

**КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА**

ВІСНИК

**КИЇВСЬКОГО НАЦІОНАЛЬНОГО
УНІВЕРСИТЕТУ
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА**

СЕРІЯ ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНІ НАУКИ

ВИПУСК №3 2016

**Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка,
выпуск №3, 2016,**

Серія фізико-математичні науки

З 1991 року серії вісників Київського університету “Математика і механіка”, “Фізика”, “Моделирование и оптимизация сложных систем” реорганізовано у “Вісник Київського університету. Серія: фізико-математичні науки”. У віснику містяться результати нових досліджень у різних галузях математики, інформатики, механіки, фізики та радіофізики для наукових працівників, викладачів, аспірантів, інженерів і студентів. Друкується за рекомендаціями Вчених Рад фізичного, радіофізичного, механіко-математичного факультетів та факультету кібернетики.

Журнал “Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія фізико-математичні науки” включено до переліку фахових видань ВАК України, в яких можуть публікуватися результати дисертаційних робіт на здобуття наукових ступенів доктора і кандидата наук (затверджено наказом Міністерства освіти і науки України №1222 від 07.10.2016), та реферується в Реферативному журналі, Zentralblatt MATH та базах даних ВИНІТИ, Росія, Москва.

Редакційна колегія:

Анісімов Анатолій Васильович, чл.-кор. НАН України, д.ф.-м.н., проф., **головний редактор**;
Хусаїнов Денис Яхєвич, д.ф.-м.н., проф., **заступник головного редактора, відповідальний за видання**;
Arturs Medvids, Dr. Phys. (habil.), Prof., Riga Technical University, Riga, Latvia;
Miklós Rontó, Dr. Sci., Prof., University of Miskolc, Miskolc, Hungary;
Milada Bartlova, Ph. D., Brno University of Technology, Brno, Czech Republic;
Nickolai Kukhtarev, Prof., Alabama A&M University, Alabama, USA;
Sergei Gorlatch, Dr. Sci. (habil.), Prof., University of Muenster, Muenster, Germany;
Sergey Trofimchuk, Prof., Universidadde Talca, Instituto de Matematica y Fisica, Talca, Chile;
Stefan Hudak, Dr. Sci., Prof., Technical University of Kosice, Kosice, Slovak Republic;
Toru Aoki, Ph. D., Prof., Research Institute of Electronics, Shizuoka University, Shizuoka, Japan;
Акіменко Віталій Володимирович, д.т.н., проф.;
Анісімов Ігор Олексійович, д.ф.-м.н., проф.;
Буй Дмитро Борисович, д.ф.-м.н., проф.;
Булавін Леонід Анатолійович, акад. НАН України, д.ф.-м.н., проф.;
Волошин Олексій Федорович, д.т.н., проф.;
Гарашенко Федір Георгійович, д.т.н., проф.;
Єжов Станіслав Миколайович, д.ф.-м.н., проф.;
Жук Ярослав Олександрович, д.ф.-м.н., проф.;
Заславський Володимир Анатолійович, д.т.н., проф.;
Кириченко Володимир Васильович, д.ф.-м.н., проф.;
Козаченко Юрій Васильович, д.ф.-м.н., проф.;
Кудін Володимир Іванович, д.т.н., с.н.с.;
Львов Віктор Анатолійович, д.ф.-м.н., проф.;
Макара Володимир Арсенійович, чл.-кор. НАН України, д.ф.-м.н., проф.;
Макарець Микола Володимирович, д.ф.-м.н., проф.;
Перестюк Микола Олексійович, акад. НАН України, д.ф.-м.н., проф.;
Погорілий Сергій Дем'янович, д.т.н., проф.;
Савенков Сергій Миколайович, д.ф.-м.н., доц.;
Скришевський Валерій Антонович, д.ф.-м.н., проф.

Редакційний відділ:

Анісімова Тетяна Харитонівна, **відповідальний секретар**;
Безущак Оксана Омелянівна, bezusch@univ.kiev.ua;
Стукаленко Вікторія Віталіївна, stu@univ.kiev.ua;
Родіонова Тетяна Василівна, rodtv@univ.kiev.ua;
Хмелюк Надія Кузьмівна, khmeluk@univ.kiev.ua;
Сільвейструк Людмила Миколаївна, **технічний редактор**, slm-klm@ukr.net.

Адреса редакційної колегії:

Факультет кібернетики, Київський національний університет імені Тараса Шевченка,
пр. Глушкова, 4 д, 03680 Тел. (044) 259-01-49
ISBN 978-966-2142
ISSN 1812-5409

ЗМІСТ

АЛГЕБРА, ГЕОМЕТРІЯ ТА ТЕОРІЯ ІМОВІРНОСТЕЙ

Бучак Х.В. Процеси Скеллама керовані гамма-субординаторами	9
Журавльов В.М., Журавльов Д.В., Шевченко О.А. Допустимі сагайдаки та черепичні порядки скінченної глобальної розмірності в $M_n(D)$, $n \leq 6$.	13
Лучко В.С., Петравчук А.П., Шевчик О.М. Про асоціативні алгебри з двома великими нільпотентними підалгебрами	19

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ, МАТЕМАТИЧНА ФІЗИКА ТА МЕХАНІКА

Бецко І.В. Побудова неперервних розв'язків одного класу систем нелінійних функціонально-різницевих рівнянь	27
Борисейко О.В., Шакері Мобаракє Пуйан, Улітко І.А. Поздовжні коливання п'єзокерамічного стержня змінного поперечного перерізу	31
Григоренко О.Я., Панкрат'єв С.А. Особливості напружено-деформованого стану пластин складної форми з ортотропних матеріалів	35
Селіванов М.Ф., Чорноіван Ю.О., Вовкодав О.В. Визначення переміщень берегів двох паралельних тріщин зчеплення	39
Клімчук Т.В., Острик В.І. Контакт зі зчепленням і проковзуванням півнескінченного штампта та пружної смуги	43
Куценко О.Г., Куценко Г.В., Харитонов О.М., Васильєв І.Ю. Осесиметричне кручення тонких кілець довільного профілю	49

КОМП'ЮТЕРНІ НАУКИ ТА ІНФОРМАТИКА

Анісімов А.В., Годованюк М.І., Кулябко П.П. Паралельне програмування в мережах на основі ПАРКС-технології (базова мова Python)	57
Башняков О.М., Пічкур В.В., Поліщук О.А. Метод адаптивної корекції кутових швидкостей твердого тіла за дискретними вимірами орієнтації	61
Іванов С.М., Яценко В.О. Прогнозування геомагнітного Кр індексу за допомогою дискретної білінійної моделі	65
Івохін Є.В., Навродський В.О., Махно М.Ф. Про наближений розв'язок чіткої та нечіткої задачі лінійного програмування з системою обмежень великої розмірності	69
Капустян О.А. Обґрунтування наближеного синтезу в розподіленій задачі оптимального керування з цільовим функціоналом типу Немицького	73
Кулян В.Р., Юнькова О.О., Коробова М.В. Алгоритм оптимальної диверсифікації портфеля акцій	79
Куценко І.А. Характерні якісні зміни неперервної функціональної поверхні побудованої з включенням та виключенням діючих і недіючих змінних	83
Лівінська Г.В. Багатоканальні стохастичні мережі з неоднорідними вхідними потоками та обслуговуванням фазового типу	87
Моренець В.І. Рівновага за Бержем в іграх із нечіткою множиною гравців	92

Наконечний О.Г., Шевчук Ю.М. Математична модель розповсюдження інформації з нестационарними параметрами	98
Слабоспицький О.С. Рекурентний алгоритм для оцінювання нестандартних параметрів методом найменших квадратів зі змінним фактором забування та найменшими відхиленнями від точок «тяжіння» для лінійних динамічних систем при неklasичних припущеннях	106
Черній Д.І. Про похідні для інтегральних представлень	111
Шкільняк С.С., Волковицький Д. Б. Логіки безкванторно-функціональних рівнів	117

РАДІОФІЗИКА

Григорук В.І., Сердега І.В., Фелінський Г.С. Смуга лазерної генерації та поріг ВКР підсилення в одномодових волокнах, легованих TiO_2	125
Григорук В.І., Сидоренко В. С., Кравчук П. О. Визначення розподілу діелектричної проникності підповерхневих шарів у ближньопольовій мікроскопії	131

СУЧАСНА ФІЗИКА

Білоус О.І. Вплив йонів KCl на динамічні властивості водних розчинів 1,2-пропілового спирту в околі їх особливих точок	137
Бур'ян С.А. Особливості капілярної поверхні на твердій підкладці в неоднорідному полі	141
Ковалюк О.М., Терентьєва Ю.Г. Взаємодія барвника Rhodamine Y(G) з полінуклеотидами	147
Ніколаєнко А.В., Надточій А.Б., Гололобов Ю.П., Боровий М.О. Електропровідність C та 2C-політипів сегнетоелектрика TiInS_2 в діапазоні температур 100 K – 300 K	151
Пивоваренко Ю.В., Гринь Д.В., Шабликін О.В., Ящук В.М. Спектральні прояви присутності молекулярного водню у водних розчинах	155
Сіжук А.С., Єжов С.М. Використання мікроскопічного розподілу частинок для квантовооптичного усереднення	159

CONTENTS

ALGEBRA, GEOMETRY AND PROBABILITY THEORY

Buchak K.V. Skellam processes directed by Gamma subordinators	9
Zhuravlev V.M., Zhuravlev D.V., Shevchenko O.A. Admissible quivers and tiled orders of finite global dimension in $M_n(D)$, $n \leq 6$	13
Luchko V.S., Petravchuk A.P., Shevchyk O.M. On associative algebras with two large nilpotent subalgebras	19

DIFFERENTIAL EQUATIONS, MATHEMATICAL PHYSICS AND MECHANICS

Betsko I.V. Construction of continuous solutions of a class of nonlinear functional-difference equations systems	27
Boriseiko O.V., Pouyan Shakeri Mobarakeh, Ulitko I.A. Longitudinal vibrations of piezoceramic bar of variable cross section	31
Grigorenko A.Ya., Pankratiev S.A. Features of stress-strain state of complex shaped plates made of orthotropic materials	35
Selivanov M.F., Chornoivan Y.O., Vovkodav O.V. Determination of crack face displacement for two parallel cohesive cracks	39
Klimchuk T.V., Ostyk V.I. Adhesion and slipping contact between a semiinfinite stamp and an elastic strip	43
Kutsenko O.G., Kutsenko G.V., Kharytonov O.M., Vasil'ev I.Yu. Axisymmetric torsion of thin ring with general view of cross-section	49

COMPUTER SCIENCES AND INFORMATICS

Anisimov A.V., Hodovaniuk M.I., Kuliabko P.P. Parallel programming in computer networks on the base of PARCS-technology (basic language is Python)	57
Bashniakov O., Pichkur V., Polishchuk O. An adaptive method for angular velocity correction of a rotating solid body using discrete measurements of orientation	61
Ivanov S.M., Yatsenko V.O. Prediction of the geomagnetic Kp index by a discrete bilinear model	65
Ivokhin E.V., Navrotsky V.O., Makhno M.F. On approximate solution of multi-constraint crisp and fuzzy linear programming problem	69
Kapustian O.A. Approximate synthesis for distributed optimal control problem with Nemyckii type cost functional	73
Kulian V.R., Yunkova O.O., Korobova M.V. Algorithm of optimal portfolio diversification	79
Kutsenko I.A. Characteristic qualitative changes of a continuous functional surface, which is constructed with including or excluding both active and inactive variables	83
Livinska H.V. On multi-channel stochastic networks with nonhomogeneous input flows and service times of phase type	87
Morenets V.I. Berge equilibrium in a non co-operative games with a fuzzy set of players	92
Nakonechny O.G., Shevchuk I.M. Mathematical model of information spreading process	98

Slabospitsky A.S. Recurrent algorithm for non-stationary parameter estimation by the least squares method with variable forgetting factor and least deviations from «attraction» points for linear dynamic systems under non-classical assumptions	106
Cherniy D.I. Derivatives of Integral Expressions	111
Shkilniak S.S., Volkovytskyi D.B. Logics of free-quantifier functional levels	117

RADIOPHYSICS

Grygoruk V.I., Serdeha I.V., Felinskyi G.S. Laser generation band and Raman gain threshold in TiO ₂ doped singlemode fiber	125
Grygoruk V.I., Sidorenko V. S., Kravchuk P. O. The definition of subsurface layers permittivity distribution in near-field microscopy	131

MODERN PHYSICS

Bilous O.I. Effect of addition of KCl ions on the dynamic properties of aqueous solutions of 1,2-propyl alcohol in a neighborhood of a singular point	137
Burian S.A. The features of the capillary surface on the solid substrate in the heterogeneous external field	141
Kovaliuk O. M., Terentyeva Y. G. The polynucleotides – Pyronin Y(G) interaction studying	147
Nikolaenko A.V., Nadochii A.B., Gololobov Yu. P., Borovoy M.O. The conductivity of C and 2C polytypes of TlInS ₂ ferroelectrics in temperature range 100K-300 K	151
Pivovarenko Y.V., Gryn D.V., Shablykin O.V., Yashchuk V.M. The spectral manifestation of molecular hydrogen presence in aqua solution	155
Sizhuk A. S., Yezhov S. M. Use of the microscopic distribution of particles for the quantum optical averages	159

АЛГЕБРА, ГЕОМЕТРИЯ ТА ТЕОРИЯ ІМОВІРНОСТЕЙ

УДК 519.21

Х.В. Бучак, аспірант

Процеси Скеллама керовані гамма-субординаторами

Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 01033, Київ, вул. Володи-
мирська, 64.

e-mail:probability@univ.kiev.ua

K.V. Buchak, Postgraduate

Skellam processes directed by Gamma subordinators

Taras Shevchenko National University of
Kyiv, 01033, Kyiv, 64 Volodymyrska st.

e-mail:probability@univ.kiev.ua

У статті вивчаються процеси Скеллама із заміною часу, де роль часу відіграє гамма субор-
динатор. Для двох типів таких процесів одержано ймовірнісні розподіли та моменти першого
і другого порядку. Розподіли виражаються в термінах спеціальних функцій: функції Райта,
модифікованої функції Бесселя і узагальненої функції Міттаг-Леффлера.

Ключові слова: процес Скеллама, процес Пуассона, гамма-субординатор, заміна часу.

Models of stochastic processes with random time are popular topics in the recent literature and they
are used in various applied areas, such as financial mathematics, reliability, queuing theory, biological,
ecological and medical research. In particular, useful models for analysis of financial data are based
on the difference of two Poisson processes, so-called Skellam processes, and their generalizations by
means of time-change. We study time-changed Skellam processes, where the role of time is played
by Gamma subordinators. We consider time-changed Skellam processes of two types and obtain the
probability distributions of these processes and moments of the first and second order. The distributions
are expressed in terms of special function: the Wright function, the modified Bessel function of the first
kind and the three-parameter generalized Mittag-Leffler function.

Key Words: Skellam process, Poisson process, Gamma subordinator, time-change.

Communicated by Prof. Kozachenko Yu.V.

1 Introduction

Models of stochastic processes with random time are popular topics in the recent literature and they
are used in various applied areas. In particular, useful models for analysis of financial data are
based on the difference of two Poisson processes, so-called Skellam processes, and their generalizati-
ons by means of time-change.

In the present paper the models of time-
changed Skellam processes are studied in the case
when Gamma subordinators are taken as random
time.

We recall definitions of Poisson, Skellam and
Gamma processes.

Poisson process (or Poisson counting process)
of intensity $\lambda > 0$ is a Lévy process $N(t)$ such that
for each $t > 0$ the random variable $N(t)$ has the
Poisson distribution with parameter λt , that is,

$$P\{N(t) = n\} = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t};$$

Lévy measure of $N(t)$ can be written in the form
 $\nu(du) = \lambda \delta_{\{1\}}(u) du$, where $\delta_{\{1\}}(u)$ is the Di-

rac delta centered at $u = 1$, Bernstein function
(Laplace exponent) is $f(u) = \lambda(1 - e^{-u})$.

Gamma process $G(t)$ with parameters $a, b > 0$
is a Lévy process such that each $G(t)$ follows
Gamma distribution $\Gamma(at, b)$, that is, has the
density

$$h(x, t) = h_{G(t)}(x) = \frac{b^{at}}{\Gamma(at)} x^{at-1} e^{-bx}, x \geq 0; \quad (1)$$

Lévy measure of $G(t)$ is $\nu(du) = au^{-1} e^{-bu} du$ and
corresponding Bernstein function is

$$f(u) = a \log \left(1 + \frac{u}{b} \right),$$

the Laplace transform is

$$\mathbb{E} \left[e^{-\theta G(t)} \right] = e^{-tf(\theta)} = \left(1 + \frac{\theta}{b} \right)^{-at}.$$

A Skellam process is defined as

$$S(t) = N_1(t) - N_2(t), t \geq 0,$$

where $N_1(t), t \geq 0$ and $N_2(t), t \geq 0$ are two
independed homogeneous Poisson processes with
intensities $\lambda_1 > 0$ and $\lambda_2 > 0$, respectively.

Skellam processes are considered, for example, in [1], Skellam distribution was introduced in [2]. The probability mass function of $S(t)$ is given by the following formula

$$s_k(t) = P(S(t) = k) = e^{-t(\lambda_1 + \lambda_2)} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right)^{k/2} I_{|k|} \left(2t\sqrt{\lambda_1\lambda_2} \right), \quad (2)$$

$k \in \mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$, where I_k is the modified Bessel function of the first kind:

$$I_k(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z/2)^{2n+k}}{n!(n+k)!}.$$

The Skellam process is a Lévy process with

$$\mathbb{E}[e^{-\theta S(t)}] = e^{-tf_S(\theta)},$$

and the Laplace exponent is given by

$$f_S(\theta) = \lambda_1 (1 - e^{-\theta}) + \lambda_2 (1 - e^{\theta}),$$

where Lévy measure ν is the linear combination of two Dirac measures: $\nu(du) = \lambda_1 \delta_{\{1\}}(u)du + \lambda_2 \delta_{\{-1\}}(u)du$. The moment generating function of the Skellam process is

$$\mathbb{E}[e^{\theta S(t)}] = e^{-t(\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_1 e^{\theta} - \lambda_2 e^{-\theta})}, \theta \in \mathbb{R}.$$

The mean, the variance and the covariance function are

$$\mathbb{E}S(t) = (\lambda_1 - \lambda_2)t, \quad \text{Var}S(t) = (\lambda_1 + \lambda_2)t, \\ \text{Cov}(S(t), S(s)) = (\lambda_1 + \lambda_2) \min(t, s), t, s > 0.$$

We will consider Skellam process with time change

$$S_I(t) = S(G(t)) = N_1(G(t)) - N_2(G(t)) \quad (3)$$

where $G(t)$ is a subordinator independent of $N_1(t)$ and $N_2(t)$ and call it Skellam process of type I and process of the form

$$S_{II}(t) = N_1(G_1(t)) - N_2(G_2(t)) \quad (4)$$

where $N_1(t)$, $N_2(t)$ are two independent Poisson processes, and $G_1(t)$, $G_2(t)$ are two independent copies of a subordinator $G(t)$, which are also independent of $N_1(t)$, and $N_2(t)$ and we will call it Skellam process of type II.

To calculate certain values, in this paper we use the Wright function

$$\Phi(\rho, \delta, z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k! \Gamma(\rho k + \delta)}, \quad (5)$$

$z \in C$, $\rho \in (-1, 0) \cup (0, \infty)$, $\delta \in C$; and generalized Mittag-Leffler function

$$\mathcal{E}_{\rho, \delta}^{\gamma}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\gamma + k)}{\Gamma(\gamma)} \frac{z^k}{k! \Gamma(\rho k + \delta)}, \quad (6)$$

$z \in C$, $\rho, \delta, \gamma \in C$. To calculate the mean and second-order moments of time-changed Lévy processes the following result from [3] can be used.

Proposition 1 (see [3]). *If $X(t)$ is a homogeneous Lévy process with $X(0) = 0$, $Y(t)$ is a nondecreasing process independent of $X(t)$ and $Z(t) = X(Y(t))$, then*

$$\mathbb{E}Z(t) = \mathbb{E}X(1)U(t),$$

provided that $\mathbb{E}X(t)$ and $U(t) = \mathbb{E}Y(t)$ exist; and if $X(t)$ and $Y(t)$ have finite second moments, then

$$\text{Var}Z(t) = [\mathbb{E}X(1)]^2 \text{Var}Y(t) + \text{Var}X(1)U(t),$$

$$\text{Cov}(Z(t), Z(s)) = [\mathbb{E}X(1)]^2 \text{Cov}(Y(t), Y(s)) + \text{Var}X(1)U(\min(t, s)).$$

2 Main results

Consider the process $N(G(t))$, where $N(t)$ is the Poisson process with intensity λ and $G(t)$ is the Gamma subordinator with parameters $a, b > 0$. The process $N(G(t))$ has been considered, for example, in [4] and in [5] (in more general case). We will use the following characteristics of $N(G(t))$ (see, [5]):

$$P\{N(G(t)) = k\} = \frac{b^{at} \lambda^k}{k! (\lambda + b)^{at+k}} \frac{\Gamma(at + k)}{\Gamma(at)};$$

$$\mathbb{E}[N(G(t))] = \frac{a}{b} \lambda t; \text{Var}[N(G(t))] = \left(\frac{a}{b^2} \lambda + \frac{a}{b} \right) \lambda t.$$

Laplace transform of $N(G(t))$ is

$$\mathbb{E}\left[e^{-tN(G(t))}\right] = \left(1 + \frac{\lambda(1 - e^{\theta})}{b}\right)^{-at}. \quad (7)$$

Theorem 2.1. *Let $S_I(t)$ be a Skellam process given by formula (3). The marginal distribution is given by*

$$r_k(t) = P(S_I(t) = k) = \int_0^{\infty} e^{-u(\lambda_1 + \lambda_2)} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right)^{\frac{k}{2}} \times I_{|k|} \left(2u\sqrt{\lambda_1\lambda_2} \right) \frac{b^{at}}{\Gamma(at)} u^{at-1} e^{-bu} du, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

The moment generating function is

$$\mathbb{E}\left[e^{\theta S_I(t)}\right] = \left(\frac{\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_1 e^{\theta} - \lambda_2 e^{-\theta}}{b} + 1 \right)^{-at}. \quad (8)$$

Доведення. We use conditioning argument to write

$$r_k(t) = \int_0^\infty s_k(u)h(u, t)du, \quad (9)$$

where $s_k(t) = P(S(t) = k)$, $h(u, t)$ is the density of $G(t)$. Inserting in (9) the expressions for $h(u, t)$ and $s_k(t)$, which are given by (1), (2), we obtain distribution $r_k(t)$.

The moment generating function is computed using that of the Poisson process. For the Skellam process of type I we have

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[e^{\theta S_I(t)} \right] &= \int_0^\infty \mathbb{E} \left[e^{\theta S_I(u)} \right] h(u, t) du \\ &= \left(\frac{1}{b} \left(\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_1 e^\theta - \lambda_2 e^{-\theta} \right) + 1 \right)^{-at}. \end{aligned}$$

□

We now calculate the moments of $S_I(t)$. Since $G(t) \sim \Gamma(\alpha t, \beta)$, we have:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(G(t)) &= \frac{\alpha t}{\beta}, \quad \mathbb{E}(G(t))^2 = \frac{\alpha t(\alpha t + 1)}{\beta^2}, \\ \text{Cov}(G(t), G(s))^2 &= \frac{\alpha}{\beta^2} \min(t, s). \end{aligned}$$

Therefore, from Propositions 1. we obtain:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} S_I(t) &= \frac{a}{b} (\lambda_1 - \lambda_2) t; \\ \text{Var} S_I(t) &= \left(\frac{a}{b^2} (\lambda_1 - \lambda_2)^2 + \frac{a}{b} (\lambda_1 + \lambda_2) \right) t; \\ \text{Cov}(S_I(t), S_I(s)) &= \left(\frac{a}{b^2} (\lambda_1 - \lambda_2)^2 \right) \min(t, s) \\ &\quad + \left(\frac{a}{b} (\lambda_1 + \lambda_2) \right) \min(t, s). \end{aligned}$$

Time-changed Skellam processes of type II were considered in [4], in the case when $N_1(t)$ and $N_2(t)$ have the same parameters, that is, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$. In the next theorem we consider more general case, when λ_1 and λ_2 may be different, and we express the distribution in terms of the Wright function.

Theorem 2.2. Let $S_{II}(t)$ be a Skellam process presented by formula (4).

Its probability mass function for $k \in \mathbb{Z}, k \geq 0$ is given by:

$$\begin{aligned} P \{ S_{II}(t) = k \} &= \frac{b^{2at} \lambda_1^k}{(\Gamma(at))^2} \\ &\times \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(\lambda_1+b)w - (\lambda_2+b)z} w^{at+k-1} z^{at-1} \\ &\times \Phi(1, k+1, \lambda_1 \lambda_2 w z) dw dz; \end{aligned}$$

and for $k < 0$ it is given by

$$\begin{aligned} P \{ S_{II}(t) = k \} &= \frac{b^{2at} \lambda_2^{|k|}}{(\Gamma(at))^2} \\ &\times \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(\lambda_1+b)w - (\lambda_2+b)z} w^{at-1} z^{at+|k|-1} \\ &\times \Phi(1, |k|+1, \lambda_1 \lambda_2 w z) dw dz. \end{aligned}$$

The moment generating function is

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[e^{\theta S_{II}(t)} \right] &= \left(1 + \frac{\lambda_1(1 - e^\theta)}{b} \right)^{-at} \\ &\times \left(1 + \frac{\lambda_2(1 - e^{-\theta})}{b} \right)^{-at}. \end{aligned} \quad (10)$$

Доведення. Since $N_1(G_1(t))$ and $N_2(G_2(t))$ are independent then:

$$\begin{aligned} P \{ S_{II}(t) = k \} &= \sum_{m=0}^\infty P [N_1(G_1(t)) = m + k] \\ &\times P [N_2(G_2(t)) = m] I_{k \geq 0} \\ &+ \sum_{m=0}^\infty P [N_1(G_1(t)) = m] \\ &\times P [N_2(G_2(t)) = m + k] I_{k < 0}. \end{aligned} \quad (11)$$

From (11) we obtain that for $k \geq 0$:

$$\begin{aligned} P \{ S_{II}(t) = k \} &= \sum_{n=0}^\infty \frac{b^{at} \lambda_1^{n+k} \Gamma(at + n + k)}{(n+k)! \Gamma(at) (\lambda_1 + b)^{at+n+k}} \\ &\times \frac{b^{at} \lambda_2^n \Gamma(at + n)}{n! \Gamma(at) (\lambda_2 + b)^{at+n}} = \frac{b^{2at} \lambda_1^k}{(\Gamma(at))^2} \\ &\times \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(\lambda_1+b)w - (\lambda_2+b)z} w^{at+k-1} z^{at-1} \\ &\times \sum_{n=0}^\infty \frac{(\lambda_1 \lambda_2 w z)^n}{n! \Gamma(n+k+1)} dw dz = \frac{b^{2at} \lambda_1^k}{(\Gamma(at))^2} \\ &\times \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(\lambda_1+b)w - (\lambda_2+b)z} w^{at+k-1} z^{at-1} \\ &\times \Phi(1, k+1, \lambda_1 \lambda_2 w z) dw dz. \end{aligned}$$

In the analogous way we obtain the result for $k < 0$.

The moment generating function is computed using that of the Poisson process. Using the formula (7) for the Skellam process of type II we

have

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[e^{\theta S_{II}(t)} \right] &= \mathbb{E} \left[e^{\theta N_1(G_1(t))} \right] \mathbb{E} \left[e^{\theta N_2(G_2(t))} \right] \\ &= e^{-at \log \left(1 + \frac{\lambda_1(1-e^\theta)}{b} \right)} e^{-at \log \left(1 + \frac{\lambda_2(1-e^{-\theta})}{b} \right)} \\ &= \left(1 + \frac{\lambda_1(1-e^\theta)}{b} \right)^{-at} \left(1 + \frac{\lambda_2(1-e^{-\theta})}{b} \right)^{-at}. \end{aligned}$$

□

Remark 1. We can also obtain the other representation for distribution of the process $S_{II}(t)$.

1. In terms of the modified Bessel function of the first kind, we obtain for $k \geq 0$:

$$\begin{aligned} P \{ S_{II}(t) = k \} &= \frac{b^{2at} \lambda_1^k}{(\Gamma(at))^2} \\ &\times \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(\lambda_1+b)w - (\lambda_2+b)z} w^{at+\frac{k}{2}-1} z^{at-\frac{k}{2}-1} \\ &\times I_k(2\lambda_1\lambda_2\sqrt{wz}) dw dz; \end{aligned}$$

and the analogous expression for $k < 0$.

2. In terms of the three-parameter generalized Mittag-Leffler function, we obtain for $k \geq 0$:

$$\begin{aligned} P \{ S_{II}(t) = k \} &= \frac{b^{2at} \lambda_1^k}{(\lambda_2 + b)^{at} (\lambda_1 + b)^{at+k} \Gamma(at)} \\ &\times \int_0^\infty e^{-(\lambda_1+b)w} w^{at+k-1} \\ &\times \mathcal{E}_{1,k+1}^{at} \left(\left(\frac{\lambda_1 \lambda_2 w}{(\lambda_2 + b)(\lambda_1 + b)} \right)^n \right) dw, \end{aligned}$$

and the analogous expression for $k < 0$.

Moments of the process $S_{II}(t)$ can be calculated from the moment generating function which is given by (10). We have, in particular,

$$\begin{aligned} \mathbb{E} S_{II}(t) &= \frac{a}{b} (\lambda_1 - \lambda_2) t; \\ \text{Var} S_{II}(t) &= \left(\frac{a}{b^2} (\lambda_1^2 + \lambda_2^2) + \frac{a}{b} (\lambda_1 + \lambda_2) \right) t. \end{aligned}$$

Список використаних джерел

1. Barndorff-Nielsen O. E. Integer-valued Levy processes and low latency financial econometrics / Barndorff-Nielsen O. E., Pollard D., Shephard N. // Quant. Finance. – 2011. – **12**, №4. – P. 587–605.
2. Skellam J. G. The frequency distribution of the difference between two Poisson variables belonging to different populations / Skellam J. G. // J. of the Royal Statistical Society. – 1946. – **A**. – P. 109–296.
3. Leonenko N. Correlation Structure of Time-Changed Lévy Processes / Leonenko N., Meerschaert M., Schilling R., Sikorskii A. // Communications in Applied and Industrial Mathematics. – 2014. – **6**, N1. – P. 22.
4. Orsingher E. Counting processes with Bernstein intertimes and random jumps / Orsingher E., Toaldo B. // Journal of Applied Probability. – 2015. – **52**. – P. 1028–1044.
5. Кобилич Х. В. Точкові процеси керовані складними процесами Пуассона / Кобилич Х. В., Сахно Л. М. // Теорія ймовірностей та математична статистика. – 2016. – **94**. – С. 85–92.

References

1. BARNDORFF-NIELSEN, O. E., POLLARD, D. and SHEPHARD, N. (2011), “Integer-valued Levy processes and low latency financial econometrics”, *Quant. Finance*, **12**, №4, pp. 587–605.
2. SKELLAM, J. G. (1946), “The frequency distribution of the difference between two Poisson variables belonging to different populations”, *J. of the Royal Statistical Society*, Ser. A, pp. 109–296.
3. LEONENKO, N., MEERSCAERT, M., SCHILLING, R. and SIKORSKII, A. (2014), “Correlation Structure of Time-Changed Lévy Processes”, *Communications in Applied and Industrial Mathematics*, Vol. 6, №1, p. 22.
4. ORSINGER, E. and TOALDO, B. (2015), “Counting processes with Bernstein intertimes and random jumps”, *Journal of Applied Probability*, **52**, pp. 1028–1044.
5. KOBLYCH, K. V. and SAKHNO, L. M. (2016), “Point processes subordinated to compound Poisson processes”, *Theory of Probability and Mathematical Statistics*, **94**, pp. 85–92.

Received: 30.01.2016

УДК 512.552

В.М. Журавльов¹, к.ф.-м.н., доцент
Д.В. Журавльов², к.ф.-м.н.
О.А. Шевченко³, студентка

**Допустимі сагайдаки та черепичні
порядки скінченної глобальної
розмірності в $M_n(D)$, $n \leq 6$**

^{1,2,3}Київський національний університет
імені Тараса Шевченка, Україна, 01601, м. Ки-
їв, вул. Володимирська, 64
E-mail: ¹vshur@univ.kiev.ua

V.M. Zhuravlev¹, Ph.D., Associate Professor
D.V. Zhuravlev², Ph.D.
O.A. Shevchenko³, student

**Admissible quivers and tiled orders of
finite global dimension in $M_n(D)$, $n \leq 6$**

^{1,2,3}Taras Shevchenko National University of
Kyiv, 01033, Kyiv, 64 Volodymyrska st.
E-mail: ¹vshur@univ.kiev.ua

У роботі вивчаються черепичні порядки в $M_n(D)$ скінченної глобальної розмірності та їхні сагайдаки. Для черепичного порядку Λ над дискретно нормованим кільцем $\mathcal{O}$ з єдиним максимальним ідеалом $\mathfrak{m}$ і для незвідної Λ -гратки M В.А. Ятегаонкар навів необхідні і достатні умови для того, щоб $\Lambda/\mathfrak{m}\Lambda$ -модуль $M/\mathfrak{m}M$ розкладався в пряму суму підмодулів. При цьому проєктивна розмірність гратки M і глобальна розмірність черепичного порядку Λ дорівнюють нескінченності. Ми наводимо необхідні і достатні умови для того, щоб для черепичного порядку Λ існувала така незвідна гратка. І кажемо, що черепичний порядок Λ задовольняє умову Ятегаонкара, якщо такої гратки не існує. Черепичний порядок скінченної глобальної розмірності задовольняє умову Ятегаонкара.

Крім сагайдака $Q(\Lambda)$ розглядається простий граф $G(\Lambda)$, який будується за порядком Λ . Якщо граф $G(\Lambda)$ зв'язний, то Λ задовольняє умову Ятегаонкара і сума всіх елементів матриці показників не перевищує $(n-1)n(n+1)/6$. При $n \leq 6$ ми отримали необхідні і достатні умови для того, щоб черепичний порядок Λ з незв'язним графом $G(\Lambda)$ задовольняв умову Ятегаонкара. При цьому глобальна розмірність таких порядків дорівнює нескінченності.

Ключові слова: черепичний порядок, допустимий сагайдак, глобальна розмірність.

We analyze tiled orders in $M_n(D)$ of finite global dimension and their quivers. For tiled order Λ on a discrete valuation ring $\mathcal{O}$ with unitary maximum ideal $\mathfrak{m}$ and irreducible Λ -lattice M V.A. Jategaonkar gave necessary and sufficient conditions for $\Lambda/\mathfrak{m}\Lambda$ - module $M/\mathfrak{m}M$ decomposes into direct sum of submodules. Herewith projective dimension of the lattice M and the global dimension of the tiled order Λ are equal to infinity. We give necessary and sufficient conditions so that an irreducible lattice exists for the tiled order Λ . We say that tiled order Λ satisfies Jategaonkar's condition, if such lattice doesn't exist. Tiled order of the finite global dimension satisfies Jategaonkar's condition.

Besides quiver $Q(\Lambda)$ we considered a simple graph $G(\Lambda)$, that is built by order of Λ . If the graph $G(\Lambda)$ is connected, then Λ satisfies Jategaonkar's condition and the sum of all elements of the exponent matrix does not exceed $(n-1)n(n+1)/6$. If $n \leq 6$, we received necessary and sufficient conditions that tiled order Λ with a disconnected graph $G(\Lambda)$ satisfies Jategaonkar's condition. Herewith the global dimension of such orders is equal to infinity.

Key words: tiled order, admissible quiver, global dimension of tiled orders.

Communicated by Prof. Kirichenko V.V.

1 Introduction

The concept of tiled order entered I.Kaplansky. His student R.Tarsi studying global dimension tiled orders of a local dedekindovym ring. V.A. Jategaonkar in [3] studied the global dimension tiled order Λ on a discrete valuation ring $\mathcal{O}$ with

unitary maximum ideal $\mathfrak{m}$. We say that the tiled order Λ satisfies Jategaonkar's condition, if such irreducible Λ -lattice doesn't exist, that $\Lambda/\pi\Lambda$ -module $M/\mathfrak{m}M$ decomposes into direct sum of modules. Tiled order of the finite global dimension satisfies Jategaonkar's condition. H.Fujita in [6] posed the question: if $\text{gl.dim } \Lambda < \infty$, then

$\sum_{i,j=1}^n \alpha_{ij} \leq \frac{(n-1)n(n+1)}{6}$ (here $(\alpha_{ij}) = \mathcal{E}(\Lambda)$ is exponent matrix tiled order Λ).

In this paper we give an affirmative answer to the question Fujita for orders with a connected graph $G(\Lambda)$ and for tiled orders in $M_n(D)$, $n \leq 6$.

2 Tiled orders

Let $\Lambda = \{\mathcal{O}, \mathcal{E}(\Lambda) = (\alpha_{ij})\}$ be a reduced tiled order on a discrete valuation ring $\mathcal{O}$ with unitary maximum ideal $\mathfrak{m} = \pi\mathcal{O}$, where π is a prime element. V.A. Jategaonkar gave necessary and sufficient conditions, that $\Lambda/\pi\Lambda$ -module $M/\mathfrak{m}M$ decomposes into direct sum of modules for an irreducible Λ -lattice M . Herewith projective dimension of grade M is equal to infinity.

Lemma 1. [3] Let $\Lambda = (\mathfrak{m}^{\lambda_{ij}}) \subseteq M_n(\mathbb{R})$ be a tiled R -order. Let $\bar{\Lambda} = \Lambda/\Lambda\mathfrak{m}$. Let $A = (R, R, \dots, R)$ be a free left R -module of rank n . Treat A as a right Λ -module naturally. If $B = (\mathfrak{m}^{\alpha_1}, \mathfrak{m}^{\alpha_2}, \dots, \mathfrak{m}^{\alpha_n}) \subseteq A$, where $0 \leq \alpha_i$ are integers, then If B is a Λ -submodule of A , then $\bar{B} = B/B\mathfrak{m} = (\mathfrak{m}^{\alpha_1}/\mathfrak{m}^{\alpha_1+1}, \dots, \mathfrak{m}^{\alpha_s}/\mathfrak{m}^{\alpha_s+1}, 0, \dots, 0) \oplus (0, \dots, 0, \mathfrak{m}^{\alpha_{s+1}}/\mathfrak{m}^{\alpha_{s+1}+1}, \dots, \mathfrak{m}^{\alpha_n}/\mathfrak{m}^{\alpha_n+1})$ as right $\bar{\Lambda}$ -modules if and only if $\lambda_{ij} \geq \alpha_j - \alpha_i$ for all i, j ; $\lambda_{ij} > \alpha_j - \alpha_i$ for $1 \leq i \leq s < j \leq n$; and $\lambda_{ij} > \alpha_j - \alpha_i$ for $1 \leq j \leq s < i \leq n$. Further, if these conditions hold, then $hd_{\Lambda} B = \infty$.

Generalization of Lemma 1.

Lemma 2. Let $\Lambda = \{\mathcal{O}, \mathcal{E}(\Lambda) = (\alpha_{ij})\}$ be a reduced tiled order in $M_n(D)$ on a discrete valuation ring $\mathcal{O}$ with prime element π , $\bar{\Lambda} = \Lambda/\pi\Lambda$, M be irreducible Λ -lattice where $\mathcal{E}(M) = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $\mathfrak{m} = \pi\mathcal{O}$. $\bar{\Lambda}$ -module $\bar{M} = M/\mathfrak{m}M$ decomposes into direct sum of submodules if and only if exist partition of indices $I = \{1, \dots, n\} = I_1 \cup I_2$, $I_1 \cap I_2 = \emptyset$, that $\alpha_{ij} \geq \alpha_j - \alpha_i$ and $\alpha_{ji} \geq \alpha_i - \alpha_j$ for all $i \in I_1, j \in I_2$.

Let $\Lambda = \{\mathcal{O}, \mathcal{E}(\Lambda) = (\alpha_{ij})\}$ be reduced tiled order.

Proposition 1. Exist bijection between irreducible Λ -lattice and isomorphic transformations of I-st type of tiled order Λ , where exponent matrix remains non-negative.

Proof. Let M be irreducible right Λ -lattice with $\mathcal{E}(M) = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$. Then for all i, j :

$$\alpha_i + \alpha_{ij} \geq \alpha_{ij}. \quad (1)$$

Consider tiled order $A = \{\mathcal{O}, \mathcal{E}(A) = (a_{ij})\}$, that is isomorphic to Λ and $\mathcal{E}(A)$ is received from $\mathcal{E}(\Lambda)$ transformations of I-st type: to each element of i -row $\mathcal{E}(\Lambda)$ add α_i , distract α_i from i -column. Then

$$a_{ij} = \alpha_{ij} + \alpha_i - \alpha_j \quad (2)$$

From (1) $a_{ij} \geq 0$. Therefore $\mathcal{E}(A) \geq 0$.

Vice versa, let (2) sets an isomorphic transformation of I-st type of a tiled order Λ , where $a_{ij} \geq 0$. Then inequality (1) holds.

So long as bijection exists between irreducible Λ -valuation and integer vectors $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, for which inequality (1) holds, $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \mathcal{E}(M)$ for some irreducible right Λ -valuation. $\square$

Theorem 1. Let Λ be reduced tiled order. Irreducible Λ -valuation, that $\Lambda/\pi\Lambda$ -module $M/\mathfrak{m}M$ decomposes into direct sum of modules, exists if and only if $\Lambda \simeq A = \{\mathcal{O}, \mathcal{E}(A) = (a_{ij})\}$, where $\mathcal{E}(A) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$, $\mathcal{E}(A) \geq 0$, $A_{21} \geq 2U_{21}$, $U_{21} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$.

Proof. Let $\Lambda = \{\mathcal{O}, \mathcal{E}(\Lambda) = (\alpha_{ij})\}$, $\mathcal{E}(\Lambda) \in M_n(\mathbb{Z})$ and M – irreducible Λ -valuation, $\mathcal{E}(M) = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ that $\Lambda/\pi\Lambda$ -module $M/\mathfrak{m}M$ decomposes into direct sum of modules. Then there exists partition of indices $I = \{1, \dots, n\}$ into two subsets $I_1, I_2 : I = I_1 \cup I_2, I_1 \cap I_2 = \emptyset$, so that:

$$\begin{aligned} \alpha_i + \alpha_{ij} &> \alpha_{ij}, \\ \alpha_j + \alpha_{ji} &> \alpha_{ji} \end{aligned} \quad (3)$$

for all $i \in I_1, j \in I_2, |I_1| = m$.

Lets consider tiled order $B = \{\mathcal{O}, \mathcal{E}(B) = (b_{ij})\}$, that is isomorphic to Λ and $\mathcal{E}(B)$ gets received from $\mathcal{E}(\Lambda)$ transformations of I-st type: $\mathcal{E}(B)$. Then due to the proposition $b_{ij} \geq 0$ for all i, j . Moreover, from (3) $b_{ij} > 0$ and $b_{ji} > 0$ for all $i \in I_1, j \in I_2$.

Let $|I_1| = m$ and $C = \{\mathcal{O}, \mathcal{E}(C) = (c_{ij})\}$ be tiled order, that is isomorphic to B and $\mathcal{E}(C)$ is received from $\mathcal{E}(B)$ by isomorphic transformations of II-nd type: $c_{ij} = b_{\tau(i)\tau(j)}$, where $\tau(k) \in \{1, 2, \dots, m\}$, if $k \in I_1$, $\tau(k) \in \{m+1, \dots, n\}$, if $k \in I_2$.

Herewith $\mathcal{E}(C) = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix}$, where $\mathcal{E}(C) \geq 0, C_{11} \in M_m(\mathbb{Z}), C_{12} \geq U_{12}, C_{21} \geq U_{21}$.

Consider tiled order $A = \{\mathcal{O}, \mathcal{E}(A) = (a_{ij})\}$, that is isomorphic to C and $\mathcal{E}(A)$ is received from

by isomorphic transformations of I-st type: for all $i \leq m$ from elements of i-row distract 1, to i-column add 1. Then $\mathcal{E}(A) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} =$

$$\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} - U_{12} \\ C_{21} + U_{21} & C_{22} \end{pmatrix} \geq 0 \text{ i } A_{21} \geq 2U_{21}.$$

Vice versa, let $\Lambda \simeq A = \{\mathcal{O}, \mathcal{E}(A) = (\alpha_{ij})\}$, where $A_{11} \in M_m(\mathbb{Z})$. Consider irreducible A -lattice N with $\mathcal{E}(N) = (\underbrace{1, \dots, 1}_m, 0, \dots, 0) =$

$(\beta_1, \dots, \beta_n)$. Then

$$a_{ij} > \alpha_j - \alpha_i = 0 - 1, \quad a_{ji} > \alpha_i - \alpha_j = 1 - 0$$

for all $i \leq m - j$. According to $1/A/\pi A$ -module $N/\mathbf{m}N$ decomposes into direct sum of modules. As far as $\Lambda \simeq A$, irreducible Λ -lattice M with this property exists. $\square$

Definition 2.1. Lets say that tiled order Λ satisfies Jategaonkar's condition, if such irreducible Λ -lattice doesn't exist, that $\Lambda/\pi\Lambda$ -module $M/\mathbf{m}M$ decomposes into direct sum of modules.

Proposition 2. Tiled order $\Lambda = \{\mathcal{O}, \mathcal{E}(\Lambda) = (\alpha_{ij})\}$, for which graph $G(\Lambda)$ is connected, satisfies Jategaonkar's condition.

Proof. Indeed, for any fragmentation $I = \{1, \dots, n\}$ into 2 subsets I_1 and I_2 , $i \in I_1, j \in I_2$ exist, which are connected by an edge of graph G , and thus $\alpha_{ij} + \alpha_{ji} = 1$. This is why Λ satisfies Jategaonkar's condition. $\square$

Proposition 3. Let Λ be a tiled order with exponent matrix $\mathcal{E}(\Lambda) = (\alpha_{ij}) \in M_n(\mathbb{Z})$. Then for every i $\sum_{j=1}^n (\alpha_{ij} + \alpha_{ji}) \leq \frac{(n-1)n}{2}$.

Proof. We can consider that $i = 1$ and $\alpha_{1j} = 0$ for all j . Lets change rows and columns $\mathcal{E}(\Lambda)$, so that $\alpha_{i+1,1} \geq \alpha_{i,1}$ for all i . Then according to lemma 2.2 [3] $\alpha_{i,1} \leq i - 1$. So $\sum_{j=1}^n (\alpha_{ij} + \alpha_{ji}) \leq \sum_{j=1}^n (j - 1) = \frac{(n-1)n}{2}$. $\square$

Theorem 2. Let Λ be reduced tiled order with exponent matrix $\mathcal{E}(\Lambda) = (\alpha_{ij}) \in M_n(\mathbb{Z})$ and graph $G(\Lambda)$ is connected. Then $d = \sum_{i,j=1}^n \alpha_{ij} \leq \frac{(n-1)n(n+1)}{6}$.

Proof. Lets prove induction by n , that elements of exponent matrix $(\alpha_{ij}) \in M_n(\mathbb{Z})$ with

connected graph G satisfies inequality $\sum_{i,j=1}^n \alpha_{ij} \leq \frac{(n-1)n(n+1)}{6}$.

$n = 3$ is base of induction. Since G is a connected graph, we can consider that $\alpha_{12} + \alpha_{21} = 1 = \alpha_{23} + \alpha_{32}$. Then $\alpha_{13} + \alpha_{31} \leq (\alpha_{12} + \alpha_{23}) + (\alpha_{32} + \alpha_{21}) = 2$ i $\sum_{i,j=1}^3 \alpha_{ij} \leq 1 + 1 + 2 = \frac{(n-1)n(n+1)}{6}$.

Lets make an assumption, that the inequality is true for any $k < n$ (connected graph G). Let $I = \{1, \dots, n\} = I_1 \cup I_2$, $I_1 \cap I_2 = \emptyset$ – such partition, that full subgraphs G_1 and G_2 with sets of vertices I_1 and I_2 accordingly are connected. Such partition exists. It is enough to divide the spanning tree of graph G on 2 subtrees. We can consider that $I_1 = \{1, 2, \dots, m\}$, $I_2 = \{m+1, \dots, n\}$. According to

this partition $\Lambda = \begin{pmatrix} \Lambda_{11} & \Lambda_{12} \\ \Lambda_{21} & \Lambda_{22} \end{pmatrix}$ $G(\Lambda_{11}) = G(\Lambda)|_{I_1}$ $G(\Lambda_{22}) = G(\Lambda)|_{I_2}$

According to induction assumption: $\sum_{i,j=1}^m \alpha_{ij} \leq \frac{(m-1)m(m+1)}{6}$, $\sum_{i,j=m+1}^n \alpha_{ij} \leq \frac{(n-m-1)(n-m)(n-m+1)}{6}$.

$i \leq m$ and $j > m$ exist, such as $\alpha_{ij} + \alpha_{ji} = 1$. $\sum_{p=1}^m \sum_{q=m+1}^n \alpha_{pq} \leq \sum_{p=1}^m \sum_{q=m+1}^n (\alpha_{pi} + \alpha_{ij} + \alpha_{jq}) \leq (n-m) \sum_{p=1}^m \alpha_{pi} + m(n-m) \alpha_{ij} + m \sum_{q=m+1}^n \alpha_{jq}$, $\sum_{p=1}^m \sum_{q=m+1}^n \alpha_{qp} \leq \sum_{p=1}^m \sum_{q=m+1}^n (\alpha_{qj} + \alpha_{ji} + \alpha_{ip}) \leq m \sum_{q=m+1}^n \alpha_{qj} + m(n-m) \alpha_{ji} + (n-m) \sum_{p=1}^m \alpha_{ip}$.

Then $\sum_{p,q=1}^n \alpha_{pq} = \sum_{p,q=1}^m \alpha_{pq} + \sum_{p,q=m+1}^n \alpha_{pq} + \sum_{p=1}^m \sum_{q=m+1}^n (\alpha_{pq} + \alpha_{qp}) \leq \frac{(m-1)m(m+1)}{6} + \frac{(n-m-1)(n-m)(n-m+1)}{6} + (n-m) \sum_{p=1}^m (\alpha_{pi} + \alpha_{ip}) + m(n-m)(\alpha_{ij} + \alpha_{ji}) + m \sum_{q=m+1}^n (\alpha_{jq} + \alpha_{qj})$.

According to proposition 3 $\sum_{p=1}^m (\alpha_{pi} + \alpha_{ip}) \leq \frac{(m-1)m}{2}$, $\sum_{q=m+1}^n (\alpha_{jq} + \alpha_{qj}) \leq \frac{(n-m-1)(n-m)}{2}$.

Therefore $\sum_{p,q=1}^n \alpha_{pq} \leq \frac{(m-1)m(m+1)}{6} + \frac{(n-m-1)(n-m)(n-m+1)}{6} + (n-m) \frac{(m-1)m}{2} + m(n-m) + m \frac{(n-m-1)(n-m)}{2} = \frac{(n-1)n(n+1)}{6}$. $\square$

Let $Q = (VQ, AQ)$ be a quiver of a tiled order.

Definition 2.2. A simple cycle in a quiver $Q = (VQ, AQ)$, weight of which is equal to 1, we will call *unitary*.

3 Tiled orders in $M_n(D)$, $n \leq 6$ satisfying Jategaonkar's condition

Let $Q = Q(\Lambda)$ be a quiver of a tiled order Λ . Consider subquiver $\overline{Q}$, that is received from quiver Q by $V\overline{Q} = VQ$ and arrow from vertex i to vertex j in $\overline{Q}$ exists if and only if this arrow is in Q and $\alpha_{ij} + \alpha_{ji} = 1$.

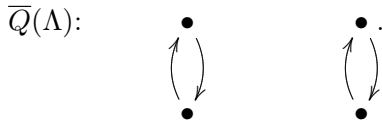
According to tiled order Λ we build a simple graph $G = G(\Lambda)$: set of vertices of a graph matches with set of vertices of quiver Q . Points i and j are connected with an edge if and only if $\alpha_{ij} + \alpha_{ji} = 1$.

It is obvious, that G and $\overline{Q}$ are connected or disconnected simultaneously. Besides that, if G is a connected graph, tiled order Λ satisfies Jategaonkar's condition.

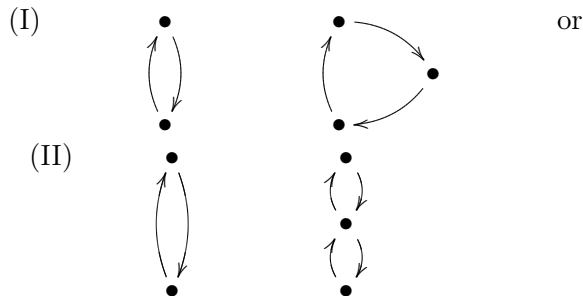
Let G be a disconnected graph. We can consider two-sided Peirce decomposition of order Λ have the following form: $\Lambda = \begin{pmatrix} \Lambda_{11} & \Lambda_{12} \\ \Lambda_{21} & \Lambda_{22} \end{pmatrix}$ and $G(\Lambda) = G(\Lambda_{11}) \cup G(\Lambda_{22})$. Also $\overline{Q}(\Lambda) = \overline{Q}(\Lambda_{11}) \cup \overline{Q}(\Lambda_{22})$.

If a tiled order Λ lies in $M_n(D)$, where $n \in \{4, 5\}$, then $\overline{Q}(\Lambda_{11}), \overline{Q}(\Lambda_{22})$ are connected quivers.

At $n = 4$ $\overline{Q}(\Lambda_{11})$ and $\overline{Q}(\Lambda_{22})$ – two-point cycle.



At $n = 5$ $\overline{Q}(\Lambda)$ looks like:



According to quiver $\overline{Q}(\Lambda)$ we can build all possible quivers $Q(\Lambda)$.

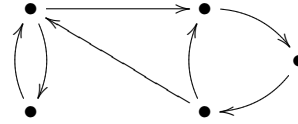
For $n = 4$ we receive 8 possible quivers $Q(\Lambda)$. For $n = 5$ when (I) we receive 24 possible quivers $Q(\Lambda)$, when (II) we receive 72 possible quivers.

Theorem 3. Let Λ be reduced tiled order in $M_n(D)$ with a disconnected graph $G(\Lambda)$, $\Lambda = \begin{pmatrix} \Lambda_{11} & \Lambda_{12} \\ \Lambda_{21} & \Lambda_{22} \end{pmatrix}$ be two-sided Peirce decomposition of Λ order and $G(\Lambda) = G(\Lambda_{11}) \cup G(\Lambda_{22})$. Order Λ for $n \in \{4, 5\}$ satisfies Jategaonkar's condition if and only if $i_1, i_2 \in VG(\Lambda_{11}), j_1, j_2 \in VG(\Lambda_{22})$ exist, that $\alpha_{i_1 j_1} + \alpha_{j_1 i_2} + \alpha_{i_2 j_2} + \alpha_{j_2 i_1} < 4$.

Proof. Let Λ be reduced tiled order in $M_n(D)$, $n \in \{4, 5\}$ and graph $G(\Lambda)$ is disconnected. Then $Q(\Lambda)$ is one of possible 8 quivers at $n = 4$ and one of possible 96 quivers at $n = 5$. Let $\Lambda = \begin{pmatrix} \Lambda_{11} & \Lambda_{12} \\ \Lambda_{21} & \Lambda_{22} \end{pmatrix}$ be two-sided Peirce decomposition of Λ order and $G(\Lambda) = G(\Lambda_{11}) \cup G(\Lambda_{22})$. We can consider that Λ_{11} is in $M_2(D)$. Because graph $G(\Lambda)$ is disconnected, every cycle of quiver $Q(\Lambda)$, that consists $G(\Lambda_{11})$ vertices as well as $G(\Lambda_{22})$ vertices, has weight more than 1.

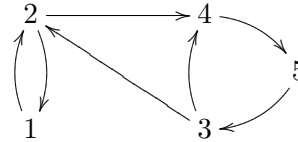
The verification shows that at $n = 4$ only 1 quiver is a quiver of tiled order Λ , that fits theorem conditions, when $n = 5$ it is 8.

Lets show that for one of possible quivers Q



tiled order Λ doesn't exist, that satisfies theorem condition and $Q(\Lambda) = Q$.

Lets assume that Q is admissible, $Q = Q(\Lambda)$ for some $\Lambda = \{\mathcal{O}, \mathcal{E}(\Lambda) = (\alpha_{ij})\}$. Then according to the theorem a weight function $w : AQ \rightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}$, exists, besides that $w(\sigma_{ij}) = \alpha_{ij}$ for arrow σ_{ij} .



We get:

$$\alpha_{12} + \alpha_{21} = 1, \quad \alpha_{34} + \alpha_{45} + \alpha_{53} = 1, \\ \alpha_{32} + \alpha_{24} + \alpha_{45} + \alpha_{53} \geq 2.$$

We can consider that $\alpha_{1j} = 0$ for all j . Then

$$\alpha_{12} = \alpha_{24} = \alpha_{45} = \alpha_{53} = 0, \\ \alpha_{21} = \alpha_{34} = 1, \alpha_{32} \geq 2.$$

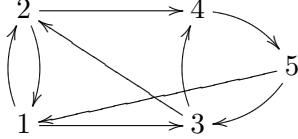
We receive

$$\mathcal{E}(\Lambda) = \left(\begin{array}{cc|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \alpha_{32} + 1 & \alpha_{32} & 0 & 1 & 1 \\ \alpha_{32} + 1 & \alpha_{32} & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_{32} + 1 & \alpha_{32} & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \text{ and the tiled}$$

order doesn't satisfy Jategaonkar's condition.

Now we show that for one of possible quivers

Q



a tiled order Λ exists, that satisfies theorem condition and $Q(\Lambda) = Q$.

We get $\alpha_{12} + \alpha_{21} = 1$, $\alpha_{34} + \alpha_{45} + \alpha_{53} = 1$ and

$$\begin{aligned} \alpha_{24} + \alpha_{45} + \alpha_{53} + \alpha_{32} &\geq 2, \\ \alpha_{24} + \alpha_{45} + \alpha_{51} + \alpha_{12} &\geq 2, \\ \alpha_{13} + \alpha_{32} + \alpha_{21} &\geq 2, \\ \alpha_{13} + \alpha_{34} + \alpha_{45} + \alpha_{51} &\geq 2. \end{aligned} \quad (4)$$

We consider that $\alpha_{1j} = 0$ for all j . Then

$$\begin{aligned} \alpha_{12} = \alpha_{13} = 0, \alpha_{21} = 1, \alpha_{45} = 0, \\ \alpha_{14} = \min(\alpha_{24}, \alpha_{34}) = 0. \end{aligned}$$

Possible cases:

(a) $\alpha_{24} < \alpha_{34}$. Then $\alpha_{24} = 0$, $\alpha_{34} = 1$, $\alpha_{53} = 0$

From (4) we get $\alpha_{32} \geq 2$, $\alpha_{51} \geq 2$.

Besides

$$\begin{aligned} \alpha_{32} &< \alpha_{34} + \alpha_{45} + \alpha_{51} + \alpha_{12} = \alpha_{51} + 1, \\ \alpha_{51} &< \alpha_{53} + \alpha_{32} + \alpha_{21} = \alpha_{32} + 1. \end{aligned}$$

From here $\alpha_{32} < \alpha_{51} + 1 < \alpha_{32} + 2$ and $\alpha_{51} = \alpha_{32}$

$$\mathcal{E}(\Lambda) = \left(\begin{array}{cc|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \alpha_{32} + 1 & \alpha_{32} & 0 & 1 & 1 \\ \alpha_{32} & \alpha_{32} & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_{32} & \alpha_{32} & 0 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

Λ doesn't satisfy Jategaonkar's condition.

(b) $\alpha_{34} < \alpha_{24}$. Then $\alpha_{34} = 0$, $\alpha_{53} = 1$. Besides $\alpha_{24} < \alpha_{21} + \alpha_{13} + \alpha_{34} = 1$ Received a contradiction.

(c) $\alpha_{24} = \alpha_{34}$. Then $\alpha_{24} = \alpha_{34} = 0$, $\alpha_{53} = 1$. From (4) we get $\alpha_{32} \geq 1$, $\alpha_{51} \geq 1$. Moreover

$$\begin{aligned} \alpha_{51} &< \alpha_{53} + \alpha_{32} + \alpha_{21} = \alpha_{32} + 2, \\ \alpha_{32} &< \alpha_{34} + \alpha_{45} + \alpha_{51} + \alpha_{12} = \alpha_{51}. \end{aligned}$$

From here $\alpha_{32} < \alpha_{51} < \alpha_{32} + 2$ and $\alpha_{51} = \alpha_{32} + 1$.

$$\mathcal{E}(\Lambda) = \left(\begin{array}{cc|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline \alpha_{32} + 1 & \alpha_{32} & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_{32} + 1 & \alpha_{32} + 1 & 1 & 0 & 0 \\ \alpha_{32} + 1 & \alpha_{32} + 1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

When $\alpha_{32} \geq 2$ tiled order Λ doesn't satisfy Jategaonkar's condition.

When $\alpha_{32} = 1$ Λ satisfies Jategaonkar's condition. Besides $\alpha_{25} + \alpha_{51} + \alpha_{13} + \alpha_{32} = 3 < 4$. $\square$

Conclusion: Let Λ be a reduced tiled order in $M_n(D)$ with disconnected graph $G(\Lambda)$, $\Lambda = \{\mathcal{O}, \mathcal{E}(\Lambda) = (\alpha_{ij})\}$. At $n = 4$ with accuracy to isomorphism unitary reduced tiled order Λ exists with a disconnected graph $G(\Lambda)$, that satisfies Jategaonkar's condition, when $n = 5$ it is 8.

$$\begin{aligned} n=4 & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ n=5 & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Proposition 4. Let Λ be reduced tiled order in $M_n(D)$ with a disconnected graph $G(\Lambda)$, $\Lambda = \begin{pmatrix} \Lambda_{11} & \Lambda_{12} \\ \Lambda_{21} & \Lambda_{22} \end{pmatrix}$ be two-sided Peirce decomposition of Λ , $G(\Lambda) = G(\Lambda_{11}) \cup G(\Lambda_{22})$ and exist $i_1, i_2, \dots, i_s \in VG(\Lambda_{11})$, $j_1, j_2, \dots, j_s \in VG(\Lambda_{22})$, that $\alpha_{i_1 j_1} + \alpha_{j_1 i_2} + \alpha_{i_2 j_2} + \alpha_{j_2 i_3} + \dots + \alpha_{i_s j_s} + \alpha_{j_s i_1} < 2s$. Then order Λ satisfies Jategaonkar's condition.

Proof. $G(\Lambda_{11}), G(\Lambda_{22})$ are connected.

Suppose that Λ doesn't satisfy Jategaonkar's condition. Then $\Lambda \simeq A = \{\mathcal{O}, \mathcal{E}(A) = (a_{ij})\}$, where $\mathcal{E}(A) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$, $\mathcal{E}(A) \geq 0$, $A_{21} \geq 2U_{21}$. $\mathcal{E}(A)$ is received from $\mathcal{E}(\Lambda)$ by isomorphic transformations of I-st type. Therefore $a_{ij} = \alpha_{ij} + \alpha_i - \alpha_j$ for some set $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n, \alpha_k \in \mathbb{Z}\}$. As far as $A_{12} \geq 0$ i $A_{21} \geq 2U_{21}$, $a_{i_1 j_1} + a_{j_1 i_2} + a_{i_2 j_2} +$

$\dots + a_{i_s j_s} + a_{j_s i_1} \geq 2s$. But $a_{i_1 j_1} + a_{j_1 i_2} + a_{i_2 j_2} + \dots + a_{j_s i_1} = (\alpha_{i_1 j_1} + \alpha_{i_1} - \alpha_{j_1}) + (\alpha_{j_1 i_2} + \alpha_{j_1} - \alpha_{i_2}) + (\alpha_{i_2 j_2} + \alpha_{i_2} - \alpha_{j_2}) + \dots + (\alpha_{j_s i_1} + \alpha_{j_s} - \alpha_{i_1}) = \alpha_{i_1 j_1} + \alpha_{j_1 i_2} + \alpha_{i_2 j_2} + \dots + \alpha_{j_s i_1} < 2s$.

Contradiction received. So Λ satisfies Jategaonkar's condition. $\square$

Corollary 1. Let Λ be reduced tiled order in $M_n(D)$ with a disconnected graph $G(\Lambda)$ and for arbitrary partition $G(\Lambda) = G_1 \cup G_2, G_1 \cap G_2 = \emptyset$ exist $i_1, \dots, i_s \in VG_1, i_1, \dots, i_s \in VG_1$, that $\alpha_{i_1 j_1} + \alpha_{j_1 i_2} + \alpha_{i_2 j_2} + \alpha_{j_2 i_3} + \dots + \alpha_{i_s j_s} + \alpha_{j_s i_1} < 2s$. Then order Λ satisfies Jategaonkar's condition.

In [5] describe up to isomorphism all reduced orders in $M_6(D)$ of finite global dimension were described. For this, first of all, were calculated up to isomorphism all reduced orders in $M_6(D)$, that satisfies Jategaonkar's condition. Among 1497

these orders 512 have disconnected graph $G(\Lambda)$.

Result analysis [5], [4] give the following theorem.

Theorem 4. Let Λ be reduced tiled order in $M_n(D)$, $n \leq 6$ with disconnected graph $G(\Lambda)$, $\Lambda = \begin{pmatrix} \Lambda_{11} & \Lambda_{12} \\ \Lambda_{21} & \Lambda_{22} \end{pmatrix}$ be two-sided Peirce decomposition of Λ order and $G(\Lambda) = G(\Lambda_{11}) \cup G(\Lambda_{22})$. Then

(1) Λ satisfies Jategaonkar's condition, if and only if exist $i_1, i_2, \dots, i_s \in VG(\Lambda_{11}), j_1, j_2, \dots, j_s \in VG(\Lambda_{22})$ $s \leq 3$, that $\alpha_{i_1 j_1} + \alpha_{j_1 i_2} + \alpha_{i_2 j_2} + \alpha_{j_2 i_3} + \dots + \alpha_{i_s j_s} + \alpha_{j_s i_1} < 2s$;

(2) If Λ satisfies Jategaonkar's condition, then $d(\Lambda) < \frac{(n-1)n(n+1)}{6}$;

(3) $gl.dim \Lambda = \infty$.

Question: If $gl.dim \Lambda < \infty$ is graph $G(\Lambda)$ connected?

Список використаних джерел

1. Hazewinkel M. Algebras, Rings and Modules / M. Hazewinkel, N. Gubareni and V.V. Kirichenko // Mathematics and Its Applications, **586**, Kluwer Acad. Publish. – 2007. – V.2. – P. 400.
2. Журавлёв В.Н. Допустимые колчаны / В.Н.Журавлёв // Фундаментальная и прикладная математика. – 2008. – №7. – Т.14 – С. 121 – 128.
3. Jategaonkar V. A. Global dimension of tiled orders over a discrete valuation ring / V. A. Jategaonkar // Trans. Amer. Math. Soc., **196**. – 1974. – P. 313–330.
4. Fujita H. Tiled orders of finite global dimension / H. Fujita // Trans. Amer. Math. Soc., v.**322** – 1990. – P. 329–342.
5. Журавльов В.М. Черепичні порядки в $M_6(D)$ скінченної глобальної розмірності. / В.М.Журавльов, Д.В.Журавльов // Препринт, НАН України, Інститут математики, Київ – 2013. – С. 35.
6. Fujita H. Neat idempotents and tiled orders having large global dimension / H. Fujita // J. Algebra. – 2002. – v.**256**. – P. 194–210.

References

1. HAZEWINDEL, M, GUBARENI, N. AND KIRICHENKO, V.V.(2007) Algebras, Rings and Modules. *Series: Mathematics and Its Applications*, **586**, Kluwer Acad. Publish. 2. pp.400.
2. ZHURAVLEV V. N.(2008) Admissible quivers. *Fundamentalnaya i prikladnaya matematika*. 14(7).pp.121-128.
3. JATEGAONKARY V. A. (1974) Global dimension of tiled orders over a discrete valuation ring. *Trans. Amer. Math. Soc.***196**. pp.313–330.
4. FUJITA H. (1990) Tiled orders of finite global dimension/ *Trans. Amer. Math. Soc.* Volume 322, pp. 329–342.
5. ZHURAVLEV V. N., ZHURAVLEV D. V. (2013) Tiled orders in $M_6(D)$ of the finite global dimension. *Preprint, NAS of Ukraine, Institute of mathematics, Kyiv* – pp.35.
6. FUJITA H. (2002) Neat idempotents and tiled orders having large global dimension *J.Algebra*. Volume 256, – pp. 194–210.

Received: 24.02.2016

УДК 519.21

В.С.Лучко¹, к.ф.-м.н., асистент
А.П.Петравчук², д.ф.-м.н., професор
О.М.Шевчик³, аспірант

Про асоціативні алгебри з двома великими нільпотентними підалгебрами

¹Чернівецький національний університет ім. Ю.Федьковича, 58012, Чернівці, вул. Коцюбинського, 2.

^{2,3}Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 01033, Київ, вул. Володимирська, 64.
e-mail: ²apetrav@gmail.com

V.S.Luchko¹, Ph.D., assistant professor,
A.P.Petravchuk², doctor of science, professor
O.M.Shevchyk³, Ph.D student

On associative algebras that have two large nilpotent subalgebras

¹Yuriy Fedkovich Chernivtsi National University, 58012, Chernivtsi, 2, Kotsubinsky str.,

^{2,3}Taras Shevchenko National University of Kyiv, 01033, Kyiv, 64 Volodymyrska str.,
e-mail: ²apetrav@gmail.com

Відомо, що асоціативне кільце R яке є сумою $R = A + B$ двох нільпотентних підкілець A і B є нільпотентним кільцем. Цей відомий результат О.Кегеля узагальнювався багато разів в різних напрямках (для різних обмежень на кільце R або на доданки A і B). В даній роботі дано узагальнення на нескінченно вимірні асоціативні алгебри над полями: якщо алгебра R над полем містить дві нільпотентні підалгебри A і B такі, що $\dim R/(A+B) < \infty$, то алгебра R містить нільпотентний ідеал скінченної корозмірності.

Ключові слова: асоціативна алгебра, нільпотентна підалгебра, лівий ідеал, сума підкілець, анулятор підкілець

It is known that an associative ring R that is a sum $R = A + B$ of two nilpotent subrings A and B is nilpotent. This known result of O.Kegel was generalized in many directions (under some restrictions on the ring R or on the subrings A and B). We give a generalization of this result on infinite dimensional associative algebras over fields: if an algebra R has two nilpotent subalgebras A and B such that $\dim R/(A+B) < \infty$ then the ring R possesses a nilpotent ideal of finite codimension.

Key Words: associative algebra, nilpotent subalgebra, left ideal, sum of subrings, annihilator of a subring

Статтю представив доктор фізико-математичних наук, професор В.В.Кириченко

1 Вступ

Вивченню асоціативних кілець R , які є сумою $R = A + B$ двох своїх підкілець A і B з певними властивостями присвячено багато робіт різних авторів. Велика кількість результатів в цій області пов'язані з відомою теоремою О.Кегеля [7] про нільпотентність асоціативного (не обов'язково комутативного) кільця, яке є сумою двох своїх нільпотентних підкілець. Відзначимо також результати К.Бейдара і А.Міхалєва [5] і [4] про асоціативні алгебри, які є сумою двох своїх PI -алгебр, де доведено (при певних обмеженнях), що сума двох кілець з поліноміальною тотожністю є знову кільцем, яке задовольняє певну поліноміальну тотожність (див. також [2], [3]). Одним із узагальнень нільпотентних алгебр над полями є майже нільпотентні алгебри (асоціативна алгебра R над полем називається майже нільпотентною, якщо R містить нільпотентний ідеал скінченної корозмірності).

В роботі [10] було доведено, що будь-яка асоціативна алгебра R (над довільним полем), яка розкладається в суму $R = A + B$ двох майже нільпотентних підалгебр A і B (як підпросторів над основним полем) майже нільпотентна. Але при доведенні цього результату була використана некоректна лема 13 із цієї роботи і тому доведення було неповним. Повне доведення цього твердження, а також теореми 14 із роботи [10], яке базується на іншому підході було дано в роботі [8]. У даній роботі ми доводимо більш загальне твердження, розглядаючи асоціативні алгебри R , які близькі до сум своїх нільпотентних підалгебр, а саме вивчаємо асоціативні алгебри R над полем, які містять дві нільпотентні підалгебри A і B такі, що їх сума

$A + B$ (як векторних підпросторів) має скінченну корозмірність в алгебрі R . Насправді, ми можемо розглядати тільки випадок, коли обидві підалгебри A і B нескінченновимірні, оскільки загальний випадок може бути легко зведений до даного випадку використовуючи результати роботи [9].

Нехай A – ненульова нільпотентна алгебра над довільним полем $\mathbb{K}$. Натуральне число n (яке залежить від алгебри A) таке, що

$$A^n = 0, \quad A^{n-1} \neq 0$$

будемо називати індексом нільпотентності нільпотентної алгебри A і позначати через $n(A)$. Індекс нільпотентності нульової алгебри покладемо рівним 1.

Позначення в роботі стандартні: основне поле $\mathbb{K}$, над яким розглядаються всі асоціативні алгебри, довільне; якщо a – елемент асоціативної алгебри A , то лівий (правий) анулятор елемента визначається як

$$\text{Ann}_A^l(a) = \{r \in A \mid ra = 0\}$$

і, відповідно,

$$\text{Ann}_A^r(a) = \{r \in A \mid ar = 0\}.$$

Легко бачити, що лівий анулятор елемента $a \in A$ є лівим ідеалом алгебри A , а правий анулятор – правим ідеалом A . Далі, нехай U, V – підпростори векторного простору W над полем $\mathbb{K}$. Підпростір V будемо називати для зручності скінченновимірним над U , якщо $\dim(V+U)/U < \infty$.

Асоціативну алгебру A будемо називати майже нільпотентною, якщо вона містить нільпотентний ідеал скінченної корозмірності. Через $\bar{n}(A)$ будемо позначати найменший індекс нільпотентності всіх нільпотентних ідеалів скінченної корозмірності майже нільпотентної алгебри A (легко бачити, що $\bar{n}(A)$ визначено коректно). Двосторонні ідеали алгебри R часто будемо називати просто ідеалами. В подальшому ми будемо використовувати наступне майже очевидне твердження: якщо $W_1, \dots, W_k$ – підпростори векторного простору V і $\dim V/W_i < \infty, i = 1, \dots, k$, то перетин $\bigcap_{i=1}^k W_i$ всіх цих підпросторів має також скінченну корозмірність в просторі V .

При доведенні основного результату ми використовуємо лему 4, яка є виправленою версією лемі 13 з роботи [10]: нехай R – асоціативна алгебра над довільним полем і I правий

(лівий) майже нільпотентний ідеал в R . Тоді R містить нільпотентний ідеал T такий, що підалгебра $(I+T)/T$ фактор-алгебри R/T є скінченновимірним розширенням ідеалу J/T з властивістю $(J/T)^2 = 0$. Зауважимо, що в лемі 13 із [10] стверджувалося, що ідеал I міститься в деякому двосторонньому майже нільпотентному ідеалі алгебри R , що не завжди виконується.

2 Властивості підалгебр і ідеалів, які близькі до нільпотентних

Наступний результат може бути легко отриманий з використанням елементарних властивостей лінійних відображень векторних просторів над полями довільної характеристики.

Лема 1. (див., наприклад, [6]) Нехай R – асоціативна алгебра над полем $\mathbb{K}$ і V – $\mathbb{K}$ -підпростір з R скінченної корозмірності в R . Тоді для кожного елемента $a \in R$ існує $\mathbb{K}$ -підпростір $V_a \subseteq V$ скінченної корозмірності в V такий що

$$aV_a \subseteq V, \quad V_a a \subseteq V.$$

Вкажемо також деякі стандартні твердження про нільпотентні ідеали і підалгебри асоціативних алгебр.

Лема 2. (див., наприклад, [1] або [10]). Нехай A – асоціативна алгебра і I – ідеал алгебри A . Якщо J є ідеалом підалгебри I , то мають місце твердження:

(1) якщо підалгебра J нільпотентна, то J лежить в деякому нільпотентному ідеалі J_I алгебри A і $J_I \subseteq I$;

(2) якщо підалгебра J скінченновимірна, то J лежить в ідеалі J_I алгебри A такому що, що $J_I \subseteq I$ і J_I містить нільпотентний ідеал T алгебри A з властивістю $\dim J_I/T < \infty$.

(3) якщо асоціативна алгебра R має ідеал I , який є розширенням нільпотентної алгебри за допомогою скінченновимірної алгебри і фактор-алгебра R/I має таку ж властивість, то алгебра R є також розширенням нільпотентної алгебри за допомогою скінченновимірної алгебри.

В наступній лемі ми даємо коротке (і інше) доведення основного результату роботи [9]. Це твердження часто буде використовуватися в подальшому.

Лема 3. Нехай R – асоціативна алгебра над довільним полем і A – підалгебра із R скінченної корозмірності в R . Тоді в підалгебрі A міститься ідеал I алгебри R , який має скінченну корозмірність в R .

Доведення. Виберемо яку-небудь систему представників $\{g_1, \dots, g_n\}$ суміжних класів векторного простору R за підпростором A . За лемою 1 для кожного елемента g_i із цієї системи існує підпростір B_i із підалгебри A такий, що

$$g_i B_i \subseteq A, \quad B_i g_i \subseteq A, \quad i = 1, \dots, n$$

і при цьому $\dim A/B_i < \infty, i = 1, \dots, n$. Позначимо через B перетин всіх цих підпросторів, тобто $B = \bigcap_{i=1}^n B_i$. Тоді B має скінченну корозмірність в A (а тому і в R) і $g_i B \subseteq A, B g_i \subseteq A$ для всіх $i = 1, \dots, n$. Звідси випливає, що

$$BR = B(g_1 + A + \dots + g_n A) \subseteq A,$$

оскільки $BA \subseteq A$ і $B g_i \subseteq A, i = 1, \dots, n$ за відзначеним вище. Аналогічно можна показати, що $RB \subseteq A$. Позначимо через $\langle B \rangle$ підалгебру, породжену в A підпростором B . Тоді, як неважко перекоонатися, виконуються співвідношення

$$R\langle B \rangle \subseteq A, \quad \langle B \rangle R \subseteq A.$$

Замінімо тепер в проведених міркуваннях підалгебру A на підалгебру $\langle B \rangle$, яка очевидно, має скінченну корозмірність в алгебрі R . Тоді отримаємо підпростір $C \subseteq \langle B \rangle$ такий, що C має скінченну корозмірність в B (а тому і в алгебрі R). Як і раніше розглянемо підалгебру $\langle C \rangle$, породжену підпростором C , яку для зручності позначимо через D . Далі, розглянемо підпростір векторного простору R вигляду $I = D + RD + DR + RDR$. Це, очевидно, двосторонній ідеал алгебри R і, оскільки $D \subseteq I$, то ідеал I має скінченну корозмірність в алгебрі R . При цьому, очевидно,

$$RD \subseteq A, \quad DR \subseteq A$$

за побудовою підалгебри D . Крім того,

$$RDR \subseteq \langle B \rangle R \subseteq A$$

і тому $I \subseteq A$. Таким чином, ми побудували ідеал скінченної корозмірності із R , який лежить в підалгебрі A . $\square$

Лема 4. Нехай R – асоціативна алгебра над довільним полем $\mathbb{K}$, I – правий (лівий) майже нільпотентний ідеал алгебри R . Тоді R містить нільпотентний ідеал T такий, що підалгебра $I + T/T$ фактор-алгебри R/T є скінченновимірним розширенням деякого ідеалу S/T (алгебри $I + T/T$) з властивістю $(S/T)^2 = 0$.

Доведення. Нехай J – який-небудь нільпотентний ідеал правого ідеалу I скінченної корозмірності в I (такий ідеал існує, оскільки I – майже нільпотентна алгебра). Тоді $JR \subseteq I$ і, очевидно,

$$\dim(J + JR)/J < \infty,$$

тобто правий ідеал JR скінченновимірний над J . Тоді існує $\mathbb{K}$ -підпростір

$$J_0 \subseteq J, \quad \dim J/J_0 < \infty$$

такий що $J_0 \cdot JR \subseteq J$. Дійсно, виберемо повну множину $\{g_1, \dots, g_k\}$ представників суміжних класів з фактор-простору $J + JR/J$. За лемою 1 існує $\mathbb{K}$ -підпростір $J_i \subseteq J$ такий, що

$$J_i \cdot g_i \subseteq J, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

і при цьому виконуються умови $\dim J/J_i < \infty$. Тоді, очевидно, для $\mathbb{K}$ -підпростору $J_0 = \bigcap_{i=1}^n J_i$ виконуються співвідношення $J_0 g_i \subseteq J, i = 1, \dots, n$ і $\dim J/J_0 < \infty$. Оскільки $J_0 J \subseteq J$, то ми маємо $J_0 JR \subseteq J$. Але тоді $(J_0 J)R \subseteq J$, а це означає, що

$$J_0 J + J_0 JR \subseteq J$$

і тому сума

$$J_0 J + J_0 JR$$

є правим ідеалом алгебри R , який міститься в J . Але тоді $J_0 J + J_0 JR$ – нільпотентний правий ідеал алгебри R і тому за лемою 2 $J_0 J + J_0 JR$ лежить в деякому двосторонньому нільпотентному ідеалі T алгебри R . У фактор-алгебрі $\bar{R} = R/T$ виконується рівність $\bar{J}_0 \bar{J} = 0$, де

$$\bar{J}_0 = J_0 + T/T, \quad \bar{J} = J + T/T.$$

З цього співвідношення випливає, що $\bar{J}_0^2 = 0$ (а тому $\bar{J}_0$ – підалгебра із $\bar{R}$) і $\bar{J}_0$ має скінченну корозмірність в просторі $\bar{I} = I + T/T$. З огляду на лему 3 $\bar{J}_0$ містить ідеал $\bar{S} = S/T$ підалгебри $\bar{I}$ такий, що $\bar{S}^2 = 0$ і $\bar{S}$ має скінченну корозмірність в $\bar{I}$. Лему доведено. $\square$

Наслідок 1. Якщо R – напівпервинна асоціативна алгебра над полем і I – майже нільпотентний лівий (правий) ідеал, то I є скінченновимірним розширенням деякого ідеалу J (алгебри I) такого, що $J^2 = 0$.

Лема 5. Нехай R – асоціативна алгебра над довільним полем $\mathbb{K}$ і нехай A – підалгебра із R така, що $\text{Ann}_R^r(A)$ (або $\text{Ann}_R^l(A)$) має скінченну корозмірність в R . Тоді підалгебра A міститься в деякому двосторонньому майже нільпотентному ідеалі T алгебри R .

Доведення. Розглянемо випадок, коли правий анулятор $\text{Ann}_R^r(A)$ має скінченну корозмірність в R і позначимо для зручності $S = \text{Ann}_R^r(A)$. Виберемо повну систему представників $\{g_1, \dots, g_k\}$ суміжних класів R/S . Тоді

$$A + AR = A + A\left(\sum_{i=1}^k (g_i + S)\right) = A + \sum_{i=1}^k Ag_i$$

і $A + AR$ є правим ідеалом алгебри R , який містить підалгебру A . За лемою 1 для кожного елемента $g_i, i = 1, \dots, k$ існує $\mathbb{K}$ -підпростір $S_i \subseteq S$ скінченної корозмірності в S такий що $g_i S_i \subseteq S$. Тоді перетин $T = \bigcap_{i=1}^k S_i$ має скінченну корозмірність в S (а тому і в R) і при цьому, очевидно, $g_i T \subseteq S, i = 1, \dots, k$. Але тоді $Ag_i T \subseteq AS = 0$ і тому $(A + AR)T = 0$. Замінюючи A на $A + AR$ в умові леми, можна зразу вважати, що підалгебра A із умови леми є правим ідеалом алгебри R . Звідси зразу випливає, що $S = \text{Ann}_R^r(A)$ є двостороннім ідеалом алгебри R . Крім того, перетин $S_0 = A \cap S$ є, очевидно, правим ідеалом алгебри R і $S_0^2 = 0, \dim A/S_0 < \infty$. Двосторонній ідеал $U = S_0 + RS_0$ алгебри R нільпотентний (оскільки S_0 – правий нільпотентний ідеал із R) і, як неважко переконатися, $\dim A + U/U < \infty$. В фактор-алгебрі $\bar{R} = R/U$ скінченновимірна підалгебра $\bar{A} = A + U/U$ має правий анулятор скінченної корозмірності. Тому за лемою 12 із роботи [10] підалгебра $\bar{A}$ міститься в деякому майже нільпотентному ідеалі $\bar{J}$ алгебри $\bar{R}$. Тому повний прообраз J ідеала $\bar{J}$ є майже нільпотентним ідеалом алгебри R , який містить підалгебру A . $\square$

Наступні дві технічні леми містяться в роботі [10].

Лема 6. (див., [10], Лема 11). Якщо I – односторонній скінченновимірний ідеал асоціативної алгебри A , то A містить деякий нільпотентний ідеал J такий що $(I + J)/J$ лежить в деякому скінченновимірному (двосторонньому) ідеалі фактор-алгебри A/J .

Лема 7. (див., [10], Лема 12). Нехай A асоціативна алгебра над довільним полем F і a – елемент із A такий, що

$$\dim A/\text{Ann}_A^r(a) < \infty, (\dim A/\text{Ann}_A^l(a) < \infty).$$

Тоді елемент a належить деякому скінченновимірному правому (відповідно лівому) ідеалу алгебри A .

3 Основна теорема

Лема 8. Нехай R – асоціативна алгебра над довільним полем, яка розкладається в суму $R = A + B$ своїх правих (лівих) майже нільпотентних ідеалів A і B . Тоді алгебра R майже нільпотентна.

Доведення. За лемою 4 в алгебрі R існують нільпотентні ідеали S і T такі, що в фактор-алгебрі R/S правий ідеал $A + S/S$ містить ідеал I/S з $(I/S)^2 = 0$ скінченної корозмірності в $A + S/S$ і аналогічно в фактор-алгебрі R/T правий ідеал $B + T/T$ містить ідеал J/T з $(J/T)^2 = 0$ скінченної корозмірності в $B + T/T$. Переходячи (якщо потрібно) до фактор-алгебри R/N , де $N = I + J$, можна зразу вважати, що праві ідеали A і B в умові леми містять ідеали I (відповідно, J) скінченної корозмірності в A (відповідно, в B) такі, що $I^2 = J^2 = 0$.

Розглянемо спочатку випадок, коли $\mathbb{K}$ -підпростір IJ скінченновимірний. Тоді для довільного елемента $i_0 \in I$ анулятор $\text{Ann}_R^r(i_0)$ має скінченну корозмірність в R . За лемою 7 елемент i_0 належить деякому скінченновимірному правому ідеалу алгебри R . Але тоді $i_0 J$ міститься в цьому скінченновимірному ідеалі. Оскільки $\dim IJ < \infty$, то звідси випливає, що IJ міститься в деякому скінченновимірному ідеалі M алгебри R . За лемою 5 добуток IJ лежить в деякому майже нільпотентному ідеалі U алгебри R . В фактор-алгебрі $\bar{R} = R/U$ праві ідеали $A + U/U$ і $B + U/U$ містять ідеали $\bar{I} = I + U/U$ і $\bar{J} = J + U/U$ скінченної корозмірності в $A + U/U$ (відповідно, $B + U/U$) такі, що $\bar{I}\bar{J} = 0$. Але тоді в фактор-алгебрі $\bar{R} = R/U$

правий анулятор $\text{Ann}_{\overline{R}}(\overline{I})$ має скінченну корозмірність (оскільки містить суму $\overline{I} + \overline{J}$) і тому за лемою 5 $\overline{I}$ міститься в деякому майже нільпотентному ідеалі алгебри R . Аналогічно можна показати, що $\overline{J}$ лежить в деякому майже нільпотентному ідеалі алгебри R . Використовуючи лему 2 можна показати, що тоді фактор-алгебра $\overline{R} = R/U$ містить майже нільпотентний ідеал скінченної корозмірності. Але тоді з огляду на лему 3 алгебра $\overline{R} = R/U$ майже нільпотентна. Звідси випливає, що і алгебра R майже нільпотентна.

