

**КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА**

ВІСНИК

**КИЇВСЬКОГО НАЦІОНАЛЬНОГО
УНІВЕРСИТЕТУ
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА**

СЕРІЯ ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНІ НАУКИ

ВИПУСК №1 2016

**Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка,
выпуск №1, 2016,
Серія фізико-математичні науки**

З 1991 року серії вісників Київського університету “Математика і механіка”, “Фізика”, “Моделирование и оптимизация сложных систем” реорганізовано у “Вісник Київського університету. Серія: фізико-математичні науки”. У віснику містяться результати нових досліджень у різних галузях математики, інформатики, механіки, фізики та радіофізики для наукових працівників, викладачів, аспірантів, інженерів і студентів. Друкується за рекомендаціями Вчених Рад фізичного, радіофізичного, механіко-математичного факультетів та факультету кібернетики.

Журнал “Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія фізико-математичні науки” включено до переліку фахових видань ВАК України та реферується в Реферативному журналі, Zentralblatt MATH та базах даних ВИНІТИ, Росія, Москва.

Редакційна колегія:

Анісімов Анатолій Васильович, чл.-кор. НАН України, д.ф.-м.н., проф., **головний редактор**;
Хусаїнов Денис Яхєвич, д.ф.-м.н., проф., **заступник головного редактора, відповідальний за видання**;
Arturs Medvids, Dr. Phys. (habil.), Prof., Riga Technical University, Riga, Latvia;
Miklós Rontó, Dr. Sci., Prof., University of Miskolc, Miskolc, Hungary;
Milada Bartlova, Ph. D., Brno University of Technology, Brno, Czech Republic;
Nickolai Kukhtarev, Prof., Alabama A&M University, Alabama, USA;
Sergei Gorlatch, Dr. Sci. (habil.), Prof., University of Muenster, Muenster, Germany;
Sergey Trofimchuk, Prof., Universidad de Talca, Instituto de Matematica y Fisica, Talca, Chile;
Stefan Hudak, Dr. Sci., Prof., Technical University of Kosice, Kosice, Slovak Republic;
Toru Aoki, Ph. D., Prof., Research Institute of Electronics, Shizuoka University, Shizuoka, Japan;
Акіменко Віталій Володимирович, д.т.н., проф.;
Анісімов Ігор Олексійович, д.ф.-м.н., проф.;
Буй Дмитро Борисович, д.ф.-м.н., проф.;
Булавін Леонід Анатолійович, акад. НАН України, д.ф.-м.н., проф.;
Волошин Олексій Федорович, д.т.н., проф.;
Гарашенко Федір Георгійович, д.т.н., проф.;
Єжов Станіслав Миколайович, д.ф.-м.н., проф.;
Жук Ярослав Олександрович, д.ф.-м.н., проф.;
Заславський Володимир Анатолійович, д.т.н., доц.;
Кириченко Володимир Васильович, д.ф.-м.н., проф.;
Козаченко Юрій Васильович, д.ф.-м.н., проф.;
Кудін Володимир Іванович, д.т.н., с.н.с.;
Львов Віктор Анатолійович, д.ф.-м.н., проф.;
Макара Володимир Арсенійович, чл.-кор. НАН України, д.ф.-м.н., проф.;
Макарець Микола Володимирович, д.ф.-м.н., проф.;
Перестюк Микола Олексійович, акад. НАН України, д.ф.-м.н., проф.;
Погорілий Сергій Дем'янович, д.т.н., проф.;
Савенков Сергій Миколайович, д.ф.-м.н., доц.;
Скришевський Валерій Антонович, д.ф.-м.н., проф.

Редакційний відділ:

Анісімова Тетяна Харитонівна, **відповідальний секретар**;
Безущак Оксана Омелянівна, bezusch@univ.kiev.ua;
Стукаленко Вікторія Віталіївна, stu@univ.kiev.ua;
Родіонова Тетяна Василівна, rodtv@univ.kiev.ua;
Хмелюк Надія Кузьмівна, khmeluk@univ.kiev.ua;
Сільвейструк Людмила Миколаївна, **технічний редактор**, slm-klm@ukr.net.

Адреса редакційної колегії:

Факультет кібернетики, Київський національний університет імені Тараса Шевченка,
пр. Глушкова, 4 д, 03680 Тел. (044) 259-01-49

ISBN 978-966-2142
ISSN 1812-5409

ЗМІСТ

АЛГЕБРА, ГЕОМЕТРІЯ ТА ТЕОРІЯ ІМОВІРНОСТЕЙ

Журавльов В.М., Циганівська І.М. Жорсткі сагайдаки черепичних порядків в $M_n(D)$, $n \leq 5$	9
Моклячук М.П., Остапенко В.І. Мінімаксна екстраполяція гармонізованих стійких процесів за спостереженнями з шумом	15
Моклячук М.П., Сідей М.І. Інтерполяція функціоналів від стаціонарних процесів за спостереженнями з пропусками	24
Олійник А.С. Самоподібні замикання вільних добутків циклічних груп порядку 2	31

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ, МАТЕМАТИЧНА ФІЗИКА ТА МЕХАНІКА

Бецко І.В. Неперервні обмежені розв'язки систем нелінійних функціонально-різницевих рівнянь	35
Глазунов С.М., Ващиліна О.В., Лебедева І.В. Частотний аналіз періодичних режимів перекочування бурильного долота по шорсткому дну глибокої свердловини	41
Дудик М.В., Діхтяренко Ю.В., Щепкіна Я.І. Вплив зони передруйнування з областю деструкції та лінійного зміцнення адгезійного матеріалу на міцність міжфазного з'єднання	45
Камінський А.О., Селіванов М.Ф., Чорноіван Ю.О. Вплив контакту між берегами тріщини Дагдейла на параметри руйнування ортотропної пластини	53
Киричок І.Ф., Жук Я.О., Карнаухова Т.В. Радіальні коливання і вібророзігрів замкнутої сферичної оболонки з фізично нелінійного в'язкопружного матеріалу та їх демпфування п'єзоелектричними сенсором і актуатором	59
Козлова Н.О., Ферук В.А. Слабкозбурені лінійні крайові задачі для інтегральних рівнянь	65
Король Ю.Ю. Обмежені розв'язки виродженої системи диференціальних рівнянь з імпульсною дією в фіксовані моменти часу	71

КОМП'ЮТЕРНІ НАУКИ ТА ІНФОРМАТИКА

Богун В.А., Полоцький С.В. Пошук виграшних стратегій в іграх на графах	77
Галкін О.А. Аналіз та метод обробки великих масивів медико-статистичних даних невизначеної структури	81
Галкіна О.А. Спектральні когерентні міри ризику в задачах портфельної оптимізації	89
Завадський І.О. Ефективне декодування мультироздільникового коду $C_{2,3,5}$	95
Колянова Т.В. Математична залежність біологічних показників при впливі фізичного навантаження на організм людини у вигляді багато параметричних функцій	101
Крак Ю.В., Касьянюк В.С., Стеля І.О., Черненко І.Л. Побудова множин відповідності для автоматизованого перекладу речень української мови у їх жестові аналоги	105
Кулян В.Р., Юнькова О.О., Коробова М.В. Про моделювання динаміки портфеля акцій	109
Марченко О.О. Метод ефективної невід'ємної факторизації лінгвістичних тензорів	113
Медвідь Н.В., Герус В. А., Мартинюк П.М. Модифікація кінематичної граничної умови на депресійній поверхні в задачах фільтрації через ґрунтову греблю	119

Мащенко С.О., Моренець В.І. Процедура пошуку N-ядра кооперативної гри з нечіткою множиною допустимих коаліцій	125
Никоненко А.О. Дослідження статистичної схожості-зв'язності	131
Прищепя О.В. Про оптимізацію систем з обмеженнями на число спроб почати обслуговування	137
Терещенко В.М., Корюкалов О.В. Контурний дескриптор для швидкого алгоритму класифікації простих об'єктів	143
Чечельницький О.А., Кучеренко О.В. Властивості мережевої моделі з різними типами вузлів у стаціонарному режимі	147

РАДІОФІЗИКА

Сулименко О.Р., Прокопенко О.В. Критерій мікрохвильової синхронізації для двох слабо зв'язаних спітронних магнітних наноосциляторів з випадковими власними параметрами	153
--	-----

СУЧАСНА ФІЗИКА

Вергун Л.Ю., Бацак Б.В., Олійник А.В. Застосування гліцерину для покращення зображення в процесі МРТ-досліджень	161
Вергун Л.Ю., Забашта Ю.Ф., Огороднік К.О. Магнітогідродинамічна нестійкість водного розчину глюкози	165
Весна Г.В., Гуменюк А.Ф., Дегода В.Я., Маразуєв Ю.А. Кінетика рекомбінаційної люмінесценції і провідності кристалофосфорів. 2. Накопичення світлосуми на глибоких пастках	167
Дегода В.Я., Когут Я.П., Свечнікова О.С. Спектри рентгенолюмінесценції кератинових біополімерів при різних температурах	181
Пророк В. В., Вайт Ф. Дж., Даценко О. І, Булавін Л. А., Мельниченко Л. Ю., Розуван С.Г., Поперенко Л. В. Залежність від часу концентрації ^{137}Cs у ґрунтовому розчині у польових умовах у 10-км зоні відчуження Чорнобильської АЕС	185
Розуван Т.С., Поперенко Л.В., Розуван С.Г., Шайкевич І.А. Оптична анізотропія наноструктурованої поверхні піролітичного графіту	189
Сіжук А.С., Єжов С.М. Квантовооптичне формулювання поняття коефіцієнта поглинання	193

CONTENTS

ALGEBRA, GEOMETRY AND PROBABILITY THEORY

Zhuravlev V.M., Tsyganivska I.M. Rigit quivers of tiled orders in $M_n(D)$, $n \leq 5$	9
Moklyachuk M.P., Ostapenko V.I. Minimax extrapolation problem for harmonizable stable processes with noise observations	15
Moklyachuk M.P., Sidei M.I. Interpolation of functionals of stationary processes with missing observations	24
Oliynyk A.S. Self-similar closures of free products of cyclic groups of order 2	31

DIFFERENTIAL EQUATIONS, MATHEMATICAL PHYSICS AND MECHANICS

Betsko I.V. Continuous bounded solutions of nonlinear functional-difference equations systems	35
Glazunov S.M., Vashchilina O.V., Lebedeva I.V. Frequency analysis of periodic regimes of drill bit rollings on uneven bottom of a deep bore-hole	41
Dudyk M.V., Dikhtiarenko Yu.V., Shchepkina Ya.I. Influence of the prefraction zone with the destruction area and linear strengthening of adhesion material on strength of interfacial joint	45
Kaminsky A.A., Selivanov M.F., Chornoivan Y.O. Influence of contact interaction between Dugdale crack faces on fracture parameters of orthotropic plate	53
Kirichok I.F., Zhuk Y.A., Karnaukhova T.V. Radial vibration and vibroheating of closed spherical shell made of physically nonlinear viscoelastic material and its damping by piezoelectric sensor and actuator	59
Kozlova N.O., Feruk V.A. Weakly perturbed linear boundary-value problems for integral equations	65
Korol Yu.Yu. Bounded solutions of degenerate system of differential equations with impulse action in fixed point of time	71

COMPUTER SCIENCES AND INFORMATICS

Bogun V.A., Polotskiy S.V. Finding winning strategies in games on graphs	77
Galkin O. A. Analysis and method of processing large amounts of medical and statistical data of unspecified structure	81
Galkina O. A. Spectral coherent risk measures in the portfolio optimization problems	89
Zavadskiy I.O. The efficient decoding of multi-delimiter code $C_{2,3,5}$	95
Kolianova T.V. Mathematical dependence of biological parameters under the influence of exercise on the human body in the form of many parametric functions	101
Krak Iu.V., Kasianiuk V.S., Stelya I.O., Chernenko I.L. Bijective sets constructing on automated translation of Ukrainian language sentences into their sign analogues	105
Kulian V.R., Yunkova O.O., Korobova M.V. On modeling the dynamics of portfolio	109
Marchenko O.O. A Method for Effective Non-negative Factorization of Linguistic Tensors	113
Medvid N.V., Herus V.A., Martyniuk P.M. Modification of Kinematic Boundary Condition at Free Surfaces in Filtration Problems by means of Earth Dam	119
Mashchenko S.O., Morenets V.I. The procedure of cooperative game nucleolus finding with the fuzzy set of feasible coalitions	125

Nykonenko A.O. Statistical similarity-relatedness research	131
Pryshchepa O.V. On optimization of systems with limited number of retrials	137
Tereshchenko V.M., Koriukalov O.V. Contour feature for simple objects classification real-time algorithm	143
Chechelnitsky O.A., Kucherenko O.V. The properties of the network model with different types of nodes in the stationary regime	147

RADIOPHYSICS

Sulymenko O.R., Prokopenko O.V. Microwave synchronization criterion for two weakly-coupled spin-torque nano-oscillators with random eigen parameters	153
--	-----

MODERN PHYSICS

Vergun L.Yu., Batsak B.V., Oliinyk A.V. The using of glycerol for image enhancement during MRI studies	161
Vergun L.Yu., Zabashta Yu.F., Ogorodnik K.O. Magnetohydrodynamic instability of aqueous solutions of glucose	165
Vesna G.V., Gumenuk A.F., Degoda V.Y, MarazueU.A. v The kinetic of the recombination luminescence and conductivity of crystallophosphorus. 2. The accumulation charge carrier on shallow traps	167
Degoda V. Ya., Kogut Ya. P., Svechnikova O. S. X-ray spectra of keratin biopolymers at different temperatures	181
Prorok V. V., White P. J., Dacenko O. I., Bulavin L. A., Melnychenko L. Yu., Rozouvan S.G., Poperenko L. V. Time dependence of ¹³⁷ Cs concentration in soil solution at field conditions in the 10-km Exclusion Zone of the Chornobyl Nuclear Power Plant	185
Rozouvan T.S., Poperenko L.V., Rozouvan S.G., Shaykevich I.A. Optical anisotropy of nanostructured surface of pyrolytic graphite	189
Sizhuk A. S., Yezhov S. M. The quantum optical formulation of absorption coefficient	193

АЛГЕБРА, ГЕОМЕТРИЯ ТА ТЕОРИЯ ІМОВІРНОСТЕЙ

УДК 512.53

В.М. Журавльов, к.ф.-м.н., доцент
І.М. Циганівська, к.ф.-м.н., асистент

Жорсткі сагайдаки черепичних порядків в $M_n(D)$, $n \leq 5$

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 01033, Київ, вул. Володимирська, 64.
e-mail: vshur@univ.kiev.ua, iratsy80@gmail.com

V.M. Zhuravlev, Ph.D., Associate Professor
I.M. Tsyganivska, Ph.D., Assistant Professor

Rigid quivers of tiled orders in $M_n(D)$, $n \leq 5$

Taras Shevchenko National University of
Kyiv, 01033, Kyiv, 64 Volodymyrska st.
e-mail: vshur@univ.kiev.ua, iratsy80@gmail.com

У роботі вивчаються сагайдаки черепичних порядків. Описано сагайдаки, що мають не більше п'яти вершин і які є сагайдаками скінченної кількості неізоморфних черепичних порядків. Показано, що всі ці сагайдаки є жорсткими.

Ключові слова: черепичний порядок, матриця показників, допустимий сагайдак, жорсткий сагайдак.

In this paper we study quivers of tiled orders. Quiver of tiled order can be realized up to isomorphism by the only tiled order of finite number of tiled orders or an infinite number of tiled orders. In particular, a quiver which has a loop at least at one vertex is implemented by infinite number of tiled orders. Moreover, all these orders have infinite global dimension. We describe all admissible quivers with at most five vertices which are not realized by infinite number of tiled orders. It is shown that all of these quivers are rigid, i. e. each one defines up to isomorphism the unique tiled order. There is a criterion of rigidity for admissible quivers associated with finite partially ordered sets. For $n \leq 4$ all rigid quivers are associated with finite partially ordered sets. There are rigid quivers on five points which are not associated with partially ordered sets.

Key words: tiled order, exponent matrix, admissible quiver, rigid quiver.

Communicated by Prof. Kyrychenko V. V.

1 Вступ

Поняття черепичного порядку ввів І.Капланський. Його учень Р.Тарсі вивчав глобальну розмірність черепичних порядків над локальним дедекіндовим кільцем. Кожен черепичний порядок над дискретно нормованим кільцем повністю визначається дискретно нормованим кільцем і матрицею показників черепичного порядку. Така будова дає простір для багатьох обчислень. Тому багато авторів вивчають глобальну розмірність черепичних порядків. З 2003-го року матриці показників стали окремим об'єктом вивчення.

Відмітимо, що в нашій термінології черепичний порядок — це нетерове з двох сторін первинне напівдосконале та напівдистрибутивне кільце з ненульовим радикалом Джекобсона.

Сагайдак черепичного порядку визначається його матрицею показників. Допустимий сагайдак, тобто сагайдак черепичного порядку, в [4] розглядається як сагайдак з ваговою функцією, заданою на множині стрілок сагайдака.

Для жорсткого сагайдака існує з точністю до ізоморфізму єдиний черепичний порядок з даним сагайдаком. Кожний допустимий сагайдак може бути сагайдаком або нескінченної кількості неізоморфних черепичних порядків або скінченної кількості. Крім того, допустимий сагайдак, який містить хоча б одну петлю, є сагайдаком нескінченної кількості неізоморфних черепичних порядків. Для сагайдаків, асоційованих зі скінченними частково впорядкованими множинами, в [2] дається критерій того, що сагайдак реалізується скінченною або нескінченною кількістю неізоморфних порядків. Причому всі такі сагайдаки, які реалізуються скінченною кількістю черепичних порядків, є жорсткими.

У даній роботі ми описуємо всі жорсткі сагайдаки на n точках, де $n \leq 5$.

2 Попередні відомості

Позначимо через $M_n(\mathbb{Z})$ кільце всіх квадратних $n \times n$ -матриць над кільцем цілих чисел $\mathbb{Z}$. Нехай

$\mathcal{E} \in M_n(\mathbb{Z})$.

Означення 2.1. Матриця $\mathcal{E} = (\alpha_{ij})$ називається **матрицею показників**, якщо $\alpha_{ij} + \alpha_{jk} \geq \alpha_{ik}$ для $i, j, k = 1, \dots, n$ та $\alpha_{ii} = 0$ для $i = 1, \dots, n$.

Нехай $\mathcal{E} = (\alpha_{ij})$ — зведена матриця показників. Покладемо $\mathcal{E}^{(1)} = (\beta_{ij})$, де $\beta_{ij} = \alpha_{ij}$ для $i \neq j$ та $\beta_{ii} = 1$ для $i = 1, \dots, n$, і $\mathcal{E}^{(2)} = (\gamma_{ij})$, де $\gamma_{ij} = \min_{1 \leq k \leq n} (\beta_{ik} + \beta_{kj})$.

Означення 2.2. Сагайдак $Q(\mathcal{E})$ з матрицею суміжності $[Q(\mathcal{E})] = \mathcal{E}^{(2)} - \mathcal{E}^{(1)}$ називається **сагайдаком зведеної матриці показників** $\mathcal{E}$.

Означення 2.3. Сильно зв'язний простий сагайдак називається **допустимим**, якщо він є сагайдаком зведеної матриці показників.

Зведена $(0, 1)$ -матриця показників $\mathcal{E}$ задає частковий порядок на множині

$$P_{\mathcal{E}} = \{1, \dots, n\}$$

за правилом: $i \leq j$ тоді й тільки тоді, коли $\alpha_{ij} = 0$. Навпаки, з кожною скінченною частково впорядкованою множиною $P = \{1, \dots, n\}$ ми зв'язуємо зведену $(0, 1)$ -матрицю показників $\mathcal{E}_P = (\lambda_{ij})$ наступним чином: $\lambda_{ij} = 0 \Leftrightarrow i \leq j$, інакше $\lambda_{ij} = 1$.

Позначимо через $P_{\max}$ множину всіх максимальних елементів множини P , через $P_{\min}$ — множину всіх мінімальних елементів множини P , і через $P_{\max} \times P_{\min}$ — їх декартів добуток.

Означення 2.4. Сагайдак $\tilde{Q}(P)$, отриманий з діаграми $Q(P)$ додаванням стрілок σ_{ij} для всіх $(p_i, p_j) \in P_{\max} \times P_{\min}$ називається сагайдаком, асоційованим з частково впорядкованою множиною P .

Теорема 2.1. [1] Сагайдак $Q(\mathcal{E}_P)$ співпадає з сагайдаком $\tilde{Q}(P)$.

Означення 2.5. Сагайдак $Q = (VQ, AQ)$ називається **зваженим**, якщо визначена функція $w: AQ \rightarrow \mathbb{R}$. Функція w називається вагою, а її значення на стрілці називається вагою стрілки.

Сума ваг всіх стрілок шляху називається вагою шляху.

Теорема 2.2. [4] Сильно зв'язний сагайдак $Q = (VQ, AQ)$ є допустимим тоді і тільки тоді, коли існує вагова функція $w: AQ \rightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}$,

яка задовольняє наступним умовам:

1. вага стрілки з точки i у точку j менша за вагу шляху з точки i у точку j довжини $l \geq 2$,
2. вага петлі в точці i менша за вагу будь-якого циклу, що проходить через точку i , довжини $l \geq 2$,
3. вага будь-якого циклу завжди більша або дорівнює 1,
4. вага довільної петлі дорівнює 1,
5. через кожну точку без петлі проходить цикл довжини $l \geq 2$, вага якого дорівнює 1.

Означення 2.6. Допустимий сагайдак Q називається **жорстким**, якщо $Q = Q(\mathcal{E})$ для єдиної з точністю до еквівалентності зведеної матриці показників $\mathcal{E}$.

Теорема 2.3. [2] Допустимий сагайдак Q , який має хоча б одну петлю, не є жорстким.

Нехай $Q = (VQ, AQ)$ — допустимий сагайдак. Тоді через кожну вершину $a \in VQ$ проходить цикл C_a одиничної ваги. Розглянемо сагайдак $\bar{Q}$ з множиною вершин VQ і множиною стрілок $A\bar{Q} = \bigcup_{a \in VQ} AC_a$. Очевидно $\bar{Q} = C_{a_1} \cup \dots \cup C_{a_m}$ для деяких вершин $a_1, \dots, a_m$.

Теорема 2.4. [2] Допустимий сагайдак Q має нескінченну кількість нееквівалентних зведених матриць показників $\mathcal{E}$ з $Q(\mathcal{E}) = Q$ тоді і тільки тоді, коли існує $\bar{Q}$ — незв'язний сагайдак.

Наступна теорема є критерієм жорсткості сагайдаків, асоційованих зі скінченними частково впорядкованими множинами.

Теорема 2.5. [2] Нехай P — скінченна частково впорядкована множина. Сагайдак $\tilde{Q}(P)$ є жорстким тоді і тільки тоді, коли не існує розбиття множини $P = P' \cup P''$, $P' \cap P'' = \emptyset$, для якого $P_{\max} = P'_{\max} \cup P''_{\max}$, $P_{\min} = P'_{\min} \cup P''_{\min}$; $P'_{\max}, P''_{\max}, P'_{\min}, P''_{\min} \neq \emptyset$.

Означення 2.7. Простий цикл в сагайдаку $Q = (VQ, AQ)$, вага якого дорівнює 1, будемо називати **одиничним**.

Твердження 2.1. [5] В допустимому сагайдаку $Q = (VQ, AQ)$ між вершинами одиничного циклу не існує інших стрілок, окрім стрілок цього циклу.

Твердження 2.2. [5] Допустимий сагайдак Q не може містити двох стрілок (v_i, v_a) та (v_j, v_a) , де вершини v_i, v_j належать одному одиничному циклу.

Твердження 2.3. [5] Допустимий сагайдак $Q = (VQ, AQ)$ не може містити стрілки $(v_a, v_i), (v_a, v_j)$, де вершини v_i, v_j належать деякому одиничному циклу.

3 Основні результати

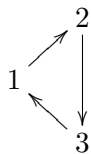
Розглянемо сагайдаки Q на n ($n \leq 5$) вершинах і які мають скінченну кількість нееквівалентних зведених матриць показників $\mathcal{E}$ з $Q(\mathcal{E}) = Q$.

$$n = 4$$

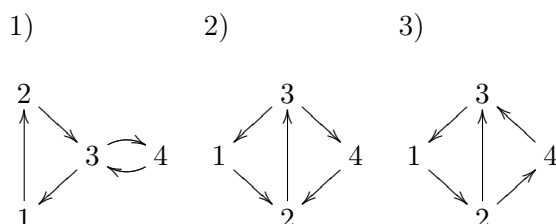
- 1) Нехай у сагайдаку Q є одиничний цикл довжини 4. Тоді в Q між вершинами цього циклу немає інших стрілок, окрім стрілок циклу. Отже, сагайдак Q - простий цикл довжини 4.



- 2) Нехай у сагайдаку Q немає одиничного циклу довжини 4, є одиничний цикл довжини 3. Нехай це цикл



За твердженнями 2.2, 2.3 вершина 4 з'єднана з цим циклом лише двома стрілками: одна стрілка виходить із вершини 4, друга стрілка входить у вершину 4. З точністю до перенумерації вершин циклу $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1$ можливі випадки:



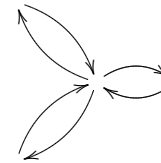
У випадку 3) через вершину 4 проходить єдиний цикл

$$1 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 3 \rightarrow 1$$

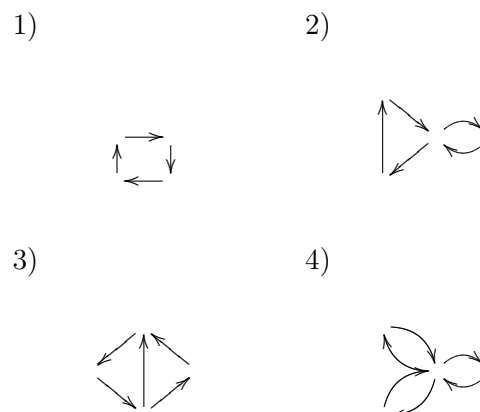
Оскільки вершина 4 не має петлі, то цей цикл одиничний. Отримали суперечність. Отже, випадок 3) неможливий.

- 3) У сагайдаку Q є одиничні цикли тільки довжини 2. Припустимо, що сагайдак Q містить цикли $1 \rightleftarrows 2$ та $3 \rightleftarrows 4$.

Тоді сагайдак $\overline{Q}$, який є об'єднанням цих циклів, - незв'язний. Отже сагайдак Q має нескінченну кількість нееквівалентних зведених матриць показників $\mathcal{E}$ таких, що $Q(\mathcal{E}) = Q$. Отже, будь-які два одиничні цикли довжини 2 мають спільну вершину. І тому сагайдак $\overline{Q}$ має вигляд



За твердженнями 2.2, 2.3 у сагайдаку Q інших стрілок не може бути. Отже, $Q = \overline{Q}$. Таким чином, маємо 4 сагайдаки на чотирьох вершинах:



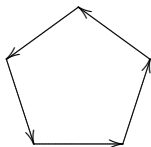
Це допустимі сагайдаки, які асоційовані з частково впорядкованими множинами.

відповідно. За теоремою 2.5 сагайдаки 1-4 є жорсткими.

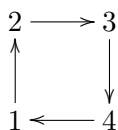
$$n = 5$$

- 4) Нехай у сагайдаку Q є одиничний цикл довжини 5. Тоді в Q між вершинами цього циклу немає інших стрілок, окрім стрілок циклу.

1.1.

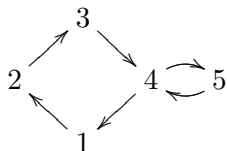


- 5) Нехай у сагайдаку Q немає одиничного циклу довжини 5, є одиничний цикл довжини 4. Нехай це цикл

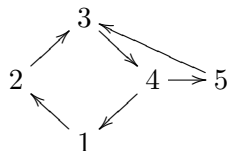


За твердженнями 2.2, 2.3 вершина 5 з'єднана з цим циклом лише двома стрілками: одна стрілка виходить із вершини 5, друга - входить. Маємо випадки

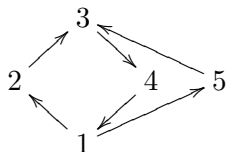
2.1.



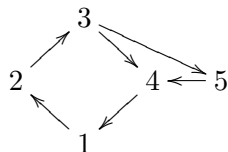
2.2.



2.3.

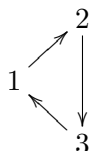


2.4.

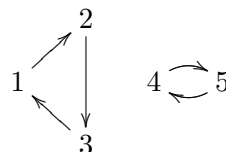


У випадку 2.4 через вершину 5 проходить одиничний цикл $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 5 \rightarrow 4 \rightarrow 1$ довжини 5. Маємо суперечність.

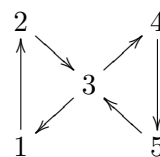
- 6) Нехай у сагайдаку Q немає одиничних циклів довжини 4 або 5, є одиничний цикл довжини 3. Нехай маємо цикл



Якщо вершини 4 і 5 з'єднані одиничним циклом довжини 2, то маємо незв'язний сагайдак $\overline{Q}$

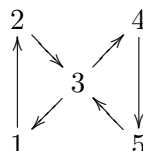


За теоремою 2.4 сагайдак Q має нескінченну кількість нееквівалентних зведених матриць показників таких, що $Q(\mathcal{E}) = Q$. Отже, вершини 4 і 5 не з'єднані одиничним циклом довжини 2. Вони з'єднані або одним, або двома одиничними циклами з вершинами циклу довжини 3. Нехай вершини 4 і 5 з'єднані одним одиничним циклом з вершиною циклу $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1$. Тоді маємо 2 одиничних цикли довжини 3 і сагайдак $\overline{Q}$ має вигляд

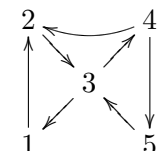


З урахуванням тверджень 2.2, 2.3 маємо можливі сагайдаки Q

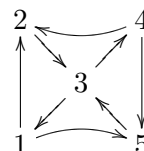
3.1.



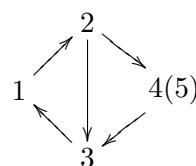
3.2.



3.3.

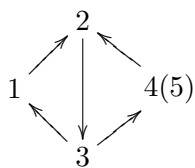


Нехай вершини 4 і 5 з'єднані різними одиничними циклами із циклом $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1$. За твердженнями 2.2, 2.3 кожна з вершин 4 і 5 з'єднана лише двома стрілками: вхідною та вихідною. Зауважимо, що вершина 4 або 5 не може бути з'єднана із циклом $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1$ наступним чином

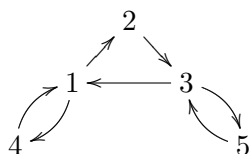


Через вершину 4 проходить єдиний одиничний цикл $1 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 3 \rightarrow 1$, який

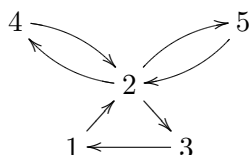
має довжину 4. Отже, можливим є підсагайдак



Якщо вершини 4 і 5 з'єднані одиничними циклами довжини 2 з циклом $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1$, то сагайдак $\bar{Q}$ має вигляд

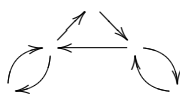


або



З урахуванням тверджень 2.2, 2.3 маємо можливі сагайдаки Q

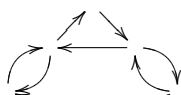
3.4.



3.5.



3.6.



3.7.

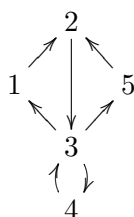


3.8.

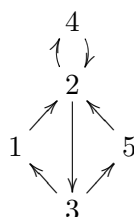


Якщо вершина 4 з'єднана з циклом $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1$ одиничним циклом довжини 2, а вершина 5 - одиничним циклом довжини 3, то сагайдак $\bar{Q}$ співпадає з одним із наступних сагайдаків

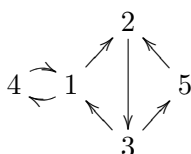
a)



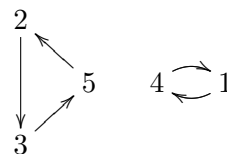
b)



c)

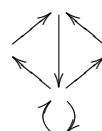


У випадку c) існує незв'язний сагайдак $\bar{Q}$

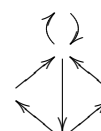


і Q реалізується нескінченною кількістю нееквівалентних зведених матриць показників. З урахуванням тверджень 2.2, 2.3 маємо можливі сагайдаки Q

3.9.

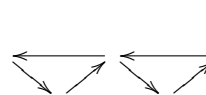


3.10.

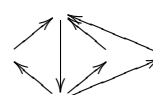


Якщо ж вершини 4 і 5 з'єднані з циклом $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1$ одиничними циклами довжини 3, то сагайдак $\bar{Q}$ співпадає з одним із наступних сагайдаків

a)

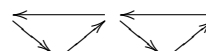


b)



З урахуванням тверджень 2.2, 2.3 маємо можливі сагайдаки Q

3.11.



3.13.

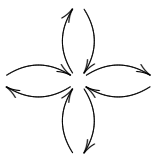


3.12.



7) Нехай сагайдак Q містить одиничні цикли тільки довжини 2. Сагайдак $\bar{Q}$ повинен бути зв'язним, тому будь-які 2 одиничні цикли у ньому мають спільну вершину. Тому $\bar{Q}$ має вигляд

4.1.



З урахуванням тверджень 2.2, 2.3 отримуємо, що $Q = \overline{Q}$. Зауважимо, що серед отриманих сагайдаків є ізоморфні. Сагайдак 3.2 ізоморфний сагайдаку 3.11, сагайдак 3.3 ізоморфний сагайдаку 3.12. Сагайдаки 1.1, 2.1, 2.2, 2.3, 3.1, 3.2, 3.3, 3.8, 3.9, 3.10, 3.13, 4.1 є асоційованими з частково впорядкованими множинами. Тому це допустимі сагайдаки. За теоремою 2.5 всі ці са-

гайдаки є жорсткими. Перевірка показує, що сагайдаки 3.4, 3.5, 3.6, 3.7. є жорсткими.

Ми довели теорему.

Теорема 3.1. З точністю до ізоморфізму існує 4 сагайдаки на чотирьох точках і 16 сагайдаків на п'яти точках, які реалізуються скінченною кількістю нееквівалентних зведених матриць показників.

Це сагайдаки 1-4 на чотирьох точках і сагайдаки 1.1, 2.1, 2.2, 2.3, 3.1, 3.2, 3.3, 3.4, 3.5, 3.6, 3.8, 3.9, 3.10, 3.13, 4.1. Всі ці сагайдаки є жорсткими.

Список використаних джерел

References

1. Hazewinkel M. Algebras, Rings and Modules / M. Hazewinkel, N. Gubareni and V.V. Kirichenko // Mathematics and Its Applications, **575**, Kluwer Acad. Publish. – 2004. – V.1. – P. 380.
2. Журавльов В.М. Жорсткі сагайдаки, асоційовані з частково впорядкованими множинами. / В.М. Журавльов, Т.О. Журавльова, О.В. Зеленський // Вісник Київського університету імені Тараса Шевченка. Серія: Математика. Механіка – 2013. – №4(29). – С. 39 – 44.
3. Кириченко В.В. О жёстких колчанах. / В.В. Кириченко, В.Н. Журавлёв, И.Н. Цыгановская // Фундаментальная прикладная математика. – 2006. – №8. – Т.12 – С. 105 – 120.
4. Zhuravlev V.N. Admissible quivers / V.N. Zhuravlev // Journal of Mathematical Sciences. – January 2010. – V. 164. – Issue 2. – P. 234-239.
5. Журавльов В.М. Одиначні сагайдаки матриць показників. / В.М. Журавльов, О.В. Зеленський, В.М. Дармасюк // Вісник Київського університету імені Тараса Шевченка. Серія: фізико-математичні науки – 2012. – №4. – С. 27 – 31.

1. HAZEWINKEL, M., GUBARENI, N. AND KIRICHENKO, V.V. (2004) Algebras, Rings and Modules. *Series: Mathematics and Its Applications*, **575**, Kluwer Acad. Publish. 1. pp.380.
2. ZHURAVLEV, V.N., ZHURAVLEVA, T.A., ZELENSKIY, A.V. (2013) Rigid quivers associated with partially ordered sets. *Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv Series: Mathematic. Makhanyc*. 1(29). pp. 39-44.
3. KIRICHENKO, V.V., ZHURAVLEV, V.N., TSIGANOVSKAYA, I.N. (2006) On rigid quivers. *Fundamentalnaya i Prikladnaya Matematika*. 12(8). pp.105-120.
4. ZHURAVLEV, V.N. Admissible quivers. *Journal of Mathematical Sciences*, January 2010, Volume 164, Issue 2, pp 234-239
5. ZHURAVLEV, V.N., ZELENSKIY, A.V., DARMASUK, V.N. (2012) Unit quivers of exponent matrices. *Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv Series: Physics & Mathematics*. 4. pp. 27-31.

Received: 10.09.2015

УДК 519.21

М.П. Моклячук, д.ф.-м.н., професор
В.І. Остапенко, аспірант

**Мінімаксна екстраполяція
гармонізованих стійких процесів за
спостереженнями з шумом**

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 01033, Київ, вул. Володимирська, 64. e-mail: mmp@univ.kiev.ua

M.P. Moklyachuk, Doctor of Sciences, Professor
V.I. Ostapenko, PhD Student

**Minimax extrapolation problem for
harmonizable stable processes with noise
observations**

Taras Shevchenko National University of
Kyiv, 01033, Kyiv, 64 Volodymyrska st. e-mail:
mmp@univ.kiev.ua

Досліджується задача оптимального оцінювання лінійного функціонала від невідомих значень гармонізованого α -стійкого випадкового процесу $\xi(t), t > 0$ за спостереженнями процесу $\xi(t) + \eta(t)$ у точках $t < 0$, де $\xi(t), t \in \mathbb{R}$ та $\eta(t), t \in \mathbb{R}$ – взаємно незалежні гармонізовані α -стійкі випадкові процеси. Отримані формули для обчислення величини похибки та визначення спектральної характеристики оптимальної оцінки функціонала за умови, що спектральні щільності процесів відомі. У тому випадку, коли спектральні щільності невідомі, але задані множини допустимих спектральних щільностей, застосовано мінімаксний метод оцінювання.

Ключові слова: гармонізований процес, оптимальна лінійна оцінка, робастна мінімаксна оцінка, найменшсприятлива спектральна щільність, мінімаксна спектральна характеристика.

The problem of optimal linear estimation of the linear functional which depends on the unknown values of a harmonizable α -stable stochastic processes $\xi(t), t > 0$, from observations of the process $\xi(t) + \eta(t), t < 0$, where $\xi(t), t \in \mathbb{R}$ and $\eta(t), t \in \mathbb{R}$ are mutually independent harmonizable α -stable stochastic processes is considered. The problem is considered in the case of spectral certainty where spectral densities are exactly known as well as in the case of spectral uncertainty where spectral densities are not exactly unknown while classes of admissible spectral densities are specified. Formulas for calculating the error and the spectral characteristic of the optimal linear estimate of the functional are proposed in the case of spectral certainty. Formulas that determine the least favorable spectral densities and the minimax (robust) spectral characteristics are proposed in the case of spectral uncertainty for some classes of admissible spectral densities.

Key Words: harmonizable process, optimal linear estimate, robust estimate, least favorable spectral density, minimax spectral characteristic.

Communicated by Prof. Kozachenko Yu.V.

1 Introduction

The interpolation, extrapolation and filtering problems for stationary stochastic processes were investigated by A. Kolmogorov, N. Wiener, A. Yaglom (see [2] for details). The extrapolation problem for harmonizable stochastic process was investigated by S. Rajput and K. Sandberg [8]. The proposed methods of solution the estimation problems are based on the assumption that we known spectral densities of the considered processes. However, usually we do not know exactly spectral densities of the processes while we often know a set of admissible spectral densities. In this case we can apply the minimax-robust approach to estimate the functional $A^{extr}\xi$. This method let us find an estimate that minimizes the

maximum of the errors for all spectral densities from the given set of admissible spectral densities simultaneously (see book [5] for more details). The paper by U. Grenander [3] is the first one where the minimax-robust approach to the problem of extrapolation of stationary stochastic processes was formulated and investigated. In the book by M. Moklyachuk [5] results of investigations of the problem of optimal linear estimation of functionals which depend on unknown values of stationary and related sequences and processes are presented. In the papers by M. P. Moklyachuk and V. I. Ostapenko [6], [7] results of investigations of the interpolation problem for harmonizable stable sequences are proposed.

In this paper we deal with the problem of opti-

mal linear estimation of the functional $A^{extr}\xi = \int_0^\infty a(t)\xi(t)dt$ which depends on the unknown values of a harmonizable α -stable stochastic processes $\xi(t), t > 0$, from observations of the process $\xi(t) + \eta(t), t < 0$, where $\xi(t), t \in \mathbb{R}$ and $\eta(t), t \in \mathbb{R}$ are mutually independent harmonizable α -stable stochastic processes. Formulas for calculating the error and the spectral characteristic of the optimal linear estimate of the functional are proposed in the case of spectral certainty where spectral densities of the processes are exactly known. Formulas that determine the least favorable spectral densities and the minimax (robust) spectral characteristics are proposed in the case of spectral uncertainty where spectral densities are not exactly unknown while a set of admissible densities is given.

2 Harmonizable symmetric α -stable stochastic process

Definition 2.1 (*symmetric α -stable random variable*). A real random variable ξ is said to be symmetric α -stable, $S\alpha S$, if its characteristic function has the form $E \exp(it\xi) = \exp(-c|t|^\alpha)$ for some $c \geq 0$ and $0 < \alpha \leq 2$.

Definition 2.2 (*symmetric α -stable stochastic process*). A stochastic process $\{\xi = \xi(t), t \in \mathbb{R}\}$ is called symmetric α -stable, $S\alpha S$, stochastic process, if all finite dimensional distributions $(\xi(t_1), \xi(t_2), \dots, \xi(t_d)), t_1, t_2, \dots, t_d \in \mathbb{R}, d \geq 1$ are symmetric α -stable.

For jointly $S\alpha S$ random variables $\xi = \xi_1 + i\xi_2$ and $\eta = \eta_1 + i\eta_2$ the covariation of ξ with η is defined as [1]

$$[\xi, \eta]_\alpha = \int_{S_d} (x_1 + ix_2) \times (y_1 + iy_2)^{<\alpha-1>} d\Gamma_{\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2}(x_1, x_2, y_1, y_2), \quad (1)$$

where $z^{<\beta>} = |z|^{\beta-1}\bar{z}$ for a complex number z and $\beta > 0$. The covariation is linear on the first argument but in general is not symmetric and linear on the second argument [1]. For ξ, ξ_1, ξ_2, η jointly $S\alpha S$ we have $[\xi_1 + \xi_2, \eta]_\alpha = [\xi_1, \eta]_\alpha + [\xi_2, \eta]_\alpha$,

$$|[\xi, \eta]_\alpha| \leq \|\xi\|_\alpha \|\eta\|_\alpha^{\alpha-1} \quad (2)$$

and $\|\xi\|_\alpha = [\xi, \xi]_\alpha^{1/\alpha}$ is a norm in the linear space of $S\alpha S$ random variables which is equivalent to convergence in probability. The norm $\|\cdot\|_\alpha$ is not necessarily the standard L^α norm.

Let $Z = \{Z(t) : -\infty < t < \infty\}$ be a complex $S\alpha S$ process with independent increments. The spectral measure of the process Z is defined as $\mu\{(s, t]\} = \|Z(t) - Z(s)\|_\alpha^\alpha$. The integrals $\int f(t)dZ(t)$ can be defined for all $f \in L^\alpha(\mu)$ with properties [1]:

$$\begin{aligned} \left\| \int f(t)dZ(t) \right\|_\alpha^\alpha &= \int |f(t)|^\alpha d\mu, \\ \left[\int f(t)dZ(t), \int g(t)dZ(t) \right]_\alpha &= \\ &= \int f(t)(g(t))^{<\alpha-1>} d\mu. \end{aligned} \quad (3)$$

Definition 2.3 (*Harmonizable symmetric α -stable stochastic process*). A $S\alpha S$ stochastic process $\{\xi(t), t \in \mathbb{R}\}$ is said to be harmonizable, $HS\alpha S$, if there exists a $S\alpha S$ process $Z = \{Z(\theta); \theta \in [-\infty, \infty]\}$ with independent increments and finite spectral measure μ such that process $\xi(t)$ has the spectral representation $\xi(t) = \int_{-\infty}^\infty e^{it\theta} dZ(\theta)$, $t \in \mathbb{R}$, and the covariation has the representation $[\xi(t), \xi(s)]_\alpha = \int_{-\infty}^\infty e^{i(t-s)\theta} d\mu(\theta)$, $t, s \in \mathbb{R}$.

Note that a $HS\alpha S$ stochastic process is not always stationary, but for $\alpha = 2$ the $HS\alpha S$ processes are stationary with Gaussian distribution. We consider the case where $1 < \alpha \leq 2$.

Denote by $H(\xi)$ the time domain of the $HS\alpha S$ process $\{\xi(t), t \in \mathbb{R}\}$, which is a closed in the norm $\|\cdot\|_\alpha$ linear manifold generated by all values of the $HS\alpha S$ process $\{\xi(t), t \in \mathbb{R}\}$. It follows from the spectral representation of the $HS\alpha S$ process $\{\xi(t), t \in \mathbb{R}\}$ that the mapping $\xi(t) \leftrightarrow e^{it\theta}, t \in \mathbb{R}$, extends to an isomorphism between the spaces $H(\xi)$ and $L^\alpha(\mu)$. Under this isomorphism to each $\eta \in H(\xi)$ corresponds a unique $f \in L^\alpha(\mu)$ such that $\eta = \int_{-\infty}^\infty f(\theta)dZ(\theta)$.

For a closed linear subspace $M \subseteq L^\alpha(\mu)$ and $f \in L^\alpha(\mu)$, there exists a unique element from M which minimizes the distance to f . This element is called projection of f onto M or the best approximation of f in M . This projection is denoted by $P_M f$ and is uniquely determined by the condition

$$\int_{-\infty}^\infty g(f - P_M f)^{<\alpha-1>} d\mu = 0, \quad g \in M. \quad (4)$$

Similarly, for $HS\alpha S$ stochastic process $\{\xi(t), t \in \mathbb{Z}\}$ and a closed linear subspace $H^-(\xi)$ of the space $H(\xi)$ there is a uniquely determined

element $\hat{\xi}_n \in H^-(\xi)$ which minimizes the distance to ξ_n and is determined from the condition

$$\left[\eta, \xi(t) - \hat{\xi}(t) \right]_{\alpha} = 0, \quad \eta \in H^-(\xi). \quad (5)$$

3 Extrapolation problem. Projection approach

Consider the problem of the optimal estimation of the linear functional

$$A^{extr} \xi = \int_0^{\infty} a(t) \xi(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} A^{extr}(\theta) dZ^{\xi}(\theta),$$

$$A^{extr}(\theta) = \int_0^{\infty} a(t) e^{it\theta} dt,$$

that depends on the unknown values of the $HS\alpha S$ -process $\xi(t), t > 0$, from observations of the process $\{\xi(t) + \eta(t), t < 0\}$, where $\xi(t)$ and $\eta(t)$ are harmonizable symmetric α -stable stochastic processes.

We consider the problem for mutually independent harmonizable symmetric α -stable stochastic processes $\{\xi(t), t \in \mathbb{R}\}$ and $\{\eta(t), t \in \mathbb{R}\}$ which have absolutely continuous spectral measures and the spectral densities $f(\theta) > 0$ and $g(\theta) > 0$ satisfying the minimality condition

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\gamma(\theta)|^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}}{(f(\theta) + g(\theta))^{\frac{1}{\alpha-1}}} d\theta < \infty. \quad (6)$$

for a non-zero function of the exponential type $\gamma(\theta) = \int_0^{\infty} \alpha(t) e^{it\theta} dt$, $\int_{-\infty}^{\infty} |\gamma(\theta)|^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} d\theta < \infty$.

Denote by $H^-(\xi + \eta)$ closed in the $\|\cdot\|_{\alpha}$ norm linear manifold generated by values of the harmonizable symmetric α -stable stochastic process $\xi(t) + \eta(t), t < 0$, in the space $H(\xi + \eta)$ generated by all values of the process $\{\xi(t) + \eta(t), t \in \mathbb{R}\}$.

It follows from the relation between spaces $H(\xi)$ and $L_{\alpha}(f)$ that the optimal estimate $\hat{A}^{extr} \xi$ of the functional $A^{extr} \xi$ is of the form

$$\hat{A}^{extr} \xi = \int_{-\infty}^{\infty} h(\theta) \left(dZ^{\xi}(\theta) + dZ^{\eta}(\theta) \right). \quad (7)$$

This estimate is determined by the spectral characteristic $h(\theta)$ from $L_{\alpha}^-(f + g)$ which is a subspace of $L_{\alpha}(f + g)$ generated by $e^{it\theta}$ for $t < 0$.

The optimal estimate $\hat{A}^{extr} \xi$ of the functional $A^{extr} \xi$ is a projection of $A^{extr} \xi$ on the subspace $H^-(\xi + \eta)$ which is determined by relations

$$[\zeta, A^{extr} \xi - \hat{A}^{extr} \xi]_{\alpha} = 0, \quad \forall \zeta \in H^-(\xi + \eta),$$

or, equivalently, by relations

$$[\xi(t) + \eta(t), A^{extr} \xi - \hat{A}^{extr} \xi]_{\alpha} = 0, \quad \forall t < 0. \quad (8)$$

It follows from these equations that the spectral characteristic $h(\theta)$ of the estimate is determined by the relation

$$(A^{extr}(\theta) - h(\theta))^{\langle \alpha-1 \rangle} f(\theta) - (h(\theta))^{\langle \alpha-1 \rangle} g(\theta) =$$

$$= \overline{C^{extr}(\theta)}, \quad C^{extr}(\theta) = \int_0^{\infty} c(t) e^{it\theta} dt \quad (9)$$

and satisfies condition

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\theta t} h(\theta) d\theta = 0, \quad t < 0. \quad (10)$$

The variance of the optimal estimate of the functional is calculated by the formula

$$\left\| \hat{A}^{extr} \xi - A^{extr} \xi \right\|_{\alpha}^{\alpha} =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} |A^{extr}(\theta) - h(\theta)|^{\alpha} f(\theta) d\theta +$$

$$+ \int_{-\infty}^{\infty} |h(\theta)|^{\alpha} g(\theta) d\theta. \quad (11)$$

We can conclude that the following theorem holds true.

Theorem 3.1. *Let $\{\xi(t), t \in \mathbb{R}\}$ and $\{\eta(t), t \in \mathbb{R}\}$ be mutually independent harmonizable symmetric α -stable stochastic processes which have absolutely continuous spectral measures and the spectral densities $f(\theta) > 0$ and $g(\theta) > 0$ satisfying the minimality condition (6). The optimal linear estimate $\hat{A}^{extr} \xi$ of the functional $A^{extr} \xi = \int_0^{\infty} a(t) \xi(t) dt$ that depends on the unknown values $\xi(t), t > 0$, of the process $\xi(t), t \in \mathbb{R}$ from observations of the process $\{\xi(t) + \eta(t), t < 0\}$ is calculated by the formula (7). The spectral characteristic $h(\theta)$ of the estimate is determined by equations (9) and (10). The variance of the optimal estimate of the functional is calculated by the formula (11).*

3.1 Extrapolation problem. Observations without noise

Consider the problem of optimal linear estimation of the functional $A^{extr}\xi$ that depends on the unknown values of a $HS\alpha S$ - process $\xi(t), t > 0$, from observations of the process $\{\xi(t), t < 0\}$.

Let $\{\xi(t), t \in \mathbb{R}\}$ be a harmonizable symmetric α -stable stochastic process which has absolutely continuous spectral measure and the spectral density $f(\theta) > 0$ satisfying the minimality condition

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\gamma(\theta)|^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}}{(f(\theta))^{\frac{1}{\alpha-1}}} d\theta < \infty, \quad (12)$$

for a non-zero function of the exponential type $\gamma(\theta) = \int_0^{\infty} \alpha(t) e^{it\theta} dt$, $\int_{-\infty}^{\infty} |\gamma(\theta)|^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} d\theta < \infty$.

Denote by $H^-(\xi)$ the closed in the $\|\cdot\|_{\alpha}$ norm linear manifold generated by values of the $HS\alpha S$ process $\xi(t), t < 0$, in the space $H(\xi)$ generated by all values of the $HS\alpha S$ process $\{\xi(t), t \in \mathbb{R}\}$.

From isomorphism between spaces $H(\xi)$ and $L_{\alpha}(f)$ it follows that the optimal estimate $\hat{A}^{extr}\xi$ of the functional $A^{extr}\xi$ is of the form

$$\hat{A}^{extr}\xi = \int_{-\infty}^{\infty} h(\theta) dZ^{\xi}(\theta). \quad (13)$$

The spectral characteristic $h(\theta)$ of the optimal linear estimate $\hat{A}^{extr}\xi$ of the functional is determined by the formula $h(\theta) =$

$$= A^{extr}(\theta) - \left(\overline{C^{extr}(\theta)} \right)^{<\frac{1}{\alpha-1}>} (f(\theta))^{\frac{-1}{\alpha-1}}, \quad (14)$$

where $C^{extr}(\theta)$ is determined by condition

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\theta t} h(\theta) d\theta = 0, t < 0. \quad (15)$$

The variance of the optimal estimate of the functional is calculated by the formula

$$\begin{aligned} & \left\| \hat{A}^{extr}\xi - A^{extr}\xi \right\|_{\alpha}^{\alpha} = \\ & = \int_{-\infty}^{\infty} \left| \left(\overline{C^{extr}(\theta)} \right)^{<\frac{1}{\alpha-1}>} (f(\theta))^{\frac{-1}{\alpha-1}} \right|^{\alpha} f(\theta) d\theta. \end{aligned} \quad (16)$$

From the theorem 3.1 the following corollary holds true.

Corollary 1. Let $\{\xi(t), t \in \mathbb{R}\}$ be a harmonizable symmetric α -stable stochastic process which has absolutely continuous spectral measure and

the spectral density $f(\theta) > 0$ satisfying the minimality condition (12). The optimal linear estimate $\hat{A}^{extr}\xi$ of the functional $A^{extr}\xi$, that depends on the unknown values $\xi(t), t > 0$, of the process $\{\xi(t), t \in \mathbb{R}\}$, from observations of the process $\{\xi(t), t < 0\}$ is of the form (13). The spectral characteristic $h(\theta)$ of the optimal linear estimate $\hat{A}^{extr}\xi$ of the functional is calculated by formula (14), where $C^{extr}(\theta)$ is determined by condition (15). The variance of the optimal estimate of the functional is calculated by formula (16).

3.2 Extrapolation problem. Stationary processes

Consider the problem of the optimal estimation of the functional $A^{extr}\xi$ that depends on the unknown values $HS\alpha S$ - process $\xi(t), t > 0$, from observations of the process $\{\xi(t) + \eta(t), t < 0\}$, where $\xi(t)$ and $\eta(t)$ are mutually independent harmonizable symmetric α -stable stochastic processes in the case $\alpha = 2$.

We will suppose that stationary process $\{\xi(t), t \in \mathbb{R}\}$ and $\{\eta(t), t \in \mathbb{R}\}$ have spectral densities $f(\theta) > 0$ and $g(\theta) > 0$ satisfying the minimality condition (6) with $\alpha = 2$.

The spectral characteristic $h(\theta)$ of the optimal estimate is of one of the forms

$$h(\theta) = \frac{A^{extr}(\theta)f(\theta) - C^{extr}(\theta)}{f(\theta) + g(\theta)}, \quad (17)$$

$$h(\theta) = A^{extr}(\theta) - \frac{A^{extr}(\theta)g(\theta) + C^{extr}(\theta)}{f(\theta) + g(\theta)}. \quad (18)$$

The variance of estimate has the form

$$\begin{aligned} & \left\| \hat{A}^{extr}\xi - A^{extr}\xi \right\|_2^2 = \\ & = \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{A^{extr}(\theta)g(\theta) + C^{extr}(\theta)}{f(\theta) + g(\theta)} \right|^2 f(\theta) d\theta \\ & + \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{A^{extr}(\theta)f(\theta) - C^{extr}(\theta)}{f(\theta) + g(\theta)} \right|^2 g(\theta) d\theta = \\ & = \langle \mathbf{Bc}, \mathbf{c} \rangle + \langle \mathbf{Ra}, \mathbf{a} \rangle, \end{aligned} \quad (19)$$

$$\text{where } c(t) = (\mathbf{B}^{-1}\mathbf{Da})(t), t \geq 0, \quad (20)$$

$$(\mathbf{Bc})(t) = \int_0^{\infty} c(u) \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(u-t)\theta} \frac{1}{f(\theta) + g(\theta)} d\theta du;$$

$$(\mathbf{Dc})(t) = \int_0^{\infty} c(u) \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(u-t)\theta} \frac{f(\theta)}{f(\theta) + g(\theta)} d\theta du;$$

$$(\mathbf{Rc})(t) = \int_0^\infty c(u) \int_{-\infty}^\infty e^{i(u-t)\theta} \frac{f(\theta)g(\theta)}{f(\theta) + g(\theta)} d\theta du.$$

So, the following theorem holds true.

Theorem 3.2. Let $\{\xi(t), t \in \mathbb{R}\}$ and $\{\eta(t), t \in \mathbb{R}\}$ be mutually independent stationary stochastic processes which have absolutely continuous spectral measures and the spectral densities $f(\theta) > 0$ and $g(\theta) > 0$ satisfying the minimality condition (6) with $\alpha = 2$. The optimal linear estimate $\hat{A}^{extr}\xi$ of the functional $A^{extr}\xi$, that depends on the unknown values $\xi(t), t > 0$ of the process $\{\xi(t), t \in \mathbb{R}\}$, from observations of the process $\{\xi(t) + \eta(t), t < 0\}$, is calculated by the formula (7). The spectral characteristic $h(\theta)$ of the estimate is calculated by the formula (17) or (18). The variance of the optimal estimate of the functional is calculated by the formula (19).

3.3 Extrapolation problem. Stationary processes. Observations without noise

Consider the problem of optimal linear estimation of the functional $A^{extr}\xi$ that depends on the unknown values $\xi(t), t > 0$, of a stationary stochastic process $\{\xi(t), t \in \mathbb{R}\}$ from observations of the process $\xi(t), t < 0$. Suppose that the stationary stochastic process $\{\xi(t), t \in \mathbb{R}\}$ has the spectral density $f(\theta) > 0$ satisfying the minimality condition (12) with $\alpha = 2$.

The spectral characteristic $h(\theta)$ of the optimal linear estimate $\hat{A}^{extr}\xi$ of the functional $A^{extr}\xi$ is calculated by the formula

$$h(\theta) = A^{extr}(\theta) - C^{extr}(\theta) (f(\theta))^{-1}, \quad (21)$$

The variance of the optimal estimate of the functional is calculated by the formula

$$\begin{aligned} & \left\| \hat{A}^{extr}\xi - A^{extr}\xi \right\|_2^2 = \\ & = \int_{-\infty}^\infty \left| C^{extr}(\theta) (f(\theta))^{-1} \right|^2 f(\theta) d\theta. \end{aligned} \quad (22)$$

where

$$\begin{aligned} C^{extr}(\theta) &= \int_0^\infty c(t) e^{i\theta t} dt, \\ c(t) &= (\mathbf{B}^{-1}\mathbf{a})(t), t \geq 0, \\ (\mathbf{Bc})(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty c(u) \int_{-\infty}^\infty (f(t))^{-1} dt du. \end{aligned} \quad (23)$$

So, the following theorem holds true.

Theorem 3.3. Let $\{\xi(t), t \in \mathbb{R}\}$ be a stationary stochastic process which has absolutely continuous spectral measure and the spectral density $f(\theta) > 0$ satisfying the minimality condition (12) with $\alpha = 2$. The optimal linear estimate $\hat{A}^{extr}\xi$ of the functional $A^{extr}\xi$ that depends on the unknown values $\xi(t), t > 0$, of the process $\{\xi(t), t \in \mathbb{R}\}$ from observations of the process $\{\xi(t), t < 0\}$ is of the form (13), where the spectral characteristic $h(\theta)$ of the optimal linear estimate $\hat{A}^{extr}\xi$ of the functional is calculated by the formula (21). The variance of the optimal estimate of the functional can be calculated by formula (22).

4 Extrapolation problem. Minimax approach

The derived formulas for calculation the error

$$\Delta(h(f, g); f, g) := \left\| \hat{A}^{extr}\xi - A^{extr}\xi \right\|_\alpha^\alpha$$

and the spectral characteristic $h(f, g) := h(\theta)$ of the optimal estimate $\hat{A}^{extr}\xi$ of the functional $A^{extr}\xi$ can be applied only in the case where we know spectral densities of the processes. However, usually we do not have exact values of the spectral densities of the processes while we often know a set $D = D_f \times D_g$ of admissible spectral densities. In this case we can apply the minimax-robust approach to estimate the functional $A^{extr}\xi$. This method let us find an estimate that minimizes the maximum of the errors for all spectral densities from the given set $D = D_f \times D_g$ of admissible spectral densities simultaneously (see book [5] for more details).

Definition 4.1. For a given class of spectral densities $D = D_f \times D_g$ the spectral densities $f_0(\theta) \in D_f$, $g_0(\theta) \in D_g$ are called the least favorable in $D = D_f \times D_g$ for the optimal linear estimation of the functional $A^{extr}\xi$ if the following relation holds true

$$\begin{aligned} \Delta(f_0, g_0) &= \Delta(h(f_0, g_0); f_0, g_0) = \\ &= \max_{(f, g) \in D_f \times D_g} \Delta(h(f, g); f, g). \end{aligned} \quad (24)$$

Definition 4.2. For a given class of spectral densities $D = D_f \times D_g$ the spectral characteristic $h^0 = h(f_0, g_0)$ of the optimal estimate $\hat{A}^{extr}\xi$ of the functional $A^{extr}\xi$ is called minimax (robust)

for the optimal linear estimation of the functional $A^{extr}\xi$ if the following relations hold true

$$h^0 \in H_D = \bigcap_{(f,g) \in D_f \times D_g} L^\alpha(f+g),$$

$$\min_{h \in H_D} \max_{(f,g) \in D} \Delta(h; f, g) = \max_{(f,g) \in D} \Delta(h^0; f, g).$$

The least favorable spectral densities $f_0(\theta)$, $g_0(\theta)$ and the minimax spectral characteristic $h^0 = h(f_0, g_0)$ form a saddle point of the function $\Delta(h; f, g)$ on the set $H_D \times D$. The saddle point inequalities

$$\Delta(h; f_0, g_0) \geq \Delta(h^0; f_0, g_0) \geq \Delta(h^0; f, g)$$

$$\forall h \in H_D, \forall f \in D_f, \forall g \in D_g$$

hold true if $h^0 = h(f_0, g_0)$ and $h(f_0, g_0) \in H_D$, where (f_0, g_0) is a solution to the constrained optimization problem

$$\max_{(f,g) \in D_f \times D_g} \Delta(h(f_0, g_0); f, g) = \Delta(h(f_0, g_0); f_0, g_0), \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \Delta(h(f_0, g_0); f, g) &= \|A^{extr}\xi - \hat{A}^{extr}\xi\|_\alpha^\alpha \\ &= -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |A^{extr}(\theta) - h^0(\theta)|^\alpha f(\theta) d\theta \\ &\quad - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |h^0(\theta)|^\alpha g(\theta) d\theta. \end{aligned} \quad (26)$$

The constrained optimization problem (25) is equivalent to the unconstrained optimization problem

$$\begin{aligned} \Delta_D(f, g) &= -\Delta(h(f_0, g_0); f, g) + \\ &\quad + \delta(f, g | D_f \times D_g) \rightarrow \inf, \end{aligned} \quad (27)$$

where $\delta(f, g | D_f \times D_g)$ is the indicator function of the set $D = D_f \times D_g$. Solution (f_0, g_0) to the problem (27) is characterized by the condition $0 \in \partial \Delta_D(f_0, g_0)$, where $\partial \Delta_D(f_0, g_0)$ is the subdifferential of the functional $\Delta_D(f, g)$ at point (f_0, g_0) . This condition makes it possible to find the least favorable spectral densities in some special classes of spectral densities $D = D_f \times D_g$ ([5]).

Note, that the form of the functional $\Delta(h(f_0, g_0); f, g)$ is convenient for application the method of Lagrange multipliers for finding solution to the problem (25). In the following part of the paper we propose relations that determine the least favourable spectral densities in some special classes of spectral densities.

Basing on the presented definitions and the derived formulas we come to conclusion that the following lemmas hold true.

Lemma 1. Let $\{\xi(t), t \in \mathbb{R}\}$ and $\{\eta(t), t \in \mathbb{R}\}$ be mutually independent harmonizable symmetric α -stable stochastic processes which have absolutely continuous spectral measures and the spectral densities $f_0(\theta) > 0$ and $g_0(\theta) > 0$ satisfying the minimality condition (6). Let the spectral densities $(f_0, g_0) \in D_f \times D_g$ gives a solution to the constrained optimization problem (25). The spectral densities (f_0, g_0) are the least favorable spectral densities in $D_f \times D_g$ and $h^0 = h(f_0, g_0)$ is the minimax spectral characteristic of the optimal linear estimation $\hat{A}^{extr}\xi$ of the functional $A^{extr}\xi$ that depends on the unknown values $\xi(t), t > 0$, of the process $\{\xi(t), t \in \mathbb{R}\}$ from observations of the process $\{\xi(t) + \eta(t), t < 0\}$ if $h^0 = h(f_0, g_0) \in H_D$.

Lemma 2. Let $\{\xi(t), t \in \mathbb{R}\}$ be a harmonizable symmetric α -stable stochastic process which has absolutely continuous spectral measure and the spectral density $f_0(\theta) > 0$ satisfying the minimality condition (12). Let the spectral density $f_0 \in D_f$ gives a solution to the constrained optimization problem

$$\max_{f \in D_f} \Delta(h(f_0); f) = \Delta(h(f_0); f_0), \quad (28)$$

$$\begin{aligned} \Delta(h(f_0); f) &= \|A^{extr}\xi - \hat{A}^{extr}\xi\|_\alpha^\alpha = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left| \left(C^{extr0}(\theta) \right)^{<\frac{1}{\alpha-1}>} (f_0(\theta))^{\frac{-1}{\alpha-1}} \right|^\alpha f(\theta) d\theta. \end{aligned} \quad (29)$$

The spectral density f_0 is the least favorable spectral density in D_f and $h^0 = h(f_0)$ is the minimax spectral characteristic of the optimal linear estimate $\hat{A}^{extr}\xi$ of the functional $A^{extr}\xi$, that depends on the unknown values $\xi(t), t > 0$, of the process $\{\xi(t), t \in \mathbb{R}\}$, from observations of the process $\{\xi(t), t < 0\}$ if $h^0 = h(f_0) \in H_D$.

Lemma 3. Let $\{\xi(t), t \in \mathbb{R}\}$ and $\{\eta(t), t \in \mathbb{R}\}$ be mutually independent stationary stochastic processes which have absolutely continuous spectral measures and the spectral densities $f_0(\theta) > 0$ and $g_0(\theta) > 0$ satisfying the minimality condition (6) with $\alpha = 2$. Let spectral densities $(f_0, g_0) \in D_f \times D_g$ gives a solution to the constrained optimization problem

$$\max_{(f,g) \in D_f \times D_g} \Delta(h(f_0, g_0); f, g) = \Delta(h(f_0, g_0); f_0, g_0), \quad (30)$$

$$\begin{aligned} \Delta(h(f_0, g_0); f, g) = & \\ & \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\left| A^{extr}(\theta)g_0(\theta) + \int_0^{\infty} ((\mathbf{B}^0)^{-1}\mathbf{R}^0\mathbf{a})(t)e^{it\theta}dt \right|^2}{(f_0(\theta) + g_0(\theta))^2} \times \\ & \times f(\theta)d\theta + \frac{1}{2\pi} \times \\ & \times \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\left| A^{extr}(\theta)f_0(\theta) - \int_0^{\infty} ((\mathbf{B}^0)^{-1}\mathbf{R}^0\mathbf{a})(t)e^{it\theta}dt \right|^2}{(f_0(\theta) + g_0(\theta))^2} \times \\ & \times g(\theta)d\theta. \end{aligned} \quad (31)$$

The spectral densities (f_0, g_0) are the least favorable spectral densities in $D_f \times D_g$ and $h^0 = h(f_0, g_0)$ is the minimax spectral characteristic of the optimal linear estimate $\hat{A}^{extr}\xi$ of the functional $A^{extr}\xi$, that depends on the unknown values $\xi(t), t > 0$, of the sequence $\{\xi(t), t \in \mathbb{R}\}$ from observations of the process $\{\xi(t) + \eta(t), t < 0\}$ if $h^0 = h(f_0, g_0) \in H_D$.

Lemma 4. Let $\{\xi(t), t \in \mathbb{R}\}$ be a stationary stochastic process which has absolutely continuous spectral measure and the spectral density $f_0(\theta) > 0$ satisfying the minimality condition (12) with $\alpha = 2$. Let the spectral density $f_0 \in D_f$ gives a solution to the constrained optimization problem

$$\max_{f \in D_f} \Delta(h(f_0); f) = \Delta(h(f_0); f_0), \quad (32)$$

$$\begin{aligned} \Delta(h(f_0); f) = & \\ & \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \int_0^{\infty} ((\mathbf{B}^0)^{-1}\mathbf{a})(t)e^{it\theta}dt \right|^2 f_0^{-2}(\theta)f(\theta)d\theta. \end{aligned} \quad (33)$$

The spectral density f_0 is the least favorable spectral density in D_f and $h^0 = h(f_0)$ is the minimax spectral characteristic of the optimal linear estimate $\hat{A}^{extr}\xi$ of the functional $A^{extr}\xi$ that depends on the unknown values $\xi(t), t > 0$, of the process $\{\xi(t), t \in \mathbb{R}\}$ from observations of the process $\{\xi(t), t < 0\}$ if $h^0 = h(f_0) \in H_D$.

4.1 Least favorable spectral densities in the class $D_f^0 \times D_g^0$

Consider the problem for the class $D_f^0 \times D_g^0$, where

$$D_f^0 = \{f(\theta) \mid \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\theta)d\theta \leq P_1\},$$

$$D_g^0 = \{g(\theta) \mid \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(\theta)d\theta \leq P_2\}.$$

Let $f_0(\theta) \in D_f^0, g_0(\theta) \in D_g^0$ and let the functions

$$h_f(f_0, g_0) = \left| \int_0^{\infty} a(t)e^{it\theta}dt - h^0(\theta) \right|^\alpha, \quad (34)$$

$$h_g(f_0, g_0) = |h^0(\theta)|^\alpha \quad (35)$$

be bounded.

Under these conditions it follows that the functional

$$\begin{aligned} \tilde{\Delta}(f, g) = & -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \int_0^{\infty} a(t)e^{it\theta}dt - h^0(\theta) \right|^\alpha f(\theta)d\theta \\ & - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |h^0(\theta)|^\alpha g(\theta)d\theta. \end{aligned} \quad (36)$$

is bounded in the space $L_1 \times L_1$.

From the condition $0 \in \partial\Delta_D(f_0, g_0), D = D_f^0 \times D_g^0$ it follows that the least favorable densities satisfy equations

$$\left| \int_0^{\infty} a(t)e^{it\theta}dt - h^0(\theta) \right|^\alpha = \alpha_1(f_0(\theta) + g(\theta)) \quad (37)$$

$$|h^0(\theta)|^\alpha = \alpha_2(f_0(\theta) + g(\theta)), \quad (38)$$

where $\alpha_1 \geq 0, \alpha_2 \geq 0$ are constant, $\alpha_1 \neq 0$, if $\int_{-\infty}^{\infty} f_0(\theta)d\theta = P_1$; $\alpha_2 \neq 0$, if $\int_{-\infty}^{\infty} g_0(\theta)d\theta = P_2$.

We have the following statement holds true.

Theorem 4.1. Let the spectral densities $f_0(\theta) \in D_f^0, g_0(\theta) \in D_g^0$ satisfy the minimality condition (6). Let functions h_f, h_g determined by (34), (35) be bounded. The spectral densities $f_0(\theta), g_0(\theta)$ are the least favorable in the class $D = D_f^0 \times D_g^0$ for the optimal extrapolation of the functional $A^{extr}\xi$ if $f_0(\theta), g_0(\theta)$ give a solution to the system of equations (37), (38) and define solution of optimization problem (25). The spectral characteristic $h(f_0, g_0)$ of optimal linear estimation $\hat{A}^{extr}\xi$ of the functional $A^{extr}\xi$ is defined by equations (9), (10).

4.2 Least favorable spectral densities for class D_1 . Observations without noise

Consider the problem for the class of spectral densities

$$D_1 = \left\{ f(\theta) : \int_{-\infty}^{\infty} f(\theta)d\theta = \gamma \right\}.$$

Making use of the Lagrange multipliers we get

$$f_0(\theta) = \lambda \left| \overline{C^{extr0}(\theta)} \right|. \quad (39)$$

$$h(f_0) = A^{extr}(\theta) + \left(\overline{C^{extr0}(\theta)} \right)^{<\frac{1}{\alpha-1}} (f_0(\theta))^{-\frac{1}{\alpha-1}}. \quad (40)$$

Thus, the following theorem holds true.

Theorem 4.2. *Let the spectral density $f_0 \in D_1$ satisfy minimality condition (12) with $\alpha = 2$. The least favorable spectral density in the class D_1 for the optimal estimate of functional $A^{extr}\xi$ is density (39) which determine solution of optimization problem (28). The minimax spectral characteristic of the optimal estimate $\hat{A}^{extr}\xi$ of the functional $A^{extr}\xi$ is defined from (40) and (15).*

4.3 Least favorable spectral densities for class $D_{2\epsilon_1} \times D_{1\epsilon_2}$. Stationary processes

Consider problem for the class $D_{2\epsilon_1} \times D_{1\epsilon_2}$, where

$$D_{2\epsilon_1} = \{f(\theta) \mid \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |f(\lambda) - f_1(\lambda)|^2 d\lambda \leq \epsilon_1\},$$

$$D_{1\epsilon_2} = \{g(\theta) \mid \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |g(\lambda) - g_1(\lambda)| d\lambda \leq \epsilon_2\}.$$

Let the functions $h_f(f_0, g_0) =$

$$= \frac{|A^{extr}(\theta)g_0(\theta) + \int_0^{\infty} ((\mathbf{B}^0)^{-1}\mathbf{D}^0\mathbf{a})(t)e^{it\theta} dt|^2}{(f_0(\theta) + g_0(\theta))^2}, \quad (41)$$

$$h_g(f_0, g_0) = \frac{|A^{extr}(\theta)f_0(\theta) - \int_0^{\infty} ((\mathbf{B}^0)^{-1}\mathbf{D}^0\mathbf{a})(t)e^{it\theta} dt|^2}{(f_0(\theta) + g_0(\theta))^2}, \quad (42)$$

be bounded. From condition $0 \in \partial\Delta_D(f_0, g_0)$, $D = D_f^0 \times D_g^0$, we have that the least favorable spectral densities are defined by equation

$$\left| A^{extr}(\theta)g_0(\theta) + \int_0^{\infty} ((\mathbf{B}^0)^{-1}\mathbf{D}^0\mathbf{a})(t)e^{it\theta} dt \right|^2 = \alpha_1 (f_0(\theta) + g_0(\theta))^2 (f_0(\theta) - f_1(\theta)) \quad (43)$$

$$\left| A^{extr}(\theta)f_0(\theta) - \int_0^{\infty} ((\mathbf{B}^0)^{-1}\mathbf{D}^0\mathbf{a})(t)e^{it\theta} dt \right|^2 = \alpha_2 (f_0(\theta) + g_0(\theta))\Psi(\theta), \quad (44)$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |f(\lambda) - f_1(\lambda)|^2 d\lambda = \epsilon_1 \quad (45)$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |g(\lambda) - g_1(\lambda)| d\lambda = \epsilon_2 \quad (46)$$

$|\Psi(\theta)| < 1$, $\Psi(\theta) = \text{sign}(g_0(\theta) - g_1(\theta))$, if $g_0(\theta) \neq g_1(\theta)$, α_1, α_2 are constants.

Thus, the following statement holds true.

Theorem 4.3. *Let $f_0(\theta) \in D_{2\epsilon_1}$, $g_0(\theta) \in D_{1\epsilon_2}$ satisfy minimality condition (6). Let functions h_f, h_g determined by (41), (42) be bounded. The spectral densities $f_0(\theta), g_0(\theta)$ are the least favorable in class $D = D_{2\epsilon_1} \times D_{1\epsilon_2}$ for optimal extrapolation of functional $A^{extr}\xi = \int_0^{\infty} a(t)\xi(t)dt$, if $f_0(\theta), g_0(\theta)$ are solution of equations (43), (44), (45), (46) and determine solution of optimization problem (30). The spectral characteristic $h(f_0, g_0)$ of the optimal estimate $\hat{A}^{extr}\xi$ of the functional $A^{extr}\xi$ is determined by equations (18).*

4.4 Least favorable spectral densities D_f^β . Stationary processes. Observations without noise

Consider the problem for class D_f^β , where

$$D_f^\beta = \{f(\theta) \mid \int_{-\infty}^{\infty} (f(\lambda))^\beta d\lambda = P_1\}.$$

It follows from condition $0 \in \partial\Delta_D(f_0, g_0)$, $D = D_f^\beta$ that the least favorable spectral density satisfies equation

$$\left| \int_0^{\infty} ((\mathbf{B}^0)^{-1}\mathbf{a})(t)e^{it\theta} dt \right|^2 f_0^{-2}(\theta) = \gamma_1 (f_0(\theta))^{\beta-1}, \quad (47)$$

where γ_1 is determined by condition

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_0(\theta)^\beta d\theta = P_1. \quad (48)$$

Thus, the following statement holds true.

Theorem 4.4. *Let spectral density $f_0 \in D_f^\beta$ satisfy minimality condition (12) with $\alpha = 2$. The least favorable spectral density D_f^β for the optimal estimate of the functional $A^{extr}\xi$ is determined by equation (47) and the optimization problem (32). The minimax spectral characterisation $h(f_0)$ is determined by equation (21).*

5 Conclusion

In this article we propose methods of solution of the problem of optimal linear estimation of the functional $A^{extr}\xi = \int_0^\infty a(t)\xi(t)dt$ which depends on the unknown values of a harmonizable α -stable process $\xi(t), t > 0$ from observations of the process $\xi(t) + \eta(t), t \in \mathbb{R}$ at points $t < 0$. The problem is investigated in the case of certainty where spectral densities of the processes are exactly known as well as in the case of uncertain-

ty where spectral densities of the processes are not exactly known while sets of admissible densities are described. In the case of certainty we derive formulas for calculation the error and spectral characteristic of the optimal estimate of the functional. The minimax approach is applied in the case of spectral uncertainty. Formulas that determine the least favorable spectral densities and the minimax (robust) spectral characteristics are proposed for some classes of admissible spectral densities.

Список використаних джерел

1. *Cambanis S.* Complex stable variables and processes / S. Cambanis // *Contributions to Statistics, North-Holland, New York.* – 1983. – P. 63 – 79.
2. *Gikhman I.I.* The Theory of Stochastic Processes. I. Classics in Mathematics/ I.I. Gikhman, A.V. Skorokhod // Berlin: Springer-Verlag, 2004. – 574 p.
3. *Grenander U.* A prediction problem in game theory / U. Grenander // *Ark. Mat.* 3.– 1957. – 371-379.
4. *Kassam S.A.* Robust techniques for signal processing: A survey / S.A. Kassam, H.V. Poor // *Proceedings of the IEEE.* – 1985. – 73, №3. – P. 433 – 481.
5. *Моклячук М. П.* Робастні оцінки функціоналів від стохастичних процесів./ М. П. Моклячук // К.:ВППЦ "Київський університет". – 2008. – 320 с.
6. *Moklyachuk M. P.* Minimax interpolation problem for harmonizable stable sequences with noise observations / M. P. Moklyachuk, V. I. Ostapenko // *J. Appl. Math. Stat.* – 2015. – Vol. 2. – No. 1. –P. – 21 – 42
7. *Moklyachuk M. P.* Minimax interpolation of harmonizable sequences / M. P. Moklyachuk, V. I. Ostapenko // *Theor. Probab. Math. Stat.* – 2016. – No. 92. – P. – 135 –146.
8. *Rajput S.* On some extremal problems in H^p and the prediction of L^p -harmonizable stochastic processes / S. Rajput // *Probab. Theory Relat. Fields.* – 1994. – 99, No. 2. – P. – 197 –210.

References

1. CAMBANIS S. (1983), "Complex stable variables and processes" *Contributions to Statistics, North-Holland, New York.* – pp. 63-79.
2. GIKHMAN I.I. and SKOROKHOD A.V. (2004), *The theory of stochastic processes. I. Classics in Mathematics*, Berlin: Springer-Verlag.
3. GRENANDER U. (1957), "A prediction problem in game theory" *Ark. Mat.* № 3. – pp. 371-379.
4. KASSAM S.A. and POOR H.V. (1985), "Robust techniques for signal processing: A survey", *Proceedings of the IEEE*, 73(3), pp. 433 – 481.
5. MOKLYACHUK M.P. (2008), "Robust estimates of functional of stochastic processes." *Kyiv.* – *Kyiv University.*
6. MOKLYACHUK M.P., OSTAPENKO V. I. (2015) "Minimax interpolation problem for harmonizable stable sequences with noise observations" *J. Appl. Math. Stat.* Vol. 2, No. 1, pp. 21 – 42
7. MOKLYACHUK M.P., OSTAPENKO V. I. (2016) "Minimax interpolation of harmonizable sequences" *Theor. Probab. Math. Stat.*, No. 92, pp. 135-146.
8. RAJPUT, S., SUNDBERG, C. (1994), "On some extremal problems in H^p and the prediction of L^p -harmonizable stochastic processes." *Probab. Theory Relat. Fields.* Vol. 99, Iss. 2.– pp. 197-210.

Received: 02.10.2015

УДК 519.21

М.П. Моклячук, д. ф.-м. н., професор
М.І. Сідей, аспірант

**Інтерполяція функціоналів від
стаціонарних процесів за
спостереженнями з пропусками**

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 01033, Київ, вул. Володимирська, 64.
e-mail: mmp@univ.kiev.ua

M.P. Moklyachuk, Doctor of Sciences, Professor
M.I. Sidei, PhD Student

**Interpolation of functionals of stationary
processes with missing observations**

Taras Shevchenko National University of
Kyiv, 01033, Kyiv, 64 Volodymyrska st.
e-mail: mmp@univ.kiev.ua

Досліджується задача оптимального лінійного оцінювання функціонала від невідомих значень стаціонарного стохастичного процесу за даними спостережень процесу з шумом, коли не всі спостереження відомі. Знайдені формули для обчислення середньоквадратичної похибки та спектральної характеристики оптимальної оцінки функціонала за умови, що спектральні щільності процесів відомі. У випадку, коли вигляд спектральних щільностей невідомий, але задані множини допустимих спектральних щільностей, застосовано мінімаксний метод оцінювання. Для заданих множин допустимих спектральних щільностей визначені найменш сприятливі спектральні щільності та мінімаксні спектральні характеристики оптимальної лінійної оцінки функціонала.

Ключові слова: стаціонарний процес, середньоквадратична похибка, робастна оцінка, найменш сприятлива спектральна щільність, мінімаксна спектральна характеристика.

The problem of the mean-square optimal linear estimation of the functional which depends on the unknown values of a stochastic stationary process from observations of the process with noise is considered. Formulas for calculating the mean-square error and the spectral characteristic of the optimal linear estimate of the functional are proposed under the condition of spectral certainty, where spectral densities of the processes are exactly known. The minimax (robust) method of estimation is applied in the case where spectral densities are not known exactly, but sets of admissible spectral densities are given. Formulas that determine the least favorable spectral densities and minimax spectral characteristics are proposed for some special sets of admissible densities.

Key Words: stationary process, mean square error, minimax-robust estimate, least favorable spectral density, minimax spectral characteristic.

Communicated by Professor Kozachenko Yu.V.

The basic assumption of most of the methods of estimation of the unobserved values of stochastic processes is that the spectral densities of the considered stochastic processes are exactly known. However, in practice, complete information on the spectral densities is impossible in most cases. To overcome the problem one can find parametric or nonparametric estimates of the unknown spectral densities and apply one of traditional estimation methods. This procedure can result in significant increasing of the value of error as K. S. Vastola and H. V. Poor [19] have demonstrated with the help of some examples. To avoid this effect one can search the estimates which are optimal for all densities from a certain

class of admissible spectral densities. These estimates are called minimax since they minimize the maximum value of the error. The paper by Ulf Grenander [4] should be marked as the first one where this approach to extrapolation problem for stationary processes was proposed. Several models of spectral uncertainty can be found in the survey paper by S. A. Kassam and H. V. Poor [6]. In the paper by M. Moklyachuk [11], books by M. Moklyachuk [10], M. Moklyachuk and A. Masyutka [13], M. Moklyachuk and I. Golichenko [12] results of investigations of the problem of optimal linear estimation of functionals which depend on unknown values of stationary and related sequences and processes are presented.

Estimation problems for functionals which depend on unknown values of stochastic processes with stationary increments were investigated by M. Luz and M. Moklyachuk [8, 9]. The problem of interpolation of a stationary sequence with missing values was investigated by M. Moklyachuk and M. Sidei [14, 15]. Prediction problems with missing observations for stationary processes were investigated in papers by P. Bondon [1, 2], T. Nakazi [16], Y. Kasahara, M. Pourahmadi and A. Inoue [5].

In this paper we deal with the problem of the mean-square optimal linear estimation of the functional $A_s \xi = \sum_{l=1}^s \int_{-M_l-N_l}^{-M_l} a(t) \xi(t) dt$, which depends on the unknown values of a stochastic stationary process $\xi(t)$ from observations of the process $\xi(t) + \eta(t)$ at points $t \in \mathbb{R} \setminus S$, $S = \bigcup_{l=1}^s [-M_l - N_l, \dots, -M_l]$, $M_l = \sum_{k=0}^l (N_k + K_k)$, $N_0 = 0$, $K_0 = 0$. The case of spectral certainty as well as the case of spectral uncertainty are considered.

1 Classical interpolation problem for stationary processes

Let $\{\xi(t), t \in \mathbb{R}\}$ and $\{\eta(t), t \in \mathbb{R}\}$ be uncorrelated stationary stochastic processes with zero first moments $E\xi(t) = 0$, $E\eta(t) = 0$ and correlation functions of the form $R_\xi(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik\lambda} f(\lambda) d\lambda$, $R_\eta(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik\lambda} g(\lambda) d\lambda$, where $f(\lambda)$, $g(\lambda)$ are spectral densities of processes $\xi(t)$ and $\eta(t)$ respectively, and the minimality condition holds true

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\gamma(\lambda)|^2}{f(\lambda) + g(\lambda)} d\lambda < \infty, \quad (1)$$

where $\gamma(\lambda) = \sum_{l=1}^s \int_{-M_l-N_l}^{-M_l} a(t) e^{it\lambda} dt$ is a nontrivial function of the exponential type. Under this condition the error-free interpolation is impossible [18].

Processes $\xi(t)$ and $\eta(t)$ admit the spectral decomposition [3]

$$\xi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} Z_\xi(d\lambda), \eta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} Z_\eta(d\lambda), \quad (2)$$

where $Z_\xi(d\lambda)$ and $Z_\eta(d\lambda)$ are orthogonal stochastic measures.

Consider the problem of the mean-square optimal linear estimation of the functional $A_s \xi = \sum_{l=1}^s \int_{-M_l-N_l}^{-M_l} a(t) \xi(t) dt$, which depends on the

unknown values of the process $\xi(t)$ from observations of the process $\xi(t) + \eta(t)$ at points $t \in \mathbb{R} \setminus S$, $S = \bigcup_{l=1}^s [-M_l - N_l, \dots, -M_l]$.

Making use of spectral decomposition (2) of stationary process $\xi(t)$ we can write the functional $A_s \xi$ in the following form $A_s \xi = \int_{-\infty}^{\infty} A_s(e^{i\lambda}) Z_\xi(d\lambda)$, where $A_s(e^{i\lambda}) = \sum_{l=1}^s \int_{-M_l-N_l}^{-M_l} a(t) e^{it\lambda} dt$.

Denote by $\hat{A}_s \xi$ the optimal linear estimate of the functional $A_s \xi$ from observations of the process $\xi(t) + \eta(t)$ and by $\Delta(f, g) = E |A_s \xi - \hat{A}_s \xi|^2$ the mean-square error of $\hat{A}_s \xi$.

Consider values $\xi(j)$ and $\eta(j)$ as elements of the Hilbert space $H = L_2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ generated by random variables ξ with 0 mathematical expectations, $E\xi = 0$, finite variations, $E|\xi|^2 < \infty$, and inner product $(\xi, \eta) = E\xi\bar{\eta}$. Denote by $H^s(\xi + \eta)$ the closed linear subspace generated by elements $\{\xi(t) + \eta(t) : t \in \mathbb{R} \setminus S\}$ in the Hilbert space $H = L_2(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Let $L_2(f + g)$ be the Hilbert space of complex-valued functions that are square-integrable with respect to the measure whose density is $f(\lambda) + g(\lambda)$. Denote by $L_2^s(f + g)$ the subspace of $L_2(f + g)$ generated by functions $\{e^{it\lambda}, t \in \mathbb{R} \setminus S\}$.

The mean-square optimal linear estimate $\hat{A}_s \xi$ of the functional $A_s \xi$ can be represented in the form $\hat{A}_s \xi = \int_{-\infty}^{\infty} h(e^{i\lambda}) (Z_\xi(d\lambda) + Z_\eta(d\lambda))$, where $h(e^{i\lambda}) \in L_2^s(f + g)$ is the spectral characteristic of the estimate.

The mean-square error $\Delta(h; f)$ of the estimate $\hat{A}_s \xi$ is given by the formula $\Delta(h; f, g) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |A_s(e^{i\lambda}) - h(e^{i\lambda})|^2 f(\lambda) d\lambda + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |h(e^{i\lambda})|^2 g(\lambda) d\lambda$.

According to the Hilbert space projection method proposed by A. N. Kolmogorov [7], the optimal estimation of the functional $A_s \xi$ is a projection of the element $A_s \xi$ of the space H on the space $H^s(\xi + \eta)$. It can be found from the following conditions: 1) $\hat{A}_s \xi \in H^s(\xi + \eta)$, 2) $A_s \xi - \hat{A}_s \xi \perp H^s(\xi + \eta)$. Thus, the spectral characteristic $h(e^{i\lambda})$ and the mean-square error of the estimate $\hat{A}_s \xi$ are calculated by formulas

$$h(e^{i\lambda}) = A_s(e^{i\lambda}) \frac{f(\lambda)}{f(\lambda) + g(\lambda)} - \frac{C_s(e^{i\lambda})}{f(\lambda) + g(\lambda)}, \quad (3)$$

$$C_s(e^{i\lambda}) = \sum_{l=1}^s \int_{-M_l-N_l}^{-M_l} (\mathbf{B}_s^{-1} \mathbf{R}_s \mathbf{a})(t) e^{it\lambda} dt,$$

$$\begin{aligned} \Delta(h; f, g) = & \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|A_s(e^{i\lambda})g(\lambda) + C_s(e^{i\lambda})|^2}{(f(\lambda) + g(\lambda))^2} f(\lambda) d\lambda \\ & + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|A_s(e^{i\lambda})f(\lambda) - C_s(e^{i\lambda})|^2}{(f(\lambda) + g(\lambda))^2} g(\lambda) d\lambda \\ = & \langle \mathbf{R}_s \vec{a}, \mathbf{B}_s^{-1} \mathbf{R}_s \vec{a} \rangle + \langle \mathbf{Q}_s \vec{a}, \vec{a} \rangle, \end{aligned} \quad (4)$$

where $\langle A, C \rangle = \sum_{l=1}^s \int_{-M_l-N_l}^{-M_l} A(t) \overline{C(t)} dt$ is the inner product in the space $L_2(S)$, $(\mathbf{B}_s \mathbf{x})(t)$, $(\mathbf{R}_s \mathbf{x})(t)$ and $(\mathbf{Q}_s \mathbf{x})(t)$ are linear operators in the space $L_2(S)$ determined by the following formulas

$$\begin{aligned} (\mathbf{B}_s \mathbf{x})(t) = & \frac{1}{2\pi} \sum_{l=1}^s \int_{-M_l-N_l}^{-M_l} \mathbf{x}(u) \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda(u-t)} \frac{1}{f(\lambda) + g(\lambda)} d\lambda du, \\ (\mathbf{R}_s \mathbf{x})(t) = & \frac{1}{2\pi} \sum_{l=1}^s \int_{-M_l-N_l}^{-M_l} \mathbf{x}(u) \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda(u-t)} \frac{f(\lambda)}{f(\lambda) + g(\lambda)} d\lambda du, \\ (\mathbf{Q}_s \mathbf{x})(t) = & \frac{1}{2\pi} \sum_{l=1}^s \int_{-M_l-N_l}^{-M_l} \mathbf{x}(u) \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda(u-t)} \frac{f(\lambda)g(\lambda)}{f(\lambda) + g(\lambda)} d\lambda du, \\ \mathbf{x}(t) \in L_2(S), \quad t \in S, \end{aligned}$$

and the function $\mathbf{a}(t) = a(t), t \in S$. Let us summarize results and present them in the form of a theorem.

Theorem 1.1. *Let $\xi(j)$ and $\eta(j)$ be uncorrelated stationary processes with spectral densities $f(\lambda)$ and $g(\lambda)$ which satisfy the minimality condition (1). The spectral characteristic $h(e^{i\lambda})$ and the mean-square error $\Delta(f, g)$ of the optimal linear estimate of the functional $A_s \xi$ which depends on the unknown values of the process $\xi(j)$ based on observations of the process $\xi(t) + \eta(t)$, $t \in \mathbb{R} \setminus S$ can be calculated by formulas (3), (4).*

For the case when the stationary process $\xi(t)$ is observed without noise we obtain

Corollary 1. *Let $\xi(t)$ be a stationary stochastic process with the spectral density $f(\lambda)$, which satisfies the minimality condition $\int_{-\pi}^{\pi} f^{-1}(\lambda) d\lambda < \infty$. The spectral characteristic $h(e^{i\lambda})$ and the mean-square error $\Delta(f, g)$ of the optimal linear estimate of the functional $A_s \xi$ which depends on the unknown values of the process $\xi(j)$ based on observations of the process $\xi(t)$ at time points*

$t \in \mathbb{R} \setminus S$, $S = \bigcup_{l=1}^s [-M_l - N_l, \dots, -M_l]$, can be calculated by formulas

$$\begin{aligned} h(e^{i\lambda}) = & A_s(e^{i\lambda}) - C_s(e^{i\lambda})f^{-1}(\lambda), \\ C_s(e^{i\lambda}) = & \sum_{l=1}^s \int_{-M_l-N_l}^{-M_l} (\mathbf{B}_s^{-1} \mathbf{a})(t) e^{it\lambda} dt, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\Delta(h; f) = \langle \mathbf{B}_s^{-1} \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle. \quad (6)$$

2 Minimax method of interpolation

The obtained formulas can be applied only in the case where spectral densities of the processes are exactly known. In the case where spectral densities are not exactly known, while a class of admissible spectral densities is given, the minimax method can be applied to estimate the functional. This method allows us to find estimates that minimize the maximum values of the mean-square errors of the estimates for all spectral densities from a given class of admissible spectral densities.

Definition 2.1. For a given class of spectral densities $D = D_f \times D_g$ the spectral densities $f_0(\lambda) \in D_f$, $g_0(\lambda) \in D_g$ are called least favorable in the class D for the optimal linear interpolation of the functional $A_s \xi$ if the following relation holds true

$$\Delta(f_0, g_0) = \Delta(h(f_0, g_0); f_0, g_0) = \max_{(f, g) \in D_f \times D_g} \Delta(h(f, g); f, g).$$

Definition 2.2. For a given class of spectral densities $D = D_f \times D_g$ the spectral characteristic $h^0(e^{i\lambda})$ of the optimal linear interpolation of the functional $A_s \xi$ is called minimax-robust if there are satisfied conditions

$$h^0(e^{i\lambda}) \in H_D = \bigcap_{(f, g) \in D_f \times D_g} L_2^s(f + g),$$

$$\min_{h \in H_D} \max_{(f, g) \in D} \Delta(h; f, g) = \max_{(f, g) \in D} \Delta(h^0; f, g).$$

From the introduced definitions and formulas derived in the previous section we can obtain the following statements.

Lemma 1. *Spectral densities $f_0(\lambda) \in D_f$, $g_0(\lambda) \in D_g$ satisfying the minimality condition (1) are the least favorable in the class $D = D_f \times D_g$ for the optimal linear interpolation of the functional $A_s \xi$, if the Fourier coefficients of the functions $(f_0(\lambda) + g_0(\lambda))^{-1}$, $f_0(\lambda)(f_0(\lambda) + g_0(\lambda))^{-1}$, $f_0(\lambda)g_0(\lambda)(f_0(\lambda) + g_0(\lambda))^{-1}$ determine operators*

$\mathbf{B}_s^0, \mathbf{R}_s^0, \mathbf{Q}_s^0$, which determine a solution to the constrain optimization problem

$$\max_{(f,g) \in D_f \times D_g} \langle \mathbf{R}_s \vec{a}, \mathbf{B}_s^{-1} \mathbf{R}_s \vec{a} \rangle + \langle \mathbf{Q}_s \vec{a}, \vec{a} \rangle = \langle \mathbf{R}_s^0 \vec{a}, (\mathbf{B}_s^0)^{-1} \mathbf{R}_s^0 \vec{a} \rangle + \langle \mathbf{Q}_s^0 \vec{a}, \vec{a} \rangle. \quad (7)$$

The minimax spectral characteristic $h^0 = h(f_0, g_0)$ is determined by the formula (3) if $h(f_0, g_0) \in H_D$.

Corollary 2. Suppose that the spectral density $f_0(\lambda) \in D_f$ is such that $f_0^{-1}(\lambda)$ is integrable. The spectral density $f_0(\lambda) \in D_f$ is the least favorable in the class D_f for the optimal linear interpolation of the functional $A_s \xi$ from the observation of the process $\xi(t)$ at points $t \in \mathbb{R} \setminus S$ if the Fourier coefficients of the function $f_0^{-1}(\lambda)$ determine the operator $\mathbf{B}_s^0$ which determines solution to the constrain optimization problem

$$\max_{f \in D_f} \langle \mathbf{B}_s^{-1} \vec{a}, \vec{a} \rangle = \langle (\mathbf{B}_s^0)^{-1} \vec{a}, \vec{a} \rangle. \quad (8)$$

The minimax spectral characteristic $h^0 = h(f_0)$ is determined by the formula (5) if $h(f_0) \in H_{D_f}$.

The least favorable spectral densities $f_0(\lambda)$, $g_0(\lambda)$ and the minimax spectral characteristic $h^0 = h(f_0, g_0)$ form a saddle point of the function $\Delta(h; f, g)$ on the set $H_D \times D$. The saddle point inequalities

$$\Delta(h^0; f, g) \leq \Delta(h^0; f_0, g_0) \leq \Delta(h; f_0, g_0),$$

$$\forall h \in H_D, \forall f \in D_f, \forall g \in D_g,$$

hold true if $h^0 = h(f_0, g_0)$ та $h(f_0, g_0) \in H_D$, where (f_0, g_0) is a solution to the constrained optimization problem

$$\sup_{(f,g) \in D_f \times D_g} \Delta(h(f_0, g_0); f, g) = \Delta(h(f_0, g_0); f_0, g_0), \quad (9)$$

$$\Delta(h(f_0, g_0); f, g) =$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|A_s(e^{i\lambda})g_0(\lambda) + C_s^0(e^{i\lambda})|^2}{(f_0(\lambda) + g_0(\lambda))^2} f(\lambda) d\lambda + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|A_s(e^{i\lambda})f_0(\lambda) - C_s^0(e^{i\lambda})|^2}{(f_0(\lambda) + g_0(\lambda))^2} g(\lambda) d\lambda,$$

$$C_s^0(e^{i\lambda}) = \sum_{l=1}^s \int_{-M_l - N_l}^{-M_l} ((\mathbf{B}_s^0)^{-1} \mathbf{R}_s^0 \mathbf{a})(t) e^{it\lambda} dt.$$

The constrained optimization problem (9) is equivalent to the unconstrained optimization problem

$$\Delta_D(f, g) = -\Delta(h(f_0, g_0); f, g) + \delta((f, g) | D_f \times D_g) \rightarrow \inf, \quad (10)$$

where $\delta((f, g) | D_f \times D_g)$ is the indicator function of the set $D = D_f \times D_g$. Solution of the problem (10) is characterized by the condition $0 \in \partial \Delta_D(f_0, g_0)$, where $\partial \Delta_D(f_0)$ is the subdifferential of the convex functional $\Delta_D(f, g)$ at point (f_0, g_0) [17].

The form of the functional $\Delta(h(f_0, g_0); f, g)$ admits finding the derivatives and differentials of the functional in the space $L_1 \times L_1$. Therefore the complexity of the optimization problem (10) is determined by the complexity of calculating subdifferentials of the indicator functions $\delta((f, g) | D_f \times D_g)$ of the sets $D_f \times D_g$.

Lemma 2. Let (f_0, g_0) be a solution to the optimization problem (10). The spectral densities $f_0(\lambda)$, $g_0(\lambda)$ are the least favorable in the class $D = D_f \times D_g$ and the spectral characteristic $h^0 = h(f_0, g_0)$ is the minimax of the optimal linear estimate of the functional $A_s \xi$ if $h(f_0, g_0) \in H_D$.

3 Least favorable spectral densities in the class $D = D_0 \times D_\varepsilon$

Consider the problem of the mean-square optimal interpolation of the functional $A_s \xi$ in the case where spectral densities of processes belong to the class of admissible spectral densities $D = D_0 \times D_\varepsilon$,

$$D_0 = \left\{ f(\lambda) \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda) d\lambda \leq P_1 \right. \right\},$$

$$D_\varepsilon = \left\{ g(\lambda) \left| g(\lambda) = (1 - \varepsilon)g_1(\lambda) + \varepsilon w(\lambda), \right. \right. \\ \left. \left. \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(\lambda) d\lambda \leq P_2 \right. \right\},$$

where $g_1(\lambda)$ is a known and fixed spectral density, $w(\lambda)$ is an unknown spectral density.

