

**КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА**

ВІСНИК

**КИЇВСЬКОГО НАЦІОНАЛЬНОГО
УНІВЕРСИТЕТУ
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА**

СЕРІЯ ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНІ НАУКИ

ВИПУСК №4 2016

**Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка,
выпуск №4, 2016,**

Серія фізико-математичні науки

З 1991 року серії вісників Київського університету “Математика і механіка”, “Фізика”, “Моделирование и оптимизация сложных систем” реорганізовано у “Вісник Київського університету. Серія: фізико-математичні науки”. У віснику містяться результати нових досліджень у різних галузях математики, інформатики, механіки, фізики та радіофізики для наукових працівників, викладачів, аспірантів, інженерів і студентів. Друкується за рекомендаціями Вчених Рад фізичного, радіофізичного, механіко-математичного факультетів та факультету кібернетики.

Журнал “Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія фізико-математичні науки” включено до переліку фахових видань ВАК України, в яких можуть публікуватися результати дисертаційних робіт на здобуття наукових ступенів доктора і кандидата наук (затверджено наказом Міністерства освіти і науки України №1222 від 07.10.2016), та реферується в Реферативному журналі, Zentralblatt MATH та базах даних ВИНІТИ, Росія, Москва.

Редакційна колегія:

Анісімов Анатолій Васильович, чл.-кор. НАН України, д.ф.-м.н., проф., **головний редактор**;
Хусаїнов Денис Яхєвич, д.ф.-м.н., проф., **заступник головного редактора, відповідальний за видання**;
Arturs Medvids, Dr. Phys. (habil.), Prof., Riga Technical University, Riga, Latvia;
Miklós Rontó, Dr. Sci., Prof., University of Miskolc, Miskolc, Hungary;
Milada Bartlova, Ph. D., Brno University of Technology, Brno, Czech Republic;
Nickolai Kukhtarev, Prof., Alabama A&M University, Alabama, USA;
Sergei Gorlatch, Dr. Sci. (habil.), Prof., University of Muenster, Muenster, Germany;
Sergey Trofimchuk, Prof., Universidadde Talca, Instituto de Matematica y Fisica, Talca, Chile;
Stefan Hudak, Dr. Sci., Prof., Technical University of Kosice, Kosice, Slovak Republic;
Toru Aoki, Ph. D., Prof., Research Institute of Electronics, Shizuoka University, Shizuoka, Japan;
Акіменко Віталій Володимирович, д.т.н., проф.;
Анісімов Ігор Олексійович, д.ф.-м.н., проф.;
Буй Дмитро Борисович, д.ф.-м.н., проф.;
Булавін Леонід Анатолійович, акад. НАН України, д.ф.-м.н., проф.;
Волошин Олексій Федорович, д.т.н., проф.;
Гарашенко Федір Георгійович, д.т.н., проф.;
Єжов Станіслав Миколайович, д.ф.-м.н., проф.;
Жук Ярослав Олександрович, д.ф.-м.н., проф.;
Заславський Володимир Анатолійович, д.т.н., проф.;
Кириченко Володимир Васильович, д.ф.-м.н., проф.;
Козаченко Юрій Васильович, д.ф.-м.н., проф.;
Кудін Володимир Іванович, д.т.н., с.н.с.;
Львов Віктор Анатолійович, д.ф.-м.н., проф.;
Макара Володимир Арсенійович, чл.-кор. НАН України, д.ф.-м.н., проф.;
Макарець Микола Володимирович, д.ф.-м.н., проф.;
Перестюк Микола Олексійович, акад. НАН України, д.ф.-м.н., проф.;
Погорілий Сергій Дем'янович, д.т.н., проф.;
Савенков Сергій Миколайович, д.ф.-м.н., доц.;
Скришевський Валерій Антонович, д.ф.-м.н., проф.

Редакційний відділ:

Анісімова Тетяна Харитонівна, **відповідальний секретар**;
Безущак Оксана Омелянівна, bezusch@univ.kiev.ua;
Стукаленко Вікторія Віталіївна, stu@univ.kiev.ua;
Родіонова Тетяна Василівна, rodtnv@univ.kiev.ua;
Хмелюк Надія Кузьмівна, khmeluk@univ.kiev.ua;
Сільвейструк Людмила Миколаївна, **технічний редактор**, slm-klm@ukr.net.

Адреса редакційної колегії:

Факультет комп'ютерних наук та кібернетики, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, пр. Глушкова, 4 д, 03680 Тел. (044) 259-01-49
ISBN 978-966-2142
ISSN 1812-5409

ЗМІСТ

АЛГЕБРА, ГЕОМЕТРІЯ ТА ТЕОРІЯ ІМОВІРНОСТЕЙ

Борисенко О.Д., Борисенко О.В. Неавтономні випадкові коливні системи четвертого порядку під дією зовнішніх періодичних збурень	9
Федорова М.В. Скінченно автоматні дії вільних груп	14

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ, МАТЕМАТИЧНА ФІЗИКА ТА МЕХАНІКА

Гіщук Р.Р., Перестюк Ю.М. Про коливання в одній розривній динамічній системі	21
Капустян О.В., Романюк І.В. Існування глобального атрактора для еволюційного рівняння другого порядку з розривними траєкторіями	29
Карнаухов В.Г., Козлов В.І., Умрихін І.М., Січко В.М. Теплове руйнування тривимірної в'язкопружної тришарової циліндричної п'єзопанелі з незалежними від температури характеристиками при вимушених коливаннях	33
Клімчук Т.В., Острик В.І. Вдавлювання двох півнескінчених штампів у пружну смугу	41
Коновалюк Т.П. Критерії для апроксимації розподілених вихрових структур точковими вихорами, що базуються на акустичних характеристиках	47

КОМП'ЮТЕРНІ НАУКИ ТА ІНФОРМАТИКА

Буй Д.Б., Канарська І.С., Сенченко О.С. Оцінки часової складності для додавання, видалення та порівняння при реалізації алгоритмів теоретико-множинних операцій у табличних алгебрах	55
Денисюк В.П., Негоденко О.В. Поліноміальні та тригонометричні сплайни	61
Зарембовський К. В. Мобільне навчання: проблеми впровадження	67
Коцур Д.В., Терещенко В.М. Застосування моделей активних контурів у задачах трекінгу структур цитоскелету	74
Кузьмич О.І., Мекуш О.Г., Гришанович Т.О. Нелінійне керування на основі методу управляючої функції Ляпунова для моделі дизельного двигуна з турбонаддувом	78
Куценко І.А. Алгоритми пошуку оптимальної сітки на заданому наборі точок для мінімаксної та середньоквадратичної багатовимірної сплайн-функції на хаотичній сітці	87
Лисенко О.О. Швидка та точна сегментація для детектування раку грудей на зображеннях маммографії	95
Машенко С.О., Моренець В.І. Оптимізація на нечітких множинах типу 2	99
Мохаммед К.Д. Характеристичні властивості одиночного успадкування класів	104
Мусбах З.Е., Легіневич Т.І., Глибовець А.М. Архітектура системи моделей глибоких нейронних мереж	108
Нікітченко М.С. Властивості квазіарних специфікаційних алгебр	114
Пасічна М. В. Дослідження конкурентноспроможності портфеля джерел генерації електроенергії	120
Хусаїнов Д.Я., Гаркуша Н.І. Оцінки збіжності процесів в одній моделі нейродинаміки Хопфілда	129
Шарапов М.М., Лабзін Олег Нумерація розбиттів множини	133

Яценко В.О., Петрович В.М., Адамчук Н.І., Требіна Н.М. Програмне забезпечення для аналізу та оцінювання вмісту хлорофілу в рослинності	138
--	-----

РАДІОФІЗИКА

Іванюта О.М. Можливість використання органічних відходів для виготовлення біопаперу	147
Крамов А.А., Баужа О.С. Розробка програмно-апаратного комплексу віддаленого моніторингу пульсу людини	153
Павлюк С.П., Григорук В.І., Іщук Л.В., Телега В.М., Ковток В.Г., Вакуляк Є.О. Особливості генерації коливань напруги структурою “Кремній з діелектричною ізоляцією”	159

СУЧАСНА ФІЗИКА

Білоус О.І. Визначення радіусу кореляції на окремих гілках кривої співіснування за даними динамічної в'язкості бінарного розчину Ga-Pb	165
Булавін Л.А., Забашта Ю.Ф., Бровко О.О., Вергун Л.Ю., Ярова Н.В., Самойленко Т.Ф. Регулювання проникливості полімерних мембран магнітним полем	169
Калустова Д.О., Баєва А.І., Руденко О.І., Макаренко О.В., Рибалочка А.В. Оцінка впливу білого світлодіодного освітлення на циркадні ритми людини	173

CONTENTS

ALGEBRA, GEOMETRY AND PROBABILITY THEORY

Borysenko O.D., Borysenko O.V. Non-autonomous fourth order random oscillating systems under the action of external periodical disturbances	9
Fedorova M.V. Finite automaton actions of free groups	14

DIFFERENTIAL EQUATIONS, MATHEMATICAL PHYSICS AND MECHANICS

Hishchuk R., Perestyuk Yu. About oscillations in one dynamic system	21
Kapustyan O.V., Romaniuk I.V. The existence of global attractor for second order evolution equation with discontinuous trajectories	29
Karnaukhov V.G., Kozlov V.I., Umrykhin I.M., Sichko V.M. Thermal failure of three – dimensional viscoelastic three – layer cylindrical piezopanel with independent temperature characteristics under the forced resonant vibrations	33
Klimchuk T.V., Ostryk V.I. Indentation of an elastic strip by two semi-infinite punches	41
Konovalyuk T.P. Criteria for the approximation of the distributed vortex structures by the point vortices, which based on the acoustic characteristics	47

COMPUTER SCIENCES AND INFORMATICS

Buy D.B., Kanarska I.S., Senchenko A.S. The time complexity of the addition, removal and comparison of the algorithms of table set- theoretic operations	55
Denysiuk V., Nehodenko O. Polynomial and trigonometric splines	61
Zarembovskiy K.V. Mobile learning: problems of implementation	67
Kotsur D.V., Tereschenko V.M. Active contour models for cytoskeletal structures tracking	74
Kuzmych O.I., Mekush O.G., Gryshanovych T.O. Nonlinear control on the basis of the control Lyapunov function method for the model a diesel turbo engine	78
Kutsenko I.A. Algorithms for finding the optimal grid on a given set of points for minimax and mean multidimensional spline-function on chaotic grid	87
Lysenko O.O. Fast and Precise Segmentation Approach for Breast Cancer Detection in Mammography Images	95
Mashchenko S.O., Morenets V.I. Optimization on a type-2 fuzzy sets	99
Mohammed K. D. Characteristic properties of single inheritance of the classes	104
Musbah Zaid Enweiji, Lehinevych T.I., Glybovets A.M. System architecture of deep neural network models	108
Nikitchenko M.S. Properties of quasiary specification algebras	114
Pasichna M.V. Research on competitiveness of portfolio of electricity generation sources	120
Khusainov D.Ya., Garkusha N.I. Estimates of the processes convergence in one model of Hopfield's neurodynamics	129
Sharapov M.M., Lamzin Oleh Numbering of set partitions	133
Yatsenko V.A., Petrovich V.N, Adamchuk N.I., Trebina N.N. Software for analysis and chlorophyll estimation in vegetation	138

RADIOPHYSICS

Ivanyuta O.M. The ability to use organic waste for the production biopaper	147
Kramov A.A., O. S. Bauzha O.S. Development of the complex system for the remote monitoring of the human heart rate	153
Pavlyuk S.P., Grygoruk V.I., Ischuk L.V., Telega V.M., V.G. Kovtok, Ye.O. Vakylyak Features of voltage fluctuations generation into the structure “Silicon with dielectric insulation”	159

MODERN PHYSICS

Bilous O.I. Investigation of the correlation radius in separate branches of the coexistence curve by viscosity measurements Ga-Pb	165
Bulavin L.A., Zabashta Yu.F., Brovko O.O., Vergun L.Yu., Iarova N.V., Samoilenko T.F. The regulation of polymeric membrane permeability with magnetic field	169
Kalustova D.O., Baieva A.I., Rudenko O.I., Makarenko O.V., Rybalochka A.V. Evaluation of the white LED lighting on human circadian rhythms	173

АЛГЕБРА, ГЕОМЕТРИЯ ТА ТЕОРИЯ ІМОВІРНОСТЕЙ

УДК 519.21

О.Д. Борисенко¹, к.ф.-м.н., доцент
О.В. Борисенко², к.ф.-м.н., доцент

**Неавтономні випадкові коливні системи
четвертого порядку під дією зовнішніх
періодичних збурень**

¹Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 01033, Київ, вул. Володимирська, 64.

² Національний технічний університет України "КПІ" 03056, г.Київ-56, проспект Перемоги, 37

e-mail: ¹odb@univ.kiev.ua

O.D. Borysenko¹, Ph.D., Associate Professor
O.V. Borysenko², Ph.D., Associate Professor

**Non-autonomous fourth order random
oscillating systems under the action of
external periodical disturbances**

¹Taras Shevchenko National University of Kyiv, 01033, Kyiv, 64 Volodymyrska st.,

²National Technical University of Ukraine "KPI", 37 Prospect Peremogy, Kyiv 03056

e-mail: ¹odb@univ.kiev.ua

У роботі вивчається асимптотична поведінка неавтономної коливної системи, яка описується диференціальним рівнянням четвертого порядку з малими нелінійними періодичними зовнішніми збуреннями типу "білого" та центрованого і нецентрованого Пуассонівських шумів. Розглядаються нерезонансний і резонансний випадки при умові, що характеристичне рівняння має два різних дійсних корені і пару спряжених чисто уявних коренів.

Ключові слова: асимптотична поведінка, неавтономна коливна система, стохастичне диференціальне рівняння, нерезонансний випадок, резонанс, періодичні збурення.

The asymptotic behavior of non-autonomous oscillating system describing by differential equation of fourth order with small non-linear periodical external perturbations of "white noise", non-centered and centered "Poisson noise" types is studied. Every term of external perturbations has own order of small parameter ε . If small parameter is equal to zero, then general solution of obtained non-stochastic fourth order differential equation has an oscillating part. We consider given differential equation with external stochastic perturbations as the system of stochastic differential equations and study the limit behavior of its solution at the time moment t/ε^k , as $\varepsilon \rightarrow 0$. The system of averaging stochastic differential equations is derived and its dependence on the order of small parameter in every term of external perturbations is studied. The non-resonance and resonance cases under the conditions that characteristic equation has two non-equal real roots and two conjugate pure imaginary roots are considered.

Key Words: asymptotic behavior, non-autonomous oscillating system, stochastic differential equation, non-resonance case, resonance, periodical disturbances.

Communicated by Prof. Kozachenko Yu.V.

1 Introduction

The autonomous oscillating systems of fourth order under the action of "white noise", centered and non-centered Poisson type noises perturbations are studied in [1]. In this paper we will consider the behavior, as $\varepsilon \rightarrow 0$, of the fourth order non-autonomous oscillating system driven by stochastic differential equation

$$\begin{aligned} x^{IV}(t) + b_1 x'''(t) + b_2 x''(t) + b_3 x'(t) + b_4 x(t) \\ = \varepsilon^{k_0} f_0(\mu_0 t, x(t), x'(t), x''(t), x'''(t)) + \\ + f_\varepsilon(t, x(t), x'(t), x''(t), x'''(t)) \end{aligned}$$

(1)

with non-random initial conditions $x(0) = x_0^{(1)}$, $x'(0) = x_0^{(2)}$, $x''(0) = x_0^{(3)}$, $x'''(0) = x_0^{(4)}$, where $\varepsilon > 0$ is a small parameter, $f_\varepsilon(t, \mathbf{x})$, $\mathbf{x} = (x, x', x'', x''')$ is a random function such that

$$\begin{aligned} \int_0^t f_\varepsilon(s, \mathbf{x}(s)) ds = \sum_{i=1}^m \varepsilon^{k_i} \int_0^t f_i(\mu_i s, \mathbf{x}(s)) dw_i(s) \\ + \varepsilon^{k_{m+1}} \int_0^t \int_{\mathbb{R}} f_{m+1}(\mu_{m+1} s, \mathbf{x}(s), z) \tilde{\nu}_1(ds, dz) + \\ + \varepsilon^{k_{m+2}} \int_0^t \int_{\mathbb{R}} f_{m+2}(\mu_{m+2} s, \mathbf{x}(s), z) \nu_2(ds, dz), \\ k_i > 0, i = \overline{0, m+2}; f_i, i = \overline{0, m+2} \text{ are non-} \\ \text{random functions periodic on } \mu_i t, i = \overline{0, m+2} \\ \text{with period } 2\pi; w_i(t), i = \overline{1, m} \text{ are independent} \end{aligned}$$

one-dimensional Wiener processes; $\tilde{\nu}_i(dt, dy) = \nu_i(dt, dy) - \Pi_i(dy)dt$, $E\nu_i(dt, dy) = \Pi_i(dy)dt$, $i = 1, 2$; $\nu_i(dt, dy)$, $i = 1, 2$ are the independent Poisson measures independent on $w_i(t)$, $i = \overline{1, m}$; $\Pi_i(A)$, $i = 1, 2$ are a finite measures on Borel sets in R .

We will consider the equation (1) as the system of stochastic differential equations

$$\begin{aligned} dy_i(t) &= y_{i+1}(t)dt, \quad i = \overline{1, 3} \\ dy_4(t) &= \left[- (b \cdot y(t)) + \varepsilon^{k_0} f_0(\mu_0 t, y(t)) + \right. \\ &\quad \left. \varepsilon^{k_{m+2}} \int_{\mathbb{R}} f_{m+2}(\mu_{m+2} t, y(t), z) \Pi_2(dz) \right] dt + \\ &\quad + \sum_{i=1}^m \varepsilon^{k_i} f_i(\mu_i t, y(t)) dw_i(t) + \\ &\quad + \varepsilon^{k_{m+1}} \int_{\mathbb{R}} f_{m+1}(\mu_{m+1} t, y(t), z) \tilde{\nu}_1(dt, dz) + \\ &\quad + \varepsilon^{k_{m+2}} \int_{\mathbb{R}} f_{m+2}(\mu_{m+2} t, y(t), z) \tilde{\nu}_2(dt, dz), \end{aligned} \quad (2)$$

$y(t) = (y_1(t), \dots, y_4(t))$, $b = (b_4, b_3, b_2, b_1)$, $y_i(0) = x_0^{(i)}$, $i = \overline{1, 4}$, $(b \cdot y(t))$ – is a scalar product of vectors b and $y(t)$.

In what follows we will use the constant $K > 0$ for the notation of different constants, which are not depend on ε .

2 Main result

This paper deals with the following case:

$b_1 > 0$, $b_3 > 0$, $b_1 b_2 > b_3$, $b_1^2 > 4(b_2 - \frac{b_3}{b_1})$, $b_1^2 b_4 = b_3(b_1 b_2 - b_3)$. Characteristic equation has a roots

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -\eta_1, \quad \lambda_2 = -\eta_2, \quad \lambda_{3,4} = \pm i\omega, \quad \text{where} \\ \eta_{1,2} &= \frac{1}{2} \left(b_1 \pm \sqrt{b_1^2 - 4 \left(b_2 - \frac{b_3}{b_1} \right)} \right), \quad \omega^2 = \frac{b_3}{b_1}. \end{aligned}$$

At first we will study the non-resonance case: $\mu_i \neq \frac{p_i}{q_i} \omega$, $i = \overline{0, m+2}$, where p_i and q_i are any relatively prime integers. If $\varepsilon = 0$ then the equation (1) has general solution in the form

$$x(t) = C_1 e^{-\eta_1 t} + C_2 e^{-\eta_2 t} + A_1 \cos \omega t + A_2 \sin \omega t$$

Let us consider the following representation of the solution $y(t)$ to the system (2):

$$\begin{aligned} y_1(t) &= N_1(t) + N_2(t) + \\ &\quad + A_1(t) \cos \omega t + A_2(t) \sin \omega t, \\ y_2(t) &= -\eta_1 N_1(t) - \eta_2 N_2(t) - \\ &\quad - A_1(t) \omega \sin \omega t + A_2(t) \omega \cos \omega t, \\ y_3(t) &= \eta_1^2 N_1(t) + \eta_2^2 N_2(t) - \\ &\quad - A_1(t) \omega^2 \cos \omega t - A_2(t) \omega^2 \sin \omega t, \\ y_4(t) &= -\eta_1^3 N_1(t) - \eta_2^3 N_2(t) + \\ &\quad + A_1(t) \omega^3 \sin \omega t - A_2(t) \omega^3 \cos \omega t, \\ N_i(t) &= C_i(t) \exp\{-\eta_i t\}, \quad i = 1, 2. \end{aligned} \quad (3)$$

We can solve the system of linear equations (3) with respect to $(N_1(t), N_2(t), A_1(t), A_2(t))$ and using the Ito formula we derive the system of stochastic differential equations:

$$\begin{aligned} dN_1(t) &= -\eta_1 N_1(t) dt + \frac{1}{(\eta_2 - \eta_1)(\eta_1^2 + \omega^2)} dH(t), \\ dN_2(t) &= -\eta_2 N_2(t) dt - \frac{1}{(\eta_2 - \eta_1)(\eta_2^2 + \omega^2)} dH(t), \\ dA_1(t) &= \frac{-\omega(\eta_1 + \eta_2) \cos \omega t + (\omega^2 - \eta_1 \eta_2) \sin \omega t}{\omega(\eta_1^2 + \omega^2)(\eta_2^2 + \omega^2)} dH(t), \\ dA_2(t) &= \frac{-\omega(\eta_1 + \eta_2) \sin \omega t - (\omega^2 - \eta_1 \eta_2) \cos \omega t}{\omega(\eta_1^2 + \omega^2)(\eta_2^2 + \omega^2)} dH(t), \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} dH(t) &= [\varepsilon^{k_0} \tilde{f}_0(\mu_0 t, N(t), A(t), \omega t) + \\ &\quad + \varepsilon^{k_{m+2}} \int_{\mathbb{R}} \tilde{f}_{m+2}(\mu_{m+2} t, N(t), A(t), \omega t, z) \Pi_2(dz)] dt + \\ &\quad + \sum_{i=1}^m \varepsilon^{k_i} \tilde{f}_i(\mu_i t, N(t), A(t), \omega t) dw_i(t) + \\ &\quad + \varepsilon^{k_{m+1}} \int_{\mathbb{R}} \tilde{f}_{m+1}(\mu_{m+1} t, N(t), A(t), \omega t, z) \tilde{\nu}_1(dt, dz) + \\ &\quad + \varepsilon^{k_{m+2}} \int_{\mathbb{R}} \tilde{f}_{m+2}(\mu_{m+2} t, N(t), A(t), \omega t, z) \tilde{\nu}_2(dt, dz), \end{aligned}$$

where $N(t) = (N_1(t), N_2(t))$, $A(t) = (A_1(t), A_2(t))$; $\tilde{f}_i(\mu_i t, N(t), A(t), \omega t)$, $i = \overline{0, m}$ are obtained from $f_i(\mu_i t, y(t))$, $i = \overline{0, m}$ and $\tilde{f}_i(\mu_i t, N(t), A(t), \omega t, z)$, $i = m+1, m+2$ are obtained from $f_i(\mu_i t, y(t), z)$, $i = m+1, m+2$ using (3).

Theorem 2.1. Let $\Pi_i(\mathbb{R}) < \infty$, $i = 1, 2$, $t \in [0, t_0]$, $k = \min(k_0, 2k_1, \dots, 2k_{m+1}, k_{m+2})$. Let us suppose, that functions f_j , $j = \overline{0, m+2}$ bounded and satisfy Lipschitz condition on y_i , $i = \overline{1, 4}$. If given below matrix $\bar{\sigma}^2(A_1, A_2)$ is non-negative definite, then:

1. If $k_0 = 2k_i = k_{m+2}$, $i = \overline{1, m+1}$, then the stochastic process $\xi_\varepsilon(t) = (N_1(t/\varepsilon^k), N_2(t/\varepsilon^k), A_1(t/\varepsilon^k), A_2(t/\varepsilon^k))$ weakly converges, as $\varepsilon \rightarrow 0$, to the stochastic process $\bar{\xi}(t) = (0, 0, \bar{A}_1(t), \bar{A}_2(t))$, where $\bar{A}(t) = (\bar{A}_1(t), \bar{A}_2(t))$ is the solution to the system of

stochastic differential equations

$$d\bar{A}(t) = \bar{\alpha}(\bar{A}(t))dt + \bar{\sigma}(\bar{A}(t))d\bar{w}(t), \quad (5)$$

$\bar{A}(0) = (A_1(0), A_2(0))$, where

$$\begin{aligned} \bar{\alpha}(A_1, A_2) &= \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \hat{f}_{(1)}(\psi, A_1, A_2, \phi) \Psi(\phi) d\phi d\psi, \\ \bar{\sigma}(A_1, A_2) &= \{\bar{B}(A_1, A_2)\}^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\pi} \times \\ &\times \left\{ \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \hat{f}_{(2)}(\psi, A_1, A_2, \phi) \Psi(\phi) \Psi^T(\phi) d\phi d\psi \right\}^{\frac{1}{2}} \\ \Psi(\phi) &= \frac{1}{\omega(\eta_1^2 + \omega^2)(\eta_2^2 + \omega^2)} \times \\ &\times \begin{pmatrix} -\omega(\eta_1 + \eta_2) \cos \phi + (\omega^2 - \eta_1 \eta_2) \sin \phi \\ -\omega(\eta_1 + \eta_2) \sin \phi - (\omega^2 - \eta_1 \eta_2) \cos \phi \end{pmatrix} \\ \hat{f}_{(1)}(\psi, A_1, A_2, \phi) &= \tilde{f}_0(\psi, 0, 0, A_1, A_2, \phi) + \\ &+ \int_R \tilde{f}_{m+2}(\psi, 0, 0, A_1, A_2, \phi, z) \Pi_2(dz), \\ \hat{f}_{(2)}(\psi, A_1, A_2, \phi) &= \sum_{i=1}^m \tilde{f}_i^2(\psi, 0, 0, A_1, A_2, \phi) + \\ &+ \int_R \tilde{f}_{m+1}^2(\psi, 0, 0, A_1, A_2, \phi, z) \Pi_1(dz), \end{aligned}$$

$\Psi^T(\phi)$ is the vector transpose to vector $\Psi(\phi)$, $\bar{w}(t) = (\bar{w}_i(t), i = 1, 2)$, $\bar{w}_i(t), i = 1, 2$ are independent one-dimensional Wiener processes.

2. If $k < k_0$ then in the averaging equation (5) we must put $\tilde{f}_0 \equiv 0$; if $k < 2k_i$ for some $i = \overline{1, m}$, then in the averaging equation (5) we must put $\tilde{f}_i \equiv 0$ for such i ; if $k < 2k_{m+1}$ then in the averaging equation (5) we must put $\tilde{f}_{m+1} \equiv 0$; if $k < k_{m+2}$ then in the averaging equation (5) we must put $\tilde{f}_{m+2} \equiv 0$.

Proof. Let us make a change of variable $t \rightarrow t/\varepsilon^k$ at the system (4) and obtain for the process $\xi_\varepsilon(t) = (N_1^\varepsilon(t), N_2^\varepsilon(t), A_1^\varepsilon(t), A_2^\varepsilon(t)) = (N_1(t/\varepsilon^k), N_2(t/\varepsilon^k), A_1(t/\varepsilon^k), A_2(t/\varepsilon^k))$ the system of stochastic differential equations

$$\begin{aligned} dN_1^\varepsilon(t) &= -\frac{\eta_1}{\varepsilon^k} N_1^\varepsilon(t) dt + \frac{1}{(\eta_2 - \eta_1)(\eta_1^2 + \omega^2)} dH_\varepsilon(t), \\ dN_2^\varepsilon(t) &= -\frac{\eta_2}{\varepsilon^k} N_2^\varepsilon(t) dt - \frac{1}{(\eta_2 - \eta_1)(\eta_2^2 + \omega^2)} dH_\varepsilon(t), \\ dA_1^\varepsilon(t) &= \Psi_1(\omega t/\varepsilon^k) dH_\varepsilon(t), \\ dA_2^\varepsilon(t) &= \Psi_2(\omega t/\varepsilon^k) dH_\varepsilon(t), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} dH_\varepsilon(t) &= \left[\varepsilon^{k_0-k} \tilde{f}_0\left(\frac{\mu_0 t}{\varepsilon^k}, \xi_\varepsilon(t), \frac{\omega t}{\varepsilon^k}\right) + \varepsilon^{k_{m+2}-k} \times \right. \\ &\times \left. \int \tilde{f}_{m+2}\left(\frac{\mu_{m+2} t}{\varepsilon^k}, \xi_\varepsilon(t), \frac{\omega t}{\varepsilon^k}, z\right) \Pi_2(dz) \right] dt + \\ &+ \sum_{i=1}^m \varepsilon^{k_i-k/2} \tilde{f}_i\left(\frac{\mu_i t}{\varepsilon^k}, \xi_\varepsilon(t), \frac{\omega t}{\varepsilon^k}\right) dw_i^\varepsilon(t) + \\ &+ \varepsilon^{k_{m+1}} \int \tilde{f}_{m+1}\left(\frac{\mu_{m+1} t}{\varepsilon^k}, \xi_\varepsilon(t), \frac{\omega t}{\varepsilon^k}, z\right) \tilde{\nu}_1^\varepsilon(dt, dz) + \\ &+ \varepsilon^{k_{m+2}} \int \tilde{f}_{m+2}\left(\frac{\mu_{m+2} t}{\varepsilon^k}, \xi_\varepsilon(t), \frac{\omega t}{\varepsilon^k}, z\right) \tilde{\nu}_2^\varepsilon(dt, dz), \end{aligned}$$

where $\Psi_i(\phi), i = 1, 2$ is a components of vector $\Psi(\phi)$, $w_i^\varepsilon(t) = \varepsilon^{k/2} w_i(t/\varepsilon^k), i = \overline{1, m}$, $\tilde{\nu}_i^\varepsilon(t, A) = \nu_i(t/\varepsilon^k, A) - \Pi_i(A)t/\varepsilon^k, i = 1, 2$, here A is a Borel set in $\mathbb{R}$. For each $\varepsilon > 0$ the process $w_i^\varepsilon(t), i = \overline{1, m}$ are independent one-dimensional Wiener processes, and $\tilde{\nu}_i^\varepsilon(t, A), i = 1, 2$ is the independent centered Poisson measure independent on $w_i^\varepsilon(t), i = \overline{1, m}$.

We have $N_i^\varepsilon(t) = \exp\{-\eta_i t/\varepsilon^k\} C_i(t/\varepsilon^k), i = 1, 2$ and processes $C_i^\varepsilon(t) = C_i(t/\varepsilon^k), i = 1, 2$ satisfy the stochastic differential equations

$$dC_1^\varepsilon(t) = \frac{e^{\eta_1 t/\varepsilon^k}}{(\eta_2 - \eta_1)(\eta_1^2 + \omega^2)} dH_\varepsilon(t),$$

$$dC_2^\varepsilon(t) = -\frac{e^{\eta_2 t/\varepsilon^k}}{(\eta_2 - \eta_1)(\eta_2^2 + \omega^2)} dH_\varepsilon(t),$$

where $|C_i^\varepsilon(0)| \leq K, i = 1, 2$.

From boundedness of functions $f_i, i = \overline{0, m+2}$ and condition $\Pi_i(\mathbb{R}) < \infty, i = 1, 2$ we can obtain the estimate

$$\begin{aligned} \mathbf{E}|N_i^\varepsilon(t)|^2 &\leq K[e^{-2\eta_i t/\varepsilon^k} + \varepsilon^k(1 - e^{-2\eta_i t/\varepsilon^k}) \times \\ &\times (t(\varepsilon^{2(k_0-k)} + \varepsilon^{2(k_{m+2}-k)}) + \sum_{i=1}^{m+2} \varepsilon^{2k_i-k})], \\ i &= 1, 2. \end{aligned}$$

Therefore $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{E}|N_i^\varepsilon(t)|^2 = 0, i = 1, 2$ and it is sufficient to study the behavior, as $\varepsilon \rightarrow 0$, of solution to the system of stochastic differential equations

$$dA_i^\varepsilon(t) = \Psi_i(\omega t/\varepsilon^k) d\hat{H}_\varepsilon(t), i = 1, 2 \quad (6)$$

with initial conditions $A_1^\varepsilon(0) = A_1(0), A_2^\varepsilon(0) = A_2(0)$, where

$$\begin{aligned} d\hat{H}_\varepsilon(t) &= \left[\varepsilon^{k_0-k} \tilde{f}_0\left(\frac{\mu_0 t}{\varepsilon^k}, A_1^\varepsilon(t), A_2^\varepsilon(t), \frac{\omega t}{\varepsilon^k}\right) + \right. \\ &+ \varepsilon^{k_{m+2}-k} \times \\ &\times \left. \int \tilde{f}_{m+2}\left(\frac{\mu_{m+2} t}{\varepsilon^k}, A_1^\varepsilon(t), A_2^\varepsilon(t), \frac{\omega t}{\varepsilon^k}, z\right) \Pi_2(dz) \right] dt + \\ &+ \sum_{i=1}^m \varepsilon^{k_i-k/2} \tilde{f}_i\left(\frac{\mu_i t}{\varepsilon^k}, A_1^\varepsilon(t), A_2^\varepsilon(t), \frac{\omega t}{\varepsilon^k}\right) dw_i^\varepsilon(t) + \\ &+ \varepsilon^{k_{m+1}} \times \\ &\times \int \tilde{f}_{m+1}\left(\frac{\mu_{m+1} t}{\varepsilon^k}, A_1^\varepsilon(t), A_2^\varepsilon(t), \frac{\omega t}{\varepsilon^k}, z\right) \tilde{\nu}_1^\varepsilon(dt, dz) \\ &+ \varepsilon^{k_{m+2}} \times \\ &\times \int \tilde{f}_{m+2}\left(\frac{\mu_{m+2} t}{\varepsilon^k}, A_1^\varepsilon(t), A_2^\varepsilon(t), \frac{\omega t}{\varepsilon^k}, z\right) \tilde{\nu}_2^\varepsilon(dt, dz), \end{aligned}$$

$\tilde{f}_j(\psi, A_1, A_2, \phi) = \tilde{f}_j(\psi, 0, 0, A_1, A_2, \phi), j = \overline{0, m}$, $\tilde{f}_i(\psi, A_1, A_2, \phi, z) = \tilde{f}_i(\psi, 0, 0, A_1, A_2, \phi, z), i = m+1, m+2$.

Let us denote $A_\varepsilon(t) = (A_1^\varepsilon(t), A_2^\varepsilon(t))$. Using conditions on coefficients of equation (6) and properties of stochastic integrals we obtain estimates

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \|A_\varepsilon(t)\|^2 &\leq K[1 + t^2(\varepsilon^{2(k_0-k)} + \\ &+ \varepsilon^{2(k_{m+2}-k)}) + t \sum_{i=1}^{m+2} \varepsilon^{2k_i-k}], \\ \mathbb{E} \|A_\varepsilon(t) - A_\varepsilon(s)\|^2 &\leq K[|t-s|^2(\varepsilon^{2(k_0-k)} + \\ &+ \varepsilon^{2(k_{m+2}-k)}) + |t-s| \sum_{i=1}^{m+2} \varepsilon^{2k_i-k}]. \end{aligned}$$

Similarly for the process $\zeta_\varepsilon(t) = (\zeta_1^\varepsilon(t), \zeta_2^\varepsilon(t))$, where $\zeta_i^\varepsilon(t) = \int_0^t \Psi_i\left(\frac{\omega s}{\varepsilon^k}\right) dM_\varepsilon(s)$, $i = 1, 2$,

$$\begin{aligned} dM_\varepsilon(t) &= \\ &= \sum_{i=1}^m \varepsilon^{k_i-k/2} \hat{f}_i\left(\frac{\mu_i t}{\varepsilon^k}, A_1^\varepsilon(t), A_2^\varepsilon(t), \frac{\omega t}{\varepsilon^k}\right) dw_i^\varepsilon(t) + \\ &+ \varepsilon^{k_{m+1}} \times \\ &\times \int_{\mathbb{R}} \hat{f}_{m+1}\left(\frac{\mu_{m+1} t}{\varepsilon^k}, A_1^\varepsilon(t), A_2^\varepsilon(t), \frac{\omega t}{\varepsilon^k}, z\right) \tilde{v}_1^\varepsilon(dt, dz) + \\ &+ \varepsilon^{k_{m+2}} \times \\ &\times \int_{\mathbb{R}} \hat{f}_{m+2}\left(\frac{\mu_{m+2} t}{\varepsilon^k}, A_1^\varepsilon(t), A_2^\varepsilon(t), \frac{\omega t}{\varepsilon^k}, z\right) \tilde{v}_2^\varepsilon(dt, dz), \end{aligned}$$

we derive estimates $\mathbb{E} \|\zeta_\varepsilon(t)\|^2 \leq K t \sum_{i=1}^{m+2} \varepsilon^{2k_i-k}$, $\mathbb{E} \|\zeta_\varepsilon(t) - \zeta_\varepsilon(s)\|^2 \leq K |t-s| \sum_{i=1}^{m+2} \varepsilon^{2k_i-k}$. Therefore for stochastic process $\eta_\varepsilon(t) = (A_\varepsilon(t), \zeta_\varepsilon(t))$ conditions of weak compactness [2] are fulfilled

$$\lim_{h \downarrow 0} \overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{|t-s| < h} \mathbb{P}\{|\eta_\varepsilon(t) - \eta_\varepsilon(s)| > \delta\} = 0$$

for any $\delta > 0$, $t, s \in [0, T]$,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{t \in [0, T]} \mathbb{P}\{|\eta_\varepsilon(t)| > N\} = 0,$$

and for any sequence $\varepsilon_n \rightarrow 0, n = 1, 2, \dots$ there exists a subsequence $\varepsilon_m = \varepsilon_{n(m)} \rightarrow 0, m = 1, 2, \dots$, probability space, stochastic processes $\bar{A}_{\varepsilon_m}(t) = (\bar{A}_1^{\varepsilon_m}(t), \bar{A}_2^{\varepsilon_m}(t))$, $\bar{\zeta}_{\varepsilon_m}(t)$, $\bar{A}(t) = (\bar{A}_1(t), \bar{A}_2(t))$, $\bar{\zeta}(t)$ defined on this space, such that $\bar{A}_{\varepsilon_m}(t) \rightarrow \bar{A}(t)$, $\bar{\zeta}_{\varepsilon_m}(t) \rightarrow \bar{\zeta}(t)$ in probability, as $\varepsilon_m \rightarrow 0$, and finite-dimensional distributions of $\bar{A}_{\varepsilon_m}(t)$, $\bar{\zeta}_{\varepsilon_m}(t)$ are coincide with finite-dimensional distributions of $A_{\varepsilon_m}(t)$, $\zeta_{\varepsilon_m}(t)$. Since we interesting in limit behaviour of distributions, we can consider processes $A_{\varepsilon_m}(t)$, and $\zeta_{\varepsilon_m}(t)$ instead of $\bar{A}_{\varepsilon_m}(t)$, $\bar{\zeta}_{\varepsilon_m}(t)$. From (6) we obtain equation

$$\begin{aligned} A_{\varepsilon_m}(t) &= A(0) + \int_0^t \alpha_{\varepsilon_m}(s, A_{\varepsilon_m}(s)) ds + \zeta_{\varepsilon_m}(t), \quad (7) \\ A(0) &= (A_1(0), A_2(0)), \quad \text{where } \alpha_\varepsilon(t, A) = \end{aligned}$$

$$(\alpha_1^\varepsilon(t, A_1, A_2), \alpha_2^\varepsilon(t, A_1, A_2)),$$

$$\begin{aligned} \alpha_i^\varepsilon(t, A_1, A_2) &= \Psi_i\left(\frac{\omega t}{\varepsilon^k}\right) \left[\varepsilon^{k_0-k} \hat{f}_0\left(\frac{\mu_0 t}{\varepsilon^k}, A_1, A_2, \frac{\omega t}{\varepsilon^k}\right) + \right. \\ &+ \left. \varepsilon^{k_{m+2}-k} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}_{m+2}\left(\frac{\mu_{m+2} t}{\varepsilon^k}, A_1, A_2, \frac{\omega t}{\varepsilon^k}, z\right) \Pi_2(dz) \right]. \end{aligned}$$

$i = 1, 2$.

It should be noted that process $\zeta_\varepsilon(t)$ is the vector-valued square integrable martingale with matrix characteristic

$$\begin{aligned} \langle \zeta_\varepsilon^{(l)}, \zeta_\varepsilon^{(n)} \rangle(t) &= \sum_{j=1}^m \int_0^t \sigma_\varepsilon^{(l,j)}(s, A_1^\varepsilon(s), A_2^\varepsilon(s)) \times \\ &\times \sigma_\varepsilon^{(n,j)}(s, A_1^\varepsilon(s), A_2^\varepsilon(s)) ds + \\ &+ \frac{1}{\varepsilon^k} \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \gamma_\varepsilon^{(l)}(s, A_1^\varepsilon(s), A_2^\varepsilon(s), z) \times \\ &\times \gamma_\varepsilon^{(n)}(s, A_1^\varepsilon(s), A_2^\varepsilon(s), z) \Pi_1(dz) ds \\ &+ \frac{1}{\varepsilon^k} \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \delta_\varepsilon^{(l)}(s, A_1^\varepsilon(s), A_2^\varepsilon(s), z) \times \\ &\times \delta_\varepsilon^{(n)}(s, A_1^\varepsilon(s), A_2^\varepsilon(s), z) \Pi_2(dz) ds, \quad l, n = 1, 2, \end{aligned}$$

where

$$\begin{aligned} \sigma_\varepsilon^{(l,j)}(s, A_1, A_2) &= \\ &= \varepsilon^{k_j-k/2} \Psi_l\left(\frac{\omega s}{\varepsilon^k}\right) \hat{f}_j\left(\frac{\mu_j s}{\varepsilon^k}, A_1, A_2, \frac{\omega s}{\varepsilon^k}\right), \\ \gamma_\varepsilon^{(l)}(s, A_1, A_2, z) &= \\ &= \varepsilon^{k_{m+1}} \Psi_l\left(\frac{\omega s}{\varepsilon^k}\right) \hat{f}_{m+1}\left(\frac{\mu_{m+1} s}{\varepsilon^k}, A_1, A_2, \frac{\omega s}{\varepsilon^k}, z\right), \\ \delta_\varepsilon^{(l)}(s, A_1, A_2, z) &= \\ &= \varepsilon^{k_{m+2}} \Psi_l\left(\frac{\omega s}{\varepsilon^k}\right) \hat{f}_{m+2}\left(\frac{\mu_{m+2} s}{\varepsilon^k}, A_1, A_2, \frac{\omega s}{\varepsilon^k}, z\right), \\ l &= 1, 2. \end{aligned}$$

For processes $A_\varepsilon(t)$ and $\zeta_\varepsilon(t)$ following estimates hold

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \|A_\varepsilon(t) - A_\varepsilon(s)\|^4 &\leq \\ &\leq K \left[(\varepsilon^{4(k_0-k)} + \varepsilon^{4(k_{m+2}-k)}) |t-s|^4 + \right. \\ &+ \left. \mathbb{E} \|\zeta_\varepsilon(t) - \zeta_\varepsilon(s)\|^4 \right], \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \|\zeta_\varepsilon(t) - \zeta_\varepsilon(s)\|^4 &\leq \\ &\leq K \left[\sum_{j=1}^{m+2} \varepsilon^{4k_j-2k} |t-s|^2 + \right. \\ &+ (\varepsilon^{4k_{m+1}-3k/2} + \varepsilon^{4k_{m+2}-3k/2}) |t-s|^{3/2} \\ &+ \left. (\varepsilon^{4k_{m+1}-k} + \varepsilon^{4k_{m+2}-k}) |t-s| \right], \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \|A_\varepsilon(t) - A_\varepsilon(s)\|^8 &\leq K, \\ \mathbb{E} \|\zeta_\varepsilon(t) - \zeta_\varepsilon(s)\|^8 &\leq K. \end{aligned} \quad (10)$$

Here we used the estimate for stochastic integrals with respect to Wiener process:

$$\mathbb{E} \left[\int_s^t f(\tau) dw(\tau) \right]^{2n} \leq [n(2n-1)]^n |t-s|^{n-1} \mathbb{E} \left[\int_s^t f^{2n}(\tau) d\tau \right], n \geq 1.$$

For estimating of stochastic integrals with respect to centered Poisson measures we used the Ito formula for the process

$$\left(\int_0^t \int_{\mathbb{R}} \varepsilon^{k_{m+i}} \hat{f}_{m+i} \tilde{\nu}_i^\varepsilon(d\tau, dz) \right)^4,$$

$i = 1, 2$.

Since $A_{\varepsilon_m}(t) \rightarrow \bar{A}(t)$, $\zeta_{\varepsilon_m}(t) \rightarrow \bar{\zeta}(t)$ in probability, as $\varepsilon_m \rightarrow 0$, then, using (10), from (8) and (9) we obtain estimates

$$\mathbb{E} \|\bar{A}(t) - \bar{A}(s)\|^4 \leq K(|t-s|^4 + |t-s|^2),$$

$$\mathbb{E} \|\bar{\zeta}(t) - \bar{\zeta}(s)\|^4 \leq C|t-s|^2.$$

Therefore processes $\bar{A}(t)$ and $\bar{\zeta}(t)$ satisfy the Kolmogorov's continuity condition [3].

Let us consider the case $k_1 = 2k_2 = 2k_3 = k_4$. Under this condition we have for $i, j = 1, 2$

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{t} \int_0^t \alpha_i^\varepsilon(s, A_1, A_2) ds &= \bar{\alpha}_i(A_1, A_2), \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{t} \int_0^t \left[\sigma_i^\varepsilon(s, A_1, A_2) \sigma_j^\varepsilon(s, A_1, A_2) + \right. & \\ \left. + \frac{1}{\varepsilon^k} \int_R \gamma_i^\varepsilon(s, A_1, A_2, z) \gamma_j^\varepsilon(s, A_1, A_2, z) \Pi_1(dz) + \right. & \\ \left. + \frac{1}{\varepsilon^k} \int_R \delta_i^\varepsilon(s, A_1, A_2, z) \delta_j^\varepsilon(s, A_1, A_2, z) \Pi_2(dz) \right] ds = & \\ = \bar{B}_{ij}(A_1, A_2), & \end{aligned} \quad (11)$$

where functions $\bar{\alpha}^{(i)}(A_1, A_2)$ and $\bar{B}(A_1, A_2) = \{\bar{B}_{ij}(A_1, A_2), i, j = 1, 2\}$ are defined in the condition of theorem. Since processes $\bar{A}(t), \bar{\zeta}(t)$ are continuous, then from (Lemma 1 [?]) and relationships (7), (11) it follows

$$\begin{aligned} \bar{A}(t) &= A(0) + \int_0^t \bar{\alpha}(\bar{A}_1(s), \bar{A}_2(s)) ds + \bar{\zeta}(t), \\ A(0) &= (A_1(0), A_2(0)), \end{aligned} \quad (12)$$

where $\bar{\zeta}(t)$ is continuous vector-valued martingale with matrix characteristic

$$\langle \bar{\zeta}^{(i)}, \bar{\zeta}^{(j)} \rangle(t) = \int_0^t \bar{B}_{ij}(\bar{A}_1(s), \bar{A}_2(s)) ds, i, j = 1, 2.$$

Hence [4] there exists Wiener process $\bar{w}(t) = (\bar{w}_i(t), i = 1, 2)$, such that

$$\begin{aligned} \bar{\zeta}(t) &= \int_0^t \bar{\sigma}(\bar{A}_1(s), \bar{A}_2(s)) d\bar{w}(s), \\ \bar{\sigma}(A_1, A_2) &= \{\bar{B}(A_1, A_2)\}^{1/2}. \end{aligned} \quad (13)$$

Relationships (12), (13) mean that process $\bar{A}(t)$ satisfies equation (5). Under conditions of theorem the equation (5) has unique solution. Therefore process $\bar{A}(t)$ does not depend on choosing of sub-sequence $\varepsilon_m \rightarrow 0$, and finite-dimensional distributions of process $A_{\varepsilon_m}(t)$ converge to finite-dimensional distributions of process $\bar{A}(t)$. Since processes $A_{\varepsilon_m}(t)$ and $\bar{A}(t)$ are Markov processes then using the conditions for weak convergence of Markov processes we finish the proof of statement 1 of theorem.

Let us consider the case $k < k_0$ or $k < k_{m+2}$. Then the corresponding terms in the coefficients $\alpha_\varepsilon^{(i)}(t, A_1, A_2)$, $i = 1, 2$ of equation (7) tend to zero, as $\varepsilon \rightarrow 0$.

In the case $k < 2k_i$ for some i in (11) we have

$$\sigma_l^\varepsilon(t, A_1, A_2) \sigma_j^\varepsilon(t, A_1, A_2) = O(\varepsilon^{2k_i-k}), l, j = 1, 2$$

for such i . In the case $k < 2k_{m+1}$ in (11) we have

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varepsilon^k} \int_R \gamma_i^\varepsilon(s, A_1, A_2, z) \gamma_j^\varepsilon(s, A_1, A_2, z) \Pi_1(dz) &= \\ = O(\varepsilon^{2k_{m+1}-k}). \end{aligned}$$

In all cases we have $k < 2k_{m+2}$, and therefore

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon^k} \int_R \delta_i^\varepsilon(s, A_1, A_2, z) \delta_j^\varepsilon(s, A_1, A_2, z) \Pi_2(dz) &= \\ = 0. \end{aligned}$$

Repeating with obvious modifications the proof of statement 1) of theorem we obtain proof of the statement 2). $\square$

In the resonance case $\mu_i = \frac{p_i}{q_i} \omega$ for some $i = \overline{0, m+2}$, where p_i and q_i are relatively prime integers, we have following result.

Theorem 2.2. Let $\Pi_i(\mathbb{R}) < \infty$, $i = 1, 2$, $t \in [0, t_0]$, $k = \min(k_0, 2k_1, \dots, 2k_{m+1}, k_{m+2})$. Let us suppose, that functions $f_j, j = \overline{0, m+2}$ bounded and satisfy Lipschitz condition on y_i , $i = \overline{1, 4}$. If given below matrix $\bar{\sigma}^2(A_1, A_2)$ is non-negative definite, then:

1. Let $\mu_i = \frac{p_i}{q_i} \omega$ for all $i = \overline{0, m+2}$, where p_i and q_i are some relatively prime integers. If $k_0 = 2k_i = k_{m+2}$, $i = \overline{1, m+1}$, then the stochastic process $\xi_\varepsilon(t) = (N_1(t/\varepsilon^k), N_2(t/\varepsilon^k), A_1(t/\varepsilon^k), A_2(t/\varepsilon^k))$

weakly converges, as $\varepsilon \rightarrow 0$, to the stochastic process $\bar{\xi}(t) = (0, 0, \bar{A}_1(t), \bar{A}_2(t))$, where $\bar{A}(t) = (\bar{A}_1(t), \bar{A}_2(t))$ is the solution to the system of stochastic differential equations

$$d\bar{A}(t) = \bar{\alpha}(\bar{A}(t))dt + \bar{\sigma}(\bar{A}(t))d\bar{w}(t), \quad (14)$$

$$\bar{A}(0) = (A_1(0), A_2(0)),$$

where

$$\begin{aligned} \bar{\alpha}(A_1, A_2) = & \frac{1}{4\pi^2} \left[\sum_{p_0 n + q_0 l = 0} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \hat{f}_0(\psi, A_1, A_2, \phi) \times \right. \\ & \times \Psi(\phi) e^{-i(n\psi + l\phi)} d\phi d\psi + \\ & + \sum_{p_{m+2} n + q_{m+2} l = 0} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}_{m+2}(\psi, A_1, A_2, \phi, z) \times \\ & \times \Psi(\phi) e^{-i(n\psi + l\phi)} \Pi_2(dz) d\phi d\psi \left. \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}(A_1, A_2) = & \left\{ \bar{B}(A_1, A_2) \right\}^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\pi} \times \\ & \times \left\{ \sum_{j=1}^m \sum_{p_j n + q_j l = 0} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \hat{f}_j^2(\psi, A_1, A_2, \phi) \times \right. \\ & \times \Psi(\phi) \Psi^T(\phi) e^{-i(n\psi + l\phi)} d\phi d\psi + \\ & + \sum_{p_{m+1} n + q_{m+1} l = 0} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}_{m+1}^2(\psi, A_1, A_2, \phi, z) \times \\ & \times \Psi(\phi) \Psi^T(\phi) e^{-i(n\psi + l\phi)} \Pi_1(dz) d\phi d\psi \left. \right\}^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Список використаних джерел

1. Борисенко О.Д., Борисенко О.В. Метод усереднення для автономної коливної системи четвертого порядку / О.Д. Борисенко, О.В. Борисенко // Вісник Київського університету імені Тараса Шевченка. Серія фізико-математичних наук. – 2016. – №2. – С.9 – 14.
2. Скороход А.В. Исследования по теории случайных процессов / А.В. Скороход // К.: Изд. Киевского университета. – 1961.
3. Гихман И.И., Скороход А.В. Теория случайных процессов, т.1 / И.И. Гихман, А.В. Скороход // М.: Наука. – 1971. – 664 с.
4. Ikeda, N. and Watanabe, S. Stochastic Differential Equations and Diffusion Processes / N.Ikeda, S.Watanabe // North Holland, Amsterdam and Kadansha, Tokyo. – 1981. – 464 p.

$$\begin{aligned} \Psi(\phi) = & \frac{1}{\omega(\eta_1^2 + \omega^2)(\eta_2^2 + \omega^2)} \times \\ & \times \begin{pmatrix} -\omega(\eta_1 + \eta_2) \cos \phi + (\omega^2 - \eta_1 \eta_2) \sin \phi \\ -\omega(\eta_1 + \eta_2) \sin \phi - (\omega^2 - \eta_1 \eta_2) \cos \phi \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$\Psi^T(\phi)$ is the vector transpose to vector $\Psi(\phi)$, $\bar{w}(t) = (\bar{w}_i(t), i = 1, 2)$, $\bar{w}_i(t), i = 1, 2$ are independent one-dimensional Wiener processes.

2. If $k < k_0$ then in the averaging equation (14) we must put $\tilde{f}_0 \equiv 0$; if $k < 2k_i$ for some $i = \overline{1, m}$, then in the averaging equation (14) we must put $\tilde{f}_i \equiv 0$ for such i ; if $k < 2k_{m+1}$ then in the averaging equation (14) we must put $\tilde{f}_{m+1} \equiv 0$; if $k < k_{m+2}$ then in the averaging equation (14) we must put $\tilde{f}_{m+2} \equiv 0$.

3. If $\mu_j \neq \frac{p_j}{q_j} \omega$ for some $j = \overline{0, m+2}$ and any relatively prime integers p_j and q_j , then in averaging coefficients in (14) we must put $l = n = 0$ in corresponding sums containing $\tilde{f}_j$.

Proof is the similar to the proof of the Theorem 2.1

References

1. BORYSENKO, O.D. and BORYSENKO, O.V. (2016), "Averaging method for autonomous fourth order oscillating system", *Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series: Physics & Mathematics*, №2, pp. 9 – 14.
2. SKOROKHOD, A.V. (1965) *Studies in the Theory of Random Processes*, Addison-Wesley.
3. GIKHMAN, I.I. and SKOROKHOD, A.V. (1971), *Teoriya sluchainykh processov, v.1*, М.: Nauka.
4. IKEDA, N. and WATANABE, S. (1981), *Stochastic Differential Equations and Diffusion Processes*, North Holland, Amsterdam and Kadansha, Tokyo.

Received: 20.10.2016

УДК 512.54

М.В. Федорова

Скінченно автоматні дії вільних груп

Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 01033, Київ, вул. Володи-
мирська, 64.
e-mail: mfed@univ.kiev.ua

M.V. Fedorova

Finite automaton actions of free groups

Taras Shevchenko National University of
Kyiv, 01033, Kyiv, 64 Volodymyrska st.
e-mail: mfed@univ.kiev.ua

Будується явний приклад вільної групи рангу два, породженої ініціальними автоматами з чотирьома внутрішніми станами над п'ятиелементним алфавітом.

Ключові слова: вільна група, скінченний автомат, додавальна машина.

Constructions of explicit examples of a groups generated by automata are very important in modern geometric group theory. The full automorphism group of a regular rooted tree is rich of free subgroups. Thus groups of automata are naturally suitable for constructing free groups. A few approaches to construct faithful representations of free groups by automata are well-known. In this paper a new example of the free group of rank two generated by finite initial automata is described. Both these automata have four inner states and are considered over an alphabet with five letters. As a base of a following construction the automaton known as the adding machine over the binary alphabet was used. The proof allows one to construct explicitly a word that is not a fixed point of a given non-identity element of the free group.

Key Words: free group, finite automaton, adding machine.

Communicated by Prof. Kirichenko V. V.

1 Introduction

Groups generated by automata form an important class of groups in modern mathematics. In particular a lot of research are aimed on constructions of explicit examples of groups generated by automata. Among them faithful representations of free groups in terms of automata constitute a valuable part of results.

This direction in particular was motivated by M. Bhattacharjee who proved in [1] that the full automorphism group of a regular rooted tree is rich of free subgroups. This result explains why groups of automata are naturally suitable for constructing free groups. V. Nekrashevych in [2] classified faithful automaton representations of free groups. He showed that if a group G acting faithfully on a rooted tree T has a free subgroup, then either there exists a point ω of the boundary ∂T and a free subgroup of G with trivial stabilizer of ω , or there exists $\omega \in \partial T$ and a free subgroup of G fixing ω and acting faithfully on arbitrarily small neighbourhoods of ω .

The very first explicit example of the free group of rank 2 generated by finite automata over binary alphabet was presented by S. Aleshin in [3]. But the complete proof was given later

in [4], where the authors constructed examples of free groups of every finite rank generated by finite automata over binary alphabet, including Aleshin's example. The first example of a finite automaton representation of the free group of rank 2 with complete proof was given by A. Oliynyk in [5].

In this paper we propose a new method of constructing faithful representations of free groups generated by finite automata. We construct an example of a free group of rank 2 generated by automata with 4 states over an alphabet of cardinality 5. The basement of our construction is the well-known adding machine.

2 Preliminaries

Let X be a finite *alphabet*, $|X| > 1$. Elements of X are called letters. A *word* of length n over X is a sequence $x_1 \dots x_n$ of elements from the alphabet X . The *empty word* Λ over X has the length 0. Denote by X^n the set of all words over X of length n , $n \geq 0$. Notation X^* is used for the set of all finite words over X . For arbitrary words $u, v \in X^*$ the product of u and v is the concatenation uv . The set X^* form a free monoid with basis X under

concatenation. A word u is a subword of a word v if $v = v_1uv_2$ for some words v_1, v_2 .

An *initial automaton* over X is a tuple $A = \langle Q, \varphi, \psi, q_0 \rangle$, where Q is a nonempty set, the set of inner states of the automaton A , φ and ψ are transition and output functions, which map $Q \times X$ into Q and X , respectively, $q_0 \in Q$ is the initial state.

Such an automaton can be defined in terms of labeled oriented graph. The vertex set of this graph is Q and the initial state is somehow highlighted. An arrow from a vertex q_1 to a vertex q_2 with a label $x_1|x_2$ is drawn if and only if

$$\varphi(q_1, x_1) = q_2, \quad \psi(q_1, x_1) = x_2.$$

The output and transition functions are naturally expand on the set $Q \times X^*$. We will restrict the transition function to the initial state.

An automaton with a finite set of inner states is called *finite*. An automaton is called *permutational* if for each its state the restriction of the output function in this state determines some permutation on the alphabet.

Each finite permutational initial automaton A over X defines a permutation on X^* by restricting its output function to the initial state. This permutation is called *finite automaton permutations over X* and denoted by A .

All finite automaton permutations over X form a group under superposition which we denote by $FAP(X)$.

3 Construction

Let $X = \{x_0, x_1\}$ and $Y = \{y_0, y_1\}$ be two disjoint alphabets of cardinality 2. Denote by ψ_X, ψ_Y their index functions, i.e. $\psi_X(x_e) = \psi_Y(y_e) = e$, $e \in \{0, 1\}$.

Consider *adding machines* A_X and A_Y over the alphabets X and Y respectively (Fig. 1). The initial automaton A_X act as follows (see [6, p. 16]). For arbitrary $n \geq 1$, $m \in \mathbb{Z}$ and a word $u = u_{e_1} \dots u_{e_n} \in X^n$ the word $v = v_{e_1} \dots v_{e_n} \in X^n$, such that $v = u^{A_X^m}$, satisfy the equality

$$\sum_{k=0}^{n-1} \psi_X(v_{e_k})2^k = \left(\sum_{k=0}^{n-1} \psi_X(u_{e_k})2^k + m \right) \mod 2^n.$$

The action of A_Y on words over Y is defined analogously.

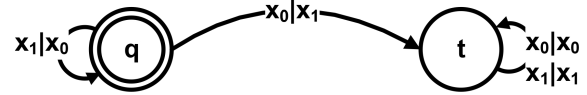


Fig. 1 Adding machine over X

Then we construct new automata B_X and B_Y over the alphabets X and Y respectively by adding one new state s and making this state initial (Fig. 2). The action of the initial automaton B_X on a non-empty word xu , $x \in X$, $u \in X^*$, depends on x . Specifically, if $x = x_0$ then $(xu)^{B_X} = xu^{A_X}$ and $(xu)^{B_X} = xu$ otherwise. The action of the initial automaton B_Y on words over Y is analogous.

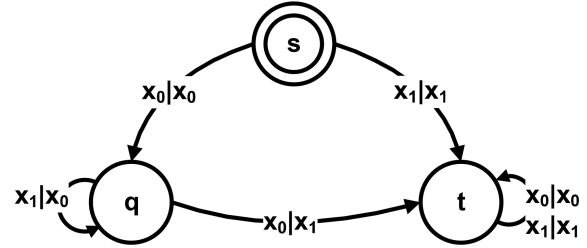


Fig. 2 Automaton B_X

Let us construct two initial automata C_X and C_Y over a new alphabet $Z = X \cup Y \cup \{z\}$, where $z \notin X \cup Y$. One can obtain these automata by adding one new state to B_X and B_Y correspondingly and extending transition and output functions. (Fig. 3).

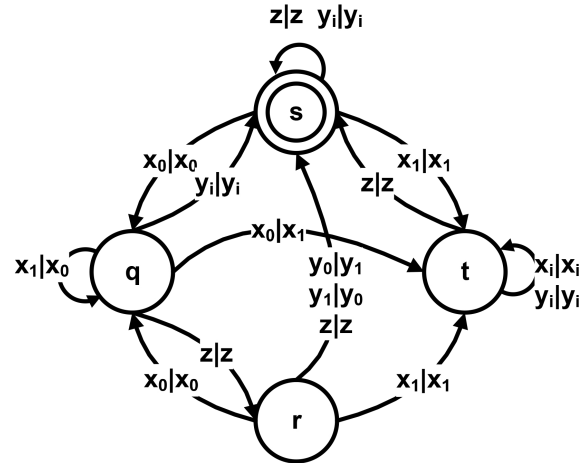


Fig. 3 Automaton C_X

Automata C_X and C_Y in each word over Z preserve letter z while letters from X and Y transform into letters from X and Y correspondingly. It follows from the definition that the action of C_X on words over X coincides with the action of B_X .

Denote by g and h finite automaton transformations defined by initial automata C_X

and C_Y correspondingly. We will need the following lemmata.

Lemma 1. *For arbitrary $n \geq 1$, $m \in \mathbb{Z}$ and words $u = x_0 u_{e_1} \dots u_{e_n} \in X^{n+1}$ and $v = v_0 v_{e_1} \dots v_{e_n} \in X^{n+1}$ such that $v = u^g$ the following equalities hold: $v_0 = x_0$ and*

$$\sum_{k=0}^{n-1} \psi_X(v_{e_k}) 2^k = \left(\sum_{k=0}^{n-1} \psi_X(u_{e_k}) 2^k + m \right) \bmod 2^n.$$

Proof. The required equalities directly follow from the above remark and the rule of the action of the adding machine over X . $\square$

Lemma 2. *For arbitrary non-zero integer m there exists a word $u_m \in X^*$ such that*

$$(x_0 u_m z y_1)^{g^m} = x_0 \underbrace{x_0 \dots x_0}_{|u_m| \text{ times}} z y_0$$

and the transition function of the automaton C_X on the word $x_0 w_m z y_1$ outputs the state s .

Proof. Without loss of generality we assume that $m > 0$. Consider the positive integer k such that

$$2^{k-1} < m \leq 2^k.$$

Note, that k is nothing but the binary length of the number m .

Then consider the word

$$u_m = x_{e_0} \dots x_{e_{k-1}} x_{e_k} \in X^{k+1}$$

such that

$$\left(\sum_{i=0}^k \psi_X(x_{e_i}) 2^i + m - 1 \right) \bmod 2^k = \sum_{i=0}^k 2^i.$$

Lemma 1 immediately follows that

$$(x_0 u_m)^{g^{m-1}} = x_0 \underbrace{x_1 \dots x_1}_{k+1 \text{ times}}.$$

Provided by on each of the $m - 1$ steps the letter previous to z is x_0 the automaton C_X during these transformations never visits the state r . It implies that the last letter of $(x_0 w_m z y_1)^{g^{m-1}}$ is y_1 . From the other hand on the word

$$x_0 \underbrace{x_1 \dots x_1}_{k+1 \text{ times}}$$

the transition function of C_X outputs the state r . It immediately follows the second statement of

the lemma. Applying Lemma 1 one more time we obtain the equality

$$(x_0 \underbrace{x_1 \dots x_1}_{k+1 \text{ times}} z y_1)^g = x_0 \underbrace{x_0 \dots x_0}_{k+1 \text{ times}} z y_0$$

which completes the proof. $\square$

Lemma 3. *Let $w \in Z^*$ be a word such that the first letter of w is x_1 and w has no subwords $y_0 x_0$, $y_1 x_0$, $z x_0$. Then $w^g = w$.*

Proof. Transforming the word w that satisfies conditions of the lemma the automaton C_X never leaves the states s and t . Since all letters in these states are fixed the statement follows. $\square$

The analogous statements are valid for the action of h . To formulate them precisely one is required to interchange alphabets X and Y . In particular, for a non-zero integer m denote by v_m a word over Y satisfying for h the statement analogous to Lemma 2.

4 Main result

Let G be a subgroup of $FAP(Z)$ generated by g, h . The main result of the paper is

Theorem 4.1. *The group G is a free group of rank two with basis $\{g, h\}$.*

Proof. Lemma 1 implies that both permutations g and h have infinite order. Then we need to show that no product $W = a_1 \dots a_n$ is trivial, where $n \geq 2$, $a_i \in \{g^{\pm 1}, h^{\pm 1}\}$, and $a_i^{-1} \neq a_{i+1}$, $1 \leq i \leq n - 1$ (see [7, Proposition 1.9]). Up to conjugacy it is enough to consider the product W such that

$$W = g^{k_1} h^{l_1} \dots g^{k_m} h^{l_m},$$

for non-zero integers $k_1, l_1, \dots, k_m, l_m$, $m \geq 1$. To prove that W is not trivial it is sufficient to construct a word $\omega \in Z^*$ such that $\omega^W \neq \omega$. The required word ω will split into the product of $2m$ subwords as follows

$$\omega = (x_0 u_{k_1} z y_1)(v_{l_1} z x_1) \dots (u_{k_m} z y_1)(v_{l_m} z x_1),$$

where words $u_{k_1}, \dots, u_{k_m} \in X^*$ satisfy Lemma 2 and words $v_{l_1}, \dots, v_{l_m} \in Y^*$ satisfy analogous statement for h .

For each i , $1 \leq i \leq m$, denote by W_{2i-1}, W_{2i} the products

$$g^{k_1} h^{l_1} \dots g^{k_i} \text{ and } g^{k_1} h^{l_1} \dots g^{k_i} h^{l_i}$$

correspondingly.

Applying $2m$ times Lemma 2 and Lemma 3 we obtain that for each i , $1 \leq i \leq m$ the words $\omega^{W_{2i-1}}$ and $\omega^{W_{2i}}$ have the form

$$(x_0 u_{k_1} z y_0 \dots u_{k_i})^{W_{2i-1}} z y_0 \dots (u_{k_m} z y_1)(v_{l_m} z x_1)$$

and

$$(x_0 u_{k_1} z y_0 \dots v_{l_i})^{W_{2i}} z x_0 \dots (u_{k_m} z y_1)(v_{l_m} z x_1)$$

correspondingly. In particular, the last letter of the word ω^W is x_0 . It immediately implies the required inequality $\omega^W \neq \omega$. The proof is complete. $\square$

Note that the proof provides an algorithm how to construct by a given product W a word ω such that $\omega^W \neq \omega$. In particular, one can express the length of ω in terms of W .

Список використаних джерел

1. Bhattacharjee M. The ubiquity of free subgroups in certain inverse limits of groups / M. Bhattacharjee // Journal of Algebra – 1995. – **172**. – P. 134-146.
2. Nekrashevych V. Free subgroups in groups acting on rooted trees / V. Nekrashevych // Groups, Geometry, and Dynamics – 2010. – № 4. – P. 847-862.
3. Aleshin S. V. A free group of finite automata / S. V. Aleshin // Vestnik Moskov. Univ. Ser. I Mat. Mekh. – 1983. – **38**. – № 4. – P. 12-14.
4. Vorobets M. On a free group of transformations defined by an automaton / M. Vorobets, Y. Vorobets // Geom. Dedicata – 2007. – **124**. – P. 237-249.
5. Oliynyk A. Free products of C_2 as groups of finitely automatic permutations / A. Oliynyk // Voprosy algebrы – 1999. – **14**. – P. 158-165.
6. Nekrashevych V. V. Self-similar groups / V. V. Nekrashevych // Mathematical Surveys and Monographs, vol. 117, Amer. Math. Soc., Providence, RI, – 2005, – xi+231p.
7. Lyndon R. C. Combinatorial group theory / R. C. Lyndon, P. E. Schupp // Springer-Verlag Berlin Heidelberg – 1977. – xiv+239p.

5 Concluding remarks

The proposed construction admits generalizations in at least two directions. The first one is to give a faithful automaton representation of the free group of rank m for $m > 2$. This result can be obtained using m adding machines over pairwise disjoint binary alphabets as a basement and then defining m new initial automata over an alphabet of cardinality $2m + 1$. The second direction is to use another initial automata as a basement instead of adding machines. The only condition is these automata have to define permutations of infinite order.

References

1. BHATTACHARJEE, M. (1995), “The ubiquity of free subgroups in certain inverse limits of groups”, Journal of Algebra, **v. 172**, pp. 134-146.
2. NEKRASHEVYCH, V. (2010), “Free subgroups in groups acting on rooted trees”, Groups, Geometry, and Dynamics, №4, pp. 847-862.
3. ALESHIN, S. V. (1983), “A free group of finite automata”, Moscow Univ. Math. Bull., **v. 38**, №4, pp. 10-13.
4. VOROBETS, M. and VOROBETS, Y. (2007), “On a free group of transformations defined by an automaton”, Geom. Dedicata, **v. 124**, pp. 237-249.
5. OLIIJNYK, A. (1999), “Free products of C_2 as groups of finitely automatic permutations”, Voprosy algebrы, **v. 14**, pp. 158-165.
6. NEKRASHEVYCH, V. V. (2005), “Self-similar groups”, Mathematical Surveys and Monographs, vol. 117, Amer. Math. Soc., Providence, RI, xi+231p.
7. LYNDON, R. C. and SCHUPP, P. E. (1977), “Combinatorial group theory”, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, xiv+339p.

Received: 30.06.2016

**ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ
РІВНЯННЯ,
МАТЕМАТИЧНА ФІЗИКА
ТА МЕХАНІКА**

УДК 519.9

Р. Р. Гіщук *аспірант*,
Ю. М. Перестюк, *інженер*

Про коливання в одній розривній динамічній системі

Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 83000, м. Київ, пр-т.
Глушкова 4д,
e-mail: gischuk@gmail.com

R. Hishchuk, *graduate student*,
Yu. Perestyuk, *engineer*

About oscillations in one dynamic system

Taras Shevchenko National University of
Kyiv, 83000, Kyiv, Glushkova st., 4d,
e-mail: gischuk@gmail.com

В роботі досліджується одна система диференціальних рівнянь на площині, що піддається імпульсному збуренню при проходженні фазовою точкою певної прямої.

Ключові слова: імпульсне збурення, фазова точка, імпульсна система.

We study a system of differential equations in the plane, subjected to impulsive effect while passing phase point of some line. It is shown that even generating linear system on a plane has a special type of steady point node through the impulse effect can simulate oscillating processes in such a system.

We are interested in case, when the phase point in the process of evolution is subjected to impulsive effect many times. If the phase point does not get the specified straight line or gets only once, its movement over time described impulsive system without effect, so over time, this point is coming near equilibrium or goes away to infinity.

Moving on one impulse cycle phase point once a period is subjected to an impulsive effect. It's possible that except one impulse cycles in the source system there can be another ones that can be called double impulse discontinuous cycles. Moving on these cycles, phase point twice a period is subjected to an impulsive effect.

Key Words: impulsive effect, impulsive system, phase point, one impulse cycles.

Статтю представив академік НАНУ, д.ф.-м.н., проф. Перестюк

При вивченні багатьох природних процесів, що піддаються короткочасним збуренням, часом зручно вважати, що ці збурення мають «миттєвий» характер. Така ідеалізація при математичному моделюванні таких процесів приводить до необхідності досліджувати динамічні системи з розривними траєкторіями. Разом з тим варто зауважити, що розрив фазової траєкторії не обов'язково є наслідком ідеалізації короткочасового збурення. В деяких випадках такі розриви – істотна характеристика процесу (наприклад, аеродинамічний скачок при перевищенні швидкості звуку, конверсія виробництва тощо). Проблема всестороннього вивчення динамічних систем з розривними

траєкторіями не є новою. Такі задачі з'явилися на початку минулого століття в роботах з нелінійної механіки і зацікавили досліджувачів можливістю адекватно математично описувати процеси в нелінійних коливних системах. Класичним прикладом такої задачі є математична модель годинникового механізму [1], [2]. Багато інших прикладів можна знайти в монографіях [3], [4], де побудовано теорію диференціальних рівнянь з імпульсним збуренням.

В цій роботі досліджується одна система диференціальних рівнянь на площині, що піддається імпульсному збуренню при проходженні фазовою точкою певної прямої. Показано, що навіть тоді, породжуюча лінійна

система на площині має особливу точку типу стійкий вузол, за рахунок імпульсного збурення можна моделювати коливні процеси в такій системі.

Розпочнемо дослідження з лінійної розривної динамічної системи на площині

$$\dot{x} = Jx, \quad \langle a, x \rangle \neq 0, \quad \Delta x|_{\langle a, x \rangle = 0} = Bx. \quad (1)$$

Тут $x = coll(x_1, x_2)$, J – дійсна жорданова клітка, пряма

$$\langle a, x \rangle = 0, \quad a_1 x_1 + a_2 x_2 = 0$$

не є віссю координат і далі ми цю пряму запишемо так :

$$x_2 = kx_1, \quad k = -\frac{a_1}{a_2},$$

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} - \text{задана стала матриця.}$$

Рух фазової точки $(x_1(t), x_2(t))$ описується диференціальною системою $\dot{x} = Jx$, коли ця точка знаходиться по за прямою $x_2 = kx_1$ і «миттєво» перекидається (переміщується) в точку

$$\begin{pmatrix} x_1^+ \\ x_2^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & 1 + b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t^*) \\ x_2(t^*) \end{pmatrix} \quad (2)$$

в момент t^* , коли $x_2(t^*) = kx_1(t^*)$, в момент попадання фазової точки на пряму $x_2 = kx_1$. Зауважимо, що лінійне однорідне відображення

$$(E+B) : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \rightarrow (E+B) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

площини (x_1, Ox_2) в площину переводить пряму $x_2 = kx_1$ в пряму $x_2 = \mu x_1$, де коефіцієнти k і μ пов'язані рівністю

$$\mu = \frac{k(1+b_{22})+b_{21}}{1+b_{11}+kb_{12}}. \quad (3)$$

Дослідимо поведінку розв'язків системи (1), коли матриця J має вигляд $J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ причому $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$ і в цьому випадку лінійна система рівнянь $\dot{x} = Jx$ має особливу точку $x = 0$ (початок координат) стійким вузлом.

Рух фазової точки $(x_1(t), x_2(t))$ відбувається по лініях

$$x_2 = c|x_1|^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}} \text{ і } x_1 = 0.$$

Якщо фазова точка при $t = 0$ починає рух з точки (x_1^0, x_2^0) , то при всіх $t \in R$ вона залишається на лінії

$$\frac{x_2}{x_1^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}} = \left(\frac{x_1^0}{x_1^0}\right)^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}, \quad \left(x_2 = x_2^0 \left(\frac{x_1}{x_1^0}\right)^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}\right) \quad (4)$$

Зрозуміло, що і фазова точка вихідної імпульсної системи рухається по цим же лініям, «перескакуючи» на прямій $x_2 = kx_1$ з однієї на іншу (або ж таку саму) із цих ліній.

Нас цікавитиме випадок, коли фазова точка в процесі своєї еволюції піддається імпульсу впливу багато разів, тобто попадає на пряму $x_2 = kx_1$ більше одного разу. Якщо фазова точка не попадає на вказану пряму, або попадає лише один раз, то її рух з часом описується системою без імпульсного збурення, а тому з часом ця точка наближається до положення рівноваги (0; 0) або ж віддаляється в нескінченність.

Щоб фазова точка піддавалась імпульсному збуренню багато разів (зчисленне число) необхідно, щоб вона, вийшовши з точки прямої $x_2 = \mu x_1$ при $t > 0$, попала на пряму $x_2 = kx_1$.

Траєкторію руху точки $(x_1(t), x_2(t))$

$$x_1(0) = x_1^0, \quad x_2(0) = x_2^0, \quad x_2(0) = \mu x_1^0$$

$$\text{є лінія } x_2 = x_1^0 \mu \left(\frac{x_1}{x_1^0}\right)^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}.$$

Ця лінія перетинає пряму $x_2 = kx_1$ в точці

$$(x_1^*, kx_1^*), \text{ де } x_1^* = x_1^0 \left(\frac{\lambda_1}{\mu \lambda_1 - \lambda_2}\right)^{\frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2}}.$$

Щоб фазова точка, вийшовши при $t = 0$ з точки $(x_1^0, \mu x_1^0)$, попала в точку (x_1^*, kx_1^*) при $t = t^* > 0$ необхідно, щоб виконувалася нерівність

$$\frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \ln \frac{\mu}{k} > 0. \quad (5)$$

Припускаючи, що параметри вихідної системи забезпечують виконання цієї нерівності, можемо стверджувати, що в момент $t = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \ln \frac{\mu}{k}$ фазова точка «перескакує» з положення (x_1^*, kx_1^*) в точку

$$(1 + b_{11} + kb_{12})x_1^*, (b_{21} + (1 + b_{22})kx_1^*)$$

прямої $x_2 = \mu x_1$

Тому поведінка розв'язків вихідної імпульсної системи визначається відображенням прямої в пряму:

$$h : R \rightarrow R, \text{ де } h : x_1 \rightarrow [(1 + b_{11}) + b_{12}k] \left(\frac{\mu}{k}\right)^{\frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2}} x_1. \quad (6)$$

Це лінійне однорідне відображення, яке ми запишемо так $h : x_1 \rightarrow \gamma x_1$, позначивши через γ число:

$$\gamma = (1 + b_{11} + b_{12}k) \left(\frac{\mu}{k}\right)^{\frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2}}. \quad (7)$$

Отже, справедливе таке твердження

Теорема 1. Якщо $|\gamma| < 1$, то всі розв'язки вихідної системи, які починаються з точок прямої $x_2 = \mu x_1$ з часом прямують до нуля, коли $t \rightarrow \infty$. Якщо $|\gamma| > 1$, то всі розв'язки вихідної системи, які при $t = 0$ починаються з точок прямої $x_2 = \mu x_1$, прямують у нескінченність, коли $t \rightarrow \infty$.

Детальніше проаналізуємо випадок $|\gamma| = 1$.

Якщо $\gamma = 1$, то кожна точка $x_1 \in R$ є нерухомою точкою відображення h і така точка породжує одноімпульсний періодичний рух (одноімпульсний цикл). Ці цикли заповнюють частину координатної площини, що лежить між прямими $x_2 = kx_1$ та $x_2 = \mu x_1$.

Якщо рух фазової точки починається з точки $(x_1^0, \mu x_1^0)$ прямої $x_2 = \mu x_1$, то цикл, що породжується цією точкою, задається куском кривої

$$x_2 = \mu x_1^0 \left(\frac{x_1}{x_1^0} \right)^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}, \left(\frac{\mu}{k} \right)^{\frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2}} \leq \frac{x_1}{x_1^0} \leq 1,$$

Безпосередньо переконаємося, що рух зображуючої точки по кожному з таких циклів є періодичним з одним і тим же періодом

$$T = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \ln \frac{\mu}{k}. \quad (8)$$

Ці цикли називатимемо одноімпульсними. Рухаючись по такому циклу фазова точка один раз за період піддається імпульсному впливу. Крім одноімпульсних циклів в вихідній системі можуть бути так звані двоімпульсні розривні цикли, відмінні від одноімпульсних: рухаючись по такому циклу фазова точка двічі за період піддається дії імпульсної сили.

Двоімпульсні цикли виникають в вихідній системі, коли її параметри задовольняють рівність

$$\gamma = (1 + b_{11} + b_{12}k) \left(\frac{\mu}{k} \right)^{\frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2}} = -1.$$

Вони породжуються точками $(x_1^0, \mu x_1^0)$, де x_1^0 – нерухома точка відображення h^2 .

Ці цикли, як і одноімпульсні, заповнюють частину координатної площини, що лежить між прямими $x_2 = kx_1$ і $x_2 = \mu x_1$.

Рух фазової точки по кожному з таких циклів є періодичним з одним і тим же періодом

$$T = \frac{2}{\lambda_1 - \lambda_2} \ln \frac{\mu}{k}.$$

На відміну від одноімпульсних циклів, кожен з яких лежить в одному з координатних кутів, кожен двоімпульсний цикл належить двом координатним кутам: першому і третьому.

Двоімпульсний цикл, що породжується точкою $(x_1^0, \mu x_1^0)$ прямої $x_2 = \mu x_1$, задається кусками ліній

$$x_2 = \mu x_1^0 \left(\frac{x_1}{x_1^0} \right)^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}},$$

$$\begin{pmatrix} x_1^* \\ kx_1^* \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 + b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & 1 + b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^* \\ kx_1^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + b_{11} + kb_{12} \\ b_{21} + (1 + b_{22})k \end{pmatrix} x_0 \left(\frac{\mu}{k} \right)^{\frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2}} = \begin{pmatrix} x_0 \\ \mu x_0 \end{pmatrix}$$

бо, в силу (3),

$$(1 + b_{22})k + b_{21} = \mu(1 + b_{11} + kb_{12}),$$

$$x_1^0 \left(\frac{\mu}{k} \right)^{\frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2}} \leq x_1 \leq x_1^0, \\ x_1^0 > 0,$$

$$x_2 = -\mu x_1^0 \left(\frac{x_1}{-x_1^0} \right)^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}},$$

$$-x_1^0 \leq x_1 \leq -x_1^0 \left(\frac{\mu}{k} \right)^{\frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2}}. \quad (9)$$

З'ясуємо тепер, чи можливі розривні цикли, якщо збурити вихідну систему, тобто розглянемо систему рівнянь

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \lambda_1 x_1 + \varepsilon f(x_1, x_2) \\ x_2 &\neq kx_1 \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_2 &= \lambda_2 x_2 + \varepsilon g(x_1, x_2) \\ \Delta \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \Big|_{x_2=kx_1} &= \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \Big|_{x_2=kx_1}, \end{aligned}$$

в якій λ_1, λ_2, k і матриця

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

такі, як і в системі (1), $f(x_1, x_2)$ і $g(x_1, x_2)$ – неперервно диференційовані в деякому крузі $x_1^2 + x_2^2 = r^2$ функції, $\varepsilon > 0$ – малий параметр.

Як і вище за текстом, позначимо через μ число

$$\mu = \frac{k(1 + b_{22}) + b_{21}}{1 + b_{11} + kb_{12}},$$

тобто кутовий коефіцієнт прямої $x_2 = \mu x_1$ в яку відображення

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 + b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & 1 + b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad (11)$$

переводить пряму $x_2 = kx_1$.

Вважатимемо, що параметри системи (10) такі, що виконується нерівність (5) і рівність

$$\gamma = (1 + b_{11} + b_{12}k) \cdot \left(\frac{\mu}{k} \right)^{\frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2}} = 1. \quad (12)$$

За цих умов система рівнянь (10) при $\varepsilon = 0$ має однопараметричну сім'ю одноімпульсних циклів, що задаються кусками парабол

$$x_2 = \mu x_1^0 \left(\frac{x_1}{x_1^0} \right)^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}, \left(\frac{\mu}{k} \right)^{\frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2}} \leq \frac{x_1}{x_1^0} \leq 1, \quad (13)$$

кожна з яких перетинає пряму $x_2 = kx_1$ в точці (x_1^*, kx_1^*) , де

$$x_1^* = x_0 \left(\frac{\mu}{k} \right)^{\frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2}}.$$

Саме ця точка відображенням Пуанкаре відображається в початкову точку $(x_0, \mu x_0)$. Дійсно

$$\begin{pmatrix} x_1^* \\ kx_1^* \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 + b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & 1 + b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^* \\ kx_1^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + b_{11} + kb_{12} \\ b_{21} + (1 + b_{22})k \end{pmatrix} x_0 \left(\frac{\mu}{k} \right)^{\frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2}} = \begin{pmatrix} x_0 \\ \mu x_0 \end{pmatrix}$$

а в силу рівності (12),

$$(1 + b_{11} + kb_{12}) \left(\frac{\mu}{k} \right)^{\frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2}} = 1.$$

Якщо $\varepsilon \neq 0$, то траєкторія системи (10), що вийшла з точки $(x_0, \mu x_0)$ не обов'язково перетне пряму $x_2 = kx_1$ в точці (x_1^*, kx_1^*) . Вона може перетнути цю пряму в точці, абсциса якої за модулем менша від $|x_1^*|$ (фазова точка наближається до початку координат), або ж в точці, абсциса якої за модулем більша від $|x_1^*|$

$$\frac{d}{dt}E(x_1, x_2) = -\lambda_2 \left(\frac{x_1}{x_1^0} \right)^{-\lambda_2 - 1} \cdot \frac{x_1}{x_1^0} \left(\frac{x_2}{\mu x_1^0} \right)^{\lambda_1} + \lambda_1 \left(\frac{x_1}{x_1^0} \right)^{-\lambda_2} \cdot \left(\frac{x_2}{\mu x_1^0} \right)^{\lambda_1 - 1} \cdot \frac{x_2}{x_1^0} = 0.$$

Тобто, функція $E(x_1, x_2)$ вздовж траєкторії системи (10) при $\varepsilon = 0$ є сталою, а отже, є інтегралом диференціальної частини системи (10). Зауважимо, що рівняння $E(x_1, x_2) = 1$ задає траєкторію цієї системи, яка проходить через точку $(x_1^0, \mu x_1^0)$ прямої $x_2 = \mu x_1$, для будь-якого $x_1^0 \in \mathbb{R}, x_1^0 \neq 0$:

$$E(x_1, x_2) = 1 \Rightarrow x_2 = \mu x_1^0 \left(\frac{x_1}{x_1^0} \right)^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}. \quad (15)$$

Розглянемо приріст функції $E(x_1, x_2)$ за час, коли фазова точка, вийшовши з положення $(x_1^0, \mu x_1^0)$, досягне прямої $x_2 = kx_1$ рухаючись по траєкторії системи рівнянь (10) при $\varepsilon \neq 0$. Повну похідну по t від $E(x_1, x_2)$, складену в силу системи рівнянь (10), легко обчислити

$$\begin{aligned} & \left(\frac{d}{dt} E(x_1, x_2) \right) = \\ & = E(x_1, x_2) \cdot \varepsilon \left(-\frac{\lambda_2}{x_1} f(x_1, x_2) + \frac{\lambda_1}{x_2} g(x_1, x_2) \right), \end{aligned}$$

або ж

$$\frac{d}{dt} \ln E(x_1, x_2) = \varepsilon \left(-\frac{\lambda_2}{x_1} f(x_1, x_2) + \frac{\lambda_1}{x_2} g(x_1, x_2) \right). \quad (16)$$

Для обчислення приросту треба з'інтегрувати одержану похідну вздовж куска траєкторії, що знаходиться між прямими $x_2 = \mu x_1$ і $x_2 = kx_1$.

$$\begin{aligned} \Delta \ln E \Big|_Y &= \varepsilon \int_Y \left(-\frac{\lambda_2}{x_1} f(x_1, x_2) + \frac{\lambda_1}{x_2} g(x_1, x_2) \right) dl = \\ &= \varepsilon \int_{\frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \ln \frac{\mu}{k}}^0 \left[-\lambda_2 f(x_1^0 e^{\lambda_1 t}, \mu x_1^0 e^{\lambda_2 t}) + \frac{\lambda_1}{\mu} g(x_1^0 e^{\lambda_1 t}, \mu x_1^0 e^{\lambda_2 t}) \right] \cdot \sqrt{1 + \mu^2 \cdot e^{2(\lambda_2 - \lambda_1)t}} dt + \varepsilon^2 \dots \\ & dl = \sqrt{(dx_1)^2 + (dx_2)^2}. \end{aligned}$$

Обчислюючи інтеграл, маємо

$$\begin{aligned} \Delta \ln E(x_1, x_2) \Big|_Y &= \varepsilon F(x_1^0) + O(\varepsilon^2), \text{ де} \\ F(x_1^0) &= \int_{\frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \ln \frac{\mu}{k}}^0 \left[-\lambda_2 f(x_1^0 e^{\lambda_1 t}, \mu x_1^0 e^{\lambda_2 t}) + \frac{\lambda_1}{\mu} g(x_1^0 e^{\lambda_1 t}, \mu x_1^0 e^{\lambda_2 t}) \right] \cdot \sqrt{1 + \mu^2 \cdot e^{2(\lambda_2 - \lambda_1)t}} dt \end{aligned} \quad (18)$$

(фазова точка віддаляється від початку координат). Щоб з'ясувати, який із цих випадків має місце, розглянемо функцію

$$E(x_1, x_2) = \left(\frac{x_1}{x_1^0} \right)^{-\lambda_2} \cdot \left(\frac{x_2}{\mu x_1^0} \right)^{\lambda_1}, \quad (14)$$

визначену в секторі, обмеженому прямими $x_2 = kx_1$, і $x_2 = \mu x_1$, без точки $(0,0)$. Обчислюючи похідну від цієї функції вздовж розв'язків системи (10) при $\varepsilon = 0$, маємо:

На жаль ця траєкторія нам невідома. Разом з тим за теоремою про диференційованість розв'язків диференціальних рівнянь за параметром (див., наприклад [6], с. 354) при достатньо малих значеннях параметра ε розв'язок нелінійної системи рівнянь (10) на скінченному часовому відрізку відрізняється величиною порядку ε від розв'язку цієї системи при $\varepsilon = 0$, а тому траєкторія системи (10), що виходить з точки $(x_1^0, \mu x_1^0)$ прямої $x_2 = \mu x_1$, на величину порядку ε відрізнятиметься від куска параболи

$$Y: x_2 = \mu x_1^0 \left(\frac{x_1}{x_1^0} \right)^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}, \quad \left(\frac{\mu}{k} \right)^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2}} \leq \frac{x_2}{x_1^0} \leq 1. \quad (17)$$

Таким чином, інтеграл від $\ln E(x_1, x_2)$ з точністю до $O(\varepsilon^2)$ можна порахувати як криволінійний інтеграл по Y від правої частини рівності (16)

За властивостями функції $F(x_1^0)$ **можемо судити про** поведінку розв'язків вихідної системи (10) (при достатньо малих значеннях параметра $\varepsilon > 0$). Якщо ця функція додатна, то в системі (10) в секторі між прямими $x_2 = kx_1$ і $x_2 = \mu x_1$ відбуваються наростаючі коливання. Якщо ж ця функція від'ємна, то коливання згасають. Можливий випадок, коли ця функція змінює знак. Нехай x_1^* – простий нуль функції $F(x_1^0)$: $F(x_1^*) = 0$, $F'(x_1^*) \neq 0$. В цьому випадку при достатньо малих значеннях параметра ε точка x_1^* породжує у вихідній системі (10) одноімпульсний цикл, який близький до куска параболи

$$\left(\frac{x_2}{\mu x_1^*}\right)^{\lambda_1} = \left(\frac{x_2}{x_1^*}\right)^{\lambda_2}, \quad (19)$$

обмеженої прямими $x_2 = kx_1$ і $x_2 = \mu x_1$.