Нехай тепер добуток IJ нескінченновимірний. Оскільки $IJ \subseteq A$, то перетин $IJ \cap I$ має скінченну корозмірність в IJ . Оскільки, як неважко переконатися, $(IJ \cap I)(I + J) = 0$, то $IJ \cap I$ має правий анулятор в алгебрі R скінченної корозмірності в R . Тоді за лемою 5 перетин $IJ \cap I$ міститься в деякому майже нільпотентному ідеалі S алгебри R . В фактор-алгебрі $\overline{R} = R/S$ добуток $\overline{I}\overline{J}$ має вже скінченну розмірність над полем $\mathbb{K}$, де $\overline{I} = I + S/S$, $\overline{J} = J + S/S$. За доведеним вище фактор-алгебра R/S майже нільпотентна. Але тоді і алгебра R майже нільпотентна за лемою 2. Лему доведено. $\square$

Теорема 1. *Нехай R – асоціативна алгебра над довільним полем, A і B – її нільпотентні підалгебри. Якщо $\dim R/(A + B) < \infty$, то алгебра R майже нільпотентна.*

Доведення. Якщо хоча б одна з підалгебр A або B скінченновимірна, то використовуючи лему 3 легко показати, що і алгебра R майже нільпотентна. Дійсно, нехай, наприклад, $\dim A < \infty$. Тоді підалгебра B має скінченну ковимірність в алгебрі R і за лемою 3 підалгебра B містить нільпотентний ідеал J алгебри R з $\dim R/J < \infty$. Це означає, що R – майже нільпотентна алгебра.

Далі будемо вважати, що підалгебри A і B нескінченновимірні. Доведемо твердження теореми індукцією за сумою $n(A) + n(B)$ де $n(A)$ і $n(B)$ – індекси нільпотентності нільпотентних підалгебр A і B відповідно. Нехай твердження виконується для будь-якої алгебри R з нільпо-

тентними підалгебрами A і B такими, що

$$\dim R/(A + B) < \infty, \quad n(A) + n(B) < k.$$

Доведемо, що для алгебр з $n(A) + n(B) = k$ твердження теореми також справедливе. Покладемо

$$A_1 = \{x \in R \mid A^{n(A)}x \subset A^{n(A)}\}.$$

Неважко переконатися, що A_1 – підалгебра алгебри R , яка містить підалгебру A (оскільки $A^{n(A)}A = 0$). Оскільки $A^{n(A)}$ є правим нільпотентним ідеалом алгебри A_1 , то підалгебра $A^{n(A)}$ міститься в деякому двосторонньому нільпотентному ідеалі I підалгебри A_1 . За умовою теореми виконується нерівність $\dim R/(A + B) < \infty$ і тому сума

$$A + (A_1 \cap B) = A + B_0,$$

де $B_0 = A_1 \cap B$, має скінченну корозмірність в A_1 . Після переходу до фактор-алгебри $\overline{A}_1 = A_1/I$ ми отримаємо, що $\overline{A} = A + I/I$ і $\overline{B}_0 = (B \cap A_1) + I/I$ нільпотентні і задовольняють умови

$$\dim \overline{A}_1/(\overline{A} + \overline{B}_0) < \infty,$$

$$n(\overline{A}) + n(\overline{B}_0) < n(A) + n(B).$$

Тут ми скористалися тим, що фактор-алгебра $\overline{A} = A + I/I$ має менший індекс нільпотентності ніж підалгебра A . За індуктивним припущенням алгебра $\overline{A}_1 = A_1/I$ майже нільпотентна. Оскільки $A + AR \subseteq A_1$, то правий ідеал алгебри $A + AR$ алгебри R майже нільпотентний. Аналогічно можна показати, що $B + BR$ – правий майже нільпотентний ідеал алгебри R . Сума $A + AR + B + BR$ цих двох правих ідеалів є правим ідеалом алгебри R і за лемою 8 ця сума є майже нільпотентним ідеалом із алгебри R . Легко бачити, що виконується нерівність

$$\dim R/(A + AR + B + BR) < \infty$$

і тому за лемою 2 алгебра R майже нільпотентна. Теорему доведено. $\square$

Список використаних джерел

1. V.A.Andrunakievich, Yu.M.Ryabukhin Radicals of algebras and structure theory/ V.A.Andrunakievich, Yu.M.Ryabukhin // Moscow, Nauka (1979), 495p. (in Russian).
2. Y.Bahturin, A.Giambruno, *Identities of sums of commutative subalgebras*. Rend. Circ. Mat. Palermo (2), 43, (1994), no.2, 250-258.
3. Y.Bahturin, O.H.Kegel, *Universal sums of abelian subalgebras*. Communications in Algebra, 23 (1995), 2975–2990.
4. K.I.Beidar, A.V.Mikhalev, *Generalized polynomial identities and rings which are sums of two subrings*. Algebra i Logika, 34 (1995), no.1, 3-11.
5. K.I.Beidar, A.V.Mikhalev, *On rings which are sums of two PI-subrings*. In book "Fundamentalny voprosy math. i mechan. P.1, Moscow University, 1994.
6. Bilun S.V. On sums of a nilpotent and ideally finite algebras, Algebra and Discrete Mathematics – 2007. – no.3 – ?38-45.
7. O.H.Kegel, *Zur Nilpotenz gewisser assoziativer Ringe*. Math. Ann. 149 (1963), 258– 260.
8. M.Kepeczyk, *On algebras that are sums of two subalgebras satisfying certain polynomial identities*. Publ. Math. Debrecen, 72, no. 3-4, P.257-267.
9. A.Mekey, *On subalgebras of finite codimension*. Stud. sci. math. hung., 27 (1992), 119-123.
10. Petravchuk A. On associative algebras which are sums of two almost commutative subalgebras, Publ. Math. Debrecen— 1998.— 53.— P. 191–206.

References

1. ANDRUNAKIEVICH V.A. (1979) RYABUKHIN YU.M. "Radicals of algebras and structure theory" Moscow, Nauka , 495p. (in Russian).
2. BAHTURIN YU., GIAMBRUNO A., "Identities of sums of commutative subalgebras Rend. Circ. Mat. Palermo (2), 43, (1994), no.2, 250-258.
3. BAHTURIN YU., KEGEL O.H. "Universal sums of abelian subalgebras Communications in Algebra, 23 (1995), 2975–2990.
4. BEIDAR K.I., A.V.MIKHALEV A.V., "Generalized polynomial identities and rings which are sums of two subrings" Algebra i Logika, 34 (1995), no.1, 3-11.
5. BEIDAR K.I., A.V.MIKHALEV A.V., "On rings which are sums of two PI -subrings". In book Fundamentalny voprosy math. i mechan., P.1, Moscow University, 1994.
6. BILUN S.V. "On sums of a nilpotent and ideally finite algebras Algebra and Discrete Mathematics – 2007. – no.3 - 38-45.
7. KEGEL O.H. "Zur Nilpotenz gewisser assoziativer Ringe". Math. Ann. 149 (1963), 258–260.
8. M.KEPCZYK M., "On algebras that are sums of two subalgebras satisfying certain polynomial identities". Publ. Math. Debrecen, 72, no. 3-4, P.257-267.
9. MEKEY A., "On subalgebras of finite codimension". Stud. sci. math. hung., 27 (1992), 119-123.
10. PETRAVCHUK A. "On associative algebras which are sums of two almost commutative subalgebras". Publ. Math. Debrecen – 1998. – 53.— P. 191–206.

Received: 27.12.2015

**ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ
РІВНЯННЯ,
МАТЕМАТИЧНА ФІЗИКА
ТА МЕХАНІКА**

УДК 517.9

І. В. Бецко, аспірант

Побудова неперервних розв'язків одного класу систем нелінійних функціонально-різницевих рівнянь

Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут», 03056, м.
Київ, пр. Перемоги, 37,
e-mail: betskoiv@mail.ru

I. V. Betsko, graduate student

Construction of continuous solutions of a class of nonlinear functional-difference equations systems

National Technical University of Ukraine "Kyiv
Polytechnic Institute", 03056, Kyiv-56, Av.
Peremogy, 37
e-mail: betskoiv@mail.ru

Встановлено нові умови існування неперервних розв'язків одного класу систем нелінійних функціонально-різницевих рівнянь, запропоновано метод побудови таких розв'язків та досліджено структуру їх множини.

Ключові слова: різницеві рівняння, функціонально-різницеві рівняння, неперервні обмежені розв'язки.

We consider the structure of a set of continuous solutions of a class of nonlinear functional-difference equations systems and their properties. Under various assumptions, the difference equations have been the object of research of many mathematicians, the development of their theory acquired a number of currents. Today this theory is widely branching and already has a lot of tangible results. Especially it concerns the existence of different kinds of solutions (analytic, continuous and others) and investigation of their properties. Despite this, during the research of numerous theoretical problems connected with them, we have to develop specific methods of solution since methods available do not give desired results.

The objective is to study existence of continuous limited solutions, study the structure of their set and also developing the method of their construction. Performed researches add to already existent works of other mathematicians and facilitate further study of the continuous limited solutions of wider classes of functional-difference equations.

Key words: difference equations, functional -difference equations, continuous limited solutions.

Статтю представив академік НАНУ, д.ф.-м.н., проф. Перестюк М. О.

Дана робота присвячена дослідженню структури розв'язків системи різницевих рівнянь вигляду

$$x(t+1) = Ax(t) + F(t, x(qt)), \quad (1)$$

де $t \in \mathbb{R}$, A – дійсна $(n \times n)$ -матриця, $F(t, x)$ – деяка дійсна неперервна при $t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^n$ вектор-функція, $F(t, 0) \equiv 0$, q – деяка дійсна стала. При різних припущеннях відносно матриці A і вектор-функції $F(t, x)$ окремі класи таких систем рівнянь були основним об'єктом дослідження багатьох математиків і в даний час ряд питань їх теорії досить детально вивчено. Особливо це стосується існування різного роду (аналітичних, неперервних та ін.) розв'язків і дослідження їх властивостей.

Метою даної роботи є вивчення питань існування неперервних обмежених при

$t \in \mathbb{R}^+(\mathbb{R}^-)$ розв'язків, дослідження структури їх множини, а також розробка методу їх побудови.

Розглянемо систему рівнянь (1). Відносно матриці A будемо припускати, що її власні значення $\lambda_i, i = 1, \dots, n$, задовольняють умові

$$|\lambda_i| \neq 0, 1, i = 1, \dots, n.$$

Тоді за допомогою деякої неособливої заміни змінних систему рівнянь (1) можна привести до вигляду

$$y(t+1) = Jy(t) + \tilde{F}(t, y(qt)), \quad (2)$$

де $\tilde{F}(t, 0) \equiv 0, J = \text{diag}(J_1(\lambda_1), \dots, J_m(\lambda_m))$,

$$J_i(\lambda_i) = \begin{pmatrix} \lambda_i & \varepsilon & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_i & \varepsilon & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_i & \varepsilon \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \lambda_i \end{pmatrix},$$

$i = 1, \dots, m, m \leq n$.

Дослідимо систему рівнянь (2) у випадку, коли $t \in \mathbb{R}^+$ і виконуються умови:

- $0 < \lambda_i < 1, i = 1, \dots, m, q > 1$;
- $|\tilde{F}(t, y') - \tilde{F}(t, y'')| \leq L|y' - y''|$, де $t \in \mathbb{R}^+$,
 $y', y'' \in \mathbb{R}^n, L$ — деяка додатна стала,
 $\tilde{F}(t, 0) \equiv 0$;

$$3. \lambda_* > \tilde{\lambda}^q, \lambda^* < \tilde{\lambda} < 1, \Delta = \frac{L(\lambda_*^{-1} + \delta_1)}{1 - (\lambda_*^{-1} + \delta_1)\tilde{\lambda}^q} < 1,$$

$$\delta_1 = \delta_1(\varepsilon) \rightarrow 0 \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0,$$

$$\lambda_* = \min\{\lambda_i, i = 1, \dots, m\}, \lambda^* = \max\{\lambda_i, i = 1, \dots, m\}.$$

Має місце теорема.

Теорема 1. Нехай виконуються умови 1 – 3. Тоді система рівнянь (2) має сім'ю неперервних обмежених при $t \in \mathbb{R}^+$ розв'язків, що залежить від довільної 1-періодичної вектор-функції $\omega(t)$.

Доведення. Покажемо, що система рівнянь (2) має розв'язки у вигляді функціональних рядів

$$y(t) = \sum_{i=0}^{\infty} y_i(t), \quad (3)$$

де $y_i(t), i = 0, 1, \dots$, — деякі неперервні й обмежені при $t \in \mathbb{R}^+$ вектор-функції.

Оскільки

$$\begin{aligned} \tilde{F}(t, y_0(qt)) + \sum_{i=2}^{\infty} \left(\tilde{F}\left(t, \sum_{j=0}^{i-1} y_j(qt)\right) - \tilde{F}\left(t, \sum_{j=0}^{i-2} y_j(qt)\right) \right) = \\ = \tilde{F}\left(t, \sum_{j=0}^{\infty} y_j(qt)\right) \end{aligned}$$

(що буде доведено пізніше), то підставивши (3) в (2), отримуємо

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{\infty} y_i(t+1) = J \sum_{i=0}^{\infty} y_i(t) + \tilde{F}(t, y_0(qt)) + \\ + \sum_{i=2}^{\infty} \left(\tilde{F}\left(t, \sum_{j=0}^{i-1} y_j(qt)\right) - \tilde{F}\left(t, \sum_{j=0}^{i-2} y_j(qt)\right) \right). \end{aligned}$$

Звідси випливає, що якщо вектор-функції $y_i(t), i = 0, 1, \dots$, є розв'язками послідовності систем рівнянь

$$y_0(t+1) = Jy_0(t), \quad (4_0)$$

$$y_1(t+1) = Jy_1(t) + \tilde{F}(t, y_0(qt)), \quad (4_1)$$

$$y_i(t+1) = Jy_i(t) + \tilde{F}\left(t, \sum_{j=0}^{i-1} y_j(qt)\right) - \tilde{F}\left(t, \sum_{j=0}^{i-2} y_j(qt)\right), \quad i = 2, 3, \dots, \quad (4_i)$$

то ряд (3) буде формальним розв'язком системи рівнянь (2).

Розглядаючи послідовно системи рівнянь $(4_i), i = 0, 1, \dots$, можна показати, що вони мають розв'язки у вигляді формальних рядів

$$y_1(t) = - \sum_{j=0}^{\infty} J^{-(j+1)} \tilde{F}(t+j, y_0(q(t+j))), \quad (5_1)$$

$$y_i(t) = - \sum_{j=0}^{\infty} J^{-(j+1)} \left[\tilde{F}\left(t+j, \sum_{j=0}^{i-1} y_j(q(t+j))\right) - \tilde{F}\left(t+j, \sum_{j=0}^{i-2} y_j(q(t+j))\right) \right], \quad i = 2, 3, \dots, \quad (5_i)$$

де $y_0(t)$ є представлення загального розв'язку системи (4_0) .

Для того, щоб (5_i) були розв'язками послідовності систем рівнянь (4_i) достатньо показати, що ці ряди рівномірно збігаються до деяких неперервних вектор-функцій $y_i(t), i = 1, 2, \dots$, для яких виконуються оцінки

$$|y_i(t)| \leq M \Delta^i \tilde{\lambda}^{qt}, \quad i = 1, 2, \dots \quad (6)$$

Приймаючи до уваги представлення загального розв'язку системи (4_0) , отримуємо

$$|y_0(t)| \leq M \tilde{\lambda}^t, \quad (7)$$

де $M = \max_i |\omega_i(t)|$.

Далі, з огляду на (7) та (5_1) отримуємо

$$\begin{aligned} |y_1(t)| &\leq \sum_{j=0}^{\infty} |J^{-1}|^{j+1} |\tilde{F}(t+j, y_0(q(t+j)))| \leq \\ &\leq \sum_{j=0}^{\infty} (\lambda_*^{-1} + \delta_1)^{j+1} L |y_0(q(t+j))| \leq \\ &\leq \sum_{j=0}^{\infty} (\lambda_*^{-1} + \delta_1)^{j+1} LM \tilde{\lambda}^{q(t+j)} \leq \\ &\leq LM (\lambda_*^{-1} + \delta_1) \tilde{\lambda}^{qt} \sum_{j=0}^{\infty} ((\lambda_*^{-1} + \delta_1) \tilde{\lambda}^q)^j \leq \\ &\leq M \frac{L(\lambda_*^{-1} + \delta_1)}{1 - (\lambda_*^{-1} + \delta_1) \tilde{\lambda}^q} \tilde{\lambda}^{qt} \leq M \Delta \tilde{\lambda}^{qt}. \end{aligned}$$

Таким чином, оцінка (6) має місце при $i = 1$. Розмірковуючи за індукцією, припустимо, що вона доведена уже для деякого k , і покажемо, що вона не зміниться при переході від k до $k+1$.

Згідно з (5_{k+1}) і (6) маємо

$$\begin{aligned} |y_{k+1}(t)| &\leq \sum_{j=0}^{\infty} |J^{-1}|^{j+1} \left| \tilde{F}(t+j, \sum_{j=0}^k y_j(q(t+j))) - \right. \\ &\quad \left. - \tilde{F}(t+j, \sum_{j=0}^{k-1} y_j(q(t+j))) \right| \leq \\ &\leq \sum_{j=0}^{\infty} (\lambda_*^{-1} + \delta_1)^{j+1} L |y_k(q(t+j))| \leq \\ &\leq \sum_{j=0}^{\infty} (\lambda_*^{-1} + \delta_1)^{j+1} LM \Delta^k \tilde{\lambda}^{q(t+j)} \leq \\ &\leq LM \Delta^k (\lambda_*^{-1} + \delta_1) \tilde{\lambda}^{q^2 t} \sum_{j=0}^{\infty} \left((\lambda_*^{-1} + \delta_1) \tilde{\lambda}^{q^2} \right)^j \leq \\ &\leq LM \Delta^k (\lambda_*^{-1} + \delta_1) \tilde{\lambda}^{qt} \sum_{j=0}^{\infty} \left((\lambda_*^{-1} + \delta_1) \tilde{\lambda}^q \right)^j \leq \\ &\leq M \Delta^k \frac{L(\lambda_*^{-1} + \delta_1)}{1 - (\lambda_*^{-1} + \delta_1) \tilde{\lambda}^q} \tilde{\lambda}^{qt} \leq M \Delta^{k+1} \tilde{\lambda}^{qt}. \end{aligned}$$

Отже, оцінки (6) мають місце при всіх $i \geq 1$. Цим самим ми довели, що ряди $(5_i), i=1, 2, \dots$, рівномірно збігаються при $t \geq 0$ до деяких неперервних вектор-функцій $y_i(t), i=1, 2, \dots$, які задовольняють оцінки (6). Звідси безпосередньо випливає, що ряд (3), в якому вектор-функції $y_i(t), i=0, 1, \dots$, визначаються співвідношеннями $(5_i), i=0, 1, \dots$, рівномірно збігається до деякої неперервної вектор-функції $y(t)$, яка задовольняє умову

$$|y(t)| \leq \frac{M}{1-\Delta} \tilde{\lambda}^t.$$

Доведемо тепер, що

$$\begin{aligned} \tilde{F}(t, y_0(qt)) + \sum_{i=2}^{\infty} \left(\tilde{F}(t, \sum_{j=0}^{i-1} y_j(qt)) - \tilde{F}(t, \sum_{j=0}^{i-2} y_j(qt)) \right) = \\ = \tilde{F}(t, \sum_{j=0}^{\infty} y_j(qt)). \end{aligned}$$

Дійсно, оскільки при всіх $m \geq 1$ виконуються співвідношення

$$\begin{aligned} \tilde{F}(t, y_0(qt)) + \sum_{i=2}^{m+1} \left(\tilde{F}(t, \sum_{j=0}^{i-1} y_j(qt)) - \tilde{F}(t, \sum_{j=0}^{i-2} y_j(qt)) \right) = \\ = \tilde{F}(t, \sum_{j=0}^m y_j(qt)), \end{aligned}$$

то внаслідок умови 2) теореми отримуємо

$$\left| \tilde{F}(t, \sum_{j=0}^{\infty} y_j(qt)) - \tilde{F}(t, \sum_{j=0}^m y_j(qt)) \right| \leq$$

$$\begin{aligned} \leq L \left| \sum_{j=0}^{\infty} y_j(qt) - \sum_{j=0}^m y_j(qt) \right| \leq L \left| \sum_{j=m+1}^{\infty} y_j(qt) \right| \leq \\ \leq L \sum_{j=m+1}^{\infty} M \Delta^j \tilde{\lambda}^{qt} \leq LM \frac{\Delta^{m+1}}{1-\Delta} \tilde{\lambda}^{qt}. \end{aligned}$$

Отже, в силу умови 3) знайдеться таке натуральне число N , що при всіх $m \geq N$ і довільному, як завгодно малому, $\varepsilon > 0$ має місце нерівність

$$LM \frac{\Delta^{m+1}}{1-\Delta} \tilde{\lambda}^{qt} \leq \varepsilon.$$

Таким чином, для всіх $m \geq N, t \in \mathbb{R}$ виконується нерівність

$$\left| \tilde{F}(t, \sum_{j=0}^{\infty} y_j(qt)) - \tilde{F}(t, \sum_{j=0}^m y_j(qt)) \right| \leq \varepsilon,$$

і, отже, має місце співвідношення

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \tilde{F}(t, \sum_{j=0}^m y_j(qt)) = \tilde{F}(t, \sum_{j=0}^{\infty} y_j(qt)).$$

Цим самим доведено, що ряд

$$\tilde{F}(t, y_0(qt)) + \sum_{i=2}^{\infty} \left(\tilde{F}(t, \sum_{j=0}^{i-1} y_j(qt)) - \tilde{F}(t, \sum_{j=0}^{i-2} y_j(qt)) \right)$$

рівномірно збігається при $t \in \mathbb{R}^+$ і його сума

$$\text{дорівнює } \tilde{F}(t, \sum_{j=0}^{\infty} y_j(qt)).$$

Теорему 1 доведено.

Розглянемо тепер систему рівнянь (2) у випадку, коли $t \leq 0$ і виконуються умови:

1. $\lambda_i > 1, i=1, \dots, m, q > 1$;
2. $|\tilde{F}(t, y') - \tilde{F}(t, y'')| \leq L |y' - y''|$, де $t \in \mathbb{R}$, $y', y'' \in \mathbb{R}^n, L$ — деяка додатна стала, $\tilde{F}(t, 0) \equiv 0$;
3. $\bar{\lambda}^q > \lambda^*, 1 < \bar{\lambda} < \lambda_*, \Delta = \frac{L \bar{\lambda}^{-q}}{1 - (\lambda^* + \delta_2) \bar{\lambda}^{-q}} < 1$,

$$\begin{aligned} \delta_2 = \delta_2(\varepsilon) \rightarrow 0 \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0, \lambda^* = \max\{\lambda_i, i=1, \dots, m\}, \\ \lambda_* = \min\{\lambda_i, i=1, \dots, m\}; \end{aligned}$$

Має місце теорема.

Теорема 2. Нехай виконуються умови 1 – 3. Тоді система рівнянь (2) має сім'ю неперервних і обмежених при $t \leq 0$ розв'язків, що залежить від довільної неперервної 1-періодичної вектор-функції $\omega(t)$.

Доведення. Покажемо, що система рівнянь (2) має розв'язки у вигляді функціональних рядів

$$\bar{y}(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \bar{y}_i(t), \quad (8)$$

де $\bar{y}_i(t), i=0,1,\dots$, – деякі неперервні й обмежені при $t \leq 0$ вектор-функції.

Оскільки ряд

$$\tilde{F}(t, \bar{y}_0(qt)) + \sum_{i=2}^{\infty} \left(\tilde{F}(t, \sum_{j=0}^{i-1} \bar{y}_j(qt)) - \tilde{F}(t, \sum_{j=0}^{i-2} \bar{y}_j(qt)) \right)$$

рівномірно збігається при $t \in \mathbb{R}^-$ (доведення аналогічне тому, яке було проведене в теоремі 1),

і його сума дорівнює $\tilde{F}(t, \sum_{j=0}^{\infty} \bar{y}_j(qt))$, то підставивши (8) в (2), отримуємо

$$\sum_{i=0}^{\infty} \bar{y}_i(t+1) = J \sum_{i=0}^{\infty} \bar{y}_i(t) + \tilde{F}(t, \bar{y}_0(t)) + \sum_{i=2}^{\infty} \left(\tilde{F}\left(t, \sum_{j=0}^{i-1} \bar{y}_j(qt)\right) - \tilde{F}\left(t, \sum_{j=0}^{i-2} \bar{y}_j(qt)\right) \right).$$

Звідки випливає, що якщо вектор-функції $\bar{y}_i(t), i=0,1,\dots$, є розв'язками послідовності систем рівнянь

$$\bar{y}_0(t+1) = J\bar{y}_0(t), \quad (9_0)$$

$$\bar{y}_1(t+1) = J\bar{y}_1(t) + \tilde{F}(t, \bar{y}_0(qt)), \quad (9_1)$$

$$\bar{y}_i(t+1) = J\bar{y}_i(t) + \tilde{F}(t, \sum_{j=0}^{i-1} \bar{y}_j(qt)) - \tilde{F}(t, \sum_{j=0}^{i-2} \bar{y}_j(qt)), \quad i=2,3,\dots, \quad (9_i)$$

то ряд (8) буде формальним розв'язком системи рівнянь (2).

Згідно умовам теореми і представлення загального розв'язку системи (9₀) виконується оцінка

$$|\bar{y}_0(t)| \leq \bar{M} \bar{\lambda}^t.$$

Розглядаючи послідовно системи рівнянь (9_i), $i=1,2,\dots$, можна показати, що ряди

$$\bar{y}_i(t) = \sum_{j=1}^{\infty} J^{j-1} \left[\tilde{F}(t-j, \sum_{j=0}^{i-1} \bar{y}_j(q(t-j))) - \tilde{F}(t-j, \sum_{j=0}^{i-2} \bar{y}_j(q(t-j))) \right], i=1,2,\dots \quad (10_i)$$

рівномірно збігаються до деяких неперервних вектор-функцій $\bar{y}_i(t), i=1,2,\dots$, для яких виконуються оцінки

$$|\bar{y}_i(t)| \leq \bar{M} \Delta^i \bar{\lambda}^{qt}.$$

Звідси випливає, що ряд (8) рівномірно збігається при $t \leq 0$ до деякого неперервного розв'язку $\bar{y}(t)$, який задовольняє умові

$$|\bar{y}(t)| \leq \frac{\bar{M}}{1-\Delta} \bar{\lambda}^t.$$

Теорему 2 доведено.

Список використаних джерел

1. Birkhoff G.D. General theory of linear difference equations. / Birkhoff G. D. – Trans. Amer. Math. Soc. – 1911. – 12. – P. 243 – 284.
2. Пелюх Г.П. Дослідження структури множини неперервних розв'язків систем лінійних функціонально-різницевих рівнянь / Пелюх Г. П., Сівак О. А. // Нелінійні коливання. — 2009. — 12, № 3. — С. 307—335.
3. Бецко І. В. Дослідження структури множини неперервних розв'язків систем різницевих рівнянь / Бецко І. В. // Наукові вісті НТУУ «КПІ». – 2015. – №4. – С. 7 – 13.
4. Бецко І. В. Про існування неперервних розв'язків систем різницевих рівнянь / Бецко І. В. // Нелінійні коливання. – 2016. – 19, №1. – С. 3 – 10.

References

1. BIRKHOFF, G. (1911) General theory of linear difference equations. – Trans. Amer. Math. Soc., 12, pp. 243 – 284.
2. PELYUKH, G., SIVAK, O. (2009) Doslidzhennya struktury mnozhyny neperervnyh rozvyazkiv system liniynuh funktsionalno-riznytsevyh rivnysn. // Neliniyni kolyvannya. – 12, №3. – pp. 307 – 335.
3. BETSKO, I. (2015) Doslidzhennya struktury mnozhyny neperervnyh rozvyazkiv system riznytsevyh rivnysn. // Naukovi visti NTUU "KPI". – №4. – pp. 7 – 13.
4. BETSKO, I (2016) Pro isnuvannya neperervnyh rozvyazkiv system riznytsevyh rivnyan. // Neliniyni kolyvannya. – 19, №1. – pp. 3 – 10.

Надійшла до редколегії 25.10.16

УДК 539.3

Борисейко О. В.¹, к. ф.-м. н., доц.
Шакері Мобаракє Пуян², аспірант
Улітко І. А.³, к. ф.-м. н.

Поздовжні коливання п'єзокерамічного стержня змінного поперечного перерізу

^{1, 2, 3} Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 83000, м. Київ, пр-т.
Глушкова 4е,
e-mail: b12313@ukr.net,
pouyan.shakeri@gmail.com, ulitko@univ.kiev.ua

O. V. Boriseiko¹, Ph.D. (Phys.-Math.), Ass. Prof.
Pouyan Shakeri Mobarakeh², Ph.D. graduate student
I. A. Ulitko³, Ph.D. (Phys.-Math.)

Longitudinal vibrations of piezoceramic bar of variable cross section

^{1, 2, 3} Taras Shevchenko National University of Kyiv,
03680, Kyiv, Acad. Glushkova pr., 4-e,
e-mail: b12313@ukr.net,
pouyan.shakeri@gmail.com, ulitko@univ.kiev.ua

Розглядаються поздовжні коливання поляризованого за товщиною п'єзокерамічного стержня змінного перерізу під дією гармонічного навантаження на електродованих трапецієподібних лицевих гранях. Зміна перерізу вздовж стержня визначається малим кутум між бічними сторонами та висотою трапеції. Завдяки електропружним властивостям матеріалу нелінійне диференціальне рівняння коливань є неоднорідним, а його розв'язок в функціях Бесселя має складну будову. Аналітично визначені резонансні частоти поздовжніх коливань та отримане їх експериментальне підтвердження. Проаналізовано вплив неканонічної форми п'єзоперетворювача на спектр його резонансних частот.

Ключові слова: п'єзостержень, змінний переріз, резонанс, амплітудно-частотна характеристика.

Mathematical modeling of piezoelectric transducers of non-canonical geometry has usually been performed by the means of numerical simulations like finite element method. At this, one can encounter with questions of comparative analysis of gathered numerical results with the analytical formulae for samples of canonical geometry obtained by the means of classical mathematics. Such a comparison is appeared primarily for the amplitude-frequency characteristics (AFC) of the transducers, and the analysis should reflect qualitative changes due to the rejection of the canonical geometry. AFC of the conduction current is clearly related with the dynamic stress-strain state of piezoelectric transducer. Therefore, appearance or disappearance of certain resonances of the transducer of non-canonical geometry indicate the global restructuring of all of its mechanical variables and conjugate electric field. However, to get a meaningful interpretation of these global changes, the simple comparison of two sets of numerical data of canonical and non-canonical geometries may not be enough. The issue of weighed theoretical analysis of analytical solutions of boundary value problems for the transducers of non-canonical geometry still remains significant.

As an example we study here the influence of variable width of the piezoceramic rod with solid surface electrodes at the frequency range of its longitudinal vibrations. The non-linear heterogeneous equation of vibrations includes the component of exciting electric field due to the nature of piezoeffect, and the solution in Bessel functions is supplemented by complicated particular terms. At this, resonance frequencies are obtained from the determinant, which is similar to that of a purely elastic trapezoid rod, but displacements, stresses and displaced electric field differ significantly from the purely elastic case and from canonical geometry. These questions require careful analysis and are beyond the scope of this article.

Key Words: Piezoceramic rod, variable cross-section, resonant frequencies, experimental testing.

Статтю представив д.ф.-м.н., професор Жук Я.О.

1. Вступ. Під час числового моделювання п'єзоелектричних резонансних перетворювачів неканонічної геометричної форми стандартними пакетами методів скінчених елементів (напр. ANSYS, ABACUS, тощо) виникають питання порівняльного аналізу цих числових результатів

з даними класичних теоретичних моделей для зразків канонічної форми, які було отримано аналітично. Такий порівняльний аналіз стосується в першу чергу резонансних кривих амплітудно-частотних характеристик (АЧХ), що відображають якісні зміни, які виникають внаслідок відмови

від канонічної геометричної форми перетворювача. Відомо, що АЧХ електричного імпедансу, або струму провідності у колі генератора напруг завжди чітко пов'язана з динамічним напружено-деформівним станом (НДС) зразка. Тому поява або зникнення певних резонансів у спектрі частот перетворювача неканонічної форми свідчить про глобальну перебудову усіх характеристик його НДС та спряженого електричного поля. Проте, щоб отримати змістовне тлумачення цих змін у перетворювачі неканонічної форми, одного лише порівняння з результатами числової розрахункової моделі перетворювача канонічної форми може бути недостатньо.

Тому, як і раніше, актуальним лишається питання теоретичного аналізу аналітичних та напіваналітичних розв'язків відповідних крайових задач для перетворювачів неканонічної форми

В даній статті досліджується вплив змінної ширини суцільно електродованого п'єзокерамічного стержня на спектр частот його поздовжніх коливань. Зміна канонічної призматичної форми перетворювача на трапецієподібну не передбачає суттєвих змін його НДС, оскільки кут між бічними сторонами такої трапеції та її висотою вважається достатньо малим. Тому при постановці задачі видалося доцільним застосовувати одновимірну стержневую модель.

2. Постановка задачі.

Розглядається задача про поздовжні коливання п'єзокерамічного стержня сталої товщини, зі змінною площею поперечного перерізу під дією електричного навантаження, підведеного до електродованих поверхонь стержня $z = \pm h$. Поляризація елемента товщинна. Розміри стержня: $|x| \leq l$, $|y| \leq b + a \cdot x/l$; $|z| \leq h$ ($b, h, a \ll l$) (рис.1, рис.2).

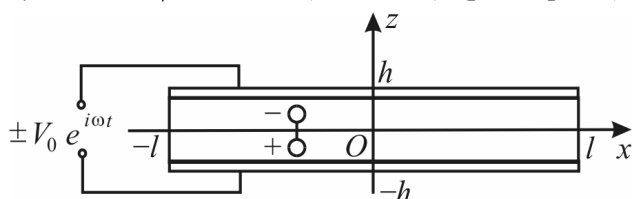


Рис.1. П'єзокерамічний стержень (переріз $y=0$).

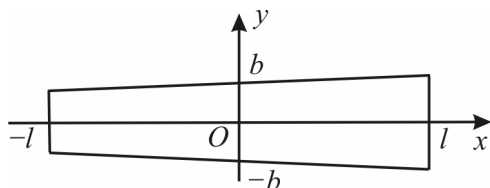


Рис. 2. Осьовий переріз стержня ($z = 0$).

Для виведення рівнянь руху частинок стержня розглянемо рівновагу елементарного призматичного об'єму стержня з трапецією в основі (рис. 3).

З умови рівноваги всіх зусиль у напрямку осі Ox отримаємо

$$\sigma_x 2h \left(b + \frac{a}{l} x \right) = \left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} \right) 2h \left(b + \frac{a}{l} (x + dx) \right),$$

або з точністю до доданків другого порядку малості:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} \left(b + \frac{a}{l} x \right) + \sigma_x \frac{a}{l} = 0. \quad (1)$$

Для отримання рівнянь руху рівняння рівноваги (1) потрібно доповнити силами інерції

$$m \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} = \rho dV \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2},$$

$$dV = 2h \frac{b + \frac{a}{l} x + b + \frac{a}{l} (x + dx)}{2} dx.$$

Знехтувавши доданками більш високого за другий порядку малості отримаємо наступне диференціальне рівняння

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} \left(b + \frac{a}{l} x \right) + \sigma_x \frac{a}{l} = \rho \left(b + \frac{a}{l} x \right) \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2}. \quad (2)$$

Напруження σ_x виражаємо через деформації ε_x та товщинну компоненту вектора напруженості електричного поля E_z [1]

$$\sigma_x = \frac{1}{s_{11}^E} \varepsilon_x - \frac{d_{31}}{s_{11}^E} E_z.$$

З урахуванням електричних граничних умов збудження коливань від генератора напруг з частотою ω :

$$\Psi|_{z=\pm h} = \pm V_0 e^{i\omega t}, \quad (3)$$

рівняння вимушеної електростатики [1] $E_z = -\partial \Psi / \partial z$, а також співвідношення Коші $\varepsilon_x = \partial u_x / \partial x$, рівняння руху (2) в переміщеннях набудуть вигляду:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\alpha}{1 + \alpha x} \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\alpha}{1 + \alpha x} d_{31} \frac{V_0}{h} e^{i\omega t} = \\ = \rho s_{11}^E \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2}, \end{aligned} \quad (4)$$

де $\alpha = a/(b \cdot l)$ - геометричний параметр.

Таким чином, рівняння коливань стержня змінного поперечного перерізу на відміну від класичного випадку є нелінійним та неоднорідним і включає в себе, як масову силу, компоненту електричного навантаження.

Рівняння (4) слід доповнити механічними граничними умовами на вільних від навантаження торцях

$$\sigma_x|_{x=\pm l} = 0. \quad (5)$$

Таким чином, отримали крайову задачу математичної фізики в частинних похідних.

3. Розв'язання крайової задачі.

У відповідності з гармонічним електричним навантаженням (3) вираз для невідомої функції переміщень подамо у вигляді

$$u_x(x, t) = u(x)e^{i\omega t}.$$

Тоді рівняння (4) для амплітуди $u(x)$ запишеться наступним чином

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{\alpha}{1 + \alpha x} \frac{du}{dx} + \frac{\omega^2}{c^2} u = -\frac{\alpha}{1 + \alpha x} d_{31} \frac{V_0}{h}, \quad (6)$$

Рівняння (6) може бути подане у само-спряженому вигляді:

$$\frac{d}{dx} \left((1 + \alpha x) \frac{du}{dx} \right) + \lambda^2 (1 + \alpha x) u = -\alpha d_{31} \frac{V_0}{h}. \quad (7)$$

Тут $\lambda = \omega / c$ – хвильове число.

І заміною змінної $x = (e^{\alpha p} - 1) / \alpha$ приведені до вигляду:

$$\frac{d^2 u}{dp^2} + \lambda^2 e^{2\alpha p} u = -\alpha d_{31} \frac{V_0}{h} e^{\alpha p}. \quad (8)$$

Загальний розв'язок отриманого рівняння:

$$u(p) = C_1 J_0 \left(\lambda \frac{e^{\alpha p}}{\alpha} \right) + C_2 Y_0 \left(\lambda \frac{e^{\alpha p}}{\alpha} \right) - \frac{\pi e^{\alpha p}}{2} d_{31} \frac{V_0}{h} \left[-Y_0 \left(\lambda \frac{e^{\alpha p}}{\alpha} \right) \int_1^p e^{\alpha \xi} J_0 \left(\lambda \frac{e^{\alpha \xi}}{\alpha} \right) d\xi + J_0 \left(\lambda \frac{e^{\alpha p}}{\alpha} \right) \int_1^p e^{\alpha \xi} Y_0 \left(\lambda \frac{e^{\alpha \xi}}{\alpha} \right) d\xi \right]. \quad (9)$$

Після оберненої заміни змінної отримаємо:

$$u(x) = C_1 J_0 \left(\lambda \frac{1 + \alpha x}{\alpha} \right) + C_2 Y_0 \left(\lambda \frac{1 + \alpha x}{\alpha} \right) - \frac{\pi(1 + \alpha x)}{2} d_{31} \frac{V_0}{h} \left[-Y_0 \left(\lambda \frac{1 + \alpha x}{\alpha} \right) \int_1^p e^{\alpha \xi} J_0 \left(\lambda \frac{e^{\alpha \xi}}{\alpha} \right) d\xi + J_0 \left(\lambda \frac{1 + \alpha x}{\alpha} \right) \int_1^p e^{\alpha \xi} Y_0 \left(\lambda \frac{e^{\alpha \xi}}{\alpha} \right) d\xi \right]. \quad (10)$$

Тут $p = \frac{1}{\alpha} \ln(1 + \alpha x)$.

Для визначення спектра власних частот отриманий розв'язок (9) підставимо в граничні умови (5). Рівність нулю визначника головної

матриці системи лінійних алгебраїчних рівнянь для визначення сталих інтегрування C_1 та C_2 і буде умовою нескінченного зростання амплітуди струму зміщення у ланцюгу зовнішнього генератора напруги тобто резонансу. Отже рівняння для визначення резонансних частот матиме наступний вигляд:

$$\Delta = \begin{vmatrix} J_1 \left(\lambda l \left(\frac{b}{a} + 1 \right) \right) & Y_1 \left(\lambda l \left(\frac{b}{a} + 1 \right) \right) \\ J_1 \left(\lambda l \left(\frac{b}{a} - 1 \right) \right) & Y_1 \left(\lambda l \left(\frac{b}{a} - 1 \right) \right) \end{vmatrix} = 0. \quad (11)$$

Коренями цього рівняння є ряд величин:

$$(\lambda l)_{p,n} = \frac{n\pi}{2}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad \text{Отримані розв'язки,}$$

характерні для тригонометричних рівнянь, пояснюються зовнішнім виглядом асимптотичних представлень функцій Бесселя для випадку нескінченного зростання аргументу [2]. Крім того, внаслідок втрати симетрії задачі спектр власних частот доповнився ще рядом значень, відсутніх у спектрі стержнів прямої призматичної форми [3].

Окрім аналітичних досліджень було проведено ряд експериментів. Нижче приведені амплітудно-частотні характеристики поздовжніх коливань стержня канонічної форми та стержня з лицьовою поверхнею у формі трапеції. Розміри пластин: прямокутна 100мм×15мм×5мм; трапеція 100мм×(9×5)×6мм (рис.4). Матеріал зразків – ЦТС-19.



Рис. 4. Експериментальні зразки.

На рис.5 – АЧХ п'єзокерамічного стержня канонічної форми. Область досліджень спектра до 100кГц. На діаграмі чітко виражені три резонансні частоти: 18,7; 54; 88,6 кГц. Відповідні відомі безрозмірні частоти $\pi/2$, $3\pi/2$, $5\pi/2$ [3].

На рис. 6 наведено АЧХ для стержня з електрокованою поверхнею у вигляді

трапеції у тому ж діапазоні частот. Порівняно з вищенаведеною АЧХ для стержня канонічної форми з'явилися додаткові власні частоти коливань: 36,2 та 74,5 кГц, що відповідають безрозмірним частотам π та 2π .

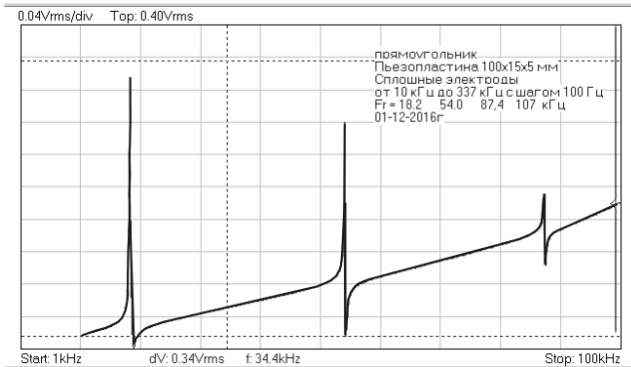


Рис. 5. АЧХ прямокутного стержня.

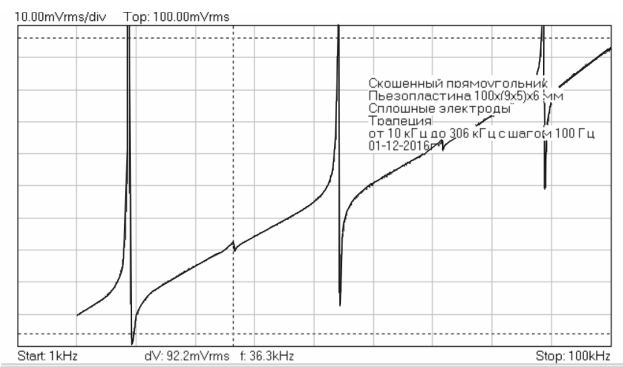


Рис. 6. АЧХ трапецієдального стержня.

Таким чином, результати аналітичних розрахунків добре узгоджуються з результатами експериментальних досліджень.

Отже, в рамках запропонованої одновимірної моделі вдалось дослідити вплив неканонічності форми п'єзокерамічного стержня на спектр його власних частот коливань. Такий підхід дав можливість дослідити резонансні властивості п'єзоперетворювача лише на низьких частотах. Питання про вищі резонансні частоти для п'єзоперетворювачів неканонічної форми, у тому числі про крайовий резонанс, не може бути дослідженим у рамках одновимірної моделі. Можливі методи аналітичних досліджень задач такого типу у двовимірній постановці наведені, наприклад, у роботі [4].

Список використаних джерел

1. Гринченко В. Т. Электроупругость/ В.Т. Гринченко, Улитко А.Ф., Шульга Н. А./ Механика связанных полей в элементах конструкций. 5/ Отв.ред. А.Н. Гузь, АН УССР, Ин-т механики.– Киев: Наук. Думка, 1989.– 280 с.
2. Справочник по специальным функциям под ред. М. Абрамовица и И. Стиган. – Москва: Наука, 1979. – 832 с.
3. Улітко А.Ф. Прикладні методи в задачах електропружності./ Улітко А. Ф., Борисейко О. В, Улітко І. А. – Київ.: ВПЦ "Київський університет", 2007. – 127 с.
4. Shakeri Mobarakeh Construction method of analytical solutions to the mathematical physics boundary problems for non-canonical domains/ P.Shakeri Mobarakeh, V.T. Grinchenko //Reports on Mathematical Physics.-2015.-Vol. 75, Number 3. – P. 417-434.

References

1. GRINCENKO V.T., ULITKO A.F., SCHUL'GA N.A. (1989) Electroelasticity // Mechanics of conjugated fields in the elements of constructions. 5 / Edt. A.N. Guz', Ac.Sci. Ukrainian SSR, Inst. Mechanics. – Kiev: Naukova Dumka.
2. Handbook of Mathematical functions. Edited by M. Abramowitz and Irene A. Stegun – Moskva: Nauka.
3. ULITKO A.F., BORYSEYKO O.V, ULITKO I.A. (2007) Applied methods in the problems of electroelasticity. Kyiv.: VPC "Kyivsky universytet".
4. POUYAN SHAKERI MOBARAKEN, GRINCENKO V.T.. Construction method of analytical solutions to the mathematical physics boundary problems for non-canonical domains/ P.Shakeri Mobarakeh, V.T. Grinchenko //Reports on Mathematical Physics.-2015.-Vol. 75,Number 3.-P. 417-434.

Надійшла до редколегії 15.11.16

УДК 539.3

Григоренко¹ О. Я., д.ф.-м.н., проф.,
Панкрат'єв¹ С. А., аспірант

Grigorenko¹ A. Ya., D.Sc., prof.,
Pankratiev¹ S. A., graduate student

Особливості напружено-деформованого стану пластин складної форми з ортотропних матеріалів

Features of stress-strain state of complex shaped plates made of orthotropic materials

¹ Інститут механіки ім. С. П. Тимошенка НАН
України,
вул. Нестерова, 3, м. Київ, 03057,
e-mail: sp4soft@gmail.com

¹ S. P. Timoshenko Institute of Mechanics of the
National Academy of Sciences of Ukraine,
Nesterov str. 3, Kyiv, 03057,
e-mail: sp4soft@gmail.com

Розглянуто задачу про статичний аналіз пластин складної форми з ортотропних матеріалів в уточненій постановці. Двовимірна крайова задача розв'язується методами сплайн-колокації та дискретної ортогоналізації у поєднанні з підходом, що дозволяє зручно описати складну форму вихідної області. Проведено порівняння напружено-деформованого стану для різних матеріалів та умов закріплення.

Ключові слова: напружено-деформований стан, пластина складної форми, ортотропні матеріали

The article presents results of static analysis of complex shaped orthotropic plates under the influence of surface load. Resolving system of equations is obtained in accordance with refined theory. Complex shape of an initial domain is described using an approach based on coordinate transformation. The original two-dimensional boundary value problem is reduced to one-dimensional by the method of spline collocation using third degree B-splines, which satisfy pre-specified boundary conditions. Further, this system is solved by the stable method of discrete orthogonalization, which allows obtaining a solution for high-order systems of partial differential equations with variable coefficients with high accuracy.

Calculation results for trapezoid plates of constant thickness are compared with those of other authors. It also shows the influence of material parameters, boundary conditions and their relative orientation. Some features of deformation field for orthotropic materials in comparison with isotropic are also mentioned.

Key Words: stress-strain state, complex shaped plate, orthotropic materials

Статтю представив д.ф.-м.н. проф. Жук Я.О.

Вступ

Актуальність дослідження властивостей анізотропних матеріалів обумовлена не тільки їх природної поширеністю, а й особливостями сучасних технологічних процесів. Останні успіхи в справі створення надміцних ниток для армування пластин та оболонок з композитних матеріалів роблять їх дослідження ще більш затребуваним. Водночас постійне ускладнення форми конструктивних елементів все частіше вимагає розробки спеціальних підходів для аналізу напружено-деформованого стану і обумовлює значні труднощі обчислювального характеру у вирішенні подібних задач.

На відміну від найпростіших прямокутних чи круглих, для пластин більш-менш складної форми (трапеція, паралелограм) коло доступних робіт є помітно обмеженим, а матеріал найчастіше

вважається ізотропним. Так, деякі питання використання перетворення координат для статичного аналізу пластин були розглянуті в [1]. Зведення складної області до більш простої за рахунок параметризації застосовано в [2], а стосовно ортотропних пластин — в роботі [3].

У даній роботі основна увага приділена пластинам з ортотропних матеріалів. Для чисельного аналізу напружено-деформованого стану пластин складної форми застосовано запропонований авторами підхід [4], що передбачає перехід до нормованої квадратної області та застосування методу сплайн-колокації у поєднанні з методом дискретної ортогоналізації.

Постановка задачі

Розглянемо задачу про напружено-деформований стан ортотропної пластини у формі рівно-

бічної трапеції (рис. 1) сталою товщиною h , що знаходиться під впливом поверхневого навантаження $q(x, y)$. Основи трапеції приймаємо паралельними до вісі Oy .

Для уточненої теорії, що спирається на гіпотезу прямої лінії, рівняння рівноваги мають вигляд [5]:

$$\begin{aligned} Q_{x,x} + Q_{y,y} + q &= 0, \\ M_{x,y} + M_{y,x,y} - Q_x &= 0, \\ M_{y,y} + M_{x,y,x} - Q_y &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

де Q_x, Q_y — зусилля зрізу, M_x, M_y, M_{yx}, M_{xy} — моменти вигину та скручування. Часткові похідні тут і далі позначено відповідними індексами після коми.

Співвідношення пружності:

$$\begin{aligned} M_x &= D_{11}\kappa_x + D_{12}\kappa_y, \\ M_y &= D_{12}\kappa_x + D_{22}\kappa_y, \\ M_{xy} &= M_{yx} = 2D_{66}\kappa_{xy}, \\ Q_x &= K_1\gamma_x, \quad Q_y = K_2\gamma_y, \end{aligned} \quad (2)$$

де

$$\begin{aligned} D_{11} &= \frac{E_x h^3}{12(1 - \nu_x \nu_y)}, \quad D_{12} = \nu_y D_{11}, \\ D_{22} &= \frac{E_y h^3}{12(1 - \nu_x \nu_y)}, \\ D_{66} &= \frac{G_{xy} h^3}{12}, \quad K_1 = \frac{5}{6} h G_{xz}, \quad K_2 = \frac{5}{6} h G_{yz}. \end{aligned}$$

Під $\kappa_x, \kappa_{xy}, \kappa_y$ розуміємо деформації вигину, E_x, E_y, ν_x, ν_y — модулі пружності і коефіцієнти Пуассона в напрямках x і y , G_{xy}, G_{xz}, G_{yz} — модулі зсуву. Вирази для деформацій через повні кути повороту прямолінійного елемента ψ_x, ψ_y :

$$\begin{aligned} \kappa_x &= \psi_{x,x}, \quad \kappa_y = \psi_{y,y}, \\ 2\kappa_{xy} &= \psi_{x,y} + \psi_{y,x}, \\ \gamma_x &= \psi_x + w_{,x}, \quad \gamma_y = \psi_y + w_{,y}. \end{aligned} \quad (3)$$

Граничні умови для жорсткого закріплення сторін при $x = \text{const}$ запишемо у вигляді

$$w = 0, \quad \psi_x = 0, \quad \psi_y = 0,$$

а для вільного краю —

$$\psi_x + w_{,x} = 0, \quad \psi_{x,x} + \nu_y \psi_{y,y} = 0, \quad \psi_{x,y} + \psi_{y,x} = 0.$$

Зазначимо, що для випадку прямокутної області на сторонах $y = \text{const}$ граничні умови

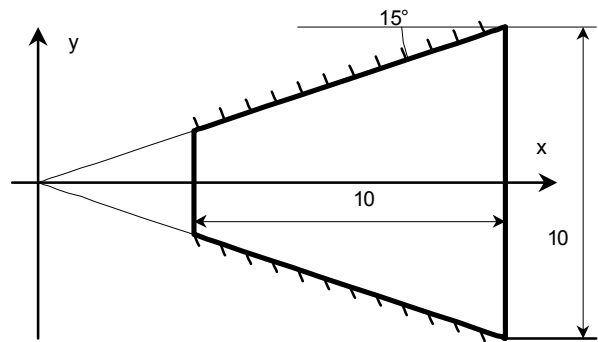


Рис. 1 — Геометричні параметри пластини з жорстким закріпленням бокових сторін трапеції

задаються аналогічно, проте їх безпосередній запис для пластини у формі трапеції викликає певні труднощі.

Об'єднуючи вирази для деформацій (3), співвідношення пружності (2) і рівняння рівноваги (1), отримаємо розв'язувальну систему диференціальних рівнянь щодо прогину w і кутів ψ_x, ψ_y , яка в поєднанні з тими чи іншими граничними умовами утворює двовимірну крайову задачу в уточненій постановці.

Для можливості порівняння результатів розрахунків далі будемо розглядати пластину у формі трапеції, розміри якої відповідають одному з наборів параметрів, розглянутих в [3]. В якості матеріалу для пластини обрано (V) набір пружних констант ($E_x = E_0, E_y = E_0/2, G_{xy} = E_0/8, \nu_x = 0,15$) та жорстке закріплення усіх сторін.

Вплив ортотропії на напружено деформований стан розглянемо на прикладі пластику, армованого вуглецевим волокном (carbon fibre reinforced plastic, CFRP), параметри якого наведено у [6]: $E_{11} = 2,11E_0, E_{22} = 0,053E_0, G_{12} = G_{13} =$

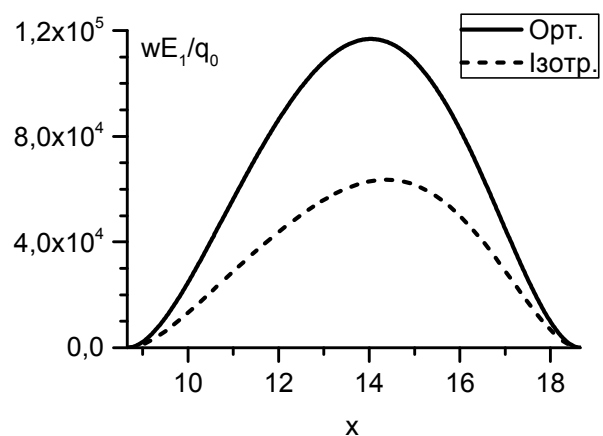


Рис. 2 — Переріз поверхні прогину $\hat{w}(x, y)$ ортотропного та ізотропного матеріалів при $y = 0$ для пружних констант з [3]

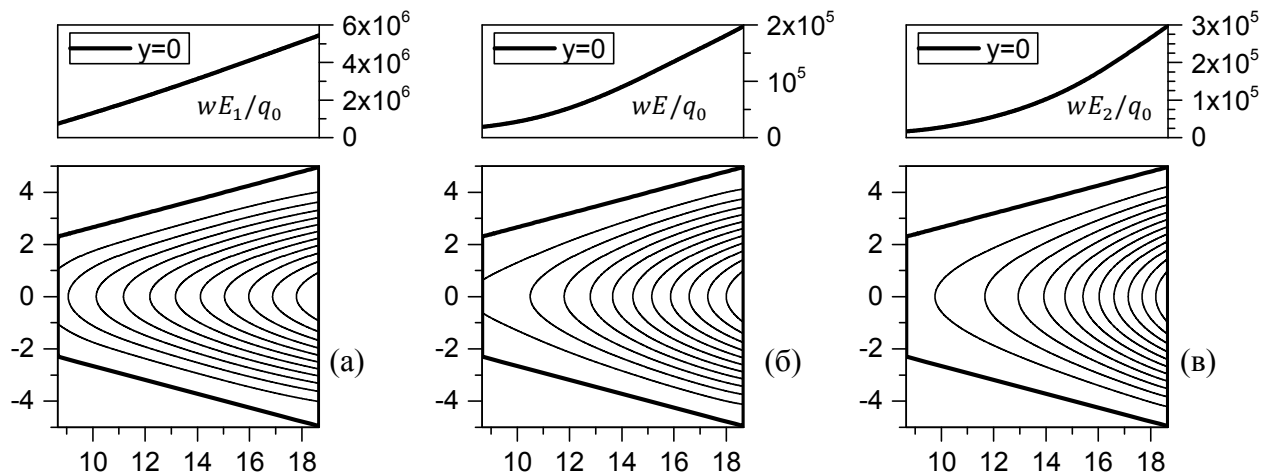


Рис. 3 — Поверхні прогину $\hat{w}(x, y)$ пластини з композитного матеріалу CFRP та її переріз: а) ортотропія $E_1/E_2 \approx 40$, б) ізотропія, в) ортотропія $E_2/E_1 \approx 40$

$0,026E_0$, $G_{23} = 0,013E_0$, $\nu_{12} = 0,25$. Для цього випадку бічні сторони трапеції будемо вважати закріпленими жорстко, а основи — вільними.

тегрування — 1500.

Методи розв'язання

Складна форма пластини, що не є прямокутником, призводить до виникнення певних труднощів у заданні граничних умов на обох бокових сторонах (рис. 1). Щоб уникнути вказаних ускладнень, застосовано підхід, який передбачає перехід до нової системи координат [4]. При цьому вихідна область у формі трапеції стає квадратом $[0,1, 0,1]$, а граничні умови із відповідними до перетворення зміними задаються на сторонах $x = \text{const}$, $y = \text{const}$. Для розв'язання самої задачі з'являється можливість використовувати добре відпрацьовані методи чисельного аналізу: за допомогою методу сплайн-колокації вздовж координати y звести задачу до одновимірної та розв'язати останню стійким чисельним методом дискретної ортогоналізації [5].

Згідно з методом сплайн-колокації розв'язок крайової задачі шукаємо у вигляді

$$w(x, y) = \sum_{i=0}^N w_i(x) \varphi_i(y),$$

де $\varphi_i(y)$ — лінійні комбінації В-сплайнів, що задовольняють заданим граничним умовам. З метою підвищення точності чисельного розв'язку точки колокації $\varepsilon_{2i}, \varepsilon_{2i+1}$ розміщуються всередині інтервалів між вузлами сітки y_{2i}, y_{2i+1} за схемою: $\varepsilon_{2i} = y_{2i} + t_1(y_{2i+1} - y_{2i})$, $\varepsilon_{2i+1} = y_{2i} + t_2(y_{2i+1} - y_{2i})$, де t_1, t_2 — корені полінома Лежандра другого порядку на відрізку $[0; 1]$, $i = 0, 1, \dots, n$. В усіх розрахунках кількість точок колокації було прийнято за 2×30 , а точок ін-

Отриманий чисельний розв'язок задачі для матеріалу з роботи [3] наведено на рис. 2 у вигляді перерізу поверхні прогину $\hat{w} = wE/q_0$ при $y = 0$. Пунктирна крива відповідає умовно ізотропному матеріалу з усередненими параметрами ($E = (E_1 + E_2)/2$). За відсутності детальних даних про умови розрахунків у [3] безпосереднє порівняння абсолютних значень $\hat{w}$ виявилось неможливим. Проте форма кривих перерізу поверхні прогину та їх співвідношення для ортотропного / ізотропного матеріалів цілком відповідають наведеним вказаними авторами.

Поверхні прогину для армованого пластику CFRP [6], для якого відношення $E_1/E_2 \approx 40$, представлені на рис. 3а та рис. 3в. При цьому останній відповідає випадку, коли пластина «ви-різана» після розвороту матеріалу на 90° , тобто $E_1 \leftrightarrow E_2$ і відповідно змінюються G_{ij} , ν_{ij} . Рис. 3б показує вигляд поверхні для псевдоізотропного матеріалу з параметрами, що є середніми для розглянутого набору ($E = (E_1 + E_2)/2$ і т.і.). Для полегшення візуального порівняння результатів розрахунків на рис. 3а–в додатково наведені криві перерізів поверхонь при $y = 0$ (відповідає середині пластини).

Порівнюючи форму кривих перерізів та характер ізоліній поверхонь на рис. 3а та рис. 3б, легко бачити, що для ортотропного матеріалу з $E_1/E_2 \approx 40$ максимальний прогин практично лінійно залежить від розміру пластини вздовж Oy , тоді як для ізотропної пластини при наближенні до лівого краю спостерігається відчутне змен-

шення прогину, поверхня стає більш пологою. Це є досить очікуваним, зважаючи на незначну жорсткість матеріалу вздовж Oy при жорсткому закріпленні тільки бокових сторін трапеції.

Вказаний вплив жорсткого закріплення є ще більш виразним у порівнянні рис. 3а з рис. 3в, та рис. 3б з рис. 3в. При розгляді поверхні біля лівого краю зростання прогину на рис. 3в є ще більш повільним, а абсолютні значення w мало відрзняються від ізотропного випадку (рис. 3б), незважаючи на значні відмінності у пружних сталих — ізотропний матеріал фактично відповідає армуванню одночасно в усіх напрямках. Це наглядно показує доцільність армування матеріалів з виділенням переважаючого напрямку, що відповідає особливостям закріплення та навантаження конструктивного елемента.

Список використаних джерел

1. Shahidi A.R., Mahzoon M., Saadatpour M.M., Azhari M., Nonlinear static analysis of arbitrary quadrilateral plates in very large deflections, Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 12 (2007), pp. 832–848.
2. Shufrin I., Rabinovitch O., Eisenberger M., A semi-analytical approach for the geometrically nonlinear analysis of trapezoidal plates, International Journal of Mechanical Sciences, 52, (2010), pp. 1588–1596.
3. Grigorenko Ya.M., Kryukov N.N., Yakovenko N.S., Using spline-functions to solve boundary-value problems for laminated orthotropic trapezoidal plates of variable thickness, Int. Appl. Mech., 41, No. 4, pp. 413–420 (2005).
4. Grigorenko A. Ya. Numerical analysis of stress-strain state of orthotropic plates in the form of arbitrary convex quadrangle / A.Ya. Grigorenko, S.A. Pankratiev, S.N. Yaremchenko // Proceedings of the 5th International Conference on Nonlinear Dynamics, Sep. 27–30, 2016, Kharkov, Ukraine – Kharkov, 2016. – pp. 287–293.
5. Григоренко Я.М. Розв'язання задач теорії оболонок на основі дискретно-континуальних методів / Я.М. Григоренко, В.Д. Будаков, О.Я. Григоренко: навчальний посібник. – Миколаїв: Іліон, 2010. – 294 с.
6. Alam N. and Asnani N.T. Vibration and Damping Analysis of Fibre Reinforced Composite Material Plates, Journal of Composite Materials, 20, issue 1 (1986), pp. 2–18.

Висновки

Для задачі із статичного аналізу ортотропної пластини у формі трапеції на основі уточненої теорії можливе успішне застосування підходу, що описує вихідну область за допомогою перетворення координат для подальшого розв'язку крайової задачі методами сплайн-колокації та дискретної ортогоналізації. Результати розрахунків погоджуються з даними інших авторів.

На основі отриманих даних показано, що для ортотропного матеріалу умови закріплення та співвідношення пружних сталих суттєво впливають на характер напружено-деформованого стану.

References

1. SHAHIDI A.R., MAHZOON M., SAADATPOUR M.M., AZHARI M. (2007) *Nonlinear static analysis of arbitrary quadrilateral plates in very large deflections*, Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 12, pp. 832–848.
2. SHUFRIN I., RABINOVITCH O., EISENBERGER M. (2010) *A semi-analytical approach for the geometrically nonlinear analysis of trapezoidal plates*, Int. J. of Mech. Sc., 52, pp. 1588–1596.
3. GRIGORENKO YA.M., KRYUKOV N.N., YAKOVENKO N.S. (2005) *Using spline-functions to solve boundary-value problems for laminated orthotropic trapezoidal plates of variable thickness*, Int. Appl. Mech., 41, No. 4, pp. 413–420.
4. GRIGORENKO A.YA., PANKRATIEV S.A., YAREMCHENKO S.N. *Numerical analysis of stress-strain state of orthotropic plates in the form of arbitrary convex quadrangle* Proceedings of the 5th International Conference on Nonlinear Dynamics, Sep. 27–30, 2016, Kharkov, Ukraine – Kharkov, 2016. – pp. 287–293.
5. BUDAK, V., GRIGORENKO, A., GRIGORENKO, Ya. (2010) *Rozvyazannya zadach teoriiy obolonok na osnovi diskretno-kontinualnih metodiv.*, Mikolayiv: Ilion.
6. Alam N. and Asnani N.T. (1986) *Vibration and Damping Analysis of Fibre Reinforced Composite Material Plates*, Journal of Composite Materials, 20, issue 1, pp. 2–18.

Надійшла до редколегії 10.11.2016

УДК 539.421

Селіванов М. Ф.¹, к.ф.-м.н., с.н.с.,
Чорноіван Ю. О.¹, к.ф.-м.н., с.н.с.,
Вовкодав О. В.¹, к.ф.-м.н., н.с.

Визначення переміщень берегів двох паралельних тріщин зчеплення

¹ Інститут механіки ім. С. П. Тимошенка НАН
України, 03057, м. Київ, вул. Нестерова, 3,
e-mail: fract@inmech.kiev.ua

M. F. Selivanov¹, PhD, senior researcher
Y. O. Chornoivan¹, PhD, senior researcher,
O. V. Vovkodav¹, PhD, researcher

Determination of crack face displacement for two parallel cohesive cracks

¹ S. P. Timoshenko Institute of Mechanics, NASU,
03057, Kyiv, Nesterov st., 3,
e-mail: fract@inmech.kiev.ua

Наведено підхід до розв'язування задач багатоосередкового руйнування. Розглянуто систему двох паралельних тріщин з достатньо розвиненими зонами зчеплення, розмір яких не дозволяє використовувати концепцію квазікрихкого руйнування. Використовується модель зі складною зоною зчеплення для тріщини змішаного режиму руйнування. Запропоновано чисельно-аналітичний метод розв'язання такого класу задач. Ефективність методу проілюстрована прикладом.

Ключові слова: модель тріщини із зоною зчеплення, тріщина змішаного режиму руйнування, складна зона зчеплення

Cohesive crack models are widely used to take into account fracture characteristics of the modern materials. They allow an efficient and adequate modeling in various types of fracture mechanics problems for various types of structures. There are two known types of cohesive crack models for the mixed mode fracture. The first one uses tension and shear zones with common tips, the second uses the common tails. It is easier to solve problems for the first type because their statements are the same as the first fundamental problem of elasticity. The problems for the second type are the mixed problems of elasticity. In this paper an algorithm is proposed to solve problems of the second type. This algorithm is based on solving integral equations of the problem using collocation method. Instead of solving non-linear equation for the crack tips location, an iterative procedure is proposed. As an example, a solution to the problem of crack faces displacement determination for two parallel cracks is given.

Key words: cohesive zone model, mixed-mode crack, multiple cohesive zone fronts.

Статтю представив докт. фіз.-мат. наук, проф. Жук Я.О.

1. Вступ

Модель тріщини із зонами зчеплення використовується для аналізу тріщиностійкості конструкцій, виготовлених з сучасних матеріалів, для широкого спектру конфігурацій елементів конструкцій з тріщиною.

Відомі два типи моделей тріщини з зоною зчеплення при змішаному режимі руйнування. Вони відрізняються взаємним розташуванням зони нормального відриву та зсувної зони. Згідно першої моделі у двох вказаних зон суміщені вершини [1], згідно другої – хвости [2]. Розв'язання задач за допомогою першої моделі виглядає більш простим [3, 4, 5], оскільки вимагає розв'язання першої основної задачі

теорії пружності, друга ж модель вимагає розв'язання змішаної задачі. У цій роботі запропоновано алгоритм розв'язання задач другого типу. В основу алгоритма покладено розв'язання системи інтегральних рівнянь [6] квадратурно-колокаційним методом [7].

2. Постановка задачі

Визначимо переміщення берегів паралельних тріщин зчеплення, в околі вершин яких діють незначні за інтенсивністю поля зсувних напружень. Для цього використаємо модель тріщини зі складною зоною зчеплення.

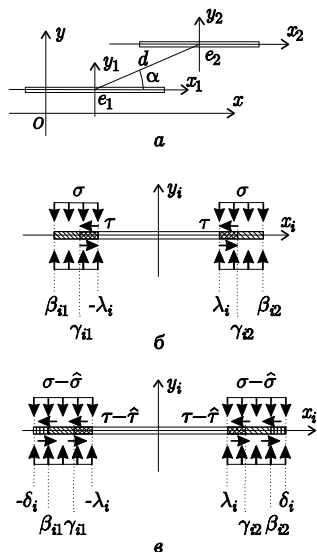


Рис. 1 Постановка задачі (а,б) та модифікована постановка (е).

Розглянемо задачу, що відповідає рис. 1 а з умовами на i -му контурі ($x \in (\beta_1^i, \beta_2^i)$), що відповідають рис. 1 б

$$\sigma^\pm(x) + i\tau^\pm(x) = p_i(x), \quad (1)$$

$$p_i(x) = -[\tilde{\sigma}_i(x) - i\tilde{\tau}_i(x)] + T_i(x) - iS_i(x), \quad (2)$$

$$T_i(x) = \begin{cases} \sigma, & x \in \Xi_i \\ 0, & x \notin \Xi_i \end{cases}, S_i(x) = \begin{cases} \tau, & x \in \Pi_i \\ 0, & x \notin \Pi_i \end{cases}, \quad (3)$$

де $\tilde{\sigma}_i$, $\tilde{\tau}_i$ – нормальні та зсувні напруження, що діють на лінії розташування i -ої тріщини в тілі без тріщини, σ і τ – сили нормального і зсувного зчеплень, $\Xi_i = (\beta_{i1}, -\lambda_i) \cup (\lambda_i, \beta_{i2})$, $\Pi_i = (\gamma_{i1}, -\lambda_i) \cup (\lambda_i, \gamma_{i2})$.

Також в постановку задачі включаємо умову обмеженості напружень в тілі. Ця умова для задачі, яку розглядаємо, еквівалентна умові плавності змикання берегів $\Delta_{li}'(\beta_{i1,i2}) = 0$, Δ_{li} – нормальне розкриття i -ї тріщини. Також включаємо в постановку аналогічну умову для зсувного розкриття

$$\Delta_{li}'(\gamma_{i1,i2}) = 0, \Delta_{li}(x) = 0, \quad x \in (\beta_{i1}, \gamma_{i1}) \cup (\gamma_{i2}, \beta_{i2}).$$

Далі, розглянемо модифіковану постановку (рис. 1 е), яка не включає в явному вигляді умови плавності змикання берегів. Оберемо інтервал пошуку розв'язку $(-\delta_i, \delta_i)$ таким чином, щоб він напевне містив зону зчеплення. Контурне напруження подамо в формі

$$p_i(x) = -[\tilde{\sigma}_i(x) - i\tilde{\tau}_i(x)] + \hat{T}_i(x) - i\hat{S}_i(x) - [\hat{\sigma}_i(x) - i\hat{\tau}_i(x)], \quad (4)$$

$$\hat{T}_i(x) = \begin{cases} \sigma, & |x| > \lambda_i \\ 0, & |x| < \lambda_i \end{cases}, \hat{S}_i(x) = \begin{cases} \tau, & |x| > \lambda_i \\ 0, & |x| < \lambda_i \end{cases}.$$

Напруження $\hat{\sigma}$ і $\hat{\tau}$ унеможливають перекриття берегів тріщини.

3. Методика розв'язування

Розв'язок задачі з контурними напруженнями (4) дається системою інтегральних рівнянь [6]

$$\begin{aligned} & \int_{-\delta_1}^{\delta_1} \frac{g_1(t)dt}{t-x_1} + \frac{1}{2} \int_{-\delta_2}^{\delta_2} \sum_i \frac{g_2(t)dt}{t-(x_1+\zeta_i)} + \\ & + \zeta \int_{-\delta_2}^{\delta_2} \frac{\overline{g_2(t)}dt}{[t-(x_1+\zeta_2)]^2} = p_1(x_1) \\ & \frac{1}{2} \int_{-\delta_1}^{\delta_1} \sum_i \frac{g_1(t)dt}{t-(x_2-\zeta_i)} - \zeta \int_{-\delta_1}^{\delta_1} \frac{\overline{g_1(t)}dt}{[t-(x_2-\zeta_2)]^2} + \\ & + \int_{-\delta_2}^{\delta_2} \frac{g_2(t)dt}{t-x_2} = p_2(x_2) \end{aligned} \quad (5)$$

$$|x_i| < \delta_i, \quad \zeta = (\zeta_1 - \zeta_2)/2, \quad \zeta_1 = e_1 - e_2, \quad \zeta_2 = \bar{e}_1 - \bar{e}_2.$$

До (5) треба додати умови однозначності переміщень

$$\Delta_i(\delta_i) = 0, \Delta_i(x) = \Delta_{li}(x) + i\Delta_{li}(x) = L \int_{-\delta_i}^x g_i(t)dt,$$

L є пружною сталою (у випадку ізотропності матеріалу та за умов плоского напруженого стану $L = 4/E$, E – модуль Юнга).

Перепишемо систему (5) після заміни змінних $t = \delta_i \tau$, $x_i = \delta_i \xi$ ($|\tau|, |\xi| < 1$) та перепозначення $g_i(\delta_i \tau)$ через $g_i(\tau)$:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\delta_1} \int_{-1}^1 \frac{g_1(t)dt}{t-x} + \frac{1}{2\delta_2} \int_{-1}^1 \sum_i \frac{g_2(t)dt}{t-(\delta_1 x + \zeta_i)/\delta_2} + \\ & + \frac{\zeta}{\delta_2^2} \int_{-1}^1 \frac{\overline{g_2(t)}dt}{[t-(\delta_1 x + \zeta_2)/\delta_2]^2} = \pi p_1(\delta_1 x) \\ & \frac{1}{2\delta_1} \int_{-1}^1 \sum_i \frac{g_1(t)dt}{t-(\delta_2 x - \zeta_i)/\delta_1} - \\ & \frac{\zeta}{\delta_1^2} \int_{-1}^1 \frac{\overline{g_1(t)}dt}{[t-(\delta_2 x - \zeta_2)/\delta_1]^2} + \frac{1}{\delta_2} \int_{-1}^1 \frac{g_2(t)dt}{t-x} = \pi p_2(\delta_2 x) \end{aligned} \quad (6)$$

Функції щільностей відриву g_i шукатимемо в формі кусково-лінійних функцій

$$g_{ik}(x) = \frac{x - b_{k-1}}{\Delta b} g_{ik} + \frac{b_k - x}{\Delta b} g_{i(k-1)}, \quad b_{k-1} \leq x \leq b_k, \\ b_k = -1 + k\Delta b, \quad k = 0, K, n, \quad \Delta b = 2n.$$

Після інтегрування з (6) отримаємо систему

$$\frac{1}{\delta_1} \sum_{k=0}^n J_k(\eta_m) g_{1k} + \frac{1}{2\delta_2} \sum_{k=0}^n \sum_i J_k \left[\frac{\delta_1 \eta_m + \zeta_i}{\delta_2} \right] g_{2k} + \\ + \frac{\zeta}{\delta_2^2} \sum_{k=0}^n K_k \left[\frac{\delta_1 \eta_m + \zeta_2}{\delta_2} \right] \bar{g}_{2k} = p_1(\delta_1 \eta_m) \quad (7) \\ \frac{1}{2\delta_1} \sum_{k=0}^n \sum_i J_k \left[\frac{\delta_2 \eta_m - \zeta_i}{\delta_1} \right] g_{2k} - \\ - \frac{\zeta}{\delta_1^2} \sum_{k=0}^n K_k \left[\frac{\delta_2 \eta_m - \zeta_2}{\delta_1} \right] \bar{g}_{1k} + \frac{1}{\delta_2} \sum_{k=0}^n J_k(\eta_m) g_{2k} = \\ = p_2(\delta_2 \eta_m)$$

яку доповнюємо умовами однозначності переміщень

$$g_{i0}/2 + g_{il} + K + g_{i(n-1)} + g_{in}/2 = 0. \quad (8)$$

У (7) η_m ($m = 1, K, n$) – точки колокації, які є серединами інтервалів (b_{m-1}, b_m) ,

$$\pi J_0(z) = -1 - (z - b_1)G_1(z), \\ \pi J_k(z) = (z - b_{k-1})G_k(z) - (z - b_{k+1})G_{k+1}(z), \\ k = 1, K, n-1, \\ \pi J_n(z) = 1 + (z - b_{n-1})G_n(z); \\ \Delta b \cdot G_k(z) = \ln(b_k - z)/(b_{k-1} - z); \\ \pi K_0(z) = -G_1(z) - (z - b_1)H_1(z), \\ \pi K_k(z) = G_k(z) + (z - b_{k-1})H_k(z) - \\ - G_{k+1}(z) - (z - b_{k+1})H_{k+1}(z), k = 1, K, n-1, \\ \pi K_n(z) = G_n(z) + (z - b_{n-1})H_n(z); \\ \Delta b \cdot H_k(z) = -1/(b_k - z) + 1/(b_{k-1} - z).$$

Ітеративна процедура для знаходження компенсуючих напружень $\hat{\sigma}$ і $\hat{\tau}$:

Позначимо через P_i індекси, що відповідають точкам колокації $|\eta_m| < \lambda_i$, і M_i – індекси, що відповідають точкам колокації в зоні зчеплення.

1. Розв'язуємо в системі з (8) наступні рівняння

$$\operatorname{Re}\{\Delta_i(\eta_m)\} = 0, m \in M_{xi}$$

$$\operatorname{Re}\{F_i(\eta_m)\} = -\tilde{\sigma}_i(\eta_m) + \hat{T}_i(\eta_m), \quad m \in P_{xi}$$

$$\operatorname{Im}\{\Delta_i(\eta_m)\} = 0, \quad m \in M_{yi}$$

$$\operatorname{Im}\{F_i(\eta_m)\} = -\tilde{\tau}_i(\eta_m) + \hat{S}_i(\eta_m), \quad m \in P_{yi}$$

де F_i – позначення лівих частин в (7).

2. Обчислюємо компенсуючі напруження

$$\hat{\sigma}_i(\eta_m) = -\operatorname{Re}\{F_i(\eta_m)\} - \tilde{\sigma}(\eta_m) + \hat{T}_i(\eta_m)$$

$$\hat{\tau}_i(\eta_m) = -\operatorname{Im}\{F_i(\eta_m)\} - \tilde{\tau}(\eta_m) + \hat{S}_i(\eta_m)$$

3. Перепозначаємо

$$M_{xi} = \{m : \hat{\sigma}_i(\eta_m) \geq 0\},$$

$$P_{xi} = \{m : \hat{\sigma}_i(\eta_m) < 0\},$$

$$M_{yi} = \{m : \hat{\tau}_i(\eta_m) \geq 0\},$$

$$P_{yi} = \{m : \hat{\tau}_i(\eta_m) < 0\}$$

Повторюємо 1-3 доки

$$\hat{\sigma}_i(\eta_m) \geq 0, \quad \hat{\tau}_i(\eta_m) \geq 0, \quad 0 \leq m \leq n.$$

4. Приклад розв'язання

На рис. 2 наведений розв'язок задачі (відносне нормальне розкриття $\bar{\Delta}_I = \Delta_I/\Delta_I^*$ та відносне зсувне розкриття $\bar{\Delta}_{II} = \Delta_{II}/\Delta_{II}^*$), отриманий для $\sigma = 35$ МПа, $\tau = 45$ МПа (напрямок є протилежним представленим на рис. 1), $\Delta_I^* = 0.003$ см, $\Delta_{II}^* = 0.002$ см, $\tilde{\sigma}_i = \sigma_\infty = \sigma/3$, $\tilde{\tau}_i = 0$, $E = 4000$ МПа, $\lambda_1 = 0.7$ см, $\lambda_2 = 0.65$ см, $\delta_1 = \delta_2 = 1$ см, $d = 2$ см, $\alpha = \pi/12$, $e_1 = 0$, $e_2 = d \exp\{i\alpha\}$, $n = 400$. Суцільні криві на рисунку відповідають першій тріщині ($i = 1$), пунктирні – другій ($i = 2$).

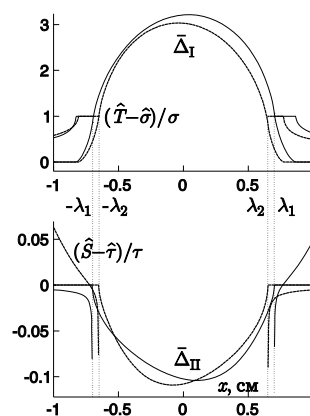


Рис. 2 Відносні нормальні ($\bar{\Delta}_I$) та зсувні ($\bar{\Delta}_{II}$) розкриття, відносні сили зчеплення та напруження поза зонами зчеплення.

Таким чином, в роботі запропоновано новий ефективний метод розв'язування задач нелінійної механіки руйнування. Цей метод дозволяє визначати розкриття тріщин зчеплення не розв'язанням нелінійних рівнянь відносно положень вершин зон зчеплення [8], а використанням ітеративної процедури, на

кожному кроці якої розв'язується система лінійних алгебраїчних рівнянь.

Список використаних джерел

1. Jin Z.-H. Cohesive zone modeling of interface fracture in elastic bimaterials / Jin, Z.-H., Sun, C.T. // *Eng. Fract. Mech.* – 2005. – 72. – P. 1805–1817.
2. Hui C.Y. Cohesive zone models and fracture / C.Y. Hui, A. Ruina, R. Long, A. Jagota // *J. Adhesion.* – 2011. – 87. – P. 1–52.
3. Каминский А.А. Определение параметров предельного состояния в рамках модели трещины с зоной сцепления для смешанного режима разрушения / А.А. Каминский, М.Ф. Селиванов // *Теоретич. и прикл. механика.* – 2014. – № 8 (54). – С. 18-25.
4. Селиванов М.Ф. Определение распределений сил сцепления трещины смешанного режима разрушения / М.Ф. Селиванов // *Теоретич. и прикл. механика.* – 2014. – № 9 (55). – С. 33-41.
5. Селіванов М.Ф. Модель тріщини з зоною зчеплення при змішаному режимі руйнування / М.Ф. Селіванов // *Доповіді НАН України.* – 2015. – № 7. – С. 62-69.
6. Саврук М.П. Двумерные задачи упругости для тел с трещинами / М.П. Саврук – К.: Наук. думка, 1981. – 324 с.
7. Erdogan F. Solution of singular integral equations / F. Erdogan, G.D. Gupta, T.S. Cook – in G.C. Sih, *Methods of analysis and solutions of crack problems, Mechanics of Fracture 1.* – 1973. – P. 368-425.
8. Камінський А.О. Вплив контакту між берегами тріщини Дагдейла на параметри руйнування анізотропної пластини / А.О. Камінський, М.Ф. Селіванов, Ю.О. Черноіван // *Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія: Фізико-математичні науки.* – 2016. – № 1. – С. 53-58.

References

1. JIN, Z.-H. and SUN, C.T. (2005) Cohesive zone modeling of interface fracture in elastic bimaterials. *Eng. Fract. Mech.* 72. p. 1805–1817.
2. HUI, C.Y. et al. (2011) Cohesive zone models and fracture. *J. Adhesion.* 87. p. 1–52.
3. KAMINSKY, A.A. and SELIVANOV, M.F. (2014) Critical state parameters determination using cohesive crack model for the mixed mode loading. *Theor. and Appl. Mech.* 54. p. 18-25.
4. SELIVANOV, M.F. (2014) Determination of cohesive force distribution for the mixed mode crack. *Theor. and Appl. Mech.* 55. p. 33-41.
5. SELIVANOV, M.F. (2015) A model of crack with cohesive zone for a mixed mode of fracture. *Dopov. Nac. akad. nauk Ukr.* 7. p. 62-69.
6. SAVRUK, M. P. (1981) *Two-Dimensional Elasticity Problems for Bodies with Cracks.* Kiev: Naukova dumka.
7. ERDOGAN, F., GUPTA, G.D. and COOK T. S. Solution of singular integral equations. – in Sih, *Methods of analysis and solutions of crack problems, Mechanics of Fracture 1.* – 1973. – P. 368-425.
8. KAMINSKY, A.A. and SELIVANOV, M.F., CHORNOIVAN, Y.O. (2016) Influence of contact interaction between Dugdale crack faces on fracture parameters of orthotropic plate. *Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Physics and Mathematics.* 1. p. 53-58.

Надійшла до редколегії 22.09.16

УДК 539.3

Клімчук Т. В.¹, аспірант
Острик В. І.¹, д. ф.-м. н., проф.

Контакт зі зчепленням і проковзуванням півнескінченного штампа та пружної смуги

¹ Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 03680,
м. Київ, просп. Глушкова, 4 е,
e-mail: tarasyniv@ukr.net

T. V. Klimchuk¹, graduate student
V. I. Ostryk¹, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof.

Adhesion and slipping contact between a semi- infinite stamp and an elastic strip

¹ Taras Shevchenko National University of Kyiv,
03680, Kyiv, Glushkova st., 4 e,
e-mail: tarasyniv@ukr.net

Розглянуто задачу про контактну взаємодію півнескінченного штампа з прямолінійною основою і пружної смуги, одна грань якої жорстко закріплена. Враховано сили тертя в області контакту, які приводять до поділу останньої на зони проковзування та зчеплення. З використанням процедур методу Вінера – Гопфа система інтегральних рівнянь задачі зведена до нескінченної системи алгебричних рівнянь. Наведено результати обчислень нормальних та дотичних контактних напружень, максимальні значення нормальних переміщень грані смуги поза областю контакту.

Ключові слова: фрикційний контакт, зони зчеплення та проковзування, пружна смуга, напруження.

The problem of contact interaction is considered between the semi-infinite stamp with straight-line basis and an elastic strip with rigidly fixed bottom strip line. The uniformly distributed normal and tangential loads are applied to the stamp. The friction forces are present in the contact zone and divide it to the slip and adhesion zones. Using the Wiener – Hopf method, the system of integral equations is initially reduced to the system of functional equations and then to the infinite Poincare – Koch type system of algebraic equations. The analytical expressions in the form of exponentially convergent series are obtained for the normal and tangential contact stresses as well as for the normal displacements of stress-free part of the upper strip line and tangential displacements in the contact zone. Transcendental equation to determine the relative size of the slip zone is derived. This size is calculated for various relations of the tangential and normal loads. The distributions of normal and tangential contact stresses and the maximum values of normal displacements of the upper strip line outside the contact zone are presented.

Key Words: frictional contact, adhesion and slip zones, elastic strip, stress.

Статтю представив д. ф.-м. н., проф. Жук Я. О.

Вступ

При контактній взаємодії пружних тіл при врахуванні сил тертя, які виникають в області контакту, остання, як правило, поділяється на зони проковзування та зчеплення [1]. У такій постановці контактну задачу для пружної смуги, в одну з граней якої під дією нормального навантаження вдавлюється півнескінченний штамп, розв'язано в [2]. Нижче ця задача розглядається у більш загальному випадку нормального та дотичного навантажень.

Постановка задачі

Нехай півнескінченний штамп ($x \geq 0$), який має прямолінійну основу, під дією нормального та дотичного навантажень інтенсивності p і q

вдавлюється у верхню грань $y = h$ пружної смуги $-\infty < x < \infty$, $-h \leq y \leq h$, нижня грань $y = -h$ якої жорстко закріплена (рис. 1). Вважаємо, що $0 \leq q < \mu_0 p$, де μ_0 – коефіцієнт тертя між основою

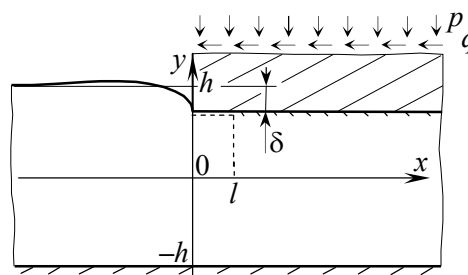


Рис. 1

штампа та верхньою гранню смуги. За вказаної умови область контакту $0 \leq x < \infty$, $y = h$ поділяється на зону зчеплення $l \leq x < \infty$ і зону проковзування $0 \leq x < l$, в якій нормальні та дотичні напруження підпорядковані закону тертя Амонтона і розмір l якої заздалегідь невідомий.