Suppose the densities $f_0(\lambda) \in D_0$, $g_0(\lambda) \in D_\varepsilon$. Let us introduce the following functions

$$h_f(f_0, g_0) = \frac{|A_s(e^{i\lambda})g_0(\lambda) + C_s^0(e^{i\lambda})|^2}{(f_0(\lambda) + g_0(\lambda))^2}, \quad (11)$$

$$h_g(f_0, g_0) = \frac{|A_s(e^{i\lambda})f_0(\lambda) - C_s^0(e^{i\lambda})|^2}{(f_0(\lambda) + g_0(\lambda))^2}, \quad (12)$$

$$\Delta(h(f_0, g_0); f, g) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} h_f(f_0, g_0) f(\lambda) d\lambda + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} h_g(f_0, g_0) g(\lambda) d\lambda.$$

Suppose the functions determined by (11), (12) are bounded. In this case the functional $\Delta(h(f_0, g_0); f, g)$ is continuous and bounded in the space $L_1 \times L_1$.

It follows from the condition $0 \in \partial\Delta_{D_0 \times D_\varepsilon}(f_0, g_0)$ that the least favorable spectral densities satisfy the following equalities

$$\left| A_s(e^{i\lambda})g_0(\lambda) + C_s^0(e^{i\lambda}) \right| = \alpha_1(f_0(\lambda) + g_0(\lambda)), \quad (13)$$

$$\left| A_s(e^{i\lambda})f_0(\lambda) - C_s^0(e^{i\lambda}) \right| = (f_0(\lambda) + g_0(\lambda))(\varphi(\lambda) + \alpha_2^{-1}), \quad (14)$$

where $\varphi(\lambda) \leq 0$, and $\varphi(\lambda) = 0$, when $g_0(\lambda) \geq (1 - \varepsilon)g_1(\lambda)$, constants $\alpha_1 \geq 0$, $\alpha_2 \geq 0$. Note that $\alpha_1 \neq 0$ if $\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f_0(\lambda)d\lambda = P_1$.

Thus, the following statement holds true.

Theorem 3.1. *Let the spectral densities $f_0(\lambda) \in D_0$, $g_0(\lambda) \in D_\varepsilon$ satisfy the minimality condition (1) and let the functions determined by formulas (11), (12) be bounded. The spectral densities $f_0(\lambda)$, $g_0(\lambda)$ are the least favorable in the class $D_0 \times D_\varepsilon$ for the optimal linear interpolation of the functional $A_s\xi$ if they satisfy equations (13), (14) and determine a solution to the optimization problem (7). The minimax-robust spectral characteristic of the optimal estimate of the functional $A_s\xi$ is determined by the formula (3).*

Theorem 3.2. *Consider the spectral densities $f_0^f(\lambda) \in D_0^f$, $g_0^g(\lambda) \in D_0^g$,*

$$D_0^f = \left\{ f(\lambda) \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)d\lambda \leq P_1 \right. \right\},$$

$$D_0^g = \left\{ g(\lambda) \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(\lambda)d\lambda \leq P_2 \right. \right\},$$

which satisfy the minimality condition (1). Suppose that the functions defined by (11), (12) are bounded. The spectral densities $f_0(\lambda)$, $g_0(\lambda)$ are the least favorable in the class $D_0 \times D_\varepsilon$ for the optimal linear interpolation of the functional $A_s\xi$ if they satisfy equations

$$\left| A_s(e^{i\lambda})g_0(\lambda) + C_s^0(e^{i\lambda}) \right| = \alpha_1(f_0(\lambda) + g_0(\lambda)), \quad (15)$$

$$\left| A_s(e^{i\lambda})f_0(\lambda) - C_s^0(e^{i\lambda}) \right| = \alpha_2(f_0(\lambda) + g_0(\lambda)), \quad (16)$$

where $\alpha_1 \geq 0$, $\alpha_2 \geq 0$, $\alpha_1 \neq 0$, if $\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f_0(\lambda)d\lambda = P_1$ and $\alpha_2 \neq 0$, if

$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g_0(\lambda)d\lambda = P_2$, and the pair $(f_0(\lambda), g_0(\lambda))$ determines a solution to the optimization problem (7). The function calculated by the formula (3) is the minimax-robust spectral characteristic of the optimal estimate of the functional $A_s\xi$.

Corollary 3. *Let the spectral density $g(\lambda)$ be known, spectral density $f_0(\lambda) \in D_0$, function $(f_0(\lambda) + g(\lambda))^{-1}$ integrable and function $h_f(f_0, g)$, determined by formula (11) be bounded. The spectral density $f_0(\lambda)$ is the least favorable in the class D_0 for the optimal linear interpolation of the functional $A_s\xi$ if it is of the form*

$$f_0(\lambda) = \max\{0, \alpha_1^{-1} \left| A_s(e^{i\lambda})g(\lambda) + C_s^0(e^{i\lambda}) \right| - g(\lambda)\}$$

and the pair $(f_0(\lambda), g_0(\lambda))$ determines a solution to optimization problem (7). The function calculated by formula (3) is the minimax-robust spectral characteristic of the optimal estimate of the functional $A_s\xi$.

Corollary 4. *Let the spectral density $f_0(\lambda) \in D_0$, function $f_0^{-1}(\lambda)$ be integrable and the function determined by formula (5) be bounded. The spectral density $f_0(\lambda)$ is the least favorable in the class D_0 for the optimal linear interpolation of the functional $A_s\xi$ from the observation of the process $\xi(t)$ at points $t \in \mathbb{R} \setminus S$ if it is of the form $f_0(\lambda) = \alpha_1 \left| C_s^0(e^{i\lambda}) \right|$ and $f_0(\lambda)$ determines a solution to the optimization problem (8). The function calculated by the formula (5) is the minimax-robust spectral characteristic of the optimal estimate of the functional $A_s\xi$.*

4 Conclusions

In the article we propose methods of the mean-square optimal linear interpolation of the functional which depends on the unknown values of stationary stochastic process based on observed data of the process with noise and missing values. Under condition of spectral certainty we derive formulas for calculating the spectral density and the mean-square error of the estimate of the functional. Analogous results are derived for the case of observations of the process without noise. In the case of spectral uncertainty where certain sets of admissible densities are given we derive the relations which the least spectral densities satisfy.

Список використаних джерел

1. *Bondon P.* Influence of missing values on the prediction of a stationary time series/ P. Bondon// Journal of Time Series Analysis. – 2005. – 26, №4. – P. 519 – 525.
2. *Bondon P.* Prediction with incomplete past of a stationary process/ P. Bondon // Stochastic Process and their Applications. – 2002. – 98. – P. 67 – 76.
3. *Gikhman I.I.* The theory of stochastic processes. I. Translated from the Russian by S. Kotz. Corrected printing of the first edition. Classics in Mathematics/ I.I. Gikhman, A.V. Skorokhod // Berlin: Springer-Verlag, 2004. – 574 p.
4. *Grenander U.* A prediction problem in game theory/ U. Grenander // Ark. Math. – 1957. – Vol. 3. – P. 371 – 379.
5. *Kasahara Y.* Duals of random vectors and processes with applications to prediction problems with missing values / Y. Kasahara, M. Pourahmadi, A. Inoue // Statistics & Probability Letters. – 2009. – 79, №14. – P. 1637 – 1646.
6. *Kassam S.A.* Robust techniques for signal processing: A survey / S.A. Kassam, H.V. Poor // Proceedings of the IEEE. – 1985. – 73, №3. – P. 433 – 481.
7. *Kolmogorov A.N.* Selected works by A.N. Kolmogorov. Vol. II: Probability theory and mathematical statistics. Ed. by A.N. Shirayev, Mathematics and Its Applications. Soviet Series. Vol.26. Dordrecht etc. Kluwer Academic Publishers. / A.N. Kolmogorov // Berlin: Springer-Verlag, 1992. – 597 p.
8. *Luz M.* Minimax interpolation problem for random processes with stationary increments / M. Luz, M. Moklyachuk// Statistics, Optimization & Information Computing. – 2015. – 3(1). – P. 30 – 41.
9. *Luz M.* Minimax interpolation of random processes with stationary increments from observations with noise/ M. Luz, M. Moklyachuk// Theory of Probability and Mathematical Statistic. – 2016. – 94. – P. 117 – 130
10. *Moklyachuk M.P.* Robust estimations of functionals of stochastic processes. / M.P. Moklyachuk// K.: Kyiv University, 2008. – 319 p.
11. *Moklyachuk M.P.* Minimax-robust estimation problems for stationary stochastic sequences/ M. Moklyachuk// Statistics, Optimization & Information Computing. – 2015. – 3(4). – P. 348–419
12. *Moklyachuk M.* Periodically correlated processes estimates/ M. Moklyachuk, I. Golichenko// LAP Lambert Academic Publishing, 2016. – 308 p.
13. *Moklyachuk M.* Minimax-robust estimation technique for stationary stochastic processes/ M. Moklyachuk, O. Masyutka// LAP Lambert Academic Publishing, 2012. – 296 p.
14. *Моклячук М. П.* Інтерполяція стаціонарних послідовностей, що спостерігаються з шумом / М. П. Моклячук, М. І. Сідей// Теорія Ймовірностей та Математична Статистика. – 2015. – 93. – С. 143 – 156.
15. *Moklyachuk M.* Interpolation problem for stationary sequences with missing observations / M. Moklyachuk, M. Sidei// Statistics, Optimization & Information Computing. – 2015. – 3, №3. – P. 259 – 275.
16. *Nakazi T.* Two problems in prediction theory/T. Nakazi// Studia Math., – 1984. – 78. – P. 7–14.
17. *Rockafellar R. T.* Convex Analysis / R. T. Rockafellar// Princeton University Press, 1997. – 451 p.
18. *Rozanov Yu. A.* Stationary stochastic processes / Yu. A. Rozanov// San Francisco-Cambridge-London-Amsterdam: Holden-Day, 1967. – 211 p.
19. *Vastola K. S.* An analysis of the effects of spectral uncertainty on Wiener filtering /K. S. Vastola, H. V. Poor // Automatica. – 1983. – 28. – P. 289 – 293.

References

1. BONDON P. (2005), "Influence of missing values on the prediction of a stationary time series", *Journal of Time Series Analysis*, 26(4), pp. 519 – 525.
2. BONDON P. (2002), "Prediction with incomplete past of a stationary process", *Stochastic Process and their Applications*, 98, pp. 67 – 76.
3. GIKHMAN I.I. and SKOROKHOD A.V. (2004), *The theory of stochastic processes. I. Translated from the Russian by S. Kotz. Corrected printing of the first edition. Classics in Mathematics*, Berlin: Springer-Verlag.
4. GRENANDER U. (1957), "A prediction problem in game theory", *Arkiv för Matematik*, 3, pp. 371 – 379.
5. KASAHARA Y., POURAHMADI M. and INOUE A. (2009), "Duals of random vectors and processes with applications to prediction problems with missing values", *Statistics & Probability Letters*, 79(14), pp. 1637 – 1646.
6. KASSAM S.A. and POOR H.V. (1985), "Robust techniques for signal processing: A survey", *Proceedings of the IEEE*, 73(3), pp. 433 – 481.
7. KOLMOGOROV A.N. (1992), *Selected works by A. N. Kolmogorov. Vol. II: Probability theory and mathematical statistics. Ed. by A.N. Shiriyayev, Mathematics and Its Applications. Soviet Series. Vol.26*. Dordrecht etc. Kluwer Academic Publishers.
8. LUZ M. and MOKLYACHUK M. (2015), "Minimax interpolation problem for random processes with stationary increments", *Statistics, Optimization & Information Computing*, 3(1), pp. 30 – 41.
9. LUZ M. and MOKLYACHUK M. (2016), "Minimax interpolation of random processes with stationary increments from observations with noise" *Theory of Probability and Mathematical Statistic*, 94, pp. 117 – 130.
10. MOKLYACHUK M.P. (2008), *Robust estimations of functionals of stochastic processes*. Kyiv University, Kyiv.
11. MOKLYACHUK M.P. (2015), "Minimax-robust estimation problems for stationary stochastic sequences", *Statistics, Optimization & Information Computing*, 3(4), pp. 348–419
12. MOKLYACHUK M. and GOLICHENKO I. (2016), *Periodically correlated processes estimates*. LAP Lambert Academic Publishing.
13. MOKLYACHUK M. and MASYUTKA O. (2012), *Minimax-robust estimation technique for stationary stochastic processes*. LAP Lambert Academic Publishing.
14. MOKLYACHUK M.P. and SIDEI M.I. (2015), "Interpolation of stationary sequences with noise", *Theory of Probability and Mathematical Statistic*, 93, pp. 143 – 156.
15. MOKLYACHUK M.P. and SIDEI M.I. (2015), "Interpolation problem for stationary sequences with missing observations", *Statistics, Optimization & Information Computing*, 3(3), p. 259 – 275.
16. NAKAZI T. (1984), "Two problems in prediction theory", *Studia Math.*, 78, pp. 7 – 14.
17. ROCKAFELLAR R.T. (1997), *Convex Analysis*. Princeton University Press.
18. ROZANOV YU.A. (1967), *Stationary stochastic processes*. San Francisco-Cambridge-London-Amsterdam: Holden-Day.
19. VASTOLA K.S. and POOR H.V. (1983), "An analysis of the effects of spectral uncertainty on Wiener filtering", *Automatica*, 28, pp. 289 – 293.

Received: 10.11.2015

УДК 512.54

А.С. Олійник

**Самоподібні замикання вільних
добутків циклічних груп порядку 2**

Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 01033, Київ, вул. Володи-
мирська, 64.

e-mail: olijnyk@univ.kiev.ua

A.S. Oliynyk

**Self-similar closures of free products of
cyclic groups of order 2**

Taras Shevchenko National University of
Kyiv, 01033, Kyiv, 64 Volodymyrska st.

e-mail: olijnyk@univ.kiev.ua

*Описано самоподібні замикання певних скінченно станових точних зображень вільних до-
бутків циклічних груп порядку 2.*

Ключові слова: самоподібна група, скінченний автомат, вільний добуток.

A group G faithfully acting on the set of all finite words over an alphabet X is called self-similar if for arbitrary letter x from X and group element g from G there exist a letter y from X and an element h from G such that for all words w over X the image of xw under g equals to y concatenated with the image of w under h . Self-similar actions of G over X exist if and only if there exist an automaton A over X such that the group of A is isomorphic to G . Each faithful representation of G on the set of all finite words over X defined by initial automata over X gives rise to the self-similar closure of G . Certain faithful representations of free products of cyclic groups of order 2 are considered and their self-similar closures are described.

Key Words: self-similar group, finite automaton, free product.

Communicated by Prof. Kirichenko V. V.

1 Introduction

In this short note it is described explicitly the self-similar groups naturally arising from faithful finite automaton actions of free products of cyclic groups of order 2 defined in [1]. These actions are determined by 2-state initial automata and are not self-similar. The examples of self-similar finite automaton actions of these free products were constructed in [2]. It is natural to ask for the minimal self-similar group containing an isomorphic copy of G generated by initial automata, i.e. to describe the self-similar closure of G . The main result of this paper is the description of self-similar closures of free products mentioned above. It will be interesting to describe self-similar closures of free products whose automaton actions were defined in [3].

2 Preliminaries

Let X be a finite non-empty set. Denote by X^* the free monoid with basis X , i.e. the set of all finite words over X including the empty word Λ under concatenation. The set X^* is partially ordered by the prefix relation $\lesssim$, i.e. $u \lesssim v$ for $u, v \in X^*$, iff $v = uw$ for some $w \in X^*$. Denote by $GA(X)$ the

automorphism group of the poset $(X^*, \lesssim)$.

A subgroup G of $GA(X)$ is called self-similar ([4]) if for arbitrary $x \in X$ and $g \in G$ there exist $y \in X$ and $h \in G$ such that $(xw)^g = y(w)^h$ for all $w \in X^*$. The group $GA(X)$ is self-similar and for each of its subgroups G one can define its self-similar closure as the intersection of all self-similar subgroups of $GA(X)$ containing G . Self-similarity can be naturally described by automata.

An automaton A over X is a triple (Q, φ, ψ) , where Q is the nonempty set of states of A , $\varphi : Q \times X \rightarrow Q$ is the transition function and $\psi : Q \times X \rightarrow X$ is the output function of A . Each state $q \in Q$ gives rise to a transformation on X^* , denoted by the same letter q , and defined by the recursive rule $\Lambda^q = \Lambda$, $x^q = \psi(q, x)$, $(xw)^q = x^q w^{\varphi(q, x)}$, $x \in X, w \in X^*$. The transformation q preserves the partial order $\lesssim$ but it may be not a permutation. If all these transformations are one-to-one then the automaton A is called invertible. For an invertible automaton A the subgroup of the group $GA(X)$ generated by all transformations $q \in Q$ is called the group of automaton A and denoted $G(A)$. Groups of automata are self-similar subgroups of $GA(X)$ and vice versa, for each self-similar subgroup G of $GA(X)$ one can find an automaton A such that $G = G(A)$.

3 Main result

Let $X = \{0, 1, \dots, n\}$, $n \geq 1$. Consider an automaton A_n over X with the set of states $\{a_i, b_i : 1 \leq i \leq n\}$. The transition and output functions of A_n are defined by the equalities

$$\varphi(a_i, j) = \varphi(b_i, j) = \begin{cases} a_i, & j = 0 \text{ or } j = i \\ b_i, & j \neq 0 \text{ and } j \neq i \end{cases},$$

$$\psi(a_i, j) = \begin{cases} i, & j = 0 \\ 0, & j = i \\ j, & j \neq 0 \text{ and } j \neq i \end{cases}, \varphi(b_i, j) = j,$$

where $1 \leq i \leq n$, $0 \leq j \leq n$. In [1], where A_n was defined, it is shown that the subgroups of $GA(X)$ generated by the sets $\{a_i : 1 \leq i \leq n\}$ and $\{b_i : 1 \leq i \leq n\}$ splits into the free product of n copies of cyclic groups of order 2. The group of the automaton $G(A_n)$ is the self-similar closure of both these subgroups and the following theorem characterizes this self-similar group.

Theorem 1. 1) Every group $\langle a_i, b_i \rangle$ ($1 \leq i \leq n$) is isomorphic to the Klein four-group. 2) The group $\langle a_1 b_1, \dots, a_n b_n \rangle$ is isomorphic to the symmetric group of degree $n + 1$. 3) The group $\langle c_1, \dots, c_n \rangle$, where $c_i = a_i$ or $c_i = b_i$, $1 \leq i \leq n$, is isomorphic to the free product of n copies of cyclic groups of order 2.

Proof. The definition of $G(A_n)$ implies that $c_i \in \{a_i, b_i\}$, $1 \leq i \leq n$, act on X^* as follows. For arbitrary word $w \in X^*$ and any letter j of w this letter changes under c_i in two cases. In the first case j is the first letter of w and $c_i = a_i$. In the second case j is not the first letter of w and the previous letter of w equals 0 or i . In both cases j equals 0 or i and c_i permutes these letters. This observation means that c_i has order 2. Moreover, the products $a_i b_i$ and $b_i a_i$ act on X as the transposition $(0i)$ and preserves all other words from X^* . The first and the second statements of the theorem follow.

Let us fix a group $\langle c_1, \dots, c_n \rangle$, $c_i \in \{a_i, b_i\}$, $1 \leq i \leq n$. To prove the third statement it is sufficient to show that the product $g = c_{i_1} \dots c_{i_m}$, where $1 \leq i_1, \dots, i_m \leq n$ and $i_k \neq i_{k+1}$, $1 \leq k \leq m - 1$, acts non-trivially on X^* . Consider a word $w = 0i_1 \dots i_m$. We will show that w is not a fixed point of g . For each k , $1 \leq k \leq m$, denote by g_k the product $c_{i_1} \dots c_{i_k}$. It is enough to prove that the $(k + 1)$ th letter of the word w^{g_k} equals 0 and all next letters of this word are the same as in w . It follows by induction on k from the observation made at the beginning of the proof and inequalities $i_k \neq i_{k+1}$, $1 \leq k \leq m - 1$. The proof is complete. $\square$

Theorem 1 allows one to derive the set of defining relations of the group $G(A_n)$.

Список використаних джерел

1. Lavrenyuk Y. Faithful group actions on rooted trees induced by actions of quotients/ Y. Lavrenyuk, V. Mazorchuk, A. Oliynyk, V. Sushchansky// Communications in Algebra. –2007. – **35**. – P.3759-3775.
2. Savchuk D. Automata generating free products of groups of order 2/ D. Savchuk, Y. Vorobets// Journal of Algebra. –2011. – **336**. – P.53-66.
3. Oliynyk A. S. Two-state automorphisms of rooted trees and free products of finite groups / A. S. Oliynyk // Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Physics and Mathematics Series — 2010. — № 3. — P. 74–76.
4. Nekrashevych V. Self-similar groups/ V. Nekrashevych// AMS, – 2005, – 232p.

References

1. LAVRENYUK, Y., MAZORCHUK, V., OLIYNYK, A. and SUSHCHANSKY, V. (2007) "Faithful group actions on rooted trees induced by actions of quotients", Communications in Algebra, **v.35**, pp.3759-3775.
2. SAVCHUK, D. and VOROBETS, Y. (2011) "Automata generating free products of groups of order 2", Journal of Algebra, **336**, pp.53-66.
3. OLIYNYK, A. S. (2010) "Two-state automorphisms of rooted trees and free products of finite groups", Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Physics and Mathematics Series, № 3, pp. 74-76.
4. NEKRASHEVYCH, V. (2005) "Self-similar groups", AMS.

Received: 11.09.2015

**ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ
РІВНЯННЯ,
МАТЕМАТИЧНА ФІЗИКА
ТА МЕХАНІКА**

УДК 517.9

I. В. Бецко, аспірант

Неперервні обмежені розв'язки систем нелінійних функціонально-різницевих рівнянь

Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут», 03056, м.
Київ, пр. Перемоги, 37,
e-mail: betskoiv@mail.ru

I. V. Betsko, graduate student

Continuous bounded solutions of nonlinear functional-difference equations systems

National Technical University of Ukraine “Kyiv
Polytechnic Institute”, 03056, Kyiv-56, Av.
Peremogy, 37
e-mail: betskoiv@mail.ru

Встановлено нові умови існування неперервних обмежених розв'язків систем нелінійних функціонально-різницевих рівнянь, запропоновано метод побудови таких розв'язків та досліджено структуру їх множини.

Ключові слова: різницеві рівняння, функціонально-різницеві рівняння, неперервні обмежені розв'язки.

We consider the structure of a set of continuous bounded solutions of difference equations systems and their properties. Under various assumptions, the difference equations have been the object of research of many mathematicians, the development of their theory acquired a number of currents. Today this theory is widely branching and already has a lot of tangible results. Especially it concerns the existence of different kinds of solutions (analytic, continuous and others) and investigation of their properties. Despite this, during the research of numerous theoretical problems connected with them, we have to develop specific methods of solution since methods available do not give desired results.

The objective is to study existence of continuous limited solutions, study the structure of their set and also developing the method of their construction. Performed researches add to already existent works of other mathematicians and facilitate further study of the continuous limited solutions of wider classes of functional-difference equations.

Key words: difference equations, functional -difference equations, continuous limited solutions.

Статтю представив академік НАНУ, д.ф.-м.н., проф. Перестюк М. О.

Робота присвячена дослідженню множини неперервних розв'язків системи рівнянь вигляду

$$x(t+1) = Ax(t) + F(t, x(qt)) \quad (1)$$

де $t \in \mathbb{R}$, A – дійсна стала $(n \times n)$ -матриця, q – дійсна стала, $F(t, x)$ – деяка дійсна неперервна при $t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^n$ вектор-функція. Окремі класи таких рівнянь вивчалися багатьма математиками і на сьогодні низка питань їх теорії досить детально вивчена. Особливо це стосується існування різного роду (аналітичних, неперервних тощо) розв'язків і дослідження їх властивостей. У роботі продовжується дослідження аналогічних питань для таких систем рівнянь.

Розглянемо систему рівнянь (1). Відносно матриці A будемо припускати, що її власні значення $\lambda_i, i = 1, \dots, n$, задовольняють умові

$$|\lambda_i| \neq 0, 1, i = 1, \dots, n.$$

Тоді існує заміна змінних

$$x(t) = Cy(t),$$

де C – деяка неособлива $(n \times n)$ -матриця, яка приводить систему рівнянь (1) до вигляду

$$y(t+1) = Jy(t) + \tilde{F}(t, y(qt)), \quad (2)$$

де $\tilde{F}(t, y) = F(t, Cy)$, $J = \text{diag}(J_1(\lambda_1), \dots, J_m(\lambda_m))$,

$$J_i(\lambda_i) = \begin{pmatrix} \lambda_i & \varepsilon & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_i & \varepsilon & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_i & \varepsilon \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \lambda_i \end{pmatrix},$$

$$i = 1, \dots, m, m \leq n.$$

Дослідимо систему рівнянь (2) у випадку, коли виконуються умови:

1. $0 < \lambda_i < 1, i = 1, \dots, m, q > 0$;
2. $\Delta = \frac{L}{1 - (\lambda^* + \delta_1)} < 1, \delta_1 = \delta_1(\varepsilon) \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$,
 $\lambda^* = \max \{\lambda_i, i = 1, \dots, m\}$;
3. $|\tilde{F}(t, y') - \tilde{F}(t, y'')| \leq L|y' - y''|$, де $t \in \mathbb{R}$,
 $y', y'' \in \mathbb{R}^n, L$ - деяка додатна стала;
4. всі елементи вектор-функції $\tilde{F}(t, 0)$ є неперервними й обмеженими при всіх $t \in \mathbb{R}$ функціями і $\sup_t |\tilde{F}(t, 0)| = M < \infty$.

Має місце теорема.

Теорема 1. Нехай виконуються умови 1 – 4. Тоді система рівнянь (2) має неперервний обмежений при $t \in \mathbb{R}$ розв'язок у вигляді функціонального ряду

$$y(t) = \sum_{i=0}^{\infty} y_i(t) \quad (3)$$

де $y_i(t), i = 0, 1, \dots$, – деякі неперервні вектор-функції.

Доведення. Якщо $|y_i(t)| \leq M_* \Delta^i$ (що буде доведено пізніше), то

$$\begin{aligned} \tilde{F}(t, y_0(qt)) + \sum_{i=2}^{\infty} \left(\tilde{F}(t, \sum_{j=0}^{i-1} y_j(qt)) - \tilde{F}(t, \sum_{j=0}^{i-2} y_j(qt)) \right) = \\ = \tilde{F}(t, \sum_{j=0}^{\infty} y_j(qt)). \end{aligned}$$

Дійсно, оскільки при всіх $m \geq 1$ виконуються співвідношення

$$\begin{aligned} \tilde{F}(t, y_0(qt)) + \sum_{i=2}^{m+1} \left(\tilde{F}(t, \sum_{j=0}^{i-1} y_j(qt)) - \tilde{F}(t, \sum_{j=0}^{i-2} y_j(qt)) \right) = \\ = \tilde{F}(t, \sum_{j=0}^m y_j(qt)), \end{aligned}$$

то внаслідок умови 3) теореми отримуємо

$$\begin{aligned} \left| \tilde{F}(t, \sum_{j=0}^{\infty} y_j(qt)) - \tilde{F}(t, \sum_{j=0}^m y_j(qt)) \right| \leq \\ \leq L \left| \sum_{j=0}^{\infty} y_j(qt) - \sum_{j=0}^m y_j(qt) \right| \leq L \left| \sum_{j=m+1}^{\infty} y_j(qt) \right| \leq \\ \leq L \sum_{j=m+1}^{\infty} M_* \Delta^j \leq LM_* \frac{\Delta^{m+1}}{1 - \Delta}. \end{aligned}$$

Отже, в силу умови 2) знайдеться таке натуральне число N , що при всіх $m \geq N$ має місце нерівність

$$LM_* \frac{\Delta^{m+1}}{1 - \Delta} \leq \varepsilon.$$

Таким чином, для всіх $m \geq N, t \in \mathbb{R}$ виконується нерівність

$$\left| \tilde{F}(t, \sum_{j=0}^{\infty} y_j(qt)) - \tilde{F}(t, \sum_{j=0}^m y_j(qt)) \right| \leq \varepsilon,$$

і, отже, має місце співвідношення

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \tilde{F}(t, \sum_{j=0}^m y_j(qt)) = \tilde{F}(t, \sum_{j=0}^{\infty} y_j(qt)).$$

Цим самим доведено, що ряд

$$\tilde{F}(t, y_0(qt)) + \sum_{i=2}^{\infty} \left(\tilde{F}(t, \sum_{j=0}^{i-1} y_j(qt)) - \tilde{F}(t, \sum_{j=0}^{i-2} y_j(qt)) \right)$$

рівномірно збігається при $t \in \mathbb{R}$ і його сума

$$\text{дорівнює } \tilde{F}(t, \sum_{j=0}^{\infty} y_j(qt)).$$

Далі, підставивши (3) в (2), отримуємо

$$\sum_{i=0}^{\infty} y_i(t+1) = J \sum_{i=0}^{\infty} y_i(t) + \tilde{F}(t, \sum_{i=0}^{\infty} y_i(t)).$$

Звідси випливає, що якщо вектор-функції $y_i(t), i = 0, 1, \dots$, є розв'язками послідовності систем рівнянь

$$y_0(t+1) = Jy_0(t) + \tilde{F}(t, 0), \quad (4_0)$$

$$y_1(t+1) = Jy_1(t) + \tilde{F}(t, y_0(qt)) - \tilde{F}(t, 0), \quad (4_1)$$

$$y_i(t+1) = Jy_i(t) + \tilde{F}(t, \sum_{j=0}^{i-1} y_j(qt)) - \tilde{F}(t, \sum_{j=0}^{i-2} y_j(qt)), \quad i = 2, 3, \dots, \quad (4_i)$$

то ряд (3) буде формальним розв'язком системи рівнянь (2).

Розглядаючи послідовно системи рівнянь (4_i), $i = 0, 1, \dots$, можна показати, що вони мають розв'язки у вигляді формальних рядів

$$y_0(t) = \sum_{j=1}^{\infty} J^{j-1} \tilde{F}(t-j, 0), \quad (5_0)$$

$$y_1(t) = \sum_{j=1}^{\infty} J^{j-1} [\tilde{F}(t-j, y_0(q(t-j))) - \tilde{F}(t-j, 0)] \quad (5_1)$$

$$y_i(t) = \sum_{j=1}^{\infty} J^{j-1} \left[\tilde{F}(t-j, \sum_{j=0}^{i-1} y_j(q(t-j))) - \tilde{F}(t-j, \sum_{j=0}^{i-2} y_j(q(t-j))) \right], \quad i = 2, 3, \dots \quad (5_i)$$

Для того, щоб (5_i) були розв'язками послідовності систем рівнянь (4_i) достатньо показати, що ці ряди рівномірно збігаються до

деяких неперервних вектор-функцій $y_i(t), i=1, 2, \dots$, для яких виконуються оцінки

$$|y_i(t)| \leq M_* \Delta^i. \quad (6)$$

Приймаючи до уваги (5₀), отримуємо

$$\begin{aligned} |y_0(t)| &\leq \left| \sum_{j=1}^{\infty} J^{j-1} \tilde{F}(t-j, 0) \right| \leq \sum_{j=1}^{\infty} |J|^{j-1} \sup \tilde{F} \leq \\ &\leq \sum_{j=1}^{\infty} (\lambda^* + \delta_1)^{j-1} M \leq \frac{M}{1 - (\lambda^* + \delta_1)} = M_*. \quad (7) \end{aligned}$$

Далі, з огляду на (7) та (5₁) отримуємо

$$\begin{aligned} |y_1(t)| &\leq \sum_{j=1}^{\infty} |J|^{j-1} |\tilde{F}(t-j, y_0(q(t-j))) - \tilde{F}(t-j, 0)| \leq \\ &\leq \sum_{j=1}^{\infty} (\lambda^* + \delta_1)^{j-1} L |y_0(q(t-j))| \leq \\ &\leq M_* \frac{L}{1 - (\lambda^* + \delta_1)} = M_* \Delta. \end{aligned}$$

Таким чином, оцінка (6) має місце при $i=0, 1$. Розмірковуючи за індукцією, припустимо, що вона доведена уже для деякого k , і покажемо, що вона не зміниться при переході від k до $k+1$. Згідно з (5_{k+1}) і (6) маємо

$$\begin{aligned} |y_{k+1}(t)| &\leq \sum_{j=1}^{\infty} |J|^{j-1} \left| \tilde{F}(t-j, \sum_{j=0}^k y_j(q(t-j))) - \right. \\ &\quad \left. - \tilde{F}(t-j, \sum_{j=0}^{k-1} y_j(q(t-j))) \right| \leq \\ &\leq \sum_{j=1}^{\infty} (\lambda^* + \delta_1)^{j-1} L \left| \sum_{j=0}^k y_j(q(t-j)) - \sum_{j=0}^{k-1} y_j(q(t-j)) \right| \leq \\ &\leq \sum_{j=1}^{\infty} (\lambda^* + \delta_1)^{j-1} L |y_k(q(t-j))| \leq \\ &\leq \frac{L}{1 - (\lambda^* + \delta_1)} M_* \Delta^k \leq M_* \Delta^{k+1}. \end{aligned}$$

Цим самим оцінки (6) повністю доведено і, отже, ряд (3) рівномірно збігається при всіх $t \in \mathbb{R}$ до деякої неперервної при $t \in \mathbb{R}$ вектор-функції $y(t)$, яка є розв'язком системи рівнянь (2) і задовольняє умові

$$|y(t)| \leq \frac{M_*}{1 - \Delta}.$$

Теорему доведено.

Дослідимо тепер систему рівнянь (2) у випадку, коли виконуються умови:

1. $\lambda_i > 1, i=1, \dots, m, q > 0$;

$$2. \quad \theta = L \frac{\lambda_*^{-1} + \delta_2}{1 - (\lambda_*^{-1} + \delta_2)} < 1, \delta_2 = \delta_2(\varepsilon) \rightarrow 0 \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0,$$

$$\lambda_* = \min \{ \lambda_i, i=1, \dots, m \};$$

$$3. \quad |\tilde{F}(t, y') - \tilde{F}(t, y'')| \leq L |y' - y''|, \text{ де } t \in \mathbb{R},$$

$$y', y'' \in \mathbb{R}^n, L - \text{деяка додатна стала};$$

$$4. \quad \text{всі елементи вектор-функції } \tilde{F}(t, 0) \text{ є неперервними й обмеженими при всіх } t \in \mathbb{R} \text{ функціями і } \sup_t |\tilde{F}(t, 0)| = M < \infty.$$

Має місце теорема.

Теорема 2. Нехай виконуються умови 1 – 4. Тоді система рівнянь (2) має неперервний обмежений при $t \in \mathbb{R}$ розв'язок у вигляді ряду

$$\bar{y}(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \bar{y}_i(t), \quad (8)$$

де $\bar{y}_i(t), i=0, 1, \dots$, - деякі неперервні й обмежені при $t \in \mathbb{R}$ вектор-функції.

Доведення. Як і в попередній теоремі, можна показати, що ряд

$$\tilde{F}(t, \bar{y}_0(qt)) + \sum_{i=2}^{\infty} \left(\tilde{F}(t, \sum_{j=0}^{i-1} \bar{y}_j(qt)) - \tilde{F}(t, \sum_{j=0}^{i-2} \bar{y}_j(qt)) \right)$$

рівномірно збігається при $t \in \mathbb{R}$,

$|\bar{y}_i(t)| \leq \bar{M}_* \theta^i, i \geq 0$ і його сума дорівнює

$$\tilde{F}(t, \sum_{j=0}^{\infty} \bar{y}_j(qt)).$$

Отже, підставивши (8) в (2), отримуємо

$$\sum_{i=0}^{\infty} \bar{y}_i(t+1) = J \sum_{i=0}^{\infty} \bar{y}_i(t) + \tilde{F}(t, \sum_{i=0}^{\infty} \bar{y}_i(t)),$$

звідки випливає, що якщо вектор-функції $\bar{y}_i(t), i=0, 1, \dots$, є розв'язками послідовності систем рівнянь

$$\bar{y}_0(t+1) = J \bar{y}_0(t) + \tilde{F}(t, 0), \quad (9_0)$$

$$\bar{y}_1(t+1) = J \bar{y}_1(t) + \tilde{F}(t, \bar{y}_0(qt)) - \tilde{F}(t, 0), \quad (9_1)$$

$$\bar{y}_i(t+1) = J \bar{y}_i(t) + \tilde{F}(t, \sum_{j=0}^{i-1} \bar{y}_j(qt)) - \tilde{F}(t, \sum_{j=0}^{i-2} \bar{y}_j(qt)), \quad i=2, 3, \dots, \quad (9_i)$$

то ряд (8) буде формальним розв'язком системи рівнянь (2).

Згідно з умовами теореми ряд

$$\bar{y}_0(t) = - \sum_{j=0}^{\infty} J^{-(j+1)} \tilde{F}(t+j, 0) \quad (10)$$

рівномірно збігається при всіх $t \in \mathbb{R}$, задовольняє систему (9₀) (в цьому можна переконатися

безпосередньою підстановкою в (9₀) і виконується оцінка

$$\begin{aligned} |\bar{y}_0(t)| &\leq \left| \sum_{j=0}^{\infty} J^{-(j+1)} \tilde{F}(t+j, 0) \right| \leq \sum_{j=0}^{\infty} |J^{-1}|^{j+1} |\sup \tilde{F}| \leq \\ &\leq \sum_{j=0}^{\infty} (\lambda_*^{-1} + \delta_2)^{j+1} \bar{M} \leq \frac{\lambda_*^{-1} + \delta_2}{1 - (\lambda_*^{-1} + \delta_2)} \bar{M} = \bar{M}_*. \quad (11) \end{aligned}$$

Розглядаючи послідовно системи рівнянь (9_i), $i=1, 2, \dots$, можна за індукцією показати, що ряди

$$\begin{aligned} \bar{y}_i(t) = & - \sum_{j=0}^{\infty} J^{-(j+1)} \left[\tilde{F}(t+j, \sum_{j=0}^{i-1} \bar{y}_j(q(t+j))) - \right. \\ & \left. - \tilde{F}(t+j, \sum_{j=0}^{i-2} \bar{y}_j(q(t+j))) \right], i=1, 2, \dots \quad (12_i) \end{aligned}$$

рівномірно збігаються при всіх $t \in \mathbb{R}$, задовольняють відповідні системи рівнянь (9_i), $i=1, 2, \dots$, і виконуються оцінки

$$|\bar{y}_i(t)| \leq \bar{M}_* \theta^i, i=1, 2, \dots \quad (13)$$

Таким чином, ряд (8) рівномірно збігається при $t \in \mathbb{R}$ до деякого неперервного розв'язку $\bar{y}(t)$, який задовольняє умові

$$|\bar{y}(t)| \leq \frac{\bar{M}_*}{1 - \theta}$$

Теорему доведено.

Перепишемо систему рівнянь (2) у вигляді

$$\begin{aligned} y^1(t+1) &= J_1 y^1(t) + \tilde{F}^1(t, y^1(qt), y^2(qt)), \\ y^2(t+1) &= J_2 y^2(t) + \tilde{F}^2(t, y^1(qt), y^2(qt)), \end{aligned} \quad (14)$$

де

$$\begin{aligned} J_1 &= \text{diag}(J_1(\lambda_1), \dots, J_k(\lambda_k)), \\ J_1 &= \text{diag}(J_{k+1}(\lambda_{k+1}), \dots, J_m(\lambda_m)), m \leq n. \end{aligned}$$

Теорема 3. Нехай виконуються умови:

- $0 < \lambda_i < 1 < \lambda_j, i=1, \dots, k, j=k+1, \dots, m, q > 0$;
- $\theta = \max \left\{ \frac{2L}{1 - (\lambda_*^{-1} + \delta_3)}, \frac{2L(\lambda_*^{-1} + \delta_4)}{1 - (\lambda_*^{-1} + \delta_4)} \right\} < 1$,
 $\lambda_* = \max \{ \lambda_i, i=1, \dots, k \}$,
 $\lambda_{**} = \min \{ \lambda_j, j=k+1, \dots, m \}$;
- $|\tilde{F}^i(t, y'_1, y'_2) - \tilde{F}^i(t, y''_1, y''_2)| \leq L(|y'_1 - y''_1| + |y'_2 - y''_2|), i=1, 2$, де $t \in \mathbb{R}, y'_1, y'_2, y''_1, y''_2 \in \mathbb{R}^n$,
 L - деяка додатна стала;

4. всі компоненти вектор-функцій $\tilde{F}^i(t, 0, 0), i=1, 2$ є неперервними й обмеженими при всіх $t \in \mathbb{R}$ функціями.

Тоді система рівнянь (14) має неперервний і обмежений при $t \in \mathbb{R}$ розв'язок

$$y(t) = (y^1(t), y^2(t)).$$

Доведення. Розв'язок системи (14) шукатимемо у вигляді функціональних рядів

$$\begin{aligned} y^1(t) &= \sum_{i=0}^{\infty} y^1_i(t), \\ y^2(t) &= \sum_{i=0}^{\infty} y^2_i(t), \end{aligned} \quad (15)$$

де $y^1_i(t), y^2_i(t), i=0, 1, \dots$, - деякі неперервні й обмежені при $t \in \mathbb{R}$ вектор-функції.

Як і в попередніх теоремах, можна показати, що ряди

$$\begin{aligned} \tilde{F}^1(t, y^1_0(qt), y^2_0(qt)) + \sum_{i=2}^{\infty} \left(\tilde{F}^1 \left(t, \sum_{j=0}^{i-1} y^1_j(qt), \sum_{j=0}^{i-1} y^2_j(qt) \right) - \right. \\ \left. - \tilde{F}^1 \left(t, \sum_{j=0}^{i-2} y^1_j(qt), \sum_{j=0}^{i-2} y^2_j(qt) \right) \right) - \\ \tilde{F}^2(t, y^1_0(qt), y^2_0(qt)) + \sum_{i=2}^{\infty} \left(\tilde{F}^2 \left(t, \sum_{j=0}^{i-1} y^1_j(qt), \sum_{j=0}^{i-1} y^2_j(qt) \right) - \right. \\ \left. - \tilde{F}^2 \left(t, \sum_{j=0}^{i-2} y^1_j(qt), \sum_{j=0}^{i-2} y^2_j(qt) \right) \right) \end{aligned}$$

рівномірно збігаються при $t \in \mathbb{R}$, $|y^1_i(t)| \leq M' \theta^i$,

$|y^2_i(t)| \leq M' \theta^i, i \geq 0$ і їх суми дорівнюють

$$\tilde{F}^1(t, \sum_{j=0}^{\infty} y^1_j(qt), \sum_{j=0}^{\infty} y^2_j(qt)), \tilde{F}^2(t, \sum_{j=0}^{\infty} y^1_j(qt), \sum_{j=0}^{\infty} y^2_j(qt))$$

відповідно.

Тоді, підставляючи (15) в (14), отримуємо

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{\infty} y^1_i(t+1) &= J_1 \sum_{i=0}^{\infty} y^1_i(t) + \tilde{F}^1(t, \sum_{i=0}^{\infty} y^1_i(qt), \sum_{i=0}^{\infty} y^2_i(qt)), \\ \sum_{i=0}^{\infty} y^2_i(t+1) &= J_2 \sum_{i=0}^{\infty} y^2_i(t) + \tilde{F}^2(t, \sum_{i=0}^{\infty} y^1_i(qt), \sum_{i=0}^{\infty} y^2_i(qt)), \end{aligned}$$

звідки безпосередньо випливає, що якщо вектор-функції $y^1_i(t), y^2_i(t), i=0, 1, \dots$, є розв'язками послідовності систем рівнянь

$$\begin{aligned} y^1_0(t+1) &= J_1 y^1_0(t) + \tilde{F}^1(t, 0, 0), \\ y^2_0(t+1) &= J_2 y^2_0(t) + \tilde{F}^2(t, 0, 0), \end{aligned} \quad (16_0)$$

$$y^1_i(t+1) = J_1 y^1_i(t) + \tilde{F}^1(t, y^1_0(qt), y^2_0(qt)) - \tilde{F}^1(t, 0, 0), \quad (16_1)$$

$$\begin{aligned} y_1^2(t+1) &= J_2 y_1^2(t) + \tilde{F}^2(t, y_0^1(qt), y_0^2(qt)) - \tilde{F}^2(t, 0, 0), \\ y_i^1(t+1) &= J_1 y_i^1(t) + \tilde{F}^1\left(t, \sum_{j=0}^{i-1} y_j^1(qt), \sum_{j=0}^{i-1} y_j^2(qt)\right) - \\ &\quad - \tilde{F}^1\left(t, \sum_{j=0}^{i-2} y_j^1(qt), \sum_{j=0}^{i-2} y_j^2(qt)\right), \\ &\quad i = 2, 3, \dots, \end{aligned} \quad (16_i)$$

$$\begin{aligned} y_i^2(t+1) &= J_2 y_i^2(t) + \tilde{F}^2\left(t, \sum_{j=0}^{i-1} y_j^1(qt), \sum_{j=0}^{i-1} y_j^2(qt)\right) - \\ &\quad - \tilde{F}^2\left(t, \sum_{j=0}^{i-2} y_j^1(qt), \sum_{j=0}^{i-2} y_j^2(qt)\right), \end{aligned}$$

то ряди (15) є формальним розв'язком системи рівнянь (14).

Приймаючи до уваги умови теореми, можна переконатися, що ряди

$$\begin{aligned} y_0^1(t) &= \sum_{j=1}^{\infty} J_1^{j-1} \tilde{F}^1(t-j, 0, 0), \\ y_0^2(t) &= -\sum_{j=0}^{\infty} J_2^{-(j+1)} \tilde{F}^2(t+j, 0, 0). \end{aligned} \quad (17_0)$$

рівномірно збігаються при $t \in \mathbb{R}$, задовольняють систему рівнянь (16₀) і виконуються оцінки

$$\begin{aligned} |y_0^1(t)| &\leq \frac{M^1}{1 - (\lambda^* + \delta_3)}, \\ |y_0^2(t)| &\leq \frac{M^2(\lambda_{**}^{-1} + \delta_4)}{1 - (\lambda_{**}^{-1} + \delta_4)}, \end{aligned} \quad (18_0)$$

де $M^1 = \sup_t |\tilde{F}^1(t, 0, 0)|$, $M^2 = \sup_t |\tilde{F}^2(t, 0, 0)|$.

Згідно з (18₀) отримуємо оцінку

$$|y_0(t)| \leq M' = \left\{ \frac{M^1}{1 - (\lambda^* + \delta_3)}, \frac{M^2(\lambda_{**}^{-1} + \delta_4)}{1 - (\lambda_{**}^{-1} + \delta_4)} \right\}. \quad (19_0)$$

Враховуючи (16₀) та (18₀) можна послідовно показати, що ряди

$$y_i^1(t) =$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{j=1}^{\infty} J_1^{j-1} \left[\tilde{F}^1\left(t-j, \sum_{j=0}^{i-1} y_j^1(q(t-j)), \sum_{j=0}^{i-1} y_j^2(q(t-j))\right) - \right. \\ &\quad \left. - \tilde{F}^1\left(t-j, \sum_{j=0}^{i-2} y_j^1(q(t-j)), \sum_{j=0}^{i-2} y_j^2(q(t-j))\right) \right], \\ &\quad i = 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (17_i)$$

$$\begin{aligned} y_i^2(t) &= \\ &= -\sum_{j=0}^{\infty} J_2^{-(j+1)} \left[\tilde{F}^2\left(t+j, \sum_{j=0}^{i-1} y_j^1(q(t+j)), \sum_{j=0}^{i-1} y_j^2(q(t+j))\right) - \right. \\ &\quad \left. - \tilde{F}^2\left(t+j, \sum_{j=0}^{i-2} y_j^1(q(t+j)), \sum_{j=0}^{i-2} y_j^2(q(t+j))\right) \right], \end{aligned}$$

рівномірно збігаються при $t \in \mathbb{R}$, задовольняють систему рівнянь (16_i), $i = 1, 2, \dots$, і виконуються оцінки

$$\begin{aligned} |y_i^1(t)| &\leq M' \theta^i, \\ |y_i^2(t)| &\leq M' \theta^i, \end{aligned} \quad i = 1, 2, \dots \quad (18_i)$$

Звідси випливає, що ряди (15) рівномірно збігаються при $t \in \mathbb{R}$ до деякої неперервної вектор-функції $y(t) = (y^1(t), y^2(t))$, яка є розв'язком системи рівнянь (14) і задовольняє умову

$$|y(t)| \leq \frac{M'}{1 - \theta}.$$

Теорему 3 доведено.

Отже, у статті встановлено нові умови існування неперервних розв'язків систем функціонально-різницевих рівнянь, запропоновано метод побудови таких розв'язків та досліджено структуру їх множини.

Отримані результати доповнюють уже існуючі праці інших математиків і сприятимуть подальшому вивченню неперервних розв'язків більш широких класів таких рівнянь.

Список використаних джерел

1. Birkhoff G.D. General theory of linear difference equations. / Birkhoff G. D. – Trans. Amer. Math. Soc. – 1911. – 12. – P. 243 – 284.
2. Trjitzinsky W. J. Analytic theory of linear q-difference equations. / Trjitzinsky W. J. – Ibid. – 1933. – 61. – P. 1 – 38.

References

1. BIRKHOFF, G. (1911) General theory of linear difference equations. – Trans. Amer. Math. Soc., 12, pp. 243 – 284.
2. TRJITZINSKY, W. (1933) Analytic theory of linear q-difference equations. – Ibid, 61, pp. 1 – 38.

3. *Пелюх Г.П.* Про структуру множини неперервних розв'язків функціонально-різницевого рівняння з лінійно перетвореним аргументом / Пелюх Г. П., Сівак О. А. // Нелінійні коливання. — 2010. — 13, № 1. — С. 75—95.
4. *Пелюх Г.П.* Дослідження структури множини неперервних розв'язків систем лінійних функціонально-різницевого рівняння / Пелюх Г. П., Сівак О. А. // Нелінійні коливання. — 2009. — 12, № 3. — С. 307—335.
5. *Бецко І. В.* Дослідження структури множини неперервних розв'язків систем різницевого рівняння / Бецко І. В. // Наукові вісті НТУУ «КПІ». — 2015. — №4. — С. 7 – 13.
6. *Бецко І. В.* Про існування неперервних розв'язків систем різницевого рівняння / Бецко І. В. // Нелінійні коливання. — 2016. — 19, №1. — С. 3 – 10.
3. *PELYUKH, G., SIVAK, O.* (2010) Pro strukturu mnozhyny neperervnyh rozvyazkiv funktsionalno-riznytsevyh rivnyan z liniyno peretvorenim argumentum. // Neliniyni kolyvannya. — 13, №1. — pp. 75 – 95.
4. *PELYUKH, G., SIVAK, O.* (2009) Doslidzhennya struktury mnozhyny neperervnyh rozvyazkiv system liniynuh funktsionalno-riznytsevyh rivnysn. // Neliniyni kolyvannya. — 12, №3. — pp. 307 – 335.
5. *BETSKO, I.* (2015) Doslidzhennya struktury mnozhyny neperervnyh rozvyazkiv system riznytsevyh rivnysn. // Naukovi visti NTUU “KPI”. — №4. — pp. 7 – 13.
6. *BETSKO, I* (2016) Pro isnuvannya neperervnyh rozvyazkiv system riznytsevyh rivnyan. // Neliniyni kolyvannya. — 19, №1. — pp. 3 – 10.

Надійшла до редколегії 30.03.16

УДК 539.3

Глазунов С. М.¹, аспірант,
Ващіліна О. В.¹, к. ф.-м. н., доц.,
Лебедева І. В.², к. ф.-м. н., доц.

Частотний аналіз періодичних режимів перекочування бурильного долота по шорсткому дну глибокої свердловини

¹ Національний транспортний університет,
01010, м. Київ, вул. Суворова 1, e-mail:
vashchilina@ukr.net

² Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 83000, м. Київ, пр-т.
Глушкова 4д, e-mail: lebedevai@ukr.net

S. M. Glazunov¹, graduate student,
O. V. Vashchilina¹, Ph.D. (Phys.-Math.), As.Prof.,
I. V. Lebedeva², Ph.D. (Phys.-Math.), As.Prof.

Frequency analysis of periodic regimes of drill bit rollings on uneven bottom of a deep bore- hole

¹ National Transport University, 01010, Kyiv, Suvo-
rova str. 1, e-mail: vashchilina@ukr.net

² Taras Shevchenko National University of Kyiv,
83000, Kyiv, Glushkova pr., 4d, e-mail:
lebedevai@ukr.net

У даній статті досліджується проблема коливань кружляння бурового долота, що обертається, в умовах його контактної взаємодії з шорстким дном свердловини. Вже давно відомо про руйнівний вплив коливань кружляння на бурове долото та бурильну колону. Вважається, що зворотні кружляння трапляються в 40% всіх випадків буріння глибоких свердловин.

Це показує, що ситуація пов'язана із збільшенням сили тиску та її наближення до критичного значення Ейлера. Тоді згинна жорсткість бурильної колони зменшується, що призводить до її вигинання, і алмазні вкращения, що є на поверхні долота, проникають вглиб породи. Коли таке стається, вісь долота нахилиється і починає прецесувати. Слід особливо підкреслити, що у такому стані долото знаходиться під дією вертикальної сили (навантаження на долото), що істотно перевищує всі інші сили. Вона притискає долото до дна свердловини (не до її стінки) і долото втрачає здатність ковзати по дну і починає котитися по його поверхні, відстаючи або випереджаючи обертання бурильної колони. В результаті точка контакту долота з зазначеною поверхнею (миттєвий центр швидкостей) може описувати надзвичайно складні траєкторії у вигляді петель та точок загострення і змінює напрям руху. Як приклад, розглянуто обертання долота сферичної форми.

Ключові слова: Глибоке буріння, долото, неголономна динаміка, прямі та зворотні кружляння.

This paper studies the problem of whirl vibrations of rotating drill string bit under conditions of its contact interaction with the bore-hole bottom surface. The mechanical model of the bit motion based on assumption of the possibility of its pure rolling without sliding is discussed. The destructive effects of whirl vibrations of drill bits and drill strings have long been recognized. The backward whirling is believed to randomly happen to some degree in 40% cases of deep drilling of all wells.

It is shown that the situation is essentially associated with enlargement of the compressive thrust force and its approaching to the Eulerian critical value. Then, the bending stiffness of the drill string reduces, it hogs and the diamond impregnations existing in the bit surface penetrate into the rock medium. As this fact takes place, the bit axis tilts and nutates. It should be particularly emphasized that at this stage, the bit is under action of the vertical force (weight on bit) which essentially exceeds all other forces. It presses the bit to the hole bottom (not to the hole wall) and the bit loses its ability to slide on the bore-hole bottom and begins to roll on its surface, lagging behind or outstripping the drill string rotation. As a result, the point of the bit contact with the reference surface (the instantaneous centre of velocities) may describe extremely complicated trajectories with loops and cuspidal points and to change the motion directions. As examples, whirling of spherical bit is considered.

Key Words: Deep drilling, drill bits, nonholonomic dynamics, forward and backward whirls.

Статтю представив д. ф.-м. н., проф. Жук Я.О.

1. Introduction

In the majority of cases, previous studies of drill bit whirl have concentrated primarily on assumption that in whirling the rotating drill bit is compressed to the bore-hole wall and is rolling on its surface [1-3]. But in our opinion, a prominent phase of this effect proceeds at the initial stage of its generation. These phenomena occur when the drilling bit changes over from being in sliding contact to rolling contact with the bore-hole bottom and then instantaneous center of its rotation begins to move around the DS axis on the bore-hole bottom surface [4]. Depending on the rotative movement direction, the forward and backward whirls are distinguished [2, 5]. As this takes place, the backward whirl can achieve frequencies somewhere in the range from 5 to 30 times the speed of the DS rotation [4]. This speed makes the generated force effect especially detrimental, producing a set of high fatigue-loading and strong impact-loading conditions that can be responsible for intensive bending vibration and irremediable detriment to downhole tools when the bit does not achieve the well wall, does not touch it, and is rolling on the well bottom. Therefore, it is more reasonable to associate these vibrations with the bit rolling on the bottom surface rather than on the well, as is traditionally considered in theoretical researches.

According to field observation, the main factor influencing whirl is the bit geometry. In papers [3, 5], the phenomena of the bits spinning and rolling on the well bottoms are simulated with the use of non-linear frictional and nonholonomic models for bits with different shapes. As an example, spherical bit whirling on spherical bore-hole bottom is numerically studied. It permitted to find three types of its stable and unstable motions associated with forward and backward rolling as well as pure spinning.

The problem on whirling of rigid ellipsoidal bits on well bottoms is considered in [4]. The oblong and oblate ellipsoidal shapes are selected for investigation. To establish general regularities of these processes proceeding, the object-oriented analytic studies should be performed. They cannot be performed through the application of created non-linear mathematic models and should be oriented to incipient stage of the process evolvement which can be described by linearized equations.

2. Whirling of a spheric bit on spheric bottom surface.

To elaborate mathematic model of a drill bit

whirling, take into account that this vibration process is attended with elastic bending of the DS tube adjacent to its bottom hole assembly (BHA). Assume that it is possible to separate mentally the lower sections AB and BC located between two lower centralizers A and B, and the collar boundary C with the bit at its end (Fig. 1). In the model constructing, the feature of fundamental importance is simulation of the bit motion which can be dynamic or kinematic. To perform the choice, it is necessary to

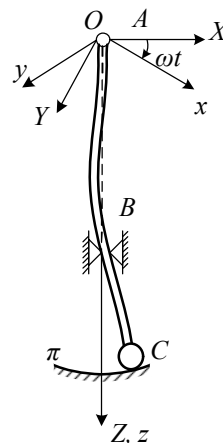


Fig.1. Schematic of lower sections of a drill string

compare frequencies of free vibrations of the separated piece of the DS and angular velocity of the bit. For example, the first frequency of free vibrations of the steel three-point beam ABC with lengths $e = 2\text{ m}$, $l = 9\text{ m}$ (Fig.1) and cross-section diameters $d_1 = 0.18\text{ m}$, $d_2 = 0.16\text{ m}$ equals $f_1 = 106.7\text{ s}^{-1}$, while the DS angular velocity may achieve only $\omega \approx 10 - 20\text{ s}^{-1}$. Besides, the bit represents a hollow-centered body with small inertia moment. So, the considered whirlings represent quasi-static processes of the DS deforming, inertia forces can be neglected at its analysis, and the whirling motions can be reckoned as kinematic, proceeding with velocities determined by angular velocity ω of the DS rotation. Therefore, in the whirling study only elastic and constraint forces will be taken into account and kinematic stimulation of the system motion will be analyzed.

3. Model of a spherical bit rolling on a spherical bottom surface.

Assume that a DS is elastically deflected from vertical and its spherical bit, rotating with angular velocity ω around its axis, begins to roll on uneven spherical surface of the well bottom π (Fig.2). Then,

depending on the position of contact point G with respect to the D point, lying in the rotation axis, the bit center C can rotate in the direction of the bit rotation (forward whirling – Fig. 2a) or, every so often, in the opposite direction (backward whirling – Fig. 2b). Introduce immovable coordinate system $OXYZ$ and reference frame $Oxyz$ fixed in the beam of the rotating DS. Vertical axes OZ and Oz coincide. As is traditional in nonholonomic mechanics [5], it is conveniently to examine this motion relative to its instantaneous center G of total rotation, because in this case the unknown constraint reaction $\mathbf{R}$ is excluded from the constitutive equations and only elastic axial ($\mathbf{T}$) and shear ($\mathbf{Q}$) forces and bending moment ($\mathbf{M}$) participate in the force equilibrium. Let the radii of the bit and hole bottom surfaces be a and b , correspondingly.

If to assume that the contacting surfaces are absolutely uneven, then the sliding effects becomes impossible. In this case, $\mathbf{v} = 0$ and pure rolling with spinning is realized. Such model belongs to the nonholonomic type.

It is shown in paper [4] that the possibility of bit sliding the bore-hole bottom is severely reduced through the presence of diamond thorns on its surface. This effects is amplified by enlargement of the bit pressure on the hole bottom and decrease of the DS stiffness. Then, the nonholonomic model application is thoroughly justified.

In paper [3], nonlinear kinematic and dynamic equations were constructed, stemming from conditions of the spherical drill bit rolling without sliding and equilibrium of elastic moment $\mathbf{M}$ and shear force $\mathbf{Q}$ applied to the bit (Fig. 2).

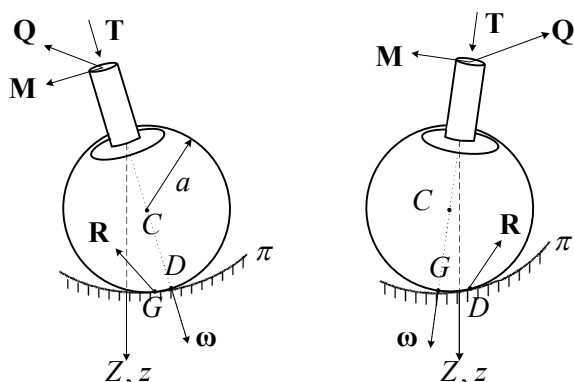


Fig.2 Nonholonomic rolling of a spherical bit:
a) forward whirling; b) backward whirling

In this paper, small whirling vibrations are studied. Therefore, the nonlinear equations can be linearized and represented in the form:

$$\begin{aligned} \dot{u} + a\dot{u}' - \omega \left(1 + \frac{a}{b-a} \right) v + a\omega v' &= 0, \\ \dot{v} + a\dot{v}' + \omega \left(1 + \frac{a}{b-a} \right) u - a\omega u' &= 0, \\ \left[g^{(1)} - ah^{(1)} - \frac{Ta}{EI(b-a)} \right] u + \left(-g + ah + \frac{Ta}{EI} \right) u' &= 0, \\ \left[g^{(1)} - ah^{(1)} - \frac{Ta}{EI(b-a)} \right] v + \left(-g + ah + \frac{Ta}{EI} \right) v' &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Here, the notations

$$\begin{aligned} D &= EI(w_M w_Q^{(1)} - w_Q w_M^{(1)}), \quad \frac{w_M}{D} = h, \quad \frac{w_M^{(1)}}{D} = h^{(1)}, \\ \frac{w_Q}{D} &= g, \quad \frac{w_Q^{(1)}}{D} = g^{(1)}. \end{aligned} \quad (2)$$

are introduced.

This system of four equations with four desired variables u, u', v and v' can receive further simplification through exclusion of variables u' and v' . Indeed, two last equations in this system permits one to write

$$u' = qu, \quad v' = qv, \quad (3)$$

Substituting Eqs. (3) into two first Eqs. (1), one gains the ultimate form of this system

$$\ddot{u} - \omega p v = 0, \quad \ddot{v} + \omega p u = 0. \quad (4)$$

Here,

$$p = \left(1 + \frac{a}{b-a} - aq \right) / (1 + aq). \quad (5)$$

System (4) is equivalent to equations

$$\ddot{u} + \omega^2 p^2 u = 0, \quad \ddot{v} + \omega^2 p^2 v = 0 \quad (6)$$

They have solutions

$$\begin{aligned} u(t) &= C_1 \sin \omega p t + C_2 \cos \omega p t, \\ v(t) &= C_3 \sin \omega p t + C_4 \cos \omega p t. \end{aligned} \quad (7)$$

Here, constants C_1, C_2, C_3 and C_4 are determined from initial conditions.

They describe trajectories of the C center movement in the $Oxyz$ coordinate system rotating with angular velocity ω . Denote $\omega p = \Omega_1$. Then, these correlations can be represented as follows:

$$\begin{aligned} u(t) &= C_1 \sin \Omega_1 t + C_2 \cos \Omega_1 t, \\ v(t) &= -C_2 \sin \Omega_1 t + C_1 \cos \Omega_1 t. \end{aligned} \quad (8)$$

Here, Ω_1 is the whirling frequency in the rotating coordinate system.

4. Basic peculiarities of the spherical bit rolling on the spherical bottom of a well

Though movement of a drill bit in rotating reference frame $Oxyz$ is governed by simple Eqs.(6), it can assume large variety of modes, depending on initial conditions (constants C_1 and C_2) and value of parameter p which, in its turn, is specified by geometric values a and b , DS stiffness EI , and flexibility parameters $w_M, w_Q, w_M^{(1)}$, and $w_Q^{(1)}$. But it can outline much more complicated paths in fixed coordinate system $OXYZ$. These trajectories are traced with the use of equalities

$$\begin{aligned} X(t) &= u(t) \cos \omega t - v(t) \sin \omega t, \\ Y(t) &= u(t) \sin \omega t + v(t) \cos \omega t. \end{aligned} \quad (9)$$

They testify that in the fixed reference frame, the bit moves with angular velocity $\Omega_2 = \omega(p-1)$ and its motion is determined by equations

$$\begin{aligned} X(t) &= C_1 \sin \Omega_2 t + C_2 \cos \Omega_2 t, \\ Y(t) &= -C_2 \sin \Omega_2 t + C_1 \cos \Omega_2 t \end{aligned} \quad (10)$$

Eqs.(8) and Eqs.(10) permit one to analyze the possible tendencies for the spherical bit to perform different self-triggered whirlings depending on the frequency p values. Thus, if $p < -1$, then, as Eqs. (8) and (9) testify, the bit center C moves along circular trajectory with angular velocity $\Omega_1 > \omega$ in rotating reference frame $Oxyz$ and performs forward whirling

with angular velocity $\Omega_2 > 2\omega$, outstripping the DS rotation in fixed coordinate system $OXYZ$. Value $p = -1$ is in line with $\Omega_1 = \omega, \Omega_2 = 2\omega$.

Special regime is generated at $p = 0$. In this situation, the bit is motionless in rotating reference frame ($\Omega_1 = 0$) but performs forward whirling with frequency $\Omega_2 = \omega$ in still space. The opposite situation occurs at $p = 1$ when the bit rotates in reverse direction with frequency $\Omega_1 = \omega$, though comes to a standstill at point $X = C_2, Y = C_1$ in the still space. Accentuate that this state is also unfavorable because here the bit performs pure spinning without rolling and sliding and the drilling direction begins to change its direction.

The subsequent enlargement of the parameter entails change-over from forward whirling of the bit to backward motion with further essential enhancement of the Ω_2 frequency. Note once again that this detrimental effect is in compliance with the unexpected field observations cited in paper [3] and consisting in essential increase in the whirl frequency which can be 30 times greater than the angular velocity of the DS, while the generally recognized model of the bit touch with the bore-hole wall [2] cannot reveal it.

Список використаних джерел

1. Aldred W. Managing Drilling Risk/ W. Aldred, D. Plumb, I. Bradford, J. Cook, V. Gholkar, L. Cousins, R. Minton, J. Fuller, S. Goraya, and D. Tucker // *Oilfield Review* – 1999. – Vol. 11(2). – P. 2 – 19.
2. Leine R. I. Stick-slip Whirl Interaction in Drillstring Dynamics/ R. I. Leine, D. H. Van Campen, W. J. G. Keultjes// *Journal of Vibration and Acoustics* – 2002 – Vol. 124(April), P. 209 – 220.
3. Stroud, D. Real-time Whirl Detector Improves RSS Reliability, Drilling Efficiency /D. Stroud, J. Pagett, and D. Minett-Smith // *Hart Exploration & Production Magazine* – 2011 –Vol. 84(8), P. 42 – 43.
4. Gulyayev, V. I. Drill string whirl simulation with the use of frictional and nonholonomic models / V. I. Gulyayev, L. V. Shevchuk // *Journal of Vibration and Acoustics* – 2015– Vol. 1, P. 011021-1-011021-9.
5. Neimark, Ju. I. Dynamics of Nonholonomic Systems/ Ju. I. Neimark., N. A. Fufaev – Providence RI: American Mathematical Society, 1972. – 519 p.

References

1. ALDER, W., PLUMB, D., BRADFORD, I., COOK, J., GHOLKAR, V., COUSINS, L., MINTON, R., FULLER, J., GORAYA, S., and TUCKER, D. (1999) Managing Drilling Risk. *Oilfield Review*. 11(2). p. 2 -19.
2. LEINE, R.I., VAN CAMPEN, D.H., KEULTJES, W.J.G. (2002) Stick-slip Whirl Interaction in Drillstring Dynamics. *Journal of Vibration and Acoustics*. 124(April), p. 209 - 220.
3. STROUD, D., PAGETT, J., and MINETT-SMITH, D. (2011) Real-time Whirl Detector Improves RSS Reliability, Drilling Efficiency. *Hart Exploration & Production Magazine*. 84(8). p. 42 -43.
4. GULYAYEV, V.I., SHEVSHUK, L.V. (2015) Drill string whirl simulation with the use of frictional and nonholonomic models. *Journal of Vibration and Acoustics*. 1. p. 011021-1-011021-9.
5. NEIMARK, JU.I. and FUFAYEV, N.A. (1972) *Dynamics of Nonholonomic Systems*, Providence RI: American Mathematical Society

Надійшла до редколегії 30.03.16

УДК 539.375

Дудик М. В.¹, к. ф.-м. н., доц.
Діхтяренко Ю.В.¹ ст. викладач
Щепкіна Я.І.¹ студент

**Вплив зони передруйнування з областю
деструкції та лінійного зміцнення
адгезійного матеріалу на міцність
міжфазного з'єднання**

¹ Уманський державний педагогічний університет імені Павла Тичини, 20300, Черкаська обл., м. Умань, вул. Садова, 2
e-mail: dudik_m@hotmail.com

M. V. Dudyk¹, Ph. D., Assoc. Prof.
Yu.V. Dikhtiarenko¹ senior teacher
Ya.I. Shchepkina¹ student

**Influence of the prefracture zone with the
destruction area and linear strengthening of
adhesion material on strength of interfacial
joint**

¹ Pavlo Tychyna Uman State Pedagogical University,
20300, Cherkassy region, Uman, Sadova str., 2
e-mail: dudik_m@hotmail.com

В умовах плоскої деформації в рамках моделі Леонова-Панасюка виконано розрахунок маломасштабної зони передруйнування у з'єднувальному матеріалі з лінійним зміцненням і зоною деструкції біля вершини міжфазної тріщини, що виходить з кутової точки ламаної межі поділу двох різних однорідних ізотропних матеріалів. Досліджено вплив утворення зони передруйнування на умови граничної рівноваги кусково-однорідного тіла.

Ключові слова: міжфазна тріщина, зона передруйнування, зона деструкції, лінійне зміцнення, граничний стан.

Under the plain strain conditions, by the Wiener-Hopf method we found the analytical solution of the problem about the computation of the small-scale pre-fracture zone with the near-tip area of destruction in the vicinity of angular point of the broken interface of two different elastic media, from which an interfacial crack goes out. The pre-fracture, which propagates from an angular point along the interface in the joining material, is simulated by the line of rupture of the normal displacement, on which the normal stress satisfies the linear law of strengthening. The destruction zone is determined as an adjacent to the crack tip the area of pre-fracture zone with the high level of the breaking interparticle bonds, that causes the decrease of the stress in the zone and the increase of its opening. The transcendent equations for the calculations of sizes of the pre-fracture and destruction zones and of the crack opening in its tip are obtained. The numerical analysis of the influence of strengthening and the formation of destruction zone on the conditions of start of the crack and on the ultimate sizes of zones is carried out. Their substantial dependence on the parameters of material strengthening, loading configuration and on the interface angle as well as is revealed. It is established that the ultimate size of the destruction zone constitutes a considerable part of the pre-fracture zone, reaching 0,9 of its lengths.

Key words: interfacial crack, pre-fracture zone, destruction zone, crack opening, ultimate state.

Статтю представив докт. фіз.-мат. наук, проф. Жук Я.О.

1. Вступ

Актуальною проблемою механіки руйнування композитів, зварних і клеєних з'єднань тощо є визначення умов граничної рівноваги кусково-однорідного тіла з міжфазною тріщиною. Високий рівень напружень біля вершини тріщини призводить до появи в її околі зони передруйнування – області необоротних деформацій матеріалу. Одним з шляхів урахування впливу зони передруйнування на граничний стан тіла є використання моделі Леонова-Панасюка [1], яка подає

зону поверхнею розриву нормального переміщення із заданим на ній сталим нормальним напруженням, що має сенс опору відриву матеріалу і визначається експериментально як середнє значення напруження по довжині зони. Проте, така модель не враховує особливості структури зони і розподілу напружень в ній, тому в [2, 3] було розвинуто її варіант з лінійним зміцненням матеріалу та зоною розпушення (деструкції) з високим рівнем деформацій. При цьому в [3] у якості критерію, що визначає умови зрушення тріщини, прийнято досягнення довжиною зони

деструкції певного критичного значення d_c , що використовується як окрема характеристика матеріалу. Нижче в рамках моделі [2, 3] розглядається метод дослідження граничного стану тіла з використанням поширеного у механіці руйнування КРТ-критерію [1], що передбачає зрушення тріщини при досягненні розкриття тріщини у її вершині критичного значення.

2. Постановка задачі та її розв'язання

В умовах плоскої деформації розглядається задача про визначення параметрів стану граничної рівноваги кусково-однорідного тіла з міжфазною тріщиною довжини L , яка виходить з кутової точки ламаної межі поділу двох різних однорідних ізотропних матеріалів з модулями Юнга E_1 , E_2 і коефіцієнтами Пуассона ν_1 , ν_2 . Передбачається, що у випадку меншої тріщиностійкості з'єднувального матеріалу порівняно з тріщиностійкістю матеріалів з'єднаних частин тіла у ньому утворюється маломасштабна зона передруйнування довжини l , яка містить у прилеглій до вершини тріщини частині область деструкції матеріалу довжини d .

Вважаємо граничним стан тіла, коли розкриття зони передруйнування у вершині тріщини досягає критичного значення δ_k , яке є базовою характеристикою тріщиностійкості з'єднувального матеріалу. Нехтуючи товщиною з'єднувального шару і деформаціями зсуву, моделюватимемо зону передруйнування лінією розриву нормального переміщення, на якій задано певний розподіл нормального напруження, що відповідає лінійному зміцненню матеріалу [2, 3]. Для розрахунку розкриття та інших параметрів зони у припущенні її маломасштабності аж до зрушення тріщини розглядатимемо тіло як кусково-однорідну площину з межею поділу матеріалів у формі сторін кута, з вершини якого вздовж однієї зі сторін виходить півнескінчена тріщина з вільними від навантаження берегами, вздовж іншої – лінія розриву (рис. 1).

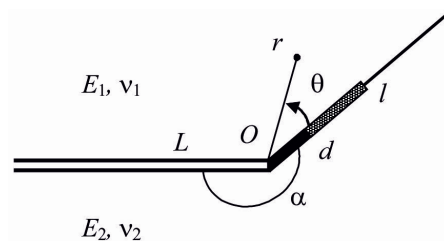


Рис.1. Розрахункова схема задачі

У полярній системі координат з початком у вершині тріщини граничні умови відповідної крайової задачі теорії пружності мають вигляд:

$$\begin{aligned} \theta = -\alpha \cup \theta = 2\pi - \alpha: \sigma_\theta = \tau_{r\theta} = 0; \\ \theta = 0: \langle \sigma_\theta \rangle = \langle \tau_{r\theta} \rangle = 0, \langle u_r \rangle = 0; \\ \theta = 0, r > l: \langle u_\theta \rangle = 0; \\ \theta = 0: \sigma_\theta = \begin{cases} (r + d_c - d) \frac{\sigma_c}{d_c}, & 0 \leq r \leq d, \\ \sigma_s + (\sigma_c - \sigma_s) \frac{l - r}{l - d}, & d \leq r \leq l, \end{cases} \end{aligned} \quad (1)$$

де d_c – критичний розмір зони деструкції, якому відповідає зрушення тріщини, σ_s і σ_c – границі текучості і міцності з'єднувального матеріалу при розтягу [2, 3].

Для маломасштабної зони передруйнування розв'язок задачі на відстанях, значно більших за її довжину, але значно менших від довжини тріщини, повинен переходити у асимптотично найбільший розв'язок біля вершини тріщини аналогічної задачі без зони передруйнування, відомий з [4]. Це дозволяє сформулювати умову на нескінченності у вигляді:

$$\theta = 0, r \rightarrow \infty: \sigma_\theta = \sum_i C_i F(\lambda_i) r^{\lambda_i} + o(1/r),$$

де λ_i – показники сингулярності напружень, що є коренями у смузі $-1 < \text{Re } \lambda < 0$ характеристичного рівняння задачі

$$D(\lambda) = 0, \quad (2)$$

$$D(\lambda) = -(1 + \kappa_1)^2 t_1 - 4(1 + \kappa_1)(e - 1)t_1 t_2 - e^2(1 + \kappa_2)^2 t_3 + 4(e - 1)^2 t_1 t_3 + 4e(1 + \kappa_2)(e - 1)t_3 t_4 + 2e(1 + \kappa_2)(1 + \kappa_1)t_5,$$

$$t_1 = (\lambda + 1)^2 \sin^2 \alpha - \sin^2(\lambda + 1)\alpha, \quad t_2 = \sin^2(\lambda + 1)(2\pi - \alpha),$$

$$t_3 = (\lambda + 1)^2 \sin^2 \alpha - \sin^2(\lambda + 1)(2\pi - \alpha), \quad t_4 = \sin^2(\lambda + 1)\alpha, \quad t_5 = t_1 + \sin(\lambda + 1)\alpha \sin 2\lambda \pi \cos(\lambda + 1)(2\pi - \alpha),$$

$$e = \frac{1 + \nu_2}{1 + \nu_1} \cdot \frac{E_1}{E_2}, \quad \kappa_{1(2)} = 3 - 4\nu_{1(2)}; \quad F(\lambda) = \frac{1}{X\Delta} [2t_1\psi_1 + e(1 + \kappa_2)((\lambda + 2)\psi_2 - \psi_3)], \quad X = 4\sqrt{\frac{2\pi(1 + e\kappa_2)}{(e + \kappa_1)}},$$

$$\begin{aligned}\psi_1 &= \sin(\lambda + 2)(2\pi - \alpha)[(e - 1)\lambda - (1 + \kappa_1)] - (e - 1)(\lambda + 2)\sin\lambda(2\pi - \alpha), \\ \psi_2 &= 2\lambda \sin^2 \alpha \sin(\lambda + 2)(2\pi - \alpha) - \sin\lambda(2\pi - \alpha) + \cos(\lambda + 2)\alpha \sin 2\lambda\pi, \\ \psi_3 &= \sin\lambda\alpha[2\cos(\lambda + 2)\alpha \cos(\lambda + 2)(2\pi - \alpha) + \lambda \cos 2\lambda\pi], \\ \Delta &= (1 + \kappa_1)t_6 - 0,5e(1 + \kappa_2)t_7 + 2(e - 1)[\lambda t_8 \sin(\lambda + 2)(2\pi - \alpha) + t_9 \sin\lambda\alpha], \\ t_6 &= \lambda \sin\alpha \cos(\lambda + 1)(2\pi - \alpha) - \sin\lambda\alpha \cos 2\lambda\pi, \quad t_7 = (\lambda + 2)\sin\lambda(2\pi - \alpha) - \lambda \sin(\lambda + 2)(2\pi - \alpha), \\ t_8 &= (\lambda + 2)\sin^2 \alpha - \sin^2(\lambda + 1)\alpha, \quad t_9 = (\lambda + 2)\sin(\lambda + 1)(2\pi - \alpha)\sin(\lambda + 1)\alpha - \sin(\lambda + 2)(2\pi - \alpha)\sin(\lambda + 2)\alpha;\end{aligned}$$

C_i – сталі, які характеризують інтенсивність зовнішнього силового поля і вважаються заданими за умовою задачі. Припускається, що на межі поділу в області зони передруйнування діє розтягувальне нормальне напруження, яке забезпечує відривні деформації, необхідні для утворення зони.

Згідно з [4], в залежності від пружних параметрів з'єднаних матеріалів і кута зламу межі поділу рівняння (2) може мати два чи три дійсних показника сингулярності λ_i , $i = 1 \div 3$, або ж два комплексно спряжених $\lambda_1 = \overline{\lambda_2}$ і один чи жодного дійсного показника λ_3 . В подальшому при розрахунках параметрів зони розрізнятимемо випадки наявності лише дійсних або й комплексних показників сингулярності.

Сформульована задача лише умовою (1) відрізняється від аналогічної задачі про міжфазну зону передруйнування без зони деструкції і лінійного зміцнення, розв'язаної в [4] за допомогою методу Вінера-Хопфа. З урахуванням (1) знайдений в [4] розв'язок приводить до рівняння для визначення довжини зони передруйнування $x = l/L$ (в одиницях довжини тріщини) в залежності від наявних коренів характеристичного рівняння (2) у смугі $-1 < \operatorname{Re} \lambda < 0$:

а) якщо характеристичне рівняння (2) має 2 або 3 дійсні корені, то йому відповідає рівняння:

$$\sigma \sum_{i=1}^3 n_i F(\lambda_i) N(\lambda_i) x^{\lambda_i} = \frac{(1 - qy)S_1 - (1 - q)S_2}{1 - y}, \quad (3)$$

$$\sigma = \frac{C_1 L^{\lambda_1}}{\sigma_c}, \quad n_i = \frac{C_i}{C_1} \frac{L^{\lambda_i}}{L^{\lambda_1}};$$

б) якщо рівняння (2) має 2 комплексно спряжені ($\lambda_1 = \overline{\lambda_2} = \lambda_r + i\lambda_m$, $C_1 = \overline{C_2} = \frac{K_I + iK_{II}}{\sqrt{2\pi L^{i\lambda_m}}}$) і один або жодного дійсного кореня λ_3 , то рівняння набуває вигляду:

$$\sigma \left\{ 2|F(\lambda_1)| \cdot |N(\lambda_1)| x^{\lambda_r} \cos(\lambda_m \ln x + \varphi + \psi + \xi) + n_3 F(\lambda_3) N(\lambda_3) x^{\lambda_3} \right\} =$$

$$= \frac{(1 - qy)S_1 - (1 - q)S_2}{1 - y}, \quad (4)$$

$$\varphi = \arg F(\lambda_1), \quad \psi = \operatorname{arctg} n, \quad n = K_{II} / K_I,$$

$$\sigma = \frac{|K| L^{\lambda_r}}{\sqrt{2\pi} \sigma_c}, \quad \xi = \arg N(\lambda_1), \quad n_3 = \frac{\sqrt{2\pi} C_3}{|K|} \frac{L^{\lambda_3}}{L^{\lambda_r}};$$

$K = K_I + iK_{II}$ – комплексний коефіцієнт інтенсивності напружень. Тут і нижче використовуються спільні для випадків дійсних і комплексних показників сингулярності λ_1 , λ_2 позначення:

$$q = \frac{\sigma_s}{\sigma_c}, \quad y = \frac{d}{l}, \quad N(\lambda) = \frac{K^+(-\lambda - 1)}{(\lambda + 1)G^+(-\lambda - 1)};$$

$$S_1 = N(0), \quad S_2 = N(1), \quad K^+(p) = \frac{\Gamma(1 - p)}{\Gamma(0,5 - p)},$$

$$G^+(p) = \exp \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{\ln G(z)}{z - p} dz \right] \quad (\operatorname{Re} p < 0),$$

$$G(p) = \frac{(1 + \kappa_1)D_1(p) \cos p\pi}{AD(-1 - p) \sin p\pi},$$

$$A = \frac{(1 + \kappa_1)[e + \kappa_1 + 1 + e\kappa_2]}{2(e + \kappa_1)(1 + e\kappa_2)};$$

$$D_1(p) = e(1 + \kappa_2)\Delta_1\Delta_2 - (1 + \kappa_1)\Delta_3\Delta_4,$$

$$\Delta_1 = p^2 \sin^2 \alpha - \sin^2 p(2\pi - \alpha),$$

$$\Delta_2(p) = p \sin 2\alpha - \sin 2p\alpha,$$

$$\Delta_3 = p^2 \sin^2 \alpha - \sin^2 p\alpha,$$

$$\Delta_4(p) = p \sin 2\alpha + \sin 2p(2\pi - \alpha);$$

$\Gamma(z)$ – гамма-функція Ейлера.

Рівняння (3), (4) містять невідому відносну довжину зони деструкції $y = d/l$. Для самоузгодженого визначення x і y використовуємо умову рівності розкриття зони передруйнування в кінці зони деструкції його критичному значенню $\langle u_\theta(d, 0) \rangle = \delta_c$, що приводить до додаткового рівняння:

$$-\frac{x}{1 + \kappa_1} \left\{ C_0(x, y; \sigma) + \sum_k C_k(x, y; \sigma)(1 - y^{1 + \lambda_k}) \right\} =$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\delta_c E_1}{4(1-\nu_1^2)L\sigma_c} \equiv \delta'_c, \quad (5) \\
 C_0(x, y; \sigma) &= (1-y) \left\{ \left(1 - \frac{xy}{x_c y_c} \right) \left\{ \frac{f''(-1)D_1'''(-1)}{[D_1''(-1)]^2} + \right. \right. \\
 &+ Q_0 \left[\ln 4 - \frac{4}{3} + 2I - \frac{S_2}{S_1} \right] \left. \right\} + \frac{Q_0}{S_1} [S_2 q - P_0(x, \sigma)] + \\
 &+ \frac{f(-2)x(1+y)}{2D_1(-2)x_c y_c} \left. \right\} + Q_0 y \ln y \cdot \left(q - \frac{x}{x_c y_c} \right), \\
 Q_0 &= \frac{2f'(-1)}{D_1''(-1)}, \\
 C_k(x, y; \sigma) &= \frac{f(-1-\lambda'_k)}{D_1'(-1-\lambda'_k)} \frac{G^+(-1-\lambda'_k)}{K^+(-1-\lambda'_k)} \times \\
 &\times \left\{ -\frac{S_1}{\lambda'_k} \left[\left(1 - \frac{xy}{x_c y_c} \right) y^{-\lambda'_k} + (1-qr) \frac{1-y^{-\lambda'_k}}{1-y} \right] + \right. \\
 &+ \frac{S_2}{1-\lambda'_k} \left[\frac{xy^{1-\lambda'_k}}{x_c y_c} - (1-q) \frac{1-y^{-\lambda'_k}}{1-y} \right] - P_k(x, \sigma) \left. \right\}, \\
 f(p) &= [(p-\kappa_1)\tilde{a}_1(p) + \tilde{a}_2(p)] - \\
 &- e[(p-\kappa_2)\tilde{b}_1(p) + \tilde{b}_2(p)], \\
 \tilde{a}_1(p) &= e(1+\kappa_2) \left(\frac{1}{2} \Delta_2 \Delta_6 + 2\Delta_5 \Delta_8 \right) - \\
 &- 2\Delta_3 [1 + \kappa_1 - 2(e-1)\Delta_5], \\
 \tilde{a}_2(p) &= e(1+\kappa_2) [2(p-1)\Delta_7 \Delta_8 - \frac{1}{2}(p+1)\Delta_2 \Delta_6] - \\
 &- 2\Delta_3 \{ 2\Delta_7 [e + \kappa_1 - p(e-1)] - (1+\kappa_1)(p+1) \}, \\
 \tilde{b}_1(p) &= 2\Delta_1 [e(1+\kappa_2) + 2(e-1)\Delta_{10}] - \\
 &- (1+\kappa_1) \left(\frac{1}{2} \Delta_4 \Delta_9 + 2\Delta_7 \Delta_{10} \right), \\
 \tilde{b}_2(p) &= (1+\kappa_1) \left(\frac{1}{2} (p+1)\Delta_4 \Delta_9 - 2(p-1)\Delta_7 \Delta_8 \right) - \\
 &- 2\Delta_1 \{ e(1+\kappa_2)(p+1) - 2\Delta_8 [1 + e\kappa_2 + p(e-1)] \}, \\
 \Delta_5(p) &= p \sin^2 \alpha - \sin^2 p(2\pi - \alpha), \\
 \Delta_6(p) &= p \sin 2\alpha - \sin 2p(2\pi - \alpha), \\
 \Delta_7(p) &= p \sin^2 \alpha + \sin^2 p(2\pi - \alpha), \\
 \Delta_8(p) &= p \sin^2 \alpha + \sin^2 p\alpha, \\
 \Delta_9(p) &= p \sin 2\alpha + \sin 2p\alpha, \\
 \Delta_{10}(p) &= p \sin^2 \alpha - \sin^2 p\alpha; \\
 I &= \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(1-t^2) \ln G(it)}{(1-t^2)^2 + 4t^2} dt;
 \end{aligned}$$

$x_c = l_c / L$, $y_c = d_c / l_c$ – граничні значення відносних розмірів зон передруйнування і деструкції, штрихи при функціях $f(p)$ та $D_1(p)$ означають похідні по p ; λ'_k – корені рівняння $D_1(-1-x)=0$, які задовольняють умову $\text{Re } \lambda'_k > -1$; функції $P_0(x, \sigma)$ і $P_k(x, \sigma)$ відносної довжини зони передруйнування x і безрозмірного параметра навантаження σ в залежності від наявних коренів рівняння (2) у смузі $-1 < \text{Re } \lambda < 0$ мають наступний вигляд:

а) λ_1, λ_2 є дійсними:

$$P_0(x, \sigma) = \sigma \sum_i \frac{n_i F(\lambda_i) N(\lambda_i)}{\lambda_i} x^{\lambda_i},$$

$$P_k(x, \sigma) = \sigma \sum_i \frac{n_i F(\lambda_i) N(\lambda_i)}{\lambda_i - \lambda'_k} x^{\lambda_i},$$

б) λ_1, λ_2 є комплексно спряженими ($\lambda_1 = \overline{\lambda_2}$):

$$P_0(x, \sigma) = 2\sigma \frac{|F(\lambda_1)| \cdot |N(\lambda_1)|}{|\lambda_1|} x^{\lambda_r} \cos(\lambda_m \ln x +$$

$$+ \varphi + \psi + \xi - \arg \lambda_1) + \sigma \frac{n_3 F(\lambda_3) N(\lambda_3)}{\lambda_3} x^{\lambda_3},$$

$$P_k(x, \sigma) = 2\sigma \frac{|F(\lambda_1)| \cdot |N(\lambda_1)|}{|\lambda_1 - \lambda'_k|} x^{\lambda_r} \cos(\lambda_m \ln x +$$

$$+ \varphi + \psi + \xi - \arg(\lambda_1 - \lambda'_k)) + \sigma \frac{n_3 F(\lambda_3) N(\lambda_3)}{\lambda_3 - \lambda'_k} x^{\lambda_3}.$$

В рівняння (3)-(5) відповідно до прийнятого в (1) розподілу напружень у зоні передруйнування в якості параметра входить граничний розмір зони деструкції d_c в момент зрушення тріщини. Для його знаходження, дотримуючись КРТ-критерію [1], прийемо в якості умови зрушення досягнення розкриття тріщини в її вершині критичного значення: $\delta(0, 0) = \langle u_\theta(0, 0) \rangle = \delta_\kappa$. Припускаючи, що при цьому довжина зони передруйнування залишається значно меншою від довжини тріщини, визначимо нормоване розкриття тріщини у вершині $\delta'_0(\sigma) = \frac{\delta(0, 0) E_1}{4(1-\nu_1^2) L \sigma_c}$:

$$\begin{aligned}
 \delta'_0(\sigma) &= -\frac{x}{A\sqrt{\pi G(0)}} \left\{ S_1 \left[\left(1 - \frac{xy}{x_c y_c} \right) y + (1-qr) \right] + \right. \\
 &+ \frac{S_2}{2} \left[\frac{xy^2}{x_c y_c} - (1-q(1+y)) \right] - P(x, \sigma) \left. \right\}, \quad (6)
 \end{aligned}$$

де функція $P(x, \sigma)$ в залежності від значень показників сингулярності має вигляд:

а) λ_1, λ_2 є дійсними:

$$P(x, \sigma) = \sigma \sum_i \frac{n_i F(\lambda_i) N(\lambda_i)}{1 + \lambda_i} x^{\lambda_i};$$

б) λ_1, λ_2 є комплексно спряженими:

$$P(x, \sigma) = 2\sigma \frac{|F(\lambda_1)| \cdot |N(\lambda_1)|}{|1 + \lambda_1|} x^{\lambda_r} \cos(\lambda_m \ln x + \varphi + \psi + \xi - \arg(1 + \lambda_1)) + \sigma \frac{n_3 F(\lambda_3) N(\lambda_3)}{1 + \lambda_3} x^{\lambda_3}.$$

Таким чином, алгоритм визначення параметрів зон передруйнування і деструкції є наступним. На першому етапі, покладаючи в рівняннях (3)-(6) $x = x_c$, $y = y_c$, $\sigma = \sigma_k$, $\delta'_0(\sigma_k) = \delta_k E_1 / (4(1 - \nu_1^2) L \sigma_c \equiv \delta'_k$, з отриманої системи рівнянь знаходимо граничне навантаження σ_k тіла перед зрушенням і відповідні йому граничні розміри зони передруйнування і зони деструкції x_c, y_c . Ці значення підставляються у вихідні рівняння (3)-(6), з яких визначаються розміри зон x, y і розкриття тріщини $\delta'_0(\sigma)$ при заданому безрозмірному навантаженні σ .

3. Числовий аналіз результатів і висновки

Приведені у п.2 рівняння використано для дослідження впливу зони деструкції і лінійного зміцнення з'єднувального матеріалу на умови граничної рівноваги кусково-однорідного тіла з міжфазною тріщиною. На рис. 2-4 подано результати числових розрахунків граничних відносних розмірів зони передруйнування x_c , зони деструкції y_c і нормованого граничного навантаження σ_k для деяких параметрів композитного з'єднання і конфігурації зовнішнього навантаження при $\nu_1 = \nu_2 = 0,3$ і $n_3 = 0$. Пунктирні лінії відповідають розрахункам параметрів зони передруйнування без урахування зони деструкції і лінійного зміцнення, виконаним згідно з моделлю, розглянутою у [4].

Згідно з рис. 2, граничні розміри зон передруйнування і деструкції та граничне навантаження є тим більшими, чим більше відрізняються модулі Юнга матеріалів ($E_1/E_2 \rightarrow 0$). Утворення зони деструкції призводить до зниження граничного навантаження і довжини зони передруйнування (суцільні лінії) порівняно з випадком відсутності зони деструкції (пунктирні лінії). Граничний розмір зони деструкції виявляється досить значним, одного порядку величини з довжиною всієї зони передруйнування.

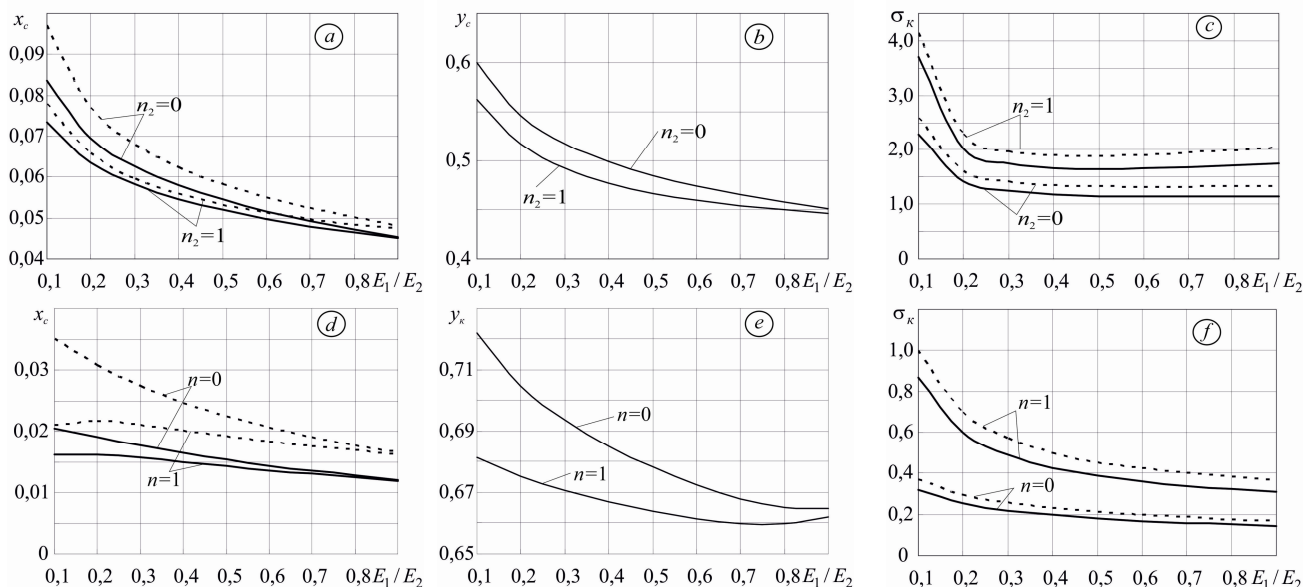


Рис. 2. Залежність граничних розмірів зони передруйнування x_c , зони деструкції y_c і навантаження σ_k від відношення модулів Юнга з'єднаних матеріалів E_1/E_2 для дійсних (a, b, c: $\alpha = 50^\circ$, $\delta'_k = 0,1$, $\delta'_c = 0,08$, $q = 0,5$) і комплексних (d, e, f: $\alpha = 210^\circ$, $\delta'_k = 0,01$, $\delta'_c = 0,008$, $q = 0,5$) коренів рівняння (2).

Як видно з рис. 3, характер залежності розмірів зони передруйнування і зони деструкції та

граничного навантаження від відношення

$q = \sigma_s / \sigma_c$, яке характеризує ступінь зміцнення матеріалу, є різним для різних δ_c . Посилення зміцнення (зменшення величини σ_s / σ_c) може супроводжуватись як зменшенням, так і збільшенням x_c , y_c в залежності від конфігурації навантаження, заданого множниками n_i і n в рів-

няннях (3-6), та величини критичного розкриття зони деструкції δ_c . Зміцнення з'єднувального матеріалу призводить до зростання граничного навантаження σ_k при малих і майже не впливає на нього при достатньо великих значеннях параметра δ_c (рис. 3, c, f).

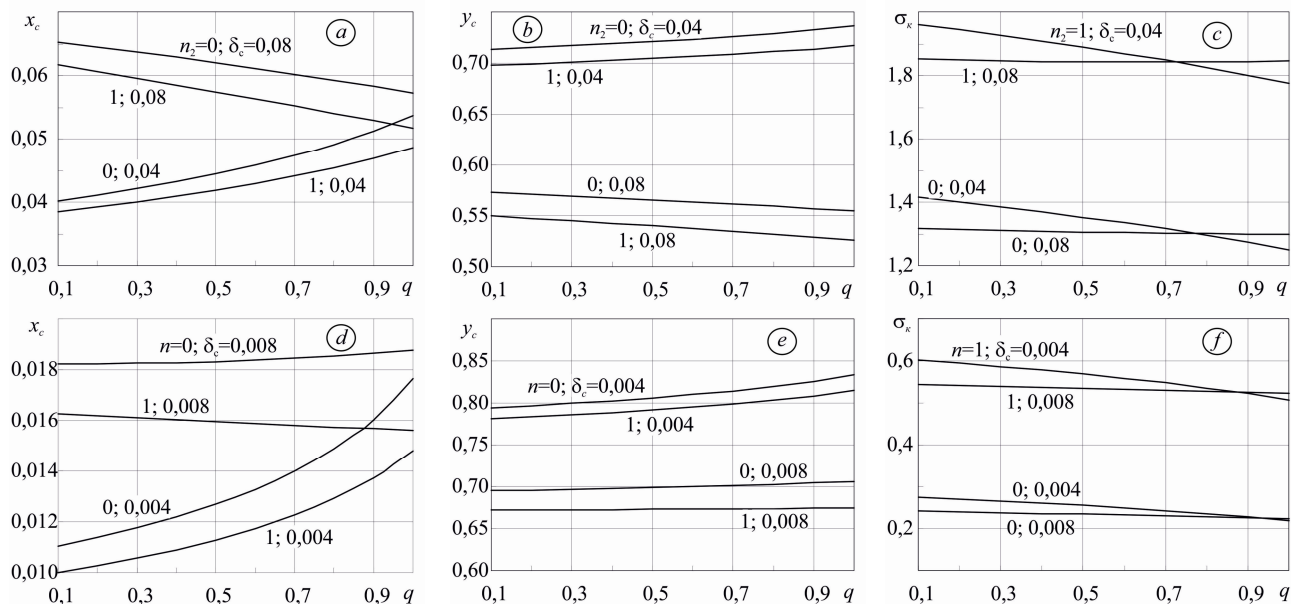


Рис. 3. Залежність граничних розмірів зони передруйнування x_c , зони деструкції y_c і навантаження σ_k від параметра лінійного зміцнення $q = \sigma_s / \sigma_c$ для дійсних (a, b, c: $\alpha = 50^\circ$, $\delta'_k = 0,1$) і комплексних (d, e, f: $\alpha = 210^\circ$, $\delta'_k = 0,01$) коренів рівняння (2); $E_1/E_2 = 0,25$.

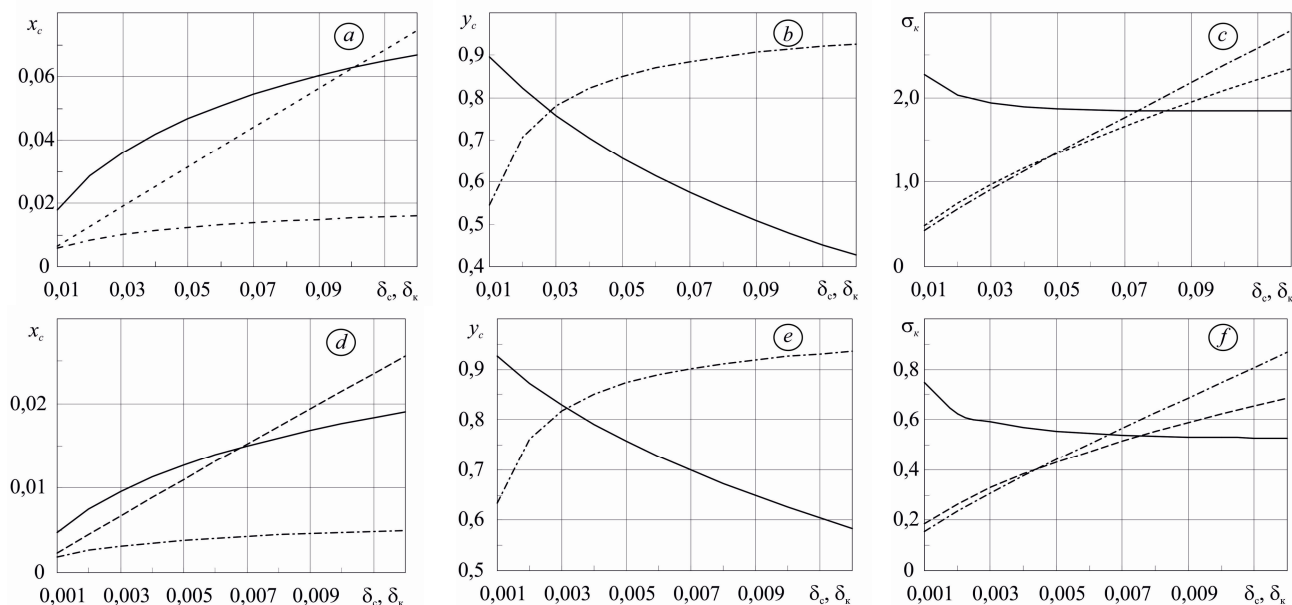


Рис. 4. Залежність параметрів граничного стану зони передруйнування від граничних розкриттів δ_c (суцільні лінії) і δ_k (пунктирні і штрих-пунктирні лінії) для $E_1/E_2 = 0,25$, $q = 0,5$; a, b, c) $\alpha = 50^\circ$, $n_2 = 1$; d, e, f) $\alpha = 210^\circ$, $n = 1$.

