

**КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА**

ВІСНИК

**КИЇВСЬКОГО НАЦІОНАЛЬНОГО
УНІВЕРСИТЕТУ
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА**

СЕРІЯ ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНІ НАУКИ

ВИПУСК №2 2016

**Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка,
выпуск №2, 2016,
Серія фізико-математичні науки**

З 1991 року серії вісників Київського університету “Математика і механіка”, “Фізика”, “Моделирование и оптимизация сложных систем” реорганізовано у “Вісник Київського університету. Серія: фізико-математичні науки”. У віснику містяться результати нових досліджень у різних галузях математики, інформатики, механіки, фізики та радіофізики для наукових працівників, викладачів, аспірантів, інженерів і студентів. Друкується за рекомендаціями Вчених Рад фізичного, радіофізичного, механіко-математичного факультетів та факультету кібернетики.

Журнал “Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія фізико-математичні науки” включено до переліку фахових видань ВАК України та реферується в Реферативному журналі, Zentralblatt MATH та базах даних ВИНІТИ, Росія, Москва.

Редакційна колегія:

Анісімов Анатолій Васильович, чл.-кор. НАН України, д.ф.-м.н., проф., **головний редактор**;
Хусаїнов Денис Яхєвич, д.ф.-м.н., проф., **заступник головного редактора, відповідальний за видання**;
Arturs Medvids, Dr. Phys. (habil.), Prof., Riga Technical University, Riga, Latvia;
Miklós Rontó, Dr. Sci., Prof., University of Miskolc, Miskolc, Hungary;
Milada Bartlova, Ph. D., Brno University of Technology, Brno, Czech Republic;
Nickolai Kukhtarev, Prof., Alabama A&M University, Alabama, USA;
Sergei Gorlatch, Dr. Sci. (habil.), Prof., University of Muenster, Muenster, Germany;
Sergey Trofimchuk, Prof., Universidad de Talca, Instituto de Matematica y Fisica, Talca, Chile;
Stefan Hudak, Dr. Sci., Prof., Technical University of Kosice, Kosice, Slovak Republic;
Toru Aoki, Ph. D., Prof., Research Institute of Electronics, Shizuoka University, Shizuoka, Japan;
Акіменко Віталій Володимирович, д.т.н., проф.;
Анісімов Ігор Олексійович, д.ф.-м.н., проф.;
Буй Дмитро Борисович, д.ф.-м.н., проф.;
Булавін Леонід Анатолійович, акад. НАН України, д.ф.-м.н., проф.;
Волошин Олексій Федорович, д.т.н., проф.;
Гарашенко Федір Георгійович, д.т.н., проф.;
Єжов Станіслав Миколайович, д.ф.-м.н., проф.;
Жук Ярослав Олександрович, д.ф.-м.н., проф.;
Заславський Володимир Анатолійович, д.т.н., доц.;
Кириченко Володимир Васильович, д.ф.-м.н., проф.;
Козаченко Юрій Васильович, д.ф.-м.н., проф.;
Кудін Володимир Іванович, д.т.н., с.н.с.;
Львов Віктор Анатолійович, д.ф.-м.н., проф.;
Макара Володимир Арсенійович, чл.-кор. НАН України, д.ф.-м.н., проф.;
Макарець Микола Володимирович, д.ф.-м.н., проф.;
Перестюк Микола Олексійович, акад. НАН України, д.ф.-м.н., проф.;
Погорілий Сергій Дем'янович, д.т.н., проф.;
Савенков Сергій Миколайович, д.ф.-м.н., доц.;
Скришевський Валерій Антонович, д.ф.-м.н., проф.

Редакційний відділ:

Анісімова Тетяна Харитонівна, **відповідальний секретар**;
Безущак Оксана Омелянівна, bezusch@univ.kiev.ua;
Стукаленко Вікторія Віталіївна, stu@univ.kiev.ua;
Родіонова Тетяна Василівна, rodtv@univ.kiev.ua;
Хмелюк Надія Кузьмівна, khmeluk@univ.kiev.ua;
Сільвейструк Людмила Миколаївна, **технічний редактор**, slm-klm@ukr.net.

Адреса редакційної колегії:

Факультет кібернетики, Київський національний університет імені Тараса Шевченка,
пр. Глушкова, 4 д, 03680 Тел. (044) 259-01-49

ISBN 978-966-2142
ISSN 1812-5409

ЗМІСТ

АЛГЕБРА, ГЕОМЕТРІЯ ТА ТЕОРІЯ ІМОВІРНОСТЕЙ

Борисенко О.Д., Борисенко О.В. Метод усереднення для автономної випадкової коливної системи четвертого порядку	9
Перегуда О.В., Ковтун О.І. Про поведінку розв'язків системи двох згасаючих стохастичних осциляторів	15
Федорова М.В. Планарність орбітальних графів Шраєра вільних добутків циклічних груп	19

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ, МАТЕМАТИЧНА ФІЗИКА ТА МЕХАНІКА

Гончар І.В. Про обмежені та сумовні розв'язки різницевого рівняння зі стрибком операторного коефіцієнта	25
Григоренко О.Я., Панкрат'єв С.А., Яремченко С.М. Розрахунок напружено-деформованого стану прямокутної пластини із застосуванням сплайнів на нерівномірних сітках	29
Івашкевич А.О. Достатні умови існування оптимального керування для деяких класів систем диференціальних рівнянь з імпульсною дією у нефіксовані моменти часу	35
Козак В.І. Інтегрування диференціально-різницевих нелінійних рівнянь за допомогою спектральної теорії блочних матриць відповідних двовимірній проблемі моментів.	41

КОМП'ЮТЕРНІ НАУКИ ТА ІНФОРМАТИКА

Александрович І.М., Молодцов О.І. Диференціальне зображення розв'язків рівнянь гіперболічного типу	51
Брила А.Ю., Антос'як П.П. Багаторівневі оптимізаційні задачі з лексикографічними обмеженнями	57
Веклич Р.А. Оптимальне керування початковими умовами для дробового рівняння дифузії	66
Завадський І.О. Сімейство швидких алгоритмів пошуку рядка в тексті	71
Зарембовський К.В., Шевченко В.П. Електронне навчання – програмно-технічні аспекти організації	77
Заславський В.А., Пасічна М.В., Красовська К.К. Застосування методу аналізу ієрархій при вирішенні проблеми диверсифікації складу портфеля джерел генерації електроенергії	82
Івохін Є.В., Апанасенко Д.В. Про кластеризацію складених нечітких чисел на основі множин векторного рівня	90
Івохін Є.В., Махно М.Ф. Про один підхід до розв'язання нечіткої задачі рекомбінації	94
Івохін Є.В., Науменко Ю.О. Про один підхід до моделювання розповсюдження реклами як процесу агрегації, обмеженої дифузією	98
Катеринич Л.О., Біла О.М. Прикладне застосування нейронних мереж у медичній діагностиці	102
Маринич О.В. Про асимптотику числа активних випадкових процесів в системі з імміграцією	108
Мекуш О.Г., Кузьмич О.І. Моделювання процесів популяційної динаміки: огляд методів та комп'ютерна реалізація	114
Назарага І.М. Знаходження коефіцієнта еластичності при витратах праці методом Ньютона	125
Сорока Є.В., Рубльов Б.В. Поріг вимірювання популяції у просторовій стохастичній моделі	130
Усар І.Я., Макушенко І.А., Протопоп Ю.О. Аналіз стаціонарного режиму для керованої двоканальної системи з повторними викликами	137
Хусаїнов Д.Я., Гаркуша Н.І., Пужа Б., Новотна В. Оцінки збіжності розв'язків нелінійної системи з післядією в околі точки спокою	141
Чечельницький О.А. Про асимптотичні властивості мережевої моделі з двовимірним вхідним потоком вимог	147

Шкільняк С.С., Волковицький Д.Б. Системи логічного виведення в логіках безкванторно-функціональних рівнів	153
---	-----

РАДІОФІЗИКА

Баужа О.С. Вплив спин-орбітальної взаємодії на розщеплення енергетичних рівнів електронів в InSb напівпровідникових квантових точках	161
Кисленко В.І., Мазур Н.В. Матричний метод аналізу стійкості лазерного резонатора	167
Находкін М.Г., Родіонова Т.В. Вплив легування фосфором на структуру аморфно-кристалічних плівок кремнію	171

СУЧАСНА ФІЗИКА

Булавін Л.А., Гребньов О.А. Модель для оцінки площі поверхні вуглецевих наночастинок	177
Голіченко Б.О., Кравченко С.О. Коливальна спектроскопія молекул Флуоресцеїну осаджених на алюмінієвих плівках та срібних наночастинок	185
Дегода В.Я., Когут Я.П., Свечнікова О.С. Рентгенолюмінесцентні дослідження біополімерів	191
Мазур Ю. П., Остапенко Р. В., Семенко М. П. Зв'язок між текстурою та мікротвердістю високоентропійних сплавів	197
Лисов В.І., Цареградська Т.Л., Сасенко Г.В., Турков О.В. Практична реалізація процесу очищення аморфної матриці від заморожених центрів кристалізації для багатокомпонентних аморфних сплавів на основі заліза та нікелю	201
Розуван С.Г., Стащук В.С., Стукаленко В.В., Теселько П.О., Ямпольський А.Л. Морфологія поверхні та мікротвердість наноструктур $(\text{Co}_{41}\text{Fe}_{39}\text{B}_{20})_x(\text{SiO}_2)_{100-x}$	205
Сіжук А.С., Єжов С.М. Квантовооптична оцінка коефіцієнта поглинання	209

CONTENTS

ALGEBRA, GEOMETRY AND PROBABILITY THEORY

Borysenko O.D., Borysenko O.V. Averaging method for autonomous fourth order random oscillating system	9
Pereguda O.V., Kovtun O.I. The behavior of the solution of a system of two damped stochastic oscillators	15
Fedorova M.V. Planarity of orbital Schreier graphs of free products of cyclic groups	19

DIFFERENTIAL EQUATIONS, MATHEMATICAL PHYSICS AND MECHANICS

Gonchar I.V. On the bounded and summable solutions of a difference equation with a jump of an operator coefficient	25
Grigorenko A.Ya., Pankratiev S.A., Yaremchenko S.N. Numerical calculation of stress-strain state of rectangular plate using splines with irregular grids	29
Ivashkevich A.O. Sufficient conditions for the existence of optimal control for some classes of differential equations with pulses at non-fixed times	35
Kozak V.I. Integration of nonlinear differential-difference equations by means of the spectral theory of block matrices related to the two-dimensional moment problem	41

COMPUTER SCIENCES AND INFORMATICS

Alexandrovich I.M., Molodtsov O.I. Differential representation of hyperbolic equations solutions	51
Brila A.Yu., Antosyak P.P. Multilevel optimization problems with lexicographic constraints	57
Veklych R.A. Optimal control of the initial conditions for a fractional diffusion equation	66
Zavadskyi I.O. A family of fast exact pattern matching algorithms	71
Zarembovsky K.V., Shevchenko V.P. E-learning and its programmatic and technical aspects of the organization	77
Zaslavskiy V.A., Krasovska K.K. Application of Analytic Hierarchy Process to solve the problem of diversification of the energy portfolio of electricity generation sources	82
Ivokhin E.V., Apanasenko D.V. About clusterization of composite fuzzy numbers on the sets of vector level	90
Ivokhin E.V., Makhno M.F. About one approach to solving the problem of fuzzy recombination	94
Ivohin E.V., Naumenko Yu.O. About one approach to modeling the distribution of advertising as a process of aggregation limited by diffusion	98
Katerynych L.O., Bila O.M. Application of neural networks in medical diagnostics	102
Marynych O.V. On the number of active random processes in a system with immigration	108
Mekush O.G., Kuzmych O.I. Modeling of population dynamics: survey of methods and computer realization	114
Nazaraga I.M. The Newton's calculation method for the determining of elasticity coefficient for the labor expenditures	125
Soroka Y.V., Rublyov B.V. Extinction threshold of a population in spatial and stochastic model	130
Usar I.Ya., Makushenko I.A., Protopop Iu.O. Stationary regime analysis for controlled two-channel system with repeated calls	137
Khusainov D.Ya., Garkusha N.I., Puzha B., Novotna V. The estimates of the convergence of linear systems solutions with aftereffect in the neighborhood of point of the rest	141
Chechelnitsky O.A. On asymptotic properties of the network model with the bivariate input flow of customers	147
Shkilniak S.S., Volkovytskyi D.B. Systems of logical reasoning in logics of free-quantifier functional levels	153

RADIOPHYSICS

Bauzha O.S. The influence of the spin-orbit interaction on the splitting of energy levels of electrons in InSb semiconductor quantum dots	161
Kislenko V.I., Mazur N.V. The analysis of stability of laser resonator by the matrix method	167
Nakhodkin N.G., Rodionova T.V. Effect of phosphorus doping on the structure of amorphous-crystalline silicon films	171

MODERN PHYSICS

Bulavin L.A., Hreblov O.A. Model for carbon nanoparticles surface area estimation	177
Golichenko B.O., Kravchenko S.O. Vibrational spectroscopy of Fluoresceine molecules adsorbed on aluminum films and silver nanoparticles	185
Degoda V.Ya., Kogut Ya. P., Svechnikova O. S. X-ray luminescence exploration of biopolymers	191
Mazur Yu.P., Ostapenko R.V., Semen'ko M.P. Connection between the texture and microhardness of the high-entropy alloys	197
Lysov V.I., Tsaregradskaya T.L., Saenko G.V., Turkov O.V. Practical implementation of the purification process of amorphous matrix from frozen crystallization centers for multicomponent amorphous alloys based on iron and nickel	201
Rozouvan S.G., Stashchuk V.S., Stukalenko V.V., Teselko P. O., Yampolskiy A.L. Surface morphology and microhardness of nanostructures $(\text{Co}_{41}\text{Fe}_{39}\text{B}_{20})_x(\text{SiO}_2)_{100-x}$	205
Sizhuk A.S., Yezhov S.M. The quantum optical estimation of absorption coefficient	209

АЛГЕБРА, ГЕОМЕТРИЯ ТА ТЕОРИЯ ІМОВІРНОСТЕЙ

УДК 519.21

О.Д. Борисенко¹, к.ф.-м.н., доцент
О.В. Борисенко², к.ф.-м.н., доцент

**Метод усереднення для автономної
випадкової коливної системи четвертого
порядку**

¹Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 01033, Київ, вул. Володимирська, 64.

²Національний технічний університет України "КПІ" 03056, г.Київ-56, проспект Перемоги, 37
e-mail: ¹odb@univ.kiev.ua

O.D. Borysenko¹, Ph.D., Associate Professor
O.V. Borysenko², Ph.D., Associate Professor

**Averaging method for autonomous fourth
order random oscillating system**

¹Taras Shevchenko National University of Kyiv, 01033, Kyiv, 64 Volodymyrska st.,

²National Technical University of Ukraine "KPI", 37 Prospect Peremogy, Kyiv 03056
e-mail: ¹odb@univ.kiev.ua

У роботі вивчається асимптотична поведінка автономної коливної системи, яка описується диференціальним рівнянням четвертого порядку з малими нелінійними зовнішніми збуреннями типу "білого" та центрованого і нецентрованого Пуассонівських шумів. Розглядається випадок кратного дійсного кореня і пари спряжених чисто уявних коренів характеристичного рівняння.

Ключові слова: асимптотична поведінка, автономна коливна система, стохастичне диференціальне рівняння.

The asymptotic behavior of autonomous oscillating system describing by differential equation of fourth order with small non-linear external perturbations of "white noise", non-centered and centered "Poisson noise" types is studied. Every term of external perturbations has own order of small parameter ε . If small parameter is equal to zero, then general solution of obtained non-stochastic fourth order differential equation has an oscillating part. We consider given differential equation with external stochastic perturbations as the system of stochastic differential equations and study the limit behavior of its solution at the time moment t/ε^k , as $\varepsilon \rightarrow 0$. The system of averaging stochastic differential equations is derived and its dependence on the order of small parameter in every term of external perturbations is studied. The case of multiple real root and two conjugate pure imaginary roots of characteristic equation is considered.

Key Words: asymptotic behavior, autonomous oscillating system, stochastic differential equation.
Communicated by Prof. Kozachenko Yu.V.

1 Introduction

The autonomous oscillating systems of fourth order under the action of "white noise" and centered Poisson type noise perturbations are studied in [1] – [3]. In this paper we will consider the behavior, as $\varepsilon \rightarrow 0$, of the fourth order autonomous oscillating system driven by stochastic differential equation

$$x^{IV}(t) + b_1 x'''(t) + b_2 x''(t) + b_3 x'(t) + b_4 x(t) = \varepsilon^{k_1} f_1(x(t), x'(t), x''(t), x'''(t)) + f_\varepsilon(x(t), x'(t), x''(t), x'''(t)) \quad (1)$$

with non-random initial conditions $x(0) = x_0^{(1)}$, $x'(0) = x_0^{(2)}$, $x''(0) = x_0^{(3)}$, $x'''(0) = x_0^{(4)}$, where $\varepsilon > 0$ is a small parameter, $f_\varepsilon(x, x', x'', x''')$ is a

random function such that

$$\begin{aligned} \int_0^t f_\varepsilon(x(s), x'(s), x''(s), x'''(s)) ds = \\ = \varepsilon^{k_2} \int_0^t f_2(x(s), x'(s), x''(s), x'''(s)) dw(s) + \\ + \varepsilon^{k_3} \int_0^t \int_R f_3(x(s), x'(s), x''(s), x'''(s), z) \tilde{\nu}_1(ds, dz) + \\ + \varepsilon^{k_4} \int_0^t \int_R f_4(x(s), x'(s), x''(s), x'''(s), z) \nu_2(ds, dz), \end{aligned}$$

$k_i > 0, i = \overline{1, 4}$; $f_i, i = \overline{1, 4}$ are non-random functions; $w(t)$ is the standard Wiener process; $\tilde{\nu}_i(dt, dy) = \nu_i(dt, dy) - \Pi_i(dy)dt$, $E\nu_i(dt, dy) = \Pi_i(dy)dt$, $i = 1, 2$; $\nu_i(dt, dy)$, $i = 1, 2$ are the

independent Poisson measures independent on $w(t)$; $\Pi_i(A)$, $i = 1, 2$ are a finite measures on Borel sets in R .

We will study the asymptotic behavior of given oscillating system, as $\varepsilon \rightarrow 0$, in the case when there exists stable harmonic oscillations at the system under condition $\varepsilon = 0$. Under this condition corresponding characteristic equation has a form

$$\lambda^4 + b_1\lambda^3 + b_2\lambda^2 + b_3\lambda + b_4 = 0.$$

We will consider the equation (1) as the system of stochastic differential equations

$$\begin{aligned} dy_i(t) &= y_{i+1}(t)dt, \quad i = \overline{1, 3} \\ dy_4(t) &= \left[- (b \cdot y(t)) + \varepsilon^{k_1} f_1(y(t)) + \right. \\ &\quad + \left. \varepsilon^{k_4} \int_{\mathbb{R}} f_4(y(t), z) \Pi_2(dz) \right] dt + \\ &\quad + \varepsilon^{k_2} f_2(y(t)) dw(t) + \\ &\quad + \varepsilon^{k_3} \int_{\mathbb{R}} f_3(y(t), z) \tilde{\nu}_1(dt, dz) + \\ &\quad + \varepsilon^{k_4} \int_{\mathbb{R}} f_4(y(t), z) \tilde{\nu}_2(dt, dz), \end{aligned} \quad (2)$$

$y(t) = (y_1(t), \dots, y_4(t))$, $b = (b_4, b_3, b_2, b_1)$, $y_i(0) = x_0^{(i)}$, $i = \overline{1, 4}$, $(b \cdot y(t))$ – is a scalar product of vectors b and $y(t)$.

In what follows we will use the constant $K > 0$ for the notation of different constants, which are not depend on ε .

2 Main result

This paper deals with the following case:

$b_1 > 0$, $4b_2 > b_1^2$, $b_3 = b_1(b_2 - b_1^2/4)$, $b_4 = b_1^2(b_2 - b_1^2/4)/4$. Characteristic equation has a roots $\lambda_{1,2} = -\eta$, $\lambda_{3,4} = \pm i\omega$, where $\eta = b_1/2$, $\omega^2 = 4b_4/b_1^2$.

If $\varepsilon = 0$ then the equation (1) has general solution in the form

$$x(t) = C_1 e^{-\eta t} + C_2 t e^{-\eta t} + A_1 \cos \omega t + A_2 \sin \omega t$$

Let us consider the following representation of the

solution $y(t)$ to the system (2):

$$\begin{aligned} y_1(t) &= N_1(t) + \\ &\quad + A_1(t) \cos \omega t + A_2(t) \sin \omega t, \\ y_2(t) &= -\eta N_1(t) + N_2(t) - \\ &\quad - A_1(t) \omega \sin \omega t + A_2(t) \omega \cos \omega t, \\ y_3(t) &= \eta^2 N_1(t) - 2\eta N_2(t) - \\ &\quad - A_1(t) \omega^2 \cos \omega t - A_2(t) \omega^2 \sin \omega t, \\ y_4(t) &= -\eta^3 N_1(t) + 3\eta^2 N_2(t) + \\ &\quad + A_1(t) \omega^3 \sin \omega t - A_2(t) \omega^3 \cos \omega t, \end{aligned} \quad (3)$$

where

$$N_1(t) = (C_1(t) + tC_2(t))e^{-\eta t}, \quad N_2(t) = C_2(t)e^{-\eta t}.$$

We can solve the system of linear equations (3) with respect to $(N_1(t), N_2(t), A_1(t), A_2(t))$ and using the Ito formula we derive the system of stochastic differential equations:

$$\begin{aligned} dN_1(t) &= [-\eta N_1(t) + N_2(t)] dt + \frac{2\eta}{(\eta^2 + \omega^2)^2} dH(t), \\ dN_2(t) &= -\eta N_2(t) dt + \frac{1}{(\eta^2 + \omega^2)} dH(t), \\ dA_1(t) &= \frac{(\omega^2 - \eta^2) \sin \omega t - 2\eta \omega \cos \omega t}{\omega(\eta^2 + \omega^2)^2} dH(t), \\ dA_2(t) &= -\frac{(\omega^2 - \eta^2) \cos \omega t + 2\eta \omega \sin \omega t}{\omega(\eta^2 + \omega^2)^2} dH(t), \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} dH(t) &= [\varepsilon^{k_1} \tilde{f}_1(\omega t, N_1(t), N_2(t), A_1(t), A_2(t)) + \\ &\quad + \varepsilon^{k_4} \int_{\mathbb{R}} \tilde{f}_4(\omega t, N_1(t), N_2(t), A_1(t), A_2(t), z) \Pi_2(dz)] dt + \\ &\quad + \varepsilon^{k_2} \tilde{f}_2(\omega t, N_1(t), N_2(t), A_1(t), A_2(t)) dw(t) + \\ &\quad + \varepsilon^{k_3} \int_{\mathbb{R}} \tilde{f}_3(\omega t, N_1(t), N_2(t), A_1(t), A_2(t), z) \tilde{\nu}_1(dt, dz) + \\ &\quad + \varepsilon^{k_4} \int_{\mathbb{R}} \tilde{f}_4(\omega t, N_1(t), N_2(t), A_1(t), A_2(t), z) \tilde{\nu}_2(dt, dz), \end{aligned}$$

where $\tilde{f}_i(\omega t, N_1, N_2, A_1, A_2)$, $i = 1, 2$ are obtained from $f_i(y(t))$, $i = 1, 2$ and $\tilde{f}_i(\omega t, N_1, N_2, A_1, A_2, z)$, $i = 3, 4$ are obtained from $f_i(y(t), z)$, $i = 3, 4$ using (3).

Theorem 2.1. Let $\Pi_i(\mathbb{R}) < \infty$, $i = 1, 2$, $t \in [0, t_0]$, $k = \min(k_1, 2k_2, 2k_3, k_4)$. Let us suppose, that functions f_j , $j = \overline{1, 4}$ bounded and satisfy Lipschitz condition on y_i , $i = \overline{1, 4}$. If given below matrix $\bar{\sigma}^2(A_1, A_2)$ is non-negative definite, then:

1. If $k_1 = 2k_2 = 2k_3 = k_4$, then the stochastic process $\xi_\varepsilon(t) = (N_1(t/\varepsilon^k), N_2(t/\varepsilon^k), A_1(t/\varepsilon^k), A_2(t/\varepsilon^k))$ weakly converges, as $\varepsilon \rightarrow 0$, to the stochastic process $\bar{\xi}(t) = (0, 0, \bar{A}_1(t), \bar{A}_2(t))$, where $\bar{A}(t) = (\bar{A}_1(t), \bar{A}_2(t))$ is the solution to the system of stochastic differential equations

$$d\bar{A}(t) = \bar{\alpha}(\bar{A}(t))dt + \bar{\sigma}(\bar{A}(t))d\bar{w}(t), \quad (5)$$

$$\bar{A}(0) = (A_1(0), A_2(0)),$$

where

$$\bar{\alpha}(A_1, A_2) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \hat{f}_{(1)}(\phi, A_1, A_2) \Psi(\phi) d\phi,$$

$$\bar{\sigma}(A_1, A_2) = \{\bar{B}(A_1, A_2)\}^{\frac{1}{2}} = \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \hat{f}_{(2)}(\phi, A_1, A_2) \Psi(\phi) \Psi^T(\phi) d\phi \right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$\Psi(\phi) = \frac{1}{\omega(\eta^2 + \omega^2)^2} \times \begin{pmatrix} (\omega^2 - \eta^2) \sin \phi - 2\eta\omega \cos \phi \\ (\eta^2 - \omega^2) \cos \phi - 2\eta\omega \sin \phi \end{pmatrix}$$

$$\hat{f}_{(1)}(\phi, A_1, A_2) = \tilde{f}_1(\phi, 0, 0, A_1, A_2) + \int_{\mathbb{R}} \tilde{f}_4(\phi, 0, 0, A_1, A_2, z) \Pi_2(dz),$$

$$\hat{f}_{(2)}(\phi, A_1, A_2) = \tilde{f}_2^2(\phi, 0, 0, A_1, A_2) + \int_{\mathbb{R}} \tilde{f}_3^2(\phi, 0, 0, A_1, A_2, z) \Pi_1(dz),$$

$\Psi^T(\phi)$ is the vector transpose to vector $\Psi(\phi)$, $\bar{w}(t) = (\bar{w}_i(t), i = 1, 2)$, $\bar{w}_i(t), i = 1, 2$ are independent one-dimensional Wiener processes.

2. If $k < k_1$ then in the averaging equation (5) we must put $\tilde{f}_1 \equiv 0$; if $k < 2k_2$, then in the averaging equation (5) we must put $\tilde{f}_2 \equiv 0$; if $k < 2k_3$ then in the averaging equation (5) we must put $\tilde{f}_3 \equiv 0$; if $k < k_4$ then in the averaging equation (5) we must put $\tilde{f}_4 \equiv 0$

Proof. Let us make a change of variable $t \rightarrow t/\varepsilon^k$ at the system (4) and obtain for the process $\xi_\varepsilon(t) = (N_1^\varepsilon(t), N_2^\varepsilon(t), A_1^\varepsilon(t), A_2^\varepsilon(t)) = (N_1(t/\varepsilon^k), N_2(t/\varepsilon^k), A_1(t/\varepsilon^k), A_2(t/\varepsilon^k))$ the system of stochastic differential equations

$$\begin{aligned} dN_1^\varepsilon(t) &= \left[-\frac{\eta_1}{\varepsilon^k} N_1^\varepsilon(t) + \frac{1}{\varepsilon^k} N_2^\varepsilon(t) \right] dt + \\ &\quad + \frac{2\eta}{(\eta^2 + \omega^2)^2} dH_\varepsilon(t), \\ dN_2^\varepsilon(t) &= -\frac{\eta_2}{\varepsilon^k} N_2^\varepsilon(t) dt + \frac{1}{(\eta^2 + \omega^2)} dH_\varepsilon(t), \\ dA_1^\varepsilon(t) &= \Psi_1(\omega t/\varepsilon^k) dH_\varepsilon(t), \\ dA_2^\varepsilon(t) &= \Psi_2(\omega t/\varepsilon^k) dH_\varepsilon(t), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} dH_\varepsilon(t) &= [\varepsilon^{k_1-k} \tilde{f}_1(\frac{\omega t}{\varepsilon^k}, \xi_\varepsilon(t)) + \\ &\quad + \varepsilon^{k_4-k} \int_{\mathbb{R}} \tilde{f}_4(\frac{\omega t}{\varepsilon^k}, \xi_\varepsilon(t), z) \Pi_2(dz)] dt + \\ &\quad + \varepsilon^{k_2-k/2} \tilde{f}_2(\frac{\omega t}{\varepsilon^k}, \xi_\varepsilon(t)) dw_\varepsilon(t) + \\ &\quad + \varepsilon^{k_3} \int_{\mathbb{R}} \tilde{f}_3(\frac{\omega t}{\varepsilon^k}, \xi_\varepsilon(t), z) \tilde{\nu}_1^\varepsilon(dt, dz) + \\ &\quad + \varepsilon^{k_4} \int_{\mathbb{R}} \tilde{f}_4(\frac{\omega t}{\varepsilon^k}, \xi_\varepsilon(t), z) \tilde{\nu}_2^\varepsilon(dt, dz), \end{aligned}$$

where $\Psi_i(\phi), i = 1, 2$ are a components of vector $\Psi(\phi)$, $w_\varepsilon(t) = \varepsilon^{k/2} w(t/\varepsilon^k)$, $\tilde{\nu}_i^\varepsilon(t, A) = \nu_i(t/\varepsilon^k, A) - \Pi_i(A)t/\varepsilon^k$, $i = 1, 2$, here A is a Borel set in $\mathbb{R}$. For each $\varepsilon > 0$ the process $w_\varepsilon(t)$ is standard one-dimensional Wiener process, and $\tilde{\nu}_i^\varepsilon(t, A)$, $i = 1, 2$ are the independent centered Poisson measures independent on $w_\varepsilon(t)$.

We have $N_2^\varepsilon(t) = \exp\{-\eta t/\varepsilon^k\} C_2(t/\varepsilon^k)$ and process $C_2^\varepsilon(t) = C_2(t/\varepsilon^k)$, satisfy the stochastic differential equations

$$dC_2^\varepsilon(t) = -\frac{e^{\eta t/\varepsilon^k}}{\eta^2 + \omega^2} dH_\varepsilon(t),$$

where $|C_2^\varepsilon(0)| \leq K$.

So, from boundedness of functions $f_i, i = \overline{1, 4}$ and condition $\Pi_i(\mathbb{R}) < \infty$, $i = 1, 2$ we have the estimate

$$\begin{aligned} E|N_2^\varepsilon(t)|^2 &\leq K[e^{-\frac{2\eta t}{\varepsilon^k}} + \varepsilon^k(1 - e^{-\frac{2\eta t}{\varepsilon^k}}) \times \\ &\quad \times (t(\varepsilon^{2(k_1-k)} + \varepsilon^{2(k_4-k)}) + \sum_{i=2}^4 \varepsilon^{2k_i-k})]. \end{aligned} \quad (6)$$

For the process $C_\varepsilon(t) = N_1^\varepsilon(t)e^{\eta t/\varepsilon^k} = C_1(t/\varepsilon^k) + C_2(t/\varepsilon^k)t/\varepsilon^k$, using the Ito formula, we obtain the stochastic differential equation

$$\begin{aligned} C_\varepsilon(t) &= C_1(0) + \frac{1}{\varepsilon^k} \int_0^t e^{\eta s/\varepsilon^k} N_2^\varepsilon(s) ds + \\ &\quad + \frac{2\eta}{(\eta^2 + \omega^2)^2} \int_0^t e^{\eta s/\varepsilon^k} dH_\varepsilon(s), \end{aligned}$$

then for the stochastic process $N_1^\varepsilon(t)$ we have

$$\begin{aligned} N_1^\varepsilon(t) &= e^{-\frac{\eta t}{\varepsilon^k}} C_1(0) + \frac{e^{-\frac{\eta t}{\varepsilon^k}}}{\varepsilon^k} \int_0^t e^{\frac{\eta s}{\varepsilon^k}} N_2^\varepsilon(s) ds + \\ &\quad + \frac{2\eta e^{-\frac{\eta t}{\varepsilon^k}}}{(\eta^2 + \omega^2)^2} \int_0^t e^{\frac{\eta s}{\varepsilon^k}} dH_\varepsilon(s). \end{aligned}$$

From (6) we derive

$$\begin{aligned} E \left| \frac{e^{-\frac{\eta t}{\varepsilon^k}}}{\varepsilon^k} \int_0^t e^{\frac{\eta s}{\varepsilon^k}} N_2^\varepsilon(s) ds \right| &\leq K \left(\frac{te^{-\frac{\eta t}{\varepsilon^k}}}{\varepsilon^k} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\varepsilon^{k/2}}{\eta} (1 + t^{1/2}) (1 - e^{-\frac{\eta t}{\varepsilon^k}}) \right), \end{aligned} \quad (7)$$

and also we have the estimate

$$\begin{aligned} E \left| \frac{2\eta e^{-\frac{\eta t}{\varepsilon^k}}}{(\eta^2 + \omega^2)^2} \int_0^t e^{\frac{\eta s}{\varepsilon^k}} dH_\varepsilon(s) \right| &\leq \\ &\leq K \left((\varepsilon^{k_1} + \varepsilon^{k_4}) \left(1 - e^{-\frac{\eta t}{\varepsilon^k}} \right) + \right. \\ &\quad \left. + (\varepsilon^{k_2} + \varepsilon^{k_3} + \varepsilon^{k_4}) \left(1 - e^{-\frac{\eta t}{\varepsilon^k}} \right)^{1/2} \right). \end{aligned} \quad (8)$$

Because $|C_1(0)| \leq K$, from (6), (7) and (8) we obtain $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbb{E}|N_2^\varepsilon(t)|^2 = 0$, $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbb{E}|N_1^\varepsilon(t)| = 0$ and it is sufficient to study the behavior, as $\varepsilon \rightarrow 0$, of solution to the system of stochastic differential equations

$$dA_i^\varepsilon(t) = \Psi_i(\omega t/\varepsilon^k) d\hat{H}_\varepsilon(t), \quad i = 1, 2 \quad (9)$$

with initial conditions $A_1^\varepsilon(0) = A_1(0)$, $A_2^\varepsilon(0) = A_2(0)$, where

$$\begin{aligned} d\hat{H}_\varepsilon(t) &= [\varepsilon^{k_1-k} \hat{f}_1\left(\frac{\omega t}{\varepsilon^k}, A_1^\varepsilon(t), A_2^\varepsilon(t)\right) + \\ &+ \varepsilon^{k_4-k} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}_4\left(\frac{\omega t}{\varepsilon^k}, A_1^\varepsilon(t), A_2^\varepsilon(t), z\right) \Pi_2(dz)] dt + \\ &+ \varepsilon^{k_2-k/2} \hat{f}_2\left(\frac{\omega t}{\varepsilon^k}, A_1^\varepsilon(t), A_2^\varepsilon(t)\right) dw_\varepsilon(t) + \\ &+ \varepsilon^{k_3} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}_3\left(\frac{\omega t}{\varepsilon^k}, A_1^\varepsilon(t), A_2^\varepsilon(t), z\right) \tilde{\nu}_1^\varepsilon(dt, dz) + \\ &+ \varepsilon^{k_4} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}_4\left(\frac{\omega t}{\varepsilon^k}, A_1^\varepsilon(t), A_2^\varepsilon(t), z\right) \tilde{\nu}_2^\varepsilon(dt, dz), \end{aligned}$$

where $\hat{f}_j(t, A_1, A_2) = \tilde{f}_j(t, 0, 0, A_1, A_2)$, $j = 1, 2$, $\hat{f}_j(t, A_1, A_2, z) = \tilde{f}_j(t, 0, 0, A_1, A_2, z)$, $j = 3, 4$. Let us denote $A_\varepsilon(t) = (A_1^\varepsilon(t), A_2^\varepsilon(t))$. Using conditions on coefficients of equation (9) and properties of stochastic integrals we obtain estimates

$$\begin{aligned} \mathbb{E}|A_\varepsilon(t)|^2 &\leq K[1 + t^2(\varepsilon^{2(k_1-k)} + \\ &\quad + \varepsilon^{2(k_4-k)}) + t \sum_{i=2}^4 \varepsilon^{2k_i-k}], \\ \mathbb{E}|A_\varepsilon(t) - A_\varepsilon(s)|^2 &\leq K[|t-s|^2(\varepsilon^{2(k_1-k)} + \\ &\quad + \varepsilon^{2(k_4-k)}) + |t-s| \sum_{i=2}^4 \varepsilon^{2k_i-k}]. \end{aligned}$$

Similarly for the process $\zeta_\varepsilon(t) = (\zeta_1^\varepsilon(t), \zeta_2^\varepsilon(t))$,

where

$$\begin{aligned} \zeta_i^\varepsilon(t) &= \\ &= \varepsilon^{k_2-k/2} \int_0^t \Psi_i\left(\frac{\omega s}{\varepsilon^k}\right) \hat{f}_2\left(\frac{\omega s}{\varepsilon^k}, A_1^\varepsilon(s), A_2^\varepsilon(s)\right) dw_\varepsilon(s) + \\ &+ \varepsilon^{k_3} \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \Psi_i\left(\frac{\omega s}{\varepsilon^k}\right) \hat{f}_3\left(\frac{\omega s}{\varepsilon^k}, A_1^\varepsilon(s), A_2^\varepsilon(s), z\right) \tilde{\nu}_1^\varepsilon(ds, dz) + \\ &+ \varepsilon^{k_4} \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \Psi_i\left(\frac{\omega s}{\varepsilon^k}\right) \hat{f}_4\left(\frac{\omega s}{\varepsilon^k}, A_1^\varepsilon(s), A_2^\varepsilon(s), z\right) \tilde{\nu}_2^\varepsilon(ds, dz), \end{aligned}$$

$i = 1, 2$ we derive estimates

$$\mathbb{E}|\zeta_\varepsilon(t)|^2 \leq Kt \sum_{i=2}^4 \varepsilon^{2k_i-k},$$

$$\mathbb{E}|\zeta_\varepsilon(t) - \zeta_\varepsilon(s)|^2 \leq K|t-s| \sum_{i=2}^4 \varepsilon^{2k_i-k}.$$

Therefore for stochastic process $\eta_\varepsilon(t) = (A_\varepsilon(t), \zeta_\varepsilon(t))$ conditions of weak compactness [4] are fulfilled

$$\lim_{h \downarrow 0} \overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{|t-s| < h} \mathbb{P}\{|\eta_\varepsilon(t) - \eta_\varepsilon(s)| > \delta\} = 0$$

for any $\delta > 0$, $t, s \in [0, T]$,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{t \in [0, T]} \mathbb{P}\{|\eta_\varepsilon(t)| > N\} = 0,$$

and for any sequence $\varepsilon_n \rightarrow 0, n = 1, 2, \dots$ there exists a subsequence $\varepsilon_m = \varepsilon_{n(m)} \rightarrow 0, m = 1, 2, \dots$, probability space, stochastic processes $\bar{A}_{\varepsilon_m}(t) = (\bar{A}_1^{\varepsilon_m}(t), \bar{A}_2^{\varepsilon_m}(t))$, $\bar{\zeta}_{\varepsilon_m}(t)$, $\bar{A}(t) = (\bar{A}_1(t), \bar{A}_2(t))$, $\bar{\zeta}(t)$ defined on this space, such that $\bar{A}_{\varepsilon_m}(t) \rightarrow \bar{A}(t)$, $\bar{\zeta}_{\varepsilon_m}(t) \rightarrow \bar{\zeta}(t)$ in probability, as $\varepsilon_m \rightarrow 0$, and finite-dimensional distributions of $\bar{A}_{\varepsilon_m}(t)$, $\bar{\zeta}_{\varepsilon_m}(t)$ are coincide with finite-dimensional distributions of $A_{\varepsilon_m}(t)$, $\zeta_{\varepsilon_m}(t)$. Since we interesting in limit behaviour of distributions, we can consider processes $A_{\varepsilon_m}(t)$, and $\zeta_{\varepsilon_m}(t)$ instead of $\bar{A}_{\varepsilon_m}(t)$, $\bar{\zeta}_{\varepsilon_m}(t)$. From (9) we obtain equation

$$\begin{aligned} A_{\varepsilon_m}(t) &= A(0) + \int_0^t \alpha_{\varepsilon_m}(s, A_{\varepsilon_m}(s)) ds + \zeta_{\varepsilon_m}(t), \\ A(0) &= (A_1(0), A_2(0)), \end{aligned} \quad (10)$$

where $\alpha_\varepsilon(t, A) = (\alpha_1^\varepsilon(t, A_1, A_2), \alpha_2^\varepsilon(t, A_1, A_2))$,

$$\alpha_i^\varepsilon(t, A_1, A_2) = \Psi_i\left(\frac{\omega t}{\varepsilon^k}\right) \hat{f}_{(1)}^\varepsilon\left(\frac{\omega t}{\varepsilon^k}, A_1, A_2\right),$$

$i = 1, 2$, where

$$\hat{f}_{(1)}^\varepsilon(t, A_1, A_2) = \varepsilon^{k_1-k} \hat{f}_1(t, A_1, A_2) + \varepsilon^{k_4-k} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}_4(t, A_1, A_2, z) \Pi_2(dz).$$

It should be noted that process $\zeta_\varepsilon(t)$ is the vector-valued square integrable martingale with matrix characteristic

$$\begin{aligned} \langle \zeta_i^\varepsilon, \zeta_j^\varepsilon \rangle(t) &= \\ &= \int_0^t \sigma_i^\varepsilon(s, A_1^\varepsilon(s), A_2^\varepsilon(s)) \sigma_j^\varepsilon(s, A_1^\varepsilon(s), A_2^\varepsilon(s)) ds + \\ &+ \frac{1}{\varepsilon^k} \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \gamma_i^\varepsilon(s, A_1^\varepsilon(s), A_2^\varepsilon(s), z) \times \\ &\times \gamma_j^\varepsilon(s, A_1^\varepsilon(s), A_2^\varepsilon(s), z) \Pi_1(dz) ds + \\ &+ \frac{1}{\varepsilon^k} \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \delta_i^\varepsilon(s, A_1^\varepsilon(s), A_2^\varepsilon(s), z) \times \\ &\times \delta_j^\varepsilon(s, A_1^\varepsilon(s), A_2^\varepsilon(s), z) \Pi_2(dz) ds, \quad i, j = 1, 2. \end{aligned}$$

where

$$\begin{aligned} \sigma_i^\varepsilon(s, A_1^\varepsilon(s), A_2^\varepsilon(s)) &= \\ &= \varepsilon^{k_2-k/2} \Psi_i\left(\frac{\omega s}{\varepsilon^k}\right) \hat{f}_2\left(\frac{\omega s}{\varepsilon^k}, A_1^\varepsilon(s), A_2^\varepsilon(s)\right), \\ \gamma_i^\varepsilon(s, A_1^\varepsilon(s), A_2^\varepsilon(s), z) &= \\ &= \varepsilon^{k_3} \Psi_i\left(\frac{\omega s}{\varepsilon^k}\right) \hat{f}_3\left(\frac{\omega s}{\varepsilon^k}, A_1^\varepsilon(s), A_2^\varepsilon(s), z\right), \\ \delta_i^\varepsilon(s, A_1^\varepsilon(s), A_2^\varepsilon(s), z) &= \\ &= \varepsilon^{k_4} \Psi_i\left(\frac{\omega s}{\varepsilon^k}\right) \hat{f}_4\left(\frac{\omega s}{\varepsilon^k}, A_1^\varepsilon(s), A_2^\varepsilon(s), z\right), \quad i = 1, 2 \end{aligned}$$

For processes $A_\varepsilon(t)$ and $\zeta_\varepsilon(t)$ following estimates hold

$$\mathbb{E} \|A_\varepsilon(t) - A_\varepsilon(s)\|^4 \leq K[(\varepsilon^{4(k_1-k)} + \varepsilon^{4(k_4-k)})|t-s|^4 + \mathbb{E} \|\zeta_\varepsilon(t) - \zeta_\varepsilon(s)\|^4], \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \|\zeta_\varepsilon(t) - \zeta_\varepsilon(s)\|^4 &\leq K \left[\sum_{i=2}^4 \varepsilon^{4k_i-2k} |t-s|^2 + \right. \\ &+ \varepsilon^{4k_3-3k/2} |t-s|^{3/2} + \varepsilon^{4k_3-k} |t-s| + \\ &+ \varepsilon^{4k_4-3k/2} |t-s|^{3/2} + \varepsilon^{4k_4-k} |t-s| \left. \right], \quad (12) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \|A_\varepsilon(t) - A_\varepsilon(s)\|^8 &\leq K, \\ \mathbb{E} \|\zeta_\varepsilon(t) - \zeta_\varepsilon(s)\|^8 &\leq K. \quad (13) \end{aligned}$$

Since $A_{\varepsilon_m}(t) \rightarrow \bar{A}(t)$, $\zeta_{\varepsilon_m}(t) \rightarrow \bar{\zeta}(t)$ in probability, as $\varepsilon_m \rightarrow 0$, then, using (13), from (11) and (12) we obtain estimates

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \|\bar{A}(t) - \bar{A}(s)\|^4 &\leq K(|t-s|^4 + |t-s|^2), \\ \mathbb{E} \|\bar{\zeta}(t) - \bar{\zeta}(s)\|^4 &\leq C|t-s|^2. \end{aligned}$$

Therefore processes $\bar{A}(t)$ and $\bar{\zeta}(t)$ satisfy the Kolmogorov's continuity condition [5].

Let us consider the case $k_1 = 2k_2 = 2k_3 = k_4$. Under these condition we have for $i, j = 1, 2$

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{t} \int_0^t \alpha_i^\varepsilon(s, A_1, A_2) ds &= \bar{\alpha}_i(A_1, A_2), \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{t} \int_0^t \left[\sigma_i^\varepsilon(s, A_1, A_2) \sigma_j^\varepsilon(s, A_1, A_2) + \right. \\ &+ \frac{1}{\varepsilon^k} \int_{\mathbb{R}} \gamma_i^\varepsilon(s, A_1, A_2, z) \gamma_j^\varepsilon(s, A_1, A_2, z) \Pi_1(dz) + \\ &+ \left. \frac{1}{\varepsilon^k} \int_{\mathbb{R}} \delta_i^\varepsilon(s, A_1, A_2, z) \delta_j^\varepsilon(s, A_1, A_2, z) \Pi_2(dz) \right] ds = \\ &= \bar{B}_{ij}(A_1, A_2), \quad (14) \end{aligned}$$

where functions $\bar{\alpha}^{(i)}(A_1, A_2)$ and $\bar{B}(A_1, A_2) = \{\bar{B}_{ij}(A_1, A_2), i, j = 1, 2\}$ are defined in the condition of theorem. Since processes $\bar{A}(t), \bar{\zeta}(t)$ are continuous, then from (Lemma 1 [6]) and relationships (10), (14) it follows

$$\begin{aligned} \bar{A}(t) &= A(0) + \int_0^t \bar{\alpha}(\bar{A}_1(s), \bar{A}_2(s)) ds + \bar{\zeta}(t), \\ A(0) &= (A_1(0), A_2(0)), \quad (15) \end{aligned}$$

where $\bar{\zeta}(t)$ is continuous vector-valued martingale with matrix characteristic

$$\langle \bar{\zeta}^{(i)}, \bar{\zeta}^{(j)} \rangle(t) = \int_0^t \bar{B}_{ij}(\bar{A}_1(s), \bar{A}_2(s)) ds, \quad i, j = 1, 2.$$

Hence [7] there exists Wiener process $\bar{w}(t) = (\bar{w}_i(t), i = 1, 2)$, such that

$$\begin{aligned} \bar{\zeta}(t) &= \int_0^t \bar{\sigma}(\bar{A}_1(s), \bar{A}_2(s)) d\bar{w}(s), \\ \bar{\sigma}(A_1, A_2) &= \{\bar{B}(A_1, A_2)\}^{1/2}. \quad (16) \end{aligned}$$

Relationships (15), (16) mean that process $\bar{A}(t)$ satisfies equation (5). Under conditions of theorem the equation (5) has unique solution. Therefore process $\bar{A}(t)$ does not depend on choosing of sub-sequence $\varepsilon_m \rightarrow 0$, and finite-dimensional distributions of process $A_{\varepsilon_m}(t)$ converge to finite-dimensional distributions of process $\bar{A}(t)$. Since processes $A_{\varepsilon_m}(t)$ and $\bar{A}(t)$ are Markov processes then using the conditions for weak convergence of Markov processes we finish the proof of statement 1 of theorem.

Let us consider the case $k < k_1$ or $k < k_4$. Then the corresponding terms in the coefficients $\alpha_\varepsilon^{(i)}(t, A_1, A_2)$, $i = 1, 2$ of equation (10) tend to zero, as $\varepsilon \rightarrow 0$.

In the case $k < 2k_2$ in (14) we have $\sigma_i^\varepsilon(t, A_1, A_2) \sigma_j^\varepsilon(t, A_1, A_2) = O(\varepsilon^{2k_2-k})$, $i, j = 1, 2$. In the case $k < 2k_3$ in (14) we have

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varepsilon^k} \int_{\mathbb{R}} \gamma_i^\varepsilon(s, A_1, A_2, z) \gamma_j^\varepsilon(s, A_1, A_2, z) \Pi_1(dz) &= \\ &= O(\varepsilon^{2k_3-k}). \end{aligned}$$

In all cases we have $k < 2k_4$, and therefore

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon^k} \int_{\mathbb{R}} \delta_i^\varepsilon(s, A_1, A_2, z) \delta_j^\varepsilon(s, A_1, A_2, z) \Pi_2(dz) = 0.$$

Repeating with obvious modifications the proof of statement 1) of theorem we obtain proof of the statement 2). $\square$

Список використаних джерел

1. Борисенко О.Д. Метод усереднення для автономної коливної системи четвертого порядку під дією випадкових збурень / О.Д. Борисенко, О.В. Борисенко // Вісник Київського університету імені Тараса Шевченка. Серія: фіз.-мат. науки. – 2010. – №4. – С. 11 – 15.
2. Борисенко О.Д. Гранична поведінка автономної коливної системи четвертого порядку під дією випадкових збурень у випадку комплексних коренів характеристичного рівняння / О.Д. Борисенко, О.В. Борисенко // Вісник Київського університету імені Тараса Шевченка. Серія: фіз.-мат. науки. – 2011. – №2. – С.7-11.
3. Борисенко О.Д. Гранична поведінка автономної коливної системи четвертого порядку під дією випадкових збурень у випадку двох пар уявних спряжених коренів характеристичного рівняння / О.Д. Борисенко, О.В. Борисенко // Вісник Київського університету імені Тараса Шевченка. Серія: фіз.-мат. науки. – 2012. – №3. – С.10 – 14.
4. Скороход А.В. Исследования по теории случайных процессов / А.В. Скороход // К.: Изд. Киевского университета. – 1961.
5. Гихман И.И. Теория случайных процессов, т.1 / И.И. Гихман, А.В. Скороход // М.: Наука. – 1971. – 664 с.
6. Borysenko O.D. Averaging method for autonomous third order random oscillating system / O.D. Borysenko, O.V. Borysenko, D.O. Borysenko // Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series: Physics & Mathematics – 2013. – №4. – P. 7 – 11.
7. Ikeda N. Stochastic Differential Equations and Diffusion Processes / N.Ikeda, S.Watanabe // North Holland, Amsterdam and Kadansha, Tokyo. – 1981. – 464 p.

References

1. BORYSENKO, O.D. and BORYSENKO, O.V. (2010), "Averaging method for autonomous fourth order oscillating system under the action of random perturbations", *Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series: Physics & Mathematics*, №4, pp. 11 – 15.
2. BORYSENKO, O.D. and BORYSENKO, O.V. (2011), "Limit behavior of autonomous fourth order oscillating system under the action of random perturbations in the case of complex roots of characteristic equation", *Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series: Physics & Mathematics*, №2, pp. 7 – 11.
3. BORYSENKO, O.D. and BORYSENKO, O.V. (2012), "Limit behavior of autonomous fourth order oscillating system under the action of random perturbations in the case of two pairs of imaginary adjoined roots of characteristic equation", *Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series: Physics & Mathematics*, №3, pp. 10 – 14.
4. SKOROKHOD, A.V. (1965) *Studies in the Theory of Random Processes*, Addison-Wesley.
5. GIKHMAN, I.I. and SKOROKHOD, A.V. (1971), *Teoriya sluchainykh processov, v.1*, M.: Nauka.
6. BORYSENKO, O.D., BORYSENKO, O.V. and BORYSENKO, D.O. (2013), "Averaging method for autonomous third order random oscillating system", *Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series: Physics & Mathematics*, №4, pp. 7 – 11.
7. IKEDA, N. and WATANABE, S. (1981), *Stochastic Differential Equations and Diffusion Processes*, North Holland, Amsterdam and Kadansha, Tokyo.

Received: 20.11.2015

УДК 519.21

О. В. Перегуда, к.ф.-м.н., доцент
О. І. Ковтун, к.ф.-м.н., доцент

Про поведінку розв'язків системи двох згасаючих стохастичних осциляторів.

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 01033, Київ, вул. Володимирська, 64.
e-mail: perol@ukr.net

O.V. Pereguda, Ph.D., Associate Professor
O.I. Kovtun, Ph.D., Associate Professor

The behavior of the solution of a system of two damped stochastic oscillators.

Taras Shevchenko National University of Kyiv,
01033, Kyiv, 64 Volodymyrska st.
e-mail: perol@ukr.net

У роботі проводиться дослідження поведінки розв'язків двох спряжених згасаючих аперіодичних гармонічних осциляторів при випадкових збурень типу "білого шуму" у формі Іто вздовж вектора фазової швидкості заданої системи. Отримано явний вигляд розв'язків відповідної стохастичної системи рівнянь Іто. Проведено якісний аналіз поведінки амплітуди та фази системи згасаючих стохастичних гармонічних осциляторів. Для отриманого розв'язку відповідної системи стохастичних рівнянь Іто побудовані різні моделі згасаючих аперіодичних осциляторів.

Ключові слова: гармонічний осцилятор, стохастичне диференціальне рівняння, згасаючі коливання, розв'язок рівняння Іто.

In present paper we consider representation of the solutions of the system of two harmonic oscillators with friction. This model is described by a system of linear differential equations of second order. The phase represent of the system is a family of parabolas singular point at the origin node. At the random perturbations of the "white noise" type of the Ito form along the phase velocity vector makes it system of stochastic Ito equations. The behavior of the solutions of stochastic of two conjugate damped aperiodic harmonic oscillators is investigated. The explicit form of the solutions of the corresponding system of stochastic Ito equations is found. A qualitative analysis of amplitude and phase behavior of the system damped harmonic stochastic oscillators is investigated. It is shown that under certain additional disturbance vector transfer equation stochastic equations, phase trajectories corresponding deterministic equations are invariant surfaces perturbed equation. To the resulting solution Ito stochastic equations constructed various models damped oscillator.

Key Words: harmonic oscillator, stochastic differential equation, damped fluctuations, Ito solution of equation.

Communicated by Prof. Kozachenko Yu.V.

1 Вступ

Розглядається система двох гармонічних осциляторів з тертям, що описується системою двох лінійним диференціальних рівнянь другого порядку

$$\begin{cases} \ddot{u}_1(t) + 2h_1\dot{u}_1(t) + k_1^2u_1(t) = 0, \\ \ddot{u}_2(t) + 2h_2\dot{u}_2(t) + k_2^2u_2(t) = 0, \\ u_1(0) = u_{10}, \dot{u}_1(0) = \dot{u}_{10}, \\ u_2(0) = u_{20}, \dot{u}_2(0) = \dot{u}_{20}, \end{cases} \quad (1)$$

де $u_{0i}, \dot{u}_{0i}$ — початкові положення і швидкості осциляторів ($u_{i0}^2 + \dot{u}_{i0}^2 > 0$); $k_i > 0$, h_i — коефіцієнти тертя осциляторів; $u_i(t), \dot{u}_i(t)$ — положення і швидкість осциляторів в момент часу $t > 0$; $i = 1, 2$.

Система (1) еквівалентна системі диференціальних рівнянь першого порядку

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) = -k_1^2x_1 - 2h_1x_2, \\ \dot{x}_3(t) = x_4(t), \\ \dot{x}_4(t) = -k_2^2x_3 - 2h_2x_4, \end{cases} \quad (2)$$

$$x_1(t) = u_1(t); x_2(t) = \dot{u}_1(t);$$

$$x_3(t) = u_2(t); x_4(t) = \dot{u}_2(t).$$

У прямокутній декартовій системі координат стан системи (2) зображається точкою М з координатами $(x_1(t), x_2(t), x_3(t), x_4(t))$, яка рухається по фазовій траєкторії. Фазова швидкість точки М направлена вздовж

дотичного вектора $(x_2(t), -k_1^2 x_1(t) - 2h_1 x_2(t), x_4(t), -k_2^2 x_3(t) - 2h_2 x_4(t))$. Портрет можливих рухів точки у фазовому просторі залежить від знаків $h_i^2 - k_i^2$, $i = 1, 2$. Якщо $0 < h^2 < k^2$, то це сім'я спіралей; якщо $h = 0$, то це сім'я подібних еліпсів з центром у початку координат; якщо $h^2 > k^2$, то сім'я парабол з особливою точкою вузол у початку координат; якщо $h^2 = k^2$, то сім'я кривих параболічного типу вузол у початку координат (при $h = k$ вузол стійкий). Дослідження поведінки зображувальної точки М на фазовій площині $X_1 O X_2$ при випадкових збуреннях вздовж вектора фазової швидкості, у випадку одного гармонічного осцилятора, проведено в [4]. Для випадку двох спряжених гармонічних осциляторів збурених двома незалежними вінеровськими процесами, дослідження поведінки зображувальної точки М при $0 < h < k$ (згасаючий осциляторний процес) було проведено в [5].

2 Постановка задачі

В данній роботі досліджується поведінка зображувальної точки М у фазовому просторі при випадковому збуренні вектора фазової швидкості $(x_2(t), -k_1^2 x_1(t) - 2h_1 x_2(t), x_4(t), -k_2^2 x_3(t) - 2h_2 x_4(t))$ "білим шумом" у формі Іто для випадку $|h_i| > k_i$ $i = 1, 2$ (згасаючий аперіодичний процес). При заданих випадкових збуреннях розглядається загальна система рівнянь вигляду:

$$\dot{x}(t) = Bx(t)\dot{\xi}(t) \quad (3) \quad de$$

де $\xi(t) = (\xi_1(t), \xi_2(t))$,

$$\dot{\xi}_1(t) = g_{11}(t) + g_{21}(t)\dot{w}_1(t);$$

$$\dot{\xi}_2(t) = g_{12}(t) + g_{22}(t)\dot{w}_2(t);$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -k_1^2 & -2h_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -k_2^2 & -2h_2 \end{pmatrix},$$

$g_{ij}(t)$ — не випадкові функції;
 $\dot{w}_i(t)$ — "похідна" від вінерівського процесу ("білий шум" у формі Іто).

Крім того вводиться додатково керуючий вектор переносу, при якому фазові траєкторії рівняння (2) будуть інваріантними поверхнями збуреної системи. Нехай $(F_t, t > 0)$ - неспадний

потік σ -алгебр на фіксованому ймовірностному просторі (Ω, F, P) , $(w(t), F_t)$ - вінерівський процес, $g_{ij}(t)$ - функції, визначені в області $[0, \infty) \times \Omega$, неперервні з ймовірністю 1 і при кожному фіксованому t вимірні відносно F_t . Тоді рівняння (3) природньо розглянути як рівняння Іто

$$dx(t) = Bx(t)d\xi_i(t); \quad (4)$$

$i=1,2$;

$$\xi_1(t) = \int_0^t g_{11}(s)ds + \int_0^t g_{21}(s)dw_1(s);$$

$$\xi_2(t) = \int_0^t g_{12}(s)ds + \int_0^t g_{22}(s)dw_2(s).$$

Введемо наступні позначення: $\mu_i = \sqrt{h_i^2 - k_i^2}$;

$$\lambda_{1i} = -h_i + \mu_i, \lambda_{2i} = -h_i - \mu_i, \alpha_{1j} = \int_0^t g_{1j}(s)ds;$$

$$\alpha_{2j} = \int_0^t g_{2j}^2(s)ds; j = 1, 2, i = 1, 2.$$

Має місце наступна теорема:

Теорема 2.1. Нехай $x(t)$ - розв'язок рівняння (4), тоді з ймовірністю 1 для всіх $t \geq 0$ мають місце рівності:

$$x_1(t) = A_1(t)\sqrt{2} \cos(\phi_1(t) + \frac{\pi}{4}),$$

$$x_2(t) = A_1(t)(\lambda_{11}^2 + \lambda_{12}^2) \sin(\phi_1(t) + \gamma_1),$$

$$x_3(t) = A_2(t)\sqrt{2} \cos(\phi_2(t) + \frac{\pi}{4}),$$

$$x_4(t) = A_2(t)(\lambda_{21}^2 + \lambda_{22}^2)(\sin \phi_2(t) + \gamma_2).$$

$$A_1(t) = \frac{1}{\lambda_{11} - \lambda_{12}} \sqrt{(y_{11}^2(t) - y_{12}^2(t))},$$

$$A_2(t) = \frac{1}{\lambda_{21} - \lambda_{22}} \sqrt{(y_{21}^2(t) - y_{22}^2(t))},$$

$$y_{ij}(t) = y_{ij}(0) \exp\{-\frac{\lambda_{ij}^2}{2} \alpha_{2i}(t) + \lambda_{ij} \xi(t)\},$$

$$y_{11}(0) = -\lambda_{12} u_{10} + \dot{u}_{10}, y_{12}(0) = -\lambda_{11} u_{10} + \dot{u}_{10},$$

$$y_{21}(0) = -\lambda_{22} u_{20} + \dot{u}_{20}, y_{22}(0) = -\lambda_{21} u_{20} + \dot{u}_{20},$$

$$tg\phi_1(t) = \frac{y_{12}(0)}{y_{11}(0)} \exp\{-2\mu_1[h_1 \alpha_{2i}(t) + \xi(t)]\},$$

$$tg\phi_2(t) = \frac{y_{21}(0)}{y_{21}(0)} \exp\{-2\mu_2[h_2 \alpha_{2i}(t) + \xi(t)]\},$$

$$tg\gamma_1 = -\frac{\lambda_{11}}{\lambda_{12}}, tg\gamma_2 = -\frac{\lambda_{21}}{\lambda_{22}}, i = 1, 2, j = 1, 2.$$

Доведення. Розглянемо лінійне перетворення процесу $x(t)$, при якому матриця B в рівнянні (4) прийме жорданову форму. Розглянемо процес $y(t) = Tx(t)$ з матрицею

$$T = \begin{pmatrix} -\lambda_{11} & 1 & 0 & 0 \\ -\lambda_{21} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda_{12} & 1 \\ 0 & 0 & -\lambda_{22} & 1 \end{pmatrix}$$

Тоді відповідно

$$TBT^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda_{21} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \lambda_{22} \end{pmatrix}$$

– жорданова форма матриці B . Завдяки рівнянню (4) для процесу $y(t)$ отримаємо стохастичне диференціальне рівняння Іто

$$dy(t) = TBT^{-1}y(t)d\xi(t) \quad (5)$$

З коефіцієнтом переносу

$$\begin{aligned} a_1(t, y) &= g_{11}(t) (\lambda_{11}y_{11}, y_{11} + \lambda_{21}y_{12}); \\ a_2(t, y) &= g_{12}(t) (\lambda_{12}y_{11}, y_{11} + \lambda_{22}y_{12}); \\ a_3(t, y) &= g_{11}(t) (\lambda_{11}y_{21}, y_{21} + \lambda_{21}y_{22}); \\ a_4(t, y) &= g_{12}(t) (\lambda_{12}y_{21}, y_{21} + \lambda_{22}y_{22}). \end{aligned}$$

Згідно [2] знаходимо явний вигляд розв'язків:

$$\begin{aligned} y_{ij}(t) &= y_{ij}(0) \exp\left\{-\frac{\lambda_{ij}^2}{2} \alpha_{2i}(t) + \lambda_{ij}\xi(t)\right\}, \\ i &= 1, 2, j = 1, 2, \end{aligned}$$

$$y_{11}(0) = -\lambda_{12}u_{10} + \dot{u}_{10}, y_{12}(0) = -\lambda_{12}u_{10} + \dot{u}_{10},$$

$$y_{21}(0) = -\lambda_{22}u_{20} + \dot{u}_{20}, y_{22}(0) = -\lambda_{21}u_{20} + \dot{u}_{20}.$$

Оскільки $x(t) = T^{-1}y(t)$, то враховуючи явний вигляд процесу $y(t)$, отримаємо завершення доведення теореми. $\square$

Зауваження 1. Маючи явний вигляд розв'язку рівняння (4) залежно від поведінки функцій $g_{ij}(t)$ можна будувати моделі незатухаючих осциляторів з довільним порядком росту амплітуд.

Зауваження 2. Якщо $g_{ij}(t) = g_{ij}$ – сталі і $g_{11} = 0$, $g_{12} = 0$, то при довільній інтенсивності $g_{21} \neq 0$, $g_{22} \neq 0$ збурюючого “білого шуму” завжди маємо згасаючий осцилятор.

Надалі ми зупинимося лише на аналізі поведінки лише затухаючих осциляторів. Покажемо, що при певному додатковому збуренні вектора переносу рівняння (4), фазові траєкторії відповідного детермінованого рівняння (2) будуть інваріантними поверхнями збуреного рівняння, тобто зображувальна точка збуреної системи буде “дифундувати” за фазовою траєкторією детермінованої системи (2).

Теорема 2.2. Нехай $y(t)$ – розв'язок системи стохастичних диференціальних рівнянь

$$dy(t) = g_{i2}^2 By(t)dt + By(t)d\xi(t), i = 1, 2,$$

$$y_1(0) = u_1(0), y_2(0) = \dot{u}_1(0),$$

$$y_3(0) = u_0(t), y_4(0) = \dot{u}_2(0),$$

де матриця B має блочно-діагональну структуру з ненульовими блоками B_1 та B_2 вигляду:

$$B_1 = \begin{pmatrix} -\lambda_{11}\lambda_{21} & \lambda_{11} + \lambda_{21} \\ \lambda_{11}\lambda_{21}(\lambda_{11} + \lambda_{21}) & \lambda_{11}^2 + \lambda_{11}\lambda_{21} + \lambda_{21}^2 \end{pmatrix}$$

$$B_2 = \begin{pmatrix} -\lambda_{12}\lambda_{22} & \lambda_{12} + \lambda_{22} \\ \lambda_{12}\lambda_{22}(\lambda_{12} + \lambda_{22}) & \lambda_{12}^2 + \lambda_{12}\lambda_{22} + \lambda_{22}^2 \end{pmatrix}$$

. Тоді для довільного $t \geq 0$ $G(y(t)) = G(y(0))$ з ймовірністю 1, де $G(y) = G_1(y)G_2(y)$

$$G_1(y) = (-\lambda_{11}y_1 + y_2)(-\lambda_{12}y_1 + y_2)^{\frac{-\lambda_{12}}{\lambda_{11}}}$$

$$G_2(y) = (-\lambda_{21}y_3 + y_4)(-\lambda_{22}y_3 + y_4)^{\frac{-\lambda_{22}}{\lambda_{21}}}$$

Доведення теореми можна провести безпосереднім застосуванням формули Іто до процесу $G(y(t))$, в силу якої отримаємо, що для довільного $t \geq 0$ $dG(y(t)) = 0$ з ймовірністю 1 і отже поверхня $G(y) = C$, де C -стала буде інваріантною множиною для заданої системи стохастичних рівнянь.

3 Висновки

У роботі розглянуто механічну модель, що описується системою двох спряжених гармонічних осциляторів у випадку аперіодичного затухання. При випадкових збуреннях типу “білого шуму” у формі Іто вздовж вектора фазової швидкості дана система перетворюється на систему стохастичних рівнянь Іто. Для отриманої стохастичної системи проведено якісний аналіз поведінки розв’язків. Для даної системи двох стохастичних спряжених осциляторів з третям зна-

йдено явний вигляд і досліджено поведінку амплітуд та фаз. Маючи явний вигляд амплітуд та фаз системи двох стохастичних осциляторів залежно від поведінки невинуватих функцій $g_{ij}(t)$ можна будувати різні моделі аперіодичних затухаючих осциляторів з довільним порядком росту амплітуд. Доведено, що при певному додатковому збуренні вектора переносу рівняння (4), фазові траєкторії відповідного детермінованого рівняння (2) будуть інваріантними поверхнями збуреного рівняння.

Список використаних джерел

1. Андронов А.А. Теория колебаний / Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. – Москва: Наука. – 1981. – 918 с.
2. Гихман И.И. Стохастические дифференциальные уравнения / Гихман И.И., Скороход А.В. – Киев: Наукова думка. – 1968. – 354 с.
3. Кулініч Г.Л. Інваріантні множини стохастичних диференціальних рівнянь Іто / Кулініч Г.Л., Перегуда О.В. // Київ:ВПЦ Київського національного університету імені Тараса Шевченка. – 2002. – 91с..
4. Kulinich G. L. Qualitative analysis of the influence of random perturbations on the phase velocity of the harmonic oscillator / Kulinich G. L. // Random Oper. And Stoch. Eq.– 1995.–3. – №2. – P. 141 – 152.
5. Перегуда О.В. Якісний аналіз поведінки системи двох згасаючих стохастичних осциляторів / О.В. Перегуда, О.І. Ковтун // Вісник Київського університету. Серія: фізико-математичні науки. – 2006. – №4. – P. 106 – 113.

References

1. ANDRONOV A.A, VITT A.A. and HAYKIN S.E. (1959), *Teoria kolebaniy*, M.: Nauka.
2. GIKHMAN I.I. and SKOROHOD A.V. (1968), *Stokhasticheskie differentsialnie uravnenia*, Kiev.: Naukova dumka.
3. KULINICH G.L. and PEREGUDA O.V. (2002), *Invariantni mnozhini stokhastichnih differentsialnih rivnian Ito*, Kiev.
4. KULINICH G. L. (1995) "Qualitative analysis of the influence of random perturbations on the phase velocity of the harmonic oscillator", *Random Oper. And Stoch. Eq.*, **3**. №2. pp. 141 – 152.
5. PEREGUDA O.V. and KOVTUN O.I. (2006), "Yakisniy analiz povedinky sysnemy dvoh zgasauchyh stohastychyh ostsilioriv", *Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series: Physics & Mathematics*, №4, pp. 106 – 113.

Received: 10.09.2015

УДК 512.54

М.В. Федорова

**Планарність орбітальних графів
Шраєра вільних добутоків циклічних
груп**

Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 01033, Київ, вул. Володи-
мирська, 64.
e-mail: mfed@univ.kiev.ua

M.V. Fedorova

**Planarity of orbital Schreier graphs of
free products of cyclic groups**

Taras Shevchenko National University of
Kyiv, 01033, Kyiv, 64 Volodymyrska st.
e-mail: mfed@univ.kiev.ua

*Будуються планарні нескінченні орбітальні графи Шраєра точної дії вільного добутку двох
циклічних груп скінченного порядку скінченно автоматними підстановками.*

Ключові слова: планарний граф, граф Шраєра, вільний добуток, індуктивна границя.

*Free products of finite number of finite groups admit faithful actions by finite automaton permutati-
ons. Each action of this kind gives rise to Schreier graphs on levels and orbital Schreier graphs. These
graphs depend on the action and a fixed generation set of the group. For the free product of two nontri-
vial cyclic finite groups we construct an orbital Schreier graph such that its underlying graph is planar.
The proof relies on Kuratowski's planarity criterion for infinite graphs and uses inductive limits of
finite planar graphs.*

Key Words: planar graph, Schreier graph, free product, inductive limit.

Communicated by Prof. Kirichenko V. V.

1 Introduction

Planarity of simple graphs is natural and challenging for verification property. The well-known criterion of Kuratowski for finite graphs and its generalization ([1]) for infinite ones are the most useful tools to check planarity. For graphs defined via groups the question about planarity was studied mainly for Cayley graphs. In [2] it was classified finite groups such that their Cayley graphs are planar. Examples of infinite planar Cayley groups include free products of cyclic groups.

It is natural to study planarity for the closest generalization of Cayley graphs, i.e. Schreier graphs. In particular, these graphs are intensively used for establishing interconnections between group theory, graph theory, dynamical systems and fractal geometry.

In the paper we consider planarity for Schreier graphs arising from faithful actions of free products of finite groups by finite automaton permutations. We show how to build an infinite planar orbital Schreier graph of such an action. The proof uses Kuratowski's criterion and inductive limits of finite planar graphs.

All notions and notations are standard and omitted ones can be found in [1] and [3].

2 Preliminaries

In this section graph means simple (i.e. without loops and multiply edges) undirected graph. Note that loops, multiply edges and orientation of edges in the graph do not affect it's planarity. Therefore we restrict ourselves to simple undirected graphs.

Definition 2.1. An infinite graph $\Gamma(V, E)$ with countable number of vertices is called plane graph if and only if this graph satisfies following conditions: $V \subseteq \mathbb{R}^2$, every edge is an arc between two vertices, different edges have different endpoints (there are no multiple edges in the graph), the interior of an edge contains no point of the other edge and no vertex, i.e. edges can intersect only at the endpoints.

Definition 2.2. An infinite graph $\Gamma(V, E)$ with countable number of vertices is called *planar* (is *embedded into the plane*) if this graph is isomorphic to some plane graph.

Using

Lemma 1. (*König, [1]*) *The infinite connected graph, in which every vertex has a finite degree, contains an infinite simple path (without repetition of the vertices).*

one can establish the following

Theorem 2.1. (Generalization of Kuratowski theorem, [1]) *A countable graph is not planar if and only if it contains a subgraph, which is homeomorphic to the graph K_5 or to the graph $K_{3,3}$.*

Let us consider a directed set of indices, i.e. a set I together with a reflexive, antisymmetric and transitive binary relation $\preceq$ on it such that for arbitrary elements $i \in I, j \in I$ of this set there is an element $k \in I$ satisfying $i \preceq k$ and $j \preceq k$. Consider a family of graphs $\Gamma_i, i \in I$. Assume that for arbitrary $i \in I, j \in I, i \preceq j$, there is a homomorphism of graphs $f_{ij} : \Gamma_i \rightarrow \Gamma_j$ such that the homomorphism f_{ii} is the identical transformation and $f_{ij}f_{jk} = f_{ik}$ for arbitrary $i \preceq j \preceq k$ from I . The set of graphs and homomorphisms $\{\Gamma_i, f_{ij} | i \preceq j \in I\}$ is called a *direct system of graphs*. Let us define an equivalence relation on the vertex set of $\bigcup_{i \in I} \Gamma_i$. Two vertices $g_1 \in \Gamma_i$ and $g_2 \in \Gamma_j$ are equivalent if there is an index k and a vertex $\omega \in \Gamma_k$ such that $i \preceq k, j \preceq k$, and $f_{jk}(g_2) = f_{ik}(g_1) = \omega$. Then one can define a new graph, whose vertices are equivalence classes. Two vertices $\tilde{g}_1$ and $\tilde{g}_2$ of this graph are connected by an edge if there is a graph Γ_k such that its vertices $g_{k1} \in \tilde{g}_1$ and $g_{k2} \in \tilde{g}_2$ are connected.

Definition 2.3. The direct limit $\Gamma_0 = (V_0, E_0)$ of the direct system of graphs $\{\Gamma_i, f_{ij} | i \preceq j \in I\}$ is a graph, whose set of vertices consists of equivalence classes of vertices of the direct set of graphs Γ , and the edge $(\tilde{g}_1, \tilde{g}_2) \in E_0$ exists, if there is a graph Γ_k such that its vertices $g_{k1} \in \tilde{g}_1$ and $g_{k2} \in \tilde{g}_2$ are connected by an edge.

The set $\mathbb{N}$ of all natural numbers with the natural ordering $\leq$ is a directed set. Let $\Gamma_i, i \in \mathbb{N}$, be a family of finite graphs and $f_i : \Gamma_i \rightarrow \Gamma_{i+1}, i \in \mathbb{N}$, be a family of injective graph homomorphisms. Then the rules $f_{ij} = f_i \dots f_{j-1}, i < j$, naturally define the direct system of graphs. For simplicity denote it by $\{\Gamma_i, f_i\}$. The direct limit of this direct system can be naturally identified with the increasing union $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} \Gamma_i$ of finite graphs such that Γ_i is isomorphic to $\Gamma_i, i \in \mathbb{N}$. We will consider direct limits of direct systems of finite graphs of this type only.

Theorem 2.2. *The direct limit of the direct system $\{\Gamma_i, f_i\}$ of finite planar graphs is a planar graph.*

Proof. By definition 2.2 the generalization of Kuratowski theorem for countable graphs 2.1 is

equivalent to the following statement. A countable graph is planar if and only if every finite subgraph of this graph is planar.

The definition of the direct limit of graphs implies that arbitrary finite subgraph of the direct limit of the direct system $\{\Gamma_i, f_i\}$ of finite planar graphs is a subgraph of some finite planar graph $\Gamma_r, r \in \mathbb{N}$. Thus the direct limit do not have subgraphs homeomorphic to K_5 or $K_{3,3}$. Hence by Theorem 2.1 the direct limit is a planar graph. $\square$

3 Main result

Consider s ($s \geq 2$) finite groups $G_1, \dots, G_s$ of orders $p_1, \dots, p_s$ respectively. Assume that $1 < p_1 \leq \dots \leq p_s$ and denote $n = p_s$. Let us recall the construction of an embedding of the free product $G_1 * \dots * G_s$ into the group $FGA(X)$ of finite automaton permutations over the alphabet $X = \{x_1, \dots, x_n\}$. It is assumed that for every $i, 1 \leq i \leq s$ a regular action of the group G_i on the first p_i symbols of X is given and all other letters are fixed. Denote the letter x_1 by 0 and the word $0 \dots 0$ from the set X^s of all words of length s by $\bar{0}$. Let $M_i = \{\underbrace{x \dots x}_i 0 \dots 0 : x \in X, x \neq 0\}$ be subsets in X^s for $1 \leq i \leq s$. For each $i, 1 \leq i \leq s$, we define the set $D_i = \bigcup_{j \neq i} M_j^{G_i}$, where $M_j^{G_i} = \{\omega^g : \omega \in M_j, g \in G_i\}, 1 \leq i, j \leq s, D_i = \{\bar{x}_1^{hg} : h \in G_j, g \in G_i, h \neq e_j, j \neq i\}$. We define functions $\varphi_{ti}, t \in \{1, 2\}$, which assign to each element $g \in G_i$ a transformation $\varphi_{ti}(g)$ of the set X^∞ of all infinite words over the alphabet X . For all $k \in \mathbb{N}$ an infinite word $\omega \in X^\infty$ can be divided into syllables of length k : $\omega = \omega[k, 1]\omega[k, 2] \dots$. For all $g \in G_i, u \in X^\infty$ we define $v_t = (\varphi_{ti}(g))(u)$ as follows. For arbitrary $1 \leq j < t + 1$ let $v_t[s, j] = u[s, j]$, and for all $j \geq t + 1$

$$v_t[s, j] = \begin{cases} (u[s, j])^g, & \text{if } u[s, j - n] \in D_i \\ u[s, j] & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (1)$$

In this way everywhere defined transformations of the set of infinite words over X are constructed.

It is shown in [3, 4] that for each element $g \in G_i$ the transformation $\varphi_{ti}(g)$ is a finite automaton permutation over the alphabet X . Moreover, the function φ_{ti} is a monomorphism from the group G_i into the group of finite automaton permutations $FGA(X)$.

Denote by $\mathbb{G}_t(G_1, \dots, G_s)$ the subgroup of $FGA(X)$, generated by all the elements $\varphi_{t1}(G_1), \dots, \varphi_{ts}(G_s), t \geq 1$.

Theorem 3.1. ([3, 4]) *The group $\mathbb{G}_t(G_1, \dots, G_s)$ splits into the free product as follows: $\mathbb{G}_t(G_1, \dots, G_s) \simeq G_1 * \dots * G_s, t \geq 1$*

Consider a group G with a finite generation set S , acting on a set M .

Definition 3.1. The Schreier graph $\Gamma(G, S, M)$ of the action of the group G on the set M is a directed graph with the set of vertices M and the set of edges $M \times S$, where for every $m \in M$ and $s \in S$ there is an edge (m, s) from m to $s(m)$ and this edge has a label s .

Let the group G be generated by a finite set S of finite automaton permutations over the alphabet X . It acts on the sets X^* and X^ω of all finite and infinite words over the alphabet X respectively.

Definition 3.2. For all $\omega \in X^\omega$ we define the Schreier graph $\Gamma(G, S, \omega)$ of the action of the group G on G -orbit of the word ω and call it the orbital Schreier graph and denote by Γ_ω .

The sets $X^n, n \geq 1$, are invariant under the action of G . Hence the sequence Γ_n of finite Schreier graphs of the action of G on $X^n, n \geq 1$, naturally arise. We call these graphs the Schreier graphs of the action of G on the levels.

Let us positive integers p_1 and p_2 such that $1 < p_1 \leq p_2$. Consider cyclic groups C_{p_1} and C_{p_2} of orders p_1 and p_2 respectively. Fix a word v of length 2 from the set $D_1 \cap D_2$. Note that this intersection is not empty. Consider the infinite word ω such that $\omega[2, 1] = v$ and all other letters of ω are 0, i.e. $\omega = v00\dots$. Denote by γ the underlying graph of the Schreier graph $\Gamma(\mathbb{G}_2(C_{p_1}, C_{p_2}), S, \omega)$, where the generating set S consists of two elements a_1, a_2 of orders p_1 and p_2 respectively. Since the group $\mathbb{G}_2(C_{p_1}, C_{p_2})$ is isomorphic to the free product $C_{p_1} * C_{p_2}$ the graph γ is the underlying graph of an orbital Schreier graph of the free product $C_{p_1} * C_{p_2}$.

The main result of the paper is as follows.

Theorem 3.2. *The graph γ is planar.*

Proof. It is shown in [5] that the vertex set of γ infinite. The definition of orbital Schreier graph

implies that it is a countable graph. It is sufficient to represent γ as an increasing union $\bigcup_{n=1}^{\infty} \gamma_n$ of finite planar graphs and use Theorem 2.2.

Let γ_0 consists of the unique vertex ω and has no edges. We define graphs $\gamma_n, n \geq 1$ recursively. Each graph γ_n is obtained using the action of one of the the generator a_1 or a_2 on vertices of the graph $\gamma_{n-1}, n \geq 1$.

More precisely, the graph γ_1 is the cycle of length p_1 obtained from the unique vertex ω of γ_0 by virtue of the action of a_1 . In other words, the vertex set of γ_1 is $\{\omega^{a_1^i} : 0 \leq i \leq p_1 - 1\}$ and an edge connects two vertices if and only if one of them goes to the other under the action of a_1 . Since the word v belongs to D_1 the word ω is not fixed under a_1 and the graph γ_1 is the underlying graph of the Schreier graph of G_1 with respect to the generator a_1 and the action on the minimal set containing the vertex set of γ_0 . In fact we built γ_1 by extending the vertex of γ_0 to the cycle of the length p_1 . Each vertex of γ_1 has degree 2. We call vertices of the graph γ_1 the vertices of the first level of γ . Note that the last nonzero syllable of each of these words equals v or $(00)^{a_1^i}, 1 \leq i \leq p_1 - 1$. It is easy to see that γ_1 is planar.

The graph γ_2 will be obtained in a similar way by extending each vertex of the first level of γ to its own cycle of the lengths p_2 . Since $v \in D_2$ and $(00)^{a_1^i}, 1 \leq i \leq p_1 - 1$ all vertices of the first level of γ are not fixed under the action of the generator a_2 . This means that γ_2 is the underlying graph of the Schreier graph of G_2 with respect to the generator a_2 and the action on the minimal set containing the vertex set of γ_1 . We call vertices of the graph γ_2 the vertices of the second level of γ . Note that the last nonzero syllable of each of these words equals $(00)^{a_2^i}, 1 \leq i \leq p_2 - 1$. Each vertex of γ_2 of the second level has degree 2 and all the other vertices have degree 4. The graph γ_2 is planar.

In the same way we define the graph γ_n by extending each vertex of the $(n - 1)$ th level of γ to its own cycle of the lengths p_1 if n is odd and to its own cycle of the lengths p_2 if n is even. In fact, γ_n is the underlying graph of the Schreier graph of G_1 (or G_2 respectively) with respect to the generator a_1 (or a_2 respectively) and the action on the minimal set containing the vertex set of γ_{n-1} . All added vertices are called vertices of the n th level of γ . The graph γ_n is planar. $\square$

4 Concluding remarks

In fact, the proof of Theorem 3.2 shows that the orbital Schreier graph $\Gamma(\mathbb{G}_2(C_{p_1}, C_{p_2}), S, \omega)$ is isomorphic to the Cayley graph of the free product $C_{p_1} * C_{p_2}$.

In the same way as we defined the graph γ for $s = 2$ one can consider the general case $s > 3$. More precisely, fix a word v of length s from the nonempty intersection $\bigcap_{i=1}^s D_i$ and consider the infinite word ω such that $\omega[s, 1] = v$ and all other letters of ω are 0. Then the underlying graph of the Schreier graph $\Gamma(\mathbb{G}_2(C_{p_1}, \dots, C_{p_s}), S, \omega)$, where the generating set S consists of s elements $a_1, \dots, a_s$ of orders $p_1, \dots, p_s$ respectively, is not

planar. The proof uses Euler's formula for finite planar graphs.

From the other hand even for the free product of two groups the planarity of the underlying graphs of Schreier graphs on levels seems to be a rare property. In fact among these graphs appear such planar graphs as a graph with a unique vertex without edges and simple cycles of length p_1 and p_2 . We conjecture a hypothesis that there is no other planar connected components of the underlying graphs of Schreier graphs on levels.

As an example, one can show that for the free product $C_3 * C_3$ the connected component of the underlying Schreier graphs on the level 2 that has 9 vertices is not a planar graph.

Список використаних джерел

1. Dirac G. A. A theorem of Kuratowski/ G. A. Dirac, S. Schuster// Indagationes Mathematicae (Proceedings). –1954. – **57**. – P. 343-348.
2. Maschke H. The representation of finite groups, especially of the rotation groups of the regular bodies of three-and four-dimensional space, by Cayley's color diagrams/ H. Maschke//American Journal of Mathematics. — 1896. — №2, **18**. — P. 156-194.
3. Olijnyk A., Free products of finite groups and groups of finitely automatic permutations/ A. Olijnyk// Proc. Steklov Inst. Math. — 2000. — №4, **231**. — P. 308–315.
4. Федорова М. В., Вільні добутки скінченних груп, задані скінченними автоматами/ М. В. Федорова// Наукові записки НаУКМА. — 2014. — **152**, Фізико-математичні науки. — С. 48-51.
5. Федорова М. В., Графи Шраєра вільних добутків циклічних груп/ М. В. Федорова// Математичний вісник Наукового товариства ім. Шевченка. — 2016. — **13**. — С. 5-16.

References

1. DIRAC, G. A. and SCHUSTER S. (1954) "A theorem of Kuratowski", Indagationes Mathematicae (Proceedings), **57**, pp. 343-348.
2. MASCHKE, H. (1896) "The representation of finite groups, especially of the rotation groups of the regular bodies of three-and four-dimensional space, by Cayley's color diagrams", American Journal of Mathematics, №2, **18**, pp. 156-194.
3. OLIJNYK, A. (2000) "Free products of finite groups and groups of finitely automatic permutations", Proc. Steklov Inst. Math, №4, **231**, pp. 308–315.
4. FEDOROVA, M. V. (2014) "Free products of finite groups defined by finite automata", Scientific notes NaUKMA, **152**, Physics and mathematics series, pp. 48-51. (in Ukrainian)
5. FEDOROVA, M. V. (2016) "Schreier graphs of free products of cyclic groups", Mathematical Bulletin of Taras Shevchenko Scientific Society, 2016, **13**, pp. 5-16.

Received: 30.11.2015

**ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ
РІВНЯННЯ,
МАТЕМАТИЧНА ФІЗИКА
ТА МЕХАНІКА**

УДК 517.929.2

I.B. Гончар

**Про обмежені та сумовні розв'язки
різницевого рівняння зі стрибком
операторного коефіцієнта**

Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 01033, Київ, вул. Володи-
мирська, 64.
e-mail: goncharinna@ukr.net

I.V. Gonchar

**On the bounded and summable solutions
of a difference equation with a jump of an
operator coefficient**

Taras Shevchenko National University of
Kyiv, 01033, Kyiv, 64 Volodymyrska st.
e-mail: goncharinna@ukr.net

*Досліджується питання про існування єдиного обмеженого і єдиного сумовного розв'язків
одного різницевого рівняння зі стрибком операторного коефіцієнта у нескінченновимірному ба-
наховому просторі.*

*Ключові слова: різницеве рівняння, нескінченновимірний простір, лінійний оператор, обме-
жений розв'язок, сумовний розв'язок.*

*We consider linear and weakly nonlinear difference equations with a linear operator coefficient jump
in the infinite dimensional complex Banach space X . Such equations often arise in theoretical and
applied problems of physics, mechanics, mathematical physics, biology and mathematical economics.
The results of the research describe existence conditions of the unique solutions for some types of
difference equations. In particular we study summable solution existence and uniqueness for linear
difference equation in the space $l_p(\mathbb{Z}, X)$. Also we address the issue of the bounded solution existence
and uniqueness for linear difference equation in the space X and the explicit form of such a solution is
determined. Furthermore we formulate sufficient conditions of existence and uniqueness of the unique
bounded solution of the weakly nonlinear difference equation in the infinite dimensional complex Banach
space X .*

*Key Words: difference equation, infinite dimensional space, linear operator, bounded solution,
summable solution.*

Статтю представив академік НАНУ, доктор фіз.-мат. наук, проф. Перестюк М.О.

1 Вступ

Нехай X - нескінченновимірний комплексний банахів простір з нормою $\|\cdot\|$ і нульовим елементом $\bar{0}$; $L(X)$ - простір лінійних обмежених операторів, що діють із X в X ; A, B - фіксовані оператори з $L(X)$.

Розглянемо різницеве рівняння

$$\begin{cases} x_{n+1} = Ax_n + y_n, n \geq 1, \\ x_{n+1} = Bx_n + y_n, n \leq 0, \end{cases} \quad (1)$$

у якому $\{y_n, n \in \mathbb{Z}\}$ - задана, а $\{x_n, n \in \mathbb{Z}\}$ - шукана послідовність елементів простору X .

Нижче наведемо деякі достатні умови на оператори A, B , при виконанні яких виконується наступна умова.

Умова 1. Для довільної обмеженої в X послідовності $\{y_n, n \in \mathbb{Z}\}$ рівняння (1) має єдиний обмежений розв'язок $\{x_n, n \in \mathbb{Z}\}$ у просторі X .

Про застосування різницевого рівнянь з операторними коефіцієнтами див. [1-3, 5, 6].

2 Обмежені розв'язки рівняння (1).

Припустимо, що спектри $\sigma(A), \sigma(B)$ операторів A, B не перетинаються з одиничним колом $S = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| = 1\}$. Нехай $\sigma_-(A), \sigma_-(B)$ - частини спектрів операторів A, B , які лежать всередині, а $\sigma_+(A), \sigma_+(B)$ - зовні кола S . Вважатимемо, що множини $\sigma_\pm(A), \sigma_\pm(B)$ непорожні. Зауважимо, що усі отримані нижче результати залишаються справедливими і у випадку, коли серед цих множин є порожні, з очевидними змінами в отриманих формулах.

Скориставшись спектральним розкладом оператора в банаховому просторі (див. [2, с. 8]), робимо висновок, що простір X розкладається в пряму суму інваріантних відносно A підпросторів $X = X_-(A) \dot{+} X_+(A)$ таким чином, що звуження A_-, A_+ оператора A на $X_-(A), X_+(A)$ мають спектри $\sigma_-(A), \sigma_+(A)$. Також $X = X_-(B) \dot{+} X_+(B)$ і звуження B_-, B_+ оператора B на $X_-(B), X_+(B)$ мають такі ж

властивості. Відзначимо, що при цьому збігаються ряди

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|A_+^{-n}\|, \sum_{n=1}^{\infty} \|A_-^n\|, \sum_{n=1}^{\infty} \|B_+^{-n}\|, \sum_{n=1}^{\infty} \|B_-^n\|. \quad (2)$$

Нехай також $X = X_-(A) \dot{+} X_+(B)$. Зафіксуємо обмежену послідовність $\bar{y} = \{y_n, n \in \mathbb{Z}\}$ і покладемо $\|\bar{y}\|_{\infty} = \sup_{n \in \mathbb{Z}} \|y_n\|$. Тоді елемент y_0 цієї послідовності єдиним чином зображується у вигляді $y_0 = y_0^- + y_0^+$, де $y_0^- \in X_-(A)$, $y_0^+ \in X_+(B)$. Позначимо через P_-^0, P_+^0 проектори в X на підпростори $X_-(A), X_+(B)$, що відповідають зображенню $X = X_-(A) \dot{+} X_+(B)$; P_-^A, P_+^A - проектори в X на $X_-(A), X_+(A)$, що відповідають зображенню $X = X_-(A) \dot{+} X_+(A)$, P_-^B, P_+^B - проектори в X на $X_-(B), X_+(B)$, що відповідають зображенню $X = X_-(B) \dot{+} X_+(B)$.

Покладемо для кожного $n \geq 1$

$$P_+^n = A_-^n P_+^0 A_+^{-n} P_+^A, \quad P_-^n = I - P_+^n; \quad (3)$$

$$P_-^{-n} = B_-^{-n} P_-^0 B_-^n P_-^B, \quad P_+^{-n} = I - P_-^{-n}; \quad (4)$$

$$x_1 = P_-^0 y_0 + \sum_{\nu=-\infty}^{-1} P_-^0 B_-^{|\nu|} P_-^B y_{\nu} - \sum_{\nu=1}^{\infty} P_+^0 A_+^{-\nu} P_+^A y_{\nu}; \quad (5)$$

$$\forall n \geq 2: x_n = \sum_{k=1}^{n-1} A_-^{n-1-k} P_-^k y_k + \\ + \sum_{\nu=-\infty}^0 A_-^{n-1} P_-^0 B_-^{|\nu|} P_-^B y_{\nu} - \sum_{\nu=n}^{\infty} P_+^{n-1} A_+^{n-1-\nu} P_+^A y_{\nu}; \quad (6)$$

$$\forall n \leq 0: x_n = P_-^{n-1} y_{n-1} + \\ + \sum_{\nu=-\infty}^{n-2} P_-^{n-1} B_-^{|\nu|+n-1} P_-^B y_{\nu} - B_+^{-|n|-1} P_+^0 y_0 - \\ - B_+^{-|n|} P_+^{-1} y_{-1} - \dots - B_+^{-1} P_+^{-|n|} y_{-|n|} - \\ - \sum_{\nu=1}^{\infty} B_+^{n-1} P_+^A A_+^{-\nu} P_+^A y_{\nu}. \quad (7)$$

Теорема 1. Припустимо, що виконуються такі умови:

- i) $\sigma(A) \cap S = \emptyset, \sigma(B) \cap S = \emptyset$;
- ii) $X = X_-(A) \dot{+} X_+(B)$.

Тоді ряди з (5-7) абсолютно збігаються за нормою та задають відповідний до обмеженої послідовності $\{y_n, n \in \mathbb{Z}\}$ обмежений розв'язок $\{x_n, n \in \mathbb{Z}\}$ рівняння (1). Цей розв'язок єдиний у класі всіх обмежених в X послідовностей.

Доведення. Спочатку доведемо, що для визначених за допомогою (3) проекторів послідовність $\{\|P_+^n\|, n \geq 1\}$ є обмеженою.

Справді, $P_+^0 + P_-^0 = I$, причому P_-^0 проектує на $X_-(A)$, а отже, для довільного $n \geq 1$

$$P_+^n = A_-^n (I - P_-^0) A_+^{-n} P_+^A = P_+^A - A_-^n P_-^0 A_+^{-n} P_+^A,$$

звідки

$$\|P_+^n\| \leq \|P_+^A\| + \|P_-^0\| \cdot \|P_+^A\| \cdot \sup_{n \geq 1} \|A_-^n\| \cdot \sup_{n \geq 1} \|A_+^{-n}\|.$$

Тут $\sup_{n \geq 1} \|A_-^n\| < \infty, \sup_{n \geq 1} \|A_+^{-n}\| < \infty$ внаслідок збіжності рядів (2). Аналогічно доводиться, що послідовність $\{\|P_-^n\|, n \geq 1\}$ є обмеженою.

Зафіксуємо сталу L , яка обмежує послідовності $\{\|P_-^k\| \|P_-^B\|, k \in \mathbb{Z}\}$ та $\{\|P_+^k\| \|P_+^A\|, k \in \mathbb{Z}\}$, і послідовність $\{y_n, n \in \mathbb{Z}\}$. Тоді з (5-7) випливає, що

$$\|x_1\| \leq L \left(\|y_0\| + \sum_{\nu=-\infty}^{-1} \|B_-^{\nu}\| \|y_{\nu}\| + \sum_{\nu=1}^{\infty} \|A_+^{-\nu}\| \|y_{\nu}\| \right);$$

для кожного $n \geq 2$

$$\|x_n\| \leq L \left(\|y_{n-1}\| + \sum_{\nu=0}^{n-2} \|A_-^{n-1-\nu}\| \|y_{\nu}\| + \right. \\ \left. + \|A_-^{n-1}\| \sum_{\nu=-\infty}^{-1} \|B_-^{|\nu|}\| \|y_{\nu}\| + \sum_{\nu=n}^{\infty} \|A_+^{n-1-\nu}\| \|y_{\nu}\| \right);$$

для кожного $n \leq 0$

$$\|x_n\| \leq L \left(\|y_{n-1}\| + \sum_{\nu=-\infty}^{n-2} \|B_-^{|\nu|+n-1}\| \|y_{\nu}\| + \right. \\ \left. + \sum_{\nu=n}^0 \|B_+^{n-1-\nu}\| \|y_{\nu}\| + \|B_+^{n-1}\| \sum_{\nu=1}^{\infty} \|A_+^{-\nu}\| \|y_{\nu}\| \right).$$

Оскільки послідовність $\{y_n, n \in \mathbb{Z}\}$ обмежена, то $\bar{x} = \{x_n, n \in \mathbb{Z}\}$ теж обмежена, причому

$$\|\bar{x}\|_{\infty} \leq \|\bar{y}\|_{\infty} L \max\{M_1, M_2\},$$

де

$$M_1 = \sum_{k=1}^{\infty} \|A_+^{-k}\| + \sup_{p \geq 0} \left\{ \sum_{k=1}^p \|A_-^k\| + \|A_-^p\| \sum_{\nu=1}^{\infty} \|B_-^{\nu}\| \right\}, \\ M_2 = \sum_{j=0}^{\infty} \|B_-^j\| + \sup_{p \geq 1} \left\{ \sum_{k=1}^p \|B_+^{-k}\| + \|B_+^{-p}\| \sum_{\nu=1}^{\infty} \|A_+^{-\nu}\| \right\}.$$

Таким чином, ряди із (5-7) збігаються абсолютно за нормою, і послідовність $\{x_n, n \in \mathbb{Z}\}$ є обмеженою.

Безпосередньою підстановкою перевіряється, що визначена за допомогою (5-7) послідовність $\{x_n, n \in \mathbb{Z}\}$ є розв'язком рівняння (1), відповідним до обмеженої послідовності $\{y_n, n \in \mathbb{Z}\}$. Доведемо єдиність цього розв'язку у класі обмежених в X послідовностей. Внаслідок лінійності різницевого рівняння (1) досить переконатися, що однорідне різницеве рівняння

$$\begin{cases} x_{n+1} = Ax_n, n \geq 1, \\ x_{n+1} = Bx_n, n \leq 0, \end{cases} \quad (8)$$

має тільки нульовий обмежений розв'язок. Перевіримо це. Нехай $\{x_n, n \in \mathbb{Z}\}$ - обмежений розв'язок рівняння (8). Доведемо спочатку, що $x_1 = \bar{0}$. Справді, $x_{n+1} = A^n x_1 = A_-^n P_-^A x_1 + A_+^n P_+^A x_1$ для кожного $n \geq 1$, звідки $P_+^A x_1 = A_+^{-n} P_+^A x_{n+1}$ а отже з урахуванням обмеженості послідовності $\{x_n, n \in \mathbb{Z}\}$ і збіжності рядів (2)

$$\|P_+^A x_1\| \leq \|A_+^{-n}\| \|P_+^A\| \|\bar{x}\|_\infty \rightarrow 0, n \rightarrow \infty.$$

Тому $x_1 \in X_-(A)$. Аналогічно $P_-^B x_1 = B_-^n P_-^B x_{-n+1}$ для кожного $n \geq 1$, звідки

$$\|P_-^B x_1\| \leq \|B_-^n\| \|P_-^B\| \|\bar{x}\|_\infty \rightarrow 0, n \rightarrow \infty.$$

Отже, $x_1 \in X_+(B)$.

Тоді $x_{n+1} = A^n x_1 = \bar{0}$ для кожного $n \geq 1$. Також відзначимо, що як і для x_1 при фіксованому $k \leq 0$ перевіряється включення $x_k \in X_+(B)$. При цьому $\bar{0} = x_1 = Bx_0 = B^2 x_{-1} = \dots = B^{|k|+1} x_k$, звідки $x_k \in X_-(B)$. Тому $x_k \in X_-(B) \cap X_+(B)$, звідки випливає, що $x_k = \bar{0}$. Таким чином, рівняння (8) має лише нульовий обмежений розв'язок. $\square$

3 Сумовні зі степенем p розв'язки різницевого рівняння (1).

Покладемо

$$l_\infty(\mathbb{Z}, X) = \{\bar{x} = \{x_n, n \in \mathbb{Z}\} \subset X \mid$$

$$\|\bar{x}\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{Z}} \|x_n\| < \infty\},$$

$$l_p(\mathbb{Z}, X) = \{\bar{x} = \{x_n, n \in \mathbb{Z}\} \subset X \mid$$

$$\|\bar{x}\|_p = \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} \|x_n\|^p \right)^{1/p} < \infty\}, 1 \leq p < \infty.$$

Зафіксуємо $p \in [1, \infty]$ і такий набір операторів $\{T_{ij}, i \in \mathbb{Z}, j \in \mathbb{Z}\} \subset L(X)$, що оператор T , який визначається за правилом

$$T\bar{x} = \{(T\bar{x})_i = \sum_{j \in \mathbb{Z}} T_{ij} x_j, i \in \mathbb{Z}\},$$

належить до множини лінійних обмежених операторів $L(l_p(\mathbb{Z}, X))$.

Визначимо функцію $d_T : \mathbb{Z} \rightarrow [0, \infty)$ за правилом:

$$d_T(k) = \sup_{i, j \in \mathbb{Z}, i-j=k} \|T_{ij}\|, k \in \mathbb{Z}.$$

Будемо казати, що $T \in \text{End}_1(l_p(\mathbb{Z}, X))$, якщо $\sum_{k \in \mathbb{Z}} d_T(k) < \infty$ при $p \in [1, \infty)$, а також $T \in L(l_\infty(\mathbb{Z}, X)) \cap \text{End}_1(l_1(\mathbb{Z}, X))$ при $p = \infty$.

Справджується таке твердження.

Лема 1 (див. [4]). *Якщо для деякого $q \in [1, \infty]$ оператор $T \in \text{End}_1(l_q(\mathbb{Z}, X))$ - неперервно оборотний, то він є неперервно оборотним у всіх просторах $l_p(\mathbb{Z}, X)$, $1 \leq p \leq \infty$.*

Визначимо тепер оператор $J : l_\infty(\mathbb{Z}, X) \rightarrow l_\infty(\mathbb{Z}, X)$ за правилом

$$J\bar{x} = \{(Jx)_k = \begin{cases} x_{k+1} - Ax_k, k \geq 1, \\ x_{k+1} - Bx_k, k \leq 0, \end{cases} k \in \mathbb{Z}\}.$$

Неважко переконатися, що $J \in \text{End}_1(l_\infty(\mathbb{Z}, X))$. Тому з теореми 1, леми 1 і теореми Банаха про обернений оператор випливає, що виконується така теорема.

Теорема 2. *Якщо виконуються умови теореми 1, то для довільного фіксованого $p \in [1, \infty]$ рівняння (1) має єдиний розв'язок $\bar{x} = \{x_n, n \in \mathbb{Z}\}$ у просторі $l_p(\mathbb{Z}, X)$ для довільної послідовності $\bar{y} = \{y_n, n \in \mathbb{Z}\} \in l_p(\mathbb{Z}, X)$.*

4 Обмежені розв'язки слабо нелінійного різницевого рівняння.

Розглянемо нелінійне різницеве рівняння

$$\begin{cases} x_{n+1} = Ax_n + g(x_n) + y_n, n \geq 1, \\ x_{n+1} = Bx_n + g(x_n) + y_n, n \leq 0, \end{cases} \quad (9)$$

де $g : X \rightarrow X$ і задовольняє умову Ліпшиця зі сталою K , тобто

$$\exists K > 0 \forall x, z \in X : \|g(x) - g(z)\| \leq K \|x - z\|.$$

Теорема 3. *Нехай $\sigma(A) \cap S = \emptyset, \sigma(B) \cap S = \emptyset$ і $KL \max\{M_1, M_2\} < 1$. Тоді для довільної обмеженої послідовності $\{y_n, n \in \mathbb{Z}\}$ нелінійне різницеве рівняння (9) має єдиний обмежений розв'язок.*

Доведення. У просторі $l_\infty(\mathbb{Z}, X)$ рівняння (9) записується у такому еквівалентному вигляді:

$$J\bar{x} = G(\bar{x}) + \bar{y}, \quad (10)$$

де $G(\bar{x}) = \{(Gx)_k = g(x_k), k \in \mathbb{Z}\}$. Доведемо, що $G(\bar{x}) : l_\infty(\mathbb{Z}, X) \rightarrow l_\infty(\mathbb{Z}, X)$. Дійсно, оскільки $G(\bar{x}) = (G(\bar{x}) - G(\bar{0})) + G(\bar{0})$ і $G(\bar{0}) = (\dots, g(0), g(0), g(0), \dots) \in l_\infty(\mathbb{Z}, X)$, то

$$\begin{aligned} \|G(\bar{x})\|_\infty &= \|G(\bar{x}) - G(\bar{0}) + G(\bar{0})\|_\infty \leq \\ &\leq \sup_{n \in \mathbb{Z}} \|g(\bar{x}) - g(\bar{0})\| + \|G(\bar{0})\|_\infty \leq K\|\bar{x}\|_\infty + \|g(0)\|. \end{aligned}$$

Також $G(\bar{x})$ задовольняє умову Ліпшиця зі сталою K , оскільки

$$\begin{aligned} \forall \bar{x}, \bar{y} \in l_\infty(\mathbb{Z}, X) : \|G(\bar{x}) - G(\bar{y})\|_\infty &= \\ = \sup_{n \in \mathbb{Z}} \|g(x_n) - g(y_n)\| &\leq K\|x_n - y_n\|_\infty. \end{aligned}$$

Список використаних джерел

1. Ким В. С. Об условиях существования ограниченных решений разностного уравнения в банаховом пространстве. / В. С. Ким // Диффер. уравнения. – 1967. – **3**, №12. – С. 2151 – 2160.
2. Дороговцев А. Я. Периодические и стационарные режимы бесконечномерных детерминированных и стохастических динамических систем. / А. Я. Дороговцев // К.: Вища шк. – 1992. – 319 с.
3. Городний М. Ф. Ограниченные и периодические решения одного разностного уравнения и его стохастического аналога в банаховом пространстве. / М. Ф. Городний // Укр. матем. журн. – 1991. – **43**, №1. – С. 42 – 46.
4. Баскаков А. Г. Асимптотические оценки элементов матриц обратных операторов и гармонический анализ. / А. Г. Баскаков // Сиб. мат. журнал. – 1997. – **38**, №1. – С. 14 – 28.
5. Слюсарчук В. Е. Обратимость линейных неавтономных разностных операторов в пространстве ограниченных на $\mathbb{Z}$ функций. / В. Е. Слюсарчук // Мат. заметки. – 1985. – **37**, вып. 5. – С. 662 – 666.
6. Хенри Д. Геометрическая теория полунелинейных параболических уравнений. / Д. Хенри // М.: Мир, – 1985. – 376 с.

З теореми 1, теореми Банаха про обернений оператор та умов теореми 3 випливає, що оператор J неперервно оборотний, причому $\|J^{-1}\| \leq L \max\{M_1, M_2\}$. Тому рівняння (10) записується, у вигляді $\bar{x} = J^{-1}G(\bar{x}) + J^{-1}\bar{y}$. Зафіксуємо $\bar{y} \in l_\infty(\mathbb{Z}, X)$. Останнє рівняння можна подати у вигляді $\bar{x} = H(\bar{x})$, де оператор $H : l_\infty(\mathbb{Z}, X) \rightarrow l_\infty(\mathbb{Z}, X)$ діє за правилом $H(\bar{x}) = J^{-1}G(\bar{x}) + J^{-1}\bar{y}$, причому

$$\begin{aligned} \forall \bar{z}, \bar{t} \in l_\infty(\mathbb{Z}, X) : \|H(\bar{z}) - H(\bar{t})\|_\infty &= \\ = \|J^{-1}G(\bar{z}) - J^{-1}G(\bar{t})\|_\infty &\leq \|J^{-1}\| \|G(\bar{z}) - G(\bar{t})\|_\infty \leq \\ &\leq KL \max\{M_1, M_2\} \|\bar{z} - \bar{t}\|_\infty. \end{aligned}$$

Таким чином, виконуються умови теореми Банаха про стискуjące відображення. Звідси випливає, що нелінійне різницеве рівняння (9) має єдиний обмежений розв'язок. $\square$

References

1. KIM, V. S. (1967) "On existence conditions of bounded solutions of a difference equation in Banach space", Differ. Uravn., Vol. 3, №12, pp. 2151-2160.
2. DOROGOVTSSEV, A. Ya. (1992) "Periodic and stationary regimes of infinite dimensional deterministic and stochastic dynamical systems", Vyshcha Shkola, Kiev, 319 p.
3. GORODNII, M. F. (1991) "Bounded and periodic solutions of a difference equation and its stochastic analogue in Banach space", Ukrainian Mathematical Journal, Vol. 43, No. 1, pp. 42-46.
4. BASKAKOV, A. G. (1997) "Asymptotic estimates for elements of matrices of inverse operators, and harmonic analysis", Sib. Mat. Zh., Vol. 38, №1, pp. 14-28.
5. SLYUSARCHUK, V. E. (1985) "Invertibility of nonautonomous difference operators in the space of bounded functions on $\mathbb{Z}$ ", Mat. Zametki, Vol. 37, №5, pp. 662-666.
6. HENRY, D. (1985) "Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations", Mir, Moscow, 376 p.

Надійшла до редколегії 24.06.2016

УДК 539.3

Григоренко¹ О. Я., д.ф.-м.н., проф.,
Панкрат'єв¹ С. А., аспірант,
Яремченко¹ С. М., к.ф.-м.н., с.н.с.

Grigorenko¹ A. Ya., D.Sc., prof.,
Pankratiev¹ S. A., graduate student,
Yaremchenko¹ S. N., PhD.

**Розрахунок напружено-деформованого
стану прямокутної пластини із
застосуванням сплайнів на нерівномірних
сітках**

**Numerical calculation of stress-strain state of
rectangular plate using splines
with irregular grids**

¹ Інститут механіки ім. С. П. Тимошенка НАН
України,
вул. Нестерова, 3, м. Київ, 03057,
e-mail: sp4soft@gmail.com

¹ S. P. Timoshenko Institute of Mechanics of the
National Academy of Sciences of Ukraine,
Nesterov str. 3, Kyiv, 03057,
e-mail: sp4soft@gmail.com

Розглянуто можливість застосування нерівно-мірних сіток для сплайнів з метою підвищення точності чисельного розв'язку крайових задач про напружено-деформований стан прямокутних пластин. Наведено результати розрахунків на основі класичної та уточненої теорії для різних видів навантаження.

Ключові слова: напружено-деформований стан, прямокутна пластина, метод сплайн колокації, метод дискретної ортогоналізації

The paper presents an attempt to enhance the accuracy of spline collocation/discrete orthogonalization methods used for stress-strain state analysis of rectangular isotropic plates. Numerical solutions using regular and irregular spline grid for two different load distribution options in accordance with classic and refined plate theory were compared with known analytical one for simply supported boundary conditions. The solution of the problem obtained by the expansion of the deflection function in a Fourier series meant as an accurate.

The calculation results show significant dependence of the accuracy on load distribution over the surface in case of irregular spline grid. In general, the knots placement optimization allows achieving considerable decrease in relative error of the numerical solution without requiring thickening splines mesh.

Additionally comments on the restrictions due to the presence of the boundary conditions for splines are given. This narrows the applicability of the proposed approach for very small grids.

Key Words: stress-strain state, rectangular plate, spline collocation method, discrete orthogonalization method

Статтю представив д.ф.-м.н. проф. Жук Я.О.

Вступ

Пластини використовуються і вивчаються як одні з базових елементів конструкцій вже не одне десятиліття. Складність і різноманіття можливих варіантів геометричних і фізичних параметрів матеріалів, розподілу навантаження залишають задачу про розрахунок напружено-деформованого стану пластин актуальною і в даний час.

Найпростіші варіанти даного класу задач детально розглянуто в науковій літературі, а для варіанта шарнірного закріплення країв прямокутної пластини наведено аналітичні розв'язки. Для складніших випадків є безліч чисельних

підходів, у тому числі заснованих на сплайн-апроксимації в одному з координатних напрямків [1, 2] або у двох [3]. В останніх, проте, для побудови сплайнів передбачається використання рівномірних сіток вузлів, що з одного боку дещо спрощує розрахунки, а з іншого — дає можливість збільшення точності чисельного розв'язку за рахунок оптимізації розміщення вузлів сітки. Оскільки, на відміну від збільшення числа точок колокації, зміна сітки вузлів не призводить до збільшення розмірності розв'язуваної системи диференціальних рівнянь, обчислювальна складність задачі в цілому залишиться на тому ж рівні, що і для випадку рівномірної сітки.

У даній роботі розглядається можливість підвищення точності чисельного розв'язку задач про напружено-деформований стан прямокутних у плані ізотропних пластин за рахунок застосування нерівномірних сіток вузлів в методі сплайн-колокації. Оцінюється ефективність підходу для різних варіантів розподілу навантаження у випадку шарнірного закріплення країв в рамках класичної і уточненої теорії. Аналіз точності результатів, отриманих на різних сітках, проводиться у порівнянні з відповідними аналітичними розв'язками.

Постановка задачі

Розглянемо задачу про напружено-деформований стан ізотропної прямокутної пластини ($0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b$) товщиною h . В рамках класичної теорії задача про згин такої пластини описується рівнянням [1]

$$\Delta \Delta w = q/D_m \quad (1)$$

де $w = w(x, y)$ — прогин, $q = q(x, y)$ — навантаження, D_m — жорсткість пластини.

Граничні умови для шарнірного закріплення всіх сторін пластини запишемо у вигляді

$$w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \text{ при } x = 0, x = a,$$

$$w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \text{ при } y = 0, y = b,$$

Рівняння (1) в поєднанні з обраними граничними умовами утворює двовимірну крайову задачу в рамках класичної теорії.

Для уточненої теорії, що спирається на гіпотезу прямої лінії, рівняння рівноваги мають вигляд [2]:

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + q = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} - Q_x = 0,$$

$$\frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - Q_y = 0,$$

де Q_x, Q_y — зусилля зрізу, M_x, M_y, M_{yx}, M_{xy} — моменти вигину та скручування; співвідношення пружності:

$$M_x = D_{11}\kappa_x + D_{12}\kappa_y, M_y = D_{12}\kappa_x + D_{22}\kappa_y, \quad (3)$$

$$M_{xy} = M_{yx} = 2D_{66}\kappa_{xy}, Q_x = K_1\gamma_x, Q_y = K_2\gamma_y,$$

де

$$D_{11} = \frac{E_x h^3}{12(1 - \nu_x \nu_y)}, D_{12} = \nu_y D_{11},$$

$$D_{22} = \frac{E_y h^3}{12(1 - \nu_x \nu_y)},$$

$$D_{66} = \frac{G_{xy} h^3}{12}, K_1 = \frac{5}{6} h G_{xz}, K_2 = \frac{5}{6} h G_{yz}.$$

Під $\kappa_x, \kappa_{xy}, \kappa_{yx}$ розуміємо деформації вигину, E_x, E_y, ν_x, ν_y — модулі пружності і коефіцієнти Пуассона в напрямках x і y , G_{xy}, G_{xz}, G_{yz} — модулі зсуву.