В умовах плоскої деформації маємо змішану задачу теорії пружності для смуги $-\infty < x < \infty$, $-h \leq y \leq h$ з крайовими умовами

$$\begin{aligned} u_y|_{y=h} &= -\delta \quad (0 \leq x < \infty), \\ \tau_{xy}|_{y=h} &= \mu_0 \sigma_y|_{y=h} \quad (0 < x < l), \\ u_x|_{y=h} &= -4hq \quad (l \leq x < \infty), \\ \sigma_y|_{y=h} &= 0, \quad \tau_{xy}|_{y=h} = 0 \quad (-\infty < x < 0), \\ u_x|_{y=-h} &= 0, \quad u_y|_{y=-h} = 0 \quad (-\infty < x < \infty), \end{aligned} \quad (1)$$

де δ – осадка під штампом. З умов на нескінченності ($\sigma_y = -p$, $\varepsilon_x = 0$, $x \rightarrow \infty$) осадка δ виражається через тиск p наступним чином:

$$\frac{\delta}{2h} = \frac{1-2\nu}{1-\nu} \frac{p}{2G}, \quad (2)$$

де ν – коефіцієнт Пуассона, G – модуль зсуву.

Система інтегральних рівнянь задачі та її розв'язання

Введемо невідомі функції контактних напружень в зонах проковзування та зчеплення

$$\begin{aligned} \sigma(x) &= \frac{1}{2G} \sigma_y|_{y=h} \quad (0 < x < l), \\ q_1(x) &= \frac{1}{2G} \sigma_y|_{y=h}, \quad q_2(x) = \frac{1}{2G} \tau_{xy}|_{y=h} \quad (l < x < \infty). \end{aligned} \quad (3)$$

Із застосуванням інтегрального перетворення Фур'є за змінною x отримаємо

$$\begin{aligned} u_y|_{y=h} &= \int_{-\infty}^{\infty} [K_{11}(2h\mu)a_1(\mu) + K_{12}(2h\mu)a_2(\mu)] e^{-i\mu x} d\mu, \\ u_x|_{y=h} &= \int_{-\infty}^{\infty} [K_{21}(2h\mu)a_1(\mu) + K_{22}(2h\mu)a_2(\mu)] e^{-i\mu x} d\mu, \end{aligned}$$

$$K_{mj}(\tau) = \frac{\lambda_{mj}(\tau)}{\tau \Delta(\tau)} \quad (m, j = 1, 2), \quad \tau = 2h\mu,$$

$$\lambda_{11}(\tau) = 2(1-\nu)[(3-4\nu)\text{sh } 2\tau - 2\tau],$$

$$\lambda_{12}(\tau) = -\lambda_{21}(\tau) = -2i[(3-4\nu)(1-2\nu)\text{sh}^2 \tau - \tau^2],$$

$$\lambda_{22}(\tau) = 2(1-\nu)[(3-4\nu)\text{sh } 2\tau + 2\tau],$$

$$\Delta(\tau) = (3-4\nu)(\text{ch } 2\tau - 1) + 2\tau^2 + 8(1-\nu)^2,$$

$$a_1(\mu) = \frac{1}{2\pi} \int_0^l \sigma(x) e^{i\mu x} dx + \frac{1}{2\pi} \int_l^{\infty} q_1(x) e^{i\mu x} dx,$$

$$a_2(\mu) = \frac{\mu_0}{2\pi} \int_0^l \sigma(x) e^{i\mu x} dx + \frac{1}{2\pi} \int_l^{\infty} q_2(x) e^{i\mu x} dx. \quad (4)$$

Подання (4) підставимо у першу та третю крайові умови (1). Відносно нових невідомих функцій

$$\varphi(\xi) = \sigma(2h\xi) \quad (0 < \xi < a), \quad a = l/(2h),$$

$$\psi_1(\xi) = p/(2G) + q_1(2h\xi),$$

$$\psi_2(\xi) = q/(2G) + q_2(2h\xi) \quad (a < \xi < \infty) \quad (5)$$

отримаємо систему інтегральних рівнянь

$$\begin{aligned} L_1(\xi) &\equiv \int_a^{\infty} [k_{11}(\xi-\eta)\psi_1(\eta) + k_{12}(\xi-\eta)\psi_2(\eta)] d\eta + \\ &+ \int_0^a k_1(\xi-\eta)\varphi(\eta) d\eta = f_1(\xi) \quad (0 < \xi < \infty), \\ L_2(\xi) &\equiv \int_a^{\infty} [k_{21}(\xi-\eta)\psi_1(\eta) + k_{22}(\xi-\eta)\psi_2(\eta)] d\eta + \\ &+ \int_0^a k_2(\xi-\eta)\varphi(\eta) d\eta = f_2(\xi) \quad (a < \xi < \infty), \end{aligned} \quad (6)$$

$$k_m(\xi-\eta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_m(\tau) e^{-i\tau(\xi-\eta)} d\tau,$$

$$k_{mj}(\xi-\eta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_{mj}(\tau) e^{-i\tau(\xi-\eta)} d\tau,$$

$$K_m(\tau) = K_{m1}(\tau) + \mu_0 K_{m2}(\tau),$$

$$f_1(\xi) = -\frac{1}{2G} \left[\frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} p + \tilde{f}_1(\xi) \right],$$

$$f_2(\xi) = -\frac{1}{2G} [q + \tilde{f}_2(\xi)],$$

$$\tilde{f}_m(\xi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\tau} [pK_{m1}(\tau) + qK_{m2}(\tau)] e^{i\tau(a-\xi)} d\tau \quad (m, j = 1, 2).$$

Розповсюдимо інтегральні рівняння (6) на всю числову вісь за умови, що $\varphi(\eta) = 0$ ($\eta < 0$, $\eta > a$), $\psi_1(\eta) = 0$, $\psi_2(\eta) = 0$ ($\eta < a$), і застосуємо до них інтегральне перетворення Фур'є. Введемо невідомі функції

$$\Phi^+(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^a \varphi(\xi) e^{iz\xi} d\xi,$$

$$\Phi^-(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^0 \varphi(\xi + a) e^{iz\xi} d\xi,$$

$$\begin{aligned}\Psi_j^+(z) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \Psi_j(\xi+a) e^{iz\xi} d\xi \quad (j=1, 2), \\ \Psi_1^-(z) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 L_1(\xi) e^{iz\xi} d\xi, \\ \Psi_2^-(z) &= \frac{e^{-iza}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^a L_2(\xi) e^{iz\xi} d\xi,\end{aligned}\quad (7)$$

аналітичні відповідно у півплощинах $\text{Im } z > c^+$ і $\text{Im } z < c^-$ ($c^+ > 0$, $c^- > 0$) комплексної площини. Зокрема, $\Phi^\pm(z)$ є цілі функції. Застосовуючи теорему про згортку для інтегрального перетворення Фур'є, приходимо до системи функціональних рівнянь Вінера – Гопфа [3]:

$$\begin{aligned}K_1(z)\Phi^+(z) + e^{iza}[K_{11}(z)\Psi_1^+(z) + K_{12}(z)\Psi_2^+(z)] - \\ - \Psi_1^-(z) = F_1^+(z), \\ K_2(z)\Phi^+(z) + e^{iza}[K_{21}(z)\Psi_1^+(z) + K_{22}(z)\Psi_2^+(z) - \\ - \Psi_2^-(z)] = e^{iza}F_2^+(z), \\ \Phi^+(z) = e^{iza}\Phi^-(z) \quad (c^+ < \text{Im } z < c^-).\end{aligned}\quad (8)$$

Праві частини перетворюються за теорією лишків до вигляду

$$\begin{aligned}F_1^+(z) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty f_1(\xi) e^{iz\xi} d\xi = \\ &= F_1(z) - \frac{e^{iza}}{iz} [\bar{p}K_{11}(z) + \bar{q}K_{12}(z)], \\ F_1(z) &= \frac{1-2v}{1-v} \frac{\bar{p}}{iz} - \sum_{k=1}^\infty \frac{\bar{p}\lambda_{11}(is_k) + \bar{q}\lambda_{12}(is_k)}{s_k^2 \Delta'(is_k)} \frac{e^{-s_k a}}{s_k + iz}, \\ F_2^+(z) &= \frac{e^{-iza}}{\sqrt{2\pi}} \int_a^\infty f_2(\xi) e^{iz\xi} d\xi = \\ &= \sum_{k=1}^\infty \frac{\bar{p}\lambda_{21}(is_k) - \bar{q}\lambda_{22}(is_k)}{s_k^2 \Delta'(is_k)} \frac{1}{s_k - iz}, \\ \bar{p} &= \frac{p}{2G\sqrt{2\pi}}, \quad \bar{q} = \frac{q}{2G\sqrt{2\pi}},\end{aligned}\quad (9)$$

де s_k ($k=1, 2, \dots$) – корені рівняння $\Delta(is) = 0$ із півплощини $\text{Re } s > 0$.

Уведемо допоміжну невідому функцію

$$\Psi^+(z) = -\mu_0 \Psi_1^+(z) + \Psi_2^+(z). \quad (10)$$

Виключивши з перших двох рівнянь системи (8) функцію $\Phi^+(z)$, отримаємо рівняння

$$\begin{aligned}K(z)\Psi^+(z) + e^{-iza} \frac{\lambda_2(z)}{\lambda_1(z)} \Psi_1^-(z) - \Psi_2^-(z) = \\ = -e^{-iza} \frac{\lambda_2(z)}{\lambda_1(z)} F_1^+(z) + F_2^+(z),\end{aligned}\quad (11)$$

де

$$\begin{aligned}K(z) &= \frac{K_{11}(z)K_{22}(z) - K_{21}(z)K_{12}(z)}{K_1(z)} = \frac{\lambda(z)}{z\lambda_1(z)}, \\ \lambda(z) &= (3-4v)^2 (\text{ch } 2z - 1) - 2z^2.\end{aligned}\quad (12)$$

Перейдемо до системи функціональних рівнянь, яка складається з першого рівняння (8) і рівняння (11). Методом Вінера – Гопфа [3] зведемо цю систему до нескінченної системи алгебричних рівнянь. Факторизуємо коефіцієнти $K_1(z)$, $K(z)$, тобто подамо їх у вигляді

$$\begin{aligned}K_1(z) &= \kappa K_1^+(z) K_1^-(z), \quad \kappa = K_1(0) = \frac{1-2v}{1-v}, \\ K(z) &= 2K^+(z) K^-(z),\end{aligned}\quad (13)$$

де $K_1^\pm(z)$, $K^\pm(z)$ – функції, які не обертаються в нуль і аналітичні у півплощинах $\text{Im } z > c^+$ і $\text{Im } z < c^-$ відповідно. Факторизацію коефіцієнтів $K_1(z)$, $K(z)$ проводимо у нескінченних добутках:

$$\begin{aligned}K_1^+(z) &= \prod_{n=1}^\infty \left(1 + \frac{iz}{\zeta'_n}\right) \left(1 - \frac{iz}{s_n}\right)^{-1}, \\ K_1^-(z) &= \prod_{n=1}^\infty \left(1 + \frac{iz}{\zeta_n}\right) \left(1 + \frac{iz}{s_n}\right)^{-1}, \\ K^+(z) &= \prod_{n=1}^\infty \left(1 - \frac{iz}{\tau_n}\right) \left(1 + \frac{iz}{\zeta'_n}\right)^{-1}, \\ K^-(z) &= \prod_{n=1}^\infty \left(1 + \frac{iz}{\tau_n}\right) \left(1 + \frac{iz}{\zeta_n}\right)^{-1}.\end{aligned}\quad (14)$$

Тут ζ_n , ζ'_n ($n=1, 2, \dots$) – корені рівняння $\lambda_1(is) = 0$ із півплощин $\text{Re } s > 0$, $\text{Re } s < 0$ відповідно; τ_n ($n=1, 2, \dots$) – корені рівняння $\lambda(is) = 0$ із півплощини $\text{Re } s > 0$.

Після факторизації коефіцієнтів систему функціональних рівнянь запишемо у вигляді

$$\begin{aligned}\kappa K_1^+(z)\Phi^+(z) + \frac{e^{iza}}{K_1^-(z)} \left[K_{11}(z) \left(\Psi_1^+(z) + \frac{\bar{p}}{iz} \right) + \right. \\ \left. + K_{12}(z) \left(\Psi_2^+(z) + \frac{\bar{q}}{iz} \right) \right] - \frac{\kappa \bar{p}}{iz} - \frac{\Psi_1^-(z)}{K_1^-(z)} = \frac{F_1(z)}{K_1^-(z)} - \frac{\kappa \bar{p}}{iz}, \\ 2K^+(z)\Psi^+(z) - 2 \frac{\mu_0 \bar{p} - \bar{q}}{iz} [K^+(z) - 1] + \\ + e^{-iza} \frac{\lambda_2(z)}{\lambda_1(z)} \frac{\Psi_1^-(z) + F_1(z)}{K^-(z)} - 2 \frac{\mu_0 \bar{p}}{iz} - \frac{\Psi_2^-(z)}{K^-(z)} = \\ = \left(\frac{\bar{p}K_{21}(z) + \bar{q}K_{22}(z)}{iz} + F_2^+(z) \right) \frac{1}{K^-(z)} - 2 \frac{\bar{q}}{iz}.\end{aligned}\quad (c^+ < \text{Im } z < c^-). \quad (15)$$

Другі складові рівнянь (15) подамо різницею функцій, аналітичних у півплощинах $\text{Im } z > c^+$, $\text{Im } z < c^-$:

$$\frac{e^{iza}}{K_1^-(z)} \left[K_{11}(z) \left(\Psi_1^+(z) + \frac{\bar{p}}{iz} \right) + K_{12}(z) \left(\Psi_2^+(z) + \frac{\bar{q}}{iz} \right) \right] - \frac{\kappa \bar{p}}{iz} = \chi_1^+(z) - \chi_1^-(z), \quad (16)$$

$$e^{-iza} \frac{\lambda_2(z)}{\lambda_1(z)} \frac{\Psi_1^-(z) + F_1(z)}{K^-(z)} - \frac{2\mu_0 \bar{p}}{iz} = \chi^+(z) - \chi^-(z).$$

Останні функції визначимо, подавши їх у вигляді інтегралів типу Коші вздовж дійсної осі. Перетворюючи інтеграли у ряди за лишками підінтегральної функції, знайдемо

$$\begin{aligned} \chi_1^-(z) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k^+}{\zeta_k + iz} \left(\Psi^+(i\zeta_k) + \frac{\mu_0 \bar{p} - \bar{q}}{\zeta_k} \right) e^{-\zeta_k a}, \\ \chi^+(z) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k^-}{\zeta'_k (\zeta'_k + iz)} \left(\Psi_1^-(i\zeta'_k) + F_1(i\zeta'_k) \right) e^{\zeta'_k a}, \quad (17) \\ \alpha_k^+ &= \frac{\kappa \lambda_{12}(i\zeta_k)}{i\lambda'_1(i\zeta_k)} K_1^+(i\zeta_k), \quad \alpha_k^- = \frac{i\zeta'_k \lambda_2(i\zeta'_k)}{\lambda'_1(i\zeta'_k) K^-(i\zeta'_k)}. \end{aligned}$$

Праві частини системи рівнянь (15) є функції, аналітичні у нижній півплощині:

$$\begin{aligned} \frac{F_1(z)}{K_1^-(z)} - \frac{\kappa \bar{p}}{iz} &= -f_1^-(z), \quad (18) \\ \left(\frac{\bar{p} K_{21}(z) + \bar{q} K_{22}(z)}{iz} + F_2^+(z) \right) \frac{1}{K^-(z)} - 2 \frac{\bar{q}}{iz} &= -f^-(z). \end{aligned}$$

У результаті система функціональних рівнянь перетворюється до вигляду

$$\begin{aligned} \kappa K_1^+(z) \Phi^+(z) + \chi_1^+(z) &= \frac{\Psi_1^-(z)}{K_1^-(z)} + \chi_1^-(z) - f_1^-(z), \\ 2K^+(z) \Psi^+(z) - 2 \frac{\mu_0 \bar{p} - \bar{q}}{iz} [K^+(z) - 1] &+ \\ + \chi^+(z) &= \frac{\Psi_2^-(z)}{K^-(z)} + \chi^-(z) - f^-(z). \quad (19) \end{aligned}$$

Для кожного рівняння (19) ліва і права частини аналітично продовжують одна одну на всю комплексну площину і являють собою цілу функцію. Використовуючи оцінки [2]:

$$\begin{aligned} K_1^+(z) &= O(z^{\rho-1}), \quad K^+(z) = O(z^{-\rho}), \\ \rho &= \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctg \frac{\mu_0(1-2\nu)}{2(1-\nu)} \quad (1/2 < \rho < 1), \quad (20) \end{aligned}$$

$$\Phi^+(z), \Psi^+(z), \chi_1^+(z), \chi^+(z) = o(1), \quad |z| \rightarrow \infty,$$

заключаємо що кожна із зазначених цілих функцій тотожно дорівнює нулеві. Отже, знаходимо

$$\Phi^+(z) = -\frac{\chi_1^+(z)}{\kappa K_1^+(z)},$$

$$\Psi_1^-(z) = K_1^-(z) \left(\frac{\kappa \bar{p}}{iz} - \chi_1^-(z) \right) - F_1(z),$$

$$\Psi^+(z) = \frac{\mu_0 \bar{p} - \bar{q}}{iz} - \frac{1}{2K^+(z)} \left(2 \frac{\mu_0 \bar{p} - \bar{q}}{iz} + \chi^+(z) \right),$$

$$\Psi_2^-(z) = K^-(z) [f^-(z) - \chi^-(z)]. \quad (21)$$

За лемою Ватсона [4] із поведінки функції $\Psi^+(z)$ при $|z| \rightarrow \infty$ впливає, що лінійна комбінація контактних напружень $\tau_{xy} - \mu_0 \sigma_y$ необмежена на краю зони зчеплення ($x \rightarrow l+0$, $y = h$). Вимагаючи обмеженість напружень у точці $x = l$, $y = h$, необхідно поставити умову

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} iz \chi^+(z) = -2(\mu_0 \bar{p} - \bar{q}). \quad (22)$$

За умови (22) вираз для функції $\Psi^+(z)$ набуває вигляду

$$\begin{aligned} \Psi^+(z) &= \frac{\mu_0 \bar{p} - \bar{q}}{iz} + \frac{\tilde{\chi}^+(z)}{2izK^+(z)}, \\ \tilde{\chi}^+(z) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k^-}{\zeta'_k + iz} \left[\Psi_1^-(i\zeta'_k) + F_1(i\zeta'_k) \right] e^{\zeta'_k a}. \quad (23) \end{aligned}$$

Вирази (21), (23) для функцій $\Phi^+(z)$, $\Psi^+(z)$, $\Psi_{1,2}^-(z)$ з урахуванням (17) містять невідомі значення $\Psi^+(i\zeta_k)$, $\Psi_1^-(i\zeta'_k)$ ($k = 1, 2, \dots$). Для їх визначення у першій рівності (23) візьмемо $z = i\zeta_n$, а в другій рівності (21) покладемо $z = i\zeta'_n$ ($n = 1, 2, \dots$). Відносно невідомих

$$\begin{aligned} z_k^+ &= \frac{1}{\bar{p}} \Psi^+(i\zeta_k) + \left(\mu_0 - \frac{q}{\bar{p}} \right) \frac{1}{\zeta_k}, \\ z_k^- &= \frac{1}{\bar{p}} \left[\Psi_1^-(i\zeta'_k) + F_1(i\zeta'_k) \right] \quad (k = 1, 2, \dots) \quad (24) \end{aligned}$$

отримаємо нескінченну систему алгебричних рівнянь

$$\begin{aligned} z_n^+ + \frac{1}{2\zeta_n K^+(i\zeta_n)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k^-}{\zeta'_k - \zeta_n} z_k^- e^{\zeta'_k a} &= 0, \\ z_n^- + K_1^-(i\zeta'_n) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k^+}{\zeta_k - \zeta'_n} z_k^+ e^{-\zeta_k a} &= -\frac{\kappa}{\zeta'_n} K_1^-(i\zeta'_n) \\ &\quad (n = 1, 2, \dots). \quad (25) \end{aligned}$$

Додаткову умову (22) для цієї системи з урахуванням виразу для $\chi^+(z)$ із (17) та позначень (24) запишемо у вигляді

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k^-}{\zeta_k'} z_k^- e^{\zeta_k' a} = -2 \left(\mu_0 - \frac{q}{p} \right). \quad (26)$$

Регулярна нескінченна система алгебричних рівнянь (25) має експоненціально зникаючі за k коефіцієнти та відноситься до типу Пуанкаре – Коха. Її розв'язок може бути ефективно знайдений методом редукції. Додаткова умова (26) служить для визначення відносного розміру зони проковзування $a = l/(2h)$.

Контактні напруження та переміщення точок межі смуги

Напруження (3) в області контакту знаходимо оберненим перетворенням Фур'є рівностей (7) для функцій $\Phi^+(z)$, $\Psi_1^+(z)$, $\Psi_2^+(z)$ з урахуванням рівностей (21), (10), (8). Перетворюючи відповідні інтеграли Фур'є в ряди за теорією лишків, отримуємо наступні вирази для контактних напружень у зонах проковзування і зчеплення:

$$\sigma_y \Big|_{y=h} = -p + p \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\zeta_k' \Delta(i\zeta_k')}{\lambda_1'(i\zeta_k')} z_k^- e^{\zeta_k' \xi} + \frac{\lambda_{12}(i\zeta_k)}{i\lambda_1'(i\zeta_k)} z_k^+ e^{-\zeta_k(a-\xi)} \right) \quad (0 < x < l),$$

$$\sigma_y \Big|_{y=h} = -p - p \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_{12}(i\tau_k)}{\lambda'(i\tau_k)} \beta_k K^-(-i\tau_k) e^{-\tau_k(\xi-a)},$$

$$\tau_{xy} \Big|_{y=h} = -q - p \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_{11}(i\tau_k)}{\lambda'(i\tau_k)} \beta_k K^-(-i\tau_k) e^{-\tau_k(\xi-a)} \quad (x > l),$$

$$\xi = \frac{x}{2h}, \quad \beta_k = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\alpha_m^-}{\zeta_m' + \tau_k} z_m^- e^{\zeta_m' a} \quad (k=1, 2, \dots). \quad (27)$$

Застосовуючи лему Ватсона [4] до інтегралів (7), отримаємо поведінку напружень на краю області контакту

$$\sigma_y \Big|_{y=h} = O(x^{p-1}), \quad x \rightarrow +0. \quad (28)$$

Перетворюючи перші два вирази (3) до інтегралів Фур'є, які містять функції $\Phi^+(z)$, $\Psi_1^+(z)$, $\Psi_2^+(z)$, і обчислюючи останні за теорією лишків, знаходимо переміщення в точках верхньої межі смуги:

$$u_y \Big|_{y=h} = -\frac{\delta}{\kappa} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_1(is_k)}{s_k \Delta'(is_k) K_1^+(is_k)} \gamma_k e^{s_k \xi}, \quad \xi = \frac{x}{2h},$$

$$u_x \Big|_{y=h} = -\frac{\delta}{\kappa} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_2(is_k)}{s_k \Delta'(is_k) K_1^+(is_k)} \gamma_k e^{s_k \xi} \quad (x < 0),$$

$$\gamma_k = \frac{1}{s_k} + \frac{1}{\kappa} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\alpha_m^+}{\zeta_m - s_k} z_m^+ e^{-\zeta_m a} \quad (k=1, 2, \dots),$$

$$u_x \Big|_{y=h} = -2\mu_0 \frac{\delta}{\kappa} + \frac{\delta}{\kappa} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda_2(i\zeta_k')}{i\lambda_1'(i\zeta_k')} z_k^- e^{\zeta_k' \xi} + \frac{\lambda(i\zeta_k)}{\zeta_k \lambda_1'(i\zeta_k)} z_k^+ e^{-\zeta_k(a-\xi)} \right) \quad (0 < x < l). \quad (29)$$

Результати обчислень

Обчислення проведено за значень коефіцієнта Пуассона $\nu = 1/3$ і коефіцієнта тертя $\mu_0 = 1/4$. У всіх точках зони проковзування $u_x \Big|_{y=h} > -4hq$ ($0 < x < l$), тобто точки верхньої грані смуги зміщуються від краю штампа, що підтверджує вибір знаку при μ_0 у другій крайовій умові (1). На певній відстані від краю штампа вільна частина верхньої межі смуги припіднімається, утворюючи пагорбок. У табл. 1 подано відносні розміри зони проковзування $a = l/(2h)$, відносні максимальні значення переміщень $\bar{u}_{\max} = 10 \max u_y / \delta$ і відповідні їм безрозмірні координати ξ верхньої грані смуги, які визначають висоту пагорбка та положення його вершини для різних відношень q/p інтенсивностей зсувного та нормального навантажень.

Таблиця 1

q/p	a	$\bar{u}_{\max}$	$-\xi$
0	0,0140	0,393	1,043
0,05	0,0291	0,473	1,039
0,1	0,0739	0,554	1,033
0,15	0,2089	0,632	1,025
0,2	0,5298	0,709	1,013
0,24	1,4279	0,748	1,004

На рис. 2 і 3 показано розподіли безрозмірних нормальних $\bar{\sigma} = \frac{1}{p} \sigma_y \Big|_{y=h}$ і дотичних $\bar{\tau} = \frac{1}{p} \tau_{xy} \Big|_{y=h}$ напружень для відношень $q/p = 0; 0,1; 0,2; 0,24$ (криві 1–4, пунктирна крива відповідає гладкому контакту [5]). Як при гладкому, так і фрикційному контакті, поблизу краю штампа ($0 < x/(2h) < 0,25$) контактний тиск перевищує своє усталене значення p , яке встановлюється вглибині області контакту ($x/(2h) > 1,5$), і необмежено зростає при наближенні до краю штампа ($x \rightarrow +0$). У середній частині області контакту ($0,25 < x/(2h) < 1,5$) контактний тиск дещо зменшується, особливо при

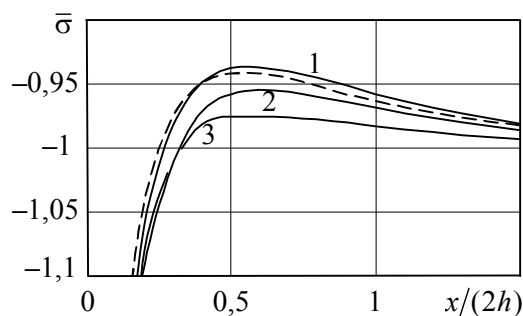


Рис. 2

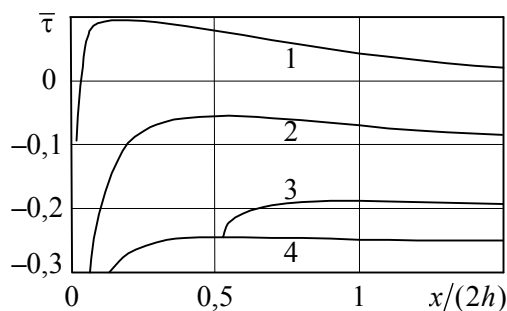


Рис. 3

гладкому контакті та у разі тільки нормального навантаження при контакті зі зчепленням і проковзуванням. При збільшенні відношення q/p від 0,2 до 0,25 розподіл нормальних контактних напружень майже не змінюється у порівнянні з випадком $q/p = 0,2$ (крива 3) і є таким самим, як і для ковзного контакту ($q/p = \mu_0 = 0,25$) [6].

Наведені на рис. 3 розподіли дотичних напружень у випадках $q/p = 0; 0,1$ (криві 1, 2) відповідають зоні зчеплення, у випадку $q/p = 0,24$ (крива 4) – зоні проковзування. У разі $q/p = 0,2$ (крива 3) графік дотичних напружень у точці $x = l = 0,53 \cdot 2h$ переходу із зони зчеплення в зону проковзування має характерний злом. На ділянці $0 < x/(2h) < 0,53$, яка є зоною проковзування для $q/p = 0,2$, криві 3 і 4 зливаються. Це вказує на незмінність на цій ділянці дотичних контактних напружень при збільшенні відношення q/p від 0,2 до його максимально можливого значення, рівного $\mu_0 = 0,25$.

Список використаних джерел

1. Джонсон К. Механика контактного взаимодействия / К. Джонсон. – Москва: Мир, 1989. – 510 с.
2. Острик В. І. Вдавлювання напівбезмежного штампа в пружну смугу за наявності тертя і зчеплення // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2008. – **51**, № 1. – С. 138–149.
3. Нобл Б. Метод Винера – Хопфа / Б. Нобл. – Москва: Изд-во иностр. лит., 1962. – 280 с.
4. Федорюк М. В. Асимптотика: Интегралы и ряды / М. В. Федорюк. – Москва: Наука, 1987. – 544 с.
5. Улитко А. Ф. Смешанная задача теории упругости для полосы на жестком основании / А. Ф. Улитко, В. И. Острик // Тр. III Всерос. конф. по теории упругости с международным участием. – Ростов-на-Дону: Новая книга, 2004. – С. 372–375.
6. Клімчук Т. В. Ковзний контакт напівнескінченного штампа з пружною смугою / Т. В. Клімчук, В. І. Острик // Вісник Київ. ун-ту. Сер.: фіз.-мат. науки. – 2015. – Вип. 2. – С. 75–78.

References

1. DZHONSON, K. (1989) *Mehanika kontaktного vzaimodeistviya*. Moskva: Mir.
2. OSTRUK, V. I. (2008) Vdavljuvannya napivbezmezhnogo shtampa v pruzhnu smugu za najavnosti tertja i zcheplennja. *Matematichni metody ta fizuko-mehanichni polja*. **51**, N 1. P. 138–149.
3. NOBL, B. (1958) *Methods based on the Wiener – Hopf technique*. London – New York – Paris – Los Angeles.
4. FEDORJUK, M. V. (1987) *Asimptotika: Integraly i rjady*. Moskva: Nauka.
5. ULITKO, A. F. and OSTRUK, V. I. (2004) Smeshannaja zadacha teorii uprugosti dlja polosy na zestkom osnovanii. *Trudy III Vserossijskoj konferentsii po teorii uprugosti s mezhnarodnym uchastijem*. Rostov-na-Donu: Novaja kniga. P. 372–375.
6. KLIMCHUK, T. V. and OSTRUK, V. I. (2015) Kovznyi kontakt napivneskinchennogo shtampa z pruzhnoju smugoju. *Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series Physics & Mathematics*. No. 2. P. 75–78.

Надійшла до редколегії 16.09.16

УДК 539.3

Куценко О. Г., к. ф.-м. н., доц.,
Куценко Г. В., к. ф.-м. н., доц.,
Харитонов О. М., к. ф.-м. н., доц.,
Васильєв І. Ю., к. ф.-м. н., с.н.с.

Осесиметричне кручення тонких кілець довільного профілю

Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, пр-т.
Глушкова 4е,
e-mail: alex_kutz@univ.kiev.ua

O. G. Kutsenko, Cand. Sci. (Ph.-M.), Docent,
G. V. Kutsenko, Cand. Sci. (Ph.-M.), Docent,
O. M. Kharytonov, Cand. Sci. (Ph.-M.), Docent,
I. Yu. Vasil'ev, Cand. Sci. (Ph.-M.), Sr. Researcher.

Axisymmetric torsion of thin ring with general view of cross-section

Taras Shevchenko National University of Kyiv,
03680, Kyiv, Glushkova st., 4e,
e-mail: alex_kutz@univ.kiev.ua

Розглянута задача про осесиметричне кручення тонкого кільця. Наведені вирази для компонент вектора зміщень та тензора напружень. Знайдено жорсткість на кручення кільця довільного профілю. Результати апробовані за допомогою моделювання методом скінченних елементів.

Ключові слова: осесиметричне кручення, довільний профіль, жорсткість на кручення.

The paper deals with the problem concerning the axisymmetric torsion of thin rings. An assumption about flat rigid cross-section was used. The distributions of displacements and stresses throughout such ring are given. It was appeared that the circumferential stress component is much greater than the radial, the longitudinal or any tangential one. The expression for the torsional stiffness of a ring with general view of cross-section was obtained. It generalizes the known expressions for the circular and rectangular cross-sections. The obtained results are approved with help of numerical calculation by the finite element method. The calculation was performed for the ring with circular cross-section, for the ring with rectangular cross-section and for the ring of the heat exchanger flange. It is appeared that the deviation between the analytical and the numerical results is under five per cent if the cross-section overall size is under twenty per cent of the ring radius. The presented analytical relations provide easy way for flange dimensioning and can be useful in the flange coupling designing.

Key Words: axisymmetric torsion, general view of cross-section, torsional stiffness.

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Жук Я. О.

Вступ

При проектуванні та продовженні ресурсу обладнання об'єктів енергетичної, хімічної, харчової та інших галузей промисловості постійно виникає проблема розрахунку напружено-деформівного стану (НДС) фланцевих з'єднань. Так, для оцінки ресурсу енергоблоку атомної станції необхідно виконати розрахунки на міцність, циклічну втому та сейсмостійкість цілої низки резервуарів. Переважна більшість цих резервуарів утримують фланцеві з'єднання, розташовані в зоні патрубків чи в зоні люка-лаза, а деякі резервуари, такі як корпус реактора, теплообмінники аварійного розхолодження та теплообмінники басейну витримки, мають фланцеві з'єднання самого

корпусу. Тому наявність аналітичних співвідношень, на основі яких може бути розрахований НДС фланцевих з'єднань, дозволяє ефективно виконати проектний розрахунок (підбір основних розмірів) та вирішити проблему достовірності результатів подальшого повірного розрахунку. Проте наявні нормативні документи (див. наприклад [6]) дають лише рекомендації по вибору основних розмірів без оцінки НДС всередині фланцевого з'єднання. Крім того, відомі [2] аналітичні вирази для оцінки параметрів НДС фланців були отримані ще в епоху великих ЕОМ, коли популярні сьогодні скінченно-елементні пакети могли використовуватися лише на небагатьох суперкомп'ютерах. Дані співвідношення були

отримані напівемпіричним методом і не завжди адекватно відображають розподіл напружень та деформацій в фланцях, що з'ясувалося саме з розвитком як самих скінченно-елементних пакетів, так і зі зростанням можливостей персональних комп'ютерів. Тому знаходження простих аналітичних співвідношень, здатних описати напружено-деформівний стан фланцевих з'єднань, є актуальною проблемою механіки деформівного твердого тіла.

Постановка задачі

Фланець можна розглядати як кільце жорсткості циліндра, у якості якого виступає труба чи обичайка у випадку резервуару. Наявність фланцевого з'єднання завжди призводить до локальної деформації згину циліндра чи то внаслідок дії сил натягу шпильок фланцевого з'єднання, чи внаслідок дії внутрішнього тиску. Тому при моделюванні поведінки фланцевого з'єднання важливою проміжною задачею постає визначення НДС кільця під дією моменту кручення.

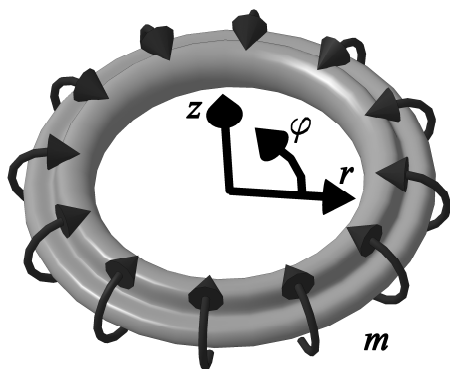


Рис.°1 Осесиметричне кручення кільця довільного постійного поперечного перерізу

Таким чином, розглядається осесиметрична задача про знаходження напружено-деформівного стану тонкого пружного кільця довільного постійного профілю, навантаженого розподіленим моментом, направленим вздовж осі стержня (див. рис. 1). Те що кільце є тонким означає, що розміри його поперечного перерізу є значно меншими за радіус його осі як стержня, яка за постановкою задачі є колом.

Загальні співвідношення

При проведенні численних розрахунків на міцність фланцевих з'єднань було помічено, що під дією зовнішніх осесиметричних навантажень поперечні перерізи фланців головним чином

повертаються як абсолютно жорсткі. Тому у випадку тонкого кільця довільного поперечного перерізу (див. рис. 2) можна припустити, що переміщення точок задаються співвідношеннями

$$u_r \approx -\vartheta z, \quad u_\varphi = 0, \quad u_z \approx \vartheta(r - r_0), \quad (1)$$

де r, φ, z — циліндричні координати, вибрані так, що вісь z є віссю осевої симетрії, а вісь r проходить через центр обертання поперечного перерізу; u_r, u_φ, u_z — компоненти вектора зміщень у даній системі координат, ϑ — кут повороту поперечного перерізу у власній площині; r_0 — відстань від осі симетрії до центру повороту поперечного перерізу.

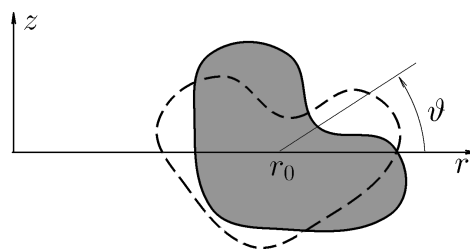


Рис.°2 Поворот поперечного перерізу кільця як єдиного цілого

Підставляючи (1) в геометричні співвідношення Коші для компонент тензора деформацій (див. наприклад [2]), знаходимо, що єдиною ненульовою компонентою тензора деформацій буде колова лінійна деформація:

$$\varepsilon_\varphi = \frac{u_r}{r} = -\vartheta \frac{z}{r}. \quad (2)$$

У випадку, коли зовнішнє навантаження не викликає суттєвих напружень в площині поперечного перерізу на границі поперечного перерізу, напруження в радіальному напрямку σ_r , та напруження у осевому напрямку σ_z через малі розміри поперечного перерізу не встигають розвинути по товщині кільця і ними можна знехтувати. Саме таким є випадок чистого кручення, коли до поперечного перерізу прикладається лише зовнішній момент кручення. Тоді в силу закону Гука колові напруження можуть бути представлені у вигляді

$$\sigma_\varphi = E\varepsilon_\varphi = -E\vartheta \frac{z}{r}, \quad (3)$$

де E — модуль Юнга матеріалу кільця. Всіма іншими компонентами тензора напружень можна знехтувати у порівнянні з σ_φ .

Перейдемо до визначення інтегральних характеристик. Перед усім необхідно визначити положення центра обертання поперечного перерізу. Для цього уявно розріжемо площиною, що проходить через вісь z , кільце навпіл, приклавши в утворених перерізах напруження σ_φ для виконання умови статичної еквівалентності вихідному кільцю. Проектуючи всі сили, прикладені до однієї з половин кільця, на напрямок, ортогональний до площини розрізу, приходимо до умови

$$2 \int_A \sigma_\varphi dA = 0 \quad \text{або} \quad \int_A \frac{z}{r} dA = 0, \quad (4)$$

де A — площа поперечного перерізу кільця. Зважаючи на те, що кільце вважається тонким, умова (4) може бути переписана у вигляді

$$\int_A z dA = 0, \quad (5)$$

тобто центр обертання знаходиться на одному радіусі з центром площ поперечного перерізу кільця. Зауважимо, що перехід від умови (4) до умови (5) буде абсолютно точним у випадку, коли вісь r є віссю симетрії поперечного перерізу кільця.

Умова (5) в силу (1) однозначно фіксує радіальні зміщення точок кільця u_r . У випадку, коли на границі кільця задані лише зусилля, осьові зміщення u_z визначаються з точністю до довільної сталої, тому відстань від осі z до центру обертання не може бути визначена. На практиці при розв'язанні задач методом скінчених елементів принаймні в одній точці має бути задане нульове осьове зміщення. Інакше чисельний розрахунок просто не зійдеться. Надалі, якщо це не буде оговорене окремо, будемо вважати, що осьове зміщення центру площ відсутнє, тобто центр обертання співпадає з центром площ.

Крім положення центра обертання також необхідно пов'язати кут повороту ϑ зі значенням моменту кручення на одиницю довжини осі кільця m . Для цього двома взаємно ортогональними площинами, що проходять через вісь z , уявно виріжемо з кільця четверть, приклавши як і в попередньому випадку до її торців напруження σ_φ . Проектуючи на вісь r , що лежить в площині будь-якого з двох перерізів, всі моменти, прикладені до четверті кільця, отримуємо співвідношення

$$\int_A \sigma_\varphi z dA = \int_0^{\pi/2} mR \sin \varphi d\varphi, \quad (6)$$

де R — радіус вісі кільця. Провівши нескладні алгебраїчні перетворення, приходимо до виразу для кута закручування

$$\vartheta = \frac{mR}{EW_r}, \quad (7)$$

де $W_r = \int_A \frac{z^2}{r} dA$. Нехтуючи зміною радіуса вздовж поперечного перерізу кільця в силу його тонкості, (7) можемо переписати у вигляді

$$\vartheta = \frac{mR^2}{EJ_r}, \quad (8)$$

де $J_r = \int_A z^2 dA$ — момент інерції поперечного перерізу кільця відносно осі r . Вираз (8) є узагальненням на випадок довільного поперечного перерізу аналогічних виразів для круглого [5] та прямокутного [3] поперечних перерізів.

Чисельні результати

Для перевірки адекватності отриманих співвідношень за допомогою скінчено-елементного пакету CalculiX [4] було проведене чисельне моделювання осесиметричного кручення кілець різних профілів: круглого, прямокутного та фланця Д2130 теплообмінника аварійного розхолодження (ТОАР) реактора ВВЕР-1000. В усіх трьох випадках момент кручення в перерізі моделювався двома парами протилежно направлених зосереджених сил, тобто до кільця прикладалися чотири рівномірно розподілені в коловому напрямку (вздовж φ) зусилля. У якості матеріалу кілець була вибрана сталь з модулем Юнга $E = 2 \cdot 10^{11}$ Па та коефіцієнтом Пуассона $\nu = 0,3$.

На рисунках 3–6 показано розподіл переміщень та напружень в круглому кільці (торі) з радіусом вісі $R = 50$ см та радіусом поперечного перерізу $\rho = 5$ см. Кручення тора відбувалося внаслідок дії розподілених по чотирьом колам сил. Кожне коло являє собою г.м.т. кінців або горизонтального (вздовж r), або вертикального (вздовж z) діаметрів поперечних перерізів. Всі сили направлені проти годинникової стрілки по дотичній до границі поперечного перерізу. Сумарне значення кожної

з них (добуток інтенсивності на довжину кола прикладання: при чисельному моделюванні в стандартних пакетах задається саме сумарне значення, а не інтенсивність) вибиралося рівним $P=100\text{кН}$, тобто сили створювали розподілений

момент кручення $m = \frac{M}{2\pi} = \frac{4P\rho}{2\pi} = 6366\text{Н}$.

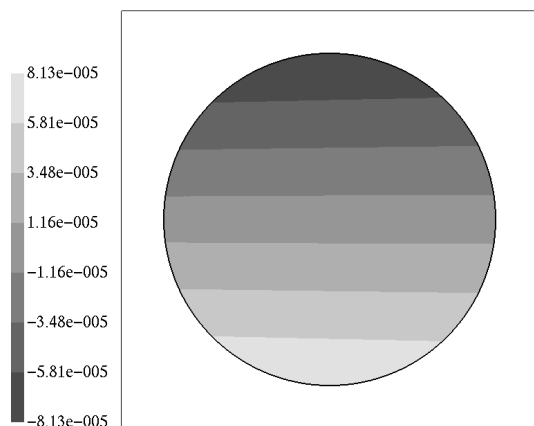


Рис.°3 Розподіл радіальних зміщень u_r по круглому поперечному перерізу

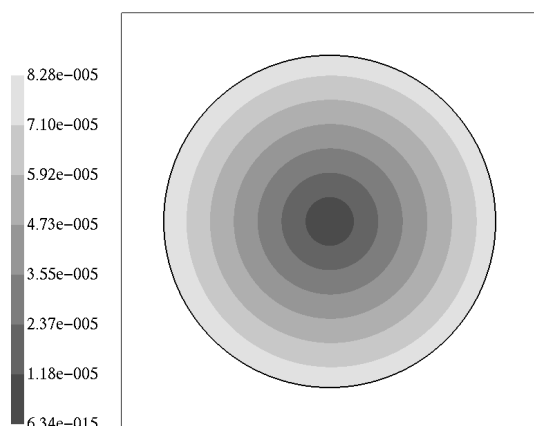


Рис.°4 Розподіл абсолютних зміщень $\sqrt{u_r^2 + u_z^2}$ по круглому поперечному перерізу

Видно, що розподіли радіальних u_r та колових u_z зміщень гарно слідують лінійним розподілам (1), хоча в розподілі u_r є ледве помітний нахил ізоліній, пов'язаний зі зміною радіальної координати вздовж перерізу кільця. Він більш помітний в розподілі колових напружень σ_ϕ в силу наявності r в знаменнику (3), проте для даного співвідношення поперечних розмірів до радіуса осі кільця $\alpha = 2\rho/R$, рівного

0,2, мало впливає на значення інтегральних характеристик. Зауважимо, що зі зменшенням α нахил ізоліній також зменшується, тобто точність співвідношень (1)–(8) зростає.

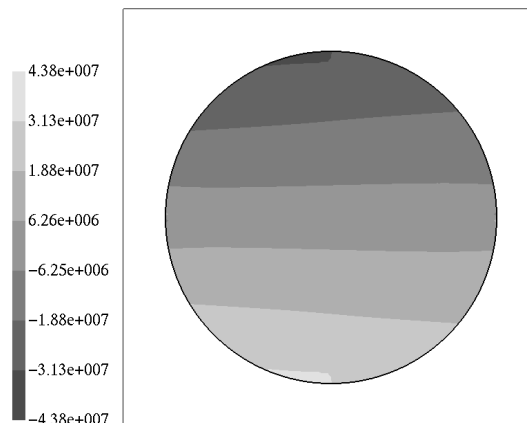


Рис.°5 Розподіл колових напружень σ_ϕ по круглому поперечному перерізу

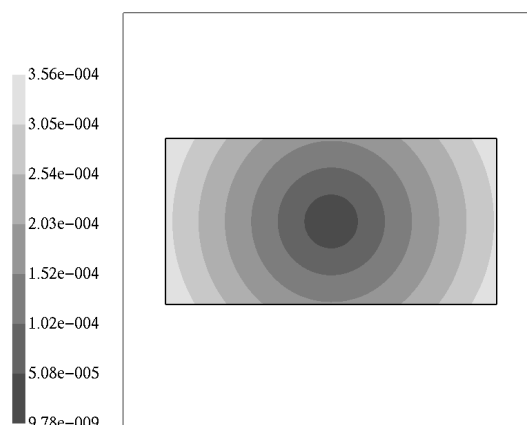


Рис.°6 Розподіл абсолютних зміщень $\sqrt{u_r^2 + u_z^2}$ по прямокутному поперечному перерізу

Відзначимо також те, що всі компоненти тензора напружень, знайдені чисельно методом скінченних елементів (МСЕ), у всьому об'ємі тора, за виключенням малих околіть точок прикладання зовнішніх сил, виявилися на два порядки меншими по величині за компоненту σ_ϕ , що підтверджує припущення про можливість їх нехтування.

Обчислений за (8) кут повороту поперечного перерізу рівний $1,621 \cdot 10^{-3}$ рад. Внаслідок чисельного моделювання було отримано значення $1,648 \cdot 10^{-3}$ рад, тобто відхилення склало

1,6%, що знаходиться в межах точності самого чисельного моделювання.

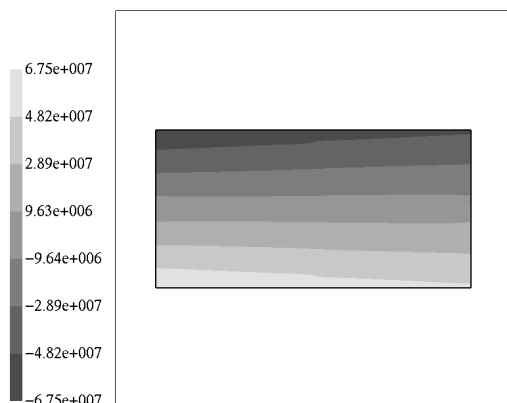


Рис.°7 Розподіл колових напружень σ_φ по прямокутному поперечному перерізу

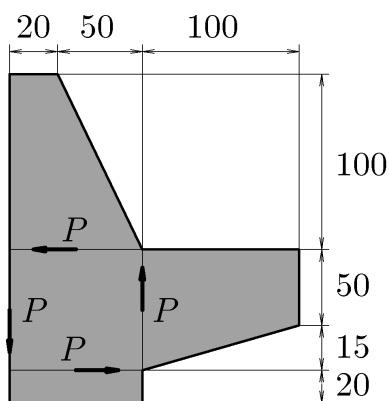


Рис.°8 Основні розміри та навантаження поперечного перерізу фланця

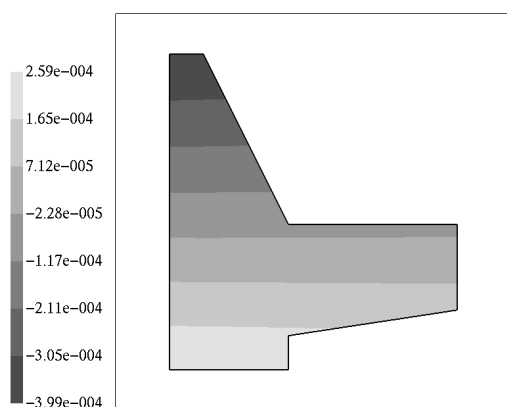


Рис.°9 Розподіл радіальних зміщень u_r по поперечному перерізу фланця

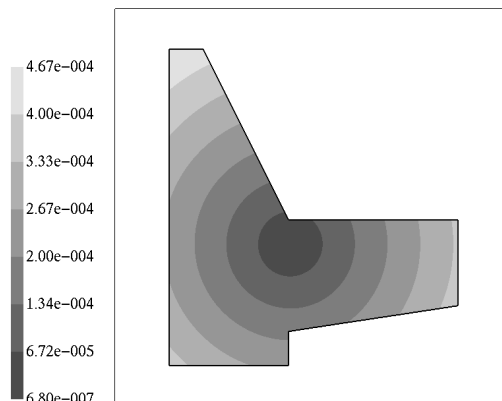


Рис.°10 Розподіл абсолютних зміщень $\sqrt{u_r^2 + u_z^2}$ по поперечному перерізу фланця

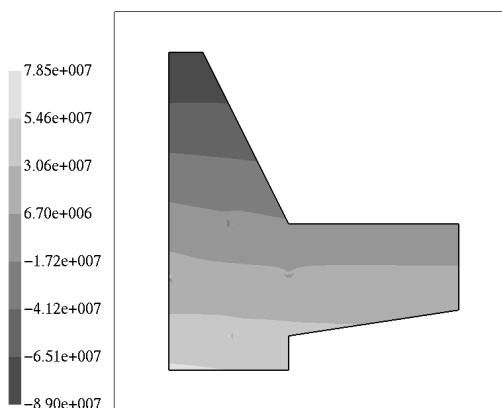


Рис.°11 Розподіл колових напружень σ_φ по поперечному перерізу фланця

Для випадку тора було також проаналізовано вплив на результат коефіцієнта Пуассона. Він виявився незначним у діапазоні значень $0 \leq \nu \leq 0,4$, хоча варто відзначити, що при зростанні ν точність одержаних співвідношень дещо падала. Наприклад при $\nu = 0,4$ кут нахилу поперечного перерізу вже склав $1,657 \cdot 10^{-3}$ рад, що відповідає відхиленню 2,2%. Зростання похибки можна пояснити зростанням ролі поперечної деформації, якою було знехтувано при виводі співвідношень (1)-(3).

Аналогічні результати отримано і для випадку прямокутного поперечного перерізу. Наприклад, на рисунках 6 та 7 представлені розподіли абсолютних зміщень та колових напружень для кільця внутрішнім радіусом 50см, шириною 10см та товщиною 5см. Кручення кільця відбувається внаслідок прикладання чотирьох рівномірно розподілених по колам, що

являють собою г.м.т. середин сторін поперечних перерізів, сил, сумарним значенням 100кН кожна. При даних параметрах обчислений за (8) кут повороту складає $6,30 \cdot 10^{-3}$ рад. Внаслідок чисельного моделювання було отримано значення $6,19 \cdot 10^{-3}$ рад, тобто відхилення склало $1,8\%$.

Враховуючи загальну мету дослідження, було також розглянуто кручення фланцевого з'єднання. Розгляд проведено на прикладі фланця Д2130 теплообмінника аварійного розхолодження (ТОАР) реактора ВВЕР-1000. Основні розміри поперечного перерізу фланця в міліметрах наведено на рисунку 8. На ньому також показане положення в перерізі розподілених сил, що викликають деформацію кручення. Сумарне значення кожної з них рівне 1000кН . На рисунках 9–11 наведено розподіл радіальних зміщень, абсолютних зміщень та колових напружень. Видно, що всі ці розподіли гарно узгоджуються з формулами (1)–(3). Значення кута закручування, визначене за формулою (8) та чисельно, склали $3,653 \cdot 10^{-3}$ рад та $3,480 \cdot 10^{-3}$ рад відповідно, тобто похибка знаходиться в межах 5% , що цілком достатньо для практичних потреб. Використання формули (7) дає більш точний результат.

Висновки

Таким чином, можна стверджувати, що формули (1) та (2) гарно наближають розподіл зміщень та напружень при осесиметричному крученні тонких кілець незалежно від їх профілю. При цьому кут закручування може бути визначений за формулою (8), або більш точною формулою (7). Практична точність результатів досягається при відношенні характерного розміру поперечного перерізу кільця до радіусу його вісі $0,2$ та менше. Зважаючи на простоту виводу одержаних співвідношень запропоновану теорію доцільно включити в розділ “Кручення стержнів” при викладанні курсу опору матеріалів.

Проте не можна стверджувати, що дана теорія повністю вирішує проблему розрахунку фланцевих з'єднань. Основний її недолік полягає в тому, що вона не враховує поперечну деформацію, викликану зусиллями, що діють в площині поперечного перерізу. А внаслідок початкового натягу шпильок в площині поперечного перерізу фланця розвиваються суттєві напруження, які за рахунок ненульового коефіцієнта Пуассона мають вплив і на колові напруження σ_ϕ . Питання адекватного їх врахування потребує подальших досліджень.

Список використаних джерел

1. Биргер И.А. Резьбовые и фланцевые соединения / И.А. Биргер, О.Б. Иосилевич. – Москва: Машиностроение, 1990. – 368 с.
2. Тимошенко С.П. Теория упругости / С.П. Тимошенко, Дж. Гудьер. – Москва: Наука, 1975. – 575 с.
3. Тимошенко С.П. Пластинки и оболочки / С.П. Тимошенко, С. Войновский-Кригер. – Москва: Физматгиз, 1966. – 635 с.
4. Dhondt G. The Finite Element Method for Three-Dimensional Thermomechanical Applications / G Dhondt. – Hoboken: Wiley, 2004. – 362 p.
5. Куценко Г.В. Об одной задаче осесимметричной деформации кругового тора / Куценко Г.В. // Прикл. мех. – 1979. – Том 15, №11. – С. 46–51.
6. ПНАЭ Г7-002-86. Нормы расчета на прочность оборудования и трубопроводов атомных энергетических установок. – Москва: Энергоатомиздат, 1989, – 525 с.

References

1. BIRGER, I.A. (1990) *Rezbovie i flantsevie soedineniya*. Moskva: Mashinostroenie.
2. TIMOSHENKO, S.P. (1975) *Teoriya uprugosti*. Moskva: Nauka.
3. TIMOSHENKO, S.P. (1966) *Plastinki i obolochki*. Moskva: Fizmatgiz.
4. DHONDT, G. (2004) *The Finite Element Method for Three-Dimensional Thermomechanical Applications*. Hoboken: Wiley.
5. KUTSENKO, G.V. (1979) Ob odnoy zadache osesimmetrichnoy deformatsii krugovogo tora. *Priladnaya Mekhanika*. 15(11). p. 46–51.
6. GOSATOMENERGONADZOR SSSR. (1987). *PNAE G7-002-86. Normi rascheta na prochnost oborudovaniya i truboprovodov atomnih energeticheskikh ustanovok*. Moskva: Energoatomizdat.

Надійшла до редколегії 20.06.14

КОМП'ЮТЕРНІ НАУКИ ТА ІНФОРМАТИКА

УДК 519.9

Анісімов А.В., чл.-кор. НАНУ, д.ф.-м.н., проф.,
Годованюк М.І., магістр,
Кулябко П.П., к.ф.-м.н., доцент.

Anisimov A.V., coresp. Member of Ukr. Nat.
Academy of Sciences, Dr. Sc. (Phys.- Math.), prof.,
Hodovaniuk M.I., master,
Kuliabko P.P., PhD, assoc.prof.

**Паралельне програмування в мережах
на основі ПАРКС-технології
(базова мова Python)**

**Parallel programming in computer
networks on the base of PARCS-technology
(basic language is Python)**

Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, пр-т.
Глушкова 4д, e-mail: ava@unicyb.kiev.ua
mykhailo.hodovaniuk@gmail.com
kpp1@ukr.net

Taras Shevchenko National University of Kyiv,
03680, Kyiv, Glushkova st., 4d, e-mail:
ava@unicyb.kiev.ua
mykhailo.hodovaniuk@gmail.com
kpp1@ukr.net

Стрімке поширення комп'ютерних технологій у всі сфери господарства спричинює ріст об'єму даних, з яким працюють комп'ютерні системи. Все більшою стає потреба в багато процесорних системах для обробки інформації. Реальною їх альтернативою є системи побудовані з великої кількості менш потужних процесорів. Однією з ідей реалізації такої системи є віртуальний паралельний простір (ВПП). У даній статті буде запропоновано та описано реалізацію концепцій ВПП, ПАРКС на мові програмування Python.

Ключові слова: ВПП, ПАРКС, розподілені системи, паралельне програмування.

Due to fundamental physical limitations and power constraints, we are observing a radical change in commodity microprocessor architectures to multicore designs. Continued performance on multicore processors now requires the exploitation of concurrency at the algorithmic level. The idea of the VPS (virtual parallel space) was introduced at 2001. In our research the main attention is concentrating on the PARCS (parallel asynchronous recursive controlling systems) as an implementation of VPS idea in terms of Python.

Key Words: VPS, PARCS, distributed systems, parallel computing, Python.

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Буй Д.Б.

Introduction. Year by year, the amount of information that computer systems worked up, grows extremely fast. Nowadays there are many problems that deal with huge amount of data or extremely time consuming. It is of great importance to be able to solve them in a reasonable time and use as little resources as possible.

In 2003, Moore [4] said - it will become impossible to keep processor speed growing at the same level soon. We will not be able to produce much better processors than we have in the nearest future.

It is impossible to develop computers in the same manner anymore. Finite of the light speed,

© А.В.Анісімов, М.І.Годованюк,
П.П.Кулябко, 2016

atomic of the things and Landauer's principle - there is a minimum possible amount of energy required to erase one bit of information - are constraints that we are facing right now.

The real alternative to multicore processors is a system that built with a huge amount of not so powerful but reasonable cheaper processors. Such system needs advanced software.

In VPS[5] laid down the idea of such software. It accepts multicore nodes and typical computers at the same time.

In this article, we are going to describe the implementation of the VPS idea - PARCS Python.

VPS, PARCS. The reference implementation of the VPS idea is based on local and global computer network.

It allows users which have the common hardware running their programs on multicomputer systems. Additionally, the task can be splitted on sub-tasks each of them can be computed on the separate node. And the function of VPS is to organize communication process between nodes.

PARCS is a programming technology (and programming concept) that provides some superstructure over the basic platform[2] (high-level or low-level programming language, operation system commands, etc.). This extension consists of objects (data structures and procedures written on base programming language) and creates controlling space (CS) for parallel or pseudo-parallel process execution. Such set of objects is called PARCS - the extension of the basic programming language. Main concepts that PARCS technology operate with:

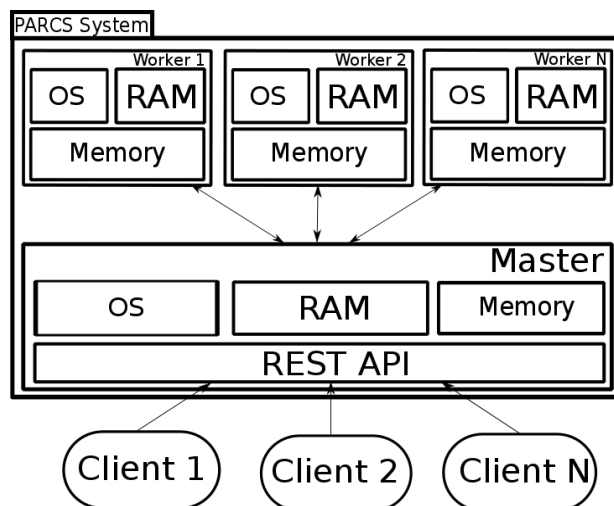
- point;
- program channel (PC);
- algorithmic module (AM).

The graph[3] which has points of the CS as vertices and PC as edges is an underlying structure of CS. Each point has the AM - PARCS procedure. AM runs in parallel but its execution may be delayed or scheduled, sometimes AM's can interact with each other by PC. At the same time, CS point can aggregate CS with any depth. Connected CS points can communicate via messages. PC has some attributes: *type* - only messages covariant to its type may path by its direction - PC are unidirectional - we don't know if Q is connected to P even if P connected to Q.

PARCS Python implementation. PARCS Python consists of points of the CS and splits its set onto two subsets: Master Node and slave nodes (figure 1). Master Node is connected to every element of the slave node set with PC. PC accepts two protocols HTTP and RPC (ZeroRPC

Figure 1 PARCS Python component diagram.

implementation). Nodes are using HTTP protocol for communication purpose - sending and



receiving instructions with meta information. RPC protocol allows sending AM instructions and receiving the result of the execution.

Master Node provides REST API which helps users to communicate with PARCS system. There is no limitation on the node nature. Nodes can run either on the single computer or on different computers connected to network. In the first case the only restriction is that there should be no conflict on the disk level.

We would like to highlight the next advantages of such kind of architecture:

1. the inner state of the system is encapsulated: client code knows nothing about system topology except the information that has been provided to it;

2. the system is fault tolerant - Master Node is responsible for error handling;

Python is an interpreted language: so there no restrictions that are typical for compiled languages;

At the same time, this implementation hides the system complexity and client code can't modify system CS topology.

Request lifecycle (figure 2):

1. the Master Node receive the request and puts its in the task queue;

2. the Scheduler daemon process, which runs on Master Node, pop request from the queue and starts it processing. The first step of the processing is to distribute client code among nodes;

3. the Master Node code initiates client code with information about system topology and calculates it. Usually, client code reads data, splits into chunks and perform map step in the map-reduce algorithm;

4. the Master Nodes receive their portions of data and perform calculations. The Slave Node returns results to the Master Node over the RPC protocol;

5. the Client code on the Master Node receives results from the supplementary Nodes and perform the reduce step;

6. optionally the client code can map-reduce result of the 4th step and do another map-reduce over the new data;

7. client code writes the final data on the disk;

8. scheduler frees all resources that were in use during request processing and takes next request from the queue.

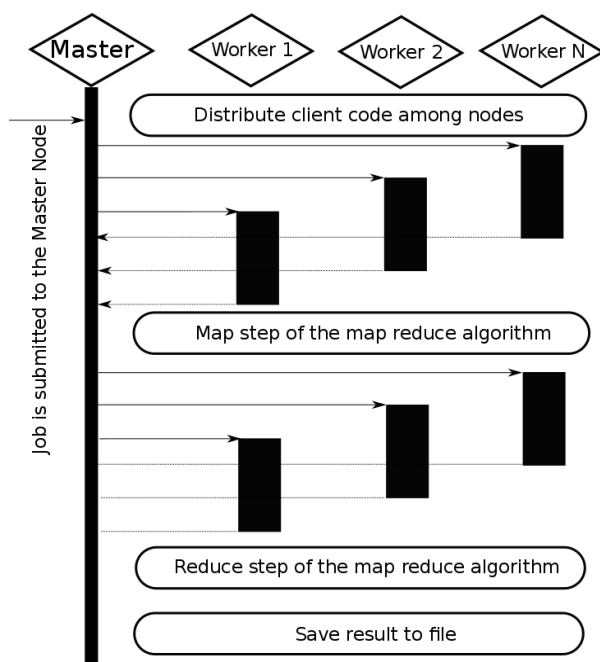


Figure 2 Request lifecycle.

PARCS Python protocols and API. Typical PARCS system consists of components that are distributed over the network. Python implementation of the PARCS system uses RPC and HTTP as underlying protocols for node to node, client to node communication.

1. RPC especially its ZeroRPC implementation: its uses by system and client cannot obtain access to it directly.
2. HTTP (REST API). There are two types of REST API: private and public. Public REST API (table 1) can be used by clients

for querying information about system state. Also, Master Node uses private REST API (table 2) for distributing information and client files between nodes.

Table 1 Public REST API

HTTP Method	HTTP URI	Request body	Description
POST	/api/jobs	{ "name": "JobName", "solution": "@solution file", "input": "@input file" }	Get job list
GET	/api/jobs		Get job list
GET	/api/job/job id		Get information about specific job
GET	/api/nodes		Get slave node list
GET	/api/nodes/: node id		Get information about specific slave node

Table 2 Private REST API

HTTP Method	HTTP URI	Description
POST	/api/internal/node	Connect to master node with slave node
POST	/api/internal/job	Master node distribute client code over slave nodes

PARCS Python web UI. The Python implementation has web UI based on twitter bootstrap framework (figure 3, 4, 5)

Figure 3. Jobs page screenshot.

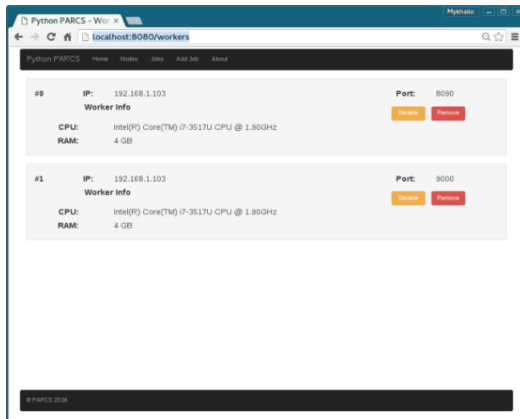


Figure 4. Nodes page screenshot.

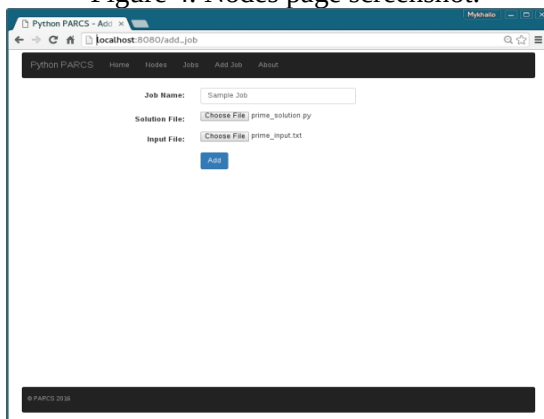
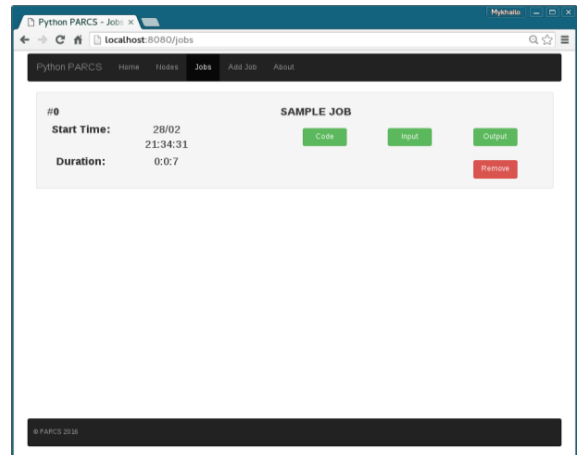


Figure 5. Add job page screenshot.



Conclusion. In this article, we overviewed concepts that shape PARCS technology and described Python implementation: its basic concepts, structure and API. Python PARCS with its user-friendly web interface and REST API brings new perspectives in direction of development and implementing distributed algorithms.

Список літератури

1. Глушков В.М. Управляющие пространства в асинхронных параллельных вычислениях. / Глушков В.М., Анисимов А.В. // Кибернетика. – 1980. – №5. – с. 1-9.
2. Анисимов А.В. Особенности ПАРУС-технологии. / Анисимов А.В., Кулябко П.П. // Кибернетика. 1993. – №3. – с.128-137.
3. Анисимов А.В. Система ПАРУС-JAVA для параллельных вычислений на компьютерных сетях / Анисимов А.В., Деревянченко А.В. // Кибернетика и системный анализ. 2005. – №1. – с.25-36.
4. Moore G. //intel.com/ content /www/us/en/silicon-innovations /moore-law-technology.html.
5. Анисимова Л.А. Керуючий простір як віртуально паралельний простір. / Анисимова Л.А., Кулябко П. П., Ветров, А.М. // Вісник Київськ.нац. універ-ту ім.Тараса Шевченка. Серія фіз.-мат. науки. - 1999. - №4. – с. 82-86.

References

1. GLUSHKOV, V.M., ANISIMOV, A.V. (1980) Controlling spaces in asynchronous parallel computing. *Cybernetics*. No 5, pp. 1-9.
2. ANISIMOV, A.V., KULIABKO, P.P. The features of the PARCS-technology. (1993) *Cybernetics*. No 3, pp.128-137.
3. ANISIMOV, A.V., DEREVIANCHENKO, A.V. (2005) PARCS-JAVA system for parallel computing on the computer nets. *Cybernetics and system analyses*. No 1, pp.25-36.
4. MOORE, G. intel.com/ content /www/us/en/silicon-innovations /moore-law-technology.html.
5. ANISIMOVA, L.A., KULIABKO, P.P., VETROV, A.M. (1999) Controlling space as a virtual parallel space. *Bulletin of Taras Shevchenko Nat. University of Kyiv. Series physics-math*. No 4. , pp. 82-86.

Надійшла до редколегії 28.10.2016

УДК 519.711.2

Башняков О.М., к.ф.-м.н., с.н.с.,
Пічкур В.В., д.ф.-м.н., доц.,
Поліщук О.А., к.т.н., м.н.с.

Метод адаптивної корекції кутових швидкостей твердого тіла за дискретними вимірами орієнтації

Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, пр-т
Глушкова, 4д
e-mail: vpichkur@gmail.com

Oleksandr Bashniakov, Ph.D., senior scientist,
Volodymyr Pichkur, Ph.D., assistant professor,
Oleksandr Polishchuk, Ph.D., junior scientist

An adaptive method for angular velocity correction of a rotating solid body using discrete measurements of orientation

Taras Shevchenko National University of Kyiv,
03068, Kyiv, Glushkova ave., 4d
e-mail: vpichkur@gmail.com

Розглядається задача корекції кутових швидкостей твердого тіла за поточними вимірами орієнтації. Для цієї задачі розроблено адаптивний алгоритм ідентифікації параметрів за дискретними вимірами. При розробці методу використовуються підходи до оптимізаційних методів другого порядку, а також методи теорії чутливості. Проведено обчислювальний експеримент.

Ключові слова: адаптивна ідентифікація, матриця чутливості, тверде тіло, кутова швидкість, орієнтація.

In this paper we present an adaptive method of parametric identification based on discrete measurements. We used methods of the sensitivity theory and second order optimization methods while developing the described method. We also propose several modifications of the method. One modification of the method uses the regularization approach. It is useful when the sensitivity matrix is singular or ill-conditioned. In this modification we apply a small parameter experimentally taking into account the input data. Another modification of the method is based on the Newton-Raphson method, which improves the convergence speed. The main features of the proposed methods are good performance, convergence speed and approximation of incoming measurements. We apply these methods to solving the problem of angular velocity correction of a rotating solid body with respect to its orientation measurements. This problem has an important application in flight dynamics and in navigation. Computational results demonstrate the high precision of the proposed methods.

Keywords: adaptive identification, sensitivity matrix, solid body, angular velocity, orientation.

Статтю представив д.т.н., проф. Гаращенко Ф.Г.

1. Вступ

Ряд сучасних прикладних задач керування і навігації пов'язані з проблематикою дослідження, оптимізації і оцінки рухів твердого тіла [1,2]. До такої області належить задача корекції кутових швидкостей твердого тіла. Така проблема виникає в системах керування літальними апаратами і пов'язана з необхідністю уточнення даних про кутові швидкості в динаміці. Задачу такого класу доцільно розв'язувати з використанням адаптивних підходів [5]. Це пов'язано з цілим рядом особливостей: задача має розв'язуватись швидкими алгоритмами, бажано в масштабі реального часу або близько до цього; відсутня інформація про шуми, які призводять до втрати

точної інформації; алгоритм має бути досить простий. Адаптивні методи продемонстрували свою ефективність для різних класів прикладних задач [3]. Важливою особливістю таких підходів є можливість використання числових методів оптимізації типу градієнтного спуску та їхніх неперервних модифікацій.

В роботі [4] запропоновано числовий метод ідентифікації параметрів системи керування на основі матриці чутливості. В основі цього методу лежать підходи, характерні для оптимізаційних методів другого порядку і в експерименті показує високу швидкість збіжності.

В даній роботі пропонується адаптивний метод параметричної ідентифікації за

дискретними вимірами. Розроблений метод застосований до задачі адаптивної корекції кутових швидкостей твердого тіла на основі вимірів параметрів орієнтації в дискретні моменти часу. Проведений обчислювальний експеримент показує високу точність методу.

2. Метод адаптивної ідентифікації

Нехай задана динамічна система вигляду

$$\frac{dx}{dt} = f(x, p, t), t \in [0, T], \quad (1)$$

$$x(0) = x_0. \quad (2)$$

Тут $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^*$ – вектор фазових координат, $p = (p_1, p_2, \dots, p_m)^*$ – вектор параметрів,

$f(x, p, t) = (f_1(x, p, t), f_2(x, p, t), \dots, f_n(x, p, t))^*$ – вектор-функція правих частин системи (1), яка є неперервно диференційованою за змінними x , p і неперервною за змінною t на $R^n \times R^m \times [0, T]$, x_0 – вектор початкових умов з R^n . Позначимо $x(t, p)$ – розв'язок задачі Коші (1), (2). За теоремою про неперервну диференційованість розв'язків системи диференціальних рівнянь за параметрами, функція $x(t, p)$ є неперервно диференційованою за змінною p .

В моменти часу $0 < t_1 < \dots < t_k < \dots < t_{N+1} = T$ ми одержуємо виміри $y^{(i)} = y(t_i)$ вектору фазових координат $x(t_i)$, $i = 1, 2, \dots, N$. Інформація про похибку спостереження та про характер цієї похибки відсутня. Необхідно визначити значення параметра p , яке відповідає спостереженням $y^{(i)}$ в момент часу t_i .

Для розв'язання поставленої задачі будемо використовувати адаптивний підхід. Вважаємо, що на проміжках (t_k, t_{k+1}) параметр p приймає постійні значення, $k = 0, 1, \dots, N$. В моменти часу t , які відповідають різним інтервалам, значення параметра p можуть відрізнятись. Таким чином, проміжки (t_k, t_{k+1}) є проміжками квазістаціонарності. В моменти $t = t_i$ відома реалізація $x(t, p)$, яка відповідає значенню параметра $p = p^{(i-1)}$. На основі даної реалізації шукаємо таке значення параметра $p^{(i)}$, яке мінімізує критерій якості вигляду

$$I(p) = \|x(t_i, p) - y^{(i)}\|^2 \rightarrow \min_p. \quad (3)$$

Застосуємо підходи, які є характерними для методів оптимізації другого порядку, а також використаємо властивості матриці чутливості [4].

Збуємо параметр p в точці $p^{(i-1)}$ на величину h і запишемо розв'язок системи (1) з врахуванням лінійного наближення

$$x(t_i, p^{(i-1)} + h) = x(t_i, p) + U(t_i, p^{(i-1)})h + r_i(h). \quad (4)$$

Тут $U(t) = U(t, p^{(i-1)})$ – матриця чутливості системи (1), яка відповідає значенню на розв'язкові $x(t, p)$ при $p = p^{(i-1)}$, h належить R^m , $r_i(h)$ нескінченно мала вищих порядків малості по відношенню до h при $h \rightarrow 0$. Матриця чутливості задовольняє матричне диференціальне рівняння

$$\frac{dU(t)}{dt} = L(t, p)U(t) + g(t), t \in [t_i, t_{i+1}], \quad (5)$$

$$U(t_i) = 0, \quad (6)$$

$$\text{де } L(t, p) = \frac{\partial f(x(t, p), p, t)}{\partial x},$$

$$g(t, p) = \frac{\partial f(x(t, p), p, t)}{\partial p}, \quad p = p^{(i-1)}.$$

Позначимо $y^{(i)} - x(t_i, p^{(i-1)}) = \Delta x^{(i)}$. Відкидаючи в (4) функцію $r_i(h)$, підставимо лінійне наближення до $x(t_i, p^{(i-1)} + h)$ в функціонал (3). Одержуємо квадратичний функціонал вигляду

$$J(h) = \|x(t_i, p) + U(t_i)h - y^{(i)}\|^2 = \|U(t_i)h - \Delta x^{(i)}\|^2 = \|\Delta x^{(i)}\|^2 + \langle U^*(t_i)U(t_i)h, h \rangle - 2\langle U(t_i)h, \Delta x^{(i)} \rangle.$$

Шукаємо параметр $h = h^{(i)}$ з умови мінімуму

$$J(h). \quad \text{З } \frac{\partial J(h^{(i)})}{\partial h} = 0 \text{ одержуємо для знаходження}$$

$h^{(i)}$ систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$U^*(t_i)U(t_i)h = U^*(t_i)\Delta x^{(i)}. \quad (7)$$

Припустимо, що матриця $U^*(t_i)U(t_i)$ є невідродженою. Тоді

$$h^{(i)} = (U^*(t_i)U(t_i))^{-1}U^*(t_i)\Delta x^{(i)}. \quad (8)$$

Виходячи з (1), (2), (5), (6), (8), метод можна записати так

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f(x, p^{(i)}, t), \\ x(t_0) &= x_0, x(t_i) = x(t_i, p^{(i-1)}), i = 1, \dots, N, \\ \frac{dU(t)}{dt} &= L(t, p^{(i)})U(t) + g(t, p^{(i)}), \\ U(t_i) &= 0, t \in [t_i, t_{i+1}], \\ p^{(i+1)} &= p^{(i)} + (U^*(t_i)U(t_i))^{-1}U^*(t_i)\Delta x^{(i)}, \end{aligned} \quad (9)$$

$p^{(0)} = p_0$, де $i = 0, 1, \dots, N$. Опис алгоритму буде таким:

Крок 1. Вибираємо початкове наближення p_0 . На проміжку $[0, t_1]$ розв'язуємо задачу (1), (2) при $p = p_0$. Підставляємо розв'язок в (5), (6), знаходимо матрицю чутливості $U(t_1)$. Знаходимо

$$p^{(1)} = p_0 + (U^*(t_1)U(t_1))^{-1}U^*(t_1)\Delta x^{(1)}.$$

Крок 2. На i -му кроці, $i = 1, \dots, N$ на проміжку $[t_i, t_{i+1}]$ розв'язуємо задачу (1), (2) при $p = p^{(i)}$. Знаходимо матрицю чутливості $U(t_1)$ як розв'язок задачі (5), (6) при $p = p^{(i)}$. Визначаємо

$$p^{(i+1)} = p^{(i)} + (U^*(t_i)U(t_i))^{-1}U^*(t_i)\Delta x^{(i)}.$$

Якщо матриця $U^*(t_i)U(t_i)$ в (7) вироджена, або близька до виродженої, то можна застосувати регуляризацию методу (9). Для цього вводиться параметр регуляризації $\varepsilon > 0$, для якого одержуємо

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f(x, p^{(i)}, t), \\ x(t_0) &= x_0, x(t_i) = x(t_i, p^{(i-1)}), i = 1, \dots, N, \\ \frac{dU(t)}{dt} &= L(t, p^{(i)})U(t) + g(t, p^{(i)}), \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} U(t_i) &= 0, t \in [t_i, t_{i+1}], \\ p^{(i+1)} &= p^{(i)} + (U^*(t_i)U(t_i) + \varepsilon I)^{-1}U^*(t_i)\Delta x^{(i)}, \\ p^{(0)} &= p_0, \text{ де } i = 0, 1, \dots, N, \text{ } I - m \times m \text{-одинична} \\ &\text{матриця. Більш ефективну модифікацію методу} \\ &\text{(9) можна одержати, використовуючи ідеї методу} \\ &\text{Ньютона - Рафсона. Для цього позначимо} \\ p(i, s) &= p^{(i)} + s((U^*(t_i)U(t_i) + \varepsilon I)^{-1}U^*(t_i)\Delta x^{(i)}), \end{aligned}$$

де $s > 0$ – параметр. Одержимо такий метод

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f(x, p^{(i)}, t), \\ x(t_0) &= x_0, x(t_i) = x(t_i, p^{(i-1)}), i = 1, \dots, N, \\ \frac{dU(t)}{dt} &= L(t, p^{(i)})U(t) + g(t, p^{(i)}), \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} U(t_i) &= 0, t \in [t_i, t_{i+1}], \\ \min_{s \in [0, 1]} I(p(i, s)) &= I(p(i, s(i))), \end{aligned}$$

$$p^{(i+1)} = p(i, s(i)), p^{(0)} = p_0, i = 0, 1, \dots, N.$$

3. Метод корекції кутових швидкостей

Введемо такі позначення: $\Lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ –

вектор кватерніонів, $\|\Lambda\| = 1$, $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ – вектор кутових швидкостей. В моменти часу $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_k < \dots < t_{N+1} = T$ відомі виміри $y^{(i)} = \Lambda(t_i)$ вектора кватерніонів. Задача полягає в тому, щоб на відрізку $[t_i, t_{i+1}]$ здійснити корекцію кутових швидкостей так, щоб вони адекватно відповідали поточній орієнтації твердого тіла.

Для поставленої задачі застосуємо метод (9). Позначимо матрицю чутливості $U(t) = (u_{ij}(t))$,

$$u_{ij} = \frac{\partial \lambda_i}{\partial p_j}, \text{ де } i = 0, 1, 2, 3, j = 1, 2, 3. \text{ Використаємо}$$

кінематичні рівняння, які описують орієнтацію твердого тіла [2]. Тоді метод буде мати вигляд

$$\begin{aligned} 2 \frac{d\lambda_0}{dt} &= -(\omega_1(t) + p_1^{(i+1)})\lambda_1 - (\omega_2(t) + p_2^{(i+1)})\lambda_2 - \\ &\quad - (\omega_3(t) + p_3^{(i+1)})\lambda_3, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2 \frac{d\lambda_1}{dt} &= (\omega_1(t) + p_1^{(i+1)})\lambda_0 + (\omega_3(t) + p_3^{(i+1)})\lambda_2 - \\ &\quad - (\omega_2(t) + p_2^{(i+1)})\lambda_3, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2 \frac{d\lambda_2}{dt} &= (\omega_2(t) + p_2^{(i+1)})\lambda_0 - (\omega_3(t) + p_3^{(i+1)})\lambda_1 + \\ &\quad + (\omega_1(t) + p_1^{(i+1)})\lambda_3, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2 \frac{d\lambda_3}{dt} &= (\omega_3(t) + p_3^{(i+1)})\lambda_0 + (\omega_2(t) + p_2^{(i+1)})\lambda_1 - \\ &\quad - (\omega_1(t) + p_1^{(i+1)})\lambda_2, \end{aligned}$$

$$t \in [t_i, t_{i+1}], \Lambda(0) = \Lambda_0, \Lambda(t_i) = \Lambda(t_i, p^{(i-1)}), i = 1, \dots, N,$$

$$\begin{aligned} 2 \frac{du_{0j}}{dt} &= -(\omega_1(t) + p_1^{(i)})u_{1j} - (\omega_2(t) + p_2^{(i)})u_{2j} - \\ &\quad - (\omega_3(t) + p_3^{(i)})u_{3j} + f_{0j}(t), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2 \frac{du_{1j}}{dt} &= (\omega_1(t) + p_1^{(i)})u_{0j} + (\omega_3(t) + p_3^{(i)})u_{2j} - \\ &\quad - (\omega_2(t) + p_2^{(i)})u_{3j} + f_{1j}(t), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2 \frac{du_{2j}}{dt} &= (\omega_2(t) + p_2^{(i)})u_{0j} - (\omega_3(t) + p_3^{(i)})u_{1j} + \\ &\quad + (\omega_1(t) + p_1^{(i)})u_{3j} + f_{2j}(t), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2 \frac{du_{3j}}{dt} &= (\omega_3(t) + p_3^{(i)})u_{0j} + (\omega_2(t) + p_2^{(i)})u_{1j} - \\ &\quad - (\omega_1(t) + p_1^{(i)})u_{2j} + f_{3j}(t), \end{aligned}$$

$$j = 1, 2, 3, t \in [t_i, t_{i+1}],$$

$$\begin{aligned} p^{(i+1)} &= p^{(i)} + (U^*(t_i)U(t_i))^{-1}U^*(t_i)\Delta\Lambda^{(i)}, \\ p^{(0)} &= p_0. \end{aligned}$$

Тут

$$\begin{aligned}f_{01}(t) &= -\lambda_1(t), f_{02}(t) = -\lambda_2(t), f_{03}(t) = -\lambda_3(t), \\f_{11}(t) &= \lambda_0(t), f_{12}(t) = -\lambda_3(t), f_{13}(t) = \lambda_2(t), \\f_{21}(t) &= \lambda_3(t), f_{22}(t) = \lambda_0(t), f_{23}(t) = -\lambda_1(t), \\f_{31}(t) &= -\lambda_2(t), f_{32}(t) = \lambda_1(t), f_{33}(t) = \lambda_0(t), \\p^{(i)} &= (p_1^{(i)}, p_2^{(i)}, p_3^{(i)})^*, \Delta\Lambda^{(i)} = y^{(i)} - \Lambda(t_i, p^{(i)}),\end{aligned}$$

Λ_0 – відома початкова орієнтація.

3. Обчислювальний експеримент

Для тестування алгоритму створена програма. Вхідними даними є:

1. Кути Крилова, до яких потрібно наблизитися системі (так звані "еталонні", або "ідеальні", які отримуються з системи контрольних вимірів);

2. Точність (у даному випадку – по координатна), з якою необхідно наблизитися до "ідеальних" кутів Крилова;

3. Початкові значення кутів Крилова.

Початкові кути Крилова були переведені в кватерніони, а отримані в результаті роботи алгоритму кватерніони переводилися у кути Крилова для обчислення відхилення від заданих кутів. Результат обчислень записувався у файл у вигляді 4-вимірних векторів, де перша координата є час (умовний час від початку обчислень), решта координат – поточні кути Крилова. При цьому остання стрічка у файлі містила кути Крилова, які по координатно відрізняються від "ідеальних", які задані у п.1, на величину, яка не перевищує задану у п.2.

Список використаних джерел

1. Акуленко Л. Д. Возмущенные и управляемые вращения твердого тела/ Акуленко Л. Д., Лещенко Д. Д., Рачинская А. Л., Зинкевич Я. С. – Одесса: ОНУ, 2013. – 288 с.
2. Бранец В.Н. Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела/ Бранец В.Н., Шмыглевский И.П. –М.: Наука, 1973. – 320 с.
3. Гаращенко Ф.Г., Адаптивный метод дистанционного обнаружения химических компонентов в растениях на основе градиентного похода/ Гаращенко Ф.Г., Матвієнко В.Т. // Мехатроника, автоматика, управление. – 2013. № 2. – С. 34 - 37.
4. Розенwasser Е.Н. Чувствительность систем управления/ Розенwasser Е.Н., Юсупов Р.М. –М.: Наука, 1981. – 464 с.
5. Фрадков А.Л. Адаптивное управление в сложных системах/ Фрадков А.Л. – М.: Наука, 1990. – 296 с.

Змінюючи початкові, "ідеальні" кути Крилова та точність обчислень можна оцінити ефективність алгоритму. Він полягає у адаптивному підборі параметрів системи так, щоб у найкоротший термін налаштуватися на "ідеальні" значення.

Розроблений алгоритм можна використати для налаштування системи у тому випадку, коли втрачається "ідеальний" сигнал (система функціонуватиме автономно), а потім, коли "ідеальний" сигнал відновиться, система буде автоматично скорегована, компенсуючи похибки, які могли виникнути як в процесі інтегрування самої системи, так і в результаті зашумлення даних з датчиків. Реалізація алгоритму передбачає додатковий підбір параметрів, таких як крок та метод інтегрування, а також частота надходження тестового сигналу.

Алгоритм протестований при різних вхідних даних. Нижче наведені результати роботи тестової програми при наступних початкових значеннях:

- поточні кути Крилова: (0.5; 0.7; 0.2)
- "ідеальні" кути Крилова: (0.01; 0.02; 0.01)
- допустиме по-координатне відхилення: до 0.01

Результати обчислень (перше число у стрічці – час, далі – кути Крилова):

0 0.394184 0.543856 0.124349
2.36 0.0102203 0.0202949 0.0100081

Таким чином за час 2.36 отримали кути Крилова з відхиленням від "ідеальних" з точністю до 0.01.