Графіки на рис. 4 ілюструють залежності граничних розмірів зон передруйнування і деструкції та граничного навантаження від граничного розкриття δ_c зони деструкції (суцільні лінії) і гра-

ничного розкриття зони передруйнування δ_k у вершині тріщини (в рамках моделей без зони деструкції і зміцнення та з їх урахуванням – відповідно пунктирні і штрих-пунктирні лінії). При розрахунках залежності параметрів зони передруйнування від δ_k у випадку дійсних показників сингулярності λ_1, λ_2 покладали $\delta_c=0,008$, у випадку комплексних – $\delta_c=0,001$. При розрахунках залежності параметрів зони передруйнування від δ_c

у випадку дійсних λ_1, λ_2 покладали $\delta_k=0,1$, у випадку комплексних – $\delta_k=0,01$. З рисунків випливає, що при збільшенні δ_c відносна довжина зони передруйнування $x_c=l_c/L$ зростає, а відносна довжина зони деструкції $y_c=d/l_c$ і нормоване граничне навантаження σ_k зменшуються (суцільні лінії). При збільшенні δ_k , як і слід було очікувати з фізичних міркувань, всі вказані параметри зростають.

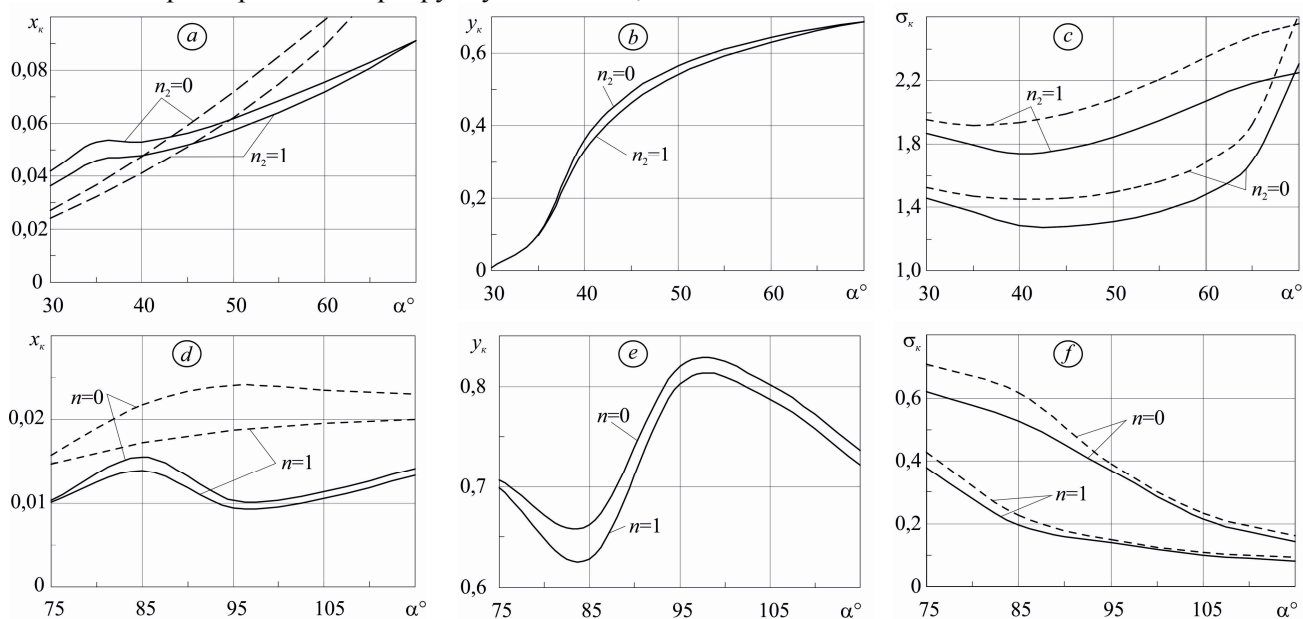


Рис. 5. Залежність граничних розмірів зони передруйнування x_c , зони деструкції y_c і навантаження σ_k від кута зламу межі поділу середовищ α для дійсних (a, b, c: $\delta'_k = 0,1$, $\delta'_c = 0,08$) і комплексних (d, e, f: $\alpha = 210^\circ$, $\delta'_k = 0,01$, $\delta'_c = 0,008$) коренів рівняння (2); $E_1/E_2=0,25$, $q=0,5$.

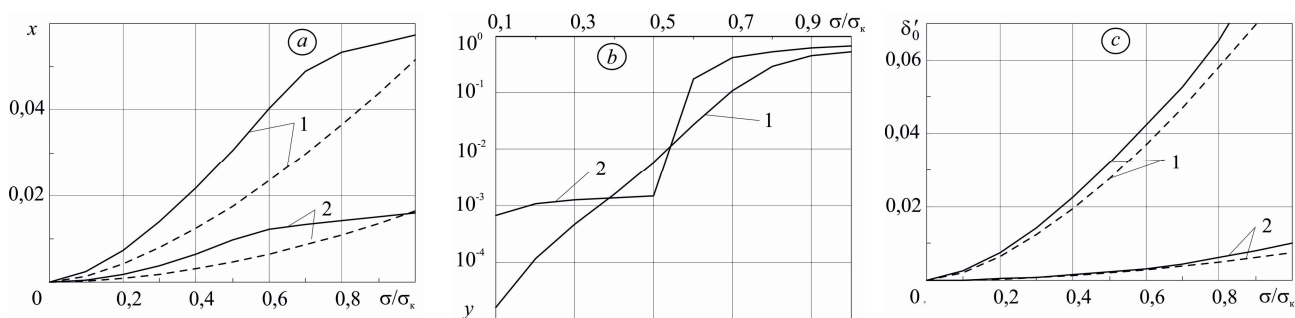


Рис. 6. Залежність відносних розмірів зон передруйнування x і деструкції y та приведенного розкриття тріщини δ'_0 від безрозмірного параметра навантаження σ ; 1) $\alpha=50^\circ$, $\delta'_k = 0,1$, $\delta'_c = 0,08$, $n_2=1$; 2) $\alpha=210^\circ$, $\delta'_k = 0,01$, $\delta'_c = 0,008$, $n_2=1$; $E_1/E_2=0,25$.

Граничні параметри зони передруйнування суттєво залежать від кута зламу межі поділу середовищ α (рис. 5). В цій залежності спостерігаються максимуми і мінімуми розмірів всієї зони передруйнування і зони деструкції. У випадку комплексно спряжених λ_1, λ_2 максимумам граничної довжини зони передруйнування наближено відповідають мінімуми відносної довжини зо-

ни деструкції і навпаки (рис. 5, d, e). Відносна довжина зони деструкції є досить малою при малих кутах розхилу ($\alpha < 35^\circ$, рис. 5, b). Згідно з рис. 5, c, f, при обраних параметрах δ_c, δ_k граничне навантаження в моделі без зони деструкції (пунктирні лінії) виявляється більшим, ніж у моделі із зоною деструкції (суцільні лінії), проте цей висновок не є загальним, оскільки з рис. 4, c, f випливає, що при достатньо великих значеннях δ_c ,

δ_k нерівність між граничними навантаженнями стає протилежною.

Після визначення граничних параметрів розглянута модель дозволяє розрахувати параметри зони передруйнування при докритичному навантаженні. Результати окремих розрахунків, подані на рис. 6, показують, що розміри зон передруйнування і деструкції та розкриття тріщини у вершині нелінійно зростають з ростом зовнішнього навантаження, заданого безрозмірним параметром σ . У зміцненому матеріалі при наявності зони деструкції довжина зони передруйнування і розкриття тріщини (суцільні лінії) при однакових умовах навантаження виявляються більшими, ніж при їх відсутності (пунктирні лінії, рис. 6, а, с). У залежності відносної довжини зони деструкції від навантаження передбачається стрибок при великих кутах зламу (рис. 6, b).

Висновки

В умовах плоскої деформації за допомогою методу Вінера-Хопфа знайдено аналітичний розв'язок задачі про розрахунок маломасштабної зони передруйнування з привершинною зоною де-

струкції в околі кутової точки межі поділу двох різних пружних середовищ, з якої виходить міжфазна тріщина. Зона передруйнування, що розвивається з кутової точки по межі поділу середовищ у з'єднувальному матеріалі, моделюється лінією розриву нормального переміщення, на якій нормальне напруження задовольняє лінійному закону зміцнення. Зона деструкції визначається як прилегла до вершини тріщини область зони передруйнування з високим рівнем розірваних міжчастинкових зв'язків, що обумовлює зниження напруження в зоні і збільшення її розкриття. Отримано трансцендентні рівняння для визначення розмірів зон передруйнування і деструкції та розкриття тріщини у її вершині. Здійснено числовий аналіз впливу зміцнення і утворення зони деструкції на умови зрушення тріщини і граничні розміри зон. Виявлено їх суттєву залежність від параметрів зміцнення матеріалу, конфігурації навантаження, а також від кута зламу межі поділу середовищ. Встановлено, що граничний розмір зони деструкції складає значну частину зони передруйнування, досягаючи 0,9 її довжини.

Список використаних джерел

1. Панасюк В.В. Предельное равновесие хрупких тел с трещинами / В.В. Панасюк. – Киев: Наук. думка, 1968. – 246 с.
2. Панько І.М. Теоретичні основи інженерних методів для оцінки тріщиностійкості матеріалів і елементів конструкцій. – Львів: Вид. центр Львів. нац. ун-ту ім. І. Франка, 2000. – 279 с.
3. Панасюк В.В. Гранична рівновага тіла з тріщиною з урахуванням особливостей розподілу напружень біля її вершини / В. В. Панасюк, І.М. Панько // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2005. – 41, № 4. – С. 5–8.
4. Дудик М.В. Розвиток зони передруйнування від міжфазної тріщини у кутовій точці межі розділу двох пружних середовищ / М.В. Дудик, Ю.В. Діхтяренко // Математичні методи та фізико-механічні поля. – 2011. – 54, №2. – С.103-114.

References

1. PANASYUK, V.V. (1968) *Limit Equilibrium of Brittle Bodies with Cracks*. Kiev: Naukova Dumka.
2. PAN'KO, I.M. (2000) *Teoretychni osnovy inzhenernykh metodiv dlia otsinky trishchynostiikosti materialiv i elementiv konstrukttsii*. Lviv: Vyd. tsentr Lviv. nats. un-tu im. I. Franka.
3. PANASYUK V.V. & PAN'KO I.M. (2005) Limiting equilibrium of a cracked body with regard for the specific features of the distribution of stresses near the crack tip. *Mater. Sci.* 41 (4). pp. 433–438.
4. DUDYK, M.V. & DIKHTYARENKO, Yu. V. (2012) Development of a prefracture zone from an interfacial crack at a corner point of an interface of two elastic media. *Journal of Mathematical Sciences*. 184 (2). pp.121-135.

Надійшла до редколегії 25.03.16

УДК 539.421

Камінський А. О.¹, д.ф.-м.н., проф.,
Селіванов М. Ф.¹, к.ф.-м.н., с.н.с.,
Чорноіван Ю. О.¹, к.ф.-м.н., с.н.с.

Вплив контакту між берегами тріщини Дагдейла на параметри руйнування ортотропної пластини

¹ Інститут механіки ім. С. П. Тимошенка НАН
України, 03057, м. Київ, вул. Нестерова, 3,
e-mail: fract@inmech.kiev.ua

A. A. Kaminsky¹, DSc, professor,
M. F. Selivanov¹, PhD, senior researcher
Y. O. Chornoivan¹, PhD, senior researcher

Influence of contact interaction between Dugdale crack faces on fracture parameters of orthotropic plate

¹ S. P. Timoshenko Institute of Mechanics, NASU,
03057, Kyiv, Nesterov st., 3,
e-mail: fract@inmech.kiev.ua

У статті наведено підхід до розв'язування задач нелінійної механіки руйнування, який враховує можливий контакт між берегами тріщини. Виведено визначальні рівняння для розкриття тріщини та контактного напруження. Наведено приклад обчислень для ортотропного композита.

Ключові слова: тріщина, руйнування, розкриття тріщини, контакт берегів тріщини

An approach taking into account possible contact between crack faces is proposed to solve nonlinear fracture mechanics problems. The studied body is assumed to be a cracked infinite orthotropic plate. In this work, as an example of the approach application we study a problem for the body which is loaded by the tensile forces at infinity and a pair of the compressive point forces applied near the crack. As a cohesive force model we used Dugdale model for its simplicity. Muskhelishvili's formalism is used to reduce the problem to Hilbert–Privalov boundary value problem. A linear approximation is used for the contact stresses. Equations are derived to determine crack opening and node values of the contact stresses. Due to the problem's nonlinearity, the contact zone extension and the location of the process zone ends should be determined as a part of the solution. An example of calculations is given for an orthotropic composite. The composite effective characteristics were obtained using homogenization. Quantitative assessment of the proposed approach is made when compared to the approach of the linear fracture mechanics (Griffith crack model).

Key words: crack, fracture, crack opening, contact interaction between faces.

Статтю представив докт. фіз.-мат. наук, проф. Жук Я.О.

1. Вступ

Важливість обчислення параметрів, що характеризують наявну в елементі конструкції тріщину, дала поштовх розвитку численних аналітичних та обчислювальних методів лінійної та нелінійної механіки руйнування. Найважливішими характеристиками тріщини є коефіцієнт інтенсивності напружень (КІН) та розкриття берегів тріщини. Незалежно від типу тріщини (криволінійна чи прямолінійна, простого режиму руйнування чи змішаного) в більшості випадків задача розв'язується в припущенні відсутності взаємодії берегів, тобто для відкритої тріщини. Навіть якщо КІН тріщини нормального відриву K_I відмінний від нуля (від'ємний K_I свідчить про перекриття берегів тріщини в околі

вершини) можливе часткове перекриття берегів на деяких ділянках, що не містять вершин. Очевидним є факт впливу утвореної зони контакту на характеристики тріщини. Підтвердження цього впливу можна знайти у розв'язках, які наведено у роботах [5-9].

У цій роботі наведено алгоритм розв'язування задачі про визначення параметрів області контактної взаємодії берегів тріщини Дагдейла, що перебуває під дією прикладених на значній віддалі від неї розтягувальних зусиль та стискальних зосереджених сил, прикладених на певній віддалі від тріщини. Для побудови аналітичних розв'язків в роботі використовуються класичні потенціали Мусхелішвілі [3]. Контактне напруження фігурує в цих потенціалах у вигляді лінійної апроксимації з невідомими

напруженнями у вузлах. Для знаходження цих напружень будуються та розв'язуються системи нелінійних рівнянь.

2. Постановка задачі

Узагальнений закон Гука для головних напрямків анізотропії матеріалу пластини [2]:

$$\varepsilon_x = a_{11}\sigma_x + a_{12}\sigma_y, \quad \varepsilon_y = a_{12}\sigma_x + a_{22}\sigma_y,$$

$$\gamma_{xy} = a_{66}\tau_{xy}.$$

Розгляньмо задачу, що відповідає постановці, зображеній на рис. 1.

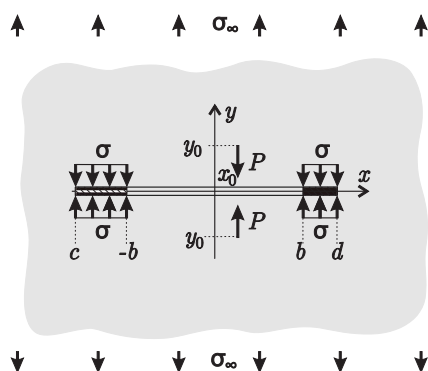


Рис. 1 Постановка задачі і позначення.

Контурні умови задачі

$$\sigma_y^\pm = -\sigma_0(x) - \sigma_c(x) + \begin{cases} \sigma, & x \in L'' \\ 0, & x \in (-b, b) \end{cases}$$

($L'' = (c, -b) \cup (b, d)$) та умову на нескінченності

$$\sigma_y(z) = \sigma_\infty, \quad z \rightarrow \infty.$$

Напруження $\sigma_c(x)$ є відмінними від нуля у випадку контакту берегів тріщини. Ці напруження будемо визначати в ході розв'язання задачі в формі лінійної апроксимації:

$$\sigma_c(x) = \frac{(b_k - x)\sigma_{k-1} + (x - b_{k-1})\sigma_k}{\Delta b_k}, \quad x \in (b_{k-1}, b_k),$$

σ_k – контактні напруження у вузлах апроксимації, $b_0 = c$, $b_n = d$. Будемо розглядати лише частковий контакт берегів, коли вершини тріщини лежать поза зоною контакту. Також у процесі розв'язування задачі має бути знайдено положення зовнішніх границь зон зчеплення c і d .

3. Методика розв'язування

Компоненти напружень і переміщень у тілі можна представити через потенціали у такому вигляді [2]:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= 2\operatorname{Re}\{s_1^2\Phi(z_1) + s_2^2\Psi(z_2)\}, \\ \sigma_y &= 2\operatorname{Re}\{\Phi(z_1) + \Psi(z_2)\}, \\ \tau_{xy} &= -2\operatorname{Re}\{s_1\Phi(z_1) + s_2\Psi(z_2)\}, \\ u &= 2\operatorname{Re}\{p_1\phi(z_1) + p_2\psi(z_2)\}, \\ v &= 2\operatorname{Re}\{q_1\phi(z_1) + q_2\psi(z_2)\}, \end{aligned} \quad (1)$$

де

$$\begin{aligned} p_k &= a_{11}s_k^2 + a_{12}, \quad q_k = a_{12}s_k + \frac{a_{22}}{s_k}; \\ \phi(z) &= \int \Phi(z)dz, \quad \psi = \int \Psi(z)dz. \end{aligned} \quad (2)$$

Комплексні параметри анізотропії $s_1 = i\beta_1$ і $s_2 = i\beta_2$ є коренями характеристичного рівняння основного диференціального рівняння плоскої задачі теорії пружності

$$a_{11}s^4 + (2a_{12} + a_{66})s^2 + a_{22} = 0.$$

Для великих значень $|z|$

$$\Phi(z) = \Gamma + \frac{A}{z} + O(z^{-2}), \quad \Psi(z) = \Gamma' + \frac{B}{z} + O(z^{-2}),$$

$\Gamma = B^* + i \cdot 0$ і $\Gamma' = B'^* + iC'^*$ – визначаються умовами на нескінченності з виразів (1):

$$\begin{cases} s_1^2\Gamma + s_2^2\Gamma' + \bar{s}_1^2\bar{\Gamma} + \bar{s}_2^2\bar{\Gamma}' = \sigma_x^\infty \\ \Gamma + \Gamma' + \bar{\Gamma} + \bar{\Gamma}' = \sigma_y^\infty \\ s_1\Gamma + s_2\Gamma' + \bar{s}_1\bar{\Gamma} + \bar{s}_2\bar{\Gamma}' = -\tau_{xy}^\infty \end{cases} \quad (3)$$

Для формулювання задачі Гільберта-Прівалова введемо функції [4]

$$\begin{aligned} \Theta(z) &= \Phi(z) + \frac{1 + \alpha s_2}{1 + \alpha s_1} \Psi(z), \\ \Omega(z) &= \bar{\Phi}(z) + \frac{1 + \alpha \bar{s}_2}{1 + \alpha \bar{s}_1} \bar{\Psi}(z); \\ \theta(z) &= \phi(z) + \frac{p_2 + \alpha q_2}{p_1 + \alpha q_1} \psi(z), \\ \omega(z) &= \bar{\phi}(z) + \frac{\bar{p}_2 + \alpha \bar{q}_2}{\bar{p}_1 + \alpha \bar{q}_1} \bar{\psi}(z). \end{aligned} \quad (4)$$

Введений параметр α є коренем квадратного рівняння

$$\frac{1 + \alpha s_2}{1 + \alpha s_1} = \frac{p_2 + \alpha q_2}{p_1 + \alpha q_1}. \quad (5)$$

Рівняння (2), (4) і (5) дають

$$\theta(z) = \int \Theta(z) dz.$$

Рівність

$$\omega(z) = \int \Omega(z) dz \quad (6)$$

впливає з того, що з $\bar{\alpha}$ також є коренем квадратного рівняння (5), звідки

$$\frac{1 + \bar{\alpha} s_2}{1 + \bar{\alpha} s_1} = \frac{p_2 + \bar{\alpha} q_2}{p_1 + \bar{\alpha} q_1}; \quad \frac{1 + \alpha \bar{s}_2}{1 + \alpha \bar{s}_1} = \frac{\bar{p}_2 + \alpha \bar{q}_2}{\bar{p}_1 + \alpha \bar{q}_1},$$

що і забезпечує (6).

Утворимо наступні комбінації напружень і переміщень

$$\begin{aligned} \sigma_\alpha &\equiv \sigma_y - \alpha \tau_{xy} = (1 + \alpha s_1) \Theta(z_1) + \\ &+ (1 + \alpha \bar{s}_1) \Omega(\bar{z}_1) + (1 + \alpha s_2) [\Psi(z_2) - \Psi(z_1)] + \\ &+ (1 + \alpha \bar{s}_2) [\overline{\Psi(z_2)} - \overline{\Psi(z_1)}]; \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} u_\alpha &\equiv u + \alpha v = (p_1 + \alpha q_1) \theta(z_1) + \\ &+ (\bar{p}_1 + \alpha \bar{q}_1) \omega(\bar{z}_1) + (p_2 + \alpha q_2) [\psi(z_2) - \psi(z_1)] + \\ &+ (\bar{p}_2 + \alpha \bar{q}_2) [\overline{\psi(z_2)} - \overline{\psi(z_1)}]. \end{aligned}$$

Переміщення берегів тріщини:

$$u_\alpha^\pm(x) = (p_1 + \alpha q_1) \theta^\pm(x) + (\bar{p}_1 + \alpha \bar{q}_1) \omega^\mp(x). \quad (7)$$

З (3) випливає, що

$$\begin{aligned} \sigma_\alpha^\infty &\equiv \sigma_\infty - \alpha \tau_\infty = \\ &= (1 + \alpha s_1) \Gamma + (1 + \alpha s_2) \bar{\Gamma} + \\ &+ (1 + \alpha \bar{s}_1) \Gamma' + (1 + \alpha \bar{s}_2) \bar{\Gamma}' \end{aligned}$$

Функції у виразах для напружень і переміщень (1), набудуть вигляду

$$\begin{aligned} \Phi(z) &= \frac{\Theta(z) + \bar{\Omega}(z)}{2}, \quad \Psi(z) = \frac{1 + \alpha s_1}{1 + \alpha s_2} \frac{\Theta(z) - \bar{\Omega}(z)}{2}; \\ \varphi(z) &= \frac{\theta(z) + \bar{\omega}(z)}{2}, \quad \psi(z) = \frac{1 + \alpha s_1}{1 + \alpha s_2} \frac{\theta(z) - \bar{\omega}(z)}{2}. \end{aligned}$$

На дійсній осі комплексної площини, коли у прямує до нуля згори чи знизу з виразу (6) відповідно отримаємо

$$\begin{aligned} \sigma_\alpha^+(x) &= (1 + \alpha s_1) \Theta^+(x) + (1 + \alpha \bar{s}_1) \Omega^-(x); \\ \sigma_\alpha^-(x) &= (1 + \alpha s_1) \Theta^-(x) + (1 + \alpha \bar{s}_1) \Omega^+(x). \end{aligned} \quad (8)$$

Додаючи та віднімаючи праві і ліві частини рівнянь (8), отримаємо дві граничні задачі Гільберта-Прівалова

$$\begin{aligned} &[(1 + \alpha s_1) \Theta(x) + (1 + \alpha \bar{s}_1) \Omega(x)]^+ + \\ &+ [(1 + \alpha s_1) \Theta(x) + (1 + \alpha \bar{s}_1) \Omega(x)]^- = \sigma_\alpha^+(x) + \sigma_\alpha^-(x); \\ &[(1 + \alpha s_1) \Theta(x) - (1 + \alpha \bar{s}_1) \Omega(x)]^+ - \\ &- [(1 + \alpha s_1) \Theta(x) - (1 + \alpha \bar{s}_1) \Omega(x)]^- = \sigma_\alpha^+(x) - \sigma_\alpha^-(x). \end{aligned} \quad (9)$$

Розв'язок цих задач у випадку наявності напружень на нескінченності та самоврівноважених контурних умов ($\sigma_\alpha^+(x) = \sigma_\alpha^-(x)$) набуває вигляду

$$\begin{aligned} &(1 + \alpha s_1) \Theta(z) \pm (1 + \alpha \bar{s}_1) \Omega(z) = \\ &\left\{ \frac{-H_1(z) - H_2(z) + H_3(z) + H_4(z)}{\pi}, \right. \\ &\left. -\Gamma_2 \right\}, \end{aligned} \quad (10)$$

де

$$\begin{aligned} H_1(z) &= \frac{1}{iX(z)} \int_c^d \frac{\sigma_0(x)}{x-z} X(x) dx, \\ H_2(z) &= \frac{1}{iX(z)} \int_c^d \frac{\sigma_c(x)}{x-z} X(x) dx; \\ H_3(z) &= 2\pi \frac{C_0 z + C_1}{X(z)}, \quad H_4(z) = \frac{1}{iX(z)} \int_{L''} \frac{X(x)}{x-z} dx, \end{aligned} \quad (11)$$

$X(x)$ – значення функції $X(z) = \sqrt{(z-c)(z-d)}$ на верхньому березі розрізу ($X(x) = X^+(x)$). Сталі C_0 та Γ_2 визначається умовами на нескінченності, стала C_1 – умовою однозначності переміщень, σ_0 – напруження, що виникають на лінії розташування тріщини в тілі без тріщини внаслідок прикладання зосереджених сил.

З умови однозначності переміщень встановимо, що $C_1 = -eC_0$. Сталі C_0 і Γ_2 :

$$C_0 = \frac{1}{2} \sigma_\alpha^\infty; \Gamma_2 = -(1 + \alpha s_1) \Gamma - (1 + \alpha s_2) \Gamma' + \\ + (1 + \alpha \bar{s}_1) \bar{\Gamma} + (1 + \alpha \bar{s}_2) \bar{\Gamma}'.$$

Інтегруючи у (9), отримаємо

$$H_1(z) = \frac{iP}{2X(z)} \sum_{k=1}^4 D_k \left[R(z, z_0^k) - R(z, \bar{z}_0^k) \right];$$

$$H_2(z) = i \sum_{k=1}^{n-1} \sigma_k \left[h_k(z) - \right. \\ \left. - \frac{N_{0k} + N_{1k}(z-e) - N_{2k}(z-e)^2}{X(z)} \right];$$

$$H_3(z) = \pi \sigma_\infty \frac{z-e}{X(z)};$$

$$H_4(z) = \sigma \left[i C_b(z) + \pi - \frac{(z-e)B_0 + \hat{X}_b}{X(z)} \right], \quad (12)$$

де $e = (d+c)/2$,

$$D_k = \frac{a_k(1 + \alpha s_k)}{a_{11} \tilde{s}_k} \cdot q_k, \quad k=1, \dots, 4,$$

$$a_1 = a_2 = 1, \quad a_3 = a_4 = -1;$$

$$\hat{X}(z) = \sqrt{(z-c)(d-z)}, \quad \hat{X}_b = \hat{X}(b) - \hat{X}(-b)$$

$$B_0 = 2 \operatorname{arctg} \left[\frac{\tilde{X}(b) - \tilde{X}(-b)}{1 + \tilde{X}(-b)\tilde{X}(b)} \right], \quad \tilde{X}(z) = \sqrt{\frac{z-c}{d-z}};$$

$$R(z, \zeta) = (z - \zeta)^{-1} [X(z) - X(\zeta)];$$

$$h_0(z) = Q'_1(z) + C_0(z), \quad h_n(z) = -Q'_n(z) - C_n(z),$$

$$h_k(z) = Q'_{k+1}(z) - Q'_k(z), \quad k=1, \dots, n-1;$$

$$Q'_k(z) = (\Delta b)^{-1} [Q_k(z) - Q_{k-1}(z)];$$

$$Q_k(z) = (z - b_k) C_k(z), \quad C_k(z) = C(z, b_k);$$

$$N_{00} = \Delta S_1 + \hat{X}_0, \quad N_{10} = \Delta R_1 - I_0, \quad N_{20} = \Delta I_1,$$

$$N_{0k} = \Delta S_{k+1} - \Delta S_k, \quad N_{1k} = \Delta R_{k+1} - \Delta R_k,$$

$$N_{2k} = \Delta I_{k+1} - \Delta I_k,$$

$$N_{0n} = -\Delta S_n - \hat{X}_n, \quad N_{1n} = -\Delta R_n + I_n, \quad N_{2n} = -\Delta I_n;$$

$$I_k = 2 \operatorname{arctg} \tilde{X}_k, \quad \tilde{X}_k = \sqrt{\frac{k}{n-k}}, \quad \hat{X}_k = \tilde{X}_k(n-k),$$

$$R_k = \hat{X}_k + \left(k - \frac{n}{2} \right) I_k, \quad 2S_k = \frac{n^2}{4} I_k - \left(k - \frac{n}{2} \right) I_k;$$

$$C_b(z) = C(z, b) - C(z, -b),$$

$$C(z, \zeta) = \ln \frac{\tilde{X}(z) - \tilde{X}(\zeta)}{\tilde{X}(z) + \tilde{X}(\zeta)}.$$

Координати вершин зон зчеплення c і d мають задовольняти умову скінченності напружень. Щоб отримати відповідні рівняння підставимо функції $H_i(z)$ з (11) до співвідношень (10) і прирівняємо вираз при $X^{-1}(z)$, обчислений у цих точках, до нуля:

$$\begin{cases} \frac{P}{2} \sum_{k=1}^2 D'_k g_{1k} + e_2 \sum_{k=1}^{n-1} \sigma_k \left[\frac{2}{n} N_{0k} - \frac{n}{2} N_{2k} \right] - \sigma \hat{X}_b = 0 \\ \frac{P}{2} \sum_{k=1}^2 D'_k g_{2k} + e_2 \left[-\sum_{k=1}^{n-1} \sigma_k N_{1k} + \sigma B_0 - \pi \sigma_\infty \right] = 0 \end{cases}, \quad (13)$$

де

$$e_2 = (d-c)/2,$$

$$D'_1 = -\frac{\beta_2^2 - a_{12}/a_{11}}{\beta_2^2 - \beta_1^2}, \quad D'_2 = \frac{\beta_1^2 - a_{12}/a_{11}}{\beta_2^2 - \beta_1^2},$$

$$g_{(1,2)k} = \operatorname{Re} \{ \tilde{X}^{-1}(z_0^k) \mp \tilde{X}(z_0^k) \}.$$

Отримаємо вираз для вертикальних переміщень берегів тріщини. Для цього проінтегруємо (12):

$$\begin{aligned} \int H_1(z) dz &= \frac{iP}{2} \sum_{k=1}^4 D_k \left[\ln \frac{z - z_0^k}{z - \bar{z}_0^k} - C(z_0^k, z) + \right. \\ &\quad \left. + C(\bar{z}_0^k, z) \right]; \\ \int H_2(z) dz &= i \sum_{k=1}^{n-1} \sigma_k \left[J_k(z) - \sum_{s=0}^2 F_s(z) N_{sk} \right]; \\ \int H_3(z) dz &= \pi \sigma_\infty X(z); \\ \int H_4(z) dz &= i K_b(z) + \pi z - B_0 X(z) + i \hat{X}_b I(z), \end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned} J_0(z) &= T_1'(z) + K_0(z), \quad J_n(z) = -T_n'(z) - K_n(z), \\ J_k(z) &= T_{k+1}'(z) - T_k'(z), \quad k = 1, \dots, n-1; \\ T_k'(z) &= (\Delta b)^{-1} [T_k(z) - T_{k-1}(z)]; \\ K_k(z) &= Q_k(z) - \hat{X}_k I(z); \\ 2T_k(z) &= (z - b_k)^2 C_k(z) + \hat{X}_k [\hat{X}(z) + b_k I(z)]; \\ F_0(z) &= -I(z), \quad F_1(z) = \hat{X}(z), \\ 2F_2(z) &= e_2^2 I(z) - z \hat{X}(z); \\ K_b(z) &= K(z, b) - K(z, -b), \quad I(z) = 2 \arctg \tilde{X}(z). \end{aligned}$$

Згідно з (7) отримаємо переміщення берегів тріщини

$$\begin{aligned} \frac{2\pi\alpha_y}{L} v(x) &= P \sum_{k=1}^2 D'_k C_x(z_0^k, x) - \\ &- \sum_{k=1}^{n-1} \sigma_k \left[J_k(x) - \sum_{s=0}^2 F_s(x) N_{sk} \right] + \\ &+ \pi \sigma_\infty \hat{X}(x) + \sigma \left[K_b(x) - B_0 \hat{X}(x) + \hat{X}_b I(x) \right]. \end{aligned}$$

Розв'язок нелінійної системи (13) може бути знайдено за допомогою одного зі стандартних методів розв'язання систем нелінійних рівнянь. Для першої ітерації c і d (положення вершин зони зчеплення) обчислюємо КІН у правій та лівій вершинах тріщини $K_1(\mp b)$; у межах рамках концепції тонкої структури вершини тріщини знаходимо

$$\begin{Bmatrix} -b-c \\ d-b \end{Bmatrix} = \frac{\pi K_1^2(\mp b)}{8\sigma^2}.$$

На кожній ітерації розв'язання нелінійної системи (13) діємо згідно з таким алгоритмом:

1. Розв'язуємо систему лінійних рівнянь $v(b_m) = 0$ з невідомими значеннями контактних напружень у вузлах апроксимації. Цю систему можна подати у вигляді

$$A \vec{\sigma} = B, \quad (14)$$

де елементи матриці A і вектора B набувають таких значень:

$$\begin{aligned} A_{mk} &= J_k(b_m) - \sum_{s=0}^2 F_s(b_m) N_{sk}, \\ B_m &= P \sum_{k=1}^2 D'_k C_x(z_0^k, b_m) + \pi \sigma_\infty \hat{X}(b_m) + \\ &+ \sigma \left[K_b(b_m) - B_0 \hat{X}(b_m) + \hat{X}_b I(b_m) \right], \\ m, k &= 1, 2, \dots, n-1, \\ C_x(z, x) &= \operatorname{Re} \{ C(z, x) \}. \end{aligned}$$

2. Виключаємо з системи (14) рівняння і змінні з номерами, що відповідають від'ємним елементам $\vec{\sigma}$ отриманого розв'язку.

3. Повторюємо процедуру доки всі елементи $\vec{\sigma}$ не стануть додатними.

Таким чином, алгоритм передбачає застосування ітеративної процедури на кожній ітерації методу розв'язання системи двох нелінійних рівнянь (13).

4. Приклад розв'язання

Проілюструємо алгоритм числовим результатом, наведеним на рис. 2. Результати отримано для $\sigma_\infty = 20$ МПа, $P = \sigma_\infty \cdot 1$ см, $x_0 = 0.1$ см, $y_0 = 0.3$ см і пружних сталих матеріалу, які отримано шляхом моделювання матеріалу пластини ортотропним середовищем з ефективними характеристиками, знайденими за допомогою результатів механіки композитних матеріалів [1] як функції механічних характеристик ізотропних матеріалів компонент композита. Концентрація армування вважалася рівною 0.2, модулі об'ємного стиснення та зсуву для армування і наповнювача — $K_1 = 85.8$ МПа, $G_1 = 29.3$ МПа, $K_2 = 5.41$ МПа, $G_2 = 2.51$ МПа.

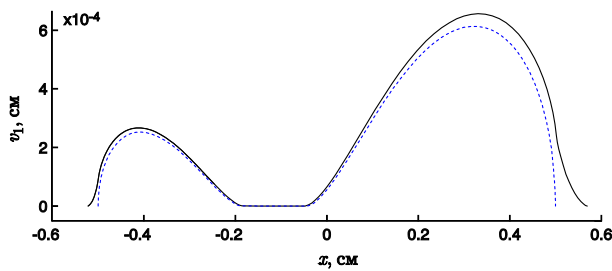


Рис. 2 Розкриття берегів тріщини.

Для порівняння на цьому ж рисунку штриховою лінією зображено відповідний розв'язок для моделі тріщини у межах лінійної механіки руйнування. Концепція тонкої

структури дає границі зон зчеплення $c = -0.5177$ см і $d = -0.5521$ см; розв'язання задачі дає $c = -0.5220$ см і $d = -0.5693$ см. Похибка концепції тонкої структури вершини тріщини при визначенні розмірів зон зчеплення становить для цієї задачі 0.82 % для лівої зони і 3.11 % для правої.

Таким чином, на конкретному прикладі проілюстровано ефективність запропонованого підходу до визначення характеристик руйнування у випадку контакту берегів тріщини.

References

1. Ван Фо Фы Г.А. Композиционные материалы волокнистого строения / Ван Фо Фы Г.А. – К.: Наук. думка, 1970. – 404 с.
2. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела / Лехницкий С.Г. – М.: Наука, 1977. – 416 с.
3. Мухелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости / Мухелишвили Н.И. – М.: Наука, 1966.–707с.
4. Савин Г.Н. Распределение напряжений около отверстий / Савин Г.Н. – К.: Наук. думка, 1968. – 888 с.
5. Becker, W.. About the Dugdale crack under mixed mode loading. / Becker, W., Gross, D. // Int. J. of Fract. – 1988. – 37, – P. 163-170.
6. Bowie O.L.. On the "overlapping" problem in crack analysis / Bowie O.L., Freese C.E. // Eng. Fract. Mech. – 1976. – 8, – P. 373-379.
7. Comninou M. On the frictional contact in crack analysis / Comninou M., Dundurs J. // Eng. Fract. Mech. – 1979. – 12, – P. 117-123.
8. Guz A.N. On physically incorrect results in fracture mechanics / Guz A.N. // Int. Appl. Mech. – 2009. – 45, – P. 1041-1051.
9. Khludnev A.M Overlapping domain problems in the crack theory with possible contact between crack faces / Khludnev A.M., Tani A. // Q. Appl. Math. – 2008. – 66. – P. 423-435.
1. VAN FO FY G.A. (1970) Composite materials of fibrous structure. Kiev: Naukova Dumka.
2. LEKHNITSKY S.G. (1963) *Theory of elasticity of an anisotropic elastic body*. San Francisco: Holden-Day.
3. MUSKHELISHVILI N.I. (1975) *Some basic problems of the mathematical theory of elasticity*. – Noordhoff, 1975.
4. SAVIN G.N. (1970) *Stress Distribution around Holes*. Washington: NASA.
5. BECKER, W., GROSS, D. (1988) About the Dugdale crack under mixed mode loading. *Int. J. of Fract.* 37. p. 163-170.
6. BOWIE O.L., FREESE C.E. (1976) On the "overlapping" problem in crack analysis. *Eng. Fract. Mech.* 8. p. 373-379.
7. COMNINOU M., DUNDURS J. (1979) On the frictional contact in crack analysis. *Eng. Fract. Mech.* 12. p. 117-123.
8. GUZ A.N. (2009) On physically incorrect results in fracture mechanics. *Int. Appl. Mech.* 45. p. 1041-1051.
9. KHLUDNEV A.M., TANI A. (2008) Overlapping domain problems in the crack theory with possible contact between crack faces. *Q. Appl. Math.* 66. p. 423-435.

Надійшла до редколегії 18.03.16

УДК 539.3

Киричок І.Ф.¹, д.ф.-м.н., пров. наук. співр.
Жук Я.О.², д.ф.-м.н., проф.
Карнаухова Т.В.³, к. ф.-м. н., доц.

I.F. Kirichok¹, Dr.Sci.
Y.A. Zhuk², Dr.Sci., Prof.
T.V. Karnaukhova³, Ph.D., Assoc. Prof.

Радіальні коливання і вібророзігрів замкнутої сферичної оболонки з фізично нелінійного в'язкопружного матеріалу та їх демпфування п'єзоелектричним сенсором і актуатором

Radial vibration and vibroheating of closed spherical shell made of physically nonlinear viscoelastic material and its damping by piezoelectric sensor and actuator

¹ Інститут механіки ім. С.П.Тимошенка НАН України, 03057, м. Київ, вул. П. Нестерова, 3,

¹ S.P.Timoshenko Institute of Mechanics National Academy of Sciences of Ukraine, 3, P. Nesterov str., Kyiv 03057

² Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, пр-т. Глушкова 4е, e-mail: y.zhuk@i.ua

² Taras Shevchenko National University of Kyiv, 4e, Glushkov ave., Kyiv 03680
e-mail: y.zhuk@i.ua

³ Київський національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут», 03056, м. Київ, пр-т Перемоги, 37

³ National Technical University of Ukraine «Kyiv Polytechnic Institute», 37, Peremohy ave., Kyiv 03056

Представлені результати дослідження вимушених радіальних коливань і дисипативного розігріву замкнутої сферичної оболонки із фізично нелінійного в'язкопружного матеріалу та їх демпфування п'єзоелектричним сенсором і актуатором. Досліджено вплив залежності від амплітуди деформації комплексного модуля пасивного матеріалу на амплітудно- і температурно-частотні характеристики оболонки. Показана можливість активного демпфування вимушених коливань оболонки за допомогою оберненого зв'язку, який математично реалізується лінійною залежністю між різницею потенціалів актуатора і показниками сенсора, його швидкості та прискорення, що вносить вклад в жорсткісні, дисипативні та інерційні характеристики системи.

Ключові слова: резонансні коливання, дисипативний розігрів, сенсор, актуатор, обернений зв'язок.

The problem of forced radial resonant vibration and dissipative heating of closed spherical shell made of physically nonlinear viscoelastic material that is actively damped with used of piezoelectric sensor and actuator is investigated. It is assumed that the core layer of the three-layer shell is composed of the electrically passive material while the outer layers are manufactured from the piezoceramics. Theory of coupled thermo-electro-viscoelasticity is used to derive the problem statement in the case of monoharmonic loading. Within this theory, the concept of complex-value moduli is applied to formulate the relations between main field characteristics. Influence of strain amplitude dependence of complex modulus of the electrically passive material on both amplitude-frequency and temperature-frequency characteristics is studied. Possibility of active damping of the shell vibration is demonstrated. It is shown that the damping can be performed through the specially organized feedback. The feedback is complying with the linear mathematical law that is organized as the linear dependence between the actuator difference of potential and the amplitude of the electric potential of the sensor, its rate and acceleration which make the contribution to stiffness as well dissipative and inertial characteristics of the system. The heat transfer coefficient influence onto critical values of the amplitudes of mechanical loading causing the overheating of the shell to the critical temperatures leading to thermal breaking of the shell is studied in details.

Key Words: resonant vibrations, dissipative heating, sensor, actuator, feedback.

Статтю представив академік НАН України Перестюк М.О.

1. Вступ

В останні роки для зниження рівня коливань тонкостінних оболонкових елементів конструк-

цій із непружних (без п'єзоефекту) матеріалів використовуються п'єзоелектричні включення, які виконують роль сенсорів і актуаторів [13]. Часто такі елементи знаходяться під дією гармонічних механічних навантажень з близькою до резонансної частотою та високим рівнем амплітуд. Ці обставини вимагають дослідження впливу фізичної нелінійності і дисипативного розігріву на працездатність і ефективність демпфування вимушених коливань таких елементів. Аналітичні та чисельні результати про вплив фізичної і геометричної нелінійностей на резонансні коливання і вібророзігрів при вимушених коливаннях тришарових балок і прямокутних пластинок отримані в [3–5] та інш. Огляд досліджень теплового руйнування тонкостінних елементів із непружних пасивних і п'єзоактивних матеріалів представлено в [6, 7].

В даній статті розв'язується задача про радіальні коливання і дисипативний розігрів замкнутої сферичної оболонки із фізично нелінійного пасивного (без п'єзоефекту) в'язкопружного матеріалу та їх демпфування пружними п'єзоелектричними шарами, один з яких є сенсором, а другий – актуатором. Демпфування реалізується за допомогою використання механізму оберненого зв'язку, який впливає на жорсткісні, дисипативні та інерційні характеристики системи [1]. Враховується залежність в'язкопружних властивостей пасивного матеріалу від амплітуди прогинів оболонки.

2. Постановка задачі та її розв'язання

Розглянемо тришарову замкнуту сферичну оболонку, віднесено до сферичних координат φ, θ, z з координатою $z = 0$ на серединній поверхні в'язкопружного середнього шару радіуса R і товщини h_0 . Внутрішній ($z \leq -h_0/2$) і зовнішній ($z \geq h_0/2$) шари товщиною h_1 і h_2 , відповідно, виготовлені із поляризованої по товщині пружної п'єзокераміки. Між пасивним і п'єзоактивними шарами та на зовнішніх поверхнях п'єзошарів нанесено нескінченно тонкі електроди. До внутрішніх електродів підведені електричні потенціали ${}^m\varphi(\pm h_0/2) = 0$, ($m = 1, 2$). Для конкретності приймаємо, що шар товщиною h_1 виконує роль сенсора, а шар товщиною h_2 є актуатором.

Оболонка навантажена центральносиметричним поверхневим тиском $q_z = q \cos \omega t$, який гармонічно змінюється за часом t з постійною амплітудою q і частотою ω , близькою до резонансної. Крім того, до електродів актуатора для ком-

пенсації механічного навантаження підводиться гармонічна різниця електричних потенціалів з частотою ω і амплітудою ${}^2\varphi(h_0/2 + h_2) - {}^2\varphi(h_0/2) = V_a$. При цьому на розімкнутих електродах сенсора виникає різниця електричних потенціалів невідомої амплітуди ${}^1\varphi(-h_0/2 - h_1) - {}^1\varphi(-h_0/2) = V_s$ а на електродованих поверхнях S виконуються такі електричні граничні умови:

$$\iint_S {}^1D_z ds = 0. \quad (1)$$

Тут 1D_z – нормальна складова електричної індукції. На поверхнях оболонки виконуються умови конвективного теплообміну із зовнішнім середовищем, температура T_0 якого дорівнює початковій температурі оболонки.

Вважаємо, що внаслідок вибраної геометрії і характеру навантаження по пакету шарів виконуються гіпотези Кірхгофа–Лява безмоментної теорії оболонок. Відносно електричних змінних приймаються адекватні їм припущення [1, 8], згідно з якими індукція $D_z = \text{const}$ є постійною по товщині п'єзошарів. В'язкопружні властивості ізотропного матеріалу пасивного шару характеризуються комплексним модулем [4], складові якого залежать від амплітуди деформації. Розглядаючи усталений процес вібророзігріву, вважаємо температуру постійною по товщині пакету. На основі прийнятих припущень із тривимірних визначальних співвідношень для поляризованої вздовж осі z п'єзокераміки [1] отримуємо такі вирази для п'єзоактивних шарів:

$$\begin{aligned} {}^m\sigma_\theta &= {}^m c_{11} \varepsilon_\theta - {}^m b_{31} {}^m E_z; \\ {}^m D_z &= 2 {}^m b_{31} \varepsilon_\theta - {}^m \tilde{\varepsilon}_{33} {}^m E_z; \end{aligned} \quad (2)$$

$$\varepsilon_\varphi = \varepsilon_\theta = \frac{w}{R}; \quad {}^m E_z = -\frac{d {}^m \varphi}{dz};$$

де

$$\begin{aligned} {}^m c_{11} &= \frac{1}{{}^m s_{11}^E (1 - {}^m \nu_E)}; \quad {}^m \nu_E = -\frac{{}^m s_{12}^E}{{}^m s_{11}^E}; \\ {}^m b_{31} &= \frac{{}^m d_{31}}{{}^m s_{11}^E (1 - {}^m \nu_E)}; \quad {}^m \tilde{\varepsilon}_{33} = {}^m \varepsilon_{33}^T - 2 {}^m b_{31} {}^m d_{31}; \end{aligned}$$

і ${}^m s_{11}^E$, ${}^m s_{12}^E$, ${}^m d_{31}$, ${}^m \varepsilon_{33}^T$ – податливості, п'єзомодуль і діелектрична проникність матеріалу п'єзоелектричних шарів; $w = w' + iw''$ – комплексна амплітуда прогину, $m = 1, 2$.

Для в'язкопружного матеріалу пасивного шару справедливі перша і третя рівності з (2), в яких необхідно покласти ${}^m c_{11} = {}^0 c_{11} = E(\varepsilon'_\theta, \varepsilon''_\theta)/(1-\nu)$, ${}^m b_{31} = 0$; де $E = E' + iE''$ – комплексний модуль в'язкопружності, який залежить від амплітуди деформацій; $\nu = \text{const}$ – коефіцієнт Пуассона.

Згідно [4] приймаємо, що залежність від амплітуд деформацій реалізується через залежність комплексного модуля зсуву $G = G'(J_2^2) + G''(J_2^2)$ від інтенсивності деформацій J_2^2 . Для розглядуваної задачі

$$\begin{aligned} J_2^2 &= \alpha_0 (\varepsilon'_\theta{}^2 + \varepsilon''_\theta{}^2), \\ \alpha_0 &= (1+\nu)^2 / (1-\nu)^2 / 3, \\ E(J_2^2) &= 2(1+\nu)G(J_2^2) \end{aligned} \quad (3)$$

Інтегруючи залежності (2) по товщині шарів оболонки одержимо такі вирази для зусилля N_θ в оболонці і електричної індукції ${}^1 D_z$ в п'єзоелектричному:

$$N_\theta = D_N \varepsilon_\theta - {}^1 b_{31} V_s + {}^2 b_{31} V_a; \quad (4)$$

$$D_N = D_N^0 + {}^0 c_{11} h_0^1; D_N^0 = c_{11} h_1 + {}^2 c_{11} h_2; \quad (5)$$

$${}^1 D_z = {}^2 b_{31} \varepsilon_\theta + {}^1 \tilde{\varepsilon}_{33} V_s / h.$$

Із граничної умови (1) з врахуванням (5) знаходимо вираз для обчислення електричного потенціалу, що виникає на електродах сенсора

$$V_s = -{}^2 b_{31} h \varepsilon_\theta / {}^1 \tilde{\varepsilon}_{33}. \quad (6)$$

В рамках безмоментної теорії рівняння гармонічних коливань досліджуваної оболонки в термінах амплітуд змінних має вигляд (множник $e^{i\omega t}$ опущено)

$$2N_\theta - \rho_* R \omega^2 w = \tilde{q}, \quad (7)$$

де $\rho_* = \rho_1 h_1 + \rho_2 h_2 + \rho_0 h_0$; $\tilde{q} = R(h_0 + h_1 + h_2)$, а ρ_1 , ρ_2 і ρ_0 – питома густина п'єзокераміки сенсора, актуатора і пасивного матеріалу відповідно.

Для активного демпфування механічних коливань оболонки використовується механізм оберненого зв'язку, що математично описується такими лінійними залежностями між показником актуатора V_a і показником сенсора V_s , його першою, або другою похідними за часом [1]:

$$V_a = -G_a V_s, \quad V_a = -i\omega G_{as} V_s, \quad V_a = \omega^2 \bar{G}_{as} V_s. \quad (8)$$

Тут G_a , G_{as} і $\bar{G}_{as}$ – параметри керування, які вносять вклад в жорсткісні, дисипативні та інерційні властивості системи відповідно. Знак «–» показує протифазне до механічного навантаження підведення потенціалу V_a до актуатора.

В силу прийнятих припущень і умов теплообміну стаціонарне значення температури дисипативного розігріву оболонки визначається співвідношенням

$$-2\alpha_s \theta + \frac{\omega}{(1-\nu)R^2} E''(J_2^2) |w|^2 = 0, \quad (9)$$

в якому $|w| = (w'^2 + w''^2)^{1/2}$, $\theta = T - T_0$; α_s – коефіцієнт теплообміну.

Підставляючи вираз (4) в рівняння (7) з врахуванням (6), (8), після нескладних перетворень знаходимо

$$|w| = \tilde{q} / (\Delta^2 + \Delta'^2)^{1/2}, \quad (10)$$

$$\Delta' = \Delta_0 + 2m_1 E'(J_2^2); \quad \Delta'' = 2[\omega G_{as} \gamma_1 + m_1 E''(J_2^2)];$$

$$\Delta_0 = 2(D_N^0 / R + \gamma_2 + G_a \gamma_1) - \omega^2 (R \rho_* + 2\bar{G}_{as} \gamma_1);$$

$$m_1 = h_0 / [(1-\nu)R]; \quad \gamma_1 = {}^2 b_{31}^2 b_{31} h_1 / ({}^1 \tilde{\varepsilon}_{33} R);$$

$$\gamma_2 = \gamma_1 {}^1 b_{31} / {}^2 b_{31}.$$

Співвідношення (10) являє собою трансцендентне рівняння відносно амплітуди прогину. Вигляд його аналітичного розв'язку залежить від апроксимації складових G' і G'' комплексного модуля G як функцій інваріанту J_2^2 . Прийmemo, що складові G' і G'' апроксимуються функціями [4,5]

$$G' = a_1 - b_1 J_2^2, \quad G'' = a_2 - b_2 J_2^2, \quad (11)$$

Тоді з врахуванням залежностей (3), (11) із співвідношення (10) відносно квадрата амплітуди прогину $y = |w|^2$ отримуємо таке кубічне рівняння:

$$A_3 y^3 - A_2 y^2 + A_1 y - \tilde{q}^2 = 0. \quad (12)$$

В рівнянні (12) позначено:

$$A_1 = \Delta_1^2 + \Delta_2^2; \quad A_2 = 2(d_1 \Delta_1 + d_2 \Delta_2);$$

$$A_3 = d_1^2 + d_2^2; \quad \Delta_1 = \Delta_0 + m_1 E_1;$$

$$\Delta_2 = 2(\omega G_a \gamma_1 + m_1 E_2); \quad d_{1,2} = 2m_1 \tilde{E}_{1,2};$$

$$E_{1,2} = 2(1+\nu)a_{1,2}; \quad \tilde{E}_{1,2} = 2(1+\nu)b_{1,2}\alpha_0 / R^2.$$

Обчисливши амплітуду прогину, температуру дисипативного розігріву знаходимо із (9) з врахуванням рівностей (3), (11). У випадку фізично лінійного пасивного матеріалу прогин і температура дисипативного розігріву знаходяться із співвідношень (9), (10), в яких необхідно покласти $E'(J_2^2) = E_1$, $E''(J_2^2) = E_2$.

3. Результати розрахунків та їх аналіз

При проведенні числових розрахунків використано отримані в [9] експериментальні дані для модуля зсуву пасивного матеріалу, які апроксимуються виразами (11) з коефіцієнтами [4]

$$a_1 = 2,41 \cdot 10^5 \text{ Па}, a_2 = 1,81 \cdot 10^5 \text{ Па}, b_1 = 0,537 \cdot 10^7 \text{ Па}, b_2 = 0,38 \cdot 10^7 \text{ Па}, \nu = 0,31, \rho_0 = 1200 \text{ кг/м}^3.$$

П'єзоелектричні актуатор і сенсор виготовлені з однакової п'єзокераміки типу ЦТСтБС-2 [10] з такими параметрами:

$$s_{11}^E = 12,5 \cdot 10^{-12} \text{ м}^2/\text{Н}, s_{12}^E = -4,62 \cdot 10^{-12} \text{ м}^2/\text{Н},$$

$$d_{31} = -1,6 \cdot 10^{-10} \text{ Кл/м}, \varepsilon_{33}^T = 2100 \varepsilon_0,$$

$$\varepsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м}, \rho_{1,2} = 7520 \text{ кг/м}^3.$$

Геометричні розміри оболонки такі: $R = 0,5 \text{ м}$, $h_0 = 0,04 \text{ м}$, $h_1 = h_2 = 0,1 \cdot 10^{-5} \text{ м}$.

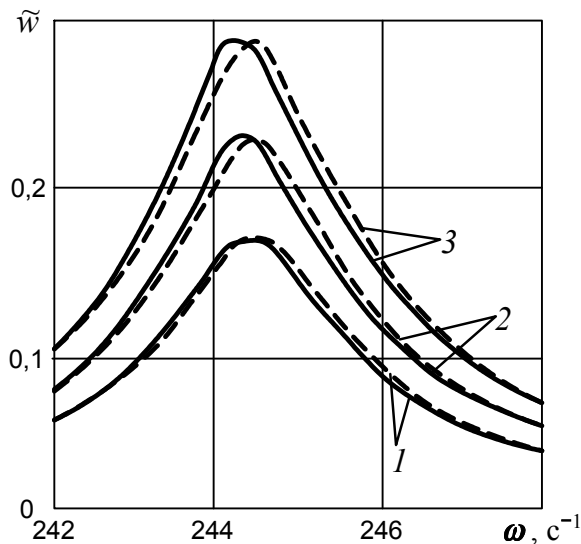


Рис. 1. Частотні залежності амплітуд прогинів оболонки при механічному навантаженні.

На рис. 1, 2 показані криві 1–3 частотних залежностей безрозмірних амплітуд прогинів $\tilde{w} = |w|/h_0$ (АЧХ) і температури дисипативного розігріву θ (ТЧХ) недемпфованої оболонки ($G_a = G_{as} = \bar{G}_{as} = 0$) при $\alpha_s = 25 \text{ Вт/(м}^2 \cdot \text{град)}$, розрахованих для амплітуд навантаження $\tilde{q} = 75, 100$ і 125 Н відповідно. З рис. 1, 2 видно, що вра-

хування фізичної нелінійності (суцільні лінії) по відношенню до лінійної задачі (штрихові лінії) характеризується зсувом АЧХ і ТЧХ в сторону зменшення резонансної частоти і деякому підвищенню прогину і температури вібророзігріву на частоті нелінійного резонансу. Вказані ефекти підсилюються з ростом амплітуди навантаження та супроводжуються високим рівнем температури вібророзігріву, яка може досягти критичного значення, при якому відбувається теплове руйнування системи через розм'якшення пасивного матеріалу або внаслідок деполяризації п'єзокераміки (точка Кюрі).

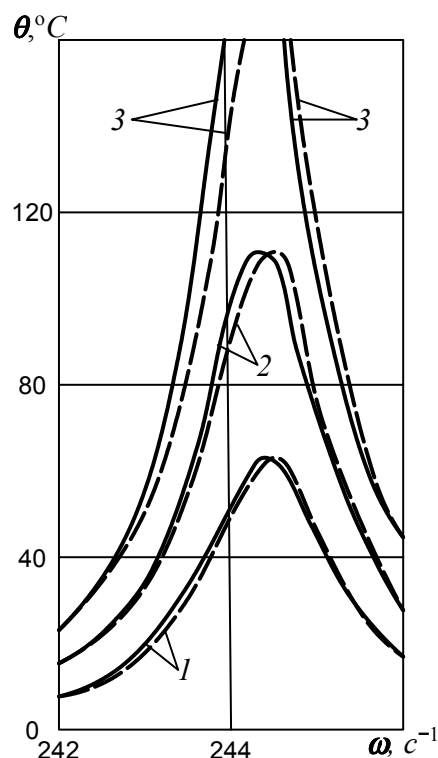


Рис. 2. Частотні залежності температури при механічному навантаженні.

На рис. 3 кривими 1–3 показані залежності температури дисипативного розігріву недемпфованої оболонки від амплітуди навантаження $\tilde{q}$, розраховані на частоті $\omega = 244 \text{ с}^{-1}$ з коефіцієнтами теплообміну $\alpha_s = 5, 10, 20 \text{ Вт/(м}^2 \cdot \text{град)}$, відповідно. Зірочкою на осі ординат позначено температуру Кюрі $\theta = 160^\circ \text{C}$ п'єзокераміки. Цій температурі на осі абсцис відповідає значення амплітуди критичного навантаження $\tilde{q}_{kp}$. Залежність $\tilde{q}_{kp}$ від коефіцієнта теплообміну α_s показана кривою на рис. 4. Зазначимо, що при амплітудах навантаження, при яких температура розігріву не досягає θ_{kp} , для розглядуваного пасивного мате-

ріалу вплив фізичної нелінійності на $\tilde{q}_{kp}$ є незначним.

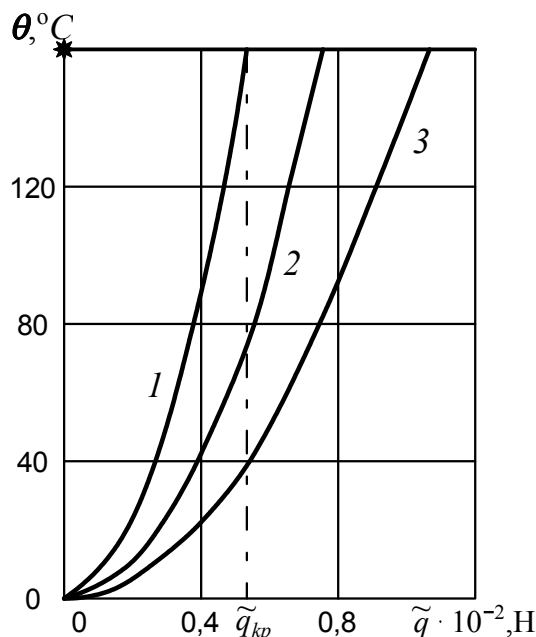


Рис. 3. Залежності температури від механічного навантаження

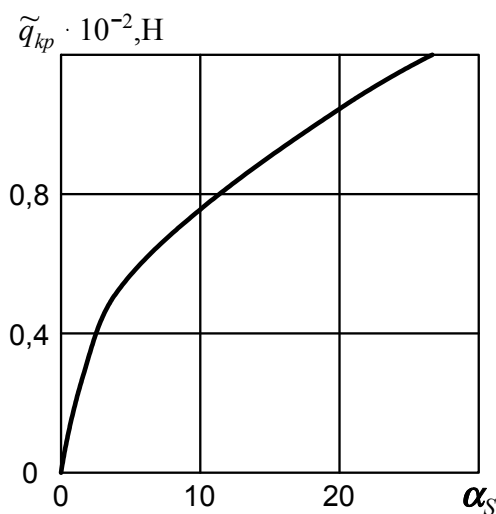


Рис. 4. Залежність критичного навантаження від коефіцієнта теплообміну.

Ефекти активного демпфування розглядуваної оболонки демонструють графіки АЧХ на рис. 5, розраховані при навантаженні $\tilde{q} = 100$ Н. Тут крива 1^0 розрахована для недемпфованої оболонки ($G_a = G_{as} = \bar{G}_{as} = 0$). Для випадку активного демпфування з використанням співвідношень (8) криві 1 і 2 розраховані при $G_{as} = 0,1 \cdot 10^{-3}$, $0,1 \cdot 10^{-1}$ ($G_a = \bar{G}_{as} = 0$); криві $1'$, $2'$ – при $G_a = 0,1$, $0,1$ ($G_{as} = \bar{G}_{as} = 0$); криві $1''$, $2''$ – при $\bar{G}_{as} = 0,1 \cdot 10^{-5}$, $0,4 \cdot 10^{-5}$ ($G_a = G_{as} = 0$).

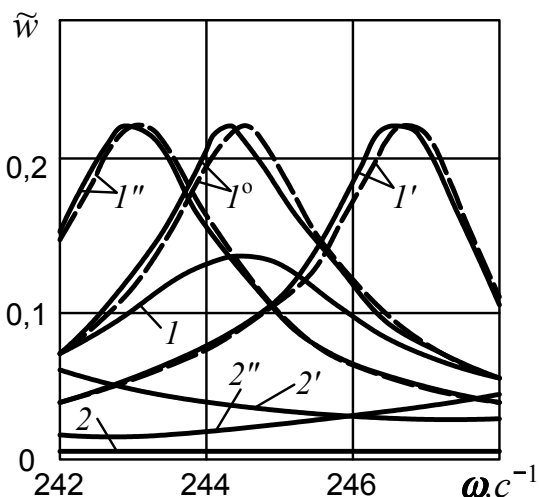


Рис. 5. Частотні залежності амплітуд прогинів оболонки при механічному навантаженні.

Аналіз кривих на рис. 5 показує, що при активному демпфуванні вимушених коливань оболонки за допомогою механізму, що впливає на дисипативні характеристики (криві 1 і 2), збільшення коефіцієнта управління G_{as} веде до повного гасіння коливань в усьому діапазоні частот навантаження. При використанні механізмів, що впливають на жорсткісні (криві $1'$, $2'$) або інерційні (криві $1''$, $2''$) характеристики відповідно, резонансна частота демпфованої оболонки збільшується або зменшується по відношенню до частоти лінійного резонансу (крива 1^0). При цьому амплітуда прогинів на резонансі демпфованої оболонки не змінюється, а гасіння коливань на резонансі недемпфованої оболонки реалізується зміщенням резонансної частоти в сторону збільшення або зменшення, відповідно.

4. Висновки.

Дано постановку і розв'язок задачі про вимушені радіальні коливання і дисипативний розігрів замкнутої сферичної оболонки із фізично нелінійного в'язкопружного матеріалу та її демпфування за допомогою п'єзоелектричних сенсорів та актуаторів. Показана можливість активного демпфування коливань оболонки за допомогою оберненого зв'язку, який реалізується лінійними залежностями між різницею потенціалів актуатора і показниками сенсора, що впливають на жорсткісні, дисипативні або інерційні характеристики оболонки. Враховується залежність в'язкопружного модуля від амплітуди деформацій. Досліджено вплив коефіцієнта теплообміну на критичні значення амплітуди механічного навантаження, при яких температура досягає точки Кюрі і п'єзокераміка деполяризується.

Список використаних джерел

References

1. Карнаухов В.Г. Нелинейная термомеханика пьезоэлектрических неупругих тел при моногармоническом нагружении / В.Г. Карнаухов, В.В. Михайленко. - Житомир: ЖСТУ, 2005. - 428с.
2. Tzou H.S. Dynamic and control of distributed systems / H.S. Tzou, L.A. Bergman. - Cambridge, 1998. - 400p.
3. Zhuk Y.A. Active damping of the forced vibration of a hinged beam with piezoelectric layers, geometrical and physical nonlinearities taken into account / Y.A. Zhuk, I.A. Guz // International Applied Mechanics. - 2009. - **45**, №1. - P. 94-108.
4. Булат А.Ф. Прикладная механика упругонаследственных сред. Т. 4. Вынужденные колебания и диссипативный разогрев неупругих тел. / А.Ф. Булат, В.И. Дырда, В.Г. Карнаухов, Е.Л. Звягильский, А.С. Кобец. - К. Наук. думка. - 2014. - 476с.
5. Карнаухов В.Г. Влияние физической нелинейности на резонансные колебания и диссипативный разогрев трехслойных неупругих прямоугольных пластин / В.Г. Карнаухов, В.М. Сичко, А.С. Карпенюк // Теорет. и прикладная механика. - 2007. - Вып. 43. - с. 102-110.
6. Карнаухов В.Г. Тепловое разрушение полимерных элементов конструкций при моногармоническом деформировании / В.Г. Карнаухов // Прикл. механика. - 2004 - т. 40, № 6. - с. 30-70.
7. Karnaukhov V.G. Thermomechanics of coupled fields in passive piezoelectric inelastic bodies under harmonic deformations / V.G. Karnaukhov // Journal of Thermal Stresses. - 2005. - **26**, № 6-7. - P. 783-815.
8. Kirichok I.F. Control of axisymmetric resonant vibrations and self-heating of shells of revolution with piezoelectric sensors and actuators / I.F. Kirichok // International Applied Mechanics. - 2011. - **46**, № 8. - P. 890-901.
9. Gandni F. Influence of nonlinear viscoelastic material characterization on performance of constrained layer damping treatment / F. Gandni // AIAA J. - 2001. - **39**, № 5. - P. 924 - 931.
10. Bolkisev A.M. Temperature dependence of the properties of piezoelectric ceramics / A.M. Bolkisev, V.L. Karlash, N.A. Shul'ga // International Applied Mechanics. - 1984. - **20**, № 7. - P. 650-653.
1. KARNAUKHOV V.G., MIKHAILENKO V.V. (2005) Nonlinear thermomechanics of piezoelectric elastic solids under monoharmonic loading. - Zhytomir: ZSTU.
2. TZOU H.S., BERGMAN L.A. (1993) Dynamic and control of distributed systems. - Cambridge, 1998.
3. ZHUK Y.A., GUZ I.A. (2009) Active damping of the forced vibration of a hinged beam with piezoelectric layers, geometrical and physical nonlinearities taken into account // International Applied Mechanics. - **45**, №1. - P. 94-108.
4. BULAT A.F., DYRDA V.I., KARNAUKHOV V.G., ZVYAGILSKY E.L., KOBETS A.S. (2014) Applied mechanics of elastic hereditary continua. Vol. 4. Forced vibration and dissipative heating of inelastic solids. - Kiev, Naukova Dumka.
5. KARNAUKHOV V.G., SICHKO V.M., KARPENYUK A.S. (2007) Influence of physical nonlinearity on resonant vibration and dissipative heating of three layer inelastic rectangular plates // Teoreticheskaya i prikladnaya mekhanika. - **43**. - P. 102-109.
6. KARNAUKHOV V.G. (2004) Thermal fracture of polymer structural elements under monoharmonic deformation // Prikladnaya mekhanika. - **40**, № 6. - P. 30-70.
7. KARNAUKHOV V.G. (2005) Thermomechanics of coupled fields in passive piezoelectric inelastic bodies under harmonic deformations // Journal of Thermal Stresses. - **26**, № 6-7. - P. 783-815.
8. KIRICHOK I.F. (2011) Control of axisymmetric resonant vibrations and self-heating of shells of revolution with piezoelectric sensors and actuators // International Applied Mechanics. - **46**, № 8. - P. 890-901.
9. GANDNI F. (2001) Influence of nonlinear viscoelastic material characterization on performance of constrained layer damping treatment // AIAA J. - 2001. - **39**, № 5. - P. 924 - 931.
10. BOLKISEV A.M., KARLASH V.L., SHUL'GA N.A. (1984) Temperature dependence of the properties of piezoelectric ceramics // International Applied Mechanics. - **20**, № 7. - P. 650-653.

Надійшла до редколегії 22.02.16

УДК 517.968.2

Козлова Н. О.¹, аспірант,
Ферук В. А.², к.ф.-м.н., н.с.

**Слабкозбурені лінійні крайові задачі
для інтегральних рівнянь**

¹ Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 03127, м. Київ, пр-т.
Глушкова 4е,

e-mail: nkozlovaa@gmail.com

² Інститут математики НАН України, 01004,
м. Київ, вул. Терещенківська 3,
e-mail: feruk.viktor@gmail.com

N. O. Kozlova¹, Postgraduate Student,
V. A. Feruk², PhD (Phys.-Math.), researcher

**Weakly perturbed linear boundary-value
problems for integral equations**

¹ Taras Shevchenko National University of Kyiv,
03127, Kyiv, Glushkova st., 4e,
e-mail: nkozlovaa@gmail.com

² Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, 01004,
Kiev, Tereshchenkivska st., 3,
e-mail: feruk.viktor@gmail.com

Отримано умови біфуркації розв'язків слабкозбуреної лінійної крайової задачі для інтегрального рівняння, за припущенням, що породжуюча задача є нерозв'язною. Побудовано розв'язок поставленої задачі у вигляді частини ряду за степенями малого параметра зі скінченним числом доданків, які містять від'ємні степені.

Ключові слова: інтегральне рівняння, нетерова крайова задача, збурення, псевдообернена матриця, ортопроектор.

In this paper we consider weakly perturbed inhomogeneous linear boundary-value problem for Fredholm integral equations. The peculiarity of this problem is that the nonperturbed linear boundary-value problem is not always solvable.

Scheme of investigation of considered boundary-value problem is based on the transition from boundary-value problem (1) to an equivalent weakly perturbed boundary-value problem for countable measurable system of algebraic equations. We consider a critical case of the first order. The question of the solvability and the structure of the solution set of weakly perturbed linear boundary-value problem for integral equations were considered. Using the Vishik-Lyusternik method, we obtain bifurcation conditions of solutions of boundary-value problem (1). The solution of weakly perturbed boundary-value problem for integral equations is constructed as part of power series of a small parameter ε with finitely many terms with negative powers of ε .

Key Words: integral equation, Fredholm boundary-value problem, perturbation, pseudoinverse matrix, orthoprojector.

Статтю представив д.ф.-м.н., академік НАН України Перестюк М. О.

Теорії нетерових крайових задач для інтегродиференціальних рівнянь, що інтенсивно розвивається останні десятиліття, присвячено чимало робіт [1-3]. Зокрема, у [2], за умови існування єдиного розв'язку, обґрунтовано застосування до таких задач різних варіантів проєкційно-ітеративного методу. Однак, важливим є випадок, коли розв'язок поставленої задачі не буде єдиним. Один із підходів до дослідження таких задач ґрунтується на залученні апарату теорії псевдообернених операторів, що дозволяє встановити умови існування і структуру розв'язків різних класів

нетерових крайових задач [3-6]. Слід відзначити, що в більшості вищезазначених досліджень розглядається випадок виродженого ядра інтегрального оператора. У даній роботі, продовжуючи дослідження [7], висвітлюється один з можливих підходів до відшукування умов біфуркації розв'язків слабкозбуреної лінійної крайової задачі для інтегральних рівнянь, ядра яких не вироджені.

1. Постановка задачі. Розглянемо слабкозбурену лінійну крайову задачу для інтегрального рівняння

$$x(t) - \int_a^b K(t,s)x(s)ds = f(t) + \varepsilon \int_a^b K_1(t,s)x(s)ds, \quad (1)$$

$$Sx(\cdot) = \alpha + \varepsilon Jx(\cdot). \quad (2) \quad \text{де}$$

Тут $K(t,s)$, $K_1(t,s)$ – ядра, сумовні з квадратом в області $[a,b] \times [a,b]$, $f, x \in L_2[a,b]$, $S = \text{col}(S_1, S_2, \dots, S_p): L_2[a,b] \rightarrow R^p$ та $J = \text{col}(J_1, J_2, \dots, J_p): L_2[a,b] \rightarrow R^p$ – обмежені лінійні векторні функціонали, $S_i, J_i: L_2[a,b] \rightarrow R$, $\varepsilon \ll 1$ – малий параметр, $\alpha = \text{col}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p) \in R^p$.

Ставиться питання знаходження умов біфуркації розв'язків та їх структури слабкозбуреної крайової задачі (1), (2), при умові, що породжуюча задача

$$x(t) - \int_a^b K(t,s)x(s)ds = f(t), \quad (3)$$

$$Sx(\cdot) = \alpha \quad (4)$$

не має розв'язку.

2. Зв'язок крайової задачі (1), (2) із крайовою задачею для зліченновимірної системи алгебраїчних рівнянь зі збуренням. Задачу (1), (2) можна звести до крайової задачі для зліченновимірної системи алгебраїчних рівнянь [7]. Нехай $\{\varphi_i(t)\}_{i=1}^\infty$ – повна ортонормальна система функцій в $L_2[a,b]$. Введемо до розгляду величини

$$x_i = \int_a^b x(t)\varphi_i(t)dt, \quad f_i = \int_a^b f(t)\varphi_i(t)dt, \quad (5)$$

$$a_{ij} = \int_a^b \int_a^b K(t,s)\varphi_i(t)\varphi_j(s)dt ds, \quad (6)$$

$$\tilde{a}_{ij} = \int_a^b \int_a^b K_1(t,s)\varphi_i(t)\varphi_j(s)dt ds, \quad (7)$$

Використовуючи позначення (5)-(7), приходимо до слабкозбуреної крайової задачі для зліченновимірної системи алгебраїчних рівнянь

$$x_i - \sum_{j=1}^\infty a_{ij}x_j = f_i + \varepsilon \sum_{j=1}^\infty \tilde{a}_{ij}x_j, \quad i = \overline{1, \infty}, \quad (8)$$

$$\sum_{j=1}^\infty S_\nu \varphi_j(\cdot)x_j = \alpha_\nu + \sum_{j=1}^\infty J_\nu \varphi_j(\cdot)x_j, \quad \nu = \overline{1, p}, \quad (9)$$

$$\sum_{j=1}^\infty |x_j|^2 < +\infty.$$

Запишемо задачу (8), (9) у векторному вигляді [3, с. 84]

$$Uz = \begin{bmatrix} \Lambda \\ W \end{bmatrix} z = \begin{bmatrix} g \\ \alpha \end{bmatrix} + \varepsilon \begin{bmatrix} \Lambda_1 \\ W_1 \end{bmatrix} z = q + \varepsilon U_1 z, \quad (10)$$

$$z = \text{col}(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots) \in \ell_2,$$

$$g = \text{col}(f_1, f_2, \dots, f_i, \dots) \in \ell_2,$$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1-a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1i} & \dots \\ -a_{21} & 1-a_{22} & \dots & -a_{2i} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_{i1} & -a_{i2} & \dots & 1-a_{ii} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix},$$

$$\Lambda_1 = \begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{12} & \dots & \tilde{a}_{1i} & \dots \\ \tilde{a}_{21} & \tilde{a}_{22} & \dots & \tilde{a}_{2i} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \tilde{a}_{i1} & \tilde{a}_{i2} & \dots & \tilde{a}_{ii} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix},$$

$$W := S\Phi(\cdot), \quad W_1 := J\Phi(\cdot),$$

$$\Phi(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_i(t), \dots).$$

Породжуюча задача для слабкозбуреної задачі (10) має вигляд

$$Uz = q. \quad (11)$$

Зазначимо, що оператор $\Lambda: \ell_2 \rightarrow \ell_2$ має вигляд $\Lambda = I - A$, де $I: \ell_2 \rightarrow \ell_2$ — одиничний, $A: \ell_2 \rightarrow \ell_2$ — цілком неперервний оператори. Для оператора Λ є вірною альтернатива Фредгольма [8, с. 188], тобто він є фредгольмовим оператором, а оператор $U: \ell_2 \rightarrow \ell_2 \times R^p$ є нетеровим. Таким чином, для рівняння (11) справедливе наступне твердження [3, с. 87].

Теорема 1. Однорідне рівняння (11) ($q = 0$) має g -параметричну сім'ю розв'язків $z \in \ell_2$

$$z = P_{\Lambda_r} P_{Q_{d_2}} c, \quad c \in R^{d_2}. \quad (12)$$

Неоднорідне рівняння (11) є розв'язним тоді і тільки тоді, коли виконуються r лінійно незалежних умов

$$P_{\Lambda_r}^* g = 0, \quad (13)$$

та d_1 лінійно-незалежних умов

$$P_{Q_{d_1}}^* (\alpha - W\Lambda^+ g) = 0, \quad (14)$$

і має g -параметричну сім'ю розв'язків $z \in \ell_2$ вигляду

$$z = P_{\Lambda_r} P_{Q_{d_2}} c +$$

$$+ P_{\Lambda_r} Q^+ (\alpha - W \Lambda^+ g) + \Lambda^+ g, \quad c \in R^{d_2}. \quad (15)$$

Тут $Q = W P_{\Lambda_r} - (p \times r)$ матриця, P_{Λ_r} – матриця, яка складається із повної системи r лінійно незалежних стовпчиків матриці-проектора P_{Λ} , $P_{\Lambda_r}^*$ – матриця, яка складається із повної системи r лінійно незалежних рядків матриці-проектора P_{Λ}^* , Λ^+ – псевдообернена (за Муром-Пенроузом) до Λ матриця, P_{Qd_2} – матриця, яка складається із повної системи d_2 лінійно незалежних стовпчиків матриці-проектора P_Q , $P_{Qd_1}^*$ – матриця, яка складається із повної системи d_1 лінійно незалежних рядків матриці-проектора P_Q^* , Q^+ – псевдообернена (за Муром-Пенроузом) до Q матриця.

Оскільки, за припущенням, крайова задача (3), (4) нерозв'язна, то і нерозв'язне рівняння (11). Виникає питання: чи можна за допомогою лінійного збурення U_1 зробити рівняння (10) розв'язним? Знайдемо умови біфуркації розв'язків та їх структуру слабкозбуреної неоднорідної крайової задачі (1), (2), при умові, що породжуюча крайова задача (3), (4) не має розв'язку. Для цього, спочатку, дослідимо умови виникнення розв'язку рівняння (10).

Як відомо [9, с. 60], малі збурення зберігають нетеровість лінійного оператора, тобто оператор $(U - \varepsilon U_1)$ є нетеровим, що дозволяє використати при дослідженні рівняння (10) класичні методи.

3. Метод Вішика-Люстерника для побудови розв'язків слабкозбуреної крайової задачі для алгебраїчної системи. Застосуємо метод Вішика-Люстерника [10], який дозволяє знайти ефективні умови виникнення розв'язків рівняння (10) у вигляді частини ряду за степенями малого параметра ε зі скінченним числом доданків, які містять від'ємні степені ε . У нашому випадку розв'язок рівняння (10) будемо шукати у вигляді наступного ряду

$$z = z(\varepsilon) = \sum_{k=-1}^{\infty} \varepsilon^k z_k. \quad (16)$$

Підставимо ряд (16) у рівняння (10) і прирівняємо коефіцієнти при однакових степенях параметра ε .

При ε^{-1} для знаходження z_{-1} отримаємо однорідне рівняння

$$U z_{-1} = 0. \quad (17)$$

Згідно теореми 1, однорідне рівняння (17) завжди має розв'язок

$$z_{-1} = P_{\Lambda_r} P_{Qd_2} c_{-1}, \quad c_{-1} \in R^{d_2}, \quad (18)$$

де вектор-стовпчик c_{-1} буде визначений з умови розв'язності рівняння відносно z_0 .

При ε^0 для знаходження z_0 отримаємо неоднорідне рівняння

$$U z_0 = q + U_1 z_{-1}. \quad (19)$$

Рівняння (19), за теоремою 1, є розв'язним тоді і тільки тоді, коли виконуються наступні умови

$$P_{\Lambda_r}^* (g + \Lambda_1 z_{-1}) = 0, \quad (20)$$

$$P_{Qd_1}^* (\alpha + W_1 z_{-1} - W \Lambda^+ (g + \Lambda_1 z_{-1})) = 0. \quad (21)$$

Підставимо вираз для z_{-1} (18) у вказані умови розв'язності (20), (21). Отримаємо алгебраїчну систему відносно c_{-1}

$$B_0 c_{-1} = b_{-1}, \quad (22)$$

де матриця B_0 розмірності $((r + d_1) \times d_2)$ та неоднорідність b_{-1} мають вигляд

$$B_0 := \begin{bmatrix} P_{\Lambda_r}^* \Lambda_1 P_{\Lambda_r} P_{Qd_2} \\ P_{Qd_1}^* (W_1 - W \Lambda^+ \Lambda_1) P_{\Lambda_r} P_{Qd_2} \end{bmatrix},$$

$$b_{-1} := \begin{bmatrix} -P_{\Lambda_r}^* g \\ P_{Qd_1}^* (W \Lambda^+ g - \alpha) \end{bmatrix}.$$

Для того, щоб система (22) була розв'язною, необхідно та достатньо, щоб виконувалась умова

$$P_{B_0}^* b_{-1} = 0. \quad (23)$$

Якщо виконується умова

$$P_{B_0}^* = 0, \quad (24)$$

то і умова (23) виконується, і система (22) буде розв'язною відносно c_{-1}

$$c_{-1} = P_{B_0} \hat{c}_{-1} + \tilde{c}_{-1}, \quad \tilde{c}_{-1} = B_0^+ b_{-1}, \quad \hat{c}_{-1} \in R^{d_2}.$$

Зазначимо, що, якщо оператор B_0 є фредгольмовим, то система (22) матиме єдиний розв'язок. Справді, у цьому випадку $P_{B_0}^* = P_{B_0}$ і, згідно умови (24), $P_{B_0} \hat{c}_{-1} = 0$, тобто

$$c_{-1} = \tilde{c}_{-1} = B_0^+ b_{-1}.$$

Отже, коефіцієнт z_{-1} в розкладі (16) набуває вигляду

$$z_{-1} = P_{\Lambda_r} P_{Q_{d_2}} B_0^+ b_{-1}. \quad (25)$$

Звідси, підставивши у (19) вираз (25), отримаємо наступне

$$Uz_0 = q + U_1 P_{\Lambda_r} P_{Q_{d_2}} B_0^+ b_{-1}. \quad (26)$$

Рівняння (26), при виконанні умови (24), має розв'язок

$$z_0 = P_{\Lambda_r} P_{Q_{d_2}} c_0 + \tilde{z}_0, \quad c_0 \in R^{d_2},$$

де c_0 – вектор констант, який буде визначений на наступному кроці з умови розв'язності системи для z_1 , $\tilde{z}_0$ – частинний розв'язок неоднорідного рівняння (26)

$$\tilde{z}_0 = U^+ (q + U_1 P_{\Lambda_r} P_{Q_{d_2}} B_0^+ b_{-1}).$$

При ε^1 отримаємо неоднорідне рівняння

$$Uz_1 = U_1 z_0. \quad (27)$$

Умови розв'язності рівняння (27) є наступними

$$P_{\Lambda_r}^* \Lambda_1 z_0 = 0, \quad (28)$$

$$P_{Q_{d_1}}^* (W_1 - W\Lambda^+ \Lambda_1) z_0 = 0. \quad (29)$$

Підставимо вираз для z_0 у рівності (28), (29) і отримаємо схожу до (22) алгебраїчну систему

$$B_0 c_0 = b_0, \quad (30)$$

яка є розв'язною тоді і тільки тоді, коли виконується рівність

$$P_{B_0}^* b_0 = 0,$$

де

$$b_0 := \begin{bmatrix} -P_{\Lambda_r}^* \Lambda_1 \tilde{z}_0 \\ P_{Q_{d_1}}^* (W\Lambda^+ \Lambda_1 - W_1) \tilde{z}_0 \end{bmatrix}.$$

Тоді, один із розв'язків системи (30) має вигляд

$$c_0 = B_0^+ b_0.$$

Таким чином, якщо виконується умова (24), то рівняння (27) має розв'язок

$$z_1 = P_{\Lambda_r} P_{Q_{d_2}} c_1 + \tilde{z}_1, \quad c_1 \in R^{d_2}, \quad (31)$$

де c_1 – вектор констант, який буде визначений на наступному кроці даного ітераційного процесу, а $\tilde{z}_1$ – частинний розв'язок неоднорідного рівняння (27), що має вигляд

$$\tilde{z}_1 = U^+ U_1 z_0.$$

При ε^2 отримаємо рівняння

$$Uz_2 = U_1 z_1. \quad (32)$$

Умови розв'язності рівняння (32) виглядають наступним чином

$$P_{\Lambda_r}^* \Lambda_1 z_1 = 0,$$

$$P_{Q_{d_1}}^* (W_1 - W\Lambda^+ \Lambda_1) z_1 = 0,$$

або ж, враховуючи (31), отримаємо систему відносно елемента c_1

$$B_0 c_1 = b_1, \quad (33)$$

де

$$b_1 := \begin{bmatrix} -P_{\Lambda_r}^* \Lambda_1 \tilde{z}_1 \\ P_{Q_{d_1}}^* (W\Lambda^+ \Lambda_1 - W_1) \tilde{z}_1 \end{bmatrix},$$

яка є розв'язною тоді і тільки тоді, коли виконується умова

$$P_{B_0}^* b_1 = 0.$$

Тоді, один із розв'язків системи (33) має наступний вигляд

$$c_1 = B_0^+ b_1.$$

Рівняння (32) має розв'язок

$$z_2 = P_{\Lambda_r} P_{Q_{d_2}} c_2 + \tilde{z}_2, \quad c_2 \in R^{d_2},$$

де довільний елемент c_2 буде визначено на наступному кроці ітераційного процесу, а частинний розв'язок $\tilde{z}_2$ крайової задачі (32) має вигляд

$$\tilde{z}_2 = U^+ U_1 z_1.$$

Легко показати за допомогою індукції, що умова (24) є умовою розв'язності і рівняння, яке ми отримаємо на k -му кроці ітераційного процесу

$$Uz_k = U_1 z_{k-1}. \quad (34)$$

Згідно теореми 1, рівняння (34) є розв'язним тоді і тільки тоді, коли виконуються умови

$$P_{\Lambda_r}^* \Lambda_1 z_{k-1} = 0,$$

$$P_{Q_{d_1}}^* (W_1 - W\Lambda^+ \Lambda_1) z_{k-1} = 0$$

та має розв'язок

$$z_k = P_{\Lambda_r} P_{Q_{d_2}} c_k + \tilde{z}_k, \quad c_k \in R^{d_2}, \quad \forall k \geq 1, \quad (35)$$

де c_k – вектор констант, який буде визначений на наступному кроці, а частинний розв'язок $\tilde{z}_k$ неоднорідного рівняння (34) має вигляд

$$\tilde{z}_k = U^+ U_1 z_{k-1}.$$

Отримаємо алгебраїчну систему

$$B_0 c_k = b_k, \quad (36)$$

яка є розв'язною тоді і тільки тоді, коли виконується умова

$$P_{B_0}^* b_k = 0,$$

де

$$b_k := \begin{bmatrix} -P_{\Lambda_r}^* \Lambda_1 \tilde{z}_k \\ P_{Q_{d_1}}^* (W \Lambda^+ \Lambda_1 - W_1) \tilde{z}_k \end{bmatrix}.$$

Один із розв'язків системи (36) має вигляд

$$c_k = B_0^+ b_k. \quad (37)$$

Таким чином, рівняння (34) є розв'язним, якщо виконується умова (24), і має розв'язок (35).

Підставивши вирази для z_k , $\forall k \geq -1$ в ряд (16), отримаємо

$$z = \frac{P_{\Lambda_r} P_{Q_{d_2}} c_{-1}}{\varepsilon} + \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k (P_{\Lambda_r} P_{Q_{d_2}} c_k + \tilde{z}_k), \quad (38)$$

де c_k визначаються формулою (37).

Отже, ми довели справедливості наступного твердження.

Теорема 2. Нехай породжуюче для (10) рівняння (11) не є розв'язним. Тоді, якщо виконується умова (24), то рівняння (10) буде мати розв'язок у вигляді збіжного, при достатньо малих фіксованих $\varepsilon \in (0, \varepsilon_*)$, ряду (38).

Зауваження 1. Умова (24) є достатньою умовою існування розв'язку рівняння (10). Якщо умова (24) не виконується, то розв'язок рівняння (10) у вигляді ряду (16) не існує, але може існувати у вигляді частини ряду типу (16) за степенями малого параметра ε починаючи із -2, -3, ...

Використовуючи отримані результати для збуреного рівняння (10), ми можемо зробити висновки про існування розв'язку вихідної збуреної крайової задачі (1), (2). Для цього використаємо перехід, описаний у роботі [7].

Якщо система (10) має хоча б один розв'язок $z = \text{col}(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots)$, то згідно теореми Ріса-Фішера, існує елемент $x \in L_2[a, b]$ такий, що має місце зображення

$$x(t) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \varphi_i(t) = \Phi(t)z, \quad (39)$$

де

$$\Phi(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_i(t), \dots),$$

$\{\varphi_i(t)\}_{i=1}^{\infty}$ — повна ортонормальна система функцій в $L_2[a, b]$.

Аналогічно роботі [11, с. 266], можна зробити висновок про те, що множина елементів $x(t)$, які визначаються співвідношенням (39), і є шуканою сім'єю розв'язків вихідної крайової задачі (1), (2).

Отже, тепер ми можемо застосувати результати теореми 2 для рівняння (10) до крайової задачі (1), (2).

Теорема 3. Припустимо, що породжуюча крайова задача (3), (4) не є розв'язною. Тоді, якщо виконується умова (24), то крайова задача (1), (2) буде мати розв'язок $x \in L_2[a, b]$ у вигляді ряду

$$x(t) = \Phi(t) \left(\frac{P_{\Lambda_r} P_{Q_{d_2}} c_{-1}}{\varepsilon} + \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k (P_{\Lambda_r} P_{Q_{d_2}} c_k + \tilde{z}_k) \right),$$

який збігається при достатньо малих фіксованих $\varepsilon \in (0, \varepsilon_*)$.

Зауваження 2. Відмітимо, що, як показано у [12], для зведення задачі (1), (2) до крайової задачі для зліченновимірної системи алгебраїчних рівнянь (8), (9) замість довільної повної в $L_2[a, b]$ ортонормальної системи функцій $\{\varphi_i(t)\}_{i=1}^{\infty}$ можна використовувати пару повних в $L_2[a, b]$ ортонормальних систем $\{\nu_i(t)\}_{i=1}^{\infty}$ та $\{\mu_i(t)\}_{i=1}^{\infty}$ власних функцій симетричних операторів $\underline{K}$ та $\overline{K}$ [12, с. 123] відповідно

$$(\underline{K}w)(t) = \int_a^b \underline{K}(t, s)w(s)ds,$$

$$(\overline{K}w)(t) = \int_a^b \overline{K}(t, s)w(s)ds,$$

де

$$\underline{K}(t, s) = \int_a^b K(\xi, t)K(\xi, s)d\xi,$$

$$\overline{K}(t, s) = \int_a^b K(t, \xi)K(s, \xi)d\xi.$$

Список використаних джерел

1. Самойленко А.М. Диференціальні рівняння з імпульсною дією. / А.М. Самойленко, М.О. Перестюк – Київ: Вища школа, 1987. - 287 с.
2. Лучка А.Ю. Проекционно-итеративные методы. / А.Ю. Лучка - Київ: Наукова думка, 1993. - 288 с.
3. Boichuk A.A. Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems. / A.A. Boichuk, A.M. Samoilenko - Utrecht, Boston: VSP, 2004. - 317 p.
4. Самойленко А.М. Крайові задачі для систем лінійних інтегро-диференціальних рівнянь з виродженням ядром / А.М. Самойленко, О.А. Бойчук, С.А. Кривошея // Укр. мат. журн. – 1996. – Т. 48, № 11. – С. 1576–1579.
5. Журавлев В.Ф. Краевые задачи для интегральных уравнений с вырожденным ядром / В.Ф. Журавлев // Нелінійні коливання. – 2012. – Т. 15, № 1. – С. 36-54.
6. Бойчук О.А. Слабконелінійні системи інтегро-диференціальних рівнянь / О.А. Бойчук, І.А. Бондар // Нелінійні коливання. - 2013. - Т. 16, № 3. – С. 314-321.
7. Козлова Н.О. Нетерові крайові задачі для інтегральних рівнянь / Н.О. Козлова, В.А. Ферук // Нелінійні коливання. - 2016. - Т. 19, № 1. - С. 58-66.
8. Люстерник Л.А. Краткий курс функционального анализа. / Л.А. Люстерник, В.И. Соболев – Москва: Высш. школа, 1982. - 271 с.
9. Крейн С.Г. Линейные уравнения в банаховом пространстве. / С.Г. Крейн - Москва: Наука, 1971. -104 с.
10. Вишик М.И. Решение некоторых задач о возмущениях в случае матриц и самосопряженных и несамосопряженных дифференциальных уравнений / М.И. Вишик, Л.А. Люстерник // УМН. – 1960.– Т. 15, вып. 3. – С. 3–80.
11. Гильберт Д. Избранные труды. / Д. Гильберт – Москва: Факториал, 1998.- Т. 2. – 608 с.
12. Stewert G.W. (2011) Fredholm, Hilbert, Schmidt. Three Fundamental Papers on Integral Equations. [Online]. Режим доступу: <http://www.cs.umd.edu/~stewart/FHS.pdf>.

References

1. SAMOILENKO, A. and PERESTYUK, M. (1987) *Differential Equations with Impulse Effects*. Kiev: Visca Skola.
2. LUCHKA, A. (1993) *Proektsionno - iterativnye metody*. Kyiv: Naukova Dumka.
3. BOICHUK, A. and SAMOILENKO, A. (2004) *Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems*. Utrecht, Boston: VSP.
4. SAMOILENKO, A. & BOICHUK, O. & KRYVOSHEIA, S. (1996) Krayovi zadachi dlya system liniinykh integro-diferentsialnykh rivnyan z virodzhenim yadrom. *UMZh*. 48 (11). p. 1576–1579.
5. ZHURAVLEV, V. (2012) Kraevye zadachi dlya integralnykh uravneniy s vyirodzhennym yadrom. *Nonlinear Oscillations*. 15(1). p. 36-54.
6. BOICHUK, O. & BONDAR, I. (2013) Slabkoneliniini sistemi integro-diferentsialnykh rivnyan. *Nonlinear Oscillations*. 16(3). p. 314-321.
7. KOZLOVA, N. & FERUK, V. (2016) Neterovi kraiovi zadachi dlya integralnykh rivnyan. *Nonlinear Oscillations*. 19(1). p. 58-66.
8. LYUSTERNIK, L. and SOBOLEV, V. (1982) *Kratkiy kurs funktsionalnogo analiza*. Moskva: Vyshha shkola.
9. KREIN, S. (1971) *Lineynye uravneniya v banakhovom prostranstve*. Moskva: Nauka.
10. VISHIK, M. & LYUSTERNIK, L. (1960) Reshenie nekotorykh zadach o vozmuscheniyakh v sluchae matrity i samosopryazhennykh i nesamosopryazhennykh differentsialnykh uravneniy. *UMN*. 15(3). p. 3-80.
11. HILBERT, D. (1998) *Izbranyie trudyi*. Moskva: Faktorial, T. 2.
12. STEWERT G.W. (2011) *Fredholm, Hilbert, Schmidt. Three Fundamental Papers on Integral Equations*. [Online]. Available from: <http://www.cs.umd.edu/~stewart/FHS.pdf>.

Надійшла до редколегії 24.03.16

УДК 517.9

Король Ю.Ю.¹, асистент

Yu. Yu. Korol¹, assistant

Обмежені розв'язки виродженої системи диференціальних рівнянь з імпульсною дією в фіксовані моменти часу.

Bounded solutions of degenerate system of differential equations with impulse action in fixed point of time.

¹ Ужгородський національний університет, 88000, м. Ужгород, вул. Університетська 14, e-mail: korol_yura@ukr.net

¹ Uzhhorod National University, 88000, Uzhhorod, University str., 14, e-mail: korol_yura@ukr.net

Розглядається вироджена система, визначена на прямому добутку тора та евклідового простору, яка зводиться до центральної канонічної форми, і при цьому відповідна однорідна невироджена система експоненціально-дихотомічна на всій осі. Досліджено питання існування та єдиності обмеженого на всій осі розв'язку виродженої системи диференціальних рівнянь з імпульсною дією у фіксовані моменти часу.

Ключові слова: експоненціальна дихотомія, центральна канонічна форма, обмежені розв'язки.

This article is devoted to singular system of differential equations with impulse action in fixed point of time define on the direct product of torus and Euclidean space. We assume that this system can be reduce to the central canonical form and the corresponding linear homogeneous nonsingular system exponential dichotomous on the entire axis. The main problem of investigation is to find the condition for existence and uniqueness solution bounded on entire axis of singular system of differential equation with impulse action. Previously, the issue has been studied for nonsingular system with impulses in fixed point of time. The novelty of this work lies in the fact that here we find sufficient condition for existence solution bounded on entire axis of singular system with impulse action that reduced to the central canonical form. Also we find sufficient condition for existence the asymptotical stable bounded solution for the considered system.

Key words: exponential dichotomy, central canonical form, bounded solutions.

Статтю представив акад. НАН України, д.ф.-м.н., проф. Перестюк М.О

Різноманітні практичні задачі приводять до математичних моделей, що описуються системами диференціальних рівнянь з різного роду виродженнями. Зокрема, в задачах оптимального керування, лінійного програмування, теорії електричних кіл та інших досить часто зустрічаються системи вигляду

$$B(t)\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t),$$

Систематичне вивчення таких систем розпочалося порівняно недавно, з початку 70-х років, хоча перші результати, що стосуються систем з сталими коефіцієнтами, з'явилися значно раніше. Важливий внесок у розвиток теорії вироджених систем внесли американські математики С.Кемпбелл і Л.Петцольд [1], які

ввели поняття центральної канонічної форми (ЦКФ) і показали що розв'язок виродженої системи має найпростішу структуру, якщо вона зводиться до ЦКФ. Розвитку загальної теорії цих систем присвячено значну кількість праць російських математиків: Бояринцева Ю.Е., Чистякова В.Ф., Данилова В.О., Логінова О.О. [2]. В подальших дослідженнях А.М.Самойленка, М.І.Шкіля, В.П.Яковця [3], було знайдено достатні умови звідності виродженої системи до ЦКФ. Беручи до уваги ці результати, а також результати [4] з'ясуємо питання існування і єдиності обмеженого на всій осі розв'язку виродженої системи з імпульсною дією визначеної на прямому добутку тора та Евклідового простору, у припущенні що вона зведена до центральної канонічної форми

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dt} &= a(t, \varphi), \\ \begin{bmatrix} E_{n-s} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \frac{dx}{dt} &= \begin{bmatrix} M(t, \varphi) & 0 \\ 0 & E_s \end{bmatrix} x + f(t, \varphi), \end{aligned} \quad (1)$$

$$\Delta x_1|_{t=\tau_i} = B_i(\varphi)x_1 + b_i, \quad (2)$$

де $x \in R^n$, $x = \text{col}(x_1, x_2)$, де $x_1(t, \varphi), x_2(t, \varphi)$ – відповідно $n-s$ та s -вимірні вектор-функції, $\varphi \in T^m$, T^m - m -вимірний тор; $a(t, \varphi), f(t, \varphi), M(t, \varphi)$ – неперервні (кусково-неперервні з розривами першого роду при $t = \tau_i$) по t , неперервні і періодичні по $\varphi_v, v=1, \dots, m$ обмежені при всіх $t \in R$ векторні і матрична функції відповідно, $f_2(t, \varphi) \in C^{s-1}(R \times T^m)$ функція $a(t, \varphi)$ задовольняє умову Ліпшиця по $\varphi \in T^m$, E_{n-s}, E_s – одиничні матриці $n-s$ та s -го порядку відповідно, I – квазидіагональна матриця, $B_i(\varphi)$ і b_i рівномірно обмежені по i матриці і сталі вектори відповідно, $\det(E_{n-s} + B_i(\varphi)) \neq 0$ для будь-якого $\varphi \in T^m$. Послідовність моментів τ_i занумерована цілими числами так, що $\tau_i \rightarrow -\infty$ при $i \rightarrow -\infty$ і $\tau_i \rightarrow +\infty$ при $i \rightarrow +\infty$. Вважатимемо, що рівномірно по $t \in R$ існує скінченна границя

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{i(t, T)}{T} = p < \infty, \quad (3)$$

де $i(a, b)$ – кількість точок послідовності τ_i на проміжку $[a, b]$. Це означає, що існують числа l і натуральне q такі, що будь-який проміжок часу довжиною l містить не більше q точок послідовності $\{\tau_i\}$.