Підводячи підсумок, сформулюємо таке твердження.

Теорема 2. Нехай в системі (10) $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$, $k > 0$, функції $f(x_1, x_2)$ і $g(x_1, x_2)$

диференційовані в деякому крузі $x_1^2 + x_2^2 \leq r^2$ і параметри системи такі, що виконується нерівність (5) і рівність (12). Якщо рівняння $F(x_1) = 0$ має ізольований корінь $x_1 = x_1^*$, такий, що $F'(x_1^*) \neq 0$, то при достатньо малих значеннях $\varepsilon > 0$ система (10) має розривний одноімпульсний цикл. Цей цикл є асимптотично орбітально стійким, якщо $F'(x_1^*) < 0$ і нестійким, якщо $F'(x_1^*) > 0$.

Безпосередні підрахунки показують, що з точністю до величин порядку малості ε^2 цей цикл визначається куском лінії

$$\frac{x_2}{\mu x_1^*} = \frac{x_2^{\lambda_2}}{x_1^{\lambda_2}} \left[1 - \varepsilon \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \int_{x_1^*}^{x_1} \frac{1}{s} \left[-\frac{1}{\lambda_1 \cdot s} f\left(s, \mu x_1^* \left(\frac{s}{x_1^*}\right)^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}\right) + \frac{1}{\lambda_2 \mu x_1^*} \cdot \left(\frac{s}{x_1^*}\right)^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}} \cdot g\left(s, \mu x_1^* \left(\frac{s}{x_1^*}\right)^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}\right) \right] ds \right] \quad (20)$$

де x_1 змінюється у межах

$$\left(\frac{\mu}{k}\right)^{\frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2}} \leq \frac{x_1}{x_1^*} \leq 1.$$

Раніше ми показали, що в системі рівнянь (10) при $\varepsilon = 0$ можливі двоімпульсні цикли. Ці цикли виникають, коли параметри системи задовольняють рівність

$$(1 + b_{11} + b_{12}k) \left(\frac{\mu}{k}\right)^{\frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2}} = -1 \quad (21)$$

Покажемо, що в системі рівнянь (10) і при $\varepsilon \neq 0$ при певних умовах, накладених на функції $f(x_1, x_2)$ і $g(x_1, x_2)$, також можливі ізольовані двоімпульсні цикли, тобто в системі рівнянь (10)

можливі коливання з двома розривами на протязі періоду. Як і при дослідженні

Використавши вираз (16) повної похідної від $\ln E(x_1, x_2)$, складеної в силу рівнянь (10), обчислюємо шуканий приріст: з точністю до величини порядку ε^2 як суму криволінійних інтегралів від функції

$$\varepsilon \cdot \left(-\frac{\lambda_2}{x_1} f(x_1, x_2) + \frac{\lambda_1}{x_2} g(x_1, x_2) \right) \quad (22)$$

по кускам кривих

$$\begin{aligned} \left(\frac{x_2}{\mu x_1^0}\right)^{\lambda_1} \cdot \left(\frac{x_1}{x_1^0}\right)^{-\lambda_2} &= 1 & \left(\frac{\mu}{k}\right)^{\frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2}} \leq \frac{x_1}{x_1^0} \leq 1 \\ \text{і} & & \\ \left(\frac{x_2}{-\mu x_1^0}\right)^{\lambda_1} \cdot \left(\frac{x_1}{-x_1^0}\right)^{-\lambda_2} &= 1 & -1 \leq \frac{x_1}{x_1^0} \leq -\left(\frac{\mu}{k}\right)^{\frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2}}, x_1^0 > 0 \end{aligned} \quad (23)$$

Обчислюючи ці інтеграли знаходимо, що

$$\Delta \ln E(x_1, x_2) = \varepsilon F_1(x_1^0) + \varepsilon^2 \dots,$$

$$F_1(x_1^0) = F(x_1^0) + F(-x_1^0),$$

де $F(x_1^0)$ визначається формулою (18). Таким чином, справедливе таке твердження.

Теорема 3. Нехай в системі (10) λ_1, λ_2 , функції $f(x_1, x_2)$ і $g(x_1, x_2)$ такі, такі як у теоремі 2, і виконуються нерівність (5) і рівність (21)

Якщо рівняння $F_1(x_1^0) = 0$ маємо ізольований додатний корінь x_1^* такий, що $F_1'(x_1^*) \neq 0$, то при достатньо малих значеннях параметра $\varepsilon > 0$ система рівнянь (10) має розривний двоімпульсний цикл. Цей цикл асимптотично

орбітально стійкий, якщо $F_1'(x_1^*) < 0$ і нестійкий, якщо $F_1'(x_1^*) > 0$.

З точністю до величини порядку ε^2 можна записати рівняння цього циклу

$$\begin{aligned} \frac{x_2}{\mu x_1^*} &= \left(\frac{x_1}{x_1^*} \right)^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}} \left(1 - \varepsilon \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \Phi(x_1, x_1^*) \right), & \left(\frac{\mu}{k} \right)^{\frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2}} \leq \frac{x_1}{x_1^*} \leq 1 \\ \frac{x_2}{-\mu x_1^*} &= \left(\frac{x_1}{-x_1^*} \right)^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}} \left(1 - \varepsilon \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \Phi(-x_1, -x_1^*) \right), & -1 \leq \frac{x_1}{x_1^*} \leq -\left(\frac{\mu}{k} \right)^{\frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2}} \end{aligned} \quad (24)$$

де

$$\Phi(x_1, x_1^*) = \int_{x_1^*}^{x_1} \frac{1}{s} \left[-\frac{1}{\lambda_1 s} f\left(s, \mu x_1^* \left(\frac{s}{x_1^*}\right)^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}\right) + \frac{1}{\lambda_2 \mu x_1^*} \left(\frac{s}{x_1^*}\right)^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}} \cdot g\left(s, \mu x_1^* \left(\frac{s}{x_1^*}\right)^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}\right) \right] ds.$$

Як приклад, розглянемо рух маятника з великим тертям

$$\ddot{x} + 2\delta \dot{x} + \sin x = 0, \quad \delta^2 > 1 \quad (25)$$

під дією імпульсної сили, яка діє на маятник при проходженні ним положення з нульовою швидкістю, а її величина пропорційна положенню в цей момент

$$\Delta \dot{x} \big|_{\dot{x}=0} = -\alpha x \big|_{\dot{x}=0}, \quad \alpha > 0. \quad (26)$$

Введемо штучно параметр $\varepsilon > 0$, запровадивши заміну $x \rightarrow \sqrt{\varepsilon} x$.

З точністю до величини порядку ε^2 матимемо систему рівнянь

$$\dot{x} = y$$

$$\dot{y} = -x - 2\delta y + \varepsilon \frac{x^3}{3!}, \quad y \neq 0, \quad (27)$$

$$\Delta x \big|_{y=0}, \quad \Delta y \big|_{y=0} = -\alpha x \big|_{y=0}.$$

Щоб ця система рівнянь набула вигляду (10) перейдемо від змінних (x, y) до змінних (x_1, x_2) шляхом заміни змінних

$$x = x_1 - x_2, \quad y = \lambda_1 x_1 - \lambda_2 x_2, \quad (28)$$

де

$$\lambda_1 = -\delta + \sqrt{\delta^2 - 1} \quad \lambda_2 = -\delta - \sqrt{\delta^2 - 1}. \quad (29)$$

В змінних x_1, x_2 рівняння набувають вигляду

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \lambda_1 x_1 + \frac{\varepsilon}{\delta(\lambda_1 - \lambda_2)} (x_1 - x_2)^3 \\ x_2 &\neq \frac{\lambda_1}{\lambda_2} x_1, \\ \dot{x}_2 &= \lambda_2 x_2 + \frac{\varepsilon}{\delta(\lambda_1 - \lambda_2)} (x_1 - x_2)^3 \\ \Delta \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \big|_{x_2 = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} x_1} &= \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \begin{pmatrix} \lambda_1 + \alpha \left(1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right) - \lambda_2 \\ \lambda_1 + \alpha \left(1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right) - \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (30)$$

Безпосередні підрахунки дають значення кутових коефіцієнтів

$$k = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}, \quad \mu = \frac{\lambda_1 + \alpha}{\lambda_2 + \alpha}$$

Умова (5) вимагає виконання нерівності $\mu > k$:

$$\frac{\lambda_1 + \alpha}{\lambda_2 + \alpha} - \frac{\lambda_1}{\lambda_2} > 0, \quad \frac{\alpha(\lambda_2 - \lambda_1)}{(\lambda_2 + \alpha)\lambda_2} > 0,$$

яка справджується, коли $\alpha > -\lambda_2$, бо $\alpha > 0$, $\lambda_2 < 0$, $\lambda_2 - \lambda_1 = -2\sqrt{\delta^2 - 1}$, тобто α повинно бути більшим від $\delta + \sqrt{\delta^2 - 1}$.

Перевіримо виконання рівності (12)

$$\begin{aligned} & (1 + b_{11} + b_{12}k) \cdot \left(\frac{\mu}{k}\right)^{\frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}} = \\ & = \left(1 + \frac{\lambda_1 + \alpha(1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_2})}{\lambda_2 - \lambda_1} - \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} \cdot \frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right) \left(\frac{\lambda_1 + \alpha}{\lambda_2 + \alpha} \cdot \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{\frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}} = \frac{\lambda_2 - \lambda_1 + \alpha(1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_2})}{\lambda_2 - \lambda_1} \left(\frac{\lambda_1 + \alpha}{\lambda_2 + \alpha} \cdot \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{\frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}} = \\ & = \left(1 + \frac{\alpha}{\lambda_2}\right) \left(\frac{\lambda_1 + \alpha}{\lambda_2 + \alpha} \cdot \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{\frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}} \end{aligned}$$

Звідси бачимо, що ця рівність не може бути виконана, бо $\alpha > -\lambda_2$. Таким чином, в вихідній системі при $\varepsilon = 0$ не може бути одноімпульсних циклів.

Перевіримо виконання умови існування двоімпульсних циклів, тобто умови (21). Ця умова запишеться так

$$(1 + b_{11} + b_{12}k) \cdot \left(\frac{\mu}{k}\right)^{\frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}} = \left(1 + \frac{\alpha}{\lambda_2}\right) \left(\frac{\lambda_1 + \alpha}{\lambda_2 + \alpha} \cdot \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{\frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}} = -1.$$

Оскільки $\left(1 + \frac{\alpha}{\lambda_2}\right) < 0$, коли $\alpha > -\lambda_2$, то остання рівність може виконуватися при $\alpha > -\lambda_2$, якщо $\alpha = \alpha^* > -\lambda_2$ є коренем рівняння

$$\left(\frac{\lambda_2 + \alpha}{\lambda_1 + \alpha} \cdot \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{\frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}} = \frac{-\lambda_2}{\lambda_2 + \alpha}. \quad (31)$$

Безпосередньо переконуємося, що це рівняння при $\alpha > -\lambda_2$ має один корінь, який ми і позначимо через $\alpha = \alpha^*$. Дійсно, ліва частина рівняння як функція α при $\alpha > -\lambda_2$ монотонно зростає від нуля до додатного числа $\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{\frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}}$, а права частина на цьому ж проміжку монотонно спадає від $+\infty$, коли $\alpha \rightarrow -\lambda_2 + 0$, до нуля, коли $\alpha \rightarrow +\infty$.

Отже, якщо в системі рівнянь (30) $\alpha = \alpha^*$, де $\alpha^* > -\lambda_2$ — корінь рівняння (31), то при $\varepsilon = 0$

кожна точка прямої $x_2 = \mu x_1$, породжує двоімпульсний розривний цикл.

Чи є стаціонарні коливання в системі (27) — з'ясуємо, обчисливши функцію $F_1(x_1)$. Для цього треба проінтегрувати функцію

$$-\frac{\lambda_2}{x_1} f(x_1, x_2) + \frac{\lambda_1}{x_2} g(x_1, x_2) \quad (32)$$

вздовж лінії (23). Ця функція в даному випадку така

$$\vartheta(x_1, x_2) = \left(-\frac{\lambda_2}{x_1} + \frac{\lambda_1}{x_2}\right) (x_1 - x_2)^3. \quad (33)$$

а тому

$$F(x_1) = \int_1^a \left(-\frac{\lambda_2}{x_1} + \frac{\lambda_1}{x_2(x_1)}\right) (x_1 - x_2(x_1))^3 \sqrt{1 + \lambda_2^2 x_2^2(x_1)} dx,$$

де позначено

$$\alpha = \left(\frac{\mu}{k}\right)^{\frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}}, \quad x_2(x_1) = \mu x_1^0 \left(\frac{x_1}{x_1^0}\right)^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}.$$

Оскільки $\vartheta(-x_1, -x_2) = \vartheta(x_1, x_2)$, то безпосередні підрахунки показують, що

$$F(-x_1) = -F(x_1),$$

а тому $F_1(x_1) \equiv 0$. Таким чином, немає підстав стверджувати, що імпульсне збурення в системі (27) забезпечить існування ізольованого розривного циклу.

Список використаних джерел

1. Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. Теория колебаний . – М.:Наука, 1981. – 568 с.
2. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. – М.: Наука 1974. – 502 с.
3. Samoilenko A.M., Perestyuk N.A. Impulsive differential equations. – Singapore: World Scientific. – 1995. – 462p.
4. Perestyuk N.A., Plotnikov V.A., Samoilenko A.M., Skripnik N.V. Differential equations with impulse effects. De Gruyter, 2011. – 307 p.
5. Perestyuk Yu. Discontinuons oscillations in one impulsive system // Journal of Mathematical Sciences, vol. 194, no 4, 2013 P. 494 – 503.
6. Самойленко А.М., Перестюк М.О., Парасюк І.О. Диференціальні рівняння. Підручник. – 3-тє вид. – Київ: ВПЦ. Київ. нац. ун-т. 2010. 527 с.

References

1. ADRONOV A.A , WITT A.A, KHAIKIN S.E.(1981), *Theory of oscillations*. - Moscow: Science 1981.
2. BOGOLYUBOV N.N, MITROPOLSKY Ya.A. (1974) *Asymptotic methods in the theory of nonlinear oscillations*. - Moscow: Nauka 1974.
3. SAMOILENKO A.M, PERESTYUK N.A. (1995.) *Impulsive differential equations*. – Singapore: World Scientific. – 1995.
4. PERESTYUK N.A., PLOTNIKOV V.A., SAMOILENKO A.M., SKRIPNIK N.V. (2011) *Differential equations with impulse effects*. De Gruyter, 2011.
5. PERESTYUK Yu. (2013) Discontinuons oscillations in one impulsive system // *Journal of Mathematical Sciences*, vol. **194**, no 4, 2013 P. 494 – 503
6. SAMOILENKO A.M, PERESTYUK N.A., PARASIUK I.A. (2010) *Differential equations*. Textbook. - 3rd ed. - Kyiv: CUP. Kiev. nat. Univ. 2010.

Надійшла до редколегії 14.11. 16

УДК 517.9

Капустян О.В.¹, д. ф.-м. н., проф.
Романюк І.В.², аспірант

**Існування глобального атрактора
для еволюційного рівняння другого
порядку з розривними траєкторіями**

¹ Київський національний університет імені
Тараса Шевченка,
83000, м. Київ, пр-т. Глушкова 4е,
e-mail: kapustyanav@gmail.com,

² Київський національний університет імені
Тараса Шевченка,
83000, м. Київ, пр-т. Глушкова 4е,
e-mail: romanjuk.iv@gmail.com

O. V. Kapustyan¹, doctor of science, professor
I. V. Romaniuk², graduate student

**The existence of global attractor for
second order evolution equation with
discontinuous trajectories**

¹ Taras Shevchenko National University of Kyiv,
83000, Kyiv, Glushkova st., 4e,
e-mail: kapustyanav@gmail.com,

² Taras Shevchenko National University of Kyiv,
83000, Kyiv, Glushkova st., 4e,
e-mail: romanjuk.iv@gmail.co

В роботі доведено існування глобального атрактора для імпульсної динамічної системи, породженої еволюційним рівнянням другого порядку, розв'язки якого зазнають імпульсного збурення при досягненні деякої підмножини нескінченновимірного фазового простору.

Ключові слова: імпульсне збурення, глобальний аттрактор.

One of the possible ways to describe the qualitative behavior of solutions of the evolution problem with instant perturbations is the theory of impulsive differential equations. An autonomous evolution system is called impulsive dynamical system (impulsive DS) if its trajectories have jumps at moments of intersection with certain surface of the phase space. Some aspects of the long-time behavior of such systems, in the finite-dimensional case, have been studied in [1]. For infinite-dimensional dissipative dynamical systems one of the most powerful tools of investigation of their long-time behavior is the theory of global attractors. In [7] was proposed approach, which allows apply the theory of global attractors for impulsive dynamical systems.

In this work using results of the theory of multi-valued semiflows [8] and considering global attractor as a compact minimal uniformly attracting set of the corresponding multi-valued semiflow, we construct abstract multi-valued impulsive DS and propose a criterion of existence of a such set. Obtained results is applied to describe asymptotic behavior of a wide class of dissipative infinite-dimensional impulsive dynamical systems, generated by second-order evolution equation with multi-valued impulsive perturbations.

Key Words: impulsive perturbation, global attractor.

Статтю представив академік НАН України Перестюк М.О.

Вступ

Теорія імпульсних диференціальних рівнянь [1] є зручним апаратом для опису еволюційних систем, траєкторії яких зазнають імпульсного впливу в моменти досягнення ними деякої фіксованої гіперповерхні фазового простору. Різним аспектам якісної теорії таких систем присвячено роботи [2-4]. Для нескінченно вимірних дисипативних динамічних систем однією з найбільш важливих задач якісної теорії

є дослідження глобального атрактора [6]. В даній роботі, досліджується глобальний аттрактор імпульсної динамічної системи, що породжується еволюційним рівнянням другого порядку, траєкторії якої зазнають багатозначного імпульсного збурення при досягненні деякої підмножини фазового простору.

**Побудова імпульсної ДС з багатозначними
збуреннями**

Нехай E – банахів простір, $P(E)$ ($\beta(E)$) – множина непорожніх (непорожніх обмежених) підмножин E .

Означення 1. [8] Відображення $G: R_+ \times E \rightarrow P(E)$ називається многозначним напівпоток (м-напівпоток), якщо

- 1) $\forall x \in E \quad G(0, x) = x$;
- 2) $\forall x \in E \quad \forall t, s \geq 0 \quad G(t + s, x) \subseteq G(t, G(s, x))$.

G називається строгим, якщо в 2) має місце рівність.

Означення 2. М-напівпотік G називається дисипативним, якщо

$$\exists B_0 \in \beta(E) \quad \forall B \in \beta(E) \quad \exists T = T(B) \geq 0 \quad \forall t \geq T \\ G(t, B) \subset B_0.$$

Означення 3. [5] Компактна підмножина $\Theta \subset E$ називається глобальним атрактором м-напівпотіку G , якщо

- 1) Θ – рівномірно притягуюча, тобто $\forall B \in \beta(E) \quad \text{dist}(G(t, B), \Theta) \rightarrow 0, t \rightarrow \infty$;
- 2) Θ – мінімальна в класі замкнених множин, що задовольняють 1).

В класі дисипативних м-напівпотіків критерієм існування глобального атрактора є виконання умови асимптотичної компактності:

$$\forall t_n \rightarrow \infty \quad \forall B \in \beta(E) \quad \forall \xi_n \in G(t_n, B)$$

послідовність $\{\xi_n\}$ є передкомпактною в E .

Для еволюційної задачі з многозначним імпульсним збуренням м-напівпотік G породжується напівгрупою $V: R_+ \times E \rightarrow E$, траєкторії якої зазнають імпульсного збурення, що задається компактнозначним відображенням $I: M \rightarrow P(M')$ при зустрічі із замкнутою імпульсною множиною $M \subset E$.

Для коректного задання м-напівпотіку будемо вважати виконаними наступні умови [7]:

$$M \cap I(M) = \emptyset, \quad (0)$$

$$\forall x \in M \quad \exists \tau = \tau(x) \quad \forall t \in (0, \tau) \quad V(t, x) \not\subset M. \quad (2)$$

Введемо позначення:

$$M^+(x) = \left(\bigcup_{t > 0} V(t, x) \right) \cap M.$$

Тоді, якщо виконуються умови (1), (2) та $M^+(x) \neq \emptyset$, то існує момент часу $s = s(x)$, такий що $\forall t \in (0, s) \quad V(t, x) \not\subset M, V(s, x) \in M$.

Тоді імпульсна траєкторія $\varphi: R_+ \rightarrow E$, що стартує з точки $x \in E$ має вигляд:

$$\varphi(t) = \begin{cases} V(t - t_n, x_n^+), & t \in [t_n, t_{n+1}), \\ x_{n+1}^+, & t = t_{n+1}; \end{cases}$$

де $\{x_n^+\}_{n \geq 1} \subset M'$ – імпульсні точки,

$x_{n+1}^+ \in IV(s_n, x_n^+)$, $x_0^+ := x$, $\{s_n\}_{n \geq 0} \subset (0, +\infty)$ – відповідні моменти часу, $\forall n \geq 0 \quad t_0 := 0$,

$$t_{n+1} := \sum_{k=0}^n s_k, n \geq 0.$$

Позначимо через K_x множину всіх імпульсних траєкторій, що починають рух з т. x .

Будемо вважати виконаною наступну умову:

$$\forall x \in E \quad \forall \varphi \in K_x \quad \text{визначена на } [0, +\infty), \quad (3)$$

тобто для будь-якої імпульсної траєкторії кількість імпульсних точок або не більш як скінченна, або $\sum_{k=0}^{\infty} s_k = \infty$.

За виконання умов (1) – (3) коректно задане відображення $G: R_+ \times E \rightarrow P(E)$,

$$\forall t \geq 0 \quad \forall x \in E \quad G(t, x) = \{\varphi(t) \mid \varphi \in K_x\}. \quad (4)$$

Формула (4) визначає строгий м-напівпотік, який називатимемо імпульсною многозначною динамічною системою (МДС).

Основні результати

Розглянемо триплет гільбертових просторів $V \subset H \subset V^*$ з компактним та щільним вкладенням, $\|\cdot\|, (\cdot, \cdot)$ – норма та скалярний добуток в H , $A: V \rightarrow V^*$ – лінійний, неперервний, самоспряжений, коерцитивний оператор. Тому функція $\langle Au, u \rangle^{\frac{1}{2}}$ визначає норму в V , яку будемо позначати $\|u\|_V$.

В обмеженій області $\Omega \subset R^n, n \geq 1$ розглядається така еволюційна задача:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + 2\beta \frac{\partial y}{\partial t} + Ay = 0, \\ y|_{t=0} = y_0 \in V, \\ y_t|_{t=0} = y_1 \in H; \end{cases} \quad (5)$$

де $\beta > 0$. Задача (5) в фазовому просторі $E = V \times H$ породжує неперервну напівгрупу $V: R_+ \times E \rightarrow E$,

де для $z_0 = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix} \in E$ $V(t, z_0) = z(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ y_t(t) \end{pmatrix}$.

Норма в E задається рівністю:

для $z = \begin{pmatrix} y \\ w \end{pmatrix} \in E$ $\|z\|_E = \|y\|_V + \|w\|$.

Траєкторії (5) в фазовому просторі E зазнають імпульсного збурення виду [1]:

$$\Delta z|_{z \in M} \in Iz - z, \quad (6)$$

де $M \subset E$ – задана імпульсна множина,

$I: M \rightarrow P(M')$ – задане багатовимірне імпульсне

відображення, $M' \subset E$ – фіксована множина.

Для фіксованого $p \geq 1$ розглянемо функцію

$$l_p^2(z) = \sum_{i=1}^p \{ \lambda_i (y, \psi_i)^2 + (w, \psi_i)^2 \}, \quad \text{де } \{ \lambda_i \}, \{ \psi_i \} -$$

розв'язки спектральної задачі $A\psi_i = \lambda_i \psi_i, i \geq 1$.

Розглянемо наступні імпульсні параметри

для $p \geq 1, a > 0, \mu > 0$:

$$M = \{ z \in E \mid l_p(z) = a \}, \quad (7)$$

$$M' = \{ z \in E \mid l_p(z) = a(1 + \mu) \},$$

$I: M \rightarrow P(M')$ багатовимірне відображення таке,

що для $z = \sum_{i=1}^{\infty} \begin{pmatrix} c_i \\ d_i \end{pmatrix} \psi_i \in M$

$$I(z) = \left\{ \sum_{i=1}^p \begin{pmatrix} c'_i \\ d'_i \end{pmatrix} \psi_i + \sum_{i=p+1}^{\infty} \begin{pmatrix} c_i \\ d_i \end{pmatrix} \psi_i : \right. \\ \left. \sum_{i=1}^p \{ \lambda_i (c'_i)^2 + (d'_i)^2 \} = a^2 (1 + \mu)^2 \right\}. \quad (8)$$

Основним результатом роботи є наступна теорема:

Теорема. Задача (5), (7), (8) породжує дисипативну імпульсну МДС G , що має глобальний аттрактор Θ , причому

$$\Theta = \left\{ \sum_{i=1}^p \begin{pmatrix} c_i \\ d_i \end{pmatrix} \psi_i \mid \sum_{i=1}^p \{ \lambda_i c_i^2 + d_i^2 \} \in [a^2, a^2(1 + \mu)^2] \right\} \cup \{0\}. \quad (9)$$

Доведення.

Для $\forall z_0 = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix} \in E$ для $z(t) = V(t, z_0) = \begin{pmatrix} y(t) \\ y_t(t) \end{pmatrix}$ і

для $\forall i \geq 1$ функції $u_i(t) = (y(t), \psi_i)$, $v_i(t) = u'_i(t) = (y_t(t), \psi_i)$ задовольняють задачу Коші:

$$\begin{cases} u''_i(t) + 2\beta u'_i(t) + \lambda_i u_i(t) = 0, \\ u_i(0) = (y_0, \psi_i), \quad u'_i(0) = (y_1, \psi_i). \end{cases} \quad (10)$$

Крім того, $\forall t \geq 0$ справедлива рівність

$$\lambda_i u_i^2(t) + v_i^2(t) = \lambda_i u_i^2(0) + v_i^2(0) - 4\beta \int_0^t v_i^2(s) ds. \quad (11)$$

З (10), (11) виводимо, що для $l_p(z_0) \neq 0$

функція $t \rightarrow l_p^2(z(t)) = \sum_{i=1}^p \{ \lambda_i u_i^2(t) + v_i^2(t) \}$ строго

спадає на $[0, +\infty)$, зокрема виконується умова (2).

З (10) також виводимо, що $\exists c > 0 \exists \eta > 0 \forall i \geq 1$

$$\forall t \geq 0 \quad \lambda_i u_i^2(t) + v_i^2(t) \leq c^2 (\lambda_i u_i^2(0) + v_i^2(0)) e^{-2\eta t}. \quad (12)$$

Нехай $z_0 \in IM$. В силу (11), (12) $\exists \bar{t} > 0$ таке, що $z(\bar{t}) \in M$. Отже,

$$a^2 = a^2 (1 + \mu)^2 - 4\beta \int_0^{\bar{t}} \sum_{i=1}^p v_i^2(s) ds. \quad (13)$$

$$3(11) \quad \forall t \geq 0 \quad \sum_{i=1}^p v_i^2(t) \leq a^2 (1 + \mu)^2. \quad (14)$$

Тоді з (13), (14) отримуємо, що

$$\bar{t} \geq \frac{1}{4\beta} \left(1 - \frac{1}{(1 + \mu)^2} \right). \quad (15)$$

З (15) одержуємо (3), тобто задача (5), (7), (8)

породжує імпульсну МДС G за формулою (4).

Оскільки імпульсного збурення зазнають тільки перші p координат фазового вектора z то з (11), (12) виводимо:

$$\forall z_0 \in E \quad \forall t \geq 0 \quad \|z(t)\|_E^2 = \sum_{i=1}^{\infty} (\lambda_i u_i^2(t) + v_i^2(t)) \leq c^2 \|z_0\|_E^2 e^{-2\eta t} + a^2 (1 + \mu)^2. \quad (16)$$

Отже, доведена дисипативність G .

Доведемо асимптотичну компактність.

Розглянемо $\xi_n \in G(t_n, z_n^0)$, де $\|z_n^0\|_E \leq r, t_n \nearrow \infty$.

Тоді $\xi_n = z_n(t_n)$, де $z_n(\cdot) \in K_{z_n^0}$. Якщо для нескінченно багатьох $n \geq 1$ $z_n(\cdot)$ не зазнають імпульсних збурень, то $z_n(t_n) = V(t_n, z_n^0)$ і в силу [6] $\exists c > 0, \eta > 0$ такі, що $\forall z_0 \in E$ для $z(t) = V(t, z_0)$ справедлива оцінка

$$\forall t \geq 0 \quad \|z(t)\|_E \leq c \|z_0\|_E e^{-\eta t}. \quad (17)$$

Звідси $\xi_n \rightarrow 0$ в E . Інакше, якщо $\tau_n > 0$ – момент першого потрапляння $V(\cdot, z_n^0)$ на множину M , то з (11)

$$a^2 \leq \|V(\tau_n, z_n^0)\|_E^2 \leq c^2 r^2 e^{-2\eta \tau_n}.$$

Таким чином $\tau_n \leq \frac{1}{\eta} \ln \frac{cr}{a}$, тобто за певний

проміжок часу, який залежить лише від величини початкових даних, фазова точка опиняється в множині IM . Отже, можемо вважати, що

$$z_n^0 \in IM, \|z_n^0\|_E \leq r.$$

Тоді для $z_n(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \begin{pmatrix} u_i^n(t) \\ v_i^n(t) \end{pmatrix} \psi_i$ та $\forall i \geq p+1$ в

силу (12)

$$\lambda_i(u_i^{(n)}(t_n))^2 + (v_i^{(n)}(t_n))^2 \leq c^2(\lambda_i u_i^2(0) + v_i^2(0))e^{-2\eta t_n}. \quad (18)$$

З іншого боку, в силу (11)

$$\sum_{i=1}^p (\lambda_i(u_i^{(n)}(t_n))^2 + (v_i^{(n)}(t_n))^2) \in [a^2, a^2(1+\mu)^2]. \quad (19)$$

Тоді по підпоследовності $\forall i \in \overline{1, p}$ $u_i^{(n)}(t_n) \rightarrow c_i$,

$v_i^{(n)}(t_n) \rightarrow d_i$, отже для $\xi = \sum_{i=1}^p \begin{pmatrix} c_i \\ d_i \end{pmatrix} \psi_i$

$$\begin{aligned} \|\xi_n - \xi\|_E^2 &\leq \sum_{i=1}^p \{ \lambda_i(u_i^{(n)}(t_n) - c_i)^2 + (v_i^{(n)}(t_n) - d_i)^2 \} + \\ &+ c^2 e^{-2\eta t_n} \cdot r^2 \rightarrow 0, n \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (20)$$

З (20) одержуємо передкомпактність $\{\xi_n\}$.

Таким чином імпульсна МДС G має глобальний аттрактор Θ . Враховуючи [8] справедлива формула

$$\Theta = \left\{ \xi \mid \xi = \lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n, \xi_n \in G(t_n, B), B \in \beta(E), t_n \nearrow \infty \right\}.$$

Тоді, враховуючи (19), (20) отримуємо формулу для глобального аттрактора задачі (5). $\square$

Список використаних джерел

1. Самойленко А. М. Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием / Самойленко А. М., Перестюк М. О. – К., 1987.
2. Kaul S. K. Stability and asymptotic stability in impulsive semidynamical systems / Kaul S. K. // J. Appl. Stoch. Anal. – 1994. – Vol.7, № 4. – P. 509-523.
3. Bonotto E. M. Flows of characteristic $0+$ in impulsive semidynamical systems / Bonotto E. M. // J. Math. Anal. Appl. – 2007. – Vol.332. – P. 81-96.
4. Ciesielski K. On stability in impulsive dynamical systems / Ciesielski K. // Bull.

Pol. Acad. Sci. Math. – 2004. – Vol.52. – P. 81-91.

5. Perestyuk M. O. Long-time behaviour of evolution inclusion with non-dumped impulsive effects / Perestyuk M. O., Kapustyan O. V. // Memoirs on Differ. Equat. and Math. Physics. – 2012. – Vol.56. – P. 89-113.
6. Temam R. Infinite-dimensional dynamical systems in mechanics and physics. / Temam R. – New York: Springer. – 1988.
7. Капустян О.В. Існування глобальних аттракторів для імпульсних динамічних систем / Капустян О.В., Перестюк М.О. // Доповіді НАН України. – 2015. – № 12. – С.13-17
8. Melnik V. S. Multi-valued nonlinear dynamics of infinite-dimensional systems / Melnik V. S. – Preprint NASU, 1994, 94 –17

References

1. SAMOILENKO A., PERESTYUK M. (1987) *Differentsialnyie uravneniya s impulsnyim vozdeystviem*. K: Vischa Shkola.
2. KAUL S. (1994) *Stability and asymptotic stability in impulsive semidynamical systems*. J. Appl. Stoch. Anal.
3. BONOTTO E. (2007) *Flows of characteristic $0+$ in impulsive semidynamical systems*. J. Math. Anal. Appl.
4. CIESIELSKI K. (2004) *On stability in impulsive dynamical systems*. Bull. Pol. Acad. Sci. Math.
5. PERESTYUK M., KAPUSTYAN O. (2012) *Long-time behaviour of evolution inclusion with non-dumped impulsive effects*. Memoirs on Differ. Equat. and Math. Phys.
6. TEMAM R. (1988) *Infinite-dimensional dynamical systems in mechanics and physics*. New York: Springer
7. KAPUSTYAN O., PERESTYUK M. (2015) *Isnuvannya globalnih atraktoriv dlya Impulsnih dinamichnih system*. Dopovidi NAN Ukrainy.
8. MELNIK V. (1994) *Multi-valued nonlinear dynamics of infinite-dimensional systems*. Preprint NASU

Надійшла до редколегії 25.11.2016.

УДК 539.3

Карнаухов В.Г.¹, д.ф.-м.н., проф.

Козлов В.І.¹, д.ф.-м.н., с.н.с.

Умрихін І.М.¹, аспірант

Січко В.М.², к.ф.-м.н., доц.

**Теплове руйнування тривимірної
в'язкопружної тришарової циліндричної
п'єзопанелі з незалежними від
температури характеристиками при
вимушених резонансних коливаннях**

¹Інститут механіки ім. С.П.Тимошенка НАН
України, 03057, м. Київ, вул. Петра Нестерова, 3
e-mail: karn@inmech.kiev.ua

²Миколаївський національний університет ім.
В.О.Сухомлинського вул. Нікольська, 24,
54030, Миколаїв, Україна;
e-mail: Andrew-mdu@ukr.net

V.G. Karnaukhov¹, Dr. Sci., Prof.

V.I. Kozlov¹, Dr. Sci., Leading Researcher.

I.M. Umrykhin¹, Graduate student

V.M. Sichko², PhD, Ass.Prof.

**Thermal failure of three-dimensional
viscoelastic three - layer cylindrical piezopanel
with independent temperature characteristics
under the forced resonant vibrations.**

¹Timoshenko Institute of Mechanics, NAS of Ukraine,
3, Petr. Nesterov str., Kyiv 03057
e-mail: karn@inmech.kiev.ua

²V.O. Suhomlynskogo Mykolaev national university,
Mykolaev, Ukraine,
e-mail: Andrew-mdu@ukr.net

На основі концепції комплексних характеристик подана постановка крайової задачі про теплове руйнування тривимірної в'язкопружної тришарової шарнірно обпертої циліндричної п'єзопанелі з незалежними від температури характеристиками при вимушених резонансних коливаннях. Розв'язок цієї задачі зведено до розв'язування лінійних задач електров'язкопружності і задач теплопровідності з відомим джерелом тепла. Розв'язок цих задач одержано методом скінченних елементів. Досліджено вплив коефіцієнта теплообміну на амплітудно – та температурно-частотні характеристики і на критичне електричне навантаження.

Ключові слова: коливання і дисипативний розігрів, тривимірна п'єзопанель, метод скінченних елементів, амплітудно – та температурно-частотні характеристики, теплове руйнування.

On base of complex characteristic' concept the formulation of boundary problem about thermal failure simply supported viscoelastic three-dimensional cylindrical piezopanel with temperature independence under forced resonant vibrations is given. The solution of this problem is reduced to the solution of the linear problems of electroviscoelasticity and thermal conductivity with known heat source. The solutions of these linear problems are obtained by finite element method. By this approach the coupled nonlinear problem about forced vibrations and vibroheating of simply supported cylindrical shell is solved. The influence of heat-transfer coefficient on the amplitude –, temperature- frequency characteristics and critical electrical loads is investigated. Cylindrical panels and passive p'yezoaktyvnyh materials are widely used in various fields of modern technology as sound emitters and receivers that operate over a wide frequency range. The resonance mode is a staple in their operation. Inherent p'yezomaterialam inelastic hysteretic losses leading to an increase in temperature in the body, called dissipative heating temperature.

Key words: vibrations and dissipative heating, three-dimensional piezopanel, finite element method, amplitude – and temperature- frequency characteristics, thermal

Статтю представив докт. фіз.-мат. наук, проф. Жук Я.О.

1. Вступ.

Циліндричні панелі з пасивних і п'єзоактивних матеріалів широко застосовуються в різних галузях сучасної техніки [1-4] в якості

випромінювачів і приймачів звуку, що працюють в широкому діапазоні частот. Резонансний режим є одним з основних при їх експлуатації.

Притаманні непружним п'єзоматеріалам гістерезисні втрати призводять до підвищення температури в тілі, так званої температури дисипативного розігріву. Її рівень залежить від багатьох факторів: геометричних параметрів тіла, амплітуди навантаження, частоти, дисипативних властивостей матеріалу, механічних і температурних граничних умов та ін. Найбільше підвищення температури має місце при коливаннях на резонансних частотах.

2. Постановка і чисельно-аналітичний метод розв'язування задачі.

Розглядається тривимірна задача про теплове руйнування в'язкопружної тришарової циліндричної п'єзопанелі при дії на неї гармонічної за часом різниці потенціалів. Панель виготовлена з середнього пасивного (алюмінієвого) шару товщиною h_0 й двох п'єзоелектричних шарів однакової товщини h_1 .

Різниця потенціалів підводиться до нескінченно тонкого електроду, нанесеного на зовнішню циліндричну поверхню. Інші поверхні неелектродовані. Для моделювання електро-механічного стану п'єзоматеріала при гармонічному деформуванні використовується концепція комплексних характеристик [5,6], згідно з якою визначальні рівняння п'єзоактивних матеріалів мають такий же вигляд, як і визначальні рівняння для пружного матеріалу з тією лише різницею, що вони є комплексними. Вважається, що дійсна й уявна складові комплексних характеристик не залежить від температури. У цьому випадку задача розпадається на дві незалежні задачі: 1) задачу електромеханіки і 2) задачу теплопровідності з відомим джерелом тепла. Перша з цих задач зводиться до розв'язку системи диференціальних рівнянь в частинних похідних з комплексними коефіцієнтами. Після розв'язку цієї задачі знаходиться середня за період електромеханічна потужність, яка виступає як джерело тепла в рівнянні енергії. Потім розв'язується задача теплопровідності з відомим джерелом тепла. Подана варіаційна постановка кожної з цих задач. Варіаційні задачі розв'язуються методом скінченних елементів. Як критерій теплового руйнування, вибирається досягнення максимальною температурою дисипативного розігріву точки Кюрі, при якій п'єзоматеріал перестає виконувати своє функціональне призначення в результаті втрати п'єзоефекту і перетворення активного матеріалу в пасивний. Для розрахунку критичної різниці

потенціалів, при якій має місце теплове руйнування п'єзопанелі, необхідно багаторазово розв'язувати вказані вище задачі для різних амплітуд електричного навантаження і знайти таку різницю потенціалів, при якій максимальна температура досягне точки Кюрі. Критичне навантаження залежить від багатьох факторів: умов теплообміну, механічних й електричних граничних умов, геометричних параметрів панелі, властивостей матеріалу та ін. Коли рівень електричного навантаження перевищує критичний, виникає задача визначення критичного часу, при досягненні якого максимальна температура дисипативного розігріву дорівнює точці Кюрі. Визначаючи критичний час для різних рівнів закритичного навантаження, можна побудувати криву типу Веллера, яка пов'язує закритичне навантаження і критичний час. Ця крива також залежить від зазначених вище факторів. У даній роботі основна увага зосереджена на розрахунку критичної різниці потенціалів. Представлено амплітудно- та температурно-частотні характеристики й графік залежності критичної різниці потенціалів від коефіцієнта тепловіддачі.

Тришарову циліндричну панель віднесемо до циліндричної системи координат (r, z, θ) . Електромеханічні властивості як пасивного, так і активного матеріалу вважаються незалежними від температури. Панель знаходиться під дією гармонічного за часом електричного навантаження з частотою, близькою до її першої резонансної частоти. Електромеханічна поведінка непружного матеріалу описується концепцією комплексних характеристик [5,6]. В цьому випадку динамічна задача про вимушені коливання і дисипативний розігрів п'єзоелектричної панелі зводиться до розв'язку тривимірних рівнянь руху і рівнянь електростатики в циліндричній системі координат [1]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial (r \sigma_{zr})}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{z\theta}}{\partial \theta} + \rho \omega^2 w &= 0; \\ \frac{\partial \sigma_{zr}}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial (r \sigma_{rz})}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} - \frac{\sigma_{\theta\theta}}{r} + \rho \omega^2 u &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{z\theta}}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial (r \sigma_{r\theta})}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} - \frac{\sigma_{r\theta}}{r} + \rho \omega^2 v &= 0; \\ \operatorname{div} \vec{D} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r D_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial D_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial D_z}{\partial z} &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

де σ_{ij} ($i, j = r, \theta, z$) – амплітудні значення компонент тензора напружень; w, u, v – компоненти вектора переміщень; ρ – густина

матеріалу; ω – частота коливань; $\vec{D}$ – вектор електричної індукції з радіальною D_r , окружною D_θ і осьовою D_z компонентами.

На частині поверхні тіла Σ_p , де задано поверхневі сили $\vec{P}_n$, тензор напружень задовольняє наступним граничним умовам: $P_{\alpha n} = \sigma_{\alpha\beta} l_{\beta n}$. Тут l_β ($\beta = 1, 2, 3$) – напрямні косинуси зовнішньої нормалі $\vec{n}$ до поверхні тіла Σ_p ; $P_{\alpha n}$ – проекції поверхневих сил на осі циліндричної системи координат. На іншій частині поверхні тіла Σ_u можуть бути задані компоненти вектора переміщень.

При збудженні коливань електричним полем на нескінченно тонких електродах, нанесених на п'єзоактивні шари, задаємо різницю потенціалів

$$\varphi = \varphi_0 e^{i\omega t}. \quad (2)$$

На тих частинах поверхні тіла, де електроди відсутні, приймаємо, що нормальна складова вектора електричної індукції D_n дорівнює нулю ($D_n = 0$).

Тензор деформації пов'язаний з вектором переміщень співвідношеннями Коші [1,7]

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rr} &= \frac{\partial u}{\partial r}; \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} + u \right); \varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z}; \varepsilon_{r\theta} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{r} \left(\frac{\partial u}{\partial \theta} - v \right) + \frac{\partial v}{\partial r} \right]; \\ \varepsilon_{rz} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z} \right); \varepsilon_{z\theta} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right). \end{aligned} \quad (3)$$

Електричний потенціал φ пов'язаний з компонентами напруженості електричного поля співвідношеннями

$$E_z = -\frac{\partial \varphi}{\partial z}, E_r = -\frac{\partial \varphi}{\partial r}; E_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \quad (4)$$

Для замикання системи (1) - (4) її необхідно доповнити рівняннями стану. Для попередньо поляризованих в радіальному напрямку в'язкопружних п'єзоматеріалів комплексні рівняння стану в циліндричній системі координат (r, z, θ) мають вигляд [1,6]:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= c_{33}^E \varepsilon_{rr} + c_{13}^E \varepsilon_{\theta\theta} + c_{13}^E \varepsilon_{zz} - e_{33} E_r; \\ \sigma_{\theta\theta} &= c_{13}^E \varepsilon_{rr} + c_{11}^E \varepsilon_{\theta\theta} + c_{12}^E \varepsilon_{zz} - e_{13} E_r; \\ \sigma_{zz} &= c_{13}^E \varepsilon_{rr} + c_{12}^E \varepsilon_{\theta\theta} + c_{11}^E \varepsilon_{zz} - e_{13} E_r; \\ \sigma_{rz} &= 2c_{44}^E \varepsilon_{rz} - e_{15} E_z; \\ \sigma_{z\theta} &= (c_{11}^E - c_{12}^E) \varepsilon_{z\theta}; \\ \sigma_{r\theta} &= 2c_{44}^E \varepsilon_{r\theta} - e_{15} E_\theta; \\ D_r &= \mu_{33}^S E_r + e_{13} (\varepsilon_{zz} + \varepsilon_{\theta\theta}) + e_{33} \varepsilon_r; \\ D_\theta &= \mu_{11}^S E_\theta + 2e_{15} \varepsilon_{r\theta}; \\ D_z &= \mu_{11}^S E_z + 2e_{15} \varepsilon_{rz}. \end{aligned} \quad (5)$$

Температурне поле дисипативного розігріву знаходиться з розв'язку рівняння теплопровідності [5,6]

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda_q \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\lambda_q r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\lambda_q \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + D_M = c\rho \frac{\partial T}{\partial t} \quad (6)$$

при початкових

$$T = T_0 \text{ при } t = t_0 \quad (7)$$

і граничних умовах конвективного теплообміну з навколишнім середовищем, температура якого T_c :

$$\lambda_q \frac{\partial T}{\partial n} = -\alpha_T (T - T_c), \quad (8)$$

де λ_q – коефіцієнт теплопровідності; α_T – коефіцієнт теплообміну; c – коефіцієнт питомої масової теплоємності матеріалу.

Дисипативну функцію D_M , що входить в рівняння енергії (6), визначаємо за формулою [5,6]:

$$D_M = \frac{\omega}{2} (\sigma_{ij}'' \varepsilon_{ij}' - \sigma_{ij}' \varepsilon_{ij}'' + D_i' E_i'' - D_i'' E_i'); (i, j = r, \theta, z). \quad (9)$$

Система рівнянь (1) - (9) з відповідними граничними і початковими умовами є складною лінійною системою диференціальних рівнянь в частинних похідних з комплексними коефіцієнтами. Для незалежних від температури характеристик система (1) - (9) розпадається на дві незалежні лінійні задачі - задачу розрахунку електромеханічного стану тіла з в'язкопружного п'єзоелектричного матеріалу і задачу теплопровідності з відомим джерелом тепла.

Для розв'язування цих лінійних задач використовуємо метод скінченних елементів (МСЕ). Для цього подано варіаційне формулювання задачі електромеханіки, яке

зводить її розв'язок до визначення стаціонарних точок функціоналу

$$\begin{aligned} \mathcal{E} = \frac{1}{2} \int_V \left[c_{11}^E \varepsilon_{zz}^2 + 2c_{13}^E \varepsilon_{zz} \varepsilon_{rr} + 2c_{12}^E \varepsilon_{zz} \varepsilon_{\theta\theta} + \right. \\ \left. + c_{33}^E \varepsilon_{rr}^2 + 2c_{13}^E \varepsilon_{rr} \varepsilon_{\theta\theta} + c_{11}^E \varepsilon_{\theta\theta}^2 + \right. \\ \left. + 4c_{44}^E \varepsilon_{r\theta}^2 + 4c_{44}^E \varepsilon_{rz}^2 + 2(c_{11}^E - c_{12}^E) \varepsilon_{z\theta} - \right. \\ \left. - 2e_{13} \varepsilon_{zz} E_r - 2e_{33} \varepsilon_{rr} E_r - \right. \\ \left. - 2e_{13} \varepsilon_{\theta\theta} E_r - 4e_{15} \varepsilon_{r\theta} E_\theta - 4e_{15} \varepsilon_{rz} E_z - \right. \\ \left. - \mu_{33} E_r^2 - \mu_{11} E_z^2 - \mu_{11} E_\theta^2 - \right. \\ \left. - \rho \omega^2 (u^2 + w^2 + v^2) \right] r dv dz d\theta - \\ - \int_{\Sigma_p} (p_{nz} w + p_{nr} u + p_{r\theta} v - \sigma^e \Psi) d\Sigma_p \end{aligned} \quad (10)$$

Розв'язок задачі теплопровідності з відомим джерелом тепла зводимо до розв'язання варіаційної задачі для функціоналу

$$\begin{aligned} I = \frac{1}{2} \int_V \left[\lambda_q \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right)^2 + \lambda_q \left(\frac{\partial T}{\partial r} \right)^2 + \right. \\ \left. + \frac{\lambda_q}{r^2} \left(\frac{\partial T}{\partial \theta} \right)^2 + 2\rho c \frac{\partial T}{\partial t} - 2D_M T \right] r dr dz d\theta + \\ + \int_S \alpha \left(\frac{T}{2} - T_c \right) T dS. \end{aligned} \quad (11)$$

Для апроксимації напружено-деформованого стану та електричного потенціалу в площині меридіонального перетину (r, z) застосовуємо алгебраїчні поліноми другого ступеня. Для апроксимації переміщень і потенціалу в окружному напрямку в кожному елементі використовуємо тригонометричні поліноми:

$$H(\theta) = a_0 + a_1 \cos \theta + b_1 \sin \theta. \quad (12)$$

Розіб'ємо область, яку займає тіло, N вузловими точками на M просторових елементів. При цьому припускаємо, що переміщення і електричний потенціал в межах елемента апроксимуються виразами

$$\begin{aligned} w = \sum_{i=1}^{24} K_i w_i, \quad u = \sum_{i=1}^{24} K_i u_i, \quad v = \sum_{i=1}^{24} K_i v_i, \\ \Psi = \sum_{i=1}^{24} K_i \Psi_i. \end{aligned} \quad (13)$$

де w_i, u_i, v_i, Ψ_i – вузлові значення переміщень і електричного потенціалу; K_i – апроксимуючі функції, які є комбінацією алгебраїчних

$L_j (j = 1, 2, 3, \dots, 8)$ і нормалізованих тригонометричних поліномів $H_j (j = 1, 2, 3)$:

$$\begin{aligned} L_1 &= \frac{1}{4} (1 - \xi) (1 - \eta) (-\xi - \eta - 1), \\ L_2 &= \frac{1}{4} (1 + \xi) (1 - \eta) (\xi - \eta - 1), \\ L_3 &= \frac{1}{4} (1 + \xi) (1 + \eta) (\xi + \eta + 1), \\ L_4 &= \frac{1}{4} (1 - \xi) (1 + \eta) (-\xi + \eta - 1), \\ L_5 &= \frac{1}{2} (1 - \xi^2) (1 - \eta), \\ L_6 &= \frac{1}{2} (1 - \eta^2) (1 + \xi), \\ L_7 &= \frac{1}{2} (1 - \xi^2) (1 + \eta), \quad L_8 = \frac{1}{2} (1 - \eta^2) (1 - \xi), \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} H_1(\theta) &= \frac{\sin(\theta - \theta_2) - \sin(\theta - \theta_3) + \sin(\theta_2 - \theta_3)}{\sin(\theta_1 - \theta_2) - \sin(\theta_1 - \theta_3) + \sin(\theta_2 - \theta_3)}, \\ H_2(\theta) &= \frac{\sin(\theta - \theta_3) - \sin(\theta - \theta_1) + \sin(\theta_3 - \theta_1)}{\sin(\theta_2 - \theta_3) - \sin(\theta_2 - \theta_1) + \sin(\theta_3 - \theta_1)}, \\ H_3(\theta) &= \frac{\sin(\theta - \theta_1) - \sin(\theta - \theta_2) + \sin(\theta_1 - \theta_2)}{\sin(\theta_3 - \theta_1) - \sin(\theta_3 - \theta_2) + \sin(\theta_1 - \theta_2)}. \end{aligned} \quad (15)$$

Визначені таким чином функції форми $K_1 = L_1 H_1; K_2 = L_2 H_1; \dots; K_{24} = L_8 H_3$ дорівнюють нулю у всіх вузлових точках елемента, за винятком вузла, номер якого співпадає з номером відповідної функції форми. Крім того, вони задовольняють умові $\sum_{i=1}^{24} K_i = 1$.

Зв'язок між циліндричними r, z і місцевими ξ, η координатами здійснюється за допомогою залежностей

$$r = \sum_{i=1}^{24} K_i r_i; \quad z = \sum_{i=1}^{24} K_i z_i. \quad (16)$$

Оскільки отримати залежності виду $\xi(r, z), \eta(r, z)$, зворотні до (16), не представляється можливим, частинні похідні при визначенні деформацій слід обчислювати через ξ, η , а потім отримані залежності розв'язати відносно похідних по циліндричних координатах. В результаті вирази для компонент тензора деформацій і компонент вектора напруженості електричного поля через вузлові значення переміщень і електричного потенціалу можна записати у вигляді

$$\begin{aligned}\varepsilon_{rr} &= \sum_{i=1}^{24} \Psi_i u_i; \quad \varepsilon_{zz} = \sum_{i=1}^{24} \Phi_i w_i; \\ \varepsilon_{\theta\theta} &= \sum_{i=1}^{24} \left(\frac{1}{r} \chi_i v_i + \frac{1}{r} K_i u_i \right); \\ \varepsilon_{zr} &= \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^{24} \Phi_i u_i + \sum_{i=1}^{24} \Psi_i w_i \right); \\ \varepsilon_{z\theta} &= \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^{24} \Phi_i v_i + \sum_{i=1}^{24} \frac{1}{r} \chi_i w_i \right); \\ \varepsilon_{r\theta} &= \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^{24} \frac{1}{r} \chi_i u_i + \sum_{i=1}^{24} \Psi_i v_i - \sum_{i=1}^{24} \frac{1}{r} K_i v_i \right), E_r = -\sum_{i=1}^{24} \varphi_i \psi_i, \\ E_z &= -\sum_{i=1}^{24} \Phi_i \varphi_i, E_\theta = -\sum_{i=1}^{24} \chi_i \frac{\varphi_i}{r},\end{aligned}\quad (17)$$

$$\begin{aligned}\Phi_i &= \frac{1}{|j|} \left(\frac{\partial K_i}{\partial \xi} \frac{\partial r}{\partial \eta} - \frac{\partial K_i}{\partial \eta} \frac{\partial r}{\partial \xi} \right), \\ \Psi_i &= \frac{1}{|j|} \left(\frac{\partial K_i}{\partial \eta} \frac{\partial z}{\partial \xi} - \frac{\partial K_i}{\partial \xi} \frac{\partial z}{\partial \eta} \right), \chi_i = \frac{\partial K_i}{\partial \theta},\end{aligned}\quad (18)$$

де

$$|j| = \frac{\partial z}{\partial \xi} \frac{\partial r}{\partial \eta} - \frac{\partial z}{\partial \eta} \frac{\partial r}{\partial \xi} \quad (19)$$

– визначник Якобі (якобіан).

Механічне навантаження $\vec{P}$ також апроксимуємо функціями форми в межах кожного скінченного елемента:

$$\begin{aligned}P_{nz} &= \sum_{i=1}^{24} K_i P_{inz}, \\ P_{nr} &= \sum_{i=1}^{24} K_i P_{inr}, \quad P_{n\theta} = \sum_{i=1}^{24} K_i P_{in\theta},\end{aligned}\quad (20)$$

Підставляючи вирази для деформацій і компонент вектора напруженості електричного поля в функціонал (10), з умови його стаціонарності отримаємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь щодо вузлових значень компонент вектора переміщень і електричного потенціалу $(w_i, u_i, v_i, \varphi_i)$ для окремого скінченного елемента:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \varepsilon_m}{\partial w_1} &= a_{11}^w w_1 + b_{11}^w u_1 + c_{11}^w v_1 + d_{11}^w \varphi_1 + \dots; \\ &+ a_{124}^w w_{24} + b_{124}^w u_{24} + c_{124}^w v_{24} + d_{124}^w \varphi_{24} = P_1^{(z,w)} \\ \frac{\partial \varepsilon_m}{\partial u_1} &= a_{11}^u w_1 + b_{11}^u u_1 + c_{11}^u v_1 + d_{11}^u \varphi_1 + \dots; \\ &+ a_{124}^u w_{24} + b_{124}^u u_{24} + c_{124}^u v_{24} + d_{124}^u \varphi_{24} = P_1^{(r,u)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \varepsilon_m}{\partial v_1} &= a_{11}^v w_1 + b_{11}^v u_1 + c_{11}^v v_1 + d_{11}^v \varphi_1 + \dots; \\ &+ a_{124}^v w_{24} + b_{124}^v u_{24} + c_{124}^v v_{24} + d_{124}^v \varphi_{24} = P_1^{(\theta,v)} \\ \frac{\partial \varepsilon_m}{\partial \varphi_1} &= a_{11}^\varphi w_1 + b_{11}^\varphi u_1 + c_{11}^\varphi v_1 + d_{11}^\varphi \varphi_1 + \dots; \\ &+ a_{124}^\varphi w_{24} + b_{124}^\varphi u_{24} + c_{124}^\varphi v_{24} + d_{124}^\varphi \varphi_{24} = 0 \\ \frac{\partial \varepsilon_m}{\partial w_{24}} &= a_{241}^w w_1 + b_{241}^w u_1 + c_{241}^w v_1 + d_{241}^w \varphi_1 + \dots; \\ &+ a_{2424}^w w_{24} + b_{2424}^w u_{24} + c_{2424}^w v_{24} + d_{2424}^w \varphi_{24} = P_{24}^{(z,w)} \\ \frac{\partial \varepsilon_m}{\partial u_{24}} &= a_{241}^u w_1 + b_{241}^u u_1 + c_{241}^u v_1 + d_{241}^u \varphi_1 + \dots; \\ &+ a_{2424}^u w_{24} + b_{2424}^u u_{24} + c_{2424}^u v_{24} + d_{2424}^u \varphi_{24} = P_{24}^{(r,u)} \\ \frac{\partial \varepsilon_m}{\partial v_{24}} &= a_{241}^v w_1 + b_{241}^v u_1 + c_{241}^v v_1 + d_{241}^v \varphi_1 + \dots; \\ &+ a_{2424}^v w_{24} + b_{2424}^v u_{24} + c_{2424}^v v_{24} + d_{2424}^v \varphi_{24} = P_{24}^{(\theta,v)} \\ \frac{\partial \varepsilon_m}{\partial \varphi_{24}} &= a_{241}^\varphi w_1 + b_{241}^\varphi u_1 + c_{241}^\varphi v_1 + d_{241}^\varphi \varphi_1 + \dots \\ &+ a_{2424}^\varphi w_{24} + b_{2424}^\varphi u_{24} + c_{2424}^\varphi v_{24} + d_{2424}^\varphi \varphi_{24} = 0\end{aligned}\quad (21)$$

Вирази для коефіцієнтів $a_{ij}, \dots, d_{ij}$ цих рівнянь визначаються через фізико-механічні характеристики матеріалу і геометричні параметри розглянутого тіла.

Просумувавши вираз (21) по всіх скінченних елементах, отримаємо для загальної глобальної нумерації вузлів систему рівнянь, в якій інтегрування об'єму замінено сумою інтегралів, взятих по об'єму окремих скінченних елементів, а інтегрування по поверхні - сумою інтегралів по поверхнях елементів, на яких задані граничні умови в напруженнях.

Отриману систему алгебраїчних рівнянь розв'язуємо в комплексній області методом Гаусса. Це дозволяє з високою точністю отримати розв'язок систем великої розмірності без порушення симетричності і стрічковості їх структури.

За отриманими вузловими значеннями переміщень і електричного потенціалу визначаємо компоненти тензора деформацій і компоненти вектора напруженості електричного поля в довільній точці скінченного елемента. При цьому точність визначення деформацій, а також напружень і індукції електричного поля внаслідок диференціювання буде нижчою від точності визначення переміщень і електричного потенціалу. Вона також буде різною в різних точках елемента. Найбільш точні значення отримуємо в точках інтегрування Гаусса, відповідних мінімально допустимому порядку інтегрування [8-10] (в даному випадку $n=8$).

При розв'язуванні варіаційної задачі (11) для рівняння теплопровідності похідна за часом $\frac{\partial T}{\partial t}$ не варіюється і замінюється виразом

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{T(t + \Delta t) - T(t)}{\Delta t}. \quad (22)$$

Це дозволяє реалізувати неявну схему розв'язування задачі теплопровідності. Тому обчислення деформацій, напруженості електричного поля, а також механічних напружень і електричної індукції проводиться у восьми точках інтегрування. Як відомо [8-10], положення точок інтегрування визначається ірраціональними числами. Це призводить до деяких незручностей при аналізі результатів, тобто для багатьох практично важливих розрахунків необхідні значення напружень та електричної індукції, розраховані у вузлових точках скінченно-елементної сітки, а також на границі тіла. Найбільш просте визначення деформацій, напружень та інших величин у кожному скінченному елементі отримуємо при екстраполяції цих величин, обчислених в точках інтегрування, на довільні точки, в тому числі і на границю. Для розглянутого випадку найбільш точні результати розрахунків отримуємо при екстраполяції напружень і індукції електричного поля білінійними поліномами.

3. Результати розрахунків та їх аналіз

Розглянемо тривимірну задачу про коливання і дисипативний розігрів шарнірно обпертої тришарової циліндричної п'єзопанелі товщиною $H = 2h_1 + h_2$, де h_2 – товщина внутрішнього шару з пасивного матеріалу, h_1 – товщина зовнішніх п'єзошарів з однаковими властивостями. На п'єзоелектричні шари нанесено нескінченно тонкі електроди. Внутрішні електроди коротко замкнуті, а до зовнішніх електродів підводиться різниця потенціалів $\varphi = \varphi_0 \cos \omega t$. Через симетрію навантаження і граничних умов при розв'язанні задачі розглядаємо чверть панелі з умовами симетрії $w=0$ при $z=0$, $v=0$ при $\theta=0$. Електричне навантаження панелі, її геометричні і фізико-механічні властивості пасивного алюмінієвого шару характеризуються такими параметрами:

$$\begin{aligned} \varphi_0 &= 220 \text{ В}; r_1 = 0,09 \text{ м}; r_2 = 0,11 \text{ м}; H = r_2 - r_1 = 0,02 \text{ м}; \\ 2h_1 &= 0,005 \text{ м}; h_2 = 0,015 \text{ м}; L = 0,1 \text{ м}; \theta_0 = \pi/3; \\ E_a &= 7,3 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2; \nu_a = 0,34; \rho_a = 0,27 \cdot 10^4 \text{ кг/м}^3. \end{aligned}$$

Коефіцієнт теплопровідності і густина п'єзоматеріалу мають такі значення:
 $\lambda = 1,25 \text{ Вт/м} \cdot ^\circ\text{С}$, $\rho = 0,75 \cdot 10^4 \text{ кг/м}^3$. При розрахунку амплітудно- та температурно-частотних характеристик коефіцієнт тепловіддачі між навколишнім середовищем і матеріалом панелі є постійним ($\alpha_T = 5 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot ^\circ\text{С}}$).

Комплексні характеристики для зазначеного матеріалу представлено в [11]. Їх залежність від температури апроксимована поліномами другого ступеня:

$$\begin{aligned} S'_{11} &= [0,171 \cdot 10^2 + 0,48335 \cdot 10^{-2} T - 0,48511 \cdot 10^{-4} T^2] \cdot 10^{-12} \text{ м}^2 / \text{Н}; \\ S'_{12} &= [-0,568 \cdot 10^1 + 0,48333 \cdot 10^{-2} T - 0,19444 \cdot 10^{-4} T^2] \cdot 10^{-12} \text{ м}^2 / \text{Н}; \\ S'_{13} &= [-0,91 \cdot 10^1 + 0,97231 \cdot 10^{-2} T - 0,38544 \cdot 10^{-4} T^2] \cdot 10^{-12} \text{ м}^2 / \text{Н}; \\ S'_{33} &= [0,184 \cdot 10^2 - 0,43333 \cdot 10^{-1} T + 0,11111 \cdot 10^{-3} T^2] \cdot 10^{-12} \text{ м}^2 / \text{Н}; \\ S'_{55} &= [0,460 \cdot 10^2 - 0,29167 \cdot 10^{-1} T - 0,6944 \cdot 10^{-4} T^2] \cdot 10^{-12} \text{ м}^2 / \text{Н}; \\ d'_{31} &= [-189,7 + 0,4545 T - 0,1515 \cdot 10^{-2} T^2] \cdot 10^{-12} \text{ м}^2 / \text{Н}; \\ d'_{33} &= [357 + 0,17 T - 0,41 \cdot 10^{-3} T^2] \cdot 10^{-12} \text{ м}^2 / \text{Н}; \\ d'_{15} &= [609 - 0,385 T + 0,45 \cdot 10^{-3} T^2] \cdot 10^{-12} \text{ м}^2 / \text{Н}; \\ \mu'_{11} &= [0,20541 \cdot 10^5 + 0,4163 \cdot 10^2 T - 0,576 \cdot 10^{-1} T^2] \cdot 10^{-12}; \\ \mu'_{33} &= [0,14803 \cdot 10^5 + 0,76783 \cdot 10^2 T - 0,145 \cdot 10^{-1} T^2] \cdot 10^{-12}. \end{aligned} \quad (23)$$

Уявні складові податливостей рівні

$$\begin{aligned} S''_{11} &= -\frac{0,2}{17,1} S'_{11}; S''_{12} = -\frac{0,1}{5,8} S'_{12}; \\ S''_{13} &= -\frac{0,2}{9,1} S'_{13}; S''_{33} = -\frac{0,4}{18,4} S'_{33}; \\ S''_{55} &= -\frac{5,6}{468} S'_{55}. \\ d''_{31} &= \frac{4,8}{189,7} d'_{31}; d''_{33} = -\frac{14,7}{357} d'_{33}; \\ d''_{15} &= -\frac{253,6}{609} d'_{15}; \mu''_{11} = -\frac{11270}{20541} \mu'_{11}; \\ \mu''_{33} &= -\frac{342}{14805} \mu'_{33}. \end{aligned} \quad (24)$$

Комплексні характеристики c_{ij} , п'єзомодулі e_{ij} , діелектричні проникності μ_{ij}^S визначаються за формулами:

$$\begin{aligned}
 c_{11} &= \frac{S_{11}^E S_{11}^E - S_{13}^E S_{13}^E}{(S_{11}^E - S_{12}^E) \Delta}, \\
 c_{12} &= \frac{S_{13}^E S_{13}^E - S_{12}^E S_{13}^E}{(S_{11}^E - S_{12}^E) \Delta}, c_{13} = -\frac{S_{13}^E}{\Delta}, \\
 c_{33} &= \frac{S_{11}^E - S_{12}^E}{\Delta}, c_{55} = \frac{1}{S_{55}^E}, c_{66} = \frac{1}{2}(c_{11} - c_{12}), \\
 e_{33} &= \frac{d_{33}(S_{11}^E + S_{12}^E) - 2d_{31}S_{13}^E}{\Delta}, e_{15} = \frac{d_{15}}{S_{55}^E}, \\
 e_{31} &= \frac{d_{31}S_{33}^E - d_{33}S_{13}^E}{\Delta}, \\
 \mu_{11} &= \mu_{33}^T - \frac{d_{33}^2(S_{11}^E + S_{12}^E) + 2d_{31}^2S_{33}^E - 4d_{33}d_{31}S_{13}^E}{\Delta}, \\
 \Delta &= (S_{11}^E + S_{12}^E)S_{33}^E - 2S_{13}^E S_{13}^E.
 \end{aligned} \quad (25)$$

Розрахунки проведено для незалежних від температури властивостей при $T = 20^\circ\text{C}$, які знайдено з (23-25).

На рис. 1, 2 показана частотна залежність радіальної компоненти вектора переміщень і стаціонарної температури в точці серединної поверхні, яка лежить на перетині $z = 0$; $R = 0,1\text{м}$; $\theta = 0$.

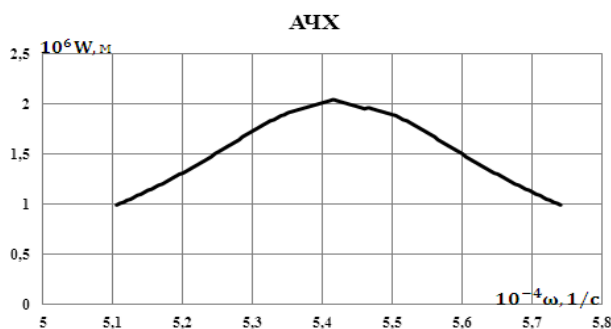


Рисунок 1. Амплітудно-частотна характеристика

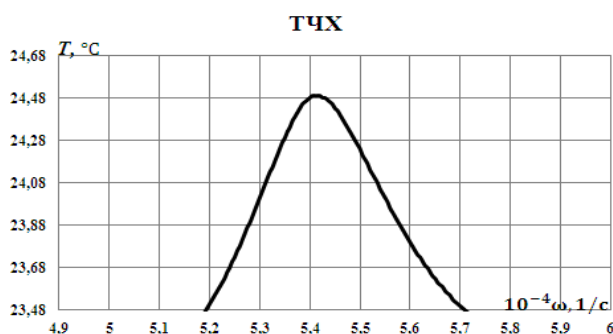


Рисунок 2. Температурно – частотна характеристика

Як видно з цих рисунків, амплітуда коливань і температура дисипативного розігріву досягають максимальних значень на резонансних частотах. Тому в

подальшому розрахунок критичних значень електричного навантаження будемо знаходити на резонансній частоті.

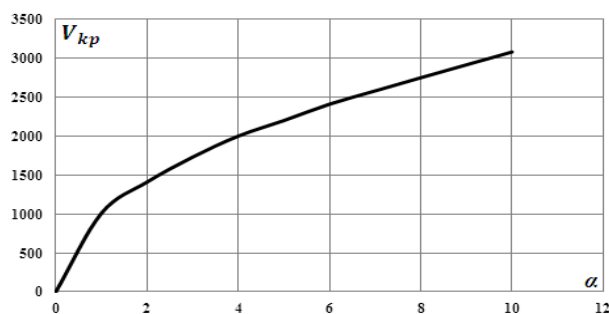


Рисунок 3. Залежність критичної різниці потенціалів від коефіцієнта тепловіддачі

Крива залежності критичної різниці потенціалів від коефіцієнта тепловіддачі α показана на рис. 3. Як видно, зі збільшенням цього коефіцієнта критична різниця потенціалів монотонно зростає. З фізичних міркувань очевидно, що при теплоізоляції панелі критична різниця потенціалів дорівнює нулю, оскільки при як-завгодно малому електричному навантаженні має місце теплове руйнування п'єзопанелі.

4. Висновки

В роботі запропоновані математичні моделі та методи дослідження вимушених резонансних коливань і температури дисипативного розігріву тривимірних просторових тіл обертання з непружних пасивних і п'єзоактивних матеріалів з незалежними від температури властивостями. Основні результати роботи полягають в наступному:

1) на основі концепції комплексних характеристик представлена постановка лінійних крайових задач про вимушені гармонійні коливання і дисипативний розігрів в'язкопружних тривимірних п'єзотілів з незалежними від температури властивостями;

2) розв'язання зазначених лінійних задач електромеханіки і теплопровідності отримано методом кінцевих елементів;

3) використовуючи зазначений підхід, отримано розв'язання нової задачі про вимушені резонансні коливання і вібророзігрів шарнірно обертої тришарової циліндричної панелі з середнім пасивним і двома зовнішніми п'єзоактивними шарами.

4) на основі аналізу чисельних результатів досліджено вплив коефіцієнта теплообміну на амплітудно і температурно-частотні

характеристики та на критичне електричне навантаження.

Список використаних джерел

1. Гринченко В.Т. Механика связанных полей в элементах конструкций. / В.Т. Гринченко, А.Ф. Улитко, Н.А. Шульга – К.: Наук. думка, 1989. – 290 с.
2. Шульга М.О. Резонансні електромеханічні коливання п'єзоелектричних пластин. /М.О. Шульга, В.Л. Карлаш - К.: Наук. думка, 2008. – 290 с.
3. Hamid R. Vibrations of Thick Cylindrical Structural. / R. Hamid, R. Hamidzadeh, N.Jazar. – New York – Dordrecht – Heidelberg–London: Springer. – 2010. – 201p.
4. Берлинкур Д. Пьезоэлектрические и пьезомагнитные материалы и их применение в преобразователях/ А.Д. Берлинкур, Д. Керран, Г. Жаффе Физическая акустика/Под ред. У.Мезона. Т.1, часть. – М.: Мир, 1966. – С. 204–326.
5. Карнаухов В.Г. Механика связанных полей в элементах конструкций. / В.Г. Карнаухов, И.Ф. Киричок В 6т.–Т.4. Электротермовязко-упругость. – К.: Наук. думка, 1988. – 320 с.
6. Карнаухов В.Г. Нелинейная термомеханика пьезоэлектрических неупругих тел при моногармоническом нагружении. /В.Г. Карноухов, В.В. Михайленко – Житомир: ЖТТУ, 2005. – 428с.
7. Коваленко А.Д. Основы термоупругости. / А.Д. Коваленко – К.: Наук.думка, 1970. – 305с.
8. Бате К.Ю. Численные методы анализа. Метод конечных элементов. / К.Ю. Бате– М.:Стройиздат, 1982. – 447 с.
9. Васидзу К. Вариационные методы в теории упругости и пластичности. / К. Васидзу – М.: Мир, 1987. – 542 с.
10. Зенкевич О. Конечные элементы и аппроксимация. / О. Зенкевич, К. Морган – М: Мир, 1986. – 318 с.
11. Sabat R.G. Temperature dependence of the complete material coefficients matrix of soft and hard doped piezoelectric lead zirconate titanate ceramics / R.G. Sabat, B. Mukherjee, W. Ren, G. Yung.// J. Appl. Phys. – 2007. – 101. –P. 06411–1–7.

References

1. GRINCHENKO V.T., ULITKO A.F., SHUL'GA N.A. (1998) *The mechanics of coupled fields in elements of designs*. At 6-T V.5. Electroelasticity. Naukova Dumka.
2. SHUL'GA N.A., KARLASH V.I. (2008) *Resonant electromechanical vibrations of piezoelectric plates* [in Russian]. Naukova Dumka.
3. HAMID R., HAMIDZADEH R., JAZAR N. (2010) *Vibrations of Thick Cylindrical Structural*. – New York – Dordrecht – Heidelberg–London: Springer.
4. BERLINKUR D., CURRAN D., JAFFE G.(1966) *Piezomagnetic piezoelectric materials and their use in converters* // Physical Acoustics / Ed. U.Mezona. Volume 1, Part A. - М.: World, - P. 204-326.
5. KARNAUKHOV V.G., KIRICHOK I.F. (1988) *The mechanics of coupled fields in elements of designs*. At 6-T T.4. Elektrotermovязко-elasticity. Naukova Dumka.
6. KARNAUKHOV V.G., MYHILENKO V.V. (2005) *Nonlinear one-frequency vibrations and dissipative heating of nonelastic piezoelectric bodies* [in Russian].ZTSU, Zhytomir.
7. KOVALENKO A.D. (1970) *Fundamentals of thermoelasticity*. – B: Naukova Dumka.
8. BATHE K. (1982) *Numerical methods of analysis. Finite element technique*. – M: Stroyizdat.
9. WASHIZU.K. (1987) *Variational methods in the theory of elasticity and plasticity*. – M. Mir.
10. ZENKEVICH A., MORGAN K. (1986) *Konechnie elements and approximation*. - M: Mir.
11. SABAT R.G., MUKHERJEE B., REN W., YUNG G.(2007) *Temperature dependence of the complete material coefficients matrix of soft and hard doped piezoelectric lead zirconate titanate ceramics* // J. Appl. Phys. – 101. –P. 06411–1–7.

Надійшла до редколегії 14.12.2016

УДК 539.3

Клімчук Т. В.¹, аспірант
Острик В. І.¹, д. ф.-м. н., проф.

**Вдавлення двох півнескінченних
штампів у пружну смугу**

¹ Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 03680,
м. Київ, просп. Глушкова, 4 е,
e-mail: tarasyniv@ukr.net

T. V. Klimchuk¹, graduate student
V. I. Ostryk¹, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof.

**Indentation of an elastic strip by two semi-infinite
punches**

¹ Taras Shevchenko National University of Kyiv,
03680, Kyiv, Glushkova st., 4 e,
e-mail: tarasyniv@ukr.net

Розглянуто контактну задачу про симетричне вдавлення двох півнескінченних штампів з прямолінійними основами в пружну смугу, нижня грань якої жорстко закріплена. Сили тертя в області контакту не враховані. З використанням процедур методу Вінера – Гопфа інтегральне рівняння задачі зведено до нескінченної системи алгебричних рівнянь. Визначено розподіли напружень в області контакту та на закріпленій грані смуги, а також нормальні переміщення вільної від навантаження частини верхньої грані смуги.

Ключові слова: пружна смуга, півнескінченний штамп, метод Вінера – Гопфа, напруження.

In presented paper the symmetrical smooth contact problem is considered for two semi-infinite punches with straight-line bases and an elastic strip with rigidly fixed bottom line. Making use of the Fourier integral transformation, the corresponding mixed boundary-value problem of the theory of elasticity for the strip is reduced to the integral equation with difference kernel at two semi-infinite intervals. Applying the Wiener – Hopf method, the integral equation of the problem is reduced to an infinite system of the algebraic equations with exponentially vanishing coefficients and a solution is obtained in the form of the series containing the powers of a small parameter. The analytical expressions are obtained for the contact stress and the normal displacement of the load-free part of the upper strip line in the form of the power series, whose coefficients are expressed through the solution of the infinite system of the algebraic equations. The stresses on the fixed strip line are presented in quadratures. Calculation of stresses and displacement is performed for the different values of the dimensionless distance between the punches.

It is indicated on an analogy between the considered contact problem and the problem of the transverse tension of an elastic strip, containing a straight-line crack on the symmetry axis. The stress intensity factor is found for the last problem.

Key words: elastic strip, semi-infinite punch, Wiener – Hopf method, stress.

Статтю представив д. ф.-м. н., проф. Жук Я. О.

Вступ

Уперше контактна взаємодія двох штампів скінченної довжини та пружної смуги у випадку відсутності тертя в зонах контакту розглядалася в роботах [1, 2]. Зокрема, в роботі [1] за допомогою асимптотичного методу знайдено наближений розв'язок інтегрального рівняння для випадку відносно великої товщини смуги, а також для випадку довільної товщини при спеціальній апроксимації ядра. Задачу про гладкий контакт двох півнескінченних штампів з довільною формою основ та пружної смуги малої товщини розв'язано в [3] методом послідовних наближень.

Метою даної роботи є знаходження точного розв'язку контактної задачі для пружної смуги,

яка знаходиться під дією двох півнескінченних штампів з прямолінійними основами за відсутності тертя в області контакту. З фізичної точки зору важливо дати відповідь на питання, як відносна відстань між штампамі впливає на розподіли контактних напружень, нормальних та дотичних напружень на закріпленій грані, а також на розподіли нормальних переміщень вільної від навантаження частини верхньої грані смуги. Подібну задачу для одного півнескінченного штампа розв'язано в [4] методом Вінера – Гопфа.

Постановка задачі

Розглянемо пружну смугу $-\infty < x < \infty$, $-h \leq y \leq h$ з модулем зсуву G та коефіцієнтом Пу-

ассона v , що знаходиться в стані плоскої деформації (рис. 1). Нехай нижня грань $y = -h$ ($-\infty < x < \infty$) смуги жорстко закріплена. У верхню грань $y = h$ смуги на проміжках $-\infty < x \leq -l$ та $0 \leq x < \infty$ під дією рівномірно розподіленого нормального навантаження інтенсивності p вдавлюються два півнескінченних штампів з прямолінійними основами. Інша частина $-l < x < 0$ верхньої грані $y = h$ вільна від навантаження. Сили тертя в області контакту $-\infty < x \leq -l$, $0 \leq x < \infty$, $y = h$ не враховуємо.

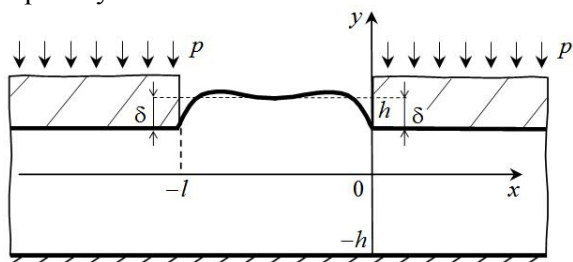


Рис. 1. Взаємодія штампів з пружною смугою

Крайові умови задачі такі:

$$\begin{aligned} u_y|_{y=h} &= -\delta, \quad \tau_{yx}|_{y=h} = 0 \quad (-\infty < x < -l, \quad 0 < x < \infty), \\ \sigma_y|_{y=h} &= 0, \quad \tau_{yx}|_{y=h} = 0 \quad (-l < x < 0), \\ u_x|_{y=-h} &= 0, \quad u_y|_{y=-h} = 0 \quad (-\infty < x < \infty), \end{aligned} \quad (1)$$

де δ – просідання смуги під штампамі. Величина δ визначається з умов рівноваги елемента смуги на нескінченності ($x \rightarrow \pm\infty$), який знаходиться в умовах однорідного напружено-деформованого стану: $\sigma_y = -p$, $\varepsilon_x = 0$, $\varepsilon_y = -\delta/(2h)$. Використавши закон Гука, матимемо

$$\delta = \frac{1-2\nu}{1-\nu} \frac{ph}{G}. \quad (2)$$

Інтегральне рівняння задачі та його розв'язання

Уведемо невідому функцію нормальних контактних напружень

$$\sigma(x) = \frac{1}{2G} \sigma_y|_{y=h} \quad (-\infty < x \leq -l, \quad 0 \leq x < \infty) \quad (3)$$

та її трансформанту Фур'є

$$\tilde{\sigma}(\mu) = \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\infty}^{-l} + \int_0^{\infty} \right) \sigma(r) e^{i\mu r} dr. \quad (4)$$

Розглянемо основну змішану крайову задачу для смуги, коли на грані $y = h$ задано нормальні $2G\sigma(x)$ та нульові дотичні напруження, а на грані $y = -h$ – нульові переміщення. Розв'язок зна-

ходимо за допомогою інтегрального перетворення Фур'є. На грані $y = h$ смуги маємо

$$u_y|_{y=h} = 2h \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda(2\mu h)}{2\mu h \Delta(2\mu h)} \tilde{\sigma}(\mu) e^{-i\mu x} d\mu,$$

$$\lambda(z) = 2(1-\nu) [(3-4\nu) \operatorname{sh} 2z - 2z],$$

$$\Delta(z) = (3-4\nu)(\operatorname{ch} 2z - 1) + 2z^2 + 8(1-\nu)^2. \quad (5)$$

Розв'язок основної змішаної задачі задовольняє всі крайові умови (1), окрім першої. Підставивши вираз для нормальних переміщень із (5) у першу крайову умову (1), отримаємо рівняння

$$2h \int_{-\infty}^{\infty} K(2\mu h) \tilde{\sigma}(\mu) e^{-i\mu x} d\mu = -\delta \quad (-\infty < x < -l, \quad 0 < x < \infty). \quad (6)$$

Функцію контактних напружень подамо у вигляді

$$\sigma(x) = -\frac{p}{2G} + \sigma_*(x), \quad \sigma_*(\pm\infty) = 0. \quad (7)$$

Виконавши заміни змінних

$$x = 2h\xi, \quad r = 2h\eta, \quad \tau = 2\mu h, \quad a = l/(2h), \quad (8)$$

та ввівши нову невідому функцію

$$\varphi(\xi) = -\sqrt{2\pi} \frac{2h}{\delta} \sigma_*(2h\xi) \quad (\xi < -a, \quad \xi > 0), \quad (9)$$

із (6) отримаємо інтегральне рівняння

$$\left(\int_{-\infty}^{-a} + \int_0^{\infty} \right) k(\xi - \eta) \varphi(\eta) d\eta = f(\xi), \quad (-\infty < \xi < -a, \quad 0 < \xi < \infty), \quad (10)$$

$$k(\xi - \eta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K(\tau) e^{-i\tau(\xi - \eta)} d\tau, \quad K(\tau) = \frac{\lambda(\tau)}{\tau \Delta(\tau)},$$

$$f(\xi) = \frac{1}{K(0)\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{K(\tau)}{i\tau} (1 - e^{-i\tau a}) e^{-i\tau \xi} d\tau, \quad K(0) = \frac{1-2\nu}{1-\nu}.$$

Рівняння (10) є інтегральним рівнянням на двох півнескінченних інтервалах з різницеvim ядром. Розв'яжемо його зведенням до нескінченної системи алгебричних рівнянь, використовуючи процедури методу Вінера – Гопфа [5] і підхід роботи [6].

Рівняння (10) задамо на всій числовій осі, поклавши $\varphi(\xi) = 0$ ($-a < \xi < 0$), та застосуємо до нього інтегральне перетворення Фур'є. Уведемо невідомі функції комплексної змінної

$$\Phi^+(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \varphi(\xi) e^{iz\xi} d\xi,$$

$$\Phi^-(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 \varphi(\xi - a) e^{iz\xi} d\xi,$$

$$\begin{aligned}\Psi^+(z) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^a e^{iz\xi} d\xi \left(\int_{-\infty}^{-a} + \int_0^{\infty} \right) k(\xi - \eta - a) \varphi(\eta) d\eta, \\ \Psi^-(z) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^0 e^{iz\xi} d\xi \left(\int_{-\infty}^{-a} + \int_0^{\infty} \right) k(\xi - \eta) \varphi(\eta) d\eta. \quad (11)\end{aligned}$$

Функції $\Phi^+(z)$, $\Psi^+(z)$ аналітичні у півплощині $\text{Im} z > c^+$ ($c^+ < 0$), а функції $\Phi^-(z)$, $\Psi^-(z)$ – у півплощині $\text{Im} z < c^-$ ($c^- > 0$). Застосувавши теорему про згортку для інтегрального перетворення Фур'є, отримаємо систему функціональних рівнянь

$$\begin{aligned}K(z) \left[e^{iza} \Phi^+(z) + \Phi^-(z) \right] - \Psi^+(z) &= F(z), \\ \Psi^+(z) &= e^{iza} \Psi^-(z) \quad (c^+ < \text{Im} z < c^-) \quad (12)\end{aligned}$$

з правою частиною

$$\begin{aligned}F(z) &= e^{iza} F^+(z) + F^-(z), \quad F^+(z) \equiv F^-(-z), \\ F^+(z) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} f(\xi) e^{iz\xi} d\xi, \\ F^-(z) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 f(\xi - a) e^{iz\xi} d\xi. \quad (13)\end{aligned}$$

Умови симетрії задачі відносно прямої $x = -l/2$ приводять до тотожностей

$$\begin{aligned}\varphi(\xi) &\equiv \varphi(-a - \xi), \\ \Phi^+(z) &\equiv \Phi^-(z), \quad \Psi^+(z) \equiv \Psi^-(z). \quad (14)\end{aligned}$$

Факторизацію коефіцієнта $K(z)$ із (12) виконаємо через нескінченний добуток:

$$\begin{aligned}K(z) &= K(0) K^+(z) K^-(z), \\ K^+(z) &\equiv K^-(-z) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{iz}{\zeta_k} \right) \left(1 - \frac{iz}{s_k} \right)^{-1}, \quad (15)\end{aligned}$$

де ζ_k і s_k ($k=1, 2, \dots$) – корені рівнянь $\lambda(is) = 0$ і $\Delta(is) = 0$ відповідно із півплощини $\text{Re} s > 0$.