References

1. AKULENKO L., LESCHENKO D., RACHINSKAYA A. and ZINKEVICH Ya. (2013) Disturbed and controlled solid rotations.– Odessa: ONU.
2. BRANEC V. SHMIGLEVSKIY I. (1973) Quaternions in solid orientation. –Moscow: Nauka.
3. GARASHCHENKO F., MATVIENKO V. Adaptive method to remote detection of chemical components on the basis of gradient method// *Mechatronics, automation control*.
4. ROZENWASSER E., YUSUPOV R. (2000) Sensitivity of Automatic Control Systems. CRC Press. Boca Raton, London, New York, Washington, D.C.
5. FRADKOV A. (1990) Adaptive control of complex systems. –Moscow: Nauka.

Надійшла до редколегії 10.10.2016

УДК 550.38:519.6

С. М. Іванов, аспірант
В. О. Яценко, д.т.н., проф.

Прогнозування геомагнітного Kp індексу за допомогою дискретної білінійної моделі

Інститут космічних досліджень НАНУ та
ДКАУ, 03680, м. Київ, проспект Академіка
Глушкова, 40, корп. 4/1,
e-mail: formula87@icloud.com
e-mail: vyatsenko@gmail.com

S. M. Ivanov, postgraduate student
V. O. Yatsenko, Sc.D., prof.

Prediction of the geomagnetic Kp index by a discrete bilinear model

Space Research Institute of NASU-SSAU,
03680, Kyiv, Akademika Glushkova str., 40,
bld. 4/1,
e-mail: formula87@icloud.com
e-mail: vyatsenko@gmail.com

Пропонується використати дискретну білінійну модель для прогнозування динаміки Kp індексу за наявними супутниковими даними. За допомогою кореляційної матриці були обрані такі вхідні дані: погодинна швидкість сонячного вітру та південна компонента магнітного поля, отриманих з ресурсу OMNI2. Розглядаються розподіли часових рядів навчальної вибірки. Пропонуються алгоритми знаходження оптимального розміру навчальної вибірки та переналаштування параметрів моделі. Наводяться результати обчислення локальних показників Ляпунова для обчислення горизонту прогнозу.

Ключові слова: прогнозування, Kp індекс, білінійна модель, розподіл, локальні показники Ляпунова.

Using the discrete bilinear model, operational model is constructed that predict the Kp index five hours in advance. The input data consist of hourly plasma (flow) speed and south magnetic field component obtained from OMNI2 resource. Non-Gaussian shape of the Kp index distribution is considered. Hyperbolic distributions Kp index and plasma speed are noted. Mathematical expectation and variance indicators of investigated time series are calculated. Mathematical expectation of Kp index for the 11-year solar cycle is considered. The algorithm of the optimal size of the training set and the need to reconfigure the parameters of the model is proposed. Localized Lyapunov exponent dynamics for the calculating of the prediction horizon is investigated by using Wolf's method. Adaptation of Wolf's method is noted. Discrete bilinear model with the logistic output for Kp index prediction is given. The structure and parameters of the bilinear model identification was performed by using a genetic algorithm in Matlab.

Key Words: prediction, Kp index, bilinear model, distribution, localized Lyapunov exponents.

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Хусаїнов Д.Я.

Серед багатьох проблем космічної погоди особливу й найважливішу роль займає попередження її проявів у магнітосфері, іоносфері та атмосфері, яка може вплинути на продуктивність і надійність не тільки космічних, але й наземних технологічних систем, а також на біологічні системи [1]. Виділяють наступні негативні впливи сонячної плазми на техногенні системи: вплив космічної радіації на апаратуру космічних апаратів, радіаційна загроза для космонавтів та екіпажів висотних літаків; зміни в умовах розповсюдження радіохвиль, перешкод у системах зв'язку й навігації, що утворюються іоносферою; зміна орбіт супутників через

нагрівання верхніх шарів атмосфери; виникнення геоіндуктивних токів у лініях електропередач, зв'язку та ін.; модифікація хімічного складу та властивостей атмосфери; вплив на біологічні об'єкти та людину [1]. Коли викид корональної плазми наближається до Землі, електрони в полярних районах магнітосфери створюють геомагнітний індукційний струм, який тече вздовж овалу полярних сьвів та може призводити до пошкодження трансформаторів й виключення систем енергопостачання [2]. Саме швидкі викиди корональної плазми є основною причиною великих геомагнітних бур і, отже, є одним з найбільш важливих сонячних явищ.

Вплив космічної погоди на навколоземний простір характеризується геомагнітними індексами, які обчислюють за результатами вимірювань. Вони характеризують лише частину складної картини сонячно-земних зв'язків. Одним з таких індексів є Кр індекс. Кр індекс (позначає «planetary», планетарний) показує відхилення магнітного поля від нормального його стану. Область значень Кр від 0 до 9. Цей індекс розраховується як середнє значення К індексів, визначених на 13 геомагнітних обсерваторіях, які знаходяться між 44 і 60 градусами північної та південної геомагнітних широт. Кр індекс є одним з важливих показників космічної погоди, однак дослідження прогнозування Кр індексу за допомогою білінійної моделі, визначення глибини прогнозу під час його збурення та відносно спокійні інтервали часу потребують подальшого розгляду. Серед багатьох моделей прогнозування космічної погоди найбільш застосовуваними є штучні нейронні мережі [3], регресійні моделі, NARMAX, та білінійні моделі, до яких останнім часом спостерігається інтерес [4]. Тому метою даної роботи є проведення аналізу часових рядів Кр індексу, динамічних характеристик сонячного вітру й магнітосфери для визначення навчальної вибірки, горизонту прогнозу, структурно-параметричної ідентифікації білінійної моделі для прогнозування динаміки Кр індексу.

Розподіли досліджуваних часових рядів для побудови моделі й прогнозування. Оскільки у даній статті пропонується побудова білінійної моделі, яка має описати залежність Кр індексу від динамічних характеристик сонячного вітру й магнітосфери, то спочатку необхідно визначити ці найбільш впливові незалежні характеристики. Були розглянуті такі характеристики: B_x , B_y , B_z , GSM nT; Proton temperature, degrees K; proton density, N/cm^3 ; plasma (flow) speed, km/s. Пропонується використати кореляційну матрицю для знаходження таких характеристик, яка дозволяє легко визначити, що на Кр індекс найвпливовішими є швидкість протонів V (plasma speed) та компонента магнітного поля B_z . Використовувалися дані з каталогу OMNI2 [5]. Розподіл часового ряду Кр індексу за період з травня 2002 до грудня 2016 року представлені на рис. 1. Вертикальна вісь позначена у відсотках як частота. При визначенні оптимальної навчальної вибірки необхідне дотримання схожості характеристик, притаманних наявним експериментальним даним. $M(Kp)$ - математичне

очікування Кр індексу за 11-річні сонячні цикли представлено на рис. 2. Розподіл погодинних даних Кр індексу за період 05.2002 – 12.2016 (рис. 1) та з 01.1963 – 12.2016 (рис. 2) мають гранично гіперболічний вигляд. Зі збільшенням даних Кр індексу схожість розподілу вибірки саме на гранично гіперболічний тільки зростає.

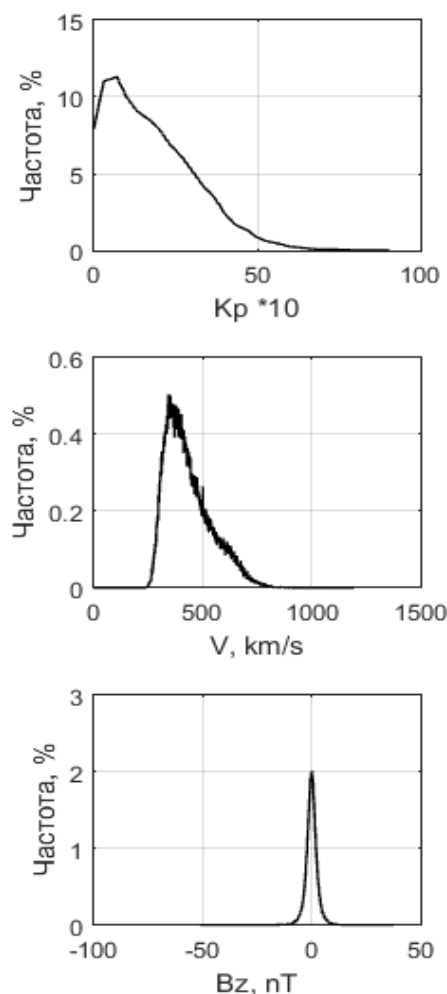


Рис. 1. Розподіли погодинних даних Кр, V, Bz за час 05.2002 – 12.2016

Основними числовими характеристиками вибірки є математичне очікування $M(\bullet)$ та дисперсія $D(\bullet)$. Для вибірок, з кардинальним числом ~ 128000 кожна за період, який вказаний на рис.1, $M(Kp)=17.7$; $M(V)=433.8$ km/s; $M(B_z)=0.0014$ nT; $D(Kp)=186.2$; $D(V)=1.14$; $D(B_z)=8.4$. Врахувавши прийнятне відхилення $\Delta M(\bullet)$ та $\Delta D(\bullet)$, знайдемо оптимальний розмір навчальної вибірки $\max_j \{N_j\}$. Для цього складемо

задачу булева програмування. Оптимальність навчальної вибірки розуміється у сенсі $\max_j \{N_j\}$ при розв'язку задачі (1).

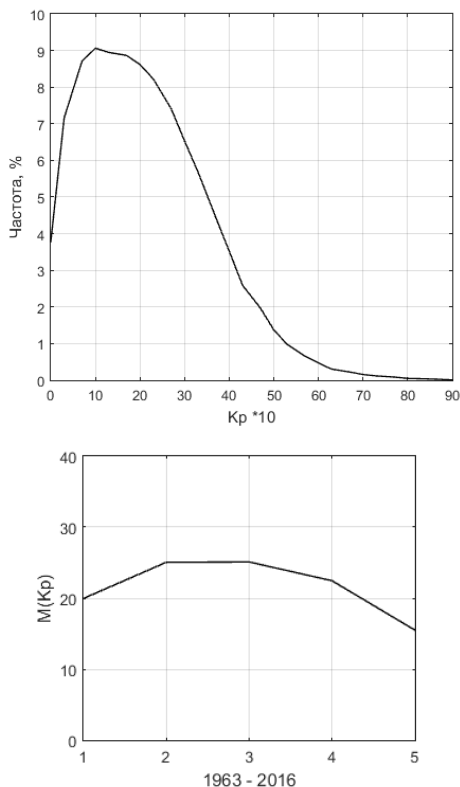


Рис. 2. Розподіл Кр індексу за період 01.1963 - 12.2016 (зверху) та $M(Kp)$ - математичне очікування Кр індексу за 11-річні сонячні цикли (знизу)

У системі (1) наведені кусочно-лінійні умови для значень n_i^j , тобто існує таке ціле $k_{\min}^j$, що виконуються умови: $n_i^j (i \in [1; k_{\min}^j]) = 1$, $n_i^j (i > k_{\min}^j) = 0$, $j = \overline{1..3}$ (для кожного з часових рядів).

$$\begin{cases} N_j = \sum_{i=1}^{Card(\bullet)} n_i^j \rightarrow \min, j = \overline{1..3}, \\ M(\bullet) - \Delta M(\bullet) \leq M^*(\bullet) \leq M(\bullet) + \Delta M(\bullet), \\ D(\bullet) - \Delta D(\bullet) \leq D^*(\bullet) \leq D(\bullet) + \Delta D(\bullet), \\ n_i^j \in \{0; 1\}, n_i^j (i \in [1; k_{\min}^j]) = 1, \\ k_{\min}^j \leq Card(\bullet), n_i^j (i > k_{\min}^j) = 0, \\ i, k_{\min}^j \in \mathbb{Z}. \end{cases} \quad (1)$$

При відхиленні не більше 5% від $M(\bullet)$ та $D(\bullet)$ оптимальний розмір складає ~40000 для кожного з досліджуваних часових рядів. При збільшенні

на кожен наступну годину кожного з досліджуваних часових рядів, необхідна перевірка на виконання умов допустимого відхилення $M^*(\bullet)$ та $D^*(\bullet)$. Й при невиконанні даних умов, необхідне розв'язування задачі (1) та знаходження нового розміру навчальної вибірки. Наступною складовою є визначення горизонту прогнозу, який надасть уявлення про час, через який дані навчальної вибірки перестануть впливати на прогноз. Застосуємо адаптований метод Вольфа та ін. [6] для розрахунку старшого локального показника Ляпунова для одномірного часового ряду Кр індексу. Адаптація методу виконувалася шляхом розділення вибірки на підмножини, розміром приблизно 1000 елементів кожна.

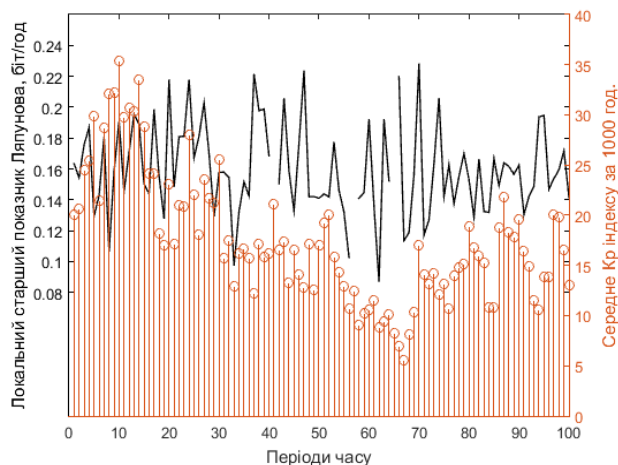


Рис. 3. Локальний старший показник Ляпунова

На рис. 3 на горизонтальній вісі за 1 прийнято 1000 год. з травня 2002 р. Під час відносно стійкого середнього значення Кр індексу спостерігається й стійкий локальний показник Ляпунова.

Попередня оцінка горизонту прогнозу для початкових даних складає від $1/0,16 \approx 6$ годин до $1/0,1 \approx 10$ годин (рис. 3). Даний підхід дає можливість здійснювати адаптивне переналаштування параметрів моделі через визначення оптимальної навчальної вибірки. Описаний алгоритм може бути цілком автоматичним.

Білінійна модель динаміки Кр індексу. Одним з важливих складових дослідження космічної погоди є прогнозування Кр індексу. Для розв'язання даної задачі було переглянуто багато моделей, однією з яких є білінійна модель (БМ), яка тут й розглядається. Чітко визначена область значень Кр індексу дозволяє застосувати

логістичну функцію виходу БМ. БМ є частковим випадком NARMAX - моделі.

Як приклад дискретної білінійної моделі наведемо наступне рівняння:

$$\begin{aligned} X(k+4) = & A1 * X(k-1) + A2 * X(k-2) + \\ & + A3 * X(k-3) + A4 * V(k-1) + A5 * V(k-2) + \\ & + A6 * V(k-3) + A7 * Bz(k-1) + A8 * Bz(k-2) + \\ & + A9 * Bz(k-3) + A10 * X(k-3) * V(k-3) + \\ & + A11 * X(k-1) * Bz(k-1). \end{aligned}$$

Застосовується вихідна логістична функція:
 $Kp_predict = 1/(1 + \exp(-X(k+4)))$.

Оптимальна структура визначалася шляхом додавання відповідних членів за попередні періоди часу до моделі, наведеної вище.

Навчання або налаштування параметрів такої моделі відбувалося за допомогою генетичного алгоритму в середовищі Matlab. На рис. 4 наведений графік тестування запропонованої БМ.

Робота виконувалась за підтримки європейського проекту PROGRESS в рамках програми HORIZON – 2020.

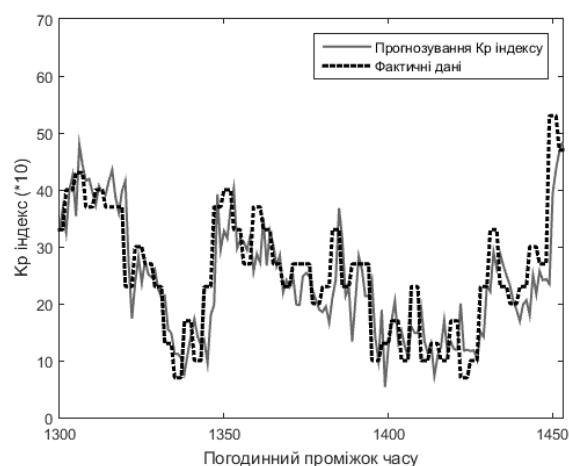


Рис. 4. Прогнозування Кр індексу

Висновки. Запропонована білінійна модель, яка може забезпечити прогноз Кр індексу до 5 годин наперед. Показано незначне зниження математичного очікування Кр індексу за останній 11-річний сонячний цикл. Попередній аналіз динаміки Кр індексу показав можливість появи хаотичної поведінки цього показника, на що вказує позитивний старший показник Ляпунова.

Список використаних джерел

1. Akasofu S.I. Predicting Geomagnetic Storms as a Space Weather Project / S.I. Akasofu. – Amer. Geophys. Union. Geophys. Monogr. Ser. V. 125. Space Weather, Washington, US. – 2001. – P. 329–337.
2. Balikhin M. Identification of Linear and Nonlinear processes in Space Plasma Turbulence / M. Balikhin, I. Bates, S. N. Walker // *Advances in Space Research*. 28, Issue 5. – 2001. – P. 787–800.
3. Wu J.G. Neural network modeling of solar wind magnetosphere interaction / Wu J.G., Lundstedt H. // *J. Geophys. Res.* 102. – 1997. – P. 14457–14466.
4. Yatsenko V. O. Geomagnetic Dst-index forecast based on bilinear models and nonlinear filtering techniques / V. O. Yatsenko, J. V. Prutsko, S. O. Cheremnykh // 10-а укр. конф. з косм. дослід. Матеріали. – К. : Освіта України, 2010. – С. 108.
5. GSFC/SPDF OMNIWeb [Електронний ресурс] / Режим доступу: <http://omniweb.gsfc.nasa.gov/>
6. Wolf A. Determining lyapunov exponents from time series / Wolf A., Swift J. B., Swinney H. L., Vastano J. A. // *Physica 16D*. – Amsterdam, Netherlands. – 1985. – P. 285–317.

References

1. AKASOFU, S. I. (2001) Predicting Geomagnetic Storms as a Space Weather Project. *Amer. Geophys. Union. Geophys. Monogr. Ser. V. 125. Space Weather*. p. 329–337.
2. BALIKHIN, M., BATES I. and WALKER S. N. (2001) Identification of Linear and Nonlinear processes in Space Plasma Turbulence. *Advances in Space Research*. 28, Issue 5. p. 787–800.
3. WU, J. G. and LUNDSTEDT, H. (1997) Neural network modeling of solar wind magnetosphere interaction, *J. Geophys. Res.* 102. p. 14457–14466.
4. YATSENKO, V. O., PRUTSKO, J. V. and CHEREMNYKH, S. O. (2010) Geomagnetic Dst-index forecast based on bilinear models and nonlinear filtering techniques. *10 Ukrainian Conference of space research*. Kyiv: Osvita Ukrainy. P. 108.
5. GSFC/SPDF OMNIWeb. – Available from: <http://omniweb.gsfc.nasa.gov/>
6. WOLF, A. & SWIFT, J. B. & SWINNEY, H. L. & VASTANO, J. A. (1985) Determining lyapunov exponents from time series. *Physica 16D*. p. 285–317.

Надійшла до редколегії 14.09.2016

УДК 519.87

Івохін Є.В., д.ф.-м.н., професор,
Навродський В.О., к.ф.-м.н., доцент,
Махно М.Ф., аспірант

**Про наближений розв'язок чіткої та
нечіткої задачі лінійного програмування з
системою обмежень великої розмірності**

Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, м. Київ, пр-т Глушкова, 4д,
e-mail: ivohin@univ.kiev.ua

Ivokhin E.V., Dr.Sci., professor,
Navrodskiy V.O., Ph.D., associate professor,
Makhno M.F., postgraduate

**On approximate solution of multi-constraint
crisp and fuzzy linear programming problem**

Taras Shevchenko National University of Kyiv,
Kyiv, Glushkova st, 4d,
e-mail: ivohin@univ.kiev.ua

У статті розглянуто підхід для розв'язання задач лінійного програмування за умов наявності системи обмежень великої розмірності. Запропоновано спосіб оцінювання близькості обмежень, заданих у вигляді нерівностей. Сформульовано алгоритм перетворення області допустимих розв'язків при зменшенні кількості обмежень, що розглядаються. Розглянуто нечітку задачу лінійного програмування з нечітко заданими ресурсами у вигляді системи нерівностей великої розмірності. Для наближеного розв'язання нечіткої задачі запропоновано узагальнення методу перетворення області допустимих розв'язків. Наближений нечіткий розв'язок шукається у формі Белмана-Заде відповідної оптимізаційної задачі.

Ключові слова: задача лінійного програмування, ресурсні обмеження, нечіткі числа, велика розмірність, метод розв'язання.

This article describes the approach to solve linear programming problems with the large-scale system of constraints. There were considered the constraints given in the form of inequalities. The method of assessment proximity of constraints was proposed. This method bases on estimation of scarce and strong connectivity of constraints. The value of the connection is measured based on the angle between the normal vectors to the planes constraints. The conversion algorithm of permissible solutions area for reducing the number of constraints under consideration was described. Also there was considered the fuzzy linear programming problems with fuzzy set of resources which are defined by large-scale system of inequalities. For fuzzy approximate solution of the problem was proposed generalized method of converting of permissible solutions area. Fuzzy approximate solution is sought in the form of Bellman-Zadeh for corresponding optimization problem. The condition for the application of this method was specified and the example of using the method was suggested.

To check the results of the study it was provided a series of numerical experiments in which were obtained the approximate solutions of fuzzy linear programming problems.

Keywords: linear optimization problem, large-scale system of resource constraints, fuzzy numbers.

Статтю представив д.т.н., проф. Волошин О.Ф.

Пошук оптимального або близького до оптимального розв'язку в задачах дослідження операцій на основі методів математичного програмування здійснюється з урахуванням системи обмежень, яка визначає область допустимих розв'язків (ОДР). В задачах лінійного програмування система обмежень визначається, як правило, системою лінійних нерівностей. За невеликої кількості обмежень область може бути легко побудована, а оптимальний розв'язок – знайдений шляхом перебору значень цільової функції в усіх симплексах (вершинах) отриманого багато-гранника [1].

Зрозуміло, що для розв'язування задач математичного (в тому числі, лінійного) програмування існує багато ефективних методів. Їх застосування дає змогу отримати оптимальний або близький до нього розв'язок, не проводячи аналізу складу системи обмежень. В той же час система обмежень може містити сукупності незалежних умов, які є близькими. В задачах лінійного програмування з великою кількістю обмежень це суттєво знижує ефективність роботи алгоритмів пошуку оптимального розв'язку.

Близькі обмеження незначним чином впливають на вигляд області допустимих розв'язків, що дозволяє розглядати задачу

оптимізації з урахуванням обмеженої кількості умов, які визначають деяке наближення початкової області допустимих розв'язків. Зрозуміло, що говорити про оптимальність отриманого при цьому розв'язку для вихідної задачі дуже складно.

Метод перетворення ОДР чіткої задачі лінійного програмування.

Розглянемо стандартну задачу лінійного програмування, записану у векторно-матричному вигляді

$$\max c^T x \quad (1)$$

при обмеженнях

$$Ax \leq b; \quad x \geq 0, \quad (2)$$

де A - матриця обмежень розміру $m \times n$, b - вектор-стовбець вільних членів (розміру m), x - вектор змінних (розміру n), $c = (c_1, c_2, \dots, c_n)$ - вектор коефіцієнтів цільової функції.

Введемо позначення: $A_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})^T$ - вектор коефіцієнтів у лівій частині обмеження з номером i , $\bar{A}_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}, b_i)^T$ - розширений вектор, що містить окрім коефіцієнтів лівої частини i -тої нерівності значення вільного члена правої частини b_i , $i = \overline{1, m}$.

Для групування нерівностей будемо досліджувати взаємозв'язки між ними, використовуючи такі означення.

Означення 1. Два обмеження системи лінійних нерівностей (2) з номерами i та j , $1 \leq i, j \leq m$, назовемо γ -слабкозв'язаними, якщо для величини

$$v_{ij} = (A_i, A_j) / (\|A_i\| \|A_j\|), \quad 1 \leq i, j \leq m, \quad (3)$$

справедливе співвідношення

$$v_{ij} \leq \gamma, \quad 0 \leq \gamma < 1. \quad (4)$$

Тут $(A_i, A_j) = \sum_{s=1}^n a_{is} a_{js}$ - скалярний добуток векторів A_i, A_j , $1 \leq i, j \leq m$.

Величина параметра γ дозволяє задати рівень взаємозв'язку двох нерівностей. Легко помітити, що значення v_{ij} співпадає зі значенням косинуса кута між векторами градієнтів A_i, A_j , $1 \leq i, j \leq m$, ($v_{ij} = \cos \varphi_{ij} = \cos \varphi(A_i, A_j)$), і при невеликих значеннях γ дві нерівності з номерами i та j , $1 \leq i, j \leq m$, суттєво відрізняються.

Означення 2. Два обмеження системи лінійних нерівностей (2) з номерами i та j ,

$1 \leq i, j \leq m$, назовемо γ -сильнозв'язаними, якщо для величини v_{ij} виду (3) справедливе співвідношення

$$v_{ij} \geq \gamma, \quad 0 < \gamma \leq 1. \quad (5)$$

Означення 3. Два обмеження системи лінійних нерівностей (2) з номерами i та j , $1 \leq i, j \leq m$, назовемо $\bar{\gamma}$ -слабкозв'язаними, якщо для величини

$$\bar{v}_{ij} = (\bar{A}_i, \bar{A}_j) / (\|\bar{A}_i\| \|\bar{A}_j\|), \quad 1 \leq i, j \leq m, \quad (6)$$

справедливе співвідношення

$$\bar{v}_{ij} \leq \gamma, \quad 0 \leq \gamma < 1. \quad (7)$$

Означення 4. Два обмеження системи лінійних нерівностей (2) з номерами i та j , $1 \leq i, j \leq m$, назовемо $\bar{\gamma}$ -сильнозв'язаними, якщо для величини $\bar{v}_{ij}$ виду (6) справедливе співвідношення

$$\bar{v}_{ij} \geq \gamma, \quad 0 < \gamma \leq 1. \quad (8)$$

Зрозуміло, що поняття $\bar{\gamma}$ -слабкозв'язаних і $\bar{\gamma}$ -сильнозв'язаних обмежень, як і у випадку γ -слабкозв'язаних і γ -сильнозв'язаних обмежень, зв'язані з величиною кута між векторами ($\bar{v}_{ij} = \cos \bar{\varphi}_{ij} = \cos \bar{\varphi}(\bar{A}_i, \bar{A}_j)$), отриманою для розширених векторів $\bar{A}_i, \bar{A}_j$, $1 \leq i, j \leq m$.

Наведені вище означення дозволяють оцінити зв'язаність обмежень вихідної задачі і запропонувати спосіб їх модифікації, замінюючи пару нерівностей на одну нову. Це дозволяє сформулювати послідовність перетворень області допустимих розв'язків для ЗЛП (1), (2) при m лінійних обмеженнях такого вигляду:

- задаємо значення величини γ , яке визначає ступінь сильної та слабкої зв'язаності пар обмежень;

- для всіх пар нерівностей, для яких значення $v_{ij} \geq \gamma$, $1 \leq i, j \leq m$, будемо нове обмеження у

вигляді $\sum_{k=1}^n p_k x_k \leq r$, де коефіцієнти $p_k, k = \overline{1, n}, r$

визначаються з рівняння гіперплощини, вектор нормалі до якої співпадає з вектором суми векторів $(a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})^T$ і $(a_{j1}, a_{j2}, \dots, a_{jn})^T$, та яка проходить через множину точок перетину гіперплощин $\sum_{k=1}^n a_{ik} x_k = b_i$ і $\sum_{k=1}^n a_{jk} x_k = b_j$, $1 \leq i, j \leq m$.

Для найпростішого випадку ЗЛП (1), (2) при $n = 2$ і m лінійних обмеженнях процедура перетворення області допустимих розв'язків

передбачає побудову нового обмеження у вигляді $px_1 + qx_2 \leq r$, де коефіцієнти p, q, r визначаються з рівняння прямої, вектор нормалі якої співпадає з вектором суми векторів $(a_{i1}, a_{i2})^T$ і $(a_{j1}, a_{j2})^T$, та яка проходить через точку перетину прямих $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_i$ і $a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 = b_j$, $1 \leq i, j \leq m$.

Слід зауважити, що область допустимих рішень задачі лінійного програмування при цьому не зменшується, а у випадку виконання умов $\bar{v}_{ij} \geq v_{ij} \geq \gamma$, $1 \leq i, j \leq m$, є перетином областей, що визначаються усіма нерівностями, крім i -ї та j -ї, та області, яка визначається новою нерівністю $\sum_{k=1}^n p_k x_k \leq r$, з урахуванням вимог $x_k \geq 0, k = \overline{1, n}$.

На жаль, подібне перетворення області допустимих рішень не гарантує близькості заново отриманого розв'язку до оптимального розв'язку початкової задачі.

Метод перетворення ОДР нечіткої задачі лінійного програмування.

Наведений вище підхід для перетворення ОДР можна застосувати для пошуку розв'язків нечітких задач лінійного програмування з нечітко заданими ресурсами [2]:

$$\sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \max, \quad (9)$$

з нечіткими обмеженнями

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq \tilde{b}_i, \quad i = \overline{1, m}, \quad x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, n}, \quad (10)$$

де праві частини обмежень (10) подаються у вигляді правих нечітких трикутних чисел $\tilde{b}_i = (b_i, b_i, b_i + b_i^0)$, $b_i^0 \geq 0$, $i = \overline{1, m}$ [3]. Допустимі відхилення $b_i^0 \geq 0$, $i = \overline{1, m}$, визначають величини граничних змін ресурсів моделі.

З урахуванням понять нечітких трикутних чисел, задача лінійного програмування (9)-(10) може бути переписана як задача оптимізації цільової функції (9) з обмеженнями [4]

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i + b_i^0 - \lambda b_i^0, \quad \lambda \in [0, 1], \quad i = \overline{1, m},$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, n}. \quad (11)$$

У цьому випадку нечітка задача лінійного програмування (9), (11) переписується у формі оптимізаційної задачі такого вигляду: знайти значення параметра $\lambda \in [0, 1]$, яке є розв'язком задачі лінійного програмування

$$\max_x \lambda$$

$$\lambda(U - L) - \sum_{j=1}^n c_j x_j + L \leq 0,$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i + b_i^0 - \lambda b_i^0, \quad i = \overline{1, m}, \quad (12)$$

$$x \geq 0, \quad 0 \leq \lambda \leq 1.$$

Тут $L = \min(Z_l, Z_u)$, $U = \max(Z_l, Z_u)$, $U \geq L$, Z_l, Z_u - оптимальні значення функцій цілі задач (9), (11) при $\lambda = 1$ і $\lambda = 0$ відповідно, а оптимальне значення цільової функції моделі (9), (11) буде належати інтервалу $[L, U]$ при деякому значенні параметра $\lambda^* \in [0, 1]$.

Запропонована вище послідовність для перетворення системи обмежень повинна враховувати подання величин ресурсів у вигляді правих трикутних нечітких чисел, $\tilde{b}_i = (b_i, b_i, b_i + b_i^0)$, $i = \overline{1, m}$.

Припустимо, що задача оптимізації має вигляд (9), (10) при m лінійних обмеженнях. Тоді схема перетворення області допустимих розв'язків набуває такого вигляду:

- задаємо значення величини γ , що визначає ступінь сильної та слабкої зв'язаності пар обмежень;

- для всіх пар нерівностей, для яких значення $v_{ij} \geq \gamma$, $1 \leq i, j \leq m$, будуємо нове обмеження у

$$\text{вигляді} \quad \sum_{k=1}^n p_k x_k \leq s - \lambda v_{ij}, \quad 0 \leq \lambda \leq 1, \quad \text{де}$$

коефіцієнти $p_k, k = \overline{1, n}$, s визначаються з рівняння гіперплощини, вектор нормалі якої співпадає з вектором суми векторів $(a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})^T$ і $(a_{j1}, a_{j2}, \dots, a_{jn})^T$ та яка проходить через множину точок перетину

$$\sum_{k=1}^n a_{ik} x_k = b_i + b_i^0 \quad \text{і} \quad \sum_{k=1}^n a_{jk} x_k = b_j + b_j^0, \quad 1 \leq i, j \leq m.$$

Отримане в новому обмеженні значення $s - \lambda v_{ij}$ відповідає нечітко заданій величині ресурсу, яка подається правим нечітким трикутним числом $= (s - v_{ij}, s - v_{ij}, s)$.

Потрібно також зауважити, що наведені вище процедури перетворення ОДР необхідно залучати для ресурсів одного виду. Тоді отримане нове обмеження буде розглядатися як деяке узагальнення умов, що накладаються на обсяг конкретного ресурсу. У протилежному випадку схема немає сенсу.

Приклад. Продемонструємо результат застосування даного алгоритму для нечіткої ЗЛП такого вигляду:

$$\begin{aligned} \max x_2 \\ 2x_1 + 9x_2 &\leq 19 - \lambda_1, \\ 3x_1 + 4x_2 &\leq 14 - 2\lambda_2, \\ -x_1 + x_2 &\leq 2 - \lambda_3, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \lambda_i &\in [0,1], i = \overline{1,3}. \end{aligned} \quad (13)$$

Використання для розв'язування задачі (13) описаного підходу у вигляді оптимізаційної задачі (12) дає розв'язок $x_1 = 0.45, x_2 = 1.96, \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0.49$.

Перетворення перших двох нерівностей до вигляду $5x_1 + 13x_2 \leq 30.9 - 0.911\lambda_4, \lambda_4 \in [0,1]$, дозволяє отримати оптимальний розв'язок нової ЗЛП $x_1 = 0.61, x_2 = 2.1, \lambda_3 = \lambda_4 = 0.4995$.

Як впливає з отриманих у прикладі розрахунків, розв'язок оптимізаційної задачі

залишився достатньо близьким до розв'язку початкової задачі, зберігаючи при цьому відповідний рівень нечіткості розв'язку.

Для більш змістовної перевірки результатів дослідження було проведено ряд чисельних експериментів, в яких отримано наближені розв'язки нечітких задач лінійного програмування. Визначення величин коефіцієнтів і кількості обмежень в задачах здійснювалося випадковим чином, кількість обмежень, що визначають область допустимих розв'язків, обиралася з діапазону [50,100].

Результати експериментів дозволили зробити висновок про конструктивність отриманих процедур перетворення областей допустимих рішень ЗЛП, що дає можливість сформулювати ефективний спосіб розв'язання чітких та нечітких задач лінійного програмування з системою обмежень великої розмірності.

Список використаних джерел

1. Зайченко Ю.П. Дослідження операцій/ Ю.П. Зайченко. – К.: «Слово», 2006. – 815 с.
2. Dubois D. Linear programming with fuzzy data / D. Dubois // Analysis of Fuzzy Information / J. C. Bezdek (ed.). Boca Raton : CRC Press, 1987.
3. Bablu J. Multi-objective fuzzy linear programming and its application in transportation model/ Bablu Jana, Tapan Kumar Roy // Tamsui Oxford Journal of Math. Sc. – 2005. – V.21(2). – P.243-268.
4. Zimmermann H.J. Fuzzy programming and linear programming with several objective functions/ H.J. Zimmermann // Fuzzy Sets and System. – 1978. – No.1. – P.45-55.

References

1. ZAICHENKO, Yu. (2006) *Operation research*. Kyiv: Slovo.
2. DUBOIS D. (1987) *Linear programming with fuzzy data* // Analysis of Fuzzy Information / J.C.Bezdek (ed.). Boca Raton: CRC Press.
3. BABLU JANA and TAPAN KUMAR ROY. (2005) *Multi-objective fuzzy linear programming and its application in transportation model* // Tamsui Oxford Journal of Math. Sc. – V.21 (2). – P.243-268.
4. ZIMMERMANN H.J. (1978) *Fuzzy programming and linear programming with several objective functions* // Fuzzy Sets and System. – No.1. – P.45-55.

Надійшла до редколегії 19.11.2016

УДК 517.9

Капустян О.А., к.ф.-м.н., с.н.с.

**Обґрунтування наближеного синтезу в
розподіленій задачі оптимального
керування з цільовим функціоналом
типу Немицького**

Київський національний університет імені
Тараса Шевченка,
03127, м. Київ, пр-т. Глушкова 4д,
e-mail: olena.kap@gmail.com

O. A. Kapustian, Ph.D.

**Approximate synthesis for distributed optimal
control problem with Nemyckii type cost
functional**

Taras Shevchenko National University of Kyiv,
03127, Glushkov ave., 4d, Kyiv, Ukraine
e-mail: olena.kap@gmail.com

Результати містять нову постановку задачі у загальній проблематиці пошуку ефективних методів керування складними нескінченновимірними системами. У роботі обґрунтовано наближене оптимальне керування у формі оберненого зв'язку (синтезу) для задачі керування тепловим процесом у мікро-неоднорідному середовищі з квадратичним нерозщеплюваним критерієм якості, ядром якого є оператор Немицького.

Ключові слова: оптимальне керування, наближений синтез, параболічне рівняння, усереднення.

This work is devoted to the finding effective methods of control of complicated infinite-dimensional systems, initiated in the works [1-3]. Finding control in the feedback form or synthesis plays important role here. In [4,5] it was proposed and substantiated a procedure for constructing approximate optimal synthesis for a wide class of distributed processes in micro-inhomogeneous medium, investigated earlier in [6]. In this paper, we consider the optimal control problem in the feedback form (synthesis) for a parabolic equation with fast oscillating coefficients and non-decomposable quadratic cost functional (with Nemyckii type operator). In general, to find the exact formula of optimal synthesis is not possible for such a problem, because we can not directly apply the Fourier method. But the transition to the average parameters greatly simplifies the structure of the problem. Assuming that the problem with the average coefficients already admits optimal synthesis form, we ground approximate optimal control in the feedback form (synthesis) for the initial problem. We give an example of Nemyckii operator for specific conditions in this paper.

Key Words: optimal control, approximate synthesis, parabolic equation, averaging.

Статтю представив д.ф.-м.н. Хусаїнов Д. Я.

Вступ.

Результати роботи вкладаються у загальну проблематику пошуку ефективних методів керування складними нескінченновимірними системами [1-3]. Важливу роль тут відіграють пошуки керування у формі оберненого зв'язку (так звана задача синтезу). У роботах [4, 5] було запропоновано та обґрунтовано процедуру побудови наближеного оптимального керування у формі оберненого зв'язку (синтезу) для

широких класів розподілених процесів у мікро-неоднорідних середовищах, які досліджувалися раніше у [6]. Найзручнішим інструментом для точного знаходження або якісного аналізу оптимальних керувань є метод Фур'є. Новизною даної роботи є розгляд функціоналу якості, що не допускає прямого застосування методу Фур'є, а отже, знаходження формули точного синтезу. Зазначений функціонал якості містить оператор типу Немицького.

Постановка задачі.

Нехай $\Omega \subset R^n$ - обмежена область, $\varepsilon \in (0,1)$ - малий параметр. В області $Q = (0,T) \times \Omega$ керований процес $\{y, u\}$ описується задачею

$$\begin{cases} \frac{\partial y}{\partial t} = A^\varepsilon y + u(t, x), \\ y|_{\partial\Omega} = 0, \\ y|_{t=0} = y_0^\varepsilon, \end{cases} \quad (1)$$

$$J_\varepsilon(y, u) = \quad (2)$$

$$= \int_\Omega q_\varepsilon(x, y(T, x)) y(T, x) dx + \int_Q u^2(t, x) dt dx \rightarrow \inf,$$

де $A^\varepsilon = \text{div}(a^\varepsilon \nabla)$, $a^\varepsilon(x) = a\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$, a - вимірний, періодична матриця, що задовольняє умови рівномірної еліптичності та обмеженості:
 $\exists \nu_1 > 0, \nu_2 > 0 \forall \eta \in R^n$

$$\nu_1 \sum_{i=1}^n \eta_i^2 \leq \sum_{i,j=1}^n a_{i,j}(x) \eta_i \eta_j \leq \nu_2 \sum_{i=1}^n \eta_i^2, \quad (3)$$

$q_\varepsilon : \Omega \times R \mapsto R$ - функція типу Каратеодорі і існують не залежні від $\varepsilon \in (0,1)$ константа $C > 0$ та функції $C_1 \in L^2(\Omega)$, $C_2 \in L^1(\Omega)$ такі, що для всіх $\xi \in R$ та м.в. $x \in \Omega$ виконуються нерівності

$$\begin{aligned} |q_\varepsilon(x, \xi)| &\leq C |\xi| + C_1(x), \\ q_\varepsilon(x, \xi) \xi &\geq -C_2(x). \end{aligned} \quad (4)$$

Тоді [9] оператор Немицького $q_\varepsilon(x, \square) : L^2(\Omega) \mapsto L^2(\Omega)$ є неперервним, отже, з умов (3), (4) і властивостей розв'язків задачі (1) (див. Лему 1) стандартно одержуємо [1], [3], що задача (1), (2) має розв'язок $\{y^\varepsilon, u^\varepsilon\}$ (оптимальний процес) у класі $W(0, T) \times L^2(Q)$, де $W(0, T)$ - це клас функцій $y \in L^2(0, T; H_1^0(\Omega))$, що мають узагальнені похідні по t з класу $L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$. У загальному випадку знайти формулу оптимального синтезу для задачі (1), (2) не уявляється можливим. Проте в багатьох випадках [6] перехід до усереднених параметрів значно спрощує структуру задачі.

Надалі через $\|\cdot\|$ і $(\cdot, \cdot)$ будемо позначати норму і скалярний добуток в $L_2(\Omega)$. Будемо вважати, що існує функція Каратеодорі $q : \Omega \times R \mapsto R$ така, що

$$\forall r > 0 \quad q_\varepsilon(x, \xi) \rightarrow q(x, \xi) \text{ слабо в } L_2(\Omega) \text{ рівномірно по } |\xi| \leq r. \quad (5)$$

Задачу

$$\begin{cases} \frac{\partial y}{\partial t} = A^0 y + u(t, x), \\ y|_{\partial\Omega} = 0, \\ y|_{t=0} = y_0, \end{cases} \quad (6)$$

$$J(y, u) = \quad (7)$$

$$= \int_\Omega q(x, y(T, x)) y(T, x) dx + \int_Q u^2(t, x) dt dx \rightarrow \inf,$$

будемо називати усередненою до задачі (1), (2), де $A^0 = \text{div}(a^0 \nabla)$, постійна матриця a^0 є усередненою для a^ε [6], $y_0 \in L^2(\Omega)$ таке, що

$$y_0^\varepsilon \rightarrow y_0 \text{ слабо в } L_2(\Omega) \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0. \quad (8)$$

Ми будемо припускати, що задача з усередненими коефіцієнтами вже допускає форму оптимального синтезу $u[t, x, y(t, x)]$.

Основною метою роботи є обґрунтування такого факту, що форма $u[t, x, y(t, x)]$ при достатньо малих $\varepsilon \in (0,1)$ реалізує наближене оптимальне керування у формі оберненого зв'язку у вихідній задачі (1), (2), тобто $\forall \eta > 0$

$$|J_\varepsilon(y^\varepsilon, u^\varepsilon) - J_\varepsilon(y_\varepsilon, u[y_\varepsilon])| < \eta \quad (9)$$

для достатньо малих $\varepsilon > 0$, де y_ε - розв'язок задачі (1), (2) з керуванням $u[y_\varepsilon]$.

Основні результати.

З умови (5) і леми Мазура [10] виводимо, що функція q задовольняє (4), отже, задача оптимального керування (6), (7) розв'язна в класі $W(0, T) \times L^2(Q)$.

Будемо вважати виконаними наступні умови:

задача (6), (7) має єдиний розв'язок $\{\bar{y}, \bar{u}\}$;
(10)

існує відображення

$$u : [0, T] \times \Omega \times L^2(\Omega) \mapsto L^2(\Omega) \quad (11)$$

таке, що $\bar{u}(t, x) \equiv u[t, x, \bar{y}(t, x)]$;
існують константи $D_1 > 0, D_2 > 0$ такі, що для
всіх $t \in [0, T]$ та $y, z \in L^2(\Omega)$ виконуються
нерівності

$$\|u[t, x, y]\| \leq D_1 (\|y\| + 1), \quad (12)$$

$$\|u[t, x, y] - u[t, x, z]\| \leq D_2 \|y - z\|.$$

Надалі будемо використовувати наступний
результат про G -збіжність параболічних
операторів.

Лема 1. [8] Нехай оператор A^ε G -збігається
до оператора A^0 [6], $y_0^\varepsilon \rightarrow y_0$ слабо в $L_2(\Omega)$,
 $v_\varepsilon \rightarrow v$ слабо в $L_2(Q)$. Тоді $g_\varepsilon \rightarrow g$ в
 $C([\delta, T]; L^2(\Omega)) \quad \forall \delta > 0$, де g_ε - розв'язок
задачі (1) з керуванням v_ε , g - розв'язок задачі
(6) з керуванням v .

Перед формулюванням основного результату
наведемо приклад функції $q_\varepsilon: \Omega \times R \mapsto R$, для
якої виконуються умови (4), (5), (10) - (12).

Приклад. Покладемо $q_\varepsilon(x, \xi) = g\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\xi$, де
 g - вимірна, обмежена, періодична функція,
число $\langle g \rangle$ - її середнє значення [6]. Тоді виконані
умови (4), (5) з $q(x, \xi) = \langle g \rangle \xi$. Крім того, задача
(6), (7) стає класичною лінійно-квадратичною
задачею, яка має єдиний розв'язок [1], отже,
виконується (10). Нехай $\{X_i\}, \{\lambda_i\}$ - розв'язки
спектральної задачі

$$\begin{cases} A^0 X_i = -\lambda_i X_i, \\ X_i|_{\partial\Omega} = 0, \end{cases}$$

$\{X_i\} \subset H_0^1(\Omega)$ - ортонормований базис в
 $L_2(\Omega)$, $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots, \lambda_i \rightarrow \infty, i \rightarrow \infty$.

Користуючись методом Фур'є, легко
встановлюється вигляд оптимального
керування в формі оберненого зв'язку [5]:

$$u[t, x, y] = \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i(t) (y(t), X_i) X_i(x), \quad (13)$$

де

$$\beta_i(t) = -e^{2\lambda_i(t-T)} \left(\frac{1}{\langle g \rangle} + \frac{1}{2\lambda_i} (1 - e^{2\lambda_i(t-T)}) \right)^{-1}.$$

З останньої формули маємо, що

$$\exists \beta > 0 \quad \forall i \geq 1 \quad \sup_{t \in [0, T]} |\beta_i(t)| \leq \beta,$$

отже, мають місце умови (11), (12) з
 $D_1 = D_2 = \beta$.

Далі, використовуючи відображення (11),
розглянемо задачу

$$\begin{cases} \frac{\partial y}{\partial t} = A^\varepsilon y + u[t, x, y], \\ y|_{\partial\Omega} = 0, \\ y|_{t=0} = y_0^\varepsilon \end{cases} \quad (14)$$

В силу умов (12) задача (13) має єдиний
розв'язок y_ε в класі $W(0, T)$ [7].

Основним результатом роботи є наступна
теорема.

Теорема. Нехай виконуються умови (3), (4),
(5), (10)-(12) і, крім того, існує додатна функція
 $l \in L^\infty(\Omega)$ така, що для всіх $\varepsilon \in (0, 1)$

$$|q_\varepsilon(x, \xi) - q_\varepsilon(x, \eta)| \leq l(x) |\xi - \eta|. \quad (15)$$

Тоді для довільного $\eta > 0$ існує $\bar{\varepsilon} \in (0, 1)$ таке,
що $\forall \varepsilon \in (0, \bar{\varepsilon})$

$$|J_\varepsilon(y^\varepsilon, u^\varepsilon) - J_\varepsilon(y_\varepsilon, u[t, x, y_\varepsilon(t, x)])| < \eta,$$

де $\{y^\varepsilon, u^\varepsilon\}$ - оптимальний процес в задачі (1), (2),
 y_ε - розв'язок задачі (14), керування
 $u[t, x, y_\varepsilon(t, x)]$ визначається з (11).

Доведення. Покажемо, що при $\varepsilon \rightarrow 0$ і
розв'язок задачі (14) y_ε , і розв'язок задачі (1), (2)
 y^ε прямують у певному сенсі до $\bar{y}$, де $\{\bar{y}, \bar{u}\}$ -
оптимальний процес в задачі (6), (7). Розглянемо
спочатку задачу (14). Для м.в. $t \in (0, T)$ для
розв'язку y_ε справедлива оцінка

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \|y_\varepsilon(t)\|^2 + 2v_1 \|y_\varepsilon(t)\|_{H_0^1}^2 &\leq \\ &\leq (2D_1 + 1) \|y_\varepsilon(t)\|^2 + D_1^2. \end{aligned} \quad (16)$$

Використовуючи лему Гронуола, з (16)
одержуємо, що послідовність $\{y_\varepsilon\}$ обмежена в

$W(0, T)$. Тоді за лемою про компактність [7] існує функція $z \in W(0, T)$ така, що по підпоследовності

$$\begin{aligned} y_\varepsilon &\rightarrow z \text{ в } L^2(Q) \text{ і м.с. в } Q, \\ y_\varepsilon(t) &\rightarrow z(t) \text{ в } L^2(\Omega) \text{ для м.в. } t \in (0, T), \\ y_\varepsilon(t) &\rightarrow z(t) \text{ в } L^2(\Omega) \text{ слабо } \forall t \in [0, T], \\ y_\varepsilon &\rightarrow z \text{ слабо в } L^2(0, T; H_0^1(\Omega)). \end{aligned} \quad (17)$$

Звідси і з (12) виводимо, що

$$u[t, x, y_\varepsilon] \rightarrow u[t, x, z] \text{ в } L^2(Q). \quad (18)$$

З леми 1 одержуємо, що z - розв'язок задачі (14) з оператором A^0 та початковими даними y^0 , причому при $\varepsilon \rightarrow 0$

$$y_\varepsilon \rightarrow z \text{ в } C([\delta, T]; L^2(\Omega)) \quad \forall \delta > 0. \quad (19)$$

Оскільки задача оптимального керування (6), (7) має єдиний розв'язок $\{\bar{y}, \bar{u}\}$, і для керування $\bar{u}$ справедлива формула $\bar{u}(t, x) = u[t, x, \bar{y}(t, x)]$, то $\bar{y}$ є розв'язком задачі (14) з оператором A^0 та початковими даними y^0 . Але ця задача також має єдиний розв'язок, отже $\bar{y} \equiv z$ і, крім того, збіжності (17) - (19) мають місце при $\varepsilon \rightarrow 0$ (а не лише по підпоследовності). Для продовження доведення теореми встановимо слабку збіжність $q_n(x, y_n) \rightarrow q(x, y)$ в $L^2(\Omega)$.

Лема 2. Нехай для $\varepsilon_n \rightarrow 0$ функції $q_n := q_{\varepsilon_n}$ задовольняють умови (4), (5), (15), і $y_n \rightarrow y$ в $L^2(\Omega)$. Тоді

$$q_n(x, y_n) \rightarrow q(x, y) \text{ слабо в } L^2(\Omega).$$

Доведення Лема 2. Для довільної $\varphi \in L^2(\Omega)$ розглянемо

$$\begin{aligned} I_n &:= \int_{\Omega} (q_n(x, y_n(x)) - q(x, y(x))) \varphi(x) dx = \\ &= \int_{\Omega} (q_n(x, y_n(x)) - q_n(x, y(x))) \varphi(x) dx + \\ &+ \int_{\Omega_1(r)} (q_n(x, y(x)) - q(x, y(x))) \varphi(x) dx + \\ &+ \int_{\Omega \setminus \Omega_1(r)} (q_n(x, y(x)) - q(x, y(x))) \varphi(x) dx = \\ &= I_n^{(1)} + I_n^{(2)}(r) + I_n^{(3)}(r), \end{aligned}$$

де $\Omega_1(r) = \{x \in \Omega \mid |y(x)| \leq r\}$. Доведемо, що

$$\forall \eta > 0 \quad \exists N \quad \forall n \geq N \quad I_n < \eta.$$

З умови (15) виводимо, що

$$\exists N_1 \quad \forall n \geq N_1 \quad I_n^{(1)} < \eta/3.$$

З умови (4) виводимо, що

$$\exists r > 0 \quad \forall n \geq 1 \quad I_n^{(3)}(r) < \eta/3.$$

З умови (5) виводимо, що

$$\exists N(r) > 0 \quad \forall n \geq N(r) \quad I_n^{(2)}(r) < \eta/3.$$

Вибираючи $N = \max\{N_1, N(r)\}$, маємо шукану слабку збіжність. Лема доведена. $\square$

З Лема 2, а також із збіжностей (17), (18) виводимо

$$J_\varepsilon(y_\varepsilon, u[t, x, y_\varepsilon]) \rightarrow J(\bar{y}, \bar{u}), \quad \varepsilon \rightarrow 0. \quad (20)$$

Тепер розглянемо оптимальний процес $\{y^\varepsilon, u^\varepsilon\}$ задачі (1), (2). Маємо нерівність

$$\begin{aligned} &-\int_{\Omega} C_2(x) dx + \int_Q u^{\varepsilon 2}(t, x) dt dx \leq \\ &\leq J_\varepsilon(y^\varepsilon, u^\varepsilon) \leq \int_{\Omega} z_\varepsilon^2(T, x) dx, \end{aligned}$$

де z_ε - розв'язок (1) з керуванням $u \equiv 0$. Для

z_ε справедлива оцінка

$$\frac{d}{dt} \|z_\varepsilon(t)\|^2 + 2\nu_1 \|z_\varepsilon(t)\|_{H_0^1}^2 \leq 0,$$

отже, послідовність $\{u^\varepsilon\}$ є обмеженою в $L^2(Q)$. Тоді існує $v \in L^2(Q)$ така, що по деякій підпоследовності

$$u^\varepsilon \rightarrow v \text{ слабо в } L^2(Q), \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

З обмеженості $\{u^\varepsilon\}$ в $L^2(Q)$, оцінки

$$\frac{d}{dt} \|y^\varepsilon(t)\|^2 + 2\nu_1 \|y^\varepsilon(t)\|_{H_0^1}^2 \leq |y^\varepsilon(t), u^\varepsilon(t)|, \quad (21)$$

і леми Гронуола виводимо, що послідовність $\{y^\varepsilon\}$ є обмеженою в $W(0, T)$ і по підпоследовності збігається до деякої функції $y \in W(0, T)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ в сенсі (17). Використовуючи Лему 1, одержуємо, що y - розв'язок задачі (6) з керуванням v , причому при $\varepsilon \rightarrow 0$

$$y^\varepsilon \rightarrow y \text{ в } C([\delta, T]; L^2(\Omega)) \quad \forall \delta > 0. \quad (22)$$

Покажемо, що процес $\{y, v\}$ є оптимальним в задачі (6),(7). З оптимальності $\{y^\varepsilon, u^\varepsilon\}$ для довільного $u \in L^2(Q)$ маємо виконання нерівності

$$J_\varepsilon(y^\varepsilon, u^\varepsilon) \leq J_\varepsilon(p^\varepsilon, u), \quad (23)$$

де p_ε є розв'язок задачі (1) з керуванням u . Тоді для p_ε справедлива оцінка (21) з заміною u^ε на u , отже $\{p^\varepsilon\}$ є обмеженою в $W(0, T)$. Повторюючи попередні міркування, одержуємо, що p_ε збігається до деякої функції $p \in W(0, T)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ в сенсі (17), причому p - розв'язок задачі (6) з керуванням u і, крім того, p_ε збігається до p в сенсі (22). Тоді при $\varepsilon \rightarrow 0$ в силу Лема 2

$$J_\varepsilon(p^\varepsilon, u) \rightarrow J(p, u),$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} J_\varepsilon(y^\varepsilon, u^\varepsilon) \geq J(y, v). \quad (24)$$

З (23), (24) остаточно виводимо нерівність

$$J(y, v) \leq J(p, u),$$

яка означає, що $\{y, v\}$ є оптимальним процесом в задачі (6), (7). В силу єдиності $\{y, v\} \equiv \{\bar{y}, \bar{u}\}$. Тепер доведемо, що

$$J_\varepsilon(y^\varepsilon, u^\varepsilon) \rightarrow J(\bar{y}, \bar{u}), \quad \varepsilon \rightarrow 0. \quad (25)$$

Для цього зафіксуємо керування $u = \bar{u}$ в задачі (1). Нехай g_ε - розв'язок цієї задачі. Використовуючи попередні міркування, приходимо до наступних співвідношень

$$J_\varepsilon(y^\varepsilon, u^\varepsilon) \leq J_\varepsilon(g_\varepsilon, \bar{u}),$$

$$J_\varepsilon(g_\varepsilon, \bar{u}) \rightarrow J(\bar{y}, \bar{u}), \quad \varepsilon \rightarrow 0. \quad (26)$$

З (24), (26) одержуємо нерівності

$$J(\bar{y}, \bar{u}) \leq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} J_\varepsilon(y^\varepsilon, u^\varepsilon),$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} J_\varepsilon(y^\varepsilon, u^\varepsilon) \leq J(\bar{y}, \bar{u}),$$

які й означають виконання (25). Крім того, з (22) і (25) випливає, що

$$\int_Q u^{\varepsilon 2}(t, x) dt dx \rightarrow \int_Q \bar{u}^2(t, x) dt dx,$$

що разом зі слабкою збіжністю гарантує сильну збіжність

$$u^\varepsilon \rightarrow \bar{u} \text{ в } L^2(Q), \quad \varepsilon \rightarrow 0. \quad (23)$$

З (20) і (25) остаточно одержуємо твердження теореми. $\square$

Зауваження. Збіжності (18) і (23) гарантують близькість не лише критеріїв якості, але й керувань і фазових змінних в наступному сенсі:

$$u^\varepsilon - u[t, x, y_\varepsilon] \rightarrow 0 \text{ в } L^2(Q), \quad \varepsilon \rightarrow 0,$$

$$y^\varepsilon - y_\varepsilon \rightarrow 0 \text{ в } C([\delta, T]; L^2(\Omega)) \quad \forall \delta > 0.$$

Висновки

Отримані у статті результати містять нову постановку задачі у загальній проблематиці пошуку ефективних методів керування складними нескінченновимірними системами. У роботі розглянуто задачу оптимального керування у формі оберненого зв'язку (задача синтезу) для параболічного рівняння зі швидко осцилюючими коефіцієнтами із квадратичним нерозщеплюваним критерієм якості (з оператором типу Немицького). У загальному випадку знайти точну формулу оптимального синтезу для такої задачі не уявляється можливим через неможливість прямого застосування методу Фур'є. Та, перейшовши до усереднених параметрів та припустивши, що задача з усередненими коефіцієнтами вже допускає форму оптимального синтезу, обґрунтовано наближене оптимальне керування у формі оберненого зв'язку (синтезу) для вихідної задачі.

Результати статті можуть бути цікавими аспірантам та науковцям, які досліджують методи оптимального керування динамічними системами.

Список використаних джерел

1. Лионс Ж.-Л. Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными / Ж.-Л. Лионс. - М.: Мир, 1972. - 416 с.
2. Егоров А.И. Оптимальное управление тепловыми и диффузионными процессами / А.И. Егоров. - М.: Наука, 1978. - 378 с.
3. Фурсиков А.В. Оптимальное управление распределенными системами / А.В. Фурсиков. - Н.: Научная книга, 1999. - 360 с.

4. Kapustyan O.V. Approximate bounded synthesis for distributed systems / O.V. Kapustyan, O.A. Kapustian, A.V. Sukretna // Lambert Academic Publishing, 2013. – 225 p.
5. Капустян О.В. Наближений синтез в імпульсній розподіленій задачі оптимального керування зі швидкоосцилюючими коефіцієнтами / О.В. Капустян, О.А. Капустян, А.В. Русіна // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка Серія фізико-математичні науки. – 2014. – № 2. – С. 61-66.
6. Жиков В.В. Усреднение дифференциальных операторов / В.В. Жиков, С.М. Козлов, О.А. Олейник. – М: ФизМатЛит, 1993. – 464 с.
7. Sell G. R. Dynamics of Evolutionary Equations / G.R. Sell, Y. You. – N.Y.: Springer, 2002.
8. Denkiwski Z. Asymptotic behavior of optimal solutions to control problems for systems described by differential inclusions corresponding to partial differential equations / Z. Denkiwski, S. Mortola // JOTA. – 1993. – vol.78. – P. 365-391.
9. Appell J. Nonlinear superposition operators / J. Appell, P. Zabreiko. – Cambridge University Press, 1990.
10. Іосіда К. Функціональний аналіз / К. Іосіда. – М: Мир, 1965.
- coefficients. Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv Series Physics & Mathematics, Vol. 2, pp. 61-66.
6. ZHIKOV, V.V., KOZLOV, S.M., OLEJNIK, O.A. (1993) *Averaging of differential operators*. Moscow: FizMatLit.
7. SELL, G. R. ,YOU, Y. (2002) *Dynamics of Evolutionary Equations*. N.Y.: Springer.
8. DENKOWSKI, Z., MORTOLA, S. (1993). *Asymptotic behavior of optimal solutions to control problems for systems described by differential inclusions corresponding to partial differential equations*. JOTA, vol.78, P. 365-391.
9. APPELL, J., ZABREIKO, P. (1990) *Nonlinear superposition operators*. Cambridge University Press.
10. YOSIDA, K. (1995) *Functional analysis*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg.

Надійшла до редколегії 13.11.2016

References

1. LIONS, J.-L. (1971) *Optimal control of systems, governed by partial differential equations*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg.
2. EGOROV, A.I. (1978) *Optimal control by heat and diffusion processes*. Moscow: Nauka.
3. FURSIKOV, A.V. (1999) *Optimal control by distributed systems*. Novosibirsk: Nauchnaya kniga.
4. KAPUSTYAN, O.V., KAPUSTIAN, O.A., SUKRETN, A.V. (2013) *Approximate bounded synthesis for distributed systems*. Lambert Academic Publishing.
5. KAPUSTYAN, O.V., KAPUSTIAN, O.A., RUSINA, A.V. (2014) *Approximate synthesis in distributed impulsive optimal control problem with quickly-oscillating*

УДК 519.925.51

Кулян В.Р.¹, к.т.н.
Юнькова О.О.², к.ф.-м.н.
Коробова М.В.¹, к.ф.-м.н.

Алгоритм оптимальної диверсифікації портфеля акцій

¹ Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 03127, м. Київ, пр-т
Глушкова, 4д

e-mail: v.kulyan@gmail.com

² Київський національний економічний
університет імені Вадима Гетьмана, м. Київ,
03680, пр-т Перемоги, 54/1

Victor R. Kulian¹, Ph.D.
Olena O. Yunkova², Ph.D.
Maryna V. Korobova¹, Ph.D.

Algorithm of optimal portfolio diversification

¹ Taras Shevchenko National University of Kyiv,
03068, Kyiv, Glushkova ave., 4d
e-mail: v.kulyan@gmail.com

² Vadym Getman National Economics University of
Kyiv, 03680, Kyiv, Peremogy ave., 54/1

Розглядається математична задача оптимальної диверсифікації портфеля акцій на основі розв'язання двокритеріальної оптимізаційної задачі.

Ключові слова: математична модель, оптимальне інвестування, портфель акцій.

The problem of optimal diversification of the portfolio is considered. Based on mathematical models of the dynamics of the formation of the market value of one share and optimal stock portfolio is determined the structure of optimal portfolio. Such models built in a class of ordinary differential equations. Another problem is the choice of the stock portfolio expected of the same return, but the risk is less. For this purpose we use a set of acceptable and effective portfolios. This sequence of steps of the algorithm allows consistently solve two optimization problems. In solving the problem of diversification of the portfolio of shares is a problem determining the moments of time, necessary to perform such diversification. In the article we constructed an algorithm for determining these points in time, based on the solution of the problem of optimal control. The use of this algorithm enables selection of optimal risk portfolio at a certain level it expected profitability. It uses efficient and acceptable set of investment portfolios.

Key Words: mathematical model, optimal investment, stock portfolio

Статтю представив д.т.н., професор Гаращенко Ф.Г.

1. Вступ

Математична задача побудови оптимального портфеля акцій у найбільш загальній постановці Г. Марковиця має вигляд [1]

$$\left\{ \begin{array}{l} r^T(t)x(t) = \max_x \\ x^T(t)Vx(t) \rightarrow \min_x \\ I^T x(t) = 1 \\ x_i(t) \geq 0, i = \overline{1, n}, t \in [t_0, T] \end{array} \right\}. \quad (1)$$

Тут T - знак транспонування.

Предметний зміст цієї двокритеріальної задачі полягає у визначенні оптимальної інвестиційної стратегії, що передбачає максимізацію очікуваної прибутковості та мінімізацію ризику одночасно. Згідно Г. Марковицю, критерії в задачі є суперечливими, тобто покращення результату за одним з них веде до погіршення за іншим.

Практично це означає, що збільшенню прибутковості портфеля відповідає збільшення його ризикованості.

Існують різні підходи до розв'язання задачі (1), проте вони більшою мірою мають академічний характер і їх важко застосувати до задач реального інвестування у цінні папери.

Кроком, який може наблизити формулювання задачі (1) до потреб практичного інвестування, є розбиття цієї двокритеріальної задачі на дві однокритеріальні, перша з яких передбачає оптимізацію ризику при заданому рівні очікуваної прибутковості $r_p(T)$, а друга - оптимізацію очікуваної прибутковості для визначеного інвестором "оптимального" рівня ризику портфеля τ_p або навпаки. У деяких випадках такі математичні постановки задач нелінійного програмування дозволяють отримати аналітичні розв'язки [2], але при цьому не

розглядаються суттєві особливості, які полягають у тому, що на кожному кроці розв'язання задачі про диверсифікацію портфеля акцій необхідно враховувати як бюджетні, так і інструментальні обмеження, які дають можливість проаналізувати наявність на ринку необхідної кількості та якості фінансових інструментів

$$x_i(t) \in X(t). \quad (2)$$

Тут $X(t)$ – обмежена замкнута множина допустимих портфелів. Математична постановка задачі про оптимізацію ризику інвестиційного портфеля при визначеному на момент часу T рівні його очікуваної прибутковості $r_p(T)$ є такою

$$\left\{ \begin{array}{l} r^T(T)x(T) = r_p(T) \\ x^T(T)Vx(T) \rightarrow \min_x \\ I^T x(T) = 1 \\ x_i(t) \geq 0, i = \overline{1, n}, t \in [t_0, T] \\ x_i(t) \in X(t), i = \overline{1, n}, t \in [t_0, T] \end{array} \right\}. \quad (3)$$

На прикладі інвестування у акції розглянемо задачу оптимізації ризику портфеля для заданого рівня його очікуваної прибутковості $r_p(T)$, врахувавши при цьому обмеження (2).

В роботі [2] побудовано математичні моделі формування динаміки ринкової вартості однієї акції та портфеля акцій. У загальному вигляді вони можуть бути записані так

$$\dot{r}_i = \frac{dr_i}{dt} = f_i(r_i, t, \alpha), \quad r_i(t_0) = r_{i0}, \quad t \in [t_0, T], \quad (4)$$

$$i = \overline{1, n}$$

та

$$\dot{r}_p = f^p(r_p, x_i, \dot{x}_i, r_i, \dot{r}_i, t), \quad r_p(t_0) = r_{p0} \quad (5)$$

відповідно. Тут r_i – очікувана ринкова вартість акції; r_p – очікувана ринкова вартість інвестиційного портфеля; x_i – частка акцій i – того виду у портфелі $i = \overline{1, n}$; V – коваріаційна матриця $(n \times n)$; I – одиничний вектор $(n \times 1)$; t – час.

Процедуру розв'язання задачі (1) поділимо на дві частини. Перша частина полягає у формулюванні динамічної постановки і розв'язанні для неї задачі оптимального керування траєкторією портфеля акцій. Оптимальним процесом при

цьому буде $(r(t), r_p(t))$. Сформулюємо дві найбільш актуальні постановки задачі математичного моделювання оптимальної за очікуваною прибутковістю траєкторії портфеля акцій.

Задача 1.

Дано: математична модель динаміки формування ринкової вартості інвестиційного портфеля (5); бажаний рівень прибутковості портфеля у момент часу T $r_p(T) = r_{pT}$; часовий інтервал $t \in [t_0, T]$; обмеження на керування у кожен момент часу $x(t) \in X(t)$; критерій якості

$$J(x(t)) = \int_{t_0}^T (r_p(t) - r_p(T))^2 dt + \Phi(r_p(t_0)) \rightarrow \min_{x(t) \in X(t)}.$$

Тут $\Phi(r_p(t_0))$ – задана функція.

Необхідно: визначити вектор $x(t_0)$ та, відповідно, $r_p(t_0)$. При цьому нагадаємо, що вектор x описує частки акцій різних видів у портфелі і є таким $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$. Тут n – кількість видів акцій у інвестиційному портфелі.

Для розв'язання поставленої вище задачі оптимального керування із одним закріпленням кінцем траєкторії та фіксованим часом застосуємо принцип максимуму. В результаті отримаємо можливість визначити $x(t_0)$ і на його основі $r_p(t_0)$. Функція Гамільтона матиме вигляд

$$H(r_p(t), \psi(t), t, x(t)) = -(r_p(t) - r_p(T))^2 + \psi(t) * f(r_p, x_i, \dot{x}_i, r_i, \dot{r}_i)$$

Необхідна умова її оптимальності за керуванням є такою

$$\frac{\partial (-(r_p(t) - r_p(T))^2 + \psi(t) * f(r_p, x_i, \dot{x}_i, r_i, \dot{r}_i))}{\partial x_i} = 0,$$

$$i = \overline{1, n}.$$

Розв'язком останнього рівняння є функція керувань інвестиційним портфелем $x^*(\psi(t), r_p(t), t)$. Побудуємо спряжену систему у вигляді

$$\dot{\psi}(t) = -2(r_p(t) - r_p(T)) + \psi(t) * f'_{r_p}(r_p, x_i, \dot{x}_i, r_i, \dot{r}_i).$$

Сформуємо умову трансверсальності на лівому кінці траєкторії

$$\psi(t_0) = -\frac{\partial \Phi(r_p(t_0))}{\partial r_p}.$$

Крайова задача принципу максимуму матиме вигляд

$$\begin{cases} \dot{\psi}(t) = -2(r_p(t) - r_p^*(t)) + \psi(t) * \\ f'_{r_p}((r_p, x_i, \dot{x}_i, r_i, \dot{r}_i)) \\ \dot{r}_p(t) = f(r_p, x_i, \dot{x}_i, r_i, \dot{r}_i) \end{cases}$$

при умовах $\psi(t_0) = \psi_0$, $r_p(T) = r_{pT}$.

Задача 2.

“Програмна” траєкторія, з огляду на властивості прикладної задачі, може бути побудована дослідником і змістом її буде бажаний рівень очікуваної прибутковості інвестиційного портфеля у кожен момент часу на обраному інтервалі. Позначимо її $r_p^*(t)$, $t \in [t_0, T]$.

Формально постановка задачі може бути такою: для математичної моделі (5), за умов

$$r_p(t_0) = r_{p_0}, r_p(T) = r_{pT}, t \in [t_0, T] \quad (6)$$

та критерія якості

$$J(r_p(t), t) = \int_{t_0}^T (r_p(t) - r_p^*(t))^2 dt \quad (7)$$

визначити функцію $r_p(t)$, яка на заданому інтервалі часу надає оптимального значення критерію якості (7) та задовольняє наведені умови.

Для розв’язання задачі (5), (6), (7) як задачі оптимального керування із двома закріпленими кінцями траєкторії та фіксованим часом, застосуємо процедуру принципу максимуму. Побудуємо функцію Гамільтона

$$H(\psi(t), t, u(t)) = -(r_p(t) - r^*(t))^2 + \psi(t) *$$

$$f(r_p, x_i, \dot{x}_i, r_i, \dot{r}_i),$$

$$\frac{\partial (-(r_p(t) - r^*(t))^2 + \psi(t) * f(r_p, x_i, \dot{x}_i, r_i, \dot{r}_i))}{\partial r_i} = 0,$$

$$i = \overline{1, n}.$$

Нехай розв’язком останнього рівняння є функція керувань інвестиційним портфелем $x^*(t)$. Побудуємо спряжену систему у вигляді

$$\dot{\psi}(t) = -\frac{\partial H(r_p(t), \psi(t), t)}{\partial r_p}.$$

Крайова задача принципу максимуму матиме вигляд

$$\begin{cases} \dot{\psi}(t) = -2(r_p(t) - r^*(t)) + \psi(t) * f'_{r_p}((r_p, x_i, \dot{x}_i, r_i, \dot{r}_i)) \\ \dot{r}_p(t) = f(r_p, x_i, \dot{x}_i, r_i, \dot{r}_i) \end{cases}$$

За умов $r_p(t_0) = r_{p_0}$, $r_p(T) = r_{pT}$.

Скористаємось твердженнями теореми про оптимальність керування для задачі з двома закріпленими кінцями траєкторії та фіксованим часом.

Розв’язавши побудовану систему звичайних диференціальних рівнянь, визначимо функції $r_p(t)$, $\psi(t)$, які, будучи підставленими у розв’язок рівняння (2), дадуть можливість визначити структуру оптимального інвестиційного портфеля на вибраному інтервалі часу.

Вище наведено дві математичні постановки та сформульовано алгоритми розв’язання задач з побудови оптимальної за обраними критеріями якості траєкторії очікуваної прибутковості портфеля акцій.

Таким чином, у площині $r_p \times t$ можемо побудувати траєкторію динаміки очікуваної прибутковості портфеля акцій, яка забезпечує у момент часу T очікувану прибутковість $r_p(T)$ і у момент часу t_0 має оптимальну структуру.



На графіку зображено прогнозовану динаміку ринкової вартості оптимального портфеля акцій, який може бути побудований на основі розв’язання задач 1 або 2. Важливою особливістю наведених вище задач є те, що така динаміка є оптимальною з точки зору тільки критерія очікуваної прибутковості портфеля. Загальна задача Г. Марковиця оптимізації

портфеля ризикованих активів передбачає врахування іншого критерія – ризикованості.

Наступний етап розв'язання задачі полягає у розробці процедури визначення моментів диверсифікації портфеля.

Варто відмітити, що, враховуючи технологію здійснення операцій на фондовому ринку, змінювати структуру портфеля можна тільки під час торгових сесій. Тому часто за моменти диверсифікації розглядають відомі моменти часу $t_0, t_1, \dots, t_k$. Наведемо формальний алгоритм вибору моментів диверсифікації портфеля акцій, що ґрунтується на розв'язанні задачі оптимального керування динамікою такого портфеля та аналізі його траєкторії.

Алгоритм методу вибору моментів диверсифікації портфеля інвестицій.

Ідея алгоритму полягає у побудові послідовності моментів часу таких, що у кожен із них існує і може бути визначене керування портфелем таке, що дозволить перейти у наступну точку розрахованої траєкторії.

Покладемо $i = 0$, $r_p(T) = r_{pT}$, $t_i = T$.

Крок 1. Наступний момент диверсифікації визначаємо за правилом $t_{i+1} = T - i\Delta t$. Тут Δt – крок за часом. Розв'язуємо задачу оптимального керування з одним закріпленим кінцем траєкторії $r_p(t_i) = r_{pi}$ та фіксованим часом для математичної моделі рівняння динаміки ринкової вартості портфеля акцій (5) і критерія якості

$$J(x(t)) = \int_{t_{i+1}}^{t_i} f^o(x(t), r_p(t), r(t), t) dt. \quad (8)$$

Оптимальний процес на цьому кроці позначимо $(r_p^*(t_{i+1}); t_{i+1})$.

Крок 2. Умова на правому кінці кожного інтервалу розбиття траєкторії може бути записана у вигляді

$$|r_p^*(t_i) - r_p(t_i)| \leq \varepsilon, \quad (9)$$

Список використаних джерел

1. Шарп У. Инвестиции / Уильям Ф. Шарп, Гордон Дж. Александер, Джеффри В. Бэйли. – Москва: Инфра-М, 1999. – с.1027.
2. Гаращенко Ф.Г. Качественный анализ математических моделей инвестиционного менеджмента / Гаращенко Ф.Г., Кулян В.Р., Рутицкая В.В. // Кибернетика и вычислительная техника. – 2005. – №148. – с. 3-10.

де ε – деяке наперед задане число.

Якщо (9) виконується, то фіксуємо значення

t_{i+1} і $r_p^*(t_{i+1})$ як одного із моментів диверсифікації портфеля і очікуваної прибутковості портфеля, що йому відповідає.

Крок 3. Далі $i := i + 1$. Якщо виконується умова $t_{i+1} > t_0$, то переходимо до кроку 1, інакше вихід.

Наведений вище алгоритм дає можливість побудувати послідовність моментів часу, у які доцільно диверсифікувати портфель акцій.

Процедура оптимізації ризику для оптимального за очікуваною прибутковістю портфеля полягає у виборі на кожному кроці допустимих портфелів, які лежать на прямій, що з'єднує точку, яка відповідає оптимальному портфелю, і точку, яка належить множині ефективних портфелів [1]. Ця пряма паралельна осі ризикованості портфелів σ_p . Особливістю такого вибору оптимального портфеля є те, що на цій прямій, згідно означення, кожному із портфелів відповідає одна і та ж очікувана прибутковість, але ризикованість зменшується у напрямку до осі r_p . Ця властивість допустимої множини інвестиційних портфелів дозволяє з одного боку врахувати обмеження

$$x_i(t) \in X(t), \quad i = \overline{1, n},$$

а з іншого – визначити портфель оптимальної прибутковості з меншим ризиком.

Висновки

Наведено нові математичні постановки задач оптимізації структури портфеля акцій та розроблено методи їх розв'язання. Математичні задачі, сформульовані на основі моделей динаміки ринкової вартості однієї акції (4) та портфеля акцій (5), дають можливість розв'язувати задачу оптимальної диверсифікації портфеля акцій.

References

1. SHARPE, W., ALEXANDER, G. and BAILEY, J. (1995) *Investments*. New Jersey: Prentice Hall.
2. GARASHCHENKO, F., KULYAN, V. and RUTITSKAYA, V. (2005) Quality analysis of mathematical models of investment management: *Cybernetics and Computing Engineering*. 148. p. 3-10.

Надійшла до редколегії 10.08.2016 р.

УДК 517.17

Куценко І.А., к.ф.-м.н.

Характерні якісні зміни неперервної функціональної поверхні побудованої з включенням та виключенням діючих і недіючих змінних

Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 03127, м. Київ, пр-т
Глушкова, 4д
e-mail: kutsenko_i_a@ukr.net

Igor A. Kutsenko, Ph.D.,

Characteristic qualitative changes of a continuous functional surface, which is constructed with including or excluding both active and inactive variables

Taras Shevchenko National University of Kyiv,
03127, Kyiv, Glushkova ave., 4d
e-mail: kutsenko_i_a@ukr.net

Перебрано всі можливі варіанти вигляду поверхні функції різної вимірності, побудованої з включенням та виключенням як діючих, так і недіючих змінних та проаналізовано їх якісні характеристики. Отримано гарантовано надійні і при цьому прості очевидні висновки-твердження, на основі яких можна розробляти конструктивні критерії знаходження суттєво активно діючих факторів для обробки результатів вимірів реальних даних.

Ключові слова: функціональні поверхні, діючі та недіючі змінні.

In the computer processing of real data to determine significant factors to build the model, it is important to create such constructive criteria that allow you to easily split significantly influencing factors from insignificant factors. To develop such constructive criteria in general, on real data, where, as a rule, is the trend and noise, it is first necessary to understand the behavior of a surface of deterministic trend function. In our case, it is first necessary to understand the features of qualitative changes several measuring surfaces built based on point measurements of deterministic continuous functions of smaller and larger dimensions. This enabled clearly imagine what all can happen with some measurable functional surface, all options of behavior when you turn off and turn on both of active and inactive variables. To do this, a comprehensive study enumerated all the possible behaviors of the surface functional of different measurements when adding and discarding as active and inactive variables: add variable-inactive and re-add again the same active variable; discarding the active and inactive variables; simultaneous addition and ejection of active and inactive variables. Comparative qualitative analysis of the characteristics of the obtained surfaces allowed us to obtain robust and simple obvious conclusions-approval, which can be used to develop design criteria for the finding of significantly active factors for processing the results of measurements of real data, which are usually noisy.

Key Words: functional surface, active and inactive variables.

Статтю представив д. ф.-м. н., проф. Буй Д. Б.

Вступ

Обробка даних вимірів деякого процесу, як правило, здійснюється з метою отримання максимально точного прогнозу, який можна отримати за допомогою комп'ютерної моделі процесу. Для створення моделі першочерговим є питання вибору суттєво діючих факторів, тобто саме таких незалежних змінних, від яких можна з максимальною точністю відтворити функціональну залежність залежної змінної. Щоб автоматизувати процес вибору суттєво діючих факторів, необхідно отримати досить прості критерії, які дозволять явно розділити суттєво діючі фактори від несуттєво діючих.

Але перед тим, як почати конкретно чисельно шукати приховані закони та закономірності в загальному випадку, на реальних зачумлених даних, пробуємо визначити детермінований тренд та відсіяти випадковий шум, спочатку слід розібратись в особливостях поведінки самого тренду, а саме: в якісних змінах декілька вимірних поверхонь, побудованих на основі точкових вимірів детермінованих неперервних функцій меншої та більшої розмірності. Включення та виключення як діючих, так і недіючих змінних дозволяє явно уявити, що ж взагалі може відбуватись з декілька вимірною функціональною поверхнею, всі

можливі варіанти її поведінки.

Порівняльний аналіз всіх можливих варіантів такої поведінки декілька вимірної функціональної поверхні дозволяє отримати гарантовано надійні і при цьому прості очевидні висновки-твердження, на основі яких можна розробляти конструктивні критерії відсіву мало діючих та знаходження суттєво активно діючих факторів при обробці результатів реальних вимірів.

Проведенню такого явного простого комплексного аналізу та отримання простих надійних висновків і присвячена ця стаття.

1. Включення змінних в побудову функціональної поверхні

1.1 Включення недіючих змінних

Твердження 1. При включенні недіючих змінних, маємо випадок, коли поверхня функції просто повторюється в напрямку координати недіючої змінної.

Продемонструємо це на графіках. Для цього розглянемо деяку одновимірну функцію $y = f(x_1)$:

$$y = \sin(x_1) + 2. \quad (1)$$

Для побудови графіків використаємо безкоштовну версію 1.2 програми 3D Grapher [1], яка легко дозволяє будувати графіки відомих аналітичних функцій. Написи на графіках здійснено в програмі Microsoft Office PowerPoint 2003/

Графік побудуємо на проміжку $x_1 \in [0, 20]$, а межі змін y задамо $[0, 4]$.

В результаті для функції від 1-ї змінної y (1) отримаємо 2D графік на рис. 1.

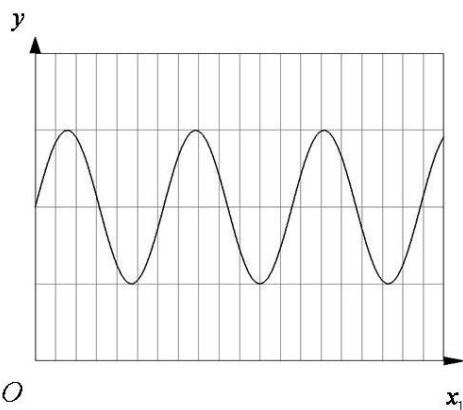


Рис.1 Двохвимірний графік функції однієї змінної $y = f(x_1)$ (1) в площинній системі координат Ox_1y .

Далі перевіримо – що ж буде з графіком цієї

функції при включенні ще однієї координати x_2 , яка не входить в функціональну залежність $f(x_1)$. Для цього програмою 3D Grapher побудуємо її графік в 3D просторі як функції від 2-х змінних з одними ж і тими ж значеннями y (1) для y_1 (2)

$$y_1 = f(x_1, x_2) \quad (2)$$

при простому включенні другою змінної x_2 .

Отримаємо графік функції, представлений на рис. 2, на якому виконуються дві умови, що конкретизують Твердження 1.

1) При фіксованому значенні діючої змінної $x_1 = c$ значення функції y є деякою незмінною константою $f(c)$ за будь-яких значень недіючої змінної x_2 ; 2) при фіксованому значенні недіючої змінної x_2 отримаємо графік однієї і тієї ж функції $y = f(x_1)$.

Для очевидності графік перетнуто площиною $y = c$, де c - константа.

Очевидно, що ці властивості поверхонь функцій мають місце не тільки в просторі одно та двовимірних функцій, але також для функцій будь-якої розмірності в просторі ще більшої розмірності.

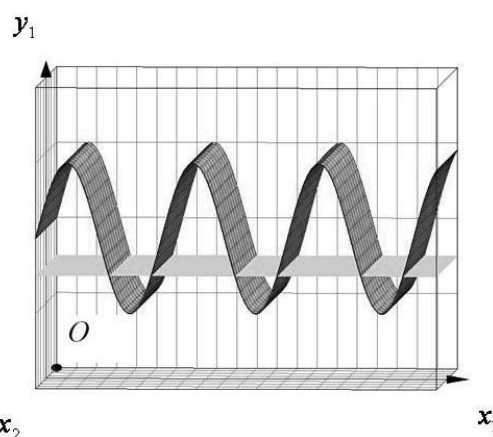


Рис. 2 Трьохвимірний графік функції двох змінних y_1 (2) в просторовій системі координат Ox_1x_2y з перетином площиною.

1.2. Повторне включення, ще раз, однієї і тієї ж діючої змінної

Твердження 2. При повторному включенні однієї і тієї ж діючої змінної розмірність функціональної поверхні не зростає – вона залишається такою ж самою.

Продемонструємо це на прикладі одновимірної функції (1). Для цього задамо 200

значень $x \in [0, 20]$ рівномірно, з кроком 0.1 , порахуємо в них значення функції y (1).

На основі цих вимірів сформуємо дані для побудови графіка трьохвимірної функції (2) з одними ж і тими ж значеннями y для y_1 та x як для x_1 , так і для x_2 та побудуємо графік функції y_1 (2).

Графіки функції y_1 представлені на рис. 3 і 4.

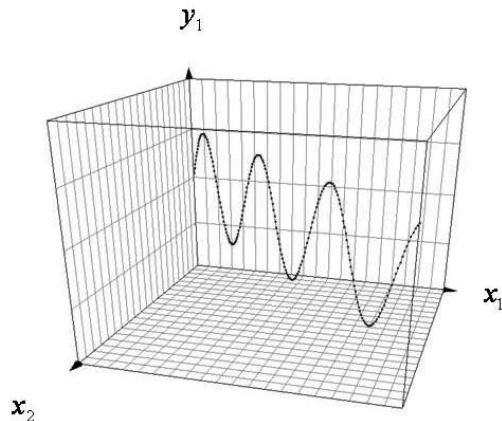


Рис. 3 Вид збоку одновимірної функції y_1 (2).

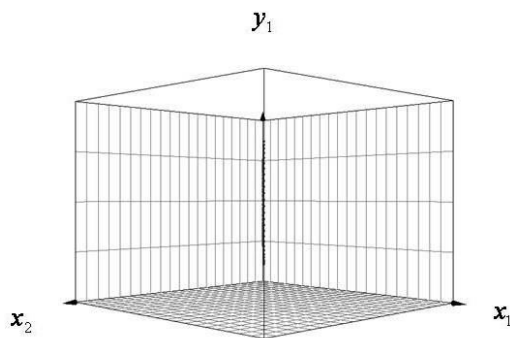


Рис. 4 Вид в профіль одновимірної функції y_1 (2) при симетрії координат x_1 і x_2

На рис. 3 представлено вид збоку, а на рис. 4 – зручна проекція трьохвимірного (3D) зображення при симетрії координат x_1 і x_2 ,

Як видно на рис. 4, 2D функція y (1) при перетворенні її в 3D функцію y_1 (2) за рахунок повтору координати x так і залишилась 2D функцією з графіком на деякій площині Oy_1x_3 , де $x_3 = (x_1 + x_2)/2$.

Тобто, сама площина Oy_1x_3 з графіком функції y (1) на ній виявилась повернутою в 3D просторі на 45° відносно координат x_1 і x_2 .

2. Виключення змінних

2.1 Виключення діючих змінних

Розглянемо питання – а що ж буде, коли є лише дискретні виміри деякої багатовимірної функції $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ розмірності n , при побудові поверхні якої викинуто одну діючу змінну.