З'ясуємо питання існування обмежених розв'язків системи (1),(2). В силу компактності фазового простору системи рівнянь

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(t, \varphi), \quad (4)$$

і припущень, накладених на функцію $a(t, \varphi)$, кожен розв'язок $\varphi_i(\tau, \varphi)$, який задовольняє початкову умову $\varphi_\tau(\tau, \varphi) = \varphi$, існує при будь-яких $\tau \in R, \varphi \in T^m$ і може бути продовжений по t на всю дійсну вісь. Система (1),(2) може бути розщеплена на дві незалежні системи

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(t, \varphi), \quad \frac{dx_1}{dt} = M(t, \varphi)x_1 + f_1(t, \varphi), \quad (5)$$

$$\Delta x_1|_{t=\tau_i} = B_i(\varphi)x_1 + b_i,$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(t, \varphi), \quad I \frac{dx_2}{dt} = x_2 + f_2(t, \varphi). \quad (6)$$

Розглянемо однорідну систему диференціальних рівнянь

$$\frac{dx_1}{dt} = M(t, \varphi_i(\tau, \varphi))x_1, \quad \Delta x_1|_{t=\tau_i} = B_i(\varphi_i(\tau, \varphi))x_1, \quad (7)$$

залежну від $\tau \in R, \varphi \in T^m$ як від параметрів. Припустимо, що ця система експоненціально-дихотомічна на всій дійсній осі, тобто існує проєктор $C(t, \varphi) = C^2(t, \varphi)$ ($C(t, \varphi)$ – неперервна по $t \in R, \varphi \in T^m$, 2π -періодична по $\varphi_v, v=1, \dots, m$ матрична функція) і незалежні від φ, s константи $K \geq 1, \gamma > 0$ такі, що виконуються умови

$$\|\Omega_0^t(t, \varphi)C(s, \varphi)\Omega_s^0(t, \varphi)\| \leq Ke^{-\gamma(t-s)}, \quad t \geq s \quad (8)$$

$$\|\Omega_0^t(t, \varphi)(E_{n-s} - C(s, \varphi))\Omega_s^0(t, \varphi)\| \leq Ke^{\gamma(t-s)}, \quad s \geq t$$

для будь-яких $t, s \in R$; $\Omega_s^t(\tau, \varphi)$ – матрицант системи (7). В силу неперервної залежності розв'язку $\varphi_i(\tau, \varphi)$ від параметрів $\tau \in R, \varphi \in T^m$, матрицант $\Omega_s^t(\tau, \varphi)$ теж залежить від цих параметрів незалежним чином.

Покладемо

$$G(t, s, \varphi) = \begin{cases} \Omega_0^t(t, \varphi)C(s, \varphi)\Omega_s^0(t, \varphi), & s \leq t \\ -\Omega_0^t(t, \varphi)(E_{n-s} - C(s, \varphi))\Omega_s^0(t, \varphi), & s > t, \end{cases} \quad (9)$$

і назвемо $G(t, s, \varphi)$ функцією Гріна-Самойленко системи рівнянь

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(t, \varphi), \quad \frac{dx_1}{dt} = M(t, \varphi)x_1, \quad \Delta x_1|_{t=\tau_i} = B_i(\varphi)x_1, \quad (10)$$

якщо

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \|G(t, s, \varphi)\| \leq k < \infty, \quad (11)$$

для всіх $t \in R, \varphi \in T^m$.

З визначення $G(t, s, \varphi)$ випливає, що функція Гріна-Самойленка неперервна для всіх $t, s \in R$

$t \neq s, \varphi \in T^m, 2\pi$ – періодична по $\varphi_v, v=1, \dots, m$, причому $G(s+0, s, \varphi) - G(s-0, s, \varphi) = E$.

Теорема 1. Якщо лінійна система з імпульсним збуренням (7) є експоненціально-дихотомічною на всій дійсній осі, а функції $a(t, \varphi), f(t, \varphi)$ і сталі вектори b_i обмежені при

всіх $t \in R$ і при $i \in Z$ відповідно, причому,
 $f_2(t, \varphi) \in C^{s-1}(R \times T^m)$, тоді система (1),(2) має
єдиний обмежений при всіх $t \in R$, $\varphi \in T^m$
розв'язок.

Доведення. Оскільки система (1), (2) розще-
плюється на дві незалежні системи (5),(6), то
покажемо спочатку існування розв'язку системи
(5). Визначимо функцію

$$x_1(t, \varphi) = \int_{-\infty}^t G(t, s, \varphi_t(\tau, \varphi)) f_1(s, \varphi_s(t, \varphi_t(\tau, \varphi))) ds + \\ + \int_t^{+\infty} G(t, s, \varphi_t(\tau, \varphi)) f_1(s, \varphi_s(t, \varphi_t(\tau, \varphi))) ds + \\ + \sum_{\tau_i \leq t} G(t, \tau_i, \varphi_{\tau_i}(\tau, \varphi)) b_i + \sum_{\tau_i > t} G(t, \tau_i, \varphi_{\tau_i}(\tau, \varphi)) b_i \quad (12)$$

і покажемо що ця функція є єдиним обмеженим
розв'язком системи (5) при всіх $t \in R$, $\varphi \in T^m$.

Права частина рівності (12) визначена,
оскільки нерівності (3) і (8) забезпечують
рівномірну збіжність інтегралів та суми з (12).
Дійсно

$$\|x_1(t, \varphi)\| \leq \int_{-\infty}^t K e^{-\gamma(t-s)} \|f_1(s, \varphi_s(t, \varphi))\| ds + \\ + \sum_{\tau_i \leq t} K e^{-\gamma(t-\tau_i)} \|b_i\| + \int_t^{+\infty} K e^{-\gamma(t-s)} \|f_1(s, \varphi_s(t, \varphi))\| ds + \\ + \sum_{\tau_i > t} K e^{-\gamma(t-\tau_i)} \|b_i\| \leq \frac{2K}{\gamma} \sup_{t \in R} \max_{\varphi \in T^m} \|f_1(t, \varphi)\| + \\ + K \sup_{i \in Z} \|b_i\| \left(\sum_{\tau_i \leq t} e^{-\gamma(t-\tau_i)} + \sum_{\tau_i > t} e^{-\gamma(t-\tau_i)} \right).$$

В силу (3), будь-який проміжок осі t
довжини l містить не більше q точок
послідовності $\{\tau_i\}$. Тоді для $j \geq i$ маємо

$$j - i + 1 \leq q \left(\left\lceil \frac{\tau_j - \tau_i}{l} \right\rceil + 1 \right) \leq q \left(\frac{\tau_j - \tau_i}{l} + 1 \right),$$

звідки

$$\tau_j - \tau_i \leq l \left(\frac{1}{q} - 1 \right) + \frac{1}{q} (j - i).$$

Тому

$$\sum_{\tau_i \leq t} e^{-\gamma(t-\tau_i)} + \sum_{\tau_i > t} e^{-\gamma(t-\tau_i)} \leq \sum_{\tau_i \leq t} e^{-\gamma(\tau_j - \tau_i)} + \sum_{\tau_i > \tau_j} e^{-\gamma(\tau_j - \tau_i)} \leq \\ \leq 2e^{\gamma \left(\frac{1}{q} - 1 \right)} \sum_{m=0}^{\infty} e^{-\frac{\gamma m}{q}} = \frac{2e^{\gamma \left(\frac{1}{q} - 1 \right)}}{1 - e^{-\frac{\gamma}{q}}}.$$

Таким чином, маємо оцінку

$$\|x_1(t, \varphi)\| \leq C \left(\sup_{t \in R} \max_{\varphi \in T^m} \|f_1(t, \varphi)\| + \sup_{i \in Z} \|b_i\| \right),$$

де

$$C = \max \left(\frac{2K}{\gamma}, \frac{2e^{\gamma \left(\frac{1}{q} - 1 \right)}}{1 - e^{-\frac{\gamma}{q}}} \right).$$

Покажемо, що функція $x_1(t, \varphi)$, визначена
рівністю (12), є розв'язком системи рівнянь (5).
Диференціюючи $x_1(t, \varphi)$ по t при $t \neq \tau_i$,
одержимо

$$\frac{dx_1(t, \varphi)}{dt} = \\ = \int_{-\infty}^t \frac{dG(t, s, \varphi_t(\tau, \varphi))}{dt} f_1(s, \varphi_s(t, \varphi_t(\tau, \varphi))) ds + \\ + \int_t^{+\infty} \frac{dG(t, s, \varphi_t(\tau, \varphi))}{dt} f_1(s, \varphi_s(t, \varphi_t(\tau, \varphi))) ds + \\ + \sum_{\tau_i \leq t} \frac{dG(t, \tau_i, \varphi_{\tau_i}(\tau, \varphi))}{dt} b_i + \sum_{\tau_i > t} \frac{dG(t, \tau_i, \varphi_{\tau_i}(\tau, \varphi))}{dt} b_i = \\ = M(t, \varphi) x_1(t, \varphi) + f_1(t, \varphi),$$

Отже, функція вигляду (12) є обмеженим на
всій осі розв'язком системи (5). Нехай існує ще
один обмежений на всій осі розв'язок $y(t, \varphi)$
системи (5). Тоді їх різниця є обмеженою на всій
осі функцією, що є розв'язком однорідної
системи (7). Однак, в силу гіперболічності, ця
система має лише тривіальний розв'язок, який
обмежений на всій осі. Тому розв'язки $x_1(t, \varphi)$ та
 $y(t, \varphi)$ співпадають і система (5) має єдиний
обмежений на всій осі розв'язок.

Розв'язок системи (6) будемо знаходити
користуючись методом [2]. Позначимо через D
оператор вигляду $D = I \frac{d}{dt}$. Тоді система (6)
набуває вигляду

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(t, \varphi), \quad x = Dx_2 - f_2(t, \varphi). \quad (13)$$

Нехай $x_2(t, \varphi)$ – розв'язок другого рівняння
(13). Застосувавши до нього оператор D ,
дістанемо

$$x_2 = Dx_2 - f_2(t, \varphi); \quad Dx_2 = D^2 x_2 - Df_2(t, \varphi); \dots; \\ D^{m-1} x_2 = D^m x_2 - D^{m-1} f_2(t, \varphi).$$

Додавши ці рівності й урахувавши, що $D^m x_2 = 0$, бачимо, що система (6) має єдиний розв'язок який має вигляд

$$x_2(t, \varphi) = - \sum_{k=0}^{s-1} \sum_{i_1+\dots+i_m=k} I^k \frac{\partial^k f_2(t, \varphi)}{\partial \varphi_1^{i_1} \dots \partial \varphi_m^{i_m}} a_1^{i_1}(t, \varphi) \dots a_m^{i_m}(t, \varphi) \quad (14)$$

Цей розв'язок є також обмежений в силу умов накладених на функції $f_2(t, \varphi)$ та $a(t, \varphi)$.

Об'єднавши (12) та (14) одержимо єдиний обмежений на всій дійсній осі розв'язок системи (1),(2)

$$x(t, \varphi) = \left(\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{+\infty} G(t, s, \varphi_t(\tau, \varphi)) f_1(s, \varphi_s(t, \varphi_t(\tau, \varphi))) ds + \\ & + \sum_{+\infty < \tau_i < -\infty} G(t, \tau_i, \varphi_{\tau_i}(\tau, \varphi)) b_i \\ & - \sum_{k=0}^{s-1} \sum_{i_1+\dots+i_m=k} I^k \frac{\partial^k f_2(t, \varphi)}{\partial \varphi_1^{i_1} \dots \partial \varphi_m^{i_m}} a_1^{i_1}(t, \varphi) \dots a_m^{i_m}(t, \varphi) \end{aligned} \right) \quad (15)$$

Теорему доведено.

Припустимо, що для матрицанта $\Omega_s^t(\tau, \varphi)$ системи рівнянь (7) виконується нерівність

$$\|\Omega_s^t(\tau, \varphi)\| \leq K e^{-\gamma(t-s)}, \quad t \geq s \quad (16)$$

для будь-яких $\varphi \in T^m$ і деяких констант $K \geq 1, \gamma > 0$. В цьому випадку функція

$$G(t, s, \varphi) = \begin{cases} \Omega_s^t(\tau, \varphi), & t \geq s, \\ 0, & t < s \end{cases} \quad (17)$$

є функцією Гріна-Самойленка системи (7). З формули (15) легко бачити, що розв'язок $x(t, \varphi)$ можна подати у вигляді

$$x(t, \varphi) = \left(\begin{aligned} & \int_{-\infty}^t G(t, s, \varphi_t(\tau, \varphi)) f_1(s, \varphi_s(t, \varphi_t(\tau, \varphi))) ds + \\ & + \sum_{\tau_i < t} G(t, \tau_i, \varphi_{\tau_i}(\tau, \varphi)) b_i \\ & - \sum_{k=0}^{s-1} \sum_{i_1+\dots+i_m=k} I^k \frac{\partial^k f_2(t, \varphi)}{\partial \varphi_1^{i_1} \dots \partial \varphi_m^{i_m}} a_1^{i_1}(t, \varphi) \dots a_m^{i_m}(t, \varphi) \end{aligned} \right) \quad (18)$$

Оскільки, для матрицанта $\Omega_s^t(\tau, \varphi)$ виконується умова (16), то цей розв'язок буде асимптотично стійкий. Отже, можемо сформулювати наступну теорему.

Теорема 2. Нехай фундаментальна матриця $\Omega_s^t(\tau, \varphi)$ задовольняє оцінку (16). Тоді система (1),(2) має єдиний обмежений на всій осі розв'язок вигляду (18), причому цей розв'язок асимптотично стійкий.

Список використаних джерел

1. Campbell S.L. Canonical forms and solvable singular systems of differential equations / Campbell S.L., Petzold L.R. // SIAM J. Alg. Discrete Methods. – 1983. – №4. – P.517-521.
2. Бояринцев Ю.Е. Численные методы решения сингулярных систем. / Бояринцев Ю.Е., Данилов В.А., Логинов А.А., Чистяков В.Ф. // - Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1989. - 223с.
3. Самойленко А.М. Лінійні системи диференціальних рівнянь з виродженнями. / Самойленко А.М., Шкіль М.І., Яковець // - К.: Вища шк., 2000. - 294с.
4. Самойленко А.М. Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием / Самойленко А.М., Перестюк Н.А. // К.: Вища шк. Головное изд-во, 1987. – 288 с.

References

1. CAMPBELL S.L., PETZOLD L.R. (1983) *Canonical forms and solvable singular systems of differential equations* // *SIAM J. Alg. Discrete Methods*. – №4. - P.517-521.
2. BOYARINCEV YU.E., DANILOV V.A., LOGINOV A.A., CHISTYAKOV V.F. (1989) *Numerical methods for solving singular systems*. – *Novosibirsk: Nauka*.
3. SAMOILENKO A.M., SHKIL M.I., YAKOVETC V.P. (2000) *Linear systems of differential equations with singularities*. – K.: Vyshcha Shkola.
4. SAMOILENKO A.M., PERESTYUK N.A. (1987) *Differential equations with impulsive actions*. – K.: Vyshcha shkola.

Надійшла до редколегії 22.06.2016

КОМП'ЮТЕРНІ НАУКИ ТА ІНФОРМАТИКА

УДК 519.9

Богун В. А. , студент
Полоцький С.В., к.ф.-м.н., асистент

Пошук виграшних стратегій в іграх на графах

Київський національний університет
імені Тараса Шевченка, 83000, м. Київ, пр-т.
Глушкова 4д
e-mail: vladyslavbogun@gmail.com
e-mail: sergiy.polotskiy@gmail.com

V. A. Bogun, student,
S. V. Polotskiy, PhD.

Finding winning strategies in games on graphs

Taras Shevchenko National University of
Kyiv, 83000, Kyiv, Glushkova st., 4d,
e-mail: vladyslavbogun@gmail.com
e-mail: sergiy.polotskiy@gmail.com

У роботі розглядаються скінченні комбінаторні ігри зі скінченною множиною позицій та повною інформацією, де гравці ходять по черзі.

Ключові слова: комбінаторні, ігри, повна інформація.

We consider finite combinatorial games with a finite set of positions and complete information where players take turns. Such games can be viewed as games on graphs. We'll find strategy for the bot. More precisely under current strategy we'll understand list of the incident edges where each edge has probability which bot use it during next step. For bot study we use neural network. During the study probability of each edge change. The main idea in the modifying of the probabilities was the following. If game is successful (bot won) then steps which were made at the end of game were more meaningful and probability for appropriate edge much more than probability of edge at the start of game. For this main idea we used three different rules for changing probability. Algorithms that find optimal strategy were built for several famous games.

Key Words: combinatorial games, no uncertainty.

Статтю представив д.т. н., проф. Гаращенко Ф.Г.

Вступ

Кожну гру можна представити у вигляді пари $A=(G,u)$, де $G=(V,E)$ – орієнтований граф, u – деяка вершина цього графа. Множина V в такому випадку є множиною позицій гри, E – множина ходів. Вершина u інтерпретується як поточна позиція гри.

Зауважимо, що інколи під грою розуміють граф G як сукупність правил гри, та послідовності ходів гравців. Проте надалі будемо розглядати лише перше означення, де не фігурує інформація про попередні кроки гравців

Гра називається нормальною, якщо програє гравець, що не може зробити хід.

Гра називається справедливою, якщо множина можливих ходів для будь-якої позиції гри не залежить від того, котрий з гравців ходить

Процесом гри в ведених означеннях будемо вважати процес переходів с однієї вершини графа G до іншої, де ходи роблять два гравці по черзі, до тих пір поки один з гравців не потрапить у програшну позицію (для нормальних ігор це вершина, степінь якої 0).

Опис алгоритму

Враховуючи, що гра представляється у вигляді графа, то в такому вигляді і будемо шукати стратегію для робота. А саме під поточною стратегією робота будемо розуміти список інцидентних ребер для кожної вершини з V (фактично, список можливих ходів для всіх позицій гри), де кожному ребру також поставлена у відповідність ймовірність того, що робот зробить такий хід.

Нехай $G=(V,E)$. $V=\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, $E=\{(u,v) \mid u \in V, v \in V\}$.

Позначимо $E(v_i) := \{(v_i, u) \mid (v_i, u) \in E\} = \{e_1, e_2, \dots, e_{m_i}\}$ – список інцидент них до v_i ребер, $P(v_i, e_j) = P_{ij} = P\{\text{зробити хід } e_j \text{ в позиції } v_i\}$

Тепер розглянемо процес навчання робота. Нехай в процесі гри робот у деяких позиціях $v_1, v_2, \dots, v_t$ зробив відповідно ходи $e_1, e_2, \dots, e_t$. В такому випадку модифікуємо поточку стратегію в залежності від результату гри. А саме нехай задана деяка константа $C \in (0, 1)$, і якщо гра завершилася перемогою цього робота, то збільшимо ймовірності зроблених ходів на C відсотків, інакше зменшимо.

Розглянемо деяку позицію $v_i \in \{v_1, v_2, \dots, v_t\}$ та відповідний хід $e_j \in E(v_i)$, що він зробив. Нехай партія завершилася перемогою, тоді потрібно збільшити ймовірність P_{ij} на C відсотків. Робитимемо це наступним чином:

$$P_{ij} \leftarrow P_{ij} + (1 - P_{ij})C$$

$$P_{ik} \leftarrow P_{ik}(1 - C), k \neq j$$

Коли ж партія завершилася поразкою, будемо зменшувати ймовірність P_{ij} на C відсотків наступним чином:

$$P_{ij} \leftarrow P_{ij} - P_{ij}C$$

$$P_{ik} \leftarrow P_{ik} + \frac{P_{ij}C}{m_i - 1}, k \neq j$$

Зауваження: тут вважаємо, що $m_i > 0$, інакше про ніяку модифікацію стратегії в даній позиції не може і йти мова (множина можливих ходів одноелементна).

Не важко переконатись, що введені в обох випадках операції зберігають властивості, що $P_{ij} \in [0, 1]$ та їх сума дорівнює 1.

Результати навчання

Алгоритм навчання виглядає наступним чином: створюються 2 роботи, які грають між собою при цьому модифікуючи свої стратегії в процесі самої гри. Тобто використовується модель навчання без вчителя.

Початкова позиція гри кожний раз випадкова (в залежності від конкретної гри), ймовірності, що робот ходить першим чи другим рівні, таким чином їх шанси на перемогу рівно можливі.

Початкова стратегія робота задається набором ймовірностей $P_{ij} = \frac{1}{m_i}$, тобто робот робить повністю випадкові ходи.

Розглядається процес розвитку робота на прикладі трьох ігор (описано нижче), для перевірки його «інтелекту» проводилась деяка кількість партій з роботом, що володіє вигравною стратегією. Результати усереднювались і отримувалась оцінка ймовірності того, що робот переможе

(ймовірність 0.5 означатиме, що робот досягнув найкращого розвитку, бо саме такою має бути ця ймовірність виходячи з вищеописаної постановки початку гри).

Зауваження: під час гри з «розумним» роботом ніяка модифікація стратегій не відбувалась.

Зауваження: фактично, щоб побудувати «розумного» робота потрібно аналітично розв'язати гру. Клас ігор, що можна так розв'язати досить вузький. Найкращими способами для цього є ретроспективний аналіз або використання теорії Шпрага-Гранді. Хоча для тестування використовувались аналітично розв'язні ігри, стратегії та їх розвиток у робота не залежать від того існує аналітична відповідь чи ні, чи існує теоретично, коли практично не має можливості її вивести у явному вигляді.

Гра 1. Камінці

Розглянемо купку з n камінців. Кожен гравець по черзі забирає з неї від одного до трьох камінців. Програє той гравець, що не може зробити хід (або ж еквівалентно цьому, виграє той, хто забрав останній камінь).

Знайдемо стратегію методом ретроспективного аналізу. Починаємо аналіз з кінця гри.

Купка з 0 камінців очевидно програшна за постановкою гри. Якщо гравець знаходиться в позиціях 1, 2, 3 – він може забрати всі камінці і виграти, отож ці позиції переможні. Тепер розглянемо позицію 4: скільки б гравець не взяв каменів, його опонент забере решту і переможе, отож ця позиція програшна. З позицій 5, 6, 7 поточний гравець може залишити своєму опоненту 4 камені, і в такому випадку виграти.

Узагальнюючи, позиція n вигравна, якщо n не ділиться націло на 4, програшна інакше. Найкращою стратегією буде забирати $n \bmod 4$ каменів в вигравній позиції, а для програшної не важливо, який хід зробити.

Результати тестування – рис 6, 7

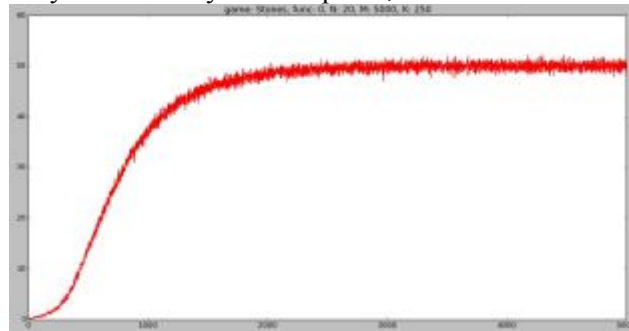


Рис. 6.

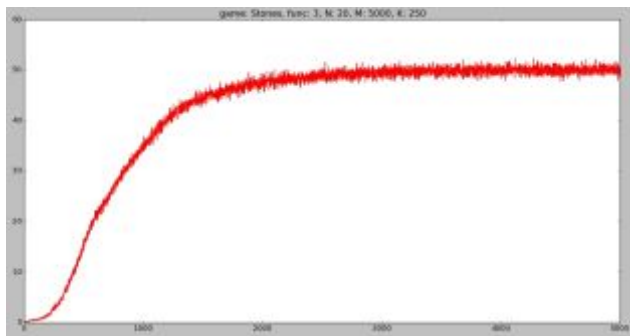


Рис. 7.

Гра 2. Стрічка

Розглянемо стрічку паперу з N клітинок ($1 \times N$). Гравець за один хід може розрізати її на дві, причому заборонено розрізати клітинки (їх кількість має залишатись цілою на обох стрічках), та заборонено розрізати стрічку на дві однакові частини. Наступний гравець обирає якусь зі стрічок та розрізає її. Програє той, що не може зробити розріз, що задовольняє правила гри. Фактично спочатку була гра на стрічці $1 \times N$, після першого розрізу вона розпадається на дві, що протікають незалежно, потім на три і т.д. Гра завершиться, коли отримається купа стрічок розмірів 1×1 або 1×2 .

Для аналізу та побудови виграшної стратегії такої гри використовувалася теорія Шпрага-Гранді. Далі наведено значення функції гранді для деяких значень N :

$$G(1)=0, G(2)=0, G(3)=1, G(4)=0, G(5)=2 \dots$$

Результати тестування – рис 8

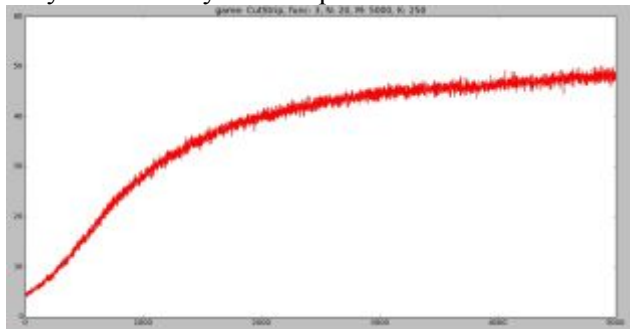


Рис. 8.

Гра 3. Лабіринт

Наступна гра фактично і не є грою у тому розумінні, що в ній немає другого гравця.

Розглянемо поле $N \times M$ клітинок. Деякі з них дозволені, деякі – ні. Гравець знаходиться у деякій дозволений клітинці та за один хід може зміститись на одну по вертикалі або горизонталі. Якщо він стане на заборонену клітинку – гра завершується поразкою. Гра завершується перемогою, якщо гравець стане на деяку завчасно обрану дозволена клітинку. Також вважаємо, що існує шлях від початкової позиції до кінцевої.

Можна уявити таку гру як блукання у лабіринті, де кінцева клітинка – вихід, його місцезнаходження невідоме до поки гравець там не опиниться. Заборонені клітинки можна трактувати як стіни лабіринту, або краще як деякі пастки (гра завершується, коли в них потрапляєш). Зауважимо, що гравець також не знає, які з позицій дозволені, а які – ні.

Хоча ця гра і на одного гравця, вона легко зводиться до двох гравців, а отже і для вищеописаної схеми навчання. Для цього просто замість другого робота поставимо робота, який не буде змінювати поточну позицію гри. Оцінювати в такому випадку ймовірність робота знайти «вихід». У відмінності від попередніх ігор тут найкращим результатом буде досягнення ймовірності 1.

Результати тестування



Рис. 2

Тепер давайте модифікуємо поточне навчання робота. У вищеописаній схемі C виступає у ролі константи (при тестуванні використовувалося значення 0.1). Це означало, що ймовірності ходів модифікуються однаково, не залежно від того вони були зроблені на початку чи під кінець гри. Природніше ж вважати, що ходи зроблені під кінець важливіші, ніж ті, що зроблені на самому початку.

Отож модифікуємо навчання наступним чином:

Ймовірність найпершого ходу буде змінюватись на C_{min} відсотків, а останнього – на C_{max} відсотків (при тестуванні використовувались значення 0.02 та 0.1 відповідно). Степінь зміни інших ймовірностей ходів монотонно зростає від початку до кінця гри від C_{min} до C_{max} .

Тестування проводились для випадків лінійної, квадратичної та кубічної функції залежності C від моменту, коли був зроблений хід.

Результати наведено на рис 3,4,5.

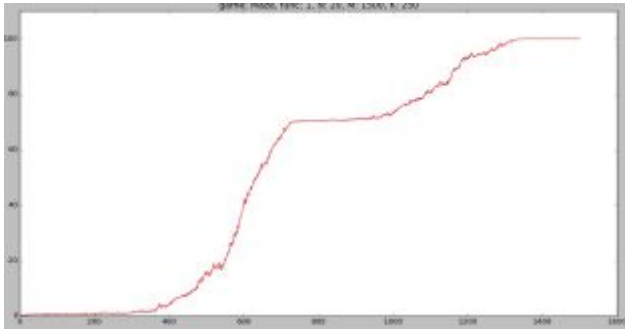


Рис 3.

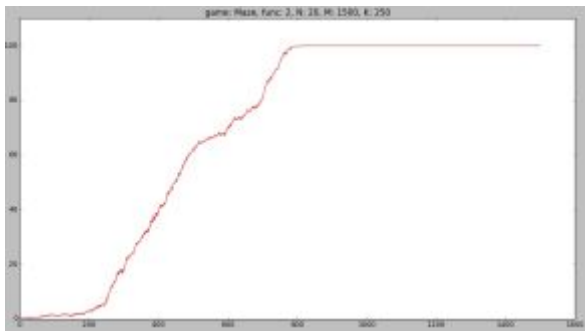


Рис 4

Як бачимо такі модифікації значною мірою покращили збіжність стратегії робота.

Зауваження: також було виявлено, що подібні модифікації майже не впливають на збіжність у попередніх двох іграх.

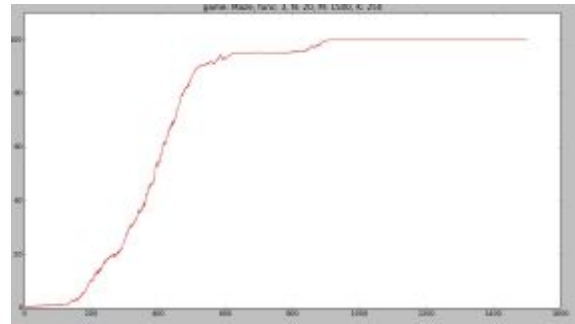


Рис 5

Список використаних джерел

1. Рутковская Д. Нейронные сети, генетические алгоритмы и нечеткие системы / Д. Рутковская, М.Пилиньский, Л. Рутковский — Москва: Горячая линия-ТелекомКнига, 2006. — 383 с.
2. Хайкин С. Нейронные сети: полный курс, 2-е издание/ С. Хайкин. — Москва: Издательский дом "Вильямс", 2006. — 1103с.
3. Станкевич А. Игры на графах. - Режим доступа:<https://ejudge.lksh.ru/archive/2014/07/A/games.pdf>.

References

1. RUTKOWSKA D., PILINSKY M. RUTKOWSKY L. (2006) Neural networks, genetic algorithms and fuzzy systems. Moscow: Hotline-TelekomKniga.
2. HAYKIN S. (2006) Neural networks: a complete course, 2nd edition. Moscow: Publishing House Williams.
3. STANKEVICH A. Games on Graphs. - <https://ejudge.lksh.ru/archive/2014/07/A/games.pdf>.

Надійшла до редколегії 01.03.2016

УДК 519.7

Галкін О. А., к.ф.-м.н., асистент

**Аналіз та метод обробки великих
масивів медико-статистичних даних
невизначеної структури**

Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, пр-т.
Академіка Глушкова 4д,
e-mail: galkin.o.a@gmail.com

O. A. Galkin, candidate of physical and mathematical
sciences, assistant

**Analysis and method of processing large
amounts of medical and statistical data of
unspecified structure**

Taras Shevchenko National University of Kyiv,
03680, Kyiv, Glushkova st., 4d,
e-mail: galkin.o.a@gmail.com

Стаття присвячена аналізу та обробці реальних даних, що пов'язані з професійною діяльністю медичних працівників при виконанні обов'язків по догляду за пацієнтами. Запропоновано метод визначення оптимального функціонування медичних працівників протягом робочого дня з використанням апріорних знань про відповідні сектори функціонування. Метод дозволяє модифікувати множину часових ознак секторів в апріорну ймовірність секторів функціонування за рахунок використання концепції вибірки за значимістю. Отримано можливість використання байєсівських оцінок за рахунок зменшення умовної ймовірності оцінок функцій для секторів вибірки.

Ключові слова: часове вікно, великі дані, байєсівська мережа

The article is devoted to the analysis and processing of real data related to the professional functioning of medical personnel in the performance of duties in patient care. The aim of our study of large amounts of medical and statistical data is to determine the optimal functioning of health professionals using the supervised learning algorithms. Data were collected within one year from medical records of patients and special controllers, resulting in the method of determining the optimal functioning of health professionals during working hours using a prior knowledge of the relevant functioning sectors. The proposed method makes it possible to modify the set of time features of sectors into prior probability of functioning sectors by using the concept of importance sampling. There was obtained an opportunity to apply the classical methods for determining the function for each local time window within a range of sectors which allowed the use of Bayesian estimation reducing the conditional probability of functions assessment for sample sectors. The proposed method outperformed the classical methods with a balanced ratio of classification to 27.74% without a prior knowledge for evaluation of data set. In comparison with the classical methods, the proposed method significantly reduces the number of errors in functioning sectors (from 346.3 sec. to 96.7 sec).

Key Words: time window, big data, Bayesian network

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Анісімов А.В.

Вступ

У сфері охорони здоров'я стандартизація процесів по догляду за пацієнтами є однією з найбільш актуальних проблем, що потребує пошуку нових та ефективних методів вирішення. Застосування інструментів машинного навчання з учителем та інтелектуального аналізу даних дає можливість кращого розуміння та покращення сфери медичних послуг у сенсі уникнення непотрібних дій та надмірної роботи персоналу.

Крім того, розробка ефективних методів обробки великих даних є важливою для пацієнтів, оскільки оптимізується загальний процес догляду за хворими, що призводить до більш короткого строку госпіталізації та зниження витрат. Останнім часом, науковці вивчили можливість визначення оптимального функціонування медичних працівників за допомогою спеціальних датчиків: наприклад, акселерометри, гіроскопи, низькочастотні аудіо пристрої та інші [1]. Крім

того, такі технології були застосовані у відповідних профільних сферах функціонування медичного персоналу по догляду за хворими. Однак, незважаючи на стрімкий розвиток вказаних підходів, певні питання залишаються відкритими.

Відсутність чіткого визначення характеру реальних функцій медичних працівників

При визначенні функцій медичних працівників, класи функцій описуються предметно-специфічним чином, як зазначено у табл. 1. У даному випадку, визначення функцій є досить складним процесом, оскільки таблиця включає ознаки, значення яких варіюються навіть для окремих класів. Наприклад, вимірювання артеріального тиску починається шляхом приєднання відповідного обладнання до пацієнта, після чого періодично відбувається здавлювання повітряного насоса, що закінчується від'єднанням обладнання. Крім того, такі дії мають певні дисбаланси, такі як число входжень серед класів, число починань в тиждень, а також тривалість. Наприклад, такі складні види функцій, як використання рентгену, вимагають десятків хвилин, в той час як інші процедури завершуються значно швидше.

Таблиця 1

Класи функцій та ознаки

№	Класи функцій	Ознаки
1	Вимірювання ваги	59
7	Вимірювання артеріального тиску	631
10	Зразок крові	19
12	Початок внутрішньовенної ін'єкції	71
13	Закінчення внутрішньовенної ін'єкції	49
15	Зміна крапельниці	39
18	Надання допомоги лікаря	23
19	Знаходження артерії	321
20	Огляд набряків	121
22	Перевірка пролежнів	14
23	Вимірювання ЕКГ	27
24	Приєднання ЕКГ	61
25	Видалення ЕКГ	7
27	Приєднання пов'язки на погруддя	34
28	Портативний рентген	9
29	Зміна бинтів	41

31	Зміна постави	79
36	Надання інвалідного крісла	91
37	Надання допомоги при ходьбі	43
38	Переміщення ліжка	21
39	Миття рук	153
41	Облік медичного функціонування	1007

Класичні підходи передбачають, що класи функцій мають однакові ймовірності у будь-який момент часу протягом дня, а також однакові тривалості. Тому, метод, точність якого не змінюється при аналізі дисбалансів, не відомий.

Досліджуючи функції медичного персоналу, ми можемо встановити чіткі цілі, такі як ефективне покращення функціонування медичного персоналу відносно часу, оптимізація тривалості процедур, задоволеність пацієнтів, а також оптимізація витрат на виконанні професійних обов'язків медичних працівників. Для досягнення вказаних цілей, технічна мета полягає не тільки у покращенні точності визначення функцій відносно класичного визначення з поточного часового вікна або того, що знаходиться в безпосередній близькості (так звані локальні часові вікна), але і в оцінці сектору, тобто діапазону, де функція виконується неперервно з використанням коректних часових ознак та тривалості.

Відсутність множини даних з чіткими цілями

Для вирішення вищезазначених проблем алгоритми машинного навчання потребують введення реальних великих даних для їх коректної оцінки. Однак, існує певна нестача відкритих множин даних, отриманих з різних сфер медичної діяльності, а також множин, що містять вичерпну інформацію щодо функціонування медичних працівників впродовж повного робочого дня з щільно анотованими ознаками. На спеціалізованих наукових ресурсах є доступними декілька множин, що містять дані з досить тривалим часом, однак, оскільки вони не мають чіткого застосування, відкритим залишається питання щодо точності цих даних [2].

В рамках дослідження були відібрані розмічені дані, що відповідають фактичному функціонуванню медичних працівників, які носили акселерометри протягом трьох тижнів. Відібрані дані були об'єднані з навчальними

ознаками, в результаті чого було отримано 34 класи функцій з 7,434 мітками від 24 медичних працівників. Крім того, були відібрані нерозмічені дані, що є відкритими даними великого обсягу для 73 медичних працівників для 541 [днів $\times$ осіб] протягом одного року. Зауважимо, що для проведення експерименту було отримано згоду від медичних працівників, а також від 120 пацієнтів відносно використання спеціальних вимірювальних датчиків та пристроїв для ведення медичних записів.

На основі розмічених даних було встановлено, що виконувані процеси мають певні дисбаланси в ряді випадків для кожного класу функцій, часу початку робочого дня, а також тривалості. В результаті, було запропоновано метод для визначення функцій впродовж повного дня, використовуючи апіорні знання на основі інформації щодо послідовності секторів функціонування, що отримані з навчальної множини даних відносно таких функцій робочого дня, як щоденні відмітки часу, тривалість та дисбаланси між класами.

В рамках запропонованого методу ми модифікували множину часових ознак навчальних даних в апіорну ймовірність сектора функцій за рахунок використання концепції вибірки за значимістю. Також, ми отримали можливість проводити тестування даних, використовуючи класичні методи визначення функцій для кожного локального часового інтервалу в діапазоні секторів. Крім того, було застосовано байєсівські оцінки, знизивши умовну ймовірність оцінки функцій для секторних вибірок [3].

Оцінюючи множину даних медичних працівників, запропонований метод перевершив на 27,74% наївний байєсівський метод без використання апіорних знань завдяки збалансованій частоті класифікації. Крім того, запропонований метод значно зменшив тривалість появи помилок в секторах функціонування з 347,4 с. до 73,4 с. в методі k -найближчих сусідів, з 169,4 с. до 79,14 с. в наївному байєсівському методі та з 119,7 с. до 6,97 с. в методі випадкового лісу.

Отже, внесок нашої роботи полягає в наступному. Було відібрано та досліджено реальну множину великих даних, що характеризують різні види функцій медичних працівників. Крім того, було відібрано великі за обсягом дані спеціальних датчиків для їх використання в машинному навчанні з учителем. Було запропоновано метод використання

апіорних знань за секторами функцій впродовж робочого дня, в результаті чого було оцінено запропонований метод в сенсі покращення точності визначення функцій та тривалості секторів функціонування. Крім того, було проведено інтелектуальний аналіз даних шляхом застосування запропонованого методу до великих за обсягом даних, отриманих від медичних працівників.

Характеристика даних датчиків щодо визначення функцій медичних працівників

Дані спеціальних датчиків були отримані від медичних працівників лікарняного закладу, що спеціалізується на дослідженні серцево-судинних захворювань. Зазначимо, що експериментальні дослідження проводилися виключно з тими медичними працівниками та пацієнтами, які погодилися на використання спеціальних датчиків. Множина великих даних містить розмічені дані, що відібрані протягом трьох тижнів та нерозпомічені дані від 134 пацієнтів, відібрані протягом року.

Для аналізу розмічених та нерозмічених множин даних зазначимо, що в процесі проведення експериментальних досліджень медичним працівникам було запропоновано носити спеціальні пристрої (Cowon Z2) в своїх нагрудних кишенях, що записують прискорення у фіксованому напрямку. Крім того, були також використані невеликі акселерометри, один з яких був прикріплений на правому зап'ясті, а інший - на задній частині талії. Кожен датчик вимірював прискорення по трьох осях в діапазоні $\pm 2G$.

У якості множини *розмічених* даних було використано дані щодо виконання професійних обов'язків 27 медичних працівників за період протягом трьох тижнів в грудні 2015 року. Зауважимо, що зазначені дані були розмічені за допомогою спеціального пристрою іншими медичними працівниками, які виступали в якості спостерігачів. Перед початком дослідження ми визначили 37 класів функцій, інформацію про яких було записано спостерігачами.

Інтерпретація ознак для реальних функцій медичних працівників вимагає ретельного опрацювання. У професійній діяльності медичних працівників догляд за пацієнтами має найвищий пріоритет, однак, у даному випадку має місце проблема відсутності багатьох ознак або невірних ознак часу [4]. Тому, у якості спостерігача було залучено медичного працівника, який керував іншим пристроєм

Cowon Z2 для запису функцій медичних працівників. На даному пристрої було встановлено програмне забезпечення, за допомогою якого спостерігач вибирав клас функцій, на якому медичний працівник збирається почати процедуру та активує значок закінчення, коли процедура закінчувалася.

Зазначимо, що якщо спостерігач очікував на початок виконання процедури медичним працівником, початкова часова ознака мала відповідну затримку. Таким чином, спостерігач та медичні працівники взаємодіяли одне з одним для отримання коректних початкових часових ознак. Тому, перед тим як почати певну процедуру, медичний працівник оголошував спостерігачеві про початок свого функціонування.

У тому ж відділенні лікарняного закладу було отримано множину *нерозмічених* даних, отриманих за допомогою датчика протягом року від медичних працівників, які носили три акселерометри таким же чином, як і для випадку множини розмічених даних. Вказані дані були отримані від медичних працівників, від яких була отримана згода на використання датчиків упродовж робочих днів.

Визначення множини даних

Для використання загальної множини даних у якості розмічених та нерозмічених даних, дані були рівномірно відформатовані наскільки це можливо. Оскільки ідентифікатори для медичних працівників є послідовними, можна стверджувати, що ідентифікатор для конкретного медичного працівника є однаковим для обох множин даних. Крім того, кожен датчик, що прикріплений в конкретному місці на тілі зберігає свої дані окремо, що дозволяє ефективно проводити аналіз даних, які будуть об'єднані в одну таблицю з декількох стовпців.

Таким чином, ми об'єднали дані трьох пристроїв, що були відібрані упродовж робочих днів в одну таблицю. Спочатку було згенеровано ознаки часу, збільшивши частоту на 24 Гц, що означає 0,06 с., та використали найближчу вибірку даних в період часу 0.074 с. для кожної часової ознаки. Зауважимо, що у випадку відсутності надходження вибірок протягом 0.037 с., ми повторно використовували останнє значення часової ознаки. Оскільки всі пристрої мають свої власні таймери, що не мають жодної взаємодії щодо синхронізації часу, існує ризик того, що загальний час буде не синхронізованим.

Для вирішення цієї проблеми, ми обнуляли таймери одночасно та періодично в середньому один раз на день для отримання опорної мітки часу, після чого використовували відносний час від часу обнулення.

Аналіз множини даних

В результаті експерименту було відібрано 453,7 [годин $\times$ осіб] даних датчиків від 24 медичних працівників у якості множини розмічених даних та 1764 [день $\times$ осіб] від 73 медичних працівників у якості множини нерозмічених даних. Для аналізу отриманих ознак, ми розглядаємо ознаки, отримані у якості множини розмічених даних. В результаті проведення експерименту було отримано 22 класи. Загальне число міток - 4347. Мітки для кожного класу функцій також перераховані у табл. 1.

На рис. 1 продемонстровано графік часу старту для кожного класу функцій в діапазоні робочого дня. Кожен рядок відповідає класу функцій (число яких відповідає номеру у табл.1), а вісь абсцис відповідає за години в день. Точки є початковим часом функціонування. Ми можемо побачити дисбаланс між класами функцій та періодами часу протягом дня. Зазначимо, що число функцій варіюється в залежності від класів функцій, а самі функції виконуються у будь-який час рівномірно.

Метод визначення функцій медичних працівників впродовж робочого дня

Функції медичних працівників мають різні властивості, що залежать від часу доби. При наявності у навчальних даних ознак та часових ознак, ми можемо модифікувати множину часових ознак в апіорну ймовірність виконуваних функцій. Крім того, якщо ми будемо використовувати початковий і кінцевий час функцій, ми можемо отримати інформацію про тривалість їх виконання. Отримання інформації про те, коли і як довго виконуються функції по догляду за хворими має важливе значення для аналізу даних. Запропонований метод на додаток до оцінки функцій, що надходять на вхід датчика часових вікон, використовує інформацію про мітки часу для того, щоб побудувати розподіл апіорної ймовірності функцій протягом робочого дня, а також їх реалізацію на основі вибірки за значимістю [5]. В результаті, отримана

інформація використовується для байєсівської оцінки функцій.

Отже, далі ми вводим математичні вирази, які використовуються для побудови математичного апарату запропонованого методу. На рис. 1 зображена схема одноденного функціонування для одного класу функцій $c \in C$.

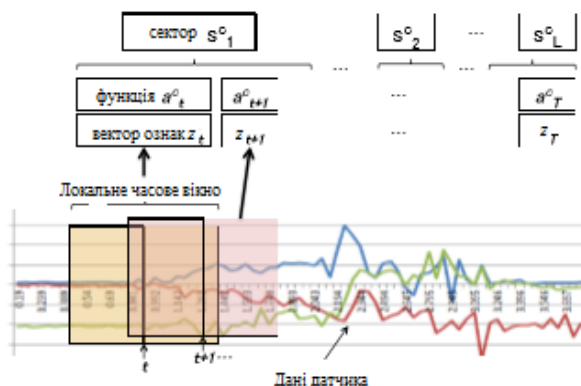


Рис. 1 Схема одноденного функціонування

Будемо вважати, що конкретний час доби виражається як ціле число між 1 та T , де послідовність $(1, 2, \dots, T)$ позначимо як $1:T$. Ми припускаємо, що вектор ознак виділяє декілька статистичних значень з часового вікна входу датчика в околі значення t . Також, послідовність векторів ознак $(z_1, z_2, \dots, z_T)$ позначимо як $z_{1:T}$.

Введемо величину C , що вказує на множину класів функцій, які необхідно визначити. Припустимо, що у будь-який момент часу t можуть бути використані числові функції в результаті того, що медичний працівник виконує декілька функцій одночасно, або тому, що алгоритм визначення функцій проводить нечіткі оцінки. Таким чином, нашою метою є визначення того, чи при бінарному значенні t функція в момент часу t відповідає $c \in C$.

Запропонований метод може бути застосований для кожного класу функцій $c \in C$, де використовується або найбільш ймовірний клас $\arg_c \max P(a_t^c)$ або всі класи, оцінені за час t . Однак, ми будемо концентруватися на визначенні лише однієї функції $c \in C$ та оцінювати її точність.

Далі ми використовуємо термін “сектор” як неперервний діапазон часу, де виконується функція c і представляємо його у вигляді пари початкового часу та часу закінчення виконання функції [6]. Припускаючи, що сектори L^c повторюються для функції c на протязі робочого

дня медичного працівника, сектор l з моменту часу $b(l)$ до моменту часу $e(l)$ визначається, як

$$s_l^c = (b(l), e(l)), \quad (1)$$

де $1 \leq b(l) \leq e(l) \leq T$.

Процедура визначення функцій може бути змодельована як проблема отримання максимального аргументу $c \in C$ від $P(a_t^c | z_t)$ лише для локального часового вікна t . Зауважимо, що обчислення $P(z_t | a_t^c)$ може бути виконано, використовуючи теорему Байєса. Далі ми будемо називати величину $P(z_t | a_t^c)$ ймовірністю локального часу. Однак, в якості нашого внеску ми будемо вирішувати проблему отримання ймовірності функцій медичних працівників впродовж повного робочого дня $P(a_{1:T}^c | z_{1:T})$.

Для дослідження запропонованого методу ми припускаємо байєсівську мережу, як показано на рис. 2.

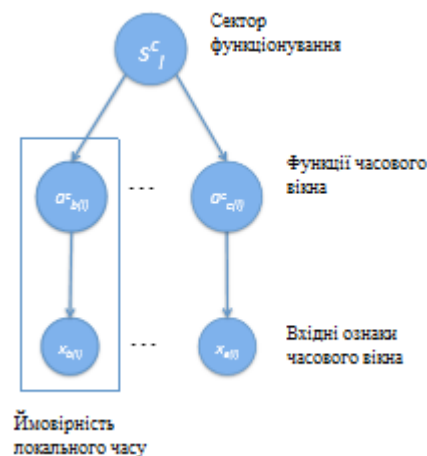


Рис. 2 Схема байєсівської мережі

На рис. 2 представлені умовні ймовірності для одного сектора s_l^c . Ми припускаємо, що ймовірності між будь-якими секторами s_l^c та $s_{l'}^c$ ($l \neq l'$) є незалежними. Зазначимо, що гранична ймовірність може бути виражена у такому вигляді:

$$P(z_{b(l):e(l)}, a_{b(l):e(l)}^c, s_l^c) = P(s_l^c) \prod_{t \in b(l):e(l)} P(z_t | a_t^c) P(a_t^c | s_l^c). \quad (2)$$

У випадку, коли s_l^c є фіксованим, a_t^c можна легко отримати для $b(l) \leq t \leq e(l)$, тому ми можемо видалити $P(a_t^c | s_l^c)$. Відповідно,

$$P(z_{b(l):e(l)}, a_{b(l):e(l)}^c, s_l^c) = P(s_l^c) \prod_{t \in b(l):e(l)} P(z_t | a_t^c). \quad (3)$$

Для отримання умовної ймовірності між $a_{b(l):e(l)}^c$ та $z_{b(l):e(l)}$, ми зменшуємо s_l^c , в результаті чого має місце така рівність:

$$P(a_{b(l):e(l)}^c, z_{b(l):e(l)}) = \sum_{s_l^c} P(s_l^c) \prod_{t \in b(l):e(l)} P(z_t | a_t^c). \quad (4)$$

Далі, ми розділяємо часову послідовність $1:T$ на сектори

$$\{b(1):e(1)\}, \{b(2):e(2)\}, \dots, \{b(L^c):e(L^c)\}$$

та розглядаємо граничну ймовірність для кожного часу $1:T$, як

$$P(a_{1:T}^c, z_{1:T}) = P(a_{b(1):e(1)}^c, z_{b(1):e(1)}, a_{b(2):e(2)}^c, z_{b(2):e(2)}, \dots, a_{b(L^c):e(L^c)}^c, z_{b(L^c):e(L^c)}) \quad (5)$$

Якщо припустити, що пари секторів незалежні один від одного, то формула (5) записується як добуток секторних граничних ймовірностей, а саме:

$$P(a_{1:T}^c, z_{1:T}) = \prod_{l \in 1:L^c} P(a_{b(l):e(l)}^c, z_{b(l):e(l)}). \quad (6)$$

Підставляючи

$$P(a_{b(l):e(l)}^c, z_{b(l):e(l)}) = \sum_{s_l^c} P(s_l^c) \prod_{t \in b(l):e(l)} P(z_t | a_t^c),$$

ми отримуємо таку рівність:

$$P(a_{1:T}^c, z_{1:T}) = \prod_{l \in 1:L^c} \left\{ \sum_{s_l^c} P(s_l^c) \prod_{t \in b(l):e(l)} P(z_t | a_t^c) \right\}. \quad (7)$$

Отже, з огляду на вхід $z_{1:T}$, ми маємо, що

$$P(a_{1:T}^c | z_{1:T}) \propto \prod_{l \in 1:L^c} \left\{ \sum_{s_l^c} P(s_l^c) \prod_{t \in b(l):e(l)} P(z_t | a_t^c) \right\}. \quad (8)$$

Дана формула використовує не тільки ймовірність локального часу $P(z_t | a_t^c)$, а також апіорну ймовірність секторів $P(s_l^c)$. Ми застосовуємо ймовірність локального часу

$P(z_t | a_t^c)$, отриману з результатів наївного методу, а також апіорну ймовірність $P(s_l^c)$, використовуючи відповідні вибірки з навчальних даних. Оскільки ймовірність $P(s_l^c)$ може бути досить інформативною, запропонований метод може призвести до підвищення точності в процесі визначення функцій протягом всього робочого дня.

Реалізація методу визначення функцій медичних працівників

Використовуючи логарифмічну ймовірність для уникнення антипереповнення, а також концепцію вибірки за значимістю, ми обчислюємо (8) відповідно до нижченаведеного алгоритму для отримання вибірок, зважених за апіорними знаннями секторів.

1. Провести навчання логарифмічної ймовірності локального часу $\log P(z_t | a_t^c)$ для $\forall t \in 1:T$ за допомогою наївного методу та зберегти результати.

2. Побудувати $P(s_l^c)$ на навчальних даних. Дана ймовірність реалізується у вигляді множини k вибірок з навчальних даних. Ми використовуємо вибірку i як $s_{l[i]}^c$, де $1 \leq i \leq k$.

3. Для $\forall s_{l[i]}^c$ на кроці 2, обчислити

$$\exp \left(\sum_{t \in b(l[i]):e(l[i])} \log P(z_t | a_t^c) \right),$$

використовуючи результат кроку 1.

4. Середнє значення

$$\exp \left(\sum_{t \in b(l[i]):e(l[i])} \log P(z_t | a_t^c) \right)$$

для $l[1], l[2], \dots, l[k]$ можна розглядати як вибірку

за значимістю для $\exp \left(\sum_{t \in b(l[i]):e(l[i])} \log P(z_t | a_t^c) \right)$, а

також в якості наближення рівняння

$$P(a_{b(l):e(l)}^c, z_{b(l):e(l)}) = \sum_{s_l^c} P(s_l^c) \prod_{t \in b(l):e(l)} P(z_t | a_t^c),$$

відповідно.

Оскільки, рівність

$$P(a_{b(l);e(l)}^c, z_{b(l);e(l)}) = \sum_{s_l^c} P(s_l^c) \prod_{t \in b(l);e(l)} P(z_t | a_t^c)$$

є аналогічною для $\forall l \in 1:L^c$, ми можемо використати її безпосередньо для оцінки s_l^c замість того, щоб повністю обчислювати рівняння (9).

Зазначимо, що на кроці 3, $\log P(z_t | a_t^c)$ може бути використаний декілька разів для різних $s_{l(i)}^c$, в результаті чого $s_{l(i)}^c$ попередньо обчислюються і зберігаються на кроці 1 для уникнення надмірних обчислень.

Оцінка методу визначення функцій медичних працівників

Далі ми оцінюємо запропонований метод на множині даних, отриманих від медичних працівників, що носили акселерометри в лікарняному закладі протягом трьох тижнів.

Оцінку запропонованого методу проведено з метою визначення того, чи може даний метод підвищити точність визначення функцій, а також ефективно оцінювати сектори. У даному випадку ми оцінюємо точність у порівнянні з наївним методом, а також оцінюємо тривалість операцій.

Отже, було виділено вектори ознак з трьох осей, використовуючи дані акселерометра. Для отриманих даних датчиків були виділені часові вікна в 4 секунди, зміщуючись кожні 2,3 секунди. Для кожного часового вікна ми розраховували 56 значень ознак.

Зазначимо, що ми скоротили 56 ознакових змінних до 25 шляхом застосування ступеневого вибору функцій до 1500 випадково вибраних векторів протягом двадцяти ітерацій.

Для оцінки запропонованого методу, ми порівняли його з апіорними знаннями про $P(s_l^c)$ з наївним методом без апіорних знань. У якості базових алгоритмів машинного навчання для $P(z_t | a_t^c)$, що є такими же, як наївний метод після застосування теореми Байєса, ми використали метод k -найближчих сусідів, наївний байєсівський метод та метод випадкового лісу, в результаті чого оцінили кожен з них.

Далі ми використали розподіл Гаусса для наївного байєсівського методу, що є параметричною моделлю ймовірностей. Оскільки даний метод припускає нестандартну функцію ймовірності, це може привести до некоректного

моделювання ймовірності. Таким чином, ми також використали метод k -найближчих сусідів, що може непараметрично апроксимувати ймовірність, використовуючи зворотні відстані із вибірки k , як це реалізовано в багатьох прикладних додатках. Метод випадкового лісу не має такого перевіреного наближення, однак ми можемо застосовувати байєсівське правило до мажоритарної частоти, отриманої від кожного слабкого дерева рішень. Враховуючи той факт, що метод випадкового лісу є досить ефективним і забезпечує більш високу точність у багатьох застосуваннях, він був використаний для перевірки використання вихідних умов.

Для того, щоб оцінити точність реального використання запропонованого методу, ми застосували підхід перехресної перевірки функцій впродовж одного робочого дня.

Зазначимо, що для оцінки запропонованого методу, точність та F-міра не потрібні для кожного часового вікна, оскільки розглянуті реальні дані є незбалансованими. Оскільки стандартні міри, такі як точність та F-міра є досить чутливими до цих дисбалансів, необхідно використовувати міри, незалежні від дисбалансу.

Відмітимо, що тривалість функцій також має важливе значення. Враховуючи той факт, що класичні міри не враховують фрагментацію оціночних функцій, фрагментація залишається в послідовностях розрахункових функцій, що може призвести до отримання секторів більш коротких тривалостей. Зазначимо, що для аналізу функцій медичних працівників тривалість є одним з критичних значень.

Для вирішення вищезазначених проблем ми використали оціночний метод. Було прийнято співвідношення вигоди та витрат Σ , що визначається наступним чином:

$$\Sigma = \frac{\Delta_+ + \Delta_-}{2}, \quad (9)$$

де показник Δ_+ визначається як $\frac{\bar{\Delta}_+}{(\Omega + \bar{\Delta}_+)}$, а

показник Δ_- - як $\frac{\bar{\Delta}_-}{(\bar{\Delta}_- + \square)}$, де $\bar{\Delta}_+(\square, \bar{\Delta}_-, \Omega)$ є

числом істинно позитивних показників (хибно позитивних, істинно негативних, або хибно негативних, відповідно). На відміну від інших мір, таких як міра повноти та F-міра, ці значення не залежать від незбалансованих позитивних та негативних вибірок, тому середнє значення Σ теж не залежить від дисбалансу. Крім того, було

оцінено різницю між середньою тривалістю розрахункових та істинних ознак для кожного класу функцій. Якщо значення є меншими, оцінені сектори матимуть ближчі тривалості до істинних секторів.

Висновки

Для пояснення отриманих результатів, зазначимо, що ми опустили результати класів функцій на не більше, ніж 7 ознак. Дані вибірки були використані для оцінки реальних даних, однак для спрощення представлення результатів були видалені. Аналізуючи точність по збалансованому показнику класифікації, були отримані результати для методу k -найближчих сусідів, наївного байєсівського методу та методу випадкового лісу в якості основних алгоритмів машинного навчання. Встановлено, що більшість класів функцій стають більш ефективними при застосуванні запропонованого метода. Усереднюючи всі класи функцій та застосовуючи метод k -найближчих сусідів в якості базового алгоритму, міра Σ склала 53,14%, де $\varepsilon=8,4$, в той час як для запропонованого методу - 70,17%, де $\varepsilon=13,1$. При використанні наївного

байєсівського методу в якості базового алгоритму, міра Σ склала 52,11%, де $\varepsilon=14,5$, а для запропонованого методу - 77,91%, де $\varepsilon=13,2$. Також, при використанні методу випадкового лісу в якості базового алгоритму, міра Σ для наївного методу склала 56,07%, де $\varepsilon=16,4$, а для запропонованого методу - 64,71%, де $\varepsilon=12,1$.

Аналізуючи точність тривалості функцій, було оцінено середню помилку тривалості функцій для наївного та запропонованого методу для кожного класу функцій. Оскільки вісь y є індикатором похибок, можна стверджувати, що чим меншими є її значення, тим вищою буде точність. На кожному класі функцій запропонований метод значно перевершив наївний метод. Середні помилки склали 319,1 с. для методу k -найближчих сусідів та 69,4 с. для запропонованого методу. При використанні наївного байєсівського методу, середні помилки склали 168,7 с. для наївного методу та 85,27 с. для запропонованого методу. Використовуючи метод випадкового лісу, середні помилки склали 117,4 с. для наївного методу та 4,97 с. для запропонованого методу.

Список використаних джерел

1. He H. Learning from imbalanced data / H. He, E.A. Garcia // *IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering*. – 2009. – 21. – P. 1263-1284.
2. McQueen, J.M. Segmentation of continuous speech using phonotactics / J.M. McQueen // *Journal of Memory and Language*. – 1998. – 39. – P. 21-46.
3. Chaudhuri P. Scale space view of curve estimation / P. Chaudhuri, J. Marron // *The Annals of Statistics*. – 2000. – 28. – P.408-428.
4. Guyon I. An introduction to variable and feature selection / I. Guyon, A. Elisseeff // *Journal of Machine Learning Research*. – 2003. – 3. – P. 1157-1182.
5. Kim E. Human Activity Recognition and Pattern Discovery / E. Kim, S. Helal, D. Cook // *Pervasive Computing, IEEE*. – 2010. – 9. – P. 48-53.
6. Holmes C.C. A probabilistic nearest neighbor method for statistical pattern recognition / C.C. Holmes, N.M. Adams // *Journal of the Royal Statistical Society*. – 2002. – 64. – P. 295-306.

References

1. HE, H., GARCIA E.A. (2009) Learning from imbalanced data. *IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering*. 21. p. 1263-1284.
2. McQUEEN, J.M. (1998) Segmentation of continuous speech using phonotactics. *Journal of Memory and Language*. 39. p. 21-46.
3. CHAUDHURI, P. & MARRON, J. (2000) Scale space view of curve estimation. *The Annals of Statistics*. 28. p.408-428.
4. GUYON, I., ELISSEEFF A. (2003) An introduction to variable and feature selection. *Journal of Machine Learning Research*. 3. p.1157-1182.
5. KIM, E., HELAL S., COOK D. (2010) Human Activity Recognition and Pattern Discovery. *Pervasive Computing, IEEE*. 9. p.48-53.
6. HOLMES, C.C., ADAMS N.M. (2002) A probabilistic nearest neighbor method for statistical pattern recognition. *Journal of the Royal Statistical Society*. 64. p. 295-306.

Надійшла до редколегії 29.02.16

УДК 519.7

Галкіна О. А., здобувач

**Спектральні когерентні міри
ризиків в задачах портфельної
оптимізації**

Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, пр-т.
Академіка Глушкова 4д,
e-mail: og20132013@gmail.com

O. A. Galkina, researcher

**Spectral coherent risk
measures in the portfolio optimization
problems**

Taras Shevchenko National University of Kyiv,
03680, Kyiv, Glushkova st., 4d,
e-mail: og20132013@gmail.com

Стаття присвячена дослідженню спектральної когерентної міри ризику та міри ризику за Кусуокі в проблемах портфельної оптимізації. Розроблено та досліджено динамічну систему оптимізації портфеля, що може використовуватися у фінансовому моделюванні. Розроблено програмне середовище реалізації методу генерації дерев сценаріїв, який є важливою частиною стохастичного програмування та протестована багатоетапна задача оптимізації портфеля з застосуванням міри ризику за Кусуокі та спектральної когерентної міри ризику. Багатоетапна задача оптимізації портфеля вимірюється тестуванням з точки зору вартості портфеля, а також процесорного часу, витраченого на генерацію дерев сценаріїв. Програмно реалізовано часовий горизонт, який дозволяє передбачити стратегії та поведінку інвестора щодо відповідного портфелю.

Ключові слова: міри ризику, портфельна оптимізація, стратегія інвестора

The article is devoted to investigation of the spectral coherent and Kusuoki's risk measures in the portfolio optimization problems. Risk is represented as portfolio yield variability due to changes in market and uncertain events. Dynamic portfolio optimization system is developed and it can be used in the financial modeling. The assets of the given problem are traded each period in order to generate a revenue stream and maintain a balanced portfolio close to the target function. The solutions of the multistage dynamic portfolio optimization problem applying the spectral coherent and Kusuoki's risk measures are found. Software environment of the method of scenarios trees generation is developed and multistaged portfolio optimization problem is tested using spectral coherent and Kusuoki's risk measures. The multistaged portfolio optimization model is measured in terms of portfolio value and CPU time spent on scenarios trees generation. Dynamic portfolio optimization model tested for various parameters. Scenarios play a key role in the time of the model performance, increasing number of scenarios leads to worse performance in terms of speed. In order to evaluate the strategy for the investor the portfolio model is solved at different time stages. Time horizon is implemented that allows to predict the behavior and strategies of the investor to the relevant portfolio.

Key words: risk measures, portfolio optimization, investor strategy

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Анісімов А.В.

Вступ

Розглянемо загальний ймовірнісний простір (Ω, F, P) та лінійний простір вимірних функцій $Z' := \{Z: Q \rightarrow R\}$. Нехай функція $\rho: Z \rightarrow R$ є мірою ризику. Число $\rho(Z)$, якщо воно позитивне, інтерпретується як мінімальні додаткові готівкові гроші, які інвестор повинен додати у

ризикованому становищі Z та інвестувати це в безризикові активи, щоб мати можливість продовжити свої плани, тобто мати ризик зі значенням 0. Крім того, якщо число $\rho(Z)$ є негативним, тоді може бути вилучена сума грошових коштів у розмірі $-\rho(Z)$. Функціонал

ρ є когерентною мірою ризику Z' , якщо він задовольняє наступні аксіоми:

Трансляційна інваріантність

Якщо $\alpha \in R$ та $Z \in Z'$, тоді

$$\rho(Z + \alpha) = \rho(Z) - \alpha.$$

Іншими словами, додавання вільної кількості ризику α до вихідного положення Z знижує ризик α . Зауважимо, якщо $\alpha = \rho(Z)$, тоді $\rho(Z + \rho(Z)) = 0$, що відповідає інтерпретації $\rho(Z)$.

Напівадитивність

Якщо $Z_1, Z_2 \in Z'$, тоді

$$\rho(Z_1 + Z_2) \leq \rho(Z_1) + \rho(Z_2).$$

Іншими словами, ризик двох окремих портфелів не може бути меншим, ніж ризик обох портфелів разом (принцип диверсифікації).

Позитивна однорідність

Якщо $\alpha \geq 0$ та $Z \in Z'$, тоді

$$\rho(\alpha Z) = \alpha \rho(Z).$$

Іншими словами, якщо інвестиції в портфель збільшуються (зменшуються), то ризик збільшується (зменшується) у стільки ж разів.

Монотонність

Якщо $Z_1, Z_2 \in Z'$ та $Z_1 \leq Z_2$, тоді

$$\rho(Z_1) \leq \rho(Z_2).$$

Іншими словами, якщо портфель Z_1 має гірші значення ніж портфель Z_2 при всіх реалізаціях, тоді ризик Z_1 повинен бути більшим, ніж ризик Z_2 .

Значення ризику (*Value at risk – VaR*) являє собою міру ризику, що визначається як величина втрат порогу $\alpha \in R$, тобто в кінці періоду інвестування, тільки перевищуючи імовірність $(1 - \beta) \in R$ [2]. Нехай $f(w, \xi)$ – втрати, пов'язані з вектором прийняття рішень $W \in R^I$ та випадковим вектором $\xi \in R^I$. Основний розподіл ймовірностей $\xi \in R^I$ має щільність $p(\xi)$. Імовірність того, що $f(w, \xi)$ не перевищує поріг $\alpha \in R$ визначається у наступному вигляді:

$$\Psi(w, \alpha) = \int_{f(w, \xi) \leq \alpha} p(\xi) d\xi.$$

β – VaR значення для випадкової величини втрат, пов'язаних з w та будь-яким заданим ймовірнісним рівнем $\beta \in (0, 1)$, позначається $\alpha_\beta(w)$ та визначається за наступною формулою:

$$\alpha_\beta(w) = \min\{\alpha \in R : \Psi(w, \alpha) \geq \beta\}.$$

Умовне значення ризику (*Conditional Value at Risk – CVaR*) є когерентною мірою ризику, що враховує умовну очікувану величину втрат, за умови, що вона перевищує значення VaR [4]. Математично це визначається у наступному вигляді:

$$\phi_\beta(w) = (1 - \beta)^{-1} \int_{f(w, \xi) \geq \alpha_\beta(w)} f(w, \xi) p(\xi) d\xi.$$

Спектральна когерентна міра ризику [1]

$$M_\varphi(X) = - \int_0^1 \varphi(p) q_X(p) dp,$$

де функція $\varphi: [0, 1] \rightarrow R$ називається спектром ризику, має наступні властивості: $\varphi(\cdot) \geq 0$, $\varphi(\cdot)$

спадна функція, $\int_0^1 \varphi(p) dp = 1$ [1].

Для дискретної випадкової величини на множині з n елементарних сценаріїв, спектральна міра ризику $M_\varphi(\cdot)$ визначена як опукла комбінація $CVaR_\beta$ для різних β :

$$M_\varphi(X) = \sum_{i=1}^n \lambda_i CVaR_{\beta_i}(X),$$

$$0 \leq \lambda_i \leq 1, i = 1, \dots, n, \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1, \quad (1)$$

де параметри λ_i та β_i , $i = 1, \dots, n$ можуть бути точно визначені.

Розглянемо значення сценаріїв випадкових величин X в спадному порядку, нумеруючи сценарії та їх ймовірності відповідно до порядку. Визначимо p_i^* $i = 1, \dots, n$.

Маємо $M_\varphi(\cdot)$ як опуклу комбінацію VaR_β , тобто [1]:

$$M_\varphi(X) = \sum_{i=1}^n \mu_i VaR_{\beta_i}(X),$$

$$\text{де} \quad \beta_i = 1 - \sum_{j=1}^i p_j^*, i = 1, \dots, n, \quad (2)$$

$$\mu_1 = \int_0^{p_1^*} \varphi(p) dp, \mu_2 = \int_{p_1^*}^{p_1^* + p_2^*} \varphi(p) dp,$$

$$\mu_i = \int_{p_1^* + \dots + p_{i-1}^*}^{p_1^* + \dots + p_i^*} \varphi(p) dp, i = 3, \dots, n.$$

Порівнюючи дане визначення $M_\varphi(\cdot)$ з (1) для β_i , $i = 1, \dots, n$ з (2), можна пронумерувати λ_i , $i = 1, \dots, n$ використовуючи μ_i , $i = 1, \dots, n$. Як результат, отримаємо [1]:

$$\lambda_i = \frac{p_1^* + \dots + p_i^*}{p_i^*} (\mu_i - \frac{p_i^*}{p_{i+1}^*} \mu_{i+1}), i = 1, \dots, n-1,$$

$$\lambda_n = \frac{\mu_n}{p_n^*},$$

$$\lambda_1 = \int_0^{p_1^*} \varphi(p) dp - \frac{p_1^*}{p_2^*} \int_{p_1^*}^{p_1^* + p_2^*} \varphi(p) dp,$$

$$\lambda_n = \frac{1}{p_n^*} \int_{p_1^* + \dots + p_{n-1}^*}^1 \varphi(p) dp,$$

$$\lambda_i = \frac{p_1^* + \dots + p_i^*}{p_i^*} \left(\int_{p_1^* + \dots + p_{i-1}^*}^{p_1^* + \dots + p_i^*} \varphi(p) dp - \frac{p_i^*}{p_{i+1}^*} \int_{p_1^* + \dots + p_i^*}^{p_1^* + \dots + p_{i+1}^*} \varphi(p) dp \right),$$

$$i = 2, \dots, n-1.$$

Можна перевірити, що

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i = \sum_{i=1}^n \mu_i = \int_0^1 \varphi(p) dp = 1, 0 \leq \lambda_i, i = 1, \dots, n.$$

У випадку, коли ймовірності усіх сценаріїв дорівнюють $\frac{1}{n}$, параметри визначення $M_\varphi(\cdot)$ можна спростити:

$$\lambda_i = i \left(\int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} \varphi(p) dp - \int_{\frac{i}{n}}^{\frac{i+1}{n}} \varphi(p) dp \right), i = 1, \dots, n-1$$

$$\lambda_n = n \int_{\frac{n-1}{n}}^1 \varphi(p) dp, \beta_i = 1 - \frac{i}{n}, i = 1, \dots, n.$$

Зауваження. Існує опукла комбінація CVaR для випадкових величин X :

$$\sum_{i=1}^k \lambda_i CVaR_{\beta_i}(X),$$

$$0 \leq \lambda_i \leq 1, i = 1, \dots, k, \sum_{i=1}^k \lambda_i = 1. \quad (3)$$

Теорема. Опукла комбінація $CVaR_{\beta_i}(X)$ в (3) є $CVaR_{\beta_*}(X)$, де β_* визначено:

$$\frac{1}{1 - \beta_*} = \sum_{i=1}^k \frac{\lambda_i}{1 - \beta_i}.$$

Доведення [1].

Спектральна міра ризику $M_\varphi(\cdot)$, визначена для дискретних випадкових величин із скінченною множиною сценаріїв є $CVaR_{\beta_*}(X)$, де β_* записано у наступному вигляді:

$$\frac{1}{1 - \beta_*} = \sum_{i=1}^k \frac{\lambda_i}{1 - \beta_i}, \text{ де } \lambda_i \text{ та } \beta_i, i = 1, \dots, n.$$

Визначення когерентної міри ризику за Кусуокі, інваріантної за розподілом, має наступну форму [1]:

$$\max_{(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \Lambda} \sum_{i=1}^n \lambda_i CVaR_{\beta_i}(X),$$

де Λ є опуклою замкритою множиною векторів вагових факторів, сума яких дорівнює 1.

Представлення за Кусуокі є тим самим, що й $CVaR_{\beta_*}(X)$, де β_* , визначено з рівняння:

$$\frac{1}{1 - \beta_*} = \max_{(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \Lambda} \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{1 - \beta_i}.$$

Динамічна задача оптимізації портфеля

Припустимо: $x_{i,t}$ – ємкість активу i за період часу t ; $r_{i,t}$ – дохід активу i за період часу t ; $u_{i,t}$ – кількість активу i купленого/проданого за період часу t ; x^{tar} – цільовий портфель; $\bar{r} = E(r_t)$ – середнє значення доходу; p – параметр відхилення; k – транзакційні витрати. Розглянемо наступну динамічну систему [3]:

$$x_{i,t+1} = (1 + r_{i,t})(x_{i,t} + u_{i,t}), i = 1, \dots, I, t = 1, \dots, T.$$

Незважаючи на коливання в доходах:

$$E[\|x_t - x^{tar}\|_1] \leq I\rho, t = 1, \dots, T,$$

необхідно, щоб портфель був близьким до цільового портфелю:

$$x_{i,t} \approx x_i^{tar}, i=1,...,I, t=1,...,T.$$

Бюджетне обмеження може бути визначено наступним чином:

$$E\left[\sum_{i=1}^I x_{i,t}\right] = \sum_{i=1}^I x_i^{tar}, t=1,...,T.$$

Звідси, динамічна система може бути записана у вигляді:

$$\begin{aligned} x_{i,t+1} &= (1 + \bar{r}_{i,t+1})(x_{i,t} + u_{i,t}) + \\ &+ (r_{i,t+1} - \bar{r}_{i,t+1})(x_i^{tar} + (x_{i,t} - x_i^{tar}) + u_{i,t}) \\ \bar{r}_{i,t} &= E(r_{i,t}), x_{i,t} \approx x_i^{tar}, u_{i,t} \prec x_{i,t} \end{aligned}$$

та спрощена до наступного вигляду:

$$\begin{aligned} x_{i,t+1} &= (1 + \bar{r}_{i,t+1})(x_{i,t} + u_{i,t}) + \xi_{i,t+1} \\ \xi_{i,t+1} &= (r_{i,t+1} - \bar{r}_{i,t+1})x_i^{tar}. \end{aligned}$$

Опора випадкової змінної ξ задана у вигляді нормального розподілу:

$$\Xi := \times_{t=1}^T \left[\xi_t \in R^I : (\bar{r} - k\delta) \leq \xi_t \leq (\bar{r} + k\delta) \right].$$

Втрати можуть бути визначені як:

$$Loss = \sum_{i=1}^{T-1} \left[\sum_{i=1}^I u_{i,t} + k \|u_t\|_1 \right],$$

де $k \in (0, 1)$ – транзакційні витрати. Цільова функція може бути представлена у наступному вигляді: $\beta - CVaR = \alpha + \frac{1}{1-\beta} E([Loss - \alpha]^+)$.

Задача мінімізації може бути представлена як:

$$\begin{aligned} \min_{x, u, \alpha} \quad & \alpha + \frac{1}{1-\beta} E([Loss - \alpha]^+) \\ \left\{ \begin{aligned} & x_{i,t+1} = (1 + \bar{r}_{i,t+1})(x_{i,t} + u_{i,t}) + \xi_{i,t+1} \\ & i = 1, ..., I, t = 1, ..., T \\ & E\left[\|x_t - x^{tar}\|_1\right] \leq Ip, t = 1, ..., T \\ & E\left[\sum_{i=1}^I x_{i,t}\right] = \sum_{i=1}^I x_i^{tar}, t = 1, ..., T. \end{aligned} \right. \end{aligned} \quad (1)$$

Загальне представлення непередбачуваних обмежень моделі 1 за період часу $t=1,...,T+1$

наведено у таблиці 1.

Таблиця 1.

Обмеження моделі 1 за період часу $t=1,...,T+1$

$t=1$	...	$t=T$	$t=T+1$
$x_{i1}^{(s)} = x_i^{tar}$ $i=1,...,I$ $s=1,...,S$		$x_{iT}^{(1)} = x_{iT}^{(2)}$ $x_{iT}^{(3)} = x_{iT}^{(4)}$... $x_{iT}^{(s-1)} = x_{iT}^{(s)}$ $i=1,...,I$	Вільна

Застосовуючи спектральну когерентну міру ризику для дискретних випадкових величин з кінцевим числом сценаріїв n , отримаємо:

$$\min_{x, u, w, \alpha, y} CVaR_{\beta^*}(w) = \alpha + \frac{1}{1-\beta^*} E(w),$$

$$\beta^*: \frac{1}{1-\beta^*} = \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{1-\beta_i}, \beta_i = 1 - \sum_{j=1}^i p_j^*$$

$$\lambda_1 = \int_0^{p_1^*} \varphi(p) dp - \frac{p_1^*}{p_2^*} \int_{p_1^*}^{p_1^*+p_2^*} \varphi(p) dp \quad (2)$$

$$\lambda_i = \frac{p_1^* + \dots + p_i^*}{p_i^*} \left(\int_{p_1^* + \dots + p_{i-1}^*}^{p_1^* + \dots + p_i^*} \varphi(p) dp - \frac{p_i^*}{p_{i+1}^*} \int_{p_1^* + \dots + p_i^*}^{p_1^* + \dots + p_{i+1}^*} \varphi(p) dp \right)$$

$$\lambda_n = \frac{1}{p_n^*} \int_{p_1^* + \dots + p_{n-1}^*}^1 \varphi(p) dp, \quad \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1.$$

Якщо w – рівномірно розподілені на $[0,1]$, то $\varphi(p) \equiv 1$,

$$\lambda_i = 0, i = 1, n-1, \lambda_n = 1. \Rightarrow \beta^* = \beta_n.$$

Застосовуючи міру ризику за Кусуокі для дискретних випадкових величин з кінцевим числом сценаріїв n , отримаємо:

$$x, u, w, \alpha, y \min_{\substack{x, u, w, \alpha, y}} CVaR_{\beta^*}(w) = \alpha + \frac{1}{1 - \beta^*} E(w),$$

$$\beta^*: \frac{1}{1 - \beta^*} = \max_{(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \Lambda} \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{1 - \beta_i}, \quad (3)$$

$$\Lambda = \left\{ (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \mid 0 \leq \lambda_i \leq 1, \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1 \right\}$$

Загальна оцінка динамічної задачі оптимізації портфеля

Час виконання моделей 2 та 3 менший приблизно в 10 разів у порівнянні з моделлю 1. β – значення: в моделях 2 та 3 визначається і використовується одне значення β^* ; k – значення: сортуються значення від 0 до 1 з кроком 0, 1 та для кожного k розв'язується задача оптимізації; ρ – значення: сортуються значення від 0 до 10 з кроком 1 та для кожного ρ розв'язується задача оптимізації.

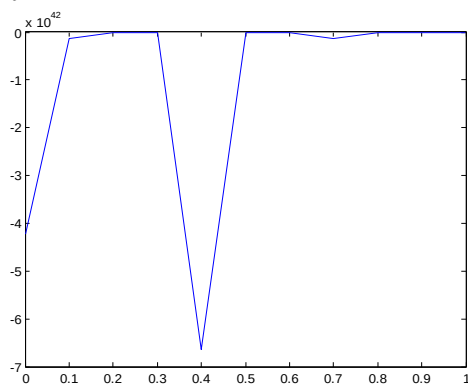


Рис. 1 Оцінка оптимальних значень моделі 2 при різних значеннях k

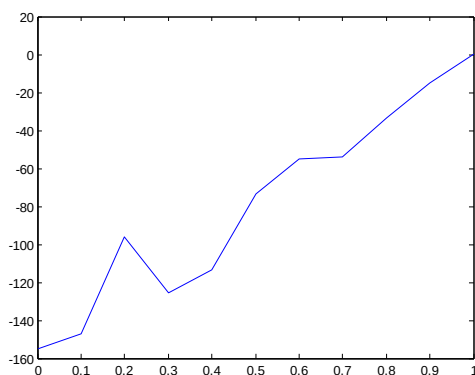


Рис. 2 Оцінка оптимальних значень моделі 3 при різних значеннях k

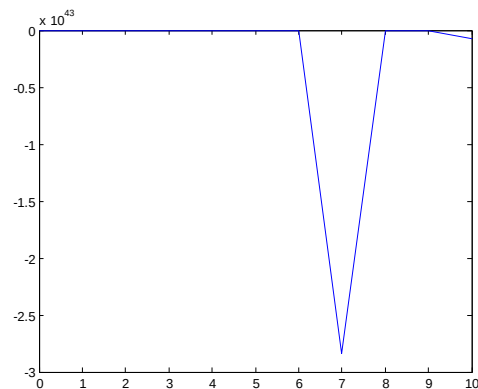


Рис. 3 Оцінка оптимальних значень моделі 2 при різних значеннях ρ

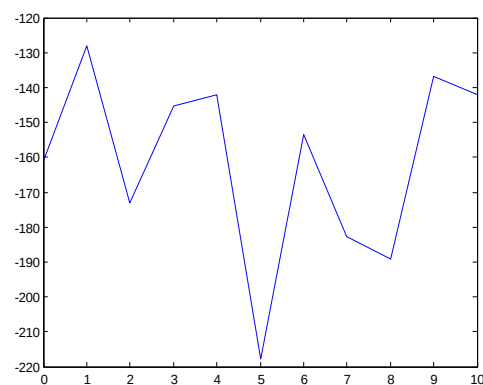


Рис. 4 Оцінка оптимальних значень моделі 3 при різних значеннях ρ

На рисунках 1 та 2 показано поведінку моделей 2 та 3 відповідно для різних значень параметру k . На рисунках 3 та 4 аналізується ефективність моделі 2 та 3 відповідно для різних значень параметру ρ .

Оцінка стратегій інвестора щодо відповідного портфеля

Для того, щоб оцінити стратегію інвестора для даного портфеля, моделі 2 та 3 розв'язуються на різних часових етапах: спочатку для $t=3$ ($x_{tar}=100$), далі для $t=1$ до $t=4$ (x_{tar} – середнє значення оптимальних розв'язків, отриманих на першому етапі), кожного разу просуваючись на $t=t+1$.

З рисунків 5 та 6 можна передбачити стратегії інвестора щодо даного портфеля та зробити висновок, що кращий спосіб для інвестора полягає в утриманні активів протягом двох періодів часу (двох років), а потім їх продаж.

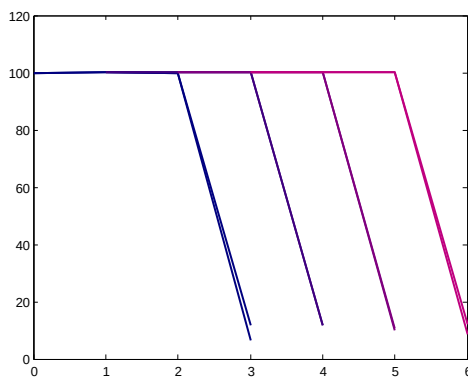


Рис. 5 Стратегія інвестора (2 модель)

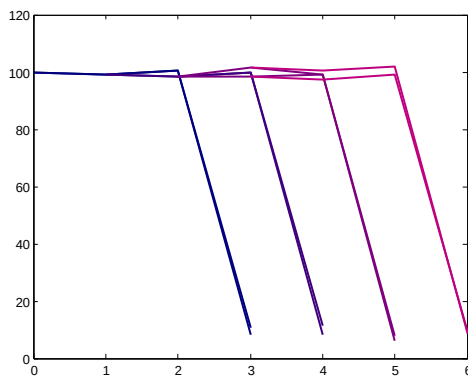


Рис. 6 Стратегія інвестора (3 модель)

Список використаних джерел

1. Kirilyuk V.S. Polyhedral coherent risk measures and optimal portfolios on the reward-risk ratio / V.S. Kirilyuk // *Cybernetics and system analysis*. – 2014. – 50. – P. 1263-1284.
2. Rockafellar R.T. Optimization of conditional value at risk / R.T. Rockafellar and S. Uryasev // *Journal of Risk*. – 2000. – P. 21-39.
3. Markowitz H.M. Portfolio selection / H.M. Markowitz // *J. Finance* 7. –1952. – P. 77–91.
4. Uryasev S. Conditional Value-at-Risk: optimization algorithms and applications / S. Uryasev // *Financial engineering news*. –2000. – P. 1-67.
5. Zanjani M.K. A multi-stage stochastic programming approach for production planning with uncertainty in the quality of raw materials and demand / M.K. Zanjani, M. Nourelfath, and D. Ait-Kadi // . – 2009.– P. 1-21.

Висновки

В даній роботі досліджено спектральну когерентну міру ризику та міру ризику за Кусуокі в задачах портфельної оптимізації. Розроблено та досліджено динамічну систему оптимізації портфеля, що може використовуватися у фінансовому моделюванні. Розроблено програмне середовище реалізації методу генерації дерев сценаріїв, який є важливою частиною стохастичного програмування та протестовано багатоетапну проблему оптимізації портфеля із застосуванням міри ризику за Кусуокі та спектральної когерентної міри ризику.

Багатоетапна модель оптимізації портфеля вимірюється тестуванням з точки зору вартості портфеля, а також процесорного часу, витраченого на генерацію дерев сценаріїв. Програмно реалізовано часовий горизонт, який дозволяє передбачити стратегії та поведінку інвестора щодо відповідного портфелю.

References

1. KIRILYUK V.S. (2014) Polyhedral coherent risk measures and optimal portfolios on the reward-risk ratio. *Cybernetics and system analysis*. 50. p. 1263-1284.
2. ROCKEFALLAR R.T. and URYASEV S. (2000) Optimization of conditional value at risk. *Journal of Risk*. p. 21-39.
3. MARKOWITZ H.M. (1952) Portfolio selection. *J. Finance* 7. p. 77–91.
4. URYASEV S. (2000) Conditional Value-at-Risk: optimization algorithms and applications. *Financial engineering news*. p. 1-67.
5. ZANJANI M.K., NOURELFATH M., and AIT-KADI D. (2009) A multi-stage stochastic programming approach for production planning with uncertainty in the quality of raw materials and demand. p. 1-21.

Надійшла до редколегії 21.03.16

УДК 519.72

І.О. Завадський, к. ф.-м. н., доцент

**Ефективне декодування
мультироздільникового коду $C_{2,3,5}$**

Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, пр-т.
Глушкова 4д, e-mail: zava@ukr.net

Igor O. Zavadskyi, Associate Professor, Ph. D.

**The efficient decoding of multi-delimiter
code $C_{2,3,5}$**

Taras Shevchenko National University of Kyiv,
03680, Kyiv, Glushkova av., 4d

Описано метод декодування для коду $C_{2,3,5}$, що має один із найвищих коефіцієнтів стиснення в родині префіксних стискальних кодів із кількома роздільниками. Метод базується на побайтовій обробці коду за допомогою таблиць, які визначені на стадії передобчислень. Метод є ефективнішим за аналогічний метод для відомих кодів Фібоначчі як за ємнісними, так і за часовими витратами.

Ключові слова: стискальні коди, мультироздільникові коди, декодування, табличний метод.

The article presents the further investigation of multi-delimiter compressing codes introduced in the previous issues of Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. The distinctive feature of this family is the use of multiple codeword delimiters in the same code. Among these codes, code $C_{2,3,5}$ has one of the highest compression rate. The conventional bitwise decoding algorithm for this code is considered. The fast byte-wise decoding algorithm is presented in details in assembler language for 32-bit operating system for PC. This algorithm utilizes the pre-computed table, which allows to process one byte of encoded text at each iteration. This table serves as array, where bytes of encoded text are indices and element values are represented by the words of the source text that can be obtained from the encoded byte. The time and space complexity of algorithm is assessed and compared with the complexity of similar algorithm for known Fibonacci code Fib3, which has the best text compressing rate among Fibonacci codes. Our algorithm is almost 2 times faster than the fastest decoding method for Fib3, and it requires more than 2 times less space.

Key words: compression codes, multi-delimiter, decoding, tabular method.

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Анісімов А.В.

Вступ

У роботі [1] було вперше розглянуто родину стискальних префіксних кодів, основною відмінною рисою яких є можливість розділення кодових слів за допомогою кількох спеціальних послідовностей бітів. Це так звані (Δ, k) -коди, або мультироздільникові коди. Представник цієї родини кодів позначається як $C_{m_1, \dots, m_t}$. Цей код містить усі слова, що задовольняють таким умовам:

- слово не починається з послідовності $1 \dots 10$, що містить m_1 або m_2 або... або m_t одиниць;
- слово закінчується послідовністю $01 \dots 10$, що містить m_1 або m_2 або... або m_t одиниць;
- слово не містить послідовності $01 \dots 10$ із m_1 або m_2 або... або m_t одиницями ніде, крім кінця.

Тут і надалі ми припускаємо, що $0 < m_1 < \dots < m_t$.

Назва « (Δ, k) -коди» пов'язана з тим, що, як показано в [1], усі слова цих кодів можуть бути подані у вигляді послідовностей (Δ, k) -груп. Кожна така група є конкатенацією однобітового значення Δ та значення k вигляду $1 \dots 10$ із 0 чи більше одиницями.

Основна сфера застосування цих кодів – стиснення природномовних текстів. Хоча найвищий коефіцієнт стиснення текстів дають коди Хафмана та арифметичні коди, подібні до наведених в [1] коди мають низку інших переваг, зокрема можливість пошуку в стиснутому файлі та швидше декодування. Найближчими до мультироздільникових кодів є коди Фібоначчі, найбільш ґрунтовно досліджені в [2]. Як показано в [3], деякі мультироздільникові коди мають перевагу над кодами Фібоначчі як в ефективності стиснення текстів, так і в складності (і ємнісній, і часовій)

прискорених методів декодування. Зокрема, у [4] наведено прискорений метод декодування для мультироздільникового коду C_2 . Цей метод має в 3,5 разів нижчу ємнісну та на 20% нижчу часову складність, ніж прискорений метод декодування найближчого до нього коду Фібоначчі Fib3 (який водночас є найкращим серед кодів Фібоначчі за ступенем стискання природномовних текстів). Однак, як зазначено в [3], за стискальною ефективністю в родині мультироздільникових кодів кращим є код $C_{2,3,5}$. Тому постає питання побудови прискореного декодувального алгоритму саме для цього коду. Його дослідженню і присвячено дану статтю.

Стандартне декодування

Стандартні побітові методи кодування та декодування для всього сімейства мультироздільникових кодів описано в [4]. Для кращого розуміння викладеного далі прискореного методу декодування ми деталізуємо загальний стандартний декодувальний метод для коду $C_{2,3,5}$.

Нехай $J = \{1, 4, 6, 7, \dots\}$ – нескінченна зростаюча послідовність усіх натуральних чисел, крім 2, 3, 5. На вхід алгоритму декодування подається кодове слово, а на виході отримуємо відповідне йому число.

- 1) Якщо кодове слово має вигляд $0\dots 0110$ або 110 , видаляємо останні 3 біти і переходимо на крок 5.
- 2) Якщо слово закінчується послідовністю 0110 , видаляємо її.
- 3) Замінюємо кожну послідовність вигляду $01\dots 10$ із $j_d \in J$ одиницями послідовністю подібного вигляду $01\dots 10$, що містить d одиниць.
- 4) Якщо слово починається з рядка $1\dots 10$ із $j_d \in J$ одиницями, замінюємо його подібним рядком $1\dots 10$, що містить d одиниць.
- 5) Допишуємо біт 1 до початку слова зліва.

Важливо зауважити, що:

- Кожен 0 у кодовому слові, якщо він не належить роздільникові 110 або 0110 в кінці слова, перетворюється на 0 у декодованому числі.

- Кожна ізольована група з j_d одиниць у кодовому слові (тобто така, що оточена нулями або міститься на початку слова) перетворюється на групу з d одиничних бітів у декодованому числі. Зокрема, одна ізольована одиниця залишається однією одиницею, 4 одиниці перетворюються на 2, 6 – на 3, 7 – на 4 тощо.

- Роздільники 01110 та 0111110 під час декодування не змінюються, а роздільник 0110 видаляється.

Прискорене побайтове декодування

Стандартні кодувальний та декодувальний алгоритми обробляють біт за бітом, а тому є достатньо повільними. У разі обробки неперервного потоку закодованого тексту їх можна значно прискорити, застосувавши побайтові табличні методи, основна ідея яких подібна до описаної в [2] для кодів Фібоначчі.

На кожній ітерації у побайтовому методі декодування зчитується ціле число байтів закодованого тексту, і з таблиці, подібної до табл. 1, відразу визначаються всі числа, які можна отримати повністю або частково в результаті декодування цих байтів. У табл. 2 ці числа позначено як w_1-w_4 , а зчитана група байтів – як u (ми розглядатимемо лише той випадок, коли u складається з одного байту).

Звичайно, кодове слово може бути поділене між групами байтів, що обробляються на послідовних ітераціях, і тому на спосіб і результат декодування кожної такої групи байтів можуть впливати значення наймолодших бітів попередньої групи. Наприклад, якщо певна група байтів починається із символів 10, то вона декодуватиметься по-різному у тих випадках, коли попередня група закінчується бітами 01 та 0111. Справді, у першому випадку матимемо послідовність 0110, яка позначає кінець кодового слова, а в другому – 011110, яка може міститися лише на початку або всередині кодового слова. Однак «зона впливу» у попередній групі байтів – це лише її наймолодші біти, які не старші за наймолодший нуль. Інакше кажучи, спосіб декодування наступної групи байтів залежить лише від довжини послідовності одиничних бітів в кінці попередньої групи, а також від того, як інтерпретовано наймолодший «0» попередньої групи на попередній ітерації. Це легко побачити, якщо зауважити, що нульовий біт може міститися лише на початку або в кінці певної (Δ, k) -групи і що на декодування будь-якої (Δ, k) -групи вміст подальших бітів закодованого тексту не впливає.

Більше того, всі послідовності з $n \geq 6$ одиниць в кінці групи байтів впливають на спосіб декодування наступної групи однаково, оскільки жодна з них не може належати останній (Δ, k) -групі кодового слова та може бути декодована незалежно від наступної групи байтів. У такому разі біти наступної групи

байтів слід записувати в декодоване слово, починаючи з найстаршого, поки не трапиться 0, а тоді починати декодування нової (Δ, k) -групи.

Стосовно наймолодшого нуля попередньої групи зауважимо, що його можна однозначно декодувати попередньої ітерації в таких випадках:

- 1) цим нулем закінчується кодове слово;
- 2) цей нуль належить послідовності $0\dots 0$, якою починається кодове слово;
- 3) після цього нуля записано не менше 3 одиниць.

В інших випадках такий «0» може як увійти до складу роздільника 0110 (і тоді він має бути відкинутий під час декодування разом із усім роздільником), так і не увійти (і тоді він буде присутній у декодованому значенні), і визначити це можна лише наступної ітерації.

Дотримуючись принципу «декодувати на поточній ітерації всі біти, які можна декодувати однозначно», отримуємо 10 способів декодування групи байтів, перелічені в табл. 1. Номер способу позначатимемо як r_{prev} .

Таблиця 2. Способи декодування групи байтів

№ способу, r_{prev}	Кількість «1» в кінці попередньої групи байтів	Чи декодовано наймолодший «0» попередньої групи байтів
0	0	так
1	0	ні
2	1	так
3	1	ні
4	2	так
5	2	ні
6	3	так
7	4	так
8	5	так
9	≥ 6	так

Отже, рядки табл. 2 можна розглядати як сукупність двовимірних масив з індексами r_{prev} та u , які записано в перших двох стовпцях таблиці. Усі інші стовпці містять значення елементів двовимірних масивів.

Надалі розглядатимемо однобайтовий метод декодування, на кожній ітерації якого зчитується один байт коду $C_{2,3,5}$. В одному байті може вміститися щонайбільше 4 повних чи неповних кодових слова. Це легко побачити з огляду на те, що найкоротше кодове слово $C_{2,3,5}$ має вигляд 110. Єдиний варіант, коли байт може охоплювати повністю чи частково чотири кодових слова, – це 0110110 x , де x – довільний

останній біт. Тут перший біт відповідає останньому біту коду w_1 , потім записано коди w_2 і w_3 – двічі 110, а останній біт – це перший біт коду w_4 .

Таким чином, кожної ітерації декодуються числа $w_1, \dots, w_k$, $1 \leq k \leq 4$. Зазначимо, що, можливо, декодування числа w_k на певній ітерації тільки розпочнеться, а продовжуватиметься та завершуватиметься на наступних ітераціях (якщо $k = 4$, то тільки такий випадок і можливий). Щоб визначити, чи завершується певної ітерації декодування числа w_i , $1 \leq i \leq 3$, скористаємося однобітовими «прапорцями» f_i : якщо завершується, то $f_i = 0$.

Під заголовком у табл. 1 записано зверху вниз ті рядки, що використовуються для декодування тексту 11000111 01101011 11100110 11101101 10011000 (тут непарні кодові слова виділено сірим).

Таблиця 1. Фрагмент таблиці для побайтового методу декодування коду $C_{2,3,5}$

r_{prev}	u	w_1	f_1	w_2	f_2	w_3	f_3	r
	11000111		0	100	1			6
6	01101011	1110	0	1	0			5
5	11100110	0111110	0	10	1	1		0
0	11101101	1110	0	1	0	1	1	2
2	10011000		0	10	0	100	1	0

Швидкість побайтового методу декодування забезпечується, зокрема, завдяки тому, що майже всі його операції можна виконати в регістрах процесора. Кожної ітерації до оперативної пам'яті процесор звертатиметься лише тричі: для зчитування байта кодового тексту, зчитування 32-розрядного рядка таблиці та запису декодованого числа у відповідний масив.

Через TEXT позначимо масив байтів закодованого тексту, а через TAB – масив, у якому зберігаються рядки табл. 1. На початку кожної ітерації індекс потрібного елемента масиву TAB формуватиметься в регістрі bx : у регістр bl записуватиметься черговий байт закодованого тексту $TEXT[i]$, а в регістр bh – значення r_{prev} . Як уже зазначалося, кодові слова, що розташовані на межі декодованих байтів, можуть на певній ітерації декодуватися лише частково. Тому потрібно десь зберігати та передавати від ітерації до ітерації вже декодовану частину слова, яку позначимо w . Це будемо робити за допомогою регістрової пари esi, edx , причому права межа цих даних буде вирівняна за 17-м бітом регістру edx . Тобто декодовані дані зберігатимуться у двох старших байтах регістру edx , а якщо їх не вистачатиме,

то старші біти w «висуватимуться» в молодші біти регістру esi .

Покажемо, як довільний рядок табл. 1 «запакувати» в одне 32-розрядне машинне слово. З метою зменшення обсягу масиву ТАВ ми дотримуватимемося такого принципу: записувати у w_i всі біти, які можна однозначно декодувати на поточній ітерації, і тільки ті біти, для яких це зробити неможливо, зберігатимуться в числі w_1 у складі елемента масиву ТАВ, що оброблятиметься наступної ітерації. Значення прапорців f_1 , f_2 , f_3 міститимуться в трьох найстарших бітах елемента масиву ТАВ. Спосіб заповнення решти бітів залежатиме від цих прапорців.

Розглянемо два випадки.

1. $f_1=1$ або $f_2=1$ (рис. 1а). У цьому випадку під час ітерації завершується декодування не більш ніж одного слова, а отже, слова w_3 та w_4 порожні. Зауважимо, що в масиві ТАВ для зберігання значення w_1 достатньо лише 10 бітів. Дійсно, поточний байт $TEXT[i]$ дає не більше 8 декодованих бітів у w_1 , а всі біти попереднього байта, від найстаршого біта до наймолодшого нуля (не включно), декодуються на попередній ітерації. Припустимо, що після наймолодшого нуля в попередньому байті міститься t одиниць. Можливі такі випадки.

- $t \leq 2$. Тоді до декодованого значення w_1 додається зліва не більше 3 бітів, причому 3 біти додається тільки тоді, коли вони мають вигляд 011. Розглянемо цей випадок детальніше. Якщо найстарший біт $TEXT[i]$ нульовий, утворюється послідовність 0110, яка містить роздільник, і тому значення w_1 є порожнім. Якщо $TEXT[i]$ починається з бітів 110, то утворюється послідовність 011110, якій у декодованому слові відповідає 0110, тобто w_1 видовжується на 1 біт. Якщо $TEXT[i]$ починається з бітів 10 чи 1110, утворюються роздільники 01110 чи 0111110 і на них значення w_1 закінчується. А якщо $TEXT[i]$ починається із $t \geq 4$ одиниць поспіль, то утворюється група 01...10 із $t+2$ одиницями, якій у декодованому значенні відповідає подібна група із не більше ніж t одиницями, тобто значення w_1 видовжується на 1 біт.

- $t \geq 3$. У декодованому слові такий групі бітів відповідає послідовність із не менш ніж $t-2$ одиниць і їх усі можна записати у w на попередній ітерації.

Отже, необроблена частина попереднього байту додає до w_1 зліва не більше одного біта. Ще одна найстарша одиниця дописується до

будь-якого декодованого числа зліва (див. базовий алгоритм декодування), але це відбувається попередньої ітерації. Так, у сукупності з 8 бітами $TEXT[i]$, маємо 10 бітів для значення w_1 , яке зберігатиметься в бітах 6–15.

Значенню w_2 у $TEXT[i]$, очевидно, може відповідати не більше 7 бітів, що з урахуванням найстаршої одиниці числа дає 8 бітів. Це значення ми зберігатимемо в бітах 16–23. У бітах 24–27 міститиметься значення r , що обмежується діапазоном від 0 до 9.

2. $f_1=f_2=0$, $f_3=1$ (рис. 1б). У цьому випадку декодування значення w_2 завершується. Це означає, що значенню w_2 відводиться в закодованому тексті щонайменше 3 біти (оскільки найкоротшим кодовим словом у $C_{2,3,5}$ є 110). Таким чином, із байту $TEXT[i]$ на w_1 залишається не більше 5 бітів, до яких, у силу викладених вище міркувань, дописується не більше 2 бітів попереднього байту, що дає довжину декодованого значення w_1 не більше 7. Це значення міститиметься в бітах 9–15 масиву ТАВ. Значення w_2 , як і в попередньому випадку, займатиме не більше 8 бітів і записуватиметься в бітах 16–23.

