

**КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА**

ВІСНИК

**КИЇВСЬКОГО НАЦІОНАЛЬНОГО
УНІВЕРСИТЕТУ
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА**

СЕРІЯ ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНІ НАУКИ

СПЕЦВИПУСК, 2015

З 1991 року серії вісників Київського університету "Математика і механіка", "Фізика", "Моделирование и оптимизация сложных систем" реорганізовано у "Вісник Київського університету. Серія: фізико-математичні науки". У віснику містяться результати нових досліджень у різних галузях математики, інформатики, механіки, фізики та радіофізики для наукових працівників, викладачів, аспірантів, інженерів і студентів. Друкується за рекомендаціями вчених рад фізичного, радіофізичного, механіко-математичного факультетів та факультету кібернетики.

Журнал «Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія: фізико-математичні науки» включено до переліку фахових видань ВАК України та реферується в реферативному журналі та базах даних "ВИНИТИ", Росія, Москва

Відповідальний за видання Хусаїнов Д. Я.

ВІДПОВІДАЛЬНИЙ РЕДАКТОР	А.В. Анісімов, чл.-кор. НАН України, д-р фіз.-мат. наук, проф.
РЕДАКЦІЙНА КОЛЕГІЯ	Д.Я. Хусаїнов (заст. відп. ред.), д-р фіз.-мат. наук, проф. (Київ, Україна); Аокі Тору, д-р філос., проф. (Шідзуока, Японія); В.В. Акіменко, д-р техн. наук, проф. (Київ, Україна); І.О. Анісімов, д-р фіз.-мат. наук, проф. (Київ, Україна); Мілада Бартлова, д-р природн. наук, доц. (Брно, Чеська Республіка); Д.Б. Буй, д-р фіз.-мат. наук, проф. (Київ, Україна); Л.А. Булавін, акад. НАН України, д-р фіз.-мат. наук, проф. (Київ, Україна); О.Ф. Волошин, д-р техн. наук, проф. (Київ, Україна); Ф.Г. Гаращенко, д-р техн. наук, проф. (Київ, Україна); Сергій Горлач, канд. фіз.-мат. наук, проф. (Мюнстер, Німеччина); Штефан Гудак, д-р інж., проф., (Кошице, Словачька Республіка); С.М. Єжов, д-р фіз.-мат. наук, проф. (Київ, Україна); Я.О. Жук, д-р фіз.-мат. наук, проф. (Київ, Україна); В.А. Заславський, д-р техн. наук, доц. (Київ, Україна); В.В. Кириченко, д-р фіз.-мат. наук, проф. (Київ, Україна); Ю.В. Козаченко, д-р фіз.-мат. наук, проф. (Київ, Україна); В.І. Кудін, д-р техн. наук, ст. наук. співроб. (Київ, Україна); М.В. Кухтарев, д-р фіз.-мат. наук, проф. (Хантсвіл, США); В.А. Львов, д-р фіз.-мат. наук, проф. (Київ, Україна); В.А. Макара, чл.-кор. НАН України, д-р фіз.-мат. наук, проф. (Київ, Україна); М.В. Макарець, д-р фіз.-мат. наук, проф. (Київ, Україна); Артурс Медвідс, канд. фіз.-мат. наук, проф. (Рига, Латвія); М.О. Перестюк, акад. НАН України, д-р фіз.-мат. наук, проф. (Київ, Україна); С.Д. Погорілий, д-р техн. наук, проф. (Київ, Україна); Миклош Ронто, д-р фіз.-мат. наук, проф., (Мішкольц, Угорщина); С.М. Савенков, д-р фіз.-мат. наук, доц. (Київ, Україна); В.А. Скришевський, д-р фіз.-мат. наук, проф. (Київ, Україна); С.І. Трофімчук, д-р фіз.-мат. наук, проф. (Талька, Чилі)
Редакційний відділ	Т.Х. Анісімова (відп. секр.); О.О. Безущак, bezusch@univ.kiev.ua; В.В. Стукаленко, stu@univ.kiev.ua; Т.В. Родіонова, rodtv@univ.kiev.ua; Н.К. Хмелюк, khmeluk@univ.kiev.ua; Л.М. Сільвейструк (техн. ред.), slm-klm@ukr.net
Адреса редколегії	03680, Київ-680, просп. Глушкова, 4-д; факультет кібернетики, ☎ (38044) 259 01 49
Зареєстровано	Міністерством юстиції України. Свідоцтво про державну реєстрацію КВ № 16299-4771Р від 11.12.09
Засновник та видавець	Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет". Свідоцтво внесено до Державного реєстру ДК № 1103 від 31.10.02
Адреса видавця	01601, Київ-601, 6-р Т. Шевченка, 14, кімн. 43 ☎ (38044) 239 31 72, 239 32 22; факс 239 31 28

ЗМІСТ

АЛГЕБРА, ГЕОМЕТРІЯ ТА ТЕОРІЯ ІМОВІРНОСТЕЙ

Хізанов В. Г. Порівняння оцінок функцій розподілу за цензурованими спостереженнями у моделі сумішей зі змінними концентраціями	11
--	----

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ, МАТЕМАТИЧНА ФІЗИКА ТА МЕХАНІКА

<u>Андрій Феофанович Улітко</u>	19
Альфавіцька С. О., Николишин М. М., Опанасович В. К., Слободян М. С. Згин пластини з наскрізною прямолінійною тріщиною за наявності пластичних зон у її вершинах з урахуванням контакту її берегів та зміцнення матеріалу	21
Балабанов В. О. Кізілова Н. М. Математичне моделювання артеріальних систем як бінарних дерев, які заповнюють об'єм простору	27
Бобильова Т. М. Рівняння для визначення власних частот осесиметричних коливань порожнистої пружної кулі	33
Борисейко О. В., Улітко І. А., Котюк Д. М. Інтерпретаційні моделі коріолісової дисперсії пружних хвиль в системі гармонічного осцилятора з двома ступенями вільності	37
Вайсфельд Н. Д., Журавльова З. Ю. Задача незв'язної термопружності для півсмуги	43
Васильєва Л. Я. Напружено-деформований стан півпростору при дії комбінованого термомеханічного імпульсного навантаження з врахуванням мікроструктурних перетворень в матеріалі	47
Войтко М. В., Кутлик М. М., Куриляк Д. Б. Резонансне розсіювання sh-хвилі скінченною тріщиною у пружному шарі	51
Гачкевич О. Р., Козакевич Т. В., Гаск М. Залишкові фазовий і напружений стани сталевोї пластини, зумовлені рухомим розподіленим джерелом тепла і стаціонарним локальним температурним полем	55
Гачкевич О. Р., Терлецький Р. Ф., Турій О. П. Моделювання термомеханічної поведінки опромінюваних шаруватих тіл	59
Говоруха В. Б., Шевельова А. Є. Аналіз тріщини між двома п'єзоелектричними матеріалами в полі стискального напруження та зосереджених сил	65
Годес А. Ю., Лобода В. В. Контактна задача для дугової тріщини в електрострикційному матеріалі	69
Грінченко В. Т., Вовк І. В., Мадипура В. Т., Троценко Я. П. Дифракція хвиль на округленому жорсткому клині	73
Жук Я. О. Визначення розміру зони теплового руйнування шаруватих елементів конструкцій з п'єзоактивними шарами при гармонічному навантаженні	77
Жук О. П., Жук Я. О. Про характер дії радіаційної сили на сферичну краплю рідини в акустичному полі	81
Зражевський Г. М., Зражевська В. Ф. Одновимірна динамічна модель крихкого руйнування при поширенні пружної хвилі	87
Індіамінов Р. Ш. Магнітопружне деформування струмонесучої конічної оболонки з врахуванням ортотропії провідних властивостей	93
Калиняк Б. М. Характеристики матеріалів, які забезпечують нульові радіальні термонапруження у неоднорідному довгому порожнистому циліндрі	97
Карнаухов В. Г., Козлов В. І., Карнаухова Т. В. Вимушені резонансні коливання і дисипативний розігрів фізично нелінійних непружних пластин і оболонок з п'єзоелектричними сенсорами та актуаторами	101
Кашталян М., Піат Р., Гузь І. Моделювання руйнування метало-керамічних композитів з ламелярною мікроструктурою	107
Кіпніс Л. А., Дудик М. В., Дякон В. М. Особливості структури пластичної зони біля вершини міжфазної тріщини при переважаючих розтягуючих навантаженнях	111

Козачок О. П., Слободян Б. С., Мартиняк Р. М. Взаємодія пружного тіла та жорсткої основи з регулярною системою заповнених ідеальним газом прямокутних виїмок	115
Колодій Ю. О., Турчин І. М., Хома В. В. Змішана нестационарна задача теплопровідності для півбесмежної плити з двостороннім покриттям	119
Константинов О. В., Семенова І. Ю. Вплив узагальненої дисипації та сил поверхневого натягу на нелінійну динаміку системи «резервуар – рідина з вільною поверхнею»	125
Крамаренко Ю. О., Лимарченко О. С., Семенович К. О. Роль фактора сумісності руху рідини з вільною поверхнею при різних способах закріплення резервуару	129
Кривий О. Ф., Морозов Ю. О. Кругова міжфазна тріщина в кусково-однорідному трансверсально-ізотропному просторі під дією теплового потоку	133
Кундрат М. М., Заблотська Ю. В. Гранична рівновага та локальне руйнування пластини з двома накладками однакової довжини	139
Куриляк Д. Б., Лисечко В. О. Розсіювання плоскої акустичної хвилі на жорстких зрізаному та скінченному конусах	143
Лебедева І. В., Горошко О. О. Уловлювання та гальмування балістичних тіл пружним тросом	149
Лібов Д. Ю. До розв'язання задачі про неосесиметричні коливання пружного циліндра скінченної довжини	155
Лимарченко О. С., Губська В. В. Задача про нелінійні коливання резервуару у формі усіченого конуса, частково заповненого рідиною під дією імпульсного навантаження	161
Михаськів В. В., Кирилова О. І. Плоска динамічна задача для циліндричного тіла довільного перерізу з тонким жорстким включенням	167
Можаровський В. В., Кузьменков Д. С. Реалізація розрахунку напружень багатопарових труб	173
Муцій Р. С., Мельник Н. Б. Термонапружений стан і несуча здатність порожнистої біметалевої кулі за дії електромагнітного імпульсу	179
Оксенчук Н. Д., Сенченков І. К., Якименко С. Н. Вплив тривалості теплового імпульсу на глибину мікроструктурних перетворень	185
Олійник В. Н., Про дисперсію хвиль деяких типів у легеневої паренхімі	189
Опанасович В. К. Двосторонній згин ізотропної пластини з круговим отвором і пружною шайбою за повного гладкого лінійчастого контакту складових	193
Опанасович В. К., Слободян М. С., Звізлю І. С. Двовісний згин пластини з круговим отвором та двома співвісними крайовими радіальними тріщинами, береги яких контактують по області сталої ширини	197
Петрищев О. М., Михеєва А. М. Розподіл енергії за типами хвиль у задачі збудження з поверхні пружного шару	203
Попов В. Г., Крутильні коливання пружного циліндра, зчепленого із пружним півпростором	207
Попович В. С., Вовк О. М., Термопружний стан контактуючих термочутливих півпросторів з тепловідленнями впродовж певного часу на межі дотику	213
Приходько Д. Ф., Кір'єв А. М., Краснопольська Т. С. Стабілізація закритичного стрижня при вертикальній вібрації	219
Процеров Ю. С. Осесиметрична задача кручення багатопарового циліндра скінченної довжини з круговою тріщиною	223
П'ятецька О. В. Знаходження КЕМЗ при коливаннях п'єзоелектричних тіл з врахуванням втрат у матеріалі	229
Сальнікова А. М. Дослідження нелінійних коливань пружного троса	233
Семенович К. О. Внутрішній резонанс в системі резервуар–рідина на маятниковому підвісі	239
Середницька Х. І., Мартиняк Р. М. Міжфазна теплопроникна щільна змінної висоти у біматеріалі з нульовим параметром Дандерса	243
Сінчило С. В., Савельєва К. В., Симчук Я. В. Комп'ютерне моделювання квадратично нелінійної гіперпружної циліндричної хвилі	247
Сулим Г. Т., Оліярник Н. Р., Піскозуб Й. З., Пастернак Я. М. Поздовжній зсув біматеріального бруса з міжфазною тріщиною з урахуванням фрикційного проковзування	251
Сулим Г. Т., Онишкевич В. М. Термопружний контакт півплощини з прямокутним жорстким штампом у разі подачі тепла на його зовнішню поверхню	255
Токовий Ю. В. Розв'язування тривимірних задач теплопровідності, пружності та термопружності для неперервно-неоднорідних тіл	261
Федорченко Л. М. Вплив фізичних властивостей матеріалу на напружений стан ортотропної сферичної оболонки з ортотропною електропровідністю	267

Фесенко Г. О. Контактна задача про втискування кругового штампa у півнескінченний пружний шар	271
Філіппова О. М., Кізілова Н. М. Дослідження руху в'язкої рідини у в'язкопружній камері з біоактивного матеріалу	277
Хотенко О. О., Хотенко І. М. Аналіз нелінійного рівняння Релея	283
Черевко В. О., Кізілова Н. М. Моделювання кінетики агрегації еритроцитів крові при проведенні тестів на алергію	287
Чумак К. А. Термопружний контакт тіл з хвилястими поверхнями за наявності теплопровідного середовища в міжконтактних зазорах	293
Шакері Мобаракє П., Грінченко В. Т., Зражевський Г. М. Чисельно-аналітичний метод розв'язання крайової задачі еліптичного типу для пластини у формі паралелограма	297
Яцків О. І., Швець Р. М. Визначення теплофізичних властивостей тонкого приповерхневого шару циліндра за відомими переміщеннями поверхні	305

КОМП'ЮТЕРНІ НАУКИ ТА ІНФОРМАТИКА

Волошин О. Ф., Лавєр В. О. Нечіткі узагальнення методів розподілу у випадку нечітко заданих витрат і запасів грошей агентів	311
---	-----

РАДІОФІЗИКА

Іванчук А. В., Кононов М. В. Вплив кількості інформації у вхідних даних на середнє значення бінарних синаптичних з'єднань в нейронній мережі з локальною обробкою інформації	317
--	-----

СУЧАСНА ФІЗИКА

Макарець М. В., Прядко Д. І. Моделювання утворення і росту тріщин у нанокристалах кварцу методом молекулярної динаміки	325
--	-----

CONTENTS

ALGEBRA, GEOMETRY AND PROBABILITY THEORY

Khizanov V. H. Comparison of CDF estimators by censored observations in mixture model with varying concentrations	11
---	----

DIFFERENTIAL EQUATIONS, MATHEMATICAL PHYSICS AND MECHANICS

<u>Andriy Feofanovych Ulitko</u>	19
Alfavitska S. O., Nykolyshyn M. M., Opanasovich V. K., Slobodyan M. S. Bend of plate with through a lineal crack in the presence of the plastic zones in its tops taking into account contact of its banks and strengthening of material	21
Balabanov V. O., Kizilova N. M. The mathematical modeling of arterial systems as space-filling binary trees	27
Bobyleva T. N. The equation for determining the natural frequencies of axisymmetric oscillations of a hollow elastic sphere	33
Boriseiko O. V., Ulitko I. A., Kotuyck D. M. Interpretation models of Coriolis dispersion of elastic waves in the system of harmonic oscillator with two degrees of freedom	37
Vaysfel'd N. D., Zhuravlova Z. Yu. The problem of disconnected thermoelasticity for a semi-strip	43
Vasiljeva L. Ya. The stress-strain state of a half-space under a combined thermomechanical pulse loading with an account of microstructural transformations in a material	47
Voytko M. V., Kutlyk M. M., Kuryliak D. B. A resonance scattering of SH-wave by the finite crack in an elastic layer	51
Hachkevych A. R., Kozakevych T. V., Gajek M. Residual phase and stress distributions of a steel plate subjected to a moving distributed heat source and a local stationary temperature field	55
Hachkevych A. R., Terlet'sky R. F., Turii O. P. The modeling of thermomechanical behavior of irradiated layered solids	59
Govorukha V. B., Sheveleva A. E. An analysis of the crack between two piezoelectric materials in the field of compressive stress and concentrated forces	65
Hodes A. Yu., Loboda V. V. The contact problem for an arc crack in an electrostrictive material	69
Grinchenko V. T., Vovk I. V., Matsypura V. T., Trotsenko Y. P. A diffraction of waves on a rigid rounded wedge	73
Zhuk Ya. A. A determination of thermal fracture zone size in layered structural elements containing piezoactive layers under the harmonic loading	77
Zhuk O. P., Zhuk Ya. A. On the character of radiation force action on an spherical liquid drop placed in an acoustic field	81
Zrazhevsky G. M., Zrazhevskaya V. F. A one-dimensional dynamic model of brittle fracture while the elastic wave propagating	87
Indiaminov R. Sh. A magnetoelastic deformation of a current-carrying conical shell with the orthotropy of conductive properties	93
Kalynyak B. M. Material characteristics ensuring zero radial thermal stresses in the inhomogeneous long hollow cylinder	97
Karnaukhov V. G., Kozlov V. I., Karnaukhova T. V. Forced resonant vibrations and dissipative heating of physical nonlinear inelastic plates and shells with the piezoelectric sensors and actuators	101
Kashtalyan M., Piat R., Guz I. Damage modelling of metal/ceramic composites with lamellar microstructure	107
Kipnis L. A., Dudyk M. V., Diakon V. M. Peculiarities of the structure of the plastic zone near the tip of an interfacial crack at the prevailing tensile loading	111
Kozachok O. P., Slobodyan B. S., Martynyak R. M. An interaction between an elastic body and a rigid base having a regular array of rectangular grooves filled with an ideal gas	115
Kolodij Yu. O., Turchyn I. M., Khoma V. V. The mixed unsteady heat conduction problem for a half-infinite plates with coatings	119

Konstantinov O. V., Semenova I. Yu. The influence of the generalized dissipation forces and surface tension on the nonlinear dynamics of the system «reservoir–liquid with a free surface»	125
Kramarenko Yu. O., Limarchenko O. S., Semenovych K. O. Role of combined character of motion of free-surfaced liquid for different ways of fixing of reservoir	129
Kryvyi O. F., Morozov Yu. O. A circular interfacial crack in a piecewise-homogeneous transversely isotropic space under the influence of a heat flow	133
Kundrat M. M., Zablotska Yu. V. The limiting equilibrium and local fracture of the plate with two reinforcements of an equal length	139
Kuryliak D. B., Lysechko V. O. A scattering of a plane acoustic wave by rigid semi-infinite and finite cones	143
Lebedyeva I. V., Goroshko O. O. The catching and braking of ballistic bodies by an elastic rope	149
Libov D. Yu. On a solution to the problem about non-axisymmetric vibrations of an elastic cylinder of finite length	155
Limarchenko O. S., Gubska V. V. Problem of oscillations of tank of truncated conic shape, partially filled by liquid under action of impulse load	161
Mykhas'kiv V. V., Kyrylova O. I. The plane dynamic problem for a cylindrical solid of arbitrary cross-section with a thin rigid inclusion	167
Mazharovsky V. V., Kuzmenkov D. S. The realization of calculation of stresses for multilayer pipes	173
Musij R. S., Melnyk N. B. Thermostressed state and bearing capacity of hollow bimetallic sphere under electromagnetic pulse	179
Oksenchuk N. D., Senchenkov I. K., Yakimenko S. N. An influence of a thermal impulse duration on a depth of microstructural transformations	185
Oliynik V. N. On a dispersion of some types of waves in a pulmonary parenchyma	189
Opanasovich V. K. Biaxial bending of the isotropic plate with a circular hole and a elastically disk in presence of a full smooth linear contact of components	193
Opanasovich V. K., Slobodyan M. S., Zvizlo I. S. The biaxial bending of the plate with a circular hole and two edge radial cracks with the width of the contact area it's shores	197
Petryshchev O. M., Mykheieva A. N. An energy distribution by type of waves in the case of excitation from the surface of an elastic layer	203
Popov V. G. A torsional oscillation of an elastic cylinder coupled with an elastic half-space	207
Popovych V. S., Vovk O. M. A thermoelastic state of contact thermosensitive half-spaces with a heat release for some time on the contact boundary	213
Prykhodko D. F., Kiriev A. M., Krasnopol'skaya T. S. A stabilization of a supercritical bar under the vertical vibration	219
Protserov Yu. S. Axisymmetric torsion problem for the finite length multilayered cylinder with the circular crack	223
Pyatetska O. V. An evaluation of the electromechanical coupling coefficient by the vibrations of piezoelectric solids accounting losses of a material	229
Salnikova A. M. The investigation of nonlinear oscillations of an elastic rope	233
Semenovych K. O. Internal resonance in the system reservoir–liquid on pendulum suspension	239
Serednytska Kh. I., Martynyak R. M. The interface heat-permeable crack having variable height in the biomaterial, where Dundurs constant is zero	243
Sinchilo S. V., Savelieva K. V., Simchyk Y. V. Computer modelling of square nonlinear hyperelastic cylindrical wave	247
Sulym H. T., Oliarnyk N. R., Piskozub Y. Z., Pasternak Ia. M. A longitudinal shear of the bimaterial beam with an interfacial crack with taking into account the frictional slippage	251
Sulym G. T., Onyshkevych V. M. The thermoelastic contact of a half-plane with the rectangular rigid punch in the case of heat providing on its external surface	255
Tokovy Yu. V. The solution to three-dimensional heat-conduction, elasticity, and thermoelasticity problems for continuously-inhomogeneous solids	261
Fedorchenko L. N. An influence of physical properties of the material on a stress state of an orthotropic spherical shell with an orthotropic electroconductivity	267
Fesenko A. A. The contact problem for a circular stamp penetrating into an elastic semi-infinite layer	271
Philippova O. M., Kizilova N. M. An investigation of viscous fluid flow in a viscoelastic chamber from a bioactive material	277
Khotenko O. O., Khotenko I. M. An analysis of a nonlinear Rayleigh equation	283

Cherevko V. O., Kizilova N. M. The modeling of red blood cell aggregation during the test on an allergy	287
Chumak K. A. Thermoelastic contact between bodies with wavy surfaces in the presence of a heat-conducting medium in intercontact gaps	293
Shakeri Mobarakeh P., Grinchenko V. T., Zrazhevsky G. M. A numerical-analytical method for solving boundary value problem of elliptical type for a parallelogram shaped plate	297
Yatskiv O. I., Shvets R. M. Cylinder undersurface thin layer thermophysical parameters identification using surface displacements data	305

COMPUTER SCIENCES AND INFORMATIC

Voloshyn O. F., Laver V. O. Fuzzy generalizations of the fuzzy rationing methods in the case when the cost value and agents' initial money amounts are fuzzy numbers	311
--	-----

RADIOPHYSICS

Ivanchuk A. V., Kononov M. V. Quantity of information in the input data effect on the mean value of binary synaptic connections in a neural network with local information processing	317
---	-----

MODERN PHYSICS

Makarets M. V., Pryadko D. I. Molecular dynamics simulation of crack origination and propagation in quartz nanocrystals	325
---	-----

АЛГЕБРА, ГЕОМЕТРИЯ ТА ТЕОРИЯ ІМОВІРНОСТЕЙ

УДК 519.21

В. Г. Хізанов, аспірант

**Порівняння оцінок функцій розподілу
за цензурованими спостереженнями у
моделі сумішей зі змінними
концентраціями**

Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 03187, м. Київ, пр-т.
Глушкова, 4е,
e-mail: nmerci@mail.com

V. H. Khizanov, PhD Student

**Comparison of CDF estimators by
censored observations in mixture model
with varying concentrations**

Taras Shevchenko National University of
Kyiv, 03187, Kyiv, Glushkova st., 4e,
e-mail: nmerci@mail.com

У даній роботі розглядається застосування моделі сумішей зі змінними концентраціями у аналізі виживання. В цій моделі концентрації компонент (ймовірності перемішування) є відомими та змінюються від спостереження до спостереження. Така структура узагальнює звичайну модель сумішей, запропоновану Карлом Пірсоном. Робота присвячена порівнянню двох непараметричних оцінок функцій розподілу тривалості життя за цензурованою вибіркою: оцінка Рижова та продукт-інтеграл оцінка. Обидва підходи базуються на оцінці Каплана-Мейєра. Порівняння здійснюється за допомогою імітаційного моделювання.

Ключові слова: модель сумішей, аналіз виживання, оцінка Каплана-Мейєра.

This paper considers an application of mixture model with varying concentrations to survival analysis. In this model concentrations of each component (mixing probabilities) are known in advance and vary from observation to observation. This framework generalizes standard mixture model introduced by Karl Pearson. The paper is devoted to comparison of two nonparametric estimators for cumulative distribution function of survival time by a sample of censored observations: Ryzhov's estimator and product-integral estimator. Both these approaches are based on nonparametric Kaplan-Meier estimator. A common testing methodology for both estimators has been purposed. The comparison is performed by simulations. Both medium and large sample properties have been described.

Key Words: mixture model, survival analysis, Kaplan-Meier estimator.

1 Introduction

Problems of lifetime distribution estimation from randomly right-censored observations naturally appear in actuarial and medical statistics as well as in reliability analysis [5, 6]. In the case of independent identically distributed observations *Kaplan-Meier estimator* is usually used [3, 4]. Consider a model in which each observation is drawn from a finite mixture of distributions. If mixture probabilities (concentrations) vary through the observations, this model is called *mixture model with varying concentrations* [7, 8]. Two modifications of Kaplan-Meier estimator for this model were proposed: the first one by A. Ryzhov [1] and the second one by R. Maiboroda and V. Khizanov [2]. In this paper these two estimators (modifications) are compared via numerical simulations.

The problem statement is considered in Sec-

tion 2. Section 3 is devoted to description of both estimators. Section 4 shows results of simulations. Conclusions are presented in Section 5.

2 Problem statement

Let $\mathcal{O} = \{O_j\}_{j=1}^n$ be a sample from a mixture with varying concentrations. I.e. each subject O_j belongs to one of M population (mixture component). Let $\text{ind}(O_j) \in \{1, \dots, M\}$ be a number of component subject O_j belongs to. The true value of $\text{ind}(O_j)$ is not observed. Instead, one is provided with *mixing probabilities*

$$p_j^m = \mathbb{P}(\text{ind}(O_j) = m), m = 1, \dots, M \quad (1)$$

For each subject O_j there exists a positive characteristic $\xi_j = \xi(O_j)$ which is treated as a lifetime. Distribution of this characteristic depends on the component respective subject belongs to, i.e.:

$$F_m(A) = \mathbb{P}(\xi_j \in A \mid \text{ind}(O_j) = m) \quad (2)$$

Remark 1. Mixing probabilities (1) satisfy normal- and
ization property

$$\sum_{m=1}^M p_j^m = 1, j = 1, \dots, n \quad (3)$$

Consider the case in which *true data* $\mathcal{D} = \{\xi_j\}_{j=1}^n$ are randomly right-censored. That is there exists a sequence of positive i.i.d. random variables $\{c_j\}_{j=1}^n$, such that only *censored data* $\mathcal{D}^c = \{(\xi_j^*, \delta_j)\}_{j=1}^n$ are observed, where $\xi_j^* = \min(\xi_j, c_j)$ and $\delta_j = \mathbf{1}\{\xi_j \leq c_j\}$ for each $j = 1, \dots, n$. Here, c_j 's are called *censors*.

The problem is to estimate conditional distributions $\{F_m\}_{m=1}^M$ from censored data $\mathcal{D}^c$ and mixing probabilities $\mathbf{P} = (p_j^m)_{j,m=1}^{n,M}$. Vectors (ξ_j, c_j) are assumed to be independent as well as variables ξ_j and c_j are conditionally independent given $\text{ind}(O_j)$ for each $j = 1, \dots, n$. Two solutions for this problem are described in subsequent sections. For the sake of simplicity only cumulative distribution functions are considered.

2.1 Ryzhov estimator

Suppose a data set $\hat{\mathcal{D}}$ is divided into N subsamples $\{\mathcal{D}_i\}_{i=1}^N$ where each subsample $\mathcal{D}_i$ comprises i.i.d. random variables $\{\xi_j\}_{j=1}^{n_i}$ with the following CDF:

$$H_i(t) = \sum_{m=1}^M p_i^m F_m(t), i = 1, \dots, N, \quad (4)$$

where p_i^m and F_m are defined by (1) and (2) respectively. For each subsample $\mathcal{D}_i$ censors $\{c_j\}_{j=1}^{n_i}$ are i.i.d. random variables with some CDF G_i .

Thus $\{\xi_j^*\}_{j=1}^{n_i}$ and $\{\delta_j\}_{j=1}^{n_i}$ which are described in previous section together form censored sample $\hat{\mathcal{D}}_i^c$.

To estimate conditional distributions $\{F_m\}_{m=1}^M$ in this setting Ryzhov's estimator can be applied [1]. It is defined in two steps: first one should estimate each H_i by applying Kaplan-Meier estimator to each subsample $\hat{\mathcal{D}}_i^c$, and then use these estimations for deriving $\hat{F}_m$. Suppose that $\{\xi_j^*\}_{j=1}^{n_i}$ in each $\hat{\mathcal{D}}_i^c$ are sorted in non-decreasing order as well as each corresponding δ_j is rearranged following ξ_j^* -th order. Then Ryzhov's estimator takes the form:

$$\hat{H}_i^{\text{KM}}(t) = 1 - \prod_{j:\xi_j^* \leq t} \left(1 - \frac{\delta_j}{n_i - j + 1}\right) \quad (5)$$

$$\hat{F}_m^{\text{R}}(t) = \sum_{i=1}^N a_i^m \hat{H}_i^{\text{KM}}(t) \quad (6)$$

Here coefficients a_i^m are determined by the mi -th element of a matrix

$$(\mathbf{P}^\top \hat{\Sigma}^{-1} \mathbf{P})^{-1} \mathbf{P}^\top \hat{\Sigma}^{-1}, \quad (7)$$

where $\mathbf{P} = (p_i^m)_{i,m=1}^{N,M}$ is a mixing probability matrix and matrix $\hat{\Sigma} = \text{diag}(\hat{\sigma}_1^2(t), \dots, \hat{\sigma}_N^2(t))$ is a diagonal matrix which contains estimations of asymptotic variances of Kaplan-Meier estimator, i.e. $\hat{\sigma}_i^2(t) = \mathbb{V}[\hat{H}_i^{\text{KM}}(t)]$, $i = 1, \dots, N$. Since each $\hat{\sigma}_i^2(t)$ depends on unknown distributions $H_1(t), \dots, H_N(t)$ one can use Greenwood's formula in order to estimate it:

$$\hat{\sigma}_i^2(t) = (1 - \hat{H}_i^{\text{KM}}(t))^2 \sum_{j:\xi_j^* \leq t} \frac{\delta_j}{(n_i - j)(n_i - j + 1)} \quad (8)$$

Theorem 1 (Ryzhov, [1]). *Suppose there exists $b_i > 0$ such that $\frac{n_i}{n} \rightarrow b_i, n_i \rightarrow \infty$, where $n = n_1 + \dots + n_N$ for all $i = 1, \dots, N$ and mixture probability matrix $\mathbf{P}$ has a full column rank. Then $\hat{F}_m^{\text{R}}$ defined by (6) is uniformly consistent and asymptotically normal estimator of F_m for each $m = 1, \dots, M$.*

2.2 Product-integral estimator

Unlike Ryzhov's estimator an estimator proposed in [2] does not require dividing censored data into subsamples. A distribution of censors in this case depends on the component to which the subject belongs, i.e.

$$G_m(A) = \mathbb{P}(c_j \in A \mid \text{ind}(O_j) = m) \quad (9)$$

This estimator, say *product-integral estimator*, takes the form:

$$\hat{F}_m^{\text{PI}}(t) = 1 - \prod_{j:\xi_j^* \leq t} \left(1 - \frac{a_j^m \delta_j}{1 - \sum_{i:\xi_i^* < t} a_i^m}\right) \quad (10)$$

where coefficients a_j^m are equal to mj -th element of a matrix

$$(\mathbf{P}^\top \mathbf{P})^{-1} \mathbf{P}^\top \quad (11)$$

with a mixing probability matrix $\mathbf{P} = (p_j^m)_{j,m=1}^{n,M}$.

Remark 2. Note that this matrix differs from one in Ryzhov's estimator, i.e. it is $n \times M$ rather than $N \times M$.

Theorem 2. Let mixture probability matrix $\mathbf{P}$ satisfy the following property:

$$\sqrt{\frac{\ln n}{n}} (\det(\mathbf{P}^\top \mathbf{P}))^{-3} \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$$

Then $\hat{F}_m^{\text{PI}}$ defined by (10) is a uniformly consistent estimator of F_m for each $m = 1, \dots, M$.

Remark 3. Asymptotic normality of product-integral estimator has not been proven yet.

3 Data simulation

This section introduces settings for comparison of two estimators described previously. For each experiment the mixture probability matrix $\mathbf{P}$ is generated randomly using the following procedure:

1. sample nM independent random variables from $\mathcal{U}(0, 1)$, which form an $n \times M$ matrix $\mathbf{A}$
2. divide each row of $\mathbf{A}$ by the sum of elements in that row
3. if $\det(\mathbf{A}^\top \mathbf{A}) > 0.2$ set $\mathbf{P} = \mathbf{A}$, otherwise go to step 1

Remark 4. The last step in previous algorithm is performed in order to avoid ill-conditioned cases.

Since Ryzhov's and product-integral estimators requires different kind of censors the same CDF G for all censors is used in order to fit both settings.

Next section provides simulation results for two-component mixture, i.e. $M = 2$, where the quantity

$$\mathbb{E} \sup_t |\hat{F}_m(t) - F_m(t)|, m = 1, 2 \quad (12)$$

is of interest.

4 Simulation results

Let $F_1 \sim \chi_1^2$ and $F_2 \sim \chi_2^2$ have chi-squared distribution with 1 and 2 degrees of freedom respectively. All censors c_j have the same uniform distribution $G \sim \mathcal{U}(0, 8)$ which corresponds to approximately 20% of censored observations. An estimation for the quantity $\mathbb{E} \sup_t |\hat{F}_m(t) - F_m(t)|$ is given by averaging 1000 independent experiments.

Since Ryzhov's estimator requires a special form of input data, the following rounding procedure is considered:

1. Fix a number of bins $N \geq 2$ and consider a partition $\{\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_N\}$ of unit interval $[0, 1)$, where

$$\mathcal{B}_i = [\frac{i-1}{N}, \frac{i}{N}), i = 1, \dots, N$$

2. Assign each p_j^m to the center of a bin it belongs to

Thereby, a subsample of censored data $\mathcal{D}^c$ which corresponding mixture probabilities belong to the i -th bin forms $\hat{\mathcal{D}}_i^c$.

Figure 1 represents simulation results, in which product-integral estimator uses true mixture probability matrix $\mathbf{P}$ while Ryzhov's estimator uses its rounded version defined above. A horizontal axis states for a sample size n while vertical axis stays for the chosen error measure (12).

As one can see, for sufficiently large sample size and reasonable number of bins estimators perform almost equally. The amount of bins can be treated as a bias-variance trade-off, i.e. small values of N produces high bias low variance estimations and vice versa.

Figure 2 illustrates the properties of both estimators in case skewed mixing probabilities, that is, mixing probability matrix with the following entries:

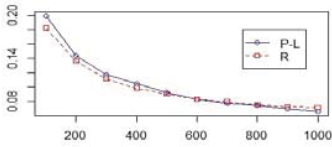
$$p_j^1 = \frac{j^2}{n^2}, p_j^2 = 1 - \frac{j^2}{n^2}, j = 1, \dots, n \quad (13)$$

is used for the product-integral estimator and its rounded version with $N = 2$ is used for Ryzhov's estimator. As one can see errors in the first component are comparable with each other while product-integral estimator for the second component outperforms Ryzhov's one.

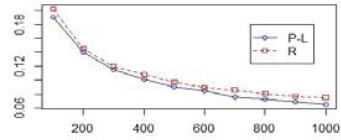
The next two figures shows how the error measure changes with different values of n and N . Here the samples are generated using rounded version of mixture probability matrix. That is, mixing probability matrix for the product-integral estimator may contain at most N different rows.

In Figure 3 the number of bins $N = 2$ remains fixed, while the sample size n varies from 100 to 1000. As one can see, both estimators perform almost equally, however for the first component Ryzhov's estimator performs slightly better.

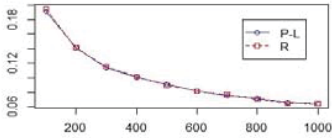
Figure 4 represents the behaviour of two estimators for fixed sample size $n = 100$ while the number of bins N varies from 2 to 10. It is clear that product-integral estimator starts outperform Ryzhov's one as the number of bins increases.



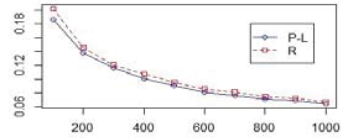
First component (χ_1^2) with $N = 2$



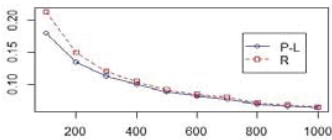
Second component (χ_2^2) with $N = 2$



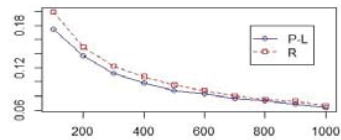
First component (χ_1^2) with $N = 3$



Second component (χ_2^2) with $N = 3$

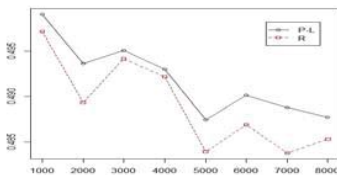


First component (χ_1^2) with $N = 5$

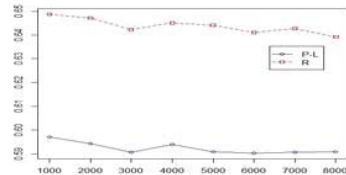


Second component (χ_2^2) with $N = 5$

Figure 1: Error comparison for different rounding in Ryzhov's estimator

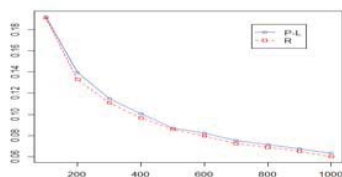


First component (χ_1^2) with $N = 2$

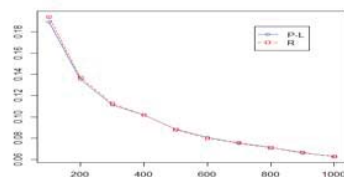


Second component (χ_2^2) with $N = 2$

Figure 2: Error comparison for large samples in case skewed mixing probabilities

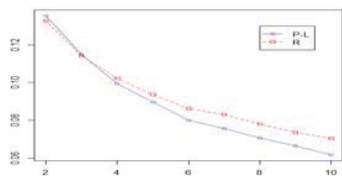


First component (χ_1^2) with $N = 2$

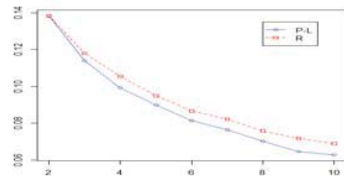


Second component (χ_2^2) with $N = 2$

Figure 3: Error comparison for different sample sizes n



First component (χ_1^2) with $n = 100$



Second component (χ_2^2) with $n = 100$

Figure 4: Error comparison for different number of bins N

5 Conclusions

By the results of simulations one can see that both estimators show satisfactory performance. However, it worth noting that product-integral estimator requires more natural data type that Ryzhov's one, which could be an advantage for practical purposes. Although, asymptotic nor-

mality of product-integral estimator has not been proved yet, the similarity of performance for these two estimators evidences that this property should hold. Moreover, Ryzhov's estimator uses adaptive weight coefficients, while product-integral estimator uses minimax ones. The adaptation of weight coefficient and the proof of asymptotic normality is a subject of further research.

Список використаних джерел

- [1] Рижов А.Ю. Оцінки розподілів компонент суміші по цензурованим даним /А. Ю. Рижов // Теорія ймовірностей та математична статистика. — 2003.— Вип. 69. — С. 142–154.
- [2] Хізанов В.Г. Модифікація оцінки Каплана-Мейєра для моделі сумішей зі змінними концентраціями, /Р. Є. Майборода, В. Г. Хізанов // Теорія ймовірностей та математична статистика. — 2015.— Вип. 92. — С. 103–109.

References

1. RYZHOV, A. YU. (2003) Estimation of mixture components' distribution by censored data. *Theory of Probability and Mathematical Statistics*. 69, p. 142–154.
2. MAIBORODA, R. E.; KHZANOV, V. H. (2015) Modification of Kaplan-Meier estimator for mixture model with varying concentrations. *Theory of Probability and Mathematical Statistics*. 92, p. 103–109.

- [3] Kaplan, E.L. Nonparametric estimation from incomplete observations, /E. L. Kaplan, P. Meier // *Journal of the American Statistical Association*. — 1958.— Вип. 53(282). — С. 457–481.
- [4] Gill, R.D. A Survey of Product-Integration with a View Toward Application in Survival Analysis, /R. D. Gill, S. Johansen // *The Annals of Statistics*. — 1990.— Вип. 18, №4. — С. 1501–1555.
- [5] Korosteleva, O. Clinical Statistics: Introducing Clinical Trials, Survival Analysis, and Longitudinal Data Analysis, /O. Korosteleva // *Jones & Bartlett Learning*. — 2009.— 120 p.
- [6] Huber, C. Mathematical Methods in Survival Analysis, Reliability and Quality of Life, /C. Huber, N. Limnios, M. Mesbah, M. Nikulin // *Wiley-ISTE*. — 2008.— 420 p.
- [7] Maiboroda, R. Statistics of mixtures with varying concentrations with application to DNA microarray data analysis, /R. Maiboroda, O. Sugakova // *Journal of Nonparametric Statistics*. — 2012.— Вип. 24, №1. — С. 201–215.
- [8] Майборода Р.Є. Оцінювання та класифікація за спостереженнями із суміші, /Р. Є. Майборода, О. В. Сугакова // *К.: ВПЦ "Київський університет"*. — 213 ст. — 2008.—
- 3. KAPLAN, E. L. and MEIER, P. (1958) Nonparametric estimation from incomplete observations. *Journal of the American Statistical Association*. 53(282), p. 457–481.
- 4. GILL, R. D. and JOHANSEN, S. (1990) A Survey of Product-Integration with a View Toward Application in Survival Analysis. *The Annals of Statistics*. 18, 4, p. 1501–1555.
- 5. KOROSTELEVA, O. (2009) Clinical Statistics: Introducing Clinical Trials, Survival Analysis, and Longitudinal Data Analysis. *Jones & Bartlett Learning*.
- 6. HUBER, C. and LIMNIOS, N. and MESBAH, M and NIKULIN, M (2008) Mathematical Methods in Survival Analysis, Reliability and Quality of Life. *Wiley-ISTE*.
- 7. MAIBORODA, R. and SUGAKOVA, O. (2012) Statistics of mixtures with varying concentrations with application to DNA microarray data analysis. *Journal of Nonparametric Statistics*. 24, p. 201–215.
- 8. MAIBORODA, R. and SUGAKOVA, O. (2008) Estimation and classification by observations from mixture model. *"Kyivskiy universytet"*.

Received: 15.03.2015

**ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ
РІВНЯННЯ,
МАТЕМАТИЧНА ФІЗИКА
ТА МЕХАНІКА**

Андрій Феофанович Улітко

Andriy Feofanovych Ulitko

24 червня 2015 року залишив тіло Андрій Феофанович Улітко.

On June 24, 2015 Andriy Feofanovych Ulitko left his body.



УЛІТКО
Андрій Феофанович
28. 08. 1934 – 24. 06. 2015

А. Ф. Улітко видатний вчений у галузі механіки, діяльність якого пов'язана з вивченням сучасних проблем механіки спряжених хвильових полів та векторних крайових задач математичної фізики. Доктор фізико-математичних наук (1972 р.), професор (1979 р.), член-кореспондент НАН України (1982 р.), Заслужений діяч науки (1984 р.), лауреат Державної премії УРСР в галузі науки і техніки (1988 р.), лауреат премії ім. О. М. Динника АН УРСР (1984 р.), заслужений професор КНУ ім.

Т. Шевченка (2000 р.), кавалер ордена «За заслуги» III ст. (2009 р.).

Андрій Феофанович Улітко народився 28 серпня 1934 р. в с. Богодарівка Лубенського району Полтавської області у селянській родині. У 1952 р. з золотою медаллю закінчив середню школу в с. Тарандинці. У 1952–1957 рр. навчався у Київському держуніверситеті ім. Т.Г. Шевченка на механіко-математичному факультеті, який закінчив з відзнакою за спеціальністю «механіка». У 1957–1960 рр. навчався в аспіран-

турі Інституту механіки НАН України під керівництвом акад. А. Д. Коваленка (1905–1973 рр.). У 1961 р. захистив кандидатську, а у 1971 р. докторську дисертації, працював у Інституті механіки НАН України на посадах молодшого, старшого наукового співробітника, завідувача відділу. У 1979 р. перейшов на викладацьку роботу до Київського держуніверситету ім. Т. Г. Шевченка. Обіймав посади професора, декана механіко-математичного факультету, проректора з навчальної роботи, завідувача кафедри, провідного наукового співробітника тощо.

Науковими працями А. Ф. Улітка здійснено визначальний внесок у розвиток кількох напрямків сучасної механіки. Творчий доробок А. Ф. Улітка стосується, в першу чергу, двох розділів механіки – просторових задач теорії пружності та механіки спряжених полів в керамічних середовищах. Суттєвими є досягнення А. Ф. Улітка в теорії інтегральних перетворень для скалярних і векторних полів. Характерною рисою його праць є те, що всі три вказані розділи розроблялися одночасно і в тісному поєднанні не тільки ідейно, а й за математичним апаратом. Як наслідок такого поєднання нових наукових ідей та класичної конструктивної математики, було створено ефективний метод розв'язування векторних крайових задач просторової теорії пружності та електропружності, відомий тепер як метод власних векторних функцій А. Ф. Улітка. Побудовані ним власні функції векторної будови дозволили вивести формули векторних інтегральних перетворень Фур'є, Ламе, Ханкеля, Мелера – Фока, Черрі та ін., які набули такого ж ступеня завершеності, як і класичні перетворення для скалярних полів. Метою цих досліджень було не стільки чисто математичне узагальнення класичних перетворень, скільки – ті широкі можливості побудови точних аналітичних розв'язків нових класів задач просторової теорії пружності та електропружності, які відкривались після застосування векторного спектрального аналізу. Тут достатньо відмітити результати аналізу напружень в приповерхневих шарах пружних тіл, навантажених зосередженими силами, встановлення характеру поведінки напружень поблизу просторових розривів та в сингулярних точках, роз'яснення явища надглибокого проникнення дрібних жорстких частинок в пружне середовище, точні розв'язки задач повільного руху в'язкої рідини Стокса навколо тіл канонічної форми, тощо.

Фундаментальні результати отримані А. Ф. Улітком під час розвитку польової теорії зв'язаних електромеханічних процесів в п'єзоактивних керамічних середовищах. З його іменем пов'язане формування нового розділу механіки – «електропружності». В працях А. Ф. Улітка вперше сформульовані фізично обґрунтовані умови електропружного навантаження п'єзокерамічних тіл, умови на дефектах в кераміці (тріщини), на внутрішніх електродах та при контактній взаємодії. Переслідуючи мету практичного застосування результатів загальної теорії, автор розробив прикладні теорії деформування тонкостінних п'єзокерамічних пластин і оболонок, які повністю адекватні класичній теорії Кірхгофа – Лява для чисто пружних оболонок. Розроблена ним енергетична теорія електромеханічного перетворення енергії в загальному випадку нестационарного навантаження підвела підсумок тривалій дискусії в літературі стосовно визначення так званих динамічних (ефективних) коефіцієнтів електромеханічного зв'язку. Енергетична теорія А. Ф. Улітка має ряд переваг у порівнянні з резонансною теорією У. Мезона. Заслугує бути відміченою створена А. Ф. Улітком теорія розряду деформованих п'єзокерамічних тіл при наявності нелінійного іскрового проміжку (іскрові п'єзогенератори), теорія розрахунку струму провідності в електродних покриттях п'єзоактивних тіл та полів розсіювання поза ними.

До суттєвих наукових здобутків А. Ф. Улітка останнього часу слід віднести теорію просторового руху пружних тіл, що відіграє ключову роль в задачах моделювання мікрохвильових двигунів та хвильових твердотільних гіроскопів, а також застосування методів Вінера – Хопфа в контактних задачах теорії пружності.

Член-кореспондент А. Ф. Улітко – автор понад 220 наукових праць, у тому числі 8 монографій, кількох винаходів, його наукові результати впроваджено в розробках лабораторії механіки спряжених хвильових полів КНУ ім. Тараса Шевченка. А. Ф. Улітко – природжений талановитий викладач, ним розроблено та впроваджено в навчальний процес низку нормативних та спеціальних курсів, якими підсумовується багатий досвід його плідної наукової творчої діяльності.

Надійшла до редколегії 30.09.15

УДК 539.3

Альфавіцька С. О.¹,
Николишин М. М.¹, д. ф.-м. н., проф.,
Опанасович В. К.², д. ф.-м. н., доц.,
Слободян М. С.², к. ф.-м. н., доц.

**Згин пластини з наскрізною
прямолінійною тріщиною за наявності
пластичних зон у її вершинах з
урахуванням контакту її берегів та
зміцнення матеріалу**

¹Інститут прикладних проблем механіки і
математики ім. Я. С. Підстригача НАН
України, 79060, м. Львів, вул. Наукова, 3-б
e-mail: alfavitska_solomiya@i.ua

²Львівський національний університет імені
Івана Франка, 79000, м. Львів, вул. Університе-
тська, 1
e-mail: slob@yandex.ru, kafmech@franko.lviv.ua

S. O. Alfavitska¹,
M. M. Nykolyshyn¹, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof.,
V. K. Opanasovich², Dr. Sci. (Phys.-Math.),
Assoc. Prof.,
M. S. Slobodyan², Ph. D. (Phys.-Math.), Assoc. Prof.

**Bend of plate with through a lineal crack in
the presence of the plastic zones in its tops
taking into account contact of its banks and
strengthening of material**

¹Pidstrygach Institute for Applied Problems of
Mechanics and Mathematics, National Academy of
Sciences of Ukraine, 79060, Lviv, Naukova str., 3-b,
e-mail: alfavitska_solomiya@i.ua

²Ivan Franko National University of Lviv, 79000,
Lviv, Universytetska str., 1
email: slob@yandex.ru, kafmech@franko.lviv.ua

У роботі сформульовано і розв'язано задачу про довівсний згин розподіленими згинальними моментами на нескінченності ізотропної пластини з однією наскрізною прямолінійною тріщиною, береги якої під дією зовнішнього навантаження контактують по області сталої ширини поблизу однієї з основ пластини, а у її вершинах утворилися пластичні зони з урахуванням зміцнення матеріалу за лінійного розподілу напруження у них та виконанням умов пластичності Треска у вигляді поверхневого шару чи пластичного шарніру. Через контакт берегів тріщини розв'язок задачі подано у вигляді суперпозиції двох задач: плоскої задачі та задачі згину (класична теорія). Використавши методи теорії функцій комплексної змінної та комплексні потенціали плоскої задачі та класичної теорії згину пластин, розв'язування задачі зведено до задач лінійного спряження, на основі яких отримано аналітичний розв'язок задачі в класі функцій, обмежених у вершинах пластичних зон. Числово визначено довжину пластичної зони та розкриття берегів тріщини у її вершині.

Ключові слова: тріщина, згин, ізотропна пластинка, комплексні потенціали, зміцнення, пластичні зони.

A problem is formulated and untied about a biaxia bend by the up-diffused bend moments on endlessness of isotropic plate with one through lineal crack, the banks of which under the action of the external loading contact for the areas of permanent width near-by one of bases of plate, and in its tops plastic areas appeared taking into account strengthening of material at the linear distributing of tension for them and by implementation of terms of plasticity of Treska as a superficial layer or plastic a hinge. Through the contact of banks of crack of upshots of task will give as superpozicii of two tasks: flat task and task of bend (classic theory). Using the methods of theory of functions of complex variable and complex potentials of flat task and classic theory of bend of plates of untie of task it is erected to the task of linear interface, on the basis of which the analytical decision of task is got in the class of functions of the plastic areas limited in tops. Numerical certainly length of plastic area and opening in the top of crack.

Key Words: Crack, Bending, Isotropic Plate, Complex Potentials, Strengthening, Plastic Zone.

1. Вступ

Елементи конструкцій у вигляді пластин дуже широко використовуються у різних галузях

техніки та промисловості за дії різного зовнішнього навантаження, а у процесі їх експлуатації чи виготовлення можуть виникати

тріщиноподібні дефекти, що призводить до зниження міцності і надійності пластинчастих конструкцій.

Розв'язками плоских задач та задач згину пластин з тріщинами займалися багато авторів, результати яких узагальнено в [1–3] та ін. Лінійчастий контакт берегів тріщин при згині пластини досліджено у роботах [4, 5], а смуговий (по ширині) контакт – у [6, 7]. Розтяг пластини з тріщинами, на продовженні яких утворилися пластичні зони, розглянуто у працях [8–10].

2. Формулювання задачі

Розглянемо нескінченну ізотропну пластину завтовшки $2h$ з прямолінійною наскрізною тріщиною завдовжки $2l$, яка знаходиться в умовах двовісного згину розподіленими моментами M_x^∞ і M_y^∞ на нескінченності, вектори яких паралельні і перпендикулярні до берегів тріщини. У серединній площині виберемо декартову систему координат $Ox\bar{y}$ з початком у центрі тріщини, направивши вісь Ox по тріщині, а вісь $O\bar{y}$ перпендикулярно до серединної площини пластини. Припускається, що під дією зовнішнього навантаження береги тріщини приходять у гладкий контакт по області постійної ширини h_1 поблизу верхньої основи пластини, а у вершинах тріщини утворилися зміцненні пластичні зони завдовжки b . Довжину тріщини з пластичними зонами позначимо через $2d$, лінію, де розміщена тріщина – через L , а пластичні зони – L_1 (див. рис. 1).

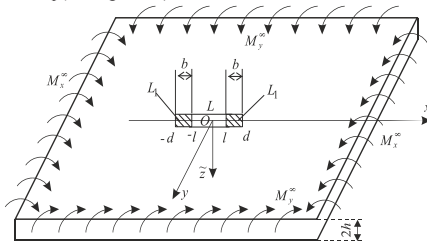


Рис. 1. Схема навантаження пластини та розміщення тріщини

Через контакт берегів тріщини сформульовану задачу розбиваємо на дві: плоску задачу та задачу згину (класична теорія згину пластин) за таких крайових умов

$$\sigma_{yy}^\pm = \sigma_0 \sigma^*(x), M_y^\pm = M_0 \sigma^*(x), \quad x \in L_1, \quad (1)$$

$$\sigma_{yy}^\pm = -\frac{N}{2h}, M_y^\pm = \beta h N, [v] + \alpha h [\partial_y w] = 0, x \in L, \quad (2)$$

$$\sigma_{xy}^\pm = 0, P_y^\pm = 0, \quad x \in L + L_1, \quad (3)$$

$$\sigma^*(x) = m^* + (1 - m^*)|x| - l / (d - l), \quad m^* = \sigma_B / \sigma_Y,$$

де σ_{yy} і σ_{xy} та u і v – компоненти тензора напружень та компоненти вектора переміщення по осях Ox і Oy у плоскій задачі; σ_0 і M_0 – невідомі нормальне напруження та згинальний момент у пластичній зоні, для яких виконуються умови пластичності Треска у вигляді поверхневого шару чи пластичного шарніру [11, 12]; N – контактне зусилля ($N > 0$); w – прогин пластини; M_y і P_y – згинальний момент та перерізувальна сила у сенсі Кірхгофа; σ_B і σ_Y – межі міцності та текучості матеріалу; $[f] = f^+ - f^-$, де значками «+» і «-» позначено граничне значення відповідної величини при $y \rightarrow \pm 0$, константи α і β мають вигляд [6]:

$$\alpha = 0.5\{1 + (1 - \gamma^2)\}, \quad \beta = 1 - \gamma / 3, \quad \gamma = h_1 / h. \quad (4)$$

3. Розв'язування задачі

Для визначення напружено-деформованого стану пластини введемо комплексні потенціали плоскої задачі $\Phi(z)$ і $\Omega(z)$ та класичної теорії згину пластини $\Phi_3(z)$ і $\Omega_3(z)$ [2, 3]

$$\sigma_{yy} - i\sigma_{xy} = \Phi(z) + \Omega(\bar{z}) + (z - \bar{z})\overline{\Phi'(z)}, \quad (5)$$

$$2\mu\partial_x(u + iv) = \kappa\Phi(z) - \Omega(\bar{z}) - (z - \bar{z})\overline{\Phi'(z)}, \quad (6)$$

$$\partial_x g = \Phi_3(z) - \Omega_3(\bar{z}) + (z - \bar{z})\overline{\Phi_3'(z)}, \quad (7)$$

$$f = \bar{\kappa}\Phi_3(z) + \Omega_3(\bar{z}) - (z - \bar{z})\overline{\Phi_3'(z)}, \quad (8)$$

де $\mu = 0.5E / (1 + \nu)$ – модуль зсуву, E – модуль Юнга, ν – коефіцієнт Пуассона матеріалу пластини,

$$(M_y + ic' + i \int_0^x P(\varepsilon) d\varepsilon) / m, \quad g = \partial_x w + i\partial_y w, \quad f(x) = \frac{0}{m}, \quad (9)$$

$$z = x + iy, \quad i^2 = -1, \quad \kappa = (3 - \nu) / (1 + \nu),$$

$$\bar{\kappa} = (3 + \nu) / (1 - \nu), \quad m = -D(1 - \nu), \quad \partial_\alpha f = \partial f / \partial \alpha,$$

c' – невідома дійсна стала, $D = 2Eh^3 / 3(1 - \nu^2)$ – циліндрична жорсткість пластини.

Введені комплексні потенціали при великих $|z|$ можна подати у вигляді [2, 3]

$$\Phi(z) = O(1/z^2), \quad \Omega(z) = O(1/z^2),$$

$$\Phi_3(z) = \tilde{\Gamma} + O(1/z^2), \quad \Omega_3(z) = -\tilde{\Gamma} - \tilde{\Gamma}' + O(1/z^2), \quad (10)$$

$$\tilde{\Gamma} = -\frac{M_x^\infty + M_y^\infty}{4D(1+\nu)}, \quad \tilde{\Gamma}' = \frac{M_x^\infty - M_y^\infty}{2m}.$$

З крайових умов (1)–(3) отримаємо

$$(\sigma_{yy} - i\sigma_{xy})^+ - (\sigma_{yy} - i\sigma_{xy})^- = 0, \quad x \in L + L_1, \quad (11)$$

$$(M_y + ic' + i \int_0^x P(\varepsilon) d\varepsilon)^+ -$$

$$-(M_y + ic' + i \int_0^x P(\varepsilon) d\varepsilon)^- = 0, \quad x \in L + L_1.$$

На основі залежностей (5) і (8) та крайових умов (11) будемо мати

$$(\Phi(x) - \Omega(x))^+ - (\Phi(x) - \Omega(x))^- = 0, \quad x \in L + L_1,$$

$$(\kappa\Phi_3(x) - \Omega_3(x))^+ - (\kappa\Phi_3(x) - \Omega_3(x))^- = 0, \quad x \in L + L_1. \quad (12)$$

Якщо врахувати (10) та розв'язати задачі лінійного спряження (12), то отримаємо

$$\Omega(z) = \Phi(z), \quad \Omega_3(z) = \kappa\Phi_3(z) - (\kappa+1)\tilde{\Gamma} - \tilde{\Gamma}'. \quad (13)$$

З крайових умов (2) і (3), врахувавши (5), (8), (9) та залежності (13), матимемо

$$N = -2h(\Phi^+(x) + \Phi^-(x)), \quad x \in L, \quad (14)$$

$$M_y = -ic' +$$

$$+ m\{\kappa(\Phi_3^+(x) + \Phi_3^-(x)) - (\kappa+1)\tilde{\Gamma} - \tilde{\Gamma}'\}, \quad x \in L.$$

Введемо функцію

$$F(z) = -2\beta h^2 \Phi(z) - m\kappa\Phi_3(z) +$$

$$+ 0.5\{ic' + m((\kappa+1)\tilde{\Gamma} + \tilde{\Gamma}')\}. \quad (15)$$

З другої крайової умови (2) отримаємо

$$F^+(x) + F^-(x) = 0, \quad x \in L. \quad (16)$$

Беручи до уваги крайові умови (1) та співвідношення (13), на основі (5) і (8), одержимо

$$\Phi^+(x) + \Phi^-(x) = \sigma_0 \sigma^*(x), \quad x \in L_1, \quad (17)$$

$$-ic' + m\{\kappa(\Phi_3^+(x) + \Phi_3^-(x)) -$$

$$-(\kappa+1)\tilde{\Gamma} - \tilde{\Gamma}'\} = M_0 \sigma^*(x), \quad x \in L_1. \quad (18)$$

Якщо врахувати (17) і (18) та вигляд функції $F(z)$ (15), то будемо мати

$$F^+(x) + F^-(x) = c\sigma^*(x), \quad x \in L_1, \quad (19)$$

$$c = -2h^2\beta\sigma_0 - M_0. \quad (20)$$

Розв'язок задачі лінійного спряження (16) і (19) запишемо у вигляді

$$F(z) = \frac{cX_1(z)}{2\pi i} \int_{L_1} \frac{\sigma^*(t)dt}{X_1^+(z)(t-z)}, \quad X_1(z) = \sqrt{z^2 - d^2}. \quad (21)$$

На основі (21), врахувавши (10) та поведінку функції $F(z)$ при $|z| \rightarrow \infty$ (15), можемо записати

$$\frac{ic' - M_y}{2} = -\frac{c}{2\pi i} \int_{L_1} \frac{\sigma^*(t)dt}{X_1^+(t)}, \quad \frac{c}{2\pi i} \int_{L_1} \frac{t\sigma^*(t)dt}{X_1^+(t)} = 0. \quad (22)$$

Після обчислення інтегралів у (22) отримаємо

$$c' = 0, \quad M_y = -2c/\pi(a\sqrt{d^2 - l^2} + \text{barccos}(l/d)). \quad (23)$$

З крайових умов (3), врахувавши (5), (8), (9), (13), одержимо

$$(\Phi(x) - \bar{\Phi}(x))^+ + (\Phi(x) - \bar{\Phi}(x))^- = 0, \quad x \in L + L_1, \quad (24)$$

$$(\Phi_3(x) - \bar{\Phi}_3(x))^+ + (\Phi_3(x) - \bar{\Phi}_3(x))^- = 0, \quad x \in L + L_1.$$

Якщо розв'язати задачі лінійного спряження (24) та врахувати поведінку функцій $\Phi(z)$ і $\Phi_3(z)$ на нескінченності (10), то будемо мати

$$\bar{\Phi}(z) = \Phi(z), \quad \bar{\Phi}_3(z) = \Phi_3(z). \quad (25)$$

Із третьої крайової умови (2), врахувавши (6), (7), (13) і (25), одержимо

$$(\delta\Phi(x) + 2\Phi_3(x))^+ - (\delta\Phi(x) + 2\Phi_3(x))^- = 0, \quad x \in L,$$

$$\delta = (\kappa+1)/(\alpha\mu h(1+\kappa)). \quad (26)$$

Врахувавши (14) і (15), отримаємо

$$G(x) = (\delta\Phi(x) + 2\Phi_3(x))^+ +$$

$$+ (\delta\Phi(x) + 2\Phi_3(x))^-, \quad x \in L_1, \quad (27)$$

$$G(x) = \delta\sigma_0\sigma^*(x) +$$

$$+ 2\{M_0\sigma^*(x)/m + (\kappa+1)\tilde{\Gamma} + \tilde{\Gamma}'\}/\kappa. \quad (28)$$

Розв'язок задачі лінійного спряження (26), (27) має вигляд

$$\delta\Phi(z) + 2\Phi_3(z) = \frac{\tilde{X}_0(z)}{2\pi i} \int_{L_1} \frac{G(t)dt}{\tilde{X}_0^+(t)(t-z)}, \quad (29)$$

$$\tilde{X}_0(z) = \sqrt{(z^2 - l^2)(z^2 - d^2)}.$$

Подамо функції $\sigma^*(x)$ та $G(x)$ у вигляді

$$\sigma^*(x) = a|x| + b, \quad (30)$$

$$G(x) = B|x| + A, \quad (31)$$

$$a = (1 - m^*) / (d - l), \quad b = m^* - (1 - m^*)l / (d - l),$$

$$A = \delta \sigma_0 b + 2\{M_0 \sigma^*(x) / m + (\tilde{\kappa} + 1)\tilde{\Gamma} + \tilde{\Gamma}'\} / \tilde{\kappa}, \quad (32)$$

$$B = a[\delta \sigma_0 + 2M_0(m\tilde{\kappa})^{-1}].$$

Якщо розвинути праву і ліву частини (29) у ряд при великих $|z|$ та приврівняти коефіцієнти біля однакових степенів z , то отримаємо

$$\int_{l_1} \frac{G(t)dt}{\tilde{X}_0^+(t)} = 0, \quad \int_{l_1} \frac{G(t)[0.5(d^2 + l^2) - t^2]dt}{\tilde{X}_0^+(t)} = 0, \quad (33)$$

$$2\tilde{\Gamma} = -\frac{1}{2\pi i} \int_{l_1} \frac{G(t)tdt}{\tilde{X}_0^+(t)}.$$

Після відповідних перетворень з (33) одержимо

$$M_0 = M_y / \{b + (2ad/\pi E(q))\} + (\tilde{\gamma}h^2/6)\sigma_0, \quad (34)$$

$$E(q) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - q^2 \sin^2 \alpha} d\alpha,$$

$$\tilde{\gamma} = 4(3 + \nu)/\alpha(1 + \nu), \quad q = \sqrt{d^2 - l^2}/d.$$

Враховавши (31), (32), залежність (29) перепишемо у вигляді

$$\delta\Phi(z) + 2\Phi_3(z) = \tilde{X}_0(z)\rho_1(z) + \frac{A}{2\pi i} \tilde{X}_0(z) \int_{l_1} \frac{dt}{\tilde{X}_0^+(t)(t-z)}, \quad (35)$$

$$\rho_1(z) = \frac{B}{2\pi i} \int_{l_1} \frac{|t|dt}{\tilde{X}_0^+(t)(t-z)}.$$

Обчисливши інтеграли у (35), одержимо

$$\delta\Phi(z) + 2\Phi_3(z) = \tilde{X}_0(z)\rho_1(z) + 0.5A. \quad (36)$$

Із (15) і (21) отримаємо

$$2\beta h^2\Phi(z) + m\tilde{\kappa}\Phi_3(z) = d_1 + m\tilde{\kappa}\tilde{\Gamma} - \frac{X_1(z)c}{2\pi i} \int_{l_1} \frac{\sigma^*(t)dt}{X_1^+(t)(t-z)}. \quad (37)$$

Розв'язавши систему алгебричних рівнянь (35) і (36) відносно $\Phi(z)$ та $\Phi_3(z)$, матимемо

$$\Phi_3(z) = d_3 + f_3(z)X_1(z), \Phi(z) = d_5 + f_4(z)X_1(z), \quad (38)$$

$$f_1(z) = \rho_1(z)\sqrt{z^2 - l^2}, \quad f_2(z) = -\frac{c}{2\pi i} \int_{l_1} \frac{\sigma^*(t)dt}{X_1^+(t)(t-z)},$$

$$f_3(z) = (\delta f_2(z) - 2\beta h^2 f_1(z)) / \Delta,$$

$$f_4(z) = (m\tilde{\kappa}f_1(z) - 2f_2(z)) / \Delta,$$

$$d_3 = (\delta B_2 - 2\beta h^2 B) / \Delta, \quad d_5 = (m\tilde{\kappa}B_1 - 2B_2) / \Delta,$$

$$\Delta = m\tilde{\kappa}\delta - 4\beta h^2, \quad B_1 = 0.5A, \quad B_2 = d_1 + m\tilde{\kappa}\tilde{\Gamma}. \quad (39)$$

Для знаходження σ_0 і M_0 скористаємося спочатку умовою пластичності Треска у вигляді поверхневого шару на нижній основі пластини [11, 12]

$$\sigma_0 + 3M_0 / 2h^2 = \sigma_Y. \quad (40)$$

Розв'язавши систему алгебраїчних рівнянь (34) і (40) відносно σ_0 і M_0 , отримаємо

$$\tilde{\sigma}_0 = \frac{\sigma_0}{\sigma_Y} = \frac{4(\pi b + 2\tilde{a}E(q) - \pi\tilde{\sigma})}{(\pi b + 2\tilde{a}E(q))(4 + \tilde{\gamma})}, \quad (41)$$

$$\tilde{M}_0 = \frac{3M_0}{2h^2\sigma_Y} = \frac{\tilde{\gamma}}{4 + \tilde{\gamma}} + \frac{4}{4 + \tilde{\gamma}} \frac{\pi\tilde{\sigma}}{\pi b + 2\tilde{a}E(q)},$$

$$\tilde{\sigma} = 3M_y / 2h^2\sigma_Y, \quad \tilde{a} = (1 - m^*) / (1 - \tilde{l}), \quad \tilde{l} = l / d.$$

Підставивши вирази σ_0 і M_0 (41) у (23), одержимо рівняння для визначення величини $\tilde{l}$

$$\tilde{\sigma} - \frac{2}{\pi} \left\{ \frac{4}{4 + \tilde{\gamma}} \frac{\pi\tilde{\sigma}}{\pi b + 2\tilde{a}E(q)} (1 - 3\beta) + (1 + 3\beta) \right\} \times \\ \times \left(\tilde{a}\sqrt{1 - \tilde{l}^2} + b \arccos \tilde{l} \right) = 0.$$

Якщо скористатися умовою пластичного шарніру [11, 12]

$$\left(\frac{\sigma_0}{\sigma_Y} \right)^2 + \frac{M_0}{h^2\sigma_Y} = 1, \quad (42)$$

то отримаємо такі вирази для $\tilde{\sigma}_0$ і $\tilde{M}_0$

$$\tilde{\sigma}_0 = \sqrt{\left(\frac{\tilde{\gamma}}{12} \right)^2 + \rho} - \frac{\tilde{\gamma}}{12}, \quad (43)$$

$$\tilde{M}_0 = \frac{\pi\tilde{\sigma}}{\pi b + 2\tilde{a}E(q)} + \frac{\tilde{\gamma}}{4} \sqrt{\left(\frac{\tilde{\gamma}}{12} \right)^2 + \rho} - \frac{\tilde{\gamma}^2}{48},$$

$$\rho = 1 - \frac{2}{3} \frac{\pi\tilde{\sigma}}{\pi b + 2\tilde{a}E(q)}, \quad q = \sqrt{1 - \tilde{l}^2}.$$

Якщо підставимо (43) у (23), то для знаходження $\tilde{l}$ отримаємо

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma} - \frac{2}{\pi} \left\{ \left(\sqrt{\left(\frac{\tilde{\gamma}}{12} \right)^2 + \rho} - \frac{\tilde{\gamma}}{12} \right) \left(3\beta + \frac{\tilde{\gamma}}{4} \right) + \frac{\pi \tilde{\sigma}}{\pi b + 2\tilde{a}E(q)} \right\} \times \\ \times \left(\tilde{a}\sqrt{1 - \tilde{\gamma}^2} + b \arccos \tilde{\gamma} \right) = 0. \end{aligned}$$

Розкриття берегів тріщини δ_1 у її вершинах на нижній основі пластини визначається за формулою

$$\delta_1 = \int_d^l \operatorname{Im} \left[((1+k)/2\mu)(\Phi^+(x) - \Phi^-(x)) - h(1+\tilde{k})(\Phi_3^+(x) - \Phi_3^-(x)) \right] dx. \quad (44)$$

Враховавши (40), з (44) отримаємо

$$\begin{aligned} \delta_1 = \int_d^l \left[-\frac{2BR_1}{\pi} \tilde{X}_0(x) \int_l^d \frac{t^2 dt}{\tilde{X}_0(t)(t^2 - x^2)} \right] dx - \\ + \int_d^l \left[-\frac{R_2 C}{\pi} \tilde{X}_1(x) \left\{ (b - ax) \int_{-d}^{-l} \frac{dt}{\tilde{X}_1(t)(t - x)} + \right. \right. \\ \left. \left. + (b + ax) \int_l^d \frac{dt}{\tilde{X}_1(t)(t - x)} \right\} \right] dx, \\ R_1 = \frac{\tilde{\alpha}_1 m \tilde{k} + 2\tilde{\beta}_1 \beta h^2}{\Delta}, \quad R_2 = -\frac{2\tilde{\alpha}_1 + \delta \tilde{\beta}_1}{\Delta}, \\ \tilde{\alpha}_1 = \frac{1 + \kappa}{2\mu}, \quad \tilde{\beta}_1 = h(1 + \tilde{\kappa}). \end{aligned} \quad (45)$$

4. Числовий аналіз та висновки

Проведено числовий аналіз задачі, коли $\nu = 0.3$, який поданий на рис. 2, де суцільні лінії отримані з використанням умови пластичності Треска у вигляді поверхневого шару, а штрихові – з використанням умови пластичного шарніру.

На рис. 2 подано графічні залежності зведеної довжини пластичної зони $\tilde{b} = b/l$ та розкриття берегів тріщини $\tilde{\delta} = \delta_1 E / \sigma_y l$ при різних параметрах задачі. Рис. 2 а), 2 б) побудовані при $m^* = 1.5$. На рис. 2 а), 2 б) наведено графічні

залежності $\tilde{b}$ та $\tilde{\delta}$ від $\tilde{\sigma}$ кривій 1 відповідає $\gamma = 0$ (контакт берегів тріщини по лінії), кривій 2 – $\gamma = 0.13$, криві 3 – $\gamma = 0.2$.

З рис. 2 а) та 2 б) можна зробити висновок, що із зростанням відносного зовнішнього навантаження $\tilde{\sigma}$ довжина пластичної зони $\tilde{b}$ та розкриття берегів тріщини $\tilde{\delta}$ зростає. Числовий аналіз показав, що довжина пластичної зони та розкриття берегів тріщини при використанні умови пластичності Треска у вигляді поверхневого шару є більшою ніж при використанні умови пластичності Треска у вигляді пластичного шарніру.

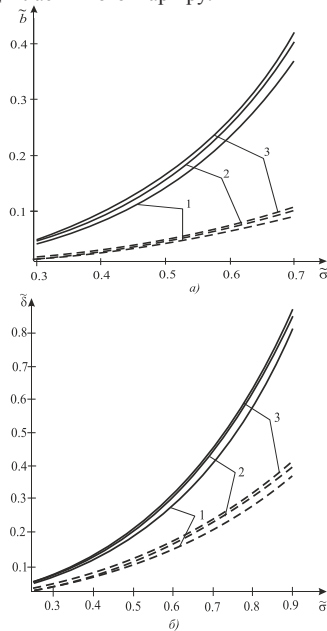


Рис. 2. Графічні залежності зведеної довжини пластичної зони $\tilde{b}$ та розкриття берегів тріщини $\tilde{\delta}$ від параметра $\tilde{\sigma}$

Список використаних джерел

1. Бережницький Л. Т. Изгиб тонких пластин с дефектами типа трещин / Бережницький Л.Т., Делявський М. В., Панасюк В. В. – К.: Наук. думка, 1979. – 400 с.
2. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости / Мусхелишвили Н. И. – М.: Наука, 1966. –

References

1. BEREZHNYTS'KYI, L. T., DELYAVS'KYI, M. V. & PANASYUK, V. V. (1979) *Bending of Thin Plates with Defects Type of Cracks*. Kiev: Naukova Dumka.
2. MUSKHELISHVILI, N. Y. (1966) *Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity*. Moscow: Nauka.

- 707 с.
3. Прусов И. А. Метод сопряжения в теории плит / Прусова И. А. – Минск: Издательство Белорусского университета, 1975. – 256 с.
 4. Шацький І.П. Згин пластини, ослабленої розрізом з контактуючими берегами / Шацький І. П. // Доповіді АН УРСР. Сер. А. Фізико-математичні та технічні науки. – 1988. – № 7. – С. 49–51.
 5. Young M. Influence of crack closure on the stress intensity factor in bending plates / Young M., Sun C. // *International Journal of Fracture*. – 1992. – Vol. 55. – P. 81–93.
 6. Опанасович В. К. Згин пластини з наскрізною прямолінійною тріщиною з урахуванням ширини області контакту її поверхонь / Опанасович В. К. // Наукові нотатки Луцького технічного університету: міжвузівський збірник. – 2007. – Т. 20, № 2. – С. 123–127.
 7. Опанасович В. Згин пластини з круговим отвором та радіальною тріщиною з урахуванням ширини області контакту її берегів / Опанасович В., Слободян М., Бедрий В. // Вісник Львівського університету. Серія мех.-мат. – 2012. – Т. 76. – С. 222–230.
 8. Знаходження довжини пластичних зон біля вершин наскрізної тріщини на прямолінійній межі поділу матеріалів при розтязі кусково-однорідної ізотропної пластини / [Николишин М. М., Опанасович В. К., Куротчин Л. Р., Слободян М. С.] // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій. – 2013. – Т. 21. – С. 192–200.
 9. Двоівсний розтяг кусково-однорідної пластини з двома тріщинами на межі поділу матеріалів з урахуванням пластичних зон біля їхніх вершин / [М. М. Николишин, В.К. Опанасович, Л. Р. Куротчин, М. С. Слободян] // Фізико-хімічна механіка матеріалів. – 2014. – № 6. – С. 67–72.
 10. Каминский А. А. Исследование роста усталостных трещин в материалах с упрочнением / Каминский А. А., Галатенко Г. В. // Прикл. механика – 1984. – Т. 20, № 4. – С. 54–60.
 11. Кир'ян В.І. Механіка руйнування зварних з'єднань металоконструкцій / Кир'ян В. І., Осадчук В. А., Николишин М. М.// Львів: СПОЛІОМ, 2007. – 320 с.
 12. Кушнір Р. М. Пружний та пружнопластичний граничний стан оболонок з дефектами / Кушнір Р. М., Николишин М. М., Осадчук В. А. – Львів: СПОЛІОМ, 2003. – 320 с.
 3. PRUSOV, Y. A. (1975) *The Method of Conjugation in the Theory of Plates*. Minsk: Izdatelstvo Beloruskogo Universitetu.
 4. SHATSKIY, I. P. (1988) Zgin plastini, oslablenoyi rozrizom z kontaktuyuchimi beregami. *Dopovidi AN URSR. Seria A. Fiziko-matematichni ta tehnicni nauki*. (7). p. 49–51.
 5. YOUNG, M. & SUN, C. (1992) Influence of crack closure on the stress intensity factor in bending plates. *International Journal of Fracture*. 55. p. 81–93.
 6. OPANASOVYCH, V. K. (2007) Bending the plate with a through crack linear considering width of its contact surfaces. *Naukovi Notatki Luts'kogo Tehnichnogo Universitetu*. 20 (2). p. 123–127.
 7. OPANASOVYCH, V., SLOBODYAN, M. & BEDRIY, B. (2012) Bending of the plate with a circular orifice and a radial crack with the width of the contact area of the shores. *Visnyk Lvivskogo Universitetu. Seria Mehaniko-Matematichna*. 76. p. 222–230.
 8. NYKOLYSHYN, M. M. et al. (2013) Finding the length of plastic zones near the top of through cracks on a straight-line interface materials at stretching piecewise homogeneous isotropic plate. *Problemy Obchislyvalnoi Mekhaniky i Mitsnosti Konstrukcii*. 21. p. 192–200.
 9. NYKOLYSHYN, M. M. et al. (2014) Biaxial tension cobbled-homogeneous plates with two cracks on verge of division of materials taking into account plastic areas near their tops. *Physical and Chemical Mechanics of Materials*. (6). p. 67–72.
 10. KAMYNSKYI, A. A. (1984) Issledovanye rosta ustalostnykh treshchyn v materialakh s uprochneniyem. *Prykladnaya mekhanika*. 20 (4). p. 54–60.
 11. KYRYAN, V. I., OSADCHUK, V. A. & NYKOLYSHYN, M. M. (2007) *Fracture Mechanics of Welded Joints of Metal*. Lviv, SPOLOM.
 12. KYSHNIR, R. M., NYKOLYSHYN, M. M. & OSADCHUK, V. A. (2003) *Elastic and Elastic-Plastic Boundary State Membranes with Defects*. Lviv, SPOLOM.

Надійшла до редколегії 30.09.15

УДК 004.42+612.1

Балабанов В. О., аспірант,
Кізілова Н. М., д. ф.-м. н., проф.

**Математичне моделювання
артеріальних систем як бінарних дерев,
які заповнюють об'єм простору**

Харківський національний університет імені
В. Н. Каразіна, 61022, м. Харків, пл. Свободи, 4
e-mail: lekarsenten@gmail.com

V. O. Balabanov, Postgraduate Student,
N. M. Kizilova, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof.

**The mathematical modeling of arterial
systems as space-filling binary trees**

V. N. Karazin Kharkov National University, 61022,
Kharkiv, Svobody sq., 4
e-mail: lekarsenten@gmail.com

Розглянуто задачі про стаціонарну течію в'язкої нестисливої рідини по розгалуженій системі трубок з в'язкопружного матеріалу, а також розповсюдження хвиль тиску з урахуванням їх відбиття на розгалуженнях. Геометрія систем трубок відповідає геометрії артеріальних систем внутрішніх органів людини. Розроблений алгоритм побудови тривимірних розгалужених систем, які утворені плоскими біфуркаціями трубок, та заповнюють деякий обсяг простору без самоперетинів. На основі лінеаризованої системи рівнянь Нав'є – Стокса проведені розрахунки тиску та швидкості руху рідини, а також стаціонарної та хвильової провідності будь-якої підсистеми трубок. Запропонований підхід та алгоритм можуть використовуватися для побудови індивідуалізованих моделей внутрішньо-органних кровоносних систем та планування хірургічних втручань, терапевтичних та реабілітаційних заходів на основі оцінки in silico результатів лікування у вигляді поліпшення кровопостачання, нормалізації тиску та напружень зсуву на стінках судин.

Ключові слова: розгалужені дерева, артеріальна система, моделювання, розповсюдження хвиль, медична діагностика.

The problems of steady flow of viscous incompressible fluid through a branching system of viscoelastic tubes, and wave propagation accounting for wave reflections at bifurcations of tubes are considered. The geometry of system of tubes corresponds to the geometry of arterial systems for inner organs of human. An algorithm of restoration of space filling 3-d branching systems composed of the plane bifurcations of tubes is elaborated. This algorithm use correspondence between organ type and vessels bifurcation geometry rules to determine angles, diameters and length of current bifurcation based on parent bifurcation. Based on the linearized Navier–Stokes equations, the computations of pressures and flow velocities, steady and wave conductivity of any subsystem of tubes are carried out. The proposed approach can be used for a patient-specific modelling of intraorgan blood circulation systems, planning of surgery, therapy and rehabilitation procedures basing on the quantitative estimations of possible outcomes of the treatment, like improvement of blood delivery, normalization of blood pressure and wall shear stress.

Key Words: Branching trees, Arterial system, Modelling, Wave propagation, Medical diagnostics.

1. Вступ

Розгалужені системи трубок, найчастіше у вигляді бінарних дерев, служать моделями різних транспортних систем живої природи: артеріальні і венозні системи кровоносних судин людини і тварин, бронхіальні дерева і дихальні шляхи, трофічні системи і крони рослин та інші проточні системи, які забезпечують доставку/відтік речовини до/від розподіленої в просторі системи стоків/джерел – клітин, тканин і органів рослин і тварин. Аналогічні за структурою проточні системи використовуються в численних технічних системах, тепло- і массообмінниках, системах

очищення і оксигенації рідин, включаючи актуальні в даний час паливні елементи і мікроелектромеханічні (MEMS) пристрої [1]. При певних співвідношеннях між геометричними характеристиками бінарні дерева являють собою оптимальні трубопроводи [2, 3], які забезпечують мінімальні витрати енергії на транспортування або мінімальне сумарне виробництво ентропії ($S \rightarrow \min$), що властиво оптимальним системам і пристроям. Однією з найважливіших властивостей судинних та дихальних систем є відсутність самоперетинів та висока однорідність постачання рідини до кожної точки об'єму, і на сьогодні невідомо, завдяки яким механізмам регуляції це

забезпечується. Для плоских дерев цю умову можливо отримати тільки завдяки штучним механізмам розподілу заданої площини на підмножини, транспорт рідини до яких забезпечуються різними шляхами вздовж дерева, але при цьому геометрія дерев не відповідає геометрії реальних судинних систем внутрішніх органів, які компактно займають певний об'єм простору [2]. Для тривимірних областей задача генерації розгалужених транспортних систем у вигляді бінарних дерев без самоперетинів на сьогодні остаточно не вирішена [3].

У випадку системи кровообігу актуальність теми обумовлена складністю будови серцево-судинної системи, а також необхідністю знання повної геометричної моделі судинної системи для розрахунків швидкості кровотоку, артеріального тиску, провідності системи та її підсистем для стаціонарного та хвильового руху крові [4, 5]. Останнім часом стають актуальними задачі генерації індивідуалізованих систем кровоносних судин пацієнта для кількісної оцінки гемодинамічних порушень та планування засобів лікування на основі детальних чисельних розрахунків, наприклад, на системі коронарних артерій людини за наявності стенозів [5]. В даній роботі така задача розглядається у більш загальному випадку кровоносної системи довільного органу людини.

2. Закономірності будови судинних систем внутрішніх органів

Не зважаючи на складність і індивідуальність будови судинних систем різних органів, статистичний аналіз результатів чисельних вимірювань на анатомічних препаратах, ангиограмах, комп'ютерних томограмах та інших медичних зображеннях [4, 5, 6] показав, що існують принципи будови біфуркацій судин (рис. 1), а саме:

- 1) якщо $d_1 \approx d_2$, то $\alpha_1 \approx \alpha_2$,
- 2) якщо $d_1 < d_2$, то $\alpha_1 > \alpha_2$,
- 3) якщо $d_1 < d_2$ і $d_0 \approx d_2$, то $\alpha_1 \approx 90^\circ$, $\alpha_2 \approx 0^\circ$;

де d_0 – діаметр батьківської судини, $d_{1,2}$ і $\alpha_{1,2}$ – діаметри та кути розгалуження двох дочірніх судин.

Діаметри судин $d_{0,1,2}$ в біфуркації зв'язані між собою наступним співвідношенням (закон Мюррея) [4, 6]:

$$d_0^3 = d_1^3 + d_2^3, \quad (1)$$

причому $\gamma \approx 3$. Так, $\gamma \in [2.55, 3.02]$ і $\gamma \in [2.76, 3.02]$ для артеріальних та венозних систем, $\gamma \in [2.61, 2.91]$ для бронхіального дерева [6].

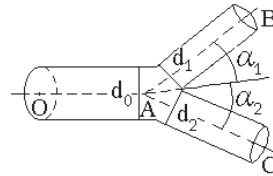


Рис. 1. Схема біфуркації судин в бінарному дереві

Для кутів розгалуження в біфуркаціях виконуються співвідношення [6]:

$$\alpha_1 = \arccos\left(\frac{((1 + \xi^3)^{4/3} + 1 - \xi^4) / (1 + \xi^3)^{2/3}}{2}\right), \quad (2)$$

$$\alpha_2 = \arccos\left(\frac{((1 + \xi^3)^{4/3} \xi^4 - 1) / (1 + \xi^3)^{2/3}}{\xi^2 / 2}\right);$$

де $\xi = \min\{d_1, d_2\} / \max\{d_1, d_2\}$ – коефіцієнт асиметрії біфуркації.

Для довжин сегментів виконуються алометричні співвідношення [5]:

$$L_j = \alpha d_j^\beta, \quad (3)$$

де $\alpha \in [2.6, 7.59]$, $\beta \in [0.84, 1.16]$ (в середньому $\beta \sim 1$). Для внутрішньо-органних артеріальних систем були також запропоновані апроксимації залежностей $L_j(d_j)$ поліномами, причому виявлені шляхом вимірювань на препаратах залежності є специфічні для різних органів [5].

На відповідних математичних моделях було показано, що співвідношення (1)–(2) є необхідними умовами локальної [4, 6] і глобальної [2] оптимальності бінарного дерева в сенсі критерію $S \rightarrow \min$. В даній роботі розглядаються бінарні дерева, геометрія яких визначається умовами (1)–(3), а задачею є розробка алгоритму, який дозволяє згенерувати таке дерево, яке не має самоперетинів та забезпечує однорідне постачання рідини [7].

Оскільки в артеріальних системах мінімальний діаметр провідних елементів – це діаметр капілярних судин $d_{\min} \sim 5$ мкм, то при заданому діаметрі d_0 кореневої (живлячої) судини можна розрахувати число генерацій у відповідному бінарному дереві. Для симетричних біфуркацій з (1) випливає, що $d_{j+1}/d_j \sim 0.8$ і, таким чином, зага-

льне число генерацій можна оцінити за формулою

$$N = 1 - \frac{\log(d_{\min} / d_0)}{\log(0.8)},$$

яка для d_0 в межах 5÷10 мм дає $N \sim 30$ генерацій, що відповідає будові артеріальної системи легенів, нирок та ряду інших органів.

3. Огляд існуючих алгоритмів

В літературі представлені тільки методи побудови і 3-d візуалізації бінарних дерев, геометрія яких визначається алгоритмом побудови та не підкоряється умовам у вигляді (1)–(3). Ці методи умовно можна розділити на два класи: побудова та візуалізація дерев на основі зв'язків між вузлами, та дерев, що заповнюють простір. Класичними підходами візуалізації дерев на основі зв'язків між вузлами є:

- порівняв розміщення ребер і вузлів на конусі або циліндрі; у цьому випадку вершини одного рівня лежать на колі;
- побудова так званого конусного дерева, в якому корінь кожного піддерева знаходиться в вершині деякого конуса, а його нащадки розміщені на основі цього конуса;
- ортогональні способи розміщення дерева, при яких його вузли розташовані на вузлах просторової решітки, яка найчастіше має цілочисельні координати. Основою цих методів є метод Фері [8].

Для просторової візуалізації дерев також використовуються адаптації 2-d візуалізації за допомогою представлення дерева як фізичної системи: при цьому потрібно розрахувати розташування вузлів дерева так, щоб мінімізувати сумарну енергію системи. До таких моделей візуалізації відносяться силова і пружинна моделі [9].

Гіперболічний метод візуалізації оснований на існуванні двох канонічних способів відображення гіперболічної площини на внутрішність круга евклідової площини: конформна модель Пуанкаре, яка зберігає кути, але перетворює лінії гіперболічного простору в дуги одиничного кола, і модель Клейна, яка відображає лінії гіперболічного простору в прямі лінії на площині, але спотворює кути [10]. Цей метод використовується для побудови спеціалізованих систем візуалізації графів, які мають велику кількість вузлів, зокрема структур гіперпосилань сайтів в мережі Інтернет.

Другий клас уявлення та візуалізації дерев – це дерева, що заповнюють простір (space-filling trees), для яких кожна точка простору, в якому розташоване дерево, має шлях кінцевої довжини, який сходиться до цього дерева; при цьому дерево найчастіше має фрактальну (самоподібну) структуру. Приклади таких дерев – L -системи, що використовуються в графічних редакторах, самоподібне бінарне дерево та дерево, яке задане в термінах ланцюгового кодування [11]. Недолік останнього підходу в реалізації лише ортогональних поворотів біфуркацій елементів. Для більшої реалістичності вводяться бінарні дерева з S -образними сегментами, що апроксимуються сплайнами, параметри яких задані на основі деяких законів.

Аналогічні підходи і алгоритми використовуються в роботах, які пов'язані з алгоритмами колонізації простору (space colonization algorithms), наприклад, у вигляді самоподібної триангуляції простору або просторовими патернами типу дифузійно-лімітованої агрегації (diffusion-limited aggregation), які розраховуються на основі рішення рівняння Пуассона в області із заданими границями. У цьому випадку на генерованому бінарному дереві можуть бути проведені розрахунки гемодинамічних характеристик, наприклад, тиску в кожному елементі, але без урахування умов (1)–(3).

4. Опис запропонованого алгоритму

Означення 1. Назвемо біфуркацією площину, що містить чотири вузли O, A, B, C та три судини (рис. 2): батьківський (OA) і два дочірніх (AB, AC), при цьому кути розгалуження $\alpha_{1,2}$ в біфуркації відповідають умові (2). На рис. 2 біфуркація O, A, B, C належить площині (I), а біфуркація A, B, D, E – площині (II), причому (I) і (II) не збігаються.

Означення 2. Назвемо віссю біфуркації пряму, яка є віссю симетрії батьківської трубки OA (рис. 2).

Означення 3. Будемо вважати, що має місце перетин трубок, якщо яка-небудь відстань h_{ij} між осями будь-якої пари трубок з першої і другої біфуркації задовольняє умові $h_{ij} \leq (d_i + d_j) / 2$, причому одна біфуркація не є безпосереднім нащадком іншої. Таким чином, кількість перетинів двох біфуркацій може приймати тільки цілочисельні значення. Числом перетинів в дереві будемо називати суму пересічень всіх біфуркацій у дереві.

Означення 4. Назвемо поворотом дерева поворот площини кожної біфуркації в дереві на деякий заданий кут навколо її вісі. Поворот дерева є основою запропонованого в роботі методу і дозволяє практично повністю усунути перетини між трубками в 3-d моделі дерева.

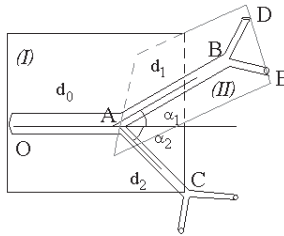


Рис. 2. Схема будови 3-d дерева, як сукупності 2-d площин, які містять послідовні біфуркації

Результуюча кількість перетинів, а значить і ефективність методу, залежить тільки від кута повороту, що обумовлює важливість його правильного визначення. Даний метод передбачає два варіанти визначення: ручну і автоматичну за допомогою перебору всіх кутів повороту в заданому інтервалі з заданим кроком. При визначенні кута повороту для візуалізації розгалужених систем, які описують один клас дерев, наприклад, артеріальні русла, для збільшення ефективності роботи методу можна використовувати статистичний аналіз кореляцій (САК) кута повороту і числа перетинів з метою пошуку оптимального кута повороту, який мінімізує кількість перетинів. Було показано [7], що використання кореляцій дозволяє мінімізувати загальне число перетинів після кожного повороту дерева. У зв'язку з тим, що в плоскій біфуркації не має різниці в тому, який з вузлів (В або С) «лівий», а який «правий», можна міняти їх місцями, зберігаючи відношення успадкування і не порушуючи планарну геометрію кожної біфуркації. Для розробки алгоритму повороту дерева шляхом мінімізації числа вихідних перетинів введемо наступні означення.

Означення 5. Назвемо сумарною довжиною ребер елемента суму довжин усіх його нащадків, включаючи його власну довжину.

Означення 6. Назвемо центральною віссю дерева вісь початкового батьківського елемента цього дерева.

Означення 7. Назвемо перерозподілом бінарного дерева зміну розташування з «лівого» на «праве» між нащадками двох дочірніх елементів даного вузла так, щоб дочірній елемент з меншою сумарною довжиною ребер знаходився най-

ближче до вісі дерева, а елемент більшою сумарною довжиною ребер – далі.