Тоді отримаємо одну із трьох можливих ситуацій Твердження 3.

Твердження 3. 1) Якщо за якоюсь однією координатою, чи за декількома, зафіксовано значення, тоді отримаємо зріз функції в підпросторі меншій розмірності.

2) Якщо виміри в кожній з координат вектору $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^*$ здійснено в різних випадкових точках, тоді виникне осциляція на графіку функції.

3) Якщо в координаті, що залишилась були здійснені 2 і більше вимірів (наприклад – при регулярній прямокутній сітці), тоді виникне багатозначність на графіку функції.

Випадок 1) є очевидним. Випадок 3) є наслідком випадку 2) при співпадінні вимірів. Тому продемонструємо найбільш розповсюджений на практиці випадок 2) на графіках функції

$$y = \sin((x_1 + x_2)/3) + \sin((x_1 - x_2)/3) + 2 \quad (3)$$

Для цього задамо 50 значень $x_1, x_2 \in [0, 20]$ датчиком випадкових чисел, порахуємо в них значення функції y (3) та виведемо графіки.

Графіки на рис. 5 – 7 є допоміжними: вони дозволяють краще розібратись в основній інформації, яка подана на рис. 8 та 9.

На рис. 5 представлена загальна картина 3D поверхні разом з випадково розташованими на ній червоними точками. Вид зверху по координатах Ox_1x_2 представлено на двох рисунках: на рис. 6 – поверхні та точок, і на рис. 7 – лише точок.

Результати проектування точок при виключенні однієї із діючих змінних наведені на рис. 8 та 9. На рис. 8 подано вид збоку лише точок по координатах Oyx_2 після виключення x_1 , а на рис. 9 – лише точок по координатах Oyx_1 після виключення x_2 .

Як явно видно на рис. 8, 9, в результаті виключення однієї із діючих змінних отримуємо графік функції, який стає розривним і виникає осциляція, навіть якщо функціональна поверхня була неперервною та досить гладкою.

2.2 Виключення недіючих змінних

При виключенні недіючих змінних повністю залишається розмірність та гладкість

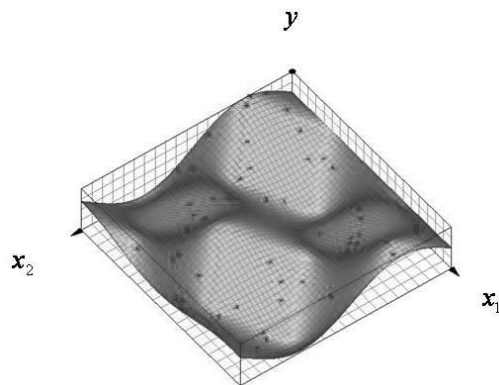


Рис. 5 Загальна картина 3D поверхні.

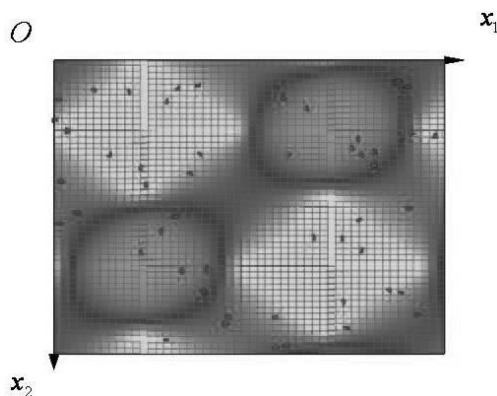


Рис. 6 Вид зверху, по координатах Ox_1x_2 поверхні та точок.

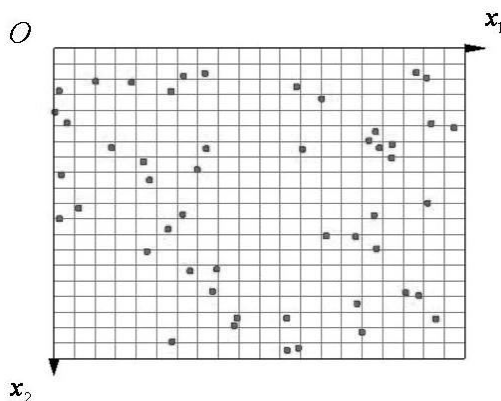


Рис. 7 Вид зверху – по координатах Ox_1x_2 лише точок.

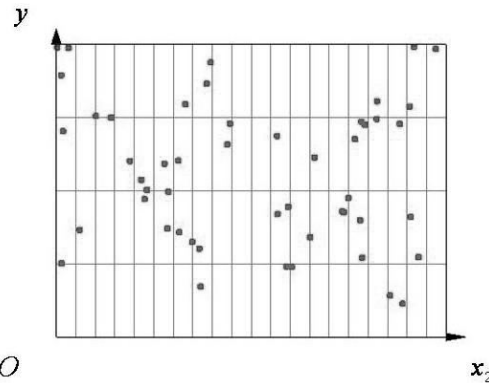


Рис. 8 Вид збоку лише точок по координатах Oyx_2 .

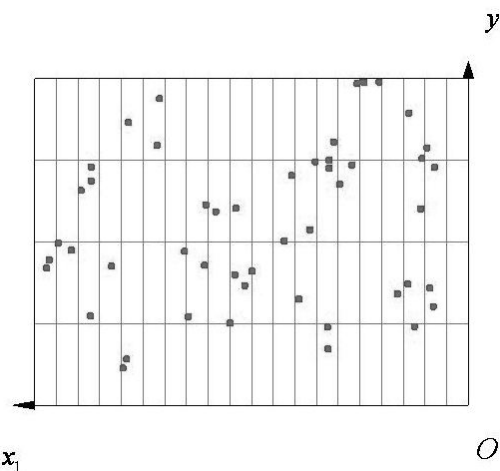


Рис. 9 Вид збоку лише точок по координатах Oyx_1 .

функціональної поверхні і осциляція не виникає. Цей висновок слідує із результатів пункту 1.1 *Включення недіючих змінних*.

3. Одночасне включення та виключення як недіючих так і діючих змінних

Мають силу всі висновки, зроблені в пунктах 1. *Включення змінних* та 2. *Виключення змінних*. Варто лише відмітити, що при включенні недіючих змінних в ситуації, коли викинуті діючі, будемо спостерігати, як правило, картину повтору осцилюючої, а не гладкої поверхні.

Список використаних джерел

1. RomanLab Software. *3D Grapher*. [Online] Available from: <http://www.romanlab.com/3dg/index.html> [Accessed: 12th May 2002].

References

1. RomanLab Software. *3D Grapher*. [Online] Available from: <http://www.romanlab.com/3dg/index.html> [Accessed: 12th May 2002].

Надійшла до редколегії 31.10.2016

УДК 519.21

Лівінська Г.В., к.ф.-м.н., асистент

**Багатоканальні стохастичні мережі з
неоднорідними вхідними потоками та
обслуговуванням фазового типу**

Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, пр-т.
Академіка Глушкова 4д,
e-mail: livinskaav@gmail.com

H.V. Livinska, PhD in Math., Assistant Professor.

**On multi-channel stochastic networks with
nonhomogeneous input flows and service
times of phase type**

Taras Shevchenko National University of Kyiv,
03680, Kyiv, Glushkova st., 4d,
e-mail: livinskaav@gmail.com

Стаття присвячена дослідженню багатоканальної стохастичної мережі, на кожен вузол якої надходить автономний пуассонівський потік вимог, інтенсивність якого залежить від часу. Розглянуто два типи обслуговування у вузлах мережі: показникове та ерлангівське (фазового типу). Показано, що модель з обслуговуванням фазового типу може бути зведена до марковської моделі з показниково розподіленим часом обслуговування, але з більшою кількістю вузлів. Для процесу обслуговування таких мереж побудовано відповідні апроксимативні гауссівські процеси за умов функціонування у перевантаженому режимі.

Ключові слова: багатоканальна стохастична мережа, перевантажений режим, неоднорідний Пуассонівський потік, обслуговування фазового типу, гауссівська апроксимація.

This article is devoted to investigation of multi-channel non-stationary stochastic network under heavy traffic condition of operating. On each network node a non-homogeneous Poisson input flow arrives. There are infinite number of servers in each node. Two models with exponentially distributed and Erlang distributed service times are considered. It is shown that the model with Erlang service (means service times of phase type) can be reduced to the model with exponentially distributed service times and with larger number of nodes. Conditions of heavy traffic regime are formulated. Functional limit theorems for service processes in both cases are written. Limit Gaussian processes are constructed for the correspondent service processes under the heavy traffic conditions. Characteristics of the limit processes are written via the network parameters. It is shown that if at least in one network node the service times are not exponentially distributed, then limit process lose his Markov property.

Key Words: Multi-channel stochastic network, heavy traffic regime, non-homogeneous Poisson input flow, service times of phase type, Gaussian approximation

Статтю представив д.т.н., проф. Заславський В.А.

1. Опис моделі і формулювання основного результату

В статті ми будемо розглядати мережу масового обслуговування, що складається з “ r ” вузлів. Будемо вважати, що на кожен вузол мережі ззовні надходить автономний потік вимог. Так, на i -тий вузол мережі надходить неоднорідний пуассонівський потік $v_i(t)$ з ведучою функцією $\Lambda_i(t)$, $i=1,2,\dots,r$. Випадкові процеси $v_i(t)$, $i=1,2,\dots,r$, є незалежними у сукупності. Кожен вузол мережі функціонує як багатоканальна стохастична система. Час обслуговування в i -тому вузлі показниково розподілений з параметром μ_i , $i=1,2,\dots,r$,

$P = \|p_{ij}\|$ – матриця маршрутизації мережі. Таку модель будемо позначати символом $[\overline{M}_i | M | \infty]^r$.

Процесом обслуговування вимог в мережі типу $[\overline{M}_i | M | \infty]^r$ будемо називати r -вимірний процес $Q'(t) = (Q_1(t), \dots, Q_r(t))$, де $Q_i(t)$, $i=1,2,\dots,r$ – кількість вимог в i -тому вузлі в момент часу t . Наша головна мета – вивчити асимптотичну поведінку процесу $Q(t)$, $t \geq 0$, в умовах критичного навантаження в мережі.

Режим критичного навантаження в такій мережі обумовлюється виконанням наступних умов:

Умова 1. Інтенсивності обслуговування у вузлах мережі залежать від “ n ” таким чином, що $\lim_{n \rightarrow \infty} n\mu_i^{(n)} = \mu_i > 0$, $i=1,2,\dots,r$.

Умова 2. Вхідні потоки залежать від “ n ” (номера серії) таким чином, що на будь-якому скінченному часовому проміжку $[0, T]$

$$n^{-1}\Lambda_i^{(n)}(nt) \xRightarrow{U} \Lambda_i^{(0)}(t) \in C[0, T], \quad i=1,2,\dots,r,$$

де $C[0, T]$ – простір неперервних функцій, заданих на $[0, T]$, символ $\xRightarrow{U}$ означає збіжність у рівномірній топології.

Розглянемо два важливих для застосувань випадки, коли Умова 2 виконується. У зв'язку з цим тимчасово припустимо, що пуассонівський

потік $v_i(t)$ регулярний: $\Lambda_i(t) = \int_0^t \lambda_i(u) du$, де

$\lambda_i(u)$ – миттєве значення параметра.

1) Якщо для регулярного потоку

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \lambda_i(t) = \lambda_i > 0,$$

То Умова 2 виконується для $\Lambda_i^{(0)}(t) = \lambda_i t$.

Це випливає з оцінки

$$\left| \frac{1}{t} \int_0^t \lambda_i(u) du - \lambda_i \right| \leq \leq \frac{1}{t} \int_{\varepsilon t}^t |\lambda_i(u) - \lambda_i| du + \frac{1}{t} \int_0^{\varepsilon t} |\lambda_i(u) - \lambda_i| du \leq \leq (1 - \varepsilon) \delta(\varepsilon t) + (\lambda_i^* + \lambda_i) \varepsilon,$$

де $\varepsilon \in (0, 1)$, $\sup_{u \geq 0} \lambda_i(u) = \lambda_i^*$, $\delta(u) \rightarrow 0$ при $u \rightarrow \infty$.

2) Нехай тепер $\lambda_i(t)$ – періодична з періодом T_i функція:

$$\lambda_i(nT_i + t) = \lambda_i(t) \quad \text{для } n=1,2,\dots \text{ і } 0 \leq t < T_i.$$

Тоді Умова 2 виконується для

$$\Lambda_i^{(0)}(t) = \left(\int_0^{T_i} \lambda_i(u) du \right) t \quad ([3]).$$

Разом Умови 1 та 2 означають, що $[\overline{M}_i | M | \infty]^r$ - мережа функціонує у перевантаженому режимі. У контексті цих умов розглянемо послідовність випадкових процесів

$$\xi^{(n)}(t) = n^{-1/2} (Q^{(n)}(nt) - q^{(n)}(nt)), \quad t \geq 0,$$

де $q^{(n)'}(nt) = (q_1^{(n)}(nt), \dots, q_r^{(n)}(nt))$,

$$q_j^{(n)}(nt) = \sum_{i=1}^r \int_0^{nt} d\Lambda_i^{(n)}(u) p_j^{i(n)}(nt - u), \quad j=1,\dots,r.$$

Для того щоб описати границю послідовності випадкових процесів $\xi^{(n)}(t)$, $n \geq 1$, при $n \rightarrow \infty$, ми введемо два незалежні гауссівські процеси $\xi^{(i)'}(t) = (\xi_1^{(i)}(t), \dots, \xi_r^{(i)}(t))$, $i=1,2$.

Процес $\xi^{(1)}(t)$ визначається середніми значеннями $E\xi^{(1)}(t) = 0$ та кореляційними матрицями

$$R^{(1)}(t) = E\xi^{(1)}(t)\xi^{(1)'}(t) - E\xi^{(1)}(t)E\xi^{(1)'}(t) = = \int_0^t P'(t-\tau) \Delta[d\Lambda^{(0)}(\tau)] P(t-\tau),$$

$$R^{(1)}(s, t) = E\xi^{(1)}(s)\xi^{(1)'}(t) - E\xi^{(1)}(s)E\xi^{(1)'}(t) = = R^{(1)}(s)P(t-s), \quad s < t,$$

де $\Lambda^{(0)'}(t) = (\Lambda_1^{(0)}(t), \dots, \Lambda_r^{(0)}(t))$,

$$P(\tau) = \exp\{\Delta(\mu)(P-I)\tau\}.$$

Для процесу $\xi^{(2)}(t): E\xi^{(2)}(t) = 0$,

$$R^{(2)}(t) = \int_0^t [\Delta[(d\Lambda^{(0)}(\tau))'P(t-\tau)] - \\ - P'(t-\tau)\Delta[d\Lambda^{(0)}(\tau)]P(t-\tau)],$$

$$R^{(2)}(s, t) = R^{(2)}(s)P(t-s), \quad s < t.$$

Наступна теорема дає апроксимацію для процесу обслуговування при критичному навантаженні в мережі.

Теорема 1. Нехай для $[\overline{M}_t | M | \infty]^r$ -мережі виконуються Умови 1, 2, і в початковий момент часу $t=0$ мережа порожня:

$Q^{(n)'}(0) = (0, \dots, 0)$. Тоді на будь-якому скінченному проміжку $[0, T]$ послідовність випадкових процесів $\xi^{(n)}(t)$ при $n \rightarrow \infty$ збігається в рівномірній топології до $\xi^{(1)}(t) + \xi^{(2)}(t)$.

Враховуючи поняття збіжності в рівномірній топології та загальні умови для такої збіжності, доведення теореми 1 може бути поділене на два етапи:

1) доведення збіжності скінченновимірних розподілів;

2) доведення збіжності в рівномірній топології, а саме, необхідно показати, що

$$\lim_{h \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{ \sup_{|t_2 - t_1| \leq h} |\xi^{(n)}(t_2) - \xi^{(n)}(t_1)| > \varepsilon \right\} = 0$$

для будь-якого $\varepsilon > 0$.

Доведення цієї теореми наведено в [3].

2. Стохастичні моделі з обслуговуванням фазового типу $[\overline{M}_t | E_m | \infty]^r$

У системах та мережах масового обслуговування типовою є ситуація, коли час обслуговування (трудоемкість) вимоги складається з деякої кількості експоненціальних фаз з однаковими параметрами. Тоді загальний час обслуговування вимоги системою (або вузлом мережі) має розподіл Ерланга.

Обслуговування вимог у $[\overline{M}_t | E_m | \infty]^r$ -мережі ($m' = (m^{(1)}, m^{(2)}, \dots, m^{(r)})$) відрізняється від обслуговування в мережах типу $[\overline{M}_t | M | \infty]^r$, очевидно, тільки тим, що показниковий розподіл часу обслуговування вимог замінюється на розподіл Ерланга. Це означає, що в i -тому вузлі час обслуговування

вимоги має таку щільність розподілу:

$$f_i(t) = \begin{cases} \frac{\mu_i (\mu_i t)^{m^{(i)}-1}}{(m^{(i)}-1)!} e^{-\mu_i t}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \quad (1)$$

для деяких натуральних $m^{(i)}$ та дійсних $\mu_i > 0$.

Ерлангівський розподіл для різних значень параметра $m^{(i)}$ визначає цілий клас розподілів, що включає в себе при $m^{(i)} = 1$ експоненціальний розподіл, а в якості граничного при $m^{(i)} \rightarrow \infty$ вироджений детермінований розподіл.

Окрім того, важливу роль відіграє гіперерлангівський розподіл, який представляє собою суміш ерлангівських розподілів з

ваговими коефіцієнтами α_i , $\alpha_i > 0$, $\sum_{i=1}^s \alpha_i = 1$.

Зауважимо, що гіперерлангівським розподілом можна з будь-яким ступенем точності наблизити (в розумінні слабкої збіжності функцій розподілу) будь-який розподіл.

Розподіл часу обслуговування типу (1) має наступну інтерпретацію. Якщо вимога надходить для обслуговування у i -тий вузол мережі, то процес її обслуговування розбивається на $m^{(i)}$ фаз (етапів) обслуговування, які вимога проходить послідовно одну за одною. На кожному етапі вона затримується на показниково розподілений час з параметром μ_i . При цьому часи проходження фаз незалежні між собою випадкові величини. Ерлангівський розподіл відноситься до розподілів фазового типу. Вимога, що поступила на i -тий вузол мережі, проходить послідовно всі $m^{(i)}$ фаз, починаючи з фази 1. Зрозуміло, що вимога не може займати одночасно дві чи більше фаз обслуговування.

Враховуючи роль ерлангівського розподілу в дослідженні стохастичних систем та мереж, розглянемо мережі типу $[\overline{M}_t | E_m | \infty]^r$.

Для спрощення аналізу $[\overline{M}_t | E_m | \infty]^r$ -мережі введемо для моделювання роботи i -того вузла $m^{(i)}$ «нових» вузлів, які є багатоканальними стохастичними системами марковського типу. Перенумеруємо всі ці вузли таким чином, що роботу i -того вузла будуть моделювати «нові» вузли з номерами

$$\sum_{j=1}^{i-1} m^{(j)} + 1, \dots, \sum_{j=1}^i m^{(j)}.$$

При цьому зовнішні потоки вимог $v_1(t), \dots, v_r(t)$ будуть надходити тільки у вузли з номерами

$$N^{(i)} = \sum_{j=1}^{i-1} m^{(j)} + 1, \quad i = 1, 2, \dots, r, \quad \text{де } m^{(0)} = 0.$$

Позначимо через $\tilde{v}(t)$ $\tilde{r}$ - вимірний вектор, $\tilde{r} = \sum_{j=1}^r m^{(j)}$, $N^{(i)}$ - та компонента якого дорівнює $v_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, r$, а інші - нулю.

Враховуючи зв'язки між «старими» вузлами мережі ($P = \|p_{ij}\|_{i,j=1}^r$) і алгоритм обслуговування за розподілом Ерланга, матриця маршрутизації $\bar{P} = \|\bar{p}_{ij}\|_{i,j=1}^{\tilde{r}}$ між $\tilde{r}$ «новими» вузлами буде мати блочну структуру і складатись з r^2 блоків $P^{(\alpha, \beta)}$, $\bar{P} = \|P^{(\alpha, \beta)}\|_{\alpha, \beta=1}^r$.

Блок $P^{(i,i)}$ для $i = 1, 2, \dots, r$ має розмір $m^{(i)} \times m^{(i)}$ та представляє собою матрицю такого виду:

$$P^{(i,i)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ p_{ii} & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Блок $P^{(i,j)}$ для $i, j = 1, 2, \dots, r$, $i \neq j$, є прямокутною матрицею розміру $m^{(i)} \times m^{(j)}$ такого виду:

$$P^{(i,j)} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ p_{ij} & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Таким чином, роботу $[\bar{M}_t | E_m | \infty]^r$ - мережі моделює мережа простішого виду $[\bar{M}_t | M | \infty]^{\tilde{r}}$, але з більшою кількістю вузлів. За побудовою, якщо $Q(t) = (Q_1(t), \dots, Q_r(t))'$ та $\bar{Q}(t) = (\bar{Q}_1(t), \dots, \bar{Q}_{\tilde{r}}(t))'$, $t \geq 0$ - процеси обслуговування вимог у мережах $[\bar{M}_t | E_m | \infty]^r$ та $[\bar{M}_t | M | \infty]^{\tilde{r}}$ відповідно, то можна записати:

$$Q_i(t) = \bar{1}^{(i)'} \bar{Q}(t), \quad i = 1, 2, \dots, r,$$

де $\bar{1}^{(i)}$ - $\tilde{r}$ - вимірний вектор-стовпчик, у якого компоненти з номерами

$$\sum_{j=1}^{i-1} m^{(j)} + 1, \sum_{j=1}^{i-1} m^{(j)} + 2, \dots, \sum_{j=1}^i m^{(j)}$$

дорівнюють одиниці, а інші - нулю.

Перевантажений режим у $[\bar{M}_t | E_m | \infty]^r$ - мережі буде означати, що її параметри залежать від деякого « n » (номера серії), і виконуються Умова 2 з попереднього розділу та наступна умова.

$$\text{Умова 1.2.} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} n \mu_i^{(n)} = \mu_i > 0, \quad \text{а}$$

параметри $m^{(i)}$, $i = 1, 2, \dots, r$, від « n » не залежать.

Позначимо через $\bar{A}^{(n)}(t)$ $\tilde{r}$ - вимірний вектор, компоненти якого з номерами $N^{(i)}$, $i = 1, 2, \dots, r$, дорівнюють $\Lambda_i^{(n)}(t)$, а інші - нулю. Тоді, враховуючи Умову 2, аналогічно тому, як це було зроблено в Лемі 2 в [3], для процесу $\tilde{v}^{(n)}(nt)$ можна записати:

$$\bar{W}^{(n)}(t) = n^{-1/2} \left(\tilde{v}^{(n)}(nt) - \bar{A}^{(n)}(nt) \right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{U} \bar{W}^{(0)}(t),$$

де $\bar{W}^{(0)}(t)$ - це $\tilde{r}$ - вимірний вектор, елементи якого з номерами $N^{(i)}$, $i = 1, 2, \dots, r$, є незалежними вінерівськими процесами, з нульовим вектором математичних сподівань та $Var \bar{W}_{N_i}^{(0)}(t) = \Lambda_i^{(0)}(t)$, а інші дорівнюють нулю.

Розглянемо тепер для $[\bar{M}_t | E_m | \infty]^r$ - мережі нормований процес обслуговування

$$\hat{\xi}^{(n)}(t) = n^{-1/2} (Q^{(n)}(nt) - \hat{q}^{(n)}(nt)), \quad t \geq 0,$$

де

$$\hat{q}^{(n)'}(t) = (\hat{q}_1^{(n)}(t), \dots, \hat{q}_r^{(n)}(t)),$$

$$\hat{q}_j^{(n)}(nt) = \bar{1}^{(j)'} \tilde{q}^{(n)}(nt), \quad j = 1, \dots, r,$$

$$\tilde{q}^{(n)'}(nt) = (\tilde{q}_1^{(n)}(nt), \tilde{q}_2^{(n)}(nt), \dots, \tilde{q}_r^{(n)}(nt)),$$

$$\hat{q}_j^{(n)}(nt) = \sum_{i=1}^{\tilde{r}} \int_0^{nt} d\bar{A}_i^{(n)}(u) \tilde{p}_{ij}^{(n)}(nt - u), \quad j = 1, \dots, \tilde{r},$$

$$\tilde{P}^{(n)}(\tau) = \|\tilde{p}_{ij}^{(n)}(\tau)\|_{\tilde{r}} = \exp \{ \Delta(\tilde{\mu}^{(n)}) (\tilde{P} - \tilde{I}) \tau \},$$

$$\tilde{\mu}^{(n)} = (\underbrace{\mu_1^{(n)}, \dots, \mu_1^{(n)}}_{m^{(1)}}, \underbrace{\mu_2^{(n)}, \dots, \mu_2^{(n)}}_{m^{(2)}}, \dots, \underbrace{\mu_r^{(n)}, \dots, \mu_r^{(n)}}_{m^{(r)}}),$$

$\tilde{P}$ - блочна матриця, що складається r^2 блоків

виду (2), (3), $\tilde{I}$ – одинична матриця розміром $\tilde{r} \times \tilde{r}$.

Для того, щоб описати границю послідовності випадкових процесів $\hat{\xi}^{(n)}(t)$, $n \geq 1$, при $n \rightarrow \infty$, ми введемо аналогічно тому, як це було зроблено в передньому розділі, два незалежних гауссівських процеси $\tilde{\xi}^{(i)'}(t) = (\tilde{\xi}_1^{(i)}(t), \dots, \tilde{\xi}_r^{(i)}(t))$, $i = 1, 2$.

Процес $\tilde{\xi}^{(1)}(t)$ визначається середніми значеннями $E\tilde{\xi}^{(1)}(t) = 0$

та кореляційними матрицями

$$\begin{aligned}\tilde{R}^{(1)}(t) &= E\tilde{\xi}^{(1)}(t)\tilde{\xi}^{(1)'}(t) - E\tilde{\xi}^{(1)}(t)E\tilde{\xi}^{(1)'}(t) = \\ &= \int_0^t \tilde{P}'(t-\tau)\Delta[d\tilde{\Lambda}^{(0)}(\tau)]\tilde{P}(t-\tau),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{R}^{(1)}(s, t) &= E\tilde{\xi}^{(1)}(s)\tilde{\xi}^{(1)'}(t) - E\tilde{\xi}^{(1)}(s)E\tilde{\xi}^{(1)'}(t) = \\ &= \tilde{R}^{(1)}(s)\tilde{P}(t-s), \quad s < t,\end{aligned}$$

де

$$\tilde{\Lambda}^{(0)'}(t) = (\underbrace{\Lambda_1^{(0)}(t), 0, \dots, 0}_{m^{(1)}}, \underbrace{\Lambda_2^{(0)}(t), 0, \dots, 0}_{m^{(2)}}, \dots, \underbrace{\Lambda_r^{(0)}(t), 0, \dots, 0}_{m^{(r)}}),$$

$$\tilde{P}(\tau) = \exp\{\Delta(\tilde{\mu})(\tilde{P} - \tilde{I})\tau\},$$

$$\tilde{\mu} = (\underbrace{\mu_1, \dots, \mu_1}_{m^{(1)}}, \underbrace{\mu_2, \dots, \mu_2}_{m^{(2)}}, \dots, \underbrace{\mu_r, \dots, \mu_r}_{m^{(r)}}).$$

Для процесу $\tilde{\xi}^{(2)}(t)$: $E\tilde{\xi}^{(2)}(t) = 0$,

$$\begin{aligned}\tilde{R}^{(2)}(t) &= \int_0^t [\Delta[d\tilde{\Lambda}^{(0)}(\tau)]\tilde{P}(t-\tau)] - \\ &- \tilde{P}'(t-\tau)\Delta[d\tilde{\Lambda}^{(0)}(\tau)]\tilde{P}(t-\tau),\end{aligned}$$

$$\tilde{R}^{(2)}(s, t) = \tilde{R}^{(2)}(s)\tilde{P}(t-s), \quad s < t.$$

Наслідком теореми 1 є наступний результат.

Список використаних джерел

1. Анисимов В.В. Стохастические сети обслуживания. Марковские модели / Анисимов В.В., Лебедев Е.А. // Лыбидь. – 1992. – 105 С.
2. Лебедев Є.О. Одна гранична теорема для стохастичних мереж та її застосування / Є.О. Лебедев // Теорія ймовірностей та математична статистика. – 2003. – Вип. 68. – С. 74-85.
3. Ливинская А.В. Предельная теорема для перегруженных многоканальных сетей / А.В. Ливинская, Е.А. Лебедев // Кибернетика и системный анализ. – 2012. – №6. – С. 106-113.

Теорема 2. Нехай для стохастичної мережі типу $[\overline{M}_t | E_m | \infty]^r$ виконуються Умови 1, 2, і в початковий момент часу мережа порожня: $Q^{(n)}(0) = (0, \dots, 0)'$. Тоді на будь-якому скінченному проміжку $[0, T]$ послідовність випадкових процесів $\hat{\xi}^{(n)}(t)$ при $n \rightarrow \infty$ збігається в рівномірній топології до гауссівського процесу $\hat{\xi}^{(1)}(t) + \hat{\xi}^{(2)}(t)$, де

$$\hat{\xi}^{(1)}(t) = (\hat{\xi}_1^{(1)}(t), \dots, \hat{\xi}_r^{(1)}(t)),$$

$$\hat{\xi}_j^{(i)}(t) = \overline{I}^{(j)'} \tilde{\xi}^{(i)}(t), \quad j = 1, 2, \dots, r, \quad i = 1, 2.$$

Зауважимо, що часто розглядаються також системи масового обслуговування з багатоетапним обслуговуванням, в яких вимога може почати обслуговування не з першого етапу. В цьому випадку треба вказати кількість вже відпрацьованих (або тих, що залишилися) етапів та ймовірності почати обслуговування в i -тому вузлі з k -того етапу. В цьому випадку час обслуговування можна задати за допомогою гіперерлангівського розподілу.

З теореми 2 можна зробити важливий висновок. У випадку розподілу часу обслуговування ерлангівського типу граничний гауссівський процес є сумою відповідних компонент марковського процесу, причому розмірність цього марковського процесу співпадає з сумарним числом фаз. Це також пояснює те, що коли час обслуговування хоча б в одному вузлі мережі не є показниковим, то граничний процес втрачає марковську властивість.

References

1. ANISIMOV V.V. and LEBEDEV E.A. (1992) Stochastic service networks. Markov models. *Lybid*.
2. LEBEDEV E.O. (2003) A limit theorem for stochastic networks and its applications. *Theor. Probability and Math. Statist.*, No.68, 81-92.
3. LIVINSKAYA A.V. and LEBEDEV E.A. (2012) A Limit Theorem for Multi-channel Networks in Heavy Traffic. *Cybernetics and Systems Analysis*, No.6, 106-113.

Надійшла до редакції 17.10.2016

УДК 519.8

Моренець В.І., аспірант

**Рівновага за Бержем в іграх із нечіткою
множиною гравців**

Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 03127, м. Київ, пр-т.
Глушкова 4д,
e-mail: v.i.morenets@gmail.com

Morenets V.I., Grad. Stud.

**Berge equilibrium in a non co-operative games
with a fuzzy set of players**

Taras Shevchenko National University of Kyiv,
03127, Kyiv, Glushkova st., 4d,
e-mail: v.i.morenets@gmail.com

Для некооперативних ігор з нечіткою множиною гравців узагальнюється поняття рівноваги за Бержем. Показано, що множина рівноваг за Бержем цієї гри буде нечіткою множиною типу 2 (нечітка множина, функція належності якої приймає нечіткі значення), побудована її функція належності. Запропонована двохкритеріальна задача побудови множини ефективних нечітких рівноваг за Бержем. Розглянутий підхід до отримання ефективних нечітких рівноваг за Бержем з максимальною достовірністю належності до множини рівноваг і достовірністю неналежності не більше за задане число.

Ключові слова: некооперативна гра, функція належності, нечітка множина типу 2, рівновага за Бержем.

Based on the notion of equilibrium for a one coalition with respect to a another coalition introduced by Berge, V. Zhukovskii introduced the Berge equilibrium. This equilibrium can be used as an alternative of Nash equilibrium. The present paper investigates Berge equilibrium in a non co-operative game with a fuzzy set of players. It is shown that the set of Berge equilibriums is a type-2 fuzzy set (a fuzzy set whose membership function takes fuzzy values) a special type. Furthermore, the corresponding membership function is given. It is also proved that equilibriums are characterized by reliability of their membership and non membership simultaneously. The notion of set of effective fuzzy equilibriums of Berge is proposed in the form of type 2 fuzzy set also. Support of this set is defined as a set of Slater's optimal alternatives for a two-criteria optimization problem. The reliability of the equilibrium membership is maximized in addition to the reliability of its non membership is minimized in this problem. Also there is proposed the procedure of constructing the effective fuzzy equilibriums of Berge with maximal reliability of their membership and reliability of non membership, not exceeding a given threshold in this paper.

Keywords: non co-operative game, membership function, type 2 fuzzy set, Berge equilibrium.

Статтю представив д. т. н., проф. Гаращенко Ф.Г.

Вступ. На противагу «егоїстичній» рівновазі за Нешем, привабливою концепцією оптимальності в умовах повної інформованості гравців є «альтруїстична» оптимальність за Бержем [1]. Концепція рівноважності за Бержем базується на ідеї некооперативної поведінки для випадків, коли агентами гри можуть бути не окремі гравці, а деякі їх угруповання (коаліції), згідно до якої, одна коаліція гравців може максимізувати функцію виграшу гравців іншої коаліції. Зокрема [1, 2], доповнююча коаліція кожного гравця максимізує його функцію виграшу. Розглянемо гру G у нормальній формі $(X_i, u_i; i \in N)$, де $N = \{1, 2, \dots, n\}$ - множина з n

гравців; X_i - множина стратегій гравця $i \in N$; $u_i(x)$ - функція його виграшу, яка визначена на множині ситуацій гри $X = \prod_{i \in N} X_i$, приймає дійсні значення і максимізується.

Ситуація $x^* = (x_i^*)_{i \in N}$ називається рівновагою за Бержем [1, 2] гри G , якщо $u_i(x^*) \geq u_i(x_i^*, x_{N \setminus i})$, $\forall x_{N \setminus i} \in X_{N \setminus i}$, $i \in N$. Тобто у рівновазі за Бержем доповнююча коаліція $N \setminus \{i\}$ кожного гравця $i \in N$ максимізує його виграш («один за всіх, і всі за одного»).

Це означення іноді зручно записувати у

вигляді системи взаємозв'язаних задач оптимізації $u_i(x_i^*, x_{N \setminus i}^*) = \max_{x_{N \setminus i} \in X_{N \setminus i}} u_i(x_i^*, x_{N \setminus i})$, $i \in N$.

Цілком зрозуміло, що множину рівноваг за Бержем, яку ми позначимо через $BE(G)$, можна представити у вигляді

$$BE(G) = \bigcap_{i \in N} AR_i, \quad (1)$$

де $AR_i = \{(\hat{x}_i, \hat{x}_{N \setminus i}) \mid u_i(\hat{x}_i, \hat{x}_{N \setminus i}) = \max_{x_{N \setminus i} \in X_{N \setminus i}} u_i(\hat{x}_i, x_{N \setminus i}), \forall \hat{x}_i \in X_i\}$ – множина найкращих відповідей доповнюючої коаліції $N \setminus i$ гравця i на його задану стратегію.

Практичне застосування рівноваги Бержа для розв'язання та дослідження конфліктів в економічних, соціальних, політичних, екологічних та багатьох інших системах з одного боку показало їх високу адекватність реальним умовам багатьох конфліктів [2], з іншого – дозволило виділити ряд таких класів ігор, для яких її можна успішно узагальнити [1].

Нечітка множина рівноваг за Бержем. Припустимо, що важко чітко сказати, які гравці з універсальної множини гравців N насправді повинні взяти участь в грі, а можна лише задати функцію належності $\eta(i)$, $i \in N$, деякої нечіткої підмножини “активних гравців” $\tilde{N} = \bigcup_{i \in N} (i, \eta(i))$. В

цьому випадку будемо говорити, що гра G у нормальній формі $(X_i, u_i; i \in N)$ породжує гру FG з нечіткою підмножиною гравців $\tilde{N}$ в нормальній формі $(X_i, u_i; (i, \eta(i)) \in \tilde{N})$. Тоді, якщо (1) природно узагальнити на випадок нечіткої множини гравців, то множина «нечітких» рівноваг за Бержем повинна задаватися як

$$BE(FG) = \bigcap_{(i, \eta(i)) \in \tilde{N}} AR_i, \quad (2)$$

де згідно до [3 – 5] $\bigcap_{(i, \eta(i)) \in \tilde{N}} AR_i$ – перетин нечіткої множини $\tilde{N}$ чітких множин AR_i , $i \in N$, який є нечіткою множиною типу 2.

Перетин нечіткої множини чітких множин. Нехай на множині ситуацій X гри задані деякі чіткі множини F_i , $i \in N$. Для $\forall i \in N$ визначимо функцію належності (характеристичну функцію) чіткої множини F_i , яку позначимо

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} 1, & x \in F_i, \\ 0, & x \notin F_i. \end{cases}$$

Спочатку розглянемо множину $F = \bigcap_{i \in N} F_i$, яка є перетином чіткої множини N чітких множин F_i , $i \in N$. Відповідно до класичної теорії вона є чіткою множиною, яка на X задається функцією належності $\varphi(x) = \min_{i \in N} \varphi_i(x)$, $x \in X$. Неважко помітити, що значення функції належності $\varphi(x)$ при кожному фіксованому значенні $x \in X$ фактично визначається як значення цільової функції тривіальної задачі “чіткого математичного програмування” $\varphi = \min_{i \in N} \varphi_i$ (в цьому записі для наочності не вказано фіксоване значення $x \in X$).

Розглянемо тепер перетин $\tilde{F} = \bigcap_{(i, \eta(i)) \in \tilde{N}} F_i$ нечіткої множини $\tilde{N}$ чітких множин F_i , $i \in N$. Природне узагальнення класичної операції перетину чіткої множини N чітких множин призводить до того, що множина $\tilde{F}$ задаватиметься функцією приналежності

$$y(x) = \min_{(i, \eta(i)) \in \tilde{N}} \varphi_i(x), \quad x \in X. \quad (3)$$

Цілком зрозуміло, що значення функції приналежності $y(x)$ для кожної фіксованої альтернативи $x \in X$ визначатиметься як значення цільової функції задачі нечіткого математичного програмування:

$$y = \min_{(i, \eta(i)) \in \tilde{N}} \varphi_i \quad (4)$$

(в цьому записі, як і у попередньому випадку, також не вказано фіксоване значення $x \in X$).

Задачі нечіткого математичного програмування достатньо добре вивчені. Згідно [6], розв'язком задачі (4) називається нечітка множина $\tilde{N}^*$, носієм якої буде множина оптимальних за Парето альтернатив (позначимо її N^{PO}) двохкритеріальної задачі оптимізації:

$$\varphi_i \rightarrow \min, \quad \mu(i) \rightarrow \max, \quad i \in N. \quad (5)$$

Функцією належності $\tilde{\eta}$ нечіткої множини $\tilde{N}^*$ буде звуження функції належності $\eta(i)$, $i \in N$, з універсальної множини N на множину $N^{PO} \subseteq N$. Іншими словами, ця функція належності матиме вигляд

$$\tilde{\eta}(i) = \begin{cases} \eta(i), & i \in N^{PO}, \\ 0, & i \notin N^{PO}. \end{cases}$$

Множині розв'язків задачі (4), якою є нечітка множина $\tilde{N}^*$ з функцією належності $\tilde{\eta}(i)$, згідно [6] відповідає нечітка множина Φ на $\{0,1\}$ оптимальних значень цільової функції цієї задачі з функцією належності $\tilde{\varphi}: \{0,1\} \rightarrow [0,1]$, $\tilde{\varphi}(y) = \max_{\varphi_i=y} \tilde{\eta}(i)$, $y \in \{0,1\}$. Слід зазначити, що універсальною множиною нечіткої множини Φ оптимальних значень цільової функції задачі (4) буде множина $\{0,1\}$, що складається з двох елементів $y=0$ і $y=1$. Це пояснюється тим, що змінна y приймає значення, які можуть бути дорівнювати тільки $\varphi_i(x)$, $i \in N$, які, у свою чергу, при будь-якій фіксованій альтернативі $x \in X$ можуть дорівнювати або 0, або 1.

Таким чином, для кожної фіксованої ситуації $x \in X$ значення $y(x)$ функції належності (3) нечіткої множини $\tilde{F} = \bigcap_{(i,\eta(i)) \in \tilde{N}} F_i$ утворюють також нечітку підмножину Φ універсальної множини $Y = \{0,1\}$. Звідси витікає, що нечітка множина $\tilde{F}$ є, так званою [3 – 5], нечіткою множиною типу 2.

Тепер можна формалізувати поняття перетину $\tilde{F} = \bigcap_{(i,\eta(i)) \in \tilde{N}} F_i$ нечіткої множини $\tilde{N}$ чітких множин F_i , $i \in N$.

Для довільної ситуації $x \in X$ розглянемо відношення домінування, яке породжується цільовими функціями задачі (5) на множині N .

Говоритимемо, що $i \in N$ домінує $j \in N$ для ситуації $x \in X$ і позначати це $i \overset{x}{\succ} j$, якщо справедливі такі нерівності: $\varphi_i(x) \leq \varphi_j(x)$, $\eta(i) \geq \eta(j)$ і хоча б одна з них є строгою.

Це поняття дозволяє визначити множину оптимальних за Парето розв'язків двох-критеріальної задачі (5), яка буде носієм нечіткої множини розв'язків задачі (4). Для $x \in X$ позначимо носій

$$N^{PO}(x) = \{i \in N \mid j \not\overset{x}{\succ} i, \forall j \in N\}. \quad (6)$$

Для довільних $x \in X$, $i \in N$ визначимо функцію належності нечіткої множини розв'язків задачі (5):

$$\tilde{\eta}(x,i) = \begin{cases} \eta(i), & i \in N^{PO}(x), \\ 0, & i \notin N^{PO}(x). \end{cases} \quad (7)$$

Перетином нечіткої множини $\tilde{N}$ чітких множин F_i , $i \in N$, називатимемо $\tilde{F} = \bigcap_{(i,\eta) \in \tilde{N}} F_i$ - нечітку множину типу 2, яке задається трійками $(x, \tilde{\varphi}(x, y))$, де $\tilde{\varphi}: X \times Y \rightarrow [0,1]$ - функція належності нечіткого відображення Φ , що виконує роль нечіткої функції належності $\tilde{F}$ і визначене таким чином: $\tilde{\varphi}(x, y) =$

$$= \begin{cases} \max_{i \in N} \{\tilde{\eta}(x, i) \mid \varphi_i(x) = y\}, & \exists i \in N \varphi_i(x) = y; \\ 0, & \forall i \in N \varphi_i(x) \neq y; \end{cases} \quad (8)$$

- x - елемент множини ситуацій X ;

- y - елемент універсальної множини $Y = \{0,1\}$ значень відображення належності Φ нечіткої множини $\tilde{F}$ типу 2.

Оскільки функція приналежності $\tilde{\varphi}(x, y)$ однозначно визначає нечітке відображення Φ , яке, у свою чергу, однозначно визначає нечітку множину $\tilde{F}$ типу 2, то надалі називатимемо $\tilde{\varphi}(x, y)$ функцією достовірності нечіткої множини $\tilde{F}$ типу 2, а її значення - достовірністю ступеня належності $y \in Y = \{0,1\}$ елемента $x \in X$ нечіткій множині $\tilde{F}$ типу 2.

Значення функції достовірності $\tilde{\varphi}(x, y)$ для фіксованої ситуації $x^0 \in X$ утворюють нечітку підмножину $\Phi_Y(x^0)$ множини $Y = \{0,1\}$ з функцією належності $\tilde{\varphi}(x^0, y)$, $y \in \{0,1\}$. Значення $\tilde{\varphi}(x^0, 1)$ можна розуміти як ступінь належності ситуації $x^0 \in X$ множині $\tilde{F}$. Відповідно значення $\tilde{\varphi}(x^0, 0)$ має сенс ступеню відсутності належності $x^0 \in X$ множині $\tilde{F}$. З іншого боку, якщо у відображенні $\tilde{\varphi}(x, y)$ зафіксувати $y=1$, то ми отримаємо нечітку множину ситуацій $x \in X$, що належать множині $\tilde{F}$, з функцією належності $\tilde{\varphi}(x, 1)$. Позначимо цю множину $\Phi_X(1)$. Аналогічно для фіксованого значення $y=0$ отримаємо нечітку множину ситуацій $x \in X$, що не належать множині $\tilde{F}$, з функцією приналежності $\tilde{\varphi}(x, 0)$. Позначимо його $\Phi_X(0)$. Цікаво, що в загальному випадку $\Phi_X(0) \neq \overline{\Phi_X(1)}$, і, відповідно $\tilde{\varphi}(x, 0) \neq 1 - \tilde{\varphi}(x, 1)$. Тому, як нечітка множина $\Phi_X(0)$, так і $\Phi_X(1)$, є

нечіткими множинами перерізів відповідно при $y = 0$ і $y = 1$ нечіткої множини $\tilde{F}$ типу 2 і є його складовими.

Спростити побудову функції достовірності $\tilde{\varphi}(x, y)$ дозволяє наступна теорема [3, 4].

Теорема. Нехай F_i , $i \in N$, - чіткі множини, які задані на множині X відповідними характеристичними функціями $\varphi_i(x)$, $x \in X$, $i \in N$; $\eta(i)$ - функція належності нечіткої множини $\tilde{N}$.

Для того, щоб нечітка множина $\tilde{F}$ типу 2, яка задана функцією достовірності $\tilde{\varphi}(x, y)$, $x \in X$, $y \in \{0, 1\}$, була перетином нечіткої множини $\tilde{N}$ чітких множин F_i , $i \in N$, тобто $\tilde{F} = \bigcap_{(i, \eta(i)) \in \tilde{N}} F_i$ необхідно і достатньо, що б для $x \in X$:

$$\tilde{\varphi}(x, 0) = \begin{cases} \max_{\varphi_i(x)=0} \eta(i), & \exists i \in N : \varphi_i(x) = 0, \\ 0, & \varphi_i(x) = 1, \quad \forall i \in N, \end{cases}$$

$$\tilde{\varphi}(x, 1) = \begin{cases} \max_{i \in N} \eta(i), & \varphi_i(x) = 1, \quad \forall i \in \text{Arg max}_{j \in N} \eta(j), \\ 0, & \exists i \in \text{Arg max}_{j \in N} \eta(j) : \varphi_i(x) = 0. \end{cases}$$

Побудова нечіткої множини рівноваг за Бержем. З викладених вище міркувань стає зрозуміло, що нечітка множина рівноваг за Бержем $BE(FG) = \bigcap_{(i, \eta(i)) \in \tilde{N}} AR_i$ є нечіткою множиною типу 2, яка задається функцією достовірності $\tilde{\varphi}(x, y)$, $x \in X$, $y \in \{0, 1\}$, де

$$\tilde{\varphi}(x, 0) = \begin{cases} \max_{i \in N} \{\eta(i) \mid x \notin AR_i\}; & \exists i \in N : x \notin AR_i; \\ 0; & \forall i \in N : x \in AR_i; \end{cases} \quad (9)$$

$$\tilde{\varphi}(x, 1) = \begin{cases} \max_{i \in N} \eta(i); & \forall i \in \text{Arg max}_{j \in N} \eta(j) : x \in AR_i; \\ 0; & \exists i \in \text{Arg max}_{j \in N} \eta(j) : x \notin AR_i. \end{cases} \quad (10)$$

Слід зазначити, що величину $\tilde{\varphi}(x, 0)$ можна інтерпретувати як достовірність неналежності ситуації $x \in X$ множині $BE(FG)$ нечітких рівноваг за Бержем, а $\tilde{\varphi}(x, 1)$ можна розуміти як достовірність її належності.

В реальній ігровій ситуації гравці прагнуть шукати таку ситуацію гри, яка має мінімальну достовірність неналежності множині $BE(FG)$ нечітких рівноваг за Бержем, а також максимальну достовірність $\psi(x, 1)$ її належності. Таким чином, перед гравцями постає наступна двохкритеріальна задача:

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}(x, 0) &\rightarrow \min, \\ \tilde{\varphi}(x, 1) &\rightarrow \max, \\ x &\in X. \end{aligned} \quad (11)$$

Позначимо $SO(FG)$ - множину оптимальних за Слейтером (слабо ефективних) розв'язків цієї задачі. Нагадаємо, що ситуація x^* називається оптимальною за Слейтером для задачі вигляду (11) якщо $\forall x \in X$, для якої мають місце нерівності: $\tilde{\varphi}(x^*, 1) > \tilde{\varphi}(x, 1)$, $\tilde{\varphi}(x^*, 0) < \tilde{\varphi}(x, 0)$.

Множиною ефективних нечітких рівноваг за Бержем в некооперативній грі з нечіткою множиною гравців будемо називати нечітку множину $EBE(FG)$ типу 2 з функцією достовірності

$$\tilde{\psi}(x, y) = \begin{cases} \tilde{\varphi}(x, y), & x \in SO(FG), \\ 0, & x \notin SO(FG), \end{cases}$$

де $y \in Y = \{0, 1\}$.

У разі, коли гравців цікавить конкретна рівновага, то її можна вибрати з множини $SO(FG)$ за допомогою того, або іншого методу багатокритеріальної оптимізації, розв'язавши задачу (11).

Легко перевірити, що рівновага за Бержем x^* «чіткої» гри G належатиме множині $SO(FG)$ із значеннями достовірностей її неналежності $\tilde{\varphi}(x^*, 0) = 0$ та належності $\tilde{\varphi}(x^*, 1) = \max_{i \in N} \eta(i) = 1$ і є абсолютно-оптимальним розв'язком задачі (11). Тому далі нас буде цікавити лише випадок, коли множина рівноваг за Бержем «чіткої» гри G є порожньою.

Оптимальний за Слейтером розв'язок x^* задачі (11) будемо називати ефективною рівновагою за Бержем гри FG з нечіткою підмножиною гравців з достовірностями $\psi(x^*, 1)$ і $\psi(x^*, 0)$ відповідно її належності і неналежності.

Позначимо $N^\xi = \{i \in N \mid \eta(i) \leq \xi\}$ - множину гравців, які мають ступені належності нечіткій множині гравців $\tilde{N}$ не більше за $\xi \in (0, 1)$. Спробуємо спростити задачу (11).

Твердження 1. Нехай $\xi \in (0, 1)$ - задане значення параметра, тоді якщо система:

$$\tilde{\varphi}(x, 0) \leq \xi; \quad (12)$$

$$x \in AR_i, \quad i \in N \setminus N^\xi; \quad (13)$$

$$x \in X; \quad (14)$$

має розв'язок x^* , то він буде ефективною рівновагою за Бержем гри FG з нечіткою підмножиною гравців з достовірністю належності $\eta^{\max} = \max_{i \in N} \eta(i)$ і з достовірністю неналежності не більше за ξ .

Доведення. Позначимо x^* – розв'язок системи (12) – (14) (за умовою твердження він існує). Припустимо супротивне, що $x^* \notin SO(FG)$. Тоді $\exists \hat{x} \in X$, для якого мають місце нерівності: $\tilde{\varphi}(\hat{x}, 1) > \tilde{\varphi}(x^*, 1)$, $\tilde{\varphi}(\hat{x}, 0) < \tilde{\varphi}(x^*, 0)$. Оскільки x^* – допустимий розв'язок системи (12) – (14), то з (10) випливає, що $\tilde{\varphi}(x^*, 1) = \max_{i \in N} \eta(i) = \eta^{\max}$. Тоді з записаних вище нерівностей виходить, що $\tilde{\varphi}(\hat{x}, 0) < \tilde{\varphi}(x^*, 0) \leq \xi$ і $\tilde{\varphi}(\hat{x}, 1) > \tilde{\varphi}(x^*, 1) \geq \eta^{\max}$. Оскільки, згідно (10) $\tilde{\varphi}(x, 1) \leq \eta^{\max}$ для $\forall x \in X$ зокрема і для $\hat{x}$, то отримали суперечність.

Твердження доведене.

Спробуємо далі спростити задачу (11).

Твердження 2. Нехай $\xi \in (0, 1)$ – задане значення параметра, тоді якщо хоча б одного значення $j \in N^\xi$ система:

$$x \notin AR_j; \quad (15)$$

$$x \in AR_i, i \in N \setminus N^\xi; \quad (16)$$

$$x \in X; \quad (17)$$

має розв'язок, то він буде ефективною рівновагою за Бержем гри FG з нечіткою підмножиною гравців з достовірністю належності $\eta^{\max} = \max_{i \in N} \eta(i)$ і з достовірністю неналежності не більше за ξ .

Доведення. Нехай $\xi \in (0, 1)$. Позначимо Q – множину допустимих розв'язків задачі (12) – (14), а P^j – множину допустимих розв'язків – (15) – (17). Спочатку покажемо, що

$$\bigcup_{j \in N^\xi} P^j = Q. \quad (18)$$

Покажемо включення $\bigcup_{j \in N^\xi} P^j \subseteq Q$. Якщо

$\bigcup_{j \in N^\xi} P^j = \emptyset$, то воно є очевидним. Нехай

$x^* \in \bigcup_{j \in N^\xi} P^j \neq \emptyset$. Припустимо супротивне, що

$x^* \notin Q$. Тоді можливі два випадки. В першому випадку не виконується умова (12), тобто

$\tilde{\varphi}(x^*, 0) > \xi$. Звідси з формули (9) отримаємо $\psi(x^*, 0) = \max_{i \in N} \{\eta(i) \mid x^* \notin AR_i\} > \xi$. Тоді

$\exists j \in N \setminus N^\xi$, для якого $x^* \notin AR_j$, що суперечить умові (16). В другому випадку не виконується умова (13), тобто $\exists j \in N \setminus N^\xi$, для якого $x^* \notin AR_j$. Тоді не виконується відповідна умова (16) і тому $x^* \notin P^i \forall i \in N^\xi$ і як наслідок $x^* \notin \bigcup_{i \in N^\xi} P^i$. Отримали суперечність. Таким чином, $x^* \in Q$ і тому $\bigcup_{i \in N^\xi} P^i \subseteq Q$.

Покажемо включення $Q \subseteq \bigcup_{i \in N^\xi} P^i$. Якщо $Q = \emptyset$, то воно очевидне. Нехай $x^* \in Q \neq \emptyset$. Припустимо супротивне, що $x^* \notin \bigcup_{i \in N^\xi} P^i$. Тоді $x^* \notin P^i \forall i \in N^\xi$. Оскільки умови (13) і (16) співпадають, то $x^* \in AR_i$ для $\forall i \in N^\xi$. Оскільки $N^\xi = \{i \in N \mid \eta(i) \leq \xi\}$, то з формул (9) випливає або $\tilde{\varphi}(x^*, 0) = \max_{i \in N} \{\eta(i) \mid x^* \notin AR_i\} > \xi$, або $\tilde{\varphi}(x^*, 0) = 0$. В обох випадках одержуємо суперечність з умовою (12). Таким чином, $x^* \notin \bigcup_{i \in N^\xi} P^i$, звідси випливає $Q \subseteq \bigcup_{i \in N^\xi} P^i$ і справедлива рівність (18).

Завершимо доведення твердження. З рівності (18) очевидно випливає еквівалентність задач (12) – (14) і (15) – (17), чого достатньо на підставі твердження 1 для доведення.

Твердження 2 доведене.

Таким чином, згідно до запропонованого підходу для знаходження ефективної рівноваги за Бержем гри FG з нечіткою підмножиною гравців достатньо зробити наступне:

- вибрати число $\xi \in (0, 1)$, яке згідно твердженню 2 характеризує максимальну для гравців достовірність неналежності рівновазі за Бержем;
- побудувати множину гравців $N^\xi = \{i \in N \mid \eta(i) \leq \xi\}$, які мають ступінь належності до нечіткої множини гравців $\tilde{N}$ не більше за задане число $\xi \in (0, 1)$;
- для кожного гравця $j \in N^\xi$ розв'язати систему:

$$x \notin AR_j; \quad (19)$$

$$x \in AR_i, i \in N \setminus N^\xi; \quad (20)$$

$$x \in X. \quad (21)$$

Якщо вона має розв'язок хоча б для одного гравця $k \in N^\xi$, то він і буде шуканою нами ефективною рівновагою за Бержем гри FG з нечіткою підмножиною гравців.

Особливий інтерес може представляти ефективною рівновага за Бержем гри FG , яка має найменше значення достовірності неналежності. Її можна одержати, якщо методом дихотомії вибирати найменше значення $\xi \in (0,1)$, при якому $\exists j \in N^\xi$, що сумісна система нерівностей (19) – (21).

Висновок. В статті основна увага надана концепції рівноваги за Бержем в некооперативній грі з нечіткою множиною гравців і методу його побудови. Згідно до запропонованого підходу множина рівноваг за Бержем цієї гри розглядається як нечітка множина типу 2, яка отримана в результаті реалізації такої операції над множинами як перетин нечіткої множини чітких множин. Особливістю такого уявлення є те, що елементи носія цієї множини

характеризуються двома показниками: достовірністю їхньої належності і достовірністю неналежності до множини рівноваг. Вводиться поняття множини ефективних нечітких рівноваг за Бержем також у вигляді нечіткої множини типу 2. Її носієм є множина оптимальних за Слейтером розв'язків двохкритеріальної задачі оптимізації. В цій задачі максимізується достовірність належності отриманого розв'язку до множини рівноваг за Бержем і мінімізується достовірність його неналежності. Розроблений метод, який дозволяє знаходити ефективні нечіткі рівноваги (елементи носія множини ефективних нечітких рівноваг за Бержем) з максимальною достовірністю їхньої належності і достовірністю неналежності не більше за задане число. Слід зазначити, що запропонований метод не тільки розширює область застосування теорії нечітких множин на випадок нечіткої множини гравців, але і може дати нові походи до розв'язання інших постановок нечітких ігор.

Список використаних джерел

1. *Мащенко С.О.* Концепция равновесия по Нэшу и ее развитие / С.О. Мащенко // Журнал обчисл. та прикладн. матем. - 2012. - № 1(107).- С. 40 - 65.
2. *Жуковский В.И.* Риск в многокритериальных и конфликтных системах при неопределённости : монография / В.И. Жуковский, Л.В. Жуковская . – М. : Едиториал УРСС, 2004. – 275 с.
3. *Мащенко С.О.* Нечеткие индивидуально-оптимальные равновесия / С.О. Мащенко // Кибернетика и вычислительная техника. – 2010, Вып. 159. – С. 19 – 29.
4. *Мащенко С.О.* Задача математического программирования с нечетким множеством индексов ограничений / Мащенко С.О. // Кибернетика и системный анализ. – 2013. – № 1. – С. 62 – 68.
5. *Мащенко С.О.* Рівновага за Нешем в іграх з нечіткою множиною гравців / С.О. Мащенко, В.І. Моренець // Журнал обчисл. та прикладн. матем. - 2015. - № 3(120).- С. 30 - 38.
6. *Орловский С.А.* Проблемы принятия решений при нечеткой исходной информации / С.А. Орловский. – М. : Наука, 1981. – 208 с.

References

1. MASHCHENKO, S. (2012) Nesh's equilibrium conception and its development. *Journal of Computational & Applied Mathematics* 1. pp. 40 – 65.
2. ZHUKOVSKIY, V.; ZHUKOVSKAIA, L. (2004) *Risk in multicriterian and conflict systems at uncertainty : monography.* Moskva: Editorial URSS.
3. MASHCHENKO, S. (2010) The fuzzy individual optimum equilibriums. *Cybernetics & Computer Engineering* 159. pp. 19 – 29.
4. MASHCHENKO, S. (2013) The problem of the mathematical programming with the fuzzy set of indexes of constraints. *Cybernetics & Systems Analysis*. 49(1). pp. 62 – 68.
5. MASHCHENKO, S.O. MORENETS, V.I. (2015) Nesh's equilibrium in the games with a fuzzy set of players. *Journal of Computational & Applied Mathematics* 3. pp. 30 – 38.
6. ORLOVSKY, S. (1981) *Problems of decision making at fuzzy initial information.* Moskva: Nauka.

Надійшла до редколегії 27.09.2016

УДК 517.9

Наконечний О.Г., д.ф.-м.н., проф.
Шевчук Ю.М., аспірант

**Математична модель
розповсюдження інформації
з нестационарними параметрами**

Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 83000, м. Київ, пр-т.
Глушкова 4д
e-mail: nakonechniy@unicyb.kiev.ua
e-mail: shevchuk.juli@ukr.net

O.G. Nakonechny, Dr. Sc., prof
I.M. Shevchuk, PhD. student

**Mathematical model
of information spreading process
with non-stationary parameters**

Taras Shevchenko National University of Kyiv,
83000, Kyiv, Glushkova st., 4d,
e-mail: nakonechniy@unicyb.kiev.ua
e-mail: shevchuk.juli@ukr.net

У роботі досліджується динамічна модель розповсюдження інформації з нестационарними параметрами керувань. При певних умовах одержані оцінки для розв'язків таких рівнянь.

Ключові слова: розповсюдження інформації, нестационарні параметри.

We consider mathematical model with non-stationary parameters of spreading any number of information channels with external influences. The number of information made by each of the sides is taken as key parameter promoting accomplishment of aim. Information is spread in the community along internal (interpersonal communication of the member of social community) and external threads. The model takes the form of N (number of information channels) non-linear ordinary differential equations. Special cases of presenting external influence are considered. It is shown that there exists such range of parameters that the systems have non-negative bounded solutions. Exact analytical solutions to a Cauchy's problem for the differential equations with stationary parameters are received. Conditions of existence of a unique periodical solution are considered for general non-stationary model and the special case of this model. The offered model of information spreading process except theoretical interest has an important practical meaning. The innovation of this work is description and evaluation of the model with non-stationary parameters.

Key Words: information spreading process, non-stationary parameters.

Статтю представив д.т. н., проф. Гаращенко Ф.Г.

Вступ

Розглядається деяка соціальна група чисельністю L , на яку провадиться інформаційна дія по N каналах, причому число суб'єктів, що сприйняли інформацію k -го типу залежить як від зовнішньої дії, так і від спілкування суб'єктів між собою. Якщо позначимо через $x_k(t)$ число суб'єктів, що сприйняли інформацію k -го типу в момент t , через $b_k(t)$ – інтенсивність спілкування, $u_k(t)$ – зовнішні дії, то зміну з часом величини $x_k(t)$ можливо описати системою диференціальних рівнянь

$$\frac{dx_k(t)}{dt} = b_k(t)x_k(t) \left(L - \sum_{i=1}^N x_i(t) \right) + u_k(t),$$
$$x_k(0) = x_{0k}, k = \overline{1, N}. \quad (1)$$

Аналіз рівнянь (1) при постійних параметрах і спеціальному виборі функцій $u_k(t)$ проводився в роботах [1], [2], [3].

Будемо досліджувати систему (1) при нестационарних параметрах і зовнішніх керуваннях, які є програмними або з оберненим зв'язком спеціального вигляду.

Твердження 1. Нехай $b_k(t)$ неперервна на $[0, T]$ де функція, а $u_k(t)$ невід'ємні та неперервні на $[0, T]$, $x_{0k} > 0$.

Тоді для розв'язків системи (1), при умові $L - \sum_{i=1}^N x_i(t) \geq 0$, виконуються нерівності

$$0 \leq x_k(t) \leq d_k(t), \quad k = \overline{1, N},$$

де

$$d_k(t) = x_{0k} \exp \int_0^t \bar{b}_k(s) ds + \\ + \int_0^t \exp \int_\tau^t \bar{b}_k(s) ds u_k(\tau) d\tau,$$

$$\bar{b}_k(t) = b_k(t) (L - z^{-1}(t)),$$

$$z(t) = z(0) \exp(-L \int_0^t c(\tau) d\tau) + \\ + \int_0^t \exp(-L \int_\tau^t c(s) ds) c(\tau) d\tau,$$

$$z(0) = x^{-1}(0),$$

$$x(t) = \sum_{i=1}^N x_i(t), \quad c(t) = \min_{1 \leq k \leq N} b_k(t).$$

Доведення.

Оскільки

$$\frac{dx_k(t)}{dt} \geq b_k(t) x_k(t) (L - x(t)),$$

то в силу леми Гроноулла-Белмана будемо мати

$$x_k(t) \geq x_{0k} \exp \int_0^t b_k(\tau) (L - x(\tau)) d\tau > 0.$$

Далі зазначимо, що

$$\frac{dx(t)}{dt} = \sum_{k=1}^N b_k(t) x_k(t) (L - x(t)) + \\ + \sum_{k=1}^N u_k(t) \geq c(t) x(t) (L - x(t)),$$

або

$$-1/x^2 \frac{dx(t)}{dt} \leq -\frac{c(t)}{x(t)} (L - x(t)).$$

Звідси

$$\frac{dz(t)}{dt} \leq -c(t) L z(t) + c(t),$$

$$z(t) = 1/x(t).$$

Тобто

$$z(t) \leq z(0) \exp \left(-L \int_0^t c(s) ds \right) + \\ + \int_0^t \exp \left(-L \int_\tau^t c(s) ds \right) c(\tau) d\tau.$$

Звідси отримаємо, що

$$x(t) \geq z^{-1}(t),$$

а значить

$$\frac{dx_k(t)}{dt} = L x_k(t) b_k(t) - \\ - b_k(t) x(t) x_k(t) z(t) \leq \\ \leq b_k(t) (L - z^{-1}(t)) + u_k(t).$$

Наслідок 1. Нехай $b_k(t) = b(t)$. Тоді

$$x_k(t) = x_{0k} \exp \int_0^t b(s) (L - x(s)) ds + \\ + \int_0^t \exp \left(\int_\tau^t b(s) (L - x(s)) ds \right) u_k(\tau) d\tau,$$

де $x(t)$ є розв'язком рівняння Ріккати

$$\frac{dx(t)}{dt} = L b(t) x(t) - \\ - b(t) x^2(t) + \sum_{k=1}^N u_k(t), \quad (2)$$

з початковими умовами

$$x(0) = \sum_{k=1}^N x_{0k}.$$

Наслідок 2. Покладемо $L - x(t) = y(t)$. Тоді для $y(t)$ одержимо співвідношення

$$\frac{dy(t)}{dt} = -b(t) (L - y(t)) y(t) - \sum_{k=1}^N u_k(t) = \\ = -b(t) y(t) - b(t) y^2(t) - \sum_{k=1}^N u_k(t) \geq \\ \geq -b(t) y(t) - \sum_{k=1}^N u_k(t),$$

де

$$y(0) = L - x(0).$$

Звідси

$$y(t) \geq y(0) \exp \left\{ - \int_0^t b(s) ds \right\} - \int_0^t \exp \left\{ - \int_\tau^t b(s) ds \right\} u(\tau) d\tau,$$

де

$$u(t) = \sum_{k=1}^N u_k(t).$$

Твердження 2. Нехай $b_k(t)=b(t)$, причому $b(t)>0$ та функції $b(t)$ та $u_k(t)$ є періодичними з періодом T . Тоді у системи рівнянь (1) існує єдиний періодичний розв'язок, що має вигляд

$$x_k(t) = \left[\Phi(T) \int_0^t \exp \int_\tau^t b(s) y(s) ds u_k(\tau) d\tau \right] \times \exp \int_0^t b(s) y(s) ds + \int_0^t \exp \int_\tau^t b(s) y(s) ds u_k(\tau) d\tau, \quad (3)$$

де

$$\Phi(T) = \left[\exp \int_0^T b(s) y(s) ds \right]^{-1}.$$

Доведення. Зауважимо, оскільки функція

$$x(t) = \sum_{k=1}^N x_k(t)$$

є розв'язком рівняння Ріккати (2), що має єдиний розв'язок, то в силу періодичності коефіцієнтів цього рівняння розв'язок його є періодичним.

Далі зауважимо, що функція $x_k(t)$ є розв'язком рівняння

$$\frac{dx_k(t)}{dt} = b(t)x_k(t)(L - x(t)) + u_k(t),$$

і в силу періодичності функцій $b(t)$, $x(t)$ та $u_k(t)$ його розв'язок також є періодичним.

В силу формули Коші отримуємо

$$x_k(t) = x_k(0) \exp \int_0^t b(s) y(s) ds + \int_0^t \exp \int_\tau^t b(s) y(s) ds u_k(\tau) d\tau.$$

Із умови $x_k(0) = x_k(T)$ знайдемо, що

$$x_k(0) = \Phi(T) \int_0^T \exp \int_\tau^T b(s) y(s) ds u_k(\tau) d\tau,$$

де

$$\Phi(T) = \left[\exp \int_0^T b(s) y(s) ds \right]^{-1}.$$

Звідси отримуємо формулу (3).

Наслідок. Нехай функція

$$u(t) = \sum_{k=1}^N u_k(t)$$

кусово постійна періодична функція, така що на відрізку $[0, T]$ вона приймає значення $u_1, \dots, u_m$

відповідно на інтервалах (t_k, t_{k+1}) , $k=1, \dots, m-1$, функція $b(t)$ також постійна на кожному з інтервалів та приймає значення $b_1, \dots, b_m$.

Доведення. Розглянемо на інтервалі (t_k, t_{k+1}) рівняння Ріккати з початковими умовами

$$x_k(t_k + 0) = x_{k-1}(t_k - 0), \\ x_1(t_1 - 0) = x(0).$$

Тоді будемо мати систему рівнянь

$$\frac{dx_k(t)}{dt} = L b_k x_k(t) - b_k x_k^2(t) + u_k,$$

$$x_k(t_k + 0) = x_{k-1}(t_k - 0), \quad k = \overline{1, m}.$$

Розв'язком цієї системи рівнянь є функції

$$x_k(t) = \frac{L/2 + \sqrt{D}/2b_k + e^{\sqrt{D}t} c_1 (-L/2 + \sqrt{D}/2b_k)}{1 - e^{\sqrt{D}t} c_1},$$

де

$$D = L^2 b_k^2 + 4u_k b_k > 0,$$

$$x_k(t_k + 0) - L/2 - \sqrt{D}/2b_k$$

$$c_1 = e^{-\sqrt{D}(t_k+0)} \frac{x_k(t_k + 0) - L/2 + \sqrt{D}/2b_k}{x_k(t_k + 0) - L/2 - \sqrt{D}/2b_k}.$$

$x_1(0)$ знаходиться з умови $x_1(0) = x_m(T)$.

Розглянемо далі випадок, коли зовнішні дії вибираються в залежності від стану системи і є пропорційними числу людей, що ще не сприйняли інформацію, тобто

$$u_k(t) = a_k(t)(L - x(t)).$$

Тоді система рівнянь прийме вигляд

$$\frac{dx_k(t)}{dt} = (a_k(t) + b_k(t)x_k(t))(L - x(t)),$$

$$x_k(0) = x_{0k}, \quad k = \overline{1, N}. \quad (4)$$

Твердження 3. Нехай $x_{0k} \geq 0$, $L - x(0) \geq 0$, функції $a_k(t)$ – неперервні невід'ємні на відрізку $[0, T]$, то у системи рівнянь (4) існують невід'ємні розв'язки.

Доведення. Позначимо через $y(t)$ величину $y(t) = L - x(t)$. Тоді для $y(t)$ справедливе рівняння

$$\frac{dy(t)}{dt} = - \frac{dx(t)}{dt} =$$

$$\left(-a(t) - \sum_{k=1}^N b_k(t)x_k(t) \right) y(t),$$

де

$$a(t) = \sum_{k=1}^N a_k(t).$$

Звідси

$$y(t) = y(0) \exp \left\{ - \int_0^t (a(s) + \right. \\ \left. + \sum_{k=1}^N b_k(s) x_k(s)) ds \right\} \geq 0.$$

Далі зауважимо, що

$$\frac{dx_k(t)}{dt} = (a_k(t) + b_k(t) x_k(t)) y(t) \geq \\ \geq b_k(t) x_k(t) y(t),$$

звідси

$$x_k(t) \geq x_{0k} \exp \left\{ \int_0^t b_k(s) y(s) ds \right\} > 0.$$

Твердження 4. Нехай

$$\min_{1 \leq k \leq N} b_k(t) = \bar{b}_1 < 0, \\ \max_{1 \leq k \leq N} b_k(t) = \bar{b}_2 > 0.$$

Тоді мають місце нерівності

$$y(0) \exp \left\{ - \int_0^t c_2(s) ds \right\} \leq y(t), \\ y(t) \leq y(0) \exp \left\{ - \int_0^t c_1(s) ds \right\}, \quad (5)$$

де

$$c_j(s) = a(s) + \bar{b}_j L, j = 1, 2.$$

Доведення. Так як функція $y(t)$ задовольняє

$$- \frac{dy(t)}{dt} = \left(a(t) + \sum_{k=1}^N b_k(t) x_k(t) \right) y(t),$$

то одержуються нерівності

$$\left(a(t) + \bar{b}_1 (L - y(t)) \right) y(t) \leq - \frac{dy(t)}{dt} \leq \\ \leq \left(a(t) + \bar{b}_2 (L - y(t)) \right) y(t),$$

або

$$c_1(t) y(t) \leq c_1(t) y(t) - \bar{b}_1 y^2(t) \leq - \frac{dy(t)}{dt} \leq \\ \leq c_2(t) y(t) - \bar{b}_2 y^2(t) \leq c_2(t) y(t).$$

Звідси за лемою Гроноулла-Белмана отримуються нерівності (5):

$$y(0) \exp \left\{ - \int_0^t c_2(s) ds \right\} \leq y(t) \leq \\ \leq y(0) \exp \left\{ - \int_0^t c_1(s) ds \right\}.$$

Наслідок. Для того, щоб виконувалася умова $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0$,

достатньо, щоб

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t c_1(s) ds = \infty.$$

І якщо

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t c_1(s) ds < \infty,$$

то розв'язки $y(t)$ обмежені.

Твердження 5. Якщо $\bar{b}_1 > 0$, то функція $y(t)$ задовольняє нерівності

$$\underline{y}(t) \leq y(t) \leq \bar{y}(t), \quad (6)$$

де

$$\underline{y}(t) = [y(0)^{-1} \exp \int_0^t c_2(s) ds - \\ - \int_0^t \exp \left\{ \int_\tau^t c_2(s) ds \right\} \bar{b}_2(\tau) d\tau]^{-1},$$

$$\bar{y}(t) = [y(0)^{-1} \exp \int_0^t c_1(s) ds - \\ - \int_0^t \exp \left\{ \int_\tau^t c_1(s) ds \right\} \bar{b}_1(\tau) d\tau]^{-1}.$$

Доведення. Із нерівностей

$$c_1(t) y(t) - \bar{b}_1 y^2(t) \leq - \frac{dy(t)}{dt} \leq \\ \leq c_2(t) y(t) - \bar{b}_2 y^2(t)$$

випливає, що

$$\frac{c_1(t)}{y(t)} - \bar{b}_1 \leq - \frac{1}{y^2(t)} \frac{dy(t)}{dt} \leq \frac{c_2(t)}{y(t)} - \bar{b}_2.$$

Покладемо

$$1/y(t) = z(t).$$

Тоді для функції $z(t)$ одержимо нерівності

$$c_1(t) z(t) - \bar{b}_1 \leq \frac{dz(t)}{dt} \leq c_2(t) z(t) - \bar{b}_2.$$

Звідси

$$y(0)^{-1} \exp \int_0^t c_1(s) ds - \\ - \int_0^t \exp \left\{ \int_\tau^t c_1(s) ds \right\} \bar{b}_1(\tau) d\tau \leq \\ \leq z(t) \leq \\ \leq y(0)^{-1} \exp \int_0^t c_2(s) ds - \\ - \int_0^t \exp \left\{ \int_\tau^t c_2(s) ds \right\} \bar{b}_2(\tau) d\tau.$$

І оскільки

$$z(t) = 1/y(t),$$

то для $y(t)$ отримуємо нерівність (6).

Наслідок 1. Нехай a_k та b_k незалежні від часу. Тоді

$$\underline{y}(t) = \left[\exp\{c_2 t\} \left(x^{-1}(0) + \frac{\bar{b}_2}{c_2} \right) - \frac{\bar{b}_2}{c_2} \right]^{-1},$$

$$\bar{y}(t) = \left[\exp\{c_1 t\} \left(x^{-1}(0) + \frac{\bar{b}_1}{c_1} \right) - \frac{\bar{b}_1}{c_1} \right]^{-1}.$$

Наслідок 2. Припустимо, що $b_k(t) = b(t)$, $k=1, \dots, N$. Тоді має місце рівність

$$y(t) = [y(0)^{-1} \exp \int_0^t c(s) ds - \int_0^t \exp \left\{ \int_\tau^t c(s) ds \right\} b(\tau) d\tau]^{-1},$$

де

$$c(s) = \sum_{i=1}^N a_i(s) + b(s)L.$$

Твердження 6. Нехай для $y(t)$ справедливі оцінки

$$\underline{y}(t) \leq y(t) \leq \bar{y}(t).$$

Тоді функції $x_k(t)$, $k=1, \dots, N$ задовольняють нерівності:

$$\underline{x}_k^{(1)}(t) \leq x_k(t) \leq \bar{x}_k^{(1)}(t), k \in I_1,$$

$$\underline{x}_k^{(2)}(t) \leq x_k(t) \leq \bar{x}_k^{(2)}(t), k \in I_2,$$

$$I_1 = \{k: b_k(t) > 0\}, I_2 = \{k: b_k(t) < 0\},$$

де для $k \in I_1$:

$$\underline{x}_k^{(1)}(t) = x_{0k} \exp \left\{ \int_0^t b_k(s) \underline{y}(s) ds \right\} + \int_0^t \exp \left\{ \int_\tau^t b_k(s) \underline{y}(s) ds \right\} a_k(\tau) \underline{y}(\tau) d\tau,$$

$$\bar{x}_k^{(1)}(t) = x_{0k} \exp \left\{ \int_0^t b_k(s) \bar{y}(s) ds \right\} + \int_0^t \exp \left\{ \int_\tau^t b_k(s) \bar{y}(s) ds \right\} a_k(\tau) \bar{y}(\tau) d\tau,$$

а для $k \in I_2$:

$$\underline{x}_k^{(2)}(t) = x_{0k} \exp \left\{ \int_0^t b_k(s) \bar{y}(s) ds \right\} + \int_0^t \exp \left\{ \int_\tau^t b_k(s) \bar{y}(s) ds \right\} a_k(\tau) \underline{y}(\tau) d\tau,$$

$$\bar{x}_k^{(2)}(t) = x_{0k} \exp \left\{ \int_0^t b_k(s) \underline{y}(s) ds \right\} + \int_0^t \exp \left\{ \int_\tau^t b_k(s) \underline{y}(s) ds \right\} a_k(\tau) \bar{y}(\tau) d\tau.$$

Доведення. Нехай $k \in I_1$ та для таких k запишемо рівняння

$$\frac{dy_k(t)}{dt} = (a_k(t) + b_k(t)x_k(t))y(t) = a_k(t)y(t) + b_k(t)y(t)x_k(t),$$

і оскільки виконуються нерівності

$$a_k(t)\underline{y}(t) + b_k(t)\underline{y}(t)x_k(t) \leq a_k(t)y(t) + b_k(t)y(t)x_k(t) \leq a_k(t)\bar{y}(t) + b_k(t)\bar{y}(t)x_k(t),$$

то одержимо, що:

$$\underline{x}_k^{(1)}(t) = x_{0k} \exp \left\{ \int_0^t b_k(s) \underline{y}(s) ds \right\} + \int_0^t \exp \left\{ \int_\tau^t b_k(s) \underline{y}(s) ds \right\} a_k(\tau) \underline{y}(\tau) d\tau,$$

$$\bar{x}_k^{(1)}(t) = x_{0k} \exp \left\{ \int_0^t b_k(s) \bar{y}(s) ds \right\} + \int_0^t \exp \left\{ \int_\tau^t b_k(s) \bar{y}(s) ds \right\} a_k(\tau) \bar{y}(\tau) d\tau.$$

Якщо $k \in I_2$, то для таких k одержимо нерівності

$$a_k(t)\underline{y}(t) + b_k(t)y(t)x_k(t) \leq a_k(t)y(t) + b_k(t)y(t)x_k(t) \leq a_k(t)\bar{y}(t) + b_k(t)\bar{y}(t)x_k(t).$$

Звідси

$$\underline{x}_k^{(2)}(t) = x_{0k} \exp \left\{ \int_0^t b_k(s) \bar{y}(s) ds \right\} + \int_0^t \exp \left\{ \int_\tau^t b_k(s) \bar{y}(s) ds \right\} a_k(\tau) \underline{y}(\tau) d\tau,$$

$$\bar{x}_k^{(2)}(t) = x_{0k} \exp \left\{ \int_0^t b_k(s) \underline{y}(s) ds \right\} + \int_0^t \exp \left\{ \int_\tau^t b_k(s) \underline{y}(s) ds \right\} a_k(\tau) \bar{y}(\tau) d\tau.$$

Наслідок. Нехай $b_k(t) = b_k$, що незалежні від часу. Тоді для $k \in I_1$:

$$\underline{x}_k^{(1)}(t) = x_{0k} \exp \left\{ b_k \int_0^t \underline{y}(s) ds \right\} + \int_0^t \exp \left\{ b_k \int_\tau^t \underline{y}(s) ds \right\} a_k(\tau) \underline{y}(\tau) d\tau,$$

$$\bar{x}_k^{(1)}(t) = x_{0k} \exp \left\{ b_k \int_0^t \bar{y}(s) ds \right\} + \int_0^t \exp \left\{ b_k \int_\tau^t \bar{y}(s) ds \right\} a_k(\tau) \bar{y}(\tau) d\tau,$$

а для $k \in I_2$:

$$\underline{x}_k^{(2)}(t) = x_{0k} \exp \left\{ b_k \int_0^t \bar{y}(s) ds \right\} + \int_0^t \exp \left\{ b_k \int_\tau^t \bar{y}(s) ds \right\} a_k(\tau) \underline{y}(\tau) d\tau,$$

$$\bar{x}_k^{(2)}(t) = x_{0k} \exp \left\{ b_k \int_0^t \underline{y}(s) ds \right\} + \int_0^t \exp \left\{ b_k \int_\tau^t \underline{y}(s) ds \right\} a_k(\tau) \bar{y}(\tau) d\tau.$$

Твердження 7. Нехай в системі рівнянь (4) $b_k(t) = b(t)$, $a_k(t) \geq 0$, причому функції $a_k(t)$ та $b(t)$ є періодичними з періодом T . Тоді у системі (4) існує єдиний додатний періодичний розв'язок, що має вигляд

$$x_k(t) = \tilde{x}_{0k} \exp \left(\int_0^t b(s)y(s) ds \right) + \int_0^t \exp \left(\int_\tau^t b(s)y(s) ds \right) a_k(\tau)y(\tau) d\tau, \quad (7)$$

де

$$\tilde{x}_{0k} = \left(1 - \exp \left(\int_0^T b(s)y(s) ds \right) \right)^{-1} \times \int_0^T \exp \left(\int_\tau^T b(s)y(s) ds \right) a_k(\tau)y(\tau) d\tau.$$

Доведення. Зауважимо, що так як $y(t) = L - x(t)$, то функція $y(t)$ є розв'язком рівняння

$$\frac{dy(t)}{dt} = (-a(t) - b(t)(L - y(t)))y(t).$$

Звідси

$$-\frac{1}{y^2} \frac{dy(t)}{dt} = \tilde{a}(t)L \frac{1}{y(t)} - b(t),$$

де

$$\tilde{a}(t) = a(t) + b(t).$$

Звідси

$$y^{-1}(t) = y^{-1}(0) \exp \int_0^t \tilde{a}(s)L ds - \int_0^t \exp \left(\int_\tau^t \tilde{a}(s)L ds \right) b(\tau) d\tau.$$

Із умови $y^{-1}(0) = y^{-1}(T)$ одержимо, що

$$y^{-1}(0) = \Phi_T^{-1} \int_0^T \exp \left(\int_\tau^T \tilde{a}(s)L ds \right) b(\tau) d\tau,$$

де

$$\Phi_T = \left(1 - \exp \int_0^T \tilde{a}(s)L ds \right).$$

Тоді

$$y(t) = \left[y^{-1}(0) \exp \int_0^t \tilde{a}(s)L ds - \int_0^t \exp \left(\int_\tau^t \tilde{a}(s)L ds \right) b(\tau) d\tau \right]^{-1},$$

і далі отримуємо

$$\frac{dx_k(t)}{dt} = (a_k(t) + b(t)x_k(t))y(t).$$

Значить

$$x_k(t) = x_{0k} \exp \left(\int_0^t b(s)y(s) ds \right) +$$

$$+ \int_0^t \exp \left(\int_\tau^t b(s)y(s) ds \right) a_k(\tau)y(\tau) d\tau.$$

Із умови $x_k(0) = x_k(T)$ одержимо

$$x_k(0) = \left(1 - \exp \left(\int_0^T b(s)y(s) ds \right) \right)^{-1} \times \int_0^T \exp \left(\int_\tau^T b(s)y(s) ds \right) a_k(\tau)y(\tau) d\tau.$$

Звідси отримуємо вид періодичного розв'язку (7).

Розглянемо далі випадок, коли зовнішні дії вибираються в залежності від стану системи

$$u_k(t) = a_k(L - x(t)) - c_k(t)x_k(t).$$

Тоді система рівнянь (1) прийме вигляд

$$\frac{dx_k(t)}{dt} = (a_k(t) + b_k(t)x_k(t))(L - x(t)) - c_k(t)x_k(t), \quad (8)$$

$$x_k(0) = x_{0k}.$$

Твердження 8. Нехай $a_k(t) \geq 0$, $L - x(0) > 0$, $c_1(t) = \dots = c_N(t) = c(t)$, функції $a_k(t)$, $b_k(t)$, $c(t)$ неперервні функції часу, тоді у системі рівнянь (8) існують додатні розв'язки.

Доведення. Позначимо $y(t) = L - x(t)$ та $a = \sum_{k=1}^N a_k(t)$.

Тоді одержимо, що

$$\begin{aligned} \frac{dy(t)}{dt} &= \left(-a(t) - \sum_{k=1}^N b_k(t)x_k(t) \right) y(t) + c(t)(L - y(t)) \geq \\ &\geq \left(-a(t) - \sum_{k=1}^N b_k(t)x_k(t) \right) y(t) + cL \geq \\ &\geq \left(-a(t) - \sum_{k=1}^N b_k(t)x_k(t) \right) y(t). \end{aligned}$$

Позначимо

$$d(t) = -a(t) - \sum_{k=1}^N b_k(t)x_k(t).$$

Тоді

$$y(t) \geq \exp \left\{ \int_0^t d(\tau) d\tau \right\} y(0) \geq 0.$$

Далі зауважимо, що

$$\begin{aligned} \frac{dx_k(t)}{dt} &= a_k(t)y(t) + (b_k(t)y(t) - c(t))x_k(t) \geq \\ &\geq (b_k(t)y(t) - c(t))x_k(t). \end{aligned}$$

Позначимо

$$d_1(t) = b_k(t)y(t) - c(t).$$

Тоді

$$x_k(t) \geq \exp \left\{ \int_0^t d_1(\tau) d\tau \right\} x_{0k} > 0,$$

що і потрібно було показати.