Код значення w_3 в цьому випадку займає не більше 4 бітів, а декодоване значення w_3 , з урахуванням найстаршої одиниці, – не більше 5 бітів, які міститимуться в бітах 24–28.

3. $f_1=f_2=f_3=0$ (рис. 1в). У цьому випадку декодування значень w_2 і w_3 завершується і з'являється значення w_4 . Як код w_3 , так і код w_2 може мати вигляд 110, 0110 або 1110, що відповідає декодованим значенням 1, 10 та 1110. Тільки якщо $w_3=1$ і наймолодший біт $TEXT[i]$ нульовий, декодоване значення $w_4=10$ (і $r=0$), а інакше $w_4=1$ (і $r=2$).

Отже, для значень w_2 і w_3 достатньо відвести по 5 бітів, а для w_4 – 2 біти. Значення w_3 міститиметься в бітах 22–26 елемента масиву ТАВ, значення w_4 – у бітах 27–28, а для w_2 залишаються біти 16–21.

У 2-му і 3-му випадках ($f_1=f_2=0$) значення r міститиметься в бітах 5–8.

В усіх розглянутих випадках у наймолодших 5 бітах елемента масиву ТАВ записуватимемо значення s – величину зсуву формованого числа w . Якщо на певній ітерації число w остаточно сформоване та підлягає виведенню ($f_1=0$), то його потрібно зсунути вправо, вирівнявши за наймолодшим розрядом 32-бітного слова (це робить команда `shrd edx,esi,cl`), інакше ($f_1=1$) до числа w на наступних ітераціях ще «доклеюватимуться» справа біти – тоді це число зсувається вліво, так, щоб його правий

край було вирівняно за 16-м бітом регістрової пари esi:edx (за цей зсув відповідає команда shld esi,edx,cl). У командах shrd і shld враховуються тільки 5 наймолодших бітів регістру cl.

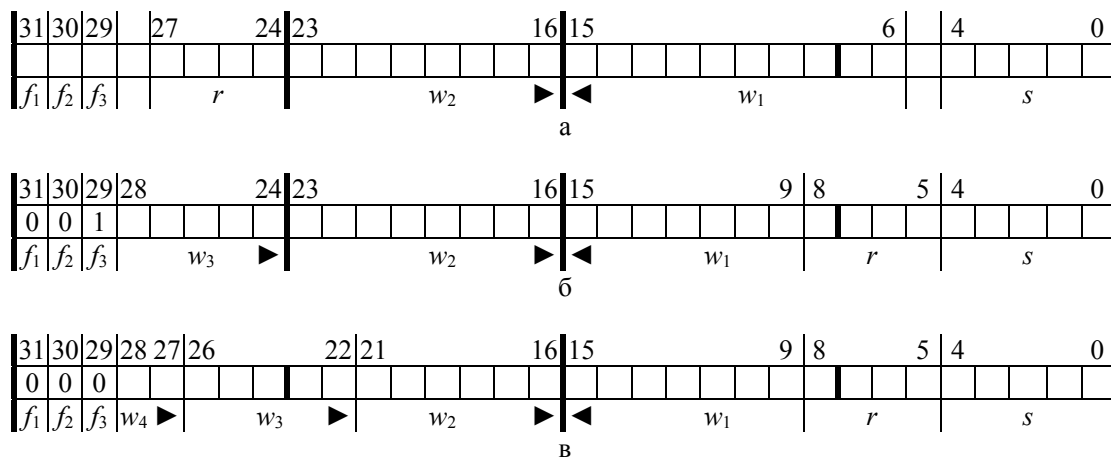


Рис. 1. Пакування рядка декодувальної таблиці у чотирибайтне машинне слово

```
for(i=0;i<N;i++) {
    mov     bl, TEXT[i]
    mov     eax, TAB[ebx]
    mov     dx,ax
    mov     cl,al
    if(f1==0) {
        shrd     edx,esi,cl
        output(edx)
        if(f2==0) {
            mov     bx,ax
            and     bx,0x01e0
            shl     bx,3
            mov     edx,eax
            shr     edx,16
            if(f3==0) {
                and     dx,0x3f
                output(edx)
                mov     edx,eax
                shr     edx,11
                shr     eax,22
                and     eax,0x1f
                output(eax)
            } else {
                mov     dh,0
                output(edx)
                mov     edx,eax
                shr     edx,8
            }
        } else {
            mov     edx,eax
            and     edx,0x00ff0000
            mov     ebx,eax
        }
    }
}
```

; індекс елемента TAB – у регістрі ebx
; до w дописати справа w1
; записати s у регістр кількості зсувів
; btr eax,31 jc r3
; (встановити 31-й біт в 0, а якщо
; він був 1, перейти на мітку r3)
; зсунути пару esi,edx до правого краю
; вивести w1
; btr eax,30 jc r2
; значення r, що міститься
; в 5–8 бітах ax,
; перенести до bh
; у 3-й байт edx записати w2
; зсунути w2 до правого краю edx
; btr eax,29 jc r1
; очистити зайві біти
; вивести w2
; у біти 22-28 edx записати пару w4w3
; w ← w4
; w3 починається з біта 22
; i містить 5 бітів
; вивести w3
; очистити зайві біти
; вивести w2
; у старший байт edx записати w3
; w ← w3 (усі старші за w3 біти нульові,
; оскільки fi були скинуті в 0 командами btr)

```

                                and    ebx,0xf0000000    ; в 24–27 бітах eax,
                                shr    ebx,16             ; перенести до bh
                                } else {
r3:    shld    esi,edx,cl    ; вирівняти значення w за 16-м бітом edx
        shl    edx,cl
        mov    ebx,eax       ; значення r, що міститься
        and    ebx,0xf0000000 ; в 24–27 бітах eax,
        shr    ebx,16       ; перенести до bh
    }
}

```

Зауважимо, що до числа w може «доклеюватися» справа тільки число w_1 , а сама «склеїка» відбувається на стику двох молодших і двох старших бітів регістру edx і здійснюється простою командою `mov dx,ax`. Це можливо завдяки тому, що, як зазначалося вище, правий край значення w вирівняно за 16-м бітом регістру edx , а лівий край числа w_1 , вирівняно за 15-м бітом елемента масиву ТАВ, який записується в ax (на рис. 1 вирівнювання чисел показано стрілками ► та ◄).

Вище мовою асемблер записано програму декодування N -байтового тексту, який міститься в масиві TEXT. Команди циклу, умовних операторів та виведення для більшої зрозумілості наведено мовою C.

Оцінка складності

Оцінимо ємнісну складність описаного методу. Для кожного з 10 можливих значень r_{prev} існує 256 значень u_i , а отже, табл. 1 містить $10 \times 256 = 2,5$ Кб рядків, кожен із яких займає 4 байти. Тому побайтове декодування потребує 10Кб пам'яті. Зазначимо, що описаний у [2]

найоптимальніший із побайтових методів декодування для коду Фібоначчі Fib3 (який, у свою чергу, є найефективнішим серед кодів Фібоначчі в застосуванні до стискання природномовних текстів) потребує 21,4 Кб пам'яті, що перевищує ємнісні витрати наведеного нами методу більш ніж удвічі.

Щодо часової складності побайтового декодування, то експеримент показує, що воно є майже вдвічі швидшим за декодування коду Fib3 (ця величина може варіюватися залежно від особливостей процесора).

Висновки

У статті описано швидкий метод декодування мультироздільникового коду $C_{2,3,5}$, який є одним із найкращих мультироздільникових кодів за стискальною ефективністю. Алгоритм базується на обробці відразу одного чи кількох байтів закодованого тексту. Оцінено складнісні характеристики методу. Зазначений метод декодування виявився ефективнішим за найкращий з подібних методів для кодів Фібоначчі за часом і за витратами пам'яті.

Список літератури

1. Завадський І.О. Префіксні (Δ, k) -коди / І.О. Завадський // Вісник Київського національного університету ім. Т. Шевченка. Серія: фіз.-мат. науки. – 2015. – №2. – с. 139–142.
2. Klein S.T. On the usefulness of Fibonacci compression codes / S.T. Klein, M.K. Ben-Nissan // Computer Journal. – 2010. – vol. 53, no. 6, pp. 701–716.
3. Anisimov A.V. Variable length prefix $(\delta; k)$ -codes. / A.V. Anisimov, I.O. Zavadskyi // IEEE International Black Sea Conference on Communications and Networking Proceedings. – 2015. – pp. 43–47.
4. Завадський І.О. Швидкий табличний метод декодування мультироздільникових кодів / І.О. Завадський // Вісник Київського національного університету ім. Т. Шевченка. Серія: фіз.-мат. науки. – 2015. – №4. – с. 125–130.

References

1. ZAVADSKYI I.O. (2015) *Prefix (Δ, k) -codes*, Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series Physics & Mathematics. No2, pp. 139–142.
2. KLEIN, S.T., BEN-NISSAN, M.K. (2010) *On the usefulness of Fibonacci compression codes*. Computer Journal. vol. 53, no. 6, pp. 701–716.
3. ANISIMOV A.V., ZAVADSKYI I.O. (2015) *Variable length prefix $(\delta; k)$ -codes*. IEEE International Black Sea Conference on Communications and Networking Proceedings, pp. 43–47.
4. ZAVADSKYI, I.O. (2015) *Fast tabular decoding method for multi-delimiter codes*. Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series Physics & Mathematics. No 4, pp. 125–130.

Надійшла до редколегії 03.03.2016

УДК 519.876:51-7:612.017

Колянова Т.В., к.ф.-м. н.

T.V. Kolianova, PhD assistant

Математична залежність біологічних показників при впливі фізичного навантаження на організм людини у вигляді багато параметричних функцій

Mathematical dependence of biological parameters under the influence of exercise on the human body in the form of many parametric functions

Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, пр-т. Глушкова
4д,

Taras Shevchenko National University of
Kyiv, 03680, Kyiv, Glushkova st., 4d,

e-mail: tania.kolianova@gmail.com

e-mail: tania.kolianova@gmail.com

В статті побудовано математичні залежності впливу фізичних навантажень від часу відновлення та максимальної потреби кисню для тренуваних та нетренуваних груп людей відповідно. Розглядається стан фізичного здоров'я людини, який встановлено за серією клінічних, морфологічних та фізіологічних, біохімічних та інших показників з урахуванням відповідно статі та віку і залежить від географічних, метеорологічних і соціальних факторів.

Наведені функціональні залежності можуть використовуватися у спортивних залах для написання відповідних програм навантаження. Це дозволить виключити надмірні навантаження для нетренованої групи людей та підвищити ефективність тренувань тих людей, хто має гарний фізичний розвиток. Всі показники (клінічні, морфо-фізіологічні, біохімічні) які було використано при розрахунках піддаються вимірюванню або в лабораторних умовах або на спортивних майданчиках, та дають змогу оцінити фізичний стан людини. Саме такі показники було використано для побудови відповідних математичних залежностей, що надасть можливість подальшого аналізу фізичного стану організму людини та прогнозу його фізичної активності.

Ключові слова морфологічні та фізіологічні, біохімічні показники, фізичне навантаження, математична модель.

The article is built mathematical depending on the impact of physical activity on the time of recovery and maximum oxygen needs for trained and untrained groups respectively. This will eliminate excessive burden for the untrained group of people and improve training those people with good physical development. We consider the state of physical health, which established a series of clinical, morphological and physiological, biochemical and other indicators for the appropriate gender and age, depending on geographical, meteorological and social factors.

These functional relationships can be used in gyms for writing the respective programs load. All parameters (clinical, morphological, physiological, biochemical) that were used in the calculations or measurable in the laboratory or on the sports fields, and make it possible to assess the physical condition of the person. These are the indicators used to construct appropriate mathematical relationships that will enable further analysis of the physical condition of the human body and its prediction of physical activity.

Key words: morphological and physiology, biochemical indexes, physical activities, mathematical model.

Статтю представив д. т. н., с. н. с. Кудін В.І.

Існує досить велика кількість біологічних показників, за якими можна дати відповідь про стан людського організму. Тому використовуючи дані спостережень, які були зібрані лікарями у догляді за спортсменами, ми зробили спробу привнести фізичні навантаження у життя звичайної людини.

Враховуючи характер поведінки функції в залежності від вибраних параметрів було запропоновано наступний вигляд функцій:

$$y_i = f_i(x_1, x_2) = c_i x_1^{\alpha_i} x_2^{\beta_i}, \quad i = \overline{1, 4},$$

де y_1 – для тренуваних людей залежність лактату крові від МПК (максимальна потреба у кисні) та часу пасивного відновлення;

y_2 – для тренуваних людей залежність лактату крові від МПК та часу активного відновлення

y_3 – для нетренованих людей залежність лактату крові від МПК та часу пасивного відновлення;

y_4 – для нетренованих людей залежність лактату крові від МПК та часу активного відновлення;

x_1 – рівень МПК у відносних величинах;

x_2 – час відновлення.

Оскільки величина МПК подана у відносних величинах на відрізку $[0;1]$, то всі інші величини, що пов'язані з даною переведемо також у відносні величини на відрізок $[0;1]$, тим самим ми будемо працювати в одному вимірі і зменшимо при цьому похибку.

Пошук коефіцієнтів α_i, β_i та c_i відбувається за допомогою МНК.

Побудуємо

$$S = \sum_{i=1}^n (c_j x_{1i}^{\alpha_j} x_{2i}^{\beta_j} - \hat{y}_j)^2 \rightarrow \min_{c, \alpha, \beta}, \quad j = \overline{1, 4},$$

де $\hat{y}_j, x_{1i}, x_{2i}$ – відповідні значення спостережень.

Застосуємо функціональний підхід: перетворимо $y_i = c_i x_{1i}^{\alpha_i} x_{2i}^{\beta_i}$, $i = \overline{1, 4}$ у функцію наступного виду:

$\ln y_i = \ln c_i + \alpha_i \ln x_{1i} + \beta_i \ln x_{2i}$, тоді

$$S = \sum_{i=1}^n (\ln c_j + \alpha_j \ln x_{1i} + \beta_j \ln x_{2i} - \ln \hat{y}_j)^2 \rightarrow \min_{\ln c, \alpha, \beta}$$

Нехай $\ln c = A$, тоді

$$\begin{cases} \frac{\partial S}{\partial A} = \sum_{i=1}^n (A + \alpha_j \ln x_{1i} + \beta_j \ln x_{2i} - \ln \hat{y}_j) = 0, \\ \frac{\partial S}{\partial \alpha_j} = \sum_{i=1}^n (A + \alpha_j \ln x_{1i} + \beta_j \ln x_{2i} - \ln \hat{y}_j) \ln x_{1i} = 0, \\ \frac{\partial S}{\partial \beta_j} = \sum_{i=1}^n (A + \alpha_j \ln x_{1i} + \beta_j \ln x_{2i} - \ln \hat{y}_j) \ln x_{2i} = 0. \end{cases}$$

Тобто

$$\begin{cases} An + \alpha_j \sum_{i=1}^n \ln x_{1i} + \beta_j \sum_{i=1}^n \ln x_{2i} = \ln \hat{y}_j, \\ A \sum_{i=1}^n \ln x_{1i} + \alpha_j \sum_{i=1}^n (\ln x_{1i})^2 + \beta_j \sum_{i=1}^n \ln x_{1i} \ln x_{2i} = \ln \hat{y}_j \sum_{i=1}^n \ln x_{1i}, \\ A \sum_{i=1}^n \ln x_{2i} + \alpha_j \sum_{i=1}^n \ln x_{1i} \ln x_{2i} + \beta_j \sum_{i=1}^n (\ln x_{2i})^2 = \ln \hat{y}_j \sum_{i=1}^n \ln x_{2i}. \end{cases}$$

Перепишемо у матричному вигляді:

$$\begin{pmatrix} n & \sum_{i=1}^n \ln x_{1i} & \sum_{i=1}^n \ln x_{2i} \\ \sum_{i=1}^n \ln x_{1i} & \sum_{i=1}^n (\ln x_{1i})^2 & \sum_{i=1}^n \ln x_{1i} \ln x_{2i} \\ \sum_{i=1}^n \ln x_{2i} & \sum_{i=1}^n \ln x_{1i} \ln x_{2i} & \sum_{i=1}^n (\ln x_{2i})^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ \alpha_j \\ \beta_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ln \hat{y}_j \\ \ln \hat{y}_j \sum_{i=1}^n \ln x_{1i} \\ \ln \hat{y}_j \sum_{i=1}^n \ln x_{2i} \end{pmatrix}$$

Тоді

$$\begin{pmatrix} A \\ \alpha_j \\ \beta_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n & \sum_{i=1}^n \ln x_{1i} & \sum_{i=1}^n \ln x_{2i} \\ \sum_{i=1}^n \ln x_{1i} & \sum_{i=1}^n (\ln x_{1i})^2 & \sum_{i=1}^n \ln x_{1i} \ln x_{2i} \\ \sum_{i=1}^n \ln x_{2i} & \sum_{i=1}^n \ln x_{1i} \ln x_{2i} & \sum_{i=1}^n (\ln x_{2i})^2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \ln \hat{y}_j \\ \ln \hat{y}_j \sum_{i=1}^n \ln x_{1i} \\ \ln \hat{y}_j \sum_{i=1}^n \ln x_{2i} \end{pmatrix}$$

Для розв'язання даного рівняння і пошуку коефіцієнтів α_i, β_i та c_i використовуємо програмний пакет Microsoft Office Excel.

Отже, були отримані такі дані:
для тренуваних людей:

- залежність лактату крові від МПК та часу пасивного відновлення:

$$y_1 = 0.29 x_1^{1.2} x_2^{-0.6}$$

- залежність лактату крові від МПК та часу активного відновлення:

$$y_2 = 0.19x_1^{0.5}x_2^{-0.6}$$

Для нетренованих відповідно:

- залежність лактату крові від МПК та часу пасивного відновлення:

$$y_3 = 0.35x_1^{1.4}x_2^{-0.5}$$

- залежність лактату крові від МПК та часу активного відновлення:

$$y_4 = 0.39x_1^{1.9}x_2^{-0.4}$$

Враховуючи характер залежності лактату крові від МПК вигляд функції був заданий наступним:

$$y = A + Bx^5.$$

Для знаходження коефіцієнтів також використовуємо МНК.

$$S = \sum_{i=1}^n (A + Bx_i^5 - \hat{y}_i)^2 \rightarrow \min_{A,B}$$

Тоді

$$\begin{cases} \frac{\partial S}{\partial A} = \sum_{i=1}^n (A + Bx_i^5 - \hat{y}_i) = 0, \\ \frac{\partial S}{\partial B} = \sum_{i=1}^n (A + Bx_i^5 - \hat{y}_i)x_i^5 = 0. \end{cases}$$

Тобто

$$\begin{cases} An + B \sum_{i=1}^n x_i^5 = \sum_{i=1}^n \hat{y}_i, \\ A \sum_{i=1}^n x_i^5 + B \sum_{i=1}^n x_i^{10} = \sum_{i=1}^n \hat{y}_i x_i^5. \end{cases}$$

Перепишемо у матричному вигляді:

$$\begin{pmatrix} n & \sum_{i=1}^n x_i^5 \\ \sum_{i=1}^n x_i^5 & \sum_{i=1}^n x_i^{10} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n \hat{y}_i \\ \sum_{i=1}^n \hat{y}_i x_i^5 \end{pmatrix}$$

Скористаємось методом Крамера

$$\Delta = \begin{vmatrix} n & \sum_{i=1}^n x_i^5 \\ \sum_{i=1}^n x_i^5 & \sum_{i=1}^n x_i^{10} \end{vmatrix},$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \sum_{i=1}^n \hat{y}_i & \sum_{i=1}^n x_i^5 \\ \sum_{i=1}^n \hat{y}_i x_i^5 & \sum_{i=1}^n x_i^{10} \end{vmatrix},$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} n & \sum_{i=1}^n \hat{y}_i \\ \sum_{i=1}^n x_i^5 & \sum_{i=1}^n \hat{y}_i x_i^5 \end{vmatrix}.$$

$$\text{Тоді} \quad A = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad B = \frac{\Delta_2}{\Delta}.$$

Отже, рівняння залежності лактату крові від МПК виглядає так:

$$y_{\text{тренувані}} = 0.075 + 1.305x^5,$$

$$y_{\text{нетреновані}} = 0.069 + 0.874x^5.$$

Враховуючи характер залежності норадреналіну від МПК (для МПК $\geq 50\%$) функціональна залежність має наступний вигляд:

$$y_{\text{норадреналін}} = 0.03x - 1.$$

Враховуючи характер залежності лактату крові від часу відновлення вигляд залежності був заданий наступним:

- для пасивного відновлення

$$y_{\text{пас}} = \frac{A_1}{x^{B_1}},$$

- для активного відновлення

$$y_{\text{акт}} = \frac{A_2}{x^{B_2}}.$$

Знову застосовуємо функціональний підхід: нехай $\ln y = \ln A - B \ln x$, тоді

$$S = \sum_{i=1}^n (\ln A - B \ln x_i - \ln \hat{y}_i)^2 \rightarrow \min_{\ln A, B}.$$

Тоді

$$\begin{cases} \frac{\partial S}{\partial \ln A} = \sum_{i=1}^n (\ln A - B \ln x_i - \ln \hat{y}_i) = 0, \\ \frac{\partial S}{\partial B} = - \sum_{i=1}^n (\ln A - B \ln x_i - \ln \hat{y}_i) \ln x_i = 0. \end{cases}$$

Тобто

$$\begin{cases} n \ln A + B \sum_{i=1}^n \ln x_i = \sum_{i=1}^n \ln \hat{y}_i, \\ \ln A \sum_{i=1}^n \ln x_i - B \sum_{i=1}^n (\ln x_i)^2 = \sum_{i=1}^n \ln \hat{y}_i \ln x_i. \end{cases}$$

Перепишемо у матричному вигляді:

$$\begin{pmatrix} n & -\sum_{i=1}^n \ln x_i \\ \sum_{i=1}^n \ln x_i & -\sum_{i=1}^n (\ln x_i)^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ln A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n \ln \hat{y}_i \\ \sum_{i=1}^n \ln \hat{y}_i \ln x_i \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \ln A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n & -\sum_{i=1}^n \ln x_i \\ \sum_{i=1}^n \ln x_i & -\sum_{i=1}^n (\ln x_i)^2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n \ln \hat{y}_i \\ \sum_{i=1}^n \ln \hat{y}_i \ln x_i \end{pmatrix}$$

Отже, рівняння залежності лактату крові від часу відновлення представлено у наступному вигляді:

- для пасивного відновлення

$$y_{nac} = \frac{2.99}{x},$$

- для активного відновлення

$$y_{akt} = \frac{0.16}{x^{0.68}}.$$

Список використаних джерел

1. Дж.Х. Уилмор. Физиология спорта и двигательной активности. / Дж.Х. Уилмор, Д. Л. Костилл // Киев: Олимпийская литература. – 2001. – 495 с.
2. Зуев С.М. Оценка параметров процесса функционального восстановления по лабораторным данным. / Зуев С.М. // Новосибирск: Наука. – 1978. – 350 с.
3. Сергієнко Л.П. Тестування рухових здібностей школярів. / Сергієнко Л.П. // Київ: Олімпійська література. – 2001. – 287 с.

References

1. UILMOR J.H., KOSTILL D.L. (2001) Fiziologija sporta i dvigatelnoy aktivnosti. Kiev: Olimpiyskaja literatura. – 495 p.
2. ZUEV S.M. (1978) Otsenka parametrov protsessa funkcionalnogo vosstanovlenija po laboratornym dannym. Novosibirsk: Nauka. – 350 p.
3. SERGIENKO L.P. (2001) Testuvannja ruhovih zdibnostey shkoljariv. Kiev: Olimpiyskaja literatura. – 287 p.

Надійшла до редколегії 24.03.16

УДК 004.91

Крак Ю.В., д.ф.-м.н., проф.
Касьянюк В.С., к.ф.-м.н.
Стеля І.О., к.т.н.
Черненко І.Л., магістрант

Побудова множин відповідності для автоматизованого перекладу речень української мови у їх жестові аналоги

Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 83000, м. Київ, пр-т.
Глушкова 4д,
e-mail: yuri.krak@gmail.com

Iu.V.Krak, PhD in Math., prof.
V.S. Kasianiuk, PhD in Math
I.O.Stelya, PhD in Tech
I.L.Chernenko, mahystrant

Bijective sets constructing on automated translation of Ukrainian language sentences into their sign analogues

Taras Shevchenko National University of Kyiv,
83000, Kyiv, Glushkova st., 4d,
e-mail: yuri.krak@gmail.com

Запропоновано метод та здійснена його алгоритмічна та програмна реалізація для побудови автоматизованого сурдоперекладу речень української мови у їх жестові аналоги. Основна ідея методу полягає у знаходженні взаємно однозначних пар узагальнених граматичних конструкцій: речення на українській мові з одним предикативним зв'язком та відповідне речення на жестовій мові. В результаті проведених досліджень було отримано близько 300 таких конструкцій. Тестування запропонованого методу на текстах, які використовуються при навчанні глухих людей, показали високий рівень правильного перекладу – 85%-91%.

Ключові слова: автоматизований переклад, жестова мова, двомовний корпус.

Method is suggested and it's algorithmic and software realization for constructing of Ukrainian language sentences automated translation into their sign analogues is implemented. The method basic idea is to find the generalized grammar constructions bijective pairs: sentence in Ukrainian language with one predicate relation and corresponding sign language sentence. For the fixed order of words in the sentence algorithm to obtain generalized grammatical structures is created. These structures instead of specific words in the sentence set of words that can be used at these fixed locations are constructed. Given method provides a small amount of grammar translation. For grammar constructions creation using the specialists of Ukrainian sign language was formed corps with bilingual Ukrainian language sentences and their corresponding sentences of sign language. This corps contains 9800 sentences from a one predictive link. About 300 such structures obtained as result of the research. The method testing on texts used for the deaf people training has shown a high level of correct translation - 85% -91%.

Key Words: automated translation, sign language, bilingual corpus.

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Анісімов А.В.

Вступ

Жестова мова (ЖМ) глухих людей – це природна мова, що передає інформацію за допомогою рухів рук і пальців, виразу обличчя, положення корпусу тіла людини. Жестова мова не є візуальною інтерпретацією звичайної мови, має свою граматику, використовується як складова для спілкування людей і служить основним комунікаційним засобом для глухих

людей [1]. Важливою проблемою для всіх жестових мов [2], і у тому числі для української ЖМ, є створення автоматизованих засобів перекладу з української мови (УМ) на ЖМ. Сурдопереклад отримується шляхом знаходження взаємно однозначних пар конструкцій, що передають сенс: речення на вхідній мові → відповідне речення на ЖМ [3,4]. Зафіксувавши порядок розташування слів у вхідному реченні з одним предикативним

зв'язком, пропонується отримати певні структури (узагальнення), у яких замість конкретних слів у реченні будуть множини слів, які можуть використовуватись на цих зафіксованих місцях. Таким чином можна отримати невеликий (відносно загальної кількості речень) обсяг граматичних конструкцій перекладу. Використання такого підходу дозволить вирішити проблему автоматизованого перекладу з використанням отриманих пар конструкцій. Для ситуацій, коли відсутня однозначна конструкція чи не існує аналогу в жестовій мові, передбачається участь професійних сурдоперекладачів для забезпечення правильності передачі сенсової інформації.

Постановка задачі

Запропонувати метод та здійснити його алгоритмічну і програмну реалізацію для побудови системи автоматизованого перекладу з української мови на українську жестову мову.

Побудова узагальнених граматичних конструкцій перекладу з української мови на жестову мову

Під реченням розуміється послідовність слів мови та знаків пунктуації [5]. Граматичною конструкцією (ГК) речення називається послідовність слів, що належать до частин мови, які передають сенс, тобто у речень відкидаються службові слова. Розрізняються ГК за кількістю слів, що до них входять. Елементами ГК (на відміну від речень) будуть множини слів, розташовані у реченнях на фіксованих позиціях:

$$\begin{aligned} Gr = \\ &= \{Gr_i = \{word_j \in W \parallel seq_j \in Seq \parallel \\ &p \in P, In_{i_1} \in In, num\}, GStr_i = \\ &= \{ges_j \in Ges \parallel gseq \in Gseq \parallel \\ &pges \in PGes, num, gesnum\}\}, \end{aligned} \quad (1)$$

де W – множина слів $word_j$ УМ; P – множина частин P УМ; In – множина параметрів словозміни In_{i_1} слова; num – номер елемента в структурі речення УМ, Ges – множина жестів ges_j ЖМ; $PGes$ – множина частин $pges$ ЖМ; $gesnum$ – номер елемента в структурі речення ЖМ. Множина Seq (слова, що можуть бути на

місці конкретних елементів у ГК) задається наступним чином:

$$\begin{aligned} Seq = \{Seq_i : \\ Seq_i = \{word_j \in W : word_j \in W, n\}\}, \end{aligned} \quad (2)$$

а множина $Gseq$ (жести, що можуть бути на місці конкретних елементів у жестовій ГК):

$$\begin{aligned} Gseq = \{Gseq_i : \\ Gseq_i = \{ges_j \in Ges : ges_j \in Ges, n\}\}, \end{aligned} \quad (3)$$

де n – номер слова в послідовності слів і номер жесту в послідовності жестів.

Алгоритм формування множини ГК перекладу на основі двомовного корпусу речень УМ та ЖМ наступний:

серед множини речень, що містяться в корпусі, виконується пошук речень, які частково збігаються; вибираються серед них речення, у яких відмінності між словами є тільки в одному з елементів;

проводиться групування цих речень та отримуються послідовності слів, які можна використовувати на фіксованих позиціях в кожному з цих речень;

проводиться аналіз цих послідовностей, визначається, чи кожне з слів послідовності може використовуватись в кожному реченні, виявляються винятки, додаються у послідовність інші аналогічні слова, які можна використовувати у даній позиції;

у результаті аналізу послідовностей слів формується ГК речення;

після проведення аналізу послідовностей слів для всіх речень, що частково збігаються, додаються ГК до списку речень та повторно проводиться пошук речень та ГК, що частково збігаються, для розширення ГК; повторюється цей пункт доти, поки ГК не перестануть розширюватись;

проводиться пошук ГК, у яких послідовності частково збігаються, та проводиться аналіз даних послідовностей для їх розширення.

Після отримання множини ГК потрібно здійснити узагальнення кожної із множин елементів, які входять у неї. Узагальнення розуміється як подання кожної із отриманих множин у вигляді комбінації конкретних ГК та частин мови:

$$\begin{aligned} GGr = \{GGr_i = \{p_j \in P, In_j \in In, num\}, \\ GStr_i = \{pges \in PGes, num, gesnum\}\}. \end{aligned} \quad (4)$$

Узагальнені граматичні конструкції (УГК) містять у фіксованих позиціях множини

параметрів словозміни та частини мов. Для ЖМ в УГК містяться частини ЖМ та позиція відповідного елемента в УГК УМ.

Елементами УГК можуть бути об'єднання або перетин певних множин параметрів словозміни. УГК може складатись з елементів, які містять певні частини мови та не містять інших. Крім того, до множин параметрів словозміни можуть додаватись або вилучатись послідовності слів.

Формування множини УГК перекладу на основі ГК перекладу проходить таким чином:

для кожної ГК перекладу будується УГК: для кожної множини слів визначаються параметри словозміни та частини мови, спільні для всіх її елементів;

отримана УГК перекладу перевіряється на правильність за реченнями із двомовного корпусу, що відповідають цій конструкції;

отримана множина УГК перекладу аналізується на наявність конструкцій, що частково збігаються за частинами мови та параметрами словозміни та їх можливого об'єднання;

якщо отримано нову УГК перекладу внаслідок об'єднання, перевіряється її правильність за реченнями з двомовного корпусу, що відповідають цій конструкції.

Алгоритм подання відношень між словами української мови та жестами жестової мови

При перекладі речення, крім визначення граматичної структури речення УМ та відповідної структури жестового речення, необхідним є наявність множини відповістей між словами УМ та жестами ЖМ. Тому для кожного слова визначається його номер у послідовності слів (з (2)), та за цим номером з відповідної послідовності жестів обирається жест, який відповідний цьому слову.

При переході до УГК перекладу (4) для визначення структури речення використовуються, замість послідовностей слів та жестів, граматичні поняття словозміни та частини мови. Тому необхідним є створення механізму подання відповістей між словами мови та відповідними їм жестами. Для створення такої множини відношень використовуються послідовності слів та жестів:

для кожної ГК перекладу визначається список послідовностей слів та відповідних послідовностей жестів, що є її елементами;

для слів з кожної з отриманих послідовностей слів визначаються пари «слово→жест»;

якщо множина відповістей слів жестам не містить пари «слово→жест», додаємо її до множини.

Якщо внаслідок формування множини відповістей між словами та жестами існує декілька варіантів перекладу для одного слова, необхідно провести аналіз ГК перекладу (1), що містять послідовності з цим словом. Для УГК перекладу (4), отриманих на основі ГК перекладу (1), які містять слова з варіативністю перекладу, вказуються у вигляді додавання або вилучення категорій словозміни та послідовностей слів або жестів умови для вибору правильного варіанту перекладу.

Наявність механізмів подання відношень між ГК речень УМ та ЖМ та відношень між словами УМ та жестами дає змогу виконувати автоматизований переклад з УМ на ЖМ. Необхідною умовою для побудови та функціонування системи автоматизованого перекладу є двомовний корпус речень звичайною та ЖМ, на основі якого вона будується, від повноти якого залежить якість перекладу.

Програмна реалізація методу автоматизованого перекладу з української мови на жестову мову

З допомогою фахівців з української ЖМ було сформовано двомовний корпус з речень УМ та відповідних їм речень ЖМ. Корпус містить 9800 речень з одним предикативним зв'язком, з відповідним словниково-жестовим запасом, які охопили можливі мовленнєві ситуації по темах, що вивчаються в програмі вивчення української ЖМ для спеціалізованих шкіл. Кількість відповістей між словами УМ та жестами склала 35298 записів. Кількість відповістей між базовими словоформами та жестами склала 2754.

Після отримання двомовного корпусу речень на основі запропонованих алгоритмів побудовано множину ГК перекладу. Частково ГК перекладу сформовані шляхом об'єднання речень у граматичні структури на етапі формування множини речень з навчальної програми щодо вивчення ЖМ. З використанням множини ГК перекладу проведено формування УГК перекладу. Для кожної з отриманих УГК перекладу фахівці з жестового мовлення мають можливість переглянути, на основі яких речень отримано цю узагальнену конструкцію, та у разі потреби редагувати її. При редагуванні конструкції фахівець вказує параметри словозміни слів, що можуть використовуватись в

конкретних позиціях речення. Для жестових речень вказують частини мови та номери елементів відповідних елементів речення українською мовою.

Унаслідок групування речень з двомовного корпусу речень УМ та ЖМ було отримано 2101 ГК перекладу. Після відповідного аналізу множини ГК перекладу було отримано 293 УГК перекладу, що дають змогу виконувати автоматичний переклад речень з навчального корпусу.

Для тестування технології було вибрано 500 речень з текстів, які призначені для використання глухими людьми. Унаслідок перекладу 321 (64%) речень було перекладено автоматично, 119 (24%) не було перекладено через відсутність відповідностей «слово-жест», 60 (12%) не було перекладено через відсутність УГК (для 33 (55%) з цих речень було запропоновано УГК, що частково збігаються з вхідним реченням). Шляхом розширення словника та встановлення відповідностей між словами та жестами отримано результат в 423 (85%) речення з автоматичним перекладом та 31 речення (6%) з автоматизованим перекладом,

основаним на прогнозуванні з використанням ГК, що частково збігаються. Загальний відсоток правильного перекладу склав 91 %.

Висновки

Запропонований новий підхід до автоматизованого перекладу довільного тексту українською мовою у жестову мову, який полягає у знаходженні взаємно однозначних пар конструкцій, що передають сенс: речення УМ у відповідне речення ЖМ. Шляхом фіксування порядку розташування слів у вхідному реченні отримані структури (узагальнення), у яких замість конкретних слів у реченні містяться множини слів (задані параметрами словозміни), що використовуються на цих зафіксованих місцях. Таким чином, отримано невеликий (відносно загальної кількості речень) обсяг граматичних конструкцій для перекладу.

Проведені дослідження підтвердили ефективність і працездатність такого підходу. Запропонований підхід має практичну цінність для створення систем комунікації для людей з вадами слуху як між собою, так і загалом.

Список використаних джерел

1. Кульбіда С.В. Теоретико-методичні засади використання жестової мови у навчанні нечуючих / С.В.Кульбіда – Київ: Поліпром, 2010. – 503 с.
2. Morrissey S. Machine Translation: Its Scope and Limits / S.Morrissey, Y.Wilks // Machine Translation. – 2009. – Vol 23, №4. – P.265-267.
3. Крак Ю.В. Метод обобщенных грамматических конструкций для автоматизированного перевода текстовой информации в жестовые аналоги / Ю.В Крак, А.В.Бармак, С.А.Романишин // Кибернетика и системный анализ. – 2014. – № 1. – С.130-138.
4. Barmak O., Krak Iu., Romanyshyn S. Automated Translation from Inflectional Languages to Sign Languages / O.Barmak, Iu.Krak, S.Romanyshyn // International Journal "Information Content and Processing". – 2014. – Vol. 1. – № 4. – P.326-338.
5. Широков В.А. Корпусна лінгвістика / В.А Широков., О.В.Бугаков, Т.О. Грязнухіна [та ін.] – Київ: Довіра, 2005. – 472 с.

References

1. KULBIDA S. (2010) *Theoretico-methodychni zasady vikorystannya gestovoi movy u navchanni nechuychyh.* – Kyiv : Poliprom.
2. MORRISSEY S., WILKS Y. (2009) Machine Translation: Its Scope and Limits. In *Machine Translation*. Vol 23. 4. P.265-267.
3. KPAK IU., BARMAK O., ROMANYSHYN S. (2014) Method obobchennyh grammaticheskikh konstrukcii dlya avomatysirovannogo perevoda tectstovoi informacii v gestovie analogy. In *Cybernetics and Systems Analysis*. 1.P.130-138.
4. BARMAK O., KRAK IU., ROMANYSHYN S. (2014) Automated Translation from Inflectional Languages to Sign Languages . In *International Journal "Information Content and Processing"*. Vol. 1. 4. P.326-338.
5. SHIROKOV V.A., BUGAKOV O.V., GRYASNULINA T.O. [ETS.] (2005) *Corpusna lingvistyka* – Kyiv: Dovira.

Надійшла до редколегії 22.03.16.

УДК 519.925.51

Кулян В.Р.¹, к.т.н.,
Юнькова О.О.², к.ф.-м.н.
Коробова М.В.¹, к.ф.-м.н.

Про моделювання динаміки портфеля акцій

¹ Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, пр-т Глушкова, 4д

e-mail: v.kulyan@gmail.com

² Київський національний економічний університет імені Вадима Гетьмана, м. Київ, 03680, пр-т Перемоги, 54/1

Victor R. Kulian¹, Ph.D.,
Olena O. Yunkova², Ph.D.
Marina V. Korobova¹, Ph.D.

On modeling the dynamics of portfolio

¹ Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03068, Kyiv, Glushkova ave., 4d
e-mail: v.kulyan@gmail.com

² Vadym Getman National Economics University of Kyiv, 03680, Kyiv, Peremogy ave., 54/1

Розглядається задача про побудову математичної моделі оптимального інвестиційного портфеля акцій.

Ключові слова: математична модель, оптимальне інвестування, портфель акцій.

Mathematical models of the dynamics of the formation of the market value per share and stock portfolio are constructed in a class of ordinary differential equations. Such models are needed to build the trajectories of the market price of shares and the optimal portfolio diversification. Initially, procedure is based on the method of variation of arbitrary constants and enables one to find an analytical solution of the corresponding equation. Model of the dynamics of the portfolio is constructed based on the mathematical model of the market value per share. This model is used because of its diversification and for building the initial values of the optimal vector of shares of different types in the portfolio. Mathematical set theory and methods of optimal control theory are applied to achieve that. The problem of partitioning of investment interval on subintervals is studied. On each of them the problem of constructing an optimal investment portfolio is solved taking into account constraints on the control.

Key Words: mathematical model, optimal investment, stock portfolio

Article presented by professor Garashchenko F.G.

1. Introduction

To solve the problem of optimal investment securities following methods are used:

- H. Markowitz approach, using a valid and effective set, investor indifference curves;
- Splitting two-kriterial investment portfolio optimization problem into two one-kriterial;
- Methods of technical analysis;
- Methods of fundamental analysis.

2. Results and Discussion.

Let's consider a mathematical model of the market value of the investment portfolio and build appropriate analytical trajectory. At the time interval $t \in [t_0, T]$ equation describing the profitability of the portfolio shares r_p , has the form

$$r_p(t) = \sum_i x_i(t)r_i(t), \quad (1)$$

where x_i – proportion of shares and type-portfolio;
 r_i – expected return on equity and-order type.
Having differentiated both parts of (1), we get

$$\frac{dr_p(t)}{dt} = \sum_i (r_i(t) \frac{dx_i(t)}{dt} + x_i(t) \frac{dr_i(t)}{dt}). \quad (2)$$

Consider normalizing expressions that the content is inverse response time of the system to change the dynamics of expected profitability and structure of portfolio

$$\sum_i \frac{\dot{r}_i(t)}{r_i(t)} = 1, \quad \sum_i \frac{\dot{x}_i(t)}{x_i(t)} = 1, \quad t \in [t_0, t_1].$$

Given that there is a property

$$\text{for } i \neq j \quad \text{and} \quad \sum_j b_j = 1$$

$$\sum_i a_i b_i = \sum_i a_i + \sum_i \sum_j a_i b_j.$$

In this way occurring ratio

$$\begin{aligned} \sum_i x_i(t) r_i(t) \frac{f_i}{r_i(t)} &= \sum_i x_i(t) r_i(t) - \sum_i \sum_j x_i(t) \times \\ & r_i(t) \frac{f_j}{r_j(t)}, \\ \sum_i \frac{x_i(t) r_i(t)}{x_i(t)} \frac{dx_i(t)}{dt} &= \sum_i x_i(t) r_i(t) - \sum_i \sum_j x_i(t) \times \\ & r_i(t) \frac{dx_j(t)}{dt} \frac{1}{x_j(t)}. \end{aligned}$$

The dynamic model of the market value of the stock portfolio will have the following form

$$\begin{aligned} \frac{dr_p(t)}{dt} &= 2r_p(t) - \sum_i \sum_j x_i(t) r_i(t) \left(\frac{f_j}{r_j(t)} \times \right. \\ & \left. \frac{dx_j(t)}{dt} \frac{1}{x_j(t)} \right). \end{aligned} \quad (3)$$

This is a first order linear equation. Applying the method of variation of arbitrary constants and getting its general solution

$$\begin{aligned} r_p(t) &= -e^{2t} \int e^{-2t} \sum_i \sum_j x_i(t) r_i(t) \left(\frac{f_j}{r_j(t)} \times \right. \\ & \left. \frac{dx_j(t)}{dt} \frac{1}{x_j(t)} \right) dt, \end{aligned} \quad (4)$$

where

$$f_j(t) = (\alpha_1 S M_{ind}(t) + \alpha_2 I(t)) r_j(t) + \sum_{i=1}^N \beta_{ij} r_j(t).$$

In latter ratio the assumptions made phenomenon that describes the dynamics of the formation of the market value of the portfolio of risky securities. A more detailed analysis indicates two important properties that characterize the market value of the portfolio: dynamics depends on the dynamics of both the expected profitability of shares and changes in the structure of the portfolio. In relation (3) f_j is the right-hand side of the differential equation that describes the dynamics of the formation of the market value of the shares [2]. Its structure and content corresponds to a market model of Sharpe [1].

We were able to construct a sequence paths at selected time intervals, allowing you to create the initial structure of the investment portfolio.

However, this approach can not effectively influence the structure of investment and not fully using the mathematical description of the properties listed in mathematical models (4).

Among other, it contains a factor $\frac{dx_j(t)}{dt} * \frac{1}{x_j(t)}$, that describes the possible changes in the structure of investment.

To simplify further calculations mathematical model (4) is presented in more general terms $\dot{r}_p = f^p(r_p, x_i, \dot{x}_i, r_i, \dot{r}_i)$, $i = \overline{1, l}$ (5)

When solving optimal control problem (1), (2) we use the method of successive approximations. As a phase state we consider the market value of equity portfolio r_p and as the control parameters in accordance with the model - vector $u(t) = (x_i(t), r_i(t), \frac{dx_i(t)}{dt}, \frac{dr_i(t)}{dt})$. (6)

We consider a mathematical model of the dynamics of formation of the market value of the investment portfolio (2); the desired level of the market value of the portfolio at the time T , $r_p(T) = r_p^T$; time interval $t \in [t_0, T]$; control constraints at each time point $x(t) \in U(t)$; quality criterion

$$J(x(t)) = \int_{t_0}^T (r_p(t) - r_p(T))^2 dt + \Phi(r_p(t_0)) \rightarrow \min_{x(t) \in U(t)}.$$

Here $\Phi(r_p(t_0))$ – given function.

We need to identify $x(t_0)$ and, respectively, $r_p(t_0)$.

At the same time, we recall that the vector x describes the proportion of different types of shares in the portfolio, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$. Here n - number of shares in the investment portfolio types.

To solve the optimal control problem stated above with one fixed end of the trajectory and fixed time using the maximum principle. The result is the ability to identify $x(t_0)$, and on its basis $r_p(t_0)$. The Hamilton function has the form

$$H(r_p(t), \psi(t), t, x(t)) = -(r_p(t) - r_p(T))^2 + \psi(t) * f(r_p, x_i, \dot{x}_i, r_i, \dot{r}_i).$$

A necessary condition for its optimality is

$$\frac{\partial(- (r_p(t) - r_p(T))^2 + \psi(t) * f(r_p, x_i, \dot{x}_i, r_i, \dot{r}_i))}{\partial x_i} = 0, \\ i = \overline{1, n}. \quad (7)$$

A solution of equation (3) is the portfolio management function $x^*(\psi(t), r_p(t), t)$.

We construct a conjugated system in the form of

$$\dot{\psi}(t) = - \frac{\partial H(r_p(t), \psi(t), t, x(t))}{\partial r_p}, \\ \dot{\psi}(t) = 2(r_p(t) - r_p(T)) - \psi(t) * f'_{r_p}(r_p, x_i, \dot{x}_i, r_i, \dot{r}_i).$$

We formulate the transversality condition at the left end of the trajectory

$$\psi(t_0) = - \frac{\partial \Phi(r_p(t_0))}{\partial r_p}.$$

A boundary value problem the maximum principle has the form

$$\begin{cases} \dot{\psi}(t) = 2(r_p(t) - r_p(T)) - \psi(t) * f'_{r_p}(r_p, x_i, \dot{x}_i, r_i, \dot{r}_i) \\ \dot{r}_p(t) = f(r_p, x_i, \dot{x}_i, r_i, \dot{r}_i) \end{cases}$$

under conditions $\psi(t_0) = \psi_0, \quad r_p(T) = r_p^T$.

The right side of the equations of the model depends on the parameters $\alpha_1, \alpha_2 \in A$, where A – a closed bounded set of model parameters. For the correct mathematical formulation of the problem we formulate additional equations

$$\frac{\partial H(r_p(t), \psi(t), t, x(t, \alpha))}{\partial \alpha_j} = 0, \quad j = 1, 2.$$

Let's use the statement of the theorem for the optimal control problem with one fixed end of the trajectory and fixed time.

We decide to build a system of ordinary differential equations that determine the function $r_p(t), \psi(t)$, which, when $x^*(\psi(t), r_p(t), t)$ is substituted in the decision, will determine the optimal structure of the investment portfolio in selected time interval.

The analysis algorithm described above makes it possible to note some shortcomings, the most important of which is the parametrically defined objective function and

significant limitations on the functions of the control.

While in the classical optimal control theory every part of the optimal trajectory is optimal (or "improvement" of the path leads to "improvement" of the entire path), in a problem with these parameters does not hold true.

Since the optimum value $\alpha^* = (\alpha_1^*, \alpha_2^*)$ for the entire trajectory and its parts cannot be the same, that is, if $x^*(t), \alpha^*$ it's possible to obtain a solution formulated optimal control problem in the interval $t \in [t_0, T]$, at the lower segment due to parameter changes it may be possible to "improve" $x(t)$.

We construct a procedure for determining the optimal stock portfolio structure by constructing a sequence of optimal controls in the sub-intervals, starting with the last, where the value of the objective function in a finite time is known.

Divide the time interval $t \in [t_0, T]$ into subintervals that meet the time when the decision to is optimize the portfolio structure.

For any of the k – sub-slot during $t \in [t_{k-1}, t_k]$ formulation of the problem in a continuous form can be written as

$$\frac{dr_p(t)}{dt} = f(r_p(t), x(t), t), \quad t_{k-1} \leq t \leq t_k, \quad (8)$$

$$r_p(t_k) = r_p^k, \quad x(t_{k-1}) \in U(t_{k-1}), \quad (9)$$

Where $U(t_{k-1})$ – closed bounded set of admissible controls for moment t_{k-1}

$$I(x(t_{k-1}), t_{k-1}) = \min_{x(t_{k-1}) \in U(t_{k-1})} \left(\int_{t_{k-1}}^{t_k} f^0(r_p(t), x(t), t) dt + \Phi(r_p(t_k)) \right). \quad (10)$$

Function $\Phi(r_p(t_k))$ is known.

Statement of the problem (8) - (10) is quite common among the unknown comprising time t_{k-1} and, accordingly, $r_p(t_{k-1})$ – expected market value of the investment portfolio at this time.

Another way to the formulation and solution of the problem of optimization of the investment structure of the portfolio is to apply formulation of two – kriterial problem of H. Markowitz.

For k – interval mathematical model has the following form:

$$r_p(t_{k-1}) = r_p^{k-1} = \sum_{j=1}^l x_j(t_{k-1}) r_j(t_{k-1}) \quad (11)$$

and the challenge is to maximize the expected market value of the investment portfolio. Dynamics of formation of the market value of one share is described by the corresponding model that is detailed in [1] and has the following form:

$$\frac{dr_j(t)}{dt} = (\alpha_1 SM_{ind}(t) + \alpha_2 I(t)) r_j(t) + \sum_{i=1}^N \beta_{ij} r_j(t),$$

$$j = \overline{1, n}.$$

It is necessary to define the control function $x(t)$, which will allow the optimal transition from point r_{p_k} to point $r_{p_{k-1}}$.

Criterion for determining the optimal market value of the portfolio to the time t_{k-1} is written in the form

$$\sum_{j=1}^n x_j(t_{k-1}) r_j(t_{k-1}) \rightarrow \max_{x(t) \in U(t)}. \quad (12)$$

Method of successive approximations is used for solving the optimal control problem (8), (9). The peculiarity of the application and the method of successive approximations is that the function of controls $x(t)$, $t \in [t_1, t_{k-1}]$ at each time overlaps sufficiently restrictive

$$x(t_i) \in U(t_i),$$

where $U(t_i)$ – the set of admissible controls,

which is characterized by the presence of the required amount of the respective type of securities and properties in the market.

Application of the method of successive approximations makes it possible to construct a sequence of controls for optimal transition from point $r_p(t_k)$ to point $r_p(t_{k-1})$. Applying steps of the algorithm at the time t_0 , we obtain the optimal structure of the initial portfolio.

Thus, the solutions of (11) - (12) make it possible to build a consistent set of paths that enable the investor to form an optimal portfolio of stocks.

3. Acknowledgements.

The formulation of the problem and built algorithm greatly expand the possibilities of investing, as in every moment of diversification it is possible to construct a set of alternatives that are equivalent in terms of quality of selected criteria. The investor, as in the classical approach, Mr. Markowitz has the ability to take into account when deciding additional factors that arise in the course of practical investment and are associated with the peculiarities of the system dynamics modeling. Mathematical portfolio diversification procedure makes it possible for the above-mentioned models of the dynamics of the market value of a share and the stock portfolio to solve the problem of constructing an initial portfolio with a known value of its expected market value at the selected future date.

Список використаних джерел

1. Шарп У. Инвестиции / Уильям Ф. Шарп, Гордон Дж. Александер, Джеффри В. Бэйли. – Москва: Инфра-М, 1999. – с.1027.
2. Гаращенко Ф.Г. Качественный анализ математических моделей инвестиционного менеджмента / Кулян В.Р., Рутицкая В.В. // Кибернетика и вычислительная техника. – 2005. – №148. – с. 3-10.

References

1. SHARPE, W., ALEXANDER, G. and BAILEY, J. (1995) *Investments*. New Jersey: Prentice Hall.
2. GARASHCHENKO, F., KULYAN, V. and RUTITSKAYA, V. (2005) Quality analysis of mathematical models of investment management: *Cybernetics and computing engineering*. 148. p. 3-10.

Надійшла до редколегії 10.03.2016 р.

УДК 681.3

Марченко О. О., д.ф.-м.н., доц.

O.O. Marchenko, Doctor of Sciences (Physics & Mathematics), Associate Professor

Метод ефективної невід'ємної факторизації лінгвістичних тензорів

A Method for Effective Non-negative Factorization of Linguistic Tensors

Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 83000, м. Київ, пр-т.
Глушкова 4д, e-mail: rozenkrans@yandex.ua

Taras Shevchenko National University of Kyiv,
83000, Kyiv, Glushkova ave., 4d,
e-mail: rozenkrans@yandex.ua

В роботі описується новий розроблений метод блочної діагоналізації та невід'ємної факторизації лінгвістичних тензорів, що полягає у попередньому перетворенні тензору у блочно-діагональний вид для того, щоб звести невід'ємну факторизацію тензору надвеликого розміру до виконання обчислень невід'ємної факторизації тензорних діагональних блоків – набору тензорів набагато меншого розміру, що вимагає на порядок меншого часу. В результаті роботи алгоритму невід'ємна факторизація лінгвістичного тензору обчислюється в єдиному базисі, що забезпечує моделі цілісність та системність.

Ключові слова: комп'ютерна лінгвістика, обробка текстів природною мовою, невід'ємна факторизація тензорів.

The paper describes problems of the use of non-negative tensor factorization methods in computational linguistics to solve theoretical and applied tasks, in particular for the automation of linguistic structures descriptions generation.

In computational linguistics problems it is often necessary to calculate the non-negative factorization of extra large size tensors, so the usage of standard algorithms for tensor factorization becomes impossible due to the NP-completeness of the problem and polynomial complexity of existing algorithms.

New original method of block diagonalization and non-negative linguistic tensor factorization has been proposed. The algorithm performs the preliminary transformation of input tensor to block diagonal form in order to reduce non-negative factorization of extra large size tensor to the sequence of non-negative factorizations of tensor diagonal blocks (a set of tensors that are much smaller than input extra large tensor). It requires sufficiently less time.

As a result of the algorithm performing a non-negative linguistic tensor factorization is calculated in the same basis. It ensures the integrity and systematic character of the model.

Keywords: computational linguistics, natural language text processing, non-negative tensor and matrix factorization.

Статтю представив д.ф.-м.н., проф., чл.-кор. НАН України Анісімов А.В.

Невід'ємна тензорна та матрична факторизація є сучасним ефективним засобом аналізу, кластеризації та класифікації багатовимірних даних, що зберігаються у великих масивах, який на сьогодні набув широкої популярності серед багатьох дослідників у всьому світі.

Невід'ємна тензорна факторизація широко застосовується у комп'ютерних науках та загалом у інформаційних технологіях, зокрема у багатьох напрямках штучного інтелекту, коли є

необхідність пошуку, дослідження та аналізу залежностей та взаємозв'язків різних факторів у даних, що мають різну модальність по своїй природі.

Серед найбільш популярних напрямів використання методів невід'ємної тензорної і матричної факторизації великих багатовимірних масивів даних особливо слід відзначити обробку та аналіз графічних зображень, обробку відеозображень, кластеризацію великих природномовних текстових корпусів, здобування

лінгвістичних знань з великих корпусів текстів природною мовою [1, 2].

Алгоритми невід'ємної тензорної та матричної факторизації застосовуються також і для автоматизації процесів розробки, розширення та заповнення контентом лінгвістичних баз знань онтологічного типу [3, 4].

Застосування невід'ємної факторизації тензорів для пошуку, дослідження та аналізу семантико-синтаксичних структур мови

У роботі [1] було запропоновано модель невід'ємної факторизації тензорів, у яких зберігаються дані про частоту використання словосполучень у великих текстових корпусах із врахуванням синтаксичної позиції слів. Невід'ємна факторизація даних тензорів дозволяє автоматизовано виділяти з корпусів текстів опис таких лінгвістичних структур, як селективні преференції (selectional preferences)[1] та субкатегоріальні фрейми дієслів [2], що містять дані про семантичні та синтаксичні властивості зв'язків між дієсловами та їх аргументами-іменниками у реченнях природної мови.

Тривимірний тензор для зберігання частот комбінацій слів у структурі *підмет-присудок-додаток*, отриманих частотно-синтаксичним аналізом текстових корпусів, зображений на рисунку 1.

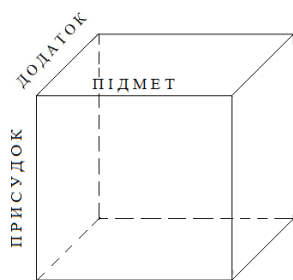


Рисунок 1. Тривимірний тензор для зберігання частот комбінацій слів у реченнях текстових корпусів в позиціях *підметів*, *присудків* та *додатків*.

В результаті частотного аналізу текстових корпусів формується розріджений тензор надвеликої розмірності. З метою отримання більш стислого та зручного представлення до лінгвістичного тензору застосовується невід'ємна факторизація. Як правило, для цього використовується алгоритм PARAFAC [5].

Основна ідея методу полягає в мінімізації суми квадратів різниць значень між оригіналом тензору та його факторизованою моделлю. Для

тривимірного тензору $T \in R^{D1 \times D2 \times D3}$ це відповідає рівнянню

$$\min_{x_i \in R^{D1}, y_i \in R^{D2}, z_i \in R^{D3}} \|T - \sum_{i=1}^k x_i \circ y_i \circ z_i\|_F^2, \text{ де } k -$$

число вимірів факторизованої моделі, $\circ$ – тензорний добуток.

При невід'ємній тензорній факторизації додається обмеження невід'ємності значень векторів, перетворюючи модель у

$$\min_{x_i \in R_{\geq 0}^{D1}, y_i \in R_{\geq 0}^{D2}, z_i \in R_{\geq 0}^{D3}} \|T - \sum_{i=1}^k x_i \circ y_i \circ z_i\|_F^2$$

Модель можна представити графічно наступним чином, враховуючи, що дана декомпозиція складається з суми тензорних добутоків трійок векторів (по числу вимірів тензору).

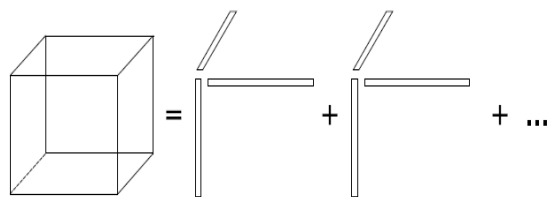


Рисунок 2. Графічне представлення невід'ємної тензорної факторизації у вигляді суми тензорних добутоків.

Далі вектори кожного з вимірів складаються в окремі матриці. Декомпозиція невід'ємної факторизації тензору частот комбінацій слів у структурах *підмет-присудок-додаток* у вигляді трьох матриць представлена на рисунку 3.

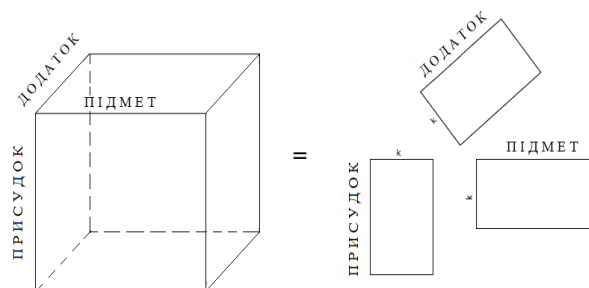


Рисунок 3. Графічне представлення невід'ємної тензорної факторизації для лінгвістичного тензору.

В результаті невід'ємної факторизації кожен підмет-іменник, присудок-дієслово та додаток-іменник отримує власний вектор розмірності k з відповідних матриць.

Оригінальне значення з тензору T для трійки (s, v, o) – T_{svo} може бути обчислено у факторизованій моделі сумою

$$T_{svo} = \sum_{i=1}^k s_{si} v_{vi} o_{oi}.$$

Для того, щоб отримати частоту комбінації слів *голкіпер врятував команду* в обробленому текстовому корпусі, у відповідних матрицях потрібно знайти вектор-підмет для іменника *голкіпер*, вектор-присудок для дієслова *врятував*, і вектор-додаток для слова *команду*. Згідно попередньої формули обчислюється частота для даної комбінації слів. Якщо значення частоти більше за деякий пороговий рівень, то робиться висновок про можливість існування та коректність даного словосполучення у мові.

Вектори з матриць факторизованого тензору описують комутативні властивості слів. Вони прописують, які зв'язки утворюють дані слова – з якими лексемами та у яких синтаксичних позиціях. У даних векторів присутня як синтаксична, так і семантична складова опису можливих зв'язків. Тому вони були названі *векторами семантико-синтаксичної валентності слів* [3].

Треба зазначити, що невід'ємна факторизація тензору є NP-повною задачею. Часові оцінки складності найкращих існуючих алгоритмів невід'ємної факторизації тензорів поліноміально залежать від розмірів тензору по кожному з його вимірів. Лінгвістичні тензори за своєю природою є надвеликими та дуже розрідженими. Розміри великого лінгвістичного тензору вздовж усіх його вимірів можуть сягати від десятків тисяч до мільйонів лексем.

Очевидним фактом стає непридатність стандартних алгоритмів невід'ємної факторизації для роботи з лінгвістичними тензорами. Звідси виникає необхідність у розробці спеціальних методів факторизації розріджених тензорів надвеликих розмірів.

Метод ефективної невід'ємної факторизації лінгвістичних тензорів

Ідея методу полягає у приведенні тензору до блочно-діагонального виду, як показано на рисунку 4, для того, щоб потім можна було по черзі виконувати невід'ємну факторизацію кожного окремо взятого блоку із подальшою конкатенацією матриць, що генеруються, із відповідним зсувом.

Таким чином процедура невід'ємної факторизації тензору виглядатиме наступним чином.

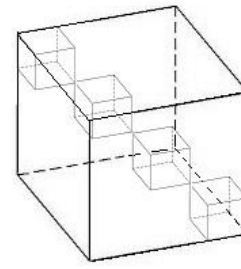


Рисунок 4. Графічне представлення лінгвістичного тензору блочно-діагонального виду.

Нехай тензор T містить N діагональних блоків. Зсув $r = 0$.

For $i = 1$ *to* N *do*

1. Взяти i -тий діагональний блок тензору.
2. Виконати невід'ємну факторизацію i -того тензорного блоку методом PARAFAC [5].
3. Отримані три матриці X_i , Y_i та Z_i дописуємо справа до попередніх матриць із зсувом вниз на r рядків. Верхні r рядків заповнюються нулями.
4. $r = r + k_i$ (де k_i – ранг факторизації, тобто кількість рядків у матрицях X_i , Y_i та Z_i).

Всі незаповнені елементи матриць заповнюються нулями.

Таким чином невід'ємна факторизація надвеликого тривимірного тензору зводиться до послідовності обчислення факторизацій N тривимірних тензорів на порядок меншого розміру. З точки зору NP-повноти задачі така декомпозиція невід'ємної факторизації надвеликих розріджених тензорів є дуже перспективним підходом.

Приведення лінгвістичного тензору до блочно-діагонального виду. Лінгвістичні тензори володіють властивістю інваріантності відносно операції перестановки місцями двох будь-яких шарів вздовж будь-якої осі. Розглянемо два шари лінгвістичного тензора T відносно, скажімо, осі присудків. Наприклад, шар A , який відповідає дієслову «їсти» та зберігає дані «хто що їсть», та шар B , що відповідає дієслову «дарувати» та зберігає дані «хто що дарує». Від перестановки цих двох шарів місцями інформація у лінгвістичному тензорі жодним чином не змінюється. Фактично, лише двом дієсловам поміняли індекси у масивах даних. Дані твердження є повністю коректними стосовно перестановок шарів місцями вздовж будь-якої з осей лінгвістичного тензору.

Тому пропонується привести лінгвістичний тензор до блочно-діагонального виду шляхом виконання послідовності перестановок шарів лінгвістичного тензору вздовж трьох осей – осі підмету, осі присудку та осі додатку.

Складність запропонованого методу полягає у тому, що групуючи необхідні ненульові комірочки тензору u , скажімо, верхньому-лівому-ближньому блоці тензору u , пересуваючи шари по одній осі, порушуємо той порядок, що досягли тільки що на попередньому кроці, коли пересували шари по іншій осі, тобто по цій осі починають з'являтися ненульові значення поза верхнього-лівого-ближнього блоку в рамках поточного діапазону, чого тільки що вдалося позбутися. Кожного разу, переходячи до наступної осі, метод руйнує той порядок, який був складений на попередньому кроці.

Формування тематичних діагональних блоків. Основною ідеєю алгоритму приведення лінгвістичного тензору до блочно-діагонального виду є групування слів однієї тематичної групи разом по всіх осях у відповідних інтервалах для підгонки всіх ненульових значень лінгвістичного тензору на перетині всередину блоку, що складається в даний момент.

Вся суть методу полягає у переході від необхідності факторизувати надвеликий розріджений лінгвістичний тензор до невід'ємної факторизації набору лінгвістичних тензорів значно зменшеного розміру. Можна уявити собі, що система не відразу «читає» мільйони текстів різної тематики та складає тензор надвеликої розмірності, а обробляє та аналізує весь вхідний текстовий корпус по тематичних розділах – в результаті утворюється набір незалежних лінгвістичних тензорів прийнятної розмірності для кожної тематики окремо. Ці незалежні тензори i мають сформувати діагональні блоки великого лінгвістичного тензору в процесі роботи нашого алгоритму.

Виникає питання, а чому, дійсно, не можна поступово обробляти невеличкі набори текстів в рамках фіксованих тематик, складати невеличкі лінгвістичні тензори, виконувати невід'ємну факторизацію та отримувати вектори семантико-синтаксичної валентності слів для окремих прикладних областей знань. Але ж одні й ті ж слова з тими ж самими значеннями будуть отримувати різні вектори семантико-синтаксичної валентності в рамках різних тематичних підрозділів. Це означає, що не буде існувати єдиного базису для тензорної моделі мови. Тоді не можна говорити про формування

опису цілісної моделі природної мови. Окрім того модель не є лише семантичною за своєю природою, вона є також і синтаксичною. І в рамках окремих предметних областей не можна чекати наявності повного опису синтаксичних комутативних властивостей для деякого слова. Якщо йому буде привласнено набір векторів з різних предметних областей по різних базисах, тоді не буде системного цілісного опису синтаксичної валентності для цього слова. Також важко судити про оптимальність стиснення даних невід'ємною факторизацією при відсутності спільного базису.

Тому ми маємо скласти блочно-діагональну структуру всередині єдиного надвеликого лінгвістичного тензору методом *формування тематичних діагональних блоків*.

Першим етапом методу є попередній розподіл лексичного складу моделі по різних тематичних кластерах. Для цього використовується латентний семантичний аналіз LSA [6] та невід'ємна матрична факторизація NMF алгоритмом Лі-Сунга [7].

1. Зібрати терм-документ матрицю V на основі корпусу статей англomовної Вікіпедії. У якості термів розглядаються усі іменники та усі дієслова в текстах.

2. За допомогою алгоритму Лі-Сунга виконати невід'ємну факторизацію терм-документ матриці V у добуток матриць $V = WH$. Матриця W кожному слову (іменникам та дієсловам) ставить у відповідність вектори розмірністю k (де k – ранг факторизації матриці V).

3. Виконуємо перетворення тензору:

$i = 1; r = 0;$

For $i = 1$ to k do

3.1. Вздовж осі підметів ОХ переставляємо на початок осі всі шари, що відповідають іменникам-підметам, у яких по i -й координаті їх вектора W стоїть ненульове значення. Нехай кількість таких іменників дорівнює n_1 .

3.2. Вздовж осі присудків ОУ переставляємо на початок осі всі шари, що відповідають дієсловам-присудкам, у яких по i -й координаті їх вектора W стоїть ненульове значення. Нехай кількість таких дієслів дорівнює m_1 .

3.3. Вздовж осі додатків ОZ переставляємо на початок осі всі шари, що

відповідають іменникам-додаткам, у яких по i -й координаті їх вектора W стоїть ненульове значення. Нехай кількість таких іменників дорівнює k_1 (зазначимо, що $k_1 = n_1$).

3.4. В результаті у лівому-верхньому-ближньому блоці тензору утворився тензор-підпростір i -тої тематики. Всі його значення переносяться в окремий тензор T_i . При переносі всі відповідні ненульові значення в тензорі T у діапазоні $[1..n_1] \times [1..m_1] \times [1..k_1]$ обнуляються.

3.5. Виконати невід'ємну факторизацію i -того тензору T_i методом PARAFAC.

3.6. Отримані три матриці X_i , Y_i та Z_i дописуємо справа до попередніх матриць із зсувом вниз на r рядків. Верхні r рядків заповнюються нулями.

3.7. $r = r + k_i$ (де k_i – ранг факторизації, тобто кількість рядків у матрицях X_i , Y_i та Z_i)

4. Всі незаповнені елементи матриць заповнюються нулями.

5. Ті вектори у матрицях X , Y та Z , що відповідають одним і тим самим словам складаються.

В результаті роботи алгоритму формується системна модель опису семантико-синтаксичних валентностей слів у єдиному базисі, що гарантує її цілісність.

При цьому також гарантовано ефективно підтримується масштабованість моделі. Якщо виникла необхідність обробити додатковий корпус текстів та додати дані з нього у готову модель, то немає потреби заново обчислювати невід'ємну факторизацію всього великого тензору, дані можна перенести лише у ті тематичні тензорні блоки, до тематик яких належать оброблені тексти, і, відповідно, виконувати факторизацію треба лише для цих тематичних тензорних блоків із оновленням лише фрагментів векторів семантико-синтаксичної валентності слів даної тематики.

Найкращого ефекту очікувано досягнуто з точки зору значного зменшення часу виконання невід'ємної факторизації набору значно зменшених за розміром тензорів замість факторизації надвеликого розрідженого тензору розміром приблизно 2 млн. $\times$ 25 тис. $\times$ 2 млн. Якщо середній розрахований час факторизації лінгвістичного тензору таких розмірів алгоритмом PARAFAC на сучасному комп'ютері

стандартної конфігурації сягає 6-7 місяців, то розробленому алгоритму *блочної діагоналізації та невід'ємної факторизації лінгвістичних тензорів* на розкладення даного тензору знадобилося 19 годин 23 хвилини.

Висновки

В роботі було досліджено застосування методів тензорної факторизації в задачах комп'ютерної лінгвістики, зокрема для автоматизації генерації опису лінгвістичних структур.

Так як у задачах комп'ютерної лінгвістики часто виникає потреба в обчисленні невід'ємної факторизації розріджених тензорів надвеликого розміру, то використання стандартних алгоритмів тензорної факторизації стає неможливим через NP-повноту даної задачі та через поліноміальну складність існуючих алгоритмів, що разом із надвеликими розмірами лінгвістичних тензорів приводить до неприйнятно великих об'ємів обчислень, які без ефективного розпаралелювання та відповідних обчислювальних потужностей не можуть бути виконані у задовільні терміни часу.

Було запропоновано новий метод *блочної діагоналізації та невід'ємної факторизації лінгвістичних тензорів*, що полягає у попередньому перетворенні тензору до блочно-діагонального виду для того, щоб звести невід'ємну факторизацію тензору надвеликого розміру до виконання обчислень невід'ємної факторизації тензорних діагональних блоків – набору тензорів набагато меншого розміру, що вимагає на порядок меншого часу. Тестування підтвердило значну перевагу нового алгоритму за часом виконання.

В результаті роботи алгоритму невід'ємна факторизація лінгвістичного тензору обчислюється у єдиному базисі, що забезпечує моделі цілісність та системність.

Слід зауважити, що перетворення лінгвістичного тензору до блочно-діагонального виду приводить до покращення потенціальної масштабованості моделі, коли для її розширення та збагачення новими даними з додаткових текстових корпусів немає необхідності виконувати невід'ємну факторизацію всього надвеликого тензору заново з самого початку. Обчислення виконуються лише на окремих блоках лінгвістичного тензору з подальшою модифікацією тільки відповідних фрагментів векторів моделі.

Список використаних джерел

1. Van de Cruys T. A Non-negative Tensor Factorization Model for Selectional Preference Induction / T. Van de Cruys // Journal of Natural Language Engineering. – 2010. – №16 (4). – P. 417-437.
2. Van de Cruys T. Multi-way Tensor Factorization for Unsupervised Lexical Acquisition / T. Van de Cruys, L. Rimell, T. Poibeau, A. Korhonen // In Proceedings of the International Conference on Computational Linguistics (COLING-12), Mumbai, India. – 2012. – P. 2703-2720.
3. Анисимов А.В. Определение семантических валентностей концептов онтологий с помощью неотрицательной факторизации тензоров больших текстовых корпусов / А.В. Анисимов, А.А. Марченко, Т.Г. Вознюк // Кибернетика и системный анализ. – 2014. – № 3. – С. 3-16.
4. Марченко А.А. Метод автоматического построения онтологических баз знаний. Автоматическое определение семантических отношений в онтологической сети / А.А. Марченко // Кибернетика и системный анализ. – 2016. – № 2. – С. 30-36.
5. Cichocki A. Nonnegative Matrix and Tensor Factorizations: Applications to Exploratory Multi-way Data Analysis and Blind Source Separation / A. Cichocki, R. Zdunek, A.-H. Phan, S.-I. Amari // Chichester: J. Wiley & Sons. – 2009. – p. 477.
6. Deerwester S. Indexing by latent semantic analysis / S. Deerwester, S. T. Dumais, G.W. Furnas, T.K. Landauer, R. Harshman // Journal of the Association for Information Science. – 1990. – № 41(6). – P. 391-407.
7. Lee D.D. Algorithms for non-negative matrix factorization / D.D. Lee, S.H. Seung // In Proceedings of the NIPS-2000. – 2000. – P. 556-562.

References

1. VAN DE CRUYS T. (2010) *A Non-negative Tensor Factorization Model for Selectional Preference Induction*, Journal of Natural Language Engineering, 16 (4), pp. 417-437.
2. VAN DE CRUYS T., RIMELL L., POIBEAU T., KORHONEN A. (2012) *Multi-way Tensor Factorization for Unsupervised Lexical Acquisition*, Proceedings of the International Conference on Computational Linguistics (COLING-12), pp. 2703-2720.
3. ANISIMOV A. V., MARCHENKO A. A., VOZNIUK T. G. (2014), *Determination of semantic valences of ontologies concepts using non-negative tensor factorization of large text corpora*, Cybernetics and System Analysis 3, pp. 3-16.
4. MARCHENKO A. A. (2014), *A method for automatic construction of ontological knowledge bases. Automatic identification of semantic relations in ontological networks*, Cybernetics and System Analysis 2, pp. 30-36.
5. CICHOCKI A., ZDUNEK R., PHAN A.-H., AMARI S.-I. (2009) *Nonnegative Matrix and Tensor Factorizations: Applications to Exploratory Multi-way Data Analysis and Blind Source Separation*, Chichester: J. Wiley & Sons, P. 477.
6. DEERWESTER S., DUMAIS S. T., FURNAS G. W., LANDAUER T. K., HARSHMAN R. (1990) *Indexing by latent semantic analysis*, Journal of the Association for Information Science 41(6), pp. 391-407.
7. LEE D. D., SEUNG S. H. (2000) *Algorithms for non-negative matrix factorization*, Proceedings of the NIPS-2000, pp. 556-562.

Надійшла до редколегії 01.03.16

UDC 519.876.5

Medvid N. V., postgraduate,
Herus V. A., lecturer,
Martyniuk P. M., Doctor of Engineering Science

Modification of Kinematic Boundary Condition at Free Surfaces in Filtration Problems by means of Earth Dam

National University of Water and Environmental
Engineering, 33028, Rivne, Soborna Str., 11,
e-mail: tashamedvid@ukr.net,
v.a.gerus@nuwm.edu.ua, martinjuk@ukr.net

Медвідь Н. В., аспірант,
Герус В. А., викладач,
Мартинюк П. М., д.т.н.

Модифікація кінематичної граничної умови на депресійній поверхні в задачах фільтрації через ґрунтову греблю

Національний університет водного господарства
та природокористування, 33028, м. Рівне, вул.
Соборна, 11,
e-mail: tashamedvid@ukr.net,
v.a.gerus@nuwm.edu.ua, martinjuk@ukr.net

The kinematic boundary condition at free surface in case of variable porosity is modified. In particular, the factors of mechanical and chemical suffusion, compression, thermal expansion of soil phases are taken into account also. The surface subsided as a result of soil consolidation and processes of contact suffusion are taken into consideration. The authors made corresponding conclusions and determined areas for further research.

Key words: kinematic condition, free surface, variable porosity.

Модифіковано кінематичну умову на вільній (депресійній) поверхні на випадок змінної пористості. Зокрема враховано фактори механічної і хімічної суфозії, ущільнення, термічного розширення фаз ґрунту тощо. Враховано просідання ґрунту в результаті його консолідації. Враховано процеси контактної суфозії. Зроблені відповідні висновки та визначено напрямки подальших досліджень.

Ключові слова: кінематична умова, вільна поверхня, змінна пористість.

The article is presented by Doctor of Engineering Science Haraschenko F. H

1. Introduction.

Research of filtration processes in earth dams directly related to their safety, change of stress-strain state, possible failures or critical situations [16-18, 20]. The mathematical models of filtration in earth dams are described with a Stefan problem [19], more specifically – with a Stefan contact problem [12].

Free surface is the boundary that divides areas of saturated soil and unsaturated soil in the body of earth dam [11] and, in general, eventually changes its position. It is necessary to require kinematic boundary conditions for correctness of free boundary problems, which describe the mathematical models of filtration in earth dams. For example, the following form of such condition is proposed in [15] (all authors' marks are remained here):

$$m \frac{\partial \xi}{\partial t} = (k \nabla u, \nabla \xi) - \omega \frac{\partial \xi}{\partial z}, \quad (1)$$

where $\xi(t, \mathbf{X}) = 0$ is the equation of free surface, $\omega = \omega(t, \mathbf{X})$ is value of infiltration through free surface into area of filtration, $k = k(\mathbf{X})$ is a coefficient of filtration, $m = m(\mathbf{X})$ is a coefficient of storage (deficiency of saturation or, in case of dry soil, porosity), $u = u(t, \mathbf{X})$ is pressure head, $\mathbf{X} = (x, y, z)$.

The following condition is used in the work [13]

$$k \frac{\partial h}{\partial n} = -m \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \nu(n_y, y), \quad (2)$$

where $h = h(t, x, y)$ is pressure head, m is soil porosity, ν is value of infiltration, $\mathbf{n} = (n_x, n_y)$ is a vector of directing cosines of external normal to free boundary, which is described by $\varphi(x, y, t) = y - h(x, y, t)$.

The kinematic boundary conditions in the problems of dissolution and leaching of water-

soluble complexes from hard rocks are deducted and used in the works [2, 3, 14]. The kinematic boundary condition on the upper movable boundary of soil area in case of its consolidation is deducted in [4]. The condition is generalized due to taking into account any number of the influencing factors on processes of soil consolidation [6]. The kinematic boundary conditions in cases of contact soil erosion and suffusion are proposed in the works [5, 8]. These conditions are used in the works [9, 10] at numeral research of the erosion processes in earth dams. Review of algorithms of the movable free boundaries approximation is presented in [1].

2. Stating of the Problem.

The form of the kinematic boundary conditions (1), (2) testifies that porosity is, in fact, considered constant (in case if dry soil is over the depression surface). Porosity is a variable quantity in cases of internal erosion, chemical suffusion, consolidation, thermal expansion of soil phases and so on. The purpose of this article is modification of the condition at free surface for this case.

3. Deduction of the Modified Kinematic Boundary Condition.

Let us do the following simplified assumption: any vertical line crosses the free boundary only in one point. This assumption is carried out for free surfaces in soil dams.

We determine in the moment of time $t = t_j$ on free surface $\varphi(\mathbf{X}, t_j) = 0$ unit area $S^{(j)}$. We consider movement of free surface in to internal normal to $S^{(j)}$ (figure 1). Without loss of generality we neglect infiltration. The properties of soil in the identified prism between two positions of free boundary $\varphi(\mathbf{X}, t_j) = 0$ and $\varphi(\mathbf{X}, t_{j+1}) = 0$ will be approximated with line dependences. In this case the pore volume in the determined soil prism will be:

$$V = \sigma^{(j+1)} \varphi(\mathbf{X}^{(j+1)}, t_{j+1}) - \sigma^{(j)} \varphi(\mathbf{X}^{(j)}, t_j), \quad (3)$$

where σ is variable porosity; $\sigma^{(j)} = \sigma(\mathbf{X}^{(j)}, t_j)$; $\mathbf{X}^{(j)} \in S^{(j)}$ is a point, adequate to determined area $S^{(j)}$.

As one can see from (3) porosity in areas $S^{(j)}$ and $S^{(j+1)}$ is averaged and is equal to indicated value in the points $\mathbf{X}^{(j+1)} \in S^{(j+1)}$ and $\mathbf{X}^{(j)} \in S^{(j)}$ accordingly.

From the other side during the time step $\Delta t = t_{j+1} - t_j$ change of liquid volume in the identified prism of porous media will be

$$V = (\mathbf{u}, \mathbf{n}) \Delta t, \quad (4)$$

where $\mathbf{u}$ is speed of filtration.

Suppose that $\Delta t \rightarrow 0$. Comparing (3) and (4) we get the kinematic boundary condition

$$\frac{d}{dt}(\sigma \varphi) = (\mathbf{u}, \mathbf{n}). \quad (5)$$

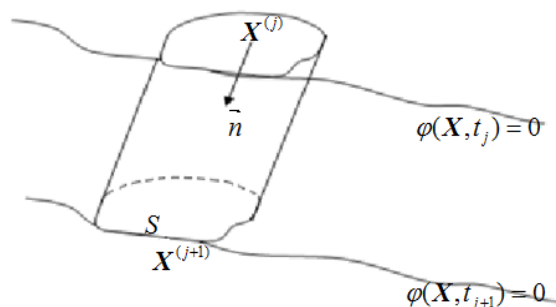


Figure 1. Change of the position of the free movable boundary in time

There is particle derivative in the left part (5). We have

$$\frac{d}{dt}(\sigma \varphi) = \frac{d\sigma}{dt} \varphi + \sigma \frac{d\varphi}{dt}. \quad (6)$$

Taking into account (6), we have the modified kinematic condition from (5)

$$\frac{d\sigma}{dt} \varphi(\mathbf{X}, t) + \sigma \frac{d\varphi(\mathbf{X}, t)}{dt} = (\mathbf{u}, \mathbf{n}). \quad (7)$$

Actually, the condition (7) at $\sigma = \text{const}$ passes in to (2).

4. Consideration of Surface Subsided as the Result of Soil Consolidation.

Change of the free surface position can happen due to compression, decompression, swelling of soil under it. The generalized kinematic boundary condition in case of surface subsided as the result of soil consolidation is deducted in [6]

$$\frac{dl(x, y, t)}{dt} = \int_{l(x, y, t)}^{l(x, y, t)} \left(\frac{e}{1+e} \left(\frac{1}{\rho_p} \frac{d\rho_p}{dt} - \frac{1}{\rho_m} \frac{d\rho_m}{dt} \right) + \nabla \cdot \mathbf{u} \right) dz, \quad (8)$$

where ρ_p is density of pore liquid which depends on concentration of water solution and temperature; ρ_m is density of soil hard particles, which can also depends on the indicated factors; e is void ratio

($e = \frac{\sigma}{1-\sigma}$, σ is soil porosity); $z = l(x, y, t)$ is the equation of the soil upper movable boundary; $z = L(x, y, t)$ is soil lower boundary, which can also be movable, but the law of its change is known.

Let us assume that independence of subsidence and additivity of general subsidence. Taking into account (7), (8), we have

$$\frac{d\sigma}{dt}\varphi(\mathbf{X}, t) + (1+\sigma)\frac{d\varphi(\mathbf{X}, t)}{dt} = (\mathbf{u}, \mathbf{n}) + \int_{L(x, y, t)}^{\varphi(\mathbf{X}, t)} \left(\frac{e}{1+e} \left(\frac{1}{\rho_p} \frac{d\rho_p}{dt} - \frac{1}{\rho_m} \frac{d\rho_m}{dt} \right) + \nabla \cdot \mathbf{u} \right) dz. \quad (9)$$

For possibility of the formula (9) usage it is necessary to know dependences for e (or σ), ρ_p , ρ_m from physical-chemical and mechanical state of porous media (concentration of salt in liquid and hard phases, concentration of suffusion particles, temperature). For example, the detailed analysis of such dependences is presented in the work [6].

5. Consideration of Contact Suffusion Processes.

Suppose that the body of dam is heterogeneous (figure 2). Then change of the free surface position $\varphi(\mathbf{X}, t) = 0$ can happen due to processes of contact suffusion through the boundary Γ_{12} (see [8]). One can suppose that the boundaries $\varphi(\mathbf{X}, t) = 0$ and $\Gamma_{12}(\mathbf{X}, t) = 0$ do not cross.

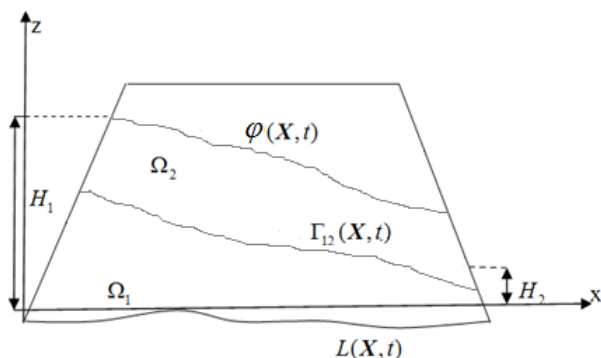


Figure 2. Heterogeneous earth dam

The next kinematic condition for the boundary $\Gamma_{12}(\mathbf{X}, t)$ which moves as the result of contact suffusion was deduced in the work [8]:

$$\left(\sigma_{\max} - \sum_{i=1}^n S_i(\mathbf{X}, t) \right) \frac{d\Gamma_{12}(\mathbf{X}, t)}{dt} = - \sum_{i=1}^n (\mathbf{q}^{(i)}, \mathbf{n}_{12}) \Big|_{\mathbf{X} \in \Gamma_{12}}. \quad (10)$$

where $\mathbf{q}^{(i)}(\mathbf{X}, t)$ is flow of suffusion particles i -of fraction ($i = \overline{1, n}$); $\mathbf{n}_{12}$ is a vector of external normal to Γ_{12} ; $\sigma_{\max}(\mathbf{X}, t) = (1 - \sigma_1)\sigma_2$, σ_1, σ_2 are functions of porosity of “pure” soil in areas Ω_1, Ω_2 accordingly; $S_i(\mathbf{X}, t)$ is concentration of suffusion particles i -of fraction ($i = \overline{1, n}$).

Taking into account the condition (10), we obtain the next modified kinematic condition for free boundary

$$\frac{d\sigma}{dt}\varphi(\mathbf{X}, t) + (1+\sigma)\frac{d\varphi(\mathbf{X}, t)}{dt} = (\mathbf{u}, \mathbf{n}) + \int_{L(x, y, t)}^{\varphi(\mathbf{X}, t)} \left(\frac{e}{1+e} \left(\frac{1}{\rho_p} \frac{d\rho_p}{dt} - \frac{1}{\rho_m} \frac{d\rho_m}{dt} \right) + \nabla \cdot \mathbf{u} \right) dz - \frac{1}{\sigma_{\max} - \sum_{i=1}^n S_i(\mathbf{X}, t)} \sum_{i=1}^n (\mathbf{q}^{(i)}, \mathbf{n}_{12}) \Big|_{\mathbf{X} \in \Gamma_{12}}. \quad (11)$$

6. Results of numerical experiments.

We find numerical solutions of filtration consolidation problem of the homogeneous soil dam and filtration problem [9] also. We use kinematic boundary condition (7).

Denote

α_m is the thermal expansion coefficient of solid particles of a soil; K_h is the coefficient of filtration; $\mathbf{F}_{osm} = K_c \nabla c + K_T \nabla T$ is the osmosis flow; K_c, K_T are the coefficients of chemical osmosis and thermal osmosis. The coefficient of filtration is dependent on temperature and concentration of salt solution [4, 5].

Because $\sigma = \frac{e}{1+e}$ then we have [7]

$$\frac{d\sigma}{dt} = - \frac{e}{(1+e)^2} \left(\frac{1}{\rho_p} \frac{d\rho_p}{dt} - \frac{1}{\rho_m} \frac{d\rho_m}{dt} \right) + \frac{1}{1+e} (\nabla \cdot (K_h \nabla h) - \nabla \cdot \mathbf{F}_{osm}).$$

Suppose that $\rho_p = \text{const}$. So $\frac{d\rho_p}{dt} \equiv 0$ and

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{e}{(1+e)^2 \rho_m} \frac{d\rho_m}{dt} + \frac{1}{1+e} (\nabla \cdot (K_h \nabla h) - \nabla \cdot \mathbf{F}_{osm}). \quad (12)$$

We know [6] that

$$\frac{d\rho_m}{dt} = -\alpha_m \rho_m \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial N}{\partial t}.$$

Thus we can rewrite equation (12) as

$$\frac{d\sigma}{dt} = -\alpha_m \frac{e}{(1+e)^2} \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{e}{(1+e)^2 \rho_m} \frac{\partial N}{\partial t} + \frac{1}{1+e} (\nabla \cdot (K_h \nabla h) - \nabla \cdot \mathbf{F}_{osm}). \quad (13)$$

Substituting (13) into (7) we get next kinematic boundary condition

$$\left(-\alpha_m \frac{e}{(1+e)^2} \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{e}{(1+e)^2 \rho_m} \frac{\partial N}{\partial t} + \frac{1}{1+e} (\nabla \cdot (K_h \nabla h) - \nabla \cdot \mathbf{F}_{osm}) \right) \varphi(\mathbf{X}, t) + \sigma \frac{d\varphi(\mathbf{X}, t)}{dt} = (-K_h \nabla h + \mathbf{F}_{osm}, \mathbf{n}). \quad (14)$$

Let

$$D_C = 0.001 \text{ m}^2 / \text{day}, D_T = 0.0001 \text{ kg} / \text{day} \cdot \text{m}^\circ \text{C}, \\ K_C = 6 \cdot 10^{-7} \text{ m}^5 / \text{kg} \cdot \text{day}, K_T = 6 \cdot 10^{-8} \text{ m}^2 / ^\circ \text{C} \cdot \text{day}, \\ c_T = 2137 \text{ kJ} / \text{m}^3 \cdot ^\circ \text{C}, c_\rho = 4,2 \text{ kJ} / \text{kg} \cdot ^\circ \text{C},$$

$$\sigma = 0.67, \alpha_m = 5.2 \cdot 10^{-5} 1 / ^\circ \text{C},$$

$$\rho_p = 1100 \text{ kg} / \text{m}^3, \rho_m = 2200 \text{ kg} / \text{m}^3,$$

$$\lambda = 108 \text{ kJ} / \text{m}^\circ \text{C} \cdot \text{day}, C_m = 160 \text{ kg} / \text{m}^3,$$

$$T_0(x) = 4^\circ \text{C}, T_{amm} = 17 + 13 \cos\left(\frac{\pi t}{180}\right),$$

$$C_0(x) = 8 \text{ kg} / \text{m}^3, C_1(t) = 8 \text{ kg} / \text{m}^3.$$

The free surface is parallel to the axis Ox at $t=0$. An initial equation of the free surface is $y=30$. The dimensions of the earth dam: the height is 30 m, width of top bound is 20 m, width of bottom bound is 80 m, length of the dam is 20 m.

We use the finite element method and we choose the FreeFem++ environment [21]. The FreeFem++ is free software with automation mesh generation based on Delaunay-Voronoi algorithm. The fixed-point method is used for approximation of the solutions of kinematic boundary condition (14).

In Fig. 3 we represent the pressure head distribution at a fixed time $t^* = 10$ years. Change of free surface may be about 10% compared to data obtained by excluding factors of salt concentration and temperature. This change increases with time.

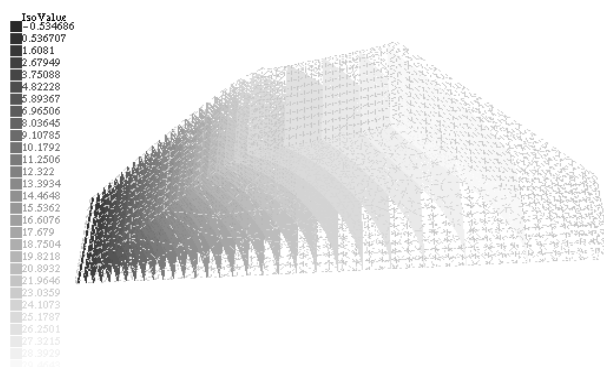


Figure 3. Pressure head distribution ($t^* = 10$ years).

7. Conclusions.

This article proposed to modify the kinematic boundary condition at the free surface of earth dam with taking into account variable porosity and influence of physical and chemical factors. There is need to know dependencies of liquid density, density of soil skeleton from the factors. Then the kinematic boundary condition allows to take into account influence of these factors on change of the free surface position. The authors also took into account soil consolidation and multifractional internal erosion. The further research will be connected with study of influence of consideration of above-mentioned factors on the free surface position.

References

1. BOURAHO, N. G. & KUKUDZHANOV, V. N. (2005) A Survey on Contact Algorithms. *Izvestia RAS, J.Mechanics of Solids*. №1. p.44-85.
2. VLASYUK, A. P. (1995) Numerical solution of the problem of dissolution and removal salt seam in the bases of hydrotechnical constructions. *Reports of the National Academy of Sciences of Ukraine*. №8. p.37-39.
3. VLASYUK, A. P. & STEPANCHENKO, O. M. (2006) Numerical solution of one nonlinear problem of salt seam dissolution. *Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series: Physics & Mathematics*. 2. p.142-150.
4. VLASYUK, A. P. and MARTINYUK, P. M. (2008) *Mathematical Modeling of Soil Consolidation at the Filtration of Salt Solutions under Nonisothermal Conditions*. Rivne, NUVHP.
5. VLASYUK, A. P. and MARTINYUK, P. M. (2010) *Numerical Solution of the Problems of Consolidation and Filtration Fracture of Soils under Conditions of the Heat-Mass Transfer by*

- the Method of Radial Basis Functions Rivne, NUVHP.
6. HERUS, V., MARTINYUK, P. & MICHUTA, O. (2015) General kinematic boundary conditions in the theory of soil filtration consolidation. *Physico-Mathematical Modeling and Informational Technologies*. 22. p.23-30.
 7. HERUS, V. & MARTINYUK, P. (2015) Generalization of equation of soil filtration consolidation. *Bulletin of Kharkiv National University. Series «Mathematical modeling. Information technology. Automated control systems»*. 27. p. 41–52.
 8. MARTINYUK, P. M. & HOSCHKO, O. V. (2013) Mathematical model of soils filtration consolidation taking into account multi-grade suffosion. *Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series: Physics & Mathematics*. 4. p.136-141.
 9. MEDVID, N. V. & MARTINYUK, P. M. (2014) Mathematical modeling of excess pressure in earth dam with culverts and an erosion zone. *Mathematical and computer modeling. Series: Technical Sciences*. 10. p.101-112.
 10. MEDVID, N. V. & MARTINYUK, P. M. (2015) Research of heat and salt transfer effect on filtration rate in soil dam (space problem). *Scientific Journal of the Ternopil National Technical University*. 4(80).p.169-178.
 11. POLUBARINOVA-KOCHINA, P. Ya. (1977) *Theory of Groundwater movement*. Moscow: Nauka.
 12. RADKEVICH, E. V. (1991) On conditions for the existence of a classical solution of the Stefan contact problem. *Math. USSR, Sb.* 69(2). p.497-525.
 13. SERGIENKO, I. V., SKOPETSKYI, V. V. and DEINEKA, V. S. (1991) *Mathematical modeling and research of processes in heterogeneous environments*. Kiev: Nauk.dumka, 1991.
 14. STEPANCHENKO, O. M. & MARTINYUK, P. M. (2015) Finite element method in problems of lime lixiviation from the concrete bases of hydrotechnical construction. *Scientific Journal of the Ternopil National Technical University*. 3(79). p.174-182.
 15. SHAMANSKII, V. E. (1970) The numerical solution of problems on unsteady filtering with free surfaces for the liquid. *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 10(2). p.318-331.
 16. FARIAS, M.M. & CORDAO, M.P. (2010) Advanced numerical simulation of collapsible earth dams. *Can.Geotech. J.* 47. p.1351-1364.
 17. FUSI, L., FARINA, A. & ROSSO, F. (2015) Mathematical models for fluids with pressure-dependent viscosity flowing in porous media. *International Journal of Engineering Science*. 87. p.110-118.
 18. WILSON, G.V., NIEBER, J.L., SIDLE, R.C., & FOX, G.A. (2012) Internal erosion during soil pipe flow: state of the science for experimental and numerical analysis. *American Society of Agricultural and Biological Engineers*. 56(2). p.465-478.
 19. MARTINYUK, P.M. (2015) Existence and uniqueness of a solution of the problem with free boundary in the theory of filtration consolidation of soils with regard for the influence of technogenic factors. *Journal of Mathematical Science*. 207(1).p.59-73.
 20. VLASYUK, A. P. & ZHUKOVSKAYA, N.A. (2015) Mathematical simulation of the stressed-strained state of the foundation of earth dams with an open surface under the two-dimensional case. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*. 88(2).p.329-341.
 21. HECHT, F. (2012) New Development in Freefem++. *Journal of Numerical Mathematics*. 20(3-4). p. 251–266.

Список використаних джерел

1. Бугаго Н.Г. Обзор контактных алгоритмов /Н.Г. Бугаго, В.Н. Кукуджанов //Изв. РАН, МТТ. – 2005. - №1. – С.44-85.
2. Власюк А.П. Чисельне розв'язання задачі розчинення і винесення пластових солей з основи гідротехнічних споруд /А.П. Власюк //Доповіді НАН України. – 1995. - №8. – С.37-39.
3. Власюк А.П. Чисельне розв'язування однієї нелінійної задачі розчинення пласта солі /А.П. Власюк, О.М. Степанченко //Вісник Київського університету. Серія фіз.-матем. науки. – 2006. – Вип.2. – С.142-150.
4. Власюк А.П. Математичне моделювання консолідації ґрунтів при фільтрації сольових розчинів в неізотермічних умовах /А.П. Власюк, П.М. Мартинюк. — Рівне : НУВГП, 2008. — 416 с.
5. Власюк А.П. Чисельне розв'язування задач консолідації та фільтраційного руйнування ґрунтів в умовах тепло-масопереносу методом радіальних базисних функцій /А.П. Власюк, П.М. Мартинюк. — Рівне: Вид-во НУВГП, 2010. – 277с.

6. Герус В. Загальна кінематична гранична умова в теорії фільтраційної консолідації ґрунтів /В. Герус, П. Мартинюк, О. Мічута //Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології. – 2015. – Вип.22. – С.23-30.
7. Герус В. А. Узагальнення рівняння консолідації ґрунтів з урахуванням впливу фізико-хімічних факторів / В. А. Герус, П. М. Мартинюк // Вісник Харківського національного університету ім. В. Н. Каразіна. Сер. Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління. – 2015. – Вип. 27. – С. 41–52.
8. Мартинюк П.М. Математична модель фільтраційної консолідації ґрунтів з урахуванням багатофракційної суфозії /П.М. Мартинюк, О.В. Гошко //Вісник Київського ун-ту. Сер. фіз.-матем. науки. – 2013. – Вип.4. – С.136-141.
9. Медвідь Н.В. Математичне моделювання впливу на надлишкові напори наявності зони вимиву в ґрунтовій греблі з водоводом / Н. В. Медвідь, П. М. Мартинюк // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Технічні науки.- 2014.- Випуск 10.- С.101-112.
10. Медвідь Н.В. Просторова задача фільтрації в ґрунтовій греблі в умовах впливу техногенних факторів/ Н.В.Медвідь, П.М.Мартинюк// Вісник Тернопільського національного технічного університету імені Івана Пулюя. – 2015. – №4(80). – С.169-178.
11. Полубаринова-Кочина П.Я. Теория движения грунтовых вод /П.Я. Полубаринова-Кочина. – М.:Наука, 1977. – 664с.
12. Радкевич В.Е. Об условиях существования классического решения контактной задачи Стефана /В.Е.Радкевич //Математический сборник. – 1990. – 184,№4. – С.464-489.
13. Сергиенко И.В. Математическое моделирование и исследование процессов в неоднородных средах /И.В. Сергиенко, В.В. Скопецкий, В.С. Дейнека. – Киев: Наук.думка, 1991. – 432с.
14. Степанченко О.М. Метод скінченних елементів в задачах вилугування вапна з бетонних фундаментів гідротехнічних споруд /О.М. Степанченко, П.М.Мартинюк// Вісник Тернопільського національного технічного університету. – 2015. - Вип.3(79). – С.174-182.
15. Шаманский В.Е. Численное решение задач неустановившейся фильтрации со свободными поверхностями жидкости /В.Е. Шаманский //Журнал вычисл. матем. и матем. физ. – 1970. – Т.10, №2. – С.505-514.
16. Farias M.M. Advanced numerical simulation of collapsible earth dams /M.M.Farias, M.P.Cordao Neto //Can.Geotech. J. – 2010. – 47. – P.1351-1364.
17. Fusi L. Mathematical models for fluids with pressure-dependent viscosity flowing in porous media /L.Fusi, A.Farina, F.Rosso //International Journal of Engineering Science. – 2015. – Vol.87. – P.110-118.
18. Internal erosion during soil pipe flow: state of the science for experimental and numerical analysis /G.V.Wilson, J.L.Nieber, R.C.Sidle, G.A.Fox //American Society of Agricultural and Biological Engineers. – 2012. – Vol.56(2). – P.465-478.
19. Martynyuk P.M. Existence and uniqueness of a solution of the problem with free boundary in the theory of filtration consolidation of soils with regard for the influence of technogenic factors /P.M. Martynyuk //Journal of Mathematical Science. – 2015. – Vol.207, №1. – P.59-73.
20. Vlasyuk A.P. Mathematical simulation of the stressed-strained state of the foundation of earth dams with an open surface under the two-dimensional case /A.P.Vlasyuk, N.A.Zhukovskaya //Journal of Engineering Physics and Thermophysics. – 2015. – Vol.88, №2. – P.329-341.
21. Hecht F. New Development in Freefem++ / F. Hecht // Journal of Numerical Mathematics. – 2012. – Vol. 20, Is. 3-4. – P. 251–266.