Вирази для деформацій через повні кути повороту прямолінійного елемента ψ_x, ψ_y :

$$\kappa_x = \frac{\partial \psi_x}{\partial x}, \kappa_y = \frac{\partial \psi_y}{\partial y}, 2\kappa_{xy} = \frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x}, \quad (4)$$

$$\gamma_x = \psi_x + \frac{\partial w}{\partial x}, \gamma_y = \psi_y + \frac{\partial w}{\partial y}.$$

Граничні умови для шарнірного закріплення на сторонах $x = \text{const}$ мають вигляд

$$w = 0, \quad \frac{\partial \psi_x}{\partial x} = 0, \psi_y = 0$$

і на сторонах $y = \text{const}$ задаються аналогічно.

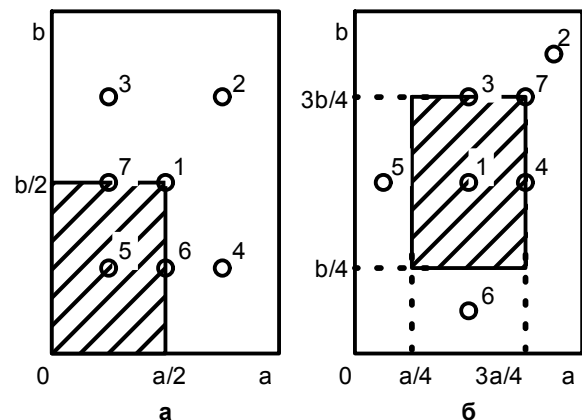


Рис. 1 Варіанти розподілу навантаження (за-штрихована частина) по поверхні пластини та розташування контрольних точок

Об'єднуючи вирази для деформацій (4), співвідношення пружності (3) і рівняння рівноваги (2), отримаємо розв'язувальну систему рівнянь щодо прогину w і кутів ψ_x, ψ_y , яка в поєднанні з тими чи іншими граничними умовами утворює двовимірну крайову задачу в уточненій постановці.

Для навантаження розглянемо два варіанти його розподілу по поверхні пластини (рис. 1):

1) $q = q_0$, при $x < a/2, y < b/2$, (рис. 1а);

2) $q = q_0$ при $a/4 \leq x < 3a/4, b/4 \leq y < 3b/4$ (рис. 1б).

Для значень координат x, y поза вказаними межами вважаємо $q = 0$.

Таким чином, у роботі розглядається шарнірне закріплення сторін пластини на основі класичної та уточненої теорій із застосуванням рівномірної та нерівномірної сітки для сплайнів, що загалом складає чотири двовимірних крайових задач. Для отримання можливості порівняння результатів проведено розрахунок відповідного до застосованої теорії пластин аналітичного розв'язку, який для випадку шарнірного закріплення сторін можна отримати за допомогою розкладу шуканої функції $w(x, y)$ у подвійний ряд Фур'є.

Сплайн-апроксимація

Метод сплайн-колокації добре зарекомендував себе як засіб переходу від двовимірної крайової задачі до одновимірної через апроксимацію шуканих функцій В-сплайнами третього або п'ятого степеня в напрямку однієї з координатних вісей [1, 2]. Використання сплайнів дозволяє отримати достатньо точний розв'язок задачі для різних складних варіантів граничних умов і навантажень.

Звичайно для завдання граничних умов і розрахунків значень сплайнів степеня n проводиться побудова розширеної рівномірної сітки вузлів

$$\Delta = y_{-n} < \dots < y_0 < y_1 < \dots < y_N < \dots < y_{N+n}.$$

Значення самих сплайнів зручно розрахувати через рекурентне співвідношення [1]

$$B_n^i(y) = \frac{y - y_i}{y_{i+n} - y_i} B_{n-1}^i(y) + \frac{y_{i+n+1} - y}{y_{i+n+1} - y_{i+1}} B_{n-1}^{i+1}(y),$$

$$B_0^i = \begin{cases} 1, & y_i \leq y < y_{i+1}; \\ 0, & \text{в іншому випадку} \end{cases} \quad (i = \overline{0, N-1}),$$

а їх похідні порядку m через інше рекурентне співвідношення [4]

$$(N_i^n)^m = \frac{m(N_i^{n-1})^{m-1} + (y - y_i)(N_i^{n-1})^m}{y_{i+n} - y_i} +$$

$$+ \frac{-m(N_{i+1}^{n-1})^{m-1} + (y_{i+n+1} - y)(N_{i+1}^{n-1})^m}{y_{i+n+1} - y_{i+1}}.$$

Розв'язок крайової задачі шукаємо у вигляді

$$S(y) = \sum_{i=0}^N b_i \varphi_i(y),$$

де $\varphi_i(y)$ — лінійні комбінації В-сплайнів обраного степеня, що задовольняють заданим граничним умовам.

У загальному випадку завдання граничних умов можна реалізувати поєднанням набору коефіцієнтів α_{ij}, β_{ij} і співвідношень

Таблиця 1

Координати контрольних точок, рис. 1а

№	x/a	y/b	x^1	y^1
1	1/2	1/2	1,00	1,50
2	3/4	3/4	1,50	2,25
3	1/4	3/4	0,50	2,25
4	3/4	1/4	1,50	0,75
5	1/4	1/4	0,50	0,75
6	1/2	1/4	1,00	0,75
7	1/4	1/2	0,50	1,50

$$^1 a = 2,0; b = 3,0$$

Таблиця 2

Координати контрольних точок, рис. 1б

№	x/a	y/b	x	y
1	1/2	1/2	1,00	1,500
2	7/8	7/8	1,75	2,625
3	1/2	3/4	1,00	2,250
4	3/4	1/2	1,50	1,500
5	1/8	1/2	0,25	1,500
6	1/2	1/8	1,00	0,375
7	3/4	3/4	1,50	2,250

$$\begin{aligned} \varphi_0 &= \alpha_{11} B_5^{-2} + \alpha_{12} B_5^{-1} + B_5^0, \\ \varphi_1 &= \alpha_{21} B_5^{-1} + \alpha_{22} B_5^0 + B_5^1, \\ \varphi_2 &= \alpha_{31} B_5^{-2} + \alpha_{32} B_5^0 + B_5^2, \\ \varphi_i &= B_5^i, \quad (i = \overline{3, N-3}), \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \varphi_{N-2} &= \beta_{31} B_5^{N+2} + \beta_{32} B_5^N + B_5^{N-2}, \\ \varphi_{N-1} &= \beta_{21} B_5^{N+1} + \beta_{22} B_5^N + B_5^{N-1}, \\ \varphi_N &= \beta_{11} B_5^{N+2} + \beta_{12} B_5^{N+1} + B_5^N, \end{aligned}$$

або

$$\begin{aligned} \varphi_0 &= \alpha_{11} B_3^{-1} + \alpha_{12} B_3^0, \\ \varphi_1 &= B_3^{-1} + \alpha_{21} B_3^0 + \alpha_{22} B_3^1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi_i &= B_3^i, (i = \overline{2, N-2}), \\ \varphi_{N-1} &= B_3^{N+1} + \beta_{21} B_3^N + \beta_{22} B_3^{N-1}, \\ \varphi_N &= \beta_{11} B_3^{N+1} + \beta_{12} B_3^N,\end{aligned}\quad (6)$$

для сплайнів п'ятого та третього степеня відповідно [1]. Вибір того чи іншого степеня сплайнів проводиться в залежності від порядку рівнянь, що вирішуються. Для зручності запису тут сплайни нумеруються по центральному вузлу, а сітка, на якій вони будуються, передбачається рівномірною, з постійним кроком $y_{i+1} - y_i$.

Остання обставина особливо важлива при переході до нерівномірних сіток: необхідність дотримання граничних умов не дозволяє змінювати положення вузлів, на яких будуються сплайни $B_5^{-2}, \dots, B_5^2$ та $B_5^{N-2}, \dots, B_5^{N+2}$, B_3^{-1}, B_3^0, B_3^1 та $B_3^{N-1}, B_3^N, B_3^{N+1}$. Це дещо обмежує можливості оптимізації, особливо у випадку малої кількості точок колокації і, відповідно, вузлів сітки.

Методи розв'язання

Для дослідження впливу нерівномірних сіток на точність чисельного рішення задачі, проведено розрахунок прогину прямокутної пластини зі сторонами a та b товщиною $h = a/40$. Значення цих параметрів є однаковим для усіх розглянутих задач.

Для спрощення кількісного аналізу розрахунків отримане значення прогину порівнюється з відповідним аналітичним розв'язком в кожній з семи контрольних точок (табл. 1, 2). За порівняльні взяті значення прогину з наближеного розв'язку крайової задачі на основі розкладання шуканої функції $w(x, y)$ в подвійний ряд Фур'є, які приймаємо за точні. В рамках класичної теорії при шарнірному закріпленні країв пластини вирази для розрахунку такого розв'язку наведено в [1].

Розглянуті в даній роботі випадки навантаження відрізняються іншим видом функції розподілу навантаження $q(x, y)$, що призводять лише до зміни виразу для коефіцієнтів розкладу q_{mn} :

$$\begin{aligned}w(x, y) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}, \\ a_{mn} &= \frac{q_{mn}}{\pi^4 D_m \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}q_{mn} &= \frac{4q_0}{mn\pi^2} \left(1 - \cos \frac{m\pi}{2} \right) \left(1 - \cos \frac{n\pi}{2} \right), \\ q_{mn} &= \frac{4q_0}{mn\pi^2} \left(\cos \frac{3m\pi}{4} - \cos \frac{m\pi}{4} \right) \left(\cos \frac{3n\pi}{4} - \cos \frac{n\pi}{4} \right),\end{aligned}$$

для варіантів навантаження а і б (рис. 1) відповідно, $m, n = 1, 2, 3 \dots$. Результати розрахунку представлені у вигляді поверхонь $\hat{w}(x, y) = wE/q_0$ на рис. 2. Числові значення у контрольних точках наведені у табл. 3.

У випадку розгляду задачі відповідно до уточненої теорії кінцеві вирази для розрахунку прогину отримуються з розв'язувальної системи рівнянь аналогічно. Розраховані значення прогину у семи контрольних точках використано для порівняння з результатами чисельних розв'язків відповідних задач (табл. 3).

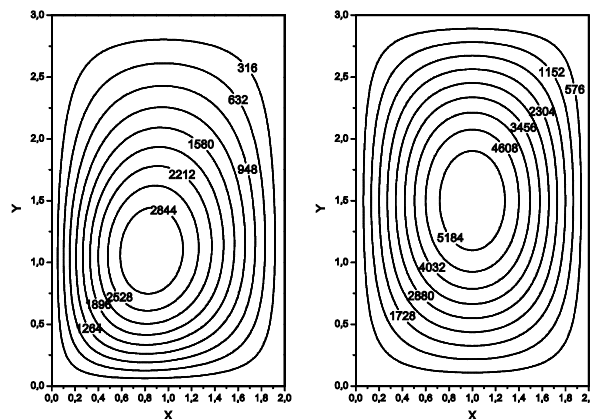


Рис. 2 – Вигляд поверхні прогину $\hat{w}(x, y)$, отриманої на основі аналітичного розв'язку, для обох варіантів навантаження рис. 1

Чисельне розв'язання сформульованих чотирьох задач здійснюється з використанням методу сплайн-колокації в поєднанні з методом дискретної ортогоналізації [1, 2]. Прогин w задаємо у вигляді

$$w(x, y) = \sum_{i=0}^N w_i(x) \varphi_i(y),$$

де $w_i(x)$ — шукані функції змінної x , $\varphi_i(y)$ — лінійні комбінації В-сплайнів на сітці Δ , що враховують граничні умови на сторонах $y = \text{const}$. Вимагаючи задоволення граничних умов в усіх точках колокації вздовж вісі y , отримаємо одновимірні крайові задачі. Їх розв'язання чисельним методом дискретної ортогоналізації в усіх випадках здійснювалося при 1500 точках

Таблиця 3

Результати розрахунків значень прогину $\hat{w}$ для різних видів навантаження

точка рис.1	класична теорія			уточнена теорія		
	рівном. сітка	аналіт.	нерівном. сітка	рівном. сітка	аналіт.	нерівном. сітка
«а», т. 1	2700,052981	2699,082116	2700,039399	2702,157197	2705,370251	2700,120745
«а», т. 2	845,204368	844,805642	845,111931	847,756493	845,926039	848,343840
«а», т. 3	956,605363	956,139742	956,443932	959,923614	957,631312	960,580971
«а», т. 4	1585,095528	1584,525492	1585,177505	1581,066641	1587,774928	1578,887871
«а», т. 5	2371,131859	2370,630120	2371,266095	2373,222372	2380,538864	2371,307346
«а», т. 6	2737,157556	2736,314801	2737,307372	2734,877648	2744,723856	2731,953690
«а», т. 7	2200,692766	2200,037969	2200,679580	2204,520493	2206,732048	2202,967541
«б», т. 1	5829,082386	5756,100996	5756,135838	5831,96422	5771,871143	5747,548007
«б», т. 2	761,255295	748,776703	748,727035	761,937819	750,208969	749,576877
«б», т. 3	3927,172248	3865,746761	3865,771749	3930,314609	3875,307227	3865,881229
«б», т. 4	4057,718700	4006,789622	4006,492681	4058,832280	4017,028618	3999,482594
«б», т. 5	2165,022735	2137,210269	2137,440500	2164,995258	2142,122888	2133,009868
«б», т. 6	2018,234305	1984,472067	1984,482696	2020,345147	1988,459096	1985,316901
«б», т. 7	2741,323200	2699,082116	2698,910271	2743,046181	2705,370251	2698,460234

інтегрування.

При розв'язанні задач вихідні рівномірні сітки вузлів Δ для сплайнів будувалися з розрахунку на 30 пар точок колокації. Це залишає достатню кількість «вільних» вузлів в центральній частині сітки для їх подальшого перерозподілу в нерівномірних сітках Δ' : для сплайнів B_5 — 48, для B_3 — 52 вузла.

Залежно від функції поверхневого навантаження $q(x, y)$, розглянуті варіанти якої наведені на рис. 1, в нерівномірних сітках Δ' зміщення

вузлів здійснювалося таким чином, щоб згущення припадало на інтервали, де навантаження змінюється стрибкоподібно. Для варіанту «а» (рис. 1) це околиці точки $y = 1,50$; для варіанту «б» — точок $y = 0,75$ і $y = 2,25$.

З метою підвищення точності чисельного розв'язку точки колокації $\varepsilon_{2i}, \varepsilon_{2i+1}$ розміщуються всередині інтервалів між вузлами сітки (рівномірної або нерівномірної) y_{2i}, y_{2i+1} за схемою: $\varepsilon_{2i} = y_{2i} + t_1(y_{2i+1} - y_{2i})$, $\varepsilon_{2i+1} = y_{2i} + t_2(y_{2i+1} - y_{2i})$, де t_1, t_2 — корені

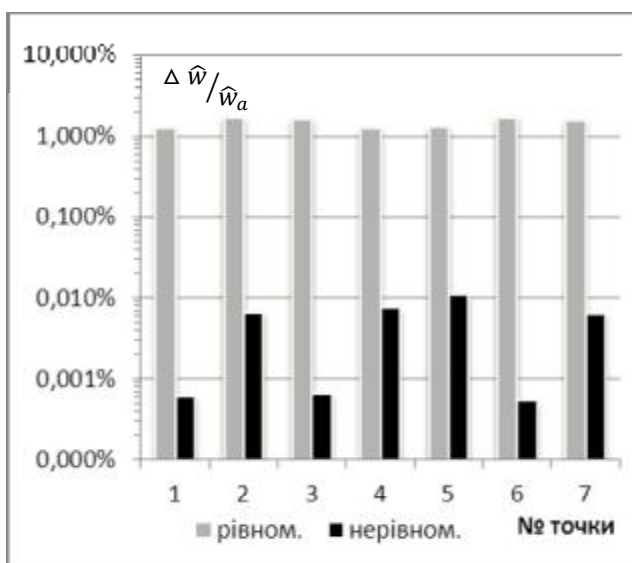


Рис. 3 Порівняння відносної різниці у значеннях прогину для розв'язків задач з використанням різних сіток, варіант навантаження рис. 1б, класична теорія

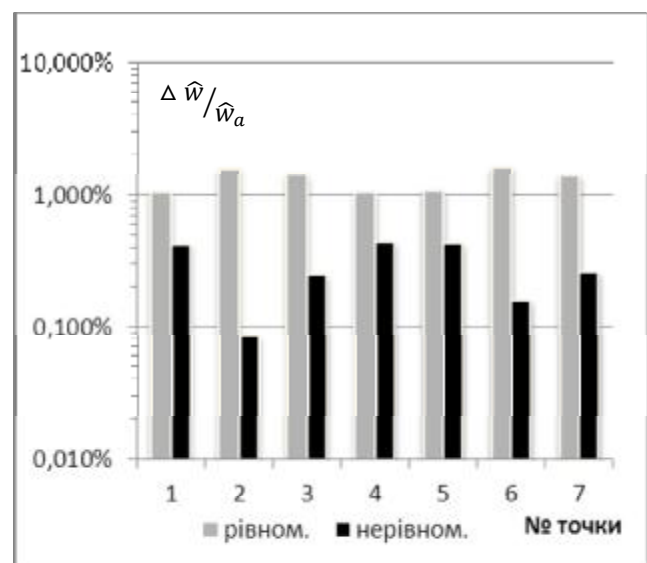


Рис. 4 Порівняння відносної різниці у значеннях прогину для розв'язків задач з використанням різних сіток, варіант навантаження рис. 1б, уточнена теорія

полінома Лежандра другого порядку на відріжку $[0; 1]$, $i = 0, 1, \dots, n$.

Результати розрахунків

Розрахунки проводилися для прямокутної пластини з параметрами $a = 2,0$; $b = 3,0$; $h = a/40 = 0,05$; $\nu = 0,3$. Значення прогину у таблицях наведено у вигляді безрозмірної величини $\hat{w} = wE/q_0$.

Чисельні розв'язки задач з шарнірними граничними умовами наведено в табл. 3 та на рис. 3, 4 поряд з відповідними аналітичними розв'язками, що дає змогу порівняти результати розрахунків для рівномірних та нерівномірних сіток і оцінити доцільність використання останніх з метою підвищення точності. Наближені аналітичні значення прогину на основі розкладання шуканої функції в подвійний ряд Фур'є, які для порівняння прийнято за точні, обчислено з урахуванням перших 600 членів ряду в кожній із подвійних сум. Це дає близько 10 достовірних значущих цифр при використанні змінних дійсного типу з подвійною точністю.

Аналізуючи отримані дані (табл. 3), можна зазначити, що для варіанту навантаження рис. 1а використання нерівномірної сітки для сплайн-апроксимації не дало відчутного ефекту незалежно від застосованої моделі. Проте для

варіанту навантаження рис. 1б відносну розбіжність чисельного розв'язку з аналітичним вдалося зменшити в середньому з 1 % до майже 0,1 % для уточненої теорії або навіть до 0,01 % для випадку класичної теорії. Це легко бачити порівнюючи відносні різниці у значеннях прогину між чисельним та аналітичним розв'язком (рис. 3, 4) $\Delta \hat{w}/\hat{w}_a = (\hat{w} - \hat{w}_a)/\hat{w}_a$, де $\hat{w}$ — чисельний, а $\hat{w}_a$ — відповідний наближений аналітичний розв'язок задачі, який прийнято за точний.

Висновки

В роботі представлено результати чисельного розв'язання крайових задач для прямокутних пластин з двома варіантами нерівномірного навантаження на основі класичної та уточненої теорії.

При порівнянні значень чисельних розв'язків з відповідними аналітичними виявлено залежність точності розрахунку від характеру розподілу навантаження. Встановлено, що лише за рахунок оптимізації розташування вузлів сітки для сплайнів, є можливим значне зменшення відносної похибки чисельного розв'язку задач без збільшення кількості вузлів сітки або точок інтегрування.

Список використаних джерел

1. Григоренко Я.М. Основи теорії пластин та оболонок: Навч. посібник / Григоренко Я.М., Мольченко Л.В. — К.: Либідь, 1993. — 232 с.
2. Григоренко Я.М. Розв'язання задач теорії оболонок на основі дискретно-континуальних методів / Я.М. Григоренко, В.Д. Будак, О.Я. Григоренко: навчальний посібник. — Миколаїв: Іліон, 2010. — 294 с.
3. Wu L.-Y. Shear Buckling of Thin Plates Using the Spline Collocation Method / L.-Y. Wu, C.-H. Wu and H.-H. Huang // Int. J. Str. Stab. Dyn. — 2008. — No. 08 — pp. 645–664.
4. Роджерс Д. Математические основы машинной графики: Пер. с англ. / Роджерс Д., Адамс Дж. — М.: Мир, 2001. — 604 с., ил.

References

1. GRIGORENKO, Ya., MOLCHENKO, L. (1993), *Osnovi teoriiy plastin ta obolonok: Navch. Posibnik.*, K.: Libid.
2. BUDAK, V., GRIGORENKO, A., GRIGORENKO, Ya. (2010), *Rozvyazannya zadach teoriiy obolonok na osnovi diskretno-kontinualnih metodiv.*, Mikolayiv: Ilion.
3. WU L.-Y., WU C.-H. and HUANG H.-H. (2008), "Shear Buckling of Thin Plates Using the Spline Collocation Method", *Int. J. Str. Stab. Dyn.*, No. 08, pp. 645–664.
4. RORZHERS D., ADAMS D. (2001), *Matematicheskie osnovy mashinnoy grafiki: Per. s angl.*, M.: Mir.

Надійшла до редколегії 19.05.2016

УДК 519.9

Івашкевич А. О.¹, аспірант.

Достатні умови існування оптимального керування для деяких класів систем диференціальних рівнянь з імпульсною дією у нефіксовані моменти часу

¹ Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 83000, м. Київ, пр-т. Глушкова, 4д,
e-mail: annatyarenko@bigmir.net

A. O. Ivashkevich¹, graduate student.

Sufficient conditions for the existence of optimal control for some classes of differential equations with pulses at non-fixed times

¹ Taras Shevchenko National University of Kyiv, 83000, Kyiv, Glushkova st., 4d,
e-mail: annatyarenko@bigmir.net

В роботі розглянуто задачу оптимального керування для системи диференціальних рівнянь з імпульсною дією у нефіксовані моменти часу. Отримано достатні умови існування оптимального керування в термінах правих частин системи та критерію якості.

Ключові слова: оптимальне керування, імпульсна дія, стрибок.

This paper is devoted to research the problems of optimal control for systems of differential equations with pulses at non-fixed times. To solve such problems we must be sure that optimal control exists.

Due to the complexity of the differential equation with impulse action in the non-fixed time points, a decision is considered at each interval until the exit solutions to the hypersurface and due to the specificity of the hypersurface we estimated distances between the moments of pulse action.

The existence of optimal control is proved without using the maximum principle, which made it possible to obtain sufficient conditions of existence. These conditions are presented in terms of right sides of the system and function which are included in the quality criterion.

This research lays the foundation for further research into the existence of optimal control for systems of differential equations with pulses at non-fixed times.

Key Words: optimal control, pulse action, jump.

Статтю представив академік НАН України, д. ф. – н., проф. Перестюк М. О.

Вступ

В даній роботі розглядається задача оптимального керування системою диференціальних рівнянь з імпульсною дією

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A(t, x) + B(t, x)u, \quad x \notin S \\ \Delta x|_{x \in S} &= g(x) \\ x(0) &= x_0 \end{aligned} \quad (1)$$

з критерієм якості

$$J(u) = \int_0^\theta L(t, x(t), u(t))dt \rightarrow \inf, \quad (2)$$

де S – гіперповерхня в R^d , D – деяка область в R^d , ∂D – її межа, $\bar{D} = D \cup \partial D$, $D \cap S$ – непорожній, $x_0 \in D$ – фіксований вектор, $t \in [0, T]$, θ – момент покидання розв'язком $x(t)$ області D ,

$u \in U \subset R^m$, U – замкнена, опукла множина в R^m , $0 \in U$. $A(t, x)$ – d -мірна вектор-функція, $B(t, x)$ – $d \times m$ -мірна матриця, g – d -мірна вектор-функція.

Подібні задачі розглядалися раніше в багатьох роботах. Наприклад, в роботі [1] розглянута задача оптимального керування при нелокальних крайових умовах. За допомогою варіації керування тут отримані різні необхідні умови оптимальності другого порядку.

В роботі [2] розглядається задача оптимального керування імпульсними системами, де в ролі керування виступають скінченні міри і задача зводиться до задачі оптимального керування для рівнянь з мірами в деякому банаховому просторі.

Варіаційні підходи в комбінації з принципом максимуму для імпульсних систем розглянуті в монографії [3]. В роботах [4], [5], [6] отримано

принцип максимуму для систем з нефіксованими моментами імпульсів.

Отримані в перерахованих вище роботах результати носять характер необхідних умов існування оптимального керування. Виключенням є лінійний випадок, для якого з принципу максимуму можна отримати достатні умови оптимальності. Тому задача отримання достатніх умов оптимальності для нелінійних імпульсних систем в термінах їх правих частин та критерію якості, без застосування принципу максимуму, є актуальною.

Дана робота складається зі вступу, постановки задачі та основного результату.

Постановка задачі та допоміжна лема

Нехай функції $A(t, x)$, $B(t, x)$ – неперервні за сукупністю змінних $t \in [0, T]$, $x \in D$, $g(x)$ – неперервна за $x \in D$. Будемо вважати, що для них виконана умова лінійного по x росту, тобто існує стала $K > 0$ така, що для $t \in [0, T]$ і $x \in D$:

$$\begin{aligned} |A(t, x)| &\leq K(1 + |x|), \\ \|B(t, x)\| &\leq K(1 + |x|), \quad |g| \leq K(1 + |x|), \end{aligned} \quad (3)$$

тут $|\cdot|$ – евклідова норма вектора, $\|\cdot\|$ – норма матриці, узгоджена з нормою вектора.

Функції $L(t, x, u)$, $L_x(t, x, u)$ та $L_u(t, x, u)$ є неперервними за сукупністю змінних для будь-яких $t \in [0, T]$, $x \in D$ та $u \in U$ і задовольняють наступні умови:

1) існують такі сталі $k > 0$ та $p > 1$, що виконується нерівність

$$L(t, x, u) \geq k|u|^p \quad (4)$$

для $t \in [0, T]$, $x \in D$, $u \in U$.

2) існує $H > 0$ та $\alpha > 0$, що

$$|L_x(t, x, u)| + |L_u(t, x, u)| \leq H(1 + |u|^{p-1} + |x|^\alpha) \quad (5)$$

для $t \in [0, T]$, $x \in D$, $u \in U$.

3) $L(t, x, u)$ опукла по u для будь-яких фіксованих $t \in [0, T]$, $x \in D$.

Допустимими для задачі (1), (2) вважаються керування $u = u(t)$ такі, що $u(t) \in L_p([0, T])$, $u(t) \in U$, $t \in [0, T]$.

Будемо вважати, що гіперповерхня S є компактом і задається рівнянням $s(x) = 0$, де s – неперервна функція.

Через τ_u^k позначимо моменти попадання розв'язку $x(t, u)$ на гіперповерхню S .

Для отримання основного результату нам знадобиться наступна лема.

Лема[7]. Якщо S – компакт, виконані умови (3) і

$$\rho(x + g(x), S) > 0 \quad \forall x \in S, \quad (6)$$

а послідовність допустимих керувань $\{u_n(t)\}$ задовольняє умову: $\int_0^T |u_n(t)|^p dt \leq D$, для деякої сталої D , незалежної від $\{u_n(t)\}$, то існує таке $\gamma > 0$, що для довільного $u_n(t)$ із даної послідовності: $\tau_{u_n}^k - \tau_{u_n}^{k-1} \geq \gamma$.

Основний результат

Теорема. Нехай для системи (1) з критерієм якості (2) виконуються умови (3) – (5) постановки задачі та умова (6). Тоді задача оптимального керування (1), (2) має розв'язок в класі допустимих керувань.

Доведення. Відзначимо, що існує хоча б одна допустима траєкторія. Дійсно, нехай $u = 0$. Тоді система (1) має вигляд

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A(t, x), \\ \Delta x|_{x \in S} &= g(x), \\ x(0) &= x_0. \end{aligned}$$

В силу леми в даній системі відсутнє «биття», а тому неперервність функції $A(t, x)$ і умова (3) гарантують існування розв'язку задачі Коші на $[0, \theta]$.

Оскільки функціонал $J(u) \geq 0$, то існує невід'ємна нижня межа m значень $J(u)$. Нехай u_n – послідовність допустимих керувань таких, що: $J(u_n) \rightarrow m$, $n \rightarrow \infty$. Відзначимо, що при досить великих m виконується нерівність: $J(u_n) \leq m + 1$. Використовуючи умову (4), отримаємо

$$\int_0^\theta |u_n(t)|^p dt \leq \int_0^T |u_n(t)|^p dt \leq \frac{m+1}{k}.$$

Отже, послідовність $u_n(t)$ слабо збігається до $u^*(t) \in L_p[0, T]$, а тому за лемою Мазура [8] знайдеться опукла комбінація $b_k(t) = \sum_{i=1}^{n(k)} a_i u_i(t)$ елементів $u_i(t) \in U$ ($a_i \geq 0, \sum_{i=1}^{n(k)} a_i = 1$), що $b_k \rightarrow u^*, k \rightarrow \infty$ за нормою L_p . Отже, існує збіжна майже скрізь на $[0, T]$ за мірою Лебега підпослідовність b_{k_l} , що $b_{k_l} \rightarrow u^*(t)$, $l \rightarrow \infty$ для майже всіх t . Оскільки U опукла і замкнена множина, то $\sum_{i=1}^{n(k)} a_i u_i(t) \in U$. Тоді із замкненості множини U випливає, що $u^*(t) \in U$ майже для всіх $t \in [0, T]$.

Оцінимо розв'язки $x_n(t)$, що відповідають керуванню $u_n(t)$.

Покажемо рівномірну обмеженість розв'язків $x_n(t)$ при $t \in [0, \theta_n]$, $\theta_n \leq T$, де θ_n – момент покидання $x_n(t)$ області D . Маємо:

$$\begin{aligned} |x_n(t)|^q &= \\ &= |x_0 + \int_0^t (A(x_n(s), s) + B(x_n(s), s)(u_n(s))) ds + \\ &\quad + \sum_{0 \leq \tau_n^k < t} g(x_n(\tau_n^k))|^q \leq 3^{q-1} (|x_0|^q + \\ &\quad + |\int_0^t (K(1 + |x_n(s)|) + K(1 + |x_n(s)|)(u_n(s))) ds|^q + \\ &\quad + |\sum_{0 \leq \tau_n^k < t} K(1 + |x_n(\tau_n^k)|)|^q) \end{aligned}$$

Використовуючи аналог нерівності Гронуолла-Беллмана [9, ст. 30] та елементарні перетворення, неважко показати, що:

$$|x_n(t)|^q \leq C \text{ для } t \in [0, \theta_n]. \quad (11)$$

Останнє означає, що $x_n(t)$ рівномірно обмежені на $[0, \theta_n]$.

Оскільки довільний розв'язок $x_n(t)$, що відповідає довільному керуванню $u_n(t)$, перетинає гіперповерхню S не більше, ніж $\left\lceil \frac{T}{\gamma} \right\rceil + 1$ разів, то розглянемо такі випадки:

1. Випадок, коли нескінченна кількість елементів послідовності $x_n(t)$ не перетинає гіперповерхню S , розглянутий в роботі [10].

2.1. Нехай послідовність $x_n(t)$, що відповідає керуванню $u_n(t)$, містить нескінченну кількість елементів, що досягають гіперповерхню S один раз, і є скінченна кількість елементів $x_n(t)$, що не досягають гіперповерхню S . Тоді розглядаємо ту послідовність, що досягає S і після відбиття залишається в області D .

Спочатку розглянемо послідовність розв'язків системи (1) до першого моменту попадання розв'язку $x_n(t)$ на гіперповерхню S , що відповідають послідовності керувань $u_n(t)$.

Нехай τ_n^1 – момент першого попадання розв'язку $x_n(t)$ на гіперповерхню S . Продовжимо $x_n(t)$ на $[0, T]$ наступним чином:

$$y_n(t) = \begin{cases} x_n(t), & t \in [0, \tau_n^1], \\ x_n(\tau_n^1), & t \in [\tau_n^1, T]. \end{cases}$$

Покажемо рівностепену неперервність $y_n(t)$ на $[0, T]$.

Нехай $s_1, s_2 \in [0, \tau_n^1]$, $s_1 < s_2$. Оскільки $|x_n(t)| \leq C$, то

$$\begin{aligned} |y_n(s_1) - y_n(s_2)| &= |x_n(s_1) - x_n(s_2)| = \\ &= |\int_{s_1}^{s_2} A(x_n(s), s) + B(x_n(s), s)u_n(s) ds| \leq \\ &\leq K(s_2 - s_1) + C(s_2 - s_1) + \\ &+ \left(\frac{m+1}{k}\right)^{\frac{1}{p}} (s_2 - s_1)^{\frac{1}{q}} + C \left(\frac{m+1}{k}\right)^{\frac{1}{p}} (s_2 - s_1)^{\frac{1}{q}}. \end{aligned}$$

Нехай $s_1 < \tau_n^1 < s_2 < T$, то

$$\begin{aligned} |y_n(s_1) - y_n(s_2)| &= |x_n(s_1) - x_n(\tau_n^1)| \leq \\ &\leq K(s_2 - s_1) + C(s_2 - s_1) + \\ &+ \left(\frac{m+1}{k}\right)^{\frac{1}{p}} (s_2 - s_1)^{\frac{1}{q}} + C \left(\frac{m+1}{k}\right)^{\frac{1}{p}} (s_2 - s_1)^{\frac{1}{q}}. \end{aligned}$$

Отже, існує рівномірно збіжна на $[0, T]$ підпослідовність $y_{n_k}(t)$. Не втрачаючи загальності, можна вважати, що сама

$$y_n \Rightarrow y^*(t), \quad n \rightarrow \infty, \quad t \in [0, T].$$

Позначимо $\liminf_{n \rightarrow \infty} \tau_n^1 = \underline{\tau}^1$. Будемо розглядати проміжок $[0, \underline{\tau}^1]$.

Виберемо з послідовності $\{\tau_n^1\}_{n \rightarrow \infty}$ таку під-послідовність $\{\tau_{n_k}^1\}_{k \rightarrow \infty}$, що: $\tau_{n_k}^1 \rightarrow \underline{\tau}^1, n_k \rightarrow \infty$. Не втрачаючи загальності, будемо вважати: $\tau_n^1 \rightarrow \underline{\tau}^1, n \rightarrow \infty$.

Зафіксуємо довільне $\varepsilon > 0$ і розглянемо випадки проміжків, в яких міститься нескінченна кількість τ_n^1 :

$$1) \tau_n^1 \in (\underline{\tau}^1 - \varepsilon, \underline{\tau}^1]; 2) \tau_n^1 \in (\underline{\tau}^1, \underline{\tau}^1 + \varepsilon).$$

Будемо розглядати випадок 1) $\tau_n^1 \in (\underline{\tau}^1 - \varepsilon, \underline{\tau}^1]$. У цьому випадку з послідовності $\{\tau_n^1\}_{n \rightarrow \infty}$ можна виділити монотонну зростаючу підпослідовність $\{\tau_{n_k}^1\}_{k \rightarrow \infty}$. Вважаємо, що $\tau_{n_k}^1 := \tau_n^1, n \rightarrow \infty$.

На проміжку $t \in [0, \underline{\tau}^1 - \varepsilon]$ послідовність $y_n(t) = x_n(t)$ і, отже, послідовність $x_n(t)$ рівномірно збігається до $y^*(t)$. Позначимо $y^*(t) = x_1^*(t), t \in [0, \underline{\tau}^1 - \varepsilon]$.

Покажемо, що $x_1^*(t)$ є розв'язком системи (1), що відповідає керуванню $u^*(t)$ на $[0, \underline{\tau}^1 - \varepsilon]$, тобто, що при $t \in [0, \underline{\tau}^1 - \varepsilon]$ справедлива рівність

$$x_1^*(t) = x_0 + \int_0^t (A(x_1^*(s), s) + B(x_1^*(s), s)u^*(s)) ds.$$

Маємо

$$x_n(t) = x_0 + \int_0^t (A(x_n(s), s) + B(x_n(s), s)u_n(s)) dx \quad (12)$$

Перейдемо у (12) до границі при $n \rightarrow \infty$:

$$x_1^*(t) = x_0 + \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^t (A(x_n(s), s) + B(x_n(s), s)u_n(s)) ds.$$

В силу теореми Лебега про мажоровану збіжність, лінійного росту функції $A(x, t)$ і рівномірної обмеженості розв'язків $x_n(t)$ отримаємо

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^t A(x_n(s), s) ds = \int_0^t A(x_1^*(s), s) ds.$$

Маємо також, що

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^t B(x_n(s), s)(u_n(s) - u^*(s)) ds = 0,$$

останнє випливає зі слабкої збіжності u_n до u^* .

Користуючись співвідношенням

$$\lim_{n \rightarrow \infty} B(x_n(t), t) = B(x_1^*(t), t),$$

що виконується рівномірно, поза деякої множини δ довільної малої міри, і нерівністю

$$\int_{\delta} |u_n(s)| ds \leq \left(\int_0^t |u_n(s)|^p ds \right)^{\frac{1}{p}} |\delta|^{\frac{1}{q}},$$

можна довести, що

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^t |B(x_n(s), s) - B(x_1^*(s), s)| |u_n(s)| ds = 0,$$

$$\int_0^t B(x_n(s), s)u_n(s) ds \rightarrow \int_0^t B(x_1^*(s), s)u^*(s) ds.$$

Отже,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^t (A(x_n(s), s) + B(x_n(s), s)u_n(s)) ds &= \\ &= \int_0^t (A(x_1^*(s), s) + B(x_1^*(s), s)u^*(s)) ds, \end{aligned}$$

тобто $x_1^*(t)$ є розв'язком системи (1), що відповідає керуванню $u^*(t)$ на $[0, \underline{\tau}^1 - \varepsilon]$.

Покажемо, що існує границя функції $x_1^*(\underline{\tau}^1 - \varepsilon)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Дійсно, нехай $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$. Тоді

$$\begin{aligned} &|x_1^*(\underline{\tau}^1 - \varepsilon_1) - x_1^*(\underline{\tau}^1 - \varepsilon_2)| = \\ &= \left| \int_{\underline{\tau}^1 - \varepsilon_2}^{\underline{\tau}^1 - \varepsilon_1} (A(x_1^*(s), s) + B(x_1^*(s), s)u^*(s)) ds \right| \leq \\ &\leq K(\varepsilon_2 - \varepsilon_1) + C(\varepsilon_2 - \varepsilon_1) + \left(\frac{m+1}{k} \right)^{\frac{1}{p}} (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)^{\frac{1}{q}} + \\ &+ C \left(\frac{m+1}{k} \right)^{\frac{1}{p}} (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)^{\frac{1}{q}} \rightarrow 0, \quad \text{при } \varepsilon_2 - \varepsilon_1 \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Позначимо

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} x_1^*(\underline{\tau}^1 - \varepsilon) = x_1^*(\underline{\tau}^1).$$

Також неважко показати, що $x_1^*(\tau^1) \in S$. Для цього потрібно довести, що $x_n(\tau_n^1) \rightarrow x_1^*(\tau^1)$ при $n \rightarrow \infty$.

Випадок 2) досліджується аналогічно.

Розглянемо послідовність розв'язків системи (1) після першого моменту попадання розв'язку $x_n(t)$ на гіперповерхню S , що відповідають послідовності керувань $u_n(t)$.

$$x_n(t) = x_n(\tau_n^1) + g(x_n(\tau_n^1)) + \int_{\tau_n^1}^t (A(x_n(s), s) + B(x_n(s), s)(u_n(s))) ds, t \in [\tau_n^1, \theta_n],$$

де τ_n^1 – перший момент попадання розв'язку $x_n(t)$ на гіперповерхню S .

За функціями $x_n(t)$ побудуємо функції $y_n(t)$, що визначаються на $[0, T]$ наступним чином

$$y_n(t) = \begin{cases} x_n(\theta_n), & t \geq \theta_n, \\ x_n(t), & t \in [\tau_n^1, \theta_n], \\ x_n(\tau_n^1) + g(x_n(\tau_n^1)), & t \in [0, \tau_n^1]. \end{cases}$$

Неважко показати, що послідовність $y_n(t)$, $t \in [0, T]$ – рівностепенно неперервна, а тому існує рівномірно збіжна на $[0, T]$ підпослідовність $y_{n_k}(t)$. Не втрачаючи загальності, можна вважа-

ти, що сама $y_n \Rightarrow y^*(t)$, $n \rightarrow \infty$, $t \in [0, T]$.

Нехай θ^* – момент виходу розв'язку $y^*(t)$ на границю області D , тобто

$$\theta^* = \begin{cases} \sup\{t \in [0, T] : y^*(s) \in D, s \in [0, t)\}, \\ T, \text{ якщо } y^*(t) \notin D. \end{cases}$$

$$\theta_n = \begin{cases} \sup\{t \in [0, T] : y_n(s) \in D, s \in [0, t)\}, \\ T, \text{ якщо } y_n(t) \notin D. \end{cases}$$

Позначимо $\liminf_{n \rightarrow \infty} \tau_n^1 = \tau^1$, $\liminf_{n \rightarrow \infty} \theta_n = \theta^*$. Нехай $\tau^1 < \theta^*$. Далі доведення аналогічне доведенню, що розглянуто в роботі [10].

2.2. Розглянемо випадок, коли нескінченна кількість елементів підпослідовності $x_n(t)$ перетинає гіперповерхню S один раз та відбивається на границю області D .

У цьому випадку $\theta_n = \tau_n$ і доведення аналогічне проведеному вище.

3.1. Нехай послідовність $x_n(t)$, що відповідає керуванню $u_n(t)$, містить нескінченну кількість тих елементів підпослідовності, що перетинають гіперповерхню S два рази, і є скінченна кількість тих елементів підпослідовності $x_n(t)$, що перетинають один раз і не перетинають гіперповерхню S . Тоді розглядаємо ту підпослідовність, що перетинає S два рази.

Доведення цього випадку аналогічне доведенню п.2.1.

3.2. Розглянемо випадок, коли нескінченна кількість елементів підпослідовності $x_n(t)$ перетинає гіперповерхню S два рази та відбивається на границю області D .

У цьому випадку доведення аналогічне як і для п.2.2.

Випадки перетину гіперповерхні більше 2 разів досліджуються аналогічно.

Розглядаючи розв'язок вихідної задачі (1) на проміжках між послідовними перетинами гіперповерхні S та до моменту виходу з області D , можемо побудувати функцію

$$x^*(t) = \begin{cases} x_1^*(t), & t \in [0, \tau^1], \\ x_2^*(t), & t \in [\tau^1, \tau^2], \\ \dots \\ x_n^*(t), & t \in [\tau^n, \theta^*]. \end{cases}$$

яка є розв'язком вихідної задачі (1), тобто $x^*(t)$, що відповідає керуванню $u^*(t)$, задовольняє рівняння:

$$\dot{x}^*(t) = x_0 + \int_0^t (A(x^*(s), s) + B(x^*(s), s)u^*(s)) ds + \sum_i g(x^*(\tau^i)).$$

Аналогічно роботі [10] можна показати, що керування $u^*(t)$ оптимальне для задачі (1), (2), тобто $J(u^*) = m$.

Теорема доведена.

Список використаних джерел

1. Шарифов Я.В. Оптимальное управление для систем с импульсным воздействием при нелокальных краевых условиях / Шарифов Я.В. // Известия вузов. Математика 2013, №2, С. 75-84.
2. Ahmed N.U. Optimal Control for a General Class of Impulsive Systems on Banach Spaces. Proceedings of the 42nd IEEE Conference on Decision and Control Maui, Hawaii USA, December 2003. – p. 480-485.
3. Дыхта В.А. Оптимальное импульсное управление с приложениями / Дыхта В.А., Самсоныук О.Н. // М.: Физматлит. 2000. – 256с.
4. Асланян А.А. Необходимые условия оптимальности в задачах управления системами дифференциальных уравнений с импульсным воздействием в нефиксированные моменты времени / Асланян А.А. // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1982. – №9. – С. 58-61.
5. Асланян А.А. Принцип максимума для разрывных динамических систем / Асланян А.А. // Теория функций, функциональный анализ и их приложения. – 1982. – Вып. 37. – С. 132-137.
6. Асланян А.А. Условия оптимальности в задачах управления системами с импульсным воздействием / Асланян А.А. // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1982. – №11. – С. 3-6.
7. Івашкевич А.О. Існування оптимального керування для систем диференціальних рівнянь з імпульсною дією у нефіксовані моменти часу / Івашкевич А.О., Ковальчук Т.В. // Нелінійні коливання. (прийнята до друку)
8. Иосида К. Функциональный анализ / Иосида К., М.: Мир, 1967. – 624 с.
9. Samoilenko A. M., Perestyuk N. A. Impulsive differential equations / Samoilenko A. M., Perestyuk N. A. – Singapore: World Scientific. 1995. – 400 p.
10. Самойленко О.О. Достатні умови існування оптимального керування для деяких класів систем диференціальних рівнянь / Самойленко О.О. // Вісник Одеського національного універ-

ситету. 2012. Т.17, Випуск 4(16), С. 86-96.

References

1. SHARIFOV Ya. (2013) *Optimalnoe upravlenie dlya sistem s impulsnyim vozdeystviem pri nelokalnyih kraevyih usloviyah*. Izvestiya vuzov. Matematika.
2. AHMED N.U. (2003) *Optimal Control for a General Class of Impulsive Systems on Banach Spaces*. Proceedings of the 42nd IEEE Conference on Decision and Control Maui, Hawaii USA.
3. DYKHTA V., SAMSONYUK O. (2000) *Optimalnoe impulsnoe upravlenie s prilozheniyami*. Moska: Fizmatlit.
4. ASLANIAN A. (1982) *Neobhodimyie usloviya optimalnosti v zadachah upravleniya sistemami differentsialnyih uravneniy s impulsnyim vozdeystviem v nefiksirovannyye momentyi vremeni*. Doklad AN USSR. Seria A.
5. ASLANIAN A. (1982) *Printsip maksimuma dlya razryivnyih dinamicheskikh sistem*. Teoriya funktsiy, funktsionalnyiy analiz i ih prilozheniya.
6. ASLANIAN A. (1982) *Usloviya optimalnosti v zadachah upravleniya sistemami s impulsnyim vozdeystviem*. Doklad AN USSR. Seria A.
7. IVASHKEVICH A., KOVALCHUK T. *Isnuvannya optimalnogo keruvannya dlya sistem diferentsialnih rIvnyan z Impulsnoyu dieu u nefiksovani momenty chasu*. Nelineyni kolivannya. (to appear)
8. IOSIDA K. (1967) *Funktsionalnyiy analiz*. Moskva: Mir.
9. SAMOILENKO A., PERESTYUK N. (1995) *Impulsive differential equations*. Singapore: World Scientific.
10. SAMOILENKO O. (2012) *Dostatni umovi Isnuvannya optimalnogo keruvannya dlya deyakih klasiv sistem diferentsialnih rIvnyan*. Visnik Odeskogo natsionalnogo universitetu.

Надійшла до редколегії 10.06.2016.

УДК 517.8

Козак В.І.¹, аспірантка

Інтегрування диференціально-різницевих нелінійних рівнянь за допомогою спектральної теорії блочних матриць відповідних двовимірній проблемі моментів

¹Національний технічний університет України “Київський політехнічний інститут”, 03056, м. Київ, просп. Перемоги, 37,
e-mail: afina0706@mail.ru

Kozak V.I.¹, graduate student

Integration of nonlinear differential-difference equations by means of the spectral theory of block matrices related to the two-dimensional moment problem

¹ National Technical University of Ukraine “Kyiv Polytechnic Institute”, 03056, Kyiv, pr. Peremohy, 37,
e-mail: afina0706@mail.ru

Раніше для двовимірної дійсної проблеми моментів були розв’язані пряма та обернена спектральні задачі аналогічно як для класичної проблеми моментів Гамбургера. В цій роботі, використовуючи блочні матриці типу Якобі відповідні двовимірній дійсній проблемі моментів, складена система рівнянь типу Лакса та проінтегрована завдяки розвиненій спектральній теорії для таких матриць. Для цього записана функція типу Вейля, яка однозначно визначає міру відповідну двовимірній дійсній проблемі моментів. Для такої функції раніше були доведені певні властивості. Аналогічні результати для комплексної проблеми моментів були наведені в роботах Березанського Ю.М. та Мохонько О.А.

Ключові слова: двовимірна проблема моментів, матриці типу Якобі, функція Вейля, поліноми другого роду, рівняння Лакса

Previously, for the two dimensional real moment problem, direct and inverse spectral problems were solved just as for the classical Hamburger moment problem. The result of the inverse spectral problem is block Jacobi type matrices. Direct problem consists of the recovering measures for a given of Jacobi type matrices. On the other hand, there were integrated Toda chains by spectral theory for the classical Hamburger moment problem using ordinary Jacobi matrix. In this article, using block Jacobi type matrices two-dimensional real moment problem, the system of Lax equations is constructed and integrated due to developed spectral theory for such matrices. For this reason the Weil function was presented there where recorded function that uniquely determined an appropriate measure corresponding to the two-dimensional real moment problem. For such functions there were proved previously certain properties. Similar results for the complex moment problem were given by Berezhansky Y.M. and Mokhonko O.A.

Key Words: two-dimensional moment problem, Jacobi type matrix, Weyl function, second order polynomials, Lax equation.

Статтю представив академік НАН України д.ф.-м.н., проф. Перестюк М.О.

Вступ. Використовуючи результати [11, 12], Ю.М. Березанський у [3, 7] запропонував метод інтегрування різницевого нелінійного рівняння (напівнескінченного ланцюжка Тоди), ґрунтуючись на спектральній тео-

рії аналога симетричного рівняння Штурма-Ліувіля. Далі в [4] показано, що аналогічна теорія інтегрування відповідних класів нелінійних різницевих рівнянь може бути побудована для спектральної теорії нормаль-

них блочних матриць типу Якобі [8].

Головною метою цієї роботи є продовження попередніх результатів на класи нелінійних різницевих рівнянь, породжених блочними матрицями типу Якобі відповідних дійсній двовимірній проблемі моментів в [6, 9].

Попередні відомості. Дійсна двовимір-на проблема моментів полягає у пошуку умов для заданої двоіндексної послідовності $\{s_{m,n}\}$, $m, n \in \mathbb{N}_0$ дійсних чисел так, аби існувала міра $d\rho(x, y)$ на дійсній площині $\mathbb{R}^2$, із якою б виконувалися рівності

$$s_{m,n} = \int_{\mathbb{R}^2} x^m y^n d\rho(x, y), \quad m, n \in \mathbb{N}_0. \quad (1)$$

Побудови відповідних матриць аналогічні до звичайного одновимірного випадку [1]. Але замість звичайного простору l_2 береться простір

$$\begin{aligned} l_2 &= \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2 \oplus \dots, \quad \mathcal{H}_n = \mathbb{C}^{n+1}, \\ n \in \mathbb{N}_0, \quad l_2 \ni f &= (f_n)_{n=0}^\infty, \quad \sum_{n=0}^\infty \|f_n\|_{\mathcal{H}_n}^2 < \infty. \end{aligned} \quad (2)$$

Вектор x_n з простору $\mathcal{H}_n = \mathbb{C}^{n+1}$ має вигляд $x_n = (x_{n;0}, \dots, x_{n;n})$. Для кожного $\alpha \in \{0, \dots, n\}$, число $x_{n;\alpha}$ є координатою базисного вектора $\delta_{n;\alpha} = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) \in \mathcal{H}_n \in l_2$ (одиниця знаходиться на α -му місці), $\delta_0 \equiv \delta_{0;0} = (1)$. Узагальнення звичайної матриці Якобі відповідної класичній проблемі моментів Гамбургера набуває вигляду пари блочних матриць:

$$J_A = \begin{bmatrix} b_0 & c_0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ a_0 & b_1 & c_1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & a_1 & b_2 & c_2 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}, \quad (3)$$

$$\begin{aligned} a_n &: \mathcal{H}_n \longrightarrow \mathcal{H}_{n+1}, & b_n &: \mathcal{H}_n \longrightarrow \mathcal{H}_n, \\ c_n &: \mathcal{H}_{n+1} \longrightarrow \mathcal{H}_n, & n &\in \mathbb{N}_0; \end{aligned}$$

$$J_B = \begin{bmatrix} w_0 & v_0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ u_0 & w_1 & v_1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & u_1 & w_2 & v_2 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}, \quad (4)$$

$$\begin{aligned} u_n &: \mathcal{H}_n \longrightarrow \mathcal{H}_{n+1}, & w_n &: \mathcal{H}_n \longrightarrow \mathcal{H}_n, \\ v_n &: \mathcal{H}_{n+1} \longrightarrow \mathcal{H}_n, & n &\in \mathbb{N}_0. \end{aligned}$$

Матриці (3) і (4) на фінітних векторах $l_{\text{fin}} \subset l_2$ задають два оператори

$$\begin{aligned} l_2 \supset l_{\text{fin}} \ni f &\longrightarrow J_A f = ((J_A f)_n)_{n=0}^\infty \subset l_2, \\ (J_A f)_n &= a_{n-1} f_{n-1} + b_n f_n + c_n f_{n+1}; \\ l_2 \supset l_{\text{fin}} \ni f &\longrightarrow J_B f = ((J_B f)_n)_{n=0}^\infty \subset l_2, \\ (J_B f)_n &= u_{n-1} f_{n-1} + w_n f_n + v_n f_{n+1}, \end{aligned} \quad (5)$$

де для зручності покладається $f_{-1} := 0$. Без втрати загальності, матриці J_A , J_B та відповідні оператори позначимо тими ж самими символами J_A і J_B .

Далі, для цієї роботи, припустимо, що ці матриці мають особливу внутрішню структуру. А саме, матриці a_n і c_n мають певну форму та їх коефіцієнти задовольняють деякі властивості:

$$\begin{aligned} a_n &= \left\{ \underbrace{\begin{bmatrix} a_{n;0,0} & * & * & \dots & * \\ a_{n;1,0} & * & * & \dots & * \\ 0 & a_{n;2,1} & * & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n;n+1,n} \end{bmatrix}}_{n+1} \right\}_{n+2}; \\ c_n &= \left\{ \underbrace{\begin{bmatrix} c_{n;0,0} & c_{n;0,1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ * & * & c_{n;1,2} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ * & * & * & \dots & c_{n;n-1,n} & 0 \\ * & * & * & \dots & * & c_{n;n,n+1} \end{bmatrix}}_{n+2} \right\}_{n+1}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{n;1,0}, a_{n;2,1}, \dots, a_{n;n+1,n} &> 0, \\ c_{n;0,1}, c_{n;1,2}, \dots, c_{n;n,n+1} &> 0, \quad n \in \mathbb{N}_0. \end{aligned}$$

(6)

$$u_n = \left\{ \begin{array}{cccccc} u_{n;0,0} & * & * & \dots & * & \\ 0 & u_{n;1,1} & * & \dots & * & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & u_{n;n,n} & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \end{array} \right\}_{n+2};$$

$$v_n = \left\{ \begin{array}{cccccc} v_{n;0,0} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ * & v_{n;1,1} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ * & * & \dots & v_{n;n-1,n-1} & 0 & 0 \\ * & * & \dots & * & v_{n;n,n} & 0 \end{array} \right\}_{n+1};$$

$$u_{n;0,0}, u_{n;1,1}, \dots, u_{n;n,n} > 0,$$

$$v_{n;0,0}, v_{n;1,1}, \dots, v_{n;n,n} > 0, \quad n \in \mathbb{N}_0. \quad (7)$$

У формулах (3) і (4) блоки b_n і w_n є симетричними $(n+1) \times (n+1)$ -матрицями $n \in \mathbb{N}_0$.

Оскільки, взагалі, мова йде про симетричні матриці, то $a_{n;\alpha,\beta} = c_{n;\beta,\alpha}$, $\alpha = 0, 1, \dots, n$, $\beta = 0, 1, \dots, n+1$, $n \in \mathbb{N}$ і $u_{n;\alpha,\beta} = v_{n;\beta,\alpha}$, $\beta = 0, 1, \dots, n$, $\alpha = 0, 1, \dots, n+1$, $n \in \mathbb{N}_0$.

Для подальших досліджень припустимо, що генеровані виразами (3) і (4) оператори є обмеженими самоспряженими і комутують у строгому резольвентному сенсі.

У такому (двовимірному) випадку, узагальнені власні вектори $P(x, y)$ [2] мають вигляд послідовності $P(x, y) = P_n(x, y)_{n=0}^\infty$, де $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $P_n(x, y) \in \mathcal{H}_n$ є вектор, коефіцієнти якого є поліноми n -го порядку за змінними x та y . А саме:

$$P_n(x, y) = (P_{n;0}(x, y), P_{n;1}(x, y), \dots, P_{n;n}(x, y)), \quad (8)$$

де $P_{n,\alpha}$ – лінійна комбінація елементів

$$\begin{aligned} & x^0 y^0; \quad x^0 y^1, x^1 y^0; \quad x^0 y^2, x^1 y^1, x^2 y^0; \quad \dots; \\ & x^0 y^n, x^1 y^{n-1}, \dots, x^{n-\alpha} y^\alpha, \quad \dots, \end{aligned} \quad (9)$$

для $\alpha = 0, \dots, n$. Поліноми (8) є розв'язками системи двох різницевих рівнянь

$$J_A P(x, y) = x P(x, y), \quad J_B P(x, y) = y P(x, y). \quad (10)$$

Коротко зауважимо, як утворилися матриці (3) і (4) із властивостями (6) і (7). Вперше такі матриці були побудовані в роботах

[5, 10]. Для побудови $P_n(x, y)$ проводиться ортогоналізація за Шмідтом системи $x^n y^m$, $m, n \in \mathbb{N}_0$ відносно скалярного добутку простору $L_2 = L_2(\mathbb{R}^2, d\rho(x, y))$ функцій інтегрованих із квадратом на $\mathbb{R}^2$ відносно міри Бореля $d\rho(x, y)$. Припускається, що функції

$$\mathbb{R}^2 \ni (x, y) \mapsto x^m y^n, \quad m, n \in \mathbb{N}_0, \quad (11)$$

є лінійно незалежними і утворюють тотальну множину в L_2 . Тобто, використовуючи порядок:

$$\begin{aligned} & x^0 y^0; \quad x^0 y^1, x^1 y^0; \quad x^0 y^2, x^1 y^1, x^2 y^0; \quad \dots; \\ & x^0 y^n, x^1 y^{n-1}, \dots, x^n y^0; \quad \dots \end{aligned} \quad (12)$$

у якості результату, отримується система ортогональних поліномів, поданих у вигляді таблиці:

$$\begin{aligned} & P_{0;0}(x, y); \\ & P_{1;0}(x, y), \quad P_{1;1}(x, y); \\ & P_{2;0}(x, y), \quad P_{2;1}(x, y), \quad P_{2;2}(x, y); \quad \dots; \\ & P_{n;0}(x, y), P_{n;1}(x, y), P_{n;2}(x, y), \dots, P_{n;n}(x, y). \end{aligned} \quad (13)$$

Кожний рядок в (13) – це вектор $P_n(x, y)$, який є розв'язком системи (10).

Для подальшого запису перетворення Фур'є, запишемо скалярний добуток: $\forall f_n \in \mathcal{H}_n$, $n \in \mathbb{N}_0$

$$(f_n, P_n(x, y))_{\mathcal{H}_n} = f_{n;0} P_{n;0}(x, y) + f_{n;1} P_{n;1}(x, y) + \dots + f_{n;n} P_{n;n}(x, y),$$

де $f_{n;\alpha}$ – координати вектора f_n , $\alpha = 0, 1, \dots, n$, $k_{n;\alpha} > 0$.

Теорема 1 [9]. Нехай J_A і J_B дві блочні симетричні матриці (3) і (4) з умовами на блоки (коефіцієнти) (6) і (7) відповідно. Припустимо, що ці матриці породжують обмежені самоспряжені комутуючі оператори після замикання за неперервністю в просторі $\mathbf{l}_2$.

Тоді перетворення Фур'є за узагальненими власними векторами операторів J_A і J_B

має вигляд:

$$\begin{aligned} \mathbf{l}_2 \supset \mathbf{l}_{\text{fin}} \ni f \\ = (f_n)_{n=0}^\infty \mapsto \hat{f}(x, y) = \sum_{n=0}^\infty (f_n, P_n(x, y))_{\mathcal{H}_n} = \\ \sum_{n=0}^\infty \sum_{\alpha=0}^n \overline{P_{n;\alpha}(x, y)} f_{n;\alpha} \in L_2(\mathbb{R}^2, d\rho(x, y)) = L_2. \end{aligned} \quad (14)$$

де $d\rho(x, y)$ – спектральна міра операторів J_A і J_B . В (14) $P_n(x, y) = (P_n(x, y))_{n=0}^\infty$ є узагальненим власним вектором пари операторів J_A і J_B . Тут $P_n(x, y)$ є вектор, коефіцієнти якого поліноми за змінними x і y вигляду (13).

Після замикання за неперервністю, оператор (14) є унітарним з $\mathbf{l}_2$ в L_2 . Образи операторів J_A і J_B є операторами множення на x і y в L_2 .

Рівність Парсеваля має вигляд: $\forall f, g \in \mathbf{l}_{\text{fin}}$

$$\begin{aligned} (f, g)_{\mathbf{l}_2} &= \int_{\mathbb{R}^2} \hat{f}(x, y) \overline{\hat{g}(x, y)} d\rho(x, y), \\ (J_A f, g)_{\mathbf{l}_2} &= \int_{\mathbb{R}^2} x \hat{f}(x, y) \overline{\hat{g}(x, y)} d\rho(x, y), \\ (J_B f, g)_{\mathbf{l}_2} &= \int_{\mathbb{R}^2} y \hat{f}(x, y) \overline{\hat{g}(x, y)} d\rho(x, y). \end{aligned} \quad (15)$$

Поліноми $P_{n;\alpha}(x, y)$, $n \in \mathbb{N}$, $\alpha = 0, \dots, n$ і $P_{0;0} = 1$ утворюють ортонормовану систему в L_2 у сенсі:

$$\begin{aligned} \iint_{\mathbb{R}^2} \sum_{i=1}^j \overline{P_{j;i}(x, y)} f_{j;i} \sum_{l=1}^k P_{k;l}(x, y) \overline{f_{k;l}} \\ = \delta_{j,k} (f_j, g_k)_{\mathcal{H}_j}. \end{aligned}$$

де $\forall f_j \in \mathcal{H}_j$, $\forall g_k \in \mathcal{H}_k$, $j, k \in \mathbb{N}_0$. Матриці $J_A = (p_{j,k})_{j,k=0}^\infty$, $p_{j,k} = (p_{j,k;\alpha,\beta})_{\alpha,\beta=0}^{j,k}$, $J_B = (q_{j,k})_{j,k=0}^\infty$, $q_{j,k} = (q_{j,k;\alpha,\beta})_{\alpha,\beta=0}^{j,k}$, віднов-

люються за формулами:

$$\begin{aligned} p_{j,k;\alpha,\beta} &= (J_A \delta_{k,\beta}, \delta_{j,\alpha})_{\mathbf{l}_2} \\ &= \iint_{\mathbb{R}^2} x \overline{P_{k;\beta}(x, y)} P_{j;\alpha}(x, y) d\rho(x, y), \\ q_{j,k;\alpha,\beta} &= (J_B \delta_{k,\beta}, \delta_{j,\alpha})_{\mathbf{l}_2} \\ &= \iint_{\mathbb{R}^2} y \overline{P_{k;\beta}(x, y)} P_{j;\alpha}(x, y) d\rho(x, y), \end{aligned} \quad (16)$$

тут перепозначено $b_n = p_{j,j}$, $c_n = p_{j,j+1}$, $a_n = p_{j+1,j}$ і $w_n = q_{j,j}$, $v_n = q_{j,j+1}$, $u_n = q_{j+1,j}$, $j \in \mathbb{N}_0$.

Рівняння Лакса для блочних якобієвих матриць відповідних дійсній двовимірній проблемі моментів. Нехай L_x та L_y – матриці типу (3) і (4) з умовами (6) і (7) відповідно. Припустимо, що їх елементи неперервно диференційовні залежать від змінної t , $t \in [0, T]$, $T \leq \infty$: $L_x = L_x(t)$ та $L_y = L_y(t)$. Розглянемо також деякі матриці $A = (d_{j,k})_{j,k=0}^\infty$ та $B = (g_{j,k})_{j,k=0}^\infty$, елементи яких теж неперервно залежать від тієї ж змінної t : $d_{j,k} = d_{j,k}(t)$, $g_{j,k} = g_{j,k}(t)$ вигляду (3) і (4) (але які не обов'язково мають властивості (6) і (7) або взагалі не є симетричними). Розглянемо систему рівнянь Лакса:

$$\begin{aligned} L'_x &= [L_x A] = L_x A - A L_x, \\ L'_y &= [L_y B] = L_y B - B L_y. \end{aligned} \quad (17)$$

Тут добутки блочних матриць $L_x A$, $A L_x$, $L_y B$ та $B L_y$ визначені звичайним чином.

Якщо в рівностях (17) матриці $A(t)$ та $B(t)$ вважати фіксованими матрицями коефіцієнтів, то ці рівності можна вважати як систему лінійних диференціальних рівнянь першого порядку відносно невідомих $L_x(t)$ та $L_y(t)$, $t \in [0, T]$.

Випишемо систему рівнянь Лакса у вигляді системи рівнянь для елементів матриць у випадку, якщо $L_x(t)$ та $L_y(t)$ мають блочну якобієву структуру, подібну до структури матриць (3) та (4).

Перепозначимо:

$$L_x(t) = \begin{bmatrix} \beta_0(t) & \gamma_0(t) & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \alpha_0(t) & \beta_1(t) & \gamma_1(t) & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \alpha_1(t) & \beta_2(t) & \gamma_2(t) & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}, \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \alpha_n(t) : \mathcal{H}_n &\longrightarrow \mathcal{H}_{n+1}, & \beta_n(t) : \mathcal{H}_n &\longrightarrow \mathcal{H}_n, \\ \gamma_n(t) : \mathcal{H}_{n+1} &\longrightarrow \mathcal{H}_n, & n &\in \mathbb{N}_0; \end{aligned}$$

$$L_y(t) = \begin{bmatrix} \omega_0(t) & \theta_0(t) & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \tau_0(t) & \omega_1(t) & \theta_1(t) & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \tau_1(t) & \omega_2(t) & \theta_2(t) & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}, \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \tau_n(t) : \mathcal{H}_n &\longrightarrow \mathcal{H}_{n+1}, & \omega_n(t) : \mathcal{H}_n &\longrightarrow \mathcal{H}_n, \\ \theta_n(t) : \mathcal{H}_{n+1} &\longrightarrow \mathcal{H}_n, & n &\in \mathbb{N}_0. \end{aligned}$$

Блоки α_n , β_n , γ_n , τ_n , ω_n , та θ_n задовольняють властивості (6) і (7). Покладемо A та B так, що їх блоки не обов'язково задовольняють умови (6) і (7).

Для підрахунку комутаторів $[A(t), L_x(t)]$ та $[B(t), L_y(t)]$ випишемо відповідні формули (в подальшому всюди елементи з від'ємними індексами вважатимуться рівними нулю):

$$\begin{aligned} (L_x A)_{n-2,n} &= c_{n-2} \gamma_{n-1}, \\ (L_x A)_{n-1,n} &= b_{n-1} \gamma_{n-1} + c_{n-1} \beta_n, \\ (L_x A)_{n,n} &= a_{n-1} \gamma_{n-1} + b_n \beta_n + c_n \alpha_n, \\ (L_x A)_{n+1,n} &= a_n \beta_n + b_{n+1} \alpha_n, \\ (L_x A)_{n+2,n} &= a_{n+1} \alpha_n, \\ (L_y B)_{n-2,n} &= v_{n-2} \theta_{n-2}, \\ (L_y B)_{n-1,n} &= w_{n-1} \theta_{n-1} + v_{n-1} \omega_n, \\ (L_y B)_{n,n} &= u_{n-1} \theta_{n-1} + w_n \omega_n + v_n \tau_n, \\ (L_y B)_{n+1,n} &= u_n \omega_n + w_{n+1} \tau_n, \\ (L_y B)_{n+2,n} &= u_{n+1} \tau_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}_0. \end{aligned} \quad (20)$$

Для (AL_x) та (BL_y) виконуються аналогічні формули з заміною a_j , b_j , c_j на α_j , β_j , γ_j і v_j , w_j , u_j на τ_j , ω_j , θ_j . Порівнюючи елементи в правій та лівій частинах відповідних рівнянь в системі (17) і користуючись формулами (20), отримаємо систему рівнянь Лакса

(17) в “координатному” вигляді:

$$\begin{aligned} 0 &= c_n \gamma_{n+1} - \gamma_n c_{n+1}, \\ \gamma'_n &= b_n \gamma_n + c_n \beta_{n+1} - \beta_n c_n - \gamma_n b_{n+1}, \\ \beta'_n &= a_{n-1} \gamma_{n-1} + b_n \beta_n + c_n \alpha_n - \alpha_{n-1} c_{n-1} \\ &\quad - \beta_n b_n - \gamma_n a_n, \\ \alpha'_n &= a_n \beta_n + b_{n+1} \alpha_n - \alpha_n b_n - \beta_{n+1} a_n, \\ 0 &= a_{n+1} \alpha_n - \alpha_{n+1} a_n \\ 0 &= v_n \theta_{n+1} - \theta_n v_{n+1}, \\ \theta'_n &= w_n \theta_n + v_n \omega_{n+1} - \omega_n v_n - \theta_n w_{n+1}, \\ w'_n &= u_{n-1} \theta_{n-1} + w_n \omega_n + v_n \theta_n - \tau_{n-1} v_{n-1} \\ &\quad - \omega_n w_n - \theta_n u_n, \\ \tau'_n &= u_n \omega_n + w_{n+1} \tau_n - \tau_n w_n - \omega_{n+1} u_n, \\ 0 &= u_{n+1} \tau_n - \tau_{n+1} u_n \end{aligned} \quad (21)$$

Елементи матриць (18) та (19) також будемо вважати рівномірно обмеженими по $n \in \mathbb{N}_0$ та $t \in [0, T]$. Тому вони породжують в $\mathbf{l}_2$ обмежені оператори, для яких ми збережемо позначення L_x та L_y . Оператори L_x та L_y будуть слабо неперервними по $t \in [0, T]$.

Аналог функції Вейля для двовимірної дійсної проблеми моментів визначимо такою теоремою [9]:

Теорема 2 Нехай J_x і J_y – блочні матриці типу Якобі, які породжують в $\mathbf{l}_2$ обмежені комутуючі самоспряжені оператори. Нехай $R_x = R_{z_1;x}(t) = (L_x(t) - z_1)^{-1}$ і $R_y = R_{z_2;y}(t) = (L_y(t) - z_2)^{-1}$ – їх резольвенти ($\text{Im} z_i \neq 0$, $i = 1, 2$). Тоді функція

$$\begin{aligned} M &:= M(z_1, z_2; t) = (R_x \delta_0, R_y \delta_0)_{\mathbf{l}_2} \\ &= \iint_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{(\lambda - z_1)(\mu - z_2)} d\rho(\lambda, \mu). \end{aligned} \quad (22)$$

$z_1, z_2 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. однозначно визначає спектральну міру цих операторів.

Продиференціюємо M по t . Тоді

$$M' = (R'_x \delta_0, R_y \delta_0)_{\mathbf{l}_2} + (R_x \delta_0, R'_y \delta_0)_{\mathbf{l}_2}. \quad (23)$$

Не важко зрозуміти, що з (17) отримається:

$$\begin{aligned} R'_x &= R_x A - A R_x, \\ R'_y &= R_y B - B R_y. \end{aligned} \quad (24)$$

Підставимо (23) в (24):

$$\begin{aligned} M' &= (R_x A \delta_0, R_y \delta_0)_{12} - (A R_x \delta_0, R_y \delta_0)_{12} \\ &+ (R_x \delta_0, R_y B \delta_0)_{12} - (R_x \delta_0, B R_y \delta_0)_{12} \\ &= (R_x A \delta_0, R_y \delta_0)_{12} + (R_x \delta_0, R_y B \delta_0)_{12} \\ &- ((A + B^*) R_x \delta_0, R_y \delta_0)_{12}. \end{aligned}$$

Скористаємося комутативними властивостями R_x та R_y та покладемо $A = -B^*$:

$$\begin{aligned} M' &= (R_x(\delta_0 b_0 + \delta_1 c_0), R_y \delta_0)_{12} - (R_x \delta_0, \\ &R_y(-b_0 \delta_0 - a_0 \delta_1))_{12} = b_0(R_x \delta_0, R_y \delta_0)_{12} \\ &+ (R_x c_0, R_y \delta_0)_{12} + (R_x c_0, R_y \delta_1)_{12} \\ &- b_0(R_x \delta_0, R_y \delta_0)_{12} - a_0(R_x \delta_0, R_y \delta_1)_{12} \\ &- a_0(R_x \delta_0, R_y \delta_{11})_{12} = (c_0, R_y \delta_0)_{12} \\ &+ (c_0, R_y \delta_1)_{12} + (c_0, R_y \delta_{11})_{12}. \end{aligned} \quad (25)$$

Припустимо додатково $c_0, R_y \delta_1 = a_0, R_y \delta_1 = 0$. Тоді

$$M' = (c_0, R_y \delta_0)_{12}. \quad (26)$$

Таким чином доведена така лема.

Лема 1 Для функції M вигляду (22) і операторів A і B , таких що $A = -B^*$ і $c_0, R_y \delta_1 = a_0, R_y \delta_1 = 0$, виконується рівність (26).

Запишемо чотири очевидні тотожності, що відповідають кожному рівнянню системи, припускаючи $\alpha_{0,0,0} = 0$, $\beta_{1,1,0} = 0$, $\beta_{1,0,1} = 0$, $\gamma_{0,0,0} = 0$, $\gamma_{1,0,0} = 0$, $\gamma_{1,1,0} = 0$, $\gamma_{1,1,1} = 0$ для матриці L_x та $\omega_{1,1,0} = 0$, $\omega_{1,0,1} = 0$, $\theta_{1,1,0} = 0$ для матриці L_y :

$$\begin{aligned} 1 &= (\delta_0, \delta_0)_{12} = (R_x(L_x - z_1)\delta_0, R_y(L_y - z_2)\delta_0)_{12} \\ &= (R_x\{(\beta_{0,0,0} - z_1)\delta_0 + \gamma_{0,0,1}\delta_{11}\}, R_y\{(\omega_{0,0,0} - z_2)\delta_0 + \theta_{0,0,0}\delta_{10}\})_{12} = (\beta_{0,0,0} - z_1)(\omega_{0,0,0} - z_2) \\ &(R_x \delta_0, R_y \delta_0)_{12} + (\beta_{0,0,0} - z_1)\theta_{0,0,0}(R_x \delta_0, R_y \delta_{10})_{12} \\ &+ \gamma_{0,0,1}(\omega_{0,0,1} - z_2)(R_x \delta_{11}, R_y \delta_0)_{12} \\ &+ \gamma_{0,0,1}\theta_{0,0,0}(R_x \delta_{11}, R_y \delta_{10})_{12}, \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} 0 &= (\delta_{10}, \delta_0)_{12} = (R_x(L_x - z_1)\delta_{10}, R_y(L_y - z_2)\delta_0)_{12} \\ &= (R_x\{(\beta_{1,0,0} - z_1)\delta_{10} + \gamma_{1,0,1}\delta_{11}\}, \{(\omega_{0,0,0} - z_2)\delta_0 \\ &+ \theta_{0,0,0}\delta_{10}\})_{12} = (\omega_{0,0,0} - z_2)(\beta_{1,0,0} - z_1) \\ &(R_x \delta_{10}, R_y \delta_0)_{12} + (\omega_{0,0,0} - z_2)\gamma_{1,0,1}(R_x \delta_{21}, R_y \delta_0)_{12} \\ &+ \theta_{0,0,0}(\beta_{1,0,0} - z_1)(R_x \delta_{10}, R_y \delta_{10})_{12} \\ &+ \theta_{0,0,0}\gamma_{1,0,1}(R_x \delta_{21}, R_y \delta_{10})_{12}, \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} 1 &= (\delta_0, \delta_0)_{12} = (R_x R_y(L_y - z_2)(L_x - z_1)\delta_0, \delta_0)_{12} \\ &= (R_x R_y(L_y - z_2)\{(\beta_{0,0,0} - z_1)\delta_0 + \gamma_{0,0,1}\delta_{11}\}, \delta_0)_{12} \\ &= (R_x R_y((\beta_{0,0,0} - z_1)\{(\omega_{0,0,0} - z_2)\delta_0 + \theta_{0,0,0}\delta_{10}\} \\ &+ \gamma_{0,0,1}\{(\omega_{1,1,1} - z_2)\delta_{11} + \gamma_{0,0,1}\theta_{1,1,1}\delta_{21}\}), \delta_0)_{12} \\ &= (\beta_{0,0,0} - z_1)(\omega_{1,1,1} - z_2)(R_x R_y \delta_0, \delta_0)_{12} \\ &+ (\beta_{0,0,0} - z_1)\theta_{0,0,0}(R_x R_y \delta_{10}, \delta_0)_{12} \\ &+ \gamma_{0,0,1}(\omega_{1,1,1} - z_2)(R_x R_y \delta_{11}, \delta_0)_{12} \\ &+ \gamma_{0,0,1}(\theta_{1,1,1}(R_x R_y \delta_{21}, \delta_0)_{12}), \end{aligned} \quad (29)$$

$$\begin{aligned} 0 &= (\delta_0, \delta_{10})_{12} = (R_x R_y(L_y - z_2)(L_x - z_1)\delta_0, \delta_{10})_{12} \\ &= (R_x R_y(L_y - z_2)\{(\beta_{0,0,0} - z_1)\delta_0 + \gamma_{0,0,1}\delta_{11}\}, \delta_{10})_{12} \\ &= (R_x R_y((\beta_{0,0,0} - z_1)\{(\omega_{0,0,0} - z_2)\delta_0 + \theta_{0,0,0}\delta_{10}\} \\ &+ \gamma_{0,0,1}\{(\omega_{1,1,1} - z_2)\delta_{11} + \gamma_{0,0,1}\theta_{1,1,1}\delta_{21}\}), \delta_{10})_{12} \\ &= (\beta_{0,0,0} - z_1)(\omega_{1,1,1} - z_2)(R_x R_y \delta_0, \delta_{10})_{12} \\ &+ (\beta_{0,0,0} - z_1)\theta_{0,0,0}(R_x R_y \delta_{10}, \delta_{10})_{12} \\ &+ \gamma_{0,0,1}(\omega_{0,0,0} - z_2)(R_x R_y \delta_{11}, \delta_{10})_{12} \\ &+ \gamma_{0,0,1}(\theta_{1,1,1}(R_x R_y \delta_{21}, \delta_{10})_{12}). \end{aligned} \quad (30)$$

Розв'язуючи систему рівнянь (27)–(30), отримуємо:

$$\begin{aligned} 1 &= (\beta_{0,0,0} - z_1)(\omega_{0,0,0} - z_2)(R_x \delta_0, R_y \delta_0) \\ &+ (\beta_{0,0,0} - z_1)\theta_{0,0,0}(R_x \delta_0, R_y \delta_{10}). \end{aligned} \quad (31)$$

При розв'язанні припускалось, що $\beta_{1,0,0} = \beta_{0,0,0}$ та враховано рівність $\gamma_{1,0,1}\theta_{0,0,0} = \gamma_{0,0,1}\theta_{1,1,1}$, яка є наслідком комутативності матриць L_x та L_y .

Виразимо з (31) $(R_x \delta_0, R_y \delta_{10})$ і підставимо його в (25):

$$M' = (c_0, R_y \delta_0 - a_0, R_y \delta_{10})(1 - (\beta_{0,0,0} - z_1)(\omega_{0,0,0} - z_2)M). \quad (32)$$

Таким чином доведена така лема.

Лема 2 Припустимо, що у матриць L_x та L_y

$$\begin{aligned} \alpha_{0;0,0} &= \beta_{1;1,0} = \beta_{1;0,1} = \gamma_{0;0,0} = \gamma_{1;0,0} = \gamma_{1;1,0} \\ &= \gamma_{1;1,1} = 0, \\ \omega_{1;1,0} &= \omega_{1;0,1} = \theta_{1;1,0} = 0, \quad \beta_{1;0,0} = \beta_{0;0,0}, \\ \omega_{1;0,0} &\neq \omega_{1;1,1} \end{aligned} \quad (33)$$

а для матриць A і B виконуються такі умови:

$$A = -B^*, \quad c_{0;0,1} = a_{0;0,1} = 0, \quad c_{0;0,0} \neq a_{0;0,1}. \quad (34)$$

Тоді функція M вигляду (22) задовольняє рівняння (32).

Наслідком Лем 1 і Лем 2 є така теорема.

Теорема 3 Нехай задана система (21), де $\alpha_{-1} = \gamma_{-1} = \tau_{-1} = \theta_{-1} = 0$. Нехай також іс-

нує розв'язок $\alpha_n(t)$, $\beta_n(t)$, $\gamma_n(t)$, $\tau_n(t)$, $\omega_n(t)$, $\theta_n(t)$, $n \rightarrow \infty$ задачі Коші для цієї системи такий, що матриці (18) та (19) породжують обмежені самоспряжені комутуючі оператори в просторі $\mathbf{l}_2$, для яких виконуються умови (33), з коефіцієнтами A та B , для яких виконуються умови (34). Тоді цей розв'язок відновлюється за допомогою формул типу (16), в яких спектральна міра $d\rho(x, y, t)$ знаходиться за початковою спектральною мірою $d\rho(x, y, 0)$ за такою процедурою:

розв'язати задачу Коші для рівняння (32) із початковими умовами $M(z_1, z_2, 0)$, яке знаходиться за $d\rho(x, y, 0)$ з (22);

знайдена функція $M(z_1, z_2, t)$, $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, $t \in [0, T]$ однозначно визначає міру згідно Теорему 2.

Автор вдячна Калюжному О.О. за постановку задачі.

Список використаних джерел

1. Ахиезер Н.И. Классическая проблема моментов / Н.И. Ахиезер. – М.: Гос. физ.-мат. лит., 1961. – 312 с.
2. Березанский Ю.М. Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов / Ю.М. Березанский. – Киев: Наук. думка, 1965. – 450 с.
3. Березанский Ю.М. Интегрирование нелинейных разностных уравнений методом обратной спектральной задачи / Ю.М. Березанский // Докл. АН СССР, – 1985. – **281**, №1. – с. 16-19.
4. Березанский Ю.М. Интегрирование некоторых дифференциально-разностных нелинейных уравнений с помощью спектральной теории блочных якобиевых нормальных матриц / Ю. М. Березанский, А.А. Мошонько // Функ. анализ и прилож. – 2008. – **42**, № 1. – С. 1–21.

References

1. AHYEZER, N. (1961) *The Classical Moment Problem*, M:Fizmatgiz.
2. BEREZANSKY, J. (1965) *Eigenfunction expansion of self-adjoint operators*, Kyev: Nauk. dumka.
3. BEREZANSKY, J. (1985) Integration of non-linear difference equations by means of inverse problem technique, Dokl. AN SSSR. 281(1). pp.16-19.
4. BEREZANSKY, J. and MOKHONKO, A. (2008) Integration of some differential-difference nonlinear equations using the spectral theory of normal block Jacobi matrices, Funk. analiz y prylozh. 42(1). pp. 1–21.

5. Гехтман М. И. Спектральная теория ортогональных полиномов нескольких переменных, /М. И. Гехтман, А. А. Калюжный // Укр.мат.журнал, Ин-т математики АН УССР, Киев. – 1991. – **43**, № 10. – С. 1334–1337.
6. Дудкін М. Є. Блочні матриці типу Якобі відповідні двовимірній проблемі моментів: поліноми другого роду та функція Вейля / М. Є. Дудкін, В. І. Козак // Укр. мат. журнал. – 2016. – **68**, № 4. – С.495–505.
7. Berezansky Yu. M. The integration of semi-infinite Toda chain by means of inverse spectral problem / Yu. M. Berezansky // Rep. Math. phys. –1986. – **24**, №1. – p. 21-47.
8. Berezansky Yu. M. The complex moment problem and direct and inverse spectral problems for the block Jacobi type bounded normal matrices / Yu. M. Berezansky, M. E. Dudkin // Methods Funct. Anal. Topology. – 2005. – **12**, №1. – P. 1–32.
9. Dudkin M.E. Direct and inverse spectral problems for the block Jacobi type bounded symmetric matrices related to the two dimensional real moment problem / M. E. Dudkin, V. I. Kozak // Methods Funct. Anal. Topology. – 2014. – **21**, № 3. – P. 219–251.
10. Gekhman M.I. On the orthogonal polynomials in several variables / Gekhman M.I., Kalyuzhny A.A. // Integr equ oper theory – 1994. – **19**. – С. 404–418.
11. Kac M., van Morbeke P. On an explicitly soluble system of nonlinear differential equations related to certain Toda lattices / M. Kac, P. van Morbeke// Adv. Math. – 1975. – **16**, №2. – p. 160-169.
12. Moser J. Three integrable Hamiltonian systems connected with isospectral deformations / J. Moser // Adv. Math. – 1975. – **16**, №2. – p. 197-220.
5. HEKHTMAN, M. and KALYUZHNYI, A. (1991) Spectral theory of orthogonal polynomials of several variables, Ukrainian Mathematical Journal, 43(10). pp.1334–1337.
6. DUDKIN, M. and KOZAK, V. (2016) The block Jacobi matrix related to type two-dimensional moment problems: second order polynomials and Weyl fubction, Ukr. Mat. Journal, 68(4). pp.495–505.
7. BEREZANSKY, J. (1986) The integration of semi-infinite Toda chain by means of inverse spectral problem, Rep.Math.phys., 24(1). pp. 21-47.
8. BEREZANSKY, J. and DUDKYN, M. (2005) The complex moment problem and direct and inverse spectral problems for the block Jacobi type bounded normal matrices, Methods Funct. Anal. Topology, 12(1). pp. 1–32.
9. DUDKYN, M. and KOZAK, V. (2014) Direct and inverse spectral problems for the block Jacobi type bounded symmetric matrices related to the two dimensional real moment problem, Methods Funct. Anal. Topology, 21(3). pp. 219–251.
10. HEKHTMAN, M. and KALYUZHNIY, A. (1994) On the orthogonal polynomials in several variables, Integr equ oper theory, 19. pp. 404–418.
11. KAC, M. and VAN MORBEKE, P. (1975) On an explicitly soluble system of nonlinear differential equations related to certain Toda lattices, 16(2). pp. 160-169.
12. MOSER, J. (1975) Three integrable Hamiltonian systems connected with isospectral deformations, Adv. Math., 16(2). pp. 197-220.

Надійшла до редколегії 07.06.2016

КОМП'ЮТЕРНІ НАУКИ ТА ІНФОРМАТИКА

УДК 519.63+519. 652

Александрович І.М., к.ф.-м.н., доцент
Молодцов О.І., к.ф.-м.н., доцент

Диференціальне зображення розв'язків рівнянь гіперболічного типу

Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 83000, м. Київ, пр-т.
Глушкова 4д,
e-mail: karateodoria@gmail.com

I. M. Alexandrovich, Cand. Phys. Math. Sci.
O. I. Molodtsov, Cand. Phys. Math. Sci.

Differential representation of hyperbolic equations solutions

Taras Shevchenko National University of Kyiv,
83000, Kyiv, Glushkova st., 4d,
e-mail: karateodoria@gmail.com

В роботі приводяться диференціальні оператори, які переводять довільні функції в регулярні розв'язки рівняння гіперболічного типу другого порядку та ітеративного рівняння. В обох випадках розв'язана задача Коші в замкнутій формі.

Ключові слова: рівняння гіперболічного типу, диференціальні оператори, задача Коші.

Partial differential equations and their iterations play an important role in the approximation theory, mapping theory, in mathematical physics problems that are associated with vibration phenomena as well as in many other practical problems of Applied Mathematics. Building of differential operators, that determine the hyperbolic and elliptic type equations solutions, as well as the hyperbolic and elliptic type equations systems solutions, is, according to the authors, one of the most attractive methods for solving such problems.

A method for obtaining solutions of the second and higher-order hyperbolic equation by the differential operator is proposed, i.e. any function of one variable and its derivatives is reflected by differential operator in a regular solution of the equation. Also a differential operator, that converts arbitrary function in a regular solution of the iterative equation, is built. Necessary and sufficient conditions are established, when the differential operator uniquely determine the regular solutions of the second-order hyperbolic equation and iterative equation. In both cases, as an example, Cauchy problem is solved in a closed form.

Key Words: hyperbolic equation, differential operator, Cauchy problem

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Хусаїнов Д.Я.

Диференціальні рівняння в частинних похідних, що містять диференціальні оператори вигляду $D_m = \frac{\partial^m}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_m}$ та їх ітерації, відіграють важливу роль в теорії апроксимації, теорії відображень, в задачах математичної фізики, пов'язаних з явищами вібрації.

Одним із методів розв'язування таких рівнянь є створення диференціальних операторів, що визначають розв'язок рівнянь гіперболічного або еліптичного типів, а також систем гіперболічного та еліптичного типу [1-4].

В даній роботі будуються диференціальні оператори $Kg(x), Lf(y)$, які переводять довільні функції однієї незалежної змінної в регулярні розв'язки рівняння

$$w_{xy} + A(x, y)w_y + B(x, y)w = 0 \quad (1)$$

де $A \in C^1(D)$, $B \in C^2(D)$, $D \subset R^2$, а також будується диференціальний оператор $Y^m v(x, y)$, що переводить довільні функції в регулярний розв'язок ітерованого рівняння

$$Y_k^m w = \left(\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + \frac{k}{2(x-y)} \left(\frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x} \right) \right)^m w = 0, \quad (2)$$
$$m \in N, \frac{k}{2} \in Z$$

Диференціальний оператор $Kg(x)$, що визначає розв'язок рівняння

$$w_{xy} + \frac{(n-m)\varphi'(x)}{\varphi(x)-\psi(y)} w_y + \frac{n(m+1)\varphi'(x)\psi'(y)}{(\varphi(x)-\psi(y))^2} w = 0, \quad (3)$$

де $\varphi(x), \psi(y)$ - функції, що задовольняють умову $(\varphi(x)-\psi(y))\varphi'(x)\psi'(y) \neq 0$; $n, m \in N \cup \{0\}$, шукатимемо у вигляді

$$Kg(x) = \sum_{k=0}^n c_k a^{n-k}(x, y) g^{(k)}(x), \quad (4)$$

де $c_k \in R, c_0 \neq 0, c_n = 1, a(x, y)$ - невідома функція, відмінна від нуля, $g(x)$ - довільна функція, достатнє число разів диференційована в області D .

Щоб знайти коефіцієнти $c_k, k = \overline{0, n-1}$ і функцію $a(x, y)$, одержуємо наступну систему рівнянь:

$$c_k \{ (n-k)a^{n-k-1} a_{xy} + (n-k)(n-k-1)a^{n-k-2} a_x a_y + \frac{(n-m)\varphi'(x)}{\varphi(x)-\psi(y)} (n-k)a^{n-k-1} a_y + \frac{n(m+1)\varphi'(x)\psi'(y)}{(\varphi(x)-\psi(y))^2} a^{n-k} \} + c_{k-1} (n+1-k)a^{n-k} a_y = 0, \quad k = \overline{0, n-1} \quad (5)$$

$$c_{n-1} a_y = -\frac{n(m+1)\varphi'(x)\psi'(y)}{(\varphi(x)-\psi(y))^2}, \quad c_{-1} = 0. \quad (6)$$

За формулами (5), (6) маємо

$$a(x, y) = -\frac{(m+1)\varphi'(x)}{\varphi(x)-\psi(y)}, \quad (7)$$

$$c_{k-1} = \frac{k(n-k+1+m)}{(n-k+1)(m+1)} c_k. \quad (8)$$

За допомогою (8), враховуючи, що $c_n = 1$, одержуємо

$$c_k = \frac{n!(m+1)_{n-k}}{(m+1)^{n-k} (n-k)! k!}. \quad (9)$$

Тут $(m+1)_{n-k} = (m+1)(m+2)\dots(m+n-k)$ - символ Похгаммера. Отже оператор $Kg(x)$ має вигляд

$$Kg(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \frac{n!(m+1)_{n-k}}{k!(n-k)!} \times \frac{(\varphi'(x))^{n-k}}{(\varphi(x)-\psi(y))^{n-k}} g^{(k)}(x) \quad (10)$$

і є розв'язком рівняння (3), тобто $w(x, y) = Kg(x)$.

Диференціальний оператор $Lf(y)$, який також визначає розв'язок рівняння (3), шукатимемо у вигляді

$$Lf(y) = \sum_{k=0}^n c_k b^{n-k}(x, y) f^{(k)}(y), \quad (11)$$

де $c_k \in R, c_0 \neq 0, b = b(x, y) \neq 0, f(y)$ - довільна функція.

Підставляючи праву частину (11) в (3) і прирівнюючи коефіцієнти при $f^{(k)}(y)$, одержуємо систему

$$c_{k-1} \left[(n-k+1)b^2 b_x + \frac{(n-m)\varphi'(x)}{\varphi(x)-\psi(y)} b^3 \right] + c_k \left[(n-k-1)b_x b_y + (n-k)bb_{xy} + \frac{(n-m)\varphi'(x)}{\varphi(x)-\psi(y)} (n-k)bb_y + \frac{n(m+1)\varphi'(x)\psi'(y)}{(\varphi(x)-\psi(y))^2} b^2 \right] = 0, \quad c_{-1} = 0, \quad k = \overline{0, n} \quad (12)$$

$$\frac{(n-m)\varphi'(x)}{\varphi(x)-\psi(y)} b + (n-m)b_x = 0. \quad (13)$$

З рівняння (13) знаходимо

$$b(x, y) = -\frac{\psi'(y)}{\varphi(x)-\psi(y)} \quad (14)$$

Підставляючи (14) в (12), одержуємо рекурентну формулу для c_k

$$c_{k-1} = kc_k \frac{n+m-k+1}{k-m-1}. \quad (15)$$

Нехай $c_m = 1$. Тоді

$$c_{m-1} = -m \frac{n+1}{1!}, \quad c_{m-2} = \frac{(m-1)m(n+1)(n+2)}{2!}, \dots$$

Отже маємо

$$c_k = (-1)^{m-k} \frac{m!(n+1)_{m-k}}{k!(m-k)!}. \quad (16)$$

Остаточно оператор $Lf(y)$ має вигляд

$$Lf(y) = \sum_{k=0}^m (-1)^{m-k} \frac{m!(n+1)_{m-k}}{k!(m-k)!} \times \frac{(-\psi'(y))^{n-k}}{(\varphi(x) - \psi(y))^{n-k}} f^{(k)}(y) \quad (17)$$

і є розв'язком рівняння (3), тобто $w(x, y) = Lf(y)$.

Одержані результати сформулюємо наступною теоремою.

Теорема Нехай $g(x), f(y)$ - довільні функції, достатнє число разів диференційовані в області D . Тоді функція $w(x, y)$, що задається рівністю $w(x, y) = Kg(x) + Lf(y) =$

$$= \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \frac{n!(m+1)_{n-k}}{k!(n-k)!} \frac{(\varphi'(x))^{n-k}}{(\varphi(x) - \psi(y))^{n-k}} g^{(k)}(x) + \sum_{k=0}^m (-1)^{m+n} \frac{m!(n+1)_{m-k}}{k!(m-k)!} \frac{(\psi'(y))^{n-k}}{(\varphi(x) - \psi(y))^{n-k}} f^{(k)}(y) \quad (18)$$

є розв'язком рівняння (3).

Як приклад розглянемо задачу Коші.

В області $D = [a, b] \times [a, b]$ знайти розв'язок рівняння

$$w_{xy} + \frac{2}{(x-y)^2} w = 0, \quad (19)$$

справджуючи умови

$$w(x, y)|_{y=-x} = \alpha(x), \quad \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} \right)_{y=-x} = \beta(x), \quad (20)$$

де $\alpha(x) \in C^2([a, b])$, $\beta(x) \in C^2([a, b])$ - задані функції, $x - y \neq 0$ в області D .

Розв'язок задачі, за формулою (18), шукаємо у вигляді

$$w(x, y) = -\frac{2}{x-y} g(x) + g'(x) + \frac{2}{x-y} f(y) + f'(y) \quad (21)$$

Задовольняючи умовам (20), матимемо шукані функції $g(x), f(y)$:

$$g(x) = \frac{x}{2} \int_{x_0}^x \frac{\alpha(t)}{t} dt + \frac{1}{2} \int_{x_0}^x t dt \int_{x_0}^t \frac{\beta(\tau)}{\tau} d\tau + \frac{1}{2} c_0 x + \frac{1}{4} c_1 x^2 + \frac{1}{2} c_2$$

$$f(y) = \frac{1}{2} \int_{x_0}^{-y} t dt \int_{x_0}^t \frac{\beta(\tau)}{\tau} d\tau + \frac{y}{2} \int_{x_0}^{-y} \frac{\alpha(t)}{t} dt + c_1 \frac{y^2}{4} + c_0 \frac{y}{2} + \frac{1}{2} c_2$$

Підставляючи знайдені функції в (21), одержуємо розв'язок задачі (19), (20):

$$w(x, y) = \frac{\alpha(x)}{2} + \frac{\alpha(-y)}{2} + \frac{x+y}{2} \int_{x_0}^x \frac{\beta(t)}{t} dt - \int_{-y}^x \left(\frac{x+y}{2(x-y)} \frac{\alpha(t)}{t} + \frac{y}{2} \frac{\beta(t)}{t} + \frac{t}{x-y} \int_{x_0}^t \frac{\beta(\tau)}{\tau} d\tau \right) dt$$

Переходимо до побудови диференціального оператора $Y_k^m v(x, y)$ для випадку $2k \in \mathbb{Z}$.

Перетворимо диференціальне рівняння

(2). Нехай $w = (x-y)^{-\frac{k}{2}} v$. Матимемо

$$Y_{\frac{k-1}{2}}^m v = \left(\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + \frac{\frac{k}{2} \left(\frac{k}{2} + 1 \right)}{(x-y)^2} \right)^m v(x, y) = 0, \quad (22)$$

або

$$Y_n^m v = \left(\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + \frac{n(n+1)}{(x-y)^2} \right)^m v = 0, n \in \mathbb{N}_0. \quad (22.1)$$

Нехай D - область у верхній півплощині.

Розглянемо рівняння (22.1) при $m = 1$

$$Y_n v = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{n(n+1)v}{(x-y)^2} = 0, \quad (23)$$

розв'язок якого в області D за формулою (18) має вигляд

$$v(x, y) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^{n-k} (2n-k)!}{k!(n-k)!} \frac{1}{(x-y)^{n-k}} g^{(k)}(x) + \sum_{k=0}^n \frac{(2n-k)!}{k!(n-k)!} \frac{1}{(x-y)^{n-k}} f^{(k)}(y), \quad (24)$$

де $g(x), f(y)$ - довільні в D функції.

Формулу (24) можна подати у вигляді

$$v(x, y) = K_n g(x) + L_n f(y), \quad (24.1)$$

$$\text{де } K_n = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^{n-k} (2n-k)!}{k!(n-k)!} \frac{1}{(x-y)^{n-k}} \frac{\partial^k}{\partial x^k},$$

$$L_n = \sum_{k=0}^n \frac{(2n-k)!}{k!(n-k)!} \frac{1}{(x-y)^{n-k}} \frac{\partial^k}{\partial y^k}.$$

Переходимо до рівняння (22.1) при $m \geq 2$

і доведемо, що $v(x, y) = \sum_{i=0}^{m-1} (x+y)^i v_i$, де

$$v_i = K_n g_i + L_n f_i.$$

Лема. Якщо $v_i(x, y)$ ($i = \overline{0, m-1}$) є $2(i+1)$ разів неперервно диференційованими розв'язками рівняння $Y_n v = 0$, то функція, визначена рівністю

$$v(x, y) = \sum_{i=0}^{m-1} v_i(x, y)(x+y)^i, \quad m \geq 2 \quad (25)$$

задовольняє рівняння $Y_n^m v = 0$.

◁ Доведення проведемо методом математичної індукції. Перевіримо справедливості твердження для $m = 2$. Маємо

$$Y_n^2 v = \left(\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + \frac{n(n+1)}{(x-y)^2} \right)^2 v = 0 \quad (22.2)$$

Безпосередньою перевіркою переконуємося, що функція $v(x, y) = v_0(x, y) + v_1(x, y)(x+y)$, де $v_i(x, y)$ ($i = 0, 1$) задовольняють рівнянню $Y_n v = 0$, є розв'язком рівняння (22.2). Дійсно, враховуючи що

$$Y_n = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + \frac{n(n+1)}{(x-y)^2}, \quad Y_n v_0 = 0, \quad Y_n v_1 = 0$$

$$Y_n((x+y)v_1) = \frac{\partial^2((x+y)v_1)}{\partial x \partial y} + \frac{n(n+1)}{(x-y)^2}((x+y)v_1) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial y} \left(v_1 + (x+y) \frac{\partial v_1}{\partial x} \right) + \frac{n(n+1)}{(x-y)^2} (x+y) v_1 =$$

$$= \frac{\partial v_1}{\partial y} + \frac{\partial v_1}{\partial x} + (x+y) \frac{\partial^2 v_1}{\partial x \partial y} + \frac{n(n+1)(x+y)}{(x-y)^2} v_1 =$$

$$= Y_n v_1 + \frac{\partial v_1}{\partial y} + \frac{\partial v_1}{\partial x} = \frac{\partial v_1}{\partial y} + \frac{\partial v_1}{\partial x}, \text{ тобто}$$

$$Y_n((x+y)v_1) = \frac{\partial v_1}{\partial y} + \frac{\partial v_1}{\partial x}, \text{ маємо}$$

$$Y_n^2 v = Y_n(Y_n(v_0 + (x+y)v_1)) =$$

$$= Y_n(Y_n v_0 + Y_n((x+y)v_1)) = Y_n \left(\frac{\partial v_1}{\partial y} + \frac{\partial v_1}{\partial x} \right) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial y} Y_n v_1 + \frac{\partial}{\partial x} Y_n v_1 = 0.$$

Нехай функція

$$v(x, y) = \sum_{i=0}^{m-2} v_i(x, y)(x+y)^i,$$

де $v_i(x, y)$ - розв'язок рівняння $Y_n v = 0$, задовольняє рівнянню $Y_n^{m-1} v = 0$. На основі цього припущення доведемо справедливості леми для наступного натурального числа m . Для цього безпосередньою перевіркою переконуємося, що функція, визначена рівністю (25), задовольняє рівнянню (22.1):

$$Y_n^m v = Y_n(Y_n^{m-1} v) = Y_n Y_n^{m-1} \left(\sum_{i=0}^{m-2} v_i(x, y)(x+y)^i + v_{m-1}(x, y)(x+y)^{m-1} \right) =$$

$$Y_n^m \left((x+y)^{m-1} v_{m-1}(x, y) \right) = Y_n^{m-1} \left(\sum_{i=0}^{m-2} v_i(x, y)(x+y)^i \right) = 0 \quad \text{за}$$

припущенням. Залишилося довести, що

$$Y_n^m \left((x+y)^{m-1} v_{m-1}(x, y) \right) = 0. \quad (26)$$

З метою спрощення доведення позначимо

$$v_{m-1} = \tilde{v} \quad (27)$$

$$\text{Тоді } Y_n^m \left((x+y)^{m-1} \tilde{v} \right) = Y_n^{m-1} \left(Y_n \left((x+y)^{m-1} \tilde{v} \right) \right).$$

Розглянемо

$$Y_n \left((x+y)^{m-1} \tilde{v} \right) =$$

$$= \left(\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + \frac{n(n+1)}{(x-y)^2} \right) \left((x+y)^{m-1} \tilde{v} \right) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial y} \left((m-1)(x+y)^{m-2} \tilde{v} + (x+y)^{m-1} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} \right) + \frac{n(n+1)}{(x-y)^2} (x+y)^{m-1} \tilde{v} =$$

$$= (m-1)(m-2)(x+y)^{m-3} \tilde{v} +$$

$$+ (m-1)(x+y)^{m-2} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} + (m-1)(x+y)^{m-2} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} +$$

$$+ (x+y)^{m-1} \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial x \partial y} + \frac{n(n+1)}{(x-y)^2} (x+y)^{m-1} \tilde{v} = \quad (28)$$

$$= (x+y)^{m-1} Y_n \tilde{v} + (m-1)(x+y)^{m-2} \left(\frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} \right) +$$

$$+ (m-1)(m-2)(x+y)^{m-3} \tilde{v}$$

Рівність (26) доводиться знову ж таки методом математичної індукції. При $m = 1$ рівність

$Y_n v_0 = 0$ істина за умовою леми. Припускаємо де справедливості (26) для $m < n$, тобто

$$Y_n^m((x+y)^{m-1}\tilde{v}) = 0, \quad m < n, \quad (29)$$

звідси маємо

$$Y_n^m((x+y)^{r-1}\tilde{v}) = 0, \quad r < n. \quad (30)$$

Дійсно,

$$Y_n^m((x+y)^{r-1}\tilde{v}) = Y_n^{m-r}(Y_n^r((x+y)^{r-1}\tilde{v})) = 0.$$

Використовуючи рівності (28) і (30), доведемо справедливості рівності (26) для m .

$$\begin{aligned} Y_n^m((x+y)^{m-1}\tilde{v}) &= \\ &= (m-1)Y_n^{m-1}\left((x+y)^{m-2}\left(\frac{\partial\tilde{v}}{\partial x} + \frac{\partial\tilde{v}}{\partial y}\right)\right) + \\ &+ (m-1)(m-2)Y_n^{m-1}((x+y)^{m-3}\tilde{v}) = 0 \end{aligned}$$

Лема доведена. $\triangleright$

Результати сформулюємо наступною теоремою.

Теорема. а) Для всякого розв'язку рівняння (22.1) $Y_n^m v = 0, m \geq 2$ знайдуться в області D функції $g_i(x), f_i(y)$ такі, що

$$v(x, y) = \sum_{i=0}^{m-1} (x+y)^i (K_n g_i + L_n f_i) \quad (31)$$

б) Навпаки. Якщо $g_i(x), f_i(y)$ - довільні в D функції, потрібне число разів диференційовані, то (31) є розв'язком рівняння (22.1) в D .

Застосуємо формулу (31) до розв'язування задачі Коші для рівняння

$$Y_n^2 v = \left(\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + \frac{2}{(x-y)^2} \right)^2 v = 0. \quad (32)$$

Задача Коші. Нехай D - квадрат $[a, b] \times [a, b]$. Знайти в області D розв'язок рівняння (32), справджуючи умови:

$$v(x, y)|_{y=-x} = \alpha_1(x);$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \right) v(x, y)|_{y=-x} = \alpha_2(x);$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 v(x, y)|_{y=-x} = \alpha_3(x);$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \right)^3 v(x, y)|_{y=-x} = \alpha_4(x),$$

$$\begin{aligned} \alpha_1(x) &\in C^4([a, b]), \alpha_2(x) \in C([a, b]), \\ \alpha_3(x) &\in C^2([a, b]), \alpha_4(x) \in C([a, b]). \end{aligned}$$

Вважатимемо також, що $x - y \neq 0$ в області D .

Розв'язок задачі шукаємо за формулою (31) з урахуванням (24.1) у вигляді

$$\begin{aligned} v(x, y) &= -\frac{2}{x-y} g(x) + g'(x) + \\ &+ \frac{2}{x-y} f(y) + f'(y) + \\ &+ (x+y) \left(-\frac{2}{x-y} g_1(x) + g'_1(x) + \right. \\ &\left. + \frac{2}{x-y} f_1(y) + f'_1(y) \right). \end{aligned} \quad (34)$$

Задовольняючи умови (33), для знаходження функцій $g(x), g_1(x), f(y), f_1(y)$ одержуємо систему рівнянь, розв'язок якої буде мати вигляд

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{x}{2} \int_{x_0}^x \frac{\alpha_1(t)}{t} dt + \frac{1}{2} \int_{x_0}^x \tau \left(\int_{x_0}^{\tau} \frac{\tilde{\alpha}_2(t)}{t} dt \right) d\tau + \\ &+ c_1 \frac{x}{2} + c_7 \frac{x^2}{4} + \frac{c_8}{2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_1(x) &= \frac{1}{2} \int_{x_0}^x d\xi \left(\int_{x_0}^{\xi} \tau \left(\int_{x_0}^{\tau} \frac{\tilde{\alpha}_4(t)}{6t} dt \right) d\tau \right) + \\ &+ \frac{1}{2} \int_{x_0}^x \tau \left(\int_{x_0}^{\tau} \frac{\tilde{\alpha}_3(t)}{6t} dt \right) d\tau + c_2 \frac{x^2}{4} + \frac{c_3}{2} + \\ &+ c_4 \frac{x^3}{12} + \frac{c_5}{2} x + \frac{c_6}{2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(y) &= \int_{x_0}^{-y} \tau \left(\int_{x_0}^{\tau} \frac{\tilde{\alpha}_2(t)}{t} dt \right) d\tau + \frac{y}{2} \int_{x_0}^{-y} \frac{\tilde{\alpha}_1(t)}{t} dt + \\ &+ c_1 \frac{y}{2} + c_7 \frac{y^2}{4} + \frac{c_8}{2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_1(y) &= \frac{1}{2} \int_{x_0}^{-y} \tau \left(\int_{x_0}^{\tau} \frac{\tilde{\alpha}_3(t)}{t} dt \right) d\tau - \\ &- \frac{1}{2} \int_{x_0}^{-y} d\xi \int_{x_0}^{\xi} \tau \left(\int_{x_0}^{\tau} \frac{\tilde{\alpha}_4(t)}{6t} dt \right) d\tau + \\ &+ c_2 \frac{y^2}{4} + \frac{c_3}{2} + c_4 \frac{y^3}{12} + c_5 \frac{y}{2} - \frac{c_6}{2}. \end{aligned} \quad (33)$$

Тут

$$\tilde{\alpha}_3(x) = \alpha_3(x) + \frac{2\alpha_1(x)}{x^2} - \alpha_1''(x),$$

$$\tilde{\alpha}_4(x) = \alpha_4(x) + \frac{\tilde{\alpha}_3(x)}{2x^2} - \frac{\tilde{\alpha}_3''(x)}{4},$$

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}_2(x) = & \alpha_2(x) - 2 \int_x^x \tau \left(\int_{x_0}^{\tau} \frac{\tilde{\alpha}_4(t)}{6t} dt \right) d\tau + \\ & + \frac{2}{x} \int_x^x d\xi \int_{x_0}^{\xi} \tau \left(\int_{x_0}^{\tau} \frac{\tilde{\alpha}_4(t)}{6t} dt \right) d\tau, \end{aligned}$$

Тобто виражаються через функції, задані умовою (33).

Підставляючи знайдені функції $g(x), g_1(x), f(y), f_1(y)$ у формулу (34), одержимо розв'язок задачі Коші (32), (33):

$$\begin{aligned} v(x, y) = & \int_{-y}^x E_1(x, y, t) dt + (x + y) \int_{-y}^x E_2(x, y, t) dt + \\ & + \frac{1}{2} \alpha_1(x) + \frac{1}{2} \alpha_1(-y), \end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned} E_1(x, y, t) = & -\frac{x}{x-y} \frac{\alpha_1(t)}{t} - \frac{t}{x-y} \int_{x_0}^t \frac{\tilde{\alpha}_2(\xi)}{\xi} d\xi + \\ & + \frac{1}{2} \frac{\alpha_1(t)}{t} + \frac{x}{2} \frac{\tilde{\alpha}_2(t)}{t} - \frac{x+y}{x-y} t \int_{x_0}^t \frac{\tilde{\alpha}_3(\xi)}{\xi} d\xi - \\ & - \frac{x+y}{x-y} \int_{x_0}^t \left(\int_{x_0}^{\tau} \frac{\tilde{\alpha}_4(\xi)}{6\xi} d\xi \right) d\tau + \frac{x(x+y)}{2} \frac{\tilde{\alpha}_3(t)}{4t} + \\ & + \frac{x+y}{2} t \int_{x_0}^t \frac{\tilde{\alpha}_4(\xi)}{6\xi} d\xi, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_2(x, y, t) = & \frac{1}{2} \frac{\tilde{\alpha}_2(t)}{t} - \frac{2}{x-y} \int_{x_0}^t \left(\int_{x_0}^{\tau} \frac{\tilde{\alpha}_4(\xi)}{6\xi} d\xi \right) d\tau + \\ & + \frac{x+y}{2} \frac{\tilde{\alpha}_3(t)}{4t} + t \int_{x_0}^t \frac{\tilde{\alpha}_4(\xi)}{6\xi} d\xi. \end{aligned}$$

Список використаних джерел

1. Пахарева Н.А., Александрович И.Н. Построение дифференциальных операторов, определяющих решение уравнения $w_{xy} + A(x, y)w_y + B(x, y)w = 0$ // Математическая физика и нелинейная механика, 1986.- №6(40).- с.75-81.
2. Александрович И.Н. Дифференциальные операторы, определяющие решение одного класса уравнений эллиптического типа. // Укр. мат. журнал. - 1989.- т.41, №6.- с.825-828.
3. Положий Г.Н. Теория и применение p -аналитических и (p, q) -аналитических функций. - Киев: Наукова думка, 1973.- 424 С.
4. Александрович И.М., Сидорова Д.М. Рівняння гіперболічного типу четвертого порядку. // VIII Міжнародна конференція імені академіка І.І.Ляшка «Обчислювальна та прикладна математика», Київ, 2015. – с.15-16.

References

1. PAHARYOVA N.A., ALEXANDROVICH I.N. (1986) Postroenie differencialnyh operatorov, opredelyajushih reshenije uravnenija $w_{xy} + A(x, y)w_y + B(x, y)w = 0$. *Matematicheskaya fizika i nelinejaya mehanika*. №6(40). p.75-81.
2. ALEXANDROVICH I.N. (1989) Differencialnie operatory, opredelyajushie reshenije odnogo klassa uravnenij ellipticheskogo tipa. *Ukr.mat.journal*, №6. p.825-828.
3. POLOZHIY G.N. (1973) *Teorija i primenenije p-analiticheskikh I (p, q)-analiticheskikh funkcij*. Kiev: Naukova dumka.
4. ALEXANDROVICH I.N., SIDOROVA D.M. Rivnyannya hiberbolichnoho typu chetvertoho poryadku. In *VIII International conference named after Academician I.I.Lyashko "Computational and Applied Mathematics"*. Kyiv, 2015. pp. 15-16.

Надійшла до редколегії 10.09.2016

УДК 519.8

Брила А.Ю., к.ф.-м.н., доц.,
Антосяк П.П., к.ф.-м.н.,

A.Yu. Brila, Ph.D.,
P.P. Antosyak, Ph.D.,

Багаторівневі оптимізаційні задачі з лексикографічними обмеженнями

Multilevel optimization problems with lexicographic constraints

Ужгородський національний університет,
88000, м. Ужгород, вул. Університетська, 14
e-mail: brila_andrij@ukr.net, antosp@ukr.net

Uzhgorod National University, 88000,
Uzhgorod, Universitetska str., 14,
e-mail: brila_andrij@ukr.net, antosp@ukr.net

Розглядаються багаторівневі оптимізаційні задачі з лексикографічними обмеженнями. Для їх розв'язання запропоновано підхід, що ґрунтується на використанні додатної лінійної згортки складових лексикографічних обмежень. Розглядаються також задачі оптимізації, що містять лексикографічні обмеження з альтернативними складовими. Для їх розв'язання також запропоновано підхід, що ґрунтується на використанні додатної згортки складових.

Ключові слова: задачі прийняття рішень, лексикографічні обмеження, альтернативні обмеження.