Як показали попередні дослідження [7], процедура перерозподілу дозволяє винести піддерева з більшою кількістю і/або більшими сумарними довжинами ребер на периферію дерева, що збільшує займану ним площу, зменшує число пересічень та сприяє більш однорідному розподілу кінцевих трубок (рис. 3).

Означення 8. Назвемо зменшенням перетину біфуркації процес, при якому з пари пересічних біфуркацій вибирається одна з меншою сумарною довжиною нащадків і повертається на деякий кут, який зменшує загальну кількість перетинів. Процес обходу дерева від кореня до кінцевих трубок зі зменшенням перетину для кожної біфуркації назвемо зменшенням числа перетинів (ЗЧП). При цьому необхідно знайти для кожного зменшення такий кут повороту, при якому число перетинів буде мінімальним. Цей кут розшукується шляхом перебору на основі методу САК, який був досліджений в [11]. Для оцінки числа перетинів між відрізками прямих у просторі використано алгоритм Еберлі [12].

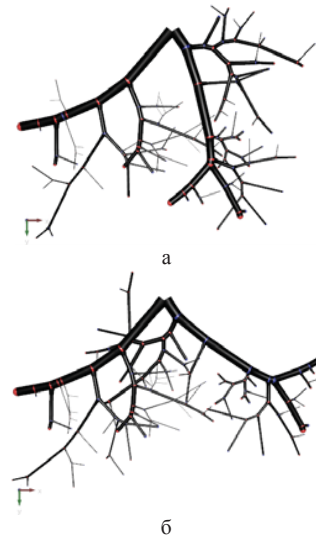


Рис. 3. Приклад бінарного дерева до (а) та після (б) перерозподілу

5. Програмна реалізація

Під час роботи розробленого алгоритму для заданої геометрії дерева (діаметри, довжини, кути розгалуження, послідовність розташування

трубок) спочатку викликається функція перерозподілу, потім функція найкращого повороту дерева, а за нею – функція зменшення числа перетинів. При незадовільному результаті остання функція може бути викликана повторно, до повного усунення перетинів. Вартість роботи алгоритму в найгіршому випадку є кубічна функція кількості вузлів [8].

Для чисельних розрахунків розподілу тиску та швидкості руху крові в системі було використано розв'язок лінеаризованої системи рівнянь Нав'є – Стокса у вигляді плоских хвиль, що біжать по в'язкопружним трубкам [13]. З урахуванням відбиття хвиль на розгалуженнях розв'язки для хвиль тиску $P_j(t, x_j)$ та об'ємної витрати $Q_j(t, x_j)$ мають вигляд:

$$\begin{aligned} P_j(t, x_j) &= P_j^0 (e^{i\omega(t-x_j/c_j)} + \Gamma_j e^{i\omega(t+(x_j-2L_j)/c_j)}), \\ Q_j(t, x_j) &= Y_j^0 P_j^0 (e^{i\omega(t-x_j/c_j)} - \Gamma_j e^{i\omega(t+(x_j-2L_j)/c_j)}); \end{aligned} \quad (4)$$

де $c_j = \sqrt{\frac{E_j h_j (1 - F_{01})}{\rho d_j (1 - \sigma_j^2)}} e^{i\theta_j}$ – швидкість пульсової хвилі; $P_j^0 = P_j|_{x_j=0}$ – амплітуда на вході в j -ту трубку; $x_j \in [0, L_j]$ – поздовжня координата; $d_j, L_j, h_j, E_j, \sigma_j, \theta_j$ – діаметр, довжина, товщина стінки, модуль пружності, коефіцієнт Пуассона та в'язкість стінки; $F_j = 2J_1(\beta_j)/(J_0(\beta_j))$, $\beta_j = \alpha_j i^{3/2}$, $\alpha_j = d_j \sqrt{\omega \rho / \mu} / 2$; ρ, μ – щільність та в'язкість крові; $Y_j^0 = (\pi d_j^2)/(4\rho c_j)$ – вхідна хвильова провідність трубки; Γ_j – коефіцієнт відбиття хвиль; ω – кругова частота хвилі.

Розрахунки термінальної хвильової провідності Y_j^0 для кожної трубки дерева проводилися шляхом складання провідностей трубок, які сполучені паралельно, або їх зворотних величин – у випадку послідовного сполучення. Так, на рис. 2 для трубки АВ термінальною є сума провідностей трубок BD та BE і т. д. Для стаціонарної компоненти Фур'є-розкладання аналогічним чином підсумовувалися значення Пуазейлевських провідностей трубок.

6. Результати розрахунків та обговорення

Приклад результатів чисельних розрахунків розподілу середнього за серцевий цикл артеріального тиску в системі, геометрія якої відповідає коронарним артеріям людини, наведений на

рис. 4. Розроблене програмне забезпечення дозволяє робити повороти моделі навколо координатних осей, збільшувати модель, щоб мати можливість детальніше дослідити розподілення окремих трубок та значення тиску, об'ємної витрати крові та в'язких напружень на стінках трубок. Проведене моделювання стенозів 3 крупних артерій (стрілки на рис. 4) та впливу стентування кожного з них окремо на відновлення кровотоку.



Рис. 4. Розподілення артеріального тиску в моделі системи коронарних артерій людини

Розроблений підхід дозволяє змінювати діаметри окремих трубок і, таким чином, моделювати стенози або аневризми, розраховувати наскільки критичними стають значення тиску та в'язкого напруження для подальшого розвитку патології, або моделювати вплив стентування того чи іншого стенозу в моделі на відновлення нормального кровопостачання органу.

7. Висновки

В роботі запропоновано новий ефективний алгоритм генерації моделі артеріальної або іншої транспортної системи у вигляді бінарного дерева трубок із заданими діаметрами, довжинами та кутами розгалуження, яке заповнює об'єм без самоперетинів, що відповідає будові систем живої природи. Алгоритм швидко реалізує 3-d візуалізацію дерев, які мають 100–1000 трубок.

Використана математична модель дозволяє швидко розраховувати хвильову провідність кожної підсистеми дерева і, таким чином, проводити розрахунки коливань тиску та швидкості в кожній трубці дерева. Зокрема проведено моделювання звуження (стенозу) на постачання рідини до кінцевих трубок. Модель може бути використана в медичній діагностиці та для планування лікувальних заходів *in silico* на індивідуальній моделі судинної системи пацієнта.

Список використаних джерел

1. Kjelstrup S. Non-equilibrium Thermodynamics of Heterogeneous Systems / S. Kjelstrup, D. Bedeaux. – World Sci. Pub., 2008. – 434 p.
2. Черноусько Ф. Л. Оптимальная структура ветвящихся трубопроводов / Ф. Л. Черноусько // Прикл. матем. мех. – 1977. – Т. 41, № 2. – С. 376–383.
3. LaValle S. M. Planning Algorithms / S. M. LaValle. – Cambridge: Cambridge University Press, 2006. – 842 p.
4. Kizilova N. N. Computational approach to optimal transport network construction in biomechanics / N. N. Kizilova // Lecture Notes in Computer Sci. – 2004. – Vol. 3044. – P. 476–485.
5. Зенин О.К. Артериальная система человека в цифрах и формулах. / О. К. Зенин. – Донецк: Журнал «Донбасс», 2002. – 196 с.
6. Розен Р. Принцип оптимальности в биологии / Р. Розен. – Москва: Мир, 1968. – 212 с.
7. Balabanov V. A. Mathematical modeling and comparison of efficiency of 3D fluid-conveying networks / V. A. Balabanov, N. N. Kizilova // «Modern Informatics: Problems, Achievements, and Prospects of Development»: International Scientific Conference, 12–13 September 2013, Kyiv, Ukraine: Book of Abstracts. – 2013. – P. 125–126.
8. Three-dimensional graph drawing / [R. F. Cohen, P. Eades, T. Lin, F. Ruskey] // Algorithmica. – 1997. – Vol. 17. – P. 199–208.
9. Kamada T. An algorithm for drawing general undirected graphs / T. Kamada, S. Kawai // Inform. Process. Lett. – 1989. – Vol. 31. – P. 7–15.
10. Касьянов В. Н. Визуализация информации на основе графовых моделей / В. Н. Касьянов // «Математические и информационные технологии, MIT-2013»: международная конференция, 5–14 сентября 2013, Врнячка Бая, Сербия; Будва, Черногория: сборник материалов конференции. – 2013. – С. 312–321.
11. Bribiesca E. Plane-and space-filling trees by means of chain coding / E. Bribiesca, N. Espinosa-Dominguez // J. Appl. Res. Technol. – 2011. – Vol. 9, № 2. – P. 145–155.
12. Eberly D. Robust Computation of Distance Between Line Segments / D. Eberly. – Geometric Tools, LLC., 2015. – 14 p.
13. Milnor W.R. Hemodynamics / W. R. Milnor. – Baltimore: Williams & Wilkins., 1989. 419 p.

References

1. KJELSTRUP, S. & BEDEAUX, D. (2008) *Non-equilibrium Thermodynamics of Heterogeneous Systems*. World Sci. Pub.
2. CHERNOUS'KO, F. L. (1977) Optimal structures of branching pipelines. *J. Appl. Math. Mech.* 41 (2). p. 373–381.
3. LAVALLE, S. M. (2006) *Planning Algorithms*. Cambridge: Cambridge University Press.
4. KIZILOVA, N. N. (2004) Computational approach to optimal transport network construction in biomechanics. *Lecture Notes in Computer Sci.* 3044. p. 476–485.
5. ZENIN, O. K. (2002) *Arterialnaya Sistema Cheloveka v Tsifrakh i Formulakh*. Donetsk: Zhurnal «Donbass».
6. ROZEN, R. (1968) *Printsip Optimalnosti v Biologii*. Moskva: Mir.
7. BALABANOV, V. A. & KIZILOVA, N. N. (2013) Mathematical modeling and comparison of efficiency of 3D fluid-conveying networks. In *Modern Informatics: Problems, Achievements, and Prospects of Development*. Kyiv, Ukraine, 12–13 September 2013. p. 125–126.
8. COHEN, R. F. et al. (1997) Three-dimensional graph drawing. *Algorithmica*. 17. p. 199–208.
9. KAMADA, T. & KAWAI, S. (1989) An algorithm for drawing general undirected graphs. *Inform. Process. Lett.* 31. p. 7–15.
10. KASYANOV, V. N. (2013) Vizualizatsiya informatsii na osnove grafovyykh modeley. In *Matematicheskie i Informatsionnye Tekhnologii, MIT-2013*. Vrnayachka Banya, Serbiya; Budva, Chernogoriya, 5–14 September 2013. p. 312–321.
11. BRIBIESCA, E. & ESPINOSA-DOMINGUEZ, N. (2011) Plane-and space-filling trees by means of chain coding. *J. Appl. Res. Technol.* 9 (2). p. 145–155.
12. EBERLY, D. (2015) *Robust Computation of Distance between Line Segments*. Geometric Tools, LLC.
13. MILNOR, W. R. (1989) *Hemodynamics*. Baltimore: Williams & Wilkins.

Надійшла до редколегії 30.09.15

УДК 539.3

Бобильова Т. М., к. ф.-м. н., доц.

**Рівняння для визначення власних
частот осесиметричних коливань
порожнистої пружної кулі**

Національний дослідницький Московський
державний будівельний університет, 129337,
м. Москва, Ярославське шосе, 26
e-mail: bobyleva-tn@yandex.ru

T. N. Bobyleva, Ph. D. (Phys.-Math.), Assoc. Prof.

**The equation for determining the natural
frequencies of axisymmetric oscillations of
a hollow elastic sphere**

Moscow State University of Civil Engineering,
129337, Moscow, Yaroslavskoe shosse, 26
e-mail: bobyleva-tn@yandex.ru

В роботі отримано рівняння для визначення резонансних частот осесиметричних коливань порожнистої ізотропної пружної кулі. Використано загальний розв'язок векторного рівняння руху тривимірної теорії пружності в сферичній системі координат. Це рівняння може бути використано в граничних задачах для довільно навантажених просторових тіл, всі три виміри яких приблизно однакові, в динамічних задачах для високочастотних коливань. Частотні рівняння чисто радіальних коливань суцільної і порожнистої кулі, що є в літературі, приведені як окремі випадки.

Ключові слова: резонансні коливання, власна частота, ізотропна порожниста куля, осесиметричні коливання.

In the article we use three-dimensional elasticity theory equation of motion in terms of displacements for a homogeneous elastic isotropic medium in order to obtain the equation for the resonant frequencies of axisymmetric vibrations of an isotropic elastic hollow sphere. The general solution that represents the Lamé vector decomposition in spherical coordinates is used. The case of simple harmonic oscillations in time is considered. As usual, values of the stress components at the boundary surfaces is set equal to zero. As a result, we get a system of four homogeneous algebraic equations for constants of integration. From equating to zero of the main determinant of this system, we obtain the equation for resonant frequencies. This equation can be used, for example, in boundary problems for arbitrarily loaded spatial bodies that have all three dimensions of approximately same size; also in dynamic problems for high-frequency oscillations. The frequency equations of purely radial vibrations of solid and hollow spheres that are available in the literature were obtained from this equation and were given as special cases.

Key Words: Resonant Vibrations, Natural Frequency, Isotropic Hollow Sphere, Axisymmetric Oscillations.

1. Introduction

Continuous improvement of modern technology puts new demands on the research in the field of mechanics to obtain more accurate representations of mechanical properties of elastic bodies under dynamic loading. The analysis of the natural vibrations of deformable objects has an important place in theoretical analysis. Currently there are a large number of works about the oscillations of spherical bodies. In this article the solution to the problem of resonant vibrations of an isotropic hollow sphere is based on the full three-dimensional system of elasticity theory equations. It can be used in both boundary problems: for arbitrarily loaded spatial bodies having all three dimensions of approximately equal size; and in dynamic problems for high-frequency oscillations.

2. Statement of the problem and its solution

Three-dimensional elasticity theory equation of motion in terms of displacements—Lamé equation for a homogeneous elastic isotropic medium—has the form [1, 2]:

$$2 \frac{m-1}{m-2} \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} - \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{u} = \frac{\rho}{G} \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}, \quad (1)$$

where $\mathbf{u}$ is the vector of elastic displacements, m is Poisson's number, G is the shear modulus, ρ is the material density, t is the time coordinate. The formula of general solution to dynamic problems of elasticity theory in the spherical coordinate system can be written as the Lamé vector decomposition [2]. In the case of simple harmonic oscillations in time with

circular frequency ω , the solution to equation (1) can be represented as [2]:

$$\mathbf{u} = e^{i\omega t} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=-n}^n \left[u_n^k(r, \omega) L_n^k(\theta, \phi) + v_n^k(r, \omega) M_n^k(\theta, \phi) + w_n^k(r, \omega) N_n^k(\theta, \phi) \right],$$

where the vector harmonics denoted as:

$$L_n^k(\theta, \phi), M_n^k(\theta, \phi), N_n^k(\theta, \phi).$$

After substitution of this expansion into equation of motion (1), we obtain a system of ordinary differential equations for the unknown radial functions $u_n^{(k)}(r, \omega)$, $v_n^{(k)}(r, \omega)$. The solution of system contains the Bessel functions of half-integer index [2]:

$$\begin{aligned} \ddot{u}_n^{(k)}(r, \omega) &= \frac{A_n^{(k)}}{k_1^2} \frac{d}{dr} \left(r^{-\frac{1}{2}} J_{n+\frac{1}{2}}(k_1 r) \right) + \\ &+ \frac{B_n^{(k)}}{k_1^2} \frac{d}{dr} \left(r^{-\frac{1}{2}} J_{-n-\frac{1}{2}}(k_1 r) \right) + \frac{C_n^{(k)}}{k_2^2} r^{-\frac{3}{2}} J_{n+\frac{1}{2}}(k_2 r) + \\ &+ \frac{D_n^{(k)}}{k_2^2} r^{-\frac{3}{2}} J_{-n-\frac{1}{2}}(k_2 r), \\ n(n+1) \dot{v}_n^{(k)}(r, \omega) &= \frac{n(n+1)}{k_1^2} A_n^{(k)} r^{-\frac{3}{2}} J_{n+\frac{1}{2}}(k_1 r) + \\ &+ \frac{n(n+1)}{k_1^2} B_n^{(k)} r^{-\frac{3}{2}} J_{-n-\frac{1}{2}}(k_1 r) + \\ &+ \frac{C_n^{(k)}}{r k_2^2} \frac{d}{dr} \left(r^{\frac{1}{2}} J_{n+\frac{1}{2}}(k_2 r) \right) + \\ &+ \frac{D_n^{(k)}}{k_2^2} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r^{\frac{1}{2}} J_{-n-\frac{1}{2}}(k_2 r) \right). \end{aligned} \quad (2)$$

Here, and in what follows, we consider only the case of axisymmetric vibrations ($k=0$); $k_1 = \omega / c_1$, $k_2 = \omega / c_2$; $c_1 = c_2 \sqrt{2(m-1)/(m-2)}$ is the velocity of compression waves, $c_2 = \sqrt{G/\rho}$ is the velocity of shear waves.

Further, assume that the values of stress components $\sigma_r(\theta, \phi)$ and $\sigma_{r\theta}(\theta, \phi)$ are set equal to zero at the boundary surfaces. Then, we substitute the radial functions (2) into these boundary conditions, written in the form:

$$\left[\frac{1}{m-2} \left(\frac{1}{r^2} \frac{d(r^2 u_n^{(k)})}{dr} - \frac{n(n+1)}{r} v_n^{(k)} \right) + \right.$$

$$\left. + \frac{d u_n^{(k)}}{dr} \right] = 0, \quad r = r_j, \quad j = 0, 1;$$

$$\left[r \frac{d}{dr} \left(\frac{v_n^{(k)}}{r} \right) + \frac{u_n^{(k)}}{r} \right] = 0, \quad r = r_j, \quad j = 0, 1;$$

where $r_0 = r$, $r_1 = R$; r and R are the radii of the inner and the outer boundary spheres, respectively. As a result, we obtain the system of four homogeneous algebraic equations with the constants of integration $A_n^{(k)}$, $B_n^{(k)}$, $C_n^{(k)}$, $D_n^{(k)}$:

$$\begin{aligned} &\left[\frac{1}{k_1^2} \frac{d^2}{dr^2} \left(r^{-\frac{1}{2}} J_{n+\frac{1}{2}}(k_1 r) \right) - \frac{r^{-\frac{1}{2}}}{m-2} J_{n+\frac{1}{2}}(k_1 r) \right] A_n^{(k)} + \\ &+ \left[\frac{1}{k_1^2} \frac{d^2}{dr^2} \left(r^{-\frac{1}{2}} J_{-n-\frac{1}{2}}(k_1 r) \right) - \right. \\ &\left. - \frac{r^{-\frac{1}{2}}}{m-2} J_{-n-\frac{1}{2}}(k_1 r) \right] B_n^{(k)} + \\ &+ \frac{1}{k_2^2} \frac{d}{dr} \left(r^{-\frac{3}{2}} J_{n+\frac{1}{2}}(k_2 r) \right) C_n^{(k)} + \\ &+ \frac{1}{k_2^2} \frac{d}{dr} \left(r^{-\frac{3}{2}} J_{-n-\frac{1}{2}}(k_2 r) \right) D_n^{(k)} = 0, \quad r = r_j, \quad j = 0, 1; \\ &\left[\frac{n(n+1)}{k_1^2} \frac{d}{dr} \left(r^{-\frac{3}{2}} J_{n+\frac{1}{2}}(k_1 r) \right) \right] A_n^{(k)} + \\ &+ \left[\frac{n(n+1)}{k_1^2} \frac{d}{dr} \left(r^{-\frac{3}{2}} J_{-n-\frac{1}{2}}(k_1 r) \right) \right] B_n^{(k)} + \\ &+ \left[\frac{1}{k_2^2} \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r^{\frac{1}{2}} J_{n+\frac{1}{2}}(k_2 r) \right) \right) + \right. \\ &\left. + \frac{r^{-\frac{1}{2}}}{2} J_{n+\frac{1}{2}}(k_2 r) \right] C_n^{(k)} + \\ &+ \left[\frac{1}{k_2^2} \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r^{\frac{1}{2}} J_{-n-\frac{1}{2}}(k_2 r) \right) \right) + \right. \\ &\left. + \frac{r^{-\frac{1}{2}}}{2} J_{-n-\frac{1}{2}}(k_2 r) \right] D_n^{(k)} = 0, \quad r = r_j, \quad j = 0, 1; \end{aligned}$$

The values of circular frequency ω , for which the main determinant of this system disappears, are the resonant frequencies of axisymmetric vibrations of a hollow sphere.

Therefore, we have the following determinant of fourth order:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} \end{vmatrix} = 0, \quad (3)$$

where

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{(n+1)(n+2)}{k_1^2} r^{-\frac{5}{2}} J_{n+\frac{1}{2}}(k_1 r) - \\ &\quad - \frac{2}{k_1} r^{-\frac{3}{2}} J_{n-\frac{1}{2}}(k_1 r) - \frac{m-1}{m-2} r^{-\frac{1}{2}} J_{n+\frac{1}{2}}(k_1 r), \\ a_{12} &= \frac{(n+1)(n+2)}{k_1^2} r^{-\frac{5}{2}} J_{-n-\frac{1}{2}}(k_1 r) + \\ &\quad + \frac{2}{k_1} r^{-\frac{3}{2}} J_{-n+\frac{1}{2}}(k_1 r) - \frac{m-1}{m-2} r^{-\frac{1}{2}} J_{-n-\frac{1}{2}}(k_1 r), \\ a_{13} &= -\frac{n+2}{k_2^2} r^{\frac{5}{2}} J_{n+\frac{1}{2}}(k_2 r) + \frac{1}{k_2} r^{\frac{3}{2}} J_{n-\frac{1}{2}}(k_2 r), \\ a_{14} &= -\frac{n+2}{k_2^2} r^{\frac{5}{2}} J_{-n-\frac{1}{2}}(k_2 r) - \frac{1}{k_2} r^{\frac{3}{2}} J_{-n+\frac{1}{2}}(k_2 r), \\ a_{21} &= -\frac{n(n+1)(n+2)}{k_1^2} r^{-\frac{5}{2}} J_{n+\frac{1}{2}}(k_1 r) + \\ &\quad + \frac{n(n+1)}{k_1} r^{-\frac{3}{2}} J_{n-\frac{1}{2}}(k_1 r), \\ a_{22} &= -\frac{n(n+1)(n+2)}{k_1^2} r^{-\frac{5}{2}} J_{-n-\frac{1}{2}}(k_1 r) - \\ &\quad - \frac{n(n+1)}{k_1} r^{-\frac{3}{2}} J_{-n+\frac{1}{2}}(k_1 r), \\ a_{23} &= \frac{n(n+2)}{k_2^2} r^{\frac{5}{2}} J_{n+\frac{1}{2}}(k_2 r) - \frac{1}{k_2} r^{\frac{3}{2}} J_{n-\frac{1}{2}}(k_2 r) - \\ a_{24} &= \frac{n(n+2)}{k_2^2} r^{\frac{5}{2}} J_{-n-\frac{1}{2}}(k_2 r) + \frac{1}{k_2} r^{\frac{3}{2}} J_{-n+\frac{1}{2}}(k_2 r) - \\ &\quad - \frac{1}{2} r^{\frac{1}{2}} J_{-n-\frac{1}{2}}(k_2 r), \quad n=0,1,2,\dots \end{aligned}$$

The coefficients b_{ij} ($i=3,4$; $j=1,2,3,4$) are derived from a_{ij} with the replacement r by R , for example:

$$\begin{aligned} b_{31} &= \frac{(n+1)(n+2)}{k_1^2} R^{-\frac{5}{2}} J_{n+\frac{1}{2}}(k_1 R) - \\ &\quad - \frac{2}{k_1} R^{-\frac{3}{2}} J_{n-\frac{1}{2}}(k_1 R) - \frac{m-1}{m-2} R^{-\frac{1}{2}} J_{n+\frac{1}{2}}(k_1 R). \end{aligned}$$

Next, for brevity, let us introduce the following notations:

$$\begin{aligned} n(n+2)(n-1) + k_2^2 r^2 &= a, \\ n(n+2)(n-1) + k_2^2 R^2 &= A, \\ (n+1)(n+2)(n-1) + dk_1^2 r^2 &= f, \\ (n+1)(n+2)(n-1) + dk_1^2 R^2 &= F, \\ r[k_2^2(n+1)(n+2) + 2dn(n+2)k_1^2 - dk_1^2 k_2^2 r^2] &= h, \\ R[k_2^2(n+1)(n+2) + 2dn(n+2)k_1^2 - dk_1^2 k_2^2 R^2] &= H, \\ n(n+1) - 2 &= j, \quad d = \frac{m-1}{m-2}, \\ B_1 &= J_{n-\frac{1}{2}}(k_1 r) J_{-n+\frac{1}{2}}(k_1 R) - J_{-n+\frac{1}{2}}(k_1 r) J_{n-\frac{1}{2}}(k_1 R), \\ b_1 &= J_{n+\frac{1}{2}}(k_2 r) J_{-n-\frac{1}{2}}(k_2 R) - J_{-n-\frac{1}{2}}(k_2 r) J_{n+\frac{1}{2}}(k_2 R), \\ B_2 &= J_{n+\frac{1}{2}}(k_1 r) J_{-n+\frac{1}{2}}(k_1 R) + J_{-n-\frac{1}{2}}(k_1 r) J_{n-\frac{1}{2}}(k_1 R), \\ b_2 &= J_{-n+\frac{1}{2}}(k_2 r) J_{n+\frac{1}{2}}(k_2 R) + J_{n-\frac{1}{2}}(k_2 r) J_{-n-\frac{1}{2}}(k_2 R), \\ B_3 &= J_{-n+\frac{1}{2}}(k_1 r) J_{n-\frac{1}{2}}(k_1 R) - J_{n-\frac{1}{2}}(k_1 r) J_{-n+\frac{1}{2}}(k_1 R), \\ b_3 &= J_{-n+\frac{1}{2}}(k_2 r) J_{n+\frac{1}{2}}(k_2 R) - J_{n+\frac{1}{2}}(k_2 r) J_{-n-\frac{1}{2}}(k_2 R), \\ B_4 &= J_{n-\frac{1}{2}}(k_1 r) J_{-n+\frac{1}{2}}(k_1 R) + J_{-n+\frac{1}{2}}(k_1 r) J_{n+\frac{1}{2}}(k_1 R), \\ b_4 &= J_{-n-\frac{1}{2}}(k_2 r) J_{n-\frac{1}{2}}(k_2 R) + J_{n+\frac{1}{2}}(k_2 r) J_{-n+\frac{1}{2}}(k_2 R), \\ B_5 &= J_{n+\frac{1}{2}}(k_1 r) J_{-n-\frac{1}{2}}(k_1 R) - J_{-n-\frac{1}{2}}(k_1 r) J_{n+\frac{1}{2}}(k_1 R), \\ b_5 &= J_{n-\frac{1}{2}}(k_2 r) J_{-n+\frac{1}{2}}(k_2 R) - J_{-n+\frac{1}{2}}(k_2 r) J_{n-\frac{1}{2}}(k_2 R), \\ B_6 &= J_{-n-\frac{1}{2}}(k_1 r) J_{n+\frac{1}{2}}(k_1 R) - J_{n+\frac{1}{2}}(k_1 r) J_{-n-\frac{1}{2}}(k_1 R), \\ b_6 &= J_{-n+\frac{1}{2}}(k_2 r) J_{n-\frac{1}{2}}(k_2 R) - J_{n-\frac{1}{2}}(k_2 r) J_{-n+\frac{1}{2}}(k_2 R). \end{aligned}$$

The equation for determining resonant frequencies of axisymmetric vibrations of a hollow sphere, using equation (3), takes the following form:

$$\begin{aligned} & \pi^2 r R (2k_1^2 a A b_1 B_1 + 2k_1 k_2 f A b_2 B_2 + 2k_1^2 k_2 j A r b_2 B_3 + \\ & + k_1 h A b_3 B_3 + 2k_1 k_2 a F b_4 B_4 + 2k_2^2 f F b_5 B_5 + \\ & + 2k_1 k_2^2 j F r b_6 B_6 + k_2 h F b_4 B_6 + \\ & + 2k_1^2 k_2 a j R b_4 B_1 + 2k_1 k_2^2 f j R b_5 B_2 + \\ & + 2k_1^2 k_2^2 j^2 r R b_6 B_1 - k_1 k_2 h j R b_4 B_2 + \\ & + k_1 a H b_1 B_4 + k_2 f H b_2 B_5 - k_1 k_2 j H r b_2 B_4 + \frac{h}{2} H b_3 B_5) + \\ & + 4n(n+1)[(n+2)(n-1)(2k_1^2 d + k_2^2)(r^2 + R^2) - \\ & - 2k_1^2 k_2^2 d r^2 R^2 - 4(n+2)^2(n-1)^2] = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

The frequency equations of radial vibrations of solid and hollow spheres are derived as particular cases from this equation. Natural frequencies of radial vibrations of a sphere obtained from equation (4) coincide with results already known in literature. For example, if $n=0$ taking into account the formulae [3]

$$J_{\frac{1}{2}}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sin z, \quad J_{-\frac{1}{2}}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos z,$$

frequency equation (4) takes the form:

$$\{k_1^2[2d(R^2 + r^2) - 4rR - k_1^2 d^2 r^2 R^2] - 4\} \sin k_1(R-r) + 2k_1^2(R-r)(2 + k_1^2 d r R) \cos k_1(R-r) = 0. \quad (5)$$

Putting in equation (5)

$$k_1 = h, \quad R = a, \quad r = b, \quad \frac{m-1}{2(m-2)} = \frac{1}{v};$$

it is transformed into the frequency equation for a vibrating hollow sphere given in [4]

$$\frac{v h a + (h^2 a^2 - v) \operatorname{tg} h a}{(h^2 a^2 - v) - v h a \operatorname{tg} h a} = \frac{v h b + (h^2 b^2 - v) \operatorname{tg} h b}{(h^2 b^2 - v) - v h b \operatorname{tg} h b}.$$

And, if $n=0$ and $r=0$ from (4), we obtain the frequency equation for pure radial vibrations of a solid sphere [2]:

$$\operatorname{tg}(k_1 R) = \frac{2(m-2)k_1 R}{2(m-2) - (m-1)k_1^2 R^2}.$$

Список використаних джерел

1. Лурье А. И. Пространственные задачи теории упругости / А. И. Лурье. – М.: Гостехиздат, 1955. – 491 с.
2. Улитко А. Ф. Векторные разложения в пространственной теории упругости / А. Ф. Улитко. – Киев: Академперіодика, 2002. – 341 с.
3. Янке Е. Специальные функции / Е. Янке, Ф. Эмде, Ф. Леш. – М.: Наука, 1977. – 342 с.
4. Ляв А. Математическая теория упругости / А. Ляв. – М.; Л.: ОНТИ, 1935. – 674 с.

References

1. LURIE, A. I. (1955) *Prostranstvennye Zadachi Teorii Uprugosti*. M.: Gostehizdat.
2. ULITKO, A. F. (2002) *Vektornie Razlozheniya v Prostranstvennoy Teorii Uprugosti*. Kiev: Akademperiodika.
3. YANKE, E., EMDE, F. & LESH, F. (1977) *Special Functions*. M.: Nauka.
4. LOVE, A. E. H. (2013) *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*. 4th Ed. Cambridge: Cambridge University Press.

Надійшла до редколегії 30.09.15

УДК 539.3

Борисейко О. В., к. ф.-м. н., доц.,
Улітко І. А., к. ф.-м. н., доц.,
Котюк Д. М., студент

**Інтерпретаційні моделі коріолісової
дисперсії пружних хвиль в системі
гармонічного осцилятора з двома
ступенями вільності**

Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, проспект
Акад. Глушкова, 4-е
e-mail: ulitko@univ.kiev.ua

O. V. Boriseiko, Ph. D. (Phys.-Math.), Assoc. Prof.,
I. A. Ulitko, Ph. D. (Phys.-Math.), Assoc. Prof.,
D. M. Kotuyck, Student

**Interpretation models of Coriolis dispersion of
elastic waves in the system of harmonic
oscillator with two degrees
of freedom**

Taras Shevchenko National University of Kyiv,
03680, Kyiv, Acad. Glushkova av., 4-e
e-mail: ulitko@univ.kiev.ua

На основі розв'язків задач про коливання гармонічного осцилятора з двома ступенями вільності, з однаковими та різними жорсткістними параметрами, який рівномірно обертається в площині його розташування, побудовані інтерпретаційні моделі коріолісової дисперсії плоских гармонічних біжучих хвиль та вказано шлях їх застосування для вивчення явищ аномальної дисперсії.

Ключові слова: гармонічний осцилятор, коріолісова дисперсія хвиль, кутова швидкість обертання.

Basic relations of Coriolis dispersion of plane harmonic waves in a steadily rotating unbounded elastic medium are described in [1, 2]. Coriolis dispersion is conditioned by the influence of relative, translational and Coriolis accelerations of spatial motion of an elastic solid [3] on the wave propagation in it. Briefly, in the unbounded rotating medium three independent types of harmonic waves can exist at the same time, their phase velocities depend on the angular rate, and they have circular or elliptic polarization of displacements. Superposition of waves with equal amplitudes at the close frequencies, which travel in the opposite directions along the axis of rotation, brings modulated traveling wave, not the normal mode in its common meaning. This feature is also known as Bryan's gyroscopic effect [4] and is widely used in wave gyroscopes [5].

On the other hand, wave propagation in an unbounded medium exploits the notion of opened vibration system without any inherent dimensioning parameter. Therefore, correct relations of the Coriolis dispersion can be given only in the terms of phase velocities of waves, what brings the anomalous dispersion: a phase velocity of some wave tends to infinity when the frequency and the angular rate become equal. This phenomenon is revealed mediately in BAW angular rate sensors, where some parts of the frequency spectra become imaginary and the corresponding components of coupled shear waves degenerate [6]. Thus, the substantial question in such model is the selection of the frequency. To solve this question and to adopt relations of Coriolis dispersion for a practical use one should exploit simple interpretation models of the harmonic oscillator with two degrees of freedom with equal or different stiffness characteristics of the elastic springs.

Key Words: Harmonic Oscillator, Coriolis Dispersion of Waves, Angular Velocity.

1. Вступ

Основні закономірності коріолісової дисперсії гармонічних хвиль в необмеженому пружному середовищі, яке рівномірно обертається, були встановлені в [1, 2]. Цей тип дисперсії обумовлений впливом відносних, переносних та коріолісових прискорень просторового руху пружного тіла [3] на процеси поширення хвиль. Виявляється, що в необмеженому середовищі одночасно можуть існувати три незалежних типи хвиль, фазові параметри яких складним чином залежать від кутової швидкості обертання. Відповідно, та-

кі дисперсійні за Коріолісом хвилі мають кругову або еліптичну поляризацію на зв'язаних переміщеннях [1], а суперпозиція зустрічних біжучих хвиль з однаковими амплітудами на близьких частотах породжує модульовані біжучі хвилі прецесії [2], а не нормальні моди у традиційному сенсі. Ця властивість, відома з літератури як гіроскопічний ефект Брауна [4], застосовується на практиці в хвильових гіроскопах різних типів [5].

У той же час, в моделі гармонічних біжучих хвиль в необмеженому тілі, як у відкритій коливальній системі, відсутні власні розмірні параметри, тому математичний опис законів коріолі-

своїй дисперсії було виконано в термінах фазових швидкостей хвиль [1], що призвело до явища аномальної дисперсії: фазова швидкість хвиль стає нескінченно великою коли частота і кутова швидкість обертання співпадають.

В розмірних моделях хвильових гіроскопів при малих кутових швидкостях обертання аномальної дисперсії, зрозуміло, не спостерігається. Проте в моделях сенсорів кутової швидкості на об'ємних акустичних хвилях [6], це явище опосередковано виявляється в уявних частинах спектрів резонансних частот та у виродженні відповідних їм гармонічних складових зв'язаних хвиль. Тут набуває ваги питання здійснення належної частотної селекції. Для вирішення цього питання та для адаптації результатів досліджень про коріолісову дисперсію хвиль можна запровадити прості інтерпретаційні моделі в коливальній системі гармонічного осцилятора, що обертається, при однаковій та різній жорсткості пружин.

2. Коріолісова дисперсія плоских гармонічних хвиль в необмеженому середовищі

Необмежене пружне середовище є відкритою коливальною системою, тобто будь-яка границя забезпечує проникання хвильових рухів назовні і не виявляє відбиття хвиль всередину даного об'єму. Тому при постановці задачі динаміки середовища, що рівномірно обертається [1, 2] вважають, що радіальні відцентрові сили інерції не призводять до зміни модулів пружності, яка б позначалася на зміні частот коливальних. Статичною деформацією, яка викликана дією цих сил нехтують. При виборі вісі OZ рухомої декартової системи координат $OXYZ$ за вісь обертання, зв'язані рівняння Ламе записуються у вигляді

$$\begin{aligned} & \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} \frac{\partial}{\partial x} (\operatorname{div} \mathbf{u}) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) + \\ & + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) = \frac{\rho}{G} (\ddot{u}_x - \Omega_0^2 u_x - 2\Omega_0 \dot{u}_y), \\ & \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} \frac{\partial}{\partial y} (\operatorname{div} \mathbf{u}) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) + \\ & + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) = \frac{\rho}{G} (\ddot{u}_y - \Omega_0^2 u_y + 2\Omega_0 \dot{u}_x), \\ & \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} \frac{\partial}{\partial z} (\operatorname{div} \mathbf{u}) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) + \\ & + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) = \frac{\rho}{G} \ddot{u}_z, \end{aligned} \quad (1)$$

де ρ – густина матеріалу, ν – коефіцієнт Пуассона, G – модуль зсуву, Ω_0 – стала кутова швидкість обертання.

2.1. Коли плоскі гармонічні біжучі хвилі з круговою частотою ω , хвильовим числом k та амплітудами A, B, C поширюються вздовж вісі обертання OZ , підстановка $u_x = A \sin(\omega t - kz)$, $u_y = B \cos(\omega t - kz)$, $u_z = C \sin(\omega t - kz)$, в рівняння руху (1) дає систему трьох однорідних алгебраїчних рівнянь відносно амплітуд A, B, C . З вимоги рівності нулевій її визначника отримують дисперсійне рівняння

$$\Delta_1(k, \omega) = \left(k^2 - \frac{\omega^2}{c_1^2} \right) \times \left\{ \left[k^2 - \frac{\omega^2}{c_2^2} (1 + \varepsilon^2) \right]^2 - 4\varepsilon^2 \left(\frac{\omega^2}{c_2^2} \right)^2 \right\} = 0, \quad (2)$$

де

$$\varepsilon = \frac{\Omega_0}{\omega}, \quad c_1 = \sqrt{\frac{2G}{\rho} \frac{1-\nu}{1-2\nu}}, \quad c_2 = \sqrt{\frac{G}{\rho}}, \quad (3)$$

відповідно, безрозмірна кутова швидкість обертання та розрахункові швидкості поздовжніх і поперечних хвиль в нерухомому пружному тілі.

З рівняння (2) визначаються три типи хвильових рухів середовища. В роботі [1] з аналізу розв'язків цього дисперсійного рівняння запроваджена така їх класифікація.

Бездисперсійна поздовжня хвиля, що поширюється в напрямку вісі OZ (P -хвиля): $k = \omega/c_1$, $u_x = 0$, $u_y = 0$, $u_z = C \sin(\omega/c_1)(c_1 t - z)$.

Дисперсійні за Коріолісом квазі-поперечні хвилі

$$k_1 = \frac{\omega}{c_2} (1 + \varepsilon), \quad \begin{cases} u_x = A \sin(\omega t - k_1 z), \\ u_y = -A \cos(\omega t - k_1 z), \\ u_z \equiv 0 \end{cases} \quad (4)$$

та

$$k_2 = \begin{cases} \frac{\omega}{c_2} (1 - \varepsilon), & \varepsilon < 1, \\ \frac{\omega}{c_2} (\varepsilon - 1), & \varepsilon > 1, \end{cases} \quad \begin{cases} u_x = A \sin(\omega t - k_2 z), \\ u_y = A \cos(\omega t - k_2 z), \\ u_z \equiv 0. \end{cases} \quad (5)$$

З (4) та (5) випливає, що хвилі мають колову плоску поляризацію на зв'язаних переміщеннях ($u_x^2 + u_y^2 = A^2$). В хвилі (4) рух частинок здійснюється в напрямку, який співпадає з напрямком обертання, а в хвилі (5) частинки рухаються протилежно до напрямку обертання.

Для аналізу дисперсійних розв'язків (4), (5) за відсутності розмірних параметрів використовують поняття фазової швидкості хвиль $c_p = \omega/k$. Для хвильових чисел k_1, k_2 маємо такі залежності фазових швидкостей $c_p^{(1)}/c_2, c_p^{(2)}/c_2$ від безрозмірної кутової швидкості $\varepsilon = \Omega_0/\omega$:

$$\frac{c_p^{(1)}}{c_2} = \frac{1}{1+\varepsilon}, \quad \frac{c_p^{(2)}}{c_2} = \begin{cases} \frac{1}{1-\varepsilon}, & 0 < \varepsilon < 1 \\ \frac{1}{\varepsilon-1}, & \varepsilon > 1 \end{cases}, \quad (6)$$

На рис. 1 горизонтальна пунктирна лінія відповідає постійній швидкості бездисперсійних поперечних хвиль c_2 . Стрілками показано напрямки руху частинок на колових траєкторіях (4), (5).

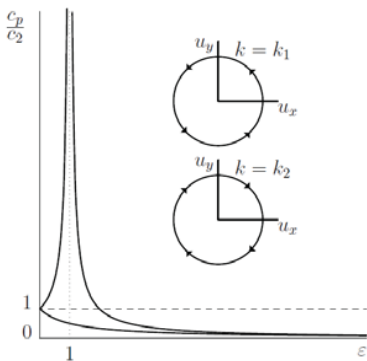


Рис. 1. Залежності фазових швидкостей дисперсійних хвиль (4), (5) від кутової швидкості

Видно, що фазові швидкості $c_p^{(1,2)}$ при малих кутових швидкостях обертання $\varepsilon = \Omega_0/\omega$ є близькими до швидкості поперечних хвиль c_2 , а за відсутності обертання маємо лише одне значення $c_p = c_2$. Це явище має аналогію в теорії хвильових гіроскопів і характеризується як Браунівське розщеплення частот [4]. Тобто дисперсійні квазі-поперечні хвилі (4) та (5) виникають внаслідок розщеплення фазової швидкості єдиної поперечної SH -хвилі, що поширюється в нерухомому тілі в площині, перпендикулярній до вісі OZ . При збільшенні кутової швидкості ε для хвилі з розв'язку (5) спостерігається аномальне явище: при наближенні частоти ω до кутової швидкості Ω_0 ($\varepsilon \rightarrow 1$) її фазова швидкість $c_p^{(2)}$ стає нескінченною. При цьому виявляється, що прискорення в

рівняннях руху (1) дорівнюють нулеві, тобто динамічні деформації в середовищі відсутні. Суть цієї аномальної дисперсії з'ясуємо з відповідної інтерпретаційної моделі.

2.2. У випадку коли фронт плоскої хвилі поширюється перпендикулярно до вісі обертання OZ вздовж деякої вісі OX розв'язок рівнянь руху (1) для переміщень $u_x = A \sin(\omega t - kx)$, $u_y = B \cos(\omega t - kx)$, $u_z = C \sin(\omega t - kx)$ приводить до такого дисперсійного рівняння

$$\Delta_2(k, \omega) = \left(k^2 - \frac{\omega^2}{c_2^2} \right) \left\{ \left[k^2 - \frac{\omega^2}{c_2^2} (1 + \varepsilon^2) \right] \times \right. \\ \left. \times \left[k^2 - \frac{\omega^2}{c_1^2} (1 + \varepsilon^2) \right] - 4\varepsilon^2 \frac{\omega^2}{c_1^2} \frac{\omega^2}{c_2^2} \right\} = 0. \quad (7)$$

Три незалежних типи хвиль, що визначаються цим рівнянням, згідно [1], є такими.

Бездисперсійна хвиля зсуву (SV -хвиля), що поширюється в напрямку вісі OX , з переносом частинок середовища вздовж вісі OZ : $k = \omega/c_2$, $u_x = 0$, $u_y = 0$, $u_z = C \sin(\omega/c_2)(c_2 t - x)$.

Дисперсійні за Копіолісом квазі-поперечна та квазі-повздовжня хвилі, що визначаються коренями бікватратного рівняння, що отримується з (7)

$$k_{1,2} = \sqrt{\frac{1 + \varepsilon^2}{2} \left(\frac{\omega^2}{c_1^2} + \frac{\omega^2}{c_2^2} \right)} \sqrt{1 \pm \sqrt{1 - \frac{4c_1^2 c_2^2}{c_1^2 + c_2^2} \left(\frac{1 - \varepsilon^2}{1 + \varepsilon^2} \right)}}$$

Для кореня k_1 , знак "+" у внутрішньому радикалі,

$$u_x = A \sin(\omega t - k_1 x),$$

$$u_y = \frac{2\varepsilon(\omega^2/c_2^2)}{(1 + \varepsilon^2)(\omega^2/c_2^2) - k_1^2} A \cos(\omega t - k_1 x), \quad u_z = 0. \quad (8)$$

Для кореня k_2 , знак "-" у внутрішньому радикалі,

$$u_x = \frac{2\varepsilon(\omega^2/c_1^2)}{(1 + \varepsilon^2)(\omega^2/c_1^2) - k_2^2} B \sin(\omega t - k_2 x), \\ u_y = B \cos(\omega t - k_2 x), \quad u_z = 0. \quad (9)$$

З розв'язків (8) та (9) випливає, що хвилі мають еліптичну поляризацію на зв'язаних переміщеннях, з напівосями еліпсів, що дорівнюють амплітудам при $\sin$ і $\cos$. В хвилях (8) рух частинок здійснюється в напрямку, що співпадає з напрямком обертання, а в хвилях з (9) частинки рухаються протилежно до напрямку обертання.

Залежності фазових швидкостей $c_p^{(1,2)}/c_2$ від нормованої кутової швидкості $\varepsilon = \Omega_0/\omega$ є такими

$$\frac{c_p^{(1,2)}}{c_2} = \sqrt{\frac{\frac{2c_1^2}{c_1^2 + c_2^2} \frac{1}{1 + \varepsilon^2}}{1 \pm \sqrt{1 - \frac{4c_1^2 c_2^2}{(c_1^2 + c_2^2)^2} \left(\frac{1 - \varepsilon^2}{1 + \varepsilon^2} \right)}}}. \quad (10)$$

На рис. 2 стрілками на еліпсах показано напрямки руху частинок. Результати отримано для коефіцієнта Пуассона $\nu = 0.33$.

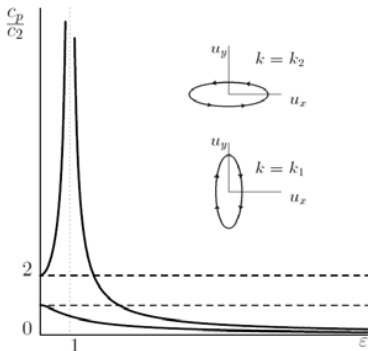


Рис. 2. Залежності фазових швидкостей дисперсійних хвиль (8), (9) від кутової швидкості.

Для малих значень ε фазова швидкість квазі-поперечних хвиль (8) є близькою до швидкості c_2 . Потім вона монотонно спадає з ростом кутової швидкості. Але фазова швидкість квазі-повдовжніх хвиль (9), будучи близькою до c_1 при малих ε , швидко зростає і при $\varepsilon=1$ стає нескінченно великою, так що описане вище явище аномальної дисперсії має місце і в цьому випадку.

3. Інтерпретаційні моделі зв'язаного гармонічного осцилятора

Нехай маса $m(x_0, y_0)$, закріплена на двох пружинах однакової довжини $l = x_0 = y_0$, що мають однакову приведену жорсткість $\mathfrak{a}_0$, або ж різні жорсткості $\mathfrak{a}_1$ та $\mathfrak{a}_2$. Пружини кріпляться в точках C_1, C_2 на котках до граней жорсткого прямого кута OXY , що обертається навколо початку координат т.О з постійною кутовою швидкістю Ω_0 . Точки C_1, C_2 можуть зміщуватися таким чином, щоб осі пружин завжди лишалися взаємно пер-

пендикулярними між собою. Відцентровими силами інерції нехтуємо.

Позначимо переміщення маси m через u_x та u_y . Запишемо рівняння руху маси m в рухомій системі відліку

$$\begin{aligned} m(\ddot{u}_x - \Omega_0^2 u_x - 2\Omega_0 \dot{u}_y) &= -\mathfrak{a}_i u_x, \\ m(\ddot{u}_y - \Omega_0^2 u_y + 2\Omega_0 \dot{u}_x) &= -\mathfrak{a}_i u_y, \quad i = 0, 1, 2. \end{aligned} \quad (11)$$

Введемо розмірні параметри системи – власні частоти коливань без обертання, що поєднують масу маятника m і жорсткості пружин $\mathfrak{a}_0, \mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2$

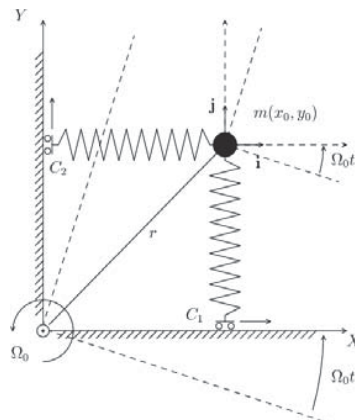


Рис. 3. Зв'язаний гармонічний осцилятор

$$p_0 = \sqrt{\frac{\mathfrak{a}_0}{m}}, \quad p_1 = \sqrt{\frac{\mathfrak{a}_1}{m}}, \quad p_2 = \sqrt{\frac{\mathfrak{a}_2}{m}} \quad (12)$$

Розв'язок рівнянь (11) виберемо у вигляді $u_x = A \sin \omega t$, $u_y = B \cos \omega t$, де ω – шукана кругова частота коливань.

3.1. У випадку однакової жорсткості пружин $\mathfrak{a}_0$ константи A і B виражаються з системи однорідних алгебраїчних рівнянь з визначником

$$\begin{aligned} \Delta_1(\omega) &= (\omega^2 - p_0^2 + \Omega_0^2)^2 - 4\omega^2 \Omega_0^2 = \\ &= (\omega^2 - 2\omega \Omega_0 - p_0^2 + \Omega_0^2) \times \\ &\times (\omega^2 + 2\omega \Omega_0 - p_0^2 + \Omega_0^2) = 0, \end{aligned} \quad (13)$$

який є алгебраїчно подібним до визначника (2) $\Delta_1(k, \omega)$ для хвиль в необмеженому середовищі. Відмінність полягає у тому, що дисперсійне рівняння (2) утримує пару незалежних фазових змінних – хвильове число k та частоту ω , а в

частотному рівнянні (13) невідомою величиною є лише частота коливань маятника ω , тоді як його власна частота p_0 та кутова швидкість Ω_0 є заданими величинами.

В залежності від внутрішнього p_0 та зовнішнього Ω_0 параметрів коливальної системи розв'язками рівняння (13) визначаються такі три випадки коливань маятника.

3.1.1. Власна частота коливань нерухомого маятника p_0 більша за кутову швидкість Ω_0 , $p_0 > \Omega_0$. Можуть одночасно існувати дві кругові частоти ω_1, ω_2 та два гармонічних розв'язки

$$\omega_1 = p_0 + \Omega_0, \quad p_0 > \Omega_0, \\ u_x = A \sin(p_0 + \Omega_0)t, \quad u_y = A \cos(p_0 + \Omega_0)t \quad (14)$$

та

$$\omega_2 = p_0 - \Omega_0, \quad p_0 > \Omega_0, \\ u_x = A \sin(p_0 - \Omega_0)t, \quad u_y = -A \cos(p_0 - \Omega_0)t. \quad (15)$$

Розв'язки (14), (15) описують рух маси m по колу в площині OXY , причому на частоті ω_1 маса m рухається протилежно до напрямку обертання, а на частоті ω_2 напрямком руху маси і напрямком обертання співпадають, що повністю узгоджується з кінематикою пружних хвиль (4), (5).

3.1.2. Власна частота коливань маятника p_0 менша за кутову швидкість Ω_0 , $p_0 < \Omega_0$. Аналогічно, можуть існувати одночасно дві кругові частоти ω_1, ω_2 та відповідні їм розв'язки

$$\omega_1 = \Omega_0 - p_0, \quad p_0 < \Omega_0, \\ u_x = A \sin(\Omega_0 - p_0)t, \quad u_y = A \cos(\Omega_0 - p_0)t \quad (16)$$

та

$$\omega_2 = \Omega_0 + p_0, \quad p_0 < \Omega_0 \\ u_x = A \sin(\Omega_0 + p_0)t, \quad u_y = -A \cos(\Omega_0 + p_0)t. \quad (17)$$

Отже рух маси m по колу радіуса A в площині OXY є протилежним до напрямку обертання в формулах (16), або співпадає з ним в (17).

3.1.3. Власна частота коливань нерухомого маятника p_0 є рівною кутовій швидкості обертання Ω_0 , $p_0 = \Omega_0$. Коливання можуть відбуватися лише на одній частоті, що дорівнює подвоєній кутовій швидкості Ω_0

$$\omega_1 = 2\Omega_0, \quad \omega_2 = 0, \quad p_0 = \Omega_0. \quad (18)$$

Розв'язком для переміщень є

$$u_x = A \sin 2\Omega_0 t, \quad u_y = A \cos 2\Omega_0 t \quad (19)$$

Рух маси m по колу здійснюється протилежно до напрямку обертового руху.

Таким чином, коли кутова швидкість Ω_0 співпадає з власною частотою коливань p_0 , у такому випадку вироджується один з гармонічних розв'язків і відповідні коливання не можуть існувати. Але завжди має місце інший гармонічний розв'язок для коливань на частоті $\omega_1 = 2\Omega_0$. Тим самим підтверджується виродження квазі-поперечної хвилі (6) в необмеженому середовищі. Дійсно, така хвиля не може існувати.

3.2. Припустимо тепер, що пружини маятника (рис. 3) мають різні жорсткості. Нехай на переміщенні u_x жорсткість буде α_1 , а на переміщенні u_y , відповідно, α_2 . Частотний визначник тепер відрізняється від визначника (13) тим, що не зводиться до різниці квадратів його параметрів і, будучи розв'язаний відносно частоти ω , дає біквadratне частотне рівняння

$$\omega^4 - \omega^2 \cdot (p_1^2 + p_2^2 + 2\Omega_0^2) + (p_1^2 - \Omega_0^2) \cdot (p_2^2 - \Omega_0^2) = 0. \quad (20)$$

З аналізу рівняння (20) масмо.

3.2.1. Якщо $0 < p_1 < \Omega_0$ або $0 < p_2 < \Omega_0$, то частоти коливань маятника $\omega_{1,2}$ будуть дійсними

$$\omega_{1,2} = \sqrt{\left(\Omega_0^2 + \frac{p_1^2 + p_2^2}{2}\right)} \times \\ \times \sqrt{1 \pm \sqrt{1 - \frac{(p_1^2 - \Omega_0^2) \cdot (p_2^2 - \Omega_0^2)}{\left(\Omega_0^2 + \frac{p_1^2 + p_2^2}{2}\right)^2}}} \quad (21)$$

3.2.2. Якщо $p_1 < \Omega_0 < p_2$, то частота ω_1 визначатиметься формулою (21), а частота ω_2 (знак “–” у внутрішньому радикалі) стане чисто уявною

$$\omega_2 = i \sqrt{\left(\Omega_0^2 + \frac{p_1^2 + p_2^2}{2}\right)} \times \\ \times \sqrt{1 - \frac{|p_1^2 - \Omega_0^2| \cdot |p_2^2 - \Omega_0^2|}{\left(\Omega_0^2 + \frac{p_1^2 + p_2^2}{2}\right)^2} - 1} \quad (22)$$

3.2.3. Якщо $p_1 = \Omega_0$ або $p_2 = \Omega_0$, то частота ω_2 стане рівною нулеві, а ω_1 матиме скінчене дійсне значення

$$\omega_1 = \sqrt{2} \sqrt{\Omega_0^2 + \frac{p_1^2 + p_2^2}{2}}, \quad \omega_2 = 0. \quad (23)$$

Після підстановки частот (21)–(23) в розв'язки для переміщень з'ясується, що траєкторіями руху маси m в площині OXY є еліпси, подібно до пружних хвиль (8), (9). На частоті ω_1 рух маси m є протилежним до напрямку обертання, а на частоті ω_2 співпадає з напрямком обертання. Коли частота ω_2 стає рівною нулеві гармонічні коливання зникають, а у випадку $p_1 < \Omega_0 < p_2$ розв'язок перестає бути гармонічним і отримуємо експоненціальні залежності розв'язків від часу, а еліптичні траєкторії руху маси m перетворюються на прямі лінії.

Подібне явище має місце в математичних моделях сенсорів кутової швидкості обертання на об'ємних акустичних хвилях [6], коли вимірювана кутова швидкість опиняється у проміжку між критичними значеннями, обернено пропор-

ційними швидкостям зв'язаних та не зв'язаних хвиль зсуву.

З точки зору аномальної дисперсії хвиль в необмеженому середовищі, задовільне пояснення цьому явищу дає випадок рівності нулеві частоти ω_2 маятника (23), що відповідає значенню $\varepsilon = 1$ в формулах для фазових швидкостей хвиль (10).

4. Висновки

Всі три випадки, описаних для простої коливальної системи – гармонічного осцилятора з двома ступенями вільності, мають якісно ідентичні аналогії в розглянутій моделі коріолісової дисперсії плоских хвиль в необмеженому пружному середовищі, а порівняльний аналіз з інтерпретаційними моделями дозволяє подолати фізичну невизначеність результату аномальної дисперсії хвиль.

Список використаних джерел

1. Улитко И. А. Дисперсия плоских гармонических волн в равномерно вращающемся упругом пространстве / Улитко И. А. // Доповіді НАН України. – 1995. – № 1. – С. 54–57.
2. Улитко И. А. Модуляция гармонических бегущих волн в равномерно вращающейся упругой среде / Улитко И. А. // «Современные проблемы механики сплошной среды»: 2-я международная научная конференция, 19–20 сентября 1996, Ростов-на-Дону, РФ: труды конференции. – Т. 1. – 1997. – С. 137–141.
3. Улитко А. Ф. Пространственное движение упругих тел / Улитко А. Ф. // Известия АН СССР. МТТ. – 1990. – № 6. – С. 55–66.
4. Bryan G. H. On the beats in the vibrations of a revolving cylinder or bell / Bryan G. H. // Proc. Cambridge Phil. Soc. Math. Phys. Sci. – 1890. – Vol. 7, № 3. – P. 101–111.
5. Луин Б. Волновой твердотельный гироскоп. Теория и технология / Луин Б., Матвеев В., Басараб М. – М.: Радиотехника, 2014. – 174 с.
6. Сарапулов С. А. Влияние вращения на объемные волны в упругой среде и их использование в твердотельной гироскопии / Сарапулов С. А. Улитко И. А. // Гироскопия и навигация. – 2001. – Т. 35, № 4. – С. 64–72.

References

1. ULITKO, I. A. (1995) Dispersiya ploskikh garmonicheskikh voln v ravnomerno vraschayuschemsya uprugom prostranstve. *Dopovidi NAN Ukrainy*. (1). p. 54–57.
2. ULITKO, I. A. (1997) Modulyatsiya garmonicheskikh beguschikh voln v ravnomerno vraschayushchisya uprugoi srede. In *Sovremennye Problemy mekhaniki sploshnoy sredy*. Rostov-na-Donu, RF, 19–20 September 1996. 1. p. 137–141.
3. ULITKO, A. F. (1990) Spatial motion of elastic bodies. *Mechanics of Solids*. (6). p. 55–66.
4. BRYAN, G. H. (1890) On the beats in the vibrations of a revolving cylinder or bell. *Proc. Cambridge Phil. Soc. Math. Phys. Sci*. 7 (3). p. 101–111.
5. LUNIN, B., MATVEEV, V., BASSARAB, M. (2014) *Volnovoі Tverdotelnyy Giroscop. Teoriya i Tekhnologiya*. M. Radiotekhnika.
6. SARAPULOFF, S. A., ULITKO, I. A. (2001) Rotation influence upon volume waves in an elastic medium and their usage in solid-state gyroscopy. *Gyroscopy and Navigation*. 35 (4) p. 64–72.

Надійшло до редколегії 30.09.15

УДК 539.3

Вайсфельд Н. Д., д. ф.-м. н., проф.,
Журавльова З. Ю., аспірант

Задача незв'язної термопружності для півсмуги

Одеський національний університет імені
І. І. Мечникова, 65082, м. Одеса, вул.
Дворянська, 2
e-mail: zhuravleva@te.net.ua

N. D. Vaysfel'd, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof.,
Z. Yu. Zhuravlova, Postgraduate Student

The problem of disconnected thermoelasticity for a semi-strip

Odessa I. I. Mechnikov National University, 65082,
Odessa, Dvoryanskaya str., 2
e-mail: zhuravleva@te.net.ua

У роботі запропонована нова методика розв'язання задачі для плоскої пружної півсмуги під дією теплового та механічного навантаження. Інтегральні перетворення застосовуються безпосередньо до системи рівнянь рівноваги Ламе, що зводить вихідну задачу до одновимірної, яка розв'язується за допомогою апарату матричного диференціального числення та матричної функції Гріна. Розв'язок задачі зведено до одного інтегро-диференціального рівняння відносно невідомої функції переміщень.

Ключові слова: півсмуза, термопружність, інтегральне перетворення Фур'є, матриця Гріна.

The most well-known approaches for the mixed elasticity problems' solving are based on the using of the different representations for the solutions of the equilibrium equations. In the article the new methodic of plane elasticity problem's solving for a semi-strip under mechanical and thermal pressures is considered. The sense of it is in the applying of the integral Fourier transformations directly to the Lamé's equations. In the right-hand parts of the equations the known temperature is given, its values are the solutions of the corresponded problem of the thermal conductivity for a semi-strip, which was solved earlier. The initial problem is transformed to a one-dimensional one, which is solved with the help of a matrix differential calculation and Green's matrix apparatus. With the help of the matrix differential calculations the fundamental matrix and matrix fundamental solutions' system were constructed. Green's matrix is constructed in the form of the bilinear representation. Such representation is very comfortable for the further calculations. The solution of the problem is reduced to the one integro-differential equation with respect to an unknown displacement function. With the help of the numerical parametrical analyses the stresses' distributions inside the semi-strip were investigated.

Key Words: Semi-strip, Thermoelasticity, Integral Fourier Transformation, Green's Matrix.

1. Вступ

Плоскі задачі теорії пружності розглядалися багатьма авторами, що пояснюється важливістю даних задач, як модельних прикладів для різноманітних інженерних додатків. Деякі з цих досліджень стали класичними, такі як роботи Г. В. Колосова [1] та Н. І. Мусхелішвілі [2]. Їх методи розв'язання плоских задач пружності спираються на використання теорії функцій комплексної змінної та інтегралів типу Коші. Велика бібліографія, що присвячена застосуванню методу інтегральних перетворень, приведена у монографії [3]. Серед основних підходів до розв'язання задач теорії пружності для півсмуги можна виділити наступні. Представлення у вигляді рядів та інтегралів Фур'є використовувалось у роботах [4]. Зведенням до нескінченної системи алгебраїчних

рівнянь розв'язували задачі для півсмуги у [5]. Варіаційний метод застосовувався у [6]. В [7] використовував енергетичний метод. Для розв'язання задачі про навантажену по торцю півсмугу у [8] будувались системи біортогональних функцій. Досить популярним є використання розвинення за системою функцій Фадля – Папковича. Цей підхід зустрічається у роботах [9] та інших.

В даній роботі представлена нова методика, що відмінна від вище приведених.

2. Постановка задачі та її розв'язання

Розглядається пружна півсмуза, що описується у декартовій системі координат співвідношеннями: $0 < x < a$, $0 < y < \infty$. На грані $x = 0$, $0 < y < \infty$ виконуються умови зчеплення $u(0, y) = 0$, $v(0, y) = 0$. На грані $x = a$, $0 < y < \infty$

виконуються умови першої основної задачі теорії пружності $\sigma_x(a, y) = 0$, $\tau_{xy}(a, y) = 0$. По торцю $y = 0$, $0 < x < a$ задано напруження:

$$\sigma_y|_{y=0} = -p(x), \quad \tau_{yx}|_{y=0} = 0. \quad (1)$$

Потрібно визначити поле переміщень та напружень у півсмугі, що задовольняють крайові умови та рівняння рівноваги [10]:

$$\begin{cases} \mu_* \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} + \mu_0 \frac{\partial^2 v(x, y)}{\partial x \partial y} = \rho \frac{\partial T}{\partial x}, \\ \frac{\partial^2 v(x, y)}{\partial x^2} + \mu_* \frac{\partial^2 v(x, y)}{\partial y^2} + \mu_0 \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x \partial y} = \rho \frac{\partial T}{\partial y}; \end{cases}$$

де $u(x, y) = u_x(x, y)$, $v(x, y) = u_y(x, y)$, $\rho = 2\alpha_l(\mu + 1)/(1 - 2\mu)$, α_l – коефіцієнт лінійного розширення, $\mu_* = \mu_0 + 1$, $\mu_0 = 1/(1 - 2\mu)$, μ – коефіцієнт Пуассона, $T(x, y)$ – температура, що відома з попереднього розв'язання задачі стаціонарної теплопровідності для півсмуги.

Крайові умови (1) перепишемо у термінах переміщень

$$2G\mu_0(\mu \partial u(x, 0)/\partial x + (1 - \mu)\partial v(x, 0)/\partial y) = -p(x), \quad (2)$$

$$\partial u(x, 0)/\partial y + \partial v(x, 0)/\partial x = 0 \quad (3)$$

та введемо невідому функцію $\chi(x) = v(x, 0)$, $\chi'(x) = v'(x, 0)$. Тоді, враховуючи (3), випливає, що $u^*(x, 0) = -\chi'(x)$, і крайова умова (3) виконується автоматично.

Вихідну задачу зведемо до одновимірної шляхом застосування півнескінчених $\sin$, $\cos$ перетворень Фур'є за змінною y за схемою

$$\begin{bmatrix} u_\beta(x, T_\beta(x)) \\ v_\beta(x) \end{bmatrix} = \int_0^\infty \begin{bmatrix} u(x, y), T(x, y) \\ v(x, y) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \beta y \\ \sin \beta y \end{bmatrix} dy.$$

Крайову задачу у просторі трансформант сформулюємо у вигляді векторної крайової задачі. Для цього введемо наступні вектори і матриці:

$$\bar{y}_\beta(x) = \begin{pmatrix} u_\beta(x) \\ v_\beta(x) \end{pmatrix}, \quad \bar{f}(x) = \begin{pmatrix} \frac{3-\kappa}{\kappa+1} \chi'(x) + \frac{\bar{\rho}}{\kappa+1} T'_\beta(x) \\ -\beta \frac{\kappa+1}{\kappa-1} \chi(x) - \frac{\beta \rho}{\kappa-1} T_\beta(x) \end{pmatrix}, \quad \bar{\rho} = \rho \frac{\kappa-1}{\kappa+1},$$

$$P = \begin{pmatrix} \frac{\kappa-1}{\kappa+1} & 0 \\ 0 & \frac{\kappa+1}{\kappa-1} \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\kappa+1} \\ -\frac{1}{\kappa-1} & 0 \end{pmatrix}.$$

Тоді система рівнянь рівноваги у векторному вигляді записується як $L_2 \bar{y}_\beta(x) = \bar{f}(x)$, де L_2 – диференціальний оператор другого порядку $L_2 \bar{y}_\beta(x) = I \bar{y}_\beta''(x) + 2\beta Q \bar{y}_\beta'(x) - \beta^2 P \bar{y}_\beta(x)$, I – одинична матриця.

Розв'язок векторної крайової задачі розшукується у вигляді суперпозиції загального розв'язку векторного однорідного рівняння $\bar{y}_\beta^0(x)$ і його часткового векторного розв'язку $\bar{y}_\beta^1(x)$:

$$\bar{y}_\beta(x) = \bar{y}_\beta^0(x) + \bar{y}_\beta^1(x).$$

Для знаходження розв'язку векторного однорідного рівняння побудуємо розв'язок матричного рівняння [11]:

$$L_2 Y_\beta(x) = 0, \quad 0 < x < a; \quad (4)$$

тут $Y_\beta(x)$ – матриця порядку 2×2 . Дану матрицю $Y_\beta(x)$ обрано у формі [11] $Y_\beta(x) = e^{\xi x} I$ і підставлено до матричного рівняння (4). В результаті отримаємо рівність $L_2 e^{\xi x} I = M(\xi) e^{\xi x}$, де матриця $M(\xi)$ визначається як $M(\xi) = I \xi^2 + 2\beta Q \xi - \beta^2 P$.

Розв'язок матричного рівняння (4) знайдено за формулою [11] $Y(x) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C e^{\xi x} M^{-1}(\xi) d\xi$, де

замкнений контур C охоплює всі особливі точки підінтегральної функції. Після обчислення контурного інтегралу за допомогою теореми про лишки з урахуванням кратності полюсів $\xi = \beta$, $\xi = -\beta$ отримаємо систему матричних фундаментальних розв'язків. Цим завершується побудова загального розв'язку векторного рівняння.

Для отримання часткового розв'язку векторної крайової задачі побудуємо матрицю-функцію Гріна. Це зробимо за допомогою методу матричних інтегральних перетворень [12]. Побудуємо матрицю-функцію Гріна $G(x, \xi)$ для векторної крайової задачі:

$$\begin{cases} L_2 \bar{y}(x) = \bar{f}(x), \\ V_i[\bar{y}(x)] = 0, \quad i = 0, 1; \end{cases} \quad (5)$$

де V_0, V_1 – крайові функціонали, що мають вигляд

$$V_i[\bar{y}(x)] = \alpha_n \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \bar{y}(x_i) - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \bar{y}'(x_i),$$

$$i = 0, 1; \quad x_0 = 0, \quad x_1 = a.$$

Ядро інтегрального перетворення обираємо у вигляді ($n = 0, 1, 2, \dots$):

$$H(x, \alpha_n) = \begin{pmatrix} \sin \alpha_n x & 0 \\ 0 & \cos \alpha_n x \end{pmatrix}, \quad \alpha_n = \frac{n\pi}{a}. \quad (6)$$

Після множення обох частин рівняння (5) на ядро (6) та інтегрування на відрізку $[0; a]$, отримаємо рівняння у просторі трансформант:

$$\Omega_\beta(\alpha_n) \bar{y}_n = \bar{f}_n, \quad (7)$$

$$\text{де} \quad \bar{y}_n = \int_0^a \bar{y}(x) H(x, \alpha_n) dx, \quad \bar{Q} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\kappa + 1} \\ \frac{1}{\kappa - 1} & 0 \end{pmatrix},$$

$$\Omega_\beta(\alpha_n) = -I\alpha_n^2 - 2\beta\alpha_n\bar{Q} - \beta^2 P. \quad \text{Обертаючи}$$

$$\text{розв'язок (7) за формулою} \quad \bar{y}(x) = \frac{2}{a} \sum_{n=0}^{\infty} H(x, \alpha_n) \bar{y}_n$$

[12] (тут штрих означає, що нульовий член помножується на $1/2$) отримаємо:

$$\bar{y}(x) = \int_0^a \left[\frac{2}{a} \sum_{n=0}^{\infty} H(x, \alpha_n) \Omega_\beta^{-1}(\alpha_n) H(\xi, \alpha_n) \right] \bar{f}(\xi) d\xi.$$

Отже, матричну функцію Гріна побудовано у вигляді білінійного розвинення:

$$G(x, \xi) = \frac{2}{a} \sum_{n=0}^{\infty} H(x, \alpha_n) \Omega_\beta^{-1}(\alpha_n) H(\xi, \alpha_n).$$

Розв'язок векторної крайової задачі має вигляд:

$$\bar{y}_\beta(x) = Y_1(x) \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + Y_2(x) \begin{pmatrix} c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} + \int_0^a G(x, \xi) \bar{f}(\xi) d\xi$$

Коефіцієнти c_i , $i = \overline{1, 4}$ знайдено з крайових умов на бічних гранях півсмуги.

Після обертання інтегральних перетворень побудовано вирази для функцій переміщень у вигляді повторних інтегралів.

Після проведення регуляризації відповідних інтегралів та задоволення крайової умови (2), що

залишилися, отримуємо сингулярне інтегро-диференціальне рівняння

$$\frac{d}{dx} \int_0^1 \tilde{\chi}(\xi) \left[\frac{1}{\xi} + f(\xi, x) \right] d\xi = r(x) - \chi(a) h(x) - \int_0^1 \int_0^1 T(\xi, \eta) g(\xi, \eta, x) d\eta d\xi, \quad 0 < x < 1; \quad (8)$$

де $\tilde{\chi}(\xi) = \chi(a\xi)$. Функція $\tilde{\chi}(\xi)$ зображується у вигляді $\tilde{\chi}(\xi) = \chi_1(\xi) + \chi(a)\chi_2(\xi)$, де функції $\chi_i(\xi)$, $i = \overline{1, 2}$ розвинуто у ряди за поліномами Якобі

$$\chi_i(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n^i \xi^\alpha (1 - \xi)^\beta P_n^{\alpha, \beta}(1 - 2\xi), \quad i = \overline{1, 2}; \quad (9)$$

$P_n^{\alpha, \beta}(x)$ – поліном Якобі, α, β – визначено з [3].

Підстановка формул (9) до рівняння (8) зводить його до розв'язання нескінченної системи лінійних алгебраїчних рівнянь виду

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n^i d_{mn}^i = f_m^i, \quad i = \overline{1, 2}, \quad m = \overline{0, 1, 2, \dots}; \quad \text{яка}$$

розв'язується методом редукції [13].

Підстановка знайдених сталих у формулу (9) завершує побудову розв'язку вихідної задачі.

Числові розрахунки проведено для пружної півсмуги з параметрами $G = 82.03125 \cdot 10^9$ Па, $\mu = 0.28$, $a = 10$, $\alpha_i = 1.1 \cdot 10^{-5}$.

З аналізу нормальних напружень $\sigma_x(5, y)$, $\sigma_y(5, y)$ всередині півсмуги встановлено, що нормальні напруження спадають при збільшенні відстані від місця прикладеного навантаження, а зі зростанням температурного впливу абсолютні значення нормальних напружень зростають.

3. Висновки

1. У роботі запропонована нова методика розв'язання задачі для півсмуги, що базується на зведенні вихідної задачі до векторної одновимірної крайової задачі. Остання розв'язується за допомогою апарату матричного диференціального числення та матричної функції Гріна, що приводить до розв'язання сингулярного інтегро-диференціального рівняння відносно невідомого значення переміщень.

2. При дослідженні абсолютних величин напружень було виявлено, що вплив температури є більш суттєвим ніж вплив механічного навантаження за інших рівних умов.

3. Підхід, що пропонується, дозволяє розв'язати задачу для півсмуги, що послаблена тріщиною.

Список використаних джерел

1. Колосов Г. В. Применение комплексных диаграмм и теории функции комплексной переменной к теории упругости / Г. В. Колосов. – Москва: ОНТИ, 1935. – 224 с.
2. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости / Н. И. Мусхелишвили. – Москва: Наука, 1966. – 707 с.
3. Уфлянд Я. С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости / Я. С. Уфлянд. – Ленинград: Наука, 1967. – 402 с.
4. Pickett G. Stress concentrations in post-tensioned prestressed concrete beams / G. Pickett, K. T. S. R. Iyengar // J. Technol. – 1956. – Vol. 1, № 2. – P. 105–112.
5. Koiter W. On the bending of cantilever rectangular plates / W. Koiter, J. Alblas // Proc. Koninke. Nederl. Akad. wet., B. – 1954. – Vol. 57, № 2. – P. 250–269.
6. Колчин Г. Б. Некоторые задачи термоупругости для прямоугольных областей / Г. Б. Колчин, Ш. Н. Плят, Н. Я. Шейнкер. – Кишинев: Штиинца, 1980. – 106 с.
7. Thecaris P. The stress distribution in a semi-infinite strip subjected to a concentrated load / P. Thecaris // Trans. J. Appl. Mech. – 1959. – Vol. 26, № 3. – P. 401–406.
8. Johnson M. W. The semi-infinite elastic strip / M. W. Johnson, R. W. Little // Quart. Appl. Math. – 1965. – Vol. 22, № 4. – P. 335–344.
9. Gregory R. D. The traction boundary value problem for the elastostatic semi-infinite strip; existence of solution, and completeness of the Papkovitch-Fadle eigenfunction / R. D. Gregory // J. Elasticity. – 1980. – Vol. 10, № 3. – P. 295–327.
10. Попов Г. Я. Точные решения некоторых краевых задач механики деформируемого твёрдого тела / Г. Я. Попов. – Одесса: Астропринт, 2013. – 424 с.
11. Попов Г. Я. Функции и матрицы Грина одномерных краевых задач / Г. Я. Попов, С. А. Абдыманов, В. Б. Ефимов. – Алматы: Рацах, 1999. – 133 с.
12. Попов Г. Я. Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений / Г. Я. Попов. – Москва: Наука, 1982. – 344 с.

References

1. KOLOSOV, G. V. (1935) *Primenenie Kompleksnih Diagram i Teorii Funkzii Kompleksnoy Peremennoy k Teorii Uprugosti*. Moskva: ONTI.
2. MUSHELISHVILI, N. I. (1966) *Nekotorye Osnovnye Zadachi Matematicheskoy Teorii Uprugosti*. Moskva: Nauka.
3. UFLYAND, Ya. S. (1967) *Integralnye Preobrazovaniya v Zadachah Teorii Uprugosti*. Leningrad: Nauka.
4. PICKETT, G. & IYENGAR, K. T. S. R. (1956) Stress concentrations in post-tensioned prestressed concrete beams. *J. Technol.* 1 (2). p. 105–112.
5. KOITER, W. & ALBLAS, J. (1954) On the bending of cantilever rectangular plates. *Proc. Koninke. Nederl. Akad. Wet., B.* 57 (2). p. 250–269.
6. KOLCHIN, G. B., PLYAT, Sh. N. & SHEYNKER, N. Ya. (1980) *Nekotorye Zadachi Termouprugosti Dlya Pryamougolnih Oblastey*. Kishenev: Shtiinza.
7. THECARIS, P. (1959) The stress distribution in a semi-infinite strip subjected to a concentrated load. *Trans. J. Appl. Mech.* 26 (3). p. 401–406.
8. JONSON, M. W. & LITTLE, R. W. (1965) The semi-infinite elastic strip. *Quart. Appl. Math.* 22 (4). p. 335–344.
9. GREGORY, R. D. (1980) The traction boundary value problem for the elastostatic semi-infinite strip; existence of solution, and completeness of the Papkovitch-Fadle eigenfunction. *J. Elasticity.* 10 (3). p. 295–327.
10. POPOV, G. Ya. (2013) *Tochnyye Resheniya Nekotorykh Kraevykh Zadach Mehaniki Deformiruemogo Tverdogo Tela*. Odessa: Astroprint.
11. POPOV, G. Ya., Abdimanov, S. A. & Efimov V. V. (1999) *Funkcii i Matrici Grina Odnomernykh Kraevykh Zadach*. Almaty: Ratsah.
12. POPOV, G. Ya. (1982) *Koncentraciya Uprugih Napryazheniy Vozle Shtampov, Razrezov, Tonkih Vklucheniya i Podkrepleniya*. Moskva: Nauka.

Надійшла до редколегії 22.09.15

УДК 539.3

Васильєва Л. Я., к. ф.-м. н., ст. викл.

**Напружено-деформований стан
півпростору при дії комбінованого
термомеханічного імпульсного
навантаження з врахуванням
мікроструктурних перетворень
в матеріалі**

Миколаївський національний університет
ім. В. О. Сухомлинського, 54030, м. Миколаїв,
вул. Нікольська, 24
e-mail: lara@vasiliev.mk.ua

L. Ya. Vasiljeva, Ph.D. (Phys.-Math.), Sr. Lecturer

**The stress-strain state of a half-space under
a combined thermomechanical pulse loading
with an account of microstructural
transformations in a material**

V. O. Sukhomlynsky National University of
Mykolayiv, 54030, Mykolayiv, Nikolska str., 24
e-mail: lara@vasiliev.mk.ua

Досліджується формування залишкового напружено-деформованого стану при комбінованому імпульсному термічному і силовому навантаженні півпростору. Для моделювання зв'язаної термомеханічної поведінки використовується узгоджена з термодинамікою необоротних процесів модель із внутрішніми змінними, модифікована для врахування мікроструктурних перетворень. Досліджується вплив мікроструктурних перетворень на залишковий напружено-деформований стан півпростору.

Ключові слова: мікроструктурні перетворення, термомеханічне імпульсне навантаження, залишковий напружено-деформований стан.

A formation of a residual stress-strain state of a half-space under the combined pulse thermal and force loading is considered. The model with internal variables, which is consistent with thermodynamics of irreversible processes, is used to simulate the material response to the fast thermomechanical loading. The model is modified to take into account of microstructural transformations (MST) that accompany the processes of fast heating followed by the gradual cooling. The resulting residual stress-strain state is formed by the inelastic strain caused by the thermomechanical pulse loading combined with the inelastic strain that occurs due to a change in the microstructural state of a material. In the latter case, the inelastic strain is induced by the difference of the specific volume of the microstructural phases. Martensite has the largest specific volume and austenite has the smallest one. The problem statement formulated is essentially nonlinear. The problem is solved numerically with the use of FEM technique specially developed to deal with high velocity coupled thermomechanics accounting for MST. The Newmark scheme is applied to allow for the dynamic problem integration. The influence of the MST on the residual stress-strain state of a half-space is investigated. A stress intensity is chosen as the main representative characteristic to describe the residual state of a material at the pulse subjected site. The main attention is paid to the evaluation of a size of thermal and force pulse affected zones as well as to the MST contribution to the residual stress state.

Key Words: Microstructural Transformation, Thermomechanical Pulse Loading, Residual Stress-Strain State.

1. Вступ

При термомеханічному процесі, зумовленому швидкодіючим тепловим та силовим імпульсом, що діють синхронно, чітко виділяються дві складові. Перша з них пов'язана з динамічним хвильовим процесом, який полягає в формуванні хвилі стискання на стадії дії імпульсу напруження й розігріву, та її подальшому розповсюдженні. Друга пов'язана з більш тривалим процесом охолодження приповерхневого шару після припи-

нення дії термомеханічного імпульсу і формування залишкового напружено-деформованого стану (НДС).

Такий складний термомеханічний процес спостерігається зокрема при імпульсній обробці елементів конструкцій потужними лазерами або проковуванні, які фактично є комбінацією теплового і механічного імпульсного впливу на тіло-об'єкт технології [1, 2]. Дійсно, імпульсне суто механічне навантаження при проковуванні, як правило, прикладається до тіла в умовах підви-

щеної температури. В свою чергу, термомеханічний вплив на матеріал при лазерному опроміненні реалізується через два основні механізми:

1) внаслідок дії потужного імпульсу частина матеріалу поверхні випаровується, утворюючи плазму, яка внаслідок розширення генерує хвилю стиснення, що поширюється всередину об'єкта;

2) має місце швидкий розігрів матеріалу і наступне поступове охолодження з великими градієнтами температури [2].

Як результат формується залишковий напружено-деформований стан, який може суттєво впливати на міцність та роботоздатність конструкції. Ситуація ускладнюється тим, що для багатьох металів та сплавів швидкий розігрів з наступним поступовим охолодженням супроводжується зміною мікроструктурного складу в тілі, що також призводить до формування залишкового НДС внаслідок різних питомих об'ємів мікроструктурних фаз: мартенсит має найбільший питомий об'єм в порівнянні з іншими структурами, а аустеніт – найменший.

Для дослідження взаємодії механічних і теплових полів при таких комбінованих навантаженнях використовується динамічна постановка задачі із залученням узагальненої узгодженої з термодинамікою незворотних процесів моделі фізично нелінійної поведінки матеріалів в широкому діапазоні температур, модифікованої для врахування мікроструктурних перетворень (МСП) [1].

В рамках такої постановки досліджується задача про дію комбінованого навантаження: теплового імпульсу та імпульсу напружень на півпростір. Імпульси мають таку інтенсивність, що їх вплив на матеріал не супроводжується зміною агрегатного стану. Досліджуються особливості перехідних термомеханічного та мікроструктурного станів, а також залишкового напружено-деформованого стану, що формується при наступному поступовому охолодженні.

2. Модель мікроструктурних перетворень

Для описання поведінки матеріалів в складних умовах швидкого термомеханічного навантаження використана модель фізично нелінійного тіла із внутрішніми змінними, яка була узагальнена на випадок врахування мікроструктурних перетворень у роботі [1]. Вона складається з наступних співвідношень: виразу для повної деформації як суми пружної ε_{ij}^e , непружної ε_{ij}^p і термострук-

турної $\varepsilon_{ij}^{\theta s}$ складових

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^p + \varepsilon_{ij}^{\theta s}, \quad (1)$$

виразу для теплової деформації

$$\varepsilon_{ij}^{\theta} = \delta_{ij} \int_{\theta_0}^{\theta} \alpha(\theta') d\theta'; \quad (2)$$

де α – коефіцієнт лінійного теплового розширення, а термоструктурна складова обчислюється через питомі об'єми мікроструктурних фаз V_{ξ} за формулою

$$\varepsilon_{ij}^{\theta s}(\theta, \theta_r, C_{\xi}) = \frac{V_{\xi}(\theta) C_{\xi}(\theta) - V_{\xi}(\theta_r) C_{\xi}(\theta_r)}{3V_{\xi}(\theta_r) V_{\xi}(\theta)}. \quad (3)$$

У рівнянні (3) θ і θ_r – поточна і деяка відрхункова температури, температура; по повторюваному індексу ξ відбувається додавання.

Температурні залежності питомих об'ємів $V_{\xi}(\theta)$, віднесені до $\theta = 20^\circ\text{C}$, взяті з [1].

Модель також містить: співвідношення закону Гука

$$\sigma_{ij} = 2G(\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^p - \varepsilon_{ij}^{\theta s}) + \lambda_E(\varepsilon_{kk} - \varepsilon_{kk}^{\theta s})\delta_{ij}, \quad (4)$$

де σ_{ij} і ε_{ij} – тензори напруження і деформації, s_{ij} і e_{ij} – девіатори тензорів напруження і деформації відповідно; G , K_V і λ_E – модулі зсуву, об'ємного стиску і параметр Ламе відповідно; закон течії з умовою пластичної нестисливості

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^p = D_0 \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[\frac{(\bar{K}_0 + K)^2}{3J_2} \right] \right\} s_{ij} / J_2^{1/2}, \quad (5)$$

$$\varepsilon_{ij}^p(0) = 0,$$

де $Z = K + D$, $J_2 = s_{ij}s_{ij}/2$, $D_2^p = \dot{\varepsilon}_{ij}^p \dot{\varepsilon}_{ij}^p / 2$, $\lambda^2 = D_2^p / J_2$; рівняння еволюції для внутрішніх змінних ізотропного K та направленого β_{ij} зміцнення

$$\dot{K} = m_1(\bar{K}_1 - K)\dot{W}^p, \quad K(0) = \bar{K}_0, \quad (6)$$

$$\dot{\beta}_{ij} = m_2(D_1 u_{ij} - \beta_{ij})\dot{W}^p, \quad \beta_{ij}(0) = 0,$$

а $\bar{K}_0$ і $\bar{K}_1$ визначаються формулами: $\bar{K}_0 = C_{\xi} K_{\xi 0}$, $\bar{K}_1 = C_{\xi} K_{\xi 1}$, де $u_{ij} = \sigma_{ij} / (\sigma_{ij} \sigma_{ij})^{1/2}$, $D = \beta_{ij} u_{ij}$,

$\dot{W}_p = \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}^p$, C_ξ – об’ємні концентрації мікроструктурних фаз, $\xi = f, p, b, m$ відповідно, фериту, перліту, бейніту і мартенситу; $K_{\xi 0}$, $K_{\xi 1}$ – параметри моделі для відповідних фаз.

Величини D_0 , D_1 , K_0 , K_1 , m_1 , m_2 , і n є константами моделі. Як вказано у [2], частина цих параметрів не залежить від температури, а частина є температурозалежними. Відповідні залежності та значення подано також у [1]. Співвідношення (1)–(6) разом визначають модель мікроструктурних перетворень. Об’ємні концентрації мікроструктурних фаз при нагріванні і охолодженні визначаються з експериментальних даних [1].

3. Постановка задачі

Розглядається півпростір $z \geq 0$, $0 < r < \infty$, на поверхні $z \geq 0$ якого задають граничні умови імпульсного термічного і механічного навантаження

$$q_s = \begin{cases} q_0 \sin \frac{\pi}{t_q} t, & t \leq t_q, \\ 0, & t > t_q; \end{cases} \quad (7)$$

$$\sigma_{zz} = \begin{cases} -p_0 \sin \frac{\pi}{t_\sigma} t, & t \leq t_\sigma, \\ 0, & t > t_\sigma; \end{cases} \quad (8)$$

де q_0 і p_0 – задані параметри навантаження, t_q і t_σ – часові параметри навантаження – тривалості дії імпульсів, для яких вибирається $t_\sigma = 2t_q$.

Постановка осесиметричної задачі також містить співвідношення Коші

$$\varepsilon_z = \frac{\partial u_z}{\partial z}, \quad \varepsilon_r = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \varepsilon_\varphi = \frac{u_r}{r}, \quad (9)$$

$$\varepsilon_{rz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z} \right),$$

рівняння руху

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} (\sigma_r - \sigma_\varphi) + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} = \rho \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2}, \quad (10)$$

$$\frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \sigma_{rz} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = \rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2},$$

рівняння теплопровідності

$$c_v \dot{\theta} + 3\alpha \theta K_V (\dot{\varepsilon}_{kk} - 3\alpha \dot{\theta}) - D' - k \Delta \theta = r_s, \quad (11)$$

рівняння моделі поведінки матеріалу (1)–(6) і початкові умови

$$u_r = u_z = \dot{u}_r = \dot{u}_z = 0, \quad \theta = \theta_0 \quad \text{при } t = 0. \quad (12)$$

У формулах (7)–(12) u_r , u_z – переміщення вздовж відповідних осей; c_v і k – коефіцієнти теплоємності при сталому об’ємі і теплопровідності відповідно; r_s – потужність заданих внутрішніх джерел тепла; D' – швидкість дисипації механічної енергії, θ_0 – початкова температура; n_j – компоненти вектора одиничної нормалі до відповідної граничної поверхні; $\dot{\varepsilon}_{kk} = \dot{\varepsilon}_r + \dot{\varepsilon}_z + \dot{\varepsilon}_\varphi$, Δ – оператор Лапласа.

4. Результати розрахунків і висновки

Припускається, що відмінною від нуля є лише осьова компонента переміщення, $u_z = u_z(z, t)$ причому $\theta = \theta(z, t)$. Тоді задача для півпростору є еквівалентною задачі для стержня $0 < r < R$, $z \geq 0$, на бічній поверхні якого реалізуються умови жорсткого гладкого контакту і теплоізоляції. Розрахунки проводились за допомогою методу скінченних елементів, спеціально розробленого для розв’язання задач з врахуванням МСП і непружного деформування за умов підвищених температур. Використані наступні параметри для стержнів: радіус $R = 10^{-6}$ м; довжина $L = 5 \cdot 10^{-3}$ м.

Для з’ясування парціальних внесків термічного і механічного навантаження у НДС розглянуто три задачі: 1) суто термічне навантаження $q_0 \neq 0$, $p_0 = 0$; 2) суто механічне навантаження $q_0 = 0$, $p_0 \neq 0$; 3) комбіноване термомеханічне навантаження $q_0 \neq 0$, $p_0 \neq 0$.

При обчисленнях приймалось $q_0 = 2 \cdot 10^{11}$ КВт/м², $p_0 = 8$ ГПа, $t_q = 10^{-8}$ с.

Для зручності будемо використовувати такі позначення: q – суто теплове навантаження без урахування МСП; $q+f$ – суто теплове навантаження з урахуванням МСП; p – суто механічне навантаження; $q+p$ – комбіноване термомеханічне навантаження без врахування МСП; $q+p+f$ –

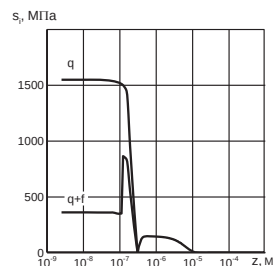


Рис. 1. Інтенсивність залишкових напружень для суто теплового навантаження з врахуванням МСП та без нього

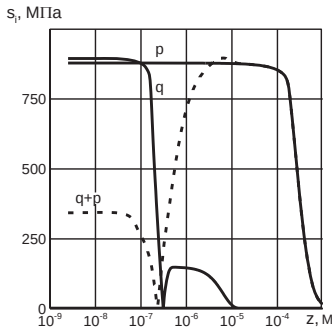


Рис. 2. Порівняння результатів з випадком силового навантаження

комбіноване термомеханічне навантаження з урахуванням МСП.

Результати розрахунків інтенсивності залишкових напружень представлені на рис. 1–3.

При тепловому навантаженні (криві q) МСП (криві $q+f$) суттєво зменшують рівень напружень в приповерхневому шарі за рахунок формування мартенситу. Суто механічне навантаження (криві p) формує область інтенсивностей напружень на рівні динамічної границі течії в шарі $z_p < 10^{-3}$ м. При комбінованому термомеханічному навантаженні (криві $q+p$) залишковий напружено-деформований стан має двомасштабну структуру – в приповерхневому шарі $0 < z \leq 10^{-6}$ м взаємодіють термічна і механічна складові навантаження, тоді як в області $10^{-6} < z \leq 7 \cdot 10^{-4}$ м домінує стан, сформований під дією механічного навантаження; при $z \geq 7 \cdot 10^{-4}$ м залишкові напруження відсутні.

Список використаних джерел

1. Жук Я. О. Вплив мікроструктурних перетворень на напружено-деформований стан локально опроміненого сталевго диска / Я. О. Жук, І. К. Сенченков, Л. Я. Васильєва // Математичні методи та фізико-механічні поля. – 2011. – Т. 54, № 1. – С. 101–115.
2. Жук Я. О. Залишковий напружено-деформований стан сталевго диска при імпульсному тепловому опроміненні / Я. О. Жук, І. К. Сенченков, О. В. Бойчук // Математичні методи та фізико-механічні поля. – 2008. – Т. 51, № 1. – С. 157–168.

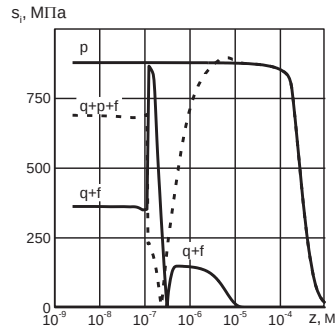


Рис. 3. Порівняння результатів з випадком комбінованого навантаження з врахуванням МСП

В приповерхневій зоні можливі незначні розтягувальні або стискальні напруження, зумовлені взаємодією парціальних процесів. Вони розташовані в смугі $0 < z \leq 10^{-7}$ м. Область непружного деформування і зміцнення (наклепу) має дворівневу структуру: перший ($z \leq 5 \cdot 10^{-7}$ м) формується взаємодією термічного і ударного навантаження; другий ($5 \cdot 10^{-7} < z \leq 7 \cdot 10^{-4}$ м), формується ударним механічним навантаженням. При комбінованому термомеханічному навантаженні в наслідок МСП (криві $q+p+f$) формується трьохзонна область термофазомеханічного впливу. Зона впливу МСП $z_f \leq 10^{-7}$ м, зона термомеханічного впливу $10^{-7} < z_{pq} < 10^{-6}$ м і зона суто механічного впливу $z_p \leq 10^{-3}$ м. Таким чином, МСП разом з механічним імпульсом є суттєвим фактором формування області із зниженим значенням інтенсивності напружень на поверхні тіл з мартенситних сталей.