Твердження 9. Нехай $a_k(t) \geq 0$, $b_k(t) \geq 0$, $c_1(t) = \dots = c_N(t) = c(t)$, тоді мають місце оцінки

$$\exp \left\{ \int_0^t d_1(\tau) d\tau \right\} x_{0k} \leq x_k(t) \leq \exp \left\{ \int_0^t \tilde{b}_k(\tau) d\tau \right\} x_{0k} + L \int_0^t \exp \left\{ \int_\tau^t \tilde{b}_k(s) ds \right\} a_k(\tau) d\tau,$$

де

$$\tilde{b}_k(t) = b_k(t)L - c(t).$$

Доведення.

$$\frac{dx_k(t)}{dt} = a_k(t)y(t) + (b_k(t)y(t) - c(t))x_k(t) \leq a_k(t)L + (b_k(t)L - c(t))x_k(t).$$

Оскільки $x_k(t) \geq 0$, то $y(t) = L - x(t) \leq L$. Звідси

$$x_k(t) \leq \exp \left\{ \int_0^t \tilde{b}_k(\tau) d\tau \right\} x_{0k} + L \int_0^t \exp \left\{ \int_\tau^t \tilde{b}_k(s) ds \right\} a_k(\tau) d\tau.$$

Наслідок. Нехай функції $a_k(t)$ та $b_k(t)$ вимірні та обмежені на $[0, T]$. Тоді на цьому відрізку існують додатні розв'язки системи (8), причому мають місце оцінки

$$x_k(t) \geq \exp \left\{ \int_0^t (b_k(s)z^{-1}(s) - c(s)) ds \right\} x_{0k} + \int_0^t \exp \left\{ \int_\tau^t (b_k(s)z^{-1}(s) - c(s)) ds \right\} a_k(\tau) z^{-1}(\tau) d\tau,$$

де

$$z(t) = \frac{1}{y(0)} \exp \int_0^t -\tilde{a}(s) ds - \int_0^t \exp \int_0^\tau -\tilde{a}(s) ds b(\tau) d\tau, \\ b(t) = \max(b_1(t), \dots, b_N(t)).$$

Доведення. Поклавши $b(t) = \max(b_1(t), \dots, b_N(t))$, отримуємо нерівності

$$\frac{dy(t)}{dt} = \left(-a(t) - \sum_{k=1}^N b_k(t)x_k(t) \right) y(t) + c(t)(L - y(t)) \geq \left(-a(t) - b(t)(L - y(t)) \right) y(t) - c(t)y(t) + c(t)L \geq (-a(t) - b(t)L - c(t))y(t) + b(t)y^2(t).$$

Позначимо

$$\tilde{a}(t) = -a(t) - b(t)L - c(t).$$

Тоді

$$\frac{dy(t)}{dt} \geq \tilde{a}(t)y(t) + b(t)y^2(t), \\ -\frac{1}{y^2(t)} \frac{dy(t)}{dt} \geq -\tilde{a}(t) \frac{1}{y(t)} - b(t), \\ \frac{1}{y(t)} \leq \frac{1}{y(0)} \exp \int_0^t -\tilde{a}(s) ds - \int_0^t \exp \int_0^\tau -\tilde{a}(s) ds b(\tau) d\tau = z(t), \\ \frac{dx_k(t)}{dt} = (a_k(t) + b_k(t)x_k(t))y(t) -$$

$$-c_k(t)x_k(t) \geq (a_k(t) + b_k(t)x_k(t))z^{-1}(t) - c_k(t)x_k(t) = a_k(t)z^{-1}(t) + (b_k(t)z^{-1}(t) - c_k(t))x_k(t).$$

Твердження 10. Нехай a_k , b_k , c_k незалежні від часу, причому $c_1 = \dots = c_N = c$ та $b_1 = \dots = b_N = b$, тоді функції $x_k(t)$ мають вигляд

$$x_k(t) = \exp \left\{ \int_0^t (by(\tau) - c) d\tau \right\} x_{0k} + \int_0^t \exp \left\{ \int_\tau^t (bx(s) - c) ds \right\} a_k(\tau)y(\tau) d\tau.$$

Доведення. Для функції $y(t)$ одержимо рівняння Ріккати

$$\frac{dy(t)}{dt} = (-a - b(L - y(t)))y(t) + c(L - y(t)) = (-a - bL - c)y(t) + by^2(t) + cL,$$

де

$$a = \sum_{i=1}^N a_i.$$

Позначимо

$$\hat{a} = -a - bL - c,$$

тоді

$$\frac{dy(t)}{dt} = \hat{a}y(t) + by^2(t) + cL.$$

Розглядається лише випадок, коли

$$D = \hat{a}^2 - 4cL \geq 0,$$

тоді

$$y(t) = \frac{\sqrt{D} - \hat{a} + (\sqrt{D} + \hat{a})e^{\sqrt{D}t}\tilde{c}}{2b(1 - e^{\sqrt{D}t}\tilde{c})},$$

де

$$\tilde{c} = \frac{2by(0) + \sqrt{D} + \hat{a}}{2by(0) - \sqrt{D} + \hat{a}}.$$

Оскільки

$$\frac{dx_k(t)}{dt} = (a_k + bx_k(t))y(t) - cx_k(t) = (by(t) - c)x_k(t) + a_ky(t),$$

то за формулою Коші отримуємо

$$x_k(t) = \exp \left\{ \int_0^t (by(\tau) - c) d\tau \right\} x_{0k} + \int_0^t \exp \left\{ \int_\tau^t (by(s) - c) ds \right\} a_k y(\tau) d\tau.$$

Список використаних джерел

1. Михайлов А. П. Модели информационной борьбы / Михайлов А.П., Маревцева Н.А. // Математическое моделирование. – 2011. – №10. – с. 19-32.
2. Михайлов А. П. Развитие модели распространения информации в социуме/ Михайлов А.П., Петров А.П., Маревцева Н.А., Третьякова И.В.// Математическое моделирование. – 2014. – №3 (26). – с. 65-74.
3. Михайлов А.П. Моделирование периодических дестабилизирующих воздействий при информационном противоборстве в социуме/ Михайлов А.П., Петров А.П., Прончева О.Г., Прончев Г.Б., Маревцева Н.А.// Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. – 2016. – №16. – 13 с. – Режим доступа: <https://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2016-16>.
4. Наконечний О.Г. Задачі протистояння в системах з динамікою Гомперца / Наконечний О. Г., Зінко П. М.// Журнал обчислювальної та прикладної математики. – 2015. – №3 (120). – с.50-60.

References

1. MIKHAILOV, A.P. & MAREVTSEVA, N.A. (2011) Models of information confrontation. *Mat. Model.* (10). p.19–32.
2. MIKHAILOV, A.P., PETROV, A.P., MAREVTSEVA, N.A. & TRETIKOVA, I. V. (2014) Development of a model of information dissemination in society. *Mat. Model.* 26(3). p.65–74.
3. MIKHAILOV, A.P., PETROV, A.P., PRONCHEVA, A.P., PRONCHEV, G.B. & MAREVTSEVA, N.A. (2016) Modeling of periodic destabilizing effect on information warfare in a society. *Preprint Keldysh Institute of Applied Mathematics.* (16). Available at: <https://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2016-16>.
4. NAKONECHNY, O.G. & ZINKO, P.M. (2015) Confrontation problems with the dynamics Gompertzian systems. *Journal of Computational&Applied Mathematics.* 120 (3). p. 50-60.

Надійшла до редколегії 03.10.2016

УДК 519.233.2+681.5

Олександр С. Слабоспицький,
к.ф.-м.н., доц.

Рекурентний алгоритм для оцінювання нестационарних параметрів методом найменших квадратів зі змінним фактором забування та найменшими відхиленнями від точок “тяжіння” для лінійних динамічних систем при неklasичних припущеннях

Київський національний університет
імені Тараса Шевченка, пр. Глушкова, 4д,
м. Київ, 03680, Україна,
e-mail: sl@univ.kiev.ua

Alexander S. Slabospitsky,
Ph.D. (Physics & Mathematics), Associate Professor

Recurrent algorithm for non-stationary parameter estimation by the least squares method with variable forgetting factor and least deviations from ‘attraction’ points for linear dynamic systems under non-classical assumptions

Taras Shevchenko National University of Kyiv,
4d Glushkov av., Kyiv, 03680, Ukraine,

e-mail: sl@univ.kiev.ua

Розглядається задача оцінювання нестационарних параметрів для лінійної дискретної динамічної системи у випадку, коли в кожен момент для матриці параметрів відома її точка “тяжіння”. Отримано рекурентний алгоритм для оцінки параметрів методом найменших квадратів зі змінним фактором забування та найменшою нормою відхилення від точок “тяжіння” при неklasичних припущеннях. Також запропоновано рекурентну процедуру для відповідної зваженої залишкової суми квадратів.

Ключові слова: оцінювання нестационарних параметрів, оператор псевдообернення, лінійна дискретна динамічна система, метод найменших квадратів, змінний фактор забування, рекурентний алгоритм, зважена залишкова сума квадратів, точки “тяжіння”.

The estimation problem of non-stationary parameters is considered for linear discrete dynamic system in the case when for parameter matrix its ‘attraction’ point is known at any moment. The recurrent algorithm is obtained for estimate of the parameters by the least squares method with variable forgetting factor and least deviation norm from ‘attraction’ points under non-classical assumptions. The recurrent procedure is suggested for corresponding weighted residual sum of squares too.

Keywords: non-stationary parameter estimation, pseudo-inverse operator, linear discrete dynamic system, least squares method, variable forgetting factor, recurrent algorithm, weighted residual sum of squares, ‘attraction’ points.

Статтю представив д. т. н., проф. Гаращенко Ф.Г.

Вступ. При розв’язанні задач побудови високоточних математичних моделей для різноманітних складних об’єктів виникає потреба у знаходженні оптимальних оцінок їх невідомих параметрів. Для пошуку останніх було розроблено ряд методів в залежності від об’єму доступної апріорної інформації про невизначеності системи [1, 2]. Один з підходів для розв’язання подібного роду проблем базується на методі найменших квадратів (МНК) [3].

У загальному випадку при використанні оцінки МНК, коли можуть порушуватися класичні припущення, що гарантують її єдиність,

не обійтися без використання оператора псевдообернення за Муром-Пенроузом [4, 5]. Для даної ситуації у роботі [6] оцінку МНК з найменшою нормою для стаціонарних параметрів регресійної моделі було проаналізовано, а також отримано рекурентні представлення для цієї оцінки та відповідної залишкової суми квадратів. Останні результати було перенесено на випадок оцінювання нестационарних параметрів регресійної моделі за допомогою МНК зі змінним фактором забування у публікаціях [7, 8].

Припустимо, що додатково до попередніх припущень у кожен момент відомі точки

“тяжіння” для невідомих параметрів системи. Тоді в якості єдиної оцінки МНК будемо брати оцінку з найменшою нормою відхилення від цих заданих точок “тяжіння” у кожен момент. Для останньої оцінки стаціонарних параметрів регресійної моделі та відповідної залишкової суми квадратів рекуренти були отримані у роботі [9]. Узагальнення на випадок оцінювання нестационарних параметрів регресійної моделі було здійснено у публікаціях [10, 11].

У даній роботі останні результати по оцінюванню нестационарних параметрів за допомогою МНК зі змінним фактором забування та найменшою нормою відхилення від заданих точок “тяжіння” у кожен момент часу поширюються на клас лінійних дискретних динамічних систем.

Оцінка параметрів лінійної динамічної системи. Розглянемо задачу оцінки матриці параметрів A лінійної дискретної динамічної системи

$$x(k+1) = Ax(k) + \xi(k), \quad k \in \mathbb{N}, \quad (1)$$

де $x(k) = (x_1(k), x_2(k), \dots, x_n(k))^T$ - доступний для спостереження вектор фазового стану, $\xi(k) = (\xi_1(k), \xi_2(k), \dots, \xi_n(k))^T$ - вектор похибок моделі, $A = (a_1, a_2, \dots, a_n)^T$, $a_i \in \mathbb{R}^n$, $i = \overline{1, n}$.

Припустимо, що матриця A може повільно змінюватися з плином часом і для неї у кожен момент часу доступна інформація про її точку тяжіння

$$A_*(N) = (a_{1*}(N), a_{2*}(N), \dots, a_{n*}(N))^T,$$

$$a_{i*}(N) \in \mathbb{R}^n, \quad i = \overline{1, n}, \quad N = 0, 1, 2, \dots$$

Оцінки матриці параметрів A у момент N методом найменших квадратів зі змінним фактором забування $\{\lambda(k)\}_{k=1}^\infty$, якщо можуть порушуватися класичні припущення, які гарантують її єдиність, визначаються як

$$\underset{A}{\operatorname{Arg\,min}} Q(A, N), \quad (2)$$

де

$$Q(A, N) = \sum_{k=1}^N w(k, N) \|\xi(k)\|^2, \quad (3)$$

$$w(k, N) = \begin{cases} \prod_{i=k}^{N-1} \lambda(i), & \text{якщо } k = \overline{1, N-1}, \\ 1, & \text{якщо } k = N, \end{cases}$$

$\lambda(i)$ - заданий змінний фактор забування ($\lambda(i) \in (0, 1]$, $i \in \mathbb{N}$), $\|\cdot\|$ - евклідова норма.

В якості єдиної оцінки $\hat{A}(N)$ на множині усіх оцінок (2) візьмемо оцінку з найменшою нормою відхилення від точки “тяжіння” $A_*(N)$ у кожен момент N .

Для цього представимо систему рівнянь (1) у вигляді

$$\tilde{X}_{2, N+1}^T = A \tilde{X}_{1, N}^T + \tilde{\Xi}_N^T, \quad N \in \mathbb{N},$$

$$\text{де } \tilde{X}_{1+i, N+i} = \begin{pmatrix} w^{\frac{1}{2}}(1, N) x^T(1+i) \\ w^{\frac{1}{2}}(2, N) x^T(2+i) \\ \vdots \\ w^{\frac{1}{2}}(N, N) x^T(N+i) \end{pmatrix}, \quad i = \overline{0, 1},$$

$$\tilde{\Xi}_N = \begin{pmatrix} w^{\frac{1}{2}}(1, N) \xi^T(1) \\ w^{\frac{1}{2}}(2, N) \xi^T(2) \\ \vdots \\ w^{\frac{1}{2}}(N, N) \xi^T(N) \end{pmatrix}.$$

А так як

$$\underset{A}{\operatorname{Arg\,min}} Q(A, N) = \underset{A}{\operatorname{Arg\,min}} \|\tilde{\Xi}_N\|^2,$$

то згідно роботи [12] отримаємо явний вигляд шуканої оцінки

$$\hat{A}(N) = [\tilde{X}_{1, N}^+ \tilde{X}_{2, N+1}]^T + A_*(N) [E_n - \tilde{X}_{1, N}^+ \tilde{X}_{1, N}], \quad N \in \mathbb{N}, \quad (4)$$

де E_n - одинична матриця порядку n .

Конструювання рекурентних алгоритмів оцінювання. Перейдемо до побудови рекурентного представлення для оцінки $\hat{A}(N)$.

Теорема 1. Для оцінки (4) при некласичних припущеннях, які не гарантують її єдиність, методу найменших квадратів зі змінним фактором забування та з найменшою нормою відхилення від заданої точки “тяжіння” $A_*(N)$ у кожен момент часу N для лінійної дискретної динамічної системи (1) рекурентний алгоритм має такий вигляд:

$$\hat{A}(N+1) = \hat{A}(N) + [x(N+2) - \hat{A}(N)x(N+1)]x^T(N+1)R(N+1) + [A_*(N+1) - A_*(N)]P(N+1), \quad (5)$$

причому якщо $\delta(N+1) > 0$, то

$$\begin{cases} R(N+1) = \frac{1}{\lambda(N)} \left\{ R(N) - \frac{1}{\delta(N+1)} \left[R(N)x(N+1)x^T(N+1)P(N) + P(N)x(N+1)x^T(N+1)R(N) \right] + \right. \\ \left. + \frac{\gamma(N+1)}{\delta^2(N+1)} P(N)x(N+1)x^T(N+1)P(N) \right\}, \\ P(N+1) = P(N) - \frac{1}{\delta(N+1)} P(N)x(N+1)x^T(N+1)P(N), \end{cases} \quad (6)$$

а у протилежному випадку

$$\begin{cases} R(N+1) = \frac{1}{\lambda(N)} \left\{ R(N) - \frac{1}{\gamma(N+1)} R(N)x(N+1)x^T(N+1)R(N) \right\}, \\ P(N+1) = P(N), \end{cases} \quad (7)$$

з початковими умовами $\hat{A}(0) = A_*(0)$, $R(0) = \Theta_n$, $P(0) = E_n$,

де $\gamma(N+1) = \lambda(N) + x^T(N+1)R(N)x(N+1)$, $\delta(N+1) = x^T(N+1)P(N)x(N+1)$, Θ_n – нульова квадратна матриця порядку n .

Доведення. Неважко впевнитися, що справедливо $Q(A, N) = \sum_{i=1}^n Q_i(a_i, N)$, де

$$Q_i(a_i, N) = \sum_{k=1}^N w(k, N) \xi_i^2(k), \quad i = \overline{1, n}. \quad (8)$$

Останнє дозволяє стверджувати, що задача пошуку оцінки $\hat{A}(N)$ для матриці A системи (1) з функціоналом якості (3) розщеплюється на n задач знаходження оцінок $\hat{a}_i(N)$ для a_i методом найменших квадратів зі змінним фактором забування та з найменшою нормою відхилення від заданої точки “тяжіння” $a_{i*}(N)$ у кожен момент часу N для систем виду

$$x_i(k+1) = x^T(k)a_i + \xi_i(k), \quad k \in \mathbb{N},$$

з функціоналами якості (8), $i = \overline{1, n}$.

У свою чергу згідно роботи [11] для оцінок $\hat{a}_i(N)$ справедливий такий рекурентний алгоритм

$$\hat{a}_i(N+1) = \hat{a}_i(N) + R(N+1)x(N+1)[x_i(N+2) - \hat{a}_i^T(N)x(N+1)] + P(N+1)[a_{i*}(N+1) - a_{i*}(N)], \quad (9)$$

з початковою умовою $\hat{a}_i(0) = a_{i*}(0)$, $i = \overline{1, n}$,

причому якщо $\delta(N+1) > 0$, то

$$\begin{cases} R(N+1) = \frac{1}{\lambda(N)} \left\{ R(N) - \frac{1}{\delta(N+1)} \left[R(N)x(N+1)x^T(N+1)P(N) + P(N)x(N+1)x^T(N+1)R(N) \right] + \right. \\ \left. + \frac{\gamma(N+1)}{\delta^2(N+1)} P(N)x(N+1)x^T(N+1)P(N) \right\}, \\ P(N+1) = P(N) - \frac{1}{\delta(N+1)} P(N)x(N+1)x^T(N+1)P(N), \end{cases} \quad (10)$$

а у протилежному випадку

$$\begin{cases} R(N+1) = \frac{1}{\lambda(N)} \left\{ R(N) - \frac{1}{\gamma(N+1)} R(N)x(N+1)x^T(N+1)R(N) \right\}, \\ P(N+1) = P(N), \end{cases} \quad (11)$$

з початковими умовами $R(0) = \Theta_n$, $P(0) = E_n$.

Співвідношення (9) дозволяють стверджувати, що справедливо таке

$$\hat{A}^T(N+1) = \hat{A}^T(N) + R(N+1)x(N+1)[x(N+2) - \hat{A}(N)x(N+1)]^T + P(N+1)[A_*(N+1) - A_*(N)]^T,$$

з початковою умовою $\hat{A}^T(0) = A_*^T(0)$.

Після транспонування останнього співвідношення для оцінки $\hat{A}(N)$ отримаємо:

$$\hat{A}(N+1) = \hat{A}(N) + [x(N+2) - \hat{A}(N)x(N+1)]x^T(N+1)R(N+1) + [A_*(N+1) - A_*(N)]P(N+1), \quad (12)$$

з початковою умовою $\hat{A}(0) = A_*(0)$.

Об'єднання (12) з (10) та (11) дає шуканий рекурентний алгоритм. Доведення завершено.

Для контролю якості процесу оцінювання потрібно вміти також здійснювати рекурентний перерахунок відповідної зваженої залишкової суми квадратів $q(N) = Q(\hat{A}(N), N)$. Це дозволяє здійснити таке твердження.

Теорема 2. Для зваженої залишкової суми квадратів $q(N) = Q(\hat{A}(N), N)$ справедливо рекурентне представлення

$$q(N+1) = \begin{cases} \lambda(N)q(N), & \text{якщо } \delta(N+1) > 0, \\ \lambda(N) \left\{ q(N) + \frac{1}{\gamma(N+1)} \|x(N+2) - \hat{A}(N)x(N+1)\|^2 \right\}, & \text{у протилежному випадку,} \end{cases} \quad (13)$$

з початковою умовою $q(0) = 0$.

Доведення. Очевидно, що $q(N) = \sum_{i=1}^n q_i(N)$, де $q_i(N) = Q_i(\hat{a}_i(N), N)$, $i = \overline{1, n}$, $N = 0, 1, 2, \dots$. Але

згідно роботи [11] рекурентний алгоритм для $q_i(N)$ має вигляд

$$q_i(N+1) = \begin{cases} \lambda(N)q_i(N), & \text{якщо } \delta(N+1) > 0, \\ \lambda(N) \left\{ q_i(N) + \frac{1}{\gamma(N+1)} [x_i(N+2) - \hat{a}_i^T(N)x(N+1)]^2 \right\}, & \text{у протилежному випадку,} \end{cases}$$

з початковою умовою $q_i(0) = 0$, $i = \overline{1, n}$.

Тоді твердження теореми стає очевидним.

Висновок. В якості оцінки матриці параметрів A лінійної дискретної динамічної системи (1) при неklasичних припущеннях пропонується використовувати оцінку (4) методу найменших квадратів зі змінним фактором забування та з

найменшою нормою відхилення від заданої точки “тяжіння” $A_*(N)$ у кожен момент часу N . Для оцінки (4) отримано рекурент (5)-(7), який доповнено рекурентним представленням (13) для відповідної зваженої залишкової суми квадратів.

Список використаних джерел

1. Eykhoff P. System Identification: Parameter and State Estimation / P. Eykhoff. – Chichester, England: Wiley, 1974. – 555 p.
2. Ljung L. System Identification: Theory for the User / L. Ljung. – Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1987. – 544 p.
3. Hsia T.C. System Identification. Least-Squares Methods / T.C. Hsia. – Toronto: Lexington Books, 1977. – 165 p.
4. Moore E. H. On the reciprocal of the general algebraic matrix / E. H. Moore // Bull. American Mathematical Society. – 1920. – V. 26, № 9. – pp. 394 – 395.

References

1. EYKHOFF, P. (1974) *System Identification: Parameter and State Estimation*. Chichester, England: Wiley.
2. LJUNG, L. (1987) *System Identification: Theory for the User*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall.
3. HSIA, T.C. (1977) *System Identification. Least-Squares Method*. Toronto: Lexington Books.
4. MOORE, E. H. (1920) On the Reciprocal of the General Algebraic Matrix. *Bull. American Mathematical Society*. V. 26, № 9. pp. 394 – 395.

5. Penrose R. A generalized inverse for matrices / R. Penrose // *Proc. Cambridge Philoc. Soc.* – 1955. – V. 51, № 3. – pp. 406 – 413.
6. Albert A. Regression and the Moore-Penrose Pseudoinverse / A. Albert. – New York: Academic Press, 1972. – 180 p.
7. Слабоспицький О.С. Рекурентний алгоритм оцінювання методом найменших квадратів зі змінним фактором забування при некласичних припущеннях / О.С. Слабоспицький // *Вісник Київського університету. Серія: фіз.-мат. науки.* – 1999. – № 4. – С. 237-240.
8. Слабоспицький О.С. Рекурентне оцінювання нестационарних параметрів методом найменших квадратів зі змінним фактором забування при некласичних припущеннях / О.С. Слабоспицький // *Вісник Київського університету. Серія: фіз.-мат. науки.* – 2000. – № 1. – С. 282-285.
9. Слабоспицький О.С. Використання додаткової інформації в рекурентному оцінюванні параметрів систем з дискретним часом методом найменших квадратів при некласичних припущеннях / О.С. Слабоспицький // *Вісник Київського університету. Серія: фіз.-мат. науки.* – 2008. – № 4. – С. 179-182.
10. Слабоспицький О.С. Оцінювання нестационарних параметрів методом найменших квадратів зі змінним фактором забування та мінімальною нормою відхилення від точок “тяжіння” для систем при некласичних припущеннях / О.С. Слабоспицький // *Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія фіз.-мат. науки.* – 2012. – № 4. – С. 199-202.
11. Слабоспицький О.С. Рекурентне оцінювання нестационарних параметрів систем при некласичних припущеннях методом найменших квадратів зі змінним фактором забування та найменшою нормою відхилення від точок “тяжіння” / О.С. Слабоспицький // *Журнал обчислювальної та прикладної математики.* – 2012. – № 2 (108). – С. 59-65.
12. Слабоспицький О.С. Оцінювання параметрів лінійних дискретних динамічних систем методом найменших квадратів з мінімальним відхиленням від точок “тяжіння” при некласичних припущеннях / О.С. Слабоспицький // *Вісник Київського університету. Серія: фіз.-мат. науки.* – 2009. – № 4. – С. 135-138.
5. PENROSE, R. (1955) A Generalized Inverse for Matrices. *Proc. Cambridge Philoc. Soc.* V. 51, № 3. pp. 406 – 413.
6. ALBERT, A. (1972) *Regression and the Moore-Penrose Pseudoinverse*. New York: Academic Press.
7. SLABOSPITSKY, A.S. (1999) Recursive Algorithm of Least Squares Estimation with Variable Forgetting Factor under Nonclassical Assumptions. *Bulletin of University of Kiev. Series: Physics & Mathematics*. 4. pp. 237-240.
8. SLABOSPITSKY, A.S. (2000) Recursive Estimation of Nonstationary Parameters by the Least Squares Method with Variable Forgetting Factor under Nonclassical Assumptions. *Bulletin of University of Kiev. Series: Physics & Mathematics*. 1. pp. 282-285.
9. SLABOSPITSKY, A.S. (2008) Usage of Supplementary Information in the Recurrent Parameter Estimation of the Systems with Discrete Time by the Least Squares Method under Non-Classical Assumptions. *Bulletin of University of Kiev. Series: Physics & Mathematics*. 4. pp. 179-182.
10. SLABOSPITSKY, A.S (2012) Non-Stationary Parameter Estimation by the Least Squares Method with Variable Forgetting Factor and Minimal Deviation Norm from ‘Attraction’ Points for Systems under Non-Classical Assumptions. *Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series Physics & Mathematics*. 4. pp. 199-202.
11. SLABOSPITSKY, A.S (2012) Recurrent Non-Stationary Parameter Estimation of Systems under Non-Classical Assumptions by the Least Squares Method with Variable Forgetting Factor and Least Deviation Norm from ‘Attraction’ Points. *Journal of Computational & Applied Mathematics*. 2 (108). pp. 59-65.
12. SLABOSPITSKY, A.S (2009) Parameter Estimation of Linear Discrete Dynamic Systems by the Least Squares Method with the Minimum Deviation from ‘Attraction’ Points under Non-Classical Assumptions. *Bulletin of University of Kiev. Series: Physics & Mathematics*. 4. pp. 135-138.

Надійшла до редколегії 09.11.2016.

УДК 517:94; 532.5

Черній Д.І., к.ф.-м.н., доц.,

Про похідні для інтегральних представлень

Київський національний університет імені
Тараса Шевченка,
факультет комп'ютерних наук і кібернетики,
вул.Володимирська,64, м. Київ,
01033, Україна
e-mail: D_Cherniy@ukr.net

Dmytro Cherniy, Ph.D., associate professor

Derivatives of Integral Expressions

Taras Shevchenko National University of Kyiv,
Faculty of Computer Science & Cybernetic
64, Volodymyrska Str., Kyiv,
01033, Ukraine

e-mail: D_Cherniy@ukr.net

Для плоских нестационарних відірваних течій, розглянута комплексна форма запису інтегральних виразів для основних інтегральних характеристик течії, які мають параметричну залежність від часу - циркуляція швидкості і характеристична функція (комплексний потенціал течії). Представлені формули і вирази для визначення похідних по параметру (часу) для цих характеристик, з урахуванням руху і деформації обтічної непроникної границі а також, виникнення нових елементів непроникних границь - ліній розриву швидкостей (вихрових поверхонь) в точках їх відриву (на гострих частинах обтічного контуру).

Ключові слова: математична модель, вихрові методи, циркуляція, потенціал, характеристики відірваних течій

For plane nonstationary separated flows, the complex form of recording integral expressions of the main integral flow characteristics are presented. That expressions have a parametric time dependence is considered - velocity circulation and characteristic function (complex flow potential). Presented formulas and expressions of derivatives on the parameter (time) for these characteristics, taking into account the motion and deformation of the flowing impermeable boundary, as well as the appearance of new elements of impermeable boundaries - velocity discontinuity lines (vortex sheets) at the separation points (on the sharp edges of the streamlined contour). It is shown that in the case of separated flow, with barotropic motion of an ideal fluid under the action of a volume force field with a single-valued potential, the change in the circulation of velocity along a closed liquid circuit encompassing only the streamlined boundary is compensated by a change in circulation in the wake due to fluid separation from the streamlined boundary. The resulting expressions will be the basis for constructing computational technologies in hydromechanics.

Keywords: mathematical model, vortex method, circulation, potential, characteristics of separated flow

Статтю представив д.т.н., проф. Ф.Г.Гарашенко.

1. Вступ

При чисельному вирішенні ряду задач аеро / гідродинаміки (задач відривного обтікання несучих поверхонь, задач гідропружності, біоніки, ..) виникає необхідність обчислення динамічних і кінематичних характеристик течії які змінюються за часом. У багатьох випадках [1,7], в чисельних моделях, закони збереження і вирази для зміни характеристик виводилися вже із дискретизованих інтегральних виразів, в результаті були втрачені складові і

співмножники, що визначають суть фізичних явищ та процесів. Мета статті отримання аналітичних виразів з явними залежностями від фізичних факторів, що визначають суть відірваних течій ідеальної рідини.

2. Формальне представлення

Розглядається плоска течія в області зі змінною в часі непроникною границею,

представимо у вигляді гладкого розімкнутого контуру $L(t) = L_d(t) + L_v(t)$.

Течія породжується рухом (переміщенням і деформацією) непроникного гладкого розімкнутого контуру $L_d(t)$, для всіх точок якого визначені швидкості (вектор швидкості безперервно розподілений по контуру, Рис.1).

Вважаємо [1,3,6,7], що рух рідини поза тонкою рухливою непроникною границі $L_d(t)$ супроводжується виникненням на її гострих кінцівках відривної вихрової течії у вигляді тонких вихрових структур $L_v(t)$, які, для плоского випадку мають представлення як нескінченно тонкі, непроникні контури розриву дотичних швидкостей.

Така схематизація [1-3,7] дозволяє замінити вихрову течію в області (поза $L_d(t)$) на циркуляційну течію (зі збереженням інтегральних характеристик течії). Лінії розриву швидкостей $L_v(t)$ будуть інтерпретуватися як непроникні вільні границі - нові елементи границі $L(t) = L_d(t) + L_v(t)$ які виникають при відривному обтіканні границі $L_d(t)$. Формування нових елементів кордонів відбувається при відриві з кінцівок $L_d(t)$ тонкого вихрового шару $L_v(t)$. Рух гладкого розімкнутого контуру $L_v(t)$ визначається швидкістю $\vec{W}_v$, визначеною для всіх його точок.

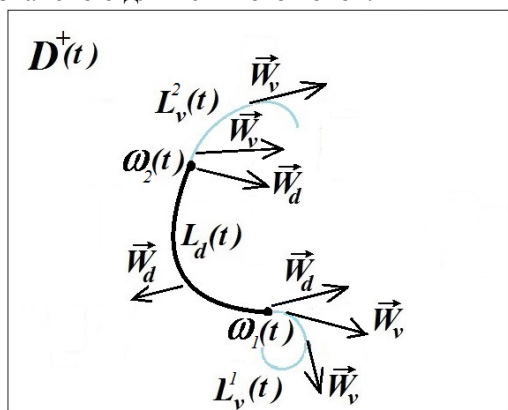


Рис.1

З причини того, що в точках сполучення границь $L_d(t)$ та $L_v(t)$, які є точками відриву $\omega_p(t)$, $p=1,2$, при їх русі, швидкості $\vec{W}_d(\omega_p) \neq \vec{W}_v(\omega_p)$, в загальному випадку, не збігаються (Рис.1.), будемо вважати, що, у всіх точках $\omega_p(t)$, $p=1,2$ відрив реалізується відповідно до умовою Бріллюена-Вілла [2]: «Крива, яка складається з контуру перешкоди і

контуру вільної границі в точці відриву має точку повернення або неперервну дотичну, в залежності від того, збігається чи не збігається точка відриву з критичною точкою потоку.»

При гладкому відриві вектор різниці швидкостей

$\vec{W}(\omega_p(s_v, t)) = \vec{W}_v(\omega_p(s_v)) - \vec{W}_d(\omega_p(s_p))$ буде

дотичним одночасно і до $L_d(t)$ і до $L_v(t)$, і визначає швидкість збільшення границі $L_v(t)$,

причому при

$$\left. \frac{ds_v(t)}{dt} \right|_{\omega=\omega_p} = |\vec{W}(\omega_p(s_v, t))| \quad \text{та} \quad \left| \frac{\partial \omega(s_v, t)}{\partial s_v} \right|_{\omega=\omega_p} = 1$$

$$\vec{W}(\omega_p(s_v, t)) = \frac{\partial \omega_p}{\partial s_v} \frac{ds_v(t)}{dt} \quad (1.1)$$

Таким чином, в площині комплексної змінної, визначена безперервна гладка лінія $L(t) = L_d(t) + L_v(t)$ складається з маркованих параметром s частинок, які в будь-який момент часу визначено своїми комплексними координатами

$$\omega_d(s, t) = x_d(s, t) + iy_d(s, t) \quad \text{і}$$

$$\omega_v(s, t) = x_v(s, t) + iy_v(s, t) \quad \text{для кожної з них.}$$

Переміщення лінії $L_d(t)$ визначається завданням безперервного розподілу в точках $\omega_d(s_d, t)$ що складаються із частинок S_d швидкості $\frac{d\omega_d(s, t)}{dt} = \vec{W}_d(\omega_d(s_d, t))$, а переміщення

частинок S_v які складають лінію $L_v(t)$ визначається завданням безперервно розподіленої на лінії частинок швидкості

$$\frac{d\omega_v(s, t)}{dt} = \vec{W}_v(\omega_v(s_v, t)) = \frac{1}{2} (V^+(\omega(s_v, t), t) + V^-(\omega(s_v, t), t)).$$

При такій схематизації течії в неодносвязной області (Рис.1), будь-яка характеристична функція буде залежною від часу (як від параметра). Комплексний потенціал течії, може бути представлений у вигляді [2,3,6,7,10,13]:

$$\Phi(z, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_d(t)} f_d(\omega, t) \ln(z - \omega) d\omega + \frac{1}{2\pi i} \int_{L_v(t)} f_v(\omega, t) \ln(z - \omega) d\omega = \quad (1.2)$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{s_1}^{s_2} f_d(\omega(s_d, t), t) \ln(z - \omega(s_d, t)) \frac{\partial \omega(s_d, t)}{\partial s_d} ds_d + \\ + \frac{1}{2\pi i} \sum_{p=1}^2 \int_{s_p(t_0)}^{s_p(t)} f_v(\omega(s_v, t), t) \ln(z - \omega(s_v, t)) \frac{\partial \omega(s_v, t)}{\partial s_v} ds_v$$

Для підінтегральної функції, у всіх точках ω_p , $p=1,2$. (гострих і кутових кінцівках $L_d(t)$) - точках сполучення

границь $L_d(t)$ і $L_v(t)$ виконується умова неперервності

$$f_v(\omega_p, t) = f_d(\omega_p, t). \quad (1.3)$$

В цьому випадку, комплексно спряжена швидкість течії має бути представлена у вигляді похідної від характеристичної функції:

$$\begin{aligned} \bar{V}(z, t) &= \frac{\partial \Phi}{\partial z} = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{L_d(t)} \frac{f_d(\omega, t)}{z - \omega} d\omega + \frac{1}{2\pi i} \sum_{p=1}^P \int_{L_v^p(t)} \frac{f_v(\omega, t)}{z - \omega} d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{s_{p-1}}^{s_p} \frac{f_d(\omega(s_d, t), t)}{z - \omega(s_d, t)} \frac{\partial \omega(s_d, t)}{\partial s_d} ds_d + \\ &+ \frac{1}{2\pi i} \sum_{p=1}^2 \int_{s_p(t_0)}^{s_p(t)} \frac{f_v(\omega(s_v, t), t)}{z - \omega(s_v, t)} \frac{\partial \omega(s_v, t)}{\partial s_v} ds_v \end{aligned} \quad (1.4)$$

Циркуляція швидкості по рідкому контуру $C(t)$, в будь-який момент часу (Рис.2),

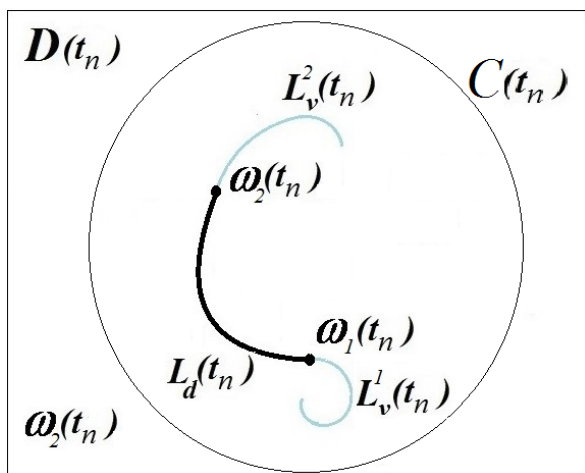


Рис.2.а

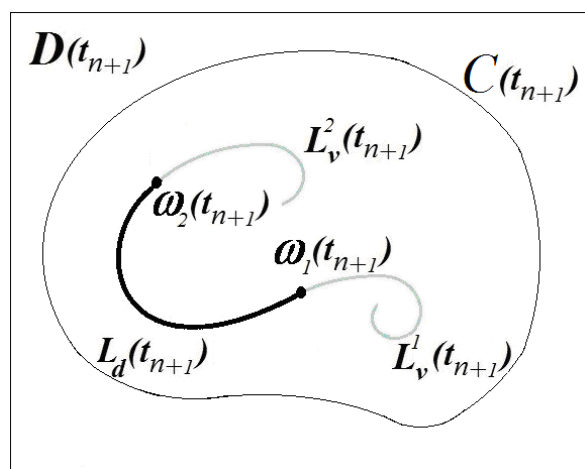


Рис.2.б

по замкнутому рідкому контуру $C(t)$ повністю охоплює границю $L(t) = L_d(t) + L_v(t)$:

$$\begin{aligned} \Gamma_0 &= \oint_C \bar{V}(\xi, t) d\xi = \oint_C \frac{d\xi}{2\pi i} \int_{L_d(t)+L_v(t)} \frac{f(\omega, t)}{\xi - \omega} d\omega = \\ &= \int_{L_d(t)+L_v(t)} f(\omega, t) d\omega = \\ &= \int_{s_{p-1}}^{s_p} f_d(\omega(s_d, t), t) \frac{\partial \omega(s_d, t)}{\partial s_d} ds_d + \\ &+ \sum_{p=1}^2 \int_{s_p(t_0)}^{s_p(t)} f_v(\omega(s_v, t), t) \frac{\partial \omega(s_v, t)}{\partial s_v} ds_v \end{aligned} \quad (1.5)$$

2. Про похідні для інтегральних виразів

Для гладко змінюючихся в часі характеристик течії вважається існуючим безперервних похідних по параметру t (за часом) для циркуляції і для потенціалу.

Так, для рідкого контуру $C(t)$, який повністю охоплює границю $L(t) = L_d(t) + L_v(t)$ в області течії (рис.2.), справедлива

Теорема (Кельвін, [5])

«При баротропному русі ідеальної рідини під дією поля об'ємних сил з однозначним потенціалом, циркуляція швидкості по замкнутому рідкому контуру не змінюється».

Тобто :

$$\frac{d}{dt} \Gamma_0 = \frac{d}{dt} \oint_{C(t)} \bar{V}(\xi, t) d\xi = 0 \quad (2.1)$$

Розглянемо зміну в часі матеріального контуру $C(t)$, який охоплює границю

$$L(t) = L_d(t) + L_v(t), \text{ Рис.3.}$$

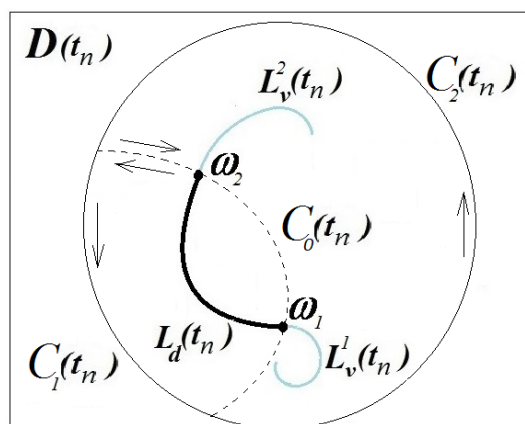


Рис.3.а

на підставі [5] має представлення в вигляді інтеграла від комплексно сполученої швидкості

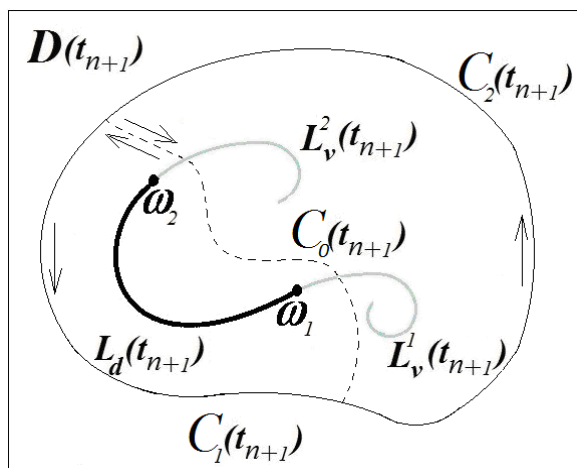


Рис.3.б

Нехай в момент часу $t = t_n$ контур $C(t)$ представляється у вигляді двох складових частин $C(t) = C_1(t) + C_2(t)$, (Рис.3 а). Введемо додатковий внутрішній матеріальний (рідкий) контур $C_0(t)$ так, щоб він в момент часу відділяв границю $L_d(t)$ від $L_v(t) = \sum_{p=1}^2 L_v^p(t)$. В наступний момент часу $t = t_{n+1}$ (Рис.3.б) всередині контуру $C_0(t) + C_1(t)$ будуть знаходитися не тільки обтічний контур, але і елементи контурів $\Delta L_v(t) = \sum_{p=1}^2 \Delta L_v^p(t)$. Таким чином, для замкнутих складових контурів $C_0(t) + C_1(t)$ та $C_0(t) + C_2(t)$ (де $C_0(t)$ проходиться в зворотному напрямку), також буде справедлива теорема Кельвіна про незмінність циркуляції швидкості по кожному з них.

$$\frac{d}{dt} \oint_{C_1(t)+C_0(t)} \bar{V}(\xi, t) d\xi = 0 \quad (2.2)$$

$$\frac{d}{dt} \oint_{C_2(t)+C_0(t)} \bar{V}(\xi, t) d\xi = 0 \quad (2.3)$$

При відривному обтіканні, при наявності потенціалу течії дану теорему доцільно переформулювати:

Теорема 1

«При відривному обтіканні з баротропним рухом ідеальної рідини під дією поля об'ємних сил з однозначним потенціалом, зміна циркуляції швидкості по замкнутому рідкому контуру, який

охоплює тільки обтічну границю, компенсується зміною циркуляції в сліді за рахунок відриву рідини з обтічної границі».

В силу чого (для плоского відривної течії з P точками відриву) справедливо

$$\frac{d}{dt} \int_{L_d(t)} f_d(\omega, t) d\omega + \sum_{p=1}^P f_d(\omega_p(s_v, t), t) \frac{\partial \omega_p}{\partial s_v} \frac{ds_v(t)}{dt} = 0 \quad (2.4)$$

або, в силу (1.1)

$$\frac{d}{dt} \int_{L_d(t)} f_d(\omega, t) d\omega = - \sum_{p=1}^P f_d(\omega_p(s_v, t), t) W(\omega_p(s_v, t)) \quad (2.5)$$

Доведення наведемо на прикладі плоскої відривної течії (при обтіканні гладкого контуру з $P = 2$ точками відриву).

Дійсно [5,7], з урахуванням (1.4), (1.5), і [14], з виразу для похідної від циркуляції

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \Gamma_0 &= \frac{d}{dt} \oint_{c(t)} \bar{V}(\xi, t) d\xi = \\ &= \frac{d}{dt} \oint_C \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{L_d(t)+L_v(t)} \frac{f(\omega(s, t), t)}{\xi - \omega} d\omega \right) d\xi = \\ &= \frac{d}{dt} \int_{L_d(t)} f_d(\omega(s, t), t) d\omega + \frac{d}{dt} \int_{\sum_{p=1}^2 L_v^p(t)} f_v(\omega(s, t), t) d\omega = \\ &= \frac{d}{dt} \int_{s_1}^{s_2} f_d(\omega(s_d, t), t) \frac{\partial \omega(s_d, t)}{\partial s_d} ds_d + \\ &+ \sum_{p=1}^2 \frac{d}{dt} \int_{s_p(t_0)}^{s_p(t)} f_v(\omega(s_v, t), t) \frac{\partial \omega(s_v, t)}{\partial s_v} ds_v = \\ &= \int_{s_1}^{s_2} \frac{d}{dt} \left(f_d(\omega(s_d, t), t) \frac{\partial \omega(s_d, t)}{\partial s_d} \right) ds_d + \\ &+ \sum_{p=1}^2 \int_{s_p(t_0)}^{s_p(t)} \frac{d}{dt} \left(f_v(\omega(s_v, t), t) \frac{\partial \omega(s_v, t)}{\partial s_v} \right) ds_v + \\ &+ \sum_{p=1}^2 f_v(\omega_p(s_v, t), t) \frac{\partial \omega_p(s_v, t)}{\partial s_v} \frac{ds_v(t)}{dt} \end{aligned} \quad (2.6)$$

В силу того, що на всіх елементах $d\omega_v = \frac{\partial \omega}{\partial s_v} ds_v$ вільної (вихровий) границі виконується теорема Кельвіна та [14], маємо

$$\frac{d}{dt} \left(f_v(\omega(s_v, t), t) \frac{\partial \omega(s_v, t)}{\partial s_v} ds_v \right) = 0. \quad (2.7)$$

При інтегруванні отримаємо, що

$$\int_{L_v^p(t)} \frac{d}{dt} \left(f_v(\omega(s_v, t), t) \frac{\partial \omega(s_v, t)}{\partial s_v} \right) ds_v = 0, \quad (2.8)$$

для усіх $L_v(t) = \sum_{p=1}^2 L_v^p(t),$

або, інакше

$$\sum_{p=1}^2 \int_{s_p(t_0)}^{s_p(t)} \frac{d}{dt} \left(f_v(\omega(s_v, t), t) \frac{\partial \omega(s_v, t)}{\partial s_v} \right) ds_v = 0. \quad (2.9)$$

З умови теореми Кельвіна

$$\begin{aligned} & \int_{s_{p-1}}^{s_p} \frac{d}{dt} \left(f_d(\omega(s_d, t), t) \frac{\partial \omega(s_d, t)}{\partial s_d} \right) ds_d + \\ & + \sum_{p=1}^2 \int_{s(t_0)}^{s_p(t)} \frac{d}{dt} \left(f_v(\omega(s_v, t), t) \frac{\partial \omega(s_v, t)}{\partial s_v} \right) ds + \\ & + \sum_{p=1}^2 f_v(\omega_p(s_v(t), t)) \frac{\partial \omega_p(s_v(t), t)}{\partial s_v} \frac{ds_v(t)}{dt} = 0 \end{aligned} \quad (2.10)$$

З урахуванням умов (1.3) і (2.3) отримаємо

$$\begin{aligned} & \int_{s_1}^{s_2} \frac{d}{dt} \left(f_d(\omega(s_d, t), t) \frac{\partial \omega(s_d, t)}{\partial s_d} \right) ds_d = \\ & = - \sum_{p=1}^2 f_d(\omega_p(s_v(t), t)) \frac{\partial \omega_p(s_v(t), t)}{\partial s_v} \frac{ds_v(t)}{dt} \end{aligned} \quad (2.11)$$

Де співмножники $\frac{\partial \omega(s, t)}{\partial s}$ в (2.8)-(2.11)

відповідають за розтягнення контурів $L_d(t), L_v(t)$, а співмножник $\frac{ds_v(t)}{dt}$ в (2.10)-(2.11) відповідає за приріст контуру $L_v(t)$ новими частинками.

З урахуванням (1.1), для (2.11) отримаємо

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \int_{L_d(t)} f_d(\omega, t) d\omega = \\ & = - \sum_{p=1}^2 f_d(\omega_p(s_v(t), t)) W(\omega_p(s_v(t))) \end{aligned} \quad (2.12)$$

Отриманий вираз (2.12) і доводить теорему.

Розглянемо вираз для похідної за параметром t (за часом) від потенціалу (1.2), в якому, можна диференціювати під знаком інтеграла. В силу того, що

$$\frac{\partial}{\partial t} \ln(z - \omega(t)) = - \frac{1}{z - \omega(t)} \frac{d\omega(t)}{dt}, \quad (2.13)$$

та $W_d(\omega_d(s_d, t)) = \frac{d\omega_d(s_d, t)}{dt}, \quad W_v(\omega_v(s_v, t)) = \frac{d\omega_v(s_v, t)}{dt}$

Отримаємо, що

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \Phi(z, t) = \frac{1}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial t} \int_{L_d(t)} f_d(\omega, t) \ln(z - \omega) d\omega + \\ & + \frac{1}{2\pi i} \sum_{p=1}^2 \frac{\partial}{\partial t} \int_{L_v^p(t)} f_v(\omega, t) \ln(z - \omega) d\omega = \\ & = \frac{1}{2\pi i} \int_{s_1}^{s_2} \ln(z - \omega(s_d, t)) \frac{\partial}{\partial t} \left(f_d(\omega, t) \frac{\partial \omega}{\partial s_d} \right) ds_d - \\ & - \frac{1}{2\pi i} \int_{s_{11}}^{s_2} \frac{W_d(\omega(s_d, t)) f(\omega, t) d\omega}{z - \omega(s_d, t)} + \\ & + \sum_{p=1}^2 \frac{1}{2\pi i} \int_{s_p(t_0)}^{s_p(t)} \ln(z - \omega(s_v, t)) \frac{\partial}{\partial t} \left(f_v(\omega, t) \frac{\partial \omega}{\partial s_v} \right) ds_v - \\ & - \sum_{p=1}^2 \frac{1}{2\pi i} \int_{s_p(t_0)}^{s_p(t)} \frac{W_v(\omega(s_v, t)) f(\omega, t) d\omega}{z - \omega(s_v, t)} + \\ & + \sum_{p=1}^2 f_d(\omega_p(s_v(t), t)) \ln(z - \omega_p(s_v(t))) \frac{\partial \omega_p(s_v(t))}{\partial s_v} \frac{ds_v(t)}{dt} \end{aligned} \quad (2.14)$$

Або, з урахуванням (1.1)

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \Phi(z, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{s_1}^{s_2} \ln(z - \omega(s_d, t)) \frac{\partial}{\partial t} \left(f_d(\omega, t) \frac{\partial \omega}{\partial s_d} \right) ds_d - \\ & - \frac{1}{2\pi i} \int_{s_{11}}^{s_2} \frac{W_d(\omega(s_d, t)) f(\omega, t) d\omega}{z - \omega(s_d, t)} + \\ & + \sum_{p=1}^2 \frac{1}{2\pi i} \int_{s_p(t_0)}^{s_p(t)} \ln(z - \omega(s_v, t)) \frac{\partial}{\partial t} \left(f_v(\omega_v, t) \frac{\partial \omega}{\partial s_v} \right) ds_v - \\ & - \sum_{p=1}^2 \frac{1}{2\pi i} \int_{s_p(t_0)}^{s_p(t)} \frac{W_v(\omega(s_v, t)) f(\omega, t) d\omega}{z - \omega(s_v, t)} + \\ & + \sum_{p=1}^2 f_d(\omega_p(s_v(t), t)) \ln(z - \omega_p(s_v(t))) W(\omega_p(s_v(t))) \end{aligned} \quad (2.15)$$

В силу того, що для елементів всієї (вихровий) границі $L_v(t)$, на підставі теореми Кельвіна виконується (2.7), третій доданок в правій частині (2.14) та (2.15) зникне, в силу чого,

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \Phi(z, t) = \\ & = \frac{1}{2\pi i} \int_{s_1}^{s_2} \ln(z - \omega(s_d, t)) \frac{\partial}{\partial t} \left(f_d(\omega_d, t) \frac{\partial \omega}{\partial s_d} \right) ds_d - \\ & - \frac{1}{2\pi i} \int_{s_1}^{s_2} \frac{W_d(\omega(s_d, t)) f(\omega, t) d\omega}{z - \omega(s_d, t)} + \\ & - \sum_{p=1}^2 \frac{1}{2\pi i} \int_{s_p(t_0)}^{s_p(t)} \frac{W_v(\omega(s_v, t)) f_v(\omega, t) d\omega}{z - \omega(s_v, t)} + \\ & + \sum_{p=1}^2 f_v(\omega_p(s_v(t), t)) \ln(z - \omega_p(t)) \frac{\partial \omega_p(s_v(t))}{\partial s_v} \frac{ds_v(t)}{dt} \end{aligned} \quad (2.16)$$

Або, з урахуванням (1.1):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \Phi(z, t) = & \\ = \frac{1}{2\pi i} \int_{s_1}^{s_2} \ln(z - \omega(s_d, t)) \frac{\partial}{\partial t} \left(f_d(\omega_d, t) \frac{\partial \omega}{\partial s_d} \right) ds_d - & \\ - \frac{1}{2\pi i} \int_{s_1}^{s_2} \frac{W_d(\omega(s_d, t)) f(\omega, t) d\omega}{z - \omega(s_d, t)} + & \\ - \sum_{p=1}^2 \frac{1}{2\pi i} \int_{s_p(t_0)}^{s_p(t)} \frac{W_v(\omega(s_v, t)) f(\omega, t) d\omega}{z - \omega(s_v, t)} + & \\ + \sum_{p=1}^2 f_d(\omega_p(s_v, t), t) \ln(z - \omega_p(t)) W(\omega_p(s_v, t)) & \end{aligned} \quad (2.17)$$

Перший доданок в (2.15) визначає зміну циркуляційної складової на контурі $L_d(t)$, другий доданок залежить від швидкостей переміщення всіх точок самого контуру $L_d(t)$, третій доданок визначає зміну циркуляційної складової на контурі $L_v(t)$, четвертий доданок залежить від швидкостей переміщення всіх точок контуру $L_v(t)$, а п'ятий доданок враховує внесок від швидкості породження нових (вихрових) елементів контуру $L_v(t)$ на гострих кінцівках контуру $L_d(t)$.

Список використаних джерел

1. Белоцерковский С.М. Отрывное и безотрывное обтекание тонких крыльев идеальной жидкостью. / С.М.Белоцерковский, М.И.Ништ, М.: Наука. – 1978. – 351 с.
2. Биркгоф Г. Струи, следы и каверны. / Г.Биркгоф, Э.Сарантонелло, М.: Мир. – 1964. – 466с.
3. Ван-Дайк М. Альбом течений жидкости и газа. / М. Ван-Дайк. – М.: Мир. – 1986. – 113с.
4. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. / Ф.Д.Гахов. – М.: Наука. - 1987. - 640с.
5. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. / Л.Г. Лойцянский. – М.: Наука. – 1970. – 904с.
6. Черний Д.И. Вычислительные технологии для метода дискретных вихрей. / Д.И. Черний, Вісник Національного технічного університету «ХПІ», Серія «Математичне моделювання в техніці та технологіях». - Харків, НТУ «ХПІ». – 2016. – № 6 (1178). – С.116-123.
7. Сарпкая Т. Вычислительные методы вихрей. Фримановская лекция (1988) / Т. Сарпкая // Современное машиностроение: Серия А. – 1989. – №10. – С. 1-60.

Результати та висновки

У припущенні виконання умов теореми Кельвіна (про збереження циркуляції) і умов Вілла [2] (при відриві вихрових шарів), отримано аналітичні вирази для похідних по параметру (за часом) від характеристичних функцій відривної течії (циркуляції швидкості і потенціалу течії), з явною залежністю від прояву фізичних ефектів - руху і деформації обтічного контуру, руху і деформації вільної границі (сліду), зміни циркуляції на обтічному контурі, зміною циркуляції на вільній границі, і додання циркуляції на вільній границі (в сліді) за рахунок породження нових елементів вільної границі при відриві рідини з обтічної контуру.

Таким чином, похідна по часу від характеристичної функції (від комплексного потенціалу течії поза контуром $L(t) = L_d(t) + L_v(t)$), має інтегральні залежності від зміни циркуляції на обтічному контурі, від розподілених швидкостей руху його точок, від розподілених швидкостей переміщення точок сліду і від швидкості породження нових циркуляційних елементів в сліді. Отримані вирази можуть стати основою для побудови обчислювальних технологій в гідромеханіці.

References

1. BELOTSEKOVSKY S.M., NISHN M.I. (1978) Separated and No-Separated flow of thin wings in ideal fluid. *Moscow: Nauka*.
2. BIRKGOFF G., ZARANTONELLO E.H. (1957) Gets, Wakes and Cavities. *Moscow: Nauka*.
3. VAN-DYKE (1986) Album of fluid and gas flows. *Moscow: Mir*.
4. GAKHOV F.D. (1987) Boundary problems. *Moscow: Nauka*.
5. LOITSYANSKY L.G. (1970) Mechanics of liquid and gas. *Moscow: Nauka*.
6. CHERNIY D. (2016) Computational technologies of discrete vortices. *Bulletin of Kh.T.U*, no. 6, pp.116-123.
7. SARPKEYA T. (1988) Computational methods of vortices. *Freeman's Lecture, ASME J.Fluids Engng.*, 111, pp. 5-52.

Надійшла до редколегії 10.07.2016

УДК 004.42:510.69

Шкільняк С. С., д. ф.-м. н., проф.,
Волковицький Д. Б., аспірант

Логіки безкванторно-функціональних рівнів

Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, пр-т
Глушкова, 4д,
e-mail: ttp@unicyb.kiev.ua

S.S. Shkilniak, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof.,
D.B. Volkovytskyi, Postgraduate Student

Logics of free-quantifier functional levels

Taras Shevchenko National University of Kyiv,
03680, Kyiv, Glushkova st., 4d,
e-mail: ttp@unicyb.kiev.ua

Досліджено логіки часткових квазіарних предикатів безкванторно-функціональних рівнів. Виділено різновиди таких логік із композиціями слабкої рівності та строгої рівності. Описано семантичні моделі й мови цих логік, досліджено їх семантичні властивості, запропоновано низку числень секвенційного типу. На базі теорем повноти цих числень для таких логік отримано розв'язність проблем наявності логічного наслідку для скінчених множин формул, істинності й виконуваності формул.

Ключові слова: логіка, предикат, суперпозиція, формула, терм.

In this paper we study new classes of program-oriented logical formalisms – logics of partial quasi-ary predicates of free-quantifier levels. These logics occupy intermediate position between propositional logic and first-order composition-nominative logics. We consider three classes of this logics: free-quantifier functional logics (FQFL), free-quantifier functional logics with composition of weak equality = (FQFLE) and free-quantifier functional logics with composition of strong equality $\equiv$ (FQFLSE). We define semantic models and languages of the introduced logics and consider their semantic properties. We describe properties of the composition superposition, weak equality and strong equality. We consider normal forms of terms and formulas, properties of logical consequence relations for sets of formulas. These properties form the semantic base for construction a number of sequent type calculi for logics of free-quantifier levels. On the base of the completeness theorem of sequent calculi we obtain an algorithmic solvability of problems for free-quantifier logics: problems of existence of logical consequence for finite sets of formulas, irrefutability problems and identically truth problems for formulas.

Key words: logic, predicate, superposition, formula, term.

Статтю представив д. ф.-м. н., проф. Буй Д.Б.

Наш час характеризується бурхливим розвитком інформаційних технологій і проникненням їх в усі сфери людської діяльності. Це зумовлює розширення сфери застосування математичної логіки. Різноманітні логічні системи з великим успіхом використовуються для розв'язання широкого кола задач інформатики і програмування. Такі системи зазвичай базуються на класичній логіці предикатів. Проте класична логіка має [1, 2] низку істотних обмежень. Тому набуває актуальності проблема побудови нових, програмно-орієнтованих логічних формалізмів. Таку побудову доцільно проводити на базі спільного для логіки й програмування композиційно-номінативного підходу. Логіки, збудовані на основі цього підходу, названо композиційно-номінативними.

Метою даної роботи є дослідження нових класів композиційно-номінативних логік – безкванторних логік часткових квазіарних предикатів. Такі логіки займають проміжне становище між пропозиційною та першопорядковими логіками, в них не використовуються характерні для першопорядкових логік композиції квантифікації.

Рівні безкванторних логік (див. [3]):

- реномінативний (РНЛ);
- реномінативний з слабкою рівністю (РНЛР);
- реномінативний з строгою рівністю (РНЛРС);
- безкванторно-функціональний (БКФЛ);
- безкванторно-функціональний з слабкою рівністю (БКФЛР);
- безкванторно-функціональний з строгою рівністю (БКФЛРС).

РНЛ описано в [1, 2], РНЛР та РНЛРС досліджено в [3, 4]. БКФЛ та БКФЛР є фрагментами першопорядкових логік функціонального рівня та функціонального рівня зі слабкою рівністю. Для випадку еквітонних предикатів такі першопорядкові логіки досліджено в [1]. БКФЛР та БКФЛРС розглядались в [4, 5]. В даній роботі зосередимося на вивченні семантичних аспектів БКФЛ, БКФЛР та БКФЛРС; зокрема, покажемо розв'язність проблем наявності логічного наслідку для скінчених множин формул, проблем істинності й виконуваності для формул.

Поняття, які в роботі не визначаються, тлумачимо в сенсі [1, 2, 4].

1. Композиційні системи логік безкванторно-функціональних рівнів

Семантичними моделями логік безкванторно-функціональних рівнів є композиційні предикатні системи вигляду $({}^V A, Fn^A \cup Pr^A, C)$. Тут Fn^A та Pr^A – це множини V - A -квазіарних функцій та V - A -квазіарних предикатів, C – множина композицій.

Базовими композиціями БКФЛ є логічні зв'язки $\neg$ і $\vee$, суперпозиції $S^{\bar{x}}$, спеціальні 0-арні композиції (функції) деномінації $'v$, де $v \in V$.

Базовими композиціями БКФЛР є $\neg$, $\vee$, $S^{\bar{x}}$, $'v$ та композиція слабкої рівності $=$.

Базовими композиціями БКФЛРС є $\neg$, $\vee$, $S^{\bar{x}}$, $'v$ та композиція строгої (точної) рівності $\equiv$.

Дамо визначення логічних зв'язок через області істинності й хибності відповідних предикатів:

$$\begin{aligned} T(\neg P) &= F(P); & F(\neg P) &= T(P); \\ T(P \vee Q) &= T(P) \cup T(Q); & F(P \vee Q) &= F(P) \cap F(Q). \end{aligned}$$

Нехай F^A – клас квазіарних функцій вигляду $f: {}^V A \rightarrow R$. Параметричну $(n+1)$ -арну композицію суперпозиції $S^{v_1, \dots, v_n}: F^A \times (Fn^A)^n \rightarrow F^A$ задамо так.

$$\begin{aligned} \text{Для всіх } d \in {}^V A \text{ маємо } S^{v_1, \dots, v_n}(f, g_1, \dots, g_n)(d) = \\ = f(d \nabla [v_1 \mapsto g_1(d), \dots, v_n \mapsto g_n(d)]). \end{aligned}$$

Будемо розглядати суперпозиції двох типів:

- суперпозиції вигляду $(Fn^A)^{n+1} \rightarrow Fn^A$;
- суперпозиції вигляду $Pr^A \times (Fn^A)^n \rightarrow Pr^A$.

Тут Fn^A та Pr^A – класи V - A -квазіарних функцій ${}^V A \rightarrow A$ та V - A -квазіарних предикатів ${}^V A \rightarrow \{T, F\}$.

Суперпозиція без параметрів діє як тотожне відображення: $S(f) = f$, де $f \in Fn^A \cup Pr^A$.

0-арні композиції – функції деномінації (розіменування) $'v$, де $v \in V$, задаємо так: $'v(d) = d(v)$.

Композиції слабкої рівності $=$ та строгої рівності $\equiv$ задаємо так. Для кожних $f, g \in Fn^A$ та $d \in {}^V A$:

$$(f, g)(d) = \begin{cases} T, & \text{якщо } f(d) \downarrow, g(d) \downarrow, f(d) = g(d), \\ F, & \text{якщо } f(d) \downarrow, g(d) \downarrow, f(d) \neq g(d), \\ \text{невизначене,} & \text{якщо } f(d) \uparrow \text{ або } g(d) \uparrow; \end{cases}$$

$$\equiv(f, g)(d) = \begin{cases} T, & \text{якщо } f(d) \downarrow, g(d) \downarrow, f(d) = g(d) \\ & \text{або } f(d) \uparrow, g(d) \uparrow; \\ F, & \text{якщо } f(d) \downarrow, g(d) \downarrow, f(d) \neq g(d) \\ & \text{або } f(d) \downarrow, g(d) \uparrow \\ & \text{або } f(d) \uparrow, g(d) \downarrow. \end{cases}$$

Зауважимо, що композиція $\equiv$ в усіх випадках має результатом тотальний предикат.

Композиції $S^{\bar{v}}$ та $=$ зберігають [1] тотальність та еквітонність V - A -квазіарних функцій і предикатів; проте $\equiv$ еквітонність не зберігає. Справді, нехай f та g еквітонні, $d' \supseteq d$, $f(d) \uparrow$, $g(d) \uparrow$ та $f(d) \downarrow \neq g(d) \downarrow$. Тоді $\equiv(f, g)(d) = T$ та $\equiv(f, g)(d') = F$.

Таким чином, на рівні БКФЛРС логіки еквітонних предикатів не розглядаємо.

Опишемо основні властивості композицій $S^{\bar{v}}$.

$S \neg$) Дистрибутивність суперпозиції щодо $\neg$:

$$S^{\bar{v}}(\neg P, \bar{f}) = \neg S^{\bar{v}}(P, \bar{f}).$$

$S \vee$) Дистрибутивність суперпозиції щодо $\vee$:

$$S^{\bar{v}}(P \vee Q, \bar{f}) = S^{\bar{v}}(P, \bar{f}) \vee S^{\bar{v}}(Q, \bar{f}).$$

SS) Згортка суперпозицій: (тут $\varphi \in Fn^A \cup Pr^A$, введені позначення $\bar{u}, \bar{t}, \bar{x}, \bar{r}, \bar{w}, \bar{v}, \bar{s}$ для $u_1, \dots, u_n$; $t_1, \dots, t_n$; $x_1, \dots, x_k$; $r_1, \dots, r_k$; $w_1, \dots, w_k$; $v_1, \dots, v_m$; $s_1, \dots, s_m$):

$$\begin{aligned} S^{\bar{u}, \bar{x}}(S^{\bar{x}, \bar{v}}(\varphi, \bar{r}, \bar{s}), \bar{t}, \bar{w}) &= S^{\bar{u}, \bar{x}, \bar{v}}(\varphi, \bar{t}, S^{\bar{u}, \bar{x}}(r_1, \bar{t}, \bar{w}), \\ &\dots, S^{\bar{u}, \bar{x}}(r_k, \bar{t}, \bar{w}), S^{\bar{u}, \bar{x}}(s_1, \bar{t}, \bar{w}), \dots, S^{\bar{u}, \bar{x}}(s_m, \bar{t}, \bar{w})). \end{aligned}$$

CN) Згортка імен (тут $\varphi \in Fn^A \cup Pr^A$):

$$\begin{aligned} S^{x_1, \dots, x_m, v_1, \dots, v_n}(\varphi, x_1, \dots, x_m, g_1, \dots, g_n) = \\ = S^{v_1, \dots, v_n}(\varphi, g_1, \dots, g_n). \end{aligned}$$

SD) Згортка неістотних імен для функцій $'x$:

$$S^{v_1, \dots, v_n}('x, g_1, \dots, g_n) = 'x \text{ за умови } x \notin \{\bar{v}\}.$$

SF) Спрощення для функцій $'x$:

$$S^{x, v_1, \dots, v_n}('x, f, g_1, \dots, g_n) = f.$$

CU) Згортка за неістотним іменем (тут маємо $\varphi \in Fn^A \cup Pr^A$, x неістотне для φ):

$$S^{x, v_1, \dots, v_n}(\varphi, f, g_1, \dots, g_n) = S^{v_1, \dots, v_n}(\varphi, g_1, \dots, g_n).$$

SI) Елімінація суперпозиції без параметрів:

$$S(\varphi) = \varphi \text{ (тут } \varphi \in Fn^A \cup Pr^A).$$

Властивості SS , CN , CU , SI формулюються для квазіарних функцій та предикатів, а властивості SD , SF – лише для квазіарних функцій.

Укажемо властивості композицій рівності.

Вважаємо $P \in Pr^A$ та $h, f, f_1, \dots, f_n, g, g_1, \dots, g_n \in Fn^A$.

Rf) кожний предикат $\neq(f, f)$ є неспростовним;

кожний предикат $\equiv(f, f)$ є тотожно істинним.

Sm) $\neq(f, g)(d) = \neq(g, f)(d)$ та $\equiv(f, g)(d) = \equiv(g, f)(d)$ для кожного $d \in {}^V A$; це означає рівність предикатів $\neq(f, g)$ і $\neq(g, f)$ та предикатів $\equiv(f, g)$ і $\equiv(g, f)$.

Tr) для кожного $d \in {}^V A$ маємо:

$$\neq(f, g)(d) = T \text{ та } \neq(g, h)(d) = T \Rightarrow \neq(f, h)(d) = T;$$

$$\equiv(f, g)(d) = T \text{ та } \equiv(g, h)(d) = T \Rightarrow \equiv(f, h)(d) = T.$$

Як наслідок маємо: кожний предикат вигляду $\equiv(f, g) \& \equiv(g, h) \rightarrow \equiv(f, h)$ неспростовний а вигляду $\equiv(f, g) \& \equiv(g, h) \rightarrow \equiv(f, h)$ – тотожно істинний.

Із визначень випливає: якщо $\equiv(f, g)$ та $\equiv(g, h)$ тотожно істинні, то $\equiv(f, h)$ тотожно істинний.

Водночас для композицій $\equiv$ аналогічне твердження невірне: якщо $\equiv(f, g)$ та $\equiv(g, h)$ неспростовні, то $\equiv(f, h)$ може бути спростовним.

Справді, візьмемо $f(d) \neq h(d)$ для деякого $d \in {}^V A$, та нехай функція g – всюди невизначена.

Дистрибутивність суперпозиції щодо рівності:

$$SE) S^{\bar{v}}((f, g), \bar{r}) = (S^{\bar{v}}(f, \bar{r}), S^{\bar{v}}(g, \bar{r}));$$

$$S^{\bar{v}}(\equiv(f, g), \bar{r}) = \equiv(S^{\bar{v}}(f, \bar{r}), S^{\bar{v}}(g, \bar{r})).$$

Тепер властивості, пов'язані з заміною рівних:

EF) $\equiv(f, g) \rightarrow \equiv(S^{z, \bar{v}}(h, f, \bar{r}), S^{z, \bar{v}}(h, g, \bar{r}))$ є неспростовним предикатом;

$\equiv(f, g) \rightarrow \equiv(S^{z, \bar{v}}(h, f, \bar{r}), S^{z, \bar{v}}(h, g, \bar{r}))$ є тотожно істинним предикатом;

$$EP) \equiv(f, g) \rightarrow (S^{z, \bar{v}}(P, f, \bar{r}) \leftrightarrow S^{z, \bar{v}}(P, g, \bar{r})) \text{ та}$$

$\equiv(f, g) \rightarrow (S^{z, \bar{v}}(P, f, \bar{r}) \leftrightarrow S^{z, \bar{v}}(P, g, \bar{r}))$ є неспростовними предикатами.

2. Мови логік безкванторно-функціональних рівнів та її інтерпретації

Композиційна система $(A, Fn^A \cup Pr^A, C)$ визначає композиційну алгебру V - A -квазіарних функцій і предикатів $(Fn^A \cup Pr^A, C)$ та алгебру (алгебраїчну систему) даних $(A, Fn^A \cup Pr^A)$. Побудова композиційної алгебри дає змогу визначити мову логіки: терми такої алгебри є формулами мови.

Алфавіт мови БКФЛ: множини предметних імен (змінних) V та тотально неістотних предметних імен $U \subseteq V$; множина $Dns = \{v | v \in V\}$ деномінаційних символів (ДНС); множини Fns та Ps функціональних (ФНС) та предикатних символів (ПС); множина $\{\neg, \vee, S^{\bar{v}}, 'v\}$ символів базових композицій. Множину $\sigma = Fns \cup Ps$ назовемо сигнатурою мови БКФЛ.

Множини термів Tr і формул Fr вводимо так.

T0. $Dns \cup Fns \subseteq Tr$, такі терми – атомарні.

T1. Нехай $\tau, t_1, \dots, t_n \in Tr$; тоді $S^{v_1, \dots, v_n} \tau t_1 \dots t_n \in Tr$.

Ф0. Кожний ПС є формулою (атомарною).

Ф1. Нехай $\Phi, \Psi \in Fr, t_1, \dots, t_n \in Tr$; тоді

$$S^{v_1, \dots, v_n} \Phi t_1 \dots t_n \in Fr, \neg \Phi \in Fr, \vee \Phi \Psi \in Fr.$$

У випадках БКФЛР та БКФЛРС визначення множини Tr термів таке ж, як для мови БКФЛ.

Для БКФЛР до символів базових композицій додаємо $\equiv$. Визначення множини Fr формул задається пп. Ф0, Ф1, до якого додаємо:

$$\Phi E) t, s \in Tr \Rightarrow \equiv ts \in Fr.$$

Для БКФЛРС до символів базових композицій додаємо $\equiv$. Визначення множини Fr формул задається пп. Ф0, Ф1, до якого додаємо:

$$\Phi ES) t, s \in Tr \Rightarrow \equiv ts \in Fr.$$

Надалі вживаємо скорочені подання термів та формул, використовуючи інфіксну форму, коми й дужки, символи похідних композицій $\&, \rightarrow, \leftrightarrow$.

Замість $\equiv ts$ та $\equiv ts$ також пишемо $t = s$ та $t \equiv s$.

Інтерпретуємо мови БКФЛ, БКФЛР, БКФЛРС на композиційних системах квазіарних функцій та предикатів відповідного типу. Символи Fns та Ps позначають базові функції та базові предикати в Fn^A та Pr^A , зокрема, символи $'v$ позначають функції деномінації $'v$. Для опису цього позначення задамо тотальне однозначне відображення $I : Dns \cup Fns \cup Ps \rightarrow Fn^A \cup Pr^A$. При цьому $I('v) = 'v$ для кожного $'v \in Dns$, кожне $z \in U$ неістотне для всіх $g \in (Fns \cup Ps)$. Далі продовжимо I до відображення інтерпретації $I : Tr \cup Fr \rightarrow Fn^A \cup Pr^A$ так:

$$IT) I(S^{v_1, \dots, v_n} \tau t_1 \dots t_n) = S^{v_1, \dots, v_n} (I(\tau), I(t_1), \dots, I(t_n));$$

$$IF) I(S^{v_1, \dots, v_n} \Phi t_1 \dots t_n) = S^{v_1, \dots, v_n} (I(\Phi), I(t_1), \dots, I(t_n));$$

$$I(\neg \Phi) = \neg(I(\Phi)), I(\vee \Phi \Psi) = \vee(I(\Phi), I(\Psi)).$$

У випадку мови БКФЛР додаємо:

$$IFE) I(\equiv ts) = \equiv(I(t), I(s)).$$

У випадку мови БКФЛРС додаємо:

$$IFS) I(\equiv ts) = \equiv(I(t), I(s)).$$

Трійку $J = (CS, \sigma, I)$ назовемо інтерпретацією мови БКФЛ (БКФЛР, БКФЛРС) сигнатури σ .

Інтерпретації мови також позначаємо (A, I) .

Предикат чи функцію, що є значенням формули чи терма ϕ при інтерпретації J , позначимо ϕ_J .

Ім'я $x \in V$ неістотне для формули чи терма ϕ , якщо при кожній J ім'я x неістотне для ϕ_J .

Формула Φ неспростовна при інтерпретації J , (позн. $J \models \Phi$), якщо предикат Φ_J – неспростовний.

Формула Φ неспростовна (позн. $\models \Phi$), якщо Φ є неспростовною при кожній інтерпретації J .

Формула Φ виконувана при інтерпретації J , якщо предикат Φ_J – виконуваний. Формула Φ виконувана, якщо Φ виконувана при деякій J .

Формула Φ тотожно істинна при інтерпретації J (позн. $J \models_{id} \Phi$), якщо Φ_J – тотожно істинний.

Формула Φ тотожно істинна (позн. $\models_{id} \Phi$), якщо Φ тотожно істинна при кожній J .

Поняття тотожно істинної формули змістовне лише для БКФЛРС, адже їх побудова неможлива без $\equiv$. Зокрема, $\models_{id} t \equiv s \leftrightarrow s \equiv t$ та $\models_{id} t \equiv t$. Водночас у випадках БКФЛ та БКФЛР множина тотожно істинних формул порожня (інтерпретуємо кожні ПС та ФНС як всюди невизначену функцію).

3. Семантичні властивості формул

На множині формул можна ввести [2, 4] низку відношень логічного наслідку. Спочатку задамо відношення наслідку між двома множинами формул при фіксованій J . Нехай $\Gamma, \Delta \subseteq Fr$. Позначимо $\bigcap_{\Phi \in \Gamma} T(\Phi_J), \bigcap_{\Psi \in \Delta} F(\Psi_J), \bigcup_{\Psi \in \Delta} T(\Psi_J), \bigcup_{\Phi \in \Gamma} F(\Phi_J)$ відповідно як $T^\vee(\Gamma_J), F^\wedge(\Delta_J), T^\vee(\Delta_J), F^\wedge(\Gamma_J)$.

$\Delta \in IR$ -наслідком Γ при J (позн. $\Gamma \models_{ID} \Delta$), якщо $T^\vee(\Gamma_J) \cap F^\wedge(\Delta_J) = \emptyset$.

$\Delta \in T$ -наслідком Γ при J (позн. $\Gamma \models_T \Delta$), якщо $T^\vee(\Gamma_J) \subseteq T^\vee(\Delta_J)$.

$\Delta \in F$ -наслідком Γ при J (позн. $\Gamma \models_F \Delta$), якщо $F^\wedge(\Delta_J) \subseteq F^\wedge(\Gamma_J)$.

$\Delta \in TF$ -наслідком Γ при J (позн. $\Gamma \models_{TF} \Delta$), якщо $T^\vee(\Gamma_J) \subseteq T^\vee(\Delta_J)$ та $F^\wedge(\Delta_J) \subseteq F^\wedge(\Gamma_J)$.

Відповідні відношення логічного наслідку визначаємо за схемою:

$\Gamma \models_* \Delta$, якщо $\Gamma \models_* \Delta$ для кожної J .

Маємо такі співвідношення:

$\models_{TF} = \models_T \cap \models_F$; $\models_{TF} \subseteq \models_T \subseteq \models_{IR}$; $\models_{TF} \subseteq \models_F \subseteq \models_{IR}$.

Окремим випадком відношень для множин формул є відповідні відношення для пари формул: $\Phi \models_* \Psi$ та $\Phi \models_* \Psi$, де $\Phi, \Psi \in Fr$.

Відношення логічного наслідку для пари формул індукують відношення логічної еквівалентності. Відношення $\sim_{IR}, \sim_T, \sim_F, \sim_{TF}$ визначаємо за схемою: $\Phi \sim_* \Psi$, якщо $\Phi \models_* \Psi$ та $\Psi \models_* \Phi$.

Відношення еквівалентності при інтерпретації J задаємо так: $\Phi \sim_J \Psi$, якщо $\Phi \models_J \Psi$ та $\Psi \models_J \Phi$.

Особливу роль мають відношення $\models_{IR}$ та $\sim_{IR}$, вони традиційно позначаються [1] як $\models$ та $\sim$. Це пов'язано з тим фактом, що логічні зв'язки $\rightarrow$ та $\leftrightarrow$ узгоджуються з відношеннями $\models_{IR}$ та $\sim_{IR}$:

$\Phi \models_{IR} \Psi \Leftrightarrow \models \Phi \rightarrow \Psi$; $\Phi \sim_{IR} \Psi \Leftrightarrow \models \Phi \leftrightarrow \Psi$.

Дуже важливим є відношення $\sim_{TF}$: $\Phi \sim_{TF} \Psi \Leftrightarrow \Leftrightarrow T(\Phi_J) = T(\Psi_J)$ та $F(\Phi_J) = F(\Psi_J) \Leftrightarrow \Phi_J = \Psi_J$.

Нетривіальним для БКФЛРС є співвідношення між $\models_{id} \Phi \rightarrow \Psi$ і $\Phi \models_{TF} \Psi$, між $\models_{id} \Phi \leftrightarrow \Psi$ і $\Phi \sim_{TF} \Psi$. При цьому для БКФЛ та БКФЛР $\{\Phi \mid \models_{id} \Phi\} = \emptyset$.

Теорема 1. Маємо $\models_{id} \Phi \rightarrow \Psi \Rightarrow \Phi \models_{TF} \Psi$ та $\models_{id} \Phi \leftrightarrow \Psi \Rightarrow \Phi \sim_{TF} \Psi$; зворотні твердження невірні.

Семантичні властивості формул індуковані відповідними властивостями композицій та записуються аналогічно, проте замість рівності предикатів фігурує строга еквівалентність формул.

$S \rightarrow) S^\vee(\neg \Phi, \bar{t}) \sqsubseteq_{TF} \neg S^\vee(\Phi, \bar{t})$;

$S \vee) S^\vee(\Phi \vee \Psi, \bar{t}) \sqsubseteq_{TF} S^\vee(\Phi, \bar{t}) \vee S^\vee(\Psi, \bar{t})$;

$CN(\Phi) S^{x, \bar{v}}(\Phi, x, \bar{t}) \sqsubseteq_{TF} S^\vee(\Phi, \bar{t})$;

$SI(\Phi) S(\Phi) \sim_{TF} \Phi$.

$CU(\Phi) S^{x, \bar{v}}(\Phi, s, \bar{t}) \sqsubseteq_{TF} S^\vee(\Phi, \bar{t})$, якщо $x \in v(\Phi)$;

$SS(\Phi) S^{\bar{u}, \bar{x}}(S^{\bar{x}, \bar{v}}(\Phi, \bar{r}, \bar{s}), \bar{t}, \bar{w}) \sqsubseteq_{TF}$

$\sqsubseteq_{TF} S^{\bar{u}, \bar{x}, \bar{v}}(\Phi, \bar{t}, S^{\bar{u}, \bar{x}}(r_1, \bar{t}, \bar{w}), \dots, S^{\bar{u}, \bar{x}}(s_m, \bar{t}, \bar{w}))$.

Властивості SS, SI, CN, CU для функцій та властивості SDD, SDF індукують відповідні властивості термів, які для БКФЛ подаємо [1, 4] у вигляді відповідної теореми (теорема 4 [4]).

Для БКФЛРС такі властивості подаємо так:

$STS) \models_{id} S^{\bar{u}, \bar{x}}(S^{\bar{x}, \bar{v}}(\tau, \bar{r}, \bar{s}), \bar{t}, \bar{w}) \equiv$

$\equiv S^{\bar{u}, \bar{x}, \bar{v}}(\tau, \bar{t}, S^{\bar{u}, \bar{x}}(r_1, \bar{t}, \bar{w}), \dots, S^{\bar{u}, \bar{x}}(s_m, \bar{t}, \bar{w}))$;

$CNTS) \models_{id} S^{x, \bar{v}}(\tau, x, \bar{t}) \equiv S^\vee(\tau, \bar{t})$;

$CUTS) \models_{id} S^{x, \bar{v}}(\tau, t, \bar{t}) \equiv S^\vee(\tau, \bar{t})$, якщо $x \in v(\tau)$;

$SITS) \models_{id} S(\tau) \equiv \tau$;

$SDS) \models_{id} S^\vee(x, \bar{t}) \equiv x$, де $x \notin \{\bar{v}\}$;

$SFS) \models_{id} S^{x, \bar{v}}(x, \tau, \bar{t}) \equiv \tau$, якщо $x \in v(\tau)$.

Для БКФЛР у відповідних властивостях ST, CNT, CUT, SD, SF, SIT пишемо $\models$ замість $\models_{id}$.

Властивості композиції строгої рівності:

$Rf_s) \models_{id} t \equiv t$;

$Sm_s) t \equiv s \sim_{TF} s \equiv t$;

$Tr_s) t \equiv s, s \equiv r \models_{TF} t \equiv r$;

$EFS) t \equiv s \models_{TF} S^{\bar{v}, z}(\tau, \bar{r}, t) \equiv S^{\bar{v}, z}(\tau, \bar{r}, s)$.

$EPS_L) t \equiv s, S^{\bar{v}, z}(\Phi, \bar{r}, t) \models_{TF} S^{\bar{v}, z}(\Phi, \bar{r}, s)$.

Для формул EFS можна подати лише в ослабленому вигляді: $t \equiv s \models_{IR} (S^{\bar{v}, z}(\Phi, \bar{r}, t) \leftrightarrow S^{\bar{v}, z}(\Phi, \bar{r}, s))$.

$SES) S^\vee(s \equiv r, \bar{t}) \sqsubseteq_{TF} S^\vee(s, \bar{t}) \equiv S^\vee(r, \bar{t})$.

Для БКФЛР у відповідних властивостях Sm, Tr, EF, EP, SE пишемо $\equiv$ замість $\equiv$ та $\sim_{IR}$ замість $\sim_{TF}$. Властивість Rf записуємо так: $\models t = t$.

Основою еквівалентних перетворень формул є теорема еквівалентності ($\sim$ – одне з $\sim_T, \sim_F, \sim_{TF}, \sim_{IR}$).

Теорема 2. Нехай Φ' отримано з формули Φ заміною деяких входжень $\Phi_1, \dots, \Phi_n$ на $\Psi_1, \dots, \Psi_n$.

1) Якщо $\Phi_1 \sim_{TF} \Psi_1, \dots, \Phi_n \sim_{TF} \Psi_n$, то $\Phi \sim \Phi'$

2) Якщо $\Phi_1 \sim_{IR} \Psi_1, \dots, \Phi_n \sim_{IR} \Psi_n$, то $\Phi \sim_{IR} \Phi'$.

Для $\sim_T$ та $\sim_F$ теорема 5 невірна (див. [2]).

Для множин формул маємо теорему заміни еквівалентних ($\models$ – одне з $\models_T, \models_F, \models_{TF}, \models_{IR}$):

Теорема 3. 1) Нехай $\Phi \sim_{TF} \Psi$, тоді $\Phi, \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow \Psi, \Gamma \models \Delta$ та $\Gamma \models \Delta, \Phi \Leftrightarrow \Gamma \models \Delta, \Psi$.

2) Нехай $\Phi \sim_{IR} \Psi$, тоді $\Phi, \Gamma \models_{IR} \Delta \Leftrightarrow \Psi, \Gamma \models_{IR} \Delta$ та $\Gamma \models_{IR} \Delta, \Phi \Leftrightarrow \Gamma \models_{IR} \Delta, \Psi$.

Кожну формулу мови БКФЛ (мови БКФЛР, БКФЛРР) можна звести до класичноподібного вигляду, коли символи суперпозиції застосовні тільки до символів базових функцій і базових предикатів.

Терм мови БКФЛРС нормальний, якщо:

– всі його символи суперпозиції (якщо вони є) застосовані тільки до ФНС;

– в усіх його символах суперпозиції (якщо вони є) згорнуті неістотні імена й виконані спрощення згідно з CNTS, CUTS, SITS, SDS, SFS.

Подібним чином визначаємо нормальні терми мови БКФЛР (для спрощення використовуємо CNT, CUT, SIT, SD, SF) і мови БКФЛ (див. [1, 4]).

Формула Ψ мови БКФЛ (мови БКФЛР, мови БКФЛРР) нормальна, або в нормальній формі, якщо в усіх її символах суперпозиції згорнуті неістотні імена й виконані спрощення та усі символи суперпозиції застосовані тільки до ФНС чи ПС.

Це означає, що в нормальній формулі усі її терми нормальні, усі символи суперпозиції застосовані тільки до ФНС чи ПС та в них згорнуті неістотні імена й виконані належні спрощення.

Теорема 4. Для кожної Φ можна збудувати нормальну формулу Ψ таку: $\Phi \sim_{TF} \Psi$.

Використовуючи $S\rightarrow$ та $S\vee$, просуваємо символи суперпозиції вглиб формули. Нехай Φ – формула мови БКФЛРР. Згідно SS Φ та STS, зортаємо символи суперпозиції; використовуючи SES, проносимо $\equiv$ через суперпозицію. При появі відповідної ситуації виконуємо спрощення згідно з CN Φ , CU Φ , CNTS, CUTS, SITS, SDS, SFS. Згідно теореми еквівалентності та зазначених властивостей, на кожному кроці таких перетворень отримуємо формулу, еквівалентну попередній.

Аналогічно доводимо для БКФЛ та БКФЛР.

4. Відношення логічного наслідку для множин формул та побудова секвенційних числень

Властивості відношень логічного наслідку для множин формул БКФЛ, БКФЛР, БКФЛРС описано в [4]. Найперше, це властивості пропозиційного рівня: монотонність відношень $\models_{TF}$, $\models_T$, $\models_F$, $\models_{IR}$, властивості декомпозиції формул, умови наявності відповідного логічного наслідку. Властивості декомпозиції формул віднесемо до властивостей переходу.