Враховуючи факторизацію (15), перепишемо перше рівняння (12) таким чином:

$$\begin{aligned}K(0) \left[K^+(z) \Phi^+(z) + e^{-iza} K^+(z) \Phi^-(z) \right] - \frac{\Psi^-(z)}{K^-(z)} &= \\ = e^{-iza} \frac{F^-(z)}{K^-(z)} + \frac{F^+(z)}{K^-(z)} \quad (c^+ < \text{Im} z < c^-). \quad (16)\end{aligned}$$

Другі складові лівої та правої частин рівняння (16) подамо різницею аналітичних у верхній та нижній півплощинах функцій:

$$\begin{aligned}e^{-iza} K^+(z) \Phi^-(z) &= \chi^+(z) - \chi^-(z), \\ \frac{F^+(z)}{K^-(z)} &= f^+(z) - f^-(z). \quad (17)\end{aligned}$$

Уведені в рівності (17) функції подамо інтегралами типу Коші вздовж дійсної осі. Використовуючи теорію лишків, отримаємо

$$\begin{aligned}\chi^+(z) &= \frac{1}{K(0)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k}{s_k - iz} \Phi^+(is_k) e^{-s_k a}, \\ f^+(z) &= \frac{K^+(z) - 1}{iz} - \frac{1}{K(0)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k}{s_k (s_k - iz)} e^{-s_k a}, \\ \alpha_k &= \frac{\lambda(is_k)}{s_k \Delta'(is_k) K^+(is_k)} \quad (k=1, 2, \dots). \quad (18)\end{aligned}$$

Тепер рівняння (16) набуває вигляду

$$\begin{aligned}K(0) \left[K^+(z) \Phi^+(z) + \chi^+(z) \right] - f^+(z) &= \\ = \frac{\Psi^-(z)}{K^-(z)} + e^{-iza} \frac{F^-(z)}{K^-(z)} + K(0) \chi^-(z) - f^-(z) \quad (c^+ < \text{Im} z < c^-). \quad (19)\end{aligned}$$

Обидві частини рівняння (19) аналітично продовжують одна одну на всю комплексну площину і являють собою довільну цілу функцію $P(z)$.

З умов на нескінченності

$$\begin{aligned}K^+(z) &= O(z^{-1/2}), \quad \Phi^+(z) = o(1), \quad \chi^+(z) = O(z^{-1}), \\ f^+(z) &= O(z^{-1}), \quad |z| \rightarrow \infty, \quad (20)\end{aligned}$$

випливає, що $P(z) \equiv 0$. На цій підставі із (19) знаходимо

$$\Phi^+(z) = \frac{f^+(z) - K(0) \chi^+(z)}{K(0) K^+(z)}, \quad (21)$$

$$\Psi^-(z) = K^-(z) \left[f^-(z) - K(0) \chi^-(z) \right] - e^{-iza} F^-(z).$$

Поклавши у першій рівності (21) $z = is_n$, отримаємо нескінченну систему алгебричних рівнянь

$$z_n + \beta_n \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\tilde{\alpha}_k}{s_k + s_n} z_k \lambda_0^k = g_n \quad (n=1, 2, \dots) \quad (22)$$

відносно невідомих

$$z_k = \Phi^+(is_k) + \frac{1}{K(0) s_k} \quad (k=1, 2, \dots), \quad (23)$$

де ($s_k \sim \pi k/2$, $k \rightarrow \infty$)

$$\lambda_0 = e^{-\pi a/2} = e^{-\pi l/(4h)}, \quad \tilde{\alpha}_k = \alpha_k e^{-(s_k - \pi k/2)a},$$

$$\beta_n = \frac{1}{K(0) K^+(is_n)}, \quad g_n = \frac{\beta_n}{s_n} \quad (k, n=1, 2, \dots). \quad (24)$$

Розв'язок системи рівнянь (22) відшукуємо у вигляді

$$z_k = \sum_{m=0}^{\infty} \xi_{km} \lambda_0^m \quad (k=1, 2, \dots). \quad (25)$$

Після підстановки розвинень (25) у рівняння (22) методом невизначених коефіцієнтів знаходимо

$$\xi_{n0} = g_n \quad (26)$$

та отримуємо рекурентні співвідношення

$$\xi_{nm} = -\beta_n \sum_{k=1}^m \frac{\tilde{\alpha}_k}{s_k + s_n} \xi_{k, m-k} \quad (27)$$

для визначення коефіцієнтів ξ_{nm} ($n, m = 1, 2, \dots$).

Розв'язок $\varphi(\xi)$ інтегрального рівняння (10), знайдемо, застосовуючи обернене перетворення Фур'є до рівності

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_{-\infty}^{-a} + \int_0^{\infty} \right) \varphi(\xi) e^{iz\xi} d\xi = \Phi^+(z) + e^{-iza} \Phi^-(z). \quad (28)$$

Для $\xi > 0$ з урахуванням (21) матимемо

$$\begin{aligned} \varphi(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi^+(t) e^{-it\xi} dt = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{t \Delta(t) K^-(t)}{\lambda(t)} [f^+(t) - K(0) \chi^+(t)] e^{-it\xi} dt. \quad (29) \end{aligned}$$

Визначення напружень та переміщень

Використавши заміни (3), (9) та обчисливши останній інтеграл із (29) за теорією лишків, отримаємо контактні напруження

$$\begin{aligned} \frac{1}{p} \sigma_y \Big|_{y=h} &= -1 - K(0) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\xi_k \Delta(i\xi_k)}{\lambda'(i\xi_k)} K^+(i\xi_k) \times \\ &\times \left(\frac{1}{\xi_k} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tilde{\alpha}_n}{s_n - \xi_k} z_n \lambda_0^n \right) e^{-\xi_k \xi} \quad (0 < \xi < \infty). \quad (30) \end{aligned}$$

На основі рівностей (18) та тауберової теореми [5], знаходимо асимптотичну поведінку контактних напружень на краю правого штамп:

$$\sigma_y \Big|_{y=h} \sim -p \sqrt{\frac{K(0)h}{\pi(1-\nu)x}} \left(1 - \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{\alpha}_k z_k \lambda_0^k \right), \quad x \rightarrow +0, \quad (31)$$

та визначаємо коефіцієнт інтенсивності контактних напружень

$$K_0 = -\lim_{x \rightarrow +0} \sqrt{2\pi x} \sigma_y \Big|_{y=h} = p \sqrt{\frac{2K(0)h}{1-\nu}} \left(1 - \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{\alpha}_k z_k \lambda_0^k \right). \quad (32)$$

Нормальні переміщення на вільній частині верхньої грані смуги отримуємо у вигляді

$$u_y \Big|_{y=h} = -\delta \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda(is_k) z_k}{s_k \Delta'(is_k)} \left(e^{s_k \xi} + e^{-s_k(a+\xi)} \right) \quad (-a < \xi < 0). \quad (33)$$

Напруження на нижній грані смуги дістанемо у вигляді комплексної комбінації

$$\begin{aligned} \frac{1}{p} (\sigma_y + i\tau_{xy}) \Big|_{y=-h} &= -1 + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{M(\tau)}{\Delta(\tau)} e^{-i\tau\xi} d\tau, \\ M(\tau) &= 4(1-\nu) \left[\frac{1}{K^+(\tau)} \left(\frac{1}{i\tau} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\tilde{\alpha}_k z_k \lambda_0^k}{s_k - i\tau} \right) - \right. \\ &- \frac{e^{-i\tau a}}{K^+(\tau)} \left(\frac{1}{i\tau} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\tilde{\alpha}_k z_k \lambda_0^k}{s_k - i\tau} \right) \Big] \left\{ [\tau + 2(1-\nu)] \operatorname{ch} \tau + \right. \\ &\left. + [\tau - (1-2\nu)] \operatorname{sh} \tau \right\} \quad (-\infty < \xi < \infty). \quad (34) \end{aligned}$$

Поперечний розтяг пружної смуги з прямолінійною тріщиною

Крайові умови (1) відповідають також задачі про розтяг пружної смуги, грані якої скріплені з жорсткими стінками, а на її осі симетрії знаходиться тріщина довжини l (рис. 2). Під дією рів-

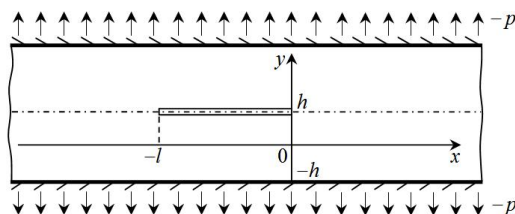


Рис. 2. Розтяг пружної смуги з тріщиною

номірно розподіленого навантаження інтенсивності $-p$ ($p < 0$), прикладеного до стінок, відстань від них до середньої лінії збільшується на величину $-\delta$ ($\delta < 0$). Завдяки симетрії задачі відносно осі смуги напружено-деформований стан нижньої півсмуги з точністю до знаку збігається зі станом смуги, що знаходиться у контакті з двома півнескінченими штампами. При цьому, зокрема, коефіцієнт інтенсивності напружень $K_1 = -K_0$ з точністю до знаку визначається виразом (33). Таким чином, побудований вище розв'язок контактної задачі переноситься на задачу для смуги з тріщиною.

Результати обчислень

Розрахунки проведено для коефіцієнта Пуассона $\nu = 1/3$ та різних значень відносної відстані $a = l/(2h)$ між штампами. Пунктирні криві на рис. 3–6 відповідають випадку вдавлювання одного півнескінченного штамп в пружну смугу [4].

На рис. 3 показано розподіли безрозмірних контактних напружень $\bar{\sigma} = \frac{1}{p} \sigma_y \Big|_{y=h}$, обчислених за формулою (30) для різних значень відносної відстані a (суцільні криві). При збільшенні від-

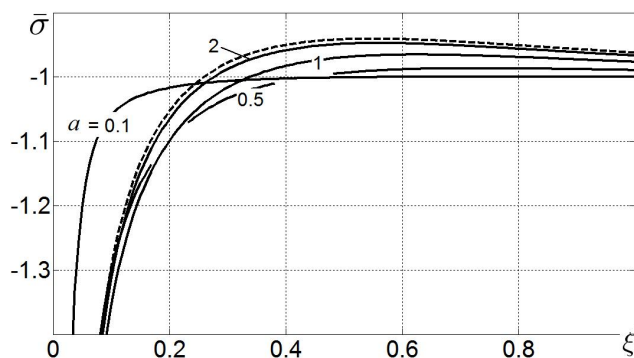


Рис. 3. Розподіли контактних напружень ($y = h$)

носної відстані a розподіли контактних напружень наближаються до аналогічного розподілу із задачі про вдавлювання одного півнескінченного штампа в пружну смугу [4]. Для значень $a > 2$ вдавлювання лівого півнескінченного штампа ($-\infty < x < -l$) майже не впливає на розподіл напружень в зоні контакту правого півнескінченного штампа ($0 < x < \infty$) та пружної смуги. При зменшенні відносної відстані a перехід контактного тиску на своє усталене значення p відбувається швидше ($x/(2h) > 0.4$ при $a = 0.1$), ніж для великих значень a ($x/(2h) > 1$ при $a = 2$).

На рис. 4 зображено безрозмірні нормальні переміщення $\bar{u} = \frac{1}{\delta} u_y|_{y=h}$ вільної від навантаження

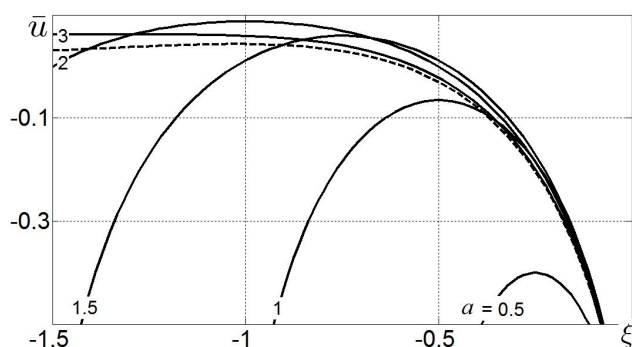


Рис. 4. Розподіли нормальних переміщень ($y = h$)

Таблиця 1

a	$\bar{u}_{\max}$	a	$\bar{u}_{\max}$
0.2	-0.737	2.5	0.0789
0.5	-0.401	3	0.0618
1	-0.066	5	0.0457
1.193	0	7	0.0436
1.5	0.0593	9	0.0434
2	0.0871	11	0.0433
2.052	0.0873	13	0.0433

частини ($-l < x < 0$) верхньої грані смуги, а у табл. 1 подано їхні максимальні значення. Просідання смуги між штампами менше, ніж під штампами ($-u_y|_{y=h} < \delta$). При відносних відстанях між штампами $a \leq 3$ максимальне значення $\bar{u}_{\max}$ величини $\bar{u}$ досягається на рівній відстані між краями штампів ($x = -l/2$). При $a < 1.193$ значення $\bar{u}_{\max}$ від'ємне, а при $a > 1.193$ – додатне, що вказує на утворення пагорбка на вільній частині межі смуги у порівнянні з її формою у ненавантаженому стані. Висота пагорбка є найбільшою для $a = 2.052$ і для більших значень a поступово спадає. Якщо $a > 3$, пагорбок на межі смуги розпадається на два пагорбки, які знаходяться на

відстані в ширину смуги від краю кожного штампа. При подальшому збільшенні відносної відстані a відносна висота кожного пагорбка спадає і при $a \geq 10$ з точністю до 0.2 % переходить у своє граничне значення 0.0433, яке відповідає задачі з одним півнескінченим штампом [4] і вдвічі менше свого найбільшого значення 0.0873 при $a = 2.052$. Наявність пагорбка у контактній задачі відповідає звуженню півсмуг у певних поперечних перерізах, які перетинають тріщину, де розкриття тріщини перевищує величину -2δ ($\delta < 0$), на яку жорсткі стінки віддаляються одна від одної.

На рис. 5 і 6 показано розподіли нормальних $\bar{\sigma} = \frac{1}{p} \sigma_y|_{y=-h}$ і дотичних $\bar{\tau} = \frac{1}{p} \tau_{xy}|_{y=-h}$ напружень на нижній грані $y = -h$ смуги, нормованих на величину p . Вдавлювання лівого штампа майже не впливає на розподіли нормальних та дотичних напружень під правим штампом для $a \geq 2$ і $a \geq 3$ відповідно.

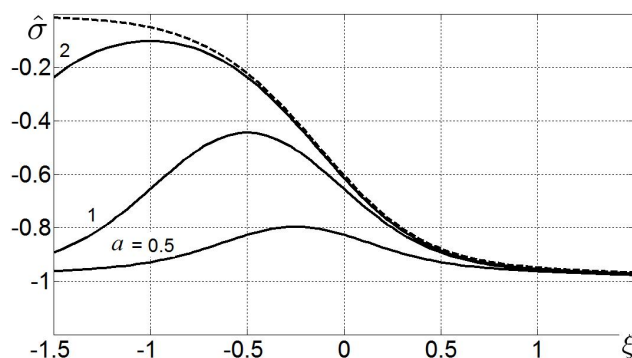


Рис. 5. Розподіли нормальних напружень ($y = -h$)

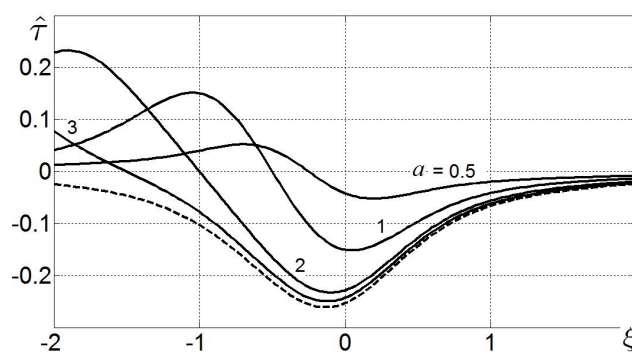


Рис. 6. Розподіли дотичних напружень ($y = -h$)

У табл. 2 подано значення безрозмірних коефіцієнтів інтенсивності напружень $\bar{K}_I = K_I/(p\sqrt{2h})$ і $\bar{K}_I = K_I/(p\sqrt{0.5l})$, які зв'язані між собою рівністю $\hat{K}_I = 2\sqrt{h/l} \bar{K}_I$. При $a \rightarrow 0$ коефіцієнт $\bar{K}_I$ прямує до нуля, що відповідає переходу тріщини в точку. Коефіцієнт $\hat{K}_I$ при $a \rightarrow 0$ прямує до зна-

Таблиця 2

a	0	0.2	0.4	0.6	0.8
$\bar{K}_I$	0	0.552	0.740	0.839	0.886
$\hat{K}_I$	1.772	1.745 (1.736)	1.654 (1.625)	1.532 (1.440)	1.401 (1.182)
a	1	3	5	7	9
$\bar{K}_I$	0.903	0.871	0.867	0.866	0.866
$\hat{K}_I$	1.277	0.711	0.548	0.463	0.408

чення $\sqrt{\pi} = 1.772$, яке відповідає коефіцієнту інтенсивності напружень в задачі про розтяг площини, що містить скінченну тріщину [7]. У дужках наведено значення безрозмірного коефіцієнта

інтенсивності напружень, обчислені за асимптотичною формулою

$$\hat{K}_I \sim \sqrt{\pi} \left[1 - \frac{\pi^2}{24} \left(\frac{a}{1-v^2} \right)^2 \right] + O(a^4), \quad a \rightarrow 0, \quad (35)$$

отриманою в роботі [8]. При збільшенні відносного розміру a тріщини коефіцієнт $\hat{K}_I$ спадає до нуля, а коефіцієнт $\bar{K}_I$ наближається до значення 0.866, яке відповідає півнескінченній тріщині [8]. Усі відмічені тут результати стосовно коефіцієнта інтенсивності напружень відносяться також і до задачі про дію двох півнескінченних штампів на пружну смугу.

Список використаних джерел

1. Александров В. М. Некоторые задачи о действии двух штампов на упругую полосу / В. М. Александров, В. А. Кучеров // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1968. – № 4. – С. 110–123.
2. Кучеров В. А. О действии двух штампов на упругую полосу / В. А. Кучеров // В сб.: Контактные задачи и их инженерные приложения. – Москва: Изд. НИИмаш. – 1969.
3. Кучеров В. А. Действие двух полубесконечных штампов на упругую полосу малой толщины / В. А. Кучеров // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1973. – № 1. – С. 120–126.
4. Улитко А. Ф. Смешанная задача теории упругости для полосы на жестком основании / А. Ф. Улитко, В. И. Острик // Тр. III Всерос. конф. по теории упругости с междунар. участием. – Ростов-на-Дону: Новая книга. – 2004. – С. 372–375.
5. Нобл Б. Метод Винера – Хопфа / Б. Нобл. – Москва: Изд. иностр. лит. – 1962. – 280 с.
6. Моргунов М. О. Згин пружної смуги штампом / М. О. Моргунов, В. І. Острик // Вісник Київ. ун-ту. Сер.: фіз.-мат. науки. – 2009. – Вип. 2. – С. 75–78.
7. Саврук М. П. Коэффициенты интенсивности напряжений в телах с трещинами / М. П. Саврук. – Киев: Наук. думка. – 1988. – 620 с. – (Механика разрушения и прочность материалов: Справ. пособие: В 4 т. / Под общей ред. В. В. Панасюка. – Т. 2.)
8. Knauss W. G. Stresses in an infinite strip containing a semi-infinite crack / W. G. Knauss // Trans. ASME. J. Appl. Mech. – 1966. – Vol. 33. – P. 356–362.

References

1. ALEKSANDROV, V. M. and KUCHEROV, V. A. (1968) Nekotorye zadachi o deystvii dvuh shtampov na upruguju polosu. *Izv. UN SSSR. Mehanika tverdogo tela*. N 4. P. 110–123.
2. KUCHEROV, V. A. (1969) O deystvii dvuh shtampov na upruguju polosu. *V sb.: Kontaknyye zadachi i ih inzhenernyye prilogeniya*. Moskva: Izd. NII mash.
3. KUCHEROV, V. A. (1973) Deystvie dvuh polubeskonechnih shtampov na upruguju polosu maloy tolshchiny. *Izv. AN SSSR. Mehanika tverdogo tela*. N 1. P. 120–126.
4. ULITKO, A. and OSTRICK, V. (2004) Smeshannaya zadacha teorii uprugosti dlja polosy na zestkom osnovanii. *Trudy III Vserossiyskoi konferentsii po teorii uprugosti*. Rostov-na-Donu: Novaya kniga. P. 372–375.
5. NOBL, B. (1958) *Methods based on the Wiener – Hopf technique*. London – New York – Paris – Los Angeles.
6. MORGUNOV, M. O. and OSTRICK, V. I. (2009) Zgyn prugnoji smugy shtampom. *Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series Physics & Mathematics*. Vyp. 2. P. 75–78.
7. SAVRUK, M. P. (1988) *Koeffitsienty intensivenosti naprjageniy v telah s treshchinami*. Kyiv: Nauk. dumka. T. 2.
8. KNAUSS, W. G. (1966) Stresses in an infinite strip containing a semi-infinite crack. *Trans. ASME. J. Appl. Mech.* Vol. 33. P. 356–362.

Надійшла до редколегії 28.10.16

УДК 534.2

Коновалюк Т. П.¹, м.н.с.

**Критерії для апроксимації розподілених
вихрових структур точковими
вихорами, що базуються на акустичних
характеристиках.**

¹ Інститут гідромеханіки НАН України, 03680,
м. Київ, вул. Желябова, 8/4,
e-mail: tpk_8_4@ukr.net

T. P. Konovalyuk¹, junior researcher

**Criteria for the approximation of the
distributed vortex structures by the point
vortices, which based on the acoustic
characteristics.**

¹ Institute of hydromechanics NAS of Ukraine,
03680, Kyiv, Zhelyabova str., 8/4,
e-mail: tpk_8_4@ukr.net

В роботі сформульовані критерії, які базуються на аналізі акустичних полів, що дають відповідь на питання, за яких умов можливо апроксимувати розподілені вихорі точковими.

Ключові слова: вихор Kirchhoff, точковий вихор, ефективність гідродинамічного випромінювання.

The problem of sound generation by the elastic interaction of two patches of homogeneous vorticity modelled in the frame of the second-order moment model by the Kirchhoff vortices and the sound analogy of Lighthill is studied numerically. The used moment model specifies only the basic tendencies in vortex behaviour at the nonelastic interaction. It is shown that the spectrum of sound field as the result of vortex interaction depends on the excitation of vortex freedom degrees. The efficiency of sound production as the numerical estimation of approximation of the Kirchhoff vortices by the point vortices was computed. It is shown that the efficiency of sound production from the Kirchhoff vortices greatly exceeds the same characteristics from the Rankine vortices. The criteria of possibility of the approximation of the Kirchhoff vortices by the vortex points based on the acoustic characteristics was found. The recommendation concerning the sound reduction from the flow past the engine is the following: the flow control has to be directed particularly to decrease of vortex ellipticity.

Key Words: Kirchhoff vortex, point vortex, efficiency of sound production.

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Жук Я.О.

Вступ

Вихрові структури, що мають властивість найбільш ефективно перетворювати енергію своєї взаємодії на звук, є когерентні вихорі. Когерентна вихрова структура є зв'язаною масою рідини, завихреність всередині якої є фазово зкорельованою по всій її просторовій протяжності. Час існування такої структури є великим в порівнянні з її періодом обертання. Когерентні вихрові структури моделюються вихровими плямами різних форм та розподілень завихреності всередині них та точковими вихорами. Зокрема, в рамках моментної моделі другого порядку (MZS-моделі другого порядку) когерентні вихорі описуються еліптичними вихорами Kirchhoff [1]. Вихровий еліпс має чотири ступені свободи: два з яких -- це рухи центру завихреності (великомасштабні рухи вихорів); двоє внутрішніх ступе-

нів свободи -- це відношення півосей та угол обертання еліпса відносно свого центру завихреності. Метою даної роботи є формулювання критеріїв, що базуються на властивостях звукових полів, згенерованих вихорами Kirchhoff, щодо апроксимації плям точковими вихорами. Розуміння особливостей таких звукових полів є основою для наукових розробок щодо зменшення шуму від роботи двигунів пристроїв.

**Взаємодія двох розподілених вихрових
структур однорідної завихреності
в ідеальній нестисливій рідині**

Течія, що формується при взаємодії двох розподілених плям завихреності, незважаючи на свою простість, є фундаментальною з точки зору утворення нових масштабів та збільшення зсувного шару. Ця течія та умови апроксимації

великомасштабних рухів вихрових структур при їх пружній взаємодії еквівалентною системою точкових вихорів детально розглянута, зокрема, в роботі [2]. Дотримуючись логіки викладення, наведемо основні результати цитованої статті. Розглядається взаємодія двох розподілених структур однорідної завихренності $\omega_1 = \omega_2 = 2\pi$ початкової кругової форми (вихорі Rankine) з співвідношенням радіусів $R_2 / R_1 = 0.1 \div 1.0$ в ідеальній нестисливій рідині в рамках MZS-моделі другого порядку [1]. Інтенсивність вихрових плям дорівнює $\Gamma_k = \pi R_k^2 \omega_k$, $k = 1, 2$. В загальній MZS-моделі існує два основних припущення: • найбільший з розмірів будь-якої плями набагато менший за мінімальну міжцентрову відстань між будь-якими плямами; • центр завихренності будь-якої плями в процесі взаємодії завжди знаходиться всередині неї. В рамках даної моделі взаємодія вихрових плям описується гамільтоною системою рівнянь четвертого порядку з відповідними початковими умовами. Система має чотири незалежних інваріанта, що виражають собою закони збереження імпульсу, моменту імпульса та енергії. В моделі також зберігається інтенсивність вихорів [1]. Задача є двовимірною за своєю геометрією. Шукані величини подані у безрозмірному вигляді. Відповідні масштаби наведені в [2]. Початкова геометрія вихрової взаємодії представлена на рис. 1. Такій вихровій системі

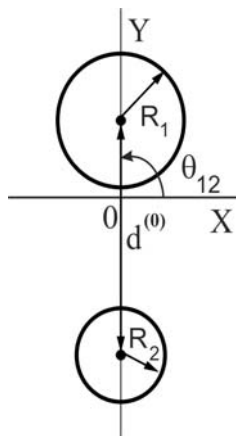


Рис. 1. Початкова геометрія вихорів: R_1, R_2 -- радіуси початково кругових вихорів; $d^{(0)}$ -- початкова міжцентрова відстань між вихорами; θ_{12} -- кут обертання вихрової системи.

притаманні два типи взаємодії: пружна вихрова взаємодія (ПВВ) та непружна вихрова взаємодія (НВВ). В області НВВ основні припущення

MZS-моделі порушуються, оскільки вихорі Kirchhoff в процесі взаємодії суттєво витягуються та наближуються одне до одного. Однак дана модель в цій області вірно вказує на тенденції в поведінці вихорів. Чисельно визначена залежність граничної початкової міжцентрової відстані між вихорами $d_{кр}^{(0)}$, що розділяє НВВ та ПВВ, від співвідношення початкових радіусів кругових вихорів R_2 / R_1 . Нижня границя ПВВ відповідає умові $d^{(0)} \sim 3R_1$ для $R_2 / R_1 = 0.1 \div 1.0$. В області ПВВ вихорі обертаються навколо центра завихреності системи, при цьому міжцентрова відстань, кутова швидкість обертання системи, півосі вихрових еліпсів осцилюють навколо своїх середніх значень. Досліджено поведінку чотирьох побудованих коефіцієнтів $k_1 \div k_4$, які описують ступінь збудження ступенів свободи розподілених вихорів в області ПВВ в залежності від R_2 / R_1 та $d^{(0)}$. Показано, що великомасштабні рухи вихрових плям можливо моделювати з задовільною точністю еквівалентними вихровими точками в ситуаціях, коли взаємний вплив ступенів свободи, що відповідають за великомасштабні рухи еліпсів, та їхніх внутрішніх ступенів свободи є незначним. Це має місце при умові: $d^{(0)} \geq 4R_1$. При цьому значення $k_1 \div k_4$ не перевищують 5%. Оцінка $d^{(0)} \geq 4R_1$ незначним чином залежить від початкової форми плям. Якщо початкові плями є не виродженими еліпсами, то гранична крива зміщена в бік більших міжцентрових відстаней.

Звукове поле, що згенероване при ПВВ двох розподілених вихрових структур однорідної завихренності

Як відомо, звуковий спектр є важливим інструментом при вирішенні багатьох питань, пов'язаних з динамікою та акустикою вихрової взаємодії. Наприклад, вигляд спектру звукових коливань, які генеруються в процесі взаємодії вихорів, є однією з необхідних умов при визначенні характеру вихрових рухів [3]. В даному дослідженні, аналізуючи звуковий спектр, сформулюємо критерії щодо апроксимації розподілених вихрових структур еквівалентною системою точкових вихорів.

Звукове поле, що згенероване при ПВВ двох вихорів Kirchhoff, було розраховано в рамках

акустичної аналогії Lighthill [4] у формулюванні Powell. Безрозмірні флуктуації звукового тиску при умові компактності джерела, яке мо-

делюється вихорами Kirchhoff, що взаємодіють, в наближенні дальнього поля мають вигляд (1) [5],

$$p'(\vec{x}, t) = -M^2 \int_0^{t-\rho} \frac{x_1^2 W_1(\tau) + x_2^2 W_2(\tau) + x_1 x_2 W_3(\tau)}{[(t-\tau)^2 - \rho^2]^{1/2}} \frac{d\tau}{(t-\tau)^2} \quad (1)$$

де $M \ll 1$ - число Маха; $\vec{x}$, t -- радіус-вектор та час, що пов'язані з прийомом сигналу; $W_i(\tau)$, $i=1,2,3$ -- функції параметрів вихорів та їхніх ступенів свободи в залежності від часу τ . Вирази цих функцій для точкових вихорів та масштаби обезрозмірювання наведені в [5]. В випадку вихорів Kirchhoff $W_i(\tau)$ отримані за аналогічною процедурою. Як відомо, за відсутності границь вихорів, що взаємодіють, в якості акустичного джерела подібні до поперечного квадруполя [4]. Результати моделювання звукового поля при взаємодії двох вихрових плям будемо порівнювати з випромінюванням звуку еквівалентною системою двох точкових вихорів з одного боку та звуковим полем від обертання одиничного вихора Kirchhoff з іншого. Нагадаємо, що два точкових вихора з інтенсивностями $\Gamma_1 \neq -\Gamma_2$, які знаходяться на відстані d , є джерелом монохроматичного звука з частотою, яка дорівнює подвійній частоті обертання вихорів, $\omega = (\Gamma_1 + \Gamma_2) / \pi d^2$. При цьому флуктуації звукового тиску спадають як $O(d^{-3})$ (Гряннік В. М. див. посилання в [5]). Це є типовий приклад випромінювання звука за рахунок лише великомасштабних вихрових рухів. Нерухомий одиничний вихор Kirchhoff з завихреністю ω_{el} та піввіссю λ генерує звукове поле лише за рахунок своїх внутрішніх ступенів свободи. Флуктуації звукового тиску є монохроматичне коливання з частотою, яка дорівнює подвійній частоті обертання еліпса, $\omega = 2\omega_{el} / (\lambda(1 + \lambda^{-1})^2)$. Як відомо, для вихрового еліпса з малим ексцентриситетом ця частота дорівнює $\omega = \omega_{el} / 2$ (Howe M.S., див. посилання в [5]). При цьому діаграма напрямленості звукового поля в обох цих класичних випадках течії обертається синхронно з обертанням вихрової системи. Вихор Rankine звук не випромінює, тому що внутрішні ступені свободи у такого вихора є виродженими.

Флуктуації звукового тиску, що виникають в результаті взаємодії вихорів Kirchhoff, в

загальному випадку не є гармонійною функцією часу. Спектр коливання є розподілений вздовж частотної смуги, шириною в декілька безрозмірних частот. Більш низькі частоти зумовлені випромінюванням звука від центрів завихреності плям, більш високі частоти — випромінюванням звука внутрішньою динамікою вихорів. Така частотна 'ієрархія' є наслідком організації когерентної вихрової структури. При вирішенні поставленої задачі особливу увагу треба приділити високочастотній смузі спектру, оскільки ця частина спектру відсутня в спектрі для вихрових точок. При побудові джерела звуку необхідною умовою апроксимації вихрових плям, що взаємодіють, еквівалентною системою точкових вихорів є послаблення взаємного впливу між великомасштабними рухами та внутрішніми ступенями свободи. Це послаблення має місце при збільшенні міжцентрових відстаней між розподіленими вихорами. Проаналізуємо в якості приклада випромінювання звукових хвиль двома однаковими вихорами Rankine ($R_2 / R_1 = 1$) (рис. 1), ПВВ яких розглядалася в [2], з міжцентровою відстанню $d^{(0)} = d_{кр} + 10^{-3} = 3.202$, тобто $d^{(0)}$ розташована поблизу граничної кривої. На рис. 2 зображено флуктуації звукового тиску (а), амплітудний спектр (б) сигналу (а), флуктуації звукового тиску еквівалентної системи точкових вихорів (в), амплітудний спектр (г) сигналу (в). Флуктуації звукового тиску (рис. 2, а) є коливання, яке складається з дискретного набору частот, розподілених в смузі, що становить декілька безрозмірних частот (рис. 2, б). Найбільш енергоємні частоти цього коливання (рис. 2, а) зосереджені в низькочастотній смузі спектру; їхні значення перевищують значення звукової частоти системи точкових вихорів приблизно на 20% (рис. 2, б, в, г). Рівень частот від внутрішніх ступенів свободи нижчий від рівня частот, що генеруються завдяки великомасштабним коливанням. Найбільш енергоємними частотами високочастотної смуги є 2.08 та 2.819 (рис. 2, б). Найбільша з цих двох

частот приблизно на 33% нижча за звукову частоту $\omega = \pi$ від обертання одиничного вихрового еліпса з малим ексцентриситетом та тими ж завихреністю та площею. Таким чином, звуковий спектр від взаємодії вихорів Kirchhoff зосереджений між частотою випромінювання еквівалентною системою точкових вихорів та частотою випромінювання одиничним еліпсом з малим ексцентриситетом. Розподілення частот по всій смузі, що відповідає звуковому коливанню, (рис. 2, б) означає, що великомасштабні та внутрішні ступені свободи активно взаємодіють між собою. Зазначимо, що в разі задання в початковий момент часу невироджених еліпсів найбільш енергоємні частоти в звуковому спектрі будуть зсунуті в праву частину спектра в порівнянні з випадком початкових вихорів Rankine.

Проаналізуємо, як змінюється звукове поле даної вихрової системи при збільшенні початкової міжцентрової відстані. Щоб не обтяжувати статтю рисунками, опишемо результати якісно. При збільшенні початкової міжцентрової відстані має місце розщеплення звукового спектра на вузькі смуги, які відповідають випромінюванню звука великомасштабними рухами та внутрішніми ступенями свободи. Це означає послаблення взаємного впливу великомасштабних та внутрішніх ступенів свободи вихрових плям. Кількісне відображення послаблення цього впливу має місце також в зменшенні коефіцієнтів $k_1 \div k_4$ [2].

Значення основних енергоємних частот розщеплених смуг при збільшенні $d^{(0)}$ наближаються до частоти випромінювання звуку еквівалентною системою вихрових точок в нижній частині спектру (її рівень спадає як $O((d^{(0)})^{-3})$, тобто $\rightarrow 0$) та до частоти випромінювання одиничним вихором Kirchhoff в верхній його частині, відповідно. Таким чином, у загальному випадку початкової форми розподілених вихорів, що взаємодіють, неможливо апроксимувати джерело звука точковими вихорами, оскільки неврахування внутрішніх ступенів свободи суттєво занижує рівень звукового поля: точковий вихор не випромінює, а невироджений вихор Kirchhoff генерує звук.

Розрахуємо ефективність звукового випромінювання при взаємодії вихорів Kirchhoff та еквівалентних точкових вихорів. Це дозволить нам отримати наглядну кількісну оцінку результату апроксимації плям вихровими точками при побудові звукового джерела. Ефективність гідродинамічного випромінювання, або коефіцієнт корисної дії, є відношення звукової енергії, що випромінюється, до кінетичної енергії течії [4]. Якщо вихрова взаємодія триває нескінченний час (як в випадку, що розглядається), то звукова енергія розраховується на одиницю часу. Коефіцієнт корисної дії при випромінюванні звуку має вигляд (2) [5]

$$\eta = \frac{1}{HT_{B3}} \frac{M^5}{64\pi} \left\{ 3 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|F_1(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega + 3 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|F_2(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|F_3(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega + 2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F_1(\omega)F_2^*(\omega)}{|\omega|} d\omega \right\} \quad (2)$$

де H -- гамільтоніан; T_{B3} -- час вихрової взаємодії; $F_i(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} W_i(\tau) e^{i\omega\tau} d\tau$, $i = 1, 2, 3$. На рис. 3 зображено чисельні розрахунки для ефективності звукового випромінювання η при ПВВ двох вихорів Kirchhoff та еквівалентних систем точкових вихорів в залежності від співвідношення початкових вихрових радіусів $R_2 / R_1 = 0.1 \div 1.0$ при наступних параметрах: а) $d^{(0)} = d_{kp} + 10^{-3}$ для кожного співвідношення початкових радіусів; позначки $\blacktriangle$ нанесені на криву η , що розрахована для початкових кругових плям; $\bullet$ позначена відповідна крива для вихрових точок; б) $d^{(0)} = 4R_1$ для кожного співвідношення початкових радіусів; $\blacksquare$ по-

значена крива η , що розрахована для початкових вихорів Kirchhoff з $\lambda = 1.4$; початкові радіуси розраховувались, виходячи з умови рівності площ еліпса і круга. η для еквівалентної системи точкових вихорів обчислювалась в залежності від співвідношення їхніх інтенсивностей. Для загальної початкової форми вихорів при зменшенні R_2 / R_1 від 1 до 0.1 при постійній завихреності плям має місце зменшення η , що обумовлене падінням рівня нестационарних вихрових звукових джерел при зменшенні інтенсивності вихора R_2 . Така ж картина має місце і для точкових вихорів (рис. 3). Для розподілених плям при $R_2 / R_1 \sim 0.4$ спостерігається локальний максимум. Цей максимум обумовлений суттєвим витягуванням

та швидким обертанням вихора R_2 навколо свого партнера в процесі взаємодії. Збільшення рівня нестационарних звукових джерел за рахунок цих

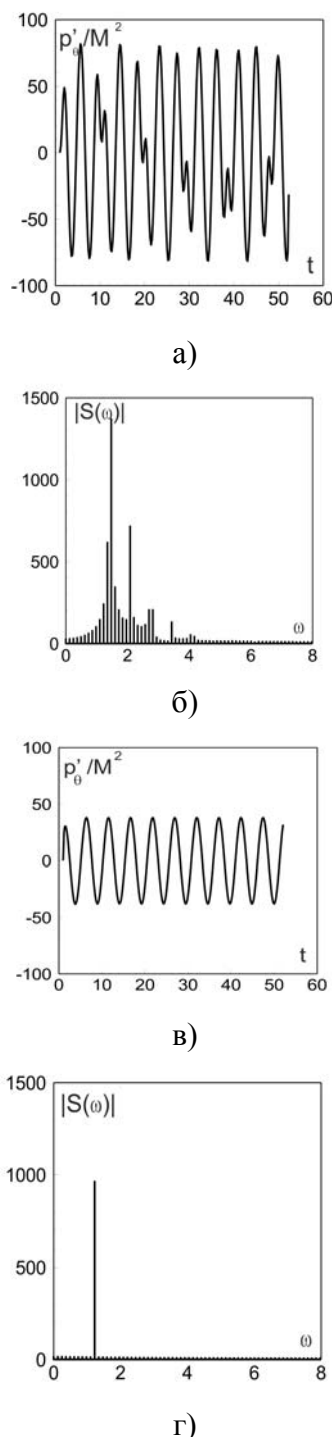


Рис. 2. Флуктуації звукового тиску та їхній спектр для системи двох вихрових еліпсів та еквівалентної системи вихрових точок; параметри взаємодії наведені в тексті.

процесів перевищує падіння рівня джерел за

рахунок зменшення інтенсивності вихора R_2 . Рівень ефективності звукового випромінювання η для початкових вихорів Rankine з $d^{(0)}$ поблизу граничної кривої [4] перевищує рівень η для еквівалентних точкових вихорів в $2 \div 6$ разів, що обумовлено суттєвим впливом внутрішніх ступенів свободи вихрових плям на процес взаємодії (рис.3, а). При збільшенні $d^{(0)}$ між вихорами Rankine до значення $d^{(0)} = 4R_1$

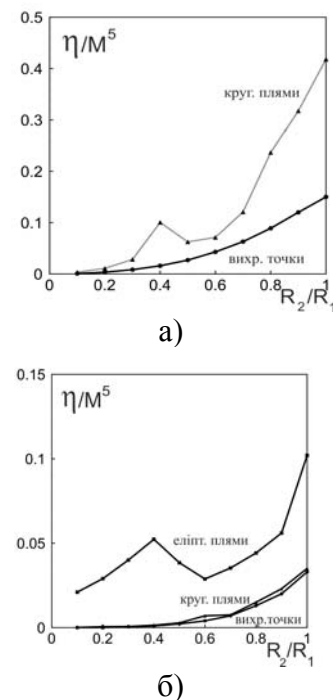


Рис. 3. Ефективність гідродинамічного випромінювання η для системи двох вихрових еліпсів та еквівалентної системи вихрових точок в залежності від співвідношення радіусів R_2 / R_1 ; параметри взаємодії наведені у тексті.

взаємодія між ступенями свободи плям суттєво слабшає, має місце розщеплення звукового спектру на смуги і виродження внутрішніх ступенів свободи вихорів. Внаслідок цього значення η для розподілених та точкових вихорів прямують одне до одного (рис.3, б). В випадку початкових вихорів Kirchhoff ($\lambda = 1.4$) (рис. 3, б) при міжцентровій відстані $d^{(0)} = 4R_1$ теж має місце розщеплення звукового спектру на смуги, однак початкові еліпси не дегенерують в кругові плями, тому звукове поле від внутрішніх ступенів свободи не прямує до нульового рівня. На рис 3, б продемонстровано, що η для почат-

кових еліпсів суттєво перевищує η для вихорів Rankine та вихрових точок: при $R_2 / R_1 \sim 0.4$ значення η відрізняються приблизно на порядок.

Таким чином, аналіз ефективності випромінювання звуку від даної модельної течії показує, що звук, який генерується вихровою течією, суттєво зменшується в випадку виродження внутрішніх ступенів свободи вихорів, з яких течія складається.

Висновки

Таким чином, виконане дослідження дозволяє сформулювати критерії, які базуються на аналізі акустичних полів, що дають відповідь на питання, за яких умов можливо апроксимувати розподілені вихорі точковими:

- необхідною і достатньою умовами апроксимації великомасштабних рухів вихорів Kirchhoff еквівалентною системою вихрових точок є розщеплення звукового спектру на

частотні смуги; близькість основної енергоємної частоти в нижній частині спектру до частоти випромінювання еквівалентної системи точкових вихорів визначає точність такої апроксимації; тобто починаючи з певної міжцентрової відстані така апроксимація є можливою;

- необхідною і достатньою умовами апроксимації вихорів Kirchhoff еквівалентною системою вихрових точок при побудові звукового джерела є одночасне розщеплення звукового спектру на частотні смуги та виродження внутрішніх ступенів свободи плям; таким чином, оскільки друга умова не є загальним фактом, то апроксимація джерела звуку точковими вихорами є неможливою процедурою;
- рекомендації щодо зменшення шуму від течії, сформованої за двигуном: керування течією має бути спрямоване, зокрема, на зменшення ексцентриситету вихорів течії.

Список використаних джерел

1. Melander M. V. A moment model for vortex interactions of two-dimensional Euler equations. Part I. Computational validation of a Hamiltonian elliptical representation. / Melander M. V., Zabuzky N. J., Styczek A. S. // *J.Fluid Mech.*-1986.- **167**.-P.95-115.
2. Коновалюк Т.П. Взаимодействие эллиптических вихрей. /Коновалюк Т.П. //Прикладная гидромеханика.-2005.-Т.7, №2.-С.44-53.
3. Aref H. Point dynamics: recent results and open problems/ Aref H., Kadtke J.B., Zawadzki J., Campbell L.J., Eckhardt B.//*Fluid Dyn.Res.*-1988.- **3**.-P.63-74.
4. Lighthill M.J. On sound generated aerodynamically. I. General theory./Lighthill M.J.// *Proc.Roy.Soc.Lond.*-1952.- **A211**.-P.564-587.
5. Коновалюк Т.П. Особенности структуры звукового поля при взаимодействии точечных вихрей./Коновалюк Т.П.//*Акуст. вісник*.-2012.- **15**, №1.-С.38-58.

References

1. MELANDER, M. V. (1986) A moment model for vortex interactions of two-dimensional Euler equations. Part I. Computational validation of a Hamiltonian elliptical representation. *J.Fluid Mech.*-1986.- **167**.-p.95-115.
2. KONOVALYUK T. P. (2005) Vzaimodejstvie ellipticheskikh vihref. *Prikladnaja gidromekhanika*. T. 7, №2.-p.44--53.
3. AREF H. (1988) Point dynamics: recent results and open problems. *Fluid Dyn. Res.* **3**. p.63--74.
4. LIGHTHILL M. J. (1952) On sound generated aerodynamically. I. General theory. *Proc.Roy.Soc.Lond.* **A211**. p.564--587.
5. KONOVALYUK T. P.. (2012) Osobennosti struktury zvukovogo polia pri vzaimodejstvii tochechnykh vihref. *Akustichnyj visnyk*. **15**. №1. p. 38--58.

Надійшла до редколегії 17.11.16

КОМП'ЮТЕРНІ НАУКИ ТА ІНФОРМАТИКА

УДК 004.655

Буй Д.Б., д.ф.-м.н., проф.,
Канарська І.С., аспірантка,
Сенченко О.С., к.ф.-м.н., доц.

**Часова складність додавання,
видалення та порівняння алгоритмів
табличних теоретико-множинних
операцій**

Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 03187, м. Київ, пр-т
Глушкова, 4д
e-mail: buy@unicyb.kiev.ua, iren_kiss@mail.ru,
senchenko_as@mail.ru

D.B. Buy, Dr. Sc., professor,
I.S. Kanarska, postgraduate student,
A.S. Senchenko, PhD

**The time complexity of the addition, removal
and comparison of the algorithms of table set-
theoretic operations**

Taras Shevchenko National University of Kyiv,
03187, Kyiv, Glushkova ave., 4d
e-mail: buy@unicyb.kiev.ua, iren_kiss@mail.ru,
senchenko_as@mail.ru

В роботі досліджуються алгоритми, що реалізують перетин, об'єднання і різницю в табличних алгебрах. Запропоновано модифікації найбільш поширених алгоритмів, що дозволяють скоротити кількість обчислень. Було знайдено оцінки у найгіршому випадку та у середньому для кожного з основних перетворень таблиць при реалізації кожного з запропонованих алгоритмів. Розроблено програмну систему, що експериментально підтверджує теоретичні оцінки.

Ключові слова: складність алгоритму, бази даних, таблична алгебра.

In this paper we investigate algorithms implementing intersection, union, and difference in table algebra which are modern analogue of Codd's well-known relational algebra and form the theoretical foundation of modern query language databases. Elements of the carrier of table algebra specify relational data structures, and signature operations are based on the basic table manipulations in relational algebra and SQL-like languages. Modifications of the most widespread algorithms which reduce the amount of computations are proposed. In these algorithms there are three basic conversions of tables: adding, deleting and comparing data. Because in real databases the performance of these conversions is different, for more accurate calculation of the execution time of the set-theoretic operations it is desirable to find complexity characteristics for each conversion separately. Based on the complexities evaluated for the each conversion of each modified algorithms, the fastest algorithm was found for each operation. A program that experimentally confirms theoretical estimates was developed.

Key Words: complexity of algorithms, database, table algebra.

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Анісімов А.В.

1. Вступ

Оптимізація запитів є одним з найбільш важливих і цікавих напрямів досліджень і розробок у всій області баз даних. Важливість цього напрямку визначається тим, що від розвиненості блоку оптимізації запитів істотно залежить загальна продуктивність будь-якої SQL-орієнтованої бази даних. Цей напрямок є найбільш цікавим, тому що при вирішенні задач оптимізації доводиться використовувати найрізноманітніші підходи та методи з різних областей обчислювальної науки і математики. Протягом останніх років ці чинники приваблюють до даного напрямку увагу багатьох

дослідників [1,2]. Авторами в роботах [3,4] запропоновано алгоритми виконання трьох традиційних бінарних теоретико-множинних операцій: перетину, об'єднання і різниці таблиць, і знайдена точна складність цих алгоритмів, що може бути використано для оптимізації запитів. У цих алгоритмах використовуються три основних перетворення таблиць: додавання, видалення і порівняння даних. При цьому в реальних базах даних швидкість виконання цих перетворень є різною. Тому, для більш точного обчислення часу виконання теоретико-множинних операцій у табличних алгебрах, необхідно знайти складнісні оцінки кожного перетворення окремо. У даній роботі для

кожного алгоритму знайдена точна складність додавання, видалення і порівняння даних.

2. Основні визначення

Зафіксуємо деяку непорожню множину атрибутів $\mathcal{R} = \{A_1, \dots, A_n\}$. Довільну підмножину множини $\mathcal{R}$, зокрема, порожню, назовемо схемою. Рядком s схеми R називається множина пар $s = \{(A'_1, d_1), \dots, (A'_k, d_k)\}$, проекція якої за першою компонентою дорівнює R , причому атрибути $A'_1, \dots, A'_k$ є попарно різними, тобто рядок є функціональним бінарним відношенням. Елементи d_i (значення атрибутів) вибираються з певної фіксованої множини. Таблиця T схеми R – скінченна множина рядків схеми R , кількість рядків у таблиці T позначаємо $|T|$. Далі, якщо не обумовлено протилежне, в роботі розглядаються таблиці схеми R з кількістю атрибутів n . На множині всіх таких таблиць введені параметричні операції об'єднання $(\bigcup_R)$, перетину $(\bigcap_R)$ і різниці $(-_R)$ таблиць як обмеження однойменних теоретико-множинних операцій.

Табличною алгеброю називається часткова алгебра з носієм – множиною всіх таблиць довільної схеми – і дев'ятьма операціями: об'єднанням, перетином, різницею, проекцією, селекцією, активним доповненням, з'єднанням, діленням і перейменуванням; визначення шести з цих операцій, не розглянутих в даній роботі, наведені в [5, 6].

Коротко торкнемося основних підходів до оцінки складності алгоритмів, слідуючи [2]. Обчислювальною складністю алгоритму називається функція залежності «обсягу» роботи, яка виконується ним, від розміру вхідних даних. Розглядають два види обчислювальної складності: часову, яка оцінює час виконання алгоритму (кількість виконуваних обчислень), і емнісну, яка оцінює кількість комірок пам'яті, необхідну для роботи алгоритму. У даній роботі вважаємо, що складність елементарних операцій однакова (тобто використовується так звана рівномірна вага). Виділяють три типи часової складності алгоритму: складність в найгіршому випадку, складність для майже всіх входів і складність в середньому. Дослідження часової складності алгоритму в найгіршому випадку значно простіше, ніж дослідження інших двох типів складності, хоча при аналізі часової

складності обробки запитів найбільш прийнятним є використання складності в середньому, оскільки саме вона дає можливість оцінити ефективність обробки запитів.

У монографії [7] виділено основні перетворення таблиць: додавання $ADD(T, s)$, видалення $DEL(T, s)$ рядка s і заміна $CH(T, s, s_1)$ рядка s рядком s_1 у таблиці T . В алгоритмах, розглянутих в даній роботі, будуть використані перші два перетворення.

В усіх запропонованих алгоритмах вважаємо, що складність перетворень $ADD(T, s)$ і $DEL(T, s)$ у найгіршому випадку і в середньому дорівнює кількості атрибутів у схемі, тобто n .

Далі будемо розглядати алгоритми виконання операцій перетину, об'єднання і різниці в табличних алгебрах: для кожної операції спочатку розглядається найбільш природний (на наш погляд) алгоритм, після цього пропонуються його модифікації, що дозволяють зменшити кількість обчислень. Потім будуть знайдені часові складності в найгіршому випадку і в середньому для кожного з цих алгоритмів.

3. Означення алгоритмів

3.1. Операція перетину таблиць

Алгоритм 1.1. З кожним рядком $s_1 \in T_1$ порівнюємо всі рядки таблиці T_2 : якщо існує такий рядок $s_2 \in T_2$, що $s_1 = s_2$, то рядок s_1 додаємо в результуючу таблицю T і переходимо до наступного рядка таблиці T_1 .

Алгоритм А 1.2. З кожним рядком $s_1 \in T_1$ порівнюємо всі рядки таблиці T_2 , і якщо існує такий рядок $s_2 \in T_2$, що $s_1 = s_2$, то рядок s_1 додаємо в результуючу таблицю T , рядок s_2 видаляємо з таблиці T_2 і переходимо до наступного рядка таблиці T_1 .

Алгоритм А 1.3. Якщо $|T_1| \leq |T_2|$, то з кожним рядком $s_1 \in T_1$ порівнюємо всі рядки таблиці T_2 , і якщо не існує такого рядка $s_2 \in T_2$, що $s_1 = s_2$, то видаляємо рядок s_1 з таблиці T_1 , а якщо такий рядок існує, то переходимо до наступного рядка таблиці T_1 ; результат міститься в таблиці T_1 . Якщо ж $|T_1| > |T_2|$, то таблиці T_1 і T_2 міняються місцями.

Алгоритм А 1.4. Якщо $|T_1| \leq |T_2|$, то з кожним рядком $s_1 \in T_1$ порівнюємо всі рядки таблиці T_2 , і якщо не існує такого рядка $s_2 \in T_2$, що $s_1 = s_2$, то видаляємо рядок s_1 з таблиці T_1 , а якщо існує такий рядок $s_2 \in T_2$, що $s_1 = s_2$, то видаляємо рядок s_2 з таблиці T_2 і переходимо до наступного рядка таблиці T_1 ; результат міститься в таблиці T_1 . Якщо ж $|T_1| > |T_2|$, то таблиці T_1 і T_2 міняються місцями.

3.2. Операція об'єднання таблиць

Алгоритм А 2.1. Додаємо всі рядки $s_1 \in T_1$ в нову таблицю T (яка містить результат), а потім всі рядки s_2 таблиці T_2 порівнюємо з рядками таблиці T_1 , і якщо не існує такого рядка s_1 , що $s_2 = s_1$, то рядок s_2 додаємо в таблицю T , а якщо такий рядок існує, то переходимо до наступного рядка таблиці T_2 .

Алгоритм А 2.2. Додаємо всі рядки $s_1 \in T_1$ в нову таблицю T (яка містить результат), а потім всі рядки s таблиці T порівнюємо з рядками таблиці T_2 , і якщо існує такий рядок $s_2 \in T_2$, що $s = s_2$, то видаляємо рядок s_2 з таблиці T_2 і переходимо до наступного рядка таблиці T . Після цього додаємо решту рядків таблиці T_2 в таблицю T .

Алгоритм А 2.3. Якщо $|T_1| \leq |T_2|$, то з кожним рядком $s_2 \in T_2$ порівнюємо всі рядки таблиці T_1 , і якщо існує такий рядок $s_1 \in T_1$, що $s_2 = s_1$, то видаляємо рядок s_1 з таблиці T_1 і переходимо до наступного рядка таблиці T_2 ; після цього додаємо всі рядки, що залишились, з таблиці T_1 в таблицю T_2 , в якій міститься результат. Якщо ж $|T_1| > |T_2|$, то таблиці T_1 і T_2 міняються місцями.

3.3. Операція різниці таблиць

Алгоритм А 3.1. З кожним рядком $s_1 \in T_1$ порівнюємо всі рядки таблиці T_2 : якщо не існує такого рядка $s_2 \in T_2$, що $s_1 = s_2$, то рядок s_1 додаємо в нову результуючу таблицю T , а якщо такий рядок існує, то переходимо до наступного рядка таблиці T_1 .

Алгоритм А 3.2. З кожним рядком $s_1 \in T_1$ порівнюємо всі рядки таблиці T_2 : якщо існує такий рядок $s_2 \in T_2$, що $s_1 = s_2$, то видаляємо рядок s_2 з таблиці T_2 і переходимо до наступного рядка таблиці T_1 , якщо ж такого рядка не існує, то рядок s_1 додаємо в нову таблицю T , яка містить результат.

Алгоритм А 3.3. З кожним рядком $s_1 \in T_1$ порівнюємо всі рядки таблиці T_2 : якщо існує такий рядок $s_2 \in T_2$, що $s_1 = s_2$, то видаляємо рядок s_1 з таблиці T_1 . Результат міститься в таблиці T_1 .

Алгоритм А 3.4. З кожним рядком $s_1 \in T_1$ порівнюємо всі рядки таблиці T_2 : якщо існує такий рядок $s_2 \in T_2$, що $s_1 = s_2$, то видаляємо рядок s_1 з таблиці T_1 , а рядок s_2 видаляємо з таблиці T_2 . Результат міститься в таблиці T_1 .

Алгоритм А 3.5. З кожним рядком $s_2 \in T_2$ порівнюємо всі рядки таблиці T_1 : якщо існує такий рядок $s_1 \in T_1$, що $s_1 = s_2$, то видаляємо рядок s_1 з таблиці T_1 і переходимо до наступного рядка таблиці T_2 . Результат міститься в таблиці T_1 .

4. Основні результати

4.1. Складність в найгіршому випадку

Знайдемо складність в найгіршому випадку для всіх раніше запропонованих алгоритмів, в яких вважаємо $|T_1| = m_1$ і $|T_2| = m_2$. Оскільки в кожному з алгоритмів кількість обчислювальних дій залежить від кількості рядків, що належать перетину вихідних таблиць (далі ці рядки будемо називати рядками таблиці $T_1 \cap_R T_2$), для знаходження складності кожного алгоритму спочатку була знайдена функціональна залежність складності від числа рядків таблиці $T_1 \cap_R T_2$, а потім, в якості складності в гіршому випадку, знайдений максимум цієї функції, з урахуванням того, що $|T_1 \cap_R T_2|$ – натуральне число. Результати наведені в таблиці 1. Звернемо увагу, що загальна складність алгоритму у найгіршому випадку не обов'язково сумі складностей у найгіршому випадку трьох

перетворень, оскільки найгірші випадки для кожного перетворення можуть відрізнятися.

4.2. Складність в середньому

Складність в середньому алгоритмів А 1.1 – А 3.5 залежить від багатьох параметрів вихідних таблиць. Нехай $|T_1| = m_1$, $|T_2| = m_2$,

$m = \min\{m_1, m_2\}$, T_1, T_2 – таблиці схеми $R = \{A_1, \dots, A_n\}$, потужності домену значень атрибутів $A_1, \dots, A_n$ дорівнюють відповідно $q_1, \dots, q_n$ і $q_1 \cdot \dots \cdot q_n = Q$.

Таблиця 1.

Алгоритм	Складність в найгіршому випадку			
	загальна	порівняння	додавання	видалення
1.1	$m_1 m_2 n + n$	$m_1 m_2 n$	$\min\{m_1, m_2\} n$	0
1.2	$m_1 m_2 n + 3n$	$m_1 m_2 n$	$\min\{m_1, m_2\} n$	$\min\{m_1, m_2\} n$
1.3	$m_1 m_2 n + \min\{m_1, m_2\} n + 1$	$m_1 m_2 n + 1$	0	$\min\{m_1, m_2\} n$
1.4	$m_1 m_2 n + \min\{m_1, m_2\} n + 1$	$m_1 m_2 n + 1$	0	$\min\{m_1, m_2\} n$
2.1	$m_1 m_2 n + m_1 n + m_2 n$	$m_1 m_2 n$	$m_1 n + m_2 n$	0
2.2	$m_1 m_2 n + m_1 n + m_2 n$	$m_1 m_2 n$	$m_1 n + m_2 n$	$m_1 n$
2.3	$m_1 m_2 n + \min\{m_1, m_2\} n + 1$	$m_1 m_2 n + 1$	$m_1 m_2 n + 1$	$\min\{m_1, m_2\} n$
3.1	$m_1 m_2 n + m_1 n$	$m_1 m_2 n$	$m_1 n$	0
3.2	$m_1 m_2 n + m_1 n$	$m_1 m_2 n$	$m_1 n$	$\min\{m_1, m_2\} n$
3.3	$m_1 m_2 n + n$	$m_1 m_2 n$	0	$\min\{m_1, m_2\} n$
3.4	$m_1 m_2 n + 3n$	$m_1 m_2 n$	0	$2 \cdot \min\{m_1, m_2\} n$
3.5	$m_1 m_2 n + n$	$m_1 m_2 n$	0	$\min\{m_1, m_2\} n$

Таким чином, існує рівно Q рядків, кожен з яких незалежно від інших може входити або не входити в кожну з вихідних таблиць. Будемо вважати, що розподіл значень по кожному атрибуту в обох таблицях рівномірний. Нескладно бачити, що якщо $m_1 + m_2 \leq Q$, то мінімальна кількість рядків у таблиці $T_1 \cap_R T_2$

дорівнює 0, в іншому випадку мінімальна кількість рядків таблиці $T_1 \cap_R T_2$ дорівнює

$(m_1 + m_2) - Q$, цю мінімальну кількість рядків позначимо через z ; з визначення перетину таблиць очевидно випливає, що максимальна можлива кількість рядків у таблиці $T_1 \cap_R T_2$

дорівнює m . Оскільки всі запропоновані алгоритми використовують порівняння рядків в таблицях T_1 і T_2 на предмет їх рівності, і складність цих алгоритмів залежить від кількості рядків таблиці $T_1 \cap_R T_2$, то знайдемо значення ймовірності $P(j)$ того, що таких рядків буде в

точності j ($j \in \{z, \dots, m\}$). Потім для кожного з запропонованих алгоритмів знайдемо значення $W(j)$ середньої кількості обчислювальних дій за умови $|T_1 \cap_R T_2| = j$. Будемо вважати складністю в

середньому величину $\sum_{j=z}^m P(j) \cdot W(j)$.

Спочатку була знайдена ймовірність $P(j)$.

$$P(j) = \frac{C_Q^j C_{Q-j}^{m_1-j} C_{Q-m_1}^{m_2-j}}{C_Q^{m_1} C_Q^{m_2}} = \frac{m_1! m_2! (Q - m_1)! (Q - m_2)!}{j! (m_1 - j)! (m_2 - j)! (Q - m_1 - m_2 + j)! Q!}.$$

Для знаходження $W(j)$ було знайдено середню кількість обчислювальних дій W' , необхідну для порівняння рядків $s^1 = \{(A_1, d_1^1), \dots, (A_n, d_n^1)\} \in T_1$ і $s^2 = \{(A_1, d_1^2), \dots, (A_n, d_n^2)\} \in T_2$ у випадку, коли

$$s^1 \neq s^2.$$

$$W' = \frac{Q}{Q-1} \left(1 \frac{q_1-1}{q_1} + 2 \frac{q_2-1}{q_1 q_2} + \dots + n \frac{q_n-1}{Q} \right).$$

Звернемо увагу, що для кожного алгоритму загальне значення $W(j)$ є сумою аналогічних

значень трьох перетворень таблиць, для економії місця в таблиці 2 ми наведемо лише значення для трьох перетворень таблиць.

Таблиця 2.

Алгоритм	W(j) для складності в середньому		
	порівняння	додавання	видалення
1.1	$\left(m_1 m_2 - \frac{j}{2} \cdot (m_2 + 1) \right) W' + jn$	jn	0
1.2	$\left(m_1 m_2 - \frac{j}{2} \left(m_1 + m_2 + \frac{1}{2} - \frac{j}{2} \right) \right) W' + jn$	jn	jn
1.3	$\left(m_1 m_2 - \frac{j}{2} (\max\{m_1, m_2\} + 1) \right) W' + jn + 1$	0	$(\min\{m_1, m_2\} n - j) n$
1.4	$\left(m_1 m_2 - \frac{j}{2} \left(m_1 + m_2 + \frac{1}{2} - \frac{j}{2} \right) \right) W' + jn + 1$	0	$\min\{m_1, m_2\} n$
2.1	$\left(m_1 m_2 - \frac{j}{2} (m_2 + 1) \right) W' + jn$	$m_1 n + (m_2 - j) n$	0
2.2	$\left(m_1 m_2 - \frac{j}{2} \left(m_1 + m_2 + \frac{1}{2} - \frac{j}{2} \right) \right) W' + jn$	$m_1 n + (m_2 - j) n$	jn
2.3	$\left(m_1 m_2 - \frac{j}{2} \left(m_1 + m_2 + \frac{1}{2} - \frac{j}{2} \right) \right) W' + jn + 1$	$(\min\{m_1, m_2\} n - j) n$	jn
3.1	$\left(m_1 m_2 - \frac{j}{2} (m_2 + 1) \right) W' + jn$	$(m_1 - j) n$	0
3.2	$\left(m_1 m_2 - \frac{j}{2} \left(m_1 + m_2 + \frac{1}{2} - \frac{j}{2} \right) \right) W' + jn$	$(m_1 - j) n$	jn
3.3	$\left(m_1 m_2 - \frac{j}{2} (m_2 + 1) \right) W' + jn$	0	jn
3.4	$\left(m_1 m_2 - \frac{j}{2} \left(m_1 + m_2 + \frac{1}{2} - \frac{j}{2} \right) \right) W' + jn$	0	$2jn$
3.5	$\left(m_1 m_2 - \frac{j}{2} \left(m_1 + m_2 + \frac{1}{2} - \frac{j}{2} \right) \right) W' + jn$	0	jn

5. Висновки

Таким чином, із запропонованих алгоритмів операції перетину найменшу складність в найгіршому випадку має алгоритм А 1.1, а найбільшу – алгоритми А 1.3 і А 1.4; найменша складність у середньому в алгоритмів А 1.4 і А 1.2, а найбільша – в алгоритмів А 1.1 і А 1.3. Для операції об'єднання найменша складність в найгіршому випадку і в середньому – у алгоритму А 2.3, найбільша в найгіршому

випадку – в алгоритмів А 2.1 і А 2.2, а найбільша складність у середньому – у алгоритму А 2.1. Із запропонованих алгоритмів різниці найменша складність в найгіршому випадку - в алгоритмів А 3.3 і А 3.5, а найбільша – в алгоритмів А 3.1 і А 3.2; найменша складність у середньому – в алгоритму А 3.5, а найбільша – у алгоритмів А 3.1 і А 3.3. Таким чином, із запропонованих алгоритмів найбільш швидкодіючими є А 1.4, А 2.3 та А 3.5.

Для експериментального підтвердження теоретичних результатів була розроблена програмна система в середовищі Lazarus, яка

обчислює фактичну кількість виконаних обчислень для кожного з запропонованих алгоритмів і порівнює їх із знайденими теоретичними оцінками; також система може обчислювати середнє значення фактичної кількості виконаних обчислень для кожної серії дослідів, у кожному з яких вихідні таблиці формуються випадковим чином. Проведені експерименти показали, що вже для відносно

невеликої кількості дослідів (від 100) середні значення фактичної кількості виконаних обчислень відрізняються від розрахункових на величину, що не перевищує 0,1%, а при збільшенні кількості дослідів, розходження між фактичною кількістю виконаних обчислень і розрахунковою зменшується.

Список використаних джерел

1. Кузнецов С.Д. Методы оптимизации выполнения запросов в реляционных СУБД / С.Д. Кузнецов // Итоги науки и техники. Вычислительные науки. – М.: ВИНТИ, 1989. – Т. 1, №6. – С. 76–153.
2. Буй Д.Б. Сложность операций в базах данных (обзор) / Д.Б. Буй, В.Г. Скобелев // Радиоэлектронні і комп'ютерні системи. – 2014. – №6. – С. 53-59.
3. Канарская И.С. Оценки сложности алгоритмов реализации теоретико-множественных операций в табличных алгебрах / И.С. Канарская // Доповіді НАН України. – 2016. – №11. – С. 17-23.
4. Редько В.Н. Точные оценки временной сложности реализации алгоритмов теоретико-множественных операций в табличных алгебрах / В.Н. Редько, Д.Б. Буй, И.С. Канарская, А.С. Сенченко // Кибернетика и системный анализ. – 2017. – Т. 53, №1. – С. 3-15.
5. Редько В.Н. К основаниям теории реляционных моделей баз данных / В.Н. Редько, Д.Б. Буй // Кибернетика и системный анализ. – 1996. – Т. 32, №4. – С. 3-12.
6. Реляційні бази даних: табличні алгебри та SQL-подібні мови / В.Н. Редько, Ю.Й. Брона, Д.Б. Буй, С.А. Поляков. – Київ: «Академперіодика», 2001. – 198 с.
7. Мейер Д. Теория реляционных баз данных.: Пер. с англ. / Д. Мейер. – Москва: Мир, 1987. – 608 с.

References

1. KUZNETSOV, S. (1989) Query optimization methods in relational DBMS. *Itogi Nauki I Tekhniki*, VINITI, Moscow. 1(6). pp. 76-153.
2. BUI, D. and SKOBELEV, V. (2014) Complexity of operations in database (a review). *Radioelectronic and Computer Systems*. 6. pp. 53-59.
3. KANARSKAYA, I. (2016) Estimates of the complexity of algorithms implementation of set-theoretic operations in table algebras. *Reports of the NAS of Ukraine*. 11. pp. 17-23.
4. RED'KO, V., BUI, D., KANARSKAYA, I. and SENCHENKO, A. (2017) Precise estimates of the time complexity of implementing the algorithms of set-theoretic operations in table algebra. *Cybernetics and Systems Analysis*. 53(1). pp. 3-15.
5. RED'KO, V. and BUI, D. (1996) Foundation of the theory of relation database models. *Cybernetics and Systems Analysis*. 32(4). pp. 3-12.
6. REDKO, V. et al. (2001) *Relational data base: table algebras and family of the SQL languages*. Kyiv: Academperiodica.
7. MAIER, D. (1987) *Theory of Relational Databases [Russian translation]*. Moskva: Mir.

Надійшла до редколегії 09.12.2016

УДК 519.62

Денисюк В.П., д.ф.-м.н., професор

Негоденко О.В., здобувач

ПОЛІНОМІАЛЬНІ ТА ТРИГОНОМЕТРИЧНІ СПЛАЙНИ

Національний авіаційний університет,
03058, м. Київ, пр-т Космонавта Комарова, 1
e-mail: kvomden@nau.edu.ua

V. Denysiuk, Doctor of Physics - Mathematical
Sciences, Professor

O. Nehodenko, getter

POLYNOMIAL AND TRIGONOMETRIC SPLINES

National Aviation University, 03058, Kyiv,
Komarova st., 1,
e-mail: kvomden@nau.edu.ua

В роботі розглядається побудова інтерполяційних тригонометричних функцій з певними властивостями гладкості; такі функції було названо тригонометричними сплайнами. Проводиться порівняння тригонометричних сплайнів з періодичними простими сплайнами. Показано, що клас тригонометричних сплайнів включає клас поліноміальних сплайнів; в той же час існують тригонометричні сплайни, які не мають поліноміальних аналогів. Результати проведених чисельних розрахунків добре узгоджуються з основними теоретичними положеннями.

Ключові слова: тригонометричні ряди, множники збіжності, інтерполяція, сплайни, поліноміальні сплайни, В-сплайни, прості поліноміальні сплайни, періодичні сплайни, тригонометричні сплайни.

The article reviewed the construction of interpolation trigonometric functions with certain properties of smoothness; these functions were called trigonometric splines. Trigonometric splines have been compared with simple periodic splines. The article has shown that trigonometric splines class includes polynomial splines class. Polynomial splines are the best linear apparatus for approximation of differentiable functions. But the principal disadvantage of polynomial splines is their component structure. All results obtained for classes of simple periodic splines are actual for classes of trigonometric splines. Interpolation trigonometric splines have some advantages compared with polynomial splines. Mentioned advantages are the constancy of trigonometric spline algorithms for different values of element r and presenting them by single formula (uniformly convergent trigonometric row) across the whole interval $[0, 2\pi]$. At the same time, there are trigonometric splines, which have no analogues polynomial. The results of the numerical calculations are well agreed with the basic theoretical propositions.

Keywords: trigonometric series, convergence of factors, interpolation, splines, polynomial splines, B-splines, simple polynomial splines, periodic splines, trigonometric splines.

Останнім часом в задачах теорії наближень широке застосування знаходять інтерполяційні сплайни. Взагалі інтерполяційними сплайнами називають функції, які мають певні властивості гладкості і інтерполюють деяку скінченну послідовність обмежених значень $\{f_i\}_{i=1}^N$ у вузлах сіток $\Delta_N = \{x_i\}_{i=1}^N$, розташованих на відрізьку $[a, b]$, причому $a = x_1 < x_2 < \dots < x_N = b$.

Найбільш розповсюдженими є прості поліноміальні сплайни, які склеюються із кусків многочленів (поліномів) таким чином, щоб забезпечити необхідну гладкість отримуваної функції.

До переваг простих поліноміальних сплайнів слід віднести можливість використання многочленів невисоких степенів і можливість врахування апріорно відомих диференціальних властивостей функцій. Крім того, такі сплайни є найкращим лінійним апаратом наближення класів диференційовних функцій [1].

Ці та деякі інші властивості сплайнів призвели до того, що сплайни поступово витісняють многочлени в багатьох галузях теоретичних і прикладних досліджень (див. напр., [1],[2]).

Проте прості поліноміальні сплайни мають і ряд недоліків. Так, при зростанні степенів сплайнів різко ускладнюються перетворення, необхідні для їх побудови. Це призводить до того, що найбільш розповсюдженими є сплайни третього степеня (кубічні сплайни).

Принциповим недоліком поліноміальних сплайнів є і їх складова структура. Це призводить до того, що операції інтегрування та диференціювання сплайнів необхідно здійснювати над многочленами, з яких складаються ці сплайни. Зрозуміло, що цей недолік значною мірою обмежує подальше розповсюдження поліноміальних сплайнів.

Тому певне зацікавлення викликають інші типи інтерполяційних функцій, які мають певні властивості гладкості. Одним з таких класів функцій є тригонометричні інтерполяційні сплайни [3],[4]. Розглянемо їх побудову та деякі властивості більш детально.

Нехай на відрізьку $[0, 2\pi]$ задано неперервну періодичну функцію $f(t)$. Нехай також на цьому відрізьку задано рівномірні сітки $\Delta_N^{(0)} = \{t_i^{(0)}\}_{i=1}^N$,

$$t_i^{(0)} = \frac{2\pi}{N}(i-1), \text{ та } \Delta_N^{(1)} = \{t_i^{(1)}\}_{i=1}^N,$$

$$t_i^{(1)} = \frac{\pi}{N}(2i-1) \quad N = 2n+1, \quad n=1, 2, \dots.$$

Для скорочення запису введемо у розгляд індикатор сітки $I = 0, 1$; тоді обидві сітки можна позначити $\Delta_N^{(I)}$. Позначимо також через

$$\left\{f\left(t_i^{(I)}\right)\right\}_{i=1}^N = \left\{f_i^{(I)}\right\}_{i=1}^N \quad \text{множину значень}$$

функції $f(t)$ у вузлах сітки $\Delta_N^{(I)}$. Розглянемо тригонометричний многочлен

$$T_n^{(I)}(t) = \frac{a_0^{(I)}}{2} + \sum_{k=1}^n a_k^{(I)} \cos kt + b_k^{(I)} \sin kt, \quad (1)$$

що інтерполуює функцію $f(t)$ на сітці $\Delta_N^{(I)}$. Відомо, що коефіцієнти цього многочлена визначаються за формулами

$$\begin{aligned} a_k^{(I)} &= \frac{2}{N} \sum_{j=1}^N f_j^{(I)} \cos kt_j^{(I)}, \\ k &= 0, 1, \dots, n; \\ b_k^{(I)} &= \frac{2}{N} \sum_{j=1}^N f_j^{(I)} \sin kt_j^{(I)}, \\ k &= 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (2)$$

Поставимо у відповідність тригонометричному многочлену $T_n^{(I)}(t)$ тригонометричний ряд

$$\frac{a_0^{(I)}}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k^{(I)} \cos kt + b_k^{(I)} \sin kt, \quad (3)$$

коефіцієнти $a_k^{(I)}, b_k^{(I)}$ якої обчислюються за формулами (2) для будь яких значень k ($k = 1, 2, \dots$); при цьому ми вважаємо, що

$$a_{mN}^{(I)} = b_{mN}^{(I)} = 0, \quad (m = 1, 2, \dots).$$

Нескладно переконатися в тому, що послідовності коефіцієнтів $a_k^{(I)}, b_k^{(I)}$ є періодичними з періодом N і ряд у правій частині (3) є розбіжним; хоча його коефіцієнти обмежені, вони не прямують до 0 із зростанням k .

Введемо у ряд (3) множники збіжності $\gamma_k(r, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, який має порядок спадання $O(k^{-(1+r)})$ та залежить від n ($n = 1, 2, \dots$) параметрів, і розглянемо ряд

$$\begin{aligned} \varphi^{(I)}(r, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \gamma, t) = & \frac{a_0^{(I)}}{2} + \\ & + \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k(r, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) [a_k^{(I)} \cos kt + \\ & + b_k^{(I)} \sin kt]. \end{aligned} \quad (4)$$

Зрозуміло, що при $r > 0$ ряд (4) є рівномірно збіжним за ознакою Вейєрштрасса. Хоча ми можемо розглядати дійсні значення параметра r , ми обмежимося розглядом випадку, коли цей параметр приймає лише натуральні значення, тобто $r = 1, 2, \dots$.

Надалі ми обмежимося розглядом випадку, коли множники збіжності $\gamma_k(r, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ залежать лише від одного параметра і мають вигляд $\gamma_k(r, \alpha)$. Легко бачити, що функція $\varphi^{(I)}(r, h, \gamma, t)$, що є сумою ряду (4), є неперервною та має неперервну похідну порядку $r-1$ ($r = 1, 2, \dots$); інакше кажучи, функція $\varphi^{(I)}(r, \alpha, \gamma, t) \in C_{[0, 2\pi]}^{r-1}$. При цьому ми вважаємо, що похідна нульового порядку співпадає із самою функцією.

Враховуючи рівномірну збіжність ряду та властивості коефіцієнтів $a_k^{(I)}, b_k^{(I)}$ ряду (4), подамо його у вигляді

$$\begin{aligned} \varphi^{(I)}(r, \alpha, \gamma, t) = & \frac{a_0^{(I)}}{2} + \sum_{k=1}^n a_k^{(I)} C_k(r, \alpha, \gamma, t) + \\ & + \sum_{k=1}^n b_k^{(I)} S(r, \alpha, \gamma, t) \end{aligned} \quad (5)$$

де

$$\begin{aligned} C_k(r, \alpha, \gamma, t) = & \gamma_k(r, \alpha) \cos kt + \\ & + \sum_{m=1}^{\infty} [\gamma_k(r, \alpha) \cos(mN + k)t + \\ & + \gamma_{mN-k}(r, \alpha) \cos(mN - k)t], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S(r, \alpha, \gamma, t) = & \gamma_k(r, \alpha) \sin kt + \\ & + \sum_{m=1}^{\infty} [\gamma_k(r, \alpha) \sin(mN + k)t - \\ & - \gamma_{mN-k}(r, \alpha) \sin(mN - k)t]. \end{aligned}$$

Введемо у ряд (5) обмежений додатковий множник $H_k^{(I)}(r, \alpha, \gamma)$ і отримаємо такий ряд

$$\begin{aligned} \varphi^{(I)}(r, \alpha, \gamma, H, t) = & \frac{a_0^{(I)}}{2} + \\ & + \sum_{k=1}^n H_k^{(I)}(r, \alpha, \gamma) [a_k^{(I)} C_k(r, \alpha, \gamma, t) + \\ & + b_k^{(I)} S(r, \alpha, \gamma, t)]. \end{aligned} \quad (6)$$

Виберемо множник $H_k^{(I)}(r, \alpha, \gamma)$ таким чином, щоб функція $\varphi^{(I)}(r, \alpha, \gamma, H, t)$ інтерполювала тригонометричний многочлен (1) (а, відповідно, і функцію $f(t)$) у вузлах сітки $\Delta_N^{(I)}$. При цьому ми покладемо $\alpha = h$, де $h = \frac{2\pi}{N}$ - крок сітки $\Delta_N^{(I)}$.

Теорема. Функція $\varphi^{(I)}(r, h, \gamma, H, t)$ інтерполює тригонометричний многочлен (1), (а, відповідно, і функцію $f(t)$) у вузлах сітки $\Delta_N^{(I)}$ тоді і лише тоді, коли множник $H_k(r, h, \gamma)$ має вигляд

$$\begin{aligned} H_k^{(I)}(r, h, \gamma) = & \{\gamma_k(r, h) + \\ & + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{mI} [\gamma_{mN+k}(r, h) + \gamma_{mN-k}(r, h)]\}^{-1}. \end{aligned}$$

Доведення теореми наводиться в [4].

Таким чином, ми побудували функцію $\varphi^{(I)}(r, h, \gamma, H, t)$, яка має певні властивості гладкості і інтерполює задану функцію у вузлах рівномірних сіток $\Delta_N^{(I)}$; отже, у світлі наданого вище означення, ця функція є тригонометричним сплайном.

Наведемо деякі властивості тригонометричних сплайнів $\varphi^{(I)}(r, h, \gamma, t)$. Так, зокрема, зрозуміло, що мають місце такі рівності:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} |\varphi^{(I)}(r, h, \gamma, H, t) - T_n^{(I)}(t)| = 0;$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} |\varphi^{(I)}(r, h, \gamma, H, t) - T_n^{(I)}(t)| = 0.$$

Розглянемо питання про вибір множників збіжності $\gamma_k(r, h)$, що мають порядок спадання $O(k^{-(1+r)})$. Так, зокрема, в ролі таких множників можуть виступати члени послідовностей типу $\frac{\psi(k, h)}{k^r}$, $\sin \frac{\psi(k, h)}{k^r}$, тощо, де $\psi(k, h)$ деякі обмежені функції, не рівні тотожно 0. Також в ролі таких множників можна також

використовувати коефіцієнти Фур'є періодичних парних неперервних функцій, які мають неперервні похідні до порядку r включно, а похідні $r+1$ -го порядку мають обмежену варіацію; відомо, що коефіцієнти Фур'є таких функцій мають порядок спадання $O((r+2)^{-1})$.

При такому підході в ролі цих функцій можуть виступати класи функцій з керованою гладкістю, зокрема, функції $T(r, h, t)$, $P(r, h, t)$, поліноміальні В-сплайни, розглянуті нами раніше, тощо [4].

Не втрачаючи загальності, надалі ми обмежимося розглядом лише випадку, коли множники $\gamma_k(r, \alpha)$ мають вигляд

$$\sigma_k(r, h) = \left[\text{sinc} \left(k \frac{h}{2} \right) \right]^{1+r};$$

$$v_k(r) = \left[\frac{1}{k} \right]^{1+r}, \quad (7)$$

де $\text{sinc}(x) = \sin x / x$.

Введемо деякі позначення. Через $Sp_r(T_n, I)$ позначимо клас періодичних з періодом 2π , простих поліноміальних сплайнів степеня r , що інтерполюють тригонометричний многочлен $T_n(t)$ у вузлах сітки $\Delta_N^{(I)}$; зрозуміло, що $Sp_r \in C^{r-1}$ ($r = 1, 2, \dots$).

Клас тригонометричних сплайнів, що складається з функцій $\varphi^{(I)}(r, h, \gamma, H, t)$, позначимо $St_r^{(I)}(\gamma)$; зрозуміло, що $St_r^{(I)} \in C^{r-1}$ ($r = 1, 2, \dots$).

Класи тригонометричних сплайнів із множниками (7) позначимо відповідно $St_r^{(I)}(\sigma)$ та $St_r^{(I)}(v)$.

Порівнюючи між собою класи $St_{2r-1}^{(I)}(\sigma)$ та $St_{2r-1}^{(I)}(v)$, нескладно дійти висновку про те, що в межах обчислювальної похибки ці класи співпадають при $r = 1, 2, \dots$. Класи ж $St_{2r}^{(I)}(\sigma)$ та $St_{2r}^{(I)}(v)$ відрізняються, причому їх різниця зменшується на порядок із зростанням r . Зауважимо, що функції класу $St_r^{(I)}(\sigma)$ мають сенс і при $r = 0$, хоча в цьому випадку рівномірна збіжність не має місця.

Розглянемо тепер питання про зв'язок класів тригонометричних та простих поліноміальних сплайнів. Має місце теорема.

Теорема. Має місце включення

$$Sp_r(T_n, I) \subset St_r^{(I)}(v), \text{ причому}$$

$$Sp_{2r-1}(T_n, 0) \equiv St_{2r-1}^{(0)}(v) \quad Sp_{2r}(T_n, 1) \equiv St_{2r}^{(1)}(v).$$

Доведення цієї теореми наводиться в [3].

Важливість цієї теореми важко перебільшити, оскільки вона дозволяє перенести всі результати, отримані для класу $Sp_r(T_n, I)$ на функції класів $St_{2r-1}^{(0)}(v)$ та $St_{2r}^{(1)}(v)$. Крім того, з цієї теореми випливає, що функції класів $St_{2r-1}^{(0)}(v)$ та $St_{2r}^{(1)}(v)$ мають відомі поліноміальні аналоги – прості поліноміальні сплайни.

Нескладно побудувати поліноміальні аналоги і для функцій класів $St_{2r}^{(0)}(v)$ та $St_{2r-1}^{(1)}(v)$; один з таких аналогів наводиться в [3].

До цього часу ми розглядали задачу інтерполяції періодичних функцій. Для того, щоб мати можливість застосовувати наведені результати для класів неперіодичних функцій, необхідно застосовувати спеціальні методи періодичного продовження неперіодичних функцій. Один з таких методів, названий авторами методом “фантомних вузлів”, досліджується в [4].

Наостанок зауважимо, що результати проведених чисельних розрахунків добре узгоджуються з наведеними теоретичними положеннями.

Проілюструємо викладений матеріал деякими прикладами.

Приклад 1. У теоретичних дослідженнях часто зустрічається тригонометричний ряд

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \cos kt,$$

який є розбіжним у кожній точці інтервалу $[-\pi, \pi]$. Введемо у цей ряд множники збіжності

$\sigma_k(r, \alpha)$ і розглянемо функцію

$$\varphi(r, \alpha, t) = \frac{1}{\pi} \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k(r, \alpha) \cos kt \right].$$

Наведемо графіки цієї функції при різних значеннях r , поклавши для визначеності $\alpha = 1$.

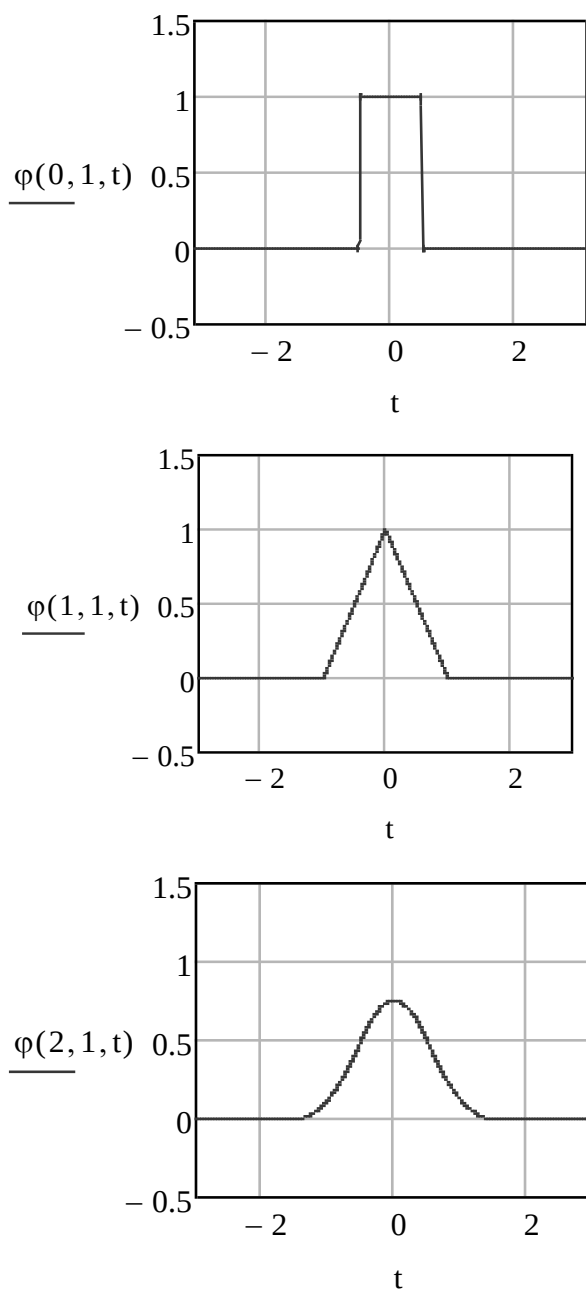


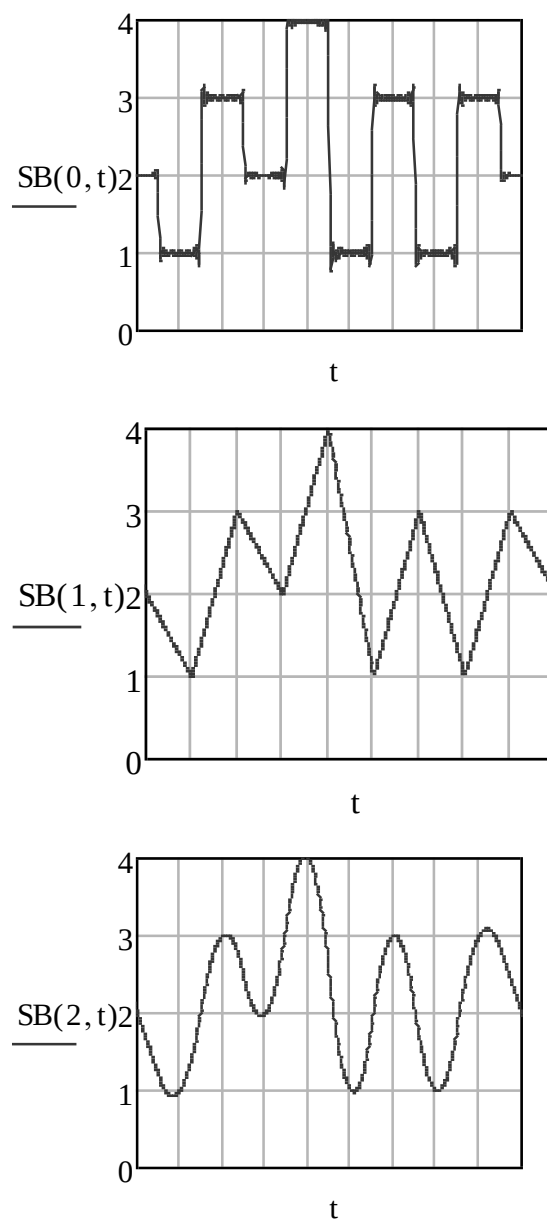
Рис.1. Графіки функції $\varphi(r, \alpha, t)$ при $r = 0, 1, 2$, $\alpha = 1$.