References

1. ZHUK, Y. O., SENCHENKOV, I. K. & VASILIEVA, L. Y. (2011) Vplyv mikrostrukturnykh peretvoren na napruzhenodeformovanyj stan lokalno oprominenogo stalevogo dyska. *Matematychni Metody ta Fizyko-Mekhanichni Polya*. 54 (1). p. 101–115.
2. ZHUK, Y. O., SENCHENKOV, I. K. & BOICHUK, E. V. (2008) Zalyshkovyj napruzhenodeformovanyj stan stalevogo dyska pry impul'snomu teplovomu oprominenni. *Matematychni Metody ta Fizyko-Mekhanichni Polya*. 51 (1). p. 157–168.

Надійшла до редколегії 30.09.15

УДК 539.3

Войтко М. В., к. ф.-м. н., наук. співр.,
Кутлик М. М., аспірант,
Куриляк Д. Б., д. ф.-м. н., ст. наук. співр.

Резонансне розсіювання SH-хвилі скінченною тріщиною у пружному шарі

Фізико-механічний інститут ім. Г. В. Карпенка
НАН України, 79060, м. Львів, вул. Наукова, 5
e-mail: voytko@ipm.lviv.ua

M. V. Voytko, Ph. D. (Phys.-Math.),
Sci. Researcher,
M. M. Kutlyk, Postgraduate Student,
D. B. Kuryliak, Dr. Sci. (Phys.-Math.),
Sr. Sci. Researcher

A resonance scattering of SH-wave by the finite crack in an elastic layer

H. V. Karpenko Physico-Mechanical Institute of NAS
of Ukraine, 79060, Lviv, Naukova str., 5
e-mail: voytko@ipm.lviv.ua;

Досліджено взаємодію пружної SH-хвилі зі скінченною тріщиною в шарі. Методом Вінера – Гопфа задачу дифракції зведено до нескінченної системи лінійних алгебричних рівнянь (НСЛАР). Записано відповідне характеристичне рівняння для визначення спектра. Наведено залежності власних частот від параметрів задачі.

Ключові слова: метод Вінера – Гопфа, резонансні коливання, тріщина, пружний шар.

The problem of diffraction of normally SH-wave by a finite crack situated at the plane elastic layer is investigated. The crack surface and layer one are assumed to stress-free. The solution of the problem is sought in class of functions that ensure the satisfying of the radiation condition at infinity and Meixner condition at the vertex of the crack. Applying the boundary conditions to the integral representations of the unknown scattered field than the initial problem is formulated as the modified Wiener–Hopf equation. This one is reduced to a pair of simultaneous integral equations via the factorization and the decomposition procedures. Further, these integral equations are reduced to the infinite system of linear algebraic equations (ISLAE) of the second kind. The obtained ISLAE are solved by the reduction method with the desired accuracy depending from the number of truncation. The approximate characteristic equation is also derived. The solutions of this equation as a function of parameters of the initial problem are analyzed at the cut Riemann surface. The resonance properties of the corresponding dynamic problem is considered. The numerical dependences of the complex resonance frequencies as a function of geometrical parameters are shown.

Key Words: Wiener–Hopf Technique, Resonance Vibrations, Crack, Elastic Layer.

1. Вступ

Для забезпечення оптимальних режимів діагностування плоскошаруватих структур з дефектами важливо визначити залежності їх власних частот від геометричних та фізико-механічних параметрів. Такі дослідження базуються на зведенні задач дифракції до нескінченних систем лінійних алгебричних рівнянь (НСЛАР) і аналізі поведінки комплексних коренів визначника як функції $\Phi(k)$ спектрального параметра $k = \omega/c$. Цей параметр входить у визначник нелінійно і міститься під знаками радикалів. Отже для однозначного визначення коренів розглядають функцію $\Phi(k)$ на нескінченнолінійній рімановій поверхні $\mathcal{R}$ з розрізами, які вибирають так, щоб за-

безпечити формування загасаючих у часі та наростаючих у просторі коливань [1]. Точки галуження $\mathcal{R}$ знаходяться на дійсній осі і визначаються типом мод поля в структурі.

Тут розглянемо найпростішу задачу – визначення спектра пружного шару зі скінченною тріщиною, паралельною до його плоских меж. Ця задача розв'язується в два етапи. Перший етап – розв'язок дифракційної задачі для різних типів хвиль – досліджувався багатьма авторами [2–4, 6]. Другий етап – вивчення спектральних властивостей аналогічних динамічних задач – проводилось в [5, 7].

Питання існування дискретного спектра нескінченного матричного оператора дифракційної задачі і ефективність знаходження його власних

значень суттєво залежить від асимптотичних властивостей матричних елементів.

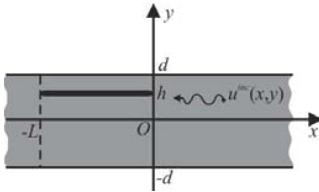


Рис. 1. Геометрична схема

Тому для розв'язання дифракційної задачі тут використали метод Вінера – Гопфа, який дає експоненціальне загасання матричних елементів при зростанні індексів і забезпечує найбільш простий їх вигляд. Для розв'язання спектральної задачі використовуємо методику запропоновану в [1] для задач електродинаміки.

2. Задача дифракції

Нехай у декартовій системі координат $Oxyz$ задано пружний шар $P: \{x \in (-\infty, \infty), y \in (-d, d)\}$ з тріщиною $\Gamma: \{x \in (-L, 0), y = h \ (h \leq d)\}$ (рис. 1). Тріщина Γ опромінюється симетричною SH-модю, що поширюється у від'ємному напрямі осі x :

$$u_z^{inc} = u^{inc}(x, y) = e^{\gamma_j x} \cos(\beta_j y), \quad (1)$$

де $\gamma_j = (\beta_j^2 - k^2)^{1/2}$, $\text{Re } \gamma_j \geq 0$, $\beta_j = \pi j / 2d$, $j = 2, 4, \dots$; $k = k' + ik''$ – хвильове число, $k' \gg k'' > 0$. Часову залежність $e^{-i\omega t}$ опускаємо.

Дифраговане поле зміщень описується скалярною функцією $u = u(x, y)$, яку знаходимо з розв'язку крайової задачі:

$$\partial_x^2 u + \partial_y^2 u + k^2 u = 0, \quad (2)$$

$$\tau_{zy} = \mu \partial_y (u + u^{inc}) = 0, y = \pm d; x \in (-\infty, \infty), \quad (3)$$

$$\tau_{zy} = \mu \partial_y (u + u^{inc}) = 0, y = h \pm 0; x \in (-L, 0). \quad (4)$$

Розв'язок шукаємо у класі функцій, що забезпечують виконання умови граничного поглинання на нескінченності та умови Мейкснера на вершинах тріщини. Невідоме поле подаємо інтегралом Фур'є

$$u(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} U(\alpha, y) e^{-i\alpha x} d\alpha, \quad (5)$$

де $U(\alpha, y) = B(\alpha) e^{\gamma y} + C(\alpha) e^{-\gamma y}$, $\gamma = (\alpha^2 - k^2)^{1/2} = -i(k^2 - \alpha^2)^{1/2}$, $\text{Re } \gamma \geq 0$; $B(\alpha)$, $C(\alpha)$ – невідомі функції. Далі зводимо крайову задачу (2)–(4) до функціонального рівняння типу Вінера – Гопфа

$$[\Psi^{(+)}(\alpha) + e^{-i\alpha L} \Psi^{-}(\alpha)] M(\alpha) + J_1(\alpha) = 0. \quad (6)$$

Тут $\alpha = \text{Re } \alpha + i \text{Im } \alpha (\equiv \sigma + i\tau)$ – параметр перетворення Фур'є, $\alpha \in \Pi: \{-\tau_0 < \tau < \tau_0\}$, $\tau_0 \leq \text{Im } k$;

$$\Psi^{(+)}(\alpha) = U^{'+}(\alpha, h) + \frac{i\beta_j \sin(\beta_j h) e^{-\gamma_j L}}{\sqrt{2\pi}(\alpha - i\gamma_j)}, \quad (7)$$

$$\Psi^{-}(\alpha) = U^{'+}(\alpha, h) - \frac{i\beta_j \sin(\beta_j h)}{\sqrt{2\pi}(\alpha - i\gamma_j)}, \quad (8)$$

де $U^{\pm}(\alpha, h)$ – невідомі Фур'є трансформанти поля напружень відповідно справа та зліва від вершин тріщини, регулярні у півплощинах $\tau < \tau_0$ та $\tau > -\tau_0$, за винятком точки $\alpha = i\gamma_j$, де функція $\Psi^{(+)}(\alpha)$ має простий полюс; $J_1(\alpha)$ – невідома ціла функція, яка за фізичним змістом є трансформантою Фур'є стрибка зміщень на берегах тріщини; $\Psi^{(+)}(\alpha) = O(\alpha^{-1/2})$ при $|\alpha| \rightarrow \infty$ в областях регулярності; $J_1(\alpha) = O(\alpha^{-3/2})$, коли $\tau < \tau_0$, а при $\tau > -\tau_0$ отримуємо $e^{i\alpha L} J_1(\alpha) = O(\alpha^{-3/2})$. Парна функція $M(\alpha)$ має вигляд

$$M(\alpha) = -\frac{\text{sh}(2\gamma d)}{\gamma \text{sh}[\gamma(d+h)] \text{sh}[\gamma(d-h)]} \quad (9)$$

і є регулярною у смузі Π , а за межами цієї смуги має прості нулі і полюси.

Функція (9) допускає факторизацію:

$$M(\alpha) = M_+(\alpha) M_-(\alpha), \quad (10)$$

Тут

$$M_+(\alpha) = -\sqrt{\frac{k \sin(2kd)}{\sin(kl_2) \sin(kl_3)}} \frac{1}{(\alpha + k)} \times \\ \times \frac{e^{-i\alpha(l_2 \ln(2d/l_2) + l_3 \ln(2d/l_3)) / \pi} \prod_{n=1}^{\infty} [1 + \alpha / (i\gamma_{n1})] e^{i\alpha \frac{2d}{n\pi}}}{\prod_{n=1}^{\infty} [1 + \alpha / (i\gamma_{n2})] e^{i\alpha \frac{l_2}{n\pi}} \prod_{n=1}^{\infty} [1 + \alpha / (i\gamma_{n3})] e^{i\alpha \frac{l_3}{n\pi}}} \quad (11)$$

де $l_2 = d - h$, $l_3 = d + h$;

$$\gamma_{n1} = (2d)^{-1} \sqrt{(\pi n)^2 - (2kd)^2}, \quad (12)$$

$$\gamma_{n2(3)} = l_{2(3)}^{-1} \sqrt{(\pi n)^2 - (kl_{2(3)})^2}. \quad (13)$$

Функції $M_{\pm}(\alpha)$ регулярні, і не мають нулів відповідно у півплощинах $\tau > -\tau_0$, $\tau < \tau_0$ і в областях регулярності $M_{\pm}(\alpha) = O(\alpha^{-1/2})$ при $|\alpha| \rightarrow \infty$; $M_{\pm}(\alpha)$ мають прості нулі при $\alpha = \mp i\gamma_{n1}$ і полюси при $\alpha = \mp i\gamma_{n2}$, $\mp i\gamma_{n3}$, а також простий полюс, коли $\alpha = \mp k$; $M_{-}(\alpha) = M_{+}(-\alpha)$.

Стандартна процедура факторизації та декомпозиції рівняння (6) приводить до функціональних співвідношень виду

$$M_{+}(\alpha)\Psi^{(+)}(\alpha) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{i\xi_n L} \Psi^{-}(-\xi_n)}{[M_{+}^{-1}(-\xi_n)]'(\alpha + \xi_n)} =$$

$$= -\frac{i\beta_j \sin(\beta_j h) M_{+}(i\gamma_j)}{\sqrt{2\pi} \alpha - i\gamma_j}, \quad (14)$$

$$M_{-}(\alpha)\Psi^{-}(\alpha) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{i\xi_n L} \Psi^{+}(\xi_n)}{[M_{-}^{-1}(\xi_n)]'(\alpha - \xi_n)} =$$

$$= \frac{i\beta_j e^{-\gamma_j L} \sin(\beta_j h) M_{-}(i\gamma_j)}{\sqrt{2\pi} \alpha - i\gamma_j}, \quad (15)$$

де $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty} = k \cup \{i\gamma_{n2}\}_{n=1}^{\infty} \cup \{i\gamma_{n3}\}_{n=1}^{\infty}$ – полюси функції $M_{-}(\alpha)$, ($\text{Im} \xi_n > 0$, $\xi_1 = k$) впорядковані так, що $\text{Im} \xi_{n+1} \geq \text{Im} \xi_n$.

Покладаючи у рівняннях (14), (15) відповідно $\alpha = \xi_n$, $\alpha = -\xi_n$, $n = 1, \infty$, отримаємо НСЛАР, які в кінцевому варіанті запишемо так:

$$[I + A]X = F. \quad (16)$$

Тут $X = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $x_n = M_{+}(\xi_n)\Psi^{+}(\xi_n)$; $x_n = O(n^{-1})$ при $n \rightarrow \infty$; I – одинична матриця, $A: \{a_{pm}\}_{p,m=1}^{\infty}$,

$$a_{pm} = \frac{e^{i\xi_m L}}{M_{+}(\xi_m)[M_{-}^{-1}(\xi_m)]'} \times$$

$$\times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{i\xi_n L}}{M_{+}(\xi_n)[M_{-}^{-1}(-\xi_n)]'(\xi_p + \xi_n)(\xi_n + \xi_m)}. \quad (17)$$

Для елементів (17) при $p, m \rightarrow \infty$ виконується:

$$|a_{pm}| \leq C e^{-\eta m} / (pm), \quad (18)$$

де C , η – відомі сталі, а отже $\|A\|_{l_2} = \sum_{p,m} |a_{pm}|^2 < \infty$ і НСЛАР (16) має єдиний розв'язок в l_2 . Виключенням є дискретні значення хвильового параметра, для яких однорідне рівняння (16) допускає ненульовий розв'язок.

3. Визначення спектра

Розглянемо функцію $\Phi(\Omega) = \det[I - A(\Omega)]$, де $\Omega = 2kd$ – безрозмірний спектральний параметр. Дискретний спектр визначається як множина комплексних коренів рівняння

$$\Phi(\Omega) = 0 \quad (19)$$

на нескінченнолистій рімановій поверхні $\mathcal{R}$ з розрізами вздовж ліній

$$\frac{(\pi n)^2}{l_{2(3)}^2} - \text{Re}^2(k) + \text{Im}^2(k) = 0, \quad (20)$$

щоб на першому листі забезпечити формування загасаючих у часі власних коливань [1]. На рис. 2 схематично наведена система розрізів у комплексній площині k за фіксованого n .

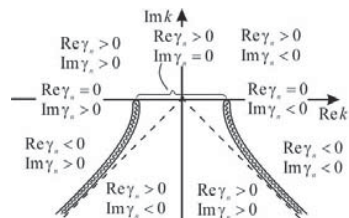
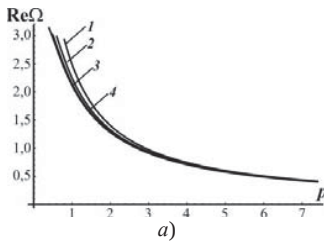


Рис. 2. Схема розрізів ріманової поверхні для фіксованого n ($\gamma_n = \gamma_{n2(3)}$)

На рис. 3 наведено залежності дійсної та уявної частин власних частот $\text{Re} \Omega$ від нормованої довжини тріщини $p = L/(2d)$ для різних значень її положення $h_1 = 1/2 - h/(2d)$.

Із наведених на рис. 3а залежностей спостерігаємо спадання $\text{Re} \Omega$ зі зростанням p . Фізично це вказує, що резонансне збудження більшої тріщини в шарі можливе на меншій частоті. Крім того, комплексне значення власної частоти коливань (рис. 3б) дає експоненційно загасаючі в часі сигнали з декрементом загасання $|\text{Im} \Omega|$, який зменшується зі збільшенням довжини тріщини.



4. Висновки

Показано можливість збудження резонансних поперечних коливань у пружному шарі за наявності в ньому скінченної тріщини, поверхня якої, паралельна його граням. Ці результати можна використати для вибору оптимальної частоти зондування у технічній діагностиці матеріалів та виробів.

Список використаних джерел

1. Шестопалов В. П. Спектральная теория и возбуждение открытых структур / В. П. Шестопалов. – К.: Наук. думка, 1987. – 288 с.
2. Mitra R. Analytical Techniques in the Theory of Guided Waves / R. Mitra, S. W. Le. – New York: Macmillan Company. – 1971. – 302 p.
3. Rokhlin S. I. Resonance phenomena of Lamb waves scattering by a finite crack in a solid layer / S. I. Rokhlin // J. Acoust. Soc. Am. – 1981. – Vol. 69, № 4. – P. 922–928.
4. Семків М. Я. Дифракція нормальних SH-хвиль на розрізі скінченної довжини у пружному хвилеводі / М. Я Семків, Г. М. Зражевський, В. Т. Маципура // Акустичний вісник. – 2013–2014. – Т. 16, № 1. – С. 54–63.
5. Сухинин С. В. Собственные колебания около пластины в канале / С. В. Сухинин // Прикладная механика и техническая физика. – 1998. – Т. 39, № 2. – С. 78–90.
6. The layered element method in the dynamic theory of elasticity / [Ye. V. Glushkov, N. V. Glushkova, A. A. Yerein, V. V. Mikhas'kiv] // J. Appl. Math. Mech. – 2009. – Vol. 73, № 4. – P. 449–456.
7. On the interaction of an elastic SH-wave with an interface crack in the perfectly rigid joint of a plate with a half-space / [Z. T. Nazarchuk, D. B. Kuryliak, M. V. Voytko, Ya. P. Kulynych] // J. Math. Sci. – 2013. – Vol. 192, № 6. – P. 609–622.

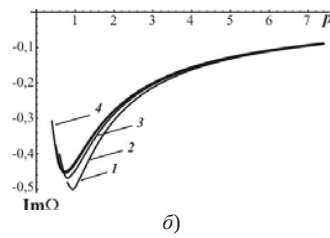


Рис. 3. Залежність дійсної (а) та уявної (б) частин резонансної частоти від p . 1 – $h_1 = 0.12$; 2 – $h_1 = 0.25$; 3 – $h_1 = 0.37$; 4 – $h_1 = 0.49$

References

1. SHESTOPALOV, V. P. (1987) *Spektralnaya Teoriya i Vozbuzhdenie Otkrytyh Struktur*. Kiev: Naukova dumka.
2. MITTRA, R. & Le, S. W. (1971) *Analytical Techniques in the Theory of Guided Waves*. New York: Macmillan Company.
3. ROKHLIN, S. I. (1981) Resonance phenomena of Lamb waves scattering by a finite crack in a solid layer. *J. Acoust. Soc. Am.* 69 (4). p. 922–928.
4. SEMKIV, M. YA, ZRAZHEVSKIY, G. M. & MATSYUPURA, V. T. (2013–2014) Difraktsiya normalnyh SH-hvyl na rozrizi skinchennoyi dovzhyny u pruzhnomu hvylevodi. *Akustychnyy visnik*. 16 (1). p. 54–63.
5. SUKHININ, S. V. (1998) Sobstvennye kolebaniya okolo plastyny v kanale. *Prikladnaya Mehanika i Tehnicheskaya Fizika*. 39 (2). p. 78–90.
6. GLUSHKOV, YE. V. et al. (2009) The layered element method in the dynamic theory of elasticity *J. Appl. Math. Mech.* 73(4). p. 449–456.
7. NAZARCHUK, Z. T. et al. (2013) On the interaction of an elastic SH-wave with an interface crack in the perfectly rigid joint of a plate with a half-space. *J. Math. Sci.* 192 (6). p. 609–622.

Надійшла до редколегії 30.09.15

УДК 539.3

Гачкевич О. Р.^{1,2}, д. ф.-м. н., проф.,
Козакевич Т. В.¹, к. ф.-м. н., н. с.,
Гаск М.², д. т. н., проф.

**Залишкові фазовий і напружений стани
сталеві пластини, зумовлені рухомим
розподіленим джерелом тепла і стаціо-
нарним локальним температурним
полем**

¹Інститут прикладних проблем механіки і
математики ім. Я. С. Підстригача НАН
України, 79060, м. Львів, вул. Наукова, 3-б
e-mail: dept13@iapmm.lviv.net

²Політехніка Опольська, Польща, 45-061,
м. Ополе, вул. Озимська, 75
e-mail: o.hachkevych@po.opole.pl,
m.gajek@po.opole.pl

A. R. Hachkevych^{1,2}, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof.,
T. V. Kozakevych¹, Ph. D. (Phys.-Math.),
Sci. Researcher,
M. Gajek², Dr. Sci. (Tech.), Prof.

**Residual phase and stress distributions of
a steel plate subjected to a moving
distributed heat source and a local stationary
temperature field**

¹Pidstryhach Institute of Applied Problems of Me-
chanics and Mathematics of NAS of Ukraine, 79060,
L'viv, Naukova str., 3-b
e-mail: dept13@iapmm.lviv.net

²Opole University of Technology, 45-061, Opole,
Ozyska str., 75
e-mail: o.hachkevych@po.opole.pl,
m.gajek@po.opole.pl

З метою вивчення впливу різних технологічних факторів на механічну поведінку сталевих конструкційних елементів при високотемпературному нагріві, запропоновано методіку дослідження залишкових фазового та напруженого станів тонких малоуглецевих низьколегованих сталевих пластин при сумісному нагріві рухомим нормально розподіленим джерелом тепла до температур повної аустенізації сталі в певних підобластях та додатковим стаціонарним температурним полем.

Ключові слова: тонка малоуглецева низьколегована сталевая пластина, рухомі розподілені джерела тепла, додатковий підігрів, температурне поле, фазовий склад та залишковий напружений стан.

The method of definition of a phase and residual stress distribution for a thin low-carbon low-alloyed plate subjected to a compatible heating by a moving normally distributed heat source and a stationary temperature field (additional heating) is proposed. The method is based on adapted to the proposed class of problems known models describing phase composition and caused residual stresses in steel solids subjected to the monotonous cooling (from a high temperature initial state with a complete austenization zone). The method is built on the weighted residual method combined with the finite element method for the numerical solving of three stages of the proposed calculation scheme (definition of temperature field, definition of percentage of residual phase components based on the known analytical dependences obtained by statistical processing of the experimental phase diagrams of thermokinetic changes in the steel solids subjected to monotonous cooling, and definition of residual stress based on the problem set out in displacements by the relative deformation method with known deformation caused by various percentage of phase components of the specific volumes). The numerical analysis of the conducted problem shows that heating of the plate by the additional local stationary temperature field can reduce the maximum values of martensitic component and residual stress intensity by 30% in comparison with the case of one moving normally distributed heat, while not making qualitative changes in the distribution phase composition and the residual stresses.

Key Words: Thin Low-Carbon Low-Alloyed Steel Plate, Distributed Moving Heat, Additional Heating, Temperature Field, Phase Composition and Residual Stress State.

1. Вступ

При термообробці сталевих пластин у зонах термічного впливу можуть виникати залишкові

напруження, від величини яких суттєво залежать кінцеві функціональні та міцнісні властивості виробів, а також їх надійність. При цьому однією

з причин появи залишкових напружень у сталевих тілах за високотемпературного нагріву (охолодження) є виникнення фазових чи структурних змін. Відома залежність механічних властивостей сталевих виробів від фазового складу: найбільшу твердість і міцність має метал з переважно мартенситною структурою, а найменшу – з ферито-перлітною; зменшення відсоткового вмісту мартенситу збільшує пластичні властивості сталевих пластини і т.д. Тому актуальними є дослідження фазового складу та залишкових напружень у тонких сталевих пластинах за врахування впливу певних термічних і технологічних параметрів нагріву.

2. Постановка задачі та її розв'язання

Визначаються залишкові фазовий і напружений стани тонкої сталеві пластини при нагріві рухомих нормально розподіленим джерелом тепла $\bar{Q}_1$:

$$\bar{Q}_1 = (Q_1^* / 2\pi\bar{\sigma}) \exp(-(x_2^2 + (x_1 - x_1^*)^2) / 2\bar{\sigma}), \quad (1)$$

за наявності підігріву, що описується стаціонарним температурним полем

$$T_0 = t_c + T \cdot \exp(-x_2^2 / \bar{\sigma}_1), \quad (2)$$

де Q_1^* – потужність джерела тепла на одиницю довжини (кВт/м), $\bar{\sigma}$ – параметр розсіювання (м^2), v – швидкість руху джерела тепла (м/с), τ – час (с), x_1 і x_2 – координати точок серединної площини пластини (м), $x_1^0 = v\tau$, $\bar{\sigma}_1$ – параметр, що характеризує розподіл цього поля (м^2), t_c – температура довкілля ($^{\circ}\text{C}$), $T + t_c$ – максимальна температура ($^{\circ}\text{C}$) (див. рис. 1).

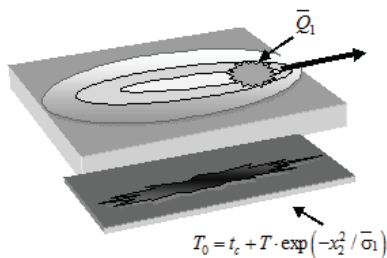


Рис. 1 Схема розміщення джерела тепла за наявності стаціонарного температурного поля

Джерело тепла $\bar{Q}_1$ (рис. 1), що рухається зі сталою швидкістю v вздовж осі $0x_1$, нагріває пластину до температури вищої від температури повної аустенізації сталі A_{c3} в окремих її підоб'єктах (в околі січення $x_2 = 0$), а потім вона монотонно охолоджується.

Для розв'язання поставленої задачі використано відому математичну модель опису фазового складу та зумовлених ним залишкових напружень у маловуглецевих низьколегованих сталевих тілах за монотонного охолодження з аустенованого стану [1].

При цьому методика комплексного визначення фазового складу і зумовленого ним залишкового напруженого стану тонких маловуглецевих низьколегованих сталевих пластин за умов локального високотемпературного нагріву рухомих розподіленим джерелом тепла з одним центром локалізації та додатковим стаціонарним температурним полем, включає три етапи:

1) визначення температурного поля на основі математичної постановки відповідної двовимірної початково-крайової задачі теплопровідності для тонкої пластини за локального високотемпературного нагріву рухомих розподіленим джерелом тепла з врахуванням стаціонарного температурного поля, а також обчислення часу перебування точок пластини в інтервалі температур поліморфних перетворень з використанням встановлених за значеннями температури ізотерм;

2) знаходження з використанням відомих узагальнених залежностей статистичного аналізу (за визначеного часу перебування точок тіла в діапазоні температур поліморфних перетворень та наявного хімічного складу сталі) відсоткового вмісту виниклих фазових складових [1–2];

3) визначення залишкових напружень на основі залежностей методу умовних залишкових деформацій за відомої (у відповідності до принципу адитивності) деформації, викликані відсотковим вмістом наявних фазових складових за встановлених значень їх питомих об'ємів.

Була розроблена методика послідовного чисельного розв'язування відповідних задач математичної фізики наявних етапів розрахункової схеми за врахування числової форми отримання результатів на кожному етапі [3], де використано метод зважених залишків (зокрема, метод Гальоркіна) та метод скінчених елементів.

3. Числові дослідження

Дослідження проведено для пластини з маловуглецевої низьколегованої сталі 17Г1С з хімічним складом: Mn = 1.35%, C = 0.175%, Si = 0.5%, $\bar{\sigma} = 30 \cdot 10^{-6}$ м² при $t_c = 20$ °C; $Q_1^* = 800$ кВт/м, $v = 2 \cdot 10^{-3}$ м/с, $\lambda = 4.42$ кВт/(м³·°C); $\alpha / 2h = 2.34 \cdot 10^2$ Вт/(м³·°C); $c_p = 5.52$ КДж/(м³·°C).

На рис. 2 приведено для одного з варіантів досліджень результати розподілів фазових складових (а, б) та компонент залишкових напружень відносно координати x_2 (в, г) при джерелі тепла з одним центром локалізації (ліній: 1 – мартенсит, 2 – бейніт, 3 – ферито-перліт, %; 4 – σ_{11} , 5 – σ_{22} , 6 – інтенсивність напружень σ_{int} , МПа).

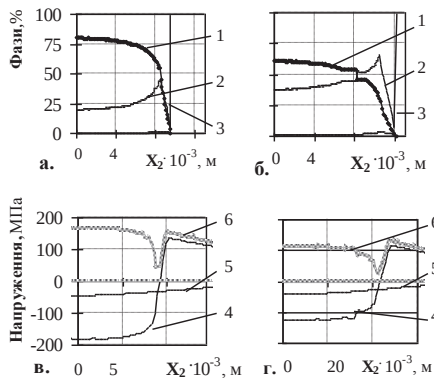


Рис. 2 Розподіл фаз (а, б) та залишкових напружень (в, г) у пластині при супутньому підігріві за $T = 300$ °C і параметрі потужності рухомого джерела $Q_1^* = 670$ кВт/м та при різних значеннях параметра $\bar{\sigma}_1$: $49 \cdot 10^{-6}$ м² – (а, в); $2500 \cdot 10^{-6}$ м² – (б, г).

На рис. 2 (б, г) подано значення параметра $\bar{\sigma}_1$, при якому одержується таке ж мінімальне значення максимального вмісту мартенситу, як і при загальному рівномірному додатковому підігріві пластини до температури $T + t_c$. Результати розрахунку максимального відсоткового вмісту мартенситу та півширини a зони термічного впливу (ЗТВ), у якій наявна мартенситна складова, залежно від параметра $\bar{\sigma}_1$ приведено в таблиці 1.

З підвищенням значень T та $\bar{\sigma}_1$ відбувається зниження вмісту мартенситу, як і при рівномір-

ній сталій початковій температурі підігріву (див. рис. 3). Встановлено, що при цьому максимальний вміст мартенситу і максимальна інтенсивність залишкових напружень у пластині можуть зменшуватись на 30%.

Таблиця 1
Максимальні значення вмісту мартенситу, інтенсивності напружень і півширини зони термічного впливу при $T = 300$ °C, $Q_1^* = 670$ кВт/м

№	$\bar{\sigma}_1 \cdot 10^{-6}$, м ²	M_{max} , %	σ_{int} , МПа	$a \cdot 10^{-3}$, м
1	-	61.4	130.1	12.3
3	49	80.0	163.7	9.6
4	121	76.1	152.0	10.1
5	256	71.9	148.3	10.6
6	625	67.4	146.5	11.3
7	1225	64.1	135.5	11.8
8	2500	61.0	129.9	12.2
9	3600	59.8	128.5	12.3

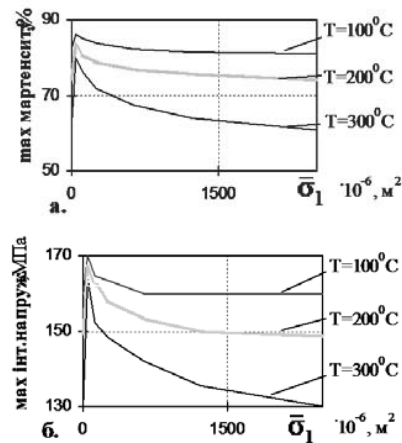


Рис. 3 Залежності максимальних значень мартенситу M_{max} (а) та інтенсивності напружень σ_{int} (б) від параметрів $\bar{\sigma}_1$ та T

4. Висновки

Досліджено залежність максимального вмісту мартенситу та інтенсивності залишкових напружень від параметрів стаціонарного температур-

ного поля та півширини зони зміни фазового складу. З отриманих даних випливає, що найбільше пониження вмісту мартенситу досягається при максимальних значеннях T (див. рис. 3). Це узгоджується з даними про формування структури сталі у ЗТВ (підвищення T приводить до зменшення швидкостей охолодження в зонах, де відбулися поліморфні перетворення).

Додаткові термічні чи технологічні умови можуть зменшувати максимальні значення мартенситної складової та інтенсивності залишкових напружень до 30 % у порівнянні з випадком наявності лише одного рухомого нормально розподіленого джерела тепла Q_1 . Загальний однорід-

ний додатковий підігрів [2] і такий підігрів додатковим стаціонарним локальним температурним полем не вносить якісних змін в розподіли фазового складу і залишкових напружень. Локальне стаціонарне температурне поле дає такий же ефект пониження рівнів вмісту мартенситу та інтенсивності залишкових напружень, як і однорідний супутній підігрів. Проте з огляду на технологічну простоту реалізації локального стаціонарного температурного поля (за суттєвої економії енергетичних ресурсів) його застосування є більш ефективним в порівнянні з загальним однорідним підігрівом.

Список використаних джерел

1. Seyffarth P. Rechnerische Bestimmung der prozentualen Gefügezusammensetzung in der Wärmeeinflusszone niedriglegierter Stähle / P. Seyffarth, O.G. Kassatkin // ZIS-Mitteilungen. – 1984. – Vol. 26, № 12. – S. 1284–1292.
2. Гачкевич А.Р. Влияние предварительного подогрева на остаточное структурное напряженное состояние стальной пластины при воздействии движущихся источников тепла / А.Р. Гачкевич, Т.В. Козакевич // Теоретическая и прикладная механика. – 2013. – Т. 53, № 7. – С. 157–164.
3. Гачкевич А.Р. Варіант числової методики визначення зумовленого структурними перетвореннями залишкового напруженого стану сталевих пластин за нагріву рухомими розподіленими джерелами тепла / А.Р. Гачкевич, Т.В. Козакевич, М. Гаєк // Вісник Донецького національного університету. Сер. А: природничі науки. – 2013. – № 2. – С. 37–43.

References

1. SEYFFARTH, U. & KASSATKIN, O. (1984) Rechnerische Bestimmung der prozentualen Gefügezusammensetzung in der Wärmeeinflusszone niedriglegierter Stähle. ZIS-Mitteilungen. 26 (12). p. 1284–1292.
2. GACHKEVICH, A. & KOZAKEVICH, T. (2013) Vliyanie predvaritelnogo podogreva na ostatochnoe strukturnoe napryazhennoe sostoyanie stalnoy plastiny pri vozdeystvii dvizhushchikhsya istochnikov tepla. Teoreticheskaya i Prikladnaya Mekhanika. 53 (7). p. 157–164.
3. HACHKEVYCH, O., KOZAKEVYCH, T. & GAJEK, M. (2013) Variant chyslovoi metodyky vyznachennya zumovlenoho strukturnymy peretvorennyamy zalyshkovoho napruzhеноho stanu stalevykh plastyn za nahrivu rukhomymy rozpodilenyymi dzerelamy tepla. Vistnyk Donetskoho Natsionalnoho Universytetu. Ser. A: Pryrodnychi Nauky. (2). p. 37–43.

Надійшла до редколегії 29.09.15

УДК 539.3

Гачкевич О. Р.^{1,2}, д. ф.-м. н., проф.,
Терлецький Р. Ф.¹, д. ф.-м. н., с. н. с.,
Турій О. П.¹, к. ф.-м. н., н. с.

Моделювання термомеханічної поведінки опромінюваних шаруватих тіл

¹Інститут прикладних проблем механіки і
математики ім. Я. С. Підстригача НАН
України, 79060, м. Львів, вул. Наукова, 3-6
e-mail: dept13@iapmm.lviv.net

²Політехніка Опольська, Польща, 45-061,
м. Ополе, вул. Озимська, 75
e-mail: o.hachkevych@po.opole.pl

A. R. Hachkevych^{1,2}, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof.,
R. F. Terlet'sky¹, Dr. Sci. (Phys.-Math.),
Sr. Sci. Researcher,
O.P. Turii¹, Ph. D. (Phys.-Math.), Sci. Researcher

The modeling of thermomechanical behavior of irradiated layered solids

¹Pidstryhach Institute of Applied Problems of Me-
chanics and Mathematics of NAS of Ukraine, 79060,
Lviv, Naukova str., 3-6
e-mail: dept13@iapmm.lviv.net

²Opole University of Technology, 45-061, Opole,
Ozyska str., 75
e-mail: o.hachkevych@po.opole.pl

Запропоновано математичну модель, що описує на основі феноменологічної теорії випромінювання та теорії квазістатичної термoprужності, термонапружений стан опромінюваних плоскошаруватих тіл (пластин) зі складниками різної прозорості за врахування впливу теплового випромінювання на поверхнях, в частково прозорих областях і на межах контакту. Записані вихідні співвідношення моделі для нескінченних три- та двошарових пластин за різних комбінацій радіаційних властивостей складників. Отримано наближені співвідношення для визначення характеристик поля випромінювання, температури і напружень в пластині, шари якої з'єднані через тонкий проміжковий шар, та в пластині з тонким покриттям.

Ключові слова: моделювання, термонапружений стан, теплове опромінення, теплоперенос, багатшарові пластини.

A mathematical model to describe a thermoelastic state of plane-parallel plates (plate composites) subjected to a thermal radiation is developed. The model is grounded on phenomenological theory of radiation and quasistatic thermoelasticity. It takes into account an effect of radiation on plate surfaces, contact boundaries, and in a semitransparent plate bulk. It is assumed a perfect contact between the constituents of layers that boundary contact is modeled on the plane surface defined on both sides of its radiation characteristics of the material layers and the conditions of heat and mechanical contacts – ideal. Within the framework of the model, the contact problems of heat transfer and thermoelasticity for plates consisting of two and three layers of a various transparency have been posed. Approximated relations to determine the radiative characteristics (using the effective reflectance at the interface of layers), temperature (utilising the operator method) and stresses (using given stiffness characteristics of the bending and stretching of the intermediate layer) in a plate consisting of two layers connected by an intermediate thin layer and in plate with coatings have been developed.

Key Words: Modeling, Thermostressed State, Thermal Irradiation, Heat Transfer, Multilayered Plate.

1. Вступ

Розвиток і вдосконалення сучасного приладобудування, електронної, космічної, авіаційної та інших галузей техніки пов'язано із застосуванням нових шаруватих конструкційних елементів, що містять складники з неметалевих (кераміки, скла, ситалів, кварцу, феритів та ін.) та металевих матеріалів. При їх з'єднанні шляхом склеювання, зварювання, спаювання і т. п. утворюється про-

міжковий шар з відмінними властивостями. Його структура, товщина і фізико-механічні характеристики визначаються способом з'єднання. Такі шаруваті елементи отримують також шляхом нанесення на основу зміцнюючих, захисних чи іншого функціонального призначення покриття на основі металів чи неметалів. Під час виготовлення чи експлуатації згадані елементи конструкцій та приладів можуть перебувати за умов теплового опромінення чи високих температур. При цьо-

му, їх складники мають різну прозорість для теплового випромінювання, що включає область спектра від ультрафіолетової до далекої інфрачервоної (довжини хвиль $0.4 \div 1000$ мкм). Непрозорість (повне поглинання енергії випромінювання в тонкому приповерхневому шарі – $100 \div 1000$ Å) характерна для металів, а часткова прозорість (повне поглинання за товщин від часток міліметра до кількох метрів) – для неметалів.

Створення ефективних моделей та методів розрахунку теплопереносу та напруженого стану в шаруватих елементах конструкцій, які можуть містити складники з різними радіаційними властивостями, за врахування впливу теплового випромінювання, вимагає адекватного моделювання поширення потоків випромінювання в шаруватих тілах. Суттєвим є врахування специфіки поглинання та випромінювання теплової енергії складниками при постановці контактних задач теплопереносу для таких тіл – формулювання рівнянь теплопереносу, крайових і контактних умов.

Врахування структури опромінюваних шаруватих елементів (наявність основних, проміжкових шарів чи покриттів різної прозорості), параметрів зовнішніх джерел теплового опромінення та їх розташування відносно тіла, умов теплообміну з зовнішнім середовищем вимагає ускладнення в постановочному плані задач, що описують перенос випромінювання та теплопереносу, зокрема модельних задач для три- та двошарових пластин. Такі ускладнені постановки дають можливість розширити коло проблем, які досліджує термомеханіка чи теорія температурних напружень в новому напрямку – радіаційної термомеханіки. З іншого боку вони сприяють більш адекватному формулюванню задач термопружності для шаруватих тіл за умов теплового опромінення чи високих температур.

Слід зазначити, що у відомих математичних моделях термопружності [1], які стосуються шаруватих і кусково-неоднорідних тіл радіаційні властивості складників, зокрема міжконтактного прошарку, не беруть до уваги. Тому ефекти пов'язані з поширенням теплового випромінювання (як зовнішнього, так і власного) та поглинання і випромінювання теплової енергії в об'ємі при описі теплового стану не враховані. В літературі не встановлені умови ідеального теплового контакту на межі поділу шарів з різною прозорістю та узагальнені умови теплообміну через проміжковий шар чи покриття за врахування особливостей випромінювання, поглинання та поширення теплової енергії в області контакту. В рамках радіацій-

ної термомеханіки не досліджували термонапружений стан опромінюваних як частково прозорих шаруватих тіл, так і тіл зі складниками з різними радіаційними властивостями.

2. Поширення теплового випромінювання в шаруватих тілах

У феноменологічній теорії випромінювання [2] за характером поглинання та випромінювання теплового випромінювання – об'ємним чи приповерхневим – тіла поділяють на частково прозорі та непрозорі. Тому, розглядаємо складники плоско-шаруватих структур, що є непрозорими чи частково прозорими тілами у всьому діапазоні спектра теплового випромінювання.

При дослідженні термомеханічної поведінки частково прозорих чи непрозорих деформованих твердих тіл, спричиненої тепловим опроміненням, зовнішнє теплове випромінювання, як випромінювання нагрітого тіла наближено може бути задане у зовнішньому середовищі (яке вважається прозорим) спектральною інтенсивністю $I_{\lambda s}(\vec{x}, t, \vec{g}_0)$ (λ – довжина хвилі) падаючого на тіло випромінювання від реального джерела. Ця інтенсивність на поверхні тіла є функцією точки (характеризується радіус-вектором $\vec{x}$), часу t і напрямку ($\vec{g}_0$ – орт в напрямку поширення променя). Вона може бути прийнята пропорційною до спектральної інтенсивності $I_{b\lambda}$ випромінювання абсолютно чорного тіла при температурі T_s джерела [1, 3], тобто

$$I_{\lambda s}(\vec{x}, t, \vec{g}_0) = k_{\lambda}(\vec{x}, \vec{g}_0) I_{b\lambda}(\lambda, T_s), \quad (1)$$

де $k_{\lambda}(\vec{x}, \vec{g}_0)$ – задана функція, вигляд якої встановлюється залежно від енергетичних і спектральних характеристик реального джерела випромінювання та його розташування відносно тіла. Теплове випромінювання від всіх джерел імпульсного чи неперервного типу, що застосовуються для нагріву (обробки) тіл задовільняє умову квазістаціонарності, $\left| \frac{\partial I_{\lambda s}}{\partial t} \right| \ll c_0 \lambda^{-1} |I_{\lambda s}|$, де c_0 – електродинамічна стала. Співвідношення (1) використовуємо при заданні поля опромінення на поверхні плоско-шаруватого тіла.

Поширення теплового випромінювання в частково-прозорих шарах описуємо квазістаціонарним рівнянням переносу [2]. Таке рівняння, що передбачає променевий характер поширення випромінювання, отримане на основі закону Бугера і враховує також власне теплове випромінювання

$$\frac{\partial I_{\lambda}(\vec{x}, t, \vec{g}_0)}{\partial g} = a_{\lambda} [I_{m\lambda}(T) - I_{\lambda}(\vec{x}, t, \vec{g}_0)] \cdot (2)$$

Тут $I_{\lambda}(\vec{x}, t, \vec{g}_0)$ – спектральна інтенсивність випромінювання в шарі, g – віддаль у напрямку поширення променя, яка відраховується від межі поділу з сусідніми складниками (зокрема, від границі тіла, якщо шар межує із зовнішнім середовищем); a_{λ} – спектральний коефіцієнт поглинання, який визначає ослаблення випромінювання і знаходиться з експерименту; $I_{m\lambda} = (n_{\lambda})^2 I_{b\lambda}[T(\vec{x}, t)]$ – спектральна інтенсивність власного теплового випромінювання, яка залежить від значення спектрального показника заломлення n_{λ} матеріалу і температури $T(\vec{x}, t)$ в шарі.

Розв'язок рівняння (2) подасмо у вигляді:

$$I_{\lambda}(\theta_{\lambda}, t, \vec{g}_0) = I_{\lambda}^{ef}(\vec{x}, t, \vec{g}_0) \exp(-\theta_{\lambda}) + \int_0^{\theta_{\lambda}} I_{m\lambda}(\lambda, T) \exp[-(\theta_{\lambda} - \theta'_{\lambda})] d\theta'_{\lambda}, \quad (3)$$

де $\theta_{\lambda}(\vec{x}) = \int_0^{g(\vec{x})} a_{\lambda}(g^*) dg^*$ – оптична товщина шляху у шарі (x_i – прямокутні Декартові координати); I_{λ}^{ef} – інтенсивності ефективного випромінювання, яке відходить від поверхонь поділу з сусідніми шарами (зокрема, від границі тіла) в точці $\vec{x}$ в напрямку $\vec{g}_0$ усередину шару. Ефективні інтенсивності на границях частково прозорих шарів знаходимо (за визначених експериментально показнику заломлення та коефіцієнтах відбивання) використовуючи граничні умови, які виражають баланс всіх потоків випромінювання, що підводяться до границі (у тому числі й перебідених всередині частково прозорої області). Такі умови є системи двох чи $2n$ (n – кількість контактуючих частково прозорих шарів) інтегральних рівнянь типу Фредгольма другого роду.

В загальному випадку кожне з рівнянь можна записати у вигляді:

$$I_{\lambda}^{ef}(\vec{x}, t, \vec{g}_0) = I_{\lambda}^{rf}(\vec{x}, t, \vec{g}_0) + \frac{1}{\pi} \int_{\Gamma} R_{\lambda}''(\vec{x}, \vec{g}_0, \vec{g}') I_{\lambda}^{inc}(\vec{x}, t, \vec{g}') \cos(\vec{g}' \wedge \vec{n}) d\Omega_{\vec{g}'}. \quad (4)$$

Тут I_{λ}^{rf} – спектральна інтенсивність заломленого з контактуючого частково прозорого шару (зовнішнього середовища) чи випроміненого з поверхні контактуючого непрозорого шару випромінювання;

$I_{\lambda}^{inc}(\vec{x}, \vec{g}_0')$ – інтенсивність випромінювання, що падає на границю зсередини шару в напрямку $\vec{g}_0'$; $R_{\lambda}''(\vec{x}, \vec{g}_0, \vec{g}_0')$ – двоспрямована відбивальна здатність границі; $\vec{n}$ – вектор нормалі до границі. Інтегрування проводиться по тілесному куту $\Gamma = 2\pi$ ($d\Omega_{\vec{g}_0}$ – його елемент в напрямку $\vec{g}_0'$). Якщо частково прозорий шар межує із прозорим зовнішнім середовищем ($n_{\lambda} = 1$), то

$$I_{\lambda}^{rf}(\vec{x}, t, \vec{g}_0') = n_{\lambda}^2 [1 - R_{\lambda}'(\vec{x}, \vec{g}_0')] I_{\lambda s}(\vec{x}, t, \vec{g}_0'), \quad \text{де} \\ R_{\lambda}'(\vec{x}, \vec{g}_0') - \text{односпрямована відбивальна здатність границі тіла. Напрямки } \vec{g}_0 \text{ і } \vec{g}'' \text{ пов'язані співвідношенням } \sin(\vec{g}_0 \wedge \vec{n}) / \sin(\vec{g}_0'' \wedge \vec{n}) = n_{\lambda}. \text{ У випадку контакту з іншим частково прозорим шаром}$$

$$I_{\lambda}^{rf}(\vec{x}, t, \vec{g}_0') = (n_{\lambda} / n_{\lambda c}) [1 - R_{\lambda}'(\vec{x}, \vec{g}_0')] I_{\lambda}^{inc}(\vec{x}, t, \vec{g}_0''), \quad \text{де } I_{\lambda}^{inc}(\vec{x}, t, \vec{g}_0'') - \text{інтенсивності випромінювання, що падає на границю в напрямку } \vec{g}_0'' \text{ з боку сусіднього шару (} n_{\lambda c} - \text{його показник заломлення). При контакті з непрозорим шаром}$$

$$I_{\lambda}^{rf}(\vec{x}, t, \vec{g}_0') = I_{\lambda}^{op}(\vec{x}, t, \vec{g}_0'), \quad \text{де } I_{\lambda}^{op}(\vec{x}, t, \vec{g}_0') - \text{інтенсивність власного теплового випромінювання з поверхні непрозорого шару в частково прозорій. Її визначасмо по відношенню до інтенсивності } I_{m\lambda} \text{ випромінювання в частково прозоре середовище абсолютно чорного тіла і характеризуємо односпрямованим спектральним ступенем чорноти } \varepsilon_{\lambda}'(\vec{x}, \vec{g}_0) \text{ поверхні:}$$

$$I_{\lambda}^{op}(\vec{x}, \vec{g}_0, t) = \varepsilon_{\lambda}'(\vec{x}, \vec{g}_0) (n_{\lambda})^2 I_{b\lambda}[T(\vec{x}, t)]. \quad (5)$$

В умовах теплової рівноваги поверхні її поглинальні властивості теж визначаються параметром $\varepsilon_{\lambda}'(\vec{x}, \vec{g}_0)$. Тоді, інтенсивність $I_{\lambda}^{abs}(\vec{x}, t, \vec{g}_0)$ поглинутого непрозорою поверхнею теплового випромінювання за інтенсивності падаючого на неї $I_{\lambda}^{inc}(\vec{x}, t, \vec{g}_0)$, враховуючи закон Кірхгофа [2]:

$$\varepsilon_{\lambda}'(\vec{x}, \vec{g}_0) = 1 - R_{\lambda}'(\vec{x}, \vec{g}_0), \quad \text{виразимо так:}$$

$$I_{\lambda}^{abs}(\vec{x}, t, \vec{g}_0) = [1 - R_{\lambda}'(\vec{x}, \vec{g}_0)] I_{\lambda}^{inc}(\vec{x}, t, \vec{g}_0). \quad (6)$$

Якщо температура T_s джерела випромінювання суттєво перевищує температуру T в досліджуваному однорідному частково прозорому тілі в літературі для опису поширення зовнішнього теплового випромінювання використовують квазі-стаціонарне рівняння переносу в наближенні невиспромінюючого матеріалу [2]. Його отримуємо з (2)

при $I_{m\lambda} = 0$. Розв'язок (2) у цьому випадку спрощується і має вигляд:

$$I_{\lambda}(\theta_{\lambda}, \vec{g}_0) = I_{\lambda}^{ef}(\vec{x}, \vec{g}_0) \exp(-\theta_{\lambda}). \quad (7)$$

Використання такого наближення дозволяє відокремити задачі визначення поля випромінювання та температури в частково прозорому тілі. Для частково прозорих областей шаруватого тіла як «зовнішнє» виступає випромінювання джерела, якщо частково прозора область межує з зовнішнім середовищем, чи випромінювання з поверхні контактуючого непрозорого шару. Таке наближення, за згаданих обмежень на температури, застосовуємо і в другому випадку, оскільки максимум енергії теплового випромінювання непрозорого шару припадає на ближню та далеку область інфрачервоного діапазону, коли характер її поглинання приповерхневий.

Вплив «зовнішнього» випромінювання на частково прозору область, можна охарактеризувати через тепловий – об'ємні тепловиділення та силовий – об'ємні (пондеромоторні) сили чинники (за теплового опромінення ним нехтують [3]). У наближенні невідпромінюючого матеріалу тепловиділення в частково прозорій області визначають поглинуту енергію «зовнішнього» теплового випромінювання, а їх вираз за відомими з розв'язку систем інтегральних рівнянь типу Фредгольма другого роду ефективними інтенсивностями I_{λ}^{ef} випромінювання на поверхнях буде

$$Q = \int_0^{\infty} \left[a_{\lambda}(\vec{x}) \int_{\Gamma} I_{\lambda}^{ef}(\vec{x}, \vec{g}_0) \exp(-\theta_{\lambda}) d\Gamma_{\vec{g}_0} \right] d\lambda. \quad (8)$$

В непрозорих областях шаруватого тіла процеси випромінювання та поглинання теплової енергії, згідно феноменологічної теорії, вважаємо поверхневими, а випромінену і поглинуту енергію характеризуємо відповідними потоками q_{op} і q_{abs} на поверхнях (на поверхні контакту двох непрозорих шарів такі потоки компенсуються). Їх вирази отримуємо інтегруючи співвідношення (5), (6) по спектру і в межах кута $\Gamma = 2\pi$

$$q_{op}(\vec{x}) = \int_0^{\infty} \left\{ \varepsilon'_{\lambda}(n_{\lambda})^2 I_{m\lambda}[T(\vec{x}, t)] d\Gamma_{\vec{g}_0} \right\} d\lambda, \quad (9)$$

$$q_{abs}(\vec{x}) = \int_0^{\infty} \left\{ \int_{\Gamma} [1 - R'_{\lambda}] I_{\lambda}^{inc}(\vec{x}, t, \vec{g}_0) d\Gamma_{\vec{g}_0} \right\} d\lambda. \quad (10)$$

Якщо ступінь чорноти поверхні вважати незалежною від напрямку $\vec{g}_0$ ($\varepsilon'_{\lambda} = \varepsilon_{\lambda}(\vec{x})$) і довжини

хвилі λ (дифузно-сіра поверхня), а показник заломлення – незалежним від λ (зокрема, рівними середньоінтегральним значенням в реальному спектральному діапазоні $\varepsilon_{\lambda}(\vec{x}) = \varepsilon(\vec{x})$, $n_{\lambda} = n = \text{const}$), то з (8) отримуюмо вираз Стефана – Больцмана $q_{op}(\vec{x}) = \varepsilon(\vec{x}) (n)^2 \sigma T^4(\vec{x}, t)$ (σ – постійна Стефана – Больцмана) для потоку випроміненої теплової енергії. Зауважимо, що для дифузно-відбиваючих поверхонь (як непрозорих так і частково прозорих тіл) справедливі співвідношення $R'_{\lambda}(\vec{x}, \vec{g}_0) = \pi R'_{\lambda}(\vec{x}, \vec{g}_0) = R_{\lambda}(\vec{x})$, де $R_{\lambda}(\vec{x})$ – коефіцієнт дифузного відбивання, а для дифузно сірих $R_{\lambda}(\vec{x}) = R(\vec{x})$. Тоді вираз (10) теж спрощується.

3. Тепловий та напружений стан опромінюваних шаруватих пластин

Тепловий стан шаруватого тіла визначаємо із системи рівнянь теплопровідності, які описують теплоперенос в шарах. При цьому тепловиділення (8) в частково прозорих областях розглядаємо як об'ємні джерела тепла в відповідних рівняннях виду:

$$\kappa T_{,ii} + Q = \rho c_e \frac{\partial T}{\partial t}, \quad (11)$$

де ρ , κ , c_e – густина, коефіцієнт теплопровідності та питома теплоємність. Тут і надалі кома означає диференціювання за відповідними координатами x_i , а повторювані індекси – підсумовування. Для непрозорих областей в рівняннях (11) $Q = 0$.

Систему рівнянь теплопереносу доповнюємо граничними і контактними умовами, які формулюємо на основі умов неперервності нормальних складників векторів потоків тепла на поверхні тіла і на межах поділу шарів (умов балансу теплових потоків), приймаючи на межах поділу допущення про локальну теплову рівновагу між шарами (рівність їх температур). При цьому на границях поділу шарів різної прозорості чи на поверхні (якщо непрозорий шар контактує з зовнішнім середовищем) розглядаємо також потоки q_{op} і q_{abs} , обумовлені випромінюванням і поглинанням теплової енергії. Вигляд граничної умови на опромінюваній поверхні шаруватого тіла залежить від радіаційних властивостей зовнішнього шару. Для непрозорого і частково прозорого шару, такі умови відповідно будуть:

$$q_i^{(T)} = q^{ext} + q_{op} - q_{abs}, \quad q_i^{(T)} = q^{ext}. \quad (12)$$

Тут $q_i^{(T)} = -\kappa T_{,i} n_i$, q^{ext} – потоки обумовлені теплопровідністю і теплообміном з зовнішнім середовищем (зокрема, конвективним за законом Ньютона). Потоки випроміненої і поглинутої енергії визначаються згідно (9), (10) (при $I_\lambda^{inc}(\vec{x}, t, \vec{g}_0) = I_{\lambda s}(\vec{x}, t, \vec{g}_0)$). Зауважимо, що на неопромінюваній поверхні $q_{abs} = 0$.

Вигляд контактних умов залежить від радіаційних властивостей контактуючих j -го і k -го шарів. При контакті непрозорого j -го і частково прозорого k -го шарів такі умови будуть [4]:

$$\begin{aligned} (\kappa_{(j)} T_{,i}^{(j)}) n_i + q_{op} - q_{abs} &= (\kappa_{(k)} T_{,i}^{(k)}) n_i, \\ T^{(j)} &= T^{(k)}. \end{aligned} \quad (13)$$

Назвемо їх умовами ідеального теплового контакту за врахування впливу випромінювання. При контакті двох частково прозорих чи непрозорих шарів умови ідеального контакту мають відомий вигляд:

$$(\kappa_{(j)} T_{,i}^{(j)}) n_i = (\kappa_{(k)} T_{,i}^{(k)}) n_i, \quad T^{(j)} = T^{(k)}. \quad (14)$$

За знайденого з розв'язку контактної-крайової задачі теплопереносу розподілу температури в опромінюваному шаруватому тілі його термонапружений стан визначасмо на основі співвідношень температурної контактної задачі теорії пружності за умов ідеального механічного контакту між шарами.

На основі викладеного підходу до опису процесів переносу випромінювання і тепла в плоскошаруватих тілах, отримано співвідношення, що описують поле випромінювання в нескінченних тришарових пластинах, опромінюваних нагрітою паралельною до них поверхнею, за різних комбінацій радіаційних властивостей складників і варіантів опромінення (з боку частково прозорого чи непрозорого шару). У частково прозорій області пластини визначення характеристик поля випромінювання (інтенсивностей) зведено до знаходження ефективних інтенсивностей на поверхнях із систем чотирьох (шести – всі складники частково прозорі) інтегральних рівнянь типу Фредгольма 2-го роду. Знайдено вирази через ці інтенсивності для тепловиділень в частково прозорих областях та потоків випроміненої та поглинутої енергії на непрозорих границях пластини і межах поділу складників різної прозорості.

Здійснено постановки контактної-крайових

задач теплопереносу для таких пластин. За наявності непрозорого шару в пластині сформульовані задачі про визначення температури є нелінійними.

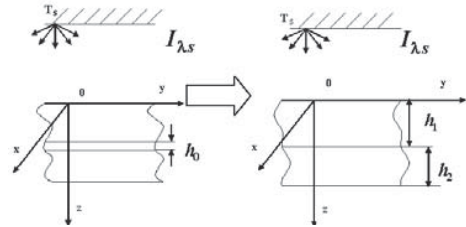


Рис. 1. Схема задачі

Термонапружений стан тришарових нескінченних пластин описано співвідношеннями температурної задачі теорії пружності, сформульованими відносно компонент тензора напружень $\sigma_{xx}^{(j)}$, $\sigma_{yy}^{(j)}$, $\sigma_{zz}^{(j)}$ ($j = 0, 1, 2$) в шарах,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \sigma_{zz}^{(j)}}{\partial z^2} &= 0, \quad \frac{\partial^2 \sigma_{xx}^{(j)}}{\partial z^2} + \frac{E_j}{1 - \nu_j} \frac{\partial^2 \phi_j}{\partial z^2} = 0, \\ \frac{\partial^2 \sigma_{yy}^{(j)}}{\partial z^2} + \frac{E_j}{1 - \nu_j} \frac{\partial^2 \phi_j}{\partial z^2} &= 0. \end{aligned} \quad (15)$$

де $\phi_j(T_j, T_0) = \alpha_t^{(j)}(T_j - T_0)$ (T_j – температури в шарах, T_0 – початкова температура в пластині); $\alpha_t^{(j)}$ – коефіцієнти лінійного температурного розширення матеріалів шарів, а ν_j , E_j – їх коефіцієнти Пуассона і модулі Юнга.

Приймається, що поверхні опромінюваної пластини $z = 0$; h ($h = h_1 + h_0 + h_2$) вільні від навантаження

$$\sigma_{zz}^{(1)}(0, t) = 0, \quad \sigma_{zz}^{(2)}(h, t) = 0, \quad (16)$$

а на межах поділу шарів мають місце умови ідеального механічного контакту. У розглядуваному випадку контактні умови, які забезпечують рівність переміщень мають вигляд:

$$\begin{aligned} e_{ll}^{(1)} &= e_{ll}^{(0)}, \quad e_{ll}^{(0)} = e_{ll}^{(2)}, \\ \frac{\partial e_{ll}^{(1)}}{\partial z} &= \frac{\partial e_{ll}^{(0)}}{\partial z}, \\ \frac{\partial e_{ll}^{(0)}}{\partial z} &= \frac{\partial e_{ll}^{(2)}}{\partial z} \quad (l = x, y), \end{aligned} \quad (17)$$

$e_{ll}^{(j)}$ – компоненти тензора деформацій в шарах.

4. Висновки

Отримано вирази для компонент тензора напружень в пластині за різних умов закріплення країв на нескінченності (вільні від зовнішніх зусиль і моментів, жорстко закріплені чи жорстко защемлені).

Для пластини з тонким частково прозорим проміжковим шаром за допомогою введення ефективного коефіцієнта відбивання на уявній межі поділу основних шарів отримано співвідношення (узагальнені умови переносу випромінювання через проміжковий шар), які дозволяють виключити його з розгляду при визначенні поля випромінювання. З використанням формального операторного методу отримані узагальнені умови теплообміну через проміжковий шар довільної прозорості за врахування ефектів поглинання та випромінювання ним теплової енергії [5]. Разом вони дають можливість використати для опису процесів переносу випромінювання і тепла в пластинах за наявності тонких прошарків модель

двошарової пластини за ускладнених радіаційних характеристик межі контакту та теплових контактних умов (умов неідеального контакту). Знайдено наближені співвідношення для визначення напружень в основних шарах, що враховують приведені жорсткісні характеристики на згин і розтяг тонкого проміжкового шару.

З застосуванням підходів та методів викладених вище, отримано вихідні співвідношення для опису поширення випромінювання та теплопереносу в опромінюваних двошарових пластинах зі складниками різної прозорості. Отримано з використанням операторного методу наближені співвідношення, що базуються на використанні узагальнених граничних умов (умов теплообміну через покриття) для опису процесів теплопереносу в опромінюваних пластинах з покриттями [4]. Розглянуто різні комбінації радіаційних властивостей пластини і покриття та варіанти опромінення. Знайдено наближені формули для визначення напружень в пластині.

Список використаних джерел

1. Гачкевич О. Р. Деякі проблеми математичного моделювання в термомеханіці тіл різної прозорості за теплового опромінення / О.Р. Гачкевич, Р.Ф. Терлецький, М.Б. Брухаль // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2008. – Т. 51, № 3. – С. 202–219.
2. Зигель Р. Теплообмен излучением / Р. Зигель, Дж. Хауелл. – Москва: Мир, 1975. – 935 с.
3. Гачкевич О. Р. Моделювання та оптимізація в термомеханіці електропровідних неоднорідних тіл. Т. 2: Механотермодифузія в частково прозорих тілах [Текст] / О. Р. Гачкевич, Р. Ф. Терлецький, Т. Л. Курницький; під заг. ред. Я. Й. Бурака, Р. М. Кушніра. – Львів: СПОЛІОМ, 2007. – 181 с.
4. Терлецький Р. Ф. Моделювання і дослідження теплопереносу у пластинах з тонкими покриттями за врахування впливу випромінювання / Р. Ф. Терлецький, О. П. Турій // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2012. – Т. 55, № 2. – С. 186–201.
5. Турій О. П. Моделювання термомеханічної поведінки опромінюваних шаруватих тіл з тонкими прошарками за врахування поглинання та випромінювання теплової енергії / О. П. Турій. // Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології. – 2013. – Т. 17. – С. 195–208.

References

1. HACHKEVYCH, A. R., TERLETSKII, R. F. & BRUKHAL', M. B. (2010) Some problems of mathematical modeling in thermomechanics of bodies of various transparencies subjected to thermal irradiation. *J. Math. Sci.* 165 (3). p. 403–425.
2. ZIGEL, R. & HAUCELL, D. (1975) *Teploobmen Izlucheniem*. Moskva: Mir.
3. HACHKEVYCH, O. R., TERLETSKIY, R. F. & KURNYTSKIY, T. L. (2007) *Modelyuvannya ta Optyimizatsiya v Termomekhanitsi Elektroprovodnykh Neodnorodnykh Til: Mekhanotermodyfuziya v Chastkovo Prozorykh Tilakh*. 2. Lviv: SPOLOM.
4. TERLETSKIY, R. F. & TURIY, O. P. (2012) Modelyuvannya i doslidzhennya teploperenosu u plastynakh z tonkym pokryttyamy za vrahuvannya vplyvu vyprominnyuvanya. *Mat. Metody ta Fiz. Mekh. Poly.* 55 (2). p. 186–201.
5. TURIY, O. P. (2013) Modelyuvannya termomekhanichnoi povedinky oprominyuvanykh sharuvatykh til z tonkymy prosharkamy za vrahuvannya poglynnannya ta vyprominennya teplovoi energii. *Fiz.-Mat. Modelyuvannya ta Inf. Tekhnologii*. 17. p. 195–208.

Надійшла до редколегії 30.09.15

УДК 539.3

Говоруха В. Б., д. ф.-м. н., проф.,
Шевельова А. С., к. ф.-м. н., доц.

**Аналіз тріщини між двома
п'єзоелектричними матеріалами в полі
стискального напруження та
зосереджених сил**

Дніпропетровський національний університет
імені Олеся Гончара, 49010, м. Дніпро-
петровськ, проспект Гагаріна, 72
e-mail: govorukhavb@yahoo.com,
allasheveleva@i.ua

V. B. Govorukha, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof.,
A. E. Sheveleva, Ph. D. (Phys.-Math.), Assoc. Prof.

**An analysis of the crack between two
piezoelectric materials in the field of
compressive stress and concentrated forces**

Oles' Honchar National University of Dnipro-
petrovsk, 49010, Dnipropetrovsk, Gagarin av., 72
e-mail: govorukhavb@yahoo.com,
allasheveleva@i.ua

Розглянуто тріщину між двома п'єзокерамічними матеріалами з відкритими ділянками та зонами гладкого контакту її берегів під дією змішаного зовнішнього навантаження. Сформульовано комбіновану крайову задачу Діріхле – Рімана, для якої виписано точний аналітичний розв'язок. Проаналізовано довжину зони контакту берегів тріщини в залежності від співвідношення інтенсивності зсувних та нормальних напружень.

Ключові слова: п'єзокерамічний матеріал, міжфазна тріщина, зона контакту.

The plane problem for an electrically permeable tunnel crack between two piezoelectric half-spaces under a concentrated loading applied to the crack faces and remote mixed-mode loading is studied. The elastic displacement and potential jumps as well as the stresses and electrical displacement along the interface are represented via a sectionally holomorphic vector functions. At the crack tip, we assume closed crack faces with a frictionless contact at the crack tip. The problem is reduced to combined Dirichlet–Riemann boundary value problems, which are solved analytically. From these solutions clear analytical expressions for characteristics of the electromechanical field at the interface are derived. A transcendental equation that determines the point of separation of the open and closed section of the crack is found. The stress intensity factors at the crack tip and the energy release rate are calculated. The influence of the magnitude and the locations of the applied loading upon the contact zone length and the associated fracture mechanical parameters is considered. The dependencies of the mentioned values on the intensities of the electromechanical loading are presented in tables and associated diagrams.

Key Words: Piezoceramic Material, Interface Crack, Contact Zone.

1. Вступ

Для випадку розтягуючих напружень на нескінченності проблема тріщини між двома п'єзокерамічними матеріалами розглядалась або в рамках класичної (осциляційної) моделі тріщини [1], або з врахуванням контакту її берегів [2]. В той же час міжфазна тріщина практично не вивчалась для випадку, коли нормальні напруження на нескінченності є стискаючими, а на берегах тріщини діють зосереджені сили. Але, як показує чисельний аналіз близької проблеми [3], наявність такого виду навантаження може призводити до появи відкритих ділянок тріщини та ділянок контакту її берегів. Вивчення цього питання і є основною метою даної роботи.

2. Постановка задачі та її розв'язання

Розглянемо плоску задачу електропружності, для біматеріальної п'єзокерамічної площини і припустимо, що на границі поділу матеріалів вздовж відрізка $c < x_1 < b$, $x_3 = 0$ порушено ідеальний зв'язок між матеріалами, тобто цей відрізок являє собою розріз, частина якого може бути закрита, а частина відкрита (рис. 1).

Півплощини $x_3 > 0$ та $x_3 < 0$ навантажені на нескінченності рівномірним напруженням $\sigma_{33}^{(j)} = \sigma_{33}^{\infty}$, $\sigma_{13}^{(j)} = \sigma_{13}^{\infty}$, $\sigma_{11}^{(j)} = (\sigma_{11}^{\infty})_j$ ($j = 1, 2$), які забезпечують умови неперервності при переході через лінію поділу матеріалів, а в точці $x_1 = d$,

$x_3 = 0$ берегів тріщини діють зосереджені сили (P_1, P_3) .

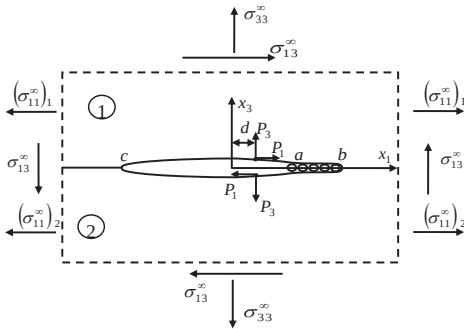


Рис. 1. Біматеріальна п'єзокерамічна площа з міжфазною тріщиною

Будемо вважати, що береги електропроникної тріщини контактують без тертя при $a < x_1 < b$. Положення точки a вважається заздалегідь невідомим. Таке формулювання є справедливим, коли більша зона контакту виникає в околі правої вершини тріщини. У цьому випадку осцилююча особливість в лівій вершині тріщини суттєво не впливає на характеристики електромеханічного поля в правій вершині тріщини [4]. Якщо ж навантаження викликає більшу контактну зону в лівій вершині тріщини, то це може бути враховано простою перестановкою півплощин.

Таким чином, граничні умови на лінії поділу матеріалів можуть бути записані у вигляді

$$\langle \sigma_{j3} \rangle = 0, \langle \phi \rangle = 0, \langle D_3 \rangle = 0, x_1 \in (-\infty, \infty); \quad (1)$$

$$\langle u_1 \rangle = 0, \langle u_3 \rangle = 0, x_1 \notin (c, b); \quad (2)$$

$$\sigma_{j3}^\pm = -P_j \delta(x_1 - d), x_1 \in (c, a); \quad (3)$$

$$\langle u_3 \rangle = 0, \sigma_{13}^\pm = 0, x_1 \in (a, b), \quad (4)$$

де $\langle f(x_1) \rangle$ – стрибок функції на лінії поділу матеріалів, $j=1,3$.

Використовуючи методику роботи [2], одержуємо представлення основних компонент електромеханічного поля вздовж осі x_1 через кусково-аналітичну функцію $F(z)$

$$\sigma_{33}(x_1, 0) + im\sigma_{13}(x_1, 0) = t[F^+(x_1) + \gamma F^-(x_1)], \quad (5)$$

$$\langle u_1'(x_1) \rangle + is\langle u_3'(x_1) \rangle = F^+(x_1) - F^-(x_1), \quad (6)$$

де m, t, s, γ – дійсні числа, які залежать від характеристик матеріалу.

У силу лінійності задачі, її розгляд можна провести для випадків навантаження на нескінченності та на берегах тріщини окремо, і остаточний розв'язок записати як суму отриманих розв'язків.

Розглянемо спочатку випадок дії рівномірно розподіленого навантаження на нескінченності, поклавши $P_1 = P_3 = 0$ у граничних умовах (3).

Задовольняючи граничні умови (1)–(4) за допомогою формул (5), (6), одержимо

$$F^+(x_1) + \gamma F^-(x_1) = 0, x_1 \in (c, a), \quad (7)$$

$$\text{Im} F^\pm(x_1) = 0, x_1 \in (a, b). \quad (8)$$

Співвідношення (7), (8) представляють собою комбіновану задачу Діріхле – Рімана для функції $F(z)$, аналітичної у всій площині за винятком ділянки (c, b) . Враховуючи поведінку функції $F(z)$ на нескінченності

$$F(z)|_{z \rightarrow \infty} = \frac{\sigma_{33}^\infty + im\sigma_{13}^\infty}{t(1+\gamma)}$$

розв'язок цієї задачі може бути представлений у вигляді

$$F(z) = P(z)X_1(z) + Q(z)X_2(z), \quad (9)$$

де

$$X_1(z) = \frac{ie^{i\varphi(z)}}{\sqrt{(z-c)(z-b)}}, \quad X_2(z) = \frac{e^{i\varphi(z)}}{\sqrt{(z-c)(z-a)}},$$

$$\varphi(z) = 2\varepsilon \ln \frac{\sqrt{(b-a)(z-c)}}{\sqrt{(b-c)(z-a)} + \sqrt{(a-c)(z-b)}},$$

$$\varepsilon = \frac{1}{2\pi} \ln \gamma, \quad P(z) = C_0 + C_1 z, \quad Q(z) = D_0 + D_1 z.$$

Довільні константи C_0, C_1, D_0, D_1 визначаються умовами на нескінченності.

Аналогічний аналіз можна провести у випадку дії зосереджених сил на берегах тріщини за відсутності навантаження на нескінченності.

Задовольняючи граничні умови (1)–(4) за допомогою співвідношень (5), (6), маємо

$$F^+(x_1) + \gamma F^-(x_1) = g(x_1), x_1 \in (c, a), \quad (10)$$

$$\text{Im} F^\pm(x_1) = 0, x_1 \in (a, b), \quad (11)$$

де $g(x_1) = -t^{-1}(P_3 + imP_1)\delta(x_1 - d)$.

Розв'язок комбінованої неоднорідної задачі Діріхле – Рімана (10)–(11), за умови, що $F(z) = O(z^{-2})$ при $z \rightarrow \infty$, має вигляд

$$F(z) = \frac{X(z)}{d-z} \left[\operatorname{Re}(I_0) + i \operatorname{Im}(I_0) \frac{Y(z)}{Y(d)} \right], \quad (12)$$

де

$$X(z) = \frac{e^{i\varphi(z)}}{\sqrt{(z-c)(z-a)}},$$

$$Y(z) = \sqrt{\frac{z-a}{z-b}}, \quad I_0 = -\frac{P_3 + imP_1}{2\pi i t X^+(d)}.$$

Підставляючи функцію $F(z)$ в рівняння (5), (6), одержимо вирази для напружень і похідних від стрибків переміщень на лінії поділу матеріалів.

Введемо далі коефіцієнти інтенсивності напружень (КІН) в околі правої вершини тріщини

$$K_1 = \lim_{x_1 \rightarrow a+0} \sqrt{2\pi(x_1-a)} \sigma_{33}(x_1, 0),$$

$$K_2 = \lim_{x_1 \rightarrow b+0} \sqrt{2\pi(x_1-b)} \sigma_{13}(x_1, 0).$$

Позначаючи через

$$\lambda = \frac{b-a}{b-c}, \quad \theta = \frac{b-d}{b-c},$$

представимо ці коефіцієнти у вигляді

$$K_1 = \frac{\sqrt{2\pi\gamma(b-c)}}{1+\lambda} \left\{ \sqrt{1-\lambda} Q_1 + 2\varepsilon Q_2 \right\} +$$

$$+ \sqrt{\frac{2(1-\theta)}{\pi(b-c)(1-\lambda)(\theta-\lambda)}} \{ P_3 H_1 + m P_1 H_2 \},$$

$$K_2 = \frac{1}{m} \sqrt{\frac{\pi(b-c)}{2}} \left\{ Q_2 - 2\varepsilon \sqrt{1-\lambda} Q_1 \right\} +$$

$$+ \frac{1+\gamma}{m} \sqrt{\frac{1-\theta}{2\pi\gamma\theta(b-c)}} \{ m P_1 H_1 - P_3 H_2 \},$$

де Q_1 , Q_2 , H_1 , H_2 – дійсні числа, які залежать від характеристик матеріалу та зовнішнього навантаження.

Скориставшись виразами для КІН, одержимо представлення для швидкості вивільнення енергії у формі:

$$G = \frac{(1+\gamma)K_1^2}{8st\gamma} - \frac{mK_2^2}{2t(1+\gamma)}.$$

Знайдений розв'язок задачі показує, що в математичному сенсі він є коректним для будь-якого значення параметра a з інтервалу (c, b) , але цей розв'язок буде фізично коректним тільки при дотриманні додаткових умов [5]

$$\sigma_{33}(x_1, 0) \leq 0 \quad \text{для } x_1 \in (a, b),$$

$$\langle u_3(x_1) \rangle \geq 0 \quad \text{для } x_1 \in (c, a).$$

Ці нерівності виконуються, якщо $K_1 = 0$, що призводить до трансцендентного рівняння відносно параметра λ , який визначає відносну довжину зони контакту. Його розв'язок, як правило, знаходиться чисельно і вибирається максимальний корінь $\lambda = \lambda_0$ з проміжку $(0, 1)$.

3. Результати розрахунків та їх аналіз

Чисельна реалізація розглянута на прикладі біматеріальної площини, що складається з п'єзокераміки PZT-5H (верхня півплощина) та п'єзокераміки PZT-4 (нижня) [1]. Довжина тріщини вибиралася рівною $l = 2$ мм. Дотичне напруження вважалось рівним $\sigma_{13}^\infty = -10$ МПа, а нормальне задавалось формулою $\sigma_{33}^\infty = \kappa \sigma_{13}^\infty$.

На рис. 2 показана залежність відносної довжини зони контакту λ_0 від нормального напруження σ_{33}^∞ з наступними значеннями силових та геометричних факторів: 1 – $P_1 = 0$, $P_3 = 0$; 2 – $P_1 = 10^5$ Н/м, $P_3 = 0$, $\theta = 0.75$; 3 – $P_1 = 0$, $P_3 = 10^4$ Н/м, $\theta = 0.75$.

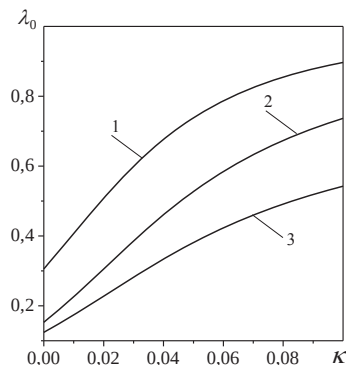


Рис. 2. Залежності довжини зони контакту λ_0 від нормального напруження σ_{33}^∞

В таблиці 1 наведені значення КІН $K_{20} = K_2(\lambda_0)$ дотичного напруження та швидкість вивільнення енергії $G_0 = G(\lambda_0)$ в вершині b при $P_1 = 10^5$ Н/м, $P_3 = 0$, $\theta = 0.75$.

Таблиця 1
Залежності КІН K_{20} та швидкості вивільнення енергії G_0 від нормального напруження σ_{33}^∞

κ	$\frac{K_{20}}{\sigma_{13}^\infty \sqrt{b-c}}$	$\frac{G_0 \cdot 10^4}{\sigma_{13}^\infty (b-c)}$
0	1.0237	0.9393
0.02	1.0232	0.9383
0.04	1.0229	0.9378
0.06	1.0227	0.9375
0.08	1.0226	0.9373
0.1	1.0225	0.9371

З одержаних результатів видно, що зона розкриття берегів тріщини присутня для всіх наведених значень κ . При цьому для досить

великих стискальних напружень ця зона стає досить великою. В той же час збільшення стискального напруження веде до зменшення модуля КІН дотичних напружень і швидкості вивільнення енергії.

4. Висновки

Розглянуто тріщину між двома п'єзокерамічними матеріалами з відкритими ділянками та зонами гладкого контакту її берегів під дією змішаного зовнішнього навантаження. Показано, що при наявності зсувних напружень значна частина тріщини виявляється відкритою. Проаналізовано залежність довжини зони контакту берегів тріщини від співвідношення інтенсивності зсувних та нормальних напружень. Представлено коефіцієнти інтенсивності напружень та швидкість вивільнення енергії.

Список використаних джерел

1. Beom H. G. Permeable cracks between two dissimilar piezoelectric materials / H. G. Beom // *Int. J. Solids Structures*. – 2003. – Vol. 40. – P. 6669–6679.
2. Herrmann K. P. Fracture-mechanical assessment of electrically permeable interface cracks in piezoelectric bimetals by consideration of various contact zone models / K. P. Herrmann, V. V. Loboda // *Arch. Appl. Mech.* – 2000. – Vol. 70. – P. 127–143.
3. Dorogoy A. Effect of crack face contact and friction on Brazilian disk specimens – A finite difference solution / A. Dorogoy, L. Banks-Sills // *Engineering Fracture Mechanics* – 2005. – Vol. 72. – P. 2758–2773.
4. Dundurs J. An opportunistic analysis of the interface crack / J. Dundurs, A. K. Gutesen // *Int. J. Fract.* – 1988. – Vol. 36. – P. 151–159.
5. Comninou M. The interface crack / M. Comninou // *Trans. ASME. J. Appl. Mech.* – 1977. – Vol. 44. – P. 631–636.

References

1. BEOM, H. G. (2003) Permeable cracks between two dissimilar piezoelectric materials. *Int. J. Solids Structures*. 40. p. 6669–6679.
2. HERRMANN, K. P. & LOBODA, V. V. (2000) Fracture-mechanical assessment of electrically permeable interface cracks in piezoelectric bimetals by consideration of various contact zone models. *Arch. Appl. Mech.* 70. p. 127–143.
3. DOROGOY, A. & BANKS-SILLS, L. (2005) Effect of crack face contact and friction on Brazilian disk specimens. *Engineering Fracture Mechanics*. 72. p. 2758–2773.
4. DUNDURS, J. & GAUTESSEN, A. K. (1988) An opportunistic analysis of the interface crack. *Int. J. Fract.* 36. p. 151–159.
5. COMNINOU, M. The interface crack. *Trans. ASME. J. Appl. Mech.* 44. p. 631–636.

Надійшла до редколегії 29.09.15

УДК 539.3

Годес А. Ю., пров. інженер,
Лобода В. В., д. ф.-м. н., проф.

Контактна задача для дугової тріщини в електрострикційному матеріалі

Дніпропетровський національний університет
імені Олеся Гончара, 49010, м. Дніпропетровськ,
проспект Гагаріна, 72
e-mail: alinegg@mail.ru,
loboda@dsu.dp.ua

A. Yu. Hodes, Leading Engineer,
V. V. Loboda, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof.

The contact problem for an arc crack in an electrostrictive material

Oles Honchar National University of Dnipropetrovsk,
49010, Kyiv, Gagarin av., 72
e-mail: alinegg@mail.ru,
loboda@dsu.dp.ua

Розглянуто задачу про визначення напружено-деформованого стану електрострикційної площини з дуговою тріщиною з урахуванням контакту її берегів. Задачу зведено до сингулярного інтегрального рівняння першого роду, яке розв'язано наближено, шляхом розвинення невідомої функції в ряд за поліномами Якобі. Визначено невідому зону контакту берегів тріщини, розкриття тріщини та коефіцієнти інтенсивності напружень.

Ключові слова: дугова тріщина, електрострикція, сингулярне інтегральне рівняння, ортогональні поліноми.

The problem concerning definition of stresses and displacements within an electrostrictive plane with an arc crack taking into account a contact of the crack faces is considered under loading applied at infinity. Unknown complex electrostatic potentials of electrostrictive plane and crack are found from boundary problem of electrostatics. The problem is reduced to the singular integral equation of the first kind with the Cauchy kernel for the complex function of real variable that determines a crack opening. Unknown function is submitted as the series expansion on the Jacobi polynomials with unknown coefficients. Different series expansions are used inside contact zone and outside of it. The singular integral equation with the conditions of displacements uniqueness and zero crack opening in the contact zone are reduced to the system of linear algebraic equations for the unknown coefficients and contact stresses. The unknown contact zone is determined from equality of stress intensity factor at the end of contact zone to zero. The crack opening and the stress intensity factors are found.

Key Words: Arc Crack, Electrostriction, Singular Integral Equation, Orthogonal Polynomials.

1. Вступ

В сучасних технологіях останнім часом широкого розповсюдження набули електрострикційні матеріали, зокрема сегнетоелектричні релаксори, для яких електрострикційний ефект є близьким до п'єзоелектричного. Як вказано в [1], в електрострикційних матеріалах під дією високого електричного та механічного навантаження можуть з'являтися тріщини. Також слід відзначити, що за деяких співвідношень інтенсивностей навантажень береги тріщини можуть контактувати один з одним. З цього випливає необхідність урахування контактної зони між берегами тріщини в електрострикційному матеріалі під дією різних навантажень.

У випадку малих деформацій визначальні співвідношення для електрострикційного матеріалу можна спростити так, щоб задача електропружності стала незв'язаною. Для цього випадку

в [2] було розроблено аналоги співвідношень Колосова – Мусхелішвілі [3], що враховують електрострикцію.

В статті [4] проведено аналіз електрострикційного тіла з дуговою тріщиною для електричного навантаження на нескінченності, що діє паралельно осі симетрії тріщини, причому береги тріщини не контактують один з одним. В даному ж дослідженні проведено аналіз дугової тріщини в електрострикційному тілі під дією довільного механічного навантаження на нескінченності та довільно орієнтованого електричного поля з урахуванням контакту берегів тріщини. Задачу зведено до сингулярного інтегрального рівняння першого роду з ядром типу Коші, яке розв'язано наближено, шляхом розвинення невідомої функції в ряд за поліномами Якобі. Знайдено невідому контактну зону, напруження на продовженні

тріщини, її розкриття та коефіцієнти інтенсивності напружень у вершинах тріщини.

2. Постановка задачі

Розглядається пружна ізотропна площина з розрізом уздовж дуги $r = R$, $|\theta| < \beta$, причому вважається, що береги тріщини є гладкими та можуть контактувати один з одним. Пружні властивості матеріалу характеризуються модулем зсуву μ та коефіцієнтом Пуассона ν , а електрострикційні властивості – постійними a_1 та a_2 . Діелектрична проникність матеріалу складає ϵ_m , діелектрична проникність наповнювача тріщини дорівнює ϵ_c . На нескінченності діють головні напруження N_1 і N_2 , причому кут між напрямом N_1 та віссю абсцис дорівнює γ . Також на нескінченності діє електричне поле з вектором напруженості, що дорівнює за модулем E_0 та направлений під кутом α до осі абсцис (рис. 1). Розшукуються нормальні та дотичні напруження на продовженні тріщини, нормальні напруження в межах зони контакту берегів тріщини, розкриття тріщини та коефіцієнти інтенсивності напружень у вершинах тріщини.

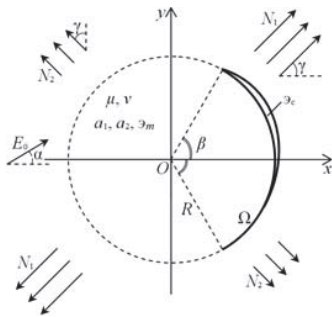


Рис. 1. Постановка задачі

Аналоги рівнянь Колосова – Мусхелішвілі для електрострикційного матеріалу наведено у статті [2]. Окрім невідомих комплексних потенціалів $\phi(z)$ та $\psi(z)$ до них входить електростатичний комплексний потенціал середовища $w(z)$. Рівняння розв'язуються разом з наступними граничними умовами на тріщині та нескінченності:

$$\sigma_{rr}^+ = \sigma_{rr}^-, \quad \sigma_{r\theta}^+ = \sigma_{r\theta}^- = 0; \quad r = R, \quad |\theta| < \beta, \quad \theta \in \Omega; \quad (1)$$

$$\tilde{\sigma}_{rr}^+ + i\tilde{\sigma}_{r\theta}^+ = \tilde{\sigma}_{rr}^- + i\tilde{\sigma}_{r\theta}^- = \sigma_{cr}^M + i\sigma_{c\theta}^M; \quad (2)$$

$$r = R, \quad |\theta| < \beta, \quad \theta \notin \Omega;$$

$$\sigma_{rr} + i\sigma_{r\theta} = \frac{N_1 + N_2}{2} + \frac{N_1 - N_2}{2} e^{2i(\gamma - \theta)}; \quad r \rightarrow \infty, \quad (3)$$

де Ω – зона контакту берегів тріщини, індекс «+» відноситься до області $r < R$, індекс «-» – до області $r > R$,

$$\sigma_{rr}^M + i\sigma_{r\theta}^M = \frac{\epsilon_m}{2} \frac{\bar{z}}{z} \overline{w'(z)^2}, \quad \sigma_{cr}^M + i\sigma_{c\theta}^M = \frac{\epsilon_c}{2} \frac{\bar{z}}{z} \overline{w'_c(z)^2}$$

$$\tilde{\sigma}_{ij} = \sigma_{ij} + \sigma_{ij}^M,$$

$w'(z)$ та $w'_c(z)$ – електростатичні комплексні потенціали середовища та тріщини відповідно, що визначаються з граничної задачі електростатики, розв'язок якої наведено в наступному розділі.

3. Гранична задача електростатики

Комплексні потенціали $w(z)$ і $w'_c(z)$ визначаються наступним чином:

$$E_1 + iE_2 = \overline{w'(z)} \text{ на всій комплексній площині,}$$

$$E_{c1} + iE_{c2} = \overline{w'_c(z)} \text{ при } r = R, \quad |\theta| \leq \beta,$$

де E_i та E_{ci} – компоненти напруженості електростатичного поля. Функція $w'(z)$ є аналітичною в усій комплексній площині, функція $w'_c(z)$ – аналітична в деякому околі тріщини.

Електростатичні граничні умови на нескінченності та тріщині виглядають як [1, 4–5]:

$$\vec{E} = \vec{i}_1 E_0 \cos \alpha + \vec{i}_2 E_0 \sin \alpha \text{ при } r \rightarrow \infty; \quad (4)$$

$$\vec{D} \cdot \vec{n} = \vec{D}_c \cdot \vec{n} \text{ при } r = R, \quad |\theta| \leq \beta; \quad (5)$$

$$\vec{E} \cdot \vec{t} = \vec{E}_c \cdot \vec{t} \text{ при } r = R, \quad |\theta| \leq \beta, \quad (6)$$

де $\vec{n} = \vec{i}_1 \cos \theta + \vec{i}_2 \sin \theta$ – вектор зовнішньої одиничної нормалі до лінії тріщини, $\vec{t} = -\vec{i}_1 \sin \theta + \vec{i}_2 \cos \theta$ – одиничний вектор дотичної до лінії тріщини, $\vec{D} = \epsilon_m \vec{E}$ та $\vec{D}_c = \epsilon_c \vec{E}_c$ – електрична індукція.

З граничної умови на нескінченності (4) випливає, що при $r \rightarrow \infty$

$$w'(z) = E_0 e^{-i\alpha}. \quad (7)$$

Оскільки функція $w'(z)$ є аналітичною в усій комплексній площині, то вираз (7) задає комплексний потенціал для будь-якого z . З умов (5)–(6) та виразу (7) отримуємо, що

$$w'_c(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{\epsilon_m}{\epsilon_c} + 1 \right) E_0 e^{-i\alpha} + \frac{1}{2} \left(\frac{\epsilon_m}{\epsilon_c} - 1 \right) E_0 e^{i\alpha} \frac{R^2}{z^2}. \quad (8)$$

4. Сингулярне інтегральне рівняння та методика його розв'язку

Задовольняючи крайовим умовам (1)–(3) і враховуючи вирази (7)–(8), приходимо до сингулярного інтегрального рівняння першого роду з ядром типу Коші відносно комплекснозначної функції дійсної змінної $\tau(\zeta)$:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\tau(\xi)}{\xi - \zeta} d\xi - \frac{\eta^2}{\pi} \int_{-1}^1 K_1(\xi) \tau(\xi) d\xi + \\ & + \frac{i\eta}{\pi} \int_{-1}^1 K_2(\xi) \tau(\xi) d\xi - \frac{i\eta}{\pi} \int_{-1}^1 \overline{K_2(\xi)} \overline{\tau(\xi)} d\xi - \\ & - \frac{1+\kappa}{2} N(\zeta) = f(\zeta), \quad |\zeta| < 1, \end{aligned} \quad (9)$$

де $K_1(\xi)$, $K_2(\xi)$ – регулярні ядра, $f(\zeta)$ – функція неперервно диференційовна нескінченно кількість разів на відрізку $|\zeta| < 1$, $\eta = \tan \frac{\beta}{2}$,

$\zeta = \frac{1}{\eta} \tan \frac{\theta}{2}$, κ – постійна Мусхелішвілі.

Функція $N(\zeta)$ визначає нормальні напруження на тріщині. Її вираз має бути знайдено для $\zeta \in \Omega$ та є заздалегідь відомим для $\zeta \notin \Omega$, де він задається граничною умовою (2).

Рівняння (9) розв'язується сумісно з умовою однозначності зміщень

$$\int_{-1}^1 K_3(\xi) \tau(\xi) d\xi = 0, \quad (10)$$

де $K_3(\xi)$ – регулярне ядро.

У випадку наявності зони контакту береги тріщини система (9)–(10) доповнюється умовою рівності нулю розкриття тріщини в цій зоні:

$$\operatorname{Re} \left[e^{-i\theta} \int_{-1}^{\zeta} K_3(\xi) \tau(\xi) d\xi \right] = 0, \quad \zeta \in \Omega. \quad (11)$$

Розкриття тріщини, напруження на її продовженні та коефіцієнти інтенсивності напружень визначаються функцією $\tau(\zeta)$.

В [6] викладено методику розв'язання інтегральних рівнянь за допомогою розвинення невідомої функції в ряд за поліномами Якобі. Однак, оскільки функцію $N(\zeta)$ задано на тріщині кусково, розрахунки за цією методикою будуть давати нестійкі результати. Тому тріщину розбито на декілька відрізків, на кожному з яких функція

$N(\zeta)$ є гладкою, і невідому функцію розвинуто в ряд на кожному з цих відрізків.

$$\tau(\zeta) = w_s(\zeta) \sum_{k=0}^n A_{sk} P_k^{(a_s, b_s)}(\zeta^{(s)}), \quad (12)$$

де

$$\begin{aligned} s &= \overline{1, s_0}, \quad x_{s-1} \leq \zeta \leq x_s, \\ w_s(\zeta) &= (x_s - \zeta)^{a_s} (\zeta - x_{s-1})^{b_s}, \\ \zeta^{(s)} &= -1 + \frac{2}{x_s - x_{s-1}} (\zeta - x_{s-1}), \\ a_s &= \begin{cases} -\frac{1}{2}, & s = s_0, \\ 0, & s \neq s_0; \end{cases} \quad b_s = \begin{cases} -\frac{1}{2}, & s = 1, \\ 0, & s \neq 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Нормальні напруження на тріщині в межах контактної зони представляються як

$$N(\zeta) = \frac{1}{\sqrt{(x_q - \zeta)(\zeta - x_{q-1})}} \sum_{k=1}^m N_k \prod_{j=1}^m \frac{\zeta - y_j}{y_k - y_j}, \quad (13)$$

де $\zeta \in \Omega$, $\Omega = (x_{q-1}; x_q)$, $N_k = N(y_k)$, $y_k \in \Omega$.