Властивості, пов'язані з суперпозицією, безпосередньо відтворюють відповідні семантичні властивості, пов'язані з еквівалентністю формул. Віднесемо їх до властивостей переходу.

Розглянемо властивості, пов'язані з композицією слабкої рівності.

Rf індукує достатню умову наявності $\models_{IR}$:

$C_{RfW}) \Gamma \models_{IR} t = t, \Delta$.

Із Sm отримуємо ($\models$ – одне з $\models_T$, $\models_F$, $\models_{TF}$, $\models_{IR}$):

$SmW) t = s, \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow t = s, s = t, \Gamma \models \Delta$.

Із Tr маємо транзитивність слабкої рівності:

$TrW) t = s, s = r, \Gamma \models_{IR} \Delta \Leftrightarrow t = s, s = r, t = r, \Gamma \models_{IR} \Delta$.

Водночас (див. [4]) для відношень $\models_T$, $\models_F$, $\models_{TF}$ транзитивність слабкої рівності порушується.

Отже, для БКФЛР адекватним залишається лише відношення $\models_{IR}$.

Властивість SE індукує властивості дистрибутивності суперпозиції відносно рівності для $\models_{IR}$; EP індукує властивості заміни рівних для $\models_{IR}$.

Розглянемо властивості, пов'язані з композицією строгої рівності. Rf_s індукує достатню умову наявності кожного з $\models_{IR}$, $\models_T$, $\models_F$, $\models_{TF}$:

$C_{RfS}) \Gamma \models t = t, \Delta$.

На основі Sm_s та Tr_s отримуємо:

$SmS) t \equiv s, \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow t \equiv s, s \equiv t, \Gamma \models \Delta$;

$TrS) t \equiv s, s \equiv r, \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow t \equiv s, s \equiv r, t \equiv r, \Gamma \models \Delta$.

SES індукує властивості дистрибутивності суперпозиції відносно рівності для $\models_{IR}$, $\models_T$, $\models_F$, $\models_{TF}$: $\models_{TF} : \models_{IR}$; EPS індукує властивості заміни рівних.

Усі пов'язані з рівністю властивості, окрім C_{RfW} та C_{RfS} , віднесемо до властивостей переходу.

Для БКФЛ, БКФЛР, БКФЛРС побудовано [5] низку числень секвенційного типу.

Властивості відношень логічного наслідку для множин формул є семантичною основою побудови для цих відношень в БКФЛ, БКФЛР, БКФЛРС низки числень секвенційного типу. Властивості наявності логічного наслідку індукують умови замкненості секвенції, властивості переходу індукують відповідні секвенційні форми.

Секвенційні числення безкванторно-функціональних логік можна розглядати як фрагменти відповідних числень першопорядкових логік квазіарних предикатів функціональних рівнів. Такі першопорядкові числення збудовано [1] для відношення $\models_{IR}$ логік еквітонних предикатів функціонального рівня (числення FZN), та функціонального рівня з композицією слабкої рівності (числення FZNE). Проте трактувати описане в [5] числення FC_E для БКФЛР як фрагмент відповідного першопорядкового числення FZNE можна з певним обмеженням: в [1] числення з рівністю трактуються як окремий випадок прикладних секвенційних числень із множиною власних аксіом для рівності, а в побудованих в [5] численнях властивості композиції рівності описуються за допомогою відповідних секвенційних форм.

На рівні БКФЛ отримано такі числення:

– числення FLR формалізує $\models_{TF}$.

– числення FL формалізує $\models_T$.

– числення FR формалізує $\models_F$.

– числення FC формалізує $\models_{IR}$.

На рівні БКФЛР маємо числення FC_E , яке формалізує відношення $\models_{IR}$.

На рівні БКФЛРС отримано такі числення.

– числення $F_E LR$ формалізує $\models_{TF}$.

– числення $F_E L$ формалізує $\models_T$.

- числення $F_E R$ формалізує $\models_F$.
- числення $F_E C$ формалізує $\models_{IR}$.

Для запропонованих числень наведено базові секвенційні форми та умови замкненості секвенцій, описано побудову секвенційного дерева, доведено теореми коректності та повноти.

Теорема 5 (коректності та повноти). $\Gamma \models \Delta \Leftrightarrow$ секвенція $\vdash \Gamma \rightarrow \Delta$ вивідна у відповідному численні.

Тут $\models$ – одне з $\models_{IR}$, $\models_T$, $\models_F$, $\models_{TF}$.

На основі теорем повноти отримуємо, що для безкванторних логік алгоритмічно розв'язними є проблеми наявності відповідного логічного наслідку для скінчених множин формул та проблеми істинності й виконуваності для формул.

Теорема 6. 1. Нехай множини формул Γ та Δ мови БКФЛР є скінченими. Тоді алгоритмічно розв'язною є така проблема: $\Gamma \models_{IR} \Delta$.

2. Нехай множини формул Γ та Δ мови БКФЛ (мови БКФЛРС) є скінченими. Тоді алгоритмічно розв'язними є наступні проблеми: $\Gamma \models_{TF} \Delta$; $\Gamma \models_T \Delta$; $\Gamma \models_F \Delta$; $\Gamma \models_{IR} \Delta$.

Теорема 7. 1. Для формул мови БКФЛРС алгоритмічно розв'язними є проблеми неспростованості $\models \Phi$ та тотожно істинності $\models_{id} \Phi$.

2. Для формул мови БКФЛ та мови БКФЛР алгоритмічно розв'язною є проблема неспростованості $\models \Phi$.

Розв'язність цих проблем впливає з того, що

у випадку безкванторних логік для скінченної секвенції $\vdash \Gamma \rightarrow \Delta$, зокрема, для 1-формульної секвенції $\vdash \Phi$, будемо замкнене чи незамкнене скінченне секвенційне дерево.

Наслідок. Для формул мови БКФЛ (БКФЛР, БКФЛРС) алгоритмічно розв'язною є проблема виконуваності.

Справді, Φ виконувана $\Leftrightarrow \neg \Phi$ спростовна.

Висновки

Досліджено композиційно-номінативні логіки часткових квазіарних предикатів безкванторно-функціональних рівнів. Виділено різновиди таких логік із композицією слабкої рівності та композицією строгої рівності. Описано семантичні моделі й мови цих логік. Наведено властивості композицій суперпозиції, слабкої рівності й строгої рівності, семантичні властивості формул. Розглянуто нормальні форми термів та формул, властивості відношень логічного наслідку для множин формул. Такі властивості є семантичною основою побудови низки числень секвенційного типу. Використовуючи теореми повноти секвенційних числень, для безкванторних логік отримано алгоритмічну розв'язність проблем наявності логічного наслідку для скінчених множин формул, проблем істинності й виконуваності для формул.

References

Список використаних джерел

1. Нікітченко М.С. Математична логіка та теорія алгоритмів / М.С. Нікітченко, С.С. Шкільняк. – Київ: ВПЦ Київський університет, 2008. – 528 с.
2. Нікітченко М.С. Прикладна логіка / М.С. Нікітченко, С.С. Шкільняк. – Київ: ВПЦ Київський університет, 2013. – 278 с.
3. Шкільняк С.С. Реномінативні логіки квазіарних предикатів / С.С. Шкільняк, Д.Б. Волковицький // Комп'ютерна математика. – 2016. – Вып. 1 – С. 46–57.
4. Шкільняк С.С. Композиційно-номінативні логіки безкванторних рівнів / С.С. Шкільняк, Д.Б. Волковицький // Проблеми програмування. – 2016. – № 2–3. – С. 48–62.
5. Шкільняк С.С. Системи логічного виведення в логіках безкванторно-функціональних рівнів / С.С. Шкільняк, Д.Б. Волковицький // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Сер.: фіз.-мат. науки. – 2016. – Вип. 2. – С. 153–158.

1. NIKITCHENKO, M. and SHKILNIAK, S. (2008). *Matematychna lohika ta teoriya alhorytmiv*. Kyiv: VPC Kyivskyi Universytet.
2. NIKITCHENKO, M. and SHKILNIAK, S. (2013). *Prykladna lohika*. Kyiv: VPC Kyivskyi Universytet.
3. SHKILNIAK, S. and VOLKOVYTSKYI, D. (2016). Renominative logics of quasiary predicates. In *Computer mathematics*, 1, p. 46–57.
4. SHKILNIAK, S. and VOLKOVYTSKYI, D. (2016). Composition-nominative logics of free-quantifier levels. In *Problems in programming*, № 2–3, p. 48–62.
5. SHKILNIAK, S. and VOLKOVYTSKYI, D. (2016). Systems of logical reasoning in logics of free-quantifier functional levels. In *Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series: Physics & Mathematics*. No2, P. 153–158.

Надійшла до редколегії 15.06.16

РАДІОФІЗИКА

УДК 535.375

Григорук В.І.¹, д.ф.-м.н., проф.,
Сердега І.В.², інженер,
Фелінський Г.С.³, д.ф.-м.н.

**Смуга лазерної генерації та поріг ВКР
підсилення в одномодових волокнах,
легованих TiO_2**

Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 83000, м. Київ, пр-т.
Глушкова 4г,

¹ e-mail: grygoruk02@ukr.net

² e-mail: ivsedega@yandex.ru

³ e-mail: felinskyi.gs@gmail.com

V. I. Grygoruk¹, Dr. Sci., Professor,
I.V. Serdeha² engineer,
G. S. Felinskyi³, Dr. Sci.

**Laser generation band and Raman gain
threshold in TiO_2 doped singlemode fiber**

Taras Shevchenko National University of Kyiv,
83000, Kyiv, Glushkova st., 4d,

¹ e-mail: grygoruk02@ukr.net

² e-mail: ivsedega@yandex.ru

³ e-mail: felinskyi.gs@gmail.com

Проаналізовані особливості ВКР генерації і ширини смуги підсилення світла в одномодовому волокні SiO_2TiO_2 . Запропонований спектроскопічний метод визначення профілю ВКР підсилення за даними поперечного перерізу спонтанного комбінаційного розсіювання світла в TiO_2 легovanому волокні. Представлені дані числових розрахунків смуги генерації і порога підсилення комбінаційного розсіювання в TiO_2 легovanому одномодовому волокні. Показано, що смуга TiO_2 лазерної генерації може бути майже вдвічі ширшою за смугу лазерної генерації в стандартному GeO_2 легovanому волокні.

Ключові слова: поріг ВКР підсилення, ВКР лазер, профіль підсилення, Гаусова декомпозиція, нелінійно-оптичне підсилення.

The features of Raman lasing and generation bandwidth in SiO_2TiO_2 single-mode fiber are analyzed. The spectroscopic method for determination of the Raman gain profile from the spontaneous Raman cross-section in TiO_2 doped fiber is proposed. It allows us to give the almost exact approximation of the experimental data using Gaussian multi-mode decomposition. The applied aspect of decomposition profiles based on the Levenberg-Marquardt method was used in our modeling. Numerical results on lasing band and Raman gain threshold in TiO_2 doped single-mode fiber is presented. It is shown the TiO_2 lasing band may be almost twice wider of the lasing band in standard GeO_2 doped fiber because of the gain maximums at the Stokes shift on the 430 cm^{-1} (13THz) and 900 cm^{-1} (27 THz), accordantly. Therefore, this fiber can be used for both low-power lasers for the signal and to generate additional pumping sources for fiber Raman amplifiers.

Key Words: Raman gain threshold, Raman lasing, gain profile, Gaussian decomposition, nonlinear optical amplification

Статтю представив д.ф.-м.н. Савенков С.М.

Вступ

Германій-силікатні одномодові волокна успішно використовуються як для підсилення оптичних сигналів на ефекті вимушеного комбінаційного розсіювання (ВКР), так і для волоконних лазерів [1,2]. Докладний аналіз порога ВКР генерації і ширини смуги підсилення в цих одномодових волокон був наведений в [3]. Тим не менш, до цих пір мало вивчені інші типи волокон, такі як TiO_2 леговане (SiO_2TiO_2) одномодове кварцове волокно.

Спектри як спонтанного комбінаційного розсіювання (СКР) світла, так і ВКР в оптичних волокнах є нерегулярним континуумом, що містить надзвичайно широкі ($\geq 100\text{ cm}^{-1} \approx 3,3\text{ THz}$) фонові смуги (наприклад, рис. 1) у всьому діапазоні стоксових зсувів понад 1000 cm^{-1} . Крім того, високоякісне ВКР підсилення світла з дуже низьким рівнем власного шуму вже реалізоване в смузі частот від 10 ТГц при застосуванні помпування на декількох довжинах хвиль.

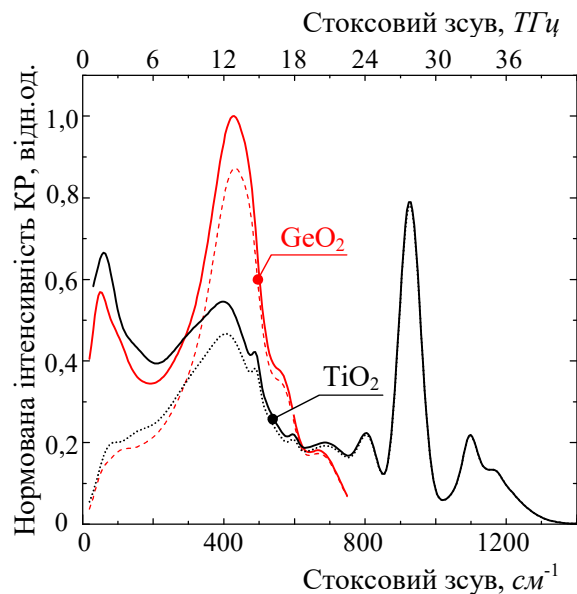


Рис. 1 Спектри СКР (суцільні лінії) та профіль ВКР підсилення (пунктир) TiO_2 легovanого волокна у порівнянні з відповідними даними для германій-силікатного одномодового волокна.

Проте, такий «дифузний» характер ліній КР, які мають ширину більше 100 cm^{-1} , викликає необхідність застосування спеціальних спектроскопічних методів для моделювання ВКР профілів підсилення.

Основи моделювання та результати

Теоретичні основи аналізу ВКР профілю підсилення

Профіль ВКР підсилення не залежить від температури [3], і його можна отримати із спектра спонтанного комбінаційного розсіювання, зокрема, для SiO_2TiO_2 одномодового волокна

$$g_R(\nu) = \sigma_0(\nu) \cdot \frac{\lambda_s^3}{c^2 h A_{\text{eff}}^{ps} n_p^2}, \quad (1)$$

де c – швидкість світла, h – стала Планка, A_{eff}^{ps} – ефективна площа області перекриття сигналу та накачки.

Залежний від T поперечний переріз $\sigma_T(\nu)$ спонтанного КР відноситься до нульового (за Кельвінін) поперечного перерізу $\sigma_0(\nu)$ як

$$\sigma_0(\nu) = \sigma_T(\nu) / [n_B(\nu, T) + 1], \quad (2)$$

де $n_B(\nu, T) = [\exp(h\nu / k_B T) - 1]^{-1}$ – фактор Бозе-Ейнштейна.

Різницю між волоконним ВКР профілем підсилення та стоксовим спектром КР за

Таблиця 1

Результати декомпозиції (набір A_i , $\omega_{v,i}$ та Γ_i) для ВКР профілю підсилення в GeO_2 легovanому кварцовому волокні за допомогою 8 Гаусових компонент (діапазон від 20 cm^{-1} до 750 cm^{-1})

№ моди	GeO_2 $g_{R\text{max}}=6,3^a \text{ (BT}\cdot\text{KM)}^{-1}$		
	A_i	$\omega_i [\text{cm}^{-1}]$	$\Gamma_i [\text{cm}^{-1}]$
1	0,057	49,5	28,6
2	0,117	89,8	51,0
3	0,129	155,7	73,1
4	0,327	298,8	112,7
5	0,922	439,1	90,9
6	0,064	478,8	23,0
7	0,233	572,5	43,0
8	0,195	672,6	80,1

^a. Значення максимуму ВКР підсилення взяті із роботи [4]

кімнатної температури добре видно на рис.1 на прикладі GeO_2 легovanого та TiO_2 легovanого одномодових кварцових волокон. Всі спектри СКР та профілі ВКР на рис. 1 нормовані на максимум інтенсивності $I_{\text{max}}(\text{GeO}_2)$ головного піка на 430 cm^{-1} у спектрі спонтанного стоксового випромінювання у GeO_2 легovanому волокні. Абсолютний максимум інтенсивності $I_{\text{max}}(\text{TiO}_2)$ у дуже багатосмуговому спектрі спонтанного стоксового випромінювання у TiO_2 легovanому волокні розташований на частоті 930 cm^{-1} .

Відношення $I_{\text{max}}(\text{GeO}_2)/I_{\text{max}}(\text{TiO}_2) = 1,3042$ знаходилось безпосереднім порівнянням спектрів спонтанного стоксового випромінювання і на цьому значенні засновані результати наступного моделювання та наведених кількісних оцінок параметрів досліджуваних волокон.

Результати багатомодової декомпозиції ВКР профілю підсилення

Всі лінії коливального спектра в плавленому кварці надзвичайно широкі. При неоднорідному розширенні фононних коливань смуга спектра описується Гаусовим профілем, проте в разі однорідного розширення форма смуги має вигляд чистого осцилятора (Лоренцовий тип). Така спектроскопічна класифікація є основою розкладання і інтерпретації експериментального спектра підсилення комбінаційного розсіювання світла.

Наш попередній аналіз показує, що точність гаусової апроксимації спектра в середньому на порядок краща, ніж точність осциляторного

наближення. Тому профіль ВКР підсилення розкладався на гаусові компоненти, які мають вигляд:

$$g_R(\omega) = \sum_{i=1}^{N_m} A_i \exp \left[-\frac{(\omega - \omega_{v,i})^2}{\Gamma_i^2} \right], \quad (3)$$

де N_m – кількість компонент декомпозиції, вибір якої залежить від ширини спектрального діапазону ($N_m=14$ у [3] для діапазону $0 - 1500 \text{ см}^{-1}$), $\omega_{v,i}$ – центральна частота i -ого гаусового профілю, параметр $\Gamma_i \approx 0,6 \text{ FWHM}_i$, де FWHM_i – повна ширина смуги на половині від максимуму для i -ого гаусового профілю, A_i – амплітуда.

Таблиця 2

12-компонентна Гаусова декомпозиція ВКР профілю підсилення у TiO_2 легованому кварцовому волокні (діапазон від 20 см^{-1} до 1400 см^{-1})

№ моди	TiO_2 $g_{Rmax}=4.8^b \text{ (Вт}\cdot\text{км)}^{-1}$		
	A_i	$\omega_i [\text{см}^{-1}]$	$\Gamma_i [\text{см}^{-1}]$
1	0,11	67,2	38,4
2	0,13	129,9	75,2
3	0,53	380,9	215,2
4	0,09	417,3	55,7
5	0,07	492,8	14,2
6	0,03	599,1	16,1
7	0,19	711,6	94,4
8	0,21	811,1	40,8
9	1,00	927,4	44,3
10	0,13	1097,0	25,8
11	0,02	1173,1	19,8
12	0,17	1134,7	114,9

^b За нашими оцінками у порівнянні із GeO_2 одномодовим волокном (рис.1).

Результат декомпозиції профілю ВКР підсилення в TiO_2 легованому кварцовому волокні наведені на рис. 2. Числові значення параметрів апроксимації, тобто набір A_i , $\omega_{v,i}$ та Γ_i представлені окремо для профілю ВКР підсилення світла у стандартному GeO_2 легованому кварцовому волокні у таблиці 1, а в таблиці 2 – для ВКР профілю у досліджуваному TiO_2 легованому кварцовому волокні.

В нашій роботі використаний прикладний аспект декомпозиції ВКР профілів. За мету була вибрана побудова, по можливості, найпростішої функції $g_R(\omega)$, яка б відповідала експериментальному профілю ВКР підсилення з максимальною точністю.

Оскільки досягнення максимальної відповідності експериментальним даним розглядалось як основне завдання декомпозиції, то в нашому моделюванні використана комп'ютерна процедура нелінійної апроксимації методом Левенберга-Марквардта. Цей метод використовує алгоритм пошуку мінімуму суми найменших квадратів методом швидкого спуску до квадратичної мінімізації і дозволяє отримати дуже хороші результати в практичній апроксимації спектра ВКР підсилення світла, як можна побачити на рис. 2.

Звернімо увагу, що переважна більшість експериментальних точок вимірюного спектра розташовуються безпосередньо на суцільних лініях розрахункових кривих. Лише в кількох ізольованих точках спектра спостерігається

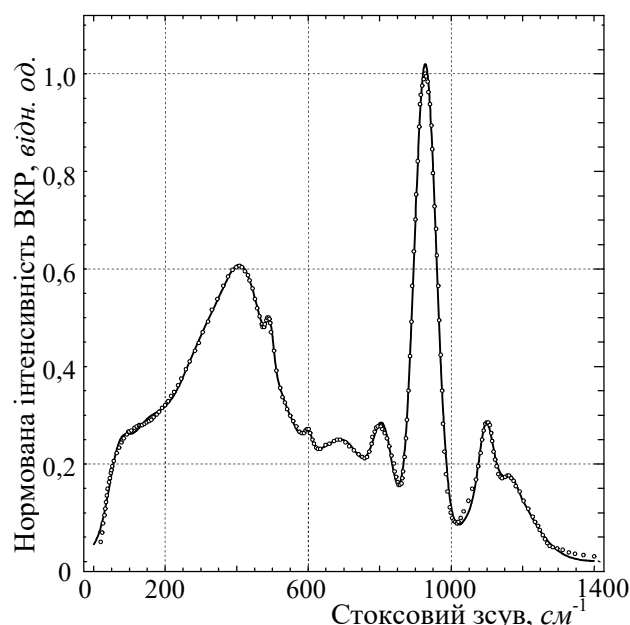


Рис. 2 Експериментальний профіль ВКР підсилення (світлі кола) у TiO_2 легованому кварцовому волокні та результат його апроксимації (суцільна лінія) шляхом декомпозиції на 12 гаусових компонент.

відхилення експериментальних даних більше 1% від розрахункових кривих $g_R(\omega)$. Отже представлену апроксимацію можна вважати майже точною, оскільки помилки обчислень є істотно меншими за типову точність вимірювання спектрів.

Дві області спектра а саме $200-600 \text{ см}^{-1}$ і $800-1000 \text{ см}^{-1}$ на профілях посилення комбінаційного розсіювання, де спостерігаються найбільше від-

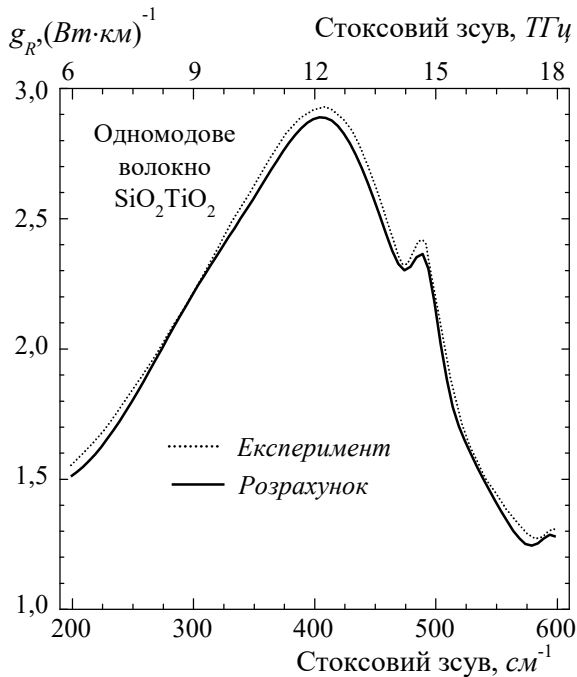


Рис. 3 Результат нелінійної апроксимації експериментального профілю ВКР підсилення в TiO_2 легovanому волокні у спектральній області 200-600 cm^{-1} (6-18 ТГц).

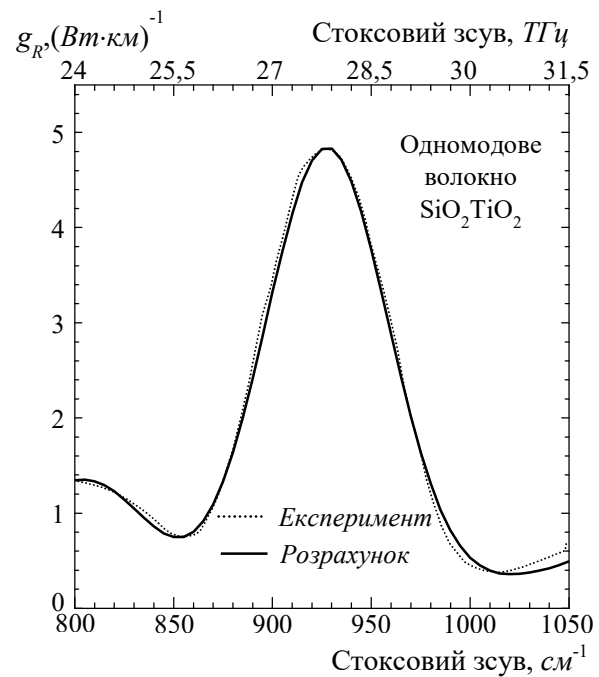


Рис. 4 Результат нелінійної апроксимації експериментального профілю ВКР підсилення в TiO_2 легovanому волокні у спектральній області 800-1000 cm^{-1} (24-30 ТГц).

хилення результатів розрахунку від експериментальних точок, наведені в збільшеному масштабі на рис. 3 та рис. 4, відповідно.

Таким чином, із експериментально виміряного спектра спонтанного комбінаційного розсіювання може бути виділений спектральний профіль ВКР підсилення. Запропонована методика спектроскопічного моделювання профілю підсилення з використанням розкладання багатомодової декомпозиції дозволяє зробити майже точну аналітичну апроксимацію експериментальних даних. Тому ця методика створює надійну основу для розрахунку основних параметрів як волоконних ВКР-лазерів, так і волоконних ВКР-підсилювачів.

Абсолютна прозорість волокна та поріг лазерної генерації

За своїм фізичним сенсом умова абсолютної прозорості волокна тісно пов'язана із порогом лазерної генерації на нелінійному ефекті вимушеного комбінаційного розсіювання. Поріг ВКР підсилення можна обчислити, базуючись на добре відомій системі зв'язаних хвильових рівнянь (див наприклад [5]). Ці рівняння описують просторову динаміку впливу

інтенсивності хвилі накачування I_p на інтенсивність Стоксової хвилі $I_s(\omega)$ при їх спільному поширенні у z - напрямку вздовж волокна. Відмітимо, що накачування є монохроматичною хвилею з настільки вузькою смугою генерації, що її спектральною шириною можна знехтувати. Однак, підсилення $g_R(\omega)$ стоксових хвиль відбувається в досить широкий смузі оптичних частот. Відповідно, інтенсивність стоксових хвиль є функцією не тільки змінної z , а залежить і від параметра ω .

За умови $dI_s/dz = 0$ в системі зв'язаних рівнянь виникає особлива точка [5]. Саме у випадку, коли $dI_s/dz = 0$ настає режим повної прозорості волокна при розповсюдженні стоксової хвилі вздовж волокна, оскільки інтенсивність цієї хвилі залишається постійною за довжиною волокна за рахунок повної компенсації власних втрат волокна.

Порогова потужність накачки для ВКР підсилення

Оскільки потужність накачки $P_p(\omega)$ можна виразити через інтенсивність накачування $I_p(\omega)$ і ефективну площу волокна A_{eff} , то із умови $dI_s/dz = 0$ безпосередньо впливає наступний кількісний вираз [5]

$$P_p^{th} = \frac{\alpha_s A_{eff}}{\tilde{g}_R(\omega)} = \frac{\alpha_s}{g_R(\omega)}, \quad (4)$$

де $\tilde{g}_R [M/Bm]$ та $g_R [(Bm \cdot km)^{-1}]$ є двома еквівалентними формами для коефіцієнта ВКР підсилення за інтенсивністю накачки I_p та потужністю накачки P_p , відповідно; α_s – коефіцієнт поглинання, який враховує волоконні втрати на стоксовій частоті; P_p^{th} – потужність накачки, за якої настає поріг ВКР підсилення. Рівність (4) є граничною умовою для потужності помпування P_p^{th} , за якої у матеріалі серцевини волокна починається перехід від природного стану із загасанням стоксової хвилі до підсилення цієї хвилі.

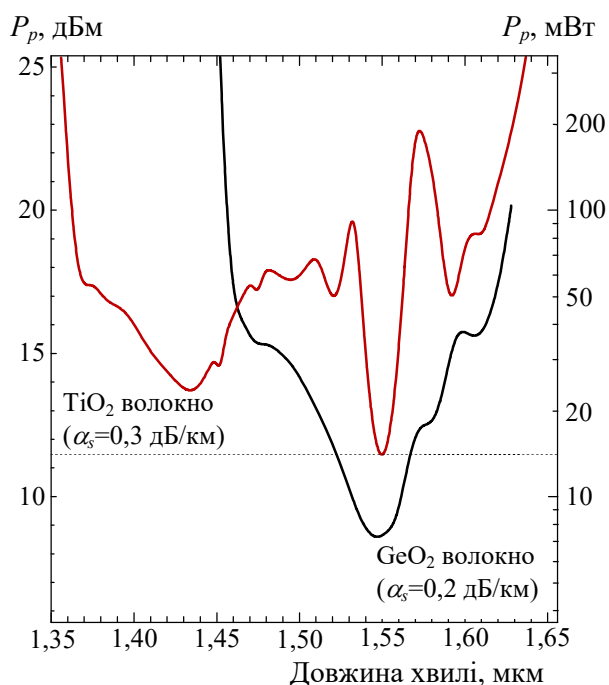


Рис. 5 Залежність порогової потужності помпування ВКР лазерної генерації від довжини хвилі для волокон SiO_2GeO_2 ($\lambda_p = 1,45$ мкм) та SiO_2TiO_2 ($\lambda_p = 1,355$ мкм)

Крім того, поріг генерації не тільки природним чином визначається за допомогою (4), але і його частотну залежність однозначно отримуємо у кількісному вигляді, ґрунтуючись лише на таких фундаментальних параметрах матеріалу волокна, як $g_R(\omega)$ і $\alpha(\omega)$.

Зауважимо, що в межах вікон прозорості волокна $\alpha_s \approx \alpha_p = \alpha$, причому загасання α практично є незмінним майже у всій смузі стоксового зсуву частот $\sim 1000 \text{ cm}^{-1}$.

У вікні прозорості поблизу від 1,55 мкм ця смуга відповідає області довжин хвиль 100 нм, в якому загасання α не залежить від частоти і має постійне значення в діапазоні від 0,2 дБ/км до 1,0 дБ/км, в залежності від типу кварцового волокна. Для значення постійної поглинання було прийнято $\alpha_s = 0,2$ дБ/км для GeO_2 легованого волокна і $\alpha_s = 0,3$ дБ/км для TiO_2 легованого волокна.

В результаті отримано залежності потужності накачування, за яких забезпечується поріг ВКР підсилення світла, від довжини хвилі в області стоксових зсувів від двох джерел помпування на $\lambda_p = 1,45$ мкм (SiO_2GeO_2) і $\lambda_p = 1,355$ мкм (SiO_2TiO_2). Результати моделювання представлені на рис.5.

Для волокна SiO_2GeO_2 (власні втрати $\alpha \sim 0,2$ дБ/км) режим підсилення стоксового сигналу починається на довжині хвилі $\lambda_s = 1,55$ мкм при потужності помпування $P_p = 8,9$ дБм (8 мВт), якщо накачка має довжину хвилі $\lambda_p = 1,45$ мкм; для волокна SiO_2TiO_2 , якщо накачка має довжину хвилі $\lambda_p = 1,355$ мкм (власні втрати $\alpha \sim 0,3$ дБ/км), то потужності помпування складають: $P_p = 17,7$ дБм (59 мВт) на $\lambda_s = 1,43$ мкм, $P_p = 11,5$ дБм (14 мВт) на $\lambda_s = 1,55$ мкм.

Смуга лазерної генерації та оптичного ВКР підсилення

Отже, режим повної прозорості в GeO_2 легованому кварцовому волокні (рис. 5) починається на довжині хвилі 1,55 мкм коли потужність накачування досягає величини, що дорівнює 8,9 дБм (8 мВт). Ці значення можна просто отримати графічно наступним чином. Горизонтальною лінією (маркер) на графіку рис.5 фіксуємо певний рівень потужності накачування P_p , а зростання потужності накачування відображається переміщенням маркера знизу доверху. У випадку стандартного GeO_2 кварцового волокна (рис. 5) коли потужність накачки досягає 8 мВт лінія маркеру матиме одну спільну точку (дотикається) із кривою повної прозорості цього волокна. Абсциса точки перетину відповідає довжині хвилі 1,55 мкм. Із зростанням потужності помпування лінія маркера рухатиметься вгору. Це приводить до формування щонайменше двох точок перетину лінії маркеру кривою повної прозорості волокна. Абсциси кожної з точок перетину очевидно визначають довжину хвилі повної прозорості для відповідного рівня потужності накачки, на яких у

досліджуваному волокну як поглинання, так і підсилення хвилі в точності рівні нулю. Інтервал між цими довжинами хвилі повної прозорості фактично визначає смугу підсилення (та лазерної генерації), оскільки на кожній довжині хвилі із цього інтервалу ВКР підсилення перевищує власні втрати волокна. Зовні вказаного інтервалу, навпаки, величини ВКР підсилення виявляється недостатньо для повної компенсації власних втрат волокна і сигнал на цих частотах загасатиме у процесі розповсюдження у волокні.

Як бачимо, згідно з рис.5, волокно SiO_2TiO_2 має два мінімуми потужності накачування, що відповідають максимумам підсилення на частотах стокових зсувів відповідно 430 см^{-1} (13 ТГц) та 900 см^{-1} (27 ТГц). Загалом смугу лазерної генерації у TiO_2 легovanому волокні ($\sim 200\text{ нм}$) можна розширити майже вдвічі у порівнянні зі смугою лазерної генерації у загальноприйнятому GeO_2 легovanому волокні, якщо досягти потужності накачування $P_p > 200\text{ мВт}$. Таким чином, TiO_2 леговане волокно може бути використане як для малопотужних лазерів для несучого сигналу, так і для генерування додаткових джерел накачування у волоконних ВКР-підсилювачах.

Список використаних джерел

1. Mermelstein M.D. Six wavelength Raman fiber laser for C- and L-band Raman amplification and dynamic gain flattening / M.D. Mermelstein, C.Horn, S.Radic, C.Headley // *Electron. Lett.* – 2002. – **38** (N13). – P. 636-638.
2. Коротков П.А. Волоконні ВКР лазери неперервної дії / П.А. Коротков, Г.С. Фелінський // *УФЖ. Огляди.* – 2006. – **3**, № 2. – С. 126-150.
3. Коротков П.А. ВКР підсилення світла в одномодових кварцових волокнах / П.А. Коротков, Г.С. Фелінський // *УФЖ. Огляди.* – 2009. – **6**, № 2. – С. 103-169.
4. Bromage J. A method to predict the Raman gain spectra of germanosilicate fibers with arbitrary index profiles / J.Bromage, K.Rottwitt, M.E.Lines // *IEEE Photon. Techn. Lett.* – 2002. – **14**, N1. – P. 24-26.
5. Felinskyi G.S. Raman threshold and optical gain bandwidth in silica fibers / G.S. Felinskyi, P.A. Korotkov // *Sem. Phys., Quant. Electron, & Optoelectronics.* – 2008. – **11**, N4. – P. 360-363.

Висновки

Нами запропонований спектроскопічний метод визначення профілю ВКР підсилення із виміряних спектрів спонтанного комбінаційного розсіяння в одномодових кварцових волокнах. Застосування нелінійної апроксимації для багатокomпонентної Гаусової декомпозиції ВКР профілю дозволяє отримати майже точне відтворення експериментальних даних та представити складний профіль ВКР підсилення у відносно простій аналітичній формі. Представлені числові результати кількісного визначення порогових потужностей помпування та реальних смуг ВКР підсилення і лазерної генерації в TiO_2 легovanому одномодовому волокні на основі плавленого кварцу. Показано, що смугу лазерної генерації в TiO_2 легovanому одномодовому волокні можна розширити майже вдвічі у порівнянні із стандартним GeO_2 легованим волокном.

Представлені результати отримані при виконанні бюджетної теми №16БФ052-04.

References

1. MERMELSTEIN M.D., HORN C., RADIC S., and HEADLEY C. (2002) Six wavelength Raman fiber laser for C- and L-band Raman amplification and dynamic gain flattening. *Electron. Lett.*, 38(13), p. 636-638.
2. KOROTKOV P.A., FELINSKYI G.S. (2006) Fiber Raman cw lasers. *Ukr. J. Phys. Reviews*, 3(2), p. 126-150.
3. KOROTKOV P.A., FELINSKYI G.S. (2009) Forced-Raman-scattering-based amplification of light in one-mode quartz fibers. *Ukr. J. Phys. Reviews*, 5(2), p. 103-168.
4. BROMAGE J., ROTTWITT K., LINES M.E. (2002) A method to predict the Raman gain spectra of germanosilicate fibers with arbitrary index profiles. *IEEE Photon. Techn. Lett.*, 14(1) p. 24-26.
5. FELINSKYI G.S., KOROTKOV P.A. (2008) Raman threshold and optical gain bandwidth in silica fibers. *Sem. Phys., Quant. Electron, & Optoelectronics*, 11(4), p. 360-363.

Надійшла до редколегії 15.09.16

УДК 537.86

Григорук В.І., д. ф.-м. н., проф.
Сидоренко В. С., к. ф.-м. н., с.н.с.
Кравчук П. О., студент

Визначення розподілу діелектричної проникності підповерхневих шарів у ближньопольовій мікроскопії

Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 83000, м. Київ, пр-т. Глушкова 4г,
e-mail: petrokravchuk@knu.ua

Grygoruk V.I., Dr. Si., Prof.
Sidorenko V. S., Ph.D
Kravchuk P. O., student

The definition of subsurface layers permittivity distribution in near-field microscopy

Taras Shevchenko National University of Kyiv, 83000,
Kyiv, Glushkova st., 4h,
e-mail: petrokravchuk@knu.ua

У даній роботі перевірено і підтверджено за допомогою математичного пакету *High Frequency Structural Simulator* можливість фіксувати залежність чутливості та роздільної здатності ближньопольового мікрохвильового мікроскопа, для шарів з різною глибиною розташування, не змінюючи типу голки зонда.

Ключові слова: ближнє поле, ближньопольовий мікрохвильовий мікроскоп, локальне поле.

The possibility to fix the dependence of sensibility and resolution of near-field microwave microscope for layers with different depth of location without changing the needle-type of the probe is tested and approved using the mathematical High Frequency Structural Simulator package. Checking the results of the experiment using the mathematical High Frequency Structural Simulator package, we have modeled a probe of a near-field microwave microscope based on the $\lambda / 4$ coaxial resonator. There have been a series of simulations with different lengths of the needle probe on different depths heterogeneity. Using such a construction we can control a diagram of a local field without changing the needle-type probe, but with changing the length of the needle probe during scanning. This scanning method is effective to obtain the distribution of heterogeneity of at least two layers of dielectric. Based on the received theoretical results we conclude that this method has the advantage in comparison with other methods that we know, such as scanning the sample at different heights above the surface, using different types of needle probes. This layered method of scanning of the sample is implemented without using complex mathematical calculations, which greatly reduces the time of research. This method also has practical value for a wide range of tasks.

Key Words: near-field, near-field microwave microscope, local field.

Статтю представив д.ф.-м.н. Савенков С.М.

Вступ

Аналізуючи роботи, присвячені проблемі ближньопольової мікроскопії, слід виділити, дослідження радіофізичних методів дистанційного зондування поверхні підповерхневого середовища.

Власне тому і обрано в даній роботі цей перспективний напрямок. Його актуальність визначає скануюча ближньопольова мікроскопія в мікрохвильовому діапазоні. Зауважимо, що у мікрохвильовому діапазоні головний інтерес представляють фундаментальні дослідження

локального поля. Для початку визначимо фізичну сутність ближнього полів. Ближнє поле відповідає за саму фізичну можливість процесу вимірювання (енергетичного зв'язку резонатора зонда та діелектричного зразка), а от наскільки цей процес буде локальним (здатність розрізнення) – залежить від локального градієнтного поля на кінчику голки зонда, тобто від радіусу його округлення. Ближнє поле – це еванесцентне (швидкозгасаюче) електромагнітне поле в якому квазістатичні поля E та H зміщені між собою по фазі на $\pi/2$, що забезпечує реактивний, тобто не хвильовий, а

коливальний характер обміну енергією. Само по собі реактивне ближнє поле не забезпечує високу здатність розрізнення – воно забезпечує тільки обмін енергією між діелектричним середовищем зразка та резонатором зонда по чвертям періоду і таким чином зовнішнє середовище вимірювання стає начебто частиною резонатора зонда, змінюючи його резонансну частоту в залежності від ε зразка. Локальне поле, на відміну від реактивного ближнього поля, залежить від радіуса заокруглення голки зонда, геометрії зонда і має градієнтний характер розподілу поля. Таке поле і забезпечує мікроскопію. Таким чином, визначений клас задач (пошук дефектів відомої форми, визначення глибини залягання неоднорідності і т.і.) може бути успішно вирішений за допомогою методики ближньопольової надвисокочастотної томографії на основі структурних зондів з адаптивною діаграмою локального поля, призначених для селективного визначення топології прихованих внутрішніх неоднорідностей зразків.

Для реалізації методу ближньопольової мікрохвильової інтроскопії, необхідно провести серію сканувань для одного зразка, використовуючи різні типи зондів на різних відстанях від зразка. Далі, необхідно вирішити некоректну зворотну задачу, яка не завжди має задовільне рішення і вимагає багато машинного часу на обчислення.

Завдання полягає в пошуку простих і ефективних методів підповерхневого дослідження середовища, не вдаючись до складних математичних обчислень. Ці методи повинні мати практичну цінність для широкого кола завдань.

Методика експерименту

Ідея полягає в тому, щоб керувати діаграмою локального поля не змінюючи тип голки зонда, детальніше даний експеримент продемонстровано в статті [1]. Цього можна досягти, реалізувавши механізм зміни довжини голки зонда в процесі сканування.

Зменшення довжини голки зонда, зменшує ефективну товщину шару діелектрика, де зосереджена основна частина енергії локального поля. Таким чином, ми можемо сфокусуватися на верхньому шарі діелектрика, товщина якого не перевищує ефективну глибину сканування. Фокусування на нижньому шарі може бути реалізовано програмно, відокремивши зображення верхнього шару діелектрика.

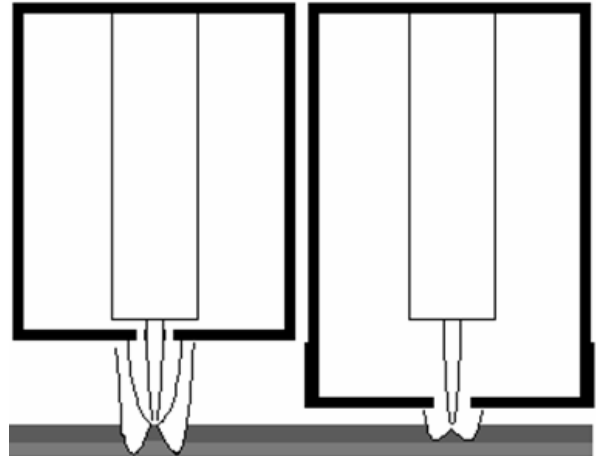


Рис.1. Схематичне зображення зонда та локального поля при $L_{\max}$ і $L_{\min}$.

Для експерименту, було взято тестовий зразок з діелектричною проникністю в діапазоні 2-2,6. Під час сканування, довжину голки зонда варіювали від 0,15 до 3,5 мм. Порівняння проводиться у відносних одиницях.

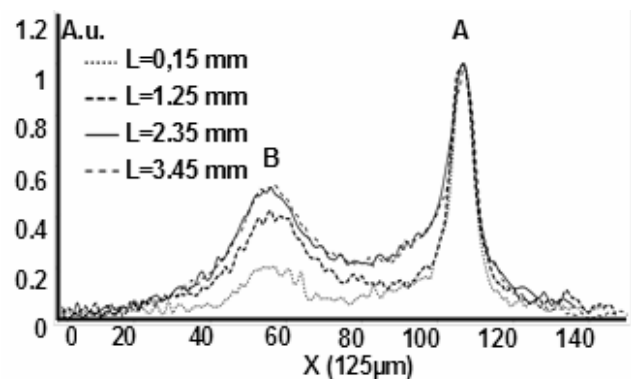


Рис.2. Зображення профілю розподілу діелектричної неоднорідності зразка, складається з двох шарів. Відстань між шарами 125 мкм. Де L-довжина голки зонда.

Як видно на Рис.2. експериментально підтверджено, що верхній шар А є не змінним для різних довжин голки зонда, також інтенсивність зображення шару В збільшується в порівнянні з інтенсивністю зображення шару А при збільшенні довжини голки. Діаграма локального поля змінюється досить сильно. Тобто, зменшення довжини голки зонда, зменшує ефективну товщину шару діелектрика, де зосереджена основна частина енергії локального поля. Таким чином, ми можемо сфокусуватися на верхньому шарі діелектрика.

Перевірка результатів експерименту

Аналізуючи результати експерименту ми прийшли до висновку, що можна керувати діаграмою локального поля не змінюючи типу голки зонда, а змінивши довжину голки зонда під час сканування.

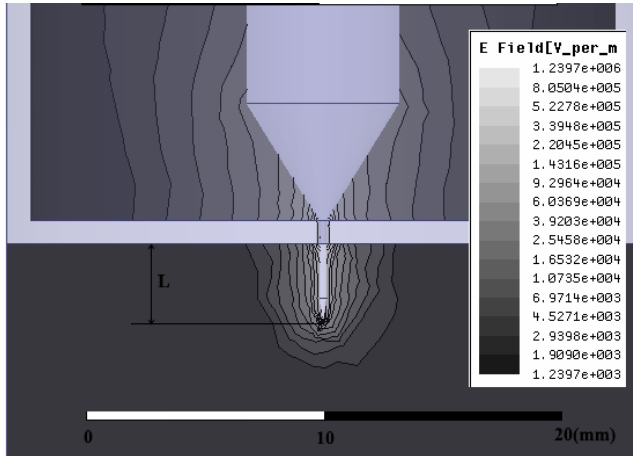


Рис.3. Зображення моделі резонатора, побудованого в математичному пакеті HFSS, де L - довжина голки зонда.

Перевіряючи результати експерименту за допомогою математичного пакету High Frequency Structural Simulator було змодельовано зонд ближньопольового мікрохвильового мікроскопа на основі $\lambda/4$ коаксialного резонатора, що зображений на Рис.3.

Для моделювання було взято тестовий зразок з полімерних матеріалів з прошарком повітря, який зображено на Рис.4.

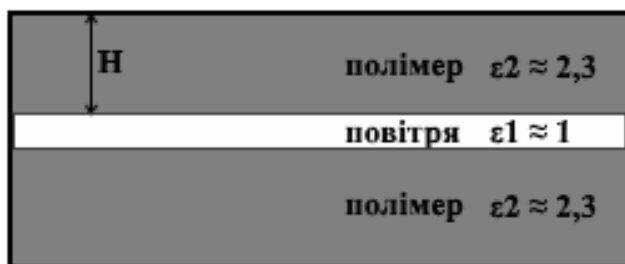


Рис.4. Зображення моделі зразка, побудованого в математичному пакеті HFSS, H - глибина залягання шару повітря з діелектричною проникністю $\epsilon_1 \approx 1$ в зразку з $\epsilon_2 \approx 2,3$.

При моделюванні підтверджено, що дійсно зі зменшенням довжини голки зонда, зменшується ефективна товщина шару діелектрика, де

зосереджується основна частина енергії локального поля.

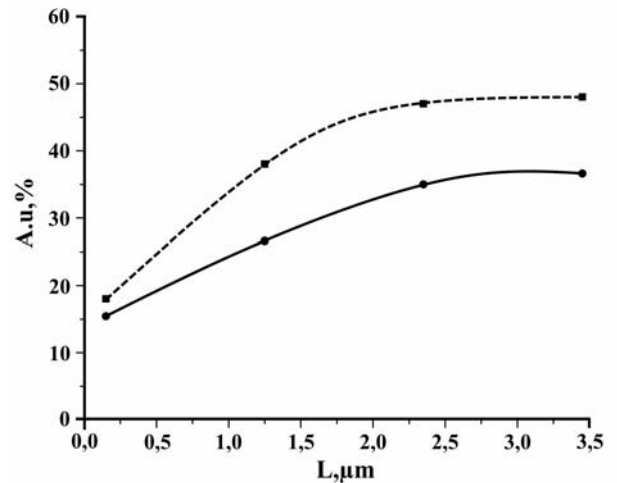


Рис.5. Теоретична та експериментальна залежність чутливості мікроскопа від довжини L голки зонда при глибині $H = 200\mu\text{m}$ залягання неоднорідності.

Як видно на Рис.5., зі збільшенням глибини залягання неоднорідності чутливість мікроскопа зменшується, а збільшення довжини голки зонда призводить до збільшення чутливості. Отже, головні аспекти експерименту було підтверджено результатами моделювання.

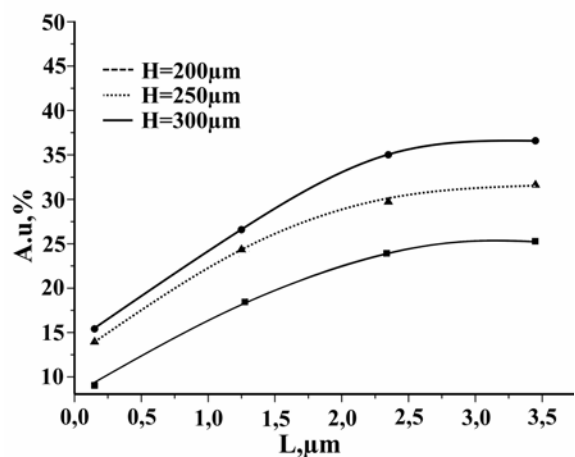


Рис.6. Залежність чутливості мікроскопа від довжини L голки зонда для різної глибини H залягання неоднорідності.

На Рис.6., показано, що для кожної глибини залягання неоднорідності існує певна довжина голки зонда після якої чутливість перестає

збільшуватись, це дає можливість сфокусуватися на конкретному шарі діелектрика.

Було зроблено серію моделювань з різними довжинами голки зонда L та на різній глибині H залягання неоднорідності. Даний метод сканування є достатньо ефективним для одержання розподілу неоднорідності, щонайменше двох шарів діелектрика.

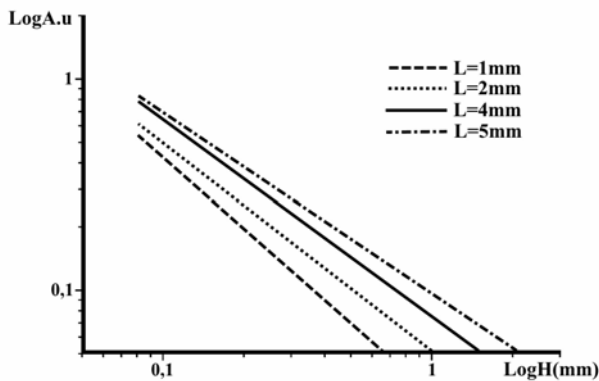


Рис.7. Подвійна логарифмічна залежність чутливості мікроскопа від довжини L голки зонда для різної глибини H залягання неоднорідності.

Список використаних джерел

1. Сидоренко В. С. Дослідження підповерхневих неоднорідностей діелектриків шляхом адаптації локального поля зонда в процесі сканування ближньопольовим мікрохвильовим мікроскопом / В.С. Сидоренко, Ю.Г. Семенец, С.Л. Скрипка, П.О. Кравчук // Вісник Київського університету Радіофізика та електроніка.-1(23), 2015.- С.73-76.
2. Григорук В. І. Аналіз чутливості та роздільної здатності ближньопольового мікрохвильового мікроскопа / В.І. Григорук, П.О. Кравчук, В.С. Сидоренко // XVIITH International Conference "Electronics and applied physics". 19-22, October 2016, Kiev, Ukraine. – Kyiv. – 2016. - P. 119-120.

Що і було перевірено та продемонстровано на графіку Рис.7., де показано, що зі збільшенням глибини залягання H чутливість будь-якої голки зонда переходить до рівня шумів, але на різній глибині.

Таким чином ми можемо сфокусуватися на верхньому шарі діелектрика. А фокусування на нижньому шарі, може бути реалізовано програмно.

Висновки

За допомогою математичного пакету HFSS побудована модель $\lambda/4$ резонатора ближньопольового мікрохвильового мікроскопа та математично досліджено запропонований метод прямого пошарового сканування зображень розподілу неоднорідності діелектричної проникності в шарах розташованих на різній глибині [1],[2]. Виходячи з отриманих теоретичних результатів приходимо до висновку, що даний метод має перевагу в порівнянні з відомими нам такими методами як: сканування на різній висоті над поверхню зразка, використання різних типів голок зондів. Даний метод пошарового сканування зразка реалізується без застосування складних математичних обчислень, що суттєво зменшує час дослідження, а також має практичну цінність для широкого спектра завдань.

References

1. SIDORENKO, V., SEMENETS, Yu., SKRIPKA, S., GOROVENKO & M., KRAVCHUK, P. (2015) The deeper investigation of subsurface inhomogeneities of dielectric objects by controlling the local field diagram of the probe of a near-field microwave. *Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv Radiophysics & electronics.* 1(23). p.73-76.
2. GRYGORUK, V., KRAVCHUK, P. & SIDORENKO, V. (2016) Analysis of sensibility and resolution of near-field microwave microscope. In *XVIITH International Conference "Electronics and applied physics"*. 19-22 October, 2016, Kiev, Ukraine. pp. 119-120.

Надійшла до редколегії 18.11.16

СУЧАСНА ФІЗИКА

УДК 519.9

Білоус О.І., к.ф.-м. н., доц.

Вплив додавання KCl на динамічні властивості водних розчинів 1,2-пропілового спирту в околі особливої точки

The National Aviation University, 1 Cosmonaut
Komarov Prospect, 02058, Kiev, Ukraine
e-mail: OksanaBilous@univ.kiev.ua

O.I. Bilous, Ph.D., Ass. Prof.

Effect of addition of KCl ions on the dynamic properties of aqueous solutions of propyl alcohol in a neighborhood of a singular point

The National Aviation University, 1 Cosmonaut
Komarov Prospect, 02058, Kiev, Ukraine
e-mail: OksanaBilous@univ.kiev.ua

У роботі представлено результати експериментальних досліджень впливу додавання іонів KCl на температурні та концентраційні залежності зсувної в'язкості, коефіцієнту поглинання та швидкості розповсюдження звуку бінарних водних розчинів 1,2-пропілових спиртів в околі їх особливих точок. Показано, що додавання KCl змінює величину концентрації особливої точки та призводить до збільшення як просторових так і часових розмірів утворених в околі структурного фазового переходу неоднорідностей. Збільшення частоти, як і відхід від особливої точки виводить систему у кросоверну чи навіть гідродинамічну область. Встановлено прямий взаємозв'язок між концентрацією йонів KCl та концентрацією особливої точки, як величини, що визначає особливості LLPT.

Ключові слова: динамічна в'язкість, особлива точка, теорія релаксуючої теплоємності, коефіцієнт поглинання та швидкість звуку

The results of experimental studies of the effect of the addition of KCl ions on the temperature and concentration dependence of the shear viscosity, the absorption coefficient and the propagation velocity of sound binary aqueous solutions of 1,2-propyl alcohol in the neighborhood of a singular point. In this study, we describe the anomalous physical properties of aqueous alcohol solutions near its singular (particular) points. A special attention is paid to conducting experiments on the temperature (T), concentration (x), and frequency (f) dependence of the sound velocity and effective absorption coefficient in a binary mixture 2-propanol – water in wide intervals of $T = (293 \div 343)$ K, $x = (0 \div 1)$ of 1,2-propanol molar fractions, and $f = (10 \div 2500)$ MHz. It is shown that the addition of KCl concentration changes the value of the singular point and leads to an increase in both the spatial and temporal dimensions formed in the vicinity of the structural phase transition inhomogeneities. Increasing the frequency as well as avoiding the singular point system brings in crossover or hydrodynamic region. A direct relationship between concentration KCl ions and the concentration of a particular point, as the value defining features LLPT.

Key words: the shear viscosity, singular point, theory relaxing heat capacity, absorption rate and the speed of sound

Статтю представив академік НАН України, д.ф.-м.н., проф. Булавін Л.А.

1. Вступ

Ряд унікальних властивостей демонструють водні розчини спиртів в околі їх особливих точок, які було названо рідина-рідина фазовим переходом (LLPT) [1-3]. Добре досліджено та проаналізовано особливості цього переходу для найунікальнішого об'єкту природи – води [2, 3].

З практичної точки зору особливо цікаво дослідити властивості таких розчинів, які при додаванні KCl набувають кращої сольватації, що дозволяє їм розчиняти як полярні так і неполярні поєднання, а також біополімери, такі як целюлоза [4]. Цікавим прикладним аспектом таких сполук

є здатність встановлювати водневі зв'язки з водою, або інших сполуками. Тобто, основним фізичним механізмом впливу йонів на динамічні властивості прийнято вважати утворення сольватної оболонки навколо йону, що природньо призводить до розчинення різних солей в водних розчинах нееклектролітів [5].

Природна складність таких систем часто призводить до суперечливих висновків. Так автори роботи [6] показали, що коефіцієнт дифузії збільшується при додаванні KCl, що, водночас, суперечить висновкам отриманим авторами робіт [7].

Суперечливі висновки щодо фізичних механізмів та унікальні можливості широкого практичного використання таких систем зумовлюють актуальність досліджень властивостей таких систем. Саме тому представлена робота спрямована на дослідження впливу додавання KCl з концентрацією ($x_{KCl} = 0,01; 0,015; 0,03; 0,05$) на різні динамічні властивості водних розчинів 1-пропіловий ($\text{CH}_3\text{CH}_2\text{CH}_2\text{OH}$), 2-пропіловий ($(\text{CH}_3)_2\text{CHOH}$) спирт.

2. Динамічна в'язкість

Спершу проаналізуємо як вплине додавання KCl на температурні та концентраційні залежності величини динамічної в'язкості $\eta_s(x, T)$. Експериментальні дані було отримано з використанням капілярного віскозиметра, з похибкою $\varepsilon(\eta_s) = (2 \div 5)\%$.

Особливу увагу приділимо особливостям залежностей розбавлених водних розчинів спиртів з концентраціями ($x = 0,03 \div 0,30$) мольних долей 1,2-пропілових спиртів. Як правило, для інтерпретації температурної залежності коефіцієнта зсувної в'язкості рідин застосовується теорія Френкеля-Ейрінга [8]. Проте ця теорія має ряд недоліків, що стимулювало скористатися емпіричною формулою, запропонованою авторами [9]:

$$\eta_s = \frac{hN_A}{V} \exp\left(\frac{\Delta G_\eta^\ddagger}{RT}\right) = \chi^{-1} \frac{hN_A}{V} \exp\left(\frac{\Delta H_\eta^\ddagger}{RT}\right) \exp\left(-\frac{\Delta S_\eta^\ddagger}{R}\right) = A(x) \exp\left(\frac{B(x)}{T}\right), \quad (1)$$

де χ - трансмісійний коефіцієнт; h - стала Планка; N_A - число Авогадро; V - мольний об'єм; $\Delta G_\eta^\ddagger$ - вільна ентальпія активації в'язкої течії ($\Delta G_\eta^\ddagger = \Delta H_\eta^\ddagger - T\Delta S_\eta^\ddagger$), $\Delta H_\eta^\ddagger / R = B$ і $\Delta S_\eta^\ddagger$ - коефіцієнт, що пов'язаний з ентальпією та ентропією активації в'язкої течії, відповідно.

Проведений аналіз експериментально отриманих даних для величини динамічної в'язкості за допомогою формули (1) дозволив отримати концентраційні залежності ентальпійного параметру B , рис. 1.

Як показує аналіз експериментальних даних, додавання KCl у водні розчини пропілових спиртів змінює величину концентрації, на яку припадає максимум зсувної в'язкості, у бік менших концентрацій пропілового спирту. Так максимальна в'язкість бінарного водного розчину 2-пропіловий спирт зафіксована за концентрації $x_{\max 1}(\eta_s) = 0,25$ мольних часток спирту. При додаванні до розчину іонів

концентрацією $x_{ion} = 0,015$ цей максимум вже становить $x_{\max 1}(\eta_s) = 0,13$ (див. рис.1). Для усіх розведених досліджуваних розчинів в області концентрацій ($x < 0,10$) 1,2-пропілових спиртів максимальне значення ентальпії було зафіксовано в розчині з концентрацією $x_{KCl} = 0,030$.

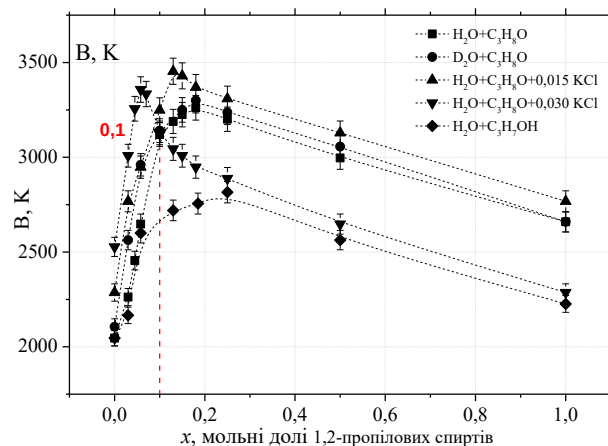


Рис. 1. Концентраційні залежності ентальпійного параметру B активації в'язкої течії досліджуваних водних розчинів.

Аналіз даних наведених на рис. 1 показує, що збільшення концентрації спирту у діапазоні ($x > 0,25$), для усіх досліджуваних розчинів, не змінює характер залежності, змінюючи лише концентрацію $x_{KCl} = 0,015$ за якої спостерігалися максимальні значення величини ентальпійного параметру B .

Зафіксоване зростання енергії активації при додаванні KCl зумовлене збільшенням стійкості мікрогетерогенних структур, що утворюються навколо йонів.

3. Коефіцієнт поглинання звуку

Експериментальні дослідження коефіцієнту поглинання та швидкості поширення звуку проводили за допомогою установки, створеної професором Сперкачем В.С. [10]. В залежності від умов експерименту відносні похибки вимірювань швидкості та коефіцієнту поглинання звуку становили $\varepsilon(\alpha, c) = (2 \div 5)\%$. Аналіз експериментальних даних проводили в рамках теорії релаксуючої теплоємності [11].

Як бачимо (рис.2), найбільше значення коефіцієнту поглинання звуку, що спостерігалось при 10 МГц, суттєво збільшується з додаванням іонів $x_{KCl} = 0,03$. Така ж тенденція зберігається і для усіх інших частот спостережуваного діапазону. Така поведінка, на наш погляд, пов'язана з утворенням мікрогетерогенних структур. Тобто, за температур ($293 \div 303$) К для концентрації солі $x_{KCl} = 0,03$ починаються помітні відхилення

температурних залежностей коефіцієнта поглинання звуку від притаманного (рис.2).

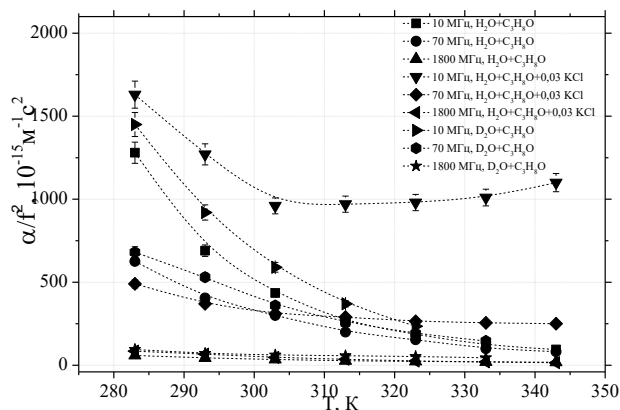


Рис. 2. Температурні залежності коефіцієнту поглинання звуку водного розчину 2-пропанол ($x = 0,13$) з додаванням йонів $x_{KCl} = 0,03$ за різних значень частоти.

Максимальне значення зафіксовано за концентрації $x_{\max 2}(\alpha) = (0,13 \div 0,15)$ мольних часток спирту. При додаванні до розчину йонів концентрацією $x_{ion} = 0,015$ цей максимум вже становить $x_{\max 2}(\alpha) = (0,11 \div 0,13)$.

В області температур $T = (283 \div 307)$ K, при $f = 10$ МГц, $f = 70$ МГц, наведені на рис.2, залежності демонструють типове зменшення коефіцієнту поглинання звуку при збільшенні температури. За температур $T > 307$ K, при $f = 10$ МГц, $f = 70$ МГц, для розчинів з йонами спостерігаємо нетипове зростання αf^{-2} зі збільшенням температури. Тобто, додавання йонів збільшує як розміри, так і час релаксації мікрогетерогенних структур, що утворюються в водних розчинах спиртів в околі LLPT [1-3]. Як показали наші дослідження, саме при цій температурі, яка була визначена, як температура особливої точки $T_s = (313.0 \pm 2.0)$ K [12] спостерігається зміна поведінки і інших фізичних величин таких як коефіцієнт динамічної в'язкості, швидкість звуку. Аналогічна закономірність спостерігалась і для спиртових розчинів з важкою водою та водного розчину 1-пропанол.

В нанорозмірних структурах, що утворюються навколо молекул н-пропанолу кількість молекул води задовольняє співвідношення $Z_w > 19$ в інтервалі концентрацій $0 < x < 0,05$, що і збігається з визначеною нами концентрацією особливої точки $x_s = 0.03 \pm 0.01$.

Цей результат не суперечить числовій оцінці кількості молекул води в мономолекулярному шарі, що оточує одну молекулу пропанолу у водних розчинах пропанолу поблизу його особливої точки. Водночас, таке утворення є

метастабільним, тобто піддається впливу сильних флуктуацій, а отже, з великою ймовірністю призведе до утворення нанорозмірних водно-спиртових кластерів.

4. Швидкість поширення звуку

Для усіх досліджуваних розчинів в області концентрацій $x_{\max 3}(c_0)_{C_3H_8O} = (0.050 \div 0.060)$ величина швидкості звуку проходить через максимум. Причому, концентраційні залежності швидкості звуку є не симетричними відносно максимуму (рис. 3).

Такий хід залежності швидкості поширення звуку для водних розчинів спиртів зумовлений структурними перебудовами, що відбуваються в околі LLPT [5].

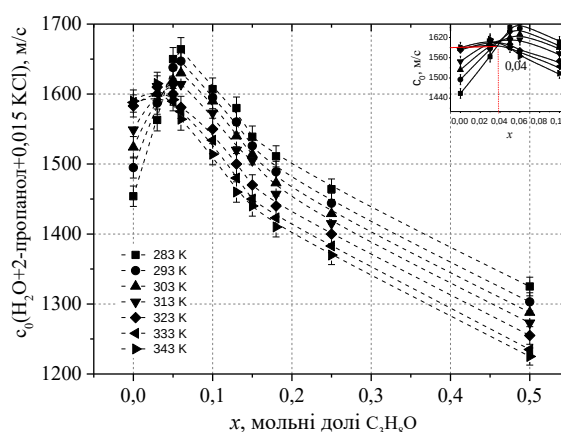


Рис. 3. Концентраційні залежності низько-частотного ($\omega \tau \ll 1$) значення швидкості поширення звуку вздовж ізотерм для розчину 2-пропанол-вода + 0,015 KCl.

Наприклад, усебічний аналіз даних, наведених на рис. 3, дозволив встановити, що концентрація особливої точки бінарного розчину 2-пропіловий спирт $x_s = 0.03 \pm 0.01$ [20], зміщується та набуває значення $x_s = 0.04 \pm 0.01$ для розчину 2-пропанол-вода + 0,015 KCl.

Аналіз концентраційних залежностей швидкості поширення звуку вздовж ізотерм в усіх досліджуваних водних розчинах дозволив вперше встановити, що концентрація особливої точки майже лінійно зростає з додаванням йонів та збільшується при зміні H_2O на D_2O .

5. Висновки

1. Вперше встановлено, що час встановлення рівноваги $t_p(LLPT) = (1 \div 7)$ доба $\gg t_p(KTP) = (4 \div 5)$ год, що є ключовою відмінністю структурного фазового переходу LLPT від фазового переходу, що спостерігається в околі KTP.

2. Встановлено, що теорія релаксуючої теплоємності описує пов'язані з флуктуаціями концентрацій чи структурними перетвореннями аномалії коефіцієнту та швидкості поширення звуку тільки у флуктуаційній області $\omega\tau_{\text{фл}} \gg 1$ частот, для якої виконується співвідношення $\frac{(\alpha f^{-2})_{\text{фл}}(f, T)}{(\alpha f^{-2})_{\text{рез}}(f, T)} > 1$. Збільшення частоти, як і відхід від особливої точки виводить систему у

кросоверну чи навіть гідродинамічну область.

3. Встановлено прямий взаємозв'язок між концентрацією йонів KCl та концентрацією особливої точки, як величини, що визначає особливості LLPT. Додаванням KCl до водних розчинів 1,2-пропілових спиртів збільшує як розміри так і час життя мікронеоднорідностей, в околі їх особливої точки.

Список використаних джерел

1. Banerjee S. Structural transformations, composition anomalies and a dramatic collapse of linear polymer chains in dilute ethanol–water mixtures, *The Journal of Physical Chemistry B*. 116 (2012) 3713–3722. / S. Banerjee, R. Ghoshi, B. Bagchi. // *The Journal of Physical Chemistry B*. – 2012. – №116. – С. 3713–3722.
2. P. Gallo, K. Amann-Winkel, C.A. Angell, M.A. Anisimov, F. Caupin, C. Chakravarty, J.A. Sellberg Water: A tale of two liquids // *Chemical Reviews*. 2016. № 13 (116). С. 7463–7500.
3. Palmer J.C., Martelli F., Liu Y., Car R., Panagiotopoulos A.Z., Debenedetti P.G. Metastable liquid-liquid transition in a molecular model of water // *Nature*. 2014. № 7505 (510). С. 385–388.
4. Pereiro A.B., Araújo J., Esperança J. Ionic liquids in separations of azeotropic systems—A review // *The Journal of Chemical Thermodynamics*. – 2012. – Т. 46. – С. 2–28.
5. Pinho S. P., Macedo E. A. Solubility of NaCl, NaBr, and KCl in water, methanol, ethanol, and their mixed solvents // *Journal of Chemical & Engineering Data*. – 2005. – Т. 50. – №. 1. – С. 29–32.
6. Maruyama K., Ohno S., Nakada M. QENS Studies on the Dynamics in Aqueous One-Propanol Solutions with KCl // *Journal of the Physical Society of Japan*. – 2013. – Т. 82. – №. A. – С. SA012.
7. Koga Y. Spectroscopy vs. thermodynamics, or G vs. G E in studies of aqueous solutions // *Journal of Molecular Liquids*. – 2016. – Т. 219. – С. 1006–1009.
8. Френкель Я.И. Кинетическая теория жидкостей / Я.И. Френкель, Л: Наука, 1975. 589 с.
9. Martins R.J., Cardoso M.J.E. de M., Barcia O.E. Excess Gibbs Free Energy Model for Calculating the Viscosity of Binary Liquid Mixtures // *Industrial & Engineering Chemistry Research*. 2000. № 3 (39). С. 849–854.
10. Sperkach Y.V., Sperkach, V.S., Strybulevych A.L. Temperature dependence of acoustical relaxation times involving the vicinity of NI phase transition point in 5CB liquid crystal // *Molecular Crystals and Liquid Crystals*. – 2001. – Т. 366. – №. 1. – С. 183–202.
11. Kaatz U. Non-critical Fluctuations of Liquids: Cinderella of Ultrasonic Spectroscopy? // *International Journal of Thermophysics*. 2014. № 11 (35). С. 1976–1989.
12. Bilous O.I., Behavior of viscosity and the speed of sound of water solutions 1,2-propyl alcohol near their singular points // 7th International Conference Physics of Liquid Matter: Modern Problems, Kyiv, Ukraine, May 27–31, P.197., в: 2016.

References

1. BANERJEE S., GHOSHI R., BAGCHI B. (2012) Structural transformations, composition anomalies and a dramatic collapse of linear polymer chains in dilute ethanol–water mixtures. *The Journal of Physical Chemistry B*. 116. p.3713–3722.
2. GALLO P., AMANN-WINKEL K., ANGELL C.A., ANISIMOV M.A., CAUPIN F., CHAKRAVARTY C., SELLBERG J.A. (2016) Water: A tale of two liquids. *Chemical Reviews*. 3 (116). p. 7463–7500.
3. PALMER J.C., MARTELLI F., LIU Y., CAR R., PANAGIOTOPOULOS A.Z., DEBENEDETTI P.G. (2014) Metastable liquid-liquid transition in a molecular model of water. *Nature*. 7505 (510). p. 385–388.
4. PEREIRO A.B., ARAÚJO J., ESPERANÇA J. (2012) Ionic liquids in separations of azeotropic systems – A review. *The Journal of Chemical Thermodynamics*. 46. p. 2–28.
5. PINHO S. P., MACEDO E. A. (2005) Solubility of NaCl, NaBr, and KCl in water, methanol, ethanol, and their mixed solvents. *Journal of Chemical & Engineering Data*. 50(1). p. 29–32.
6. MARUYAMA K., OHNO S., NAKADA M. (2013) QENS Studies on the Dynamics in Aqueous One-Propanol Solutions with KCl. *Journal of the Physical Society of Japan*. 82(A). p. SA012.
7. KOGA Y. (2016) Spectroscopy vs. thermodynamics, or G vs. G E in studies of aqueous solutions. *Journal of Molecular Liquids*. 219. p. 1006–1009.
8. FRENKEL YA.I. *Kinetic theory of liquids*. (1975) Leningrad: Nauka.
9. MARTINS R.J., CARDOSO M.J.E. DE M., BARCIA O.E. (2000) Excess Gibbs Free Energy Model for Calculating the Viscosity of Binary Liquid Mixtures. *Industrial & Engineering Chemistry Research*. 3(39). p. 849–854.
10. SPERKACH Y.V., SPERKACH, V.S., STRYBULEVYCH A.L. (2001) Temperature dependence of acoustical relaxation times involving the vicinity of NI phase transition point in 5CB liquid crystal. *Molecular Crystals and Liquid Crystals*. 366(1). p. 183–202.
11. KAATZE U. (2014) Non-critical Fluctuations of Liquids: Cinderella of Ultrasonic Spectroscopy? *International Journal of Thermophysics*. 11(35). p. 1976–1989.
12. BILOUS O.I. (2016) Behavior of viscosity and the speed of sound of water solutions 1,2-propyl alcohol near their singular points. In 7th International Conference Physics of Liquid Matter: Modern Problems, Kyiv, Ukraine, May 27–31, P.197.

Надійшла до редколегії 10.12.2016

УДК 532.69.

Бур'ян С. А., асп.

Особенности капиллярной поверхности на твердой подкладке в неоднородном поле

Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 01601, м. Київ, вул.
Володимирська 64/13,
e-mail: serg.buran@gmail.com

S.A. Burian, PhD stud.

The features of the capillary surface on the solid substrate in the heterogeneous external field

Taras Shevchenko National University of Kyiv,
01601, Kyiv, Volodymyrska st. 64/13,
e-mail: serg.buran@gmail.com

У роботі представлені результати дослідження форми рівноважної капиллярної поверхні нанорозмірної бульбашки на гідрофобній твердій підкладці. Розглянуто випадок сильно неоднорідного зовнішнього поля спричиненого присутністю твердотільної підкладки. Запропоновано вигляд функції, яка моделює основні тенденції поведінки поля гідрофобних сил. Використано припущення, що характерна глибина проникнення цього поля співпадає з типовим значенням висоти нанобульбашок. В рамках запропонованого припущення, отримується диференціальне рівняння для опису форми рівноважної капиллярної поверхні, та чисельно інтегрується. Чисельне розв'язування методом продовження розв'язку за параметром дозволило не звертатися явно до граничних умов які визначаються рівнянням Юнга для кута змочування. Такий підхід дав змогу дослідити форму профіля капиллярної поверхні нанобульбашки не турбуючись про ефекти, пов'язані з суттєвим впливом лінійного натягу на кут змочування на наномасштабі. Значний вплив неоднорідного поля на форму нано- і мікро-розмірних бульбашок демонструється графічно.

Ключові слова: нанобульбашка, лінійний натяг, рівняння Юнга, гідрофобні сили.

In this article, the results of this study of the form of equilibrium capillary surface of nanoscale bubble that it is placed on a hydrophobic solid support have been presented. The case of a strong heterogeneous external field caused by the presence of a solid substrate has been considered. The type of function has been proposed by which the behavior of the major trends of the field hydrophobic forces can be simulated. It has been suggested that a typical penetration depth of the field is the same like a typical value of nanobubble height. On the basis of this assumption, a differential equation has been obtained to describe the shape of equilibrium capillary surface, which has a numerical solution. The numerical parameter differentiation allowed not to refer explicitly to boundary conditions which is defined by Young's equation for the contact angle. This approach allowed us to explore the profile shape of the capillary surface of a nanobubble with no worrying about effects related to the significant influence of linear tension on the contact angle on the nanoscale. A significant influence of heterogeneous fields over nano- and micro-sized bubbles has been graphically demonstrated.

Key Words: nanobubble, line tension, Young's equation, hydrophobic forces.

Статтю представив академік НАН України, д.ф.-м.н., проф. Булавін Л.А.

Вступ

На сьогодні, дослідження межі поділу речовин, що знаходяться в різних агрегатних станах, залишається актуальною фундаментальною проблемою, яка має також вагомe прикладне значення. І, зокрема, межа поділу рідина – тверде тіло широко зустрічається в процесі створення наноструктурованих матеріалів їх дослідженні та комп'ютерному моделюванні [1–5].

Неминучим є те, що в силу різних чинників (хімічних реакцій [6], специфіки взаємодії рідини

з твердим тілом [7]) може утворюватися нова фаза, наприклад, у вигляді бульбашки. Можливість виникнення зародків нової фази при фазовому переході “рідина-пара” у воді, яка знаходиться в контакті з гідрофобною поверхнею, у вигляді нанорозмірних бульбашок, за нормальних умов, тобто при температурах суттєво нижчих (при 20 °C) ніж температура фазового переходу, обґрунтовувалась в роботі [8]. Де було показано, що значне зниження температури фазового переходу, викликане гідрофобною взаємодією, котра більше змінює

значення хімічного потенціалу молекул рідкої фази, а ніж молекул газової фази.

Присутність газової фази може бути як негативним, так і позитивним чинником, тому очевидно, що дослідження особливостей формування та стійкості, а також тепло-фізичних параметрів таких систем є, безумовно, важливою задачею.

Оскільки, одним з чинників виникнення нанобульбашок у воді є ефективне поле біля поверхні твердої гідрофобної підкладки, як це показано в роботі [8], то в нашому дослідженні ми використаємо модельне поле, напруженість якого обертається в нуль на висоті бульбашки. Вибір такого поля, також, значно спростить вигляд математичної моделі капілярної поверхні нанобульбашки.

Метою даної роботи є дослідження впливу неоднорідного поля на форму капілярної поверхні нанобульбашки розташованій на гідрофобній твердій підкладці.

Основні наближення

Розглянемо бульбашку насиченої пари, котра перебуває в термодинамічній рівновазі зі своєю рідиною та розташована на поверхні твердотільної підкладки в деякому ефективному полі зумовленому присутністю цієї гідрофобної підкладки.

Вважатимемо, що всі фізичні характеристики такої системи ізотропні вздовж будь-якої площини довільно проведеної крізь таку систему та паралельну поверхні підкладки. Для такого випадку в літературі доводиться ряд теорем [9], щодо існування, єдиності, стійкості та аксіальної симетрії рівноважної капілярної поверхні Σ однозв'язної поверхні бульбашки з заданим об'ємом V , з віссю симетрії, котра ортогональна опорній площині (підкладці), та сталим й визначеним кутам змочування $0 < \theta \leq \pi$

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}_{\partial \Sigma} = \cos \theta, \quad (1)$$

де $\mathbf{n}_{\partial \Sigma}$ – нормаль до межі поверхні $\partial \Sigma \subset \Sigma$ та до самої поверхні Σ , а $\mathbf{n}$ – нормаль до поверхні підкладки.

Кут змочування θ в рівнянні (1), для макроскопічних бульбашок визначається з відомого закону сталості кута змочування, сформульованого Юнгом:

$$\cos \theta = \frac{\sigma^{VS} - \sigma^{LS}}{\sigma^{LV}}, \quad (2)$$

де σ^{ij} – коефіцієнти міжфазового поверхневого натягу відповідних фаз (V – газ, насичена пара, L – рідина, вода S – тверде тіло) (див. рис. 1).

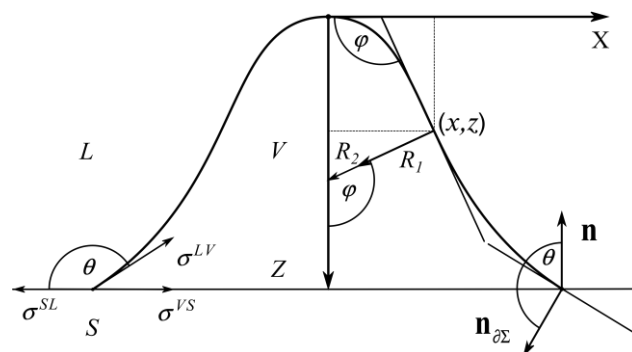


Рис. 1. Схематично зображено профіль бульбашки розташованої на гідрофобній твердій поверхні.

Слід зазначити, що окрім міжфазного поверхневого натягу σ^{ij} , в описі механічної рівноваги та енергетичних властивостей мезо- та нано- розмірних рідких плівок і трьохфазних систем скінченного об'єму, необхідно враховувати також *лінійний натяг* [10]. *Лінійний натяг*, слід розуміти як питому (що припадає на одиницю довжини лінії контакту) надлишкову вільну енергію (або великий термодинамічний потенціал) системи, чи як силу, яка діє вздовж лінії трьохфазного контакту, та прагне скоротити або видовжити її.

Також, розглядаючи значну зміну масштабів, – від макро- до нано- розмірів, слід мати на увазі, що *лінійний натяг* залежність від кривизни лінії межі поділу трьох фаз, і загалом, така залежність має ту ж природу, що й залежність *поверхневого натягу* від кривизни поверхні межі поділу двох фаз (інтегральне рівняння Гіббса-Толмена-Кенніга-Баффа).

Отже, для мезо- та нано- розмірних бульбашок, рівняння Юнга (2) дещо узагальнюють [10]:

$$\cos \theta = \frac{\sigma^{VS} - \sigma^{LS}}{\sigma^{LV}} - \frac{\tau}{\sigma^{LV} \cdot r}, \quad (3)$$

де θ – спостережуваний кут змочування, τ – лінійний натяг лінії контакту трьох фаз з повною кривизною $1/r$.

Вважатимемо розглядувану рідину, нестисливим суцільним середовищем, для якого справедливе рівняння руху ідеальної рідини в загальному вигляді:

$$\rho \frac{dv_i}{dt} = - \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} P_{ji} + \rho f_i, \quad (4)$$

де ρ – густина рідини, x_i , v_i , f_i ($i=1,2,3$) – декартові компоненти координати $\mathbf{x}$, швидкості $\mathbf{v}(x,y,z,t)$ та сили $\mathbf{f}(x,y,z,t)$, що діє на одиницю маси речовини, P_{ji} ($j,i=1,2,3$) – компоненти тензора тисків середовища вважатимемо симетричними вздовж довільної горизонтальної площини, як це і зазначалось вище. Тензор тисків розіб'ємо на дві частини: перша з яких є парціальний скалярний рівноважний тиск P , помножений на одиничний тензор $\mathbf{I}$, а друга – в'язкий тензор тисків.

Нами розглядається випадок рідини, яка перебуває в спокої $\mathbf{v}(x,y,z,t) = \text{const}$. В такому разі, матеріальна похідна перетворюється в нуль разом з в'язким тензором тисків, а рівняння (4) прийме вигляд:

$$\text{grad}P = \rho \mathbf{f}. \quad (5)$$

Рівняння (5) описує механічну рівновагу рідини яка не має меж, тобто об'ємну частину без своїх границь та в якій виконується закон Паскаля.

Для розгляду явищ, пов'язаних з поверхневим натягом вважатимемо, що міжфазова область поверхні рідини яка формує бульбашку є, в відомому розумінні, тонка та невагома.

В загальному випадку для стаціонарного інтерфейсу, нормальний баланс напружень на вільній поверхні, урівноважений дією сили, викликаной поверхневим натягом викривленої межі фази, або поверхні поділу фаз, так що:

$$\mathbf{n}_\Sigma \cdot \mathbf{T}^L \cdot \mathbf{n}_\Sigma - \mathbf{n}_\Sigma \cdot \mathbf{T}^V \cdot \mathbf{n}_\Sigma = \sigma^{LV} (\nabla_\Sigma \cdot \mathbf{n}_\Sigma), \quad (6)$$

де $\mathbf{T}^L$ і $\mathbf{T}^V$ – тензори напружень в областях фаз L і V . За відсутності руху середовища тензори напружень можна представити через гідростатичний тиск $\mathbf{T}^V = -P^V \mathbf{I}$ і $\mathbf{T}^L = -P^L \mathbf{I}$. Враховуючи, що дивергенція вектора нормалі $(\nabla_\Sigma \cdot \mathbf{n}_\Sigma)$ є подвоєною середньою кривизною, то рівняння (6) для межі поділу фаз прийме наступний вигляд:

$$P^L - P^V = \sigma^{LV} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right), \quad (7)$$

де R_1 і R_2 є радіуси головних кривизн поверхні (рис. 1).

Вплив зовнішнього неоднорідного поля на форму рівноважної капілярної поверхні

Відмітимо, що детальна поведінка функції, яка описує ефективну дію гідрофобних сил в загальному випадку, не відома. Експериментально встановлено, що такі сили є короткодійними, проте характерна дальність їх дії велика в порівнянні з міжмолекулярними відстанями. [11] Враховуючи зазначене, існує певна свобода у виборі можливих підходів для опису поведінки таких сил.

Якісно представити потенціал гідрофобних сил можна наблизивши його степеневим або експоненційним виглядом, такими як відомі потенціали Ван-дер-Вальсівських сил, потенціал Ленард-Джонса чи потенціал Морзе.

У випадку неоднорідного поля, напруженість гідрофобних сил, з урахуванням гравітації, можна представити наступним чином:

$$\mathbf{f} = \left(g + j \cdot \frac{e^{\frac{z}{\varepsilon}} - 1}{1 + e^{\frac{z}{\varepsilon}}} \right) \mathbf{k}, \quad (8)$$

де g – прискорення вільного падіння, j – амплітуда напруженості гідрофобних сил, ε – певний параметр, який відповідає за просторову обмеженість дії неоднорідного поля, $\mathbf{k}$ – орт прямокутної системи координат спрямований за напрямком напруженості гравітаційного поля.

Перебір параметрів потенціалу (8) дає ширший спектр зміни якісної поведінки гідрофобних сил, а ніж тільки експоненційні чи степеневі потенціали, оскільки функціональний характер поведінки такого потенціалу є більш гнучким.

Відповідно, що у випадку нестисливого середовища $\rho(x,y,z,t) = \text{const}$, всередині дотичних фаз, можна отримати розв'язок рівняння (5) для кожної з фаз у вигляді:

$$P^i(z) = P^i(0) + (g - j)\rho^i z + 2j\rho^i \varepsilon \ln \frac{1 + e^{\frac{z}{\varepsilon}}}{2}, \quad (9)$$

де $P^i(0)$ – значення тиску i -ої фази на висоті $z = 0$.

Капілярна поверхня на лежить до класу поверхонь другого порядку, для яких в диференційній геометрії обґрунтовується існування та єдність форми поверхні, при заданих першій та другій квадратичних формах.

Метричні коефіцієнти квадратичних форм однозначно пов'язані з головними кривизнами поверхні, пів-сума яких є відомою середньою кривизною поверхні.