Аналізуючи наведені графіки, легко бачити, що ми отримали поліноміальні B -сплайни порядку r , побудовані на рівномірній сітці з кроком $h = 1$. Інакше кажучи, має місце формула

$$\frac{1}{h} B_r(h, t) = \frac{1}{\pi} \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [\sigma(r, h)]^{1+r} \cos kt \right\}.$$

Приклад 2. Нехай на проміжку $[0, 2\pi)$ задано деяку функцію, яка у вузлах сітки $\Delta_9^{(0)}$ з

кроком $h = \frac{2\pi}{9}$, приймає значення $\{2, 1, 3, 2, 4, 1, 3, 1, 3\}$. За формулами (2) обчислимо коефіцієнти a_0, a_k, b_k , ($k = 1, 2, \dots, 4$) інтерполяційного тригонометричного многочлена $T_4^{(0)}(t)$; поставимо у відповідність цьому многочлену функцію $\varphi^{(0)}(r, h, \sigma, H, t)$ за формулою (6). Наведемо графіки цієї функції при різних значеннях параметра r , позначивши при цьому для простоти на графіках $\varphi^{(0)}(r, h, \sigma, H, t) = Sb(r, t)$.



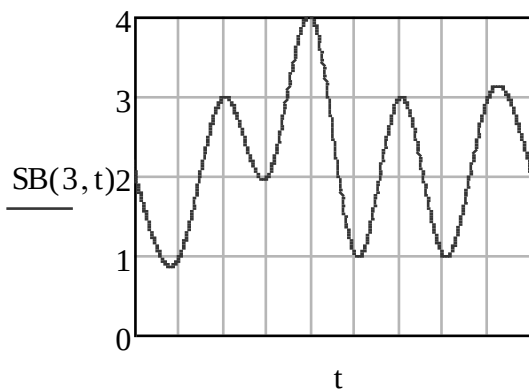


Рис.2. Графіки тригонометричних сплайнів $\varphi^{(0)}(r, h, \sigma, H, t)$ при $r = 0, 1, 2, 3$.

Висновки.

Побудовано класи тригонометричних функцій, які мають певні властивості гладкості та інтерполюють задані тригонометричні многочлени у вузлах рівномірних сіток. Це дає підстави називати їх інтерполяційними тригонометричними сплайнами.

Показано, що класи інтерполяційних тригонометричних сплайнів включають класи

періодичних інтерполяційних простих поліноміальних сплайнів, що інтерполюють заданий тригонометричний многочлен у вузлах тих же рівномірних сіток. Це дає можливість перенести всі результати, отримані для класів періодичних простих сплайнів на класи тригонометричних сплайнів. В той же час існують інтерполяційні тригонометричні сплайни, які не мають поліноміальних аналогів.

Інтерполяційні тригонометричні сплайни мають ряд переваг у порівнянні з поліноміальними сплайнами. До таких переваг слід віднести незмінність алгоритмів побудови тригонометричних сплайнів для різних значень параметра r та подання їх єдиним виразом (рівномірно збіжним тригонометричним рядом) на всьому інтервалі $[0, 2\pi]$.

Безумовно, класи тригонометричних сплайнів потребують подальших досліджень як в теоретичному так і в прикладному плані.

Список використаних джерел

1. Корнейчук Н.П. Экстремальные задачи теории приближения. – М.:Наука, 1976. – 320с.
2. Завьялов Ю.С. и др. Методы сплайн-функций. – М.: Наука, 1980. – 352с.
3. Денисюк В.П. Сплайни та сигнали. – Київ, ЗАТ «ВІПОЛ», 2007р. – 228с.
4. Денисюк В.П. Тригонометричні ряди та сплайни. – К.:НАУ, 2017. – 212с.

References

1. N. KORNEICHUK (1976) Extremal problems of approximation theory. *Moskow. Nauka.*
2. YU. ZAVYALOV (1980) Methods of spline functions. *Moskow. Nauka.*
3. V. DENYSIUK (2007) Splines and signals. *Kyiv. Vipol.*
4. V. DENYSIUK (2017) Trigonometric series and splines. *Kyiv.NAU.*

Надійшла до редколегії 20.12.2016

УДК 519.688

Зарембовський К. В., аспірант

K. V. Zarembovskyi, graduate student

Мобільне навчання: проблеми впровадження

Mobile learning: problems of implementation

Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, пр-т. Глушкова, 4д, м. Київ,
03680
e-mail: zkv.inn@gmail.com

Taras Shevchenko National University of Kyiv,
03680, Kyiv, Glushkova st., 4d

e-mail: zkv.inn@gmail.com

Мобільні та переносні пристрої стали широкоживаними та доступними для рядового користувача. Це дало поштовх для розвитку мобільного навчання. Але мобільне навчання може приймати різні форми і в ньому можуть застосовуватись різні методи. В статті розглянуто особливості мобільного навчання та критерії для вибору його форми та впровадження. Розглянуті технічні стандарти для систем електронного та мобільного навчання – TinCan та SCORM. Запропоновано модель системи керування навчанням, яка використовує ці стандарти і надає можливості як для звичайного електронного, так і для мобільного навчання. Проведений аналіз і висновки будуть корисними для фахівців сфери організації систем мобільного навчання, їх впровадження та підтримки.

Ключові слова: мобільне навчання, система керування навчанням, TinCan, SCORM.

Nowadays mobile and portable devices are commonly used and affordable for the average user. Mobile technologies are widespread and ubiquitous. Thus, implementation of mobile learning have become appropriate and effective. Mobile learning is the only way to learn for some types of people It should be said that mobile learning have many strands and it can be used in different methods. Therefore, in this article the features of mobile learning, the criteria for selecting the form of mobile learning and its implementation are discussed. Furthermore, the article reviewed two technical standards for electronic learning and mobile learning, such as TinCan and SCORM. Learning management system designed with respect to TinCan standard makes it easy to integrate with mobile devices. In addition, the model of learning management system that uses these standards and provides opportunities for electronic and mobile learning is proposed. Overall, the analysis and findings will be useful during the implementation of learning management systems for mobile learning and their support.

Key Words: mobile learning, learning management system, TinCan, SCORM.

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Анісімов А.В.

Вступ

Мобільне навчання (далі **МН**) – це використання бездротових і мобільних технологій для підтримки, прискорення і збагачення процесу навчання. При цьому переважно або виключно використовуються портативні пристрої: телефони, смартфони, планшети, ноутбуки, тощо. Навчання відбувається і тоді, коли учень знаходиться поза фіксованим, наперед обумовленим місцем або часом.

Привабливість **МН** полягає в тому, що саме мобільні пристрої та технології як не можна краще відображають динамічність сучасного життя – роботи і навчання, розваг і спілкування, всіх інших важливих сфер. Мобільні телефони зараз є майже в кожного, а значить, більшість людей можуть мати постійний доступ в мережу – неважливо, де вони при цьому знаходяться і чим займаються.

МН може бути дуже багатогранним, і включати різні за цілями, методами, змістом і реалізацією форми:

1) Доступ до матеріалів електронного навчання в системі керування навчанням (LMS, learning management system).

2) Поставка навчального контенту у форматі електронних курсів на мобільні пристрої.

3) Проведення контролю знань у різних форматах.

4) Підтримка практичних вправ - надання довідкових матеріалів, які потрібні слухачу для виконання актуального завдання.

5) Навчання взаємодії та спільній роботі у колективі.

6) Доповнена реальність.

Переваги та недоліки МН

Розглянемо основні переваги та типові проблеми **МН**.

Переваги:

1) Можливість застосовувати в навчанні новітні технології.

2) Можливість використання в навчанні легких, компактних, портативних пристроїв.

3) За допомогою мобільних технологій можна забезпечувати якісну підтримку будь-якого формату навчання, а також змішаного навчання.

4) **МН** є хорошим інструментом при навчанні людей з особливими потребами.

5) **МН** добре підходить для молоді.

6) Дозволяє значно знизити витрати.

Основними недоліками **МН** можна назвати:

1) Маленький розмір екранів і клавіш на мобільних пристроях.

2) Необхідність доступу до Інтернету;

3) Обмеженість обсягу пам'яті та обчислювальної потужності мобільних пристроїв.

4) Проблеми інформаційної безпеки.

5) Пристрої кінцевих користувачів мають різні технічні характеристики.

6) Відсутність єдиної або загальноприйнятої мобільної платформи.

7) Необхідність переробляти традиційний електронний контент для мобільних пристроїв.

8) Ризики легкої втрати мобільного пристрою.

Практичні аспекти впровадження

Із урахуванням всього вищесказаного, перед впровадженням **МН**, необхідно чітко усвідомити, якої мети потрібно досягти саме за допомогою **МН**, яку роль відіграватиме мобільність у системі

дистрибуції дистанційного курсу. Тому для успішного впровадження **МН** надзвичайно важливими є такі фактори:

1) **Виявлення потреб.** – Необхідно бути впевненим, що **МН** впроваджується для вирішення реальних організаційних завдань, наприклад, в компанії багато «польових» співробітників, яких складно навчати якимось інакше.

2) **Оцінка організаційної готовності.** Треба виявити особливості потенційної аудиторії, чи використовують вони мобільні пристрої взагалі, і як? Чи є підтримка **МН** з боку керівництва на витрати додаткових ресурсів і розробку необхідної стратегії?

3) **Вибір необхідних платформ і пристроїв.**

Перш за все, це вибір між різними операційними системами: Apple iOS, Android, Windows Phone або BlackBerry. Важливо і те, які конкретно пристрої будуть використовуватися, зокрема, який у них екран. Можна також використовувати для навчання власні пристрої співробітників; тут є свої зрозумілі переваги, але це може перешкодити однотипності.

4) **Вибір моделі для розробки і постачання МН.** Що буде використовуватися – спеціальні програми або веб, Flash або HTML5. Чи будуть застосовуватися спеціальні інструменти для розробки **МН**, і якщо так, то які. Якою мірою і для яких цілей буде використовуватися система керування навчанням.

5) **Створення чи одержання відповідного контенту.** У багатьох випадках беруть готовий контент для **електронного навчання** (далі **ЕН**) і поставляють його на мобільні пристрої, але такий підхід виправданий далеко не завжди. **МН**, щоб бути ефективним, – контент повинен бути якомога більш змістовно навантаженим, концентрованим. Так чи інакше, вирішуючи питання про контент **МН**, потрібно добре розуміти, в яких умовах, як саме користувачі будуть навчатися. Іншими словами, скільки часу користувач зможе витратити на **МН**, щоб це не заважало роботі. Чи будуть у нього вільні обидві руки, щоб робити в ході навчання все необхідне. Чи зможе він вводити необхідні в ході навчання дані.

6) **Питання безпеки** – оскільки мобільний пристрій легко втратити, втративши разом з ним і всі дані, що містяться в ньому, то організація повинна подбати про те, як захистити їх від стороннього доступу. Всі співробітники, залучені в **МН**, повинні бути в курсі політики щодо безпеки **МН**.

Прикладне програмне забезпечення системи керування навчанням (LMS) –повинно виконувати такі функції:

- 1) Керування навчальними курсами.
- 2) Керування записами про навчання.
- 3) Дистрибуція навчальних матеріалів.
- 4) Он-лайн навчання.
- 5) Документування та підтримка процесу навчання.
- 6) Реалізація групового та індивідуального навчання.
- 7) Керування навчальним персоналом.
- 8) Створення електронного портфоліо.
- 9) Документування та підтримка процесу розвитку різноманітних навичок.

В основі будь-якої LRS лежить база/бази даних (БД) для зберігання навчальної інформації, накопичення даних про хід навчання.

SCORM стандарт для ЕН

SCORM (англ. Sharable Content Object Reference Model, «еталонна модель контентного об'єкта, призначеного для спільного використання») [1] – збірка специфікацій і стандартів, розроблена для систем **ЕН**, в тому числі мобільного, які постачають навчальний контент за допомогою **web-технологій** у режимі **on-line**. Містить вимоги до організації навчального матеріалу і всієї системи керування навчання. SCORM дозволяє забезпечити сумісність компонентів і можливість їх багаторазового використання: навчальний матеріал представлений окремими невеликими блоками, які можуть включатися в різні навчальні курси і використовуватися системою дистанційного навчання незалежно від того, ким, де і за допомогою яких засобів вони були створені.

Стандарт SCORM описує такий функціонал навчальної системи, як:

- 1) Пакування. Як саме навчальний контент має бути записаний у файли, які призначені для зберігання та обміну контентом.
- 2) Відслідковування. Як саме контент взаємодіє із LMS для стеження за діяльністю користувача.
- 3) Метадані. Як має бути описаний навчальний контент на різних рівнях.
- 4) Послідовність та навігацію між навчальними об'єктами. Система опису правил, які враховують певні передумови (наприклад проходження базової частини курсу перед проходженням поглибленої частини), згідно яких користувач переглядати різні підрозділи навчального курсу.

Враховуючи час та ресурси, витрачені експертами для створення контенту, доцільним є повторне використання контенту. Окремі організації, або ж підрозділи організацій витратять свій час тільки для локалізації та покращення контенту. Створення навчальних об'єктів згідно стандарту SCORM полегшує пошук, спільне використання та повторне використання початкових об'єктів, сприяє створенню цифрових сховищ навчальних об'єктів. Як наслідок, навчальні об'єкти матимуть аудиторію набагато більшу та різноманітнішу, ніж та, для якої вони розроблялись.

SCO (sharable content object, контентний об'єкт, призначений для спільного використання) – невелика, змістовно наповнена, автономна частина/порція навчального контенту, оформлена згідно стандарту SCORM. [2].

SCO мають переваги:

- 1) Великий час життя. SCO майже не потребують оновлення та переробки під час розвитку системи навчання.
- 2) Доступність. SCO мають метадані, які дозволяють описати їх зміст та прив'язаність до певного курсу, що значно полегшує їх пошук та використання.
- 3) Можливість повторного використання. SCO розроблений один раз, можна використовувати у різних курсах.
- 4) Сумісність контенту. Можливість використовувати один SCO у різних системах.
- 5) Адаптивність. Кожен SCO може змінювати свою поведінку згідно потреб користувача та його прогресу у навчанні. Ця функція традиційно реалізується через механізм відслідковування прогресу по конкретному SCO.

Відповідність цим параметрам дозволяє створити адаптивну та доступну систему дистанційного/мобільного **ЕН** у будь-якій організації.

Використання стандарту SCORM рекомендоване за таких умов:

- 1) Необхідність інтеграції із сторонніми постачальниками навчального контенту.
- 2) Навчальна система містить велику кількість навчальних об'єктів.
- 3) Використовується LMS для дистрибуції навчального контенту та керування навчальним процесом.
- 4) При розробці навчального контенту закладається можливість його повторного використання.
- 5) Потрібно відслідковувати прогрес навчання користувача.

6) При розробці навчального курсу закладається можливість його видозміни згідно відстежуваного прогресу навчання та індивідуальних потреб користувача.

Водночас, не рекомендується використовувати стандарт SCORM у таких випадках:

1) Контент є простим гіпертекстовим документом.

2) Для розповсюдження простої довідкової інформації.

3) Навчальний контент має малий час життя та буде використаний в одній і тій же формі і тільки в одній навчальній системі.

4) Внутрішня реалізація створеної системи не буде перероблятися чи оновлюватися.

5) Потрібна розробка нетрадиційних навчальних засобів (наприклад, емуляція роботи реальних пристроїв, моделювання різноманітних процесів, навчальні ігрові симулятори).

Стандарт для EH TinCanAPI

TinCanAPI – збірка стандартів, яка описує обов'язковий функціонал інтерфейсу СКБД LRS та модель даних для БД LRS, сумісних із TinCan [3].

Фактично, TinCanAPI описує сервіс, який дозволяє різноманітним записам про діяльність користувача (зазвичай навчальну) бути безпечно доставленими та збереженими у LRS, а також обмінюватись цими записами між різними LRS.

У TinCanAPI описуються:

1) Структура та визначення різноманітних об'єктів, які дозволяють взаємодіяти із постачальником активності (будь-яке програмне забезпечення, із яким працює користувач під час навчання).

2) Методи передачі та зберігання даних, призначені для обміну цими об'єктами. Обмін об'єктами може проводитись як між поставником активності та LRS, так і між двома LRS.

3) Методи захисту, які дозволяють безпечно обмінюватись даними між LRS та довіреними джерелами.

4) Фактично, у стандарті також описаний інтерфейс, який повинен мати постачальник активності.

5) Оскільки даний стандарт описує механізм саме взаємодії із LRS, при його використанні відкривається багато можливостей: [4].

6) Відстеження різних процесів та роботи об'єктів, таких як:

6.1) МН.

6.2) Ігри-симулятори.

6.3) Емулятори обладнання та моделювання різних процесів.

6.4) Практична діяльність.

7) Можливість працювати будь-де:

7.1) Можливість роботи в режимі оф-лайн, з'єднання потрібне лише для синхронізації із системою.

7.2) Можливість використовувати будь-який пристрій та будь-яке програмне забезпечення для роботи користувача.

7.3) Можливість роботи поза веб-браузером, за допомогою програм, розроблених для конкретної платформи.

8) Легка технічна реалізація такого функціоналу:

8.1) Інтерактивність та адаптивність процесу навчання.

8.2) Використання кількох технологій для дистанційного навчання.

8.3) Підтримка процесу навчання, який буде продовжуватись довгий період.

8.4) Запуск навчального контенту поза LMS.

8.5) Розширений контроль за доставкою та використанням навчального контенту.

8.6) Використання протоколів безпеки.

9) Зручне керування даними про:

9.1) Групове навчання.

9.2) Результати оцінювання упродовж курсу.

9.3) Кількість спроб виконати певну дію або пройти тест, та розмірами перерв між ними.

9.4) Деталізовані результати тестів.

Приклади впровадження систем мобільного навчання

BlackBoard. На даний момент є чимало виробників LMS, які мають мобільну частину, та підтримують стандарти SCORM та TinCan. Однією з найпопулярніших систем керування навчанням є BlackBoard [5].

Компанія Blackboard є світовим лідером у сфері дистанційних освітніх технологій за рахунок надання унікального комплексу послуг та інтегрованих програмних рішень, які успішно використовуються більш ніж в 10 000 організацій по всьому світу.

Рішення BlackboardLearn може виступати як основа для створення середовища електронної підтримки навчання, оскільки в його рамках реалізуються завдання централізованого зберігання і надання доступу до навчальної

інформації, а також завдання контролю та аналізу результатів навчання. Дане рішення є веб-орієнтованим, тобто всі можливості рішення доступні користувачам через стандартний веб-браузер.

DominKnowmobileplayer. Мобільний програвач dominKnow спочатку розроблявся, як мобільний варіант для хмарної системи керування навчанням Claro, але зараз може бути інтегрований у будь-яку LMS із підтримкою TinCan та SCORM, як мобільний засіб доставки навчального контенту [6]. Забезпечує спосіб доставки навчального контенту будь-якому користувачеві будь-де: вдома, в офісі, або в

дорозі. Програвач забезпечує доступ до навчального контенту без необхідності постійного інтернет підключення. Учні можуть користуватись контентом, де і коли вони цього хочуть – за допомогою мобільних пристроїв. Особливістю даного програмного продукту є можливість завантаження SCORM та TinCan контенту, робота із ним у режимі офлайн, після закінчення роботи – синхронізація. Фактично, це дає змогу обійти обмеження SCORM на онлайн режим роботи.

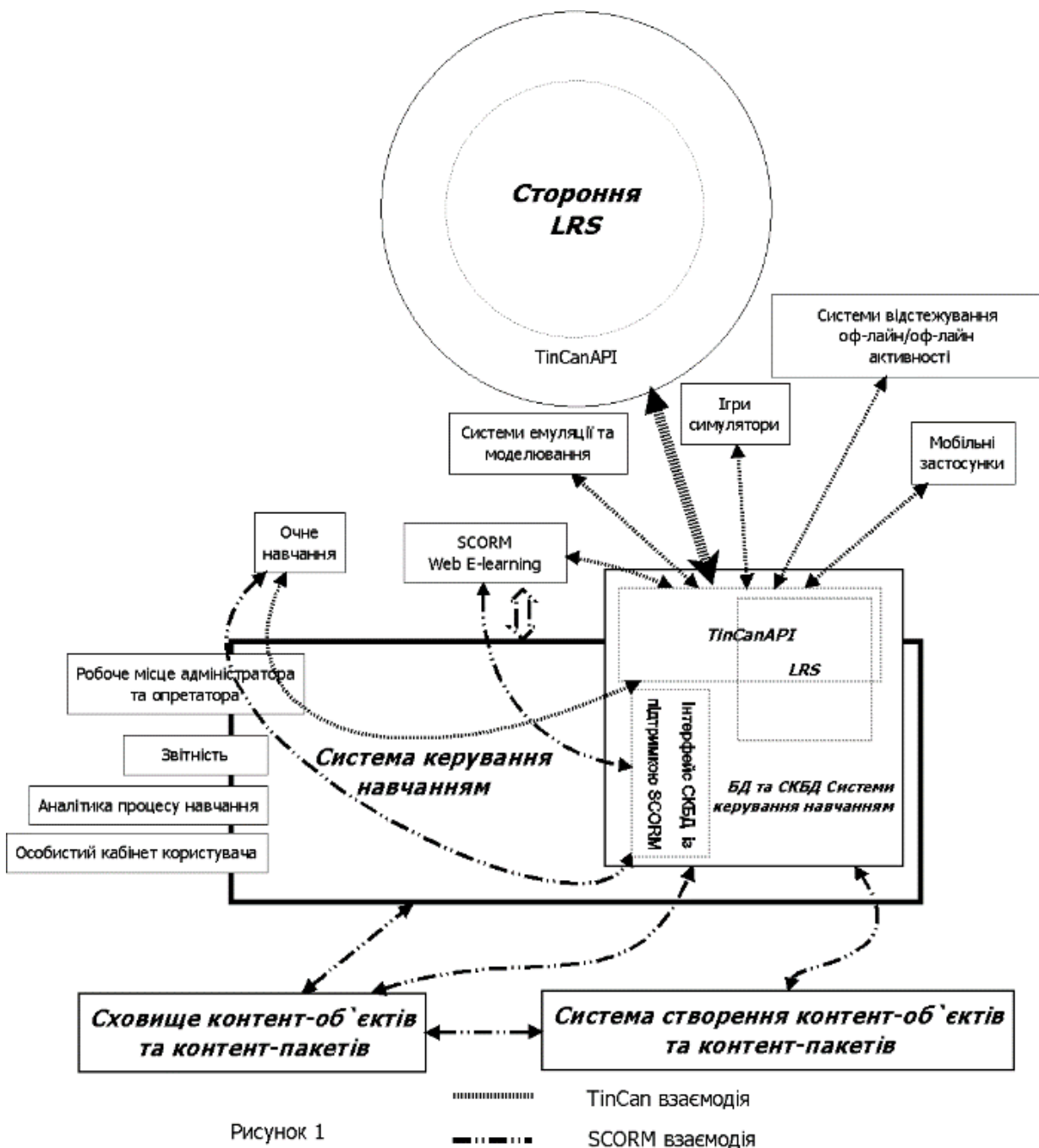


Рисунок 1

Архітектура програмної реалізації системи МН

Розглянемо типову схему (рис.1) програмної реалізації системи дистанційного навчання, яка використовує стандарти SCORM та TinCan, та роботу її основних блоків.

Система керування навчанням (LMS) – забезпечує взаємодію усіх блоків, тісно інтегрована із своєю БД, реалізує такий функціонал, як робоче місце адміністратора, звітність, аналітика процесу навчання, особистий кабінет користувача.

БД реалізує сховище та інтерфейс для роботи із системою керування навчання із підтримкою SCORM. Як частину себе містять LRS, систему записів про навчання.

LRS, система записів про навчання – сховище, яке підтримує стандарт TinCan, із спеціальним інтерфейсом TinCanAPI. Його особливість полягає у тому, що дане сховище може обмінюватись даними, не використовуючи систему керування навчанням як посередника.

Очне навчання – дані про очне навчання потрапляють у систему керування навчанням через робоче місце адміністратора або оператора. При цьому для роботи із БД можна використовувати як власно розроблені засоби, вбудовані у систему керування навчанням, так і засоби TinCanAPI.

SCORM WebLearning – метод дистрибуції навчального контенту засобами Web за допомогою SCORM контент-пакетів. Дозволяє також засобами SCORM або TinCan збирати результати користувача із SCORM-об'єктами.

Сховище контент-об'єктів та контент-пакетів – файлове сховище із спеціальним інтерфейсом, із якого вибираються контент-об'єкти для збірки контент-пакетів та дистрибуції їх кінцевому користувачу. Індекс об'єктів та пакетів знаходиться у БД системи керування навчанням.

Система створення контент-об'єктів та контент-пакетів – система, яка дозволяє створювати, оновлювати та переробляти вищезгадані об'єкти та пакети, та працювати із індексом об'єктів та пакетів.

Системи емуляції та моделювання – системи, призначені для емуляції обладнання та моделювання процесів, які обмінюються інформацією про навчальний процес із LRS через TinCanAPI.

Ігри симулятори – ігри, призначені для навчання, які обмінюються інформацією про навчальний процес із LRS через TinCanAPI.

Системи відстежування оф-лайн/он-лайн активності – відстежують активність користувача пов'язану із навчанням та обмінюються інформацією про навчальний процес із LRS через TinCanAPI.

Мобільні застосування – розроблені під певну мобільну платформу, виконують навчальні функції та обмінюються інформацією про навчальний процес із LRS через TinCanAPI.

Стороння LRS – LRS, яка обмінюється записами про навчання із LRS даної системи навчання. Може також напряму збирати дані із об'єктів даної системи, які мають підтримку TinCan. Може представляти TinCan-інтерфейс іншій системі керування навчанням, або виступати у ролі централізованої LRS для кількох систем керування навчанням.

Висновки

МН пропонує відповідні викликам нашого часу засоби й інструменти для швидкого доступу до потрібної інформації, здобуття необхідних знань і умінь.

Як і будь-яка інша форма організації навчального процесу мобільне навчання має свої особливості та недоліки. Для здійснення навчального процесу необхідним є забезпечення методичної, інформаційної складових та комунікаційних зв'язків між студентом та викладачем із врахуванням особливостей зв'язку та сприйняття інформації через мобільні пристрої.

В роботі сформульовані критерії, вимоги і рекомендації для створення систем мобільного навчання. Для розробки власної навчальної системи описані доступні технічні стандарти SCORM та TinCanAPI. Контентні об'єкти SCORM хоча й мають чимало можливостей, але розраховані на тривале життя і потребують повністю он-лайн роботи із ними. Стандарт TinCanAPI дозволяє створювати додатки, які можуть працювати у будь-якому режимі та успішно співпрацювати із будь-якими навчальними системами, в тому числі створеними згідно SCORM стандарту.

Успішними прикладами використання можливостей мобільного навчання є BlackBoard та Dominknowmobileplayer.

Список використаних джерел

1. Jesukiewicz P. SCORM 2004 [Електронний ресурс]. – Режим доступу: http://www.adlnet.org/wp-content/uploads/2013/09/SCORM_2004_4ED_v1_1_RTE_20090814.pdf
2. An introduction to SCORM 2004 [Електронний ресурс]. – Режим доступу: <https://www.slideshare.net/teeled/an-introduction-to-scorm-2004>
3. Experience API AdvancedDistributedLearning (ADL) Co-Laboratories [Електронний ресурс]. – Режим доступу: <https://github.com/adlnet/xAPI-Spec/blob/master/xAPI.md>
4. Layer 2: Record Any Learning Experience (Informal Learning) [Електронний ресурс]. – Режим доступу: <http://tincanapi.com/layer-2-record-any-learning-experience-informal-learning/>
5. Система управління обучением LMS Blackboard Learn [Електронний ресурс]. – Режим доступу: http://www.vpgroup.ru/blackboard_learn.aspx
6. ClaroMobileplayer [Електронний ресурс]. – Режим доступу: http://www.dominknow.com/assets/downloads/dominKnow_mobile_app.pdf

References

1. JESUKIEWICZ, P., SCORM 2004 [Online] Available from: http://www.adlnet.org/wp-content/uploads/2013/09/SCORM_2004_4ED_v1_1_RTE_20090814.pdf [Accessed: 10th August 2016].
2. An introduction to SCORM 2004 [Online] Available from: <https://www.slideshare.net/teeled/an-introduction-to-scorm-2004> [Accessed: 10th August 2016].
3. Experience API AdvancedDistributedLearning (ADL) Co-Laboratories [Online] Available from: <https://github.com/adlnet/xAPI-Spec/blob/master/xAPI.md> [Accessed: 10th August 2016].
4. Layer 2: Record Any Learning Experience (Informal Learning) [Online] Available from: <http://tincanapi.com/layer-2-record-any-learning-experience-informal-learning/> [Accessed: 10th August 2016].
5. Learning management system LMS Blackboard Learn [Online] Available from: http://www.vpgroup.ru/blackboard_learn.aspx [Accessed: 10th August 2016].
6. ClaroMobileplayer [Online] Available from: http://www.dominknow.com/assets/downloads/dominKnow_mobile_app.pdf [Accessed: 10th August 2016].

Надійшла до редколегії 02.12.2016

УДК 519.21

Коцур Д.В., аспірант

Терещенко В.М., д.ф.-м.н., професор

**Застосування моделей активних
контурів у задачах трекінгу структур
цитоскелету**

Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, пр-т.
Академіка Глушкова 4д,
e-mail: dkotsur@gmail.com, v_ter@ukr.net

D.V. Kotsur, postgraduate

V.M. Tereschenko, Dr.Sci.(Phis.-Math.), Assoc. Prof.

**Active contour models for cytoskeletal
structures tracking**

Taras Shevchenko National University of Kyiv,
03680, Kyiv, Glushkova st., 4d,

e-mail: dkotsur@gmail.com, v_ter@ukr.net

Стаття присвячена дослідженню моделей активних контурів в поєднанні з методом оптичного потоку, і їх застосування в галузі клітинної біології для відстеження окремих компонентів цитоскелета в послідовностях конфокальних зображень. В статті модель активного контуру визначається як двовимірний параметричний крива, що є розв'язком (мінімумом) в задачі мінімізації заданого "енергетичного" функціоналу. Також продемонстровано як інформація з послідовності зображень може бути включена в задачу мінімізації через градієнт зображення, який згодом замінюється на більш стійке векторне поле (градієнтний потік). Зайві деталі зображення відфільтровуються за допомогою запропонованих алгоритмів попередньої обробки в наступній послідовності: згладжування за допомогою анізотропної дифузії, підсилення ребер за допомогою гессіану, адаптивне покращення контрастності зображення з масштабуванням, застосування перетворення з подвійним пороговим значенням, бінаризація. Наводиться повний опис алгоритму трекінгу на основі активних контурів та оптичного потоку, окреслюються сфери його застосування. Результат роботи алгоритму демонструється на прикладі трекінгу окремих мікротрубочок в межах їхньої мережі.

Ключові слова: моделі активних контурів, оптичний потік, градієнтний потік, трекінг

In this paper we investigate active contour models coupled with optical flow method and their application in the field of cell biology for the tracking of individual cytoskeletal components on the time-sequences of confocal images. Firstly, we define active contour model as a parametric curve, which minimizes given "energy" functional. We show how information about the image sequence can be incorporated into the minimization problem by introducing image-based gradient of "external energy", which we replace further by more robust vector field called gradient vector flow. Next, we introduce image pre-processing pipeline, which allows to filter out redundant image features. It consists of the following processing steps: anisotropic diffusion filtering, Hessian ridge enhancement, adaptive contrast enhancement with image scaling, two-level thresholding, binarization. Then, we describe overall tracking procedure. Finally, we outline the applications of algorithm and illustrate an example of the algorithm output for individual microtubules tracking within their network.

Key Words: active contour models, optical flow, gradient vector flow, tracking

Статтю представив д. ф.-м. н., проф. Анісімов А.В.

1. Introduction

Active contour models or snakes were introduced by Kass et al in the paper [1]. They became a very popular image processing tool and were applied in many diverse fields from industry to the research. The main area of application for active contour models is segmentation of objects defined by their contours on the single image [2], [3]. But this models can be also successfully applied for object tracking. As was shown in paper [4] active contour models can be successfully applied to track individual nonintersecting actin filaments. In [5] the algorithm is even extended to 3D space. The generalization of the snakes for cytoskeleton segmentation and tracking is presented in [6].

In this paper we extend approach [6] and apply active contour models coupled with the optical flow approach in the field of cell biology for tracking of individual cytoskeletal components such as microtubules, actin or keratin cytoskeleton on the time-sequences of confocal images. The significance of this field is determined by the huge role of the cell cytoskeleton in vital processes such as cell migration, wound healing or tumour metastasis formation.

2. Active contour models

Active contour model is defined as a parametric curve $\mathbf{x}(s) = [x(s), y(s)]$, $s \in [0, 1]$. According to Kass et al [1], the position of the contour within one frame in time-sequences is obtained by minimizing “energy” functional:

$$E = \int_0^1 \frac{1}{2} (\alpha |\mathbf{x}'(s)|^2 + \beta |\mathbf{x}''(s)|^2) + E_{ext}(\mathbf{x}(s)) ds$$

where α , β are elasticity parameters that controls stretching and bending resistance of the curve correspondingly. This variational problem is solved by reducing to differential equation and applying iterative scheme with artificial time variable t :

$$\mathbf{x}_t(s, t) = \alpha \frac{\partial^2}{\partial x^2} \mathbf{x}(s, t) + \beta \frac{\partial^4}{\partial x^4} \mathbf{x}(s, t) - \nabla E_{ext}$$

The impact of “external energy” term E_{ext} or the gradient of “external energy” ∇E_{ext} is crucial in this problem. Normally, it is defined as a function of the input image, which allows to incorporate useful features of the images into the problem statement. For example, in order to obtain convergence towards the edges of the image, “external energy” defined as $E_{ext} = -|\nabla f(x, y)|^2$, where $f(x, y)$ is intensity value of the image. In case if we prefer convergence towards the ridges, we can use the following definition: $E_{ext} = f(x, y)$.

3. Gradient vector flow

In Xu et al. [7] authors propose to replace the gradient of the “external energy” ∇E_{ext} with the vector field $\mathbf{v}(x, y) = [u(x, y), v(x, y)]$, which minimizes functional:

$$\mathcal{E} = \iint \mu (u_x^2 + u_y^2 + v_x^2 + v_y^2) + |\nabla f|^2 |\mathbf{v} - \nabla f|^2 dx dy,$$

where $f(x, y)$ is the intensity of the pixel at the position (x, y) , $|\cdot|$ is the Euclidean norm and μ is the regularization (smoothness) parameter. The vector field $\mathbf{v}(x, y)$ is called gradient vector flow (GVF). Here larger values for the regularization parameter leads to smoother resulting vector field.

Comparing to the classical examples of “external energy”, the gradient vector flow behaves like more smoothed version of the gradient of input image. It is shown in [7] that it performs better than “classical external energies” in case of concavities and is more stable numerically.

Taking into account gradient vector flow term the evolution of the snake on the single frame can be defined as follows:

$$\mathbf{x}_t(s, t) = \alpha \frac{\partial^2}{\partial x^2} \mathbf{x}(s, t) + \beta \frac{\partial^4}{\partial x^4} \mathbf{x}(s, t) - \mathbf{v}(\mathbf{x}(s, t))$$

4. Image preprocessing workflow

Usually input images are corrupted by noise and contain a lot of redundant information (features), which can hinder active contours from the convergence towards desired edges or ridges. This means, that input images require additional preprocessing.

For the tracking problem of cytoskeletal structures, we propose the following image preprocessing pipeline (see also Figure. 1):

- 1) The input image (see Fig. 1, A) is given as an input for anisotropic diffusion filter.
- 2) The result of the 1st step (Fig. 1, B) is given as an input for Hessian ridge detector.
- 3) We apply histogram-based contrast enhancement to the result of the 2nd step:
 - Calculate histogram of the input and choose the most frequent intensity value (denote it by T).
 - Scale intensities of the images using the formula: $I_{new} = (I_{old} - T) * S$, where S is constant (contrast stretching term), I_{new} , I_{old} – new and old intensity values respectively.
- 4) Then we apply binary threshold to the result of 2nd step (see Fig. 1, C):

$$I_{new} = \begin{cases} I_{old}, & \text{if } T_{min} \leq I_{old} \leq T_{max} \\ T_{min}, & \text{if } I_{old} < T_{min} \\ T_{max}, & \text{if } I_{old} > T_{max} \end{cases}$$

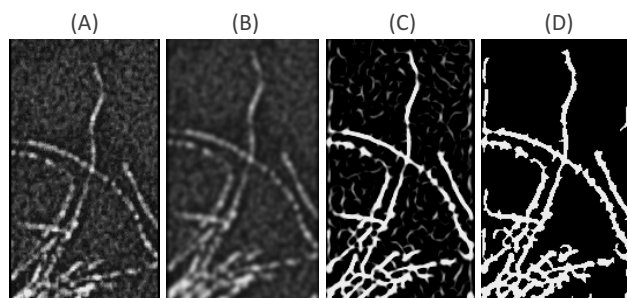


Figure 1. Image preprocessing workflow: (A) – original image, (B) – result of anisotropic diffusion, (C) – Hessian ridge detection, (D) – after applying adaptive binary threshold and filtering small components.

where $T_{\min}$, $T_{\max}$ are minimum and maximum constant intensity thresholds.

- 5) Finally, we perform morphological filtering of the components smaller than the given size (see Fig. 1, D).

The result of the step (4) replaces the input image for gradient vector flow. The binary mask (5) will be used later for contour stretching term.

5. Overall tracking algorithm

The tracking of individual contours consists of two main routines: refinement of the position of the contour on the current frame using the procedure described in chapters (2-4) and transition of the contour from current to the next frame of sequence. For the second step, we apply pyramidal Lucas-Kanade optical flow algorithm [8]. It allows to get better fit in case of large deformations of the contour. However, the main assumption of the optical flow algorithm – unchanged image intensity values in the neighborhood of the tracking point, might be violated. This in turn leads to the wrong mapping of the points between the frames. We propose to overcome this issue by repetition of the refinement step using active contours.

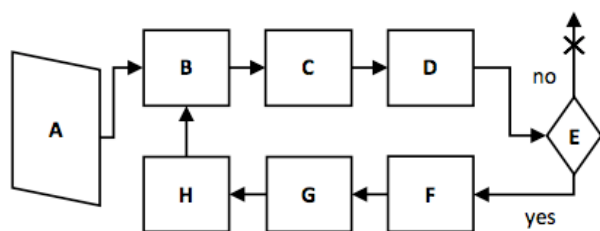


Figure 2. Diagram of overall tracking procedure

Thus, we propose the following tracking procedure (see Figure 2):

- A) *Initialization*. We require initialization of the contour on the first analyzed frame. This can be done, for example, manually by user or

by additional (semi-)automatic segmentation procedures.

- A) *Image preprocessing*. Apply image preprocessing pipeline as described in chapter 4.
- B) *Calculate gradient vector flow (GVF)* on the preprocessed image (see chapter 3)
- C) *Optimize position of the snake* on the current image based on the obtained GVF and taking into account stretching term for open ends [4] calculated on the binary mask (see step (5) in chapter 4);
- D) If current image is last in the analyzed sequence, exit the procedure. Otherwise go to the next step;
- E) Calculate pyramidal optical flow from current image to the next image in time-sequence as described in [8]
- F) Transfer snake to the next image in the sequence based on the calculated optical flow algorithm.
- G) Select next image and repeat starting from step (B);

6. Experimental results and analysis

There are many application of parametric active contours in the field of image processing in particular for cell biology, e.g. cell nucleus and membrane segmentation, cytoskeletal components segmentation [3].

Here we apply active contour models for tracking the dynamics of individual cellular biopolymers, in particular microtubules, which are important structures of the cell cytoskeleton responsible for many vital processes (cell division, molecular transport). The result of the tracking algorithm is shown on the Figure 3. Individual microtubules were tracked on the time-sequence of 91 frame. Here we applied image pre-processing pipeline in the way as defined in chapter (4).

We evaluated tracking algorithm with the proposed image processing pipeline and compared to the approach defined in [6]. The microtubule data for evaluation was taken from free-access Cell Image Library. The dataset contains 5 image sequences, 329 frames and 20 labelled microtubules. Tracked and labelled contours were compared by means of discrete Frechet distance. Correctly tracked data was classified by empirical distance threshold chosen from observations: $Th=5.0$. The result is the following:

- Our approach (with preprocessing): 82.1% correct frames.
- Approach in [6]: 73.6% correct frames.

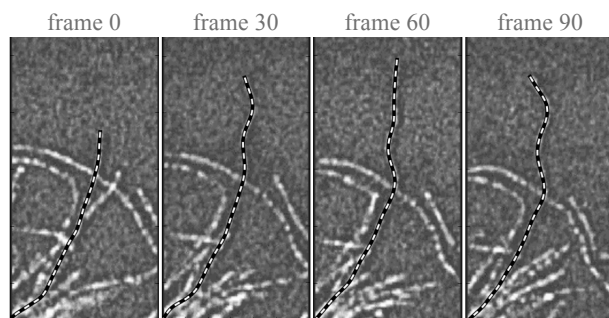


Figure 3. Tracking individual microtubule dynamics (dashed line) for 91 frames.

Список використаних джерел

1. Kass M. Snakes: Active contour models / M. Kass, A. Witkin, D. Terzopoulos. // International Journal of Computer Vision. – 1988. – №4. – P. 321–331.
2. Zhang R. A Novel Gradient Vector Flow Snake Model Based on Convex Function for Infrared Image Segmentation / R. Zhang, S. Zhu, Q. Zhou. // Sensors. – 2016. – №10. – P. 1756–1773.
3. Connecting Markov random fields and active contour models: application to gland segmentation and classification / J.Xu, J. P. Monaco, R. Sparks, A. Madabhushi. // Journal of Medical Imaging. – 2017. – №2. – P. 132–143.
4. Automated actin filament segmentation, tracking and tip elongation measurements based on open active contour models / [H. Li, S. Tian, M. B. Smith et al.]. // Proceedings of the IEEE International Symposium on Biomedical Imaging: From Nano to Macro. – 2009. – P. 1302–1305.
5. Xu T. 3D actin network centerline extraction with multiple active contours / T. Xu, D. Vavylonis, X. Huang. // Medical Image Analysis. – 2014. – №2. – P. 272–284.
6. Smith M. B. Segmentation and tracking of cytoskeletal filaments using open active contours / M. B. Smith, H. Li, T. Shen. // Cytoskeleton. – 2010. – №11. – P. 693–705.
7. Xu C. Gradient Vector Flow: A New External Force for Snakes / C. Xu, J. L. Prince. // Proceedings of the IEEE Computer Society Conference on Computer Vision and Pattern Recognition. – 1997. – P. 66–71.
8. Sharmin N. Optimal Filter Estimation for Lucas-Kanade Optical Flow / N. Sharmin, R. Brad. // Sensors. – 2012. – №12. – P. 12694–12709.

7. Conclusions and outlooks

In this work we presented tracking algorithm based on parametric active contour models coupled with pyramidal optical flow and applied it for the problem of individual cytoskeletal components tracking on the time-sequences of confocal images. We introduced image preprocessing pipeline for filtering redundant image features, which improves the stability of active contour models. The algorithm output was demonstrated for individual microtubules tracking within their network.

References

1. KASS, M., WITKIN, A. and TERZOPOULOS, D. (1988). Snakes: Active contour models. International Journal of Computer Vision, 1(4), p. 321-331.
2. ZHANG, R., ZHU, S. and ZHOU, Q. (2016). A Novel Gradient Vector Flow Snake Model Based on Convex Function for Infrared Image Segmentation. Sensors, 16(10), p. 1756–1773.
3. XU, J., MONACO, J., SPARKS, R. and MADABHUSHI, A. (2017). Connecting Markov random fields and active contour models: application to gland segmentation and classification. Journal of Medical Imaging, 4(2), p. 132-143.
4. LI, H., SHEN, T., SMITH, M., FUJIWARA, I., VAVYLONIS, D. and HUANG, X. (2009). Automated actin filament segmentation, tracking and tip elongation measurements based on open active contour models. IEEE International Symposium on Biomedical Imaging: From Nano to Macro, p.1302–1305.
5. XU, T., VAVYLONIS, D. and HUANG, X. (2014). 3D actin network centerline extraction with multiple active contours. Medical Image Analysis, 18(2), p.272-284.
6. SMITH, M., LI, H., SHEN, T., HUANG, X., YUSUF, E. and VAVYLONIS, D. (2010). Segmentation and tracking of cytoskeletal filaments using open active contours. Cytoskeleton, 67(11), p. 693-705.
7. XU, C. and PRINCE, J. (1997). Gradient vector flow: a new external force for snakes. Proceedings of IEEE Computer Society Conference on Computer Vision and Pattern Recognition, p. 66-71.
8. SHARMIN, N. and BRAD, R. (2012). Optimal Filter Estimation for Lucas-Kanade Optical Flow. Sensors, 12(12), p. 12694-12709.

Надійшла до редакції 10.12.2016

УДК 519.7

Кузьмич О.І., к.ф.-м.н., доц.
Мекуш О.Г., к.ф.-м.н.
Гришанович Т.О., к.ф.-м.н.

**Нелінійне керування на основі методу
управляючої функції Ляпунова
для моделі дизельного двигуна з
турбонаддувом**

Східноєвропейський національний
університет імені Лесі Українки, 43000,
м.Луцьк, просп. Волі, 13,
e-mail: lenamaks79@mail.ru
mekush77@gmail.com
grishanovicht@gmail.com

O.I. Kuzmych, PhD, associate professor
O.G. Mekush, PhD
T.O. Gryshanovych, PhD

**Nonlinear control on the basis of the
control Lyapunov function method
for the model a diesel turbo engine**

Lesya Ukrainka National University of Lutsk,
43000, Lutsk, Voli st., 13,
e-mail: lenamaks79@mail.ru
mekush77@gmail.com
grishanovicht@gmail.com

В даній статті представлено альтернативний спосіб розробки оптимального керування з допомогою управляючої функції Ляпунова для дизельного двигуна, який оснащений системою рециркуляції відпрацьованих газів і турбокомпресором змінної геометрії. Розраховуються параметри управляючої функції Ляпунова для досягнення стійкості контролера, розроблено алгоритм оптимізації функції Ляпунова з метою отримання його кращої продуктивності. Запропонований підхід дозволяє замість використання тривіальної квадратичної функції Ляпунова, перейти до більш загальної функції Ляпунова з додатковими ступенями свободи. Можливість маніпулювання і підбору параметрів згідно умов стійкості сприятимуть поліпшенню якості керування. Представлено спосіб пошуку параметрів оптимального керування на базі узагальненої форми управляючої функції Ляпунова для досягнення критерію якості. Основною є умова від'ємності похідної Лі функції Ляпунова, що є функціональною нерівністю залежною від стану системи і формулюється як задача лінійних матричних нерівностей з обмеженнями. Вона може бути вирішена шляхом перетворення її в задачу SOS оптимізації з використанням програмної технології SOS-tools. Перевірено різні функції Ляпунова на базі обчислювальних експериментів з метою отримання більш високої продуктивності.

Ключові слова: технологія "суми-квадратів", керування з допомогою функції Ляпунова, оптимальне керування, модель дизельного двигуна.

This article presents an alternative way to develop an optimal control for a diesel engine equipped of EGR system and variable geometry turbocharger by using of control Lyapunov functions. The parameters of control Lyapunov functions to achieve stability of the controller are calculated, the developed algorithm of optimization of the Lyapunov function is aimed to obtain a better performance of the controller. Proposed approach allows instead of trivial quadratic Lyapunov function, use more general Lyapunov function with additional degrees of freedom. The possibility of manipulation and selection the parameters under the condition of stability will improve the quality of control. The method of finding optimal control parameters based on a generalized form of the management Lyapunov function to achieve the quality criterion is presented. The main condition is negativity of Lee derivative of Lyapunov function, it is depended on functional inequalities of the system and formulated as linear matrix inequalities with restrictions. It can be solved by turning it into a problem of SOS optimization, it can be solved using software technologies of SOS-tools.

Keywords: Sum-of-Square technology, control via Lyapunov functions, optimal control, diesel engine model.

Статтю представив чл.-кор. НАН України, д.ф.-м.н., проф. Анісімов А.В.

Вступ

У зв'язку із зростанням екологічних вимог протягом останніх років аналіз і керування технічними системами є одними з найбільш складних проблем [1]. Тому проектування ефективного керування є ключовою вимогою, що пред'являється до сучасних технологій двигунів внутрішнього згоряння [2-4]. Цього можливо досягти на базі сучасних математичних методів моделювання та аналізу динамічних систем. Дизельні двигуни, оснащені технологіями рециркуляції відпрацьованих газів (Exhaust Gas Recirculation, далі - EGR) і турбокомпресором змінної геометрії (Variable Geometry Turbine, далі - VGT) із запалюванням через стиснення є хорошими рішеннями для застосування в автомобільній техніці через їх низьку витрату палива і довговічність. Шкідливі викиди, в т.ч. оксидів азоту можуть бути зменшені за рахунок збільшення кількості фракції відпрацьованих газів (EGR-фракції) впускного колектора, а кількість диму може бути зменшена за рахунок збільшення співвідношення повітря / паливо [5].

Останнім часом були опубліковані різні підходи до керування систем EGR і VGT шляхом зміни положення пропускнуго клапана рециркуляції газів та регулювання пропускнуго здатності турбокомпресора. Так, Кук (Cook) [2] та Янковіч (Jankovic) [6] представили хороший огляд різних методів та технологій керування системами EGR та VGT дизельних двигунів. Підхід Ляпунова був використаний і експериментально перевірений Колмановським [7].

У цій роботі ми зосереджуємо увагу на розробці управляючої функції Ляпунова (Control Lyapunov Function, далі - CLF) для контролера на базі нелінійної динамічної моделі дизельного двигуна. В [8-13] були розглянуті подібні проблеми розробки контролера. Наша стаття є продовженням та розширенням попередньої роботи Кузьмич [14] та роботи Янковіч (Jankovic) [15]. В даній роботі розробляється нелінійне оптимальне керування, що базується на методі CLF [6]. Ми пропонуємо новий спосіб обчислення параметрів управляючої функції Ляпунова для досягнення стійкості і оптимального критерію керування. Нерівність для похідної Лі функції Ляпунова можна розглядати як вираз, що містить функцію суми квадратів. Розв'язок цієї нерівності наближено може бути отриманий для параметрів функції Ляпунова з допомогою інструмента SOSTOOLS в середовищі MatLab [16]. Для заданого квадратичного цільового функціоналу, процедура

використання SOS (Sum-of-Square) розкладу полінома дозволяє знайти оптимальну управляючу функцію Ляпунова, що забезпечує стійкість контролера та зводить до мінімуму витрати. SOS являє собою потужний і перспективний метод, який широко використовується в останні роки авторами Праджна (Prajna) [17], Чжен (Zheng) [18] і Танака (Tanaka) [19]. Це базовий метод, який дозволяє розробити оптимізаційний алгоритм знаходження керування з допомогою функції Ляпунова, що базується на основі ітераційної процедури. Результатом цього є отримання керування за допомогою технології Sum-of-Squares програмування.

Запропонований підхід дозволяє замість використання тривіальної квадратичної функції Ляпунова, що розглянуто в [15] перейти до більш загальної функції Ляпунова з додатковими ступенями свободи. Можливість маніпулювання і підбору параметрів згідно умов стійкості сприятимуть розширенню області стійкості нелінійної системи, і як результат - поліпшенню якості керування. Адаптувавши більш "гнучку" функцію Ляпунова та використавши ефективний обчислювально-оптимізаційний підхід до проектування закону керування, отримуємо більше свободи для досягнення вищого рівня продуктивності та ефективне управління. Теоретично, в порівнянні з тривіальними квадратичними функціями Ляпунова, ці узагальнені функції Ляпунова допоможуть знайти найкращу відповідність поверхонь рівня адаптованої функції Ляпунова і побудувати результуючий нелінійний закон керування згідно оптимізаційного критерію якості. Обчислювально, це призводить до систематичної процедури обрахування коефіцієнтів функції Ляпунова, що можна виконати з допомогою SOS-програмування.

1. Динамічна модель дизельного двигуна з турбонаддувом

Розглянемо модель дизельного двигуна, оснащеного турбокомпресором змінної геометрії (VGT) і системою рециркуляції відпрацьованих газів (EGR). Введемо припущення, що всі термодинамічні властивості повітряного потоку і зміна температур впускного і випускного колектора є незначними. Цей підхід був запропонований Янковіч (Jankovic) [15]. У цій статті ми також використовуємо підхід Вальстрем (Wahlstrom) [1] для моделювання повітряного потоку через циліндр і масового потоку через системи EGR і VGT. Принципова

схема дизельного двигуна показана на рис. 1.

Турбокомпресор складається із турбіни змінної геометрії і компресора, встановлених на одному валу. Турбіна отримує енергію від вихлопних газів для живлення компресора. Суміш повітря з компресора і відпрацьованого газу, що надходить через EGR клапан нагнітається з впускного колектора в циліндри. Паливо вприскується безпосередньо в циліндри і згоряє, виробляючи крутільний момент для колінчастого валу. Гарячий вихлопний газ відкачується через випускний колектор. Частина вихлопних газів витікає з випускного колектора через турбіну назовні, а інша частина рециркулює назад у впускний колектор.

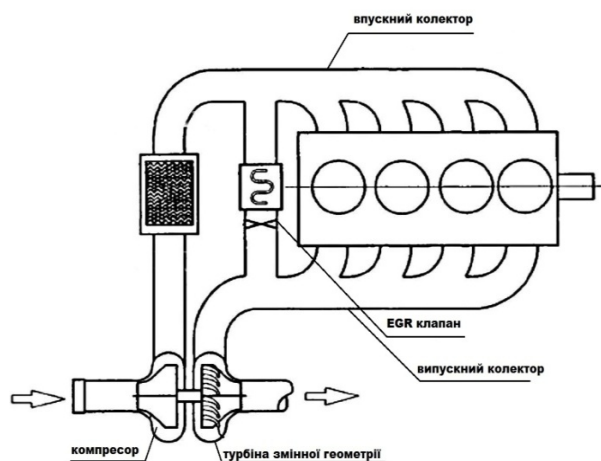


Рис. 1. Схема дизельного двигуна

Динамічна модель має три змінні стану: тиск впускного колектора p_{im} , тиск випускного колектора p_{em} , потужність компресора P_C , які описують основну динаміку і найбільш важливі системні властивості. Отже, вектором стану системи є $x = (p_{im}, p_{em}, P_C)$.

Таким чином, динамічна модель системи має вигляд (див. для деталей [14]):

$$\begin{cases} \dot{p}_{im} = k_1(W_C + u_1 - k_e p_{im}) \\ \dot{p}_{em} = k_2(k_e p_{im} - u_1 - u_2 + W_f) \\ \dot{P}_C = \frac{1}{\tau}(\eta_m P_t - P_C) \end{cases} \quad (1)$$

Тут нелінійні функції мають вигляд:

$$W_C = \frac{\eta_c}{T_a c_p} \frac{P_C}{\left(\frac{p_{im}}{p_a}\right)^\mu - 1} - \text{масовий потік через}$$

$$\text{компресор, } P_t = \eta_t c_p T_2 \left(1 - \left(\frac{p_a}{p_{em}}\right)^\mu\right) u_2 - \text{енергія}$$

$$\text{турбіни, } P_C - \text{енергія компресора, де: } k_1 = \frac{R_a T_1}{V_1},$$

$$k_2 = \frac{R_a T_2}{V_2}, k_e = \frac{\eta_v N V_d}{R_a T_1}.$$

Базуючись на викладках наведених у [14], метою керування є регулювання виходів

$$y_1 = W_C - W_C^d, y_2 = W_{egr} - W_{egr}^d \quad (2)$$

до нуля. Позначимо $u_1 = W_{egr}$ та $u_2 = W_t$ - два входи системи, що мають зміст масових потоків через системи EGR та VGT відповідно. Припустимо, що необхідні цільові значення змінних можуть бути визначені шляхом маніпулювання EGR та VGT приводів, тобто зміною положень клапану k_{egr} і пропускної здатності k_{vgt} . При такому підході треба певним чином інвертувати моделі потоків, щоб отримати положення клапану EGR і положення лопастей VGT, які є керуючими входами до моделі.

2. Методологія розробки керування

Мета розробки закону керування полягає в регулюванні складу паливно-повітряної суміші (AF) і фракції рециркульованого газу (EGR) до відповідних бажаних значень, які визначаються зі статичних даних двигуна з допомогою формул:

$$AF_{ref} = AF_{ref}(N, W_f), EGR_{ref} = EGR_{ref}(N, W_f).$$

Відповідні статичні карти бажаних значень генеруються через проведення серії експериментів на основі балансу між максимальною економією палива та мінімальним значенням шкідливих викидів оксидів азоту. Отже, в той час як бажані значення для AF визначають продуктивність двигуна і запобігають диму, регулювання фракції рециркульованого газу EGR прагне звести до мінімуму кількість викидів оксидів азоту. Відповідний набір операційних точок паливно-повітряної суміші і фракції EGR може бути перетворений в набір точок для масових потоків газів через компресор W_C^d і через систему рециркуляції відпрацьованих газів W_{egr}^d , використовуючи їх зв'язки в стійкому стані (див. Уткін (Utkin) [9-10] для додаткових відомостей).

Розглянемо задачу знаходження оптимального керування $U(x)$ для системи

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u \quad (3)$$

з наступними властивостями:

- $U(x)$ досягає асимптотичної стійкості рівноваги;

- $U(x)$ мінімізує функціонал

$$J = \int_0^{\infty} (l(x) + u^T R(x) u) dt \quad (4)$$

Робастність оптимального керування впливає з рівняння Гамільтона-Якобі-Белмана

$$l(x) + L_f V(x) - \frac{1}{4} L_g V(x) R^{-1}(x) (L_g V(x))^T = 0 \quad (5)$$

$V(x) = 0$, що задовольняє оптимальне значення функції $V(x)$. Позначення $L_p h(x)$ означає похідну Лі функції $h(x)$ уздовж векторного поля $p(x)$: $L_p h(x) = (\partial h / \partial x) p(x)$.

Використаємо метод, наведений у Янковіч (Janković) [15] для розробки закону керування, але замість квадратичної функції Ляпунова ми пропонуємо більш загальну функцію Ляпунова, яка включає компоненти, що містять добутки станів системи. Це робить цю функцію більш "гнучкою", забезпечуючи додаткові ступені свободи, щоб довести стійкість системи.

Теорема (оптимальність і стійкість) Янковіч (Janković) [20].

Припустимо, що існує додатна напіввизначена функція $V(x)$, яка задовільняє рівняння Гамільтона-Якобі-Белмана (5) так, що керування зі зворотнім зв'язком $u(x) = -\frac{1}{2} R^{-1}(x) (L_g V(x))^T(x)$ досягає асимптотичної стійкості рівноваги при $x = 0$. Тоді $u(x)$ є оптимальним стабілізуючим керуванням, яке мінімізує (4) для всіх $u(x)$ гарантуючи $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$ і $V(x)$ є оптимальним значенням функції. Доведення див. в [20].

Для розробки надійного контролера для дизельного двигуна ми використовуємо в роботі метод, що застосовується до нелінійної системи виду (3), для якої управляюча функція Ляпунова $V(x)$ відома. Управляюча функція Ляпунова CLF є гладка, позитивно визначена функція, така, що для всіх $x \neq 0$ існує керування $u(x)$, що задовольняє умову:

$$\dot{V}(x) = \frac{\partial V}{\partial x} f(x) + \frac{\partial V}{\partial x} g(x) u < 0 \quad (6)$$

Ці умови є еквівалентні умовам $L_g V(x) = 0 \Rightarrow L_f V(x) \leq 0$. Для відповідно вибраної позитивної скалярної функції $\gamma(\cdot)$ закон керування отримується з допомогою перетворення:

$$u(x) = -\frac{1}{2} \gamma(V(x)) (L_g V)^T(x) \quad (7)$$

Це керування є глобально стабілізуюче та оптимальне. Для цільового функціоналу використовується $R(x) = I$. Закон керування може бути спрощений шляхом вибору $\gamma(V(x)) = \gamma_0$ де $\gamma_0 > 0$ - стала. Глобальна стійкість втрачається, але оптимальність і асимптотична стійкість можуть бути досягнуті.

Виконаємо лінеаризацію системи (1) методом зворотної трансформації "вхід-вихід" (детально у [14, 15]). Отримаємо лінеаризовану систему:

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = w_1 \\ \dot{y}_2 = w_2 \\ \dot{z} = k_z \left(b - \frac{1}{\tau} \right) y_1 + f_z - k_z w_1 - \frac{k_z b}{k_e} w_2 \end{cases} \quad (8),$$

$$\text{де} \quad k_z = \mu p_{im}^{\mu-1} \frac{k_1}{b+a} \quad (9)$$

$$f_z = k_z \left(\left(b - \frac{1}{\tau} \right) w_c^d + b \frac{k_2}{k_e} W_f + (k_2 - k_e) p_{im} b \right) \quad (10)$$

і $z = p_{im}^{\mu} - (p_{im}^e)^{\mu}$ є функціями стану [14].

3. Побудова управляючої функції Ляпунова та контролера

Для проектування робастного контролера побудуємо управляючу функцію Ляпунова у вигляді:

$$V(\bar{y}_1, \bar{y}_2, z) = c_1 \bar{y}_1^2 + c_2 \bar{y}_2^2 + c_3 z^2 + c_4 \bar{y}_1 z + c_5 \bar{y}_2 z + c_6 \bar{y}_1 \bar{y}_2 \quad (11)$$

Згідно з визначенням, для того, щоб V була управляючою функцією для системи (10), повинна виконуватись нерівність $V = L_f V + L_g V u \leq 0$. Будемо використовувати еквівалентну умову: з того, що $L_g V = 0$ випливає, що похідна Лі $L_f V \leq 0$ для всіх $(\bar{y}_1, \bar{y}_2, z) \neq 0$. В процесі розробки закону керування, отримуємо достатню умову того, щоб V була CLF. Після правильно вибраної позитивної скалярної функції γ_0 одержимо закон керування у формі:

$$u(x) = -\frac{1}{2} \gamma_0 (L_g V)^T(x) \quad (12)$$

Теорема 1. Для того, щоб функція (11) була CLF для системи (8) достатньо, щоб виконувались умови

$$\begin{cases} d_1 > 0 \\ d_2 > 0 \\ d_2 > \frac{1}{2} d_1 \cdot \max \{ |z| \} \end{cases}$$

$$\text{де } d_1^2 = (2c_3 + c_4 c_{21} + c_5 c_{22}) k_z \left(\frac{1}{\tau} - b \right) c_{21} \quad (14)$$

$$d_2 = \frac{(2c_3 + c_4 c_{21} + c_5 c_{22}) f_z}{2d_1} \quad (15)$$

$$c_{11} = \frac{c_6 - \frac{k_z b}{k_e} c_4}{2c_1 - k_z c_4} \quad (16)$$

$$c_{22} = \frac{\frac{k_z b}{k_e} 2c_3 - c_5 - c_{11} (k_z 2c_3 - c_4)}{2c_2 - \frac{k_z b}{k_e} c_5 + c_{11} (k_z c_5 - c_6)} \quad (17)$$

$$c_{21} = \left(\frac{k_z 2c_3 - c_4}{2c_1 - k_z c_4} \right) + \left(\frac{k_z c_5 - c_6}{2c_1 - k_z c_4} \right) c_{22} \quad (18)$$

Тут c_{11}, c_{22}, c_{21} є функціями станів (див. [14] для більш докладної інформації). Побудувавши CLF, ми використовуємо її, щоб отримати оптимальний закон керування з гарантованими властивостями робастності. Оскільки V є CLF для лінеаризованої системи (8), то вона буде також управляючою функцією Ляпунова і для вихідної системи (1), що отримана шляхом зворотної трансформації. Тоді закон керування набуває вигляду:

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \gamma_0 \begin{pmatrix} L_{g1} v \\ L_{g2} v \end{pmatrix}.$$

Для системи (8), при $\dot{z} = \mu p_{im}^{\mu-1} \dot{p}_{im}$ загальна похідна V матиме вигляд:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= (2c_1 \bar{y}_1 + c_4 z + c_6 \bar{y}_2) \cdot \\ &\cdot \left[-a(\bar{y}_1 + W_c^d - k_e p_{im}) - \frac{1}{\tau} (\bar{y}_1 + W_c^d) - a u_1 + b u_2 \right] + \\ &+ (2c_2 \bar{y}_2 + c_5 z + c_6 \bar{y}_1) [k_2 (p_{im} k_e + W_f) + k_2 u_1 - k_2 u_2] + \\ &+ \mu p_{im}^{\mu-1} (2c_3 z + c_4 \bar{y}_1 + c_5 \bar{y}_2) \cdot (k_1 (\bar{y}_1 + W_c^d - k_e p_{im} + u_1)) \end{aligned} \quad (19)$$

Отримуємо:

$$\begin{aligned} L_{g1} v &= \bar{y}_1 (-a 2c_1 + c_6 k_2 + c_4 k \mu p_1^{\mu-1}) + \\ &+ \bar{y}_2 (-a c_6 + k_2 2c_2 + c_5 k_1 \mu p_1^{\mu-1}) + \\ &+ z (-a c_4 + k_2 c_5 + 2c_3 k_1 \mu p_1^{\mu-1}) \end{aligned} \quad (20)$$

$$L_{g2} v = \bar{y}_1 (b 2c_1 - k_2 c_6) + \bar{y}_2 (b c_6 - k_2 2c_2) + z (b c_4 - k_2 c_5).$$

(13) Будемо позиціонувати керування в їх заданих бажаних значеннях (операційних точках) $v_1 = u_1 - W_{egr}^d$, $v_2 = u_2 - (W_c^d + W_f)$.

Виберемо матрицю зі сталими коефіцієнтами

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} \gamma_1 & 0 \\ 0 & \gamma_2 \end{pmatrix}, \quad \text{яка забезпечує додатковий}$$

ступінь свободи в налаштуванні контролера для досягнення стабільності. Після відповідних перетворень остаточно отримуємо закон керування:

$$\begin{aligned} v_1 &= \gamma_1 [(W_c - W_c^d) (-2a c_1 + c_6 k_2 + c_4 k \mu p_1^{\mu-1}) + \\ &+ (p_{em} - p_{em}^e) (-a c_6 + 2k_2 c_2 + c_5 k_1 \mu p_1^{\mu-1}) + \\ &+ (p_{im}^{\mu} - (p_{im}^e)^{\mu}) (-a c_4 + k_2 c_5 + 2c_3 k_1 \mu p_1^{\mu-1})] \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} v_2 &= \gamma_2 [(W_c - W_c^d) (2b c_1 - k_2 c_6) + (p_{im}^{\mu} - (p_{im}^e)^{\mu}) \cdot \\ &\cdot (b c_6 - 2k_2 c_2) + (p_{im}^{\mu} - (p_{im}^e)^{\mu}) (b c_4 - k_2 c_5)] \end{aligned} \quad (22)$$

Результати моделювання контролера можна побачити в роботі Кузьмич [14].

4. Поверхні рівня управляючої функції Ляпунова

Розглянемо функцію Ляпунова (11) у формі:

$$V = (y_1, y_2, z)^T P (y_1, y_2, z) \quad (23),$$

$$\text{де } P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix} \text{ і } c_1 = p_{11}, c_2 = p_{22}, c_3 = p_{33},$$

$$c_4 = p_{21} + p_{12}, c_5 = p_{31} + p_{13}, c_6 = p_{32} + p_{23}.$$

Шляхом вибору параметрів функції Ляпунова, можна отримати різні форми та розміри поверхонь рівня функції Ляпунова як показано далі.

Звернемо увагу, що умова $L_f V < 0$ є функціональною нерівністю залежною від стану системи. Вона може бути вирішена шляхом перетворення її в задачу SOS оптимізації з використанням програмної технології SOS. Для перетворення виразу $L_f V < 0$ в алгоритмізовані умови SOS, потрібно додати деякі обмеження у вигляді $R(x) < 0$. Тоді модифікована умова стабілізації керування зворотного зв'язку в термінах SOS буде: мінімізувати функцію $R(x)$ так, що виконується умова:

$$-\left(z^2(2c_3 + c_4c_{21} + c_5c_{22})k_z\left(b - \frac{1}{\tau}\right)c_{21} + z(2c_3 + c_4c_{21} + c_5c_{22})f_z\right) + R(x) \in SOS \quad (24)$$

при умові $\left(b - \frac{1}{\tau}\right) > 0$.

Основні кроки оптимізаційного обчислювального алгоритму:

-маючи умову $L_{g1}V = 0$, $L_{g2}V = 0$ і $L_fV < 0$

для управляючої функції Ляпунова V , розв'яжемо задачу SOS-декомпозиції (24);

-маючи початкові значення констант $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6$ функції Ляпунова (23), розрахуємо c_1 за результатами рішення SOS-задачі;

-виконується перевірка умови $V > 0$, для розрахунку критерію якості J ;

-після цього шляхом ітеративного підбору параметрів, перевіряють умову $J \rightarrow \min$.

Застосовуючи ітеративний алгоритм, отримуємо стабілізований стан системи при тому, що помилка оцінки прямує до нуля.

5. Результати моделювання

1) Для параметрів $p_{12} = 0.004$, $p_{13} = 0.0061$, $p_{21} = 0.021$, $p_{22} = 0.01$, $p_{23} = 0.01$, $p_{31} = 0.01$, $p_{32} = -0.01$, $p_{33} = 0.3$, ми розрахуємо $c_1 = 3.2$.

Отримаємо $M = \begin{pmatrix} 3.2 & 0.004 & 0.0061 \\ 0.021 & 0.01 & 0.01 \\ 0.01 & -0.01 & 0.3 \end{pmatrix}$.

Функція Ляпунова $V = 3.6$. Моделювання форми і поверхні рівня функції Ляпунова можна бачити на рис.2.

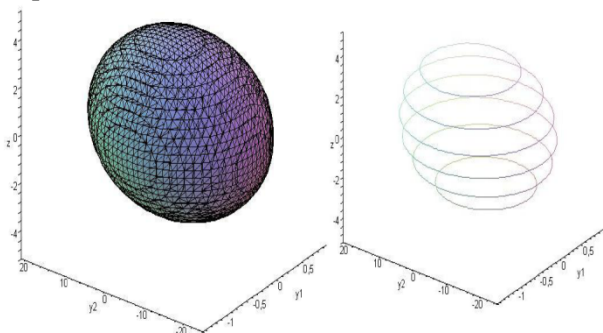


Рис. 2. Функція Ляпунова та поверхні рівня, отримані в експерименті (1).

2) $p_{12} = 0.009$, $p_{13} = 0.011$, $p_{21} = 0.071$, $p_{22} = 0.4$, $p_{23} = 0.07$, $p_{31} = 0.09$, $p_{32} = -0.05$, $p_{33} = 0.3$, ми розрахуємо $c_1 = 489.15$.

Отримаємо матрицю:

$$M = \begin{pmatrix} 489.15 & 0.009 & 0.011 \\ 0.071 & 0.4 & 0.07 \\ 0.09 & -0.05 & 2 \end{pmatrix}.$$

Функція Ляпунова $V = 491.7$. Можна побачити результати моделювання на рис. 3.

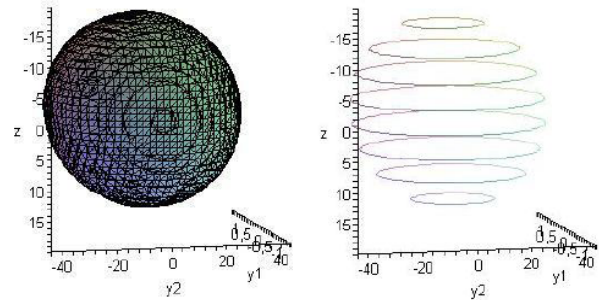


Рис. 3. Функція Ляпунова та поверхні рівня, отримані в експерименті (2).

3) $p_{12} = 0.004$, $p_{13} = 0.091$, $p_{21} = 0.011$, $p_{22} = 0.02$, $p_{23} = 0.001$, $p_{31} = 0.03$, $p_{32} = -0.01$, $p_{33} = 0.1$, ми розрахуємо $c_1 = 1.05$ і отримаємо

$$M = \begin{pmatrix} 1.05 & 0.004 & 0.0091 \\ 0.011 & 0.02 & 0.001 \\ 0.03 & -0.01 & 0.1 \end{pmatrix}.$$

Функція Ляпунова $V = 1.21$, це можна бачити на рис. 4.

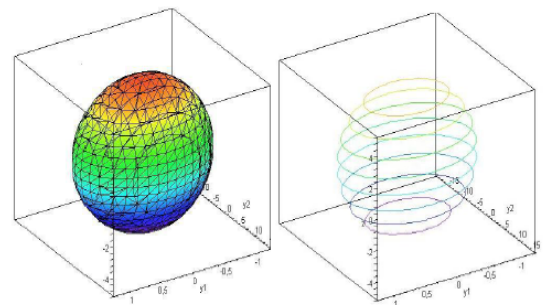


Рис. 4 Функція Ляпунова та поверхні рівня, отримані в експерименті (3).

4) $p_{12} = 0$, $p_{13} = 0$, $p_{21} = 0$, $p_{22} = 0.02$, $p_{23} = 0.001$, $p_{31} = 0.003$, $p_{32} = 0$, $p_{33} = 0.1$, ми розрахуємо $c_1 = 2.13$ і отримаємо

$$M = \begin{pmatrix} 2.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.02 & 0.001 \\ 0.003 & 0 & 0.1 \end{pmatrix}.$$

Функція Ляпунова $V = 2.25$ (див. рис. 5).

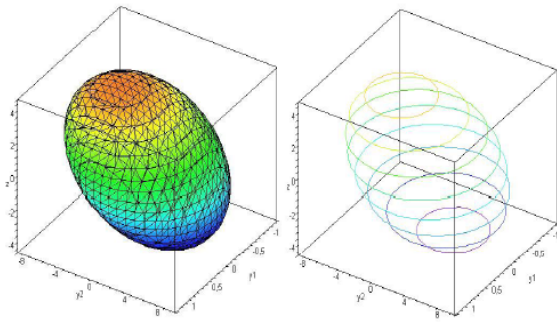


Рис.5. Функція Ляпунова та поверхні рівня, отримані в експерименті (4).

Порівняння функцій Ляпунова для моделювання (3) і (4) представлено на рис.6, і функції моделювання Ляпунова (1), (3) і (4) показані на рис. 7.

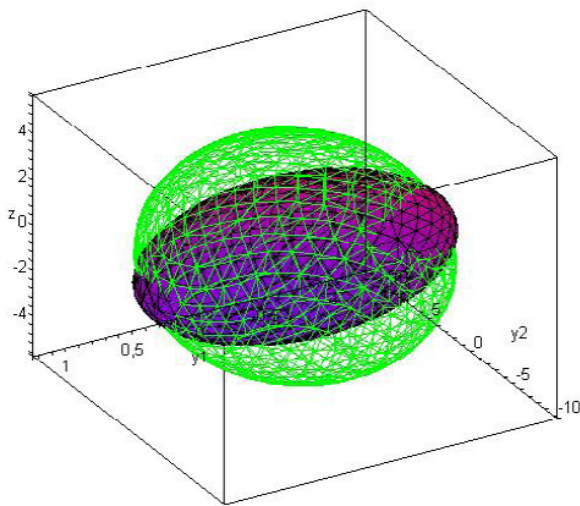


Рис.6. Порівняння функцій Ляпунова отриманих в експериментах (3) та (4).

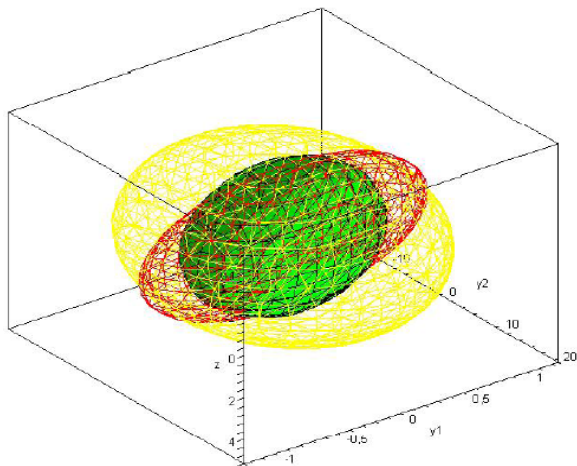


Рис. 7. Порівняння функцій Ляпунова отриманих в експериментах (1), (3) та (4).

Оптимальний підбір параметрів в рамках виконання умов стійкості нелінійної системи покращує продуктивність контролера. Це забезпечує більшу свободу досягнення високого рівня продуктивності для результируючих коефіцієнтів підсилення контролера шляхом адаптації функції Ляпунова та використання обчислювального алгоритму оптимального вибору. Така узагальнена форма функції Ляпунова, забезпечує отримання найкращих її параметрів та в результаті - побудову нелінійного закону керування такого, що забезпечує екстремум цільового функціоналу. Процедура обчислення їх базується на використанні SOS програмування.

Висновки

В даній статті представлено спосіб пошуку найкращої форми управляючої функції Ляпунова та на основі цього обчислення параметрів керування для досягнення оптимального критерію якості. Перевірено різні форми функцій Ляпунова для того, щоб отримати більш високу продуктивність при використанні узагальненої форми функції Ляпунова із додатковими ступенями свободи. Це дає кращу продуктивність керування і глобальну збіжність системи помилок. У майбутніх дослідженнях планується вдосконалити алгоритм оптимізації та провести його апробацію на реальних даних для операційних точок контролера дизельного двигуна.

Список використаних джерел

1. Wahlstrom J. EGR-VGT control and tuning for pumping work minimization and emission control / J Wahlstrom, L. Eriksson, L. Nielsen // In IEEE Transaction on Control Systems Technology. -2010.- Vol. 18. - № 4. - pp. 993–1003.
2. Cook J. Automotive Powertrain Control: A Survey / J Cook, Jing Sunz, J. H. Bucklandy, I. V. Kolmanovskyy, H. Pengz, J. W. Grizzlez // Asian Journal of Control. - 2006. - Vol. 8. - № 3. - pp. 237-260.
3. Stefanopoulou A.G. Control of Variable Geometry Turbocharged Diesel Engines for Reduced Emissions / A.G Stefanopoulou, I. Kolmonovsky, J. S. Freudenberg // In IEEE Transactions on Control System Technology.- 2000. - Vol. 8. - № 4.- pp. 733-745.
4. Dambrosio L. VGT Turbocharger Controlled by an Adaptive Technique / L Dambrosio, G. Pascasio, B. Furtunato // In Transactions on Mechatronics.- 2003. - Vol. 8. - № 4.- pp. 492-499.
5. Kao M. Turbocharged Diesel Engine Modeling for Nonlinear Engine Control and State Estimation / M Kao, J.J. Moskwa // Transactions of ASME.-1995. - Vol. 117. - pp. 20-30.
6. Jankovic M. Robust nonlinear controller for turbo charged diesel engines / M. Jankovic, I. Kolmanovsky // In Proceedings of the American Control conference.- Philadelphia, Pennsylvania.- 1998. - pp. 1389–1395.
7. Kolmanovsky I. Nonlinear Charge Control in Direct Injection Gasoline Engines / I Kolmanovsky, J. Sun, M. Druzhinina // In Proceedings of the 2002 IFAC World Congress. - Barcelona, Spain. - 2002. - pp. 216-221.
8. Upadhyay D. Multivariable Control Design for Intake Flow Regulation of a Diesel Engine Using Sliding Mode / D Upadhyay, V.I. Utkin, G. Rizzoni // 15th Triennial World Congress.- Barcelona, Spain. 2002. - pp. 21-26.
9. Utkin V. Sliding Modes in Control Optimization.- USA: Springer Verlag.- 1992.-286 p.
10. Utkin V. Sliding Mode Control for Variable Geometry Turbocharged Diesel Engines / V Utkin, Hao-Chi Chang, I. Kolmanovsky, J. A. Cook // In Proceedings of the American Control Conference Chicago. - Illinois. - 2000.- Vol.1.- №6. -pp.584-588.
11. Wahlstrom J. Modeling diesel engines with a variable-geometry turbocharger and exhaust gas recirculation by optimization of model parameters for capturing nonlinear system dynamics / J. Wahlstrom L. Eriksson // In Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers. Part D. Journal of Automobile Engineering. - 2011. -Vol. 225. -№7.- pp. 960-986.
12. Wahlstrom J. Nonlinear EGR and VGT Control with Integral Action for Diesel Engines. Oil and Gas Science and Technology / J Wahlstrom, L. Eriksson // Rev. IFP Energies nouvelles. - 2011. - Vol. 66. - № 4.- pp. 573–586.
13. Djemili I. Control strategy for the air path dynamic system / I Djemili, H.P. Wang, A. Aitouche, V. Cocquempot, J. Bosche, A. El Hajjaji // In Proceedings of the 20th Mediterranean Conference on Control and Automation (MED).- Barcelona, Spain. - 2012. – pp. 960-965.
14. Kuzmych O. CLF-Based Nonlinear Control Design for Turbocharged Diesel Engine / O. Kuzmych, O.A. Aitouche // IEEE 21st Mediterranean Conference on Control and Automation. - Greece. - 2013. - pp. 821-835.
15. Jankovic M. Constructive Lyapunov Control Design for Turbocharged Diesel Engines / M. Jankovic, I. Kolmanovsky // IEEE Transaction on Control Systems Technology. - 2000. -Vol. 8. - № 2.- p. 288.
16. Prajna S. Nonlinear Control Synthesis by Sum of Squares Optimization: A Lyapunovbased Approach / S Prajna, A. Papachristodoulou, F. Wu // In Proceedings of the 5th Asian Control Conference.- 2004. - pp. 157-165.
17. Prajna, S. SOSTOOLS. Sum of Squares Optimization Toolbox for MATLAB / S Prajna, A. Papachristodoulou, P. Seiler, P. A. Parrilo // Users guide. - 2004. – 98 p.
18. Zheng Qian. Sum of Squares Based Nonlinear Control Design Techniques // Dissertation submitted to the Graduate Faculty of North Carolina State University. - 2009. - 44 p.
19. Tanaka K. Guaranteed Cost Control of Polynomial Fuzzy Systems via a Sum of Squares Approach / K. Tanaka, H. Ohtake, H.O. Wang // IEEE Transaction on System, MAN and Cybernetics, Part B: Cybernetics.- 2009. - Vol. 39.- № 2.- pp. 561-567.
20. Jankovic M. Constructive Lyapunov stabilization of nonlinear cascade systems / M. Jankovic R. Sepulchre, P. V. Kokotovic // In IEEE Transaction Automatic Control. - 1996. - pp. 1723–1753.

References

1. WAHLSTROM J., ERIKSSON L. and NIELSEN L. (2010) "EGR-VGT control and tuning

for pumping work minimization and emission control”, In *IEEE Transaction on Control Systems Technology*, vol. 18, № 4, pp. 993–1003.

2. COOK J., SUNZ JING, BUCKLANDY J. H., KOLMANOVSKYY I. V., PENGZ H., GRIZZLEZ J. W. (2006) “Automotive Powertrain Control: A Survey”. *Asian Journal of Control*, vol. 8, № 3, pp. 237-260.

3. STEFANOPOULOU A. G., KOLMONOVSKY I. and FREUDENBERG J. S. (2000) “Control of Variable Geometry Turbocharged Diesel Engines for Reduced Emissions”, In *IEEE Transactions on Control System Technology*, vol. 8, № 4, pp. 733-745.

4. DAMBROSIO L., PASCAZIO G. and FURTUNATO B. (2003) “VGT Turbocharger Controlled by an Adaptive Technique”, In *Transactions on Mechatronics*, vol. 8, № 4, pp. 492-499.

5. KAO M. and MOSKWA J.J. (1995) “Turbocharged Diesel Engine Modeling for Nonlinear Engine Control and State Estimation”, *Transactions of ASME*, volume 117, March 1995, pp. 20-30.

6. JANKOVIC M., JANKOVIC M. and KOLMONOVSKY I. (1998) “Robust nonlinear controller for turbo charged diesel engines”, In *Proceedings of the American Control conference*, Philadelphia, Pennsylvania, June 1998, pp. 1389–1395.

7. KOLMONOVSKY I., SUN J. and DRUZHININA M. (2002) “Nonlinear Charge Control in Direct Injection Gasoline Engines”, In *Proceedings of the 2002 IFAC World Congress*, Barcelona, Spain, July, pp. 216-221.

8. UPADHYAY D., UTKIN V.I. and RIZZONI G. (2002) “Multivariable Control Design for Intake Flow Regulation of a Diesel Engine Using Sliding Mode”, *15th Triennial World Congress*, Barcelona, Spain 2002, pp.21-26.

9. UTKIN V. (1992) “Sliding Modes in Control Optimization”, Springer Verlag U.S.A., 286 p.

10. UTKIN V., CHANG HAO-CHI, KOLMONOVSKY I. and COOK J.A. (2000) “Sliding Mode Control for Variable Geometry Turbocharged Diesel Engines”, In *Proceedings of the American Control Conference Chicago*, Illinois, June, vol.1, №6, pp. 584-588.

11. WAHLSTROM J. and ERIKSSON L. (2011) Institution of Mechanical Engineers. Part D. Journal of Automobile Engineering. - 2011. -Vol. 225. -№7.- pp. 960-986.

12. WAHLSTROM J. and ERIKSSON L. (2011) “Nonlinear EGR and VGT Control with Integral Action for Diesel Engines”, *Oil and Gas Science and Technology, Rev. IFP Energies nouvelles*, vol. 66, № 4, pp. 573–586.

13. DJEMILI I., WANG H.P., AITOUICHE A., COCQUEMPOT V., BOSCHE J. and HAJJAJI A. EL. (2012) “Control strategy for the air path dynamic system”, In *Proceedings of the 20th Mediterranean Conference on Control and Automation (MED)*, Barcelona, Spain, pp 960-965.

14. KUZMYCH O., AITOUICHE A. (2013) “CLF-Based Nonlinear Control Design for Turbocharged Diesel Engine”, *IEEE 21st Mediterranean Conference on Control and Automation, Greece*, pp.821-835.

15. JANKOVIC M., JANKOVIC M. and KOLMONOVSKY I. (2000) “Constructive Lyapunov Control Design for Turbocharged Diesel Engines”, *IEEE Transaction on Control Systems Technology*, vol. 8, № 2, p. 288.

16. PRAJNA S., PAPACHRISTODOULOU A. and WU F. (2004) “Nonlinear Control Synthesis by Sum of Squares Optimization: A Lyapunovbased Approach”, In *Proceedings of the 5th Asian Control Conference*, pp. 157-165.

17. PRAJNA S., PAPACHRISTODOULOU A., SEILER P. and PARRILO P.A. (2004) “SOSTOOLS. Sum of Squares Optimization Toolbox for MATLAB”, Users guide. Version 2.00. 98 p.

18. ZHENG QIAN (2009) “Sum of Squares Based Nonlinear Control Design Techniques”, *Dissertation submitted to the Graduate Faculty of North Carolina State University*, 44 p.

19. TANAKA K., OHTAKE H. and WANG H.O. (2009) “Guaranteed Cost Control of Polynomial Fuzzy Systems via a Sum of Squares Approach”, *IEEE Transaction on System, MAN, and Cybernetics Part B: Cybernetics*, vol. 39, № 2, pp. 561-567.

20. JANKOVIC M., SEPULCHRE R. and KOKOTOVIC P.V. (1996) “Constructive Lyapunov stabilization of nonlinear cascade systems”, In *IEEE Transaction Automatic Control*, pp. 1723–1753.

Надійшла до редколегії 8.12.16

УДК 519.65

Куценко І.А., к.ф.-м.н.

Алгоритми пошуку оптимальної сітки на заданому наборі точок для мінімаксної та середньоквадратичної багатовимірної сплайн-функції на хаотичній сітці

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 03127, м. Київ, пр-т Глушкова, 4д
e-mail: kutsenko_i_a@ukr.net

Igor A. Kutsenko, Ph.D.

Algorithms for finding the optimal grid on a given set of points for minimax and mean multidimensional spline-function on chaotic grid

Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03127, Kyiv, Glushkova ave., 4d
e-mail: kutsenko_i_a@ukr.net

Побудовано чотири алгоритми знаходження оптимальної сітки апроксимаційної БСФХС (багатовимірної сплайн-функції на хаотичній сітці) її побудови шляхом виключення та включення точок сітки. Точність наближення випадкових даних – абсолютна та середньоквадратична. Точки для сітки вибираються з дискретної скінченної множини наявних вимірів. Оптимальність сітки розуміється як мінімальна кількість точок при заданій точності наближення сплайн-функцією в усіх точках наявних вимірів.

Ключові слова: багатовимірна сплайн-функція на хаотичній сітці, задана сітка, виключення та включення точок сітки.

This is considered the task of data processing: the input is a data stream consisting of discrete measurement values of an unknown multidimensional smooth function in some points of the values of its variables. When processing real measurements data to obtain the most accurate prediction of process behavior, represented by data flow, it is necessary to build a sufficiently robust and accurate computer model that describes the behavior of the process. The article as a model is considered a multidimensional spline function on a chaotic grid of its construction. The article as a model is considered a MSFCG (multidimensional spline function on a chaotic grid) of its construction. We demonstrate the use of such spline functions as the best choice among all the spline functions at the expense of the simplicity and universality of the model in the form of simple sums of certain functions, which is the only spline function for the entire set definition of variables and requires less computer memory for its construction. But for approximate MSFCG has its own problems. So, to calculate the coefficients we need to find the inverse to of a symmetric dense matrix. On the other hand, by reducing the grid becomes less local optimums MSFCG, it becomes more smooth, and can therefore increase the predicted stability of its behavior inside the area bounded by measurement points. Therefore, you should build a spline function with a minimum number of points of the grid. And to this spline function has been fairly accurate throughout the dataset. Constructed four algorithms for finding an optimal grid of approximate MSFCG by exclusion and inclusion of points grid. Accuracy approximation of random data - the absolute and the mean. Points for the grid are selected from a discrete finite set of available measurements. Optimum grid understood as the minimum number of points for a given accuracy of approximation spline-function at all points available measurements.

Key words: multidimensional spline-function on chaotic grid, a given grid, exclusion and inclusion of points grid.

Статтю представив д. ф.-м. н., проф. Буй Д. Б.

Вступ

В статті розглядається задача обробки даних, коли на вході є потік даних, що складається з дискретних вимірів значень невідомої гладкої багатовимірної функції в деяких точках значень її змінних. Для отримання максимально точного

прогнозу поведінки процесу, представленого потоком даних, при обробці даних реальних вимірів, необхідно побудувати достатньо стійку та точну комп'ютерну модель, що описує поведінку процесу.