Рівняння (9)–(11) з урахуванням виразів (12)–(13) зводяться до замкнутої системи лінійних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих коефіцієнтів A_{sk} та N_k . Невідома зона контакту визначається з умови обмеженості напружень у внутрішніх точках тріщини:

$$\sum_{k=1}^m N_k \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^m \frac{x_s - y_j}{y_k - y_j} = 0, \quad s = \overline{1, s_0 - 1}.$$

5. Результати чисельного моделювання

На рис. 2, 3 наведено графіки розкриття тріщини для плоского деформованого стану і значень параметрів, що відповідають матеріалу $\text{PbMg}_{1/3}\text{Nb}_{2/3}\text{O}_3$ (PMN) та тріщині, яку наповнено повітрям [4]. Розрахунки проведено для кута піврозхилу тріщини $\beta = 60^\circ$, напружень на нескінченності $N_2 = 0$ та $N_1 > 0$, кута прикладання електричного навантаження $\alpha = 0$ та кутів прикладання механічного навантаження $\gamma = 45^\circ$ та $\gamma = 75^\circ$ відповідно. Суцільна лінія відповідає співвідношенню інтенсивностей навантажень $\frac{\partial_m E_0^2}{N_1} = 0.5 \cdot 10^{-5}$, пунктирна лінія відповідає відсутності електричного поля.

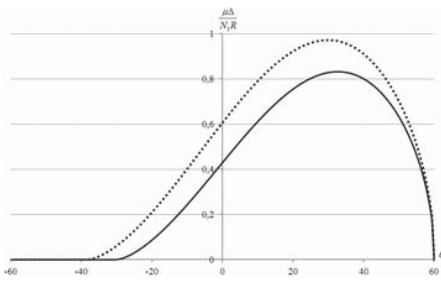


Рис. 2. Розкриття тріщини для $\gamma = 45^\circ$

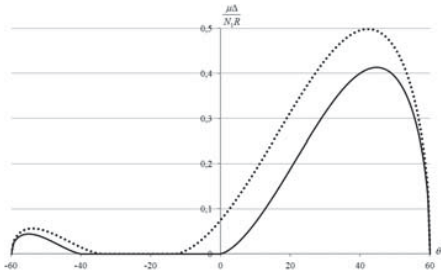


Рис. 3. Розкриття тріщини для $\gamma = 75^\circ$

Список використаних джерел

1. Mai Y.-W. Fracture of electrostrictive solids subjected to combined mechanical and electric loads / Y.-W. Mai, C.-F. Gao // *Eng. Fract. Mech.* – 2010. – Vol. 77. – P. 1503–1515.
2. Knops R. J. Two-dimensional electrostriction / R. J. Knops // *Quart. J. Mech. Appl. Math.* – 1963 – Vol. 16, № 3. – P. 377–388.
3. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости / Н. И. Мусхелишвили. – Москва: Наука, 1949 – 635 с.
4. Zheng M. An arc-shaped crack in an electrostrictive material / M. Zheng, C.-F. Gao // *Int. J. Eng. Sci.* – 2010. – Vol. 48. – P. 771–782.
5. Страттон Дж. Теория электромагнетизма / Дж. Страттон. – Москва; Ленинград: ГИТТЛ, 1948. – 539 с.
6. Андреев А. В. Метод численного решения полных сингулярных интегральных уравнений с комплексными особенностями степенного типа / А. В. Андреев // *Известия РАН. МТТ.* – 2006. – № 1. – С. 99–114.

6. Висновки

Описана в цій роботі методика дозволяє визначити напружено-деформований стан електрострикційної пружної площини з дуговою тріщиною у разі, коли електричні та механічні навантаження прикладені на нескінченності. При цьому враховується можливість контакту берегів тріщини. Задачу зведено до сингулярного інтегрального рівняння першого роду з ядром типу Коші, яке розв'язано шляхом розкладання невідомої функції в ряд за поліномами Якобі сумісно з умовою однозначності зміщень та умовою рівності нулю розкриття тріщини в межах контактної зони. Розглянуто випадки, коли контактна зона відсутня, прилягає до одної з вершин тріщини та не прилягає до жодної з вершин. Знайдено нормальні та дотичні напруження на продовженні тріщини, невідома зона контакту її берегів, розкриття тріщини, контактні напруження та коефіцієнти інтенсивності напружень у вершинах тріщини.

References

1. MAI, Y.-W. GAO, C.-F. (2010) Fracture of electrostrictive solids subjected to combined mechanical and electric loads. *Eng. Fract. Mech.* 77. p. 1503–1515.
2. KNOPS, R. J. (1963) Two-dimensional electrostriction. *Quart. J. Mech. Appl. Math.* 16 (3). p. 377–388.
3. MUSKHELISHVILI, N. I. (1949) *Nekotorye Osnovnye Zadachi Matematicheskoy Teorii Uprugosti*. Moskva: Nauka.
4. ZHENG, M., GAO, C.-F. (2010) An arc-shaped crack in an electrostrictive material. *Int. J. Eng. Sci.* 48. p. 771–782.
5. STRATTON, J. (1948) *Teoriya elektromagnetizma*. Moskva; Leningrad: GITTL.
6. ANDREEV, A. V. (2006) Metod chislennogo resheniya polnykh singulyarnykh integralnykh uravneniy s kompleksnymi osobennostyami stepennogo tipa. *Izvestiya RAN. MTT.* (1). p. 99–114.

Надійшла до редколегії 06.09.15

УДК 534.26

Грінченко В. Т.¹, д. ф.-м. н., проф.,
Вовк І. В.¹, д. ф.-м. н., проф.,
Маципура В. Т.², д. ф.-м. н., проф.,
Троценко Я. П.², студент

Дифракція хвиль на округленому жорсткому клині

¹Інститут гідромеханіки НАН України, 03057,
м. Київ, вул. Желябова, 8/4

²Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, проспект Акад.
Глушкова, 4-е
e-mail: yaroslav.p.trotsenko@gmail.com

V. T. Grinchenko¹, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof.,
I. V. Vovk¹, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof.,
V. T. Matsypura², Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof.,
Y. P. Trotsenko², Student

A diffraction of waves on a rigid rounded wedge

¹Institute of Hydromechanics NAS of Ukraine,
03057, Kyiv, Zhelyabova str., 8/4

²Taras Shevchenko National University of Kyiv,
03680, Kyiv, Acad. Glushkova av., 4-e
e-mail: yaroslav.p.trotsenko@gmail.com

Розглянуто плоску задачу дифракції акустичних циліндричних хвиль на округленому жорсткому клині. Досліджено проблему побудови розв'язку в межах методу часткових областей, структуру поля в околі ребра клина та питання збіжності розв'язку досліджуваної задачі до розв'язку задачі дифракції хвиль на гострому клині.

Ключові слова: дифракція хвиль, округлений клин, метод часткових областей.

The plane problem of diffraction of acoustic cylindrical waves on a rigid rounded wedge is investigated. The problem of constructing a solution within the method of partial domains is examined. A continuation of the boundary conditions on the non-physical part of the boundary was used to build a general solution in the considered domain of existence of field. A field structure near the wedge apex and its dependence on a wave radius of rounding of the edge is studied. It is shown that rounding wedge eliminates the sharp lowering of pressure and singularity of vibrational velocity near the edge. At the same time, it results in reduction of amplitude oscillations of pressure and the radial component of vibrational velocity along the illuminated surface of the wedge, indicating a decrease in the amplitude of the scattered wave toward the source of acoustic waves. It is shown that all the characteristics of a diffraction field for an acute wedge and a rounded wedge coincide for a small wave radius of the edge rounding. That is, there is a convergence of the studied problem solution to the solution to the problem of wave diffraction on an acute wedge when reducing a wave radius of rounding of the edge.

Key Words: Wave Diffraction, Rounded Wedge, Method of Partial Domains.

1. Вступ

Задача дифракції акустичних хвиль на гострому клині є фундаментальною проблемою, на результатах розв'язку якої ґрунтується багато фізичних уявлень щодо процесів взаємодії хвиль з тілами. Цій проблемі присвячена велика кількість робіт (вказемо лише на монографії [1-3] і бібліографію до них). Інтерес до цієї задачі обумовлений, в першу чергу, двома причинами. Перша має математичний характер: в межах евклідової геометрії неможливо задати нормальну похідну вздовж лінії ребра (зокрема, в акустиці – нормальну складову коливальної швидкості). Як наслідок, з'являється особливість на ребрі клина, яка проявляється у прямуванні величини коливальної швидкості до

нескінченності. Друга причина підвищеного інтересу до дифракції хвилі на клині – велика змістовність і практичне значення цього процесу. З результатів численних експериментів відомо, що при падінні хвилі на клин на його ребрі виникає циліндрична хвиля, яка, з одного боку, інтерферує із падаючою хвилею, а з іншого – є причиною появи хвиль в зоні геометричної тіні.

Розвитком дослідження вказаної проблеми є побудова розв'язку задачі дифракції хвилі на округленому клині. Тут також можна виділити основні причини, що зумовлюють увагу до неї. Перша обумовлена проблемою побудови розв'язку в межах методу часткових областей. Друга пов'язана із дослідженням структури поля в околі клина при його заокругленні. Третя – з питанням про те, чи матиме місце збіжність

розв'язку задачі дифракції хвилі на округленому клині до відповідного розв'язку на гострому клині при зменшенні радіусу заокруглення.

2. Постановка задачі та її розв'язання

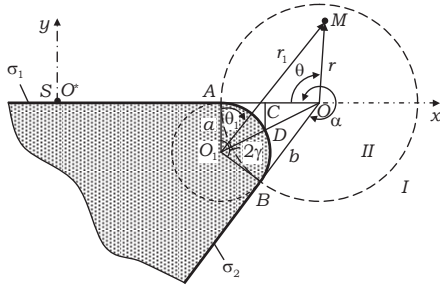


Рис. 1. Геометрія округленого клина

Розглядається плоска гранична задача дифракції циліндричної хвилі на округленому клині (рис. 1). Вважаємо, що поверхні клина – акустично жорсткі. Введемо дві полярні системи координат: $rO\theta$ і $r_1O_1\theta_1$. Кут округленого клина α визначається як кут відповідного гострого клина. Джерело звуку S розміщене на поверхні σ_1 і співпадає з початком допоміжної декартової системи координат xO^*y .

Щоб скористатись методом часткових областей [4], виділимо наступні області. Область I задається в координатах $rO\theta$ і є зовнішністю круга радіусу b з центром в точці O , обмеженою гранями клина. Область II є внутрішністю круга радіусу b за виключенням зони перетину з кругом радіусу a з центром в точці O_1 .

Тиск в області I запишемо у вигляді:

$$p_I = \frac{\pi i}{2\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n H_{\xi_n}^{(1)}(kr_{ist}) J_{\xi_n}(kr) \cos(\xi_n \theta) + \sum_{n=0}^{\infty} A_n \frac{H_{\xi_n}^{(1)}(kr)}{H_{\xi_n}^{(1)'}(kb)} \cos(\xi_n \theta), \quad (1)$$

де $\xi_n = n\pi/\alpha$. Перша сума описує поле джерела, розташованого на поверхні гострого клина [2, 3]. З метою проведення порівняння розрахунків для гострого та округленого клинів радіальна координата джерела для округленого клина збільшена на величину відрізка OC , тобто $r_{ist} = r_i + OC$. Друга сума визначає поле розсіяної хвилі у вигляді сукупності біжучих від клина циліндричних хвиль із врахуванням граничних

умов на жорстких поверхнях клина. Вираз (1) є загальним розв'язком для області I, оскільки набір функцій $\cos(\xi_n \theta)$ володіє повнотою і ортогональністю на проміжку $\theta = [0, \alpha]$. Тому належний вибір коефіцієнтів A_n дозволить провести спряження полів на межі областей I і II.

Тиск в області II представимо у вигляді суми $p_{II} = p_{II}^{(1)} + p_{II}^{(2)}$, де:

$$p_{II}^{(1)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{J_n(kr)}{J_n'(kb)} (B_n \cos(n\theta) + \tilde{B}_n \sin(n\theta)), \quad (2)$$

$$p_{II}^{(2)} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \frac{H_{\eta_n}^{(1)}(kr_1)}{H_{\eta_n}^{(1)'}(ka)} \cos(\eta_n \theta_1). \quad (3)$$

Вираз (2) є загальним розв'язком для внутрішності круга радіусу b . Оскільки точка O знаходиться всередині області, то за кутові функції слід брати $\cos(n\theta)$ і $\sin(n\theta)$, які мають властивості повноти та ортогональності на повному колі. Але фізична часткова область II не є повним кругом. Тому, при записі умов зшивання полів на межі часткових областей I і II, нам потрібно буде доповнити граничну умову для розв'язку $p_{II}^{(1)}$ на нефізичній ділянці межі, тобто при $r = b$, $\alpha \leq \theta \leq 2\pi$ [4].

Розв'язок (3) є загальним для внутрішності двогранної області BO_1A . Тут функції $\cos(\eta_n \theta_1)$ ортогональні на проміжку $0 \leq \theta_1 \leq 2\gamma$. Тому він забезпечить виконання граничної умови на поверхні заокруглення клина, тобто на дузі ADB .

Гранична умова на поверхні заокруглення клина (4) та умови спряження звукових полів на межі областей I і II (5), (6) мають вигляд:

$$\frac{\partial p_{II}}{\partial r_1} = 0, \quad r_1 = a, \quad \theta_1 = [0, 2\gamma]; \quad (4)$$

$$p_{II} = p_I, \quad r = b, \quad \theta = [0, \alpha]; \quad (5)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial p_{II}}{\partial r} = \frac{\partial p_I}{\partial r}, & r = b, \quad \theta = [0, \alpha]; \\ \frac{\partial p_{II}^{(1)}}{\partial r} = F(\theta), & r = b, \quad \theta = [\alpha, 2\pi]. \end{cases} \quad (6)$$

Принципово немає різниці в тому, що продовжувати на нефізичну ділянку межі – тиск чи радіальну швидкість [4]. В даному випадку у виразі (6) вибрано швидкість. Функція $F(\theta)$ може бути довільною, однак потрібно намагатись зменшити стрибки поля на кінцях ділянки.

Зрозуміло, що ці міркування мають умовний характер, оскільки розв'язок задачі нам поки не відомий. Розглянемо два варіанти вибору цієї функції – у вигляді нульової функції та лінійної:

$$F(\theta) = \left| \frac{\partial G(b, \alpha; r_{ist}, 0)}{\partial r} \right| + \left[\left| \frac{\partial G(b, 0; r_{ist}, 0)}{\partial r} \right| - \left| \frac{\partial G(b, \alpha; r_{ist}, 0)}{\partial r} \right| \right] \frac{\theta - \alpha}{2\pi - \alpha}, \quad (7)$$

де $G(r, \theta; r_{ist}, 0)$ – функція джерела (функція Гріна) для гострого клина.

Алгебраїзація функціональних рівнянь (4)–(6) виконувалась стандартним чином, із використанням властивостей ортогональності відповідного набору функцій [4]. В результаті приходимо до нескінченної системи лінійних алгебраїчних рівнянь другого роду. Після її розв'язання методом редукції, перш за все, необхідно перевірити виконання умов (4)–(6).

3. Результати розрахунків та їх аналіз

Числові розрахунки проводились при таких параметрах клина і координатах джерела: $\alpha = 270^\circ$, $a/\lambda = 0.5$, $r_i/\lambda = 3$, $OC/\lambda = 0.146$. Загальна кількість невідомих в системі лінійних алгебраїчних рівнянь складала 120.

Як приклад, на рис. 2, 3 приведені графіки нев'язки по тиску на межі часткових областей I і II та по нормальній складовій коливальної швидкості на поверхні заокруглення клина.

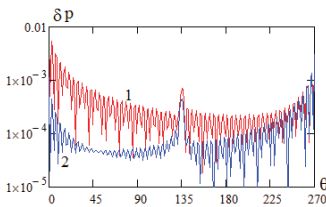


Рис. 2. Нев'язка по тиску на межі часткових областей I та II

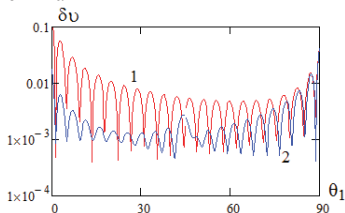


Рис. 3. Нев'язка по нормальній швидкості на поверхні заокруглення клина

Нев'язка обчислювалася за формулами:

$$\delta p(\theta) = \frac{|p_I(r=b, \theta) - p_{II}(r=b, \theta)|}{\left| \frac{i}{2} H_0^{(1)}(r_i) \right|}; \quad (8)$$

$$\delta v(\theta_1) = \frac{|v_{II}(r_1=a, \theta_1)|}{\left| \frac{i}{2} H_0^{(1)*}(r_i) \right|}. \quad (9)$$

Криві 1 на рис. 2, 3 відповідають випадку нульової функції $F(\theta)$, а криві 2 – лінійної. Як видно, за виключенням малої ділянки, що дотикається до тіншової грані клина, криві 2 розташовуються нижче кривих 1. Це свідчить про більш вдалий вибір продовження швидкості на нефізичну ділянку межі у вигляді лінійної функції. Загалом виконання умов спряження та граничної умови можна вважати цілком задовільними.

На рис. 4, 5 представлені нормовані розподіли амплітуд тиску і радіальної складової коливальної швидкості вздовж осі O^*x . Криві нормовані на амплітуди тиску та радіальної швидкості для гострого клина в точці з координатами $r = 0.9r_i$, $\theta = 0$.

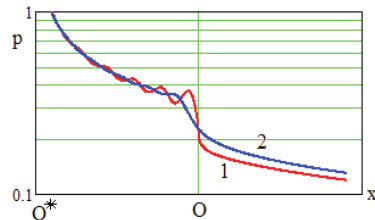


Рис. 4. Розподіл нормованих амплітуд тиску

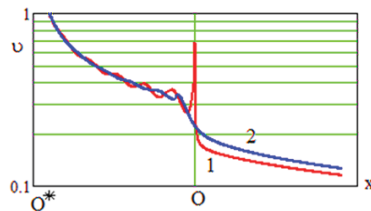


Рис. 5. Розподіл нормованих амплітуд радіальних складових коливальних швидкостей

Криві 1 визначають тиск і радіальну швидкість для гострого клина. Як видно з рис. 4, на ребрі дійсно виникає стрибок тиску. Цей стрибок породжує крайову циліндричну хвилю, яка в освітленій зоні інтерферує із падаючою

хвилею (внаслідок чого з'являються осциляції тиску на поверхні σ_1) і проникає в зону геометричної тіні. Особливість коливальної швидкості (рис. 5) буде тим сильнішою чим гостріше клин [1]. Криві 2 визначають тиск і радіальну швидкість для округленого клина.

Порівнюючи поведінку кривих 1 і 2 на рис. 4, 5 треба відмітити, що заокруглення ребра клина приводить до наступного: відбувається плавна зміна тиску при переміщенні точки спостереження з жорсткої поверхні σ_1 безпосередньо в середовище; суттєво знижуються осциляції амплітуд тиску і радіальної швидкості вздовж поверхні σ_1 , що говорить про зменшення амплітуди розсіяної хвилі в напрямку до джерела; при вибраному радіусі заокруглення усувається особливість коливальної швидкості.

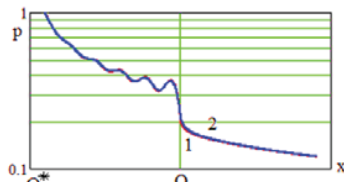


Рис. 6. Розподіл нормованих амплітуд тиску

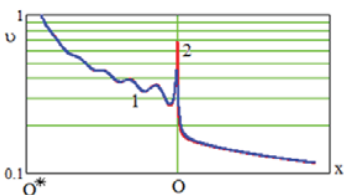


Рис. 7. Розподіл нормованих амплітуд радіальних складових коливальних швидкостей

На рис. 6, 7 значення хвильового радіусу заокруглення клина дорівнює $a/\lambda = 0.05$. Як видно, криві 1 і 2 практично співпадають, – лише стрибок швидкості на ребрі гострого клина виражений більш яскраво, що є очікуваним результатом. Тобто, не зважаючи на наявність заокруглення, як і у випадку гострого ребра, відбувається різке зменшення тиску і, як наслідок, виникає пік коливальної швидкості. Звісно, з математичної точки зору на заокругленому ребрі клина особливість коливальної швидкості принципово виникнути не може. Проте, як ми бачимо, всі характерні особливості дифракційного поля залишаються практично однаковими.

4. Висновки

В межах методу часткових областей отримано строге розв'язання плоскої граничної задачі дифракції циліндричної хвилі на округленому клині. При цьому для побудови загального розв'язку в області існування поля використана можливість продовження граничних умов на нефізичну ділянку межі. Показано, що заокруглення ребра клина дозволяє усунути наявність різкого стрибка тиску і особливості коливальної швидкості біля ребра. Ефективність такої процедури залежить від радіусу заокруглення. Показано, що при малому хвильовому радіусі заокруглення всі характерні особливості дифракційного поля залишаються практично однаковими для гострого та округленого клинів, тобто має місце збіжність розв'язку для округленого клина до відповідного розв'язку у випадку гострого клина при зменшенні радіусу заокруглення.

Список використаних джерел

1. Хенл Х. Теория дифракции / Х. Хенл, А. Мауэ, К. Вестпфаль. – Москва: Мир, 1964. – 428 с.
2. Шендеров Е. Л. Излучение и рассеяние звука / Е. Л. Шендеров. – Ленинград: Судостроение, 1989. – 304 с.
3. Фелсен Л. Излучение и рассеяние волн / Л. Фелсен, Н. Маркувиц. – Москва: Мир, 1978. – 555 с. – (Т. 2).
4. Гринченко В. Т. Волновые задачи акустики / В. Т. Гринченко, И. В. Вовк, В. Т. Мацыпура. – Киев: Интерсервис, 2013. – 572 с.

References

1. KHENL, KH., MAUE, A. & VESTPFAL, K. (1964) *Teoriya Difraktsii*. Moskva: Mir.
2. SHENDEROV, E. L. (1989) *Izluchenie i Rasseyaniye Zvuka*. Leningrad: Sudostroenie.
3. FELSEN, L. & MARKUVITS, N. (1978) *Izluchenie i Rasseyaniye Voln*. 2. Moskva: Mir.
4. GRINCHENKO, V. T., VOVK, I. V. & MATSYIPURA, V. T. (2013) *Volnovye Zadachi Akustiki*. Kiev: Interservis.

Надійшла до редколегії 23.09.15

УДК 539.3

Жук Я. О., д. ф.-м. н., проф.

**Визначення розміру зони теплового
руйнування шаруватих елементів
конструкцій з п'єзоактивними шарами
при гармонічному навантаженні**

Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, проспект
Акад. Глушкова, 4-е
e-mail: y.zhuk@i.ua

Ya. A. Zhuk, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Prof.

**A determination of thermal fracture zone size
in layered structural elements containing
piezoactive layers under the harmonic loading**

Taras Shevchenko National University of Kyiv,
03680, Kyiv, Acad. Glushkov av., 4-e
e-mail: y.zhuk@i.ua

Запропоновано методику визначення розміру зони теплового руйнування функціональних тонкостінних шаруватих елементів конструкцій з п'єзоактивними шарами внаслідок дисипативного розігріву, який призводить до втрати п'єзоефекту при підвищенні температури вище точки Кюрі. Розроблений метод ґрунтується на використанні одночастотного наближення і концепції комплексних модулів. Основну увагу приділено визначенню розміру деполаризованої зони внаслідок теплового руйнування.

Ключові слова: резонансні коливання, дисипативний розігрів, тонкостінний шаруватий елемент конструкції, п'єзоактивний матеріал.

The problem of forced axisymmetric resonant vibration and dissipative heating of a layered structural element containing piezoelectric layers is investigated. The main attention is paid to the estimation of size of the thermally fractured zone due to an overheating above the Curie point. As an example the problem for three layer beam under an electric or mechanical excitation is considered. It is assumed that the core layer of a beam is composed of the electrically passive material while the outer layers are manufactured from the piezoceramics. Theory of coupled thermo-electro-viscoelasticity is used to derive the single frequency approximation problem statement in the case of harmonic loading. Within this theory, the concept of complex-value moduli is applied to formulate the relations between the main field characteristics. In terms of these moduli, the initial problem is reduced to a scleronomous system of equations for complex amplitudes of mechanical and electrical variables – displacements, stresses, total and inelastic strains, electric field, and electric displacement. The dissipative function is calculated and evolution of the temperature field under steady state vibration phase is studied in details. The electric response of the beam partially depolarized (due to excessive heating above the Curie point) is investigated. The dependencies of depolarized zone size on the amount of cycles is obtained.

Key Words: Resonant Vibrations, Dissipative Heating, Thin Wall Structural Member, Piezoactive Material.

1. Вступ

Одним із найсучасніших методів контролю коливань тонкостінних шаруватих конструкцій вважають метод активного контролю коливань. Він полягає у введенні до конструкції активних елементів, здатних впливати на коливання системи з метою їх підсилення або зменшення [1]. Такі елементи виготовляються у вигляді суцільних п'єзоактивних шарів або плям і виконують функції сенсора або актуатора. За жорстких умов функціонування можливі ситуації, коли матеріал електрично пасивних шарів конструкції деформується непружно. Непружне деформування су-

проводжується виділенням тепла. Малий розігрів за один цикл коливань може призвести до суттєвого розігріву для багатоциклових процесів внаслідок досягнення температури Кюрі і деполаризації п'єзокераміки [2]. Чисельне моделювання таких режимів вимагає значних обчислювальних витрат через необхідність моделювання складної нелінійної реакції матеріалу для тривалих історій деформування і зберігання великих обсягів інформації у випадку багатоциклових режимів [1, 2]. У випадку гармонічного навантаження зручно користуватись перевагами підходу моногармонічного наближення, що ґрунтується

на методі еквівалентної лінеаризації і концепції комплексних модулів.

В даній статті електромеханічна модель тонкостінних елементів конструкцій, що розвинута на основі метода моногармонічного наближення, застосовується для дослідження зв'язаної електромеханічної поведінки шаруватої балки, яка містить пружні або в'язкопружні п'єзоактивні шари і фізично нелінійні електрично пасивні шари, при гармонічному механічному або електричному навантаженні. Як приклад розглядається модельна задача про вимушені коливання та дисипативний розігрів шарнірно опертої тришарової балки. Основну увагу приділено визначенню розмірів зони теплового руйнування (втрати п'єзо ефекту активним матеріалом внаслідок перегріву).

2. Постановка задачі та її розв'язання

Розглядаються вимушені коливання шарнірно опертої тришарової балки, середній шар якої виготовлений з алюмінієвого сплаву АМГ–6, а зовнішні – з п'єзокераміки ЦТС–19. Товщини шарів сталі. Прямокутна декартова система координат Охуз вводиться таким чином, щоб вісь абсцис співпадала з віссю балки, товщинна координата відраховувалась вздовж осі ординат, а ширина – вздовж осі аплікату. Геометричні параметри балки: довжина – L , товщина – h (верхня і нижня грані $z = h/2$, $z = -h/2$ відповідно), ширина – b_y . Товщини індивідуальних шарів h_i , $i = 1, 2, \dots, n$. Електричні потенціали φ_i визначені на електродованих поверхнях п'єзоактивних шарів. Коливання збуджуються або механічними моментами, що прикладені у шарнірах, або заданням різниці електричних потенціалів на контактах п'єзоактивних шарів. І механічне, і електричне збудження змінюються за гармонічним законом у часі.

Наведемо постановку задачі в моногармонічному наближенні, ґрунтуючись на результатах робіт [1, 2]. Задача формулюється в термінах амплітуд механічних та електричних змінних, а циклічні властивості матеріалів характеризуються за допомогою комплексних модулів.

Постановка задачі містить визначальні співвідношення для матеріалу електрично пасивного шару

$$\tilde{s}_{ij} = 2\tilde{G}\tilde{\epsilon}_{ij}, \quad \tilde{\epsilon}_{ij}^p = \tilde{\kappa}_p\tilde{\epsilon}_{ij}, \quad \tilde{\sigma}_{kk} = 3K_V\tilde{\epsilon}_{kk}, \quad (1)$$

де комплексні амплітуди девіатора повної деформації $\tilde{\epsilon}_{ij} = \epsilon_{ij}' + i\epsilon_{ij}''$, непружної деформації

$$\tilde{\epsilon}_{ij}^p = \epsilon_{ij}^{p'} + i\epsilon_{ij}^{p''} \quad \text{та} \quad \text{напруження} \quad \tilde{s}_{ij} = s_{ij}' + is_{ij}''$$

зв'язані за допомогою комплексного модуля зсуву $\tilde{G}$, $\tilde{G} = G' + iG''$, та коефіцієнта непружності $\tilde{\kappa}_p$, $\tilde{\kappa}_p = \kappa_p' + i\kappa_p''$, а об'ємний модуль K_V вибирається дійсною величиною.

Для матеріалу п'єзоактивного шару амплітуди електричних змінних задачі визначаються аналогами співвідношень (1), а циклічні визначальні співвідношення для матеріалу без піроефекту записують наступним чином [1]:

$$\tilde{\sigma}_{ij} = \tilde{C}_{ijkl}^D \tilde{\epsilon}_{kl} - \tilde{h}_{mij} \tilde{D}_m, \quad \tilde{E}_n = \tilde{\beta}_{nm}^S \tilde{D}_m - \tilde{h}_{nkl} \tilde{\epsilon}_{kl}, \quad (2)$$

$$i, j, k, l, m, n = 1, 2, 3 \leftrightarrow x, y, z;$$

де $\tilde{E}_k$ і $\tilde{D}_k$ – компоненти векторів електричного поля і електричної індукції відповідно; $\tilde{C}_{ijkl}^D$ – тензор ізотермічних комплексних модулів за сталого електричного зміщення; $\tilde{h}_{ijk}$ – п'єзоелектричні константи і $\tilde{\beta}_{ij}^S$ – матриця діелектричних коефіцієнтів за сталої деформації. Ці рівняння отримано в припущенні справедливості електростатичного наближення.

Використання стандартних гіпотез Кірхгофа-Лява, узагальнених на випадок електромеханіки і плоского напруженого стану, дозволяє отримати визначальні співвідношення для кожного п'єзоактивного шару, а перехід до комплексних аналогів переміщень та інших кінематичних параметрів з наступним інтегруванням співвідношень по товщині окремого шару та пакету шарів приводить до остаточної форми фізичних співвідношень у комплексній формі

$$\tilde{N}_x = \tilde{C}_1 \tilde{\epsilon} + \tilde{K}_1 \tilde{\kappa} - \tilde{N}_E; \quad \tilde{M}_x = \tilde{K}_1 \tilde{\epsilon} + \tilde{D}_1 \tilde{\kappa} - \tilde{M}_E. \quad (3)$$

Тут і далі використані позначення статті [1]. Процедура виведення співвідношень (3) і вирази для відповідних коефіцієнтів отримані в статтях [1, 2].

Постановка задачі для балки також містить комплексні аналоги рівнянь коливань

$$\frac{\partial \tilde{N}_x}{\partial x} + \tilde{\rho} \omega^2 H_s \tilde{u} = 0; \quad \frac{\partial \tilde{Q}_x}{\partial x} + \tilde{\rho} \omega^2 H_s \tilde{w} = 0; \quad (4)$$

$$\tilde{\rho} = H_s^{-1} \sum_s \int_{z_j}^{z_{j+1}} \rho_j dz,$$

виразів для компонент деформаційних параметрів осі балки

$$\tilde{\epsilon} = \partial \tilde{u} / \partial x; \quad \tilde{\kappa} = \partial \tilde{\vartheta} / \partial x; \quad \tilde{\vartheta} = -\partial \tilde{w} / \partial x \quad (5)$$

і замикається заданням відповідних граничних умов [1, 2].

3. Задача дисипативного розігріву

Рівняння теплопровідності для умов, що розглядаються, має вигляд

$$c_V \dot{T} = kT_{,ii} - K_V T_0 \alpha_T \dot{\varepsilon}_{kk} / 3 + D'(x, z), \quad (6)$$

де через T і T_0 позначено поточну та початкову температуру відповідно, c_V – коефіцієнт теплоємності за сталого об'єму, k – коефіцієнт теплопровідності, α_T – коефіцієнт лінійного теплового розширення, D' – потужність дисипації електро-механічної енергії. На межах шарів виконуються умови ідеального теплового контакту.

Введемо у розгляд приріст температури за формулою $\theta = T - T_0$. Тоді в термінах надлишкової температури рівняння (6) для балки можна переписати у вигляді

$$c_V \dot{\theta} = k(\theta_{,xx} + \theta_{,zz}) - \frac{2\theta \alpha_y}{b} - \frac{K_V T_0 \alpha_T \dot{\varepsilon}_{kk}}{3} + D'(x, z), \quad (7)$$

де α_y – коефіцієнт тепловіддачі з поверхонь $y = 0, b$.

Осереднюючи рівняння теплопровідності (7) за період коливань і нехтуючи внеском термopужних ефектів у загальний рівень дисипативного розігріву, отримуємо

$$c_V \dot{\theta} = k(\theta_{,xx} + \theta_{,zz}) - 2\theta \alpha_y / b + D'(x, z), \quad (8)$$

де θ і D' знову використані для позначення осередненої за період температури та дисипації відповідно.

З врахуванням отриманих вище амплітудних визначальних співвідношень остаточно форма виразу осередненої дисипативної функції для п'єзоактивного шару набуває вигляду [2]

$$D' = \frac{\omega}{2} C_{11}'' (\varepsilon_{xx}^{\prime 2} + \varepsilon_{xx}^{\prime \prime 2}) + \frac{\omega}{2} B_{33}^S (D_z^{\prime 2} + D_z^{\prime \prime 2}) - \omega H_{31}'' (D_z' \varepsilon_{xx}' + D_z'' \varepsilon_{xx}''), \quad (9)$$

При розгляді електрично пасивного металічного шару мають місце тільки механічні втрати, отже вираз (9) спрощується

$$D' = \frac{\omega}{2} \text{Im}(\tilde{\sigma}_{xx} \tilde{\varepsilon}_{xx}^*) = \frac{\omega}{2} (\sigma_{xx}' \varepsilon_{xx}' - \sigma_{xx}'' \varepsilon_{xx}''). \quad (10)$$

Вважаємо, що на зовнішніх поверхнях балки відбувається теплообмін по конвективному механізму з оточуючим середовищем, яке має температуру T_0 . Відповідні межові умови мають вигляд

$$\begin{aligned} \pm k \theta_{,x} &= \alpha_x \theta, \quad x = 0, L; \\ \pm k \theta_{,z} &= \alpha_z \theta, \quad z = \mp h/2. \end{aligned} \quad (11)$$

Тут α_x і α_z – коефіцієнти тепловіддачі з поверхонь $x = 0, L$ і $z = \pm h/2$ відповідно.

Оскільки задача теплопровідності є нестационарною, то початкова умова формулюється тільки для температури та має вигляд

$$\theta(x, z) = 0, \quad t = 0. \quad (12)$$

Зв'язана задача термоелектромеханіки (4), (5), (8) з початковою умовою для температури (12), межовими температурними умовами (11) та відповідними механічними межовими умовами [1, 2], які описують механічне або електричне збудження, розв'язується чисельно у два етапи. На першому етапі розв'язується стаціонарна задача електро-механіки для балки за допомогою методу дискретної ортогоналізації. Результат розв'язання – амплітуди основних електро-механічних характеристик і дисипативна функція. На другому етапі методом скінченних різниць розв'язується двовимірний нестационарний задача теплопровідності з відомою функцією джерела.

4. Результати розрахунків і висновки

Розрахунки проводились для модельної задачі про вимушені коливання шарнірно опертої тришарової балки, яка складається з центрального шару зі сплаву АМг-6 і двох зовнішніх п'єзоактивних шарів п'єзокераміки ЦТС-19. Фізико-механічні властивості та комплексні модулі для цих матеріалів наведені в [1]. Товщини п'єзоактивних шарів дорівнюють $h_1 = h_3$, повна товщина балки визначається як $h = H_s = h_1 + h_2 + h_3$, де h_2 – товщина алюмінієвого шару. Довжина балки $L = 0.826$ м, повна товщина $h = 0.6 \cdot 10^{-1}$ м, а ширина $b_y = 0.3 \cdot 10^{-1}$ м, товщини шарів $h_1 = h_3 = 0.2 \cdot 10^{-2}$ м, $h_2 = 0.56 \cdot 10^{-1}$ м.

Зазначимо, що максимальні рівні розігріву спостерігалися в резонансній області. Найбільший розігрів має місце там, де прогини максимальні, а, отже, і максимальні непружні деформації. При цьому, відповідно, потрібно менше часу, щоб температура досягла точки Кюрі (температура, за якої відбувається втрата п'єзоефекту). Поза областю резонансу підвищення температури-

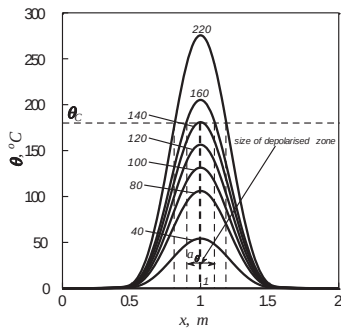


Рис. 1. Розподіл температури вздовж балки

ри не настільки суттєве, щоб спричинити небезпечні рівні вібророзігріву.

Розподіл температури вздовж балки при $z = \pm 0.28 \cdot 10^{-1}$ м (лінія теплових максимумів) для $f = 32$ Гц і $M_0 = 1$ кН·м наведені на рис. 1 для різної кількості циклів (показана числами), що пройшли від початку коливань.

Видно ефект локалізації розігріву в центральній частині балки. Саме в цій області температура досягає точки Кюрі, і починається деполаризація п'єзоактивного матеріалу. Для електричного навантаження – це момент втрати робоздатності конструкції.

Ширина деполаризованої зони a_θ , вводиться на рис. 1. Зміна профілю температури, показана в залежності від кількості циклів від початку коливань. Частина деполаризованого матеріалу не дає внеску в електричний заряд. В результаті, амплітуда струму зменшується. Залежність ширини деполаризованої області від кількості циклів для декількох частот збудження показані на рис. 2. Значення частот подані числами. Різкі зміни спостерігаються при досягненні температурою точки

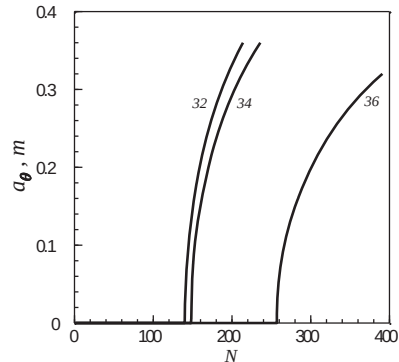


Рис. 2. Ширина деполаризованої зони a_θ для декількох частот збудження

Кюрі. Розігрів дає швидку зміну величини a_θ , що відповідно призводить до аналогічного швидкого зменшення амплітуди електричного струму.

Подальша поведінка обох залежностей визначається параметрами і умовами теплопровідності при заданому джерелі тепла, і, в наших умовах, обидва процеси уповільнюються. Ефект швидкого зменшення амплітуди електричного струму може бути корисним для певних технологічних застосувань, в рамках яких проводиться виявлення і оцінка термічно спричиненої втрати робоздатності матеріалу.

Отже, розвинена методика забезпечує надійну оцінку розміру зони теплового руйнування шаруватих елементів конструкцій з п'єзоактивними шарами при гармонічному навантаженні.

Список використаних джерел

1. Zhuk Y. A. Analysis of the vibrationally induced dissipative heating of thin-wall structures containing piezoelectric layers / Y. A. Zhuk, I. A. Guz, C. M. Sands // *Int. J. Non-Linear Mech.* – 2012. – Vol. 47. – P. 105–116.
2. Жук Я. О. Термомеханічний критерій втрати робоздатності шаруватих елементів з п'єзоактивними шарами при гармонічному навантаженні / Я. О. Жук, Л. Я. Васильєва // *Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій.* – 2014. – № 23. – С. 64–74.

References

1. ZHUK, Y. A., GUZ, I. A. & SANDS, C. M. (2012) Analysis of the vibrationally induced dissipative heating of thin-wall structures containing piezoelectric layers. *Int. J. Non-Linear Mech.* 47. p. 105–116.
2. ZHUK, Y. O. & VASILJEVA, L. Y. (2014) Termomechanichnyj kryterij vtraty robotozdatnosti sharuvatykh elementiv z p'jesoaktyvnymy sharamy pry harmonichnomu navantazheni. *Problemy Obchyslyvalnoji Mekhaniky i Micnosti Konstrukcij.* (23). p. 64–74.

Надійшла до редакції 30.09.15

УДК 532.59:534.29

Жук О. П.¹, д. ф.-м. н., пров. н. с.,
Жук Я. О.², д. ф.-м. н., проф.

Про характер дії радіаційної сили на сферичну краплю рідини в акустичному полі

¹Інститут механіки ім. С.П.Тимошенка НАН Ук-
раїни, 03057, м. Київ, вул. Петра Нестерова, 3
e-mail: zhuk@inmech.kiev.ua

²Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, проспект Акад.
Глушкова, 4-е
e-mail: y.zhuk@i.ua

O. P. Zhuk¹, Dr. Sci. (Phys.-Math.),
Leading Sci. Researcher,
Ya. A. Zhuk², Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof.

On the character of radiation force action on an spherical liquid drop placed in an acoustic field

¹S. P. Timoshenko Institute of Mechanics of NAS of
Ukraine, 03057, Kyiv, P. Nesterov str., 3
e-mail: zhuk@inmech.kiev.ua

²Taras Shevchenko National University of Kyiv,
03680, Kyiv, Acad. Glushkov av., 4-e
e-mail: y.zhuk@i.ua

Розроблено метод для дослідження дії радіаційної сили акустичного поля на сферичну краплю ідеальної рідини, яка знаходиться в іншій ідеальній рідині. Одержано формули для обчислення величини і напрямку її дії. Досліджено залежність величини і напрямку дії радіаційної сили від частоти, відношення густин та від адіабатичних модулів пружності зовнішньої рідини та рідини краплі.

Ключові слова: ідеальна рідина, плоска акустична хвиля, рідка крапля, гідродинамічна сила, радіаційна сила.

Problems of determination of the radiation forces acting on the obstacles in an ideal liquid is formulated with respect to the Lagrange coordinate system. Thus, the radiation pressure is defined as a time-averaged value of the acoustic pressure over the obstacle surface. This approach proves to be adequate if, at determining of the acoustic pressure in a fluid, the deviation of the pressure from the harmonic law in a time domain is taken into account in the obstacle vicinity. The linear approximation for the radiation pressure evaluation is an insufficient because having the sound pressure as the periodic function of time and averaging it over the wave field oscillation period leads to zero value of the force. According to the approach developed earlier, solution of the specified problem is performed in two basic steps. The first step comprises the examination of regularities of interaction between incident harmonic sound wave and obstacle: the sphere, i.e. the solution of the problem of a primary wave scattering. With making use of the results obtained, the second step encompasses determining of hydrodynamic forces acting on the spherical droplet with their subsequent averaging over the suitable time interval at the third step. The formulae for radiation force calculation as well as determination of the direction of it are derived. The dependencies of force on the ratios of the densities and adiabatic elastic moduli of the droplet itself and external liquids are studied.

Key Words: Ideal Liquid, Plane Acoustic Wave, Liquid Drop, Hydrodynamic Force, Radiation Force.

1. Вступ

Різноманітні питання руху та взаємодії крапель рідини, газових бульбашок та кавітаційних утворень розглянуті в роботах [1, 2]. Певний технологічний інтерес викликає дослідження руху крапель в акустичному полі під дією радіаційних сил. Радіаційна сила, що діє на перешкоду в акустичному полі, виникає в результаті зміни в деякому об'ємі середнього по часу імпульсу, що переноситься хвилею, і визначається інтегралом

по поверхні перешкоди від середнього за часом звукового (радіаційного) тиску. Відзначимо, що точне значення радіаційного тиску в загальному випадку відрізняється в ейлеровій та лагранжевій системах координат [3]. В лагранжевих координатах воно визначається середнім за часом значенням звукового тиску на поверхню, що коливається в звуковому полі. В ейлерових координатах воно визначається як згортка тензора густини потоку імпульсу з одиничним вектором нормалі до поверхні.

При обчисленні радіаційної (сталої, незалежної від часу) сили, що діє в звуковому полі на перешкоду, тиск у рідині визначають з врахуванням величин другого порядку малості, які зумовлені нелінійністю акустичного поля, і, отже, не перетворюються на нуль після осереднення по часу. Наявність у рідині перешкод змінює звукове поле: з'являється відбита хвиля. Для її визначення необхідно розв'язати задачу про дифракцію падаючої хвилі на перешкоді. У випадку перешкоди у вигляді газової бульбашки збудовані падаючою хвилею хвильові коливальні процеси у бульбашці можуть суттєво впливати на характер розсіювання хвилі: при малій різниці між частотою хвилі та частотою власних коливань газової бульбашки ефективний поперечник розсіювання звуку набирає значень, які в багато разів перевищують діаметр бульбашки [3, 4]. В результаті збільшується внесок у величину радіаційної сили хвилі, відбитої від перешкоди.

Задачу обчислення радіаційної сили, яка діє в звуковому полі на перешкоду, можна розбити на декілька етапів. На першому з них визначається хвиля, що розсіюється перешкодою. Оскільки визначення тиску в рідині з врахуванням величин другого порядку малості можливе в лінійному наближенні [5, 6], то при визначенні відбитої хвилі можна обмежитись розв'язанням лінійної задачі дифракції первинної хвилі на перешкоді. На другому етапі на основі результатів розв'язання цієї задачі визначається результуюча сила впливу рідини на перешкоду. На третьому етапі осередненням останньої по часу відфільтровується стала в часі (радіаційна) сила, яка діє на перешкоду, та досліджується характер руху перешкоди, обумовлений радіаційною силою.

В подальшому, оскільки відбита від перешкоди хвиля визначається із розв'язку лінійної задачі дифракції, взаємодія падаючої та відбитої хвиль не враховується. В даній статті на основі вказаного вище підходу розглядається випадок, коли перешкодою в рідині є крапля іншої рідини. Результати дослідження випадків поодиноких твердих часток і систем таких частот обговорюються в статтях [7, 8].

2. Розв'язання задачі дифракції

На першому етапі дослідження визначимо відбиту від краплі хвилю. Представимо краплю рідкою сферою радіуса R . Тоді необхідно розв'язати лінійну задачу дифракції первинної хвилі на рідкій сфері. Припускаємо, що простір заповнений ідеальною рідиною густини ρ_0 , швидкість звуку в якій є a_0 . Помістимо в неї рідку

сферу радіуса R , що має густину $\bar{\rho}_0$, і нехай $\bar{a}_0$ – швидкість звуку в рідчині сфери. Тут і далі риска над символом позначає величину, що відноситься до рідкої сфери.

Виберемо прямокутну декартову систему координат $Oxyz$ так, щоб її початок O знаходився в центрі рідкої сфери. Нехай в просторі, зайнятому рідиною, поширюється плоска акустична хвиля, яка описується потенціалом

$$\Phi_i = A \exp[i(kx - \omega t)], \quad (1)$$

де A – амплітуда; $k = \omega/a_0$ – хвильове число; ω – кутова частота.

Під дією падаючої хвилі рідка сфера буде зазнавати періодичного стискання та розріджування. В подальшому вплив на сферу тиску поверхневого натягу не будемо враховувати. В математичному плані задача про дифракцію акустичної хвилі (1) на рідкій сфері полягає у визначенні потенціалу швидкості Φ_s відбитої хвилі: розв'язку лінійного хвильового рівняння

$$\Delta \Phi - \frac{1}{a_0^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0, \quad (2)$$

який згасає на нескінченності, а граничні умови на поверхні рідкої сфери вимагають неперервності тиску та нормальної компоненти швидкості в рідинах при переході через поверхню сфери. Зв'яжемо з нею сферичну систему координат $Or\theta\varphi$, в якій кут θ будемо відраховувати від осі Ox (див. рис. 1).

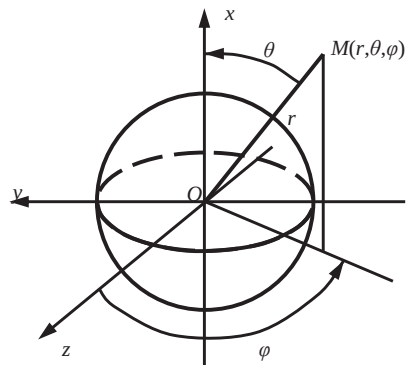


Рис. 1. Крапля сферичної форми, розташована в рідині

В цій системі координат граничні умови на поверхні рідкої сфери запишемо в наступному вигляді:

$$(p_i + p_s)_{r=R} = \bar{p}|_{r=R}, \quad (v_r^i + v_r^s)_{r=R} = \bar{v}_r|_{r=R}. \quad (3)$$

В (3) p_i та v_r^i – обумовлені падаючою хвилею тиск та радіальна компонента швидкості в рідині, що оточує сферу; p_s та v_r^s – аналогічно для відбитої хвилі; $\bar{p}$ і $\bar{v}_r$ – тиск та радіальна компонента швидкості всередині рідкої сфери. Вказані величини визначаються через потенціали поля швидкостей, які є розв'язками рівняння (2). В лінійному наближенні при відомому потенціалі швидкості тиск в звуковій хвилі та радіальна компонента швидкості рідини обчислюються за формулами

$$p = -\rho_0 \frac{\partial \Phi}{\partial t}, \quad v_r = \frac{\partial \Phi}{\partial r}. \quad (4)$$

При формулюванні граничних умов (3) використано припущення, що амплітуда коливань поверхні сфери дуже мала і можна вважати $R = \text{const}$.

Для знаходження розв'язків рівняння (2) використаємо метод розділення змінних в сферичній системі координат. Тоді в досліджуваному випадку потенціали швидкості у відбитій хвилі та у хвилі всередині рідкої сфери можна записати у вигляді узагальнених рядів Фур'є по сферичних хвильових функціях

$$\Phi_s = \sum_{n=0}^{\infty} A_n h_n^{(1)}(kr) P_n(\cos \theta) \exp(-i\omega t), \quad (5)$$

$$\bar{\Phi} = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{A}_n j_n(\bar{k}r) P_n(\cos \theta) \exp(-i\omega t). \quad (6)$$

У (5) і (6) $h_n^{(1)}(w)$ – сферичні функції Ганкеля першого роду; $j_n(w)$ – сферичні функції Бесселя; $P_n(\cos \theta)$ – поліноми Лежандра. Коефіцієнти розвинень A_n і $\bar{A}_n$ визначаються з граничних умов (3) на поверхні рідкої сфери ($r = R$). Вираз (6) задовольняє умовам випромінювання на нескінченності.

Запишемо вираз для первинної хвилі (1) в сферичній системі координат, подаючи його у вигляді розвинення по сферичних хвильових функціях,

$$\Phi_i = \sum_{n=0}^{\infty} A(2n+1) i^n j_n(kr) \times P_n(\cos \theta) \exp(-i\omega t). \quad (7)$$

Використовуючи в (4) потенціали швидкості (5) і (7), отримуємо для обчислення звукового тиску $p = p_i + p_s$ і радіальної компоненти швидко-

сті $v_r = v_r^i + v_r^s$ в рідині, що оточує сферу, наступні співвідношення:

$$p = i\omega\rho_0 \sum_{n=0}^{\infty} \left[A(2n+1) i^n j_n(kr) + A_n h_n^{(1)}(kr) \right] \times P_n(\cos \theta) \exp(-i\omega t), \quad (8)$$

$$v_r = \sum_{n=0}^{\infty} \left[A(2n+1) i^n \frac{dj_n(kr)}{dr} + A_n \frac{dh_n^{(1)}(kr)}{dr} \right] \times P_n(\cos \theta) \exp(-i\omega t). \quad (9)$$

Аналогічно, використовуючи потенціал $\bar{\Phi}$, отримаємо для звукового тиску і радіальної компоненти швидкості в рідкій сфері наступні вирази:

$$\bar{p} = i\omega\rho_0 \sum_{n=0}^{\infty} \bar{A}_n j_n(\bar{k}r) P_n(\cos \theta) \exp(-i\omega t), \quad (10)$$

$$\bar{v}_r = \bar{k} \sum_{n=0}^{\infty} \bar{A}_n \frac{dj_n(\bar{k}r)}{dr} P_n(\cos \theta) \exp(-i\omega t). \quad (11)$$

З умов (3) для тиску і радіальної компоненти швидкості на поверхні сфери, беручи до уваги вирази (8)–(11), приходимо до нескінченної системи алгебраїчних рівнянь ($n = 0, 1, 2, \dots$) для визначення невідомих A_n і $\bar{A}_n$:

$$\begin{aligned} h_n^{(1)}(\alpha) A_n - \frac{\bar{\rho}_0 \bar{k} \bar{a}_0}{\rho_0 k a_0} j_n(\bar{\alpha}) \bar{A}_n &= -A(2n+1) i^n j_n(\alpha), \\ \frac{dh_n^{(1)}(\alpha)}{dr} A_n - \frac{\bar{k}}{k} \frac{dj_n(\bar{\alpha})}{dr} \bar{A}_n &= -A(2n+1) i^n \frac{dj_n(\alpha)}{dr}, \\ (\alpha &= kR, \bar{\alpha} = \bar{k}R). \end{aligned} \quad (12)$$

З системи рівнянь (12) отримуємо формули для обчислення невідомих коефіцієнтів A_n і $\bar{A}_n$:

$$\frac{A_n}{A(2n+1) i^n} = \frac{j_n(\alpha) \frac{dj_n(\bar{\alpha})}{dr} - \frac{\bar{\rho}_0 \bar{a}_0}{\rho_0 a_0} j_n(\bar{\alpha}) \frac{dj_n(\alpha)}{dr}}{\frac{\bar{\rho}_0 \bar{a}_0}{\rho_0 a_0} j_n(\bar{\alpha}) \frac{dh_n^{(1)}(\alpha)}{dr} - \frac{dj_n(\bar{\alpha})}{dr} h_n^{(1)}(\alpha)}, \quad (13)$$

$$\bar{v}_r = \bar{k} \sum_{n=0}^{\infty} \bar{A}_n \frac{dj_n(\bar{k}r)}{dr} P_n(\cos \theta) \exp(-i\omega t). \quad (14)$$

В подальших дослідженнях обмежимося випадком малого радіуса сфери в порівнянні з довжиною акустичної хвилі. В цьому випадку виконується умова $\alpha \ll 1$. Можна показати, що тоді й

$\bar{\alpha} \ll 1$. Для прийнятих обмежень вирази (13), (14) для коефіцієнтів A_n і $\bar{A}_n$ можна спростити, використовуючи асимптотичні представлення функцій $j_n(w)$, $h_n^{(1)}(w)$ та їх похідних для малих значень w , а отже й для $\alpha, \bar{\alpha} \ll 1$.

В подальшому, враховуючи порядки малості доданків, обмежимося у виразі (5) першими трьома членами. Потенціал поля швидкості всередині рідкої сфери $\bar{\Phi}$ далі не використовується, тому вирази для коефіцієнтів $\bar{A}_n$ не наводимо. Визначенням потенціалів Φ_s і $\bar{\Phi}$ закінчується розв'язання задачі дифракції.

3. Обчислення радіаційної сили, що діє на рідку сферу

Радіаційну силу обчислимо, осереднюючи по часу гідродинамічну силу, яка діє в звуковому полі з боку рідини на рідку сферу. Внаслідок осевої симетрії хвильового поля відносно осі Ox гідродинамічна сила буде напрямлена вздовж цієї осі та за величиною дорівнюватиме

$$F_x = -2\pi R^2 \int_0^\pi p \sin \theta \cos \theta d\theta. \quad (15)$$

Маючи на увазі наступне осереднення (15) по періоду первинної хвилі, звуковий тиск p в рідині визначимо в квадратичному наближенні. Для цього використаємо підхід [5, 8], який передбачає обчислення тиску p з точністю до доданків другого порядку по числу Маха

$$p = -\rho_0 \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \frac{1}{2} \rho_0 (\text{grad} \Phi)^2 + \frac{1}{2} \frac{\rho_0}{a_0^2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right)^2. \quad (16)$$

При цьому можна використати потенціал $\Phi = \Phi_i + \Phi_s$, який вже визначений із розв'язання лінійної задачі дифракції [5,6]. Структура виразу (16) передбачає при обчисленні тиску p використання дійсної частини виразу для потенціалу Φ . Зауважимо, що при обчисленні радіаційної сили необхідно враховувати зміну положення рідкої сфери, що коливається, оскільки її врахування приводить до появи в (16) доданків, які мають той же порядок малості, що й другий, й третій. Це зумовлено тим, що частинну похідну по часу $\partial \Phi / \partial t$ в (16) необхідно обчислювати в нерухомій системі відліку, відносно якої розглядався рух сфери при визначенні потенціалу Φ . Для осесиметричного випадку в сферичній системі координат, зв'язаної з рухомою сферою, ця похідна визначається виразом

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{d\Phi}{dt} - V_x \cos \theta \frac{\partial \Phi}{\partial r} + V_x \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta}. \quad (17)$$

де $d\Phi/dt$ – повна похідна по часу. Для вибраної точності обчислень співвідношення (17) слід враховувати тільки при визначенні внеску в гідродинамічну силу (15) першого доданку у виразі для звукового тиску (16). При цьому необхідно брати до уваги тільки другий та третій доданки з виразу (17), оскільки при наступному осередненні по часу повна похідна від обмеженої функції обертається на нуль.

З (5) і (7) отримуємо

$$\text{Re} \Phi \Big|_{r=R, \theta, t} = \sum_{n=0}^2 (L_n \sin \omega t - K_n \cos \omega t) \times \times P_n(\cos \theta), \quad (18)$$

$$\text{Re} \frac{\partial \Phi}{\partial r} \Big|_{r=R, \theta, t} = \sum_{n=0}^2 (M_n \cos \omega t + N_n \sin \omega t) \times \times P_n(\cos \theta), \quad (19)$$

де вирази для констант K_i , L_i , M_i , і N_i , $i = 0, 1, 2$ наведені наприклад у [5, 6].

В подальшому для спрощення запису дійсної частини $\text{Re} \Phi$ потенціалу Φ та його похідних позначення Re будемо відкидати.

Тепер можемо обчислити гідродинамічну силу (15), яка діє на рідку сферу в акустичному полі. Осереднивши її за період первинної хвилі, отримаємо шукану радіаційну силу. Процес обчислення зведемо до визначення внесків у (15) кожного з доданків виразу (16).

Для першого доданку з (16) використовуємо вираз (17) для частинної похідної по часу $\partial \Phi / \partial t$, в якому V_x – швидкість руху вздовж осі Ox рідкої сфери як цілого. Цю швидкість визначимо, обчисливши $\partial \Phi / \partial t$ при $r = R$ і $\theta = 0$ або $\theta = \pi$. Використовуючи (19), запишемо

$$v_r \Big|_{r=R, \theta, t} = A k \left(1 - 2 \frac{\bar{\rho}_0 - \rho_0}{2\bar{\rho}_0 + \rho_0} \right) \cos \theta \sin \omega t + O(\alpha), \quad (20)$$

де $k = \rho_0 a_0^2$ і $\bar{k} = \bar{\rho}_0 \bar{a}_0^2$ – адіабатичні модулі об'ємної пружності зовнішньої рідини та рідини сфери, $k^* = \frac{3\bar{k}(k - \bar{k})}{\bar{k}(3\bar{k} - k\alpha^2)}$.

З (20) отримуємо вираз для визначення швидкості руху вздовж осі Ox рідкої сфери як цілого

$$V_x = v_r \Big|_{r=R, \theta=0, t} = A k \left(1 - 2 \frac{\bar{\rho}_0 - \rho_0}{2\bar{\rho}_0 + \rho_0} \right) \sin \omega t. \quad (21)$$

Тоді внесок в гідродинамічну силу першого доданку з (16), враховуючи (17), буде

$$F_x^{(1)} = 2\pi\rho_0 R^2 V_x \times \int_0^\pi \left(-\frac{\partial\Phi}{\partial r} \cos\theta + \frac{1}{R} \frac{\partial\Phi}{\partial\theta} \sin\theta \right) \sin\theta \cos\theta d\theta. \quad (22)$$

Після інтегрування (22) та осереднення результату по періоду первинної хвилі внесок першого доданку з (16) матиме вигляд

$$\langle F_x^{(1)} \rangle = \frac{2}{9} A^2 \pi \rho_0 k^* \frac{\rho_0}{(2\bar{\rho}_0 + \rho_0)} \alpha^6 + O(\alpha^8). \quad (23)$$

Аналогічні міркування для другого і третього доданків в (16) дають для внесків у гідродинамічну та радіаційну сили відповідно

$$F_x^{(2)} = \pi\rho_0 R^2 \times \int_0^\pi \left[\left(\frac{\partial\Phi}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{R^2} \left(\frac{\partial\Phi}{\partial\theta} \right)^2 \right] \sin\theta \cos\theta d\theta, \quad (24)$$

$$\langle F_x^{(2)} \rangle = \frac{2}{27} A^2 \pi \frac{\rho_0}{2\bar{\rho}_0 + \rho_0} \times \times [\bar{\rho}_0 - \rho_0 - k^* (\bar{\rho}_0 + 2\rho_0)] \alpha^6 + O(\alpha^8); \quad (25)$$

$$F_x^{(3)} = -\frac{\pi\rho_0 R^2}{a_0^2} \int_0^\pi \left(\frac{\partial\Phi}{\partial t} \right)^2 \sin\theta \cos\theta d\theta, \quad (26)$$

$$\langle F_x^{(3)} \rangle = -\frac{2}{3} A^2 \pi \rho_0 \left[k^* \frac{\bar{\rho}_0}{(2\bar{\rho}_0 + \rho_0)} - \frac{\bar{\rho}_0 - \rho_0}{2\bar{\rho}_0 + \rho_0} \right] \alpha^6 + O(\alpha^8). \quad (27)$$

Додаючи внески (23), (25), (27) і вводячи позначення $\eta = \rho_0/\bar{\rho}_0$, отримаємо вираз, який визначає дію радіаційної сили в звуковій хвилі (1) на рідку сферу

$$\langle F_x \rangle = \frac{2}{27} A^2 \pi \rho_0 \frac{1}{2 + \eta} \times \times [k^* (\eta - 10) + 4(1 - \eta)] \alpha^6 + O(\alpha^8). \quad (28)$$

Відзначимо, що умова $\alpha = \sqrt{3k/k}$ відповідає резонансу пульсаційних коливань рідкої сфери [5, 6]. Тому з аналізу виразу (28) випливає, що при наближенні значення α до величини резонансного значення радіаційна сила зростає. Зауважимо, що вираз (28) отримано за умови, що зна-

чення α за величиною відрізняється від $\sqrt{3k/k}$. В цьому випадку в русі рідкої сфери а акустичному полі переважають осциляційні коливання [5]. Якщо ж рідка крапля за своїми механічними властивостями не відрізняється від оточуючої рідини ($\bar{\rho}_0 = \rho_0$, $\bar{k} = k$), то радіаційна сила (28) дорівнює нулю.

4. Чисельне дослідження радіаційної сили. Аналіз результатів

Чисельне дослідження проведемо для двох випадків: а) густина рідини краплі менше густини оточуючої рідини ($\eta > 1$); б) густина рідини краплі більша за густину оточуючої рідини ($\eta < 1$). В першому випадку розглядалась крапля етилового спирту ($\bar{\rho}_0 = 790 \text{ кг/м}^3$, $\bar{a}_0 = 1180 \text{ м/с}$) у воді ($\rho_0 = 1000 \text{ кг/м}^3$, $a_0 = 1500 \text{ м/с}$), а у другому – навпаки. Густина потоку енергії в звуковій хвилі вибиралась рівною 175 Вт/м^2 . Графіки залежності величини радіаційної сили, яка діє на краплю, від параметру ka представлені на рис. 2 і рис. 3 кривими 1–1. Крива 2 на цих рисунках відповідає випадку твердої сферичної частки.

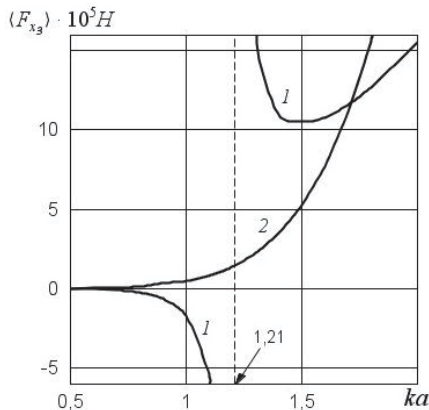


Рис. 2. Величина радіаційної сили в залежності від параметру ka для випадку $\eta > 1$

Вкажемо на характерні особливості дії радіаційної сили на сферичну краплю.

При наближенні значення параметру ka до резонансного значення пульсаційних коливань рідкої сфери ($ka = 1.21$ в першому випадку, рис. 2, і $ka = 2.48$ у другому випадку, рис. 3) радіаційна сила зростає.

При переході параметру ka через його резонансне значення напрямок радіаційної сили змінюється на протилежний (криві 1–1 на рис. 2, 3).

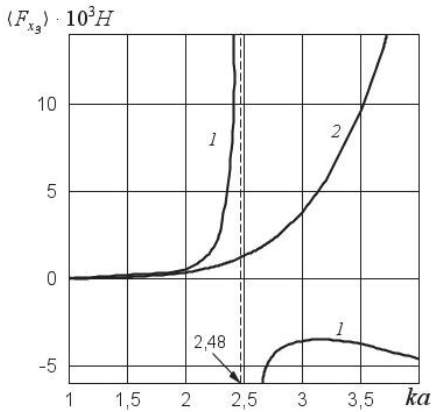


Рис. 3. Величина радіаційної сили в залежності від параметру ka для випадку $\eta < 1$

Напрямок дії радіаційної сили залежить від величини η .

У випадку, коли механічні властивості рідини краплі не відрізняються від властивостей оточуючої рідини, радіаційна сила дорівнює нулю.

У випадку твердої сферичної частинки напрямки дії радіаційної сили не залежить від величини η і співпадає з напрямком поширення акустичної хвилі. Її значення монотонно зростає при збільшенні частоти хвилі.

Отже, в рамках прийнятого в дослідженні наближення можна зробити висновок, що радіаційна сила, яка діє на рідку сферу, на відміну від випадку твердої сфери, може мати напрямки, що співпадає з напрямком поширення хвилі, так і протилежний напрямки (при $\bar{\rho}_0 < \rho_0$). Характер дії радіаційного тиску на рідку сферу обумовлений тими самими причинами, що і у випадку його дії на поверхню розділу двох рідин.

Список використаних джерел

1. Зинченко А. З. К расчету гидродинамического взаимодействия капель при малых числах Рейнольдса / А. З. Зинченко // Прикл. математика и механика. – 1978. – Т. 42, № 5. – С. 955–959.
2. Buivol V. D. Dynamics of ellipsoidal cavities in fluid / V. D. Buivol // Int. Appl. Mech. – 2006. – Vol. 42, № 2. – P. 145–151.
3. Лепендин Л. Ф. Акустика / Л. Ф. Лепендин. – Москва: Высшая школа, 1978. – 448 с.
4. Ржевкин С. Н. Курс лекций по теории звука / С. Н. Ржевкин. – Москва: Изд-во Московского университета, 1960. – 336 с.
5. Жук А. П. Действие акустического излучения на сферическую каплю жидкости / А. П. Жук // Прикл. мех. – 2007. – Т. 43, № 7. – С. 26–34.
6. Гузь А. Н. Действие акустического излучения в вязкой жидкости на сферическую каплю идеальной жидкости / А. Н. Гузь, А. П. Жук // Прикл. мех. – 2014. – Т. 50, № 6. – С. 3–13.
7. Guz A. N. Motion of solid particles in a liquid under the action of an acoustic field: the mechanism of radiation pressure / A. N. Guz, A. P. Zhuk // Int. Appl. Mech. – 2004. – Vol. 40, № 3. – P. 246–265.
8. Zhuk A. P. Acoustic radiation force on a spherical particle in a fluid-filled cavity / A. P. Zhuk, V. D. Kubenko, Y. A. Zhuk // J. Acoust. Soc. Am. – 2012. – Vol. 132, № 4. – P. 2189–2197.

References

1. ZINCHENKO, A. Z. (1978) K rasschetu gidrodinamicheskogo vzaimodeystviya kapel pri malykh chislakh Reynoldsa. *Prikl. Matematika i Mekhanika*. 42. p. 955–959.
2. BUIVOL, V. D. (2006) Dynamics of ellipsoidal cavities in fluid. *Int. Appl. Mech.* 42 (2). p. 145–151.
3. LEPENDIN, L. F. (1978) *Akustika*. Moskva: Vysshaya shkola.
4. RZHEVKIN, S. N. (1960) *Kurs Lekcij po Teorii Zvuka*. Moskva: Izdatelstvo Moskovskogo universiteta.
5. ZHUK, A. P. (2007) Dejstviye akusticheskogo izlucheniya na sfericheskuyu kaplyu zhidkosti. *Prikladnaya Mekhanika*. 43 (7). p. 26–34.
6. GUZ, A. N. & ZHUK A. P. (2014) Dejstviye akusticheskogo izlucheniya v вязкой жидкости на сферическую каплю идеальной жидкости. *Prikladnaya mekhanika*. 50 (6). p. 3–13.
7. GUZ, A. N. & ZHUK, A. P. (2004) Motion of solid particles in a liquid under the action of an acoustic field: the mechanism of radiation pressure. *Int. Appl. Mech.* 40 (3). p. 246–265.
8. ZHUK, A. P., KUBENKO, V. D. & ZHUK, Y. A. (2012) Acoustic radiation force on a spherical particle in a fluid-filled cavity. *J. Acoust. Soc. Am.* 132 (4). p. 2189–2197.

Надійшла до редколегії 30.09.15

УДК 539.3

Зражевський Г. М.¹, к. ф.-м. н., доц.,
Зражевська В. Ф.², к. ф.-м. н., доц.

Одновимірна динамічна модель крихкого руйнування при поширенні пружної хвилі

¹Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, проспект Акад.
Глушкова, 4-е

e-mail: zgrig@univ.kiev.ua

²Київський національний технічний університет
України «Київський політехнічний інститут»,
03056, м. Київ, проспект Перемоги, 37

e-mail: vera.zrazevska@gmail.com

G. M. Zrazhevsky¹, Ph D (Phys.-Math.), Assoc. Prof.,
V. F. Zrazhevskaya², Ph D (Phys.-Math.), Assoc. Prof.

A one-dimensional dynamic model of brittle fracture while the elastic wave propagating

¹Taras Shevchenko National University of Kyiv,
03680, Kyiv, Acad. Glushkova av., 4-e

e-mail: zgrig@univ.kiev.ua

²National Technical University of Ukraine «Kyiv
Polytechnic Institute», 03056, Kyiv, Peremohy av.,
37

e-mail: vera.zrazevska@gmail.com

В роботі пропонуються до розгляду одновимірні моделі крихкого руйнування скінченного лінійно-пружного стрижня, в якому поширюється хвиля розтягу-стиску, ініційована прикладеним до торця фінітним імпульсом. Моделі будуються на відомих експериментальних дослідженнях Гопкінсона та Кольського – повного та часткового руйнування стрижня при поширенні в ньому пружної хвилі. Розглянуто дві моделі руйнування: з дисипацією енергії при руйнуванні та без дисипації енергії. Досліджено збереження інтегралів повної механічної енергії та кількостей руху фрагментів зруйнованого стрижня.

Показано, що для обох моделей руйнування рух спільного центру інерції зберігається. Застосування моделей проілюстровано на прикладі дослідження квазістатичного руйнування шляхом поширення крихкої тріщини. Отримано залежність енергії руйнування від розміру тріщини та повну енергію руйнування.

Ключові слова: динамічне руйнування, інтеграли збереження, поширення пружних хвиль.

In the paper, the one-dimensional models of brittle fracture of a finite linear elastic rod under the propagation of tension-compression wave initiated by a finite impulse are proposed. The models are based on the well known experimental studies by Hopkins and Kolsky of a full or a partial destruction of the rod under the elastic wave impact. Two models of fracture—with energy dissipation and without energy dissipation—were considered. A conservation of integrals for complete mechanical energy and the momentum for fragments of destroyed rod are studied. The mathematical problem statement was set as the initial boundary value problem for the one-dimensional wave equation with singular generalized functions in the coefficients. The quasi-solution of this problem was built and analyzed, what allowed to formulate some realistic model of destruction, which taking into account the energy dissipation while destructing.

It is shown that the joint center of an inertia keeps its movement for both fracture models. The application of models is illustrated by the study of quasistatic fracture through the brittle crack propagation. The dependence between the fracture energy of crack size and the total energy of fracture are obtained.

Key Words: Dynamic Fracture, Saved Integrals, Elastic Wave Propagation.

1. Вступ

Крихке руйнування в елементах конструкцій в багатьох випадках пов'язане з генерацією та поширенням в них пружних хвиль [1, 2]. Специфіка такого руйнування полягає в тому, що енергія руйнування при поширенні тріщини відбирається від енергії хвильового процесу [3, 4], отже, модель такого процесу має бути

динамічно-нестационарною. В той же час, існування та поширення тріщини призводить як до дифракції хвилі, так і, в свою чергу, призводить до генерування вторинної хвилі [5]. В даній роботі пропонуються одновимірні моделі такого явища на прикладі крихкого руйнування скінченного лінійно пружного стрижня в якому поширюється хвиля розтягу-стиску, ініційована прикладеним до торця фінітного імпульсу.

Модель будується на відомих експериментальних дослідженнях Гопкінсона та Кольського [1], повного та часткового руйнування стрижня при поширенні в ньому пружної хвилі. Результати експериментів свідчать, що руйнування відбувається при досягненні динамічних напружень розтягу у відбитій від вільного торця стрижня певного рівня, шляхом зародження та поширення дископодібної тріщини від осі стрижня [1, 6, 7]. Отже, теорія міцності в цьому випадку не може бути покладена в основу моделі. Для адекватного опису потрібно базуватись на динамічній теорії руйнування [6, 7].

Математична модель сформульована у формі початково-граничної задачі для хвильового рівняння на відрізку, що може роз'єднуватись на дві частини при виконанні розв'язком умов певного критерію [4]. При цьому кожен з під відрізків, за тим же критерієм, може також бути розділений при збереженні історії поширення хвилі в кожному з таких елементів. Математичні проблеми розв'язання задачі пов'язані зі зміною області розв'язання а також тим, що для застосування критерію подрібнення області необхідно мати розв'язок як прямої, так зворотної задач. З точки зору механіки руйнування, задача є новою, оскільки окрім глобального критерію поширення тріщини, що призводить до повного чи часткового відокремлення фрагменту (використовувався інтегральний енергетичний критерій) [8, 9] необхідно вводити також локальний критерій зародження тріщини.

Задача розв'язана за методом Даламбера. Отриманий розв'язок проаналізовано як з кінематичної, так і енергетичної точок зору. Показано, що як до руйнування, так і після руйнування швидкість руху спільного центру інерції фрагментів залишаються збереженими незалежно від місця та моменту руйнування. Інтеграли повної механічної енергії залежать від моделі руйнування. Найпростіша модель не передбачає дисипацію енергії при руйнуванні, тоді як інші моделі дозволяють введення енергії руйнування. З теоретичної точки зору принциповим моментом є встановлення інтегральних інваріантів руйнування [9, 10]. Також розв'язана проблема дифракції та генерування пружних хвиль в процесі руйнування. Задача формалізована до нестационарної одновимірної задачі для хвильового рівняння з коефіцієнтами, що належать до класу сингулярних узагальнених функцій. Як приклад, розглянуто руйнування, що полягає в поширенні дискової тріщини з

довільною швидкістю руху фронту в квазістатичній постановці.

2. Поширення хвиль

Розглядається задача про поширення в стрижні скінченної довжини пружних хвиль, збурених обмеженим імпульсом напружень, прикладеного до торця. В безрозмірних змінних

$$\hat{x} = x/l, \quad \hat{t} = t/T, \quad \hat{u} = u/U, \quad \hat{\sigma} = \sigma/\Sigma, \quad c^2 = E/\rho, \\ T = l/c, \quad U = l p_0/E, \quad \Sigma = p_0. \quad (1)$$

де l – довжина стрижня, p_0 – амплітуда прикладеного навантаження, E, ρ – модуль Юнга та густина матеріалу, початково-гранична гранична задача має вигляд (хвилі над змінними опущено):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \quad x \in (0,1), \quad t > 0; \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = -S(t), \quad \frac{\partial u}{\partial x}(1,t) = 0, \quad (2) \\ u(x,0) = \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0, \quad 0 < x < 1. \\ S(t) = \begin{cases} S(t), & 0 < t < \tau_s; \\ 0, & t > \tau_s; \end{cases} \quad S(t) \in [0,1].$$

Розв'язок може бути записаний за методом Даламбера у вигляді автомоделі суперпозиції хвиль:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x}(x,t) = \sum_0^k \frac{\partial u_i}{\partial x}(x,t), \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \sum_0^k \frac{\partial u_i}{\partial t}(x,t), \end{cases}, \quad k < t < k+1.$$

Швидкість руху центру інерції та енергію (кінетичну та потенціальну) можна порахувати як безпосередньо з розв'язку, так і через інтегральні перетворення (2). Наприклад:

$$\int_0^t (\partial^2 u / \partial x^2(x,t) - \partial^2 u / \partial t^2(x,t)) dt = 0,$$

а отже

$$v_c = \int_0^1 \partial u / \partial t(x,t) dx = - \int_0^t \partial u / \partial x(0,t) dt = \int_0^t S(t) dx.$$

Аналогічно:

$$\int_0^t \left[\partial^2 u / \partial x^2(x, t) - \partial^2 u / \partial t^2(x, t) \right] \partial u / \partial t(x, t) dt = 0.$$

Повні кінетична та потенціальна енергії:

$$T = \frac{1}{2} \int_0^1 \left[\partial u / \partial t(x, t) \right]^2 dx, \quad \Pi = \frac{1}{2} \int_0^1 \left[\partial u / \partial x(x, t) \right]^2 dx.$$

Кінетична енергія руху разом з центром інерції та відносного руху відносно центру інерції:

$$T_c = 1/2 v_c^2, \quad T_r = T - 1/2 v_c^2.$$

При цьому легко показати, що швидкість центру інерції стрижня та повна механічна енергія стрижня:

$$\begin{cases} v_c = \int_0^{\min(t, \tau_s)} S(t) dt, \\ E = T + \Pi = \int_0^{\min(t, \tau_s)} S^2(t) dt, \end{cases} \quad (3)$$

зберігаються після закінчення збурення $t > \tau_s$. При цьому, оскільки кінетична енергія твердотілого руху

$$T_c = \frac{1}{2} \left(\int_0^{\min(t, \tau_s)} S(t) dt \right)^2$$

зберігається, то зберігається також і повна внутрішня енергія стрижня [10].

3. Фрагментування стрижня без дисипації енергії

Вважаємо, що в перерізі x_f в момент часу t_f (умова $0 < (t_f - 1) - (1 - x_f) < \tau_s$ забезпечує умову руйнування в зоні розтягу) стрижень руйнується на 2 фрагменти.

За модель руйнування приймемо умову розділення стрижня та прикладання до торців, що утворилися напружень, протилежних до хвильових напружень в суцільному стрижні, що забезпечує умову звільнення від напружень для суперпозиції розв'язків. Подібна модель руйнування не передбачає, вочевидь, дисипації енергії. Дійсно, нехай маємо складений стрижень (з фрагментами $0 < x < x_f$ та $x_f < x < 1$). При навантаженні хвилею стиску (2) фрагменти не розділяються. Після відбиття та формування хвилі розтягу, фрагменти розділяються без (що

показано) відсутності контакту по перерізу складання.

Збережені величини знаходяться за методом попереднього розділу.

Швидкості центрів інерції фрагментів:

$$v_c^I = \frac{1}{x_f} \int_0^{t_f + x_f - 2} S(t) dt, \quad v_c^{II} = \frac{1}{1 - x_f} \int_{t_f + x_f - 2}^{\tau_s} S(t) dt,$$

а отже, швидкість спільного центру інерції фрагментів зберігається:

$$x_f v_c^I + (1 - x_f) v_c^{II} = \int_0^{\tau_s} S(t) dt. \quad (4)$$

Можна показати, що кінетичні, потенціальні (а отже і повні) механічні енергії фрагментів не залежать від часу. Для 1-го фрагменту:

$$T^I = \Pi^I = \frac{1}{2} E^I = \int_0^{t_f + x_f - 2} S^2(t) dt. \quad (5)$$

Легко показати, що:

$$E = \int_0^t S^2(t) dt,$$

а отже, повна спільна механічна енергія фрагментів зберігається та визначається (3). Отже, для такої моделі руйнування, справедливий теорема про збереження руху центру інерції та збереження повної механічної енергії для системи матеріальних точок [10]. Окрім того, можна показати, що лівий фрагмент як тверде тіло гальмується, правий розганяється, а швидкості матеріальних точок на торцях, що розділяються змінюються неперервно так, що перекриття фрагментів не відбувається, що доводить коректність такої моделі.

4. Модель руйнування, що враховує дисипацію енергії

Очевидно, розглянута модель руйнування не може бути застосована для випадку, коли руйнування пов'язане з розвиненням тріщин. Для останнього випадку, запропонуємо модель руйнування, що зводиться до послаблення перерізу руйнування за заданим часовим законом. Нехай

$$E = E_0 [1 - f(t - t_f) \delta(x - x_f)], \quad (6)$$

де функція, що визначає руйнування:

$$f(t): f(0)=0, f(\tau_f)=1, f'(t) \geq 0, t \in [0, \tau_f]. \quad (7)$$

Шукаємо повний розв'язок для моделі у вигляді розв'язку (2) для $t \in [0, \tau_f]$ та розв'язку задачі:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = f(t - \tau_f) \frac{\partial}{\partial x} \left(\delta(x - x_f) \frac{\partial u}{\partial x} \right),$$

$$x \in (0, 1), t_f < t;$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial u}{\partial x}(1, t) = 0, x \in (0, 1), t_f < t;$$

$$u(x, t_f) = u_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, t_f) = v_0(x), \quad 0 < x < 1, \quad (8)$$

де $u_0(x), v_0(x)$ – переміщення та швидкості розв'язку (2) в момент часу t_f . Для зручності, в подальшому при розв'язанні (8) під t будемо розуміти $t - t_f$.

Використавши другу формулу Гріна для хвильового оператора з фундаментальним розв'язком

$$u^*(x, t; \tau, \xi) = -1/2 H(t - \tau - |x - \xi|)$$

легко отримати інтегральне представлення розв'язку (8):

$$u(\xi, \tau) = -\frac{1}{2} \int_{\max(\xi - (\tau_f - \tau), 0)}^{\min(\xi + (\tau_f - \tau), 1)} \frac{\partial u}{\partial t}(x, \tau_f) dx -$$

$$-\frac{1}{2} \{ u(\xi - (\tau_f - \tau), \tau_f) H(\xi - (\tau_f - \tau)) +$$

$$+ u(\xi + (\tau_f - \tau), \tau_f) H(\xi - (\tau_f - \tau)) \} -$$

$$-\frac{1}{2} \text{sign}(x_f - \xi) f(\tau + |x - \xi|) \times$$

$$\times \frac{\partial u}{\partial x}(x_f, \tau + |x_f - \xi|) H(\tau_f - \tau - |x_f - \xi|), \quad (9)$$

Розв'язок (9) має утримувати як неперервну частину $u_0(x, t)$, що пов'язана з проходженням хвилі перерізу $x = x_f$, так і розривну $u_1(x, t)$, що визначається дифракцією хвилі в перерізі руйнування. Отже,

$$u(x, t) = u_0(x, t) + u_1(x, t),$$

де

$$u_0(\xi, \tau) = -\frac{1}{2} \int_{\max(\xi - (\tau_f - \tau), 0)}^{\min(\xi + (\tau_f - \tau), 1)} \frac{\partial u_0}{\partial t}(x, \tau_f) dx -$$

$$-\frac{1}{2} \{ u_0(\xi - (\tau_f - \tau), \tau_f) H(\xi - (\tau_f - \tau)) +$$

$$+ u(\xi + (\tau_f - \tau), \tau_f) H(\xi - (\tau_f - \tau)) \} \quad (10)$$

$$\begin{cases} u_0(\xi, 0) = u_0(\xi), \\ \frac{\partial u_0}{\partial x}(\xi, 0) = v_0(\xi), \end{cases} \quad 0 < \xi < 1,$$

неперервна частина розв'язку, а

$$\begin{cases} \frac{\partial u_1}{\partial x}(x_f + \xi, \tau) = \frac{\partial u_1}{\partial x}(x_f - \xi, \tau) \\ \frac{\partial u_1}{\partial t}(x_f + \xi, \tau) = -\frac{\partial u_1}{\partial x}(x_f - \xi, \tau), \end{cases} \quad (11)$$

розривна частина розв'язку. Саме вона представляє найбільший інтерес. З (9) легко отримати умову автомодельності для $u_1(x, t)$:

$$\frac{\partial u_1}{\partial x}(x_f, \tau) - \frac{\partial u_1}{\partial t}(x_f + 0, \tau) =$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x}(x_f + (\tau_f - \tau), \tau_f) - \frac{\partial u_1}{\partial t}(x_f + (\tau_f - \tau), \tau_f),$$

або

$$\frac{\partial u_1}{\partial x}(x_f, \tau) - \frac{\partial u_1}{\partial t}(x_f + 0, \tau) =$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x}(x_f + \xi, \tau_f + \xi) - \frac{\partial u_1}{\partial t}(x_f + \xi, \tau_f + \xi), \quad (12)$$

(9) з врахуванням (10), (11) та (12) має вигляд:

$$\begin{cases} \left[\frac{\partial u_1}{\partial t} \right](x_f, \tau) = \frac{d}{d\tau} \left[f(\tau) \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial x} \right)(x_f, \tau) \right], \\ \left[\frac{\partial u_0}{\partial t} \right](x_f, \tau) = 0, \end{cases} \quad (13)$$

що і визначає модель руйнування, побудовану на гіпотезі (6).

Інтегрування (13) щодо стрибка переміщень дозволяє отримати:

$$[u] = [u_1](x_f, \tau) = f(\tau) \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial x} \right)(x_f, \tau). \quad (14)$$

Рівняння (14) можна проінтерпретувати різним чином. Наприклад, оскільки цей вираз отримано з інтегрального представлення розв'язку (9), він подає зв'язок між стрибком переміщень та напруженнями в перерізі руйнування. В той же час, (14) можна отримати шляхом інтегрування закону Гюка

$$\sigma dx = E_0 [1 - f(t - t_f) \delta(x - x_f)] \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} dx$$

по малому просторовому елементу, що утримує переріз руйнування. В цьому випадку (14)

визначає сингулярну деформацію, що записується через стрибок переміщень. Сtribок переміщень є фіктивним, оскільки одновимірна модель руйнування не може передбачити конкретний фізичний механізм руйнування. Він може бути обумовлений розвиненням внутрішньої тріщини при крихкому руйнуванні, пластичною течією, тощо. У випадку руйнування фізичного тіла для якого стрибок переміщень набагато менший за середні деформації перед руйнуванням, наприклад, при руйнуванні пружинистого тіла, $[u](x_f, t)$ можна знехтувати, що призведе, як буде показано далі до нехтуванням енергією руйнування, а отже, таке руйнування описується моделлю, введеною в попередньому розділі.

Для введеної моделі руйнування (6)–(14), як і раніше, можна визначити збережені величини. Очевидно:

$$\begin{aligned} \int_0^T f(t-t_f) dt \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x} \left(\delta(x-x_f) \frac{\partial u}{\partial t} \right) dx &= \int_0^T f(t-t_f) dt \times \\ &\times \left(\int_0^1 \delta'(x-x_f) \frac{\partial u}{\partial t} dx + \int_0^1 \delta(x-x_f) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx \right) = \\ &= \int_0^T f(t-t_f) \left\{ -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_f, t) + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_f, t) \right\} dt = 0. \end{aligned}$$

А отже, руйнування не призводить до зміни швидкості центру інерції стрижня: $\Delta v_c = 0$. Повторивши викладки попереднього розділу отримаємо:

$$\Delta E(t) = -\frac{1}{2} \int_{t_f}^t \frac{f'(t-t_f)}{f(t-t_f)} \frac{\partial u(x_f, t)}{\partial x} [u_1](x_f, t) dt. \quad (15)$$

Таким чином, енергія руйнування ($\Delta E(t)$ для $t > t_f + \tau_f$ – не залежить від часу) визначається рівнем напружень розтягу $\partial u(x_f, t) / \partial x$ та фіктивним стрибком переміщень $[u_1](x_f, t)$ в перерізі руйнування і взагалі кажучи, залежить від динаміки руйнування $f(t)$. У випадку, коли $[u](x_f, t)$ можна знехтувати, $\Delta E(t_f + \tau_f) = 0$ та руйнування відбувається без дисипації енергії.

5. Квазистатичне крихке руйнування

В якості прикладу реалізації другої динамічної моделі руйнування розглянемо руйнування стрижня через виникнення та розвинення в перерізі руйнування внутрішньої центральної дискової тріщини. Для спрощення, вважатимемо, що руйнування відбувається квазистатично.

Для квазистатичної рівноважної тріщини радіусу r в перерізі з напруженнями розтягу σ_0 , що розташована центральним чином в стрижні з радіусом R наближений за методом плоских перерізів та усереднений по перерізу обезрозмірений стрибок переміщень може бути знайдено за [4]:

$$[u_z] = \frac{16(1-\nu^2)}{3\pi} \left(\frac{R}{l} \right) C \left(\frac{r}{R} \right) \sigma_0, \quad (16)$$

де

$$C \left(\frac{r}{R} \right) = \left(\frac{r}{R} \right)^3 \frac{1}{2} \left[1 + \frac{\arcsin(r/R)}{(r/R)\sqrt{1-(r/R)^2}} \right], \quad (17)$$

ν – коефіцієнт Пуассона, l – довжина стрижня, (введена раніше).

Поклавши в цьому випадку $f(t) = (r(t)/R)^2$ та застосувавши (15), отримаємо:

$$\begin{aligned} \Delta E(\hat{r}) &= -\frac{8(1-\nu^2)}{3\pi} \left(\frac{R}{L} \right) \sigma_0^2 \times \\ &\times \left(\hat{r} + \hat{r}^3 / 3 - \sqrt{1-\hat{r}^2} \arcsin(\hat{r}) \right), \quad \hat{r} = r/R. \end{aligned} \quad (18)$$

Повна енергія, що дисипується при фрагментуванні стрижня:

$$\Delta E(1) = -\frac{32(1-\nu^2)}{9\pi} \left(\frac{R}{L} \right) \sigma_0^2 \quad (19)$$

Як слідує з (18), для малих тріщин, $\Delta E(\hat{r}) \approx -A\hat{r}^3$, а для розвинених $\Delta E(\hat{r}) \approx_{\hat{r} \rightarrow 1} -B_1 - A^1(1-\hat{r})^{1/2}$. Окрім того, $(-\Delta E(\hat{r}))' > 0$, $(-\Delta E(\hat{r}))'' > 0$. Ця властивість дає змогу пояснити результати експериментів [1], в яких поширення пружних хвиль призводить до часткового руйнування (пошкодження): дископодібні тріщини ініціюються але не досягають поверхні стрижня, оскільки відносний приріст енергії руйнування стрімко зростає при наближенні крихкої тріщини до границі.

6. Висновки

Процес відбиття пружних хвиль в стрижні, що навантажений фінітним імпульсом напружень підкоряється теоремам про рух центру інерції та про зміну повної механічної енергії системи матеріальних точок. Після закінчення процесу навантаження, рух центру інерції та повна механічна енергія зберігаються. Відношення кінетичної енергії руху разом з центром інерції до повної механічної енергії завжди менше 1/2.

В моделі руйнування, що зводиться до прикладання протидіючих навантажень до торців

фрагментів, що розділяються також виконуються теоремам про рух центру інерції та про зміну повної механічної енергії системи матеріальних точок. Кінетичні та потенціальні енергії фрагментів не залежать від часу, повна спільна механічна енергія не змінюється при в результаті розділення, незмінним залишається рух спільного центру інерції. Швидкості торців змінюються монотонно та неперервно.

Запропонована друга модель одновимірного динамічного руйнування, що базується на фінітному в часі послабленні перерізу руйнування. Руйнування за цією моделлю супроводжується дисипацією енергії, а отже допускає введення енергетичного критерію руйнування. Застосування такого критерію, вочевидь, дозволяє повне визначення руйнування стрижня: переріз руйнування, момент руйнування, фрагментування чи пошкодження. В той же час, модель має кінематичну інтерпретацію через фіктивний

стрибок переміщень в перерізі руйнування. Показано, що за цією моделлю, повна механічна енергія зменшується, хоча рух центру інерції зберігається. А отже, динамічне руйнування відбувається за рахунок зменшення повної внутрішньої (потенціальної енергії деформацій та кінетичної енергії відносного руху відносно центру інерції) енергії хвильового процесу в стрижні.

Запропонована модель, що враховує дисипацію енергії при руйнуванні, проілюстрована на прикладі руйнування, що визначається квазістатичним поширенням внутрішньої крихкої тріщини, що розташована в перерізі руйнування. Отримано залежність енергії руйнування від відносного радіусу тріщини, асимптотичну поведінку енергії для малих та розвинутих тріщин, а також, підраховану повну енергію руйнування.

Список використаних джерел

1. Kolsky H. *Stress Waves in Solid* / H. Kolsky. – Oxford, 1953. – 189 p.
2. Achenbach J. D. *Wave Propagation in Elastic Solids* / J. D. Achenbach. – Elsevier, 1999. – 394 p.
3. Achenbach J. D. Crack propagation generated by a horizontally polarized shear wave / J. D. Achenbach // *J. Mech. Phys. Solids*. – 1970. – Vol. 18, № 4. – P. 245–259.
4. Слепян Л. И. *Механика трещин* [изд. 2-е, перераб. и доп.] / Л. И. Слепян. – Ленинград: Судостроение, 1990. – 296 с.
5. Ravi-Chandar K. *Dynamic Fracture* / K. Ravi-Chandar. – Elsevier, 2004. – 254 p.
6. Freund L. B. *Dynamic Fracture Mechanics* / L. B. Freund. – Cambridge University Press. – 1998. – 563 p.
7. Achenbach J. D. Fracture generated by a dilatational wave / J. D. Achenbach, R. Nisner // *Int. J. Fract. Mech.* – 1971. – Vol. 7, № 1. – P. 77–99.
8. Atkinson C. The flow of energy into the tip of a moving crack / C. Atkinson, J. D. Eshelby // *Int. J. Fract. Mech.* – 1968. – Vol. 4, № 1. – P. 3–8.
9. Вычислительные методы в механике разрушения: [под ред. Атлури С. М.] – М.: Мир, 1990. – 392 с.
10. Кильчевский Н. А. *Курс теоретической механики* / Н. А. Кильчевский. – М.: Наука, 1977. – Т. 2. – 544 с.