Multilevel optimization problems are considered. These problems contain lexicographic constraints which consist of ranked linear constraints (some of them can be alternative). The approach of reducing lexicographic constraints to scalar constraints is proposed. This approach is based on a linear convolution of particular constraints of the lexicographic constraint. So on contrary to approaches which base on replacement of the lexicographic constraints with system of scalar constraints our approach allows not to increase number of inequalities of feasible set. It allows not to change the structure of some specific problems (such a knapsack problems and others) and allows to apply the most appropriate methods of their solving. Also optimization problems are considered, which contain lexicographic constraints with alternative particular constraints. For solving such problems, the scalarization method is considered and the approach of reducing such constraints to scalar constraints is proposed. These approaches allow to reduce lexicographic constraints to scalar constraints. So we can use well known optimization methods and reduce computational complexity of solving algorithms.

Key Words: decision making problem, lexicographical constraints, alternative constraints.

Статтю представив д.т.н., проф. Волошин О.Ф.

1. Вступ

Багато прикладних оптимізаційних задач в економіці, теорії розкладів та ін. можуть містити так звані лексикографічні обмеження [1]. Ці задачі також відносять до багаторівневих оптимізаційних задач [2]. Лексикографічні обмеження виникають як правило у випадку, коли рішення приймається q ($q > 1$) експертами, яких проранжовано за їх важливістю. Кожен з експертів визначає власні обмеження на множину допустимих альтернатив. Вважаємо, що альтернатива є допустимою тоді і тільки тоді, коли має місце один з випадків [1]:

1) перше обмеження виконується як строга нерівність;

2) перше обмеження виконується як рівність і друге обмеження виконується як строга нерівність;

...

к) попередні $k - 1$ ($1 \leq k \leq q$) обмежень виконуються як рівності і k -тє обмеження виконується як строга нерівність;

...

q) попередні $q - 1$ обмежень виконуються як рівності і q -тє обмеження виконується як строга нерівність.

q+1) усі обмеження виконуються як рівності.

Включення лексикографічних обмежень ускладнює процес розв'язання. Оскільки використання аналогу схеми скаляризації для багатокритеріальних задач оптимізації [1]

призводить до неможливості застосування класичних методів розв'язання багатьох задач (наприклад, задачі про рюкзак, транспортної задачі та ін.). У роботі запропоновано підхід, що ґрунтується на використанні додатної лінійної згортки обмежень. Це дає можливість звести задачу до звичайної задачі з скалярними обмеженнями і застосувати класичні методи для їх розв'язання. Подібний підхід досліджувався у [3,4] при розв'язанні булевої багаторівневої задачі оптимізації.

Задачі оптимізації, які містять лексикографічні обмеження з альтернативними складовими також виникають у випадку, коли рішення приймається q ($q > 1$) експертами, яких проранжовано за важливістю [5]. Кожен з експертів визначає декілька альтернативних обмежень на множину допустимих альтернатив і вважає, що принаймні одне із них повинно виконуватись. Будемо вважати, що альтернатива є допустимою, якщо має місце один з випадків [1]:

1) одне з обмежень, запропонованих першим експертом виконується як строга нерівність;

2) одне з обмежень запропонованих першим експертом виконується як рівність і одне з обмежень запропонованих другим експертом виконується як строга нерівність;

...

k) одне з обмежень запропонованих i -вим ($i=1,2,...,k-1$) експертом виконується як рівність і одне з обмежень запропонованих k -вим експертом виконується як строга нерівність;

...

q) одне з обмежень запропонованих i -вим ($i=1,2,...,q-1$) експертом виконується як рівність і одне з обмежень запропонованих q -вим експертом виконується як строга нерівність;

$q+1$) одне з обмежень запропонованих i -вим ($i=1,2,...,q$) експертом виконується як рівність.

Альтернативні обмеження було досліджено багатьма авторами [6,7]. Але вони не розглядали їх як частину лексикографічних обмежень, як це зроблено у даній роботі. Іншими словами, кожен рівень лексикографічного обмеження складається з декількох альтернативних обмежень. Для розв'язання цієї задачі також може бути застосовано механізм схеми скаляризації, але це знову ж таки призводить до неможливості застосування класичних методів і призводить до зростання обчислювальної складності алгоритму

розв'язання. Використання ж додатної згортки обмежень дозволяє звести задачу до задачі зі скалярними обмеженнями, що дозволяє спростити процес розв'язання.

Будемо розглядати задачу математичного програмування

$$\max(c(x): x \in X \subset \mathbf{Z}^n), \quad (1)$$

де:

цільова функція є скалярною
 $c(x): \mathbf{Z}^n \rightarrow \mathbf{R}$;

множина допустимих розв'язків X
задається за допомогою
лексикографічних обмежень або
лексикографічних обмежень з
альтернативними обмеженнями.

Робота містить 5 розділів. У другому розділі розкрито зміст лексикографічних обмежень та розглянуто деякі підходи, до розв'язання задач з лексикографічними обмеженнями. У третьому розділі розглядається підхід до зведення лінійних задач оптимізації з лексикографічними обмеження до лінійних задач з скалярними обмеженнями, використовуючи додатну лінійну згортку обмежень. Четвертий розділ містить опис лексикографічних обмежень з альтернативними обмеженнями та схему скаляризації для розв'язання задач оптимізації з такими обмеженнями. У п'ятому розділі наведено підхід до розв'язання задач оптимізації з альтернативними обмеженнями, що ґрунтується на використанні додатної згортки критеріїв.

2. Лексикографічні обмеження і методи розв'язання оптимізаційних задач з лексикографічними обмеженнями

У цьому розділі ми коротко розглянемо зміст лексикографічних обмежень та методи розв'язання задач, що містять такі обмеження.

2.1. Лексикографічні обмеження

Лексикографічні обмеження було розглянуто багатьма авторами [1,3,4]. У загальному, лексикографічні обмеження задаються векторною нерівністю

$$g(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq^L b, \quad (2)$$

де

$$g: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^q,$$

$$g(x) = (g_1(x), g_2(x), \dots, g_q(x)),$$

$$g_i(x): \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}, \quad i=1,2,\dots,q,$$

$b \in \mathbf{R}^q$ є вектором $b = (b_1, b_2, \dots, b_q)$, і " $\leq^L$ " означає, що вектори порівнюються з використанням правил лексикографічного

порівняння [1,5]. Тобто лексикографічне обмеження складається з q обмежень:

$$g_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq b_1,$$

$$g_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq b_2,$$

...

$$g_q(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq b_q.$$

Альтернатива $x \in \mathbf{R}^n$ задовольняє лексикографічне обмеження (2) якщо виконується одне із наступних обмежень:

1) $g_1(x) < b_1$;

2) $g_1(x) = b_1$,
 $g_2(x) < b_2$;

3) $g_1(x) = b_1$,
 $g_2(x) = b_2$,
 $g_3(x) < b_3$;

...

q) $g_1(x) = b_1$,
 $g_2(x) = b_2$,

...

$g_{q-1}(x) = b_{q-1}$,

$g_q(x) < b_q$;

q+1) $g_i(x) = b_i, i = 1, 2, \dots, q$.

Приклад. Розглянемо лексикографічного обмеження [1] приклад

$$(-x_1 + x_2, 2x_1 + x_2) \leq^L (1, 2).$$

Графічне представлення лексикографічного обмеження наведено на рис. 1.

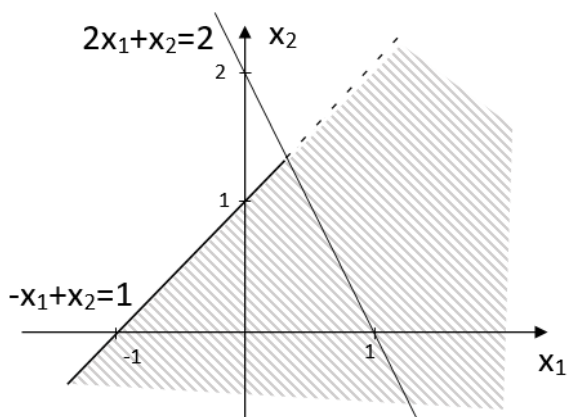


Рис. 1. Приклад лексикографічного обмеження

2.2. Методи розв'язання задач з лексикографічними обмеженнями

2.2.1. Зведення лексикографічного обмеження до системи скалярних обмежень

Підхід до заміни лексикографічного обмеження системою скалярних обмежень для

випадку дискретної або частково дискретної множини допустимих розв'язків було запропоновано у [1]. Але, як було зазначено раніше, це призводить до неможливості застосування класичних методів розв'язання задач особливого типу, таких як задачі про рюкзаки, транспортних задач, задач про максимальний потік та ін. З іншого боку такий підхід дозволяє звести задачі з лексикографічними обмеженнями до задач зі скалярними обмеженнями, що спрощує процес розв'язання задачі.

2.2.2. Схема скаляризації для розв'язання задач зі скалярними обмеженнями

Очевидно задачу (1) з лексикографічним обмеженням можна розв'язати використовуючи аналог схеми скаляризації для лексикографічних багатокритеріальних задач оптимізації [1,5]. Ця схема скаляризації складається з кроків.

Крок 1. Знаходимо оптимальний розв'язок задачі

$$c(\bar{x}^1) = \max(c(x) : g_1(x) \leq b_1). \quad (3)$$

Якщо задача (3) не має розв'язку, то і задача (1) не має розв'язку [1]. Якщо $g_1(\bar{x}^1) < b_1$ або $g_1(\bar{x}^1) = b_1$ і (3) має єдиний розв'язок, тоді $\bar{x}^1$ є розв'язком задачі (1). В іншому випадку переходимо до кроку 2.

Крок 2. Знаходимо оптимальних розв'язок задачі

$$c(\bar{x}^2) = \max(c(x) : g_1(x) = b_1, g_2(x) \leq b_2). \quad (4)$$

Якщо $g_2(\bar{x}^2) < b_2$ або $g_2(\bar{x}^2) = b_2$ і (4) має єдиний розв'язок, тоді $\bar{x}^2$ є розв'язком задачі (1). Інакше переходимо до кроку 3.

...

Крок q. Знаходимо оптимальний розв'язок задачі

$$c(\bar{x}^q) = \max(c(x) : g_i(x) = b_i, i = 1, 2, \dots, q-1, g_q(x) \leq b_q).$$

Оптимальний розв'язок $\bar{x}^q$ є оптимальним розв'язком задачі (1).

Як бачимо на кожному кроці цієї схеми розв'язання доводиться додавати додаткові обмеження, що призводить до зростання обчислювальної складності алгоритму розв'язання.

3. Зведення лінійної задачі оптимізації з лексикографічними обмеження до задачі оптимізації з скалярними обмеженнями

Розглянемо лінійну задачу оптимізації з лексикографічним обмеженням

$$\max \left(c(x) = \sum_{j=1}^n c_j x_j : x \in X \subseteq D \subset \mathbf{Z}^n, x_j \geq 0, j=1,2,\dots,n \right), (5)$$

де:

цільова функція є лінійною

$$c(x) = \sum_{j=1}^n c_j x_j, c_j \in \mathbf{R}, j=1,2,\dots,n;$$

множина допустимих розв'язків X задається лінійним лексикографічним обмеженням

$$g(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq^L b, (6)$$

$$g = (g_1, g_2, \dots, g_q),$$

$$g_i(x) = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j, i=1,2,\dots,q,$$

$$a_{ij} \in \mathbf{R}, i=1,2,\dots,q, j=1,2,\dots,n,$$

$$b \in \mathbf{R}^n, b = (b_1, b_2, \dots, b_q) \geq 0.$$

У [8] розглядається підхід до розв'язання задач лексикографічної багатокритеріальної оптимізації, що ґрунтується на використанні додатної лінійної згортки критеріїв. Подібний підхід було використано для розв'язання однієї булевої багаторівневої задачі (Multilevel Boolean Problems) [3,4]. Застосуємо аналогічний підхід для розв'язання задачі (5).

Розглянемо послідовність додатних чисел $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_q$, де α_q є довільним додатним числом, а інші числа $\alpha_{q-1}, \alpha_{q-2}, \dots, \alpha_1$ послідовно визначені згідно з умовою

$$\alpha_r > \frac{1}{\mu_r} \sum_{k=r+1}^q \alpha_k M_k, r = q-1, q-2, \dots, 1; (7)$$

де

$$M_k = \sup \{ b_k - g_k(x) : x \in D \}, k = 2, \dots, q; (8)$$

$$0 < \mu_r \leq \inf_{\substack{x \in D \\ b_r \neq g_r(x)}} |b_r - g_r(x)|, r = q-1, q-2, \dots, 1. (9)$$

Якщо $a_{1j} > 0$, то у (8)-(9) можна використати

$$D = \left\{ x = (x_1, x_2, \dots, x_q) \in \mathbf{Z}^n : 0 \leq x_j \leq \bar{d}_j = \left\lceil \frac{b_1}{a_{1j}} \right\rceil, j=1,2,\dots,n \right\}. (10)$$

Це можливо, оскільки перше обмеження у лексикографічному обмеженні обов'язково повинно виконуватись. Якщо ж $a_{kj} \geq 0$, то

$$M_k = \max \{ b_k - g_k(\bar{d}_1, \bar{d}_2, \dots, \bar{d}_q) \}, k = 2, 3, \dots, q. (11)$$

Відмітимо, що у випадку коли змінні є булевими, то $\bar{d}_j = 1$ і

$$M_k = \max \{ b_k - g_k(1, 1, \dots, 1) \}, k = 2, 3, \dots, q. (12)$$

Якщо $x_j, b_r, a_{rj} \in \mathbf{Z}$, тоді у (7), ми можемо використати (для спрощення)

$$\mu_r = 1. (13)$$

Нехай

$$G(x) = \alpha_1 g_1(x) + \alpha_1 g_1(x) + \dots + \alpha_q g_q(x),$$

$$B = \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \dots + \alpha_q b_q.$$

Теорема 1. Оптимальний розв'язок задачі

$$\max \left(c(x) = \sum_{j=1}^n c_j x_j : G(x) \leq B, x_j \geq 0, j=1,2,\dots,n, x \in D \subset \mathbf{Z}^n \right), (14)$$

є оптимальним розв'язком задачі (5).

Доведення. Для доведення теореми необхідно довести, що лексикографічне обмеження (6) є еквівалентним обмеженню

$$G(X) \leq B.$$

Тобто потрібно довести, що виконуються наступні умови:

$$1) \text{ якщо } g(x) \leq^L b, \text{ то } G(X) \leq B;$$

$$2) \text{ якщо } g(x) \not\leq^L b, \text{ то } G(X) \leq B.$$

Доведемо, що виконується 1). Нерівність $g(x) \leq^L b$ означає, що або

$$g_i(x) = b_i, i=1,2,\dots,q,$$

або існує таке t ($1 \leq t \leq q$), що

$$g_t(x) < b_t,$$

$$g_i(x) = b_i, i=1,2,\dots,t-1. (15)$$

У першому випадку очевидно ми одержимо $G(x) = B$. У другому випадку знайдемо різницю

$$B - G(x).$$

Оскільки виконується (15), то одержимо

$$\begin{aligned} B-G(x) &= (\alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \dots + \alpha_q b_q) - (\alpha_1 g_1(x) + \alpha_2 g_2(x) + \dots + \alpha_q g_q(x)) = \\ &= (\alpha_1 b_1 + \alpha_{t+1} b_{t+1} + \dots + \alpha_q b_q) - (\alpha_t g_t(x) + \alpha_{t+1} g_{t+1}(x) + \dots + \alpha_q g_q(x)) = \\ &= \alpha_t (b_t - g_t(x)) + \sum_{i=t+1}^q \alpha_i (b_i - g_i(x)). \end{aligned} \quad (16)$$

де

Враховуючи (9) одержимо

$$b_t - g_t(x) \geq \mu_t,$$

і

$$B-G(x) = \alpha_t (b_t - g_t(x)) + \sum_{i=t+1}^q \alpha_i (b_i - g_i(x)) \geq \alpha_t \mu_t + \sum_{i=t+1}^q \alpha_i (b_i - g_i(x)) > 0.$$

Таким чином, $G(x) \leq B$. Отже, перша частина теореми доведена.

Доведемо, що має місце 2). Якщо $g(x) \not\leq^L b$, то існує таке t ($1 \leq t \leq q$), що

$$g_t(x) > b_t,$$

$$g_i(x) = b_i, \quad i = 1, 2, \dots, t-1.$$

Використовуючи обчислену раніше різницю $B-G(x)$ аналогічно одержимо

$$B-G(x) = \alpha_t (b_t - g_t(x)) + \sum_{i=t+1}^q \alpha_i (b_i - g_i(x)) \leq -\alpha_t \mu_t + \sum_{i=t+1}^q \alpha_i (b_i - g_i(x)) < 0.$$

Таким чином, $G(x) > B$. Теорему доведено.

4. Лексикографічні обмеження з альтернативними частковими обмеженнями і методи розв'язання задач, що містять такі обмеження

4.1. Лексикографічні обмеження з альтернативними частковими обмеженнями

Для початку розглянемо випадок, коли система обмежень, яка визначає множину допустимих розв'язків, містить альтернативні (дихотомічні) обмеження [9], тобто коли повинно виконуватись одне із обмежень:

$$h(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq H$$

або

$$k(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq K.$$

У даному випадку ми можемо перейти від альтернативних обмежень до системи обмежень шляхом введення додаткової булевої змінної $y \in \{0, 1\}$ (аналогічно, як це зроблено у [9])

$$\left. \begin{aligned} h(x_1, x_2, \dots, x_n) &\leq s_h y + H \\ k(x_1, x_2, \dots, x_n) &\leq s_k (1 - y) + K \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

$$s_h = \sup(h(x) : x \in D) - H,$$

$$s_k = \sup(k(x) : x \in D) - K.$$

Зараз розглянемо лексикографічне обмеження з альтернативними обмеженнями

$$\bar{g}(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq^L \bar{b}, \quad (18)$$

де

$$\bar{g} = (\bar{g}_1, \bar{g}_2, \dots, \bar{g}_q),$$

$$\bar{g}_i = (g_i^1(x), g_i^2(x)),$$

$$g_i^l(x) : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}, \quad i = 1, 2, \dots, q, l = 1, 2,$$

і b є вектором

$$\bar{b} = (\bar{b}_1, \bar{b}_2, \dots, \bar{b}_q),$$

$$\bar{b}_i = (b_i^1, b_i^2),$$

$$b_i^1, b_i^2 \in \mathbf{R}, \quad i = 1, 2, \dots, q.$$

Відмітимо, що ми розглядаємо лексикографічне обмеження, де на кожному рівні лексикографічного обмеження для спрощення, але без втрати загальності міркувань, ми розглядаємо тільки два альтернативних обмеження. У загальному на кожному із рівнів може знаходитись довільна кількість альтернативних обмежень і їх кількість на кожному із рівнів може бути різною.

Альтернатива $x \in D$ задовольняє лексикографічному обмеженню з альтернативними складовими (18) якщо виконується одна із умов [1]:

$$1) \quad g_1^1(x) < b_1^1 \text{ або } g_1^2(x) < b_1^2;$$

$$2) \quad g_1^1(x) = b_1^1 \text{ або } g_1^2(x) = b_1^2,$$

$$g_2^1(x) < b_2^1 \text{ або } g_2^2(x) < b_2^2;$$

$$3) \quad g_1^1(x) = b_1^1 \text{ або } g_1^2(x) = b_1^2,$$

$$g_2^1(x) = b_2^1 \text{ або } g_2^2(x) = b_2^2,$$

$$g_3^1(x) < b_3^1 \text{ або } g_3^2(x) < b_3^2,$$

...

$$q) \quad g_1^1(x) = b_1^1 \text{ або } g_1^2(x) = b_1^2,$$

$$g_2^1(x) = b_2^1 \text{ або } g_2^2(x) = b_2^2,$$

...

$$g_{q-1}^1(x) = b_{q-1}^1 \text{ або } g_{q-1}^2(x) = b_{q-1}^2,$$

$$g_q^1(x) < b_q^1 \text{ або } g_q^2(x) < b_q^2.$$

$$q+1) \quad g_i^1(x) = b_i^1 \text{ або } g_i^2(x) = b_i^2, \\ i = 1, 2, \dots, q.$$

Аналогічно до (17) кожна пара альтернативних обмежень може бути представлена з використанням системи обмежень

$$\left. \begin{aligned} g_i^1(x) &\leq y_i s_i^1 + b_i^1 \\ g_i^2(x) &\leq (1 - y_i) s_i^2 + b_i^2 \end{aligned} \right\}, i = 1, 2, \dots, q, \quad (19)$$

де

$$s_i^1 \geq \sup(g_i^1(x) : x \in D) - b_i^1,$$

$$s_i^2 \geq \sup(g_i^2(x) : x \in D) - b_i^2,$$

$$y_i \in \{0, 1\}, i = 1, 2, \dots, q.$$

4.2. Метод скаляризації розв'язання задач оптимізації з лексикографічними обмеженнями, які містять альтернативні складові обмеження

Розглянемо задачу оптимізації

$$\max(c(x) : x \in \bar{X} \subset Z^n), \quad (20)$$

де допустима множина $\bar{X}$ задається за допомогою лексикографічного обмеження з альтернативними складовими (18). Враховуючи (19), дана задача може бути розв'язана з використанням схеми скаляризації подібно до [1,8]. Схема скаляризації містить q кроків.

Крок 1. Знаходимо оптимальний розв'язок задачі

$$c(\bar{x}^1) = \max c(x),$$

при умові

$$g_1^1(x) \leq y_1 s_1^1 + b_1^1,$$

$$g_1^2(x) \leq (1 - y_1) s_1^2 + b_1^2,$$

$$y_1 \in \{0, 1\}.$$

Якщо дана задача не має оптимальних розв'язків, то задача (20) не має розв'язку [1].

Якщо

$$(g_1^1(\bar{x}^1) < b_1^1 \text{ or } g_1^2(\bar{x}^1) < b_1^2)$$

або

$$(g_1^1(\bar{x}^1) = b_1^1 \text{ or } g_1^2(\bar{x}^1) = b_1^2) \text{ і задача має}$$

єдиний розв'язок, то $\bar{x}^1$ є розв'язком задачі (20).

В іншому випадку, переходимо до кроку 2. При цьому обмеження $\tilde{g}_1(x) = \tilde{b}_1$ передається на наступний крок. Якщо $y_1^* = 1$ є оптимальним значенням, то $\tilde{g}_1(x) = g_1^2(x)$ і $\tilde{b}_1 = b_1^2$, інакше $\tilde{g}_1(x) = g_1^1(x)$ і $\tilde{b}_1 = b_1^1$.

Крок 2. Знаходимо оптимальний розв'язок задачі

$$c(\bar{x}^2) = \max c(x),$$

при умові

$$\tilde{g}_1(\bar{x}^1) = \tilde{b}_1,$$

$$g_2^1(x) \leq y_2 s_2^1 + b_2^1,$$

$$g_2^2(x) \leq (1 - y_2) s_2^2 + b_2^2,$$

$$y_2 \in \{0, 1\}.$$

Якщо

$$(g_2^1(\bar{x}^2) < b_2^1 \text{ або } g_2^2(\bar{x}^2) < b_2^2)$$

або

$$(g_2^1(\bar{x}^2) = b_2^1 \text{ або } g_2^2(\bar{x}^2) = b_2^2) \text{ і розв'язок}$$

цієї задачі є єдиним, тоді $\bar{x}^2$ є оптимальним розв'язком задачі (20).

В іншому випадку переходимо до кроку 3. При цьому обмеження $\tilde{g}_2(x) = \tilde{b}_2$ передається на наступний крок.

Якщо $y_2^* = 1$ є оптимальним значенням, тоді $\tilde{g}_2(x) = g_2^2(x)$ і $\tilde{b}_2 = b_2^2$, в іншому випадку $\tilde{g}_2(x) = g_2^1(x)$ і $\tilde{b}_2 = b_2^1$.

... Крок q . Знаходимо оптимальний розв'язок задачі

$$c(\bar{x}^q) = \max c(x),$$

при умові

$$\tilde{g}_i(\bar{x}^1) = \tilde{b}_i, i = 1, 2, \dots, q-1,$$

$$g_q^1(x) \leq y_q s_q^1 + b_q^1,$$

$$g_q^2(x) \leq (1 - y_q) s_q^2 + b_q^2,$$

$$y_q \in \{0, 1\}.$$

Оптимальний розв'язок цієї задачі $\bar{x}^q$ буде оптимальним розв'язком задачі (20).

5. Зведення лінійної задачі, яка містить лексикографічні обмеження з альтернативними складовими до задачі лінійного програмування з скалярними обмеженнями

У розділі 3 розглянуто підхід до зведення лінійних задач з лексикографічними обмеженнями (без альтернативних складових) до лінійних задач з скалярними обмеженнями. Подібний підхід може бути використано для лінійних задач, які містять лексикографічні обмеження з альтернативними складовими.

Розглянемо задачу оптимізації

$$\max(c(x) : x \in \bar{X} \subseteq D \subset \mathbb{Z}^n, x_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, n), \quad (21)$$

яка подібна до (5), але множина допустимих розв'язків $\bar{X}$ задається за допомогою лінійного лексикографічного обмеження з альтернативними складовими обмеженнями (18)

$$g_i^1(x) = \sum_{j=1}^n a_{ij}^1 x_j, g_i^2(x) = \sum_{j=1}^n a_{ij}^2 x_j, i = 1, 2, \dots, q,$$

$$a_{ij}^1, a_{ij}^2 \in \mathbf{R}, i = 1, 2, \dots, q, j = 1, 2, \dots, n.$$

Розглянемо послідовність додатних чисел $\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, \dots, \bar{\alpha}_q$, де $\bar{\alpha}_q$ є довільним додатним числом, а інші числа поступово обчислені згідно з умовою

$$\bar{\alpha}_r > \frac{1}{\bar{\mu}_r} \sum_{k=r+1}^q \bar{\alpha}_k \bar{M}_k, r = q-1, q-2, \dots, 1, \quad (22)$$

де

$$\bar{M}_k \geq \max \left\{ \sup \left\{ b_k^1 - g_k^1(x) : x \in D \right\}, \sup \left\{ b_k^2 - g_k^2(x) : x \in D \right\} \right\}, k = 2, \dots, q, \quad (23)$$

$$0 < \bar{\mu}_r \leq \min \left\{ \inf_{\substack{x \in D \\ b_r^1 \neq \bar{g}_r^1(x)}} |b_r^1 - g_r^1(x)|, \inf_{\substack{x \in D \\ b_r^2 \neq \bar{g}_r^2(x)}} |b_r^2 - g_r^2(x)| \right\}, \quad (24)$$

$$r = q-1, q-2, \dots, 1.$$

Якщо $a_{1j}^1, a_{1j}^2 > 0$ ($1 \leq j \leq n$), то у (23)-(24) можемо використати

$$D = \left\{ x = (x_1, x_2, \dots, x_q) \in \mathbb{Z}^n : 0 \leq x_j \leq \bar{d}_j = \max \left\{ \left[\frac{b_1^1}{a_{1j}^1} \right], \left[\frac{b_1^2}{a_{1j}^2} \right] \right\}, j = 1, 2, \dots, n \right\}. \quad (25)$$

Це є можливим завдяки тому, що принаймні одне з обмежень на першому рівні лексикографічного обмеження повинно виконуватись. Також якщо $a_{kj}^1, a_{kj}^2 \geq 0$, то

$$\bar{M}_k \geq \max \left\{ \max \left\{ b_k^1, b_k^1 - g_k^1(\bar{d}_1, \bar{d}_2, \dots, \bar{d}_q) \right\}, \max \left\{ b_k^2, b_k^2 - g_k^2(\bar{d}_1, \bar{d}_2, \dots, \bar{d}_q) \right\} \right\}, \quad (26)$$

$$k = 2, 3, \dots, q.$$

Слід відмітити, що у випадку, коли змінні є булевими, то $\bar{d}_j = 1$ і

$$\bar{M}_k \geq \max \left\{ \max \left\{ b_k^1, b_k^1 - g_k^1(1, 1, \dots, 1) \right\}, \max \left\{ b_k^2, b_k^2 - g_k^2(1, 1, \dots, 1) \right\} \right\} \quad (27)$$

$$k = 2, 3, \dots, q.$$

Якщо $x_j, b_r^1, b_r^2, a_{rj}^1, a_{rj}^2 \in \mathbb{Z}$, тоді у (22) ми можемо використати (для спрощення)

$$\bar{\mu}_r = 1. \quad (28)$$

Кожна пара альтернативних складових може бути представлена з використанням системи (19) або з використанням нерівності

$$y_i g_i^1(x) + (1 - y_i) g_i^2(x) \leq y_i b_i^1 + (1 - y_i) b_i^2,$$

$$y_i \in \{0, 1\}, i = 1, 2, \dots, q.$$

Позначимо

$$\bar{G}(x, y) = \bar{\alpha}_1 (y_1 g_1^1(x) + (1 - y_1) g_1^2(x)) + \bar{\alpha}_2 (y_2 g_2^1(x) + (1 - y_2) g_2^2(x)) + \dots + \bar{\alpha}_q (y_q g_q^1(x) + (1 - y_q) g_q^2(x)),$$

$$\bar{B}(y) = \bar{\alpha}_1 (y_1 b_1^1 + (1 - y_1) b_1^2) + \bar{\alpha}_2 (y_2 b_2^1 + (1 - y_2) b_2^2) + \dots + \bar{\alpha}_q (y_q b_q^1 + (1 - y_q) b_q^2),$$

$$y = (y_1, y_2, \dots, y_q),$$

$$y_i \in \{0, 1\}, i = 1, 2, \dots, q.$$

Теорема 2. Оптимальний розв'язок задачі

$$\max \left\{ \begin{array}{l} c(x); \\ \bar{G}(x, y) \leq \bar{B}(y), \\ x_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, n, x \in D \subset \mathbf{Z}^n, \\ y_i \in \{0, 1\}, i = 1, 2, \dots, q \end{array} \right\} \quad (29) \quad \text{і}$$

є оптимальним розв'язком задачі (21).

Доведення. Для доведення теореми необхідно довести, що лексикографічне обмеження (18) є еквівалентним обмеженню

$$\bar{G}(x, y) \leq \bar{B}(y).$$

Тобто довести, що мають місце умови:

$$1) \text{ якщо } \bar{g}(x) \leq^L \bar{b}, \text{ то } \bar{G}(x, y) \leq \bar{B}(y);$$

$$2) \text{ якщо } \bar{g}(x) \not\leq^L \bar{b}, \text{ то } \bar{G}(x, y) > \bar{B}(y).$$

Доведемо, що виконується 1). Нерівність $\bar{g}(x) \leq^L \bar{b}$ означає, що має місце один з випадків:

$$g_i^1(x) = b_i^1 \text{ або } g_i^2(x) = b_i^2, i = 1, 2, \dots, q;$$

або існує таке t ($1 \leq t \leq q$), що

$$g_t^1(x) < b_t^1 \text{ або } g_t^2(x) < b_t^2,$$

$$g_i^1(x) = b_i^1 \text{ або } g_i^2(x) = b_i^2, i = 1, 2, \dots, t-1. \quad (30)$$

У першому випадку враховуючи, що $y_i \in \{0, 1\}$, ми одержимо $\bar{G}(x) = \bar{B}$. В другому випадку обчислимо різницю

$$\bar{B}(y) - \bar{G}(x, y).$$

Оскільки виконується (30) і $y_i \in \{0, 1\}$, одержимо

$$\begin{aligned} \bar{B}(y) - \bar{G}(x, y) &= (\bar{\alpha}_1(y_1 b_1^1 + (1 - y_1) b_1^2) + \dots + \bar{\alpha}_q(y_q b_q^1 + (1 - y_q) b_q^2)) - \\ &- (\bar{\alpha}_1(y_1 g_1^1(x) + (1 - y_1) g_1^2) + \dots + \bar{\alpha}_q(y_q g_q^1(x) + (1 - y_q) g_q^2)) = \\ &= (\bar{\alpha}_t(y_t b_t^1 + (1 - y_t) b_t^2) + \dots + \bar{\alpha}_q(y_q b_q^1 + (1 - y_q) b_q^2)) - \\ &- (\bar{\alpha}_t(y_t g_t^1(x) + (1 - y_t) g_t^2) + \dots + \bar{\alpha}_q(y_q g_q^1(x) + (1 - y_q) g_q^2)) = \\ &= \bar{\alpha}_t((y_t b_t^1 + (1 - y_t) b_t^2) - (y_t g_t^1(x) + (1 - y_t) g_t^2)) + \end{aligned}$$

$$+ \sum_{i=t+1}^q \bar{\alpha}_i((y_i b_i^1 + (1 - y_i) b_i^2) - (y_i g_i^1(x) + (1 - y_i) g_i^2)).$$

Враховуючи (22)-(24) і те, що $y_i \in \{0, 1\}$, одержимо

$$((y_t b_t^1 + (1 - y_t) b_t^2) - (y_t g_t^1(x) + (1 - y_t) g_t^2)) \geq \bar{\mu}_t,$$

і

$$\bar{B}(y) - \bar{G}(x, y) \geq \bar{\alpha}_t \bar{\mu}_t +$$

$$+ \sum_{i=t+1}^q \bar{\alpha}_i((y_i b_i^1 + (1 - y_i) b_i^2) - (y_i g_i^1(x) + (1 - y_i) g_i^2)) > 0.$$

Таким чином, $\bar{G}(x, y) \leq \bar{B}(y)$. Перша частина теореми доведена.

Доведемо, що виконується 2). Якщо $\bar{g}(x) \not\leq^L \bar{b}$, тоді існує таке t ($1 \leq t \leq q$), що

$$g_t^1(x) > b_t^1 \text{ або } g_t^2(x) > b_t^2,$$

$$g_i^1(x) = b_i^1 \text{ або } g_i^2(x) = b_i^2, i = 1, 2, \dots, t-1.$$

Використовуючи раніше обчислену різницю $\bar{B}(y) - \bar{G}(x, y)$ аналогічно до попереднього випадку одержимо

$$\bar{B}(y) - \bar{G}(x, y) \leq -\bar{\alpha}_t \bar{\mu}_t +$$

$$+ \sum_{i=t+1}^q \bar{\alpha}_i((y_i b_i^1 + (1 - y_i) b_i^2) - (y_i g_i^1(x) + (1 - y_i) g_i^2)) < 0.$$

Таким чином, $\bar{G}(x, y) > \bar{B}(y)$. Теорема доведена.

6. Висновки

Як було зазначено, розглядувана задача оптимізації з лексикографічними обмеженнями може бути зведена до задач оптимізації, де лексикографічні обмеження замінено на систему обмежень, або задача може бути розв'язана шляхом розв'язання послідовності задач згідно з схемою скаляризації. Запропонований же підхід дозволяє зводити задачу до задачі з скалярним обмеженням не збільшуючи при цьому кількості обмежень і дає можливість застосувати найбільш ефективні методи для відповідного класу задач. Запропонований підхід також дозволяє будувати відносно прості математичні моделі, які містять лексикографічні обмеження з альтернативними складовими та зводити їх до задач оптимізації зі скалярними обмеженнями, що значно спрощує процес розв'язання і дає можливість застосувати відомі методи розв'язання такого роду задач.

Звичайно, запропонований підхід має більше переваг, коли відомі верхні границі функцій, за допомогою яких визначається множина допустимих розв'язків (наприклад, це легко зробити при розв'язанні комбінаторних задач). Відмітимо, що можливим є знаходження коефіцієнтів додатної згортки обмежень, які можуть бути використані для довільної перестановки обмежень у лексикографічному

обмеженні (аналогічно до [10]). Також можливим є розширення задачі на випадок, коли $X \subset \mathbf{R}^n$ (у цьому випадку аналогічно до [8] потрібно розглядати множину крайніх точок допустимої множини).

Список використаних джерел

1. Червак Ю.Ю. Оптимізація. Непокращуваний вибір / Ю.Ю. Червак – Ужгород: Ужгород. нац. ун-т, 2002. – 312 с.
2. Caramia M. Enhanced exact algorithms for discrete bilevel linear problems / M. Caramia, R. Mari // Optimization Letters – 2015. – No 9. – P. 1447-1468.
3. Borning A. Constraint hierarchies / A. Borning, B. Freeman-Benson, M. Wilson // LISP and Symbolic Computation. – 1992. – No 5. – P. 223-270.
4. Freuder E. Lexicographically-ordered constraint satisfaction problems / E. Freuder, R. Heffernan, R. Wallace, N. Wilson // Constraints. – 2010. – No 15. – P. 1-8.
5. Волошин О.Ф. Моделі та методи прийняття рішень / О.Ф. Волошин, С.О. Мащенко. – К.: Видавничо-поліграфічний центр «Київський університет», 2010. – 336 с.
6. Ecker J. Finding efficient points for linear multiple objective programs / J. Ecker, I. Kouada // Mathematical Programming. – 1975. – No 8. – P. 375–377.
7. Ehrgott M. Multiple Criteria Optimization. Classification and Methodology / M. Ehrgott. – Shaker Verlag, Aachen, 1997.
8. Подиновский В.В. Оптимизация по последовательно применяемым критериям / В.В. Подиновский, В.М. Гаврилов. – М.: Сов. Радио, 1975. – 115 с.
9. Корбут А.А. Дискретное программирование / А.А. Корбут, Ю.Ю. Финкельштейн. – М.: Наука, 1969. – 368 с.
10. Брила А.Ю. Достижимость оптимальных решений линейной задачи многокритериальной оптимизации по взвешенной сумме критериев разной важности в транзитивной субординации / А.Ю. Брила // Кибернетика и системный анализ. – 2008. – № 5. – С. 135-138.

References

1. CHERVAK, Yu. (2002) *Optimization. Non improved choice*. Uzhgorod: Uzhgorod National University.
2. CARAMIA, M., MARI, R. (2015) Enhanced exact algorithms for discrete bilevel linear problems. *Optimization Letters*. 9. p. 1447-1468.
3. BORNING, A., FREEMAN-BENSON, B., WILSON, M. (1992) Constraint hierarchies. *LISP and Symbolic Computation*. 5. p. 223-270.
4. FREUDER, E., HEFFERNAN, R., WALLACE, R., WILSON, N. (2010) Lexicographically-ordered constraint satisfaction problems. *Constraints*. 15. p. 1-8.
5. VOLOSHIN, O., MASHCENKO, S. (2010) *Models and methods of decision making*. Kyiv: publishing center "Kyiv University".
6. ECKER, J., KOUADA, I. (1975) Finding efficient points for linear multiple objective programs. *Mathematical Programming*. 8. p. 375–377.
7. EHRGOTT, M (1997) *Multiple Criteria Optimization. Classification and Methodology*. Shaker Verlag, Aachen.
8. PODINOVSKIY, V., GAVRILOV, V. (1975) *Optimization by consistently applied criteria*. Moskva: Soviet Radio.
9. KORBUT, A., FINKELSTEIN, Yu. (1969) *Discrete programming*. Moskva: Nauka.
10. BRILA, A. (2008) Attainability optimal solutions of linear multi-criteria optimization problem on a weighted sum of criteria of different importance in transitive subordination. *Cybernetics and Systems Analysis*. 5. p. 135-138.

Надійшла до редколегії 10.10.2016

УДК 517.9

Веклич Р.А., аспірант

R.A. Veklych, PhD student

Оптимальне керування початковими умовами для дробового рівняння дифузії

Optimal control of the initial conditions for a fractional diffusion equation

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, пр-т Глушкова 4д,
e-mail: vekross@gmail.com

Taras Shevchenko National University of Kyiv,
03680, Kyiv, Glushkova av., 4d,
e-mail: vekross@gmail.com

У статті наведено теорему існування та єдиності розв'язку задачі керування для однорідного рівняння дифузії з дробовою похідною Капуто за часом, сформульовані необхідні та достатні умови оптимальності.

Ключові слова: оптимальне керування, рівняння дифузії, дробова похідна, похідна Капуто.

Fractional diffusion equations are used in modeling of non-Markovian processes with memory, the mechanical wave propagation and relaxation effects in viscoelastic materials and anomalous contaminant diffusion in heterogeneous aquifer. In this paper we consider an optimal control problem for a system governed by a diffusion equation with a fractional Caputo time derivative in an open bounded domain, a cost function is assumed to be quadratic, and a set of admissible controls is closed and convex. Since the state equation has a unique weak solution, we can prove the existence and uniqueness of the solution for the initial problem by showing the convergence of the minimization sequence. To obtain a characterization of the optimal solution, similarly to the case of parabolic equations with an integer order derivative, an adjoint equation is introduced using ordinary and fractional integration by parts. This dual problem, which has a fractional Riemann-Liouville time derivative, allows us to compute the cost functional derivative and formulate necessary and sufficient optimality conditions.

Key Words: optimal control, diffusion equation, fractional derivative, Caputo derivative.

Статтю представив чл.-кор. НАН України, д.ф.-м.н., проф. Анісімов А.В.

Вступ

Рівняння дифузії з дробовими похідними виникають при описі релаксаційних ефектів і поширення механічних хвиль у складних в'язкопружних матеріалах, процесів аномальної дифузії середовищах фрактальної геометрії, моделюванні розповсюдження забруднення в неоднорідних водоносних шарах.

В роботі розглянуто задачу керування для рівняння такого типу з дробовою похідною Капуто за часом та отримані умови оптимальності, аналогічні результатам для параболічних рівнянь похідними цілих порядків, наведених в [1].

1. Основні поняття

Нехай функція f визначена на $[0, T]$, $T < +\infty$. Ліво- та правосторонні дробові інтеграли Рімана-Ліувілля порядку $\alpha \in (0, 1)$ мають вигляд:

$${}_0I_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau,$$

$${}_tI_T^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_t^T (\tau-t)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau,$$

де $\Gamma(\alpha)$ — гамма-функція. Наступні вирази визначають відповідні дробові похідні Рімана-Ліувілля:

$${}_0D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_0^t (t-\tau)^{-\alpha} f(\tau) d\tau,$$

$${}_tD_T^\alpha f(t) = -\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_t^T (\tau-t)^{-\alpha} f(\tau) d\tau,$$

та дробові похідні Капуто:

$${}_0^C D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{-\alpha} \frac{d}{d\tau} f(\tau) d\tau,$$

$${}_t^C D_T^\alpha f(t) = -\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_t^T (\tau-t)^{-\alpha} \frac{d}{d\tau} f(\tau) d\tau.$$

Нехай $0 < \alpha < 1$, $f \in L^p(0, T; \mathbb{R})$, $f \in L^q(0, T; \mathbb{R})$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \leq 1 + \alpha$, $1 \leq p \leq \infty$, $1 \leq q \leq \infty$. Тоді, як показано в [2], має місце формула дробового інтегрування частинами:

$$\int_0^T f(t) ({}_0I_t^\alpha g)(t) dt = \int_0^T g(t) ({}_tI_T^\alpha f)(t) dt. \quad (1.1)$$

Для $z \in \mathbb{C}$ та довільних сталих $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$

визначимо функцію Міттаг-Лефлера як

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}.$$

Якщо $0 < \alpha < 2$, $\beta \in \mathbb{R}$, $\frac{\pi\alpha}{2} < \mu < \min\{\pi, \pi\alpha\}$, то (див. [3]) існує стала $C = C(\alpha, \beta, \mu) > 0$, що

$$|E_{\alpha,\beta}(z)| \leq \frac{C}{1+|z|}, \quad \mu \leq |\arg z| \leq \pi. \quad (1.2)$$

2. Постановка задачі

Нехай $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — обмежена область із гладкою границею $\partial\Omega$, $U_{\partial} \subset L^2(\Omega)$ — непорожня опукла та замкнута область допустимих керувань, $y_d \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$. Розглянемо задачу оптимального керування:

$$J(y, u) = \frac{1}{2} \|y(\cdot, T) - y_d\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\lambda}{2} \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \rightarrow \inf, \quad (2.1)$$

$$u \in U_{\partial}. \quad (2.2)$$

Стан $y = y(x, t, u)$ є розв'язком системи

$${}_0^C D_t^\alpha y(x, t) = Ay(x, t), \quad x \in \Omega, \quad t \in (0, T), \quad (2.3)$$

$$y(x, t) = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad t \in (0, T), \quad (2.4)$$

$$y(x, 0) = u(x), \quad x \in \Omega, \quad (2.5)$$

де A — симетричний рівномірно еліптичний оператор:

$$Ay(x) = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial y}{\partial x_j}(x) \right) + a_0(x)y(x),$$

де $a_{ij} = a_{ji} \in C^1(\bar{\Omega})$, $a_0 \in C(\bar{\Omega}) \leq 0$ та існує така стала $\mu > 0$, що для довільних $x \in \bar{\Omega}$ та $\xi_1, \dots, \xi_n \in \mathbb{R}$ виконується нерівність

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq \mu \sum_{i=1}^n \xi_i^2.$$

3. Існування та єдиність оптимального керування

Означення 1. Слабким розв'язком задачі (2.3)-(2.5) називатимемо такий елемент y , що (2.3) виконується в $L^2(\Omega)$, $y(\cdot, t) \in H_0^1(\Omega)$ майже для всіх $t \in (0, T)$, $y \in C([0, T]; L^2(\Omega))$ і

$$\lim_{t \rightarrow 0} \|y(\cdot, t) - u\|_{L^2(\Omega)} = 0.$$

Нехай $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$ — власні числа оператора $-A$, а $\varphi_n \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ — відповідні власні вектори, тобто $A\varphi_n = -\lambda_n \varphi_n$.

Як показано в [3], при $u \in L^2(\Omega)$ задача (2.3)-(2.5) має єдиний слабкий розв'язок $u \in$

$$C([0, T]; L^2(\Omega)) \cap C((0, T]; H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega))$$

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (u, \varphi_n) E_{\alpha,1}(-\lambda_n t^\alpha) \varphi_n(x), \quad (3.1)$$

де $(\cdot, \cdot)$ позначає скалярний добуток в $L^2(\Omega)$, і, якщо $u \in H_0^1(\Omega)$, то $y \in L^2(0, T; H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega))$ та існує така стала $C > 0$, що

$$\|y\|_{L^2(0,T;H^2(\Omega))} + \|{}_0^C D_t^\alpha y\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \leq C \|u\|_{H^1(\Omega)}. \quad (3.2)$$

Використавши оцінку (1.2), аналогічно до [4]

$$\begin{aligned} \|\partial_t y(x, t)\|_{L^2(\Omega)}^2 &= \sum_{n=1}^{\infty} |(u, \varphi_n)(-\lambda_n) t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_n t^\alpha)|^2 = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left| \lambda_n^{\frac{1}{2}}(u, \varphi_n) \right|^2 \left| t^{\alpha-1} \lambda_n^{\frac{1}{2}} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_n t^\alpha) \right|^2 = \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \left| \lambda_n^{\frac{1}{2}}(u, \varphi_n) \right|^2 \left| C_6 t^{\alpha-1} t^{-\frac{\alpha}{2}} \frac{(\lambda_n t^\alpha)^{\frac{1}{2}}}{1 + \lambda_n t^\alpha} \right|^2 \leq \\ &\leq (C_6 t^{\frac{\alpha}{2}-1} \|u\|_{H^1(\Omega)})^2. \end{aligned}$$

Тоді при $1 \leq p < \frac{2}{2-\alpha}$

$$\begin{aligned} \|\partial_t y(x, t)\|_{L^p(0,T;L^2(\Omega))}^p &= \int_0^T \|\partial_t y(x, t)\|_{L^2(\Omega)}^p dt \leq \\ &\leq \frac{2C_6^p T^{\frac{2-(2-\alpha)p}{2}}}{2 - (2-\alpha)p} \|u\|_{H^1(\Omega)}^p. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Отже, $\partial_t y(x, t) \in L^p(0, T; L^2(\Omega))$. Позначимо простір

$$\mathbb{Y}^p = \left\{ y \in L^2(0, T; H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) : \partial_t y \in L^p(0, T; L^2(\Omega)) \right\}$$

з нормою

$$\|y\|_{\mathbb{Y}^p} = \|y\|_{L^2(0,T;H^2(\Omega))} + \|\partial_t y\|_{L^p(0,T;L^2(\Omega))}. \quad (3.4)$$

Теорема 1. Існує єдиний розв'язок $(\hat{y}, \hat{u}) \in \mathbb{Y}^p \times U_{\partial}$ задачі (2.1)-(2.5).

Доведення. Нехай $\mathbb{U}$ — множина допустимих пар задачі (2.1)-(2.5), тобто множина таких $(y, u) \in \mathbb{Y}^p \times U_{\partial}$, для яких виконуються (2.3)-(2.5) та $J(y, u) < \infty$. Тоді існує така мінімізуюча послідовність $\{(y_n, u_n)\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{U}$, що

$$\lim_{k \rightarrow \infty} J(y_n, u_n) = \inf_{(y,u) \in \mathbb{U}} J(y, u) > -\infty$$

Тому $\sup_{n \in \mathbb{N}} I(y_n, u_n) \leq C_1$, де стала C_1 не зале-

жить від n . Із (3.2) та (3.3) маємо, що

$$\|y\|_{\mathbb{Y}^p} + \|u\|_{H^1(\Omega)} \leq C_2 J(u, y) + C_3,$$

і $\sup_{n \in \mathbb{N}} [\|u_n\|_{H^1(\Omega)} + \|y_n\|_{\mathbb{Y}^p}] \leq C_4$. Отже, можна виділити слабкозбіжні підпоследовності $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, для простоти індексовані так само:

$$u_n \rightharpoonup \hat{u} \text{ в } H_0^1(\Omega), \quad (3.5)$$

$$y_n \rightharpoonup \hat{y} \text{ в } \mathbb{Y}^p. \quad (3.6)$$

Оскільки U_∂ є опуклою та замкнутою, то $\hat{u} \in U_\partial$.

Покажемо, що $\hat{y}$ є розв'язком системи (2.3)-(2.5) при $u = \hat{u}$. Із [3] для довільних $v \in C_0^\infty(\Omega)$, $\psi \in C_0^\infty(0, T)$ y_n задовільняє

$$\int_0^T \int_\Omega ({}_0^C D_t^\alpha y - Ay) v(x) \psi(t) dx dt = 0. \quad (3.7)$$

Оператор $\partial_t : \mathbb{Y}^p \rightarrow L^p(0, T; L^2(\Omega))$ є обмеженим і лінійним, тому

$$\partial_t y_n \rightharpoonup \partial_t \hat{y}.$$

Оператор ${}_0 I_t^{1-\alpha}$ є лінійним, а із [2] маємо, що при $0 < \alpha < 1$, $1 < p < \frac{1}{1-\alpha}$ він обмежено діє з простору L^p в простір L^q , де $q = \frac{p}{1-(1-\alpha)p}$, тому в $L^q(0, T; L^2(\Omega))$

$${}_0^C D_t^\alpha y_n = {}_0 I_t^{1-\alpha} \partial_t y_n \rightharpoonup {}_0 I_t^{1-\alpha} \partial_t \hat{y} = {}_0^C D_t^\alpha \hat{y}. \quad (3.8)$$

Оскільки при $q^* = \frac{p}{(2-\alpha)p-1}$ (тобто $\frac{1}{q} + \frac{1}{q^*} = 1$) $\psi(t) \in L^{q^*}(0, T) = (L^q(0, T))^*$, то з (3.8) при $n \rightarrow \infty$

$$\int_0^T \psi(t) {}_0^C D_t^\alpha y_n dt \rightarrow \int_0^T \psi(t) {}_0^C D_t^\alpha \hat{y} dt. \quad (3.9)$$

Враховуючи крайові умови (2.4), за формулою Гріна маємо:

$$\begin{aligned} \int_\Omega Ay_n(x, t)v(x) dx &= \int_\Omega y_n(x, t)A^*v(x) dx + \\ &+ \int_{\partial\Omega} \left(v(x) \frac{\partial y_n}{\partial N_A}(x, t) - y_n(x, t) \frac{\partial v}{\partial N_{A^*}}(x) \right) ds = \\ &= \int_\Omega y_n(x, t)A^*v(x) dx, \end{aligned}$$

де A^* є спряженим оператором до A , тобто

$$A^*v(x) = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial v}{\partial x_i}(x) \right) + a_0(x)v(x),$$

та $N = (N_1, \dots, N_n)$ — одиничний вектор зовнішньої нормалі до $\partial\Omega$, і

$$\frac{\partial y}{\partial N_A}(x, t) = \sum_{i,j=1}^n \left(a_{ij}(x) N_i(x) \frac{\partial y}{\partial x_j}(x, t) \right)$$

$$\frac{\partial v}{\partial N_{A^*}}(x) = \sum_{i,j=1}^n \left(a_{ij}(x) N_j(x) \frac{\partial v}{\partial x_i}(x) \right)$$

Тоді, перейшовши до границі при $n \rightarrow \infty$ та ще раз використавши формулу Гріна, запишемо:

$$\begin{aligned} \int_\Omega Ay_n v(x) dx &\rightarrow \int_\Omega \hat{y} A^* v(x) dx = \\ &= \int_\Omega A \hat{y} v(x) dx. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Отже, із (3.9) та (3.10)

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_\Omega ({}_0^C D_t^\alpha y_n - Ay_n) v(x) \psi(t) dx dt &\rightarrow \\ \rightarrow \int_0^T \int_\Omega ({}_0^C D_t^\alpha \hat{y} - A \hat{y}) v(x) \psi(t) dx dt, \end{aligned}$$

тобто $\hat{y}(x, t)$ задовольняє (3.7).

Покажемо, що $\hat{y}$ також задовольняє початкову умову (2.5). Для довільного $\psi \in C_0^\infty(0, T)$ використаємо (1.1) та проінтегруємо частинами:

$$\begin{aligned} \int_0^T \psi(t) {}_0^C D_t^\alpha y_n(x, t) dt &= \\ = \int_0^T \psi(t) {}_0 I_t^{1-\alpha} \partial_t y_n dt &= \int_0^T \partial_t y_n {}_t I_T^{1-\alpha} \psi(t) dt = \\ = y_n {}_t I_T^{1-\alpha} \psi(t) \Big|_{t=0}^{t=T} - \int_0^T y_n \frac{d}{dt} {}_t I_T^{1-\alpha} \psi(t) dt. \end{aligned}$$

Тоді, підставивши $y_n(x, t)$ в (3.7) та врахувавши, що $y_n(x, 0) = u_n(x)$ і ${}_t I_T^{1-\alpha} \psi(t) \Big|_{t=T} = 0$

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^T \int_\Omega ({}_0^C D_t^\alpha y_n - Ay_n) v(x) \psi(t) dx dt = \\ &= - \int_\Omega {}_t I_T^{1-\alpha} \psi(t) \Big|_{t=0} u_n(x) v(x) dx + \\ &+ \int_0^T \int_\Omega (v(x) {}_t D_T^\alpha \psi(t) - \psi(t) A^* v(x)) y_n dx dt. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Аналогічно для $\hat{y}(x, t)$ маємо

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^T \int_\Omega ({}_0^C D_t^\alpha \hat{y} - A \hat{y}) v(x) \psi(t) dx dt = \\ &= - \int_\Omega {}_t I_T^{1-\alpha} \psi(t) \Big|_{t=0} \hat{y}(x, 0) v(x) dx + \\ &+ \int_0^T \int_\Omega (v(x) {}_t D_T^\alpha \psi(t) - \psi(t) A^* v(x)) \hat{y} dx dt. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Тоді, віднявши (3.12) від (3.11) і перейшовши до границі при $n \rightarrow \infty$, отримуємо, що

$$\int_\Omega {}_t I_T^{1-\alpha} \psi(t) \Big|_{t=0} (\hat{y}(x, 0) - \hat{u}(x)) v(x) dx = 0,$$

і з довільності $v(x)$ маємо, що

$$\lim_{t \rightarrow 0} \|\hat{y}(x, t) - \hat{u}\|_{L^2(\Omega)} = 0.$$

Покажемо, що $y_n(x, T) \rightarrow \hat{y}(x, T)$ в $L^2(\Omega)$.
Справді, з (3.1) маємо

$$\begin{aligned} \|y_n(x, T) - \hat{y}(x, T)\|_{L^2(\Omega)}^2 &= \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} |(u_n - \hat{u}, \varphi_n) E_{\alpha, 1}(-\lambda_n t^\alpha)|^2 \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} C_1 (u_n - \hat{u}, \varphi_n)^2 \leq C_2 \|u_n - \hat{u}\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

Оскільки $H_0^1(\Omega)$ компактно вкладений в $L^2(\Omega)$, то
із (3.5) маємо

$$\|u_n - \hat{u}\|_{L^2(\Omega)}^2 \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty,$$

і $y_n(x, T)$ сильно збігається до $\hat{y}(x, T)$ в $L^2(\Omega)$. Отже,

$$\begin{aligned} \|\hat{y}(x, T) - y_d(x)\|_{L^2(\Omega)}^2 &= \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \|y_n(x, T) - y_d(x)\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Зі слабкої напівнеперервності знизу відображення
 $u \rightarrow \|u\|_{H_0^1(\Omega)}$

$$\|\hat{u}\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|u_n\|_{H_0^1(\Omega)}. \quad (3.14)$$

Разом із (3.13) і (3.14)

$$J(\hat{y}, \hat{u}) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} J(y_n, u_n) = \inf_{(y, u) \in \mathbb{U}} J(y, u).$$

і $(\hat{u}, \hat{y})$ є оптимальним розв'язком задачі (2.1).

Єдиність розв'язку задачі (2.1)-(2.5) випливає
зі строгої опуклості функціонала якості в (2.1).

4. Умови оптимальності

Позначимо $J(u) = J(y, u)$, де $y = y(u)$ є
розв'язком (2.3)-(2.5), та

$$\langle \cdot, \cdot \rangle = \langle \cdot, \cdot \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)}$$

Нехай $\Lambda = -\Delta + I$, тоді $\forall u, v \in H_0^1(\Omega)$

$$\begin{aligned} \langle \Lambda u, v \rangle &= (u, v)_{H_0^1(\Omega)} = (v, u)_{H_0^1(\Omega)} = \langle \Lambda v, u \rangle, \\ \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2 &= \langle -\Delta u + u, u \rangle = \langle \Lambda u, u \rangle. \end{aligned}$$

Позначимо $y_\theta = y(\hat{u} + \theta u)$ і обчислимо

$$\begin{aligned} J(\hat{u} + \theta u) - J(\hat{u}) &= \\ &= \frac{1}{2} \|y(T, \hat{u} + \theta u) - y_d\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\lambda}{2} \|\hat{u} + \theta u\|_{H_0^1(\Omega)}^2 - \\ &\quad - \frac{1}{2} \|y(T, \hat{u}) - y_d\|_{L^2(\Omega)}^2 - \frac{\lambda}{2} \|\hat{u}\|_{H_0^1(\Omega)}^2 = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} ((y_\theta(T), y_\theta(T)) - 2(y_\theta(T), y_d)) - \\ &\quad - \frac{1}{2} ((\hat{y}(T), \hat{y}(T)) - 2(\hat{y}(T), y_d)) + \\ &\quad + \frac{\lambda}{2} (\langle \Lambda \hat{u}, \theta u \rangle + \langle \Lambda(\theta u), \hat{u} \rangle + \langle \Lambda(\theta u), \theta u \rangle) = \\ &= \frac{1}{2} (y_\theta(T) - \hat{y}(T), y_\theta(T) + \hat{y}(T) - 2y_d) + \\ &\quad + \frac{\lambda}{2} (2\theta \langle \Lambda \hat{u}, u \rangle + \theta^2 \langle \Lambda u, u \rangle). \end{aligned}$$

Функція $\delta_\theta = y_\theta - \hat{y}$ є розв'язком системи

$${}_0^C D_t^\alpha \delta_\theta(x, t) = A \delta_\theta(x, t), \quad x \in \Omega, \quad t \in (0, T), \quad (4.1)$$

$$\delta_\theta(x, t) = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad t \in (0, T), \quad (4.2)$$

$$\delta_\theta(x, 0) = \theta u(x), \quad x \in \Omega. \quad (4.3)$$

Оскільки

$$\|\delta_\theta\|_{\mathbb{Y}^p} \leq C|\theta| \|u\|_{H^1(\Omega)},$$

то послідовність $\{\delta_\theta\}$ збігається до $\hat{y}$ при $\theta \rightarrow 0$.
Позначимо $\delta = \frac{1}{\theta} \delta_\theta$, тоді δ є розв'язком (2.3)-(2.5).

Переходячи до границі при $\theta \rightarrow 0$, маємо

$$\begin{aligned} 0 &\leq \frac{1}{\theta} (J(\hat{u} + \theta u) - J(\hat{u})) = J'_u(\hat{u})u = \\ &= (\delta(T), \hat{y}(T) - y_d) + \langle \Lambda \hat{u}, u \rangle. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Розглянемо спряжену задачу

$${}_t D_T^\alpha z(x, t) = A^* z(x, t), \quad x \in \Omega, \quad t \in (0, T), \quad (4.5)$$

$$z(x, t) = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad t \in (0, T), \quad (4.6)$$

$${}_t I_T^{1-\alpha} z(x, t)|_{t=T} = z_0(x), \quad x \in \Omega, \quad (4.7)$$

де $z_0(x) = \hat{y}(x, T) - y_d(x)$.

Як показано в [5], при $z_0 \in L^2(\Omega)$ задача (4.5)-
(4.7) має єдиний слабкий розв'язок

$$\begin{aligned} z(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} ((z_0, \varphi_n)(T - t)^{\alpha-1} \times \\ &\quad \times E_{\alpha, \alpha}(-\lambda_n(T - t)^\alpha) \varphi_n(x)). \end{aligned} \quad (4.8)$$

Крім того, $z \in L^q(0, T; H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega))$ при $1 < q < \frac{1}{1-\alpha}$ і $z_0 \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, та існує така стала
 $C > 0$, що

$$\begin{aligned} \|z\|_{L^q(0, T; H^2(\Omega))} + \|{}_t D_T^\alpha z\|_{L^q(0, T; L^2(\Omega))} &\leq \\ &\leq C \|z_0\|_{H^2(\Omega)}. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Оскільки $\delta(x, t)$ є розв'язком (2.3)-(2.5), то
 $\partial_t \delta(x, t) \in L^p(0, T; L^2(\Omega))$ при $1 \leq p < \frac{2}{2-\alpha}$, і мо-
жемо використати (1.1):

$$\int_0^T z(x, t) {}_0^C D_t^\alpha \delta(x, t) dt =$$

$$\begin{aligned} \int_0^T z(x, t) {}_0I_t^{1-\alpha} \partial_t \delta(x, t) dt = \\ = \int_0^T \partial_t \delta(x, t) {}_tI_T^{1-\alpha} z(x, t) dt. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Із (4.9) $z(x, t) \in L^q(0, T; H^2(\Omega))$, а з [2] при $0 < \alpha < 1$ та $1 < q < \frac{1}{1-\alpha}$ маємо, що ${}_tI_T^{1-\alpha} z(x, t) \in L^{q^*}(0, T; L^2(\Omega))$, де $q^* = \frac{q}{1-(1-\alpha)q}$. Також з (4.9) $\frac{\partial}{\partial t} {}_tI_T^{1-\alpha} z(x, t) = {}_tD_T^\alpha z(x, t) \in L^q(0, T; L^2(\Omega))$. Оскільки ${}_tI_T^{1-\alpha} z(x, t) \in W^{1,q}(0, T; L^2(\Omega))$ при $q < q^*$ та врахувавши, що $\delta(x, t) \in W^{1,p}(0, T; L^2(\Omega))$, інтегруємо частинами в (4.10):

$$\begin{aligned} \int_0^T \partial_t \delta(x, t) {}_tI_T^{1-\alpha} z(x, t) dt = \\ = \delta(x, t) {}_tI_T^{1-\alpha} z(x, t) \Big|_{t=0}^{t=T} - \\ - \int_0^T \delta(x, t) \frac{\partial}{\partial t} {}_tI_T^{1-\alpha} z(x, t) dt = \\ = \delta(x, t) {}_tI_T^{1-\alpha} z(x, t) \Big|_{t=0}^{t=T} + \\ + \int_0^T \delta(x, t) {}_tD_T^\alpha z(x, t) dt. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Тоді з (2.3), (4.5) та умови (4.7) маємо:

$$0 = \int_0^T \int_\Omega ({}_0^C D_t^\alpha \delta - A\delta) z dx dt =$$

Список використаних джерел

1. Лионс Ж.-Л. Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными / Ж.-Л. Лионс. — Москва: Мир, 1972. — 416 с.
2. Самко С.Г. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения / С.Г. Самко, А.А. Килбас, О.И. Маричев. — Минск: Наука и техника, 1987. — 688 с.
3. Sakamoto K. Initial value/boundary value problems for fractional diffusion-wave equations and applications to some inverse problems / K. Sakamoto, M. Yamamoto // Journal of Mathematical Analysis and Applications. — 2011. — Vol. 382, №1. — P. 426–447.
4. Li Z. Initial-boundary value problems for multi-term time-fractional diffusion equations with positive constant coefficients. Z. Li, Y. Liu, M. Yamamoto, Applied Mathematics and Computation. — 2015. — Vol. 257. — P. 381–397.
5. Fujishiro K. Approximate controllability for fractional diffusion equations by interior control / K. Fujishiro, M. Yamamoto // Applicable Analysis. — 2014. — Vol. 93, №9. — P. 1793–1810.

$$\begin{aligned} = \int_\Omega {}_tI_T^{1-\alpha} z(x, t) \Big|_{t=0}^{t=T} \delta(x, 0) dx + \\ + \int_0^T \int_\Omega ({}_tD_T^\alpha z(x, t) - A^* z(x, t)) \delta(x, t) dx dt = \\ = \delta(x, T) z_0(x) - {}_tI_T^{1-\alpha} z(x, t) \Big|_{t=0} u(x). \end{aligned}$$

Отже,

$$\delta(x, T) (\hat{y}(T) - y_d) = {}_tI_T^{1-\alpha} z(x, t) \Big|_{t=0} u(x).$$

і з (4.4)

$$J'_u(\hat{u}) = {}_tI_T^{1-\alpha} z \Big|_{t=0} + \lambda \Lambda \hat{u}.$$

Отже, із [1] маємо, що має місце

Теорема 2. Якщо $(\hat{y}, \hat{u}) \in \mathbb{Y}^p \times U_\partial$ є розв'язком задачі (2.1)-(2.5), то для довільного $u \in U_\partial$

$$\langle {}_tI_T^{1-\alpha} z \Big|_{t=0} + \lambda(-\Delta \hat{u} + \hat{u}), u - \hat{u} \rangle \geq 0,$$

де z є розв'язком (4.5)-(4.7).

І навпаки, якщо $\hat{u} \in U_\partial$, $\hat{y}$ задовольняє (2.3)-(2.5), а $\hat{z}$ — (4.5)-(4.7), і для довільного $u \in U_\partial$

$$\langle {}_tI_T^{1-\alpha} \hat{z} \Big|_{t=0} + \lambda(-\Delta \hat{u} + \hat{u}), u - \hat{u} \rangle \geq 0,$$

то $(\hat{y}, \hat{u})$ є оптимальним розв'язком задачі (2.1)-(2.5).

References

1. LIONS, J.-L. (1971) *Optimal control of systems governed by partial differential equations*. Berlin: Springer-Verlag.
2. SAMKO, S.G., KILBAS, A.A. and MARICHEV, O.I. (1993) *Fractional integrals and derivatives: theory and applications*. Switzerland: Gordon and Breach Science Publishers.
3. SAKAMOTO, K. and YAMAMOTO, M. (2011) Initial value/boundary value problems for fractional diffusion-wave equations and applications to some inverse problems. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. 382 (1). p. 426–447.
4. LI, Z., LIU, Y. and YAMAMOTO, M. (2015) Initial-boundary value problems for multi-term time-fractional diffusion equations with positive constant coefficients. *Applied Mathematics and Computation*. 257. p. 381–397.
5. FUJISHIRO, K. and YAMAMOTO, M. (2014) Approximate controllability for fractional diffusion equations by interior control. *Applicable Analysis*. 93 (9). p. 1793–1810.

Надійшла до редколегії 10.09.16

УДК 519.72

І.О. Завадський, к. ф.-м. н., доцент

Сімейство швидких алгоритмів пошуку рядка в тексті

Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, пр-т.
Глушкова 4д, e-mail: zava@ukr.net

Igor O. Zavadskyi, Associate Professor, Ph. D.

A family of fast exact pattern matching algorithms

Taras Shevchenko National University of Kyiv,
03680, Kyiv, Glushkova av., 4d

Описано сімейство алгоритмів точного пошуку рядка в більшому текстовому масиві. В алгоритмах використовуються багатовимірні масиви з метою обробки кожної ітерації кількох послідовних пошукових вікон. Це дає змогу знизити часову складність у середньому за рахунок підвищення ємнісних витрат. Розглянуті алгоритми є ефективними для коротких шуканих рядків (від 3 до 16 символів) і алфавітів середнього розміру (найвища ефективність досягається для алфавітів, що містять близько 30–40 елементів). Для деяких значень пар значень (довжина шуканого рядка, розмір алфавіту) запропоновані алгоритми є ефективнішими в середньому за всі відомі на сьогодні алгоритми точного пошуку підрядка.

Ключові слова: пошук рядка в тексті, алгоритм Бойєра-Мура, швидкий пошук, багатовіконний.

A family of comparison-based exact pattern matching algorithms is described. They utilize multi-dimensional arrays in order to process more than one subsequent text window in each iteration of the search cycle. This approach leads to a lower average time complexity by the cost of space. The algorithms of this family perform well for short patterns and middle alphabets. In such case the shift of the window by several pattern lengths at once is quite probable, which is the main factor of algorithm success. Our algorithms outperform the Boyer-Moore-Horspool algorithm, either in the original version or with Sunday's "Quick search" modification, in a wide area of pattern length / alphabet size plane. In some subareas the proposed algorithms are the fastest among all known exact pattern matching algorithms. Namely, they perform best when alphabet size is about 30–40 and pattern length is about 4–10. Such parameters are typical for search in natural language text databases.

Key words: pattern matching, Boyer-Moore, fast search, text search, multi-window.

Communicated by Prof. Anisimov A.V.

1 Introduction

Pattern matching is one of the most fundamental techniques used in computer science. The most common pattern matching problem is formulated as finding all the exact occurrences of a given substring in a larger body of text. Through the entire presentation we use the following notation:

T – input text

P – pattern to be searched

n – length of the input text

m – length of the pattern

Σ – alphabet of input text and pattern

$|\Sigma|$ – size of alphabet Σ

$|\Sigma_P|$ – number of different symbols in the pattern

This problem has been systematically studied since the beginning of seventies. The number of algorithms more efficient than the simplest straight forward search (SF) has been discovered. The most famous of them are the Knuth-Morris-Pratt

algorithm [1], which improves the worst-case time complexity of the SF from $O(nm)$ to $O(n+m)$ and Boyer-Moore algorithm [2], which significantly outperforms the SF in the average.

Almost all known pattern matching algorithms include the preprocessing stage, when some preliminary values are obtained basing on the pattern, and the main search cycle, when the text body is scanned. In most cases the algorithm efficiency strongly depends not only on the pattern and text lengths, but also on the alphabet size. Since, as a rule, the dependence of the main search cycle on the text length is linear and time complexity of the preprocessing stage is negligibly small, it is worthwhile to compare the algorithm efficiency on the $(|\Sigma|, m)$ -plane.

Our research concerns the left up area, where m is small, $|\Sigma|$ is large. In this area two modifications of BM algorithm, namely Boyer-Moore-Horspool

algorithm (BMH) [3] and Sunday's "Quick Search" (QS) [4] were considered the best for a decades. However, in 2000s a number of more efficient exact pattern matching algorithms were invented. According to [5] they are FJS for $m < 8$ and $|\Sigma| > 32$, TVSBS for $m = 2$ and $8 \leq |\Sigma| \leq 32$, EBOM for $4 \leq m \leq 16$ and $8 \leq |\Sigma| \leq 32$, SBNDM for $8 \leq m \leq 16$ and $|\Sigma| > 32$ and FSBNDM for $m > 16$ and $|\Sigma| > 8$. The algorithms mentioned cover all three known types of pattern-matching algorithms: FJS and TVSBS are comparison-based; EBOM is automata based, while SBNDM and FSBNDM algorithms utilize the bit-parallel operations. We propose the new comparison-based algorithms. Almost all algorithms of this type, including FJS, TVSBS and our new algorithms, exploit the idea of bad-character shift, which originates from BM search. It is to compare the last character of the search window and the last character of the pattern and, if they do not match, shift the window as long as possible. The BMH algorithm is based on this idea only. We develop a generalization of BMH algorithm, which allows performing several bad-character shifts at each iteration.

The search cycle of the BMH algorithm is shown in Fig. 1. Since we analyze the algorithms in operation level, we try to remove the unnecessary subtractions denoting $n-m$ by nm and $m-1$ by $m1$; these values can be calculated in a preprocessing stage. The bad character shift is performed in the row 7 and its length is equal to $D[T[pos+m-1]]$, where pos is the current position of the search window and D is the shift array calculated in a preprocessing stage. If the ratio $|\Sigma_P|/|\Sigma|$ is small enough, the symbol $T[pos+m-1]$ most likely does not occur in the pattern and the length of this shift is maximum, i.e. it stands m . These maximum length shifts are the main factor responsible for the efficiency of BMH in the left up area of the $(|\Sigma|, m)$ -plane. And we are interested in the most left upper subarea, where the ratio $|\Sigma_P|/|\Sigma|$ is particularly small. In this case one can assume that probably not only character $T[pos+m-1]$ does not belong to the pattern, but the characters $T[pos+2m-1]$, $T[pos+3m-1]$ etc. as well. This means that the search window can be shifted by several window lengths at once, or, in other words, several subsequent search windows can be processed at iteration of the search cycle. This is the main idea of the multi-window search algorithms.

```

1. while pos < nm
2.   j ← m1;
3.   while j > 0 AND T[pos+j] = P[j]
4.     j ← j-1;
```

```

5.   if j = 0
6.     output pos;
7.   pos ← pos + D[T[pos+m1]];
```

Fig. 1. The main search cycle of the Boyer-Moore-Horspool algorithm

Of course, at least k symbols of input text must be read and processed in each substring of the length km in order not to miss the possible pattern occurrence. Thus, at least k readings of input text characters should be done for each window of the length km – just the same number as at k iterations of the single-window algorithm like BMH or QS. However, we can reduce the number of other operations using the k -dimensional arrays. Such arrays occupy rather more memory than the pattern shift arrays for single-window search algorithms and their filling takes more preprocessing time. Nevertheless, as will be shown below, these space overheads are not that big comparing to memory size of modern computers, while time overheads are more than covered in the main search cycle, resulting in a significant gain in the total for the wide range of alphabet size / pattern length combinations.

The idea of using two text windows while searching all occurrences of the pattern is not new. It was utilized in Two-Sliding-Windows (TSW) algorithm [6]. However, these windows were supposed to be processed in parallel and thus TSW algorithm is suitable for parallel processor structures only. Also the idea of two-dimensional search array was already implemented in a number of algorithms, for instance, in Berry-Ravindran algorithm [7], TVSBS and EBOM. However, it was always proposed to use two subsequent characters of a text as indices. This significantly increases the probability of the maximum length shift if it is low for single-character check but otherwise leads to superfluous density of the checks. In other words, if even single-character check causes the maximum shift with high probability, there is no need to check two subsequent characters to shift the text window by m or $m+1$ positions. In this case it may be better to perform double-check of the characters $T[pos]$ and $T[pos+m-1]$, which could shift the text window by $2m$ positions at once.

2 Double window algorithm

Let us discuss how to process two subsequent search windows of the length m , which could be considered as one window of the double length $2m$.

We try to reduce the total number of computing operations required to process the substring of the length $2m$. Let us examine the main cycle of BMH algorithm shown in Fig. 1. Two reads from shift table D in row 7 in two iterations can be replaced by one if we use two-dimensional shift table $D2_{|\Sigma| \times |\Sigma|}$ defined as follows.

$D2[i][j]$ is the leftmost possible position of the first character of the pattern under assumption that $T[m-1]=i$ and $T[2m-1]=j$. All shifts defined by the table $D2$ can be divided in 4 types shown in Fig. 2.

a) Neither i nor j belong to pattern P . Then P can be safely shifted by $2m$ positions forward.

b) Character i doesn't belong to pattern P but j belongs. In this case P can be safely shifted by more than $m-1$ symbols but less than $2m$. Namely, the rightmost occurrence of j in P should be aligned with $T[2m-1]$.

c) Character i belongs to P and $P[m-1] \neq i$. Then P can be safely shifted forward by less than m symbols. Namely, the rightmost occurrence of i in P should be aligned with $T[m-1]$.

d) $P[m-1]=i$. This is the case when the pattern can be matched in the current position. One should check if $T[0] \dots T[m-1]$ coincides with the pattern before proceed forward.

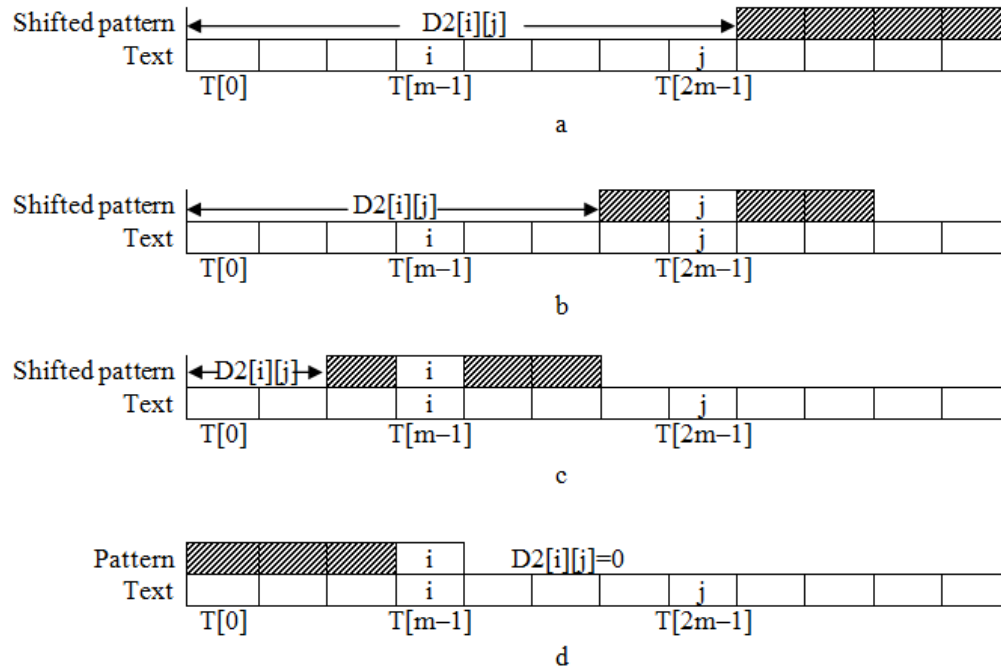


Fig. 2. Pattern shifts in Double window algorithm

```

1. while pos < nm
2.   r ← D2[T[pos]] [T[pos+m]];
3.   if r = 0
4.     j ← 0;
5.     while j < m AND T[pos-m+1+j] = P[j]
6.       j ← j+1;
7.     if k = m
8.       output pos-m+1;
9.     pos ← pos + D[T[pos]];
   else
10.  pos ← pos + r;

```

Fig. 3. The Double window algorithm main search cycle

Let us calculate the number of operations in BMH and Double window (DW) algorithms required for the shift of the text window by $2m$ characters forward in the case of the maximum

possible shift. This is the most probable case when pattern length is very small compared to alphabet size. In this case only rows 1, 2, 3 and 7 in two iterations of BMH algorithm and only rows 1, 2, 3

and 10 in one iteration of Double window algorithm are executed. Note that getting the element of one-dimensional array like $D[x]$ is equivalent to $*(D+x)$ in C notation, which requires one addition and two readings from memory, while getting the element of two-dimensional $|\Sigma| \times |\Sigma|$ array like $D2[x][y]$ is equivalent to $*(D2+|\Sigma|*x+y)$, which requires two additions, one multiplication and three readings from memory ($|\Sigma|$ is a constant).

The calculations are shown in Table 1. The number of operations in Double window algorithm is more than twice less compared to BMH. Also, it should be noted that memory reads generally take longer time than operations that could be performed using processor registers only, e.g. arithmetic operations. If someone implements the discussed algorithms in assembler language, the values of variables $pos, m1, m, j$ etc. can be stored in processor registers, while the arrays T, D and $D2$ cannot. In such implementation 8 memory reads are performed in two iterations of BMH (2 in row 3 and 2 in row 7 in each iteration) and only 3 memory reads needed in one iteration of Double window algorithm, they are $T[pos]$, $T[pos+m]$ and $D2[T[pos]][T[pos+m]]$ in row 3. Thus, in the case of efficient assembler implementation, the Double window algorithm main cycle outperforms the BMH main cycle even more than in the case of implementation in the high-level programming language, if the longest possible shifts are performed (Figure 2a).

Table 1. The operational complexity of Boyer-Moore-Horspool and Double window algorithms

Operation	Boyer-Moore-Horspool	Double window
compari- son	4 – (rows 1 and 3) $\times 2$	2 (rows 1 and 3)
assign- ment	4 – (rows 2 and 7) $\times 2$	2 (rows 2 and 10)
memory reads	28 – (2 in row 1; 1 in row 2; 6 in row 3; 5 in row 7) $\times 2$	10 (2 in row 1; 6 in row 2; 2 in row 10)
additions	14 – (3 in row 3; 4 in row 7) $\times 2$	6 (5 in row 2 and 1 in row 10)
multipli- cation	–	1 (row 2)
Total	50	21

One can observe that even one iteration of Double window algorithm main cycle requires fewer operations than one iteration of BMH main cycle in the case when the condition $r=0$ is not met.

Therefore, in the cases shown in figures 2b and 2c the Double window algorithm main cycle still executes faster than BMH main cycle. Note that in the case (c) the equality $D2[i][j]=D[i]$ holds, i.e. the shift length in Double window algorithm is just the same as in BMH.

Of course, the advantage of DW main cycle over BMH main cycle in the case (b) is lower than in the case (a) and in the case (c) is lower than in the case (b). While the ratio $|\Sigma_P|/|\Sigma|$ increases, the balance between cases (a), (b) and (c) moves to (b) and (c) and then to (c) only. If $|\Sigma_P|/|\Sigma|$ is close to 1, the case (c) occurs almost always and outperformance of DW main cycle over BMH main cycle is small.

The case shown in Figure 2d for random text and pattern occurs with the probability $1/|\Sigma|$ regardless of $|\Sigma_P|$ value. In this case the internal cycle of DW in rows 5 and 6 executes and the internal cycle of BMH in rows 3 and 4 has more than one iteration. Each iteration of DW internal cycle requires more time than that one of BMH, because the comparison $T[pos-m1+j]=P[j]$ requires 4 additions/subtractions and 6 readings from memory, while the comparison $T[pos+j]=P[j]$ consists of only 3 additions and 5 readings from memory.

As a result, the main cycle of the DW algorithm is essentially faster than the main cycle of BMH algorithm when the following conditions are met:

- (1) the alphabet is large enough to make the case (d) not frequent;
- (2) the ratio $|\Sigma_P|/|\Sigma|$ is small enough to make the case (c) not frequent.

The simulation shows that only when alphabet size is up to 4, the condition (1) violation forces the DW algorithm main cycle to run slower than BMH main cycle on random pattern and text. Any alphabet of size greater than 4 could be considered as “large enough”. The violation of condition (2) forces the DW algorithm main cycle to run approximately at the same speed as the BMH main cycle. However, for the wide range of pattern length / alphabet size combinations the DW is essentially faster than BMH. This range covers m in the range 20–30 and $|\Sigma|>4$.

3 Multi-window extension

Let us consider the possibility of processing more than 2 subsequent text windows in one iteration. The modification of the DW algorithm is simple: the N -dimensional array DN should be used instead of $D2$. It is defined as follows.

$DN[i_1] \dots [i_N]$ is the leftmost possible position of the beginning of the pattern under assumption that $T[km-1]=i_k, k=1, \dots, N$.

In Figure 3 only row 2 should be changed in a following way:

$r \leftarrow DN[T[pos]][T[pos+2m]] \dots [T[pos+Nm]]$;

Thus we obtain the Triple Window (TW), Quadruple Window (QW) and other Multi-window algorithms.

Using C notation this assignment can be rewritten as $r = *(DN + b_{N-1}pos + \dots + b_1(pos + (N-1)m) + pos + Nm)$, where $b_k = |\Sigma|^k$. Of course, in order to reduce the number of multiplications, the values $2m, \dots, Nm$ can be calculated in the preprocessing stage, while the values b_k could be considered as constants. However, every next dimension adds two additions, one multiplication and two memory reads to the calculation routine. This overhead is covered by longer shifts until the value of $|\Sigma_P|/|\Sigma|$ is small enough, but in the case $N \geq 3$ the preprocessing begins to play an important role, since its time and space complexity grows exponentially depending on N . The preprocessing stage is discussed in the next section.

4 Preprocessing

On the preprocessing stage of the N -window algorithm the values $km, k=1, \dots, N$ are calculated and arrays D containing $|\Sigma|$ elements and DN with $|\Sigma|^n$ elements are filled with the values. Filling the array D is just the same as in the BMH algorithm and runs in $O(|\Sigma|)$. Obtaining values km is $O(N)$ time, which is ignorable small for realistic values of N . Filling the array DN takes up almost all the time. The following procedure completes this task.

1. Assign the value Nm to all elements.
2. Replace the values $D[i_1] \dots [i_N]$, where $i_N \in P$, with $Nm - q_N - 1$, where q_N is the rightmost position of the character i_N in the pattern P .

...

$N+1$. Replace the values $D[i_1] \dots [i_N]$, where $i_1 \in P$, with $m - q_1 - 1$, where q_1 is the rightmost position of the character i_1 in the pattern P .

The first step takes $O(|\Sigma|^N)$ time, while each other step – $O(m|\Sigma|^{N-1})$ time. The overall time complexity of preprocessing stage is $O(|\Sigma|^N + Nm|\Sigma|^{N-1})$.

Using the special functions that copy memory blocks, like `memcpy` from `memory.h` C library, one can build the implementation that is faster in times than the conventional method given above.

The space complexity of Multi-window algorithms is, of course, strongly greater than that one for BMH/QS. However, memory requirements of $D2$ array even for relatively large alphabet containing 256 symbols are only 64 Kb, which is absolutely admissible for present-day computers and programs.

The TW algorithm, as computational experiment shows, is efficient only for b values around 32. Then the size of $D3$ ($32 \times 32 \times 32$) array is only 32 Kb. The QW algorithm could be efficient for $b=16$ at maximum and the size of the respective $D4$ array is 64 Kb.

5 Unrolling cycle

The algorithms based on bad character rule, such as BMH or Multi-window, could be accelerated using the unrolling cycle technique. It consist of applying “blind” shifts, without checking the end of file, until shift value is not positive. In order not to miss the end of the file, the text is appended by the fictitious pattern.

This technique could be applied to Multi-window algorithms in a following way:

- Row 1 should be replaced with the endless cycle “while 1”.
- After row 3 we should check the condition $pos \geq nm$ and break the cycle if it is met.

This allows us to check the end of the file only when the shift array element is equal to zero and speed up the multi-window algorithms by 2–4%.

6 Computational experiment

We implement the unrolled versions of Double window, Triple-window (TW), Quadruple-window (QW) and a number of other known algorithms in C language, use the Microsoft Visual studio compiler to build the executables and run them on the Athlon II X2 245 processor, 2.9 GHz, Windows 7 platform. Preprocessing stage of the TW and QW algorithms is implemented using the fast memory fill functions. The text containing 10 MB characters is randomly built and the patterns as well. The distribution of characters is uniform.

The results for alphabet of size 32 and different pattern lengths are presented in Table 2. The total running time of 1000 runs is shown. The QW results are not shown, since they are significantly worse than DW and TW results for alphabet size 32. The QW algorithm could be efficient for smaller alphabets and very short patterns.

Table 2. The total running time of pattern matching algorithms, 10 MB of text $\times$ 1000, in seconds

	BMH	QS	DW	TW	EBOM	FJS	TVSBS	SBNDM	FSBNDM
m=2	45,326	31,678	34,030	27,229	90,742	26,169	24,186	25,689	36,091
m=3	33,320	25,596	24,429	21,396	52,538	22,890	21,109	20,034	26,177
m=4	24,552	20,366	18,836	15,812	33,695	19,420	18,182	16,071	19,477
m=5	19,919	17,358	15,558	13,630	25,020	16,397	16,025	14,127	16,273
m=6	16,458	14,583	13,313	11,623	19,524	13,926	13,824	12,328	13,250
m=7	15,049	13,724	11,957	10,706	17,003	12,880	13,002	11,855	11,930
m=8	14,279	13,213	11,704	10,913	15,945	12,550	12,680	11,725	11,451
m=9	12,170	11,327	10,181	9,316	13,299	10,846	11,212	10,391	9,624
m=10	11,097	10,411	9,363	8,990	11,667	9,826	10,218	10,076	8,963
m=11	10,541	9,788	9,088	8,547	10,673	9,175	9,454	9,401	8,103
m=12	9,874	9,432	8,522	8,198	9,949	8,859	9,071	9,271	7,726

7 Conclusions

As is seen, the Triple Window algorithm is superior over all known algorithms for pattern lengths from 4 to 9 and alphabet size 32. Both DW and TW algorithms outperform classical comparison-based algorithms, such as BMH and QS for all considered values of m . The TVSBS, FJS and SBNDM are better for very short patterns,

while for pattern length 10 and more the FSBNDM algorithm becomes superior.

The technique used in Multi-window algorithm family could be applied in order to accelerate the algorithms based on comparisons of subsequent characters, which is a future research direction.

Список використаних джерел

1. Knuth D. E. Fast pattern matching in strings / D. E. Knuth, J. G. Morris, V. R. Pratt // SIAM J. Comput. – 1977. – V. 6 (1) – P. 323–350.
2. Boyer R. S. A fast string searching algorithm. / R. S. Boyer, J. S. Moore // Commun. ACM. – 1977. – V. 20 (10) – P. 762–772.
3. Horspool R. N. Practical fast searching in strings. / R. N. Horspool // Softw. Pract. Exp. – 1980. – V. 10 (6). – P. 501–506.
4. Sunday D. M. A very fast substring search algorithm. / D. M. Sunday // Commun. ACM. – 1990. – V. 33 (8). – P. 132–142.
5. Faro S. The Exact Online String Matching Problem: a Review of the Most Recent Results. / S. Faro, T. Lecroq // ACM Computing Surveys (CSUR) Surveys Homepage archive. – 2013. – V. 45 (2), February 2013, Article No. 13.
6. Hudaib A. A fast pattern matching algorithm with two sliding windows (TSW). / A. Hudaib, R. Al-Khalid, D. Suleiman, M. Itriq, A. Al-Anani // J. Comput. Sci. – 2008. – V. 4 (5), P. 393–401.
7. Berry T. A fast string matching algorithm and experimental results. / T. Berry, S. Ravindran // In Proceedings of the Prague Stringology Club Workshop '99. – 1999. – P. 16–28.

References

1. KNUTH D. E., MORRIS J. H., and PRATT V. R. (1977) *Fast pattern matching in strings*, SIAM J. Comput. 6 (1), pp. 323–350.
2. BOYER R. S. and MOORE J. S. (1977) *A fast string searching algorithm*, Commun. ACM 20, 10, pp. 762–772.
3. HORSPOOL R. N. (1980) *Practical fast search in strings*, Softw. Pract. Exp. 10, 6, 501–506.
4. SUNDAY D. M. (1990) *A very fast substring search algorithm*, Commun. ACM 33, 8, pp. 132–142.
5. FARO S., LECROQ T. *The Exact Online String Matching Problem: a Review of the Most Recent Results* (2013), ACM Computing Surveys (CSUR) Surveys Homepage archive. Volume 45 Issue 2, Article No. 13.
6. HUDAIB A., AL-KHALID R., SULEIMAN D., ITRIQ M., AL-ANANI A. (2008), *A fast pattern matching algorithm with two sliding windows (TSW)*, J. Comput. Sci. 4, 5, pp. 393–401.
7. BERRY T., RAVINDRAN S. (1999) *A fast string matching algorithm and experimental results*, In Proceedings of the Prague Stringology Club Workshop '99, pp. 16–28.

Received: 28.06.2016

УДК 519.688

Зарембовський К. В., аспірант,
Шевченко В. П., к.ф.-м.н., доц.

Електронне навчання – програмно- технічні аспекти організації

Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, пр-т. Глушкова, 4д, м. Київ,
83000
e-mail: zkv.inn@gmail.com
e-mail: vpsh@unicyb.kiev.ua

K. V. Zarembovskyi, graduate student,
V. P. Shevchenko, candidate of physical and
mathematical sciences, associate professor.

E-learning and its programmatic and technical aspects of the organization

Taras Shevchenko National University of Kyiv,
83000, Kyiv, Glushkova st., 4d,
e-mail: zkv.inn@gmail.com
e-mail: vpsh@unicyb.kiev.ua

Стаття присвячена основним напрямкам електронного навчання. Наведено етапи розвитку електронного навчання. Розглянуто дистанційне навчання як напрям навчання електронного. Виділено та описано форми дистанційного навчання та його функціональні підрозділи. Розкривається зміст поняття «мобільне навчання» з технічної та організаційної точки зору, вказуються основні переваги над іншими формами електронного навчання. Проведений аналіз і висновки будуть корисними для фахівців сфери організації систем електронного навчання, їх впровадження та підтримки.

Ключові слова: електронне навчання, дистанційне навчання, мобільне навчання.

The article describes main areas of e-learning. E-learning nowadays is a cornerstone for getting knowledge for the students of different specialties. Such systems are independent of time, place, social status, computer type. The article describes the obstacles for further development of these new forms of learning. Stages of e-learning are listed. Distance learning is considered as a brunch of e-learning. Learning by correspondence as a primitive form of distance learning was rather popular in Ukraine since XX century. Computer networks, personal computers, compact data storages were the main factors for computerizing distance learning. Highlight and described forms of distance learning and its functional units. Expansion of smartphones, i-pads, spread of mobile connection initialized a new form of e-learning. Expands the concept of "mobile learning" from a technical and organizational point of view, indicated the main advantages over other forms of e-learning. The analysis and results will be useful for specialists of e-learning systems, their implementation and support.

Key Words: electronic learning, distance learning, mobile learning

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Анісімов А.В.

Вступ

Для сучасних студентів, навіть гуманітарного спрямування, отримання навчальної інформації за допомогою електронних пристроїв є невід'ємною частиною життя. Динамічність розвитку сучасного світу вимагає швидких і дешевих засобів для створення й постачання знань. E-learning є одним з інструментів, який може вирішити цю проблему [1].

На даний момент технології e-learning надають можливості створення систем масового безперервного навчання та засобів обміну інформаційним контентом, які не залежать від часових поясів і географічного положення, соціального стану та рівня доходів слухачів, часу дня та використовуваної програмної платформи. Тим самим реалізується право кожної людини на отримання освіти. Саме такі системи здатні найбільш швидко і адекватно реагувати на

потреби суспільства і забезпечувати втілення права на освіту кожного громадянина.

В той же час розвиток теоретичних та практичних аспектів розробки та використання систем електронного навчання характеризується наразі певним рівнем невизначеності та неузгодженості [2]. Тому метою даного дослідження є аналіз комп'ютерних аспектів організації систем e-learning як одного з перспективних напрямків освіти третього тисячоліття.

Електронне навчання

Електронне навчання (e-learning, скорочення від англ. Electronic Learning) – система навчання, де основним інструментом процесу є інформаційні й електронні технології.

Марк Розенберг (Marc Rosenberg) відзначає, що e-learning вирізняється використанням Intra- та Internet технологій для створення та надання широкого набору рішень, які створюють основу для підвищення ефективності отримання знань та продуктивності праці; e-learning має кілька базисних принципів: навчання проводиться із використанням мережевих технологій; кінцевий користувач отримує навчальний контент за допомогою звичайного комп'ютера та набору стандартизованих мережевих технологій [3].

E-learning визначають також як «широкий спектр застосунків та процесів, використанням яких забезпечується навчальний процес оснований на web-технологіях; використанні персональних комп'ютерів та «віртуальних» класних кімнат; засобів для взаємодії користувачів через мережу. E-learning безпосередньо використовує такі методи доставки навчального контенту, як: через мережу, мультимедійні записи, супутникові методи зв'язку та передачі інформації, інтерактивне телебачення та дискретні носії». [4]. На сучасному етапі розвитку інформаційно-комунікаційних технологій електронне навчання може розглядатися як технологічна основа фундаменталізації освіти.

Розвиток електронного навчання можна умовно поділити на три етапи.

Перший етап (20-50-ті роки XX століття) охоплює період з моменту появи електромеханічних пристроїв і до початку широкого впровадження електронних обчислювальних машин. На цьому етапі різні механічні, електромеханічні та електронні індивідуалізовані засоби використовувались для подачі навчального матеріалу та контролю і

самоконтролю знань. За методичну основу бралася технологія програмованого навчання. Універсальні ЕОМ для навчання в цей період ще не використовувались.

Другий етап (50-80-ті роки) пов'язаний із широким розповсюдженням ЕОМ у цивільній сфері. В даний період була створена велика кількість комп'ютерно-орієнтованих парадигм навчання, комп'ютеризованих систем контролю знань, спеціалізованих наборів програмного забезпечення, таких як автоматизовані навчальні системи PLATO, Coursewriter, Tutor та інші. Головні недоліки розробок зазначеного періоду, автономність та стаціонарність, були пов'язані з використанням «великих» обчислювальних машин або, в кращому випадку, зв'язаних із ними терміналів. Також дуже складно було реалізувати обмін навчальними матеріалами в електронному вигляді та постачання навчальних послуг значній кількості користувачів.

Третій етап (з 80-х років) розпочався з появою персональних комп'ютерів, компактних сховищ даних із високою щільністю запису, комп'ютерних мереж. Якісний стрибок у розвитку електронного навчання стався з появою глобальної мережі Інтернет. Ключовими характеристиками для e-learning стала можливість автоматичного обміну інформацією між віддаленими комп'ютерами, впровадження комунікаційного інтерфейсу для спілкування між учасниками навчального процесу в реальному часі, здешевлення і мініатюризація електронного обладнання, охоплення територій потужними каналами зв'язку, використання гіпертекстових сторінок, інтелектуалізація програмного забезпечення. В цей же час з'являються такі різновиди електронного навчання як дистанційне, мобільне та змішане.

Незважаючи на численні переваги e-learning [5] відкрилися і досить серйозні проблеми його поширення і використання. Частина з них носить гуманітарний характер: юридична легалізація цих форм навчання, зміна психолого-педагогічних засад навчання, необхідність мовної адаптації. До програмно-апаратних проблем можна віднести відсутність стандартів, високу залежність від технічної інфраструктури, складність реконфігурації курсу в процесі навчання. e-learning як і будь-які новачі потребує значних інвестицій в розробку і впровадження та в підготовку відповідних фахівців.

Дистанційне навчання

Дистанційне навчання (d-learning, скорочення від англ. Distance Learning) на даний момент є формою e-learning, яка зазнала бурхливого розвитку завдяки появі і широкому розповсюдженню глобальної комп'ютерної мережі Інтернет. Головною відмінністю d-learning є рознесення у просторі (завдяки і у рамках мережі) всіх учасників навчального процесу: студентів, викладачів, адміністраторів. Перші форми дистанційного навчання працювали в режимі реального часу – викладач виступав перед комп'ютером, а студенти в цей же час спілкувалися із ним за своїми персональними комп'ютерами в інших точках мережі. З розвитком програмно-апаратних засобів (можливість зберігання і демонстрації по потребі відеозаписів, програмна індивідуалізована подача інформації і контроль її засвоєння) відпало і обмеження реального часу. Відтоді всі учасники навчального процесу могли брати в ньому участь знаходячись біля будь-якого комп'ютера мережі і в будь-який час.

Первісною «примітивною» формою дистанційного навчання можна вважати форму письмового спілкування, тобто завдання і відповіді відсилались поштою. Це рух Чотоква (Chautauqua) у США у XIX столітті, телевізійні школи в СРСР у 60-ті роки, курси ЄШКО у сучасній Україні.

Крім традиційних – студент, викладач, адміністратор (методист деканату чи кафедри) у дистанційній формі з'являються нові елементи:

1) *бази знань* – навчальний контент згрупований у модулі, які можуть містити дані різної природи – текст, графіку, зображення, аудіо, анімацію, відео тощо. Зазвичай, вони зберігаються як певні об'єкти за допомогою бази даних і доступні в залежності від зазначених потреб слухачів та наданих слухачам дозволів згідно прослуховуваного курсу, успіхів слухача та багатьох інших факторів та правил. Результатом цього є індивідуалізація навчання – студенти отримують лише те, що їм потрібно, засвоюючи знання у бажаному темпі;

2) *групи* – студенти можуть самі створювати Інтернет-спільноти для взаємодопомоги та обміну повідомленнями;

3) *експерти* – інші викладачі або інструктори з курсу доступні в мережі для проведення консультацій, відповіді на питання, організації обговорення.

Можливість здійснення не лише традиційного зв'язку «викладач – студент»

перетворює всіх учасників навчального процесу, включаючи адміністрацію, у навчальну гіпермережу по якій передається не лише інформація у довільній електронній формі (тексти, звук, зображення, відео), а й управління ходом навчання, крім того у ній можуть утворюватись підмережі з додатковим функціоналом або обмеженнями (онлайн-конференції, спільні групові проекти студентів, семінари або гуртки за інтересами).

За типом управління форми дистанційного навчання можна диференціювати у кількох вимірах:

1) **За глобальністю** форми відрізняються наявністю чи відсутністю алгоритму регуляції навчання і рівнем документа про завершення навчання.

1.1) Включене або самоосвітнє, коли вибір дисципліни та регуляція процесу навчання здійснюється самим студентом, а результати надсилаються студенту або в іншу освітню систему/програму. Наприклад он-лайн курс «Бренд-менеджмент» в Київському національному університеті імені Тараса Шевченка або Coursera.

1.2) Сертифіковане, коли вибір дисциплін, порядок і об'єм їх вивчення регулюється певним сертифікованим алгоритмом, можливо за участю самого студента. Успішне виконання алгоритму дає право на одержання документу про одержання певного рівня освіти. Класичним прикладом є Лондонський відкритий університет.

2) **За рівнем замкненості** форми відрізняються системами авторизації та ідентифікації.

2.1) Відкриті, коли кожен бажаючий може пройти курс навчання.

2.2) Закриті, коли до навчання допускається тільки певне коло студентів.

3) **За комерційною ознакою** форми відрізняються наявністю чи відсутністю взаємодії з фінансовими, як правило банківськими, системами.

3.1) Безкоштовні.

3.2) Платні.

4) **За типом комунікації** форми відрізняються за використаною матеріально-технічною базою спілкування.

4.1) Чисто мережеве – використовуються тільки мережеві канали.

4.2) Змішане – використовуються й інші інформаційні джерела: спеціальні програми радіо і телебачення, CD-диски, друковані видання.

Практично всі відомі педагогічні методики навчання можуть бути реалізовані в дистанційному навчальному середовищі за допомогою спеціалізованих програмно-апаратних засобів.

Здійснення дистанційного навчання передбачає наявність певних структурних складових (підрозділів), які розрізняються за своїми функціями.

1) Навчальний центр (навчальний заклад або будь-який інший постачальник дистанційного навчання), який виконує функції організації інформаційної та технічної підтримки навчальних курсів, організації спілкування студентів (форми навчання, які вимагають колективної роботи), функції управління та адміністрування навчальної системи.

2) Інформаційні ресурси – навчальні модулі та курси (тексти лекцій, матеріали для демонстрацій та інше); методичні матеріали та довідники (які, власне, включають коментарі викладачів до навчальних матеріалів, найбільш часті запитання слухачів та інше); електронна бібліотека (списки рекомендованої літератури, списки доступних ресурсів по тематиці прослуховуваного курсу та посилання на них, академічний календар та інше).

3) Матеріально-технічні засоби – доставка та демонстрація навчального контенту студентам, автоматизована система опитування та перевірки, комунікаційні засоби: сервіси електронної пошти та автоматизованої розсилки, дошки оголошень, вебінари та віртуальні лекції, мультимедійні трансляції.

4) Викладачі-консультанти («тьютори») – консультації, контроль знань, зворотній зв'язок.

5) Студенти.

Мобільне навчання

Сьогодні понад 6 мільярдів людей мають доступ до Інтернету за допомогою мобільних пристроїв. Мобільні технології змінюють спосіб нашого життя і починають змінювати світ навчання. Розвиток глобальних мереж, мініатюризація електронних гаджетів, суттєве вдосконалення програмного забезпечення та збільшення об'єму запам'ятовуваних пристроїв викликали розвиток такої форми електронного та дистанційного навчання, як мобільне навчання (m-learning).

Мобільне навчання (m-learning, скорочення від англ. *Mobile Learning*) [6] – це будь-яка активність, яка дозволяє людям бути більш продуктивними в таких процесах, як використання та створення інформації, будь-яка взаємодія із нею за допомогою компактного, переносного цифрового пристрою, яким людина користується регулярно. Такий пристрій повинен забезпечувати надійний швидкий зв'язок і для транспортування розміщуватись в кишені або в сумці чи портфелі.

Мобільне навчання відбувається в умовах, коли студент або викладач знаходяться поза наперед обумовленою локацією. Мобільні пристрої та технології щонайкраще відображають динамічність сучасного життя – роботи і навчання, розваг і спілкування. Мобільні телефони, смартфони зараз є майже в кожного, а значить, більшість людей можуть мати постійний доступ до мережі, незважаючи на те, де вони при цьому знаходяться і чим займаються. Тому мобільні пристрої мають величезний потенціал для дистрибуції інформації.

M-learning надає електронному навчанню наступні програмно-технічні переваги:

1) Можливість використання в навчанні легких, компактних, портативних пристроїв, які придбані студентом, є його власністю і ним обслуговуються.

2) Добре підходить для найрізноманітніших типів навчальної активності – під час практичних занять на виробництві, дослідів у полі, в транспорті.

3) Є адекватним інструментом при навчанні людей з особливими потребами (інвалідів, активно працюючих, ув'язнених).

4) Добре підходить для молодіжного способу життя.

5) Забезпечує безперервну, цільову підтримку навчання.

6) Надає учасникам більшу свободу і величезну різноманітність варіантів де і коли вчитися.

7) Відбувається зазвичай швидше і динамічніше, ніж електронне у форматі стандартних курсів.

8) Контент, як правило, поставляється маленькими, змістовно навантаженими, якомога релевантнішими порціями.

З іншого боку, з мобільним навчанням пов'язаний і цілий ряд проблем:

1) маленький розмір екранів і клавіш на мобільних пристроях;

2) проблеми інформаційної безпеки навчального контенту і персональних даних;

3) необхідність переробляти звичайний електронний контент для мобільних пристроїв;

4) ризики у разі втрати мобільного пристрою;

5) не всі учні можуть дозволити собі придбати відповідний мобільний пристрій;

6) непропрацьованість педагогічної теорії для мобільного навчання;

7) змішування приватного життя, роботи, навчання;

8) потреба у підвищеній мотивації у порівнянні із очним навчанням.

В даний час міжнародні організації, такі як ЮНЕСКО, державні і приватні фонди активно працюють над просуванням ідеї «навчання для

всіх», під час якого активно використовуються мобільні пристрої; доповненням і збагаченням формального навчання; прагнуть зробити навчання більш доступним, справедливим і гнучким для студентів у всьому світі.

Висновки

Проведений у статті аналіз програмно-технічних аспектів організації різних форм електронного навчання дозволить ефективніше розгортати його в поєднанні з іншими інформаційно-комунікаційними технологіями для досягнення широкого спектру освітньо-навчальних цілей.

Список використаних джерел

1. Глибовець М. М. Програмні засоби створення і супроводу розподіленого навчального середовища / М.М.Глибовець, С.С.Гороховський, І.В.Сергієнко, А.М.Глибовець. – К.:НаУКМА Аграр Медіа Груп. – 2012. – 710 с.
2. Clark T. Online, blended, and distance education in schools. / Building Successful Programs Edited by Tom Clark and Michael K. Barbour. – STYLUS PUBLISHING, LLC. – 2015. – 160 p.
3. Rosenberg M. Beyond E-Learning: New Approaches to Managing and Delivering Organizational Knowledge / ASTD International Conference, Atlanta. – 2007. – р. 2008.
4. E-Learning / Е-Софт Девелопмент [Електронний ресурс]. – 2011. – Режим доступу: www.web-learn.ru/biblioteka-online/36-e-learning
5. Хусейн А. З. С. Програмоване, дистанційне, мобільне... Яке навчання далі? / Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія: Фізико-математичні науки. – 2015. – №4. – с. 75-81.
6. Духнич Ю. Мобильное обучение – Mobile Learning [Електронний ресурс]. – Режим доступу: <http://www.smart-edu.com/mobile-learning.html>.

References

1. HLYBOVETS M. M., SERHIENKO I. V., HOROKHOVSKIY S. S. and HLYBOVETS A. M. (2012) *Prohramni zasoby stvorennia i suprovodu rozpodilenoho navchalnoho seredovyshcha*. K.:NaUKMA; Agrar Media Hrup, 2012.
2. CLARK T. Online, blended, and distance education in schools. *Building Successful Programs*. K. Barbour 2015 STYLUS PUBLISHING, LLC.
3. ROSENBERG M. Beyond E-Learning: New Approaches to Managing and Delivering Organizational Knowledge in *ASTD International Conference*. 2007 June 3 Atlanta.
4. E-Soft Development. (2011) *E-Learning*. [Online] Available from: www.web-learn.ru/biblioteka-online/36-e-learning [Accessed: 19th August 2015].
5. KHUSEIN A. Z. S. (2015) Programmed, remote, mobile... Which learning to choose further? *Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv Series Physics & Mathematics*. 2015(4) pp. 75-81.
6. DUKHNYCH Yu. *Mobylnoe obuchenye – Mobile Learning*. [Online] Available from: <http://www.smart-edu.com/mobile-learning.html> [Accessed: 19th August 2015].

Надійшла до редколегії 16.09.2016

УДК 303.732.4; 519.81

В. А. Заславський, д-р техн. наук, проф.
М. В. Пасічна, здобувач,
К. К. Красовська, аспірант

**Застосування методу аналізу ієрархій при
вирішенні проблеми диверсифікації
складу портфеля джерел генерації
електроенергії**

Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 01033, Київ, вул. Володи-
мирська 64.

e-mail: zas.vlad@gmail.com
maypas@gmail.com
katerina.krasovska@gmail.com

V. A. Zaslavskiy, D. Eng. Sc., Prof.
M. V. Pasichna, PhD candidate,
K. K. Krasovska, PhD candidate

**Application of Analytic Hierarchy Process
to solve the problem of diversification of the
energy portfolio of electricity generation
sources**

Taras Shevchenko National University of Kyiv,
01033, Kyiv, Volodymyrska st.64.

e-mail: zas.vlad@gmail.com
maypas@gmail.com
katerina.krasovska@gmail.com

Стаття присвячена питанню диверсифікації енергогенеруючого портфеля на провідних підприємствах виробництва електроенергії в Європейському Союзі (ЄС). Енергетика належить до критичної інфраструктури (КИ), а конкурентне, безпечне і стале виробництво електроенергії є одним із головних завдань енергетичного співтовариства. Проте, компанії, щоб досягти цього, повинні здійснити вибір пріоритетів між різними джерелами генерації електроенергії. Отже, головною задачею, поставленою у дослідженні, є проведення пріоритизації (ранжування) на множині можливих джерел генерації електроенергії із застосуванням методу аналізу ієрархій (МАІ). Цей метод дозволяє з'ясувати та кількісно підтвердити яка альтернатива найкращим чином відповідає потребам компаній як з експертної точки зору, так і через механізм кількісної оцінки. В процесі побудови ієрархії створюється система основних критеріїв, які необхідно враховувати при оцінці альтернатив. В статті описується етапи проведення МАІ і кількісні розрахунки, на основі яких робиться висновок про доцільність використання того чи іншого джерела генерації електроенергії для формування диверсифікації складу портфеля.

Ключові слова: метод аналізу ієрархій (МАІ), ієрархія, джерело генерації електроенергії, система прийняття рішень.

This research adheres to the issue of diversification of the energy portfolio at the leading electricity generating enterprises in the European Union (EU). Energy sector belongs to critical infrastructure (CI) and competitive, secure and sustainable electricity is one of the main objectives of the Energy Community. However, for the companies to reach this, a priority choice between the different electricity generation sources should be made. The main problem, raised in the study, concerns prioritizing (ranking) of the set of possible sources of the electricity generation by utilizing the Analytic Hierarchy Process (AHP). This method allows to explain what alternative best meets the needs of the companies from both an expert point of view and through the mechanism of quantitative assessment. Moreover, while creating the hierarchy, a system of the main factors, which have to be considered when evaluating alternatives, is being created. The article describes the stages of AHP and quantitative calculations, which create the basis for analyzing the feasibility of using the source of electricity generation for creation of diversification of the energy portfolio.

Keywords: analytic hierarchy process (AHP), hierarchy, electricity generation source, decision-making system.

Статтю представив д.фіз.-мат. наук, проф. Хусаїнов Д.Я.

Вступ. Метод аналізу ієрархій (МАІ) – що застосовується для розв'язання різноманітних математичний інструментарій системного аналізу, складних проблем прийняття рішень, які

розроблено у Пенсильванському університеті американським вченим Томасом Сааті у 1972-1973 рр.^[5]

Головною перевагою даного методу є його гнучкість та легкість застосування у багатьох предметних областях, зокрема МАІ широко використовується при дослідженні проблем енергетики^[10,11].

Об'єкти енергетичної сфери належать до так званої критичної інфраструктури (КІ), тобто коли від надійності, безпечності та ефективності функціонування таких систем залежить економічна стабільність та безпека суспільства^[12,17]. Враховуючи складність об'єктів КІ, їх дослідження необхідно проводити якомога ретельніше, правильно визначати важливість критеріїв, надійність критичних складових, які забезпечують їх функціонування. Для оцінки ризиків та підтримки безпеки систем КІ необхідно застосовувати принципи системного аналізу, математичні моделі та алгоритми для якісної та кількісної оцінки працездатності систем.

Інструментарій МАІ, як багатофакторний процес прийняття рішень, дозволяє успішно вирішувати проблеми, оскільки метод дозволяє визначити не тільки інтенсивність дії (пріоритет) певного фактору (критерію) на функціонування систем та проводити ранжування конкретних варіантів рішення (альтернатив), але й дозволяє визначити ваги критеріїв, незалежно від їх природи. Так, в енергетичній галузі МАІ використовувався в контексті раціональної оцінки та основи для фіксації альтернатив при задоволенні попиту на енергію, з врахуванням обмеженої пропозиції^[13].

Слід зазначити, що «ідеального» рішення, варіанту, який є найкращим для всіх обраних критеріїв, що покладені в основу класичних інструментів для прийняття рішень, важко досягти. Тому необхідним є знаходження компромісу з числа різних гіпотетичних рішень, тобто необхідно зупинитися на тій альтернативі, яка є «виправданою», і може бути «не оптимальною»^[14].

В останні роки, підходи із застосування МАІ в енергетиці розглядалися багатьма вітчизняними і закордонними вченими. Так, у 2011 році значна увага приділялась теорії надійності та ризик-аналізу, проводився аналіз надійності та оцінка можливих ризиків енергетичних систем та їх елементів таких як ТЕС або АЕС^[3,6]. У 2015 році не залишилося без уваги питання раціонального розміщення об'єктів КІ в контексті задачі вибору раціонального розташування електростанцій^[4].

У зв'язку з тим, що сучасна, гостра проблема вичерпання природних ресурсів є найбільш актуальною для систем енергетики, зростає актуальність досліджень, присвячених вибору альтернативних джерел отримання енергії та пошуку нових. Розглядаються підходи до планування енергозабезпечення регіонів України за допомогою поновлюваних джерел енергії^[2] та проблема вибору альтернативного джерела з використанням МАІ^[1,8], при вирішенні проблеми модернізації національної енергетичної системи^[7].

Розв'язання питань планування раціонального використання природних ресурсів потребує системного підходу, їх систематизації та кількісної оцінки з метою отримання більш цілісного розуміння та підвищення ефективності стратегічного планування в енергетиці в умовах обмежених ресурсів. В статті проводиться аналіз проблеми раціонального використання ресурсів в сфері енергетики з урахуванням різного типу критеріїв (економічних, технічних, соціальних і екологічних), і по відношенню до енергогенеруючих підприємств, які працюють з різноманітними джерелами вироблення електроенергії в окремих державах-членах ЄС (Франція, Німеччина, Бельгія, Італія, Швеція та Фінляндія). З такої точки зору задача раціонального використання ресурсів ще не розглядалася. В цьому і полягає актуальність диверсифікації складу портфеля джерел генерації електроенергії. В рамках дослідження пропонується застосувати МАІ при виборі джерела генерації електроенергії з подальшим числовим розрахунком.