В якості моделі розглядається багатовимірна

сплайн-функція на хаотичній сітці її побудови. Дасться обґрунтування використання саме такої сплайн-функції в якості найкращого вибору серед всіх сплайн-функцій за рахунок: простоти та універсальності моделі в вигляді простої суми деяких функцій; така сплайн-функція являється єдиною сплайн-функцією для всієї множини визначення змінних; вона вимагає менше комп'ютерної пам'яті для своєї побудови.

З метою: підвищення стійкості як самої сплайн-функції, так і обчислень значень її коефіцієнтів, а також - економії обчислень та пам'яті при побудові та використанні сплайн-функції, ставиться задача знаходження оптимальної сітки сплайн-функції з мінімальною кількістю точок при заданій точності наближення в усіх точках даних вимірів.

В статті використовуються D^m -сплайни, створені Василенком В.А. з Новосибірська [1,2]. Але така назва приховує суттєві властивості таких сплайн-функцій. Тому надалі буде використовуватись скорочення БСФХС (багатовимірна сплайн-функція на хаотичній сітці) її побудови. БСФХС суттєво відрізняється від інших сплайн-функцій і в статті приведено загальний порівняльний аналіз особливостей БСФХС та інших сплайн-функцій.

Надалі потрібно буде знати конкретний вигляд БСФХС та особливості її побудови в $(n+1)$ вимірному просторі дійсних чисел R^{n+1} .

1. Побудова інтерполяційної та апроксимаційної БСФХС з наперед заданою сіткою

Спочатку визначимо, як будувати на заданій сітці $\bar{P}$ інтерполяційну сплайн-функцію $\sigma(\bar{P}; \bar{\lambda}; x)$, яка в точках $P^{(k)}$ сітки $\bar{P} = (P^{(1)}, P^{(2)}, \dots, P^{(N)})$ приймає деякі наперед задані значення z_k , $k = \overline{1, N}$ [1-3]:

$$\sigma(\bar{P}; \bar{\lambda}; P^{(k)}) = z_k, \quad k = \overline{1, N} \quad (1)$$

і має вид суми функцій Гріна та складових поліноміального ядра варіаційного енергетичного оператора [1,2], помножених на лінійні коефіцієнти:

$$\sigma(\bar{P}; \bar{\lambda}; x) = \sum_{k=1}^N \lambda_k G_{m,n}(x - P^{(k)}) + \sum_{|\alpha| \leq m-1} \nu_\alpha x^\alpha, \quad (2)$$

де $P^{(k)} = (P_1^k, P_2^k, \dots, P_n^k)^* \in R^n$, $k = \overline{1, N}$,
 $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdot x_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot x_n^{\alpha_n}$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^*$, $*$ - знак

транспонування, $x_k^{\alpha_k}$ - k - а координата в α_k -й степені, функції Гріна

$$G_{m,n}(x - P) = \begin{cases} \|x - P\|^{2m-n} \ln \|x - P\|, & n = 2k \\ \|x - P\|^{2m-n}, & n = 2k - 1 \end{cases},$$

$$\|x - P\| = \left[\sum_{i=1}^n (x_i - P_i)^2 \right]^{\frac{1}{2}}, \quad P = (P_1, P_2, \dots, P_n)^*.$$

$\sum_{|\alpha| \leq m-1}$ - сума всіх можливих комбінацій по α до $m-1$ включно складових поліноміального ядра

[1]: при $m=1$ та $\alpha=0$ - це лише вільний

коефіцієнт ν_0 ; при $m=2$ та $\alpha=1$ - $\nu_0 + \sum_{k=1}^n \nu_k x_k$ -

це сума складових при $m=1$ та $\alpha=0$ + складові

при лінійній формі $\sum_{k=1}^n \nu_k x_k$; при $m=3$ та $\alpha=2$ -

це сума складових при $m=2$ та $\alpha=1$ + складові

при квадратичній формі $\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \nu_{kl} x_k x_l$ і т.д. При

визначеній розмірності простору n та при заданому коефіцієнті гладкості m отримаємо всього

$$g = C_n^m = \frac{(n+m-1)!}{n!(m-1)!} \quad (3)$$

складових. Для неперервності функцій Гріна $G_{m,n}(x - P)$ необхідно виконання умови $m > n/2$.

Зведення висновків варіаційної теорії побудови БСФХС до простих алгебраїчних умов дозволяє розглядати знаходження коефіцієнтів такого сплайну як розв'язок деякої системи лінійних рівнянь. Для цього введемо для коефіцієнтів ν і функцій ядра при них з формули (2) суцільну лінійну індексацию: $\nu_l, l = \overline{1, g}$, та сформуємо з коефіцієнтів $\lambda_i, i = \overline{1, N}$ і $\nu_l, l = \overline{1, g}$ єдиний вектор

$$\bar{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N, \nu_1, \nu_2, \dots, \nu_g)^*, \quad (4)$$

розмірністю $N_g = N + g$. Тоді значення вектору коефіцієнтів $\bar{\lambda}$ (4) визначаються з двох алгебраїчних умов: 1) співпадіння значень сплайн-функції в заданих точках $\bar{P}$ (1) та 2) ортогональності функцій поліноміального ядра між собою на цих же точках. В матричній формі це має такий узагальнений вид:

$$C \cdot \bar{\lambda} = \bar{z}, \quad (5)$$

де матриця C має розмірність $N_g \times N_g$, її явний вигляд визначається в [3], а $\bar{z} = (z_1, z_2, \dots, z_N, 0, 0, \dots, 0)^*$ - вектор заданих значень розмірністю N_g . Щоб система (5) мала розв'язок, необхідно виконання умови $N \geq g$.

Побудова мінімаксно та середньоквадратично точної апроксимаційної БСФХС з наперед заданою сіткою

Постановка задачі. Нехай в нас є деякий масив $Y \in R^{n+1}$ з M ($n+1$) - вимірних точок вигляду:

$$Y = \begin{pmatrix} x_1^{(1)} & \dots & x_n^{(1)} & f_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{(M)} & \dots & x_n^{(M)} & f_M \end{pmatrix}, \quad (6)$$

отриманий в результаті вимірювання значень $(f_1, \dots, f_M)$ деякої невідомої дійсної функції $f_i = f(x^{(i)})$ на множині $X = \{x^{(i)}, i = \overline{1, M}\}$ з M n - вимірних точок з дійсними координатами $x^{(i)} = (x_1^{(i)}, \dots, x_n^{(i)})^*, i = \overline{1, M}$. Тут M значно більше n .

Нехай нам відома опукла множина $\Omega \in R^n$ мінімального об'єму, для якої точки множини X є внутрішніми для Ω чи лежать на її границі.

Зауваження. Побудова такої вписаної в X опуклої множини Ω є сама-по собі непростою задачею. Тому в крайньому випадку можна скористатись гіперкубом з ребрами від мінімального до максимального значення кожної з n координати. Але при цьому зменшується достовірність гарантована точність відтворення значень функції f в точках, які лежать між точками вимірів.

Необхідно знайти на деякій заданій сітці $\bar{P}$ таку сплайн-функцію $\sigma(\bar{P}; \bar{\lambda}; x)$ вигляду (2), з коефіцієнтами $\bar{\lambda}$ (4), що на масиві Y для неї будуть виконуватись умови:

$$\Delta = |r_i(\bar{\lambda})| = \min_{\bar{\lambda}} \max_{1 \leq i \leq M} |r_i(\bar{\lambda})|, \quad (7)$$

$$s_N = s/N, \quad s = \sum_{i=1}^M [r_i(\bar{\lambda})]^2 = \min_{\bar{\lambda}} \sum_{i=1}^M [r_i(\bar{\lambda})]^2, \quad (8)$$

де $r_i(\bar{\lambda}) = \sigma(\bar{P}; \bar{\lambda}; x^{(i)}) - f_i, i = \overline{1, M}$.

Порядок побудови апроксимаційної БСФХС

Апроксимаційну як середньоквадратичну, так і мінімаксну БСФХС на заданій сітці $\bar{P}$ для системи (6) можна побудувати як деяку інтерполяційну (2), але зі своїми особливими оптимальними значеннями вектору $\bar{z}^{onm} = (z_1^{onm}, z_2^{onm}, \dots, z_N^{onm}, 0, 0, \dots, 0)^*$ (1) в N точках сітки $\bar{P}$.

Для знаходження $\bar{z}^{onm}$ покладемо вимогу, щоб сплайн-функція $\sigma(\bar{P}; \bar{\lambda}; x)$ (2) в M точках сітки $X = \{x^{(i)}, i = \overline{1, M}\}$ масиву вимірів (6) максимально точно, (тобто з мінімальною похибкою виду (7) чи (8)) наближала значення функції f у всіх M точках. Таким чином отримуємо перевизначену систему рівнянь

$$\sigma(\bar{P}; \bar{\lambda}; x^{(i)}) = f_i, \quad i = \overline{1, M}, \quad (9)$$

за якою нам треба знайти $\bar{\lambda}^{onm}$ - оптимальні значення вектору коефіцієнтів $\bar{\lambda}$. В системі (9) на основі рівняння (5) здійснимо перехід від вектору $\bar{\lambda}$ до вектору $\bar{z}$ за формулою

$$\bar{\lambda} = C^{-1} \cdot \bar{z}, \quad (10)$$

і в результаті отримаємо деяку перевизначену систему рівнянь з вектором:

$$a^{(i)} \cdot \bar{z} = f_i, \quad i = \overline{1, M}, \quad (11)$$

для якої конкретний вигляд векторів $a^{(i)}$ визначається в [4, 5]. Розв'язок системи (11) для мінімаксного критерію (7) шукаємо методом Ремеза [5], а для середньоквадратичного критерію (8) - методом найменших квадратів [4, 5].

Після знаходження $\bar{z}^{onm}$ $\bar{\lambda}^{onm}$ отримується за формулою (10).

2. Побудова оптимальної БСФХС, достатньо точної і з найменшою сіткою

Обґрунтування використання БСФХС в якості найкращими вибору серед всіх сплайн-функцій

Нехай нам відомо набір багатовимірних точок дискретних вимірів вигляду Y (6) якоїсь гладкої функції відгуку f , про яку нам більш наперед нічого не відомо.

Для побудови функції відтворення деякої гладкої функціональної поверхні за значеннями

її дискретних вимірів $(f_1, \dots, f_M)$ (6) в довільних точках множини визначення змінних $X = \{x^{(i)}, i = \overline{1, M}\}$ (6), за якими будується поверхня, можна використовувати різні сплайн-функції, побудовані на різних заданих сітках їх побудови $\bar{P}$. Для гладкості сплайн-функцій в точках сітки накладається такі умови, як співпадіння значень функцій та їх похідних.

Відомі два види сплайн-функцій, які конструктивно визначаються на всій множині.

1) Окремі сплайн-функції, побудовані на різних підмножинах множини визначення змінних Ω та умовами гладкості "зшиті" між собою на межах підмножин: поліноміальні сплайни, В-сплайни (NURBS) Т-сплайни [6].

2) Єдина сплайн-функція для всієї множини визначення змінних Ω в вигляді суми функцій Гріна та поліномів: $\sigma(\bar{P}; \bar{\lambda}; x)$ (2) [1,2].

Окремі сплайн-функції на регулярній, тобто, прямокутній, сітці, були спочатку побудовані з практичних міркувань, і лише потім знайшли їх зв'язок з варіаційною теорією. В багатовимірному випадку для своєї побудови вони, як правило, вимагають визначення мінімум 3^n точок регулярної сітки, де n – розмірність простору.

На відміну від окремих сплайн-функцій на регулярній сітці формули розрахунків для БСФХС виведені з варіаційної теорії і в багатовимірному випадку для своєї побудови вони вимагають визначення значно менше точок: всього C_n^m , де $m > n/2$. До того ж точки побудови сплайн-функцій на хаотичній сітці є довільними, а самі функції мають вигляд простої суми деяких функцій без будь-яких обмежень на використання (крім тих міркувань, що не доцільно використовувати сплайн-функцію далеко від області її побудови).

Зосередимось на розгляді особливостей побудови саме БСФХС і надалі в тексті під сплайн-функцією слід розуміти тільки БСФХС.

Для повного визначення деякої БСФХС необхідно знати три речі: 1) кількість точок побудови N ; 2) значення координат самих точок $P^{(k)}$, $k = \overline{1, N}$ визначаючої сітки $\bar{P}$; 3) значення лінійних коефіцієнтів при адитивних складових в формулі сплайн-функції $\bar{\lambda}$ (4).

Обґрунтування необхідності знаходження оптимальної сітки для побудови БСФХС

Коли відома кількість точок сітки побудови сплайн-функції N та конкретно визначено

положення в R^n кожної її багатовимірної точки $P^{(k)}$ для визначення сітки $\bar{P}$, тоді не виникає питання побудови такої апроксимаційної функції [1-4], тому що конструктивно відомо, як знайти значення лінійних коефіцієнтів $\bar{\lambda}$ (4) при адитивних складових в її формулі (2) на основі рівнянь (1).

Але в кожному конкретному випадку відтворення гладкої функціональної поверхні за значеннями в деяких точках її дискретних вимірів виникає питання знаходження найкращої сітки побудови сплайн-функції $\bar{P}$ з мінімальною кількістю її точок N та достатньою точністю наближення даних вимірів.

Це викликано необхідністю вирішення двох різних проблем в процесі побудови апроксимаційних БСФХС.

З одного боку, при рості кількості точок сітки для побудови сплайн-функції, відбувається зростання кількості проведення все більш нестійких обчислень в процесі знаходження значення лінійних коефіцієнтів при адитивних складових. Це викликано тим, що необхідно обернути деяку щільну квадратичну матрицю C (5), розмірність $(N+9) \times (N+9)$ якої квадратично росте разом з ростом кількості точок сітки N . Як відомо, обернення великих щільних матриць, починаючи з деякого моменту, викликає суттєві труднощі. Тому чим менша сітка – тим краще, простіше та надійніше, стійкіше, можна визначити сплайн-функцію на ній.

З іншого боку, за рахунок зменшення сітки стає менше локальних оптимумів БСФХС, вона стає все більш гладкою, і тому відбувається підвищення прогнозованої стійкості її поведінки всередині області Ω , обмеженої точками вимірів X . Але при побудові апроксимаційних сплайн-функцій на конкретному наборі даних важливо знаходити саме такі точки для сітки, які дозволяють сплайн-функції з найменшою їх кількістю максимально точно відтворювати значення f у всіх заданих точках.

Тому одним із самих визначальних моментів при побудові апроксимаційної БСФХС власне є саме знаходження оптимальної сітки побудови такої функції.

Постановка задачі побудови оптимальної сітки для БСФХС

Задача полягає в тому, щоб знайти таку найкращу сітку $\bar{P}_{opt}$ для побудови БСФХС $\sigma(\bar{P}_{opt}; \bar{\lambda}; x)$ (2), яка задовольняє наступним

трьом умовам:

1) вона повинна мати найменшу кількість точок N ;

2) на цій сітці можна буде побудувати достатньо точну сплайн-функцію;

3) при цьому точки для сітки слід шукати тільки серед точок заданої скінченної дискретної множини вимірів $X : P^{(k)} = x^{(i_k)}$, $k = \overline{1, N}$.

Достатньо точну БСФХС слід розуміти в сенсі, що вона задовольняє відповідно до однієї з вимог точності наближення даних:

1) абсолютно точного наближення

$$\Delta \leq \bar{\Delta}; \quad (12)$$

2) відносного середньоквадратичного:

$$s_M \leq \bar{s}_M. \quad (13)$$

Тут Δ (7) є абсолютною обчисленою для $\sigma(\bar{P}; \bar{\lambda}; x)$ похибкою наближення на всіх M точках даних Y (6), а $\bar{\Delta}$ - заданою допустимою. Аналогічно s_M (8) та $\bar{s}_M$ - відносні середньоквадратичні. За допомогою $\bar{\Delta}$ та $\bar{s}_M$ встановлюється критичний рівень допустимої точності. Вони завжди задаються апіорі як наперед визначені абсолютні значення, хоча, звісно, їх можна адаптивно уточнювати в процесі проведення розрахунків.

Також можна задавати точність обчислень апостеріорі, відносно через коефіцієнт відношення похибки наближення сплайн-функцією при одній викинутій точці до точності на сітці з викинутими i точками $w_{abc} = \Delta^{(1)} / \Delta^{(i)}$ - для абсолютної похибки, $w_{скв} = s_M^{(1)} / s_M^{(i)}$ - для середньоквадратичної. $2 \leq i \leq M - 9$:

$$w_{abc} \leq \bar{w}_{abc}, \quad (14)$$

$$w_{скв} \leq \bar{w}_{скв}. \quad (15)$$

За допомогою $\bar{w}_{abc}$ та $\bar{w}_{скв}$ встановлюється критичний рівень допустимої точності.

Є два протилежні підходи для знаходження найкращого набору точок сітки побудови сплайн-функції з вже визначеного, заданого набором даних X :

1) скорочення існуючої сітки з великою кількістю точок, зменшення кількості точок;

2) нарощування деякої початкової сітки, починаючи з мінімально необхідною кількістю точок.

Спочатку розглянемо алгоритми скорочення

сітки.

3. Алгоритми скорочення існуючої сітки з великою кількістю точок відповідно до заданого критерію точності, мінімаксного чи середньоквадратичного

Зауваження. Ці алгоритми можна використовувати лише в випадку, коли для обертання великорозмірної щільної квадратної матриці C (5) з метою знаходження $\bar{\lambda}$ (4) є достатньо оперативної пам'яті та стійка процедура обертання.

Для використання алгоритмів треба спочатку задати тип допустимої точності: абсолютний (в який входять умови (12), (13)), чи відносний (з (14), (15)). А далі – вид похибки наближення: 1) абсолютної (однієї з (12) (14)), чи 2) відносної середньоквадратичної (однієї з (13), (15))

При абсолютному типі допустимої точності слід задати $\bar{\Delta}$ для абсолютної (12) чи $\bar{s}_M$ для відносної середньоквадратичної точності наближення (13) і скористатись *Алгоритмом 1*.

При відносному типі допустимої точності слід задати $w_{abc} = \Delta^{(1)} / \Delta^{(i)}$ (14) чи $w_{скв} = s_M^{(1)} / s_M^{(i)}$ (15) $2 \leq i \leq M - 9$ і скористатись *Алгоритмом 2*.

Алгоритм 1.

1. Процедура скорочення проводиться, починаючи з повної інтерполяційної сітки, побудованої на всіх точках даних.

Задається: номер кроку $i = 0$, кількість точок в сітці $N^{(i)} = M$ і початкова сітка на 0 -му кроці $\bar{P}_{(0)} = X$.

2. Перевірка: чи залишається достатньо точок для побудови сплайн-функції.

Якщо $N^{(i)} \geq (9 + 1)$, то перехід на п.3.

Інакше $N^{(i)} = 9$ і *найкращий вихід* з повідомленням: "Сітка з мінімальною кількістю вузлів 9 гарантує задану точність."

3. З $\bar{P}_{(i)}$ виключається одна за одною підряд всі $N^{(i)}$ точок: $j = 1, N^{(i)}$.

3.1. На кожній отриманій сітці $\bar{P}_{(i,j)}$ знаходиться апроксимаційна сплайн-функція $\sigma(\bar{P}_{(i,j)}; \bar{\lambda}; x^{(i)})$ і обчислюються: різниці наближення $r_i = \sigma(\bar{P}_{(i,j)}; \bar{\lambda}; x^{(i)}) - f_i$, $i = \overline{1, M}$ та похибки $\Delta^{(i,j)} = \max_{1 \leq i \leq M} |r_i|$, (чи $s_M^{(i,j)} = \sum_{i=1}^M r_i^2$).

3.2. Щоб визначити номер точки $\bar{j}$, викидання якої на i -му кроці призведе на до *найменшого зростання похибки*, серед всіх

похибок знаходиться мінімальна

$$\Delta^{(i,j)} = \min_{1 \leq j \leq N^{(i)}} \Delta^{(i,j)} \text{ (чи } s_M^{(i,j)} = \min_{1 \leq j \leq N^{(i)}} s_M^{(i,j)}).$$

3.3. Запам'ятовується: номер кроку $i = i + 1$, кількість точок в сітці $N^{(i)} = N^{(i-1)} - 1$, сітка на i -му кроці $\bar{P}_{(i)} = \bar{P}_{(i,j)}$ та її точність $\Delta^{(i)} = \Delta^{(i,j)}$ (чи $s_M^{(i)} = s_M^{(i,j)}$).

4. Перевірка: чи не вийшли за межі допустимої точності: $\Delta^{(i)} \leq \bar{\Delta}$ (12) (чи $s_M^{(i)} \leq \bar{s}_M$ (13))?

Якщо ні – то перехід на п.2.

Якщо ж так – тоді $i = i - 1$ і перевірка: чи $i > 0$?

4.1. При $i = 0$ вихід з повідомленням: "На цьому наборі точок та при цих заданих умовах точності не можливо зменшити сітку хоч на одну точку."

4.2. При $i > 0$ вихід з виведенням попередніх значень: i , $N^{(i)}$, сітки $\bar{P}_{(i)}$ та повідомленням: "На кроці i досягли мінімальної сітки з кількістю точок $N^{(i)}$."

Алгоритм 2.

Алгоритм 2. є майже повністю аналогічний *Алгоритму 1.* з тією різницею, що для визначення w_{abc} (14) та $w_{сжв}$ (15) треба зробити один раз крок 3 *Алгоритму 1.* А на 4.-му кроці слід перевіряти показники (14) чи (15), а не (12) чи (13). У всьому іншому він повністю аналогічний.

Алгоритми скорочення заданої сітки є повністю визначеними, однозначним, чітко теоретично обґрунтованою.

Основною вадою алгоритмів скорочення заданої сітки є обчислювальні складності, що виникають під час реалізації на великій (вже більше 200) кількості точок. По перше, треба обертати великі щільні матриці. По друге, треба робити повний перебір всіх можливих варіантів: N варіантів з $N-1$ точкою сітки, $N-1$ варіантів з $N-2$ точкою сітки, $N-2$ варіантів з $N-3$ точкою сітки, і т.д. Де N – початкова кількість точок сітки.

Тому на практиці, коли є досить великий набір точок вимірів і для нього потрібно побудувати достатньо точну апроксимаційну поверхню в формі сплайн-функції, сітку для її побудови доцільно знаходити, користуватись алгоритмами з нарощуванням кількості точок.

4 Алгоритми знаходження оптимальної сітки шляхом нарощування кількості точок

Відповідно до заданого критерію точності наближення, мінімаксного чи

середньоквадратичного.

Суттєве зауваження. Щоб запустити алгоритми знаходження оптимальної сітки нарощуванням, потрібно спочатку знайти найкращу *початкову сітку* з g (3) точок. Якщо підходити до цього питання формально, тоді слід перебрати всі можливі варіанти по g точок з усіх M точок, тобто здійснити всього C_M^g переборів варіантів для знаходження *найкращої початкової сітки*. Навіть при невеликих $g \leq 20$ та $M \geq 100$ це досить велике число. Якщо ж уважно придивитись до вигляду сплайн-функції $\sigma(\bar{P}; \bar{\lambda}; x)$ (2), тоді стає зрозумілим, що в ній поліноміальне ядро задає загальне тло поверхні, фон, а функції Гріна визначають точки потенційних локальних оптимумів на цьому фоні. Тому для побудови сітки сплайн-функції скористаємось такими міркуваннями: спочатку в якості фону використаємо рівну гіперповерхню, а далі будемо добавляти точки і нарощувати ядро, поки не вийдемо на кількість з g точок, Після цього вже можна працювати з повним ядром і нарощувати лише точки для функцій Гріна.

Ясно, що критерії відносної точності (14) та (15), які потребують знання похибки для сітки з $M-1$ точок, не можна використовувати в алгоритмі нарощування точок. А можна використовувати лише абсолютні критерії (12) та (13).

Алгоритм 3. Нарощування сітки відповідно до мінімаксного критерію (12)

Ініціалізація процедури нарощування сітки

1. Задається допустима точність апроксимації для скороченої сітки $\bar{\Delta}$ (12).

2. Задається максимально допустима кількість точок сітки $N_{\max}$.

3. Задається мінімально допустима кількість точок сітки N точок: $N = n + 1$, що дозволяє побудувати $(n+1)$ – вимірну гіперплощину, де: n – розмірність простору змінних x , і 1 – розмірність функціональної поверхні.

4. Для мінімаксного критерію просто знаходимо $(n+1)$ – вимірну гіперплощину в просторі $\bar{z}$ найбільш стійким методом Ремеза [5, 7], який в процесі своєї роботи здійснює ціле направлений конструктивний перебір серед всіх можливих варіантів.

В результаті, на виході процедури Ремеза, отримуємо:

1) набір індексів $J = \{i_1, i_2, \dots, i_{n+1}\}$ - це номери

тих рівнянь-обмежень системи (6), які вже вибрані для сітки побудови сплайн-функції;

2) досягнуту точність наближення, тобто максимальної похибки Δ (7).

Тіло процедури нарощування сітки

5. На множині точок $J = \{i_1, i_2, \dots, i_N\}$ будується сплайн-функція $\sigma(\bar{P}; \bar{\lambda}; x)$ (2).

5.1. При побудові $\sigma(\bar{P}; \bar{\lambda}; x)$, при $N \leq \mathcal{G}$ здійснюється нарощення ядра: кожен раз добавляються функції поліноміального ядра відповідно номерам індексів $\nu_l, l = \overline{1, \mathcal{G}}$, які ми ввели для формули (2).

6. Δ (7) знаходиться для всіх M точок, а на точках $M - N$, не включених в сітку $\bar{P}$, з множини індексів $I_1 = I \setminus J$, $I = \{1, 2, \dots, M\}$ знаходиться максимальна похибка $\Delta_{I_1}^{\max}$ та відповідний їй номер точки i_{N+1} :

$$\Delta_{I_1}^{\max} = r_{i_{N+1}} = \max_{i \in I_1} r_{i_{N+1}}, \quad r_i = |\sigma(\bar{P}_{(i,j)}; \bar{\lambda}; x^{(i)}) - f_i|,$$

$$i = \overline{1, I_1}.$$

7. Перевірка: якщо $\Delta \leq \bar{\Delta}$ (12) - тоді досягли допустиму точність апроксимації і: перехід на п.10 - *успішний вихід* з повідомленням: "Сітка з мінімальною кількістю вузлів N гарантує задану точність $\bar{\Delta}$."

8. Перевірка: якщо $N \geq N_{\max}$ - тоді вже набрали допустиму кількість точок сітки і більше рахувати не можемо: перейти на п.10 - *вимушений вихід* з повідомленням: "Вже досягли максимально допустимої кількості вузлів $N_{\max}$, але не досягли заданої точності. Досягнута точність Δ більше заданої $\bar{\Delta}$ ".

9. Вибір наступної точки для включення в сітку. Вибирається та точка з індексом i_{N+1} , на якій досягається Δ (7) в п.6. Включаємо її в масив індексів $J = \{i_1, i_2, \dots, i_N\}$, який після включення буде мати вигляд $J = \{i_1, i_2, \dots, i_{N+1}\}$. Для нарощування сітки задаємо $N = N + 1$ та переходимо на п. 5.

10. Вихід з виведенням результату: точності наближення $\bar{\Delta}$, Δ , кількості точок сітки N , значення самих точок сітки $\bar{P}$.

Алгоритм 4. Нарощування сітки відповідно до середньоквадратичного критерію (8) є майже повністю аналогічний попередньому *Алгоритму 3*. Є лише три різниці:

1) В п.1. задається допустима точність апроксимації $\bar{s}_M$ (13).

2) В п.7 слід рахувати s_M (8) та її перевіряти на допустиму точність апроксимації $\bar{s}_M$ (13).

3) При виводі результатів вказується відповідний середньоквадратичний критерій.

Висновки

В результаті проведених досліджень розроблено конструктивні алгоритми пошуку оптимальної сітки для багатовимірної сплайн-функції з хаотичною сіткою її побудови при мінімаксії та середньоквадратичній заданій точності наближення даних вимірів. Під оптимальною сіткою для побудови сплайн-функції розуміється спеціально підібраний набір багатовимірних точок мінімальної кількості з простору діючих факторів R^n такий, що побудована на ньому апроксимаційна сплайн-функція гарантує задану точність відтворення значень вимірів в усіх точках даних, на всій дискретній скінченній множині наявних вимірів.

В статті представлено чотири алгоритми знаходження оптимальної сітки побудови БВСХС для різних заданих вимог точності: два – за рахунок виключення точок з сітки, два – включення.

Методом скорочення існуючої сітки з великою кількістю точок розроблено два алгоритми побудови оптимальної сітки, по одному для двох різних типів точності: заданих як межі допустимих помилок при проведенні обчислень: 1) абсолютний та 2) відносний.

До абсолютного типу заданої точності обчислень відносяться два види точності: 1) абсолютна (12), для якої слід задати межу точності $\bar{\Delta}$ та 2) відносна середньоквадратична (13), для якої слід задати $\bar{s}_M$. Перевірка виконання цих апіорних умов точності здійснюється на всій множині точок вимірів Y (6). Хоча такі межі точності повинні задаватись перед отриманням результатів обчислень, вони можуть адаптивно уточнюватись під час проведення обчислень.

Під відносним типом точності розуміється такий, для якого задається не абсолютна точність обчислень, а відносна: допустима межа відношення похибки наближення на сітці при одній виключеній точці до похибки на 2-х і більше: 1) $\bar{w}_{abs}$ (14) для абсолютного виду точності та 2) $\bar{w}_{skv}$ (15) – для відносного середньоквадратичного виду точності.

Процедура скорочення сітки проводиться, починаючи з повної інтерполяційної сітки, побудованої на всіх точках даних. Тому такі

алгоритми можна використовувати лише в випадку, коли для обертання великорозмірної щільної квадратної матриці C (5) з метою знаходження $\bar{\lambda}$ (4) є достатньо оперативної пам'яті та стійка процедура обертання..

Методом нарощення кількості точок сітки розроблено два алгоритми побудови оптимальної сітки, по одному для різних видів заданої точності: абсолютної (12) та середньоквадратичної (13). Щоб запустити алгоритми знаходження оптимальної сітки нарощуванням, потрібно спочатку знайти найкращу початкову сітку з мінімальною кількістю точок $\mathcal{Q}$ (3), рівну кількості складових в поліноміальному ядрі БВХС (2). Враховуючи

те, що поліноміальне ядро сплайн-функції задає загальне тло поверхні, фон, а функції Гріна визначають точки потенційних локальних оптимумів на цьому фоні, побудова сітки сплайн-функції починається з рівної гіперповерхні. А далі до сітки добавляються точка за точкою і нарощується ядро, поки не вийдемо на кількість з $\mathcal{Q}$ точок. Після цього нарощування сітки проводиться вже з повним ядром.

Треба відмітити, що загальне теоретичне питання побудови найкращої сітки з пошуком на всьому багатовимірному просторі її визначення R^n , а не лише на заданому наборі точок, залишається відкритим.

Список використаних джерел

1. Василенко В.А. Сплайн-функции: теория, алгоритмы, программы / В.А. Василенко. – Новосибирск: Наука, 1983. – 214 с.
2. Bezhaev, A.Y. Variational spline theory / A.Y. Bezhaev, V.A. Vasilenko // Bull. Novosibirsk computing center. Ser.: Numerical Analysis, special issue. Novosibirsk, 1993. – N 3. – 258 p.
3. Куценко И.А. Особенности численной интерполяции функций с помощью многомерных сплайнов на хаотичной сетке // Кибернетика и вычислительная техника. – 2001. – Вып. 133. – С 40–45.
4. Куценко, И.А. Побудова апроксимаційної середньоквадратичної та мінімаксної багатовимірної сплайн-функції на хаотичній сітці // Системні дослідження та інформаційні технології. – 2008. – № 4. – С.121–124.
5. Развитие методов и технологий моделирования та оптимизации сложных систем / [Гарашенко Ф.Г. та ін.]; за ред. Ф.Г. Гарашенка, И.А. Куценка, И.И. Харченка. – К.: Издавництво "Сталь", 2009. – 668 с.
6. Малахівський П. С. Неперервне й гладке мінімаксне сплайн-наближення / П. С. Малахівський, В. В. Скопєцький ; відп. ред. І. В. Сергієнко. – К. : Наук. думка, 2013. – 271 с.
7. Куценко И.А. Стійка процедура побудови інтерполяційної багатовимірної сплайн-функції на хаотичній сітці // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка (серія: Кибернетика). – Вип.8. – 2008. – С.42-44.

References

1. VASILENKO, V.A. (1983). *Spline-functions: theory, algorithms, programs*. Novosibirsk: "Nauka".
2. BEZHAEV, A.Y., and VASILENKO, V.A. (1993) *Variational spline theory*. Bull. Novosibirsk computing center. Ser.: Numerical Analysis, Special issue 3. Novosibirsk. NCC Publisher.
3. KUTSENKO, I. (2001) Features of numerical interpolation functions using multidimensional splines on the chaotic grid. *Cybernetics and Computing Machinery*, 133, pp.40–45.
4. KUTSENKO, I. (2008) The construction of the approximate mean and minmax multidimensional spline-functions on a chaotic grid. *System Research and Information Technologies*, (4), pp.121–124.
5. GARASHCHENKO, F.G. et al. (2008) *The development of methods and technologies of modeling and optimization of complex systems*. Kyiv: "Stal".
6. MALACHIVSKYY, P.S. and SKOPETSKIY, V.V. (2013) *Continuous and smooth minimax spline-approximation*. Kyiv: "Naukova dumka".
7. KUTSENKO, I. (2008) Stability procedure for constructing multidimensional interpolation spline-function on chaotic grid. *Bulletin of Kyiv National Taras Shevchenko University (series: Cybernetics)*, 8, pp.42-44.

Надійшла до редколегії 30.11.2016

УДК 519.72

О.О. Лисенко, аспірант

Швидка та точна сегментація для детектування раку грудей на зображеннях мамографії

Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, пр-т.
Глушкова 4д
e-mail: alexlysenko92@gmail.com

Oleksandr O. Lysenko, postgraduate student

Fast and Precise Segmentation Approach for Breast Cancer Detection in Mammography Images

Taras Shevchenko National University of Kyiv,
03680, Kyiv, Glushkova av., 4d
e-mail : alexlysenko92@gmail.com

In this paper, mean shift and graph-based segmentation algorithm are utilized to detect breast cancer tumors in mammography images. Brightness histograms are used to detect breast area and separate it from a background. Monte-Carlo method inside chest area from the previous step is used for generating input points sample for mean shift clustering. Then, mean shift output is some number of clusters, which, at the same time, are color palette of mammography image. Felzenswalb graph-based algorithm is applied to find all connected components in the color palette segmentation. At the final step, a geometric filter is used to determine if there is a cancer tumor among the components.

Keywords: breast cancer detection, mean-shift clustering, geometric filtering, graph-based segmentation, feature extraction.

У цій статті було використано mean shift і сегментацію на основі графу для детектування пухлин раку грудей на зображеннях мамографії. Гістограми яскравості використовуються для детектування зони грудей та відділення цієї зони від фону. Було застосовано метод Монте-Карло всередині площини грудей з попереднього кроку для генерації вхідної вибірки для mean shift кластеризації. Результат кластеризації – декілька кластерів, які, в той же час, являються палітрою кольорів зображення мамографії. Застосовано алгоритм на графах Фельзенівальба для знаходження зв'язних компонент в сегментації палітрою кольорів. На останньому кроці, використовуючи геометричні фільтри, виділяються ракові пухлини серед інших компонент.

Ключові слова: детектування раку грудей, mean shift кластеризація, геометричне фільтрування, сегментація на основі графу, виділення ознак.

Статтю представив д. т. н., проф. Заславський В.А.

Introduction

Breast cancer is one of the most common cancers among woman; it even happens to men. Tumor detection in mammography images is a challenging problem for radiologists because tumors are located into complicated tissues; also, they are in different shapes and sizes.

Recently, many computer-aided diagnosis (CAD) systems have been developed for breast cancer tumor controlling.

Tumor detection in the early step can be helpful for the patient. Image processing and machine learning methods are frequently used for this goal.

The proposed method uses mean shift clustering - segmentation technique with high accuracy. Monte-Carlo approach for choosing input points sample for generating color palettes helps to get near to constant mean shift complexity.

High values of precision and recall - next to 90% - make results very promising for real-world use.

Problem formulation

The main goal of this work is developing the fast and precise algorithm for breast cancer detection in mammography images, and its prototyping in C++.

The Proposed Method

Mean shift and graph-based segmentation algorithm are utilized to detect breast cancer tumors. At the first step, there is a mammography image (fig. 1).

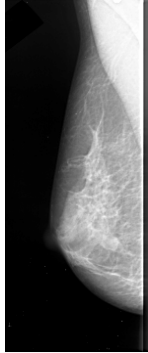


Figure 1 Breast without a tumor

This is a normal breast of usual density, and there is no tumor. In comparison, on the next image (fig. 2) you can find a tumor easily.

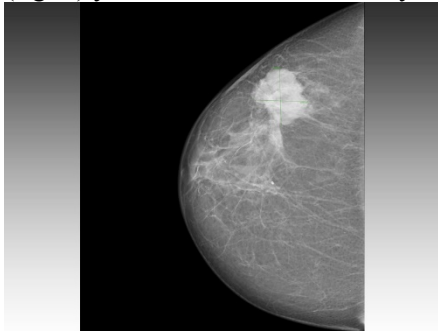


Figure 2 Breast with clearly visible tumor

It is the large bright spot on the upper part of the breast. For detecting this spots, (it is not always so bright and large, the main problem of breast cancer detection is the diagnosis on the early stage, while the tumor is small and not so dense - in this case it is much easier to treat it somehow) complex multistage algorithm has been applied.

Pre-processing

At first, noise should be illuminated - Gaussian blur with the 5x5 kernel is used for this purpose [1]. To apply the Gaussian blur on an image Gaussian function in two dimensions must be used. In this case, the equation of this function is the product of two such Gaussians, one in each dimension:

$$G(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}},$$

where x is the distance from the origin in the horizontal axis, y is the distance from the origin in the vertical axis and σ is the standard deviation of the Gaussian distribution. When applied in two

dimensions, this formula produces a surface whose contours are concentric circles with a Gaussian distribution from the center point. Values from this distribution are used to build a convolution matrix, which is applied to the original image.

There are different things in the mammography image sometimes, which are not breast. To detect breast itself, the brightness histogram is calculated, and then breast area is separated from the background [4]. The region growing is one of the image segmentation methods, it works in two way based on pixel values and other is selection of seed point which is of two kind automatic and manual. In automatic selection of seed point, it is assigned based on histogram on highest intensity which is represented by peak value of the histogram. In this work the automatic selection is used. Region-based segmentation is a technique for determining the region directly. The basic formulation is:

- $$(a) \bigcup_{i=1}^n R_i = R.$$
- (b) R_i is a connected region, $i = 1, 2, \dots, n$.
 (c) $R_i \cap R_j = \emptyset$ for all $i = 1, 2, \dots, n$.
 (d) $P(R_i) = \text{TRUE}$ for $i = 1, 2, \dots, n$
 (e) $P(R_i \cup R_j) = \text{FALSE}$ for any adjacent region R_i and R_j .

$P(R_i)$ is a logical predicate defined over the points in set R_i and $\emptyset$ is the null set.

- (a) means that the segmentation must be complete; that is, every pixel must be in a region.
 (b) requires that points in a region must be connected in some predefined sense.
 (c) indicates that the regions must be disjoint.
 (d) deals with the properties that must be satisfied by the pixels in a segmented region. For example $P(R_i) = \text{TRUE}$ if all pixels in R_i have the same grayscale.
 (e) indicates that region R_i and R_j are different in the sense of predicate P .

Advantages of this method are that region growing can correctly separate the regions that have the same properties defined, it can provide the original images which have clear edges with good segmentation results, the multiple criteria could be chosen at the same time. One of the disadvantages is that region growing method is sensitive to noise, but it is compensated by using Gaussian blur on the previous step.

Segmentation

On this step, all segments in the image must be found. Finding representative sample for mean shift input is valuable. For this purpose, Monte-Carlo method through already known breast area is used. Its essential idea is using randomness to solve problems that might be deterministic in principle. It is often used in physical and mathematical problems and are most useful when it is difficult or impossible to use other approaches. 5000 points are generated. This fact makes possible near to constant complexity of mean shift [2].

The mean shift algorithm is a non-parametric feature-space analysis technique which does not require prior knowledge of the number of clusters, and does not constrain the shape of the clusters. This is an iterative method, and iterations start with an initial estimate x . Let a kernel function $K(x_i - x)$ be given. This function determines the weight of nearby points for re-estimation of the mean. The K , kernel function, must satisfy the following requirements:

1. $\int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) = \begin{cases} 1 & a \leq x \leq b \\ 0 & \text{else} \end{cases}$
2. $\varphi(x) \geq 0$

In this work Gaussian kernel was used:

$$\varphi(x) = e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$

Mean shift can be considered to be based on gradient ascent on the density contour. The generic formula for gradient ascent is:

$$x_1 = x_0 + \eta f'(x_0)$$

Applying it to kernel density estimator, finally, we get:

$$\vec{x} = \frac{\sum_{i=1}^n K'(\frac{x - x_i}{h}) \vec{x}_i}{\sum_{i=1}^n K'(\frac{x - x_i}{h})}$$

The output of mean shift is color palette of the image (more exactly, a color palette of the breast area). Each pixel is classified and assigned to the nearest color from the color palette[5] using these color palettes.

Features extraction

Felzenswalb graph-based algorithm is applied to find and map all connected components in the color palette segmentation output [3]. Felzenswalb segmentation algorithm:

- input: graph $G = (V, E)$, with n vertices and m edges.
- output: segmentation of V into components $S = (C_1, \dots, C_r)$.

0. Sort E into $\pi = (o_1, \dots, o_m)$, by non-decreasing edge weight.
1. Start with a segmentation S^0 , where each vertex v_i is in its own component.
2. Repeat step 3 for $q = 1, \dots, m$.
3. Construct S^q given S^{q-1} as follows. Let v_i and v_j are in disjoint components of S^{q-1} and $w(o_q)$ is small compared to the internal difference of both those components, then merge the two components otherwise do nothing. More formally, let C_i^{q-1} be the component of S^{q-1} containing v_i and C_j^{q-1} the component containing v_j . If $C_i^{q-1} \neq C_j^{q-1}$ and $w(o_q) \leq \text{Int}(C_i^{q-1}, C_j^{q-1})$ then S^q is obtained from S^{q-1} by merging C_i^{q-1} and C_j^{q-1} . Otherwise $S^q = S^{q-1}$.
4. Return $S = S^m$.

$\text{Int}(C)$ is the internal difference of a component $C \subseteq V$ to be the largest weight in the minimum spanning tree of the component, $\text{MST}(C, E)$. That is,

$$\text{Int}(C) = \max_{e \in \text{MST}(C, E)} w(e).$$

At the final step, the geometric filter is used to determine if there is a cancer tumor among the components: each component is extracted and examined by size and shape [6]. The tumor (fig.3) is clearly visible, and it is easily separated from another breast area.

Results

Performance on University of South Florida Digital Database of Screening Mammography:

Precision = 83.4 %

Recall = 94.7%

F-score = 0,887

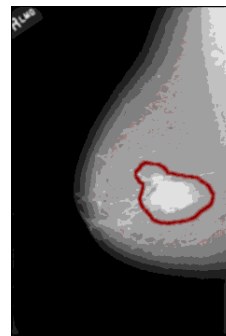


Figure 3 The example of segmented mammography image.

Список літератури

1. Frederick M. Waltz. An efficient algorithm for Gaussian blur using finite-state machines. / Frederick M. Waltz, John W.V. Miller. – 1998 – Режим доступу: https://software.intel.com/sites/default/files/m/1/c/7/21_GBlur.pdf
2. Cheng. Mean Shift, Mode Seeking, and Clustering. / Cheng, Yizong. – 1995 – Режим доступу: http://home.ku.edu.tr/mehyilmaz/public_html/mean-shift/00400568.pdf
3. Pedro F.Felzenszwalb. Efficient graph-based image segmentation. / Pedro F.Felzenszwalb, Daniel P. Huttenlocher. – 2012 – Режим доступу: <http://cs.brown.edu/~pff/papers/seg-ijcv.pdf>
4. Aziz Makandar. Combined segmentation technique for suspicious mass detection in mammography. / Aziz Makandar, Bhagirathi Halalli. – 2015 – Режим доступу: ieeexplore.ieee.org/iel7/7490162/7492634/07492680.pdf
5. Xiang Fu. Robust Image Segmentation Using Contour-guided Color Palettes. / Xiang Fu, Chien-Yi Wang, Chen Chen, Changhu Wang, C.-C. Jay Kuo. – 2015 – Режим доступу: http://www.cv-foundation.org/openaccess/content_iccv_2015/papers/Fu_Robust_Image_Segmentation_ICCV_2015_paper.pdf
6. Boris Epshtein. Detecting text in natural scenes with stroke width transform. / Boris Epshtein, Eyal Ofek, Yonatan Wexler. – 2010 – Режим доступу: <http://cmp.felk.cvut.cz/~cernyad2/TextCapchaPdf/Detecting%20Text%20in%20Natural%20Scenes%20with%20Stroke%20Width%20Transform.pdf>

References

1. FREDERICK M. WALTZ, JOHN W.V. MILLER. (1998) An efficient algorithm for Gaussian blur using finite-state machines.
2. CHENG, YIZONG (1995) Mean Shift, Mode Seeking, and Clustering.
3. PEDRO F.FELZENSZWALB, DANIEL P. HUTTENLOCHER. (2012) Efficient graph-based image segmentation.
4. AZIZ MAKANDAR, BHAGIRATHI HALALLI. (2015) Combined segmentation technique for suspicious mass detection in mammography.
5. XIANG FU, CHIEN-YI WANG, CHEN CHEN, CHANGHU WANG, C.-C. JAY KUO. (2015) Robust Image Segmentation Using Contour-guided Color Palettes.
6. BORIS EPSHTEIN, EYAL OFEK, YONATAN WEXLER. (2012) Detecting text in natural scenes with stroke width transform.

Надійшла до редколегії 02.12.2016

УДК 519.8

Машченко С.О., д. ф.-м. н., проф.,
Моренець В.І., аспірант

Оптимізація на нечітких множинах типу 2

Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 03127, м. Київ, пр-т.
Глушкова 4д,
e-mail: msomail@yandex.ua
e-mail: v.i.morenets@gmail.com

S.O. Mashchenko, D.Sci (Phys-Math.), Prof.,
Morenets V.I., Grad. Stud.

Optimization on a type-2 fuzzy sets

Taras Shevchenko National University of Kyiv,
03127, Kyiv, Glushkova st., 4d,
e-mail: msomail@yandex.ua
e-mail: v.i.morenets@gmail.com

В роботі досліджується задача максимізації функції на нечіткій множині типу 2 (нечітка множина, функція належності якої приймає нечіткі значення). Показано, що множина «оптимальних» розв'язків цієї задачі також є нечіткою множиною типу 2 (НМТ-2). Нечітка функція належності цієї множини задається нечітким відображенням. Побудована його функція належності. Вона названа функцією достовірності НМТ-2. Носій множини «оптимальних» розв'язків визначається як множина оптимальних за Слейтером альтернатив задачі трьохкритеріальної оптимізації. В цій задачі окрім цільової функції вихідної задачі максимізується ступінь належності НМТ-2 розв'язків, а також значення функції достовірності.

Ключові слова: нечітка множина; нечітка множина типу 2; нечітке математичне програмування; прийняття рішень.

The present paper investigates the problem of maximizing the function on the type 2 fuzzy set (a fuzzy set whose membership function takes fuzzy values). The idea of decomposition of fuzzy set on the set levels consists the basis of the method of solving this problem. It is shown that the set of "optimal" solutions to this problem is also a type 2 fuzzy set. Fuzzy membership function of this set is defined by fuzzy mapping. Its membership function is constructed. Since this function uniquely determines this set, it is called a reliability function of the type 2 fuzzy set. There are proved theorems that allow to simplify the construction of reliability function. It is shown that the support of the set of "optimal" solutions can be represented as a set of Slater's optimal alternatives to the three-criteria optimization problem. In this problem membership degree of type 2 fuzzy set of solutions is maximized in addition to the objective function of the original problem, as well as the value of the reliability function is maximized too. The proposed approach to solving optimization problems on type 2 fuzzy sets develops the known methods of fuzzy mathematical programming.

Keywords: fuzzy set, type-2 fuzzy set, fuzzy mathematical programming, decision-making.

Статтю представив д. т. н., проф. Гаращенко Ф.Г.

Вступ. Оптимізація — це класична область досліджень, яка має високу затребуваність в багатьох напрямках науки. Наприклад, в інженерії, менеджменті, політиці, медицині, штучному інтелекті, дослідженні операцій і багатьох інших областях, в яких виникає необхідність оптимізації конструкцій, рішень, структур і інформаційних процесів. Причому слід зазначити, що, як правило, багато конкретних проблем, які формалізуються в рамках задач оптимізації, рясніють джерелами неточності. Вони приводять до невизначеності, яка може бути пов'язаною з помилками і неповнотою даних, суб'єктивністю експертних оцінок і

неоднозначністю значень параметрів.

В [1] вдало відмічено: «добре відомо, що для того, щоб вирішувати складну задачу, алгоритм повинен включати всю доступну інтуїцію». Реалізація цієї ідеї приводить до необхідності включення невизначеності в постановку задач математичного програмування.

Віхи розвитку нечіткого математичного програмування (НМП) чудово висвітлені в оглядах: Rommelfanger [2], Inuiguchi і Ramik [3] і Delgado та ін. [4]. Проте слід зазначити, що проведені дослідження торкалися оптимізації на звичайних нечітких множинах.

Останні роки проявився значний інтерес до

так званих нечітких множин типу 2 (НМТ-2). НМТ-2 були введени Л. Заде [5] в 1975, як розширення нечітких множин типу 1. В той час, коли ступені належності елементів в нечіткій множині типу 1 (НМТ-1) є значеннями з інтервалу $[0,1]$, ступені належності елементів в НМТ-2 є нечіткою множиною на $[0,1]$. НМТ-2 визначається функцією належності $\lambda: X \rightarrow [0,1] \times [0,1]$, де $[0,1] \times [0,1]$ – множина відображень з $[0,1]$ в $[0,1]$.

В [6, 7] запропоновано означення НМТ-2, в якому функція належності з нечіткою множиною значень визначена як нечітке відображення.

Згідно [6, 7] НМТ-2 A , яка визначена на X , називається сукупність трійок вигляду $(x, y, \psi(x, y))$, де:

x — елемент множини X ;

y — елемент множини $[0,1]$ ступенів належності НМТ-2;

$\psi: X \times [0,1] \rightarrow [0,1]$ — функція належності нечіткого відображення, яке задає нечітку функцію належності НМТ-2 A .

Оскільки функція належності $\psi(x, y)$ чітка і однозначно визначає НМТ-2 A , то зручно працювати з нею. Щоб не плутати $\psi(x, y)$ з нечіткою функцією належності, в [6, 7] вона названа функцією достовірності значення ступеня належності $y \in [0,1]$ елемента $x \in X$ НМТ-2 або просто функцією достовірності НМТ-2 A .

Нехай X – універсальна множина, а f – функція, що визначена на X , значеннями якої оцінюються результати вибору елементів множини X . У множині X задана НМТ-2 D з функцією достовірності $\mu_D: X \times [0,1] \rightarrow [0,1]$. Назвемо її НМТ-2 альтернатив. Задача полягає у "максимізації" у деякому сенсі функції f на НМТ-2 D . Формалізуємо її у такому вигляді:

$$\max_{(x,y,\mu_D(x,y)) \in D} f(x) \quad (1)$$

Представимо функцію належності НМТ-2 D як нечітке відображення типу 1 $\Delta: X \times [0,1] \rightarrow [0,1]$. Тоді (1) можна записати як задачу знаходження нечіткого відображення, яке виконує роль функцією нечіткої функції належності НМТ-2 розв'язку (1). Функція належності знайденого нечіткого відображення буде функцією достовірності НМТ-2 розв'язку (1). Ця задача буде мати вигляд

$$\max_{((x,y),\mu_D(x,y)) \in \Delta} f(x). \quad (2)$$

В основу методу розв'язання (2) покладемо таку ідею. Якщо пара $(\hat{x}, \hat{y}) \in X \times [0,1]$ є розв'язком задачі $f(x) \rightarrow \max$ на множині рівня α нечіткого відображення $\Delta: X \times [0,1] \rightarrow [0,1]$, то вважатимемо, що число α є ступенем належності пари $(\hat{x}, \hat{y})$ НМТ-2 розв'язку (1). Перебравши усі можливі $\alpha \in [0,1]$, ми одержимо функцію належності нечіткого розв'язку.

Розглянемо цей підхід детальніше. Позначимо

$$D_\alpha = \{(x, y) \in X \times [0,1]: \mu_D(x, y) \geq \alpha\}$$

– чітку множину рівня $\alpha \in [0,1]$ нечіткого відображення $\Delta: X \times [0,1] \rightarrow [0,1]$. Для будь-якого $\alpha \in [0,1]$ такого, що $D_\alpha \neq \emptyset$, розглянемо чітку множину

$$Z_\alpha = \{(\hat{x}, \hat{y}) \in X \times [0,1]: f(\hat{x}) = \max_{(x,y) \in D_\alpha} f(x)\}. \quad (3)$$

Вона буде множиною пар, які відповідають оптимальним розв'язкам задачі максимізації $f(x)$ на множині тих пар, які зі ступенем належності не меншим за α вважаються допустимими у задачі (2).

Для побудови функції належності нечіткого відображення розв'язків необхідно кожній парі $(x, y) \in X \times [0,1]$ приписати її належність. Уведемо таке означення.

Означення 1. Розв'язком задачі (2) будемо називати нечітке відображення $\Delta_G: X \times [0,1] \rightarrow [0,1]$ з функцією належності

$$\mu_G(x, y) = \max\{\alpha \in [0,1]: (x, y) \in Z_\alpha\}. \quad (4)$$

Цю формулу можна спростити, якщо користатися таким твердженням.

Твердження 1. Якщо $(x, y) \in Z = \bigcup_{\alpha > 0} Z_\alpha$, то

$$\mu_G(x, y) = \mu_D(x, y).$$

Доведення. Припустимо супротивне, що $\mu_G(x, y) \neq \mu_D(x, y)$. Розглянемо два можливих випадки. В першому, нехай $\mu_G(x, y) > \mu_D(x, y)$, тоді $\max\{\alpha \in [0,1]: (x, y) \in Z_\alpha\} > \mu_G(x, y)$. Тому

$$\exists \hat{\alpha} > \mu_D(x, y) \quad (5)$$

та $(x, y) \in Z_{\hat{\alpha}}$. Звідси за (3), (4) $(x, y) \in D_{\hat{\alpha}}$ і тоді $\mu_D(x, y) \geq \hat{\alpha}$, що суперечить (5).

В другому випадку, нехай $\mu_G(x, y) < \mu_D(x, y)$. За (4) це означає, що

$$\max\{\alpha \in [0,1]: (x, y) \in Z_\alpha\} < \mu_D(x, y) = \gamma. \quad (6)$$

Тоді для $\forall \alpha \in [0,1]$ такого, що $(\hat{x}, \hat{y}) \in Z_\alpha$ має місце включення $(\hat{x}, \hat{y}) \in D_\gamma \subseteq D_\alpha$. Окрім цього, $(\hat{x}, \hat{y}) \notin Z_\gamma$, оскільки у протилежному випадку з (6) випливає б неможлива нерівність $\gamma < \gamma$. Звідси $f(\hat{x}) < \max_{(x,y) \in D_\gamma} f(x) \leq \max_{(x,y) \in D_\alpha} f(x) = f(\hat{x})$.
Получили суперечність. Твердження доведено.

Із твердження 1 випливає, що розв'язком задачі (2) є нечітке відображення $\Delta_G : X \times [0,1] \rightarrow [0,1]$ з функцією належності

$$\mu_G(x, y) = \begin{cases} \mu_D(x, y), & (x, y) \in \bigcup_{\alpha > 0} Z_\alpha; \\ 0, & (x, y) \notin \bigcup_{\alpha > 0} Z_\alpha. \end{cases} \quad (7)$$

Отримана нами формула є достатньо складною, оскільки за (3) чіткі множини Z_α визначаються як результати розв'язання задач оптимізації на множинах рівня D_α . Тому спробуємо спростити (7). Для цього використаємо наступну ідею. Нехай

$$\Phi_\alpha = \{y(x) : \forall x \in X \ y(x) \in [0,1], \mu_D(x, y(x)) \geq \alpha\}$$

– клас функцій належності, що визначені на X . Множині рівня D_α нечіткого відображення $\Delta : X \times [0,1] \rightarrow [0,1]$ співставимо клас НМТ-1, які визначені на X , з функціями належності з Φ_α .

Розглянемо НМТ-1 $\Theta_\alpha = \bigcup_{y(x) \in \Phi_\alpha} \bigcup_{x \in X} (x, y(x))$, яка є об'єднанням всіх нечітких множин з функціями належності класу Φ_α . Вона буде мати функцію належності

$$y_\alpha(x) = \max_{y(x) \in \Phi_\alpha} y(x) = \max_{y \in [0,1]} \{y : \mu_D(x, y) \geq \alpha\} \quad (6)$$

і може бути представленою як $\Theta_\alpha = \bigcup_{x \in X} (x, y_\alpha(x))$.

Тоді при такому підході чіткій задачі (3), яка визначена на універсальній множині $X \times [0,1]$, можна співставити задачу НМП

$$\tilde{Z}_\alpha = \text{Arg max}_{(x, y_\alpha(x)) \in \Theta_\alpha} f(x), \quad (8)$$

яка визначена на універсальній множині X .

Позначимо $P_\alpha \subseteq X$ – множину оптимальних за Слейтером розв'язків двохкритеріальної задачі

$$y_\alpha(x) = \max_{y \in [0,1]} \{y : \mu_D(x, y) \geq \alpha\} \rightarrow \max_x, \quad (9)$$

$$f(x) \rightarrow \max_x, \quad x \in X.$$

Тоді за відомою теорією [8] з (8) випливає, що НМТ-1 $\tilde{Z}_\alpha$ має функцію належності

$$\tilde{y}_\alpha(x) = \begin{cases} y_\alpha(x), & x \in P_\alpha; \\ 0, & x \notin P_\alpha. \end{cases}$$

Очевидно, що НМТ-1 $\tilde{Z}_\alpha$ можна тепер співставити чітку множину пар

$$Z_\alpha = \bigcup_{x \in P_\alpha} (x, y) = \bigcup_{x \in P_\alpha} (x, \tilde{y}_\alpha(x)). \quad (10)$$

Спробуємо спростити задачу (9).

Позначимо $Q_\alpha \subseteq X \times [0,1]$ – множину оптимальних за Слейтером розв'язків двохкритеріальної задачі

$$\begin{aligned} y &\rightarrow \max_{(x,y)}, \\ f(x) &\rightarrow \max_{(x,y)}, \\ \mu_D(x, y) &\geq \alpha \\ x &\in X, y \in [0,1]. \end{aligned} \quad (11)$$

Твердження 2. НМТ-1 $\tilde{Z}_\alpha$ має функцію належності

$$\tilde{y}_\alpha(x) = \begin{cases} y, & (x, y) \in Q_\alpha; \\ 0, & (x, y) \notin Q_\alpha. \end{cases} \quad (12)$$

Доведення. Позначимо множину допустимих розв'язків (11) $P_D = \{(x, y) : \mu_D(x, y) \geq \alpha, y \in [0,1]\}$. Тоді задачі (9), (11) можна переписати у вигляді

$$\begin{aligned} y_\alpha(x) &= \max_{(x,y) \in P_D(\alpha)} y \rightarrow \max_x, \\ f(x) &\rightarrow \max_x, \\ x &\in X; \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} y &\rightarrow \max_{(x,y)}, \\ f(x) &\rightarrow \max_{(x,y)}, \\ (x, y) &\in P_D(\alpha). \end{aligned} \quad (14)$$

Для фіксованого $\hat{x} \in X$ позначимо

$$\hat{y} = y_\alpha(\hat{x}) = \max_{(\hat{x}, y) \in P_D(\alpha)} y.$$

Покажемо, що якщо $\hat{x} \in Q_\alpha$, то $(\hat{x}, \hat{y}) \in P_\alpha$. Очевидно, що $(\hat{x}, \hat{y}) \in P_D(\alpha)$. Припустимо супротивне $(\hat{x}, \hat{y}) \notin P_\alpha$. Тоді $\exists (\bar{x}, \bar{y}) \in P_D(\alpha)$ причому очевидно

$$\bar{y} \leq \max_{(\bar{x}, y) \in P_D(\alpha)} y \quad (15)$$

та виконуються нерівності

$$\bar{y} > \hat{y}, \quad f(\bar{x}) > f(\hat{x}). \quad (16)$$

Тоді в контексті задачі (13) $\bar{x} \in X$ та з рахунком (15) $y(\bar{x}) = \max_{(\bar{x}, y) \in P_D(\alpha)} y \geq \bar{y}$. Звідси з (16) одержимо $y_\alpha(\bar{x}) > \hat{y}$, $f(\bar{x}) > f(\hat{x})$. Тому $\hat{x} \notin Q_\alpha$. Получили суперечність.

Тепер покажемо, що якщо $(\hat{x}, \hat{y}) \in P_\alpha$, то $\hat{x} \in Q_\alpha$. Припустимо супротивне $\hat{x} \notin Q_\alpha$. Тоді $\exists \bar{x} \in X$, для якого

$$y_\alpha(\bar{x}) = \max_{(\bar{x}, y) \in P_D(\alpha)} y, \quad (\bar{x}, y(\bar{x})) \in P_D \quad (17)$$

та виконуються нерівності:

$$y_\alpha(\bar{x}) > y_\alpha(\hat{x}), \quad f(\bar{x}) \geq f(\hat{x}). \quad (18)$$

Позначимо $\bar{y} = y_\alpha(\bar{x})$. Тоді для задачі (14) можна записати, що з (17) випливає $(\bar{x}, \bar{y}) \in P_D$, тоді з (18) одержимо відповідно $\bar{y} > \hat{y}$, $f(\bar{x}) > f(\hat{x})$. Тому $(\hat{x}, \hat{y}) \notin P_\alpha$. Получили суперечність. З встановленого взаємозв'язку задач (9) та (11) очевидно випливає (12). Твердження доведене.

З твердження 2 з рахунком (10) випливає

Наслідок 1. Чіткі множини пар Z_α та Q_α співпадають.

Спробуємо спростити (7) далі. Позначимо $Q \subseteq X \times [0, 1]$ – множину оптимальних за Слейтером розв'язків трьохкритеріальної задачі

$$\begin{aligned} \mu_D(x, y) &\rightarrow \max_{(x, y)}, \\ y &\rightarrow \max_{(x, y)}, \\ f(x) &\rightarrow \max_{(x, y)}, \\ x &\in X, y \in [0, 1]. \end{aligned} \quad (19)$$

Твердження 3. Розв'язком задачі (2) є нечітке відображення $\Delta_G : X \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ з функцією належності

$$\mu_G(x, y) = \begin{cases} \mu_D(x, y), & (x, y) \in Q; \\ 0, & (x, y) \notin Q. \end{cases} \quad (20)$$

Доведення. Для доведення твердження достатньо показати, що в формулі (7) $\bigcup_{\alpha > 0} Z_\alpha = Q$.

В свою чергу для цього в силу наслідку 1 треба показати, що $\bigcup_{\alpha > 0} Q_\alpha = Q$.

Спочатку доведемо $\bigcup_{\alpha > 0} Q_\alpha \subseteq Q$. Нехай деяка пара $(x, y) \in \bigcup_{\alpha > 0} Q_\alpha$. Тоді $\exists \alpha > 0$, для якого

$$(x, y) \in Q_\alpha. \quad (21)$$

Відмітимо, що звідси випливає

$$\mu_D(x, y) \geq \alpha. \quad (22)$$

Покажемо, що $(x, y) \in Q$. Припустимо супротивне, що $(x, y) \notin Q$. Тоді $\exists (\hat{x}, \hat{y}) \in X \times [0, 1]$, для якої виконуються нерівності: $\mu_D(\hat{x}, \hat{y}) > \mu_D(x, y)$, $\hat{y} > y$, $f(\hat{x}) > f(x)$. З рахунком (22) одержимо $\mu_D(\hat{x}, \hat{y}) > \alpha$. Звідси випливає, що $(\hat{x}, \hat{y})$ є допустимою альтернативою задачі (11). Також має місце відношення домінування ($\succ$) для вектору значень критеріїв (11) $(\hat{y}, f(\hat{x})) \succ (y, f(x))$. Тому за означенням оптимальної за Слейтером альтернативи $(x, y) \notin Q_\alpha$, що суперечить (21). Таким чином, включення $\bigcup_{\alpha > 0} Q_\alpha \subseteq Q$ є доведеним.

Тепер доведемо $Q \subseteq \bigcup_{\alpha > 0} Q_\alpha$. Нехай деяка пара $(x, y) \in Q$. Покажемо, що $(x, y) \in \bigcup_{\alpha > 0} Q_\alpha$. Припустимо супротивне, що $(x, y) \notin \bigcup_{\alpha > 0} Q_\alpha$. Тоді для $\forall \alpha > 0$, зокрема для

$$\alpha > \mu_D(x, y) \quad (23)$$

$\exists (\hat{x}, \hat{y}) \in X \times [0, 1]$, що $\mu_D(\hat{x}, \hat{y}) \geq \alpha$ та виконуються нерівності: $\hat{y} > y$, $f(\hat{x}) > f(x)$. З рахунком (23) одержимо також $\mu_D(\hat{x}, \hat{y}) > \mu_D(x, y)$. В контексті трьохкритеріальної задачі (19) це означає, що вектор значень критеріїв $(\mu_D(\hat{x}, \hat{y}), \hat{y}, f(\hat{x})) \succ (\mu_D(x, y), y, f(x))$. Тому за означенням оптимальної за Слейтером альтернативи $(x, y) \notin Q$. Получили суперечність. Таким чином, $Q \subseteq \bigcup_{\alpha > 0} Q_\alpha$, що остаточно доводить рівність $\bigcup_{\alpha > 0} Q_\alpha = Q$. Твердження доведене.

В силу постановки задачі (2) можна зробити висновок, що знайдена нами функція належності $\mu_G(x, y)$ нечіткого відображення Δ_G буде шуканою функцією достовірності НМТ-2 розв'язку задачі (1) «максимізації» функції $f(x)$ на НМТ-2 альтернатив G .

Висновок. В статті основна увага надана концепції розв'язку задачі «максимізації» функції на НМТ-2 альтернатив і її обґрунтуванню. Згідно до запропонованого підходу множина розв'язків цієї задачі розглядається як НМТ-2. Показано, що її носієм є множина оптимальних за Слейтером розв'язків трьохкритеріальної задачі оптимізації. В цій задачі окрім вихідної цільової функції максимізуються також значення ступеня

належності до результуючої НМТ-2 та його достовірність.

Слід зазначити, що запропонований підхід не тільки розширює область застосування теорії нечіткої оптимізації на випадок НМТ-2, але й може дати нові походи до розв'язання інших постановок нечітких оптимізаційних задач.

Список використаних джерел

1. *Luhandjula M. K.* Fuzzy optimization: Milestones and perspectives / M. K. Luhandjula // *Fuzzy Sets Syst.* – 2015. – 1. – P. 4–11.
2. *Rommelfanger H.* Fuzzy linear programming and applications / H. Rommelfanger // *Eur. J. Oper. Res.* – 1996. – 92. – P. 512–527.
3. *Inuiguchi M.* Possibilistic linear programming: a brief review of fuzzy mathematical programming and a comparison with stochastic programming in portfolio selection problem / M. Inuiguchi, J. Ramik // *Fuzzy Sets Syst.* – 2000. – 111. – P. 3–28.
4. *Delgado M.* Relating different approaches to solve linear programming problems with imprecise costs / M. Delgado, J.L. Verdegay, M.A. Vila // *Fuzzy Sets Syst.* – 1990. – 37. – 1. – P. 33–42.
5. *Zadeh L.* The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning – I / L. Zadeh // *Inf. Sci.* – 1975. – 8. P. 199–249.
6. *Мащенко С.О.* Нечеткие индивидуально-оптимальные равновесия / С.О. Мащенко // *Кибернетика и вычислительная техника.* – 2010, Вып. 159. – С. 19 – 29.
7. *Мащенко С.О.* Задача математического программирования с нечетким множеством индексов ограничений / Мащенко С.О. // *Кибернетика и системный анализ.* – 2013. – № 1. – С. 62 – 68.
8. *Орловский С.А.* Проблемы принятия решений при нечеткой исходной информации / С.А. Орловский. – М. : Наука, 1981. – 208 с.

References

1. LUHANDJULA M. K. (2015) Fuzzy optimization: Milestones and perspectives. *Fuzzy Sets Syst.* 274(1). pp. 4–11.
2. ROMMELFANGER H. (1996) Fuzzy linear programming and applications. *Eur. J. Oper. Res.* 92. pp. 512–527.
3. INUIGUCHI M., RAMIK J. (2000) Possibilistic linear programming: a brief review of fuzzy mathematical programming and a comparison with stochastic programming in portfolio selection problem. *Fuzzy Sets Syst.* 111. pp. 3–28.
4. DELGADO M., VERDEGAY J.L., VILA M.A. (1990) Relating different approaches to solve linear programming problems with imprecise costs, *Fuzzy Sets Syst.* 37(1). pp. 33–42.
5. ZADEH L. (1975) The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning – I. *Inf. Sci.* 8. pp. 199–249.
6. MASHCHENKO, S. (2010) The fuzzy individual optimum equilibriums. *Cybernetics & Computer Engineering* 159. pp. 19 – 29.
7. MASHCHENKO, S. (2013) The problem of the mathematical programming with the fuzzy set of indexes of constraints. *Cybernetics & Systems Analysis.* 49(1). pp. 62 – 68.
8. ORLOVSKY, S. (1981) *Problems of decision making at fuzzy initial information.* Moskva: Nauka.

Надійшла до редколегії 05.12.2016

УДК 004.655

Мохаммед К.Д.

Характеристичні властивості одиночного успадкування класів

В статті розглянуто одиночне успадкування класів, яке є окремим випадком множинного успадкування, та визначені його характеристичні властивості. Наведено алгоритм, який визначає, чи є ієрархія класів ієрархією одиночного успадкування.

Ключові слова: класи, успадкування, одиночне успадкування класів, метод лінеаризації.

E-mail: karamjasim1978@yahoo.com

Статтю представив д. ф.-м. н., проф. Буй Д.Б.

Для розв'язання конфлікту імен, яке виникає при множинному успадкуванні класів застосовується метод лінеаризації [1, 2] втілений в багатьох алгоритмах [3]. Але всі ці алгоритми мають недоліки, пов'язані зі складністю пошуку найбільш підходячого класу. При одиночному успадкуванні ситуація спрощується, що дозволяє говорити про переваги одиночного успадкування над множинним, там де його можливо використовувати. Нижче розглянемо деякі характеристичні властивості одиночного успадкування.

Будемо вважати, що класи складаються з атрибутів які мають унікальні імена в межах одного класу, хоча ці імена можуть і повторюватися в інших класах. Позначимо через C_1, C_2, C_3 класи, множину яких позначимо через Cls . Класи також будемо позначати і іншими буквами латинського алфавіту. Множину всіх атрибутів позначимо через Atr , а окремі атрибути – через $a_1, a_2, \dots$. Тоді клас буде визначатися як пара (C, atr) , де C – ім'я класу, а atr – множина атрибутів $a_1, a_2, \dots, a_n$. Такий клас будемо записувати у вигляді $C(a_1, a_2, \dots, a_n)$, або просто C , якщо відомо, про які атрибути йде мова, або конкретний набір атрибутів неважливий.

Між класами існує відношення успадкування, коли один клас успадковує атрибути іншого класу, або, навіть, сукупності класів. Якщо клас C_1 успадковується від класу C_2 то домовимося таку пару записувати у вигляді $C_1 \rightarrow C_2$, а, якщо деякий клас C_1 успадковується від кількох класів

Mohammed K. D.

Characteristic properties of single inheritance of the classes

The paper devoted to single inheritance of the classes that is special case of multiple inheritance. Its characteristic properties were defined. Algorithm which check is the class hierarchy simple was implemented.

Key words: classes, inheritance, single inheritance, method of the linearization.

$C_{21}, C_{22}, \dots, C_{2n}$, то будемо це записувати у вигляді $C_1 \rightarrow (C_{21}, C_{22}, \dots, C_{2n})$ де $C_{2i} \neq C_{2j}, i \neq j$, та $C_1 \neq C_{2i}, i = 1..n$. Порядок, в якому класи $C_{21}, C_{22}, \dots, C_{2n}$ перераховуються є важливим, тобто, якщо поміняти місцями, наприклад, перший і другий класи $C_1 \rightarrow (C_{22}, C_{21}, \dots, C_{2n})$ то ми отримуємо інше успадкування. Якщо клас успадковується рівно від одного класу, то назвемо це одиночним успадкуванням, якщо ж він успадковується більш ніж від одного класу, то назвемо це множинним успадкуванням. Клас, який успадковується від інших класів, називається нащадком, а клас, від якого успадковуються інші класи, називається предком. Наприклад, в успадкуванні $C_1 \rightarrow C_2$ клас C_1 є нащадком класу C_2 , а C_2 є предком класу C_1 . Так як класи не можуть успадковуватися від самих себе то відношення успадкування є антирефлексивним.

Підмножина відношення успадкування утворює ієрархію класів. Наприклад $\{C \rightarrow (A, B), E \rightarrow (B, D)\}$ задає ієрархію, яка показана на діаграмі, намальованій на рис.1

Тут клас C є потомком класів A і B , а клас E є потомком класів B, D . Відповідно клас A є предком класу C , клас B є предком класів C, E а клас D є предком класу E .

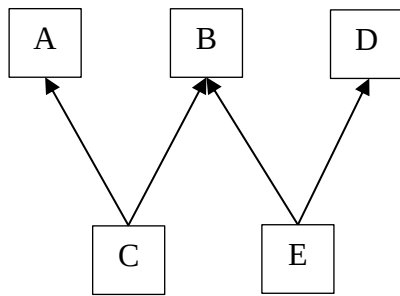


Рис.1 Приклад ієрархії класів

Але не будь яка підмножина відношення успадкування утворює ієрархію класів. Крім того, в ієрархію можуть включатись одиночні класи, які не є предками, або потомками інших класів. Прикладом підмножини наслідування яка не утворює ієрархію класів є множина $\{A \rightarrow B, B \rightarrow C, C \rightarrow A\}$ яка зображена на діаграмі, на рис.2

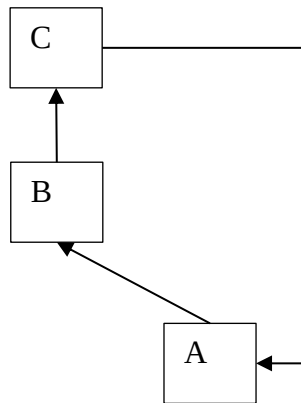


Рис. 2 Приклад циклів в наслідуванні

Тобто наслідування не може утворювати цикли. Наступна підмножина теж не утворює ієрархію класів: $\{A \rightarrow B, A \rightarrow C\}$, діаграма цього наслідування зображена на рис.3

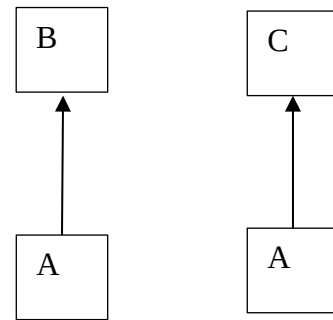


Рис. 3 Приклад успадкування, яке не утворює ієрархії класів

В цій множині втрачається порядок, в якому перераховуються предки класу A. Для того щоб зробити з цього ієрархію класів, підмножину треба переписати у вигляді $\{A \rightarrow (B, C)\}$, або $\{A \rightarrow (C, B)\}$.

Сформулюємо умови, за яких підмножина відношення успадкування утворює ієрархію класів. Нехай є дві пари наслідування класів $A \rightarrow (B_1, B_2, \dots, B_k)$ і $C \rightarrow (D_1, D_2, \dots, D_l)$. Якщо існує таке B_i , що $C = B_i$, то назовемо такі пари зв'язаними. Послідовність пар наслідування $I_1, I_2, \dots, I_m$ утворює ланцюг успадкування, якщо будь яких два послідовних елемента є зв'язаними, тобто $I_j, I_{j+1}, j=1..m-1$ є зв'язаними. Якщо, крім того, I_m зв'язана з I_1 то такий ланцюг успадкування утворює цикл. Підмножина відношення наслідування називається ациклічною, якщо будь який ланцюг успадкування з цієї підмножини не утворює цикл.

Для того, щоб уникнути неоднозначності при перерахуванні предків деякого класу, достатньо вимагати, щоб вибрана підмножина відношення наслідування була функціональною, тобто для будь яких пар $a \rightarrow b$ і $c \rightarrow d$, з цієї підмножини, $a \neq b$.

Таким чином ієрархією класів назовемо пару (S, I) де S – множина класів, а I – підмножина відношення наслідування, яка є ациклічною, функціональною і яка утворюється з класів з множини S . Якщо в S є класи, які не приймають участі в I , тобто не є предками або потомками інших класів, то такі класи будемо називати класами без успадкування.

Далі, для деякого класу $C(a_1, a_2, \dots, a_k)$ звернення до атрибуту a_i будемо записувати у

вигляді $C.a_i$. У випадку, коли клас входить до деякої ієрархії класів, це звернення трактується у розширеному сенсі. А саме, якщо атрибут a відсутній безпосередньо в класі C , то він шукається в предках цього класу. Наприклад, нехай існує наступна ієрархія класів $(\{A(a_1, a_2), B(b_1, b_2), C(c_1)\}, A \rightarrow (B, C))$, тоді при зверненні $A.c_1$ атрибут c_1 спочатку шукається між атрибутами класу A , потім між атрибутами класів B і C . Але може бути ситуація, коли атрибут c_1 зустрічається в обох класах B і C . Тоді виникає питання, який з цих двох атрибутів вибрати. Для цього в мовах з динамічною типизацією використовується спеціальний метод, який називається лінеаризацією. Введемо кілька означень. Нехай в ієрархії наслідування приймають участь тільки ті пари наслідування, в яких в якості предка використовується тільки один клас, тобто права частина складається тільки з одного елемента. Такі ієрархії будемо називати ієрархіями одиночного наслідування класів. Якщо ж є хоча б одна пара з кількістю предків більших за одиницю, то будемо називати її ієрархією множинного наслідування класів. Якщо в ієрархії одиночного наслідування з всіх пар наслідування можна утворити один ланцюг, який містить всі класи, то таку ієрархію назвемо простою ієрархією одиночного наслідування класів.

За аналогією з деревами, клас, який не має жодного потомка будемо називати листом, а клас, який не має жодного предка – коренем. Відмітимо, що для ієрархії одиночного наслідування класів лист має не більш ніж одного предка.

Теорема 1: Непуста ієрархія одиночного успадкування класів буде простою тоді і тільки тоді, коли в ній існує рівно лист.

Доведення: Доведемо необхідність. За визначенням простою ієрархією одиночного наслідування називається ієрархія всі елементи якої можуть утворити один ланцюг. Тоді перший елемент цього ланцюга буде листом ієрархії. Так як всі інші елементи входять в ланцюг то вони не можуть бути листом.

Достатність. В іншу сторону будемо доводити від протилежного. Припустимо, що виконуються умови теореми, тобто в ієрархії існує рівно один лист, але не можна побудувати ланцюг, який містить всі класи. Візьмемо початкову множину ланцюгів, таку що кожний ланцюг складається з одного класу, і всі класи входять до цієї множини. Потім почнемо

з'єднувати ті ланцюги, кінцевий клас яких має предком початковий клас інших ланцюгів, поки це можливо. За припущенням, не існує одного ланцюга, який містить всі класи, тому в результаті отримаємо кілька ланцюгів, причому, один клас, за побудовою, входить тільки в один ланцюг. Так як ті ланцюги, що залишилися, не можна з'єднувати, то це означає, що початок одного ланцюга не може мати потомком кінець іншого ланцюга. Крім того, початок ланцюга не може мати потомком класи які входять в інший ланцюг але не є останніми, так як це порушує умову одиночного успадкування. Таким чином перші елементи ланцюгів повинні бути листами. Отримали протиріччя. Теорема доведена.

Для ієрархії одиночного наслідування, яка не є простою, не існує одного ланцюга успадкування, який містить всі класи. Виникає питання, яка мінімальна кількість ланцюгів, що містять всі класи. Відповідь дає наступна теорема

Теорема 2. Якщо в ієрархії класів з одиночним успадкуванням існує k листів, то тоді мінімальна потужність множини ланцюгів успадкування які містять всі класи, дорівнює k .

Доведення. Позначимо множину листів через $L = \{L_1, L_2, \dots, L_m\}$, а множину всіх інших класів через $U = \{U_1, U_2, \dots, U_n\}$. Об'єднання $L \cup U$ співпадає з множиною всіх класів ієрархії. Утворимо з елементів L ланцюги успадкування довжиною один. Далі, ітеративно повторюємо наступний крок, поки це можливо: до кожного ланцюгу додаємо предка останнього елемента в ланцюзі, якщо такий предок існує в U і вилучаємо його з U . Зупиняємося, коли ніяких нових елементів до ланцюгів не можна додати.

Так як множина класів, яка утворює ієрархію, скінченна то і виконання цього кроку закінчиться через скінченну кількість ітерацій. Стверджується, що після завершення множина U буде пустою.

Дійсно, припустимо протилежне, а саме, що множина U є не пустою, але ніяких нових елементів додати до ланцюгів неможливо. Нехай U' - один з таких класів. За визначенням він повинен мати потомка, якого позначимо U'' . Цей потомок не може знаходитися в будь якому ланцюзі, тому що тоді і U' повинен був би бути доданим до цього ланцюга. Тому U'' знаходиться в множені U . З аналогічних міркувань потомок U'' теж повинен знаходитися в множені U . І так далі. Але множина U скінченна, тому деякий потомок не може мати ще одного потомка. Отримали протиріччя.

Побудована множина ланцюгів має потужність k . Так як всі ланцюги починаються з листів, то неможливо побудувати множину меншої потужності

Має місце і аналогічна теорема для коренів.

Теорема 3. Якщо в ієрархії класів з одиночним успадкуванням існує k коренів, то тоді мінімальна потужність множини всіх ланцюгів успадкування, які містять всі класи ієрархії не може бути менша ніж k .

Доведення. Дійсно, кожний ланцюг закінчується коренем, або класом, який входить в інший ланцюг. Так як всі класи містяться в множині цих ланцюгів, причому деякі класи можуть включатися в кілька ланцюгів, то загальна кількість ланцюгів не менша ніж кількість коренів.

З теорем 2 і 3 випливає наступний наслідок

Список використаних джерел

1. R. Ducournau, M. Habib, M. Huchard, and M.L. Mugnier, "Proposal for a Monotonic Multiple Inheritance Linearization," OOPSLA '94 Proceedings of the ninth annual conference on Object-oriented programming systems, language, and applications, pp. 164–175, 1994.
2. R. Ducournau, M. Habib, M. Huchard, and M.L. Mugnier, "Monotonic conflict resolution mechanisms for inheritance," Proceeding OOPSLA '92 conference proceedings on Object-oriented programming systems, languages, and applications, pp.16–24. 1992.
3. Mohammed K. Linearization algorithms CLOS and LOOPS of the classes in programming languages: the formal definitions / D. Buy, J. Karam, S. Kompan, S. Polyakov.// 13th International Scientific Conference on Informatics. – Poprad, Slovakia, 18-20 Nov., 2015. – P. 63-66 (Print ISBN: 978-1-4673-9867-1, DOI 10.1109/Informatics.2015.7377809).
4. Mohammed K. Mathematical Foundations of Multiple Inheritance: Reflexive-transitive Closure of the Binary Relations / Dmytro Buy, Olena Shyshatska, Sunmade Fabunmi, Karam Mohammed // Perspective Technologies and Methods in MEMS Design (MEMSTECH), 2016 XII International Conference on Perspective Technologies and Methods in MEMS Design (MEMSTECH). – 2016. – C.192-195.

Наслідок 1. В ієрархії одиночного наслідування кількість листів завжди більша або дорівнює кількості коренів.

Наступний алгоритм визначає, чи є ієрархія успадкування ієрархією одиночного успадкування.

Вхід: множина класів `set_cls`, множина наслідування класів `inherit_set`

Вихід: True, якщо це ієрархія одиночного успадкування, False в протилежному випадку

`is_single_inheritance(set_cls: Type(dictionary of classes),`

`inherit_set: Type(dictionary of class inheritens))`

`for cls, set_of_parent_cls in inherit_set`

`if size(set_of_parent_cls) > 1`

`return False`

`return True`

References

1. R. Ducournau, M. Habib, M. Huchard, and M.L. Mugnier (1994) "Proposal for a Monotonic Multiple Inheritance Linearization," OOPSLA '94 Proceedings of the ninth annual conference on Object-oriented programming systems, language, and applications, pp. 164–175.
2. R. Ducournau, M. Habib, M. Huchard, and M.L. Mugnier (1992) "Monotonic conflict resolution mechanisms for inheritance," Proceeding OOPSLA '92 conference proceedings on Object-oriented programming systems, languages, and applications, pp.16–24.
3. K. Mohammed, D. Buy, S. Kompan, S. Polyakov (2015) Linearization algorithms CLOS and LOOPS of the classes in programming languages: the formal definitions /.13th International Scientific Conference on Informatics. – Poprad, Slovakia, 18-20 Nov., 2015. – P. 63-66 (Print ISBN: 978-1-4673-9867-1, DOI 10.1109/Informatics.2015.7377809).
4. K. Mohammed, D. Buy, O. Shyshatska, S. Fabunmi (2016) Mathematical Foundations of Multiple Inheritance: Reflexive-transitive Closure of the Binary Relations / Perspective Technologies and Methods in MEMS Design (MEMSTECH), 2016 XII International Conference on Perspective Technologies and Methods in MEMS Design (MEMSTECH) – C.192-195.

Поступила в редакцію 20.10.2016

УДК 519.21

Мусбах Заїд Енвейджи, аспірант

Легіневич Т.І., магістр

Глибовець А.М., к.ф.-м.н., доцент

Архітектура системи моделей глибоких нейронних мереж

Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 01033, м. Київ, вул.
Володимирська, 60,
e-mail: s.cc85@yahoo.com

Національний університет «Києво-Могилянська
Академія», 04655, м. Київ, вул. Сковороди, 2,
email: andriy@glybovets.com.ua

Musbah Zaid Enweiji, Postgraduate

T.I. Lehinevych, Master

A.M. Glybovets, PhD in Math., Associate Professor

System architecture of deep neural network models

Taras Shevchenko National University of Kyiv,
01033, Kyiv, Volodymyrska st., 60,
e-mail: s.cc85@yahoo.com

National University «Kyiv-Mohyla Academy»,
04655, Kyiv, Skovorody st., 2,
email: andriy@glybovets.com.ua

Стаття присвячена розробці архітектури для системи міжмовної класифікації, яка забезпечує послідовний робочий процес управління моделями: безперервне навчання моделей, їх динамічне завантаження та обслуговування. Основна увага приділяється реалізації архітектури для реальної системи, котра в свою чергу буде управляти новими даними, навчати та підтримувати моделі в актуальному стані. Крім того, модуль, який відповідає за розміщення даних, дозволяє нам дозволяє нам обслуговувати кілька моделей одночасно та переходити з однієї на іншу в режимі реального часу. Ще однією особливістю даної архітектури є інформаційна панель, котра забезпечує візуалізацію і порівняння моделей, а також їх навчання та розміщення запитів.

Ключові слова: архітектура системи глибокого навчання, розміщення моделей нейронних мереж, безперервне навчання, сховище моделей.

This article is devoted to a development of the architecture for cross-language classification system that provides a workflow of models management: continuous models training, dynamic loading and serving. The emphasis is on implementing the architecture for real system that manages new data, trains and keeps models up-to-date. Moreover, the hosting module allows us to serve multiple models and switch between them in real-time. Another feature is dashboard that provides visualization and model comparison as well as training and hosting model requests.

Key Words: deep learning system architecture, neural network model hosting, continuous training, model storage.

Статтю представив доктор фіз.-мат. наук, професор, Анісімов А.В.

1. Introduction

Deep neural network is the most discussible topic of artificial intelligence research. Recent papers on this matter show that deep neural network goes far beyond just image recognition towards new systems in varied fields and industries. It has produced extremely promising results for various tasks in natural language understanding, particularly topic classification, sentiment analysis, question answering and language translation [1]. That is why, there is a need to implement deep neural network into real world systems for solving diverse problems raised in business, science or even in everyday life. There are several challenges that are to be solved during the implementation procedure, such as computationally expensive training of neural network models, continuous models improvement and models serving. Currently, these challenges are actively investigating in many studies, as a result, new solutions and architectures are being developed. In this paper, we describe a whole architecture of cross-language classification system that provides a workflow of models management: training models, tuning model parameters and serving.