References

1. KOLSKY, H. (1953) *Stress Waves in Solid*. Oxford.
2. ACHENBACH, J. D. (1999) *Wave Propagation in Elastic Solids*. Elsevier.
3. ACHENBACH, J. D. (1970) Crack propagation generated by a horizontally polarized shear wave. *J. Mech. Phys. Solids*. 18 (4). p. 245–259.
4. SLEPIAN, L. I. (1990) *Mekhanika Treschin*. 2nd Ed. Leningrad: Sudostroenie.
5. RAVI-CHANDAR, K. (2004) *Dynamic Fracture*. Elsevier.
6. FREUND, L. B. (1998) *Dynamic Fracture Mechanics*. Cambridge: University Press.
7. ACHENBACH J. D. (1971) Fracture generated by a dilatational wave. *Int. J. Fract. Mech.* 7 (1). p. 77–99.
8. ATKINSON, C. & ESHELBY, J. D. (1968) The flow of energy into the tip of a moving crack. *Int. J. Fract. Mech.* 4 (1). p. 3–8.
9. (Ed. by ATLURI, S. N.) (1990) *Computational Methods in the Mechanics of Fracture*. Center of the Computational Mechanics Georgia Institute of Technology. Atlanta, Georgia..
10. KILCHEVSKIY, N. A. (1977) *Kurs Teoreticheskoy Mekhaniki*. Moskva: Nauka.

Надійшла до редколегії 30.09.15

УДК 539.3

Індіамінов Р. Ш., д. ф.-м. н., проф.

**Магнітопружне деформування
струмонесучої конічної оболонки з
врахуванням ортотропії провідних
властивостей**

Самаркандський філіал Ташкентського університету інформаційних технологій, 100140, Республіка Узбекистан, м. Самарканд, вул. Шохрух Мірзо, 47-а
e-mail: r_indiaminov@mail.ru

R. Sh. Indiaminov, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof.

A magnetoelastic deformation of a current-carrying conical shell with the orthotropy of conductive properties

Samarkand branch of Tashkent University of Information Technologies, 100140, The Republic of Uzbekistan, Samarkand, Shohrux Mirzo str., 47-a
e-mail: r_indiaminov@mail.ru

Вивчається нелінійна деформація гнучкої струмонесучої ортотропної конічної оболонки, яка знаходиться у магнітному полі. Задача розглядається в осесиметричній постановці. Досліджується вплив зовнішнього магнітного поля на напружено-деформований стан струмонесучих ортотропних конічних оболонок у геометрично нелінійній постановці задачі. Завдяки спеціальним електромагнітним гіпотезам задача тривимірного деформування тіла приводиться до задачі про деформування довільно вибраної координатної поверхні. Напруження в елементі оболонки розглядається як сума механічного напруження і напруження Максвелла. Для опису процесу деформування застосовуються рівняння геометрично нелінійної теорії тонких оболонок у квадратичному наближенні. Для її розв'язку застосовується чисельний метод на основі послідовного застосування скінченно-різницевої схеми Ньюмарка, методів лінеаризації та дискретної ортогоналізації. Історія деформування відслідковувалася в інтервалі часу $0 \div 10^{-2}$ з кроком 10^{-3} . Було встановлено, що згин оболонки сильно залежить від зовнішньої магнітної індукції і її приріст призводить до збільшення індукції внутрішнього магнітного поля.

Ключові слова: конічна оболонка, магнітне поле, магнітопружність.

A nonlinear axisymmetric deformation of a flexible current-carrying orthotropic conical shell magnetic field is studied. An influence of external magnetic field on a stress-deformation state of an electrically conductive orthotropic conical shell in the geometrically nonlinear statement is investigated. By the special electromagnetic hypotheses, the problem of three-dimensional deformation of a shell is transformed to the problem of deformation of the coordinate surface selected arbitrarily. The stress in the conical shell element was considered as the sum of the mechanical and Maxwell stress. To describe the deformation process, the quadratically approximated equations of geometrically nonlinear theory for thin shells are used. To find a solution of these equations, it is used the numerical method based on the successive application of the Newmark finite-difference scheme, linearization methods, and discrete orthogonalization. A history of deformation is described for the time interval $0 \div 10^{-2}$ with a time step 10^{-3} . It was established that the shell flexure is strongly dependent on an external magnetic induction, and an increase of the external magnetic induction leads to an increase of the induction for an internal magnetic field.

Key Words: Conical Shell, Magnetic Field, Magnetoelasticity.

1. Вступ

Механізм взаємодії пружного тіла з електромагнітним полем має різноманітні прояви і обумовлений як його фізичними властивостями, так і геометричними характеристиками. В тонких пластинах і оболонках, виготовлених із матеріалів, які мають анізотропні провідні властивості, цей механізм набуває певних специфічних особливостей. Картина магнітопружної взаємодії полів

значно ускладнюється і тому створення спрощеної нелінійної теорії магнітопружної взаємодії у цьому випадку складає окремий науковий інтерес, як з точки зору теорії, так і застосувань.

У процесі деформації оболонки відбувається зміна форми її поверхні, що призводить до зміни напрямку струму, тобто змінюється електромагнітне поле оболонки, виникають вихорові струми, які, взаємодіючи з зовнішнім магнітним полем, спричиняють виникнення сил Лоренца. Ці

сили змінюють стан тіла і електромагнітне поле в ньому.

Зв'язана система нелінійних магнітопружних рівнянь у частинних похідних восьмого порядку, яка описує напружено-деформівний стан гнучких струмонесучих ортотропних конічних оболонок з ортотропною електропровідністю, а також методика розв'язання такого нового класу задач викладені в [1], де зв'язана система рівнянь електромагнітодинаміки отримана в лагранжевих змінних, віднесених до недеформованої серединної поверхні оболонки в ортогональній криволінійній системі координат.

2. Постановка задачі та її розв'язання

Розглядатимемо гнучкі струмонесучі конічні оболонки змінної вздовж меридіану товщини, які знаходяться під дією нестационарних електромагнітних і механічних полів. Нехтуючи впливом процесів поляризації і намагнічування, а також температурних напруженнями, вважатимемо, що до торця оболонки підводиться змінний електричний струм від зовнішнього джерела. Вважатимемо також, що сторонній електричний струм у незбуреному стані рівномірно розподілений по тілу (густина струму не залежить від координат). Пружні властивості матеріалу оболонки приймаються ортотропними, головні напрямки пружності співпадають з напрямками відповідних координатних ліній, а електромагнітні властивості матеріалу характеризуються тензорами електричної провідності σ_{ij} , магнітної проникливості μ_{ij} та діелектричної проникливості ϵ_{ij} . При цьому згідно принципів кристалології для таких провідних ортотропних середовищ з ромбічною кристалічною структурою приймемо, що тензори σ_{ij} , ϵ_{ij} і μ_{ij} мають діагональний вигляд [2].

У цьому випадку довільна поверхня другого порядку має три взаємно перпендикулярні осі другого порядку і їх можна розташувати паралельно кристалографічним осям другого порядку. Крім того, характеристична поверхня другого порядку має всі елементи симетрії, які можуть бути у класів орторомбічної системи.

Приймемо, що геометричні і механічні характеристики тіла такі, що для опису процесу деформування можна застосовувати рівняння геометрично нелінійної теорії тонких оболонок у квадратичному наближенні. Крім того, приймемо, що відносно напруженості електричного поля $\vec{E}$ і напруженості магнітного поля $\vec{H}$ виконуються електромагнітні гіпотези [4]:

$$E_1 = E_1(\alpha, \beta, t), \quad E_2 = E_2(\alpha, \beta, t),$$

$$\begin{aligned} E_3 &= \frac{\partial v}{\partial t} B_1 - \frac{\partial u}{\partial t} B_2, \\ H_1 &= \frac{1}{2}(H_1^+ + H_1^-) + \frac{\gamma}{h}(H_1^+ - H_1^-), \\ H_2 &= \frac{1}{2}(H_2^+ + H_2^-) + \frac{\gamma}{h}(H_2^+ - H_2^-), \\ H_3 &= H_3(\alpha, \beta, t). \end{aligned} \quad (1)$$

Ці допущення є певним електродинамічним аналогом гіпотези недеформівних нормалей і разом з нею являються гіпотезами магнітопружності тонких тіл. Прийняття цих гіпотез дозволяє звести задачу про деформування тривимірного тіла до задачі про деформування координатної поверхні, вибраної довільним чином. Нехай на поверхні конічної оболонки відомо вектор магнітної індукції та поверхневі механічні сили.

У такій постановці система рівнянь, яка описує на відповідному часовому шарі нелінійні коливання гнучкої струмонесучої ортотропної конічної оболонки згідно [3–5], після застосування методу квазілінеаризації набуває вигляду:

$$\begin{aligned} \frac{d u^{(k+1)}}{d m} &= \frac{1 - v_s v_\theta}{\rho \epsilon_s h} N_s^{(k+1)} - \frac{v_\theta \cos \phi}{\rho r} u^{(k+1)} - \\ &- \frac{v_\theta \sin \phi}{\rho r} w^{(k+1)} + \frac{1}{2\rho} (\theta_s^{(k)})^2 - \theta_s^{(k+1)} \theta_s^{(k)}; \\ \frac{d w^{(k+1)}}{d m} &= - \frac{\theta_s^{(k+1)}}{\rho}; \\ \frac{d \theta_s^{(k+1)}}{d m} &= \frac{12(1 - v_s v_\theta)}{\rho \epsilon_s h^3} M_s^{(k+1)} - \frac{v_\theta \cos \phi}{\rho r} \theta_s^{k+1}; \\ \frac{d N_s^{(k+1)}}{d m} &= \frac{\cos \phi}{\rho r} \left[\left(v_\theta \frac{e_\theta}{\epsilon_s} - 1 \right) N_s^{(k+1)} + \right. \\ &+ e_\theta h \left(\frac{\cos \phi}{r} u^{(k+1)} + \frac{\sin \phi}{r} w^{(k+1)} \right) \Big] \\ &- \frac{P_s^{(k+1)}}{\rho} + \frac{h}{\rho} J_{\theta CT} B_\zeta^{(k+1)} - \frac{\sigma_1 h}{\rho} \left[(E_\theta^{(k+1)} - E_\theta^{(k)}) B_\zeta^{(k)} + \right. \\ &+ E_\theta^{(k)} B_\zeta^{(k+1)} + \frac{1}{2} \left((\dot{w}^{(t+\Delta t)})^{(k+1)} - (\dot{w}^{(t+\Delta t)})^k \right) a; \\ &+ (\dot{u}^{(t+\Delta t)})^{(k)} B_\zeta^{(k+1)} \Big] \left(B_s^+ + B_s^- \right) - \left\{ - (B_\zeta^{(k)})^2 (\dot{u}^{(t+\Delta t)})^{(k)} + \right. \\ &+ (B_\zeta^{(k)})^2 (\dot{u}^{(t+\Delta t)})^{(k+1)} + 2 B_\zeta^{(k+1)} B_\zeta^{(k)} (\dot{u}^{(t+\Delta t)})^k \Big\} + \\ &+ h (\dot{u}^{(t+\Delta t)})^{(k+1)}; \\ \frac{d Q_s^{(k+1)}}{d m} &= - \frac{\cos \phi}{\rho r} Q_s^{(k+1)} + v_s \frac{e_\theta}{\epsilon_s} \frac{\sin \phi}{\rho r} N_s^{(k+1)} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{e_0}{\rho} \frac{h \sin \phi}{r} \left(\frac{\cos \phi}{r} u^{(k+1)} + \frac{\sin \phi}{r} w^{(k+1)} \right) - \frac{P_{\zeta}^{(k+1)}}{\rho} - \\
 & - \frac{h}{2\rho} J_{\text{ОСТ}} (B_s^+ + B_s^-) - \frac{\sigma_3 h}{\rho} \left[-\frac{1}{2} E_0^{(k+1)} (B_s^+ + B_s^-) - \right. \\
 & - \frac{1}{4} (\dot{w}^{(t+\Delta t)})^{(k+1)} (B_s^+ + B_s^-) - \frac{1}{12} (\dot{w}^{(t+\Delta t)})^{(k+1)} (B_s^+ - B_s^-)^2 \\
 & + \frac{1}{2} \left\{ \left((\dot{u}^{(t+\Delta t)})^{(k+1)} - (\dot{u}^{(t+\Delta t)})^{(k)} \right) B_{\zeta}^{(k)} + (\dot{u}^{(t+\Delta t)})^{(k)} B_{\zeta}^{(k+1)} \right\} \times \\
 & \times (B_s^+ + B_s^-) + \frac{h}{12} \left\{ -(\ddot{\theta}^{(t+\Delta t)})^{(k)} B_{\zeta}^{(k)} - (\ddot{\theta}^{(t+\Delta t)})^{(k+1)} B_{\zeta}^{(k+1)} \right\} + \\
 & + (\dot{\theta}^{(t+\Delta t)})^{(k)} B_{\zeta}^{(k+1)} \left. \right\} (B_s^+ + B_s^-) \Big] + h (\dot{w}^{(t+\Delta t)})^{(k+1)} ; \\
 & \frac{dM_s^{(k+1)}}{dm} = \frac{\cos \phi}{\rho r} \left[\left(v_s \frac{e_0}{e_s} - 1 \right) M_s^{(k+1)} + \right. \\
 & \left. + \frac{e_0 h^3 \cos \phi}{12 r} \theta_s^{(k+1)} \right] + \frac{Q_s^{(k+1)}}{\rho} + \\
 & + \frac{1}{\rho} \left[N_s^{(k)} (\theta_s^{(k+1)} - \theta_s^{(k)}) + N_s^{(k+1)} \theta_s^{(k)} \right] - v_s \frac{e_0}{e_s} \frac{\sin \phi}{\rho r} \times \\
 & \times \left[M_s^{(k)} (\theta_s^{(k+1)} - \theta_s^{(k)}) + M_s^{(k+1)} \theta_s^{(k)} \right] - \frac{e_0 h^3 \sin \phi \cos \phi}{12 \rho r^2} \times \\
 & \times \left[-(\theta_s^{(k)})^2 + 2\theta_s^{(k+1)} \theta_s^{(k)} \right] + \frac{h^3}{12\rho} (\ddot{\theta}^{(t+\Delta t)})^{(k+1)} ; \\
 & \frac{dB_{\zeta}^{(k+1)}}{dm} = -\frac{\sigma_2 \mu}{\rho} \left[E_0^{(k+1)} + 0.5 (\dot{w}^{(t+\Delta t)})^{(k+1)} (B_s^+ + B_s^-) - \right. \\
 & \left. \left\{ -(\dot{u}^{(t+\Delta t)})^{(k)} B_{\zeta}^{(k)} + (\dot{u}^{(t+\Delta t)})^{(k+1)} B_{\zeta}^{(k)} + (\dot{u}^{(t+\Delta t)})^{(k)} B_{\zeta}^{(k+1)} \right\} \right] + \\
 & + \frac{B_s^+ - B_s^-}{\rho h} ; \\
 & \frac{dE_0^{(k+1)}}{dm} = -\frac{1}{\rho} (\ddot{B}_{\zeta}^{(t+N)})^{(k+1)} - \frac{\cos \phi}{\rho r} E_0^{(k+1)}, \quad (k=0, 1, 2, \dots).
 \end{aligned}
 \tag{2}$$

У співвідношеннях (1)–(2) використані загальноприйняті в теорії оболонок і теорії електромагнітопружності позначення. Крім того, тут введені такі позначення: $B_s^{\pm}$ – тангенціальні складові індукції магнітного поля на поверхні струмонесущої конічної оболонки. Компоненти пондеромоторної сили Лоренца включають нелінійні члени, обумовлені переміщенням оболонки при її деформуванні.

Для розв'язування цієї задачі був розроблений чисельний метод з послідовним застосуванням скінченно-різницевої схеми Н'юмарка, методів лінеаризації і дискретної ортогоналізації [4–5]. Зауважимо, що при застосуванні схеми Н'юмарка весь часовий інтервал розбивався на окремі малі інтервали, а історія деформування відслідковувалася послідовним розв'язуванням задачі на кожному часовому шарі.

3. Результати розрахунків та їх аналіз

Для прикладу розглянуто нелінійну поведінку ортотропної струмонесущої конічної оболонки змінної товщини $h = 5 \cdot 10^{-4} (1 - \frac{s}{2s_N})$ м. Нехай оболонка з берилію знаходиться під дією механічної сили $P_{\zeta} = 5 \cdot 10^3 \sin \omega t$ Н/м², стороннього струму $J_{\text{ОСТ}} = 5 \cdot 10^5 \sin \omega t$ А/м² рівномірно розподіленого по оболонці, і зовнішнього магнітного поля $B_{s0} = 0.1$ Тл, а також має конічну ортотропну електропровідність $\sigma(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$. У цьому випадку на оболонку діє комбіноване навантаження, яке складається із пондеромоторної сили Лоренца і механічної сили.

Вивчимо поведінку ортотропної оболонки в залежності від зміни зовнішньої нормальної складової магнітної індукції $B_{\zeta 0}$, яка приймає відповідно значення $B_{\zeta 0} = (-0.3; -1.0; -2.0; -3.0; -4.0; -5.0; -6.0; -7.0)$. Були вибрані такі граничні умови:

$$\begin{aligned}
 & u = 0, w = 0, M_s = 0, \\
 & B_{\zeta} = B_{\zeta 0} \sin \omega t \text{ (шарпір) } \text{ при } s = s_0 = 0, \\
 & w = 0, \quad \theta_s = 0, \quad N_s = 0, \\
 & B_{\zeta} = 0 \text{ (ковзне) } \text{ при } s = s_N = 0.5 \text{ м.}
 \end{aligned}$$

Параметри оболонки і матеріалу мають наступні значення:

$$\begin{aligned}
 & s_0 = 0, \quad s_N = 0.5 \text{ м, } r = r_0 + s \cos \phi; \quad r_0 = 0.5 \text{ м;} \\
 & \omega = 314.16 \text{ с}^{-1}, \quad \rho = 2300 \text{ кг/м}^3, \quad B_s^+ = B_s^- = 0.1 \text{ Тл;} \\
 & \phi = \pi / 30, \quad \mu = 1.256 \cdot 10^{-6} \text{ Гн/м,} \\
 & J_{\text{ОСТ}} = 5 \cdot 10^5 \sin \omega t \text{ А/м}^2, \quad \sigma_1 = 0.279 \cdot 10^8 \text{ (Ом} \cdot \text{м)}^{-1}, \\
 & \sigma_2 = 0.321 \cdot 10^8 \text{ (Ом} \cdot \text{м)}^{-1}, \quad \sigma_3 = 1.136 \cdot 10^8 \text{ (Ом} \cdot \text{м)}^{-1}, \\
 & v_s = 0.03, \quad v_0 = 0.09, \quad P_{\zeta} = 5 \cdot 10^3 \sin \omega t \text{ Н/м}^2, \\
 & e_s = 28.8 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2, \quad e_0 = 33.53 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2.
 \end{aligned}$$

Анізотропія питомого електричного опору берилію у даному випадку дорівнює $\eta_3 / \eta_1 = 4.07$.

Розв'язок задачі знаходився на інтервалі часу $\tau = 0 \div 10^{-2}$ с, крок інтегрування по часу дорівнював $\Delta t = 1 \cdot 10^{-3}$ с. Максимальні значення отримані при кроці по часу $t = 5 \cdot 10^{-3}$ с.

На рис. 1 наведено розподіл згину оболонки в залежності від зміни зовнішньої магнітної індукції при $s = 0.4$ м і $t = 5 \cdot 10^{-3}$ с для всіх варіантів значень $B_{\zeta 0}$.

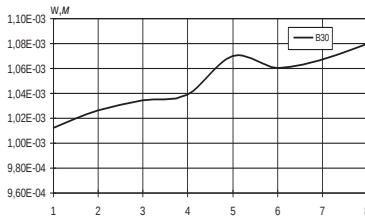


Рис. 1. Залежність згину оболонки від зміни зовнішньої магнітної індукції при $t = 5 \cdot 10^{-3}$ с і $s = 0.4$ м для всіх значень B_{z0}

Максимальне значення згину спостерігається при $B_{z0} = -7.0$. З результатів обчислень видно, що зі збільшенням значень магнітної індукції згин оболонки збільшується.

На рис. 2 показана залежність внутрішньої магнітної індукції оболонки від зовнішньої магнітної індукції при $t = 5 \cdot 10^{-3}$ с і $s = 0.45$ м для всіх значень B_{z0} .

Як видно з рис. 2, внутрішня магнітна індукція оболонки суттєво залежить від зовнішньої магнітної індукції і досягає свого максимуму при $B_{z0} = -4.0$.

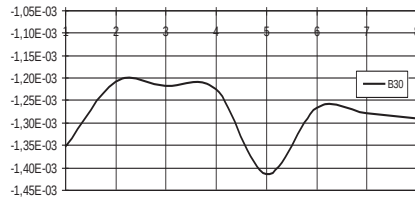


Рис. 2. Залежність внутрішньої магнітної індукції оболонки від зміни зовнішньої магнітної індукції при $t = 5 \cdot 10^{-3}$ с і $s = 0.45$ м для всіх значень B_{z0}

4. Висновки

Встановлено, що при збільшенні індукції зовнішнього магнітного поля індукція внутрішнього магнітного поля теж збільшується.

У роботі детально проаналізовано вплив зовнішньої магнітної індукції на напружений стан ортотропної оболонки у геометрично нелінійній постановці.

Отримані результати не протирічать механічному і фізичному уявленню процесу, який відбувається в оболонці, що знаходиться під дією електромагнітних і механічних полів.

Список використаних джерел

1. Мольченко Л. В. Магнітопружність конічної оболонки з врахуванням ортотропної електропровідності в геометрично нелінійній постановці / Л. В. Мольченко, І. І. Лоос, Р. Ш. Індіамінов // Вісник Київського Університету. Серія: фізико-математичні науки. – 2007. – № 2. – С. 85–90.
2. Сиротин Ю. И. Основы кристаллофизики / Ю. И. Сиротин, М. П. Шаскольская. – Москва: Наука, 1979. – 639 с.
3. Амбарцумян С. А., Багдасарян Г. Е., Белубекян М. В. Магнитоупругость тонких оболочек и пластин. – Москва: Наука, 1977. – 272 с.
4. Мольченко Л. В. Магнітопружне деформування ортотропних оболонок обертання з ортотропною електропровідністю / Л. В. Мольченко, І. І. Лоос, Р. Ш. Індіамінов // Вісник Київського університету. Математика. Механіка. – 2008. – Т. 19–20. – С. 53–59.
5. Indiaminov R. S. On the absence of the tangential projection of the Lorenz force on the axsymmetrical stressed state of current-carrying conic shells // International Journal Computational Technologies. – 2008. – Vol. 13, № 6. – P. 65–77.

References

1. MOLCHENKO, L. V., LOOS, I. I. & INDIAMINOV, R. S. (2007) Magnitopruzhnist konichnoyi obolonky z vrahuvannyam ortotropnoyi elektroprovodnisty v geometrychno nelineyniyi postanovtsi. *Visnyk Kyivskogo Natsionalnogo Universytetu Imeni Tarasa Shevchenka*. (2). p. 85–90.
2. SIROTIN, Y. I., SHASKOLSKAYA, M. P. (1979) *Osnovy Kristallofiziki*. Moskva: Nauka.
3. AMBARTSUMYAN, C. A., BAGDASARYAN, G. E. & BELUBEKYAN, M. V. (1977) *Magnitoprugost Tonkikh Obolochek i Plastin*. Moskva: Nauka.
4. MOLCHENKO, L. V., LOOS, I. I. & INDIAMINOV, R. S. (2008) Magnitopruzhne deformuvannya ortotropnykh obolonok obertannya z ortotropnoyu elektroprovodnistyu. *Visnyk Kyivskogo Universytetu. Matematyka. Mehanika*. 19–20. p. 53–59.
5. INDIAMINOV, R. S. (2008) On the absence of the tangential projection of the Lorenz force on the axsymmetrical stressed state of current-carrying conic shell. *International Journal Computational Technologies*. 13 (6). p. 65–77.

Надійшла до редколегії 30.09.15

УДК 539.3

Калиняк Б. М., к. ф.-м. н., с. н. с.

**Характеристики матеріалів, які
забезпечують нульові радіальні
термонапруження у неоднорідному
довгому порожнистому циліндрі**

Інститут прикладних проблем механіки і мате-
матики ім. Я. С. Підстригача НАН України,
79060, м. Львів, вул. Наукова, 3-б
e-mail: b-kalynyak@litech.net

В. М. Kalynyak, Ph. D. (Phys.-Math.),
Sr. Sci. Researcher

**Material characteristics ensuring zero radial
thermal stresses in the inhomogeneous long
hollow cylinder**

Pidstryhach Institute of Mechanics and Mathematics
NAS of Ukraine, 79060, L'viv, Naukova str., 3-b
e-mail: b-kalynyak@litech.net

Запропоновано метод визначення характеристик функціонально-градієнтних матеріалів (ФГМ) для забезпечення нульових радіальних термонапружень у довгому порожнистому циліндрі при заданих сталих теплових навантаженнях на поверхнях. Вважаємо, що на поверхнях циліндра задані класичні умови теплообміну, температурне поле стаціонарне, характеристики ФГМ описуються моделлю простої суміші, характеристики термонапруженого стану і матеріалу залежать тільки від радіальної змінної. Отримано точні аналітичні вирази для розподілу концентрації одного з матеріалів по товщині циліндра при відсутності масових сил та теплових джерел, яка забезпечує нульові радіальні та окружні напруження.

Ключові слова: функціонально-градієнтні матеріали, термомеханічні характеристики, циліндр, модель простої суміші, відсутність напружень, стаціонарне температурне поле, композити.

The method for determining the characteristics of functionally graded materials (FGM) ensuring zero radial stresses in a long hollow cylinder under a steady heat loading was proposed. It was supposed that the classical boundary conditions for a heat exchange are present, the temperature field is steady, the characteristics of FGM are represented by the simple mixture model (Voigt model), material characteristics, temperature field, stresses, strains, displacements are functions only of a radial variable. The exact condition between the temperature field and thermo-mechanical characteristics ensuring zero radial and circumferential stresses were obtained as a solution of proposed integral equations. The explicit relations under thermo-mechanical characteristics of FGM, following from obtained conditions, were written. Since the manufacturing of FGM with arbitrary characteristics is complicated, the model of simple mixture was used for further investigations. The exact explicit expression for a concentration of one material of two-component mixture through Lambert functions was obtained. The corresponding concentrations, temperature field, characteristics of metal-ceramic FGM, ensuring the absence of radial and circumferential stresses in a long hollow cylinder using simple mixture model were calculated.

Key Words: Functional-Graded Materials, Thermo-Mechanical Characteristics, Cylinder, Simple Mixture Model, Stress Absence, Steady Temperature Field, Composite.

1. Вступ

Сучасні технології дозволяють виготовляти матеріали з заданими розподілами їх характеристик для продовження терміну експлуатації виробів при теплових та силових навантаженнях. Це, зокрема, композити та функціонально-градієнтні матеріали (ФГМ)[1–3].

Актуальною задачею стає підбір таких характеристик ФГМ, який би забезпечував відсутність переміщень чи напружень при заданих теплових і, можливо, силових навантаженнях.

У цій праці отримано зв'язок між стаціонарним температурним полем та характеристиками ФГМ у довгому неоднорідному порожнистому циліндрі при заданих силових та теплових навантаженнях на його поверхнях, який забезпечує нульові радіальні напруження.

2. Постановка задачі та її розв'язання

Розглянемо довгий неоднорідний вздовж радіальної змінної r порожнистий циліндр з вну-

трішнім радіусом R_1 та зовнішнім R_2 . У циліндрі з нульовими навантаженнями ($p_1 = p_2 = 0$) на внутрішній та зовнішній поверхнях та сталою осью деформацією ($e_z = \text{const}$) є температурне поле $\bar{T}(r)$, визначене з стаціонарної задачі теплопровідності, записаного у змінних $\rho = r / R_2$

$$\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \lambda \frac{dT(\rho)}{d\rho} \right) + q_v(\rho) = 0, \quad (1)$$

де $T(\rho) = \bar{T}(\rho R_2)$ з умовами на поверхнях $\rho = \rho_1 = R_1 / R_2$ і $\rho = \rho_2 = R_2 / R_2 = 1$

$$\lambda(\rho_1) \frac{dT(\rho_1)}{d\rho} + \beta_1 [T(\rho_1) - T_1] = 0, \\ \lambda(1) \frac{dT(1)}{d\rho} + \beta_2 [T(1) - T_2] = 0. \quad (2)$$

або іншими умовами теплообміну, наприклад, сталими температурами $T(\rho_1) = T_1$, $T(1) = T_2$ або першою з умов (2) і $\lambda(1) \frac{dT(1)}{d\rho} = q_2$, де q_2 – інтенсивність потоку тепла, тощо. У формулах (1)–(2) T_1 , T_2 – температури середовищ біля внутрішньої та зовнішньої поверхонь циліндра, $\lambda(\rho)$ – коефіцієнт теплопровідності, $q_v(\rho)$ – густина теплових джерел в циліндрі, β_1 , β_2 – коефіцієнти теплообміну внутрішньої та зовнішньої поверхонь циліндра з середовищем.

Умовою відсутності радіальних напружень у довгому неоднорідному порожнистому циліндрі при нульових масових силах є [4]

$$T(\rho) = \frac{C}{\alpha(\rho)} - \frac{pF(v(\rho))}{\alpha(\rho)} + T_0, \quad (3)$$

де $C = \frac{C}{[V(1) + W(1)]}$, C – довільна стала, T_0 – відлікова температура, при якій відсутні напруження і переміщення, p – стале осьове навантаження, $v(\rho)$ – коефіцієнт Пуассона, $\alpha(\rho)$ – лінійний коефіцієнт теплового розширення,

$$V(\rho) = \int_{\rho_1}^{\rho} \frac{\eta E(\eta)}{1 - v^2(\eta)} d\eta, \quad W(\rho) = \int_{\rho_1}^{\rho} \frac{\eta E(\eta) v(\eta)}{1 - v^2(\eta)} d\eta, \\ F(v(\rho)) = - \frac{W(1) - V(1)v(\rho)}{[V^2(1) - W^2(1)](1 + v(\rho))}.$$

Зв'язок (3) отримано у праці [4] з інтегрального рівняння Фредгольма 2-го роду [5] відносно радіального напруження, до розв'язування якого зведена класична задача стаціонарної незв'язної термомпружності у напруженнях для неоднорідного довгого порожнистого циліндра зі сталими осьовими деформаціями. Якщо осьові сили навантаження $p = 0$ або коефіцієнт Пуассона $v(\rho) = \text{const}$, то вираз (3) спрощується

$$T(\rho) = \frac{C}{\alpha(\rho)} + T_0. \quad (4)$$

Потрібно визначити такі характеристики ФГМ $\alpha(\rho)$, $\lambda(\rho)$, $v(\rho)$, щоб температурне поле $T(\rho)$ вигляду (3) чи (4) задовольняло рівняння (1)–(2) або інші теплові навантаження на межах циліндра.

3. Характеристики ФГМ, які приводять до відсутності радіальних напружень

Оскільки розподіли температури (3) або (4) повинні бути розв'язком рівняння теплопровідності (1), їх підставлення у рівняння (1) призведе до диференціального рівняння, яке зв'язує $\alpha(\rho)$, $\lambda(\rho)$, $v(\rho)$, $q_v(\rho)$. Розв'язки цього диференціального рівняння відносно теплових джерел, коефіцієнтів теплопровідності, Пуассона, теплового лінійного розширення мають вигляд:

$$\bar{B} - \int_{\rho_1}^{\rho} \eta q_v(\eta) d\eta \\ q_v(\rho) = - \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \lambda(\rho) \frac{dT(\rho)}{d\rho} \right), \lambda(\rho) = \frac{\rho_1}{\rho} \frac{d}{d\rho} T(\rho), \quad (5)$$

$$\alpha(\rho) = [C - pF(v(\rho))] / T_s(\rho), \quad (6)$$

$$v(\rho) = \frac{pW(1) - [V^2(1) - W^2(1)] [C - (T_s(\rho) - T_0) \alpha(\rho)]}{pV(1) - [V^2(1) - W^2(1)] [C - (T_s(\rho) - T_0) \alpha(\rho)]}, \quad (7)$$

де $T_s(\rho) = C_1 L(\rho) + C_2 - \int_{\rho_1}^{\rho} [L(\rho) - L(\eta)] \eta q_v(\eta) d\eta$ –

загальний розв'язок диференціального рівняння

(1), $T(\rho)$ має вигляд (3), $L(\rho) = \int_{\rho_1}^{\rho} \frac{d\eta}{\eta \lambda(\eta)}$. Умови

(2) або інші на обмежувальних поверхнях слід узгодити, бо розв'язок (4) містить тільки одну сталу, яка визначається з однієї з умов (2). Технічно важко забезпечити потрібний розподіл теплових джерел в тілі. Тому важливим є випадок їх відсутності ($q_v(\rho) = 0$). Вважатимемо також, що немає осьових навантажень або

коефіцієнт Пуассона сталий, що дозволяє використовувати простіші формули (4) замість (3).

У випадку нульових осових навантажень або сталому коефіцієнті Пуассона з (5) матимемо

$$\lambda(\rho) = \frac{\bar{B}}{C\rho} \left[\frac{d}{d\rho} \left(\frac{1}{\alpha(\rho)} \right) \right]^{-1}. \quad (8)$$

Зрозуміло, що отримані зв'язки між характеристиками (5)–(8) важко реалізувати практично через технологічні складності виготовлення матеріалів з наперед заданими довільними теплофізичними та механічними характеристиками. Тому обмежимося ФГМ, характеристики яких визначаються через характеристики складових моделлю простої суміші (модель Фойгта) [6]

$$P(\rho) = P_1 S_1(\rho) + P_2 S_2(\rho), \quad (9)$$

де P_1, P_2 – характеристики складових матеріалу, $S_1(\rho)$ – концентрація першого матеріалу в другому, $S_2(\rho)$ – концентрація другого матеріалу в першому, $S_1(\rho) + S_2(\rho) = 1$ і $S_i(\rho) > 0, i=1,2$. З формул (8) і (9) матимемо

$$\frac{d}{d\rho} \left(\frac{1}{\alpha_2 + (\alpha_1 - \alpha_2) S_1(\rho)} \right) = \frac{B}{\rho} \frac{1}{\lambda_2 + (\lambda_1 - \lambda_2) S_1(\rho)}, \quad (10)$$

де $B = \bar{B}/C$.

Розв'язком диференціального рівняння (10) є

$$S_1(\rho) = \frac{\alpha_1 \lambda_2 - \alpha_2 \lambda_1 - \alpha_2 (\lambda_1 - \lambda_2) W_L(z(\rho))}{(\lambda_1 - \lambda_2) (\alpha_1 - \alpha_2) W_L(z(\rho))}, \quad (11)$$

де $z(\rho) = \frac{(\alpha_1 \lambda_2 - \alpha_2 \lambda_1)}{(\lambda_1 - \lambda_2)} \rho^{B a_1} \exp(a_1 B B_1)$, B_1 –

довільна стала $a_1 = \frac{(\alpha_1 - \alpha_2)}{(\lambda_1 - \lambda_2)}$, $W_L(z)$ – W функція Лямберта [7]. Температурні навантаження, коефіцієнти теплопровідності, теплового розширення, концентрації складових, пов'язані виразами (4), (9), (11) через сталі $\bar{B}, B_1, C$. Розглянемо тому одну з можливих технічно здійснених придатну для практики умов отримання нульових радіальних напружень у циліндрі.

4. Результати розрахунків та їх аналіз

Слід підібрати такий двокомпонентний ФГМ, щоб при заданому перепаді температур і заданих концентраціях складових на межах були відсутні

окружні та радіальні напруження по товщині циліндра.

За значенням перепаду температур між поверхнями стала C визначається з виразу

$$C(\alpha(1)^{-1} - \alpha(\rho_1)^{-1}) = \Delta T_{21}, \quad (13)$$

отриманого з (4) за значеннями теплового коефіцієнта лінійного розширення на поверхнях $\alpha(1)$ і $\alpha(\rho_1)$ з інтервалу $[\alpha_1; \alpha_2]$, якщо відомі значення $T_2 - T_1 = \Delta T_{21}$. Тоді T_1 та T_2 обчислюються з (4) при заданому T_0 .

З формули (11) можна визначити межі зміни концентрації $S_1 = S(\rho_1)$ та $S_2 = S(1)$, які відповідають значенням $\alpha(\rho_1)$ та $\alpha(1)$ відповідно при вибраних характеристиках складових суміші. Якщо невід'ємних розв'язків менших або рівних одиниці для S_1 та S_2 не існує, то це значить, що вибрали не ті матеріали або в межах заданого перепаду температур для вибраних матеріалів нульових напружень у циліндрі не можна забезпечити. У вираз для концентрації входять дві сталі B і B_1 , для визначення яких використаємо рівняння, отримані з формули (11)

$$S_i = \frac{\alpha_1 \lambda_2 - \alpha_2 \lambda_1 - \alpha_2 (\lambda_1 - \lambda_2) W_L(z_i)}{(\lambda_1 - \lambda_2) (\alpha_1 - \alpha_2) W_L(z_i)}, \quad (14)$$

$$z_1 = z(\rho_1), \quad z_2 = z(1) \quad i=1,2.$$

Ці рівняння мають точні розв'язки відносно z_1 і z_2

$$z_i = \frac{(\alpha_1 \lambda_2 - \alpha_2 \lambda_1) \exp(D_i)}{(\lambda_1 - \lambda_2) \alpha(\rho_i)}, \quad i=1,2, \quad \rho_2=1 \quad (15)$$

де $D_i = \frac{\alpha_1 \lambda_2 - \alpha_2 \lambda_1}{(\lambda_1 - \lambda_2) [\alpha_2 + (\alpha_1 - \alpha_2) S_i]}$, $i=1,2$.

З формул (15) після використання виразів для $z(\rho)$ отримано

$$B = \frac{\ln\left(\frac{z_1}{z_2}\right) (\lambda_1 - \lambda_2)}{\ln(\rho_1) (\alpha_1 - \alpha_2)}, \quad B_1 = \frac{\ln\left[\frac{z_2 (\lambda_1 - \lambda_2)}{\alpha_1 \lambda_2 - \alpha_2 \lambda_1}\right] \ln(\rho_1)}{\ln(z_1 / z_2)}. \quad (16)$$

ФГМ для забезпечення у циліндрі нульових радіальних та колових напружень підбирався при температурі поверхні $T_1 = 900 \text{ K}$, $\Delta T_{21} = 300 \text{ K}$ та $T_0 = 300 \text{ K}$ і характеристиках складових (силіцид кремнію і нержавіюча сталь [6])

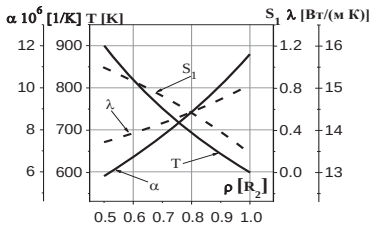


Рис. 1. Залежності від радіальної координати температури, концентрації та характеристик ФГМ, які забезпечують нульові радіальні напруження

$\lambda_1 = 13.72 \text{ Вт/(м·К)}$, $\lambda_2 = 15.78 \text{ Вт/(м·К)}$,
 $\alpha_1 = 5.83 \cdot 10^{-6} [1/\text{К}]$, $\alpha_2 = 12.872 \cdot 10^{-6} [1/\text{К}]$. При
цих значеннях характеристик і температур на по-
верхні $C = 0.003480$, $S_1 = 1.0$, $S_2 = 0.1765$.

Відповідні розподіли температури, концентрації
та характеристик матеріалу зображені на рис. 1.

Список використаних джерел

1. New analysis for the FGM thick cylinders under combined pressure and temperature loading / [K. Abrinia, H. Naei, F. Sadeghi, F. Djavanroodi] // American Journal of Applied Sciences. – 2008. – Vol. 5, № 7. – P. 852–859.
2. Bohidar S. K. Functionally graded materials: a critical review / S. K. Bohidar, R. Sharma, P. R. Mishra // International Journal of Research. – 2014. – Vol. 1, № 7. – P. 289–301.
3. Functionally Graded Materials in the 21st Century: a Workshop on Trends and Forecasts [ed. by Kiyoshi Ichikawa]. – 2001. – Vol. XVI. – 242 p.
4. Калиняк Б. М. Визначення температурного поля та термомеханічних характеристик матеріалу, які забезпечують нульові радіальні напруження у неоднорідному вздовж радіуса довгому порожнистому циліндрі / Б. Калиняк // Доповіді НАН України. – 2015. – № 6. – С. 46–56.
5. Калиняк Б. М. Рівняння Фредгольма 2-го роду відносно радіальних напружень для визначення термопружного стану неоднорідного порожнистого довгого циліндра / Б. М. Калиняк // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2013. – Т. 56, № 3. – С. 141–147.
6. Shen H.-S. Functionally Graded Materials: Nonlinear Analysis of Plates and Shells / H.-S. Shen. – CRC Press, 2009. – 280 p.
7. On the Lambert W function / [Corless R. M., Gonnet G. H., Hare D. E. G. et al.] // Adv. Comp. Math. – 1996. – Vol. 5. – P. 329–359.

5. Висновки

У праці :

- отримано точний аналітичний вираз, який зв'язує температурне поле – розв'язок стаціонарної задачі теплопровідності, силові осеві навантаження, характеристики матеріалу, і є умовою відсутності радіальних та колових напружень у циліндрі, що випливає з рівняння рівноваги;
- у випадку ФГМ, характеристики якого описуються моделлю простої суміші, отримано точні аналітичні вирази для концентрації складових, яка забезпечує нульові радіальні та колові напруження;
- адекватність підходу підтверджена обчисленням значень концентрацій складових у реально існуючому ФГМ, які повинні забезпечити відсутність радіальних та колових напружень у неоднорідному довгому циліндрі.

References

1. ABRINIA, K. et al. (2008) New analysis for the FGM thick cylinders under combined pressure and temperature loading. *Am. J. Appl. Sci.* (5) 7. p. 852–859.
2. BOHIDAR, S. K., SHARMA, R. & MISHRA, P. R. (2014) Functionally graded materials: a critical review. *Int. J. Res.* (1) 7. p. 289–301.
3. (ed. ICHIKAWA, KIYOSHI) (2001) *Functionally Graded Materials in the 21st Century: a Workshop on Trends and Forecasts*. XVI.
4. KALYNYAK, B. M. (2015) Vyznachennya temperaturnoho polya ta termomechanichnykh charakterystyk materialu, yaki zabezpechuyut' nulovi radialni napruzheniya u neodnorodnomu vzdovzh radiusu dovhomu porozhnystomu cylindri. *Dopovidi NAN Ukrainy*. (6). p. 46–56.
5. KALYNYAK, B. M. (2015) Fredholm equations of the second kind for radial stresses aimed at the determination of the thermoelastic state of an inhomogeneous hollow long cylinder. *Journal of Mathematical Sciences*. 205 (5). p. 659–666.
6. SHEN, H.-S. (2009) *Functionally Graded Materials: Nonlinear Analysis of Plates and Shells*. CRC Press.
7. CORLESS, R et al. (1996) On the Lambert W function. *Adv. Comp. Math.* 5. p. 329–359.

Надійшла до редколегії 30.09.15

УДК 539.3

Карнаухов В. Г.¹, д. ф.-м. н., проф.,
Козлов В. І.¹, д. ф.-м. н., с. н. с.,
Карнаухова Т. В.², к. ф.-м. н., доц.

**Вимушені резонансні коливання і
дисипативний розігрів фізично
нелінійних непружних пластин і
оболонки з п'єзоелектричними
сенсорами та актуаторами**

¹Інститут механіки ім. С. П.Тимошенка НАН
України, 03057, м. Київ, вул. Петра Нестерова, 3
e-mail: karn@inmech.kiev.ua

²Київський національний технічний університет
України «Київський політехнічний інститут»,
03056, м. Київ, проспект Перемоги, 37

V. G. Karnaukhov¹, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof.,
V. I. Kozlov¹, Dr. Sci. (Phys.-Math.),
Sr. Sci. Researcher,
T. V. Karnaukhova², Ph. D. (Phys.-Math.),
Assoc. Prof.

**Forced resonant vibrations and dissipative
heating of physical nonlinear inelastic plates
and shells with the piezoelectric sensors and
actuators**

¹S. P. Timoshenko Institute of Mechanics of NAS of
Ukraine, 03057, Kyiv, P. Nesterov str., 3
e-mail: karn@inmech.kiev.ua

²National Technical University of Ukraine «Kyiv
Polytechnic Institute», 03056, Kyiv, Peremohy pr., 37

Представлено результати дослідження вимушених резонансних коливань і вібророзігріву фізично нелінійних непружних пластин і оболонок з п'єзоелектричними сенсорами та актуаторами. Досліджено вплив коефіцієнта оберненого зв'язку й залежності комплексних характеристик матеріалу від амплітуд деформацій на динамічні характеристики коливань таких елементів.

Ключові слова: непружні пластини й оболонки, резонансні коливання, дисипативний розігрів, сенсори й актуатори.

A problem of damping of the forced resonant vibrations and dissipative heating of inelastic plates and shells by the piezoelectric sensors and actuators is formulated. To model the electromechanical behavior and response of these layered structural elements, the Kirchhoff-Love hypotheses and adequate to them hypotheses about the electric and temperature field variables are used. The mechanical behavior of passive material under harmonic loading is described by making use of the concept of complex characteristics, which depend on amplitudes of strains. To attack the nonlinear boundary problems, the iterative procedures are applied to reduce the initial problem to the linear ones. The linear problems are solved by the finite element method adapted for the complex moduli approach. Using developed models and methods, variety of amplitude-frequency and temperature-frequency characteristics of resonant vibrations of cylindrical panels are calculated and the stress-strain state is studied. It is shown that the coefficient of feedback coupling and physical nonlinearity have considerable influence on these characteristics.

Key Words: Inelastic Plates and Shells, Resonant Vibrations, Dissipative Heating, Sensors and Actuators.

1. Вступ

Тонкі шаруваті оболонки обертання з непружних металевих, полімерних і композитних матеріалів знаходять широке застосування в багатьох галузях науки й техніки. Для зменшення рівня коливань, забезпечення динамічної міцності елементів конструкцій, стійкої роботи апаратури та покращення комфортності машин і механізмів в сучасній техніці широко застосовуються активні методи демпфування, коли в конструкцію включаються п'єзоактивні компоненти, які виконують роль сенсорів та

актуаторів [1]. На ефективність таких методів впливає багато факторів, зокрема і фізична нелінійність, яка породжується залежністю механічних характеристик матеріалу від амплітуд деформацій чи напружень. Загальна теорія фізично нелінійних пасивних і п'єзоактивних матеріалів такого типу з використанням концепції комплексних характеристик розроблена в [2–5]. По аналогії з деформаційною теорією пластичності вважається, що складові комплексних механічних характеристик залежать від узагальненої інтенсивності девіатора тензора

деформацій I_2 .

Постановка задач про коливання і дисипативний розігрів тонкостінних елементів з залежними від амплітуд деформацій комплексними характеристиками представлена в монографіях [3–5]. При цьому для конкретизації залежності комплексних характеристик від амплітуд деформацій в [6] використана узагальнена головна теорія термов'язкопружності [5]. Перші результати по розробці загальної теорії стаціонарних і нестаціонарних коливань та дисипативного розігріву тонкостінних елементів з п'єзоелектричними включеннями з використанням узагальненої теорії течії [7] одержано в [8, 9].

В даній роботі на основі вказаних вище постановок задач про коливання і дисипативний розігрів тонкостінних елементів і розробленого авторами роботи чисельно-аналітичного методу шляхом розв'язку конкретних задач досліджено вплив коефіцієнта оберненого зв'язку і фізичної нелінійності на амплітудно- й температурно-частотні характеристики циліндричної непружної панелі при дії на неї гармонічного за часом рівномірного поверхневого тиску. Для розв'язування нелінійних задач використовуються ітераційні методи, які зводять вихідну нелінійну задачу електромеханіки до послідовності лінійних задач електромеханіки. На кожній ітерації ці лінійні задачі розв'язуються методом скінченних елементів. Після розв'язку нелінійної задачі електромеханіки розраховується дисипативна функція, а потім розв'язується рівняння теплопровідності з джерелом тепла, яке співпадає з дисипативною функцією. При розрахунках залежність модуля зсуву пасивного матеріалу $G = G' + iG''$ від деформацій знаходиться з експериментальних результатів, наведених в [10, 11].

2. Постановка і чисельно-аналітичний метод розв'язування задачі

Розглянемо тришарову оболонку обертання, складеної з середнього фізично нелінійного непружного ізотропного пасивного шару товщиною h_2 і двома однаковими зовнішніми п'єзоелектричними шарами товщиною h_1 з протилежною поляризацією. На оболонку діє рівномірно розподілений поверхневий тиск $q_z = q \cos \omega t$ з частотою ω , близькою до резонансної. Торці оболонки шарнірно оперті, а поверхні знаходяться в умовах конвективного теплообміну з оточуючим середовищем. При

моделюванні електромеханічної поведінки вказаної оболонки приймаємо гіпотези Кірхгофа – Лява для механічних величин [12] і адекватні їм припущення відносно електричних змінних, з яких витікає, що $D_z = \text{const}$ по товщині п'єзошарів. Вважасмо, що непружні властивості пасивних матеріалів описуються концепцією комплексних характеристик, які залежать від амплітуд деформацій через узагальнений інваріант девіатора тензора деформацій. П'єзоактивні шари виготовлено з лінійного в'язкопружного матеріалу, електромеханічні характеристики якого наведено в [13].

В результаті прийняття вказаних гіпотез приходимо до спрощених рівнянь стану, наведених, наприклад, в [14]. З них шляхом інтегрування по товщині одержимо комплексні рівняння стану для зусиль та моментів

$$\begin{aligned} N_{ss} &= C_{11}\epsilon_{ss}^0 + C_{12}\epsilon_{\theta\theta}^0 + N_0, \dots; \\ M_{ss} &= D_{11}\kappa_{ss} + D_{12}\kappa_{\theta\theta}^0 + M_0, \dots \end{aligned} \quad (1)$$

Тут комплексні жорсткісні характеристики пасивного матеріалу залежать від узагальненого другого інваріанту девіатора тензора деформацій оболонки з врахуванням гіпотез Кірхгофа-Лява і припущення про постійність коефіцієнта Пуассона. Величини C_{ij} , D_{ij} , N_0 , M_0 знаходяться за формулами, наведеними в [14].

Універсальні співвідношення теорії оболонок (рівняння руху, кінематичні співвідношення, початкові і граничні умови, рівняння енергії і температурні початкові і граничні умови) мають такий же вигляд, як і в класичній теорії оболонок [12].

Як бачимо, рівняння стану для зусиль і моментів формально співпадають з рівняннями стану для теорії термопружності оболонок, в яких величини N_0 , M_0 залежать не від температури, а від прикладених до електродів різниці потенціалів.

Для керування коливаннями оболонок обертання застосовуються п'єзоелектричні сенсори та актуатори. При цьому до актуатора підводиться різниця потенціалів, пропорційна різниці потенціалів сенсора, його першій або другій похідній:

$$V_a = G_1 V_s + G_2 \dot{V}_s + G_3 \ddot{V}_s, \quad (2)$$

Тут V_s – різниця потенціалів, яка знімається з сенсора.

При використанні (2) змінюються жорсткісні характеристики оболонки, її коефіцієнт демпфу-

вання й інерційні характеристики. В подальшому для демпфування коливань оболонки в (2) будемо використовувати тільки другий член, який породжує додаткове затухання, пропорційне першій похідній від вектора зміщень. Коефіцієнт пропорційності називається коефіцієнтом оберненого зв'язку. При цьому використано такий підхід, коли при вимушених коливаннях це додаткове затухання змінює не уявну частину комплексної жорсткості оболонки, а додається до приведеної густини оболонки, яка стає комплексною. В результаті спростується розрахунок температури дисипативного розігріву при застосуванні методу скінченних елементів. Через залежності комплексних жорсткісних характеристик від амплітуд деформацій в рівняннях стану (1) задача електромеханіки зводиться до розв'язування складних нелінійних систем диференціальних рівнянь з комплексними коефіцієнтами. Для її розв'язування використовується модифікований метод пружних розв'язків, за допомогою якого вихідна нелінійна задача зводиться до послідовності лінійних задач електромеханіки з залежними від координат комплексними коефіцієнтами [3-5]. Лінійні задачі на кожній ітерації розв'язуються методом скінченних елементів. Для цього подано варіаційне формулювання задачі електромеханіки. В результаті задача зводиться до розв'язування варіаційної задачі для функціоналу

$$\delta\mathcal{E} = \delta\mathcal{E}_1 + \delta\mathcal{E}_2 + \delta\mathcal{E}_3 = 0 \quad (3)$$

Вирази для $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \mathcal{E}_3$ мають вигляд [14]

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_1 = & \frac{1}{2} \iint_s \left[C_{11} (\varepsilon_{ss}^0)^2 + 2C_{12} \varepsilon_{ss}^0 \varepsilon_{\theta\theta}^0 + \right. \\ & + C_{22} (\varepsilon_{\theta\theta}^0)^2 + 4C_{44} (\varepsilon_{\theta s}^0)^2 + \\ & + D_{11} \kappa_{ss}^2 + 2D_{12} \kappa_{ss} \kappa_{\theta\theta} + \\ & + D_{22} \kappa_{\theta\theta}^2 + 4D_{44} \kappa_{s\theta}^2 \left. \right] r ds d\theta, \\ \mathcal{E}_2 = & -\frac{1}{2} \iint_F \omega^2 \{ \rho_1 (u_0^2 + v_0^2 + w^2) + \\ & + \rho_2 \left[\left(\frac{\partial w}{\partial s} \right)^2 + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right)^2 \right] \} r ds d\theta, \\ \mathcal{E}_3 = & -\frac{1}{2} \iint_F \{ (\varphi_k - \varphi_{k-1}) [(\varepsilon_{ss}^0 + \varepsilon_{\theta\theta}^0) \frac{H_2^k}{H_1^k} + \\ & + (\kappa_{ss} + \kappa_{\theta\theta}) \frac{H_3^k}{H_1^k}] - q w \} r ds d\theta. \end{aligned}$$

Розв'язок варіаційної задачі (3) знаходиться методом скінченних елементів з використанням дванадцятивузлових ізопараметричних чотирикутних елементів з апроксимацією зміщень і геометрії оболонки поліномами третього ступеня в межах чотирикутника [14]. При цьому прогин оболонки в межах елемента апроксимується бікубічними поліномами Ерміта L_i [14]:

$$w = \sum_{i=1}^4 L_i w_i + \sum_{i=1}^4 L_{i+4} \left(\frac{\partial w}{\partial s} \right)_i + \sum_{i=1}^4 L_{i+8} \left(\frac{\partial w}{r \partial \theta} \right)_i + \sum_{i=1}^4 L_{i+12} \left(\frac{\partial^2 w}{r \partial s \partial \theta} \right)_i,$$

де $w_i, \left(\frac{\partial w}{\partial s} \right)_i, \left(\frac{\partial w}{r \partial \theta} \right)_i, \left(\frac{\partial^2 w}{r \partial s \partial \theta} \right)_i$ – амплітудні значення прогину та його похідних в кутових точках.

Тангенціальні складові зміщення в межах елемента апроксимуються кубічними поліномами N_i [14]:

$$u_0 = \sum_{i=1}^{12} N_i u_0^i, \quad v_0 = \sum_{i=1}^{12} N_i v_0^i.$$

Після розв'язку задачі електромеханіки розраховується дисипативна функція і розв'язується рівняння теплопровідності з відомим джерелом тепла

$$k \Delta \theta + W = c \dot{\theta} \quad (4)$$

зі стандартними початковими та граничними умовами [5, 6].

Для визначення температури використовуємо тривимірне варіаційне рівняння енергії для шаруватої оболонки, наведене в [14]:

$$\begin{aligned} & \iiint_V \left[c_T \rho^k \frac{\partial T}{\partial t} \delta T + \lambda_T^k \left(\frac{\partial T}{\partial z} \delta \frac{\partial T}{\partial z} + \right. \right. \\ & + \left. \frac{\partial T}{\partial r} \delta \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} \delta \frac{\partial T}{r \partial \theta} \right) + Q^k \delta T \left. \right] dV + \\ & \iint_{(\Sigma)} \alpha_T (T - T_c) \delta T d\Sigma = 0. \end{aligned}$$

Для зведення тривимірної варіаційної задачі теплопровідності до двовимірної вважаємо, що нормальна складова теплового потоку q_z змінюється по товщині кожного шару по лінійному закону $q_z = q_0 + q_1 z$. В цьому випадку температура в кожному шарі апроксимується

квадратичним поліномом по товщинній координаті Z .

При механічному навантаженні для розімкнутих електродів з умови $\iint_{(S)} D_z dS = 0$ знайдемо різницю потенціалів між електродами:

$$\varphi_k - \varphi_{k-1} = \frac{1}{\iint_{(S)} \frac{dS}{H_1^k}} \iint_{(S)} \left[(\varepsilon_{ss}^0 + \varepsilon_{\theta\theta}^0) \frac{H_2^k}{H_1^k} + (\kappa_{ss} + \kappa_{\theta\theta}) \frac{H_3^k}{H_1^k} \right] dS.$$

Тут S – площа електродів, з яких знімається різниця потенціалів. При цьому електроди можуть бути як суцільними, так і розрізними.

При деформуванні на резонансних частотах за межами пружності і при реальних теплообміні та розмірах оболонок рівень температури дисипативного розігріву, як правило, перевищує розумні межі. Цей факт необхідно враховувати при дослідженні вимушених резонансних коливань пружно-пластичних і в'язкопружно-пластичних тіл за межами пружності. Розумні рівні температур досягаються при деформуванні в області мікропластичності. Для моделювання механічної поведінки для цього випадку можна використати модель, розроблену, наприклад, в [10,11]. Вона дає такі вирази для складових комплексного модуля зсуву:

$$G' = G(1 - rI_2^\alpha), \quad G'' = gGI_2^\alpha. \quad (5)$$

Тут параметри G, r, g, α визначаються з експериментів. Ці параметри для ряду матеріалів представлено в [11]. Наприклад, для алюмінієвого сплаву вони мають такі значення: $G = 0.265 \cdot 10^{11} \text{ Н/м}^2$; $\alpha = 0,4$; $\Delta = 0.0014$; $\tau = 12$.

При цьому

$$g = \left(\frac{2G}{\sqrt{2}\tau} \right)^\alpha \frac{\Delta}{\pi}; \quad \frac{r}{g} = \frac{4}{\alpha(\alpha+2)} \cdot \frac{\Gamma(2+\frac{\alpha}{2})}{\Gamma(\frac{\alpha+1}{2})\Gamma(\frac{3}{2})}.$$

Тут Γ – гамма-функція.

3. Результати розрахунків та їх аналіз

Числові розрахунки проведено для кругової циліндричної панелі з товщиною середнього пасивного шару $h_2 = 0.00999 \text{ м}$. Загальна товщина панелі $H = h_1 + h_2 = 0.01 \text{ м}$, а її радіус і довжина $R = 0.1 \text{ м}$, $l = 0.1 \text{ м}$. Довжина твірної $s = 0.1 \text{ м}$. Пасивний шар виготовлено з алюмінієвого сплаву, а п'єзошари – із п'єзоелектричного матеріалу з

властивостями, наведеними в [13]. Коефіцієнт Пуассона приймається постійним і рівним $\nu = 0.31$. Густина активного матеріалу $\rho_a = 0.75 \cdot 10^4 \text{ кг/м}^3$, а пасивного $\rho_n = 0.28 \cdot 10^4 \text{ кг/м}^3$. Коефіцієнт теплопровідності пасивного шару $\lambda_T = 200 \text{ Вт/м} \cdot \text{гр}$, коефіцієнт теплообміну $\alpha_T = 20 \text{ Вт/м}^2 \cdot \text{гр}$ а початкова температура і температура навколишнього середовища $T_C = T_0 = 20^\circ \text{C}$. Частота навантаження вважається близькою до резонансної, а амплітуда механічного навантаження $q = 0.25 \cdot 10^4 \text{ Н/м}^2$.

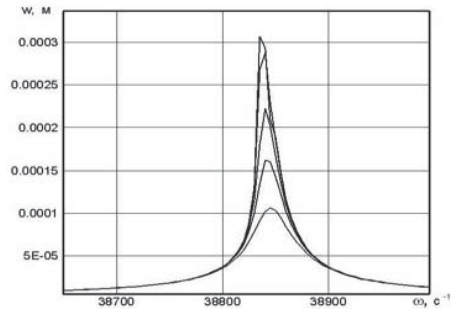


Рис. 1. Амплітудно-частотні характеристики

На рис. 1 показана амплітудно-частотна характеристика такої панелі. Наведені тут криві відповідають таким значенням уявної частини комплексної густини $\rho_n = \rho' - i\rho''$ (рахунок кривих іде зверху вниз): $\rho'' = 0; 0.1; 0.5; 1; 2$.

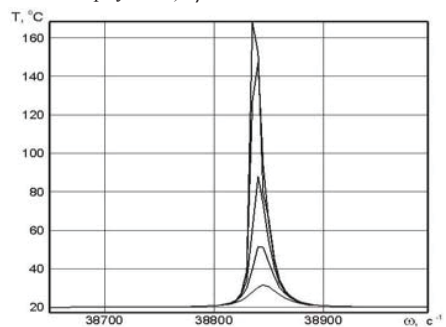


Рис. 2. Температурно-частотні характеристики

Температурно-частотні характеристики для тих же значень комплексної густини представлені на рис. 2, а залежність другого інваріанту тензора деформацій I_2 – на рис. 3. Остання залежність показує, що деформації циліндричної панелі не перевищують меж

пружності.

Як видно, величина уявної частини комплексної густини матеріалу суттєво впливає на фундаментальні динамічні характеристики коливань непружної циліндричної панелі з фізично нелінійного матеріалу. Ця уявна частина легко визначається через показники сенсора і пропорційна коефіцієнту оберненого зв'язку в співвідношенні (2).

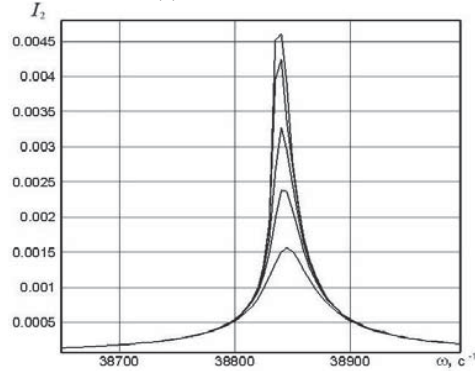


Рис. 3. Частотна залежність I_2

4. Висновки

Представлено варіаційну постановку задачі про активне демпфування вимушених резонансних коливань і температуру дисипативного розігріву тонких фізично нелінійних непружних оболонок обертання за допомогою п'єзоелектричних сенсорів та актуаторів. Для розв'язування варіаційних задач використано ітераційні методи сумісно з методом скінченних елементів.

З використанням описаного підходу розв'язано конкретну задачу про вимушені резонансні коливання і дисипативний розігрів непружної циліндричної панелі з сенсорами та актуаторами при дії на неї гармонічного за часом рівномірного тиску. Досліджено вплив коефіцієнта оберненого зв'язку та фізичної нелінійності на амплітудно-частотну, температурно-частотну характеристики та на інтенсивність девіатора тензора деформацій при вимушених резонансних коливаннях циліндричної панелі.

Список використаних джерел

1. Encyclopedia of Smart Materials (ed. Schwartz, Mal). – New York: Wiley & Sons, 2002. – Vol. 1–2. – 1176 p.
2. Карнаухов В. Г. Нелинейная термомеханика пьезоэлектрических неупругих тел при моногармоническом нагружении / В. Г. Карнаухов, В. В. Михайленко. – Житомир: ЖГТУ, 2005. – 428 с.
3. Термомеханика эластомерных элементов конструкций при циклическом нагружении / [В. Н. Потураев, В. И. Дырда, В. Г. Карнаухов и др.] – К.: Наук. думка, 1987. – 288 с.
4. Вынужденные колебания и диссипативный разогрев неупругих тел / [А. Ф. Булат, В. И. Дырда, В. Г. Карнаухов и др.] – Киев: Наук. думка, 2014. – 520 с.
5. Карнаухов В. Г. Связанные задачи термовязкоупругости / В. Г. Карнаухов. – Киев: Наук. думка, 1982. – 260 с.
6. Карнаухов В. Г. Связанные задачи теории вязкоупругих пластин и оболочек / В. Г. Карнаухов, И. Ф. Киричок. – Киев: Наук. думка, 1986. – 222 с.
7. Bodner S. R. Constitutive equation for elastoviscoplastic strainhardening materials /

References

1. SCHWARTZ, MAL (eds.) (2002) *Encyclopedia of Smart Materials*. 1–2. New York: Wiley & Sons.
2. KARNAUKHOV, V. G. & MYKHAILENKO, V. V. (2005) *Nelineynaya Thermomechanika Piezoelektricheskikh Neuprugikh Tel Pri Monoharmonicheskomo Nagruzhenii*. Zhytomyr: ZSTU.
3. POTURAEV, V. N. et al. (1987) *Termomekhanika Elastomernykh Elementov Konstruktsij pri Tsiklicheskom Nagruzhenii*. Kiev: Naukova dumka.
4. BULAT, A. F. et al. (2014) *Vynuzhennyye Kolebaniya i Dissipativnyy Razogrev Neuprugikh Tel*. Kiev: Naukova dumka.
5. KARNAUKHOV, V. G. (1982) *Svyazannyye Zadachi Termov'yazkoupругosti*. Kiev: Naukova dumka.
6. KARNAUKHOV, V. G. & KIRICHOK, I. F. (1986) *Svyazannyye Zadachi Teorii Vyazkoupругikh Plastin i Obolochek*. Kiev: Naukova dumka.
7. BODNER, S. R. & PARTOM, Y. (1975) Constitutive equation for elastoviscoplastic strain

- S. R. Bodner, Y. Partom // *Trans. ASME. J. Appl. Mech.* – 1975. – Vol. 42. – P. 385–389.
8. Термомеханічна зв'язана теорія шаруватих оболонок з пасивними фізично нелінійними непружними шарами та розподіленими п'єзоелектричними включеннями для контролю нестационарних коливань / [В. Г. Карнаухов, В. І. Козлов, Я. О. Жук, Т. В. Карнаухова] // Математичні методи та фізико-механічні поля. – 2001. – Т. 44, № 3. – С. 96–106.
9. Термомеханическая связанная теория гармонических колебаний слоистых оболочек с физически нелинейными неупругими слоями и распределенными пьезоэлектрическими включениями для контроля колебаний / [В. Г. Карнаухов, В. И. Козлов, Я. О. Жук, Т. В. Карнаухова] // Математические методы и физико-механические поля. – 2001. – Т. 44, № 4. – С. 113–122.
10. Пальмов В. А. Колебания упруго-пластических тел / В. А. Пальмов. – М.: Наука, 1976. – 328 с.
11. Вибрации в технике: Справочник. В 6-ти т. – М.: Машиностроение, 1981. – Т. 6. – 456 с.
12. Амбарцумян С. А. Общая теория анизотропных оболочек / С. А. Амбарцумян. – М.: Наука, 1974. – 446 с.
13. Temperature dependence of the complete material coefficients matrix of soft and hard doped piezoelectric lead zirconate titanate ceramics / [R. G. Sabat, B. Mukherjee, W. Ren, G. Yung] // *J. Appl. Phys.* – 2007. – Vol. 101. – P. 06411–1–7.
14. Козлов В. І. Чисельне моделювання активного демпфування вимушених термомеханічних резонансних коливань в'язкопружних оболонок обертання за допомогою п'єзоелектричних включень / В. І. Козлов, Т. В. Карнаухова, М. В. Пересунько // Математичні методи та фізико-механічні поля. – 2009. – Т. 52, № 3. – С. 116–126.
- hardening materials. *Trans. ASME. J. Appl. Mech.* 42. p. 385–389.
8. KARNAUKHOV, V. G. et al. (2001) Termomekhanichna zvyazana teoriya sharuvatykh obolonok z pasyvnymy fizichno nelineijnymy nepruzhnymy sharamy ta rozpodilenyymi piezoelektrychnymy vrluchennyamy dlya kontrolyu nestatsionarnykh kolyvan'. *Matematychni Metody ta Fyzyko-Mekhanichni Polya*. 44 (3). p. 96–106.
9. KARNAUKHOV, V. G. et al. (2001) Termomekhanicheskaya svyazannaya teoriya garmonichaskikh kolebanij sloistykh obolochek s fizicheski nelineijnymi neuprugimi sloyami i raspredelemnymi piezoelektricheskimi vklyuchenyami dlya kontrolya kolebanij. *Matematicheskije Metody i Fyzyko-Mekhanicheskije Polya*. 44 (4). p. 113–122.
10. PALMOV, V. A. (1976) *Kolebaniya Uprugoplastichestskikh tel*. Moskva: Nauka.
11. *Vibratsii v Tekhnike* (1981). 6. Moscow: Mashinostroenie.
12. AMBARTSUMIYAN, S. A. (1974) *Obshchaya Teoriya Anizotropnykh Tel*. Moskva: Nauka.
13. SABAT, R. G. et al. (2007) Temperature dependence of the complete material coefficients matrix of soft and hard doped piezoelectric lead zirconate titanate ceramics. *J. Appl. Phys.* 101. p. 06411–1–7.
14. KOZLOV, V. I., KARNAUKHOVA, T. V. & PERESUNKO, N. V. (2009) Chiselne modelyuvannya aktyvnogo dempfiruvannya vymushenykh termomekhanichnykh rezonansnykh kolyvan vyazkopruznykh obolonok obertannya za dopomogoyu piezoelektrychnykh vklyuchen. *Matematychni Metody ta Fyzyko-Mekhanichni Polya*. 52 (3). p. 116–126.

Надійшла до редакції 30.09.15

УДК 532.5

Кашталян М.¹, к. ф.-м. н., проф.,
Піат Р.², к. ф.-м. н., проф.,
Гузь І.¹, д. ф.-м. н., проф.

Моделювання руйнування метало-керамічних композитів з ламельною мікроструктурою

¹Абердінський університет, м. Абердін,
Шотландія
e-mail: m.kashtalyan@abdn.ac.uk,
i.guz@abdn.ac.uk
²Дармштадтський університет прикладних
наук, м. Дармштадт, Німеччина
e-mail: romana.piat@kit.edu

M. Kashtalyan¹, Ph. D. (Phys.-Math.), Prof.,
R. Piat², Ph. D. (Phys.-Math.), Prof.,
I. Guz¹, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof.

Damage modelling of metal/ceramic composites with lamellar microstructure

¹University of Aberdeen, Aberdeen, Scotland, UK
e-mail: m.kashtalyan@abdn.ac.uk,
i.guz@abdn.ac.uk
²Darmstadt University of Applied Sciences,
Darmstadt, Germany
e-mail: romana.piat@kit.edu

Розглянуто металокерамічний композит з ламельною мікроструктурою, що містить поперечні тріщини у керамічному шарі. Аналіз напруженого стану в однодомному зразку виконано на основі моделі еквівалентного стиснення та методом скінчених елементів.

Ключові слова: металокерамічний композит; поперечне розтріскування; руйнування; метод скінчених елементів; теоретичне моделювання

In this paper, a single-domain sample of a metal/ceramic composite with lamellar microstructure containing multiple transverse cracks in the ceramic layers is analysed. For analytical modelling, the Equivalent Constraint Model is used. A composite sample consisting of a ceramic layer fully bonded between two metal layers is considered. The ceramic layer contains multiple tunnelling cracks assumed to be spaced uniformly with constant crack spacing, spanning the full thickness of the ceramic layer. The sample is subjected to biaxial tension and in-plane shear loading. Materials are assumed to behave elastically. A finite element model of the quarter of representative segment is built in ABAQUS to investigate dependence of the stress field on the transverse coordinate. It is found that there is a region of high tensile stresses in the ceramic layer in the vicinity of ceramic/metal interface, indicating possibility of debonding.

Key Words: Metal/Ceramic Composites, Transverse Cracking, Damage Modelling, Finite Element Modeling, Analytical Modeling.

1. Introduction

Composites with metal matrix and ceramic reinforcement offer many advantages over monolithic metals and their alloys such as high stiffness-to-weight and strength-to-weight ratios, good thermal properties and better resistance to wear, creep and fatigue. Recently, innovative porous ceramic preforms have been developed that can be infiltrated by molten aluminium alloy to produce composites with relatively high ceramic content in a cost-effective way [1], making such composites attractive to many automotive, aerospace and biomedical engineering applications. As a consequence of ice crystals growth during freeze-casting of the preforms from ceramic-water suspension, the resulting metal/ceramic composites possess a hierarchical lamellar microstructure, with

randomly orientated individual regions (domains), in which all ceramic and metallic lamellae are parallel to each other [2]. Recent studies [3] of the compressive behaviour of metal/ceramic composites with lamellar microstructure have shown initiation and accumulation of damage within the ceramic lamellae, mainly in the form of transverse cracking, Fig 1.

However, damage mechanisms in these composites have not been studied in depth yet. In this paper, a single-domain composite sample with lamellar microstructure containing multiple transverse cracks in the ceramic layers is analysed using the Equivalent Constraint Model [4, 5] and a finite element method.

2. Analytical modelling

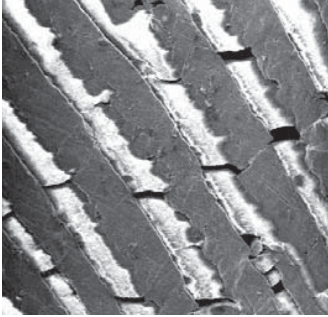


Fig. 1. Transverse cracks in ceramic layer of metal-ceramic composite with lamellar microstructure

Consider a composite sample consisting of a ceramic layer of thickness $2h_c$ fully bonded between two metal layers of thickness h_m . Ceramic layer contains multiple tunneling cracks, assumed to be spaced uniformly with crack spacing $S = 2s$, spanning the full thickness of the ceramic layer and depth $2w$ of the sample. The sample is referred to the co-ordinate system x_1, x_2, x_3 , with x_1 axis parallel to the cracks and subjected to biaxial tension $\bar{\sigma}_{11}$, $\bar{\sigma}_{22}$ and in-plane shear loading $\bar{\sigma}_{12}$.

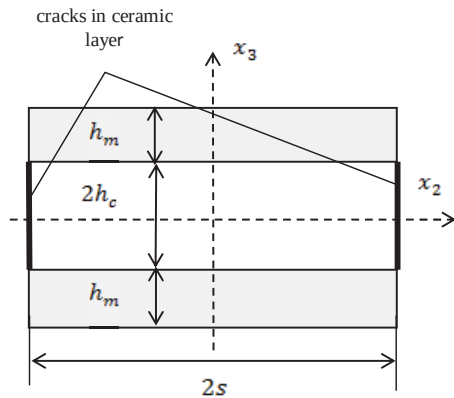


Fig. 2. Representative segment of a single-domain composite sample

Due to periodicity of damage in the sample, only a representative segment bounded by two cracks needs to be considered (Fig. 2). The equilibrium equations in terms of microstresses, i.e. stresses averaged across the thickness of the layer and the depth of the sample, have the form

$$\chi \bar{\sigma}_{ij}^{(m)} + \bar{\sigma}_{ij}^{(c)} = (1 + \chi) \bar{\sigma}_{ij}, \quad (1)$$

$$i, j = 1, 2, \quad \chi = h_m / h_c,$$

$$\frac{d\bar{\sigma}_{22}^{(c)}}{dx_2} + \frac{\tau_2}{h_c} = 0, \quad \frac{d\bar{\sigma}_{12}^{(c)}}{dx_2} + \frac{\tau_1}{h_c} = 0, \quad (2)$$

$$\bar{\sigma}_{ij}^{(c)} = \frac{1}{2wh_c} \int_{-w}^w \int_{-h_c}^{h_c} \sigma_{ij}^{(c)}(x_1, x_2, x_3) dx_1 dx_3,$$

where τ_1, τ_2 are the interface shear stresses at the metal/ceramics interface. Assuming that out-of-plane shear stresses vary linearly with x_3 and in the metal layer this variation is restricted to the shear layer of thickness h_s , i.e.

$$\tau_j = K_j (\bar{u}_j^{(m)} - \bar{u}_j^{(c)}),$$

$$K_j = \frac{3G_c G_m}{h_c G_m + (1 + (1 - \eta) / 2) \eta h_m G_c}, \quad (3)$$

$$\eta = h_s / h_m.$$

The constitutive equations in terms of microstrains and microstresses are

$$\begin{bmatrix} \bar{\epsilon}_{11}^{(c)} \\ \bar{\epsilon}_{22}^{(c)} \\ \bar{\gamma}_{12}^{(c)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11}^{(c)} & S_{12}^{(c)} & 0 \\ S_{12}^{(c)} & S_{22}^{(c)} & 0 \\ 0 & 0 & S_{66}^{(c)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\sigma}_{11}^{(c)} \\ \bar{\sigma}_{22}^{(c)} \\ \bar{\sigma}_{12}^{(c)} \end{bmatrix} \quad (4a)$$

$$\begin{bmatrix} \bar{\epsilon}_{11}^{(m)} \\ \bar{\epsilon}_{22}^{(m)} \\ \bar{\gamma}_{12}^{(m)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11}^{(m)} & S_{12}^{(m)} & 0 \\ S_{12}^{(m)} & S_{22}^{(m)} & 0 \\ 0 & 0 & S_{66}^{(m)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\sigma}_{11}^{(m)} \\ \bar{\sigma}_{22}^{(m)} \\ \bar{\sigma}_{12}^{(m)} \end{bmatrix}. \quad (4b)$$

In addition, it is also assumed that $\bar{\epsilon}_{11}^{(c)} = \bar{\epsilon}_{11}^{(m)}$, and crack surfaces are stress-free, i.e. $\bar{\sigma}_{22}^{(c)}|_{x_2=\pm s} = 0$, $\bar{\sigma}_{12}^{(c)}|_{x_2=\pm s} = 0$. Equations (1)–(4) can be reduced to two uncoupled second-order ordinary differential equations with respect to in-plane microstresses in the ceramic layer

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \bar{\sigma}_{22}^{(c)}}{dx_2^2} - L_1^{(c)} \bar{\sigma}_{22}^{(c)} + \Omega_{11}^{(c)} \bar{\sigma}_{11} + \Omega_{22}^{(c)} \bar{\sigma}_{22} &= 0, \\ \frac{d^2 \bar{\sigma}_{12}^{(c)}}{dx_2^2} - L_2^{(c)} \bar{\sigma}_{12}^{(c)} + \Omega_{12}^{(c)} \bar{\sigma}_{12} &= 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Solutions of these equations satisfying specified boundary conditions can be found as

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}_{22}^{(c)} &= \frac{1}{L_1^{(c)}} \left(1 - \frac{\cosh \sqrt{L_1^{(c)}} x_2}{\cosh \sqrt{L_1^{(c)}} s} \right) (\Omega_{11}^{(c)} \bar{\sigma}_{11} + \Omega_{22}^{(c)} \bar{\sigma}_{22}), \\ \bar{\sigma}_{12}^{(c)} &= \frac{1}{L_2^{(c)}} \left(1 - \frac{\cosh \sqrt{L_2^{(c)}} x_2}{\cosh \sqrt{L_2^{(c)}} s} \right) \Omega_{12}^{(c)} \bar{\sigma}_{12}, \\ L_1^{(c)} &= \frac{K_2}{h_m} [S_{22}^{(m)} + \chi S_{22}^{(c)} + a_1 (S_{12}^{(m)} + \chi S_{12}^{(c)})], \\ a_1 &= -\frac{S_{12}^{(m)} + \chi S_{12}^{(c)}}{S_{11}^{(m)} + \chi S_{11}^{(c)}}, \quad L_2^{(c)} = \frac{K_1}{h_m} (S_{66}^{(m)} + \chi S_{66}^{(c)}), \\ \Omega_{11}^{(c)} &= \frac{K_2}{h_m} (1 + \chi) (S_{12}^{(m)} + a_1 S_{11}^{(m)}), \\ \Omega_{22}^{(c)} &= \frac{K_2}{h_m} (1 + \chi) (S_{22}^{(m)} + a_1 S_{12}^{(m)}), \\ \Omega_{12}^{(c)} &= \frac{K_1}{h_m} (1 + \chi) S_{66}^{(m)}.\end{aligned}\quad (6)$$

Figure 3 shows distribution of the normalized axial stress $\bar{\sigma}_{22}^{(c)} / \bar{\sigma}_{22}$ under uniaxial tensile loading ($\bar{\sigma}_{11} = \bar{\sigma}_{12} = 0$) as a function of distance x_2 for a range of half-spacing to layer thickness ratios s/h_c . Young's moduli of metal and ceramics are taken as 80 GPa and 390 GPa respectively; Poisson's ratios are 0.33 and 0.24 respectively. Layer thicknesses are $h_m = 0.3\text{mm}$; $h_c = 0.2\text{mm}$, shear layer thickness is $h_s = 0.15 h_m$.

According to the analytical model, the average axial stress between the two existing cracks is tensile, with its value decreasing as the distance between two neighbouring cracks becomes smaller. At lower crack densities (i.e. larger crack spacing), the curve exhibits a characteristic plateau.

3. Numerical modelling

A finite element model of the quarter of representative segment is built in ABAQUS to investigate dependence of the stress field on the transverse co-ordinate x_3 . For large crack spacings, axial stress $\sigma_{22}^{(c)}$ in the ceramic layer between the cracks away from crack surfaces is tensile. As crack density increases and crack spacing becomes smaller, a region of compressive stress in the ceramic layer emerges, which is consistent with observations in [6]. There is also a region of high tensile stresses in the ceramic layer in the vicinity of ceramic/metal interface, indicating possibility of debonding as competing failure mechanism.

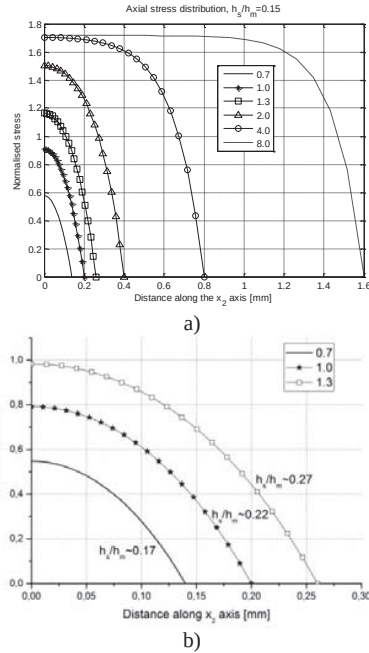


Fig. 3. Normalized axial stress $\bar{\sigma}_{22}^{(c)} / \bar{\sigma}_{22}$ in the ceramic layer as a function of co-ordinate x_2 for a range of crack spacing to layer thickness ratios as predicted by: a) analytical model; b) finite element model

4. Conclusions

The cracked microstructure is of metal-ceramic composite is modelled by analytical and computational approaches. Stress field is determined using a modified 2-D shear lag approach and a finite element method. The result obtained by finite elements analysis is consistent with result in work [6]. The average axial stress between the two cracks is found to be decreasing with decreasing the distance between the cracks.

Financial support of this research by The Royal Society (IE121116), UK, and DFG (PI 785/3-2, PI 785/1-2), Germany, is gratefully acknowledged. We thank Dr. S. Roy (Karlsruhe Institute of Technology) for providing the microstructure images.

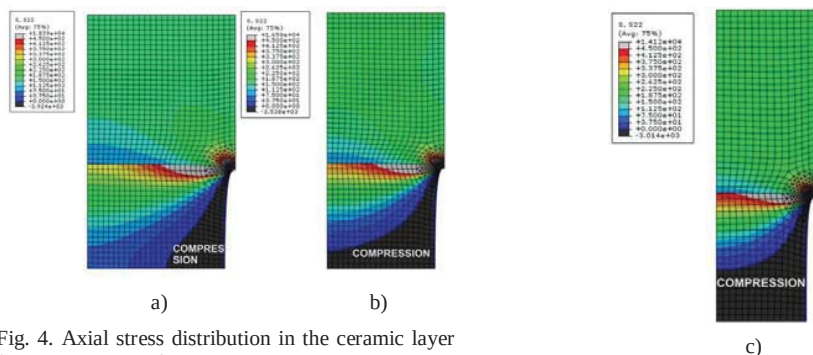


Fig. 4. Axial stress distribution in the ceramic layer for three crack half-spacing to layer thickness ratios: a) $s/h_c = 1.3$; b) $s/h_c = 1.0$; c) $s/h_c = 0.7$

Список використаних джерел

References

1. Roy S. Metal/ceramics composites from freeze-cast ceramic preforms: domain structure and elastic properties / S. Roy, A. Wanner // *Compos. Sci. & Technol.* – 2008. – Vol. 68. – P. 1136–1143.
2. Roy S. Damage evolution and domain-level anisotropy in metal ceramics composites exhibiting lamellar microstructures / S. Roy, B. Butz, A. Wanner // *Acta Mater.* – 2010. – Vol. 58. – P. 2300–2312.
3. Sinchuk Y. Numerical study of internal load transfer in metal/ceramic composites based on freeze-cast ceramic preforms and experimental validation / Y. Sinchuk, S. Roy // *Mater. Sci. & Eng.: A.* – 2013. – Vol. 585. – P. 10–16.
4. Kashtalyan M. Residual stiffness of cracked cross-ply composite laminates under multi-axial in-plane loading / M. Kashtalyan, S. Soutis // *Appl. Compos. Mater.* – 2011. – Vol. 18. – P. 31–43.
5. Matrix cracking in polymeric composites laminates: Modelling and experiments / [D. T. G. Katerelos, M. Kashtalyan, C. Soutis, C. Galotis] // *Compos. Sci. & Technol.* – 2008. – Vol. 68. – P. 2310–2317.
6. Bai T. Fracture spacing in layered rocks: a new explanation based on the stress transition / T. Bai, D. D. Pollard // *J. Struct. Geol.* – 2000. – Vol. 22. – P. 43–57.
1. ROY, S. & WANNER, A. (2008) Metal/ceramics composites from freeze-cast ceramic preforms: domain structure and elastic properties. *Compos. Sci. & Technol.* 68. p. 1136–1143.
2. ROY, S., BUTZ, B. & WANNER, A. (2010) Damage evolution and domain-level anisotropy in metal ceramics composites exhibiting lamellar microstructures. *Acta Mater.* 58. p. 2300–2312.
3. SINCHUK, Y. & ROY, S. (2013) Numerical study of internal load transfer in metal/ceramic composites based on freeze-cast ceramic preforms and experimental validation. *Mater. Sci. & Eng.: A.* 585. p. 10–16.
4. KASHTALYAN, M. & SOUTIS, S. (2011) Residual stiffness of cracked cross-ply composite laminates under multi-axial in-plane loading. *Appl. Compos. Mater.* 18. p. 31–43.
5. KATERELOS, D.T.G. et al. (2008) Matrix cracking in polymeric composites laminates: Modelling and experiments. *Compos. Sci. & Technol.* 68. p. 2310–2317.
6. BAI, T. & POLLARD, D. D. (2000) Fracture spacing in layered rocks: a new explanation based on the stress transition. *J. Struct. Geol.* 22. p. 43–57.

Надійшла до редколегії 30.09.15

УДК 539.375

Кіпніс Л. А.¹, д. ф.-м. н., проф.,
Дудик М. В.¹, к. ф.-м. н., доц.,
Дякон В. М.², к. ф.-м. н., доц.

**Особенности структуры пластичной зоны
близ вершины межфазной трещины при
преобладающих растягивающих
навантажениях**

¹Уманський державний педагогічний університет
ім. Павла Тичини, 20300, Черкаська обл.,
м. Умань, вул. Садова, 2
e-mail: dudik_m@hotmail.com

²Уманська філія ПВНЗ «Європейський університет»,
20300, Черкаська обл., м. Умань,
вул. Шевченка, 15-а

L. A. Kipnis¹, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof.,
M. V. Dudyk¹, Ph. D. (Phys.-Math.), Assoc. Prof.,
V. M. Diakon², Ph. D. (Phys.-Math.), Assoc. Prof.

**Peculiarities of the structure of the plastic
zone near the tip of an interfacial crack at the
prevailing tensile loading**

¹Pavlo Tychyna Uman State Pedagogical University,
20300, Cherkassy Region, Uman, Sadova str., 2
e-mail: dudik_m@hotmail.com

²Uman Affiliate of European University, 20300,
Cherkassy region, Uman, Shevchenko str., 15-a

Досліджено комплексну модель пластичної зони біля вершини міжфазної тріщини в умовах переважаючих розтягуючих навантажень, яка передбачає утворення зони деструкції у прилеглий до вершини частині пластичної зони та маломасштабної області контакту берегів. В умовах плоскої деформації методом Вінера – Гонфа розв'язано задачу про розрахунок довжини зони деструкції і розкриття тріщини у вершині. Виконано чисельний аналіз параметрів пластичної зони.

Ключові слова: міжфазна тріщина, пластична зона, зона деструкції, розкриття тріщини.

It is investigated the complex model of the plastic zone near the tip of the interfacial crack in an elastic-plastic piecewise homogeneous body under conditions of the prevailing tensile loading that foresees the formation of the fracture process zone in the part of plastic zone adjoining to the tip and a small scale area of the contact of lips. The plastic zone going out of the crack tip in more plastic material at an angle to the flat interface is modeled as a straight line of a displacement discontinuity, which consists of two parts. In the plastic zone, the part adjacent to the crack tip modeling a fracture process zone of the tangential and normal displacement discontinuity is assumed, and the tangential and normal stresses are equal to the shear yield strength and to the resistance of the material to separation accordingly. In the rest part of it that corresponds to the plastic zone only a tangential displacement discontinuity takes place and the tangential stress is equal to the shear yield strength.

The problem of the calculation of the plastic zone parameters near the crack tip is solved by the Wiener–Hopf method for the plane strain conditions at ignoring the lips contact. The equations for the calculations of the length of a fracture process zone and of the singularity index of the stresses is obtained. Expression for the crack opening in its tip is found. On the basis of the numerical calculations the dependences of the zone parameters on the configuration of the external loading and the elastic characteristics of the joined materials is studied. The conditions of the absence of the lips contact near the tip are determined.

Key Words: Interfacial Crack, Plastic Zone, Fracture Process Zone, Crack Opening.

1. Вступ

Напружено-деформований стан в околі вершини міжфазної тріщини залежить від багатьох факторів, у тому числі від можливого контакту берегів та утворення маломасштабної пластичної зони. Останні враховані у комплексній моделі зони передруйнування [1, 2], використання якої дозволяє уникнути передбачуваних класичною моделлю міжфазної тріщини фізично некорект-

них просторових осциляцій берегів.

Структура привершинної області суттєво залежить від конфігурації зовнішнього навантаження. Зокрема, при переважанні у навантаженні розтягуючих зусиль у перпендикулярному до площини тріщини напрямку розміри області контакту берегів передбачаються екстремально малими [3], тому при дослідженні структури привершинної області, у першу чергу, слід враховувати розвиток з вершини тріщини бічної пластичної

зони у більш пластичному матеріалі з'єднання, розрахунок якої в рамках моделі Леонова-Панасюка – Дагдейла виконано в [4]. Проте, поява пластичної зони не усуває концентрацію напружень біля вершини, що у відповідності з висновками експериментальних досліджень [5] передбачає утворення зони деструкції матеріалу з високим рівнем деформацій у прилеглий до вершини частині пластичної зони. В даній статті виконується розрахунок параметрів зони деструкції в рамках комплексної моделі зони передруйнування [1, 2] при нехтуванні контактом берегів.

2. Постановка задачі та її розв'язання

В умовах плоскої деформації розглядається задача про розрахунок зони деструкції у прилеглий до вершини міжфазної тріщини частині маломасштабної бічної пластичної зони. Тріщина розташована на плоскій межі поділу двох однорідних ізотропних матеріалів з модулями Юнга E_1 , E_2 і коефіцієнтами Пуассона ν_1 , ν_2 . Відповідно до експериментальних даних [5] довжина області деструкції d передбачається набагато меншою від довжини l всієї пластичної зони. Це дозволяє розглядати тіло як кусково-однорідну площину, що містить на межі поділу півнескінченну тріщину з вільними від навантаження берегами, з вершини O якої під кутом α до межі поділу у перший матеріал, який для визначеності вважаємо більш пластичним, виходить півнескінченна пряма лінія розриву, що складається з двох ділянок (рис. 1). На ділянці OO' , яка примикає до вершини тріщини і відповідає зоні деструкції, зазнають розриву дотичне і нормальне переміщення, а дотичне і нормальне напруження дорівнюють межі текучості τ_1 і опору відриву σ_1 матеріалу. На другій ділянці зазнає розриву лише дотичне переміщення, а дотичне напруження дорівнює τ_1 .

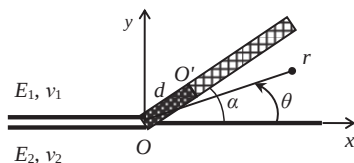


Рис.1. Розрахункова схема задачі

Умову на нескінченності формулюємо на основі вимоги, щоб розв'язок задачі на відстанях, значно більших за розміри зони деструкції, але

значно менших від розмірів пластичної зони, переходив у асимптотичний розв'язок аналогічної задачі про пластичну зону без зони деструкції, отриманий в [4]. Даній моделі відповідає статична задача теорії пружності з крайовими умовами:

$$\theta = 0, \quad < \sigma_\theta > < \tau_{r\theta} > = 0, \quad < u_\theta > < u_r > = 0;$$

$$\theta = \pm \pi, \quad < \sigma_\theta > < \tau_{r\theta} > = 0;$$

$$\theta = \alpha, \quad < \sigma_\theta > < \tau_{r\theta} > = 0; \quad \theta = \alpha, \quad \tau_{r\theta} = \tau_1;$$

$$\theta = \alpha, \quad r < d, \quad \sigma_\theta = \sigma_1;$$

$$\theta = \alpha, \quad r > d, \quad < u_\theta > = 0;$$

$$\theta = \alpha, \quad r \rightarrow \infty, \quad \sigma_\theta = \tau_1 \left[C_0 + \sum_k C_k r^{\lambda_k} \right] + o\left(\frac{1}{r}\right),$$

$$\text{де } C_0 = \frac{2u'(-1)}{\pi D_1(-1)}, \quad u'(p) = du(p)/dp,$$

$$C_k = \frac{4(1+\lambda_k)u(-1-\lambda_k)G^+(-1-\lambda_k)}{\tau_1 \lambda_k D_1'(-1-\lambda_k)K^+(-1-\lambda_k)} l^{-\lambda_k} \times \\ \times \operatorname{Re} \left[\frac{F(\alpha) l^{-0.5+i\omega} K^+(-0.5-i\omega)}{(0.5+i\omega)G^+(-0.5-i\omega)} \frac{1-2\omega}{1+2\lambda_k-2\omega} \right],$$

$$u(p) = (1+\kappa_1)e(1+\kappa_2)u_1(p) + \\ + [e^2(1+\kappa_2)^2 + 4(1-e)(1+e\kappa_2)\sin^2 p\pi]u_2(p) + \\ + (1+\kappa_1)[(1+\kappa_1)u_3(p) + 2(1-e)u_4(p)]\sin p\pi,$$

$$u_1(p) = p \sin^2 \alpha [p \sin p(\pi+2\alpha) - \\ - 2 \sin p\alpha \cos p(\pi+\alpha)] - \sin p\pi \sin^2 p(\pi-\alpha),$$

$$u_2(p) = -p(p-1)\sin^2 \alpha \sin p(\pi-2\alpha),$$

$$u_3(p) = \sin^2 p(\pi-\alpha) - p \sin^2 \alpha,$$

$$u_4(p) = p \sin^2 \alpha [p \cos 2p\alpha + 2 \sin^2 p\alpha] - \\ - \sin^2 p(\pi-\alpha); \quad D_1'(p) = dD_1(p)/dp;$$

$$e = \frac{E_1(1+\nu_2)}{E_2(1+\nu_1)}, \quad \omega = \frac{1}{2} \ln \frac{e+\kappa_1}{1+e\kappa_2}, \quad \kappa_{1(2)} = 3-4\nu_{1(2)};$$

λ_k – корені рівняння $D_1(-1-x)=0$, що задовольняють умову $\operatorname{Re} \lambda_k > -1$, найменший з яких, λ_1 , є показником сингулярності напружень; функції $D_1(p)$, $G^+(p)$, $K^+(p)$ визначені в [4]. Передбачається, що конфігурація зовнішнього навантаження, заданого комплексним КІН $K = K_1 + iK_2$, забезпечує відривний характер нормального напруження у зоні деструкції.