Постановка задачі. В статті розглядається задача диверсифікації складу енергогенеруючого портфеля на провідних підприємствах виробництва електроенергії в ЄС.

Вирішення задачі вимагає проведення ранжування на множині можливих варіантів джерел генерації електроенергії з врахуванням різноманітності цих елементів. Для розв'язання поставленої задачі використовується МАІ, який дозволяє провести не тільки ранжування конкретних елементів (джерел виробництва електроенергії, критеріїв вибору між ними), але і зважити їх. Таким чином, можна визначити кількісно наскільки один елемент є більш/менш важливим, ніж інший.

Застосування МАІ для розв'язання задачі вибору джерел генерації електроенергії при диверсифікації портфеля. Формування та прийняття рішення у МАІ складається із наступних кроків^[5].

Крок 1. На даному кроці визначається головна ціль (ранжування джерел генерації електроенергії диверсифікованого складу енергопортфеля компаній) та скінченна множина різнотипних альтернативних джерел генерації електроенергії, критерії оцінювання джерел генерації електроенергії, та будується ієрархія проблеми, що вирішується.

Дані для формування задачі збирались із різних джерел: наукових публікацій, звітів енергогенеруючих компаній, що функціонують в різних країнах ЄС, офіційних електронних ресурсів та безпосереднього опитування експертів, компетентних з проблем енергетики. Аналізувалась література та звіти компаній, до яких є відкритий доступ і які охоплюють період 2007-2015 років. Опитування експертів здійснювалось методом відкритих інтерв'ю та з використанням анкет із фіксованими відповідями.

Нехай $Z_1 - Z_m$ – множина альтернативних варіантів джерел генерації електроенергії. В даному випадку $m = 7$ і множина альтернатив

складається із елементів: вугілля (Z_1), природний газ (Z_2), гідроенергетика (Z_3), вітроенергетика (Z_4), геліоенергетика (Z_5), використання біомаси (Z_6), ядерна енергетика (Z_7). Питома вага цих джерел складала 97 відсотків виробництва електроенергії в ЄС-27 у 2014 році^[16].

В табл. 1 представлено комплекс найбільш важливих критеріїв та відповідних їм факторів, які були обрані на основі проведеного експертного аналізу.

Значущість критеріїв була оцінена групою експертів по шкалі від 1 до 5 методом безпосереднього оцінювання. Оскільки наявність занадто великої кількості критеріїв робить процес парного порівняння занадто складним і тривалим, то бажаним є скорочення числа критеріїв^[15]. У зв'язку з цим, при проведенні дослідження, тільки критерії із оцінкою «3» і вище були прийняті до уваги. Таким чином, серед 9 критеріїв та 29 факторів було обрано 8 критеріїв і 19 факторів, які представлені в табл. 1 з їх оцінками, які використовуються при розв'язанні задачі в МАІ.

Таблиця 1. Критерії для оцінювання джерела електроенергії

	Критерії та фактори	Оцінка*
F1	Державна підтримка і регулювання	4
F11	Законодавство і регулювання, що підтримує розвиток джерел електроенергії	4
F12	Законодавство і регулювання, що регулює питання зміни клімату	5
F13	Просування джерел електроенергії є збалансованим із захистом навколишнього середовища	3
F2	Стабільна економіка країни	4
F21	Економічна стабільність в країні	4
F22	Високі ціни на викиди CO ₂ та паливо	5
F3	Внутрішня політика компанії, направлена на диверсифікацію структури виробництва електроенергії	3
F31	Наявність в компанії амбіційної енергоефективної політики і політики по скороченню викидів	3
F32	Злиття і поглинання / продаж активів	3
F4	Конкурентна вартість виробництва електроенергії	5
F41	Відносно невисокі витрати на нові технології для виробництва електроенергії	3
F42	Відносно невисокі витрати на модернізацію існуючих технологій для виробництва електроенергії	3
F43	Рентабельність проектів	5
F5	Соціальне сприйняття і співробітництво із зацікавленими сторонами	3
F51	Підтримка громадськості та НУО (неурядові організації)	3
F52	Співпраця із зацікавленими сторонами (Європейська комісія, місцеві адміністрації, і т.д.)	4
F6	Надійні постачальники палива	4
F61	Відносно невисокі витрати на поставки палива для виробництва електроенергії	5
F62	Стабільні поставки палива для виробництва електроенергії	3
F7	Задоволення споживачів електроенергії	4

F71	Якісне джерело генерації електроенергії (сертифікована електроенергія)	3
F72	Відносно невисока ціна на електроенергії від джерела енергії	5
F73	Якісне і безперебійне постачання електроенергії від джерела енергії	3
F8	Безпека та надійність виробництва електроенергії	4
F81	Відповідальне функціонування заводу	4
F82	Можливість оцінити надійність роботи заводу	4

*1- немає актуальності, 2 - незадовільно, 3 - задовільно, 4 - добре і 5 – відмінно

На рис. 1 на основі сформованої множини альтернатив, критеріїв та факторів представлено побудовану ієрархію, яка складається з чотирьох рівнів. Рівень I – мета: ранжування джерел генерації електроенергії диверсифікованого складу енергопортфеля компаній.

Рівень II і рівень III: критерії і відповідні їм групи факторів, які впливають на значущість джерела виробництва електроенергії. Рівень IV: диверсифікована множина альтернативних джерел генерації електроенергії.

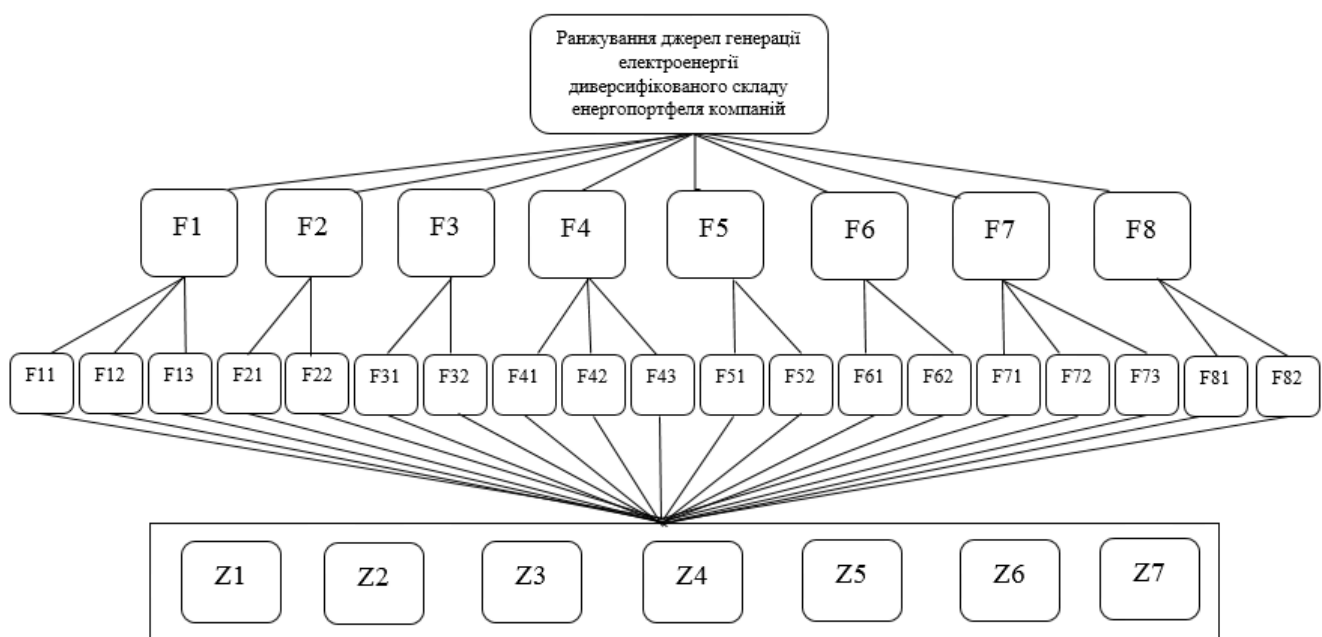


Рис. 1. Багаторівнева ієрархічна структура для оцінювання джерела генерації електроенергії

Таким чином, визначено мета, множина альтернатив $Z_1 - Z_7$, та 8 комплексних різнотипних критеріїв $F_1 - F_8$ і 19 відповідних ним факторів $F_{11} - F_{13}$; $F_{21} - F_{22}$; $F_{31} - F_{32}$; $F_{41} - F_{43}$; $F_{51} - F_{52}$; $F_{61} - F_{62}$; $F_{71} - F_{73}$; $F_{81} - F_{82}$.

Крок 2. На цьому кроці МАІ необхідно побудувати матриці суджень (парних порівнянь) і визначити пріоритети всіх елементів ієрархії. Нижче наведено загальний вигляд матриці (1):

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad (1)$$

Згідно МАІ елементи матриці A повинні задовольняти властивості оберненої симетричності (2):

$$a_{ji} = \frac{1}{a_{ij}}. \quad (2)$$

На діагоналі матриці стоять 1, тобто $a_{11} = 1, a_{22} = 1 \dots a_{nn} = 1$ ^[5].

Для побудови матриць парних порівнянь використовувався метод анкетування. Експертам, які брали участь у дослідженні, пропонувалось заповнити наступні три анкети:

- парне порівняння комплексних критеріїв відносно мети;
- парне порівняння факторів відповідних комплексних критеріїв;
- парне порівняння альтернатив.

Оцінки виставлялися експертами за відомою у МАІ шкалою, згідно якої можна оцінити відносну важливість елементів ієрархії.^[5]

У результаті проведеного анкетування було отримано 28 матриць парних порівнянь (розмірністю від $n \times n = 2 \times 2 - 19 \times 19$). Матриця N_0 , результат опитування по першій анкеті, матриці $N_{F_1} - N_{F_8}$ – другої, а матриці $N_{F_{11}} - N_{F_{13}}; N_{F_{21}} - N_{F_{22}}; N_{F_{31}} - N_{F_{32}}; N_{F_{41}} - N_{F_{43}}; N_{F_{51}} - N_{F_{52}}; N_{F_{61}} - N_{F_{62}}; N_{F_{71}} - N_{F_{73}}; N_{F_{81}} - N_{F_{82}}$ відповідно, третьої анкети і представляють собою оцінки методу парних порівнянь альтернатив відносно 19 факторів, що відповідають комплексним критеріям (табл. 1).

Матриця N_0 , наприклад, має такий вигляд (табл. 3):

Таблиця 3. Матриця N_0

	F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7	F8
F1	1	2	5	1/6	3	2	1/2	1/3
F2	1/2	1	4	1/4	2	2	1/2	1/3
F3	1/5	1/4	1	1/7	1/2	1/4	1/5	1/6
F4	6	4	7	1	6	5	2	1
F5	1/3	1/2	2	1/6	1	1/4	1/5	1/6
F6	1/2	1/2	4	1/5	4	1	1/3	1/5
F7	2	2	5	1/2	5	3	1	1/7
F8	3	3	6	1/2	8	5	7	1

Матриці суджень для оцінки факторів і альтернатив будуються аналогічним чином.

Після проведення парних порівнянь та побудови матриць визначався вектор локальних пріоритетів (3). Для кожної матриці суджень обчислювався нормалізований вектор локальних пріоритетів $a^k = (a_1^k, a_2^k \dots a_n^k), k = \overline{1, 28}$ з наступними компонентами^[5]:

$$a_i^k = \sqrt[n]{\prod_{j=1}^n a_{ij}}, i = \overline{1, n}, \quad (3)$$

де n – розмірність матриці; a_{ij} – елемент i -го рядка матриці. Таким чином, кожній з 28 матриць суджень відповідає вектор $a^k, k = \overline{1, 28}$.

Вектори $b^k = (b_1^k, b_2^k \dots b_n^k), k = \overline{1, 28}$ – результат нормалізації векторів a^k за формулою (4) для кожної з 28-ми матриць суджень і являють

собою внесок (пріоритет) критерію у досягнення мети:

$$b_i^k = \frac{a_i^k}{\sum_{i=1}^n a_i^k}, k = \overline{1, 28}. \quad (4)$$

Для кожного вектора b^k виконується (5):

$$\sum_{i=1}^n b_i^k = 1, \quad (5)$$

де n – розмірність матриці; b_i^k – компонента вектора b^k .

Крок 3. Суть цього кроку полягає у оцінці суджень експертів на узгодженість.

Після обчислення локальних векторів пріоритету необхідно перевірити матриці суджень на узгодженість. Узгодженість матриці у загальному вигляді показує те, що при наявності основного масиву даних всі інші дані можуть бути логічно виведені з них. Прийнятним порогом узгодженості вважається 10%. Якщо оцінка узгодженості вища встановленого порогу, то якість суджень слід поліпшити шляхом перевірки оцінок експертів^[5], уточненням поставлених експертам питань. По своїй суті оцінка узгодженості показує міру нелогічності суджень експерта. Це своєрідне згладжування суджень, яке може бути прийнятним або неприйнятним в залежності від умов задачі.

Для того, щоб обчислити оцінку узгодженості, необхідно знайти $\lambda_{\max}^k, k = \overline{1, 28}$ – власні числа відповідних матриць $(N_0; N_{F_1} - N_{F_8}; N_{F_{21}} - N_{F_{22}}; N_{F_{31}} - N_{F_{32}}; N_{F_{41}} - N_{F_{43}}; N_{F_{51}} - N_{F_{52}}; N_{F_{61}} - N_{F_{62}}; N_{F_{71}} - N_{F_{73}}; N_{F_{81}} - N_{F_{82}})$, що обчислюються за формулами (6), (7):

$$\lambda_i^k = \sum_{i=1}^n a_{ij} \times b_i^k, k = \overline{1, 28}, \quad (6)$$

$$\lambda_{\max}^k = \sum_{i=1}^n \lambda_i^k. \quad (7)$$

Для обчислення оцінки узгодженості використовується RI – оцінка випадкової узгодженості для випадкової матриці розмірності $n \times n$ (табл.4).

Таблиця 4. Значення випадкового індексу узгодженості

N	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
RI	0.00	0.00	0.58	0.9	1.12	1.24	1.32	1.41	1.45	1.49

Оцінка узгодженості в MAI обчислюється за формулою (8):

$$CR = \frac{CI}{RI}, \quad (8)$$

де CI – індекс узгодженості матриць визначається формулою (9):

$$CI = \frac{\lambda_{\max}^k - n}{n - 1}, k = \overline{1, 28}, \quad (9)$$

де $\lambda_{\max}^k$ – максимальне власне значення матриці; n – розмірність матриці.

Як вже було згадано раніше, якщо $CR \leq 0,1$ (вищезазначений поріг в 10%), то значення оцінки узгодженості вважається прийнятним, якщо $CR \geq 0,1$, то матриця суджень вважається неузгодженою і оцінки експерта повинні бути переглянутими.^[5]

Після проведення обчислень були отримані наступні значення пріоритетів критеріїв (табл. 5).

Таблиця 5. Значення пріоритетів критеріїв та їх ранжування

Критерій	Пріоритет	Ранг
F4. Конкурентна вартість виробництва електроенергії	0,2800	1
F8. Задоволення споживачів електроенергії	0,2795	2
F7. Безпека та надійність виробництва електроенергії	0,1346	3
F1. Державна підтримка і регулювання	0,0978	4
F2. Стабільна економіка країни	0,0794	5
F6. Надійні постачальники палива	0,0674	6
F5. Соціальне сприйняття і співробітництво із зацікавленими сторонами	0,0351	7
F3. Внутрішня політика компанії, направлена на диверсифікацію структури виробництва електроенергії	0,0262	8

Крок 4. Після перевірки матриць суджень на узгодженість здійснюється синтез глобальних пріоритетів альтернатив. Для отримання глобальних пріоритетів альтернатив використовуються нормалізовані вектори матриць суджень і за формулою (10) здійснюється згортка критеріїв:

$$b^{Z_m} = \sum_{i=1}^8 \sum_{j=1}^{19} b^{N_0} \cdot b^{N_{Fi}} \cdot b^{N_{Fij}}, m = \overline{1,7}, \quad (10)$$

де b^{Z_m} – вектор пріоритетів альтернатив; b^{N_0} – нормалізований вектор пріоритетів матриці суджень відносно головної мети; $b^{N_{Fi}}$ – нормалізований вектор пріоритетів матриць суджень факторів відносно комплексних критеріїв; $b^{N_{Fij}}$ – нормалізований вектор пріоритетів матриці парного порівняння альтернатив відносно факторів.

Крок 5. На останньому кроці проводиться ранжування множини альтернатив.

Результати обчислень глобальних пріоритетів та рангів альтернатив представлені в табл. 6:

Згідно результатів, представлених у табл. 6, атомна енергія, вугілля та природний газ являються пріоритетними джерелами генерації електроенергії для енергетичного портфеля компанії. Це підтверджує той факт, що не дивлячись на розвиток відновлюваних джерел

енергії, традиційна енергетика залишається провідною.

Таблиця 6. Значення пріоритетів альтернатив та їх ранжування

Джерело електроенергії - альтернативи	Пріоритет	Ранг
Z7. Атомна енергія	0,2188	1
Z1. Вугілля і буре вугілля	0,2008	2
Z2. Природний газ	0,1335	3
Z6. Енергія біомаси	0,1247	4
Z3. Гідроенергія	0,1147	5
Z5. Сонячна енергія	0,1077	6
Z4. Вітрова енергія	0,1008	7

Висновок. Ранжування джерел генерації електроенергії із застосуванням МАІ визначає, що ядерна енергія найкраще задовольняє всім критеріям і судженням, і трохи випереджає вугілля, а інші джерела виробництва електроенергії значно відстають.

Це є логічним висновком для формування диверсифікованого портфелю енергетичних компаній з точки зору того, що виробництва електроенергії є мало-затратним, безперебійним, надійним та безпечним. Слід, однак, відмітити те, що даний аналіз базується на тенденціях 2007-2015 років в країнах ЕС і не враховує того, що, наприклад, нові вимоги з безпеки для АЕС можуть призвести до значного підвищення вартості виробництва електроенергії на АЕС. З іншого боку, останні кроки по зниженню вартості виробництва сонячної і вітрової електроенергії можуть значно покращити ранги даних джерел в майбутньому.

Стосовно критеріїв, що отримали низькі ранги, необхідно відмітити, що внутрішня політика компанії майже втричі менш важливіша, ніж підтримка з боку держави та економічну стабільність країни. Це ще раз підтверджує критичність енергетичної інфраструктури та її стратегічну важливість для добробуту країни.

Дане дослідження проводилось для енергогенеруючих компаній, але розроблені альтернативи, критерії та ієрархія МАІ можуть бути застосовані для інших компаній, енергетичної системи країни в цілому.

Список використаних джерел

References

1. Дюжев В. Обоснование современных приоритетов инновационной восприимчивости к НВЭ на основе анализа социально-экономических и эколого-техногенных факторов с использованием метода анализа иерархий / Виктор Дюжев, Станислав Сусликов // Вісник НТУ «ХП». Серія: Технічний прогрес і ефективність виробництва. – Харків – 2013. - № 66 (1039). – с. 3-12.
2. Калинчик В. Планирование энергообеспечения регионов Украины на основе возобновляемых источников энергии / Василий Калинчик, Марина Кокорина // Вісник КрНУ імені Михайла Остроградського. - 2013. – № 3(80). – С. 60 – 65.
3. Мезин С. В. Разработка методики анализа показателей надежности современных АСУ ТП ТЭС и АЭС : автореф. дис. на соиск. учен. степ. канд. техн. наук : 05.13.07. / Сергей Витальевич Мезин. Москва – 2000. – 20 с.
4. Панкратьев П.С. Поддержка принятия решений при многокритериальном двухуровневом выборе пунктов размещения электростанций: автореф. дис. канд. техн. наук: 05.13.01 / Павел Сергеевич Панкратьев – Иркутск – 2015. – 22 с.
5. Саати Т.Л. Принятие решений. Метод анализа иерархий. / Т.Л. Саати, М.: Радио и связь, 1989. — 316 с.
6. Худий Є. Стан ізоляції та надійність роботи електрообладнання. Досвід діагностики електродвигунів у промислових умовах / Євгеній Худий, Іван Пельтек // Гірничі електромеханіка та автоматика: Наук.-техн. зб. – Донецьк. – 2011. – № 86. – с. 137-141.
7. Köne A. An analytical network process (ANP) evaluation of alternative fuels for electricity generation in Turkey / Aylin Köne, Tayfun Büke // Energy Policy – 2007. - № 35(10). – p. 5220-5228.
8. Lee S.K. et al. A study on making a long-term improvement in the national energy efficiency and GHG control plans by the AHP approach // Energy Policy – 2007. -
1. DYUZHEV V.G., SUSLIKOV S.V. (2013) *Justification of modern priorities of innovative susceptibility to non-conventional renewable energy sources based on the analysis of socio-economic, ecological and technological factors with using of analytic hierarchy process*. Bulletin of NTU “KHPI”: Technical progress and production efficiency, 66: p.3-12.
2. KALINCHIK V.P., KOKORINA M.T. (2013) *Planning of energy supply for Ukrainian regions based on the renewable energy sources*. Bulletin of KrNU n.a. M.Ostrogradskiy. 3/2013: p.60-65.
3. MEZIN S.V. (2000) *Development of methods for indicators reliability analysis of TPP and NPP modern automation systems*.
4. PANKRATIEV P.S. (2015) *Decision support when choosing duplex multicriterion placing electric power stations*.
5. SAATY T.L. (1989) *Decision making. Analytic hierarchy process*. Radio and connection.
6. KHUDYY E.G., PELTEK I.I. (2011) *State of isolation and reliability of electrical equipment. Experience of electric motors diagnostics in industrial environments*. Mining electrical engineering and Automatics. 86: p.137-141.
7. KÖNE A.Ç., BÜKE T. (2007) *An analytical network process (ANP) evaluation of alternative fuels for electricity generation in Turkey*. Energy Policy.
8. LEE S.K. ET AL (2007) *A study on making a long-term improvement in the national energy efficiency and GHG control plans by the AHP approach*. Energy Policy.
9. OZGUR DEMIRTAS (2013) *Evaluating the Best Renewable Energy Technology for Sustainable Energy Planning*. Energy Economics and Policy. Vol.3: p.23-33.
10. PATLITZIANAS K.D. (2007) *Assessing the renewable energy producers' environment in EU accession member states*. Energy Conversion and Management, 48: p.890–897.
11. CHATZIMOURATIDIS A.I., PILAVACHI P.A. (2007) *Objective and subjective evaluation of power plants and their non-*

- №35(5). – p.2862-2868.
9. Ozgur Demirtas Evaluating the Best Renewable Energy Technology for Sustainable Energy Planning // *Energy Economics and Policy* – 2013. – №3. – p. 23-33.
 10. Patlitzianas K.D. Assessing the renewable energy producers' environment in EU accession member states // *Energy Conversion and Management* – 2007. - №48. - p.890–897.
 11. Chatzimouratidis A. Objective and subjective evaluation of power plants and their non-radioactive emissions using the analytic hierarchy process / Athanasios Chatzimouratidis, Petros Pilavachi // *Energy Policy* – 2007. - №35. - p.4027–4038.
 12. Бірюков Д.С. Зелена книга з питань захисту критичної інфраструктури в Україні / Бірюков Д.С. [та ін.] // К.: Національний інститут стратегічних досліджень –2015. – 35 с.
 13. Saaty T.L. Applications in Business, Energy, Health, and Transportation. / Thomas L. Saaty, Luis G. Vargas// Springer Netherlands – 1982. - p. 182-192.
 14. Cavallaro F. A multicriteria approach to evaluate wind energy plants on an Italian island / Fausto Cavallaro, Luigi Caraolo // *Energy Policy* – 2005. - №33. – p.235–244.
 15. Tam M.C.Y. An Application of the AHP in vendor selection of a telecommunications system / M.C.Y. Tam, V.M.R. Tummala // *Omega* - 2001. - №29(2). – p.171-182.
 16. The Shift Project Data Portal, Energy and Climate Data. [Online] Available from: www.tsp-data-portal.org
 17. Zaslavskiy V. Risk analyses and redundancy for protection of critical infrastructure Monographs of System Dependability / Volodymyr Zaslavskiy, Yevhenii Ievgiienko // Oficyna Wydawnicza Politechniki Wroclawskiej – 2010. - p.161-173.
 - radioactive emissions using the analytic hierarchy process. *Energy Policy* 35: P.4027–4038.
 12. BIRIUKOV D.S., KONDRATOV S.I., NASVIT O.I., SUKHODOLYA O.M. (2015) *Green Paper on a protection of the critical infrastructure in Ukraine*. National Institute of Strategic Research.
 13. SAATY T.L., VARGAS L.G. (1982). *Applications in Business, Energy, Health, and Transportation*. Springer Netherlands, pp. 182-192.
 14. CAVALLARO F., CIRAULO L. (2005). *A multicriteria approach to evaluate wind energy plants on an Italian island*. *Energy Policy* 33, 235–44.
 15. TAM M.C.Y., TUMMALA V.M.R. (2001). *An Application of the AHP in vendor selection of a telecommunications system*. *Omega* 29(2): 171-182.
 16. The Shift Project Data Portal, Energy and Climate Data. [Online] Available from: www.tsp-data-portal.org
 17. ZASLAVSKIY V., IEVGIIENKO Y. (2010) *Risk analyses and redundancy for protection of critical infrastructure Monographs of System Dependability* // Editor J.Mazurkiewicz, J.Sugier, T.Walkowiak, W.Zamojski, Oficyna Wydawnicza Politechniki Wroclawskiej, Wroclaw, Poland, 2010, P.161-173.

Надійшла до редколегії 28.03.16

УДК 519.87

Івохін Є.В., д.ф.-м.н, професор,
Апанасенко Д.В., аспірант

Про кластеризацію складених нечітких чисел на основі множин векторного рівня

Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, м. Київ, пр-т Глушкова, 4д,
e-mail: ivohin@univ.kiev.ua

Ivokhin E.V., Dr.Sci., professor,
Apanasenko D.V., postgraduate

About clusterization of composite fuzzy numbers on the sets of vector level

Taras Shevchenko National University of Kyiv,
Kyiv, Glushkova st, 4d,
e-mail: ivohin@univ.kiev.ua

В статті розглянуто та розв'язано задачі групування станів нечіткої системи, що описуються сукупністю складених нечітких чисел на основі множини векторного рівня. Було розглянуто конструктивний алгоритм, який дозволяє проводити кластеризацію нечітких даних, які подаються як сукупність складених нечітких чисел. Алгоритм дозволяє формалізувати пошук кластерного центру множини нечітких чисел та реалізувати процедуру групування даних в межах заданої кількості кластерів. Такий алгоритм кластеризації ґрунтується на обчисленні значень функції похибки, яка визначається на відповідних множинах заданого векторного рівня. Цей підхід є модифікацією вже існуючого методу C-means.

Ключові слова: кластеризація, невизначеність, нечітка множина, складене нечітке число, множина векторного рівня.

In the article the problem solved and state clustering fuzzy systems described by a set of fuzzy numbers drawn from the set of the vector. For the clustering process, there are many approaches, many of which are heuristic methods that are based on certain algorithms action researcher and do not require complex statistical calculations. However, their use in case of unclear information processing much more difficult or even becomes impossible through specific presentation fuzziness.

The article describes clustering method of given inaccurate information, which is formalized by the set of composite fuzzy sets. It was considered constructive algorithm that allows clustering fuzzy data which are presented as a set of fuzzy numbers drawn. The algorithm allows to formalize ways to search for the center cluster set and implementation procedures of fuzzy clustering data within the specified number of clusters. Such clustering algorithm based on the gradual improvement of the function of error which as a result should not exceed a given threshold. This approach is a modification of an existing method C-means.

Keywords: clustering, uncertainty, fuzzy set, composite fuzzy number, set of vector level.

Статтю представив д.т.н., проф. Волошин О.Ф.

Традиційна задача групування даних у відносно однорідні групи, що виникає в самих різних сферах науки, економіки, соціуму та ін., включає в себе проблему виділення кластерів та задачу знаходження еталонних вузлів. В реалізації методів кластеризації важливу роль грають показники належності даних до групи, способи обчислення відстаней між елементами, вагові коефіцієнти, що залежать від конкретної предметної області та спостережень в рамках цієї області. Методи мають різну обчислювальну складність та різний ступінь ефективності при вирішенні конкретних прикладних задач.

Для проведення процесу кластеризації існує багато підходів, більшість з яких є евристичними методами, що базуються на певних алгоритмах дій дослідника і не вимагають складних

статистичних розрахунків. Однак, їх використання у випадку обробки інформації нечіткого характеру суттєво ускладнюється або взагалі стає неможливим через специфічне представлення нечіткості. Розглянемо методику кластеризації неточно заданої інформації, для формалізації якої використовуються сукупності складених нечітких множин.

Означення 1 [1]. Нечіткою множиною $\tilde{A}$ в універсальному просторі X називається сукупність пар виду $\{(x, \mu_{\tilde{A}}(x))\}$, де $x \in X$, а $\mu_{\tilde{A}}(x) : X \rightarrow [0,1]$ - функція належності нечіткої множини $\tilde{A}$.

Величину функції належності $\mu_{\tilde{A}}(x)$ для довільного елемента $x \in X$ називають

ступенем належності x нечіткій множині $\tilde{A}$. Інтерпретацією ступеня належності $\mu_{\tilde{A}}(x)$ є суб'єктивна міра того, наскільки елемент $x \in X$ відповідає поняттю, зміст якого формалізується нечіткою множиною $\tilde{A}$.

При цьому, звичайна множина $L_0 = \{x \in X : \mu_{\tilde{A}}(x) > 0\}$ називається носієм нечіткої множини $\tilde{A}$, а множини $L(\alpha) = \{x \in X : \mu_{\tilde{A}}(x) \geq \alpha\}$ - множинами рівня $\alpha \in (0,1]$ нечіткої множини $\tilde{A}$.

Традиційно в якості універсального простору розглядається довільний скінченновимірний простір $X \subseteq R^N$, $x = (x_1, \dots, x_N) \in R^N$. У випадку $X \subseteq R^1$ нечітка множина $\tilde{A}$ містить сукупність пар, що складаються з двох скалярних значень $x \in R^1$ та $\mu_{\tilde{A}}(x)$.

Нехай задано сукупність нечітких множин $\tilde{A}_1, \dots, \tilde{A}_m$, що визначені у відповідних універсальних просторах $X_1, \dots, X_m$, де $X_i \subseteq R^1$, $i = \overline{1, m}$. Тоді можна говорити, що задано множину нечітких чисел. Будемо вважати, що кожне з них має трикутний вигляд, тобто $\tilde{A}_i = \{(a_i, b_i, c_i)\}$, $a_i \leq b_i \leq c_i$, $i = \overline{1, m}$, з лінійними функціями належності $\mu_{\tilde{A}}(x)$ вигляду

1. $\mu_{\tilde{A}}(x) = \frac{x-a}{b-a}, x \in [a, b];$
2. $\mu_{\tilde{A}}(x) = \frac{c-x}{c-b}, x \in [b, c];$
3. $\mu_{\tilde{A}}(x) = 0, x \notin [a, c].$

Розглянемо універсальну множину X у вигляді декартового добутку $X = \times_{i=1}^m X_i$.

Сформуємо множину $\tilde{A}^m = \{(x^1, \mu_{\tilde{A}_1}(x^1)), (x^2, \mu_{\tilde{A}_2}(x^2)), \dots, (x^m, \mu_{\tilde{A}_m}(x^m))\}$ де $x^i \in X_i$, $i = \overline{1, m}$.

Означення 2. Нечітку множину $\tilde{A}^m$ назвемо складеним нечітким числом в універсальній множині $\times_{i=1}^m X_i$.

Означення 3. Множину

$$L_0^m = \{x^1 \in X_1, x^2 \in X_2, \dots, x^m \in X_m : \mu_{\tilde{A}_1}(x^1) > 0, \mu_{\tilde{A}_2}(x^2) > 0, \dots, \mu_{\tilde{A}_m}(x^m) > 0\}, \quad (2)$$

$$L_0^m \subseteq X_1 \times X_2 \times \dots \times X_m,$$

будемо називати носієм складеного нечіткого числа $\tilde{A}^m$.

Означення 4. Множину

$$L^m(\alpha) = \{x^1 \in X_1, x^2 \in X_2, \dots, x^m \in X_m :$$

$$\mu_{\tilde{A}_1}(x^1) \geq \alpha, \mu_{\tilde{A}_2}(x^2) \geq \alpha, \dots, \mu_{\tilde{A}_m}(x^m) \geq \alpha\} \quad (3)$$

назвемо множиною рівня $\alpha \in (0,1]$ складеного нечіткого числа $\tilde{A}^m$.

Сукупність всіх складених нечітких чисел $\tilde{A}^m$ у множині $X = \times_{i=1}^m X_i$ позначимо $K(\tilde{A}^m)$.

Розробка конструктивного алгоритму проведення кластеризації нечітких даних, представлених сукупністю складених нечітких чисел з $K(\tilde{A}^m)$, включає в себе формалізацію способів пошуку кластерного центру множини та реалізацію процедури групування нечітких даних в межах заданої кількості кластерів.

У літературі, присвяченій проблемам кластеризації [2,3,4], найчастіше розглядаються три алгоритми: C-means, пікового групування та різницевого групування. Ці методи представляють собою кардинально різні підходи до вирішення проблеми кластеризації. Як правило, перший з них потребує від дослідника точного знання кількості кластерів, на базі чого будується алгоритм. Другий метод вимагає багато часу для виконання, бо має багато нетривіальних умов для перевірки щодо належності елемента до кластеру та побудови самого кластеру. Третій – найбільш оптимальний, але для його застосування необхідне детальне знання специфічних залежностей в системі для встановлення значень важливих параметрів, без яких метод не дає бажаного результату.

Задачу кластеризації нечітких даних, представлених сукупністю складених нечітких множин з $K(\tilde{A}^m)$, за допомогою алгоритмів нечіткого групування було розглянуто в роботах [5, 6]. У цих дослідженнях складені нечіткі дані об'єднувалися на основі множин заданого рівня, що, взагалі кажучи, не завжди є достатньо точним поданням вхідної інформації.

Узагальнемо цей підхід на випадок множин векторного рівня. Для цього визначимо деякі поняття.

Означення 5. Множину

$$L^m(\bar{\alpha}) = \{x^1 \in X_1, x^2 \in X_2, \dots, x^m \in X_m :$$

$$\mu_{\tilde{A}_1}(x^1) \geq \alpha_1, \mu_{\tilde{A}_2}(x^2) \geq \alpha_2, \dots, \mu_{\tilde{A}_m}(x^m) \geq \alpha_m\} \quad (4)$$

назвемо множиною векторного рівня $\bar{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$, $\alpha_i \in (0, 1]$, $i = \overline{1, m}$, складеного нечіткого числа $\tilde{A}^m$.

Нехай є два довільних складених нечітких числа

$$\tilde{U}^m = \{(x^1, \mu_{\tilde{A}_1}^U(x^1)), (x^2, \mu_{\tilde{A}_2}^U(x^2)), \dots, (x^m, \mu_{\tilde{A}_m}^U(x^m))\}$$

та

$$\tilde{V}^m = \{(x^1, \mu_{\tilde{A}_1}^V(x^1)), (x^2, \mu_{\tilde{A}_2}^V(x^2)), \dots, (x^m, \mu_{\tilde{A}_m}^V(x^m))\}.$$

Обчислимо вектор $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_m)$,

$$\gamma_i = \min_{Z \in \{U, V\}} \mu_{\tilde{A}_i}^Z(x^i), \quad i = \overline{1, m}, \quad \text{кожна компонента}$$

якого є мінімальним значенням відповідних величин мір належності окремих елементів обох множин $\tilde{U}^m, \tilde{V}^m$. Це значення дозволяє побудувати дві множини векторного рівня γ у вигляді звичайних множин $L_{\tilde{U}}^m(\bar{\gamma}), L_{\tilde{V}}^m(\bar{\gamma})$, що представляють собою вектори з універсальної множини $X = \bigtimes_{i=1}^m X_i$, між якими може бути обчислена евклідова відстань $d = \|L_{\tilde{U}}^m(\bar{\gamma}) - L_{\tilde{V}}^m(\bar{\gamma})\|$.

Означення 6. Складене нечітке число

$$\tilde{D}(\tilde{A}^m) = \{(x^i, \gamma_i) : \gamma_i \in (0, 1], i = \overline{1, m}\}, \quad (5)$$

визначає метрику простору складених нечітких чисел $K(\tilde{A}^m)$.

Таким чином, кожне складене нечітке число $\tilde{A}^m$ вимірюється за допомогою складеної нечіткої величини $\tilde{D}(\tilde{A}^m)$, а для знаходження нечіткої відстані $\rho(\tilde{U}^m, \tilde{V}^m)$ між довільними складеними нечіткими числами $\tilde{U}^m, \tilde{V}^m$ можна використати техніку обробки нечітких відношень переваги, введену Орловським [7]. За цим підходом, якщо задано $\tilde{\rho}_1 = \rho(\tilde{U}_1^m, \tilde{V}_1^m)$, $\tilde{\rho}_2 = \rho(\tilde{U}_2^m, \tilde{V}_2^m)$ - нечіткі відстані між складеними нечіткими множинами $\tilde{U}_1^m, \tilde{V}_1^m$ та $\tilde{U}_2^m, \tilde{V}_2^m$ відповідно, то визначити нечітку відстань, яка є меншою, можна у розумінні нечіткого відношення переваги “<”.

На основі введеного поняття відстані між складеними нечіткими числами та способу їх порівняння можна сформулювати алгоритми нечіткого групування даних, поданих у вигляді сукупності складених нечітких чисел $\{\tilde{A}^{m(j)}, j = \overline{1, p}\}$ з $K(\tilde{A}^m)$, що узагальнюють відомі підходи.

Розглянемо метод нечіткого групування S-means Будемо вважати, що задану сукупність можна згрупувати в k кластерів.

Задамо вектор $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_m)$, $\gamma_i \in (0, 1]$, який буде визначати рівень нечіткості даних, що розглядаються.

Визначимо k центрів кластерів у вигляді набору складених нечітких чисел

$$\tilde{C}^{m(i)} = \{(x^{1(i)}, \mu_{\tilde{A}_1}(x^{1(i)})), (x^{2(i)}, \mu_{\tilde{A}_2}(x^{2(i)})), \dots,$$

$$(x^{m(i)}, \mu_{\tilde{A}_m}(x^{m(i)}))\}, \quad i = \overline{1, k}. \quad \text{Виходячи з того, що}$$

точні значення центрів групування невідомі, алгоритм кластеризації має бути ітераційним. На початку процесу значення центрів групування оберемо випадковим чином.

Припустимо, що складені нечіткі числа $\tilde{A}^{m(j)}$, $j = \overline{1, q}$, $q \leq p$, мають непорожні множини рівня $L^m(\bar{\gamma})$. Будемо розглядати їх як звичайні вектори $S(\tilde{A}^{m(j)}) = \{x^{1(j)}, x^{2(j)}, \dots, x^{m(j)}\}$, $j = \overline{1, q}$. Зрозуміло, що вектори $S(\tilde{A}^{m(j)})$, будуть належати до різних груп з центрами $S(\tilde{C}^{m(i)})$, $i = \overline{1, k}$, відповідно, зі степенем належності u_{ij} , $i = \overline{1, k}$, $j = \overline{1, q}$.

Початкові величини значень належності також можуть бути задані випадково, з урахуванням очевидної умови $\sum_{i=1}^k u_{ij} = 1$ для кожного $j = \overline{1, q}$. Без обмеження загальності u_{ij} , $i = \overline{1, k}$, $j = \overline{1, q}$, можуть бути визначені, наприклад, у вигляді $u_{ij} = 1/k$, $i = \overline{1, k}$, $j = \overline{1, q}$.

Функції похибок, що відповідають такому представленню, можна визначити як суми часткових похибок належності до центрів з урахуванням значень степенів належності u_{ij} , $i = \overline{1, k}$, $j = \overline{1, q}$, відповідно, у вигляді

$$E(S) = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^q u_{ij} \|S(\tilde{C}^{m(i)}), S(\tilde{A}^{m(j)})\| \quad (6)$$

Таким чином, задача групування буде полягати в знаходженні мінімальних значень функції похибки $E(S)$ з p обмеженнями типу

$$\sum_{i=1}^k u_{ij} = 1, \quad j = \overline{1, q}. \quad \text{Розв'язки цієї задачі}$$

подається у вигляді [8]

$$S(\tilde{C}^{m(i)}) = \sum_{j=1}^q u_{ij} S(\tilde{A}^{m(j)}) / \sum_{j=1}^q u_{ij}, \quad (7)$$

$$u_{ij} = 1 / \sum_{t=1}^k \left(\frac{\xi_{ij}^2}{\xi_{tj}^2} \right)^{\frac{1}{m-1}} \quad (8)$$

де

$$\xi_{ij} = \xi(S(\tilde{C}^{m(i)}), S(\tilde{A}^{m(j)})) = \|S(\tilde{C}^{m(i)}), S(\tilde{A}^{m(j)})\|,$$

$i = \overline{1, k}, j = \overline{1, q}$ - це евклідові відстані між парами векторів, що визначають центри $\tilde{C}^{m(i)}, i = \overline{1, k}$ та складені нечіткі множини $\tilde{A}^{m(j)}, j = \overline{1, q}$, відповідно.

Остаточний алгоритм формулюється наступним чином:

1. Задати величини елементів векторного рівня $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_m), \gamma_i \in (0, 1]$.
2. Визначити значення коефіцієнтів $u_{ij}, i = \overline{1, k}, j = \overline{1, q}$ з урахуванням умов нормування.
3. Визначити k центрів кластерів у відповідності з (7).
4. Розрахувати значення функції похибки

згідно формули (6). Якщо її значення не перевищує деякої порогової величини або за умов незначного зменшення значення похибки відносно попередньої ітерації, то обчислення закінчити. Поточні значення центрів кластерів складають розв'язок задачі. В протилежному випадку перейти до четвертого пункту.

5. Розрахувати нові значення $u_{ij}, i = \overline{1, k}, j = \overline{1, q}$ за формулами (8) і перейти до другого пункту.

Такий алгоритм назовемо модифікованим алгоритмом *C-means* для кластеризації нечітко визначених даних, представлених у вигляді сукупності складених нечітких чисел, на основі множин векторного рівня.

Для перевірки результатів дослідження продемонстровано роботу алгоритмів на прикладі задачі групування станів нечіткої системи, що функціонує у двовимірному просторі. Попереднє розташування станів системи здійснюється випадково, кількість точок обирається користувачем.

Список використаних джерел

1. Zadeh L.A. Fuzzy sets //Information and control. 1965.V.8.
2. Jamba M. Hierarchical cluster analysis and compliance. - Moscow: Finance and Statistics, 1988. - 345 с.
3. Durand B., Odell P. Cluster analysis. - Moscow: Statistics, 1977. - 128 с.
4. Вятченин Д.А. Нечеткие методы автоматической классификации. - Минск: Технопринт, 2004. - 219 с.
5. Івохін Є.В. Метод кластеризації складених нечітких множин/ Є.В.Івохін., К.О. Косинський// Обчисл. та прикл. мат. - 2007.- № 2.- С. 54 - 58.
6. Івохін Є.В Про застосування методів кластеризації нечітких даних спеціального вигляду/ Є.В.Івохін., Д.В. Апанасенко // Вісник КНУ імені Тараса Шевченка: Сер. фіз.-мат. науки. - 2013. - №1. - С.167-171.
7. Орловский С.А. Проблемы принятия решения при нечеткой исходной информации / С.А.Орловский. - М: Наука, 1981. - 206 с.
8. Осовский С. Нейронные сети для обработки информации /С. Осовский. - М: Финансы и Статистика, 2002. - 344 с.

References

1. ZADEH L.A. (1965) *Fuzzy sets* //Information and control. V.8.
2. JAMBA M. (1988) *Hierarchical cluster analysis and compliance*. - Moscow: Finance and Statistics.
3. DURAND B. and ODELL P. (1977) *Cluster analysis*. - Moscow: Statistics.
4. VIATTCHENIN D.A. (2004) *Fuzzy methods of automatic classification*. - Minsk: Tehnoprnt.
5. IVOHIN E. and KOSINSKIY K. *The method of clusterization of complex fuzzy sets*// Journ. of Comp. & Appl. Math. - 2007.- № 2.- P. 54 - 58.
6. IVOHIN E. and APANASENKO D. *On the application of fuzzy clustering data special type* // Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv - 2013. - №1. - P.167-171.
7. ORLOVSKIY S.A. (1981) *The problems of decision making for fuzzy input information*. Moscow: Nauka.
8. OSOVSKI C. (2002) *Neural networks for information processing*. - Moscow: Finance and Statistics.

Надійшла до редколегії 29.08.2016

УДК 519.87

Івохін Є.В., д.ф.-м.н, доцент,
Махно М.Ф., аспірант

Про один підхід до розв'язання нечіткої задачі рекомбінації

Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, м. Київ, пр-т Глушкова, 4д,
e-mail: ivohin@univ.kiev.ua

Ivokhin E.V., Dr.Sci., associate professor,
Makhno M.F., postgraduate

About one approach to solving the problem of fuzzy recombination

Taras Shevchenko National University of Kyiv,
Kyiv, Glushkova st, 4d,
e-mail: ivohin@univ.kiev.ua

В статті розглянуто основні задачі теорії розкладів та їх математичні моделі. Відзначено необхідність враховувати NP-повну складність розв'язання таких задач. Для задачі оптимальної рекомбінації запропоновано схему жадібного алгоритму, що дозволило знаходити наближений розв'язок задачі. Сформульовано нечітку задачу рекомбінації, яку формалізовано у вигляді нечіткої задачі лінійного програмування. Для розв'язання отриманої задачі запропоновано метод, в якому здійснюється пошук нечіткого розв'язку Белмана-Заде відповідної оптимізаційної задачі.

Ключові слова: теорія розкладів, задача рекомбінації, нечітке число, нечітка задача лінійного програмування, метод розв'язання.

In this article the basic problems of the schedule theory and their mathematical models were investigated. It is indicated the need to consider the complexity of NP-complete problems of scheduling solution. Getting of approximate solution algorithm is based on the use of schemes aimed sorting options. The recombination problem of works characterized by lasting implementation and setup time is considered. For the problem of optimal recombination scheme proposed greedy algorithm that allowed to find an approximate solution of the problem. This algorithm is providing primary selection of works on approximately the same length of time and the smallest adjustment. It is formulated fuzzy recombination problem, which is formalized in the form of fuzzy linear programming problem. The submission of fuzzy numbers is described in triangular fuzzy numbers form. For solving of the resulting problem it is proposed the method in which is suggested the search of fuzzy Bellman-Zadeh solution for corresponding optimization problem.

To check the results of the study it is provided a series of numerical experiments in which were obtained the approximate solutions of fuzzy optimal recombination problems.

Keywords: schedule theory, recombination problem, fuzzy number, fuzzy problem of linear optimization, decision method.

Статтю представив д.т.н., проф. Волошин О.Ф.

«Часовий» характер завдань теорії розкладів виділяє їх в особливий клас, що істотно відрізняється від «об'ємних» економічних задач. Якщо в останніх потрібно відповісти на питання, що і скільки виробляти, то в задачах теорії розкладів необхідно визначити, коли і в якій послідовності виконувати роботи. Ця різниця визначає наявну відмінність в методах і можливостях вирішення задач. Для задач об'ємного характеру розроблено потужний апарат, головним чином математичного програмування, що дозволяє з успіхом знаходити їх розв'язки. Для задач теорії розкладів апарат методів розв'язування розвинений у суттєво меншій мірі.

Традиційно пошук оптимального або близького до оптимального розкладу здійснюється за допомогою одного з 4 підходів [1]:

- математичного програмування;
- комбінаторного;
- евристичного;
- статистичного (імовірнісного).

Основи теорії розкладів розвивалися в умовах, коли математичні моделі активно застосовувалися для вирішення економічних задач. Тому були зроблені спроби побудувати математичні моделі і для задач теорії розкладів. При цьому необхідно було вирішити принципову проблему. У математичній моделі система обмежень відображає той стан речей, що деяка сукупність умов має виконатись одночасно. У задачі теорії розкладів ряд умов має виконуватись альтернативно: або i -а робота запускається раніше j -ї, або навпаки.

Формулювання загальної задачі складання розкладу в термінах лінійного цілочисельного програмування.

Нехай маємо систему з n робіт і m машин. Кожна робота складається з g_i операцій, $i = \overline{1, n}$. Кожній операції приписано три індекси:
 i - номер роботи, що містить цю операцію;
 j - номер операції всередині роботи, $j = \overline{1, g_i}$;
 k - номер машини, на якій операція повинна виконуватися.

Обмеження на час і порядок виконання операцій машинами такі:

- кожна машина виконує одночасно не більше однієї операції;
- операції виконуються у зазначеній послідовності;
- ніякі дві операції, що відносяться до однієї роботи, не виконуються одночасно.

Будемо вважати, що кожна робота вимагає в точності одного виконання на кожній з машин.

Нехай t_{ik} - тривалість виконання роботи i машиною k ;

$$r_{ijk} = \begin{cases} 1, & \text{якщо операція } j \text{ роботи } i \\ & \text{виконується машиною } k; \\ 0, & \text{в іншому випадку.} \end{cases}$$

t_{ik} - момент початку виконання роботи i машиною k (дорівнює часу початку виконання відповідної операції роботи i машиною k).

Група обмежень 1. З того, що кожна машина у довільний момент часу може виконувати не більше однієї роботи, випливає, що для кожної пари робіт I та J справедлива лише одна з нерівностей:

$t_{Ik} - t_{Jk} \geq t_{Jk}$ - виконанню роботи I передую виконання роботи J , або

$t_{Jk} - t_{Ik} \geq t_{Ik}$ - виконанню роботи J передую виконання роботи I .

Обмеження (1) типу «або-або» не можна описати в термінах традиційних задач лінійного програмування і потребує введення цілочисельних змінних.

Позначимо

$$Y_{Ijk} = \begin{cases} 1, & \text{якщо робота } I \text{ передую роботі } J \\ & \text{на машині } k; \\ 0, & \text{в іншому випадку.} \end{cases}$$

Тепер сформульовані вище обмеження типу «або-або» можна записати у вигляді двох умов, кожна з яких має бути виконана:

$$(M + t_{Jk})Y_{Ijk} + (t_{Ik} - t_{Jk}) \geq t_{Jk} \quad (2)$$

$$(M + t_{Ik})(1 - Y_{Ijk}) + (t_{Jk} - t_{Ik}) \geq t_{Ik} \quad (3)$$

де $M = \sum_i \sum_k t_{ik}$ - досить велика константа, обрана таким чином, щоб виконувалася тільки одна з двох умов: $Y_{Ijk} = 0$ або $Y_{Ijk} = 1$.

Нехай I передую J , тобто $t_{Ik} < t_{Jk}$ і $Y_{Ijk} = 1$, тоді (3) в точності збігається з другою умовою «або-або» в (1), а умова (2) завдяки великому параметру M перетворюється в надлишкове обмеження, що не суперечить всій системі в цілому.

Група обмежень 2. Забезпечує дотримання обмежень на порядок виконання операцій.

Зауважимо, що $\sum_k r_{ijk} t_{ik}$ - момент початку виконання операції j роботи i .

Тоді для всіх операцій кожної роботи, повинна мати місце нерівність

$$\sum_k r_{ijk} (t_{ik} + t_{ik}) \leq \sum_k r_{i(j+1)k} t_{ik} \quad (4)$$

Цільові функції можуть бути різними. Так, мінімізація сумарного часу завершення робіт рівносильна мінімізації суми моментів початку виконання останніх операцій всіх робіт:

$$\sum_i \sum_k r_{imk} t_{ik} \rightarrow \min.$$

При мінімізації максимального часу завершення робіт додається обмеження виду

$$\sum_k r_{imk} (t_{ik} + t_{ik}) \leq T_{\max}, i = \overline{1, n},$$

де $T_{\max}$ - змінна, яку потрібно мінімізувати.

При застосуванні методів математичного програмування для вирішення задач теорії розкладів необхідно враховувати NP-повну складність розв'язання задачі, що неминуче призводить до експоненціальності величини часу отримання оптимального розв'язку. До найбільш широко використовуваних прийомів скорочення перебору відносяться прийоми, побудовані на неповному переборі. Ці прийоми базуються на побудові «часткових рішень», представлених у вигляді дерева пошуку та застосуванні методів побудови оцінок, що дозволяють відсікати безперспективні часткові рішення. Однак, навіть досконалі прийоми скорочення перебору не дозволяють звільнитися від експоненційної складності розв'язання задач теорії розкладів.

NP - повна складність розв'язування задачі є вагомим аргументом при обґрунтуванні необхідності побудови наближених або евристичних алгоритмів її розв'язку, важливості використання схем спрямованого перебору варіантів, а також при обґрунтуванні необхідності дослідження окремих випадків задачі.

Впорядкування кінцевої кількості робіт для 1 машини.

Припустимо, що кожна робота складається тільки з однієї операції. У цьому випадку множину робіт можна розбити на групи в залежності від виду операції, а кожна машина, що виконує певну операцію, не залежить від інших. Отже, можна обмежитися складанням розкладу тільки для однієї машини і виконуваної нею підмножини робіт.

Вважається, що

- кількість робіт скінченна і всі роботи мають бути виконані;
- роботи надходять в систему одночасно, так що при складанні розкладу процес обслуговування може початися з будь-якої з них;
- виконання кожної з робіт відбувається або без настройки машини, або настройка не залежить від попередньої роботи.

У цьому випадку введені раніше позначення набувають наступних значень:

$m = 1$ - є лише одна машина;

$g_i = 1$ - кожна робота складається з однієї

операції, $i = \overline{1, n}$;

$r_i = 0$ - всі роботи надходять одночасно (тому без обмеження загальності початок відліку часу можна поєднати з моментом надходження роботи), $i = \overline{1, n}$;

$t_{i1} = t_i$ - тривалість роботи береться довільною величиною, що задається заздалегідь і не залежить від розкладу, $i = \overline{1, n}$;

$a_i = d_i$ - допустима тривалість проходження збігається з плановим терміном, $i = \overline{1, n}$;

$W_{i1} = W_i$ - тривалість очікування роботою i початку її виконання, $i = \overline{1, n}$;

$T_i = F_i = t_i + W_i$ - момент закінчення роботи (дорівнює тривалості проходження, відлік часу починається з моменту надходження роботи), $i = \overline{1, n}$.

У такій постановці тривалість налагодження перед будь-якою роботою залежить лише від самої роботи і цю тривалість можна приєднати до тривалості виконуваної роботи. Інша цікава постановка задачі теорії розкладів стосується ситуації, коли час проведення переналагодження для кожної нової роботи залежить від порядку виконання робіт і, як наслідок, не може бути врахований в їх тривалості. Така задача називається задачею рекомбінації робіт[2].

Формулювання задачі оптимальної рекомбінації робіт.

Нехай задана множина робіт $V = \{v_1, \dots, v_n\}$, що мають бути виконані на єдиній машині. Кожна робота $v \in V$ характеризується тривалістю $t_v \in R_+$, в межах якої виконання роботи не переривається. Якщо машина, на якій виконуються роботи, переходить від виконання однієї роботи на іншу, то необхідно виконати переналагодження. Будемо вважати, що задано терміни переналагодження $s_{vu} \in R_+$ з роботи v на роботу u , для усіх $v, u \in V$, де $v \neq u$. Потрібно скласти розклад, що мінімізує час завершення усіх робіт.

Позначимо через $\pi = (\pi_1, \dots, \pi_n)$ перестановку, яка визначає порядок виконання робіт: π_i - робота, що виконується на i -му етапі. Нехай $s(\pi) = \sum_{i=1}^{n-1} s_{\pi_i \pi_{i+1}}$. Тоді вихідна задача еквівалентна пошуку перестановки π^* , за якою мінімізується сумарний час переналагодження $s(\pi^*)$.

Один з варіантів реалізації наближених алгоритмів розв'язку задачі рекомбінації може бути створений на основі застосування жадібного підходу. Схема жадібних алгоритмів ґрунтується на введенні додаткових умов, які й визначають порядок вибору розв'язку [2].

Сформулюємо схему жадібного алгоритму для задачі рекомбінації. Задачу пошуку перестановки π^* , на якій досягається оптимальне значення часу переналагодження, запишемо у вигляді задачі лінійного програмування з функцією цілі

$$s(\pi) = \sum_{i=1}^{n-1} s_{\pi_i \pi_{i+1}} y_{\pi_i \pi_{i+1}} \rightarrow \min \quad (5)$$

та обмеженнями

$$\sum_{i=1}^{n-1} y_{\pi_i \pi_{i+1}} = n-1, \quad y_{\pi_i \pi_{i+1}} \in \{0, 1\}, \quad i = \overline{1, n-1}. \quad (6)$$

Для знаходження наближеного розв'язку розташуємо роботи за незростанням величини частки відношення тривалостей довільних двох робіт до необхідного в цьому випадку часу переналагодження:

$$t_{\pi_i} / t_{\pi_{i+1}} / s_{\pi_i \pi_{i+1}}, \quad i = \overline{1, n-1}. \quad (7)$$

Впорядкування виконання робіт за даною схемою передбачає першочерговий вибір робіт з приблизно однаковою тривалістю та найменшим часом налагодження. Без обмеження загальності, можна стверджувати, що даний підхід дозволяє

отримати допустимий розв'язок (перестановку), близьку до оптимальної.

Іншим цікавим застосування наведеної жадібної схеми виявилася можливість розв'язання нечіткої задачі рекомбінації.

Нечітка задача оптимальної рекомбінації.

Означення 1 [3]. Нечіткою множиною $\tilde{A}$ в універсальному просторі X називається сукупність пар виду $\{(x, \mu_{\tilde{A}}(x))\}$, де $x \in X$, а $\mu_{\tilde{A}}(x): X \rightarrow [0,1]$ - функція належності нечіткої множини $\tilde{A}$.

У випадку $X \subseteq R^1$ нечітка множина $\tilde{A}$ містить сукупність пар, що складаються з двох скалярних значень $x \in R^1$ та $\mu_{\tilde{A}}(x)$. Тоді можна говорити, що задано множину нечітких чисел. Будемо вважати, що кожне з них має трикутний вигляд, тобто $\tilde{A}_i = \{(a_i, b_i, c_i)\}$, $a_i \leq b_i \leq c_i$, $i = \overline{1, m}$, з лінійними функціями належності $\mu_{\tilde{A}}(x)$ вигляду

$$\begin{aligned} 1. \mu_{\tilde{A}}(x) &= \frac{x-a}{b-a}, x \in [a, b]; \\ 2. \mu_{\tilde{A}}(x) &= \frac{c-x}{c-b}, x \in [b, c]; \\ 3. \mu_{\tilde{A}}(x) &= 0, x \notin [a, c]. \end{aligned} \quad (8)$$

Нечітке трикутне число вигляду (a, b, b) називається лівим нечітким трикутним числом, що визначається функцією належності

$$\begin{aligned} \mu_{\tilde{A}}(x) &= 0, x < a; \quad \mu_{\tilde{A}}(x) = \frac{x-a}{b-a}, x \in [a, b]; \\ \mu_{\tilde{A}}(x) &= 1, x > b, \end{aligned} \quad (9)$$

а нечітке трикутне число вигляду (b, b, c) називається правим нечітким трикутним числом, що визначається функцією належності

$$\begin{aligned} \mu_{\tilde{A}}(x) &= 1, x < b; \quad \mu_{\tilde{A}}(x) = \frac{c-x}{c-b}, x \in [b, c]; \\ \mu_{\tilde{A}}(x) &= 0, x > c. \end{aligned} \quad (10)$$

Припустимо, що у задачі рекомбінації чітко задані тривалості виконання робіт, а час проведення переналагодження визначено неточно у вигляді правих нечітких чисел. У такому випадку можна перейти до формулювання нечіткої задачі рекомбінації вигляду

$$\sum_{i=1}^{n-1} \tilde{s}_{\pi_i \pi_{i+1}} y_{\pi_i \pi_{i+1}} \rightarrow \min, \quad (11)$$

у якій значення коефіцієнтів $\tilde{s}_{\pi_i \pi_{i+1}}$, $i = \overline{1, n-1}$, задано нечітко у формі нечетких чисел.

Як відомо, розв'язування нечіткої задачі лінійного програмування зводиться до пошуку розв'язку стандартної (чіткої) задачі з додатковою змінною і додатковим обмеженням по відношенню до моделі (5)-(6) [4]. Алгоритм розв'язання передбачає вирішення задачі рекомбінації при граничних значеннях термінів переналагодження, а отриманий таким чином розв'язок називається нечітким розв'язком Белмана-Заде.

Запропонована вище жадібна схема пошуку оптимальної перестановки в задачі рекомбінації дозволяє отримати конструктивний алгоритм для розв'язання відповідної нечіткої задачі.

Для перевірки результатів дослідження проведено ряд чисельних експериментів, в яких отримано наближені розв'язки нечітких задач оптимальної рекомбінації. Вибір параметрів в задачах здійснюється випадково, а кількість виконуваних робіт не перевищувала 20. Практичне значення отриманого результату полягає у створенні ефективного способу розв'язання задач чіткої та нечіткої оптимальної рекомбінації.

Список використаних джерел

1. Жданова Е.Г. Теория расписаний. – М: Наука. – 2000. – 136 с.
2. Еремеев А.В. О сложности оптимальной рекомбинации для одной задачи составления расписаний с переналадками / А.В.Еремеев, Ю.В.Коваленко // Дискрет.анализ и исслед. операций. – 2012. – Т. 19, № 3. – С. 13 - 26.
3. Zadeh L.A. Fuzzy sets //Information and control. –1965. –V.8.
4. Dubois D. Linear programming with fuzzy data / D. Dubois // Analysis of Fuzzy Information / J. C. Bezdek (ed.). Boca Raton : CRC Press, 1987.

References

1. ZHDANOVA E. (2000) *The problems of decision making for fuzzy input information*. Moscow: Nauka.
2. EREMEEV A. and KOVALENKO Yu. (2012) *Neural networks for information processing*. - Moscow: Finance and Statistics.
3. ZADEH L.A. (1965) *Fuzzy sets* //Information and control. - V.8.
4. DUBOIS D. (1987) *Linear programming with fuzzy data* // Analysis of Fuzzy Information / J.C.Bezdek (ed.). Boca Raton: CRC Press.

Надійшла до редколегії 29.09.2016

УДК 517.9

Івохін Є.В., д.ф.-м.н, професор,
Науменко Ю.О., аспірант

**Про один підхід до моделювання
розповсюдження реклами як процесу
агрегації, обмеженої дифузії**

Київський національний університет
імені Тараса Шевченка, м.Київ, пр-т Глушкова,
4д, e-mail: ivohin@univ.kiev.ua

Ivohin E.V., Dr.Sci., professor,
Naumenko Yu.O., postgraduate

**About one approach to modeling the
distribution of advertising as a process of
aggregation limited by diffusion**

Taras Shevchenko National University of Kyiv,
Kyiv, Glushkova st., 4d,
e-mail: ivohin@univ.kiev.ua

У даній роботі змодельовано та досліджено процес розповсюдження реклами без засобів мас-медіа шляхом комунікації в межах заданої цільової аудиторії. Застосовується модель, яка описує процес спілкування всередині групи людей з метою зацікавити рекламною продукцією якомога більше користувачів. Поширення рекламної інформації розглядається як результат послідовного процесу, моделювання якого здійснюється на основі принципів агрегації, обмеженої дифузії (diffusion limited aggregation, DLA). Для опису проникнення (розповсюдження) даних у соціальній групі використовується модель міжнейронного процесу обміну інформації.

Ключові слова: реклама, процес розповсюдження, агрегація, дифузія, модель міжнейронного обміну інформації.

In this article a process of the advertisement spreading via communications within a given target audience and without means of mass media was modeled and studied. We are using a model that describes the process of communication within the group, so that more users will be interested in advertised product. Distribution of the promotional information is seen as the result of a consistent process modeling that is based on the principles of aggregation limited by diffusion (diffusion limited aggregation, DLA). To describe the penetration (distribution) of the data in a social group, we use a model of the interneural process of the exchange of information.

The approach uses an original methodology for process modeling of the aggregation of limited diffusion. We consider the process of penetration (spread) of the impact of advertising on a given target audience. This approach is based on the information exchange model in a neural elements network. Modelling of the process is carried out under conditions that each individual from the target audience may communicate with any number of other network participants. Results are formed by a given set of trust, that users have to each other and a set threshold level of susceptibility to the advertising from people from the target audience.

An simulation modeling process algorithm for the advertisement distribution was designed based on the representation of the network elements in the form of a graph, whose vertices parameters describe susceptibility to advertising and mutual trust.

Key words: advertising distribution process, aggregation, diffusion, model of the interneural information exchange.

Статтю представив д.т.н., проф. Волошин О.Ф.

Багато процесів, що відбуваються у природі та суспільстві, характеризуються хаотичною динамікою, моделювання якої призводить до появи нових математичних структур, яким властива статистична (неповна) повторюваність. Важливе місце серед цих структур займають фрактальні кластери [1], для дослідження яких активно застосовується модель агрегації, обмеженої дифузії (diffusion limited aggregation, DLA) [2], що описує процедуру об'єднання окремих частинок у самоподібний агрегат в умовах їх випадкового блукання. Дана модель

була запропонована у [3, 4] і знайшла широке застосування для імітаційного моделювання різних дифузійних процесів, що спостерігаються у рідинах і газах.

За класичною моделлю DLA елементарні частинки послідовно приєднуються до агрегату. Процес побудови агрегату починається з єдиної частинки, до якої буде приєднуватися сукупність нових частинок, що розташовані або наблизилися у результаті блукання до агрегату.

При реалізації алгоритмів моделювання DLA розрахунки потребують значних витрат часу.

Тому для подальшого використання даної методики необхідна розробка варіантів оптимізації роботи цих алгоритмів, а також створення нових методів формалізації процесів, що відбуваються у явищах агрегації, обмеженої дифузії. Це особливо важливо в сучасних умовах широко впливу засобів соціальних мереж на інформаційні процеси у суспільстві.

У даній роботі на основі моделі DLA сформовано та досліджено процес розповсюдження реклами серед цільової аудиторії, що мешкає в рамках деякого регіону. Модель описує процес розповсюдження реклами без впливу засобів мас-медіа, шляхом обміну інформацією, який відбувається при комунікації між людьми.

У будь-якій соціальній групі активне спілкування людей між собою сприяє розповсюдженню інформації про продукцію, яку було або буде придбано, з метою зацікавлення у цій продукції якомога більше нових людей. Розповсюдження цієї інформації можна змодельовати на основі принципів агрегації DLA, використовуючи для опису процесу проникнення (розповсюдження) даних нейронну модель обміну інформації у соціальній мережі.

Математична модель процесу обміну інформації подібного міжнейронному.

Розглянемо соціальну мережу S , що складається з заданої ($N = n + 1$) кількості користувачів. Усі користувачі (нейрони), що представляють вузли мережі, обмінюються між собою повідомленнями (пакетами даних). Математичну модель функціонування обміну інформацією в рамках мережі можна сформулювати на основі підходу [5], що використовується для моделювання процесів у нейронах і часто застосовується при дослідженні задач з імпульсним впливом.

Розглянемо довільний нейроподібний елемент, що має n входів і один вихід. Стан елемента описується скалярною величиною u_0 , яка називається потенціалом.

Потенціал u_0 кожного елемента зростає за часом пропорційно зваженій сумі $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n w_i x_i(t)$ входних імпульсів x_i , $i = \overline{1, n}$, w_i - синоптична вага i -го входу, $i = \overline{1, n}$, яка спадає з постійної часу τ . Без втрати загальності шляхом вибору відповідного масштабу часу можна покласти $\tau = 1$. Остаточно отримуємо, що рівень потенціалу визначається розв'язком наступного диференціального рівняння:

$$\frac{du_0(t)}{dt} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n w_i x_i(t) - u_0(t), \quad (1)$$

де $x_i(t)$ - величина i -го входу, тобто частота вхідних імпульсів у момент часу t , $i = \overline{1, n}$.

Вихід $x(t)$ елемента вважається аналоговою величиною та визначається монотонно зростаючою функцією $\phi(\cdot)$ потенціалу $u_0(t)$

$$x(t) = \phi(u_0(t) - h), \quad (2)$$

де h - значення порогу.

Характер вихідної функції тісно пов'язаний з рефрактерним періодом. Для пояснення механізму генерації імпульсу необхідно ввести додатковий параметр стану - внутрішній поріг. Генерація імпульсу відбувається всякий раз, коли потенціал u_0 перевищує внутрішній поріг. Слідом за генерацією імпульсу внутрішній поріг зростає до нескінченності і залишається таким протягом інтервалу часу τ_a , названого абсолютним рефрактерним періодом; потім він поступово зменшується. Нехай $h(\tau)$ - внутрішній поріг у момент τ , що спостерігається від початку генерації імпульсу. Тоді $h(\tau) = \infty$

при $0 < \tau \leq \tau_a$; при $\tau > \tau_a$ $h(\tau)$ асимптотично і монотонно спадає. Отже, елемент не здатний до генерації імпульсу протягом абсолютного рефрактерного періоду.

Детальний аналіз показує, що потенціал швидко спадає відразу після генерації імпульсу. Однак, якщо вхідні імпульси продовжують надходити з інших нейронів, потенціал незабаром відновлюється і підтримується на попередньому рівні. Якщо стала часу відновлення мала, то швидкими флуктуаціями u_0 можна зневажити і вважати u_0 конкретною величиною, яку отримано при їхньому згладжуванні. При цьому, зміни u_0 вважаються досить повільними в порівнянні зі зміною внутрішнього порогу.

Отже, кожний нейроподібний елемент задається n ваговими значеннями w_i , $i = \overline{1, n}$, порогом h і вихідною функцією $\phi(u)$. Мережа складається з $n + 1$ елемента. Нехай u_i , h_i і x_i , $i = \overline{1, n}$, - відповідно, потенціал, поріг і вихід i -го елемента. Позначимо w_{i1} , w_{i2} , ..., w_{in} - ваги i -го елемента. Припустимо, що всі елементи з'єднано таким чином, що вихід x_i i -го елемента надходить на всі інші елементи в якості j -го входу (з'єднання типу загальної шини). При

цьому, ваги $w_{ij} \geq 0$, $i, j = \overline{1, n}$ характеризують рівень впливу j -го елементу на i -й елемент. Якщо $w_{ij} = 0$, то зв'язок між j -м та i -м елементами відсутній. Тоді модель опису станів елементів мережі буде задаватися наступною системою рівнянь:

$$\frac{dv_i(t)}{dt} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n+1} w_{ij} x_j(t) - h_i - v_i(t), \quad i = \overline{1, n+1}, \quad (3)$$

$$x_i(t) = \phi(u_i(t) - h_i) = \phi(v_i(t)), \quad i = \overline{1, n+1}, \quad (4)$$

$$u_i(t) = v_i(t) + h_i, \quad i = \overline{1, n+1}, \quad (5)$$

з відповідними початковими умовами.

Побудова моделі розповсюдження реклами в межах цільової аудиторії.

Маємо цільову аудиторію, що складається з N людей, об'єднаних у соціальну мережу. Кожна людина знайома або має можливість спілкуватися з певною кількістю n_i , $i = \overline{1, N}$ інших людей з цієї аудиторії. Без обмеження загальності вважається можливим, що існують такі номери $k = \overline{1, N}$ користувачів мережі, для яких $n_k = N - 1$. З іншого боку, зрозуміло, що, якщо підписувач мережі i знайомий з підписувачем j , то й j буде знайомий з i . Таку структуру можна представити графом, де кожна вершина графа представляє собою людину-користувача, а ребро між двома вершинами означає те, що ці люди знайомі або спілкуються між собою. Цей граф можна задати симетричною матрицею R інцидентності розмірності $N \times N$, що складається з 0 та 1, де 0 на позиції ij означає, що людина i не знайома з людиною j , а 1 – що людина i знайома з людиною j .

Кожну людину з цільової аудиторії характеризує також набір додаткових параметрів. По-перше, кожен неоднаково ставиться до побаченої/почутої реклами: в даній моделі кожна людина має свій коефіцієнт I_i , $I_i \in [0, 1]$, $i = \overline{1, N}$, що відображає її сприйнятливість до реклами. По-друге, кожен по-різному прислуховується до думки своїх знайомих. Покладемо в моделі відповідним за це вектор T_i , що задає рівень довіри i -ї людини до її знайомих. Для зручності використання запишемо цей вектор у вигляді $T_i = (t_{i1}, t_{i2}, \dots, t_{iN})$, де $t_{ij} \in [0, 1]$, $t_{ij} = 0$, якщо відповідне $r_{ij} = 0$, r_{ij} – j -й елемент i -го рядка матриці R , $t_{ii} = 1$, $j = \overline{1, N}$.

Алгоритм імітаційного моделювання процесу розповсюдження реклами.

Припустимо, що на початку процесу моделювання процесу розповсюдження реклами проведено певну рекламну кампанію. Розглянемо, яким чином буде поширюватися рівень розповсюдження реклами серед певної цільової аудиторії, застосовуючи описану вище модель.

Задамо певний поріг сприйнятливості до реклами L , $L \in [0, 1]$. При цьому будемо вважати, що реклама ефективно подіяла на людину i , якщо її ставлення $I_i \geq L$. Введемо вектор H_0 , $H_0 = (h_1, h_2, \dots, h_N)$, де $h_i = 0$, якщо $I_i < L$ та $h_i = 1$ при $I_i \geq L$. Цей вектор характеризує осіб з цільової аудиторії, на яких подіяла реклама до моменту початку спілкування.

Далі вважаємо, що у мережі відбувається спілкування користувачів між собою. Сприятливість до реклами кожного учасника може з часом змінитись в залежності від його оточення. Зміну сприйнятливості з часом будемо описувати моделлю нейроноподібного елементу вигляду (3)

$$\frac{dI_i(t)}{dt} = \frac{1}{n_i + 1} \sum_{j=1}^N t_{ij} I_j(t) - I_i(t). \quad (6)$$

Зміна ставлення кожної людини з цільової аудиторії спостерігається дискретно. Поклавши без обмеження загальності інтервал дискретизації $\Delta t = 1$, отримуємо рівняння наступного вигляду:

$$I_i(t+1) - I_i(t) = \frac{1}{n_i + 1} \sum_{j=1}^N t_{ij} I_j(t) - I_i(t), \quad (7)$$

або остаточно

$$I_i(t+1) = \frac{1}{n_i + 1} \sum_{j=1}^N t_{ij} I_j(t). \quad (8)$$

Тобто, на кожному послідовному кроці дискретизації перераховуються коефіцієнти ставлення до реклами кожної особи з цільової аудиторії за допомогою середнього значення думки оточення людини з урахуванням рівня її довіри до кожного з даного оточення.

Як результат отримуємо новий набір значень $I_i(t)$, $i = \overline{1, N}$, $t > 0$. Обчислюємо новий вектор $H(t)$ відповідно до порогу L .

Якщо на деякому кроці виконується співвідношення $H(t) = H(t-1)$, $t \geq 1$, тобто реклама більше не вплинула на жодну особу з аудиторії, або, якщо вектор $H(t) = (1, 1, \dots, 1)$,

тобто усі особи вже знаходяться під впливом реклами, – алгоритм зупиняється.

Висновок.

У даній роботі змодельовано та досліджено процес розповсюдження реклами без засобів мас-медіа шляхом комунікації в межах заданої цільової аудиторії. Застосовується модель, яка описує процес спілкування всередині групи людей з метою зацікавити рекламною продукцією якомога більше користувачів. Поширення рекламної інформації розглядається як результат послідовного процесу, моделювання якого здійснюється на основі принципів агрегації, обмеженої дифузії (*diffusion limited aggregation, DLA*). Для опису проникнення (розповсюдження) даних у соціальній групі використовується модель міжнейронного процесу обміну інформації.

Запропонований підхід використовує оригінальну методику моделювання процесів

агрегації, обмежених дифузії. Розглянуто процес проникнення (розповсюдження) впливу реклами на задану цільову аудиторію. Використовується підхід, що базується на моделі обміну інформацією у мережі нейроподібних елементів. Моделювання процесу здійснено за умов можливості спілкування кожної особи аудиторії з довільною кількістю інших учасників мережі. Отримання результатів формується за допомогою заданого набору довіри користувачів один до іншого і заданого порогового рівня сприйнятливості реклами осіб цільової аудиторії.

Розроблено алгоритм імітаційного моделювання процесу розповсюдження реклами, що базується на представленні елементів мережі у вигляді графа, вершини якого описуються параметрами сприйнятливості до реклами та взаємної довіри.

Список використаних джерел

1. Батюков А.М. О модификации модели агрегации, ограниченной диффузией / А.М.Батюков, Н.Б.Ампилов // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Информатика. Телекоммуникации. Управление. - 2013. - Вып.3 (174). - С.233-238.
2. Смирнов Б.М. Физика фрактальных кластеров. / Б.М.Смирнов. - М.: Наука, 1991. – 136с.
3. Pinski A. Diffusion-limited aggregation // Physical Review. The American Physical Society. USA, 1981.
4. Witten T.A., Sander L.M. Diffusion-limited aggregation // Physical Review. The American Physical Society. USA, 1982.
5. Jang J.S. Neuro-Fuzzy and soft computing / J.S. Jang, C.T. Sun, E. Mizutani – N.Y.: Prentice Hall - 1997. – 176 p.

References

1. BATYUKOV A. and AMPILOVA N. (2013) *O modifikacii modeli agregacii, ogranichennoj diffuziej// Nauchno-tehnicheskie vedomosti SPbGPU: Informatika. Telekommunikacii. Upravlenie.* – 3. – P. 233-238.
2. SMIRNOV B. (1991) *Fizika fraktalnykh klasterov.* Moskva: Nauka.
3. PINSKI A. (1981) *Diffusion-limited aggregation.* Physical Review. The American Physical Society. USA.
4. WITTEN T.A. and SANDER L.M. (1982) *Diffusion-limited aggregation.* Physical Review. The American Physical Society. USA.
5. JANG J.S., SUN C.T. and MIZUTANI E. (1997) *Neuro-Fuzzy and soft computing.* N.Y.:Prentice Hall.

Надійшла до редколегії 29.08.2016

УДК 519.6

Катеринич Л. О., к. ф.-м. н., доцент,
Біла О.М., студент

Прикладне застосування нейронних мереж у медичній діагностиці

Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 01033, Київ, вул. Володи-
мирська 64.

e-mail: katerinich@rambler.ru
belaya.ola@gmail.com

L.O. Katerynych, PhD,
O. M. Bila, student

Application of neural networks in medical diagnostics

Taras Shevchenko National University of Kyiv,
01033, Kyiv, Volodymyrska st.64.

e-mail: katerinich@rambler.ru
belaya.ola@gmail.com

В даній статті аналізується штучна нейронна мережа та її використання для розв'язку задач медичної діагностики. Для початку ознайомимось із поняттям експертної системи, прикладами задач, які вона допомагає вирішити та характерні особливості. Вияснимо, в чому специфіка саме медичної експертної системи та чому в задачах діагностики захворювань експертні системи є найбільш прийнятними для використання. Розглянемо, що таке штучна нейронна мережа, принцип її роботи та реалізації. Серед можливих архітектур штучних нейронних мереж та алгоритмів її навчання оберемо найбільш придатні для задач медичної діагностики. Зупинимось детальніше на розгляді алгоритму зворотного поширення помилки. Обговоримо переваги та недоліки обраних варіантів. В результаті роботи розглянемо реалізовану медичну експертну систему «NeuroDiagnostics», що дає можливість визначати за 22 можливими симптомами, поданими на вхід програми, діагноз найпоширеніших цереброваскулярних захворювань людини – інсульт та енцефаліт.

Ключові слова: штучна нейронна мережа, алгоритм зворотного поширення помилки, експертна система.

In this paper we will analyze an artificial neural network and its usage to solve problems of medical diagnostics. First, we will find out the main concept of expert system, examples of problems it helps to solve and its different characteristics. Will see what is the specificity of the medical expert system and why it is the most appropriate approach to use solving disease diagnostics problems. Also we will take a look on what is the artificial neural network, how it works and its possible implementations. Among the various architectures of artificial neural networks and algorithms of its learning will choose the most suitable for medical diagnostics problems. Additionally, we will look in more detail on back propagation algorithm. Will discuss the advantages and disadvantages of selected options. As a result, we will take a look on implemented medical expert system «NeuroDiagnostics», that makes it possible to identify by 22 input symptoms most common cerebrovascular human diseases - stroke and encephalitis.

Key Words: artificial neural network, back-propagation algorithm, expert system.

Статтю представив д.т.н., проф. Заславський В.А.

Вступ. Сьогодні розвиток інформаційних технологій торкається чи не всіх сфер життя, особливо важливим та популярним є впровадження та застосування останніх досягнень людства в медицині. За статистикою трьома основними причинами смертності населення в сучасному світі є серцево-судинні, онкологічні та цереброваскулярні захворювання.

В Україні на ішемічну хворобу серця та інсульт приходить більше 50% усіх захворювань людини.^[1]

Метою даної статті є розробка експертної системи медичної діагностики найбільш поширених цереброваскулярних захворювань на базі нейронної мережі і її можливості навчатися на основі вхідних даних.

Експертні системи та їх застосування в медичній діагностиці. Під експертною системою (ЕС) розуміють комп'ютерну програму, здатну частково замінити спеціаліста-експерта в розв'язанні проблемної ситуації. Експертні системи дозволяють вирішувати задачі, для яких характерні:

- Задачі не можуть бути представлені в числовій формі;
- Вихідні дані та знання з предметної області є неоднозначними, неточними, або такими, що викликають протиріччя;
- Не існує однозначного алгоритмічного рішення поставленої задачі.

Усі вищезазначені властивості є типовими для медичних задач через те, що у більшості випадків вони представлені великим об'ємом багатомірних, заплутаних, а інколи навіть і суперечливих клінічних даних. Медичні експертні системи дозволяють лікарю не тільки перевірити особисті діагностичні припущення, але і проконсультуватися з комп'ютером у особливо складних діагностичних випадках.

Найбільш важливими областями застосування експертних систем є:

- Діагностика невідкладних та погрожуючих станів в умовах дефіциту часу;
- Обмежені можливості обстеження;
- Мізерна клінічна симптоматика;
- Швидкі темпи розвитку захворювання.

Загальний принцип, покладений в основу формування медичних експертних систем, - включення в базу знань синдромів, що відображають стан всіх основних систем органів.^[2]

Приклади використання експертних систем в медицині не можна назвати одиничними, вони застосовуються в багатьох областях охорони здоров'я. Так, наприклад, в галузі хірургії на основі штучної нейронної мережі створили систему прогнозування ризику розвитку жовчнокам'яної хвороби у людей з надмірною вагою тіла. Автори вивчили клінічні та лабораторні дані 117 пацієнтів з ожирінням, прооперованих за період з лютого 1999 по

жовтень 2005 р. і в результаті була побудована штучна нейронна мережа, навчена алгоритмом зворотного поширення помилки. Використовувалися 30 вхідних змінних, включаючи клінічні дані (стать, вік, індекс маси тіла, супутні захворювання), лабораторні показники та результати гістологічного дослідження. Прогнозуючу цінність штучної нейронної мережі порівнювали з моделлю логістичної регресії, навченої на тій же базі даних. Нейронна мережа продемонструвала кращу прогнозуючу цінність і нижчу помилку, ніж модель логістичної регресії.^[3]

Серед багатьох розроблених медичних експертних систем немає аналогів діагностики цереброваскулярних захворювань людини, що і стало однією із причин реалізації системи «NeuroDiagnostics».

Штучна нейронна мережа. Серед медичних експертних систем особливе місце займають інтелектуальні системи, здатні до самонавчання. В їх основі лежать методи автоматичної класифікації ситуацій з реальної практики або за допомогою методів навчання на прикладах. Такою системою і є штучна нейронна мережа.

Штучні нейронні мережі (ШНМ, artificial neural networks) представляють собою нелінійну систему, що дозволяє класифікувати дані набагато краще, ніж звичайні лінійні методи. Для ШНМ характерний принцип паралельної обробки сигналів, що досягається шляхом об'єднання великого числа нейронів у так звані шари тапоєднання нейронів різних шарів. Теоретично кількість шарів та нейронів в кожному шарі може бути довільним, але фактично обмежується ресурсами конкретного комп'ютера.^{[2][3]}

Найбільш важливою відмінністю ШНМ від інших методів прогнозування є можливість конструювання ЕС самим лікарем-фахівцем, який може передати нейронній мережі свій індивідуальний досвід і досвід своїх колег або навчати мережу на реальних даних, отриманих шляхом спостережень. Позитивна характерна властивість ШНМ полягає в тому, що вони не програмуються, тобто не використовують ніяких правил виводу для постановки діагнозу, а навчаються робити це на прикладах.^[4]

Архітектура з'єднань штучних нейронів в ЕС. Конкретний вид перетворення вхідного вектора сигналів у вихідний визначається архітектурою нейромережі, характеристиками нейронних елементів, засобами керування та синхронізації інформаційних потоків між нейронами.

Найпоширенішим варіантом архітектури є багат шарові мережі (Рис.1).

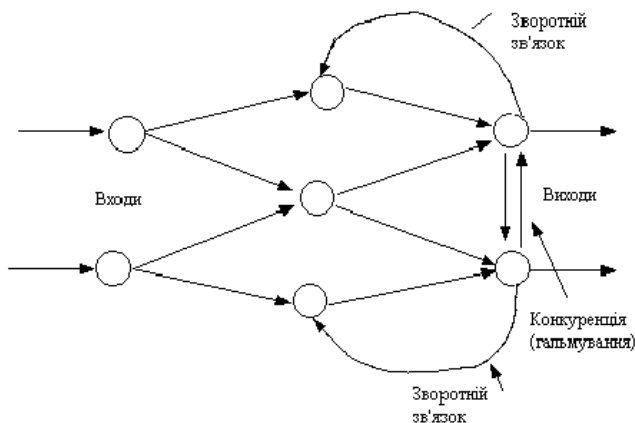


Рис.1. Багат шаровий тип з'єднання нейронів

Шар вхідних нейронів отримує дані або з вхідних файлів, або безпосередньо з електронних давачів. Вихідний шар пересилає інформацію безпосередньо до зовнішнього середовища, до вторинного комп'ютерного процесу, або до інших пристроїв. Між цими двома шарами може бути багато прихованих шарів. Входи та виходи кожного з прихованих нейронів сполучені з іншими нейронами.

Напрямок зв'язків нейронів має значний вплив на роботу мережі. Корегуючи параметри, можна налаштувати зв'язки як на посилення так і на послаблення величини сигналів. [2] [7]

Алгоритм зворотного поширення помилки. Перед використанням, нейромережа з контрольованим навчанням повинна бути навчена. Навчання вважається закінченим при досягненні нейромережею визначеного користувачем рівня ефективності і бажаної статистичної точності. У випадку отримання незадовільних результатів для тестової множини, навчання продовжується.

Після того, як визначено число шарів і число нейронів в кожному з них, потрібно знайти значення для синаптичних ваг і порогів мережі, які спроможні мінімізувати похибку спродукованого результату. Похибка для конкретної моделі мережі визначається шляхом проходження через мережу всіх навчальних прикладів і порівняння спродукованих вихідних значень з бажаними значеннями. В якості функції похибок найчастіше використовують суму квадратів похибок.

Алгоритм:

1. Ініціалізація: вагові коефіцієнти і зсуви приймають малі випадкові значення.
2. Визначення елемента навчальної множини: (вхід - вихід). Входи ($x_1, x_2 \dots x_N$), повинні розрізнятися для всіх прикладів навчальної множини.
3. Обчислення вихідного сигналу:

$$S_{im} = \sum_{j=1}^{N_{m-1}} w_{ijm-1} y_{j,m-1} - b_{im}$$

$$y_{im} = f(S_{im})$$

$$i_m = 1, 2, \dots, N_m, m = 1, 2, \dots, L,$$

де S - вихід суматора, w - вага зв'язку, y - вихід нейрона, b - зсув, i - номер нейрона, N - число нейронів у шарі, m - номер шару, L - число шарів, f - передатна функція.

4. Налаштування синаптичних ваг:

$$w_{ij}(t+1) = w_{ij}(t) + rgx'_i,$$

де w_{ij} - вага від нейрона i або від елемента вхідного сигналу i до нейрона j у момент часу t , x'_i - вихід нейрона i , r - швидкість навчання, g_j - значення похибки для нейрона j .

Якщо нейрон з номером j належить останньому прошарку, тоді:

$$g_j = y_j(1 - y_j)(d_j - y_j),$$

де d_j - бажаний вихід нейрона j , y_j - поточний вихід нейрона j .

Якщо нейрон з номером j належить одному з шарів з першого по передостанній, тоді:

$$g_j = x'_j(1 - x'_j) \sum_k g_k w_{jk},$$

де k пробігає всі нейрони шару з номером на одиницю більше, ніж у того, котрому належить нейрон j . Зовнішні зсуви нейронів b налаштовуються аналогічно.

Таким чином:

- Недоліки алгоритму: Низька швидкість навчання.
- Переваги алгоритму: Ефективний та популярний алгоритм для вирішення численних практичних задач.

Незважаючи на численні успішні застосування алгоритму зворотного поширення помилки, він не є панацеєю. Найбільше неприємностей приносить невизначено довгий процес навчання. У складних завданнях для навчання мережі можуть знадобитися дні або навіть тижні, вона може і взагалі не навчитися.

Розглянемо роботу алгоритму на прикладі мережі, схему якої наведено нижче на рис. 2:

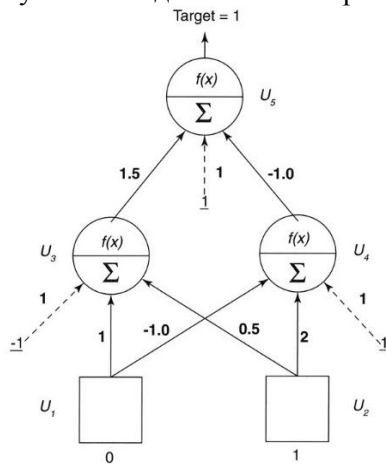


Рис. 2. Приклад мережі

Спочатку виконується розрахунок руху вхідного сигналу по мережі. Розглянемо значення для прихованого шару:

$$u_3 = f(w_{3,1}u_1 + w_{3,2}u_2 + w_b \cdot bias) = f(1 \cdot 0 + 0.5 \cdot 1 + 1 \cdot 1) = 0.81757;$$

$$u_4 = f(w_{4,1}u_1 + w_{4,2}u_2 + w_b \cdot bias) = f(-1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 1) = 0.952574;$$

В якості передаточної функції використовуємо сигмоїд. Коли сигнал дійшов до прихованого шару, необхідно перемістити його у вихідний шар та розрахувати значення на виході мережі:

$$u_5 = f(w_{5,3}u_3 + w_{5,4}u_4 + w_b \cdot bias) = f(1.5 \cdot 0.81757 + -1 \cdot 0.952574 + 1 \cdot 1) = 0.78139;$$

Отриманий результат не такий вже і поганий, але можна зменшити значення похибки, використавши алгоритм зворотного поширення помилки. Для корегування вагових коефіцієнтів в мережі зазвичай використовують значення середньоквадратичної похибки. Для одного вузла похибка обчислюється таким співвідношенням:

$$err = 0.5 \cdot (o_{desired} - o_{actual})^2;$$

$$err = 0.5 \cdot (1 - 0.78139)^2 = 0.023895;$$

Застосуємо зворотне поширення, починаючи з визначення похибки у вихідному та прихованому шарах. Використовуючи рівняння знаходження суми всіх ваг, що входять у вузол, розрахуємо похибку вихідного вузла:

$$\delta_o = (1 - 0.78139) \cdot 0.78139 \cdot (1 - 0.78139) = 0.0373;$$

Далі необхідно розрахувати похибку для двох прихованих вузлів. Для цього використовується похідна сигмоїдної функції:

$$val = x \cdot (1.0 - x);$$

Використовуючи її значення, розрахуємо похибки для прихованих вузлів:

$$\delta_{u4} = (\delta_o \cdot w_{5,4}) \cdot u_4 \cdot (1 - u_4) = (0.0373 \cdot -1) \cdot 0.952574 \cdot (1 - 0.952574) = -0.0016851;$$

$$\delta_{u3} = (\delta_o \cdot w_{5,3}) \cdot u_3 \cdot (1 - u_3) = (0.0373 \cdot 1.5) \cdot 0.81757 \cdot (1 - 0.81757) = 0.0083449;$$

Після розрахування значень похибок для вихідного та прихованого шарів, можна змінити значення ваг. Використовуємо коефіцієнт навчання $\rho = 0.5$. Спочатку необхідно оновити значення ваг з'єднань між вихідним для прихованим шарами:

$$w_{ij}^* = w_{ij} + \rho \delta_o u_i;$$

$$w_{5,4} = w_{5,4} + (\rho \cdot 0.0373 \cdot u_4) = -1 + (0.5 \cdot 0.0373 \cdot 0.952574) = -0.9822;$$

$$w_{5,3} = w_{5,3} + (\rho \cdot 0.0373 \cdot u_3) = 1.5 + (0.5 \cdot 0.0373 \cdot 0.81757) = 1.51525;$$

Оновимо значення зміщення для вихідної комірки:

$$w_{5,b} = w_{5,b} + (\rho \cdot 0.0373 \cdot bias_5) = 1 + (0.5 \cdot 0.0373 \cdot 1) = 1.01865;$$

Як бачимо, для $w_{5,4}$ значення ваги зменшилося, тоді як для $w_{5,3}$ вага зросла. Зміщення було оновлено для збільшення збудження. Покажемо зміни значень ваг для прихованого шару:

$$w_{ij}^* = w_{ij} + \rho \delta_i u_i;$$

$$w_{4,2} = w_{4,2} + (\rho \cdot -0.0016851 \cdot u_2) = 2 + (0.5 \cdot -0.0016851 \cdot 1) = 1.99916;$$

$$w_{4,1} = w_{4,1} + (\rho \cdot -0.0016851 \cdot u_1) = -1 + (0.5 \cdot -0.0016851 \cdot 0) = -1;$$

$$w_{3,2} = w_{3,2} + (\rho \cdot 0.0083449 \cdot u_2) = 0.5 + (0.5 \cdot 0.0083449 \cdot 1) = 0.50417;$$

$$w_{3,1} = w_{3,1} + (\rho \cdot 0.0083449 \cdot u_1) = 1.0 + (0.5 \cdot 0.0083449 \cdot 0) = 1.0;$$

Останній крок – оновлення зміщень для комірок:

$$w_{4,b} = w_{4,b} + (\rho \cdot -0.0016851 \cdot bias_4) = 1.0 + (0.5 \cdot -0.0016851 \cdot 1) = 0.99915;$$

$$w_{3,b} = w_{3,b} + (\rho \cdot 0.0083449 \cdot bias_3) = 1.0 + (0.5 \cdot 0.0083449 \cdot 1) = 1.00417;$$

Перевіримо, що алгоритм справді зменшує похибку на виході, вводячи той же самий сигнал ще раз:

$$u_3 = f(w_{3,1}u_1 + w_{3,2}u_2 + w_b \cdot bias) = f(1 \cdot 0 + 0.50417 \cdot 1 + 1.00417 \cdot 1) = 0.8188;$$

$$u_4 = f(w_{4,1}u_1 + w_{4,2}u_2 + w_b \cdot bias) = f(-1 \cdot 0 + 1.99916 \cdot 1 + 0.99915 \cdot 1) = 0.952497;$$

$$u_5 = f(w_{5,3}u_3 + w_{5,4}u_4 + w_b \cdot bias) = f(1.51525 \cdot 0.8188 + -0.9822 \cdot 0.952497 + 1.01865 \cdot 1) = 0.7898;$$

$$err = 0.5 * (1.0 - 0.7898)^2 = 0.022;$$

Нагадаю, що минулого разу похибка мала значення, рівне 0.023895. Цього разу похибка має значення 0.022, а це означає, що одна ітерація алгоритму зворотного поширення помилки дозволила зменшити середньоквадратичну похибку на 0.001895, що досить непогано. [5]

Реалізація ЕС «NeuroDiagnostics».

Алгоритм зворотного поширення помилки вже багато років досить успішно використовується для задач медичної діагностики. [6] Чим ми і скористаємося, реалізуючи його для діагностики найбільш поширених цереброваскулярних захворювань людини, використовуючи ряд параметрів.

В прикладі розгляду роботи алгоритму зворотного поширення помилки використовувався приклад мережі з одним виходом. В даному ж випадку мережа матиме стільки виходів, скільки всього діагнозів вона може визначити. Тоді виникає питання, як саме нейронна мережа повинна вибирати той чи інший вихід (тобто визначати той чи інший діагноз). Для цього використовується архітектура мережі, побудована по принципу «переможець отримує все». В такому випадку вихідна комірка з максимальною сумою ваг являє собою «переможця» групи і саме її значення використовується при отриманні результату. В даному випадку та вихідна комірка (та діагноз, що за нею закріплений), яка отримує максимальне значення і буде видана в якості результату користувачу. [5]

Звичайно, для отримання якомога точних результатів в якості даних для навчання мережі були використані реальні дані хворих, які в певний період свого життя мали справу із вказаними захворюваннями.

При розробці експертної системи NeuroDiagnostics використовувалися знання лікаря-невропатолога, експерта в галузі неврології з 30-річним стажем роботи. [6] Саме за його рекомендаціями було прийнято рішення щодо розробки системи з медичної діагностики обраних неврологічних захворювань. В першу чергу, через те, що вони є дуже схожими, і далеко не завжди вдається точно визначити діагноз хворого, а також через стрімке зростання кількості хворих у неврологічному відділенні з заданими діагнозами за останні роки, що, як було зазначено раніше, є однією з найбільш поширених причин смертності в Україні й в усьому світі.

Для визначення мережею діагнозу були використані найбільш вагомі чинники на думку експерта:

Загальні відомості:

- Вік
- Шкідливі звички
- Гострий початок хвороби

Симптоми:

- Головний біль
- Підвищений артеріальний тиск
- Загальна слабкість
- Підвищена температура
- Параліч кінцівок
- Чи перебуває пацієнт у свідомості?

Фонові захворювання:

- Атеросклероз
- Гіпертонічна хвороба
- Цукровий діабет
- Аритмія
- Порушення структури судинної стінки
- СНІД
- Простудні захворювання

Додаткові методи дослідження:

- КТ (МРТ):
- Інфаркт мозку
- Осередки демієлінізації

Дослідження крові:

- Підвищений рівень лейкоцитів
- Підвищений рівень сої
- Вірусологія

Білково-клітинна дисоціація:

- Аналіз СМР

Отже, всього визначаємо 22 параметри, тому відповідно кількість нейронів у вхідному шарі дорівнюватиме 22, кількість нейронів у вихідному шарі дорівнюватиме 2 (кількість можливих діагнозів – інсульт та енцефаліт).

Висновок. В ході роботи над статтею проводився аналіз основних технологій, характерних для розробки медичних ЕС. Як результат, була створена система діагностики найбільш поширених цереброваскулярних захворювань людини «NeuroDiagnostics». Для реалізації використовувалася штучна нейронна мережа, що має структуру багатошарового

персептрону і використовує алгоритм зворотного поширення помилки для навчання мережі.

Незважаючи на значну кількість вже відомих практичних додатків штучних нейронних мереж, можливості їх подальшого використання для обробки сигналів остаточно не вичерпані, і можна припустити, що ШНМ ще протягом

багатьох років будуть одним з основних інструментів підтримки прийняття рішень в умовах відсутності точних моделей реальних процесів і явищ.

Список використаних джерел

1. Jones Tim M. *AI Application Programming* – Charles River Media, 2003. – 311p.
2. Haykin Simon *Neural Networks: A Comprehensive Foundation* - MacMillan Publishing Company, 1994. – 1104p.
3. Реброва О.Ю. Математические алгоритмы и экспертные системы в дифференциальной диагностике инсультов: дисс. доктора мед. наук: 14.00.13 / Реброва Ольга Юрьевна. – К., 2003. – 325с.
4. Жариков О.Г. Экспертные системы в медицине / Жариков О.Г., Литвин А.А., Ковалев В.А. // Медицинские Новости. – 2008. – №10
5. Qeethara Kadhim Al-Shayea *Artificial Neural Networks in Medical Diagnosis* // IJCSI International Journal of Computer Science Issues. – 2011. – Vol.8 – P. 150-154.
6. Ежов А., Чечеткин В. Нейронные сети в медицине // Открытые системы. –1997. – №4. - 304с.
7. Горбань А.Н. Нейроинформатика /А. Н. Горбань, В. Л. Дунин-Барковский, А.Н. Кирдин – Новосибирск: Наука. Сибирское предприятие РАН, 1998. – 296 с.

References

1. JONES, T.M. (2003) *AI Application Programming*. Charles River Media.
2. HAYKIN, S. (1994) *Neural Networks: A Comprehensive Foundation*. MacMillan Publishing Company.
3. REBROVA, O.Y. (2003) *Mathematical Algorithms and Expert Systems in Differential Diagnostics of Strokes*.
4. ZHARIKOV, O.G., LITVIN, A.A., KOVALEV V.A. (2008) *Expert Systems in Medicine*. Medical News. №10
5. KADHIM, Q., (2011) *Artificial Neural Networks in Medical Diagnosis*. IJCSI International Journal of Computer Science Issues, pp. 150-154.
6. YEZHOF, A., CHECHETKIN, V. (1997) *Neural Networks in Medicine*. Open systems. №4, pp. 34-37.
7. GORBAN, A.N., DUNIN-BARKOVSKIY, V.L., KIRDIN, A.N. (1998) *Neuroinformatics*. Novosibirsk: Science.

Надійшла до редколегії 22.01.16

УДК 519.214.6

Маринич О. В.¹, к. ф.-м. н., докторант

Про асимптотику числа активних випадкових процесів в системі з імміграцією

¹Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, пр-т Глушкова 4д
e-mail: marynych@unicyb.kiev.ua

Marynych O. V.¹, PhD, doctoral candidate

On the number of active random processes in a system with immigration

¹Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03680, Kyiv, Glushkova av., 4d
e-mail: marynych@unicyb.kiev.ua

Нехай $(\xi_k, \eta_k)_{k \in \mathbb{N}}$ є послідовністю незалежних копій випадкового вектора (ξ, η) з майже напевно додатними координатами. В роботі вивчається асимптотика процесу $M(u) := \sum_{j \geq 1} \mathbb{1}_{\{S_{j-1} \leq u < S_{j-1} + \eta_j\}}$, де $(S_k)_{k \in \mathbb{N}}$ є стандартним випадковим блуканням з кроками $(\xi_k)_{k \in \mathbb{N}}$, що стартує в нулі. За різноманітних моментних припущень на ξ та η , отримано клас граничних теорем для скінченновимірних розподілів $(M(ut))_{u \geq 0}$ при $t \rightarrow \infty$. Отримані результати доповнюють відомі раніше твердження, див. Mikosch and Resnick (2006), про асимптотичну поведінку $M(u)$ у випадку незалежних ξ та η .

Ключові слова: дробово інтегрований обернений стійкий субординатор, дробово інтегрований стійкий процес Леві, випадкове блукання, випадковий процес з імміграцією, теорія відновлення.

Let $(\xi_k, \eta_k)_{k \in \mathbb{N}}$ be a sequence of independent copies of a random vector (ξ, η) with almost surely positive coordinates. We study the asymptotic behavior of a random process $M(u) := \sum_{j \geq 1} \mathbb{1}_{\{S_{j-1} \leq u < S_{j-1} + \eta_j\}}$, where $(S_k)_{k \in \mathbb{N}}$ is the zero-delayed random walk with steps $(\xi_k)_{k \in \mathbb{N}}$. Under various moment assumptions on ξ and η , we obtain limit theorems for finite-dimensional distributions of $(M(ut))_{t \geq 0}$, as $t \rightarrow \infty$. Our results complement previously known theorems, see Mikosch and Resnick (2006), on the asymptotics of $M(u)$ for independent ξ and η . The random process $M(u)$ could be interpreted as follows. Let $D := D[0, \infty)$ be the Skorokhod spaces of right-continuous real-valued functions which are defined on $[0, \infty)$ and have finite left limits at each point of the domain. Let $X := (X(t))_{t \geq 0}$ be a random process with paths in D which might be arbitrarily dependent of a positive random variable ξ and let $(X_1, \xi_1), (X_2, \xi_2), \dots$ be a sequence of independent copies of the pair (X, ξ) . The process $Y(t) := \sum_{k \geq 0} X_{k+1}(t - S_k)$ is called random process with immigration at the epochs of a renewal process. Assume that the random variable $\tau_X := \inf\{t \geq 0 : X(s) = 0 \text{ for all } s \geq t\}$ is almost surely finite. We say that the process X is active at $t \geq 0$ if and only if $t < \tau_X$. The value $M(u)$ of random process M with $\eta = \tau_X$ is then the number of active processes at time $u \geq 0$. Thus, our limit theorems for $M(u)$ can be interpreted as asymptotic results for the number of active processes in a system with immigration.

Keywords: fractionally integrated inverse stable subordinator, fractionally integrated stable Levy process, random walk, random processes with immigration, renewal theory

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Хусаїнов Д. Я.

Вступ

Нехай $D := D[0, \infty)$ є простором Скорохода, що складається з функцій, визначених та неперервних справа на $[0, \infty)$ та які мають скінченні границі зліва на $(0, \infty)$. Розглянемо випадковий процес $X := (X(t))_{t \geq 0}$ з траєкторіями в D і додатну випадкову величину ξ , яка може як завгодно залежати від X . Нехай $(X_1, \xi_1), (X_2, \xi_2), \dots$ є послідовністю незалежних копій пари (X, ξ) , а $(S_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ (тут і надалі $\mathbb{N}_0 := \{0, 1, 2, \dots\}$) є стандартним випадковим

блуканням з кроками $(\xi_j)_{j \in \mathbb{N}}$, тобто

$$S_0 := 0, \quad S_k := \xi_1 + \dots + \xi_k, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (1)$$

Ми позначатимемо $(\nu(t))_{t \in \mathbb{R}}$ момент першого потрапляння в (t, ∞) випадковим блуканням (S_k) :

$$\nu(t) := \inf\{k \in \mathbb{N}_0 : S_k > t\} = \#\{k \in \mathbb{N}_0 : S_k \leq t\}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Випадковий процес $Y := (Y(t))_{t \in \mathbb{R}}$, що визначається рівністю

$$Y(t) := \sum_{k \geq 0} X_{k+1}(t - S_k) = \sum_{k=0}^{\nu(t)-1} X_{k+1}(t - S_k), \quad t \in \mathbb{R} \quad (2)$$

було введено в роботах [5, 6], де він отримав назву *випадкового процесу з імміграцією в моменти відновлення*. Ця назва стає зрозумілою з такої інтерпретації: в момент часу $S_0 = 0$ перший іммігрант прибуває в систему і породжує процес X_1 , далі, для кожного $k \in \mathbb{N}$, в момент S_k іммігрант $k+1$ прибуває в систему і породжує процес X_{k+1} . Тоді $Y(t)$ є сумою процесів, породжених іммігрантами, що прибули в систему до часу t включно і описує кумулятивний ефект процесів, породжених всіма прибулими іммігрантами. Процес X називається *процесом відповіді*.

У даній роботі досліджується клас випадкових процесів з імміграцією $M := (M(t))_{t \in \mathbb{R}}$, побудованих на процесах відповіді $X(t) = \mathbb{1}_{\{\eta > t\}}$, де $\eta \in \text{деякою додатною випадковою величиною}$, а $\mathbb{1}_A$ позначає індикатор події A . Таким, чином ми вивчатимемо випадкові процеси вигляду

$$M(t) := \sum_{j \geq 1} \mathbb{1}_{\{S_{j-1} \leq t < S_{j-1} + \eta_j\}}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (3)$$

де $(\xi_j, \eta_j)_{j \in \mathbb{N}}$ є копіями випадкового вектора (ξ, η) з як зазвичай залежними координатами (ξ, η) .

З точки зору загальної теорії випадкових процесів з імміграцією процес M можна інтерпретувати як кількість процесів в системі, що *активні* в момент часу t . Термін “активний” розуміється в наступному сенсі: якщо процес відповіді X має скінченну тривалість, тобто величина

$$\tau_X := \inf\{t \geq 0 : X(s) = 0 \text{ для всіх } s \geq t\} \quad (4)$$

є майже напевно скінченною, то процес X активний в момент часу t тоді й тільки тоді коли $t < \tau_X$. Очевидно, що кількість активних процесів в момент t дорівнює $M(t)$, де M побудовано на парі (ξ, τ_X) .

Процес M , як з залежними так і з незалежними ξ та η , виникає у багатьох задачах прикладної ймовірності. Зокрема:

- процес M описує число зайнятих серверів в системі масового обслуговування $(GI/G/\infty)$ [6, 8];

- для незалежних ξ, η випадкова величина $M(t)$ представляє кількість активних передач даних в момент часу t в комп'ютерній мережі [10];
- процес $M(t)$ є різницею між кількістю візитів в інтервал $[0, t]$ стандартного випадкового блукання $(S_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ та збуреного випадкового блукання $(S_n + \eta_{n+1})_{n \in \mathbb{N}_0}$ [1];
- процес $M(t)$, що породжується парою величин $(|\ln W|, |\ln(1 - W)|)$, де W – деяка випадкова величина зі значеннями в $(0, 1)$, виникає в аналізі числа порожніх комірок в ґратці Бернуллі [7].

В роботі [10] вивчалась слабка збіжність скінченновимірних розподілів підходящим чином нормованого та центрованого процесу

$$\widetilde{M}(t) := \sum_{j \geq 1} \mathbb{1}_{\{S_j \leq t < S_j + \eta_j\}}, \quad t \in \mathbb{R} \quad (5)$$

за припущення, що послідовності $(\eta_j)_{j \in \mathbb{N}}$ та $(\xi_j)_{j \in \mathbb{N}}$ є незалежними. Зрозуміло, що за цього припущення $(\widetilde{M}(t))_{t \in \mathbb{R}} \stackrel{f.d.}{=} (M(t))_{t \in \mathbb{R}}$, де $\stackrel{f.d.}{=}$ позначає рівність скінченновимірних розподілів, а тому результати [10] вірні й для процесу M . У даній роботі нас цікавить питання про збіжність скінченновимірних розподілів процесу $(M(t))_{t \in \mathbb{R}}$ без припущення про незалежність ξ та η . Часткову відповідь на це питання можна отримати з загальної асимптотичної теорії випадкових процесів з імміграцією, побудованої в роботах [5, 6, 9]. Відповідні твердження будуть сформульовані у наступному розділі. Проте, існує декілька випадків, у яких граничні теореми для процесу $(M(t))_{t \in \mathbb{R}}$ не вдається отримати з відомих раніше результатів. Одним з таких випадків є наступний: припустимо, що обидві випадкові величини ξ та η мають нескінченне середнє, а їх хвости правильно змінюються і асимптотично порівнювані, тобто

$$\mathbb{P}\{\xi > t\} \sim c \mathbb{P}\{\eta > t\} \sim t^{-\alpha} \ell(t), \quad t \rightarrow \infty, \quad (6)$$

для деяких $c > 0, \alpha \in (0, 1)$ та функції ℓ , що повільно змінюється на нескінченності. Виявляється, що за додаткового припущення про *сумісну* правильну зміну розподілу пари (ξ, η) , можна отримати граничну теорему для процесу $(M(t))_{t \in \mathbb{R}}$. Цей результат, який є основним у даній роботі, сформульовано і доведено в останньому розділі роботи.

У роботі використовуються такі позначення:
 $\xrightarrow{d}$ – збіжність за розподілом послідовності випадкових величин; $\xrightarrow{f.d.d.}$ – збіжність скінченновимірних розподілів послідовності випадкових процесів; $\xrightarrow{P}$ – збіжність за ймовірністю.

Граничні теореми для процесу $M(t)$

I) Випадок $\mathbb{E}\xi < \infty$ та $\mathbb{E}\eta < \infty$: збіжність до стаціонарної версії. На тому ж ймовірнісному просторі, де задана послідовність $(\xi_k, \eta_k)_{k \in \mathbb{N}}$, визначимо такі об'єкти:

- незалежну копію $(\xi_{-k}, \eta_{-k})_{k \in \mathbb{N}}$ послідовності $(\xi_k, \eta_k)_{k \in \mathbb{N}}$;
- випадковий вектор (ξ_0, η_0) , що не залежить від $(\xi_k, \eta_k)_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}}$ та має розподіл

$$\mathbb{P}\{\xi_0 \leq x, \eta_0 \leq y\} = \frac{1}{\mathbb{E}\xi} \int_{[0, x]} z \mathbb{P}\{\xi \in dz, \eta \leq y\}$$

при $x, y \geq 0$;

- випадкову величину U , що не залежить від $(\xi_k, \eta_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ та має рівномірний розподіл на $[0, 1]$.

Покладемо

$$S_{-k} := -(\xi_{-1} + \dots + \xi_{-k}), \quad k \in \mathbb{N}$$

та

$$\begin{aligned} S_0^* &:= U\xi_0, \quad S_{-1}^* := -(1-U)\xi_0, \\ S_k^* &:= S_0^* + S_k, \quad S_{-k-1}^* := S_{-1}^* + S_{-k-1}, \quad k \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

З теореми 1.1 роботи [9] випливає такий результат

Твердження 1. Припустимо, що $\mathbb{E}\xi < \infty$, $\mathbb{E}\eta < \infty$ та розподіл ξ неарифметичний. Тоді

$$M(u+t) \xrightarrow{f.d.d.} M^*(u), \quad t \rightarrow \infty,$$

де

$$M^*(u) := \sum_{k \in \mathbb{Z}} \mathbb{1}_{\{0 \leq u + S_k^* < \eta_k\}}, \quad u \in \mathbb{R},$$

а $-\infty < u_1 < u_2 < \dots < u_n < \infty$ є точками неперервності M^* .

Зауваження 1. Якщо $\mathbb{E}\xi = \infty$ та $\mathbb{E}\eta < \infty$, то $M(t) \xrightarrow{d} 0$ при $t \rightarrow \infty$ (див. твердження 4 нижче).

II) Випадок $\mathbb{E}\eta = \infty$, $\mathbb{E}\xi < \infty$: граничні теореми з центруванням та нормуванням. У цьому випадку граничні теореми для M можна отримати за припущень, що випадкова величина ξ лежить в області притягання α -стійкого розподілу з $\alpha \in (1, 2]$, а функція $\mathbb{P}\{\eta > t\}$ правильно змінюється на нескінченності з показником $-\rho$, $\rho \in [0, 1]$:

$$\mathbb{P}\{\eta > t\} \sim t^{-\rho} \ell^*(t), \quad t \rightarrow \infty, \quad (7)$$

для деякої функції ℓ^* , що повільно змінюється на нескінченності. Нагадаємо (див. теорема 1, §5, Розділ XVII в [3]), що ξ лежить в області притягання α -стійкого розподілу з $\alpha \in (1, 2]$ тоді й лише тоді, коли

$$\mu_2(t) := \mathbb{E}[\xi^2 \mathbb{1}_{\{\xi \leq t\}}] \sim t^{2-\alpha} \ell(t), \quad t \rightarrow \infty, \quad (8)$$

для деякої функції ℓ , що повільно змінюється на нескінченності. Нехай

$$c(t) = \begin{cases} \sigma\sqrt{t}, & \text{якщо } \sigma^2 := \mathbb{D}\xi < \infty, \\ t^{1/\alpha} (\ell^\#(t))^{1/\alpha}, & \text{якщо } \sigma^2 = \infty, \end{cases} \quad (9)$$

де у випадку $\sigma^2 = \infty$ також припускається, що виконується умова (8) з $\alpha \in (1, 2]$, а $\ell^\#$ – функція спряжена за де Брейном до $L(t) := 1/\ell(t^{1/\alpha})$ (див. Теорема 1.5.13 в [2]). З теореми 2.4 роботи [5] випливає

Твердження 2. Припустимо, що випадкова величина ξ лежить в області притягання α -стійкого розподілу з $\alpha \in (1, 2]$, а функція c визначена формулою (9) та виконується умова (7) з $\rho \in [0, 1]$.