2. Architecture

In this section we discuss the architecture of

continuous training pipeline and hosting for deep neural network models as one integrated system. It consists of three modules:

- data management
- model training
- model hosting

The data management module is responsible for preprocessing and storing the data. It is well known fact that deep neural network models require huge amount of data for training. That is why the module needs to fulfill two requirements: an efficient data preprocessing and availability. They are critical for two other modules (model training and hosting). In the training module the data will be queried for each training iteration, and inefficient data delivery could be a bottleneck for the whole training process. The hosting module will provide new data examples that should be handle by the data management module. The general-purpose database management system satisfies all requirements for the current module. We chose the PostgreSQL open-source database [2] for cross-language classification system. The database diagram is shown on Fig. 1. Every new article from the hosting module is saved into raw_data table and a trigger also adds it into a preprocessing queue. Independently, there are running processes that extract all new rows from

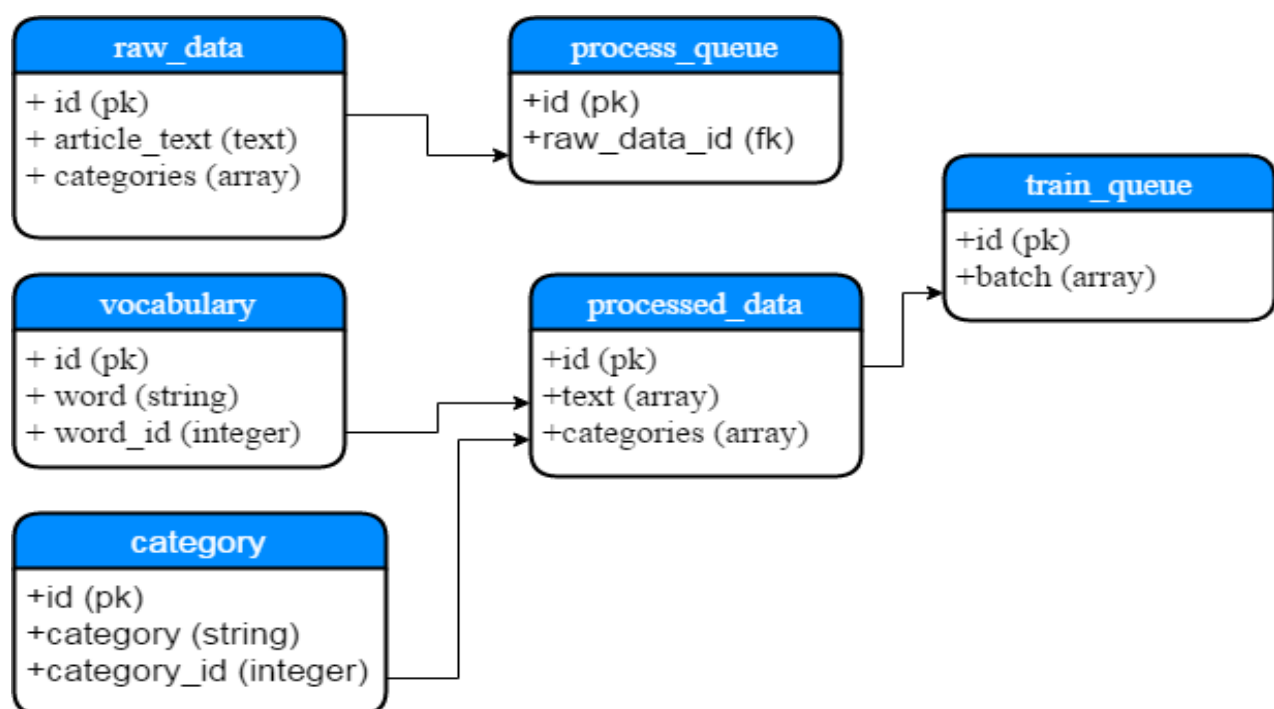


Figure 1. Database EER diagram

proccess_queue and perform the following operation:

- Clean the text data using regular expression in order to match only words.
- Append special token to each article text with length less than 1.500 words. This step is required, because each example in a batch must be of the same length.
- Build a vocabulary mapping (vocabulary table), if it exists, new words should be added into the table. Then map each word to an integer according to the table. Each article text becomes a vector of integers.
- Build a category mapping (category table), if it exists, new categories should be added into the table. Then map each category to an integer between 0 and the number of categories. For each article categories we got a vector of integers.
- Save new representation of the article into proccess_data table.

Training queue is created upon request by

expensive, and usually it is running on Graphics Processing Unit (GPU) server or cluster due to the nature of deep learning training requirements. There are multiple open source frameworks that will allow you to train your deep neural network models, such as Theano[3], torch[4], mxnet[5] and tensorflow[6]. The listed frameworks support GPU and CPU servers or cluster out of the box. The challenging part is to handle growing amount of trained models and continuous training. For this purpose it was decided to save as much information about every trained model as possible on a storage server. That is why every saved model consists of 4 components Fig. 2:

- *model_params* component contains model learned parameters (weights)
- *model_graph* component is a representation of a model structure
- *model_hyper_params* components describes the hyperparameters that was used for a model training (i.e. number of layer)

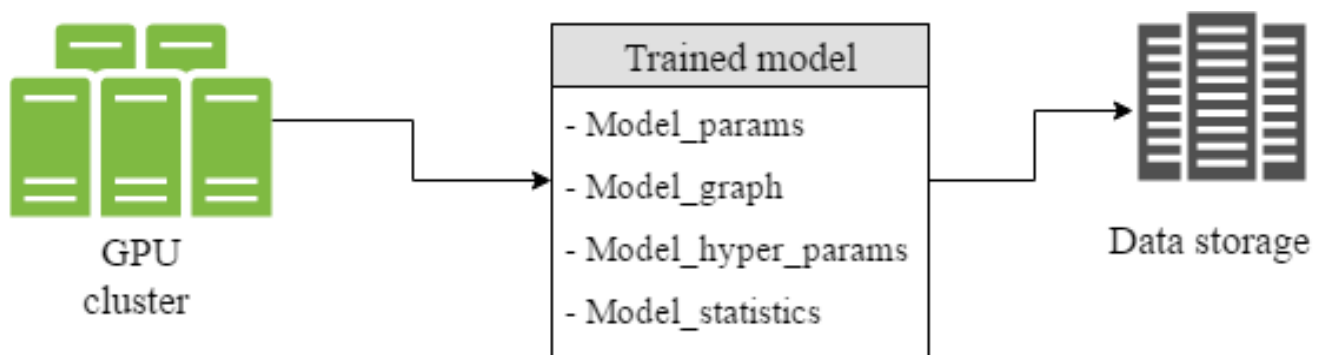


Figure 2. Exported model structure

randomly selecting a processed article from processed_data table. The size of batch is defined in the model training module. Then upon every request for data from the training module the data management module returns new batch and deletes it from the queue. The queue creation is flexible and could be modified in order to match model requirements, for example, add into a queue only new articles. The model training module is computationally

- *model_statistics* component includes statistics about training procedure, loss and accuracy values and etc.

Such simple approach gives us flexibility in model managing, because it is easier to compare two models based on gained statistics, load any of them for testing, training or running in production, the necessary information about the model and parameters are also saved. In addition, it allows us to use different

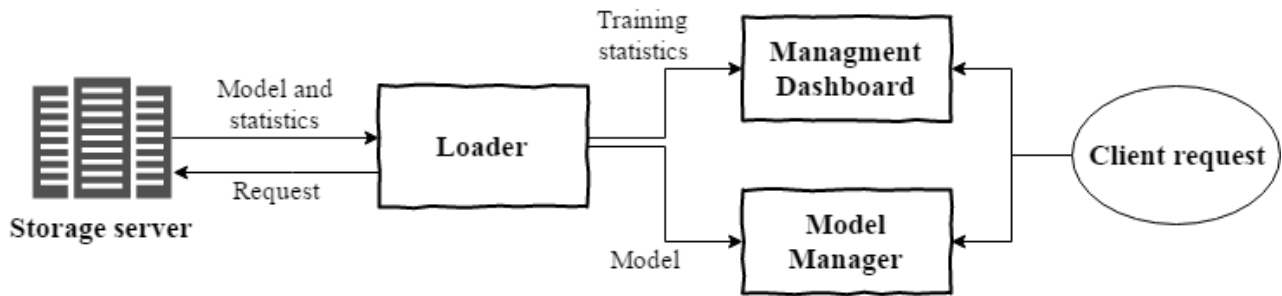


Figure 3. Model hosting module

frameworks for training and serving the models, all it requires to do is to implement script for loading saved model in specific format. Tensorflow, theano frameworks and keras library were used for the training module of the cross-language classification system. The third module is model hosting. The idea behind serving models is straight forward: load the model from storage server and run it for client requests. To handle client requests model manager was implemented, which is responsible for serving models. The number of served models limits only by server resources. It allows us to simultaneously serve multiple models and redirect request to concrete version of the model or different one without changing any API.

Thus, the system could serve simultaneously a bunch of models, and a manager could easily choose what model has to be used. The model loader is connected to the storage server, gotten information about available models and loaded the chosen ones for model manager, as presented on Fig. 3. Moreover, the loader implements logic for model visualization and statistics output. This is use separately for management dashboard and visualization. The dashboard is important for model understanding and comparing the model performance and accuracy. The other important feature of management dashboard is requesting model training. There are two options: choose already trained model and it will be trained on a new

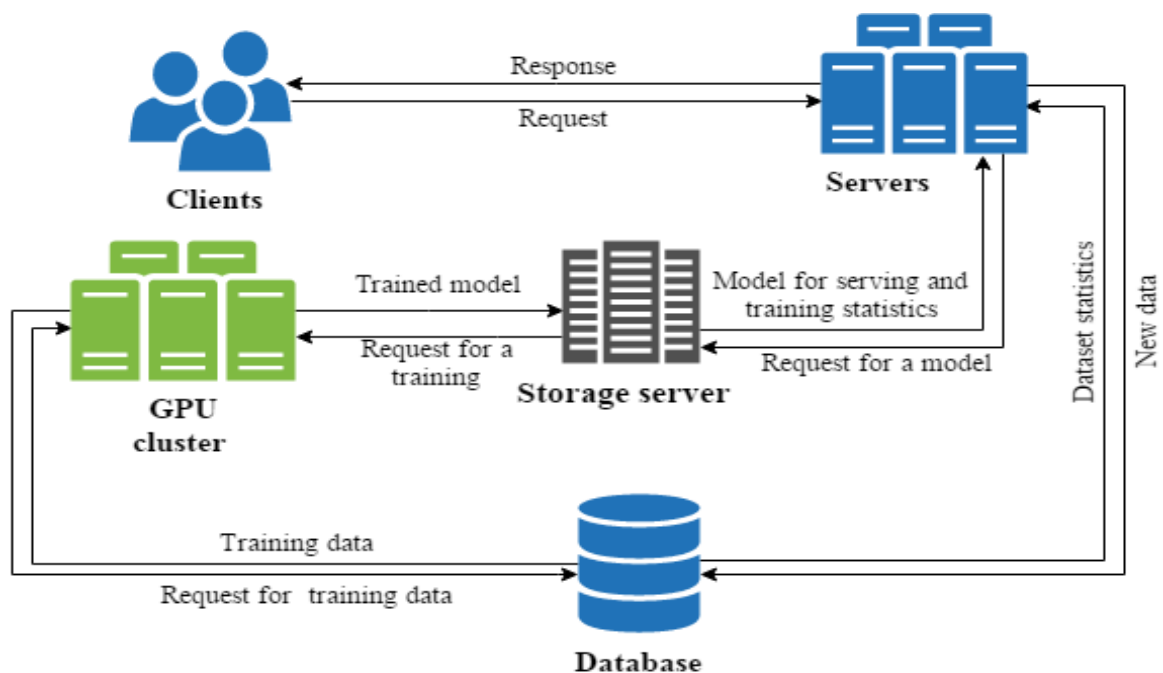


Figure 4. Architecture of cross-language classification system

available data or enter hyperparameters and train a new model. When the training procedure is finished, the model appears on the storage server.

In the cross-language classification system the hosting module was implemented based on flask framework [7] for handling client requests. However, there is also available an open-source framework called TensorFlow Serving [8] that has similar functionality for model serving, but without management dashboard.

The overall architecture is shown on Fig. 4. Such architecture allows you to continuously train neural network modules and compare them. What is more important, the model could be tested in production on chosen clients (beta testers) and easily roll back without influencing other users or system modification. The difference will be in the request body, where a version or name of the neural network model should just be specified. Also the hosting module should not be necessary based on GPU server or cluster, unless the system is not high loaded. It reduces expenses during developing phrase, especially if your system is based in cloud.

Список використаних джерел

1. LeCun Y. Deep learning / Y. LeCun, Y. Bengio, G. Hinton. // Nature. – 2015. – №512. – С. 436–444.
2. PostgreSQL 9.6.0, PostgreSQL Global Development Group. [Електронний ресурс]. – n.d. – Режим доступу до ресурсу: <https://www.postgresql.org/docs/>.
3. Theano Development Team. Theano: A Python framework for fast computation of mathematical expressions / Theano Development Team. – 2016. – arXiv e-prints abs/1605.02688. – URL: <http://arxiv.org/abs/1605.02688>
4. Collobert, R., Bengio, S. and Mariéthoz, J. Torch: a modular machine learning software library / Collobert, R., Bengio, S. // *Technical report*. – Idiap, 2002.
5. Chen, T., Li, M., Li, Y., Lin, M., Wang, N., Wang, M., Xiao, T., Xu, B., Zhang, C. and Zhang, Z. Mxnet: A flexible and efficient machine learning library for heterogeneous distributed systems / Chen, T., Li, M. – 2015. – arXiv preprint arXiv:1512.01274
6. Abadi, M., Barham, P., Chen, J., Chen, Z., Davis, A., Dean, J., Devin, M., Ghemawat, S., Irving, G., Isard, M. et al. Tensorflow: A system for large-scale machine learning./ Abadi, M., Agarwal, A. et al.// *Proceedings of the 12th USENIX Symposium on Operating Systems Design and Implementation (OSDI)*. – Savannah, Georgia, USA, 2016.
7. Flask is a microframework for Python based on Werkzeug and Jinja2. [Електронний ресурс]. – n.d. – Режим доступу до ресурсу: <http://flask.pocoo.org/>.
8. TensorFlow Serving is an open-source software library for serving machine learning models. . [Електронний ресурс]. – n.d. – Режим доступу до ресурсу: <https://tensorflow.github.io/serving/>.

References

1. LECUN, Y., BENGIO, Y. and HINTON, G. (2015). Deep learning, Nature 521(7553): 436–444.
2. PostgreSQL (n.d). *PostgreSQL 9.6.0, PostgreSQL Global Development Group*. [online] Available at: <https://www.postgresql.org/docs/> [Accessed 20 Nov. 2016].
3. Theano Development Team (2016). Theano: A Python framework for fast computation of mathematical expressions, arXiv e-prints abs/1605.02688. URL: <http://arxiv.org/abs/1605.02688>
4. COLLOBERT, R., BENGIO, S. and MARIETHOZ, J. (2002). Torch: a modular machine learning software library, Technical report, Idiap.
5. CHEN, T., LI, M., LI, Y., LIN, M., WANG, N., WANG, M., XIAO, T., XU, B., ZHANG, C. and ZHANG, Z. (2015). Mxnet: A flexible and efficient machine learning library for heterogeneous distributed systems, arXiv preprint arXiv:1512.01274
6. ABADI, M., BARHAM, P., CHEN, J., CHEN, Z., DAVIS, A., DEAN, J., DEVIN, M., GHEMAWAT, S., IRVING, G., ISARD, M. et al. (2016). Tensorflow: A system for large-scale machine learning. Proceedings of the 12th USENIX Symposium on Operating Systems Design and Implementation (OSDI). Savannah, Georgia, USA.
7. Flask (A Python Microframework) (n.d.). *Flask is a microframework for Python based on Werkzeug and Jinja2*. [online] Available at: <http://flask.pocoo.org/> [Accessed 22 Nov. 2016].
8. TensorFlow Serving (n.d.). *TensorFlow Serving is an open-source software library for serving machine learning models*. [online] Available at: <https://tensorflow.github.io/serving/> [Accessed 16 Nov. 2016].

Надійшла до редакції 7.12.2016

УДК 004.42:510.69

Нікітченко М.С., д. ф.-м. н., проф.

Властивості квазіарних специфікаційних алгебр

Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, пр. Глушкова 4д
e-mail: nikitchenko@unicyb.kiev.ua

Nikitchenko M.S., Dr. Sci., prof.

Properties of quasiary specification algebras

Taras Shevchenko National University of Kyiv,
03680, Kyiv, Glushkova st., 4d
e-mail: nikitchenko@unicyb.kiev.ua

Вводяться спеціальні специфікаційні алгебри над класами квазіарних відображень. Ці алгебри відображають такі властивості програмних систем, як частковість даних, частковість та необмежена арність предикатів та функцій, чутливість до невизначених даних. Досліджено властивості побудованих алгебр та визначено нормальні форми термів у цих алгебрах. Запропоновані методи можуть бути корисними для побудови та дослідження алгебр та логік для доведення властивостей програм.

Ключові слова: алгебра, квазіарний предикат, програмна алгебра.

Special program specification algebras defined for classes of quasiary mappings are introduced. These algebras reflect such features of software systems as partiality of data, partiality and unrestricted arity of predicate and functions, sensitivity to unassigned variables. For the constructed algebras their properties are studied and normal forms of their terms are defined. The proposed methods can be useful for construction and investigation of algebras and logics for program reasoning.

Key Words: algebra, quasiary predicate, program algebra.

Статтю представив д. ф.-м. н., проф. Буй Д.Б.

Introduction

In this paper we present a special kind of algebras over classes of quasiary mappings [1]. Such mappings are partial mappings defined over partial states (partial assignments) of variables. Conventional n -ary mappings can be considered as a special case of quasiary mappings. Quasiary mappings can be met in different branches of mathematics, logics, and computer science. Informally speaking, such mappings appear when we use variables (names) to construct mapping arguments. Quasiary mappings adequately represent semantics of computer programs, therefore algebras of quasiary mappings can be treated as formal models of programs [2].

Here we consider special specification algebras which are generalizations of Glushkov systems of algorithmic algebras [3] on classes of quasiary mappings. Such algebras better reflect properties of software systems (partiality of data, partiality and unrestricted arity of predicate and functions, sensitivity to unassigned variables) [4], but they are more complicated than algebras of n -ary mappings.

We study properties of compositions of quasiary specification algebras and their several extensions; also, we construct normal forms of terms of these algebras. Obtained results can be used to construct program logics which are oriented on proving program properties.

1. Formal Definitions of Quasiary Specification Algebras

Let V be a set of names, $V \neq \emptyset$. According to tradition, names from V are also called *variables*. Let A be a set of basic values, $A \neq \emptyset$. Given V and A , the class ${}^V A$ of nominative sets is defined as the class of all partial mappings from V to A , thus, ${}^V A = V \xrightarrow{p} A$. Informally speaking, nominative sets represent states of variables.

Though nominative sets are defined as mappings, we follow mathematical traditions and also use set-like notation for these objects. In particular, the notation $d = [v_i \mapsto a_i \mid i \in I]$ describes a nominative set d ; the notation $v_i \mapsto a_i \in {}_n d$ means that $d(v_i)$ is defined and its value is a_i ($d(v_i) \downarrow = a_i$). The main operations

for nominative sets are total unary parametric projections $\|_X$ and $\|_{-X}$ ($X \subseteq V$), and a total binary overriding defined respectively by the following formulas ($d, d_1, d_2 \in {}^V A$):

$$\begin{aligned} d \|_X &= [\nu \mapsto a \in_n d \mid x \in X]; \quad d \|_{-X} = [\nu \mapsto a \in_n d \mid x \notin X]; \\ d_1 \nabla d_2 &= [\nu \mapsto a \mid \nu \mapsto a \in_n d_2 \vee \\ &\quad \vee (\nu \mapsto a \in_n d_1 \wedge \neg \exists a' (\nu \mapsto a' \in_n d_2))]. \end{aligned}$$

Let $Bool = \{T, F\}$ be a set of Boolean values. Sets $Pr_A^V = {}^V A \xrightarrow{p} Bool$, $F_n A^V = {}^V A \xrightarrow{p} A$, and $PF_A^V = {}^V A \xrightarrow{p} {}^V A$ are respectively called sets of *partial quasiary predicates*, *partial quasiary ordinary functions*, and *partial bi-quasiary (program) functions*. Here ‘ordinary’ means that the range of such functions is the set of basic values A . The terms ‘ordinary’ and ‘partial’ are often omitted.

In general terms, elements from Pr_A^V , $F_n A^V$, and PF_A^V are called *quasiary mappings*. Operations over mappings are called *compositions*.

We use the following set of composition symbols parameterized by V :

$Cs^V = \{\vee, \neg, \exists x, 'x, S_p^{\bar{v}}, S_F^{\bar{v}}, =, S_G^{\bar{v}}, AS^x, \bullet, IF, WH, \cdot\}$. The following notational convention (maybe with indexes) is used: x, y, u, v, z for variables; d for a nominative set; p, q for predicates; f, h for ordinary functions; g for a program function; Φ for a formula, t for a term, and π for a program. If $\bar{v}$ is a list of variables $v_1, \dots, v_n$, $\bar{f}$ is a list of ordinary function $f_1, \dots, f_n$, d is a nominative set, then $d \nabla \bar{v} \mapsto \bar{f}(d)$ denotes a nominative set

$$d \nabla [v_1 \mapsto f_1(d), \dots, v_n \mapsto f_n(d)].$$

Notation $d \nabla x \mapsto a$ means $d \nabla [x \mapsto a]$. Other notations are understood in the sense of [2].

All compositions are total mappings and have the following types:

$$\begin{aligned} \vee: Pr_A^V \times Pr_A^V &\xrightarrow{t} Pr_A^V, \\ \neg, \exists x: Pr_A^V &\xrightarrow{t} Pr_A^V, \\ 'x: F_n A^V, \\ S_p^{\bar{v}}: Pr_A^V \times (F_n A^V)^n &\xrightarrow{t} Pr_A^V, \\ S_F^{\bar{v}}: F_n A^V \times (F_n A^V)^n &\xrightarrow{t} F_n A^V, \\ =: F_n A^V \times F_n A^V &\xrightarrow{t} Pr_A^V, \\ S_G^{\bar{v}}: PF_A^V \times (F_n A^V)^n &\xrightarrow{t} PF_A^V, \\ AS^x: F_n A^V &\xrightarrow{t} PF_A^V, \\ \bullet: PF_A^V \times PF_A^V &\xrightarrow{t} PF_A^V, \\ IF: Pr_A^V \times PF_A^V \times PF_A^V &\xrightarrow{t} PF_A^V, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} WH: Pr_A^V \times PF_A^V &\xrightarrow{t} PF_A^V, \\ \cdot: PF_A^V \times PF_A^V &\xrightarrow{t} PF_A^V. \end{aligned}$$

Compositions are defined by the following formulas:

$$\begin{aligned} (p \vee q)(d) &\equiv \begin{cases} T, & \text{if } p(d) \downarrow = T \text{ or } q(d) \downarrow = T, \\ F, & \text{if } p(d) \downarrow = F \text{ and } q(d) \downarrow = F, \\ \text{undefined in other cases.} \end{cases} \\ (\neg p)(d) &\equiv \begin{cases} T, & \text{if } p(d) \downarrow = F, \\ F, & \text{if } p(d) \downarrow = T, \\ \text{undefined if } p(d) \uparrow. \end{cases} \\ (\exists x p)(d) &\equiv \begin{cases} T, & \text{if exists } b \in A: p(d \nabla x \mapsto b) \downarrow = T, \\ F, & p(d \nabla x \mapsto a) \downarrow = F \text{ for each } a \in A, \\ \text{undefined in other cases.} \end{cases} \end{aligned}$$

$$'x(d) \equiv d(x).$$

$$S_p^{\bar{v}}(p, \bar{f})(d) \equiv p(d \|_{-\bar{v}} \nabla \bar{v} \mapsto \bar{f}(d)).$$

$$S_F^{\bar{v}}(f, \bar{f})(d) \equiv f(d \|_{-\bar{v}} \nabla \bar{v} \mapsto \bar{f}(d)).$$

$$S_p^{\bar{v}}(g, \bar{f})(d) \equiv g(d \|_{-\bar{v}} \nabla \bar{v} \mapsto \bar{f}(d)).$$

$$(f = f')(d) \equiv \begin{cases} T, & \text{if } f(d) \downarrow, f'(d) \downarrow, f(d) = f'(d) \\ & \text{or } f(d) \uparrow, f'(d) \uparrow, \\ F, & \text{in other cases.} \end{cases}$$

$$AS^x(f)(d) \equiv d \nabla [x \mapsto f(d)].$$

$$g_1 \bullet g_2(d) \equiv g_2(g_1(d)).$$

$$IF(p, g_1, g_2)(d) \equiv \begin{cases} g_1(d), & \text{if } p(d) \downarrow = T, g_1(d) \downarrow, \\ g_2(d), & \text{if } p(d) \downarrow = F, g_2(d) \downarrow, \\ \text{undefined in other cases.} \end{cases}$$

$$WH(p, g)(d) = d_n, \text{ if } p(d) \downarrow = T, g(d) \downarrow = d_1,$$

$$p(d_1) \downarrow = T, g(d_1) \downarrow = d_2, \dots,$$

$$p(d_{n-1}) \downarrow = T, g(d_{n-1}) \downarrow = d_n, p(d_n) \downarrow = F.$$

$$g \cdot p(d) \equiv p(g(d)).$$

Please note that definitions of predicate compositions are similar to *strong Kleene's* connectives and quantifiers [5]. We also call superposition and equality compositions as *strong* compositions in the sense that they are *sensitive to undefinedness* of ordinary functions.

A tuple $A_A^V(Cs^V) = \langle Pr_A^V, F_n A^V, PF_A^V; Cs^V \rangle$ is called *quasiary specification algebra* (QSA) over V and A .

Variables used as composition parameters can be classified as *essential* in the sense that they can affect the result of composition application evaluation and as *updatable* in the sense that the values of these variables can change during

evaluation. Variable x is essential for denomination composition ' x ', variable x is updatable for $\exists x$ and AS^x , variables $v_1, \dots, v_n$ are updatable for $S_P^{v_1, \dots, v_n}$, $S_F^{v_1, \dots, v_n}$, and $S_G^{v_1, \dots, v_n}$.

The presented class of compositions is rather expressive and permits to define new important compositions. For example,

- conjunction composition : $p \wedge q = \neg(\neg p \vee \neg q)$;
- renomination:

$$R_{x_1, \dots, x_n}^{v_1, \dots, v_n}(p) = S_P^{v_1, \dots, v_n}(p, 'x_1, \dots, 'x_n);$$

- monotone Floyd-Hoare composition FH for partial predicates [6]: $FH(p, g, q) = p \rightarrow g \cdot q$; here $FH(p, g, q)$ formalizes Hoare triple $\{p\}g\{q\}$;
- identity program function:

$$id = WH('x \neq 'x, AS^x('x);$$

- nowhere defined program function

$$\perp_G = WH('x = 'x, AS^x('x);$$

- nowhere defined predicate: $\perp_P = \perp_G \cdot ('x = 'x)$.

2. Properties of compositions of quasiary specification algebras

Properties related to propositional compositions (connectives) are traditional therefore we concentrate on properties of superposition compositions which give specifics to algebras of quasiary predicates and are not defined for n -ary mappings.

Lemma 1 (distributivity of superposition). The following properties hold in $A_A^V(Cs^V)$:

$$S_{\vee}. S_P^{\bar{v}}(p \vee q, \bar{f}) = S_P^{\bar{v}}(p, \bar{f}) \vee S_P^{\bar{v}}(q, \bar{f});$$

$$S_{\neg}. S_P^{\bar{v}}(\neg p, \bar{f}) = \neg S_P^{\bar{v}}(p, \bar{f});$$

$$S_{=} . S_P^{\bar{v}}(h_1 = h_2, \bar{f}) = S_F^{\bar{v}}(h_1, \bar{f}) = S_F^{\bar{v}}(h_2, \bar{f});$$

$$S_{\exists}. S_P^{\bar{v}}(\exists x p, \bar{f}) = \exists u S_P^{\bar{v}}(S_P^x(p, 'u), \bar{f}); \quad u \notin x, \quad u \notin \bar{v},$$

u is unessential for p and $\bar{f}$.

Here " u is unessential for p and $\bar{f}$ " means that $p(d) \equiv p(d')$ and $\bar{f}(d) \equiv \bar{f}(d')$ for any d and d' such that $d|_{-\{u\}} = d'|_{-\{u\}}$.

Proof. Let us prove the property $S_{\exists}$ only. Evaluating the left hand-side we obtain that

$$S_P^{\bar{v}}(\exists x p, \bar{f})(d) \equiv \exists x p(d \nabla \bar{v} \mapsto \bar{f}(d)). \quad \text{Assume that}$$

$$\exists x p(d \nabla \bar{v} \mapsto \bar{f}(d)) \downarrow = T. \quad \text{It means that}$$

$$p((d \nabla \bar{v} \mapsto \bar{f}(d)) \nabla x \mapsto a) \downarrow = T \quad \text{for some } a \in A.$$

$$\text{Evaluating of the right-hand side}$$

$\exists u S_P^{\bar{v}}(S_P^x(p, 'u), \bar{f})(d)$ for this a and using the property that u is unessential for p and $\bar{f}$ we obtain that

$$\begin{aligned} & S_P^{\bar{v}}(S_P^x(p, 'u), \bar{f})(d \nabla u \mapsto a) \equiv \\ & \equiv S_P^x(p, 'u)((d \nabla u \mapsto a) \nabla \bar{v} \mapsto \bar{f}(d \nabla u \mapsto a)) \equiv \\ & \equiv S_P^x(p, 'u)(d \nabla u \mapsto a \nabla \bar{v} \mapsto \bar{f}(d)) \equiv \\ & \equiv p(d \nabla u \mapsto a \nabla \bar{v} \mapsto \bar{f}(d)) \nabla \\ & \nabla x \mapsto 'u(d \nabla u \mapsto a \nabla \bar{v} \mapsto \bar{f}(d)) \equiv \\ & \equiv p(d \nabla u \mapsto a \nabla \bar{v} \mapsto \bar{f}(d)) \nabla x \mapsto a \equiv \\ & \equiv p(d \nabla \bar{v} \mapsto \bar{f}(d)) \nabla x \mapsto a = T. \end{aligned}$$

The case of $p((d \nabla \bar{v} \mapsto \bar{f}(d)) \nabla x \mapsto a) \downarrow = F$ is considered in the same manner.

Thus, $S_P^{\bar{v}}(\exists x p, \bar{f}) = \exists u S_P^{\bar{v}}(S_P^x(p, 'u), \bar{f})$.

Lemma 2 (superposition folding). Let

$\bar{y} = y_1, \dots, y_n, \quad \bar{f}' = f'_1, \dots, f'_n; \quad \bar{x} = x_1, \dots, x_k,$
 $\bar{f} = f_1, \dots, f_k, \quad \bar{h}' = h'_1, \dots, h'_k, \quad \bar{v} = v_1, \dots, v_m,$
 $\bar{h} = h_1, \dots, h_m, \quad \bar{y} \cap \bar{v} = \emptyset.$ Then the following

properties hold in $A_A^V(Cs^V)$:

$$SS_P. S_P^{\bar{y}, \bar{x}}(S_P^{\bar{x}, \bar{v}}(p, \bar{f}, \bar{h}), \bar{f}', \bar{h}') = S_P^{\bar{y}, \bar{x}, \bar{v}}(p, \bar{\sigma}),$$

$$SS_F. S_F^{\bar{y}, \bar{x}}(S_F^{\bar{x}, \bar{v}}(f, \bar{f}, \bar{h}), \bar{f}', \bar{h}') = S_F^{\bar{y}, \bar{x}, \bar{v}}(f, \bar{\sigma}),$$

$$SS_G. S_G^{\bar{y}, \bar{x}}(S_G^{\bar{x}, \bar{v}}(g, \bar{f}, \bar{h}), \bar{f}', \bar{h}') = S_F^{\bar{y}, \bar{x}, \bar{v}}(g, \bar{\sigma}),$$

where

$$\begin{aligned} \bar{\sigma} = & (\bar{f}', S_F^{\bar{y}, \bar{x}}(f_1, \bar{f}', \bar{h}'), \dots, S_F^{\bar{y}, \bar{x}}(f_k, \bar{f}', \bar{h}'), \\ & S_F^{\bar{y}, \bar{x}}(h_1, \bar{f}', \bar{h}'), \dots, S_F^{\bar{y}, \bar{x}}(h_m, \bar{f}', \bar{h}')). \end{aligned}$$

Proof is straightforward and is not presented here.

Superposition compositions are not distributive with respect to WH therefore we simplify superpositions into program functions using the identity program function.

Lemma 3 (superpositions with program functions). The following properties hold in $A_A^V(Cs^V)$:

SG – superposition into program function:

$$S_G^{\bar{v}}(g, \bar{f}) = S_G^{\bar{v}}(id, \bar{f}) \bullet g,$$

SP – superposition with prediction composition:

$$S_P^{\bar{v}}(g \cdot p, \bar{f}) = S_G^{\bar{v}}(g, \bar{f}) \cdot p.$$

Proof. Let us prove SG only. For every $d \in A$ we have that

$$\begin{aligned} & S_G^{\bar{v}}(g, \bar{f})(d) \equiv g(d|_{-\bar{v}} \nabla \bar{v} \mapsto \bar{f}(d)) \equiv \\ & \equiv g(id(d|_{-\bar{v}} \nabla \bar{v} \mapsto \bar{f}(d))) \equiv g(S_G^{\bar{v}}(id, \bar{f})(d)) \equiv \\ & \equiv (S_G^{\bar{v}}(id, \bar{f}) \bullet g)(d). \end{aligned}$$

Thus, $S_G^{\bar{v}}(g, \bar{f}) = S_G^{\bar{v}}(id, \bar{f}) \bullet g$.

Lemma 4 (superposition simplification). The following properties hold in $\mathbb{A}_A^V(Cs^V)$:

SE – superposition with empty parameter list:

$$S_P(p) = p, \quad S_F(f) = f, \quad S_G(g) = g;$$

SiD – superposition into denomination functions:

$$S_F^{\bar{v}}(x, \bar{f}) = x \text{ if } x \notin \bar{v}; \quad S_F^{x, \bar{v}}(x, f, \bar{h}) = f;$$

SwD – superposition with denomination function:

$$S_P^{x, \bar{v}}(p, x, \bar{f}) = S_P^{\bar{v}}(p, \bar{f}),$$

$$S_F^{x, \bar{v}}(h, x, \bar{f}) = S_F^{\bar{v}}(h, \bar{f});$$

ST – transposition of parameters:

$$S_P^{\bar{v}, x, y, \bar{z}}(\varphi, \bar{f}, h, h', \bar{f}') = S_P^{\bar{v}, y, x, \bar{z}}(\varphi, \bar{f}, h', h, \bar{f}'),$$

$$S_F^{\bar{v}, x, y, \bar{z}}(f, \bar{f}, h, h', \bar{f}') = S_F^{\bar{v}, y, x, \bar{z}}(f, \bar{f}, h', h, \bar{f}'),$$

$$S_G^{\bar{v}, x, y, \bar{z}}(g, \bar{f}, h, h', \bar{f}') = S_G^{\bar{v}, y, x, \bar{z}}(g, \bar{f}, h', h, \bar{f}').$$

These properties can be used to construct superpositional normal forms for algebra terms.

Now we study relations between QSA $\mathbb{A}_A^V(Cs^V)$ and QSA $\mathbb{A}_A^{V'}(Cs^{V'})$ induced by the following two relations between sets of their names:

- there is a renomination bijection $\beta: V \xrightarrow{p} V'$,
- V' is an extension of V ($V \subseteq V'$).

3. Variable renomination in QSA

Given QSA $\mathbb{A}_A^V(Cs^V)$, QSA $\mathbb{A}_A^{V'}(Cs^{V'})$, and renomination bijection $\beta: V \xrightarrow{t} V'$, a mapping $\beta_D: {}^V A \xrightarrow{t} {}^{V'} A$ can be defined by the following formula: $\beta_D(d) = [\beta(v) \mapsto a \mid v \mapsto a \in {}_n d]$ for any $d \in {}^V A$.

This mapping induces new mappings $\beta_P: Pr_A^V \xrightarrow{t} Pr_A^{V'}$, $\beta_F: Fn_A^V \xrightarrow{t} Fn_A^{V'}$, and $\beta_G: PF_A^V \xrightarrow{t} PF_A^{V'}$ defined respectively by the formulas $\beta_P(p)(d') \cong p(\beta_D^{-1}(d'))$,

$$\beta_F(f)(d') \cong f(\beta_D^{-1}(d')),$$

and $\beta_G(g)(d') \cong g(\beta_D^{-1}(d'))$ for any $d' \in {}^{V'} A$.

Also, $\beta: V \xrightarrow{t} V'$ induces in a natural way a bijection $\beta_C: Cs^V \xrightarrow{t} Cs^{V'}$ between composition classes Cs^V and $Cs^{V'}$.

Theorem 1. Mappings β_C , β_P , β_F , and β_G define an isomorphism of $\mathbb{A}_A^V(Cs^V)$ and $\mathbb{A}_A^{V'}(Cs^{V'})$.

Proof. Let us prove, for instance, that

$$\begin{aligned} \beta_P(S_P^{v_1, \dots, v_n}(p, f_1, \dots, f_n)) &= \\ &= S_P^{\beta(v_1), \dots, \beta(v_n)}(\beta_P(p), \beta_F(f_1), \dots, \beta_F(f_n)). \end{aligned}$$

Given $d \in {}^V A$, $d' \in {}^{V'} A$, for the left hand-side we have that

$$\begin{aligned} \beta_P(S_P^{v_1, \dots, v_n}(p, f_1, \dots, f_n))(d') &\cong \\ S_P^{v_1, \dots, v_n}(p, f_1, \dots, f_n)(\beta_D^{-1}(d')) &\cong \\ \cong p(\beta_D^{-1}(d') \upharpoonright_{-\{v_1, \dots, v_n\}} \nabla & \\ \nabla[x_1 \mapsto f_1(\beta_D^{-1}(d')), \dots, x_n \mapsto f_n(\beta_D^{-1}(d'))]) & \end{aligned}$$

For the right hand-side we have that

$$\begin{aligned} S_P^{\beta(v_1), \dots, \beta(v_n)}(\beta_P(p), \beta_F(f_1), \dots, \beta_F(f_n))(d') &\cong \\ \cong \beta_P(p)(d' \upharpoonright_{-\{\beta(v_1), \dots, \beta(v_n)\}} \nabla & \\ \nabla[\beta(v_1) \mapsto \beta_F(f_1)(d'), \dots, \beta(v_n) \mapsto \beta_F(f_n)(d')]) &\cong \\ \cong p(\beta_D^{-1}(d' \upharpoonright_{-\{\beta(v_1), \dots, \beta(v_n)\}} \nabla & \\ \nabla[\beta(v_1) \mapsto \beta_F(f_1)(d'), \dots, \beta(v_n) \mapsto \beta_F(f_n)(d')]) &\cong \\ \cong p(\beta_D^{-1}(d') \upharpoonright_{-\{v_1, \dots, v_n\}} \nabla & \\ \nabla[v_1 \mapsto \beta_F(f_1)(d'), \dots, v_n \mapsto \beta_F(f_n)(d')]) &\cong \\ \cong p(\beta_D^{-1}(d') \upharpoonright_{-\{v_1, \dots, v_n\}} \nabla & \\ \nabla[x_1 \mapsto f_1(\beta_D^{-1}(d')), \dots, x_n \mapsto f_n(\beta_D^{-1}(d'))]) & \end{aligned}$$

Both sides coincide, so, the equality holds.

Other properties are proved in a similar way.

4. QSA with extended sets of variables

Let V' be an extension of V ($V \subseteq V'$). How $\mathbb{A}_A^V(Cs^V)$ and $\mathbb{A}_A^{V'}(Cs^{V'})$ can be naturally related?

To answer this question we should first find ways to relate mappings of $\mathbb{A}_A^V(Cs^V)$ with mappings of $\mathbb{A}_A^{V'}(Cs^{V'})$. The main difficulty here is that mappings of $\mathbb{A}_A^V(Cs^V)$ are defined on “smaller” nominative sets from ${}^V A$ comparing with “bigger” sets from ${}^{V'} A$. Analyzing this difficulty we can propose two natural solutions:

1) to “ignore” the values of variables from $U = V \setminus V'$; in this case these variables can have any values and become unessential variables;

2) to “assume” fixed values of variables from $U = V \setminus V'$; in this case these fixed values can be represented by some nominative set d_0 from ${}^{V'} A$.

The first case induces injective homomorphisms from the first QSA $\mathbb{A}_A^V(Cs^V)$ to QSA $\mathbb{A}_A^{V'}(Cs^{V'})$ which is a restriction of $\mathbb{A}_A^{V'}(Cs^{V'})$, and the second case induces homomorphisms from a special subalgebra of $\mathbb{A}_A^{V'}(Cs^{V'})$ to $\mathbb{A}_A^V(Cs^V)$.

For the first case we define a mapping $t_D^U : V' A \xrightarrow{t} V A$ by the formula $t_D^U(d') = d' \parallel_U$ ($d' \in V' A$). These definitions specify three mappings $t_P^U : Pr_A^V \xrightarrow{t} Pr_A^{V'}$, $t_F^U : Fn_A^V \xrightarrow{t} Fn_A^{V'}$, and $t_G^U : PF_A^V \xrightarrow{t} PF_A^{V'}$ between algebras' carriers:

$$t_P^U(p)(d') \equiv p(t_D^U(d')), \quad t_F^U(f)(d') \equiv f(t_D^U(d')), \\ t_G^U(g)(d') \equiv d' \parallel_U \nabla g(t_D^U(d')).$$

Theorem 2. Let $V \subseteq V', U = V \setminus V'$. Then mappings t_P^U , t_F^U , and t_G^U define an injective homomorphism of $\mathbb{A}_A^{V'}(Cs^V)$ into $\mathbb{A}_A^V(Cs^V)$.

Proof. Injectivity of t_P^U , t_F^U , and t_G^U is trivial. Let us prove, for instance, that

$$t_P^U(S_p^{v_1, \dots, v_n}(p, f_1, \dots, f_n))(d') = \\ = S_p^{v_1, \dots, v_n}(t_P^U(p), t_F^U(f_1), \dots, t_F^U(f_n)).$$

Given $d \in V A$, $d' \in V' A$, for the left hand-side we have that

$$t_P^U(S_p^{v_1, \dots, v_n}(p, f_1, \dots, f_n))(d') \equiv \\ \equiv S_p^{v_1, \dots, v_n}(p, f_1, \dots, f_n)(t_D^U(d')) \equiv p(t_D^U(d')) \parallel_{\{v_1, \dots, v_n\}} \nabla \\ \nabla [v_1 \mapsto f_1(t_D^U(d')), \dots, v_n \mapsto f_n(t_D^U(d'))].$$

For the right hand-side we have that

$$S_p^{v_1, \dots, v_n}(t_P^U(p), t_F^U(f_1), \dots, t_F^U(f_n))(d') \equiv \\ \equiv t_P^U(p)(d' \parallel_{\{v_1, \dots, v_n\}} \nabla [v_1 \mapsto t_F^U(f_1)(t_D^U(d')), \dots, \\ v_n \mapsto t_F^U(f_n)(t_D^U(d'))]) \equiv p(t_D^U(d')) \parallel_{\{v_1, \dots, v_n\}} \nabla \\ \nabla [v_1 \mapsto f_1(t_D^U(d')), \dots, v_n \mapsto f_n(t_D^U(d'))].$$

Both sides coincide, so, the equality holds.

Other properties are proved in a similar way.

The second case is a bit complicated. We should consider a subclass $PFR_A^{V'}$ of program functions for which variables from U are non-updatable. It is easy to prove that

$$\mathbb{A}_A^{V'}(Cs^V) = \langle Pr_A^{V'}, Fn_A^{V'}, PFR_A^{V'}; Cs^V \rangle$$

is a subalgebra of $\mathbb{A}_A^{V'}(Cs^V)$. Now, given $d_0 \in V' A$ we

define $v_{D, d_0}^U : V A \xrightarrow{t} V' A$ by formula

$$v_{D, d_0}^U(d) = d_0 \parallel_U \nabla d. \text{ Then, we define mappings}$$

v_{P, d_0}^U , v_{F, d_0}^U , and v_{G, d_0}^U in the following way:

$$v_{P, d_0}^U(p')(d) \equiv p'(v_{D, d_0}^U(d)), \\ v_{F, d_0}^U(f')(d) \equiv f'(v_{D, d_0}^U(d)), \\ v_{G, d_0}^U(g')(d) \equiv g'(v_{D, d_0}^U(d)) \parallel_V.$$

Theorem 3. Let $V \subseteq V', U = V \setminus V'$. Then mappings v_{P, d_0}^U , v_{F, d_0}^U , and v_{G, d_0}^U define a homomorphism of $\mathbb{A}_A^{V'}(Cs^V)$ into $\mathbb{A}_A^V(Cs^V)$.

Proof. Let us prove, for instance, that $v_{G, d_0}^U(g_1' \bullet g_2') = v_{G, d_0}^U(g_1') \bullet v_{G, d_0}^U(g_2')$. Evaluating the left hand-side we obtain

$$v_{G, d_0}^U(g_1' \bullet g_2')(d) \equiv (g_1' \bullet g_2')(v_{D, d_0}^U(d)) \parallel_V \equiv \\ \equiv (g_2'(g_1'(d_0 \parallel_U \nabla d))) \parallel_V.$$

Evaluating the right hand-side we obtain

$$v_{G, d_0}^U(g_1') \bullet v_{G, d_0}^U(g_2')(d) \equiv v_{G, d_0}^U(g_2')(v_{G, d_0}^U(g_1')(d)) \equiv \\ \equiv v_{G, d_0}^U(g_2')(g_1'(v_{D, d_0}^U(d))) \parallel_V \equiv \\ \equiv g_2'(v_{D, d_0}^U(g_1'(v_{D, d_0}^U(d)))) \parallel_V \equiv \\ \equiv g_2'(v_{D, d_0}^U(g_1'(d_0 \parallel_U \nabla d))) \parallel_V \equiv \\ \equiv g_2'(d_0 \parallel_U \nabla (g_1'(d_0 \parallel_U \nabla d))) \parallel_V.$$

But $d_0 \parallel_U \nabla (g_1'(d_0 \parallel_U \nabla d)) \equiv g_1'(d_0 \parallel_U \nabla d)$

because variables from U are non-updatable.

Both sides coincide, so, the equality holds.

5. Superpositional normal forms in QSA

The obtained results will be used to prove properties of extended algebras. In this case the terms of quasiary specification algebras, interpreted as predicates, are called *QUR*-formulas. This permits to formulate transformations rules based on properties presented in Lemmas 1–4. For instance, the property $S\exists$ specifies a transformation rule

$$TS\exists. S_p^{\bar{v}}(\exists x \Phi, \bar{t}) = \exists u S_p^{\bar{v}}(S_p^x(\Phi, 'u, \bar{t})); u \neq x, \\ u \notin \bar{v}, u \text{ is fresh unessential variable for } \Phi \text{ and } \bar{t}.$$

Here “ u is fresh unessential variable for Φ and $\bar{t}$ ” means that u belongs to the set U of unessential for basic predicates variables and u does not occur in Φ and $\bar{t}$ [4]. Correctness of this rule can be proved by induction.

We use these rules to construct superpositional normal forms of a formula.

QUR-formula Φ is said to be in *superpositional normal form*, if the following conditions hold:

SP. For each subformula $S_p^{\bar{v}}(\Psi, \bar{t})$ of formula Φ we have that Ψ is symbol of a basic predicate;

SF. For each subformula of the form $S_f^{\bar{v}}(t, \bar{t}')$ we have that t is a symbol of basic ordinary function;

SG. For each subformula of the form $S_G^{\bar{v}}(\pi, \bar{t})$ we have that $\pi = id$.

Theorem 4. Let Φ be *QUR*-formula. Then, using transformations specified by Lemmas 1–4, a

superpositional normal form Φ^s of Φ can be constructed such that $\Phi^s \approx \Phi$.

Lemma can be proved by induction.

Superpositional normal forms are closer to formulas of n -ary logics, but still one more problem with updatable variables should be solved. To explain this problem let us consider a program function defined by the following formula:

$$crlst([x \mapsto n]) = [x_1 \mapsto 1, \dots, x_n \mapsto n].$$

This function creates an unrestricted number of new (updatable) variables, thus, it cannot be 'mimic' by n -ary mappings. To make such modeling possible we should uniformly and explicitly restrict the number of updatable variables.

The idea of unified superpositional form is to construct a formula which can be translated to n -ary formula. To do this we should identify all essential and updatable variables for Φ . The set of such variables includes all names occurring in Φ and all updatable names for program symbols occurring in Φ . Let us denote this set as $eu(\Phi)$.

Let $\bar{v}$ be a list of variables such that $eu(\Phi) \subseteq \bar{v}$. QUR -formula Φ is said to be in $\bar{v}$ -unified superpositional normal form, if it is in a superpositional normal form and all occurrences of

superposition symbols in Φ are parameterized by the same list of names $\bar{v}$.

Theorem 5. Let Φ be QUR -formula with restricted set of updatable variables. Then, using transformations specified by Lemmas 1–4, $\bar{v}$ -unified superpositional normal form Φ^s of Φ can be constructed such that $\Phi^s \approx \Phi$.

Conclusions

In this paper we have introduced a special kind of program specification algebras defined for classes of quasiary mappings. These algebras reflect such features of software systems as partiality of data, partiality and unrestricted arity of predicate and functions, sensitivity to unassigned variables. For the constructed algebras we have studied their properties and construct some normal forms of their terms. The proposed methods can be useful for construction and investigation of algebras and logics for program reasoning.

Список використаних джерел

1. Нікітченко М.С. Математична логіка та теорія алгоритмів / М.С. Нікітченко, С.С. Шкільняк // Видавництво КНУ імені Тараса Шевченка, Київ, 2008, С. 528.
2. Нікітченко М.С. Прикладна логіка / М.С. Нікітченко, С.С. Шкільняк // Видавництво КНУ імені Тараса Шевченка, Київ, 2013, С. 278.
3. Глушков В. М. Теория автоматов и формальные преобразования микропрограмм // Кибернетика.– 1965, №5.– с. 1–10.
4. Nikitchenko M.S. Satisfiability in Composition-Nominative Logics / M.S. Nikitchenko, V.G Tymofieiev // Central European Journal of Computer Science, Vol. 2, Issue 3, 2012, P. 194–213.
5. S. C. Kleene. Mathematical Logic. New York: John Wiley & Sons, 1967. – 398 p.
6. Kryvolap A. Extending Floyd-Hoare logic for partial pre- and postconditions / A. Kryvolap, M. Nikitchenko, W. Schreiner // CCIS, 412, Springer, Heidelberg, 2013.– P. 355–378.

References

1. NIKITCHENKO, M. and SHKILNIAK, S. (2008). *Mathematical logic and Theory of algorithms*. Kyiv: VPC Kyivskyi University.
2. NIKITCHENKO, M. and SHKILNIAK, S. (2013). *Applied logic*. Kyiv: VPC Kyivskyi University.
3. GLUSHKOV, V. M. (1965). Automata theory and formal transformations of microprograms. In *Cybernetics* (in Russian), 5, pp. 1–10.
4. NIKITCHENKO, M. and TYMOFIEIEV, V. (2012). Satisfiability in composition-nominative logics. In *Central European Journal of Computer Science*, 2, pp. 194–213.
5. Kleene, S. (1967). *Mathematical Logic*. New York: John Wiley & Sons.
6. KRYVOLAP, A., NIKITCHENKO, M., and SCHREINER, W. (2013). Extending Floyd-Hoare logic for partial pre- and postconditions. In: *CCIS*, 412, pp. 355–378.

Надійшла до редколегії 27.12.16

УДК 303.732.4; 519.81

М. В. Пасічна, аспірантка

**Дослідження конкурентноспроможності
портфеля джерел генерації
електроенергії**

Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, пр-
т. Академіка Глушкова 4д,
e-mail: maypas@gmail.com

M. V. Pasichna, PhD candidate

**Research on competitiveness of portfolio of
electricity generation sources**

Taras Shevchenko National University of Kyiv,
03680, Kyiv, Glushkova st., 4d,
e-mail: maypas@gmail.com

Стаття присвячена аналізу структури енергогенеруючого портфеля на провідних підприємствах генерації електроенергії в Європейському Союзі (ЄС) в контексті поточного стану і майбутніх тенденцій його диверсифікації. Дане питання є складовим оптимізації структури енергопостачання і направлене на розуміння процесів технологічних змін під впливом трансформації інноваційної системи з метою запровадження енергоефективних та енергозберігаючих технологій. Враховуючи обмеження ресурсів енергокомпаній та нестабільність енергетичного ринку, це допоможе зрозуміти те, наскільки енерго-генеруючі портфелі компаній відповідають цілям, що містяться у планах компанії і знаходяться на порядку денному держав, можна визначити характер майбутньої динаміки структури енергогенерації. Отже, основними завданнями, поставленими у дослідженні, є розрахунок вартості, віддачі і ризику енерго-портфель, візуалізація його розвитку на майбутнє.

Ключові слова: портфель джерел генерації електроенергії, теорія портфеля Марковіца, прогнозування.

The article provides analysis of the electricity generation portfolio at the leading electricity generation companies in the European Union (EU). The analysis covers current developments in the electricity generation structure of the main EU energy companies as well as future trends of their portfolio diversification. This issue is a component of the optimization of the structure of energy supply and aims at understanding the processes of technological change. The latter is influenced by the transformation of the innovation system and shows the trends in implementation of the energy-efficient and energy-saving technologies. Due to resource constraints of the energy companies and energy market instability, it helps to understand how energy-generating portfolios of the companies meet the objectives which are contained in the company's plans and are on the agenda of the countries, where the main electricity generation activities of the companies is concentrated. It could also determine the nature of future development of the structure of electricity generation. Thus, the main objectives of the current study are to calculate the cost, return and risk of the energy portfolios, visualize its development for the future.

Keywords: portfolio of electricity generation sources, Markowitz portfolio theory, forecasting.

Статтю представив д.т.н., проф. Заславський В.А.

Вступ. Політично бажане і потрібне розширення конкурентноспроможних, енерго-ефективних, і низьковуглецевих технологічних рішень в Європі приводиться в рух частково за рахунок модифікації енерго-генеруючих портфель підприємств. Прийняття рішень стосовно цих процесів базується на врахуванні потенційних майбутніх тенденцій диверсифікації енергопортфеля, його прибутковості і ризиків.

Європейський союз (ЄС), частка якого у світовому попиті на енергоносії становить

14%^[17], є одним з головних учасників трансформації глобальної енерго-системи. Створення ефективної та різноманітної структури виробництва енергії, є одним з ключових завдань.

Поступова модернізація ПЕК (паливно-енергетичного комплексу) України і приведення його до стандартів ЄС є одними з елементів зниження уразливості і підвищення ефективності структури енергозабезпечення в Україні. Більше того, оскільки сфера енергопостачання

відноситься до переліку ключових об'єктів КІ (критичної інфраструктури), Україні слід мати досконале розуміння про Європейські практики її захисту та безпеки, так як загроза її функціонуванню і різноманітності є загрозою для національної безпеки країни.

Підходи до диверсифікації енергогенеруючого портфеля в енергетичній галузі вивчаються багатьма вітчизняними і закордонними вченими. Оскільки моделювання, і зокрема в сферах енергетики та охорони довкілля, носить багатокритеріальний характер, значний обсяг наукових робіт досліджує прикладні завдання з диверсифікації енергопортфеля, використовуючи принципи системного аналізу (СА)^[3]. Аналіз поведінки системи при різних комбінаціях її параметрів проводять з використанням оптимізаційних та імітаційних моделей, серед яких особливої уваги заслуговують Метод аналізу ієрархій (МАІ), Сучасна теорія портфеля та ін.^[2,7,8,9,14]. Для моделювання розв'язування різних типів операційних питань функціонування підприємств енергетики часто застосовуються г-алгоритми Шора, метод послідовного аналізу варіантів (ПАВ) та ін.^[4,5].

Зміни в структурі енергетичного портфеля повинні розглядатись як один з показників успішності технологічних змін під впливом трансформації інноваційної системи^[11,12]. Відповідно до напрямку літератури з еволюційного і інноваційного розвитку та сталого підприємництва, фірми відносяться до числа суб'єктів інноваційної діяльності, які відіграють центральну роль в технологічних змінах^[13,16]. В роботах [1,18] енергетична система розглядається як складна система із «високою вартістю відмови», а її моделювання проводиться, застосовуючи так званий «принцип різнотипності».

В статті проводиться аналіз динаміки структури джерел генерації електроенергії з розбивкою за видами палива (енергетичний портфель) на рівні провідних енерго-генеруючих компаній ЄС в країнах, де зосереджена їх основна генеруюча потужність. Проводячи аналіз ризику і доходності енергопортфелів компаній, можна визначити характер майбутньої динаміки структури енергогенерації, уникнути ситуації, коли портфель містить багато проектів, що мають низьку віддачу, великий ризик, не є стратегічно пріоритетними і т.д. В рамках дослідження пропонується застосовувати елементи сучасної

теорії портфеля, лінійний прогноз, кількісний і якісний аналіз.

Постановка задачі. В статті розглядається задача аналізу диверсифікації складу енергопортфеля на восьми підприємствах виробництва електроенергії в ЄС з точки зору аналізу конкурентноспроможності портфеля і перспектив розвитку його структури на майбутнє.

Вирішення даної задачі вимагає розрахунок вартості, ризику і доходності енергопортфелів відповідно до сучасної теорії портфеля, зокрема моделі Марковіца^[8,10]. Прогнозування динаміки структури енергопортфелів базується на лінійному прогнозуванні, враховуючи тенденції у встановленій генеруючій потужності за минулі роки (2007-2014 рр.).

Застосування моделі Марковіца для аналізу ризику і доходності портфелів енергокомпаній. Балансування фізичного обсягу відпуску електроенергії і ризику коливання доходності. В енергетиці при аналізі енерго-портфеля відповідно до моделі Марковіца обчислюються наступні змінні^[10,14]:

Очікувана вартість портфеля, що являє собою середньозважене окремих генеруючих витрат і розраховується за формулою (1):

$$E_{Ci} = \sum_{i=1}^7 w_i E_{Ci}, \quad (1)$$

де w_i – частка i -го джерела генерації електроенергії в портфелі; E_{Ci} – очікуване значення середньозважених генеруючих витрат i -го джерела генерації електроенергії за кіловат-годину.

Частка джерела генерації електроенергії являє собою суму часток встановленої потужності компаній по основним енерго-генеруючим технологіям – вугілля, природний газ, гідроенергія, енергія вітру, енергія сонця, енергія біомаси, та атомна енергія (питома вага цих джерел складала 97 відсотків виробництва електроенергії в ЄС-27 у 2014 році^[17,19]) в країнах-членах ЄС, де зосереджена основна генеруюча потужність врахованих компаній (Франція, Німеччина, Бельгія, Італія, Іспанія, Швеція та Фінляндія) на 2014 р^[20,21,22,23,24,25,26,27].

Очікувана віддача портфеля. В енергетиці в якості доходності по технології i (R_i) використовується фізичний обсяг відпуску електроенергії на одиницю вартості (величину оберенену до нормованої вартості генерації електроенергії (англ. LCOE)) (формула 2):

$$R_i = \frac{1}{LCOE}, \quad (2)$$

Сума середньозважених індивідуальних очікуваних віддач кожного джерела генерації електроенергії в портфелі являє собою *очікувану віддачу портфеля* (формула 3):

$$E_{R_p} = \sum_{i=1}^7 w_i E_{R_i}, \quad (3)$$

де E_{R_i} - очікувана віддача i -го джерела генерації електроенергії (R_i).

Для визначення узагальнених витрат на генерацію електроенергії (LCOE) для певних технологій було обчислено і використано дані по вище-зазначеним країнам за останні роки (2008-2014 рр.)^[15]. Для того, щоб забезпечити порівняння між різними даними, валюти були переведені в Євро за ставками першого торговельного дня року. Розмірності було переведено до Євро на МВт-год.

Очікуваний ризик портфеля. Стосовно ризику, для кожної технології за його величину приймається стандартне річне відхилення доходності за період володіння (англ. HPR) технологією для (як мінімум) трьох типів змінних: ризику капітала або витрат на будівництво, ризику палива, та ризику експлуатації і обслуговування (англ. O&M); також можна враховувати витрати, пов'язані із викидами CO₂.

HPR являє собою зміну вартості технології у портфелі за певний період і розраховується за наступною спрощеною формулою (4):

$$HPR = (EV - BV)/BV, \quad (4)$$

де EV - кінцева вартість технології у портфелі та BV – початкова вартість технології у портфелі.

Враховуючи стандартні відхилення HPR по кожній технології, яка входить до енергопортфелю, можна розрахувати стандартне відхилення портфеля (σ_p) (або очікувану річну зміну вартості генерації електроенергії), що являє собою сукупний ризик портфеля і обчислюється за формулою (5):

$$E_{(\sigma_p)} = \sqrt{\sum_{i=1}^n w_i^2 \sigma_i^2 + 2 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n w_i w_j \sigma_i \sigma_j \rho_{ij}}, \quad (5)$$

$i \neq j$

де σ_i та σ_j - стандартні відхилення зміни доходності технологій по річним витратам i -го та j -го джерел генерації електроенергії відповідно, n - кількість джерел генерації електроенергії, ρ_{ij} - коефіцієнт кореляції між цими джерелами (який приймає значення від -1 до +1).

Оскільки детальні дані для розрахунку HPR та його відхилення, а також коефіцієнта кореляції між різними джерелами для конкретної компанії не знаходяться у вільному доступі або не є доступними у форматі, що вимагає даний підхід в дослідженні, то були використані узагальнені історичні дані з джерел, що є у відкритому доступі^[9]. Слід зазначити, що використані дані наведено у декількох джерелах і їх значення майже не відрізняються.

Результати розрахунків (табл. 1) вказують на наступні тенденції:

- Менш ризиковим і менш витратним є не лише більш диверсифікований портфель (Enel в Іспанії в порівнянні із Італією, Fortum у Фінляндії в порівнянні із Швецією та ін.), але й той портфель, що містить меншу частку вугільної і газової потужностей – GDF Suez в Німеччині, Португалії та Іспанії, E.On у Франції, Іспанії та Бельгії, та ін. Це пояснюється тим, що «традиційним» викопним паливам притаманний високий ризик, зокрема в частині викидів CO₂ та витрат на паливо. Загалом, в контексті країн, більш ризиковими виявляються Італія, Іспанія, Німеччина (в основному через переважання газової генерації в Італії і Іспанії, вугільної і атомної генерації в Німеччині, а також через більш високий рівень LCOE), менш ризиковими - Франція, Швеція, Фінляндія, Бельгія, Нідерланди і Португалія.
- За деяким виключенням, чим більшою є загальна встановлена потужність в країні, тим більше даний портфель є диверсифікованим. Проте, якщо мова йде про енергопортфель, в якому лівова частина належить тому джерелу генерації електроенергії, який є базовим в країні (атомна енергія у Франції, гідроенергія в Швеції), то загальний його обсяг в даній країні може поступатися обсягу енергопортфеля даної компанії в інших країнах. Так, обсяг загальної встановленої потужності EDF у Франції в 27 разів перевищує загальну генеруючу потужність компанії в країнах Бенелюкс, але є і менш

диверсифікованим. Франція виділяється серед інших країн тим, що обсяг атомної потужності компанії в країні є найбільшим у порівнянні із іншими компаніями – 55,1 ГВт, дана потужність є базовою протягом багатьох років, має значну сформовану інфраструктуру і державну підтримку, перехід від даного джерела генерації електроенергії означатиме значні фінансові витрати і виникнення питань балансування попиту-пропозиції на електроенергію. Аналогічна ситуація спостерігається і з гідрогенерацією в Швеції, зокрема на прикладі компанії Vattenfall.

- Більший фізичний обсяг портфелю означає менший ризик з точки зору покриття необхідного попиту, проте характеризується також і більшим ризиком зміни доходності портфелю, оскільки більша величина портфелю вимагає більший обсяг витрат.

Перспективи розвитку структури енергопортфелів компаній на майбутнє. Стратегічний напрямок енергокомпаній, як правило, є відображенням цілей та пріоритетів законодавства ЄС з питань енергетики та охорони довкілля. В цілому, компанії на період до 2030 р. мають за мету збільшити використання ВДЕ – відновлюваних джерел енергії (головним чином вітрової та сонячної енергії) та палива з відходів для генерації електроенергії; зробити ревізію існуючої потужності, що використовує для генерації енергії викопні палива; зміцнити позиції атомної генерації з точки зору підвищення безпеки; зменшити інтенсивність викидів вуглецю; досягти економії використання енергії.

Поряд із цим, аналізуючи динаміку змін у встановленій генеруючій потужності компаній за останні роки (2007-2015 рр.), слід відмітити наступні тенденції:

- Деякі компанії (Enel, E.ON, RWE) значно скоротили «високо-ризиковані» потужності, що використовують вугілля та ПГ в результаті, зокрема, скорочення попиту на електроенергію, триваючої економічної кризи і розвитку (здешевлення) ВДЕ. У той же час, ці компанії як і раніше залишаються лідерами з даної встановленої потужності в масштабі ЄС. Engie, Enel і RWE оголосила про зупинку інвестицій, відключення або виведення з експлуатації вугільної генерації протягом наступного десятиліття; Vattenfall і Fortum оголосили про плани виходу лише з вугільного ринку.
- Збільшення обсягу вугільної і газової встановленої потужностей відбувається на

фоні відмови від атомної енергії і в формі введення в експлуатацію нових надкритичних вугільних і парогазових установок в основному в Німеччині і Франції. Проте, через значне падіння оптових цін на електроенергію в 2013 р., кілька газових та вугільних генеруючих потужностей були зупинені. Fortum після оголошення щодо припинення виробництва електроенергії на вугільних електростанціях в Фінляндії (в результаті економічного спаду) почав підготовку щодо прийняття міноритарної частки в фінському ядерному проєкті Fennovoima.

- Обсяги гідропотужностей знижуються, починаючи з 2008 р. на фоні зростання (майже в два рази в період 2008-2010 рр.) «низько-ризикованих» потужностей вітрової, сонячної генерації, а також генерації на основі біомаси. GDF Suez змінила назву на «Engie» в 2015 р., що вказує на переорієнтацію компанії на ВДЕ. Однак, Engie досі має значну встановлену потужність на основі природного газу і атомної енергії. E.ON оголосила про дроблення компанії на блок, який займатиметься ВДЕ, розподілом електроенергії та підтримкою клієнтів і блок, діяльність якого зосереджуватиметься на «традиційній» генерації і торгівлі електроенергією.
- Атомна потужність компаній практично не змінилась, але почала трохи знижуватись з 2011 р., особливо в Німеччині. Стабільна динаміка спостерігається у Швеції і Фінляндії (в основному через історично-сформований портфель та державну підтримку), Франції (завдяки підтримці держави) та Іспанії. Тим не менш, подальше розгортання в області атомної генерації ставляться під сумнів у зв'язку зі збільшенням витрат на безпеку, а також регулюванням, направленим на зупинення виробництва і використання атомної енергії (Німеччина, Швеція).

Таблиця 1. Структура енерго-генеруючих портфельів компаній в країнах ЄС станом на 2014 р.
(встановлена потужність, МВт); показники вартості, віддачі і ризику енерго-портфельів

Компанія	EDF			GDF Suez						
Країна	Франція	Італія	Бенелюкс	Бельгія	Франція	Німеччина	Італія	Португалія	Іспанія	Нідерланди
(Буре) вугілля	8217	3420	1293.6	1641	15	-	591	576	-	1448
Природний газ	5478	2280	862.4	2850	2191	283	5232	1830	1973	3071
Гідро-енергія	19947	1400	69	1186	3808	132	73	33	65	-
Енергія вітру	-	600	60	175	1426	196	158	650	-	56
Енергія сонця	-	-	60	-	-	-	-	-	-	-
ТЕЦ на біомасі	-	-	60	260	52	20	13	-	-	180
Атомна енергія	55139	-	900	4100	1200	600	-	-	-	-
Всього встановленої потужності	88781	7700	3305	10212	8692	1231	6067	3089	2038	4755
Вартість портфеля	83.04	84.88	38.71	122.92	95.34	13.73	82.65	33.03	20.33	52.77
Віддача портфеля	0.0121	0.0122	0.0050	0.0156	0.0135	0.0019	0.0077	0.0049	0.0034	0.0072
Ризик портфеля	0.321	0.420	0.174	0.467	0.327	0.052	0.495	0.187	0.192	0.341
Компанія	E.ON						RWE		Enel	
Країна	Німеччина	Швейцарія	Франція	Італія	Іспанія	Бельгія	Німеччина	Бельгія/Нідерланди	Італія	Іспанія (Іберія)
(Буре) вугілля	-	-	-	-	-	-	15609	2789	6486	5306
Природний газ	1989	1014	828	3710	2010	385	4411	3256	5199	5445
Гідро-енергія	972	2046	-	531	689	-	375	-	12698	4764
Енергія вітру	220	125	84	328	648	-	539	-	554	598
Енергія сонця	-	-	11	50	100	-	1	-	554	598
ТЕЦ на біомасі	-	-	-	-	-	-	5	-	554	598
Атомна енергія	5746	2511	-	-	-	-	3908	146	-	3318
Всього встановленої потужності	8927	5696	923	4619	3447	385	24848	6191	26045	20626
Вартість портфеля	103.40	60.16	9.63	63.15	36.66	-	561.75	66.27	291.84	216.50
Віддача портфеля	0.0133	0.0092	0.0015	0.0860	0.0056	-	0.0739	0.0103	0.0396	0.0322
Ризик портфеля	0.450	0.212	0.076	0.340	0.190	0.035	2.511	0.440	1.215	0.874
Компанія	Iberdrola	Vattenfall			Fortum					
Країна	Іспанія	Швейцарія	Німеччина	Нідерланди	Фінляндія	Швейцарія				
(Буре) вугілля	874	-	10633	650	1212	-				
Природний газ	5695	-	1707	4100	284	-				
Гідро-енергія	9712	8175	2880	24	1526	3088				
Енергія вітру	5753	-	-	-	-	-				
Енергія сонця	50	-	-	-	-	-				
ТЕЦ на біомасі	-	189	112	2	55	-				
Атомна енергія	3410	6974	-	-	1460	1820				
Всього встановленої потужності	25494	15338	15332	4776	4537	4908				
Вартість портфеля	270.41	171.79	149.66	50.35	54.91	53.90				
Віддача портфеля	0.0407	0.0231	0.0270	0.0077	0.0067	0.0077				
Ризик портфеля	0.866	0.576	1.021	0.394	0.168	0.198				

Незважаючи на перехід компаній на ВДЕ, їх операції в традиційній і атомній енергетиці є не менш активними – поточні портфелі компаній не є стратегічно виправданими, проте на майбутнє, відповідно до заявлених цілей, очікуються зміни. Це пояснюється тим, що на сьогодні сформована значна виробнича потужність, пов'язана із нею

інфраструктура, а також є наявність споживачів, залежних від електроенергії, виробленої «традиційними» технологіями.

На рівні енергокомпаній відповідно до спостережень дослідження мають місце наступні прогнози стосовно змін у складі енергопортфелю компаній (рис. 1):

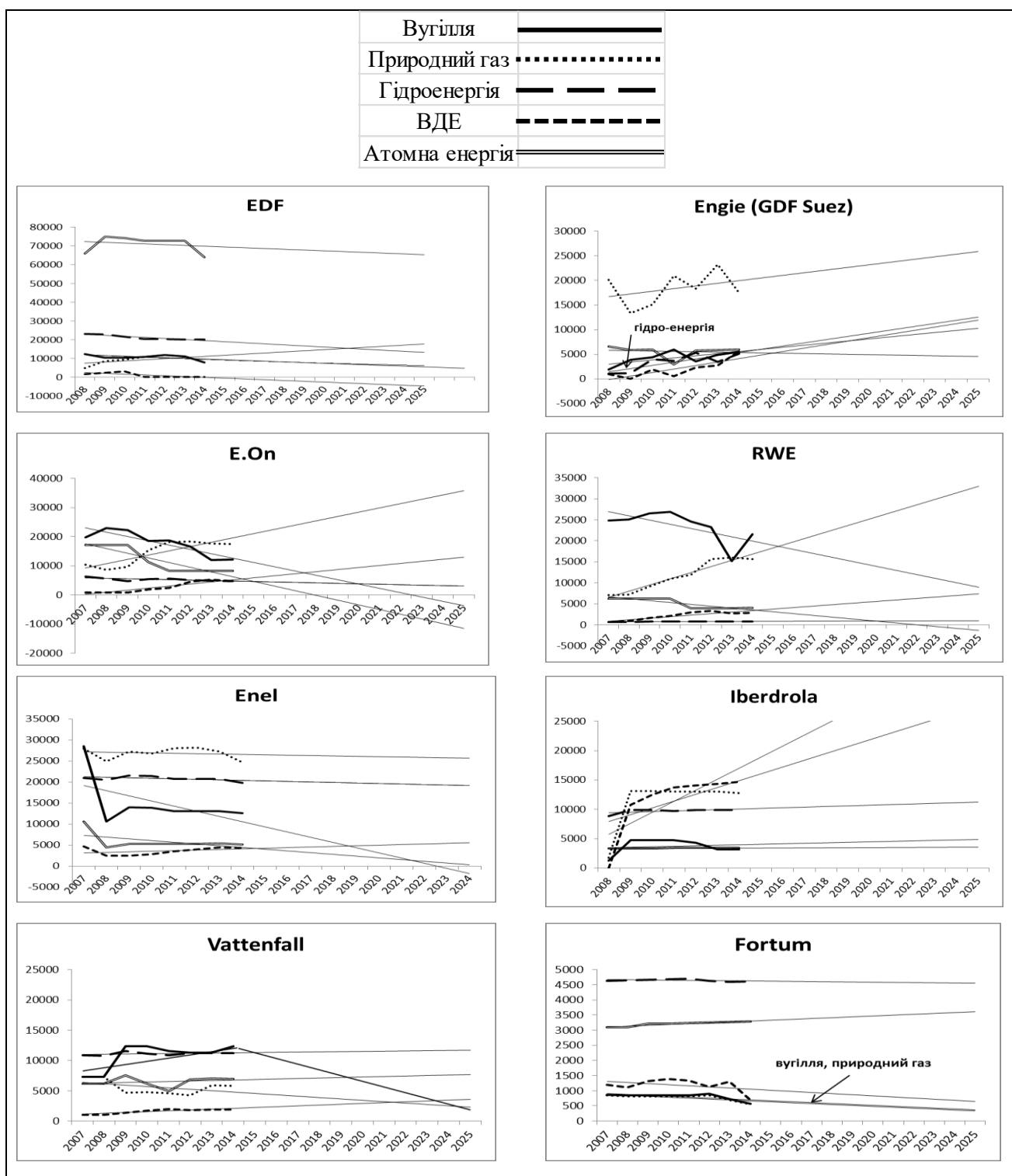


Рис. 1. Історичний (2007-2014рр.) і прогностичний (2015-2025рр.) загальний обсяг генеруючої потужності в компаніях, МВт

Спостерігаючи перспективи змін у загальній генеруючій потужності компаній (рис. 1), слід відмітити те, що майже всі компанії показують тенденцію до її збільшення. Лише в EDF спостерігатиметься спадна тенденція за рахунок

зменшення обсягу атомних, вугільних та ВДЕ потужностей; при цьому, компанія навіть у 2025 р. залишатиметься лідером за загальним обсягом потужності.

В розрізі складу енергопортфеля компаній спадна тенденція у атомній потужності має компенсуватись розвитком ВДЕ і гідропотужностей, а природний газ, скоріше за все, почне витісняти вугілля.

Для уникнення зростання вартості і ризику енергопортфелів компаній такі тенденції можуть бути виправданими в разі готовності рішень стосовно заміни атомної генерації, стабільності цін на природний газ, можливостей балансування генерації електроенергії від ВДЕ.

У будь-якому випадку при проведенні оцінки оптимальності майбутніх тенденцій необхідно враховувати позицію компанії щодо певного ризику. Аналіз преференцій, що є елементом комплексного аналізу рішень, міг би бути

Список використаних джерел

1. Заславський В.А. Принцип різнотипності та особливості дослідження складних систем з високою ціною відмови / В.А. Заславський // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. – 2006. – С. 136–147.
2. Саати Т.Л. Принятие решений. Метод анализа иерархий. / Т. Л. Саати. - Москва: Радио и связь, 1989.
3. Скопецкий В.В. Системный анализ объектов, находящихся под влиянием взаимодействующих процессов / В.В. Скопецкий, О.А. Марченко, Н.А. Лежнина // Кибернетика и системный анализ. – 2001. – №6. – С. 54–66.
4. Стецюк П.І. Математические и программные средства моделирования и оптимизации динамической загрузки мощностей энергосистемы / П.І. Стецюк, А.П. Лиховид, Б.М. Чумаков, А.Ю. Видил, А.В. Пилиповский // Отчет о научно-исследовательской работе № 0107U004963. – Киев: Ин-т кибернетики им. В.М. Глушкова НАН Украины. 2009.
5. Стецюк П.І. Математичні моделі та програмне забезпечення в задачах енергетики / П.І. Стецюк, М.Г. Журбенко, О.П. Лиховид. - Київ: Національна академія наук України, інститут кібернетики ім. В.М. Глушкова, 2012.
6. Alberici S. Subsidies and costs of EU energy / S. Alberici, S. Boeve, P. Van Breevoort, P. Deng // Ecofys report. - 2014.
1. ZASLAVSKIY V.A. (2006) Type Variety Principle and features of study of complex systems with a high cost of failure, *Bulletin of Kyiv National Taras Shevchenko University*. p. 136–147.
2. SAATY T.L. (1989) Decision making. Analytic hierarchy process, Moscow: Radio and Connection.
3. SKOPECKIY V.V. (2001) Systems analysis of the objects, which are under the influence of mutually-interactive processes. *Cybernetics and systems analysis*. 6. p. 54-66.
4. STECUYK P.I. (2009) Mathematical and software tools for modeling and optimization of dynamic capacity utilization of the power system capacities. *Report on research work No. 0107U004963*, Kiev: The National Academy of Sciences of Ukraine, Institute of Cybernetics after V.M. Glushkov.
5. STECUYK P.I. (2012) Mathematical models and software problems in the energy sector, Kiev: The National Academy of Sciences of Ukraine, Institute of Cybernetics after V.M. Glushkov.
6. ALBERICI S., BOEVE S., VAN BREEVOORT P., DENG P. (2014) Subsidies and costs of EU energy, *Ecofys report*.

7. Awerbuch S. Applying Portfolio Theory to EU Electricity Planning and Policy-Making / S. Awerbuch, M. Berger // IEA/EET Working Paper. - EET/2003/03
8. Awerbuch S. Efficient Electricity Generating Portfolios for Europe: Maximising Energy Security and Climate Change Mitigation / S. Awerbuch, Y. Spencer // EIB Papers, ISSN 0257-7755. -Vol. 12. - Iss. 2. - 2007. - P. 8-37.
9. Bazilian M. Analytical methods for energy diversity and security: portfolio optimization in the energy sector: a tribute to the work of Dr. Shimon Awerbuch / M. Bazilian, F. Roques - Elsevier: Business & Economics, 2009.
10. Bhattacharya A. Power sector investment risk and renewable energy: A Japanese case study using portfolio risk optimization method / A. Bhattacharya, S. Kojima. // Energy Policy. – 2012. – №40. – P. 69–80.
11. Foxon T. Overcoming barriers to innovation and diffusion of cleaner technologies: Some features of a sustainable innovation policy regime / T. Foxon, P. Pearson. // Journal of Cleaner Production. – 2008. – №16 (1S). – P. 148–161.
12. Hekkert M. Functions of innovation systems: A new approach for analysing technological change / M. Hekkert, R. Suurs, S. Negro, S. Kuhlmann // Technological Forecasting & Social Change. – 2007. – №74. – P. 413 – 432.
13. Hockerts K. Greening Goliaths Versus Emerging Davids: Theorizing About the Role of Incumbents and New Entrants in Sustainable Entrepreneurship / K. Hockerts, R. Wüstenhagen. // Journal of Business Venturing. – 2010. – №25 (5). – P. 481–492.
14. Markowitz H. Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments / H. Markowitz. – New York: John Wiley & Sons, 1959.
15. Salvatore J. World Energy Perspective. Cost of Energy Technologies / J. Salvatore. – London: World Energy Council, 2013.
16. Schmidt T. Decarbonising the power sector via technological change – differing contributions from heterogeneous firms / T. Schmidt, M. Schneider, V. Hoffmann. // Energy Policy. – 2012. – №43. – P. 466–479.
7. AWERBUCH S., BERGER M. (2003) Applying Portfolio Theory to EU Electricity Planning and Policy-Making. *IEA/EET Working Paper*, EET/2003/03, Paris
8. AWERBUCH, S., SPENCER, Y. (2007) Efficient Electricity Generating Portfolios for Europe: Maximising Energy Security and Climate Change Mitigation., *EIB Papers*, ISSN 0257-7755. Vol. 12. Iss. 2. p. 8-37
9. BAZILIAN, M., ROQUES, F. (2009) Analytical Methods for Energy Diversity and Security: Mean-Variance Optimization for Electric Utilities Planning, Elsevier: Business & Economics.
10. BHATTACHARYA, A., KOJIMA, S. (2012) Power Sector Investment Risk and Renewable Energy: A Japanese Case Study Using Portfolio Risk Optimization Method, *Energy Policy*. Vol. 40. p. 69–80
11. FOXON T., PEARSON P. (2008) Overcoming barriers to innovation and diffusion of cleaner technologies: Some features of a sustainable innovation policy regime, *Journal of Cleaner Production*. 16 (1S). p. 148–161.
12. HEKKERT M., SUURS R., NEGRO S., KUHLMAN S. (2007) Functions of innovation systems: A new approach for analysing technological change, *Technological Forecasting & Social Change*. 74. p. 413–432.
13. HOCKERTS K, WUESTENHAGEN R. (2010) Greening Goliaths Versus Emerging Davids: Theorizing About the Role of Incumbents and New Entrants in Sustainable Entrepreneurship, *Journal of Business Venturing*. 25 (5). p. 481–492.
14. MARKOWITZ H. (1959) Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments, New York: John Wiley & Sons.
15. SALVATORE J. (2013) World Energy Perspective. Cost of Energy Technologies, *World Energy Council*, London.
16. SCHMIDT T., SCHNEIDER M., HOFFMANN V. (2012) Decarbonising the power sector via technological change – differing contributions from heterogeneous firms, *Energy Policy*. 43. p. 466–479.

17. The Shift Project Data Portal, Energy and Climate Data. [Online] Доступно: www.tsp-data-portal.org
18. Zaslavskiy V. Risk analyses and redundancy for protection of critical infrastructure / V. Zaslavsky, Y. Ievgiienko // Monographs of System Dependability. – Oficyna Wydawnicza Politechniki Wroclawskiej - 2010. – P. 161–173.
19. ENTSOE. [Online] Доступно: <https://transparency.entsoe.eu>
20. RWE Facts & Figures. [Online] Доступно: <http://www.rwe.com>
21. E.ON Facts & Figures. [Online] Доступно: <http://www.eon.com>
22. EDF Activity Reports. [Online] Доступно: <https://www.edf.fr>
23. Fortum Annual Reports. [Online] Доступно: <https://www.fortum.com>
24. GDF-Suez Environmental Reporting. [Online] Доступно: <http://www.engie.com>
25. Vattenfall Annual and Sustainability Reports. [Online] Доступно: <https://corporate.vattenfall.com>
26. Iberdrola Integrated Reports. [Online] Доступно: <https://www.iberdrola.com>
27. Enel Annual Reports. [Online] Доступно: <https://www.enel.com>
17. The Shift Project Data Portal, Energy and Climate Data. [Online] Available from: www.tsp-data-portal.org
18. ZASLAVSKIY V., IEVGIIENKO Y. (2010) Risk analyses and redundancy for protection of critical infrastructure, *Monographs of System Dependability, Oficyna Wydawnicza Politechniki Wroclawskiej, Wroclaw*. p. 161–173.
19. ENTSOE. [Online] Available from : <https://transparency.entsoe.eu>
20. RWE Facts & Figures. [Online] Available from: <http://www.rwe.com>
21. E.ON Facts & Figures. [Online] Available from: <http://www.eon.com>
22. EDF Activity Reports. [Online] Available from <https://www.edf.fr>
23. Fortum Annual Reports. [Online] Available from: <https://www.fortum.com>
24. GDF-Suez Environmental Reporting. [Online] Available from : <http://www.engie.com>
25. Vattenfall Annual and Sustainability Reports. [Online] Available from: <https://corporate.vattenfall.com>
26. Iberdrola Integrated Reports. [Online] Available from: <https://www.iberdrola.com>
27. Enel Annual Reports. [Online] Available from: <https://www.enel.com>

Надійшла до редколегії 01.12.16

УДК 517.929.4

Хусаїнов Д.Я., д.ф.-м.н., проф., Гаркуша Н.І.,
к.е.н., с.н.с.

Оцінки збіжності процесів в одній моделі нейродинаміки Хопфілда

Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, пр.-т.
Глушкова, 4д,
e-mail: dkh@unicyb.kiev.ua ngarkusha@gmail.com

D.Ya. Khusainov, PhD., Prof., N. I. Garkusha, PhD,
senior researcher

Estimates of the processes convergence in one model of Hopfield's neurodynamics

Taras Shevchenko National University of Kyiv,
03680, Kyiv, Glushkova av., 4d,
e-mail: dkh@unicyb.kiev.ua,
ngarkusha@gmail.com

В роботі досліджується математична модель нейродинаміки Хопфілда. Використовується загальноприйнята «електрична інтерпретація», при використанні якої за допомогою закону Кірхгофа модель динаміки записується у вигляді системи звичайних квазілінійних диференціальних рівнянь. В роботі розглядається система без запізнення, яка має виділену лінійну частину діагонального вигляду. На відміну від відомих робіт [3] матриця лінійної частини не є одиничною. Нелінійні функції задовольняють умовам Ліпшиця з різними, достатньо малими, сталими. Попередньо знаходиться стаціонарна точка системи рівнянь динаміки. Вона відповідає усталеному режиму роботи нейронної мережі. За допомогою заміни типу «паралельного переносу у початок координат» дослідження стійкості стаціонарної точки зводиться до дослідження стійкості нульового стану рівноваги, що дозволяє використати традиційні методи дослідження стійкості динамічних систем. Для дослідження стійкості використовується другий метод Ляпунова з функцією квадратичного вигляду. Якщо лінійна частина системи «превалює перед сталими Ліпшиця», то стан рівноваги системи є глобально асимптотично стійким. Обчислено залежності між коефіцієнтами лінійної частини і сталими Ліпшиця, при виконанні яких гарантовано асимптотичну стійкість стану рівноваги. Отримані результати сформульовані у вигляді теореми.

Ключові слова: математична модель, динамічна система, нейродинаміка, модель Хопфілда, рівновага, асимптотична стійкість.

The paper investigates the mathematical model of Hopfield's neurodynamics. The common "electrical interpretation" is used, in which, using Kirchhoff's law, the dynamics model is written as a system of ordinary quasilinear differential equations. The paper considers the system without delay, which has a dedicated linear section of the diagonal form. Unlike the known works [3], the matrix of the linear part isn't single. Nonlinear functions satisfy the Lipschitz conditions with different, sufficiently small constants. First of all, a stationary point of the system of dynamics equations is found. It corresponds to the steady state of the neural network. By replacing the type of "parallel transfer to the origin of coordinates", the stability study of the stationary point is reduced to the study of the stability of the zero state of equilibrium, which allows us to use traditional methods for studying the stability of dynamic systems. To study the stability, the second Lyapunov method with a quadratic function is used. If the linear part of the system "precedes the Lipschitz constant", the state of equilibrium of the system is globally asymptotically stable. The dependences between the coefficients of the linear part and the Lipschitz constants, in which the asymptotic stability of the equilibrium state is guaranteed, is calculated. The obtained results are formulated in the form of a theorem.

Keywords: mathematical model, dynamic system, neurodynamics, Hopfield model, equilibrium, asymptotic stability.

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Анісімов А.В.

Back in 1943, scientists Warren McCulloch and Walter Pitts suggested that nerve cells can be considered as logical elements and the system of

cells with their connection as some logical expression. From the totality of such elements, it is possible to create an apparatus that simulates

complex behavior. The same scientists belong the definition of "neural networks" [1]. The article deals with the Hopfield neural networks with feedback [2,3].

1. Dynamic Hopfield networks. General provisions.

In the theory of neural networks two main tasks are distinguished: training and functioning. The neural network is trained to give a desired set of output values for a number of input signals. Training is carried out by sequential presentation of input vectors with simultaneous adjustment of scales in accordance with a certain procedure. In the process of learning, weights of the network gradually change so that each input vector produces the corresponding output vector [2-4]

There are two main types of networks: networks with feedback, in which the output signal is fed back to the input of the network, and networks in which an output vector is calculated for each input vector, which is read from the output neurons. In this case, there are no feedbacks, and there is a direct flow of information.

In neural networks when the output signal is fed back to the input, an iterative process arises and a network with feedback is obtained. This network structure is called auto-associative. The described type was firstly proposed by Hopfield in 1982 [1]. Initially, a vector was fed into the network, the elements of which were ± 1 . The further steps of the calculations occurred according to the iterative scheme

$$y_i(k) = f(x_i(k)), \quad x_i(k+1) = \sum_{j=0}^{n-1} w_{ij} y_j(k).$$

The calculation was suspended when the image began to repeat (or slightly changed). Thus, the mathematical model of neural network dynamics could be described by a system of difference equations.