У вершині O' області деструкції має місце коренева особливість напружень

$$\theta = \alpha, \quad r \rightarrow d+0, \quad \sigma_\theta \approx \frac{k}{\sqrt{2\pi(r-d)}}$$

з коефіцієнтом інтенсивності k , що визначається в ході розв'язання задачі.

За допомогою перетворення Мелліна розв'язання сформульованої крайової задачі зводиться до функціонального рівняння Вінера – Гопфа:

$$\Phi_1^+(p) + \frac{\sigma_1 - C_0 \tau_1}{p+1} - \tau_1 \sum_k \frac{C_k d^{\lambda_k}}{p + \lambda_k + 1} =$$

$$= -\tau g p \cdot G_1(p) \Phi_1^-(p) \quad (-\varepsilon_1 < \operatorname{Re} p < \varepsilon_2),$$

$$\Phi_1^+(p) = \int_1^\infty \sigma_\theta(p d, \alpha) p^p d p,$$

$$\Phi_1^-(p) = \frac{E_1}{4(1-v_1^2)} \int_0^1 \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right) \Big|_{r=p d} p^p d p;$$

$$G_1(p) = \frac{4 \cos p \pi d_1(p) D_2(p)}{\sin^2 p \pi D_1(p)},$$

$$D_2(p) = (1 + \kappa_1)^2 \sin^2 p \pi - D_{21}(p) d_2(p) +$$

$$+ \sin p \alpha [D_{22}(p) \cos p \alpha - D_{23}(p) \sin p \alpha],$$

$$D_{21}(p) = e^2 (1 + \kappa_2)^2 + 4(1-e)(1 + \kappa_2) \sin^2 p \pi,$$

$$D_{22}(p) = (1 + \kappa_1) e (1 + \kappa_2) \sin 2 p \pi,$$

$$D_{23}(p) = 2(1 + \kappa_1) [e(1 + \kappa_2) + 2(1-e)] \sin^2 p \pi,$$

$$d_1(p) = \sin^2 p (\pi - \alpha) - p^2 \sin^2 \alpha,$$

$$d_2(p) = p^2 \sin^2 \alpha - \sin^2 p \alpha;$$

$\varepsilon_1, \varepsilon_2$ – достатньо малі додатні числа. Його розв'язок знайдено аналогічно розв'язку рівняння Вінера-Гопфа в задачі про бічну пластичну зону в [4]. З нього отримано рівняння для визначення довжини зони деструкції:

$$\sum_k \frac{C_k d^{\lambda_k} K^+(-1 - \lambda_k)}{(1 + \lambda_k) I(\lambda_k)} = \left(\frac{\sigma_1 - C_0}{\tau_1} \right) \frac{K^+(-1)}{I(0)},$$

$$I(x) = \exp \left[\frac{x+1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\ln G_1(it)}{t^2 + (x+1)^2} dt \right]$$

та вираз для розкриття тріщини в її вершині, обумовленого появою зони:

$$\delta = \frac{2(1-v_1^2)}{E_1} \tau_1 d \sqrt{\pi G_1(0)} \sum_k \frac{C_k d^{\lambda_k} \lambda_k K^+(-1 - \lambda_k)}{(1 + \lambda_k)^2 I(\lambda_k)} \times$$

$$\times \left[\frac{\sin \alpha - (\pi - \alpha) \cos \alpha}{(\pi - \alpha)^2 - \sin \alpha} - \frac{e(1 + \kappa_2) \delta_1}{\delta_2} \right],$$

$$\delta_1 = e(1 + \kappa_2) (\sin \alpha + \alpha \cos \alpha) + (1 + \kappa_1) \pi \cos \alpha,$$

$$\delta_2 = (1 + \kappa_1)^2 \pi^2 + (1 + \kappa_1) e (1 + \kappa_2) \pi \alpha +$$

$$+ e^2 (1 + \kappa_2)^2 (\alpha^2 - \sin^2 \alpha).$$

Поява зони деструкції змінює НДС біля вершини тріщини, який на відстанях, значно менших ніж зона, визначатиметься показником сингулярності λ_{d1} – найменшим на інтервалі $(-1, 0)$ коренем рівняння $D_2(-1-x) = 0$.

3. Числовий аналіз результатів і висновки

Дослідження отриманого розв'язку задачі здійснено на прикладі кусково-однорідної площини з міжфазною тріщиною довжини L , навантаженої на нескінченності однорідними нормальним і дотичним напруженнями ($\sigma_x = p > 0$, $\tau_{xy} = q$ при $x, y \rightarrow \infty$). КІН обраховувався за формулою [6]

$$K = \frac{\sqrt{\pi L / 2}}{\operatorname{ch} \pi \omega} (1 + 2i\omega)(q + ip).$$

Результати числових розрахунків при $\sigma_1 = 5\tau_1$, $v_1 = v_2 = 0.3$ приведені в табл.1 для окремих параметрів задачі, які відповідають вимогам маломасштабності пластичної зони і зони деструкції. Зовнішнє навантаження задавали безрозмірним модулем $f = \sqrt{p^2 + q^2} / \tau_1$ та відношенням q/p , що визначав його конфігурацію.

Таблиця 1.

Параметри пластичної зони і напружено-деформованого стану біля вершини тріщини

E_1	q/p	0		0.1	
E_2	f	0.1	0.2	0.1	0.2
0.5	α°	86.8	83.4	78.4	74.4
	l/L	$1.10 \cdot 10^{-3}$	$4.25 \cdot 10^{-3}$	$1.03 \cdot 10^{-3}$	$4.12 \cdot 10^{-3}$
	d/L	$4.90 \cdot 10^{-5}$	$2.06 \cdot 10^{-4}$	$5.44 \cdot 10^{-5}$	$2.25 \cdot 10^{-4}$
	λ_1	-0.4828	-0.4851	-0.4892	-0.4931
	λ_{d1}	-0.4064	-0.3974	-0.3829	-0.3701
	$\tilde{\delta}$	$-1.51 \cdot 10^{-4}$	$-5.54 \cdot 10^{-4}$	$-1.05 \cdot 10^{-4}$	$-2.77 \cdot 10^{-4}$
0.8	α°	78.1	76.7	67.9	66.4
	l/L	$1.01 \cdot 10^{-3}$	$4.02 \cdot 10^{-3}$	$1.01 \cdot 10^{-3}$	$4.06 \cdot 10^{-3}$
	d/L	$4.97 \cdot 10^{-5}$	$2.02 \cdot 10^{-4}$	$5.38 \cdot 10^{-5}$	$2.17 \cdot 10^{-4}$
	λ_1	-0.4971	-0.4975	-0.5005	-0.5010
	λ_{d1}	-0.4174	-0.4139	-0.3892	-0.3845
	$\tilde{\delta}$	$-6.80 \cdot 10^{-5}$	$-2.32 \cdot 10^{-4}$	$2.38 \cdot 10^{-5}$	$1.60 \cdot 10^{-4}$

Згідно з розрахунками, кут нахилу пластичної зони зменшується, а довжина зони деструкції зростає при збільшенні величини навантаження і його дотичної складової. Розміри зони деструкції виявляються значно меншими від розмірів пластичної зони, що відповідає прийнятому при розв'язанні задачі наближенню.

Якщо утворення пластичної зони усуває просторові осциляції переміщень і напружень при наближенні до вершини тріщини, залишаючи показник сингулярності на рівні $\lambda_1 \approx -0.5$, то з появою в ній зони деструкції концентрація напружень ще й послаблюється ($\lambda_{d1} > \lambda_1$).

З аналізу знаку безрозмірного розкриття $\tilde{\delta} = (1 + \nu_1)\tau_1\delta / LE_1$ випливає, що у випадку чистого розтягу ($q=0$) або при значній відмінності

пружних характеристик матеріалів після появи зони деструкції залишається можливим контакт берегів біля вершини тріщини ($\tilde{\delta} < 0$), тоді як при близьких модулях Юнга ($E_1 \rightarrow E_2$) і наявності вкладу дотичного навантаження ($q > 0$) тріщина у вершині буде відкритою.

Список використаних джерел

1. Каминский А. А. О комплексной модели зоны предразрушения в конце трещины на границе раздела упругих сред / А. А. Каминский, Л. А. Кипнис // Доповіді НАН України. – 2010. – № 2. – С.59–63.
2. Каминский А. А. О страгивании трещины, расположенной на границе раздела упругих сред / А. А. Каминский, Л. А. Кипнис // Доповіді НАН України. – 2011. – № 1. – С. 38–43.
3. Comninou M. The interface crack / M. Comninou // Trans. ASME. J. Appl. Mech. – 1977. – Vol. 44, № 4. – P. 631–636.
4. Каминский А. А. О направлении развития тонкой пластической зоны в вершине трещины на границе раздела различных сред / А. А. Каминский, М. В. Дудик, Л. А. Кипнис // Прикл. механика. – 2006. – Т. 42, № 2. – С. 14–23.
5. Каминский А. А. Экспериментальное исследование распределения пластических деформаций в окрестности вершины трещины при статическом нагружении / А. А. Каминский, Г. И. Усикова, Е. А. Дмитриева // Прикл. механика. – 1994. – Т. 30, № 11. – С.69–75.
6. Rice J. R. Elastic fracture mechanics concepts for interfacial cracks / J. R. Rice // Trans. ASME. J. Appl. Mech. – 1988. – Vol. 55, № 1. – P.98–103.

References

1. KAMINSKII, A. A. & KIPNIS, L. A. (2010) O kompleksnoy modeli zony pre-drazrusheniia v kontse treshchiny na granitse razdela uprugikh sred. *Dopovidi NAN Ukrainy*. (2). p. 59–63.
2. KAMINSKII, A. A. & KIPNIS, L. A. (2011) O stragivanii treshchiny, raspolozhennoy na granitse razdela uprugikh sred. *Dopovidi NAN Ukrainy*. (1). p. 38–43.
3. COMNINO, M. (1977) The interface crack. *Trans. ASME. J. Appl. Mech.* 44 (4). p. 631–636.
4. KAMINSKY, A. A., DUDIK, M. V., & KIPNIS, L. A. (2006) On the direction of development of a thin fracture process zones at the tip of an interfacial crack between dissimilar media. *Int. Appl. Mech.* 42 (2). p. 136–144.
5. KAMINSKII, A. A., USIKOVA, G. I., & DMITRIEVA, E. A. (1994) Experimental study of the distribution of plastic strains near a crack tip during static loading. *Int. Appl. Mech.* 30 (11). p. 892–897.
6. RICE, J. R. (1988) Elastic fracture mechanics concepts for interfacial cracks. *Trans. ASME. J. Appl. Mech.* 55 (1). p. 98–103.

Надійшла до редколегії 28.09.15

УДК 539.3

Козачок О. П., аспірант,
Слободян Б. С., к. ф.-м. н., с. н. с.,
Мартиняк Р. М., д. ф.-м. н., с. н. с.

**Взаємодія пружного тіла та жорсткої
основи з регулярною системою
заповнених ідеальним газом
прямокутних виїмків**

Інститут прикладних проблем механіки і мате-
матики ім. Я. С. Підстригача НАН України,
79060, м. Львів, вул. Наукова, 3-б
e-mail: labmtd@iapmm.lviv.ua

O. P. Kozachok, Postgraduate Student,
B. S. Slobodyan, Ph. D. (Phys.-Math.),
Sr. Sci. Researcher,
R. M. Martynyak, Dr. Sci. (Phys.-Math.),
Sr. Sci. Researcher

**An interaction between an elastic body and
a rigid base having a regular array of
rectangular grooves filled with
an ideal gas**

Pidstryhach Institute of Applied Problems of Me-
chanics and Mathematics of NAS of Ukraine, 79060,
Lviv, Naukova str., 3-b
e-mail: labmtd@iapmm.lviv.ua

Розглянуто взаємодію пружного тіла та жорсткої основи за наявності в ній періодично розташованих виїмків прямокутної форми, які заповнені ідеальним газом, стан якого описується рівнянням Клапейрона – Менделєєва. Відповідна контактна задача зведена до системи двох рівнянь – сингулярного інтегрального рівняння з ядром Гільберта відносно висоти зазорів і трансцендентного рівняння для визначення тиску газу. Проаналізовано залежності тиску газу, контактної податливості тіл та контактного тиску від прикладеного навантаження і маси газу.

Ключові слова: контактна взаємодія, періодичний рельєф, виїмки, міжповерхневі зазори, сингулярне інтегральне рівняння.

The contact between an elastic body and a rigid base having periodically arranged rectangular grooves filled with an ideal gas is considered. The state of an ideal gas is described by the Clapeyron–Mendeleev equation. Each gap is filled with the same amount of the gas, pressure of which is unknown and varies with the applied load. The corresponding contact problem is reduced to a system of two equations. One of them is a singular integral equation with the Helbert kernel for a height of the gaps. It is transformed to a singular integral equation with a Cauchy kernel, which is solved analytically. The other is a transcendental equation for a gas pressure. On the basis of the obtained solution of this system, the dependences of the gas pressure, the contact compliance of the bodies, and the contact pressure on the applied load and the amount of the gas are analyzed. As the applied load and the gas mass increase, the gas pressure increases and the contact compliance decreases. At the same time, the contact pressure outside the gaps falls if the gas mass increases.

Key Words: Contact Interaction, Periodic Relief, Grooves, Interfacial Gaps, Singular Integral Equation.

1. Вступ

Для покращення функціональних характери-
стик контактних пар використовують різнома-
нітні методи поверхневого модифікування,
зокрема текстуровання поверхонь, що полягає у
формуванні на них регулярно (періодично)
розташованих виїмків однакової форми. При
контакті текстурованих тіл між ними виникають
періодично розташовані міжконтактні зазори, які
у реальних умовах можуть заповнюватися
рідиною чи газом, які чинять додатковий тиск на
спряжені поверхні. Взаємодія тіл з урахуванням
впливу тиску газорідинного заповнювача зазору,
зумовленого поодиноким поверхневою виїмкою,

вивчено у працях [1, 2]. Огляд публікацій, що
стосуються контактних задач для тіл з
періодичним рельєфом за відсутності
заповнювача зазорів між ними, наведено у
працях [3, 4]. Розглянуто [5] контакт між
плоскою і хвилястою поверхнями за наявності
стисливої рідини в зазорах між ними. Досліджено
[6] вплив рідинних міжповерхневих містків та
поверхневого натягу рідини на контакт двох
пружних тіл, одне з яких має періодичну систему
виїмків.

У цій статті досліджено взаємодію пружного
тіла з жорсткою основою за наявності в ній
періодично розташованих прямокутних виїмків,
заповнених ідеальним газом.

2. Формулювання задачі

Розглянемо безфрикційний контакт пружного

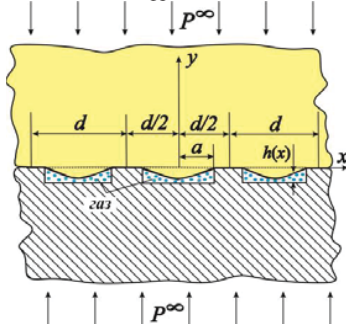


Рис. 1. Схема контакту тіл

ізотропного півпростору з жорсткою основою, межа якої має періодичну систему, розташованих з періодом d мілких тунельних виїмок прямокутної форми ширини $2a$ і висоти A ($A/a \ll 1$). Пружний півпростір притискається до основи під дією рівномірно розподіленого на нескінченості навантаження P^∞ і в ньому реалізується стан плоскої деформації. У зв'язку з наявністю виїмок між тілом і основою утворюються зазори висоти $h(x)$ (рис. 1). Вважаємо, що вони заповнені ідеальним газом, стан якого описується рівнянням Клапейрона-Менделєєва

$$PV = mRT/\mu, \quad (1)$$

де P_1 – тиск газу, V і m – об'єм і маса газу, що припадають на одиницю довжини зазору в його поздовжньому напрямі (перпендикулярному до площини рис. 1), R – універсальна газова стала, T – температура, μ – молярна маса газу.

У процесі навантаження змінюватиметься висота зазорів $h(x)$ та тиск газу P_1 .

Контактно-крайові умови сформульованої задачі мають вигляд:

- вздовж зазорів $x \in (-a + kd; a + kd)$

$$\tau_{xy} = 0, \quad \sigma_{yy} = -P_1; \quad (2)$$

- на ділянках контакту

$$x \in [-d/2 + kd; -a + kd] \cup [a + kd; d/2 + kd]$$

$$\tau_{xy} = 0, \quad v = 0; \quad (3)$$

- на нескінченості

$$\sigma_{yy} = -P^\infty, \quad \sigma_{xx} = 0, \quad \tau_{xy} = 0. \quad (4)$$

Тут $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$; σ_{xx} , σ_{yy} , τ_{xy} – компоненти тензора напружень; v – складова вектору переміщення вздовж осі Oy .

3. Методика розв'язування задачі

Сформульовану задачу розв'язували методом функцій міжконтактних зазорів. Напруження і похідні від переміщень у пружному тілі виражені у комплексному вигляді через висоту зазорів $h(x)$ [2]:

$$\begin{aligned} \sigma_{yy} - i\tau_{xy} &= \Phi(z) - \overline{\Phi(\bar{z})} + (z - \bar{z})\overline{\Phi'(z)} - P^\infty, \\ 2G(u' + iv') &= \kappa\Phi(z) + \overline{\Phi(\bar{z})} - \\ &\quad - (z - \bar{z})\overline{\Phi'(z)} + \frac{3-\kappa}{4}P^\infty, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\Phi(z) = \frac{(-1)^{3-n}}{dK} \int_{-a}^a h'(t) \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi(t-z)}{d} \right) dt, \quad z \in D_n, \quad \text{де}$$

$n=1, 2$, $z = x + iy$, $i = \sqrt{-1}$, $K = 2(1-\nu)/G$, $\kappa = 3-4\nu$, G , ν – модуль зсуву і коефіцієнт Пуассона матеріалу пружного тіла, D_1 і D_2 – верхня ($y > 0$) і нижня ($y < 0$) півплощини.

Для визначення функції $h(x)$ отримано сингулярне інтегральне рівняння (СІР) з ядром Гільберта:

$$\frac{2}{d} \int_{-a}^a h'(t) \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi(t-x)}{d} \right) dt = K(P^\infty - P_1). \quad (6)$$

У крайніх точках зазорів повинні виконуватися умови рівності висоти зазорів та висоти виїмок $h(\pm a) = A$, які в еквівалентному вигляді запишемо так:

$$\int_{-a}^a h'(t) dt = 0, \quad h(-a) = A. \quad (7)$$

Провівши заміну змінних

$$\xi = tg(\pi x/d), \quad \eta = tg(\pi t/d), \quad \alpha = tg(\pi a/d),$$

СІР (6) з ядром Гільберта трансформуємо у СІР з ядром Коші

$$2 \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{h'(\eta) d\eta}{\eta - \xi} = \frac{dK(P^\infty - P_1)}{1 + \xi^2}, \quad \xi \in [-\alpha, \alpha]. \quad (8)$$

У зв'язку з наявністю на межі основи куткових точок шукатимемо необмежений у точках $\xi = \pm\alpha$ розв'язок рівняння (8), який з урахуванням першої з умов (7) має вигляд:

$$h'(\xi) = \frac{Kd(P^\infty - P_1)}{2\pi} \frac{\xi\sqrt{\alpha^2 + 1}}{(1 + \xi^2)\sqrt{\alpha^2 - \xi^2}}. \quad (9)$$

Проінтегрувавши функцію (9) з використанням другої з умов (7), отримаємо:

$$h(\xi) = -\frac{Kd(P^\infty - P_1)}{2\pi} \operatorname{arctg} \left(\frac{\sqrt{\alpha^2 - \xi^2}}{\sqrt{\alpha^2 + 1}} \right) + A.$$

Підставивши функцію $h(\xi)$ у вираз для об'єму зазорів ($V = \frac{ld}{\pi} \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{h(\xi)}{1 + \xi^2} d\xi$, де $l = 1$ м), отримаємо:

$$V = -\frac{Kd^2(P^\infty - P_1)}{4\pi} \ln(\alpha^2 + 1) + 2dA \operatorname{arctg}(\alpha)/\pi. \quad (10)$$

Враховувавши співвідношення (10) у рівнянні (1), знайдемо тиск газу:

$$P_1 = \frac{1}{2} \left[P^\infty - \frac{8A \operatorname{arctg}(\alpha)}{d \ln(\alpha^2 + 1)} + \frac{\sqrt{D}}{K} \right], \quad (11)$$

$$\text{де } D = \left(\frac{8A \operatorname{arctg}(\alpha)}{d \ln(\alpha^2 + 1)} - KP^\infty \right)^2 + \frac{16\pi m KRT}{\mu d^2 \ln(\alpha^2 + 1)}.$$

З подань (5) і (9) визначаємо контактний тиск $P(x) = -\sigma_{yy}(x, 0)$:

$$P(x) = \frac{\xi\sqrt{\alpha^2 + 1}}{\sqrt{\xi^2 - \alpha^2}} KP^\infty + \left[1 - \frac{\xi\sqrt{\alpha^2 + 1}}{\sqrt{\xi^2 - \alpha^2}} \right] KP_1. \quad (12)$$

Через висоту міжконтактних зазорів $h(x)$ визначаємо важливі для інженерних розрахунків контактної взаємодії тіл з регулярним рельєфом ефективні контактні параметри - контактне

зближення тіл [6] $\Delta v^\infty = \frac{1}{d} \int_{-d/2}^{d/2} (-r(x) - h(x)) dx$

та контактну податливість [6] $k^* = d(\Delta v^\infty)/dP^\infty$.

4. Результати розрахунків та їх аналіз

Розрахунки проведені для безрозмірних величин: півдовжини зазору $\tilde{a} = a/d$, навантаження на нескінченності $\tilde{P}^\infty = KP^\infty$, тиску газу $\tilde{P}_1 = KP_1$, маси газу $\tilde{m} = mKRT/(\mu d^3)$, висоти виїмок $\tilde{A} = A/d$, контактного зближення $\Delta \tilde{v}^\infty = \Delta v^\infty/d$, контактної податливості $\tilde{k}^* = d(\Delta \tilde{v}^\infty)/d\tilde{P}^\infty$ за фіксованих півдовжини і висоти виїмок $\tilde{a} = 0.25$ і $\tilde{A} = 0.001$.

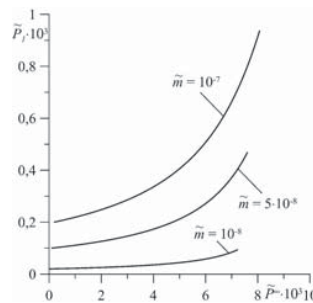


Рис. 2. Тиск газу

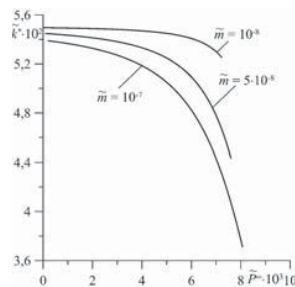


Рис. 3. Контактна податливість

На рис. 2 і рис. 3 зображено залежності тиску газу $\tilde{P}_1$ і контактної податливості $\tilde{k}^*$ від навантаження $\tilde{P}^\infty$ для різної маси $\tilde{m}$ заповнювача одного зазору. Бачимо, що зі збільшенням навантаження і маси газу тиск газу збільшується, а контактна податливість зменшується.

На рис. 4 показані графіки розподілу контактного тиску за різної маси заповнювача

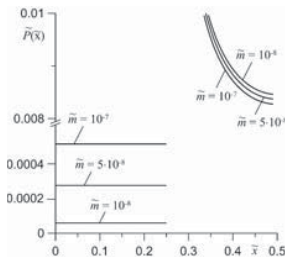


Рис. 4. Контактний тиск

при навантаженні $\tilde{P}^\infty = 0.006$. Горизонтальні лінії відповідають тиску газу в зазорі. На краях виїмки контактний тиск прямус до нескінченності, а при віддаленні від неї – монотонно спадає, набуваючи локального мінімуму в точках ± 0.5 , що ділять навпіл ділянки між виїмками. Зі збільшенням маси газу його тиск в зазорі зростає, а контактний тиск тіл поза ним – спадає.

Список використаних джерел

1. Kit G. S. The effect of a fluid in the contact gap on the stress state of conjugate bodies / G. S. Kit, R. M. Martynyak, I. M. Machishin // *Int. Appl. Mech.* – 2003. – Vol. 39, № 3. – P. 292–299.
2. Martynyak R. M. Contact of elastic half-spaces in the presence of an elliptic gap filled with liquid / R. M. Martynyak, B. S. Slobodyan. // *Mater. Sci.* – 2009. – Vol. 45, № 1. – P. 66–71.
3. Block J. M. Periodic contact problems in plane elasticity / J. M. Block, L. M. Keer // *J. Mech. Mater. Struct.* – 2008. – Vol. 3, № 7. – P. 1207–1237.
4. Goryacheva I. G. Contact problems for textured surfaces involving frictional effects / I. G. Goryacheva, R. M. Martynyak // *Proc. Inst. Mech. Eng., Part J: J. Eng. Tribol.* – 2014. – Vol. 228, № 7. – P. 707–716.
5. Kuznetsov Ye. A. Effect of fluid lubricant on the contact characteristics of rough elastic bodies in compression / Ye. A. Kuznetsov // *Wear.* – 1985. – Vol. 102, № 3. – P. 177–194.
6. Козачок О. П. Взаимодействие упругих тел с периодическим рельефом при наличии жидкостных мостиков в межконтактных зазорах / О. П. Козачок, Б. С. Слободян, Р. М. Мартыняк // *Теоретическая и прикладная механика.* – 2013. – Т. 7, № 53. – С. 45–52.

5. Висновки

Досліджено контактну взаємодію пружного тіла та жорсткої основи, межа якої має періодичну систему прямокутних мілких виїмок, коли міжконтактні зазори заповнені ідеальним газом. Тиск газу невідомий та змінюється разом з навантаженням. Сформульовану контактну задачу зведено до сингулярного інтегрального рівняння з ядром Коші відносно похідної від висоти міжконтактного зазору та трансцендентного рівняння відносно тиску газу в зазорах. На основі отриманого розв'язку досліджено залежності контактних параметрів від прикладеного навантаження і маси газу. Виявлено, що зі збільшенням навантаження та кількості газу в зазорах тиск газу зростає, а контактна податливість тіл зменшується. Водночас, контактний тиск спадає, якщо маса газу в зазорах збільшується.

References

1. KIT, G. S., MARTYNYAK, R. M. & MACHISHIN, I. M. (2003) The effect of a fluid in the contact gap on the stress state of conjugate bodies. *Int. Appl. Mech.* 39 (3). p. 292–299.
2. MARTYNYAK, R. M. & SLOBODYAN, B. S. (2009) Contact of elastic half-spaces in the presence of an elliptic gap filled with liquid. *Mater. Sci.* 45 (1). p. 66–71.
3. BLOCK, J. M. & KEER, L. M. (2008) Periodic contact problems in plane elasticity. *J. Mech. Mater. Struct.* 3 (7). p. 1207–1237.
4. GORYACHEVA, I. G. & MARTYNYAK, R. M. (2014) Contact problems for textured surfaces involving frictional effects. *Proc. Inst. Mech. Eng., Part J: J. Eng. Tribol.* 228 (7). p. 707–716.
5. KUZNETSOV, Ye. A. (1985) Effect of fluid lubricant on the contact characteristics of rough elastic bodies in compression. *Wear.* 102 (3). p. 177–194.
6. KOZACHOK, O. P., SLOBODYAN, B. S. & MARTYNYAK, R. M. (2013) Vzaimodeystvie uprugikh tel s periodicheskim relefom pri nalichii zhidkostnykh mostikov v mezhkontaktnykh zazorakh. *Teoreticheskaya i Prikladnaya Mekhanika.* 7 (53). p. 45–52.

Надійшла до редколегії 25.09.15

УДК 539.3

Колодій Ю. О.¹, к. ф.-м. н., м. н. с.,
Турчин І. М.², к. ф.-м. н., доц.,
Хома В. В.¹, аспірант

**Змішана нестационарна задача
теплопроводності для півбесконечної
плити з двостороннім покриттям**

¹Львівський національний університет імені
Івана Франка, 79000, м. Львів, вул.
Університетська, 1

²Інститут прикладних проблем механіки і
математики ім. Я. С. Підстригача НАН
України, 79060, м. Львів, вул. Наукова, 3-б
e-mail: ihorturchyn@gmail.com

Yu. O. Kolodij¹, Ph. D. (Phys.-Math.),
Jr. Sci. Researcher,
I. M. Turchyn², Ph. D. (Phys.-Math.), Assoc. Prof.,
V. V. Khoma¹, Postgraduate Student

**The mixed unsteady heat conduction problem
for a half-infinite plates with coatings**

¹Ivan Franko National University of L'viv, 79000,
L'viv, Universytetska str., 1

²Pidstryhach Institute of Applied Problems of
Mechanics and Mathematics of NAS of Ukraine,
79060, L'viv, Naukova str., 3-b
e-mail: ihorturchyn@gmail.com

Побудовано розв'язок нестационарної задачі теплопроводності для напівбесконечної неоднорідної плити зі змішаними умовами нагрівання: на частині покриття та на торці плити задано розподіл температури, а на іншій частині покриття теплообмін за законом Ньютона. Розв'язок одержано із використанням інтегрального перетворення Лагерра за часовою змінною та перетворення Фур'є за просторовою змінною. Змішані умови задовольняються шляхом зведення задачі до послідовності парних інтегральних рівнянь, розв'язок яких будується методом рядів Неймана. Обґрунтовується збіжність методу та числових процедур його реалізації.

Ключові слова: нестационарна теплопроводність, змішані крайові умови, поліноми Лагерра, парні інтегральні рівняння.

Analysis of temperature fields in bodies with coatings is important for many engineering applications. The account of actual operating conditions of these structures frequently leads to mixed heating condition. The steady heat conduction problem with mixed boundary conditions currently is sufficiently investigated. However, the corresponding non-stationary problem, despite its relevance, is poorly studied. This is due to mathematical difficulties that arise in application of the Laplace integral transform. The authors of this paper developed a new effective method of solutions derivation for mixed boundary-value unsteady heat conduction problems.

This paper considers the plate with a two-sided coating at the part of surface of which and in the end of plate the temperature distribution is known. Outside this area the heat transfer by Newton's law is performed. At the material interface of plate and coatings the conditions of a perfect thermal contact are satisfied. The initial temperature of a coating and a plate is equal to zero.

To the heat conductivity problem it is applied the Laguerre integral transformation in time variables and integral Fourier transformation in spatial variable. As a result, the triangular sequence of ordinary differential equations is obtained. The general solution of these sequences is obtained in the form of algebraic convolution. Taking into account the mixed boundary conditions leads to dual integral equations. For solution of this problem it is proposed the method of Neumann's series. By this method the problem is reduced to the infinite system of algebraic equations, for which the convergence of reduction procedure is proved. Finally, the unknown temperature is submitted as a series of Laguerre polynomials. The coefficient of these series is Fourier integrals.

The results of numerical analysis of temperature field made of aluminum alloy and ceramic coating is presented.

Key Words: Unsteady Heat Conduction Problem, Mixed Boundary Conditions, Laguerre Polynomials, Dual Integral Equations.

1. Вступ

Покриття, як засоби захисту деталей конструкцій від високих температур та агресивних середовищ широко використовуються в сучасній інженерній практиці [1]. Математичне моделювання процесу перенесення тепла в тілах з покриттями часто використовує певні спрощення, пов'язані із малою відносною товщиною покриття. При цьому вважається, що крайові умови є однотипними на всій граничній поверхні покриття. У випадку, коли математичне моделювання процесу нагрівання чи взаємодії елементу конструкції із зовнішнім середовищем вимагає виконання на поверхні покриття крайових умов різного роду вказаний підхід зреалізувати вкрай важко.

У випадках, коли елементи неоднорідного тіла не вдається описати за допомогою теорій пластин чи оболонок доводиться використовувати просторові постановки [2]. Проте при розв'язуванні нестационарних задач теплопровідності зі змішаними крайовими умовами з використанням методу інтегрального перетворення Лапласа дослідників чекають значні труднощі, пов'язані із розглядом так званих парних (дуальних) інтегральних рівнянь [3], які містять як незалежну змінну параметр перетворення за Лапласом.

Поряд із традиційними підходами до розв'язування квазістатичних задач термопружності неоднорідних тіл останнім часом одержав розвиток новий – метод поліномів Лагерра [4, 5]. Основною перевагою цього підходу є простота обертання – підсумовування ряду. Окрім того, при застосуванні методу поліномів Лагерра до класичних початково–крайових задач математичної фізики утворюються трикутні послідовності крайових задач, що дозволяє одразу записати їх загальний розв'язок і тим самим створити узагальнений алгоритм знаходження коефіцієнтів розкладу, у тому числі і для задач зі змішаними крайовими умовами [4].

2. Постановка задачі та її розв'язання

Розглянемо півбезмежну неоднорідну плиту, що складається з основи, товщини $2h_2$ та нанесених на її бічні сторони однакових покриттів товщини h_1 (рис. 1). З моменту часу $t=0$ плита миттєво занурюється на глибину L в середовище, що має сталу температуру T^* .

Нехтуючи процесом теплопровідності в середовищі та приповерхневими явищами в покритті та плиті, будемо вважати, що в результаті цього занурення на торцевих

поверхнях плити та покриттів та на частинах бічних поверхонь покриттів, що мають довжину L вважається заданим часовий розподіл температури $T^*(t)$. Зовні цих ділянок на поверхнях покриттів відбувається теплообмін за законом Ньютона

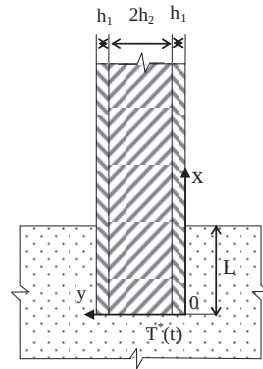


Рис. 1. Схема задачі

на із середовищем нульової температури. Вважається, що початкова температура плити та покриттів рівна нулю, а на поверхнях поділу матеріалів плити та покриттів виконуються умови ідеального теплового контакту.

Зважаючи на геометричну та фізичну симетрію задачі відносно осі $y = h_1 + h_2$ задачу теплопровідності сформулюємо наступним чином:

$$\partial_{\alpha\alpha}^2 T^{(i)} + \partial_{\gamma\gamma}^2 T^{(i)} = \tilde{a}_T^{(i)} \partial_{\tau} T^{(i)}, \quad i=1,2; \quad (1)$$

$$T^{(i)} = 0, \quad \tau = 0, \quad i=1,2; \quad (2)$$

$$T^{(i)} = T^*(\tau), \quad \alpha = 0, \quad i=1,2; \quad (3)$$

$$T^{(1)} = T^*(\tau), \quad \gamma = 0, \quad \alpha \leq 1; \quad (4)$$

$$\partial_{\gamma} T^{(1)} - Bi T^{(1)} = 0, \quad \gamma = 0, \quad \alpha > 1; \quad (5)$$

$$T^{(1)} = T^{(2)}, \quad \tilde{\lambda}_T^{(1)} \partial_{\gamma} T^{(1)} = \partial_{\gamma} T^{(2)}, \quad \gamma = \gamma_1; \quad (6)$$

$$\partial_{\gamma} T^{(2)} = 0, \quad \gamma = \gamma_2. \quad (7)$$

Тут $\alpha = x/L$, $\gamma = y/L$, $\tau = a_T^{(2)} t / L^2$, $\gamma_1 = h_1/L$, $\gamma_2 = (h_1 + h_2)/L$, $\tilde{a}_T^{(i)} = a_T^{(2)} / a_T^{(i)}$, $\tilde{\lambda}_T^{(i)} = \lambda_T^{(i)} / \lambda_T^{(2)}$, $q(\alpha, \tau) = Q(\alpha, \tau) d / \lambda_T^{(1)}$, $Bi = \kappa d / \lambda_T^{(1)}$, $\lambda_T^{(i)}, a_T^{(i)}$ – відповідно, коефіцієнти теплопровідності та температуропровідності покриття ($i=1$) та основи ($i=2$); κ – коефіцієнт тепловіддачі з поверхні покриття, $T^{(i)}(\alpha, \gamma, \tau)$, $i=1,2$ – температурне поле в покритті та основі.

До рівняння (1) застосуємо інтегральне перетворення Лагерра за змінною τ [4] та $\sin$ -перетворення Фур'є за змінною α [6]. В результаті, враховуючи нульові початкові умови та умови на торці (3) одержимо трикутну послідовність звичайних диференціальних рівнянь

$$d_{\gamma}^2 \bar{T}_n^{(i)} - (\xi^2 + \lambda \bar{a}_i) \bar{T}_n^{(i)} = \lambda \bar{a}_i \sum_{k=0}^{n-1} \bar{T}_k^{(i)} - \xi T_n^*, \quad (8)$$

$\bar{T}_n^{(i)}(\xi, \gamma) = \int_0^\infty \exp(-\lambda \tau) \left[\int_0^\infty T_n^{(i)}(\alpha, \gamma, \tau) \sin(\xi \alpha) d\alpha \right] \times$
 $\times L_n(\lambda \tau) d\tau$ – трансформанта за Лагерром та
Фур'є, $T_n^* = \int_0^\infty \exp(-\lambda \tau) T^*(\tau) L_n(\lambda \tau) d\tau$.

Аналогічно до результатів, одержаних в роботі [5], загальний розв'язок послідовностей (8) запишемо у вигляді

$$\bar{T}_n^{(i)}(\xi, \gamma) = \sum_{j=0}^n \left[A_{n-j}^{(i)}(\xi) G_j^{(i)}(\xi, \gamma) + \right. \\ \left. + B_{n-j}^{(i)}(\xi) W_j^{(i)}(\xi, \gamma) \right] + Q_n^{(i)}, \quad (9)$$

$$Q_n^{(i)} = \frac{\xi}{\omega_i^2} \left\{ T_n^* - \frac{\lambda \bar{a}_i^{(i)}}{\omega_i^2} \sum_{k=0}^{n-1} T_k^* \left(\frac{\xi^2}{\omega_i^2} \right)^{n-1-k} \right\}, \quad (10)$$

а $G_j^{(i)}(\xi, \gamma)$, $W_j^{(i)}(\xi, \gamma)$ – лінійно незалежні фундаментальні розв'язки, які мають вигляд

$$G_j^{(i)}(\xi, \gamma) = \exp(-\omega_i \gamma) \sum_{k=0}^j a_{j,k}^{(i)} \frac{(\omega_i \gamma)^k}{k!}, \\ W_j^{(i)}(\xi, \gamma) = \exp(\omega_i \gamma) \sum_{k=0}^j a_{j,k}^{(i)} \frac{(-\omega_i \gamma)^k}{k!}. \quad (11)$$

Тут введено позначення $\omega_i = \sqrt{\xi^2 + \lambda \bar{a}_i}$. Коефіцієнти $a_{j,k}^{(i)}$ одержуються із рекурентних рівнянь:

$$a_{j,k+1}^{(i)} = 0.5 \left(a_{j,k+2}^{(i)} - \frac{\lambda \bar{a}_i}{\omega_i^2} \sum_{m=k}^{j-1} a_{m,k}^{(i)} \right) \quad (12)$$

при довільних $a_{j,0}^{(i)}$ і $a_{j,k}^{(i)} \equiv 0$ при $k > j$. В подальших розрахунках покладемо $a_{0,0}^{(i)} = 1$, $a_{j,0}^{(i)} = 0$, $j \geq 1$, $i = 1, 2$.

Невідомі $A_n^{(i)}(\xi)$, $B_n^{(i)}(\xi)$, $A_n^{(2)}(\xi)$, $B_n^{(2)}(\xi)$ знайдемо з умов (4)–(7). Розглянемо спочатку змішані умови (4), (5), які після застосування

інтегрального перетворення Лагерра набудуть вигляду

$$T_n^{(1)} = T_n^*, \quad \alpha \leq 1; \quad \partial_\gamma T_n^{(1)} - \text{Bi} T_n^{(1)} = 0, \quad \alpha > 1. \quad (13)$$

Безпосереднє застосування $\sin$ -перетворення Фур'є до цих умов є неможливим, внаслідок їх різнорідності, тому поступимо традиційно для випадку змішаних умов – продовжимо другу умову (13) на всю вісь, увівши при цьому в розгляд невідому функцію $g_n(\alpha)$:

$$\partial_\gamma T_n^{(1)} - \text{Bi} T_n^{(1)} = \begin{cases} g_n(\alpha), & \alpha \leq 1; \\ 0, & \alpha > 1. \end{cases} \quad (14)$$

Умова (14) тепер задана на всьому проміжку зміни α і є однотипною, а тому після застосування до неї $\sin$ -перетворення Фур'є одержимо

$$\partial_\gamma \bar{T}_n^{(1)} - \text{Bi} \bar{T}_n^{(1)} = \bar{g}_n(\xi), \quad \gamma = 0, \quad (15)$$

де $\bar{g}_n(\xi) = \int_0^1 g_n(\alpha) \sin(\alpha \xi) d\alpha$.

Застосовуючи інтегральне перетворення Лагерра та $\sin$ -перетворення Фур'є до умов (6)–(7) одержимо

$$\bar{T}_n^{(1)} = \bar{T}_n^{(2)}, \quad \bar{\lambda}_i^{(1)} \partial_\gamma \bar{T}_n^{(1)} = \partial_\gamma \bar{T}_n^{(2)}, \quad \gamma = \gamma_1; \quad (16)$$

$$\partial \bar{T}_n^{(2)} = 0, \quad \gamma = \gamma_2. \quad (17)$$

Безпосередня підстановка розв'язків (9) в умови (15)–(17) після виділення в лівій частині лише невідомих з нижнім індексом n приводить до систем алгебричних рівнянь

$$\begin{pmatrix} -\omega_1 - \text{Bi} & \omega_1 - \text{Bi} & 0 & 0 \\ e^{-\omega_1 \gamma_1} & e^{\omega_1 \gamma_1} & -e^{-\omega_2 \gamma_1} & -e^{\omega_2 \gamma_1} \\ -\lambda \omega_1 e^{-\omega_1 \gamma_1} & \lambda \omega_1 e^{\omega_1 \gamma_1} & \omega_2 e^{-\omega_2 \gamma_1} & -\omega_2 e^{\omega_2 \gamma_1} \\ 0 & 0 & -\omega_2 e^{-\omega_2 \gamma_2} & \omega_2 e^{\omega_2 \gamma_2} \end{pmatrix} \times \\ \times \begin{pmatrix} A_n^{(1)} & A_n^{(2)} & B_n^{(1)} & B_n^{(2)} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} c_{1,n} & c_{2,n} & c_{3,n} & c_{4,n} \end{pmatrix}^T, \quad (18)$$

в яких права частина з ростом дискретної величини n поповнюється розв'язками, знайденими при її попередніх значеннях і має вигляд:

$$c_{1,n} = \bar{g}_n(\xi) + \text{Bi} Q_n^{(1)} - \\ - \sum_{j=1}^n \left[A_{n-j}^{(1)} \left(\bar{G}_j^{(1)}(0) - \text{Bi} G_j^{(1)}(0) \right) + \right. \\ \left. + B_{n-j}^{(1)} \left(\bar{W}_j^{(1)}(0) - \text{Bi} W_j^{(1)}(0) \right) \right];$$

$$\begin{aligned} c_{2,n} &= Q_n^{(2)} - Q_n^{(1)} + \\ &+ \sum_{j=1}^n \left[A_{n-j}^{(2)} G_j^{(2)}(\gamma_1) + B_{n-j}^{(2)} W_j^{(2)}(\gamma_1) - \right. \\ &\quad \left. - A_{n-j}^{(1)} G_j^{(1)}(\gamma_1) - B_{n-j}^{(1)} W_j^{(1)}(\gamma_1) \right]; \\ c_{3,n} &= \sum_{j=1}^n \left[A_{n-j}^{(2)} \tilde{G}_j^{(2)}(\gamma_1) + B_{n-j}^{(2)} \tilde{W}_j^{(2)}(\gamma_1) - \right. \\ &\quad \left. - \tilde{\lambda}_T^{(1)} A_{n-j}^{(1)} \tilde{G}_j^{(1)}(\gamma_1) - \tilde{\lambda}_T^{(1)} B_{n-j}^{(1)} \tilde{W}_j^{(1)}(\gamma_1) \right]; \\ c_{4,n} &= - \sum_{j=1}^n \left[A_{n-j}^{(2)} \tilde{G}_j^{(2)}(\gamma_2) + B_{n-j}^{(2)} \tilde{W}_j^{(2)}(\gamma_2) \right]. \end{aligned}$$

Із використанням методу Гауса, одержано рекурентний розв'язок систем (18) у який входить невідома функція $\bar{g}_n(\xi)$. Для її визначення повернемось до змішаних умов (13). Враховуючи подання (11) та формули обернення $\sin$ -перетворення Фур'є ці умови можна записати у вигляді послідовності парних інтегральних рівнянь

$$\begin{aligned} &\int_0^{\xi} \xi^{-1} \bar{g}_n(\xi) [1 + f(\xi)] \sin(\xi\alpha) d\xi = \\ &= -\frac{\pi}{2} T_n^* + \int_0^{\xi} F_n(\xi) \sin(\xi\alpha) d\xi, \quad 0 \leq \alpha \leq 1. \\ &\int_0^{\xi} \bar{g}_n(\xi) \sin(\xi\alpha) d\xi = 0, \quad \alpha > 1, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (19)$$

де $\bar{g}_n(\xi)$ - шукана функція, $f(\xi)$ та $F_n(\xi)$ - відомі.

Для побудови розв'язку послідовностей парних інтегральних рівнянь (18), (19) подамо шукану функцію $\bar{g}_n(\xi)$ у вигляді ряду Неймана [5]

$$\bar{g}_n(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{n,k} J_{2k+1}(\xi). \quad (21)$$

Безпосередньою підстановкою легко пересвідчитись, що рівняння (20) задовольняється тотожно при довільних коефіцієнтах $a_{n,k}$, а з рівняння (19) одержуємо послідовності безмежних систем лінійних алгебричних рівнянь

$$\bar{a}_{n,k} + \sum_{m=0}^{\infty} \bar{a}_{n,m} b_{m,k} = c_{n,k} \quad (22)$$

де

$$\begin{aligned} \bar{a}_{n,k} &= a_{n,k} (2k+1)^{-1/2}; \\ b_{m,k} &= 2\sqrt{2m+1}\sqrt{2k+1} \int_0^{\xi} \frac{f(\xi)}{\xi} J_{2m+1}(\xi) J_{2k+1}(\xi) d\xi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_{n,k} &= 2\sqrt{2k+1} \int_0^{\xi} \left[-\frac{\bar{T}_n^*(\xi)}{\sqrt{\xi}} + \frac{F_n(\xi)}{\xi} \right] J_{2k+1}(\xi) d\xi; \\ \bar{T}_n^*(\xi) &= T_n^* \frac{1 - \cos \xi}{\xi}. \end{aligned}$$

Використовуючи властивості рядів Неймана та розривних інтегралів Вебера – Шафхейтліна [7] можна встановити, що

$$\sum_{m,k=0}^{\infty} (b_{m,k})^2 < \infty, \quad \sum_{k=0}^{\infty} (c_{n,k})^2 < \infty. \quad (23)$$

В роботі [8] показано, що виконання умов (23) свідчить про квазірегулярність систем (22) і забезпечує збіжність числової процедури редукції.

Знаходження невідомих $\bar{a}_{n,k}$ з систем (23) завершує побудову розв'язку вихідної задачі теплопровідності. При цьому температурне поле в покритті та плиті розраховується за формулою

$$\begin{aligned} T^{(i)}(\alpha, \gamma, \tau) &= \frac{2\lambda}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} L_n(\lambda\tau) \times \\ &\times \int_0^{\xi} \bar{T}_n^{(i)}(\xi, \gamma) \sin(\xi\alpha) d\xi. \end{aligned} \quad (22)$$

При розрахунку інтегралів в розв'язку (22) для малих α виникають труднощі обчислювального характеру, пов'язані із нерегулярною збіжністю інтегралів типу

$$\int_0^{\xi} \frac{1 - \cos \xi}{\xi} \sin(\xi\alpha) d\xi = \frac{\pi}{2} S_+(1 - \alpha) \quad (23)$$

де $S_+(x)$ – функція Хевісайда.

Для усунення цієї проблеми частина розв'язку, пов'язана із інтегралами (23) виділяється, а розв'язок подається у вигляді

$$\begin{aligned} T^{(i)}(\alpha, \gamma, \tau) &= T^*(\tau) S_+(1 - \alpha) + \\ &+ \lambda \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} L_n(\lambda\tau) \int_0^{\xi} \left[\bar{T}_n^{(i)}(\xi, \gamma) - T_n^* \frac{1 - \cos \xi}{\xi} \right] d\xi. \end{aligned} \quad (24)$$

Як свідчать подальші числові експерименти, таке подання значно покращує практичну збіжність інтегралів, особливо на границі покриття $\gamma = 0$ та при малих значеннях α .

3. Числові результати

Числовий розрахунок температурного поля в плиті, виготовленій із алюмінієвого сплаву, з

покриттям із кераміки ($a_T^{(1)} = 1.19 \times 10^{-7}$ м/сек²;
 $\lambda_T^{(1)} = 36 \text{ Вт}/(\text{м} \cdot \text{К})$ $a_T^{(2)} = 9.06 \times 10^{-7}$ м/сек²;
 $\lambda_T^{(2)} = 2.22 \times 10^2 \text{ Вт}/(\text{м} \cdot \text{К})$ проведено у випадку,
коли температура частини поверхні покриття та
торця плити задається співвідношенням

$$T^*(\tau) = (1 - \exp(-\tau_0 \tau)) q^*,$$

де q^* – величина, що має розмірність темпера-
тури. Множник $1 - \exp(-\tau_0 \tau)$ в цій умові слугує
для її узгодження з нульовими початковими
умовами, а параметр τ_0 при цьому дає змогу
змінювати час виходу температури поверхні на
стаціонарне значення.

Було прийнято, крім того, що півтовщина
плити з покриттям рівна глибині занурення
композитного тіла ($h_1 + h_2 = L$), а відносна
товщина покриття $\gamma_1 = 0.1$.

На рис. 2 зображено процес виходу на стаціо-
нарне значення віднесеної до q^* температури в
двох точках поверхні поділу матеріалів покриття
та основи при різних рівнях інтенсивності
охладження поверхні поза ділянкою нагрівання.
Як видно з рисунку інтенсивність теплообміну із
зовнішнім середовищем суттєво впливає як на
кількісні характеристики температурного поля,
так і на час виходу температури на стаціонарне
значення.

На рис. 3 зображено розподіл теплового
потoku $\tilde{\lambda}_T^{(i)} \partial_\gamma T^{(i)} / q^*$ на поверхнях $\gamma = \text{const}$ під
час перехідного процесу в момент часу $\tau = 2$. Як

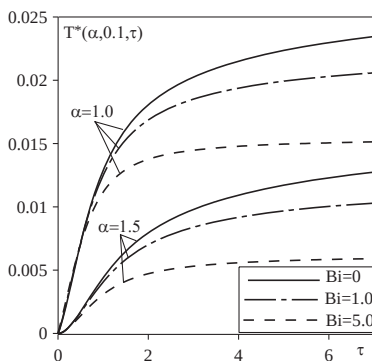


Рис. 2. Часовий розподіл температури на
поверхні $\gamma = \gamma_1$

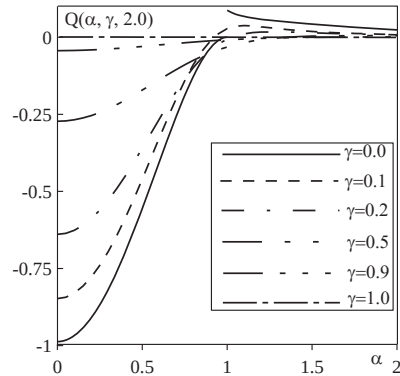


Рис. 3. Тепловий потік на різних поверхнях плити
та покриття під час перехідного періоду

слідє з рисунку, лінія розділу крайових умов є
лінією зміни знаку теплового потоку, а на
поверхні покриття тепловий потік терпить
розрив.

Наведені результати безумовно не претен-
дують на детальний аналіз температурного поля
в такому композиті і наводяться як числовий
експеримент, що слугує ілюстрацією числової
реалізації запропонованої методики.

4. Висновки

Розглянуто нестационарну задачу теплопровід-
ності для півбезмежного неоднорідного тіла, що
складається з трьох шарів, один з яких
вважається основою, а два інших – покриттями.
На торцевій поверхні неоднорідного тіла та на
частинах поверхонь покриття задана температура,
а на решті поверхні покриття – теплообмін за
законом Ньютона. Задача розв'язується із
використанням інтегрального перетворення
Лагерра за часовою змінною та перетворення
Фур'є за просторовою змінною. У вигляді
алгебричної згортки знайдено загальний роз-
в'язок послідовностей диференціальних рівнянь,
одержаних після застосування перетворень.
Після задоволення змішаних крайових умов та
умов ідеального теплового контакту складових
одержано послідовності парних інтегральних
рівнянь, розв'язок яких будується методом рядів
Неймана. Обґрунтовується квазірегулярність
безмежних систем лінійних алгебричних рівнянь,
до яких зводиться в кінцевому рахунку вихідна
задача. Остаточний розв'язок має вигляд рядів
за поліномами Лагерра із коефіцієнтами у вигляді
інтегралів Фур'є. Наводяться результати число-

вого експерименту. Запропонована методика побудови розв'язку змішаних нестационарних задач теплопровідності може застосовуватись також для інших комбінацій змішаних крайових умов та

використовуватись при розгляді відповідних квазістатичних задач термопружності.

Список використаних джерел

1. Tamarin Y. Protective Coatings for Turbine Blades / Y. Tamarin. – ASM Intern. – 2002. – 248 p.
2. Коляно Ю. М. Методы теплопроводности и термоупругости неоднородного тела / Ю. М. Коляно. – К.: Наук. думка, 1992. – 280 с.
3. Sneddon I. Mixed Boundary-Value Problems in Potential Theory / I. Sneddon. – Amsterdam: North-Holl. Publ. Comp., 1966. – 282 p.
4. Galazyuk V. A. Quasistatic thermal stress state of a layer with mixed heating conditions / V. A. Galazyuk, I. M. Turchin // Int. Appl. Mech. – 1998. – Vol. 34, № 9. – P. 886–893.
5. Turchin I. M. Nonstationary end heating of a multilayer semiinfinite plate / I. M. Turchin // Journ. of Eng. Physics and Thermoph. – 2012. – Vol. 85, № 6. – P. 1453–1462.
6. Sneddon I. Fourier Transforms / Sneddon I. – New York: McCraw-Hill Book Company, 1951. – 542 p.
7. Ватсон Г. Н. Теория бесселевых функций. Часть первая / Г. Н. Ватсон. – М.: Издательство иностранной литературы, 1949. – 798 с.
8. Канторович Л. В. Приближенные методы высшего анализа. / Л. В. Канторович., В. И. Крылов. – М.–Л.: Физматлит, 1962. – 708 с.
9. Taya M. Metal Matrix Composites – Thermomechanical Behavior / M. Taya, R. J. Arsenault. – New York: Pergamon Press, 1989. – 264 p.

References

1. TAMARIN, Y. (2002) *Protective Coatings for Turbine Blades*. ASM International
2. KOLYANO, Yu. M. (1992) *Metody Teploprovodnosti i Termouprugosti Neodnorodnogo Tela*. Kiev: Naukova Dumka.
3. SNEDDON, I. (1966) *Mixed Boundary-Value Problems in Potential Theory*. Amsterdam: North-Holland Publishers Company.
4. GALAZYUK, V. A. & TURCHIN, I. M. (1998) Quasistatic thermal stress state of a layer with mixed heating conditions. *Int. Appl. Mech.*. 34 (9). p. 886–893.
5. TURCHIN, I. M. (2012) Nonstationary end heating of a multilayer semiinfinite plate. *Journ. Eng. Physics Thermoph.* 85 (6). p. 1453–1462.
6. SNEDDON, I. (1951) *Fourie Transforms*. New York: McCraw-Hill Book Company.
7. WATSON, G. N. (1966) *A Treatise on the Theory of Bessel Functions*. 2nd. Ed. Cambridge University Press.
8. KANTOROVICH, L. V. & KRYLOV, V. I. (1962) *Priblizhennyye Metody Vysshego Analiza*. Moskwa–Leningrad: Fizmatlit.
9. TAYA, M. & ARSENAULT, R. J. (1989) *Metal Matrix Composites–Thermomechanical Behavior*. New York: Pergamon Press.

Надійшла до редколегії 30.09.15

УДК 532.595

Константинов О. В.¹, к. ф.-м. н.,
Семенова І. Ю.², к. ф.-м. н.

**Вплив узагальненої дисипації та сил
поверхневого натягу на нелінійну
динаміку системи «резервуар – рідина з
вільною поверхнею»**

¹Інститут математики НАН України, 01601,
м. Київ, вул. Терещенківська, 3
e-mail: akonst.im@mail.ru

²Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, проспект Акад.
Глушкова, 4-е
e-mail: is25@bigmir.net

O. V. Konstantinov¹, Ph. D. (Phys.-Math.),
I. Yu. Semenova², Ph. D. (Phys.-Math.)

**The influence of the generalized dissipation
forces and surface tension on the nonlinear
dynamics of the system «reservoir–liquid with
a free surface»**

¹Institute of mathematics of NAS of Ukraine, 01601,
Kyiv, Tereshchenkivska str., 3
e-mail: akonst.im@mail.ru

²Taras Shevchenko National University of Kyiv,
03680, Kyiv, Acad. Glushkov av., 4-e
e-mail: is25@bigmir.net

Розглянуто задачу про дослідження перехідних процесів в механічній системі «циліндричний резервуар – рідина з вільною поверхнею» при збудженні руху системи періодичною силою, прикладеною до резервуару. Рух системи відбувається в полі слабкої гравітації з урахуванням сил поверхневого натягу на вільній поверхні рідини. Додатково досліджується вплив узагальненої дисипації, яке може бути створена врахуванням в системі конструктивних демпферних елементів. Показано, що при відсутності узагальненої дисипації в системі вихід на ustalений режим не відбувається взагалі, а при наявності – спостерігається вихід на режим коливань, близьких до ustalеного, з однією частотною домінують.

Ключові слова: нелінійна динаміка, слабка гравітація, вільна поверхня рідини, узагальнена дисипація, вихід на ustalений режим.

The problem of transients in the mechanical system «cylindrical tank – liquid with a free surface» under excitation motion of a system with periodic forces applied to the tank is under consideration. The movement system is in a weak gravitational field, taking into account capillary forces on the free surface of the liquid. Additionally, the system is taking into account the generalized dissipation created by structural damping devices. Investigation is done on the basis of efficient nonlinear multimodal model, which considers combined motion of reservoir and free surface of the liquid. The movement system is excited in resonance, before resonance and after resonance ranges. Generalized dissipation factors in the equations of motion are calculated in G. N. Mikishev's known manner and satisfy the relevant criteria of similarity. It was shown that in case without the generalized dissipation mode of steady-state oscillation is not achieved. In case with the generalized dissipation it is possible failure of the regime, close to stationary mode of oscillations, which is containing two or three frequencies and one of them is dominant.

Key Words: Nonlinear Dynamics of Liquid, Weak Gravity, Free Surface of Liquid, Generalized Dissipation, Attainment on Stationary Mode.

1. Вступ

Розглядається нелінійна динаміка сумісного руху циліндричного резервуару та рідини, яка його частково заповнює. Резервуар здійснює поступальний рух в горизонтальному напрямку під дією періодичної сили. В роботі поставлено задачу дослідити особливості перехідних процесів в коливаннях вільної поверхні рідини з можливістю виходу на ustalений режим. В якості додаткових факторів, що впливають на розвиток нелінійних коливань в системі,

враховуються сили поверхневого натягу та узагальнена (штучна) дисипація. Вплив сил поверхневого натягу розглядається в умовах слабкої дисипації, коли прискорення поля гравітаційних сил менше наземного в 1000 разів.

Для вивчення задачі використано модель [1], яка була протестована на прикладі перехідних процесів для задач динаміки циліндричного резервуару з рідиною з вільною поверхнею при наявності кінематичного збурення або динамічного збудження руху. Використана

модель описує нелінійні коливання резервуару та вільної поверхні рідини з урахуванням їх взаємодії при утриманні в рівнянні вільної поверхні до 12 форм коливань. Узагальнена дисипація вводиться в модель відповідно до методики роботи [2] на основі припущення, що в системі присутні конструктивні демпфери, ефективна площа яких невелика. Оскільки в цьому разі розсіювання енергії коливань рідини буде слабким, демпфуючі властивості рідини будуть враховані інтегрально на основі визначення узагальненого коефіцієнту дисипації.

2. Дискретна модель механічної системи

Розглянемо задачу про коливання механічної системи «циліндричний резервуар та рідина з вільною поверхнею». Резервуар вважаємо абсолютно твердим тілом, який може рухатись поступально під дією активних зовнішніх сил. Рідину вважаємо ідеальною, нестисливою, однорідною, а її початковий рух – безвихровим.

На основі варіаційного принципу Гамільтона-Остроградського, методу модальної декомпозиції та методу [1], який дозволяє повністю виключити кінематичні граничні умови на вільній поверхні рідини, отримаємо дискретну модель механічної системи «резервуар – рідина з вільною поверхнею» відносно незалежних параметрів a_i – коефіцієнтів розкладу в ряд збурення вільної поверхні рідини ξ за формами коливань вільної поверхні ψ_i та ε_i – компонент вектора переміщення центру незбуреної вільної поверхні рідини

$$\sum_{n=1}^N p_{rn} \ddot{a}_n + \sum_{n=N+1}^{N+3} p_{rn} \ddot{\varepsilon}_{n-N} = q_r, \quad r = \overline{1, N+3},$$

де p_{rn} – квадратна матриця, q_r – вектор, який залежить від a_n , $\dot{a}_n$, ε_n , $\dot{\varepsilon}_n$ та вектору активних зовнішніх сил $\vec{F}$. Отримана дискретна модель описує динаміку сумісного руху системи «резервуар – рідина з вільною поверхнею» при різних видах кінематичного збурення та динамічного збудження вільної поверхні рідини.

3. Результати чисельних експериментів

Розглядається круговий циліндричний резервуар з вертикальною поздовжньою віссю Oz , який здійснює поступальні рухи в площині xOy . Резервуар радіусу $R = 0.3$ м та маси M_T частково заповнений рідиною з масою M_F до глибини $H=R$. При цьому в обчислювальних експериментах приймалося $M_T = 0,1M_F$, фізичні

постійні σ і ρ приймалися для води, значення контактного кута $\theta_1 = 75^\circ$, а для прискорення гравітаційних сил було прийняте значення $g = 0.001g_0$, де $g_0 = 9.81$ м/с² – прискорення вільного падіння на поверхні Землі.

Для випадку відсутності у системі дисипації було зроблене припущення, що рідина є ідеальною, а стінки резервуару – абсолютно гладкими. Однак в багатьох практичних застосуваннях необхідно враховувати в'язкість рідини або наявність конструктивних демпфуючих елементів (стрінгери, шпангоути, перегородки, сітки, шорсткість стінок резервуару) [2]. Для чисел Рейнольдса в діапазоні $10000 \leq Re \leq 50000$ (для даної системи число Рейнольдса $Re \approx 15000$) врахування в'язкості по суті може бути зведено до врахування розсіювання енергії в системі при коливаннях рідини. При цьому внаслідок слабого розсіювання енергії коливань рідини демпфуючі властивості рідини достатньо врахувати інтегрально шляхом визначення узагальнених характеристик, наприклад, логарифмічного декременту затухання.

Відомо, що на практиці розрізняють лінійну (в'язку) та нелінійну дисипацію. Лінійна дисипація обумовлена в цілому розсіюванням коливань рідини в тонкому примежовому шарі на стінках резервуару та характерно для резервуарів із гладкими стінками. Нелінійна дисипація з'являється при наявності конструктивних елементів. Обидва види дисипації в діапазоні $10000 \leq Re \leq 50000$ або з урахуванням малої площі конструктивних елементів можна звести до введення в дискретну модель системи узагальнених коефіцієнтів дисипації, тобто членів виду $\alpha_i^p \dot{a}_i$, припускаючи, що сила тертя пропорційна швидкості [2]. Для умов наземної гравітації значення отриманих коефіцієнтів є заниженими, тому для суттєвої дисипації коливань рідини на власних частотах їх необхідно збільшити в 8–30 разів [1].

Для випадку моделювання руху системи в умовах слабкої гравітації необхідно витримати критерії подібності. Відомо, що безрозмірним критерієм подібності, який відображає співвідношення між силами гравітації та силами в'язкості, є число Галілея $Ga = g\rho^3 R^3 / \eta^2 = gR^3 / \nu^2$, де η – динамічна в'язкість, а $\nu = \eta / \rho$ – кінематична в'язкість рідини. В умовах, коли прискорення поля гравітаційних сил менше від наземного в 1000 разів, виконання критерію

подібності вимагає зменшення кінематичної в'язкості ν і, відповідно, коефіцієнтів α_p^p в $\sqrt{1000} \approx 31.62$ рази. Однак в цьому разі внесок сил дисипації при значному зниженні абсолютних значень кінетичної та потенціальної енергії системи значно збільшиться, тому отримані значення коефіцієнтів, навпаки, є сильно завищеними. Тому за основу співставлення була прийнята подібність до швидкості виходу на усталений режим по амплітуді коливань в умовах слабкої гравітації. За даними обчислювальних експериментів коефіцієнти дисипації α_p^p були прийняті зменшеними в $3.11 \cdot 31.62 \approx 100$ раз.

До стінки резервуара прикладається горизонтальна сила, яка змінюється за гармонічним законом $F = F_0 \cos pt$, початкове збурення вільної поверхні рідини відсутнє.

Розглянемо нелінійні коливання вільної поверхні рідини, коли частота зовнішньої сили розташована в околі резонансу, тобто $p = 1.25\omega_1$, де ω_1 – частота першої антисиметричної форми. На рис. 1 наведено графік збурення амплітуди вільної поверхні рідини на стінці резервуару при відсутності дисипації, а на рис. 2 – при наявності узагальненої дисипації.

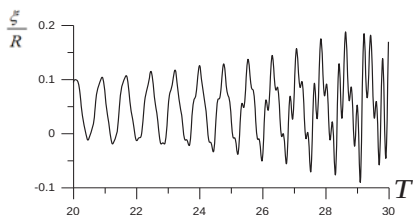


Рис. 1. Збурення вільної поверхні рідини у резонансному діапазоні при відсутності дисипації

Як видно з рис. 1, при відсутності дисипації коливання мають нерегулярний характер, в них присутні гармоніки вищих форм коливань, що відображається характерними зламами та зрізами на графіку (особливо починаючи з 25 періоду), наявна амплітудна модуляція, яка обумовлена близькістю власної частоти та частоти зовнішнього силового збудження. При наявності початкового викривлення незбуреної вільної поверхні рідини коливання відбуваються не в околі нуля, а в околі деякого позитивного рівня. В резонансному режимі збудження коливання амплітуда на стінці швидко зростає, при цьому верхня та нижня огинаючі не є дзеркальним відображенням одне одного, що є характерною

ознакою механізму прояву нелінійностей в системі – висота горба перевищує глибину западини. При внесенні в систему узагальненої дисипації, як видно з рис. 2, коливання вільної поверхні рідини виходять на умовно усталений режим – коливання відбуваються на декількох частотах, одна з яких є домінуючою.

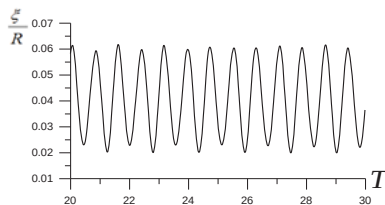


Рис. 2. Збурення вільної поверхні рідини у резонансному діапазоні при наявності дисипації

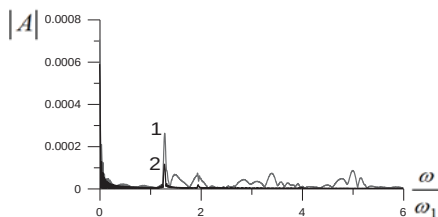


Рис. 3. Частотний спектр збурення вільної поверхні рідини у резонансному діапазоні

Ці висновки, отримані із аналізу графіків на рис. 1 та 2, підтверджуються результатами аналізу частотного спектра збурення вільної поверхні рідини (рис. 3: 1 – відсутність дисипації, 2 – наявність дисипації).

При відсутності дисипації спектр збурення містить гармоніки вищих форм коливань, взаємодія між якими і призводить до нерегулярного процесу коливань та унеможливує вихід коливань на усталений режим. За наявності дисипації коливання вільної поверхні після завершення перехідних процесів виходять практично на усталений режим. Як видно з частотного спектру (рис. 3, графік 2), домінуючою є гармоніка на частоті зовнішнього збурення, всі інші гармоніки мають суттєво менші амплітуди, тому коливання дуже близькі до одночастотних (усталеного режиму).

Розглянемо нелінійні коливання вільної поверхні рідини, коли частота зовнішньої сили розташована в зарезонансній зоні, тобто коли частота зовнішнього збудження дорівнює $p = 1.35\omega_1$ (рис. 4, 5).

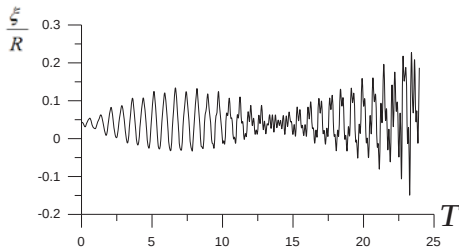


Рис. 4. Збурення вільної поверхні рідини у зарезонансному діапазоні при відсутності дисипації

Для зарезонансного діапазону коливань при відсутності дисипації характерний режим амплітудної модуляції, обумовлений близькістю власної частоти та частоти зовнішнього збудження. Глибина амплітудної модуляції велика, оскільки в системі спостерігається явище антирезонансу (на 13 періоді), коли коливання вільної поверхні рідини дуже малі $\xi(R) \approx 0.02R$.

При цьому дуже яскраво проявляється вплив гармонік вищих форм коливань у вигляді зрізів та зламів. При наявності дисипації після завершення перехідного процесу система виходить на режим, в якому спостерігаються декілька частот, одна з яких є домінуючою (оскільки амплітудна модуляція, хоч і незначна, але присутня). Цей режим можна умовно назвати близьким до усталеного. В дорезонансному режимі збудження руху при $p=1.10$, в системі відбуваються процеси, аналогічні до зарезонансного режиму, але, звичайно, з іншими часотними домінантами.

Список використаних джерел

1. Лимарченко О. С. Нелинейная динамика конструкций с жидкостью. / О. С. Лимарченко, В. В. Ясинский. – Киев: Национальный технический университет Украины «КПИ». – 1997. – 348 с.
2. Микишев Г. Н. Экспериментальные методы в динамике космических аппаратов / Г. Н. Микишев. – Москва: Машиностроение, 1971. – 536 с.

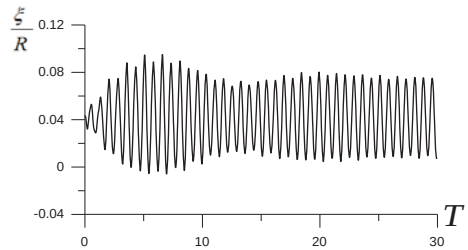


Рис. 5. Збурення вільної поверхні рідини у зарезонансному діапазоні при наявності дисипації

4. Висновки

Розглянуто задачу про дослідження перехідних процесів в механічній системі «циліндричний резервуар – рідина з вільною поверхнею» при збудженні руху системи періодичною силою, прикладеною до резервуару. Рух системи відбувається в полі слабкої гравітації з урахуванням сил поверхневого натягу на вільній поверхні рідини та узагальненої дисипації, яке може бути створено врахуванням в системі конструктивних демпферних елементів. Досліджено рух системи в резонансному, дорезонансному та зарезонансному діапазонах збудження. Показано, що при відсутності узагальненої дисипації в системі вихід на усталений режим не відбувається взагалі, а при наявності спостерігається вихід на режим коливань, близьких до усталеного, з однією частотною домінантою.

References

1. LIMARCHENKO, O. S., YASINSKY V. V. (1997) *Nelineynaya Dinamika Konstrukciy s Gidkosti*. Kiev: KPI.
2. MIKISHEV, G. N. (1971) *Eksperimentalnye Metody v Dinamike Kosmicheskikh Apparatov*. Moskva: Mashinostroenie.

Надійшла до редколегії 29.09.15

УДК 539.595

Крамаренко Ю. О., аспірант,
Лимарченко О. С., д. т. н., професор,
Семенович К. О., аспірант

Роль фактора сумісності руху рідини з вільною поверхнею при різних способах закріплення резервуару

Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 83000, м. Київ, проспект
Акад. Глушкова, 4-е
e-mail: kateryna.semenovych@gmail.com,
olelim2010@yahoo.com

Yu. O. Kramarenko, Postgraduate Student,
O. S. Limarchenko, Dr. Sci. (Tech.), Prof.,
K. O. Semenovych, Postgraduate Student

Role of combined character of motion of free- surfaced liquid for different ways of fixing of reservoir

Taras Shevchenko National University of Kyiv,
83000, Kyiv, Acad. Glushkova av., 4-e
e-mail: kateryna.semenovych@gmail.com,
olelim2010@yahoo.com

Розглянуто внесок механізмів прояву сумісності руху рідини з вільною поверхнею і резервуару. Особливо досліджено випадки поступального руху резервуару і резервуару на маятниковому підвісі. Показано, що при вібраційному збудженні руху відбувається суттєва зміна власних частот в системі в порівнянні з розташуванням парціальних частот і навіть зміна черговості різних форм коливань при їх розташуванні за зростанням частот. Наведено числові приклади поведінки системи при вібраційному збудженні руху в околі парціальних і власних частот. Показано, що амплітуди коливань вільної поверхні можуть відрізнятися в 8–10 разів, а характер розвинення нелінійних механізмів також суттєво відрізняється.

Ключові слова: нелінійна динаміка рідини, вільна поверхня рідини, сумісний характер руху рідини і резервуара, числовий приклад.

Contribution of mechanisms of manifestation of combined character of motion of free-surfaced liquid and reservoir is under consideration. Cases of translational motion of reservoir and motion of reservoir on pendulum suspension are considered separately. Modeling of liquid motion is done on the basis of nonlinear model of combined motion of liquid with reservoir, which is based on simultaneous application of problem formulation, done on the basis of the Hamilton variational principle and direct methods of mathematical physics with preliminary elimination of all kinematical boundary conditions. It was shown that on vibrational excitation of motion considerable variation of normal frequencies in comparison with distribution of partial frequencies occurs and even change of arrangement of different normal modes of oscillations on their arrangement in ascending order of frequencies. Numerical examples of system behavior on vibrational excitation of motion in a vicinity of partial and normal frequencies are given. It was shown that amplitudes of elevations of a liquid free surface can differ 8-10 times, and character of development of nonlinear mechanisms is also considerably different.

Key Words: Nonlinear Liquid Dynamics, Liquid Free Surface, Joint Motion of Liquid and Reservoir, Numerical Example.

1. Вступ

Переважно дослідження в динаміці резервуарів з рідиною проводяться для задач, коли резервуар або нерухомий, або рухається за заданим законом [1]. Тому постає питання щодо дослідження ролі сумісного характеру руху компонентів системи «рухомий резервуар – рідина з вільною поверхнею». Додаткова увага до цієї проблеми викликана також новими аналітичними і експериментальними дослідженнями, які показали, що на відміну від досліджень,

виконаних на основі постановок задач із заданим рухом резервуара, усталений характер руху рідини з вільною поверхнею не спостерігається [2, 3]. Проте теоретичні дослідження в рамках сумісної постановки задачі про рух резервуара з рідиною добре узгоджуються з цими експериментами [4, 5]. Ставиться задача дослідити поглиблено природу відмінностей між випадками урахування сумісного руху компонентів системи і випадком, коли сумісним характером руху рідини і резервуара нехтують.

Дослідження дозволили встановити основні напрямки цих відмінностей.

1. Сумісний рух твердого резервуара з рідиною з вільною поверхнею призводить до суттєвих відмінностей між парціальними і власними частотами коливань рідини з вільною поверхнею. Ці відмінності для найбільш поширених практичних випадків досягають 35% для поступального руху і 75% для кутового руху резервуара. Тому діапазони прояву резонансів суттєво змінюються в порівнянні з випадком заданого руху резервуара. Більше того, для кутового руху системи розміщення форм коливань по мірі зростання частот може також змінитися.

2. Декілька нових типів внутрішніх резонансів може проявитися при маятниковому закріпленні резервуару для заданих співвідношень мас рідини і резервуару і довжин маятникового підвісу.

3. Дослідження групи тестових прикладів динаміки резервуара з рідиною показало, що внутрішні нелінійні механізми перерозподілу енергії між формами коливань проявляються порівняно для випадків сумісного і заданого рухів резервуара. Переважно це обумовлене іншим співвідношенням між власними частотами. Також спостерігається більш суттєвий внесок вищих гармонік спектру. Застосування для моделювання задачі несумісної і сумісної постановки задач може призвести до відмінностей в амплітудах коливань 10–20 разів. Це в підсумку призводить до відсутності усталених режимів руху вільної поверхні рідини при вібраційному збудженні.

2. Зміна розподілу частот

Розглянемо тепер в лінеаризованій постановці задачу про сумісний рух системи резервуар – рідина з вільною поверхнею з врахуванням лише однієї форми коливань [4] (тут a_1 – амплітуда збурення першої антисиметричної форми коливань, ε – параметр поступального руху резервуара, α_2 – параметр кутового руху резервуара, решта позначень взяті згідно [4] і представляють собою або фізичні параметри резервуару, або квадратури від форм коливань рідини). При цьому ε відповідає коливанням по вісі Ox , а α_2 відповідно поворотам відносно вісі Oy .

$$\ddot{a}_1 + \frac{1}{\alpha_1^v} B_1^1 \ddot{\varepsilon} + \frac{1}{2\alpha_1^v} E_{11}^{1*} \ddot{\alpha}_2 + \Omega_1^2 a_1 = 0;$$

$$\begin{aligned} & \frac{\rho B_1^1}{M_r + M_l} \ddot{a}_1 + \ddot{\varepsilon} + \frac{\rho F_2^1}{M_r + M_l} \ddot{\alpha}_2 = 0; \\ & \ddot{a}_1 E_{21}^{1*} + 2F_2^1 \ddot{\varepsilon} + 2 \left(\frac{1}{\rho} I_{res}^{11} + E_{11}^{1*} \right) \ddot{\alpha}_2 + \\ & + \frac{2g}{\rho} (M_r h_r + M_l h_l) \alpha_2 = 0. \end{aligned} \quad (1)$$

З системи рівнянь (1) можна визначити парціальні частоти

$$\begin{aligned} \omega_a^p &= \Omega_1 = \sqrt{\frac{\kappa_1 g}{R} \tanh\left(\frac{\kappa_1 H}{R}\right)}; \quad \omega_\varepsilon^p = 0; \\ \omega_a^p &= \sqrt{g \frac{M_r h_r + M_l h_l}{I_{res}^{11} + \rho E_{11}^{1*}}}. \end{aligned} \quad (2)$$

Власні частоти для випадку лише поступального руху резервуару будуть

$$\omega_a^N = \frac{\omega_a^p}{\sqrt{1 - \frac{\rho (B_1^1)^2}{M_r + M_l}}}; \quad \omega_\varepsilon^N = 0. \quad (3)$$

В загальному випадку взаємне розташування власних ω^N і парціальних ω^p частот підкоряється такій вимозі:

$$\omega_1^N \leq \omega_1^p < \omega_2^p \leq \omega_2^N. \quad (4)$$

Виходячи із співвідношення (3), яке узгоджується з (4), власна частота коливань рідини буде більшою за парціальну. Для практично важливого випадку, коли маса рідини перевершує масу резервуара в 5 разів, частота зростає на 33%, що значно змінює діапазон прояву резонансу.

У випадку руху резервуару на маятниковому підвісі ця різниця стає ще більш помітною. При вказаному вище співвідношенні мас відміна в частотах складає вже біля 75%. Проте більш важливим є те, що лише частоти, що відповідають окружному номеру $m=1$ зазнають зміни при зміні довжини підвісу. Решта частот залишаються незмінними і збігаються з парціальними. Тому, з одного боку, через зміну співвідношення власних і парціальних частот (що відповідають моделі з заданим рухом резервуара) слід очікувати зміни в прояві нелінійних властивостей системи. З другого боку, на деяких довжинах

підвісу резервуара може бути збіг власних частот, які відповідають різним окружним номерам. Загальну ситуацію із зміною частот при різних довжинах маятникового підвісу підвісу показано на рис. 1.

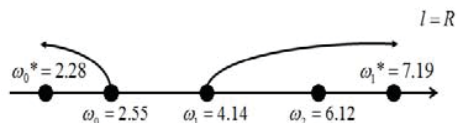


Рис. 1. Зміна частот для різних довжин підвісу

Парціальні частоти, що відповідають коливанням фізичного маятника (2.55) і коливанням рідини за першою антисиметричною формою (4.14) для випадку зв'язаного руху стають рівними 2.26 і 7.19. При цьому власна частота коливань за першою антисиметричною формою на відміну від випадку розташування парціальних частот стає більшою за частоти, які відповідають окружним номерам $m=2$ і $m=0$. Тобто перша антисиметрична форма в разі розташування форм за зростанням частот стає вже третьою, на відміну від випадку заданого руху резервуара, де ця форма є першою. Тому слід очікувати менш гострого прояву резонансних властивостей при розвиненні коливань за цією формою. Відмітимо також, що для довжини підвісу $l = 3.08R$, де R – радіус циліндричного резервуару, частоти коливань окружними номерами $m=1$ і $m=0$ збігаються, тобто в системі буде спостерігатися внутрішній резонанс. Подібні резонанси спостерігаються також і для інших окружних номерів. Проведення чисельного моделювання підтвердило прояв знайдених внутрішніх резонансів.

3. Чисельне моделювання

На основі нелінійної моделі, яка враховує 12 форм коливань рідини [4] було досліджено задачу про коливання резервуара з рідиною на маятниковому підвісі при заданому кутовому русі резервуара $\alpha = \alpha_0 \sin pt$ і в сумісній постановці під дією моменту $M = M_0 \sin pt$. При цьому для порівняння двох постановок задач амплітуда моменту приймалася рівною силі інерції, яка виникає при заданому кутовому русі системи $M_0 = -p^2 \alpha_0 (I_{res}^{11} + \rho E_{11}^2)$. Тобто в першому варіанті розглядається система при кінематичному збудженні, а в другому – при динамічному збудженні. Чисельно розглядалися два випадки,

коли частота збурення приймалася рівною парціальній (рис. 2) і власній (рис. 3) частотам коливань вільної поверхні рідини за першою антисиметричною формою. В обох випадках розглядався рух системи на маятниковому підвісі довжиною $l = R$. В початковий момент часу система знаходилася в стані спокою. Порівняння випадків заданого і сумісного руху резервуара з рідиною свідчить про значні відмінності в розв'язках як за амплітудами відхилень вільної поверхні рідини, так і по характеру збігу коливань в часі. Наприклад, у випадку коливань системи в околі парціальної частоти відмінність по амплітудам досягає 15 разів, а у випадку коливань в околі власної частоти ця відмінність складає біля 5 разів. Помітно, що при динамічному збудженні вплив вищих гармонік більш помітний і характер розвинення коливань є більш складним.

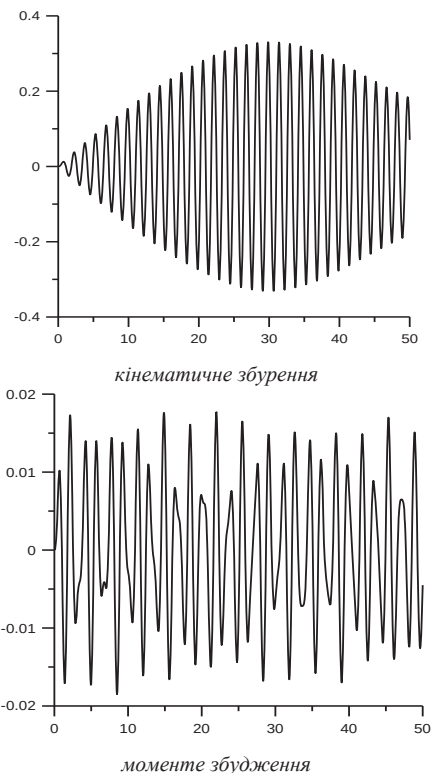


Рис. 3. Амплітуда коливань першої форми при збудженні системи в околі парціальної частоти 4.14

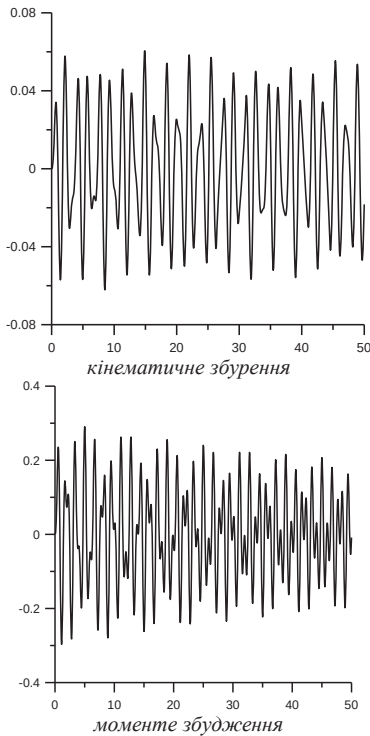


Рис. 4. Амплітуда коливань першої форми при збуренні системи в околі власної частоти 7.22

Список використаних джерел

1. Ibrahim R. Liquid sloshing dynamics: theory and applications / R. Ibrahim // Cambridge University Press, 2005. – 948 p.
2. Pal P. Sloshing of liquid in partially filled container – an experimental study / P. Pal // International Journal of Recent Trends in Engineering. – 2009. – Vol. 1. – P. 1–6.
3. Faltinsen O. Transient and steady-state amplitudes of resonant three-dimensional sloshing in a square base tank with a finite fluid depth / O. Faltinsen, O. Rognebakke, A. Timokha // Physics of fluids. – 2006. – Vol. 1. – P. 5–18.
4. Limarchenko O., Rotational motion of structures with tanks partially filled by liquid. / O. Limarchenko, G. Matarazzo, V. Yasinsky // Kyiv: «FADA LTD», 2003. – 286 p.

4. Висновки

На основі розвиненої аналітичної моделі проаналізовано відмінності в описі руху системи для моделі вібраційного збудження коливань в рамках моделей заданого і сумісного руху резервуару з рідиною. При розгляді кінематичного збурення і динамічного збудження руху резервуара з рідиною на маятниковому підвісі одержуються принципово різні по амплітудам і характеру зміни параметрів руху системи. В значній мірі ці відмінності обумовлені відмінністю частотних характеристик системи при врахуванні фактору сумісності руху системи. При русі системи в зв'язаному і заданому режимах по-різному відбувається прояв нелінійних механізмів взаємодії при різному описі механізмів взаємодії між різними формами руху складових частин системи. На основі проведеного дослідження можна стверджувати, що для задач динаміки резервуарів з рідиною модель сумісного руху дає результати, які узгоджуються з практикою, а модель заданого руху резервуара має суттєві вади.

References

1. IBRAHIM, R. (2005) *Liquid Sloshing Dynamics: Theory and Applications*. Cambridge University Press.
2. PAL, P. (2009) Sloshing of liquid in partially filled container – an experimental study. *International Journal of Recent Trends in Engineering*. 1. p. 1–6.
3. FALTINSEN, O., ROGNEBAKKE, O. & TIMOKHA, A. (2006) Transient and steady-state amplitudes of resonant three-dimensional sloshing in a square base tank with a finite fluid depth. *Physics of fluids*. 1. p. 5–18.
4. LIMARCHENKO, O, MATARAZZO, G. & YASINSKY, V. (2003) *Rotational Motion of Structures with Tanks Partially Filled by Liquid*. Kyiv: «FADA LTD».

Надійшла до редколегії 29.09.15

УДК 539.3

Кривий О. Ф.¹, д. ф.-м. н., проф.,
Морозов Ю. О.², к. ф.-м. н., доц.

**Кругова міжфазна тріщина в
кусково-однорідному трансверсально-
ізотропному просторі під дією
теплового потоку**

¹Одеська національна морська академія,
65029, м. Одеса, вул. Дідріхсона, 8
e-mail: krivoy-odessa@ukr.net,
krivvyi-od@math.onma.edu.ua

²Одеський національний політехнічний
університет, 65044, м. Одеса, пр-т. Шевченка, 1
e-mail: morozovyu@gmail.com

O. F. Kryvyi¹, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof.,
Yu. O. Morozov², Ph. D. (Phys.-Math.), Assoc. Prof.

**A circular interfacial crack in
a piecewise-homogeneous transversely
isotropic space under the influence of
a heat flow**

¹Odesa National Maritime Academy, 65029, Odessa,
Didrikhson str., 8
e-mail: krivoy-odessa@ukr.net,
krivvyi-od@math.onma.edu.ua

²Odesa National Polytechnic University, 65044,
Odessa, Shevchenko av., 1
e-mail: morozovyu@gmail.com

У просторі узагальнених функцій повільного зростання побудовано розривний розв'язок задачі стаціонарної термопружності для кусково-однорідного трансверсально-ізотропного простору у випадку довільного навантаження. Використовуючи побудований розривний розв'язок і властивості узагальнених функцій, отримані двовимірні сингулярні інтегральні співвідношення, які дозволяють зводити задачі про міжфазні дефекти в неоднорідному трансверсально-ізотропному просторі безпосередньо до систем двовимірних сингулярних інтегральних рівнянь (СІР) з ядрами, які виражаються через елементарні функції.

Побудовано в явному вигляді розв'язок задачі про кругову міжфазну тріщину в кусково-однорідному трансверсально-ізотропному просторі під дією силового та теплового навантаження.

Ключові слова: теплопровідність, кусково-однорідний трансверсально-ізотропний простір, міжфазний дефект, двовимірні сингулярні інтегральні рівняння.

In the space of generalized functions, it is constructed the discontinuous solution of the stationary thermoelasticity problem for a piecewise-homogeneous transversely isotropic space in the case of an arbitrary loading. Using the formed discontinuous solutions and the properties of generalized functions, it was obtained two-dimensional singular integral relations which bind jumps and the sum the components of the stress tensor and displacement vector, and the in temperature and heat flow and allowing to reduce the problem of interfacial defects arbitrary nature in an inhomogeneous transversely-isotropic space directly to the systems of two-dimensional singular integral equations (SIE) with kernels, which are expressed in terms of elementary functions.

The problem of circular crack by the action of stationary load and the heat flow, which is using the obtained integral relations, was reduced to a system of four two-dimensional singular equations relative to jumps of displacements and temperature. Passing to polar coordinates and applying the finite Fourier transform of the angular coordinate, the system of integral equations with kernels in the form of an Weber-Sonin integral, which, with the help of the Sonin transforming operators, is reduced to the aggregate one-dimensional systems of singular integral equations. The decision of the latter, received in an explicit form.

Key Words: Thermal Conductivity, Inhomogeneous Transversely Isotropic Space, Interphase Defect, Two-Dimensional Singular Integral Equations.

1. Вступ

Проблеми термопружності в кусково-однорідних тілах, що знаходяться під дією теплових навантажень, часто виникають в різних технічних задачах. Наявність границі з'єднання

матеріалів призводить до появи істотної неоднорідності як у розподілі температурних полів, так і полів напружень поблизу границі, а присутність різних тонких термоізованих або термоактивних тріщин (включень), на яких,

задані температура або тепловий потік, вносить додатковий внесок у цю неоднорідність (зумовлює зростання в їх околі температурних градієнтів і напружень).

Неоднорідність теплових полів породжує неоднорідність деформацій і напружень в кусково-однорідних матеріалах, що в свою чергу може бути причиною появи нових дефектів та поширення вже наявних.

Задачі термопружності для необмеженого та напівобмеженого простору при наявності дефектів розглядалися багатьма авторами. Що стосується задач для кусково-однорідних трансверсально-ізотропних середовищ, які містять міжфазні дефекти, то таких робіт істотно менше. Наприклад, в роботах [1–3] задача про монето-подібну тріщину в термопружному трансверсально-ізотропному просторі за допомогою фундаментального розв'язку [4], який подано через чотири квазігармонічні функції, зведена до інтегральних рівнянь.

В даній роботі побудовано в явному вигляді розв'язок задачі про кругову міжфазну тріщину в кусково-однорідному трансверсально-ізотропно-му просторі під дією теплового потоку.

2. Постановка задачі та її розв'язання

Нехай в площині $x_3 = 0$ з'єднання двох різних трансверсально-ізотропних просторів, які знаходяться під дією, заданого на нескінченності теплового потоку інтенсивності q_0 , міститься міжфазний дефект, що займає область Ω .

Розглянемо випадок міжфазної тріщини, до берегів якої прикладено довільне навантаження

$$v_k(x_1, y_1, \pm 0) = f_k^\pm(x_1, y_1), k = \overline{1, 3}, (x_1, y_1) \in \Omega$$

і виконуються умови неідеального теплового контакту між поверхнями дефекту:

$$\begin{aligned} \lambda^* \Delta \left(v_7^*|_{x_3=+0} - v_7^*|_{x_3=-0} \right) + 2 \left[v_8^*|_{x_3=-0} - v_8^*|_{x_3=+0} \right] &= 0, \\ -D \left(v_7^*|_{x_3=-0} - v_7^*|_{x_3=+0} \right) + 6 \left[v_8^*|_{x_3=-0} + v_8^*|_{x_3=+0} \right] &= 0, \end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned} \{v_k^\pm\}^8 &= \{v_k\}^8|_{z=\pm 0} \\ \mathbf{v} &= \{v_k(\mathbf{x})\}_{k=\overline{1,8}} = \{\sigma_3, \tau_{23}, \tau_{13}, u_1, u_2, u_3, T, q_3\} \\ v_k^*(\mathbf{x}) &= \tilde{v}_k(\mathbf{x}) + v_k(\mathbf{x}), k = \overline{7, 8} \end{aligned}$$

$\tilde{v}_k(\mathbf{x})$ – температура та тепловий потік в бездефектному складеному просторі;
 $v_k(\mathbf{x})$ – побудований, аналогічно роботам [5–12], розривний розв'язок.