(A1) Якщо $\mathbb{P}\{\eta > t\} = o(t/c^2(t))$ при $t \rightarrow \infty$, то

$$\frac{M(ut) - \frac{1}{\mathbb{E}\xi} \int_0^{ut} \mathbb{P}\{\eta > y\} dy}{\sqrt{(\mathbb{E}\xi)^{-1} \int_0^t \mathbb{P}\{\eta > y\} dy}} \xrightarrow{f.d.d.} V_{-\rho}(u), \quad t \rightarrow \infty,$$

де $(V_{-\rho}(u))_{u \geq 0}$ – центрований гауссівський процес з коваріацією

$$\mathbb{E}(V_{-\rho}(s)V_{-\rho}(t)) = t^{1-\rho} - (t-s)^{1-\rho}, \quad 0 \leq s \leq t.$$

(A2) Якщо $t/c^2(t) = o(\mathbb{P}\{\eta > t\})$ при $t \rightarrow \infty$, то

$$\frac{M(ut) - \frac{1}{\mathbb{E}\xi} \int_0^{ut} \mathbb{P}\{\eta > y\} dy}{(\mathbb{E}\xi)^{-(\alpha+1)/\alpha} c(t) \mathbb{P}\{\eta > t\}} \xrightarrow{f.d.d.} \int_0^u (u-y)^{-\rho} dS_\alpha(y), \quad t \rightarrow \infty,$$

де $(S_\alpha(y))_{y \geq 0}$ – стандартний броунівський рух якщо $\alpha = 2$ та спектрально негативний α -стійкий процес Леві з характеристичною функцією

$$\mathbb{E} \exp^{izS_\alpha(1)} = \exp\{-|z|^\alpha \Gamma(1-\alpha) \times (\cos(\pi\alpha/2) + i \operatorname{sign}(z) \sin(\pi\alpha/2))\}, \quad z \in \mathbb{R}, \quad (10)$$

якщо $\alpha < 2$.

Зауваження 2. Випадок $t/c^2(t) \sim c_1 \mathbb{P}\{\eta > t\}$ при $t \rightarrow \infty$ та $c_1 \in (0, \infty)$ залишається відкритим.

III) Випадок $\mathbb{E}\eta = \infty, \mathbb{E}\xi = \infty$: граничні теореми з нормуванням. Припустимо, що хвости $\mathbb{P}\{\xi > t\}$ та $\mathbb{P}\{\eta > t\}$ правильно змінюються на нескінченності:

$$\mathbb{P}\{\xi > t\} \sim t^{-\alpha} \ell(t), \quad \mathbb{P}\{\eta > t\} \sim t^{-\rho} \ell^*(t), \quad t \rightarrow \infty \quad (11)$$

та $\alpha, \rho \in [0, 1)$.

Підвипадок $\mathbb{P}\{\xi > t\} = o(\mathbb{P}\{\eta > t\})$, $t \rightarrow \infty$. З теореми 2.5 роботи [5] отримуємо такий результат

Твердження 3. Припустимо, що виконуються умови (11) та знайдеться така невід'ємна монотонна функція u , що

$$\frac{\mathbb{P}\{\xi > t\}}{\mathbb{P}\{\eta > t\}} \sim \frac{1}{u(t)} \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty.$$

Тоді

$$\frac{\mathbb{P}\{\xi > t\}}{\mathbb{P}\{\eta > t\}} M(ut) \xrightarrow{f.d.d.} \int_{[0, u]} (u-y)^{-\rho} dW^\leftarrow(y), \quad t \rightarrow \infty,$$

де $W^\leftarrow(y) := \inf\{s \geq 0 : W(s) \geq y\}$, а $(W_\alpha(u))_{u \geq 0}$ – α -стійкий субординатор з експонентою Лапласа $-\ln \mathbb{E} \exp\{-zW_\alpha(u)\} = \Gamma(1-\alpha)uz^\alpha$, $u, z \geq 0$.

Підвипадок $\mathbb{P}\{\eta > t\} = o(\mathbb{P}\{\xi > t\})$, $t \rightarrow \infty$. З леми 5.1 роботи [4] випливає, що без жодних припущень про правильну зміну має місце такий результат

Твердження 4. Якщо $\mathbb{E}\eta = \infty$ та $\mathbb{P}\{\eta > t\} = o(\mathbb{P}\{\xi > t\})$ при $t \rightarrow \infty$, то

$$M(t) \xrightarrow{d} 0, \quad t \rightarrow \infty.$$

Граничні теореми для процесу M у випадку

$$\mathbb{E}\xi = \infty \text{ та } \mathbb{P}\{\xi > t\} \sim c\mathbb{P}\{\eta > t\}$$

Нехай $N_{\alpha,c} := \sum_{k \geq 0} \delta_{(t_k, j_k)}$ – процес Пуассона в $[0, \infty) \times (0, \infty]$ з мірою інтенсивності $\mathbb{L} \otimes \nu_{\alpha,c}$, де $\mathbb{L} \otimes \nu_{\alpha,c}$ – міра Лебега на $[0, \infty)$ та

$$\nu_{\alpha,c}((x, \infty]) = c^{-1}x^{-\alpha}, \quad x > 0.$$

Теорема 1. Припустимо, що випадковий вектор (ξ, η) задовольняє умову (6). Нехай c – довільна неперервна додатна функція така, що

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t \mathbb{P}\{\xi > c(t)\} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t \ell(c(t))}{c^\alpha(t)} = 1.$$

Якщо для довільних $x, y > 0$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t \mathbb{P}\{\xi > xc(t), \eta > yc(t)\} = 0, \quad (12)$$

то

$$M(ut) \xrightarrow{f.d.d.} \sum_{k \geq 0} \mathbb{1}_{\{W_\alpha(t_k) \leq u < W_\alpha(t_k) + j_k\}},$$

де $(W_\alpha(t))_{t \geq 0}$ – α -стійкий субординатор, що не залежить від точкового процесу $N_{\alpha,c}$ та має експоненту Лапласа $\mathbb{E} \exp(-\lambda W_\alpha(t)) = \exp(-\Gamma(1-\alpha)t\lambda^\alpha)$.

Зауваження 3. Умови (6) та (12) означають, що має місце збіжність у просторі точкових мір $M_p([0, \infty]^2 \setminus \{(0, 0)\})$ з грубою топологією:

$$t \mathbb{P}\{c^{-1}(t)(\xi, \eta) \in \cdot\} \xrightarrow{v} \mu_{\alpha,c}(\cdot), \quad (13)$$

де

$$\mu_{\alpha,c}\{(u, v) : u > x \text{ або } v > y\} = x^{-\alpha} + c^{-1}y^{-\alpha}, \quad x, y > 0.$$

Умова (12) гарантує, що міра $\mu_{\alpha,c}$ зосереджена на координатних осях. Зауважимо, що формула (13) також означає, що хвіст $1 - \mathbb{P}\{\xi \leq x, \eta \leq y\}$ правильно змінюється в $\mathbb{R}_+^2$ (див., наприклад, розділ 5.4.2 в [11]).

Доведення. В доведенні використовується міркування аналогічні до тих, що були використані в доведенні теореми 1.1 роботи [7]. Достатньо перевірити ти слабку збіжність

$$\left(\frac{S_{[ut]-1}}{c(t)}, \sum_{k \geq 1} \delta_{(k/t, \eta_k/c(t))} \right) \Rightarrow (W_\alpha(u), N^{(\alpha,c)}), \quad t \rightarrow \infty, \quad (14)$$

в просторі $D \times M_p([0, \infty) \times (0, \infty])$. В свою чергу, в силу леми 8.4 роботи [7], (14) еквівалентно

$$\sum_{i=1}^n \gamma_i \frac{S_{[u_i t]}}{c(t)} + \gamma \sum_{k \geq 1} g\left(\frac{k}{t}, \frac{\eta_k}{c(t)}\right) \xrightarrow{d} \sum_{i=1}^n \gamma_i W_\alpha(u_i) + \gamma \sum_m g(t_m, j_m), \quad t \rightarrow \infty, \quad (15)$$

для довільної неперервної функції g з компактним в $[0, \infty) \times (0, \infty]$ носієм, та довільних $0 \leq u_1 < u_2 < \dots < u_n$, $\gamma, \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n \in \mathbb{R}$.

Для довільного фіксованого $z > 0$ маємо

$$\begin{aligned} \phi_t(z) &:= \mathbb{E} \exp \left(-z \left(\sum_{i=1}^n \gamma_i \frac{S[u_i t]}{c(t)} + \gamma \sum_{k \geq 1} g \left(\frac{k}{t}, \frac{\eta_k}{c(t)} \right) \right) \right) \\ &= \mathbb{E} \exp \left(-z \left(\sum_{i=1}^n \frac{\gamma_i}{c(t)} \sum_{k=1}^{[u_i t]} \xi_k + \gamma \sum_{k \geq 1} g \left(\frac{k}{t}, \frac{\eta_k}{c(t)} \right) \right) \right) \\ &= \prod_{k \geq 1} \mathbb{E} \exp \left(-z \left(\frac{\xi}{c(t)} \sum_{i=1}^n \gamma_i 1_{\{k \leq u_i t\}} + \gamma g \left(\frac{k}{t}, \frac{\eta}{c(t)} \right) \right) \right) \\ &= \prod_{k \geq 1} \int_{[0, \infty) \times [0, \infty)} (1 - K(z, u, v, k/t)) \\ &\quad \times \mathbb{P} \left\{ \frac{\xi}{c(t)} \in du, \frac{\eta}{c(t)} \in dv \right\}, \end{aligned}$$

де

$$K(z, u, v, w) = 1 - \exp \left(-z \left(u \sum_{i=1}^n \gamma_i 1_{\{w \leq u_i\}} + \gamma g(w, v) \right) \right).$$

Нехай C – (компактний) носій g . Для довільного $k \in \mathbb{N}$ маємо

$$\begin{aligned} \int_{[0, \infty) \times [0, \infty)} K(z, u, v, k/t) \mathbb{P} \left\{ \frac{\xi}{a(t)} \in du, \frac{\eta}{c(t)} \in dv \right\} \\ \leq \mathbb{E} \left(1 - \exp \left(-\frac{z\xi}{c(t)} \sum_{i=1}^n \gamma_i 1_{\{k \leq u_i t\}} \right) \right) \\ + \mathbb{P} \left\{ \left(\frac{\xi}{c(t)}, \frac{\eta}{c(t)} \right) \in C \right\}. \end{aligned}$$

Отже, з огляду на (13)

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \sup_{k \in \mathbb{N}} \int_{[0, \infty) \times [0, \infty)} K(z, u, v, k/t) \\ \times \mathbb{P} \left\{ \frac{\xi}{c(t)} \in du, \frac{\eta}{c(t)} \in dv \right\} = 0. \end{aligned} \quad (16)$$

Для досить малого $x_0 > 0$ знайдеться число $M = M(x_0) > 0$ таке, що

$$0 \leq -\ln(1-x) - x \leq Mx^2, \quad 0 < x \leq x_0.$$

Звідси отримуємо для досить великих t

$$\begin{aligned} 0 \leq -\ln \phi_t(z) - \sum_{k \geq 1} \int_{[0, \infty) \times [0, \infty)} K(z, u, v, k/t) \\ \times \mathbb{P} \left\{ \frac{\xi}{c(t)} \in du, \frac{\eta}{c(t)} \in dv \right\} \\ \leq M \sum_{k \geq 1} \left(\int_{[0, \infty) \times [0, \infty)} K(z, u, v, k/t) \right. \\ \left. \mathbb{P} \left\{ \frac{\xi}{c(t)} \in du, \frac{\eta}{c(t)} \in dv \right\} \right)^2. \end{aligned}$$

Використовуючи (16), робимо висновок, що

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \left(-\ln \phi_t(z) - \sum_{k \geq 1} \int_{[0, \infty) \times [0, \infty)} K(z, u, v, k/t) \right. \\ \left. \times \mathbb{P} \left\{ \frac{\xi}{c(t)} \in du, \frac{\eta}{c(t)} \in dv \right\} \right) = 0 \end{aligned} \quad (17)$$

для кожного $z > 0$. Зі співвідношення (13) отримуємо

$$\begin{aligned} \mu^{(t)}(du, dv, dx) \\ := \sum_{k \geq 1} \delta_{k/t}(dx) \mathbb{P} \left\{ \frac{\xi}{c(t)} \in du, \frac{\eta}{c(t)} \in dv \right\} \\ \xrightarrow{v} \mu_{\alpha, c}(du \times dv) dx, \quad t \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

в просторі $M_p([0, \infty]^2 \setminus \{(0, 0)\}) \times [0, \infty)$. Оскільки функція g має компактний носій в $[0, \infty) \times (0, \infty]$, то знайдуться такі $a, A > 0$, що $g(w, v) = 0$ при $w > A$ або $v < a$. Звідси робимо висновок, що носій функції $(u, v, w) \mapsto K(z, u, v, w)$, для кожного фіксованого $z > 0$, міститься в множині $[0, \infty) \times [a, \infty) \times [0, \max\{A, u_n\}]$, яка є компактною в $([0, \infty]^2 \setminus \{(0, 0)\}) \times [0, \infty)$. Отже, з представлення

$$\begin{aligned} \sum_{k \geq 1} \int_{[0, \infty) \times [0, \infty)} K(z, u, v, k/t) \\ \times \mathbb{P} \left\{ \frac{\xi}{c(t)} \in du, \frac{\eta}{c(t)} \in dv \right\} \\ = \int_{[0, \infty) \times [0, \infty) \times [0, \infty)} K(z, u, v, x) \mu^{(t)}(dx, du, dv) \end{aligned}$$

випливає

$$\begin{aligned} \int_{[0, \infty) \times [0, \infty) \times [0, \infty)} K(z, u, v, x) \mu^{(t)}(dx, du, dv) \\ \rightarrow \int_{[0, \infty) \times [0, \infty) \times [0, \infty)} K(z, u, v, x) dx \mu_{\alpha, c}(du, dv), \end{aligned} \quad (18)$$

при $t \rightarrow \infty$. Використовуючи рівність $g(x, 0) = 0$ та згаданий вище факт, що міра $\mu_{\alpha, c}$ зосереджена на координатних осях, робимо висновок, що

$$\begin{aligned} \int_{[0, \infty) \times [0, \infty) \times [0, \infty)} K(z, u, v, x) dx \mu_{\alpha, c}(du, dv) \\ = \alpha \int_0^\infty \int_0^\infty \left(1 - \exp \left(-zu \sum_{i=1}^n \gamma_i 1_{\{x \leq u_i\}} \right) \right) dx \frac{du}{u^{\alpha+1}} \\ + \alpha c^{-1} \int_0^\infty \int_0^\infty \left(1 - \exp(-z\gamma g(x, v)) \right) dx v^{-\alpha-1} dv \\ = -\ln \mathbb{E} \exp \left(-z \sum_{i=1}^n \gamma_i X_\alpha(u_i) \right) \\ - \ln \mathbb{E} \exp \left(-z\gamma \sum_m g(t_m, j_m) \right) \end{aligned}$$

для кожного $z > 0$. З цієї формули, враховуючи (17), отримуємо (15). Теорема 1 доведена. ■

Список використаних джерел

- [1] Alsmeyer G. *Power and exponential moments of the number of visits and related quantities for perturbed random walks* / G. Alsmeyer, A. Iksanov, M. Meiners // J. Theoret. Probab. – 2015. – 28, с. 1–40.
- [2] Bingham N. H. *Regular variation* / N. H. Bingham, C. M. Goldie, J. L. Teugels // Cambridge University Press. – 1989. – 494 с.
- [3] Feller W. *An introduction to probability theory and its applications. Vol 2.* / W. Feller // John Wiley & Sons, Inc. – 1971. – 669 с.
- [4] Iksanov A. *Limit theorems for renewal shot noise processes with eventually decreasing response functions* / A. Iksanov, A. Marynych, M. Meiners // Stoc. Proc. Appl. – 2014. – 124, с. 2132–2170.
- [5] Iksanov A. *Asymptotics of random processes with immigration I: scaling limits* / A. Iksanov, A. Marynych, M. Meiners // Bernoulli – 2017. – In press.
- [6] Iksanov A. *Asymptotics of random processes with immigration II: convergence to stationarity* / A. Iksanov, A. Marynych, M. Meiners // Bernoulli – 2017. – In press.
- [7] Iksanov A. *Weak Convergence of Finite-Dimensional Distributions of the Number of Empty Boxes in the Bernoulli Sieve* / A. Iksanov, A. Marynych, V. Vatutin // Theory Probab. Appl. – 2015. – 59, с. 87–113.
- [8] Kaplan N. *Limit theorems for a GI/G/∞ queue* / N. Kaplan // Ann. Probab. – 1975. – 3, с. 780–789.
- [9] Marynych A. *A note on convergence to stationarity of random processes with immigration* / A. Marynych // Theory Stoc. Proc. – 2015. – 20, с. 84–100.
- [10] Mikosch T. *Activity rates with very heavy tails* / T. Mikosch, S. Resnick // Stoc. Proc. Appl. – 2006. – 116, с. 131–155.
- [11] Resnick S. *Extreme values, regular variation, and point processes* / S. Resnick // Springer Verlag – 1987. – 320 с.

References

- [1] Alsmeyer G., Iksanov A. and Meiners M. (2015). *Power and exponential moments of the number of visits and related quantities for perturbed random walks*. J. Theoret. Probab., 28, pp. 1–40.
- [2] Bingham N. H., Goldie C. M. and Teugels J. L. (1989). *Regular variation*. Cambridge University Press, 494 p.
- [3] Feller W. (1971). *An introduction to probability theory and its applications. Vol. 2*. John Wiley & Sons, Inc. 669 p.
- [4] Iksanov A., Marynych A., Meiners M. (2014). *Limit theorems for renewal shot noise processes with eventually decreasing response functions*. Stoc. Proc. Appl., 124, pp. 2132–2170.
- [5] Iksanov A., Marynych A., Meiners M. (2017). *Asymptotics of random processes with immigration I: scaling limits*. Bernoulli. In press.
- [6] Iksanov A., Marynych A., Meiners M. (2017). *Asymptotics of random processes with immigration II: convergence to stationarity*. Bernoulli. In press.
- [7] Iksanov A., Marynych A., Vatutin V. (2015). *Weak Convergence of Finite-Dimensional Distributions of the Number of Empty Boxes in the Bernoulli Sieve*. Theory Probab. Appl. 59, pp. 87–113.
- [8] Kaplan N. Kaplan N. (1975). *Limit theorems for a GI/G/∞ queue*. Ann. Probab. 3, pp. 780–789.
- [9] Marynych A. (2015). *A note on convergence to stationarity of random processes with immigration*. Theory Stoc. Proc. 20, pp. 84–100.
- [10] Mikosch T., Resnick S. (2006). *Activity rates with very heavy tails* Stoc. Proc. Appl. 116, pp. 131–155.
- [11] Resnick S. (1987). *Extreme values, regular variation, and point processes*. Springer Verlag, 320 p.

Надійшла до редколегії 21.06.16

УДК 519.7

Мекуш О.Г., к.ф.-м.н.
Кузьмич О.І., к.ф.-м.н., доц.

**Моделювання процесів популяційної
динаміки: огляд методів та
комп'ютерна реалізація**

Східноєвропейський національний
університет імені Лесі Українки, 43000,
м.Луцьк, просп. Волі, 13,
e-mail: mekush77@gmail.com
lenamaks79@mail.ru

O.G. Mekush, PhD
O.I. Kuzmych, PhD, associate professor

**Modeling of population dynamics:
survey of methods and
computer realization**

Lesya Ukrainka National University of Lutsk,
43000, Lutsk, Voli st., 13,
e-mail: mekush77@gmail.com
lenamaks79@mail.ru

У статті проводиться огляд методів математичного та комп'ютерного моделювання процесів популяційної динаміки, проводиться аналіз моделей, наводяться можливості застосування таких моделей в різних галузях науки та перспективи подальших впроваджень. Крім того, на базі авторського досвіду представлені застосування принципово різних способів моделювання процесів розвитку популяцій - метод кліткових автоматів, реалізований засобами мови програмування Java та метод диференціальних рівнянь, проведено комп'ютерну реалізацію моделей. Досліджено інструменти чисельного моделювання динамічних моделей взаємодії популяцій засобами MatLab (версія 7.6.0 (R2008a)). Побудовані графічні залежності чисельності популяції від часу та фазові траєкторії, виконано порівняння методів та висновки.

Ключові слова: математичне моделювання, процеси популяційної динаміки, метод кліткових автоматів та метод диференціальних моделей.

The article is an overview of mathematical and computer modeling processes of population dynamics, we analyze the models, present the possibilities of application of such models in various fields of science and prospects for future extension. In addition, based on the author's experience of application are fundamentally different way to process modeling of populations - cellular automata method, implemented by means of Java programming language and the method of differential equations, we present computer realization of the models. We propose and studied instruments numerical simulation of dynamic models of interaction between populations means MatLab (version 7.6.0 (R2008a)). We present several software implementations, the results of simulations with different model parameters. Based on numerical calculations we built the graphics of population size depending on time and phase trajectories. These results allow the simulation both visually and quantitatively estimate the status, functioning and dynamics of the relationship of populations in biological systems. It allows clarify the mechanisms of interaction between system elements, perform the prediction of system behavior under various external influences.

Keywords: mathematical modeling, population dynamical processes, cellular automata method, method of differential models.

Статтю представив чл.-кор. НАН України, д.ф.-м.н., проф. Анісімов А.В.

**Огляд підходів до моделювання систем
популяційної динаміки**

Кожне дослідження, особливо в математичній біології, пов'язане з необхідністю побудови деякої прийнятної моделі розглянутого об'єкта або процесу. При цьому, чим більш складними є об'єкти і процеси, тим важче побудувати адекватну математичну модель, яка

підходить для їх опису. В даній статті проводиться аналіз сучасних підходів до опису та моделювання процесів розвитку популяцій та можливості їх застосування в різних галузях науки, наведено використання кількох підходів для аналізу розвитку популяції: методу кліткових автоматів та методу диференціальних моделей. Дані методи є альтернативними і взаємодоповнюючими: складні природні явища,

такі як самовідтворення, зростання і розвиток, які важко моделювати за допомогою диференціальних рівнянь, вдається описати за допомогою клітинних автоматів. Перші спроби математично описати біологічні процеси відносяться саме до моделей популяційної динаміки, що має застосування в екології, в мікробіології, імунології, для еволюційних процесів і т.д.

Сам термін “популяція” – це сукупність організмів, що займають обмежений ареал, мають спільне походження за фенотипом та географічно ізольовані від інших популяцій даного виду [1]. Важливим питанням вивчення популяції є дослідження зміни її чисельності – співвідношення народжуваності і смертності та динаміки росту. У цій статті пропонується огляд методів моделювання, що дозволяють кількісно оцінювати стан, функціонування, динаміку і характер взаємин популяцій в біосистемах для різних природних умов та інших факторів.

На сьогоднішній день існує декілька підходів, що враховують різні критерії опису популяції [1]:

1. *Генетичний підхід*. Відображає більш високу ймовірність схрещування особин в одній популяції і, відповідно, наявність у них загального генофонду, відмінного від генофондів інших популяцій виду. В основі цього підходу лежить Менделівська популяція.

2. *Еволюційний підхід*. Популяція розглядається як елементарна одиниця процесу мікроеволюції, здатна реагувати на зміну середовища перебудовою свого генофонду.

3. *Екологічний підхід*. Визначає, перш за все, рівень і характер взаємин в групі особин одного виду на певній території.

Незважаючи на різноманітність живих систем, всі вони володіють наступними специфічними рисами, які необхідно враховувати при побудові моделей відповідно до цілей моделювання:

1. Виділяються визначальні характеристики системи (наприклад, загальна чисельність видів) і розглядаються якісні показники еволюції цих величин в часі, такі як: стійкість стаціонарного стану, наявність коливань, існування просторової неоднорідності. Такий підхід є історично найбільш давнім і властивий динамічній теорії популяцій.

2. Детальне вивчення елементів системи і їх взаємодій на базі імітаційного моделювання. Імітаційна модель не допускає аналітичного

дослідження, але її параметри мають визначений фізичний і біологічний сенс. При хорошій експериментальній вивченості фрагментів системи вона може дати кількісний прогноз її поведінки при різних зовнішніх впливах.

3. Здатність до розмноження - це найважливіша властивість живих систем. У моделях ця властивість виражається в наявності в рівняннях компонентів, що визначають можливість зростання, можливість нестійкості стаціонарного стану в локальних системах і нестійкості стаціонарного стану в просторово розподілених системах.

4. Важливу роль в розвитку складних просторово-часових режимів грають процеси взаємодії компонентів (біохімічні реакції), процеси переносу, як хаотичного (дифузія), так і пов'язаного з напрямком зовнішніх сил (гравітація, електромагнітні поля) або з адаптивними функціями живих організмів.

5. Відкриті біосистеми, що постійно пропускають через себе потоки речовини і енергії, мають складну систему саморегуляції, що описується відповідними нелінійними компонентами у рівняннях.

Метод динамічної теорії систем для моделювання популяційної еволюції: огляд і застосування

Одними з поширених методів моделювання процесів розвитку популяцій є методи динамічної теорії систем на базі диференціальних рівнянь та методи якісної теорії систем. На основі цього методу можливе вирішення таких задач аналізу біосистеми як:

- з'ясування механізмів взаємодії елементів системи,
- ідентифікація та верифікація параметрів моделі за експериментальними даними,
- прогноз поведінки системи при різних зовнішніх впливах,
- оптимальне керування системою відповідно до обраного критерію.

Найбільш цікаві результати по якісному моделюванню властивостей біологічних систем отримані на моделях з двох диференціальних рівнянь, які допускають якісне дослідження за допомогою методу фазової площини.

Розглянемо одну з найбільш відомих моделей опису динаміки популяцій – модель Лотки-Вольтерри, запропоновану в 1931 р., яка

по своїй суті є математичним описом дарвінського принципу боротьби за виживання, викладеного у [2]. Дарвін знайшов підтвердження своїх висновків у працях Мальтуса [3] і поширював твердження про те, що в природі відбувається боротьба за життя, за існування, в якій найслабші організми гинуть першими і перемагають більш пристосовані. Саме ці організми дають потомство і швидше адаптуються, якщо подібні випадки боротьби повторюються періодично. Ці ідеї знайшли розвиток у працях Вольтерри і, раніше, Лотки [4, 5], а саме: якщо в системі “хижак-жертва” обидва види знищуються рівномірно і пропорційно числу особин, то середнє число жертв зростає, а число хижаків зменшується.

В книзі [6] наведено приклади існування цього ефекту в природі. Перший – під час першої світової війни лов риби в Адріатичному морі був суттєво скорочений, що несподівано призвело до збільшення числа хижаків і зменшення числа жертв. Інший приклад – принцип Вольтерри показує подвійний характер застосування засобів від комах для збереження врожаю на полях. Такі хімічні речовини діють не лише на шкідників, але і на їх природних ворогів, що призводить до збільшення числа шкідників і до зменшення одночасно, наприклад, птахів, що споживають цих шкідників. Тому, згідно принципу Вольтерри, в екосистемі “хижак-жертва” популяція жертв буває чутлива до процесу пропорційної зміни особин популяцій.

Дана модель має ряд цікавих і різнопланових застосувань у різних галузях. В роботі [7] наведені приклади використання математичної моделі Лотки-Вольтерри для опису різноманітних процесів в біології, екології, медицині, соціальних науках, радіофізиці та ін. Характерним для процесів, які моделюються системами на базі рівнянь Лотки-Вольтерри є циклічність процесів, що відбуваються. Так, в праці Арнольда [8] розглядається видозмінена модель Лотки-Вольтерри, що враховує конкуренції жертв за їжу і хижаків за жертв. Дана модель має цікаву інтерпретацію динамічної системи взаємодії законослухняних громадян і соціально небезпечних осіб.

Представляє інтерес модель взаємодії забруднення з природним навколишнім середовищем [4,9]. Головна ідея, що лежить в основі моделі та, що навколишнє середовище активно абсорбує і переробляє забруднення до певної межі і ситуація забруднення трактується

як частинний випадок моделі Лотки-Вольтерри, коли природа виступає в якості жертви, а забруднення – хижака. У роботах [4,9] представлено математичну модель очистки стічних вод, яка основана на пропозиції розглядати забруднювач як “жертву”, а біологічно активний мул в якості “хижака”, що здатен нейтралізовувати забруднювач через процес біохімічного окислення.

Модель класової боротьби, описана у [10,11], може бути використана для моделювання явищ взаємозв'язку місцевої земельної ренти і інтенсивності землевикористання, безробіття, динаміки економічного зростання. Схожою є і модель безкласового суспільства епохи мисливців-збирачів [12], яка характеризується низькою густиною населення і общинною організацією людського суспільства, де зміна чисельності населення на конкретному ареалі визначалася, в основному, станом ресурсної бази. На цьому ж принципі ґрунтується і модель військових дій (модель Ланчестера-Осіпова) [13, 14, 8], що описує швидкість зміни чисельностей армій конкурентів, які є в стані військового конфлікту.

В 1974 році Г. Белл [15,16] запропонував модель імунної реакції, в якій взаємодія між геном і антитілом описується в термінах “хижак-жертва”. У цій моделі вірусного інфекційного забруднення основними факторами є концентрації патогенних антигенів, антитіл, що нейтралізують антигени, плазмоклітин – носіїв. Подібні моделі поширення епідемій, включаючи модель зараження вірусом комп'ютерів представлені у [17].

Одне з новітніх застосувань моделі Лотки-Вольтерри - модель взаємодії когнітивних і емоційних мод мозку. Згідно роботи [18], когнітивні паттерни, тобто моди, або представлення, що спостерігаються в експерименті в робочому режимі мозку повинні подавляти один одного, що повинно відбуватися послідовно в часі. Автори [18] презентують нову парадигму, що виражається в твердженні, що емоції і когнітивні функції – це перехідні динамічні процеси, зв'язані з функціонально визначеною взаємодією різних підсистем мозку, їх конкуренцією і координацією в часі. Ці процеси конкуренції когнітивних і емоційних мод один з одним, а також емоційних і когнітивних мод один з одним пропонується описувати системою рівнянь типу Лотки-Вольтерри. У роботі [19] представлена модель

Лотки-Вольтерри, яка описує динаміку зміни чисельності популяції в часі з врахуванням змінного характеру ємності середовища та коефіцієнтів приросту чисельності популяції.

Важливим напрямком застосування моделі “Лотки-Вольтерри” є економічні процеси. У роботі [20] розглянуті технології математичного та програмного моделювання економічного стану виробництва в умовах конкуренції і процесу вирівнювання цін, запропоновані схеми імітаційного моделювання засобами MatLab.

Математичному аналізу системи “хижак-жертва” присвячені також роботи [21-23]. Як правило, математична частина моделей представлена задачею Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь. У таких моделях не враховується просторовий розподіл особин. Реальні популяції живуть на обмежених територіях з різними властивостями довкілля в різних її частинах [24,25]. Частина особин з різних причин (наприклад, в пошуках їжі або вільних місць проживання) схильна до переміщення по території. Як показує аналіз результатів польових спостережень [26] переміщення особин відбувається випадковим чином. У моделях з розподіленими параметрами, в яких враховується просторовий розподіл особин популяції, вводиться щільність популяції на одиницю довжини, площі або об'єму, і вважається, що особини розподілені в просторі. Навколишнє середовище вважається суцільним, що дозволяє використовувати апарат диференціальних рівнянь в частинних похідних, широко застосовуваний при розробці математичних моделей суцільних середовищ з нелінійними властивостями [37,28].

Комп'ютерна реалізація моделі Лотки-Вольтерри в програмному середовищі MatLab та її аналіз

Розглянемо вищезгадану модель Лотки-Вольтерра, та проведемо її моделювання в середовищі MatLab (версія 7.6.0 (R2008a)) на базі використання солвера розв'язання систем диференціальних рівнянь “ode45”.

Нехай на деякій замкнутій території мешкають два види: вегетаріанці-жертви, що харчуються рослинами, які є в достатній кількості і хижаки, що полюють на жертв. Система рівнянь динаміки взаємодії хижаків і жертв при умові коли між особами одного виду немає конкуренції має вигляд:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x(\alpha - \beta y) \\ \frac{dy}{dt} = -y(\gamma - \delta x) \end{cases}$$

Знайдемо стаціонарний стан системи [29]. Якщо чисельність популяції стала, то її похідна по часу рівна нулю. Тобто

$$\begin{cases} 0 = x(\alpha - \beta y) \\ 0 = -y(\gamma - \delta x) \end{cases}$$

$$\text{Звідси } x_1 = 0, y_1 = 0, x_2 = \frac{\gamma}{\delta}, y_2 = \frac{\alpha}{\beta}.$$

Корені характеристичного рівняння лінеаризованої системи уявні, а це значить, що особлива точка – центр. Поблизу особливої точки фазові траєкторії є еліпсами.

Розглянемо наступні випадки.

1. Нехай маємо деякий біологічний вид, у якого немає ворогів, а харчова база є в достатній кількості. Швидкість приросту популяції або зміна числа особин за одиницю часу пропорційна числу існуючих особин, тобто

$$\frac{dN(t)}{dt} = \alpha(t)N(t), \quad (1)$$

де $\alpha(t)$ - коефіцієнт приросту. Цю систему ще називають моделлю Мальтуса.

При умові сталості в часі приросту популяції, тобто $\alpha(t) = const$ і при умові відсутності хижаків, жертви розмножуються нескінченно і їх популяція описується рівнянням:

$$\frac{dx}{dt} = \alpha x,$$

розв'язок якого має вигляд $x = x_0 e^{\alpha t}$, де α - коефіцієнт приросту.

Диференціальна модель Мальтуса розв'язувалась в програмі MatLab з такими початковими значеннями: початкова чисельність популяції становила 8, початковий коефіцієнт приросту чисельності популяції рівний 4. Такі початкові дані були вибрані з метою подальшого аналізу шляхом варіації коефіцієнта народжуваності жертв.

Так, при умові його послідовного зменшення $\alpha = 3, \alpha = 2$ маємо графіки, подані на рис. 1. На основі розв'язку цієї системи диференціальних рівнянь протягом модельного часу $t=0, \dots, 2$ будувалися графіки залежності чисельності популяції від часу. Спостерігаємо експоненціальний ріст чисельності жертв,

причому найшвидше зростання чисельності маємо при найбільшому $\alpha = 3$.

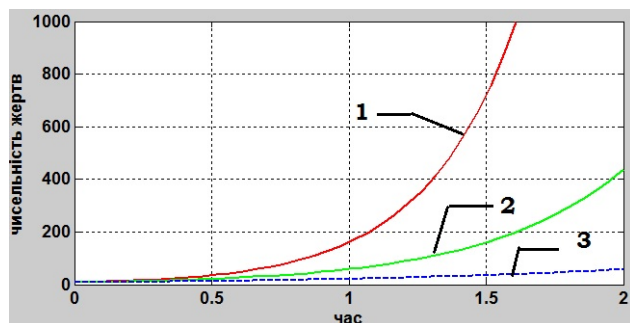


Рис. 1. Динаміка популяції при умові відсутності хижаків. Графік 1 - при $\alpha = 3$, графік 2 - при $\alpha = 2$, графік 3 при $\alpha = 1$.

2. При врахуванні процесу смертності особин, одержимо, що швидкість зміни населення популяції з часом пропорційна її чисельності $N(t)$, помноженій на суму коефіцієнтів народжуваності $\alpha(t) \geq 0$ і смертності $\beta(t) \leq 0$. При умові сталості цих коефіцієнтів, а також умові $\alpha < \beta$, $\alpha = 3$, $\beta = 1$ одержимо динаміку, подану на рис.2. Початкова чисельність дорівнює 8, час моделювання дорівнює 2. Спостерігається експоненціальний спад чисельності популяції.

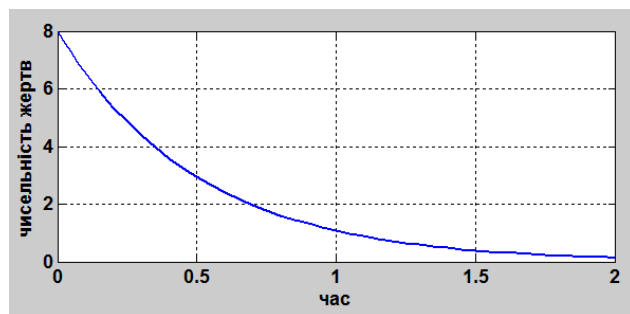


Рис. 2. Динаміка чисельності популяції при відсутності хижаків

Якщо немає жертв, то хижаки без корму вимерли б за законом

$$\frac{dy}{dt} = -\gamma y,$$

звідки $y = y_0 e^{-\gamma t}$, де γ - коефіцієнт загибелі хижаків; y - їх чисельність в даний момент; y_0 - їх чисельність у початковий момент часу.

3. Росту чисельності жертв перешкоджають їх зустрічі з хижаками, частота яких пропорційна числу жертв і числу хижаків, тобто xy [30]. Тоді

швидкість зміни чисельності жертв описується рівнянням

$$\frac{dx}{dt} = x(\alpha - \beta y),$$

де β - коефіцієнт зменшення жертв при зустрічі з хижаками. Аналогічно, зустріч хижаків з жертвою збільшує ймовірність виживання хижаків, тобто сприяє приросту популяції хижаків

$$\frac{dy}{dt} = -y(\gamma - \delta x),$$

де $\delta > 0$ - коефіцієнт, що залежить від того, як часто зустріч закінчується смертю жертви.

Відповідна система диференціальних рівнянь Лотки-Вольтерра розв'язувалась в програмі MatLab з такими початковими значеннями: початкова чисельність популяції жертв становила 7, популяція хижаків - 4. Початкові коефіцієнти приросту чисельності популяції рівні $\alpha = 4, \beta = 3, \gamma = 2, \delta = 1$. Графік 4 на рис. 3 демонструє залежність числа хижаків від числа жертв в цьому випадку (фазова залежність), та на рис. 4 відповідні часові графіки популяцій (сині лінії). Далі при зростанні числа жертв до 8 на графіку 3 (рис. 3) бачимо суттєве зменшення амплітуд фазових коливань. На графіках фазових траєкторій (рис. 3) також показано особливі точки для кожного випадку. Часові залежності для цього випадку показані на рис. 4 (зелені лінії). На рис. 4 показано часові залежності зеленим кольором при $\alpha = 8, \beta = 3, \gamma = 2, \delta = 1$, та синім кольором при $\alpha = 4$, що демонструє залежність числа хижаків від числа жертв.

Так, при умові подальшого зростання коефіцієнта народжуваності жертв $\alpha = 17$ і $\alpha = 25$ маємо графіки 2 і 1 відповідно, подані на рис. 3.

Отже, результати моделювання показують, що чисельності популяцій відчують не співпадаючі по фазі коливання (рис.3, 4). Зі зростанням коефіцієнта народжуваності жертв спостерігаємо циклічну зміну амплітуд коливань обох популяцій. При $\alpha = \beta$ чисельність популяції залишиться сталою при умові відсутності хижаків. В цьому випадку розв'язком рівняння (1) є рівноважна величина $N(t) = N(0)$, рівновага між народжуваністю і смертністю нестійка у тому сенсі, що навіть невелике порушення рівності $\alpha = \beta$ призводить з часом до все більшого відхилення функції $N(t)$ від рівноважного значення $N(0)$. При $\alpha < \beta$

чисельність популяції зменшується і прямує до нуля при $t \rightarrow \infty$. При $\alpha > \beta$ чисельність зростає по експоненціальному закону, і прямує до нескінченності при $t \rightarrow \infty$.

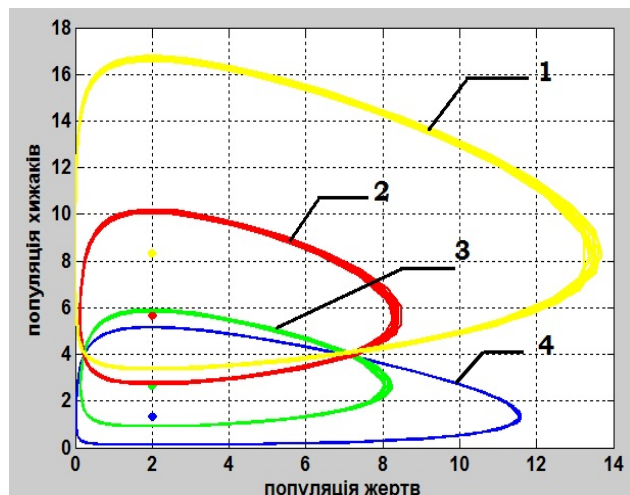


Рис. 3. Графік фазових залежностей популяції хижаків від популяції жертв. Графік 4 при $\alpha = 4$, графік 3 - при $\alpha = 8$, графік 2 - при $\alpha = 17$, графік 1 - при $\alpha = 25$

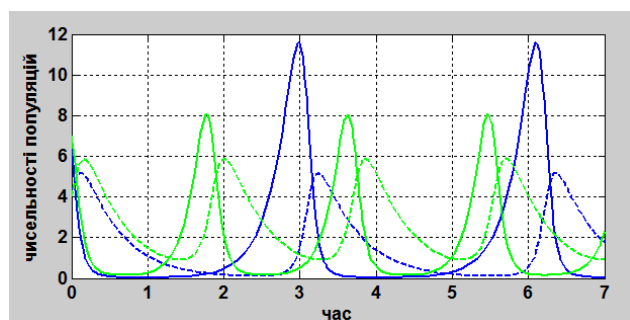


Рис. 4. Часові залежності популяцій для випадків: при $\alpha = 4$ (синій колір), та при $\alpha = 8$ (зелений колір).

Метод кліткових автоматів для моделювання динаміки популяцій

Термін “кліткові автомати” почав використовуватись у середині XX ст. для позначення сукупності залежних елементів із заданими станами і правилами, згідно з якими стани цих елементів і залежності між ними змінюються в часі. Час і стани при цьому дискретні. Використання описаних моделей для формального моделювання самовідтворюваних організмів вперше запропоновано в роботі Фон Неймана [31]. Елементи кліткових автоматів

представляються одновимірними або двовимірними нескінченними прямокутними таблицями. Стан елемента змінюється в залежності від його власного поточного стану і від стану двох (або чотирьох - для двовимірного випадку) найближчих сусідів.

Кліткові автомати в силу своєї дискретності порівняно просто моделюються за допомогою ЕОМ і завдяки цьому, в 50-70 ті рр. XX ст. набувають популярності. Починаючи з 80 х рр. вивчення кліткових автоматів набуло більш спеціалізованого відтінку. На базі загальної теорії створюються і вивчаються різні конфігурації кліткових автоматів для конкретних дослідницьких областей. Приблизно в той же час з'явилися ігри для кліткових автоматів - математичні моделі, що мають в основі ігровий опис.

З точки зору розвитку комп'ютерних технологій актуальність клітинно-автоматних моделей в даний час продовжує зростати у міру поширення паралельних обчислень, тому що потенціал їх паралелізації можна вважати практично невичерпним. Цим в першу чергу пояснюється спостережуване в даний час наростання інтересу до використання і подальшого розвитку моделей, заснованих на концепції клітинних автоматів. Про це свідчить і поява низки фундаментальних монографій на цю тему, яскравими прикладами яких є роботи [32] і [33]. Даний метод активно вивчається і українськими дослідниками, зокрема [34], де його ефективно використовують для моделювання руху транспорту, а також - для моделювання поведінки натовпу.

Програмна реалізація самовідтворюваної моделі “хижак-жертва”

Одна з програмних реалізацій - програмний комплекс, реалізований на мові програмування JavaScript представляє динаміку моделі “хижак - жертва” для формального моделювання самовідтворюваних організмів.

Гра “Аква-Тор” - наочний приклад застосування клітинних автоматів в біології. Гра моделює поведінку системи, що складається з двох популяцій, умовно званих “травоядні” і “хижаки”. Їжею для “хижаків” є особини “травоядних”, їжі ж для “травоядних” нескінченно багато. Полем для гри є тор - квадрат, замкнутий сам на себе, тобто якщо особина досягає крайньої клітини квадрата, вона переноситься на протилежну сторону квадрата автоматично

(прикладом тора може служити будь-яка планета, наприклад, Земля).

Поведінка даної системи характеризується наступними правилами:

- 1) особина може переміститися на будь-яку клітку, що має з даною спільну сторону. Напрямок вибирається випадково з можливих вільних.
- 2) особина може залишити потомство в тій клітці, з якої вона перемістилася. Потомство з'являється періодично, період є параметром.
- 3) якщо особина є “хижою”, то вона може поглинути свою жертву, при цьому переміщаючись на місце жертви.
- 4) особина живе обмежену кількість часу, зване часом життя особи - також параметр.
- 5) якщо “хижа” особина не знаходить собі їжі протягом певного часу (називається часом голодної смерті), то вона гине. Час голодної смерті є параметром.

Побудована модель досліджує поведінку найпростішої якісної моделі екосистеми світового океану, що складається з хижаків і жертв. Таким чином, “хижаками” є акули, “травоядними” - риби. Якщо акула знаходиться на сусідній клітці з рибою, то вона переміщається в клітку своєї жертви, поглинаючи її. Потомство з'являється і у акул, і у риб. Риби, як травоядні, приносять потомство частіше, ніж хижі акули. Крім того, час смерті акули підібрано таким чином, що акула приносить потомство тільки один раз за весь період життя. Особина вмирає після закінчення періоду життя. Якщо особині прийшов час “народити”, але період життя закінчився, особина помирає, не залишаючи потомства.

Основна сторінка програмного продукту має чотири основні складові, а саме:

Поле відображення моделі (тор) – поле, на якому відображаються основні режими роботи програмного продукту;

Параметри гри – задаються індивідуально в залежності від потреб користувача;

Статистика гри – інструмент, який динамічно відображає кількість особин популяції у торі;

Панель інструментів – панель керування програмою: старт, наступний крок, стоп.

Для початку, програма дає змогу задати параметри моделі хижак-жертва (рис. 5). На ігровому полі розставляються представники біологічної популяції: хижаки, жертви. Користувач, в залежності від своїх потреб, може задати параметри ігрової динамічної моделі:

змінити відсоток потомства жертви, тривалість життя жертви (кількість кроків від народження до смерті), відсоток потомства хижака, тривалість життя хижака та час голодної смерті (кількість кроків життя хижака, якщо він не знаходить жертви). Також можна задати швидкість анімації, для кращого наочного сприйняття інформації.

На рисунках 5 та 6 показано результат моделювання за умов: потомство жертви – 30% , тривалість життя жертви - 5 ітераційних кроків, потомство хижака – 30%, тривалість життя хижака 5. Час голодної смерті хижака 5 ітераційних кроків. Тут розміщення представників класу хижаків (червоні клітинки) та жертв (зелені клітинки) задано у довільному порядку. Жертви, маючи вдосталь їжі, можуть давати потомство за тривалість свого життя 5 ітераційних кроків декілька раз. Хижаки за своє життя в 5 ітераційних кроків з потомством 30% можуть дати своє потомство тільки раз.

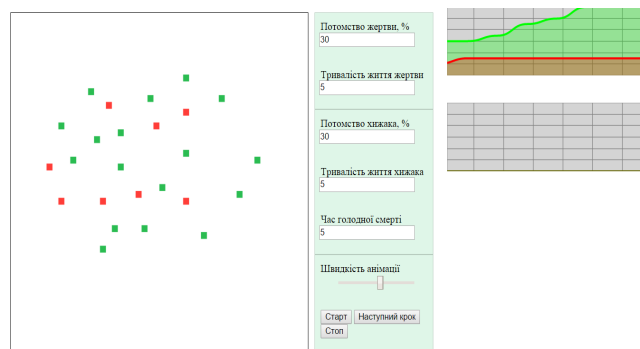


Рис. 5. Моделювання системи: задання параметрів

Задавши основні параметри моделі (рис. 5), отримуємо результат моделювання динамік популяцій, що показано на рис. 6.

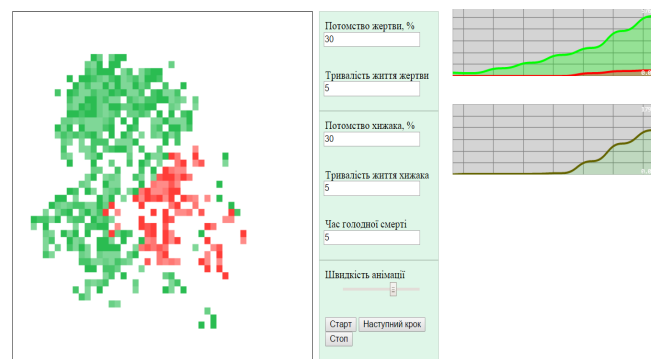


Рис.6. Процес взаємодії популяцій

В залежності від заданих параметрів визначається поведінка популяцій організмів. Дані процеси відображаються на діаграмах (рис. 7, рис. 8).

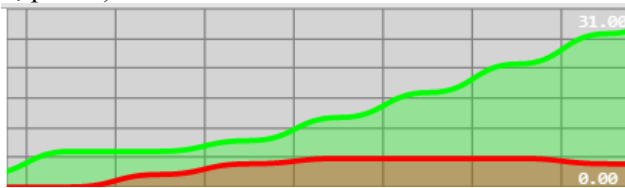


Рис. 7. Чисельність популяції
залежно від часу

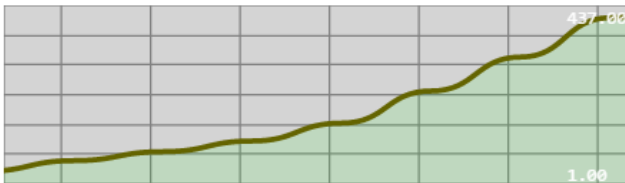


Рис. 8. Кількість поглинутих
організмів залежно від часу

Дана програмна реалізація дозволяє візуально представити біологічну модель популяції двох класів організмів: “хижака” і “жертви”, оцінити її динаміку в часі, оцінити кількість особин популяцій та їх розміщення в залежності від параметрів та початкових умов.

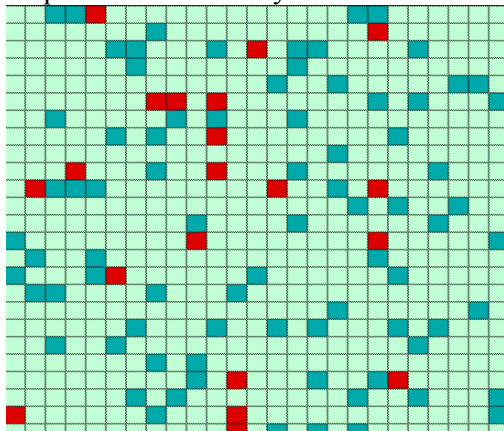


Рис. 9. Моделювання системи:
початкове розміщення

Представлено ще одну програмну реалізацію, що так само моделює процес популяційної взаємодії хижаків і жертв. На рис. 9 – початкове розміщення особин, на рис. 10 – результат візуального моделювання при наступних параметрах: розмір поля 25 одиниць, час моделювання 10, кількість акул 20, час життя акул 80, час народження потомства акулою 22, час голодної смерті акули 17, кількість риб, час життя риб, час народження потомства рибою 9.

На рис. 11 подано статистику моделювання: графіки залежностей числа хижаків від числа жертв.

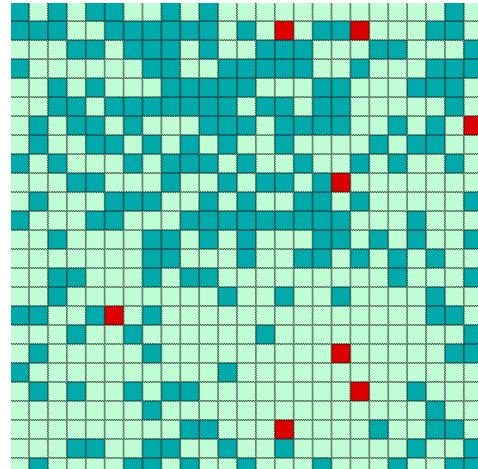


Рис. 10. Результат моделювання системи
при модельному часі 10.

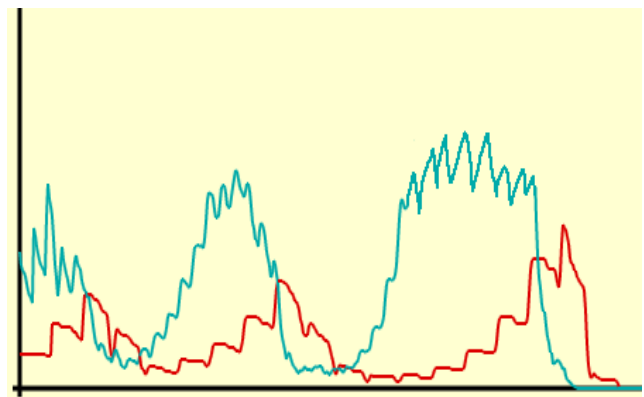


Рис. 11. Статистика моделювання чисельностей
популяції залежно від часу.

З результатів моделювання видно, що графіки часових залежностей числа хижаків від числа жертв демонструють періодичний характер. Це добре узгоджується з результатами, отриманими вище при реалізації аналітичної моделі, що показано на рис. 4. Також важливим висновком є підтвердження того, що метод динамічних моделей та метод кліткових автоматів є взаємодоповнюючими і за певних умов – альтернативними. У природних умовах зміна чисельності популяції носить коливальний характер, коливання чисельності пов'язані з реакцією популяції на зовнішні впливи і внутрішні зміни в біосистемі. Період і амплітуда коливань залежать від механізмів регуляції чисельності популяції, особливостей виду і від умов його існування.

Висновки

У даній статті здійснено огляд методів математичного моделювання процесів розвитку популяцій. Виконано аналіз моделей та їх застосувань, проведено комп'ютерне моделювання систем популяційної динаміки методом кліткових автоматів та методом диференціальних рівнянь в середовищі MatLab

Список використаних джерел

1. Яблоков Я.В. Популяционная экология. -М.: Высшая школа, 1987. -303 с.
2. Darwin C. Autobiography.- New York: Norton, 1958.-120 p.
3. Malthus T.H. An essay on the principle of population, as it affects the future improvement of society. – Penguin: Harmondsworth, 1978.- pp. 613–637.
4. Вольтерра В. Математическая теория борьбы за существование.-М.: Наука, 1976.-288 с.
5. Lotka A. Elements of physical biology.- Baltimore: Williams and Wilkins, 1925.-pp. 85-86.
6. Братусь А.С. Динамические системы и модели биологии //А.С. Новожилов, А.П. Платонов.- М.: Физматлит, 2010.-400 с.
7. Трубецков Д. И. Феномен математической модели Лотки-Вольтерры и сходных с ней // Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. — 2011. — Т. 19. — № 2. — с. 69–88.
8. Арнольд В.И. Жесткие и мягкие модели// Природа.-1998.- №4.-с.3.
9. Братусь А.С. Математические модели взаимодействия загрязнения с окружающей средой / А.С. Мещерин, А.С. Новожилов // Вестник МГУ. Сер. вычислительная математика и кибернетика.-2001.-Т.6.-с.140.
10. Занг В.Б. Синергетическая экономика. Время и перемены в нелинейной экономической теории.-М: Мир, 1999.-335 с.
11. Goodwin R.M. A Growth Model // Socialism and Growth.-Cambridge: University Press, 1967.-pp. 54–58.
12. Малков С.Ю. Социальная самоорганизация и исторический процесс: возможности математического моделирования. -М: Либроком / URSS, 2009.
13. Lanchester F.W. Aircraft in warfire. The down of the fourth arm.-London: Constable, 1916.-288 p.
14. Осипов М.О. О влиянии численности вступающих в бой и их потери// Военный сборник, июль-октябрь.-1915.

при різних параметрах моделей. На основі чисельних розрахунків побудовані графічні залежності чисельності популяції від часу та фазові траєкторії, зроблено порівняння результатів моделювання різними методами. Дані результати моделювання дозволяють як візуально, так і кількісно оцінювати стан, функціонування, динаміку і характер взаємин популяцій в біосистемах.

References

1. YABLOKOV Y.V. (1987) "Population ecology", Vysshaya shkola, Moscow, Russia.
2. DARVIN C. (1958) "Autobiography", Norton, New York.
3. MALTHUS T.H. (1978) "An essay on the principle of population, as it affects the future improvement of society", Harmondsworth, Penguin, pp. 613–637.
4. VOLTERRA V. (1976) "The mathematical theory of the struggle for existence", Nauka, Moscow, Russia.
5. LOTKA A. (1925) "Elements of physical biology", Williams and Wilkins, Baltimore, pp. 85-86.
6. BRATUS A.S, NOVOZHILOV A.S. and PLATONOV A.P. (2010) "Dynamic systems and biology models", Phizmatlit, Moscow, Russia, P.400
7. TRUBETSKOV D.I. (2011) "Mathematical phenomenon of Lotka-Volterra model and similar to it", *Izvestiya vysshyh uchebnyh zavedeniy. Prikladnaya nelineynaya dinamika*, vol. 19(2), pp.69-88.
8. ARNOLD V.I. (1998) "Hard and soft models", *Priroda* 4, p. 3.
9. BRATUS A.S, NOVOZHILOV A.S. and MESCHERIN A.S. (2001) "Mathematical models of interaction with the environment pollution", *Vestnik MGU, Seriya vychislitel'naya matematika i kibernetika*, vol. 6, p. 140.
10. ZANG V.B. (1999) "The synergetic economics. Time and changes in the economic theory of nonlinear ", Mir, Moscow, Russia, P. 335.
11. GOODWIN R.M. (1967) "A Growth Model", *Socialism and Growth*, University Press, Cambridge, pp. 54–58.
12. MALKOV S.U. (2009) " The social self-organization and the historical process: the possibility of mathematical modeling", *Librokom/USSR*, Moscow, Russia.
13. LANCHESTER F.W. (1916) "Aircraft in warfire. The down of the fourth arm", Constable, London.

15. Bell G. Prey – predator equations simulating on immune response// *Math. Biosci.*- 1973. -№ 16.- С. 291.
16. Марчук Г.И. Математические модели в иммунологии и медицине. - М.: Наука, 1985.- 276 с.
17. Kermack W.O. Contribution to the mathematical theory of epidemics /A.G.MacKendrick // *Proceedings of Royal Statistacal Society.*-1927.-Vol. 115.- 700 p.
18. Рабинович М.И. Нелинейная динамика мозга: эмоции и интеллектуальная деятельность /М.К. Мюезинолу // *Успехи физических наук.*- 2010.-Т.180.-№4.-с.381-387.
19. Иванов О. Я. Математична модель динаміки чисельності популяції з урахуванням зміни ємності середовища та зміни коефіцієнтів приросту / В.О. Василенко // *Математична біофізика. Фізика живого.* -2008.-Т. 16.- N 2.- с.172-176.
20. Соколов Ю.Н. Компьютерные технологии в задачах природы и общества. Модель “Лотки-Вольтерра “Хищник-жертва” в задачах экономики” / А.Ю. Соколов, В.М. Илюшко // *Раіоелектронні і комп’ютерні системи.*- 2010.- №3(44).- с. 20-27.
21. Гасратова Н. А. Математическая модель хищник-жертва на линейном ареале /М.В. Столбовая, Д.С. Бойцов, Д. С. Степанова // *Молодой учёный.*- 2014.-№ 11 (70).-с.1-10.
22. Апонин, Ю. М. Математическая модель сообщества хищник — жертва с нижним порогом численности жертвы /Е.А. Апонина // *Компьютерные исследования и моделирование.* — 2009. — Т. 1. — № 1. — с. 51–56.
23. Базыкин А. Д. Нелинейная динамика взаимодействующих популяций. – Москва - Ижевск: Институт компьютерных технологий, 2003. — 368 с.
24. Глызин С. Д. Разностная аппроксимация уравнения “реакция — диффузия” на отрезке // *Моделирование и анализ информационных систем.* — 2009. — Т. 16. — № 3. — с. 96–116.
25. Громов В. С. Пространственно-этологическая структура популяций грызунов. - М.: Т-во научн. изданий КМК, 2008. — 581 с.
26. Окулова Н. М. Взаимосвязи “хищник-красно-серая полевка” в сообществах позвоночных животных Лапландского заповедника / Г.В. Катаев // *Зоологический журнал.* — 2007. — Т. 86. — № 8. — с. 989–998.
27. Жукова И. В. Математические модели злокачественной опухоли / Е.П. Колпак //
14. OSIPOV M.O. (1915) “The effect of the number of entering into battle and losing”, *Voennyi sbornik* .
15. BELL G. (1973) “Prey–predator equations simulating on immune response”, *Math. Biosci* 16.
16. MARCHUK G.I. (1985) “Mathematical models in immunology and medicine”, Nauka, Moscow, Russia.
17. KERMACK W.O. and MACKENDRICK A.G. (1927) “Contribution to the mathematical theory of epidemics”, *Proceedings of Royal Statistacal Society*, vol. 115.
18. RABINOVICH M.I. and MYUEZINOLU M.K. (2010) “Non-linear dynamics of the brain: emotion and cognition”, *Uspehi fizicheskikh nauk*, vol. 180(4), pp.381-387.
19. IVANOV O.Y. and VASYLENKO V.O. (2008) “A mathematical model of population dynamics of the changing environment and changing capacity growth rate”, *Matematychna biofizyka. Fyzyka zhyvogo*, vol. 16(2), pp. 172-176.
20. SOKOLOV Y.N., SOKOLOV A.Y. and ILYUSHKO V.M. (2010) “Computer technologies in the problems of nature and society . Lotka-Volterra predator -prey model in the economy problems”, *Raioelektronni i kompyuterni sistemy*, vol. 3(44), pp. 20-27.
21. GASRATOVA N.A., STOLBOVAYA M.V., BOYTSOV D.S. and STEPANOVA D.S. (2014) “Mathematical model of the predator-prey on linear habitat”, *Molodoy uchenyi* 11(70), pp.1-10.
22. APONIN Y.M. and APONINA E.A. (2009) “Mathematical model of community predator - prey with a lower threshold of the number of victims” , *Kompyuternye issledovaniya i modelirovanie*, vol.1(1), pp. 51-56.
23. BAZYKIN A.D. (2003) “Nonlinear dynamics of interacting populations”, Institut Kompyuternyh tehnologiy, Moscow- Izhevsk, Russia.
24. GLYZIN S.D. (2009) “Difference approximation “reaction – diffusion” of the equation on the interval”, *Modelirovanie i analiz informatsionnyh sistem*, vol. 16(3), pp. 96-116.
25. GROMOV V.S. (2008) “Space- ethological structure of rodent populations”, *Tovarischestvo nauchnyh izdaniy KMK*, Moscow, Russia.
26. OKULOVA N.M. and KATAEV G.V. (2007) “Relationships predator- gray-sided vole in the communities of vertebrates Lapland Reserve”, *Zoologicheskii zhurnal*, Vol. 86(8), pp. 989-998.
27. ZHUKOVA I.V. and KOLPAK E.P. (2014) “Mathematical models of cancer”, *Vestnik Sankt-*

- Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 10: Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. — 2014. — № 3. — с. 5–18.
28. Карелин В. В. Один подход к задаче оценки параметров динамической системы в условиях неопределенности // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 10: Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. — 2012. — № 4. — с. 31–36.
29. Хусаинов Д.Я. Введения в моделювання динамічних систем / І.І. Харченко, А.В. Шатирко // Навч. посібник. Київський національний університет імені Тараса Шевченка.- 2010.- 132 с.
30. Тарасевич Ю.Ю. Математическое и компьютерное моделирование. Вводный курс. — М. Едиториал УРСС - 2004, - 152 с.
31. Дж. фон Нейман. Теория самовоспроизводящихся автоматов. — М.: Мир, 1971. — 485 с.
32. Плотинский Ю.М. Модели социальных процессов // Учебное пособие для высших учебных заведений/. - М.: Логос, 2001. — 296 с.
33. Складорова Е.А. Компьютерное моделирование физических явлений / В.М. Малютин // Учебное пособие. Томский политехнический университет. — Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2012. — 152 с.
34. Аноприенко А.Я. Применение клеточных автоматов для моделирования динамических процессов: опыт ДОННТУ/ А.П. Коноплёва , Д.Ю. Плотников , Е.Ф. Малёванный // Четверта міжнародна науково-технічна конференція “Моделювання та комп’ютерна графіка”, 5-8 жовтня, 2011.
- Peterburgskogo universiteta. Seriya 10: Prikladnaya matematika. Informatika. Protsesy upravleniya 3*, pp.5-18.
28. KARELIN V.V. (2012) “One approach to the problem of estimating the parameters of the dynamic system in the face of uncertainty”, *Vestnik Sankt-Peterburgskogo universiteta. Seriya 10: Prikladnaya matematika. Informatika. Protsesy upravleniya 4*, pp.31-36.
29. KHUSAINOV D.Y., KHARCHENKO I.I. and SHATIRKO A.V. (2010) “Introduction to the modeling of dynamic systems”, *Navchalnyi posibnyk. Kyivskiy natsionalnyi universytet imeni Tarasa Shevchenka*.
30. TARASEVYCH Y.Y. (2004) “Mathematical and computer modeling. Introductory course”, Editorial URSS, Moscow, Russia.
31. NEYMAN D. (1971) “The theory of self-reproducing automata”, Mir, Moscow, Russia, P.485.
32. PLOTINSKIY Y.M. (2001) “Models of Social Processes”, Logos, Moscow, Russia.
33. SKLYAROVA E.A. and MALYUTIN V.M. (2012) “Computer modeling of physical phenomena”, *Tomskiy politechnicheskiy universitet, Tomsk, Russia*.
34. ANOPRIENKO A.Y., KONOPLEVA A.P., PLOTNIKOV D.Y. and MALYEVANYI E.F. (2011) “Application of cellular automata to simulate dynamic processes: the experience of DONNTU”, the Fourth International Scientific Conference “Modelling and Computer Graphics”, October 5-8, 2011.

Надійшла до редколегії 13.09.16

УДК 519.86+519.615

Назарага І.М., к.т.н., м.н.с.

Знаходження коефіцієнта еластичності при витратах праці методом Ньютона

Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, пр-т Глушкова
4д, e-mail: inna_na@ukr.net

I. M. Nazaraga, Ph. D. (Tech.), jun. researcher

The Newton's calculation method for the determining of elasticity coefficient for the labor expenditures

Taras Shevchenko National University of Kyiv,
03680, Kyiv, Glushkova av., 4d, e-mail:
inna_na@ukr.net

У статті описано покроковий алгоритм знаходження коефіцієнта еластичності при витратах праці для виробничої функції Кобба – Дугласа у формі Тінбергена, що ґрунтується на застосуванні методу Ньютона. Такий підхід передбачає використання комплексної математичної моделі економічних процесів в Україні, що є розвитком моделі "Альфа", яка базується на припущенні про баланс між сукупним попитом та сукупною пропозицією. Реалізацію підходу продемонстровано на статистичних даних економіки України за 2000 – 2015 рр. Зроблено висновок щодо отриманих результатів розрахунків. Знайдені для базового періоду методом Ньютона коефіцієнти еластичності при витратах праці можна використати для оцінювання значень темпу технічного прогресу чи сукупної факторної продуктивності, а також для знаходження прогнозних значень основних макроекономічних показників вітчизняної економіки.

Ключові слова: коефіцієнт еластичності при витратах праці, метод Ньютона, виробнича функція.

In an article the general approach for evaluation of elasticity coefficient for labor expenditures of Cobb – Douglas production function in Tinbergen variation is proposed and described in step-by-step variation. Unlike to classic least squares method, algorithm proposed for this case is based on Newton's calculation method. With Newton's calculation stepwise method, elasticity coefficient for such models can be found as a solution of nonlinear of equation. This method enables the use of complex mathematical models, such as model of economic processes in Ukraine, which is extension of macroeconomic model "Alpha" and based on assumption of balance between total supply and total demand. The approach is verified on statistical data about economic indicators of Ukraine for the period of 2000-2015, and results of calculations are presented. A general conclusion was made concerning the results of calculations. The result can be used for estimation of labor expenditures, determining of technological progress rate or total factor productivity, and prediction of basic macroeconomic indicators of Ukrainian economics.

Key Words: elasticity coefficient for the labor expenditures, Newton's calculation method, production function.

Статтю представив д. т. н., проф. Гаращенко Ф. Г.

Вступ

Важливим етапом макроекономічного моделювання і, загалом, кінцевою метою макроекономічних досліджень є прогнозування значень досліджуваних показників. Цей етап передбачає знаходження (ідентифікацію) параметрів моделі різними математичними методами. Наприклад, для розрахунку прогнозних значень випуску товарів та послуг, попиту на працю, сукупної пропозиції, потенційного ВВП тощо необхідно провести ідентифікацію коефіцієнта еластичності при витратах праці.

Поняття коефіцієнта еластичності при витратах праці тісно пов'язане із поняттям виробничої функції, у якій одним із факторів виробництва є праця. У загальному випадку, під виробничою функцією розуміють залежність кінцевого випуску продукції чи її вартості від використання різних факторів виробництва, конкретних видів ресурсів і затрат. Одними з найпоширеніших виробничих функцій, що найчастіше використовуються в макроекономічних дослідженнях, є виробнича функція Кобба - Дугласа [1] та її модифікації.

Варто зауважити, що при використанні виробничої функції типу Кобба – Дугласа [2,

с. 79 - 80] часто допускаються неточності. Зокрема, використання показника ВВП замість випуску продукції, використання показника загальної чисельності зайнятих замість витрат праці (добутку чисельності зайнятих та величини середньорічної номінальної заробітної плати). З метою врахування перелічених недоліків, у статті розглядається класична виробнича функція Кобба - Дугласа, але в кейнсіанській інтерпретації зі сталістю віддачі від масштабу в формі Тінбергена з деякими модифікаціями [2, 3]:

$$V_t = e^{\gamma_t t} L_t^{\beta_t} (g_t K_t)^{1-\beta_t}. \quad (1)$$

Тут V_t – випуск товарів та послуг;

γ_t – змінний темп технічного прогресу;

L_t – витрати праці на виробництво товарів і послуг;

g_t – коефіцієнт завантаження виробничого капіталу;

K_t – вартість виробничого капіталу;

β_t – коефіцієнт еластичності при витратах праці, який показує залежність зміни обсягу випуску від зміни на 1% витрат праці (тобто із збільшенням витрат праці на 1% - обсяг випуску збільшиться на β_t %).

Для знаходження β_t , зазвичай, здійснюється логарифмування виробничої функції типу Кобба - Дугласа та приведення її до лінійного вигляду із подальшим застосуванням методу найменших квадратів для знаходження коефіцієнтів у лінійній регресії (див., наприклад, [4 - 7]). У [2] пропонується знаходити коефіцієнт еластичності при витратах праці із функціональної залежності від коефіцієнту капіталомісткості праці із використанням кусково-лінійної апроксимації.

У статті подається формалізований алгоритм знаходження коефіцієнта еластичності при витратах праці β_t , який ґрунтується на використанні методу Ньютона. Такий підхід передбачає використання комплексної математичної моделі економічних процесів в Україні [3], що є розвитком моделі "Альфа" [2].

Рівняння для знаходження коефіцієнта еластичності при витратах праці

Для знаходження β_t здійснюється розв'язання нелінійного рівняння, яке будується на основі рівняння для знаходження сукупної пропозиції Q_t^s , умови балансу між попитом і

пропозицією праці та рівняння, що визначає максимальну чисельність зайнятих у сфері виробництва [3]:

$$-\ln \frac{P_{0,t} W_{0,t}}{\xi_t N_t W_t} \beta_t + \ln \frac{P_{0,t} W_{0,t} \sigma_t}{Q_t^s P_t} = \ln \beta_t. \quad (3)$$

Тут $P_{0,t}$ - максимальна чисельність зайнятих у сфері виробництва,

$W_{0,t}$ - заробітна плата за повної зайнятості,

ξ_t - коефіцієнт зайнятості,

N_t - загальна чисельність зайнятих,

W_t - заробітна плата,

σ_t - коефіцієнт структури витрат,

Q_t^s - сукупна пропозиція;

P_t - дефлятор ВВП.

Рівняння (3) впливає із таких міркувань. Із рівняння для знаходження сукупної пропозиції [3] маємо:

$$g_t K_t = \left[\frac{Q_t^s}{\sigma_t e^{\gamma_t t} (\xi_t N_t W_t)^{\beta_t}} \right]^{\frac{1}{1-\beta_t}}. \quad (4)$$

А з умови балансу між попитом і пропозицією праці

$$\frac{g_t K_t}{\xi_t W_{0,t}} (e^{\gamma_t t} \beta_t P_t)^{\frac{1}{1-\beta_t}} = \frac{1}{2} T_{N,t} \left(1 - \frac{O_t}{W_{0,t}} \right)$$

та рівняння, що визначає максимальну чисельність зайнятих $P_{0,t}$ у сфері виробництва

$$P_{0,t} = \frac{1}{2} T_{N,t} \xi_t \left(1 - \frac{O_t}{W_{0,t}} \right),$$

отримаємо:

$$g_t K_t = P_{0,t} W_{0,t} (e^{\gamma_t t} \beta_t P_t)^{\frac{1}{\beta_t-1}}, \quad (5)$$

де O_t - дохід з майна на душу населення, $T_{N,t}$ - чисельність населення.

Прирівняємо праві частини рівнянь (4) та (5):

$$P_{0,t} W_{0,t} (e^{\gamma_t t} \beta_t P_t)^{\frac{1}{\beta_t-1}} = \left[\frac{Q_t^s}{\sigma_t e^{\gamma_t t} (\xi_t N_t W_t)^{\beta_t}} \right]^{\frac{1}{1-\beta_t}} \Leftrightarrow$$

$$P_{0,t} W_{0,t} = \left[\frac{Q_t^s}{\sigma_t e^{\gamma_t t} (\xi_t N_t W_t)^{\beta_t}} \right]^{\frac{1}{1-\beta_t}} (e^{\gamma_t t} \beta_t P_t)^{\frac{1}{1-\beta_t}} \Leftrightarrow$$

$$\Pi_{0,t} W_{0,t} = \left[\frac{Q_t^S \beta_t P_t}{\sigma_t (\xi_t N_t W_t)^{\beta_t}} \right]^{\frac{1}{1-\beta_t}}. \quad (6)$$

Запишемо (6) у логарифмічній шкалі:

$$\ln(\Pi_{0,t} W_{0,t}) = \frac{1}{1-\beta_t} \left[\ln(Q_t^S \beta_t P_t) - \ln(\sigma_t (\xi_t N_t W_t)^{\beta_t}) \right].$$

Звідси отримаємо (3):

$$-\ln \frac{\Pi_{0,t} W_{0,t}}{\xi_t N_t W_t} \beta_t + \ln \frac{\Pi_{0,t} W_{0,t} \sigma_t}{Q_t^S P_t} = \ln \beta_t.$$

У лівій частині рівняння (3) – лінійна функція від β_t , а в правій – логарифмічна. Оскільки рівняння такого виду не можна розв'язати з допомогою алгебраїчних операцій, то значення β_t можна знайти одним із наближених методів, наприклад, методом Ньютона.

Теоретичне підґрунтя: метод Ньютона

Методом Ньютона знаходження коренів нелінійних рівнянь вигляду $f(x) = 0$ називається ітеративна процедура [8- 9]:

$$x^{k+1} = x^k - \frac{f(x^k)}{f'(x^k)},$$

причому $f'(x^k) \neq 0$, а функція f має похідну.

Основні труднощі методу Ньютона виникають тоді, коли початкова точка недостатньо близька до шуканого кореня, а також при досить малих значеннях $f'(x^k)$, тоді метод може розійтися. Крім того, до недоліків методу Ньютона відносять необхідність обчислення похідної на кожній ітерації. У практичних задачах це викликає значні труднощі. Тому на практиці часто використовують модифікації методу, зокрема метод хибного припущення [8, с. 180 - 188; 9, с. 114 - 116]:

$$x^{k+1} = x^k - \left[\frac{f(\bar{x}) - f(x^k)}{\bar{x} - x^k} \right]^{-1} f(x^k), k = 0, 1, \dots,$$

де $\bar{x}$ - деяка фіксована точка, і метод січних:

$$x^{k+1} = x^k - \left[\frac{f(x^{k-1}) - f(x^k)}{x^{k-1} - x^k} \right]^{-1} f(x^k), k = 0, 1, \dots$$

На жаль, метод січних нерідко розбігається [9, с. 115-116] через співпадіння знаків $f(x^k)$ і $f(x^{k-1})$, а для методу хибного припущення

обмеженість і збіжність послідовності оцінок шуканого кореня забезпечені. Але ці гарантії досягаються ціною втрати швидкодії – збіжність методу хибного припущення лінійна.

Алгоритм знаходження коефіцієнта еластичності при витратах праці

Вхідні дані:

$\Pi_{0,t}$ - максимальна чисельність зайнятих у сфері виробництва,

$W_{0,t}$ - заробітна плата за повної зайнятості,

ξ_t - коефіцієнт зайнятості,

N_t - загальна чисельність зайнятих,

W_t - заробітна плата,

σ_t - коефіцієнт структури витрат,

$Q_t^S P_t$ - номінальний ВВП.

Етап I

$$\text{Позначити } A = \ln \frac{\Pi_{0,t} W_{0,t}}{\xi_t N_t W_t}, B = \ln \frac{\Pi_{0,t} W_{0,t} \sigma_t}{Q_t^S P_t}.$$

Етап II (застосування методу Ньютона)

Крок 1. Вибрати початкове наближення $\beta_t^0 \in (0;1)$.

Крок 2. Вибрати ϵ - похибку обчислень.

Крок 3. Покласти $k=0$.

Крок 4. Обчислити

$$\beta_t^{k+1} = \beta_t^k - \frac{A\beta_t^k + \ln \beta_t^k - B}{A\beta_t^k + 1} \beta_t^k.$$

Крок 5. Якщо $|\beta_t^{k+1} - \beta_t^k| > \epsilon$, то збільшити k на 1 і перейти до кроку 4, інакше перейти до кроку 6.

Крок 6. Присвоїти $\beta_t = \beta_t^{k+1}$

Вихідні дані алгоритму: коефіцієнт еластичності при витратах праці β_t .

$$\text{Зауваження: } \ln \frac{\Pi_{0,t} W_{0,t}}{\xi_t N_t W_t} > \ln \frac{\Pi_{0,t}}{\xi_t N_t} > 0 \text{ для}$$

базового періоду, тому розв'язок існує і він єдиний.

Результати застосування алгоритму

Емпіричними даними для розрахунків стали дані Державної служби статистики України [10], але зауважимо, що для розрахунків за 2011 – 2015 рр. використано дані без урахування тимчасово окупованої території АР Крим, м. Севастополя та частини зони проведення антитерористичної операції.

Використовуючи поданий алгоритм (графічне представлення його застосування для 2000, 2014 та 2015 років подано на рис. 1), отримаємо такі

значення β_t (рис. 2) для періоду 2000 – 2015 років (табл. 1).

Таблиця 1

Значення β_t для 2000 – 2015 років

Рік	2000	2001	2002	2003
β_t	0,104	0,105	0,114	0,116
Рік	2004	2005	2006	2007
β_t	0,105	0,112	0,119	0,127
Рік	2008	2009	2010	2011
β_t	0,134	0,163	0,197	0,165
Рік	2012	2013	2014	2015
β_t	0,178	0,183	0,168	0,141

Коефіцієнт еластичності при витратах праці:
2000, 2014 та 2015 рр.

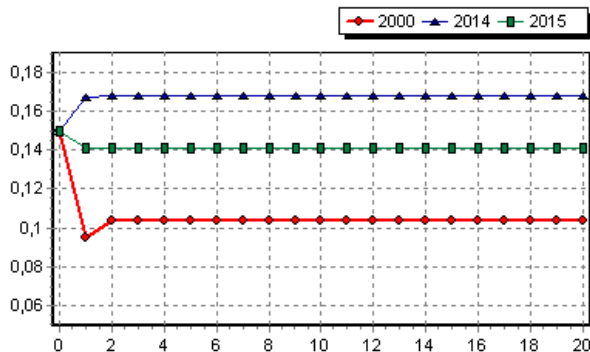


Рис. 1. Демонстрація застосування алгоритму

Різке зменшення β_t у 2011 р. (у порівнянні з попереднім роком) та у 2014 - 2015 рр. можна пояснити використанням статистичних даних без урахування тимчасово окупованої території АР Крим, м. Севастополя та частини зони проведення антитерористичної операції.

Як зауважено у [2, с. 74 та с. 44], оптимальне значення коефіцієнта еластичності при витратах праці згідно із принципом "золотого перетину" складає 0,382, а отримані значення β_t свідчать про наявність "тіньової" складової заробітної плати.

Коефіцієнт еластичності при витратах праці

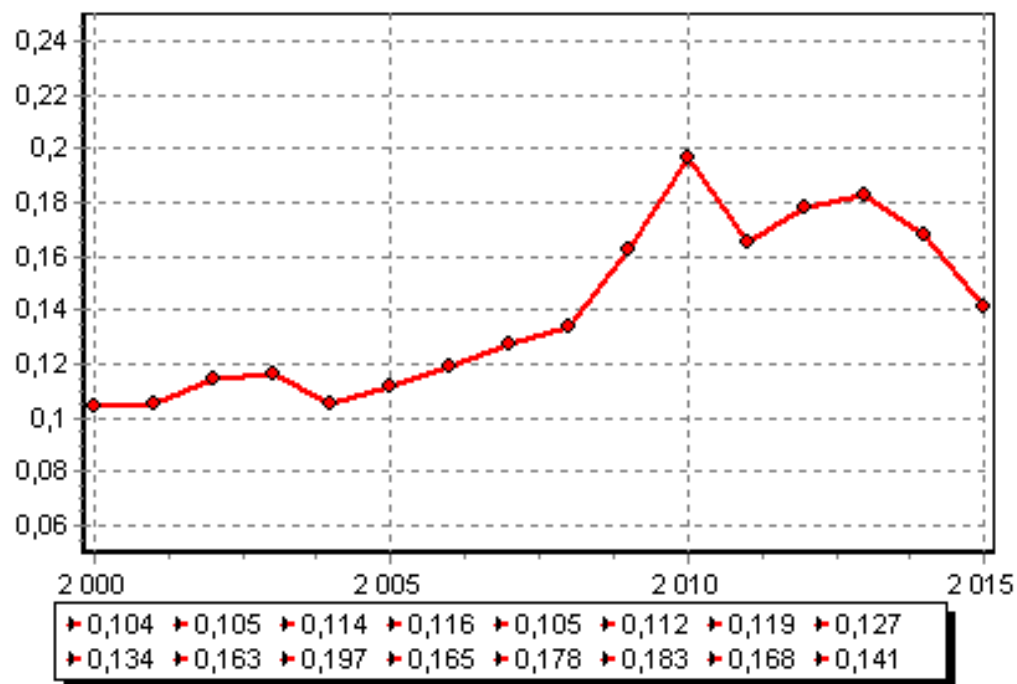


Рис. 2. Коефіцієнт еластичності
при витратах праці за 2000 – 2015 рр.

Висновки

У статті запропоновано та описано алгоритм знаходження коефіцієнта еластичності при витратах праці для виробничої функції Кобба –

Дугласа у формі Тінбергена, який ґрунтується на використанні методу Ньютона. Подано результати розрахунків за алгоритмом для 2000 – 2015 рр. та проведено їх аналіз. Емпіричними

даними для обчислень стали дані Державної служби статистики України.

Знайдені таким чином коефіцієнти еластичності при витратах праці можна використати, зокрема, для оцінювання значень темпу

технічного прогресу чи сукупної факторної продуктивності, а також для знаходження прогнозних значень основних макроекономічних показників економіки України.

Список використаних джерел

1. Cobb C. W. A Theory of Production. / C. W. Cobb, P. H. Douglas // *American Economic Review*. – 1928. – 18 (Supplement). – P. 139–165.
2. Харазішвілі Ю.М. Теоретичні основи системного моделювання соціально-економічного розвитку України: Моногр. / Ю.М. Харазішвілі. – К.: ПоліграфКонсалтинг, 2007. – 324 с.
3. Донченко В.С. Програмне забезпечення для прогнозування основних макроекономічних показників економіки України / В.С. Донченко, І.М. Назарага // *Вісник КНУ імені Тараса Шевченка. Серія: фіз.-мат. науки*. – 2010. – № 4. – С. 118–123.
4. Скрипниченко М. Секторальні та міжкраїнні моделі економічного розвитку / М. Скрипниченко - К.: Фенікс, 2004 – 256 с.
5. Грабовецький Б.Є. Виробничі функції: теорія, побудова, використання в управлінні виробництвом: Монографія/ Б.Є. Грабовецький. - Вінниця: УНІВЕРСУМ-Вінниця, 2006. - 137 с.
6. Шумська С.С. Виробнича функція в економічному аналізі: теорія та практика використання/ С.С. Шумська// *Економіка і прогнозування*. – 2007. – №2 -С. 138 – 153.
7. Ляшенко І.М. До вдосконалення методів побудови виробничих функцій / І.М. Ляшенко, В.С. Григорків // *Економіка України*. – 1998. – №10. – С.83–85.
8. Дж. Ортега. Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными: Пер. с англ. / Дж. Ортега, В. Рейнболдт. – М.: Мир, 1975. – 660 с.
9. Гилл Ф. Практическая оптимизация: Пер. с англ. / Ф. Гилл, У. Мюррей, М. Райт. – М.: Мир, 1985. – 509 с.
10. Офіційний сайт Державної служби статистики України [Електронний ресурс] – Режим доступу: <http://www.ukrstat.gov.ua>. – Назва з екрану.

References

1. COBB, C. W. and DOUGLAS, P. H. (1928) A Theory of Production. *American Economic Review*. 18 (Supplement). p. 139–165.
2. . KHARAZISHVILI, Yu. M. (2007) Teoretychni osnovy systemnoho modeliuvannia sotsialno-ekonomichnoho rozvytku Ukrainy: Monohr. Kyiv: PolihrafKonsaltnyh.
3. DONCHENKO, V. S. and NAZARAGA, I. M. (2010) Prohramne zabezpechennia dlia prohozuvannia osnovnykh makroekonomichnykh pokaznykiv ekonomiky Ukrainy. *Visnyk KNU imeni Tarasa Shevchenka. Seria: fiz.-mat. nauky*, no. 4, pp. 118–123.
4. SKRYPNYCHENKO, M. (2004) Sektoralni ta mizhkrainni modeli ekonomichnoho rozvytku. Kyiv: Feniks.
5. HRABOVETSKYI, B. Ye. (2006) Vyrobnychi fynktsii: teoriia, pobudova, vykorystannia v upravlinni vyrobnytstvom: Monohrafiia. Vinnytsia: UNIVERSUM-Vinnytsia.
6. SHYMSKA, S. S. (2007) Vyrobnycha fynktsiia v ekonomichnomy analizi: teoriia ta praktyka vykorystannia *Ekonomika i prohozyvannia*, no. 2, pp. 138 – 153.
7. LIASHENKO, I. M. and HRYHORKIV, V. S. (1998) Do vdoskonalennia metodiv pobudovy vyrobnychx fynktsii. *Ekonomika Ukrainy*, no. 10, pp.83–85.
8. ORTEGA, DZH. and REYNBOLDT, V. (1975) Iteratsionnye metody resheniya nelineynykh sistem uravneniy so mnogimi neizvestnymi. *Moskow: Mir*.
9. GILL, F. and MYURREY, U. and RAYT, M. (1985) Prakticheskaya optimizatsiya. *Moskow: Mir*.
10. Official web-site of the State Statistics Service of Ukraine [Electronic resource] - Mode of access: <http://www.ukrstat.gov.ua>. - Title from the screen.

Надійшла до редколегії 12.09.16

УДК 517.5

Є.В. Сорока, студентка,
Б.В. Рубльов, д.ф.-м.н., проф.

Y.V. Soroka, student,
B.V. Rublyov, PhD, prof.

Поріг вимирання популяції у просторовій стохастичній моделі

Extinction threshold of a population in spatial and stochastic model

Київський національний університет імені Тараса
Шевченка, Україна, 01601, місто Київ, вул.
Володимирська, 64/13
e-mail: eugenia.soroka@gmail.com

Taras Shevchenko National University of Kyiv,
64/13, Volodymyrska Street, City of Kyiv, Ukraine,
01601
e-mail: eugenia.soroka@gmail.com

У праці досліджено просторову стохастичну логістичну модель динаміки популяції певного виду. Досліджено критичні значення параметру смертності індивідуумів і знайдено поріг вимирання популяції за допомогою аналітичних методів і проведення симуляцій динаміки популяції. Порівняно аналітичні апроксимації порогу вимирання популяції з результатами симуляцій, на базі отриманих даних знайдені критичні значення параметрів смертності, при перевищенні яких відбувається зниження густоти популяції з подальшим її вимиранням. Досліджено поведінку критичного значення (порогу вимирання) як функції від параметрів моделі, зокрема, від просторового масштабу функцій конкуренції між індивідуумами та їхньої дисперсії. Перевірено гіпотезу про апроксимацію порогу вимирання аналітично і знайдено функціональну форму залежності критичного значення параметру смертності від параметрів моделі, для якої дійсна аналітична апроксимація.

Ключові слова: просторова стохастична логістична модель, поріг вимирання, просторові кумулянти, збурюване розширення, модель середнього поля.

In this study, spatial stochastic and logistic model (SSLM) describing dynamics of a population of a certain species was analysed. The behaviour of the extinction threshold as a function of model parameters was studied. More specifically, we studied how the critical values for the model parameters that separate the cases of extinction and persistence depend on the spatial scales of the competition and dispersal kernels.

We compared the simulations and analytical results to examine if and how the mathematical approximations break down at the vicinity of the extinction threshold, and found a functional form of the naïve approximation for which higher-order term of analytical approximation converges.

Keywords: spatial and stochastic logistic model, extinction threshold, spatial cumulants, perturbation expansion, mean-field model.

Статтю представив д.ф.-м.н., професор Хусаїнов Д.Я.

Introduction

One of the most fundamental questions in population biology concerns the persistence of species and populations, or conversely their risk of extinction. Theoretical ecologists have long sought to understand how the persistence of populations depends on biotic and abiotic factors. Extinction risk is influenced by a myriad of factors, including interaction between species traits and various stochastic processes leading to fluctuations and declines in population size [1].

The term extinction threshold refers to a critical value of some attribute, such as the amount of habitat in the landscape, below which a population, a metapopulation or species does not persist [2]. To

calculate the extinction threshold, a model is required that links the relevant properties of the landscape to the dynamics of the species.

Mathematical and statistical modelling approaches provide a powerful tool for developing general theory and synthesizing the results of individual empirical case studies by placing them into the context of theory [3]. In particular, several modelling approaches have been developed to understand the ecological and evolutionary phenomena related to extinction. In general, mathematical frameworks for dynamical systems can be classified depending on such parameters as type of a variable (discrete or continuous), space (accounted for in the model or not, or discrete or continuous), time (discrete

or continuous) and stochasticity (accounted for or not).

In this study stochastic and spatial logistic model (SSLM) is used, and it is described as follows.

Individual-based stochastic and spatial model

Individual-based stochastic and spatial models form the most realistic family of population models, but at the same time they also are the most difficult family of models for mathematical analyses. In such models movements and interactions can be of localized nature, and demographic stochasticity is not averaged out.

Many individual-based models are defined with discrete spatial structure, e.g. a regular grid. Such models are also known as “interacting particle systems” or “stochastic cellular automata”. Here we however focus on individual-based models formulated in continuous space and time. In particular, the spatial and stochastic logistic model is a spatio-temporal point process, the Lagrangian (individual-based) description of which is as follows:

Sedentary individuals produce propagules at a *per capita* fecundity rate f (by “rate” we mean probability per time unit, so that in a continuous-time model, the probability of a propagule being produced by a particular individual during a short time dt is $f dt$). A newly produced propagule is distributed (instantaneously) according to a dispersal kernel, and it is assumed to establish (instantaneously) as a new-born individual, which matures (instantaneously) and starts to produce propagules. Existing individuals may die for two reasons. Firstly, there is a constant background per capita mortality rate m , yielding an exponentially distributed lifetime with mean $\frac{1}{m}$. Secondly, mortality has a density-dependent component (self-thinning), so that competition among the individuals may also lead to death. The density-dependent component of the death rate of a focal individual is a sum of contributions from all the other individuals within the entire R^d , but the strength of the competitive effect decreases with distance [4].

Next let us define SSLM mathematically. For this we consider the space of locally finite configurations:

$$\Gamma = \{\gamma \subset R^d \mid |\gamma \cap \Lambda| < \infty, \text{ for any bounded } \Lambda \subset R^d\} \quad (1.1)$$

where d is the dimension of the space.

We use a probability measure μ_t (or $\mu(t)$) on Γ to describe the state of the system at time t . Informally, the measure μ_t describes how likely the system is to be in a given configuration at time t , given that it starts from an initial state described by the measure μ_0 at time 0. We define the SSLM by describing how

individual events modify an observable F . More precisely, the evolution of states is defined through the differential equation

$$\frac{d}{dt} \langle F, \mu(t) \rangle = \langle LF, \mu(t) \rangle, \quad (1.2)$$

where L is a linear operator acting on observables, i.e., functions on Γ [4]. Here $\langle F, \mu(t) \rangle$ is a pairing between an observable and a measure, defined by

$$\langle F, \mu(t) \rangle := \int_{\Gamma} F(\gamma) d\mu(\gamma). \quad (1.3)$$

As for the evolution of states associated with SSLM, this model can be mathematically defined through the linear operator L with

$$(LF)(\gamma) = \sum_{x \in \gamma} \left(m + \sum_{y \in \gamma \setminus x} a^-(x-y) \right) [F(\gamma \setminus x) - F(\gamma)] + \sum_{y \in \gamma} \int_{R^d} a^+(x-y) [F(\gamma \cup x) - F(\gamma)] dx \quad (1.4)$$

where F is arbitrary observable; m is the density-independent death rate of individual in location x ; $a^-(x-y)$ is a kernel describing the mortality rate imposed by an individual located at y to individual located in x ; the reproduction kernel $a^+(x-y)$ indicates the rate (per unit area) at which new-born individuals are created at location x by a parent located at y . In this model per capita fecundity rate f is incorporated in the reproduction kernel a^+ , i.e. $f = \int_{R^d} a^+(x) dx$ [4].

Aim of the work

The aim of this work is to analyse the behaviour of the extinction threshold in the spatial stochastic and logistic model. Recent mathematical developments enable one to study the dynamics of this model using a mathematically rigorous approximation, namely a perturbation expansion around the mean-field model (for details, see below). However, the perturbation expansion may break down at the vicinity of the extinction threshold, and thus there is yet no mathematical theory that could be used to understand the dynamics of population extinction and the behaviour of the extinction threshold as a function of model parameters. The aim of this work is to examine these questions with the help of simulations.

More specifically, we aim to study how the critical values for the model parameters that separate the cases of extinction and persistence depend on the spatial scales of the competition and dispersal kernels. A further aim is to compare the simulations to analytical results to examine if and how the mathematical approximations break down at the

vicinity of the extinction threshold. We formulate the results as a mathematically formulated conjecture, which we hope will inspire future mathematical work, that may eventually lead to its confirmation or rejection.

We start by reviewing some relevant theoretical results that have been published earlier. We then present the methods used in this work, then the results obtained, and finally the conclusions of this work.

Review of previously published theory

Spatial moments and cumulants

While the operator L (together with initial measure μ_0 – the probability distribution for the initial distribution of individuals in the domain) defines the model, as such it yields no statistical information on how the population behaves. To analyse the model behaviour, we turn to the time-evolution of spatial moments and spatial cumulants, which translate the Lagrangian (individual-based) model definition into an Eulerian (population-based) framework.

The n^{th} order spatial moment is denoted by the function $k^{(n)}(x_1, x_2, \dots, x_n)$. It is assumed to be symmetric, and the spatial moments of all orders $n = 0, 1, \dots$ are collected into the family $k = \{k^{(n)}\}$, with $k(0) = 1$. The vector k of all spatial moments is a sufficient description of the state of the system, i.e., it includes the same statistical information as the

The first order spatial moment describes expected population density, while the second and higher orders describe the degree of clustering in the spatial distribution of individuals [4]. In the case of Poisson measure (i.e., complete spatial randomness), the spatial moment function of any order n is simply given by the product

$$k^{(n)}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n k^{(1)}(x_i). \quad (2.1)$$

Spatial cumulants can be defined as [4]

$$\begin{aligned} u^{(0)} &= 0, \\ u^{(1)}(x) &= k^{(1)}(x), \\ u^{(2)}(x_1, x_2) &= k^{(2)}(x_1, x_2) - u^{(1)}(x_1)u^{(1)}(x_2) \end{aligned} \quad (2.2)$$

and, for any η , $|\eta| = n \geq 2$,

$$u^{(n)}(\eta) = k^{(n)}(\eta) - \sum_{\substack{\eta_1 \sqcup \dots \sqcup \eta_s = \eta \\ s \geq 2, \eta_i \neq \emptyset \\ \text{for } i=1, \dots, s}} \frac{1}{s!} u(\eta_1) \dots u(\eta_s).$$

Thus, as in the non-spatial case, the cumulant of order n is obtained from the moment of order n by subtracting all combinations of lower order cumulants.

The dynamical equation for the first spatial cumulant (population density) for SSLM reads

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} u_t^{(1)}(x) &= -m u_t^{(1)}(x) \\ &\quad - \int_{\mathbb{R}^d} a^-(x-y) u_t^{(2)}(y, x) dy \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^d} a^+(x-y) u_t^{(1)}(y) dy \\ &\quad - u_t^{(1)}(y) \int_{\mathbb{R}^d} a^-(x-y) u_t^{(1)}(y) dy, \end{aligned} \quad (2.4)$$

where the last term in the right-hand side is the non-linear component.

As for the spatial moment equations, spatial cumulants form an infinite hierarchy that can not be solved exactly. However, unlike spatial moments, spatial cumulants of higher orders can be expected to be small in the sense that they tend to zero as the distance between any two points in the definition tends to infinity.

Next we discuss a perturbative approach that utilizes this property of the cumulants.

Analytical approximations of spatial cumulants

For approximation of first and second order spatial cumulants at the equilibrium, we use the scaled version of the model, where the scaling parameter ε is an arbitrary positive number ($\varepsilon > 0$). As in the case for the SSLM, operator L may include functions (kernels) which describe pair interactions between the elements of the system. For example, in case of the SSLM, two such kernels are involved, namely a^- (competition / density-dependent mortality) and a^+ (reproduction and dispersal). For any such kernel $a: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}_+ := [0, +\infty)$, $a \in L^1(\mathbb{R}^d)$, we define a scaled version a_ε by setting

$$a_\varepsilon(x) := \varepsilon^d a(\varepsilon x), \quad x \in \mathbb{R}^d. \quad (2.5)$$

Then, as $\varepsilon \rightarrow 0$, the kernel becomes increasingly flat and long-ranged, while its integral remains constant, i.e.

$$\int_{\mathbb{R}^d} a_\varepsilon(x) dx = \int_{\mathbb{R}^d} a(x) dx \quad (2.6)$$

independently of $\varepsilon > 0$. For a given model defined by an operator L , we define a scaled model by replacing the operator L by L_ε , meaning that all the kernels of L are rescaled according to Eq. 2.6.

As $\varepsilon \rightarrow 0$ a so-called *mean-field (or mesoscopic) limit* can be obtained, which generally refers to a situation in which the law of mass action holds, i.e. it assumes that individuals are (at least locally) well-mixed in the sense that the probability of interaction of a randomly chosen individual with any other individual from the same population does not depend on the individual chosen [4]. The limit $\varepsilon \rightarrow 0$ corresponds to one such particular limit, which we call that of long-ranged interactions. In case of the SSLM model, one may develop a perturbation

expansion for the dynamical equations of the first and second order spatial cumulants as

$$u_{\varepsilon}^{(1)}(t, x) = q(t, x) + \varepsilon^d p(t, x) + O(\varepsilon^{2d}), \quad (2.7)$$

$$u_{\varepsilon}^{(2)}(t, x, y) = \varepsilon^d g(t, x, y) + O(\varepsilon^{2d}). \quad (2.8)$$

The dynamics of q , p and g can be explicitly written down as a function of the model parameters [4] as follows.

Population density q satisfies the differential equation

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} q(t, x) &= -mq(t, x) \\ &- q(t, x) \int_{\mathbb{R}^d} a^-(x-y) q(t, y) dy + \\ &+ \int_{\mathbb{R}^d} a^+(x-y) q(t, y) dy. \end{aligned} \quad (2.9)$$

The usual non-spatial logistic model is obtained by further assuming *translational invariance*, i.e. that the initial condition is independent of spatial location. In this case, the functions q and p become independent of the location x , and the function g depends only on the distance between x and y (denoted by $r = |x - y|$). Then the mean-field population density evolves as

$$\frac{d}{dt} q(t) = (A^+ - m)q(t) - A^- q(t)^2, \quad (2.10)$$

where $A^+ = \int_{\mathbb{R}^d} a^+(x) dx$ and $A^- = \int_{\mathbb{R}^d} a^-(x) dx$ denote the integrals of the reproduction and mortality kernels, respectively.

For functions $p(t)$ and $g(t, r)$ it holds:

$$\begin{aligned} \frac{dg}{dt} &= 2g * a^+ + 2qa^+ - 2mg - 2g * a^- \\ &- 2qA^-g - 2q^2a^-, \end{aligned} \quad (2.11)$$

$$\begin{aligned} \frac{dp(t)}{dt} &= A^+ p(t) - mp(t) - 2A^- q(t)p(t) \\ &- \int_{\mathbb{R}^d} a^-(x) g(x) dx, \end{aligned} \quad (2.12)$$

where $*$ denotes convolution. The convergence of the SSLM to the mean-field has been rigorously proved earlier in [5]. [4] shows that the first order correction term (the coefficient of ε^d) is non-zero only on the space of one- and two-point configurations (denoted by $p(t)$ and $g(t, r)$, respectively). Thus, for large but finite interactions, the two-point spatial cumulant dominates the spatial pattern, the higher order cumulants being less important.

As time parameter t tends to infinity, the dynamics of the system and hence also $u^{(1)}(t)$ and $u^{(2)}(t, r)$ can be expected tend to a stationary state, which we denote by

$$u^{(1)*} = \lim_{t \rightarrow \infty} u^{(1)}(t), \quad (2.13)$$

$$u^{(2)*}(r) = \lim_{t \rightarrow \infty} u^{(2)}(t, r). \quad (2.14)$$

Let us define by q^* , g^* and p^* the corresponding values of $q(t)$, $g(t, r)$ and $p(t)$ at the equilibrium to which the dynamics can be expected to converge as $t \rightarrow \infty$. These can be solved explicitly from the dynamical equations given above, i.e.

$$q^* = \frac{A^+ - m}{A^-}, \quad (2.15)$$

$$\tilde{g}^* = \frac{q^{*2} \tilde{a}^- - q^* \tilde{a}^+}{\tilde{a}^+ - \tilde{a}^- - q^* A^- - m}, \quad (2.16)$$

$$\begin{aligned} p^* &= \frac{\int_{\mathbb{R}^d} a^-(x) g(x) dx}{A^+ - m - 2A^- q^*} \\ &= - \frac{\int_{\mathbb{R}^d} a^-(x) g(x) dx}{A^+ - m}, \end{aligned} \quad (2.17)$$

where $\tilde{f}$ denotes Fourier transform of function f .

Method Section

Analytical methods

In this study the behaviour of the critical value $m_c(\varepsilon)$ for the persistence of population as a function of ε is being investigated. If we simply ignore the error term in Eq. 2.7, $m_c(\varepsilon)$ can be obtained by solving the equation

$$q^* + \varepsilon^d p^* = 0, \quad (3.1)$$

where q^* and p^* are the values of $q(t)$ and $p(t)$ at the equilibrium, which depend on mortality rate m (by definition). Let us call such $m_c(\varepsilon)$ a “naïve approximation”, and it can be written down explicitly as

$$m_c(\varepsilon) = A^+ - \varepsilon^{\frac{d}{2}} \sqrt{A^- \int_{\mathbb{R}^d} a^-(x) g(x) dx}. \quad (3.2)$$

The naïve approximation (given by Eq. 3.2) defines a critical value $m_c(\varepsilon)$, such that the persistence criteria is $m_{\varepsilon} < m_c(\varepsilon)$, i.e. as $m_{\varepsilon} \geq m_c(\varepsilon)$ population goes extinct.

The reason why the naïve approximation may not hold is the following. Let us write the perturbation expansion (see Eq. 2.7) as

$$u^{(1)*} = q^* + \varepsilon^d p^* + C(m) \varepsilon^{2d} + O(\varepsilon^{3d}). \quad (3.3)$$

While the constant $C(m)$ is finite for any fixed m , it may diverge as $C(m) \rightarrow \infty$ when the parameter m approaches the extinction threshold determined by the mean-field model, i.e. when $m \rightarrow m_c(0) = A^+$. If and how this happens can make the naïve approximation invalid. Another reason why the naïve approximation may not hold is the presence of the higher order terms included in $O(\varepsilon^{3d})$, as their coefficients may also diverge as $m \rightarrow m_c(0)$.

To simplify, we ignore here the higher order terms, and thus assume

$$u^{(1)*} = q^* + \varepsilon^d p^* + C(m) \varepsilon^{2d}. \quad (3.4)$$

To explore how fast $C(m)$ can diverge so that the naïve approximation is still valid, we assume that

$$C(m) = O(A^+ - m)^{-x}, \quad (3.5)$$

where $x > 0$ so that the term diverges as $m \rightarrow A^+$. If the naïve approximation holds, at the vicinity of the extinction threshold it holds that $A^+ - m = O(\varepsilon^{d/2})$, and thus the term $\varepsilon^d p^*$ behaves as $O(\varepsilon^{d/2})$, whereas the term $C(m)\varepsilon^{2d}$ behaves as $O(\varepsilon^{2d-x\frac{d}{2}})$. The naïve approximation is expected to hold if the latter term decreases faster than the former term, and thus if $2d - x\frac{d}{2} > \frac{d}{2}$. This equation holds if $x < 3$. In other words, if $x < 3$, the naïve approximation is expected to describe the leading behaviour of $m_c(\varepsilon)$ for small ε . We however note that this reasoning ignores the higher order terms in the perturbation expansion.

The above considerations motivate us to conduct simulations to find out about the behaviour of $m_c(\varepsilon)$ for small ε , and the behaviour of $C(m)$ near the extinction threshold.

But first let us define three errors useful for studying and understanding the differences between analytical and simulated results, and also for obtaining formula for $m_c(\varepsilon)$:

$$e_1 = -p^* \varepsilon^d, \quad (3.8)$$

$$e_2 = -(u_\varepsilon^{(1)*} - q^*), \quad (3.9)$$

$$e_3 = -(u_\varepsilon^{(1)*} - (q^* + p^* \varepsilon^d)). \quad (3.10)$$

According to the theory reviewed above, error e_2 should behave for small epsilon as e_1 and thus as $O(\varepsilon^d)$, whereas error e_3 should behave as $O(\varepsilon^{2d})$ because $u_\varepsilon^{(1)*} = q^* + \varepsilon^d p^* + O(\varepsilon^{2d})$ (see Eq. 2.7 and Eq. 3.3).

Numerical methods

As noted above, the perturbation expansion may break down close to the extinction threshold, and thus there is yet no mathematical theory that could be used to understand the dynamics of population extinction and the behaviour of the extinction threshold as a function of model parameters.

In order to approach this problem, we approximate first and second order spatial cumulants at the equilibrium by simulating the dynamics of the population defined by SSLM.

We define the model with the following parameters:

1. Density independent birth kernel $a^+(x)$ is as a tophat kernel with parameters integral and radius $(A^+, \frac{1}{\varepsilon})$, where $A^+ = 2$.

2. Death by competition kernel $a^-(x)$ is also defined as a tophat kernel with parameters $(A^-, \frac{1}{\varepsilon})$, where $A^- = 1$.

3. Mortality (density independent death) rate m is a constant which takes values from the set $\{0.5, 0.6, 0.7, \dots, 1.7, 1.8\}$.

We conduct simulations for the perturbation parameter ε covering the range $\varepsilon \in \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}\}$.

Population dynamics are simulated on a torus domain of size $U \times U$ during time T , where as a starting point $(U, T) = (128, 128)$. We then sequentially increase either the final time of the simulation T or the domain size $U \times U$ by fourfold, continuing until the inferred qualitative behaviour of the extinction threshold does not change anymore, and also its quantitative behaviour remains essentially unchanged.

For approximating $u^{(1)*}$ and $u^{(2)*}(r)$ by simulations, we define $u_{U,T}^{(1)}$ which denotes the mean density obtained by simulating the dynamics in a domain of size $U \times U$ until final time T , and $u_{U,T}^{(2)}(r)$ analogously, i.e. it denotes the second order cumulant for a population in $U \times U$ domain until final time T .

We also define $u_{U,T}^{(1)*}$ as a limit of mean density obtained by simulations in a domain of size $U \times U$ until time T , calculated discarding the first half $T/2$ of time of the simulation and averaging the recorded density over the rest of time. Analogously, $u_{U,T}^{(2)*}(r)$ denotes the second order cumulant for a population in $U \times U$ domain until final time T , discarding the first half of time, and averaging the values over the rest of time.

However, we note that approximating $u^{(1)*}$ and $u^{(2)*}(r)$ by simulating the system is not trivial. This is because for a fixed domain size U the population always goes extinct for $T \rightarrow \infty$. Conversely, for a finite final time T some individuals are always predicted to remain in the population for $U \rightarrow \infty$.

Predicting the extinction threshold

To develop our approach for studying the extinction threshold from simulations, let us return to the naïve approximation. In this case the critical value of $m_c(\varepsilon)$ can be solved from Eq. 3.1, or

$$u_\varepsilon^{(1)A}(m) = q^*(m) + \varepsilon^d p^*(m) = 0, \quad (3.11)$$

where the behaviour of both q^* and p^* is analytically known (see above), and the superscript A in $u_\varepsilon^{(1)A}$ refers to the fact that $u_\varepsilon^{(1)A}$ is the analytical approximation of $u_\varepsilon^{(1)}$.

Now, let us pretend that we would not know the behaviour of p^* as a function of m , only that of the mean-field model $q^*(m)$, but that we would know the values of $u_\varepsilon^{(1)A*}(m)$ for a collection of values of m and ε . As we defined the error e_1 as $-p^* \varepsilon^d$ (Eq. 3.8),

it holds that $e_1 = q^*(m) - u_\varepsilon^{(1)A^*}(m)$. Considering these as data, we may fit a statistical model, and thus infer the behaviour of e_1 as a function of m and ε , and consequently the behaviour of the extinction threshold $m_c(\varepsilon)$. We first develop this approach so that it provides an accurate approximation of the naïve approximation. After that, we apply the same idea for data based on the simulations.

Using Wolfram Mathematica, non-linear model is fitted to both errors e_1 and e_2 . Knowing functional forms for errors e_1 and e_2 , we can obtain critical value for mortality $m_c(\varepsilon)$ by solving the equation for population extinction at the equilibrium:

$$u_\varepsilon^{(1)*} \approx q^* + \varepsilon^d p^* = 0, \quad (3.12)$$

and thus predict the extinction threshold.

For error $e_1 = -p^* \varepsilon^d$ functional form $e_1 = f(m) \cdot \varepsilon^d$ is fitted, where $f(m) = \frac{a+b \cdot (A^+ - m)}{1+c \cdot (A^+ - m)}$, and values of parameters a, b and c are estimated. In order to conduct such model fitting, data for error e_1 is log-transformed, and on the right-hand side of the equation Taylor series expansion of $\log_2(f(m) \cdot \varepsilon^d)$ is used.

After model fitting we obtain functional form of error e_1 , and therefore can calculate mortality $m_c(\varepsilon)$ by solving the equation:

$$u_\varepsilon^{(1)*} \approx q^* - e_1 = 0; \quad (3.13)$$

$$u_\varepsilon^{(1)*} \approx \frac{A^+ - m}{A^-} - f(m) \cdot \varepsilon^d = 0. \quad (3.14)$$

For error $e_2 = -(u_\varepsilon^{(1)} - q^*)$ (Eq. 3.9) first model $e_2 = f(m) \cdot \varepsilon^d$ is fitted, where $f(m) = \frac{a+b \cdot (A^+ - m)}{1+c \cdot (A^+ - m)}$, and values of parameters a, b and c are estimated. Then model $e_2 = f(m) \cdot \varepsilon^d + g(m) \cdot \varepsilon^{2d}$ is fitted, where $g(m) = \frac{a'+b' \cdot (A^+ - m)}{1+c' \cdot (A^+ - m)}$, and values of a, b, c, a', b' and c' are estimated. In the second case model fits better, which displays that higher-order term ε^{2d} is important for approximating e_2 . The same procedure as with error e_1 is used. After model fitting with the second functional form, we can calculate $m_c(\varepsilon)$ by solving the equation:

$$u_\varepsilon^{(1)*} \approx q^* - e_2 = 0; \quad (3.15)$$

$$\frac{A^+ - m}{A^-} - (f(m) \cdot \varepsilon^d + g(m) \cdot \varepsilon^{2d}) = 0. \quad (3.16)$$

For error $e_3 = -(u_\varepsilon^{(1)} - (q^* + \varepsilon^d p^*))$ (Eq. 3.10) model $e_3 = f(m) \cdot \varepsilon^{2d}$ is fitted, where $f(m) = \frac{a+b \cdot (A^+ - m)}{1+c \cdot (A^+ - m)}$, and values of parameters a, b and c are estimated. Then we calculate $m_c(\varepsilon)$ by solving the equation:

$$u_\varepsilon^{(1)*} \approx q^* + \varepsilon^d p^* - e_3 = 0; \quad (3.17)$$

$$u_\varepsilon^{(1)*} \approx \frac{A^+ - m}{A^-} - f(m) \cdot \varepsilon^{2d} = 0. \quad (3.18)$$

For errors e_2 and e_3 the mean values of the data from the repeated simulations are used for model fitting, incorporating weights $\frac{1}{\text{error}^2}$ into non-linear model, where *error* is a deviation for each measurement.

Results

To illustrate how results obtained by simulations correspond to those obtained analytically, Fig. 1 shows the comparison of simulated and analytical population dynamics for the first order (a) and second order (b) spatial cumulants.

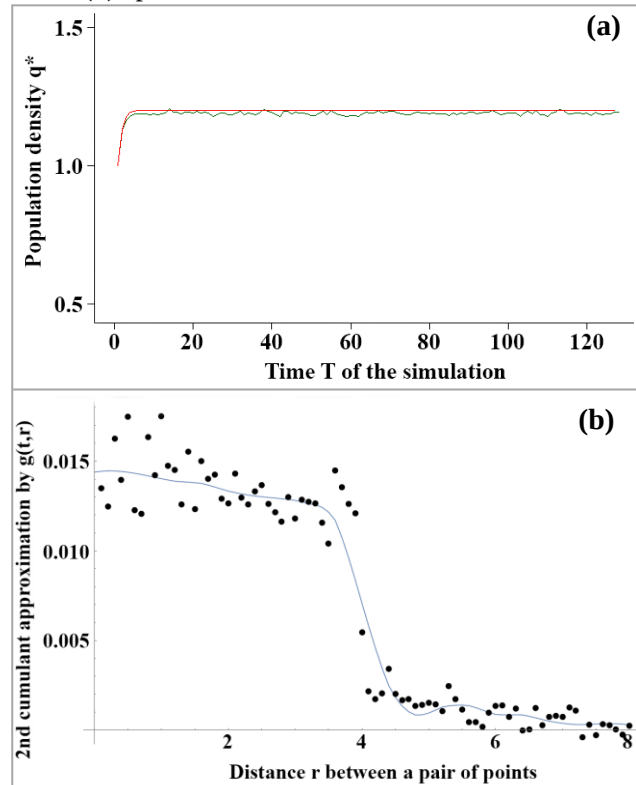


Fig. 1 – Population density (a) and 2nd spatial cumulant (b) for the simulation with domain size $U = 256$, time of the simulation $T = 128$, mortality rate $m = 0.8$ and scaling parameter $\varepsilon = \frac{1}{4}$. In (a) analytical solution is shown in red and results of the simulation in green. In (b) analytical solution is the blue curve and results of the simulation are denoted by black dots.

Simulations enabled us to obtain necessary data on the dynamics of a population and conduct further analysis required for predicting the extinction threshold.

After fitting a functional model to the data from errors e_1, e_2 and e_3 we obtained estimated critical values of mortality rate $m_c(\varepsilon)$ (Fig. 2).