Надійшла до редколегії 17.02.2016

УДК 519.8

Машченко С.О., д. ф.-м. н., проф.,
Моренець В.І., аспірант

**Процедура пошуку N-ядра
кооперативної гри з нечіткою
множиною допустимих коаліцій**

Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 83000, м. Київ, пр-т.
Глушкова 4д,
e-mail: msomail@yandex.ua
e-mail: v.i.morenets@gmail.com

S.O. Mashchenko, D.Sci (Phys-Math.), Prof.,
Morenets V.I., Grad. Stud.

**The procedure of cooperative game nucleolus
finding with the fuzzy set of feasible
coalitions**

Taras Shevchenko National University of Kyiv,
83000, Kyiv, Glushkova st., 4d,
e-mail: msomail@yandex.ua
e-mail: v.i.morenets@gmail.com

Запропоновано процедуру знаходження N-ядра кооперативної гри в характеристичній формі з нечіткою множиною допустимих коаліцій. На кожному кроці процедури розв'язується задача лінійного програмування з нечіткою множиною обмежень. Показано, що множина її розв'язків буде нечіткою множиною типу 2 (нечітка множина, функція належності якої приймає нечіткі значення), побудована її функція належності. Побудована трьох-критеріальна задача пошуку раціонального розв'язку. Розглянутий підхід до отримання наближеного розв'язку цієї задачі.

Ключові слова: кооперативна гра, функція належності, нечітка множина типу 2, N-ядро гри.

The problem of the choice of an equitable distribution of profits among the players, if they agree to cooperation, but not clearly understand what the coalition may be feasible. This is due to the fact that in many real-life situations, not every group of players has the ability to cooperate and therefore all the coalition can not be formed. The well-known concept of cooperative games nucleolus generalized to the case of fuzzy sets of feasible coalition players. The problem of the linear programming with the fuzzy set of constraints are solving on every step of procedure. It is shown that the set of feasible solutions of this problem is the intersection of fuzzy set of crisp sets. This is the fuzzy set of type 2 (a fuzzy set, membership function which takes a fuzzy values). The membership function of this set is build. A three-criteria optimization problem of finding a rational solution is proposed. The approach to obtain an approximate solution of this problem is considered. The proposed approach extends the scope of the theory of fuzzy sets in case of cooperative games with fuzzy set of feasible coalitions and may provide a new approach to solving other problems of game theory.

Keywords: cooperative game, membership function, fuzzy set of type 2, nucleolus of game.

Статтю представив д. т. н., проф. Гаращенко Ф.Г.

Вступ. В класичних кооперативних іграх припускається, що для заданої множини гравців будь-яка їхня коаліція є допустимою. В реальних ситуаціях, які можуть бути змодельованими кооперативними іграми з трансферабельною корисністю, не всі коаліції гравців можуть утворитися з різних причин економічного, політичного або технічного характеру. Більше того, в деяких випадках буває також складно чітко вказати множину дозволених коаліцій.

Розглянемо кооперативну гру у характеристичній формі $\langle N, v \rangle$, де $N = \{1, \dots, n\}$ – множина

гравців, $n \geq 2$; $v: 2^N \rightarrow R^1$ – характеристична функція, яка кожній коаліції гравців співставляє її гарантований виграш, причому $v(\emptyset) = 0$, $v(S \cup T) \geq v(S) + v(T)$ для $\forall S, T \subset N$, $S \cap T = \emptyset$.

Нехай $\Omega \subseteq 2^N \setminus N$ – набір можливих коаліцій (в яких гравці можуть співпрацювати разом). Тоді грою з обмеженою кооперацією будемо називати трійку $\langle N, v, \Omega \rangle$.

Узагальнення вектора Шеплі для ігор з обмеженою кооперацією розглядалися R. Myerson [1], пізніше їх аналізували G. Owen [2] і P. Borm, G. Owen і S. Tijs [3].

В деяких випадках буває складно чітко вказати заборонені коаліції. Цей випадок розглядався авторами в [4] для знаходження S -ядра. В цій роботі розглядається N -ядро кооперативної гри з нечіткою множиною дозволених коаліцій.

N -ядро. Говорять, що вектор $x = (x_1, \dots, x_n)$ не гірше за вектор $y = (y_1, \dots, y_n)$ у сенсі лексикографічного порядку и записувати $x \geq y$, якщо $x = y$, або $\exists i = \overline{1, n}$, для котрого $x_i > y_i$ и $x_j = y_j$ для $\forall j < i$.

Позначимо через $x_{\uparrow} = (x_{(1)}, \dots, x_{(n)})$ – вектор, компоненти якого $x_{(1)} \leq \dots \leq x_{(n)}$ є компонентами вектора x та впорядковані за зростанням. Говорять, що вектор $x = (x_1, \dots, x_n)$ не гірше за $y = (y_1, \dots, y_n)$ у сенсі лексмінного порядку и записувати $x \geq_{\uparrow} y$, якщо $x_{\uparrow} \geq y_{\uparrow}$.

Нехай $f(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x))$ – деяка вектор-функція. Позначимо через

$$\text{Lex max}_{x \in X} f(x) = \{x \in X \mid f(x) \geq_{\uparrow} f(y), \forall y \in X\}$$

– множину максимальних елементів множини X за відношенням $\geq_{\uparrow}$ лексмінного порядку.

Ексцесом вектору $x = (x_1, \dots, x_n)$ відносно коаліції K називається $e(x, K) = \sum_{i \in K} x_i - v(K)$.

Нехай X – множина векторів $x = (x_1, \dots, x_n)$, які задовольняють рівності $\sum_{i=1}^n x_i = v(N)$. Для

кожного вектора $x \in R^n$ визначено $2^n - 2$ чисел $e(x, K)$, де K пробігає множину власних коаліцій (всіх можливих коаліцій за виключенням порожньої та всієї множини гравців). Впорядкувавши множину власних коаліцій, ми можемо розглядати набір $e(x)$ чисел $e(x, K)$, як елемент $2^n - 2$ -вимірною векторного простору.

N -ядром гри $\langle N, v \rangle$ будемо називати будь-який елемент множини $\text{Lex max}_{x \in X} e(x)$.

Відомо [5], що у будь-якій грі існує єдине N -ядро, яке є поділом виграшів даної гри.

Пошук N -ядра [5]. Позначимо Σ_1 множину усіх власних коаліцій (всіх коаліцій за виключенням усієї множини гравців N).

Крок 1. Знайдемо максимум функції

$\min_{K \in \Sigma_1} e(x, K)$ на множині векторів, які

задовольняють рівності $\sum_{i=1}^n x_i = v(N)$. Очевидно,

N -ядро належить множині розв'язків цієї задачі.

Введенням допоміжної змінної w ця задача зводиться до задачі лінійного програмування:

$$w \rightarrow \max, \quad (1)$$

$$e(x, K) \geq w, \quad K \in \Sigma_1, \quad (2)$$

$$\sum_{i=1}^n x_i = v(N). \quad (3)$$

Розв'язку (1) – (3) $(x^{(1)}, w^{(1)})$ відповідає сідлова точка $(x^{(1)}, w^{(1)}, \lambda^{(1)}, \mu^{(1)})$ функції Лагранжа

$$\begin{aligned} w + \sum_{K \in \Sigma_1} \lambda_K \left(\sum_{i \in K} x_i - v(K) - w \right) + \mu \left(\sum_{i \in N} x_i - v(N) \right) = \\ = \left(1 - \sum_{K \in \Sigma_1} \lambda_K \right) w + \sum_{i \in N} \left(\sum_{K \ni i} \lambda_K + \mu \right) x_i - \\ - \sum_{K \in \Sigma_1} \lambda_K v(K) - \mu v(N), \end{aligned}$$

де двоїсті змінні λ_K є невід'ємними, а змінна μ є довільною.

Звідси випливає, що $\sum_{K \in \Sigma_1} \lambda_K^{(1)} = 1$, а значить

множина $\Xi_1 = \{K \in \Sigma_1 : \lambda_K^{(1)} > 0\}$ не порожня. Тоді для будь-якої коаліції $K \in \Xi_1$ виконується рівність $\sum_{i \in K} x_i^{(1)} - v(K) = w^{(1)}$. Покладемо

$\Sigma_2 = \Sigma_1 \setminus \Xi_1$ і перейдемо до кроку 2.

Крок 2. Розв'яжемо задачу:

$$w \rightarrow \max, \quad (4)$$

$$e(x, K) \geq w, \quad K \in \Sigma_2, \quad (5)$$

$$\sum_{i=1}^n x_i = v(N), \quad (6)$$

$$e(x, K) \geq w^{(1)}, \quad K \in \Sigma_1, \quad (7)$$

$$\dots \\ e(x, K) \geq w^{(t-1)}, \quad K \in \Sigma_{t-1}. \quad (8)$$

Очевидно, ця задача еквівалентна пошуку максимуму функції $\min_{K \in \Sigma_t} e(x, K, v)$ на множині

векторів, які задовольняють умовам (6) – (8).

Якщо N -ядро належить множині допустимих розв'язків цієї задачі, то воно належить і множині її максимумів.

Її розв'язку $(x^{(t)}, w^{(t)})$ відповідає сидлова точка $(x^{(0)}, w^{(0)}, \lambda^{(0)}, \mu^{(0)})$ функції Лагранжа

$$\begin{aligned} & w + \sum_{K \in \Sigma_t} \lambda_K \left(\sum_{i \in K} x_i - v(K) - w \right) + \\ & + \sum_{k=1}^{t-1} \sum_{K \in \Xi_k} \lambda_K \left(\sum_{i \in K} x_i - v(K) - w_k \right) + \mu \left(\sum_{i \in N} x_i - v(N) \right) = \\ & = \left(1 - \sum_{K \in \Sigma_t} \lambda_K \right) w + \sum_{i \in N} \left(\sum_{K \ni i} \lambda_K + \mu \right) x_i - \\ & - \sum_{k=1}^{t-1} \sum_{K \in \Xi_k} \lambda_K w_k - \sum_{K \in \Sigma_t} \lambda_K v(K) - \mu v(N), \end{aligned}$$

де двоїсті змінні λ_K є невід'ємними, а змінна μ є довільною.

Оскільки для $K \in \Xi_k$ виконуються рівності $w^{(k)} = e(x^{(k)}, K)$, то $\Xi_t = \{K \in \Sigma_t : \lambda_K^{(t)} > 0\}$ не порожня, і для будь-якої коаліції $K \in \Xi_t$ виконується рівність $w^{(t)} = e(x^{(t)}, K)$.

Після розв'язання задачі t , переходимо до задачі з номером $(t+1)$, якщо ранг системи ринянь:

$$\begin{aligned} e(x, K) &= w^{(1)}, \quad K \in \Sigma_1, \\ &\dots \\ e(x, K) &= w^{(t)}, \quad K \in \Sigma_t. \end{aligned}$$

менше за n . В протилежному випадку завершуємо алгоритм.

Оскільки кількість рівнянь цієї системи з кожним кроком зростає, то робота алгоритму обов'язково завершиться. Єдиний розв'язок цієї системи рівнянь і буде N -ядром.

N -ядро кооперативної гри з нечіткою множиною дозволених коаліцій. Припустимо, що гравці не можуть чітко сказати, які коаліції з множини $\Omega = 2^N \setminus N$ усіх можливих, можуть бути дозволеними, а їм відома лише функція належності $\mu(S)$, $S \in \Omega$, нечіткої множини $\tilde{\Omega}$ дозволених коаліцій. Тоді виникає кооперативна гра з нечіткою множиною дозволених коаліцій, яка задається трійкою $\langle N, v, \tilde{\Omega} \rangle$. Якщо узагальнити на цей випадок метод розподілу виграшу всієї спільноти гравців згідно до концепції N -ядра, то на кроці $t = 1, 2, \dots$ алгоритма пошуку N -ядра задача (4) – (8) прийме наступний вигляд:

$$w \rightarrow \max, \quad (9)$$

$$e(x, K) \geq w, \quad (K, \mu(K)) \in \tilde{\Sigma}_t, \quad (10)$$

$$\sum_{i=1}^n x_i = v(N), \quad (11)$$

$$e(x, K) \geq w^{(1)}, \quad K \in \Sigma_1, \quad (12)$$

$$\dots \\ e(x, K) \geq w^{(t-1)}, \quad K \in \Sigma_{t-1}. \quad (13)$$

де запис (10) слід розуміти таким чином.

Позначимо $X^{(t-1)} = \{x = (x_i)_{i \in N} \mid \sum_{i \in N} x_i = v(N),$

$e(x, K) \geq w^{(1)}, K \in \Sigma_s, s = 1, \dots, t-1\}$ – множини ситуацій гри, яка задовольняє умовам (11) – (13). Очевидно це буде підмножина поділів, яка окреслена умовами (12) – (13). Нехай $F_K^{(t)} = \{x = (x_i)_{i \in N} \mid x \in X^{(t-1)}, e(x, K) \geq w, K \in \Sigma_t\}$

– множина векторів x , які задовольняють умові (5) для коаліції $K \in \Sigma_1$ та умовам (11) – (13). Тоді запис вигляду (10) означає, що множина допустимих розв'язків системи (10) – (13) повинна задаватися множиною $\tilde{F}^{(t)} = \bigcap_{K \in \Sigma_t} F_K^{(t)}$, де

згідно [6] $\bigcap_{K \in \Sigma_t} F_K^{(t)}$ – перетин нечіткої множини

Σ_1 чітких множин $F_K^{(t)}$, який представляє собою нечітку множину типу 2.

Перетин нечіткої множини чітких множин.

Визначимо це поняття відповідно до підходу, який був запропонований в [6].

В просторі R^n визначимо функцію належності (характеристичну функцію) чіткої множини F_K , $K \in \Sigma_t$, яку позначимо

$$\phi_K(x) = \begin{cases} 1, & e(x, K) \geq w, \\ 0, & e(x, K) < w. \end{cases}$$

Для довільного $x \in R^n$ введемо відношення домінування на множині коаліцій Σ_t .

Говоритимемо, що коаліція $K \in \Sigma_t$ домінує коаліцію $T \in \Sigma_t$ для $x \in R^n$ і позначати це $K \overset{x}{\succ} T$, якщо справедливі такі нерівності: $\phi_K(x) \leq \phi_T(x)$, $\mu(K) \geq \mu(T)$ і хоча б одна з них строга.

Позначимо

$$\tilde{\mu}(x, K) = \begin{cases} \mu(K), & K \in PO(x), \\ 0, & K \notin PO(x), \end{cases}$$

де $PO(x) = \{K \in \Sigma_t \mid K \not\overset{x}{\succ} S, \forall K \in \Sigma_t\}$.

Перетином нечіткої множини $\tilde{\Sigma}_t$ чітких

коаліцій F_K , $K \in \Sigma_t$, називається [6] $\tilde{F} = \bigcap_{K \in \Sigma_t} F_K$ - достатньо, що б для $x \in R^n$:

нечітка множина типу 2, яка задається трійками $(x, y, \psi(x, y))$, де $\psi: R^n \times Y \rightarrow \{0, 1\}$ - функція належності нечіткого відображення $\tilde{\Phi}$, що виконує роль нечіткої функції належності, яка визначена таким чином:

$$\psi(x, y) = \max_{K \in \Sigma_t} \{\mu(x, K) | \phi_K(x) = y\},$$

якщо $\exists K \in \Sigma_t \phi_K(x) = y$;

$$\psi(x, y) = 0,$$

якщо $\forall K \in \Sigma_t \phi_K(x) \neq y$;

x - елемент простору R^n ;

y - елемент універсальної множини $Y = \{0, 1\}$

значень функції належності $\psi(x, y)$ нечіткої множини $\tilde{F}$ типу 2.

Значення $\psi(x^0, 1)$ можна розуміти як ступінь належності вектора $x^0 \in R^n$ множині $\tilde{F}$. Відповідно значення $\psi(x^0, 0)$ має сенс ступеню відсутності належності $x^0 \in R^n$ множині $\tilde{F}$.

Оскільки функція приналежності $\phi(x, y)$ однозначно визначає нечітке відображення $\tilde{\Phi}$, яке, у свою чергу, однозначно визначає нечітку множину $\tilde{F}$ типу 2, то надалі називатимемо $\phi(x, y)$ функцією належності нечіткої множини $\tilde{F}$ типу 2, а її значення - достовірністю ступеня належності $y \in Y = [0, 1]$ елемента простору R^n нечіткій множині $\tilde{F}$ типу 2.

Позначимо через $K^* = \text{Arg max}_{T \in \Sigma_t} \mu(T)$ -

множину коаліцій з максимальним ступенем належності до нечіткої множини допустимих коаліцій.

Спростити побудову функції належності $\psi(x, y)$ дозволяє наступна теорема [6].

Теорема. Нехай F_K , $K \in \Sigma_t$, - чіткі множини, які задані в просторі R^n відповідними характеристичними функціями $\phi_K(x)$, $x \in R^n$, $K \in \Sigma_t$; $\mu(K)$, $K \in \Sigma_t$, - функція належності нечіткої множини коаліцій $\tilde{\Sigma}_t$. Для того, щоб нечітка множина $\tilde{F}$ типу 2, яке задана функцією належності $\psi(x, y)$, $x \in R^n$, $y \in \{0, 1\}$, була перетином нечіткої множини $\tilde{\Sigma}_t$ чітких коаліцій F_K , $K \in \Sigma_t$, тобто $\tilde{F} = \bigcap_{K \in \Sigma_t} F_K$ необхідно и

$$\psi(x, 0) = \begin{cases} \max_{\phi_K(x)=0} \mu(K), & \exists K \in \Sigma_t \phi_K(x) = 0, \\ 0, & \forall K \in \Sigma_t \phi_K(x) = 1, \end{cases}$$

$$\psi(x, 1) = \begin{cases} \max_{K \in \Sigma_t} \mu(K), & \forall K \in K^* \phi_K(x) = 1, \\ 0, & \exists K \in K^* \phi_K(x) = 0. \end{cases}$$

Пошук N-ядер заданого рівня достовірності.

Повернемось до задачі (4) - (8). З викладених вище міркувань стає зрозуміло, що множина $\tilde{F}^{(t)}$ є нечіткою множиною типу 2, яка задається функцією належності $\psi(x, y)$, $x \in R^n$, $y \in \{0, 1\}$, де

$$\psi^{(t)}(x, 0) = \begin{cases} \max_{e(x, K) < w} \mu(K), & \exists K \in \Sigma_t e(x, K) < w, \\ 0, & \forall K \in \Sigma_t e(x, K) \geq w, \end{cases} \quad (14)$$

- достовірність неналежності $x \in R^n$ N-ядру гри;

$$\psi^{(t)}(x, 1) = \begin{cases} \max_{K \in \Sigma_t} \mu(K), & \forall K \in K^* e(x, K) \geq w, \\ 0, & \exists K \in K^* e(x, K) < w, \end{cases} \quad (15)$$

- достовірність належності $x \in R^n$ N-ядру гри.

В реальній ігровій ситуації гравці прагнуть шукати таку ситуацію гри, яка має мінімальну достовірність $\psi(x, 0)$ неналежності N-ядру гри, а також максимальну достовірність $\psi(x, 1)$ його належності. Таким чином, перед гравцями постає трьохкритеріальна задача:

$$w \rightarrow \max,$$

$$\psi^{(t)}(x, 0) \rightarrow \min, \quad (16)$$

$$\psi^{(t)}(x, 1) \rightarrow \max, \quad x \in X^{(t-1)}.$$

Позначимо $SO^{(t)}$ - множину оптимальних за Слейтером (слабо оптимальних за Парето) розв'язків цієї задачі. Нагадаємо, що розв'язок x^* називається оптимальним за Слейтером для задачі вигляду (16) якщо $\nexists x \in X$, для якого мають місце нерівності: $\psi^{(t)}(x^*, 1) < \psi^{(t)}(x, 1)$, $\psi^{(t)}(x^*, 0) > \psi^{(t)}(x, 0)$.

Загальним раціональним розв'язком задачі (4) - (8) будемо називати нечітку множину $\tilde{X}^{(t)}$ типу 2 з функцією належності

$$\psi_{\tilde{X}^{(t)}}(x, y) = \begin{cases} \psi^{(t)}(x, y), & x \in SO^{(t)}, \\ 0, & x \notin SO^{(t)}, \end{cases}$$

де $y \in Y = \{0, 1\}$.

У разі, коли гравців цікавить конкретний раціональний розв'язок задачі (4) – (8), то його можна вибрати з множини $SO^{(t)}$ за допомогою того або іншого методу багатокритеріальної оптимізації, вирішивши задачу (16).

Легко перевірити, що оптимальний розв'язок x^* «чіткого аналога» (4) – (8) належатиме множині $SO^{(t)}$ із значенням достовірності його недопустимості $\psi^{(t)}(x^*, 0) = 0$. Назвемо цей розв'язок тривіальним розв'язком задачі (4) – (8). Нас, в першу чергу, цікавитимуть нетривіальні розв'язки задачі (4) – (8), які мають строго додатну достовірність недопустимості.

Оптимальний за Слейтером нетривіальний розв'язок x^* задачі (16) назвемо раціональним розв'язком задачі (4) – (8) з достовірностями $\psi^{(t)}(x^*, 1)$ і $\psi^{(t)}(x^*, 0)$ відповідно його належності і неналежності N -ядру гри.

Позначимо через $\Sigma_t^\xi = \{K \in \Sigma_t \mid \mu(K) \leq \xi\}$ підмножину коаліцій множини Σ_t , які мають ступені належності нечіткій множині дозволених коаліцій $\tilde{\Omega}$ не більше за $\xi \in (0, 1)$. Спробуємо спростити задачу (16).

Твердження 1. Нехай $\xi \in (0, 1)$ – задане значення параметра, тоді якщо задача:

$$w \rightarrow \max, \quad (17)$$

$$0 < \psi^{(t)}(x, 0) \leq \xi, x \in X^{(t-1)}, \quad (18)$$

$$e(x, K) \geq w, K \in \Sigma_t \setminus \Sigma_t^\xi. \quad (19)$$

має оптимальний розв'язок, то він буде раціональним розв'язком задачі (4) – (8) з достовірністю допустимості $\mu^{\max} = \max_{K \in \Sigma_t} \mu(K)$ і з достовірністю недопустимості не більше за ξ .

Доведення. Припустимо супротивне, що $x^* \notin SO$. Тоді $\exists \hat{x}$, який задовольняє умовам (18) і (19), що мають місце нерівності: $w(\hat{x}) < w(x^*)$, $\psi^{(t)}(\hat{x}, 1) > \psi^{(t)}(x^*, 1)$, $\psi^{(t)}(\hat{x}, 0) < \psi^{(t)}(x^*, 0)$.

Оскільки x^* – допустимий розв'язок задачі (17) – (19), то з (15) випливає, що $\psi^{(t)}(x^*, 1) = \max_{K \in \Sigma_t} \mu(K) = \mu^{\max}$. Тоді з записаних вище нерівностей $\psi^{(t)}(\hat{x}, 0) < \psi^{(t)}(x^*, 0) \leq \xi$ і $\psi^{(t)}(\hat{x}, 1) > \psi^{(t)}(x^*, 1) \geq \mu^{\max}$. Оскільки, згідно (15) $\psi^{(t)}(\hat{x}, 1) \leq \mu^{\max}$, то отримали суперечність.

Твердження доведене.

Спробуємо далі спростити задачу (16).

Твердження 2. Нехай $\xi \in (0, 1)$ – задане значення параметра, тоді якщо задача:

$$\min_{T \in \Sigma_t^\xi} \max w, \quad (20)$$

$$0 < \psi^{(t)}(x, 0) \leq \xi, x \in X^{(t-1)}, \quad (21)$$

$$e(x, K) \geq w, K \in \Sigma_t \setminus \Sigma_t^\xi. \quad (22)$$

має оптимальний розв'язок, то він буде раціональним розв'язком задачі (4) – (8) з достовірністю допустимості $\mu^{\max} = \max_{K \in \Sigma_t} \mu(K)$ і з достовірністю недопустимості не більше за ξ .

Доведення. Нехай $\xi \in (0, 1)$. Позначимо Q – множину допустимих розв'язків задачі (17) – (19), а P^T – множину допустимих розв'язків – (20) – (22). Спочатку покажемо, що

$$\bigcup_{T \in \Sigma_t^\xi} P^T = Q. \quad (23)$$

Покажемо включення $\bigcup_{T \in \Sigma_t^\xi} P^T \subseteq Q$. Якщо

$\bigcup_{T \in \Sigma_t^\xi} P^T = \emptyset$, то воно є очевидним. Нехай

$x^* \in \bigcup_{T \in \Sigma_t^\xi} P^T \neq \emptyset$. Припустимо супротивне, що

$x^* \notin Q$. Тоді можливі два випадки. В першому випадку не виконується умова (18), тобто $\psi^{(t)}(x^*, 0) > \xi$. Звідси з формули (14) отримаємо $\psi^{(t)}(x^*, 0) = \max_{K \in \Sigma_t} \{\mu(K) \mid \sum_{i \in K} x_i < v(K)\} > \xi$. Тоді

$\exists K \in \Sigma_t \setminus \Sigma_t^\xi$, для якого $\sum_{i \in K} x_i^* < v(K)$, що суперечить умові (22). В другому випадку не виконується умова (19), тобто $\exists K \in \Sigma_t \setminus \Sigma_t^\xi$, для якого $\sum_{i \in K} x_i^* < v(K)$. Тоді не виконується

відповідна умова (22) і тому $x^* \notin P^T \forall T \in \Sigma_t^\xi$ і як наслідок $x^* \notin \bigcup_{T \in \Sigma_t^\xi} P^T$. Отримали суперечність.

Таким чином, $x^* \in Q$ і тому $\bigcup_{T \in \Sigma_t^\xi} P^T \subseteq Q$.

Покажемо включення $Q \subseteq \bigcup_{T \in \Sigma_t^\xi} P^T$. Якщо

$Q = \emptyset$, то воно очевидне. Нехай $x^* \in Q \neq \emptyset$. Припустимо супротивне, що $x^* \notin \bigcup_{T \in \Sigma_t^\xi} P^T$. Тоді

$x^* \notin P^T \forall T \in \Sigma_t^\xi$. Оскільки умови (19) і (22) співпадають, то $e(x^*, K) \geq w, K \in \Sigma_t^\xi$. Оскільки $\Sigma_t^\xi = \{K \in \Sigma_t \mid \mu(K) \leq \xi\}$, то з формул (14) $\psi^{(t)}(x^*, 0) = \max_{K \in \Sigma_t} \{\mu(K) \mid e(x^*, K) < w\} > \xi$, або

$\psi^{(t)}(x^*, 0) = 0$. В обох випадках одержуємо суперечність з умовою (18). Таким чином,

$$x^* \notin \bigcup_{T \in \Sigma_t^\xi} P^T, \text{ звідси випливає } Q \subseteq \bigcup_{T \in \Sigma_t^\xi} P^T \text{ і}$$

справедлива рівність (23).

Завершимо доведення твердження. З рівності (23) очевидно випливає еквівалентність задач (17) – (19) і (20) – (22), чого достатньо на підставі твердження 1 для доведення.

Твердження доведене.

Таким чином, для знаходження раціонального розв'язку задачі (4) – (8) достатньо зробити наступне:

- вибрати число $\xi \in (0,1)$, яке згідно твердженню 2 характеризує максимальну для гравців достовірність неналежності N -ядру;
- побудувати множину коаліцій $\Sigma_t^\xi = \{K \in \Sigma_t \mid \mu(K) \leq \xi\}$ із ступенем належності до N -ядра не більше заданого числа $\xi \in (0,1)$;
- для $\forall S \in \Sigma_t^\xi$ розв'язати задачу:

$$\max w,$$

$$e(x, S) < w, \quad x \in X^{(t-1)}, \quad ;$$

$$e(x, K) \geq w, \quad K \in \Sigma_t \setminus \Sigma_t^\xi.$$

якщо вона має розв'язок, то позначимо його $x_S^{(t)}$, в протилежному випадку вибираємо наступну коаліцію $S \in \Sigma_t^\xi$;

- з отриманих розв'язків $x_S^{(t)}$, $S \in \Sigma_t^\xi$, вибираємо рекордне $\hat{x}^{(t)}$ за значенням цільової функції, тобто $w(\hat{x}^{(t)}) = \arg \max_{S \in \Sigma_t^\xi} w(x_S^{(t)})$.

Висновок. На закінчення слід відмітити, що розглянутий вище підхід розширює область застосування теорії нечітких множин на випадок кооперативних ігор з нечіткою множиною допустимих коаліцій і може дати нові шляхи до розв'язання інших постановок ігрових задач з нечіткою структурою.

Список використаних джерел

1. Myerson R.B. Graphs and cooperation in games / R.B. Myerson // Math. Oper. Res. – 1977. – 2. – pp. 225 – 229.
2. Owen G. Values of graph-restricted games / G. Owen // SIAM J. Algebraic and Discrete Methods. – 1986. – 7. – pp. 210 – 220.
3. Borm P. On the position value for communication situations / Borm P., Owen G., Tijs S. // SIAM J. Disc. Math. – 1992. – 5. – pp. 305 – 320.
4. Машченко С.О. С-ядро кооперативної гри з нечіткою множиною дозволених коаліцій / С.О. Машченко, В.І. Моренець // Вісник Київського університету. Серія: фіз.-мат. науки. – 2015. – № 2. – С. 165 – 169.
5. Maschler M. Geometric properties of the kernel, nucleolus and related solution concepts / M. Maschler, B. Peleg, L.S. Shapley // Mathematics of operations research. – 1979. – 4. – pp. 303 – 338.
6. Машченко С.О. Задача математического программирования с нечетким множеством индексов ограничений / Машченко С.О. // Кибернетика и системный анализ. – 2013. – № 1. – С. 62 – 68.

References

1. MYERSON, R.B. (1977) Graphs and cooperation in games. Math. Oper. Res. 2. pp. 225 – 229.
2. OWEN, G. (1986) Values of graph-restricted games. SIAM J. Algebraic and Discrete Methods 7. pp. 210 – 220.
3. BORM, P.; OWEN, G.; TIJS, S. (1992) On the position value for communication situations. SIAM J. Disc. Math. 5. pp. 305 – 320.
4. MASHCHENKO, S.O.; MORENETS, V.I. (2015) C- core of cooperative game with the fuzzy set of admissible coalitions. Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kiev. Series: Physics & Mathematics. 3. pp. 165 – 169.
5. MASHLER, M.; PELEG, B.; SHAPLEY, L.S. (1979) Geometric properties of the kernel, nucleolus and related solution concepts. Math. of Oper. Res. 4(4). pp. 303 – 338.
6. MASHCHENKO, S. (2013) The problem of the mathematical programming with the fuzzy set of indexes of constraints. Cybernetics and systems analysis. 49(1). pp. 62 – 68.

Надійшла до редколегії 11.01.2016.

УДК 681.3

Никоненко А.О., здобувач

A.O. Nykonenko, PhD candidate

**Дослідження статистичної схожості-
зв'язності**

Statistical similarity-relatedness research

Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 83000, м. Київ, пр-т.
Глушкова 4д,
e-mail: andrey.nikonenko@gmail.com

Taras Shevchenko National University of Kyiv,
83000, Kyiv, Glushkova st., 4d,
e-mail: andrey.nikonenko@gmail.com

Стаття присвячена питанню визначення статистичної схожості слів на базі великого корпусу статей новин. В основі дослідження лежать методи статистичної семантики [1], перевірка базової гіпотези Фірста: "слово характеризується компанією в якій воно зустрічається" [2] та Розподільної Гіпотези (Distributional Hypothesis): "мовні елементи з аналогічним розподілом мають схожі значення" [3]. Важливим для лінгвістики висновком з цих двох гіпотез є твердження про те, що значення конкретного слова, у вирішенні задачі word sense disambiguation (WSD), має базуватися на частотах сумісного входження навколишніх слів контексту. В статті ми торкнемося питання збору даних з великих текстових корпусів, їх аналізу та обробки; проаналізуємо застосування принципів статистичної семантики до задач визначення семантичної схожості та семантичної зв'язності слів. Крім того, проведене дослідження може бути використано в якості допоміжного у вирішенні задачі визначення значення слова (WSD).

Ключові слова: семантична схожість, семантична близькість, статистична схожість.

The article deals with the statistical similarity of words on a base of large newswire corpus. The methods of Statistical Semantics [1], First's basic hypothesis [2] and Distributional Hypothesis [3] are the base of the study. Important conclusion of these hypotheses is the assertion, that the meaning of a particular word in the word sense disambiguation (WSD) task, should be based on frequencies of surrounding context. In the article we analyze the application of the above principles to the problem of determining semantic similarity and semantic relatedness of words. In addition, we deal with processing huge text corpus, collecting word-based statistics, filtering unnecessary elements, extracting semantically meaningful data and solving text-related problems. Besides described earlier, the study can be helpful in the task of determining the meaning of the words (WSD).

Determine the semantic similarity of concepts is one of the most interesting problem of today. Solution of the problem will lead computers to perfectly understanding natural language text. Importance of the subjects causes to a large number of researches in the area. The most of researches are based on the proximity determination on different language resources: dictionaries, thesauri, ontologies. Our research proposes a different approach to the problem - the semantic similarity determination on a base of large text corpus.

Keywords: semantic similarity, semantic relatedness, statistical similarity.

Статтю представив д.ф.-м.н., проф., чл.-кор. НАН України Анісімов А.В.

Швидкий темп розвитку галузі обробки природної мови зумовлює високий інтерес до відкритих проблем в цій галузі. Однією з найбільш гострих проблем на сьогодні є визначення семантичної схожості-зв'язності понять, оскільки від вирішення даної проблеми практично на пряму залежить розуміння комп'ютером змісту тексту. Актуальність

проблеми зумовлює велику кількість досліджень даної тематики, проте більшість з них спираються на визначення близькості понять на основі тих чи інших мовних ресурсів: словників, тезаурусів, онтологій. Наше дослідження пропонує використати інший підхід до проблеми – визначення близькості за допомогою великих текстових корпусів.

Ідея, описана в статті, полягає в обчисленні семантичної схожості-зв'язності понять на базі статистичних властивостей слів, зібраних з досить великого корпусу. В роботі ми розглядаємо триграмну мовну модель, що містить лише семантично значимі частини мови і може бути використана в якості зменшеної за довжиною, але семантично коректної моделі контексту. За час проведення дослідження було проаналізовано більш глибоко природу статистичної схожості-зв'язності, розглянуто декілька різних підходів до вирішення задачі, кроки з їх оптимізації, та методи фільтрації малозначущих елементів.

Наскільки нам відомо, дослідження в такій постановці задачі, а саме: визначення схожості через формування спеціалізованої триграмної мовної моделі, на спеціально підібраних даних (власний великий корпус англomовних новин) проводиться вперше.

Дані та налаштування для проведення дослідження

В якості бази для дослідження нами використано текстовий корпус, зібраний на протязі 2013 року з різних ресурсів новин: AP[5], Noodles [6], PR News Group [7] та інших. В цілому, корпус мультитематичний з деяким зміщенням в бік бізнесових та економічних новин. Всього зібраний корпус містив близько 186тис. новин, після видалення неанглomовних статей, надкоротких статей (до 400 символів) та неповних статей в корпусі лишилося 183420 англomовних статей придатних для обробки. В середньому розмір однієї статті в корпусі коливається від 3 до 50 Кбайт.

Для дослідження статистичної схожості-зв'язності та для перевірки наведених вище гіпотез, нами було вирішено побудувати триграмну мовну модель (language model). Вибір триграмної моделі було продиктовано кількома міркуваннями. По-перше, в задачах обробки природної мови триграмні моделі показують себе більш ефективно, ніж уні- та бі-грамні (в той же час, маючи триграмну модель, ми здатні побудувати на її базі модель меншої мірності). По-друге, при збільшенні числа N в мовній моделі завжди росте розрідженість даних, тож триграмна модель є розумним компромісом між точністю моделі та її достатністю для проведення експериментів. По-третє, при збільшенні числа N розмір моделі зростає зі швидкістю, близькою до експотенційної, тому триграмна модель є

максимально допустимою для побудови на корпусі таких розмірів на наявних комп'ютерних ресурсах (для побудови моделі потрібно 16 Гбайт ПЗУ, а файл результуючої моделі займає близько 500 Мбайт).

Також перевагою триграмної моделі є її природна інтерпретованість до тексту. Кожен триплет містить лівий і правий контекст для центрального слова, таким чином, зібравши всі триплети певного слова, ми отримаємо набір його всіх можливих контекстів.

Предобробка та збір статистики

Об'єктом нашого дослідження є іменники, тому всі триплети містять в центральній позиції лише слова, що мають тег NN або NNS за класифікацією Penn Treebank [8]. В якості лівого та правого контексту буде використано найближчих сусідів іменника, однак, на реальних текстах такий підхід дає дуже розріджені результати через велику кількість часток, сполучників, прийменників та інших незначущих частин мови. Оскільки ми вважаємо, що значення слова в гіпотезі Фірста задаються значеннями інших змістовних елементів, то в якості правого і лівого сусідів для формування триплету ми будемо використовувати саме слова, що несуть певний зміст: іменники, прикметники, дієслова, прислівники, займенники, тощо. Повний список частин мови у відповідності до [8], що можуть заповнювати лівий і правий контекстні слоти, наступний: EX, FW, JJ, JJR, JJS, MD, NN, NNS, NNP, NNPS, PRP, PRP\$, RB, RBR, RBS, VB, VBD, VBG, VBN, VBP, VBZ, WDT, WP, WP\$, WRB. Також крайні слоти можуть заповнювати власні назви та іменовані сутності будь-якого типу.

На Рис.1 схематично зображено процес попередньої обробки тексту:

- етап 1 – визначення частин мови;
- етап 2 – фільтрація слів довжиною менше трьох символів
- етап 3 – фільтрація стоп-слів за словником
- етап 4 – приведення слів до нормальної (базової) форми
- етап 5 – визначення іменованих сутностей та їх границь. В даному випадку, теги NNP та NNPS конвертуються в іменовану сутність невизначеного типу – ProperNoun. Усі іменовані сутності на малюнку складаються з одного слова, крім “President Bill”, що складається з двох слів.

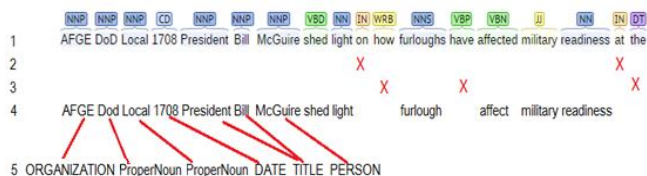


Рисунок 1. Передобробка тексту

З наведеного на Рис. 1 фрагменту тексту буде сформовано три триплети:

1. shed light furlough
2. light furlough affect
3. military readiness ..

В процесі подальшої обробки корпусу, вказані триплети буде додано до мовної моделі у якості можливих контекстів для їх середніх слів. Тобто, “shed _ furlough” для слова “light”; “light _ affect” для слова “furlough”; “military _ ..” для слова “readiness”.

Агрегація іменованих сутностей

У зв'язку з високим ступенем унікальності текстових даних, для боротьби з розрідженістю зібраних триплетів, необхідні механізми агрегації та уніфікації. Причому механізми мають проводити уніфікацію триплетів без втрати або розширення семантики.

Одним з таких механізмів є агрегація іменованих сутностей. З точки зору семантики триплети типу “новий автомобіль Петрова” і “новий автомобіль Сидорова” є абсолютно еквівалентними, тому ми обґрунтовано можемо замінити їх на “новий автомобіль PERSON”. Аналогічні заміни тексту слова на клас сутності ми проведемо з усіма типами іменованих сутностей, в т.ч. і невизначеного типу – ProperNoun. Даний крок дає можливість значно зменшити розрідженість.

Попередні результати та постобробка

Описані вище техніки було реалізовано на базі трьох NLP-фреймворків: OpenNLP [9], CoreNLP [10], LingPipe [11]. Реалізація всіх етапів з Рис. 1 у всіх системах була однаковою, єдиним виключенням став етап 4 – з трьох фреймворків лише Стенфордська реалізація має функціонал з нормалізації форми слова, інші дві системи застосовували SnowBall Stemming [12].

Результати, отримані алгоритмом на базі систем [9] та [10], незважаючи на різні підходи до нормалізації слів, є фактично еквівалентними, результати на базі системи [11] суттєво

відрізняються і містять більшу кількість шумів через інший підхід до токенизації текстів. Після аналізу попередніх результатів, було вирішено взяти за основу систему [10] і всі наступні обчислення проводити використовуючи її засоби попередньої обробки текстів.

В якості результату роботи алгоритму побудовано триграмну модель мови, що зберігається в двох форматах:

- **words** - файл, що містить набори триплетів для кожного слова. Всього унікальних слів 154288.
- **templates** - файл, що містить набори слів для кожного триплета. Всього унікальних триплетів 3728910.

Кожен з файлів містить понад 220Мбайт даних. Приклади наповнення файлів можна переглянути на Рис. 2. та Рис. 3. На Рис. 2. показан фрагмент вмісту *templates* файлу: перший рядок – триплет та сумарна кількість іменників для середньої ячейки, рядки 2-12 – варіанти іменників, що заповнюють середню ячейку триплету, та їх частоти в цій позиції. На Рис. 3. показан фрагмент вмісту *words* файлу: перший рядок – слово та його частота в корпусі; інші рядки – триплети, в яких зустрічається слово, та їх частота в корпусі.

Як видно з наведених чисел (154288 унікальних слів та 3728910 унікальних триплетів), дані досить розріджені і потребують подальшої агрегації. В якості прикладу розглянемо близькість слів “car” (13942 триплетів, з них 8310 унікальних) та “automobile” (1645 триплетів, з них 862 унікальних). Серед триплетів цієї пари всього 108 унікальних спільних триплетів, інші 8202 (98,7%) для car та 754(87,5%) для automobile – не перетинаються. На розріджених даних неможливо робити висновки щодо близькості понять.

Зменшення розрідженості та збір додаткової інформації

В якості заходів подальшого зменшення розрідженості даних, було проаналізовано велику кількість різних гіпотез, з них було обрано та реалізовано наступні підходи:

1. **Перехід від слів до частин мови.** На базі принципу агрегації іменованих сутностей було запропоновано застосувати схожий принцип до слів. Гіпотеза базується на наступному припущенні: у багатьох випадках для визначення змісту слова більшу роль грає не конкретне слово-сусід, а його частина мови. Наприклад, у фрагментах “зелене яблуко в кошику”, “червоне

яблуко в кошику”, “смачне яблуко в кошику”, “стигле яблуко в кошику” – лівий сусід слова “яблуко” може бути будь-яким прикметником, семантичне значення іменника “яблуко” від цього не зміниться. Аналогічний принцип можна застосувати і для інших частин мови в тому числі і для правого сусіда, наприклад: “зелене яблуко в мішку”, “зелене яблуко в ящику”, “зелене яблуко на полиці”. Для перевірки даної гіпотези нами зібрано з корпусу два типи статистик: агреговану (лівий і правий члени триплету замінено частинами мови) та максимально агреговану (усі елементи триплету замінено частинами мови).

Провівши максимальну агрегацію даних, ми отримали 1271 унікальний триплет, деталі розподілу вказано у табл. 1. Десять найчастіших триплетів при максимальній агрегації наведені в табл. 2. та табл. 3.

Використовуючи агреговану версію мовної моделі, ми зводимо триплети для слів “car” та “automobile” до виду більш придатного для обрахування семантичної близькості. Розглянемо отримані дані: “car” (7722 триплети, з них 203 унікальних) та “automobile” (965 триплетів, з них 85 унікальних). Серед усіх триплетів цих двох слів однакові 31 унікальний триплет, інші 172(84,7%) для car та 54(63,5%) для automobile – не перетинаються. Очевидно, що розрідженість даних зменшилася, що призвело до зменшення кількості унікальних триплетів з 98,7% до 84,7% для car та з 87,5% до 63,5% для automobile.

Таблиця 1

	Іменники однини	Іменники множини
Унікальних триплетів у групі	1250	1192
Всього триплетів	13052529	5924688
Відсоток від загальної кількості триплетів	68,8%	31,2%

Таблиця 2

Триплет	NN_NN	JJ_NN	NN_NNS	NN_JJ	NNS_NN
Кількість у корпусі	1966314	1276724	873900	681340	591137
Варіант №1 заповнення середнього слоту	NN	NN	NN	NN	NN
Кількість у корпусі варіанту №1	1570023	988324	644789	446026	429530
Варіант №2 заповнення середнього слоту	NNS	NNS	NNS	NNS	NNS
Кількість у корпусі варіанту №2	396291	288400	229111	235314	161607

Таблиця 3

Триплет	JJ_NNS	JJ_JJ	NNS_NNS	NN_VBN	VB_NN
Кількість у корпусі	576652	415656	397937	353962	275843
Варіант №1 для середнього слоту	NN	NN	NN	NN	NN
Кількість у корпусі варіанту №1	410947	256263	238074	204436	219294
Варіант №2 для середнього слоту	NNS	NNS	NNS	NNS	NNS
Кількість у корпусі варіанту №2	165705	159393	159863	149526	56549

Схожість понять car та automobile за WordSim353 [13] є близькою до 100%, тому ми використовуємо дану пару як індикатор розрідженості даних, в той же час, будемо розглядати іншу пару “dessert” і “sandwich” з низькою схожістю (46% за [13]) в якості індикатору надмірної агрегованості та втрати семантичних ознак даними.

До проведення агрегації за частиною мови дана пара мала наступні характеристики: “dessert” (231 триплет, з них 147 унікальних) та “sandwich” (481 триплет, з них 272 унікальних). Серед цих триплетів спільних 0, тобто dessert та sandwich взагалі не перетинаються.

Після агрегації характеристики пари стали виглядати наступним чином: “dessert” (231 триплет, з них 52 унікальних) та “sandwich” (481 триплет, з них 55 унікальних). Серед цих триплетів спільних 16, тобто тепер 30,7% dessert однакові з 29% sandwich, в результаті чого ми маємо майже 30% схожість пари понять, що були абсолютно різними, отже присутня втрата семантики під час агрегації.

2. Інші методи. Для покращення результатів нами було також застосовано інші методи очищення та оброблення даних. Принцип TFIDF [14] було використано для фільтрації рідких (а значить статистично малозначущих) слів та триплетів, також за допомогою даної міри з корпусу було видалено незначну кількість малозначущих статей. Для семантичної агрегації триплетів понять було запропоновано гіпотезу про збереження змісту слова в границях однієї статті: “усі входження поняття в одному документі тягнуть до одного змісту, отже всі триплети слова, зібрані з одного документу, можуть вважатися такими, що описують один і той самий зміст слова”. Додатково в метрику близькості слів було включено підрахунок перетинів лівих і правих контекстів та

обчислення кількості файлів, в яких сумісно зустрічаються обидва слова пари.

Загалом, метрика визначення семантичної схожості двох слів враховує всі знайдені значущі параметри триплетів:

- 1) загальна кількість триплетів кожного слова;
- 2) кількість спільних триплетів у двох слів;
- 3) загальна кількість файлів для кожного слова;
- 4) кількість файлів, у яких спільно зустрічаються обидва слова;
- 5) кількість лівих та правих контекстів, що є спільними для обох слів.

Прийнявши до уваги всі вказані параметри, нами було проведено розрахунок статистичної схожості для кількох пар слів: “forecast” та “weather”; “hotel” та “restaurant”; “downtown” та “highway”. В табл. 4 наведено статистичні дані, зібрані для кожного слова; ступінь схожості пар, вказану в [13]; та схожість, обчислену на базі зібраних статистик.

Таблиця 4

Схожість за [13]	0.83	0.72	0.68
Слово 1	forecast	hotel	downtown
Файлів зі словом 1	5357	3677	1106
Слово 2	weather	restaurant	highway
Файлів зі словом 2	3406	2953	1245
Спільних файлів для слова 1 і слова 2	533/876 3	896/6630	34/1874
Коеф. для файлів $\text{coeff} = \text{common} / (\text{totalDocs} / 2)$	0.1216	0.2703	0.0255
Триплетів для слова 1	3096	5276	733
Триплетів для слова 2	2475	3456	1141
Спільних триплетів	33	316	34
Коеф. для триплетів $\text{coeff} = 2 * \text{common} / (\text{tripletsA} + \text{tripletsB})$	0.0118	0.0724	0.0363
Всього лівих елементів	17650	60809	2552
Спільних лівих елементів	251	537	121
Всього правих елементів	19501	57350	10835
Спільних правих елементів	276	540	74
Схожість за формулою	0.5828	0.4917	0.9189

Результати

Семантична схожість понять традиційним методом обчислюється на базі онтології шляхом переміщення по IS-A ієрархії. Ключовою різницею між семантичною схожістю і семантичною близькістю є можливість замінити схожі поняття одне одним без втрати змісту.

Звідси, має місце припущення про наявність великої кількості спільних контекстів (а відповідно і триплетів, що модулюють контекст в нашій мовній моделі) у схожих понять.

Проведені експерименти дозволили виявити досить значні відмінності теоритичної моделі від практичної. Серед них найбільш цікаві наступні:

- 1) Однакові за значенням слова bunny та rabbit, що за [13] мають схожість більшу за 90%, в корпусі взагалі не мають спільних триплетів. Аналогічно слова black і dark; copying і replication; endangerment і hazard та багато інших пар. Можливо, це пов'язано з тим, що людина схильна до використання різних слів, що описують одне поняття, в різних контекстах.
- 2) Схожі поняття, що зв'язані в онтологіях IS-A зв'язками, та мають за [13] схожість більшу за 90% також не мають спільних контекстів (триплетів). Наприклад, gem і jewel; cushion і pillow; bakery і bread (2 спільні триплети з 652); strawberry і fruit (0 з 1279);
- 3) Схожі сестринські поняття (мають спільний гіпернім), які мають за [13] схожість більшу за 90% також можуть не мати спільних контекстів. Наприклад, boy і lad (1 з 1258); rain і storm (8 з 1275); autograph і signature (1 з 1484); harbour і port (10 з 2596).

Всі ці, та багато інших колізій потребують подальшого дослідження та пояснення.

Висновки

Проведені дослідження не підтвердили можливість використання гіпотез [2] та [3] для визначення семантичної схожості-зв'язності іменників англійської мови на базі триграмної моделі мови, зібраної на корпусі статей новин. Результати даного дослідження, хоча і говорять про неможливість побудови триграмної моделі, достатньої для обрахунку схожості-зв'язності, проте не виключають можливість застосування гіпотез [2] та [3] для вирішення задачі схожості слів на базі більш складних мовних моделей. В наступних дослідженнях ми розвинемо тематику ролі статистичних даних в задачах визначення семантики тексту на більш складних моделях англійської мови.

Список використаних джерел

1. *Delavenay, Emile* An Introduction to Machine Translation/*E. Delavenay*. – New York, NY: Thames and Hudson, 1960. – OCLC 1001646. pp. 78-92.
2. *Firth, J.R.*, A synopsis of linguistic theory 1930-1955. Studies in Linguistic Analysis (Oxford: Philological Society): 1–32. Selected Papers of J.R. Firth 1952-1959. London, 1957. – pp. 1-32.
3. *Harris, Z.*, Distributional structure/ *Z. Harris*. – Word, 1954. 10 (2-3). pp. 146 –162.
4. *Philip Resnik* Using information content to evaluate semantic similarity in a taxonomy/ *Philip Resnik, Chris S. Mellish* // Proceedings of the 14th international joint conference on Artificial intelligence (IJCAI'95) Morgan Kaufmann Publishers Inc., San Francisco, CA, USA, 1995. – pp. 448-453.
5. Associated Press [Електронний ресурс]. – Режим доступу: <http://www.ap.org/>
6. Gateway to facts [Електронний ресурс]. – Режим доступу: <https://noodls.com/>
7. Public Relations News [Електронний ресурс]. – Режим доступу: <http://www.prnewsonline.com/>
8. Penn Treebank II Constituent Tags [Електронний ресурс]. – Режим доступу: <http://www.surdeanu.info/mihai/teaching/ista555-fall13/readings/PennTreebankConstituents.html>
9. OpenNLP [Електронний ресурс]. – Режим доступу: <http://opennlp.apache.org/>
10. Stanford CoreNLP [Електронний ресурс]. – Режим доступу: <http://nlp.stanford.edu/>
11. LingPipe [Електронний ресурс]. – Режим доступу: <http://alias-i.com/lingpipe/>
12. Snowball: A language for stemming algorithms [Електронний ресурс]. – Режим доступу: snowball.tartarus.org/texts/introduction.html
13. *E. Agirre* A Study on Similarity and Relatedness Using Distributional and WordNet-based Approaches/ *E. Agirre, E. Alfonseca, K. Hall, J. Kravalova, M. Pasca, A. Soroa* // In Proceedings of NAACL-HLT 2009. — pp. 19-27.
14. *Jones K. S.*, A statistical interpretation of term specificity and its application in retrieval. Journal of Documentation, MCB University/ *K. S. Jones*. — Press, 2004. — T. 60, № 5. — pp. 493-502.

References

1. *DELAVENAY, EMILE* (1960) *An Introduction to Machine Translation*. New York, NY: Thames and Hudson. OCLC 1001646, pp. 78-92.
2. *FIRTH, J.R.* (1957) *A synopsis of linguistic theory 1930-1955*. Studies in Linguistic Analysis (Oxford: Philological Society): 1–32. Selected Papers of J.R. Firth 1952-1959. London, pp. 1-32.
3. *HARRIS, Z.* (1954) *Distributional structure*. Word, 10 (2-3), pp. 146–162.
4. *PHILIP RESNIK* (1995) *CHRIS S. MELLISH Using information content to evaluate semantic similarity in a taxonomy*. Proceedings of the 14th international joint conference on Artificial intelligence (IJCAI'95) Morgan Kaufmann Publishers Inc., San Francisco, CA, US, pp. 448-453.
5. Associated Press [Electronic Resource]. – Mode of access : URL : <http://www.ap.org/>
6. Gateway to facts [Electronic Resource]. – Mode of access : URL : <https://noodls.com/>
7. Public Relations News [Electronic Resource]]. – Mode of access : URL : <http://www.prnewsonline.com/>
8. Penn Treebank II Constituent Tags [Electronic Resource]. – Mode of access : URL : <http://www.surdeanu.info/mihai/teaching/ista555-fall13/readings/PennTreebankConstituents.html>
9. OpenNLP [Electronic Resource]. – Mode of access : URL : <http://opennlp.apache.org/>
10. Stanford CoreNLP [Electronic Resource]. – Mode of access : URL : <http://nlp.stanford.edu/>
11. LingPipe [Electronic Resource]. – Mode of access : URL : <http://alias-i.com/lingpipe/>
12. Snowball: A language for stemming algorithms [Electronic Resource]. – Mode of access : URL : snowball.tartarus.org/texts/introduction.html
13. *E. AGIRRE, E. ALFONSECA, K. HALL, J. KRAVALOVA, M. PASCA, A. SOROA* (2009) *A Study on Similarity and Relatedness Using Distributional and WordNet-based Approaches*, In Proceedings of NAACL-HLT 2009, pp. 19-27.
14. *JONES K. S.* (2004) *A statistical interpretation of term specificity and its application in retrieval*. Journal of Documentation, MCB University Press 60 (5), pp. 493-502.

Надійшла до редколегії 10.12.15

УДК 519.21

Прищеп О.В., викладач

Про оптимізацію систем з обмеженнями на число спроб почати обслуговування

Національний університет водного господарства
та природокористування, 33028, м. Рівне, вул.
Соборна, 11,

e-mail: o.v.pryshchepa@nuwm.edu.ua

Pryshchepa O.V., lecturer

On optimization of systems with limited number of retrials

National University of Water and Environmental
Engineering, 33028, Rivne, Soborna Str., 11,

e-mail: o.v.pryshchepa@nuwm.edu.ua

В роботі розглядаються системи масового обслуговування типу $M/M/c/\infty$ з однією повторною спробою почати обслуговування. Для таких систем розглядається порогова стратегія керування інтенсивністю вхідного потоку. Знайдено умови існування стаціонарного режиму, ефективний алгоритм підрахунку стаціонарних ймовірностей та явний вигляд функціоналу якості.

Ключові слова: стохастична система з повторними викликами, процес обслуговування, стаціонарні ймовірності, порогова стратегія, оптимізація.

Retrial queues have been widely used to provide stochastic modelling of many practical situations arising in telecommunication, computer networks and in other field. In this paper retrial queues of the $M/M/c/\infty$ - type in which the rate of input flow depend on the number of sources of retrial calls and in which the number of retrials of each customer is limited by one attempt are considered. That is, if a customer fails to enter the server facility at the retrial attempt, then the customer leaves the system without service. For these systems a threshold strategy for the rate of input flow is used. The existence conditions of stationary regime are found. A vector-matrix representation of the steady-state distribution of the service process is obtained. This representation allows to write down the stationary probabilities through the model parameters. For this we use an approximation of the initial model by means of the truncated one and the direct passage to the limit. The optimization problem for finding optimal strategy of control is considered.

Key words: retrial queue, service process, stationary probabilities, threshold strategy, optimization.

Статтю представив д.т.н., проф. Заславський В.А.

Вступ. Головною особливістю класичних систем масового обслуговування є те, що вимоги, які не можуть отримати обслуговування відразу, надходять до черги та обслуговуються відповідно до визначеної дисципліни або ж залишають систему назавжди. Проте в деяких випадках нетерплячі вимоги залишають чергу та вважаються для системи втраченими. Однак дане припущення про втрату вимог є лише першою апроксимацією реальних ситуацій. Зазвичай такі вимоги після невдалої початкової спроби отримати обслуговування через деякий випадковий проміжок часу повертаються до системи та знову намагаються отримати обслуговування. Класичні системи не беруть до уваги феномен повторних викликів і, таким чином, не можуть використовуватися для розв'язання великої кількості важливих

практичних задач, оскільки втрачається точність моделі. Саме тому слід розглядати системи масового обслуговування з повторними викликами, в яких вимоги, що надійшли до системи при зайнятості всіх каналів обслуговування, повертаються після деякого періоду часу, щоб отримати обслуговування. Особливе значення такі системи мають для комп'ютерних та телекомунікаційних мереж. Більш детально порівняльний аналіз класичних систем та систем з повторними викликами проведено в роботах [1], [2]. При цьому для систем з повторними викликами покладають, що повторне звернення здійснюється до тих пір, поки вимога не отримає обслуговування. Це є лише наближенням реальних ситуацій, тому що число повторних звернень до системи часто буває обмеженим (див. [3]).

Дослідження та оптимізація систем з обмеженим числом спроб почати обслуговування є актуальною на даний час проблемою. Найчастіше для оптимізації систем використовують клас порогових та гістерезисних стратегій.

I. Модель

Основна модель, що розглядається в даній роботі, є двовимірний ланцюг Маркова з неперервним часом $Q(t) = (Q_1(t), Q_2(t))$, $t \geq 0$ у фазовому просторі $S(Q) = \{0, 1, \dots, c\} \times \{0, 1, \dots\}$.

Інфінітезимальні характеристики $a_{(i,j)(i',j')}$, $(i, j), (i', j') \in S(Q)$ ланцюга $Q(t)$ визначаються наступним чином:

1) якщо $i = 0, 1, \dots, c-1$, $j = 0, 1, \dots$, то

$$a_{(i,j)(i',j')} = \begin{cases} \lambda_j, & \text{при } (i', j') = (i+1, j), \\ i\mu, & \text{при } (i', j') = (i-1, j), \\ j\nu, & \text{при } (i', j') = (i+1, j-1), \\ -(\lambda_j + i\mu + j\nu), & \text{при } (i', j') = (i, j), \\ 0, & \text{в інших випадках;} \end{cases} \quad (1)$$

2) якщо $i = c$, $j = 0, 1, \dots$, то

$$a_{(c,j)(i',j')} = \begin{cases} \lambda_j, & \text{при } (i', j') = (c, j+1), \\ c\mu, & \text{при } (i', j') = (c-1, j), \\ j\nu, & \text{при } (i', j') = (c, j-1), \\ -(\lambda_j + c\mu + j\nu), & \text{при } (i', j') = (c, j), \\ 0, & \text{в інших випадках.} \end{cases} \quad (2)$$

Даний ланцюг Маркова описує процес обслуговування в наступній системі. На вхід системи ззовні надходять вимоги для обслуговування. Якщо у момент надходження є хоча б один вільний прилад, то вимога відразу починає обслуговуватися і після цього залишає систему. Час обслуговування – показниково розподілена випадкова величина з параметром μ . Якщо всі прилади зайняті, то вимога стає джерелом повторних викликів та повторно намагається отримати обслуговування через випадковий час, який має показниковий розподіл з параметром ν . Вимога, яка при повторному зверненні знайшла прилад зайнятим, залишає систему та не отримує обслуговування. Інтенсивність вхідного потоку дорівнює λ_j , $j = 0, 1, \dots$ та залежить від кількості джерел повторних викликів. Компонента $Q_1(t)$ вказує на кількість зайнятих приладів в момент часу t , $Q_2(t)$ дорівнює числу джерел повторних викликів. Згідно з прийнятою в теорії масового обслуговування системою позначень таку модель

будемо позначати як $M/M/c/\infty$. Символ " ∞ " на останній позиції означає відсутність обмежень на кількість джерел повторних викликів.

У подальшому будемо вважати $\lambda_j, \mu, \nu > 0$, $j = 0, 1, \dots$, що завжди виконується на практиці. При виконанні цієї вимоги будемо казати, що параметри моделі невироджені.

II. Умови існування стаціонарного розподілу

З'ясуємо умови існування стаціонарного режиму для процесу $Q(t)$.

Лема 1. Якщо $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} \lambda_n < \nu$, то для процесу обслуговування $Q(t)$, $t \geq 0$ багатоканальної системи масового обслуговування з однією спробою повтору існує стаціонарний режим.

Доведення.

Для того, щоб довести існування стаціонарного режиму, розглянемо

$$\varphi(i, j) = \varphi(j) = j, \quad (i, j) \in S(Q),$$

в якості тест-функцій Ляпунова. Для них середній перенос, що визначається як

$$y_{ij} = \sum_{(i', j') \neq (i, j)} a_{(i,j)(i',j')} (\varphi(i', j') - \varphi(i, j)),$$

дорівнює

$$y_{ij} = \begin{cases} -j\nu, & \text{при } i = 0, 1, \dots, c-1, \\ \lambda_j - j\nu, & \text{при } i = c. \end{cases}$$

При $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} \lambda_n < \nu$ для y_{ij} виконуються умови теореми Твіді ([2], стор. 97). Таким чином процес $Q(t)$ є регулярним, ергодичним і його граничний розподіл співпадає з єдиним стаціонарним розподілом. *Лему доведено.*

Змінний характер інтенсивності вхідного потоку в моделі, що розглядається, дає можливість ставити і розв'язувати для них оптимізаційні задачі.

В зв'язку з цим розглянемо порогову стратегію, яка задається порогом H . Якщо в момент часу $t \geq 0$, кількість джерел повторних викликів не перевищує H , то система функціонує в першому режимі і інтенсивність вхідного потоку на вході системи дорівнює h_1 . В іншому випадку, якщо кількість джерел повторних викликів стає більшою за H , то система переходить у другий режим з інтенсивністю вхідного потоку h_2 . Інші параметри від режиму не залежать.

У подальшому індекс H буде вказувати на те, що відповідні характеристики системи

розглядаються при фіксованій пороговій стратегії.

Нехай $S_1(t, H)$ – число викликів, обслуговування яких завершено в системі за час t ; $S_2(t, H)$ – число викликів, які отримали відмову в обслуговуванні і стали повторними викликами; $S_3(t, H)$ – число перемикачів інтенсивності вхідного потоку. Якщо існують границі $\lim_{t \rightarrow \infty}^{-1} S_i(t, H)$, то будемо позначати їх через $S_i(H)$, $i=1,2,3$.

Розглянемо оптимізаційну задачу

$$C_1 S_1(H) - C_2 S_2(H) - C_3 S_3(H) \rightarrow \max, \quad (3)$$

$$H \in \{0, 1, \dots\},$$

де C_1 – прибуток, пов'язаний з обслуговуванням одного виклику; C_2 – штраф за відмову в обслуговуванні; C_3 – штраф за перемикач інтенсивності вхідного потоку.

Розв'язком задачі (3) є такий поріг H , який максимізує середній прибуток від роботи системи. Подібні оптимізаційні задачі для систем з повторними викликами розглядалися в роботах [5], [7], [8].

В умовах існування стаціонарного режиму (див. лему 1) функціонали $S_i(H)$, $i=1,2,3$, теж існують і можуть бути виписані через стаціонарні імовірності

$$S_1(H) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=1}^c i \mu \pi_{ij}(H),$$

$$S_2(H) = h_1 \sum_{j=0}^H \pi_{cj}(H) + h_2 \sum_{j=H+1}^{\infty} \pi_{cj}(H),$$

$$S_3(H) = h_1 \pi_{cH}(H) + (H+1) \nu \sum_{i=0}^c \pi_{iH+1}(H).$$

Таким чином для розв'язання задачі (3) необхідні ефективні алгоритми розрахунку стаціонарного розподілу.

III. Алгоритм підрахунку стаціонарних імовірностей

У загальному випадку при довільній кількості джерел повторних викликів побудувати явні формули для стаціонарних ймовірностей системи з однією спробою почати обслуговування неможливо. Виключення становлять лише одноканальні системи [6]. Тому доцільно спочатку розглядати урізану модель даної системи $M/M/c/N$, яка має скінченну кількість місць для повторних викликів N . При

умові, що всі прилади зайняті та існує N джерел повторних викликів, нові вимоги при надходженні втрачаються системою назавжди.

Процес обслуговування для урізаної моделі визначається двовимірним ланцюгом Маркова $Q^N(t) = (Q_1^N(t), Q_2^N(t))$ з неперервним часом у фазовому просторі $S(Q^N) = \{0, 1, \dots, c\} \times \{0, 1, \dots, N\}$. Інфінітезимальні характеристики $a_{(i,j)(i',j')}$, $(i, j), (i', j') \in S(Q^N)$ ланцюга $Q^N(t)$ збігаються з (1) для $i=0, 1, \dots, c-1$, $j=0, 1, \dots, N$ та з (2) для $i=c$, $j=0, 1, \dots, N-1$, а у випадку $i=c$, $j=N$ визначаються наступним чином:

$$a_{(c,N)(i',j')}^N = \begin{cases} c\mu, & \text{при } (i', j') = (c-1, N), \\ N\nu, & \text{при } (i', j') = (c, N-1), \\ -(c\mu + N\nu), & \text{при } (i', j') = (c, N), \\ 0, & \text{в інших випадках.} \end{cases}$$

Оскільки фазовий простір $S(Q^N)$ процесу $Q^N(t)$ скінченний, то для нього завжди існує стаціонарний режим. Знайдемо його стаціонарний розподіл π_{ij}^N , $(i, j) \in S(Q^N)$.

Введемо наступні позначення:

$$e_i(k) = (\delta_{i0}, \delta_{i1}, \dots, \delta_{ik})^T, \text{ де } \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{при } i = j, \\ 0, & \text{при } i \neq j; \end{cases}$$

$$\bar{1}(k) = (\underbrace{1, 1, \dots, 1}_k)^T;$$

$$F(j) = \|f_{ik}^j\|_{i,k=0}^c, \quad j = 0, 1, \dots, N-1,$$

$$\text{де } f_{ik}^j = \begin{cases} \lambda_j + i\mu + j\nu, & k=i, i=0, 1, \dots, c-1, \\ \lambda_j + c\mu, & k=c, i=c, \\ -\lambda_j, & k=i+1, i=0, 1, \dots, c-2, \\ -i\mu, & k=i-1, i=1, 2, \dots, c, \\ -j\nu, & k=c, i=0, 1, \dots, c-2, \\ -(\lambda_j + j\nu), & k=c, i=c-1, \\ 0, & \text{в іншому випадку;} \end{cases}$$

$$B = \|b_{ik}\|_{i,k=0}^c, \quad j = 0, 1, \dots, N-1,$$

$$\text{де } b_{ik}^j = \begin{cases} 1, & k=i+1, i=0, 1, \dots, c-1, \\ 1, & k=c, i=c, \\ 0, & \text{в іншому випадку;} \end{cases}$$

$$D(N) = \|d_{ik}^N\|_{i,k=0}^{c-1},$$

де

$$d_{ik}^j = \begin{cases} i\mu, & k=i, i=1,2,\dots,c-1, \\ -(\lambda_N + N\nu), & k=i-1, i=1,\dots,c-1, \\ -N\nu, & k=i-2, i-3, \dots, i-c+1, i=2,3,\dots,c-1, \\ 0, & \text{в іншому випадку;} \end{cases}$$

$$W(j) = BF^{-1}(j), \quad j = 0,1,\dots,N-1.$$

Перевіримо, що матриці $F(j)$, $j = 0,1,\dots,N-1$ та $D(N)$ є невідродженими.

Лема 2. Якщо $\lambda_j, \mu, \nu > 0$, то матриці $F(j)$, $j = 0,1,\dots,N-1$ та $D(N)$ є невідродженими.

Доведення.

Для перевірки на невідродженість матриць $F(j)$, $j = 0,1,\dots,N-1$ скористаємося послабленими умовами Адамара [4, с.408]:

$$\left| f_{ii}^j \right| - \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^c \left| f_{ik}^j \right| \geq 0, \quad i = 0,1,\dots,c. \quad (4)$$

Умови (4) означають, що всі діагональні елементи матриць $F(j)$ є слабко домінуючими. Враховуючи вигляд вище введеної матриці, маємо

$$\lambda_j + i\mu + j\nu - \lambda_j - i\mu - j\nu = 0, \quad i = 0,1,\dots,c-1;$$

$$\lambda_j + c\mu - c\mu = \lambda_j > 0, \quad i = c.$$

Матриця $D(N)$ є трикутною матрицею і тому

$|D(N)| = \prod_{i=1}^{c-1} i\mu > 0$, що означає невідродженість матриці.

Таким чином, якщо параметри системи $\lambda_j, \mu, \nu > 0$, то матриці $F(j)$, $j = 0,1,\dots,N-1$ та $D(N)$ є невідродженими.

Лему доведено.

Теорема 1. Якщо $\lambda_j, \mu, \nu > 0$, то стаціонарні ймовірності $\pi_{ij}^{(N)}$, $(i,j) \in S(Q^N)$ мають наступний вигляд:

$$\begin{pmatrix} \pi_{1N}^N \\ \pi_{2N}^N \\ \dots \\ \pi_{c-1N}^N \end{pmatrix} = \pi_{0N}^N D^{-1}(N) (N\nu \bar{1}(c-1) + \lambda_N e_1(c-1)), \quad (5)$$

$$\pi_{cN}^N = \frac{\pi_{0N}^N}{c\mu} (r_{0N}^N, r_{1N}^N, \dots, r_{c-1N}^N) (N\nu \bar{1}(c) + \lambda_N e_c(c)), \quad (6)$$

$$\begin{pmatrix} \pi_{0j}^N \\ \pi_{1j}^N \\ \dots \\ \pi_{cj}^N \end{pmatrix} = \frac{\pi_{0N}^N N! \nu^{N-j}}{j!} (r_{0N}^N, r_{1N}^N, \dots, r_{cN}^N) W(N-1) \times \dots \times W(j), \quad (7)$$

$$j = 0,1,\dots,N-1.$$

$$\pi_{0N}^N = \left\{ N! \sum_{j=0}^{N-1} \frac{\nu^{N-j}}{j!} (r_{0N}^N, r_{1N}^N, \dots, r_{cN}^N) W(N-1) \times \dots \times W(j) \bar{1}(c+1) + \right. \\ \left. + (r_{0N}^N, r_{1N}^N, \dots, r_{c-1N}^N) \bar{1}(c) + \frac{1}{c\mu} (r_{0N}^N, r_{1N}^N, \dots, r_{c-1N}^N) (N\nu \bar{1}(c) + \lambda_N e_c(c)) \right\}^{-1}, \quad (8)$$

$$\text{де } \begin{pmatrix} r_{0N}^N \\ r_{1N}^N \\ \dots \\ r_{c-1N}^N \end{pmatrix} = \left(D^{-1}(N) (N\nu \bar{1}(c-1) + \lambda_N e_1(c-1)) \right),$$

$$r_{cN}^N = \frac{1}{c\mu} (r_{0N}^N, r_{1N}^N, \dots, r_{c-1N}^N) (N\nu \bar{1}(c) + \lambda_N e_c(c)),$$

$$W(j) = BF^{-1}(j), \quad j = 0,1,\dots,N-1.$$

Доведення.

Для кожного $k = 0,1,\dots,c-1$ розіб'ємо $S(Q^N)$ на дві підмножини $E_k = \{(0,N), (1,N), \dots, (k,N)\}$ та $\bar{E}_k = S(Q^N) \setminus E_k$. В силу рівності потоків ймовірностей через замкнений контур у стаціонарному режимі ([9], стор.49), будемо мати

$$N\nu \pi_{0N}^N + N\nu \pi_{1N}^N + \dots + N\nu \pi_{k-1N}^N + (N\nu + \lambda_N) \pi_{kN}^N = \\ = (k+1)\mu \pi_{k+1N}^N, \quad k = 0,1,\dots,c-1. \quad (9)$$

Введемо нову змінну $r_{ij}^N = \frac{\pi_{ij}^N}{\pi_{0N}^N}$, $(i,j) \in S(Q^N)$.

Тоді з перших $(c-1)$ рівнянь системи (9) маємо

$$\begin{pmatrix} r_{1N}^N \\ r_{2N}^N \\ \dots \\ r_{c-1N}^N \end{pmatrix} = D^{-1}(N) (N\nu \bar{1}(c-1) + \lambda_N e_1(c-1)). \quad (10)$$

З (9) при $k = c-1$ знаходимо

$$r_{cN}^N = \frac{1}{c\mu} (r_{0N}^N, r_{1N}^N, \dots, r_{c-1N}^N) (N\nu \bar{1}(c) + \lambda_N e_c(c)). \quad (11)$$

Для кожного $j = 0,1,\dots,N-1$ побудуємо розбиття фазового простору $S(Q^N) = S_j(Q^N) \cup \bar{S}_j(Q^N)$, де $S_j(Q^N) = \{(k,m) \in S(Q^N) : m \leq j\}$. Знову використовуючи теорему про рівність потоку ймовірностей через границю області $S_j(Q^N)$ в стаціонарному режимі та зважаючи на введену нову змінну, маємо

$$\lambda_j r_{cj}^N = (j+1) \nu r_{0j+1}^N + \dots + (j+1) \nu r_{cj+1}^N. \quad (12)$$

Розглянемо тепер $(c+1) \times N$ замкнених контурів, які містять одну точку (i, j) з області $\tilde{S}(Q^N) = \{0, 1, \dots, c\} \times \{0, 1, \dots, N-1\}$. Відповідні рівняння для r_{ij}^N , $(i, j) \in \tilde{S}(Q^N)$ мають вигляд

$$(\lambda_j + j \nu) r_{0j}^N = \mu r_{1j}^N, \quad i = 0, \quad (13)$$

$$(\lambda_j + i \mu + j \nu) r_{ij}^N = (j+1) \nu r_{i-1j+1}^N + \lambda_j r_{i-1j}^N + (i+1) \mu r_{i+1j}^N, \quad i = 1, 2, \dots, c-1, \quad (14)$$

$$(\lambda_j + c \mu + j \nu) r_{cj}^N = \lambda_j r_{c-1j}^N + \lambda_{j-1} r_{cj-1}^N + (j+1) \nu r_{c-1j+1}^N + (j+1) \nu r_{cj+1}^N, \quad i = c. \quad (15)$$

Покладемо в рівнянні (12) $j = j-1$ та перепишемо (15) у вигляді

$$(\lambda + c \mu) r_{cj}^N = (\lambda_j + j \nu) r_{c-1j}^N + \lambda_{j-1} r_{cj-1}^N + (j+1) \nu r_{c-1j+1}^N + (j+1) \nu r_{cj+1}^N + j \nu r_{0j}^N + j \nu r_{1j}^N + \dots + j \nu r_{c-2j}^N, \quad i = c.$$

Подамо тепер систему (13)–(15) у векторно-матричному вигляді

$$(r_{0j}^N, r_{1j}^N, \dots, r_{cj}^N) F(j) = (j+1) \nu (r_{0j+1}^N, r_{1j+1}^N, \dots, r_{cj+1}^N) B$$

або

$$(r_{0j}^N, r_{1j}^N, \dots, r_{cj}^N) = (j+1) \nu (r_{0j+1}^N, r_{1j+1}^N, \dots, r_{cj+1}^N) B F^{-1}(j) = (j+1) \nu (r_{0j+1}^N, r_{1j+1}^N, \dots, r_{cj+1}^N) W(j), \quad j = 0, 1, \dots, N-1, \quad (16)$$

оскільки за лемою 2 обернені матриці $F^{-1}(j)$ існують.

Розв'язок векторно-матричного рекурентного рівняння (16) можна знайти у вигляді

$$(r_{0j}^N, r_{1j}^N, \dots, r_{cj}^N) = \frac{N! \nu^{N-j}}{j!} (r_{0N}^N, r_{1N}^N, \dots, r_{cN}^N) W(N-1) \times \dots \times W(j), \quad j = 0, 1, \dots, N-1. \quad (17)$$

Умова нормування для стаціонарних ймовірностей $\pi_{ij}^{(N)}$, $(i, j) \in S(Q^N)$, яка виглядає

так $\sum_{i=0}^c \sum_{j=0}^N \pi_{ij}^N = 1$, може бути переписана наступним чином

$$\sum_{i=0}^{c-1} r_{iN}^N + r_{cN}^N + \sum_{i=0}^c \sum_{j=0}^{N-1} r_{ij}^N = (\pi_{0N}^N)^{-1}.$$

Підставляючи сюди вирази з формул (10), (11), (17), отримаємо (8).

Співвідношення (5)–(7) є безпосереднім наслідком (10), (11), (17). *Теорему доведено.*

Доведена теорема містить у собі ефективну рекурентну процедуру для знаходження стаціонарного розподілу керованої системи $M/M/c/N$ з однією спробою повтору та обмеженою кількістю джерел повторного виклику. Результат теореми застосуємо для пошуку явних формул для стаціонарних ймовірностей керованої системи з одним приладом та доведемо можливість перенесення вказаного результату на систему без обмежень на кількість джерел повторних викликів.

Введемо позначення

$$A_i(j) = \begin{cases} \prod_{k=i}^{j-1} \frac{\lambda_{k+1} + (k+1)\nu + \mu}{\lambda_k (\lambda_k + k\nu)}, & i < j, \\ 1, & i = j. \end{cases} \quad (18)$$

Наслідок 1. Якщо для $M/M/1/\infty$ системи з однією спробою повтору виконуються умови леми 1, то для неї існує стаціонарний режим стаціонарні ймовірності дорівнюють

$$\pi_{0j} = \frac{P_j}{j! \nu^j}, \quad (19)$$

$$\pi_{1j} = \frac{P_j (\lambda_j + j \nu)}{j! \mu \nu^j}, \quad (20)$$

$$P_j = \left\{ \sum_{i=0}^j \frac{(\lambda_i + i \nu + \mu) A_i(j)}{i! \mu \nu^i} + \sum_{i=j+1}^{\infty} \frac{\lambda_i + i \nu + \mu}{i! \mu \nu^i} A_j(i) \right\}^{-1}. \quad (21)$$

Доведення.

Факт існування стаціонарного розподілу впливає з леми 1. Для пошуку стаціонарних ймовірностей розглянемо спочатку систему типу $M/M/1/N$. Для такої системи застосуємо результати теореми 1. У випадку $c=1$ маємо

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ та } F(j) = \begin{pmatrix} \lambda_j + j \nu & -(\lambda_j + j \nu) \\ -\mu & \lambda_j + \mu \end{pmatrix}.$$

Оскільки

$$F^{-1}(j) = \frac{1}{\lambda_j (\lambda_j + j \nu)} \begin{pmatrix} \lambda_j + \mu & \lambda_j + j \nu \\ \mu & \lambda_j + j \nu \end{pmatrix},$$

то матриця $W(j)$ буде мати вигляд

$$W(j) = B F^{-1}(j) = \frac{1}{\lambda_j (\lambda_j + j \nu)} \begin{pmatrix} \mu & \lambda_j + j \nu \\ \mu & \lambda_j + j \nu \end{pmatrix}, \quad j = 0, 1, \dots, N.$$

Тоді з формул (5)–(8) після відповідних перетворень маємо

$$\pi_{0j} = \pi_{0N} \frac{N! \nu^{N-j}}{j!} A_j(N), \quad (22)$$

$$\pi_{1j} = \pi_{0N} \frac{N! \nu^{N-j} (\lambda_j + j \nu)}{j! \mu} A_j(N), \quad (23)$$

$$\pi_{1N} = \pi_{0N} \frac{1}{\mu} (N \nu + \lambda_N), \quad (24)$$

$$\pi_{0N} = \left\{ N! \sum_{j=0}^{N-1} \frac{\nu^{N-j}}{j!} A_j(N) \frac{\lambda_j + j \nu + \mu}{\mu} + \frac{1}{\mu} (\lambda_N + N \nu + \mu) \right\}^{-1}. \quad (25)$$

Список використаних джерел

1. Artalejo J. R. Retrial Queueing Systems A Computational Approach / J. R. Artalejo, A. Gomez-Corral. – Springer, 2008. – 317 p.
2. Falin G.I. Retrial Queues/ G.I. Falin, J.G.C. Templeton. – London: Chapman and Hall, 1997. – 317 p.
3. Shin Y.W. Retrial queues with limited number of retrials: numerical investigations / Y. W. Shin, D.H. Moon // In: The seventh international symposium on operations research and its applications (ISORA'08). – 2008. – pp. 237–247.
4. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц / Ф.Р. Гантмахер. – М.: Наука, 1967. – 576 с.
5. Дудин А.Н. Оптимизация динамического управления входной нагрузкой в узле информационно-вычислительной сети / А.Н. Дудин, В.И. Клименок // Автоматика и вычислительная техника. -1991.-№ 2.-С.25-31.
6. Лебедев Є.О. Стохастичні системи з повторними викликами та нетерплячими вимогами / Є.О. Лебедев, О.В. Прищепа // Вісник Київського університету. Серія фізико – математичних наук, Вип. №2. – 2007. – С.169-173.
7. Лебедев Є.О. Оптимізація систем з повторами і скінченним числом джерел вимог / Лебедев Є.О., Пономарьов В.Д. // Вісн. Київ. ун-ту. Сер.: фіз.- мат. науки. - 2008. - № 2. - с. 91-97.
8. Пономарьов В.Д. Оптимізація керування режимом роботи системи з повторними викликами і скінченним числом користувачів / Пономарьов В.Д. // Вісн. Київ. ун-ту. Сер.: фіз.- мат. науки. - 2008. - № 4. - с. 161-168.
9. Уолрэнд Дж. Введение в теорию сетей массового обслуживания / Дж Уолрэнд. – М.: Мир, 1993. - 336 с.

Переходячи у формулах (22) – (25) до границі при $N \rightarrow \infty$, отримаємо подання (19) – (21).

Наслідок доведено.

Висновки

В даній роботі досліджується стохастична багатоканальна система з однією повторною спробою почати обслуговування, для якої розглянуто проблему оптимального керування в класі порогових стратегій. Для процесу обслуговування вимог досліджено стаціонарний режим. Знайдено ефективний алгоритм підрахунку стаціонарних ймовірностей та явний вигляд функціоналу якості в стаціонарному режимі.

References

1. Artalejo, J. R. and Gomez-Corral, A. (2008) Retrial Queueing Systems A Computational Approach. *Springer*.
2. Falin, G.I. and Templeton, J.G.C. (1997) Retrial Queues. *London: Chapman and Hall*.
3. Shin, Y.W. and Moon, D.H. (2008) Retrial queues with limited number of retrials: numerical investigations. *In: The seventh international symposium on operations research and its applications (ISORA'08)*. p. 237–247.
4. Gantmacher, F.R. (1967) Theory of matrices. *Moscow: Nauka*.
5. Dudin, A. N. and Klimenok, V. I. (1991) Optimization of the dynamic control of the input load at a node of an information computer network. *Avtom. Vychisl. Tekhnika*, No. 2. p. 25–31
6. Lebedev, E.A. and Pryshchepa, O.V. (2007) Retrial queue with impatient calls. *Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv*. No.2. p.169-173.
7. Lebedev, E.A. and Ponomarov, V.D. (2008) Optimization of retrial queue with finite source of calls. *Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv*. No.2. p. 91-97.
8. Ponomarov, V.D. (2008) Behavior control optimization of retril queue with finite source of calls. *Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv*. No.4. p.161-168.
9. Uolrend, J. (1993) Introduction to the theory of queuing networks. *Moscow: Mir*.

Надійшла до редколегії 22.02.2016

УДК 519.68

Терещенко В.М., д. ф.-м.н., професор
Корюкалов О.В., аспірант.

**Контурний дескриптор для швидкого
алгоритму класифікації простих
об'єктів**

Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 83000, м. Київ, пр-т.
Глушкова 4д,
e-mail: v_ter@ukr.net

V.M. Tereshchenko, Dr. Sci.(Ph.-M.), Professor
O.V. Koriukalov, PhD student.

**Contour feature for simple objects
classification real-time algorithm**

Taras Shevchenko National University of Kyiv,
83000, Kyiv, Glushkova av., 4d,
e-mail: v_ter@ukr.net

В роботі пропонується швидкий, простий для реалізації контурний дескриптор, що може бути використаний для подальшої обробки класифікатором. Алгоритм призначений для класифікації простих об'єктів, найкращі результати класифікації досягаються в комбінації з текстурними дескрипторами.

Ключові слова: класифікація об'єктів, контурний дескриптор, згладжування контуру, обробка зображень.

In this article we propose simple to compute, ten times faster than real-time contour descriptor, that can be used for simple objects classification. Image classification is common task of computer vision, which have many applications in different areas: robotic vision, computer intelligence, cognitive vision, statistics, geometry, optimization, biological vision, smart cameras. Main algorithm consists of four main steps: finding edges on image mask, build object contour based on found edges; smooth contour using extremes based approach; rotate image(image contour), find side contour feature for each rotation, append it to common feature vector; classify object contour, using SVM. Proposed method is better suited for objects, whose contour is similar to star polygon, it was successfully applied on our Mushrooms dataset singly, or together with texture or color based features.

Key Words: object classification, contour feature, contour smoothing, image processing.

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Анісімов А.В.

1. Introduction.

Problem definition. Given segmented image, classify it to one of predefined classes.

Actuality. Image classification is one of common tasks of computer vision, which have many applications in different areas: robotic vision, computer intelligence, cognitive vision, statistics, geometry, optimization, biological vision, smart cameras. Image classification task is often related with machine learning, artificial intelligence, signal processing, imaging, control robotics technologies. Since applications of these technologies have to handle ever more data or to run on mobile devices with limited computational capabilities, there is a growing need for descriptors that are fast to compute, fast to match, memory efficient and yet

exhibiting good accuracy. That is why, here we introduce simple to compute, ten times faster than real-time contour descriptor, that can be used for further processing by classifiers(in this article we use SVM as a classifier).

Related work. For improving images classification algorithm it was decided to use object's contour information, that is why we needed contour description that can be used for further processing by classifier. Several contour coding algorithms are described in [1]. Chain coding and its variations[2] is often used for representing object's contour, for example in [3] differential chain code histogram proposed for classification hand-written digits. The pairwise geometric histogram is also used for coding contours, five simple shape descriptors: convexity, principal axes, compactness, variance, elliptic variance are introduced in [1].

In [4] they address the shape classification problem and make the following contributions: combine both contour and skeleton (also local and global) information for shape analysis, and apply Boosting or SVM as a classifier. Discrete contour evolution (DCE)[5] method is applied to extract simplified polygons.

An approach which classifies a segmented video object based on its appearance(object views) in successive video frames is presented in [6]. The classification is performed by matching curvature features of the contours of these object views to a database containing preprocessed views of prototypical objects using a modified curvature scale space technique. By integrating the results of a number of successive frames and by using the modified curvature scale space technique as an efficient representation of object contours, proposed approach performs the robust, tolerant and rapid object classification of video objects.

In [7] they propose an expectation-maximization (EM) approach to separate a shape database into different shape classes, while simultaneously estimating the shape contours that best exemplify each of the different shape classes(clusterization). They employ the level set function as the shape descriptor, for each shape class they assume that there exists an unknown underlying level set function whose zero level set describes the contour that best represents the shapes within that shape class. The level set function for each example shape in the database is modeled as a noisy measurement of the appropriate shape class's unknown underlying level set function.

Focus on mid-level modeling of shape representation is made in [8]. They develop a new shape representation called Bag of Contour Fragments (BCF) inspired by classical Bag of Words (BoW) model. In BCF, a shape is decomposed into contour fragments each of which is then individually described using a shape descriptor, e.g., the shape context descriptor, and encoded into a shape code. Finally, a compact shape representation is built by pooling shape codes in the shape. Shape classification with BCF only requires an efficient linear SVM classifier.

2. Main algorithm

Objects contour classification algorithm takes as input data image's segmentation, and consists of four main steps(image 1):

- Finding edges on image mask using Canny edge detection algorithm[9], build object contour based on found edges.

- Smooth contour using extremes based approach, described in previous work.

- Rotate image(image contour), find side contour feature for each rotation, append it to common feature vector.

- Classify object contour, using linear svm 1vs 1 winner choosing strategy, and homogeneous kernel map, described in VIFeat[10].

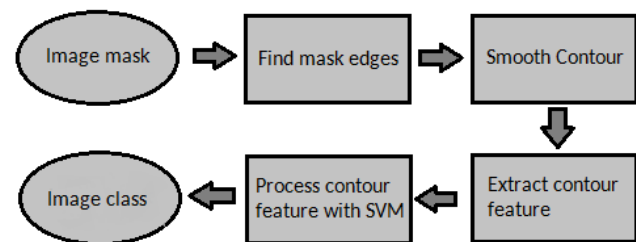


Image 1. Main algorithm scheme.

Let us describe each step more detailed.

On first step, for computing object contour we use single channel ground truth annotation, presented as an image mask(255 for foreground, 0 for background), proposed approach does not provide solution for image segmentation task(foreground subtraction). First, we find object contour using canny edge detection algorithm, then present contour as a polygon vertexes sequence. This is done to optimize image rotation speed, thus we don't need to rotate the whole image, which takes $O(m*n)$ time, rotating image contour is enough – $O(m+n)$ time.

On second step, we smooth contour with extremes based method, described in previous articles. While trying to implement proposed contour classification algorithm, we faced with necessity of special contour smoothing algorithm. In contour classification tasks contour noises appeared as a result of inaccurate segmentation algorithms or human annotations, or after image's mask jpeg compression, so we often need to remove some small background parts near boundaries that does not belong to object. Therefore we needed algorithm for building bounding contour, based on the most locally internal vertexes of input contour. That is why we proposed a method, that first finds vertexes where contour convexity changes, than obtains local minimums or maximums, which should be used in resulting contour.

On third step, we extract from smoothed contour features, describing contour. Feature extracting algorithm has two input parameters, which values are selected depending on object specificity:

- u – number of image rotations;

- v – feature vector dimension for each rotation;

Resulting feature vector is $u*v$ dimensional. We rotate input image n times, taking left object side's description as side feature for each rotation, then concatenate all side feature vectors to resulting feature vector. Such description is more appropriate for objects, whose contours can be represented as a star polygon. Resulting feature vector will be used for further SVM processing.

Let us tell how we obtain side feature vector. First, we add to image mask empty background borders of half image's size, to avoid foreground part corruption while rotating. Than for i 'th image's rotation(original image rotated at an angle of $360*i/u$ degrees) we remove borders, finding left, right, top, and bottom foreground object coordinates, and scale resulting ROI to size $v*v$. For each mask's row, we store to side feature vector the most left object's x coordinate, and then concatenate all side feature vectors to $u*v$ dimensional resulting feature vector. Example for $u = 4$, $v = 300$ is shown on image 2.

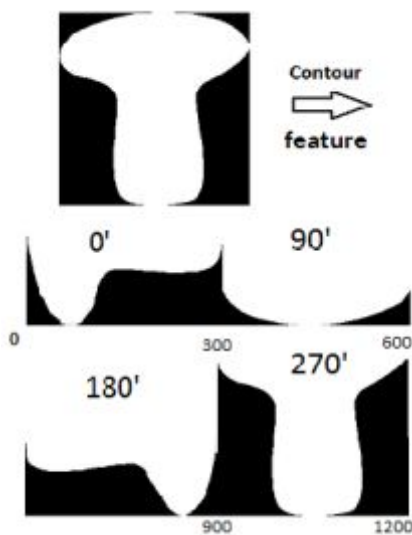


Image 2. Contour feature representation.

Finally, resulting feature vector is processed by SVM. We tried several vector normalizations, the results are described in application part. After normalization, homogeneous kernel map is applied, so feature vector's dimension increases $2*order+1$ times($order$ – input parameter of HOM algorithm). Than we train multi-class Linear SVM with 1 vs 1 winner choosing strategy, using several dataset's partitions to avoid overfitting.

Theorem 1. Time complexity of algorithm is $O(m*n + (m+n)*u)$.

Proof. Finding edges using Canny edge detection algorithm takes $O(m*n)$ time. Smoothing contour of $m+n$ vertexes takes $O(m+n)$ time. Computing contour feature consists of u steps, each step needs $v<m+n$ iterations, that is why total time of this part

is $O((m+n)*u)$. Prediction of $u*v$ -dimensional feature vector by SVM takes $O(u*v)$ time, $v<m+n$. That is why total algorithm complexity is $O(m*n + (m+n)*u)$. Because algorithm complexity is linear to image's size, proposed method is much faster than real-time, algorithm's speed is 320 fps.

Same idea should be applied for more than 2 dimensional spaces, for example for 3 dimensions we can use spherical angles using square $v*v$ side description for each rotation.

3. Application

Here we introduce our Mushrooms dataset, on which proposed approach was tested. Dataset contains ten classes of mushrooms, totally 395 segmented images, we take 60% images of each class for training model. The results of algorithm application singly or together with texture and color features are presented in table 1.

Algorithm parameters	True recognized(%)
Contour, $u = 1$	33
Contour, $u = 4$	47
Contour, $u = 4$, L1	50
Contour, $u = 6$	48
Contour, $u = 12$	53
Contour, $u = 12$, L1	52
Contour, $u = 20$	53
BOW(MSDS+Color+Surf)	70
BOW(MSDS+Color+Surf) + Contour	75

Table 1. Tests.

As we can see from the table 1 L1 and L2 normalization give same result. Choosing u value depends on object's specificity, for our dataset $u=12$ is optimal. Proposed contour descriptor bust up classical feature based approach (Bag Of Words for MSDS, Sift, Color) on Mushrooms dataset from 70 to 75 %.

4. Conclusion

Image classification is common task of computer vision, which have many applications in different areas, that is why we designed simple to compute, ten times faster than real-time contour descriptor, that can be used for further processing by classifiers. Main algorithm consists of four steps: finding edges on image mask, build object contour based on found edges; smooth contour using extremes based approach; rotate image(image contour), find side contour feature for each rotation, append it to common feature vector; classify object contour descriptor, using SVM. Approach was tested on our Mushrooms dataset singly or together with

color and texture descriptors, better result is shown for object, whose shape's form is similar to star polygon. In future work complex algorithm,

including current as a part, will be presented, more wide comparison with existing approaches will be performed.

Список використаних джерел

1. Jukka Iivarinen 2 Shape Coding Techniques - Jun 18 1997 [Електронний ресурс]. – Режим доступу: <http://www.cis.hut.fi/research/IA/paper/publications/bmvc97/node2.html>
2. Heechan Park Lossless contour representation using efficient multiple grid chain coding / Heechan Park, Graham R. Martin, Andy C. Yu. //Department of Computer Science, University of Warwick, Coventry United Kingdom. - 2005.
3. You Qian Recognition Method for Handwritten Digits Based on Improved Chain Code Histogram Feature / You Qian, Wang Xichang, Zhang Huaying, Sun Zhen, Liu Jiang //Journal of Nonlinear Mathematical Physics — november 2013. - P. 467-478.
4. Xiang Bai Integrating contour and skeleton for shape classification / Xiang Bai, Wenyu Liu, Zhuowen Tu //Computer Vision Workshops, 12th International Conference. - 2009. - P. 360-367.
5. L. Latecki Shape similarity measure based on correspondence of visual parts / L. Latecki and R. Lakamper// IEEE Trans. PAMI — 2000. - P. 1185-1190.
6. Stephan Richter Contour-based classification of video objects / Stephan Richter, Gerald Kuehne, Oliver Schuster// Proc. SPIE 4315, Storage and Retrieval for Media Databases. - 2001. - P. 608.
7. Tsai A. An EM algorithm for shape classification based on level sets / Tsai A., Wells W.M., Warfield S.K., Willsky A.S.//Medical images analysis, Volume 9, Issue 5. - 2005. - P. 491-502.
8. Xinggang Wang Bin Bag of contour fragments for robust shape classification / Xinggang Wang Bin, Feng Xiang Bai, Wenyu Liu Longin, Jan Latecki //Journal Pattern Recognition, Volume 47, Issue 6. - June, 2014. - P. 2116-2125.
9. Canny Edge Detection / 09gr820. - March 2009.
10. Vedaldi A. VLFeat Library – 2013. [Електронний ресурс]. – Режим доступу: <http://www.vlfeat.org/>

References

1. IIVARINEN J. (June 18 1997) 2 Shape Coding Techniques. Available from: <http://www.cis.hut.fi/research/IA/paper/publications/bmvc97/node2.html>
2. HEECHAN PARK, GRAHAM R. MARTIN, ANDY C. YU. (2005) Lossless contour representation using efficient multiple grid chain coding. Department of Computer Science, University of Warwick, Coventry United Kingdom.
3. YOU QIAN, WANG XICHANG, ZHANG HUAYING, SUN ZHEN, LIU JIANG. (november 2013) Recognition Method for Handwritten Digits Based on Improved Chain Code Histogram Feature. Journal of nonlinear mathematical physics, p. 467-478.
4. XIANG BAI, WENYU LIU, ZHUOWEN TU. (2009) Integrating contour and skeleton for shape classification. Computer Vision Workshops, 12th International Conference, p. 360-367.
5. LATECKI L., LOKAMPER R. (2000) Shape similarity measure based on correspondence of visual parts. IEEE Trans. PAMI, - p. 1185-1190.
6. STEPHAN RICHTER, GERALD KUEHNE, OLIVER SCHUSTER. (2001) Contour-based classification of video objects. Proc. SPIE 4315, Storage and Retrieval for Media Databases, p. 608.
7. TSAI A., WELLS W.M., WARFIELD S.K., WILLSKY A.S. (2005) An EM algorithm for shape classification based on level sets. Medical images analysis, Volume 9, Issue 5, p. 491-502.
8. XINGGANG WANG BIN, FENG XIANG BAI, WENYU LIU LONGIN, JAN LATECKI. (June 2014) Bag of contour fragments for robust shape classification. Journal Pattern Recognition, Volume 47, Issue 6, p. 2116-2125.
9. (2009) Canny Edge Detection. 09gr820.
10. VEDALDI A. (2013) VLFeat Library. Available from: <http://www.vlfeat.org/>

Надійшла до редколегії 26.05.16

УДК 519.21

Чечельницький О.А., к.ф.-м.н., доцент

Кучеренко О.В., провідний інженер

**Властивості мережевої моделі з різними
типами вузлів у стаціонарному режимі**

Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, пр-т.
Академіка Глушкова 4д,
e-mail: alex_che@voliacable.com

O.A. Chechelnitsky, PhD in Math., Associate
Professor.

O.V. Kucherenko, leading engineer

**The properties of the network model with
different types of nodes in the stationary
regime**

Taras Shevchenko National University of Kyiv,
03680, Kyiv, Glushkova st., 4d,
e-mail: alex_che@voliacable.com

Стаття присвячена дослідженню багатоканальної мережевої моделі з різними типами вузлів. Це означає, що ми розглядаємо модель, яка складається з двох систем обслуговування з нескінченною кількістю обслуговуючих приладів. Час обслуговування на першій системі має довільний розподіл з функцією розподілу $G(t)$, а час обслуговування на другій системі є показниковим. Вивчення моделі ускладнюється тим, що її стохастична динаміка не може бути описана ланцюгом Маркова. Крім того, ми передбачаємо, що вимоги надходять до мережевої моделі згідно з двовимірним потоком Пуассона. Цей потік характеризується тим, що вимоги з нього можуть надходити парами одночасно. Вивчається стохастичний процес числа вимог у вузлах моделі. Отримано генератрису граничного розподілу цього процесу. Це дозволило виписати в явному вигляді вирази для математичного сподівання, дисперсії та кореляції числа вимог у вузлах мережі..

Ключові слова: мережева модель обслуговування, двовимірний вхідний потік, стаціонарний розподіл.

The present article is devoted to research the multi-channel network model with different types of nodes. It means that we consider the model which consists of two infinite-server queues $M / G / \infty$ and $M / M / \infty$. The service time in the first system has general function of distribution $G(t)$ and the service time in the second system has the exponential distribution. In this case the stochastic dynamic of our model cannot be defined by Markov chain. As a result, analysis of such networks is much more difficult than that of the corresponding Markovian queueing models. Besides we assume that customers arrive to our model according a bivariate Poisson input flow. This input process is characterized by the fact that customers arrive according to a bivariate Poisson flow simultaneously. We consider the number of customers in the systems at time t . This stochastic process describes the state of our network model. In present paper we find the limit joint distribution of the number of customers in the systems. In a general way (by differentiating the corresponding generating function.) we obtain the main characteristics of this distribution, such as the expected number of customers in the nodes, its variance and correlation. In the case when parameters of our model dependent on the parameter n (number of series) the limit normal distribution was obtained for the service process in the stationary regime.

Key Words: network model, bivariate input flow, stationary distribution

Статтю представив д.т.н., проф. Заславський В.А.

1. Стационарні характеристики моделі.

Особливості реальних комп'ютерних мереж та мереж зв'язку вимагають застосування паралельного функціонування об'єктів різного типу. Це пов'язано з тим, що паралельність обробки масивів інформації, запитів, паралельність обчислень та інших операцій, які виконуються в сучасних мережевих системах, дозволяють досягати найбільшої швидкості роботи та економії часу. Ось чому, велике значення має аналіз властивостей математичних моделей мережевих структур з паралельно функціонуючими елементами різних типів. У даній статті ми розглянемо модель паралельної структури, елементами якої є дві системи масового обслуговування типу $M/G/\infty$ та $M/M/\infty$ з двовимірним вхідним потоком вимог Пуассона $(\nu_1(t), \nu_2(t))$ з параметрами $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$, $b > 0$. Вимоги з потоку $\nu_1(t)$ прибувають на першу систему, а вимоги з потоку $\nu_2(t)$ прибувають на другу систему обслуговування. Нехай $G(t)$ функція розподілу часу обслуговування в першій системі, $\bar{G}(t) = 1 - G(t)$, $a = \left\{ \int_0^{+\infty} t dG(t) \right\}^{-1}$, $\mu > 0$ параметр показникового розподілу часу обслуговування відповідно у другій системі, $G^*(s)$ та $\bar{G}^*(s)$ - перетворення Лапласа функцій $G(t)$, $\bar{G}(t)$.