Відносно невідомих стрибків переміщень і температури $\chi_k^-(x_1, x_2), (x_1, x_2) \in \Omega$ отримані двовимірні СІР:

$$\begin{aligned} q_{13} \sum_{k=4}^5 \partial_{k-3} \chi_k^-(\mathbf{x}) + q_{15} \chi_7^-(\mathbf{x}) - \frac{q_{14}}{2\pi} \nabla^2 \iint_{\Omega} \chi_6^-(\xi) \frac{1}{r_0} d\xi &= \\ = g_1(\mathbf{x}), \mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \Omega \\ q_{24} \partial_j \chi_6^-(\mathbf{x}) + \frac{1}{2\pi} \iint_{\Omega} \left\{ q_{23}^+ \chi_{6-j}^-(\xi) \partial_{12}^2 \frac{1}{r_0} + \chi_7^-(\xi) \partial_j \frac{q_{25}}{r_0} + \right. \\ \left. + \chi_{3+j}^-(\xi) \left[\frac{q_{23}}{r_0} - q_{23}^+ \partial_1^2 \frac{1}{r_0} \right] \right\} d\xi &= g_{j+1}(\mathbf{x}), j = \overline{1, 2} \\ \lambda^* \Delta \chi_7^-(\mathbf{x}) + \frac{q_{55}^0}{2^{-1}} \chi_8^-(\mathbf{x}) - \frac{\lambda^*}{2\pi} \Delta \iint_{\Omega} \chi_8^-(\xi) \frac{q_{55}^0}{r_0} d\xi &= 0, \\ D \chi_7^-(\mathbf{x}) + 6 q_{66}^0 \chi_8^-(\mathbf{x}) - \frac{q_{65}^0}{\pi} \iint_{\Omega} \chi_7^-(\xi) \frac{1}{r_0^3} d\xi &= 12 q_0. \end{aligned}$$

де

$$g_k(x, y), k = \overline{1, 4} - \text{відомі функції}, D = 12h^* - \lambda^* \Delta,$$

$$\partial_j \equiv \frac{\partial}{\partial x_j}, r_0 = |\mathbf{x} - \xi|, \chi_k^\pm = f_k^\pm \pm f_k^-, j, k = \overline{1, 3},$$

λ^* і h^* – коефіцієнти, які характеризують теплопровидність дефекту в подовжньому і поперечному напрямках.

Розглянемо випадок, коли до берегів тріщини прикладене стателе навантаження:

$$f_1^\pm(x_1, x_2) = -P_1, f_k^\pm(x_1, x_2) = P_k, k = \overline{2, 3}.$$

Вводячи комплексні комбінації переміщень $u^\pm = \chi_4^\pm + i\chi_5^\pm$ перепишемо систему наступним чином:

$$\begin{aligned} q_{13} \bar{D} u^-(\mathbf{x}) + q_{13} D \bar{u}^-(\mathbf{x}) - \frac{q_{14}}{\pi} D \bar{D} K [\chi_6^-] &= \\ = -2P_1 - q_{15} \chi_7^-(\mathbf{x}) \\ \frac{2\pi}{q_{24}^{-1}} D \chi_6^-(\mathbf{x}) + \tilde{q}_{23} D \bar{D} K [u^-] + \frac{q_{23}^+}{2} D^2 K [\bar{u}^-] &= \\ = 2P_2 - q_{25} D K [\chi_7^-] \\ 2\pi q_{24} \bar{D} \chi_6^-(\mathbf{x}) + \tilde{q}_{23} D \bar{D} K [\bar{u}^-] + q_{23}^+ 2^{-1} \bar{D}^2 K [u^-] &= \\ = 2P_3 - q_{25} \bar{D} K [\chi_7^-] \end{aligned} \quad (1)$$

$$q_{65}^0 D \bar{D} K [\chi_7^-] = 4\pi q_0,$$

де

$$D = \partial_1 + i\partial_2, \quad K[f] = \iint_{\Omega} \frac{f(\xi)}{r_0} d\xi,$$

$$r_0 = \sqrt{\omega\bar{\omega}}, \quad \omega = (x_1 - \xi_1) + i(x_2 - \xi_2).$$

Перейдемо в рівняннях (1) до циліндричної системи координат (ρ, φ, x_3) і введемо нові функції

$$\begin{aligned} v_2^\pm(r, \varphi) &= \tau_\pm^\pm(\rho, \varphi), \quad v_3^\pm(r, \varphi) = u_\pm^\pm(\rho, \varphi), \\ v_1^\pm(r, \varphi) &= \xi_{\pm 1}^\pm(r, \varphi), \quad v_4^\pm(r, \varphi) = \xi_{\pm 6}^\pm(r, \varphi), \\ v_5^\pm(r, \varphi) &= \xi_{\pm 7}^\pm(r, \varphi), \quad \tau_\pm^\pm = \zeta_3^\pm + i\zeta_2^\pm, u_\pm^\pm = \zeta_4^\pm + i\zeta_5^\pm \quad (2) \\ \{\zeta_k^\pm(\rho, \varphi)\}_{k=1,8} &= \\ &= \{\langle \sigma_3 \rangle^\pm, \langle \tau_\varphi \rangle^\pm, \langle \tau_\rho \rangle^\pm, \langle u_\rho \rangle^\pm, \langle u_\varphi \rangle^\pm, \langle u_3 \rangle^\pm, \langle T \rangle^\pm\}. \end{aligned}$$

Невідомі стрибки переміщень та температури на тріщині розшукуємо у вигляді:

$$\begin{aligned} v_k^\pm(\rho, \varphi) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} V_n^{k,\pm}(\rho) e^{in\varphi}, \\ V_n^{k,\pm}(\rho) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} v_k^\pm(\rho, \varphi) e^{-in\varphi} d\varphi, \quad k=1,2. \end{aligned} \quad (3)$$

Застосувавши до системи (1) скінченне перетворення Фур'є, після очевидних перетворень, знайдемо:

$$\begin{cases} -a_1 W_{n+1,n}^0 [U_n^{2,-}] + b_1 W_{n+1,n+1}^0 [U_n^{1,-}] = Q_n^1, \\ b_2 W_{n,n}^0 [U_n^{2,-}] - a_2 W_{n,n+1}^0 [U_n^{1,-}] = Q_n^2(r), \\ b_3 W_{n,n}^0 [U_n^{3,-}] = Q_n^3(r); \end{cases} \quad (4)$$

$$D_n W_{n,n}^0 [U_n^{5,-}] = \frac{2\pi q_0}{q_{65}^0} \delta_{0n}, \quad D_n = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{n^2}{r^2},$$

де

$$W_{kn}[f] = \int_0^a f(\zeta, \psi) W_{kn}^*(r, \zeta) \zeta d\zeta,$$

$$W_{kn}^*(r, \zeta) = \int_0^\infty J_k(tr) J_n(t\zeta) dt;$$

$$U_n^{k,-} = \tilde{V}_{n,k}^- + (-1)^k \tilde{V}_{k,-n}^-, \quad k=2,3,$$

$$U_n^{1,-} = \tilde{V}_n^{3,-}, \quad U_n^{5,-} = V_n^{5,-}, \quad Q_n^k(r) = \tilde{Q}_n^k(r) + \bar{Q}_n^k(r),$$

$$\tilde{V}_n^{3,-}(r) = r^{-n-1} [r^{n+1} V_n^{3,-}(r)]',$$

$$\tilde{V}_n^{4,-}(\rho) = \rho^n [r^{-n} V_n^{4,-}(\rho)]',$$

$$\tilde{Q}_n^1(r) = \pi q_{15}^0 W_{n+1,n}^0 [U_n^{5,-}], \quad \tilde{Q}_n^3 = -2i \operatorname{Im} c_n,$$

$$\tilde{Q}_n^2 = c_n r^n + \bar{c}_n \delta_{0n} - 2q_{25}^0 W_{n,n} [U_n^{5,-}], \quad a_1 = \pi q_{13},$$

$$b_1 = \pi^{-1} q_{14}, \quad a_2 = 8\pi q_{24}, \quad b_k = \tilde{q}_{23} + (-1)^k q_{23}^+, \quad k=2,3;$$

$$\tilde{Q}_n^k(r) - \text{визначені в [13].}$$

В силу лінійності задачі, розв'язок системи (4) має вигляд

$$U_n^{k,-} = \tilde{U}_n^{k,-} + \tilde{U}_n^{k,-}, \quad k=1,2,3, \quad (5)$$

де $\tilde{U}_n^{k,-}$ – отриманий в [13] розв'язок у випадку сталого навантаження, $\tilde{U}_n^{k,-}$ – розв'язок у випадку температурних навантажень, який буде побудовано нижче.

Розв'язок рівняння теплопровідності, отримаємо, використовуючи результати робіт [7, 8],

$$U_n^{5,-}(r) = \frac{4q_0}{q_{65}^0} \sqrt{a^2 - r^2} \delta_{0n}. \quad (6)$$

Введемо до розгляду такі оператори

$$\Pi_k[f] = r^{k-1} \mathfrak{I}_* [r^{2-k} f],$$

$$\Pi_k^*[f] = -2\pi^{-1} r^{k-3} \partial_r \mathfrak{I}_* [r^{2-k} f], \quad k=1,2;$$

$$\mathfrak{I}_*[f] = \int_r^a \frac{f(s) ds}{\sqrt{s^2 - r^2}}, \quad \mathfrak{I}_0[f] = \int_0^r \frac{f(s) ds}{\sqrt{r^2 - s^2}}, \quad (7)$$

$$S_1[f] = \partial_r \Pi_1 \int_0^r f(s) ds, \quad S_2[f] = \mathfrak{I}_0[rf].$$

Розглянемо спочатку систему (4) при $n=0$ і перейдемо до нових функцій

$$\eta_{10}^-(r) = \Pi_2 [\tilde{U}_0^{1,-}], \quad \eta_{k0}^-(r) = \Pi_1 [\tilde{U}_0^{k,-}],$$

$$\tilde{U}_0^{1,-}(r) = \pi^{-1} \Pi_2^* [\eta_{10}^-], \quad \tilde{U}_0^{k,-}(r) = \pi^{-1} \Pi_1^* [\eta_{k0}^-], \quad (8)$$

$$\eta_{10}^-(r) = -\eta_{10}^-(-r), \quad \eta_{k0}^-(r) = \eta_{k0}^-(-r), \quad k=2,3,5.$$

Для цього застосуємо до другого і третього рівнянню системи (4) оператор S_2 , а до першого оператор S_1 , і продовжимо невідомі функції на проміжок $(0, -a]$ відносно нових невідомих $\eta_k^-(r)$, $k=1,2,3$ отримаємо таку систему сингулярних інтегральних рівнянь:

$$\begin{cases} a_1 l_1 [\eta_{20}^-] + b_1 l_0 [\eta_{10}^-] = f_1(r), \\ b_2 l_0 [\eta_{20}^-] + a_2 l_1 [\eta_{10}^-] = f_2(r); \end{cases} \quad (9)$$

$$b_3 l_0 [\eta_{30}^-] = f_3(r), \quad (10)$$

де

$$l_0[f] = \int_{-a}^a f(t) \frac{\text{sign}(r-t) + \text{sign}(t)}{2} dt,$$

$$l_1[f] = \frac{1}{\pi} \int_{-a}^a f(t) \ln \left| \frac{t}{r-t} \right| dt,$$

$$f_1(r) = \pi q_{15} l_1 [\eta_{50}^-], \quad f_2(r) = -2q_{25} l_0 [\eta_{50}^-] + r 2 \text{Re} c_0, \\ f_3(r) = -r 2i \text{Im} c_0.$$

Для визначення комплексної змінної c_0 необхідно скористатися умовами

$$\int_{-a}^a \eta_{k0}^-(\rho) d\rho = 0, \quad k = 1, 2, 3. \quad (11)$$

Безпосередньо з рівняння (10) маємо

$$\eta_{30}^-(r) = \frac{1}{b_3} f_3'(r), \quad f_3'(r) = -2i \text{Im} c_0.$$

Скориставшись формулами (7), (8) отримаємо вираз для $\tilde{U}_n^{3-}(r)$

$$\tilde{U}_0^{3-}(r) = \frac{4i}{\pi} \text{Im} c_0 \frac{1}{\sqrt{a^2 - r^2}}. \quad (12)$$

З рівняння (10), враховуючи умови (11), не важко встановити, що $\text{Im} c_0 = 0$ і отже $\tilde{U}_0^{3-}(r) = 0$.

Систему (9) можна записати наступним чином

$$l_0[\tilde{\eta}(r)] + \mathbf{M} l_1[\tilde{\eta}(r)] = \mathbf{f}(r), \quad (13)$$

де

$$\mathbf{M} = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & b_1 \\ b_2 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\tilde{\eta} = \{\eta_k\}^2 = \begin{pmatrix} \eta_{20}^- \\ \eta_{10}^- \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f} = \mathbf{B}^{-1} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}.$$

Матриця $\mathbf{M} = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}$ допускає розвинення:

$$\mathbf{M} = \mathbf{S} \mathbf{J} \mathbf{S}^{-1}, \quad \mathbf{J} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{S} = \begin{pmatrix} \kappa_2 & \lambda_2 \\ \lambda_1 & \kappa_1 \end{pmatrix},$$

$$\kappa_j = \frac{a_j}{b_j}, \quad \lambda_j = (-1)^{j+1} i \lambda_0, \quad \lambda_0^2 = -\kappa_1 \kappa_2.$$

Враховавши це, систему (13) перепишемо так:

$$l_0[\mu_j] + \lambda_j l_1[\mu_j] = F_j, \quad j = 1, 2; \quad (14)$$

$$\tilde{\mu} = \{\mu_j\}^2 = \mathbf{S}^{-1} \tilde{\eta}, \quad \mathbf{F} = \{F_j\}^2 = \mathbf{S}^{-1} \mathbf{f}, \quad \mathbf{S}^{-1} = \{s_{jk}^*\}^2.$$

Враховуючи умову $0 \leq \lambda \leq 1$, яка виконується для комбінацій відомих трансверсально-ізотропних матеріалів [14], розв'язки рівнянь (14) слід шукати у вигляді [15]:

$$\mu_j(\rho) = R_j[F_j'(\rho)],$$

$$R_j[f] = \frac{1}{\kappa_*} \left(f(\rho) - \frac{\lambda_j \omega_j(\rho)}{\pi} \int_{-a}^a \frac{f(t)}{\omega_j(t)} \frac{dt}{t - \rho} \right), \quad (15)$$

$$\omega_j(\rho) = \left(\frac{a + \rho}{a - \rho} \right)^{\gamma_j}, \quad \gamma_j = (-1)^{j+1} i \alpha_0,$$

$$\alpha_0 = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1 + \lambda_0}{1 - \lambda_0}, \quad \kappa_* = 1 - \lambda_0^2, \quad j = 1, 2.$$

В таблиці 1 наведено значення біпружної сталої α_0 для комбінацій матеріалів [14]: $m1$ – Кераміка $A(\text{BaTiO}_3)$, $m2$ – Кераміка $B(\text{BaTiO}_3 + 5\% \text{CaTiO}_3)$, $m3$ – Ітрій, $m4$ – Магній.

Таблиця 1

Значення біпружної сталої

Комбінація матеріалів	α_0
$m1-m2$	0.00171
$m3-m4$	0.00932
$m3-m2$	0.04505

Розвинення (15), подання $\tilde{\eta} = \mathbf{S} \tilde{\mu}$, а також співвідношення (8) дають змогу розв'язок системи (4) подати так:

$$\begin{pmatrix} \tilde{U}_0^{2-}(r) \\ \tilde{U}_0^1(r) \end{pmatrix} = \sum_{k,m=1}^2 \begin{pmatrix} \beta_{km}^{(1)} \Gamma_1^* \\ \beta_{km}^{(2)} \Gamma_2^* \end{pmatrix} R_k[f'_{3-m}(r)], \quad (16)$$

$$\beta_{km}^{(j)} = s_{jk} s_{mk}^* b_{3-m}^{-1}.$$

Отже, формули (5), (12), (16) визначають стрибки переміщень на тріщині при сталому та температурному навантаженні її берегів. Здобутий результат дає змогу, скориставшись розривним розв'язком для кусково-однорідного простору, отримати подання в явному вигляді компонент тензора напружень і вектора переміщень у всьому просторі, зокрема:

$$\begin{aligned} v_3^-(r, \phi) &= \frac{P_1}{\pi \rho} \int_r^a \frac{t \eta_2(t) dt}{\sqrt{t^2 - r^2}} - \frac{\tau e^{i\phi}}{\pi} \int_r^a \frac{\eta_3^+(t) dt}{\sqrt{t^2 - r^2}} dt - \\ &- \frac{\bar{\tau} e^{-i\phi}}{\pi} \int_r^a \frac{\bar{\eta}_3(t) dt}{\sqrt{t^2 - r^2}} + \frac{\pi}{\kappa_*} \frac{q_{15} q_0}{q_{65}^0} \int_r^a \frac{\Theta_1(t) dt}{\sqrt{t^2 - r^2}}, \\ v_4^-(r, \phi) &= \frac{P_2 \sin \phi + P_3 \cos \phi}{\pi r} \int_r^a \frac{t \eta_{12}(t) dt}{\sqrt{t^2 - r^2}} + \\ &+ \frac{P_4}{\pi} \int_r^a \frac{\eta_1(t) dt}{\sqrt{t^2 - r^2}} + \frac{\pi}{\kappa_*} \frac{q_{15} q_0}{q_{65}^0} \int_r^a \frac{\Theta_2(t) dt}{\sqrt{t^2 - r^2}}, \end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned} \Theta_i(r) &= \Pi_i^* \left\{ (a^2 - r^2) \ln \left(\frac{a-r}{r+a} \right) - 2ra - \right. \\ &- \left. \int_{-a}^a \ln \left(\frac{a-t}{t+a} \right) \frac{(a-t)^{\gamma_j+1}}{(a+t)^{\gamma_j-1}} \frac{dt}{t-r} \right\}. \end{aligned}$$

Список використаних джерел

1. Chen W. Q. Thermoelastic field of transversely isotropic elastic medium containing a penny-shaped crack: exact fundamental solution / W. Q. Chen, H. J. Ding, D. S. Ling // *Int. J. Solids and Structures*. – 2004. – Vol. 41, № 1. – P. 69–83.
2. Chen W. Q. Potential theory method for 3D crack and contact problems of multi-field coupled media: a survey/ W. Q. Chen, H. J. Ding // *J. Zhejiang Univ. SCI.* – 2004 – Vol. 5, № 9. – P. 1009–1021.
3. Saxena H. S. A penny-shaped crack at the interface of two bonded dissimilar transversely isotropic half-spaces/ H. S. Saxena, R. S. Dhaliwal // *Engng. fract. mech.* – 1990. – Vol. 37, № 4. – P. 891–899.
4. Hou P-F. Three-dimensional Green's functions for transversely isotropic thermoelastic bimaterials// P.-F. Hou, A. Y. T. Leung, Y.-J. He // *Int. J. Solids and Structures*. – 2008. – Vol. 45, № 24. – P. 6100–6113.
5. Kryvyi O. The discontinuous solution for the piece-homogeneous transversal isotropic medium / O. Kryvyi // *Operator Theory: Advances and Applications*. – 2009. – Vol. 191. – P. 387–398.
6. Кривий О. Ф. Сингулярні інтегральні співвідношення і рівняння для кусково-однорідного трансверсально-ізотропного простору з міжфазними дефектами./ О. Ф. Кривий // *Мат. методи та фіз.-мех. поля*. – 2010. – Т. 53, № 1. – С. 23–35.
7. Кривой А. Ф. Решение задачи теплопроводности

3. Висновки

Отже, наявність температурного навантаження призводить до появи додаткового інтегрального доданку в явних розв'язках задач. При цьому характер поведінки і асимптотика розв'язку залишається як і у випадку силового навантаження. Слід відмітити, що у випадку температурних навантажень, задача стає осесиметричною. Запропонована методика дозволяє отримати явні розв'язки при більш складних температурних та силових навантаженнях берегів тріщини.

References

1. CHEN, W. Q., DING, H. J. & LING, D. S. (2004) Thermoelastic field of transversely isotropic elastic medium containing a penny-shaped crack: exact fundamental solution. *Int. J. Solids and Structures*. 41 (1). p. 69–83.
2. CHEN, W. Q. & DING, H. J. (2004) Potential theory method for 3D crack and contact problems of multi-field coupled media: a survey. *J. Zhejiang Univ. Sci.* 5 (9). p. 1009–1021.
3. SAXENA, H. S. & DHALI WAL, R. S. (1990) A penny-shaped crack at the interface of two bonded dissimilar transversely isotropic half-spaces. *Engng. Fract. Mech.* 37 (4). p. 891–899.
4. HOU, P-F., LEUNG, A.Y.T. & HE, Y.-J. (2008) Three-dimensional Green's functions for transversely isotropic thermoelastic biomaterials. *Int. J. Solids and Structures*. 45 (24). p. 6100–6113.
5. KRYVYI, O. (2009) The discontinuous solution for the piece-homogeneous transversal isotropic medium. *Operator Theory: Advances and Applications*. 191. p. 387–398.
6. KRYVYI, O. F. (2010) Synguljarni integralni spivvidnoshennja i rivnjannja dlja kuskovo-odnorodnogo transversalno-izotropnogo prostoru z mizhfaznymy defektamy. *Mat. Metody ta Fiz.-Mekh. Polya*. 53 (1). p. 23–35.
7. KRIVYOY, A. F. & MOROZOV, YU. A.

- сти для кусочно-однородного ортотропного пространства с межфазными дефектами / А. Ф. Кривой, Ю. А. Морозов // Вісник Одеського національного університету. Математика і механіка. – 2012. – Т. 17, № 3. – С. 107–119.
8. Морозов Ю. О. Розривний розв'язок рівняння теплопровідності для кусково-однорідного ортотропного простору з міжфазними дефектами у просторі узагальнених функцій / Ю. О. Морозов, О. Ф. Кривий // «Математичне моделювання та математична фізика»: всеукраїнська наукова конференція, Кременчук: матеріали конференції. – 2013. – С. 34–35.
 9. Кривий О. Ф. Міжфазне відшароване включення в кусково-однорідному трансверсально-ізотропному просторі / О. Ф. Кривий // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2014. – Т. 49, № 4. – С. 47–57.
 10. Kryvyi O. Delaminated interface inclusion in a piecewise homogeneous transversely isotropic space / O. Kryvyi // Materials Science – 2014. – Vol. 50. – P. 245–253.
 11. Кривой А. Ф. Произвольно ориентированные дефекты в составной анизотропной плоскости / А. Ф. Кривой // Вісник Одеського державного університету. Фізико-математичні науки. – 2001. – Т. 6, № 3. – С. 108–115.
 12. Krivoi A. F. Features of the stress field near tunnel inclusions in an inhomogeneous anisotropic space / A. F. Krivoi, G. Ya. Popov // International Applied Mechanics. – 2008. – Vol. 44, № 6. – P. 626–634.
 13. Кривий О. Ф. Кругова міжфазна тріщина в неоднорідному трансверсально-ізотропному просторі / О. Ф. Кривий // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2011. – Т. 46, № 6. – С. 47–57.
 14. Александров К. С. Упругие свойства кристаллов. Обзор / К. С. Александров, Т. В. Рыжова // Кристаллография. – 1961. – Т. 6, № 2. – С. 289–314.
 15. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. – Москва: Наука, 1977. – 640 с.
 - (2012) Reshenie zadachi teploprovodnosti dlja kusochno-odnorodnogo ortotropnogo prostranstva s mezhfaznymi defektami. *Visnik Odeskoho Natsionalnogo Univeritetu. Matematyka i Mekhanika*. 17 (3). p. 107–119.
 8. MOROZOV, YU. A. & KRYVYI, O. F. (2013) Rozryvnyj rozvyazok rivnjannja teploprovodnosti dlja kuskovo-odnorodnogo ortotropnogo prostoru z mizhfaznymy defektamy u prostori uzagalnennyh funktsij. In *Matematyчне Modeljuvannya ta Matematychna Fizyka*. Kremenčuk, 2013. p. 34–35.
 9. KRYVYI, O. F. (2014) Mizhfazne vidsharovane vključennja v kuskovo-odnorodnomu transversalno-izotropnomu prostori. *Fiz.-Khim. Mekhanika Materialiv*. 49 (4). p. 47–57.
 10. KRYVYI, O. (2014) Delaminated interface inclusion in a piecewise homogeneous transversely isotropic space. *Materials Science*. 50. p. 245–253.
 11. KRYVOY, A. F. (2001) Proyzvolno oryentyrovannye defekty v sostavnoj anyzotropnoj ploskosty. *Visnyk Odeskoho Derzhavnoho Universytetu. Fyzyko-Matematychni Nauky*. 6 (3). p. 108–115.
 12. KRIVOI, A. F. & POPOV, G. YA. (2008) Features of the stress field near tunnel inclusions in an inhomogeneous anisotropic space. *International Applied Mechanics*. 44 (6). p. 626–634.
 13. KRYVYI, O. F. (2011) Krugova mizhfazna trishhyna v neodnorodnomu transversalno-izotropnomu prostori. *Fiz.-Khim. Mekhanika Materialiv*. 46 (6). p. 47–57.
 14. ALEKSANDROV, K. S. & RYZHOVA, T. V. (1961) Uprugie svoystva kristallov. *Obzor. Kristallografija*. 6 (2). p. 289–314.
 15. GAKHOV, F. D. (1977) *Kraevye Zadachi*. Moskva: Nauka.

Надійшла до редколегії 29.09.15

УДК 539.3

Кундрат М. М., д. т. н., проф.,
Заблотська Ю. В.

Гранична рівновага та локальне руйнування пластини з двома накладками однакової довжини

Національний університет водного господарства та природокористування, 33028, м. Рівне, вул. Соборна, 11
e-mail: kundrat@i.ua,
melnytschka@ukr.net

M. M. Kundrat, Dr. Sci. (Tech.), Prof.,
Yu. V. Zablotska

The limiting equilibrium and local fracture of the plate with two reinforcements of an equal length

National University of Water Management and Natural Resources Use, 33028, Rivne, Soborna str., 11
e-mail: kundrat@i.ua,
melnytschka@ukr.net

Подано розв'язок двовимірної модельної задачі для півбезмежної пластини з двома пружними гнучкими накладками, навантаженими по всій довжині зсувними напруженнями. Задача зведена до сингулярного інтегрального рівняння, яке в класі функцій, необмежених на кінцях інтервалу, розв'язано методом колокації. Обчислено розміри зон передруйнування, розподіли контактних напружень під накладками, розривні осьові зусилля у накладках.

Ключові слова: півбезмежна пластина, накладка, зона передруйнування, контактні напруження, осьові зусилля.

The solution of two-dimensional model problem for the semi-infinite plate with two elastic flexible plates loaded along the whole length with a shifting tension according to conditions plane problem elasticity theory is presented. Mathematical model foresee the two-phase zone of prefracture. Locality zones are developed along interface border from tips to centers of reinforcement's plate. They can correspond to regions of damages, plastic deformation, partial break of connection and another. On area outside of zones of prefracture the perfect mechanical contact is remaining. The problem is reduced to a singular integral equation and is solved by collocation method in class of functions unlimited at the ends of the interval. Physically correct limited stresses and deformations are received in all points of a composition. Tangents stresses also satisfy to relationship of pair law. The dimensions of eventual zones of prefracture, distribution of contact tensions under the reinforcement and breaking axial forces in the reinforcement are calculated. Basic part of loading from reinforcement to plate is transfer in neighbourhood of reinforcements ends. Under the growth the distance between reinforcements the connection between dimensions of prefracture zones are approximate to linear.

Key Words: Semi-Infinite Plate, Reinforcement, Prefracture Zone, Contact Stresses, Axial Forces.

1. Вступ

Прогнозування міцності підкрплених тонкостінних конструкцій залишається актуальною задачею механіки деформівного твердого тіла. Для з'ясування граничного експлуатаційного навантаження таких композицій під навантаженням необхідні поглиблений аналіз полів напружень і деформацій біля підкрплюючих елементів та пов'язана з ним побудова відповідних математичних моделей, які б описували поля напружень і деформацій безпосередньо перед руйнуванням.

Дослідження та огляд контактної задачі Мелана [1] для пружного тіла подано у

широкому колі праць: монографіях М. І. Мусхелішвілі [2], А. І. Каландії [3], Е. І. Григолюка, В. М. Толкачова [4], Г. Я. Попова [5], В. М. Александрова, С. М. Мхітаряна [6], Г. Т. Сулима [7] та ін. В цих працях використані ідеалізовані схеми математичної постановки задачі, які не враховують можливості виникнення в областях країв накладок часто спостережуваних зон ослабленого контакту з пластиною. Розрахункова модель для аналізу граничної рівноваги в півплощині з однією пружною накладкою запропонована авторами в праці [8]. Постановка задачі дала можливість отримати механічно коректні обмежені напруження у всіх точках композиції. У представленій статті цей підхід поширено на системи з двома пружними

накладками, жорсткість яких більша від жорсткості півплощини.

2. Постановка задачі

Розглядаємо ізотропну півбезмежну пластину одиничної товщини, що розтягується на безмежності напруженнями інтенсивності $\sigma_{xx}^\infty = q$ підсилену двома гнучкими пружними накладками довжини $2d = a_2 - a_1$. Одночасно накладки по верхній границі навантажені тангенціальними напруженнями інтенсивності $\tau_+(x)$ та зосередженими силами величини Q_1 та Q_2 , прикладеними до їх кінців (рис. 1).

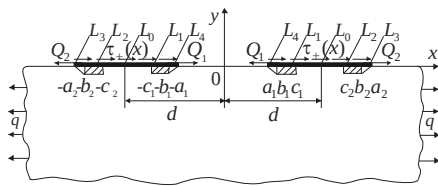


Рис. 1. Схема задачі

Вважаємо, що саме під кінцями накладок зароджуються зони передруйнування, просуваючись від кожного краю до центральної частини: $a_1 < |x| < c_1$ – в околах зближених кінців та $c_2 < |x| < a_2$ – в околах віддалених кінців. Зони передруйнування в свою чергу складаються з двох частин: ділянок пластичного деформування та розпушення.

На ділянках пластичного деформування дотичні напруження приймаємо сталими і рівними своєму граничному значенню τ_s^* :

$$\begin{aligned}\tau_{xy}(x) &= -\tau_s^* \text{sign}(x), \quad (x \in L_1); \\ \tau_{xy}(x) &= \tau_s^* \text{sign}(x), \quad (x \in L_2).\end{aligned}\quad (1)$$

На ділянках розпушення дотичні напруження лінійно зростають від нуля до свого граничного значення:

$$\begin{aligned}\tau_{xy}(x) &= \tau_s^* \frac{a_2 - |x|}{a_2 - b_2} \text{sign}(x), \quad (x \in L_3); \\ \tau_{xy}(x) &= -\tau_s^* \frac{|x| - a_1}{b_1 - a_1} \text{sign}(x), \quad (x \in L_4).\end{aligned}\quad (2)$$

Параметр τ_s^* – адгезійна зсувна міцність контактної межі пластина-накладка, а при пластичному деформуванні – її зсувний поріг

пластичності. Довжину ділянок розпушення приймаємо на обох кінцях накладки однаковою $b_1 - a_1 = a_2 - b_2 = \gamma$.

3. Побудова розв'язку задачі

Розглянемо рівновагу правої накладки. Для довільного перерізу з координатою x рівняння рівноваги має вигляд [3]:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u^f(x)}{\partial x} &= \frac{1}{hE_f} \left[\int_x^{c_2} \tau_{xy}(t) dt + \tau_s^* \left(\frac{a_2 + b_2 - 2c_2}{2} \right) - \right. \\ &\quad \left. - \tau_+(t)(a_2 - x) + Q_2 \right], \quad x \in [c_1, c_2].\end{aligned}\quad (3)$$

Для навантаженої півплощини, згідно праці [2], вираз для деформації вільного краю

$$\begin{aligned}\frac{\partial u(x)}{\partial x} &= \frac{\kappa + 1}{4G} \left[-\frac{1}{\pi} \left(\int_{a_1}^{a_2} \frac{\tau_{xy}(t)}{t - x} dt + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \int_{a_1}^{a_2} \frac{\tau_{xy}(t)}{t + x} dt + \frac{q}{2} \right) \right], \quad x \in [a_1, a_2].\end{aligned}\quad (4)$$

Умова рівності деформацій між накладкою і пластиною (3)–(4) з урахуванням крайових умов (1)–(2) породжує сингулярне інтегральне рівняння стосовно невідомих контактних напружень $\tau_{xy}(x)$:

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\pi} \left[\int_{c_1}^{c_2} \frac{\tau_{xy}(t) dt}{t - x} + \int_{c_1}^{c_2} \frac{\tau_{xy}(t) dt}{t + x} \right] + \frac{1}{2h\lambda_0} \int_x^{c_2} \tau_{xy}(t) dt + \\ &\quad + \tau_s^* \left[\frac{a_2 + b_2 - 2c_2}{4h\lambda_0} - \frac{1}{\pi} g(x) \right] + \frac{1}{2h\lambda_0} \times \\ &\quad \times \left[Q_2 - \tau_+(t)(a_2 - x) \right] - \frac{q}{2} = 0, \quad x \in [c_1, c_2], \\ &\text{де } g(x) = 4 + \frac{1}{b_1 - a_1} \left[(x - a_1) \ln \left(\frac{b_1 - x}{a_1 - x} \right) + (x + a_1) \times \right. \\ &\quad \times \ln \left(\frac{a_1 + x}{b_1 + x} \right) \left. \right] + \frac{1}{a_2 - b_2} \left[(x - a_2) \ln \left(\frac{a_2 - x}{b_2 - x} \right) + \right. \\ &\quad \left. + (x + a_2) \ln \left(\frac{b_2 + x}{a_2 + x} \right) \right] + \ln \left(\frac{c_1^2 - x^2}{b_1^2 - x^2} \right) + \ln \left(\frac{c_2^2 - x^2}{b_2^2 - x^2} \right), \\ &\lambda_0 = E_f / E.\end{aligned}\quad (5)$$

Окрім того, мають виконуватися умова загальної рівноваги правої накладки (для лівої умова аналогічна але з протилежним знаком)

$$\int_{a_1}^{a_2} \tau_{xy}(t) dt = Q_2 - Q_1 + \int_{a_1}^{a_2} \tau_+(t) dt \quad (6)$$

та умови обмеженості напружень в околах вершин зон

$$\tau_{xy}(c_1) = -\tau_s^*; \quad \tau_{xy}(c_2) = \tau_s^*. \quad (7)$$

4. Числові результати та висновки

Нехай сили розтягу пластини ($q=0$) та зсувні напруження ($\tau_+(x)=0$) відсутні, а накладка розтягується зосередженими силами $Q_1=Q_2=Q$. Вираз для напружень $\tau_{xy}(x)$ подаємо у вигляді ряду за многочленами Чебишева першого роду $T_n(x)=\cos(\arccos(x))$ з виділеною кореневою особливістю та невідомими коефіцієнтами b_n :

$$\tau_{xy}(x) = \frac{QC_2}{d\sqrt{c_2^2 - x^2}} \sum_{n=0}^{\infty} b_n T_n(x), \quad |x| \leq c_2. \quad (8)$$

Після підстановки (8) у рівняння (5)–(7) отримуємо безмежну систему нелінійних рівнянь стосовно довжин зон передруйнування ($\varepsilon_1, \varepsilon_2$) та коефіцієнтів b_n , яку розв'язуємо методом редукції.

На рис. 2 подано залежності довжин смуг біля ближнього $\varepsilon_1=(c_1-a_1)/d$ та віддаленого $\varepsilon_2=(a_2-c_2)/d$ кінців правої накладки від параметра навантаження $Q_s=Q/(2\tau_s^*d)$ при фіксованій довжині ділянки розпушення $\gamma=0,01$. Для ліній 1, 2 і 3 $\lambda_0=10/3$; 4, 5, 6 – $\lambda_0=10$; 7, 8, 9 – $\lambda_0=20$. Безрозмірна відстань між накладками $\alpha \equiv a_1/d=0$ (накладки співдотикаються) відповідає лініям 1, 4, 7 – (ближні краї) і 2, 5, 8 (віддалені краї накладок); $\alpha=10$ – 3, 6, 9 (практично невзаємодіючі накладки).

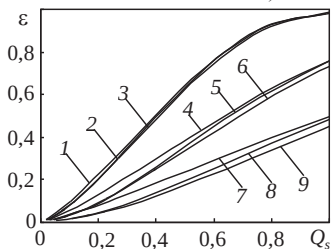


Рис. 2. Довжини зон передруйнування

Отже: а) зі збільшенням жорсткості накладок довжина локалізованих зон передруйнування зменшується за інших однакових умов. Слід зауважити, що при навантаженні пластини – довжина локалізованих зон збільшується, що і слід було очікувати; б) при зростанні відстані між накладками зв'язок між розмірами смуг передруйнування наближається до лінійного ($\varepsilon_1=\varepsilon_2$), що відповідає двом невзаємодіючим накладкам.

На рис. 3 подано розподіл дотичних напружень $\tilde{\tau}_{xy}=\tau_{xy}/\tau_s^*$ під правою накладкою при фіксованому параметрі навантаження $Q_s=0.15$ та довжині ділянки розпушення $\gamma=0.01$: для ліній 1 відстань між накладками $\alpha=0.01$; 2 – $\alpha=10$. Дані рис. а) отримані при відносній жорсткості накладки $\lambda_0=10/3$, для рис. б) – $\lambda_0=10$.

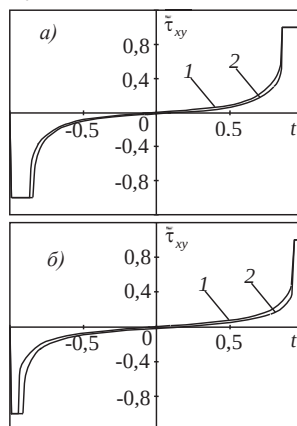


Рис. 3. Дотичні напруження під накладкою

Основна частина навантаження від накладки на пластину передається в околі її країв. У випадку коли накладки взаємодіють ($\alpha=0.01$) точка зміни знаку зміщена від середини в сторону віддалених кінців на $t=x/d=0,2$ від півдовжини накладки. Збільшення жорсткості накладок при фіксованому навантаженні зменшує і зону передруйнування і величину зсувних напружень за межами зони. В середній частині, коли накладки не взаємодіють ($\alpha=10$), контактні напруження порівняно незначні і при $x=0$ (середина накладки) дорівнюють нулю та міняють знак.

На рис. 4 подано осьові розривні зусилля у правій накладці, отримані за формулою

$$\bar{P}(t) = \frac{\sigma_{xx} h}{2\tau_s} = \frac{1}{2\tau_s h} \left(Q - \int_x^{\sigma_2} \tau_{xy}(t) dt \right)$$

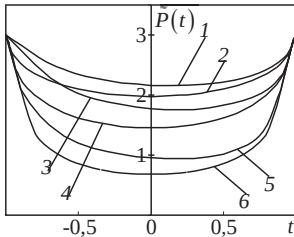


Рис. 4. Осьові розривні зусилля у накладці

при тому ж навантаженні $Q_s = 0.15$ та довжині ділянки розпушення $\gamma = 0.01$, що і на рис. 3. Для лінії 1, 2 – $\lambda_0 = 20$; 3, 4 – $\lambda_0 = 10$; 5, 6 – $\lambda_0 = 10/3$; параметр $\alpha = 0.01$ для ліній 1, 3, 5; $\alpha = 10$ – для 2, 4, 6.

Для невазємодіючих накладок ($\alpha = 10$) помітне існування області у центральній частині накладки, де розривні зусилля змінюються незначно і досягають свого мінімального значення. Для зближених накладок ($\alpha = 0.01$) точка мінімуму зміщена від середини в сторону віддалених кінців на $t = 0.2$ від півдовжини накладки, для жорстких накладок на $t = 0.1$.

Список використаних джерел

References

1. Melan E. Ein beitrag zur theoric geschweisster verbindungen / E. Melan // Ingenieur – Archiv. – 1932. – Bd. 3, № 2. – S. 123–129.
2. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости / Н. И. Мусхелишвили. – М.: Наука, 1966. – 707 с.
3. Каландия А. И. Математические методы двумерной теории упругости / А. И. Каландия. – М.: Наука, 1973. – 303 с.
4. Григолюк Э. И. Контактные задачи теории пластин и оболочек / Э. И. Григолюк, В. М. Толкачев. – М.: Машиностроение, 1980. – 411 с.
5. Попов Г. Я. Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений / Г. Я. Попов. – М.: Наука, 1982. – 344 с.
6. Александров В. М. Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками / В. М. Александров, С. М. Мхитарян. – М.: Наука, 1983. – 488 с.
7. Сулим Г. Т. Основи математичної теорії термомпружної рівноваги деформівних твердих тіл з тонкими включеннями / Г. Т. Сулим. – Львів: Дослідно-видавничий центр НТШ, 2007. – 716 с.
8. Кундрат М. М. Контактна взаємодія півплощини з навантаженою по верхній границі пружною накладкою / М. М. Кундрат, Ю. В. Мельник // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія: фіз.-мат. науки. – 2013. – № 3. – С. 166–168.
1. MELAN, E. (1932) Ein beitrag zur theoric geschweisster verbindungen. *Ingenieur. Archiv.* 3 (2). p. 123–129.
2. MUSKHELISHVILI, N. I. (1966) *Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity*. Moscow: Nauka.
3. KALANDIYA, A. I. (1973) *Mathematical Methods of Two-Dimensional Elasticity*. Moscow: Nauka.
4. GRIGOLYUK, E. I. & TOLKACHEV, V. M. (1980) *Contact Problems of the Theory of Plates and Shells*. Moscow: Mashinostroenie.
5. POPOV, G. Y. (1982) *Concentration of elastic stress close to stamps, cross sectional view, thin inclusions & reinforcements*. Moscow: Nauka.
6. ALEXANDROV, V. M. & MKHITARYAN, S. M. (1983) *The contact problems for solids with thin coatings and layers*. Moscow: Nauka.
7. SULYM, G. T. (2007) *Basis of mathematical theory of thermoelastic balance of deformable solids with thin inclusions*. Lviv: Research & publishing center NTS.
8. KUNDRAT, M. M. & MELNIK, YU. V. (2013) Contact interaction a half-plane with elastic loaded along the upper border reinforcement. *Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series: Physics & Mathematics*. (3). pp. 166–168.

Надійшла до редколегії 30.09.15

УДК 534.26

Куриляк Д. Б., д. ф.-м. н., с. н. с.,
Лисечко В. О., аспірант

Розсіювання плоскої акустичної хвилі на жорстких зрізаному та скінченному конусах

Фізико-механічний інститут ім. Г. В. Карпенка
НАН України, 79060, м. Львів, вул. Наукова, 5
e-mail: vtlysechko@gmail.com

D. B. Kuryliak, Dr. Sci. (Phys.-Math.),
Sr. Sci. Researcher,
V. O. Lysechko, Postgraduate Student

A scattering of a plane acoustic wave by rigid semi-infinite and finite cones

H. V. Karpenko Physico-Mechanical Institute of NAS
of Ukraine, 79060, Lviv, Naukova str., 5
e-mail: vtlysechko@gmail.com

Розв'язано задачу дифракції плоскої акустичної хвилі на напівнескінченному жорсткому конусі зі зрізаною вершиною. Задачу зведено до розв'язання нескінченної системи лінійних алгебраїчних рівнянь (НСЛАР) другого роду, використовуючи метод розкладу потенціалу швидкості в ряд за власними функціями і процедуру аналітичної регуляризації. Отримана НСЛАР допускає розв'язок із заданою точністю. Розглянуто граничний перехід до задачі дифракції на круглій апертурі в площині і сформульовано теорему, яка дозволяє отримати НСЛАР для задачі дифракції на скінченному конусі з НСЛАР вихідної задачі. Досліджено вплив параметрів зрізаного конуса на діаграми спрямованості та потужність випромінювання.

Ключові слова: акустична хвиля, зрізаний конус, діаграма спрямованості, потужність випромінювання, аналітична регуляризація.

The problem of diffraction by a semi-infinite truncated rigid cone is investigated. This one is formulated concerning the velocity potential of diffracted field for the three-dimensional Helmholtz equation with Dirichlet boundary condition on the cone surface. The diffracted field is sought as expansion series of eigenfunctions in each regions of the existence of sound pressure. Mode matching technique with orthogonality properties of Legendre functions are used in order to reduce the diffraction problem to the infinite system of linear algebraic equation (ISLAE) of the first kind. The main part of asymptotic of ISLAE matrix element forms the convolution type operator converted by using of the analytical regularization procedure. Then the initial diffraction problem transformed to ISLAE of the second kind, which allows the solution with a desired accuracy. The boundary transition to the aperture in the infinite rigid screen is considered and the theorem, which allows obtaining ISLAE for solution the wave diffraction problem for a finite cone, is formulated. The matching of velocities at boundary of regions is used for verification of validity evaluation. The far-field pattern and the radiation power are analyzed.

Key Words: Acoustic Wave, Truncated cone, Far-Field Pattern, Radiation Power, Analytical Regularization Procedure.

1. Вступ

Розвиток сучасних методів акустичного неруйнівного контролю передбачає вивчення розподілу поля, розсіяного об'єктами контролю. Необхідні дані отримують, як правило, із розв'язку модельних задач дифракції для розсіювачів канонічної форми. У праці [1] показано можливість контролю радіуса апертури напівнескінченного м'якого конуса. Тут продовжено дослідження розсіяного поля для напівнескінченного жорсткого конуса зі зрізаною вершиною.

Дослідження взаємодії акустичних хвиль з напівнескінченим зрізаним конусом раніше проводилось наближено, використовуючи методи Кірхгофа, геометричної акустики, варіаційний метод (див. бібліографію в [1, 2]), що мають обмежену область застосування.

Тут розсіювальні властивості напівнескінченного жорсткого конуса зі зрізаною вершиною досліджуємо методом спряження полів, який використовуємо сумісно з методом аналітичної регуляризації, запропонованим раніше [3]. Це дозволяє суттєво розширити діапазон параметрів задачі, для яких можна отримати її розв'язок з гарантованою точністю.

2. Постановка задачі

Розглянемо у сферичній системі координат (r, θ, φ) ідеально жорсткий напівнескінченний конус зі зрізаною вершиною $Q^{(trunc)}: \{r \in (c, \infty), \theta = \gamma, \varphi \in [0, 2\pi)\}$ (див. рис. 1). Нехай конус $Q^{(trunc)}$ опромінюється плоскою монохроматичною акустичною хвилею, яка поширюється вздовж осі симетрії конуса у напрямку $\theta = 0$ і характеризується потенціалом швидкості $U_0(r, \theta) = \exp(ikr \cos \theta)$, де $k = \omega/c_0$, ω – кругова частота, c_0 – фазова швидкість. Гармонічну залежність поля від часу $\exp(-i\omega t)$ надалі опускаємо.

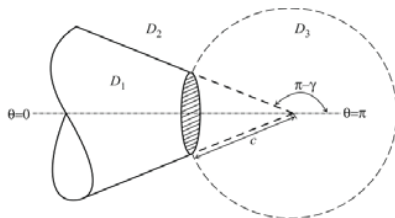


Рис. 1. Геометрична схема задачі

Оскільки встановлене поле володіє осьовою симетрією і не залежить від координати φ , то знаходження невідомого потенціалу дифрагovanого поля $U = U(r, \theta)$ зводиться до розв'язання змішаної крайової задачі для рівняння Гельмгольца:

$$\Delta U + k^2 U = 0, \quad (1)$$

де Δ – оператор Лапласа,

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right).$$

Шуканий потенціал повинен задовольняти граничну умову Неймана

$$\left. \frac{\partial}{\partial \theta} [U(r, \theta) + U^{(i)}(r, \theta)] \right|_{r, \theta \in Q^{(trunc)}} = 0. \quad (2)$$

Тут $U^{(i)}(r, \theta)$ – відомий потенціал первинного поля, який для зручності прийемо у вигляді потенціалу повного поля плоскої хвилі $U_0(r, \theta)$ у напівнескінченній конічній області і подамо у вигляді

$$U^{(i)}(r, \theta) = \sqrt{\frac{\pi}{2sr}} \left(1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\gamma}{2} \right) I_{1/2}(sr) - \sqrt{\frac{2\pi^3}{sr}} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\mu_k P_{\mu_k-1/2}(\cos \gamma) P_{\mu_k-1/2}(-\cos \theta)}{\cos \pi \mu_k \partial P_{\mu_k-1/2}(-\cos \gamma) / \partial \mu} I_{\mu_k}(sr), \quad (3)$$

де $I_{\eta}(\cdot)$ – модифікована функція Бесселя, $P_{\eta-1/2}(\cdot)$ – приєднана функція Лежандра.

Вираз для потенціалу первинного поля (3) отримуюмо скориставшись поданням поля у вигляді інтеграла Конторовича – Лебедєва [3].

Розв'язок задачі (1), (2) шукаємо у класі функцій, які забезпечують виконання умови граничного поглинання на нескінченності і умови обмеженості енергії поля у будь-якому скінченному об'ємі. У нашій задачі остання умова зводиться до забезпечення виконання умови Мейкснера на круговому краю апертури зрізаного конуса.

3. Розв'язання задачі

Згідно методу часткових областей [4], повне поле подамо у вигляді

$$U^{(i)}(r, \theta) = \begin{cases} U^{(i)}(r, \theta) + U(r, \theta), & (r, \theta) \in D_2; \\ U(r, \theta), & (r, \theta) \in D_1, D_3, \end{cases}$$

де області, сформовані конусом $Q^{(trunc)}$, подамо так (див. рис. 1):

$$\begin{aligned} D_1 &: \{r \in (c, \infty), \theta \in [0, \gamma)\}; \\ D_2 &: \{r \in (c, \infty), \theta \in (\gamma, \pi]\}; \\ D_3 &: \{r \in (0, c), \theta \in [0, \pi]\}. \end{aligned}$$

Тоді невідомий потенціал швидкості дифрагovanого поля шукаємо у вигляді

$$U(r, \theta) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{sr}} \sum_{p=1}^{\infty} y_p^{(1)} P_{\nu_p-1/2}(\cos \theta) \frac{K_{\nu_p}(sr)}{K_{\nu_p}(sc)}; & (r, \theta) \in D_1 \\ \frac{1}{\sqrt{sr}} \sum_{k=1}^{\infty} y_k^{(2)} P_{\mu_k-1/2}(-\cos \theta) \frac{K_{\mu_k}(sr)}{K_{\mu_k}(sc)}; & (r, \theta) \in D_2 \\ \frac{1}{\sqrt{sr}} \sum_{n=0}^{\infty} \bar{x}_n P_{z_n-1/2}(\cos \theta) \frac{I_{z_n}(sr)}{I_{z_n}(sc)}; & (r, \theta) \in D_3 \end{cases} \quad (4)$$

де $y_p^{(1)}$, $y_k^{(2)}$, $\bar{x}_n$ – невідомі коефіцієнти розкладу;
 $K_n(\cdot)$ – функція Макдональда; $s = -ik$;
 $z_n = n + 1/2$; v_p , μ_k ($v_1, \mu_1 = 1/2$) – дійсні
додатні корені трансцендентних рівнянь

$$P_{\eta-1/2}^{(1)}(\cos\gamma)\Big|_{\eta=v_p} = 0, \quad P_{\eta-1/2}^{(1)}(-\cos\gamma)\Big|_{\eta=\mu_k} = 0. \quad (5)$$

Невідомі коефіцієнти розкладу в (4) шукаємо
у класі послідовностей, що забезпечує рівномірну
збіжність рядів, а їх перші похідні допускають
особливості типу $\rho^{-1/2}$ при $\rho \rightarrow 0$, де ρ – віддал
до краю конуса у локальній системі координат.

Для знаходження невідомих коефіцієнтів
розкладу в (4) використаємо умови спряження
повного потенціалу та його нормальної похідної
на сфері $S: \{r \in [0, c], \theta \in [0, \pi], \varphi \in [0, 2\pi]\}$
радіусом c , що містить край конуса. За фізичним
змістом ці умови пов'язують тиски та нормальні
складові коливальних швидкостей частинок на
межі областей і записуються так

$$U^{(t)}(r, \theta)\Big|_{\theta \in [0, \pi]}^{r=c-0} = \begin{cases} U^{(t)}(r, \theta)\Big|_{\theta \in [0, \gamma]}^{r=c+0}; \\ U^{(t)}(r, \theta)\Big|_{\theta \in [\gamma, \pi]}^{r=c+0}; \end{cases} \quad (6)$$

$$\partial_r U^{(t)}(r, \theta)\Big|_{\theta \in [0, \pi]}^{r=c-0} = \begin{cases} \partial_r U^{(t)}(r, \theta)\Big|_{\theta \in [0, \gamma]}^{r=c+0}; \\ \partial_r U^{(t)}(r, \theta)\Big|_{\theta \in [\gamma, \pi]}^{r=c+0}. \end{cases} \quad (7)$$

Скориставшись умовами (6), (7) приходимо до
системи суматорних рівнянь, вигляду:

$$\begin{aligned} \bar{x}_0 + \sum_{n=1}^{\infty} x_n P_{n-1/2}(\cos\theta) = \\ \theta \in [0, \pi] \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{cases} y_1^{(1)} + \sum_{p=2}^{\infty} y_p^{(1)} P_{v_p-1/2}(\cos\theta); \\ \theta \in [0, \gamma] \\ y_1^{(2)} + \sum_{k=2}^{\infty} y_k^{(2)} P_{\mu_k-1/2}(-\cos\theta) + \\ + \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left(1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\gamma}{2}\right) I_{1/2}(sc) - \\ - \sqrt{2\pi^3} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\mu_k P_{\mu_k-1/2}^{(1)}(\cos\gamma) P_{\mu_k-1/2}^{(1)}(-\cos\theta)}{\cos\pi\mu_k \partial P_{\mu_k-1/2}^{(1)}(-\cos\gamma) / \partial \mu} I_{\mu_k}(sc); \\ \theta \in (\gamma, \pi] \end{cases}$$

$$\bar{x}_0 \frac{I'_{1/2}(sc)}{I_{1/2}(sc)} + \sum_{n=1}^{\infty} x_n P_{n-1/2}(\cos\theta) \frac{I'_{z_n}(sc)}{I_{z_n}(sc)} = \\ \theta \in [0, \pi]$$

$$\begin{cases} y_1^{(1)} \frac{K'_{1/2}(sc)}{K_{1/2}(sc)} + \sum_{p=2}^{\infty} y_p^{(1)} P_{v_p-1/2}(\cos\theta) \frac{K'_{v_p}(sc)}{K_{v_p}(sc)}; \\ \theta \in [0, \gamma] \\ y_1^{(2)} \frac{K'_{1/2}(sc)}{K_{1/2}(sc)} + \sum_{k=2}^{\infty} y_k^{(2)} P_{\mu_k-1/2}(-\cos\theta) \frac{K'_{\mu_k}(sc)}{K_{\mu_k}(sc)} + \\ + \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left(1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\gamma}{2}\right) I'_{1/2}(sc) - \\ - \sqrt{2\pi^3} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\mu_k P_{\mu_k-1/2}^{(1)}(\cos\gamma) P_{\mu_k-1/2}^{(1)}(-\cos\theta)}{\cos\pi\mu_k \partial P_{\mu_k-1/2}^{(1)}(-\cos\gamma) / \partial \mu} I'_{\mu_k}(sc). \\ \theta \in (\gamma, \pi] \end{cases} \quad (9)$$

Тут штрих означає похідну за аргументом.

Застосовувавши властивість ортогональності
функцій Лежандра, із систем (8), (9) виключаємо
невідомі $\bar{x}_0$, $y_p^{(1)}$, $y_k^{(2)}$ і зводимо задачу до
НСЛАР першого роду, яку записуємо так:

$$A_{11}X = F, \quad (10)$$

де $X = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$; A_{11} – матричний оператор,

$$A_{11}: \left\{ a_q = \frac{sc W[K_{\xi_q} I_{z_n}(sc)]}{[\xi_q^2 - z_n^2] K_{\xi_q}(sc) I_{z_n}(sc)} \right\}_{q,n=1}^{\infty}; \quad (11)$$

$F = \{f_q\}_{q=1}^{\infty}$ – відомий вектор.

Введемо до розгляду парну мероморфну
функцію

$$M(v, \gamma) = - \frac{\cos\pi v}{\pi P_{v-1/2}^{(1)}(\cos\gamma) P_{v-1/2}^{(1)}(-\cos\gamma)}, \quad (12)$$

яка є регулярна у смузі $\Pi: \{|\operatorname{Re} v| < 1/2\}$, а за
межами Π має прості нулі і полюси відповідно у
точках $\pm z_k$, $\pm \xi_q$, $M(v, \gamma) = O(v^{-1})$ при $|v| \rightarrow \infty$.
Функція (12) допускає факторизацію у вигляді
 $M(v, \gamma) = M_+(v, \gamma) M_-(v, \gamma)$, де $M_+(v, \gamma)$, $M_-(v, \gamma)$
не мають нулів відповідно у півплощинах
 $\operatorname{Re} v > -1/2$, $\operatorname{Re} v < 1/2$; $M_+(v, \gamma) = M_-(-v, \gamma)$;
 $M_{\pm}(v, \gamma) = O(v^{-1/2})$ при $|v| \rightarrow \infty$ в областях
регулярності.

Пара операторів [3]

$$A: \{a_{qn} = (\xi_q - z_n)^{-1}\}_{q,n=1}^{\infty}; \quad (13)$$

$$A^{-1} : \{\tau_{kq}\}_{k,q=1}^{\infty}, \quad (14)$$

$$\tau_{kq} = \left\langle \left\{ M_{-}^{-1}(\xi_q, \gamma) \right\}^T M_{-}'(z_k, \gamma)(z_k - \xi_q) \right\rangle^{-1},$$

є регуляризуючими для НСЛАР (10). Тоді, виділивши із НСЛАР (10) матричний оператор (13) і використовуючи обернений оператор (14), отримаємо НСЛАР другого роду, яку запишемо так

$$X = A^{-1}[A - A_1]X + A^{-1}F. \quad (15)$$

Єдиний розв'язок НСЛАР (15) існує в

$$b(\sigma) : \{\|x_n\| = \sup_n |x_n n^\sigma|, \lim_{n \rightarrow \infty} x_n n^\sigma = 0\}$$

при $0 \leq \sigma < 1/2$, що забезпечує виконання умов Мейкснера на краю [3].

Невідоме значення $\bar{x}_0$ визначаємо у вигляді

$$\bar{x}_0 = \text{sh}(sc) / \sqrt{sc}.$$

Для випадку круглого отвору у площині ($\gamma = \pi/2$) доводимо, що індекси $z_n = 2n - 1/2$, а $\xi_q = 2q - 3/2$. Далі переписуємо формулу (12) у вигляді

$$M(v, \pi/2) = -\frac{\Gamma^2(v/2 + 1/4)\Gamma^2(-v/2 + 1/4)}{4\pi\Gamma(v + 1/2)\Gamma(-v + 1/2)}. \quad (16)$$

Факторизація функції (16) відносно уявної осі дозволяє подати $M_{+}(v, \gamma)$ так:

$$M_{+}(v, \pi/2) = i2^{v-1} \frac{\Gamma^2(v/2 + 1/4)}{\sqrt{\pi}\Gamma(v + 1/2)},$$

а обернений оператор (14) приймає вигляд:

$$\tau_{kq} = \frac{8\Gamma(q + 1/2)\Gamma(k + 1/2)}{\pi^2(1 - 2q)(2k - 2q + 1)\Gamma(q)\Gamma(k)}.$$

Розв'язок задачі дифракції на скінченному конусі $Q^{(\text{finite})}$ [2], який доповнює $Q^{(\text{trunc})}$ до напівнескінченного, знаходимо аналогічно. Зв'язок між матричними операторами задач дифракції на краях цих конусів встановлює теорема.

Теорема. Матричні оператори задач дифракції на кругових апертурах конусів $Q^{(\text{finite})}$ і $Q^{(\text{trunc})}$ зв'язані співвідношеннями:

$$a_{qn}^{(\text{trunc})} = -a_{qn}^{(\text{finite})}(\xi_q \rightarrow z_n, z_n \rightarrow \xi_q),$$

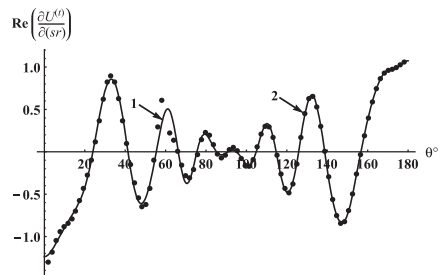
$$a_{qn}^{(\text{finite})} = -a_{qn}^{(\text{trunc})}(\xi_q \rightarrow z_n, z_n \rightarrow \xi_q),$$

де $a_{qn}^{(\text{trunc})}$ задано формулою (11).

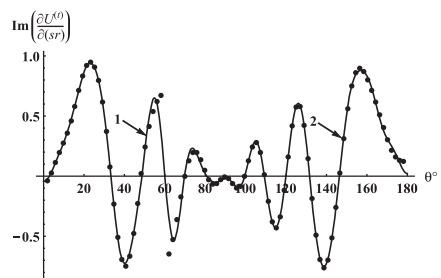
4. Чисельні результати

Усі характеристики розсіяного поля розраховувались на основі розв'язку скінченної системи рівнянь, яку отримували із НСЛАР (15) методом редукції, а також використовували співвідношення (4). Порядок редукції вибирався із умови $n = |sc| + q$, $q = 4 \dots 10$.

Перевірку отриманих результатів проводили графічним співставленням тисків і швидкостей, використовуючи відповідно співвідношення (6) і (7). На рис. 2 показано дійсні і уявні частини складової радіальної швидкості $\partial_{sr}U^{(t)}$ на сферах радіусом $r = c \pm 0$ при $\gamma = 60^\circ$ і $kc = 6\pi$.



a



б

Рис. 2. Перевірка умови спряження нормальної складової швидкості на границі уявної сфери S для $\gamma = 60^\circ$ і $kc = 6\pi$: а) – дійсна складова швидкості, б) – уявна складова швидкості; 1 – область D_3 ; 2 – області D_2 , D_3

Із поведінки кривих 1, 2 на рис. 2 можна стверджувати, що вони співпадають із графічною точністю. На краю конуса (див. рис. 2, а, б), коли $\theta = \gamma$, спостерігаємо різкі зміни коливальної швидкості, які мають локальний характер і на енергетичні характеристики не впливають.

Аналізувались діаграми спрямованості розсіяного поля, які розраховувались за формулою:

$$D(\theta) = |rU(r, \theta) \exp(-ikr)|,$$

де $U(r, \theta)$ за фізичними змістом відповідає повному полю в областях D_1 , D_3 і дифрагованому в D_2 .

На рис. 3 показано вплив хвильового радіусу зрізу вершини конуса kc на амплітудні діаграми спрямованості при опроміненні плоскою звуковою хвилею зі сторони зрізу. Тобто аналізуємо ситуацію, коли хвиля проникає у конічну каверну через отвір сформований зрізом вершини. Із поведінки кривих на рис. 3 спостерігаємо формування інтенсивного випромінювання у напрямі поширення падаючої хвилі ($\theta = 0^\circ$) та зі зростанням параметра kc розширення області «глухої» до проникнення дифрагованого поля. В діапазоні зміни полярного кута $100^\circ < \theta < 140^\circ$ спостерігаємо суттєвий рівень дифрагованого поля у напрямі дзеркального відбивання хвиль від бокової поверхні конуса. Решта кутового діапазону в області D_2 є практично «вільною» від проникнення дифрагованого поля.

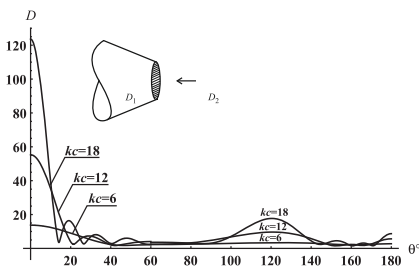


Рис. 3. Вплив параметра kc на діаграми спрямованості для $\gamma = 60^\circ$

На рис. 4 ілюструємо діаграми спрямованості, коли конус опромінюється зі сторони основи зрізу ($\gamma = 120^\circ$), тобто хвиля виходить через отвір, утворений зрізом вершини напівнескінченного конуса. Співставляючи відповідні криві на рис. 3, 4, бачимо їх практичне співпадіння при $0 < \theta < 60^\circ$ (область D_1) і значимі розходження в

області $\theta > 120^\circ$ за протилежних напрямів опромінення конуса $Q^{(mnc)}$ вздовж осі. Із рис. 4 видно значний рівень розсіяння у напрямі твірної $\theta = 120^\circ$ і у зворотному напрямі ($\theta = 180^\circ$).

Аналогічний характер впливу параметра kc на форму діаграм спрямованості конуса зі зрізаною вершиною спостерігаємо і при його розширенні.

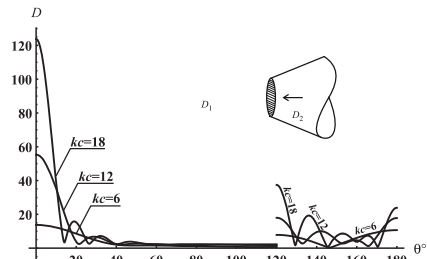


Рис. 4. Вплив параметра kc на діаграми спрямованості для $\gamma = 120^\circ$

На рис. 5 наведені залежності коефіцієнтів відбивання за потужністю $W_- = W_-(kc)$ для різних кутів розхилу конуса при падінні хвилі зі сторони зрізу. Ці залежності визначалися за формулою:

$$W_- = \frac{\pi \sin \gamma}{2(kc)^2} \sum_{k=1}^{\infty} |y_k^{(2)}|^2 \times \frac{|P_{\mu_k - 1/2}(-\cos \gamma) \partial P_{\mu_k - 1/2}^1(-\cos \gamma) / \partial \mu|}{\mu_k |K_{\mu_k}(sc)|^2}.$$

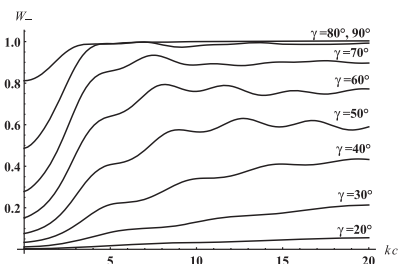


Рис. 5. Сімейство залежностей W_- для різних кутів розхилу конуса γ

Як видно із поведінки кривих на рис. 5, ці залежності зі збільшенням кута розхилу γ і $kc > 10$ прямують до постійного значення. Максимальна потужність випромінювання при

$\gamma < 90^\circ$ не перевищує 1. У довгохвильовому діапазоні ($k \rightarrow 0$) максимальну потужність спостерігаємо для $\gamma = 90^\circ$, де $W_- = 0.810569$.

На рис. 6 співставлено залежності $W_-(kc)$ отриману для $\gamma = 90^\circ$ (крива 1) і отриману в [5] для круглої апертури в жорсткій площині (крива 2). З порівняння цих кривих бачимо їх повне співпадіння у всьому діапазоні зміни хвильового параметра kc .

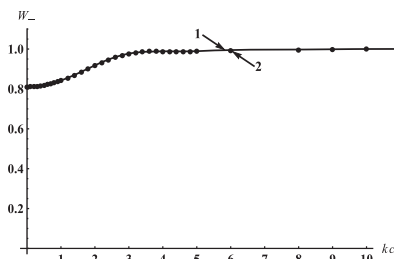


Рис. 6. Співставлення коефіцієнтів відбивання за потужністю для апертури у жорсткій площині: 1 – $\gamma = 90^\circ$; 2 – отримано в [5]

Список використаних джерел

1. Куриляк Д. Б. Дифракція плоскої акустичної хвилі на напівнескінченному м'якому конусі зі зрізаною вершиною / Д. Б. Куриляк, В. О. Лисечко // Акустичний вісник. – 2013–2014. – Т. 16, № 4. – С. 33–41.
2. Куриляк Д. Б. Дифракція плоскої акустичної хвилі на скінченному жорсткому конусі при осьовому опроміненні / Д. Б. Куриляк, В. О. Лисечко // Акустичний вісник. – 2013–2014. – Т. 16, № 2. – С. 8–17.
3. Куриляк Д. Б. Аналітико-числові методи в теорії дифракції хвиль на кінцевих і клиноподібних поверхнях / Д. Б. Куриляк, З. Т. Назарчук. – Київ: Наукова думка, 2006. – 280 с.
4. Гринченко В. Т. Волновые задачи акустики / В. Т. Гринченко, И. В. Вовк, В. Т. Мацыпура. – Киев: Интерсервис, 2013. – 572 с.
5. Bouwkamp C. J. Theoretical and numerical treatment of diffraction through a circular aperture / C. J. Bouwkamp // IEEE Trans. Antennas Propag. – 1970. – Vol. 18, № 2. – P. 152–176.

4. Висновки

Отримано розв'язок задачі дифракції плоскої акустичної хвилі на напівнескінченному жорсткому конусі зі зрізаною вершиною. Методом спряження полів та аналітичної регуляризації отримано НСЛАР 2-го роду, розв'язок якої знаходиться із заданою точністю. Побудовано елементи регуляризуючих операторів для круглої апертури.

У широкому діапазоні зміни геометричних параметрів задачі і частоти отримано числовий розв'язок НСЛАР і досліджено характеристики розсіювання жорсткого зрізаного конуса. Встановлено достовірність отриманих результатів шляхом порівняння складових коливальної швидкості на межі областей та порівняння отриманих результатів з відомими у часткових випадках. Вивчено вплив параметрів зрізаного конуса на характеристики дифрагованого поля у широкому діапазоні зміни параметрів задачі.

Reference

1. KURYLIAC, D. B. & LYSECHKO, V. O. (2013–2014) Dyfrakciya ploskoyi akustychnoyi hvyli na napivneskinchenному myakomu konusi zi zrizanoyu vershynoyu. *Akustychnyj visnyk*. 16 (4). p. 33–41.
2. KURYLIAC, D. B. & LYSECHKO, V. O. (2013–2014) Dyfrakciya ploskoyi akustychnoyi hvyli na skinchenному zhorstkomu konusi pry osovomу oprominenni. *Akustychnyj visnyk*. 16 (2). p. 8–17.
3. KURYLIAC, D. B. & NAZARCHUK, Z. T. (2006) *Analityko-Chyslovi Metody v Teoriyi Dyfrakciyi Khvyli na Konichnykh i Klynopodibnykh Poverhnyakh*. Kyiv: Naukova dumka.
4. GRINCHENKO, V. T., VOVK, I. V. & MATSYPURA, V. T. (2013) *Volnovyie Zadachi Akustiki*. Kiev: Interservis.
5. BOUWKAMP, C. J. (1970) Theoretical and numerical treatment of diffraction through a circular aperture. *IEEE Trans. Antennas Propag.* 18 (2). p. 152–176.

Надійшла до редколегії 30.09.15

УДК 531.62

Лебедева І. В., к. ф.-м. н., доц.,
Горошко О. О., д. ф.-м. н., проф.

Уловлювання та гальмування балістичних тіл пружним тросом

Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, проспект
Акад. Глушкова, 4-е
e-mail: lebedevai@ukr.net

I. V. Lebedyeva, Ph. D. (Phys.-Math.), Assoc. Prof.,
O. O. Goroshko, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof.

The catching and braking of ballistic bodies by an elastic rope

Taras Shevchenko National University of Kyiv,
03680, Kyiv, Acad. Glushkova av., 4-e
e-mail: lebedevai@ukr.net

Виділяються два етапи у динаміці вловлювання та гальмування. Перший етап – поперечно-поздовжні коливання пружного каната з вловленим балістичним тілом. Другий етап – гальмування балістичного тіла пружним канатом змінної довжини. Спеціальним вибором узагальнених координат аналіз динамічних процесів першого етапу зводиться до розв'язання класичної задачі математичної фізики гіперболічного типу з голономними та неголономними граничними умовами.

Ключові слова: балістичне тіло, вловлювання та гальмування.

The dynamics of catching and braking of a massive speed body by an elastic rope of variable length is studied. The braking process is divided into two stages. The first stage (capture) is cross-longitudinal vibrations of elastic rope, excited by transverse impact of ballistic body. The braking is implemented by braking devices of catching system, captured body wheels, and viscous aerodynamic resistance. The second stage is a one-dimensional longitudinal movement of the rope with the caught body. The process of catching is described by the Lagrange and Euler coordinates. By a special choice of generalized coordinates analysis of dynamics of the system «catching mechanism–elastic rope» is reduced to the problem of mathematical physics of hyperbolic or elliptic type depending on the speed of the caught body. The geometric boundary conditions for the elastic rope of variable length with mobile ends and the nonholonomic boundary conditions at the end of the rope reeling out the brake drums are identified. The rope length in the Lagrange coordinates is determined. Bringing these tasks to the classical problems of mathematical physics makes it possible to use for solution of these tasks the direct methods and software.

Key Words: Ballistic Body, Catching and Braking.

1. Вступ

Дослідження коливань пружного каната змінної довжини першого етапу вловлювання та гальмування балістичних тіл представлено у роботі [1]. Ця задача зведена до класичного рівняння математичної фізики гіперболічного чи еліптичного типу (в залежності від швидкості уловлюваного тіла) з голономними та неголономними граничними умовами [2]. Класична форма рівнянь дає можливість побудови наближених розв'язків класичними методами [3, 4, 5] та розробки програмного забезпечення для ЕОМ стосовно конкретних технічних задач. Значне місце в динаміці гальмування масивних тіл представлено працями підйомно-транспортної техніки, зокрема, задачами гірничих шахтних підйомів [6, 7], лісотransпортної техніки, канатних підвісних доріг та інше. Первинні дослідження з динаміки

гірничих підйомів представлені працями академіка О. М. Динника та його учнів [8]. Отримані в цих роботах рекомендації з розрахунку підйомних канатів і в наш час покладені в основу нормативних документів з вибору коефіцієнтів запасу міцності та динамічних режимів експлуатації канатів [9].

У авіаційній, космічній та транспортній техніці вловлювання та гальмування масивних швидкісних об'єктів становить складну технічну задачу, і засоби її реалізації постійно вдосконалюються. Серед цих засобів класичні гальмівні пристрої, парашутні установки (аеродинамічне гальмування), канатні механізми, магнітні лінійні дороги, комбінація цих засобів тощо. Зокрема, вловлювання та гальмування літаків на аеродромних посадкових смугах, палубах авіаносців здійснюється пружними канатами та гальмівними пристроями коліс. Початковий момент вловлювання реалізується

поперечним ударом по канату, намотаному на барабани з гальмівними пристроями (рис. 1). Процес уловлювання та гальмування поділимо на два етапи: протягом першого етапу відбуваються поперечно-поздовжні коливання каната (троса), який витягується зачепами балістичного тіла. Протягом другого етапу поперечні коливання каната, як струни, малі у порівнянні з поздовжніми переміщеннями його елементів: поперечно-поздовжній рух трансформувється у поздовжній гальмівний рух пружного каната змінної довжини, скріпленого з балістичним тілом.

Попередні дослідження цих задач, основані на моделях нерозтяжних канатів, охоплюють понад віковий період. Змістовний огляд праць цього періоду міститься у роботах В. С. Щедрова та А. П. Мінакова [11, 12]. За оцінкою А. П. Мінакова «Своеобразие проблемы движения нити не позволяет установить единый метод решения всех задач, которые связаны в большинстве случаев с очень значительными математическими трудностями» [11, ст. 160]. Досліджуючи динаміку машин текстильної промисловості, А. П. Мінаков використовував додаткові своєсвідні штучно сформовані кінематичні співвідношення, так звані «умови на швидкостях» та «умови на прискореннях». Ці умови не ідентифікуються з класичними рівняннями динаміки, граничними та початковими умовами [10, 11].

2. Рівняння плоских коливань пружного каната змінної довжини з рухомими кінцями

У роботі [1] дано математичне формулювання задачі першого етапу вловлювання та гальмування масивного тіла пружним канатом змінної довжини з граничними умовами на нерухомих границях.

Кінематичні співвідношення. Основні позначення. Рух елементів каната та вловлюваного тіла описується в осях інерціальної (нерухомої) системи O_1XY , початок якої пов'язаний з гальмівними барабанами системи вловлювання. Початок рухомої системи OUV пов'язаний з уловлюваним тілом.

Лагранжеві та ейлерові координати. Пружний рухомий канат – одновимірне вагоме текуче середовище, для опису руху якого користуються лагранжевими та ейлеровими координатами. Лагранжеві координати x закріплені на пружному тілі, у нашому випадку – на пружному канаті. За влучним виразом академіка О. Ю. Ішлінського, лагранжеві координати нанесені на пружний канат як

поділки на масштабній лінійці [13]; при поздовжньому деформуванні лінійки лагранжеві координати x деформуються разом з лінійкою. Початок лагранжевої системи координат Ox помістимо у точку скріплення з балістичним тілом; вісь Ox спрямуємо вздовж дуги каната. Пружний канат, скріплений з балістичним тілом, змотується з гальмівних барабанів (рис. 1). Протягом першого етапу здійснюється поперечно-поздовжній рух пружного каната змінної довжини. У кінці першого етапу вловлювання амплітуди поперечних коливань малі порівняно з поздовжніми переміщеннями, і процес вловлювання трансформувється у поздовжній рух пружного каната змінної довжини разом з вловлюваним тілом.

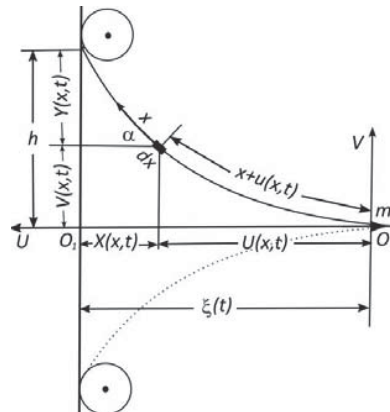


Рис. 1. Перший етап вловлювання балістичного тіла. Тут x – лагранжеві координати елементів каната, $u(x,t)$ – пружне видовження ділянки каната довжини Ox ; $U(x,t), V(x,t)$ – зміщення елементів каната в осях рухомої системи OUV , пов'язаної з балістичним тілом m ; $X(x,t), Y(x,t)$ – зміщення елемента каната dx в осях нерухомої системи O_1XY ; $\xi(t)$ – закон руху вловлюваного тіла відносно нерухомого простору; $\alpha(x,t)$ – кут нахилу елемента каната до осі Ox

Введемо такі позначення
 $u(x,t)$ – пружне видовження ділянки каната довжиною Ox ;

$\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}$ – відносна деформація каната;

$\xi(t)$ – положення вловлюваного тіла відносно нерухомого простору.

Вибір узагальнених координат. Рівняння руху тіл системи вловлювання. Для коректного опису (постановки задачі) динамічних процесів уловлювання балістичного тіла необхідно:

- 1) Побудувати рівняння руху вловлюваного балістичного тіла;
- 2) записати рівняння руху елементів пружного каната;
- 3) визначити у лагранжевих координатах довжину деформованого розтягнутого каната; 4. Записати граничні голономні та неголономні умови на рухомих кінцях каната.

Зв'язок координат елементів системи вловлювання в інерціальній та рухомій системах координат (рис. 1) визначається співвідношеннями:

$$\begin{aligned} X(x, t) &= \xi(t) - U(x, t), \\ Y(x, t) &= h - V(x, t), \\ \xi(t) &= U(l(t), t). \end{aligned} \quad (1)$$

де $x = l(t)$ – лагранжева координата точки канату, яка перебігає через початок нерухомої системи O_1XY при змотуванні з барабана. З очевидних співвідношень координати елементів каната в рухомій системі OUV пов'язані з деформацією каната $\partial u / \partial x$ співвідношеннями

$$\begin{aligned} U(x, t) &= \int_0^x \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right) \cos \alpha \, dx, \\ V(x, t) &= \int_0^x \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right) \sin \alpha \, dx. \end{aligned} \quad (2)$$

У нерухомій системі координат O_1XY положення елементів пружного каната визначаються співвідношеннями

$$\begin{aligned} X(x, t) &= \xi(t) - \int_0^x \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right) \cos \alpha \, dx, \\ Y(x, t) &= h - \int_0^x \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right) \sin \alpha \, dx. \end{aligned} \quad (3)$$

Проекції деформацій елементів пружного каната на осі рухомої системи OUV згідно з рис. 1 пов'язані з деформацією формулами:

$$u_1(x, t) = \int_0^x \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \cos \alpha \, dx,$$

$$v_1(x, t) = \int_0^x \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \sin \alpha \, dx. \quad (4)$$

Виберемо проекції деформації каната $u_1(x, t)$ та $v_1(x, t)$ за узагальнені координати. У цих узагальнених координатах задача вловлювання балістичного тіла описується рівняннями гіперболічного типу математичної фізики.

Залежність між кутом $\alpha(x, t)$ та похідними узагальнених координат $\partial u_1(x, t) / \partial x$ та $\partial v_1(x, t) / \partial x$ визначаються з рівнянь (4) геометричними співвідношеннями

$$u'_1(x, t) = u'(x, t) \cos \alpha, \quad v'_1(x, t) = v'(x, t) \sin \alpha,$$

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{u'_1(x, t)}{\sqrt{(u'_1)^2 + (v'_1)^2}}, \\ \sin \alpha &= \frac{v'_1(x, t)}{\sqrt{(u'_1)^2 + (v'_1)^2}}. \end{aligned} \quad (5)$$

Тут і надалі штрихами позначені похідні $\partial / \partial x$ функцій $u(x, t)$, $u_1(x, t)$, $v_1(x, t)$.

За принципом Даламбера рівняння руху елементів каната відносно нерухомого простору мають вигляд

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial^2 X(x, t)}{\partial t^2} - \frac{\partial P}{\partial x} \cos \alpha - \rho \ddot{\xi}(t) &= 0, \\ \rho \frac{\partial^2 Y(x, t)}{\partial t^2} - \frac{\partial P}{\partial x} \sin \alpha &= 0, \end{aligned} \quad (6)$$

де ρ – розподілена (погонна) маса каната, $\rho \ddot{\xi}(t) dx$ – сила інерції, яка діє на елемент каната dx , обумовлена неінерціальністю рухомої системи координат O_1XY .

У позначеннях будівельної механіки та опору матеріалів поздовжній натяг каната $P(x, t)$ визначається формулою:

$$P(x, t) = EF \frac{\partial u(x, t)}{\partial x}. \quad (7)$$

За принципом Даламбера рух балістичного вловлюваного тіла описується рівняннями

$$m \ddot{\xi}(t) - EF \left(\frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha \right)_{x \geq 0} - \sum_k P_k(t) = 0, \quad (8)$$

де $P_k(t)$ – сили, що створюються гальмівними пристроями барабанів, коліс підвісок, аеродинамічним гальмуванням.

$$P(x, t)|_{x=l(t)} = EF \left(\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right)_{x=l(t)}.$$

Це натяг каната, зафіксований при попередній намотці на гальмівний барабан. В узагальнених координатах $u_1(x, t)$, $v_1(x, t)$ рівняння руху каната на ділянці $0 < x < l(t)$ набувають вигляду

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} - EF \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} &= - \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_0^x \frac{\rho u_1' dx}{\sqrt{(u_1')^2 + (v_1')^2}} + \\ &+ \frac{\rho}{m} \left[EF \frac{\partial u(0, t)}{\partial x} + \sum_k P_k(t) \right], \\ \rho \frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2} - EF \frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} &= - \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_0^x \frac{\rho v_1' dx}{\sqrt{(u_1')^2 + (v_1')^2}}. \end{aligned} \quad (9)$$

Це інтегро-диференціальні рівняння математичної фізики гіперболічного типу [8] з рухомими границями.

Граничні умови в узагальнених координатах. Таким чином, задача динаміки першого етапу вловлювання та гальмування балістичного тіла зведена до інтегрування системи двох рівнянь гіперболічного типу (9), які описують процес гальмування та пружних поперечно-поздовжніх коливань каната за геометричних граничних умов

$$u_1(x, t)|_{x=0} = 0, \quad v_1(x, t)|_{x=0} = 0. \quad (10)$$

За відсутності проковзування каната по ободу барабана мають місце неголономні граничні умови (обмеження, накладені на швидкості граничних елементів):

$$\left(\frac{\partial u_1(x, t)}{\partial t} \right)_{x=l(t)} = 0, \quad \left(\frac{\partial v_1(x, t)}{\partial t} \right)_{x=l(t)} = 0. \quad (11)$$

Граничним умовам (11) можна надати іншу, інтегральну, форму [2]. Для побудови цієї форми розглянемо повну похідну функції $u(l(t), t)$:

$$\left(\frac{\partial u_1(l, t)}{\partial t} \right) = \left(\frac{\partial u_1(x, t)}{\partial t} \right)_{x=l(t)} \dot{l} + \left(\frac{\partial u_1(x, t)}{\partial x} \right)_{x=l(t)},$$

$$\left(\frac{\partial v_1(l, t)}{\partial t} \right) = \left(\frac{\partial v_1(x, t)}{\partial t} \right)_{x=l(t)} \dot{l} + \left(\frac{\partial v_1(x, t)}{\partial x} \right)_{x=l(t)}. \quad (12)$$

Інтегруючи умови (12) за часом, з урахуванням умов (11), дістанемо граничні умови у точці $x = l(t)$ в узагальнених координатах:

$$\begin{aligned} u_1(l, t) &= \int_0^{l(t)} \frac{\partial u_1(l, t)}{\partial x} \dot{l} dt, \\ v_1(l, t) &= \int_0^{l(t)} \frac{\partial v_1(l, t)}{\partial x} \dot{l} dt. \end{aligned} \quad (13)$$

Для обчислення довжини $l(t)$ пружного каната в лагранжевих координатах відповідно до співвідношень (1) отримаємо такі рівняння:

$$\begin{aligned} \xi(t) &= \int_0^l \left[\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right) \cos \alpha \right]_{x=l(t)} dx = 0, \\ \int_0^l \left[\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right) \sin \alpha \right]_{x=l(t)} dx &= 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Беручи до уваги рівності $\cos \alpha = 1$, $\sin \alpha = 0$ у граничній точці $x = l(t)$, умови (14) представимо у вигляді

$$\xi(t) = l(t) + u(l, t), \quad \dot{\xi}(t) = \dot{l} + \frac{\partial u(l, t)}{\partial x} \dot{l} \quad (15)$$

або

$$\begin{aligned} l(t) &= \int_0^l \frac{\dot{\xi}(t) dt}{\left(1 + \frac{\partial u(l, t)}{\partial x} \right)} \Rightarrow l(t) = \int_0^l \dot{\xi}(t) \left(1 - \frac{\partial u(l, t)}{\partial x} \right) dt, \\ l(t) &= \xi(t) - \int_0^l \dot{\xi}(t) \frac{\partial u(l, t)}{\partial x} dt. \end{aligned}$$

Таким чином, задача першого етапу про рух приведена до інтегрування інтегро-диференціального рівняння гіперболічного типу (9) та рівняння (8) з граничними умовами (11), (13) та (15) для обчислення довжини деформованого каната $l(t)$ у лагранжевих координатах.

3. Уловлювання та гальмування балістичного тіла пружним ланцюгом

Ця задача також має понад вікову історію. У 1872–1874 рр. Г. Резаль на запрошення

військовиків досліджував рух ланцюга, прикріпленого до гарматного ядра [11]. В узагальнених координатах задача динаміки системи «балістичне тіло – пружний ланцюг змінної довжини, який витягується з нерухомої бухти», приводиться до задачі динаміки системи змінної маси. За принципом Даламбера рівняння Мещерського для цієї задачі в рухомій системі координат має вигляд:

$$M(l)\ddot{l} + \rho l \ddot{\xi} + R + (m + \rho l)\ddot{\xi} = 0, \quad (16)$$

де $M(l) = m + \frac{\rho l}{3}$ – приведена маса системи [5]

«балістичне тіло – ланцюг», $\rho l \ddot{\xi}$ – реактивна сила приєднаних елементів витягуваного з бухти ланцюга, R – аеродинамічний опір, $(m + \rho l)\ddot{\xi}$ – сила інерції, обумовлена рухом системи.

Рух вловлюваного тіла m відносно нерухомого простору описується рівнянням

$$m\ddot{\xi} + EF \frac{\partial u(0,t)}{\partial x} + R = 0. \quad (17)$$

Беручи до уваги залежність $l(t) + u(l,t) = \xi$, дістанемо для швидкості $\dot{l}$ співвідношення

$\dot{l} \left(1 + \frac{\partial u(l,t)}{\partial x} \right) = \dot{\xi}$. З точністю до $O \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)$ рівняння (16), (17) набувають вигляду:

$$2 \left(m + \frac{2\rho l}{3} \right) \ddot{l} + \rho l^2 + R = 0, \quad (18)$$

$$m\ddot{l}(t) + EF \frac{\partial u(0,t)}{\partial x} + R = 0. \quad (19)$$

Рівняння (18) описує динамічний процес у системі «вловлене тіло – пружний ланцюг», рівняння (19) – процес гальмування вловленого тіла.

4. Висновки

1. Спеціальним вибором узагальнених координат аналіз динаміки процесів уловлювання та гальмування балістичних тіл зведено до задач еліптичного або гіперболічного типу в залежності від швидкості вловлюваного тіла.

2. Задачі вловлювання балістичних тіл пружним ланцюгом зведені до класичної задачі Мещерського механіки системи змінної маси.

3. Для конкретних сил аеродинамічного опору та опору гальмівних пристроїв побудовано розв'язки для визначення необхідних сил опору в залежності від довжини гальмівного шляху.

Список використаних джерел

1. Горошко О. А. Уравнение плоских колебаний каната переменной длины с подвижными концами / О. А. Горошко // Стальные канаты. – 1964. – Т. 3. – С. 21–25.
2. Кошляков Н. С. Дифференциальные уравнения математической физики / Н. С. Кошляков, Э. В. Глинер, М. М. Смирнов. – Москва: Физматгиз, 1978. – 712 с.
3. Митропольский Ю. А. Нестационарные процессы в нелинейных колебательных системах / Ю. А. Митропольский. – Киев: Изд-во АН УССР, 1965. – 284 с.
4. Митропольский Ю. А. Нелинейная механика. Одночастотные колебания / Ю. А. Митропольский. – Киев: Изд-во Ин-та механики АН Украины, 1997. – 388 с.
5. Тимошенко С. П. Колебания в инженерном деле [изд. 3-е] / С. П. Тимошенко. – Москва: Физматлит, 1959. – 440 с.
6. Горошко О. А. Введение в механику деформируемых тел переменной длины / О. А. Горошко, Г. М. Савин. – Киев: Наукова думка, 1971. – 223 с.

References

1. GOROSHKO, O. O. (1964) Uravnenie ploskikh kolebaniy kanata peremennoy dliny s podvizhnymi kontcami. *Stalnye Kanaty*. 3. p. 21–25.
2. KOSHYLYAKOV, N. S., GLINER, E. V. & SMIRNOV, M. M. (1978) *Differentsialnye Uravneniya Matematicheskoy Fiziki*. Moskva: Phizmatgiz.
3. MITROPOLSKIY, Y. A. (1965) *Nestatsionarnyye Protsessy v Nelineynykh Kolebatelnykh Sistemakh*. Kiev: Izd-vo AN USSR.
4. MITROPOLSKIY, Y. A. (1997) *Nelineynaya Meckhanika. Odnochasotnyye Kolebaniya*. Kiev: Izd-vo In-ta Mekhaniki AN Ukrainy.
5. TIMOSHENKO, S. P. (1955) *Vibration Problems in Engineering*. 3rd Ed. Toronto, New York, London: D. Van Nostrand Co.
6. GOROSHKO, O. O., SAVIN, G. M. (1971) *Vvedenie v Mekhaniku Deformiruemykh Tel Peremennoy Dliny*. Kiev: Naukova dumka.
7. GOROSHKO, O. O., NOVIKOV, V.D. (1968) Rivnyannya ruhu pruzhnykh trosiv, yaki tyagnutsya kynyutym tilom. *DAN URSR*. (12). p.

7. Горошко О. О. Рівняння руху пружних тросів, які тягнуться кинутим тілом / О. О. Горошко, В. Д. Новіков // ДАН УРСР. – 1968. – № 12. – С. 25–29.
8. Динник А. Н. Статьи по горному делу / А. Н. Динник. – Москва: Углетехиздат, 1957. – 194 с.
9. Савин Г. Н. Динамическая теория расчета подъемных канатов / Г. М. Савин. – Киев: Изд-во АН УССР, 1949. – 104 с.
10. Гузь А. Н. О монографическом наследии Г. Н. Савина / А. Н. Гузь, Я. Я. Рушицкий // Прикладная механика. – 2007. – № 1. – С. 37–45.
11. Щедров А. Н. Основы механики гибкой нити / А. Н. Щедров. – Москва: Машгиз, 1961. – 172 с.
12. Минаков А. П. Основы индустрии наматывания и сматывания нити / А. П. Минаков // Текстильная промышленность. – 1944. – № 10. – С. 11–12.
13. Ишлинский А. Ю. Об уравнениях продольных движений каната (гибкой нити) переменной длины / А. Ю. Ишлинский // ДАН СССР. – 1954. – № 3. – С. 62–63.
- 25–29.
8. DINNIK, A. N. (1957) *Stati po Gornomu Delu*. Moskva: Ugletehizdat.
9. SAVIN, G. M. (1971) *Dinamicheskaya Teoriya Podyomnyh Kanatov*. Kiev: Izd-vo AN USSR.
10. GUZ, A. N., RUSHCHITSKIY, Y. Y. (2007) O monographicheskomo nasledii G. N. Savina. *Prikladnaya mehanika*. (1). p. 37–45.
11. SHCHEDROV, A. N. (1961) *Osnovy Mekhaniki Gибkoy Niti*. Moskva: Mashgiz.
12. MINAKOV, A. P. (1944) *Osnovy industrii namatyvaniya i smatyvaniya niti. Tekstilnaya Promyshlennost*. (10). p. 11–12.
13. ISHLINSKIY, A. Y. (1954) Ob uravneniyah prodol'nyh dvizheniy kanata (gibkoy niti) peremennoy dliny. *DAN SSSR*. (3). p. 62–63.

Надійшла до редколегії 30.09.15

УДК 539.3

Лібов Д. Ю., к. ф.-м. н.

**До розв'язання задачі про
неосесиметричні коливання пружного
циліндра скінченної довжини**

Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, проспект
Акад. Глушкова, 4-е
e-mail: dmytro.libov@univ.net.ua

D. Yu. Libov, Ph. D. (Phys.-Math.)

**On a solution to the problem about
non-axisymmetric vibrations of an elastic
cylinder of finite length**

Taras Shevchenko National University of Kyiv,
03680, Kyiv, Acad. Glushkov av., 4-e
e-mail: dmytro.libov@univ.net.ua

Розглядається перша основна гранична задача теорії пружності про неосесиметричні коливання ізотропного циліндра скінченних розмірів. Припускається, що проблема розпадається на послідовність крайових задач зі стоячими хвилями у круговому напрямку. Мета роботи полягає у побудові такого розв'язку поставленої задачі, який дозволить би провести дослідження напружено-деформованого стану циліндра у всій його області, включаючи і кутові точки. Як слідє з представленого у статті огляду, найбільш ефективною серед відомих методологій до розв'язання даної крайової задачі виявляється метод суперпозиції, доповнений асимптотичною поведінкою невідомих нескінченної системи, що виникає при застосуванні цього методу. Поведінка невідомих нескінченної системи у представленій роботі встановлюється за допомогою використання припущення про незалежність певних складових нормального радіального напруження від порядку кругової координати. Наявність інформації про поведінку невідомих задачі дозволяє провести коректну редукцію нескінченної системи і отримати після розв'язання редукованої системи весь вихідний нескінченний набір невідомих. Це є основою для встановлення швидкості збіжності рядів і дослідження напруженого стану циліндра у всіх точках його області.