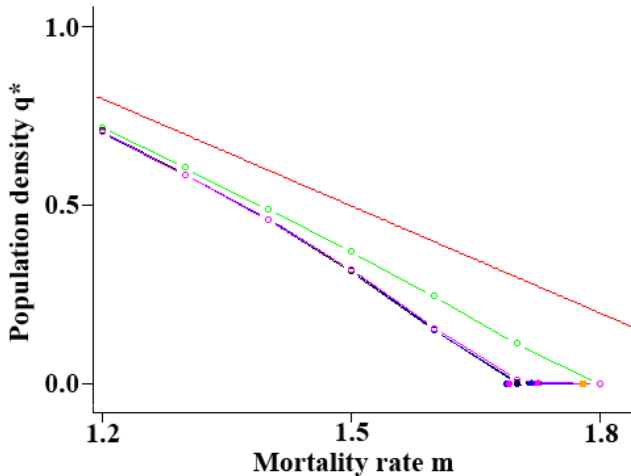


Fig. 2 – Population density: analytical in the mean-field model (red), numerical as $\varepsilon = \frac{1}{2}$ (green) and simulated: $(U, T) = (128, 128)$ (black), $(U, T) = (128, 512)$ (blue), $(U, T) = (256, 128)$ (magenta). Predicted values $m_c(\varepsilon)$ are listed as follows:

(U, T)	MF to error	$m_c(\varepsilon)$	Denoted by
	e_1	1.7804	■
(128, 128)	e_2	1.6890	●
(128, 512)		1.6876	●
(256, 128)		1.6914	●
(128, 128)	e_3	1.7011	▲
(128, 512)		1.7174	▲
(256, 128)		1.7253	▲

(MF stands for model fitting.)

Conclusions

In this study spatial stochastic and logistic model (SSLM) describing dynamics of a population of a certain species was analysed. Specific cases of SSLM with various model parameters were studied and the corresponding population dynamics were simulated and obtained data was analysed.

The behaviour of the extinction threshold as a function of model parameters was studied. More specifically, we studied how the critical values for the model parameters that separate the cases of extinction and persistence depend on the spatial scales of the competition and dispersal kernels defined in the model.

We compared the simulations and analytical results to examine if and how the mathematical approximations break down at the vicinity of the extinction threshold, and found a functional form of the naïve approximation for which higher-order term of analytical approximation converges, i.e. the functional form for which the mathematical approximation of spatial cumulants holds.

Further work should enable us to formulate the results as a mathematically formulated conjecture about the dependence of the extinction threshold on model parameters. We hope that such conjecture will awaken interest in the minds of mathematicians which would eventually lead to its rigorous mathematical confirmation or rejection.

Список використаних джерел

1. Ovaskainen O. Stochastic models of population extinction / O. Ovaskainen, B. Meerson // Trends in Ecology and Evolution. – 2010. – Vol. 25, No. 11. – P.643–652.
2. Ovaskainen O. Extinction threshold in metapopulation models / O. Ovaskainen, I. Hanski // Annales Zoologici Fennici. – 2003. – No.40. – P.81–97.
3. Ovaskainen O. Quantitative Ecology and Evolutionary Biology. Integrating Models with Data. / O. Ovaskainen, H. J. de Knecht, M. del M. Delgado // Oxford University Press, 2016. – 304 p.
4. Ovaskainen O. A mathematical framework for the analysis of spatial-temporal point processes / O. Ovaskainen, D. Finkelstein, O. Kutoviy, S. Cornell, B. Bolker, Y. Kondratiev // Theoretical Ecology. – 2014. – No. 7. – P.101–113.
5. Finkelstein D. Glauber dynamics in continuum: a constructive approach to evolution of states / D. Finkelstein, Y. Kondratiev, Y. Kozitsky // Discrete and Continuous Dynamical Systems. – 2013. – No. 33(4). – P.1431–1450.

References

1. OVASKAINEN, O., MEERSON, B. (2010) Stochastic models of population extinction. *Trends in Ecology and Evolution*, Vol. 25, No. 11, pp.643–652.
2. OVASKAINEN, O. and HANSKI, I. (2003) Extinction threshold in metapopulation models. *Annales Zoologici Fennici* 40, pp.81–97.
3. OVASKAINEN, O., HENRIK, J. de K. and DELGADO, M. del M. (2016) *Quantitative Ecology and Evolutionary Biology. Integrating Models with Data*. Oxford University Press.
4. OVASKAINEN, O., FINKELSTEIN, D., KUTOVIY, O., CORNELL, S., BOLKER, B., KONDRATIEV, Y. (2014) A mathematical framework for the analysis of spatial-temporal point processes. *Theoretical Ecology* 7, pp.101–113.
5. FINKELSTEIN, D., KONDRATIEV, Y., KOZITSKY, Y. (2013) Glauber dynamics in continuum: a constructive approach to evolution of states. *Discrete and Continuous Dynamical Systems* 33(4), pp.1431–1450.

Надійшла до редколегії 25.03.2016.

УДК 519.21

Усар І.Я., к. ф.-м. н.
Макушенко І.А., к. ф.-м. н.
Протопоп Ю.О., аспірант

I.Ya. Usar, Ph.D.
I.A. Makushenko, Ph.D.
Iu.O. Protopop, graduate student

Аналіз стаціонарного режиму для керованої двоканальної системи з повторними викликами

Stationary regime analysis for controlled two-channel system with repeated calls

Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, пр-т.
Глушкова 4д,
e-mail: usar@unicyb.kiev.ua

Taras Shevchenko National University of Kyiv,
03680, Kyiv, Glushkova st., 4d,
e-mail: usar@unicyb.kiev.ua

У статті розглядається марковська модель двоканальної системи з повторними викликами та змінною інтенсивністю вхідного потоку без обмежень на кількість джерел повторних викликів, керованої пороговою стратегією. Для такої моделі з'ясовано умови існування стаціонарного режиму. Подальший аналіз базується на апроксимації вихідної системи системою з обмеженою кількістю повторних викликів, для якої знайдені явні формули для стаціонарних імовірностей. Отримано швидкість збіжності стаціонарного розподілу скінченної системи з повторними викликами до стаціонарного розподілу нескінченної систем.

Ключові слова: стохастична система, повторні виклики, порогова стратегія, стаціонарний режим, швидкість збіжності.

The paper is focused on in-depth study of the promising area of the stochastic systems theory related with scrutiny of queueing systems with repeated calls. We research Markov's models of retrial systems and variable rate of input flow controlled by threshold strategy with no restriction on the capacity of the orbit. We defined stationary regime existence conditions and investigated probability characteristics of process for two-dimension Markov process with continuous time which we took as a main model of the specified system. In stationary regime for probability characteristics of the service process were found explicit formulas. Research methods which we used are based on the initial process approximation by the process with bounded state space. Results of the research allow us to evaluate convergence rates of stationary distribution of finite systems with repeated calls to stationary distribution of infinite systems. Method of probability flow equating is used for obtain explicit expressions for stationary system probabilities through the closed path which are defined in a special way. We considered model for two service devices, which are controlled by threshold strategies.

Key Words: queue, repeated calls, threshold strategies, stationary regime, convergense rate.

Статтю представив д. т. н., проф. Заславський В.А.

Теорія систем з повторними викликами є одним із важливих розділів теорії масового обслуговування. Такі системи розглянуті в монографіях [1], [2]. Математичні моделі систем з повторними викликами широко застосовуються на практиці (див., наприклад [3], [4]).

У даній роботі розглядаються системи обслуговування з повторними викликами типу $M_Q/M/2/N$ та $M_Q/M/2/\infty$, в яких інтенсивність вхідного потоку λ_j залежить від j -

числа джерел повторних викликів. Час обслуговування вимоги має показниковий розподіл з параметром μ . Якщо прилади зайняті, вимога стає джерелом повторних викликів і знову повторює спробу отримати обслуговування через випадковий час, розподілений за показниковим законом з параметром ν . Процес керування роботою систем визначається на основі порогових стратегій, які реалізують наступний алгоритм управління процесом

обслуговування: вважаємо $\lambda_j = \lambda_1$, якщо $j = 0, 1, \dots, H$, і $\lambda_j = \lambda_2$, якщо $j = H + 1, \dots, N$. H представляє собою поріг, при переході через який стрибком змінюється інтенсивність вхідного потоку. Змінний характер інтенсивності вхідного потоку в моделях такого типу дозволяє розв'язувати для них оптимізаційні задачі.

Процес обслуговування будемо моделювати двовимірним процесом Маркова $Q(t) = (Q_1(t), Q_2(t))$ з неперервним часом у фазовому просторі $S = \{0, 1, 2\} \times \{0, 1, \dots\}$, де $Q_1(t)$ – число зайнятих приладів у момент часу t , $Q_2(t)$ – число джерел повторних викликів.

Для побудови розрахункових алгоритмів і явних формул розглядається скінченна модель $M_Q/M/2/N$, для якої стаціонарний розподіл $\pi_{ij}^{(N)} = \lim_{t \rightarrow \infty} P(Q_1(t) = i, Q_2(t) = j)$ завжди існує.

При виконанні умови $\lambda/2\mu < 1$, де $\lambda = \lim_{j \rightarrow \infty} \lambda_j < \infty$ і $N \rightarrow \infty$ стаціонарні ймовірності $\pi_{ij}^{(N)}$ наближають відповідні стаціонарні ймовірності π_{ij} для системи $M_Q/M/2/\infty$.

Відмітимо (див. [1]), що завжди виконується нерівність $\pi_{ij} \leq \pi_{ij}^{(N)}$.

В роботі оцінюється швидкість збіжності стаціонарного розподілу $\pi_{ij}^{(N)}$ системи $M_Q/M/2/N$ до відповідного розподілу π_{ij} системи $M_Q/M/2/\infty$ з повторними викликами.

Не порушуючи загальності покладемо $\mu = 1$. Позначимо

$$A_i(j) = \begin{cases} \prod_{k=i}^{j-1} \frac{1 + \rho_k + \lambda_{k+1} + (k+1)\nu}{\rho_k[(\lambda_k + k\nu)^2 + k\nu]}, & i < j, \\ 1, & i = j, \end{cases}$$

де $\rho_k = \frac{\lambda_k}{2\mu} = \frac{\lambda_k}{2}$ – завантаження системи первинними викликами, коли черга $Q_2(t) = k$.

Теорема 1. Якщо $\lambda_j > 0$, $j = 0, 1, \dots, N$, то стаціонарні ймовірності для системи $M_Q/M/2/N$ мають вигляд

$$\pi_{0j}^{(N)} = \pi_{0N}^{(N)} \frac{N! \nu^{N-j} A_j(N)}{j!},$$

$$\pi_{1j}^{(N)} = \pi_{0N}^{(N)} \frac{N! \nu^{N-j} (\lambda_j + j\nu) A_j(N)}{j!},$$

$$\pi_{2j}^{(N)} = \pi_{0N}^{(N)} \frac{N! \nu^{N-j} (1 + \lambda_{j+1} + (j+1)\nu) A_{j+1}(N)}{\lambda_j j!},$$

$$j = 0, \dots, N-1,$$

$$\pi_{1N}^{(N)} = \frac{\pi_{0N}^{(N)} (N\nu + \lambda_N)}{\mu},$$

$$\pi_{2N}^{(N)} = \pi_{0N}^{(N)} \frac{(\lambda_N + N\nu)^2 + N\nu}{2}, \text{ де}$$

$$\pi_{0N}^{(N)} = \left\{ 1 + \lambda_N + N\nu + N! \sum_{j=0}^{N-1} \frac{\nu^{N-j} (1 + \lambda_j + j\nu) A_j(N)}{j!} + N! \sum_{j=0}^{N-1} \frac{\nu^{N-j} (1 + \lambda_{j+1} + (j+1)\nu) A_{j+1}(N)}{\lambda_j j!} + \frac{1}{2} ((\lambda_N + N\nu)^2 + N\nu) \right\}^{-1}.$$

Теорема 2. Нехай для $M_Q/M/2/\infty$ - системи виконується умова $\lambda = \lim_{j \rightarrow \infty} \lambda_j / 2 < 1$. Тоді стаціонарні ймовірності будуть мати вид

$$\pi_{0j} = \frac{R_j}{j! \nu^j}, \quad \pi_{1j} = \frac{(\lambda_j + j\nu) R_j}{j! \nu^j},$$

$$\pi_{2j} = \frac{(1 + \lambda_{j+1} + (j+1)\nu) R_j}{\lambda_j j! \nu^j} \frac{\rho_j [(\lambda_j + j\nu)^2 + j\nu]}{1 + \rho_j + \lambda_{j+1} + (j+1)\nu},$$

де

$$R_j = \left\{ \sum_{i=0}^j \frac{(1 + \lambda_i + i\nu) A_i(j)}{i! \nu^i} + \sum_{i=j+1}^{\infty} \frac{1 + \lambda_i + i\nu}{i! \nu^i} A_j(i) + \sum_{i=0}^{j-1} \frac{(1 + \lambda_{i+1} + (i+1)\nu) A_{i+1}(j)}{\lambda_i i! \nu^i} + \sum_{i=j}^{\infty} \frac{1 + \lambda_{i+1} + (i+1)\nu}{\lambda_i i! \nu^i} A_j(i+1) \right\}^{-1}.$$

Теореми 1, 2 є наслідком результатів роботи [5].

Тепер розглянемо швидкість збіжності стаціонарного розподілу системи $M_Q/M/2/N$ до відповідного розподілу системи $M_Q/M/2/\infty$ при умові, що він існує.

Оскільки

$$\left| \pi_{0j} - \pi_{0j}^{(N)} \right| = \frac{1}{j! \nu^j} \left| R_j - \pi_{0N}^{(N)} N! \nu^N A_j(N) \right|, \quad (1)$$

$$\left| \pi_{1j} - \pi_{1j}^{(N)} \right| = \frac{\lambda_j + j\nu}{j! \nu^j} \left| R_j - \pi_{0N}^{(N)} N! \nu^N A_j(N) \right|, \quad (2)$$

$$\left| \pi_{2j} - \pi_{2j}^{(N)} \right| = \frac{1 + \lambda_{j+1} + (j+1)\nu}{\lambda_j j! \nu^j} \left| R_j - \pi_{0N}^{(N)} N! \nu^N A_{j+1}(N) \right|, \quad (3)$$

то нам потрібно оцінити швидкість збіжності $\pi_{0N}^{(N)} N! \nu^N A_j(N)$ до R_j .

Позначимо

$$B_j = \sum_{i=0}^j \frac{(1 + \lambda_i + i\nu) A_i(j)}{i! \nu^i} + \sum_{i=0}^{j-1} \frac{(1 + \lambda_{i+1} + (i+1)\nu) A_{i+1}(j)}{\lambda_i i! \nu^i}.$$

$$\Theta_j = B_j + \sum_{i=j+1}^{\infty} \frac{1 + \lambda_i + i\nu}{i! \nu^i A_j(i)} + \sum_{i=j}^{\infty} \frac{1 + \lambda_{i+1} + (i+1)\nu}{\lambda_i i! \nu^i A_j(i+1)}.$$

Скористаємось наступною лемою

Лема 1. Нехай $\mu = 1, \overline{\lim}_{j \rightarrow \infty} \lambda_j / 2 < 1$. Тоді

$$\lim_{N \rightarrow \infty} |R_j - \pi_{0N}^{(N)} N! \nu^N A_j(N)| (N-2)! \nu^N A_j(N) = \frac{\nu^2}{2\Theta_j^2}. \quad (4)$$

Доведення.

$$\begin{aligned} & \lim_{N \rightarrow \infty} \Theta_j \cdot \left\{ B_j + \sum_{i=j+1}^N \frac{1 + \lambda_i + i\nu}{A_j(i) \nu^i i!} + \right. \\ & \left. + \sum_{i=j}^{N-1} \frac{1 + \lambda_{i+1} + (i+1)\nu}{A_j(i+1) \nu^i \lambda_i i!} + \frac{1}{2} \frac{((\lambda_N + N\nu)^2 + N\nu)}{N! \nu^N A_j(N)} \right\} = \Theta_j^2. \\ & \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{(\lambda_N + N\nu)^2 + N\nu}{N! \nu^N A_j(N)} \cdot (N-2)! \nu^N A_j(N) = \\ & = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{(\lambda_N + N\nu)^2 + N\nu}{N(N-1)} = \nu^2. \end{aligned}$$

При $N \rightarrow \infty$ маємо

$$\begin{aligned} & (N-2)! \nu^N A_j(N) \sum_{i=N+1}^{\infty} \frac{1 + \lambda_i + i\nu}{i! \nu^i A_j(i)} = \\ & = (N-2)! \sum_{i=N+1}^{\infty} \frac{1 + \lambda_i + i\nu}{i! \nu^{i-N}} \prod_{k=N}^{i-1} \frac{\rho_k [(\lambda_k + k\nu)^2 + k\nu]}{1 + \rho_k + \lambda_{k+1} + (k+1)\nu} \leq \\ & \leq (N-2)! \sum_{i=N+1}^{\infty} \frac{1 + \lambda_i + i\nu}{i! \nu^{i-N}} \prod_{k=N}^{i-1} \bar{\rho} k\nu = \\ & = (N-2)! \sum_{i=N+1}^{\infty} \frac{(1 + \lambda_i + i\nu) N(N+1) \dots (i-1)}{i!} \bar{\rho}^{i-N} = \\ & = \frac{1}{(N-1) \bar{\rho}^N} \sum_{i=N+1}^{\infty} \frac{1 + \lambda_i + i\nu}{i} \bar{\rho}^i \leq \\ & \leq \frac{2\nu}{(N-1) \bar{\rho}^N} \sum_{i=N+1}^{\infty} \bar{\rho}^i = \frac{2\nu \bar{\rho}^{N+1}}{(N-1) \bar{\rho}^N (1 - \bar{\rho})} = \frac{2\nu \bar{\rho}}{(N-1)(1 - \bar{\rho})} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Аналогічно можна довести, що

$$\lim_{N \rightarrow \infty} (N-2)! \nu^N A_j(N) \sum_{i=N+1}^{\infty} \frac{1 + \lambda_{i+1} + (i+1)\nu}{\lambda_i i! \nu^i A_j(i+1)} = 0.$$

Тепер отримаємо

$$|R_j - \pi_{0N}^{(N)} N! \nu^N A_j(N)| \cdot (N-2)! \nu^N A_j(N) \rightarrow \frac{\nu^2}{2\Theta_j^2}.$$

Лему доведено.

Введемо деякі позначення. Нехай N_0 вибрано так, що $\sup_{j > N_0} \lambda = q_0 < 1$, а $1 < \gamma_0 < 1/q_0$. Покладемо

$$I(\nu) = \inf \left\{ i > 0 : \frac{(3 + (i+1)\nu)[4 + 5i\nu + (i\nu)^2](2 + (i+1)\nu)}{\nu^4 i^4} \leq \gamma_0 \right\},$$

$$D_j(N) = B_j + \sum_{i=j+1}^N \frac{1 + \lambda_i + i\nu}{A_j(i) \nu^i i!} \left(1 + \frac{i\nu}{\lambda_{i-1}} \right).$$

Теорема 3. Нехай у системі з повторними викликами типу $M_Q/M/2/\infty$ виконуються умови леми 1. Тоді для будь-якого j

$$\lim_{N \rightarrow \infty} (N-2)! \nu^N A_j(N) \left| \pi_{0j} - \pi_{0j}^{(N)} \right| = \frac{1}{2j! \nu^{j-2} \Theta_j^2}, \quad (5)$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} (N-2)! \nu^N A_j(N) \left| \pi_{1j} - \pi_{1j}^{(N)} \right| = \frac{\lambda_j + j\nu}{2j! \nu^{j-2} \Theta_j^2}, \quad (6)$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} (N-2)! \nu^N A_{j+1}(N) \left| \pi_{2j} - \pi_{2j}^{(N)} \right| = \frac{1 + \lambda_{j+1} + (j+1)\nu}{2\lambda_j j! \nu^{j-2} \Theta_j^2}. \quad (7)$$

і для кожного фіксованого j та всіх $N \geq \max \{N_0, I(\nu), j\} + 1$ справедливі оцінки

$$\begin{aligned} & (N-2)! \nu^N A_j(N) \left| \pi_{0j} - \pi_{0j}^{(N)} \right| \leq \\ & \leq \frac{R_j}{\nu^j j! D_j(N_0)} \frac{(2 + N\nu)^2 + N\nu}{2N^2} \left[1 + \frac{2 + \nu(N+1)}{\nu N} \frac{1}{1 - \gamma_0 q_0} \right], \\ & (N-2)! \nu^N A_j(N) \left| \pi_{1j} - \pi_{1j}^{(N)} \right| \leq \\ & \leq \frac{R_j (\lambda_j + j\nu)}{\nu^j j! D_j(N_0)} \frac{(2 + N\nu)^2 + N\nu}{2N^2} \times \\ & \times \left[1 + \frac{2 + \nu(N+1)}{\nu N} \frac{1}{1 - \gamma_0 q_0} \right], \\ & (N-2)! \nu^N A_j(N) \left| \pi_{2j} - \pi_{2j}^{(N)} \right| \leq \\ & \leq \frac{(1 + \lambda_{j+1} + (j+1)\nu)}{\nu^j \lambda_j j!} \cdot \frac{\rho_j [(\lambda_j + j\nu)^2 + j\nu]}{1 + \rho_j + \lambda_{j+1} + (j+1)\nu} \times \\ & \times \frac{R_j}{D_j(N_0)} \frac{(2 + N\nu)^2 + N\nu}{2N^2} \left[1 + \frac{2 + \nu(N+1)}{\nu N} \frac{1}{1 - \gamma_0 q_0} \right]. \end{aligned}$$

Доведення. Формула (5) випливає з (1) та (4), формула (6) з (2) та (4), Формула (7) з (3) та (4).

Для доведення отриманих оцінок позначимо

$$a_i = \frac{1 + \lambda_i + i\nu}{A_j(i) \nu^i i!} \left(1 + \frac{i\nu}{\lambda_{i-1}} \right).$$

Тоді для всіх $i \geq N_0 + 1$ маємо

$$\begin{aligned} \frac{a_{i+1}}{a_i} &= \frac{1 + \lambda_{i+1} + (i+1)\nu}{\nu (i+1)(1 + \lambda_i + i\nu)} \frac{\rho_i [(\lambda_i + i\nu)^2 + i\nu]}{1 + \rho_i + \lambda_{i+1} + (i+1)\nu} \times \\ & \times \frac{\lambda_i + (i+1)\nu}{\lambda_i} \frac{\lambda_{i-1}}{\lambda_{i-1} + i\nu} \leq \\ & \leq \frac{(3 + (i+1)\nu)[4 + 5 + i\nu + (i\nu)^2](2 + (i+1)\nu)}{\nu^4 i^4} q_0. \end{aligned}$$

Враховуючи визначення $I(\nu)$ з цієї формули

маємо $\frac{a_{i+1}}{a_i} \leq \gamma_0 q_0$, $i \geq I(\nu)$, звідки

$$a_i \leq (\gamma_0 q_0)^{i-N} a_N \quad \text{для } i \geq \max[I(\nu), N_0] + 1.$$

З цієї оцінки випливає, що

$$\sum_{i=N+1}^{\infty} \frac{1 + \lambda_i + i\nu}{A_j(i)\nu^i i!} \left(1 + \frac{i\nu}{\lambda_{i-1}}\right) \leq a_{N+1} \sum_{i=0}^{\infty} (\gamma_0 q_0)^i = \frac{a_{N+1}}{1 - \gamma_0 q_0} =$$

$$= \frac{1 + \lambda_{N+1} + (N+1)\nu}{A_j(N+1)\nu^{N+1}(N+1)!} \left(1 + \frac{\nu(N+1)}{\lambda_N}\right) \frac{1}{1 - \gamma_0 q_0}.$$

З означення $A_j(N)$ маємо

$$A_j(N) \frac{1 + \lambda_{N+1} + (N+1)\nu}{A_j(N+1)\nu^{N+1}} \left(1 + \frac{\nu(N+1)}{\lambda_N}\right) =$$

$$= \frac{\rho_N[(\lambda_N + N\nu)^2 + N\nu]}{1 + \rho_N + \lambda_{N+1} + (N+1)\nu} \times$$

$$\times \frac{1 + \lambda_{N+1} + (N+1)\nu}{\nu N^3} \frac{\lambda_N + \nu(N+1)}{\lambda_N} \leq$$

Список використаних джерел

1. Falin G.I. Retrial Queues / G.I. Falin, J.G.C. Templeton. – London Chapman & Hall, 1997. – 331 p.
2. Artalejo J.R. Retrial Queueing Systems. A Computational Approach / J.R. Artalejo, A. Gomes-Corral. – Springer-Verlag, 2008. – 318 p.
3. Artalejo J.R. Steady state solution of a single server queue with linear repeated request / J.R. Artalejo, A. Gomes-Corral // J. Applaid Probability. – 1997. – Vol.34. – P. 223-233.
4. Anisimov V.V. Analysis of Markov multiserver retrial queues with negative arrivals / V.V. Anisimov, J.R. Artalejo // Queueing Systems. – 2001. – Vol.39. – P. 157-182.
5. Лебедєв Є.О. Про системи з повторними викликами та керованим входним потоком / Є.О. Лебедєв, І.Я. Усар // Доповіді національної академії наук України. – 2009. - №5. – С. 52-59.

$$\leq \frac{[(2 + N\nu)^2 + N\nu](2 + \nu(N+1))}{2\nu N^3}.$$

Тепер отримаємо

$$(N-2)! \nu^N A_j(N) \left| R_j - \pi_{0N}^{(N)} N! \nu^N A_j(N) \right| \leq$$

$$= \frac{R_j}{D_j(N)} \frac{(2 + N\nu)^2 + N\nu}{2N^2} \left[1 + \frac{2 + \nu(N+1)}{\nu N} \frac{1}{1 - \gamma_0 q_0} \right]$$

для $N \geq \max[I(\nu), N_0, j] + 1$.

З останньої оцінки та формул (5)-(7) випливає твердження теореми.

У статті отримано нові результати для класу двоканальних систем з повторними викликами і керованою інтенсивністю входного потоку, які розвивають теорію стохастичних систем з повторними викликами. Знайдено оцінку швидкості збіжності стаціонарного розподілу скінченної системи з повторними викликами до стаціонарного розподілу нескінченної системи, що може бути використане при побудові алгоритмів розрахунку стаціонарного розподілу.

References

1. FALIN, G.I., TEMPLETON, J.G.C. (1997) *Retrial Queues*. London Chapman & Hall.
2. ARTALEJO, J.R., GOMES-CORRAL, A. (2008) *Retrial Queueing Systems. A Computational Approach*. Springer-Verlag.
3. ARTALEJO, J.R., GOMES-CORRAL, A. (1997) *Steady state solution of a single server queue with linear repeated request*. J. Applaid Probability. Vol.34, pp. 223-233.
4. ANISIMOV, V.V., ARTALEJO, J.R., (2001) *Analysis of Markov multiserver retrial queues with negative arrivals*. Queueing Systems. Vol.39, pp. 157-182.
5. LEBEDEV, E.O., USAR, I.Y., (2009) *About of retrial queueing systems and controlled of input flow*. Reports of the National Academy of Sciences of Ukraine. Vol.5, pp. 52-59.

Надійшла до редколегії 23.09.16

УДК 517.929.4

Хусаїнов Д.Я.¹, д.ф.-м.н., проф., Гаркуша Н.І.¹,
к.е.н., с.н.с, проф., Пужа Б.^{2*}, к.ф.-м.н., доц.,
Новотна В.^{2*}, ст. преп.

**Оцінки збіжності розв'язків нелінійної
системи з післядією в околі точки спокою**

¹Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 03680, Україна, м. Київ, пр.-
т. Глушкова, 4д; ²Брненський технологічний
університет, Чехія, м.Брно, в. Колейна 2906/4
e-mail: dkh@unicyb.kiev.ua ngarkusha@gmail.com
puza@fbm.vutbr.cz

D.Ya. Khusainov¹, PhD., Prof., N. I. Garkusha¹,
PhD, senior researcher, Puzha B.^{2*}, Ph.D., docent,
Novotna V.^{2*}, as.

**The estimates of the convergence of linear
systems solutions with aftereffect in the
neighborhood of point of the rest**

¹Taras Shevchenko National University of Kyiv,
03680, Ukraine, Kyiv, Glushkova av., 4d; ²Brno
University of Technology, Czech Republik, Brno,
Kolejni 2906/4
e-mail: dkh@unicyb.kiev.ua ngarkusha@gmail.com
puza@fbm.vutbr.cz

Дана робота є продовженням циклу робіт про дослідження нелінійних моделей популяції з одним сталим запізненням. Розглядається система диференціальних рівнянь, що описує динаміку популяції. Вона має вигляд системи двох нелінійних диференціальних рівнянь з одним сталим запізненням. Визначаються стани рівноваги системи. Проведено дослідження стійкості ненульового стану рівноваги. Оскільки система нелінійна і має більш одного стану рівноваги, проведена оцінка області стійкості стану рівноваги.

Робота виконана на підставі договору про наукове співробітництво між факультетом комп'ютерних наук та кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка та факультетом бізнесу та менеджменту Брненського технологічного університету від 08.04.2016.

Ключові слова: математична модель, динамічна система, диференціальні рівняння, запізнювання.

The study of many mathematical models of population dynamics is reduced to a qualitative research and the construction of the phase portrait of a system of ordinary differential equations. Moreover, non-linear and have multiple equilibria. The singular trajectories are found, which are the rest points and cycles they are "stapled", and a phase portrait of the system as a whole is constructed. The peculiarity of the population model is the account of the factor-effect, which leads to the study of delay systems. Simple models are systems of differential-difference equations with a constant delay. In the present paper, we consider a system of nonlinear differential equations on the plane with a delay. Specific points of the system are the same as for the system without delay, and they are found by solving system of two equations in algebraic form. Hence, the design methods for finding periodic trajectories doesn't exist. The linearization of system in the vicinity of the equilibrium positions is held. If the equilibrium position of the linearized system is "rough", then the original nonlinear system has the similar properties in a sufficiently small neighborhood of the equilibrium position. In the study of the system with delay equilibrium positions the linearization method is also used. The method of stability analysis and to obtain the estimates of convergence the second Lyapunov method with a quadratic function is selected.

*Work is conducted under the agreement on scientific cooperation between the Faculty of Computer Science and Cybernetics, Taras Shevchenko National University of Kyiv and the Faculty of Business and Management Brno University of Technology 04.08.2016. *This paper was supported by the Czech Science Foundation: The project: "Development of new methods of solving dynamic models of corporate processes management", No.: GA16-03796S.*

Key words: mathematical model, dynamic system, differential equations, delay.

Статтю представив д.-р. тех. н., проф. Гаращенко Ф.Г.

Introduction

The fundamental bases of the theory of mathematical modeling of population dynamics

were laid in [1,2]. The proposed work extends the series of studies mathematical models of population dynamics such as "predator-prey" with

aftereffect [3-6]. Generally, the study of nonlinear systems defines the equilibrium, cyclic trajectories and investigate the stability of these trajectories [2]. The research method is a method of linear approximations. But even for linear stationary systems, the presence of resistance "not at all" describes the behavior of solutions in a neighborhood of equilibrium. Characteristic numbers of matrix linear approach don't fully describe the dynamics of the system. They reveal the fact of stability (asymptotic stability), but do not calculate the characteristics of behavior of the solutions. One of the important characteristics is the estimate of solutions convergence, which can be accessed using the second method of Lyapunov functions quadratic form. The proposed work uses quadratic Lyapunov functions to study a nonzero equilibrium stability and to calculate the estimate of system convergence solution with delay in a neighborhood of stable equilibrium.

Getting the estimates of convergence solutions of nonlinear systems on plane

One of the main factors affecting the dynamics of the system, is consideration aftereffect [7-9]. In [3-6] were proposed to consider the effect of the delay caused by the time of individual ripenin. Mathematical model of dynamics in this case has the form of a system of two differential equations.

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= P_1(x_1(t), x_1(t-\tau), y_1(t-\tau)), \\ \dot{y}_1(t) &= Q_1(y_1(t), x_1(t-\tau), y_1(t-\tau)),\end{aligned}\quad (1)$$

where [2]

$$\begin{aligned}P_1(x_1(t), x_1(t-\tau), y_1(t-\tau)) &= \\ &= \left[a - \frac{bx_1(t-\tau)y_1(t-\tau)}{1 + Px_1(t-\tau)} \right] x_1(t), \\ Q(y_1(t), x_1(t-\tau), y_1(t-\tau)) &= \\ &= - \left[c - \frac{dx_1^2(t-\tau)}{1 + Px_1(t-\tau)} \right] y_1(t).\end{aligned}\quad (2)$$

Constants a, b, c, d, P are system parameters that determine the characteristics of the interaction of populations. The system of equations with delay (2) has the same equilibriums as the system without delay. Special points are two points, the same as for the system without delay. They are

$$O(0,0), O_1(x_1^0, y_1^0), x_1^0 = \frac{Pc + \sqrt{P^2c^2 + 4cd}}{2d},$$

$$y_1^0 = a \frac{Pc + \sqrt{P^2c^2 + 4cd}}{2bc}. \quad (3)$$

The first point describes the absence of populations and has no interest. Consider the second special point $O_1(x_1^0, y_1^0)$. With the help of replacement

$$x_1(t) = x(t) + x_1^0, y_1(t) = y(t) + y_1^0$$

of the original system (1) we move to a system disturbed in the vicinity of the point. It looks

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= P(x(t), x(t-\tau), y(t-\tau)), \\ \dot{y}(t) &= Q(y(t), x(t-\tau), y(t-\tau)),\end{aligned}\quad (4)$$

where

$$\begin{aligned}P(x(t), x(t-\tau), y(t-\tau)) &= \\ &= P(x(t) + x_1^0, x(t-\tau) + x_1^0, y(t-\tau) + y_1^0) - \\ &\quad - P(x_1^0, x_1^0, y_1^0), \\ Q(y(t), x(t-\tau), y(t-\tau)) &= \\ &= Q(y(t) + y_1^0, x(t-\tau) + x_1^0, y(t-\tau) + y_1^0) - \\ &\quad - Q(y_1^0, x_1^0, y_1^0).\end{aligned}$$

The system of linear approximation in a neighborhood of a singular point $O_1(x_1^0, y_1^0)$ with nonlinear function defined in (2), will look like

$$\dot{z}(t) = Az(t) + Bz(t-\tau), \quad (5)$$

$$\begin{aligned}A &= \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & 0 \end{pmatrix}, z(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}, \\ z(t-\tau) &= \begin{pmatrix} x(t-\tau) \\ y(t-\tau) \end{pmatrix},\end{aligned}$$

With coefficients

$$\begin{aligned}a_{11} &= a - b \frac{x_1 y_1}{1 + Px_1}, a_{22} = -c + d \frac{x_1^2}{1 + Px_1}, \\ b_{11} &= -b \frac{x_1 y_1}{(1 + Px_1)^2}, b_{12} = -b \frac{x_1^2}{(1 + Px_1)^2},\end{aligned}\quad (6)$$

Let's define a common approach for obtaining estimates of convergence solutions of nonlinear perturbed systems (4) in the vicinity of the zero equilibrium. Let the eigenvalues of matrix $A+B$ have negative real parts, ie conditions of zero asymptotic stability of

equilibrium systems of linear approximation (5) in the vicinity of the second singular point $O_1(x_1, y_1)$ are satisfied. For estimates of the convergence solutions of the nonlinear system (4) will use the quadratic Lyapunov function

$$V(t, x, y) = h_{11}x^2 + 2h_{12}xy + y^2,$$

where

$$H = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{12} & h_{22} \end{bmatrix}$$

symmetric positively defined matrix which is the solution of Lyapunov matrix equation

$$(A + B)^T H + H(A + B) = -C, \quad (7)$$

The full derivative of Lyapunov quadratic Lyapunov function has the following form because of the nonlinear system (4)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} V(x(t), y(t)) = \\ + (\dot{x}(t), \dot{y}(t)) H \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} + (x(t), y(t)) H \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} V(x(t), y(t)) = \\ = 2[h_{11}x(t) + h_{12}y(t)] \times P(x(t), x(t-\tau), y(t-\tau)) + \\ + 2[h_{12}x(t) + h_{22}y(t)] \times Q(y(t), x(t-\tau), y(t-\tau)). \end{aligned}$$

After separating the linear approximation, we write the derivative as

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} V(x(t), y(t)) = 2[h_{11}x(t) + h_{12}y(t)] \times \\ \times [a_{11}x(t) + b_{11}x(t-\tau) + b_{12}y(t-\tau)] + \\ + 2[h_{21}x(t) + h_{22}y(t)] \times [a_{22}y(t) + b_{21}x(t-\tau)] + \\ + R_1[x(t), y(t), x(t-\tau), y(t-\tau)], \quad (8) \end{aligned}$$

where part of derivative with nonlinearity, is bigger that the other looks like $R_1[x(t), y(t), x(t-\tau), y(t-\tau)] = 2[h_{11}x(t) + h_{12}y(t)] \times [P(x(t), x(t-\tau), y(t-\tau)) - (a_{11}x(t) + b_{11}x(t-\tau) + b_{12}y(t-\tau))] + 2[h_{21}x(t) + h_{22}y(t)] \times [Q(y(t), x(t-\tau), y(t-\tau)) - (a_{22}y(t) + b_{21}x(t-\tau))]$.

By selecting into the first two components of the original Lyapunov function (8) linear terms without delay, we'll get

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} V(x(t), y(t)) = \\ = 2[h_{11}x(t) + h_{12}y(t)] \times [(a_{11} + b_{11})x(t) + b_{12}y(t)] + \\ + 2[h_{21}x(t) + h_{22}y(t)] \times [a_{22}y(t) + b_{21}x(t)] + \\ + 2[h_{11}x(t) + h_{12}y(t)] \times \\ \times [b_{11}(x(t-\tau) - x(t)) + b_{12}(y(t-\tau) - y(t))] + \\ + 2[h_{21}x(t) + h_{22}y(t)] b_{21}(x(t-\tau) - x(t)) + \\ + R_1[x(t), y(t), x(t-\tau), y(t-\tau)]. \quad (9) \end{aligned}$$

As linear approximation system was held thus for term $R_1[x(t), y(t), x(t-\tau), y(t-\tau)]$ we'll have the next estimate

$$\begin{aligned} R_1[x(t), y(t), x(t-\tau), y(t-\tau)] \leq \\ \leq N_1 [x(t)]^2 + [y(t)]^2]^{\frac{1}{2} + \alpha} + \\ + N_2 [x(t-\tau)]^2 + [y(t-\tau)]^2]^{\frac{1}{2} + \beta}, \quad \alpha > 0, \beta > 0. \quad (10) \end{aligned}$$

Matrix H is the solution of the Lyapunov matrix equation (7). Therefore, by replacing the first component of the original Lyapunov function in expression (9) by her value from matrix equation (7), we obtain

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} V(x(t), y(t)) \leq -\lambda_{\min}(C) [x^2(t) + y^2(t)] + \\ + 2[h_{11}x(t) + h_{12}y(t)] \times \\ \times [b_{11}(x(t-\tau) - x(t)) + b_{12}(y(t-\tau) - y(t))] + \\ + 2[h_{21}x(t) + h_{22}y(t)] b_{21}(x(t-\tau) - x(t)) + \\ + R_1[x(t), y(t), x(t-\tau), y(t-\tau)]. \end{aligned}$$

By studying the solution stability of systems with aftereffect with Lyapunov functions the so-called conditions of B.S. Razumikhina is used. Its purport is that the total derivative is computed on the boundary surface of Lyapunov function, and the background is in the middle. This condition has the form

$$V(x(s), y(s)) < V(x(t), y(t)), \quad s < t$$

and for selected quadratic Lyapunov function is specified by dependency

$$\lambda_{\min}(H)[x^2(s) + y^2(s)]^2 < \lambda_{\max}(H)[x^2(t) + y^2(t)]^2, \quad (11)$$

where $\lambda_{\min}(H)$, $\lambda_{\max}(H)$ the smallest and largest eigenvalues of symmetric positively defined matrices H . Therefore

$$\begin{aligned} |x(t-\tau)| &< \sqrt{\varphi(H)}[x^2(t) + y^2(t)]^{1/2}, \\ |y(t-\tau)| &< \sqrt{\varphi(H)}[x^2(t) + y^2(t)]^{1/2}. \end{aligned} \quad (12)$$

Using the estimates (12) for part of the inequality that characterizes linear effect of delay we have the following estimate

$$\begin{aligned} R_2[x(t), y(t), x(t-\tau), y(t-\tau)] &= [h_{11}x(t) + h_{12}y(t)] \times \\ &\times [b_{11}(x(t-\tau) - x(t)) + b_{12}(y(t-\tau) - y(t))] + \\ &+ [h_{21}x(t) + h_{22}y(t)]b_{21}(x(t-\tau) - x(t)) \leq \\ &\leq [|h_{11}|x(t)| + |h_{12}|y(t)] \times (|b_{11}| + |b_{12}|)\sqrt{\varphi(H)} \times \\ &\times [x^2(t) + y^2(t)]^{1/2} + [|h_{21}|x(t)| + |h_{22}|y(t)] \times \\ &\times |b_{21}|\sqrt{\varphi(H)}[x^2(t) + y^2(t)]^{1/2} = \\ &= [x^2(t) + y^2(t)]^{1/2} \sqrt{\varphi(H)} \times \\ &\times \{ |x(t)|[|h_{11}|(|b_{11}| + |b_{12}|) + |h_{21}||b_{21}|] + \\ &+ |y(t)|[|h_{12}|(|b_{11}| + |b_{12}|) + |h_{22}||b_{21}|] \}. \end{aligned}$$

Denoting

$$\begin{aligned} L_1 &= |h_{11}|(|b_{11}| + |b_{12}|) + |h_{21}||b_{21}|, \\ L_2 &= |h_{12}|(|b_{11}| + |b_{12}|) + |h_{22}||b_{21}|, \end{aligned} \quad (13)$$

we'll get

$$\begin{aligned} R_2[x(t), y(t), x(t-\tau), y(t-\tau)] &< \\ &< \sqrt{\varphi(H)}[x^2(t) + y^2(t)]^{1/2} [L_1|x(t)| + L_2|y(t)|]. \end{aligned}$$

Using the correspondence

$$ab + cd \leq \sqrt{a^2 + c^2} \times \sqrt{b^2 + d^2},$$

we'll have

$$R_2[x(t), y(t), x(t-\tau), y(t-\tau)] <$$

$$< \sqrt{\varphi(H)}\sqrt{L_1^2 + L_2^2}[x^2(t) + y^2(t)]. \quad (14)$$

Let's go back to the last component that characterizes the effect of nonlinearity system and its delay. Using the condition of B.S. Razumikhina and inequality (10) we have the following estimate of the total derivative of Lyapunov function relating to non-linear part of the system

$$\begin{aligned} |R_1(x(t), y(t), x(t-\tau), y(t-\tau))| &< \\ &< N_1[x^2(t) + y^2(t)]^{1+\alpha} + N_2(2\varphi(H))^{1+\beta} \times \\ &\times [x^2(t) + y^2(t)]^{1+\beta}. \end{aligned}$$

Therefore because of the nonlinear system (1) for the full derivative of Lyapunov function in the vicinity of the singular point, we have an expression that consists of four parts.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}V(t, x(t), y(t)) &\leq -\lambda_{\min}(C) \times [x^2(t) + y^2(t)] + \\ &+ \sqrt{\varphi(H)}\sqrt{L_1^2 + L_2^2}[x^2(t) + y^2(t)] + \\ &+ N_1[x^2(t) + y^2(t)]^{2+\alpha} + N_2(2\sqrt{\varphi(H)})^\beta \times \\ &\times [x^2(t) + y^2(t)]^{1+\beta} [x^2(t) + y^2(t)]^{2+\beta} \end{aligned}$$

The first part determines the stability of linear equilibrium system without delay, the second - the impact of the delay in linear part, the third - the impact of nonlinear system without delay, the fourth - the impact of nonlinear systems with delay.

Turning back to the irregularities described by Lyapunov function, we replace the phase coordinates with function. Whereas bilateral estimates quadratic Lyapunov function

$$\begin{aligned} \lambda_{\min}(H)[x^2(t) + y^2(t)]^2 &\leq V(x(t), y(t)) \leq \\ &\leq \lambda_{\max}(H)[x^2(t) + y^2(t)]^2, \end{aligned}$$

For Lyapunov function we get the two-sided inequality

$$\frac{V(x, y)}{\lambda_{\max}(H)} \leq x^2 + y^2 \leq \frac{V(x, y)}{\lambda_{\min}(H)}. \quad (15)$$

Using the inequalities (15), for the full derivative of Lyapunov function we get the following

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}V(x(t), y(t)) \leq & -\frac{\lambda_{\min}(C)}{\lambda_{\max}(H)}V(t, x(t), y(t)) + \\ & + \frac{\sqrt{\varphi(H)}}{\lambda_{\min}(H)}\sqrt{L_1^2 + L_2^2} \times V(x(t), y(t)) + \\ & + N_1 \left(\frac{V(x(t), y(t))}{\lambda_{\min}(H)} \right)^{1+\frac{\alpha}{2}} + \\ & + N_2 (2\varphi(H))^\beta \left(\frac{V(x(t), y(t))}{\lambda_{\min}(H)} \right)^{1+\frac{\beta}{2}}. \end{aligned} \quad (16)$$

Denoting

$$\begin{aligned} \gamma = \frac{\lambda_{\min}(C)}{\lambda_{\max}(H)}, \quad \xi = \frac{\sqrt{\varphi(H)}}{\lambda_{\min}(H)}(L_1^2 + L_2^2), \quad (17) \\ \eta = N_1 \left(\frac{1}{\lambda_{\min}(H)} \right)^{1+\frac{\alpha}{2}}, \quad \delta = N_2 (2\varphi(H))^\beta \left(\frac{1}{\lambda_{\min}(H)} \right)^{1+\frac{\beta}{2}}. \end{aligned}$$

Then the differentiated inequality (17) looks like

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}V(x(t), y(t)) < & -(\gamma - \xi)V(x(t), y(t)) + \eta V^{1+\frac{1}{2}\alpha}(x(t), y(t)) + \\ & + \delta V^{1+\frac{1}{2}\beta}(x(t), y(t)). \end{aligned} \quad (17)$$

If the system parameters and their eigenvalues of Lyapunov function are

$$\gamma - \xi > 0,$$

then in the area of

$$D = \left\{ (x, y) \in R^2 : \eta V^{\frac{1}{2}\alpha}(x, y) + \delta V^{\frac{1}{2}\beta}(x, y) < \gamma - \xi \right\}$$

derivative of Lyapunov function is negatively defined, the solutions of system will asymptotically ascend to a state of equilibrium. Thus the stability region zero equilibrium nonlinear system (4) and point of rest $O_1(x_1^0, y_1^0)$ of system (1) is defined by

$$D = \left\{ (x, y) \in R^2 : V^{\frac{1}{2}\alpha}(x, y) + V^{\frac{1}{2}\beta}(x, y) < \gamma - \xi \right\}, \quad (18)$$

where the parameters α, β determine the degree of linearity of right sides of the original system.

$$\begin{aligned} \gamma = \frac{\lambda_{\min}(C)}{\lambda_{\max}(H)}, \quad \xi = \frac{\sqrt{\varphi(H)}}{\lambda_{\min}(H)}(L_1^2 + L_2^2), \\ \eta = N_1 \left(\frac{1}{\lambda_{\min}(H)} \right)^{1+\frac{\alpha}{2}}, \quad \delta = N_2 (2\varphi(H))^\beta \left(\frac{1}{\lambda_{\min}(H)} \right)^{1+\frac{\beta}{2}}, \end{aligned}$$

L_1, L_2 are defined in (13),

$$\varphi(H) = \lambda_{\max}(H)/\lambda_{\min}(H),$$

H - solution of Lyapunov matrix equation (7).

There is the following statement. Let matrix $A + B$ of system of linear approximation (2) with parameters defined in (6) is asymptotically stable and inequality

$$\begin{aligned} \gamma - \xi > 0, \quad \gamma = \frac{\lambda_{\min}(C)}{\lambda_{\max}(H)}, \quad \xi = \frac{\sqrt{\varphi(H)}}{\lambda_{\min}(H)}(L_1^2 + L_2^2), \\ \eta = N_1 \left(\frac{1}{\lambda_{\min}(H)} \right)^{1+\frac{\alpha}{2}}, \quad \delta = N_2 (2\varphi(H))^\beta \left(\frac{1}{\lambda_{\min}(H)} \right)^{1+\frac{\beta}{2}}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_1 &= |h_{11}|(|b_{11}| + |b_{12}|) + |h_{21}||b_{21}|, \\ L_2 &= |h_{12}|(|b_{11}| + |b_{12}|) + |h_{22}||b_{21}|, \end{aligned}$$

Then the equilibrium state $O_1(x_1^0, y_1^0)$ of output nonlinear model (1), (2) with parameters

$$\begin{aligned} x_1^0 &= \frac{Pc + \sqrt{P^2c^2 + 4cd}}{2d}, \\ y_1^0 &= a \frac{Pc + \sqrt{P^2c^2 + 4cd}}{2bc} \end{aligned}$$

Is asymptotically stable. Moreover, the area of stability is defined by

$$\begin{aligned} D_1 = \left\{ (x_1, y_1) \in R^2 : \eta V^{\frac{1}{2}\alpha}(x_1 - x_1^0, y_1 - y_1^0) + \right. \\ \left. + \delta V^{\frac{1}{2}\beta}(x_1 - x_1^0, y_1 - y_1^0) < \gamma - \xi \right\}, \end{aligned}$$

where H is symmetrical, positively defined matrix, which is the solution of the Lyapunov matrix equation (7).

Список використаних джерел

1. *Malthus T.R.* An Essay on the Principle of Population / T.R. Maltus.- London: Johnson, 1798. – 134 с.
2. *Базыкин А.Д.* Математическая биофизика взаимодействующих популяций / А.Д. Базыкин. – Москва: Наука, 1985. – 181 с.
3. *Эльсгольц Л.Э.* Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом / Л.Э.Эльсгольц, С.Б.Норкин – М: Наука, 1970. – 240 с.
4. *Хейл Д.К.* Теория функционально-дифференциальных уравнений / Д.К.Хейл; перевод с англ. С.Н. Шиманова. – М.: Мир, 1984. – 421 с.
5. *Хусаинов Д.Я.* Линейные динамические системы с последействием. Представление решений, устойчивость, управление, стабилизация / Д.Я.Хусаинов, Й.Диблик, М.Ружичкова – Киев: Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко, ГП Информационно-аналитическое агентство, 2015. – 252 с.
6. *Гаркуша Н.І.* Про одну математичну модель динаміки взаємодіючих популяцій / Н.І. Гаркуша // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія фізико-математичні науки. – 2014. - №4. – С. 135-138.
7. *Гаркуша Н.І.* Динаміка однієї екологічної моделі «хижак-жертва» без врахування вікової структури / Н.І. Гаркуша // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія кібернетика. – 2014. - №14. – С. 22-24.
8. *Гаркуша Н.І.* Отримання оцінки області стійкості положення рівноваги моделі популяції з післядією / Н.І. Гаркуша // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія: фізико-математичні науки. – 2015. - №2. – С. 123-127.
9. *Гаркуша Н.І.* Дослідження динаміки однієї математичної моделі популяції при малих щільностях популяції жертви / Н.І. Гаркуша // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія: фізико-математичні науки. – 2015. - №3. – С. 72-75.

References

1. *MALTHUS, T.* (1798) *An Essay on the Principle of Population as it Affects the Future Improvement of Society, with Remarks on the Speculations of Mr. Godwin, M. Condorcet, and Other Writers.* London: Johnson.
2. *BAZYKIN, A.* (1985) *Mathematical Biophysics of Interacting Populations.* Moskva: Nauka.
3. *ELSGOLTZ, L., NORKIN, S.* (1970) *Introduction to the Theory of Differential Equations with Deviating Argument.* Moskva: Nauka.
4. *HALE, J.* (1977) *Theory of functional differential equations.* New York etc.: Springer.
5. *HUSAINOV, D., DIBLIK, I., RUZHICHKOVA, M.* (2015) *Linear dynamic systems with aftereffect. Representation of solutions, stability, control, stabilization.* Kyiv: Taras Shevchenko National University of Kyiv, GP Information-analytical agency.
6. *GARKUSHA, N.* (2014) About One Mathematical Model of the Dynamics of Interacting Population. In *Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series Physcs&Mathematics.* №4.– p.135-138.
7. *GARKUSHA, N.* (2014) The Dynamics of the Ecological Model “Predator-Prey” without Age Structure. In *Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv Series Cybernetics,* №14. - p. 22-24.
8. *GARKUSHA, N.* (2015) Obtaining the estimation of the stability area of equilibrium in the model of population with aftereffect. In *Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series Physcs&Mathematics.* №2.– p.123-127.
9. *GARKUSHA, N.* (2015) Investigation dynamics of mathematical model of the of population with low densities of prey. In *Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series Physics&Mathematics.* №3.– p.72-75.

Надійшла до редколегії 22.09.2016 р.

УДК 519.21

Чечельницький О.А., к.ф.-м.н., доцент

**Про асимптотичні властивості
мережевої моделі з двовимірним
вхідним потоком вимог**

Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, пр-т.
Академіка Глушкова 4д,
e-mail: alex_che@voliacable.com

O.A. Chechelnitsky, PhD in Math., Associate
Professor.

**On asymptotic properties of the network
model with the bivariate input flow of
customers**

Taras Shevchenko National University of Kyiv,
03680, Kyiv, Glushkova st., 4d,
e-mail: alex_che@voliacable.com

Останнім часом моделям з повторними викликами приділяється багато уваги через те, що вони знаходять застосування при аналізі різних реальних систем таких, як call центри, комп'ютерні мережі та системи телекомунікації. Моделі з повторними викликами характеризуються тим, що вимоги, які не можуть отримати обслуговування одразу після прибуття, поступають на віртуальну орбіту (буфер) і повторюють свій запит на обслуговування через випадкові інтервали часу. Як наслідок, аналіз моделей з повторними викликами є більш складним ніж звичайних моделей без повторів. Дана стаття присвячена дослідженню мережевої моделі з двома вузлами. Перший вузол функціонує як система $M/M_Q/1/w.r.$, а другий – як система $M/M/1$. Крім того, ми передбачаємо, що вимоги надходять до мережевої моделі згідно з двовимірним потоком Пуассона. Цей потік характеризується тим, що вимоги з нього можуть надходити парами одночасно. Вивчається стохастичний процес числа вимог у вузлах моделі. Досліджено режим великого навантаження мережевої моделі з двовимірним пуассонівським вхідним потоком вимог. Доведені теореми про принцип усереднення та дифузійну апроксимацію процесу обслуговування.

Ключові слова: мережева модель обслуговування, двовимірний пуассонівський вхідний потік, слабка збіжність, дифузійна апроксимація.

Recently, models with retrial queues are paid much attention because they have applications in performance analysis of various systems such as call centers, computer networks and telecommunication systems. The models with retrial queues are characterized by the fact that customers that cannot receive service upon arrival enter a virtual orbit and retry for service again after some random time. The arrival flow from the orbit makes the underlying Markov chain of retrial queues to be no homogeneous. As a result, analysis of the models with retrial queues is much more difficult than that of the corresponding queueing models without retrials. The present article is devoted to research the network model with two nodes. The first node operates as the system $M/M_Q/1/w.r.$ and the second node operates as the system $M/M/1$. Besides we assume that customers arrive to our model according a bivariate Poisson input flow. This process is characterized by the fact that customers arrive simultaneously. We consider the number of customers in the systems at time t . This stochastic process describes the state of our network model. In present paper the heavy traffic regime of the network model with the bivariate Poisson input flow of customers was investigated. The diffusion approximation for the service process was obtained.

Key Words: network model, bivariate Poisson input flow, weak convergence, diffusion approximation

Статтю представив д.т.н., проф. Заславський В.А.

Розглянемо мережеву модель, яка складається з двох вузлів. Перший вузол функціонує як система обслуговування з повторними викликами типу $\langle M / M_Q / 1 / w.r. \rangle$, а другий є одноканальною системою масового обслуговування типу $\langle M / M / 1 \rangle$. Вимоги до вузлів прибувають з потоку, який є двовимірним пуассонівським потоком вимог $(v_1(t), v_2(t))$ з параметрами $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$, $b > 0$. Вимоги з потоку $v_1(t)$ прибувають на першу систему, а вимоги з потоку $v_2(t)$ прибувають на другу систему обслуговування. Вимога з зовнішнього потоку, яка надійшла до вузла $\langle M / M_Q / 1 / w.r. \rangle$ і застала обслуговуючий прилад зайнятим, стає в чергу і утворює незалежний пуассонівський потік повторних запитів з параметром $v(a) > 0$, де змінна a описує число вимог у першому вузлі. Якщо ж прилад є вільним, він обслуговує вимогу, незалежно від того, звідки б вона не надійшла, інтервал часу, який має показниковий розподіл з параметром $\mu_1 > 0$. Другий вузол складається з одного приладу, який обслуговує вимоги з зовнішнього потоку випадковий інтервал часу з показниковим розподілом з параметром $\mu_2 > 0$. Позначимо через $X_1(t)$ число вимог у першому вузлі, а через $X_2(t)$ - число вимог у другому вузлі.

Припустимо, що інтенсивність повторних звернень залежить від параметра n (параметр серії): $v^{(n)}(a) = n^{-1}v(n^{-1}a)$, а процеси

$X_1(t)$ та $X_2(t)$ розглянемо у зміненому масштабі часу nt : $X_1^{(n)}(t) = X_1(nt)$, $X_2^{(n)}(t) = X_2(nt)$, $X^{(n)}(t) = (X_1^{(n)}(t), X_2^{(n)}(t))$.

Справедлива наступна теорема.

Теорема 1. Нехай наша модель задовольняє наступним умовам:

- 1) $\lambda_2 + b - \mu_2 > 0$, а функція $v(a)$ є локально липшецевою по змінній a ;

$$2) \quad n^{-1}X^{(n)}(0) \xrightarrow{p} S_0, \quad \text{де} \\ X^{(n)}(0) = (X_1^{(n)}(0), X_2^{(n)}(0)), \quad S_0 = (s_0^1, s_0^2).$$

$$\text{Тоді} \quad \sup_{0 \leq t \leq T} \left| \frac{1}{n} X_n(nt) - s(t) \right| \xrightarrow{p} 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Функція $s(t) = (s_1(t), s_2(t))$ описується наступним чином: компонента $s_1(t)$ задовольняє диференційному рівнянню наступного вигляду:

$$ds_1(t) = (\lambda_1 + b)dt - m(s_1(t))^{-1}dt,$$

$$\text{де} \quad m(a) = \frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\lambda_1 + b + a_1 v(a)}.$$

$$\text{Компонента} \quad s_2(t) = (\lambda_2 + b - \mu_2)t.$$

Доведення. Розглянемо двовимірний процес обслуговування $X_n(t) = (X_n^1(t), X_n^2(t))$ в послідовні моменти часу $t_{n1} < t_{n2} < \dots$, що є моментами завершення обслуговування вимоги, яка знаходиться у першому вузлі, $t_{n0} = 0$. Таким чином, $t_{n1} < t_{n2} < \dots$ - послідовні моменти завершення обслуговування у системі з повторними викликами, а $X_n(t_{nk} + 0) = (X_{nk}^1(t_{nk} + 0), X_{nk}^2(t_{nk} + 0))$ - величина черги на двох вузлах в момент завершення обслуговування у першому вузлі. Взагалі кажучи, для того, щоб описати функціонування першого вузла, можна розглянути двокомпонентний процес $\pi_n(t) = (X_n^1(t), I_n(t))$, де $I_n(t)$ - число вимог, які знаходяться на обслуговуванні в системі обслуговування $M / M_X / M / 1(w.r.)$. Вочевидь, що фазовим простором процесу $\pi_n(t)$ є множина пар $\{(i, j) : i = 0, \infty, j = 0, 1\}$. В той же час, наш двокомпонентний процес в моменти завершення обслуговування $\pi_n(t_{nk} + 0)$ повністю визначається значенням першої компоненти $X_{nk}^1 = X_{nk}^1(t_{nk} + 0)$, а друга компонента в цей момент дорівнює нулеві.

Вивчимо розподіл випадкового інтервалу між послідовними закінченнями обслуговування вимог у першому вузлі нашої моделі. Для цього позначимо через $\tau_{nk}(na) = t_{nk+1} - t_{nk}$ - інтервал між завершеннями послідовних обслуговувань вимог у системі $M / M_X / M / 1(w.r.)$. Розподіл

величини $\tau_{nk}(na)$, вочевидь, буде залежати від числа вимог, які знаходяться на обслуговуванні na_1 в момент часу t_{nk} . Далі реалізація випадкової величини $\tau_{nk}(na_1)$ відбувається наступним чином. Наша система $M/M_X/M/1(w.r.)$ очікує випадковий інтервал часу, який має показниковий розподіл з параметром $\lambda_1 + b + av(a)$, надходження нової вимоги на обслуговуючий прилад першого вузла. Значення параметру визначається тим, що ця випадкова величина в свою чергу є мінімумом двох випадкових величин, а саме інтервалу між надходженнями вимог з зовнішнього потоку та інтервалу між надходженнями вимог з потоку повторних викликів. Потім, як складова величини $\tau_{nk}(na)$, незалежним чином реалізується експоненційна з параметром $\mu_1 > 0$ випадкова величина, яка описує тривалість часу обслуговування вимоги в системі $M/M_X/M/1(w.r.)$.

Таким чином, випадкова величина $\tau_{nk}(na)$ представляється у вигляді суми двох незалежних експоненційно розподілених випадкових величин $\tau_{nk}(na) = \theta(a) + \mathcal{G}$, де випадкова величина $\theta(a)$ має показниковий розподіл з параметром $\lambda_1 + b + av(a)$, а випадкова величина $\mathcal{G}$ має показниковий розподіл з параметром $\mu_1 > 0$. Отже, процес $\pi_n(t)$ знаходиться в стані $(na, 0)$ протягом випадкового інтервалу часу, який має показниковий розподіл з параметром $\lambda_1 + b + av(a)$, а потім з ймовірністю $\frac{\lambda_1 + b}{\lambda_1 + b + av(a)}$ починається обслуговування вимоги з зовнішнього потоку, або з ймовірністю $\frac{av(a)}{\lambda_1 + b + av(a)}$ - повторної вимоги.

Для подальшого доведення є важливим знайти представлення приростів нашого двовимірного випадкового процесу обслуговування $X_n(t) = (X_n^1(t), X_n^2(t))$ на інтервалі $\tau_{nk}(na)$. Вочевидь, що прирости процесу $X_n(t) = (X_n^1(t), X_n^2(t))$ на цих інтервалах є однорідними і не залежать від номеру k .

Враховуючи цю обставину, позначимо через ξ_{n1}

двовимірний вектор $\xi_{nk} = \begin{pmatrix} \xi_{n1}^1 \\ \xi_{n1}^2 \end{pmatrix}$, перша компонента якого описує приріст на інтервалі $\tau_{nk}(na)$ процесу обслуговування на першому, а друга компонента – приріст відповідно на другому вузлі. Розглянемо складові кожної з введених величин приростів для першого та другого вузлів нашої моделі.

Почнемо з розгляду ситуації, яка виникає в першому вузлі, тобто системі з повторними викликами $M/M_X/M/1(w.r.)$. Для конструктивного представлення величини ξ_{n1}^1 введемо наступне позначення: через $\Pi_\lambda(t)$ будемо позначати пуассонівський процес з параметром λ . Якщо показникова величина $\mathcal{G}$, яка описує тривалість обслуговування, реалізувалася на значенні $t, X_{nk}^1 = na_1$, тоді розподіл ξ_{n1}^1 може бути представлена наступним чином:

$$P(\xi_{n1}^1 = \Pi_{(\lambda_1+b)}(t) - 1) = \frac{av(a_1)}{\lambda_1 + b + av(a_1)},$$

$$P(\xi_{n1}^1 = \Pi_{(\lambda_1+b)}(t)) = \frac{\lambda_1 + b}{\lambda_1 + b + av(a_1)}$$

Використовуючи формулу повної ймовірності для умовних математичних сподівань, знайдемо математичне сподівання приросту першої компоненти процесу обслуговування:

$$\begin{aligned} b_n^1(a) &= M\xi_{n1}^1 = \\ &= M\left(\Pi_{(\lambda_1+b)}(\mathcal{G}) - 1\right) \frac{av(a)}{\lambda_1 + b + av(a)} + \\ &+ M\left(\Pi_{(\lambda_1+b)}(\mathcal{G})\right) \frac{\lambda_1 + b}{\lambda_1 + b + av(a)} = \\ &= \frac{1}{\lambda_1 + b + av(a)} \times \\ &\times \left(av(a) \int_0^{+\infty} M\left(\Pi_{(\lambda_1+b)}(t) - 1\right) d(1 - e^{-\mu_1 t}) + \right. \\ &\left. + (\lambda_1 + b) \int_0^{+\infty} M\Pi_{(\lambda_1+b)} d(1 - e^{-\mu_1 t}) \right) = \\ &= \frac{av(a)}{\lambda_1 + b + av(a)} \left(\frac{\lambda_1 + b}{\mu_1} - 1 \right) + \end{aligned}$$

$$+ \frac{\lambda_1 + b}{\lambda_1 + b + a\nu(a)} \frac{\lambda_1 + b}{\mu_1} =$$

$$= \frac{\lambda_1 + b}{\mu_1} - \frac{a\nu(a)}{\lambda_1 + b + a\nu(a)}.$$

Розглянемо тепер приріст другої компоненти нашого процесу обслуговування, який описує функціонування вузла з системою типу $M / M / 1 / +\infty$. Якщо, система завантажена, приріст другої компоненти може бути описаний наступною випадковою величиною :

$$\xi_{n1}^2 = \prod_{(\lambda_2+b)}(\vartheta) - \prod_{\mu}(\theta(a) + \vartheta)$$

З визначення системи масового обслуговування типу $M / M / 1 / +\infty$ випливає, що процес з такими приростами на інтервалі $t_{nk+1} - t_{nk}$ співпадає з траєкторією процесу $X_n(t)$ лише на тих проміжках, на яких траєкторії процесу з приростами ξ_{nk}^2 цілком належать простору R_+^2 .

Як і у випадку з першою компонентою процесу обслуговування, використовуючи формулу повної ймовірності для умовних математичних сподівань, знайдемо математичне сподівання приросту другої компоненти:

$$b_n^2(a) = M\xi_{n1}^2 =$$

$$= M \left(\prod_{(\lambda_2+b)}(\theta(a) + \vartheta) - \prod_{\mu_2}(\theta(a) + \vartheta) \right) =$$

$$= \lambda(a_1, a_2) \left(\frac{1}{\lambda(a_1, a_2) + a_1\nu(a_1)} + \frac{1}{\mu_1} \right) -$$

$$- \mu_2(a_1, a_2) \left(\frac{1}{\lambda(a_1, a_2) + a_1\nu(a_1)} + \frac{1}{\mu_1} \right) =$$

$$= (\lambda(a_1, a_2) - \mu_2(a_1, a_2)) \times$$

$$\times \left(\frac{1}{\lambda(a_1, a_2) + a_1\nu(a_1)} + \frac{1}{\mu_1} \right).$$

Для доведення принципу усереднення для нашого процесу обслуговування скористаємось теоремою, доведеною В.В. Анісімовим в [1]. Користуючись результатами про збіжність в рівномірній топології суперпозиції випадкових процесів, В.В. Анісімовим для напівмарковських процесів спеціального виду був доведений наступний результат.

Нехай при кожному $n \geq 1$ задані незалежні у сукупності сімейства випадкових векторів

$\{(\xi_{nk}(a), \tau_{nk}(a)), a \in R^m\}, k \geq 0$ зі значеннями в просторі $R^m \times [0, \infty)$, вимірні по аргументу a стосовно борелівської σ -алгебри в $R^m \times [0, \infty)$, та незалежна від введеного сімейства випадкова величина S_{n0} , яка описує початкове значення. Розглянемо послідовності випадкових величин, які задаються рекурентним чином: $t_{n0} = 0, S_{nk+1} = S_{nk} + \xi_{nk}(S_{nk})$

$$t_{nk+1} = t_{nk} + \tau_{nk}(S_{nk}), k \geq 0$$

На цих послідовностях побудуємо напівмарковський процес $S_n(t)$: $S_n(t) = S_{nk}$, $t_{nk} \leq t < t_{nk+1}, t \geq 0$. Як видно з побудови, процес $S_n(t)$ є неоднорідним напівмарковським процесом. Для вивчення нашої моделі достатньо розглянути однорідний випадок, коли розподіли випадкових величин $\xi_{nk}(a)$, та $\tau_{nk}(a)$ не залежать від індексу k . Позначимо через $m_n(a) = M\tau_{n1}(na)$, $b_n(a) = M\xi_{n1}(na)$.

Теорема (принцип усереднення). Нехай для напівмарковського процесу $S_n(t)$ виконані наступні умови:

- 1) $M\tau_{n1}(a)^2 + M|\xi_{n1}(a)|^2 < C$;
- 2) Для будь-якої константи $L > 0$, якщо $|a_1| \vee |a_2| < L$:
 $|m_n(a_1) - m_n(a_2)| + |b_n(a_1) - b_n(a_2)| < C_L |a_1 - a_2| + c_n$
 $c_n \rightarrow 0$ рівномірно по $|a_1| \vee |a_2| < L$;
- 3) Існують функції $m(a) > 0, b(a)$ такі, що для будь-якого $a \in R^m: m_n(a) \rightarrow m(a)$,
 $b_n(a) \rightarrow b(a)$, де $|b(a)| \leq C(1 + |a|)$;
- 4) $\frac{1}{n} S_{n0} \xrightarrow{p} s_0$.

Тоді $\sup_{0 \leq t \leq T} \left| \frac{1}{n} S_n(nt) - s(t) \right| \xrightarrow{p} 0$, де функція $s(t)$

задовольняє диференційному рівнянню

$$ds(t) = b(s(t))m(s(t))^{-1} dt, s(0) = s_0$$

Повертаючись до аналізу нашої моделі, можемо зауважити, що процес

$$X_n(t) = (X(t_{nk} + 0), X(t_{nk} + 0)) \quad \text{для}$$

$t_{nk} \leq t < t_{nk+1}$, де $t_{nk+1} = t_{nk} + \tau_{nk}(na_1, na_2)$ є напівмарковським, для якого можна застосувати результат вищенаведеної теореми. А саме, умова

1) на другі моменти є вочевидь виконаною,

оскільки існують другі моменти у показникового та пуассонівського розподілів, умова 2) буде виконуватись, якщо передбачити, що функція $v(a)$ є локально липшицевою. Крім того, в наслідок попередніх розрахунків, математичні сподівання часу перебування напівмарковського процесу $X_n(t)$ та його приростів задовольняють умові 3). Умова 4) на початкове значення також є виконаною. Таким чином, для будь-якого $T > 0$ будемо мати

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \left| \frac{1}{n} X_n(nt) - s(t) \right|^p \rightarrow 0,$$

де функція $s(t)$ задовольняє рівнянням наступного вигляду:

$$\begin{cases} ds_1(t) = (\lambda_1 + b)dt - m(s_1(t))^{-1} dt \\ s_2(t) = (\lambda_2 + b - \mu_2)t \end{cases},$$

$$\text{де } m(a) = \frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\lambda_1 + b + av(a)}.$$

Аналогічний аналіз дозволяє отримати результат про дифузійну апроксимацію змішаної мережі паралельної структури.

Для доведення теореми про збіжність у рівномірній топології випадкового процесу $X_n(t)$ також використаємо відповідну теорему, доведену В.В. Анісімовим [1]. Нехай $X_n(t)$ є напівмарковським процесом рекурентного типу, який розглядався в теоремі про принцип усереднення. Введемо послідовність випадкових процесів

$$\zeta_n(t) = \frac{1}{\sqrt{n}} (X_n(nt) - ns(t)), t \geq 0,$$

де $s(t)$ задовольняє диференційному рівнянню з теореми про принцип усереднення. Будемо позначати

$$\begin{aligned} \rho_{nk}(a) &= \xi_{nk}(na) - b_n(a) - \\ &\quad - \tilde{b}(a)(\tau_{nk}(na) - m_n(a)) \\ D_n^2(a) &= M\rho_{n1}(a)\rho_{n1}(a)^*, \\ q_n(a, z) &= \sqrt{n} \left(\tilde{b}_n \left(a + \frac{z}{\sqrt{n}} \right) - \tilde{b}(a) \right), \\ a, z &\in R^m, \\ \tilde{b}_n(a) &= b_n(a)m_n(a)^{-1}, \\ \tilde{b}(a) &= b(a)m(a)^{-1}. \end{aligned}$$

Теорема (дифузійна апроксимація).

Нехай є виконаними умови теореми про принцип усереднення, величина c_n в умові 2) є такою, що $\sqrt{nc_n} \rightarrow 0$, та для будь-якого $L > 0$ і при $|a_1| \vee |a_2| < L$:

$$1) \quad |D_n(a_1) - D_n(a_2)| \leq C_L |a_1 - a_2| + \alpha_n, \quad \text{де } \alpha_n \rightarrow 0 \text{ рівномірно по } |a_1| \vee |a_2| < L;$$

для будь-яких $a, z \in R^m$

$$\begin{aligned} q_n(a, z) &\rightarrow Q(a)z + g(a), \\ D_n^2(a) &\rightarrow D^2(a), \end{aligned}$$

де функції $Q(a)$ та $g(a)$ неперервні;

$$3) \lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{|a| < Ln} \left(M\tau_{n1}^2(a) \chi(\tau_{n1}^2(a) > N) + M\xi_{n1}^2(a) \chi(\xi_{n1}^2(a) > N) \right) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0$$

$$\text{та } \zeta_n(0) \xrightarrow{cs} \zeta_0.$$

Тоді $\zeta_n(t)$ збігається в рівномірній топології на будь-якому інтервалі $[0, T]$ такому, що з ймовірністю $1 - \gamma(+\infty) > T$, де

$$y(t) = \int_0^t m(\eta(u))du, \quad \text{а } \eta(t) \text{ задовольняє}$$

диференційному рівнянню $d\eta(t) = b(\eta(t))dt$, $\eta_0 = s_0$, до дифузійного процесу $\zeta(t)$, який задовольняє стохастичному диференційному рівнянню

$$\begin{aligned} d\zeta(t) &= (Q(s(t))\zeta(t) + g(s(t)))dt + \\ &\quad + D(s(t))m(s(t))^{-1/2}dw(t), \end{aligned}$$

$\zeta(0) = \zeta_0$, де $w(t)$ - стандартний вінерівський процес в просторі R^2 .

Використаємо наведену теорему для доведення збіжності процесу $X_n(t)$.

Теорема 2. Якщо додатково до умов теореми 1 функції $\lambda(a_1, a_2)$, $v(a_1)$ та $\mu_2(a_1, a_2)$ мають неперервні похідні по кожному аргументу, $\frac{1}{\sqrt{n}}(X_n(0) - ns_0) \xrightarrow{\tilde{w}} \zeta_0$ при $n \rightarrow +\infty$, тоді послідовність випадкових процесів $\zeta_n(t) = \frac{1}{\sqrt{n}}(X_n(nt) - ns(t))$, $t \geq 0$ збігається на будь-якому проміжку $[0, T]$ в рівномірній

топології до процесу $\zeta(t)$, який задовольняє стохастичному диференційному рівнянню :

$$d\zeta(t) = G(s(t))\zeta(t)dt + B(s(t))dw(t),$$

де перша компонента вектору переносу $G(s(t)) = (G_1(s_1(t), s_2(t)), G_2(s_1(t), s_2(t)))$ має вигляд :

$$G_1(s_1(t)) = \frac{d}{a_1} \left(\frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\lambda_1 + b + av(a)} \right)^{-1},$$

друга компонента вектору переносу дорівнює нулю:

$$G_2(s_2(t)) = 0.$$

Матриця дифузії

$$B^2(s(t)) = \begin{bmatrix} b_{11}(s(t)) & b_{12}(s(t)) \\ b_{21}(s(t)) & b_{22}(s(t)) \end{bmatrix} \in \text{матрицею з}$$

компонентами:

$$\begin{aligned} b_{11}(s(t)) &= (\lambda_1 + b)m(s_1(t)) + \\ &+ \sigma^2(s_1(t))m(s_1(t))^{-2} - \\ &- 2(\lambda_1 + b)m(s_1(t))^{-1} \times \\ &\times ((\lambda_1 + b) + s_1(t)v(s_1(t)))^{-2} \end{aligned}$$

$$m(s_1(t)) = \frac{1}{\mu_1} + ((\lambda_1 + b) + s_1(t)v(s_1(t)))^{-1}$$

$$\sigma^2(s_1(t)) = \frac{1}{\mu_1^2} + ((\lambda_1 + b) + s_1(t)v(s_1(t)))^{-2}$$

$$b_{12}(s_1(t), s_2(t)) = b_{21}(s_1(t), s_2(t)) = b$$

$$b_{22}(s_1(t), s_2(t)) = \lambda_2 + b + \mu_2$$

Висновки. Розглянута модель, як видно з попереднього аналізу, може бути описана відповідним ланцюгом Маркова з неперервним часом. Можна тільки уявити рівень складності задач, які виникають при дослідженні цього процесу, зважаючи на залежність параметру повторних викликів моделі від її станів та неоднорідність по вузлах.

Отримані результати натомість дають можливість асимптотично при $n \rightarrow \infty$ вважати складний двовимірний процес обслуговування у вузлах нашої мережевої моделі еквівалентним більш простому процесу $ns(t) + \sqrt{n}\xi(t)$, тобто

$$\begin{pmatrix} X_n^1(t) \\ X_n^2(t) \end{pmatrix} \approx n \begin{pmatrix} s_1(t) \\ s_2(t) \end{pmatrix} + \sqrt{n} \begin{pmatrix} \xi_1(t) \\ \xi_2(t) \end{pmatrix}.$$

Список використаних джерел

1. Анисимов В.В. Стохастические сети обслуживания./ Анисимов В.В., Лебедев Е.А.// Лыбидь. – 1992. – С.105.
2. Anisimov V.V. Averaging Methods for Overloading Retrial Queueing Systems/ Anisimov V.V. //Mathematical and Computer Modelling – 30. – 1999. – P.65-78.
3. Anisimov V.V. Diffusion approximation in overloaded switching queueing models/ Anisimov V.V. // Queueing Systems. – 40. – 2. – 2002. – P.141-180.
4. Anisimov V.V. Switching processes in Queueing Models/ Anisimov V.V.// John Wiley & Sons, London, UK, Hoboken, NJ. – 2006. – P.150.

References

1. ANISIMOV V.V. and LEBEDEV E.A. (1992) Stochastic service networks. *Lybid*.
2. ANISIMOV V.V (1999) Averaging Methods for Overloading Retrial Queueing Systems. *Mathematical and Computer Modelling* – 30. – P.65-78.
3. ANISIMOV V.V (2002) Diffusion approximation in overloaded switching queueing models. *Queueing Systems*. – 40 – 2 –P.141-180.
4. ANISIMOV V.V (2006). Switching processes in Queueing Models. *John Wiley & Sons, London, UK, Hoboken, NJ*.

Надійшла до редакції 01.09.2016

УДК 004.42:510.69

Шкільняк С. С., д. ф.-м. н., проф.,
Волковицький Д. Б., аспірант.

Системи логічного виведення в логіках безкванторно-функціональних рівнів

Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 83000, м. Київ, пр-т
Глушкова, 4д,
e-mail: ttp@unicyb.kiev.ua

S.S. Shkilniak, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof.,
D.B. Volkovytskyi, Postgraduate Student

Systems of logical reasoning in logics of free-quantifier functional levels

Taras Shevchenko National University of Kyiv,
83000, Kyiv, Glushkova st., 4d,
e-mail: ttp@unicyb.kiev.ua

Побудовано числення секвенційного типу для композиційно-номінативних логік часткових предикатів безкванторно-функціональних рівнів. Такі числення запропоновано для безкванторно-функціональних логік та їх різновидів зі слабкою рівністю та строгою рівністю. Вказано базові секвенційні форми та умови замкненості секвенцій, для цих числень доведено теореми коректності й повноти.

Ключові слова: логіка, предикат, безкванторно-функціональний рівень, секвенційне числення.

In this paper we study new classes of program-oriented logical formalisms: free-quantifier composition-nominative logics of partial quasi-ary predicates. This logics occupy intermediate position between propositional logic and first-order logics. For their logics we propose sequent systems of logical reasoning. Effective reasoning may be a key part of many information and program systems. Sequent calculi is a reliable Gentzen-style deduction system. These calculi are a formalization of logical consequence, one of the central concepts of logic. The focus of the paper is devoted to construction the sequent calculi for three classes of logics of free-quantifier levels: free-quantifier functional logics, free-quantifier functional logics with composition of weak equality and with composition of strong equality. Sequent calculi are proposed for relations of IR-consequence $\models_{IR}$, T-consequence $\models_T$, F-consequence $\models_F$ and TF-consequence $\models_{TF}$. We specify basic sequent forms and sequent closure conditions for these calculi and describe proof construct in these calculi – sequent tree. For the proposed calculi we prove the soundness theorem, the theorems about a countermodels for non-closed path in the sequent tree and the completeness theorem.

Key words: logic, predicate, free-quantifier level, sequent calculus.

Статтю представив д. ф.-м. н., проф. Буй Д.Б.

Для успішного розв'язання задач, що виникають в сучасних інформаційних та програмних системах, необхідний ефективний пошук виведень. Надійним апаратом побудови виведень є числення секвенційного (генценівського) типу. Низку таких числень розроблено (див., напр., [1]) для різних класів програмно-орієнтованих логічних формалізмів – композиційно-номінативних логік квазіарних предикатів.

Метою даної роботи є побудова секвенційних числень для композиційно-номінативних логік безкванторно-функціональних рівнів: безкванторно-функціональних логік (БКФЛ) та їх різновидів з композиціями слабкої рівності (БКФЛР) та строгої рівності (БКФЛРС). Такі числення формалізують відношення неспростовнісного $\models_{IR}$, істиннісного $\models_T$, хибнісного $\models_F$ та сильного $\models_{TF}$

логічного наслідку. Наведено умови замкненості секвенцій та базові секвенційні форми цих числень, доведено їх коректність та повноту.

Логіки безкванторно-функціональних рівнів займають проміжне становище між пропозиційною та першопорядковими логіками, вони є розширенням відомих реномінативних логік. Семантичні властивості безкванторно-функціональних логік вивчалися в [2, 3]. В цих роботах описано композиції суперпозиції та слабкої і строгої рівності, розглянуто семантичні моделі та мови, досліджено властивості відношень $\models_{IR}$, $\models_T$, $\models_F$, $\models_{TF}$. Властивості цих відношень є семантичною основою побудови для БКФЛ, БКФЛР, БКФЛРС відповідних числень секвенційного типу.

Поняття, які в цій статті не визначаються, тлумачимо в сенсі робіт [1–3].

1. Різновиди секвенційних числень логік безкванторно-функціональних рівнів

Секвенції трактуємо як множини формул, специфікованих символами $\vdash$ та $\neg$. Будуємо їх так: секвенція $\vdash \Gamma \neg \Delta$ вивідна $\Leftrightarrow \Gamma \models \Delta$. Секвенція Σ вивідна, якщо існує замкнене секвенційне дерево з коренем Σ . Замкненість $\vdash \Gamma \neg \Delta$ означає $\Gamma \models \Delta$.

Секвенційне числення задаємо базовими секвенційними формами і умовами замкненості секвенції.

Базова умова замкненості секвенції $\vdash \Gamma \neg \Delta$:

C) існує формула Φ така, що $\Phi \in \Gamma$ та $\Phi \in \Delta$.

Додаткові умови замкненості $\vdash \Gamma \neg \Delta$:

CL) існує формула Φ : $\Phi \in \Gamma$ та $\neg \Phi \in \Gamma$;

CR) існує формула Φ : $\Phi \in \Delta$ та $\neg \Phi \in \Delta$;

CLR) існують формули Φ та Ψ такі:

$\Phi \in \Gamma$, $\neg \Phi \in \Gamma$, $\Psi \in \Delta$, $\neg \Psi \in \Delta$.

На **рівні БКФЛ** отримуємо такі числення.

Числення *FLR* формалізує $\models_{TF}$.

Умова замкненості секвенції: $C \vee CLR$.

Числення *FL* формалізує $\models_T$.

Умова замкненості секвенції: $C \vee CL$.

Числення *FR* формалізує $\models_F$.

Умова замкненості секвенції: $C \vee CR$.

Числення *FC* формалізує $\models_{IR}$.

Умова замкненості секвенції: C .

Опишемо базові секвенційні форми числень *FLR*, *FL*, *FR*. Спочатку наведемо основні форми еквівалентних перетворень.

$$\begin{aligned} \vdash S \neg \frac{\vdash \neg S^{\bar{v}}(\Phi, \bar{t}), \Sigma}{\vdash S^{\bar{v}}(\neg \Phi, \bar{t}), \Sigma}; & \quad \neg S \neg \frac{\neg \vdash S^{\bar{v}}(\Phi, \bar{t}), \Sigma}{\neg \vdash S^{\bar{v}}(\neg \Phi, \bar{t}), \Sigma}; \\ \vdash \neg S \neg \frac{\vdash S^{\bar{v}}(\Phi, \bar{t}), \Sigma}{\vdash \neg S^{\bar{v}}(\neg \Phi, \bar{t}), \Sigma}; & \quad \neg \neg S \neg \frac{\neg \vdash S^{\bar{v}}(\Phi, \bar{t}), \Sigma}{\neg \vdash \neg S^{\bar{v}}(\neg \Phi, \bar{t}), \Sigma}; \\ \vdash S \vee \frac{\vdash S^{\bar{v}}(\Phi, \bar{t}) \vee S^{\bar{v}}(\Psi, \bar{t}), \Sigma}{\vdash S^{\bar{v}}(\Phi \vee \Psi, \bar{t}), \Sigma}; & \\ \neg S \vee \frac{\neg \vdash S^{\bar{v}}(\Phi, \bar{t}) \vee S^{\bar{v}}(\Psi, \bar{t}), \Sigma}{\neg \vdash S^{\bar{v}}(\Phi \vee \Psi, \bar{t}), \Sigma}; & \\ \vdash \neg S \vee \frac{\vdash \neg (S^{\bar{v}}(\Phi, \bar{t}) \vee S^{\bar{v}}(\Psi, \bar{t})), \Sigma}{\vdash \neg S^{\bar{v}}(\Phi \vee \Psi, \bar{t}), \Sigma}; & \\ \neg \neg S \vee \frac{\neg \vdash \neg (S^{\bar{v}}(\Phi, \bar{t}) \vee S^{\bar{v}}(\Psi, \bar{t})), \Sigma}{\neg \vdash \neg S^{\bar{v}}(\Phi \vee \Psi, \bar{t}), \Sigma}. & \end{aligned}$$

Нехай Ψ отримана з Φ згортою суперпозицій згідно *SSΦ* (див. [3]). Маємо форми:

$$\begin{aligned} \vdash SS\Phi \frac{\vdash \Psi, \Sigma}{\vdash \Phi, \Sigma}; & \quad \neg SS\Phi \frac{\neg \vdash \Psi, \Sigma}{\neg \vdash \Phi, \Sigma}; \\ \vdash \neg SS\Phi \frac{\vdash \neg \Psi, \Sigma}{\vdash \neg \Phi, \Sigma}; & \quad \neg \neg SS\Phi \frac{\neg \vdash \neg \Psi, \Sigma}{\neg \vdash \neg \Phi, \Sigma}. \end{aligned}$$

Нехай Ψ отримана з елементарної Φ еквівалентними перетвореннями за теоремою 4 роботи [3].

Маємо форми нормалізації термів:

$$\begin{aligned} \vdash \text{NrTr} \frac{\vdash \Psi, \Sigma}{\vdash \Phi, \Sigma}; & \quad \neg \vdash \text{NrTr} \frac{\neg \vdash \Psi, \Sigma}{\neg \vdash \Phi, \Sigma}; \\ \vdash \neg \text{NrTr} \frac{\vdash \neg \Psi, \Sigma}{\vdash \neg \Phi, \Sigma}; & \quad \neg \neg \text{NrTr} \frac{\neg \vdash \neg \Psi, \Sigma}{\neg \vdash \neg \Phi, \Sigma}. \end{aligned}$$

Допоміжні форми спрощення:

$$\begin{aligned} \vdash \text{CI}\Phi \frac{\vdash \Phi, \Sigma}{\vdash S(\Phi), \Sigma}; & \quad \neg \text{CI}\Phi \frac{\neg \vdash \Phi, \Sigma}{\neg \vdash S(\Phi), \Sigma}; \\ \vdash \neg \text{CI}\Phi \frac{\vdash \neg \Phi, \Sigma}{\vdash \neg S(\Phi), \Sigma}; & \quad \neg \neg \text{CI}\Phi \frac{\neg \vdash \neg \Phi, \Sigma}{\neg \vdash \neg S(\Phi), \Sigma}; \\ \vdash \text{CN}\Phi \frac{\vdash S^{\bar{v}}(\Phi, \bar{t}), \Sigma}{\vdash S^{\bar{x}, \bar{v}}(\Phi, \bar{x}, \bar{t}), \Sigma}; & \\ \neg \text{CN}\Phi \frac{\neg \vdash S^{\bar{v}}(\Phi, \bar{t}), \Sigma}{\neg \vdash S^{\bar{x}, \bar{v}}(\Phi, \bar{x}, \bar{t}), \Sigma}; & \\ \vdash \neg \text{CN}\Phi \frac{\vdash \neg S^{\bar{v}}(\Phi, \bar{t}), \Sigma}{\vdash \neg S^{\bar{x}, \bar{v}}(\Phi, \bar{x}, \bar{t}), \Sigma}; & \\ \neg \neg \text{CN}\Phi \frac{\neg \vdash \neg S^{\bar{v}}(\Phi, \bar{t}), \Sigma}{\neg \vdash \neg S^{\bar{x}, \bar{v}}(\Phi, \bar{x}, \bar{t}), \Sigma}; & \\ \vdash \text{CU}\Phi \frac{\vdash S^{\bar{v}}(\Phi, \bar{t}), \Sigma}{\vdash S^{\bar{x}, \bar{v}}(\Phi, \bar{x}, \bar{t}), \Sigma}, x \in v(\Phi); & \\ \neg \text{CU}\Phi \frac{\neg \vdash S^{\bar{v}}(\Phi, \bar{t}), \Sigma}{\neg \vdash S^{\bar{x}, \bar{v}}(\Phi, \bar{x}, \bar{t}), \Sigma}, x \in v(\Phi); & \\ \vdash \neg \text{CU}\Phi \frac{\vdash \neg S^{\bar{v}}(\Phi, \bar{t}), \Sigma}{\vdash \neg S^{\bar{x}, \bar{v}}(\Phi, \bar{x}, \bar{t}), \Sigma}, x \in v(\Phi); & \\ \neg \neg \text{CU}\Phi \frac{\neg \vdash \neg S^{\bar{v}}(\Phi, \bar{t}), \Sigma}{\neg \vdash \neg S^{\bar{x}, \bar{v}}(\Phi, \bar{x}, \bar{t}), \Sigma}, x \in v(\Phi). & \end{aligned}$$

Форми декомпозиції формул:

$$\begin{aligned} \vdash \neg \neg \frac{\vdash \Phi, \Sigma}{\vdash \neg \neg \Phi, \Sigma}; & \quad \neg \neg \neg \frac{\neg \vdash \Phi, \Sigma}{\neg \vdash \neg \neg \Phi, \Sigma}; \\ \vdash \vee \frac{\vdash \Phi, \Sigma \quad \vdash \Psi, \Sigma}{\vdash \Phi \vee \Psi, \Sigma}; & \quad \neg \vee \frac{\neg \vdash \Phi, \neg \vdash \Psi, \Sigma}{\neg \vdash \Phi \vee \Psi, \Sigma}; \\ \vdash \neg \vee \frac{\vdash \neg \Phi, \vdash \neg \Psi, \Sigma}{\vdash \neg (\Phi \vee \Psi), \Sigma}; & \quad \neg \neg \vee \frac{\neg \vdash \neg \Phi, \neg \vdash \neg \Psi, \Sigma}{\neg \vdash \neg (\Phi \vee \Psi), \Sigma}. \end{aligned}$$

Базові секвенційні форми числення *FC* – це наведені вище форми $\vdash \text{NrTr}$, $\neg \vdash \text{NrTr}$, $\vdash \text{CN}\Phi$, $\neg \vdash \text{CN}\Phi$, $\vdash \text{CU}\Phi$, $\neg \vdash \text{CU}\Phi$, $\vdash \text{CI}\Phi$, $\neg \vdash \text{CI}\Phi$, $\vdash \text{SS}\Phi$, $\neg \vdash \text{SS}\Phi$, $\vdash S \neg$, $\neg S \neg$, $\vdash S \vee$, $\neg S \vee$, $\vdash \vee$, $\neg \vee$, до яких додаємо:

$$\vdash \neg \frac{\vdash \Phi, \Sigma}{\vdash \neg \Phi, \Sigma}; \quad \neg \neg \neg \frac{\neg \vdash \Phi, \Sigma}{\neg \vdash \neg \Phi, \Sigma}.$$

На **рівні БКФЛР** маємо числення *FC_E*, яке формалізує відношення $\models_{IR}$.

Додаткова умова замкненості секвенції $\vdash \Gamma \neg \Delta$:

$\text{CRf}_w) t = t \in \Delta$ для деякого $t \in \text{Tr}$.

Звідси умова замкненості секвенції: $C \vee CRf_W$.

Базові секвенційні форми числення FC_E – це форми числення FC , до яких додаємо форми, пов'язані з слабкою рівністю $=$.

Симетричність і транзитивність слабкої рівності:

$$\text{SmW} \frac{\vdash t = s, \vdash s = t, \Sigma}{\vdash t = s, \Sigma};$$

$$\text{TrW} \frac{\vdash t = s, \vdash s = r, \vdash t = r, \Sigma}{\vdash t = s, \vdash s = r, \Sigma}.$$

Форми, пов'язані з заміною рівних:

$$\vdash \text{ETW} \frac{\vdash t = s, \vdash S^{\bar{v},z}(\theta, \bar{r}, t) = \tau, \vdash S^{\bar{v},z}(\theta, \bar{r}, s) = \tau, \Sigma}{\vdash t = s, \vdash S^{\bar{v},z}(\theta, \bar{r}, t) = \tau, \Sigma};$$

$$\vdash \text{ETW} \frac{\vdash t = s, \vdash S^{\bar{v},z}(\theta, \bar{r}, t) = \tau, \vdash S^{\bar{v},z}(\theta, \bar{r}, s) = \tau, \Sigma}{\vdash t = s, \vdash S^{\bar{v},z}(\theta, \bar{r}, t) = \tau, \Sigma};$$

$$\vdash \text{E}\Phi\text{W} \frac{\vdash t = s, \vdash S^{\bar{v},z}(\Phi, \bar{r}, t), \vdash S^{\bar{v},z}(\Phi, \bar{r}, s), \Sigma}{\vdash t = s, \vdash S^{\bar{v},z}(\Phi, \bar{r}, t), \Sigma};$$

$$\vdash \text{E}\Phi\text{W} \frac{\vdash t = s, \vdash S^{\bar{v},z}(\Phi, \bar{r}, t), \vdash S^{\bar{v},z}(\Phi, \bar{r}, s), \Sigma}{\vdash t = s, \vdash S^{\bar{v},z}(\Phi, \bar{r}, t), \Sigma}.$$

Форми пронесення суперпозиції через рівність:

$$\vdash \text{SE} \frac{\vdash S^{\bar{v}}(t, \bar{t}) = S^{\bar{v}}(s, \bar{t}), \Sigma}{\vdash S^{\bar{v}}(t, \bar{t}) = S^{\bar{v}}(s, \bar{t}), \Sigma};$$

$$\vdash \text{SE} \frac{\vdash S^{\bar{v}}(t, \bar{t}) = S^{\bar{v}}(s, \bar{t}), \Sigma}{\vdash S^{\bar{v}}(t, \bar{t}) = S^{\bar{v}}(s, \bar{t}), \Sigma}.$$

На **рівні БКФЛРС** маємо такі числення.

Числення F_{ELR} формалізує $\models_{TF}$.

Умова замкненості секвенції: $C \vee \text{CLR} \vee \text{CRf}_S$.

Числення F_{EL} формалізує $\models_T$.

Умова замкненості секвенції: $C \vee \text{CL} \vee \text{CRf}_S$.

Числення F_{ER} формалізує $\models_F$.

Умова замкненості секвенції: $C \vee \text{CR} \vee \text{CRf}_S$.

Числення F_{EC} формалізує $\models_{IR}$.

Умова замкненості секвенції: $C \vee \text{CRf}_S$.

Тут додаткова умова замкненості $\vdash \Gamma \vdash \Delta$:

$\text{CRf}_S) t \equiv t \in \Delta$ для деякого $t \in Tr$.

Базові секвенційні форми числень F_{ELR} , F_{EL} , F_{ER} – це форми числень FLR , FLR , FR , до яких додаємо форми, пов'язані з строгою рівністю.

Симетричність і транзитивність строгої рівності:

$$\text{SmS} \frac{\vdash t \equiv s, \vdash s \equiv t, \Sigma}{\vdash t \equiv s, \Sigma};$$

$$\text{TrS} \frac{\vdash t \equiv s, \vdash s \equiv r, \vdash t \equiv r, \Sigma}{\vdash t \equiv s, \vdash s \equiv r, \Sigma}.$$

Форми, пов'язані з заміною рівних:

$$\vdash \text{ETS} \frac{\vdash t \equiv s, \vdash S^{\bar{v},z}(\theta, \bar{r}, t) \equiv \tau, \vdash S^{\bar{v},z}(\theta, \bar{r}, s) \equiv \tau, \Sigma}{\vdash t \equiv s, \vdash S^{\bar{v},z}(\theta, \bar{r}, t) \equiv \tau, \Sigma};$$

$$\vdash \text{ETS} \frac{\vdash t \equiv s, \vdash S^{\bar{v},z}(\theta, \bar{r}, t) \equiv \tau, \vdash S^{\bar{v},z}(\theta, \bar{r}, s) \equiv \tau, \Sigma}{\vdash t \equiv s, \vdash S^{\bar{v},z}(\theta, \bar{r}, t) \equiv \tau, \Sigma};$$

$$\vdash \text{E}\Phi\text{S} \frac{\vdash t \equiv s, \vdash S^{\bar{v},z}(\Phi, \bar{r}, t), \vdash S^{\bar{v},z}(\Phi, \bar{r}, s), \Sigma}{\vdash t \equiv s, \vdash S^{\bar{v},z}(\Phi, \bar{r}, t), \Sigma};$$

$$\vdash \text{E}\Phi\text{S} \frac{\vdash t \equiv s, \vdash S^{\bar{v},z}(\Phi, \bar{r}, t), \vdash S^{\bar{v},z}(\Phi, \bar{r}, s), \Sigma}{\vdash t \equiv s, \vdash S^{\bar{v},z}(\Phi, \bar{r}, t), \Sigma};$$

$$\vdash \neg \text{E}\Phi\text{S} \frac{\vdash t \equiv s, \vdash \neg S^{\bar{v},z}(\Phi, \bar{r}, t), \vdash \neg S^{\bar{v},z}(\Phi, \bar{r}, s), \Sigma}{\vdash t \equiv s, \vdash \neg S^{\bar{v},z}(\Phi, \bar{r}, t), \Sigma};$$

$$\vdash \neg \text{E}\Phi\text{S} \frac{\vdash t \equiv s, \vdash \neg S^{\bar{v},z}(\Phi, \bar{r}, t), \vdash \neg S^{\bar{v},z}(\Phi, \bar{r}, s), \Sigma}{\vdash t \equiv s, \vdash \neg S^{\bar{v},z}(\Phi, \bar{r}, t), \Sigma}.$$

Секвенційні форми пронесення суперпозиції через рівність:

$$\vdash \text{SES} \frac{\vdash S^{\bar{v}}(t, \bar{t}) \equiv S^{\bar{v}}(s, \bar{t}), \Sigma}{\vdash S^{\bar{v}}(t, \bar{t}) \equiv S^{\bar{v}}(s, \bar{t}), \Sigma};$$

$$\vdash \text{SES} \frac{\vdash S^{\bar{v}}(t, \bar{t}) \equiv S^{\bar{v}}(s, \bar{t}), \Sigma}{\vdash S^{\bar{v}}(t, \bar{t}) \equiv S^{\bar{v}}(s, \bar{t}), \Sigma};$$

$$\vdash \neg \text{SES} \frac{\vdash \neg S^{\bar{v}}(t, \bar{t}) \equiv S^{\bar{v}}(s, \bar{t}), \Sigma}{\vdash \neg S^{\bar{v}}(t, \bar{t}) \equiv S^{\bar{v}}(s, \bar{t}), \Sigma};$$

$$\vdash \neg \text{SES} \frac{\vdash \neg S^{\bar{v}}(t, \bar{t}) \equiv S^{\bar{v}}(s, \bar{t}), \Sigma}{\vdash \neg S^{\bar{v}}(t, \bar{t}) \equiv S^{\bar{v}}(s, \bar{t}), \Sigma}.$$

Форми, пов'язані зі зняттям заперечення для формул вигляду $\neg t \equiv s$:

$$\vdash \text{ES} \frac{\vdash \neg t \equiv s, \Sigma}{\vdash \neg t \equiv s, \Sigma}; \quad \vdash \text{ES} \frac{\vdash t \equiv s, \Sigma}{\vdash \neg t \equiv s, \Sigma}.$$

Зауважимо, що наявність $\vdash \text{ES}$ та $\vdash \text{ES}$ робить непотрібними $\vdash \neg \text{ETS}$ та $\vdash \neg \text{ETS}$.

Базовими секвенційними формами числення F_{EC} є форми числення FC , до них додаємо форми SmS , TrS , $\vdash \text{ETS}$, $\vdash \text{ETS}$, $\vdash \text{E}\Phi\text{S}$, $\vdash \text{E}\Phi\text{S}$, $\vdash \text{SES}$, $\vdash \text{SES}$, пов'язані з строгою рівністю. Тут $\vdash \text{ES}$ та $\vdash \text{ES}$ не потрібні через наявність $\vdash \neg$ та $\vdash \neg$.

Властивості відношень логічного наслідку для множин формул indukують основну властивість секвенційних форм ($\models$ – одне з $\models_{IR}$, $\models_T$, $\models_F$, $\models_{TF}$):

Теорема 1. Нехай $\frac{\vdash \Lambda, K}{\vdash \Gamma, \Delta}$ та $\frac{\vdash \Lambda, K \quad \vdash X, Z}{\vdash \Gamma, \Delta}$ –

базові секвенційні форми. Тоді:

a) $\Lambda \models K \Leftrightarrow \Gamma \models \Delta$; $\Gamma \models \Delta \Leftrightarrow \Lambda \models K$.

b) $\Lambda \models K$ та $X \models Z \Leftrightarrow \Gamma \models \Delta$;

$\Gamma \models \Delta \Leftrightarrow \Lambda \models K$ або $X \models Z$.

2. Побудова виведення. Теорема коректності

Стисло опишемо поетапну побудову виведення – секвенційного дерева – для заданої секвенції Σ (скінченної або зліченної).

Побудова починається з кореня дерева. Кожне застосування секвенційної форми проводимо до скінченної множини доступних на даний момент виведення формул.

На початку етапу виконуємо крок доступу: до списку доступних додається по одній формулі зі списків $\vdash$ -формул та $\neg$ -формул. На початку побудови доступна лише пара перших формул списків.

Після виконання кожної форми перевіряємо, чи будуть усі листи будованого дерева замкненими секвенціями. При появі замкненої секвенції до неї вже незастосовна жодна форма, і процес побудови дерева на цьому шляху обривається.

Якщо всі листи побудованого дерева замкнені, то ми отримали замкнене секвенційне дерево, побудова завершена позитивно.

Якщо ні, то для кожного незамкненого листа робимо наступний крок доступу. Нехай після додавання до секвенції-листа нових доступних формул отримана секвенція η . Далі добудовуємо скінченне піддерево з вершиною η таким чином.

Активізуємо всі доступні непримітивні секвенції η . До кожної активної формули застосовуємо відповідну секвенційну форму. Після застосування основної форми утворені нею формули на даному етапі пасивні, до таких формул на цьому етапі основні форми не застосовуються.

В процесі застосування основних форм (типу $S\neg$, $S\vee$, $SS\Phi$, $\neg\neg$, $\vee$, $\neg\vee$, а також типу SE для БКФЛР, типу SES та ES для БКФЛРС) за необхідності виконуємо спрощення. Для цього кожен раз при появі відповідної ситуації застосовуємо належну допоміжну форму типів $CN\Phi$, $CU\Phi$, $CI\Phi$. Кожен раз при отриманні елементарної формули для неї виконуємо форму нормалізації термів (форми типу $NrTr$) до тих пір, поки усі її терми не набудуть нормальної форми.

Застосування форм рівності в численнях БКФЛР та БКФЛРС має особливості.

Форми SmS (SmW для числення FC_E) виконуються кожен раз при появі (активізації) нової для секвенції формули вигляду $\vdash t \equiv s$ (вигляду $\vdash t = s$).

Форми TrS (TrW для FC_E) виконуємо кожен раз при активізації пари формул $\vdash t \equiv s$ та $\vdash s \equiv r$ ($\vdash t = s$ та $\vdash s = r$ для FC_E), якщо хоч одна з цих формул нова.

Форми типу ETW виконуються кожен раз при активізації пари формул, одна з яких $\vdash t = s$, а друга $\neg S^{\bar{v},z}(\theta, \bar{r}, t) = \tau$ чи $\neg S^{\bar{v},z}(\theta, \bar{r}, t) = \tau$, причому принаймні одна з них нова для секвенції.

Форми типу $E\Phi W$ виконуємо кожен раз при активізації пари формул, одна з яких $\vdash t = s$, а друга $\neg S^{\bar{v},z}(\Phi, \bar{r}, t)$ чи $\neg S^{\bar{v},z}(\Phi, \bar{r}, t)$, причому принаймні одна з них нова для секвенції.

Форми типу ETS виконуємо кожен раз при активізації пари формул, одна з яких $\vdash t \equiv s$, а друга $\neg S^{\bar{v},z}(\theta, \bar{r}, t) \equiv \tau$ чи $\neg S^{\bar{v},z}(\theta, \bar{r}, t) = \tau$, причому хоч одна з них нова для секвенції.

Форми типу $E\Phi S$ виконуємо кожен раз при активізації пари формул, одна з яких $\vdash t \equiv s$, а друга $\neg S^{\bar{v},z}(\Phi, \bar{r}, t)$, $\neg S^{\bar{v},z}(\Phi, \bar{r}, t)$, $\neg S^{\bar{v},z}(\Phi, \bar{r}, t)$ чи $\neg S^{\bar{v},z}(\Phi, \bar{r}, t)$ і хоч одна з них нова для секвенції.

Якщо побудова секвенційного дерева завершена негативно і отримано скінченне незамкнене дерево (випадок скінченних секвенцій) або побудова не завершується і маємо нескінченне секвенційне дерево (випадок нескінченних секвенцій), то в дереві існує скінченний або нескінченний *незамкнений* шлях, вершини якого – незамкнені секвенціями. Кожна з формул секвенції Σ зустрінеться на цьому шляху і стане доступною.

Теорема 2 (коректності). Нехай секвенція $\vdash \neg \Delta$ вивідна. Тоді $\Gamma \models \Delta$.

Якщо $\vdash \neg \Delta$ вивідна, то для неї збудоване замкнене секвенційне дерево. Із побудови дерева випливає, що $\Lambda \models K$ для кожної вершини $\vdash \neg \Lambda.K$. Для листів дерева це впливає з визначення замкненої секвенції. Збереження секвенційними формами відношення логічного наслідку (від засновків до висновку) впливає з теореми 1. Таким чином, для кореня дерева – секвенції $\vdash \neg \Delta$ – теж маємо $\Gamma \models \Delta$.

3. Теореми про контрмоделі

Теореми про повноту секвенційних числень опираються на теореми про існування контрмоделей для множини формул незамкненого шляху.

Такі теореми формулюються однотипно для кожної групи числень, що формалізує відповідне відношення $\models_{TF}$, $\models_T$, $\models_F$, $\models_{IR}$.

Теорема про контрмоделі для числень FLR та $F_E LR$:

Теорема 3. Нехай $\wp$ – незамкнений шлях у секвенційному дереві, збудованому для секвенції $\vdash \neg \Delta$, нехай H – множина всіх специфікованих формул секвенцій цього шляху. Тоді існують інтерпретації $A = (A, I_1)$, $B = (A, I_2)$ та $\delta, \eta \in {}^V A$ такі:

$$H_T) \vdash \Phi \in H \Rightarrow \Phi_A(\delta) = T \text{ та } \neg \Phi \in H \Rightarrow \Phi_A(\delta) \neq T;$$

$$H_F) \vdash \Phi \in H \Rightarrow \Phi_B(\eta) \neq F \text{ та } \neg \Phi \in H \Rightarrow \Phi_B(\eta) = F.$$

Пари (A, δ) та (B, η) назвемо *T-контрмоделлю* та *F-контрмоделлю* для $\vdash \neg \Delta$.

Теорема про контрмоделі для числень FL та $F_E L$:

Теорема 4. Нехай $\wp$ – незамкнений шлях у секвенційному дереві, збудованому для секвенції $\vdash \neg \Delta$, нехай H – множина всіх специфікованих формул секвенцій цього шляху. Тоді існують інтерпретації $A = (A, I_1)$, $B = (A, I_2)$ та $\delta, \eta \in {}^V A$ такі:

$$H_T) \vdash \Phi \in H \Rightarrow \Phi_A(\delta) = T \text{ та } \neg \Phi \in H \Rightarrow \Phi_A(\delta) \neq T.$$

Теорема про контрмоделі для числень FR та $F_E R$:

Теорема 5. Нехай $\wp$ – незамкнений шлях у секвенційному дереві, збудованому для секвенції $\vdash \Gamma \Delta$, нехай H – множина всіх специфікованих формул секвенції цього шляху. Тоді існують інтерпретації $A = (A, I_1)$, $B = (A, I_2)$ та $\delta, \eta \in {}^V A$ такі:

$$H_F) \vdash \Phi \in H \Rightarrow \Phi_B(\eta) \neq F \text{ та } \vdash \Phi \in H \Rightarrow \Phi_B(\eta) = F.$$

Теорема про контрмоделі для числень FC , FC_E та $F_E C$: формулюється так:

Теорема 6 Нехай $\wp$ – незамкнений шлях у секвенційному дереві, збудованому для секвенції $\vdash \Gamma \Delta$, нехай H – множина всіх специфікованих формул секвенції цього шляху. Тоді існують інтерпретації $A = (A, I_1)$, $B = (A, I_2)$ та $\delta, \eta \in {}^V A$ такі:

$$H_C) \vdash \Phi \in H \Rightarrow \Phi_A(\delta) = T \text{ та } \vdash \Phi \in H \Rightarrow \Phi_A(\delta) = F.$$

Пару (A, δ) назовемо IR -контрмоделлю для $\vdash \Gamma \Delta$.

Наведемо тут доведення теореми 3 для випадку $F_E LR$ -числення. Застосування форм до секвенцій на шляху $\wp$ відбувається до тих пір, поки це можливо, тому кожна непримітивна формула чи її заперечення, що зустрічається на шляху $\wp$, рано чи пізно буде розкладена чи спрощена.

Усі секвенції шляху $\wp$ незамкнені, тому для них невірна умова замкненості $C \vee CLR \vee CRfs$. Отже, для H виконуються умови коректності:

H_C) не існує Φ такої, що $\vdash \Phi \in H$ та $\vdash \Phi \in H$.

$HCLR$) не існує формул Φ та Ψ таких:

$$\vdash \Phi \in H, \vdash \neg \Phi \in H, \vdash \Psi \in H, \vdash \neg \Psi \in H;$$

$HCRfs$) не існує $t \in Tr$ такого, що $\vdash t \equiv t \in H$.

Зауважимо, що $HCLR \Leftrightarrow HCL \vee HCR$, де HCL і HCR отримано з умов CL та CR :

HCL) не існує Φ такої, що $\vdash \Phi \in H$ та $\vdash \neg \Phi \in H$;

HCR) не існує Ψ такої, що $\vdash \Psi \in H$ та $\vdash \neg \Psi \in H$.

Переходи від нижчої вершини шляху $\wp$ до вищої робимо згідно з певною секвенційною формою, тому для H маємо відповідні умови переходу:

HCI) $\vdash S(\Phi) \in H \Rightarrow \vdash \Phi \in H$; $\vdash S(\Phi) \in H \Rightarrow \vdash \Phi \in H$;

$H \neg CI$) $\vdash \neg S(\Phi) \in H \Rightarrow \vdash \neg \Phi \in H$; $\vdash \neg S(\Phi) \in H \Rightarrow \vdash \neg \Phi \in H$;

$H CN$) $\vdash S^{\bar{x}, \bar{v}}(\Phi, \bar{x}, \bar{t}) \in H \Rightarrow \vdash S^{\bar{v}}(\Phi, \bar{t}) \in H$;

$$\vdash S^{\bar{x}, \bar{v}}(\Phi, \bar{x}, \bar{t}) \in H \Rightarrow \vdash S^{\bar{v}}(\Phi, \bar{t}) \in H;$$

$H \neg CN$) $\vdash \neg S^{\bar{x}, \bar{v}}(\Phi, \bar{x}, \bar{t}) \in H \Rightarrow \vdash \neg S^{\bar{v}}(\Phi, \bar{t}) \in H$;

$$\vdash \neg S^{\bar{x}, \bar{v}}(\Phi, \bar{x}, \bar{t}) \in H \Rightarrow \vdash \neg S^{\bar{v}}(\Phi, \bar{t}) \in H;$$

HCU) при умові $x \in v(\Phi)$ маємо:

$$\vdash S^{\bar{x}, \bar{v}}(\Phi, t, \bar{t}) \in H \Rightarrow \vdash S^{\bar{v}}(\Phi, \bar{t}) \in H;$$

$$\vdash S^{\bar{x}, \bar{v}}(\Phi, t, \bar{t}) \in H \Rightarrow \vdash S^{\bar{v}}(\Phi, \bar{t}) \in H.$$

Подібним чином записуємо умову $H \neg CU$.

Нехай Ψ отримана з елементарної формули Φ згідно перетворень теореми 4 роботи [3]. Тоді:

$H Nr$) $\vdash \Phi \in H \Rightarrow \vdash \Psi \in H$; $\vdash \Phi \in H \Rightarrow \vdash \Psi \in H$;

$H \neg Nr$) $\vdash \neg \Phi \in H \Rightarrow \vdash \neg \Psi \in H$; $\vdash \neg \Phi \in H \Rightarrow \vdash \neg \Psi \in H$.

Нехай Ψ отримана з Φ згорткою суперпозицій згідно $SS\Phi$ (див. [2, 3]). Тоді:

$HS\Phi$) $\vdash \Phi \in H \Rightarrow \vdash \Psi \in H$; $\vdash \Phi \in H \Rightarrow \vdash \Psi \in H$;

$H \neg S\Phi$) $\vdash \neg \Phi \in H \Rightarrow \vdash \neg \Psi \in H$; $\vdash \neg \Phi \in H \Rightarrow \vdash \neg \Psi \in H$.

Умови, пов'язані з пронесенням суперпозицій:

$HS \neg$) $\vdash S^{\bar{v}}(\neg \Phi, \bar{t}) \in H \Rightarrow \vdash S^{\bar{v}}(\Phi, \bar{t}) \in H$;

$$\vdash S^{\bar{v}}(\neg \Phi, \bar{t}) \in H \Rightarrow \vdash S^{\bar{v}}(\Phi, \bar{t}) \in H;$$

$HS \vee$) $\vdash S^{\bar{v}}(\Phi \vee \Psi, \bar{t}) \in H \Rightarrow \vdash S^{\bar{v}}(\Phi, \bar{t}) \vee S^{\bar{v}}(\Psi, \bar{t}) \in H$;

$$\vdash S^{\bar{v}}(\Phi \vee \Psi, \bar{t}) \in H \Rightarrow \vdash S^{\bar{v}}(\Phi, \bar{t}) \vee S^{\bar{v}}(\Psi, \bar{t}) \in H;$$

Подібним чином записуємо $H \neg S \neg$ та $H \neg S \vee$.

Умови, пов'язані з декомпозицією формул:

$H \neg \neg$) $\vdash \neg \neg \Phi \in H \Rightarrow \vdash \Phi \in H$; $\vdash \neg \neg \Phi \in H \Rightarrow \vdash \Phi \in H$;

$H \vee$) $\vdash \Phi \vee \Psi \in H \Rightarrow \vdash \Phi \in H$ або $\vdash \Psi \in H$;

$\vdash \Phi \vee \Psi \in H \Rightarrow \vdash \Phi \in H$ та $\vdash \Psi \in H$;

$H \neg \vee$) $\vdash \neg(\Phi \vee \Psi) \in H \Rightarrow \vdash \neg \Phi \in H$ та $\vdash \neg \Psi \in H$;

$\vdash \neg(\Phi \vee \Psi) \in H \Rightarrow \vdash \neg \Phi \in H$ або $\vdash \neg \Psi \in H$.