Позначимо також через $X_1(t)$ число вимог, які обслуговуються в першій системі $M/G/\infty$ в момент часу t , а через $X_2(t)$ - число вимог у другій системі $M/M/\infty$ в момент часу t . Кожна вимога обслуговується тільки на одній системі обслуговування.

Однією з ключових проблем, яка розв'язується в рамках теорії масового обслуговування, є дослідження стаціонарних характеристик моделі. Очевидно, що найбільш повним успіхом на цьому шляху є випадки, коли вдається знайти стаціонарний розподіл процесу обслуговування $(X_1(t), X_2(t))$. В зв'язку з цим має місце наступна теорема.

Теорема 1. Процес обслуговування $(X_1(t), X_2(t))$ в моделі $(M/G-M/\infty)^2$ з паралельною структурою та двовимірним пуассонівським потоком вимог $(\nu_1(t), \nu_2(t))$ має ергодичний розподіл з генератрисою наступного вигляду:

$$\begin{aligned} \varphi(z_1, z_2) &= Mz_1^{X_1} z_2^{X_2} = \\ &= \exp \left\{ - \left(\frac{\lambda_1}{a} + b \left(\frac{1}{a} - \bar{G}^*(\mu) \right) \right) (1 - z_1) - \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{\lambda_2}{\mu} + bG^*(\mu) \right) (1 - z_2) - b\bar{G}^*(\mu)(1 - z_1 z_2) \right\}. \end{aligned}$$

Доведення. В даній статті ми запропонуємо підхід, який базується на конструктивному представленні стохастичного процесу $(X_1(t), X_2(t))$ через суми індикаторних випадкових величин на вхідних пуассонівських потоках, кожна з яких буде описувати процес обслуговування окремо розглянутої вимоги. Введемо до розгляду три сімейства незалежних двовимірних випадкових величин з наступними розподілами. Двовимірна випадкова величина $\chi_k^1(t)$ нехай приймає значення $(1, 0)$ з ймовірністю $1 - G(t) = \bar{G}(t)$ та значення $(0, 0)$ з ймовірністю $G(t)$. Випадкова величина $\chi_k^2(t)$ приймає значення $(0, 1)$ з ймовірністю $e^{-\mu t}$ та значення $(0, 0)$ з ймовірністю $1 - e^{-\mu t}$. В свою чергу випадкова величина $\chi_k^3(t)$ приймає значення $(1, 1)$ з ймовірністю $e^{-\mu t} \bar{G}(t)$, значення $(1, 0)$ з ймовірністю $(1 - e^{-\mu t}) \bar{G}(t)$, значення $(0, 1)$ з ймовірністю $e^{-\mu t} G(t)$ та значення $(0, 0)$ з ймовірністю $(1 - e^{-\mu t}) G(t)$.

Тоді з ймовірністю 1 для двовимірного процесу обслуговування має місце наступне представлення:

$$\begin{aligned} (X_1(t), X_2(t)) &= \sum_{k=1}^{m_1} \chi_k^1(t) + \sum_{k=1}^{m_2} \chi_k^2(t) + \\ &+ \sum_{k=1}^{y_1(t)} \chi_k^1(t - t_k^1) + \sum_{k=1}^{y_2(t)} \chi_k^2(t - t_k^2) + \sum_{k=1}^{y_3(t)} \chi_k^3(t - t_k^3), \end{aligned}$$

де $y_1(t), y_2(t), y_3(t)$ є незалежними пуассонівськими потоками з параметрами λ_1, λ_2, b відповідно і такими що, $\nu_1(t) = y_1(t) + y_3(t)$, $\nu_2(t) = y_2(t) + y_3(t)$, $t_k^i, i = 1, 2, 3; k = 1, 2, \dots$ є моментами приходу вимог відповідно з потоку $y_i(t), i = 1, 2, 3$. У подальшому, не обмежуючи загальності, вважаємо $m_i = 0, i = 1, 2$. Введемо до розгляду двовимірну генератрису величини

$$(X_1(t), X_2(t)): \varphi(z_1, z_2, t) = M z_1^{X_1(t)} z_2^{X_2(t)}.$$

Використовуючи властивості умовного математичного сподівання, можемо записати: $\varphi(z_1, z_2, t) =$

$$\begin{aligned} &= M \left\{ M \left\{ z_1^{X_1(t)} z_2^{X_2(t)} / t_1^i, \dots, t_{y_i(t)}^i, i=1,2,3 \right\} \right\} = \\ &= M \left\{ \prod_{k=1}^{y_1(t)} \left(G(t-t_k^1) + z_1 \bar{G}(t-t_k^1) \right) \times \right. \\ &\quad \times \prod_{k=1}^{y_2(t)} \left(\left(1 - e^{-\mu(t-t_k^2)} \right) + z_2 e^{-\mu(t-t_k^2)} \right) \times \\ &\quad \times \prod_{k=1}^{y_3(t)} \left\{ \left(1 - e^{-\mu(t-t_k^3)} \right) G(t-t_k^3) + z_1 \bar{G}(t-t_k^3) \times \right. \\ &\quad \times \left(1 - e^{-\mu(t-t_k^3)} \right) + z_2 e^{-\mu(t-t_k^3)} G(t-t_k^3) + \\ &\quad \left. \left. + z_1 z_2 e^{-\mu(t-t_k^3)} \bar{G}(t-t_k^3) \right\} \right\}. \end{aligned}$$

Для знаходження генератриси з останнього виразу знову скористаємося умовним математичним сподіванням стосовно величин $y_1(t), y_2(t)$ та $y_3(t)$. Тоді можемо записати: $\varphi(z_1, z_2, t) =$

$$\begin{aligned} &= M \left\{ M \left\{ \prod_{k=1}^{y_1(t)} \left(G(t-t_k^1) + z_1 \bar{G}(t-t_k^1) \right) \times \right. \right. \\ &\quad \times \prod_{k=1}^{y_2(t)} \left(\left(1 - e^{-\mu t} \right) + z_2 e^{-\mu(t-t_k^2)} \right) \times \\ &\quad \times \prod_{k=1}^{y_3(t)} \left\{ \left(1 - e^{-\mu(t-t_k^3)} \right) G(t-t_k^3) + z_1 \bar{G}(t-t_k^3) \times \right. \\ &\quad \times \left(1 - e^{-\mu(t-t_k^3)} \right) + z_2 e^{-\mu(t-t_k^3)} G(t-t_k^3) + \\ &\quad \left. \left. + z_1 z_2 e^{-\mu(t-t_k^3)} \bar{G}(t-t_k^3) \right\} / y_i(t), i=1,2,3 \right\} \right\}. \end{aligned}$$

Підрахуємо умовне математичне сподівання в останньому виразі. Тоді ми отримаємо:

$$\begin{aligned} \varphi(z_1, z_2, t) &= M \{ A_1(z_1, t) \}^{y_1(t)} M \{ A_2(z_2, t) \}^{y_2(t)} \times \\ &\times M \{ A_3(z_1, z_2, t) \}^{y_3(t)}, \text{ де вирази } A_1(z_1, t), \\ &A_2(z_2, t), A_3(z_1, z_2, t) \text{ мають наступний вигляд:} \end{aligned}$$

$$A_1(z_1, t) = \frac{1}{t} \int_0^t \left(G(t-u) + z_1 \bar{G}(t-u) \right) du;$$

$$A_2(z_2, t) = \frac{1}{t} \int_0^t \left(1 - e^{-\mu(t-u)} + z_2 e^{-\mu(t-u)} \right) du;$$

$$\begin{aligned} A_3(z_1, z_2, t) &= \frac{1}{t} \int_0^t \left(1 - \bar{G}(t-u) \left(1 - e^{-\mu(t-u)} \right) (1-z_1) - \right. \\ &\quad \left. - e^{-\mu(t-u)} G(t-u) (1-z_2) - e^{-\mu(t-u)} \bar{G}(t-u) (1-z_1 z_2) \right) du. \end{aligned}$$

В останніх виразах для $A_1(z_1, t)$, $A_2(z_2, t)$ та $A_3(z_1, z_2, t)$ коефіцієнт $\frac{1}{t}$ є щільністю рівномірного на проміжку $[0,1]$ розподілу.

Остаточно, генератриси $A_1(z_1, t)$, $A_2(z_2, t)$ та $A_3(z_1, z_2, t)$ будуть мати наступний вигляд:

$$A_1(z_1, t) = \frac{1}{t} \int_0^t \left(1 - \bar{G}(t-u) (1-z_1) \right) du;$$

$$A_2(z_2, t) = 1 - \frac{1}{\mu t} \left(1 - e^{-\mu t} \right) (1-z_2);$$

$$A_3(z_1, z_2, t) = \frac{1}{t} \int_0^t \left(1 - \bar{G}(t-u) \left(1 - e^{-\mu(t-u)} \right) \right) du (1-z_1) -$$

$$- \frac{1}{t} \int_0^t e^{-\mu(t-u)} \bar{G}(t-u) du (1-z_1 z_2)$$

Підставивши генератриси $A_1(z_1, t)$, $A_2(z_2, t)$ та $A_3(z_1, z_2, t)$ в генератриси величин $y_1(t), y_2(t)$ та $y_3(t)$, отримаємо явний вираз генератриси $\varphi(z_1, z_2, t)$: $\varphi(z_1, z_2, t) =$

$$\begin{aligned} &= \exp \left\{ - \left(\lambda_1 \int_0^t \bar{G}(u) du + b \int_0^t \bar{G}(u) \left(1 - e^{-\mu u} \right) du \right) \times \right. \\ &\quad \times (1-z_1) - \left(\frac{\lambda_2}{\mu} \left(1 - e^{-\mu t} \right) + b \int_0^t e^{-\mu u} G(u) du \right) (1-z_2) - \\ &\quad \left. - b \int_0^t e^{-\mu u} \bar{G}(u) du (1-z_1 z_2) \right\}. \end{aligned}$$

Перейшовши в останньому виразі до границі при $t \rightarrow \infty$, ми отримаємо:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(z_1, z_2, t) &= \varphi(z_1, z_2) = \\ &= \exp \left\{ - \left(\frac{\lambda_1}{a} + b \left(\frac{1}{a} - \bar{G}^*(\mu) \right) \right) (1-z_1) - \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{\lambda_2}{\mu} + b G^*(\mu) \right) (1-z_2) - b \bar{G}(\mu) (1-z_1 z_2) \right\}. \end{aligned}$$

Теорема доведена.

З результату, який ми одержали, можна зробити ряд цікавих висновків та наслідків.

Перш за все слід відзначити, що граничний розподіл процесу обслуговування в нашій моделі є двовимірним пуассонівським з параметрами

$$a_1 = \frac{\lambda_1}{a} + b \left(\frac{1}{a} - \bar{G}^*(\mu) \right), \quad a_2 = \frac{\lambda_2}{\mu} + b \bar{G}^*(\mu) \quad \text{та} \\ a_3 = b \bar{G}^*(\mu).$$

Крім того, структура двовимірного процесу обслуговування налічує п'ять незалежних пуассонівських компонент. Це означає, що в стаціонарному режимі одновимірний розподіл процесу обслуговування має наступну будову: $X_1 = x_1 + x_2 + x^*$, $X_2 = x_3 + x_4 + x^*$, де $x_i, i=1,4$ та x^* незалежні випадкові величини, розподілені за законами Пуассона з параметрами:

$$\frac{\lambda_1}{a} \text{ для } x_1, \quad b \left(\frac{1}{a} - \bar{G}^*(\mu) \right) \text{ для } x_2, \quad \frac{\lambda_2}{\mu} \text{ для } x_3, \\ b \left(\frac{1}{\mu} - \bar{G}^*(\mu) \right) \text{ для } x_4 \text{ та } b \bar{G}^*(\mu) \text{ для } x^*.$$

Таким чином, в структурі процесу обслуговування з'являється дві додаткові незалежні компоненти x_2 та x_4 . З цього можна зробити висновок, що наша модель в процесі свого функціонування послаблює залежність між компонентами потоків вимог. Компоненти x_2 та x_4 описують в побудові процесу обслуговування ті вимоги, які прийшли в парі з потоку $y_3(t)$, але залишилися в нашій моделі на обслуговуванні по одній зі своєї пари. Оскільки інша вимога з пари вже отримала обслуговування і вийшла з системи, пара розпалася, а значить і залежність між компонентами X_1 та X_2 зменшилась на величину залежності, яку вносила до процесу обслуговування дана пара вимог.

Отже, враховуючи той факт, що параметр розподілу Пуассона є одночасно значенням математичного сподівання і дисперсії випадкової величина, яка має цей розподіл, можемо зробити наступні висновки: 1) математичне сподівання та дисперсія загального числа пар вимог, які

Список використаних джерел

1. Griffiths R.S. A class of bivariate Poisson process, / Griffiths R.S., Milne R.K. // *Journal Multivar. Anal.* Issue 8, - 3 – 1978 - P.380-396.
2. Анисимов В.В. Стохастические сети обслуживания, / Анисимов В.В., Лебедев Е.А. // Лыбидь. – 1992. - 105 с.

«розпалися» в результаті обслуговування, дорівнює $b \left(\frac{1}{a} - \bar{G}^*(\mu) \right) + b \left(\frac{1}{\mu} - \bar{G}^*(\mu) \right)$.

2) математичне сподівання та дисперсія повних пар вимог, які знаходяться на обслуговуванні в нашій моделі, дорівнює $b \bar{G}^*(\mu)$.

Також можна знайти вираз коефіцієнта кореляції між компонентами процесу обслуговування вимог у нашій моделі:

$$r(X_1, X_2) = \frac{\text{cov}(X_1, X_2)}{\sqrt{DX_1 DX_2}} = \sqrt{a\mu} \frac{b \bar{G}^*(\mu)}{\sqrt{(\lambda_1 + b)(\lambda_2 + b)}}.$$

2. Асимптотична нормальність стаціонарного розподілу процесу обслуговування.

В умовах зростання інтенсивностей вхідних потоків отримаємо теорему про слабку збіжність відповідно центрованого та нормованого вектора (X_1, X_2) до двовимірного нормально розподіленого випадкового вектора (ξ_1, ξ_2) .

Теорема 2. Нехай параметри вхідного пуассонівського потоку залежать від номера серії n наступним чином:

$$\lambda_1^{(n)} = \lambda_1 n, \lambda_2^{(n)} = \lambda_2 n, b^{(n)} = bn, \quad n \geq 1.$$

Тоді має місце слабка збіжність вектора $(\xi_1^{(n)}, \xi_2^{(n)}) = n^{-1/2} (X_1^{(n)} - \alpha_1 n, X_2^{(n)} - \alpha_2 n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} (\xi_1, \xi_2)$

При цьому вектор (ξ_1, ξ_2) має нормальний розподіл з нульовим вектором середніх значень і матрицею коваріацій

$$C = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_3 \\ \alpha_3 & \alpha_2 \end{pmatrix}, \alpha_1 = (\lambda_1 + b)/a, \alpha_2 = (\lambda_2 + b)/\mu$$

References

1. GRIFITHS R.S and MINE R.K (1978). A class of bivariate Poisson process. *Journal Multivar. Anal.* Issue 8, - 3 – P.380-396.
2. ANISIMOV V.V. and LEBEDEV E.A. (1992) Stochastic service networks. *Lybid.*

Надійшла до редакції 1.02.2016

РАДІОФІЗИКА

УДК 537.6/.8, 537.86/.87

Сулименко О.Р., асп.,
Прокопенко О.В., д.ф.-м.н., доц.

**Критерій мікрохвильової синхронізації
для двох слабо зв'язаних спітронних
магнітних наноосциляторів з
випадковими власними параметрами**

Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 01601, м. Київ, пр-т. Акад.
Глушкова 4г. E-mail: olgasulymenko@gmail.com
Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 01601, м. Київ, пр-т. Акад.
Глушкова 4г.
E-mail: Oleksandr.Prokopenko@gmail.com

O.R. Sulymenko, Ph.D. stud.,
O.V. Prokopenko, D.Sci., Asc.Prof.

**Microwave synchronization criterion for two
weakly-coupled spin-torque nano-oscillators
with random eigen parameters**

Taras Shevchenko National University of Kyiv,
01601, Kyiv, 4g Acad. Glushkova av.
E-mail: olgasulymenko@gmail.com
Taras Shevchenko National University of Kyiv,
01601, Kyiv, 4g Acad. Glushkova av.
E-mail: Oleksandr.Prokopenko@gmail.com

Проаналізовано мікрохвильову динаміку в системі двох слабо зв'язаних спітронних магнітних наноосциляторів (СМНО) з випадковими власними параметрами (частотами та початковими фазами коливань). У межах фазової моделі синхронізації СМНО показано, що залежність комплексного параметра порядку системи від часу може бути немонотонною або осцилюючою. Відповідно, для надійного визначення стану системи (є синхронізація, немає синхронізації) необхідно проводити аналіз не абсолютних значень комплексного параметра порядку в деякий момент часу, а характерних значень флуктуацій цього параметра протягом певного періоду часу. За допомогою методів числового аналізу застосування цього критерію фазової синхронізації СМНО проілюстровано для двох слабо зв'язаних СМНО з власними частотами, розподіленими за нормальним законом, і початковими фазами коливань, розподіленими рівномірно. Отримані результати дозволяють уточнити існуючі дані щодо синхронізації СМНО і є важливими для розробки мікрохвильових систем з багатьма СМНО.

Ключові слова: спітронний магнітний наноосцилятор, синхронізація коливань, критерій синхронізації, фазова модель, комплексний параметр порядку, випадкова власна частота.

Microwave dynamics of the system of two weakly-coupled spin-torque nano-oscillators (STNOs) with random eigen parameters (frequencies and initial phases of oscillations) is analyzed. A time dependence of the complex order parameter of the system is shown to be non-monotonic or oscillatory in a scope of the STNOs' phase synchronization model. Accordingly, one should consider not the absolute value of the complex order parameter at a time, but the characteristic value of the parameter's fluctuations over time for a reliable determination of the system state (synchronization is present or absent). Using numerical analysis techniques the application of this STNO's phase synchronization criterion is illustrated for two weakly-coupled STNOs with random eigen frequencies described by the Gaussian distribution and random initial phases of oscillations distributed uniformly. The obtained results allow one to refine existing data on STNO synchronization and are important for the development of microwave systems with many STNOs.

Key words: spin-torque nano-oscillator, synchronization of oscillations, synchronization criterion, phase model, complex order parameter, random eigen frequency.

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Савенков С.М.

Вступ

Одним з перспективних напрямів розвитку сучасної електроніки є спітроніка, в якій використовуються квантові властивості спіну електронів (або інших частинок) [2]. Ансамбль спін-поляризованих електронів має ненульове

середнє значення проекції спіну на деяку вісь. Відповідно, рух такого ансамблю частинок приводить не тільки до переносу електричного заряду, але й до переносу ненульової проекції спіну, що спричиняє зміни спінового стану системи. Цей ефект, названий спін-обертотним

ефектом (COE, the spin-transfer torque) [2–4], був теоретично передбачений Дж. Слончевським [3] та Л. Берже [4] і потім досліджувався експериментально в багатьох роботах [5–10] (див. також перелік посилань в [2]). На сьогоднішній день на основі COE запропоновано низку нанорозмірних мікрохвильових пристроїв [6, 7, 10–13].

COE типово спостерігається в шаруватих магнітних наноструктурах, які містять три шари: вільний магнітний шар (ВМШ), намагніченість якого може відносно вільно рухатись під дією зовнішнього впливу, закріплений магнітний шар (ЗМШ), намагніченість якого є нерухомою, та немагнітний прошарок, що розділяє магнітні шари. При протіканні сталого електричного струму крізь таку структуру, цей струм поляризується намагніченістю ЗМШ і починає переносити спіновий обертальний момент від ЗМШ до ВМШ. Це спричиняє дестабілізацію магнітного стану ВМШ. За умови, що перенесений обертальний момент перевищує власний дисипативний обертальний момент ВМШ, у цьому шарі виникає стійка прецесія намагніченості. Внаслідок ефекту гігантського магнітоопору або ефекту тунельного магнітоопору [2] це приводить до появи мікрохвильових коливань магнітоопору структури. Такі генератори мікрохвильових сигналів, названі спітронними магнітними наноосциляторами (СМНО, spin-torque nano-oscillator), мають ряд недоліків: малу вихідну потужність (типово 0.1–100 нВт), достатньо низькі робочі частоти (типово 1–10 ГГц), широку смугу генерації (типово 0.1–1 ГГц), мале співвідношення сигнал/шум тощо [2, 6, 7, 11, 13–15]. Для збільшення вихідної потужності генераторів на основі СМНО, звуження їх смуги генерації та покращення їх шумових властивостей необхідно застосовувати не поодинокі СМНО, а масиви синхронізованих наноосциляторів.

СМНО є сильно нелінійними та неізохронними коливними системами. Це суттєво ускладнює експериментальні та теоретичні дослідження процесів синхронізації в системах з багатьма СМНО. На даний момент експериментально вдалось синхронізувати лише два СМНО традиційного типу [8, 9] та чотири СМНО з вихровим станом намагніченості [16]. Існуюча теорія синхронізації СМНО [17, 18] також є доволі недосконалою і не враховує наявний значний розкид власних параметрів окремих наноосциляторів внаслідок

недосконалості технології їх виготовлення.

Метою даної роботи є числовий аналіз процесів взаємної фазової синхронізації (ВФС) двох слабо зв'язаних СМНО з урахуванням технологічного розкиду їх власних параметрів, а також вдосконалення існуючого критерію синхронізації СМНО в межах фазової моделі [18–20].

Числова модель

Аналіз ВФС двох СМНО з урахуванням фази коефіцієнта зв'язку (або, що те ж саме, затримки сигналу зв'язку) показав [17, 18], що кожен генератор може бути описаний однією динамічною змінною – «узагальненою фазою» $\varphi_j(t)$ (т.зв. фазова модель синхронізації СМНО). Динаміка стану такої системи описується рівняннями:

$$\begin{aligned}\frac{d\varphi_1}{dt} - \omega_1 &= \Lambda_{1,2} \sin(\varphi_2 - \varphi_1 + \beta_{1,2}), \\ \frac{d\varphi_2}{dt} - \omega_2 &= \Lambda_{2,1} \sin(\varphi_1 - \varphi_2 + \beta_{2,1}).\end{aligned}\quad (1)$$

Тут $\omega_j = 2\pi f_j$ – власна частота j -го осцилятора, $\Lambda_{j,k}$ – амплітуда зв'язку між j -тим і k -тим осцилятором, $\beta_{j,k}$ – фаза коефіцієнта зв'язку. Модель (1) має досить загальний характер і може бути застосована до опису фазової синхронізації генераторів будь-якої природи [17]. Ця модель може бути використана для числового та аналітичного дослідження синхронізації в масивах СМНО.

На практиці власні частоти f_j наноосциляторів можуть відрізнятися за рахунок недосконалості технології їх виготовлення або наявності дефектів. Тому в системі (1) власні частоти $\omega_j = 2\pi f_j$ слід розглядати як випадкові значення з певним відомим розподілом $P(f_j)$ (будемо вважати, що цей розподіл є однаковим для всіх осциляторів, що передбачає їх виготовлення за однаковою технологією в єдиному технологічному циклі). Введемо також середнє значення частоти для масиву з N СМНО: $\langle f \rangle = N^{-1} \sum_{j=1}^N f_j$. Також будемо розглядати тільки випадок, коли частоти наноосциляторів розподілені за нормальним законом:

$$P_G(f_j) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\Delta f} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{f_j - \langle f \rangle}{\Delta f}\right)^2\right]. \quad (2)$$

Тут Δf – деяке усереднене відхилення частот f_j від $\langle f \rangle$, яке будемо вважати однаковим для всіх наноосциляторів.

Вирази для амплітуди $\Lambda_{j,k}$ та фази $\beta_{j,k}$ коефіцієнта зв'язку залежать від механізму зв'язку між наноосциляторами (вважається, що він однаковий для всіх СМНО). В цій роботі розглянуто найбільш простий випадок т.зв. глобального зв'язку. При цьому для усіх СМНО буде виконуватись умова:

$$\Lambda_{j,k} = \Lambda = \text{const}, \quad \beta_{j,k} = \beta = \text{const}. \quad (3)$$

Надалі будемо вивчати синхронізацію СМНО виходячи з моделі (1) з урахуванням умови (3), вважаючи, що частоти наноосциляторів f_j задані розподілом (2).

Для опису процесу синхронізації СМНО будемо використовувати комплексний параметр порядку [1]:

$$r = R e^{i\psi} = \frac{1}{2} (e^{i\varphi_1} + e^{i\varphi_2}). \quad (4)$$

За умови, що коливання намагніченості у СМНО є несинхронізованими, різниця «узагальнених фаз» $\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ – змінна величина, а амплітуда параметра порядку $R = |r|$ – осцилююча. При цьому великі чи малі значення R в деякий момент часу самі по собі недостатньо надійно характеризують стан системи. Саме тому, щоб впевнитись в існуванні синхронізації, необхідно досліджувати незмінність величини $\Delta\varphi$ або R протягом певного періоду часу.

Розроблена процедура числового аналізу передбачає розв'язання системи (1) для певних фіксованих значень $\Lambda_{1,2} = \Lambda_{2,1} = \Lambda$, $\beta_{1,2} = \beta_{2,1} = \beta$, випадкових початкових частот $f_1 \equiv f_1(0)$, $f_2 \equiv f_2(0)$ заданих згідно розподілу (2) та випадкових початкових фаз коливань $\varphi_1(0)$, $\varphi_2(0)$, що описуються рівномірним розподілом:

$$P_R(\varphi_{1,2}(0)) = \begin{cases} 1/2\pi, & 0 \leq \varphi_{1,2}(0) \leq 2\pi \\ 0, & \varphi_{1,2}(0) < 0, \varphi_{1,2}(0) > 2\pi \end{cases}. \quad (5)$$

Ширина смуги розкиду частот Δf була задана як $\Delta f = \xi \langle f \rangle$, де ξ – безрозмірний коефіцієнт, який характеризує недосконалість технології виготовлення СМНО. Для існуючої технології виготовлення СМНО [14, 15] цей коефіцієнт

приблизно лежить у межах: $0.05 < \xi < 0.5$.

Оскільки частоти f_j є випадковими величинами, що задані законом розподілу (2), а початкові «узагальнені фази» $\varphi_1(0)$, $\varphi_2(0)$ є випадковими величинами, що описуються законом розподілу (5), зрозуміло, що поведінка розв'язків системи (1) також може бути випадковою (принаймні, частково). Враховуючи це, результати аналізу розв'язків системи (1) мають бути статистично усереднені, що дозволить отримати достовірну інформацію щодо динаміки «узагальнених фаз» для системи двох слабо зв'язаних СМНО з випадковими власними параметрами. Статистичне усереднення, проведене в даній роботі за процедурою, вказаній у [19], показало, що ця операція не змінює критерій синхронізації двох СМНО. Відповідно далі розглянемо лише особливості числового аналізу системи (1), пропускаючи інформацію щодо процедури статистичного усереднення [19].

Алгоритм числового аналізу полягав у наступному:

1) Задавались певні значення амплітуди Λ та фази β коефіцієнта зв'язку, характерний розкид власних частот Δf або коефіцієнт ξ . Також задавався проміжок часу $t \in [0; T]$ протягом якого досліджується динаміка системи.

2) Генерувався випадковий вектор початкових «узагальнених фаз» $\vec{\varphi}(0) = \{\varphi_1(0), \varphi_2(0)\}$, виходячи із закону розподілу (5), та випадковий вектор власних частот $\vec{f} = \{f_1, f_2\}$, використовуючи закон розподілу (2) для відомого значення Δf .

3) Числовими методами розв'язувалась система рівнянь (1) для обраних значень Λ , β , $\varphi_1(0)$, $\varphi_2(0)$, f_1 , f_2 і визначались функції $\varphi_1(t)$ та $\varphi_2(t)$, $t \in [0; T]$.

4) За відомими функціями $\varphi_1(t)$ та $\varphi_2(t)$ розраховувався модуль параметра порядку $R(t)$ згідно виразу (4).

5) Задавався проміжок часу $[T - \tau; T]$ на якому буде досліджуватись стан системи. За такого вибору проміжку часу автоматично враховується той факт, що в початкові моменти часу $t \ll T$ динаміка системи може бути сильно нерівноважною, а при $t \rightarrow T$ динаміка системи, як правило, є більш усталеною. За відомими значеннями $R(t)$ розраховувалось середнє

значення цієї функції $\langle R \rangle_\tau$ на проміжку часу $[T - \tau; T]$ та характерне значення амплітуди її осциляцій $\langle \Delta R \rangle_\tau$:

$$\langle R \rangle_\tau = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n R(t_i), \quad (6)$$

$$\langle \Delta R \rangle_\tau = \frac{1}{n} \sqrt{\sum_{i=1}^n [R(t_i) - \langle R \rangle_\tau]^2}, \quad (7)$$

де n – кількість відліків часу t_i на проміжку часу $[T - \tau; T]$.

6) Задавалась припустима відносна величина амплітуди осциляцій $0 < \mu < 1$. Якщо для заданого μ виконувалось співвідношення

$$\langle \Delta R \rangle_\tau < \mu \langle R \rangle_\tau, \quad (8)$$

вважалося що СМНО є синхронізованими на проміжку часу $[T - \tau; T]$.

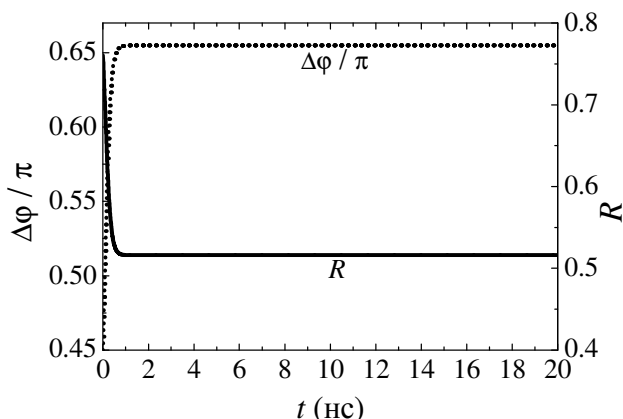


Рис 1. Часові залежності нормалізованої різниці фаз $\Delta\varphi/\pi$ (пунктирна крива) та амплітуди R комплексного параметра порядку (4) (суцільна крива); $\beta = 5\pi/4$.

Результати та їх аналіз

Числовий аналіз проводився для системи двох слабо зв'язаних СМНО з наступними параметрами (визначеними згідно п.п. 1, 2): $\Lambda/2\pi = 4$ ГГц, $f_1 = 12.5$ ГГц, $f_2 = 10$ ГГц, $\langle f \rangle = 11.25$ ГГц, $\vec{\varphi}(0) = \{\pi; 1.45\pi\}$, $\xi = 0.05$. Використовуючи алгоритм, наведений вище, було розраховано динаміку різниці «узагальнених фаз» $\Delta\varphi \equiv \Delta\varphi(t) = \varphi_1(t) - \varphi_2(t)$ для двох значень фази коефіцієнта зв'язку: $\beta = 5\pi/4$ (пунктирна лінія на рис. 1) та $\beta = \pi/2$ (пунктирна лінія на рис. 2). На тих же графіках суцільною лінією показано часову залежність модуля комплексного параметра порядку

$R \equiv R(t)$. З рис. 1, 2 видно, що абсолютне значення $R(t)$ характеризує лише «близькість» «узагальнених фаз» $\varphi_1(t)$ та $\varphi_2(t)$ в деякий момент часу. Проте поведінка $R(t)$ протягом досить тривалого проміжку часу $[t; t + \tau]$ свідчить про існування або відсутність синхронізації СМНО.

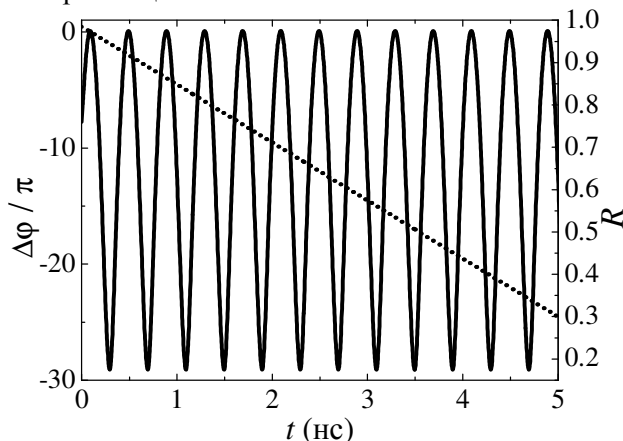


Рис 2. Часові залежності нормалізованої різниці фаз $\Delta\varphi/\pi$ (пунктирна крива) та амплітуди R комплексного параметра порядку (6) (суцільна крива); $\beta = \pi/2$.

Проведені дослідження показали, що величина $R(t)$ залежить від співвідношення початкових фаз $\vec{\varphi}(0) = \{\varphi_1(0), \varphi_2(0)\}$ і величини Λ . Якщо значення Λ менше деякої порогової величини, характерної для заданих $\vec{f} = \{f_1, f_2\}$ і близької до значення різниці власних частот Δf , синхронізація не відбуватиметься. Проте фаза коефіцієнта зв'язку β впливатиме ще суттєвіше, що видно з порівняння рис. 1, 2. Так для значень β близьких до $(2k+1)\pi/2$, $k \in \mathbb{N}$, синхронізація взагалі відбуватися не буде (див. рис. 2), незалежно від величини Λ .

Висновки

Показано, що часова залежність комплексного параметра порядку системи двох слабо зв'язаних СМНО може бути немонотонною або осцилюючою. Відповідно, для надійного визначення стану системи (є синхронізація чи її немає) необхідно проводити аналіз не абсолютних значень комплексного параметра порядку в деякий момент часу, а досліджувати зміни цього параметра протягом

певного періоду часу. За допомогою числового аналізу також встановлено, що синхронізація двох СМНО є найбільш ефективною, коли амплітуда коефіцієнта зв'язку Λ є більшою за різницю власних циклічних частот осциляторів, а фаза коефіцієнта зв'язку відрізняється від

$$(2k+1)\pi/2, k \in \mathbb{N}.$$

Робота була підтримана грантом Державного фонду фундаментальних досліджень України (проект F64/8).

Список використаних джерел

1. *Pikovsky A.* Synchronization: A Universal Concept in Nonlinear Sciences / A. Pikovsky, M. Rosenblum, J. Kurths. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2007. – 433 p.
2. *Žutić I.* Spintronics: Fundamentals and applications / I. Žutić, J. Fabian, S. Das Sarma // *Rev. Mod. Phys.* – 2004. – **76**, № 2. – P. 323-410.
3. *Slonczewski J.C.* Current-driven excitation of magnetic multilayers / J.C. Slonczewski // *J. Magn. Magn. Mater.* – 1996. – **159**, № 1-2. – P. L1-L7.
4. *Berger L.* Emission of spin waves by a magnetic multilayer traversed by a current / L. Berger // *Phys. Rev. B* – 1996. – **54**, №13. – P. 9353-9358.
5. *Myers E.B.* Current-induced switching of domains in magnetic multilayer devices / E.B. Myers, D.C. Ralph, J.A. Katine, R.N. Louie, R.A. Buhrman // *Science*. – 1999. – **285**, № 5429. – P. 867-870.
6. *Kiselev S.I.* Microwave oscillations of a nanomagnet driven by a spin-polarized current / S.I. Kiselev, J.C. Sankey, I.N. Krivorotov, N.C. Emley, R.J. Schoelkopf, R.A. Buhrman, D.C. Ralph // *Nature*. – 2003. – **425**, №6956. – P. 380-383.
7. *Krivorotov I.N.* Time-domain measurements of nanomagnet dynamics driven by spin-transfer torques / I.N. Krivorotov, N.C. Emley, J.C. Sankey, S.I. Kiselev, D.C. Ralph, R.A. Buhrman // *Science*. – 2005. – **307**, №5707. – P. 228-231.
8. *Kaka S.* Mutual phase-locking of microwave spin torque nano-oscillators / S. Kaka, M.R. Pufall, W.H. Rippard, T.J. Silva, S.E. Russek, J.A. Katine // *Nature*. – 2005. – **437**, №7057. – P. 389-392.
9. *Mancoff F.B.* Phase-locking in double-point-contact spin-transfer devices / F.B. Mancoff, N.D. Rizzo, B.N. Engel, S. Tehrani // *Nature*. – 2005. – **437**, №7057. – P. 393-395.
10. *Tulapurkar A.A.* Spin torque diode effect in magnetic tunnel junctions / A.A. Tulapurkar, Y. Suzuki, A. Fukushima, H. Kubota, H. Maehara, K. Djayaprawira, N. Watanabe, S. Yuasa // *Nature*. – 2005. – **438**, № 7066. – P.

References

1. PIKOVSKY, A., ROSENBLUM, M., KURTHS, J. (2007) *Synchronization: A Universal Concept in Nonlinear Sciences*, Cambridge: Cambridge Univ. Press.
2. ŽUTIĆ, I., FABIAN, J., DAS SARMA, S. (2004) Spintronics: Fundamentals and applications. *Rev. Mod. Phys.* 76 (2). p. 323-410.
3. SLONCZEWSKI, J. (1996) Current-driven excitation of magnetic multilayers. *J. Magn. Magn. Mater.* 159 (1-2). p. L1-L7.
4. BERGER, L. (1996) Emission of spin waves by a magnetic multilayer traversed by a current. *Phys. Rev. B.* 54 (13). p. 9353-9358.
5. MYERS, E., RALPH, D., KATINE, J., LOUIE, R., BUHRMAN, R. (1999) Current-induced switching of domains in magnetic multilayer devices. *Science*. 285 (5429). p. 867-870.
6. KISELEV, S.I., SANKEY, J.C., KRIVOROTOV, I.N., EMLEY, N.C., and RALPH, D.C. (2003) Microwave oscillations of a nanomagnet driven by a spin-polarized current. *Nature*. 425 (6956). p. 380-383
7. KRIVOROTOV, I.N., EMLEY, N.C., SANKEY, J.C., RALPH, D.C. and BUHRMAN, R.A. (2005) Time-domain measurements of nanomagnet dynamics driven by spin-transfer torques. *Science*. 307 (5707). p. 228-231.
8. KAKA, S., PUFALL, M.R., RIPPARD, W.H., SILVA, T.J., and KATINE, J.A. (2005) Mutual phase-locking of microwave spin torque nano-oscillators. *Nature*. 437 (7057). p. 389-392.
9. MANCOFF, F.B., RIZZO, N.D., ENGEL, B.N. and TEHRANI, S. (2005) Phase-locking in double-point-contact spin-transfer devices. *Nature*. 437 (7057). p. 393-395.
10. TULAPURKAR, A., SUZUKI, Y., FUKUSHIMA, A., KUBOTA, H., MAEHARA, H., TSUNEKAWA, K., DJAYAPRAWIRA, D., WATANABE, N. and YUASA, S. (2005) Spin torque diode effect in magnetic tunnel junctions. *Nature*. 438 (7066). p. 339-342.
11. PROKOPENKO, O., BANKOWSKI, E., MEITZLER, T., TIBERKEVICH, V. and SLAVIN, A. (2011) Spin-torque nano-oscillator

- 339-342.
11. Prokopenko O. Spin-Torque Nano-Oscillator as a Microwave Signal Source/ O. Prokopenko, E. Bankowski, T. Meitzler, V. Tiberkevich, A. Slavin // *IEEE Magn. Lett.* – 2011. – **2**. – P. 3000104.
12. Prokopenko O.V. Microwave detectors based on the spin-torque diode effect/ O.V. Prokopenko, A.N. Slavin // *Low Temp. Phys.* – 2015. – **41**, № 5. – P. 457-465.
13. Locatelli N. Spin-torque building blocks / N. Locatelli, V. Cros, J. Grollier // *Nature Mater.* – 2014. – **13**, №1. – P. 11-20.
14. Katine J.A. Device implications of spin-transfer torques / J.A. Katine, E.E. Fullerton // *J. Magn. Magn. Mater.* – 2008. – **320**, №7. – P. 1217-1226.
15. Silva T.J. Developments in nano-oscillators based upon spin-transfer point-contact devices / T.J. Silva, W.H. Rippard // *J. Magn. Magn. Mater.* – 2008. – **320**, №7. – P. 1260-1271.
16. Ruotolo A. Phase-locking of magnetic vortices mediated by antivortices / A. Ruotolo, V. Cros, B. Georges, A. Dussaux, J. Grollier, C. Deranlot, R. Guillemet, K. Bouzehouane, S. Fusil, A. Fert // *Nature Nanotech.* – 2009. – **4**, №8. – P. 528-532.
17. Slavin A.N. Nonlinear auto-oscillator theory of microwave generation by spin-polarized current / A.N. Slavin, V.S. Tiberkevich // *IEEE Trans. Magn.* – 2009. – **45**, № 4. – P. 1875-1918.
18. Прокопенко О.В. Взаємна фазова синхронізація двох нанорозмірних магнітних структур з урахуванням запізнення сигналу / О.В. Прокопенко // *Радіоелектроніка. Інформатика. Управління.* – 2010. – № 2. – С. 11-15.
19. Prokopenko O.V. Dynamics of generalized phases in a system of two weakly-coupled spin-torque nano-oscillators with random eigen frequencies: the case of global coupling/ O.V. Prokopenko, B.I. Karpiak, O.R. Sulymenko // *Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Радіофізика та електроніка.* – 2013. – № 19. – С. 47-51.
20. Slavin A.N. Theory of mutual phase locking of spin-torque nanosized oscillators / A.N. Slavin, V.S. Tiberkevich // *Phys. Rev. B.* – 2006. – **74**, №10. – P. 104401.
- as a microwave signal source. *IEEE Magn. Lett.* 2. p. 3000104.
12. PROKOPENKO, O., SLAVIN, A. (2014) Microwave detectors based on the spin-torque diode effect. *Low Temp. Phys.* 41(5). p. 457-465.
13. LOCATELLI, N., CROS, V., GROLLIER, J. (2014) Spin-torque building blocks. *Nature Mater.* 13(1) p. 11-20.
14. KATINE, J., FULLERTON, E. Device implications of spin-transfer torques. *J. Magn. Magn. Mater.* 320 (7). p. 1217-1226.
15. SILVA, T., RIPPARD, W. (2008) Developments in nano-oscillators based upon spin-transfer point-contact devices. *J. Magn. Magn. Mater.* 320 (7). p. 1260-1271.
16. RUOTOLO, A., CROS, V., GEORGES, B., DUSSAUX, A., GROLLIER, J., DERANLOT, C., GUILLEMET, R., BOUZEHOUE, S., FUSIL, S. and FERT, A. (2009) Phase-locking of magnetic vortices mediated by antivortices. *Nature Nanotech.* 4 (8). p. 528-532.
17. SLAVIN, A., TIBERKEVICH, V. (2009) Nonlinear auto-oscillator theory of microwave generation by spin-polarized current. *IEEE Trans. Magn.* 45 (4). p. 1875-1918.
18. PROKOPENKO, O.V. (2010) Mutual phase-locking of two nano-size magnetic structures considering an influence of signal delay. *Radio Electronics, Computer Science, Control.* 2. p. 11-15.
19. PROKOPENKO, O., KARPIAK, B., SULYMENKO, O. (2013) Dynamics of generalized phases in a system of two weakly-coupled spin-torque nano-oscillators with random eigen frequencies: the case of global coupling. *Bulletin of National Taras Shevchenko University of Kyiv. Radiophysics and Electronics.* 19. p. 47-51.
20. SLAVIN, A., TIBERKEVICH, V. (2006) Theory of mutual phase locking of spin-torque nanosized oscillators. *Phys. Rev. B.* 74(10). p. 104401.

Надійшла до редколегії 29.01.2016

СУЧАСНА ФІЗИКА

УДК 536.63, 537.638, 616-073.8

Вергун Л.Ю.¹, к.ф.-м.н., н.с.,
Бацак Б.В.², асп.,
Олійник А.В.¹, студ.

Застосування гліцерину для покращення зображення в процесі МРТ-досліджень

¹Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 01601, м. Київ, вул. Володимирська 64/13, e-mail: aktanl@univ.kiev.ua

²Національний інститут серцево-судинної хірургії імені М.М.Амосова НАМН України, 03110, м. Київ, вул. М.Амосова 6

L.Yu. Vergun¹, PhD, Sci. Res.,
B.V. Batsak², PhD stud.,
A.V. Oliinyk¹, stud.

The using of glycerol for image enhancement during MRI studies

¹Taras Shevchenko National University of Kyiv, 01601, Kyiv, Volodymyrska st. 64/13, e-mail: aktanl@univ.kiev.ua

²Amosov National Institute of Cardiovascular Surgery, 03110, Kyiv, N.Amosov st. 6

Досліджується проблема покращення якості зображення упродовж МРТ-сканування. Виникнення цієї проблеми пов'язане із впливом зовнішніх магнітних полів на дифузію речовин через епідерміс. Запропоновано використовувати гліцерин, попередньо оброблений в постійному магнітному полі. Встановлено, що магнітна обробка змінює коефіцієнт теплопровідності гліцерину. Отриманий результат пов'язаний із орієнтацією анізотропних кластерів у напрямку магнітного поля. Зроблено висновок, що нанесення гліцеринового шару акумулює дію магніточутливих частинок у поверхневому шарі епідермісу і запобігає утворенню некоректних МРТ-зображень.

Ключові слова: МРТ-сканування, гліцерин, коефіцієнт теплопровідності, магнітне поле.

Investigated the problem of improving the image quality during MRI scans. The occurrence of this problem to the influence of external magnetic fields on the diffusion of substances through the epidermis. The main component of epidermis is the keratin. The mechanism of changing the structure of the epidermis under the influence of a constant magnetic field has been associated with changes in sizes and shapes of defective areas. To hypothesize concerning the relationship between the quality of MRI images and the presence of the defective areas in the epidermis filled with magnetic particles. Proposed use of glycerol, pre-treated in a constant magnetic field. The developed method of evaluate the effectiveness of using magnetic field for pre-treated of contrasting agents. It is established that the magnetic coating changes the thermal conductivity of glycerol. The result is associated with the anisotropic orientation of clusters in the direction of the magnetic field. The experimental results for images of human hand with tomography system "TOSHIBA Vantage Titan Octave 1,5 Tesla" are used. It is concluded that the application of glycerol is accumulates the effect of magnetically sensitive particles in the surface layer of the epidermis and prevents incorrect MRI images.

Key Words: MRI scan, glycerol, coefficient of thermal conductivity, magnetic field.

Статтю представив академік НАН України, д.ф.-м.н., проф. Булавін Л.А.

Вступ

Для діагностики м'яких тканин при проведенні МРТ-досліджень використовують речовини, що змінюють релаксаційні властивості тканин. Їх називають контрастними препаратами та контрастуючими агентами [1]. Контрастні препарати впливають на властивості навколишніх тканин за незмінного сигналу. В свою чергу, контрастуючі агенти змінюють контраст зображення. Використання зазначених речовин пов'язане із наявністю магнітного моменту.

При проведенні МРТ-обстеження покрив людського організму піддається впливу постійного магнітного поля. Як відомо [2], поверхневий шар цього покриву – це епідерміс, що являє собою

впорядковану структуру і складається з без'ядерних клітин, заповнених нерозчинним кератином і міжклітинним ліпідним матриксом. Епідерміс відносять до тканин, де основним компонентом є кератин. Слід зазначити також, що при онкологічних захворюваннях в кісткових компонентах сполучної тканини, основною цементуючою речовиною якою є колаген, було виявлено наявність деяких модифікацій кератину [3]. Крім того, в роботі [4] встановлено, що утворення епітеліальних маркерів пов'язане із процесом кератинізації, що являє собою процес руйнування поверхневого шару епідермісу. Руйнування цього шару відбувається за рахунок збільшення дефектних зон, які оточують структурні одиниці – кератинові гранули. Дефектні зони в епідермісі можуть бути заповнені також магнітними

частинками (залізо, мідь, тощо), які надходять в організм із зовнішнього середовища. В роботах [5], [6] встановлено, що сильні зовнішні магнітні поля створюють в поверхневих шарах шкіри власні магнітні поля порядку 0,04-2 мТл, які впливають на дифузію речовин крізь ці шари.

Механізм зміни структури епідермісу під дією постійного магнітного поля був запропонований в роботі [2] і пов'язаний зі зміною розмірів і форм дефектних зон.

Для виключення можливості спотворення зображень за рахунок утворення дефектних зон, як контрастуючий препарат, пропонується використовувати діаманетик – гліцерин, що може акумулювати малі магнітні поля, змінюючи свою структуру на кластероподібну [7], [8]. Слід також зазначити, що вплив силових полів на структуру рідинних систем було експериментально і теоретично досліджено в роботі [9].

Матеріали та методика експериментального дослідження

Для проведення експериментів застосовувався гліцерин (ГОСТ 6259-75 "чда" ТОВ НПД «Альфарус»). Експерименти проводились на основі адіабатичного методу калориметрії Персона та методу створення магнітного поля досліджуваної речовини, що базується на використанні системи котушок Гельмгольца [10], [11]. Результати експерименту були використані для отримання зображень кисті руки за допомогою томографа Vantage Titan Octave 1,5 Tesla компанії TOSHIBA.

У процесі експерименту кювета з гліцеринном розміщувалась у постійне магнітне поле з індукцією 0,43мТл, час витримки в магнітному полі складав 30 хвилин. Величина зазначеного часу визначалась орієнтованою тривалістю проведення МРТ-дослідження. Надалі проводився диференційний термічний аналіз зразків. Температурний діапазон нагріву зразків відповідав температурному діапазону, що використовується при проведенні МРТ-дослідженнях.

Мета згаданого теплофізичного експерименту полягала в порівнянні теплопровідності гліцерину, що витримувався (λ_2) і не витримувався (λ_1) в магнітному полі.

Як відомо, температура поля $T(\vec{r}, t)$ визначається рівнянням теплопровідності

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a^2 \Delta T, \quad (1)$$

де T – температура, t – час, a^2 – температуропровідність, що відповідає відомій формулі

$$a^2 = \frac{\lambda}{c\rho}, \quad (2)$$

де λ – коефіцієнт теплопровідності, c – теплоємність, ρ – густина.

Граничною умовою в даному випадку служить рівність

$$T(\vec{r}, t) = T_0, \quad (\vec{r} \in S) \quad (3)$$

де $\vec{r}$ – радіус-вектор, S – гранична поверхня об'єму, зайнятого гліцеринном.

Загальний розв'язок рівняння (1), як відомо, має вигляд

$$T(\vec{r}, t) = \sum_i \exp\left(-\frac{t}{\tau_i}\right) B_i(\vec{r}), \quad (4)$$

де $B_i(\vec{r})$ – власні функції рівняння (1).

Через певний час t_1 після початку вимірів вираз (4) набуває вигляду

$$T \approx T_0 \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right], \quad (5)$$

У формулі (5) час релаксації визначається формулою

$$\tau \sim \frac{L^2}{a^2}, \quad (6)$$

де L – розмір кювети.

Вводячи позначення

$$k(t) = \frac{T(t)}{T_0}, \quad (7)$$

перепишемо вираз (5) у вигляді

$$1 - k(t) = \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right). \quad (8)$$

Із виразу (8) маємо

$$\tau = -t \ln[1 - k(t)]. \quad (9)$$

Підставляючи у формулу (9) рівності (2) та (6), отримуємо

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{\ln[1 - k_1(t)]}{\ln[1 - k_2(t)]}, \quad (10)$$

де $k_1(t)$ та $k_2(t)$ відповідають немагніченому та намагніченому гліцерину.

Результати експерименту та їх обговорення

На рис.1. показано залежність безрозмірного коефіцієнту, що характеризує наростання температури, від часу $k(t)$. На цьому рисунку сірим кольором позначено значення k еталону – Al_2O_3 , чорним кольором-значення k для гліцерину, що перебував у магнітному полі, білі квадрати відповідають даним, отриманим для не намагніченого гліцерину. Розраховане за формулою (10) за даними рис.1 значення відношення $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}(t)$ наведено на рис.2.

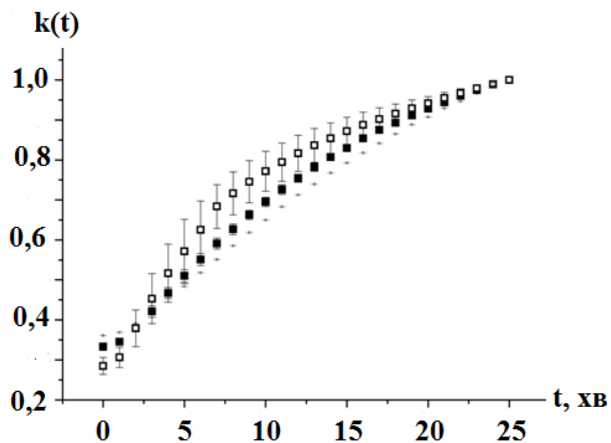


Рис.1 Залежність безрозмірного коефіцієнта k , що характеризує зміни температури від часу

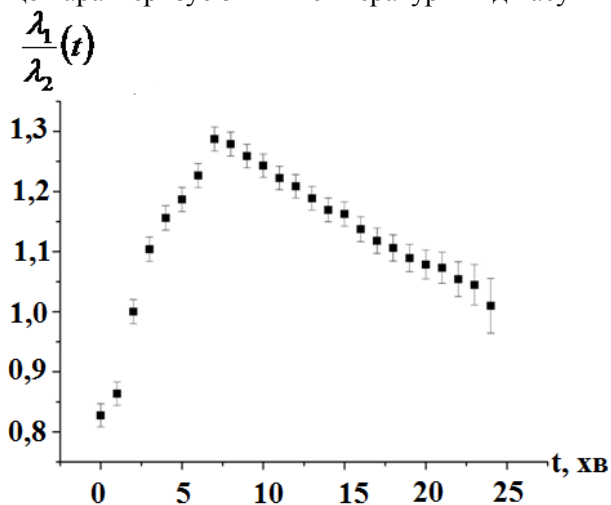


Рис.2 Залежність відношення коефіцієнтів теплопровідності для немагніченого та намагніченого гліцерину $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$ від часу

З рис.2. видно, що витримування гліцерину в магнітному полі змінює його теплопровідність. Цей факт можна пояснити орієнтацією анізотропних кластерів у напрямку магнітного поля. При цьому після проходження теплового потоку концентрація цих кластерів починає зростати. Таке зростання пояснюється можливістю поділу кластерної зони на більш дрібні. Протягом усього експерименту, час якого дорівнює середньому часу виконання МРТ-досліджень, відбувається зменшення розмірів кластерних зон практично до поодиноких молекул.

На рис.3 наведено МРТ-зображення кисті руки, які відповідають проведенню сканування у відсутності нанесення гліцерину, як контрастуючого агента (3а), а також при нанесенні звичайного (3б) та намагніченого гліцерину (3в). Отримані під час МРТ знімки оброблялися у програмі «RadiAnt DICOM Viewer (64-bit)».

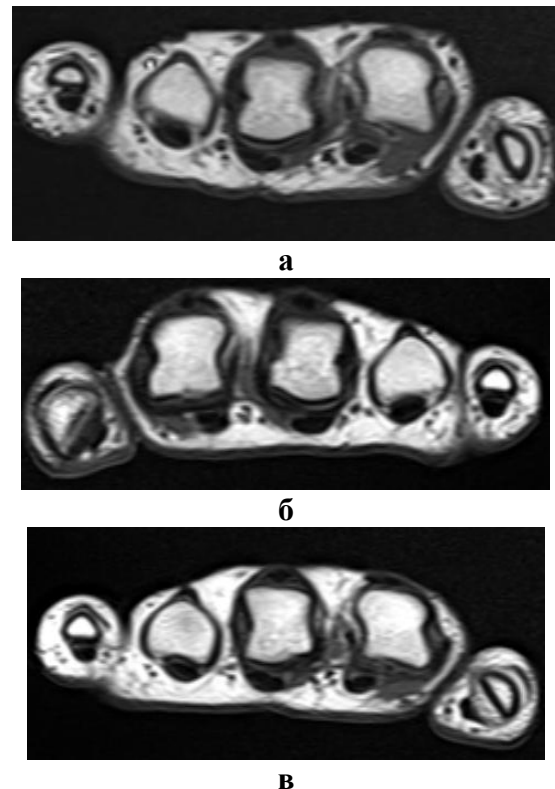


Рис. 3. МРТ-зображення кисті руки: а – відсутність гліцерину, б - гліцерин, який не перебував у постійному магнітному полі, в – гліцерин, що перебував у постійному магнітному полі індукцією 0,43mTl протягом 25 хвилин.

Як видно з рис.3а, б, в, зображення, що відповідають стану за відсутності гліцерину та станам із намагніченим та немагніченим гліцеином, відрізняються ступенем зернистості. Це означає, що для зазначених випадків кількість гліцеинового шару з орієнтованими у напрямку поля кластерами змінює механізми дифузії в поверхневих шарах сполучних тканин, що перешкоджає участі магніточутливих частинок, які містяться в епідермісі, вносити похибки в отримання зображень внутрішніх органів.

Висновки

У роботі запропоновано метод, що дозволяє покращити зображення МРТ-сканування. Зазначений метод базується на застосуванні гліцеиру та його попередній обробці в слабкому постійному магнітному полі. Встановлено, що магнітна обробка змінює коефіцієнт теплопровідності гліцеиру, що зумовлює орієнтацію анізотропних кластерів у напрямку магнітного поля. Встановлено також, що нанесення гліцеиру шару акумулює дію магніточутливих частинок у поверхневому шарі епідермісу і запобігає утворенню некоректних МРТ-зображень.

Список використаних джерел

1. Felix R. Magnevist / R. Felix, A. Heshiski. – Berlin: Blackwell Science, 2001. – 242 с.
2. Vergun L. Y. Molecular Mechanism of Disordering the Epidermis Structure Under the Effect of Static Magnetic Field / L. Y. Vergun, K. O. Teliman. // 3. – 2013. – №2. – С. 312–315.
3. Mozafar A. The Adjuvant Therapy Influence upon Micrometastasis in Bone Marrow Aspiration and Detection of relapse Rate in Breast Cancer Patients Follow up / A. Mozafar, G. Ardeshir. // International Journal of Hematology Oncology and Stem Cell Research. – 2010. – №4. – С. 21–25.
4. Milind V. Keratins: Markers of cell differentiation or regulators of cell differentiation? / V. Milind, K. Deepak. // J.Biosci. – 2007. – №32. – С. 629–634.
5. Krishnan G. Enhanced Skin Permeation of Naltrexone by Pulsed Electromagnetic Fields in Human Skin in Vitro / G. Krishnan, J. Edwards. // J Pharm Sci. – 2010. – №99. – С. 2724 – 2731.
6. Levallois P. Effects of Electric and Magnetic Fields from High-power Lines on Female Urinary Excretion of 6-Sulfatoxymelatonin / P. Levallois, M. Dumont. // American Journal of Epidemiology. – 2001. – №7. – С. 601 – 609.
7. Levin P. P. Geminate recombination kinetics of triplet radical pairs in glycerol: magnetic field effect / P. P. Levin, I. V. Khudyakov. // J. Phys. Chem. – 1989. – №1. – С. 208–214.
8. Root L. Short-range order in glycerol. A molecular dynamics study / L. Root, F. Stillinger. // J. Chem.Phys. – 1989. – №2. – С. 1200–1208.
9. Dikanskii Y. I. Determination of polarization charge density surfaces of magnetic fluid jet in a uniform electric field / Y. I. Dikanskii, O. V. Borisenko. // Technical physics. – 2014. – №84. – С. 31–35
10. Bessonov L. A. Theoretical basics of electrical engineering. An electromagnetic field / Bessonov. – M: Gardariki, 2001. – 317 с.
11. Kirschvink J. L. Magnetite Biomineralization and Magnetoreception in Organisms: A New Biomagnetism. – Topics in Geobiology / J. L. Kirschvink, D. S. Jones. – New York: Plenum Press, 1985. – 685 с
12. Kikoin A. Molecular Physics / A. Kikoin, I. Kikoin, G. Leib. – London: Central Books Ltd, 1979. – 480 с.
13. Mehra R. Elements in Scalp hair and nails indicating metal body burden in polluted environment / R. Mehra, M. Juneja. // Journal of Scientific and Industrial Research. – 2005. – №64. – С. 119–124.
14. Reichelt J. Formation of a Normal Epidermis Supported by Increased stability of Keratins 5 and 14 in Keratin Null Mice / J. Reichelt, H. Büssow. // Molecular Biology of the Cell. – 2001. – №12. – С. 1557–1560.

References

1. FELIX, R., HESHISKI, A. (2001). *Magnevist*. Berlin: Blackwell Science.
2. VERGUN, L. & TELIMAN, K. (2013) Molecular Mechanism of Disordering the Epidermis Structure Under the Effect of Static Magnetic Field. *Journal of Physical Science and Application*. 3(2). p.312-315.
3. AZNAB, M. & GHAVAMZADE, A. (2010) The Adjuvant Therapy Influence upon Micrometastasis in Bone Marrow Aspiration and Detection of relapse Rate in Breast Cancer Patients Follow up. *International Journal of Hematology Oncology and Stem Cell Research*. 4(3). p. 21-25.
4. MILIND, V. & KANOJLA, D. (2007) Keratins: Markers of cell differentiation or regulators of cell differentiation? *J.Biosci*. 32(4). p. 629-634.
5. KRISHNAN, G. & EDWARDS, J. (2010) Enhanced Skin Permeation of Naltrexone by Pulsed Electromagnetic Fields in Human Skin in Vitro. *J. Pharm Sci*. 99 (6). p. 2724 – 2731.
6. LEVALLOIS, P. & DUMONT, M. (2001) Effects of Electric and Magnetic Fields from High-power Lines on Female Urinary Excretion of 6-Sulfatoxymelatonin. *American Journal of Epidemiology*. 154(7). p. 601 -609.
7. LEVIN, P. & KHUDYAKOV, I. (1989) Geminate recombination kinetics of triplet radical pairs in glycerol: magnetic field effect. *J. Phys. Chem*. 93 (1). p. 208–214.
8. ROOT, L. & STILLINGER, F. (1989) Short-range order in glycerol. A molecular dynamics study. *J.Chem.Phys*. 90(2). p.1200-1208.
9. DIKANSKII, Yu. & BORISENKO, O. (2014) Determination of polarization charge density surfaces of magnetic fluid jet in a uniform electric field. *Technical physics*. 84 (3). p.31-35.
10. BESSONOV, L.A. (2001) *Theoretical basics of electrical engineering. An electromagnetic field*. M.:Gardariki.
11. KIRSCHVINK, J., JONES, D. (1985) *Magnetite Biomineralization and Magnetoreception in Organisms: A New Biomagnetism. Topics in Geobiology*. New York: Plenum Press.
12. KIKOIN, A., KIKOIN, I. and LEIB, G. (1979). *Molecular Physics*. London: Central Books Ltd.
13. MEHRA, R. & JUNEJA, M. (2005) Elements in Scalp hair and nails indicating metal body burden in polluted environment. *Journal of Scientific and Industrial Research*. 64. p. 119-124.
14. REICHELT, J. & BÜSSOW, H. (2001) Formation of a Normal Epidermis Supported by Increased stability of Keratins 5 and 14 in Keratin Null Mice. *Molecular Biology of the Cell*. 12. p. 1557 - 156.

Надійшла до редколегії 21.01.16

УДК 537.84

Вергун Л.Ю.¹, к.ф.м.н., с.н.с.
Забашта Ю.Ф.¹, д.ф.м.н., проф.,
Огороднік К.О.¹, асп.

Магнітогідродинамічна нестійкість водного розчину глюкози

¹Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 01601, м. Київ,
вул. Володимирська 64/13,
e-mail: keit1989@ukr.net

L.Yu. Vergun¹, PhD, Sen. Sci. Res.,
Yu.F. Zabashta¹, Dr. Sci., Prof.,
K.O. Ogorodnik¹, PhD Stud.

Magnetohydrodynamic instability of aqueous solutions of glucose

¹Taras Shevchenko National University of Kyiv,
01601, Kyiv, Volodymyrska st. 64/13,
e-mail: keit1989@ukr.net

Виявлено існування магнітогідродинамічної нестійкості для водного розчину глюкози, що проявляється у виникненні турбулентного руху після прикладення сталого магнітного поля.

Ключові слова: магнітне поле, турбулентність, глюкоза.

In this work we investigated the influence of magnetic fields on diamagnetic solutions. For this purpose experimental researches of light scattering intensity in aqueous solutions of glucose were conducted. The measurements were held for thirty minutes when the field was turned off, the subsequent measurements were carried out under the steady action of magnetic field. At the time of connection of magnetic field increase in fluctuation intensity that exceeds the experimental error was observed. The occurrence of fluctuations causes motion that occurs at the macroscopic level, because the system is in a nonequilibrium state. Changing the value of B induction of current magnetic field we were trying to determine the critical value of B_c induction, excess of which leads to instability. The received dependence of scattering intensity on the time has got chaotic nature, that by definition, causes turbulent movement.

Thus, there was revealed the existence of magnetohydrodynamic instability of aqueous solutions of glucose, which is manifested in occurrence of turbulent motion after applying steady magnetic field.

Key Words: magnetic field, turbulent motion, glucose.

Статтю представив академік НАН України, д.ф.-м.н., проф. Булавін Л.А.

Вступ

У фізиці рідинних систем давно відоме явище електрогідродинамічної нестійкості [1], яке полягає у виникненні турбулентного руху під дією електричного поля в деяких нерухомих до того рідинних системах, коли напруженість електричного поля перевищує певне критичне значення.

Чи спостерігатиметься аналогічне явище при дії на рідинну систему магнітного поля?

В пошуках відповіді на це запитання ми провели дослідження світлорозсіяння 5% водним розчином глюкози, що знаходиться під дією магнітного поля.

Експеримент та його результати

Схема використаної експериментальної установки приведена в статті [2]. Вимірювалась відносна інтенсивність розсіяння $\xi = I/I_0$, де I –

інтенсивність в момент часу t , I_0 – інтенсивність в момент часу $t=0$, що відповідає початковим вимірам. Спочатку протягом 30 хвилин виміри проводилися при вимкненому магнітному полі, після чого поле вмикалося, і подальші виміри проводилися вже при дії сталого магнітного поля. Результати експерименту показані на рис.1

Кожна з приведених залежностей – це один з первинних графіків, які було отримано для даного значення магнітної індукції. та не піддано статистичній обробці. Така подача експериментальних даних використана в цій статті навмисно, побоюючись, що усереднення результатів при статистичній обробці, знівелює ефект, який ми намагатимемося виявити, а саме турбулентний рух.

Обговорення результатів експерименту

Як видно з рис. 1 для величини ξ існують дві області, малих ($t < 30$, поле виключене) і великих

($t > 30$, поле включене) флуктуацій. За відсутності магнітного поля ніяких структурних перетворень із розчином не відбувається. Відповідно можна стверджувати, що спостережені малі флуктуації – це не що інше, як відхилення, пов'язані із похибками експерименту. Отже ми можемо говорити, що включення магнітного поля призводить до флуктуацій інтенсивності, що суттєво перевищують похибку експерименту.

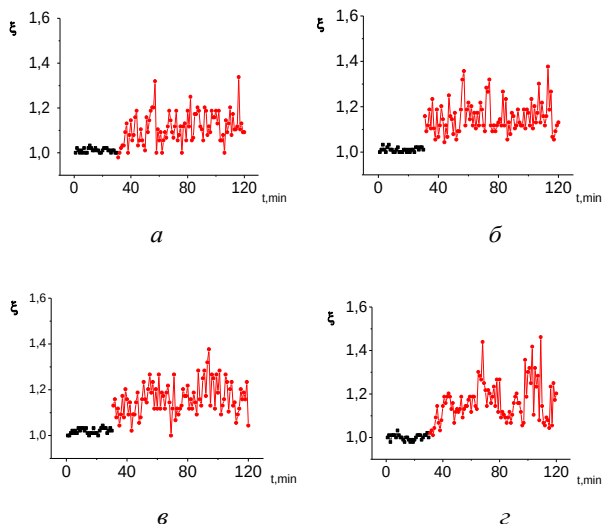


Рис. 1. Часові залежності відносної інтенсивності світлорозсіяння 5% водним розчином глюкози під впливом магнітного поля індукцією: (а) - 0,13 мТл, (б) - 0,16 мТл, (в) - 0,25 мТл, (г) - 0,43 мТл.

Чи можуть бути такі флуктуації наслідком теплового руху? На нашу думку, флуктуації, що викають при включенні магнітного поля, завдячують своїм існуванням тому, що система знаходиться в нерівноважному стані, в якому, на

відміну від рівноважного, відбувається рух на макроскопічному рівні.

Як видно з рис. 1, залежність $I(t)$ носить хаотичний характер, а отже, і макроскопічний рух, що спричинив цю залежність є хаотичним. За визначенням [3], турбулентний рух є макроскопічним хаотичним рухом. Це визначення дозволяє нам зробити висновок, що ми маємо справу з магнітогідродинамічною нестійкістю, коли прикладення магнітного поля причиняє появу турбулентного руху.

Змінюючи значення індукції B діючого магнітного поля ми намагалися визначити те критичне значення індукції B_c , перевищення якої призводить до виникнення нестійкості. Згідно з рис. 1, турбулентність з'являлася при всіх застосовуваних нами значеннях B . Єдине, що ми можемо з певністю стверджувати на основі наших експериментальних даних, - це те, що критичне значення B_c задовольняє нерівності.

$$B_c < 0,13 \text{ мТл}$$

Висновки

Водному розчину глюкози притаманне явище магнітогідродинамічної нестійкості, яке проявляє себе під дією сталого магнітного поля з виникненням турбулентного руху.

Для дослідження розчинів критичне значення магнітної індукції, при якому з'являється нестійкість, менше за 0,13 мТл.

Список використаних джерел

1. Пикин С.А. Структурное превращение в жидких кристаллах / С. А. Пикин. – Москва: Наука, 1981. – 336 с.
2. Vergun L. Yu. Molecular Mechanism of Disordering the Epidermis Structure under Effect of Static Magnetic Field / L. Yu. Vergun, O. A. Zagorodnia, K. O. Teliman. // J. Phys.Sci. Appl.. – 2013. – №3. – С. 311-314.
3. Ландау Л. Д. Гидродинамика / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. – Москва: Наука, 1988. – 736 с.

References

1. PIKIN, S. A. (1981) *Making structures in liquid crystals*. Moskva: Nauka.
2. VERGUN, L.YU., ZAGORODNIA, O.A. and TELIMAN, K.O. (2013) Molecular Mechanism of Disordering the Epidermis Structure under Effect of Static Magnetic Field. *J. Phys.Sci. Appl.* 3 (5). p.311-314.
3. LANDAU, L.D, LIFSCHITZ, E.M. (1989) *Hydrodynamics* Moskva: Nauka.

Надійшла до редколегії 18.03.16

УДК 535.376

Весна Г.В.¹, к.ф.-м.н.,
Гуменюк А.Ф.¹, к.ф.-м.н., доц.,
Дегода В.Я.¹, д.ф.-м.н., с.н.с.,
Маразуєв Ю.А.¹, к.ф.-м.н., доц.

**Кінетика рекомбінаційної люмінесценції
і провідності кристалофосфорів
2. Накопичення світлосуми на глибоких
пастках**

¹Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 01601, м. Київ, вул.
Володимирська 64/13,
e-mail:galyna.vesna@gmail.com

G.V.Vesna¹, PhD.,
A.F.Gumenuk¹, PhD.,
V.Y.Degoda¹, Dr. Sci., Sen. Sci. Res.,
U.A.Marazuev¹, PhD.

**The kinetic of the recombination luminescence
and conductivity of crystallophosphorus
2.The accumulation charge carrier on shallow
traps**

¹Kyiv Taras Shevchenko National University, 01601,
Kyiv, Volodymyrska st. 64/13,
e-mail:galyna.vesna@gmail.com

В розвиток класичних теорій кінетики люмінесценції і провідності розглянута модель кристалофосфору, яка містить три типи пасток (мілка, фосфоресцентна, глибока) та два конкуруючі між собою центри свічення, тобто розглянули фізично більш адекватну модель. Використовуючи прийняті в класичних теоріях наближення, одержали прості наближені розв'язки системи кінетичних рівнянь в аналітичному вигляді. В цій другій частині роботи одержані кінетичні залежності для накопичення носіїв заряду на глибоких пастках та залежності для інтенсивності люмінесценції і величини струму провідності.

Ключові слова: фотолюмінесценція, фотопровідність, кристалофосфор або широкозонний напівпровідник, центр рекомбінації (свічення)

A model of crystallophosphorus was studied as a development of the classical theories of kinetic of luminescence and conductivity. This model has 3 types of traps (shallow, phosphorescent, deep) and 2 compete luminescence centres. The easy approximate solutions of simultaneous kinetic equations was done using the existing in classical theories approximations. These solutions exist by specified excitation temperature in material when a few small traps are present. The influence of shallow traps on luminescence and conductivity was determined. Dependences of the concentration of free and localization charges carrier on shallow and deep traps was received at start excitation. Specified that the shallow traps influence insignificantly on the stationary recombinative luminescence because it doesn't change living time of free electrons in conducting band. However, shallowtraps influenceessentially on current conductor value because the part of free electrons was localised on this traps. Moreover significant influence of shallow traps on frequency characteristics of the luminescence and conductivity at using modulation excited radiation was found. The important peculiarity for accumulation charges carrier on shallow traps are that the form of curves of the concentration of the charges carrier $n_k(t)/n_{0k}$ and $N(t)/N_0$ are identical at different excitation intensity. The recharges speed of the shallow traps is identical at different generation intensity of the charges carrier in different layer of a specimen on the different depth from surface irradiation.

Key words: photoluminescence, photoconductivity, crystallophosphorus, wide-band-gap semiconductor, trap, recombination (light) centre.

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Єжов С.М.

Вступ

В реальних кристалофосфорах завжди присутній цілий набір пасток різної природи та декілька типів центрів свічення, а найпростіша

модель кристалофосфору в класичній кінетичній теорії фотолюмінесценції [1 – 3] та фотопровідності [4 – 7] розглядає тільки один тип пасток і один тип центрів рекомбінації. В

дійсності велика кількість типів локальних центрів призводить до великої кількості різних процесів, які відбуваються одночасно і впливають один на одного. Це зумовлює складність одержання простих залежностей для концентрацій носіїв на різних центрах. Тому метою даної роботи, в розвиток класичних теорій, був розгляд фізично більш адекватної моделі кристалофосфора з декількома типами пасток (мілка, фосфоресцентна і глибока) [8] та одержання в аналітичному вигляді наближених розв'язків в аналітичному вигляді системи кінетичних рівнянь для концентрацій вільних і локалізованих носіїв заряду на мілких пастках для початкового етапу збудження (перші декілька секунд). Далі необхідно розглянути кінетику накопичення носіїв на глибоких пастках: електронів на фосфоресцентній і глибоких пастках та дірок на центрах рекомбінації. Очевидно, що одержати точні розв'язки відповідних систем кінетичних рівнянь неможливо, але, використовуючи прийняті в класичних теоріях наближення, справедливості яких підтверджена багатьма експериментами, можна одержати досить прості наближені розв'язки в аналітичному вигляді для такої моделі. А вже маючи кінетичні рівняння для концентрацій носіїв на різних центрах, легко одержати залежності для інтенсивності люмінесценції і величини провідності, які можна порівнювати з експериментальними даними. Необхідно зазначити, що одночасний комплексний розгляд люмінесценції і провідності значно збільшує інформативність експериментальних результатів.

Стаціонарні концентрації локалізованих носіїв заряду

Після розгляду накопичення носіїв на мілких пастках необхідно перейти до кінетики накопичення носіїв заряду на глибоких центрах. Система кінетичних рівнянь для цього випадку [8] з використанням прийнятих в класичній теорії наближень буде

$$\begin{cases} \frac{\partial N^-}{\partial t} = G + [w_i n_i - N^- u^- \sigma_i^- (v_i - n_i)] - N^- u^- \sigma_{(i+1)}^- (v_{(i+1)} - n_{(i+1)}) - N^- u^- \sigma_p^- p \\ n_{0(i-1)} = N_0^- \frac{u^- \sigma_{(i-1)}^- v_{(i-1)}}{w_{(i-1)}} = N_0^- \frac{v_{(i-1)}}{N_C} \exp\left(\frac{E_{(i-1)}}{kT}\right) \\ \frac{\partial n_i}{\partial t} = N^- u^- \sigma_i^- (v_i - n_i) - w_i n_i - P^+ u^+ \sigma_i^+ n_i \\ \frac{\partial n_{(i+1)}}{\partial t} = N^- u^- \sigma_{(i+1)}^- (v_{(i+1)} - n_{(i+1)}) - P^+ u^+ \sigma_{(i+1)}^+ n_{(i+1)} \\ \frac{\partial P^+}{\partial t} = G - P^+ u^+ \sigma_p^+ v_p - P^+ u^+ \sigma_i^+ n_i - P^+ u^+ \sigma_{(i+1)}^+ n_{(i+1)} \\ \frac{\partial p}{\partial t} = P^+ u^+ \sigma_p^+ v_p - N^- u^- \sigma_p^- p \\ p + P^+ = n_{(i-1)} + n_i + n_{(i+1)} + N^- \Rightarrow p = n_i + n_{(i+1)} \end{cases}, (2.1)$$

де: G – темп генерації вільних носіїв (кількість згенерованих вільних носіїв в одиниці об'єму за одиницю часу); N^- та P^+ – концентрації вільних електронів та дірок в зонах, u^- , u^+ – їх теплові швидкості, відповідно; n та p – концентрації локалізованих електронів та дірок на відповідних локальних центрах; v – концентрації пасток та центрів рекомбінації; σ – перерізи локалізації вільних носіїв заряду (верхній індекс вказує знак заряду вільного носія, а нижній індекс – центр на який відбувається локалізація); w – імовірності термічної делокалізації з локалізованого стану: $w_i = w_{0i} \exp(-E_i/kT)$ (w_{0i} – частотний фактор для цього локального центру; E_i – енергетична глибина пастки; k – стала Больцмана; T – температура зразка).

Розв'язки цієї системи рівнянь будемо шукати послідовно. Спочатку нехтуємо імовірністю теплової і оптичної делокалізації носіїв із глибоких пасток. Це справедливо для випадку, коли інтенсивність люмінесценції та величина струму провідності зменшуються в сотні і більше разів за першу секунду після припинення збудження, тобто виконується нерівність $G \gg w_i n_i$. Тоді, для концентрацій вільних електронів і дірок маємо:

$$N_0^- = \frac{G}{u^- \left[\sigma_i^- v_i + \sigma_{(i+1)}^- v_{(i+1)} - (\sigma_i^- n_i + \sigma_{(i+1)}^- n_{(i+1)} - \sigma_p^- p) \right]} = G\tau^-$$

та

$$P_0^+ = \frac{G}{u^+ \sigma_p^+ (v_p - p)} = G\tau^+ . \quad (2.2)$$

Але: повинно виконуватись балансне рівняння – останнє рівняння системи (2.1) та відомо, що перерізи локалізації є величинами одного порядку [3,9]. Тому весь час буде виконуватись співвідношення: $(\sigma_i^- v_i + \sigma_{(i+1)}^- v_{(i+1)}) \gg (\sigma_i^- n_i + \sigma_{(i+1)}^- n_{(i+1)} - \sigma_p^- p)$ та $v_p \gg p$. Це, фактично, означає, що накопичення електронів на глибоких пастках в процесі збудження зменшує імовірність їх локалізації і, в той же час, майже на стільки ж збільшується імовірність їх рекомбінації на локалізованих дірках (перезаряджених центрах свічення). Це говорить про те, що зміни τ^- та τ^+ будуть незначними в процесі збудження кристалофосфору і можна використовувати постійні значення:

$$\tau_0^- = \frac{1}{u^- (\sigma_i^- v_i + \sigma_{(i+1)}^- v_{(i+1)})} ; \quad \tau_0^+ = \frac{1}{u^+ \sigma_p^+ v_p} . \quad (2.3)$$

Оскільки глибокі пастки лише локалізують вільні носії, то їх можна або об'єднати в одну, або покласти $v_{(i+1)} = 0$. Знайдемо розв'язки для стаціонарного стану коли усі похідні по часу дорівнюють нулю і маємо тільки алгебраїчні рівняння:

$$\begin{cases} N^- = N_0^- = G\tau_0^- , \quad P^+ = P_0^+ = G\tau_0^+ \\ n_{0(i-1)} = N_0^- \frac{v_{(i-1)}}{N_C} \exp\left(\frac{E_{(i-1)}}{kT}\right) \\ \frac{\partial n_i}{\partial t} = N_0^- u^- \sigma_i^- (v_i - n_i) - P_0^+ u^+ \sigma_i^+ n_i = 0 \\ n_{(i+1)} = 0 \\ \frac{\partial p}{\partial t} = P_0^+ u^+ \sigma_p^+ v_p - N_0^- u^- \sigma_p^- p = 0 \\ p = n_i \end{cases} . \quad (2.4)$$

Позначимо концентрації локалізованих електронів n_∞ і дірок p_∞ , а загальні концентрації глибоких пасток v_i і центрів рекомбінації v_p . Стаціонарні концентрації локалізованих електронів і дірок можна визначити з двох алгебраїчних рівнянь:

$$\sigma_p^+ u^+ G\tau_0^+ \cdot (v_p - p_\infty) = \sigma_p^- u^- G\tau_0^- p_\infty$$

$$\sigma_i^- u^- G\tau_0^- \cdot (v_i - n_\infty) = \sigma_i^+ u^+ G\tau_0^+ n_\infty$$

Розв'язки цих алгебраїчних рівнянь будуть:

$$p_\infty = \frac{v_p}{\left(1 + \frac{\sigma_p^- u^- \tau_0^-}{\sigma_p^+ u^+ \tau_0^+}\right)} , \quad n_\infty = \frac{v_i}{\left(1 + \frac{\sigma_i^+ u^+ \tau_0^+}{\sigma_i^- u^- \tau_0^-}\right)} . \quad (2.5)$$

Звертає на себе увагу той факт, що стаціонарні концентрації електронів на глибоких пастках та перезаряджених центрах рекомбінації не залежать від інтенсивності збудження, на відміну від концентрацій вільних носіїв. Можна проаналізувати співвідношення між концентраціями локалізованих електронів і дірок:

$$\frac{p_\infty}{n_\infty} = \frac{v_p}{v_i} \frac{\left(1 + \frac{\sigma_i^+ u^+ \tau_0^+}{\sigma_i^- u^- \tau_0^-}\right)}{\left(1 + \frac{\sigma_p^- u^- \tau_0^-}{\sigma_p^+ u^+ \tau_0^+}\right)} . \quad \text{Перерізи локалізації та}$$

рекомбінації для електронів і дірок є величинами одного порядку, що дозволяє використати наступне наближення $\sigma_i^- \approx \sigma_i^+ \approx \sigma_p^- \approx \sigma_p^+ \sim 10^{-15} \text{ см}^2$. Таке припущення принципово не впливає на визначення величини концентрації носіїв заряду, зате суттєво спрощує розрахунки та аналіз результатів. В цьому випадку доданки до одиниці в (2.5) стають оберненими між собою

величинами $\left(\frac{1+a}{1+1/a} = a\right)$, що дає:

$$\frac{p_\infty}{n_\infty} = \frac{v_p}{v_i} \frac{u^+ \tau_0^+}{u^- \tau_0^-} = \frac{v_p}{v_i} \frac{u^- \sigma_i^- v_i}{u^+ \sigma_p^+ v_p} \approx 1 . \quad (2.6)$$

Тобто, концентрації перезаряджених глибоких пасток для електронів і дірок практично однакові, незалежно від співвідношення концентрацій самих глибоких пасток. Цей висновок узгоджується з балансним рівнянням системи (2.4). При цьому часи життя вільних електронів і дірок залишаються

незмінними в процесі збудження. Відповідно, стаціонарні концентрації електронів на глибоких пастках та перезаряджених центрів рекомбінації будуть однаковими:

$$p_{\infty} = n_{\infty} = \frac{v_p v_i}{v_i + v_p}, \quad (2.7)$$

і меншими за найменшу концентрацію центрів. Оскільки мінімальні концентрації центрів свічення, які можна зареєструвати в широкозонних напівпровідниках спектроскопічними методами, становлять $\sim 10^{15} \text{ см}^{-3}$, то будемо розглядати концентрації не менші за цю величину. Для таких концентрацій точкових дефектів ще суттєво не змінюються рухливості вільних носіїв [10], що дозволяє використовувати табличні значення μ^+ і D^+ . Оцінка часу життя вільних електронів при таких концентраціях дає $\tau^- = 1/[10^{15} (\text{см}^{-3}) \cdot 10^{-15} (\text{см}^2) 10^7 (\text{см} \cdot \text{с}^{-1})] = 10^{-7} \text{ с}$. Як правило, в кристалофосфорах для вільних дірок характерна більша ефективна маса ніж для електронів і, відповідно, менша теплова швидкість. А концентрації центрів свічення з електронним механізмом рекомбінації (пастки для вільних дірок) досягають 10^{18} см^{-3} , що зумовлює час життя вільних дірок на декілька порядків менший ніж у електронів.

Для таких малих часів життя вільних носіїв заряду маємо досить низькі концентрації вільних електронів і дірок у порівнянні з концентраціями локалізованих, навіть при потужному збудженні. Таким чином, як і в класичній кінетичній теорії фотолюмінесценції [2, 3], при будь-яких рівнях збудження можна нехтувати концентраціями вільних носіїв у порівнянні з концентраціями локалізованих. Це також дозволяє нехтувати додатковим електричним полем яке створюють вільні носії заряду у частині зразку. Таким чином, для стаціонарного стану при постійному збудженні одержуємо лінійну залежність концентрації вільних носіїв заряду від інтенсивності збудження. А концентрації електронів на глибоких пастках та концентрації перезаряджених центрів рекомбінації будуть однаковими між собою і не залежать від інтенсивності збудження.

Кінетика накопичення світлосуми в напівпровідниковому зразку буде визначатися розв'язками рівнянь для локалізованих електронів і дірок, якщо врахувати незмінність концентрацій вільних носіїв в (2.4) та при початкових умовах $p|_{t=0} = n|_{t=0} = 0$:

$$\begin{cases} \frac{\partial n}{\partial t} = N^- u^- \sigma_i^- (v_i - n) - P^+ u^+ \sigma_i^+ n \\ \frac{\partial p}{\partial t} = P^+ u^+ \sigma_p^+ (v_p - p) - N^- u^- \sigma_p^- p \end{cases} \Rightarrow$$

$$p(t) = n(t) = \frac{v_p v_i}{v_i + v_p} \left[1 - \exp \left(- \frac{(v_i + v_p) \cdot G \cdot t}{v_i v_p} \right) \right]. \quad (2.8)$$

Отже, для простої моделі кристалофосфору в процесі збудження концентрації локалізованих електронів і дірок залишаються однаковими, а темп їх накопичення пропорційний інтенсивності збудження. Слід пам'ятати, що при низьких рівнях збудження час досягнення рівноважного стану стає дуже тривалим.

Для визначення загальної накопиченої світлосуми у всьому зразку необхідно одержане співвідношення (2.8) проінтегрувати по об'єму зразка, враховуючи поглинання збуджуючого випромінювання (κ) по товщині зразка (Y_0), тобто залежність $G(y) = G_0 \kappa \exp(-\kappa y)$:

$$\int_0^V n(t) dV = Hd \cdot n_{\infty} \int_0^{Y_0} \left\{ 1 - \exp \left[- \frac{G_0 \kappa t}{n_{\infty}} \exp(-\kappa y) \right] \right\} dy. \quad (2.9)$$

Отримане співвідношення співпадає з наведеним у [11], де враховувалось неоднорідність рентгенівського збудження в кристалах ітрій-алюмінієвого граната.

В реальних матеріалах спостерігається фосфоресценція та релаксація струму провідності після припинення збудження протягом тривалого часу (хвилини і навіть години). Це означає, що в моделі кристалофосфора необхідно враховувати важливе явище – термічну делокалізацію носіїв заряду з локальних центрів. Тому надалі вводимо в модель процес термічної делокалізації носіїв з глибоких пасток з імовірністю $w_i \sim 1 \text{ с}^{-1}$. При цьому будемо використовувати нерівність: $N_0^-, P_0^+ \ll n, p$. Також спочатку визначимо

стаціонарні значення концентрацій з алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} 0 = G - N^- / \tau^- + w_i n_\infty \\ 0 = G - P^+ / \tau^+ \\ 0 = \sigma_i^- u^- N^- (v_i - n_\infty) - \sigma_i^+ u^+ P^+ n_\infty - w_i n_\infty \\ 0 = \sigma_p^+ u^+ P^+ (v_p - p_\infty) - \sigma_p^- u^- N^- p_\infty \end{cases} \quad (2.10)$$

Введення в систему кінетичних рівнянь доданка, який описує термічну делокалізацію електронів, змінює їх концентрацію:

$$N^- = \tau_0^- (G + w_i n_\infty) \neq N_0^-, \quad P_0^+ = \tau_0^+ G. \quad (2.11)$$

Підставляючи ці значення в рівняння для стаціонарної концентрації локалізованих електронів одержуємо квадратичне рівняння для n_∞ :

$$G - n_\infty G \left(\frac{1}{v_i} + \frac{1}{v_p} \right) - (n_\infty)^2 \frac{w_i}{v_i} = 0, \quad (2.12)$$

яке при $w_i \rightarrow 0$ дає співвідношення (2.7). Розв'язок цього квадратичного рівняння буде:

$$\begin{aligned} \frac{n_\infty}{v_i} &= \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{G}{w_i v_i} \cdot \frac{v_i + v_p}{v_p} \right)^2 + \frac{4G}{w_i v_i}} - \frac{G}{2w_i v_i} \left(\frac{v_i + v_p}{v_p} \right) \\ &\approx \frac{1}{1 + \frac{v_i}{v_p} + \frac{w_i v_i}{G}} \end{aligned} \quad (2.13)$$

де принципового значення набуває параметр $G/w_i v_i$, який характеризує співвідношення між темпами генерації вільних носіїв та термічною делокалізацією електронів з пасток.

За рахунок $w_i \neq 0$ змінюється і рівняння для локалізованих дірок, яке набуває вигляду:

$$G - n_\infty G \left(\frac{1}{v_i} + \frac{1}{v_p} \right) - (n_\infty \cdot p_\infty) \frac{w_i}{v_i} = 0.$$

Це рівняння тотожне (2.12) при $n_\infty = p_\infty$, тобто, при виконанні балансного рівняння системи кінетичних рівнянь. Таким чином, термічна делокалізація електронів з глибоких пасток призводить до збільшення концентрації вільних електронів та однакового зменшення

концентрацій локалізованих електронів і дірок на глибоких центрах:

$$\begin{aligned} n_\infty = p_\infty &= \sqrt{\frac{1}{4} \left[\frac{G}{w_i} \left(1 + \frac{v_i}{v_p} \right) \right]^2 + \frac{G v_i}{w_i} - \frac{G}{2w_i} \left(1 + \frac{v_i}{v_p} \right)} \\ &\approx \frac{v_i}{1 + \frac{v_i}{v_p} + \frac{w_i v_i}{G}} \end{aligned} \quad (2.14)$$

Із загальних міркувань зрозуміло, що делокалізація електронів зменшує концентрацію локалізованих і збільшує концентрацію вільних носіїв заряду. А збільшення концентрації вільних електронів зменшує концентрацію локалізованих дірок за рахунок збільшення за одиницю часу актів рекомбінації вільних електронів з локалізованими дірками. При цьому концентрації локалізованих електронів і дірок залишаються однаковими між собою. При малих ймовірностях делокалізації ($G > w_i v_i$) можна використовувати більш просту наближену залежність (2.14). На рис. 1 наведені залежності відносної концентрації локалізованих електронів від інтенсивності збудження. Видно, що при середніх і великих інтенсивностях збудження ($G \gg w_i v_i$) процес делокалізації носіїв з глибоких рівнів суттєво не впливає на концентрації перезаряджених центрів рекомбінації.

Кінетика накопичення світлосуми на глибоких пастках

Термічна делокалізація електронів повинна впливати і на кінетику накопичення локалізованих носіїв заряду. З (2.11) видно, що концентрація вільних електронів дещо збільшується в процесі збудження, але кінетичні рівняння для локалізованих електронів і дірок залишаються однаковими між собою і мають однаковий початковий темп накопичення ($dn/dt|_{t=0} = dp/dt|_{t=0} = G$). Можна переписати диференціальне рівняння для локалізованих електронів у вигляді:

$$\begin{aligned} \frac{\partial n}{\partial t} &= N^- u^- \sigma_i^- (v_i - n) - P_0^+ u^+ \sigma_i^+ n - w_i n = -\frac{w_i}{v_i} \left[n^2 + n \frac{G v_i}{w_i} \left(\frac{1}{v_i} + \frac{1}{v_p} \right) - \frac{G v_i}{w_i} \right] \\ &= -\frac{w_i}{v_i} \left[n - \sqrt{\frac{1}{4} \left[\frac{G}{w_i} \left(1 + \frac{v_i}{v_p} \right) \right]^2 + \frac{G v_i}{w_i} + \frac{G}{2 w_i} \left(1 + \frac{v_i}{v_p} \right)} \right] \left[n + \sqrt{\frac{1}{4} \left[\frac{G}{w_i} \left(1 + \frac{v_i}{v_p} \right) \right]^2 + \frac{G v_i}{w_i} + \frac{G}{2 w_i} \left(1 + \frac{v_i}{v_p} \right)} \right] \Rightarrow \\ &= \frac{dn}{n - \sqrt{\frac{1}{4} \left[\frac{G}{w_i} \left(1 + \frac{v_i}{v_p} \right) \right]^2 + \frac{G v_i}{w_i} + \frac{G}{2 w_i} \left(1 + \frac{v_i}{v_p} \right)}} = \frac{dn}{n + \sqrt{\frac{1}{4} \left[\frac{G}{w_i} \left(1 + \frac{v_i}{v_p} \right) \right]^2 + \frac{G v_i}{w_i} + \frac{G}{2 w_i} \left(1 + \frac{v_i}{v_p} \right)}} = \\ &= -\frac{w_i}{v_i} \sqrt{\frac{1}{4} \left[\frac{G}{w_i} \left(1 + \frac{v_i}{v_p} \right) \right]^2 + \frac{4 G v_i}{w_i}} dt \end{aligned}$$

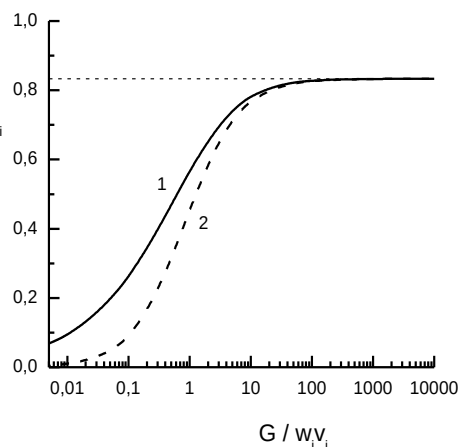


Рис. 1. Рівень заповнення глибоких пасток для електронів (n_{∞} / v_i) в залежності від відносної інтенсивності збудження ($G / w_i v_i$) напівпровідника з $v_p = 5 \cdot v_i$, розраховані за точною (1) і наближеною (2) формулою (3.11)

Після інтегрування маємо розв'язок цих диференціальних рівнянь:

$$\begin{aligned} n(t) = p(t) &= \frac{\left[\sqrt{\frac{1}{4} \left[\frac{G}{w_i} \left(1 + \frac{v_i}{v_p} \right) \right]^2 + \frac{G v_i}{w_i} + \frac{G}{2 w_i} \left(1 + \frac{v_i}{v_p} \right)} \right] \cdot \left[1 - \exp \left\{ -\frac{w_i}{v_i} \sqrt{\frac{1}{4} \left[\frac{G}{w_i} \left(1 + \frac{v_i}{v_p} \right) \right]^2 + \frac{4 G v_i}{w_i}} \cdot t \right\} \right]}{1 - \frac{\left[\sqrt{\frac{1}{4} \left[\frac{G}{w_i} \left(1 + \frac{v_i}{v_p} \right) \right]^2 + \frac{G v_i}{w_i} + \frac{G}{2 w_i} \left(1 + \frac{v_i}{v_p} \right)} \right] \cdot \exp \left\{ -\frac{w_i}{v_i} \sqrt{\frac{1}{4} \left[\frac{G}{w_i} \left(1 + \frac{v_i}{v_p} \right) \right]^2 + \frac{4 G v_i}{w_i}} \cdot t \right\}}{\left[\sqrt{\frac{1}{4} \left[\frac{G}{w_i} \left(1 + \frac{v_i}{v_p} \right) \right]^2 + \frac{G v_i}{w_i} + \frac{G}{2 w_i} \left(1 + \frac{v_i}{v_p} \right)} \right]} \cdot \exp \left\{ -\frac{w_i}{v_i} \sqrt{\frac{1}{4} \left[\frac{G}{w_i} \left(1 + \frac{v_i}{v_p} \right) \right]^2 + \frac{4 G v_i}{w_i}} \cdot t \right\}} \\ &= n_{\infty} \frac{1 - \exp \left[-\left(\frac{n_{\infty}}{v_i} + \frac{G}{w_i n_{\infty}} \right) w_i t \right]}{1 - \frac{w_i n_{\infty}^2}{G v_i} \cdot \exp \left[-\left(\frac{n_{\infty}}{v_i} + \frac{G}{w_i n_{\infty}} \right) w_i t \right]}, \quad (2.15) \end{aligned}$$

де n_{∞} визначається формулою (2.14). Зазначимо, що ці криві накопичення досить добре апроксимуються експонентами, але з більшим темпом накопичення носіїв на пастках. Основна відмінність (2.15) від (2.8) полягає у тому, що стала часу накопичення вже нелінійно залежить від інтенсивності збудження а також суттєво залежить від імовірності делокалізації електронів. На рис. 2 наведені розраховані за (2.15) залежності накопичення носіїв на глибоких центрах.

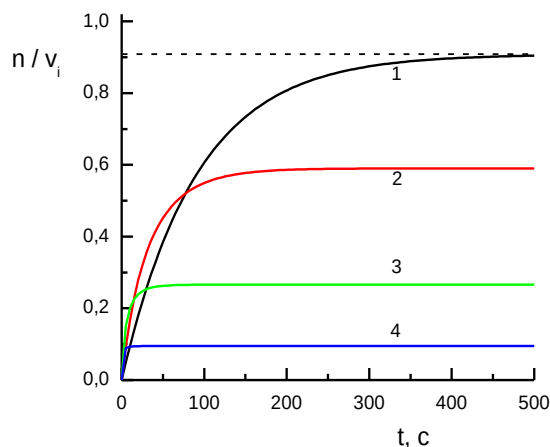


Рис. 2. Накопичення світлосуми $n(t) / v_i$ в процесі збудження напівпровідника з пастками $v_i = 10^{14} \text{ см}^{-3}$, $v_p = 10^{15} \text{ см}^{-3}$ при $w_i = 0$ (1), $w_i = 0,01 \text{ с}^{-1}$ (2), $w_i = 0,1 \text{ с}^{-1}$ (3), $w_i = 1,0 \text{ с}^{-1}$ (4) при $G = 10^{12} \text{ см}^{-3} \text{ с}^{-1}$

Видно, що збільшення w_i (при зростанні температури) призводить до зменшення $n_{\infty} = p_{\infty}$ і глибока пастка для електронів поступово трансформується в мілку пастку. Також маємо

відповідь щодо концентрації носіїв заряду для моделі напівпровідника в якій присутні тільки глибокі пастки для носіїв одного знаку і тільки мілкі пастки для носіїв протилежного знаку. В цьому випадку загальні концентрації локалізованих носіїв на глибоких пастках будуть дорівнювати загальній концентрації локалізованих носіїв протилежного знаку на мілких пастках. Це суттєво зменшує ймовірність рекомбінації носіїв (зовнішнє згасання люмінесценції) і збільшує струм провідності. Останнє експериментально спостерігається в високоомних монокристалічних зразках ZnSe при $T > 360 \text{ K}$ [12]. Таким чином, поява термічної делокалізації носіїв не змінює загальну кінетику для концентрацій вільних і локалізованих носіїв заряду. Спостерігається лише зменшення часу встановлення рівноважного стану, зменшення концентрацій локалізованих електронів і дірок (причому $n_{\infty} = p_{\infty}$) та збільшення концентрації вільних електронів за рахунок їх делокалізації.

Маючи кінетичні залежності накопичення носіїв заряду для одного типу глибоких пасток, необхідно повернутися до моделі з фосфоресцентною (i) і глибокою ($i+1$) пастками для електронів. Одержаний розв'язок (2.15) залишається справедливим для випадків, коли $v_i \gg v_{i+1}$ та для випадку, коли маємо інтенсивне оптичне висвічування з усіх глибоких пасток.