2. Investigation of stability and obtaining estimates of convergence in dynamic Hopfield networks.

Let the Hopfield net be given. It will have a dynamic balance if an image that is mapped is fed into its input. From the point of view of physics, the total energy of the system at this point will be minimal. The energy function (essentially, the Lyapunov function) can be specified as the sum of the kinetic and potential energies

$$V(y) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n w_{ij} y_i y_j + \sum_{k=1}^n \delta_k y_k.$$

And, as follows from the theorems of the second Lyapunov method, the stationary state of the network will be asymptotically stable if the Lyapunov function is positive defined, and its total derivative along the iterations is negative defined. If we assume that the iteration steps are small, then we can pass from the difference system to a system of ordinary differential equations. In this paper we study continuous Hopfield networks without delay [5]

$$C_i \frac{dy_i(t)}{dt} = -\frac{1}{R_i} y_i(t) + \sum_{j=1}^n v_{ij} \varphi_j(y_j(t)) + I_i, \quad t \geq 0, \\ i = \overline{1, n}. \quad (1)$$

If the processing time of the signal is taken into account, then systems of differential difference equations with delay are used

$$C_i \frac{dy_i(t)}{dt} = -\frac{1}{R_i} y_i(t) + \sum_{j=1}^n v_{ij} \varphi_j(y_j(t-\tau)) + I_i, \\ t \geq 0, \quad i = \overline{1, n}. \quad (2)$$

Here n - number of neurons in the network,

$y(t) = (y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t))^T$ - vector of network

state in time $t > 0$; R_i , C_i , I_i , $i = \overline{1, n}$ -

respectively, resistances, capacitances and

external currents. By replacing $a_i = \frac{1}{R_i C_i}$,

$\omega_{ij} = \frac{v_{ij}}{C_i}$, $I_i^0 = \frac{I_i}{C_i}$, $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, n}$ in systems

(1), (2) can be reduced to systems in the standard form

$$\frac{dy_i(t)}{dt} = -a_i y_i(t) + \sum_{j=1}^n \omega_{ij} \varphi_j(y_j(t)) + I_i^0, \quad t \geq 0, \\ i = \overline{1, n} \quad (3)$$

$$\frac{dy_i(t)}{dt} = -a_i y_i(t) + \sum_{j=1}^n \omega_{ij} \varphi_j(y_j(t-\tau)) + I_i^0, \quad t \geq 0, \\ i = \overline{1, n} \quad (4)$$

3. Stability of networks without delay. The method of Lyapunov quadratic functions.

We consider a system of differential equations without delay (3). As follows from the

statement of the problem, $a_k > 0$, $k = \overline{1, n}$ - constants, functions $\varphi_l(y)$, $l = \overline{1, n}$ - are continuous and satisfy the Lipschitz condition; i.e.

$$|\varphi_l(y + \Delta y) - \varphi_l(y)| \leq L_l |\Delta|, \quad l = \overline{1, n}. \quad (5)$$

Suppose that the system of equations

$$-a_i y_i + \sum_{j=1}^n \omega_{ij} \varphi_j(y_j) + I_i^0 = 0, \quad i = \overline{1, n} \quad (6)$$

has the solution in point $M_0(y_1^0, y_2^0, \dots, y_n^0)$, $y_i^0 > 0$, $k = \overline{1, n}$. Making the substitution

$$y_k(t) = x_k(t) + y_k^0, \quad i = \overline{1, n}.$$

After including the substitution in system (3) we get

$$\dot{x}_i(t) = -a_i(x_i(t) + y_i^0) + \sum_{j=1}^n \omega_{ij} \varphi_j(x_j(t) + y_j^0) + I_i^0, \quad i = \overline{1, n}.$$

Rewrite the obtained system

$$\dot{x}_i(t) = -a_i x_i(t) + \sum_{j=1}^n \omega_{ij} [\varphi_j(x_j(t) + y_j^0) - \varphi_j(y_j^0)], \quad i = \overline{1, n}.$$

Making the substitution

$$F_j(x_j(t)) = \varphi_j(x_j(t) + y_j^0) - \varphi_j(y_j^0), \quad j = \overline{1, n}.$$

Then the system (3) is

$$\dot{x}_i(t) = -a_i x_i(t) + \sum_{j=1}^n \omega_{ij} F_j(x_j(t)), \quad i = \overline{1, n}, \quad (7)$$

with $F_j(0) = 0$. After this substitution, the stability study of the equilibrium position $M_0(y_1^0, y_2^0, \dots, y_n^0)$ system (3) is reduced to the study of the stability of the zero equilibrium position of the system (7). We introduce the following notation

$$c_{ii} = h_i(a_i - L_i \omega_{ii}), \quad c_{ij} = -\frac{1}{2}(h_i L_j \omega_{ij} + h_j L_i \omega_{ji}),$$

$$i, j = \overline{1, n}, \quad C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{12} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ c_{1n} & c_{2n} & \dots & c_{nn} \end{bmatrix}. \quad (8)$$

The following conditions hold for asymptotic stability.

Theorem 1. Let the system of equations (6) has the solution $M_0(y_1^0, y_2^0, \dots, y_n^0)$, $y_i^0 > 0$, $i = \overline{1, n}$, and there are constants $h_i > 0$, $i = \overline{1, n}$, under which the symmetric matrix C is positive defined.

Then the stability equilibrium $M_0(y_1^0, y_2^0, \dots, y_n^0)$ is globally asymptotically stable. For the convergence of the process, the inequality takes place

$$|x(t)| \leq \frac{\bar{h}}{h} \exp\left\{-\frac{\lambda_{\min}(C)}{h} t\right\}.$$

Evidence. To study the stability of the equilibrium position $M_0(y_1^0, y_2^0, \dots, y_n^0)$ let use the Lyapunov function of the quadratic form (kinetic energy)

$$V(x) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n h_i x_i^2, \quad h_i > 0, \quad i = \overline{1, n}.$$

Its total derivative, in view of the system of perturbation equations (7), has the form

$$\frac{d}{dt} V(x(t)) = \sum_{i=1}^n h_i x_i(t) \left[-a_i x_i(t) + \sum_{j=1}^n \omega_{ij} F_j(x_j(t)) \right].$$

Or

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} V(x(t)) &= \\ &= -\sum_{i=1}^n h_i a_i x_i^2(t) + \sum_{i=1}^n h_i x_i(t) \left[\sum_{j=1}^n \omega_{ij} F_j(x_j(t)) \right]. \end{aligned}$$

Using the Lipschitz (5), got

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} V(x(t)) &\leq \\ &\leq -\sum_{i=1}^n h_i a_i x_i^2(t) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n h_i L_j \omega_{ij} |x_i(t)| |x_j(t)|. \end{aligned}$$

Set

$$c_{ii} = h_i(a_i - L_i \omega_{ii}), \quad c_{ij} = -\frac{1}{2}(h_i L_j \omega_{ij} + h_j L_i \omega_{ji}),$$

$$i, j = \overline{1, n}, \quad C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{12} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ c_{1n} & c_{2n} & \dots & c_{nn} \end{bmatrix}.$$

Then for the total derivative of the quadratic Lyapunov function, by virtue of system (7), has inequality

$$\frac{d}{dt} V(x(t)) \leq -\lambda_{\min}(C) |x(t)|^2,$$

where $\lambda_{\min}(C)$ - the minimal eigenvalue of a symmetric matrix C . As follows from the inequalities of quadratic forms, the two-sided inequality holds for the Lyapunov function.

$$\frac{1}{2} h_{\min} |x(t)|^2 \leq V(x(t)) \leq \frac{1}{2} h_{\max} |x(t)|^2. \quad (9)$$

Therefore, the full derivative will be satisfied

$$\frac{d}{dt}V(x(t)) \leq -2 \frac{\lambda_{\min}(C)}{\bar{h}} V(x(t)).$$

Integrating, we obtain

$$V(x(t)) \leq V(x(0)) \exp\left\{-2 \frac{\lambda_{\min}(C)}{\bar{h}} t\right\}.$$

Using again inequality (9) to estimate the convergence of the process, we obtain

$$|x(t)| \leq \frac{\bar{h}}{h} \exp\left\{-\frac{\lambda_{\min}(C)}{\bar{h}} t\right\}.$$

Theorem is proved.

Литература

1. Мак-Каллок У.С. Логическое исчисление идей, относящихся к нервной активности. – В сб. Галушкина А.И., Цыпкин Я.З. Нейронные сети: История развития теории, кн. 5 / У.С. Мак-Каллок, В. Питтс. – М: ИПРЖР, 2001. – 840 с.
2. Архангельский В.И. Нейронные сети в системах автоматизации / В.И. Архангельский, И.Н. Богаенко, Г.Г. Грабовский, Н.А. Рюмшин. – Киев: «Техника», 1999. – 364 с. (ВА 590706)
3. Хайкин С. Нейронные сети: полный курс, 2-е издание / С. Хайкин. М: Издательский дом «Вильямс», 2006. – 1104 с.
4. Гиттис В.Б. Теория и практика применения нейронных сетей / В.Б. Гиттис. – Краматорск: ДГМА, 2016. – 208 с. (ВА 803202)
5. Бойков И.В. Устойчивость нейронных сетей Хопфилда с запаздыванием / И.В. Бойков // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2012. – №2(22). – С. 85-97.
6. Brokan E. On a differential system arising in the network control theory [Online] / E. Brokan, F. Sadyrbaev // Nonlinear Analysis: Modelling and Control. – 2016. – Vol.21, №5. P. 687-701. <http://dx.doi.org/10.15388/NA.2016.5.8>

References

1. McCALLOCH W., PITTS W. (1943) *Logical calculus of the ideas immanent in nervous activity*. Bull. Math. Biophys. v.5. – pp.115–133.
2. ARHANGELSKIY V.I., BOGAENKO I.N., GRABOVSKIY G.G., RYUMSHIN N.A. (1999) *Neural networks in automation systems*. Kiev: Tehnika. (BA 590706)
3. HAIKIN S. (1998) *Neural Networks: A Comprehensive Foundation*. 2nd Ed. NJ: Prentice Hall PTR Upper Saddle River.
4. GITTIS V.B. (2016) *Theory and practice of using neural networks*. Kramatorsk: DGMA. (BA 803202).
5. BOIKOV I.V. (2012) Stability of Hopfield neural networks with delay. In *Proceedings of higher educational institutions. Povolzhskiy region. Physics and mathematics*. 2(22). p.85-97.
6. BROKAN E., SADYRBAEV F. (2016) On a differential system arising in the network control theory. *Nonlinear Analysis: Modelling and Control*. [Online] 21(5). p.687-701. <http://dx.doi.org/10.15388/NA.2016.5.8>

Надійшло до редколегії 22.09.2016 р.

УДК 519.115.5

Шарапов* М.М., к.ф.-м. н., доцент,
Ламзін Олег, студент.

Нумерація розбиттів множини

Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, пр-т. Глушкова
4д,

*e-mail: sharapov@unicyb.kiev.ua.

M.M. Sharapov*, Cand.Sci.(Phys.-Math.),
Lamzin Oleh, student.

Numbering of set partitions

Taras Shevchenko National University of Kyiv,
03680, Kyiv, Glushkova st., 4d,

*e-mail: sharapov@unicyb.kiev.ua.

В статті розглядаються методи нумерації розбиттів скінченних множин. Запропоновані алгоритми дозволяють обчислювати номер (індекс) розбиття та будувати розбиття скінченної множини за його номером (індексом). Для одного з методів показано, як будується дерево пошуку, яке хоча і не є рівноважним, але має високу швидкість спуску. Наведені методи дають також можливість будувати наступне розбиття множини для заданого розбиття, якщо, звісно, задане розбиття не є останнім за номером (індексом), що важливо для випадку генерації усіх розбиттів даної скінченної множини. Аналогічно можна обчислювати попереднє розбиття для заданого розбиття. Усі методи наведені з детальними алгоритмами та посиланнями на код відповідних програм, які викладені у мережі Інтернет.

Ключові слова: розбиття скінченної множини, номер (індекс) розбиття скінченної множини, пошук індексу розбиття скінченної множини, відновлення розбиття скінченної множини за його індексом.

Here we consider ways of set partitions numbering and obtaining the index of specific set partition or finding a set partition by its index. One of these methods is shown to have a search tree that is not an equilibrium one though it has rather good speed of descent due to the appropriate algorithm. These approaches make it possible to build next set partition for the current set partition if the current set partition is not the last one. This feature is rather useful if one needs just to generate all possible partitions for a given finite set. Similarly, one can easily obtain the previous set partition for the current set partition if the current set partition is not the first one. All mentioned methods are given with appropriate detailed algorithms and links to the code placed in the Internet.

Key Words: partition of a finite set, index of a finite set partition, obtaining of a partition set by its index.

Статтю представив д. ф.-м. н., професор Хусаїнов Д.Я.

Here we'll introduce ways of set partitions numbering and obtaining the index of specific set partition or finding a set partition by its index.

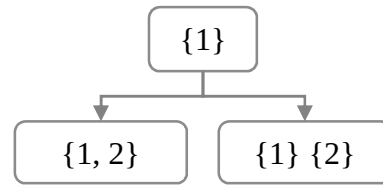
A partition of a set (PS) X is a grouping of the set's elements into non-empty subsets, in such a way that every element is included in one and only one of the subsets, i.e. X is a disjoint union of the subsets ([1], [5]). The sets in PS are called blocks, parts or cells of PS. For example, the set $X = \{1, 2, 3\}$ has five different PS: $\{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$, $\{\{1, 2\}, \{3\}\}$, $\{\{1, 3\}, \{2\}\}$, $\{\{1\}, \{2, 3\}\}$ and $\{\{1, 2, 3\}\}$. It's common knowledge ([1], [3], [4]) that the total number of PS of an n -element set is the Bell number B_n . The first several Bell numbers are $B_0 = 1$, $B_1 = 1$, $B_2 = 2$, $B_3 = 5$,

$B_4 = 15$. More information on these numbers and their properties one can easily find in books or internet. In our above example $n = 3$ and $B_3 = 5$. If we'd like to number five mentioned PS we could do it in different ways without any problems though when n is rather big then the numbering turns to be a real problem. Bell numbers grow rapidly, e.g., $B_{26} > 4 \cdot 10^{19}$, and sometimes it is rather difficult to write down all PS, put them in some order and obtain the index of specific PS or to find a PS by its index. Here the word index means the index number (serial number) of a specific PS. We are going to introduce here two ways PS-numbering for quick obtaining the index of specific PS or finding a PS by its index. One can find some partial algorithms

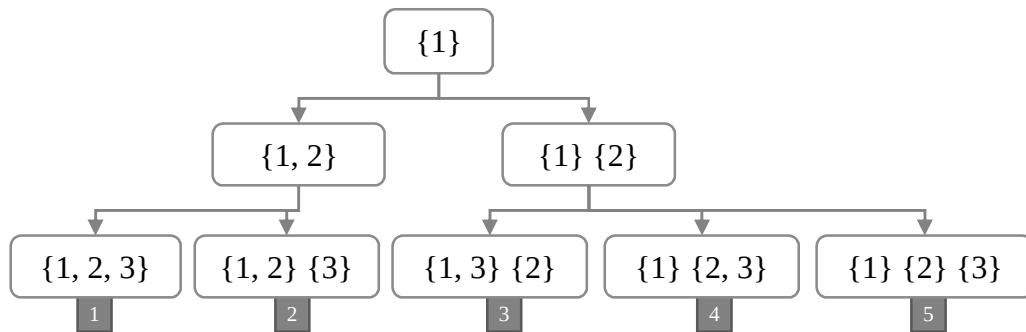
of ordering, generating and indexing of PS ([1], [3], [4]) while we're going to introduce the method that allows effectively solve all these problems.

Method 1 (Sharapov M.).

Let's start with a simple example. Let's build all PS for a set $X = \{1, 2, 3\}$ like so. We'll deal with elements $\{1, 2, 3\}$ one by one starting with $\{1\}$. There are only two ways to deal with next element 2 – it may walk into block $\{1\}$ changing it into block $\{1, 2\}$ or can form a new block thereby creating set of two blocks $\{1\}$ and $\{2\}$.



Then there are two ways to deal with next element 3 within block $\{1, 2\}$ and three ways to deal with element 3 within set of blocks $\{1\}$ and $\{2\}$. All these five ways are shown at the following picture.



Well, we have built a tree with 5 leaves and their order from-left-to-right determines the indexes of corresponding PS. To make it clear how to automate this process for large values of n we'll need the following statement.

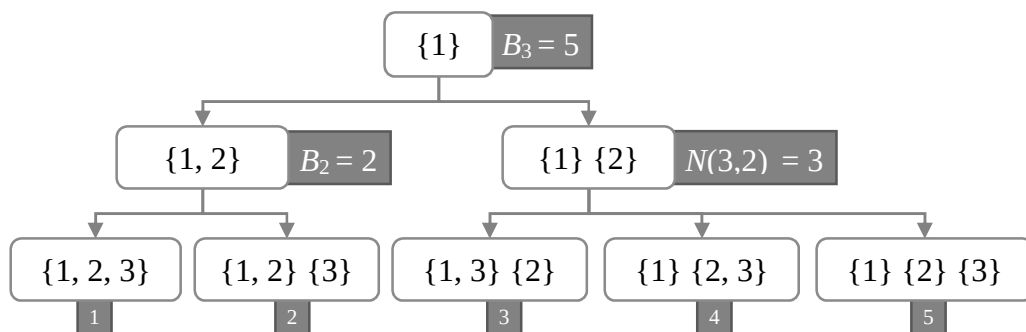
Lemma There are

$$N(n, m) = \sum_{k=0}^{n-m} \binom{n-m}{k} m^{n-m-k} B_k$$

ways to form a PS for a set $\{a_1, a_2, \dots, a_m, \dots, a_n\}$ when its m elements $\{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ get into different blocks.

Really, it is enough to realize that k corresponds to the number of those elements $a_i \in \{a_{m+1}, \dots, a_n\}$ that will not get into blocks like $\{a_1, \dots\}, \dots, \{a_m, \dots\}$; $\binom{n-m}{k}$ is a number of ways to choose these k elements; m^{n-m-k} is a number of ways to distribute the rest $n-m-k$ elements on blocks $\{a_1, \dots\}, \dots, \{a_m, \dots\}$; and B_k is a number of ways to arrange these k elements into some new blocks.

This lemma helps to obtain the number of leaves that correspond to each node of our tree.



Furthermore, it seems rather useful for calculus that each level node child-boxes (may be except the last box) has the same number of corresponding leaves. We cannot see this effect at our scheme for $n=3$ though if we deal, say, with $n=4$ then we could find two boxes with $N(3,2)=3$ corresponding leaves. These trees are far from equilibrium ones though they have perfect speed of descent in appliance with the following algorithm.

This approach makes it possible to write down algorithms for both obtaining the index of specific PS and finding a PS by its index. For these algorithms are very similar we'll present here only the algorithm for obtaining the index of specific PS. Let m be an array of block-numbers for our elements, i.e. if i should be in j -th block then $m_i = j$. Let's $n > 1$ and cardinality of the set V will be denoted by $|V|$. As usual $t=1$ means "we set t equal to 1" while $t==1$ means " t is equal to 1".

The algorithm for obtaining the index of specific PS

1. Let $A_1 = \{1\}$ while array of blocks $A = \{A_i\}$;
 $V = \{2, \dots, n\}$, $index = 0$.
2. While $|V| > 0$ do
 - a. $t = |A|$, $b = \min(V)$, $t_0 = t + 1$.
 - b. If b should be in block A_i for any $i = \overline{1, t}$ then $t_0 = i$.
 - c. If $t == 1$ and $t_0 == 2$ then
 $index = B_{|m|-|A_1|}$ else
if $t_0 \leq t$ then
 $index = index + (t_0 - 1) \cdot N(t + |V| - 1, t)$.
 - d. Remove b from array V .
 - e. If $t_0 \leq t$ then add b to block A_{t_0} else
create new block $A_{t+1} = \{b\}$.
3. Return value $index + 1$ as required value.

This algorithm works rather quickly for $n \leq 300$ in spite of use of long arithmetic. Well, for speeding it up we precomputed arrays of Bell

numbers and numbers $N(\cdot, \cdot)$ mentioned in lemma. For testing these algorithms see [6], [7].

This approach makes it possible to build next PS for the current PS if the current PS is not the last one. Let $A = \{A_1, \dots, A_t\}$ is a current PS other than $\{\{1\}, \{2\}, \dots, \{n\}\}$; $t = |A|$, n is a maximum element; $i : n \in A_i$. Next PS will be denoted by $Next(A)$ while $next(A, a)$ means building $Next(A)$ followed by replacement of block A_1 with $A_1 \cup \{a\}$. Under these notations we have

$$Next(A) = \begin{cases} \{A_1, \dots, A_i \setminus \{n\}, A_{i+1} \cup \{n\}, \dots, A_t\}, & i < t, \\ \{A_1, \dots, A_t \setminus \{n\}, \{n\}\}, & i = t, |A_t| > 1, \\ next(A \setminus A_t, n), & i = t, |A_t| = 1. \end{cases}$$

Finding the previous PS is similar to finding the next PS so we'll omit its description.

The online forms of these algorithms are located over [8] and [9].

Method 2 (Lamzin O.) Searching algorithms of i^{th} PS.

To solve this problem we need to introduce compare operators for multiple-sets and partitions. These operators allow us to get i^{th} PS without generating all of them.

compare_multiple_sets(A, B):

if $len(A) < len(B)$: return -1

if $len(A) > len(B)$: return 1

sort(A); sort(B);

for $i := 0$ to $len(A)$:

if $A[i] < B[i]$: return -1

if $A[i] > B[i]$: return 1

return 0

// ex.: $[1, 2, 2, 3] > [1, 2]$, $[1, 2, 2, 3] < [1, 2, 2, 2]$, $[1, 2, 5, 6] = [1, 2, 5, 6]$.

compare_arrays_by_min_element(A, B):

if $\min(A) < \min(B)$: return -1

if $\min(A) > \min(B)$: return 1

return 0

// ex.: $[1, 2, 3] < [2, 2, 3, 4]$, $[2] > [1, 2, 2]$, $[5, 6, 7] = [5, 5, 15]$.

compare_partitions(A, B):

if $len(A) > len(B)$: return -1

if $len(A) < len(B)$: return 1

$lenA := [len(item) \text{ for item in } A]$ // $A =$

$[[1, 2], [3, 4, 5]] \rightarrow lenA = [2, 3]$

$lenB := [len(item) \text{ for item in } B]$

```
if cmp:=compare_multiple_sets(lenA, lenB) !=
0: return cmp
sort_by_min_element(A);
sort_by_min_element(B)
for i:= 0 to len(A):
if cmp := compare_multiple_sets(A[i], B[i]) !=
0: return cmp
return 0
// ex.: let A = [[7, 3], [6, 2, 4], [5], [1]], B = [[2,
4, 6], [3], [1], [5, 7]],
// lenA = [1, 1, 2, 3] = lenB,
// A := [[1], [2, 4, 6], [3, 7], [5]], B := [[1], [2, 4,
6], [3], [5, 7]],
// So, A[2] > B[2] → B is less than A.
```

The first step. The structure set of all partitions

Let's generate all partitions of some set, write down to the array and sort using compare operators you see above. We can identify certain patterns. For example let's discover set {1, 2, ..., 6} and its partitions. For the beginning let's represent 6 as a sum of natural numbers $6 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1 + 1 + 2 = 1 + 1 + 1 + 3 = 1 + 1 + 2 + 2 = 1 + 1 + 4 = 1 + 2 + 3 = 2 + 2 + 2 = 1 + 5 = 2 + 4 = 3 + 3 = 6$. This yields the sorted array of partitions: ({1}, {2}, {3}, {4}, {5}, {6}), ({1}, {2}, {3}, {4}, {5, 6}), ({1}, {2}, {3}, {4, 5}, {6}), ({1}, {2}, {3}, {4, 6}, {5}), ... ({1}, {2}, {3}, {4, 5, 6}), ({1}, {2}, {3, 4, 5}, {6}), ({1}, {2}, {3, 4, 6}, {5}), ({1}, {2}, {3, 5, 6}, {4}), ... ({1, 2, 3, 4, 5, 6}). The first are such partitions, that $len_A = \{1, 1, 1, 1, 1, 1\}$. Next is the part, where $len_A = \{1, 1, 1, 1, 2\}$. The next one is the part, where $len_A = \{1, 1, 1, 3\}$ and so on. The last one consist of one partition, where $len_A = \{6\}$.

If $A = \{1, 2, \dots, n\}$, $len_A = \{c_1, \dots, c_1, c_2, \dots, c_2, \dots, c_N, \dots, c_N\}$, $c_1 < c_2 < \dots < c_N$; k_i - number of c_i in len_A , M - capacity of len_A , then

$$m(len_A) = \frac{C_n^{c_M} C_{n-c_M}^{c_{M-1}} \dots C_{n-c_M-c_{M-1}-\dots-c_3-c_2}^{c_1}}{k_1! k_2! \dots k_N!} \quad (*)$$

For each block we can calculate the number of belonging partitions using **m** function. As we know all the partitions of number **n** as sum of natural numbers, we can calculate belonging

partitions number for each block. That is why we can find the exact block where i^{th} PS is located. So, here you could see the first step of getting i^{th} PS **without** generating all of them.

The second step. Forming of searched partition

At the first step, we identified the block where i^{th} PS is located. That means in fact that we identified the array len_A for our PS:

$$len_A = \{c_1, \dots, c_1, c_2, \dots, c_2, \dots, c_N, \dots, c_N\}, \\ c_1 < c_2 < \dots < c_N.$$

Let $len_A = \{2, 2, 3, 4\}$. So our exact block looks like: ({1, 2}, {3, 4}, {5, 6, 7}, {8, 9, 10, 11}), ..., ({1, 11}, {2, 8, 9, 10}, {3, 6, 7}, {4, 5}), ({1, 2, 3}, {4, 5}, {6, 7}, {8, 9, 10, 11}), ..., ({1, 10, 11}, {2, 7, 8, 9}, {3, 6}, {4, 5}), ({1, 2, 3, 4}, {5, 6, 7}, {8, 9}, {10, 11}), ..., ({1, 9, 10, 11}, {2, 7, 8}, {3, 6}, {4, 5}).

The first are partitions with number 1 as item of set where we have capacity 2. The next ones are with capacity 3 and 4. We can estimate the number of partitions where number 1 is an item of sets with capacities 2, 3 and 4.

Let number 1 be item of set with capacity t , $len_{tmp} := len_A / \{t\}$. There are

$$k = C_{n-1}^{t-1} m(len_{tmp}) \quad (**)$$

location combinations of other unused numbers in forming PS. Unused numbers will be also included to the same set as number 1. There are $m(len_{tmp})$ ways to extend PS, which we form step by step for each combination of set with number 1.

Therefore, using (**) we can get:

- 1) capacity of set with number 1;
- 2) all of other numbers included in the same set that number 1 (we know how many partitions' sequels exists for each possible combination of other numbers). Here you have to solve simple problem of combination retrieval by its index.

So, we identified the first set of PS. Next, we will repeat the same steps considering that some numbers are already used.

Forming PS algorithm

Let

- A - searched PS;

- $len_A := \{c_1, \dots, c_1, c_2, \dots, c_2, \dots, c_N, \dots, c_N\}$,
 $c_1 < c_2 < \dots < c_N$ - array with capacities of A items.

- $used := \{\}$ - set of numbers directly located in searched PS.

- $partition := \{\}$ - partition we will build step by step.

1. Let $a := \min(\{1, 2, \dots, n\} \setminus used)$. Let's look through all unique items of array len_A in ascending order, and will use variable $len_A[i]$ for it. By the fact, we look through all possible capacities for set with number **a**. We can identify interval of partitions indexes with next set's capacity equals $len_A[i]$. If searched PS index belongs to the interval we go to the step 2 of algorithm.

2. $used := used \cup \{a\}$. There are $C_{n-\|used\|}^{len_A[i]-1}$ ways to form the set, which consists of number **a**

and other unused numbers. Each of these also have $m(len_A / len_A[i])$ ways to extend partition. We cut down the search interval after selecting combination. Therefore, we need to select combination that gives us interval with searched PS. Let $\{a_1, a_2, \dots, a_{len_A[i]-1}\}$ are included in the same set as number **a**.

$$used := used \cup \{a, a_1, a_2, \dots, a_{len_A[i]-1}\}$$

$$partition := partition \cup \{a, a_1, a_2, \dots, a_{len_A[i]-1}\}$$

$len_A := len_A / len_A[i]$ If $len_A = \{\}$ or $\|used\| = n$ we go to the step 3. Otherwise, go to the step 1.

3. The end of the algorithm. $partition$ - is searched partition.

You can find the implementation code at [10].

Список використаних джерел

1. George E. Andrews. The Theory of Partitions// Cambridge University Press – 1998. – p. 220-226.
2. John F. Lucas. Introduction to Abstract Mathematics// Rowman & Littlefield Publishers; Second Edition. – 1990. – p. 188-210.
3. Федорова Т.И. Комбинаторные алгоритмы: Учебное пособие// Новосиб. гос. ун-т. Новосибирск. – 2011. – с. 72-79.
4. Кручинин В.В. Методы, алгоритмы и программное обеспечение комбинаторной генерации// Докторская диссертация. – Томск. – 2010. – с. 162-169.
5. en.wikipedia.org/wiki/Partition_of_a_set
6. http://teorver.pp.ua/ukr/ukr.php?templ=34d
7. http://teorver.pp.ua/ukr/ukr.php?templ=34c
8. http://teorver.pp.ua/ukr/ukr.php?templ=34d
9. http://teorver.pp.ua/ukr/ukr.php?templ=34c
10. https://github.com/Lamzin/KNU_LABS/blob/master/3-course/sharapov-lab/partition.php

References

1. GEORGE E. ANDREWS. (1998) The Theory of Partitions. *Cambridge University Press*, p. 220-226.
2. JOHN F. LUCAS. (1990) Introduction to Abstract Mathematics. *Rowman & Littlefield Publishers; Second Edition*, p. 188-210.
3. FEDOROVA T. (2011) Combinatorial algorithms: tutorial. *Novosibirsk State University*, p. 72-79.
4. KRUCHININ V. (2010) Methods, algorithms and software for combinatorial generating. Doctoral thesis, Tomsk, p. 162-169.
5. en.wikipedia.org/wiki/Partition_of_a_set
6. http://teorver.pp.ua/ukr/ukr.php?templ=34d
7. http://teorver.pp.ua/ukr/ukr.php?templ=34c
8. http://teorver.pp.ua/ukr/ukr.php?templ=34d
9. http://teorver.pp.ua/ukr/ukr.php?templ=34c
10. https://github.com/Lamzin/KNU_LABS/blob/master/3-course/sharapov-lab/partition.php

УДК 519.9

В. О. Яценко¹, д.т.н., проф.,
В. М. Петрович¹, к.т.н., н.с.,
Н. І. Адамчук², к.б.н., с.н.с.,
Н. М. Требіна¹, пров. інж.-матем.

V.A. Yatsenko¹, D. Eng. Sc., Prof.,
V.N. Petrovich¹, Ph.D. Eng. Sc.,
N.I. Adamchuk², Ph.D. Biol. Sc.,
N.N. Trebina, leading engineer-mathematician

Програмне забезпечення для аналізу та оцінювання вмісту хлорофілу в рослинності

Software for analysis and chlorophyll estimation in vegetation

Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, пр-т.
Глушкова 4д, ² Інститут мікробіології і
вірусології ім. Д.К. Заболотного НАНУ, 03143,
м. Київ, вул. Академіка Заболотного, 154
e-mail: vyatsenko@gmail.com;
filonval63@gmail.com;
m_nv@mail.ru
natasha@unicyb.kiev.ua

Taras Shevchenko National University of Kyiv,
03680, Kyiv, Glushkova st., 4d, ² D.K. Zabolotny
Institute of Microbiology and Virology of the NASU,
03143, Kyiv, Acad. Zabolotny st. 154

e-mail: vyatsenko@gmail.com;
filonval63@gmail.com;
m_nv@mail.ru
natasha@unicyb.kiev.ua

У роботі розглядається задача аналізу та оцінювання вмісту хлорофілу на основі використання спектрів відбиття рослинності. Розроблено прикладне програмне забезпечення для двох варіантів використання: експрес-оцінювання хлорофілу в рослинності в польових умовах та програмне забезпечення WINCHL з широким набором інструментів цифрової фільтрації та згладжування, Фур'є - аналізу, оптимізації, визначення головних компонент для побудови регресійних моделей.

Ключові слова: програмне забезпечення, оцінювання вмісту хлорофілу на основі використання спектрів відбиття рослинності, метод головних компонент, спектральні криві відбиття.

Accurate estimation of leaf chlorophyll level by remote sensing is a challenging problem. Such estimation is especially needed in an ecologically dangerous environment. Our goal is to develop new software that allows estimating chlorophyll concentration using remote sensing data for multiple kinds of soil and vegetation. The software was designed for two variants: express estimation of chlorophyll content in vegetation in the field conditions and software for digital filtration, regression analysis, Fourier analysis, optimization, determination of principal components for regression models. The estimation is based on training data set obtained from the leaf samples collected at various points on the earth's surface. The spectrometer was designed to comply with the strict measurement requirements essential for robust estimation. We have applied pattern recognition techniques as well as linear and nonlinear regression model approaches. Unlike previously suggested approaches, our methods use the shape of spectral curve obtained from measuring reflected light.

Key words: software, content chlorophyll estimation on the basis of optical spectrum, method of principal components, spectral curves.

Статтю представив д.т.н. Гаращенко Ф.Г.

1. Вступ

Проблема інформативності параметрів спектра відбиття рослинності щодо різних показників її стану активно розробляється протягом останніх 30 років. Роботи більш раннього періоду були орієнтовані на побудову різних вегетаційних індексів, що використовують спектральні коефіцієнти яскравості. Їх вимірювали багатоканальними дистанційними спектрорадіометрами.

Напівширина спектральної ділянки таких каналів була 30-10 нм. Були знайдені комбінації цих коефіцієнтів, які виявляли високу ступінь кореляції з вмістом у листках тих чи інших біохімічних компонентів, зокрема хлорофілу. Дистанційні вимірювання з використанням такого підходу називають мультиспектральними, а відповідна апаратура - це багатозональні сканери. Результати таких вимірювань мають істотне обмеження щодо дешифрування даних з метою отримання коректної інформації. Це обумовлено в основному двома обставинами: 1) необхідністю мати еталони коефіцієнтів яскравості, які необхідно вимірювати в тих же умовах, що і досліджуваній об'єкт, і 2) спотворення корисного сигналу відображення рослинності внеском відображення від ґрунту при роботі з фітоценозами з неповним проективним покриттям.

Останнім часом значне поширення отримали дослідження, що стосуються інформативних можливостей спектральних кривих відбиття рослинності, вимірюваних при високому спектральному дозволі. Встановлено, що зміни нахилу квазіпрямолінійної ділянки спектральної кривої в області, так званого, червоного краю, 680-800 нм, обумовлені варіаціями вмісту хлорофілу [1-13]. У деяких роботах останніх років для якісної оцінки змін концентрації хлорофілу використовували відношення інтенсивності двох екстремумів у графіку 1-ої похідної від спектральної кривої в області червоного краю. В роботі [2] показано, що при більш низькій концентрації хлорофілу домінує більш короткохвильовий екстремум. У роботах [9, 10] пропонується відношення інтенсивності екстремумів при 705 і 722 нм, D_{705} / D_{722} , як диференціального індексу для розпізнавання ситуацій, відповідних більшого або меншого вмісту хлорофілу, і виявлення, таким чином, стресу у рослин. Проте, вважаємо, що у величину цього відношення дає внесок флуоресценція листя.

Авторами протягом ряду років розробляється методологічний підхід для визначення хлорофілу в листі на основі кореляційної зв'язку цього параметра до величини відношення двох екстремумів у графіку 1-ої похідної [12,13]. Було показано, що такий підхід дозволяє отримати рівняння регресії для розрахунку хлорофілу [11] і що ця формула стійка щодо вкладів відбиття від ґрунту. Однак працездатність методу істотно залежить від рівня шуму на виході вимірювальної установки, оскільки цей фактор визначає можливість розрізнення двох екстремумів у графіку 1-ої похідної. Крім того, для приладової реалізації методу необхідно розробити спосіб автоматичного пошуку положення екстремумів і їх інтенсивності.

Зазначені недоліки запропонованого підходу стимулювали пошук альтернативних методів визначення хлорофілу з використанням спектральної кривої відбиття. Аналіз методів дозволив запропонувати і обґрунтувати новий підхід на основі відшукування головних компонент.

Для перевірки застосовності розроблених нами методів, адаптації їх до польових вимірів і впровадження в широку практику необхідний польовий прилад для вимірювання спектрів відбиття рослинності. Він повинен відповідати ряду специфічних вимог, що обумовлюють його конструктивні особливості, а також включати спеціалізоване програмне забезпечення для розрахунків хлорофілу за розробленими алгоритмами.

2. Програмне забезпечення для аналізу спектральних кривих та оцінювання вмісту хлорофілу

З метою аналізу та оцінювання вмісту хлорофілу в рослинності було розроблено прикладне програмне забезпечення (ППЗ) WINCHL. Воно складається з наступних функціонально пов'язаних підсистем: підсистеми управління, бази даних, бібліотеки алгоритмів, графічного інтерфейсу для взаємодії з користувачем.

Структурна схема його представлена нижче (рис. 1).

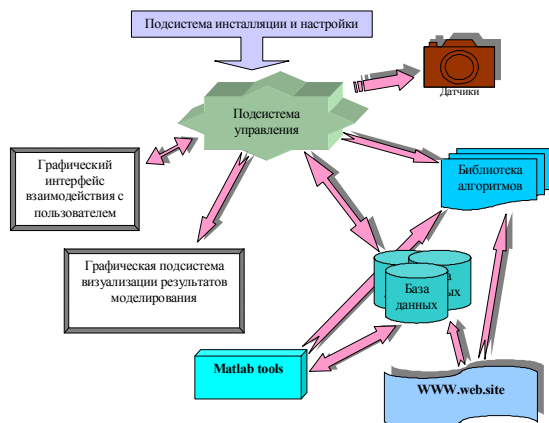


Рис. 1. Структурна схема ППЗ WINCHL

Система WINCHL призначена для вирішення наступних завдань:

- отримання спектральних даних зі спектрометра;
- обчислення значення хлорофілу по одному з розроблених алгоритмів;
- збереження результатів у базі даних.

ППЗ розроблено для двох варіантів використання. Перший, який має назву USWHL, призначений для експрес-оцінювання хлорофілу в рослинності у польових умовах. У функції USWHL входить: отримання спектральних даних зі спектрометра, обчислення концентрації хлорофілу і збереження результатів в базі даних. Цей варіант ППЗ простий у використанні та добре підходить для накопичення спектральних кривих в базі даних, отримання швидкісних оцінок вмісту хлорофілу в рослинності (рис. 2, рис. 3).



Рис. 2. Користувачке ППЗ WINCHL

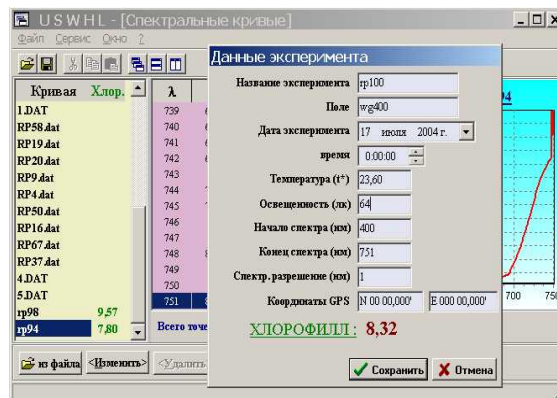


Рис. 3. Результати роботи варіанту для користувачів ППЗ WINCHL

Другий, який має назву WINCHL з широким набором інструментів для обробки траєкторій спектральних кривих та дослідження їх властивостей. Бібліотека WINCHL містить алгоритми цифрової фільтрації і згладжування, Фур'є-аналізу, диференціювання, оптимізації, визначення головних компонент, множинної регресії. Візуальний конструктор алгоритмів ППЗ WINCHL дозволяє досліднику задати необхідну конфігурацію алгоритмів обробки спектральних кривих та їх параметри за своїм бажанням і формувати різні послідовності алгоритмів обчислення хлорофілу (рис. 4).

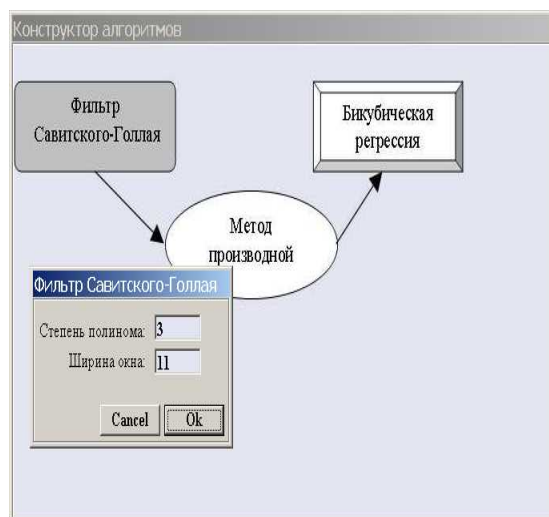


Рис. 4. Візуальний конструктор алгоритмів дослідницького варіанту ППЗ WINCHL

Для реалізації розробленого нами методу із застосуванням головних компонент спектральної кривої, а також методу з використанням 1-ої похідної [11, 12] необхідний польовий спектрометр з високим спектральним дозволом, не гірше 1-2 нм. Другий з методів пред'являє високі вимоги до рівня сигнал/шум. За нашими оцінками рівень шуму не повинен перевищувати 0,1% від шкали приладу. Обидві ці вимоги – високій спектральний дозвіл і низький рівень шуму, є такими, що суперечать один одному, оскільки перше з них вимагає звуження спектральної ширини вхідної щілини приладу, що знижує інтенсивність світлового потоку і, отже, сприяє підвищенню відносної величини шумового сигналу. Ці умови повинні поєднуватися з великою величиною динамічного діапазону, оскільки має місце великий перепад значень коефіцієнта відбиття в області червоного краю – від приблизно 3 до 60% в діапазоні 680-800 нм. Крім того, при роботі в польових умовах натуральна освітленість може змінюватися від 10000 лк в похмуру погоду до 120000 лк в сонячну. У наземних вимірах виникає також специфічна вимога до форми поля зору приладу. При використанні традиційної конструкції вхідного тракту, використовуваної в аеродистанційних або космічних вимірах поле зору перетворюється у вузьку і довгу смужку з розмірами близько декількох міліметрів по ширині і більше 1 м в довжину при роботі з висоти 1,5 м.

Ці проблеми були розв'язані із застосуванням оригінальних конструкторських рішень. Оптичний блок є двоканальним спектрофотометром, який виконаний на базі поліхроматора з плоскою дифракційною решіткою, дзеркальними сферичними об'єктивами і ПЗС як фото приймального пристрою. Ще один канал, візуалізації поля зору приладу, дозволяє вибирати необхідну для вимірювань ділянку фітоценозу. Запис повного інформаційного пакету – реєстрограми і службової інформації може здійснюватися на флеш-карту або безпосередньо в комп'ютер типу Notebook. Останній містить розроблене нами програмне забезпечення WINCHL, яке забезпечує роботу приладу в двох режимах – призначеному для користувача і для наукових досліджень. Призначений для користувача канал дозволяє отримувати оцінки хлорофілу в рослинності в реальному масштабі часу.

Режим для наукових досліджень виконує запам'ятовування спектральних кривих в базі даних разом зі службовою інформацією. Це є дані про температуру і освітленості в момент вимірювання, і географічні координати місця проведення вимірювань. Вони надходять з відповідних датчиків, якими оснащений прилад. Наявність в ППЗ бібліотеки алгоритмів і ряду математичних інструментів дозволяє в подальшому застосовувати різні методи обробки спектрів для визначення інших важливих параметрів стану рослинності.

Проведення лабораторних випробувань оптичного блоку показало, що розроблена конструкція оптичної схеми дозволяє домогтися дозволу 1,6 нм. Застосована система накопичення сигналу на рівні приладової реалізації дозволяє істотно знизити шуми, такі як співвідношення сигнал/шум.

Польові випробування підтвердили висновок про низький рівень шумів. Порівняння одиничного запису спектра відбиття та усередненого з 10 повторних записів того ж самого падаючого в поле зору приладу, показали, що їх відмінності не перевищують 5%. Відмінності графіків 1-ої похідної від зазначених вище спектральних кривих не перевищують 7-10%. Форма спектральної кривої відбиття відповідає такій, що отримана в лабораторних умовах, і відмінності в області червоного краю при варіаціях вмісту хлорофілу мають аналогічний характер.

3. Результати

За проведеними розрахунками отримано власні вектори і власні значення, на основі яких було розраховано коефіцієнти регресійних моделей для обчислення концентрації хлорофілу. Було проведено тестування двох алгоритмів:

- а) на основі методу головних компонент (МГК);
- б) методу 1-й похідної.

Вони продемонстрували подібні результати. МГК показав кращу точність при малих значеннях хлорофілу і нестійкий при проектному покритті меншому 100%.

На рис. 1 показані спектри відбиття листя озимої пшениці з різним вмістом хлорофілу.

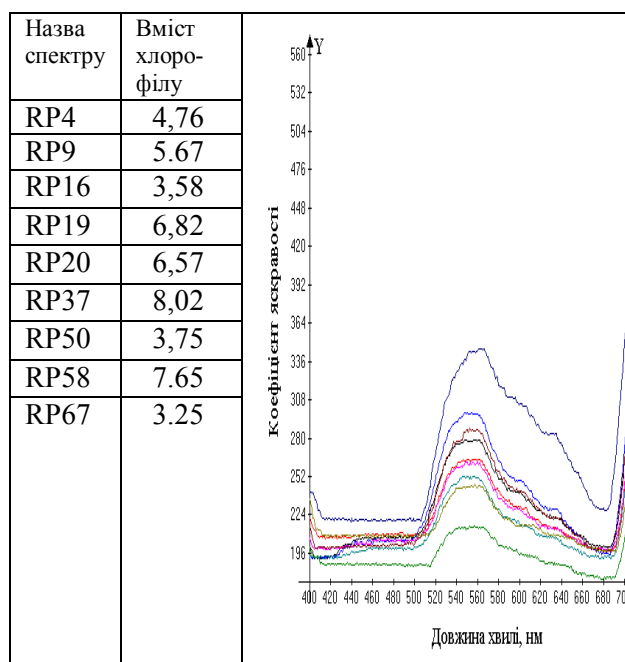


Рис.5. Спектральні криві озимої пшениці при 100% проективному покритті

Аналіз спектрів відбиття озимої пшениці з різним вмістом хлорофілу виявив залежність головних компонент спектра в області червоного краю (680-750 нм) від вмісту хлорофілу. На рис. 6 і рис. 7 наведені графіки, що демонструють ці залежності.

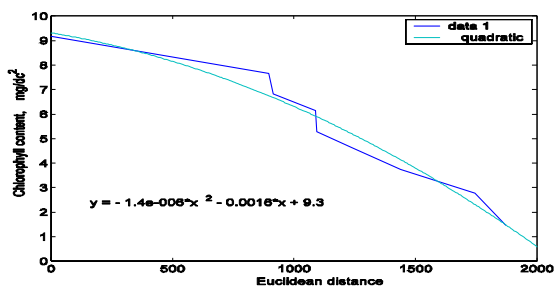


Рис. 6. Графік залежності концентрації хлорофілу від евклідової відстані між векторами головних компонент

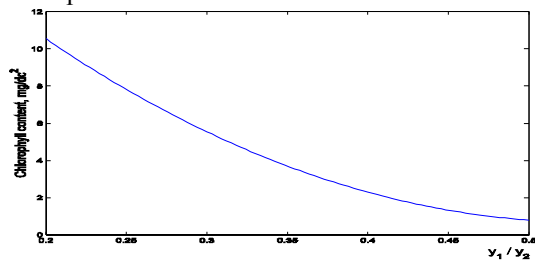


Рис. 7. Графік залежності концентрації хлорофілу від відношень двох перших головних компонент

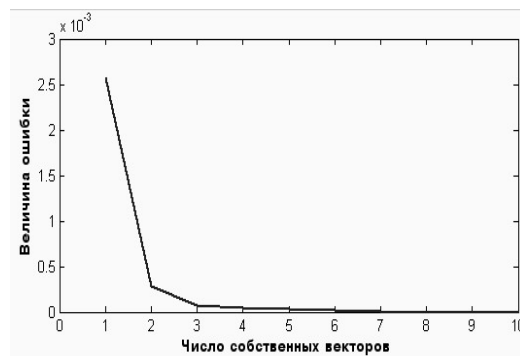


Рис. 8. Залежність величини похибки E від числа власних векторів

З рис. 8 видно, що при використанні п'яти власних векторів помилка близька до нуля.

Проведемо порівняння розробленого алгоритму за результатами біохімічного аналізу. При цьому алгоритм було заздалегідь навчено на 23 спектральних кривих. Потім оцінювався вміст хлорофілу по 9-ти новим спектральним кривим. Результати порівняння наведені на рис. 9, де видно, що помилка не перевищує 0,42.

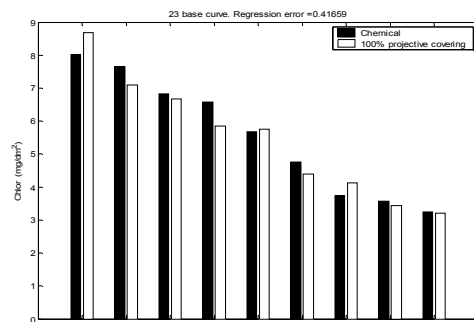


Рис. 9. Порівняння точності МГК за хімічним способом визначення хлорофілу

4. Висновки

Запропоновано новий підхід до оцінювання концентрації хлорофілу в рослинності, що базується на аналізі форми вихідної спектральної кривої в області червоного краю (680-750 нм). Основою його є побудована коваріаційна матриця за навчальною вибіркою з визначенням власних векторів.

Показано, що необхідно не більше 5 принципів компонент для опису форми спектральної кривої. Головні компоненти використані як незалежні змінні нелінійної регресійної моделі для оцінювання концентрації хлорофілу в рослинності.

Встановлено, що існує нелінійна залежність між векторами принципів компонент і вмістом хлорофілу, яка досить добре апроксимується бікубічною регресійною моделлю. МГК може бути використаний для експрес-аналізу концентрації хлорофілу на основі вбудованих і мобільних обчислювальних

систем. Розроблено ППЗ USWHL для експрес-оцінювання хлорофілу в рослинності в польових умовах та програмне забезпечення WINCHL з широким набором інструментів для обробки і дослідження спектральних кривих.

Список використаних джерел

1. Moran J.A. Differentiation among effects of nitrogen fertilization treatments on conifer seedlings by foliar reflectance: a comparison of methods / J.A. Moran, A.K. Mitchell, G. Goodmanson, K.A. Stockburger // *Tree Physiology*, 2000. – V. 20. – P. 1113-1120.
2. Lamb D.W. Estimating leaf nitrogen concentration in ryegrass (*Lolium spp.*) pasture using the chlorophyll red-edge: theoretical modelling and experimental observations / D.W. Lamb, M. Steyn-Ross, P. Schaare, M.M. Hanna, W. Silvestr, A. Steyn-Ross // *Int. J. Remote Sens.*, 2002. – V. 23. – P. 3619-3648.
3. Riggs G.A. Detection of canopy water stress in conifers using the airborne imaging spectrometer / G.A. Riggs, S.W. Running // *Remote Sens. Environ.*, 1991. – V. 35. – P. 51-68.
4. Ceccato P. Detecting vegetation leaf water content using reflectance in the optical domain / P. Ceccato, S. Flasse, S. Tarantola, S. Jecquemoud, J.M. Gregoire // *Remote Sens. Environ.*, 2001. – V. 77. – P. 22-33.
5. Bowyer P. Sensitivity of spectral reflectance to variation in live fuel moisture content at leaf and canopy level / P. Bowyer, F.M. Danson // *Remote Sens. Environ.*, 2004. – V. 92. – P. 297-308.
6. Horler D.N.H. The red edge of plant leaf reflectance / D.N.H. Horler, M. Dokray, J. Barber // *Int. J. Remote Sens.*, 1983. – V. 4. – P. 273-288.
7. Pinar A. Grass chlorophyll and the reflectance red edge / A. Pinar, P.J. Curran // *Int. J. Remote Sens.*, 1996. – V. 17. – P. 351-357.
8. Zarko-Tejada P.J. Vegetation stress detection through chlorophyll a+b estimation and fluorescence effects on hyperspectral imagery / P.J. Zarko-Tejada,

References

1. MORAN J.A., MITCHELL A.K., GOODMANSON G, STOCKBURGER K.A. (2000) *Differentiation among effects of nitrogen fertilization treatments on conifer seedlings by foliar reflectance: a comparison of methods*. *Tree Physiology*, 20: pp. 1113-1120.
2. LAMB D.W., STEN-ROSS M., SCHAARE P., HANNA M.M., SILVESTR W., STEYN-ROSS A. (2002) *Estimating leaf nitrogen concentration in ryegrass (Lolium spp.) pasture using the chlorophyll red-edge: theoretical modelling and experimental observations*. *Int. J. Remote Sens.*, 23: pp. 3619-3648.
3. RIGGS G.A., RUNNING S.W. (1991) *Detection of canopy water stress in conifers using the airborne imaging spectrometer*. *Remote Sens. Environ.*, Vol. 35: pp. 51-68.
4. CECCATO P., FLASSE S., TARANTOLA S., JECQUEMOUND S., GREGOIRE J.M. (2001) *Detecting vegetation leaf water content using reflectance in the optical domain*. *Remote Sens. Environ.*, Vol. 77: p. 22-33.
5. BOWYER P., DANSON F.M. (2004) *Sensitivity of spectral reflectance to variation in live fuel moisture content at leaf and canopy level*. *Remote Sens. Environ.*, Vol. 92: pp. 297-308.
6. HORLER D.N.H., DOKRAY M., BARBER J. (1983) *The red edge of plant leaf reflectance*. *Int. J. Remote Sens.*, Vol. 4: pp. 273-288.
7. PINAR A., P.J. CURRAN. (1996) *Grass chlorophyll and the reflectance red edge*. *Int. J. Remote Sens.*, Vol. 17: pp. 351-357.
8. ZARKO-TEJADA P.J., MILLER J.R., MOHAMMED G.H., NOLAND T.L., SAMPSON P.H. (2002) *Vegetation stress detection through chlorophyll a+b estimation and fluorescence effects on*

- J.R. Miller, G.H. Mohammed, T.L. Noland, P.H. Sampson // J. Environ. Qual., 2002. – V. 31. – P. 1433-1441.
9. Zarko-Tejada P.J. Steady-state chlorophyll a fluorescence detection from canopy derivative reflectance and double peak red edge effect / P.J. Zarko-Tejada, J.C. Pushnik, S.J. Dobrowski, S.L. Ustin // Remote Sens. Environ., 2003. – V. 84. – P. 283-294.
10. Kochubey S.M. Novel Approach to Remote Sensing of Vegetation / S.M. Kochubey, P.I. Bidyuk // Conference “AeroSense. Technologies and Systems for Defence & Security”, 21-25 April 2003, Orlando USA, Proc. of SPIE. – P. 5093.
11. Yatsenko V.A. Estimation of chlorophyll concentration in vegetation using global optimization approach / V.A. Yatsenko, S.M. Kochubey, P.M. Pardalos, L. Zhan // “Technologies, Systems, and Architectures for Transnational Defence II”, SPIE Conference “AeroSense. Technologies and Systems for Defence & Security”, 21-25 April 2003, Orlando USA, Proc. of SPIE, P. 5071.
12. Comon P., Independent component analysis. A new concept? / P. Comon, // Signal Processing, 1994. – № 36(3). – P. 287-314.
13. Garashchenko F.G. Detection of chemical components in the plants / F.G. Garashchenko, V.T. Matvienko, N.N. Trebina // International Conference: Problems of decision making under uncertainties. – Abstracts, May, 23- 27, 2016, Tbilisi-Batumi, Georgia, p. 62-63.
- hyperspectral imagery*. J. Environ. Qual., Vol. 31.: pp. 1433-1441.
9. ZARKO-TEJADA P.J., PUSHNIK J.C., DOBROWSKI S.J., USTIN S.L. (2003) *Steady-state chlorophyll a fluorescence detection from canopy derivative reflectance and double peak red edge effect*. Remote Sens. Environ., Vol. 84.: pp. 283-294.
10. KOCHUBEY S.M., BIDYUK P.I. (2003) *Novel Approach to Remote Sensing of Vegetation*. Conference “AeroSense. Technologies and Systems for Defence & Security”, Orlando USA, Proc. of SPIE.: pp. 5093.
11. YATSENKO V.A., KOCHUBEY S.M., PARDALOS P.M., ZHAN L. (2003) *Estimation of chlorophyll concentration in vegetation using global optimization approach*. Conference “Technologies, Systems, and Architectures for Transnational Defence II”, SPIE Conference “AeroSense. Technologies and Systems for Defence & Security” Orlando USA, Proc. of SPIE.: pp. 5071.
12. COMON P. (1994) *Independent component analysis. A new concept?* Signal Processing. 36(3):. pp. 287-314.
13. GARASHCHENKO F.G., MATVIENKO V.T., TREBINA N.N. (2016) *Detection of chemical components in the plants*. International Conference “Problems of decision making under uncertainties”. Abstracts. Tbilisi-Batumi. Georgia. pp. 62-63.

Надійшла до редколегії 01.12.2016

РАДІОФІЗИКА

УДК 542.65, 544.2, 620.92, 616.314.

Іванюта О. М., к.ф.-м.н., доц.

**Можливість використання органічних
відходів для виготовлення біопаперу.**

Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, пр-т.
Глушкова 4д,
e-mail: iva@univ.net.au.

O.M. Ivanyuta, Ph.D., Ass. Prof.

**The ability to use organic waste for the
production biopaper.**

Taras Shevchenko National University of Kyiv,
03680, Kyiv, Glushkova st., 4d,
e-mail: iva@univ.net.au.

Проведено аналіз сучасного стану композитів гідроксиапатитів для прикладних задач. Виготовлено наночастинки з емалі зубів. За аналізом ІЧ спектрів визначено вплив розмірів частинок на їх фазовий склад і стехіометрію. Показано, що вони можуть бути основою волокон колагену який є основою біопаперу.

Ключові слова: гідроксиапатит, полімеризація, спектроскопія, біодрук.

The analysis modern state composition hydroxyapatite is conducted for applied tasks. Functional pre-product, possibly, to get the different ways of synthesis, but here their prime price is proportional the amount technological operations. Therefore, approach is known as «Up - down» seems better. The nanoparticles are made with teeth. The hydroxyapatite play the role of bio-based collagen paper, which will be deposited in living cells bioprinter cartridges. After the analysis IR - spectrums certainly influence of sizes particles nanoparticles on their phase composition and stoichiometric phase's forms. The nanoparticles hydroxyapatite of diameter basic cell not exceeding $2 \div 4$, value hydroxyapatite - deformed molecules will be determined not only in volume but also the morphology the surface. The change of the surface can significantly affect the composition of the whole composite. Not stoichiometry has high values specific surface composite hydroxyapatite. It's shows that the nanoparticles are made dentin of the teeth are more than organic component nanoparticles are made of tooth enamel, which can be explained their stoichiometry and morphology It's rationed that they can be basis of fibres collagen that is biopaper basis.

Key Words: hydroxyapatite, polymerization, spectroscopy, bioprinting.

Статтю представив д.ф.-м.н. Скришевський В.А.

Forming of well-organized structures in the polymeric matrices of nanoparticles different nature allows to create composite materials with unique electric, magnetic, optical, mechanical properties [1]. If to reproduce these processes not physical and chemical methods, but by the methods of local seal, such structures will possess enhance able biocompatibility [2]. By the most perspective environments for forming and stabilizing of different medical - biological materials are hydrogel polymeric matrices, in particular, matrices of supramolecules for creation osteoimplants [3]. Thus, the choice feedstock, and this case organic, will determine functional properties nanoobjects.

Functional pre-product, possibly, to get the different ways of synthesis, but here their prime price is proportional the amount technological operations. Therefore, approach is known as «Up - down» seems

better. Such approach can exemplify one of the most ancient methods growing of organic and minerals shallow, namely by a mortar and pestle. In this case, organic wastes can serve raw material for the subsequent technological operations of creation the mentioned matrices.

The most perspective candidate is (HA) $\text{Ca}_{10}(\text{PO}_4)_6(\text{OH})_2$. It is a basic inorganic component of biogenic bone fabric, possesses such valuable properties, as biocompatibility, bioactivity, osteoconductivity and absence of inflammatory, toxic effects [4], also not deprived failings. HA is one the most studied representatives' compounds with apatite structure. Its crystallographic structure can show in Fig. 1. HA the composition, structure and properties of crystals - chemical analogue mineral component skeleton tissues mammals [1-3] and has two structural forms: hexagonal and mono wedge [5]. Hexagonal

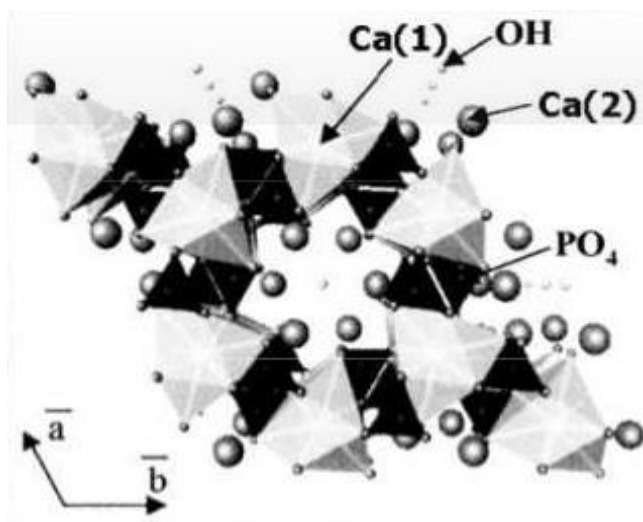


Fig. 1. The projection the hexagonal structure hydroxyapatite it's the cell along a direction [001].

HA usually formed by precipitation in supersaturated solutions at temperatures 25÷100°C, and monoclinic HA - hexagonal shape when heated to 850°C and subsequent cooling to room temperature [2]. Inorganic fraction containing human bone: 75 % HA, 19 % carbon apatite, 4,4 % chloral apatite i 0,66 % fluorine apatite (Table 1). Which complicates the implementation of the possibility of using organic waste for HA bio printing due to the need for additional chemical reactions to constituents of the components division? This is the same constraint that stood in the way of approach "bottom - up", such as the synthesis functional particles nanoreactors. Despite the large number of publications devoted to synthetic analogue GAP existing synthesis methods have some significant drawbacks: for example, using water instead of expensive organic solvents (anisole) [6] or exotic agents (Ca×(OEt)₂) [7]. In addition, the reaction should take place in the first case for 2 days at 130°C, and the second - for 2 hours under vacuum. Thus, still topical task of developing the optimal method of receiving analogue HA. Consequently, to synthetic HA comes to the role of substitute bio apatite, would like his natural "counterpart", consisting of plate crystals with a diameter of 50 nm (Fig. 2) and should have some kind carbonate - ion [8]. To increase the degree of crystalline apatite phase HA necessary to carry out thermal processing of composites for removing organic phase from materials of biological origin and lower concentration impurities. The molar ratio of HA / impurity in the samples polymerized HA can take values that are significantly different from the theoretical (1,67) [6, 11].

Unfortunately, its advantages are reversed.

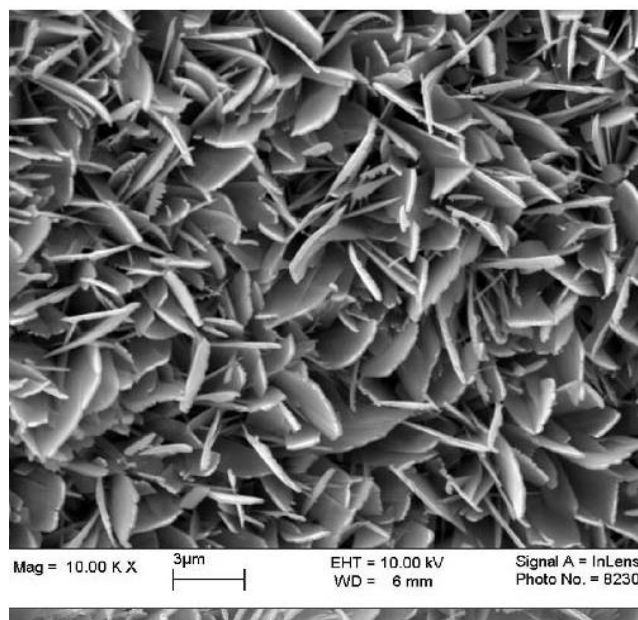


Fig. 2. Image composite HA without impurities after annealing [1].

Thus, the resistance of biopaper HA with respect to the environment of the organism leads to the fact that bone can grow into the implant and fills the contact space of fibrous connective tissue, which covers the foreign body mechanically. It is clear that such contact may not be durable. Commendable strength ceramics characteristics turn its increased rigidity. biopaper implant in the bone model in the form of two different materials stacked, one of them - Soft (bone), the other - hard (ceramic). In a system with mechanical load it is distributed unevenly: most will take the hard biopaper element. In the absence of the

Table 1:
The chemical composition bone tissue and teeth
(in wt. %) [1, 5]

Component	Fabric bones	Fabric tooth (dentine)
Ca	34,8	35,1
in form P ₄ ³⁻	15,2	16,9
Na	0,9	0,6
Mg	0,72	1,23
K	0,03	0,05
in form CO ₄ ³⁻	7,4	5,6
F	0,03	0,06
Cl	0,13	0,01
inorganic component	65	70
organic component	25	20
Water	10	10
ratio Ca/P (molar)	1,71	1,61

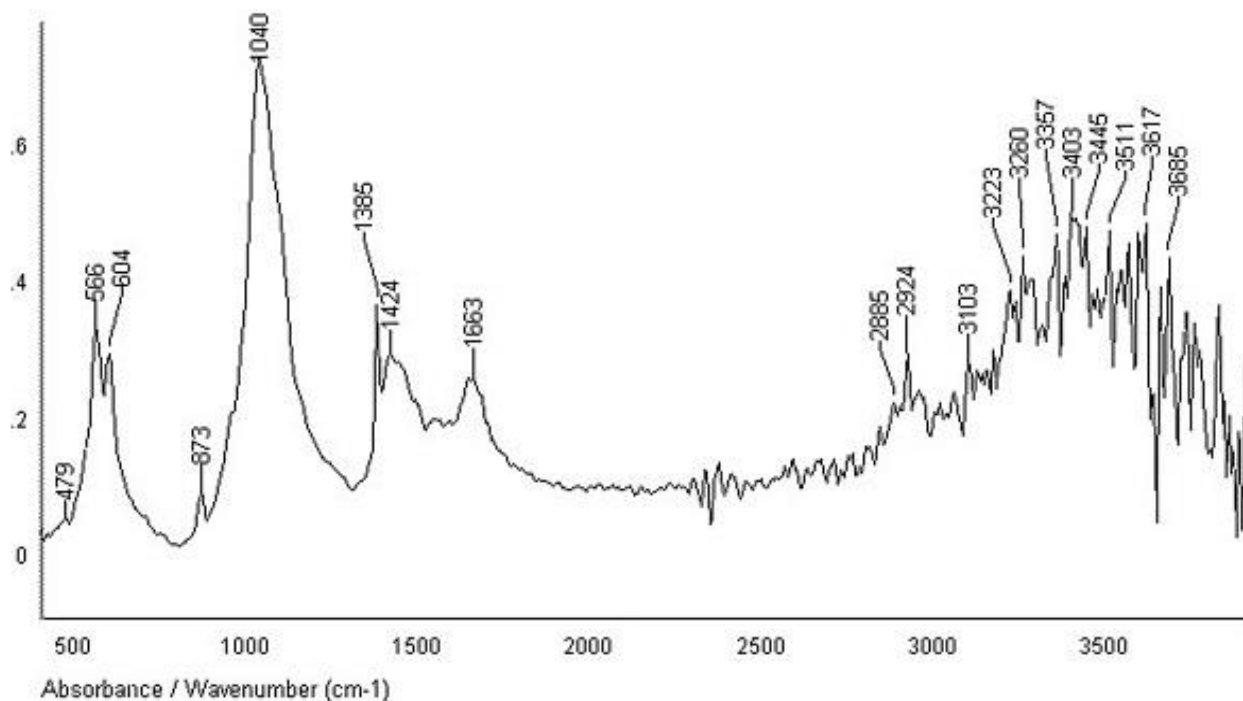


Fig. 3. IR - spectrum composite hydroxyapatite with gelatine ($T = 40^{\circ}\text{C}$) [5].

usual load bone cells start the bone dissolution process, which leads to osteoporosis - the disease is to reduce bone mass due to their porosity development [4]. Practical application at biopaper arthroplasty is limited due to the hardness, brittleness and excessive crystalline. [7] Therefore, it seems that composite materials based on mineralized hydrogels combine the beneficial properties inherent in their polymeric and inorganic compounds have a high potential for prosthesis bone. HA as a material for bone implants, involves in vivo interactions with living cells. Note that synthesized the substance does not have a commercial perspective, if it does not satisfy the regulated indicators (lack of toxicity), or inferior degree activation interaction in the process cell repair substances already present in the market. Generally, the physical and chemical properties of composite HA, crystal size and morphology of the surface is extremely sensitive to the conditions of manufacture. Therefore, the synthesis of artificial HA for better simulating human bone carbonates apatite or OH^- and PO_4^{3-} groups by carbonate groups controlled replacement. Monitoring the introduction of impurities is extremely important for stoichiometric HA. Depending on the substituted group (hydroxyl or phosphate) formed structure HA α - or β - phase respectively [1, 5].

In fact HA is a combination variable composition and its formula can be represented as $\text{Ca}_{10-x}(\text{HPO}_4)_x(\text{PO}_4)_{6-x}(\text{OH})_{2-x}$, where $0 < x < 1$ (i.e. the

ratio Ca / P can vary from 1,5 in $x=1$ to 1,67 when $x=0$). In the crystal structure of apatite possible partial replacement (substitution) of calcium cations to other ions, such as Sr^{2+} , Ba^{2+} , Be^{2+} , Pb^{2+} . Phosphate ions may be substituted instead OH - groups – Cl^- , Br^- , F^- . For example, a significant amount of fluoride is part of HA, contained in the teeth. A characteristic feature of HA that form bone tissues, is the presence in its structure of carbonate ion. He is one of the main sources of apatite lattice deformation, creating local mechanical stresses and defects in crystals HA, and determines the biological activity of bone apatite, the so-called carbonate in this case - appetite. With some degree of conditionality formula mineral component bone tissue can be written as $\text{Ca}_9(\text{CO}_3)_x(\text{HPO}_4)_y(\text{PO}_4)_5(\text{OH})$ (where $x+y=1$. Interestingly, the age carbonate ion content in the bone grows and HA among other reasons lowers the mechanical strength of the bones in the elderly).

Three main groups of substances is the basis of bone, collagen (25 wt. % - Organic component of bone), calcium phosphate (65 wt. % - Inorganic component) and water (10 wt. %). In addition to these substances in the tissue present in small amounts of other organic compounds (proteins haridy, lipids) (Table. 1). Play thorough morphology of bone tissue in vivo is not possible in the near future [1, 5 ÷ 8].

Collagen molecules consisting of three strands

twisted spiral polypeptide capable collected in the fiber diameter of $100 \div 2000$ nm. The strength of the bone mineral caused by compression component - biopaper. Its crystals present in bone in the form of plates with dimensions $50 \times 20 \times 5$ nm. There are seven levels of bone architecture fabric biopaper. Organic and inorganic components form a composite biomaterial. If he claims to be, the implants must meet the requirements that are dictated by the structure, composition and properties biopaper:

- 1) Chemical properties - no unwanted chemical reactions with the tissues and interstitial fluid, no corrosion;
- 2) Mechanical characteristics HA should be close to the bone;
- 3) Biological properties - the lack of reaction from the immune system, fusion with bone tissue, stimulation formation bones (osteosynthesis);
- 4) For rapid germination bone in implant requires the latter through pores size $100 \div 150$ μm .

Spectroscopic methods, including infrared spectroscopy and Raman spectroscopy is not disruptive in the study of structure and defect organic - mineral aggregates, including bone and dental tissues. Methods provide information on the characteristics of their local molecular structure. The measurement was conducted using absorption spectrophotometer, which consisted of a light source, monochromatic (for allocation of a specific wavelength), transparent corvette where sample detector and light meter to record the output of the detector. During the one measured by the wavelength at the intensity of light that has passed through a medium (which can be a buffer - sizing), then walked measurement of light intensity that has passed through a sample of the substance in a same

environment then recorded changes in light intensity, which can judge the absorption substance. With the introduction biopolymers, along with the emergence new absorption bands organic functional groups in composites increased the content of bound water, this effect is particularly pronounced in the presence of gelatine (Fig. 3). Typical IR spectrum HA is characterized by fluctuations bands OH- groups ($\nu=3606 \div 3617$ cm^{-1}), bands of valence and deformation vibrations of the phosphate groups ($1047, 604, 569$ cm^{-1}) and carbonate groups ($1420, 1385$ cm^{-1}). Thus, all containing it's a number HA CO_3^{2-} groups. Increase temperature to 250°C leads to the rupture of hydrogen bonds between the CO and NH groups and increase the number not dissociated carboxyl groups [9].

According to the literature, carbonate - ions partially replacing hydroxyl groups located in Ca - channels HA [2, 9]. This effect is observed even at relatively low temperatures (80°C), resulting in washed samples for elemental analysis data do not contain nitrogen. Found that polymers do not form bonds with OH groups HA. All composites are present at frequencies bands 1424 i 873 cm^{-1} . Corresponding fluctuations carbonate groups and bands stretching vibration water. That does not form pronounced triplets confirms HA education. Based on IR spectra can be concluded on education systems in these composites containing HA variable composition [9]. IR - range of composite HA with gelatine (show. Fig. 3) are present bands characteristic of stoichiometric HA: band $\nu(\text{OH})$ when 3511 cm^{-1} , band stretching vibration PO_4 groups: 1385 (weak shoulder), 1424 i 873 cm^{-1} , and deformation oscillations PO_4 groups: $604, 566$ i 479 cm^{-1} . Also present in the spectrum bands oscillations carbonate groups ($1422, 1420$ i 873 cm^{-1}),

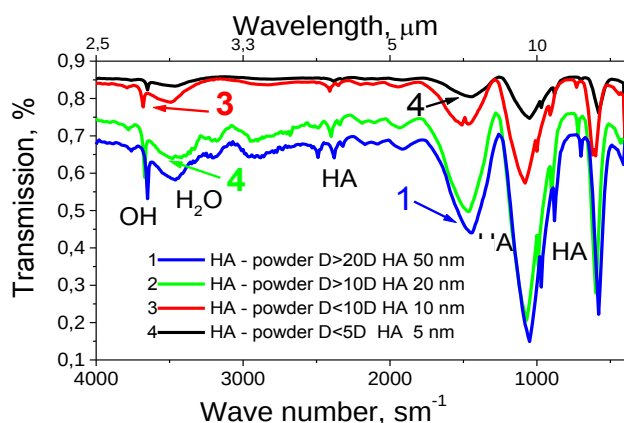


Fig. 4. IR spectra of different diameter nanoparticles HA obtained from enamel teeth.

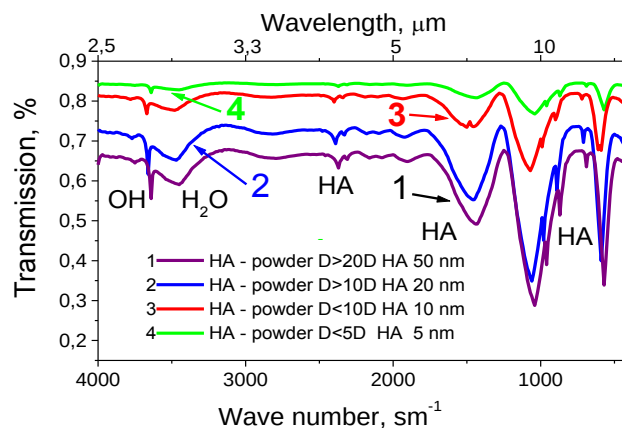


Fig. 5. IR spectra of different diameter nanoparticles HA obtained from dentin teeth.

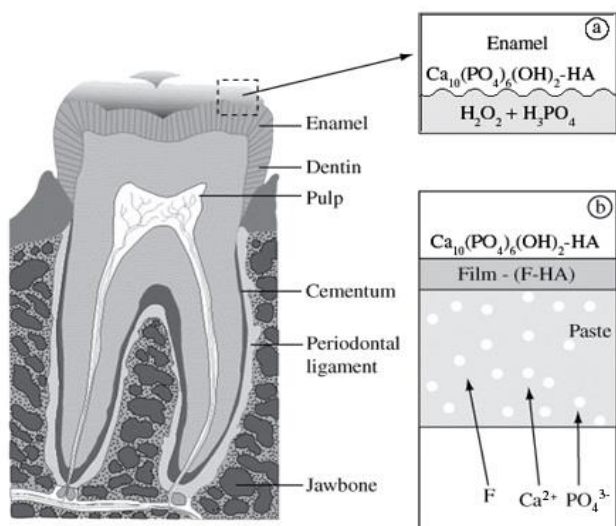


Fig. 6. Structure of tooth.

partially substitute PO_4 and OH^- HA group during its synthesis by absorption CO_2 from the atmosphere. Developed surface nano powder HA promotes sorption significant amounts of water; valence fluctuations sorbet water of crystallization and characterized in background $3500 \div 2900 \text{ cm}^{-1}$, deformation oscillations H-O-H characterized band 1671 cm^{-1} . During the heat treatment intensity of these bands absorption is significantly reduced. IR - spectrum HA / gelatine has the entire characteristic HA net absorption band, which also indicates formation composite HA during the polymerization reaction HA gelatine in the aqueous solution. At the same time, the IR - spectrum composite virtually no characteristic absorption band gelatine, obviously, due to the small number bio polymers (2 weight. %) and overlapping bands functional groups HA and gelatine [5].

A relatively low resistance to crack propagation and a wide scatter of experimental values of strength from sample to sample characterizes ceramics based on HA. Moist environment, simulating the environment of the organism, only exacerbates these negative properties of ceramics. Because of these reasons it is conducted intensive search for new composite materials with improved mechanical characteristics. Low solubility of synthetic GAP turns its low bioactivity: bone cells slowly "digest" he proposed source of calcium and phosphorus; as a consequence of bone slowly grows into a ceramic implant. To improve bioactivity HA diluted more soluble calcium phosphates, for example tri-orthophosphate or made porous HA ceramics.

When nanoparticles of diameter basic cell not exceeding $2 \div 4$ ($D_{\text{cell}} = 0,962 \text{ nm}$), value HA / deformed molecules will be determined not only in

volume but also the morphology the surface. Therefore, the change of the surface can significantly affect the composition of the whole composite. Not stoichiometry has high values specific surface composite HA [1-3, 5]. It is obvious that all these reasons have a place in the processing chain, and the relative contribution each them in the study of biocompatible HA necessary to control the rapid non-destructive methods spectroscopy. Fig. 4 and Fig. 5 show the IR - spectra different diameter nanoparticles HA obtained from the enamel teeth and dentin teeth, respectively. It is seen that with decreasing the size nanoparticles HA reduced overall bandwidth and powder absorption bands corresponding to his unit cell and its components. It is obvious that HA retains its stoichiometry when a rate greater than diameter nanoparticles ten linearly arranged elementary cells. It is seen that with unequivocally that the stoichiometry HA stored in its nanoparticles that have diameters greater than 10 nm. Nanoparticles HA with a diameter about 50 nm manifests itself organic component raw materials (dentin and enamel teeth), which upon annealing temperature will deteriorate, and the polymerization process will not behave predictably. Also shows that the nanoparticles are made dentin of the teeth are more than organic component nanoparticles are made of tooth enamel, which can be explained their stoichiometry and morphology (Fig. 6). It is obvious that in the case dentin diameter nanoparticles must be smaller than in the case enamel, but their diameter can't be less than 10 nm.

Was that HA nanoparticle (10 nm) in diameter unit cell slightly larger than the value that is provided in the Handbook of Mineralogy (0,962 nm). Perhaps this is due to the fact that composites unit cell HA slightly deformed and possibly polarized. All the above definitions makes it difficult to formulate requirements for controlled polymerization processes HA composites decreasing the size of nanoparticles HA reduced total intensity radiation and bandwidth decreases according to an increase unit cells deformed. Although the technology bioprinting is still in active development, there are already working bioprinter. The size of the ink droplets are sprayed conventional ink printer, roughly equal to the size of clusters and nanoparticles supermolecules. Here HA play the role of foundations, i.e bio-based collagen paper, which will be deposited in living cells bioprinter cartridges. But collagen, in turn, consists of a micro-cylinder polymerized supramolecules HA. Its mechanical properties are provided with a special spatial arrangement of structural components - bony plate's

thickness $3\div 10\text{ }\mu\text{m}$ [3, 9]. Testing hierarchical structures as stage management and the creation of biosynthesis of desired properties of matter will go to

the development of production technology that provides unique value "price - quality" fiber HA.

Список використаних джерел

1. Best S.M. Bioceramics: Past, present and for the future / S.M. Best, A.E. Porter, E.S. Thian, J. Hyang // *J.Eur. Ceram. Soc.* - 2008. - **28** - P. 1319–1327.
2. Driessens F.C.M. The mineral in bone, dentin and tooth enamel // *Bull. Soc. Chim. Belg.* - 1980 - **89** - P. 663–689.
3. Patel N. A comparative study on the in vivo behaviour of hydroxyapatite and silicon-substituted hydroxyapatite granules / Patel N., Gibson I.R., Hing K.A., Best S.M., Revell P.A., Bonfield W. // *J. Mater. Sci.: Mater. Med.* - 2002 - **13** - P. 1199–1206.
4. Porter A.E. Effect of carbonate-substitution on the ultrastructural characteristics of hydroxylapatite implants. / Porter A.E., Patel N., Brooks R., Best S.M., Rushton N., Bonfield W. // *J. Mater. Sci.: Mater. Med.* - 2005 - **16** - P. 1–9
5. Sun L.A. Materials fundamentals and clinical performance of plasma-sprayed hydroxyapatite coatings: a review. / L.A. Sun, C.C. Berndt, K.A. Gross, C.C. Kucuk // *J. Biomed. Mater. Res.* - 2001 - **58B** - P. 570–592.
6. Ahmad Z. Electrohydrodynamic print-patterning of nanohydroxyapatite. / Z. Ahmad, J. Huang, M.J. Edirisinghe, S.N. Jayasinghe, S.M. Best, W. Bonfield, R.A. Brooks, N. Rushton // *J. Biomed. Nanotechnol* - 2006 - **2** - P. 201–207.
7. Lim Y.M. Calcium phosphate films deposited by electrostatic spray deposition and an evaluation of their bioactivity./ Y.M. Lim, B.H. Kim, Y.S. Jeon, K.O. Jeon, K.S. Hwang // *J. Ceram. Proc. Res.* - 2005 - **6** - P. 255–258.
8. Siebers M.C. Electrostatic spray deposition (ESD) of calcium phosphate coatings, an in vitro study with osteoblast-like cells. / M.C. Siebers, X.F. Walboomers, S.C.G. Leeuwenburgh, J.G.C. Wolke, J.A. Jansen // *Biomater* - 2004 - **25** - P. 2019–2027.
9. Wang Y. Osteoblastic cell response on fluoridated hydroxyapatite coatings. / Y. Wang, S. Zhang, X. Zeng, L.L. Ma, W. Weng, W. Yan, M. Qian // *Acta Biomater* - 2007 - **3** - P. 191–197.

References

1. BEST S.M., PORTER A.E., THIAN E.S., HYANG J. (2008) Bioceramics: Past, present and for the future. *J. Eur. Ceram. Soc.* (28). p. 1319–1327.
2. DRIESSENS F.C.M. (1980) The mineral in bone, dentin and tooth enamel. *Bull. Soc. Chim. Belg.* (89). p. 663–689.
3. PATEL N., GIBSON I.R., HING K.A., BEST S.M., REVELL P.A., BONFIELD W. (2002) A comparative study on the in vivo behaviour of hydroxyapatite and silicon-substituted hydroxyapatite granules *J. Mater. Sci.: Mater. Med.* (13). p. 1199–1206.
4. PORTER A.E., PATEL N., BROOKS R., BEST S.M., RUSHTON N., BONFIELD W. (2005) Effect of carbonate-substitution on the ultrastructural characteristics of hydroxylapatite implants. *J. Mater. Sci.: Mater. Med.* (16). p. 1–9
5. SUN L.A., BERNDT C.C., GROSS K.A., KUCUK C.C. (2001) Materials fundamentals and clinical performance of plasma-sprayed hydroxyapatite coatings: a review. *J. Biomed. Mater. Res.* (58B). p. 570–592.
6. AHMAD Z., HUANG J., EDIRISINGHE M.J., JAYASINGHE S.N., BEST S.M., BONFIELD W., BROOKS R.A., RUSHTON N. (2006) Electrohydrodynamic print-patterning of nanohydroxyapatite. *J. Biomed. Nanotechnol* (2). p. 201–207.
7. LIM Y.M., KIM B.H., JEON Y.S., JEON K.O., HWANG K.S. (2005) Calcium phosphate films deposited by electrostatic spray deposition and an evaluation of their bioactivity. *J. Ceram. Proc. Res.* (6). p. 255–258.
8. SIEBERS M.C. WALBOOMERS X.F., LEEUWENBURGH S.C.G., WOLKE J.G.C., JANSEN J.A (2005) Electrostatic spray deposition (ESD) of calcium phosphate coatings, an in vitro study with osteoblast-like cells. *Biomater* (25). p. 2019–2027.
9. WANG Y. ZHANG S., ZENG X., MA L.L., WENG W., YAN W., QIAN M. (2007) Osteoblastic cell response on fluoridated hydroxyapatite coatings. *Acta Biomater* (3). p. 191–197.

Надійшла до редколегії 07.09.16.

УДК 681.3

Крамов А. А., студент,
Баужа О. С., к.ф.-м.н., асистент

**Розробка програмно-апаратного комплексу
віддаленого моніторингу пульсу людини**

Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 83000, м. Київ, пр-т.
Глушкова 4г,
e-mail: artemkramov@gmail.com
e-mail: asb@mail.univ.kiev.ua

A. A. Kramov, student,
O. S. Bauzha, PhD.

**Development of the complex system for the remote
monitoring of the human heart rate**

Taras Shevchenko National University of Kyiv,
83000, Kyiv, Glushkova st., 4g,
e-mail: artemkramov@gmail.com
e-mail: asb@mail.univ.kiev.ua

В роботі пропонується метод створення автоматизованого комплексу віддаленого спостереження та аналізу пульсу людини. Результатом роботи є розробка програмно-апаратного комплексу моніторингу пульсу людини в режимі реального часу. Комплекс може здійснювати візуальну демонстрацію процесу серцебиття з використанням веб-інтерфейсу та оповіщати компетентних осіб у випадку відхилення значення пульсу від допустимих меж.

Ключові слова: пульс, ATmega8, Arduino, Bluetooth.

An implementation of the remote pulse monitoring system which allows observing of the patient's pulse in the real-time mode via browser is offered in this work. The result of the work is the development of the complex system, which contains the hardware components for the pulse measurement and the software component for the data processing and visualization in a web-interface. The web-interface provides the heart rate visualization in the real-time mode and informs the appropriate person in case of deviation from pulse limits. The monitoring system can detect two disease types: tachycardia and bradycardia. A pulse sensor detects the heart beat moment and functions like a plethysmograph. The microcontroller ATmega8 is used to read data from the sensor, to analyze information and pass it to the next hardware block. Arduino Uno and Ethernet module ENC28J60 are used to transform the information about the heart beat event to the web-interface. Ethernet module ENC28J60 is connected to Arduino Uno using SPI interface. The pair of Bluetooth modules HC-05 is used to connect ATmega8 and Arduino Uno between each other. The module HC-05 is connected to both microcontrollers using UART interface. The Websocket protocol is used to implement the real-time data demonstration in the web-interface. The web-interface is adapted to mobile devices therefore it can be viewed from smartphones and tablets. The complex can be used both by the qualified specialist for the remote monitoring of the patient's state and as personal prophylactic.

Key Words: heart rate, ATmega8, Arduino, Bluetooth.

Статтю представив д.т.н. Погорілий С.Д.

Вступ

Серцево-судинні захворювання – найпоширеніша медично-біологічна і соціальна проблема. Даний тип захворювання є найтипівішою причиною смертності в усьому світі, і в Україні в тому числі. Станом на 2016 рік Україна знаходиться серед країн з найбільшою кількістю серцево-судинних хвороб в Європі [1]. За статистичними даними [1] відносна частка людей в Україні, що страждають на серцево-судинні захворювання, становить близько 19%.

Лікування, запобігання, профілактика серцево-судинних хвороб є актуальними проблемами в Україні та потребують якнайшвидшого вирішення.

Для запобігання ускладнень та профілактики серцево-судинних хвороб необхідне постійне спостереження за серцевим ритмом людини та оперативна реакція на його відхилення від норми. Аналіз пульсу людини дозволяє відслідкувати ряд хвороб: тахікардію (пульс вище норми), брадикардію (пульс нижче норми),

аритмію. Багато людей похилого віку мають проблеми з порушенням пам'яті чи мислення, тому у випадку погіршення стану здоров'я не в змозі надати собі допомогу, чи, інколи, навіть звернутися за допомогою. Найгірша ситуація, коли хвора людина самотня. Тому реалізація моніторингу пульсу людини у режимі реального часу є актуальною проблемою.

Існують програмно-апаратні системи, що дозволяються виконувати дистанційне спостереження пульсу, проте кожна з них має власні недоліки: необхідність в наявності мобільного пристрою [2] чи NFC-сумісного (NFC – Near Field Communication) пристрою [3], складність трансляції даних в мережу. Варто відзначити високу вартість таких пристроїв, а також відсутність їхніх аналогів вітчизняного виробництва.

В роботі пропонується створення програмно-апаратного комплексу для можливості віддаленого моніторингу та аналізу пульсу людини в режимі реального часу.

Під час розробки комплексу до апаратної частини були висунуті наступні вимоги:

- наявність пристрою отримання даних про пульс (періодичність серцевих скорочень);
- можливість передачі даних на веб-сервер.

На програмну частину покладено наступний функціонал:

- зчитування даних з апаратної частини та вивід даних у веб-інтерфейсі в режимі реального часу;
- аналіз пульсу та оповіщення компетентних осіб у випадку відхилення від допустимих меж.

Основні принципи роботи комплексу

В цілому комплекс можна розділити на 3 функціональні блоки, з'єднані послідовно:

- апаратний блок зчитування даних про пульс людини;
- апаратний блок передачі даних до веб-служби;
- програмний блок отримання, аналізу та візуального відтворення пульсу людини.

На рис.1 наведена загальна блок-схема програмно-апаратного комплексу та відповідні функціональні блоки.