Подвоєна середня кривизна поверхні може бути знайдена, якщо підставити умову (9), яка визначає стрибок локальних тисків при переході через викривлену поверхню в формулу (7). У цьому випадку безрозмірне рівняння, на радіус кривизни в вершині меніска бульбашки $R_1 = R_2 \equiv r$, має вигляд:

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = 2 + \text{Bo} \cdot \frac{2-\mu}{\mu} \cdot z + \text{Bo} \cdot \frac{\mu-1}{\mu} \cdot \frac{2}{\lambda} \cdot \ln \frac{1+e^{\lambda z}}{2}, \quad (10)$$

де $\lambda = r/\varepsilon$, $\mu = (g+j)/g$ і $\text{Bo} = (g+j)(\rho^L - \rho^V)r^2/\sigma^{LV}$ – безрозмірний гідростатичний критерій подібності, число Бонда (число Етвеша в англійській літературі). Число Бонда характеризує співвідношення між силами зовнішнього поля і силами поверхневого натягу ($\text{Bo} = (\rho^L - \rho^V)gr^2/\sigma^{LV}$ і відповідно $\text{Bo} = \beta o \cdot \mu$).

Оскільки капілярна поверхня аксіально-симетрична [9], то зручно перейти до циліндричної системи координат з віссю симетрії відносно осі Z , де головні радіуси кривизни $R_1 = (1+z'^2)^{3/2}/z''$ і $R_2 = x(1+z'^2)^{1/2}/z'$.

Так як розв'язок в цьому разі не залежить від азимутального кута, то отримуємо двовимірну задачу. Отже, рівняння (10), що визначає капілярну поверхню, приймає вид диференціального рівняння другого порядку:

$$\frac{z''}{(1+z'^2)^{3/2}} + \frac{z'}{x(1+z'^2)^{1/2}} = 2 + \text{Bo} \cdot \frac{2-\mu}{\mu} \cdot z + \text{Bo} \cdot \frac{\mu-1}{\mu} \cdot \frac{2}{\lambda} \cdot \ln \frac{1+e^{\lambda z}}{2}. \quad (11)$$

Для зручності чисельного інтегрування, рівняння (11) перетворимо на систему з трьох диференціальних рівнянь першого порядку, використовуючи заміну змінних пов'язану з геометрією задачі. Якщо, довжина дуги профілю капілярної поверхні $ds = \sqrt{(dz)^2 + (dx)^2}$, то меридіанний і широтний радіуси головних кривизн поверхні $R_1 = ds/d\varphi$ і $R_2 = x/\sin \varphi$

відповідно, де φ кут між горизонталлю та дотичною до капілярної поверхні (див. рис. 1).

Отже, система диференціальних рівнянь, для опису профілю капілярної поверхні сидячої бульбашки, поміщеної в неоднорідне поле (8), матиме наступний вигляд:

$$\frac{dx}{ds} = \cos \varphi; \quad (12)$$

$$\frac{dz}{ds} = \sin \varphi; \quad (13)$$

$$\frac{d\varphi}{ds} = 2 + \text{Bo} \cdot \frac{2-\mu}{\mu} \cdot z + \text{Bo} \cdot \frac{\mu-1}{\mu} \cdot \frac{2}{\lambda} \cdot \ln \frac{1+e^{\lambda z}}{2} - \frac{\sin \varphi}{x}. \quad (14)$$

Відмітимо, що у випадку граничних значень параметрів рівняння (11), коли $\lambda = r/\varepsilon \rightarrow 0$ і $\mu = 1 + j/g \rightarrow 1$, воно набуває вигляду класичного відомого рівняння Бешфорта-Адамса [12]

$$\frac{z''}{(1+z'^2)^{3/2}} + \frac{z'}{x(1+z'^2)^{1/2}} = 2 + \beta o \cdot z. \quad (15)$$

В разі коли радіус кривизни капілярної поверхні у вершині бульбашки буде мезо- чи нано- скопічних розмірів, рівняння (11) має не тривіальний розв'язок тільки тоді коли безрозмірний критерій гідростатичної подібності Bo і добуток $\mu \cdot r^2$ є обмеженими величинами. У цьому випадку характерний параметр розміру краплі – r пропорційний величині $1/\sqrt{|\mu|} \approx \sqrt{|g/j|}$.

Якщо j значно більше g , то $\mu = (g+j)/g \rightarrow \infty$ і рівняння (11) набуває вигляду:

$$\frac{z''}{(1+z'^2)^{3/2}} + \frac{z'}{x(1+z'^2)^{1/2}} = 2 - \text{Bo} \cdot z + \text{Bo} \cdot \frac{2}{\lambda} \cdot \ln \frac{1+e^{\lambda z}}{2}. \quad (16)$$

Рівняння (16) описують профіль рівноважної капілярної поверхні бульбашки мезо- та нано- розмірів, розташованої на гідрофобній твердій поверхні.

В разі, якщо неоднорідне поле стрімко обривається на висоті бульбашки, то $\lambda \rightarrow \infty$, а

$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} (\ln(1 + e^{\lambda z}/2)/\lambda) = z$ і рівняння (16) приймає вигляд:

$$\frac{z''}{(1+z'^2)^{3/2}} + \frac{z'}{x(1+z'^2)^{1/2}} = 2 + \text{Bo} \cdot z. \quad (17)$$

Рівняння (15) та (17) подібні з точністю до змісту якого набуває число Бонда $\text{Bo} = \beta \sigma \cdot \mu$. Ці два рівняння описують капілярні поверхні на різних масштабах розмірів бульбашок та в зовнішніх полях, які значно відмінні за інтенсивністю.

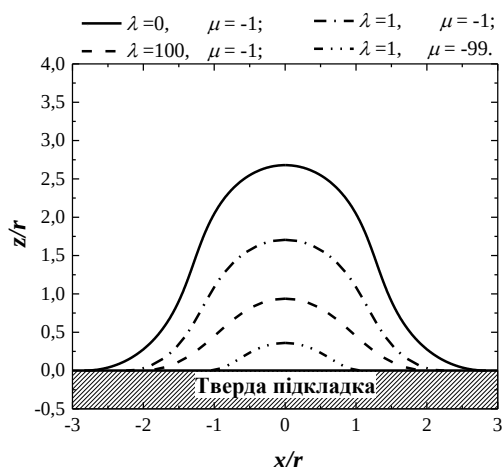


Рис. 2. Профіль бульбашки на гідрофобній поверхні в неоднорідному зовнішньому полі. Профілі поверхонь демонструються для різних значень напруженості ефективного поля, викликаного присутністю підкладки в порівнянні з фоновим гравітаційним полем.

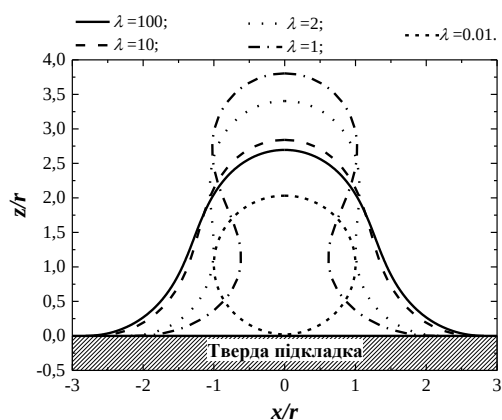


Рис. 3. Профіль бульбашки на гідрофобній поверхні в неоднорідному зовнішньому полі. Показано випадок, коли поле обумовлене присутністю підкладки за інтенсивністю значно перевищує гравітаційне поле, тобто $\mu = (g + j)/g \rightarrow \infty$.

На рис. 2 та 3 для порівняння наведено різні профілі капілярних поверхонь, в залежності від стрімкості зміни напруженості зовнішнього неоднорідного поля і від його інтенсивності в порівнянні з інтенсивністю однорідного гравітаційного поля.

Формально, граничними умовами для рівняння (11), або еквівалентної йому системи рівнянь (12-14), слугують висота бульбашки та умова сталості граничного кута змочування (2) або, для випадку нанорозмірних систем – узагальнене рівняння Юнга (3). Однак, рівняння (11), для опису профілю рівноважної капілярної поверхні нанобульбашки в ефективному зовнішньому полі, розв'язувалось не аналітично, а чисельно (методом продовження розв'язку за параметром), тому отриманий розв'язок не залежить явно від ефектів пов'язаних з лінійним натягом.

Висновки

Отже, спираючись на закон Юнга-Лапласа (про надлишковий тиск на тонкій викривленій межі поділу двох гомогенних фаз) та закон Юнга (про сталість кута змочування) побудовано модель капілярної поверхні бульбашки насиченої пари в нестискуваній рідині, розташованій на поверхні гідрофобної твердої підкладки в деякому ефективному неоднорідному полі зумовленому присутністю підкладки.

Особливість досліджуваної моделі полягає в тому, що розглянуто випадок коли неоднорідне поле проникає в рідину лише на глибину, яка співпадає з висотою бульбашки.

На основі проведених розрахунків запропонованої моделі, було встановлено, що форма профілю рівноважної поверхні нанорозмірної бульбашки, поміщеної в зовнішнє поле яке стрімко обривається на висоті бульбашки, конгруентна профілю макроскопічної бульбашки в гравітаційному полі на такій же поверхні. Проте, така подібність обмежується умовою на кут змочування. Так як для нанобульбашок кут змочування визначається модифікованим рівнянням Юнга, яке враховує вплив лінійного натягу, що діє вздовж лінії контакту «газ-рідина-тверде тіло», а для макробульбашок, завдяки зростанню радіусу кривизни лінії контакту трьох фаз, доданок з лінійним натягом прямує до нуля і тому не впливає на кут змочування.

Список використаних джерел

1. Photoacoustic effects in nanocomposite structure “porous silicon-liquid” / [D. Andrusenko, M. Isaiev, A. Kuzmich та ін.] // *Nanoscale Res. Lett.* – 2012. – № 1. – С. 411.
2. Surface-Enhanced Raman Spectroscopy of Polyelectrolyte-Wrapped Gold Nanoparticles in Colloidal Suspension / [S.T. Sivapalan, B.M. Devetter, T.K. Yang та ін.] // *J. Phys. Chem. C. Nanomater. Interfaces.* – 2013. – № 20/- С. 10677-10682
3. Size evaluation of the fine morphological features of porous nanostructures from the perturbation of heat transfer by a pore filling agent / [D. Andrusenko та ін.] // *Microporous Mesoporous Mater.* – 2014. – С. 79–82.
4. Influence of Single-Walled Carbon Nanotubes on Thermal Expansion of Water / [V.F. Korolovych, L.A. Bulavin, Y.I. Prylutskyi та ін.] // *Int. J. Thermophys.* – 2014. – № 1. – С. 19–31.
5. Efficient tuning of potential parameters for liquid–solid interactions / [M. Isaiev, S. Burian, L. Bulavin та ін.] // *Mol. Simul.* – 2016. – № 11. – С. 910–915.
6. Effect of Surface Morphology on Electrical Properties of Electrochemically-Etched Porous Silicon Photodetectors / [N. Naderi, M.R. Hashim та ін.] // *Int. J. Electrochem. Sci.* – 2012. – С. 11512–11518.
7. Pancake bouncing on superhydrophobic surfaces / [Y. Liu, L. Moevius, X. Xu та ін.] // *Nat. Phys.* – 2014. – № June. – С. 515-519.
8. Механізм виникнення нанобульбашок у воді на гідрофобній поверхні / [Л. А. Булавін, П. Кекічев, В. М. Сисоєв та ін.] // *Укр. фіз. журн.* – 2014. – 59, № 1. – С. 96–98.
9. Finn R. *Equilibrium Capillary Surfaces* / Robert Finn., 2012. – 246 с.
10. Accurate determination of the vapor-liquid-solid contact line tension and the viability of Young equation / [Y. Liu, J. Wang, X. Zhang та ін.] // *Sci. Rep.* – 2013. – С. 2008
11. Israelachvili J. *Intermolecular and Surface Forces* / Jacob Israelachvili., 2015. – 710 с.
12. Bashforth F. *An attempt to test the theories of capillary action* / F. Bashforth, J.C. Adams., 1883. – 139 с.

References

1. ANDRUSENKO, D., et al. (2012) Photoacoustic effects in nanocomposite structure ‘porous silicon-liquid’. *Nanoscale research letters*, (1) p.411.
2. SIVAPALAN, S. T., et al. (2013) Surface-enhanced Raman spectroscopy of polyelectrolyte-wrapped gold nanoparticles in colloidal suspension. *The Journal of Physical Chemistry C*, (20) p.10677-10682.
3. ANDRUSENKO, D., et al. (2014) Size evaluation of the fine morphological features of porous nanostructures from the perturbation of heat transfer by a pore filling agent. *Microporous and Mesoporous Materials*, (194) p. 79-82.
4. KOROLOVYCH, V. F., et al. (2014) Influence of Single-Walled Carbon Nanotubes on Thermal Expansion of Water. *International Journal of Thermophysics*, 35(1) p. 19-31.
5. ISAIEV, M., et al. (2015) Efficient tuning of potential parameters for liquid–solid interactions. *Molecular Simulation*, (11) p. 210-215.
6. NADERI, N.; HASHIM, M. R. (2012) Effect of surface morphology on electrical properties of electrochemically-etched porous silicon photodetectors. *Int. J. Electrochem. Sci.*, (7) p. 11512-11518.
7. LIU, Y., et al. (2014) Pancake bouncing on superhydrophobic surfaces. *Nature Physics*, (7) p. 515-519.
8. BULAVIN, L., et al. (2014) Mechanism of nanobubble formation in water on a hydrophobic surface. *Ukrainian Journal of Physics* 59(1) p.95–97.
9. FINN, R.. (2012) *Equilibrium capillary surfaces*. Springer Science & Business Media.
10. LIU, Y.; WANG, J.; ZHANG, X. (2013) Accurate determination of the vapor-liquid-solid contact line tension and the viability of Young equation. *Scientific reports*, (3) p.2008.
11. ISRAELACHVILI, J. N. (2015) *Intermolecular and surface forces*. Academic press.
12. BASHFORD, F.; ADAMS, J. C. (1883) *An attempt to test the theory of capillary action*. Cambridge University Press: London.

Надійшла до редколегії 19.09.16

УДК 519.9

Ковалюк О.М.¹, студ.,
Терентьєва Ю. Г.², к.ф.-м.н., доц.

O. M. Kovaliuk¹, stud.,
Y. G. Terentyeva², PhD.

Взаємодія барвника Pyronin Y(G) з полінуклеотидами

The polynucleotides – Pyronin Y(G) interaction studying

^{1,2}Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 01601, м. Київ, вул.
Володимирська 64/13,
e-mail: ¹kovaliukoleksandr@gmail.com,
²juliater@i.ua

^{1,2}Taras Shevchenko National University of Kyiv,
01601, Kyiv, Volodymyrska st. 64/13,
e-mail: ¹kovaliukoleksandr@gmail.com,
²juliater@i.ua

Досліджувалася взаємодія барвника Pyronin Y(G) з полінуклеотидами (ДНК, РНК) у водному розчині, виявлено ефект затухання флюоресценції як результат взаємодії полінуклеотидів з барвником. Було обчислено вплив концентрації полінуклеотидів на оптичну густину водного розчину барвник-полінуклеотид. Виявлено, що зміна оптичної густини у водному розчині ДНК-барвник є меншою, ніж в такому ж РНК-барвник. Взаємодію між молекулами барвника та різними базами РНК змодельовано за допомогою програмного пакету HyperChem Professional 8. Встановлено просторові конфігурації взаємних положень молекул барвника та баз, які відповідають найбільшим енергіям взаємодії. Експериментально виявлено та теоретично підтверджено гасіння флюоресценції барвника винятково пуриновими азотистими основами.

Ключові слова: полінуклеотиди, барвник, флюоресценція, азотисті основи.

Researched the interaction of dye Pyronin Y (G) with the polynucleotides (DNA, RNA) in water solution. The effect of the quenching of fluorescence as a result of interaction with the dye polynucleotides. The degree of quenching depends of the impurity concentration of RNA or DNA. Calculated concentration influence on polynucleotides optical density of the water solution of the dye-polynucleotide. Found the change in optical density in water solution DNA-dye is less than in the same RNA- dye. Experimentally show that optical absorption spectra of an water solute of dye and fluorescence excitation of an water solute of PY * RNA same, so the current optical center belongs dye. Excitation spectra and fluorescence emission spectra is "mirrored." Fluorescence quenching correlates with a decrease optical density. The excitation from molecules Pyronin Y to molecule RNA or DNA isn't passed. The interaction between dye molecules and various RNA bases simulated by the software package HyperChem Professional 8. Established mutual spatial configuration of the positions of the dye molecules and RNA bases where the highest energies of interaction. Discovered experimentally and theoretically confirmed by fluorescence quenching dye only purine nitrogenous bases.

Key Words: polynucleotides, dye, fluorescence, nucleobases.

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Макарець М. В.

Вступ

Барвник Pyronin Y(G) широко використовується у цитохімії задля флюоресцентної візуалізації [1] та ідентифікації полінуклеотидів. ДНК і РНК забезпечують зберігання, передачу і реалізацію генетичної інформації організму [2] й функціонування живих клітин, що робить будь-яке відкриття пов'язане з ними вагомим для світу. Важливими є спектроскопічні дослідження вибіркової взаємодії барвника Pyronin Y з ДНК і РНК, оскільки спектральний прояв ДНК та РНК дуже

подібний і відрізняється лише при взаємодії з барвником.

Pyronin Y(G) – катіонний барвник [3], структурна формула якого $C_{12}H_{19}N_2O$ показана на рис.1. Максимум смуги поглинання барвника відповідає довжині хвилі 565 нм (крива 1, рис.2).

Експериментальні дослідження та матеріали

Спектри поглинання одержані на серійному двопробеновому спектрофотометрі Specord UV-VIS. Запис спектрів поглинання розчинів проводився в стандартних кварцевих кюветах

товщиною 1 см (діапазон пропускання 170-1000 нм). Похибка запису хвильових чисел становила за паспортом 20 см^{-1} .

Спектри флюоресценції вимірювались на серійному спектрофлюориметрі Cary Eclipse (Varian Inc., Agilent Tech). Максимальна роздільна здатність приладу Cary Eclipse - 1,5 нм, що визначається апаратною функцією та найменшою шириною щілини. Але оскільки досліджувані смуги люмінесценції досить широкі ($\sim 50 \text{ нм}$), то обрана спектральна ширина щілини для вимірів становила 10 нм. Похибка визначення інтенсивності не перевищує 1%. Для спектральних вимірювань використовували стандартні кварцеві кювети розміром $1 \times 1 \text{ см}$.

Результати та обговорення

Виміряно збудження і випромінювання флюоресценції чистого барвника та при додаванні РНК. При концентрації РНК 1,9 г/л у розчині спостерігалось зменшення інтенсивності флюоресценції на 33%.

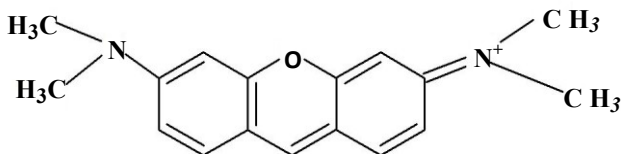


Рис. 1. Структурна формула Pyronin Y(G).

Виміряно поглинання чистого барвника і з додаванням РНК. Спектри поглинання та флюоресценції показані на рис.2. Спектри поглинання та збудження флюоресценції для чистого барвника та при додаванні РНК відповідають один одному. Спектри збудження та випромінювання флюоресценції “дзеркальні”. Отже, діючий оптичний центр єдиний і належить барвнику, передача збудження між барвником і полінуклеотидами не відбувається. Ступінь гасіння флюоресценції корелює зі ступенем зменшення оптичної густини в розчині барвника з РНК або ДНК (криві 1-4, рис.2).

Досліджено залежність оптичної густини розчину барвника та полінуклеотидів від концентрації полінуклеотидної компоненти (рис.3,4).

Контроль концентрації полінуклеотидів здійснювався стандартним методом вимірювання оптичної густини на довжині хвилі 260 нм (залежності поглинання від концентрації – кр. 1 для РНК, кр. 2 для ДНК, рис.5).

Знайдена кількісна залежність максимуму оптичної густини барвника від концентрації РНК та ДНК в розчині з барвником, що показана на рис.5.

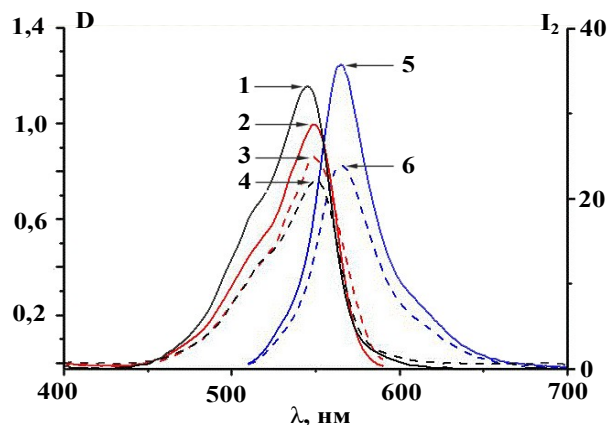


Рис. 2. Спектри збудження (2,3) та випромінювання (5,6) флюоресценції – їм відповідає ліва вісь ординат (D); спектри поглинання (1,4) для чистого Pyronin Y (1,2,5) та при додаванні у розчин РНК (3,4,6).

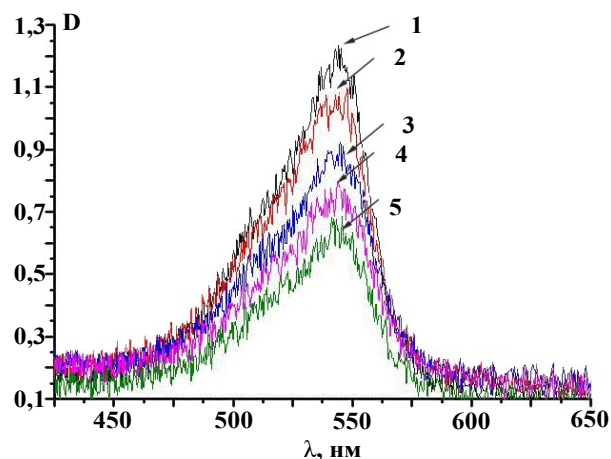


Рис. 3. Спектри поглинання чистого Pyronin Y (1) та з додаванням РНК за різних концентрацій: 0,31 г/л – 2, 1,25 г/л – 3, 2,50 г/л – 4, 5,00 г/л – 5.

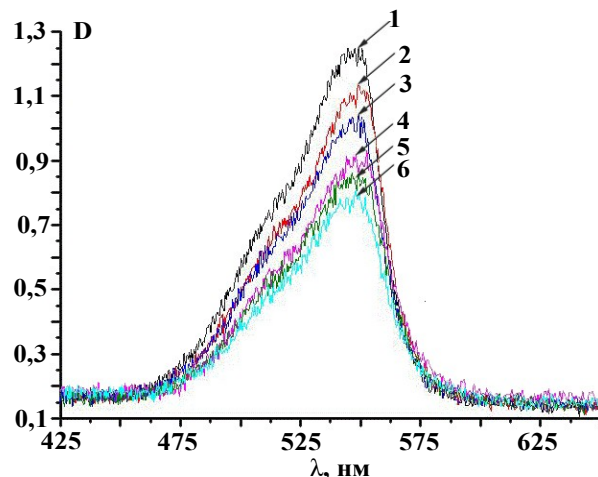


Рис. 4. Спектри поглинання чистого Pyronin Y (1) та з додаванням ДНК за різних концентрацій: 3,06 г/л – 2, 5,71 г/л – 3, 8,04 г/л – 4, 10,10 г/л – 5, 11,93 г/л – 6.

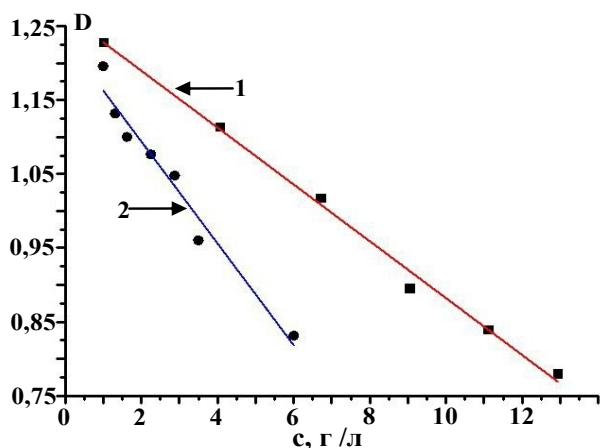


Рис. 5. Залежність максимуму смуги поглинання Ругонін У від концентрації РНК(2, круглі точки) та ДНК(1, квадратні точки).

Для обох полінуклеотидів прослідковується лінійна залежність. Отже, в першому наближенні підтверджується закон Бугера. Оскільки діючий оптичний центр у розчині відповідає Ругонін У та перенесення збудження немає, то гасіння флюоресценції корелює з зменшенням оптичної густини при додаванні полінуклеотидів.

Розрахунки

За допомогою програмного пакету HyperChem Professional 8 були зроблені розрахунки для взаємодії молекули Ругонін У з РНК. Енергетична структура РНК складається з суперпозиції енергетичних структур нуклеозидів [4] молекули, тому розглядали взаємодію барвника окремо з кожною з основ РНК. Припускалося, що має місце стекова диполь-дипольна взаємодія. Напівемпіричним методом AM1 були знайдені положення з найбільшими енергіями взаємодій, які показані на рис.7-10. Молекули розташовувалися так, щоб їх диполі були антипаралельними (приклад для взаємодії барвника з аденином на рис.6).

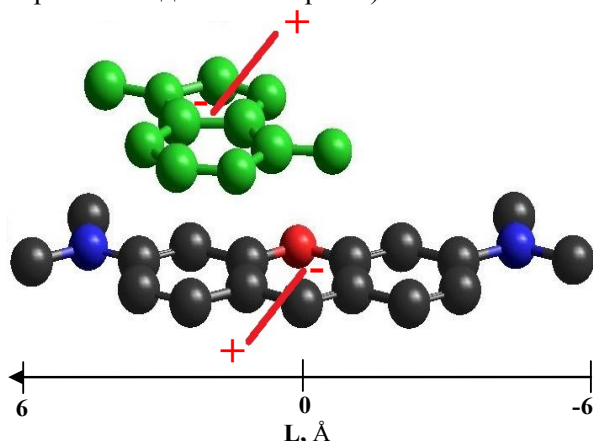


Рис. 6. Взаєморозташування диполів Ругонін У та аденіну.

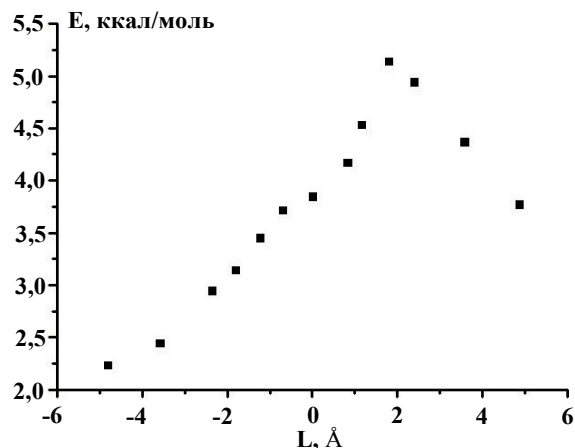


Рис. 7. Залежність енергії взаємодії від відстані горизонтального зміщення молекул Ругонін У та аденіну.

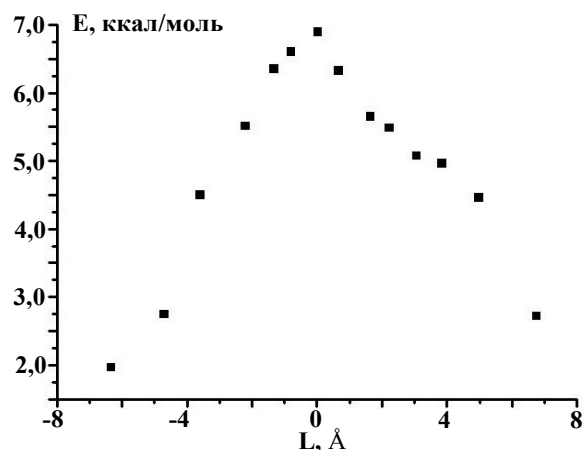


Рис. 8. Залежність енергії взаємодії від відстані горизонтального зміщення молекул Ругонін У та гуаніну.

В результаті обчислення отримано, що найбільша енергія взаємодії відповідає парі Ругонін У-гуанін. Це зумовлено тим, що для неї найбільша площа перекриття електронних хмар. Для положень, де енергія взаємодії найбільша було розраховано сили осцилятора напівемпіричним методом ZINDO/S. Отримали для взаємодії з аденином та гуаніном для переходу HOMO-LUMO малі енергії осциляцій ($f = 0,1455$ і $f = 0,0333$ відповідно). Отже, ці переходи заборонені, що підтверджується фактом гасіння флюоресценції. При взаємодії з цитозином ($f = 0,759$) і урацилом ($f = 0,7356$) відповідні електронні переходи дозволені.

Напівемпіричним методом ZINDO/S були розраховані молекулярні орбіталі та розподіл електронної густини при взаємодії барвника з кожною з основ. При взаємодії Ругонін У з аденином та гуаніном верхні зайняті молекулярні орбіталі цих основ лежать між верхньою зайнятою та нижньою вакантною орбіталями барвника.

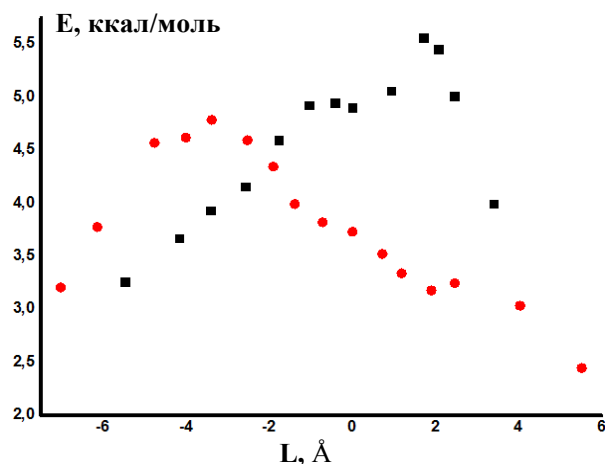


Рис. 9. Залежність енергії взаємодії від відстані горизонтального зміщення молекул цитозину (круглі точки) і урацилу (квадратні точки) відносно Pyronin Y.

Отже, відстань між зайнятими і вакантними орбіталями в результаті взаємодії пуринових баз з барвником зменшується. Для цитозину та урацилу такий факт відсутній, тому флюоресценція така ж як і чистого барвника.

Висновки

В результаті взаємодії Pyronin Y з полінуклеотидами має місце ефект гасіння флюоресценції. Ступінь гасіння лінійним чином залежить від концентрації домішки РНК чи ДНК,

тобто, в першому наближенні підтвердилося підпорядкування фізичного механізму поглинання закону Бугера. При взаємодії з ДНК ефект проявляється значно менше. Взявши еталоном гасіння з ДНК та з РНК, як повністю денатурованої ДНК можна проградувати шкалу, за якою можливо визначати ступінь денатурованості молекули ДНК.

Експериментально показано, що спектри оптичного поглинання водного розчину чистого барвника та збудження флюоресценції водного розчину PY*РНК співпадають, тому діючий оптичний центр належить барвнику. Спектри збудження та випромінювання флюоресценції суміші є "дзеркальними". Гасіння флюоресценції корелює зі зменшенням оптичної густини. Отже, збудження з молекули Pyronin Y на молекулу РНК або ДНК не передається.

Отримано, що гасять флюоресценцію барвника Pyronin Y саме пуринові основи (аденін, гуанін) внаслідок того, що їхні верхні зайняті орбіталі лежать між нижніми вакантними та верхніми зайнятими орбіталями барвника, що при їх взаємодії зумовлює зменшення енергетичної відстані між зайнятими і вакантними орбіталями.

Список використаних джерел

1. Миронова В.М. Цитологічний аналіз / В.М. Миронова, Н.В. Барикіна, О.В. Застєпіна // Cytological Analysis of the Response of Nucleolar RNA and RNA Binding Proteins to Oxidative Stress in HeLa Cells, 2014, Cell and tissue biology. – 2014. – P. 4,6. Доступна: <https://www.researchgate.net>. [Добавлена: Лютий 2015].
2. Уотсон Дж. Двойная спираль/ Дж. Уотсон – Нью-Йорк: Харвест, 2013 – 30-53 с.
3. Конарев В.Г. Методы биохимии и цитохимии нуклеиновых кислот / В.Г. Конарев, С.Л. Тютюрев.– Ленинград: Колос, 1970. – 149-164 с.
4. Ящук В.М. Фотоніка полімерів/ В.М. Ящук. – Київ: ВПЦ, 2004. – 23,24 с.

References

1. MIRONOVA, A., BARYKINA, N. and ZASTEPINA, O. (2014) *Cytological Analysis of the Response of Nucleolar RNA and RNA Binding Proteins to Oxidative Stress in HeLa Cells*. Ed.: Cell and tissue biology, p.4,6. Available from: <https://www.researchgate.net>. [Accessed: February 2015].
2. WATSON, J. (2013) *The double helix*. Ed. New York: Harvesting. p. 30-53.
3. KONAREV, V., TUTUREV S. (1970) *Methods of biochemistry and cytochemistry nucleic acids*. Ed. Kyiv: Kolos. p. 149-164.
4. YASHCHUK, V. (2004) *Photonics of polymers*. September 2007. Ed. Kyiv: Vydavnycho-polihrafichnyj centr Kyuyivskij universytet. p. 23-24.

Надійшла до редколегії 10.09.16

УДК 536.413.2

Ніколаєнко А.В.¹, інж.,
Надточій А.Б.¹, к.ф.-м.н., с.н.с.,
Гололобов Ю.П.², д.ф.-м.н., проф.,
Боровий М.О.¹, д.ф.-м.н., доц.

Електропровідність *C* та *2C* політипів сегнетоелектрика TlInS_2 в діапазоні температур 100 К -300 К

¹Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 01601, м. Київ, вул. Володимирська 64/13,
²Національний транспортний університет, 01010, м.Київ, вул. Суворова 1
e-mail: alina.salnik@gmail.com

A.V.Nikolaienko¹, Eng.,
A.B. Nadtochii¹, PhD., Sen. Sci. Res.,
Yu. P. Gololobov², Dr. Sci., Prof.,
M.O.Borovoy¹, Dr. Sci., Assoc. Prof.

The conductivity of *C* та *2C* polytypes of TlInS_2 ferroelectrics in temperature range 100K-300 K

¹Taras Shevchenko National University of Kyiv, 01601, Kyiv, Volodymyrska st. 64/13,
²National Transport University, 01010, Kyiv, Suvorova Street 1
e-mail:¹ alina.salnik@gmail.com

Експериментально досліджено температурні залежності питомої електропровідності на постійному струмі *C*- та *2C*-політипів кристалів TlInS_2 при охолодженні в області температур 100 К – 300 К. Виявлено, що температурні залежності для таких політипів демонструють суттєві відмінності. У зразках *C*-політипу спостерігається зростання провідності при охолодженні в температурній області існування НФ, тоді як в зразках *2C*-політипу в усьому температурному інтервалі провідність монотонно спадає. Для обох політипів визначено енергії активації провідності на експоненційних ділянках температурних залежностей питомої електропровідності. Показано, що в області температур 120 К – 160 К для *C*- та *2C*-політипів спостерігається стрибова провідність зі змінною довжиною стрибка. Визначено густину локалізованих станів біля рівня Фермі, яка для *2C*-політипу є майже у 2 рази є вищою, ніж у *C*-політипу.

Ключові слова: Модульовані структури, стрибова провідність, локалізовані стани

The temperature dependence of electrical conductivity on DC for *C*- and *2C*-polytypes of TlInS_2 crystals was experimentally investigated in temperature range 100–300 K. It was revealed that temperature dependences for such polytypes demonstrate significant differences. The increasing of the conductivity during the cooling in the temperature interval of the incommensurate phase existence was observed for *C*-polytype, meanwhile for *2C*-polytype the conductivity monotonically decreases. For both polytypes there were determined the activation energies of conductivity in exponential areas of temperature dependences of electrical conductivity. It was shown that in temperature range 120–160 K for *C*- and *2C*-polytype observed the hopping conductivity with a variable jump length. It was determined the density of localized states near the Fermi level, which for *2C*-polytype was almost twice higher. The main types of defects which provide the appearance of localized states in the band gap were considered. There were qualitatively considered the possible reasons of absence of the modulated structures and the mechanism of conductivity growth in region of the incommensurate phase existence in *2C*-polytype crystals.

Key Words: Modulated structures, hopping conductivity, localized states

Статтю представив член-кор. НАН України, д.ф.-м.н., проф. Макара В.А.

Вступ

Кристали $\beta\text{-TlInS}_2$ належать до класу низькорозмірних сполук талію TiMX_2 ($M = \text{Ga, In}$; $X = \text{Se, S, Te}$), для яких характерні сегнетоелектричні та напівпровідникові властивості. За нормальних умов такі кристали характеризуються просторовою групою $C2/c$

моноклінної сингонії [1]. Можливість використання TlInS_2 в приладах оптоелектроніки стимулювала численні дослідження електротранспорту, діелектричних, оптичних та пружних властивостей цих кристалів. Цілий ряд аномалій фотопровідності, діелектричної сприйнятливості, швидкості поширення ультразвукових хвиль, теплоємності, що

спостерігаються в інтервалі температур $T = 170 - 300$ К, свідчать про існування фазових переходів в TlInS_2 (див., наприклад, повний огляд [2]). Особливістю цих перетворень є формування модульованих просторових структур, які можуть бути як співрозмірними, так і неспіврозмірними. Незважаючи на численні дослідження, існуючі дані про механізми і температури переходів з парафази до неспіврозмірної фази (НФ) і, відповідно, з НФ до співрозмірної фази (СФ), які базуються на вказаних вище експериментальних методах, досить суперечливі [2]. В нашій недавній роботі [3] було показано, що такі розбіжності можуть бути зумовленими політипією кристалів TlInS_2 . Зокрема, було встановлено, що в кристалах політипу 2С (подвоєний параметр елементарної комірки $c' = 2c$, де $c = 1,516$ нм – параметр комірки С-політипу) у спектрах рентгенівської дифракції не спостерігаються модуляційні сателіти як НФ (температурна область існування $T = 194$ К – 214 К), так і СФ ($T < 194$ К). У роботі [3] на основі рентгеноструктурних даних було висловлено припущення, що кристали 2С-політипу мають вищу концентрацію дефектів упакування вздовж вісі OZ у порівнянні з С-політипом, завдяки чому в них пригнічується утворення довгоперіодичних модуляцій в цьому напрямку. В той же час, на сьогодні відсутні експериментальні дані про електропровідність кристалів TlInS_2 2С-політипу, які дозволили б визначити механізми переносу заряду та роль підсистеми дефектів в таких процесах у порівнянні з кристалами С-політипу. Тому в даній роботі представлено результати дослідження електропровідності кристалів TlInS_2 С- та 2С-політипів на постійному струмі в області температур 100 К – 300 К.

Методика експерименту

Для вимірювання електропровідності використовувалися монокристалічні зразки TlInS_2 С- та 2С-політипів, вирощені методом Бріджмена. Типовий розмір зразків складав $5 \times 7 \times 1$ мм. Поверхня 5×7 мм збігалася з площинами $(00l)$. Досліджувалася питома електропровідність вздовж шарів ($\sigma_{\perp}$). Для забезпечення омичних контактів використовувалася індій-галієва паста, яка наносилася на попередньо очищені грані 7×1 мм. Зразок розміщувався у камері кріостата CS204AEX1-AL. Електрична напруга формувалася 12-бітним цифро-аналоговим перетворювачем та через буферний підсилювач подавалася на

зразок. Електричний струм, що проходив через зразок, за допомогою перетворювача "струм-напруга" перетворювався на напругу, яка вимірювалася за допомогою 16-бітного аналогово-цифрового перетворювача та у цифровому вигляді передавалася до комп'ютера. Діапазон зміни напруги на зразку: від -10 В до $+10$ В. Керування температурою кріостата здійснювалося за допомогою контролера "Lake Shore 331S" через цифровий порт RS232 комп'ютера. Точність підтримування температури складала $0,1$ К. Швидкість зміни температури 1 К/хв. Вимірювання виконувалися в режимі охолодження з кроком по температурі 2 К. При кожній температурі визначалася вольт-амперна характеристика зразка $I(U)$, на якій виділялася лінійна ділянка, що відповідала омичному опору. Напруги на цій ділянці не перевищували $0,2$ В. Для визначення опору зразка $R = U/I$ використовувалася напруга $0,1$ В.

Результати та обговорення

Розглянемо отримані експериментальні результати. На рис. 1 представлено типові температурні залежності провідності $\sigma_{\perp}$ для політипу С (крива 1) та політипу 2С (крива 2). У випадку політипу С при охолодженні зразків в області температур 255 К – 290 К спостерігається експоненційна ділянка залежності $\sigma_{\perp}(T)$ з енергією активації носіїв струму $0,65$ еВ. При подальшому зменшенні температури енергія активації монотонно зменшується і при температурах $T_i = 214$ К – 217 К вона дорівнює нулю (горизонтальна ділянка на кривій 1). Важливо відзначити, що саме при цих

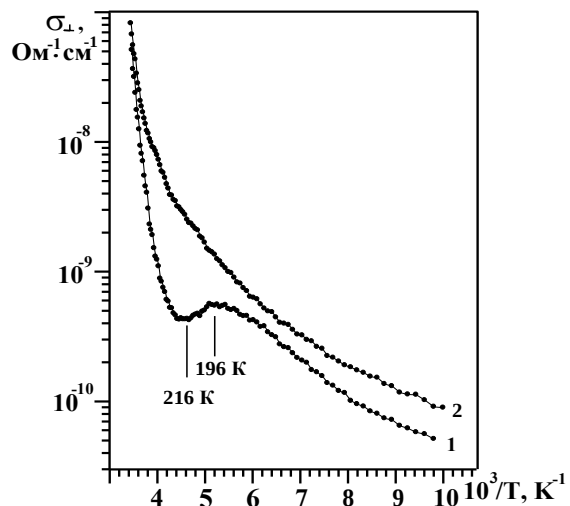


Рис. 1. Залежність електропровідності кристалів TlInS_2 від температури: 1 – С-політип; 2 – 2С-політип.

температурах починається активне формування НФ в усьому об'ємі кристалу [3]. Подальше охолодження супроводжується зростанням провідності з енергією активації $E = -0,06$ еВ і при $T_c = 195$ К – 200 К залежність $\sigma_{\perp}(T)$ знову виходить на горизонтальну ділянку. Вказані температури T_c відповідають фазовому переходу з НФ до СФ [2]. Таким чином, зростання провідності зразків С-політипу спостерігається саме в області існування НФ. Про подібне збільшення провідності кристалів TlInS_2 повідомлялося раніше в роботі [4], але там відповідна температурна область складала 226 К – 260 К, що відповідає стану кристалу TlInS_2 у парафазі. Охолодження зразків від $T = 196$ К супроводжується зменшенням провідності, при цьому енергія активації носіїв струму монотонно зростає до 0,04 еВ при $T \approx 160$ К. Далі вниз по температурі помітних змін енергії активації не відбувається аж до $T \approx 120$ К. Оскільки раніше повідомлялося про можливість у кристалах TlInS_2 стрибкової провідності зі змінною довжиною стрибка [5], було проаналізовано залежність $\sigma_{\perp}(T)$ в діапазоні $T = 100$ К – 200 К з точки зору існування такої провідності.

Як відомо, стрибкова провідність зі змінною довжиною стрибка відбувається тоді, коли біля рівня Фермі в забороненій зоні існує область з кінцевою густиною локалізованих станів $N(E_F)$. Для такого типу провідності залежність питомої електропровідності від температури має вигляд [6]

$$\sigma = \sigma_0 \exp(-BT^{-1/4}) \quad (1)$$

де

$$B = 2 \left(\frac{\alpha^3}{kN(E_F)} \right)^{1/4} \quad (2)$$

тут α - стала спаду хвильової функції електрона $\psi \propto \exp(-\alpha r)$, k - стала Больцмана. Стала спаду є оберненою до радіусу локалізації електрона $a = 1/\alpha$. Приймається, що густина локалізованих станів біля рівня Фермі $N(E_F)$ залишається сталою в інтервалі енергій порядку kT . На рис. 2 експериментальні значення провідності $\ln(\sigma_{\perp})$ зразків С-політипу представлені залежно від $T^{-1/4}$ в області температур 100 К – 200 К (крива 1). Як видно, в інтервалі температур 120 К – 160 К спостерігається лінійна ділянка такої залежності, що свідчить саме про стрибкову провідність зі змінною довжиною стрибка. За кутом нахилу відповідної прямої визначено $B = (68 \pm 3) \text{ K}^{-1/4}$. Тоді з рівняння (2) було оцінено густина станів біля рівня Фермі.

Приймаючи радіус локалізації $a = 1,4$ нм [4], отримано $N(E_F) = 3,7 \cdot 10^{18} \text{ eB}^{-1} \cdot \text{cm}^{-3}$. Таке

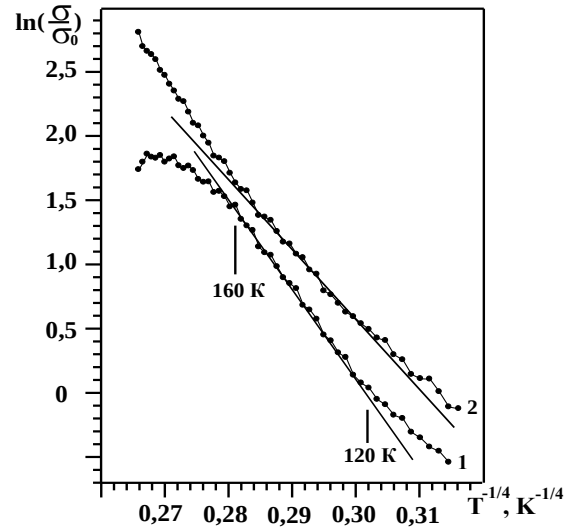


Рис. 2. Відносна електропровідність кристалів TlInS_2 як функція $T^{-1/4}$:
1 – С-політип; 2 – 2С-політип.

значення густини станів добре корелює з результатами [7], отриманими на змінному струмі. При подальшому охолодженні від 120 К до 100 К енергія активації зменшується і при $T = 100$ К складає 0,01 еВ – 0,02 еВ.

Розглянемо залежність питомої електропровідності від температури для зразків 2С-політипу TlInS_2 (рис. 1, крива 2). На відміну від зразків С-політипу, тут при охолодженні можна виділити три експоненційні ділянки: 1) $T = 255$ К – 290 К, енергія активації $E = 0,52$ еВ; 2) $T = 235$ К – 250 К, $E = 0,21$ еВ; 3) $T = 170$ К – 230 К, $E = 0,09$ еВ.

Важливо відзначити, що в області температур 190 К – 220 К, в якій для політипу С спостерігалася складна форма залежності $\sigma_{\perp}(T)$, питома провідність зразків 2С-політипу монотонно спадає, а будь-які аномалії не спостерігаються. Цей результат добре узгоджується з раніш встановленими фактом того, що в зразках 2С-політипу в області температур існування НФ та СФ відсутні модуляційні рентгеновські сателіти, характерні для цих фаз [3]. Отже, на основі як рентгеноструктурних даних, так і отриманих в даній роботі результатів по електропровідності, можна стверджувати, що в 2С-політіпі TlInS_2 довгоперіодичні модульовані структури в області температур 220 К – 190 К відсутні.

Для зразків 2С-політипу також було перевірено можливість існування стрибкової провідності зі змінною довжиною стрибка. На рис. 2 наведено

експериментальну залежність провідності від температури в координатах $\ln(\sigma_{\perp})$ та $T^{-1/4}$ (крива 2). Очевидно, і для цього політипу спостерігається лінійна ділянка (інтервал температур $T = 126 \text{ K} - 162 \text{ K}$). Величина нахилу прямої виявилася дещо меншою, а ніж для C -політипу, а саме $B = (56 \pm 3) \text{ K}^{-1/4}$. Оцінка за формулою (2) дає $N(E_F) = 6,9 \cdot 10^{18} \text{ eV}^{-1} \cdot \text{cm}^{-3}$. При подальшому охолодженні до $T = 100 \text{ K}$ енергія активації, як і для C -політипу, зменшується до $0,01 \text{ eV} - 0,02 \text{ eV}$.

Важливим питанням, що потребує розв'язку, є з'ясування природи зростання провідності у НФ C -політипу TlInS_2 . Особливо звертає на себе увагу той факт, що при $T < 194 \text{ K}$, коли в кристалі існує співрозмірна модульована структура з хвильовим вектором $q(0,0,\pm 0.25)$, провідність спадає. Зростання провідності спостерігається лише при існуванні неспіврозмірних хвиль модуляції з хвильовим вектором $q(\mp \delta, 0, \pm 0.25)$ ($\delta = 0.04$) при охолодженні кристалу області температур $195 \text{ K} - 215 \text{ K}$.

Список використаних джерел

1. Muller D. Untersuchungen über ternäre Chalkogenide. XXIV. Zur Struktur des TlGaSe_2 / Muller. // *Zeitschrift für Anorganische und Allgemeine Chemie*. – 1978. – V.438. – P. 258 – 272.
2. Panich A. M. Electronic properties and phase transitions in low-dimensional semiconductors. / Panich. // *Journal of Physics. Condensed Matter*. – 2008. – V.20. – №29. – P. 293202–293244.
3. Salnik A. V. The incommensurate phase transformation in TlInS_2 ferroelectric / A. V. Salnik, Y. P. Gololobov, N. A. Borovoy. // *Ferroelectrics*. – 2015. – V.484. – P. 62–68.
4. Mustafaeva S. N. Investigation of dc hopping conduction in TlGaS_2 and TlInS_2 single crystal / S. N. Mustafaeva, M. M. Asadov. // *Physics of the Solid State*. – 1998. – V.40. – №4. – P. 561 – 563.
5. Sardarly R. M. Relaxor properties and the mechanism of conduction in TlInS_2 crystals exposed to gamma irradiation / R. M. Sardarly, O. A. Samedov. // *Physics of the Solid State*. – 2005. – V.47. – №9. – P. 1729 – 1733.
6. Mott N. E. Electron processes in non-crystalline materials / N. E. Mott, E. A. Davis. – Oxford: Clarendon Press, 1979. – 673 c.
7. Mustafaeva S. N. Effect of gamma irradiation on the dielectric properties and electrical conductivity of the TlInS_2 single crystal / S. N. Mustafaeva, M. M. Asadov. // *Physics of the Solid State*. – 2009. – V.51. – №11. – P. 2269 – 2273.

Висновки

Таким чином, в кристалах TlInS_2 C - та $2C$ -політипів в області температур $T = 120 \text{ K} - 160 \text{ K}$ реалізується стрибкова провідність зі змінною довжиною стрибка, зумовлена наявністю локалізованих станів біля рівня Фермі. Висока густина таких станів ($\propto 10^{18} \text{ eV}^{-1} \cdot \text{cm}^{-3}$) свідчить про значну концентрацію дефектів структури в політипах TlInS_2 і за будовою енергетичних зон наближає ці кристали до аморфних напівпровідників. Дефектами можуть виступати катіонні та аніонні вакансії, розірвані атомні зв'язки, комплекси точкових дефектів, дефекти упакування. Порівнюючи C - та $2C$ -політипи, необхідно відзначити, що вища густина $N(E_F)$ у $2C$ -політипі свідчить і про більшу концентрацію дефектів у таких кристалах, зокрема, дефектів упакування вздовж напрямку $[00l]$. Тоді, відсутність хвиль статичних зміщень в цьому напрямку в кристалах $2C$ -політипу може бути зумовлена демпфуючою дією дефектів упакування шарів, що узгоджується з даними рентгеноструктурних досліджень [3].

References

1. MULLER, D. (1978) Untersuchungen über ternäre Chalkogenide. XXIV. Zur Struktur des TlGaSe_2 . *Zeitschrift für Anorganische und Allgemeine Chemie*. 438. p. 258–272.
2. PANICH, A. M. (2008) Electronic properties and phase transitions in low-dimensional semiconductors. *Journal of Physics. Condensed Matter*. 20 (29). p. 293202 (42 p.).
3. SALNIK, A., GOLOLOBOV, YU. P. and BOROVOY, N.A. (2015) The incommensurate phase transformation in TlInS_2 ferroelectric. *Ferroelectrics*. 484. p. 62–68.
4. MUSTAFAEVA, S. N. and ASADOV, M. M. (1998) Investigation of dc hopping conduction in TlGaS_2 and TlInS_2 single crystal. *Physics of the Solid State*. 40(4), p. 561–563.
5. SARDARLY, R. M., SAMEDOV, O. A. (2005) Relaxor properties and the mechanism of conduction in TlInS_2 crystals exposed to gamma irradiation. *Physics of the Solid State*. 47(9). p. 1729–1733.
6. MOTT, N. E. and DAVIS, E. A. (1979) *Electron processes in non-crystalline materials*. Oxford: Clarendon Press.
7. MUSTAFAEVA, S. N. and ASADOV, M. M. (2009) Effect of gamma irradiation on the dielectric properties and electrical conductivity of the TlInS_2 single crystal. *Physics of the Solid State*. 51(11), p. 2269–2273.

Надійшла до редколегії 19.09.16

УДК 539.2

Пивоваренко Ю.В.¹, інж.,
Гринь Д.В.², інж.,
Шабликін О.В.³, к.х.н.,
Ящук В.М.⁴, д.ф.-м.н., проф.

Y.V. Pivovarenko¹, Eng.,
D.V. Gryn², Eng.,
O.V. Shablykin³, PhD.,
V.M. Yashchuk⁴ Dr. Sci., Prof.

Спектральні прояви присутності молекулярного водню у водних розчинах

The spectral manifestation of molecular hydrogen presence in aqua solution

¹Навчально-науковий центр «Фізико-хімічне
матеріалознавство» Київського Національного
університету ім. Тараса Шевченка та НАН
України, 01601, м. Київ, вул.
Володимирська 64/13,
e-mail: y.pivovarenko@gmail.com

¹Research and Training Center 'Physical and
Chemical Materials Science' under Kyiv Taras
Shevchenko University and NAS of Ukraine, 01601,
Kyiv, Volodymyrska st. 64/13
e-mail: y.pivovarenko@gmail.com

^{2,4}Фізичний факультет Київського
національного університету імені Тараса
Шевченка, 01601, м. Київ, вул.
Володимирська 64/13
e-mail: ²d.gryn@ukr.net

^{2,4}Physical Faculty, Taras Shevchenko National
University of Kyiv, 01601, Kyiv, Volodymyrska st.
64/13

e-mail: ²d.gryn@ukr.net

³Інститут біоорганічної хімії та нафтохімії
Національної Академії наук України, 02660,
м. Київ, вул.Мурманська,1.

³Institute of Bioorganic Chemistry and Petrol
Chemistry NAS of Ukraine, Murmanskaja str. 1,
Kiev, 02660, Ukraine

Спостерігається поява люмінесценції у водних розчинах отриманих при електролізі. Деякі автори пов'язують цю люмінесценцію з наявністю активних форм кисню). В даній роботі перевіряється припущення що люмінесценція води з катодного відділення електролізера пов'язана саме з наявністю розчиненого водню у воді. Пропускання газоподібного водню через воду, так само як і реакція води з магнієм призводить до появи спектральної смуги в області 410-415нм. Інтенсивність люмінесценції залежить від кількості продутого водню та тривалості реакції з магнієм, в той же час форма та положення спектральної смуги залишається незмінним.

Ключові слова: газоподібний водень, розчинений водень, флюоресценція.

It is known that water solutions, which are obtained by electrolysis, manifests fluorescence. Some authors connect this effect to the ROS (Reactive Oxygen Species) both in anode and in cathode compartments. In this article authors in contrast assumed that the fluorescence of the cathode solutions is connected with aqueous hydrogen gas. In experiment, water has got saturated by hydrogen gas. These, definitely containing hydrogen, water solutions are examined. The bubbling of distilled water with hydrogen as well as reaction of water with Mg leads to appearing the wide emission band with the maximum near 410-415nm. The intensity of the fluorescence depends on the quantity of hydrogen gas bubbled through the water, as well as the time of interaction of water with metal magnesium, but the shape and the position of maximum of the fluorescence spectra do not depend on the time of reaction. Also the same band connected with hydrogen is present in water from cathode part of electrolyser. The hydrogen fluorescence in water present at room temperature at excitation band 260 nm

Key Words: hydrogen gas, aqueous hydrogen gas, fluorescence.

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Макарець М. В.

Introduction

It was experimentally shown that the water solutions obtained by the electrolysis, manifests fluorescence in the range: 300 – 700 nm [1]. The authors explained this fluorescence due to the appearance of the ROS (Reactive Oxygen Species), both in anode and in cathode compartments of the electrolyzer. Analyzing the results of these experiments, we have in contrast assumed that the fluorescence of the cathode solutions is connected with aqueous hydrogen gas. This assumption was tested experimentally.

To test our assumption, we recorded fluorescence spectra of water solutions, which definitely contain dissolved hydrogen gas, and compare them to ordinary distilled water. Firstly, we evidently recorded fluorescence spectra of water which was bubbled with hydrogen. Secondly, we recorded fluorescence spectra of water in which the metallic magnesium or metallic iron were present; – in fact, we tested the water solutions containing the products of reactions between water and these metals [2].

So we tried to check our assumption.

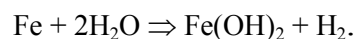
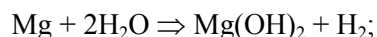
Materials and methods

Water was bubbled with hydrogen gas. Gas is supplied from a cylinder with a gas reducer at 1,05 atmosphere.

For monitoring the aqueous hydrogen fluorescence in dynamic, we have used the reactions between water and some metals, namely magnesium and iron were used [2], which are producing hydrogen:



Fig. 1. A closed polyethylene bottle with hydrogen gas after 2 weeks of filling. These changes shows that hydrogen gas easily can permeate through the polyethylene.



Reactive were purchased from Ukrreachim (Ukraine).

The fluorescence spectra recording Cary Eclipse fluorescence spectrofluorometer (Varian, Austria) was used.

The primary fluorescence excitation wavelength was 260 nm, as in [1].

All investigated solutions were at room temperature.

As it is known [2], hydrogen gas has high possibility of penetration. For example, it is able to get out of a closed polyethylene bottle, making bottle to shrink (Fig. 1). For this reason, fluorescence spectra of researched solutions were recorded immediately after their preparation.

Results and discussion

The main results are presented on Fig.2 and Fig.3.

Verifying our hypothesis, we obtained the fluorescence spectra of water solutions saturated with hydrogen gas in different ways.

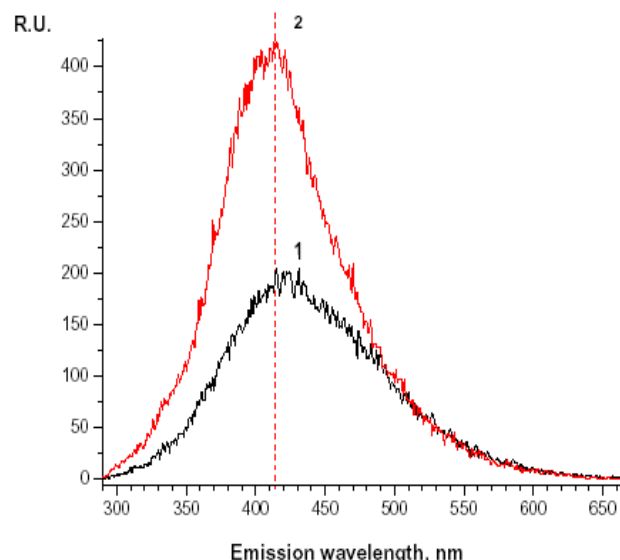


Fig. 2. Fluorescence spectra of distilled water (1) and distilled water saturated with hydrogen gas (2).

From Fig.2 it follows that in distilled water at room temperature as a result of light excitation on 260 nm, a weak fluorescence broad band with maximum at 410-415 nm appeared (Fig.2, curve 1). The intensity of this fluorescence strongly increases under saturation of this sample of water with

hydrogene gas (Fig.2, curve 2). The similar effect was observed when the small piece of magnesium

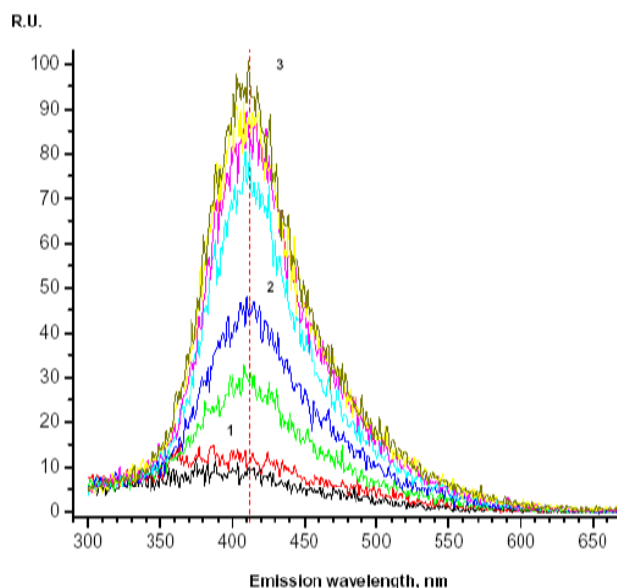


Fig. 3. Fluorescence spectra of an aqueous solution containing reaction products of magnesium metal and water: 1 – before the reaction; 2 – 15 min after the start of the reaction; 3 – 30 min after the start of the reaction.

metal is placed in water ((Fig.3, curves 2, 3).

Most convenient experiment is the reaction between the magnesium metal and water; a small piece of magnesium metal can be placed directly into the photometric cuvette with water (Fig. 3).

As it follows from this Fig.3, the intensity of fluorescence increased with the time of contact the magnesium with water. The shape and the position of maximum of this band in spectra of fluorescence in this case were very close to those that were observed when the water was bubbled with hydrogen. The same picture was observed when the water was contacted with metallic iron powder.

The data obtained above showed the broad fluorescence band with maximum near 412-415 nm that appeared in water under irradiation by UV light, is connected with the presence of hydrogenic molecules in water in both experiments.

It may be important that this maximum in fluorescence spectra is situated close to the wavelength of violet spectral lines of hydrogen gas emission ($\sim 410,17$ nm) of the Balmier series [3,4].

Although we understand that this occurrence could be accidental.

Therefore, we believe that these peaks are exists due to the presence of hydrogen in the researched solutions.

Comparing the spectra obtained by us (Fig. 3,4) and spectra, which have been published (Fig.1 in [1], spectra 1,2), we came to the conclusion that they manifests the similar peaks in a short-wave spectral range with a maximum wavelength of $\sim 410,2$ nm. This confirmed our assumption that the peaks (including peaks, which appear during the electrolysis in cathode solutions [1]) are partly connected with fluorescence of aqueous hydrogen gas.

In our opinion, described fluorescence can be used to detect hydrogen gas in aqueous media; it may be important for experts on hydrogen energy.

Also we think that this fluorescence could be also useful for biologist. In particular, it is known that hydrogen gas is a significant part of the human and laboratory animals intestinal gas. Its content in human intestinal gases is from 20 to 37 % (vol.) [6]. In addition the hydrogen gas possesses a high penetration (Fig. 1): thanks to this, it can every time penetrate in all human body, tissues and laboratory animals. As a result, hydrogen gas can be widespread in the tissues of living organisms, and it's fluorescence must be taken into account in experiments of measuring their spectral properties in that range.

Conclusions

1. The presence of hydrogen molecules in aqua solutions leads to manifestation of broad band of fluorescence with maximum 412-415 nm under UV light excitation.

2. The effect described above has to be taking into account in the spectral investigations of water solutions.

3. The observed effects can be used for detection of hydrogen gas. It may be important for experts or hydrogen energy

4. Due to the high penetration possibility of hydrogene gas it is present in all human and animal tissues, hydrogene can be widespread in the tissues of living organisms. So the spectral testing of biological processes with involving of hydrogen is perspective.

Список використаних джерел

1. Беловолова Л. В. Особенности флуоресценции воды, активированной электролизом. Роль активных форм кислорода [Электронный ресурс] / Л. В. Беловолова, М. В. Глушков, Г. И. Виноградова // Электронный научный журнал «ИССЛЕДОВАНО В РОССИИ». – 2006. – №268. – С. 2588-2601. – Режим доступа до ресурсу: <http://zhurnal.ape.relarn.ru/articles/2006/268.pdf>.
2. Некрасов Б. В. Основы общей химии [изд. 3-е] / Б. В. Некрасов. – Санкт-Петербург: Лан, 2003.
3. Шпольский Э. В. Атомная физика [изд. 6-е] / Э. В. Шпольский. – Москва: Наука, 1974.
4. Kuchling H. Physik / Kuchling. – Leipzig: VEB Fachbuchverlag, 1980.
5. Role of Water in Electron-Initiated Processes and Radical Chemistry: Issues and Scientific Advances / [C. Garrett, D. A. Dixon, D. M. Camaioni та ін.]. // Chem. Rev. – 2005. – №105. – С. 355–389.
6. Использование препарата Эспумизан в практике гастроэнтеролога / [Н. В. Харченко, В. В. Черненко, И. Н. Червак та ін.]. // Здоров'я України. – 2008. – №6/1. – С. 52–53.

References

1. Belovolova, L.V.; Glushkov, M.V.; Vinogradova, G.I., (2006) Features water fluorescence activated electrolysis. The role of reactive oxygen species. *Electronic multi-disciplinary scientific journal "Investigated in Russia"*. [Online] Moscow Physico-Technical Institute. 268. p2588-2601. Available from: <http://zhurnal.ape.relarn.ru/articles/2006/268.pdf>. [Accessed: 24th March 2012]
2. Nekrasov, B.V. (2003) *Bases of general chemistry. 4th Ed.* Sankt-Petersburg: Lan.
3. Shpolsky, E.V. (1974) *Atomic Physics*. Vol.1. 6th Ed. Moskva: Nauka.
4. Kuchling, H. (1980) *Physik*. Leipzig: VEB Fachbuchverlag.
5. Garrett, C., Dixon, D.A., Camaioni, D.M. at al. (2005) Role of Water in Electron-Initiated Processes and Radical Chemistry: Issues and Scientific Advances. *Chem. Rev.* 105. p355-389.
6. Harchenko, N.V., Tchernenko, V.V., Tchervak, I.N., Stukalo, V.M., Tokar, D.V. (2008) Using Espumizan preparation in practice gastroenterologist. *Ukraine's Health*. 6(1). p52-53.

Надійшла до редколегії 15.09.16

УДК 535.341.08, 535.342, 53.096.

Сіжук А. С.¹, к.ф.-м.н.,
Єжов С. М.², д.ф.-м.н., проф.

A. S. Sizhuk¹, PhD.,
S. M. Yezhov², Dr. Sci.

**Використання мікроскопічного
розподілу частинок для
квантовооптичних усереднених**

**Use of the microscopic distribution of particles
for the quantum optical averages**

^{1,2}Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 01601, м. Київ, вул.
Володимирська 64/13,
e-mail: ¹andrii.sizhuk@gmail.com,
²yezhov@univ.kiev.ua

^{1,2}Taras Shevchenko National University of Kyiv,
01601, Kyiv, Volodymyrska st. 64/13,
e-mail: ¹andrii.sizhuk@gmail.com,
²yezhov@univ.kiev.ua

У даній роботі обговорюється можливість представлення квантово-оптичних виразів для коефіцієнта поглинання у термінах інтегралів зіткнення для відповідних напівкласичних кінетичних рівнянь. Показано, що у певному наближенні, задані градієнтні поля для розподілу кількості частинок у фазовому просторі (координати і імпульсу) можуть відповідним чином визначати поглинальні властивості системи.

Ключові слова: коефіцієнт поглинання, кінетичне рівняння, інтеграл зіткнення, комутаційні співвідношення, квантова оптика.

In this work the representation of the quantum optical expressions for the absorption coefficient in terms of collisional integrals of the corresponding semi-classical kinetic equations is discussed. It was shown, that in certain approximation, the given gradient field of particle number distribution in the phase space (of coordinates and momentums) can determine the absorption properties of a system. The atom-photon and atom-atom collisions are formally represented here in the form of the corresponding items in the kinetic equation. The proposed approximation can be used to introduce the chronology of absorption/reemission and interatomic collision events in the system within an impact theory or a semi-classical evolution operator in the kinetic equation. The single-atom methods, such as the equation of motion for the one-particle population matrix, to find the number of quanta, imbibed by atoms or liberated into the environment per unit time, are not used here. The derived expression for the local absorption coefficient non-linearly depends on atomic density and initial intensity. It was found that the ability of the system to absorb or emit quanta can quantitatively be expressed through the semi-classical form of collision integrals.

Key Words: absorption coefficient, kinetic equation, collision integral, commutation relation, quantum optics.

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Макарець М.В.

Вступ

Відомо, що, феноменологічно, розширення та зсув спектральної лінії (поглинання переходом між двома енергетичними рівнями), спричинених відповідно короткодійною (абсолютно пружною) та далекодійною (непружною або пружною) взаємодіями між атомами, можуть бути описані розподілом Лоренца для спектральної густини (інтенсивності: див., наприклад, [1]):

$$I(\omega) = \frac{C}{(\omega - \omega_0 - \Delta\omega)^2 + (\gamma/2)^2}, \quad (1)$$

Де зсув лінії задається параметром $\Delta\omega = n_A \bar{v} \sigma_s$, а розширення лінії поглинання – за допомогою

$\gamma = \gamma_0 + n_A \bar{v} \sigma_b$, $C = I_0 \gamma / 2\pi$. Тут, n_A – це концентрація атомів, $\bar{v}$ – середня теплова швидкість атомів, σ_s та σ_b – це так звані площі поперечних перерізів для зсуву та розширення спектральної лінії, відповідно. γ_0 – частота розпаду («натуральна ширина» лінії) відповідного збудженого стану вільного атома. I_0 – деяка інтегральна (початкова) інтенсивність скануючого променя.

Поставимо наступне запитання. Чи можна звести процедуру обчислення поглинальних властивостей середовища, отриману на основі теорії квантової оптики, до виразів, подібних

формулі (1) і сформульованих у напівкласичних термінах кінетичної теорії (таких, як інтеграл зіткнення, переріз розсіювання тощо)?

Незважаючи на значний поступ на шляху позитку понять класичної та квантової теорій розсіювання світла оптично активним середовищем (див., наприклад, [2] – [10]), поєднання термінології теорії кінетичних рівнянь та методу вторинного квантування для електромагнітного поля, на нашу думку, є доволі нетривіальним.

У даній роботі пропонується розглянути мікроскопічний опис системи взаємодіючих атомів та електромагнітного поля. Досліджується можливість представлення квантово-оптичних виразів для коефіцієнта поглинання за допомогою відповідних інтегралів зіткнення.

Представлення у кінетичних термінах

Нехай локальний коефіцієнт поглинання електромагнітного випромінювання є визначений як похідна вздовж вісі симетрії поширення променя (OZ) від логарифма інтенсивності. Як може бути показано при певних припущеннях (див., наприклад, [11]), коефіцієнт може бути виражений за допомогою комутаційних співвідношень між відповідним модельним гамільтоніаном і оператором інтенсивності:

$$\alpha_{tot} \approx \text{Re} \frac{\delta}{\delta Z} \ln \sum_{\Psi} \langle \Psi | \hat{I}_\tau \hat{\rho}_\Psi | \Psi \rangle, \quad (2)$$

де $\hat{I}_\tau$ є оператор інтенсивності у заданий момент часу:

$$\hat{I}_\tau = \hat{I} + \frac{i}{\hbar} \tau [\hat{H}, \hat{I}] + \frac{1}{2} \left(\frac{i}{\hbar} \tau \right)^2 [\hat{H}, [\hat{H}, \hat{I}]], \quad (3)$$

де модельний гамільтоніан $\hat{H} = \hat{H}^A + \hat{H}^F + \hat{H}^{AF} + \hat{H}^{AA}$ описує взаємодію системи однакових атомів з електромагнітним полем (доданок $\hat{H}^{AF}$) та міжатомну короткодіючу взаємодію (доданок $\hat{H}^{AA}$). $\hat{H}^A$, $\hat{H}^F$ – оператори енергії вільних атомів (молекул) та поля, відповідно. $\hat{\rho}_\Psi$ – статистичний розподіл по чистим станам системи $|\Psi\rangle$ у деякий початковий момент часу. Оптичний шлях розсіюваного променя визначається віссю Z. τ є деякий інтервал часу.

Для прикладу, розглянемо такі члени у розкладі (3), як $[\hat{H}^{AF}, \hat{I}]$ та $[\hat{H}^{AA}, \hat{I}]$.

Введемо до розгляду дельта-функцію:

$$f(\mathbf{X}, \hat{\mathbf{D}}) = \sum_{i=1}^N \delta(\mathbf{X} - \mathbf{X}_i) \delta(\hat{\mathbf{D}} - \hat{\mathbf{D}}_i), \quad (4)$$

яка являє собою мікроскопічний розподіл частинок у фазовому просторі координати та імпульсу, позначеного як $\mathbf{X} = (\mathbf{r}, \mathbf{p})$, і оператора дипольного моменту, $\hat{\mathbf{D}}$. f є нормована на кількість частинок (атомів) у системі N . При цьому $\mathbf{X}_i$ визначає положення i -го атома (молекули) у даному просторі $\mathbf{X}_i = (\mathbf{r}_i, \mathbf{p}_i)$. Зміна функції розподілу f , позначену як $\Delta_{coll} f(t, \mathbf{X})$, за достатньо малий проміжок часу Δt при «зіткненнях» атомів з квантами поля та з іншими атомами нехай визначена за допомогою інтегралів зіткнення I_{AF}^{coll} та I_{AA}^{coll} , відповідно. Іншими словами, наступне кінетичне рівняння може мати місце (див., наприклад, [12]):

$$\Delta_{coll} f(t, \mathbf{X}) = (I_{AF}^{coll} + I_{AA}^{coll}) \Delta t = \Delta t \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\mathbf{p}}{m} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} + \mathbf{F} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \right) f(t). \quad (5)$$

Тут $\mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} (\mathbf{D} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}))$, де $\mathbf{D}$ є деякий характеристичний (усереднений) дипольний момент атома. $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ – величина вектора напруженості електромагнітного поля в околі точки $\mathbf{r}$.

Формально представимо значення комутаторів у (3) через дельта-функціональний розподіл у фазовому просторі $\mathbf{X}', \mathbf{D}$. Наприклад,

$$[\hat{H}^{AF}, \hat{I}] \rightarrow - \int d\mathbf{X}' d\hat{\mathbf{D}} f(\mathbf{X}', \hat{\mathbf{D}}) [\hat{\mathbf{D}} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}'), \hat{I}]. \quad (6)$$

Тоді, переходячи від суми до інтегрування по параметрам станів $d\Psi = d\mathbf{X}^N d\Psi^{red}$, де $d\mathbf{X}^N = d\mathbf{X}_1 d\mathbf{X}_2 \dots d\mathbf{X}_N$, та припускаючи факторизацію за теоремою про середнє, представимо доданки під знаком логарифма у формулі (2) у формі середнього за розподілом $\rho(\mathbf{X}^N)$ у фазовому просторі $\mathbf{X}^N = (\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_N)$ наступним чином:

$$\sum_{\Psi} \langle \Psi | [\hat{H}^{AF}, \hat{I}] \hat{\rho}_\Psi | \Psi \rangle \rightarrow \int d\mathbf{X}^N d\mathbf{X}' d\mathbf{D} g(\mathbf{X}^N) \rho(\mathbf{X}^N) \overline{\langle [\hat{I}] \rangle}, \quad (7)$$

де $\mathbf{X}' = (\mathbf{r}', \mathbf{p}')$, $\mathbf{X}^N = (\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_N)$, і (див. [11]) $\overline{\langle [\hat{I}] \rangle} =$

$$\int d\Psi^{red} g^{red}(\Psi) \rho_\Psi^{red}(\Psi) \langle \Psi | f(\mathbf{X}', \hat{\mathbf{D}}) [-\hat{\mathbf{D}} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}'), \hat{I}] | \Psi \rangle \rightarrow I_{AF}(\mathbf{X}') f^*(\mathbf{X}', \hat{\mathbf{D}}) - I_{FA}(\mathbf{X}') f(\mathbf{X}', \hat{\mathbf{D}})$$

$$= \text{Re}(I_{AF}(\mathbf{X}')) \{ f^*(\mathbf{X}', \hat{\mathbf{D}}) - f(\mathbf{X}', \hat{\mathbf{D}}) \} \\ + i \text{Im}(I_{AF}(\mathbf{X}')) \{ f^*(\mathbf{X}', \hat{\mathbf{D}}) + f(\mathbf{X}', \hat{\mathbf{D}}) \}.$$

Тут $f^*(\mathbf{X}', \hat{\mathbf{D}})$ позначає значення функції f після взаємодії атома (атомів) з фотоном. $I_{AF}(\mathbf{X}')$ є деяка цілком визначена функція.

Таким чином, у даному наближенні можемо записати, що

$$\sum_{\Psi} \langle \Psi | [\hat{H}^{AF}, \hat{I}] \hat{\rho}_{\Psi} | \Psi \rangle \rightarrow C_{AF} \frac{\Delta t}{\tau_1} + i C_{AF}^F n_A, \quad (8)$$

де

$$C_{AF} \frac{\Delta t}{\tau_1} = \int d\mathbf{X}' d\hat{\mathbf{D}} \text{Re}(I_{AF}(\mathbf{X}')) \langle I_{AF}^{coll}(\mathbf{X}', \hat{\mathbf{D}}) \rangle \Delta t,$$

$$C_{AF}^F n_A = 2 \langle \text{Im}(I_{AF}(\mathbf{X}', \hat{\mathbf{D}})) \rangle N,$$

$$I_{AF}^{coll}(\mathbf{X}', \hat{\mathbf{D}}) \Delta t = f^*(\mathbf{X}', \hat{\mathbf{D}}) - f(\mathbf{X}', \hat{\mathbf{D}}),$$

$$\langle \dots \rangle \equiv \int d\mathbf{X}^N g(\mathbf{X}^N) \rho(\mathbf{X}^N) \dots$$

За аналогією до вище наведеного предствлення записуємо наступне:

$$[\hat{H}^{AA}, \hat{I}(\mathbf{r})] \rightarrow \int d\mathbf{X}' d\hat{\mathbf{D}}' d\mathbf{X}'' d\hat{\mathbf{D}}'' f(\mathbf{X}', \hat{\mathbf{D}}') f(\mathbf{X}'', \hat{\mathbf{D}}'') [\hat{H}^{AA}, \hat{I}]. \quad (9)$$

Тоді

$$\sum_{\Psi} \langle \Psi | [\hat{H}^{AA}, \hat{I}] \hat{\rho}_{\Psi} | \Psi \rangle \rightarrow \int d\mathbf{X}^N d\mathbf{X}' d\hat{\mathbf{D}}' d\mathbf{X}'' d\hat{\mathbf{D}}'' g(\mathbf{X}^N) \rho(\mathbf{X}^N) \overline{\langle [L, I]^{(2)} \rangle}, \quad (10)$$

де, аналогічно з отриманим наближенням у [11], можемо покласти:

$$\overline{\langle [L, I]^{(2)} \rangle} = \int d\Psi^{red} g^{red}(\Psi) \rho_{\Psi}^{red}(\Psi) \times \\ \langle \Psi | f(\mathbf{X}', \hat{\mathbf{D}}') f(\mathbf{X}'', \hat{\mathbf{D}}'') [\hat{H}^{AA}, \hat{I}] | \Psi \rangle = \\ \langle \Psi | f(\mathbf{X}', \hat{\mathbf{D}}') f(\mathbf{X}'', \hat{\mathbf{D}}'') (\hat{I}_{AA} - \hat{I}_{AA}^{\dagger}) | \Psi \rangle \rightarrow \\ \text{Re}(I_{AA}(\mathbf{X}', \mathbf{X}'')) \times \\ \{ f^{**}(\mathbf{X}', \hat{\mathbf{D}}') f^{**}(\mathbf{X}'', \hat{\mathbf{D}}'') - f(\mathbf{X}', \hat{\mathbf{D}}') f(\mathbf{X}'', \hat{\mathbf{D}}'') \} \\ + i \text{Im}(I_{AA}(\mathbf{X}', \mathbf{X}'')) \times \\ \{ f^{**}(\mathbf{X}', \hat{\mathbf{D}}') f^{**}(\mathbf{X}'', \hat{\mathbf{D}}'') + f(\mathbf{X}', \hat{\mathbf{D}}') f(\mathbf{X}'', \hat{\mathbf{D}}'') \}.$$

Тут $f^{**}(\mathbf{X}', \hat{\mathbf{D}})$ позначає значення функції f після взаємодії між атомами (парного зіткнення). Звідки робимо таке наближення:

$$\sum_{\Psi} \langle \Psi | [\hat{H}^{AA}, \hat{I}(\mathbf{r})] \hat{\rho}_{\Psi} | \Psi \rangle \rightarrow C_{AA} \frac{\Delta t}{\tau_2} + i C_{AA}^F n_A^2, \quad (11)$$

де введені наступні позначення:

$$C_{AA} \frac{\Delta t}{\tau_2} = 2 \int d\mathbf{X}' d\hat{\mathbf{D}}' d\mathbf{X}'' d\hat{\mathbf{D}}'' \text{Re}(I_{AA}(\mathbf{X}', \mathbf{X}'')),$$

$$\langle f(\mathbf{X}'', \hat{\mathbf{D}}'') I_{AA}^{coll}(\mathbf{X}', \hat{\mathbf{D}}') \rangle \Delta t,$$

$$C_{AA}^F n_A^2 = 2 N^2 \langle \text{Im}(I_{AA}) \rangle_{\text{int}}(\mathbf{r}),$$

$$I_{AA}^{coll}(\mathbf{X}', \hat{\mathbf{D}}) \Delta t = f^{**}(\mathbf{X}', \hat{\mathbf{D}}) - f(\mathbf{X}', \hat{\mathbf{D}}),$$

$$\langle \dots \rangle_{\text{int}} \equiv \int d\mathbf{X}' d\hat{\mathbf{D}}' d\mathbf{X}'' d\hat{\mathbf{D}}'' \langle \dots \rangle.$$

Отже, підставляючи вирази (8) та (11) у (2), формально отримуємо таку формулу для локального коефіцієнта поглинання:

$$\alpha_{\text{tot}} \approx \frac{1}{2} \frac{\frac{\delta}{\delta z} \{ \Delta \Omega^2 + \Gamma^2 \}}{\Delta \Omega^2 + \Gamma^2}, \quad (12)$$

де

$$\Delta \Omega = I_0 \frac{\hbar}{\tau} - n_A (C_{AF}^F + C_{AA}^F n_A), \quad (13)$$

$$\Gamma = C_{AF} \frac{\Delta t}{\tau_1} + C_{AA} \frac{\Delta t}{\tau_2}, \quad (14)$$

τ_1 та τ_2 є характерні часи релаксації (збудження) для атом-фотон та атом-атом взаємодій.

Відмітимо наступне. Якщо знехтувати частинною похідною за часом $\partial/\partial t$ та/або електромагнітною силою $\mathbf{F}$ (чи частинною похідною за імпульсом) у кінетичному рівнянні, то вираз (12) буде визначатись відповідним інтегралом по фазовому просторі від проекції градієнта частинкової функції розподілу на напрямок моменту імпульсу. Додаткового дослідження потребує тут питання побудови відповідної геометричної інтерпретації.

Слід зазначити, що для отримання виразу типу (1), що залежить від різниці скануючої та атомної резонансної частот $\omega - \omega_0$, необхідно визначити введені коефіцієнти, такі, як C_{AF}^F та C_{AA}^F . Останні, взагалі кажучи, можуть залежати від просторової фази, визначеної хвильовим та просторовим векторами (див. [11]).

Висновки

Отже, у даній роботі продемонстровано можливість представлення квантово-оптичних виразів для коефіцієнта поглинання у термінах інтегралів зіткнення для відповідних напівкласичних кінетичних рівнянь. Таким чином, у певному наближенні, задані градієнтні

поля для розподілу кількості частинок у фазовому просторі координати, імпульсу (та, наприклад, моменту імпульсу) можуть певним

чином визначати поглинальні властивості системи.

Список використаних джерел

1. Демтрюдер В. Лазерна спектроскопія Т. 1: Базові принципи/ В. Демтрюдер. – Berlin: Springer-Verlag, 2008. – 78 с.
2. Ліндгольм І. Залежність ширини спектральних ліній від тиску / І. Ліндгольм. // Ark. Mat. Astron. Fys. A. – 1945. – №32. – Р. 17–18.
3. Лекс М. Квантовані шуми. IV. Квантова теорія джерел шуму / М. Лекс. // Phys. Rev. – 1966. – №145. – Р. 110–129.
4. Бен-Ріувен А. Інтерпретація розширення спектральних ліній. Аналогія з класичним осцилятором / А. Бен-Ріувен. // Adv. Atom. Mol. Phys. – 1969. – №5. – Р. 201–235.
5. Воробйов Ф. А. Випрмінювальні та поглинальні спектри у сильному полі. Ефект віддачі / Ф. А. Воробйов, Р. І. Соколовскій. // Журнал прикладної спектроскопії. – 1970. – №13. – С. 906–913.
6. Лемберг Р. Випромінювання N-атомною системою. I. Загальний формалізм. / Р. Лемберг. // Phys. Rev. A. – 1970. – №2. – Р. 883–888.
7. Сандо К. М. Форми спектральних ліній у лазерному полі при різних тисках / К. М. Сандо, Ш. Чи. // Adv. At. Mol. Phys. – 1989. – №25. – Р. 133–162.
8. Берман П. Р. Порівняння збудженого віддачею резонансу та колективної атомної віддачі / П. Р. Берман. // Phys. Rev. A. – 1999. – №59. – Р. 585–596.
9. Квантовий ефект віддачі для двох нетотожних атомів на скінченних проміжках часу/ Ф. Ластра, С. Валентович, М. Орзаг, М. Гернандес // Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics. – 2009. – №42. – Р. 065504–065505.
10. Кооперативний ефект та безлад: масштабний аналіз спектру для ефективного атомного гамільтоніана / Л. Беландо, А. Геро, І. Акерманс, Р. Кайзер. // Phys. Rev. A. – 2014. – №90. – Р. 063822–063823.
11. Сіжук А. С. Квантовооптичне формулювання поняття коефіцієнта поглинання / А. С. Сіжук, С. М. Єжов. // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія: фіз.-мат. науки. – 2016. – №1. – С. 193 – 197.
12. Сіжук А. С. Мікроскопічне рівняння еволюції для непружно взаємодіючих кульок, обмежених стінкою / А. С. Сіжук, С. М. Єжов. // Вісник Київського національного університету

імені Тараса Шевченка. Серія: фіз.-мат. науки. – 2005. – №3. – С. 591–595.

References

1. DEMTRÖDER, W. (2008) *Laser Spectroscopy*. Berlin: Springer-Verlag.
2. LINDHOLM, E. (1945) Pressure broadening of spectral lines. *Ark. Mat. Astron. Fys. A.* 32. p.17-18.
3. LAX, M. (1966) Quantum Noise. IV. Quantum Theory of Noise Sources. *Phys. Rev.* 145(1). p.110-129.
4. BEN-REUVEN, A. (1969) The meaning of collisional broadening of spectral lines: The classical oscillator analog. *Adv. Atom. Mol. Phys.* 5. p. 201-235.
5. VOROB'EV, F. A. and SOKOLOVSKII, R. I. (1970) Emission and absorption spectra in a strong field, and recoil effect. *Journal of Applied Spectroscopy*. 13(1). p. 906-913.
6. LEHMBERG, R. H. (1970) Radiation from an N-Atom System. I. General Formalism. *Phys. Rev. A.* 2(3). p. 883-888.
7. SANDO, K. M., CHU, SHI-I. (1989) Pressure broadening and laser-induced spectral line shapes. *Adv. At. Mol. Phys.* 25. p.133-162.
8. BERMAN, P. R. (1999) Comparison of recoil-induced resonances and the collective atomic recoil. *Phys. Rev. A.* 59(1). p. 585-596.
9. LASTRA, F. et. al. (2009) Quantum recoil effects in finite-time disentanglement of two distinguishable atoms. *Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics*. 42(6). p. 065504-065505.
10. BELLANDO, L. et. al. (2014) Cooperative effects and disorder: A scaling analysis of the spectrum of the effective atomic Hamiltonian. *Phys. Rev. A.* 90(6). p. 063822-063823.
11. SIZHUK, A. S., YEZHOF, S. M. (2016) The quantum optical formulation of absorption coefficient. *Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv, Series Physics & Mathematics*. (1). p. 193–197.
12. SIZHUK, A. S., YEZHOF, S. M. (2005) The microscopic equation for the system of rough spheres bounded by a wall. *Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv, Series Physics & Mathematics*. 3. p. 591–595.

Надійшла до редколегії 17.08.16

Підписано до друку _____. Формат _____. Друк. офс.
Папір офс. № _____. Друк. арк. _____. Тираж _____. Зам. _____.
Друкарня _____.