Умови, пов'язані з строгою рівністю:

HES) $\vdash t \equiv s \in H \Rightarrow \vdash t \equiv s \in H$;

$\vdash t \equiv s \in H \Rightarrow \vdash t \equiv s \in H$;

$HSms$) $\vdash t \equiv s \in H \Rightarrow \vdash s \equiv t \in H$;

$HTrS$) $\vdash t \equiv s \in H$ та $\vdash s \equiv r \in H \Rightarrow \vdash t \equiv r \in H$;

$HSES$) $\vdash S^{\bar{v}}(t \equiv s, \bar{t}) \in H \Rightarrow \vdash S^{\bar{v}}(t, \bar{t}) \equiv S^{\bar{v}}(s, \bar{t}) \in H$;

$$\vdash S^{\bar{v}}(t \equiv s, \bar{t}) \in H \Rightarrow \vdash S^{\bar{v}}(t, \bar{t}) \equiv S^{\bar{v}}(s, \bar{t}) \in H;$$

$HETS$) $\vdash t \equiv s, \vdash S^{\bar{v}, z}(\theta, \bar{r}, t) \equiv \tau \in H \Rightarrow$

$$\Rightarrow \vdash t \equiv s, \vdash S^{\bar{v}, z}(\theta, \bar{r}, t) \equiv \tau, \vdash S^{\bar{v}, z}(\theta, \bar{r}, s) \equiv \tau \in H;$$

$$\vdash t \equiv s, \vdash S^{\bar{v}, z}(\theta, \bar{r}, t) \equiv \tau \in H \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vdash t \equiv s, \vdash S^{\bar{v}, z}(\theta, \bar{r}, t) \equiv \tau, \vdash S^{\bar{v}, z}(\theta, \bar{r}, s) \equiv \tau \in H;$$

$HEFS$) $\vdash t \equiv s, \vdash S^{\bar{v}, z}(\Phi, \bar{r}, t) \in H \Rightarrow$

$$\Rightarrow \vdash t \equiv s, \vdash S^{\bar{v}, z}(\Phi, \bar{r}, t), \vdash S^{\bar{v}, z}(\Phi, \bar{r}, s) \in H;$$

$$\vdash t \equiv s, \vdash S^{\bar{v}, z}(\Phi, \bar{r}, t) \in H \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vdash t \equiv s, \vdash S^{\bar{v}, z}(\Phi, \bar{r}, t), \vdash S^{\bar{v}, z}(\Phi, \bar{r}, s) \in H.$$

Подібним чином записуємо $H \neg SES$ та $H \neg EFS$.

Побудуємо контрмодель за множиною H .

Нехай $W = \{v_0, \dots, v_n, \dots\}$ – множина усіх предметних імен, що фігурують в ДНС та символах суперпозиції формул H , нехай $Dn = \{v \mid v \in W\}$.

Нехай Tr – множина усіх нормальних термів, що фігурують в формулах H . Задамо $TW = Tr \cup Dn$; нехай $TW = \{t_0, t_1, \dots, t_n, \dots\}$, де кожне v_j – це t_{kj} .

Рівність індукує на TW відношення еквівалентності: $t \sim s \Leftrightarrow \vdash t \equiv s \in H$. Нехай $A = TW / \sim$ – фактор-множина множини TW за відношенням $\sim$.

Позначимо $\langle t \rangle$ клас еквівалентності з представником t . Позначимо $\langle t_i \rangle$ як a_i .

Тоді задамо $\delta = \eta = [v_0 \mapsto a_{k_0}, \dots, v_j \mapsto a_{k_j}, \dots]$.

Для всіх $f \in Fns$, наявних в H , визначимо f_A та f_B так, щоб виконувалась умова:

$(t_i)_A(\delta) = a_i$ та $(t_i)_B(\eta) = a_i$ для всіх $t_i \in Tr$.

Для $t_{kj} = \langle v_j \rangle$ тоді $(t_{kj})_A(\delta) = (t_{kj})_B(\eta) = (\langle v_j \rangle)_A(\delta) = \langle v_j \rangle = a_{kj}$.

Нехай $t_m = f \in Fns$. Задаємо

$f_A(\delta) = (t_m)_A(\delta) = a_m$ та $f_B(\eta) = (t_m)_B(\eta) = a_m$.

Для всіх інших $t_m \in TW$ значення задаємо так.

Нехай t_p – це $S^{v_1, \dots, v_n} f t_{j_1} \dots t_{j_n}$, де $f = t_m \in Fns$.

Тоді задамо $f_A(\delta \nabla v_1 \mapsto a_{j_1} \nabla \dots \nabla v_n \mapsto a_{j_n}) =$
 $= f_B(\eta \nabla v_1 \mapsto a_{j_1} \nabla \dots \nabla v_n \mapsto a_{j_n}) = a_p$.

Задамо значення примітивних формул та їх заперечень на δ і η :

$\neg \vdash t \equiv s \in H \Rightarrow (t \equiv s)_A(\delta) = T$ та $(t \equiv s)_B(\eta) \neq F$;

$\neg \vdash t \equiv s \in H \Rightarrow (t \equiv s)_A(\delta) \neq T$ та $(t \equiv s)_B(\eta) = F$.

$\neg \vdash p \in H \Rightarrow p_A(\delta) = T$ та $p_B(\eta) \neq F$;

$\neg \vdash p \in H \Rightarrow p_A(\delta) \neq T$ та $p_B(\eta) = F$;

$\neg \vdash \neg p \in H \Rightarrow p_A(\delta) = F$ та $p_B(\eta) \neq T$;

$\neg \vdash \neg p \in H \Rightarrow p_A(\delta) \neq F$ та $p_B(\eta) = T$;

$\neg \vdash S^{v_1, \dots, v_n} p t_{j_1} \dots t_{j_n} \in H \Rightarrow p_A(\delta \nabla v_1 \mapsto a_{j_1} \nabla \dots \nabla v_n \mapsto a_{j_n}) = T$
та $p_B(\eta \nabla v_1 \mapsto a_{j_1} \nabla \dots \nabla v_n \mapsto a_{j_n}) \neq F$;

$\neg \vdash S^{v_1, \dots, v_n} p t_{j_1} \dots t_{j_n} \in H \Rightarrow p_A(\delta \nabla v_1 \mapsto a_{j_1} \nabla \dots \nabla v_n \mapsto a_{j_n}) \neq T$
та $p_B(\eta \nabla v_1 \mapsto a_{j_1} \nabla \dots \nabla v_n \mapsto a_{j_n}) = F$;

$\neg \vdash \neg S^{v_1, \dots, v_n} p t_{j_1} \dots t_{j_n} \in H \Rightarrow p_A(\delta \nabla v_1 \mapsto a_{j_1} \nabla \dots \nabla v_n \mapsto a_{j_n}) = F$
та $p_B(\eta \nabla v_1 \mapsto a_{j_1} \nabla \dots \nabla v_n \mapsto a_{j_n}) \neq T$;

$\neg \vdash \neg S^{v_1, \dots, v_n} p t_{j_1} \dots t_{j_n} \in H \Rightarrow p_A(\delta \nabla v_1 \mapsto a_{j_1} \nabla \dots \nabla v_n \mapsto a_{j_n}) \neq F$
та $p_B(\eta \nabla v_1 \mapsto a_{j_1} \nabla \dots \nabla v_n \mapsto a_{j_n}) = T$.

Далі доводимо індукцією за складністю формули.

Зауваження щодо вибору контрмоделі.

Для F -контрмоделі (B, η) невиконання HCR дає $\Phi_B(\eta) = F$ та $\neg \Phi_B(\eta) = F$ – неоднозначність Φ_B .

Для T -контрмоделі (A, δ) невиконання HCL дає $\Phi_A(\delta) = T$ та $\neg \Phi_A(\delta) = T$ – неоднозначність Φ_A .

Отже, якщо для H маємо HCL та невірне HCR, то беремо T -контрмодель; якщо для H маємо HCR та невірне HCL, то беремо F -контрмодель; якщо для H вірні HCL та HCR, то можна брати як T -контрмодель, так і F -контрмодель.

Список використаних джерел

1. Нікітченко М.С. Математична логіка та теорія алгоритмів / М.С. Нікітченко, С.С. Шкільняк. – Київ: ВПЦ Київський університет, 2008. – 528 с.
2. Шкільняк С.С. Безкванторно-функціональні логіки часткових квазіарних предикатів / С.С. Шкільняк, Д.Б. Волковицький // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Сер.: фіз.-мат. науки. – 2015. – Вип. 3. – С. 148–154.
3. Шкільняк С.С. Композиційно-номінативні логіки безкванторних рівнів / С.С. Шкільняк, Д.Б. Волковицький // Проблеми програмування. – 2016. – № 2–3. – С. 48–62.

4. Теорема про повноту

На основі теорем про контрмоделі отримуємо теорему повноти (тут $\models$ – одне з $\models_{IR}$, $\models_T$, $\models_F$, $\models_{TF}$).

Теорема 7. Нехай $\Gamma \models \Delta$. Тоді секвенція $\vdash \Gamma \vdash \Delta$ вивідна у відповідному численні.

Доведемо для $\models_{TF}$ та числень FLR і F_{ELR} . Нехай супротивне: $\Gamma \models_{TF} \Delta$ та $\vdash \Gamma \vdash \Delta$ невивідна. Звідси секвенційне дерево для $\vdash \Gamma \vdash \Delta$ незамкнене, тому в ньому існує незамкнений шлях. Нехай H – множина всіх специфікованих формул секвенцій цього шляху. Тоді $\vdash \Gamma \vdash \Delta \subseteq H$. За теоремою 3 існують T -контрмодель (A, δ) та F -контрмодель (B, η) :

$\vdash \Phi \in H \Rightarrow \Phi_A(\delta) = T$ та $\neg \vdash \Phi \in H \Rightarrow \Phi_A(\delta) \neq T$;

$\vdash \Phi \in H \Rightarrow \Phi_B(\eta) \neq F$ та $\neg \vdash \Phi \in H \Rightarrow \Phi_B(\eta) = F$.

Для T -контрмоделі для всіх $\Phi \in \Gamma$ маємо $\Phi_A(\delta) = T$, для всіх $\Psi \in \Delta$ маємо $\Psi_A(\delta) \neq T$. Звідси $\delta \in T(\Gamma_A)$ та $\delta \notin T(\Delta_A)$, звідки невірно $T(\Gamma_A) \subseteq T(\Delta_A)$. Це заперечує $\Gamma_A \models_T \Delta$, тому й заперечує $\Gamma \models_{TF} \Delta$.

Для F -контрмоделі для всіх $\Phi \in \Gamma$ маємо $\Phi_B(\eta) \neq F$, для всіх $\Psi \in \Delta$ маємо $\Phi_B(\eta) = F$. Звідси $\eta \notin F(\Gamma_B)$ та $\eta \in F(\Delta_B)$, звідки невірно $F(\Delta_B) \subseteq F(\Gamma_B)$. Це заперечує $\Gamma_B \models_F \Delta$, тому й заперечує $\Gamma \models_{TF} \Delta$.

Висновки

Для безкванторно-функціональних логік та їх різновидів зі слабкою рівністю та строгою рівністю побудовано числення секвенційного типу. Такі числення формалізують відношення неспростовнісного, істиннісного, хибнісного та сильного логічного наслідку. Для цих числень наведено базові секвенційні форми та умови замкненості секвенцій, описано побудову секвенційного дерева, доведено теореми коректності та повноти.

References

1. NIKITCHENKO, M. and SHKILNIAK, S. (2008). *Matematychna lohika ta teoriia alhorytmiv*. Kyiv: VPC Kyivskyi Universytet.
2. SHKILNIAK, S. and VOLKOVYTSKYI, D. (2015). Free-quantifier functional logics of partial quasi-ary predicates. In *Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series: Physics & Mathematics*. No 3. P. 148–154.
3. SHKILNIAK, S. and VOLKOVYTSKYI, D. (2016). Composition-nominative logics of free-quantifier levels. In *Problems in programming*. № 2–3, p. 48–62.

Надійшла до редколегії 26.05.16

РАДІОФІЗИКА

УДК 621.38

Баужа О.С., к.ф.-м.н., асистент

**Вплив спин-орбітальної взаємодії на
розщеплення енергетичних рівнів
електронів в InSb напівпровідникових
квантових точках**

Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 83000, м. Київ, пр-т.
Глушкова 4г,
e-mail: asb@mail.univ.kiev.ua

O.S. Bauzha, PhD.

**The influence of the spin-orbit interaction on
the splitting of energy levels of electrons in
InSb semiconductor quantum dots**

Taras Shevchenko National University of Kyiv,
83000, Kyiv, Glushkova st., 4g,
e-mail: asb@mail.univ.kiev.ua

У цій роботі проведено теоретичний аналіз впливу спин-орбітальної взаємодії (СО) на енергетичний спектр електронів в циліндричних напівпровідникових квантових точках (КТ). Розглянуто залежність енергетичних рівнів електронів від розміру квантової точки і прикладеного зовнішнього магнітного поля. Врахування складових Бичкова-Рашиби та Рашиби спин-орбітальної взаємодії приводить до виникнення спінового розщеплення електронних енергетичних рівнів. Спінове розщеплення електронних станів з ненульовим орбітальним моментом електрона продемонстровано на прикладі InSb квантової точки в нульовому магнітному полі. Досліджено перетини рівнів енергії електрона з однаковим орбітальним моментом і різними спіновими моментами в ненульовому магнітному полі.

Ключові слова: спин-орбітальна взаємодія, квантова точка, електронний енергетичний рівень.

The theoretical analysis of the effect of spin-orbit (SO) interactions on the electron energy spectrum of cylindrical semiconductor quantum dots is the aim of presented papers. The dependence of energy levels on size of the dots and the applied external magnetic field is studied. Contributions the Bychkov-Rashba term and the Rashba term of the spin-orbit interactions to the spin splitting of the electron energy states are discussed. The spin splitting of electron states with nonzero angular momentum is demonstrated theoretically for InSb quantum dots at zero magnetic field. It was find a "crossing" of the electron energy states with the same angular momentum and different spin polarizations in a nonzero magnetic field.

The results demonstrate competition two components of the spin-orbit interaction. Rashba term has a greater impact in the reduction of the size of the quantum dot. The value of Bychkov-Rashba term can be easily controlled by external electric field. I was demonstrated the ability to control the electronic spectrum of the quantum dot using external electric field applied along the axis of symmetry of the quantum dot in this work.

Keywords: spin-orbit interaction, quantum dot, electron energy states.

Статтю представив д.т.н. Погорілий С.Д.

Експериментальні та теоретичні дослідження спинзалежних явищ в низькорозмірних структурах та спин транспорту в напівпровідникових квантових гетероструктурах привернули значну увагу в останні роки [1-2]. Зростаючий інтерес до цієї теми пов'язаний із двома фактами. По-перше, прогрес в технології напівпровідників зробив можливим створити структури, що чутливі до електронних спінів. Такими пристроями спинтроники можна керувати за допомогою поляризації спінів електронів [1-2]. По-друге, можна використовувати досить

загальний фізичний підхід для опису спинзалежних явищ у напівпровідникових квантових малорозмірних структурах [3].

Спін електрона може істотно вплинути на електричні та магнітні властивості квантових структур. Серед можливих спинзалежних впливів слід виділити взаємодію між орбітальним та спіновим моментом електрона [3-5].

Незважаючи на релятивістську природу СО взаємодії, вона може грати суттєву роль в зонній структурі багатьох напівпровідників. Навіть в симетричному обмежуючому потенціалі СО

взаємодія частково знімає виродження енергетичних рівнів електронів в напівпровідникових квантових ямах [3].

Очевидно, що спин-орбітальна взаємодія в значній мірі залежить від квантової геометрії системи. Удосконалення напівпровідникової технології зробило можливим легко змінювати геометричні форми квантових структур [6-7]. Тому спин-залежні явища в цих структурах є цікавими для дослідників.

Метою даної роботи є розгляд впливу СО взаємодії на електронні енергетичні стани в квантових точках. Спин-орбітальна взаємодія в роботі описується двома складовими гамільтониану електрона, що знаходиться в КТ. Одна з них відома як складова Рашби СО взаємодії [8]. Друга була вперше розглянута Бичковим та Рашбою для електронів в 2D електронному газі [9]. Кулонівською взаємодією

між електронами для простоти нехтуємо. Дане спрощення суттєво не змінить основних висновків про вплив СО взаємодії на властивості електронів, що перебувають в квантовій точці.

При розрахунках електронних спектрів вважаємо, що електрони знаходяться в квазі-двовимірній квантовій точці. Дана модель може успішно описати електронні властивості круглих дискових квантових точок [3-4] (штучних атомів).

Для опису квантової точки будемо використовувати наступну математичну модель:

2D-електронний газ обмежений параболічним потенціалом, в якості форми квантової точки вибрано циліндр. Рух електронів уздовж осі Z обмежено нескінченно глибокою потенціальною ямою (рис. 1 с). Величина нахилу дна ями вздовж осі Z залежить від величини прикладеного зовнішнього електричного поля.

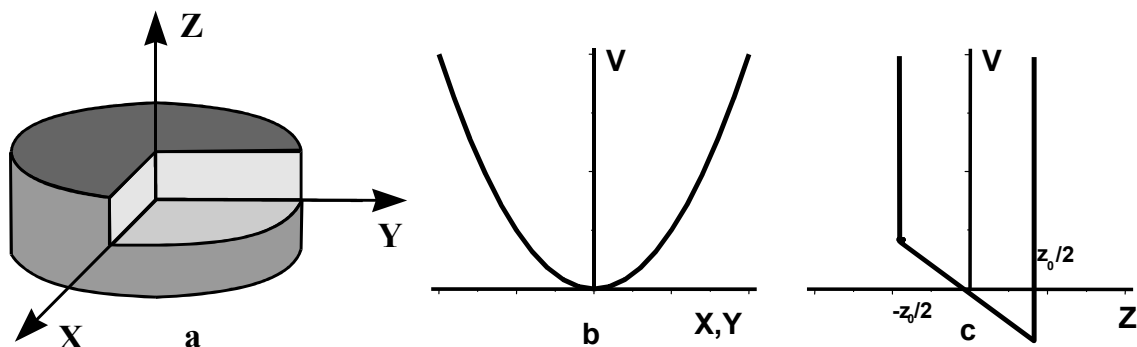


Рис. 1. Вигляд та профіль потенціалу квантової точки.

В подальших обчисленнях використовується простий параболічний потенціал, що розміщений в площині XY (рис. 1 б). Потенціал має вигляд:

$$V_c(r) = \frac{1}{2} m(E) \omega_0^2 r^2, \quad (1)$$

де $m(E)$ – ефективна маса електрона, що залежить від значення його енергії, $\hbar\omega_0$ – характерна енергія зв'язку електрона в квантовій точці. Характерний розмір квантової точки визначається із співвідношення [3]:

$$r = \sqrt{\frac{2E_f}{m(E_f)\omega_0^2}} \quad (2)$$

де E_f – рівень Фермі.

Уздовж осі Z прикладене однорідне постійне магнітне поле, якому відповідає векторний потенціал:

$$\mathbf{A} = \left(-\frac{By}{2}; \frac{Bx}{2}; 0 \right), \quad \mathbf{B} = (0; 0; B). \quad (3)$$

Спин-орбітальна взаємодія описується наступним оператором:

$$H_{SL} = g \frac{\hbar\mu_B E(r)}{mcr} \hat{\mathbf{I}}\mathbf{s} \equiv \lambda \hat{\mathbf{I}}\mathbf{s}, \quad (4)$$

де μ_B – магнетон Бора, $E(r)$ – електричне поле, c – швидкість світла.

Як видно зі співвідношення, при русі електрона в напрямку перпендикулярному до напрямку зміни потенціалу внесок спин-орбітальної взаємодії буде відмінним від нуля. Для 2D електронів можна розкласти даний потенціал на дві частини. Перша частина буде залежати від зміни обмежуючого потенціалу вздовж осі Z [4, 9]:

$$V_{SO}^{BR} = a \frac{dV}{dz} (\sigma_x \hat{k}_y - \sigma_y \hat{k}_x) \quad (5)$$

де a – параметр спин-орбітального зв'язку, $\hat{k}$ – оператор хвильового вектора. Запишемо дане співвідношення в циліндричній системі координат:

$$V_{SO}^{BR} = \alpha \frac{dV(r, z)}{dz} \left(\Sigma_{\varphi} k_r + \Sigma_r \left(k_r + \frac{e}{2\hbar} Br \right) \right) \quad (6)$$

де $k_{\varphi} = -i(1/r)\partial/\partial\varphi$, $k_r = -i(1/\varphi)\partial/\partial r$, $V(r, z)$ – обмежуючий потенціал квантової точки, r – двовірний радіус.

Матриці Паулі – $\Sigma_r, \Sigma_{\varphi}, \sigma_z$ в циліндричних координатах мають вигляд:

$$\Sigma_r = \begin{pmatrix} 0 & e^{i\varphi} \\ e^{-i\varphi} & 0 \end{pmatrix}, \Sigma_{\varphi} = \begin{pmatrix} 0 & ie^{i\varphi} \\ -ie^{-i\varphi} & 0 \end{pmatrix},$$

$$\sigma_z \equiv \Sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (7)$$

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m(E)} \left[\frac{\partial}{r\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right] - \frac{i}{2} m \omega_c(E, B) \frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{1}{8} m(E) \omega_c^2(E, B) r^2$$

$$+ V_c(r) + \frac{1}{2} \sigma_z \mu_B g(E) B + V_{SO}^R(r, \varphi) + V_{SO}^{BR}(r, \varphi), \quad (9)$$

де $\mu_B = e\hbar/2m_0$ – магнетон Бора, e – заряд електрона, m_0 – маса вільного електрона.

Ефективна маса електрона подається формулою [3]:

$$\frac{1}{m(E)} = \frac{1}{m(0)} \frac{E_g(E_g + \Delta)}{(3E_g + 2\Delta)} \left[\frac{2}{E + E_g} + \frac{1}{E + E_g + \Delta} \right], \quad (10)$$

(E – енергія електрона в зоні провідності, $m(0)$ – ефективна маса електрона на дні зони провідності, E_g та Δ – ширина забороненої зони та величина спіно-орбітального розщеплення валентної зони, відповідно),

$$\omega_c(E, B) = \frac{eB}{m(E)} \quad (11)$$

$$H_1 = -\frac{\hbar^2}{2m(E)} \left[\frac{\partial}{r\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right] - \frac{i}{2} \hbar \omega_c(E, B) \frac{\partial}{\partial \varphi} +$$

$$+ \frac{1}{8} m(E) \omega_c^2(E, B) r^2 + \frac{1}{2} m(E) \omega_0^2 r^2 + \frac{1}{2} \sigma_z \mu_B g B - \sigma_z \alpha m(E) \omega_0 \frac{i\partial}{\partial \varphi}. \quad (14)$$

Стационарне рівняння Шрьодінгера з [3,5]. Його рівні енергії та хвильові функції гамільтоніаном H_1 має аналітичний розв'язок мають вигляд:

$$E_{n,l,\sigma}^1 = \hbar \Omega_{\sigma}(E_{n,l,\sigma}, B) (2n + |l| + 1) + l \frac{\hbar \omega_c(E_{n,l,\sigma}, B)}{2} + \sigma \left[\frac{\mu_B}{2} g(E_{n,l,\sigma}) B + l \alpha m(E_{n,l,\sigma}) \omega_0^2 \right], \quad (15)$$

$$\psi_{n,l,\sigma}^1(r, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(il\varphi) R_{n,l,\sigma}^1(r), \quad (16)$$

$$\text{де } R_{n,l,\sigma}^1(r) = \sqrt{\frac{2}{l_B^2}} \left[\frac{n!}{(n+|l|)!} \right]^{1/2} \exp\left(-\frac{r^2}{2l_B^2}\right) \cdot \left(\frac{r^2}{l_B^2}\right)^{|l|/2} \cdot L_n^{|l|}\left(\frac{r^2}{l_B^2}\right), \quad (17)$$

n – головне квантове число, l – квантове число, що відповідає за проекцію орбітального моменту електрона на вісь z та $\sigma = \pm 1$ – квантове число,

При розгляді КТ видно, що обмежуючий потенціал вздовж радіусу КТ має також приводити до виникнення спіно – орбітальної взаємодії. Даний внесок відомий як потенціал Рашби [3, 8]. В полярній системі координат оператор Рашби набуває такого вигляду:

$$V_{so}^R(r, \varphi) = \sigma_z \alpha \frac{dV_c(r)}{dr} \left(k_{\varphi} + \frac{e}{2\hbar} Br \right). \quad (8)$$

Рівняння Шрьодінгера:

Розглянемо параболичну квантову точку з обмежуючим потенціалом (1). Магнітне поле прикладено вздовж осі z КТ. Тоді гамільтоніан електрона в циліндричних координатах (r, φ) набуває наступного вигляду:

тут $\omega_c(E, B)$ – циклотронна частота електрона.

$$g(E) = 2 \left[1 - \frac{m_0}{m(E)} \frac{\Delta}{3(E_g + E) + 2\Delta} \right] \quad (12)$$

тут $g(E)$ – ефективний g -фактор для напівпровідників. Співвідношення для ефективної маси та g -фактора є характерними для напівпровідників.

Перепишемо гамільтоніан (9) у вигляді:

$$H = H_1 + \frac{\sigma_z \alpha m(E) \omega_0^2 e B}{2\hbar} \rho^2 + V_{so}^{BR}(r, \varphi), \quad (13)$$

де

$$l_B = \sqrt{\hbar / m\Omega_\sigma} - \text{ефективна магнітна довжина},$$

$$\Omega_\sigma^2 = \omega_0^2 + \frac{\omega_C^2(E, B)}{4}.$$

Хвильову функцію гамільтоніана (9) шукаємо у вигляді [3]:

$$\psi(r, \varphi) = \sum_{n,l} e^{il\varphi} R_{n,l,\sigma}^1(r) \left[A_l^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + B_l^n \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right]. \quad (18)$$

Стационарне рівняння Шрьодінгера перетворюється на систему рівнянь:

$$(E_{n,l,+1}^0 - E) A_l^n + \alpha \frac{em\omega_0^2}{2\hbar} B \sum_m G_l^{nm} A_l^m +$$

$$+ i\gamma \sum_m \left\{ (l+1) I_l^{nm} + P_l^{nm} + \frac{eB}{2\hbar} J_l^{nm} \right\} B_{l-1}^m = 0,$$

$$(E_{n,l,-1}^0 - E) B_l^n - \alpha \frac{em\omega_0^2}{2\hbar} B \sum_m G_l^{nm} B_l^m -$$

$$- i\beta \sum_m \left\{ (l-1) K_l^{nm} + D_l^{nm} + \frac{e}{2\hbar} B L_l^{nm} \right\} A_{l-1}^m = 0 \quad (19)$$

Тут введені позначення:

$$G_l^{nm} = \int_0^\infty r^3 R_{n,l}^0(r) R_{m,l}^0(r) dr, \quad (20)$$

$$I_l^{nm} = K_{l+1}^{mn} = \int_0^\infty R_{n,l}^0(r) R_{m,l+1}^0(r) dr, \quad (21)$$

$$J_l^{nm} = L_{l+1}^{mn} = \int_0^\infty r^2 R_{n,l}^0(r) R_{m,l+1}^0(r) dr, \quad (22)$$

$$P_l^{nm} = \int_0^\infty r R_{n,l}^0(r) \frac{d}{dr} R_{m,l+1}^0(r) dr, \quad (23)$$

$$D_l^{nm} = \int_0^\infty r R_{n,l}^0(r) \frac{d}{dr} R_{m,l-1}^0(r) dr. \quad (24)$$

Систему рівнянь (19) можна записати в векторній формі: $\mathbf{x}_1^l \mathbf{A}_l = \mathbf{x}_2^l \mathbf{B}_{l-1}$, $\mathbf{x}_3^l \mathbf{B}_{l-1} = \mathbf{x}_4^l \mathbf{A}_l$ [5]. Енергетичний спектр електрона знаходимо чисельно з наступного співвідношення: $\det(\mathbf{x}_3^l (\mathbf{x}_2^l)^{-1} \mathbf{x}_1^l - \mathbf{x}_4^l) = 0$.

Результати розрахунків:

Для InSb квантової точки обрано наступні параметри: $m(0) = 0.014m_0$, $E_g = 0.24\text{eV}$, $\Delta = 0.81\text{eV}$ та $\alpha = 500\text{\AA}^2$ [3]. При розрахунках використовувались розміри квантових точок: $r = 20.9\text{nm}$ та $r = 18.5\text{nm}$. Вздовж осі z прикладено електричне поле.

На рис. 2(а,б,с) зображено залежність енергетичних рівнів електрона від прикладеного магнітного поля. При розрахунках розглянуто енергетичні рівні електрона з головним

квантовим числом $n = 0$. Врахування СО взаємодії приводить до виникнення розщеплення енергетичних рівнів навіть при нульовому значенні прикладеного магнітного поля (Рис.2а, 2с).

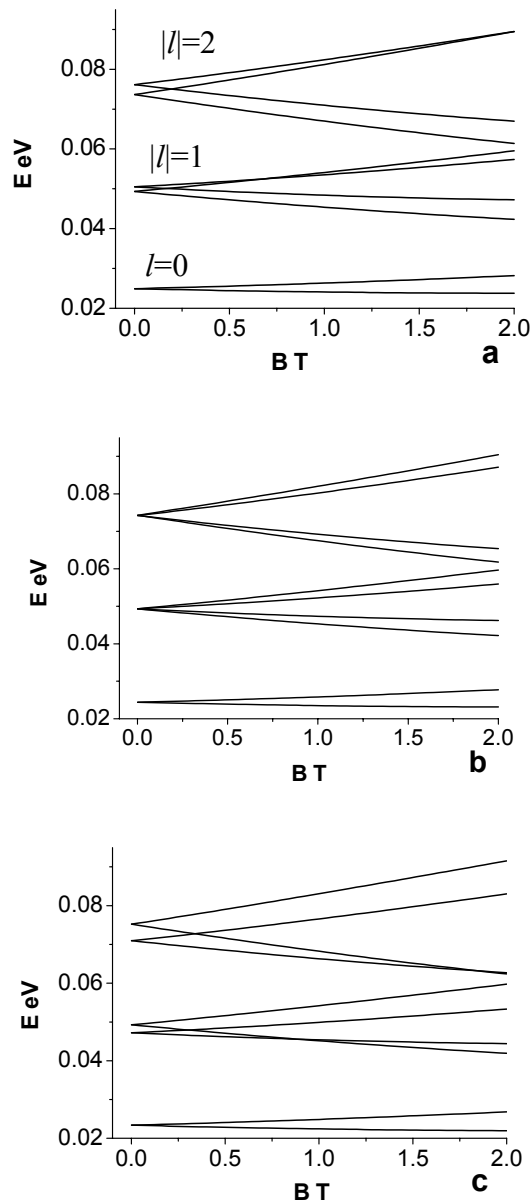


Рис. 2. Енергетичний спектр електрона в InSb квантовій точці з врахуванням складових Рашби та Бичкова-Рашби спин-орбітальної взаємодії. Розмір квантової точки $r = 20.9\text{nm}$. Прикладене зовнішнє електричне поле проводить до зміни потенціалу а) $dV/dz = 4\text{meV/nm}$, б) $dV/dz = 10.86\text{meV/nm}$, в) $dV/dz = 18\text{meV/nm}$

На рис. 2а зовнішнє електричне поле має мале значення. Складові Бичкова-Рашби СО взаємодії незначна порівнянно з складовою Рашби. Спін-орбітальна взаємодія частково знімає

виродження енергетичних рівнів електрона при нульовому значенні магнітного поля. Для $|l|=1$ та $|l|=2$ бачимо розщеплення енергетичних рівнів. Дане розщеплення приводить до перетину енергетичних рівнів електрона з однаковим орбітальним моментом і різними спіновими моментами в ненульовому магнітному полі.

На рис. 2b розглянуто випадок, коли обидві складові СО взаємодії мають однаковий вплив. Як видно з рисунку, дані складові спін-орбітальної взаємодії компенсують одна одну.

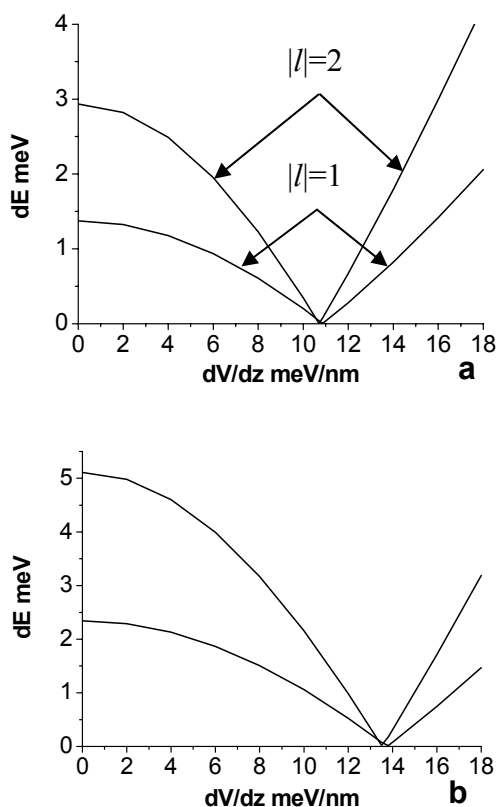


Рис. 3. Розщеплення рівнів енергії електрона, що знаходиться в InSb квантовій точці, при нульовому значенні магнітного поля, а) $r=20,9\text{nm}$, б) $r=18,5\text{nm}$.

При великому значенні електричного поля (рис. 2с) складова Бичкова-Рашби СО взаємодії домінує. Тут також має місце розщеплення енергетичних рівнів.

В роботі [5] продемонстровано, що перетин електронних енергетичних рівнів в квантовій точці приводить до стрибкоподібної зміни намагніченості квантової точки, при низьких значеннях температури. З рисунку 2 видно, що керуючи величиною прикладеного електричного поля можна керувати положенням перетину енергетичних рівнів електрона, що в свою чергу приведе до зміни магнітних властивостей квантової точки.

В даній роботі представлено теоретичне дослідження впливу спін-орбітальної взаємодії на спектр електронів в InSb квантових точках. При розрахунках використовувався одноелектронний гамільтоніан. Для параболічного обмежуючого потенціалу та прикладеного вздовж осі симетрії електричного та магнітного полів отримані спектри електронів в InSb квантових точках. Врахування спін-орбітальної взаємодії приводить до виникнення часткового розщеплення енергетичних рівнів електрона при нульовому значенні магнітного поля. Складові Рашби спін-орбітальної взаємодії зростає із зменшенням величини квантової точки. Складові Бичкова-Рашби пропорційна величині електричного поля прикладеного вздовж осі симетрії квантової точки. Продemonстрована конкуренція двох складових спін-орбітальної взаємодії. Зокрема, як видно з рис. 2b при розмірі КТ $r=20,9\text{nm}$ та зміні потенціалу вздовж z $dV/dz=10,86\text{meV/nm}$ складові Рашби та Бичкова-Рашби скомпенсували одна одну. При зменшенні розміру квантової точки електричне поле для компенсації двох складових спін-орбітальної взаємодії має збільшитись. Це продемонстровано на рис. 3b.

Спінове розщеплення в нульовому магнітному полі і перетин енергетичних рівнів (з однаковими за модулем проекціями орбітального моменту електрона) з зміною зовнішнім магнітним полем явні фізичні явища, які виникають за рахунок впливу спін-орбітальної взаємодії. За допомогою зовнішнього електричного поля можна керувати величиною спін-орбітальної взаємодії.

Список використаних джерел

1. Hanson R. Spins in few-electron quantum dots / R. Hanson, L. P. Kouwenhoven, J. R. Petta, S. Tarucha, L. M. K. Vandersypen // *Rev. Mod. Phys. Journal*. – 2007. – **79**. – P. 1217-1268.

References

1. HANSON R., KOUWENHOVEN L. P., PETTA J. R., TARUCHA S., VANDERSYPEN L. M. K. (2007) Spins in few-electron quantum dots. *Rev. Mod. Phys. Journal*. 79. p. 1217-1268.

2. Mosshammer K. Semiclassical spin-spin dynamics and feedback control in transport through a quantum dot / K. Mosshammer, T. Brandes // *Phys. Rev. B.* – 2014. – **90**, – P. 134305-134325.
3. Voskoboynikov O. Spin-orbit splitting in semiconductor quantum dots with a parabolic confinement potential / O. Voskoboynikov, C. P. Lee, O. Tretyak. // *Phys. Rev. B.* – 2001. – **63**. – P. 165306-165311.
4. Pietilainen P. Energy levels and magneto-optical transitions in parabolic quantum dots with spin-orbit coupling / P. Pietilainen, T. Chakraborty // *Phys. Rev. B.* – 2006. – **73**. – P. 155315-155330.
5. Voskoboynikov O. Magnetic properties of parabolic quantum dots in the presence of the spin-orbit interaction / O. Voskoboynikov, O. Bauga, C. P. Lee, O. Tretyak // *Journal of Applied Physics* – 2003. – **94**. – P. 5891-5895
6. Nishi Y. Intermediate low spin states in a few-electron quantum dot in the $v \geq 1$ regime / Y. Nishi, P. A. Maksym, D.G. Austing, T. Hatano, L. P. Kouwenhoven, H. Aoki, and S. Tarucha // *Phys. Rev. B.* – 2006 – **74**. – P. 033306-033309.
7. Reimann S. M. Electronic structure of quantum dots / S. M. Reimann, M. Manninen // *Rev. Mod. Phys. Journal.* – 2002. – **74**. – P. 1283-1342.
8. Magaril L. I. Ballistic transport and spin-orbit interaction of two-dimensional electrons on cylindrical surface / L. I. Magarill, D. A. Romanov, and A. V. Chaplik // *Zh. Eks. Teor. Fiz.* – 1998. – **86**. – P. 771-779.
9. Bychkov Yu. A. Properties of a 2D electron-gas with lifted spectrum degeneracy / Yu. A. Bychkov, E. I. Rashba // *JETP Lett.* – 1984, – **39**. – P. 78-81.
2. MOSSHAMMER K., BRANDES T. (2014) Semiclassical spin-spin dynamics and feedback control in transport through a quantum dot. *Phys. Rev. B.* 90. p. 134305-134325.
3. VOSKOBOYNIKOV O., LEE C. P., TRETYAK O. (2001) Spin-orbit splitting in semiconductor quantum dots with a parabolic confinement potential *Phys. Rev. B.* 63. p. 165306-165311.
4. PIETILAINEN P., CHAKRABORTY T. (2006) Energy levels and magneto-optical transitions in parabolic quantum dots with spin-orbit coupling. *Phys. Rev. B.* 73. p. 155315-155330.
5. VOSKOBOYNIKOV O., BAUGA O., LEE C. P., TRETYAK O. (2003) Magnetic properties of parabolic quantum dots in the presence of the spin-orbit interaction. *Journal of Applied Physics.* 94. p. 5891-5895.
6. NISHI Y., MAKSYM P. A., AUSTING D. G., HATANO T., KOUWENHOVEN L. P., AOKI H., AND TARUCHA S. (2006) Intermediate low spin states in a few-electron quantum dot in the $v \geq 1$ regime. *Phys. Rev. B.* 74. p. 033306-033309.
7. REIMANN S. M., MANNINEN M. (2002) Electronic structure of quantum dots. *Rev. Mod. Phys. Journal.* 74. p. 1283-1342.
8. MAGARILL L. I., ROMANOV D. A., AND CHAPLIK A. V. (1998) Ballistic transport and spin-orbit interaction of two-dimensional electrons on cylindrical surface. *Zh. Eks. Teor. Fiz.* 86. p. 771-779.
9. BYCHKOV YU. A., RASHBA E. I. (1984) Properties of a 2D electron-gas with lifted spectrum degeneracy. *JETP Lett.* 39. p. 78-81.

Надійшла до редколегії 06.06.15

УДК 519.9

Кисленко В. І., к.ф.-м.н., доц.
Мазур Н. В., студент

Kislenko V. I., Ph.D
Mazur N. V., student

Матричний метод аналізу стійкості лазерного резонатора

The analysis of stability of laser resonator by the matrix method

Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 83000, м. Київ, пр.-т. Глушкова 4г,
e-mail: vladimir.kislenko@gmail.com
e-mail: nazarmazur1994@gmail.com

Taras Shevchenko National University of Kyiv, 83000,
Kyiv, Glushkova st., 4h,
e-mail: vladimir.kislenko@gmail.com
e-mail: nazarmazur1994@gmail.com

У даній роботі наведені розрахунки стійкості лазерного резонатора при розгляді двох спряжених опорних площин, розташованих нормально до оптичної осі резонатора. Головною фізичною величиною, що аналізується, є лінійний коефіцієнт збільшення.

Ключові слова: резонатор, дзеркало, опорна площина

The problem of forming of the radiation field in laser resonators was investigating in many studies. The consideration of this issue was based on the replacement the task of forming field in a laser resonator onto the task of modeling of spreading radiation in the lens waveguide in the paraxial approximation. Such a model allows us to identify a number of important factors that influence on this process. But the difference between this model and the original laser resonator is that resonator has discrete frequencies of generation, while a continuous range of frequencies can spread in the lens waveguide. In this work the main physical quantity that is analyzing, is the linear increment coefficient in a contrast to the angular increment coefficient that was used in previous works. This approach requires involving consideration of the two conjugated reference planes which are located perpendicular to optical axis of a resonator (the planes of an object and an image). Their location is limited by an existence of a minimal optical distance between the object and its real image to the spherical mirror. Such approach allows comparing the previous conditions of stability of a laser resonator with received in this work.

Key Words: resonator, mirror, reference plane.

Статтю представив д.ф.-м.н. Савенков С.М.

Вступ

Однією з основних характеристик резонатора є його стійкість. Задача про стійкість лазерного резонатора є класичною для сучасної оптики. Знаючи параметри резонатора (радіуси дзеркал і відстань між ними) можна розрахувати умову стійкості, що впливає на генераційні характеристики лазера.

Задача стійкості резонатора розглядалась в багатьох роботах [1-4]. Аналіз стійкості лазерного резонатора було проведено в роботі [4]. В ній було виведено та проаналізовано критерій стійкості резонатора, введена еквівалентна система лінз. Розрахунки проводились, розміщуючи опорні площини на одному із дзеркал резонатора.

Постановка задачі

В даній роботі запропоновано розглядати поперечний розподіл лазерного випромінювання всередині резонатора. З цією метою введені додаткові опорні площини, довільно розташованих всередині резонатора.

Отже, введені опорні площини P_1 , P_2 , розташовані всередині резонатора довжиною L , утвореного дзеркалами 1 і 2 з радіусами r_1 і r_2 відповідно (див. рис.1). Будемо вважати, що дзеркала рівноправні.

L – оптична довжина резонатора; P_1 , P_2 – опорні площини; s_1 – відстань від площини P_1 до дзеркала 1; s_2 – відстань від дзеркала 1 до площини P_2 ; s_3

- відстань від площини P_2 до дзеркала 2; s_4 - відстань від дзеркала 2 до площини P_1 .

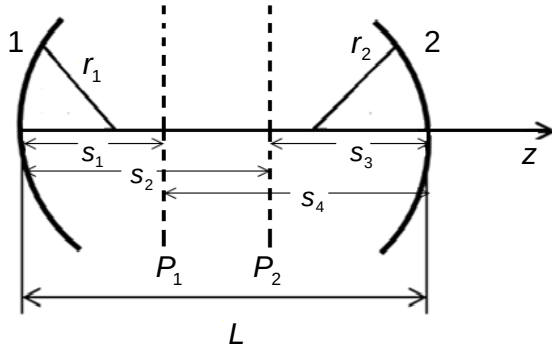


Рис. 1 Розташування опорних площин в лазерному резонаторі

Поперечний розподіл інтенсивності лазерного випромінювання в одній з опорних площин можна розглядати як певний предмет із відповідним розміром y_1 , зображення якого формується в другій опорній площині за допомогою дзеркала 1 (розмір зображення y_2).

Враховуючи рівноправність дзеркал, потрібно врахувати також рівноправність опорних площин, тобто вони можуть одночасно бути площинами предмета і зображення для дзеркала 1 та площинами зображення і предмета для дзеркала 2. Знайдемо обмеження на взаємне розташування предмета в площині P_1 і його зображення в площині P_2 .

Матрицю лазерного резонатора M_Σ тоді можна визначити як добуток матриць

$$M_\Sigma = M_2 M_1 = \begin{pmatrix} A_\Sigma & B_\Sigma \\ C_\Sigma & D_\Sigma \end{pmatrix}, \quad (1)$$

Матриця M_1 складається з матриці трансляції від площини P_1 до дзеркала 1, матриці дзеркала, та матриці трансляції від дзеркала 1 до площини P_2 . Матриця M_2 складається з матриці трансляції від площини P_2 до дзеркала 2, матриці дзеркала, та матриці трансляції від дзеркала 2 до площини P_1 .

$$M_1 = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{pmatrix} = S_2 R_1 S_1, \quad (2)$$

$S_1 = \begin{pmatrix} 1 & s_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ – матриця трансляції від предмета в площині P_1 до дзеркала 1;

$$R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -F_1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2}{r_1} & 1 \end{pmatrix} \text{ – матриця дзеркала}$$

1, що формує зображення;

$$S_2 = \begin{pmatrix} 1 & s_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ – матриця трансляції від дзеркала}$$

1 до зображення в площині P_2 ;

Коефіцієнти матриці M_1 визначаються наступним чином:

$$A_1 = 1 - F_1 s_2, \quad (3)$$

$$B_1 = s_1(1 - F_1 s_2) + s_2, \quad (4)$$

$$C_1 = -F_1 = -\frac{2}{r_1}, \quad (5)$$

$$D_1 = 1 - F_1 s_1, \quad (6)$$

$$\text{де } F_1 = \frac{2}{r_1} = \frac{1}{f_1}.$$

Матриця M_2 визначається як

$$M_2 = \begin{pmatrix} A_2 & B_2 \\ C_2 & D_2 \end{pmatrix} = S_4 R_2 S_3, \quad (7)$$

$$S_4 = \begin{pmatrix} 1 & s_4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (8)$$

$$R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -F_2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2}{r_2} & 1 \end{pmatrix}, \quad (9)$$

$$S_3 = \begin{pmatrix} 1 & s_3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (10)$$

де

$$A_2 = 1 - F_2 s_4, \quad (11)$$

$$B_2 = s_3(1 - F_2 s_4) + s_4, \quad (12)$$

$$C_2 = -F_2, \quad (13)$$

$$D_2 = 1 - F_2 s_3, \quad (14)$$

$$\text{де } F_2 = \frac{2}{r_2} = \frac{1}{f_2}.$$

Матриця M_1 описує перетворення променів, що виходять із однієї точки опорної площини P_1 і попадають в одну точку опорної площини P_2 . Для оптичної матриці дзеркала M_1 це означає, що коефіцієнт $B_1 = 0$. Враховуючи (4) отримуємо:

$$s_1(1-F_1s_2) + s_2 = 0.$$

Тоді з цієї умови отримаємо

$$s_1 + s_2 = F_1s_1s_2.$$

Це співвідношення відповідає формулі сферичного дзеркала

$$\frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_2} = F_1 = \frac{1}{f_1}. \quad (15)$$

Аналогічні результати отримаємо для матриці M_2 , замінивши відстані s_1, s_2 на s_3, s_4 відповідно. В даному випадку предметом вважаємо розподіл інтенсивності випромінювання в площині P_2 , а його зображення, утворене дзеркалом 2, знаходиться в площині P_1 .

За аналогією до формули (15) отримується формула для дзеркала 2

$$\frac{1}{s_3} + \frac{1}{s_4} = F_2 = \frac{1}{f_2}. \quad (16)$$

Для оптичної матриці дзеркала M_2 аналогічно коефіцієнт $B_2 = 0$, тобто

$$B_1 = s_1(1-F_1s_2) + s_2 = 0,$$

$$B_2 = s_3(1-F_2s_4) + s_4 = 0.$$

Враховуючи коефіцієнти A_1, A_2 з формул (3), (11), отримуємо, що

$$B_1 = s_1A_1 + s_2 = 0, \quad (17)$$

$$B_2 = s_3A_2 + s_4 = 0. \quad (18)$$

З цих формул отримуємо значення коефіцієнтів A_1, A_2 .

$$A_1 = -\frac{s_2}{s_1}, A_2 = -\frac{s_4}{s_3}. \quad (19)$$

Знаючи коефіцієнти $A_i, B_i, C_i, D_i, i=1,2$, можемо визначити коефіцієнти сумарної матриці

$$A_\Sigma = A_1A_2 + B_1C_2 = A_1A_2, \quad (20)$$

$$B_\Sigma = A_1B_2 + B_1D_2 = 0, \quad (21)$$

$$C_\Sigma = C_1A_2 + D_1C_2, \quad (22)$$

$$D_\Sigma = C_1B_2 + D_1D_2 = D_1D_2. \quad (23)$$

Аналогічно до $B_1 = B_2 = 0$, отже і $B_\Sigma = 0$, A_Σ визначає лінійне збільшення у випадку формування зображення системою дзеркал, $D_\Sigma = 1/A_\Sigma$.

Тобто

$$M_\Sigma = M_2M_1 = \begin{pmatrix} A_\Sigma & 0 \\ C_\Sigma & 1/A_\Sigma \end{pmatrix}. \quad (24)$$

Підставляючи значення з (19) в (20) отримаємо

$$A_\Sigma = A_1A_2 = \frac{s_2}{s_1} \frac{s_4}{s_3}. \quad (25)$$

Слід відмітити, що (див. рис. 1)

$$s_2 = L - s_3, s_4 = L - s_1. \quad (26)$$

Підставивши дані значення в (30), отримаємо

$$A_\Sigma = \frac{L-s_1}{s_1} \frac{L-s_3}{s_3} = \left(1 - \frac{L}{s_1}\right) \left(1 - \frac{L}{s_3}\right). \quad (27)$$

Подивимось, які обмеження на розташування опорних площин вимагають існування дійсного зображення, за умови, що предмет знаходиться на відстані $2f$ від дзеркала.

Позначивши l_1 як оптичний шлях від предмета до зображення, що формується дзеркалом 1

$$l_1 = s_1 + s_2, \quad (28)$$

і підставивши в формулу (15), отримаємо

$$l_1 = \frac{F_1s_1^2}{F_1s_1 - 1}. \quad (29)$$

Знайдемо мінімально можливу оптичну відстань між предметом та зображенням

$$\frac{\partial l_1}{\partial s_1} = 0, \quad (30)$$

$$\frac{\partial l_1}{\partial s_1} = \frac{F_1^2s_1^2 - 2F_1s_1}{(F_1s_1 - 1)^2} = 0 \rightarrow F_1s_1 - 2 = 0. \quad (31)$$

Отримуємо

$$(s_1)_{\min} = \frac{2}{F_1} = 2f_1 = R_1. \quad (32)$$

Підставивши отриманий вираз в формулу (29), отримаємо, що мінімальна оптична відстань між предметом та зображенням є

$$l_{1\min} = \frac{F_1 \frac{4}{F_1^2}}{F_1 \frac{2}{F_1} - 1} = \frac{4}{F_1} = 4f_1. \quad (33)$$

Підставивши отриманий вираз в (28), впливає

$$(s_1)_{\min} + (s_2)_{\min} = 4f_1 \rightarrow (s_2)_{\min} = 2f_1 = R_1. \quad (34)$$

З (32), (34) бачимо, що $(s_1)_{\min} = (s_2)_{\min}$, тобто P_1 і P_2 суміщаються.

Аналогічно вводиться $l_2 = s_3 + s_4$, і отримуємо

$$(s_3)_{\min} = (s_4)_{\min} = R_2. \quad (35)$$

Тоді мінімальна оптична відстань між предметом і зображенням дорівнює

$$l_{2\min} = 4f_2. \quad (36)$$

Отже, загальна мінімальна оптична відстань між предметом і зображенням при повному обході

резонатора, і враховуючи рівноправність дзеркал, дорівнює

$$l_{\min} = l_{1\min} + l_{2\min} = 4(f_1 + f_2). \quad (37)$$

Підставляючи значення величин із формул (32), (35) у формулу (27), отримуємо

$$A_{\Sigma} = (1 - \frac{L}{R_1})(1 - \frac{L}{R_2}). \quad (38)$$

Для того, щоб резонатор був стійким, потрібно, щоб розміни пучка генерації залишалися сталими або були меншими за 1 при повному проходженні резонатора, тобто

$$0 < A_{\Sigma} < 1. \quad (39)$$

Тому отримуємо таку умову

$$0 < (1 - \frac{L}{r_1})(1 - \frac{L}{r_2}) < 1. \quad (40)$$

Ввівши заміну

$$g_1 = 1 - \frac{L}{r_1}, g_2 = 1 - \frac{L}{r_2}, \quad (41)$$

і підставивши її в (40), отримаємо

$$0 < g_1 g_2 < 1. \quad (42)$$

Тобто $A_{\Sigma} = g_1 g_2$, і отримано умову стійкості лазерного резонатора.

Висновки

В роботі показано, що включення додаткових опорних площин дозволяє розглянути проблему стійкості лазерного резонатора я проблему стійкості зображення структури лазерного випромінювання у відповідних площинах. Це дає можливість перейти від параметрів g_1, g_2 до фізично відомих параметрів – коефіцієнтів лінійного збільшення A_1, A_2 . Результати отримані в роботі співпадають з результатами попередніх авторів.

Список використаних джерел

1. Ананьев Ю. А. Оптические резонаторы и лазерные пучки / Ю.А. Ананьев.— Москва: Наука, 1990
2. Джеррард А. Вступ в матричну оптику / А. Джеррард, Дж.М. Берч. - Москва: Мир, 1978.
3. Звелто О. Принципи лазерів / О. Звелто. — Москва: Мир, 1990
4. Когельник Х. Лазерні промені та резонатори / Х. Когельник, Т. Лі. — Proc. IEEE, 1966, **54**, № 10, С. 1312-1329.
5. Мазур Н. В. Матричний метод аналізу стійкості лазерного резонатора / Н.В. Мазур, В.І. Кисленко // XVITH International Young Scientists' Conference on Applied Physics. 15-18, June 2016, Kiev, Ukraine. — Kyiv. — 2016. - P. 27-28.

References

1. Anan'ev, Y. (1990) Optical resonators and laser beams. Moskva: Nauka
2. Gerrard, A., Burch, J. (1978) Introduction to matrix methods in optics. Moskva: Myr
3. Svelto, O. (1990) Principles of Lasers. Moskva: Myr
4. Kogelnik H., Li T. (1966) Laser Beams and Resonators. Proc. IEEE
5. Mazur, N., Kislenco, V. (2016) Stability analysis of laser resonator by the matrix method. In XVITH International Young Scientists' Conference on Applied Physics. June, 15-18, 2016, Kiev, Ukraine. pp. 27-28

Надійшла до редколегії 29.09.16

УДК 539.25

Находкін М.Г., д.ф.-м.н., проф.
Родіонова Т.В., к.ф.-м.н., с.н.с.

**Вплив легування фосфором на
структуру аморфно-кристалічних
плівки кремнію**

Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 83000, м. Київ, пр-т.
Глушкова 4д,
e-mail: rodtv@univ.kiev.ua

N.G. Nakhodkin, D. Sci., prof.
T.V. Rodionova, Ph. D.

**Effect of phosphorus doping on the structure
of amorphous-crystalline silicon films**

Taras Shevchenko National University of Kyiv,
83000, Kyiv, Glushkova st., 4d,
e-mail: rodtv@univ.kiev.ua

Структура нелегованих та легованих фосфором аморфно-кристалічних плівок кремнію, що отримані методом хімічного осадження з газової фази, була досліджена методом просвічуючої електронної мікроскопії. В легованих фосфором плівках було виявлено два типи кристалітів кремнію, зокрема, кристаліти еліптичної форми з двійниковими прошарками уздовж головної осі та кристаліти неправильної форми. В нелегованих плівках спостерігались тільки кристаліти неправильної форми. Така відмінність структури може бути обумовлена ступенем впорядкованості аморфної фази, в якій ростуть кристаліти кремнію.

Ключові слова: аморфно-кристалічні плівки кремнію, структура, легування фосфором.

The microstructure of undoped and phosphorus doped amorphous-crystalline silicon films deposited by low pressure chemical vapor deposition has been investigated by transmission electron microscopy. It was shown that phosphorus doping significantly influences the structure of amorphous-crystalline silicon films. There are two morphological species of crystallites observed in P-doped films: 1 – elliptical crystallites which contain twin boundaries along the major axis. The major axis of each ellipse is about three times longer than the minor one. Twin boundaries are found to lie along the $\langle 112 \rangle$ direction with the average length of 200 nm. The elliptical crystallites shape is due to the anisotropic growth of crystal in amorphous silicon along different orientation and implies that these formation is controlled by the slowest growing planes, i.e. (111); 2 – fan-like crystallites with average size about 50 nm. This is only one species of crystallites is observed in undoped amorphous-crystalline silicon films – fan-like crystallites. Such difference is determined by various crystallite formation mechanisms in these two cases. In undoped silicon films crystallite formation is controlled by deposition temperature and proceeds in amorphous surrounding. As far as P-doped silicon films is concerned, the analogy with ion-implanted layers allow us to suppose that in situ doping results in disordered amorphous layers.

Key Words: amorphous-crystalline silicon films, structure, phosphorus doping

Статтю представив д.ф.-м.н. Скришевський В.А.

Вступ

Оскільки відомо, що структура полікристалічних плівок визначає їх важливі з точки зору практичних застосувань властивості (механічні, електрофізичні, оптичні), структурним дослідженням приділяється значна увага. При цьому, якщо раніше при дослідженні структури в якості основного структурного елемента розглядали розмір зерен, зараз увага дослідників звернена на такі елементи структури, як дефекти та границі поділу. Зокрема, велика кількість

досліджень присвячена вивченню границь зерен та стиків границь зерен в плівках [1-5], їх будови, орієнтацій них залежностей, зміни характеристик зернограничної структури при термообробках та ін.

Поряд з повністю кристалічними плівками значну увагу привертають кремнієві плівки, що містять нанокристаліти кремнію в аморфній кремнієвій матриці. Такі плівки привертають увагу дослідників як з точки зору фундаментальних досліджень, що пов'язані з

наявністю в цих матеріалах квантово-розмірних ефектів, так і завдяки перспективам їх практичних застосувань [1-5]. З прикладної точки зору становить інтерес можливість керованого формування зародків кристалічної фази з метою отримання полікристалічних плівок кремнію з наперед заданими параметрами для виробництва тонкоплівкових пристроїв, зокрема, транзисторів, сенсорів, сонячних батарей, рідкокристалічних дисплеїв, тощо.

З точки зору застосування в сонячній енергетиці аморфно-кристалічні плівки є більш привабливими, ніж аморфні, з кількох причин, зокрема: по-перше, аморфний стан є метастабільним, тому параметри пристроїв можуть змінюватись та спричинювати деградацію приладів; по-друге, як правило, швидкість безвипромінювальних переходів в кристалічних кластерах менше, ніж в аморфних, так що інтенсивність фотолюмінісценції для нанокристалів, як правило, вище, ніж для аморфних кластерів.

Оскільки електрофізичні властивості аморфно-кристалічних плівок визначаються їх структурними характеристиками, численні дослідження присвячені визначенню залежностей структури плівок від параметрів осадження, зокрема, від температури осадження, тиску, товщини плівок, швидкості осадження та ін. [3-5]. В роботі [3], показано, що зменшення швидкості осадження при будь-якій заданій температурі призводить від осадження аморфної плівки до осадження плівки зі змішаною структурою, в якій кристаліти кремнію вбудовані в аморфну кремнієву матрицю. В роботі [3], в якій проаналізовано механізми формування структури змішаних плівок кремнію, показано, що такі вбудовані кристаліти формуються на початку процесу осадження і мають переважну орієнтацію $\langle 311 \rangle$. При цьому розміри кристалітів та їх щільність зростають зі збільшенням температури осадження та зменшенням тиску при осадженні. Але визначенню впливу домішок на структуру плівок майже не приділялась увага.

В даній роботі методами просвічуючої електронної мікроскопії (ПЕМ) досліджено вплив фосфору на структурні характеристики аморфно-кристалічних плівок кремнію.

Методика

Кремнієві плівки одержували методом хімічного осадження з газової фази в реакторі

зниженого тиску. Як підкладки використовували пластини монокристалічного кремнію із шаром окисла SiO_2 товщиною ~ 100 нм. Температура осадження аморфно-кристалічних плівок становила 610°C , товщина плівок 500 нм. Частину плівок легували фосфором. Рівень легування $\sim 10^{21} \text{ см}^{-3}$.

Для дослідження структури методом просвічуючої електронної мікроскопії плівки стоншували шляхом хімічного травлення в суміші $\text{HF}:\text{HNO}_3$ (1:5).

Результати та обговорення

ПЕМ-зображення структури нелегованих та легованих фосфором плівок свідчать про наявність кристалітів кремнію, що хаотично розподілені в аморфній матриці. Як видно з рис.1, структура нелегованих та легованих фосфором аморфно-кристалічних плівок суттєво відрізняється. В легованих фосфором плівках спостерігаються два морфологічно різних типа кристалітів: 1– кристаліти еліптичної форми, що містять двійникові прошарки уздовж головної осі (на рис. 1,а позначені як кристаліти типу А). При цьому головна вісь майже втричі перевищує по довжині малу вісь еліпса. Двійникові прошарки розташовані уздовж напрямку $\langle 112 \rangle$ і мають середню довжину 200 нм. Еліптична форма кристалітів обумовлена анізотропією росту кристалічної фази в аморфній матриці уздовж різних кристалографічних напрямків і свідчить про те, що формування кристалітів контролюється площинами з мінімальною швидкістю росту. 2 – кристаліти неправильної форми із середнім розміром 50 нм (позначені як кристаліти типу Б на рис. 1,а). В нелегованих аморфно-кристалічних плівках спостерігається тільки один різновид кристалітів – кристаліти неправильної форми (рис. 1,б).

На рис. 2 наведені картини селективної електронної дифракції для нелегованих та легованих фосфором плівок. Видно, що у випадку нелегованих плівок на дифракційній картині спостерігаються гало, що характерно для аморфних плівок (рис. 2,а). Малі щільність та розміри кристалітів недостатні для формування дифракційних рефлексів. У випадку легованих фосфором кремнієвих плівок дифракційна картина стає більш різкою, на дифракційних кільцях спостерігаються окремі яскраві точки, що відповідають кристалітам кремнію (рис. 2,б). Найбільш інтенсивні рефлекси спостерігаються

плівок спостерігаються два типа кристалітів, пов'язано з тим, що у випадку іонно-імплантованих шарів спостерігали кристаліти, що зароджуються на границі плівка-підкладка, а у випадку легованих фосфором аморфно-кристалічних плівок біля границі a-Si-SiO₂ зародження кристалітів не має місця [6].

Висновки

Легування фосфором суттєво впливає на структуру аморфно-кристалічних кремнієвих плівок, а саме:

- в нелегованих плівках має місце один тип кристалітів кремнію неправильної форми з середнім розміром 50 нм в аморфній матриці;

- в плівках, що леговані фосфором, спостерігаються кристаліти двох видів, зокрема, кристаліти неправильної форми з середнім розміром 50 нм, та кристалітів еліптичної форми. Переважні орієнтації кристалітів $\langle 111 \rangle$ та $\langle 311 \rangle$.

- різниця в структурі нелегованих та легованих фосфором аморфно-кристалічних плівок обумовлена ступенем впорядкованості аморфної фази.

Список використаних джерел

1. Mao H.-Yu. Hot-wire chemical vapor deposition and characterization of p-type nanocrystalline Si films for thin film photovoltaic applications / H.-Yu. Mao, S.-Yu. Lo, D.-S. Wu, B.-R. Wu, S.-L. Ou, H.-Yu Hsieh, R.-H. Horng // *Thin Solid Films*. – 2012. – Vol. 520. – P.5200–5205.
2. Mukhopadhyay S. Nanocrystalline silicon: A material for thin film solar cells with better stability / S. Mukhopadhyay, A. Chowdhury, S. Ray // *Thin Solid Films*. – 2008. – Vol. 516, Issue 20. – P. 6824-6828.
3. Wee H. Growth mechanisms of crystallites in the mixed-phase silicon films deposited by low-pressure chemical vapor deposition / H. Wee, C. Lee, S.-C. Shin // *Thin Solid Films*. – 2000. – Vol. 376. – P. 38-46.
4. Gogoi P. High band gap nanocrystallite embedded amorphous silicon prepared by hot wire chemical vapour deposition / P. Gogoi, H.S. Jha, P. Agarwal // *Thin Solid Films*. – 2010. – Vol. 518. – P. 6818-6828.
5. Zhang H. Microstructure characterization of microcrystalline silicon thin films deposited by very high frequency plasma-enhanced chemical vapor deposition by spectroscopic ellipsometry / H. Zhang, X. Zhang, C. Wei, J. Sun, X. Geng, S. Xiong, Y. Zhao // *Thin Solid Films*. – 2011. – Vol. 520. – P. 861-865.
6. Кобка В.Г. Границы раздела в поликремниевых пленках / В.Г. Кобка, Н.Г. Находкин, Т.В. Родионова, // *Известия АН СССР. Неорган. Матер.* – 1989. – Том 25, № 11. – С. 1912-1914. ISSN 0002-337X.

References

1. MAO, H.-YU., LO, S.-YU., WUU, D.-S., WU, B.-R. OU, S.-L., HSIEH, H.-YU. & HORNG, R.-H. (2012) Hot-wire chemical vapor deposition and characterization of p-type nanocrystalline Si films for thin film photovoltaic applications *Thin Solid Films*. 520. p.5200–5205.
2. MUKHOPADHYAY, S., CHOWDHURY, A. & RAY, S. (2008) Nanocrystalline silicon: A material for thin film solar cells with better stability *Thin Solid Films*. 516(20). p. 6824-6828.
3. WEE, H., LEE, C. & SHIN, S.-C. (2000) Growth mechanisms of crystallites in the mixed-phase silicon films deposited by low-pressure chemical vapor deposition. *Thin Solid Films*. 376. p. 38-46.
4. GOGOI, P., JHA, H.S. & AGARWAL, P. (2010). High band gap nanocrystallite embedded amorphous silicon prepared by hot wire chemical vapour deposition. *Thin Solid Films*. 518. p. 6818-6828.
5. ZHANG, H., ZHANG, X., WEI, G., SUN, J., GENG, X., XIONG, S. & ZHAO Y. (2011) Microstructure characterization of microcrystalline silicon thin films deposited by very high frequency plasma-enhanced chemical vapor deposition by spectroscopic ellipsometry. *Thin Solid Films*. 520. p. 861-865.
6. KOBKA, V.G., NAKHODKIN, N.G. & RODIONOVA T.V. (1989) Interfaces in polysilicon films. *Inorganic materials*. 25(11).p. 1912-1914.

Надійшла до редколегії 29.09.16.

СУЧАСНА ФІЗИКА

УДК 53.023

Булавін Л.А.¹, д.ф.-м.н., проф.,
Гребньов О.А.¹, студ.

Модель для оцінки площі поверхні вуглецевих наночастинок

¹КНУ ім. Тараса Шевченка, вул. Володимирська,
64/13, 01601 Київ, Україна
e-mail:astakolle@yandex.ru

L.A. Bulavin¹, Dr.Sci., Prof.,
O.A. Hreblov¹, stud.

Model for carbon nanoparticles surface area estimation

¹Taras Shevchenko National University of Kyiv,
Volodymyrska Str., 64/13, 01601 Kyiv, Ukraine
e-mail:astakolle@yandex.ru

Ми описуємо модель для оцінки площі поверхні вуглецевих наночастинок, а саме одностінних вуглецевих нанотрубок, багатостінних вуглецевих нанотрубок, фулеренів, астраленів, нанопластин. Оцінка площі поверхні ґрунтується на припущенні, що наночастина описується геометричною фігурою з аналогічною наночастиною симетрією та геометричними розмірами. Далі розраховується площа поверхні геометричної фігури. У порівнянні з описаною у літературі моделлю [1], запропонована модель має меншу кількість «розрахункових» кроків для оцінки площі поверхні наночастинок, що зменшить час розрахунків при моделюванні властивостей вуглецевих наночастинок.

Ключові слова: вуглецеві нанотрубки, фулерени, астралени, вуглецеві нанопластики, питома площа поверхні.

We report a simple approach to surface area estimation of carbon nanoparticles, such as single-walled nanotubes, multi-walled nanotubes, fullerenes, astralens and nanosheets. Evaluation of surface area is based on a model in which nanoparticle is presented by geometric figure with the same symmetry and same parameters, and followed by calculation surface area of figure. The results are in good agreement with the microscopic properties and the surface area of carbon nanoparticles which are previously reported in the literature. In comparison with existing models [1], proposed model can reduce the number of steps for evaluation of carbon nanoparticle surface area; this is reducing calculation time in software for modeling properties of nanoparticles. The calculated data are reported in diagrams useful to correlate the specific surface area of samples, which can be helpful to adjust the synthesis conditions of carbon nanoparticles as well as applications where surface area plays an important role, e.g., in development of devices for energy storage, or creation of media for gas storage. At the same time, this approach would open up a new way to the quick estimation of surface properties of nonmaterial, such as nanoparticles and their aggregates.

Key words: carbon nanotubes, fullerenes, astralens, carbon nanosheet, specific surface area.

Статтю представив Л.А. Булавін проф., д.ф.-м.н., академік НАН України

Introduction

In contrast to the bulk materials based on carbon, carbon nanoparticles have a developed surface area, which plays a key role in their application. It is explained by the fact that the transition from microparticles to nanoparticles causes not only increasing of surface area, but also cause increasing of the number of atoms that can participate in intermolecular interactions with the environment [2]. For example, carbon nanotubes with a developed surface area can be used for producing a new generation of electrodes in batteries; it will reduce charging time and increase battery capacity. [3].

Fullerenes or carbon nanotubes can be used for creation of more efficient catalysts; it will reduce the temperature and the energy required for beginning of the reaction [4]. Also, the specific surface area plays a significant role in the developing electromechanical actuators [5], devices for storage of energy in electrochemical capacitors [6] and as media for H₂ storage [7]. Examples of other applications of carbon nanoparticles in engineering and medicine are described in works [8, 9]. Note that in liquid medium around the carbon nanoparticles confined water layer is formed [10]. As shown by Korolovych et al. [10, 11, 12] the presence of confined water in the system changes its thermodynamic properties and requires consideration

when applying liquid system as coolant. However, at the moment there is no systematic data on the surface area of carbon nanoparticles. For example, in work [13] specific surface area of carbon nanosheets is equal to $\sim 2500 \text{ m}^2/\text{g}$ and in work [13] it is $466 \text{ m}^2/\text{g}$. A similar situation for single-walled carbon nanotubes, in work [1] specific surface area of nanotubes approximately is $1300 \text{ m}^2/\text{g}$, and in work [14] it is $400 \text{ m}^2/\text{g}$. In addition, currently there are no simple model for estimation carbon nanoparticle surface area that is depending on their shape and size.

Therefore the aim of our work is to make a report on geometrical calculations establishing the relations between the surface area of main types of carbon nanoparticles (carbon nanotubes, fullerenes, carbon nanosheets, astralenes) and their geometrical characteristics. The results are reported in the form of diagrams which may be useful to other investigators. We also have shown that the experimental data of carbon nanoparticles surface area is in a good agreement with the theoretical calculations of surface area, which was estimated or calculated on the base of the microscopic characteristics, as reported by the respective authors.

Results and discussion

In a modern literature there are carbon nanoparticles of four main forms, namely: a cylindrical (carbon nanotubes), spherical (fullerenes), planar (carbon nanosheet) and toroidal (astralen). Schematic representation of the carbon nanotube, fullerene, carbon nanosheet and astralen are presented on Fig. 2.

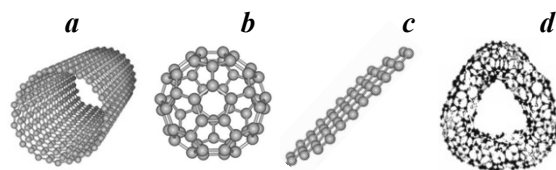


Fig. 2. Schematic representation of the open-ended carbon nanotubes (a), fullerene C₆₀ (b), carbon nanosheet (c) and astralen (d)

Depending on the number of layers, carbon nanotubes (Fig. 2a) are divided into single-walled and multi-walled. The diameter of single-walled carbon nanotubes is in the range from 0.5 nm to a few nm and length from several hundred nanometers to hundreds of microns [15, 16]. Multi-walled carbon nanotubes

are also characterized by a diameter and length. Diameter of multi-walled nanotube ranges from a few to hundreds of nanometers, and in length – from several tens of nanometers to a several micrometers [15, 16, 17]. In contrast to nanotubes, fullerene C₆₀ fullerene has spherically symmetrical shape and it is characterized by in diameter, meaning of the diameter is about 7 Å [18]. Fullerene C₇₀ has not symmetrical shape, so for its characterization two axes are introduced, length of shorter is about 0.712 nm and length of longer - 0.796 nm [19, 20]. It should be noted that in several other works another values are given: 0.72 nm and 0.85 nm [21], or 0.691 nm and 0.792 nm [22]. Astralen is a carbon nanoparticle, which geometric shape is toroid. Astralen is characterized by an outer diameter and pore size. The outer diameter of astralen nanoparticle is in the range from 10 to 150 nm, and pore size from 20 to 60 nm [23, 24]. Carbon nanosheets are characterized by the length of edge, the edge is in the range from 40 nm to several micrometers [25]. Note that in works [26] following data is presented: 1.75 microns and 13 microns, respectively. Thickness of nanosheets typically is more that 1 nm. But we know that nanosheet thickness can vary from a few nanometers to hundreds of nanometers [26].

To evaluate the surface area of nanoparticles with different shapes we proposed a model. The model consists of the description of nanoparticle by geometrical figure that has similar geometric characteristics, and following calculation of the surface area of geometric figure. Note that application of our model does not require consideration of the hexagonal structure of the graphene surface. Also, the model takes into account only the outer surface of nanoparticles. The proposed model can simplify the calculation of the surface area of nanoparticles in comparison to the model described in work [1]. The model proposed in work [1] requires information not only about the nanoparticle weight and number of atom, but also about the molecular structure of nanoparticle hexagonal surface element. Moreover, our model can reduce the number of steps for evaluation carbon nanoparticle surface area; this is reducing calculation time while modeling properties of nanoparticles.

a) Surface area of carbon nanotubes

When calculating the surface area of single-walled carbon nanotube, the nanotube is described by cylinder,

the cylinder height is equal to the nanotube length, and cylinder diameter is equal to the nanotubes diameter. We assume that nanotube "closed", this means that we do not take into account its inner surface. So, the formula for calculation of the nanotube surface area is:

$$S = \pi dl \quad (1)$$

where S - surface area of nanotube, d - its diameter, l - the length of the nanotube.

To calculate the S , we need to know the weight of the carbon nanotube. To calculate the number of carbon atoms that form nanotube, we used the software Nanotube Modeler. Then, the formula for calculation of specific surface area of nanotubes takes the form:

$$SSA = \frac{S}{Nm_C}, \quad (2)$$

where SSA - specific surface area of nanotube, S - its surface area, N - number of C atoms that form nanotube; $m_C = 1,993 \cdot 10^{-26}$ kg – weight of one C atom. When calculating the surface area of multi-walled nanotubes, we applied a similar approach. Specifically, the nanotube is described by cylinder, cylinder height is the length of the nanotube, the diameter of the cylinder - is the outer diameter of the nanotube. The formula for calculation of surface area is similar to the formula (1). To check our model, we calculated specific surface area of single-walled and multi-walled (five layers) nanotubes, taking as a basis the average experimental data on geometrical parameters of carbon nanotubes [15, 17, 10, 17]. The average length of single-walled carbon nanotubes is equal to 30 nm and a diameter is 1.15 nm. For multi-walled nanotubes: the average length is equal to 320 nm and a diameter is 25.4 nm. Calculations using formulas (1) and (2) shows that the surface area of a SWSNT is equal to $4.3332 \cdot 10^{-13} \text{ m}^2$ or $SSA = 1303 \text{ m}^2/\text{g}$. The obtained data is in agreement with the result ($1315 \text{ m}^2/\text{g}$) of calculations based on the model described in work [1]. However, the values are too high in comparison with experimental data ($285 \text{ m}^2/\text{g}$ [16]; $400 \text{ m}^2/\text{g}$ [27]), we explain it by the presence of defects in the nanotubes after synthesis and purification. For MWSNT with parameters, which are equal to averaged value, surface area is equal to $S = 5,1 \cdot 10^{-14} \text{ m}^2$, or MWSNT with 5 layers, $SSA = 649 \text{ m}^2/\text{g}$. For comparison, the experimental data is $50 \text{ m}^2/\text{g}$ [16], $10\text{-}500 \text{ m}^2/\text{g}$ [28], $40\text{-}300 \text{ m}^2/\text{g}$ [29]. Note that the value of specific surface area of MWCNT depends on the number of layers which are forming nanoparticle. Increasing the number of layers results in increased weight of the

nanoparticle, weight is inversely proportional to the specific surface area, see formula (2), while a value of surface area depends only on parameters of outer layer. In other words, the data calculated by our model is in agreement with the literature data.

Using the proposed approach, we calculated the total surface area of the material formed by single-walled and multi-walled carbon nanotubes (Fig 1).

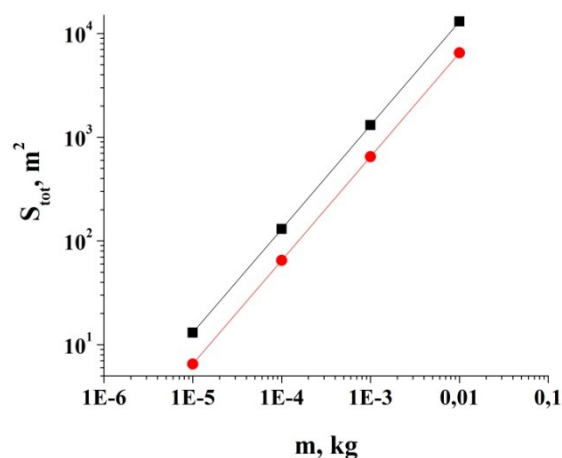


Fig. 1. Total surface area of single-walled (■) and multi-walled (●) carbon nanotubes, based on proposed model.

From Fig. 1 can be seen that the surface area of single-walled carbon nanotube is greater than surface area a multiwall nanotubes, with averaged parameters. By increasing the weight of material based on carbon nanotubes, the effective surface area of the material increases linearly.

b) Surface area of fullerenes

To calculate the surface area of fullerene C_{60} , we describe this carbon nanoparticles by a sphere. The diameter of the sphere coincides with the diameter of fullerene. The formula for the calculation of surface area of fullerene is:

$$S = \pi d^2, \quad (3)$$

where S – fullerene surface area, d – fullerene diameter. To calculate the specific surface area of fullerene-based material we used formula (2), where the value of N is defined as the number of C atoms in fullerene (for C_{60} - 60 atoms, and for C_{70} - 70 atoms). The average diameter of C_{60} is 6.83 Å, and C_{70} is 7.59 Å. The surface area of a fullerene C_{60} is equal to $1.46 \cdot 10^{-22} \text{ m}^2$ or same, $SSA = 1224 \text{ m}^2/\text{g}$. The resulting

value of SSA is greater than the experimental data (5.66-6.44 m²/g [23]), we explain it by the presence of impurities during the synthesis of fullerene nanoparticles. Surface area of C₇₀ is equal to 1.80*10²² m² or SSA=1296 m²/g. Using this model, also was calculated SSA of material formed by nanoparticles C₆₀ and C₇₀ (Fig. 2).

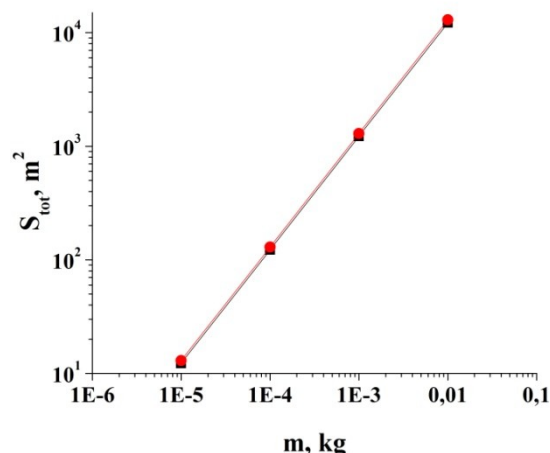


Fig. 2. Total surface area of fullerene C₆₀ (■) and C₇₀ (●) based on proposed model.

The total surface area of fullerene C₇₀ is larger than for a fullerene C₆₀, we explain it by the different size of fullerenes. By increasing weight of material, surface area of material on the base of fullerenes increases linearly.

c) Surface area of astralene

For astralen nanoparticles is used model in which astralen described by geometrical figure - torus. We know that astralen characterized by two parameters: D - outer diameter, and d - pore size. Torus also is described by two parameters, R - radius of large circle of the torus, r - radius of the small circle of the torus. The relationship between these parameters of torus and astralen is: $D = \frac{d}{2} + r$. Then, surface area of astralen is:

$$S_{astr} = 4\pi^2 r R = 4\pi^2 \frac{D-d}{4} \left(\frac{d}{2} + \frac{D-d}{4} \right) = \frac{\pi^2}{4} (D^2 - d^2) \quad (4)$$

Weight of nanoparticles was determined using software Nanotube Modeler. Due to the geometry of the astralen nanoparticle, we assumed that the number of atoms in astralen is equal to the number of atoms in a single-walled nanotube with $2\pi R$ length and radius r. Calculation of the specific surface area is held by the formula (2).

The average outer diameter is 82 nm, diameter of pore - 40 nm. Then, a surface area of astralen nanoparticle is $1.3 \cdot 10^{-14}$ m² or SSA=1307 m²/g. For another type of astralen nanoparticles with greater weight, described in work [31], the value of SSA=40 m²/g, which is in good agreement with experimental data - 20.55-38.3 m²/g [23]. Using the proposed approach, the total surface area of the material formed by astralen nanoparticles also was calculated (Fig. 3).

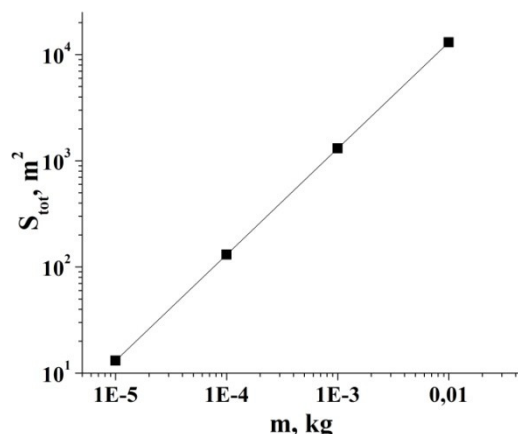


Fig.3. Total surface area of astralens based on proposed model.

By increasing the weight of the material its effective area increases linearly.

d) Nanosheets

When calculating the surface area of nanosheet, we describe it by a rectangle. Nanosheet is characterized by a length and a width; these values in the proposed model are equal to length and width of the rectangle. The surface area of a rectangle is "S = a*b", where, a - the length of nanosheet, b - width of nanosheet. Number of C atoms in nanosheet was determined using software Nanotube Modeler. Average length and width of nanosheet is 3.6 microns. Applying the formulas (1) and (2) we got value surface area $2.6 \cdot 10^{-11}$ m², and the value of the specific surface area 2557 m²/g for nanosheet. For comparison, the experimental data is 466 m²/g [13], other theoretical calculations is 2620 m²/g [13]. We see that the results obtained by the proposed model are in agreement with other theoretical calculations, and they are larger than the experimental data, it is because theoretical calculations reflects the maximum possible value of

surface area of the nanoparticles. In addition, using this model, we calculated the total surface area of the material formed by nanosheets (Figure 4).

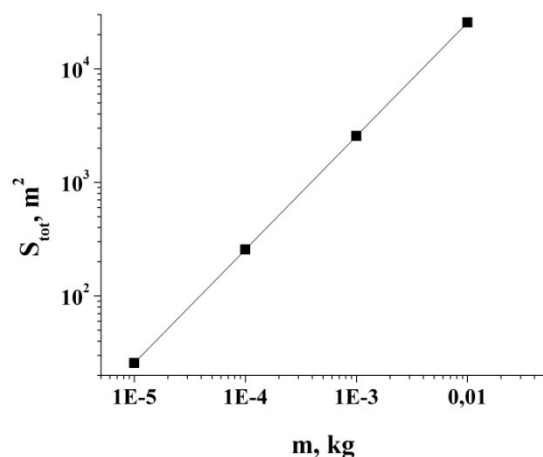


Fig.4. Total surface area of nanosheets based on proposed model.

From Fig. 4 it can be seen, that by the increasing weight of material formed by nanosheets, its surface area increases linearly.

To summarize the results, we compared the values of the specific surface area of different types of carbon nanoparticles (Fig. 5).

From Fig. 5, you can see that the greatest specific surface area have nanosheets. Fullerenes and single-walled carbon nanotubes have similar values of specific surface area. The value of the specific surface area for multi-walled nanotubes may vary depending on the number of layers, and it is less than the value of the specific surface area of single-walled nanotubes with similar characteristics. Usually most interesting for scientists are nanoparticles with the greatest specific surface area, but depending on the application, other parameters of nanoparticles must be taken into account; after determining the importance of all parameters, it can be determined what type of particles should be used.

For example, small particles (<100 nm) would offer a larger external surface, but they cannot be used in most of the biomedical applications due to difficulties of filtering them from the biofluids. Authors of work [29] investigated cytotoxicity of carbon nanoparticles and concluded that cytotoxicity follows a sequence order on a mass basis: SWNTs>MWNT10>C₆₀. The measured room temperature thermal conductivity for

an individual MWNT (>3000 W/mK) is greater than that of basal plane of graphite (2000 W/mK) [30].

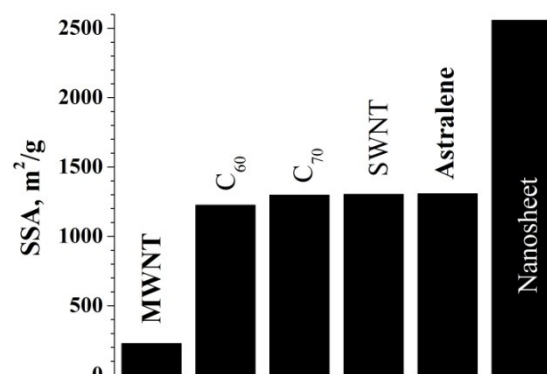


Fig.5. Specific surface area of different types of nanoparticles based on proposed model.

Conclusions

The model for calculating the specific surface area of carbon nanoparticles of different shapes and sizes was proposed. The model consists of comparison of a nanoparticle with geometric figure, and following calculation of the surface area of the figure. The model is based on several assumptions: 1. Nanoparticles can be described by geometric figure with symmetry and geometric parameters that are similar to the corresponding parameters of nanoparticles; 2. Only the outer surface of nanoparticles is taken into account; 3. The surface of the nanoparticles do not contain defects. Unlike the model proposed by the authors in work [1], our model does not require information about the surface structure of nanoparticles. Using the proposed model, was calculated specific surface area of carbon nanotubes, fullerenes C₆₀ and C₇₀, astralens and a nanosheets. The results are in a good agreement with theoretical specific surface area calculated by other authors. However, the value of the specific surface area of nanoparticles obtained with the proposed model and the model described in [32] have inflated value compared with experimental data, we explain it by the presence of defects in the carbon nanoparticles as a result of treatment, and the presence of impurities. Thus, the proposed model allows us to calculate the maximum specific surface area of the carbon nanoparticles of different symmetry.

Список використаних джерел

1. Питома площа поверхні вуглецевих нанотрубок та об'єднаних нанотрубок / [А. Пеїгней, К. Лаурент, Е. Флахаут та ін.]. // *Carbon*. – 2001. – №39. – С. 507–514.
2. Шварц Д. А. Поверхні наночастинок та пористих матеріалів / Д. А. Шварц, Ц. Ш. Контеску. // *Surfaces of nanoparticles and porous materials*. – 1999. – №78.
3. Вирівняні вуглецеві нанотрубки - силіконові нанопластики: нова нано-архітектура для гнучких електродів літій іонних батарей / [К. Фу, О. Ілдіз, Х. Бханушалі та ін.]. // *Advanced Materials*. – 2013. – №25. – С. 5109–5114.
4. Провокування відновлення кисню за допомогою біоінспірованого каталізатора на основі вуглецевих нанотрубок з прив'язаним залізо-фталогіанином / [Р. Цао, Р. Тхапа, Х. Кім та ін.]. // *Nature communications*. – 2013. – №4 – С.12.
5. Актuatorи з вуглецевих нанотрубок / [Р. Х. Бау гман, С. Цуй, А. А. Закхидов та ін.]. // *Science*. – 1999. – №284. – С. 1340–1344.
6. Фраков'як Е. Вуглецеві матеріали для електрохімічного зберігання енергії у конденсаторах / Е. Фраков'як, Ф. Бегуін. // *Carbon*. – 2001. – №36. – С. 937–950.
7. Адсорбція водню і когесивна енергія одношарових вуглецевих нанотрубок / [Й. Є, К. К. Ахн, К. Вітхам та ін.]. // *Applied physics letters*. – 1999. – №74. – С. 2307–2309.
8. Сучасні і майбутні застосування вуглецевих нанотрубок / М. Ф.Де Волдер, С. Х. Тауфік, Р. Х. Баугхман, Р. Х. Харт. // *Science*. – 2013. – №339. – С. 535–539.
9. Композит нанотрубка-полімер для ультрашвидкої фотоніки / [Т. Хасан, З. Сун, З. Ван та ін.]. // *Advanced Materials*. – 2009. – №21. – С. 3874–3899.
10. Вплив одношарових вуглецевих нанотрубок на термальну експансію води / [В. Ф. Королович, Л. А. Булавін, Й. І. Прилуцький та ін.]. // *International Journal of Thermophysics*. – 2014. – №35. – С. 19–31.
11. Стисливість водовмісних одношарових вуглецевих нанотрубок / [В. Ф. Королович, С. П. Нед'як, К. О. Мороз та ін.]. // *Fullerenes, Nanotubes and Carbon Nanostructures*. – 2013. – №21. – С. 24–30.

References

1. PEIGNEY, A. et al. (2001). Specific surface area of carbon nanotubes and bundles of carbon nanotubes. *Carbon*. 39 (4). p.507-514.
2. SCHWARZ, J. A., & CONTESCU, C. I. (Eds.). (1999). *Surfaces of nanoparticles and porous materials*. (78). CRC Press.
3. FU, K. et al. (2013). Aligned Carbon Nanotube - Silicon Sheets: A Novel Nano - architecture for Flexible Lithium Ion Battery Electrodes. *Advanced Materials*.25 (36).p.5109-5114.
4. CAO, R. et al. (2013). Promotion of oxygen reduction by a bio-inspired tethered iron phthalocyanine carbon nanotube-based catalyst. *Nature communications*. 4. p.12.
5. BAUGHMAN, R. H. et al. (1999). Carbon nanotube actuators. *Science*. 284 (5418). p.1340-1344.
6. FRACKOWIAK, E., & BEGUIN, F. (2001). Carbon materials for the electrochemical storage of energy in capacitors. *Carbon*. 39 (6). p. 937-950.
7. YE, Y. et al. (1999). Hydrogen adsorption and cohesive energy of single-walled carbon nanotubes. *Applied physics letters*. 74 (16). p.2307-2309.
8. DE VOLDER, M. F. et al. (2013). Carbon nanotubes: present and future commercial applications. *Science*. 339 (6119). p.535-539.
9. HASAN, T. et al. (2009). Nanotube-polymer composites for ultrafast photonics. *Advanced Materials*.21 (38 - 39). p.3874-3899.
10. KOROLOVYCH, V. F. et al. (2014). Influence of Single-Walled Carbon Nanotubes on Thermal Expansion of Water. *International Journal of Thermophysics*. 35 (1). p.19-31.
11. KOROLOVYCH, V. F. et al. Compressibility of Water Containing Single-Walled Carbon Nanotubes. *Fullerenes, Nanotubes and Carbon Nanostructures*. 21 (1). p.24-30.
12. KOROLOVYCH, V. (2011, April). Influence of carbon nanotubes functionalized with COOH groups on the isothermal elastic modulus of. In *Physics, Chemistry and Applications of Nanostructures: Proceedings of the International Conference Nanomeeting-2011: Reviews and Short Notes: Minsk, Belarus. 26-29 May 2009* (p.84). World Scientific.

12. Королович В. Ф. Вплив вуглецевих нанотрубок функціоналізованих COOH групами на ізотермічний еластичний модуль води / В. Ф. Королович. // Physics, Chemistry and Applications of Nanostructures: Proceedings of the International Conference Nanomeeting--2011: Reviews and Short Notes: Minsk, Belarus. – 2009. – С. 84.
13. Синтез нанопластин на основі графену з хімічного відновлення відшарованого оксиду графіту / [С. Станкович, Д. А. Дікін, Р. Д. Пінер та ін.]. // Carbon. – 2007. – №45. – С. 1558–1565.
14. Формування татан оксид нанотрубки / [Т. Касга, М. Хірамац, А. Хосон та ін.]. // Langmuir. – 1998. – №14. – С. 3160–3163.
15. Нанотрубки [Електронний ресурс]. – 2010. – Режим доступу до ресурсу: <https://sesres.com/Nanotubes.asp>.
16. Ку Ч. Вуглецеві нанотрубки для зберігання водню / Ч. Ку. // Material Engineering thesis. – 2002. – №115. – С. 5.
17. Харіс П. Д. Композити вуглецевих нанотрубок / П. Дж Харіс. // International Materials Reviews. – 2004. – №49. – С. 31–43.
18. Гоел А. Аналіз розміру одного фулерену за допомогою електронної мікроскопії / А. Гоел, Д. Б. Говард, Д. Б. Вандер Санде. // Carbon. – 2004. – №42. – С. 1907–1915.
19. Дресельхаус М. С. Наука фулеренів та вуглецевих нанотрубок: їх властивості та застосування / М. С. Дресельхаус, Г. Дресельхаус, П. С. Еклунд., 1996.
20. Розмір - та орієнтація - вибіркова інкапсуляція C70 циклопарафениленом / [Т. Івамото, Й. Ватанабе, Х. Такая та ін.]. // Chemistry–A European Journal. – 2013. – №19. – С. 14061–14068.
21. Міязав К. І. C70 ниткоподібні нанокристали виготовлені шляхом створення межі поділу рідина-рідина у системі розчину C70 у толуолі з ізопропілним спиртом / К. І. Міязав. // Journal of the American Ceramic Society. – 2002. – №85. – С. 1297–1299.
22. Контрольована орієнтація еліптичного фулерену C70 у вуглецевих нанотрубках / [А. Н. Кхлостов, Р. Сціпіоні, Д. Нгуєн-Манх та ін.]. // Applied physics letters. – 2004. – №84. – С. 792–794.
23. Терранова М. Л. Вуглецеві матеріали для адсорбції газу / М. Л. Терранова, С. Орландуччі, М. Россі., 2012.
13. STANKOVICH, S. et al. (2007). Synthesis of graphene-based nanosheets via chemical reduction of exfoliated graphite oxide. *Carbon*,. 45 (7). p.1558-1565.
14. KASUGA, T. et al. (1998). Formation of titanium oxide nanotube. *Langmuir*. 14 (12). p.3160-3163.
15. SES Research. (2010) *NANOTUBES*. [Online] Available from: <https://sesres.com/Nanotubes.asp>. [Accessed: 12.04.2016].
16. KU, CH. (2002). Carbon Nanotubes for Hydrogen Storage. *Material Engineering thesis*. 115. p.5.
17. HARRIS, P. J. F. (2004). Carbon nanotube composites. *International Materials Reviews*. 49 (1). p.31-43.
18. GOEL, A., HOWARD, J. B., & VANDER SANDE, J. B. (2004). Size analysis of single fullerene molecules by electron microscopy. *Carbon*. 42 (10). p.1907-1915.
19. DRESSELHAUS, M. S., DRESSELHAUS, G., & EKLUND, P. C. (1996). *Science of fullerenes and carbon nanotubes: their properties and applications*. Academic press.
20. IWAMOTO, T. et al. (2013). Size - and Orientation - Selective Encapsulation of C70 by Cycloparaphenylenes. *Chemistry–A European Journal*. 19 (42). p.14061-14068.
21. MIYAZAWA, K. I. (2002). C70 nanowhiskers fabricated by forming liquid/liquid interfaces in the systems of toluene solution of C70 and isopropyl alcohol. *Journal of the American Ceramic Society*. 85 (5). p.1297-1299.
22. KHLOBYSTOV, A. N. et al. (2004). Controlled orientation of ellipsoidal fullerene C70 in carbon nanotubes. *Applied physics letters*. 84 (5). p.792-794.
23. TERRANOVA, M. L., ORLANDUCCI, S., & ROSSI, M. (Eds.). (2012). *Carbon Nanomaterials for Gas Adsorption*. CRC Press.
24. BELOUSOV, V. P. et al. (2007). Oxygen adsorption by fullerenes and carbon nanostructures. *Russian Journal of Physical Chemistry A*. 81 (10). p.1650-1657.

24. Адсорбція кисню фулеренами та вуглецевими наноструктурами / [В. П. Белоусов, І. М. Белоусова, А. В. Ермаков та ін.]. // Російський журнал фізичної хімії А. – 2007. – №81. – С. 1650–1657.
25. Перетворення з фулерену C₆₀ у вуглецеві наносфери шокним стисненням / К. Нівасе, К. Г. Накмара, Т. Хомає, К. Кондо. // *Journal of Physics: Conference Series*. – 2010. – №1. – С. 012146.
26. Синтез вуглецевих наопластин та вуглецевих наночастинок RF-плазмою підвищена осадженням хімічного пару / Б. П. Рао, Д. Д. Тхірувадігал, С. Рамасвами, К. Гопалакрішнан. // *International Journal of Nanoscience*. – 2009. – №8. – С. 29–33.
27. Експериментальні дослідження притягування молекулярного водню з нанотрубками / [Б. К. Прадган, Г. У. Суманасекера, К. В. Аду та ін.]. // *Physica B: Condensed Matter*. – №323. – С. 115–121.
28. Оцінка характеристик багатостінних вуглецевих нанотрубок / [Д. Х. Лехман, М. Терронес, Е. Мансфілд та ін.]. // *Carbon*. – 2011. – №49. – С. 2581–2602.
29. Цитотоксичність вуглецевих наноматеріалів: одностінна вуглецева нанотрубка, багатостінна нанотрубка, фулерен / [Г. Дзя, Х. Ван, Л. Янь та ін.]. // *Environmental science & technology*. – 2005. – №39. – С. 1378–1383.
30. Вимірювання термічного транспорту індивідуальних багатостінних нанотрубок / П. Кім, Л. Ши, А. Мажумдар, П. Л. Макуїн. // *Physical review letters*. – 2001. – №87. – С. 215502.
31. Структурне і магнітно резонансне дослідження наночастинок астрелану / [А. І. Шамес, Е. А. Катз, А. М. Паніч та ін.]. // *Diamond and Related Materials*. – 2009. – №18. – С. 505–510.
32. Королович В. Ф. Оцінка площі поверхні наночастинок астрелану: модель / В. Ф. Королович, О. М. Цівілева, К. О. Мороз. // *Вісник Київського національного університету ім. Тараса Шевченка. Серія: Фізика та Математика*. – 2014. – №1. – С. 261–262.
25. NIWASE, K., NAKAMURA, K. G., HOMAE, T., & KONDO, K. (2010). Transformation from C₆₀ fullerene into carbon spheres by shock compression. In *Journal of Physics: Conference Series*. 215 (1). p. 012146). IOP Publishing.
26. RAO, B. P. C., THIRUVADIGAL, D. J., RAMASWAMY, S., & GOPALAKRISHNAN, C. (2009). Synthesis of Carbon Nanosheets and Carbon Nanoparticles by Rf-Plasma Enhanced Chemical Vapor Deposition. *International Journal of Nanoscience*, 8(01n02). p.29-33.
27. PRADHAN, B. K., et al. (2002). Experimental probes of the molecular hydrogen–carbon nanotube interaction. *Physica B: Condensed Matter*, 323 (1), p.115-121.
28. LEHMAN, J. H., et al. (2011). Evaluating the characteristics of multiwall carbon nanotubes. *Carbon*. 49 (8). p.2581-2602.
29. JIA, G., WANG, H., YAN, L., WANG, X., PEI, R., YAN, T., GUO, X. (2005). Cytotoxicity of carbon nanomaterials: single-wall nanotube, multi-wall nanotube, and fullerene. *Environmental science & technology*. 39 (5). p.1378-1383.
30. KIM, P., SHI, L., MAJUMDAR, A., & MCEUEN, P. L. (2001). Thermal transport measurements of individual multiwalled nanotubes. *Physical review letters*. 87 (21). p.215502.
31. SHAMES, A. I., (2009). Structural and magnetic resonance study of astralen nanoparticles. *Diamond and Related Materials*, 18 (2), 505-510.
32. KOROLOVICH, V. F., TSIVILEVA, O. M., & MOROZ, K. O. (2014). Evaluation of the surface area of astralene nanoparticles: Model. *Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series: Physics & Mathematics*. 1. p. 261-262.

Надійшла до редколегії 17.06.16

УДК 535.015, 543.421/.424

Голіченко Б.О.¹, асп.,
Кравченко С.О.², к.ф.-м.н., с.н.с.

**Коливальна спектроскопія молекул
Флуоресцеїну осаджених на алюмінієвих
плівках та срібних наночастинках**

¹Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 01601, м. Київ, вул.
Володимирська, 64/13,
e-mail: desilor227@gmail.com

²Інститут фізики напівпровідників імені
В.Є.Лашкарьова, пр-т Науки, 41, Київ, Україна
e-mail: ²kravchenko.srg@gmail.com

B.O. Golichenko¹, PhD stud.,
S.O. Kravchenko², PhD, Sen. Sci. Res.

**Vibrational spectroscopy of the Fluorescein
molecules adsorbed on the aluminum foils and
silver nanoparticles**

¹Taras Shevchenko National University of Kyiv,
01601, Kyiv, Volodymyrska str., 64/13,
e-mail: desilor227@gmail.com

²V.E. Lashkariyov Institute of Semiconductor Physics
of NAS of Ukraine, 03028, Kyiv, Nauky Ave. 41,
Ukraine
e-mail: ²kravchenko.srg@gmail.com

Краплини водних розчинів Флуоресцеїну були осаджені на поверхні з алюмінієвої фольги, алюмінієвого дзеркала та скляних пластинок з різними концентраціями наночастинок срібла, нанесених з реактивів Толленса. Отримані зразки були досліджені методами спектроскопії комбінаційного розсіяння світла та інфрачервоного поглинання. Результати, отримані при виконанні експерименту, вказують на відмінності коливальних спектрів барвника адсорбованого на поверхнях різних типів, а також наявність ефекту поверхневого підсилення комбінаційного розсіяння світла у випадку зразків з острівцями срібла. В статті проведено порівняння ефективності розсіяння світла молекулами на різних поверхнях та аналіз смуг спектру, що відповідають за активну взаємодію Флуоресцеїну з наночастинок срібла. Встановлено значну залежність підсилення розсіяння світла від концентрації пробної речовини на поверхні підкладок та закономірності висихання краплин розчину барвника. В роботі також представлено зображення обраних для дослідження поверхонь, які демонструють особливості нанесення на них срібних наночастинок і пробної речовини.

Ключові слова: Флуоресцеїн, поверхнево-підсилене комбінаційне розсіяння світла, реактив Толленса, наночастинок срібла.

Drops of Fluorescein water solutions were deposited on surfaces of aluminum mirror, aluminum foil and glass plates with different concentrations of silver nanoparticles on them. Silver nanoparticles were obtained from Tollen's reagent. The prepared samples were investigated by Raman scattering and Infrared absorption methods. Experimental results indicate the differences in vibrational spectra of Fluorescein adsorbed on various types of substrates and show the evidence of Surface-Enhanced Raman Scattering effect in case of samples with silver nanoparticles islands. A comparison between the efficiency of light scattering by Fluorescein molecules deposited on different surfaces and analysis of the spectral bands corresponding to active interaction of Fluorescein with silver nanoparticles was performed in the present paper. The notable dependence of light scattering enhancement on concentration of silver nanoparticles and the features of dye solution drops evaporation was detected. The peculiarities of deposition of silver nanoparticles and analyte onto them were also studied by optical microscopy.

Key Words: Fluorescein, Surface-Enhanced Raman Scattering, Tollen's reagent, silver nanoparticles.

Статтю представив академік НАН України, д.ф.-м.н., проф. Булавін Л. А.

Флуоресцеїн ($C_{20}H_{12}O_5$) відноситься до барвників, які використовують у медицині та флуоресцентній спектроскопії [1]. Його кістяк подібний до Родаміну 6Ж, і у вигляді нейтральної молекули площина бензолового кільця перпендикулярна до площини ксантену. В

даній роботі було досліджено спектр даного барвника на поверхнях алюмінієвих плівок та дзеркал, а також вплив, який на нього здійснювала наявність срібних частинок, що володіють плазмонними властивостями. Для цієї мети, були виготовлені розчини Флуоресцеїну

у двічі дистильованій воді з концентраціями 10^{-6} та 10^{-5} Моль/л. Надалі, ці розчини були осажені у вигляді краплин об'ємом 8-10 мкл на дослідні поверхні – алюмінієві дзеркала, плівки алюмінієвої фольги та скляні скельця, витримані у реактивах Толленса з різними концентраціями наночастинок срібла (зразки 1-6 відповідали 6 розчинам із поступовим зменшенням концентрації частинок).

Процес висихання краплин на поверхнях всіх типів супроводжувався утворенням обідка, що розташовувався приблизно на початковій межі краплини, та окремих кристалітів, що частково утворювалися протягом висихання, а частково були присутні у водному розчині барвника вищої концентрації. Таким чином, розосередження речовини на поверхні відбувалося нерівномірно. Найбільша концентрація барвника спостерігалася на ободі краплини та в центрі, а найменша – в області між ними. Присутність наночастинок срібла сприяла більш рівномірному розподілу барвника, зокрема й на їх поверхні. На відміну від рівної поверхні алюмінієвих дзеркал, плівки мали періодичну структуру, де відбувалося чергування лінійних канавок з глибиною, шириною та взаємною відстанню в діапазоні 1 – 7 мкм. Це сприяло більш швидкому висиханню краплин та більш рівномірному розподілу барвника в областях меншої концентрації в порівнянні з іншими зразками.

Дослідження комбінаційного розсіяння світла було виконане на спектрометрі T64000 (Horiba, Jobin Yvon) з голографічною ґраткою (1800 штрихів/мм), оснащеного мікроскопом Olympus BX41 з об'єктивом 50X, в геометрії оберненого розсіяння. В якості джерела збудження використовувався Ar-Ne лазер (SpectraPhysics) з довжинами хвиль $\lambda = 488$ та 541,5 нм. Типовими часом накопичення сигналу та потужністю лазерного променя були 20 секунд та 0,1 мВт.

Інфрачервоне поглинання було досліджено за допомогою вакуумного інфрачервоного Фур'є-спектрометра Vertex 70V (Bruker) в режимі відбивання. Перед початком вимірювань, камери зразка та приладу були відкачані до тиску 1,67 Гпа. Час накопичення сигналу складав 12 хв.

Задля зручності порівняння, базові лінії коливних спектрів були видалені, спектри були згладжені та зсунуті по вісі інтенсивності засобами програмного забезпечення LabSpec 5.0.

Попереднє фотографування поверхонь зразків зі срібними наночастинами було виконане за допомогою оптичного мікроскопа NU-2E (Carl

Zeiss) з об'єктивами 25X та 50X з приєднаною до нього цифровою камерою DS126071 (Canon).

В першу чергу, були проведені виміри комбінаційного розсіяння світла зразків без нанесеного барвника. Алюмінієві поверхні продемонстрували пологі профілі, які дозволяють легко виокремити і усунути їх зі спектрів речовини обраної для дослідження (рис. 1).

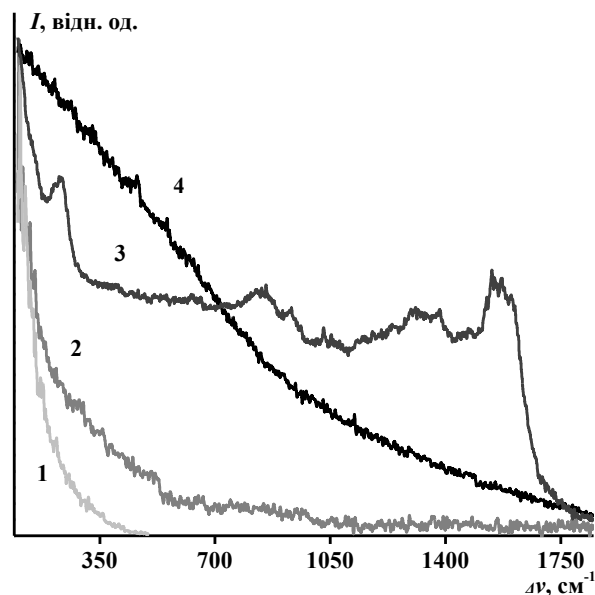


Рис. 1. Спектри комбінаційного розсіяння зразків до нанесення Флуоресцеїну: 1 – алюмінієвого дзеркала, 2 – алюмінієвої плівки, 3 – срібних наночастинок на поверхні скляних пластинок, 4 – скла.

Подібна ситуація спостерігалася і для поверхні скляних пластинок. При наявності срібних наночастинок, профіль спектру суттєво змінився – з'явився ряд смуг та широких горбів на частотах 231, 850, 920, 1528, 1552, 1595 cm^{-1} , а також серія 2-3 смуг в діапазоні 1300-1500 cm^{-1} , що відповідають оксидам, хлоридам та іншим сполукам срібла, утворених при взаємодії з повітрям. Оскільки положення цих смуг та горбів, мало відрізняється від зразка до зразка, їхній вклад при обробці спектру мінімальний. Також слід зазначити, що незалежно від концентрації та агрегації наночастинок на поверхні (рис. 2), профілі їхніх спектрів не зазнавали значних відмінностей і визначались лише співвідношенням наявних сполук на поверхні.

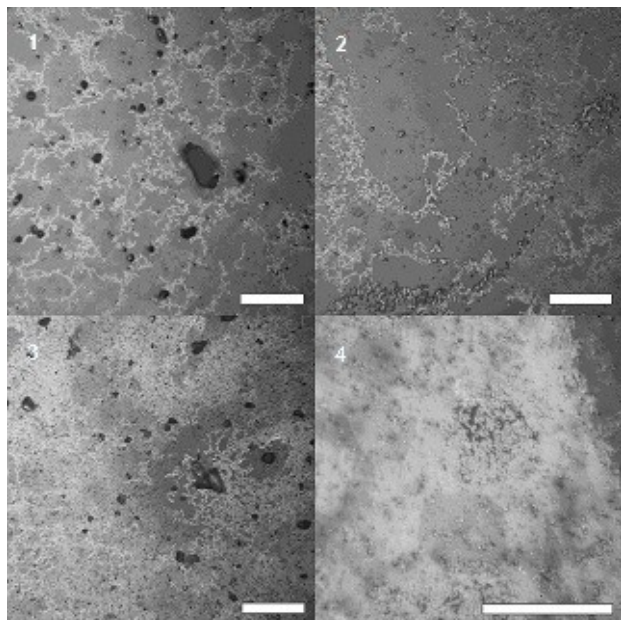


Рис. 2. Зображення поверхонь зі срібними наночастинками. 1 – зразок №4, 10^{-5} моль/л, 2 – зразок №2, область без барвника, 3 – зразок №1, 10^{-5} моль/л, 4 – зразок №1, 10^{-5} моль/л. Масштабні поділки відповідають 50 та 25 мкм.

Спектр люмінесценції Флуоресцеїну, осадженого на зразках зі срібними наночастинками, при використанні лазерного променя з довжинами хвиль 514,5 та 488 нм, показаний на рис. 3.

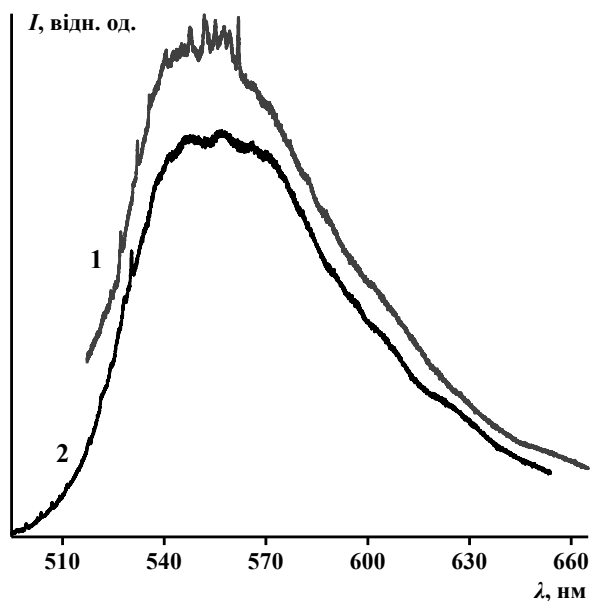


Рис. 3. Спектри люмінесценції флуоресцеїну: 1 – при збудженні з довжиною хвилі 514,5 нм, 2 – при збудженні з довжиною хвилі 488 нм.

Його профіль виявився стандартним для барвників такого типу, однак була помітна певна особливість – при збудженні розсіяння світлом з довжиною хвилі 514,5 нм, інтенсивність смуг комбінаційного розсіяння світла в діапазоні до 1100 cm^{-1} була в 1,5-2 рази інтенсивніша, що можна пов'язати з більшою інтенсивністю люмінесценції, максимум якої спостерігається на 554 нм.

Дослідження комбінаційного розсіяння світла зразків, показали відмінності в інтенсивності розсіяного світла, положенні та кількості смуг у спектрах (рис. 4).

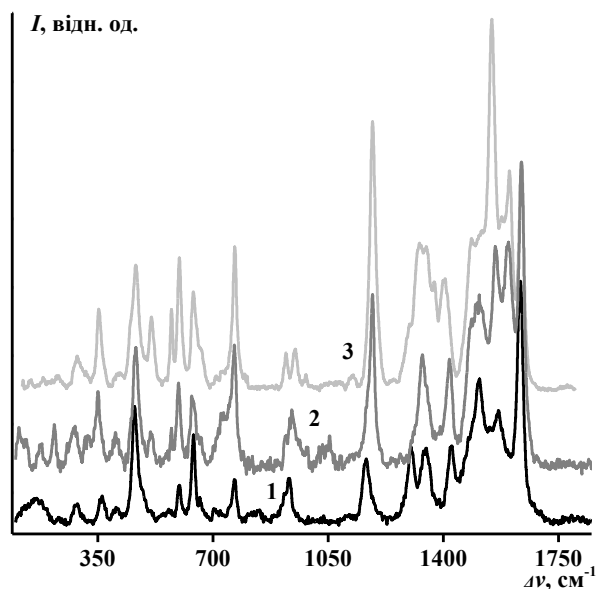


Рис. 4. Спектри Флуоресцеїну отримані на поверхні: 1 – алюмінієвої плівки, 2 – зразка №4, з ободу краплини, 3 – зразка №1 із островця зі срібними наночастинками.

Для спектрів Флуоресцеїну на алюмінії характерні наступні частоти: 121, 150, 183, 416, 513, 570, 917, 1483, 1542, 1570, 1592 cm^{-1} (мають слабку інтенсивність, часто розташовані на плечах інтенсивніших смуг), 287, 363, 461, 596, 641, 764, 933, 1166, 1308, 1346, 1423, 1508 cm^{-1} (мають середню інтенсивність), а також 461, 1508 та 1634 cm^{-1} , що мають найбільшу інтенсивність. У спектрах зразків зі срібними наночастинками слабкі смуги спостерігаються на частотах 121, 146, 187, 231, 410, 660, 710, 979, 1128, 1326, 1374, 1486, 1518, 1580 cm^{-1} . Смуги із середньою інтенсивністю розташувались на частотах 288, 353, 466, 513, 575, 598, 639, 765, 951, 1326, 1349, 1371, 1405, 1484, 1516, 1576, 1601 cm^{-1} . Найбільш

інтенсивними були смуги на 1186, 1547 та 1638 cm^{-1} .