Спочатку визначимо стаціонарні значення концентрацій для моделі кристалфосфора з фосфоресцентною і глибокими пастками. Система алгебраїчних рівнянь буде відрізнятися від (2.10) тільки додатковим рівнянням для n_{i+1} :

$$\begin{cases} 0 = G - N^- / \tau_0^- + w_i n_{i\infty} & \Rightarrow N^- = (G + w_i n_{i\infty}) \tau_0^- \\ 0 = G - P^+ / \tau_0^+ & \Rightarrow P^+ = G \tau_0^+ \\ 0 = \sigma_i^- u^- N^- (v_i - n_{i\infty}) - \sigma_i^+ u^+ P^+ n_{i\infty} - w_i n_{i\infty} \\ 0 = \sigma_{i+1}^- u^- N^- (v_{i+1} - n_{i+1\infty}) - \sigma_{i+1}^+ u^+ P^+ n_{i+1\infty} \\ 0 = \sigma_p^+ u^+ P^+ (v_p - p_{\infty}) - \sigma_p^- u^- N^- p_{\infty} \end{cases} \quad (2.16)$$

Легко переконатись, що при $w_i = 0$ ця система дає очікувані розв'язки:

$$n_{i\infty} = \frac{v_p v_i}{v_i + v_{i+1} + v_p},$$

$$\begin{aligned} n_{i+1\infty} &= \frac{v_p v_{i+1}}{v_i + v_{i+1} + v_p}, \\ p_{\infty} &= \frac{v_p (v_i + v_{i+1})}{v_i + v_{i+1} + v_p}, \end{aligned} \quad (2.17)$$

та виконується балансне рівняння: $n_{i\infty} + n_{i+1\infty} = p_{\infty}$. А при $w_i \gg 1$ (пастка стає мілкою) одержуємо:

$$n_{i\infty} \approx 0, \quad n_{i+1\infty} = \frac{v_p v_{i+1}}{v_{i+1} + v_p}, \quad p_{\infty} = \frac{v_p v_{i+1}}{v_{i+1} + v_p},$$

$$\text{оскільки } \tau_0^- \rightarrow \frac{1}{u^- \sigma_{i+1}^- v_{i+1}}.$$

З двох останніх рівнянь системи (2.16) одержуємо:

$$\begin{aligned} n_{i+1\infty} &= \frac{v_{i+1} v_p}{(v_i + v_{i+1}) \left(\frac{G}{G + w_i n_{i\infty}} \right) + v_p} \\ p_{\infty} &= \frac{v_p (v_i + v_{i+1})}{(v_i + v_{i+1}) + v_p \left(\frac{G + w_i n_{i\infty}}{G} \right)}, \end{aligned} \quad (2.18)$$

які вже залежать від інтенсивності збудження (G), а головне, від інтенсивності делокалізації електронів з фосфоресцентної пастки ($w_i n_{i\infty}$). Для одержання концентрацій електронів та дірок на глибоких пастках можна розв'язати третє рівняння системи, яке дає квадратичне рівняння для $n_{i\infty}$:

$$(n_{i\infty})^2 + (n_{i\infty}) \left[\frac{G}{w_i} \left(1 + \frac{v_i + v_{i+1}}{v_p} \right) + v_{i+1} \right] - \frac{G v_i}{w_i} = 0. \quad (2.19)$$

Третє рівняння (2.16) легко звести до вигляду:

$$\begin{aligned} n_{i\infty} &= \frac{v_i v_p}{(v_i + v_{i+1}) \left(\frac{G}{G + w_i n_{i\infty}} \right) + v_p} = \frac{v_i v_p}{\left(\frac{v_i + v_{i+1}}{g} \right) \left(1 + \frac{w_i v_p}{G} \right) + v_p}, \\ g &= \frac{G + w_i n_{i\infty}}{G}. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Одержані співвідношення (3.15) і (3.17) при локалізованих носіїв можна підставити в $(w_i n_{i\infty}) \ll G$ переходять в (3.14). Для рівняння балансу ці співвідношення та знайти визначення стаціонарних концентрацій рівняння для $g = (G + w_i n_{i\infty}) / G > 1$:

$$\frac{v_i v_p}{\left(\frac{v_i + v_{(i+1)}}{g}\right) \left(1 + \frac{w_i v_p}{G}\right) + v_p} + \frac{v_{(i+1)} v_p}{\left(\frac{v_i + v_{(i+1)}}{g}\right) + v_p} = \frac{v_p (v_i + v_{(i+1)})}{(v_i + v_{(i+1)}) + g v_p}.$$

З якого одержуємо квадратичне рівняння для g :

$$g^2 + \frac{g}{v_p} \left[v_i + v_{(i+1)} \left(1 + \frac{w_i v_p}{G}\right) - v_p \right] - \left(\frac{v_i + v_{(i+1)}}{v_p} \right) \left(1 + \frac{w_i v_p}{G}\right) = 0.$$

Це рівняння фактично співпадає з Додатній розв'язок квадратичного рівняння має квадратичним рівнянням для $n_{i\infty}$ (2.19), але вигляд: значно спрощує розрахунок концентрацій.

$$g = \sqrt{\frac{1}{4} \left[\frac{v_i}{v_p} + \frac{v_{(i+1)}}{v_p} \left(1 + \frac{w_i v_p}{G}\right) - 1 \right]^2 + \left(\frac{v_i + v_{(i+1)}}{v_p} \right) \left(1 + \frac{w_i v_p}{G}\right) - \frac{1}{2} \left[\frac{v_i}{v_p} + \frac{v_{(i+1)}}{v_p} \left(1 + \frac{w_i v_p}{G}\right) - 1 \right]}. \quad (2.21)$$

Як і для (2.14), для заповнення фосфоресцентної пастки суттєвого значення набуває параметр співвідношення темпу генерації до темпу делокалізації електронів $G/w_i v_i$. На рис. 3 наведені залежності параметра g та рівня заповнення локальних рівнів для стаціонарних концентрацій носіїв від $G/w_i v_i$. Видно, що концентрація вільних електронів слабо залежить від імовірності делокалізації. Дійсно, збільшення імовірності делокалізації w_i призводить до зменшення заповнення фосфоресцентної пастки $n_{i\infty}$ (крива 1 на рис. 3 б).

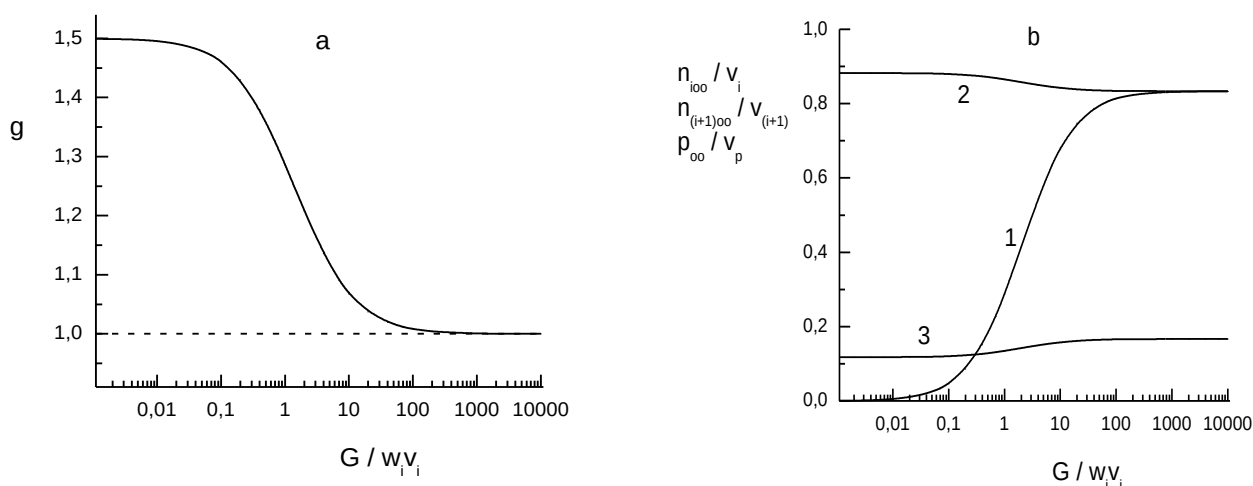


Рис. 3. Зміна відносної концентрації вільних електронів g (а) та рівень заповнення глибоких пасток (б) $n_{i\infty} / v_i$ (1), $n_{(i+1)\infty} / v_{(i+1)}$ (2), p_{∞} / v_p (3) в залежності від відносної інтенсивності $(G / w_i v_i)$ збудження кристалосфору при $v_p = 15 \cdot v_i$, $v_{(i+1)} = 2 \cdot v_i$

В результаті маємо тільки незначне збільшення концентрації вільних електронів в процесі накопичення світлосуми на пастках. Для випадку коли фосфоресцентна пастка не є домінуючою, тобто $v_i < v_{(i+1)}$, максимальні концентрації електронів на глибоких пастках (крива 2 на рис. 3б) і відповідні концентрації локалізованих дірок на перезаряджених центрах свічення (крива 3 на рис. 3б) змінюються також в невеликих межах:

$$\frac{v_{(i+1)}v_p}{v_i + v_{(i+1)} + v_p} < n_{(i+1)\infty} < \frac{v_{(i+1)}v_p}{v_{(i+1)} + v_p}$$

та

$$\frac{v_p(v_i + v_{(i+1)})}{v_i + v_{(i+1)} + v_p} > p_\infty > \frac{v_p v_{(i+1)}}{v_{(i+1)} + v_p}.$$

Одержані співвідношення для стаціонарних концентрацій вільних і локалізованих носіїв заряду необхідні для аналізу температурних залежностей стаціонарних інтенсивностей люмінесценції та провідності кристалічних фосфорів.

Далі необхідно визначити кінетику накопичення електронів і дірок на глибоких центрах, вважаючи незмінними часи життя вільних носіїв у зонах. Фактично необхідно знайти розв'язки системи рівнянь:

$$\begin{cases} N^- = (G + w_i n_i) \tau_0^- \\ P^+ = G \tau_0^+ \\ \frac{\partial n_i}{\partial t} = \frac{(G + w_i n_i)}{(v_{(i+1)} + v_i)} (v_i - n_i) - \frac{G}{v_p} n_i - w_i n_i \\ \frac{\partial n_{(i+1)}}{\partial t} = \frac{(G + w_i n_i)}{(v_{(i+1)} + v_i)} (v_{(i+1)} - n_{(i+1)}) - \frac{G}{v_p} n_{(i+1)} \\ \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{G}{v_p} (v_p - p) - \frac{(G + w_i n_i)}{(v_{(i+1)} + v_i)} p \\ p = n_i + n_{(i+1)} \end{cases} \quad (2.22)$$

Причому, при виконанні балансного рівняння (останнє рівняння системи) диференціальне рівняння для локалізованих дірок не є незалежним, а є сумою двох попередніх диференціальних рівнянь. В третє рівняння входить тільки одна змінна від часу $n_i(t)$ і воно інтегрується аналогічно до (2.15):

$$\begin{aligned} \frac{\partial n_i}{\partial t} = & - \frac{w_i}{(v_i + v_{(i+1)})} \left\{ n_i - \sqrt{\frac{1}{4} \left[\frac{G}{w_i v_p} (v_i + v_{(i+1)} + v_p) + v_{(i+1)} \right]^2} + \frac{G v_i}{w_i} + \frac{1}{2} \left[\frac{G}{w_i v_p} (v_i + v_{(i+1)} + v_p) + v_{(i+1)} \right] \right\} \times \\ & \times \left\{ n_i + \sqrt{\frac{1}{4} \left[\frac{G}{w_i v_p} (v_i + v_{(i+1)} + v_p) + v_{(i+1)} \right]^2} + \frac{G v_i}{w_i} + \frac{1}{2} \left[\frac{G}{w_i v_p} (v_i + v_{(i+1)} + v_p) + v_{(i+1)} \right] \right\}. \end{aligned}$$

Після інтегрування маємо розв'язок:

$$\begin{aligned} n_i(t) = & \frac{\left\{ \sqrt{\frac{1}{4} \left[\frac{G}{w_i v_p} (v_i + v_{(i+1)} + v_p) + v_{(i+1)} \right]^2} + \frac{G v_i}{w_i} - \frac{1}{2} \left[\frac{G}{w_i v_p} (v_i + v_{(i+1)} + v_p) + v_{(i+1)} \right] \right\} \cdot \left[1 - \exp \left\{ - \frac{w_i}{(v_i + v_{(i+1)})} \sqrt{\frac{1}{4} \left[\frac{G}{w_i v_p} (v_i + v_{(i+1)} + v_p) + v_{(i+1)} \right]^2} + \frac{4 G v_i}{w_i} \cdot t \right\} \right]}{1 - \left\{ \sqrt{\frac{1}{4} \left[\frac{G}{w_i v_p} (v_i + v_{(i+1)} + v_p) + v_{(i+1)} \right]^2} + \frac{G v_i}{w_i} - \frac{1}{2} \left[\frac{G}{w_i v_p} (v_i + v_{(i+1)} + v_p) + v_{(i+1)} \right] \right\} \cdot \exp \left\{ - \frac{w_i}{(v_i + v_{(i+1)})} \sqrt{\frac{1}{4} \left[\frac{G}{w_i v_p} (v_i + v_{(i+1)} + v_p) + v_{(i+1)} \right]^2} + \frac{4 G v_i}{w_i} \cdot t \right\}} \end{aligned}$$

$$= n_{i\infty} \frac{1 - \exp \left[- \left(\frac{n_{i\infty}}{v_i} + \frac{G}{w_i n_{i\infty}} \right) w_i t \right]}{1 - \frac{w_i n_{i\infty}^2}{G v_i} \cdot \exp \left[- \left(\frac{n_{i\infty}}{v_i} + \frac{G}{w_i n_{i\infty}} \right) w_i t \right]}, \quad (2.23)$$

де $n_{i\infty}$ визначається (2.20), а параметр g – формулою (2.21). Розраховані залежності накопичення світлосуми $n_i(t)/v_i$ наведені на рис. 4 для різних ймовірностей делокалізації електронів з фосфоресцентної пастки.

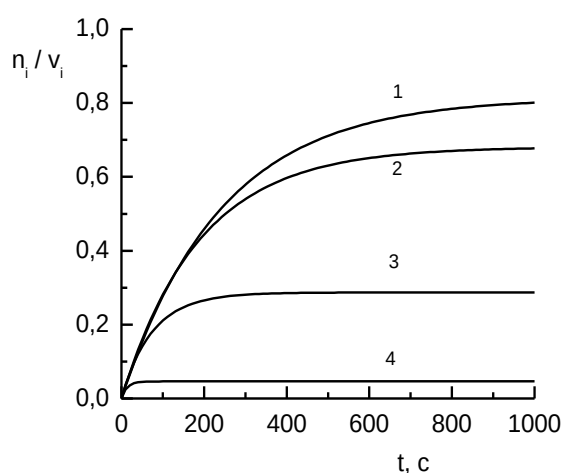


Рис. 4. Накопичення світлосуми $n_i(t)/v_i$ в процесі збудження напівпровідника з фосфоресцентною $v_i = 10^{14} \text{ см}^{-3}$ та глибокими пастками $v_{(i+1)} = 2 \cdot 10^{14} \text{ см}^{-3}$, $v_p = 1.5 \cdot 10^{15} \text{ см}^{-3}$ при $G = 10^{12} \text{ см}^{-3} \text{ с}^{-1}$ з різними ймовірностями делокалізації $w_i = 0,0001$ (1), $w_i = 0,001 \text{ с}^{-1}$ (2), $w_i = 0,01 \text{ с}^{-1}$ (3), $w_i = 0,1 \text{ с}^{-1}$ (4).

На відміну від (2.15) включення в розгляд глибоких пасток не змінює початкового темпу накопичення світлосуми на фосфоресцентній пастці, але час досягнення стаціонарної світлосуми і сама величина світлосуми значно зменшуються при збільшенні w_i . При $w_i > 1,0 \text{ с}^{-1}$ можна вже нехтувати впливом фосфоресцентної

пастки на кінетику люмінесценції та накопичення загальної світлосуми в кристалофосфорі і вважати, що ця пастка перейшла в розряд мілких пасток.

Кінетика накопичення світлосуми на глибоких пастках визначається четвертим рівнянням системи (2.22), до якого входить $n_i(t)$. Хоча ця залежність вже відома – (2.23), але вона не дозволяє одержати розв'язок у вигляді простої аналітичної функції. Тому скористаємося такими двома фактами: параметр g (в який входить функція $n_i(t)$) під час збудження змінюється тільки на початку збудження (n_i швидко досягає насичення) і то в невеликих межах. Тому, при розв'язку рівняння для $n_{(i+1)}(t)$ будемо вважати, що величина $g \approx \text{Const}(t)$. Це вносить незначну похибку тільки на самому початковому етапі збудження кристалофосфору. І для накопичення електронів на глибоких пастках маємо:

$$n_{(i+1)}(t) = n_{(i+1)\infty} \left\{ 1 - \exp \left[- \left(\frac{g}{v_i} + \frac{g}{v_{(i+1)}} + \frac{1}{v_p} \right) G t \right] \right\}, \quad (2.24)$$

де $n_{(i+1)\infty}$ визначається формулою (2.18), а параметр g – формулою (2.21). Для кінетики зміни концентрації перезаряджених центрів свічення можна скористатися балансним рівнянням $p(t) = n_i(t) + n_{(i+1)}(t)$, що дає:

$$p(t) = n_{i\infty} \frac{1 - \exp \left[- \left(\frac{n_{i\infty}}{v_i} + \frac{G}{w_i n_{i\infty}} \right) w_i t \right]}{1 - \frac{w_i n_{i\infty}^2}{G v_i} \cdot \exp \left[- \left(\frac{n_{i\infty}}{v_i} + \frac{G}{w_i n_{i\infty}} \right) w_i t \right]} + n_{(i+1)\infty} \left\{ 1 - \exp \left[- \left(\frac{g}{v_i} + \frac{g}{v_{(i+1)}} + \frac{1}{v_p} \right) G t \right] \right\}. \quad (2.25)$$

Відповідні розраховані залежності для $n_{(i+1)}(t)$ та $p(t)$ наведені на рис. 5 для різних імовірностей делокалізації w_i .

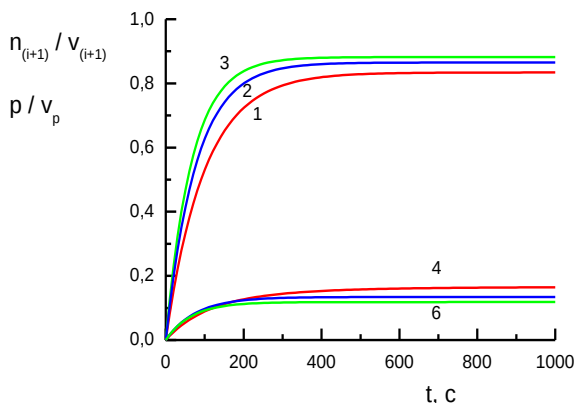


Рис. 5. Накопичення електронів на глибоких пастках $n_{(i+1)}/v_{(i+1)}$ (1 - 3) та дірок на центрах рекомбінації $p(t)/v_p$ (4 - 6) в процесі збудження напівпровідника з

$v_i = 10^{14} \text{ см}^{-3}$, $v_{(i+1)} = 2 \cdot 10^{14} \text{ см}^{-3}$,
 $v_p = 1.5 \cdot 10^{15} \text{ см}^{-3}$ при $G = 10^{12} \text{ см}^{-3} \text{ с}^{-1}$ з різними
ймовірностями делокалізації $w_i = 0,0001$ (1,4);
 $w_i = 0,01 \text{ с}^{-1}$ (2,5), $w_i = 1,0 \text{ с}^{-1}$ (3,6).

Таким чином, імовірність делокалізації з i -пастки, як і очікувалось, суттєво впливає на заповнення носіями цієї пастки але слабо впливає на кінетику накопичення носіїв на глибоких пастках та на концентрацію перезаряджених центрів рекомбінації. Фактично маємо, що збільшення w_i призводить до зменшення n_i і в результаті, величина $w_i n_i$ весь час залишається значно меншою за G . Це підтверджують і експериментальні дослідження рентгенопровідності кристалів ZnSe, коли при температурі 85 K спостерігається досягнення максимального струму провідності за декілька хвилин і далі струм залишається постійним. А для реєстрації релаксації струму після збудження необхідно підвищувати чутливість на два порядки.

Маючи кінетичні залежності для локалізованих носіїв заряду можна визначати кінетику люмінесценції і провідності при збудженні кристалофосфору.

Кінетика люмінесценції та провідності при наявності в кристалофосфорі різних пасток

При однорідному збудженні кристалофосфору струм провідності буде визначатися концентрацією вільних носіїв заряду в кожен момент часу, величиною електричного поля у зразку та рухливістю носіїв. Будемо вважати, що електричні контакти метал-напівпровідник є омичними і, відповідно, відсутні додаткові приконтактні заряди, а електричне поле однорідне у зразку. Також вважаємо, що кристалофосфор має достатньо велику ширину забороненої зони, є досить чистим і має високу структурну досконалість (низькі концентрації домішок і власних дефектів) для того, щоб величина темної провідності була на порядки менша за провідність зразка при його збудженні. В цьому випадку величина поля E буде пропорційна прикладений до зразка різниці потенціалів U_0 ($E = U_0 / d$, d – відстань між електричними контактами), а густина струму провідності визначається [13, 14]:

$$j = eE(\mu^- N^- + \mu^+ N^+) \approx eE\mu^- N^-,$$

оскільки в нашій моделі матеріалу концентрація вільних дірок на порядки менша за концентрацію вільних електронів. Враховуючи короточасну локалізацію електронів на мілких пастках [8], маємо рівняння для густини струму:

$$j = eE\mu^- a_{(i-1)} N^-. \quad (2.26)$$

Фактично, струм провідності визначається тільки концентрацією вільних електронів, які під дією поля рухаються до/від контактів з постійною дрейфовою швидкістю ($u_{dr}^- = \mu^- U_0 / d$). Ця усереднена величина концентрації за $\Delta t = 1 \text{ с}$ визначатиметься двома факторами: генерацією та делокалізацією електронів з фосфоресцентної пастки.

Під інтенсивністю рекомбінаційної люмінесценції (J_p) будемо розуміти загальну кількість актів рекомбінації вільних носіїв на перезаряджених центрах рекомбінації. Для цієї моделі кристалофосфору маємо:

$$J_p = \sigma_p^- u^- N^-(t) p(t). \quad (2.27)$$

Звичайно, та інтенсивність люмінесценції, яка експериментально реєструється, буде пропорційна J_p , а до коефіцієнта пропорційності будуть входити: внутріцентровий квантовий вихід центра свічення, геометричний коефіцієнт (визначається тією частиною люмінесцентних квантів, яка потрапляє в реєструючу систему), спектральна чутливість реєструючої системи до спектра випромінювання центра свічення. Тому будемо мати на увазі відносну інтенсивність, яка визначається добутком концентрацій вільних електронів та перезаряджених центрів рекомбінації.

Вольт-амперні характеристики (ВАХ)

Якщо електричні контакти є омичними, то електричне поле не змінює однорідного просторового розподілу як вільних так і локалізованих носіїв. А головне, електричне поле не змінює концентрації вільних і локалізованих носіїв. При омичних контактах відсутня інжекція носіїв з металічного електроду у зразок. Розглядаємо такі напруженості поля, при яких ще можна нехтувати ефектом Пула-Френкеля і розігрівом вільних носіїв під дією поля, тобто, вважаємо, що дрейфова швидкість залишається значно меншою за теплову швидкість вільних носіїв заряду. При досягненні стаціонарного стану концентрації вільних електронів не змінюються, а тому вольт-амперні характеристики кристалофосфору повинні бути **лінійними**. В рамках такої моделі кристалофосфора зовнішнє електричне поле не впливає на процес рекомбінації вільного електрона з перезарядженим центром свічення, концентрація яких залишається постійною для стаціонарного стану. Тому величина електричного поля **не впливає** на інтенсивність люмінесценції.

Залежності від інтенсивності збудження

Такі залежності від інтенсивності збудження можна реєструвати як при збільшенні, так і при зменшенні інтенсивності збудження. В результаті можемо одержати гістерезис. Тому, для одержання коректних результатів, ці залежності необхідно реєструвати для стаціонарного стану. Оскільки і N^- , і p_∞ залежать від G , то можна розглянути випадки, коли концентрація фосфоресцентної пастки є домінуючою та протилежний випадок, коли концентрація фосфоресцентної пастки є малою у порівнянні із загальною концентрацією глибоких пасток. Для обох випадків одержані залежності для стаціонарних концентрацій перезаряджених центрів свічення та локалізованих електронів.

Квантовий вихід рекомбінаційної люмінесценції

Для рекомбінаційної люмінесценції необхідно використовувати поняття квантового виходу рекомбінаційної люмінесценції (η_{RL}), який визначається як відношення кількості актів випромінювальної рекомбінації за одиницю часу до кількості згенерованих електронних збуджень (вільних електронно-діркових пар) за одиницю часу. За рахунок того, що частина вільних дірок рекомбінує з локалізованими електронами (доданки $\sigma_i^+ u^+ P^+ n_{i\infty}$ і $\sigma_{(i+1)}^+ u^+ P^+ n_{(i+1)\infty}$ в третьому і четвертому рівняннях системи (2.16)) кількість рекомбінацій $J_p = \sigma_p^- u^- N^- p_\infty$ буде меншою за кількість згенерованих збудженням електронно-діркових пар.

$$\eta_{RL} = \frac{\sigma_p^- u^- N^- p_\infty}{G} = \frac{\left(\frac{G + w_i n_{i\infty}}{G} \right)}{\left(v_i + v_{(i+1)} \right)} \cdot \frac{v_p (v_i + v_{(i+1)})}{(v_i + v_{(i+1)}) + v_p \left(\frac{G + w_i n_{i\infty}}{G} \right)} = \frac{v_p g}{v_i + v_{(i+1)} + v_p g}.$$

Використовуючи рівняння для параметра g (2.21), маємо значення $\eta_{RL}(G)$, яке асимптотично наближується при потужному збудженні до значення:

$$\eta_{RL} = \frac{V_p}{V_i + V_{(i+1)} + V_p}. \quad (2.28)$$

Таким чином, квантовий вихід рекомбінаційної люмінесценції буде близьким до одиниці, якщо концентрація центрів рекомбінації значно перевищує загальну концентрацію глибоких пасток.

Висновки

На відміну від найпростішої моделі кристаллофосфору в класичній кінетичній теорії, яка розглядає тільки один тип пасток і один тип центрів рекомбінації в реальних кристаллофосфорах завжди присутній цілий набір пасток різної природи і різної глибини та декілька типів центрів свічення. Одержані в аналітичному вигляді наближені розв'язки системи кінетичних рівнянь для концентрацій вільних і локалізованих носіїв заряду при збудженні для моделі з декількома типами пасток

(мілка, фосфоресцентна і глибока). Ці розв'язки дозволяють розрахувати залежності для інтенсивностей свічення і струму провідності, які можна порівнювати з експериментальними результатами. Одержані кінетичні залежності доповнюють класичні теорії фотолюмінесценції і фотопровідності, оскільки розширюється модель кристаллофосфору додатковими локальними центрами, які спостерігаються в реальних матеріалах.

Встановлено, що наявність глибоких пасток в кристаллофосфорі призводить до того, що концентрація вільних носіїв заряду стає практично пропорційною інтенсивності збуджуючого опромінення. А максимальна величина накопиченої світлосуми не залежить від інтенсивності збудження, але темп її накопичення на початку збудження пропорційний інтенсивності збудження.

Список використаних джерел

1. Адирович Э. И. Некоторые вопросы теории люминесценции кристаллов / Э. Адирович.- М.: ГИТТЛ, 1956.- 350 с.
2. Фок М.В. Введение в кинетику люминесценции кристаллофосфоров / М.Фок.- Москва: Наука, 1964.- 284 с.
3. Антонов-Романовский В.В. Кинетика фотолюминесценции кристаллофосфоров / В. Антонов-Романовский – М.: Наука, 1966. – 323 с.
4. Бьюб Р. Фотопроводимость твердых тел / Р. Бьюб - М.: Из-во ИЛ, 1962. -558 с.
5. Рывкин С.М. Фотоэлектрические явления в полупроводниках / С.Рывкин.- Москва: ГИФМЛ, 1963.- 494 с.
6. Роуз А. Основы теории фотопроводимости / А. Роуз.- М.: Мир.- 1966.- 192 с.
7. Лашкарев В.Е., Неравновесные процессы в фотопроводниках / В.Лашкарев, А.Любченко, М.Шейнкман.- Киев: Наукова думка, 1981.- 264 с.

References

1. ADIROVICH, E.I. (1956) *Some questions in the theory of luminescence of crystals*. Moskva: GITTL.
2. FOK, M.V. (1964) *Introduction to the kinetics of luminescence of crystal*. Moskva: Nauka.
3. ANTONOV-ROMANOVSKIY, V.V. (1966) *The kinetics of the photoluminescence of crystal*. Moskva: Nauka.
4. BUBE, R. (1960) *Photoconductivity of solids*.- New York – London: John Wiley and Sons, inc..
5. RIVKIN, S.M. (1963) *Photoelectric phenomena in semiconductors*. Moskva: GIFML.
6. ROUS, A. (1966) *Basic theory of photoconductivity*. Moskva: Mir.
7. LASHKAREV, V.E., LUBCHENKO, A. and SHEINKMAN, M. (1981) *Non-equilibrium processes in photoconductors*. Kiev: Naukova dumka.

8. Весна Г.В. Кінетика рекомбінаційної люмінесценції і провідності кристалофосфорів. 1. Накопичення носіїв заряду на мілких пастках. // Гуменюк А.Ф., Дегода В.Я., Маразуєв Ю.А. / Вісник київського національного університету. Фізико-математичні науки. , 2015, № 3, с.46-61.
9. Гурвич А.М. Введение в физическую химию кристаллофосфоров / Гурвич А.М.- М.: "Высшая школа", 1982.- 376 с.
10. Амброзьяк А. Конструкция и технология полупроводниковых фотоэлектрических приборов / А.Амброзьяк - М.: Советское радио, 1970.- 392 с.
11. Горбань И.С., Термолюминесценция при неоднородном запасании светосуммы в кристаллах ИАГ:Nd³⁺ / Горбань И.С., Гуменюк А.Ф., Дегода В.Я., Кучакова Т.А.- УФЖ.- 1986.- т. 31, № 3.-с. 370-372]
12. Sofiienko A.O., X-ray induced conductivity of ZnSe sensors at high temperatures / A.O. Sofiienko, V.Ya. Degoda Radiation Measurements. - 2012.- v. 47, № 1.- P. 27-29.
13. Шалимова К.В. Физика полупроводников. / Шалимова К.В. М.: " Энергия", 1971. - 312 с.
14. Киреев П.С. Физика полупроводников./ Киреев П.С. - М.: "Высшая школа", 1975.- 584 с.
8. VESNA, G., GUMENUK, A., DEGODA, V., MARAZUEV, U. (2015) The kinetic of the recombination luminescence and conductivity of crystallophosphorus. 1.The accumulation charge carrier on shallow traps / *Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series Physics & Mathematics* p.46-61.
9. GURVICH, A.M. (1982) *Introduction to the physical chemistry of crystal*. Moskva: Vicshay shkola.
10. AMBROZAYK, A. (1970) *The design and technology of semiconductor photovoltaic devices*. Moskva: Sovetskoe radio.
11. GORBAN, I., GUMENUK, A., DEGODA, V., KUCHAKOVA, T. (1986) Thermo luminescence at inhomogeneous light storing in IAG: Nd³⁺ crystals UPhJ.31(3). p.370-372.
12. SOFIIENKO, A.O., DEGODA, V.YA. (2012) X-ray induced conductivity of ZnSe sensors at high temperatures. *Radiation Measurements*. 47(1). p.27-29.
13. SHALIMOVA, K.V. (1971) *Semiconductors phusics* Moskva: Energia.
14. KIREEV, P.S. *Semiconductors phusics* (1975) Moskva: Vicshay shkola.

Надійшла до редколегії 18.02.16

УДК 535.37

Дегода В.Я.¹, д.ф.-м.н., пров.н.с.,
Когут Я.П.¹, інж.,
Свечнікова О.С.¹, к.ф.-м.н., с.н.с.

Спектри рентгенолюмінесценції кератинових біополімерів при різних температурах

¹Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 01601, м. Київ,
вул. Володимирська 64/13,
e-mail: yana_kogut@ukr.net

V. Ya. Degoda¹, Dr. Sci. Res.,
Ya. P. Kogut¹, Eng.,
O. S. Svechnikova¹, PhD, Sen. Sci. Res.

X-ray spectra of keratin biopolymers at different temperatures

¹Taras Shevchenko National University of Kyiv,
01601, Kyiv, Volodymyrska st. 64/13,
e-mail: yana_kogut@ukr.net

Представлені експериментальні результати дослідження люмінесцентних властивостей кератинових біополімерів на прикладі нігтьової пластини людини. Наведено спектри рентгенолюмінесценції нігтьової пластини при температурах 8, 85 та 300 К. Проаналізовано зміну інтенсивностей та форм свічення зразків різних тинів (жіночого та чоловічого) від температури.

Ключові слова: рентгенолюмінесценція, температура, біополімер.

Biological objects like skin, nails and hair are sources of metabolism information and also describes the condition of body in general. Nowadays the diagnostics by using nails and hair are only empiric. Obtained result can give information for further medical diagnostics. The way of developing diagnostic methods and correct optical measuring is the actual problem for medical physics.

In the present work was described methods of luminescent and temperatures measurements of inhomogeneous biological objects at the range of temperatures from 8 to 300 K. That researches (luminescent and temperatures) for each temperature were made at the same time. The main characteristic of these biological samples is low intensity of luminescence under X-ray excitation in comparison to traditional luminophores. For example, intensity of luminescence under X-ray excitation in 4 times lower compared to ZnSCu.

For experimental researches were used nails from men and women. Experimental spectra of under X-ray luminescence at 300 K were not obtained. However the spectra of luminescence under X-ray excitation for temperatures 85 K and 8 K have a non-elemental structure in the range from 330 nm to 700 nm. The spectra at 8 K looks different from obtained results for 85 K. For low range of temperatures also were registered differences between spectra from samples (nails from man and woman).

Key Words: X-ray, temperature, biopolymer.

Статтю представив академік НАН України, д.ф.-м.н., проф. Булавін Л.А.

Вступ

Шкіра та придатки шкіри (нігтьова пластина та волосся) людини внаслідок своєї будови та фізіологічної функціональності в організмі людини є досить інформативними щодо змін в обміні речовин людини та відображає стан організму в цілому. Шкіра є її найбільшим за площею органом людини, а її будову, функціонування, захворювання та лікування вивчає дерматологія. З медичної точки зору дерматологія займається також волоссям та нігтями; і зовнішній огляд цих придатків шкіри сьогодні дозволяє провести первинну діагностику деяких захворювань. Проте така

діагностика носить лише емпіричний та якісний характер і є лише певними «підказками», в якому напрямку проводити лабораторну діагностику людського організму. Методом медичної діагностики, який наразі досить широко рекламується, є «мікроелементний аналіз волосся» [1], який має багато недоліків, головні з яких – по-перше, обмежена сукупність хімічних елементів для аналізу - починаючи лише з сірки (поза увагою лишаються легкі елементи - азот, кисень, водень, вуглець). По-друге, не враховується будова конкретної волосини (наявності поверхневої та внутрішньої компонент, які відрізняються за своєю структурою), а, отже, по-різному відображають

“реакцію” організму людини на зміну в обміні речовин.

Основою структури як волосся так нігтів є кератин, а головною структурною відмінністю між волосся та нігтями є наявність у волоссі пігменту меланіну [2].

Зрозуміло, що волосся та нігтьові пластини є оптично неоднорідними об'єктами, крім того наявність меланіну у волоссі вносить свої корективи при оптичних дослідженнях, бо саме меланін виступає окремим складовим компонентом, що значно впливає на процеси розсіяння, випромінювання та поглинання квантів світла. Вже зараз оптично-люмінесцентний аналіз волосся та нігтів застосовується в медицині та судовій експертизі, тому дослідження в цьому напрямі є важливою та актуальною задачею в медичній та біологічній фізиці. Важливо відмітити, що головною особливістю подібних досліджень, поряд із оптичною неоднорідністю зразків, є дуже мала інтенсивність як фотолюмінесценції (ФЛ), так і рентгенолюмінесценції (РЛ) фібрилярних біополімерів, до яких відносяться як волосся, так і нігті. У порівнянні з класичними люмінофорами (ZnSCu) інтенсивність люмінесценції біополімерів на 4 порядки менша. Для розв'язання цієї проблеми експериментального вивчення люмінесцентних властивостей таких об'єктів необхідно розробити методологію коректних ФЛ- та РЛ-досліджень кератинових фібрилярних біополімерів (КФБП). Саме тому метою даної роботи є розробка цієї методології та апробація її при отриманні та порівняльному аналізі спектрів РЛ при різних температурах зразків КФБП на прикладі нігтьової пластини людини.

Методика експерименту та опис зразків дослідження

Структурно волосся та нігті складаються з кератину, при цьому основною відмінністю волосся є наявність природного меланіну, який сильно розсіює і поглинає збуджуюче випромінювання та люмінесценцію [3]. Для того, щоб позбутися впливу меланіну на інтенсивність люмінесценції, для експериментального дослідження були обрані зразки нігтьових пластин людини. Досліджувалися зразки нігтьових пластин без механічних і хімічних ушкоджень здорових жінки (віком 28 років) та чоловіка (віком 31 років).

Свіжозрізана нігтьова пластина розміром близько 15 мм^2 механічно закріплювалась на

мідній підкладці таким чином, щоб забезпечити найкращий тепловий контакт зразка з мідною підкладкою (рис.1).



Рис. 1. Зовнішній вигляд закріпленого зразка

Зразок поміщався в кріостат, що дозволяє проводити виміри у вакуумі, опромінюючи зразок інтегральним випромінюванням рентгеновської трубки БХВ 7 (Re, $L = 120 \text{ мм}$) в режимі $U = 20 \text{ кВ}$ і $I = 25 \text{ мА}$, при цьому випромінювання проходило в кріостат через берилієве віконце. Зразок кріпився таким чином, щоб інтегральне випромінювання від рентгеновської трубки потрапляло на внутрішню частину пластини. Дослідження проводили в діапазоні температур від 8 до 300K за допомогою рідких гелію та азоту, нагрівальних елементів шляхом охолодження або нагрівання мідної підкладки. Для вимірювання температури використовувалися термopа хромель - алюмель і напівпровідникові датчики температури WAD-305, які закріплені на мідній підкладці разом із зразком.

Випромінювання рентгеновської трубки направлено перпендикулярно до площини зразка. РЛ зразків реєструвалася одночасно за двома каналами: інтегрально і спектрально, при цьому кварцові вікна реєстрації були розташовані під кутами 45° до площини зразка, а між собою під кутом 90° . Інтегральне свічення реєстрували з використанням світлочутливого фотоелектронного помножувача ФЕП-106. Спектри свічення реєстрували у діапазоні від 330 нм до 800 нм крізь світлосильний монохроматор МДР-2 із дифракційною ґраткою 600 шт/мм за допомогою світлочутливого фотоелектронного помножувача ФЕП-106. Усі представлені спектри виправлені на спектральну чутливість реєструючої системи. Інформація в аналоговому вигляді після підсилювачів усіх каналів реєстрації (з блоку сканування монохроматора, з блоків контролю температури, з блоків реєстрації інтенсивностей свічення, з вакуумметра) подавалася на 16-канальний АЦП. За допомогою створеного програмного забезпечення одержані експериментальні дані оброблялися за допомогою ПК [4].

Експериментальні результати

Було досліджено два типи зразків – жіноча та чоловіча нігтьова пластини. На рис. 2 та рис. 3 наведені спектри РЛ при температурах 8 К, 85 К та 300 К для обох типів зразків нігтьової пластини.

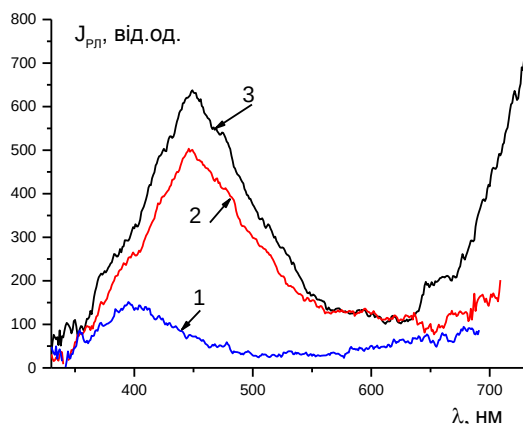


Рис. 2. Спектри РЛ жіночої нігтьової пластини при температурах 300 К (1), 85 К (2) та 8 К (3)

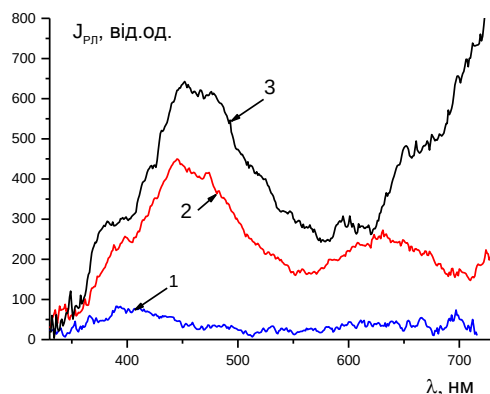


Рис. 3. Спектри РЛ чоловічої нігтьової пластини при температурах 300 К (1), 85 К (2) та 8 К (3)

Слід наголосити, що незалежно від температури досліджень значення інтенсивності РЛ нігтьової пластини дуже мала у порівнянні зі класичними люмінофорами (РЛ біополімерів на 4 порядки менша). Також варто зазначити, що спектри РЛ додатково були записані для «порожнього» кріостату (без зразка). Зареєстровані дані при кімнатній температурі за інтенсивністю були на 5-10 % менші, ніж у спектрах РЛ нігтьової пластини, а відмінності за формою в межах похибки («шумовий фон») однакові, аналогічно «смузі» у спектральному діапазоні 350-450 нм (криві 1 на рис. 2, рис. 3). Ці результати дозволяють зробити висновок щодо

відсутності РЛ нігтьової пластини при температурі 300 К.

При порівнянні кривих 2 рис. 2 та рис. 3 (які були одержані при температурі 85 К), бачимо, що спектри складаються з неелементарної широкої смуги у спектральному діапазоні 350-700 нм із вираженим максимумом при 450 нм. Тобто, спектр РЛ складається як мінімум з двох смуг: 350÷550 нм та 550÷700 нм. Крім того, варто зазначити, що в чоловічій нігтьовій пластині смуга свічення в області 550÷700 нм значно яскравіше виражена у порівнянні із жіночим зразком. Відносна інтенсивність РЛ максимуму при 450 нм для зразка жіночої нігтьової пластини на $\approx 10\%$ менша за інтенсивність РЛ чоловічого зразка.

При охолодженні обох зразків до 8 К інтенсивність спектрів РЛ збільшується на 15÷20 %. Крім того, варто відмітити, що незалежно від типу зразків при температурі 8 К у спектрах РЛ з'являється інтенсивна смуга свічення у червоній області (більше за 650 нм). Якісно дослідити свічення у цьому діапазоні через малі інтенсивності та приладні обмеження, на жаль, не є можливим.

Порівняємо форми спектрів РЛ при різних температурах для досліджених обох типів зразків. На рис. 4 та рис. 5 наведені нормовані на максимум смуги свічення при 450 нм при температурі 85 К та 8 К, відповідно.

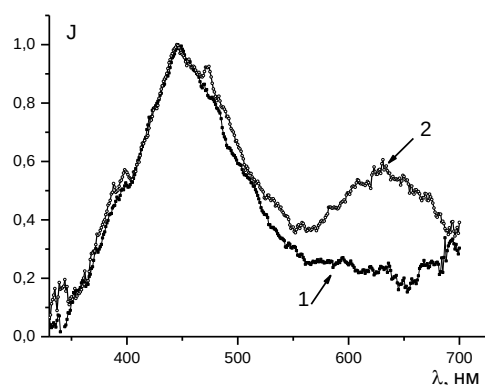


Рис. 4. Нормовані спектри РЛ для зразків жіночої (1) та чоловічої (2) нігтьової пластини при температурі 85К

Якщо порівняти зміну форми спектрів для обох зразків при температурі 85 К (рис. 4) в спектральному діапазоні від 330 нм до 500 нм, то в межах похибки («шумового фону») можна побачити, що форми кривих не залежать від типу зразка. А у спектральному діапазоні від 500 нм до 700 нм форма спектру РЛ чоловічої нігтьової

пластини кардинально відрізняється від форми спектру РЛ жіночої нігтьової пластини. У чоловічій нігтьовій пластині з'являється смуга свічення із вираженим максимумом близько 650 нм.

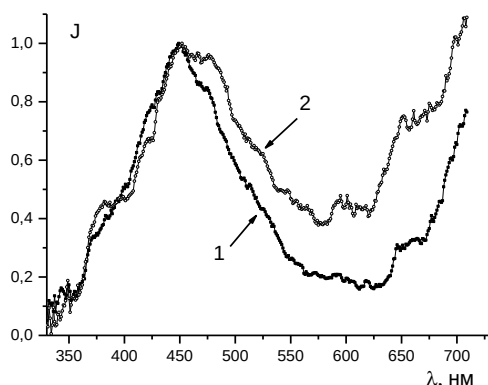


Рис. 5 Нормовані спектри РЛ для зразків жіночої (1) та чоловічої (2) нігтьової пластини при температурі 8К

Якщо порівняти зміну форми спектрів для обох зразків при температурі 8 К (рис. 5), то в спектральному діапазоні від 330 нм до 450 нм в межах похибки («шумового фону») форми кривих не залежать від типу зразка. Поведінка спектрів РЛ для обох типів зразків у спектральному діапазоні від 450 нм до 700 нм подібна: спадаюча до 600 нм та зростаюча до 700 нм з перегином біля 650 нм. При цьому варто зазначити, що внесок в спектр РЛ червоної смуги для чоловічої нігтьової пластини більший ніж для

жіночої нігтьової пластини. Як вже зазначалося, якісно дослідити свічення в діапазоні від 700 нм в «червону» область, через слабкі сигнали свічення інтенсивності та приладні обмеження, на жаль, не є можливим.

Основні результати та висновки

Інтенсивність рентгенолюмінесценції біополімерів на 4 порядки менша за інтенсивність рентгенолюмінесценції класичних люмінофорів, що вимагає використання коректної методики проведення рентгенолюмінесцентних досліджень оптично неоднорідних біологічних об'єктів.

При кімнатній температурі не вдалося одержати коректні спектри РЛ нігтьових пластин людини.

Співвідношення смуг спектрів РЛ досліджених зразків змінюється з температурою: при температурі 85 К спектр РЛ нігтьової пластини має форму широкої неелементарної смуги в спектральному діапазоні 330 нм – 700 нм з вираженим максимум в області 450 нм, а при температурі 8 К в спектрах обох типів зразків з'являється «червона» смуга свічення, максимум якої коректно зареєструвати технічно неможливо.

Спектр РЛ чоловічої нігтьової пластини при температурі 85 К має додаткову чітко виражену смугу свічення з максимумом близько 650 нм у порівнянні зі спектром РЛ жіночої нігтьової пластини.

References

1. Скальный А.В. Микроэлементозы человека: диагностика и лечение / А.В. Скальный. – Москва: КМК, 1999. – 96 с.
2. Волькенштейн М. В. Молекулярная биофизика / М. В. Волькенштейн. – Москва: Наука, 1975. – 616 с.
3. Дослідження форм спектрів фотолумінесценції фібрилярних біополімерів (волосся людини) / В.Я. Дегода, І.О. Золкін, Я.П. Когут, О.С. Свечнікова // Вісник КНУ: сер. Фіз.-мат. наук, 2009, № 4, с.213-216.
4. Дегода В.Я. Комплексна установка для досліджень люмінесценції та провідності кристалофосфорів / В.Я. Дегода // Вісник «Львівська політехніка»: сер. Електроніка, 2014, № 798, с.120-125.
1. SKALNIY, A. (1999) *Microelementoses person: diagnosis and treatment*. Moscow: KMK.
2. WOLKENSTEIN, M. (1975) *Molecular biophysics*. Moscow: Nauka.
3. DEGODA, V. et al. (2009) Research fibrillar forms of photoluminescence spectra of biopolymers (human hair). *Bulletin of KNU, ser. Sci. Science*, 4, p.213-216.
4. DEGODA, V. (2014) Complete plants for luminescence and conductivity studies of crystal. *Herald "Lviv Polytechnic", ser. Electronics*, 798, p.120-125.

Надійшла до редколегії 18.03.16

УДК 543.423:574

Пророк В. В.^{1*}, к.ф.-м.н., с.н.с.,
Вайт Ф. Дж.², PhD, проф.,
Даценко О. І.³, к.ф.-м.н., с.н.с.,
Булавін Л. А.⁴, д.ф.-м.н., проф.,
Мельниченко Л. Ю.⁵, к.ф.-м.н., с.н.с.,
Розуван С.Г.⁶, к.ф.-м.н., н.с.,
Поперенко Л. В.⁷, д.ф.-м.н., проф.

V. V. Prorok¹, PhD,
P. J. White², Prof,
O. I. Dacenko³, PhD,
L. A. Bulavin⁴, Prof.,
L. Yu. Melnychenko⁵, PhD,
S.G. Rozouvan⁶, PhD,
L. V. Poperenko⁷, Prof.

Залежність від часу концентрації ^{137}Cs у грунтовому розчині у польових умовах у 10-км зоні відчуження Чорнобильської АЕС

Time dependence of ^{137}Cs concentration in soil solution at field conditions in the 10-km Exclusion Zone of the Chornobyl Nuclear Power Plant

^{1,3,4,5,6,7} Київський національний університет
імені Тараса Шевченка, 01601, м. Київ,
вул. Володимирська 64/13,
e-mail: ¹prorok@univ.kiev.ua

^{1,3,4,5,6,7} Taras Shevchenko National University of
Kyiv, 01601, Kyiv, Volodymyrska st. 64/13,
e-mail: ¹prorok@univ.kiev.ua

² The James Hutton Institute, Invergowrie, Dundee
DD2 5DA, Scotland (UK)

² The James Hutton Institute, Invergowrie, Dundee
DD2 5DA, Scotland (UK)

Експериментально досліджено залежність від часу концентрації ^{137}Cs у грунтовому розчині протягом двох років на трьох дослідних ділянках з різними властивостями ґрунтів у природних умовах у 10-км зоні відчуження Чорнобильської АЕС. Концентрація ^{137}Cs у зразках грунтового розчину визначалася за допомогою гама-спектрометра з напівпровідниковим детектором HPGe ORTEC GMX40P4-83-RB ПОРТОР sn.48-TN22465A. Мінімальна детектована ^{137}Cs активність складала 0,1 Bq на зразок для часу вимірювання 10.000 s з середньостатистичною похибкою 20% ($p=0,95$). Згідно з отриманими даними, ця величина істотно змінювалася протягом часу досліджень. Аналіз отриманих даних показав, що концентрація ^{137}Cs у грунтовому розчині не корелює з вологістю ґрунту та з жодною з наведених метеорологічних характеристик. Після аналізу отриманих результатів зроблено висновок, що найбільш ймовірною причиною змін концентрації ^{137}Cs є мікробіологічна активність в досліджуваних ґрунтах.

Ключові слова : польові умови, цезій-137, ґрунтовий розчин

Experiments were performed during 2012 and 2013 years at three field sites within the 10 km Exclusion Zone of the Chornobyl Nuclear Power Plant. Samples of the soils were selected several times during the every growth season. Humidity of soils were determined for each of the selected soil sample. Soil solution was extracted by a centrifuge from every soil sample. The obtained soil solution was first filtered through filter paper with a pore diameter 1-3 μm , and then through a membrane filter with a pore diameter of 0,1 μm . The soil solutions were transparent after filtration. The concentration of ^{137}Cs in the samples was determined by a gamma-spectrometer with the semiconductor detector HPGe ORTEC GMX40P4-83-RB ПОРТОР sn.48-TN22465A. The minimum detectable ^{137}Cs activity was 0,1 Bq/sample for a measurement time of 10.000 s with a statistical error of 20% ($p=0,95$). The obtained data show that the concentration of ^{137}Cs substantially changes during the experiment time. The analysis of the obtained data proved that the ^{137}Cs concentration in the soil solution correlated neither to the soil humidity nor to any meteorological characteristics including an average daily air temperature, a number of total hours of bright sunlight and average relative air humidity. It was concluded after the analysis of the obtained experimental results that the most credible reason for changes of the ^{137}Cs concentration in the soil solution is a microbiological activity in the studied soils.

Key words: field conditions, cesium-137, soil solution

Статтю представив академік НАН України, д.ф.-м.н., проф. Булавін Л.А.

Вступ

Вивчення надходження ^{137}Cs до рослини відноситься до найбільш актуальних проблем радіоекології. На відміну від стронцію, в якого є дуже гарний аналог відносно надходження до рослини (кальцій), що значно полегшує прогнозування надходження стронцію до рослини, у цезію такого аналога серед елементів макроживлення рослин нема. Однозначного зв'язку між надходженням до рослини ^{137}Cs та калію, який вважається аналогом цезію, не спостерігається. Численні дослідження надходження цезію до рослин, на жаль, проводяться не завжди коректно. Часто проводять порівняння надходження цезію до різних видів рослин, що вирости в різних умовах. Між тим, у роботах [1-3] показано, що навіть в рослинах одного й того ж виду, що вирости на тій самій ділянці, але в різний час, вміст цезію інколи відрізняється у десятки разів. Автори вказаних публікацій пояснюють це різною концентрацією ^{137}Cs та калію у ґрунтовому розчині та різною вологістю ґрунтів в різний час.

Задача прогнозування надходження цезію до рослини, що росте на даній ділянці з даним типом ґрунту, дуже складна. З нашої точки зору доцільно її розбивати на дві задачі: – задачу прогнозування складу ґрунтового розчину на даній ділянці, як функції від часу, та задачу прогнозування надходження цезію до рослини в залежності від параметрів ґрунтового розчину та властивостей рослини. Це дві окремі доволі складні задачі. Ми вважаємо, що об'єднання цих двох задач в одну є також однією з причин того, що після півстолітніх досліджень й дуже багатьох публікацій на цю тему на сьогоднішній день немає надійної методики прогнозування надходження цезію до рослин, що підтверджують останні публікації (наприклад, [4]).

Надходження цезію до рослини у якийсь конкретний момент часу визначається в першу чергу параметрами ґрунтового розчину в цей момент часу. Є чимало теоретичних досліджень (наприклад, [5-8]) щодо вмісту цезію у ґрунтовому розчині в залежності від параметрів ґрунту.

На жаль, експериментальних даних щодо вмісту цезію у ґрунтовому розчині у природних умовах у літературі дуже мало. В роботі [9] наведені результати таких досліджень для кількох забруднених ^{137}Cs експериментальних ділянок у 30-км зоні відчуження Чорнобильської АЕС. В даній роботі було проведено експериментальне дослідження залежності від

часу концентрації ^{137}Cs у ґрунтовому розчині у природних умовах у 10-км зоні на інших ділянках з іншими властивостями ґрунтів.

Результати досліджень та їх обговорення.

Дослідження проводилися на трьох експериментальних ділянках, розташованих у 10-кілометровій зоні відчуження Чорнобильської АЕС: ділянка Д – торф'яний ґрунт; ділянка Б – піщаний ґрунт; Б2 – піщаний ґрунт із дещо відмінним від ґрунту Б складом. Вміст цезію-137 у досліджуваних ґрунтах складав: Д – 15 200 Бк/кг, Б – 16 900 Бк/кг, Б2 – 10 600 Бк/кг. Гама-фон на експериментальних ділянках дорівнював: Д – 200 мР/год., Б – 380 мР/год., Б2 – 350 мР/год. Густина ґрунту Д – 0,85 г/см³, ґрунту Б – 1,41 г/см³, ґрунту Б2 – 1,42 г/см³. Усі досліджувані ґрунти мають низьку солонуватість та підвищену кислотність. Хімічний аналіз ґрунтів проведено за методиками, описаними в [10].

Ми відбирали зразки ґрунтів по кілька разів кожного сезону. З ґрунту екстрагувався ґрунтовий розчин за допомогою центрифуги ОС-6М (СРСР). Частота обертання вала приводу складала до 6000 обертів на хвилину. Якщо відібраний зразок ґрунту був недостатньо вологий для центрифугування, в цей ґрунт добавлялася дистильована вода. Центрифугування проводилось через 12 годин після додавання води. Центрифугований розчин фільтрувався крізь паперовий фільтр (діаметр пор 1-3 мкм), а потім крізь мембранний фільтр (діаметр пор 0,1 мкм). ґрунтовий розчин після фільтрування був прозорим. Для консервації цього розчину ми додавали у нього концентровану азотну кислоту у пропорції 1 мл кислоти на 500 мл ґрунтового розчину та нагрівали його до кипіння. Ми визначали вологість ґрунту h як відношення маси води у зразку до маси сухого ґрунту в цьому зразку з експериментальною похибкою 10%. Висушування зразків ґрунту проводилося в сушильній печі при температурі 100 °С. Концентрація ^{137}Cs у зразках ґрунтового розчину визначалася за допомогою гама-спектрометра з напівпровідниковим детектором HPGe ORTEC GMX40P4-83-RB PORTOP sn.48-TN22465A (AMETEK, USA) з експериментальною похибкою 10%. Мінімальна детектована ^{137}Cs активність складала 0,1 Вq на зразок для часу вимірювання 10.000 s з середньостатистичною похибкою 20% ($p=0,95$). Більш детально методика експерименту описана в [11].

Таблиця 1

Середньомісячні погодні умови на дослідних ділянках [12].

2012 Місяць	Середньо місячна температура повітря (°C)		Загальне число сонячних годин	Середня вологість повітря (%)
	min.	max.		
Травень	11.0	22.6	226	69
Червень	13.0	23.5	187	74
Липень	15.7	27.4	265	73
Серпень	13.6	24.4	181	77
Вересень (до 09.18)	9.2	21.2	100	78

2013 Місяць	Середньо місячна температура повітря (°C)		Загальне число сонячних годин	Середня вологість повітря (%)
	min.	max.		
Травень	11.8	24.1	215	67
Червень	15.3	26.0	220	71
Липень	13.9	24.6	228	75
Серпень (до 08.20)	13.1	26.9	199	69

У графі «Загальне число сонячних годин» враховані тривалість дня та хмарність кожного дня вказаного місяця.

У таблиці 2 приведені вологість ґрунту та концентрація ^{137}Cs у ґрунтовому розчині на всіх ділянках під час експерименту.

Аналіз отриманих експериментальних даних показав, що концентрація ^{137}Cs у ґрунтовому розчині не корелює з вологістю ґрунту (табл. 2) та з жодною з наведених метеорологічних характеристик. Найбільш ймовірною причиною змін концентрації ^{137}Cs у ґрунтовому розчині є

Список використаних джерел

1. Пророк В.В. Залежність вмісту ^{137}Cs у рослині від параметрів ґрунту / В.В. Пророк, К.Ф.В. Масон, С.Ф. Тимофєєв та ін. // Вісник Київського ун-ту, сер. фіз.-мат., 2004. – Вип. 3. – С. 407-416.
2. Пророк В.В. Закономірності надходження ^{137}Cs з ґрунту до рослини / В.В. Пророк, Л.А. Булавін, В.А.Агєєв та ін // Ядерна фізика та енергетика. 2007. – Т.19, №1. – С.115-122.

мікробіологічна активність в ґрунтах протягом часу досліджень.

Таблиця 2

Вологість ґрунту та концентрація ^{137}Cs у ґрунтовому розчині для всіх експериментальних ділянок та дат відбору зразків

Дата	Д		Б		Б2	
	h	Бк/л	h	Бк/л	h	Бк/л
2012, Трав. 04		5,2		1,9		
2012, Трав. 28	0,139	8,52	0,006	12,4		
2012, Черв. 25	0,208	6,01	0,058	4,4		
2012, Срп. 01	0,202		0,008	14,41		
2012, Вер. 18	0,358	5,21	0,050	7,6		
2013, Трав. 15	0,252	2,32	0,072	5,11	0,024	6,53
2013, Черв. 04	0,345	2,64	0,111	9,15	0,074	19,1
2013, Черв. 26	0,173	4,89	0,018	14,32	0,012	16,95
2013, Лип. 09	0,0772	1,85	0,011	10,62	0,004	7,31
2013, Срп. 20	0,0718	2,52	0,007	7,43	0,006	3,92

Висновки

У природних умовах концентрація ^{137}Cs у ґрунтовому розчині весь час змінюються. Найбільш ймовірною причиною змін концентрації ^{137}Cs є мікробіологічна активність в досліджуваних ґрунтах протягом часу досліджень.

Робота виконана за фінансової підтримки Українського Науково-Технологічного Центру (проект УНТЦ 5439).

References

1. PROROK, V.V. et al. (2004) Dependence of ^{137}Cs at the plant on the soil parameters. *Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv Series Physics & Mathematics*. (3). p. 407-416.
2. PROROK, V.V. et al. (2007) Lows of ^{137}Cs transition from the soil to the plant. *Nuclear Physics and Energetic*. 19 (1), p.115-122.

3. Prorok V.V. The transfer of dissolved ^{137}Cs from soil to plants [Електронний ресурс] / V.V. Prorok, C.F.V. Mason, V.A. Ageyev, et al. // Proc. of WM'06. Session 66. Tucson (Arizona), 26 February – 2 March 2006. – Tucson, 2006. – Режим доступу: <http://www.wmsym.org/archives/2006/pdfs/6423.pdf>.
4. Waegeneers N. Plant uptake of radiocaesium from artificially contaminated soil monoliths covering major European soil types / N. Waegeneers, T. Sauras-Year, Y. Thiry et al. // J. Environ. Radioact. – 2009. – V.100, No 6. – P. 439-444.
5. Протас Н.М. Механизмы, контролирующие миграцию радионуклидов в системе почва-растение / Н.М. Протас, Л.И. Шпинар, И.И. Ясковец // Агроэкологический журнал. – 2004. – №2. – С.67-72.
6. Пристер Б.С. Способ комплексной оценки свойств почвы для прогнозирования накопления радионуклидов растениями / Б.С. Пристер, Г. Бизольд, Ж. Девиль-Ковелин // Радиационная биология. Радиоэкология. – 2003. – Т.43, №6. – С.688-696.
7. Ehlken S. Environmental processes affecting plant root uptake of radioactive trace elements and variability of transfer factor data: a review / S. Ehlken, G. Kirchner // J. Environ. Radioact. – 2002. – Vol.58. – P.97-112.
8. Коноплев А.В. Параметризация перехода ^{137}Cs из почвы в растения на основе ключевых почвенных характеристик / А.В. Коноплев, И.В. Коноплева // Радиационная биология. Радиоэкология. – 1999. – Т.39, №4. – С.455-461.
9. Пророк В.В. Залежність від часу концентрації калію, ^{137}Cs та відношення $^{137}\text{Cs}/\text{K}$ у ґрунтовому розчині / В.В. Пророк // Вісник Київського ун-ту. Сер. фіз.-мат. науки. – 2009. – Вип.4. – С. 225-228.
10. Александрова Л.Н. Лабораторно-практические занятия по почвоведению: [4-е изд.] / Л.Н. Александрова, О.А. Найденова. – Л.: Агропромиздат, 1986. – 295 с.
11. Prorok V.V. Mechanistic interpretation of the varying selectivity of Cesium-137 and potassium uptake by radish (*Raphanus sativus* L.) under field conditions near Chernobyl / V.V. Prorok, O.I. Dacenko, L.A. Bulavin et al. // J. Environ. Radioact. – 2016. – Vol.152. – P.85-91.
12. Архив погоды в Чернобыле. Website. Online Available from: http://rp5.ua/Архив_погоды_в_Чернобыле.
3. PROROK, V.V. et al. (2006) The transfer of dissolved ^{137}Cs from soil to plants. In *Proc. of WM'06. Session 66.*, 26th February to 2nd March 2006 [Online]. Tucson. Available from: <http://www.wmsym.org/archives/2006/pdfs/6423.pdf>.
4. WAEGENEERS, N. et al. (2009) Plant uptake of radiocaesium from artificially contaminated soil monoliths covering major European soil types. *J. Environ. Radioact.* 100 (6). p. 439-444.
5. PROTAS, N.M., SHPINAR, L.I., YASKOVETS, I.I. (2004) Mechanisms controlling radionuclide migration in soil-plant system. *Agroecol. J.* (2). p.67-72.
6. PRISTER, B.S., BIZOLD, G., DEVIL-KOVELIN, J. (2003) Method of complex estimation of soil properties to predict the radionuclide accumulation. *Radiat. Biol. Radioecol.* 43 (6). p.688-696.
7. EHLKEN, S., KIRCHNER, G. (2002) Environmental processes affecting plant root uptake of radioactive trace elements and variability of transfer factor data: a review. *J. Environ. Radioact.* 58. p.97-112.
8. KONOPLEV, A.V., KONOPLEVA, I.V. (1999) Parameterization of ^{137}Cs transition from soil to plant based on key soil characteristics. *Radiat. Biol. Radioecol.* 39 (4). p.455-461.
9. PROROK, V.V. (2009) Dependencies of concentration of potassium, ^{137}Cs and ratio $^{137}\text{Cs}/\text{K}$ in soil solution on time. *Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv Series Physics & Mathematics.* (4). p.225-228.
10. ALEKSANDROVA, L.N. and NAIDENOVA, O.A. (1986) *Laboratory and practical classes of soil science.* 4th Ed. Leningrad. Agropromisdat.
11. PROROK, V.V. et al. (2016) Mechanistic interpretation of the varying selectivity of Cesium-137 and potassium uptake by radish (*Raphanus sativus* L.) under field conditions near Chernobyl. *J. Environ. Radioact.* 152. p.85-91.
12. *Archive of weather in Chernobyl.* [Online] Available from: <http://rp5.ua/Chornobyl>.

Надійшла до редколегії 26.02.16 р.

УДК 539.194

Розуван Т.С.¹, асп.,
Поперенко Л.В.¹, д.ф.-м.н, проф.,
Розуван С.Г.¹, к.ф.-м.н, н.с.,
Шайкевич І.А.¹, д.ф.-м.н, проф.

T.S.Rozouvan¹, Ph.D. stud.,
L.V. Poperenko¹, Dr.Sc., Prof.,
S.G. Rozouvan¹, Ph.D., Sci. Res.,
I.A. Shaykevich¹, Dr.Sc., Prof.

Оптична анізотропія наноструктурованої поверхні піролітичного графіту

Optical anisotropy of nanostructured surface of pyrolytic graphite

¹Київський національний університет імені
Тараса Шевченка 01601, м. Київ, вул.
Володимирська 64/13, e-mail: sgr@univ.kiev.ua

¹Taras Shevchenko National University of Kyiv,
01601, Kyiv, Volodymyrska st. 64/13,
e-mail: sgr@univ.kiev.ua

Високоорієнтований піролітичний графіт з наноструктурами у вигляді сходинок на його гранях вивчався за допомогою скануючої тунельної мікроскопії та кутово залежної еліпсометрії. Еліпсометричні параметри відбитого світла від поверхні графіту проявили анізотропію, яка була пояснена за допомогою чисельного розв'язку рівнянь Максвелла для плоскої електромагнітної хвилі поблизу поверхні наноструктур.

Ключові слова: наноструктурований графіт, скануюча тунельна мікроскопія, еліпсометрія, оптична анізотропія.

Highly oriented pyrolytic graphite with stairs nanostructures on its faces was studied by scanning tunneling microscopy and angle dependent ellipsometry. The registered terrace steps had a few nanometers heights and a few microns length. Reflected from graphite light ellipsometric parameters revealed anisotropic behavior which was explained by numerical simulation of Maxwell equations for a plane electromagnetic wave near the nanostructures surface. p- and s- components of incident light induce two different spatial distributions of electrical currents in the vicinity of terraces. As a consequence electromagnetic fields distribution just near the terraces edges differ drastically. Azimuth angle ellipsometric parameters curves had six maximums which were found to be related to graphite crystal lattice orientation having hexagonal symmetry. The results demonstrate possibility anisotropic behavior of conducting materials surface optical parameters induces by nanostructures on its surfaces.

Key Words: nanostructured graphite, scanning tunneling microscopy, ellipsometry, optical anisotropy.

Статтю представив член-кор. НАН України, д.ф.-м.н., проф. Макара В.А.

Вступ

Графіт одна з можливих кристалічних форм вуглецю. Його sp^2 тетрагональна гібридизація призводить до шарової кристалічної структури графіту, при якій графенові шари зв'язані слабкими Ван-дер-Ваальсівськими зв'язками за рахунок делокалізованих π -орбіталей [1]. Електронні властивості графіту та його оптична провідність були експериментально визначені в [2,3]. Зонна структура графіту теоретично викладена в [4]. Оптична анізотропія графіту розглянута в [5]. Високоорієнтований піролітичний графіт ВОПГ [6] це синтетичний графіт, який характеризується високою ступінню хімічної чистоти та ідеальністю кристалічної ґратки, яка близька до ідеальної. Грані ВОПГ у вигляді кристалічних площин утворюються при

механічному відриві поверхневого шару зразка графіту. При цьому у [7] зареєстровані тераси (сходинки) на поверхневих гранях з довжинами порядку одиниць мікрон і перепадом висот в одиниці-десятки нанометрів. Такого роду тераси можуть бути інтерпретовані як лінійні дефекти, їх структура може мати специфічні особливості і може бути змінена електрохімічним травленням [8,9]. При використанні ВОПГ граней як електродів, наявність терас приводило до зміни кінетики електронних процесів в зразках [10]. Задачею даної роботи є дослідження оптичних властивостей наноструктурованої терасами поверхні ВОПГ.

Експериментальна частина.

Для експериментів ми використовували скануючий тунельний мікроскоп на базі

нанолабораторії ІНТЕГРА, що дозволяло нам реєструвати топологію поверхні з просторовою роздільною здатністю, яка досягала 0,5 нм. Гостру голку для СТМ ми виготовляли з дроту діаметром 0,5 мм, зі сплаву $Pt_{0.8}Ir_{0.2}$, виготовленого шляхом механічного відрізання його кінця.

Результати скануючої тунельної мікроскопії поверхні ВОПГ представлені на рис.1. Ми бачимо сходинки мікронної довжини з перепадом висот не більше 7 нанометрів, з краями різної топологічної орієнтації. Результати СТМ такої тераси з високою просторовою роздільною здатністю позначені на рис.2 цифрами 1, 2, 3. Зареєстровано три сходинки (одну з висотою порядку 10 нм та дві паралельні їй з висотами в декілька нанометрів) які розділяють атомні площини граней (на площинах видна структура кристалічної ґратки графіту). Сама сходинка утворилась внаслідок розриву графіту і є фактично лінійним нанооб'єктом на атомній площині графіту. Поперечні розміри такого утворення на два порядки менші від довжин

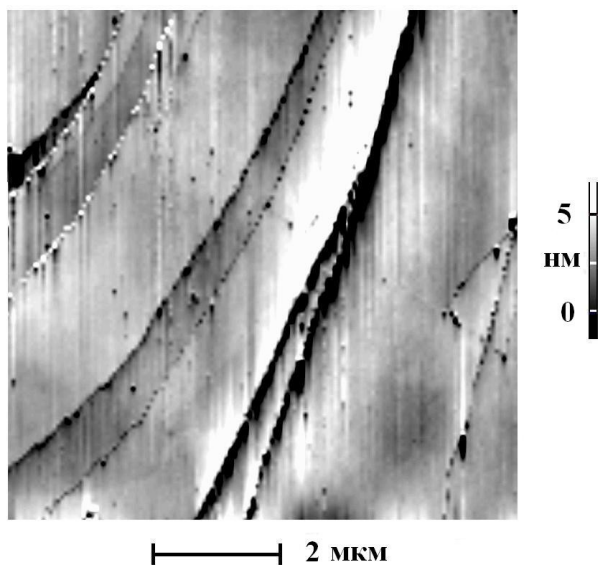


Рис. 1. Скануюча тунельна мікроскопія ВОПГ з терасами. Просторова роздільна здатність 30 нм.

хвиль видимого світла. Тому при відбитті світла від поверхні ВОПГ з сукупністю таких лінійних нанооб'єктів ми маємо знехтувати дифракційними ефектами. В той же час, така поверхня не еквівалентна ідеальній площині, яка береться за основу при виведенні співвідношень Френеля для падаючої плоскої електромагнітної хвилі. На рис. 3 приведені результати чисельних розрахунків сумарних електричних напруженостей (ізолінії) при падінні плоскої електромагнітної хвилі і наведених нею струмів в

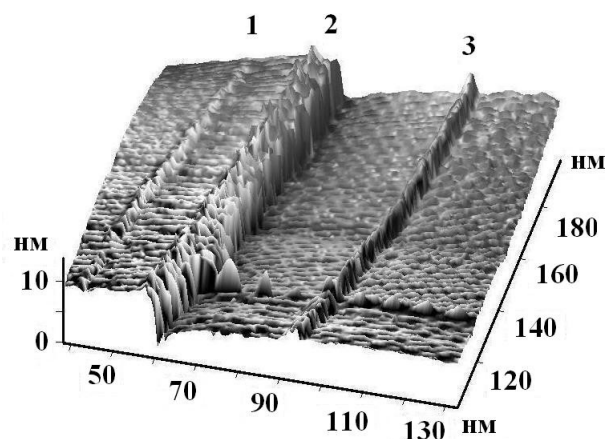


Рис. 2. Скануюча тунельна мікроскопія сходинок на поверхні графіту. Просторова роздільна здатність 0,5 нм.

сходинках з ідеальною провідністю для р- і s-компонент світлової хвилі. Розрахунки проводились за допомогою програмного забезпечення МЕЕР, яке є частиною стандартної операційної системи Debian LINUX. Довжина електромагнітної хвилі бралась в 100 разів більшою від висоти паралелепіпеда, кут падіння становив 30 градусів, напрямок хвильового вектора світла позначений на рисунку стрілками.

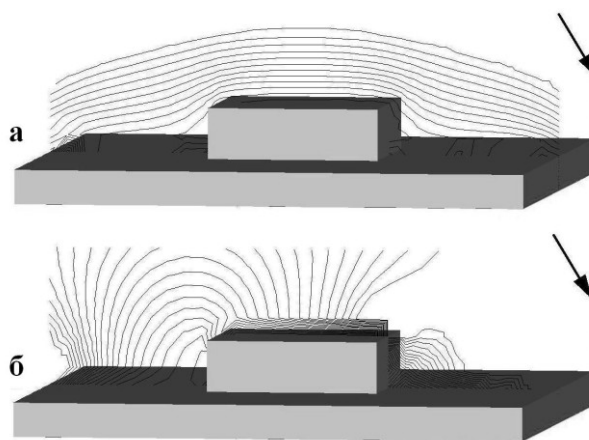


Рис. 3. Розрахунки напруженості електричного поля при падінні плоскої електромагнітної хвилі на ідеально провідну поверхню з паралелепіпедом.

а) s-поляризація, б) р-поляризація.

З рисунків видно, що розподіли поля для випадків s- та р-поляризацій суттєво різняться. Теоретично це пояснюється наступним чином. Електричний вектор електромагнітного поля поблизу провідної поверхні індукуює локальні поверхневі електричні струми, співнаправлені з проекцією електричного вектора на цю площину. Поверхневі струми визначають амплітудні та фазові параметри відбитого світла, бо величини

струмів входять в граничні умови рівнянь Максвелла. У випадку р-поляризації поверхневі струми на бокових гранях паралелепіпеда мають розповсюджуватись поперек його ребер, що призводить до зменшення величин струмів. З рисунка 3,б видно, що розподіл напруженості поля суттєво відрізняється біля лівої і правої бокових сторонах паралелепіпеда, тобто при падінні світла на сходинку з двох різних сторін. На рис.3а відмінностей немає бо s-компонента практично не збуджує плазмові коливання. З цього можна зробити два висновки. По-перше, наявність сходинки призводить до оптичної анізотропії. По-друге, азимутальні еліпсометричні залежності мають бути асиметричними у напрямках перпендикулярних напрямкам

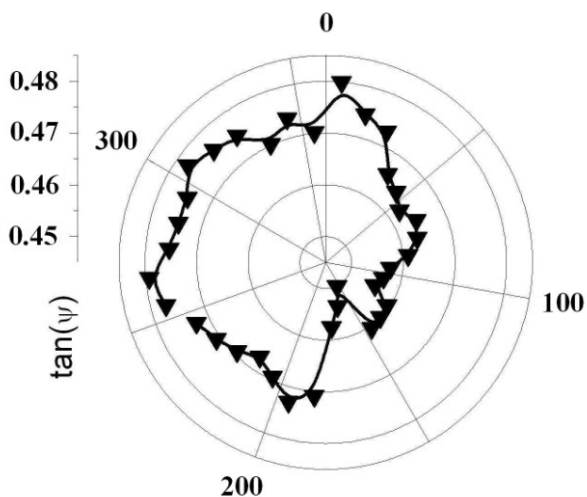


Рис. 4. Азимутальні залежності тангенса азимута відновленої поляризації при довжині хвилі світла 546.1 нм. Кут падіння світла 75° .

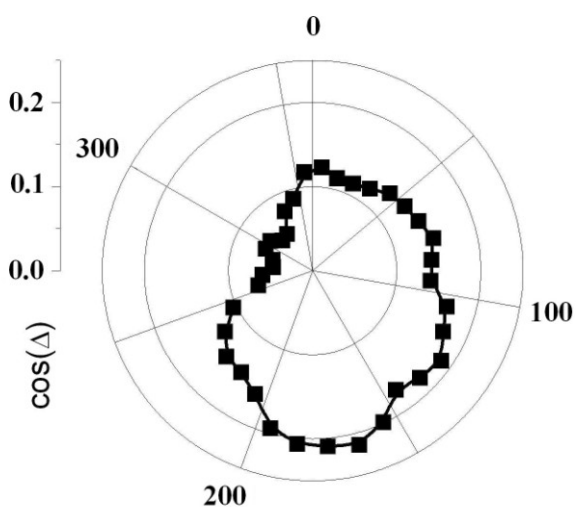


Рис. 5. Азимутальні залежності косинуса зсуву фаз при довжині хвилі світла 546.1 нм. Кут падіння світла 75° .

переважної просторової орієнтації сходинки. Ефективність такої анізотропії має залежати від концентрації дефектів на одиницю площі.

Для експериментальної перевірки наших розрахунків та висновків нами були проведені еліпсометричні вимірювання поверхні піролітичного графіту. Зразок ВОПГ площею 1 квадратний сантиметр розколювався шляхом відриву його верхніх шарів за допомогою липкої

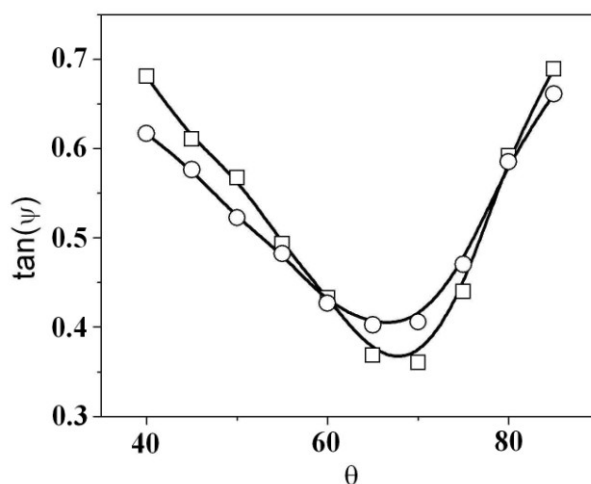


Рис. 6. Кутові залежності тангенса азимута відновленої поляризації при довжині хвилі світла 546.1 нм для азимутальних кутів 340° (○) і 60° (□).

стрічки. Після цього відразу ж проводились виміри. Таким чином, ми не допускали деградації поверхні графіту внаслідок дії атмосферного кисню. На рис.4, та рис.5 представлені дані еліпсометричних вимірювань залежностей зсуву фаз та азимута відновленої поляризації в залежності від азимутального кута повороту зразка на предметному столику гоніометра при збереженні кута падіння світла на зразок θ . З цих залежностей на рисунках можна зробити декілька висновків. По-перше, максимуми на залежностях рис.4 та рис.5 мають шість рівновіддалених максимумів з кутом 60° між ними. Так, наприклад, для залежності азимута відновленої поляризації координати розташовані в областях кутів 10° , 70° , 130° , 200° , 260° та 320° . Типовим для ВОПГ є орієнтація кристалічної ґратки $[110]$ при його сколі. При цьому на СТМ сканах графіту ми бачимо впорядкування атомів у вершинах шестикутників, напрям сторін яких визначає переважний напрям сколів (напрямок терас) на поверхні графіту. Тобто, шість максимумів на азимутальних залежностях еліпсометричних параметрів рис. 4, рис.5 є наслідком Р63мс гексагональної просторової групи симетрії кристалічної ґратки графіту.

Також, залежності на рис. 4, рис. 5 є асиметричними відносно осі з напрямком вздовж кутів 40° , 230° . На рис. 6 зображені залежності азимута відновленої поляризації в залежності від кута падіння світла θ виміряні при азимутальних кутах 160° та 340° . З кутових залежностей видно, що головні кути для двох кривих різняться на декілька градусів.

Висновки

Наноструктурована плоска поверхня графіту з великою поверхневою концентрацією наноструктур має оптичні властивості, відмінні від властивостей ідеальної площини. ВОПГ

демонструє анізотропію еліпсометричних параметрів. Кутові азимутальні залежності азимута відновленої поляризації та зсуву фаз мають чітку прив'язку до орієнтації кристалічної ґратки графіту, тому що орієнтація терас на поверхні графіту визначається напрямком виходу атомних площин кристалічної ґратки на поверхню. Даний результат демонструє можливість існування оптичної анізотропії в провідниках наведеної поверхневими лінійчатими наноструктурами.

Список використаних джерел

1. Chung D. L. Review Graphite / D. L. Chung. // *Journal of Materials Science*. – 2002. – №37. – С. 1475–1489.
2. Taft E. A. Optical properties of graphite / E. A. Taft, H. R. Philipp. // *Phys. Rev.* – 1965. – №138. – С. A197–A202.
3. Universal optical conductance of graphite / A. B. Kuzmenko, E. van Heumen, F. Carbone, D. van der Marel. // *Phys. Rev. Lett.* – 2008. – №100. – С. 117401–117405.
4. McClure J. W. Band structure of graphite and de Haas-van Alphen effect / J. W. McClure // *Phys. Rev.* – 1957. – №108. – С. 612–618.
5. Falkovsky L. A. Anisotropy of graphite optical conductivity / L. A. Falkovsky // *Pis'ma v ZhETF*. – 2010. – №5. – С. 348–351.
6. Blackman L. C. Stress recrystallization of graphite / L. C. Blackman, A. R. Ubbelohde. // *Proceedings of the Royal Society A*. – 1962. – №266. – С. 20–32.
7. McDermott M. T. Scanning Tunneling Microscopy of Ordered Graphite and Glassy Carbon Surfaces: Electronic Control of Quinone Adsorption / M. T. McDermott, R. L. McCreery. // *Langmuir*. – 1994. – №10. – С. 4307–4314.
8. STM study of a grain boundary in graphite / [P. Simonis, C. Goffaux, P. A. Thiry et al.] // *Surface Science*. – 2002. – №511. – С. 319–322.
9. Change in the morphology of the terrace edges on graphite surfaces by electrochemical reduction / S. Kubota, T. Yonezawa, T. Nagahama, T. Shimada. // *Chemistry Letters*. – 2012. – №41. – С. 187–188.
10. Banks C. E. New electrodes for old: from carbon nanotubes to edge plane pyrolytic graphite / C. E. Banks, R. G. Compton. // *Analyst*. – 2006. – №131. – С. 15–21.

References

1. CHUNG, D. D. L. (2002) Review Graphite. *Journal of Materials Science*. 37. p. 1475-1489.
2. TAFT, E. A., & PHILIPP, H. R. (1965) Optical Properties Of Graphite. *Phys. Rev.* 138. p. A197-A202.
3. KUZMENKO, A. B. *et al.* (2008) Universal Optical Conductance Of Graphite. *Phys. Rev. Lett.* 100. p. 117401-117405.
4. MCCLURE, J. W. (1957) Band Structure Of Graphite And De Haas-Van Alphen Effect. *Phys. Rev.* 108. p. 612-618.
5. FALKOVSKY, L. A. (2010) Anisotropy Of Graphite Optical Conductivity. *Jetp Lett.* 5. p. 348-351.
6. BLACKMAN, L. C., & UBBELOHDE A. R. (1962) Stress Recrystallization Of Graphite. *Proceedings of the Royal Society A*. 266. p. 20-32.
7. MCDERMOTT, M. T., & MCCREERY R. L. (1994) Scanning Tunneling Microscopy Of Ordered Graphite And Glassy Carbon Surfaces: Electronic Control Of Quinone Adsorption. *Langmuir*. 10. p. 4307-4314.
8. SIMONIS, P et al. (2002) STM Study Of A Grain Boundary In Graphite. *Surface Science*. 511. p. 319-322.
9. KUBOTA, S., YONESAVA, T., et al. (2012) Change In The Morphology Of The Terrace Edges On Graphite Surfaces By Electrochemical Reduction. *Chem. Lett.* 41. p. 187-188.
10. BANKS, C. E., & COMPTON, R. G. (2006) New Electrodes For Old: From Carbon Nanotubes To Edge Plane Pyrolytic Graphite. *The Analyst*. 131. p. 15-21.

Надійшла до редколегії 25.01.16

УДК 535.341.08, 535.342, 53.096.

Сіжук А. С.¹, к.ф.-м.н.,
Єжов С. М.², д.ф.-м.н., проф.

A. S. Sizhuk¹, PhD,
S. M. Yezhov², Dr. Sci.

Квантовооптичне формулювання поняття коефіцієнта поглинання

The quantum optical formulation of absorption coefficient

^{1,2}Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 01601, м. Київ, вул.
Володимирська 64/13,
e-mail: ¹andrii.sizhuk@univ.kiev.ua,
²yezhov@univ.kiev.ua

^{1,2}Taras Shevchenko National University of Kyiv,
01601, Kyiv, Volodymyrska st. 64/13,
e-mail: ¹andrii.sizhuk@univ.kiev.ua,
²yezhov@univ.kiev.ua

У даній роботі подано приклад побудови коефіцієнта поглинання у термінах квантової оптики. Розроблена методика обчислення враховує ефект Доплера. Показано, що в основі квантовооптичного формулювання коефіцієнта поглинання може лежати комутаційне співвідношення між операторами електричного поля та інтенсивності.

Ключові слова: коефіцієнт поглинання, квантова оптика, ефект Доплера, комутаційні співвідношення.

The example of the quantum optical formulation of absorption coefficient is provided. The local absorption coefficient is defined as a derivative of logarithm of intensity with respect to the distance in the vicinity of a given spatial point and a moment of time. The intensity is represented by the averaged normal product of creation and annihilation operators of the certain electromagnetic field states. The averaging is performed over all possible pure quantum (discrete and continuous) states of the system of the field and atoms. The average quantity at an arbitrary moment of time is determined by the state of the system at the initial moment of time through the corresponding Schrödinger equation in the introduced approximation. The theoretical basis for the calculation of the absorption coefficient is developed taking into account the Doppler effect. It was shown that the absorption coefficient can be defined by the commutation relation between the operators of electric field and intensity. The fundamental role of the quantization of electromagnetic field in defining the absorption or emission properties in the optical region is revealed in the microscopic level of the theory.

Key Words: absorption coefficient, quantum optics, Doppler effect, commutation relation.

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Макарець М.В.

Introduction

In this work we investigate some aspects of the quantum optical method for the formulation of the absorption or/and emission theory based on a model Hamiltonian. The introduced here Hamiltonian models the atom-field interaction taking into account the Doppler effect.

The concept of local absorption (emission) is introduced here as the derivative of logarithm of intensity with respect to distance in the vicinity of a given spatial point and the moment of time. The intensity is represented by the averaged normally ordered product of creation and annihilation operators of certain electromagnetic field states. The averaging is performed over all possible quantum (discrete and continuous) states of the system of the field and atoms.

Therefore, expressing the quantum average of the intensity operator, embraced by the conjugate unitary operators (the exponentials), through the series of commutators with the model Hamiltonian and then applying the averaging over an ensemble give the theoretical prediction of the physical quantity in an approximation.

The following features of the present research can in our opinion be noted in comparison with other models (for example, used in such works as [1] - [9]). Taking the atomic motion in space into consideration, the induced Doppler effect is naturally introduced into the corresponding averaging procedure. The used time independent model Hamiltonian allows formally to represent the general solution of the equation in a fairly compact form without discussing the chronology of events in the

system. The "single-atom" methods, such as the equation of motion for the one-particle population matrix, to find the number of quanta, imbibed by atoms or liberated into the environment per unit time, is not used here. Under certain assumptions, it is enough to know the information about the distribution of system states at the given initial moment of time for the calculation of the coefficient of absorption.

The model

Assume, the system of N atoms occupies the volume of capacity V , determined by optically transparent and thermally insulated (for example, till near-infrared region) walls. And suppose, generated within a certain period of time electromagnetic field "reaches" the space of volume V_{el} (which includes V). Atoms, that fill the volume V , are able to interact with the modes of this electromagnetic field. The frequencies of the modes are distributed near the resonant frequency ω_0 of a single atom (or molecule) transition between only two levels b (the ground state) and a (the excited state). The modes of the electromagnetic field correspond to Fock states (or number states with a well-defined number of quanta), formally received through the standard procedure of quantization in the volume V_{el} . The interaction of the field with an atom is determined through the scalar potential, formed by the scalar (inner) product of atomic dipole moment (more carefully, the dipole matrix) and the operator of the electric field. Translational motion of every atom has three degrees of freedom and is confined by rigid walls (forming the volume V). Taking this into account, the following Hamiltonian describes the infinitesimal change of the state function of the system during the infinitesimal time intervals:

$$\hat{H} = \hat{H}^A + \hat{H}^F + \hat{H}^{AF}. \quad (1)$$

Here, the first item describes the spatial "movement" of N atoms with the translational energy ε_i and intrinsic energy $\hbar\omega_{a,b}$ (for $i = 1 \dots N$), such

that $\hat{H}^A = \sum_{i=1}^N \hat{H}_i^A$, where $\hat{H}_i^A|i\rangle = (\varepsilon_i + \hbar\omega_{a,b})|i\rangle$ and

$|i\rangle$ is the eigenvector of the single particle operator.

The second item represents the energy of free electromagnetic field in the volume V_{el} :

$$\hat{H}^F = \frac{1}{2} \int d\mathbf{r} (\varepsilon_0 \mathbf{E}^2(\mathbf{r}) + \mu_0 \mathbf{H}^2(\mathbf{r})), \quad (2)$$

where $\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r})$ and $\hat{\mathbf{H}}(\mathbf{r})$ are the electric and magnetic field operators, respectively. Inasmuch as the electromagnetic field can be defined through the

superposition of its modes, the representation in the basis of the corresponding Fock states is allowed:

$$\hat{H}^F = \sum_q \hat{H}_q^F, \quad (3)$$

where $\hat{H}_q^F|n_q\rangle = (n_q + 1/2)\hbar\omega_q|n_q\rangle$ with $|n_q\rangle$ being the corresponding Fock states. Here, the symbol q denotes the mode of electromagnetic field with the propagation wave vector $\mathbf{k}$ and the j -th polarization with $j = 1, 2$. A state $|n_q\rangle$ has the determined number of photons n , corresponding to the mode q .

The third item is the energy of interaction between the atoms and electromagnetic field, expressed by the standard dipole-field coupling:

$$\hat{H}^{AF} = - \sum_{i=1}^N \hat{\mathbf{d}}_i \cdot \hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}_i), \quad (4)$$

where $\hat{\mathbf{d}}_i$ is the dipole moment operator for i -th atom located at $\mathbf{r}_i$.

The definition

Let us to introduce the pure quantum state of the system as the following superposition:

$$|\Psi\rangle = \sum_{\{\}} C_{\{\}}(t) \prod_{i,j=1}^{N-2D} |i_j\rangle \prod_{d_l=1}^D |d_l\rangle \prod_q |n_q\rangle, \quad (5)$$

where $q \equiv (\mathbf{k}, j)$, and $\{\} \equiv (\{\varepsilon\}, \{\alpha\}, \{n_q\})$ with $\{\alpha\} = \{a, b\}$.

Introducing explicitly the Doppler effect into the atom-field coupling, we redefine the notation in (4) as follows:

$$\hat{H}^{AF} \equiv \sum_{i=1}^N F \hat{\mathbf{S}}_i \cdot \hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}_i), \quad (6)$$

where the notation F imposes special additional limitations on the coupled atomic and field states. This notation introduces the corrections in accordance with the laws of conservations (total momentum and energy conservation during photon scattering on a single atom) and the relativistic Doppler effect influencing the resulting absorption or emission frequencies. Therefore, in non-relativistic case, the following restrictions during the acts of photon absorption or emission take place:

$$\mathbf{p}_i + \hbar\mathbf{k} = \mathbf{p}'_i$$

$$\mathbf{p}_i + \hbar\mathbf{k} = \mathbf{p}'_i$$

$$\varepsilon_i + \hbar\omega_k = \varepsilon_i + \hbar\omega_0^{rel}(\mathbf{p}_i, \hat{\mathbf{k}}) \quad (7)$$

$$\omega_0^{rel} \equiv \left(1 + \frac{\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{p}_i}{M_i c} \right) \omega_0.$$

Here, $\frac{\hat{k} \cdot \mathbf{p}_i}{M_i c} = -\frac{v_i}{c} \cos \theta_s$, $\hat{k} = \frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|}$ is the unit vector

directed along the wave vector $\mathbf{k}$. θ_s is the angle between the atomic velocity of i -th atom v_i and the direction to the source (here imaginable) of the photon at the point of absorption. c equals the speed of light in vacuum.

In the case of the Hamiltonian independent of time, the state function (5) can formally be represented in the following form:

$$|\Psi\rangle(t) = e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H} t} |\Psi\rangle(0), \quad (8)$$

where $|\Psi\rangle(0)$ is the value of the state function at the initial moment of time.

Then, in accordance with the accepted model of device counting photons (see, for example, [10]), the local absorption coefficient is defined in the following manner:

$$\alpha_{tot} \approx \frac{\delta}{\delta z} \ln \sum_{\Psi} \langle \Psi | \left(\hat{I} + \frac{i}{\hbar} \tau [\hat{H}, \hat{I}] \right) \hat{\rho}_{\Psi} | \Psi \rangle, \quad (9)$$

where $\hat{I} = \hat{E}_+ \hat{E}_-$ with $\hat{E}_+ = \sum_q \hat{e}_q E_q e^{-ik_q \cdot \mathbf{r}} a_q^\dagger$ and

$\hat{E}_- = \sum_{q'} \hat{e}_{q'} E_{q'} e^{ik_{q'} \cdot \mathbf{r}} a_{q'}$. $\hat{\rho}_{\Psi}$ is the statistical

distribution over the pure system states $|\Psi\rangle$ at the initial moment of time $t = 0$. The optical pathway inside the sample is assumed to be parallel to the Z-axis. The field “amplitude” is given

by $E_q = \left(\frac{\hbar v_q}{2 \epsilon_0 V_{el}} \right)^{1/2}$. The phase factor in $\hat{E}_q$ is

neglected for simplicity. The sum of $\hat{E}_+$ and $\hat{E}_-$ represents the electric field operator.

Commutators

For an evaluation of the expression (9) we need to commutation relation between the intensity operator and the model Hamiltonian.

For example, neglecting $[\hat{H}^A, \hat{I}]$ in (9), we can be interested in the calculation of such commutators as

$$[\hat{H}, \hat{I}] \rightarrow [\hat{H}^F, \hat{I}] + [\hat{H}^{AF}, \hat{I}]. \quad (10)$$

Based on the commutation relations for the operators of bosonic field $[a_q, a_{q'}^\dagger] = \delta_{qq'}$, we obtain the following expression:

$$[\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}_i), \hat{I}(\mathbf{r})] = \sum_{q, \bar{q}} \hat{e}_q E_q^2 (\hat{e}_q \cdot \hat{e}_{\bar{q}}) E_{\bar{q}} \times \left(e^{i(\mathbf{k}_{\bar{q}} - \mathbf{k}_q) \cdot \mathbf{r}} e^{ik_q \cdot \mathbf{r}_i} a_{\bar{q}} - e^{-i(\mathbf{k}_{\bar{q}} - \mathbf{k}_q) \cdot \mathbf{r}} e^{-ik_q \cdot \mathbf{r}_i} a_q^\dagger \right). \quad (11)$$

Accordingly,

$$[\hat{H}^{AF}, \hat{I}] = \sum_{i=1}^N F \hat{\mathbf{S}}_i \cdot \sum_{q, \bar{q}} \hat{e}_q E_q^2 (\hat{e}_q \cdot \hat{e}_{\bar{q}}) E_{\bar{q}} \times \left(e^{i(\mathbf{k}_{\bar{q}} - \mathbf{k}_q) \cdot \mathbf{r}} e^{ik_q \cdot \mathbf{r}_i} a_{\bar{q}} - e^{-i(\mathbf{k}_{\bar{q}} - \mathbf{k}_q) \cdot \mathbf{r}} e^{ik_q \cdot \mathbf{r}_i} a_q^\dagger \right). \quad (12)$$

Also, applying the commutation relations between the pairs of bosonic operators, we find that

$$[\hat{H}^F, \hat{I}] = \sum_{q, q'} \hbar \omega_q (\hat{e}_q \cdot \hat{e}_{q'}) E_q E_{q'} \times \quad (13)$$

$$a_q^\dagger a_{q'} \left[e^{i(\mathbf{k}_{q'} - \mathbf{k}_q) \cdot \mathbf{r}} - e^{-i(\mathbf{k}_{q'} - \mathbf{k}_q) \cdot \mathbf{r}} \right].$$

It can be noted that (13) is vanishing, for example, in the case of initially nearly symmetric distribution over the frequencies.

Interesting then, that the following so-called second order commutation relation can be non-vanishing and has to be taken into account in the

next term, proportional to $\left(\frac{i}{\hbar} \tau \right)^2$ in the series under the round parenthesis in (9):

$$[\hat{H}^F, [\hat{H}^{AF}, \hat{I}]] = - \sum_{q, \bar{q}} \hbar \omega_{\bar{q}} (F \hat{\mathbf{S}}_i \cdot \hat{e}_{\bar{q}}) (\hat{e}_q \cdot \hat{e}_{\bar{q}}) \times \quad (14)$$

$$E_q^2 E_{\bar{q}} \left\{ e^{i(\mathbf{k}_{\bar{q}} - \mathbf{k}_q) \cdot \mathbf{r}} e^{ik_q \cdot \mathbf{r}_i} a_{\bar{q}} + e^{-i(\mathbf{k}_{\bar{q}} - \mathbf{k}_q) \cdot \mathbf{r}} e^{-ik_q \cdot \mathbf{r}_i} a_q^\dagger \right\}.$$

Another interesting commutator that can give relatively significant contribution is the following:

$$[\hat{H}^{AF}, [\hat{H}^{AF}, \hat{I}]] = - \sum_{i, j=1}^{N, N} \sum_{q, \bar{q}} (F \hat{\mathbf{S}}_i \cdot \hat{e}_{\bar{q}}) \times$$

$$(F \hat{\mathbf{S}}_j \cdot \hat{e}_q) (\hat{e}_q \cdot \hat{e}_{\bar{q}}) E_q^2 E_{\bar{q}}^2 \times \left\{ e^{i(\mathbf{k}_{\bar{q}} - \mathbf{k}_q) \cdot \mathbf{r}} e^{ik_q \cdot \mathbf{r}_i} e^{-ik_q \cdot \mathbf{r}_j} + e^{-i(\mathbf{k}_{\bar{q}} - \mathbf{k}_q) \cdot \mathbf{r}} e^{-ik_q \cdot \mathbf{r}_i} e^{ik_q \cdot \mathbf{r}_j} \right\}. \quad (15)$$

The commutator $[\hat{H}^A, \hat{I}]$ can also be found, for example, in the coordinate representation for the atomic state functions $|i\rangle$. For this, it is necessary to know the commutator $[\nabla_i^2, e^{ik_q \cdot \mathbf{r}_i}]$ that can be easily calculated in the basis. Here, ∇_i is the nabla operator in the coordinates of i -th atom.

Conclusions

Thus, in this paper we examined the example of the quantum optical formulation of the absorption coefficient.

The local absorption coefficient is defined as a derivative of logarithm of intensity with respect to the distance in the vicinity of a given spatial point and a moment of time. The intensity is represented by the averaged normal product of creation and annihilation operators of the certain electromagnetic field states. The averaging is performed over all possible pure quantum (discrete and continuous)

states of the system of the field and atoms. The average quantity at an arbitrary moment of time is determined by the state of the system at the initial moment of time through the corresponding Schrödinger equation in the introduced approximation.

The derived expression for the absorption coefficient is based on the commutation relation between the operators of electric field and intensity. Therefore, the quantization of electromagnetic field in the optical region can play a fundamental role in defining the absorption/emission properties of a matter.

Список використаних джерел

1. Ліндгольм І. Залежність ширини спектральних ліній від тиску / І. Ліндгольм. // Ark. Mat. Astron. Fys. A. – 1945. – №32. – Р. 17–18.
2. Лекс М. Квантовані шуми. IV. Квантова теорія джерел шуму / М. Лекс. // Phys. Rev. – 1966. – №145. – Р. 110–129.
3. Бен-Ріувен А. Інтерпретація розширення спектральних ліній. Аналогія з класичним осцилятором / А. Бен-Ріувен. // Adv. Atom. Mol. Phys. – 1969. – №5. – Р. 201–235.
4. Воробйов Ф. А. Випромінювальні та поглинальні спектри у сильному полі. Ефект віддачі / Ф. А. Воробйов, Р. І. Соколовскій. // Журнал прикладної спектроскопії. – 1970. – №13. – С. 906–913.
5. Лемберг Р. Випромінювання N-атомною системою. I. Загальний формалізм. / Р. Лемберг. // Phys. Rev. A. – 1970. – №2. – Р. 883–888.
6. Сандо К. М. Форми спектральних ліній у лазерному полі при різних тисках / К. М. Сандо, Ш. Чи. // Adv. At. Mol. Phys. – 1989. – №25. – Р. 133–162.
7. Берман П. Р. Порівняння збудженого віддачею резонансу та колективної атомної віддачі / П. Р. Берман. // Phys. Rev. A. – 1999. – №59. – Р. 585–596.
8. Квантовий ефект віддачі для двох нетотожних атомів на скінченних проміжках часу / Ф.Ластра, С. Валентович, М. Орзаг, М. Гернандес. // Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics. – 2009. – №42. – Р. 065504–065505.
9. Кооперативний ефект та безлад: масштабний аналіз спектру для ефективного атомного гамільтоніана / Л.Беландо, А. Геро, І. Акерманс, Р. Кайзер. // Phys. Rev. A.. – 2014. – №90. – Р. 063822–063823.
10. Скалі М. Квантова оптика / М. Скалі, С. Зубайрі. – Cambridge: Cambridge University Press, 1997. – 114 с.

References

1. LINDHOLM, E. (1945) Pressure broadening of spectral lines. Ark. Mat. Astron. Fys. A. 32. p.17-18.
2. LAX, M. (1966) Quantum Noise. IV. Quantum Theory of Noise Sources. Phys. Rev. 145(1). p.110-129.
3. BEN-REUVEN, A. (1969) The meaning of collisional broadening of spectral lines: The classical oscillator analog. Adv. Atom. Mol. Phys. 5. p. 201-235.
4. VOROB'EV, F. A. and SOKOLOVSKII, R. I. (1970) Emission and absorption spectra in a strong field, and recoil effect. Journal of Applied Spectroscopy. 13(1). p. 906-913.
5. LEHMBERG, R. H. (1970) Radiation from an N-Atom System. I. General Formalism. Phys. Rev. A. 2(3). p. 883-888.
6. SANDO, K. M., CHU, SHI-I. (1989) Pressure broadening and laser-induced spectral line shapes. Adv. At. Mol. Phys. 25. p.133-162.
7. BERMAN, P. R. (1999) Comparison of recoil-induced resonances and the collective atomic recoil. Phys. Rev. A. 59(1). p. 585-596.
8. LASTRA, F. et. al. (2009) Quantum recoil effects in finite-time disentanglement of two distinguishable atoms. Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics. 42(6). p. 065504-065505.
9. BELLANDO, L. et. al. (2014) Cooperative effects and disorder: A scaling analysis of the spectrum of the effective atomic Hamiltonian. Phys. Rev. A. 90(6). p. 063822-063823.
10. SCULLY, M. O. and ZUBAIRY, S. (1997) Quantum Optics. Cambridge, England: Cambridge University Press.

Надійшла до редколегії 09.03.16

Підписано до друку _____. Формат _____. Друк. офс.
Папір офс. № _____. Друк. арк. _____. Тираж _____. Зам. _____.
Друкарня _____.