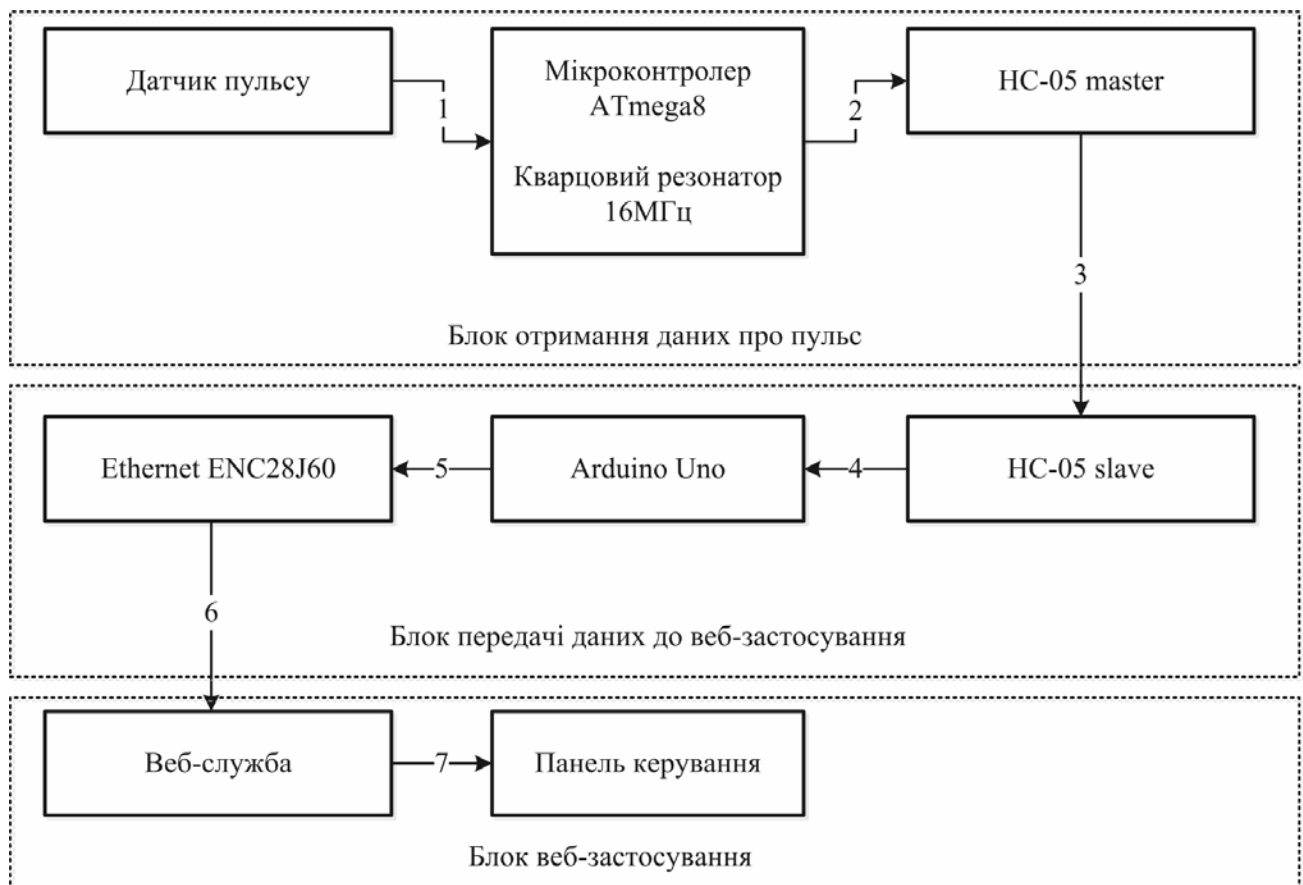


Рис. 1 Блок-схема програмно-апаратного комплексу

Перший блок забезпечує отримання інформації про пульс. Елементи даного блоку разом складають єдиний елемент, який кріпиться на руку людині. Схема першого блоку зображена на рис. 2. Другий блок відповідальний за передачу інформації в мережу, що здійснюється за допомогою Ethernet-модуля. Схема другого блоку зображена на рис. 3. Третій блок здійснює обробку отриманих даних та їхню візуалізацію. Візуалізація здійснена завдяки веб-інтерфейсу, що надає можливість перегляду поточного пульсу пацієнта, діаграму пульсу за визначений період, статистику захворювань.

На початковому етапі дані зчитуються з

датчику пульсу [4] мікроконтролером ATmega8 [5]. Принцип роботи датчика оснований на методі фотоплетизмографії. Плетизмографія – вимірювання пульсу на основі реєстрації зміни об'єму в органі, наповненому кров'ю (як правило – в кровоносних судинах). Під фотоплетизмографією розуміється реєстрація зміни наповненості частини тіла кров'ю за допомогою оптичних методів. Вимірювання оптичної густини відбувається за допомогою фотоприймача та джерела випромінювання, зокрема світлодіоду. Вимірювання, як правило, проводиться з пальця руки або мочки вуха.

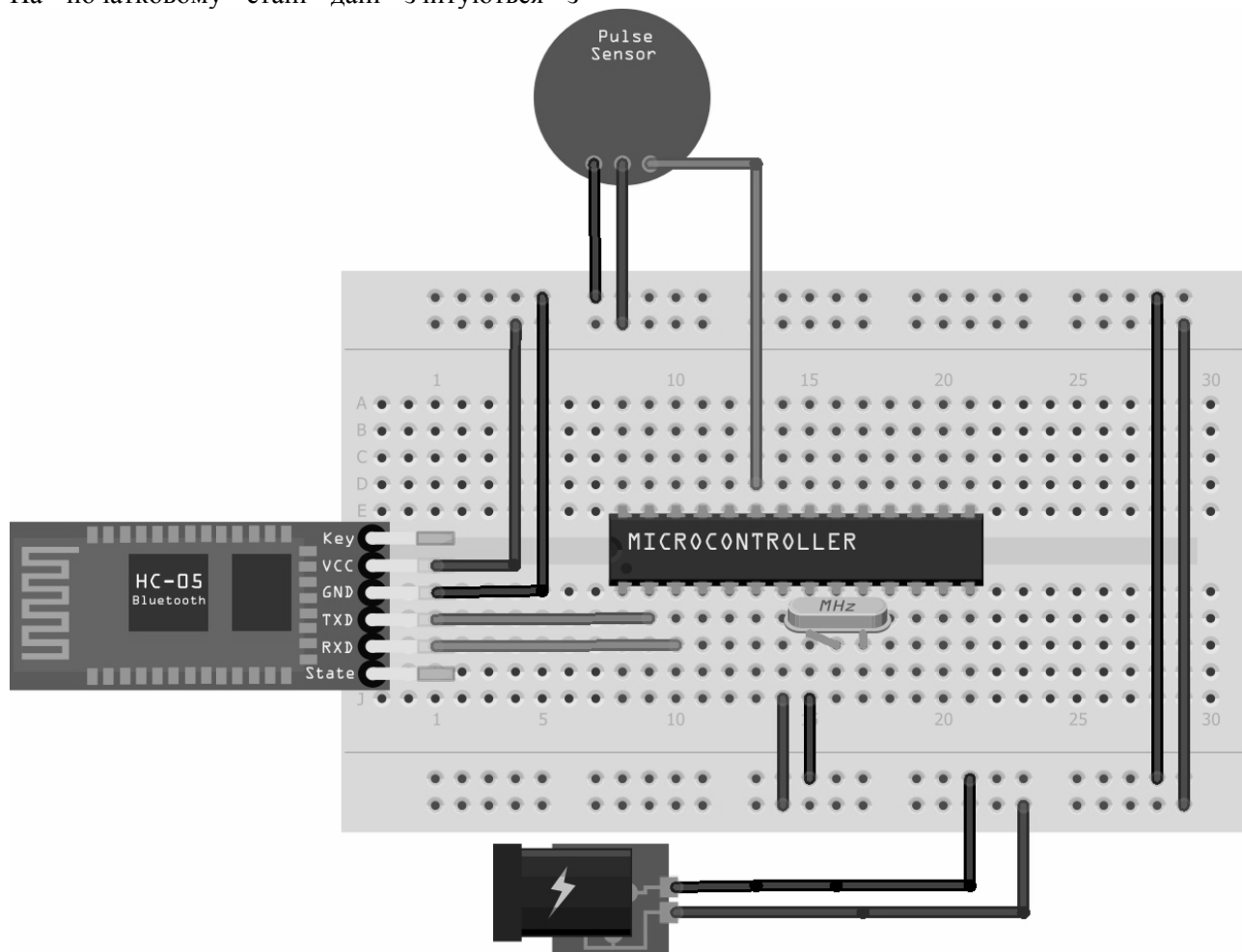


Рис. 2 Схема блоку реєстрації пульсу людини

По інтенсивності світіння джерела можна зробити висновок про поточний об'єм крові в досліджуваній частині тіла.

Після реєстрації моменту удару серця дані необхідно передати до наступного блоку комплексу, забезпечуючи достатню відстань передачі. Для цього використовується пара

Bluetooth-пристроїв серії HC-05 [6]. Один з пристроїв працює в режимі передавача (див. рис. 2), інший в режимі приймача (див. рис. 3). Головними перевагами інтерфейсу Bluetooth є стійкість до широкосмугових завад (сукупність пристроїв, що знаходяться в одному місці, можуть одночасно здійснювати обмін даними

між собою без впливу на сусідні канали зв'язку) та простота реалізації. Для передачі даних між пристроями необхідно встановити між ними захищене з'єднання, що реалізується за допомогою AT-команд [7]. AT-команди дозволяють встановити роль пристрою (передавач чи приймач), пароль з'єднання та зробити пристрої спряженими. Спряжені пристрої встановлюють захищений канал зв'язку між собою, що робить з'єднання стійким до зовнішніх завад.

Обмін даними з пристроєм HC-05 здійснюється за допомогою інтерфейсу UART (Universal Asynchronous Receiver/Transmitter) [8]. UART є популярним інтерфейсом асинхронної передачі даних, що з'єднує компоненти комп'ютерів та периферійних пристроїв. Реалізація UART наявна в багатьох серіях мікроконтролерів, включаючи ATmega8. Швидкість передачі даних між мікроконтролером та Bluetooth-пристроєм складає значення 38600 бод.

Для того, щоб синхронізація передачі даних відбулася успішно, необхідно, щоб тактова

частота джерела передачі сигналу та приймача була однаковою. Тактова частота процесора плати для налагодження Arduino Uno [9] складає значення 16МГц, мікроконтролера ATmega8 – 8МГц. Тому як джерело тактової частоти мікроконтролера ATmega8 використовується кварцовий резонатор (див. рис.2) з робочою частотою 16МГц.

Для обробки даних, отриманих з Bluetooth приймача, використовується плата Arduino Uno. Arduino Uno [9] (див. рис.3) – апаратно-обчислювальна, відкрита платформа, призначена для швидкого конструювання різнотипних електронних пристроїв. Платформа є доволі популярною у світі завдяки зручності у використанні та простоті мови програмування. Для програмування використовується модифікована версія C++, відома як Wiring. Як середовище програмування можна використовувати водночас вільно поширюване середовище Arduino IDE, а також будь-який C/C++ інструментарій (наприклад, Atmel Studio).

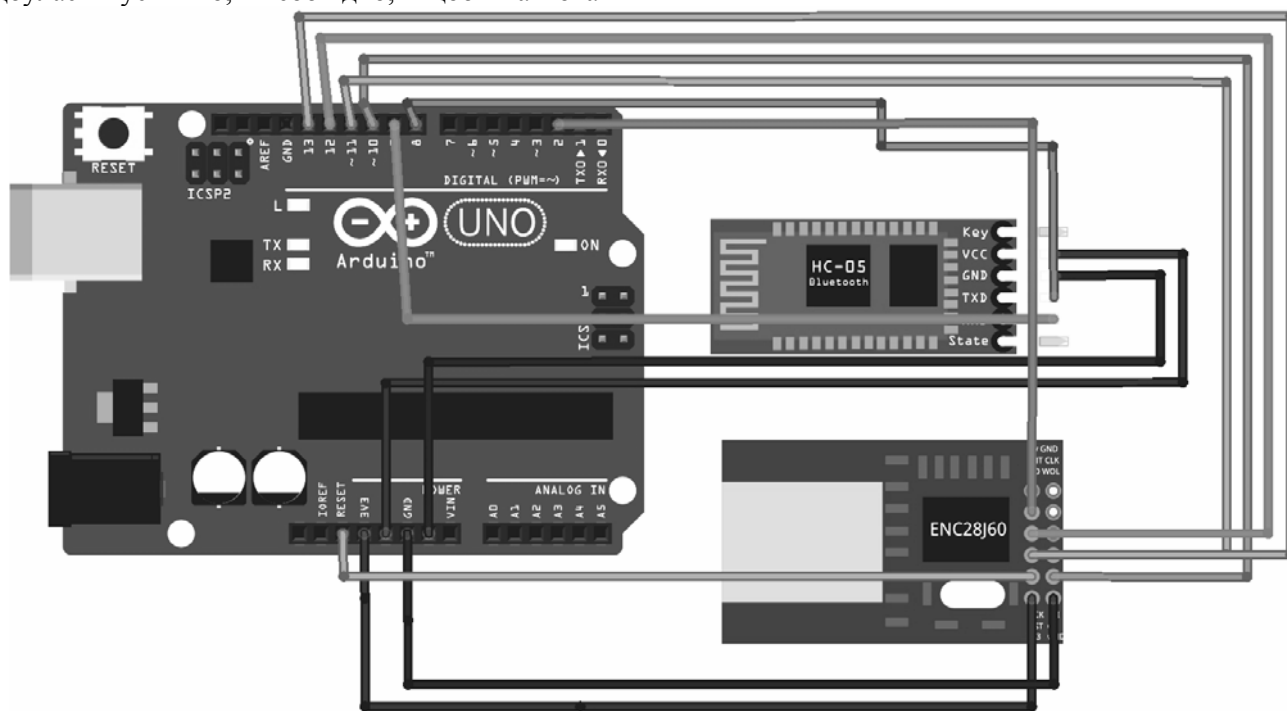


Рис. 3 Схема блоку передачі даних в мережу

Для розробки програмного забезпечення можна використовувати операційні системи Windows, Linux, MacOS X. Плата має вбудований програматор, в який записано завантажувач (bootloader), тому немає потреби у використанні зовнішнього програматора для зміни

програмного забезпечення. До складу плати входять наступні компоненти: 14 цифрових входів/виходів (з них 6 можуть використовуватися як виходи для широтно-імпульсної модуляції), 6 аналогових входів, кварцовий резонатор на 16МГц, роз'єм USB,

роз'єм живлення, роз'єм для внутрішньо-схемного програмування (ICSP) і кнопка скидання. Для керування роботою компонентів плати використовується мікроконтролер ATmega328 [10]. Як перетворювач інтерфейсів USB-UART застосовується мікроконтролер ATmega16U2. Для початку роботи з пристроєм необхідно подати напругу від AC/DC-адаптера чи батарейки, або підключити його до комп'ютера через USB-з'єднання. Схемотехнічна реалізація платформи Arduino Uno поширена у відкритому доступі.

Передача даних з Arduino Uno в мережу відбувається за допомогою Ethernet-модуля ENC28J60. Модуль може працювати водночас в режимі HTTP-сервера, а також як HTTP-клієнт. Зв'язок з мікроконтролером відбувається через інтерфейс SPI (Serial Peripheral Interface). Робоча напруга пристрою – 3.3В. На платі змонтована розетка RJ-45 для кабелю Ethernet. Розетка містить трансформатор, 2 світлодіоди, що є індикаторами обміну даними, кварцовий резонатор частоти 25МГц.

Дані, представлені у форматі JSON (JavaScript Object Notation), апаратним блоком передаються на веб-сервіс, який обробляє, зберігає та відправляє дані у веб-інтерфейс для подальшого візуального представлення. Для відображення діаграми пульсу в режимі реального часу необхідне постійне з'єднання веб-сервісу з веб-інтерфейсом. Як механізм перманентного з'єднання використовуються веб-сокети і протокол передачі даних WebSocket. WebSocket — це протокол транспортного рівня, призначений для обміну інформацією між браузером та веб-сервером в режимі реального часу. Він забезпечує двонаправлений повнодуплексний канал зв'язку через один TCP-сокет. Протокол WebSocket спроектовано для втілення у веб-браузерах та веб-серверах, але може також використовуватись будь-якою клієнт-серверною програмою. Прикладний програмний інтерфейс WebSocket був стандартизований міжнародним співтовариством W3C, крім того протокол WebSocket стандартизований організацією IETF як документ RFC 6455. Зв'язок здійснюється через TCP порт 80, а отже, його можна застосовувати в тих середовищах, де інші мережеві протоколи заблоковано.

Розроблений пристрій є простим у повторенні, адже для реалізації апаратної частини використовувалися стандартні та широко вживані серед фахівців компоненти. Вартість одного приладу при малосерійному виготовленні складає близько 20\$.

Висновки

Велика поширеність серцево-судинних хвороб в Україні, де статистика серцевих захворювань є найгіршою в Європі, підтверджує той факт, що профілактика та запобігання серцево-судинних хвороб є важливою і актуальною проблемою. Розробка програмно-апаратного комплексу, здатного віддалено здійснювати постійний моніторинг пульсу людини та передбачати можливі загрози, дозволить водночас запобігти можливим серцевим захворюванням, а також швидко зреагувати на погіршення стану людей, не здатних надати собі допомогу самотужки.

Серед різних проаналізованих методів вимірювання пульсу перевагу надано методу фотоплетизмографії. Відповідний датчик пульсу має достатню точність та є доступним за вартістю. В ролі обчислювального пристрою для отримання даних з датчика обрано мікроконтролер ATmega8, характерний невеликими розмірами та низьким енергоспоживанням. Для передачі даних в мережу використана популярна плата для налагодження Arduino Uno та Ethernet-модуль ENC28J60.

Продемонстровано, що для бездротового зв'язку мікроконтролерів зручно використовувати Bluetooth пристрої серії HC-05, що працюють як передавач та приймач інформації. Пара таких спряжених пристроїв має достатньо великий запас швидкодії, низьке енергоспоживання та є простою у використанні.

Оскільки моніторинг пульсу повинен відбуватися в режимі реального часу, необхідне постійне і надійне з'єднання пристрою з веб-інтерфейсом. Для реалізації перманентного з'єднання зручно використовувати протокол WebSocket, призначений для обміну повідомленнями між браузером і веб-сервером в режимі реального часу.

Розроблений програмно-апаратний комплекс може використовуватися компетентним фахівцем для віддаленого слідування за станом пацієнта, а також як персональний профілактичний засіб.

Список використаних джерел

1. European Cardiovascular Disease Statistics. // European Heart Network. – 2017. – №1.
2. EQ02 LifeMonitor [Електронний ресурс]. – 2012. – Режим доступу до ресурсу: http://www.equivital.co.uk/assets/common/SEM_Data_Sheet_General_HIDA3330-DSG-02.2_2_.pdf.
3. Code4Armour - One Tap Can Save A Life [Електронний ресурс] – Режим доступу до ресурсу: https://www.indiegogo.com/projects/code4armour-one-tap-can-save-a-life#.
4. Pulse sensor amped [Електронний ресурс] – Режим доступу до ресурсу: <https://pulsesensor.com/pages/pulse-sensor-amped-arduino-v1dot1>
5. 8-bit Atmel with 8KBytes InSystem Programmable Flash. ATmega8. ATmega8L [Електронний ресурс] // Atmel Corporation. – 2013. – Режим доступу до ресурсу: http://www.atmel.com/images/atmel-2486-8-bit-avr-microcontroller-atmega8_1_datasheet.pdf.
6. HC-05 - Bluetooth to Serial Port Module [Електронний ресурс]. – 2010. – Режим доступу до ресурсу: ftp://imall.iteadstudio.com/Modules/IM120723009/DS_IM120723009.pdf.
7. HC-03/05 Embedded Bluetooth Serial Communication Module [Електронний ресурс]. – 2011. – Режим доступу до ресурсу: http://eskimon.fr/wp-content/uploads/2014/10/commandes_AT_H_C05.pdf.
8. Universal Asynchronous Receiver/Transmitter (UART) [Електронний ресурс] // Texas Instruments. – 2010. – Режим доступу до ресурсу: <http://www.ti.com/lit/ug/sprugp1/sprugp1.pdf>.
9. Uno Платы Ардуино [Електронний ресурс] – Режим доступу до ресурсу: <http://arduino.ua/ru/hardware/Uno>.
10. 8-bit AVR Microcontrollers - ATmega328/P [Електронний ресурс] // Atmel Corporation. – 2016. – Режим доступу до ресурсу: http://www.atmel.com/Images/Atmel-42735-8-bit-AVR-Microcontroller-ATmega328-328P_datasheet.pdf.

References

1. *European Cardiovascular Disease Statistics*, 1st ed. Brussels: European Heart Network, 2017.
2. "EQ02 LifeMonitor", *Equivital*, 2017. [Online]. Available: http://www.equivital.co.uk/assets/common/SEM_Data_Sheet_General_HIDA3330-DSG-02.2_2_.pdf. [Accessed: 26- Mar- 2017]
3. "Code4Armour - One Tap Can Save A Life", *Indiegogo*. [Online]. Available: https://www.indiegogo.com/projects/code4armour-one-tap-can-save-a-life#. [Accessed: 26- Mar- 2017].
4. "Pulse Sensor Amped", [Online]. Available: <https://pulsesensor.com/pages/pulse-sensor-amped-arduino-v1dot1>. [Accessed: 26- Mar- 2017].
5. "8-bit Atmel with 8KBytes InSystem Programmable Flash. ATmega8. ATmega8L", 2013. [Online]. Available: http://www.atmel.com/images/atmel-2486-8-bit-avr-microcontroller-atmega8_1_datasheet.pdf. [Accessed: 26- Mar- 2017].
6. "HC-03/05 Embedded Bluetooth Serial Communication Module", 2010. [Online]. Available: http://ftp://imall.iteadstudio.com/Modules/IM120723009/DS_IM120723009.pdf. [Accessed: 26- Mar- 2017].
7. "HC-03/05 Embedded Bluetooth Serial Communication Module", 2011. [Online]. Available: http://eskimon.fr/wp-content/uploads/2014/10/commandes_AT_H_C05.pdf. [Accessed: 26- Mar- 2017].
8. "[11]"Universal Asynchronous Receiver/Transmitter (UART)", 2010. [Online]. Available: <http://www.ti.com/lit/ug/sprugp1/sprugp1.pdf>. [Accessed: 26- Mar- 2017].
9. "Uno Платы Ардуино", *Arduino.ua*, 2017. [Online]. Available: <http://arduino.ua/ru/hardware/Uno>. [Accessed: 26- Mar- 2017].
10. "8-bit AVR Microcontrollers - ATmega328/P", 2016. [Online]. Available: http://www.atmel.com/Images/Atmel-42735-8-bit-AVR-Microcontroller-ATmega328-328P_datasheet.pdf. [Accessed: 26- Mar- 2017].

Надійшла до редколегії 10.10.16

УДК 537.311.33

Павлюк С. П., к.ф.-м.н., зав.лаб.,
Григорук В. І., д.ф.-м.н., проф.,
Іщук Л. В., к.ф.-м.н., доц.,
Телега В.М., к.ф.-м.н., зав.лаб.,
Ковток В. Г., пров. інж.,
Вакуляк Є. О., студ.

S. P. Pavlyuk, Ph.D.,
V. I. Grygoruk, Dr.Sci., Prof.,
L. V. Ischuk, Ph.D., Assoc. Prof.,
V. M. Telega, Ph.D., Assoc. Prof.,
V. G. Kovtok, lead engineer,
Ye. O. Vakylyak, stud.

Особливості генерації коливань напруги структурою «Кремній з діелектричною ізоляцією»

Features of voltage fluctuations generation into the structure "Silicon with dielectric insulation"

Київський національний університет імені Тараса
Шевченка, 03022, м. Київ, пр-т. Глушкова, 4г,
e-mail: pps@univ.kiev.ua.

Taras Shevchenko National University of Kyiv,
03022, Kyiv, Glushkova st., 4g,
e-mail: pps@univ.kiev.ua.

Від'ємну диференціальну провідність пов'язують з нестійкістю однорідного стаціонарного стану відносно просторових флуктуацій електричного поля і концентрації носіїв, що призводить до просторово неоднорідних розподілів густини струму або поля.

Колівання потенціалу виникають за його від'ємних значень на вольт-амперної характеристики
Ключові слова: диференціальна провідність, коливання, вольт-амперна характеристика.

We studied the current-voltage and differential characteristics that have a region of negative differential conductance. If the current density decreases with increasing electric field or, conversely, increases with decreasing field, the corresponding stationary state is generally unstable. This is realized when the current value is dependent, for example, from the rest of the circuit, which, even in the absence of external load resistors necessarily comprises resistive and reactive elements such as wiring resistance and inductance, mutual inductance and capacitance. Fluctuations in the potential to arise in the current range of the CVC, where the current differential is negative.

Negative Differential conductance (NDC) N- and S-types are associated with instabilities controlled respectively voltage or current.

In the case of CCT N-type, the current density is a unique function of the field, and the field is ambiguous: function $E(j)$ a certain range of values of j has three branches. Case CCT S-type is complementary, i.e. E and j are swapped.

Keywords: differential conductance, fluctuations, current-voltage characteristics.

Статтю представив д.ф.-м.н. Скришевський В.А.

Вступ

Напівпровідник, на який мають вплив сильні зовнішні фактори (великі електричні і магнітні поля, високий рівень інжекції струму чи світлового збудження), має суттєво нелінійну поведінку: спостерігаються значні відхилення від лінійного (омічного) співвідношення між струмом та напругою, в багатьох випадках виникають нестійкості, як, наприклад, струмовий пробій, коливання та стрибки струму чи напруги, перемикавання та гістерезис у вольт-амперній характеристиці. Ці нестійкості зустрічаються в багатьох матеріалах, в різних температурних областях та за різних рівнях збудження [1]. Хоча

такі нестійкості часто можуть негативно впливати на характеристики твердотільних приладів. У деяких важливих напівпровідникових приборах вони були спеціально використані для генерації СВЧ випромінювання в діапазоні частот від 0,1 до 1000 ГГц, де звичайні транзистори не можуть використовуватися, а також у швидких електронних перемикачах.

Метою даної роботи було дослідження особливостей генерації коливань напруги структурою «кремній з діелектричною ізоляцією».

Від'ємна диференціальна провідність

Вольт-амперна $I(V)$ характеристика напівпровідників, яка виміряна за стаціонарних умов, найбільш повно відображає характер переносу носіїв заряду. Ця характеристика залежить як від мікроскопічних якостей об'єму напівпровідника, які визначають залежність щільності струму I від локального електричного поля E та від параметрів контакту.

Якщо залежність $I(V)$ має область від'ємної диференціальної провідності, тобто, якщо щільність струму зменшується зі збільшенням електричного поля або, навпаки, зростає при зменшенні поля, то відповідні стаціонарні стани в загальному випадку нестійкі. При цьому величина струму залежить, наприклад, від решти ланцюга, який навіть за відсутності зовнішніх навантажувальних опорів обов'язково містить резистивні і реактивні елементи, такі, як опір і індуктивність проводів, взаємні індуктивності і ємності [2].

Від'ємна диференціальна провідність (ВДП) N- і S-типів пов'язана з нестійкостями, відповідно керованими напругою або струмом. У разі ВДП N-типу, густина струму є однозначною функцією поля, а поле неоднозначно: функція $I(V)$ в певній області значень I має три гілки. Випадок ВДП S-типу є компліментарний, тобто V і I міняються місцями.

Можливі також комбінації ВДП S- і N-типу. На статичній характеристиці вони можуть змінювати один одного при зростанні електричного поля [3]. Характеристика може з часом перетворюватися з S-подібної на N-подібну [1]. Статична характеристика може мати і більш складну форму, з багатозначністю струму

і напруги.

Зазвичай від'ємну диференціальну провідність пов'язують з нестійкістю однорідного стаціонарного стану відносно просторових флуктуацій електричного поля і концентрації носіїв, що призводить до просторово неоднорідного розподілу густини струму або поля [4].

Є численні приклади ВДП N-типу, коли однорідний стаціонарний стан нестійкий відносно утворення рухомих або нерухомих неоднорідних, шаруватих розподілів поля з гребенеподібним профілем уздовж зразка ("домени сильного поля"). Як і в багатьох випадках однорідний стаціонарний стан при ВДП S-типу нестійкий відносно утворення неоднорідного розподілу густини струму в поперечному перерізі провідника, коли виникає центральна циліндрична область з високою густиною струму («шнури» струму) і навколишня її область з низькою густиною струму [4].

2. Експериментальні результати.

Експериментальні зразки

На рис.1 схематично зображено досліджувані зразки. Це кремнієві $n^+ - n - n^+$ структури з електричними контактами з алюмінію (Al) до n^+ -областей. Вони розташовані в "кишенях", що відокремлені шаром SiO_2 завтовшки ≈ 2 мкм від підкладки із полікремнію товщиною 300 мкм. "Кишені" мають різну глибину h_1 (від 2,8 мкм до 10,5 мкм).

$n^+ - n - n^+$ структури виготовлені із монокристалічного n-кремнію. n^+ -області отримані іонним легуванням n-кремнію

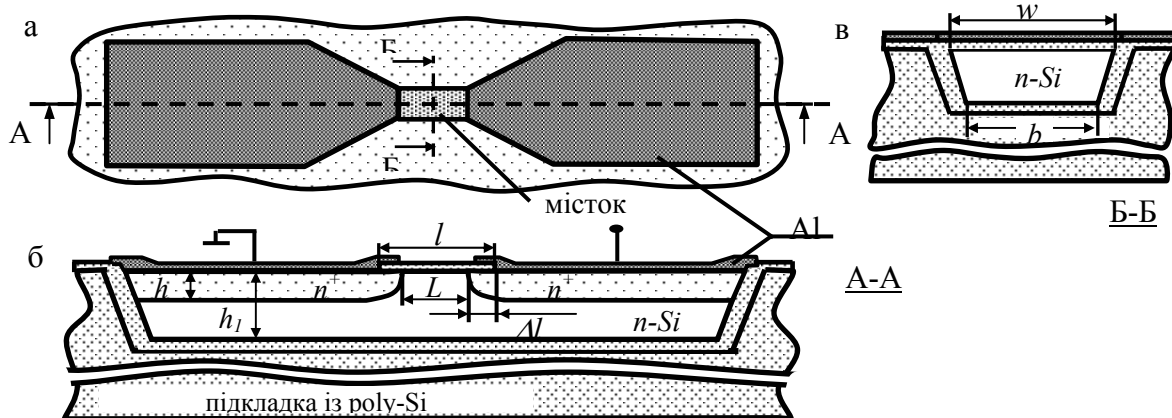


Рис. 1. Схематичне зображення зразка: а – вид в плані; б і в – перетин по А-А і Б-Б відповідно. Перетин по Б-Б для наочності збільшено.

фосфором до концентрації фосфору $P \approx 10^{21} \text{ см}^{-3}$ з його подальшою термічною розгонкою на глибину $h \approx 5 \text{ мкм}$. Залежно від глибини h_1 “кишені” n^+ - область має таку ж глибину, як і “кишеня” ($h_1/h=1$), або меншу за неї ($h_1/h>1$).

Вважається, що струм в зразках, у першу чергу, розігріває ту його частину з n -кремнію, яка розташована між n^+ -областями і яку далі називатимемо “містком” [5]. Ясно, що омичний опір “містка” залежить від його розмірів h_1 , L , b і w (див. рис.1) і, в основному, визначає опір структури R . В досліджених зразках величина R знаходилася в інтервалі від одиниць до десятків Ом.

$n^+ - n - n^+$ структури відрізнялись між собою за двома конструктивними параметрами. Перший – це величини h_1 і h , які в різних зразках були різні, але для яких завжди виконувалось співвідношення $h_1/h=1$ або $h_1/h>1$; другий – так звана фотолітографічна довжина “містка” l (див. рис.1б). У різних зразках $l = 8,0 \div 13,4 \text{ мкм}$. Зауважимо, що при розгонці фосфор “підлегує” кремній під краєм окислу біля поверхні, унаслідок чого довжина “містка” L між n^+ -областями завжди менша за l на довжину “підлегвання” $2\Delta l$.

Поперечний переріз “містка” (рис.1.в) має вигляд трапеції, у якій розмір нижньої основи $b=4,0 \text{ мкм}$ фіксований, а величина верхньої основи w визначається глибиною “кишені” h_1 і змінюється в інтервалі $w = 8 \div 18 \text{ мкм}$. В структурах різних типів розміри контактних площадок із Al (рис. 1.а) дещо відрізнялись, але в середньому їх довжина становила 200 мкм , а ширина – 150 мкм .

Експериментальна установка

Всі вимірювання проводились в стаціонарному режимі генератора струму.

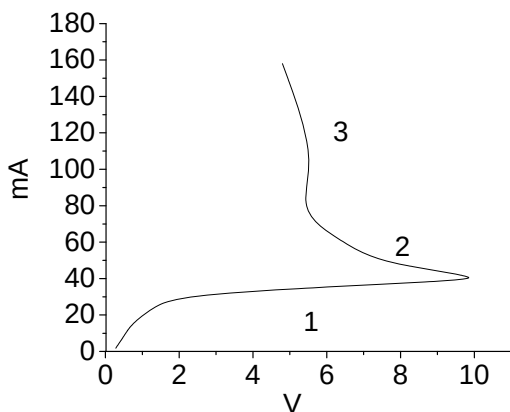


Рис. 2 Вольт-амперна характеристика

Установка складається з джерела живлення (ДЖ), що живить генератор струму (ГС). ГС має перемикач, що дозволяє працювати як в стаціонарному режимі, так і в імпульсному. В імпульсному режимі імпульс подається від генератора імпульсів. ГС дозволяє змінювати струм від 0 до 1.5 А . ГІ дозволяє змінювати тривалість імпульсу від одиниць мікросекунд до 1 с . Напруга на зразку вимірювалася за допомогою запам'ятовуючого осцилографа по першому каналу. Для контролю величини струму, що протікав через структуру, послідовно з зразком було ввімкнено опір R_c ($R_c \ll R_z$), сигнал з якого вимірювався другим каналом осцилографа. Під час вимірювань спостерігали за поверхнею досліджуваної структури за допомогою мікроскопу.

Вольт-амперні характеристики

Стаціонарну вольт-амперну характеристику зображено на рис. 2, а її диференціал на рис 3. Диференціал першої зони має додатний знак. Коливання в цій зоні не виникають при зміні струму від 0 до 35 мА . Диференціал другої зони є від'ємним зі спадаючим характером. При збільшенні струму від 35 мА до 75 мА диференціал другої зони стає від'ємним зі спадаючим характером, і виникають стаціонарні коливання. Амплітуда коливань при збільшенні струму спочатку зростає, а потім зменшується, і коливання зникають. Подальше збільшення струму переводить диференціал ВАХ до зони 3 з додатним знаком. Коливання потенціалу не спостерігаються. На рис. 4 показано стаціонарні коливання, на рис.5 – стаціонарні коливання, а на рис.6, відповідно, – завершення коливань.

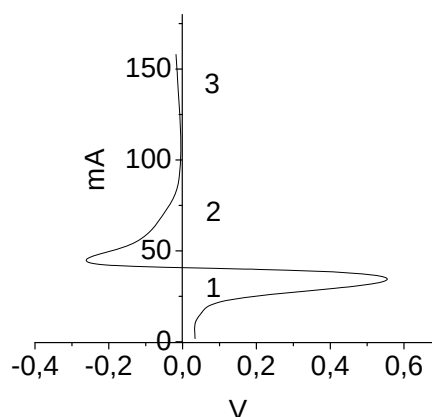


Рис.3 Диференціальна характеристика

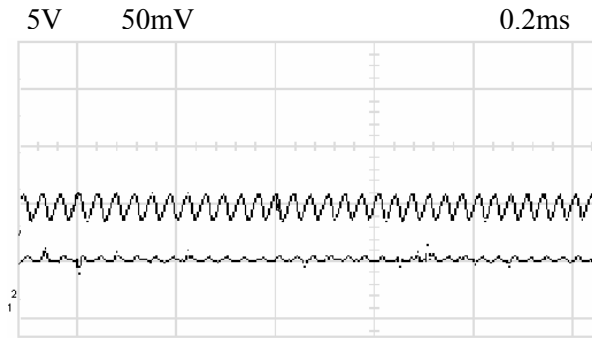


Рис.4 Стаціонарні коливання струму

Висновки

Якщо залежність струму від напруги має область ВДП то відповідний стаціонарний стан, в загальному випадку, нестійкий, що призводить до виникнення коливань в цій зоні.

Від'ємна диференціальна провідність S- і N-типу пов'язана з виникненням коливань і може керуватись напругою або струмом.

Список використаних джерел

1. Бонч-Бруєвич В.Л. Доменная электрическая неустойчивость полупроводников. / В.Л. Бонч-Бруєвич, И.П. Звягин, А.Г. Миронов. – Москва: «Наука», 1972. – 412 с.
2. С. Зи. Физика полупроводниковых приборов / С. Зи. – Москва: «МИР», 1984. – 462 с.
3. Вакиров Б.С. Токовая неустойчивость обусловленная фазовым переходом полупроводник – металл в квазиодномерных структурах. / Б.С. Вакиров, И.С. Вакарова, А.Б. Корляков, С.Н. Кравченко, А.Г. Пегуков // Физика и техника полупроводников. – 1989. – **23**. – в. 7. – С. 1182-1186.
4. Волков А.Ф. Физические явления в полупроводниках с отрицательной дифференциальной проводимостью. / А.Ф. Волков, Ш.М. Когин // Успехи физических наук. – 1968. – **96**. – 64. – С. 633-672.

References

1. BONCH-BRUEVICH, V.L., ZVYAGIN, I.P., MIRONOV, A.G. (1972) *Domennaya elektricheskaya neustoychivost poluprovodnikov*. Moskva: Nauka.
2. ZI, S. (1984) *Fizika poluprovodnikoviyh priborov*. Moskva: MIR.
3. VAKIROV, B.S., VAKAROVA, I.S., KORLYAKOV, A.B., KRAVCHENKO, S.N., PEGUKOV, A.G. (1989) Tokovaya neustoychivost obuslovlennaya fazovym perehodom poluprovodnik – metall v kvaziodnomernyih strukturah. *Fizika i Tehnika Poluprovodnikov*. 23 (7). p. 1182-1186.
4. VOLKOV, A.F., KOGIN, SH.M. (1968) Fizicheskie yavleniya v poluprovodnikah s otritsatelnoy diferentsialnoy provodimostyu. *Uspehi Fizicheskikh Nauk*, 96 (64). p. 633-672.

Надійшла до редколегії 01.11.16

СУЧАСНА ФІЗИКА

УДК 519.9

Білоус О.І., к.ф.-м. н., доц.

Визначення радіусу кореляції на окремих гілках кривої співіснування за даними динамічної в'язкості бінарного розчину Ga-Pb

The National Aviation University, 1 Cosmonaut
Komarov Prospect, 02058, Kiev, Ukraine
e-mail: OksanaBilous@univ.kiev.ua

O.I. Bilous, Ph.D., Ass. Prof.

Investigation of the correlation radius in separate branches of the coexistence curve by viscosity measurements Ga-Pb

The National Aviation University, 1 Cosmonaut
Komarov Prospect, 02058, Kiev, Ukraine
e-mail: OksanaBilous@univ.kiev.ua

Запропоновано метод визначення величини радіуса кореляції на окремих гілках кривої співіснування, що ґрунтується на експериментальних даних про динамічну в'язкість. У роботі доведено ефективність застосування скейлінгової моделі як суми їхньої регулярної та флуктуаційної частини для опису аномальної поведінки динамічної в'язкості йонно-електронних бінарних розчинів. Показано, що для величини динамічної в'язкості флуктуаційна частина є меншою, ніж регулярна, а отже, в експериментальних умовах доступних для спостереження, не виконується припущення теорії динамічного скейлінгу. Підтверджено висновок кінцево-розмірної теорії масштабних перетворень щодо скінченного значення в'язкості при критичних значеннях концентрації $x=x_{кр}$ та температури $T=T_{кр}$.

Ключові слова: динамічна в'язкість, йонно-електронні бінарні розчини, флуктуаційна в'язкість, радіус кореляції

The method for the determination of the correlation radius curve on separate branches of coexistence based on experimental data on the temperature and concentration dependence of dynamic viscosity. We prove the effectiveness of the model scaling as the sum of their regular and fluctuation of abnormal behavior to describe the dynamic viscosity of binary ionic-electronic solutions. It is shown that the value of dynamic viscosity fluctuation of less than regular, and therefore, in experimental conditions accessible to observation, not satisfied assumption of the theory of dynamic scaling. Confirmed conclude finite-dimensional theory of scale transformations on finite viscosity at critical values of concentration and temperature. As follows from the results, the concentration dependence of viscosity fluctuation in the interface and the critical isotherm describes the power law with the same critical indicators, but with different amplitudes. Moreover, the amplitude of fluctuation of the concentration dependence of dynamic viscosity for the interface is less than the corresponding amplitude on the critical isotherm, which is consistent with the conclusions of the theory of dynamic scaling.

Key words: the shear viscosity, ion-electronic binary solutions, viscosity fluctuation, correlation radius

Статтю представив академік НАН України, д.ф.-м.н., проф. Булавін Л.А.

Вступ

Однією з величин, яка пов'язана з незворотними явищами, і, зокрема, із явищами дисипації енергії, являється в'язкість [1]. Структура визначає в'язкість системи, а в'язкість - розвиток у ній структури. Особливо яскраво цей взаємозв'язок проявляється в сильно корельованих системах. Прикладом таких сильно корельованих систем є йонно-електронні бінарні розчини з критичною концентрацією [2]–[4].

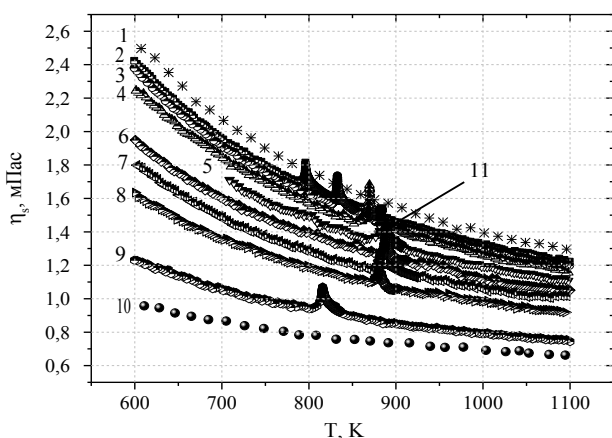
З практичної точки зору особливо цікаво дослідити властивості таких розчинів, оскільки деякі рідкі метали мають значну теплопровідність

та високу теплоємність. Така особлива риса дозволяє використовувати рідкі метали у теплотехніці як матеріали, що ефективно переносять тепло між теплообмінними пристроями. Враховуючи, що поведінка в'язкості таких складних систем з критичними параметрами може бути описана в рамках теорії динамічних критичних явищ, як і для інших бінарних систем, що належать до класу універсальності 3-мірної моделі Ізінга [5], основним параметром, що визначає усі унікальні та універсальні властивості в околі критичних температур розшарування є радіус кореляції [6].

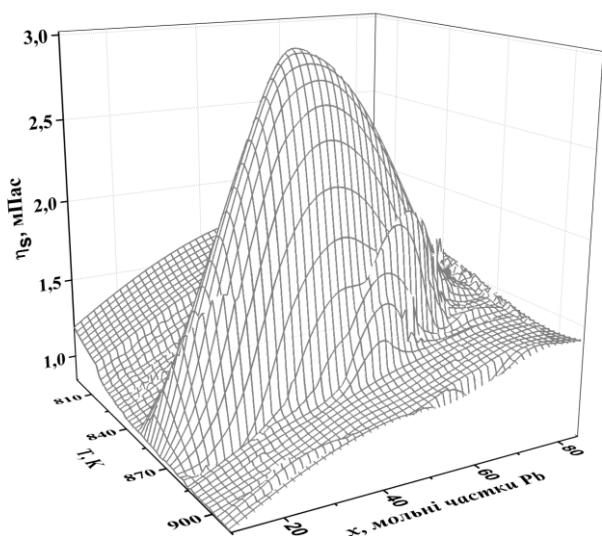
Саме тому представлена робота спрямована на визначення величини радіуса кореляції за результатами дослідження особливостей поведінки динамічної в'язкості йонно-електронного бінарного розчину Ga_4Pb з критичними параметрами: $T_{\text{кр}} = 888,68 \pm 0,2$, $x_{\text{кр}} = 0,515 \pm 0,005$.

Скейлінговий підхід до опису динамічної в'язкості

Для аналізу особливостей поведінки динамічної в'язкості у різних термодинамічних напрямках: температур $t > 0$, $t < 0$ ($|t| < 10^{-1}$) та концентрацій $x > x_{\text{кр}}$, $x < x_{\text{кр}}$, включаючи їхні критичні значення $T_{\text{кр}}$, $x_{\text{кр}}$ використовували



a



б

Рис. 1. Температурні залежності динамічної в'язкості $\eta_s(T, x)$ розчину Ga-Pb уздовж різних напрямків: 1 – Pb, 2 – $\text{Ga}_{15}\text{Pb}_{85}$, 3 – $\text{Ga}_{20}\text{Pb}_{80}$, 4 – $\text{Ga}_{30}\text{Pb}_{70}$, 5 – $\text{Ga}_{40}\text{Pb}_{60}$, 6 – $x = x_{\text{кр}}$ ($\text{Ga}_{51}\text{Pb}_{49}$) критичної ізоконцентрації, 7 – $\text{Ga}_{60}\text{Pb}_{40}$, 8 – $\text{Ga}_{70}\text{Pb}_{30}$, 9 – $\text{Ga}_{90}\text{Pb}_{10}$, 10 – Ga, 11 – межі поділу фаз.

літературні дані для йонно-електронного бінарного розчину Ga-Pb [7].

На рис. 1 наведено як температурні залежності (рис. 1 а) так і тримірну поверхню (рис. 1 б) динамічної в'язкості для досліджуваного бінарного розчину Ga-Pb.

Аналіз експериментальних даних (рис. 1 а) проводили базуючись на скейлінговому підході, використовуючи рівняння в'язкості для розчинів з критичними параметрами, у якому враховано просторову дисперсію системи поблизу критичної точки ($q_2 R_c \neq 0$) у різних термодинамічних напрямках:

$$\eta_{s2}(T, x) = \eta_{\text{pez}}(T, x) + \eta_{\text{фл}}(T, x). \quad (1)$$

Тут, $\eta_{\text{pez}}(T, x)$ та $\eta_{\text{фл}}(T, x)$ – відповідно регулярна та флуктуаційна складові динамічної в'язкості, яка дорівнює:

$$\eta_{\text{фл}}(T, x) = \frac{\Delta \eta_0 R_c(T, x)}{\left[1 + (q_2 R_c(T, x))^2\right]^{\frac{1}{2}(1-\eta)}}. \quad (2)$$

У цій моделі q_2 – параметр, що має розмірність хвильового вектора, η – критичний показник універсальної залежності кореляційної функції, η , ν , β – критичні показники флуктуаційної теорії фазових переходів; $\Delta x = (x - x_{\text{кр}}) / x_{\text{кр}}$ – параметр порядку бінарних розчинів. З співвідношення (3) випливає, що в'язкість системи в критичній точці ($t = 0$, $\Delta x = 0$) є скінченною ($\eta_{\text{pez}}(R_c \rightarrow \infty) = \Delta \eta / q_2 = \text{const}$), що узгоджується із розрахунками Фіксмана М [8].

Регулярна частина в'язкості, яка визначається фізико-хімічними особливостями бінарних розчинів і не пов'язана з наближенням системи до критичної точки розшарування визначається як:

$$\eta_{\text{pez}}(x, T) = \frac{h N_A}{V} \exp\left(\frac{\Delta G_{\eta}^{\neq}}{RT}\right), \quad (3)$$

де h – стала Планка; N_A – число Авогадро; V – мольний об'єм; $\Delta G_{\eta}^{\neq}$ – вільна енергія активації в'язкої течії.

Аналіз експериментальних даних для усіх досліджуваних йонно-електронних бінарних розчинів показав, що як і для бінарного розчину ізомасляна кислота-вода [9], поведінка в'язкості є різною в різних термодинамічних напрямках. Це зумовлено тим, що флуктуаційна частина динамічної в'язкості визначається радіусом

кореляції, поведінка якого є різною уздовж критичної ізоконцентрати, межі поділу фаз та критичної ізотерми:

$$R_{c1} = R_{01} t^{-\nu}, R_{c2} = R_{02} |t|^{-\nu}, R_{c3} = R_{03} |\Delta x|^{-\nu/\beta}. \quad (4)$$

В'язкість уздовж межі поділу фаз та на критичній ізотермі

Уздовж межі поділу фаз температурна залежність динамічної в'язкості та її регулярна частина має вигляд наведений на рис.2.

Кривими на рис. 2 зображено розраховані за формулою (1) та (3) значення, відповідно для експериментальних значень динамічної в'язкості (η_s) та її регулярної ($\eta_{\text{рег}}$) частини. Проведений аналіз даних свідчить, що характер поведінки в'язкості уздовж межі поділу фаз у першу чергу зумовлений величиною її регулярної частини.

Підтвердженням чого є вигляд температурних залежностей відносних значень вільної енергії в'язкої течії та мольного об'єму, які наведено на рис. 3.

Для аналізу наведених на рис. 2, 3 температурних залежностей варто скористатися рівнянням кривої співіснування, $\Delta\eta_s(t) = \pm \eta_0 |t|^{\beta} \pm \eta_1 |t|^{\beta+0.5}$, де $\Delta\eta(t) = (\eta_s(t) - \eta_{\text{рег}})/\eta_{\text{рег}}$, $t = (T_{\text{кр}} - T)/T_{\text{кр}}$. Такий підхід дозволив для кожного випадку $t < 0$ та $t > 0$ знайти величину асимптотичної амплітуди η_0 та критичного показника кривої співіснування $\beta = 0,338 \pm 0,002$ для йонно-електронного бінарного розчину. Як показує аналіз залежностей, наведених на рис. 2, рис. 3, саме при використанні розрахованого значення $\beta = 0,338 \pm 0,002$ отримуємо задовільне узгодження з експериментом.

Окрім того, детальний аналіз даних уздовж критичної ізоконцентрати дозволив підтверджено висновок кінцево-розмірної теорії масштабних

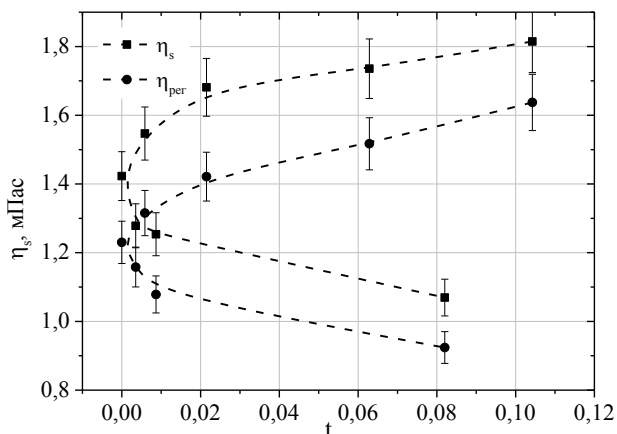


Рис. 2. Температурна залежність динамічної в'язкості та її регулярної частини (4) уздовж термодинамічного напрямку межі поділу фаз для Ga-Pb.

перетворень щодо скінченного значення в'язкості при критичних значеннях концентрації $x = x_{\text{кр}}$ та температури $T = T_{\text{кр}}$.

Показано, що вільна енергія активації в'язкої течії лінійно зменшуються зі збільшенням

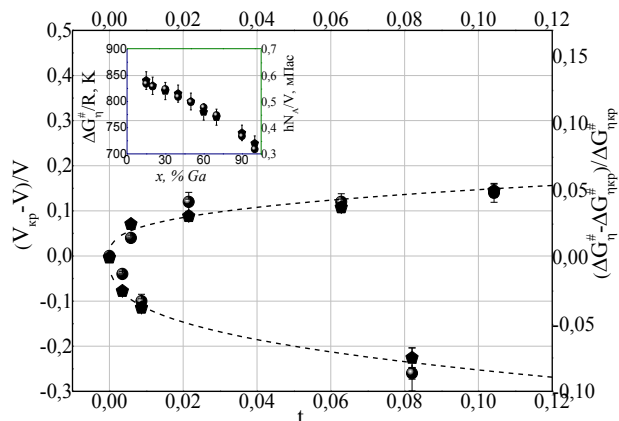


Рис. 3. Температурна ($t < 0$, $t > 0$) та концентраційна (вставка) залежності відносних значень енергії активації в'язкої течії та мольного об'єму динамічної в'язкості (3) для розчину Ga-Pb.

концентрації, що призводить до збільшення мольного об'єму (див. вставку на рис. 3). Інша картина спостерігається для молекулярних бінарних розчинів, для яких зменшення мольного об'єму супроводжується зменшенням вільної енергії активації в'язкої течії [9].

Використовуючи значення регулярної частини в'язкості знайдено флуктуаційну в'язкість (1), поведінка якої була проаналізовано у різних термодинамічних напрямках з використанням формул (2) та (4). Це фактично дозволило визначити та проаналізувати особливості залежності радіуса кореляції на окремих гілках кривої співіснування.

Було підтверджено висновки теорії динамічного скейлінгу щодо однакових степеневих концентраційних залежностей радіуса кореляції на межі поділу фаз і на критичній ізотермі. Причому, амплітуда концентраційної залежності оберненого значення флуктуаційної частини в'язкості на межі поділу фаз менша за відповідну амплітуду на критичній ізотермі.

Висновки

З розглянутого можна зробити такі висновки:

1. Для йонно-електронних розчинів запропоновано метод визначення величини радіуса кореляції на окремих гілках кривої співіснування, що ґрунтується на експериментальних даних про динамічну в'язкість.

2. Доведено ефективність застосування скейлінгової моделі як суми їхньої регулярної та флуктуаційної частини для опису аномальної поведінки динамічної в'язкості йонно-електронних бінарних розчинів, що належать до класу універсальності 3-мірної моделі Ізінга.

3. Показано, що для величини динамічної в'язкості флуктуаційна частина є меншою, ніж регулярна, а отже, в експериментальних умовах,

доступних для спостереження, не виконується припущення теорії динамічного скейлінгу.

4. Підтверджено висновок кінцево-розмірної теорії масштабних перетворень щодо скінченного значення в'язкості при критичних значеннях концентрації $x = x_{кр}$ та температури

$$T = T_{кр}.$$

Список використаних джерел

1. Mirzaev S. Z. Does shear viscosity relaxation control the dynamics of critical fluctuations in polystyrene--cyclohexane? / S. Z. Mirzaev, U. Kaatz. // *The Journal of Chemical Physics*. – 2014. – №140. – С. 044508.
2. Plevachuk Yu., Sklyarchuk V., Alekhin O., Bulavin L., Bilous O. Investigation of the critical region in monotectic systems by viscosity measurements// *Journal of Physics: Conference Series* – 2008. – V. 98. – P. 022007.
3. Yu. Plevachuk, V. Sklyarchuk, O. Alekhin, O. Bilous, L. Bulavin Experimental studies of phase equilibria in high-temperature ternary immiscible metallic melts // *Journal of Non-Crystalline Solids* – 2007. – V. 353. – P. 3310-3313.
4. Sbihi D. E. et al. Segregation and temperature effect on the atomic structure of Bi₃₀Ga₇₀ liquid alloy // *Journal of Physics: Condensed Matter*. – 2009. – T. 21. – №. 24. – С. 245107.
5. Kadanoff L. P. *Statistical physics: statics, dynamics and renormalization*. – World Scientific Publishing Co Inc, 2000. - 479 p.
6. Анисимов М.А. Критические явления в жидкостях и жидких кристаллах. - М.: Наука, 1987. - 272 с.
7. Plevachuk, Y., Filippov, V., Kononenko, V., Popel, P., Rjabina, A., Sidorov, V., & Sklyarchuk, V. (2003). Investigation of the miscibility gap region in liquid Ga–Pb alloys. *Zeitschrift für Metallkunde*, 94(9), 1034-1039.
8. Fixman M. Viscosity of critical mixtures // *The Journal of Chemical Physics*. – 1962. – T. 36. – №. 2. – С. 310-318.
9. Температурная Зависимость Вязкости Раствора Изомасляная Кислота-Вода Вдоль Критической Изоконцентрацы И Границы Раздела Фаз / А. Д.Алехин,, Ю. Л. Остапчук, Е. Г. Рудников, А. В. Войтешенко. // *Физика Аэродисперсных Систем*. – 2014. – №51. – С. 18–26.

References

1. MIRZAEV S. Z., GHOSHI R., BAGCHI B. (2014) Does shear viscosity relaxation control the dynamics of critical fluctuations in polystyrene--cyclohexane? *The Journal of Physical Chemistry*. 140. p.044508.
2. PLEVACHUK Yu., SKLYARCHUK V., ALEKHIN O., BULAVIN L., BILOUS O. (2008) Investigation of the critical region in monotectic systems by viscosity measurements. *Journal of Physics: Conference Series*. 98. p. 022007.
3. PLEVACHUK Yu., SKLYARCHUK V., ALEKHIN O., BULAVIN L., BILOUS O.. (2007) Experimental studies of phase equilibria in high-temperature ternary immiscible metallic melts. *Journal of Non-Crystalline Solids*. 353. p. 3310–3313.
4. SBIHI D. E. et al. (2009) Ionic liquids in separations of azeotropic systems – *Journal of Physics: Condensed Matter*. 21(24). p. 245107.
5. KADANOFF L. P. (2000) *Statistical physics: statics, dynamics and renormalization*. – World Scientific Publishing Co Inc.
6. ANISIMOV M. A. (1987) *Critical phenomena in liquids and liquid crystals*. Moskva: Nauka.
7. PLEVACHUK, Y., FILIPPOV, V., KONONENKO, V., POPEL, P., RJABINA, A., SIDOROV, V., SKLYARCHUK, V. (2003) Investigation of the miscibility gap region in liquid Ga–Pb alloys.. *Zeitschrift für Metallkunde*. 94(9). p. 1034-1039.
8. FIXMAN M. (1962) Viscosity of critical mixtures. *Journal of Chemical Physics*. 36(2). p.310-318.
9. ALYEKHIN A.D, OSTAPCIUC Y.L., RUDNIKOV E.G., VOYTESHENKO A.V. (2014) The temperature dependence of the viscosity of the solution isobutyric acid-water along the critical Izokontsentraty and interfacial. *Physics aerodisperse Systems*. 51. p. 18–26.

Надійшла до редколегії 12.12.2016

УДК 539.2: 537.636: 544.526 : 542.952.6 : 678.686

Булавін Л.А.¹, акад., д.ф.-м.н., проф.,
Забашта Ю.Ф.¹, д.ф.-м.н., проф.,
Бровко О.О.², д.х.н., пров.н.с.,
Вергун Л.Ю.¹, к.ф.-м.н., н.с.,
Ярова Н.В.², к.х.н., с.н.с.,
Самойленко Т.Ф.², м.н.с.

Регулювання проникливості полімерних мембран магнітним полем

¹Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 01601, м. Київ, вул.
Володимирська 64/13,
e-mail: aktanl@mail.univ.kiev.ua

²Інститут хімії високомолекулярних сполук
НАН України, e-mail: ynv25@ukr.net

L.A.Bulavin.¹, Acad. Dr. Sci., Prof.,
Yu.F.Zabashsta¹, Dr. Sci., Prof.,
O.O.Brovko², Dr. Sci.,
L.Yu.Vergun¹, PhD, Sci. Res.,
N.V.Iarova², PhD, Sen. Sci. Res.,
T.F.Samoilenko², Sci. Res.

The regulation of polymeric membrane permeability with magnetic field

¹Taras Shevchenko National University of Kyiv,
01601, Kyiv, Volodymyrska st. 64/13,
e-mail: aktanl@mail.univ.kiev.ua

²Institute of Macromolecular Chemistry of the
National Academy of Science of Ukraine,
e-mail: ynv25@ukr.net

Розглядається питання щодо фізичних механізмів проникливості синтетичних мембран. Отримані експериментальні значення ефективного коефіцієнта дифузії та коефіцієнта пропускання намагнічених та ненамагнічених плівок, отриманих методом фотополімеризації циклоаліфатичної смоли УП-650Т. Запропоновано використати залежність коефіцієнта дифузії від магнітного поля при створенні синтетичної мембрани.

Ключові слова: полімерна мембрана, магнітне поле, дифузія

The question about the physical mechanisms of permeability of synthetic membranes is considered. The specified fundamental difference between synthetic and biological membranes, which is the ability to regulate passage channel, is denoted. The model of two component synthetic membrane with disordered matrix and blocks inclusion is proposed. In these models the spaces between the blocks are natural channels for outside molecules. The mechanism of regulation of extraneous movement of molecules through the channel by creating a mechanical moment between the blocks associated with the magnetic field is proposed. We studied the penetration of membranes with respect to the molecules that are the components of air. This insight was characterized with averaged parameter which is called effective diffusion coefficient. The experimental values of the effective diffusion coefficient and transmittance of magnetized and unmagnetized films formed by photopolymerization of cycloaliphatic epoxy resin UP-650T were obtained. A dependence of the diffusion coefficient of the magnetic field was proposed to use while creating a synthetic membrane.

Key Words: polymeric membrane, magnetic field, diffusion.

Статтю представив академік НАН України, д.ф.-м.н., проф. Булавін Л.А.

Вступ

Як відомо, мембрана являє собою плівку, що містить канали, завдяки яким різноманітні речовини мають змогу проходити через плівку. Головною функціональною ознакою мембрани є її вибірковість – мембрана мусить пропускати лише необхідні (прохідні) речовини і слугувати заслоном для інших непрохідних речовин. Ступінь вибіркової визначається нерівністю

$$D_1 < d < D_2, \quad (1)$$

де d – діаметр каналу, D_1 – розмір частинки прохідної речовини, D_2 – розмір частинки непрохідної речовини.

Коли йдеться про молекулярний структурний рівень, то D_1 та D_2 – це розміри відповідно прохідних і непрохідних молекул.

Розрізняють два типи мембран – синтетичні та біологічні. Принципова різниця між цими типами мембран полягає в тому, що вибірковість біомембран може регулюватись – за неохідності мембранний канал може відкриватись та

закриватись. Для синтетичної мембрани така можливість виключена.

Однією із проблем сучасної фізики є створення штучної клітини [1-2]. Як відомо, до складу клітин входить певна кількість біомембран – зовнішня та внутрішньоклітинні. Відповідно згадана проблема ставить на порядок денний задачу про створення синтетичної мембрани з регульованими каналами.

В данній статті йдеться про один із можливих шляхів вирішення цієї задачі.

Фізичний механізм регулювання проникливості

Для вирішення цієї задачі першочерговим пунктом є вибір матеріалу мембрани. На нашу думку, найбільш доцільним є використання в цьому випадку полімерних матеріалів. Такий вибір ґрунтується на існуванні в полімері двох типів областей – з більшою та меншою ступенями неупорядкованості. Далі будемо вживати скорочені назви: для перших – упорядкована область або блок, для другого – неупорядкована область. В аморфно-кристалічних полімерах згадані два типи областей це – кристалічна та аморфні області, в аморфних полімерах це – області з густою та рідкою ланцюговою сіткою.

Структурному рівневі, де в ролі структурних елементів виступають згадані області, відповідає двокомпонентна модель, що є неупорядкованою матрицею 1, в якій розташовані вclusions – блоки 2 (рис. 1).

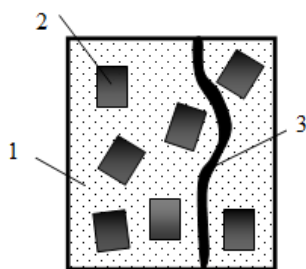


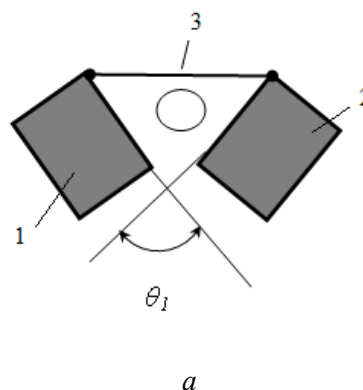
Рис. 1. Двокомпонентна модель структури полімеру.

Називатимемо сторонніми молекули речовини, які контактують з полімерною мембраною. Проміжки між блоками є природними каналами для сторонніх молекул. В цьому головна перевага полімерів як мембранних

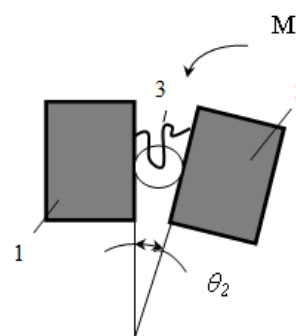
матеріалів: не слід застосовувати певні технології для утворення каналів – вони є необхідним елементом полімерної структури. Один із можливих каналів зображено на рис.1 звивистою жирною лінією і позначено цифрою 3.

Як уже згадувалось, в рамках структурної моделі, зображеної на рис.1, канал можна представити як проміжок між блоками. В цьому проміжку (рис. 2) розташовуються ланцюги неупорядкованої області, які з'єднують між собою сусідні блоки 1 і 2 (на рис. 2 зображено лише один із ланцюгів неупорядкованої області, його позначено цифрою 3). Поперечний переріз каналу зображено на рис. 2 колом, розташованим між блоками.

Можна запропонувати наступний механізм регуляції руху сторонніх молекул через цей канал. Нехай кут між поверхнями сусідніх блоків 1 і 2 дорівнює такому значенню θ_1 , при якому ланцюг 3 має витягнуту конфігурацію (рис. 2a).



а



б

Рис. 2. Модель каналу в полімерній мембрані: а - канал відкрито, б - канал закрито.

Як видно з рис. 2a, знаходячись у цій конфігурації ланцюг відкриває канал. Якщо зменшити кут між згаданими поверхнями до значення θ_2 , ланцюг 3 набуває згорнутої

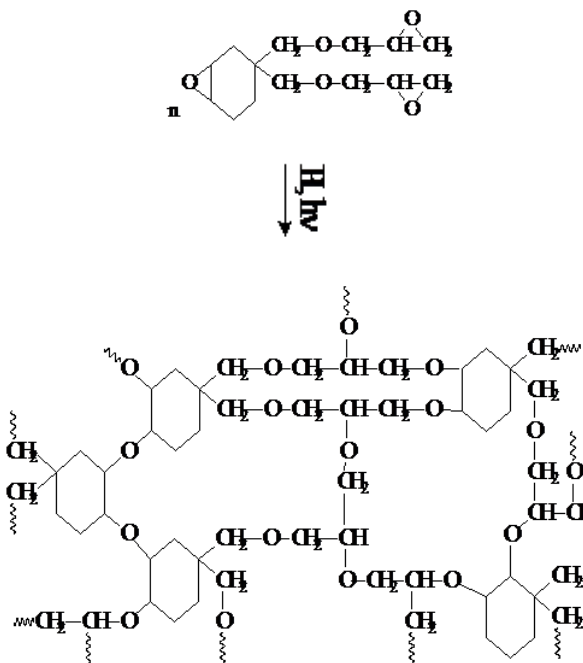
конфігурації, закриваючи канал. Для повороту блока 2 на кут $\theta_1 - \theta_2$ відносно блока 1, до цього блоку необхідно прикласти деякий механічний момент M . Для створення цього моменту ми пропонуємо розташовувати мембрану в магнітному полі. Тоді відповідно механічний момент $\vec{M}$ визначатиметься за формулою

$$\vec{M} = \vec{H} \bullet (\vec{m}_1 - \vec{m}_2), \quad (2)$$

де $\vec{H}$ - напруженість магнітного поля, $\vec{m}_1$ і $\vec{m}_2$ - магнітні моменти блоків 1 і 2.

Експеримент

Ми передбачаємо застосовувати для регулювання проникливості мембран магнітні поля, для яких магнітна індукція складає порядка 1 мТл. Відповідно виникло питання про пошук матеріалу, який би реагував на такі поля. Опираючись на попередній досвід [3], нами було використано циклоаліфатичну трифункціональну смолу УП-650Т, яка у своїй структурі містить епоксидні групи різної природи. Плівки для дослідів ми отримували методом фотополімеризації УП-650 Т за наступною схемою:



Перевірку згаданої здатності полімеру реагувати на дію магнітного поля було здійснено за допомогою приладу КФК-2МП. Було отримано залежності коефіцієнта пропускання світла від його довжини хвилі для двох типів плівок, які відповідно піддавались і не

піддавались дії магнітного поля. Плівки першого типу витримувались в полі з індукцією 0,43 мТл протягом 15 хвилин. Результати даного експерименту представлені на рис. 3.

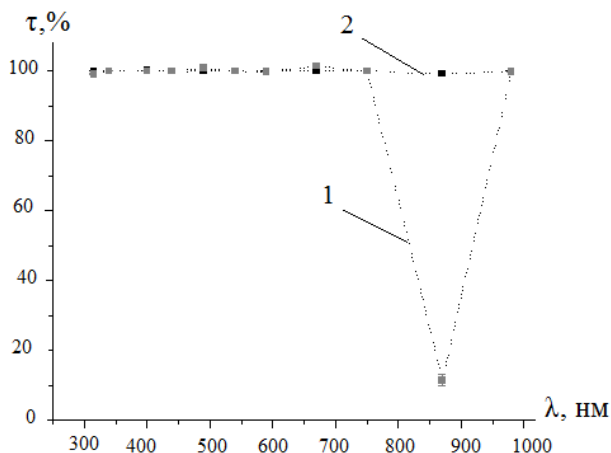


Рис. 3. Залежність коефіцієнта пропускання τ від довжини хвилі λ .

Як видно з рис. 3 для зразків під дією магнітного поля (1) і без дії (2) згадані залежності суттєво відрізняються. Отже під дією магнітного поля структура мембрани, матеріалом якої є вибраний полімер, змінюється. Чи приведуть ці зміни до змін проникливості мембрани? Відповідь на це питання ми шукали, досліджуючи проникливість мембран обох згаданих типів за методикою, викладеною в нашій роботі [3]. Вивчалась проникливість мембран по відношенню до молекул, що входять в склад повітряного середовища. Дифузійний рух молекул через мембрану в застосованій методиці ініціювався градієнтом тисків 70×10^3 Па/м. Цю проникливість було охарактеризовано усередненим параметром, який названо ефективним коефіцієнтом дифузії D . Результати експерименту представлені в табл. 1.

Як видно із табл. 1, прикладення магнітного поля призводить до зменшення коефіцієнта дифузії на два порядки. Це означає, що дія магнітного поля спричиняє перекриття каналів між блоками: під дією магнітного поля відбувається зміна структури неупорядкованих областей. Звичайно, для того, щоб уповільнити дифузії зовсім необов'язково повністю перекрити кожний канал. Для цього достатньо перекриття в окремих перерізах. За винятком таких перерізів блоки можуть залишитися на своїх місцях, в яких вони знаходились до прикладення магнітного поля або навіть

розійтись, витягуючи ланцюги, в залежності від того, як блоки орієнтовані відносно магнітного поля.

Таблиця 1.

Проникливість полімерних мембран

Тип мембран	Коефіцієнт дифузії $D, \text{м}^2 / \text{с}$
Ненамагнічена	$(0,221 \pm 0,004) \times 10^{-9}$
Намагнічена	$(0,009 \pm 0,003) \times 10^{-9}$

Таким чином, оскільки, регулювання дифузії здійснюють окремі блоки, для того, щоб досягти ефекту перекриття каналів, необхідно, щоб ці блоки мали достатні магнітні моменти, для створення під дією магнітного поля механічного моменту, який здатен був би розвернути блок, долаючи опір оточуючого полімерного матеріалу. Цю задачу можна вирішити хімічними

методами, підвищуючи до основного ланцюга бокові субланцюги, осі яких, розташовуючись паралельно одна одній, могли б створити структуру, аналогічну рідкокристалічній, яка могла б і забезпечити виникнення необхідного магнітного моменту блока.

Висновки

В роботі доведена можливість змінювати проникливість полімерної мембрани за допомогою дії магнітного поля. Запропоновано можливий фізичний механізм, який міг би забезпечити регулювання потоком сторонніх молекул через мембрану шляхом перекриття або відкриття мембранних каналів в певні моменти часу. Це дозволяє сподіватись, що спостережений в даній роботі ефект впливу магнітного поля на проникливість мембран в майбутньому може бути використаний при створенні штучної клітини.

Список використаних джерел

1. Jiang Chaoyang, Tsukruk Vladimir V. Organized arrays of nanostructures in freely suspended nanomembranes // *Soft Matter*.-2005.-1.-P.334–337.
2. Korolovich V.F., Grishina O.A., Bulavin L.A. Impact of high-frequency ultrasound on nanocomposite microcapsules: in silico and in situ visualization // *Physical Chemistry Chemical Physics*.-2016.-18(4). - P..2389-2397.
3. Bulavin L.A., Zabashta Yu.F., Brovko O.O. Influence of magnetic field to the allocation of impurity molecules in the structure of optically transparent polymer films // *Polymer Journal (Institute of Macromolecular Chemistry of the NAS of Ukraine)*.- 2016.-38 (3), P.205-209.

References

1. JIANG, C., TSUKRUK, V. V. (2005) Organized arrays of nanostructures in freely suspended nanomembranes. *Soft Matter*.1. p.334–337.
2. KOROLOVICH V., GRISHINA O., BULAVIN, L. (2016) Impact of high-frequency ultrasound on nanocomposite microcapsules: in silico and in situ visualization. *Physical Chemistry Chemical Physics*.18(4). p.2389-2397.
3. BULAVIN, L., ZABASHTA, Yu., BROVKO, O. (2016) Influence of magnetic field to the allocation of impurity molecules in the structure of optically transparent polymer films. *Polymer Journal (Institute of Macromolecular Chemistry of the NAS of Ukraine)*. 38 (3). p.205-209.

Надійшла до редколегії 08.12.2016.

УДК 628.98

Калустова Д.О.¹, асп.,
Баєва А.І.², студ.,
Руденко О.І.², студ.,
Макаренко О.В.², к.ф.-м.н., доц.,
Рибалочка А.В.¹, к.т.н., с.н.с.

Оцінка впливу білого світлодіодного освітлення на циркадні ритми людини

¹Інститут фізики напівпровідників
ім. В.Є. Лашкарьова НАН України, 03028,
м. Київ, пр. Науки, 41,
e-mail: andriy.rybalochka@gmail.com

²Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, фізичний факультет 03127,
м. Київ, пр. акад. Глушкова 4,
e-mail: almarkar@univ.kiev.ua

D.O. Kalustova¹, PhD stud.,
A.I. Baieva², stud.,
O.I. Rudenko², stud.,
O.V. Makarenko², PhD.,
A.V. Rybalochka¹, PhD.

Evaluation of the white LED lighting on human circadian rhythms

¹V. Lashkaryov Institute of Semiconductor Physics
NAS of Ukraine, 03028, Kyiv, Nauki prosp., 41,
e-mail: andriy.rybalochka@gmail.com

²Taras Shevchenko National University of Kyiv,
Faculty of Physics, 03127, Kyiv, Glushkova prosp., 4,
e-mail: almarkar@univ.kiev.ua

У статті розглядається питання впливу синьої складової видимого спектрального діапазону випромінювання білих світлодіодів на циркадні ритми людини. Мета статті – порівняти вплив на циркадні ритми людини світлодіодного освітлення з штучними джерелами білого світла іншої природи, а також зі стандартними джерелами світла типу А, В, С та D65.

Ключові слова: світлодіод, штучне освітлення, циркадні ритми.

Considered in the paper method of evaluating the impact of the white light on human circadian rhythms consists in calculating of special factor from spectral characteristics of the various light sources. This factor characterizes "dose of blue light" that affects biological photoreceptors in the human eye, which regulate the circadian rhythms relative to photopic mechanism of the human light perception. The result demonstrates the absence of the circadian dependence of the "dose of blue light" for the white light sources of different origin with similar values of the correlated color temperature. Moreover, there is almost a linear increase of the "dose of blue light" with the increase of the correlated color temperature. The circadian "dose of blue light" regarding the type A light source for the light sources with a correlated color temperature of about 4000 K, 5000 K and 6500 K is more than 1.4, 1.8 and 2.5 times higher, respectively. The results indicate that the light source type is not a significant factor in the artificial lighting creation in terms of its impact on the human circadian rhythms. In terms of the artificial lighting hygiene, it is important not to disturb significantly the natural dynamics of the change of the white light hue during the day. It means that we should use light sources with warm tones of the white light (2700 K-3500 K) in the evening, not to interfere the production in the human body of the melatonin hormone that is required for a healthy sleep. In the same time, when a person needs to feel cheerfulness and improve the efficiency during the day, natural (4000 K-5000 K) and cold (about 6000 K-6500 K) tones of the white light can be used.

Key words: light emitted diode (LED), artificial light, circadian rhythms.

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Макарець М. В.

Вступ

Світло є одним з факторів зовнішнього середовища, яке має багатосторонню біологічну дію і відіграє першочергову роль в регуляції найважливіших життєвих функцій організму.

На сьогоднішній день все ширшого використання набувають світлодіодні джерела

світла завдяки їх енергоефективності, екологічності та малим фізичним розмірам світловипромінюючих елементів, які дають широкі можливості по конфігуруванню світлового поля освітлювальних систем на їх основі [1, 2]. Однак, є відкритим й активно досліджується питання впливу світлодіодного освітлення на організм людини і, зокрема, на

циркадні ритми, яке пов'язане з вираженою короткохвильовою компонентою у спектрах випромінювання світлодіодних джерел білого світла.

Циркадні ритми — це зміна інтенсивності біологічних процесів, що протікають в організмі людини протягом доби. Люди адаптувалися до зміни світлових параметрів сонячного світла та їх циркадні ритми (чергування періодів сну та неспання) фактично визначаються трьома факторами: інтенсивністю, кольірною температурою і короткохвильовою складовою випромінювання. Відомо, що регулярне опромінення світлом занадто високої інтенсивності у вечірні години може загрожувати порушенням біологічного ритму, безсонням і різними захворюваннями [1].

Детальне дослідження даного питання пов'язане з відкриттям у 2002 р. невідомих раніше світлочутливих гангліозних клітин сітківки ока (intrinsic photosensitive Retinal Ganglion Cell). Ці клітини є додатковою ланкою до паличок та колбочок, з піком чутливості у синьо-блакитній області, та відповідають за вплив світла на циркадні ритми регуляції фізіологічного стану людини за допомогою впливу на вироблення в її організмі світлочутливого гормону — мелатоніну [3]. Яскраве світло, особливо його короткохвильова компонента, знижує рівень мелатоніну в крові, тим самим знижуючи сонливість, збільшуючи роботоздатність та знижуючи гостроту сезонної депресії [4].

В даній роботі розглядається питання оцінки впливу різних тонів білого світлодіодного світла на циркадні ритми людини в порівнянні зі штучними джерелами білого світла іншої природи, а також зі стандартними джерелами світла типу А, В, С та D65.

Експериментальні дослідження

Експериментальні дослідження, які використані для аналізу впливу джерел світла різної природи на циркадні ритми людини, були проведені на метрологічній базі науково-дослідної лабораторії «Центр випробувань і діагностики напівпровідникових джерел світла та освітлювальних систем на їх основі» Інституту фізики напівпровідників ім. В.Є. Лашкарьова НАН України. Безпосередньо для вимірювання спектрального складу випромінювання та інших світлових параметрів різних джерел світла був використаний спеціалізований вимірювальний комплекс, основними компонентами якого є

високоточний матричний спектрорадіометр «НААС-2000» та інтегруюча фотометрична сфера діаметром 1,0 м виробництва компанії «EVERFINE Corporation». За допомогою цього вимірювального комплексу було визначено спектральні характеристики наступного переліку об'єктів випробувань (ОВ): дванадцяти зразків світлодіодних ламп (СДЛ) з корельованими кольірними температурами (T_C) 2717 К, 2731 К, 3054 К, 4119 К, 4176 К, 4407 К, 5094 К, 5570 К, 6004 К, 6801 К, 7411 К та 8367 К; трьох зразків компактних люмінесцентних ламп (КЛЛ) зі значеннями T_C 2428 К, 3990 К та 5956 К; трьох зразків ламп розжарювання (ЛР) зі значеннями 2737 К, 2833 К та 3000 К. Також до аналізу були долучені спектральні характеристики стандартних джерел Міжнародної комісії з освітлення (МКО), що відповідають, у тому числі, різним фазам природного денного світла: А (2856 К) — газонаповнена електрична лампа розжарювання з $T_C = 2856$ К; В (4874 К) — пряме сонячне освітлення; С (6774 К) — освітлення розсіяним денним світлом; D65 (6504 К) — освітлення усередненим денним світлом.

Спектральний склад випромінювання СДЛ, ЛР та КЛЛ реєструвався у видимому спектральному діапазоні 380 нм ÷ 780 нм з кроком 1 нм. Усі вимірювання проводились у робочому режимі ОВ, при досягненні стабілізації їх світлових параметрів. Спектри випромінювання для фаз денного світла були побудовані за табличними даними, які представлені у ГОСТ 7721-89 [5].

Використаний в роботі метод оцінки впливу білого світла на циркадні ритми людини полягає в розрахунку за спектральними характеристиками різних джерел світла спеціального коефіцієнту, який характеризує відносну до фотопічного механізму сприйняття світла людиною «дозу синього», яка впливає на біологічні рецептори в оці людини, що відповідають за регулювання її циркадних ритмів [6].

Аналіз спектральних характеристик

Для наочного порівняння спектральних характеристик штучних джерел світла були обрані стандартні джерела МКО типу А та типу D65, а також відповідні світлодіодні та люмінесцентні джерела світла з близькими до них значеннями T_C .

На рис.1 наведено порівняння в абсолютних величинах спектральних характеристик джерел світла різної природи з теплим тоном білого світла (2800 К), які нормовані на однакове

значення загального світлового потоку. На цьому рисунку наочно не спостерігається значна відміна в короткохвильовій частині спектру для джерела типу А та СДЛ. На спектрі КЛЛ є два вузьких піки в діапазоні 400-440 нм.

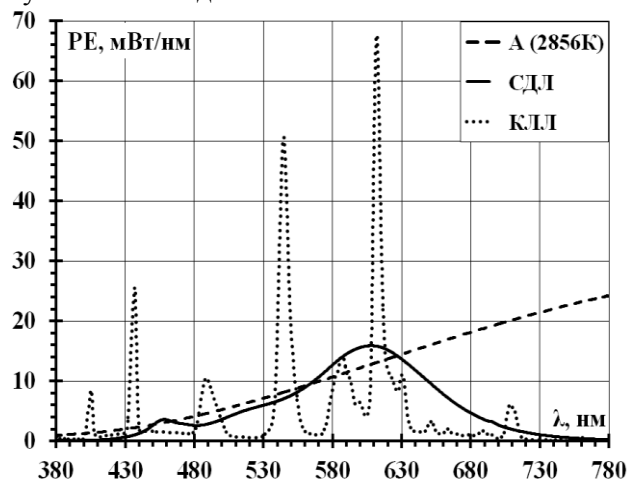


Рис. 1. Порівняння спектрів теплих тонів білого світла джерел різної природи (~ 2800 K)

На рис.2 наведено аналогічне попередньому порівняння в абсолютних величинах спектральних характеристик джерел світла різної природи з холодним тоном білого світла (6500 K). В цьому випадку, додатково до аналогічних вузьких піків в спектрі КЛЛ, спостерігається пік в спектрі СДЛ з максимумом біля 450 нм.

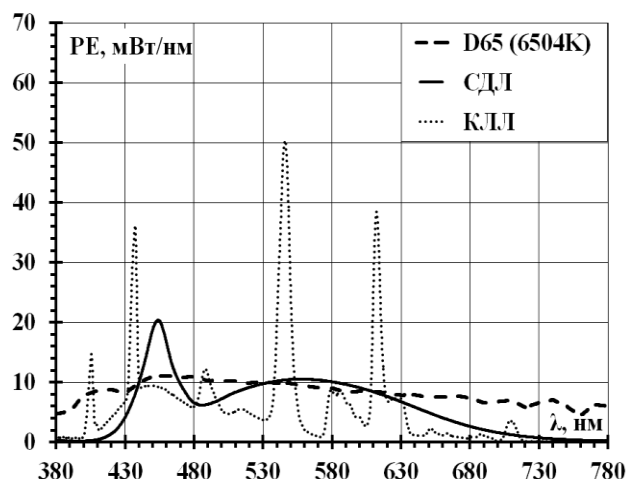


Рис. 2. Співставлення спектрів холодного тону білого світла джерел різної природи (~ 6500 K)

Для аналізу отриманих результатів використаний дещо модернізований відомий метод оцінки впливу білого світла різного походження на циркадні ритми людини, який полягає в розрахунку за спектральними характеристиками різних джерел світла

спеціального коефіцієнту, який характеризує відносну до фотопічного механізму сприйняття світла людиною «дозу синього світла», яка впливає на незорові рецептори в очі людини, що відповідають за регулювання її циркадних ритмів [6]. Для його роз'яснення розглянемо рис.3, на якому наведено дві стандартні функції: $c(\lambda)$ – функція, яка характеризує відносний ступінь впливу на циркадні ритми людини монохроматичних випромінювань рівних інтенсивностей; $V(\lambda)$ – функція спектральної світлової ефективності (функція чутливості людського ока для фотопічного зору). Для наочності демонстрації принципу аналізу на рис.3 також наведено $X(\lambda)$ – приклад спектральної характеристики білого світлодіода з $T_C = 4176$ K.

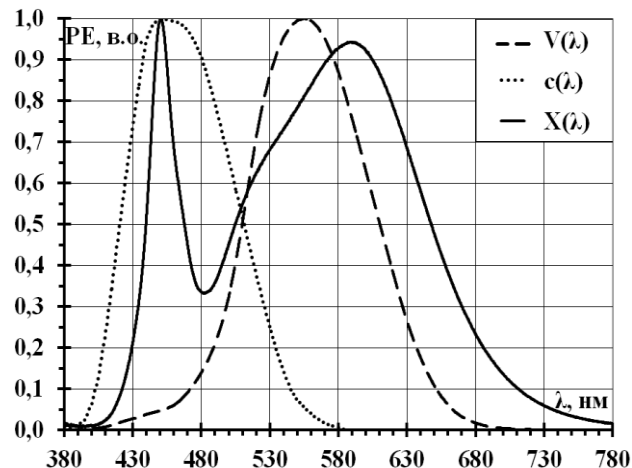


Рис. 3. Функція спектральної циркадної ефективності $c(\lambda)$, функція спектральної світлової ефективності $V(\lambda)$ та спектр білого світлодіода $X(\lambda)$ (4176 K)

Відносний ступінь циркадного впливу білого світла довільного спектру $X(\lambda)$ будемо характеризувати параметром A_{CV} (Вт/Лм), який вказує певну енергетичну циркадну «дозу синього світла», що припадає на 1 Лм світлового потоку джерела світла. В такому розумінні його можна визначити наступною формулою:

$$A_{CV} = \frac{\int X(\lambda)c(\lambda)d\lambda}{683 \int X(\lambda)V(\lambda)d\lambda}. \quad (1)$$

Значення розрахованого параметра A_{CV} для джерел світла різної природи при різних значеннях T_C представлені на рис.4. Одержані результати демонструють зростання циркадного впливу джерел світла різної природи зі зростанням значень T_C .

Для джерел світла з T_C близько 4000 К, 5000 К та 6500 К значення A_{CV} перевищує його величину для стандартного джерела світла типу А в 1,4, 1,8 та 2,5 разів, відповідно.

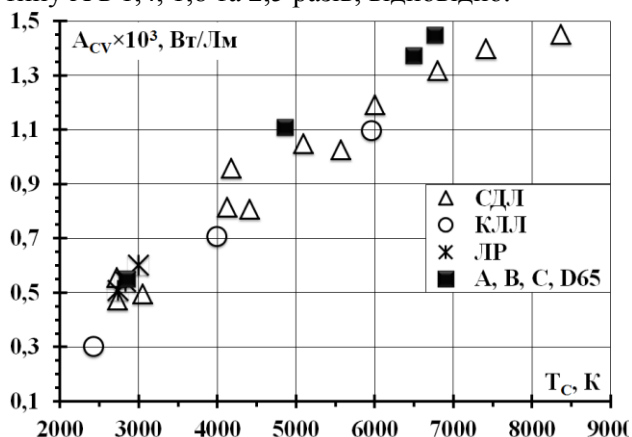


Рис. 4. Значення параметру A_{CV} для джерел світла різної природи при різних значеннях T_C .

Відсутність залежності значень параметру A_{CV} від походження джерел білого світла з близькими значеннями T_C дозволяє зробити висновок, що вплив на циркадні ритми людини досліджених в роботі джерел світла різної природи залежить лише від значення параметру T_C світла, яке вони випромінюють.

Список використаних джерел

1. Шуберт Ф. Е. Светодиоды / Ф. Е. Шуберт. – Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2-е изд., 2008. – 496 с.
2. Енергоефективні світлодіодні освітлювальні системи / [З. Готра, В. Корнага, В. Мартіросова та ін.]. – Київ: ВД "Авіцена", 1-е вид., 2016. – 335 с.
3. Berson D.M. Phototransduction by Retinal Ganglion Cells That Set the Circadian Clock / D.M. Berson, F.A. Dunn, M. Takao // Science. – 2002. – V.295, №5557. –р. 1070-1073.
4. Ри М. Анализ влияния наружного освещения на систему суточного ритма человека / М. Ри, А. Смит, Э. Бьерман, М. Фигуэро – Современная светотехника №3, 2010.–с. 54-58.
5. ГОСТ 7721-89 «Источники света для измерения цвета: типы, технические требования, маркировка».
6. Шаракшанэ А. Влияние освещения на циркадный ритм человека, «опасность синего» / А. Шаракшанэ – Полупроводниковая светотехника №4, 2012 – с. 52-56.

Висновки

Отриманий в роботі результат демонструє відсутність, за умови близьких значень корельованої колірної температури T_C , різниці впливу на циркадні ритми людини досліджених в роботі штучних джерел світла (світлодіодних та люмінесцентних ламп, а також ламп розжарювання) та стандартних джерел світла, що відповідають різним фазам денного освітлення.

Спостерігається лінійна залежність між так званою циркадною «дозою синього світла» A_{CV} та корельованою колірною температурою. Зокрема, A_{CV} відносно стандартного джерела світла типу А для джерел світла з близько 4000 К, 5000 К та 6500 К більші приблизно в 1,4, 1,8 та 2,5 разів, відповідно.

Наведені залежності дозволяють надати рекомендації що до гігієни штучного освітлення. Оскільки, важливим є не порушувати суттєво природної динаміки зміни відтінків білого світла протягом доби необхідно користуватись у вечірній час джерелами світла з теплими тонами білого світла ($T_C \sim 2700$ К ... 3500 К), в денний же час, коли людина потребує почуття бадьорості та для підвищення її працездатності, можна застосовувати освітлення натуральних ($T_C \sim 4000$ К ... 5000 К) та більш холодних ($T_C \sim 6000$ К ... 6500 К) відтінків білого світла.

References

1. SCHUBERT, E.F. (2008) *Light-emitting diodes*. 2nd Ed. New York: Cambridge University Press.
2. GOTRA, Z. et al. (2016) *Energy efficient LED lighting systems*. 1st Ed. Kyiv: PH «Avicena».
3. BERSON, D.M., DUNN, F.A., TAKAO, M. (2002) Phototransduction by Retinal Ganglion Cells That Set the Circadian Clock. *Science*. p. 1070-1073.
4. REA, M. et al. (2010) The potential of outdoor lighting for stimulating the human circadian system. *Sovremennaya Svetotechnika (Modern Lighting Technologies)*. p. 54-58.
5. GOST 7721-89 «Illuminants for colour measurements. Types. Technical requirements. Marking».
6. SHARAKSHANE, A. (2012) Light influence on the human circadian rhythm, "the danger of the blue". *Poluprovodnikovaya Svetotechnika (Semiconductor Lighting Technologies)*. p. 52-56.

Надійшла до редколегії 08.12.16

Підписано до друку _____. Формат _____. Друк. офс.
Папір офс. № _____. Друк. арк. _____. Тираж _____. Зам. _____.
Друкарня _____.