Для порівняння спектрів Флуоресцеїну на зазначених поверхнях, вони були пронормовані за інтенсивністю смуги в околі частоти 464 cm^{-1} . Після цього, інтенсивність смуг на частоті 639 cm^{-1} та 1638 cm^{-1} стала збігатися з точністю 95%. Окрім збільшення інтенсивностей багатьох смуг, присутніх в спектрах зразків з алюмінієвими поверхнями, в спектрах зразків зі срібними наночастинками спостерігаються нові смуги, або такі, що раніше розташовувалися на плечах інших смуг. До них відносяться смуги на частотах 513, 575, 660, 983, 1371, 1484, 1547, 1576, 1601 cm^{-1} . Зсуву частотного положення зазнали смуги на 353, 922, 952, 1186, 1326, 1351, 1405, 1518, 1576, 1601 cm^{-1} . Деякі смуги, зокрема на частоті 1301 cm^{-1} , навпаки – зазнають зсуву в сторону більш інтенсивних і стають малопомітними.

Наявність срібних наночастинок на поверхні скла, суттєво змінює ефективність досліджень за рахунок збільшення сигналу комбінаційного розсіяння світла. Шорстка поверхня сприяє кращій адсорбції молекул, а плазмонні властивості срібних наночастинок – кращому поглинанню світла [2]. Обидва фактори були підтверджені при вимірюванні розсіяння світла зразків 1-6 зі срібними наночастинками. З набору спектрів від кожного зразка були обрані найбільш інтенсивні (рис. 5). Відповідні місця на поверхні зразків вказані на рис. 6.

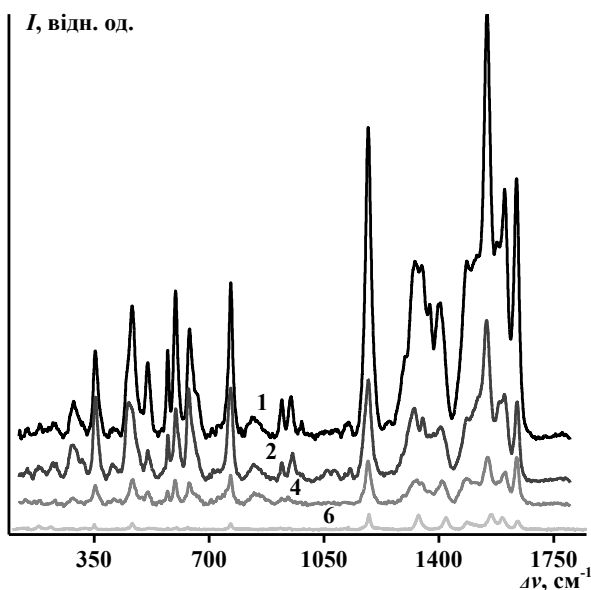


Рис. 5. Спектри Флуоресцеїну адсорбованого на поверхнях зразків зі срібними наночастинками. Номер спектру відповідає номеру зразка.

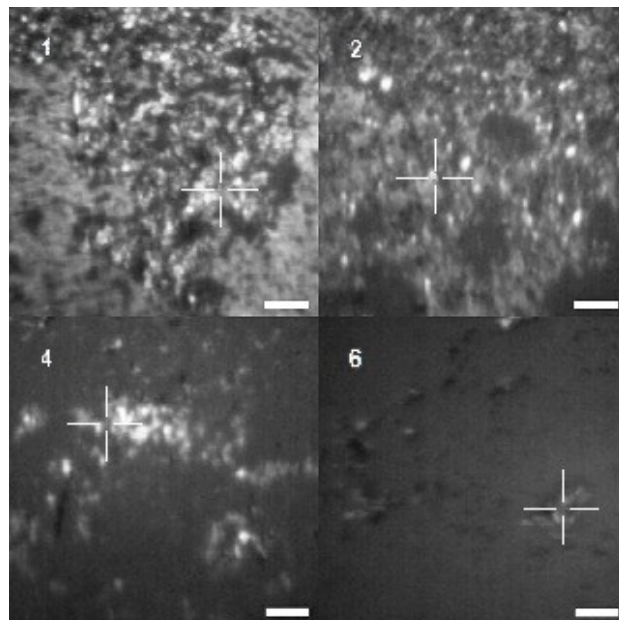


Рис. 6. Зображення поверхонь зі срібними наночастинками та точок запису спектрів. Номер зображення відповідає номеру зразка. Масштабні поділки відповідають 5 мкм.

Незважаючи на нерівномірність розподілу наночастинок, їхня концентрація на поверхні була пропорційна концентраціям розчинів у яких тримали скляні пластинки; як наслідок, було отримано різницю в інтенсивності смуги на частоті 1547 cm^{-1} між зразком №1 та зразком №6 в 300 разів (представлений спектр зразка №6 накопичений протягом десятикратного часу по відношенню до зразків 1, 2, 4).

Протягом вимірювань також було досліджено стійкість поверхонь цих зразків до впливу лазерного опромінення. Для експерименту було обрано острівце срібних наночастинок на одному зі зразків. З цієї області, з інтервалом в 5 секунд, була записана серія спектрів зі зростанням інтенсивності, кожен протягом 20 секунд. Як наслідок, при стандартній потужності лазерного променя близько 0,1 мВт, у спектрі спостерігалися смуги, притаманні лише Флуоресцеїну. При збільшенні потужності до 1 мВт, у спектрі з'явилась широка смуга на частоті 231 cm^{-1} , притаманна сполукам срібла, а смуги Флуоресцеїну втратили інтенсивність. При досягненні потужності 5 мВт, смуги Флуоресцеїну майже не були помітні на тлі смуг, що відповідають солям та оксидам срібла. Це свідчить про те, що поглинання світла наночастинками сприяє сублімації молекул барвника. З іншого боку, оскільки в спектрі ще спостерігалися ледь помітні смуги Флуоресцеїну,

можна говорити про збереження зв'язку з поверхнею окремих молекул.

У зв'язку зі значним поглинанням скла в інфрачервоному діапазоні, а також тим, що на поверхні зразків була осаждена надто мала кількість речовини, дослідження інфрачервоного поглинання були проведені лише на алюмінієвому дзеркалі з нанесеними на нього 10 краплин розчину з концентрацією Флуоресцеїну 10^{-5} Моль/л. Через нерівномірний розподіл речовини на поверхні, спектр виявився не досить чітким для аналізу, проте використання поляризатора та детектора з більшою чутливістю дозволило отримати краще розділення смуг, зокрема в діапазоні до 800 см^{-1} (рис. 7).

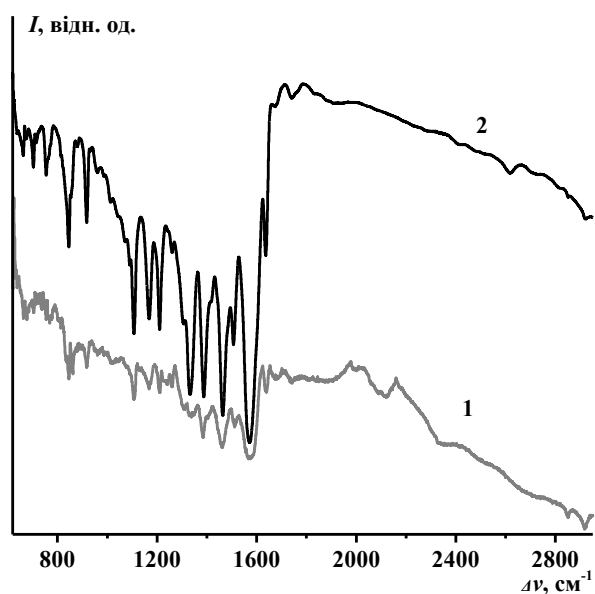


Рис. 7. Інфрачервоні спектри поглинання Флуоресцеїну адсорбованого на алюмінієвому дзеркалі. 1 – з використанням стандартного детектора, 2 – з використанням поляризатора та детектора з азотним охолодженням.

Смуга на частоті 575 см^{-1} , що спостерігається у спектрі комбінаційного розсіювання зразків зі срібними наночастинками, виявляється й у випадку інфрачервоного поглинання. Оскільки смуги в області $550\text{--}650\text{ см}^{-1}$ відповідають скелетним коливанням кільця ксантену [3], то це може свідчити про те, що адсорбовані на срібних наночастинках молекули спричиняють виникненню коливань, не характерних для Флуоресцеїну у вільному стані. На частотах до 1000 см^{-1} знаходяться переважно обертальні та скелетні коливання ксантенового та ароматичного кілець [4]. Згідно з даними

досліджень комбінаційного розсіювання та інфрачервоного поглинання Флуоресцеїну [3 - 6], частоти понад 1000 см^{-1} зазвичай містять вклади від кількох об'єднаних коливань. Так, в спектрах інфрачервоного поглинання, коливання зв'язків С-С ароматичного кільця можуть здійснювати вклад в смуги на частотах 1107 , 1483 , 1572 та 1637 см^{-1} . Коливання подібних зв'язків у кільці ксантену можна очікувати на частотах 1168 , 1210 , 1333 , 1420 , 1598 та 1741 см^{-1} , окрім цього, смугу на 1507 см^{-1} відносять до дихальної моди центральної частини, котра містить кисневий місток. Більшість дослідників характеризують смуги на частотах 1107 , 1168 , 1210 , 1306 , 1464 , 1572 см^{-1} як такі, що мають зв'язок з коливаннями типу С-О, С=О та С-ОН. З симетричними та антисиметричними коливаннями карбоксильної групи Флуоресцеїну (COOH) пов'язують частоти 1387 та 1572 см^{-1} . В спектрі комбінаційного розсіювання, зазвичай фіксують лише антисиметричні коливання даної групи, помітні на частоті 1580 см^{-1} у випадку зразків зі срібними наночастинками. Також, при аналізі спектру комбінаційного розсіювання, можна говорити про вклад коливань зв'язків С-О, С=О та С-ОН у смуги на частотах 1186 , 1300 , 1546 , 1580 , 1638 см^{-1} . Коливання зв'язків типу С-С представлені майже всіма частотами понад 1300 см^{-1} , оскільки в цьому діапазоні значною мірою відіграють роль як коливання сполучених кілець бензолу та ксантену один відносно одного, так і окремі деформації їх частин (наприклад половин та чвертей бензолових кілець [7]).

Висновки

1. Використання скляних пластинок зі срібними наночастинками, в порівнянні з алюмінієвими поверхнями, спричиняє значному перерозподілу інтенсивностей смуг Флуоресцеїну в спектрі комбінаційного розсіювання світла. Окрім цього, в спектрі барвника виникають нові смуги притаманні комплексам, які утворюють молекули адсорбовані на поверхні наночастинок срібла.

2. Порівняння спектрів інфрачервоного поглинання та комбінаційного розсіювання вказують на їх значну подібність та можливість взаємного доповнення та аналізу в окремих випадках.

3. Виконані дослідження підтверджують ефективність використання колоїдних наночастинок благородних металів для дослідження оптичних властивостей наднизьких об'ємів речовини.

Список використаних джерел

1. Lakowicz J.R. Principles of Fluorescence Spectroscopy, third ed. / J.R. Lakowicz. – New York: Springer, 2013. – 960 p.
2. Bastus N.G. Quantifying the Sensitivity of Multipolar (Dipolar, Quadrupolar, and Octapolar) Surface Plasmon Resonances in Silver Nanoparticles: The Effect of Size, Composition, and Surface Coating / N.B. Bastus, J. Piella, V. Puentes // *Langmuir*. – 2016. – V. 32. – No. 1. P. 290–300.
3. Hilderbrandt P. Surface enhanced resonance raman study on Fluoresceine dyes / P. Hilderbrandt, M. Stockburger // *Journal of Raman Spectroscopy*. – 1986. – V. 17. – P. 55–58.
4. Wang L. Raman and FTIR spectroscopies of fluoresceine solutions / L. Wang, A. Roitberg, C. Meuse, A.K. Gaigalas // *Spectrochimica Acta Part A*. – 2001. – V. 57. – P. 1781–1791.
5. Davies M. Infra-red absorptions of Phenol, Phenolphthalein, Fluoresceine and some alkali derivatives / M. Davies, L. Jones // *Journal of the Chemical Society*. – 1954. – P. 120–125.
6. Elfeky S.A. Synthesis and spectral characteristics of gold nanoparticles labeled with fluorescence sodium / S.A. Elfeky, Al-S.A. Al-Sherbini // *Current Nanoscience*. – 2011. – V. 7. – P. 1028–1033.
7. Shrerer J.R. Group vibrations of substituted benzenes—I E_{1u} bend-stretch modes and E_{2g} ring deformations of the chlorbenzenes / J.R. Shrerer // *Spectrochimica Acta*. – 1963. – V. 19. – P. 601–610.
8. Kalkan A.K. Single Molecule Detection Surface-enhanced Raman Scattering Substrates by Electroless Synthesis of Ag Nanoparticles on Nanostructured Silicon Films / A.K. Kalkan // *The Electrochemical Society Transactions*. – 2007. – V. 3. No. 23. – P. 9–16.

References

1. LAKOWICZ, J.R. (2013) *Principles of Fluorescence Spectroscopy, third ed.* New York: Springer.
2. BASTUS, N.B., PIELLA, J., PUNTES, V. (2016) Quantifying the Sensitivity of Multipolar (Dipolar, Quadrupolar, and Octapolar) Surface Plasmon Resonances in Silver Nanoparticles: The Effect of Size, Composition, and Surface Coating. *Langmuir*. 32 (1). p.290-300.
3. HILDERBRANDT, P., STOCKBURGER, M. (1986) Surface enhanced resonance raman study on Fluoresceine dyes. *Journal of Raman Spectroscopy*. 17. p.55-58.
4. WANG, L., ROITBERG, A., MEUSE, C., GAIGALAS, A.K. (2001) Raman and FTIR spectroscopies of fluoresceine solutions. *Spectrochimica Acta Part A*. 57. p.1781-1791.
5. DAVIES, M., JONES, L. (1954) Infra-red absorptions of Phenol, Phenolphthalein, Fluoresceine and some alkali derivatives. *Journal of the Chemical Society*. 1. p.120-125.
6. ELFEKY, S.A., AL-SHERBINI, Al-S.A. (2011) Synthesis and spectral characteristics of gold nanoparticles labeled with fluorescence sodium *Current Nanoscience*. 7. p.1028-1033.
7. SHRERER, J.R. (1963) Group vibrations of substituted benzenes—I E_{1u} bend-stretch modes and E_{2g} ring deformations of the chlorbenzenes. *Spectrochimica Acta*. 19. p.601-610.
8. KALKAN, A.K. (2007) Single Molecule Detection Surface-enhanced Raman Scattering Substrates by Electroless Synthesis of Ag Nanoparticles on Nanostructured Silicon Films. *The Electrochemical Society Transactions*. 3(23). p.9-16.

Надійшла до редколегії 21.03.16

УДК 535.37

Дегода В.Я.¹, д.ф.-м.н., пров.н.с.,
Когут Я.П.¹, інж.,
Свечнікова О.С.¹, к.ф.-м.н., с.н.с.

Рентгенолюмінесцентні дослідження біополімерів

¹Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 01601, м. Київ,
вул. Володимирська 64/13,
e-mail: yana_kogut@ukr.net

V. Ya. Degoda¹, Dr. Sci. Res.,
Ya. P. Kogut¹, Eng.,
O. S. Svechnikova¹, PhD, Sen. Sci. Res.

X-ray luminescence exploration of biopolymers

¹Taras Shevchenko National University of Kyiv,
01601, Kyiv, Volodymyrska st. 64/13,
e-mail: yana_kogut@ukr.net

Представлені експериментальні результати дослідження рентгенолюмінесцентних властивостей кератинових біополімерів на прикладі 10 нігтьових пластин з пальців обох рук однієї людини. Для усіх зразків одержані спектри рентгенолюмінесценції при температурі 85 K та температурні залежності інтенсивності рентгенолюмінесценції. Температурні залежності, отримані по двом каналам реєстрації для всіх зразків, апроксимуються формулою Мотте. Встановлено, що квантовий вихід рентгенолюмінесценції кератинових біополімерів в досліджуваному температурному діапазоні буде низьким, тобто, люмінесценція завжди буде слабкою.

Ключові слова: рентгенолюмінесценція, температура, кератинові біополімери, квантовий вихід люмінесценції, формула Мотте.

Keratin biopolymers, including skin, nail plate and hair is a source of information, and describes the body as a whole. Experimental results presented research X – ray luminescence 10 nail plates of all fingers of one person. For all samples obtained X-ray spectra at 85 K and the temperature dependence of the intensity of X-ray from 85 to 300 K. The results indicate the reproducibility of the experiment.

Nail plate is stable for hours of X-rays confirming experiment.

X-ray spectra of all nail plates are composed of electron-vibrational transitions. The resulting frequency of 1343 cm^{-1} corresponds to the local fluctuations of the molecules.

Temperature dependence obtained for all samples approximated Mott formula with equal energy value of temperature attenuation $E_T = 0,062\text{ eV}$. The intensity of luminescence in keratin biopolymers will always be weak.

Despite the similarity of X-ray spectra obtained results indicate differences between samples, and because all the samples were formed at the same time, they represent the same health. We can conclude that in each nail plate encrypted information is different and this result makes it possible to speak of the body to diagnose X – ray luminescence properties nail plate.

Key Words: X-ray, temperature, biopolymer, quantum yield of luminescence, formula Motte.

Статтю представив академік НАН України, д.ф.-м.н., проф. Булавін Л.А.

Вступ

Звичним і діагностично-необхідними в медицині є аналіз крові. На сьогодні кров є універсальним діагностичним об'єктом для будь-яких досліджень стану організму людини. Однак не лише кров є інформативною щодо стану організму.

Кератинові біополімери, зокрема, шкіра та придатки шкіри (нігтьові пластини та волосся) людини внаслідок своєї будови та фізіологічної

функціональності в організмі людини є досить інформативними щодо змін в обміні речовин людини. За зовнішнім виглядом шкіри, нігтьових пластин та волосся сьогодні проводять первинну діагностику деяких внутрішніх захворювань. Проте така діагностика носить емпіричний та якісний характер і є лише певними «підказками», в якому напрямку проводити лабораторну діагностику. Одним з методів, який наразі досить широко рекламується, є «мікроелементний аналіз волосся» [1], який має багато недоліків. Головні з

них – по-перше, обмежена сукупність хімічних елементів для аналізу – починаючи лише з сірки (поза увагою лишаються легкі елементи – азот, кисень, водень, вуглець, які є основними елементами біологічних об'єктів). По-друге, не враховується будова конкретної волосини. Крім того, при проведенні таких досліджень не враховується, а відповідно, і не аналізується, місце зрізу волосся – з якої частини голови волосся було зрізано. Структурно нігтьова пластина, як і волосся, складається з кератину, проте для оптичних досліджень нігті через відсутність меланіну є оптично вигіднішими. Як вже зазначалось в [2], незважаючи на головну особливість люмінесцентних досліджень біополімерів, а саме: дуже малу інтенсивність рентгенолюмінесценції (РЛ), яка більш як на 4 порядки менша за інтенсивність РЛ класичного люмінофора ZnS-Cu, дослідження в цьому напрямку є важливою та актуальною задачею в медичній та біологічній фізиці. В [2] була описана методологія люмінесцентних досліджень нігтьової пластини. Отримані результати свідчать про перспективність даного напрямку дослідження, що в майбутньому, ймовірно дозволить розробити метод аналізу стану організму людини за люмінесцентними властивостями нігтьової пластини людини.

Продовжуючи рентгенолюмінесцентні дослідження біополімерів (нігтьової пластини людини), задачами даної роботи є: по-перше перевірити відтворюваність експериментальних результатів; по-друге провести дослідження за однаковою програмою для 10 нігтьових пластин однієї людини та дослідити відмінності у люмінесцентних та температурних властивостях зазначених об'єктів.

Методика експерименту та опис зразків дослідження

Досліджувалися зразки нігтьових пластин з 10 пальців рук однієї людини. Для проведення коректного порівняння експериментально отриманих результатів дослідження проводилися в рамках одного циклу, при цьому зрозуміло, що усі 10 зразків росли одночасно і, відповідно, відображають однаковий стан організму. Кожен із зразків зрізувався в день проведення експерименту, безпосередню перед початком спектральних досліджень. Всі досліджені зразки не піддавались будь-яким фізичним, механічним чи хімічним пошкодженням. Умовні позначення зразків відображені на рис. 1 (5 зразків лівої руки

позначені літерою «L», а правої – літерою «R», відповідно).

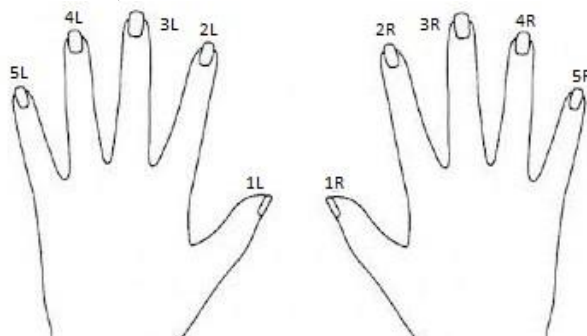


Рис. 1 Схематичне зображення та позначення досліджувальних зразків.

Свіжозрізана нігтьова пластина розміром близько 15 мм² механічно закріплювалась на мідній підкладці кріостату таким чином, щоб забезпечити найкращий тепловий контакт зразка з мідною підкладкою.

Зразок розміщується в кріостаті, що дозволяє проводити виміри у вакуумі при різних температурах, опромінюючи зразок інтегральним випромінюванням рентгенівської трубки БХВ 7 (Re, L = 120 мм) в режимі 20 kV, 25 mA, 0,635 mBт/см², при цьому рентгенівське випромінювання проходило в кріостат через берилієве віконце. Зразок закріплювався таким чином, щоб інтегральне випромінювання від рентгенівської трубки потрапляло на внутрішню частину пластини. Дослідження проводили в діапазоні температур від 85 до 300 K за допомогою охолодження або нагрівання мідної підкладки. Для вимірювання температури використовувалися термопара хромель – алюмель, яка була закріплена на мідній підкладці разом із зразком.

Випромінювання рентгенівської трубки направлено перпендикулярно до площини зразка. РЛ зразків реєструвалася одночасно за двома каналами: інтегрально і спектрально, при цьому кварцові вікна реєстрації були розташовані під кутами 45° до площини зразка, а між собою під кутом 90°. Інтегральне свідчення реєстрували з використанням світлочутливого фотоелектронного помножувача ФЕП-106. Спектри свідчення реєстрували у діапазоні від 330 до 800 нм через світлосильний монохроматор МДР - 2 із дифракційною ґраткою 600 шт/мм за допомогою світлочутливого фотоелектронного помножувача ФЕП-106. Усі спектри люмінесценції виправлялися на спектральну чутливість реєструючої системи. Інформація в

аналоговому вигляді після підсилювачів усіх каналів реєстрації (з блоку сканування монохроматора, з блоку реєстрації температури, з блоків реєстрації інтенсивностей свічення) подавалася на 16-канальний АЦП. За допомогою створеного програмного забезпечення одержані експериментальні дані оброблялися на ПК [3]. За необхідністю спектри РЛ переводили зі шкали довжин хвиль (нм) в шкалу енергій квантів (eV) із урахуванням спектральної густини випромінювання.

Дослідження усіх зразків нігтьових пластин проводилося в однакових умовах за однаковою програмою експерименту, а саме:

- зразок розміщувався в кріостат та охолоджувався у вакуумі до температури 85 К
- після температурної стабілізації зразок опромінювався рентгенівськими квантами 1 годину; при цьому реєструвалася інтенсивність свічення інтегрально та спектрально на максимумі свічення $\lambda \approx 450$ нм, реєструвався спектр в діапазоні 300 ÷ 700 нм,
- зразок нагрівався від 85 К до температури 300 К і при цьому реєстрували температурні залежності РЛ (інтегрально та спектрально на максимумі свічення).

Експериментальні результати

Було досліджено 10 зразків – жіночі нігтьові пластини з 10 пальців рук. Найменування зразків згідно схеми на рис. 1. Згідно програми експерименту всі зразки при температурі 85 К опромінювалися 1 годину, що дозволяло зареєструвати 2 спектри: на 5 хвилині від початку опромінювання та на 50 хвилині опромінювання. Ці результати для одного зразка 2L представлені на рис. 2.

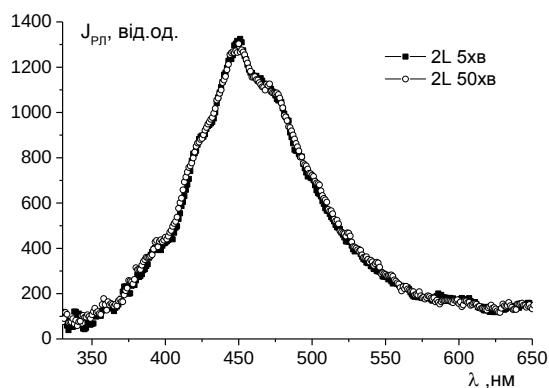


Рис. 2 Спектри РЛ при температурі 85 К для зразка 2L на 5 та 50 хвилині опромінювання.

При порівнянні між собою аналогічних двох спектрів для кожного із зразків відносні значення інтенсивності РЛ та форма спектрів виявилися однаковими в межах «шумового фону». Крім того, реєстрація інтегрального свічення протягом 1 години опромінювання так само підтверджує незмінність спектрів. Отримані результати свідчать про стійкість нігтьової пластини людини до рентгенівського опромінювання дозою 2,3 Дж/см² (1 год. опромінювання) і дозволяють користуватися отриманими результатами. Рентгеностійкість зразків даного типу потребує подальших досліджень.

Для зручності сприйняття отримані експериментальні дані представлені на рисунках із поділом на праву та ліву руки. На Рис. 3 представлені спектри РЛ досліджувальних зразків при температурі 85 К (рис. 3(а) – права рука, рис. 3(б) – ліва рука, відповідно).

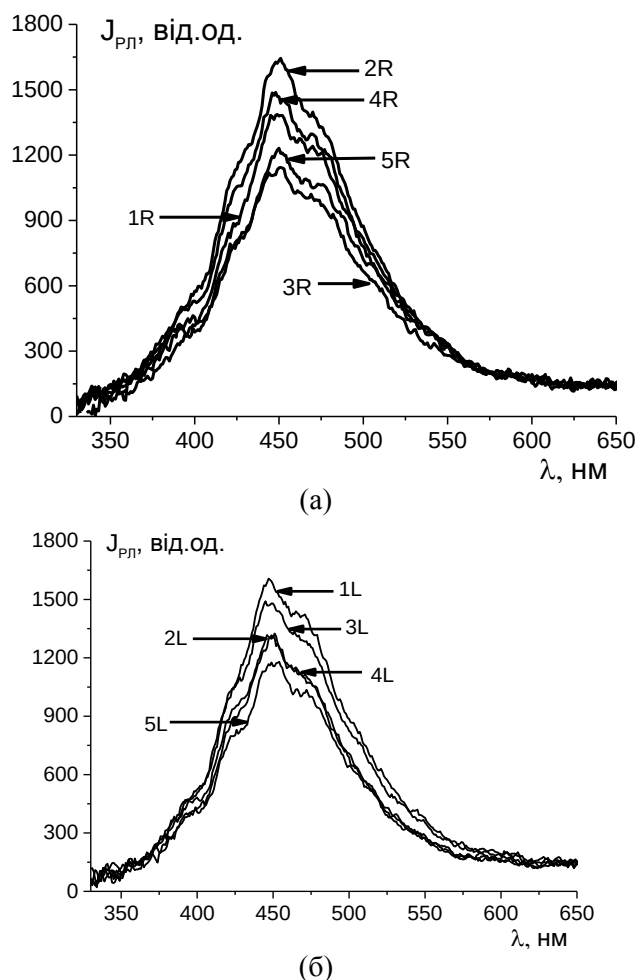


Рис. 3. Спектри РЛ 5 нігтьових пластин при температурі 85 К (а - права рука, б - ліва рука)

Отримані спектри РЛ нігтьових пластин корелюють з раніше отриманими спектрами для

подібних зразків [2], що свідчить про коректність проведених досліджень та відтворюваність експериментальних даних.

З наведених спектрів РЛ (рис. 3) видно, що відносні значення інтенсивностей РЛ не однакові для різних зразків. Також не спостерігається кореляцій між інтенсивностями РЛ при порівнянні спектрів нігтьових пластин відповідних пальців двох рук між собою. Діапазон відмінності між значеннями інтенсивності для різних зразків змінюється від 0 до 30%. Варто звернути увагу на два зразка, а саме 2L та 4L, інтенсивності яких між собою співпадають в межах «шумового фону».

На рис. 4 наведені усереднені значення інтенсивностей РЛ усіх досліджувальних зразків. Відносні значення інтенсивності РЛ кожного зразка усереднювалась за інтегральним і спектральним значенням, які корелюють між собою у межах похибки.

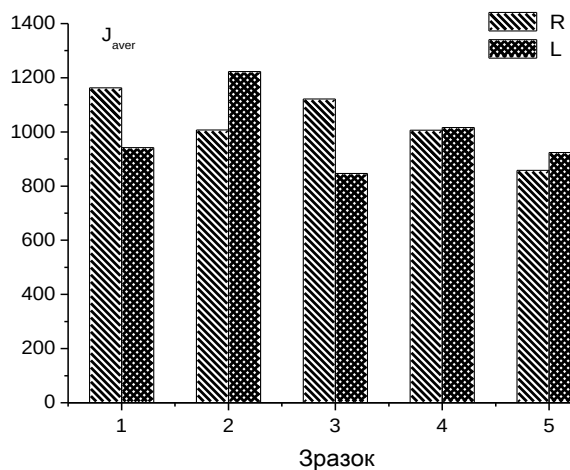


Рис. 4. Усереднені значення інтенсивностей РЛ усіх 10 зразків (позначення згідно Рис. 1)

З аналізу рис. 4 робимо висновок, що не зважаючи на методологічні особливості проведення експерименту та слабкість свідчення нігтьових пластин людини, люмінесцентні властивості різні для кожної нігтьової пластини, і саме це є перспективною основою для нового методу медичної діагностики організму людини.

На Рис. 5 наведені нормовані на максимум смуги свідчення спектри РЛ окремо для кожного з 10 зразків. Максимум свідчення спектра РЛ для всіх зразків знаходиться на довжині хвилі ~ 450 нм, що є в межах похибки реєструючої системи.

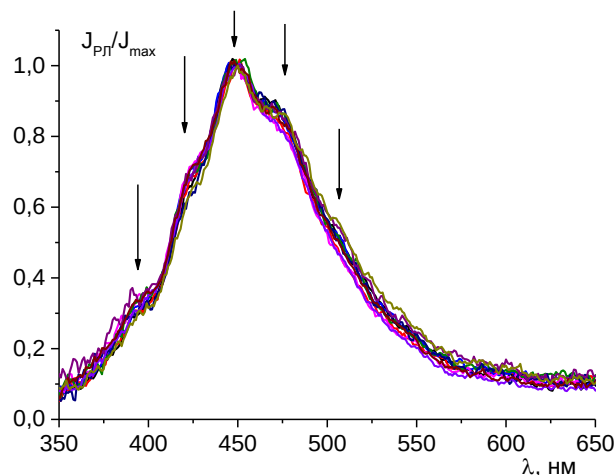


Рис. 5. Нормовані спектри РЛ для 10 зразків (стрілками позначені «перегини»)

Видно (рис. 5), що форми спектрів РЛ для усіх зразків є подібними між собою – неелементарна широка смуга свідчення в спектральному діапазоні (330 ÷ 650) нм з максимумом на довжині хвилі ~ 450 нм. Крім того, незважаючи на «шумовий фон» спектра кожного окремого зразка, на графіку, де представлені спектри всіх досліджувальних зразків, можна чітко виділити 5 «перегинів» (позначено стрілочками на рис. 5). Для визначення значень енергій «перегинів» усі спектри РЛ з урахуванням спектральної густини випромінювання були переведені зі шкали довжини хвилі нм в енергетичну шкалу eV. Було встановлено, що значення енергій, які відповідають «перегинам», мають еквідистантні положення (в шкалі енергій) зі значенням різниці енергій 0,1665 eV, що відповідає частоті 1343 cm^{-1} . Слід зазначити, що відносна похибка цього значення не перевищує 0,1 %, незважаючи на те, що кожна нормована крива спектру має досить помітний рівень шумів. Одержані спектральні положення «перегинів» можна було встановити лише за рахунок усереднення нормованих кривих.

Можна зробити висновок, що спектр РЛ досліджувальних зразків складається з електронно-коливних переходів, а частота 1343 cm^{-1} відповідає локальному коливанию молекулярного комплексу, який і є центром свідчення в нігтьовій пластині людини. Порівняння з літературними даними показали, що існує багато органічних речовин, яким відповідає ця частота коливань. Для однозначної ідентифікації молекулярного комплексу, який обумовлює люмінесценцію кератинових біополімерів у видимій області спектру,

необхідно в подальшому проводити цілеспрямований пошук серед молекулярних комплексів, які, по-перше, входять до складу кератинових біополімерів, а саме нігтьової пластини людини, по-друге, мають коливну частоту $\sim 1343 \text{ cm}^{-1}$ та, по-третє, для яких спостерігається свічення в цій ділянці спектра.

Температурні залежності та їх аналіз

Для усіх 10 зразків були одержані температурні залежності інтенсивності люмінесценції в інтервалі $(85 \div 300) \text{ K}$. Реєстрація інтенсивності РЛ проводилась по двом каналам: інтегрально та спектрально на $\lambda \approx 450 \text{ nm}$ (максимум свічення). Як приклад, на рис. 6 представлені експериментальні температурні залежності інтенсивності РЛ для нігтьових пластин правої руки при інтегральній реєстрації люмінесценції.

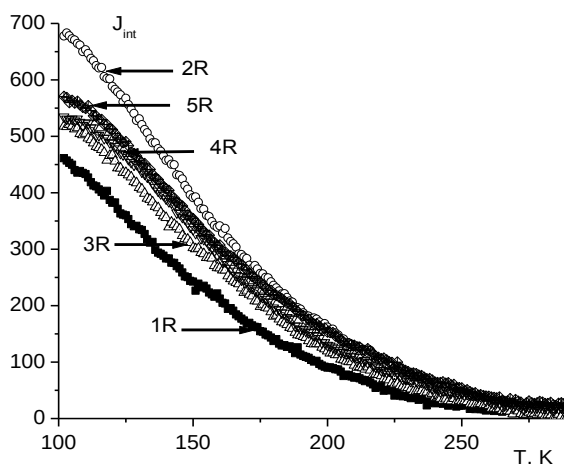


Рис. 6. Температурні залежності інтенсивності РЛ для зразків правої руки при інтегральній реєстрації люмінесценції.

Усі 20 одержаних експериментальних температурних залежностей інтенсивності РЛ $J(T)$ добре апроксимуються формулою Мотта:

$$J(T) = J_0 / [1 + A \cdot \exp(-E_T/kT)],$$

де: J_0 – інтенсивність люмінесценції при $T \rightarrow 0$, A – константа, E_T – енергія температурного згасання люмінесценції, k – стала Больцмана, T – температура зразка.

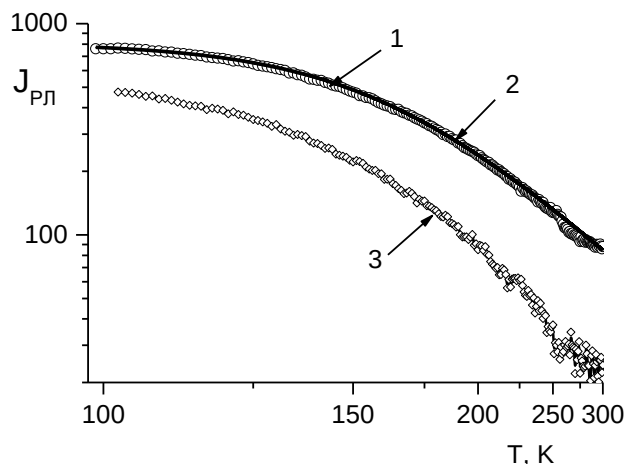


Рис. 7. Температурні залежності для зразка 3R (спектральна (крива 3) та інтегральна (крива 1) реєстрації) та теоретична апроксимація формулою Мотта для інтегральної реєстрації (крива 2) РЛ.

Варто зазначити, що більш достовірною є температурна залежність, отримана при інтегральній реєстрації, оскільки з підвищенням температури смуга свічення розширюється і інтенсивність у максимумі смуги спадає швидше за інтенсивність всієї смуги. Це призводить до збільшення величини енергії згасання, що і спостерігається. Для інтегральної реєстрації рентгенолюмінесценції одержали однакове значення енергії згасання $E_T = 0,062 \text{ eV}$ для усіх зразків. Проте формула Мотта враховує лише надбар'єрні переходи із збудженого електронного стану в основний стан центра свічення [4, 5]. Якщо врахувати тунельні переходи із збудженого в основний стан, то визначена енергія температурного згасання становить $3/4$ від висоти бар'єра [4, 5], тобто висота бар'єра становить $0,08 \text{ eV}$. Якщо врахувати, що смуга збудження цього центра свічення знаходиться в УФ частині спектра, то стоксівський зсув для цієї смуги свічення (E_C) перевищує значення $3,0 - 2,7 = 0,3 \text{ eV}$. В результаті маємо, що висота бар'єра, для безвипромінювальної релаксації електронного збудження центра свічення суттєво менша за половину стоксівського зсуву: $0,08 \text{ eV} < 0,15 \text{ eV}$. Це означає, що цей центр свічення за будь-яких умов буде мати дуже низький квантовий вихід люмінесценції, а отже і інтенсивність люмінесценції буде слабкою, що і спостерігається експериментально.

Основні результати та висновки

Проведені експерименти підтверджують відтворюваність експериментальних результатів отриманих в [2]. Для 10 зразків нігтьової пластини було отримано спектри рентгенолюмінесценції при температурі 85 К та їх температурні залежності від 85 до 300 К.

Експериментально підтверджено, що при одногодинному рентгенівському опромінюванні РЛ нігтьової пластини людини залишається незмінною.

Спектри рентгенолюмінесценції усіх нігтьових пластин складаються з електронно-ковинних переходів. Одержана частота 1343 см^{-1} відповідає локальному коливанию молекулярного комплексу, який є центром свічення нігтьових пластин.

Температурні залежності, отримані для 10 зразків, апроксимуються формулою Мотта з однаковим значенням енергії температурного затухання $E_T = 0,062 \text{ eV}$.

З порівняння енергії температурного згасання люмінесценції зі стоксівським зсувом смуги свічення рентгенолюмінесценції нігтьової пластини показано, що за будь-яких умов цей центр буде мати дуже низький квантовий вихід люмінесценції. Отже, інтенсивність люмінесценції в кератинових біополімерах завжди буде слабкою.

Незважаючи на подібність спектрів рентгенолюмінесценції, отримані результати свідчать про відмінності між зразками, а оскільки усі зразки формувались одночасно, то вони відображають однаковий стан організму. Можна зробити висновок, що в кожній нігтьовій пластині зашифрована різна інформація і саме цей результат дає можливість говорити про діагностику організму по рентгенолюмінесцентним властивостям нігтьових пластин.

Список використаних джерел

1. Скальный А.В. Микроэлементозы человека: диагностика и лечение / А.В. Скальный. – Москва: КМК, 1999. – 96 с.
2. Спектри рентгенолюмінесценції кератинових біополімерів при різних температурах / В.Я. Дегода, Я.П. Когут, О.С. Свечнікова // Вісник КНУ: сер. Фіз.-мат. наук, 2016, № 1, с.181-184.
3. Дегода В.Я. Комплексна установка для досліджень люмінесценції та провідності кристалофосфорів / В.Я. Дегода // Вісник «Львівська політехніка»: сер. Електроніка, 2014, № 798, с.120-125.
4. Дегода В.Я. Імовірність внутріцентричних тунельних переходів з безвипромінювальною рекомбінацією / В.Я. Дегода // Вісник Київського університету, Серія фізико-математичні науки, 2000, № 2, с.495-504.
5. Дегода В.Я. Температурна залежність квантового виходу внутріцентричної люмінесценції / В.Я. Дегода // Вісник Київського університету, Серія фізико-математичні науки, 2000, № 3, с. 380-390.

References

1. SKALNIY, A. (1999) *Microelementoses person: diagnosis and treatment*. Moscow: KMK.
2. DEGODA, V. et al. (2016) X-ray spectra of keratin biopolymers at different temperatures. *Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv Series Physics & Mathematics*, 1, p.181-184.
3. DEGODA, V. (2014) Complete plants for luminescence and conductivity studies of crystal. *Bulletin of "Lviv Polytechnic", ser. Electronics*, 798, p.120-125.
4. DEGODA, V. (2000) Probability vnutritsentrovyyh tunnel junctions with non-radiative recombination. *Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv Series Physics & Mathematics*, 2, p.495-504.
5. DEGODA, V. (2000) The temperature dependence of the luminescence quantum yield vnutritsentrovoyi. *Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv Series Physics & Mathematics*, 3, p.380-390.

Надійшла до редколегії 24.06.16

УДК 538.91:539.8

Мазур Ю. П.¹, асп.,
Остапенко Р. В.², асп.,
Семенко М. П.³, д.ф.-м.н., проф.

Зв'язок між текстурою та мікротвердістю високоентропійних сплавів

^{1,2,3}Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 01601, м. Київ, вул.
Володимирська 64/13,
e-mail: fizmazur@gmail.com

Yu. P. Mazur¹, PhD stud.,
R. V. Ostapenko², PhD stud.,
M. P. Semen'ko³, Dr. Sci., Prof.

Conection between the texture and microhardness of the high-entropy alloys

^{1,2,3}Taras Shevchenko National University of Kyiv,
01601, Kyiv, Volodymyrska st. 64/13,
e-mail: fizmazur@gmail.com

Досліджено розподіл мікротвердості та параметрів рентгенівської дифракції (інтенсивність та ширина дифракційних максимумів) по поверхні зразка високоентропійного сплаву складу CrMnFeCoNi₂Cu. Показано наявність відповідного зв'язку між мікротвердістю та відносною інтенсивністю, що може бути пояснена наслідком анізотропії пружних властивостей, що встановлена для таких ГЦК сплавів.

Ключові слова: високоентропійний сплав, текстура, мікротвердість.

The CrMnFeCoNi₂Cu high entropy alloy was prepared by vacuum arc melting of pure single element material in high-purity argon atmosphere on a water-cooled Cu hearth. After the homogenization the rectangular specimen of the size 10×12 mm² was cut from the alloying ingot. Microstructure investigations of alloy was carried out by x-ray diffraction (XRD) using DRON-4 diffractometer with Co K α radiation. The series of XRD-partents were obtained by displacement x-ray beam along two side of specimen with 2 mm step. The microhardness was measured by using PMT-2 mycro-hardometer along longer side of the sample with discrete less than 0.2 mm. The distributions of the microhardness and diffraction parameters (the intensity and the diffraction maximum wide) on the surface of the high entropy CrMnFeCoNi₂Cu alloy were obtained. The existence of the appropriate connection between the microhardness and relative intensity was shown. Such connection issues due to anisotropy elastic properties that was revealed for such FCC alloys.

Key-words: high-entropy alloy, texture, microhardness.

Статтю представив член-кор. НАН України, д.ф.-м.н., проф. Макара В.А.

Вступ

Високоентропійні сплави (ВЕСи) – новий клас матеріалів, що складаються з п'яти і більше металічних складових, вміст яких близький до еквіатомного.

Склад та простий тип кристалічної структури (ОЦК або ГЦК) дає право віднести їх до твердих розчинів заміщення. ВЕСи мають перспективи для використання в інженерії, зокрема в якості конструкційних матеріалів.

Досить часто такі сплави характеризуються певною текстурованістю після розливання в форми. Хоча текстурованість зразків ВЕСів і детально досліджувалась [1], однак визначенню її прямого впливу на властивості в загальному не приділено достатньо уваги.

В роботі зроблено спробу визначення ролі

текстури у формуванні властивостей таких матеріалів.

Методика експерименту

В роботі було досліджено ВЕС складу CrMnFeCoNi₂Cu, виготовлений за методикою, описаною в [1]. Структуру та фазовий склад досліджували рентгенівською дифракцією на дифрактометрі ДРОН-4 з використанням Со α -випромінювання. Мікротвердість визначали на приладі ПМТ-2 при навантаженні в 100 г.

Для дослідження структури проводили запис серії дифрактограм, зміщуючи зразок вздовж осей X (сторона 10 мм) та Y (сторона 12 мм) з дискретністю 2 мм відносно центра пучка. Першу дифрактограму одержували при X або Y рівному 1 мм, що дозволяло одержувати дифрактограму при повній локалізації пучка на зразку.

Результати експерименту

Деякі загальні особливості структури досліджуваного сплаву та сплаву складу CrMnFeCoNi викладені нами в [2]. На рис. 1 показано фрагменти дифрактограм, одержані при скануванні пучка вздовж осі X . Як видно, змінюється не тільки абсолютна інтенсивність дифракційних максимумів, але і відносна їх інтенсивність, особливо для дифракційних максимумів (111) та (200). Слід сказати, що інтенсивність залежить і від кількості речовини, що приймає участь у дифракції. При однотипному орієнтуванні зразка відносно пучка це може проявлятися лише для двох крайніх точок. Для середньої частини такий фактор відсутній, оскільки весь пучок попадає на зразок при будь-якій його кутовій орієнтації.

Для визначення відносних інтенсивностей одержані дифракційні максимуми апроксимувалися двома функціями Лоренца. Функція Лоренца була вибрана з тієї причини, що вона найкращим чином описує дифракційні максимуми металів.

На рис. 2, *а* зображена залежність відносних інтенсивностей дифракційного максимуму (200) до інтенсивності максимуму (111) від координати X та Y . Причому, у випадку X -сканування зйомку проводили при скануванні як в прямому, так і у зворотному напрямку. В обох випадках одержали практично однаковий результат. Як видно, має місце суттєве перевищення інтенсивності дифракційного максимуму (200) на одному кінці зразка, порівняно з його інтенсивністю на іншому кінці. Тобто в цьому випадку має місце різна текстурованість з напрямком $\langle 100 \rangle$ перпендикулярно до площини зразка.

На рис. 2, *б* зображені залежності ширини w дифракційних максимумів (111) та (200) (w_{111} та w_{200} , відповідно) при русі пучка вздовж осі X . Бачимо, що зі зміщенням вздовж цього напрямку ширина дифракційного максимуму (111) зменшується, але ширина дифракційного максимуму (200) залишається практично незмінною.

Добре відомо, що цілий ряд фізичних властивостей матеріалів визначається не тільки їх складом, а й структурою. Тому, слід очікувати, що для одного й того ж складу повинні змінюватися і фізичні властивості при русі вздовж координати X (або Y). Провести такі дослідження можна досить просто шляхом вимірювання мікротвердості H_V , що дозволяє одержати розподіл такої характеристики по

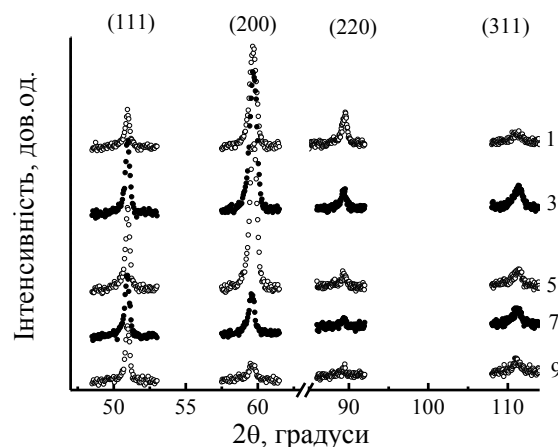
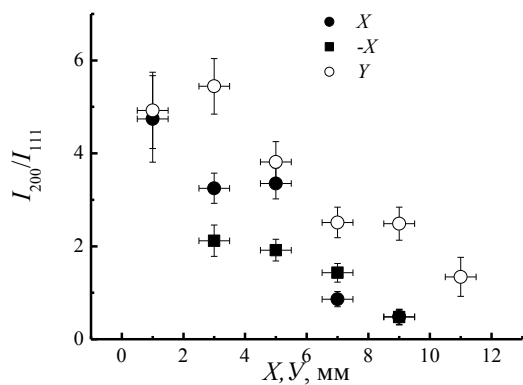
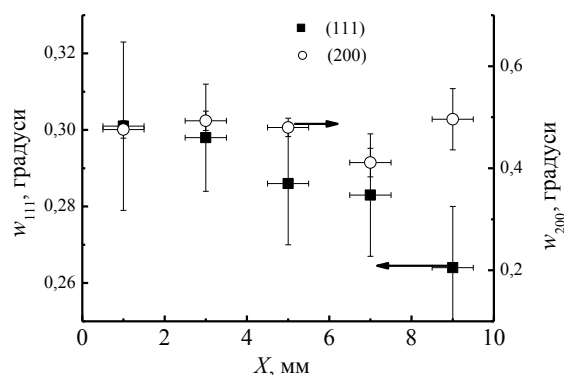


Рис. 1. Фрагменти дифрактограм, знятих при скануванні пучка вздовж X . Цифри справа від дифрактограм – значення X у мм.



(а)



(б)

Рис. 2. Залежність відносної інтенсивності I_{200}/I_{111} дифракційних максимумів від X або Y ($-X$ означає сканування в іншому напрямку) (а) та залежність ширини w цих дифракційних максимумів від координати X (б).

поверхні. Залежність H_V від координати X зображена на рис. 3. В цьому випадку вимірювання проводилось по середині зразка вздовж координати Y , тобто в області максимуму дифракційного пучка при його скануванні вздовж осі X . Отже, як видно, H_V , як і параметри дифракції, змінюється (збільшується) по мірі руху вздовж X .

Обговорення результатів

Мікротвердість – величина, що визначається рядом механічних властивостей. Якщо вимірювання проведені для одних типів кристалів і в близьких умовах, то можна виявити чіткі кореляції між H_V та певним типом механічних параметрів. Зокрема, вимірювання мікротвердості для ВЕСів складу CrMnFeCoNi дозволили встановити залежність між H_V та розміром зерен існує $d: H_V \sim d^{1/2}$ (закон Холла-Петча) [3]. Така залежність є наслідком зв'язку між мікротвердістю та міцністю, для якої цей закон і був встановлений.

В нашому випадку має місце зміна ширини дифракційного максимуму w_{111} (рис. 2, б). Без врахування внеску від мікронапружень ширина дифракційного максимуму пов'язана з розміром блоків когерентного розсіювання (БКР), у відповідності з рівнянням $d = 0.94\lambda / w \cos(\theta)$ (λ - довжина хвилі випромінювання, θ - кут дифракції), відомим як рівняння Селякова-Шеррера [4]. У відповідності з цим рівнянням та отриманою залежністю $w_{111}(X)$ по мірі руху вздовж напрямку, що задається віссю X , d повинно зростати. Отже, якби виконувався закон Холла-Петча, то мало б місце і зменшення твердості H_V , що не узгоджується із одержаними експериментальними даними.

Така обставина є цілком логічною, оскільки параметри дифракції дають інформацію про розмір БКР вздовж нормалей до площин, що паралельні площині зразка (визначається умовою фокусування за Бреггом-Бретано [4]), а закон $H_V \sim d^{1/2}$ одержано для випадку, коли d визначалося в площині зразка [3], тобто в напрямку, перпендикулярному до напрямку визначення розміру БКР та напрямку прикладання навантаження при вимірюванні мікротвердості. Крім цього, ширина дифракційного максимуму w_{200} залишається практично постійною, а з цієї точки зору мікротвердість повинна залишатися постійною.

Тому для пояснення залежності H_V від X використаємо залежність текстурованості по ширині пластини. Зміна текстури може бути якісно

відображена залежностями відносної інтенсивності (рис. 2, а), доля кристалітів з орієнтацією напрямку $[100]$ перпендикулярно

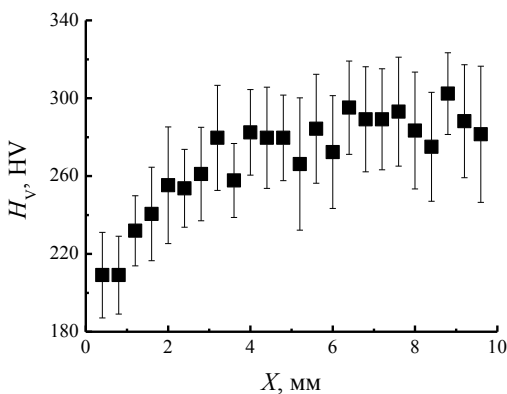


Рис. 3. Залежність мікротвердості по Вікерсу від X (X узгоджене з дифракційними даними, $Y \approx 6$ мм).

площині зразка (або те ж само площин типу (100), паралельних площині зразка) при русі вздовж напрямку осі X зменшується, наближаючись до хаотичної орієнтації зерен на краю зразка, що відповідає $X = 10$ мм. Свідченням цього є зменшення відносної інтенсивності від ~ 5 до значення $\sim 0,4$, саме такого, яким і характеризується відносна інтенсивність цих двох дифракційних максимумів більшості ГЦК кристалів.

Відповідно [5], у сплавах CrMnFeCoNi, що є близьким за складом та параметрами до дослідженого, виявляється сильна анізотропія модуля Юнга значення якого складають: $E_{100} = 122.2$ $E_{110} = 223.2$ $E_{111} = 222.6$, $E_{311} = 163.5$ $E_{331} = 266.7$ ГПа.

Оскільки твердість пропорційна і визначається ще й модулем Юнга матеріалу [6], то можна припустити, що одержана залежність H_V від X обумовлена зміною текстурованості зразка. Дійсно, при максимальній кількості площин з орієнтацією $[100]$ перпендикулярно площині зразка модуль Юнга E в усередненій області вимірювань мікротвердості буде визначатися мінімальним значенням модуля E_{100} (E буде мінімальним). По мірі зменшення внеску такого роду площин матиме місце поступове зростання модуля Юнга, оскільки E в інших напрямках характеризується більшим його значенням. В цьому випадку, врахувавши зв'язок між значення твердості H_V та E слід очікувати зростання мікротвердості, що і спостерігається на експерименті.

Слід відмітити, що межі зміни H_V по ширині зразка складають значення від 310 до 200 HV, відношення яких може узгоджуватися з анізотропією модуля Юнга цього сплаву $r_E = E_{111}/E_{100} = 1.98$ при врахування „неідеальності” текстури, а між значенням H_V та відносною

інтенсивністю I_{200}/I_{111} існує близька до лінійної кореляція, що показано на рис. 4.

Висновки

На прикладі дослідження дифракції та вимірювання мікротвердості ВЕСу складу $\text{CrMnFeCoNi}_2\text{Cu}$ показано, що властивості високоентропійних сплавів будуть визначатися не тільки складом та такими елементами структури як розмір кристалітів, а й текстурованістю матеріалу.

Отже, текстурованість повинна прийматися до уваги при аналізі властивостей навіть кубічних кристалів у тому випадку, коли та чи інша властивість проявляє анізотропію для цього типу кристалів, зокрема у випадку механічних властивостей.

Список використаних джерел

1. Bhattacharjee P. P. Microstructure and texture evolution during annealing of equiatomic CoCrFeMnNi high-entropy alloy / P. P. Bhattacharjee, G. D. Sathiaraj, M. Zaid, J. R. Gatti, C. Lee, C.-W. Tsai, J.-W. Yeh // *J. Alloys Comp.* – 2014. – Vol. 587. – P. 544–552.
2. Крапивка М. О. Структура високоентропійних сплавів CrMnFeCoNi та $\text{CrMnFeCoNi}_2\text{Cu}$ та термостабільність їх електротранспортних властивостей / М.О. Крапивка, Ю.П. Мазур, М.П. Семенко, С.А. Фирстов // *Металлофиз. новейшие технол.* – 2015. – т. 37. – сс.731-740.
3. Liu W.H. Grain growth and the Hall–Petch relationship in a high-entropy FeCrNiCoMn alloy / W.H. Liu, Y. Wu, J.Y. He, T.G. Nieh, Z.P. Lu // *Scripta Mater.* – 2013. – Vol. 68. – P. 526.
4. Уманский Я.С. Кристаллография, рентгенография и электронная микроскопия/ Уманский Я.С. Скаков Ю.А. Иванов А.Н., Расторгуев Л.Н. // М.: Металлургия. – 1982, 632 с.
5. Wu Y. In-situ neutron diffraction study of deformation behavior of a multi-component highentropy alloy / Y. Wu, W. H. Liu, X. L. Wang, D. Ma, A. D. Stoica, T. G. Nieh, Z. B. He, Z. P. Lu. // *Appl. Phys. Lett.* – 2014. – Vol. 104. – P. 327–335.
6. Шувалов Л.А. Современная кристаллография (в четырех томах). Том. 4. Физические свойства кристаллов / Шувалов Л.А., Урусовская А.А., Желудев И.С. и др. // М.: Наука. – 1981. – 496 с.

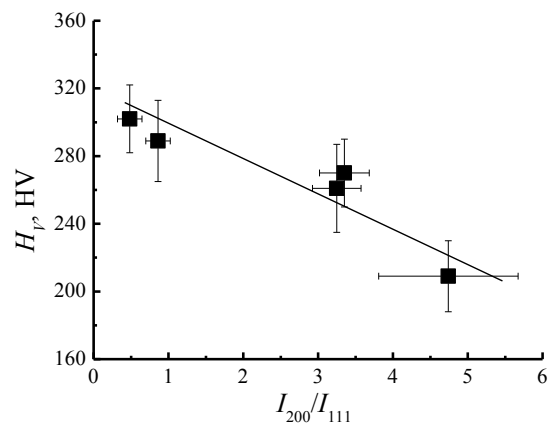


Рис. 4. Кореляційна залежність між мікротвердістю H_v та відносною інтенсивністю I_{200}/I_{111} .

References

1. BHATTACHARJEE, P. P., et al. (2014) Microstructure and texture evolution during annealing of equiatomic CoCrFeMnNi high-entropy alloy. *J. Alloys Comp.* 587. p.544–552.
2. KRAPIVKA, M.O., et al. (2015) The structure and electrical transport properties of thermal stability of high entropy alloys CrMnFeCoNi , $\text{CrMnFeCoNi}_2\text{Cu}$. *Metalofiz. Noveishie tehnol.* 37. p.731-740.
3. LIU, W.H., et al. (2013) Grain growth and the Hall–Petch relationship in a high-entropy FeCrNiCoMn alloy. *Scripta Mater.* 68. p.526.
4. UMANSKIY, Y.S., et al. (1982) *Crystallography, radiography and electron microscopy*. Moscow: Metallurgiya.
5. WU, Y., et al. (2014) In-situ neutron diffraction study of deformation behavior of a multi-component highentropy alloy. *Appl. Phys. Lett.* 104. p. 327–335.
6. SHUVALOV L. A. et al. (1981) *Contemporary crystallography (4 volumes) vol. 4. Crystals physics properties*. M. Nayka.

Надійшла до редколегії 10.06.16

УДК 539.213

Лисов В.І.¹, д.ф.м. н., проф.,
Цареградська Т.Л.², к.ф.м.н., доц.,
Саєнко Г.В.³, інж.,
Турков О.В.⁴, інж.

**Практична реалізація процесу очищення
аморфної матриці від виморожених
центрів кристалізації для
багатокомпонентних аморфних сплавів на
основі заліза та нікелю**

^{1,2,3,4} Київський національний університет
імені Тараса Шевченка, 01601,
м. Київ, вул. Володимирська 64/13,
e-mail: ²tsar_grd@ukr.net

V.I. Lysov¹, Dr.Sc., Prof.,
T.L. Tsaregradskaya², PhD.,
G.V. Saenko³, Eng.,
O.V. Turkov⁴, Eng.

**Practical implementation of the purification
process of amorphous matrix from frozen
crystallization centers for multicomponent
amorphous alloys based on iron and nickel**

^{1,2,3,4} Taras Shevchenko National University of Kyiv,
01601, Kyiv, Volodymyrska st. 64/13,
e-mail: ²tsar_grd@ukr.net

За допомогою високочутливої дилатометричної методики досліджено вплив термічної обробки на термостабільність багатокомпонентних аморфних сплавів на основі заліза та нікелю. Температура обробки визначалась емпіричним шляхом, базуючись на теоретичних положеннях термодинамічної теорії високотемпературної стабільності аморфних сплавів, згідно якої існує інтервал температур, в якому різниця хімічних потенціалів між фазами аморфна матриця – виморожені центри кристалізації є від'ємною; при цьому виконується термодинамічна умова можливості розчинення виморожених центрів кристалізації. Показано, що запропоновані режими термообробки дозволяють розширити інтервали термічної стабільності аморфних сплавів на основі заліза та нікелю на (20-40) К, шляхом очищення аморфної матриці від виморожених центрів кристалізації, що підтверджено електронномікроскопічними дослідженнями.

Ключові слова: аморфний сплав, термообробка, термостабільність, виморожені центри кристалізації

Using highly sensitive techniques dilatometer was experimentally investigated the influence of heat treatment on the thermal stability of multicomponent amorphous alloys based on iron and nickel. Annealing temperature was determined empirically based on theoretical positions thermodynamic theory of high-temperature stability of amorphous alloys, according to which there is a temperature range in which the difference between the chemical potentials of the phases of the amorphous matrix – frozen crystallization centers is negative. This is performed thermodynamic condition for the possibility of dissolution of frozen crystallization centers. The results showed that the proposed modes of heat treatment can extend thermal stability intervals of amorphous alloys based on iron and nickel on (20-40) K, due to the dissolution of existing amorphous phase frozen crystallization centers. As a comparison parameter properties of amorphous alloys in the initial state and after heat treatment conducted microhardness values were used. It is shown that the microhardness decreases after the heat treatment carried out by (15-21)%, indicating decrease in part of crystalline phases in samples. Thus, based on the provisions of the thermodynamic theory of high-temperature stability of amorphous alloys practically implemented purification process of amorphous matrix frozen crystallization centers.

Key Words: amorphous alloy, heat treatment, thermal stability, freezed crystallization centers

Статтю представив член-кор. НАН України, д.ф.-м.н., проф. Макара В.А.

Вступ

Одним з актуальних напрямів сучасної фізики конденсованого стану є вивчення структури і властивостей неупорядкованих

систем, до яких відносяться тіла з аморфною структурою, зокрема, аморфні металеві сплави. Значний інтерес до аморфних металевих сплавів пов'язаний з тим, що їх дослідження розширює представлення фізики конденсованих середовищ,

і дає унікальну можливість вивчати неупорядковані системи в твердому стані.

З практичної точки зору підвищений інтерес до аморфних металевих сплавів зумовлений поєднанням в них унікальних фізичних властивостей. На сьогоднішній день відомо, що властивості аморфних сплавів залежать від умов їх отримання і подальшої обробки. У зв'язку з цим представляє інтерес дослідження поведінки аморфних сплавів при термообробці, оскільки залишаються відкритими питання про механізми впливу зовнішніх чинників на властивості аморфних сплавів [1-2].

Постановка задачі досліджень та методика експерименту

Постановка задачі впливає з термодинамічної теорії високотемпературної стабільності аморфних сплавів [3], відповідно до якої зовнішні впливи може приводити до істотного зсуву фазової рівноваги в гетерогенній системі аморфна матриця – вмерозені центри кристалізації. В щойно отриманих аморфних зразках завжди присутні вмерозені центри кристалізації, при цьому об'ємна частка кристалічної фази в зразку не може перевищувати 10^{-6} (умова аморфності матеріалу). Вмерозені центри кристалізації мають різні розміри, як правило, (20-100) нм. Під дією зовнішніх впливів розмір вмерозених центрів кристалізації може зменшуватись, а також відбуватися розчинення в аморфній матриці; при цьому буде зростати інтервал термічної стабільності сплаву. На процес зародження центрів кристалізації значно впливає різниця хімічних потенціалів $\Delta\mu_i$ між аморфною і кристалічною фазами, причому зменшення $\Delta\mu_i$ сприяє підвищенню термічної стабільності сплавів. При певних значеннях температури ізотермічного відпалу (нижче за температуру кристалізації аморфного сплаву), а також при зміні зовнішнього тиску, є можливими умови при яких відбуватиметься процес переходу кристалічної фази в аморфну. При такому процесі при зменшенні долі кристалічної фази в аморфній матриці збільшуватиметься температурно-часова стабільність аморфного сплаву.

Основною характеристикою термічної стабільності аморфних сплавів є температура початку інтенсивної кристалізації, яка визначалась за допомогою високочутливої дилатометричного методу, суть якого полягає в наступному [4]. Молярний об'єм більшості

сплавів в аморфному та кристалічному станах відрізняється на (1-3) %. Процес кристалізації аморфного сплаву можна дослідити, фіксуючи зміну довжини зразка та перераховуючи її в об'ємні зміни. При нагріванні аморфного сплаву з постійною швидкістю його об'єм монотонно зростає, коли температура досягає певного значення (температури початку інтенсивної кристалізації) відбувається перехід аморфного сплаву в кристалічний стан. Цей процес супроводжується різким зменшенням об'єму. З отриманої температурної залежності відносної зміни об'єму $\Delta V/V(T)$ при нагріванні аморфного сплаву визначають температуру початку інтенсивної кристалізації. Швидкість нагрівання складає 10 К/хв., систематична відносна похибка не перевищувала 5 %. В якості параметра порівняння властивостей аморфних сплавів у вихідному стані та після проведеної термообробки було використано значення мікротвердості. Вимірювання мікротвердості за Віккерсом здійснювались на приладі ПМТ-3. Метод вимірювання мікротвердості ґрунтується на вимірі лінійної величини діагоналі відбитка, що утворюється при втискуванні алмазної пірамідки в досліджуваний матеріал під певним навантаженням. При вимірах мікротвердості враховувалась можливість розкиду значень мікротвердості внаслідок впливу сусідніх структурних складових з іншою мікротвердістю, виміри проводились 10 разів в однакових умовах, повторні виміри проводились в новому місті структурної складової [4].

Результати експериментальних досліджень та їх обговорення

За допомогою високочутливої дилатометричної методики було експериментально досліджено вплив термічної обробки на термостабільність багатокомпонентних аморфних сплавів основі заліза та нікелю: $\text{Fe}_{40}\text{Ni}_{40}\text{B}_{20}$, $\text{Ni}_{78}\text{B}_{18}\text{Si}_4$, $\text{Fe}_{80}\text{B}_{14}\text{Si}_6$, $\text{Fe}_{76,2}\text{Ni}_{3,8}\text{B}_{14}\text{Si}_6$, $\text{Fe}_{78}\text{Si}_6\text{B}_{14}\text{Mo}_2$. Температура відпалу визначалась емпіричним шляхом, базуючись на теоретичних положеннях термодинамічної теорії високотемпературної стабільності аморфних сплавів. Згідно цієї теорії існує інтервал температур, в якому різниця хімічних потенціалів між фазами: аморфна матриця – вмерозені центри кристалізації $\Delta\mu_i$ є від'ємною. При цьому виконується термодинамічна умова можливості розчинення вмерозених центрів кристалізації. В таблиці 1 наведено температури початку інтенсивної кристалізації T_k^0 для вихідних сплавів,

температури проведеної попередньої термообробки T_k^a , температури початку інтенсивної кристалізації T_k після проведеної термообробки, інтервали збільшення температурно-часової стабільності аморфних сплавів ΔT , а також відносні зміни мікротвердості між вихідними сплавами та сплавами, що пройшли відповідну термообробку $(H_a - H_0)/H_a$.

Таблиця 1

Склад аморфного сплаву	T_k^0	T_k^a	T_k	ΔT	$\frac{\Delta H}{H_a}$
	К				%
$\text{Fe}_{40}\text{Ni}_{40}\text{B}_{20}$	710	670	730	20	21,1
$\text{Ni}_{78}\text{B}_{18}\text{Si}_4$	730	680	750	20	15,3
$\text{Fe}_{80}\text{B}_{14}\text{Si}_6$	770	720	810	40	16,4
$\text{Fe}_{76,2}\text{Ni}_{13,8}\text{B}_{14}\text{Si}_6$	770	720	810	40	19,2
$\text{Fe}_{78}\text{Si}_6\text{B}_{14}\text{Mo}_2$	845	800	870	25	18,4

Аналіз результатів, наведених в таблиці 1, показав, що по-перше, інтервал термічної стабільності вихідних сплавів істотно залежить від хімічного складу сплавів. Температура початку інтенсивної кристалізації T_k вища для сплавів на основі Fe ніж на основі Ni; T_k збільшується при додаванні Si до складу сплавів та істотно зростає при легуванні Mo. Цей факт можна пояснити утворенням в багатокомпонентних сплавах ультрадисперсних сполук, які гальмують процеси дифузії Fe або Ni та B, перешкоджаючи утворенню основних фаз базового сплаву, які кристалізуються в першу чергу. По-друге, запропонований режим термообробки дозволив розширити інтервали термічної стабільності багатокомпонентних аморфних сплавів на основі заліза та нікелю на (20-40) К (таблиця 1). Підвищення термічної стабільності досліджених аморфних сплавів після проведеної термообробки можна пояснити розчиненням існуючих в аморфній фазі вмерзених центрів кристалізації.

Для низки аморфних сплавів було проведено вимірювання мікротвердості H для порівняння властивостей аморфних сплавів у вихідному стані та після проведеної термообробки. Між значеннями температури початку інтенсивної кристалізації та мікротвердості існує пропорційна залежність, ймовірно, ці параметри визначаються загальним чинником, наприклад, енергією міжатомної взаємодії компонентів сплаву. Значення мікротвердості знижується після проведеної термообробки на (15-21)%

(таблиця 1), що свідчить про зменшення частки кристалічної фази в зразках.

Для перевірки даного твердження були проведені електронномікроскопічні дослідження вихідних зрізків та тих, що пройшли попередню термічну обробку.

На рис. 1 наведено результати електронномікроскопічних досліджень для сплаву $\text{Fe}_{80}\text{B}_{14}\text{Si}_6$.

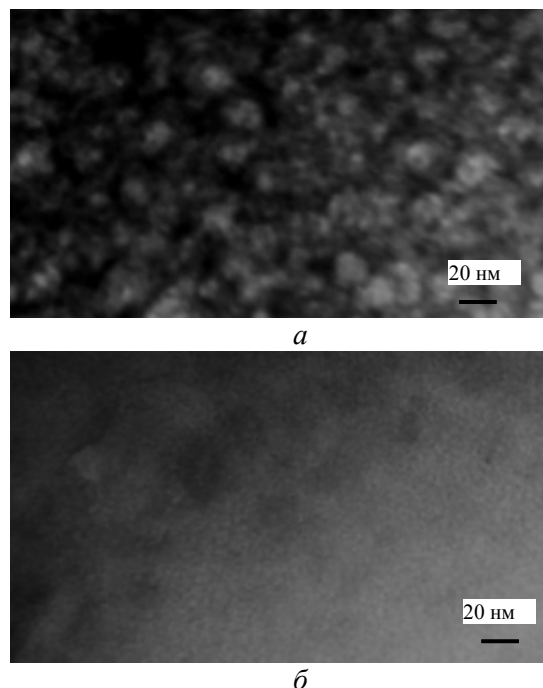


Рис. 1. Електронномікроскопічні (темнопольні) зображення для сплаву $\text{Fe}_{80}\text{B}_{14}\text{Si}_6$ у початковому стані (а) та після ізотермічного відпалу при 720 К протягом години (б)

Аналіз результатів електронномікроскопічних досліджень для сплаву (рис. 1) $\text{Fe}_{80}\text{B}_{14}\text{Si}_6$ показав, що вихідний аморфний стан характеризується наявністю вмерзених центрів кристалізації з середнім розміром (15-20) нм (рис.1.а). Після відпалу при 720 К кристалічні зародки в аморфній матриці відсутні (рис.1.б). В цій області температур різниця хімічних потенціалів між аморфною та кристалічною фазами для i -го компонента $\Delta\mu_i < 0$, отже кристалічні зародки розчиняються в аморфній матриці. Збільшення інтервалу температурно-часової стабільності досліджених багатокомпонентних аморфних сплавів можна пояснити тим, що проведена термообробка аморфних сплавів призводить до істотного зміщення фазової рівноваги в гетерогенній системі: аморфна матриця – вмерзени центри кристалізації.

При цьому відбувається розчинення в заморожених центрів кристалізації, присутніх в початкових зразках.

Процес очищення аморфної матриці від заморожених центрів кристалізації шляхом ізотермічного відпалу виникає за рахунок ініційованої висхідної дифузії, обумовленої наявністю пружних напружень на границі аморфної та кристалічної фаз [5].

Таким чином, результати проведених експериментальних досліджень підтверджують висновки термодинамічної теорії високотемпературної стабільності аморфних сплавів, яка показує можливість зсуву фазової рівноваги в системі аморфна матриця – заморожені центри кристалізації за рахунок спрямованої дії зовнішніх впливів та визначає

способи розширення температурного інтервалу існування аморфного стану сплавів.

Висновки

- Досліджено вплив термічної обробки на термостабільність аморфних сплавів основі заліза та нікелю та показано, що запропоновані режими термічної обробки дозволяють розширити інтервали термічної стабільності багатокомпонентних аморфних сплавів на основі заліза та нікелю на (20 – 40) К.

- Реалізовано процес очищення аморфної матриці від заморожених центрів кристалізації шляхом ізотермічного відпалу аморфного сплаву за рахунок ініційованої висхідної дифузії, зумовленої наявністю пружних напружень на границі аморфної та кристалічної фаз.

Список використаних джерел

1. Шпак А.П. Кристалізація і аморфізація металевих систем./ А.П. Шпак, В.І. Лисов, Ю.А. Куницький, Т.Л. Цареградська – Київ.: Академперіодика, 2002. – 208 с.
2. Лисов В.І. Дослідження процесів стабілізації структури та властивостей металевих стеклов під дією зовнішніх впливів / В.І. Лисов, Т.Л. Цареградська, О.В. Турков, Г.В. Саєнко // Журнал фізичних досліджень. – 2013. – т.7. – № 2. – С.2701.1-2701.5.
3. Харьков Е.И. Термодинамическая теория высокотемпературной устойчивости аморфных сплавов / Е.И. Харьков, В.И. Лысов // Расплавы. – 1987. – т.1, – №1. – С. 30-37.
4. Новиков В.Н. Методика дилатометрических исследований металлических стеклов / В.Н. Новиков, Б.Е. Рябчиков // Заводская лаборатория. – 1989. – т.55. – №37. – С.49-53.
5. Лисов В.І. Підвищення термічної стабільності аморфних сплавів за рахунок процесу ініційованої висхідної дифузії / В.І. Лисов, Т.Л. Цареградська, Г.В. Саєнко, О.В. Турков // Вісник Київського університету, серія фізико-математичні науки. – 2015. – вип.2. – С. 259-262.

References

1. SHPAK, A.P. *et al.* (2002) *Crystallisation and amorphisation of metallic systems*. Kyiv: Akademperiodika.
2. LYSOV, V.I., TSAREGRADSKAYA, T.L., TURKOV, O.V., SAENKO, G.V. (2013) The studies of processes stabilizing structure and properties of metallic glasses under external influences. *Journal of Physical Studies*. 7 (2). p. 2701.1-2701.5.
3. KHAR'KOV, E. I., LYSOV, V. I. (1987) Thermodynamic theory of high-temperature stability of amorphous alloys. *Fusions*. 1(1). p. 30-37.
4. NOVIKOV, V.N., RYABCHIKOV, B.E. (1989) The method of dilatometrical researches of metallic glasses. *Factory laboratory*. 55(37). p. 49-53.
5. LYSOV, V.I., TSAREGRADSKAYA, T.L., SAENKO, G.V., TURKOV, O.V. (2015). The increasing of thermal stability amorphous alloys is due to initiate of ascending diffusion process. *Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv Series Physics & Mathematics* (2). p. 259-262.

Надійшла до редколегії 20.05.2016

УДК 535, 538.91, 53.087.4

Розуван С.Г.¹, к.ф.-м.н., н.с.,
Сташук В.С.², д.ф.-м.н., проф.,
Стукаленко В.В.³, к.ф.-м.н., м.н.с.,
Теселько П.О.⁴, к.ф.-м.н.,
Ямпольський А.Л.⁵, студ.

Морфологія поверхні та мікротвердість наноструктур $(\text{Co}_{41}\text{Fe}_{39}\text{B}_{20})_x(\text{SiO}_2)_{100-x}$

^{1,2,3,4,5}Київський національний університет
імені Тараса Шевченка, 01601, м. Київ, вул.
Володимирська 64/13,
e-mail: ²svs@univ.kiev.au, ³stu@univ.kiev.au

S.G.Rozouvan¹, PhD., Sci. Res.,
V.S. Stashchuk², Dr. Sci., Prof.,
V.V. Stukalenko³, PhD., Sci. Res.,
P. O. Teselko⁴, PhD., Sci. Res.,
A.L. Yampolskiy⁵, stud.

Surface morphology and microhardness of nanostructures $(\text{Co}_{41}\text{Fe}_{39}\text{B}_{20})_x(\text{SiO}_2)_{100-x}$

^{1,2,3,4,5}Taras Shevchenko National University of Kyiv,
01601, Kyiv, Volodymyrska st. 64/13,
e-mail: ²svs@univ.kiev.au, ³stu@univ.kiev.au,

В роботі досліджено мікротвердість і морфологію поверхні наноструктур $(\text{Co}_{41}\text{Fe}_{39}\text{B}_{20})_x(\text{SiO}_2)_{100-x}$ з різним процентним вмістом металевої фази в діелектричній матриці. Виявлено, що залежності мікротвердості та середньоквадратичного відхилення по профілю від концентрації мають немонотонний характер (яскраво виражений мінімум) при величині $x = 56\%$. Це значення x близьке до порогу перколяції у вказаній наноструктурі.

Ключові слова: наноструктури $(\text{Co}_{41}\text{Fe}_{39}\text{B}_{20})_x(\text{SiO}_2)_{100-x}$, морфологія поверхні, мікротвердість.

This paper describes the results of the nanostructures $(\text{Co}_{41}\text{Fe}_{39}\text{B}_{20})_x(\text{SiO}_2)_{100-x}$ research. Percentage of metal phase in the dielectric matrix was $x = 19, 33, 41, 56$ and 100% . These nanostructures were investigated applying atomic force microscopy. Surface morphology was detected with spatial resolution, which was defined by curvature of cantilever needle (30 nm). Measurements were conducted in semicontact mode, in which cantilever console was oscillated with a frequency of hundreds of kilohertz.

Microhardness HV of nanocomposites was measured by standard Vickers hardness test, which includes indenter indentation in the form of four-sided diamond pyramid with a 136° angle at the top. Load on the indenter was 0.5 N and 2.0 N. The accuracy of microhardness measurement experiment was 15%.

The microgeometry parameters of the surface and of the microhardness of the nanostructures non-monotonously depend on the composition of metal phase. On the curves we can see the minimum which corresponds nanocomposite $x = 56\%$. This value x is close to the percolation threshold in the tested nanostructure.

Key Words: scanning tunnelling microscopy, surface morphology, microhardness, nanocomposites.

Статтю представив член-кор. НАН України, д.ф.-м.н., проф. Макара В.А.

Вступ

На сьогодні добре вивчені електричні та магнітні властивості [1] нанокompозитів $(\text{Co}_{41}\text{Fe}_{39}\text{B}_{20})_x(\text{SiO}_2)_{100-x}$, а також, в деякій мірі, оптичні і магнітооптичні властивості [2]. Однак, до сих пір не досліджувалася мікротвердість та мікрогеометрія цієї складної системи. Практичний інтерес до металевих нанокompозитів в діелектричній матриці викликаний перспективами їхнього застосування в якості магнітних головок для запису і зчитування інформації, при розробці захисних покриттів, тощо [3]. Для створення головок магнітного запису наразі широко застосовуються

аморфні магнітом'які сплави на основі феруму та кобальту. В області низьких частот вони мають хороші магнітні властивості. Проте у високочастотній області їх застосування ускладнюється внаслідок зростаючих втрат на струми Фуко [4]. Очевидно, що для зменшення цих втрат необхідно збільшувати питомий електричний опір магнітних сплавів.

Одним з шляхів вирішення даної задачі є застосування композиційних наноструктурних матеріалів на основі аморфних металевих сплавів з діелектриком. Такі композити складаються з металевих гранул нанометрового розміру, які хаотично розподілені у діелектричній матриці [5]. В якості діелектричних наповнювачів

використовують оксиди кремнію або алюмінію. Завдяки цьому суттєво збільшується питомий електроопір і тому значно розширюється частотний діапазон магнітних матеріалів. Згадані нанокompозити характеризуються високими механічною міцністю і корозійною стійкістю [2].

Для отримання композиційних наноструктур металевий сплав в діелектричній матриці частіше всього застосовують магнетронне розпорошення [6]. Перевагою цього методу є можливість отримання плівок того самого складу, що і склад мішеней. Керування розмірами гранульованих частинок, співвідношенням вмісту діелектричної та металевої фаз здійснюється шляхом зміни відстані між мішенями та підкладками, інтенсивності йонного випромінювання, температури підкладки та режимів термообробки. Для отримання однорідних гранульованих структур підкладки розташовують на каруселі, що обертається.

Зазвичай структура отримуваних нанокompозитів є сукупністю включень аморфного металевого сплаву з розмірами кластерів, що лежать в інтервалі 2 – 10 нм, які хаотично розподілені в аморфній діелектричній матриці. Така двофазна (гетерогенна) структура характерна, наприклад, для досліджуваних в роботі композитів $(\text{Co}_{41}\text{Fe}_{39}\text{B}_{20})_x(\text{SiO}_2)_{100-x}$ ($x = 19, 33, 41, 56$ та 100%).

Питомий електричний опір нанокompозитів суттєво зменшується при зміні величини x від 20 до 100 % приблизно на 7 порядків [7]. Значення порогу перколяції відповідає $x = 47\%$ і при збільшенні x доля металевої провідності, зрозуміло, зростає, оскільки діелектричні області мають провідність близьку до нуля.

Експериментальні дані та їх обговорення

Для встановлення параметрів профілю поверхонь зразків був використаний скануючий атомно-силовий мікроскоп на базі нанолaboratorії ІНТЕГРА, що дозволило реєструвати топологію поверхні з просторовою роздільною здатністю, яка визначалася кривиною голки кантилівера (30 нм). Вимірювання проводились в напівконтактному режимі, при якому на консоль кантилівера подається модульована напруга з частотою в сотні кілогерц. За рахунок п'єзоэффекту кінчик голки при цьому осцилює з підбіраною резонансною частотою. Ван-дер-Ваальсівські сили, що виникають між зразком і голкою залежать від відстані голка-поверхня зразка. Предметний столик мікроскопа з можливістю позиціонування в трьох

координатах з точністю в одиниці ангстрем дозволяє забезпечувати постійну вибрану нами величину Ван-дер-Ваальсівських сил і таким чином фіксувати точну координату точки поверхні зразка під голкою. Сканування поверхонь зразків проводилось в растровому режимі (256x256 точок), забезпечуючи необхідну величину просторової роздільної здатності вимірів. В табл. 1 наведено експериментальні дані мікрогеометрії поверхонь, отримані за допомогою атомно-силового мікроскопа; Sq – середньоквадратичне відхилення z ; z – амплітуда відхилення; Sz – різниця між середнім значенням п'ятих найбільших максимумів та п'ятих найменших мінімумів; Sa – арифметичне усереднення абсолютних значень відхилень; Sy – максимальна різниця екстремальних значень z .

На рис. 1 показано залежність середньоквадратичного відхилення Sq від x . Як видно з рисунка, крива має яскраво виражений мінімум (можливо, при $x = 56\%$), тобто поблизу порогу перколяції (47%). Отже, параметри, які характеризують мікрогеометрію поверхні досліджуваних зразків, залежать немоновотонно від вмісту металевої фази. Вигляд поверхні зразків з різним вмістом x показано на рис. 2.

Як відомо, при напівконтактній атомно-силовій мікроскопії реєструється профіль поверхні шляхом забезпечення постійної величини сил Ван-дер-Ваальса між кінчиком

Таблиця 1. Параметри профілю поверхонь нанокompозитів $(\text{Co}_{41}\text{Fe}_{39}\text{B}_{20})_x(\text{SiO}_2)_{100-x}$

x	Sq	Sz	Sa	Sy
19	40,09	181,31	28,14	361,22
33	21,85	88,35	16,78	177,40
41	17,14	195,61	2,14	389,60
56	9,68	74,81	7,154	159,78
100	33,87	274,90	20,64	530,80

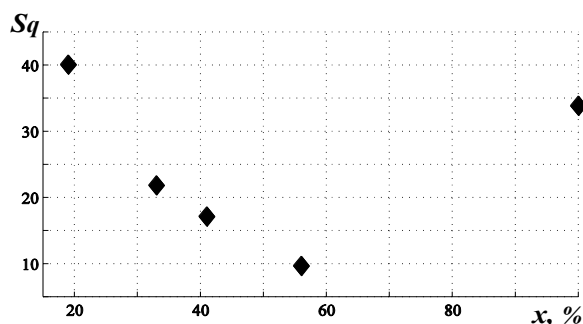
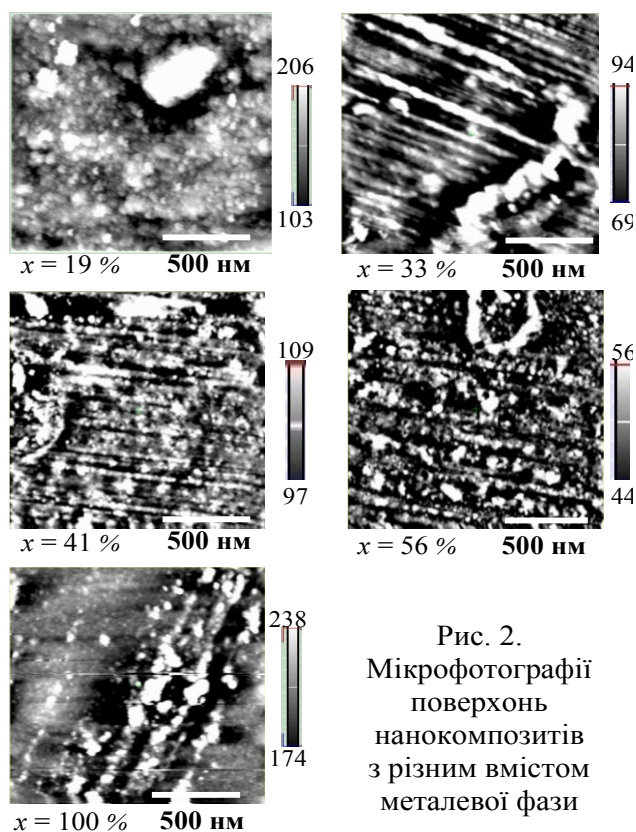


Рис. 1. Залежність середньоквадратичного відхилення профілю поверхні Sq нанокompозитів $(\text{Co}_{41}\text{Fe}_{39}\text{B}_{20})_x(\text{SiO}_2)_{100-x}$ для зразків з різними значеннями x .



голки кантілівера та поверхнею зразка. При цьому величина цих короткодійних міжмолекулярних сил залежить також і від фізичних параметрів зразка під голкою. При наявності металевих гранульованих включень на поверхні фаза сигналу в атомно-силовому мікроскопі на границі гранула-матриця зазнає різкого стрибка. Тобто порівнюючи отриманий профіль поверхні та просторовий розподіл фази сигналу ми можемо робити якісні висновки про наявність гранульованих включень з іншою провідністю в зразку.

Згідно результатів досліджень за допомогою атомно-силового мікроскопа встановлено, що металеві гранули мають неправильну форму і хаотично розташовані в діелектричній матриці і в цілому їхні розміри дещо збільшуються зі збільшенням вмісту металевої фази [1].

Для вимірювання мікротвердості використовувався мікротвердомір ПМТ-3. Мікротвердість вимірювалась стандартною методикою за Віккерсом з вдавлюванням індентора у вигляді алмазної чотиригранної пірамідки з кутом при вершині 136° . Навантаження на індентор становило 0,5 Н та 2,0 Н. Величина твердості, виміряна у Па, визначається за формулою:

$$H = \frac{1854P}{d^2},$$

де P – навантаження на індентор, d – довжина діагоналі відбитка. Похибка експерименту у вимірюванні мікротвердості становила 15%.

На рис. 3 показано залежність мікротвердості HV наноккомпозитів $(\text{Co}_{41}\text{Fe}_{39}\text{B}_{20})_x(\text{SiO}_2)_{100-x}$ для зразків з $x = 19, 33, 41, 56$ та 100 % при навантаженнях 0,5 Н та 2,0 Н. Мікротвердість аморфного кварцу становить 10 ГПа. Як видно з рисунка, мікротвердість змінюється немонотонно, на обох кривих спостерігається мінімум, що відповідає композиту $x = 56$ %. Це значення x близьке до порогу перколяції [8].

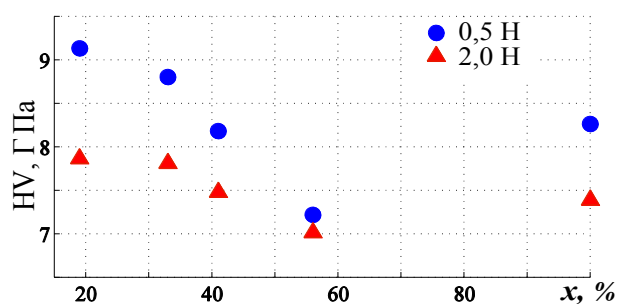


Рис. 3. Залежність мікротвердості HV наноккомпозитів $(\text{Co}_{41}\text{Fe}_{39}\text{B}_{20})_x(\text{SiO}_2)_{100-x}$ при різних значеннях x та навантаженнях: 0,5 Н – кружечки; 2,0 Н – трикутники. Для аморфного кварцу $HV = 10$ ГПа.

Із порівняння даних, наведених на рис. 1 та рис. 3 випливає, що значення усіх параметрів, які характеризують мікрогеометрію поверхні (наприклад, середньоквадратичне відхилення профілю поверхні S_q та значення мікротвердості HV) залежать немонотонно від вмісту металевої фази і можна із впевненістю стверджувати, що найменші значення відповідних параметрів, що характеризують мікрогеометрію поверхонь досліджуваних зразків та їхню мікротвердість досягають найменших значень при x , які близькі до значення, що відповідає порогу перколяції для вказаних двофазових матеріалів.

Потрібно також враховувати, що наноккомпозити є не двофазовою, а багатофазовою системою, і характеризуються складною електронною будовою [6]. Зокрема, встановлено, що поряд з йонами d-металів Fe^{3+} , Fe^{2+} , Co^{2+} в поглинанні в рентгенівській області беруть участь також йони оксигена, який утворює оксиди перехідних металів, і, в меншій мірі, силіциду і бору.

Висновки

Значення параметрів, які характеризують мікрогеометрію поверхні та значення мікротвердості HV нанокompозитів $(\text{Co}_{41}\text{Fe}_{39}\text{B}_{20})_x(\text{SiO}_2)_{100-x}$ залежать немонотонно від вмісту металевої фази.

Список використаних джерел

1. High-frequency electromagnetic properties of compositionally graded FeCoB-SiO₂ granular films deposited on flexible substrates / [F. F. Yang, S. S. Yan, M. X. Yu та ін.]. // J. Appl. Phys. – 2012. – 111, N11 – P. 113909-113909-4.
2. Инфракрасные спектры аморфных нанокompозитов и их межатомные взаимодействия / А. В. Щекочихин, Э. П. Домашевская, С. И. Карпов, О. В. Стогней. // Конд. среды и межфазовые границы. – 2009. – №1. – С. 78–83.
3. Золотухин И. В. Новые направления физического материаловедения / И. В. Золотухин, Ю. Е. Калинин, О. В. Стогней. – Воронеж: ВГТУ, 2000. – 360 с.
4. Розуван К. П. Магнітні властивості тонких плівок молібдену / К. П. Розуван, С. Г. Розуван, І. А. Шайкевич. // Вісник Київського національного ун-ту імені Тараса Шевченка. Серія фіз.-мат. науки. – 2013. – №1. – С. 325–330.
5. Щекочихин А. В. Влияние элементного состава на основе CoFeB - SiO₂ на магнитные и магниторезистивные свойства / А. В. Щекочихин, Э. П. Домашевская, С. И. Карпов. // Конд. среды и межфазовые границы. – 2006. – №1. – С. 64–66.
6. Optical and magneto-optical properties of CoFeB/SiO₂ and CoFeZr/Al₂O₃ granular magnetic nanostructures / [A. M. Kalashnikova, V. V. Pavlov, R. V. Pisarev та ін.]. // PHYSICS OF THE SOLID STATE. – 2004. – №11. – С. 2163–2170.
7. Гранульовані магнітні матеріали. / І. В. Золотухін, Ю. Є. Калінін, О. В. Стогней // Наносистеми, наноматеріали, нанотехнології. – 2004. – 2, Вип. 1. – С. 1-45.
8. Transport anisotropy in hetero-amorphous (CoFeB)-SiO₂ thin films / P. Johnsson, S.-I. Aouqi, A. M. Grishin, M. Munakata // J. Appl. Phys. -2003.- V.93, №10.-P.8101-8103.

Найменші значення середньоквадратичного відхилення профілю поверхні S_q досліджуваних зразків та їхнє найменше значення мікротвердості досягаються при величинах x , які близькі до значення, що відповідає порогу перколяції для вказаних двофазових матеріалів.

References

1. YANG, F. F. et al. (2012) High-frequency electromagnetic properties of compositionally graded FeCoB-SiO₂ granular films deposited on flexible substrates. *J. Appl. Phys.* 111 (11). p. 113909–113909-4.
2. SCHEKOCHYKHIN, A.V. et al. (2009) Infrared spectrums in amorphous nanocomposites and interatomic interaction. *Condensed matter and interphases*. 11 (1). p. 78–83.
3. ZOLOTUKHIN, I.V., KALININ, YU.E., STOGNEY, O.V. (2000) *New directions in physical material science*. Voroneg: VGNU.
4. ROZOUVAN, K. P., ROZOUVAN, S. G., SHAYKEVICH, I. A. (2013) Magnetic properties of molybdenum thin films. *Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv Series Physics & Mathematics*. 1. p. 325–330.
5. SCHEKOCHYKHIN, A. V., DOMASHEVSKAYA, E. P., KARPOV, S.I. (2006) Influence of the element composition on basis of CoFeB - SiO₂ upon magnetic and magnetoresistive properties. *Condensed matter and interphases*. 8 (1). p. 64–66.
6. KALASHNIKOVA, A. M. et al. (2004) Optical and magneto-optical properties of CoFeB/SiO₂ and CoFeZr/Al₂O₃ granular magnetic nanostructures. *Physics of the solid state*. 11. p. 2163–2170.
7. ZOLOTUKHIN, I.V., KALININ, YU.E., STOGNEY, O.V. (2004) Granular magnetic materials. *Nanosystems, nanomaterials and nanotechnology*. 2 (1). p. 1–45.
8. JOHNSSON, P., et al. (2003) Transport anisotropy in hetero-amorphous (CoFeB)-SiO₂ thin films. *J. Appl. Phys.* 93 (10). p. 8101–8103.

Надійшла до редколегії 29.05.16

УДК 535.341.08, 535.342, 53.096.

Сіжук А. С.¹, к.ф.-м.н.,
Єжов С. М.², д.ф.-м.н., проф.

A. S. Sizhuk¹, PhD.,
S. M. Yezhov², Dr. Sci.

Квантовооптична оцінка коефіцієнта поглинання

The quantum optical estimation of absorption coefficient

^{1,2}Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 01601, м. Київ, вул.
Володимирська 64/13,
e-mail: ¹andrii.sizhuk@gmail.com,
²yezhov@univ.kiev.ua

^{1,2}Taras Shevchenko National University of Kyiv,
01601, Kyiv, Volodymyrska st. 64/13,
e-mail: ¹andrii.sizhuk@gmail.com,
²yezhov@univ.kiev.ua

У даній роботі подано приклад розрахунку коефіцієнта поглинання у термінах квантової оптики, враховуючи ефект Доплера. Отриманий вираз для локальних значень коефіцієнта поглинання, оснований на комутаційному співвідношенні між операторами електричного поля та інтенсивності, нелінійно залежить від атомної густини та початкової інтенсивності.

Ключові слова: коефіцієнт поглинання, квантова оптика, ефект Доплера, комутаційні співвідношення.

In this work the calculation method of absorption coefficient in the terms of quantum optics, taking into account the Doppler effect, is presented. The atomic collisions are not discussed here. Accordingly, in contrast with the impact theory, the introduction of the chronology of absorption/reemission events in the system is avoided here. The "single-atom" methods, such as the equation of motion for the one-particle population matrix, to find the number of quanta, imbibed by atoms or liberated into the environment per unit time, are not used here. Under certain assumptions, it is enough to know the information about the distribution of system states at the given initial moment of time for the calculation of the coefficient of absorption. The derived expression for the local absorption coefficient, based on the commutation relation between the operators of electric field and intensity, non-linearly depends on atomic density and initial intensity. It was found that the ability of the system to absorb or emit quanta can quantitatively be expressed through the special form of interaction integrals. The form of dependence on the integrals results from the structure of the quantum brackets.

Key Words: absorption coefficient, quantum optics, Doppler effect, commutation relation.

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Макарець М.В.

Introduction

In this work the example of the analytical evaluation of the quantum optically defined absorption coefficient is provided.

As it was shown in the previous work [1], the absorption coefficient can be defined by the commutation relation between the model Hamiltonian and the operator of intensity. The estimation technique for the averaged commutators is demonstrated.

In comparison with other theories (see, for example, [2] - [10]), the induced by spatial atomic motion Doppler effect is naturally introduced into the corresponding averaging procedure. The atomic collisions are not discussed here. Accordingly, in contrast with the impact theory, the introduction of the chronology of absorption/reemission events in

the system is avoided here. The "single-atom" methods, such as the equation of motion for the one-particle population matrix, to find the number of quanta, imbibed by atoms or liberated into the environment per unit time, are not used here. Under certain assumptions, it is enough to know the information about the distribution of system states at the given initial moment of time for the calculation of the coefficient of absorption.

Assume, the system of N atoms occupies the volume of capacity V , determined by optically transparent and thermally insulated (for example, till near-infrared region) walls. And suppose, generated within a certain period of time electromagnetic field "reaches" the space of volume V_{el} (which includes V). Atoms, that fill the volume V , are able to interact with the modes of this electromagnetic field. The

frequencies of the modes are distributed near the resonant frequency ω_0 of a single atom (or molecule) transition between only two levels b (the ground state) and a (the excited state). Taking this into account, the following Hamiltonian is assumed to model the infinitesimal change of the state function of the system during the infinitesimal time intervals:

$$\hat{H} = \hat{H}^A + \hat{H}^F + \hat{H}^{AF}.$$

Here, the first item describes the spatial "movement" of N atoms with the translational energy ε_i and intrinsic energy $\hbar\omega_{a,b}$ (for $i = 1 \dots N$), such

that $\hat{H}^A = \sum_{i=1}^N \hat{H}_i^A$, where $\hat{H}_i^A |i\rangle = (\varepsilon_i + \hbar\omega_{a,b}) |i\rangle$ and $|i\rangle$ is the eigenvector of the single particle operator.

The second item represents the energy of free electromagnetic field in the volume V_{el} . Inasmuch as the electromagnetic field can be defined through the superposition of its modes, the representation in the basis of the corresponding Fock states is allowed:

$$\hat{H}^F = \sum_q \hat{H}_q^F,$$

where $\hat{H}_q^F |n_q\rangle = (n_q + 1/2) \hbar\omega_q |n_q\rangle$ with $|n_q\rangle$ being the corresponding Fock states. Here, the symbol q denotes the mode of electromagnetic field with the propagation wave vector $\mathbf{k}$ and the j -th polarization with $j = 1, 2$. A state $|n_q\rangle$ has the determined number of photons n , corresponding to the mode q . The third item is the energy of interaction between the atoms and electromagnetic field, expressed by the standard dipole-field coupling:

$$\hat{H}^{AF} = - \sum_{i=1}^N \hat{\mathbf{d}}_i \cdot \hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}_i),$$

where $\hat{\mathbf{d}}_i$ is the dipole moment operator for i -th atom located at $\mathbf{r}_i$. $\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r})$ is the electric field operator.

The definition

The definition of local absorption coefficient is introduced here as the derivative of logarithm of intensity with respect to distance in the vicinity of a given spatial point and the moment of time. The intensity is represented by the averaged normally ordered product of creation and annihilation operators of certain electromagnetic field states. The averaging is performed over all possible quantum (discrete and continuous) states of the system of the field and atoms. Then, in accordance with the accepted model of device counting photons (see, for example, [11]), the local absorption coefficient can be written in the following manner:

$$\alpha_{tot} \approx \frac{\delta}{\delta z} \ln \sum_{\Psi} \langle \Psi | \hat{I}_{\tau} \hat{\rho}_{\Psi} | \Psi \rangle, \quad (1)$$

$$\hat{I}_{\tau} = \hat{I} + \frac{i}{\hbar} \tau [\hat{H}, \hat{I}] + \frac{1}{2} \left(\frac{i}{\hbar} \tau \right)^2 [\hat{H}, [\hat{H}, \hat{I}]], \quad (2)$$

where $\hat{I} = \hat{E}_+ \hat{E}_-$ with $\hat{E}_+ = \sum_q \hat{e}_q E_q e^{-i\mathbf{k}_q \cdot \mathbf{r}} a_q^\dagger$ and

$\hat{E}_- = \sum_{q'} \hat{e}_{q'} E_{q'} e^{i\mathbf{k}_{q'} \cdot \mathbf{r}} a_{q'}$. $\hat{\rho}_{\Psi}$ is the statistical

distribution over the pure system states $|\Psi\rangle$ at the initial moment of time $t = 0$. The optical pathway inside the sample is assumed to be parallel to the Z -axis. The field "amplitude" is given

by $E_q = \left(\frac{\hbar V_q}{2\varepsilon_0 V_{el}} \right)^{1/2}$. The phase factor in $\hat{E}_q$ is

neglected for simplicity. The sum of $\hat{E}_+$ and $\hat{E}_-$ represents the electric field operator.

The estimation of the absorption coefficient

We next discuss the commutator of the operator associated with the atom-field interaction and the intensity in the expressions (1) and (2). We can write that

$$\sum_{\Psi} \langle \Psi | [\hat{H}^{AF}, \hat{I}] \hat{\rho}_{\Psi} | \Psi \rangle = \langle \bar{\Psi} | \hat{Y} | \bar{\Psi} \rangle, \quad (3)$$

where $\langle \bar{\Psi} | = \sum_{\{\}} C_{\{\}}^* (0) \prod_{i=1}^N \langle i | \prod_q | n_q \rangle$, and

$$\hat{Y} = \sum_{i=1}^N \hat{F} \hat{S}_i \cdot \sum_{q,\bar{q}} \hat{e}_q E_q^2 (\hat{e}_q \cdot \hat{e}_{\bar{q}}) E_{\bar{q}} \left(e^{i(\mathbf{k}_{\bar{q}} - \mathbf{k}_q) \cdot \mathbf{r}} e^{i\mathbf{k}_q \cdot \mathbf{r}_i} a_{\bar{q}} - c.c. \right).$$

The following is assumed in the representation (3). At the initial moment of time the system states are assumed to be thermally distributed. This allows to apply the splitting conditions, such as

$$C_{\{\}}(0) = C_{\{\varepsilon, \alpha\}}(0) C_{\{n_q\}}(0); \quad C_{\{n_q\}} = C_{n_q} \dots C_{n_{q'}} \dots \quad (4)$$

$$C_{n_q}^* C_{n_{q'}} = \rho_q [1 - \exp(-\hbar\nu_k / k_B T_s)] \exp(-n\hbar\nu_k / k_B T_s) \quad (5)$$

where ρ_q is some distribution of frequencies. Note, in our case the distribution describes the light beam of quite narrow frequency band with linear polarization. Besides,

$$C_{\varepsilon}(0) = (Z)^{-1/2} \exp(-\varepsilon / 2k_B T), \quad (6)$$

$$Z = \frac{V}{(2\pi\hbar)^3} (2\pi M k_B T)^{3/2}. \quad (7)$$

(4) and (6) suppose that $C_{\varepsilon}^* C_{\varepsilon} \approx \exp(-\hbar\omega_0 / 2k_B T_s)$.

Thus, using the defined above approximations, the averaged commutator (3) can be represented in the following way:

$$\sum_{\Psi} \langle \Psi | [\hat{H}^{AF}, \hat{I}] \hat{\rho}_{\Psi} | \Psi \rangle \approx N(I_1 I_2 - I_{1-} I_{2-}), \quad (8)$$

where

$$I_1 = |S| \sum_{\varepsilon', \varepsilon, \omega} \delta_{\varepsilon', \varepsilon + \Delta\varepsilon} \delta_{\omega, \omega_0 + \Delta\omega} \delta_{\mathbf{p}', \mathbf{p} + \hbar \mathbf{k}_{\omega}} C_{\varepsilon', a}^*(0) C_{\varepsilon, b}(0) E_{\omega}^2 e^{-i\mathbf{k}_{\omega} \cdot \mathbf{r}},$$

$$I_{1-} = |S| \sum_{\varepsilon', \varepsilon, \omega} \delta_{\varepsilon', \varepsilon - \Delta\varepsilon} \delta_{\omega, \omega_0 + \Delta\omega} \delta_{\mathbf{p}', \mathbf{p} - \hbar \mathbf{k}_{\omega}} C_{\varepsilon', b}^*(0) C_{\varepsilon, a}(0) E_{\omega}^2 e^{i\mathbf{k}_{\omega} \cdot \mathbf{r}}.$$

Here, $\delta_{\varepsilon', \varepsilon + \Delta\varepsilon}$ and $\delta_{\omega, \omega_0 + \Delta\omega}$ the Kronecker deltas with

the defined variables: $\Delta\varepsilon = \hbar\omega_0 \frac{\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{p}}{Mc}$ and

$$\Delta\omega \approx \left(2 \frac{\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{p}}{Mc} \right) \omega_0.$$

$$I_2 = \sum_{n_q} C_{n_q-1}^*(0) C_{n_q}(0) E_q \sqrt{n_q} e^{i\mathbf{k}_q \cdot \mathbf{r}},$$

$$I_{2-} = \sum_{n_q} C_{n_q+1}^*(0) C_{n_q}(0) E_q \sqrt{n_q+1} e^{-i\mathbf{k}_q \cdot \mathbf{r}}.$$

It can be shown that the introduced integrals I_1 and I_{1-} has the following values:

$$I_1 = K_1 \omega_0 \left[1 - G \frac{a}{Mc} \right] \exp \left(-\frac{\hbar\omega_0}{2k_B T_S} - i \frac{\omega_0}{c} \mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{k}} + \frac{a}{4} G^2 \right),$$

$$I_{1-} = K_1 \omega_0 \left[1 - G_- \frac{a}{Mc} \right] \exp \left(-\frac{\hbar\omega_0}{2k_B T_S} + i \frac{\omega_0}{c} \mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{k}} + \frac{a}{4} G_-^2 \right),$$

where $K_1 = \frac{\hbar|S|}{2\varepsilon_0 V_{el}}$ and $a = 2Mk_B T$,

$$G = \frac{\hbar\omega_0}{Mc} b + 2i\omega_0 \frac{\mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{k}}}{Mc^2} \text{ and } G_- = \frac{\hbar\omega_0}{Mc} b_- - 2i\omega_0 \frac{\mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{k}}}{Mc^2}$$

$$b = \frac{1}{2k_B T} + 2 \frac{1}{2k_B T_S} \text{ and } b_- = -\frac{1}{2k_B T} + 2 \frac{1}{2k_B T_S}.$$

The second kind of integrals, appearing in the presentation (8) and denoted by I_2 and I_{2-} , can be estimated in the following way. First, we make the limit transition from the summation over n_q to the

integration over the number n and the space of the wave vector $\mathbf{k}$. In doing this we model the distribution ρ_q in (5) by the normal (or Gaussian) one:

$$\rho(\mathbf{k}) = \text{Norm} N(\bar{v}, \Delta v^2) \delta(\hat{\sigma} - \hat{\mathbf{k}}), \quad (9)$$

where $\text{Norm} = \frac{(2\pi\hbar)^3}{V_{el}} \frac{c^3}{\bar{v}^2 + \Delta v^2}$. After performing

the integration over the continuum taking into account that, the following approximation can be written down:

$$I_2 \approx \left[-\left(-i\bar{v} + \Delta v^2 \frac{\mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{k}}}{c} \right)^2 + \Delta v^2 \right] \Phi, \quad (10)$$

where $\Phi = K_2 \exp \left(i \frac{\bar{v}}{c} \mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{k}} - \frac{1}{2} \Delta v^2 \left(\frac{1}{c} \mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{k}} \right)^2 \right)$ and

$$K_2 = \frac{1}{\bar{v}^2 + \Delta v^2} \left(\frac{\pi k_B T_S}{8\varepsilon_0 V_{el}} \right)^{1/2}.$$

Inasmuch as, in our approximation, the coefficients $C_{n_q}^*$ are real,

$$I_{2-} = I_2^*.$$

Having the estimated commutator (3), other commutators can also be found. For example, by analogy with the provided above,

$$\sum_{\Psi} \langle \Psi | [\hat{H}^{AF}, [\hat{H}^{AF}, \hat{I}]] \hat{\rho}_{\Psi} | \Psi \rangle \approx -NI_3 - 2N(N-1)I_1 I_{1-} \quad (11)$$

with

$$I_3 = \left(\frac{\hbar\omega_0}{2\varepsilon_0 V} \right)^2 |S|^2 \left(1 + \frac{2}{M^2 c^2} a \right). \quad (12)$$

Next, the following average can be evaluated in the similar manner:

$$\sum_{\Psi} \langle \Psi | [\hat{H}^F, [\hat{H}^{AF}, \hat{I}]] \hat{\rho}_{\Psi} | \Psi \rangle \approx -N(I_1 I_2' + I_{1-} I_{2-}'), \quad (13)$$

where

$$I_2' = -i\hbar \left[-i\bar{v} + \Delta v^2 \frac{\mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{k}}}{c} \right] \left\{ \left(-i\bar{v} + \Delta v^2 \frac{\mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{k}}}{c} \right)^2 - 3\Delta v^2 \right\} \Phi$$

and $I_{2-}' = (I_2')^*$.

Thus, substituting all the found above averaged commutators into the averaged series (2), representing the expression under the logarithm in (1), the total absorption coefficient obtains the following approximate formula (14):

$$\alpha_{tot} \approx \Re \left\{ \frac{\partial}{\partial z} \ln \left(I(0) + \frac{i}{\hbar} \tau N I^{(1)} - \frac{1}{2} \left(\frac{i}{\hbar} \tau \right)^2 N I^{(2)} \right) \right\}.$$

Here,

$$I(0) = I_2 I_{2-} \approx \frac{\pi k_B T_S}{8\varepsilon_0 V_{el}},$$

$$I^{(1)} = I_1 I_2 - I_{1-} I_{2-}$$

$$I^{(2)} = I_3 + 2(N-1)I_1 I_{1-} + I_1 I_2' + I_{1-} I_{2-}'.$$

The real and imaginary parts of the derived expression under the sign of $\Re$ in (14) can formally be related to a complex refractive index (see, for example, [12]).

Conclusions

Thus, an example of analytical description for the absorption properties of a model gas, taking into account the Doppler effect, is discussed.

The derived expression for the local absorption coefficient, based on the commutation relation

between the operators of electric field and intensity, non-linearly depends on atomic density and initial intensity. It was found that the ability of the system to absorb or emit quanta can quantitatively be

expressed through the special form of interaction integrals. The form of dependence on the integrals results from the structure of the quantum brackets.

Список використаних джерел

1. Сіжук А. С. Квантовооптичне формулювання поняття коефіцієнта поглинання / А. С. Сіжук, С. М. Єжов. // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія: фізико-математичні науки. – 2016. – №1. С.193-196.
2. Ліндгольм І. Залежність ширини спектральних ліній від тиску / І. Ліндгольм. // Ark. Mat. Astron. Fys. A. – 1945. – №32. – Р. 17–18.
3. Лекс М. Квантовані шуми. IV. Квантова теорія джерел шуму / М. Лекс. // Phys. Rev. – 1966. – №145. – Р. 110–129.
4. Бен-Ріувен А. Інтерпретація розширення спектральних ліній. Аналогія з класичним осцилятором / А. Бен-Ріувен. // Adv. Atom. Mol. Phys. – 1969. – №5. – Р. 201–235.
5. Воробйов Ф. А. Випромінювальні та поглинальні спектри у сильному полі. Ефект віддачі / Ф. А. Воробйов, Р. І. Соколовській. // Журнал прикладної спектроскопії. – 1970. – №13. – С. 906–913.
6. Лемберг Р. Випромінювання N-атомною системою. I. Загальний формалізм. / Р. Лемберг. // Phys. Rev. A. – 1970. – №2. – Р. 883–888.
7. Сандо К. М. Форми спектральних ліній у лазерному полі при різних тисках / К. М. Сандо, Ш. Чи. // Adv. At. Mol. Phys. – 1989. – №25. – Р. 133–162.
8. Берман П. Р. Порівняння збудженого віддачею резонансу та колективної атомної віддачі / П. Р. Берман. // Phys. Rev. A. – 1999. – №59. – Р. 585–596.
9. Квантовий ефект віддачі для двох нетотожних атомів на скінченних проміжках часу / Ф.Ластра, С. Валентович, М. Орзаг, М. Гернандес. // Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics. – 2009. – №42. – Р. 065504–065505.
10. Кооперативний ефект та безлад: масштабний аналіз спектру для ефективного атомного гамільтоніана / Л.Беландо, А. Геро, І. Акерманс, Р. Кайзер. // Phys. Rev. A. – 2014. – №90. – Р. 063822–063823.
11. Скалі М. Квантова оптика / М. Скалі, С. Зубайрі. – Cambridge: Cambridge University Press, 1997. – 114 с.
12. Хечт Є. Оптика / Є. Хечт. – Pearson Education, Inc. New York: Addison-Wesley, 2002. – 128 с.

References

1. SIZHUK, A. S., YEZHOF, S. M. (2016) The quantum optical formulation of absorption coefficient. *Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv, Series Physics & Mathematics*. (1). p.193-196.
2. LINDHOLM, E. (1945) Pressure broadening of spectral lines. *Ark. Mat. Astron. Fys. A*. 32. p.17-18.
3. LAX, M. (1966) Quantum Noise. IV. Quantum Theory of Noise Sources. *Phys. Rev.* 145(1). p.110-129.
4. BEN-REUVEN, A. (1969) The meaning of collisional broadening of spectral lines: The classical oscillator analog. *Adv. Atom. Mol. Phys.* 5. p. 201-235.
5. VOROB'EV, F. A. and SOKOLOVSKII, R. I. (1970) Emission and absorption spectra in a strong field, and recoil effect. *Journal of Applied Spectroscopy*. 13(1). p. 906-913.
6. LEHMBERG, R. H. (1970) Radiation from an N-Atom System. I. General Formalism. *Phys. Rev. A*. 2(3). p. 883-888.
7. SANDO, K. M., CHU, SHI-I. (1989) Pressure broadening and laser-induced spectral line shapes. *Adv. At. Mol. Phys.* 25. p.133-162.
8. BERMAN, P. R. (1999) Comparison of recoil-induced resonances and the collective atomic recoil. *Phys. Rev. A*. 59(1). p. 585-596.
9. LASTRA, F. et. al. (2009) Quantum recoil effects in finite-time disentanglement of two distinguishable atoms. *Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics*. 42(6). p. 065504-065505.
10. BELLANDO, L. et. al. (2014) Cooperative effects and disorder: A scaling analysis of the spectrum of the effective atomic Hamiltonian. *Phys. Rev. A*. 90(6). p. 063822-063823.
11. SCULLY, M. O. and ZUBAIRY, S. (1997) *Quantum Optics*. Cambridge, England: Cambridge University Press. p. 114.
12. HECHT, E. (2002) *Optics*. Pearson Education, Inc. New York: Addison-Wesley, p.128.

Надійшла до редколегії 10.05.16

Підписано до друку _____. Формат _____. Друк. офс.
Папір офс. № _____. Друк. арк. _____. Тираж _____. Зам. _____.
Друкарня _____.