Ключові слова: пружний ізотропний циліндр, неосесиметричні коливання, метод суперпозиції, нескінченна система рівнянь, асимптотичні властивості невідомих.

The first boundary value problem of elasticity theory about non-axisymmetric vibrations of a finite isotropic cylinder is considered. It is supposed that the problem is decomposed on the sequence of boundary value problems with the standing waves toward a circle direction. The aim of the present work consists in constructing for the stated problem such a solution that enables to investigate a cylinder stress state inside its volume, including corner points. As follows from the article review, the most efficient among known methodologies to solution of the stated problem turns out the superposition method complemented by the asymptotic behavior of infinite system unknowns, where the infinite system is the result of usage of the superposition method. The behavior of unknowns for the infinite system is determined by means of the assumption about an independence of normal radial stress components from a circumferential coordinate order. The information about the behavior of infinite system unknowns allows to perform its correct truncation and to determine the initial infinite set of unknowns. It enables to establish the rate of series convergence and to investigate a cylinder stress state within all points of its boundary.

Key Words: Elastic Isotropic Cylinder, Non-axisymmetric Vibrations, Superposition Method, Infinite System of Equations, Asymptotic Behavior of Unknowns.

1. Вступ

Широке використання об'єктів циліндричної форми в неруйнівному контролі матеріалів [1], акустoeлектроніці [2]: в якості резонаторів, сенсорів, частотних фільтрів та ін., обумовлює активне теоретичне і експериментальне дослідження лінійних гармонічних коливань пружних ізотропних циліндрів. У зв'язку з цим часто постає за-

дача отримання точних даних про власні частоти коливань і характеристики напружено-деформованого стану циліндра у всій його області, включаючи і точки ребра (кутові точки). Причому при описанні динамічної поведінки сучасних приладів використання теорій, які не враховують зв'язаність просторового руху точок тіла, у більшості випадків є неможливим. Тому з'являється необхідність розгляду такої лінійної моделі гар-

монічних коливань циліндрів, яка б не допускала спрощуючих гіпотез щодо характеру його деформування. Дана проблема має строге математичне формулювання у рамках динамічної теорії пружності. Серед аналітичних підходів (такі методи, на відміну від чисельних, дають можливість безпосередньо аналізувати особливості напружено-деформованого стану) до побудови розв'язку крайової задачі теорії пружності про гармонічні коливання ізотропного циліндра скінченних розмірів найбільший розвиток отримали метод однорідних розв'язків і суперпозиції.

У першому підході вектор зміщення представляється набором однорідних і неоднорідних мод – власних розв'язків нескінченного циліндра [3, 4] з довільними комплексними коефіцієнтами, кожний з яких залежить від відповідного кореня дисперсійного рівняння [5]. Нескінченний набір невідомих коефіцієнтів знаходиться з граничних умов на плоских поверхнях циліндра. При цьому знаходження коефіцієнтів потребує використання досить громіздких процедур, – метод колокацій [5, 6, 7], метод найменших квадратів або варіаційний принцип [8, 9], – що зводять задачу до нескінченної системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Причому застосування вказаних підходів не дає змогу отримати в явному вигляді коефіцієнти нескінченної системи і встановити поведінку коефіцієнтів шуканих розкладів. Як наслідок, в рамках вказаних підходів, не вдається дослідити особливості напружень в околі кутових точок циліндра. Не дивлячись на вказані труднощі, за допомогою методу однорідних розв'язків отримані достатньо точні дані про спектри і форми осесиметричних коливань ізотропного скінченного та півнескінченного циліндра. Розв'язок для неосесиметричних типів руху методом однорідних розв'язків на даний момент відсутній.

Ще одним підходом до розв'язання осесиметричної задачі є теорія «другого порядку» – певна модифікація методу однорідних розв'язків, що враховує перші три корені відповідного дисперсійного рівняння. Дана наближена теорія не дає змогу описати з достатньою точністю навіть спектр частот: частота крайового резонансу визначається з похибкою у більш ніж 10% [10, 11]. Тому, враховуючи вказані обмеження, дана теорія має лише історичне значення.

У другому підході – методі суперпозиції – поле переміщень скінченного циліндра представляється у вигляді суми двох рядів: перший відповідає модам нескінченного шару, товщини рівній висоті циліндра; другий – модам нескінченного циліндра, радіус якого рівний радіусу скінчен-

ного циліндра. Моді шару та циліндра тут розкладені в ряди Діні та Фур'є з довільними коефіцієнтами по повним системам Бесселевих і тригонометричних функцій відповідно. Підпорядкування розв'язку умовам на границі циліндра, як і у методі однорідних розв'язків, приводить до нескінченної системи лінійних алгебраїчних рівнянь відносно коефіцієнтів рядів. На цьому етапі розв'язання задачі перевага методу суперпозиції полягає у можливості отримати в явному вигляді коефіцієнти нескінченної системи.

У роботах, присвячених дослідженню на основі методу суперпозиції осесиметричних [12] і неосесиметричних [13] коливань циліндра, шляхом вкорочення нескінченної системи (метод простої редукції) знайдені спектри частот і приведені форми коливань. Хоча метод простої редукції дає можливість з високою точністю визначити частоти і поле переміщень, проте він не підходить для опису напруженого стану в околі реберних кіл циліндра.

Дану статтю присвячено побудові на основі методології [14] такого розв'язку крайової задачі, який дозволив в рамках методу суперпозиції дослідити поведінку напружень в околі кутових точок циліндра. У роботі будуть розглядатися тільки неосесиметричні коливання, оскільки осесиметрична задача є дослідженою більш повно [15].

2. Постановка граничної задачі

Розглянемо наступну крайову задачу теорії пружності у циліндрі $0 \leq r_1 \leq a$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $|z_1| \leq H$. Матеріал циліндра вважаємо лінійно-пружним, ізотропним, з коефіцієнтом Пуассона ν , модулем зсуву μ і густиною ρ . Залежність процесу деформування від часу приймаємо гармонічною (часовий множник $e^{i\omega t}$ надалі опущено). В наступному використовуємо безрозмірні, віднесені до радіуса a , координати: $r = r_1 / a$, $z = z_1 / a$, $h = H / a$.

Компоненти вектора зміщення $\vec{u}(r, \theta, z)$ задовільняють рівняння руху Ламе:

$$c_1^2 \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{u} - c_2^2 \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{u} = -\omega^2 \vec{u}. \quad (1)$$

Тут $c_1 = c_2 \sqrt{2(1-\nu)/(1-2\nu)}$, $c_2 = \sqrt{\mu/\rho}$ – швидкості безвихрової та еквіволумінальної хвиль.

Крайові умови відповідають першій основній граничній задачі теорії пружності:

$$\sigma_r = 0, \quad \tau_{rz} = \tau_{r\theta} = 0, \quad r = 1, \quad |z| \leq h;$$

$$\frac{a}{2\mu}\sigma_z = \alpha_{\pm}(r, \theta), \quad \tau_{zr} = \tau_{z\theta} = 0, \quad 0 \leq r \leq 1, \quad |z| = h. \quad (2)$$

Припускаємо, що проблема (1), (2) розпадається на послідовність граничних задач зі стоячими хвилями у круговому напрямку:

$$\alpha_{\pm}(r, \theta) = g_{\pm}(r) \cos(\ell\theta), \quad \ell = 1, 2, \dots \quad (3)$$

Припущення (3) ґрунтується на даних експерименту Мкмагона [16].

За рахунок лінійності задачі використовуємо можливість окремого розгляду задач з симетричним та антисиметричним деформуванням відносно серединної площини циліндра:

$g_{\pm}(r) = g(r)$ – симетричні коливання;

$g_{\pm}(r) = \pm g(r)$ – антисиметричні коливання.

Далі розглядається лише симетрична задача. Перехід до характеристик антисиметричної задачі виконується за допомогою стандартної серії заміни: $\cos(\cdot) \rightarrow -\sin(\cdot)$, $\sin(\cdot) \rightarrow \cos(\cdot)$.

3. Метод суперпозицій

Згідно методу суперпозиції, розв'язок граничної задачі (1), (2) для симетричних відносно площини $z = 0$ коливань представляється у вигляді:

$$\bar{u}(r, \theta, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{u}^c(\kappa_n; r, \theta, z) + \sum_{j=1}^{\infty} \bar{u}^d(\lambda_j; r, \theta, z). \quad (4)$$

Тут $\kappa_n h = \pi n$, а λ_j – корені рівняння $J'_\ell(\lambda) = 0$.

Перший ряд відповідає розв'язку задачі про періодичне (симетричне відносно площини $z = 0$) деформування нескінченного циліндра $0 \leq r \leq 1$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $|z| < \infty$, моди якого мають вигляд:

$$\begin{aligned} u_r^c &= \left[A q_1 I'_\ell(q_1 r) - B \kappa q_2 I'_\ell(q_2 r) + C \frac{\ell}{r} I_\ell(q_2 r) \right] e^{i[\ell\theta + \kappa z]}, \\ u_\theta^c &= \left[A \frac{\ell}{r} I_\ell(q_1 r) - B \kappa \frac{\ell}{r} I_\ell(q_2 r) + C q_2 I'_\ell(q_2 r) \right] i e^{i[\ell\theta + \kappa z]}, \\ u_z^c &= \left[A \kappa I_\ell(q_1 r) - B q_2^2 I_\ell(q_2 r) \right] i e^{i[\ell\theta + \kappa z]}, \\ q_s^2 &= \kappa^2 - \Omega_s^2, \quad \Omega_s = \frac{\omega a}{c_s} \quad (s=1, 2); \quad A, B, C - \text{const}. \end{aligned} \quad (5)$$

Даний розв'язок дозволяє виконати граничні умови на бічній поверхні скінченного циліндра.

Другий ряд (4) представляє розв'язок задачі про «періодичне» (симетричне) деформування нескінченного шару $0 \leq r < \infty$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $|z| \leq h$, зміщення якого мають наступний вигляд:

$$\begin{aligned} u_r^d &= \left\{ \left[D \lambda \cosh(p_1 z) - E p_2 \cosh(p_2 z) \right] J'_\ell(\lambda r) + \right. \\ &\quad \left. + F \cosh(p_2 z) \frac{\ell}{r} J_\ell(\lambda r) \right\} e^{i\ell\theta} + \dots, \\ u_\theta^d &= \left\{ \left[D \cosh(p_1 z) - E \frac{p_2}{\lambda} \cosh(p_2 z) \right] \frac{\ell}{r} J_\ell(\lambda r) + \right. \\ &\quad \left. + F \cosh(p_2 z) \lambda J'_\ell(\lambda r) \right\} e^{i\ell\theta} + \dots, \\ u_z^d &= \left[D p_1 \sinh(p_1 z) - E \lambda \sinh(p_2 z) \right] J_\ell(\lambda r) e^{i\ell\theta} + \dots \\ p_s^2 &= \lambda^2 - \Omega_s^2 \quad (s=1, 2); \quad D, E, F - \text{const}. \end{aligned} \quad (6)$$

Моди нескінченного шару (6) мають необхідну функціональну повноту для виконання граничних умов на торцях циліндра.

Процедура виконання крайових умов (2) зводить задачу до розв'язання нескінченної системи лінійних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих коефіцієнтів рядів (4) та компонент g_j розвинення в ряд зовнішнього навантаження:

$$g(r) = \sum_{j=1}^{\infty} g_j \frac{J_\ell(\lambda_j r)}{J'_\ell(\lambda_j)}. \quad (7)$$

Нескінченна система для симетричних відносно серединної площини коливань циліндра має наступний вигляд ($n = 0, 1, 2, \dots, \infty$; $j = 1, 2, \dots, \infty$):

$$\begin{aligned} \tau_{zr}, \tau_{z\theta}: \quad D_j &= E_j \frac{\lambda_j^2 + p_2^2}{2\lambda_j p_1} \cdot \frac{\sinh(p_2 h)}{\sinh(p_1 h)}, \quad F_j = 0; \\ \tau_{rz}: \quad A_n &= B_n \frac{\kappa_n^2 + q_2^2}{2\kappa_n} \cdot \frac{q_2}{q_1} \cdot \frac{I'_\ell(q_2)}{I'_\ell(q_1)} - C_n \frac{\ell}{2q_1} \cdot \frac{I_\ell(q_2)}{I'_\ell(q_1)}; \\ \sigma_r: \quad x_n \mathcal{P}(\kappa_n) &+ z_n \mathcal{C}(\kappa_n) + \sum_{j=1}^{\infty} y_j \mathcal{D}_{jn} = 0; \\ \tau_{r\theta}: \quad x_n \mathcal{T}(\kappa_n) &+ z_n \mathcal{Q}(\kappa_n) + \sum_{j=1}^{\infty} y_j \mathcal{G}_{jn} = 0; \\ \sigma_z: \quad x_0 \frac{2\nu\Omega_1^2 \lambda_j^2}{(1-2\nu)p_1^2} \cdot \frac{\mathfrak{J}_\ell(\Omega_1) - \ell}{\lambda_j^2 - \ell^2} &+ \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} [x_n \mathcal{K}_{nj} + z_n \mathcal{L}_{nj}] + y_j \mathcal{R}(\lambda_j) = g_j. \end{aligned} \quad (8)$$

У системі (8) введено позначення для коефіцієнтів дисперсійного рівняння Хадсона $\mathcal{P}(\kappa)$,

$\mathcal{C}(\kappa)$, $\mathcal{T}(\kappa)$, $\mathcal{Q}(\kappa)$; визначника Релея – Лемба $\mathcal{R}(\lambda)$; функції Оное $\mathfrak{J}_\ell(\Omega)$; коефіцієнтів рядів системи $\mathcal{D}_{jn}$, $\mathcal{G}_{jn}$, $\mathcal{K}_{nj}$, $\mathcal{L}_{nj}$. Явний вигляд цих величин приведений у дисертації [17]. Також введено позначення для невідомих x_n , z_n , y_j :

$$\begin{aligned}x_0 &= -A_0 J_\ell(\Omega_1), & x_n &= B_n (-1)^n \kappa_n q_2 I'_\ell(q_2); \\z_0 &= C_0 J_\ell(\Omega_2), & z_n &= C_n (-1)^n I_\ell(q_2); \\hy_j &= -E_j \lambda_j \sinh(p_2 h) J_\ell(\lambda_j).\end{aligned}$$

4. Результати дослідження

Для проведення кількісного дослідження особливостей мод коливань і розподілу напружень необхідно виконати перехід від нескінченної (8) до відповідної скінченної системи рівнянь.

Для отримання скінченної системи часто використовуються метод простої редукції [13, 18], який полягає у відкиданні всіх рівнянь (8), починаючи з деякого, тобто:

$$x_n = 0, \quad z_n = 0 \quad (n \geq N); \quad y_j = 0 \quad (j \geq J). \quad (9)$$

Хоча такий підхід до розв'язання нескінченної системи дозволяє описати з досить високою точністю власні частоти і форми коливань, проте він не дозволяє досліджувати поведінку напружень σ_r , σ_z в околі ребра циліндра.

Підхід, що дає можливість аналізувати поведінку напружень в кутових точках, полягає в дослідженні регулярності нескінченної системи. Якщо регулярність нескінченної системи встановлено, то з'являється можливість застосувати до неї теорію Кояловича [15], з якої випливають асимптотичні властивості невідомих задач. Оскільки доведення регулярності (8) є окремою і досить складною задачею, тому у представлений роботі буде використовуватися методологія і припущення, запропоновані у монографії [14]. Дана методологія базується на відомій для осесиметричного випадку сингулярності певних складових нормальних напружень в точках ребра циліндра [19]. Зокрема, якщо для фіксованої частоти Ω існує обмежений розв'язок осесиметричної задачі, тоді «шарова» частина напруження $\sigma_r(r, z)$ при підході до торця циліндра вздовж криволінійної поверхні повинна мати логарифмічну особливість вигляду:

$$\sigma'_r(1, z) = O\left(\ln\left[1 - e^{-\pi(h-|z|)^{1/4}}\right]\right), \quad |z| \rightarrow h; \quad (10)$$

при $\Omega^2 / \kappa_N^2 \approx \Omega^2 / \lambda_J^2 = o(1)$.

Припустимо, що тип сингулярності «шарової» частини неосесиметричного напруження $\sigma_r(r, \theta, z)$ не залежить від порядку (ℓ) кругової координати θ . Тоді поведінка нескінченної суми, що відповідає цьому напруженню,

$$\frac{a}{2\mu} \sigma'_r = h \sum_{j=1}^{\infty} y_j \mathcal{W}_j^r(r, z) \cos(\ell\theta), \quad (11)$$

де $\mathcal{W}_j^r(r, z)$ представлено у [17], при наближенні до точок $r=1$, $|z| \rightarrow h$ повинна співпадати з (10).

Якщо виписати асимптотику члена $\mathcal{W}_j^r$ при великих j біля торця циліндра [17]:

$$\begin{aligned}\mathcal{W}_j^r(1, z) &\approx \varsigma e^{-\beta_j(h-|z|)} \cdot [\beta_j^{-1} - h + |z|], \quad |z| \rightarrow h; \\ \lambda_j &= \beta_j + O(\beta_j^{-1}), \quad j \rightarrow \infty;\end{aligned} \quad (12)$$

$$\beta_j = \frac{1}{4} \pi (4j + 2\ell + 1); \quad \varsigma = \frac{1}{2} (\Omega_2^2 - \Omega_1^2),$$

і використати суму ряду [17]

$$T_1(\eta) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{e^{-\beta_j \eta}}{\beta_j} = \frac{1}{\pi} \left[\ln \frac{1 + e^{-\pi\eta/4}}{1 - e^{-\pi\eta/4}} + \dots \right], \quad (13)$$

то можна зробити висновок, що напруження $\sigma'_r(r, \theta, z)$ має логарифмічну особливість (10), якщо

$$\lim_{j \rightarrow \infty} y_j = G = \text{const}. \quad (14)$$

Щоб встановити асимптотичну поведінку невідомих x_n і z_n , розглянемо третій і четвертий набори рівнянь нескінченної системи (8) при великих n . Для нескінченної сум будемо мати оцінки:

$$\sum_{j=1}^{\infty} y_j \mathcal{D}_{jn} = G \frac{\varsigma}{\kappa_n} + O\left(\frac{\Omega_2^2}{\kappa_n^3}\right), \quad \sum_{j=1}^{\infty} y_j \mathcal{G}_{jn} = O\left(\frac{\Omega_2^2}{\kappa_n^2}\right). \quad (15)$$

Коефіцієнти дисперсійного рівняння Хадсона мають наступні асимптотичні представлення:

$$\mathcal{P}(\kappa_n) = -\frac{\varsigma}{\kappa_n} + O\left(\frac{\Omega_2^2}{\kappa_n^2}\right),$$

$$C(\kappa_n) = \frac{1}{2} \ell \kappa_n + O\left(\frac{\Omega_2^2}{\kappa_n^2}\right), \quad (16)$$

$$T(\kappa_n) = \frac{\ell \Omega_2^2}{\kappa_n^2} + O\left(\frac{\Omega_2^2}{\kappa_n^3}\right), \quad Q(\kappa_n) = -\kappa_n^2 + O(\kappa_n).$$

Використовуючи оцінки (15) і (16), отримуємо систему для визначення поведінки невідомих x_n , z_n при достатньо великих n :

$$\begin{aligned} x_n \zeta - \frac{1}{2} z_n \ell \kappa_n^2 &= G \zeta; \\ x_n \frac{\ell \Omega_2^2}{\kappa_n^2} - z_n \kappa_n^2 &= O\left(\frac{\Omega_2^2}{\kappa_n^3}\right). \end{aligned} \quad (17)$$

Після розв'язання системи (17) отримаємо:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = G, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} z_n \kappa_n^4 = \text{const}. \quad (18)$$

Не складно показати [17], що асимптотичні властивості невідомих задовільняють останній набір рівнянь нескінченної системи (8), якщо швидкість спадання коефіцієнтів зовнішнього навантаження: $g_j = O(\lambda_j^{-2})$. Цим підтверджує-

ся справедливість зробленого вище припущення (14) про асимптотичну поведінку невідомої y_j .

Використовуючи поведінку невідомих x_n , z_n , y_j (14) і (18), можемо покласти у всіх рядах нескінченної системи:

$$x_n = G, \quad z_n = 0 \quad (n \geq N); \quad y_j = G \quad (j \geq J) \quad (19)$$

і отримати скінченну систему $2N + 2 + J$ рівнянь. Константа G може бути визначена, наприклад, як середнє арифметичне величин x_N , y_J :

$$G = \frac{1}{2}(x_N + y_J). \quad (20)$$

Важливою перевагою покращеної редукції (19) над простою редукцією (9) є те, що із отриманої коректно редуктованої системи можна знайти всі нескінченні набори невідомих вихідної системи рівнянь (8). Саме це дає можливість провести дослідження поведінки напружень σ_r , σ_z в околі кутових точок циліндра [17].

Список використаних джерел

1. Papadakis E. P. *Nondestructive Testing* / E. P. Papadakis // *Ultrasonic Instruments and Devices*. – Academic Press, 1999. – Vol. 1. – P. 193–274. – (Physical Acoustics; Vol. 23).
2. Lynnworth L. C. *Industrial Process control Sensors and Systems* / L. C. Lynnworth, V. Magori // *Ultrasonic Instruments and Devices*. – Academic Press, 1999. – Vol. 1. – P. 275–470. – (Physical Acoustics; Vol. 23).
3. Pochhammer L. Über die fortpflanzungsgeschwindigkeiten kleiner schwingungen in einem unbegrenzten isotropen kreiszyylinder / L. Pochhammer // *J. Reine und Angew. Math.* – 1876. – Vol. 81, № 4. – S. 324–336.
4. Hudson G. E. Dispersion of elastic waves in solid circular cylinders / G. E. Hudson // *Phys. Rev.* – 1943. – Vol. 63. – P. 46–51.
5. Zemanek J. An experimental and theoretical investigation of elastic wave propagation in a cylinder / J. Zemanek // *J. Acoust. Soc. Am.* – 1972. – Vol. 51, № 1(2). – P. 265–283.
6. Kari L. Axially symmetric modes in finite cylinders—the wave guide solution / L. Kari // *Wave Motion*. – 2003. – Vol. 37, № 2. – P. 191–206.
7. Pagneux V. Complex resonance and localized vibrations at the edge of a semi-infinite elastic

References

1. PAPADAKIS, E. P. (1999) *Ultrasonic Instruments and Devices*. 1. Academic Press.
2. LYNNWORTH, L. C. & MAGORI, V. (1999) *Ultrasonic Instruments and Devices*. 1. Academic Press.
3. POCHHAMMER, L. (1876) Über die fortpflanzungsgeschwindigkeiten kleiner schwingungen in einem unbegrenzten isotropen kreiszyylinder. *J. reine und angew. Math.* 81 (4). s. 324–336.
4. HUDSON, G. E. (1943) Dispersion of elastic waves in solid circular cylinders. *Phys. Rev.* 63. p. 46–51.
5. ZEMANEK, J. (1972) An experimental and theoretical investigation of elastic wave propagation in a cylinder. *J. Acoust. Soc. Am.* 51 (1). p. 265–283.
6. KARI, L. (2003) Axially symmetric modes in finite cylinders—the wave guide solution. *Wave Motion*. 37 (2). p. 191–206.
7. PAGNEUX, V. (2012) Complex resonance and localized vibrations at the edge of a semi-infinite elastic cylinder. *Math. Mech. Solids*. 17. p. 17–26.
8. WU, C.-H. & PLANKETT, R. (1967) On the solutions of plates, strips, rods and cylinders

- cylinder / V. Pagneux // *Math. Mech. Solids.* – 2012. – Vol. 17. – P. 17–26.
8. Wu C.-H. On the solutions of plates, strips, rods and cylinders subjected to arbitrary dynamic edge load / C.-H. Wu, R. Plankett // *SIAM J. Appl. Math.* – 1967. – Vol. 15, № 1. – P. 107–119.
 9. Gregory R. D. Axisymmetric waves in a semi-infinite elastic rod / R. D. Gregory, I. Gladwell // *Quart. J. Mech. Appl. Math.* – 1989. – Vol. 42, № 2. – P. 327–337.
 10. McNiven H. D. Extensional waves in a semi-infinite elastic rod / H. D. McNiven // *J. Acoust. Soc. Am.* – 1961. – Vol. 33, № 1. – P. 23–27.
 11. McNiven H. D. Axially symmetric waves in finite, elastic rods / H. D. McNiven, D. C. Perry // *J. Acoust. Soc. Am.* – 1962. – Vol. 34, № 4. – P. 433–437.
 12. Hutchinson J. R. Axisymmetric vibration of a free finite-length rod / J. R. Hutchinson // *J. Acoust. Soc. Am.* – 1972. – Vol. 51, № 1. – P. 233–240.
 13. Hutchinson J. R. Vibrations of solid cylinders / J. R. Hutchinson // *J. Appl. Mech.* – 1980. – Vol. 47, № 4. – P. 901–907.
 14. Гринченко В. Т. Гармонические колебания и волны в упругих телах / В. Т. Гринченко, В. В. Мелешко. – Киев: Наук. думка, 1981. – 284 с.
 15. Гринченко В. Т. Равновесие и установившиеся колебания упругих тел конечных размеров / В. Т. Гринченко. – Киев: Наукова думка, 1978. – 264 с.
 16. McMahon G. W. Experimental study of the vibrations of solid, isotropic, elastic cylinders / G. W. McMahon // *J. Acoust. Soc. Am.* – 1964. – Vol. 36, № 1. – P. 85–92.
 17. Либов Д. Ю. Особенности спектра собственных частот цилиндров конечной длины: дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.02.04 / Либов Дмитрий Юрьевич. – Киев, 2014. – 104 с.
 18. Tamura S.-I. Vibrational cavity modes in a free cylindrical disk / S.-I. Tamura // *Phys. Rev. B.* – 2009. – Vol. 79. – P. 054302.
 19. Гринченко В. Т. Высокочастотные осесимметричные колебания круглых дисков / В. Т. Гринченко, В. В. Мелешко // *Прикл. механика.* – 1976. – Т. 12, № 12. – С. 60–68.
 - subjected to arbitrary dynamic edge load. *SIAM J. Appl. Math.* 15 (1). p. 107–119.
 9. GREGORY, R. D. & GLADWELL, I. (1989) Axisymmetric waves in a semi-infinite elastic rod. *Quart. J. Mech. Appl. Math.* 42 (2). p. 327–337.
 10. MCNIVEN, H. D. Extensional waves in a semi-infinite elastic rod *J. Acoust. Soc. Am.* – 1961. – Vol. 33, № 1. – P. 23–27.
 11. MCNIVEN, H. D. & PERRY, D. C. (1962) Axially symmetric waves in finite, elastic rods. *J. Acoust. Soc. Am.* 34 (4). p. 433–437.
 12. HUTCHINSON, J. R. (1972) Axisymmetric vibration of a free finite-length rod. *J. Acoust. Soc. Am.* 51 (1). p. 233–240.
 13. HUTCHINSON, J. R. (1980) Vibrations of solid cylinders. *J. Appl. Mech.* 47 (4). p. 901–907.
 14. GRINCHENKO, V. T. & MELESHKO, V. V. (1981) *Garmonicheskie Volny i Kolebaniya v Uprigikh Telakh.* Kiev: Naukova Dumka.
 15. GRINCHENKO, V. T. (1978) *Ravnovesie i Ustanovivshiesya kolebaniya uprugih tel konechnykh razmerov.* Kiev: Naukova Dumka.
 16. MCMAHON, G. W. (1964) Experimental study of the vibrations of solid, isotropic, elastic cylinders. *J. Acoust. Soc. Am.* 36 (1). p. 85–92.
 17. LIBOV, D. YU. (2014) *Osobennosti Spectra Sobstennykh Chastot Cilindrov Konechnoy Dliny.* Dissertatsiya Kandidata Fiziko-Matematicheskikh Nauk po Spetsialnosti: 01.02.04. Kievskiy Natsionalnyy Universitet Imeni Tarasa Shevchenko. Kiev.
 18. TAMURA, S.-I. (2009) Vibrational cavity modes in a free cylindrical disk. *Phys. Rev. B.* 79. p. 054302.
 19. GRINCHENKO, V. T. & MELESHKO, V. V. (1976) High-frequency axisymmetric vibrations of circular disks. *Soviet Appl. Mech.* 12. p. 1251–1258.

Надійшло до редколегії 30.09.15

УДК 539.3

Лимарченко О. С.¹, д. т. н., проф.,
Губська В. В.², к. ф.-м. н.

**Задача про нелінійні коливання
резервуару у формі усіченого конуса,
частково заповненого рідиною під дією
імпульсного навантаження**

¹Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, проспект Акад. Глушкова, 4-е
e-mail: olelim2010@yahoo.com

²Київський національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут», 03056, м. Київ, проспект Перемоги, 37

O. S. Limarchenko¹, Dr. Sci. (Tech.), Prof.,
V. V. Gubskaya², Ph. D. (Phys.-Math.)

**Problem of oscillations of tank of truncated
conic shape, partially filled by liquid under
action of impulse load**

¹Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03680, Kyiv, Acad. Glushkov av., 4-e
e-mail: olelim2010@yahoo.com

²National Technical University of Ukraine «Kyiv Polytechnic Institute», 03056, Kyiv, Peremohy pr., 37

Ставиться задача дослідити вплив нахилу стінок резервуару у формі зрізаного конуса на хвилювання в рідині з вільною поверхнею. Поведінка системи розглядається на тривалому проміжку часу при імпульсному збудженні руху силою, прикладеною до резервуару. Проаналізовано амплітуди збурень рідини на стінці резервуару в часі для конуса, циліндра, а також проміжних випадків у вигляді зрізаного конуса.

Ключові слова: нелінійна динаміка, вільна поверхня рідини, вихід на ustalений режим.

The problem of the influence of slope walls of the tank in the shape of a truncated cone on the formation of oscillations of liquid with a free surface is investigated. The behavior of the system is considered on the long period of time under pulsed excitation movement force applied to the tank. We consider the problem of forced nonlinear oscillations tank in the shape of a truncated cone and fluid with a free surface at their joint motion. The problem of the availability of such a system in steady oscillation of the system at the excitation pulse power is investigated. The analysis of amplitude perturbations of the liquid on the side of the tank in time for the cone, cylinder, and intermediate cases in the form of a truncated cone was conducted. For considered oscillatory processes is typical modulation and unchanged average value of amplitudes, significant influence of higher harmonics and shows significantly on the amount of time far from the beginning of the oscillatory process (superharmonics and two-humped peaks), the modulation period increases with radius lower base. The maximum amplitudes slightly decrease with increasing radius of the lower base. In all cases, steady state mode of oscillation was not achieved.

Key Words: Nonlinear Dynamics, Free Surface, Steady State Mode of Oscillation.

1. Вступ

Актуальність задач динаміки рідини в резервуарах постає при проектуванні сучасних систем конструкцій з рідиною. Багато видів інженерних систем пов'язані з транспортуванням рідких вантажів і все частіше постає проблема динаміки таких систем, викликана коливаннями рідини з вільною поверхнею. Проблема коливань конструкцій з рідиною викликає інтерес щодо впливу коливань рідкого палива на льотно-технічні характеристики реактивних транспортних засобів та їх керування. При транспортуванні виникають коливання вільної поверхні рідини, а при великій відносній масі рідини її хвильові рухи

можуть суттєво впливати на динаміку транспортного засобу. Тому необхідно володіти високодостовірною моделлю процесів у системах резервуар-рідина, зручною для теоретичного аналізу та чисельної реалізації.

У відомих роботах українських та закордонних вчених [1–8] та інших розглядалися нелінійні задачі коливань рідини в резервуарах. Так, було показано, що в таких задачах варіаційні методи дають ефективні результати. Важливість такого типу задач пов'язана також з тим, що ці задачі є одним з різновидів неklasичної задачі Неймана для рівняння Лапласа. Незважаючи на численні публікації в цій галузі, задачі динаміки

сумісного руху резервуарів з рідиною досліджувалися в недостатній мірі.

Метою роботи є побудова ефективної математичної моделі для дослідження нелінійної задачі динаміки сумісного руху системи, що складається з резервуару у формі усіченого конуса і рідини з вільною поверхнею, а також дослідження характерних режимів розвитку коливань системи під дією імпульсного навантаження.

2. Постановка задачі та її розв'язання

Ставиться задача дослідити вплив нахилу стінок резервуару у формі зрізаного конуса на хвилеутворення в рідині з вільною поверхнею. Поведінка системи розглядається на тривалому проміжку часу при імпульсному збудженні руху силою, прикладеною до резервуару.

Нелінійні нестационарні задачі динаміки сумісного руху системи, що складається з резервуару у формі оберненого усіченого конуса та рідини з вільною поверхнею, що частково заповнює його, коли система здійснює поступальний рух під дією імпульсної сили.

Розглядається резервуар у формі усіченого конуса. Нехай τ – область, яку займає рідина; S_0 і S – вільна поверхня рідини в її збуреному і незбуреному русі; Σ і Σ_0 – границі контакту рідини зі стінками резервуару у збуреному та незбуреному стані ($\Delta\Sigma$ – зміна контакту рідини, зумовлена збуренням руху, $\Sigma = \Sigma_0 + \Delta\Sigma$), $\xi(x, y, z, t) = 0$ – рівняння вільної поверхні рідини. Поступальний рух резервуара описується вектором переміщень $\vec{\varepsilon}$. Припускається, що рідина ідеальна, однорідна, нестислива і в початковий момент часу вихрові рухи відсутні. В цьому випадку кінематика рідини може бути описана потенціалом швидкостей. Резервуар є абсолютно твердим тілом з абсолютно жорсткими стінками.

Постановка задачі [4]:

$$\Delta\varphi = 0 \text{ в } \tau; \quad (1)$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n} = \dot{\vec{\varepsilon}} \cdot \vec{n} \text{ на } \Sigma; \quad (2)$$

$$\frac{\partial\xi}{\partial t} + \vec{\nabla}\xi \cdot \vec{\nabla}\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial z} \text{ на } S; \quad (3)$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{1}{2}(\vec{\nabla}\varphi)^2 - \vec{\nabla}\varphi \cdot \dot{\vec{\varepsilon}} - \vec{g} \cdot \vec{r} = 0 \text{ на } S \quad (4)$$

Рівняння (1) відповідає вимозі нерозривності потоку в об'ємі рідини τ , (2) – умова неперетікання на твердій межі контакту тіло –

рідина Σ , (3) – умова неперетікання на вільній збуреній поверхні рідини S , (4) – динамічна гранична умова, яка відповідає рівності тисків на вільній поверхні рідини і тиску атмосфери над нею.

Потенціал швидкостей рідини можна представити у наступному вигляді: $\Phi = \varphi + \dot{\vec{\varepsilon}} \cdot \vec{r}$, де $\vec{r}$ – радіус-вектор точок області τ , а $\vec{\varepsilon}$ – параметр поступального руху тіла, що несе рідину. Перший член у виразі відповідає хвилювому руху рідини, другий – поступальному руху резервуару.

З точки зору аналітичної механіки задача складається з кінематичних умов (механічних в'язей) (1)–(3), які необхідно задовольнити до застосування варіаційного принципу, і динамічної умови (4), яка є природною для варіаційного принципу Гамільтона–Остроградського.

Для варіаційного принципу Гамільтона–Остроградського

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = 0; \quad (5)$$

узагальнена функція Лагранжа може бути записаною в наступному вигляді:

$$L = \frac{1}{2} \rho \int_{\tau} (\vec{\nabla}\varphi)^2 d\tau + \frac{1}{2} M_p (\dot{\vec{\varepsilon}})^2 - \frac{1}{2} \rho g \int_{S_0} \xi^2 dS - (M_p + M_f) \varepsilon_z g \quad (6)$$

де ρ – густина рідини, M_p – маса резервуара, M_f – маса рідини, g – прискорення вільного падіння.

Наведена постановка задачі про рух обмеженого об'єму рідини в нових змінних по відношенню до варіаційного принципу Гамільтона–Остроградського представляє собою сукупність кінематичних в'язей, які для ефективного застосування варіаційного принципу необхідно виключити до розв'язання варіаційної задачі.

Для вивчення задачі використано модель [4, 7], яка була протестована на прикладі перехідних процесів для задач динаміки резервуарів у формі тіл обертання з рідиною з вільною поверхнею. Математична модель представлена в амплітудних параметрах a_i коливань рідини та руху резервуара $\vec{\varepsilon}$:

$$\sum_{n=1}^N p_{rn}(a_k, t) \ddot{a}_n + \sum_{n=N+1}^{N+3} p_{rn}(a_k, t) \ddot{e}_{n-N} = q_r(a_k, \dot{a}_l, t),$$

$$r = \overline{1, N+3} \quad (7)$$

При цьому коефіцієнти p_m визначаються через алгебраїчні форми від першого до третього порядків з коефіцієнтами, які визначаються через квадратури від форм коливань (координатних функцій).

Для побудови координатних функцій був використаний метод допоміжної області, який на відміну від класичного методу враховує виконання умови неперетікання вище рівня незбуреної вільної поверхні. Для оцінки точності отриманого розв'язку приймалася похибка у вигляді

$$\delta = \frac{\partial \phi}{\partial n} \bigg|_{\Sigma} / \max \left| \frac{\partial \phi}{\partial n} \right|_{S_0}. \text{ Отримані функції з точністю } 10^{-5} \text{ і вище задовольняють умови неперетікання на стінці, і з точністю порядку } 10^{-3} \text{ на продовженні стінки над вільною поверхнею. За умови використання методу допоміжної області, похибки умови неперетікання вище рівня вільної поверхні вдалося покращити в 100-500 разів в порівнянні з класичним підходом.}$$

3. Результати розрахунків та їх аналіз

Досліджується задача виходу на ustalений режим системи, що складається з резервуару і рідини з вільною поверхнею. Розглянемо сумісний рух резервуару з рідиною в горизонтальній площині під дією імпульсної сили. Поведінка системи розглядається на тривалому проміжку часу 150 с, співвідношення мас резервуару і рідини $M_p = 0.2M_{ж}$. До резервуару прикладається імпульсна сила величиною 0.7 Н протягом часу 0.5 с.

Проаналізуємо амплітуди збурень рідини на стінці резервуару в часі для конуса, циліндра, а також проміжних випадків у вигляді зрізаного конуса з радіусом нижньої основи 0.2, 0.4, 0.6, 0.8 м. Приведені графіки зміни амплітуди збурень рідини на стінці резервуару в часі. Для більш наочного представлення розглянуті ці ж значення на меншому інтервалі часу.

З графіків видно, що ustalені коливання в системі практично не спостерігаються. На тлі квазіперіодичного процесу, що практично співпадає з частотою коливань по першій формі, помітний істотний прояв вищих форм з періодами, не кратними періоду зовнішнього збудження, що в кінцевому підсумку призводить

до того, що ustalені режими коливань відсутні для обох випадків.

Для випадків конуса і зрізаного конуса з радіусом нижньої основи 0.2 зміна середнього значення амплітуди коливань не спостерігається. Присутня помітна модуляція.

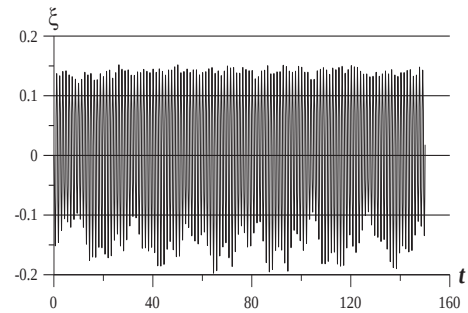


Рис. 1. Зміна амплітуди збурень рідини з часом для конуса

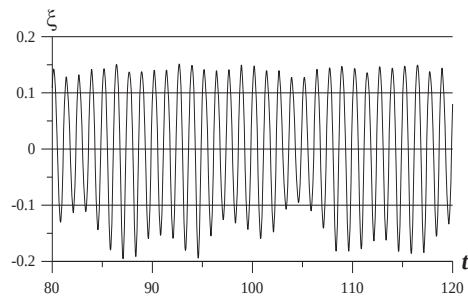


Рис. 1 а. Зміна амплітуди збурень рідини з часом для конуса, часовий проміжок 80–120 с

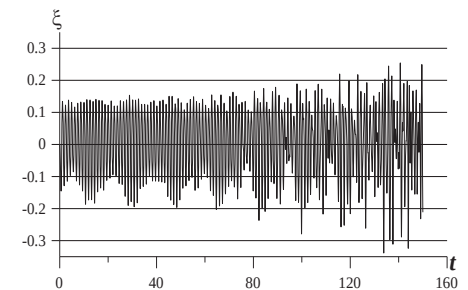


Рис. 2. Зміна амплітуди збурень рідини з часом для зрізаного конуса з радіусом нижньої основи 0.2 м.

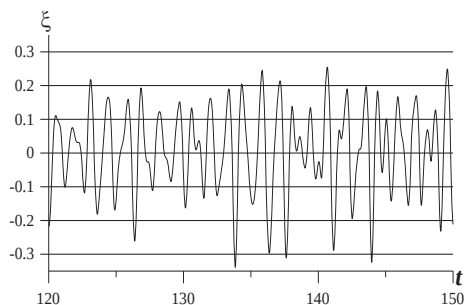


Рис.2 а Зміна амплітуди збурень рідини з часом для зрізаного конуса з радіусом нижньої основи 0,2 м, часовий проміжок 80–150 с

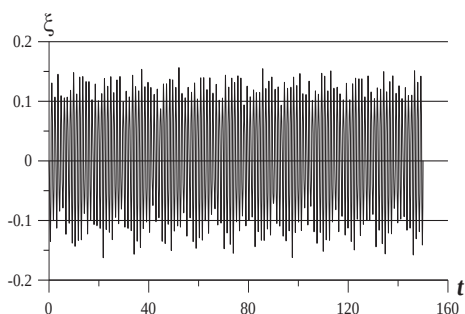


Рис. 4 Зміна амплітуди збурень рідини з часом для зрізаного конуса з радіусом нижньої основи 0.6 м

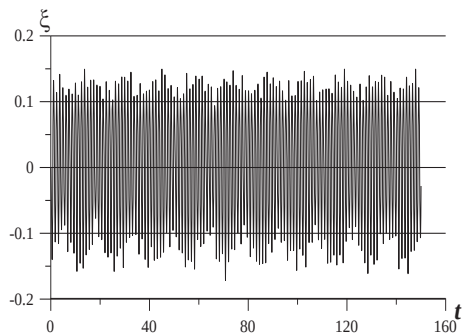


Рис. 3. Зміна амплітуди збурень рідини з часом для зрізаного конуса з радіусом нижньої основи 0.4 м

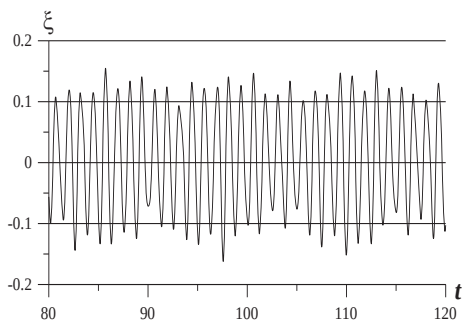


Рис. 4 а Зміна амплітуди збурень рідини з часом для зрізаного конуса з радіусом нижньої основи 0.6 м, часовий проміжок 80–120 с

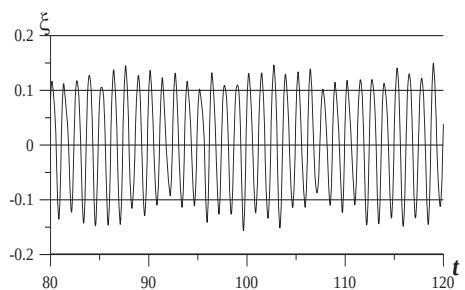


Рис. 3 а Зміна амплітуди збурень рідини з часом для зрізаного конуса з радіусом нижньої основи 0,4 м, часовий проміжок 80–120 с

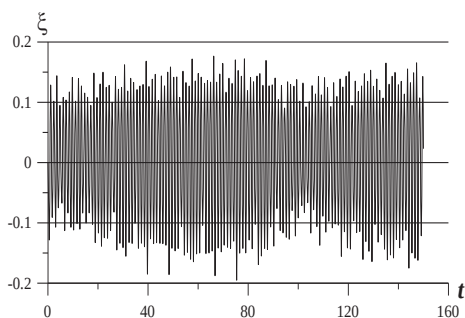


Рис. 5 Зміна амплітуди збурень рідини з часом для зрізаного конуса з радіусом нижньої основи 0.8 м

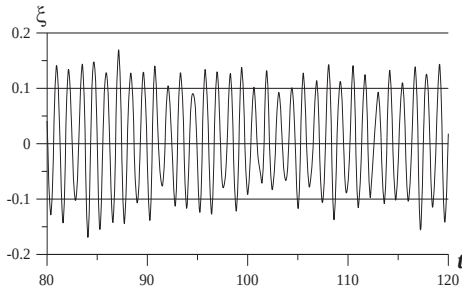


Рис. 5 а Зміна амплітуди збурень рідини з часом для зрізаного конуса з радіусом нижньої основи 0.8 м, часовий проміжок 80–120 с

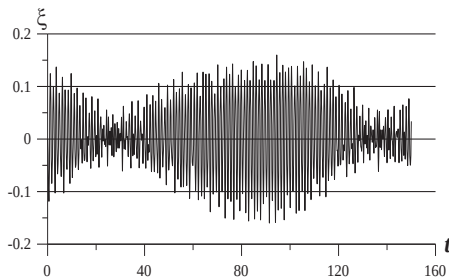


Рис. 6 Зміна амплітуди збурень рідини з часом для циліндра

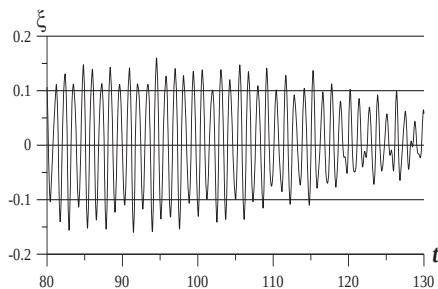


Рис. 6 а Зміна амплітуди збурень рідини з часом для циліндра, часовий проміжок 80–120 с

Для всіх випадків не спостерігається зміни середнього значення амплітуди, вплив вищих гармонік значний і проявляється суттєво на проміжку часу далекому від початку коливального процесу (супергармоніки та двугорбі піки) і присутній для всіх розглянутих випадків нижньої основи зрізаного конуса. Має місце модуляція коливань, період якої збільшується зі збільшенням радіуса нижньої основи. Значення максимальної амплітуди коливань дещо зменшується зі збільшенням радіуса нижньої основи.

4. Висновки

В роботі розглянуто задачу про вимушені нелінійні коливання резервуару у формі усеченого конуса і рідини з вільною поверхнею при їх сумісному русі. Поведінка системи розглядається в рамках нелінійної моделі на тривалому проміжку часу. Досліджено задачу про вихід такої системи на усталений режим коливань при збудженні руху системи імпульсною силою.

Проаналізовано амплітуди збурень рідини на стінці резервуару в часі для конуса, циліндра, а також проміжних випадків у вигляді зрізаного конуса. Помітний істотний прояв вищих форм з періодами не кратними періоду зовнішнього збудження, що в кінцевому підсумку приводить до того, що усталені режими коливань відсутні.

Для розглянутих коливальних процесів характерна виражена модуляція та практично незмінне середнє значення амплітуди, вплив вищих гармонік значний і проявляється суттєво на проміжку часу далекому від початку коливального процесу (супергармоніки та двугорбі піки), причому період модуляції збільшується зі збільшенням радіуса нижньої основи. Можна відмітити також, що значення максимальної амплітуди коливань дещо зменшується зі збільшенням радіуса нижньої основи. В усіх випадках вихід на режим усталених коливань не відбувся.

Список використаних джерел

1. Нариманов Г. С. Нелинейная динамика летательного аппарата с жидкостью / Г. С Нариманов, Л. В. Докучаев, И. А. Луковский. - М.; Машиностроение, 1977. - 208 с.

References

1. NARIMANOV, G. S., DOKUCHAEV, L. V. & LUKOVSKY, I. A. (1977) *Nelinejnaya Dinamika Letatel'nogo Apparata s Zhidkostju*. Moscow: Mashynostroenie.

2. Луковский И. А., Введение в нелинейную динамику твердого тела с полостями, содержащими жидкость / И. А. Луковский. – Киев: Наукова думка, 1990. – 295 с.
3. Микишев Г. Н. Динамика твердого тела с полостями, частично заполненными жидкостью. / Г. Н. Микишев, Б. И. Рабинович. – М.: Машиностроение, 1968. – 532 с.
4. Лимарченко О. С. Нелинейная динамика конструкций с жидкостью. / О. С. Лимарченко, В. В. Ясинский. – Киев: Национальный технический университет Украины «КПИ». – 1997. – 348 с.
5. Faltinsen O. M. Transient and steady-state amplitudes of resonant three-dimensional sloshing in a square base tank with a finite fluid depth / O. M. Faltinsen, O. F. Rognebakke, A. N. Timokha // *Physics of fluids*. – 2006. – Vol. 18, № 1. – P. 012103.
6. Ibrahim R. A. Liquid Sloshing Dynamics: Theory and Applications / R. A. Ibrahim. – Cambridge University Press. – 2005. – 950 p.
7. Limarchenko O. S. Peculiarities of application of perturbation techniques in problems of nonlinear oscillations of liquid with a free surface in cavities of non-cylindrical shape / O. S. Limarchenko // *Ukrainian Mathematical Journal*. – 2007. – Vol. 59, № 1. – P. 44–70.
8. Pal P. Sloshing of liquid in partially filled container – an experimental study / P. Pal // *International Journal of Recent Trends in Engineering*. – 2009. – Vol. 1, № 6. – P. 1–5.
2. LUKOVSKY I. A. (1990) *Vvedenie v Nelinejnuju Dinamiku Tverdogo Tela s Polostuami, Soderzhashimi Zhidkost*. Kiev: Naukova dumka.
3. MIKISHEV, G. N. & RABINOVICH, B. I. (1968) *Dinamika Tverdogo Tela s Polostiami, Chastichno Zapolnennymi Zhidkostju*. Moskva: Mashynostroenie.
4. LIMARCHENKO, O. S. & YASINSKY V. V. (1997) *Nelinejnaja Dinamika Konstruktsij s Zhidkostju*. Kiev: Natsionalnyy Tekhnicheskij Universitet Ukrainy «KPI».
5. FALTINSEN, O. M., ROGNEBAKKE, O. F., & TIMOKHA, A. N. (2006) Transient and steady-state amplitudes of resonant three-dimensional sloshing in a square base tank with a finite fluid depth. *Physics of Fluids*. 18 (1). p. 012103.
6. IBRAHIM, R. A. (2005) *Liquid Sloshing Dynamics: Theory and Applications*. Cambridge University Press.
7. LIMARCHENKO, O. S. (2007) Peculiarities of application of perturbation techniques in problems of nonlinear oscillations of liquid with a free surface in cavities of non-cylindrical shape. *Ukrainian Mathematical Journal*. 59 (1), p. 44–70.
8. PAL, P. (2009) Sloshing of liquid in partially filled container – an experimental study. *International Journal of Recent Trends in Engineering*. 1 (6). p. 1–5.

Надійшла до редколегії 30.09.15

УДК 539.3

Михаськів В. В.¹, д. ф.-м. н., проф.,
Кирилова О. І.²

**Плоска динамічна задача для
циліндричного тіла довільного перерізу
з тонким жорстким включенням**

¹Інститут прикладних проблем механіки і
математики ім. Я. С. Підстригача, 79060, м.
Львів, вул. Наукова, 3-б
e-mail: tex@iapmm.lviv.ua
²Одеська національна морська академія, 65029,
м. Одеса, вул. Дідріхсона, 8
e-mail: ol007ga@yandex.ru

V. V. Mykhas'kiv¹, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof.,
O. I. Kyrylova²

**The plane dynamic problem for a cylindrical
solid of arbitrary cross-section with a thin
rigid inclusion**

¹Pidstryhach Institute for Applied Problems of
Mechanics and Mathematics, 79060, L'viv, Naukova
str., 3-b
e-mail: tex@iapmm.lviv.ua
²Odesa National Maritime Academy, 65029, Odessa,
Didrikhson str., 8
e-mail: ol007ga@yandex.ru

Розв'язано задачу по визначенню напруженого стану поблизу тонкого жорсткого включення в нескінченному циліндрі довільного перерізу при коливаннях в умовах плоскої деформації. Отримано наближені формули для розрахунку КІН, за допомогою яких досліджено вплив на їх значення частоти коливань, геометричних розмірів циліндра а також розташування включення.

Ключові слова: циліндр довільного перерізу, плоска деформація, включення, КІН.

To solve the problem, an approach that allows to individually satisfy conditions at the surface of the inclusion and on the border of the cylinder is proposed. It consists in the presentation of displacement as a sum of discontinuous solutions of Lamé equations built for the inclusion, and some unknown functions that are the solutions of Lamé equations and through which the conditions on the surface of the cylinder are satisfied. These functions are presented through the wave potentials, which, in its turn, are founded as a linear combination of particular solutions of the Helmholtz equations, which forming complete closed systems of functions. As a result, the problem is reduced to solving a sequence of integral equations on the inclusion. After solving the systems, the coefficients of linear combination are determined from the boundary conditions on the surface of the cylinder. The approximate formulae for calculation of SIF with the help of which the influence on the frequency of oscillations, geometric dimensions of the cylinder, and location of the inclusion was researched were received. These integral equations differ only in the right parts and their appearance does not depend on the form the boundaries of the body. Their numerical solution is built using the of mechanic quadrature's method of. For this purpose, the boundary conditions of the collocation method obtained system of linear algebraic equations.

Key Words: Cylinder of Arbitrary Cross-Section, Plane Deformation, Inclusion, SIF.

1. Вступ

Дослідження напруженого стану обмежених тіл з включеннями є актуальним як для встановлення умов руйнування тіл через оцінку коефіцієнтів інтенсивності динамічних напружень в околі включень, так і діагностики таких дефектів, виходячи з інформації про їх вплив на резонансні частоти [1]. Попередні результати у цьому напрямку переважно відносились до необмежених та півобмежених тіл з тріщинами або тонкими включеннями [2–5]. Ситуацій, де тіла займають обмежену область, розглянуто значно менше. Це пов'язано з тим, що із застосуванням методу граничних інтегральних

рівнянь вихідні задачі зводяться до зв'язаних систем інтегральних рівнянь, заданих і на поверхні дефектів, і на межі тіла [6–8]. Далі запропоновано підхід, що дозволяє окремо розв'язувати інтегральні рівняння на поверхні включення та задовольняти умови навантаження на межі тіла.

2. Постановка задачі

Розглядається нескінченний пружний циліндр довільного перерізу з твірними, паралельними осі Oz (Рис.1), що знаходиться у стані плоскої деформації.

Перетин циліндра площиною xOy являє собою довільну замкнену гладку криву, що в полярній системі координат визначається рівнянням $r = r_0 \psi(\varphi)$, $0 \leq \varphi < 2\pi$.

У циліндрі міститься тонке жорстке тунельне включення товщини h , яке в площині xOy займає відрізок $-a \leq x \leq a$.

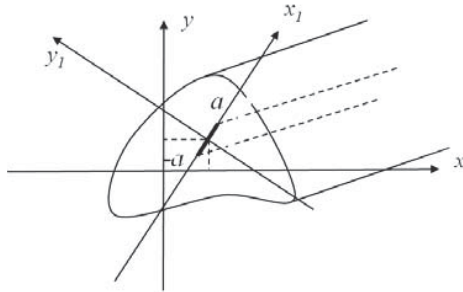


Рис. 1. Нескінченний циліндр довільного перерізу з наскрізним включенням

Циліндр знаходиться під дією саморівноваженого нормального до його поверхні гармонічного навантаження $GP(\varphi)e^{-i\omega t}$. Множник, що визначає залежність від часу, надалі опущений. За таких умов в циліндрі реалізовано стан плоскої деформації і визначення потребують тільки переміщення u_r, u_φ , які задовольняють рівнянням Ламе:

$$\begin{aligned} \mu \left(\Delta u_r - \frac{u_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} \right) + \\ + (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (ru_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} \right) + \rho \omega^2 u_r = 0; \\ \mu \left(\Delta u_\varphi - \frac{u_\varphi}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} \right) + \\ + (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (ru_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} \right) + \rho \omega^2 u_\varphi = 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Граничні умови на поверхні циліндра мають вигляд:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} \cos(\nu, x) + \sigma_{xy} \cos(\nu, y) = P(\varphi) \cos(\nu, x), \\ \sigma_{xy} \cos(\nu, x) + \sigma_{yy} \cos(\nu, y) = P(\varphi) \cos(\nu, y), \end{aligned} \quad (2)$$

$(x, y) \in L$, L – контур перерізу.

Граничні умови на включенні формуються у системі $x_1 O_1 y_1$, яка пов'язана безпосередньо з ним (Рис. 1). Для абсолютно жорсткого включення, що знаходиться в умовах повного зчеплення, вони мають вигляд:

$$\begin{aligned} u_1(x_1, 0) = d_1; \quad v_1(x_1, 0) = d_2 + \gamma x_1; \\ d_1, d_2, \gamma = \text{const}; x \in [-a, a] \end{aligned} \quad (3)$$

Також на поверхні включення мають розрив напруження зі стрічками:

$$\begin{aligned} \sigma_{y_1 y_1}(x_1, +0) - \sigma_{y_1 y_1}(x_1, -0) = \chi_1(x_1), \\ \sigma_{x_1 y_1}(x_1, +0) - \sigma_{x_1 y_1}(x_1, -0) = \chi_2(x_1). \end{aligned} \quad (4)$$

У (3) d_1, d_2 – невідомі амплітуди переміщень включення вздовж осей Oy , Ox , а γ – амплітуда кута обертання навколо Oz . Вони визначаються з рівнянь руху включення, як жорсткого тіла:

$$-\omega^2 m d_i = \int_{-a}^a \chi_i(\eta) d\eta; \quad -\frac{4}{3} m a^2 \omega^2 \tilde{\gamma} = \int_{-a}^a \eta \chi_1(\eta) d\eta. \quad (5)$$

Отже, аналіз усталеного за часом напруженого стану тіла з включенням зводиться до розв'язування диференціальних рівнянь (1) з крайовими умовами (2)–(5).

3. Розв'язання задачі

Спершу у локальній системі координат, пов'язаній з включенням, розглядаються розривні розв'язки рівнянь Ламе [2]:

$$\begin{aligned} u_1^d(x_1, y_1) = \int_{-a}^a \chi_1(\eta) G_{41}(\eta - x_1, y_1) d\eta + \\ + \int_{-a}^a \chi_2(\eta) G_{42}(\eta - x_1, y_1) d\eta, \\ v_1^d(x_1, y_1) = \int_{-a}^a \chi_1(\eta) G_{31}(\eta - x_1, y_1) d\eta + \\ + \int_{-a}^a \chi_2(\eta) G_{32}(\eta - x_1, y_1) d\eta, \end{aligned} \quad (6)$$

де

$$G_{31}(\eta - x_1, y_1) = \frac{1}{\mu \kappa_2^2} \left[\left(\kappa_1^2 + \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \right) r_1 - \frac{\partial^2 r_2}{\partial x_1^2} \right];$$

$$G_{32}(\eta - x_1, y_1) = G_{41} = -\frac{1}{\mu\kappa_2^2} \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial y_1} (r_2 - r_1);$$

$$G_{42}(\eta - x_1, y_1) = \frac{1}{\mu\kappa_2^2} \left[-\frac{\partial^2 r_1}{\partial x_1^2} + \left(\kappa_2^2 + \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \right) r_2 \right],$$

$$r_i = r_i(\eta - x, y) = -\frac{i}{4} H_0^{(i)} \left(\kappa_i \sqrt{(\eta - x)^2 + y^2} \right).$$

Далі в полярній системі координат переміщення подаються суперпозицією складових:

$$u_r(r, \varphi) = u_r^d(r, \varphi) + u_r^0(r, \varphi),$$

$$u_\varphi(r, \varphi) = u_\varphi^d(r, \varphi) + u_\varphi^0(r, \varphi) \quad (7)$$

де $u_r^d(r, \varphi)$, $u_\varphi^d(r, \varphi)$ – розв’язки (6) після переходу до полярних координат, а $u_r^0(r, \varphi)$, $u_\varphi^0(r, \varphi)$ – розв’язки рівнянь Ламе (1), якими забезпечується у подальшому виконання граничних умов (2). Ці невідомі функції подаються через хвильові потенціали

$$u_r^0 = \frac{\partial \psi_1}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_2}{\partial \varphi}, \quad u_\varphi^0 = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_1}{\partial \varphi} - \frac{\partial \psi_2}{\partial r}. \quad (8)$$

В свою чергу, хвильові потенціали розшуковуються у вигляді лінійної комбінації N частинних розв’язків рівнянь Гельмгольца, які в області перерізу є лінійно незалежними і утворюють повну замкнену систему функцій [9]:

$$\psi_1 = r_0^2 \sum_{k=1}^N A_k g_k^{(1)}(r, \varphi); \quad \psi_2 = r_0^2 \sum_{k=1}^N B_k g_k^{(2)}(r, \varphi), \quad (9)$$

$$g_{2m-1}^{(i)}(r, \varphi) = J_{m-1}(\kappa_i r) \cos(m-1)\varphi,$$

$$g_{2m}^{(i)}(r, \varphi) = J_m(\kappa_i r) \sin m\varphi.$$

В (9) A_k, B_k – невідомі коефіцієнти, J_m – циліндричні функції.

З метою реалізації граничних умов (3) на включенні у поданні (7) здійснюється перехід до системи $x_1 O_1 y_1$. Тоді

$$u_i(x_1, y_1) = u_i^d(x_1, y_1) + u_i^0(x_1, y_1),$$

$$v_i(x_1, y_1) = v_i^d(x_1, y_1) + v_i^0(x_1, y_1). \quad (10)$$

Підстановка співвідношень (10) в граничну умову (3) приводить до інтегральних рівнянь відносно стрибків напружень на включенні χ_i , $i=1,2$, які після виділення сингулярної частини та переходу до позначень

$$\varphi_i(\tau) = \frac{\chi_i(a\tau)}{\mu}; \quad \eta = a\tau, \quad x_1 = a\zeta, \quad \kappa_0 = \kappa_2 r_0, \quad a/r_0 = \gamma,$$

набувають вигляду:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \varphi_1(\tau) \left[\gamma \frac{1+\xi^2}{2} \ln|\tau-\zeta| + \gamma F_{31}(\tau-\zeta) + \frac{\pi}{\bar{\rho} h \gamma \kappa_0^2} + \frac{3\pi\zeta\tau}{4\bar{\rho} h \gamma \kappa_0^2} \right] d\tau = - \left(\sum_{k=1}^N A_k d_k + \sum_{k=1}^N B_k e_k \right);$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \varphi_2(\tau) \left[\gamma \frac{1+\xi^2}{2} \ln|\tau-\zeta| + \gamma F_{42}(\tau-\zeta) + \frac{\pi}{\bar{\rho} h \gamma \kappa_0^2} \right] d\tau = - \left(\sum_{k=1}^N A_k b_k + \sum_{k=1}^N B_k c_k \right), \quad (11)$$

де регулярні складові мають асимптотику

$$F_{31}(z) = O(z^2 \ln z), \quad F_{42}(z) = O(z^2 \ln z), \quad z \rightarrow 0,$$

а функції b_k, c_k, d_k, e_k подаються через похідні функцій $g_k^{(i)}(x_1, y_1)$. Також в (11) використано співвідношення, які випливають з (4):

$$\frac{d_i}{r_0} = -\frac{1}{2\bar{\rho} h \gamma \kappa_0^2} \int_{-1}^1 \varphi_i(\tau) d\tau; \quad \tilde{\gamma} = -\frac{3}{8\bar{\rho} h \gamma^2 \kappa_0^2} \int_{-1}^1 \tau \varphi_1(\tau) d\tau.$$

Внаслідок лінійності розв’язок (11) можна подати через нові невідомі функції у вигляді:

$$\varphi_i(\tau) = \sum_{k=1}^N A_k \varphi_k^{(1)}(\tau) + \sum_{k=1}^N B_k \varphi_k^{(2)}(\tau); \quad i=1,2. \quad (12)$$

Після цього рівняння (11) трансформуються до послідовностей $2N$ рівнянь відносно функцій φ_k^i , $i=1,2$, які відрізняються тільки правими частинами, а саме

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \varphi_k^1(\tau) \left[\gamma \frac{1+\xi^2}{2} \ln|\tau-\zeta| + \gamma F_{31}(\tau-\zeta) + \frac{\pi}{\bar{\rho} h \gamma \kappa_0^2} + \frac{3\pi\zeta\tau}{4\bar{\rho} h \gamma \kappa_0^2} \right] d\tau = h_k(\zeta),$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \varphi_k^2(\tau) \left[\gamma \frac{1+\xi^2}{2} \ln|\tau-\zeta| + \gamma F_{42}(\tau-\zeta) + \frac{\pi}{\bar{\rho} h \gamma \kappa_0^2} \right] d\tau = f_k(\zeta), \quad k=1, N, \quad (13)$$

де

$$\Phi_k^i = \begin{pmatrix} \Phi_k^{i1} \\ \Phi_k^{i2} \end{pmatrix}; f_k(\zeta) = -\begin{pmatrix} b_k(\zeta) \\ c_k(\zeta) \end{pmatrix}; h_k(\zeta) = -\begin{pmatrix} d_k(\zeta) \\ e_k(\zeta) \end{pmatrix}.$$

Для побудови наближених розв'язків (13) невідомі функції подаються у вигляді:

$$\Phi_k^i(\tau) = \frac{\Psi_k^i(\tau)}{\sqrt{1-\tau^2}}. \quad (14)$$

Далі кожна з функцій $\Psi_k^i(\tau)$ з (14) наближено відновлюється інтерполяційним многочленом:

$$\Psi_{ik}(\tau) \approx \sum_{m=1}^n \Psi_{km}^i \frac{T_n(\tau)}{(\tau - \tau_m) T_n'(\tau_m)},$$

де $\Psi_{km}^i = \Psi_k^i(\tau_m)$, $\tau_m = \cos \frac{\pi(2m-1)}{2n}$, $m=1, \dots, n$ - корені полінома Чебишева 1-го роду $T_n(\tau)$. Після цього згідно методу механічних квадратур [10] з використанням якості точок колокації коренів многочлена Чебишева $U_{n-1}(\zeta)$, $\zeta_j = \cos \frac{\pi j}{n}$, $j=1, 2, \dots, n$ з інтегральних рівнянь (13) отримано систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно значень Ψ_{km}^i функцій $\Psi_k^i(\tau)$ у вузлах інтерполяції:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \sum_{m=1}^n a_m \Psi_{km}^1 \left[\gamma \frac{1+\xi^2}{2} C_{jm} + \gamma F_{jm}^{31}(\tau_m - \zeta_j) + \frac{\pi}{\rho \hbar \gamma \kappa_0^2} + \frac{3\pi \zeta_j \tau_m}{4\rho \hbar \gamma \kappa_0^2} \right] &= h_k(\zeta_j), \\ \frac{1}{2\pi} \sum_{m=1}^n a_m \Psi_{km}^2 \left[\gamma \frac{1+\xi^2}{2} C_{jm} + \gamma F_{jm}^{42}(\tau_m - \zeta_j) + \frac{\pi}{\rho \hbar \gamma \kappa_0^2} \right] &= f_k(\zeta_j), \end{aligned} \quad (15)$$

де

$$\Psi_{km}^1 = \begin{pmatrix} \Psi_{km}^{11} \\ \Psi_{km}^{12} \end{pmatrix}; \quad \Psi_{km}^2 = \begin{pmatrix} \Psi_{km}^{21} \\ \Psi_{km}^{22} \end{pmatrix};$$

$$f_k(\zeta_j) = \begin{pmatrix} b_k(\zeta_j) \\ c_k(\zeta_j) \end{pmatrix}; \quad h_k(\zeta_j) = \begin{pmatrix} d_k(\zeta_j) \\ e_k(\zeta_j) \end{pmatrix}.$$

У (15)

$$C_{jm} = -\ln 2 - 2 \sum_{p=1}^{n-1} \frac{\cos \frac{\pi p(2m-1)}{2n} \cos \frac{\pi p j}{n+1}}{p}, \quad j=1, n$$

– коефіцієнти відомої квадратурної формули для інтегралів з логарифмічною особливістю.

Невідомі коефіцієнти A_k , B_k , які входять у подання (9), визначаються з умов (2) на границі циліндра. Після підстановки граничних значень умови (2) набувають вигляду:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^N A_k \left[\int_{-1}^1 (\Phi_{1k}^1(\tau) G^1(\tau, \varphi) + \Phi_{2k}^1(\tau) G^2(\tau, \varphi)) d\tau + \right. \\ \left. + U_k(\varphi) \right] + \sum_{k=1}^N B_k \left[\int_{-1}^1 (\Phi_{1k}^2(\tau) G^1(\tau, \varphi) + \right. \\ \left. + \Phi_{2k}^2(\tau) G^2(\tau, \varphi)) d\tau + V_k(\varphi) \right] = IP(\varphi), \\ G^1(\tau, \varphi) = \begin{pmatrix} G_1^1(\tau, \varphi) \\ G_2^1(\tau, \varphi) \end{pmatrix}; \quad G^2(\tau, \varphi) = \begin{pmatrix} G_1^2(\tau, \varphi) \\ G_2^2(\tau, \varphi) \end{pmatrix}; \\ U_k(\varphi) = \begin{pmatrix} U_k^1(\varphi) \\ U_k^2(\varphi) \end{pmatrix}; V_k(\varphi) = \begin{pmatrix} V_k^1(\varphi) \\ V_k^2(\varphi) \end{pmatrix}; I = \begin{pmatrix} \cos(\vec{n}, x) \\ \cos(\vec{n}, y) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (16)$$

Тут функції $G^i(\tau, \varphi)$, $i=1, 2$ подаються через значення функцій $r_i(\eta - x, y)$ та її похідних на границі перерізу, а $V_k(\varphi)$, $U_k(\varphi)$ – через значення на границі похідних функцій $g_k^{(i)}$ з подань (9). З огляду на громіздкість ці вирази не приводяться. Застосування квадратурних формул Гауса-Чебишева та методу колокації у вузлах $u_s = \frac{2\pi S}{N}$, $S=1, \dots, N$ зводить рівняння (16) до системи лінійних алгебраїчних рівнянь для визначення A_k , B_k .

Напружений стан поблизу включення характеризується коефіцієнтами інтенсивності нормальних та дотичних напружень [11]. Для них отримано формули:

$$k_i^- = \frac{(-1)^n}{n} \frac{1}{16(1-\nu)} \left(\sum_{k=1}^N A_k G_k^{i1} + \sum_{k=1}^N B_k G_k^{i2} \right),$$

$$k_i^+ = \frac{1}{n} \frac{1}{16(1-\nu)} \left(\sum_{k=1}^N A_k E_k^{i1} + \sum_{k=1}^N B_k E_k^{i2} \right),$$

де

$$C_k^{ij} = \sum_{m=1}^n (-1)^m \Psi_{km}^{ij} \tan \frac{\beta_m}{2}, j=1,2;$$

$$E_k^{ij} = \sum_{m=1}^n (-1)^m \Psi_{km}^{ij} \cot \frac{\beta_m}{2}, j=1,2.$$

4. Результати числових досліджень

Для числової реалізації заданого методу розглядався еліптичний циліндр з ексцентриситетом $\varepsilon = 0.5$, який знаходиться під

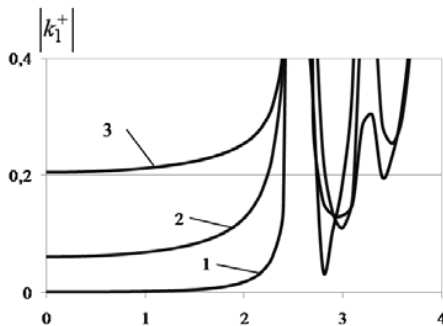


Рис. 2. Залежність поведінки КІН від безрозмірного хвильового числа k_0

дією самоврівноважуючого навантаження $P(\varphi) = 1$. Включення розташоване під кутом 45° так, що один його кінець знаходиться у початку координат, а другий при збільшенні відносної довжини наближається до границі перерізу. Це досягалося зміною параметра $\gamma = a/r_0$ від 0.2 до 0.4628, коли включення виходить на границю. Криві 1, 2, 3 відповідають значенням $\gamma = 0.2$; 0.4; 0.462. Графіки наведено для нормальних напружень кінця включення, що наближається до границі.

Аналіз кривих дозволяє зробити наступні висновки:

- 1) в дорезонансній зоні при зміні значень γ при збільшенні безрозмірної частоти спостерігається зростання КІН;
- 2) при наближенні кінця включення до границі значення КІН збільшуються.

Для дотичних напружень спостерігається аналогічна поведінка значень КІН.

Список використаних джерел

1. Назарчук З. Т. Акустико-емісійне діагностування елементів конструкцій: у 3 т. / З. Т. Назарчук, В. Р. Скальський. – Київ: Наукова думка, 2009.
2. Попов В. Г. Сравнительный анализ дифракционных полей при прохождении упругих волн через дефекты различной природы / В. Г. Попов, А. Э. Улановский // Изв. РАН Механика твердого тела. – 1995. – № 4. – С. 99–109.
3. Ang D. D. Diffraction of scalar elastic waves by a finite strip / D. D. Ang, L. Knopoff // Proc. Math. Sci. USA. – 1964. – Vol. 51, № 4. – P. 593–598.
4. Mykhas'kiv V. Elastodynamic analysis of multiple crack problem in 3-D bi-materials by a BEM / V. Mykhas'kiv, I. Zhabadynskyi, Ch. Zhang // Int. J. Num. Meth. Biomed. Eng. – 2010. – Vol. 26, № 12. – P. 1934–1946.
5. Попов В. Г. Взаимодействие плоских упругих волн с системами радиальных дефектов / В. Г. Попов // Изв. РАН. Механика твердого

References

1. NAZARCHUK, Z. T., & SKALSKYI V. R. (2009) *Akustiko-Emisijne Diagnostuvannja Elementiv Konstruktsij*. Kyiv, Naukova dumka.
2. POPOV, V. G. & ULANOVSKYI, A. E. (1995) *Sravnitel'nyj analiz difraktsionnyh polej pri prohodenii uprugih voln cherez defekty razlichnoj prirodi*. Izv. RAN *Mekhanika Tverdogo Tela*. (4). p. 99–109.
3. ANG, D. D. & KNOPOFF, L. (1964) Diffraction of scalar elastic waves by a finite strip. *Proc. Math. Sci. USA*. 51 (4). p. 593–598.
4. MYKHAS'KIV, V., ZHBADYNSKYI, I. & ZHANG, CH. (2010) Elastodynamic analysis of multiple crack problem in 3-D bi-materials by a BEM. *Int. J. Num. Meth. Biomed. Eng.* 26 (12). p. 1934–1946.
5. POPOV V.G. (1999) *Vzaimodejstvije ploskih uprugih voln s systemami radialnyh defektov* *Izv. RAN Mekhanika Tverdogo Tela*. (4). p. 118–129.
6. CHIRINO, F. & DOMINGUES, J. (1989) Dynamic analysis of cracks using boundary

- тела. – 1999. – № 4. – С. 118–129.
6. Chirino F. Dynamic analysis of cracks using boundary element method / F. Chirino, J. Domingues // *Engineering Fracture Mechanics*. – 1989. – Vol. 34, № 5–6. – P. 1051–1061.
 7. Бобылев А. А. Применение метода граничных элементов к расчету вынужденных колебаний упругих тел конечных размеров с трещинами / Бобылев А. А., Доброва Ю. А. // *Вестник Харк. нац. ун-та*. – 2003. – Т. 590, № 1. – С. 49–54.
 8. Zhang Ch. A 2D hypersingular time-domain traction BEM for transient elastodynamic crack analysis / Ch. Zhang // *Wave Motion*. – 2002. – Vol. 35, № 1. – P. 17–40.
 9. Векуа И. Н. Новые методы решения эллиптических уравнений / И. Н. Векуа. – М.: ОГИЗ, 1948. – 296 с.
 10. Назарчук З. Т. Численное исследование дифракции волн на цилиндрических структурах / З. Т. Назарчук. – К.: Наук. думка, 1989. – 256 с.
 11. Сулим Г. Т. Основи математичної теорії термомпружної рівноваги деформівних тіл з тонкими включеннями / Г. Т. Сулим. – Львів, 2007. – 716 с.
 - element method. *Engineering Fracture Mechanics*. 34 (5–6). p. 1051–1061.
 7. BOBIL'OV, A. A. & DOBROVA, J. A. (2003) Primenenie metoda granichnih elementov k rastchetu vinugdenih kolebanij uprugih tel konechnih razmerov s treshinami *Vestnik Khark. Nats. Univ.* 590 (1). p. 49–54.
 8. ZHANG, Ch. (2002) A 2D hypersingular time-domain traction BEM for transient elastodynamic crack analysis. *Wave Motion*. 35 (1). p. 17–40.
 9. VEKUA, I. N. (1948) *Novije Metody Reshenija Ellipticheskikh Uravnenij*. M.: OGIZ.
 10. NAZARCHUK, Z. T. (1989) *Chislennoje Issledovanie Difraktsyi Voln na Tsilindricheskikh Strukturah*. K.: Nauk. dumka.
 11. SULYM, G. T. (2007) *Osnovi Matematichnoji Teoryi Termoprugnoyi Rinnovagi Deformivnih Til z Tonkimi Vkluchennjami*. Lviv.

Надійшла до редколегії 30.09.15

УДК 539.3

Можаровський В. В., д. т. н., проф.,
Кузьменков Д. С., к. ф.-м. н., доц.

Реалізація розрахунку напружень багатошарових труб

Гомельський державний університет ім. Ф.
Скорини, 246019, м. Гомель, вул. Советская,
104
e-mail: val-mozh@yandex.ru

V. V. Mazharovsky, Dr. Sci. (Tech.), Prof.,
D. S. Kuzmenkov, Ph. D. (Phys.-Math.), Assoc. Prof.

The realization of calculation of stresses for multilayer pipes

Francisk Skorina Gomel State University, 246019,
Gomel, Sovetskaya str., 104
e-mail: val-mozh@yandex.ru

В роботі розглядається реалізація осесиметричної термопружної задачі для багатошарових циліндричних труб з анізотропних матеріалів, розв'язок якої зводиться до системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Для розв'язання розглянутої задачі (розрахунку напружено-деформованого стану) розроблена автоматизована методика та створено програмний комплекс. Також наводяться приклади розрахунку за методом скінченних елементів (МСЕ). Досліджується напружено-деформований стан шаруватої циліндричної труби на пружній основі, що знаходиться під дією внутрішнього тиску і під дією стискаючих зовнішніх зусиль. Розрахунок проведено з використанням апарату скінченно-елементного моделювання. Проведено експериментальні дослідження композитної труби на стиск.

Ключові слова: напружено-деформований стан, композит, програмний комплекс, експериментальні дослідження, шарувата труба.

The paper deals with the realization of axisymmetric thermoelastic problem for multilayered cylindrical structures (pipes) made from anisotropic materials. The given problem is reduced to the system of linear algebraic equations. For the solution to the above problem (the calculation of stress-strain state), the automated method and the program complex have been developed. Also, the article presents the examples of the stress analysis with the help of the finite element method (FEM). The results of theoretical and experimental studies of the influence of defects (cracks) on a stress-strain state of a cylindrical composite tube (ring) are presented in the paper. For the solution to the problem (the calculation of a stress-strain state), there has been developed the automated technique and created a software package based on the finite element method. The developed program complex allows to freely vary the coating materials of multilayer pipes and their characteristics and shows plausible results. The experimental studies on the development of a crack in a compression test of the tube ring have been carried out.

Key Words: Stress-Strain State, Composite, Program Complex, Experimental Studies, Layered Tube.

1. Вступ

В даний час досить актуальною проблемою є розробка сучасних методів оцінки ресурсу обладнання (резервуарів, трубопроводів) з нових матеріалів, в тому числі композиційних, на основі наявної діагностичної інформації. Досвід створення таких комплексних програм і методик вже є [1, 2]. Тому розробка такого програмного комплексу, що дозволяє автоматизувати цей процес, є важливою задачею.

При розрахунку напружено-деформованого стану трубопроводів і систем трубопроводів через складну геометрію та особливості конструкційної будови стінок труб, а також в зв'язку з необхідністю моделювання різних шаруватих тіл, застосовується скінченно-елементний аналіз для

задач в двовимірній постановці. Нижче представлена реалізація розрахунку шаруватих труб згідно алгоритму [3, 5].

2. Постановка задачі та її розв'язання

Нехай є шарувата циліндрична товстостінна труба (внутрішній радіус r_a , зовнішній – r_b , n – число шарів труби). Труба знаходиться під дією рівномірно розподіленого термосилового навантаження: p – інтенсивність внутрішнього навантаження; ΔT – температура. Таким чином, розглядається осесиметрична термопружна задача. Осьові деформації для всіх шарів багатошарової труби вважаємо постійними і рівними деякій константі, яку потрібно визначити.

Таким чином, для i -го анізотропного шару багатшарової циліндричної труби справедливі наступні співвідношення:

$$\sigma = A^i \varepsilon - \xi \Delta T,$$

де $\sigma = (\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z)^T$ і $\varepsilon = (\varepsilon_r, \varepsilon_\theta, \varepsilon_z)^T$, – тензори напружень і деформацій відповідно,

$$\xi = (\xi_r, \xi_\theta, \xi_z)^T, \quad A^i = \begin{pmatrix} A_{11}^i & A_{12}^i & A_{13}^i \\ A_{21}^i & A_{22}^i & A_{23}^i \\ A_{31}^i & A_{32}^i & A_{33}^i \end{pmatrix}.$$

$$\xi = \alpha^{(i)} \varepsilon,$$

де $\alpha_r^{(i)}, \alpha_\theta^{(i)}, \alpha_z^{(i)}$ – коефіцієнти температурного розширення в i -ому шарі.

Підставляючи вирази для напружень в рівняння рівноваги і використовуючи рівняння Коші, отримуємо неоднорідне диференціальне рівняння 2-го порядку [3, 5]:

$$\frac{\partial^2 u_r^{(i)}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r^{(i)}}{\partial r} - \frac{A_{22}^{(i)} / A_{11}^{(i)}}{r^2} u_r^{(i)} = \frac{\alpha^{(i)} \varepsilon_0}{r} + \frac{\eta^{(i)} \Delta T}{r},$$

де

$$\alpha^{(i)} = (A_{23}^{(i)} - A_{13}^{(i)}) / A_{11}^{(i)},$$

$$\eta^{(i)} = (\xi_r^{(i)} - \xi_\theta^{(i)}) / A_{11}^{(i)}.$$

В результаті розв'язку диференціального рівняння, будуть отримані наступні вирази для переміщень [3, 5]:

$$\text{Якщо } A_{22}^{(i)} / A_{11}^{(i)} > 0, \quad k = \sqrt{A_{22}^{(i)} / A_{11}^{(i)}}.$$

а) $k \neq 1$, матеріал анізотропний:

$$u_r^{(i)} = C_1^{(i)} r^{k(i)} + C_2^{(i)} r^{-k(i)} + \frac{(\alpha^{(i)} \varepsilon_0 + \eta^{(i)} \Delta T) r}{1 - k^2},$$

б) $k = 1$, матеріал ізотропний:

$$u_r^{(i)} = C_1^{(i)} r + C_2^{(i)} r^{-1} + \frac{(\alpha^{(i)} \varepsilon_0 + \eta^{(i)} \Delta T) r}{2} \ln(r).$$

Коли $A_{22}^{(i)} / A_{11}^{(i)} < 0$, то розв'язок буде:

$$u_r^{(i)} = C_1^{(i)} \sin(k^{(i)} \ln r) + C_2^{(i)} \cos(k^{(i)} \ln r) + \frac{(\alpha^{(i)} \varepsilon_0 + \eta^{(i)} \Delta T) r}{1 + k^2}, \quad \text{де } C_1^{(i)}, C_2^{(i)}, \varepsilon_0 - \text{шукані}$$

коефіцієнти, які знаходяться з граничних умов:

1) Граничні умови силового навантаження:

$$\sigma_r^{(1)}(r_a) = -p,$$

$$\sigma_r^{(n)}(r_b) = 0.$$

2) Умови неперервності переміщень і радіальних напружень на межі розділу шарів:

$$u_r^{(i)}(r_i) = u_r^{(i+1)}(r_i), \quad i = \overline{1, n},$$

$$\sigma_r^{(i)}(r_i) = \sigma_r^{(i+1)}(r_i), \quad i = \overline{1, n}.$$

3) Для циліндричної шаруватої труби із закритими кінцями справедливо наступне співвідношення

$$2\pi \sum_{i=1}^n \int_{r_i}^{r_{i+1}} \sigma_z^{(i)}(r) dr = \pi r_a^2 p.$$

На підставі аналітичних виразів для переміщень, з урахуванням рівнянь зв'язку Коші і закону Гука, аналітичні вирази для напружень у випадку, коли матеріал анізотропний, будуються аналогічно [3]. На підставі граничних умов отримуємо систему $2n+1$ лінійних алгебраїчних рівнянь з $2n+1$ невідомими $C_j^{(i)}, \varepsilon_0$, і ці розв'язки будуть розв'язками шуканої задачі термопружності. Коли $A_{22}^{(i)} / A_{11}^{(i)} > 0$, $k \neq 1$ розв'язки будуються аналогічно [3].

3. Приклад числових досліджень

На основі описаної вище методики розроблено програмний модуль CalcMultilayerPipe, що входить до складу загального програмного продукту Pipe Solutions. Загальний вигляд розробленого програмного модуля CalcMultilayer Pipe наведено на рис. 1.

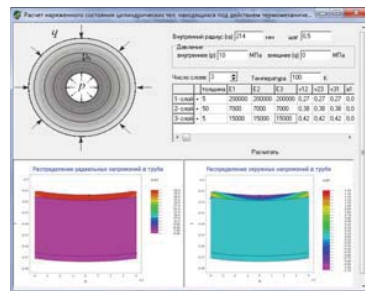


Рис. 1. Загальний вигляд програми

З використанням програми CalcMultilayerPipe був зроблений розрахунок напружено-дефор-

мованого стану шаруватої циліндричної труби (зовнішній діаметр сталевий труби (3 шар) – 219 мм; матеріали: 1 – поліетилен, товщина – 5 мм; 2 – пінополіуретан, товщина – 50 мм; 3 – сталь (ст-20), товщина – 5 мм), що перебуває під дією внутрішнього тиску 10 МПа і температури 100°C.

На рис. 2 представлена картина розподілу напружень в шаруватій трубі. Тут і далі напруження представлені у відносних величинах $\sigma' = \sigma / p$. Максимальні значення напружень зосереджені на внутрішній поверхні труби (рис. 2.). Максимальна абсолютна величина напружень становить 1.5р. Для реалізації задачі підбору матеріалу для труб, з урахуванням характеристик експлуатації, реалізований модуль ведення бази даних фізико-механічних характеристик матеріалів труб. Для зручності пошуку реалізований механізм ієрархічного подання списку матеріалів. Всі матеріали згруповано за відповідними групами. Причому класифікатор може бути налаштований кінцевим користувачем, що дозволяє розширити коло вирішуваних завдань. Згідно представленого алгоритму підбору матеріалів труб, по заданих розрахунковим параметрам проведена надбудова «SearchMaterialsPipeLine» програмного продукту PipeSolutions, розробленого в лабораторії математичного моделювання складних систем і призначеного для вирішення завдань чисельного моделювання напружено-деформованого стану циліндричних гомогенних, гетерогенних (шаруватих, волокнистих, композиційних матеріалів), що знаходяться під дією різного роду навантажень. Надбудова призначена для збереження даних розрахунку в таблиці «Calculate» бази даних «DBPipeSolutions», що дозволяє оперативно отримувати доступ до розрахункової інформації, не витрачаючи час на прорахунок однотипних завдань.

Алгоритм задачі підбору матеріалу для труб реалізований таким чином, що кінцевий користувач (проектувальник) задає мінімальний перелік технічних характеристик необхідної конструкції: геометричні характеристики конструкції; експлуатаційні характеристики: середовище експлуатації, робочий тиск, визначає коефіцієнт запасу міцності, задає групу матеріалів найбільш придатних для вирішення даного завдання, причому, якщо не конкретизувати даний параметр, то підбір буде здійснюватися за всіма наявними в довіднику матеріалами.

Далі, в першу чергу, відповідно до обмежень пошуку по групі матеріалів, відбираються

матеріали даної групи, після чого відбувається звернення до таблиці «Calculate» бази даних «PipeSolutions» на пошук даних за розрахунком завдання, а у випадку, якщо розрахункові дані в таблиці відсутні, – проводиться розрахунок і формування відповідних позицій в таблиці «Calculate», після чого проводиться аналіз на виконання умови по теорії міцності. У разі виконання умови, матеріал додається до переліку «Підібрані матеріали».

Аналогічно був проведений розрахунок також максимальних дотичних напружень.

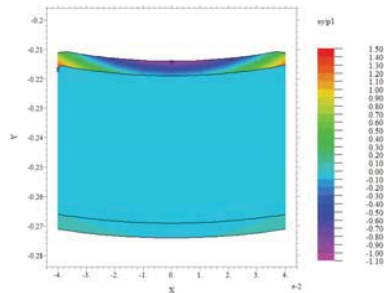


Рис. 2. Розподіл напружень σ_y



Рис. 3. Залежності $\sigma_r^{(k)}$ от r

4. Реалізація розрахунку напружень багатошарових труб

Було прораховано різні приклади розрахунку напружень багатошарових труб (для різних матеріалів, тиску і т.д.). Нижче на рис. 3 приведена якісна картина зміни радіальних напружень (напруження визначалися аналогічно [3]). Розроблений програмний комплекс дозволяє вільно варіювати матеріалами покриттів труб і їх характеристиками і показує достовірні результати.

5. Реалізація за МСЕ

Досліджуємо напружено-деформований стан шаруватої циліндричної труби на пружній основі, що знаходиться під дією внутрішнього тиску.

Розрахунок проведемо з використанням апарату скінченно-елементного моделювання. Розбиття розрахункової області, виконуємо нерегулярною сіткою, трикутними скінченними елементами. Збільшення кількості скінченних елементів в місцях концентрації напружень дозволяє досягти максимальної точності при розрахунках. Загальна схема нерегулярної дискретизації представлена на рис. 4.

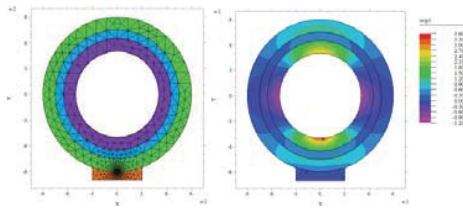


Рис. 4. Загальна схема розрахунку Розподіл σ_x

На рис. 4. представлена картина розподілу напружень σ_x . Максимальні значення напружень зосереджені на внутрішній поверхні труби безпосередньо над опорою і в протилежній стороні (зверху) і досягають значення 3.6р, що в три рази більше ніж мінімальні напруження, які також розташовані на внутрішній поверхні по обидві сторони від осі Ox труби. Аналогічні графіки були побудовані і для σ_y , τ_{xy} . Застосування МСЕ дозволяє отримати достатньо повну і достовірну інформацію про стан труб з композитних матеріалів.

6. Напружено-деформований стан труби, що знаходиться під дією стискаючих зовнішніх зусиль

Для оптимізації складу дисперсно-армованих композитів, використовуваних для кільцевих фрагментів шпульт, на основі експериментальної методики проведені дослідження з визначення та аналізу деформаційно-міцнісних властивостей шпульт для намотування плівки і зіставлення використовуваних матеріалів. Наше завдання полягає в розробці чисельної методики визначення напружено-деформованого стану циліндричних тіл (кільцеві, труб, кільцевих фрагментів шпульт), що знаходяться під дією стискаючих зовнішніх зусиль, з метою

визначення та оцінки міцнісних властивостей елементів конструкцій, знаходження найбільш небезпечних зон. Для тестування методики розглянуто приклад про напружено-деформований стан композитної труби, що знаходиться під дією стискаючих зовнішніх зусиль (рис. 5, рис. 8), внутрішній радіус $r_1 = 50$ мм; зовнішній радіус $r_2 = 65$ мм; стискаюче зовнішнє зусилля $P = 0.1$ МПа; $h = 15$ мм, модуль Юнга $E = 142$ МПа (матеріал – композит).

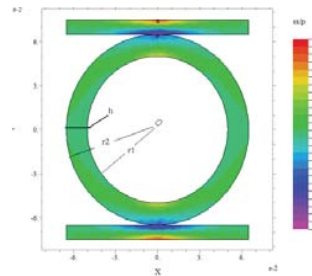


Рис. 5. Розподіл напружень σ_y

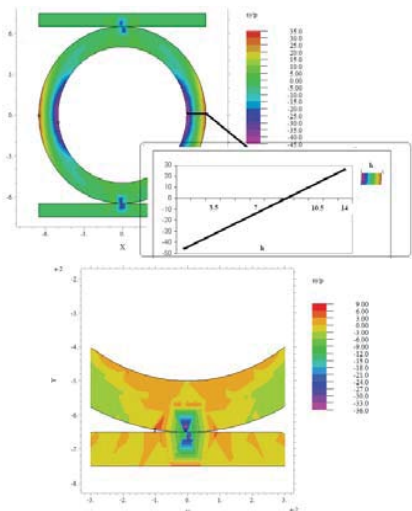


Рис. 6. Розподіл напружень σ_y

7. Експериментальні дослідження композиційної труби на стиск

Дослідження (рис. 5–8) показали, що тріщини виникають в зоні 2 і в протилежній, що підтверджується чисельними розрахунками (див. рис. 9, зона 4), оскільки там виникають максимальні дотичні напруження. Аналіз даних показує, що наявність внутрішнього дефекту значно збільшує напруження, розташовані на внутрішній поверхні труби.

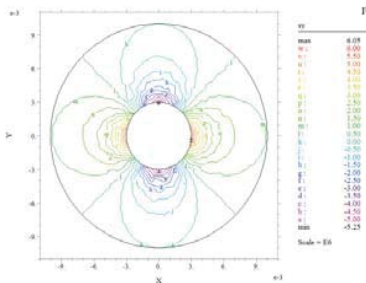


Рис. 7а. Розподіл напружень σ_y , Па, труба без дефекту

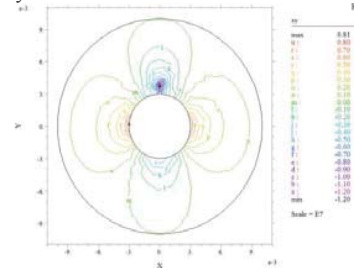


Рис. 7б. Розподіл напружень σ_y , Па, труба має тріщину на внутрішній поверхні труби

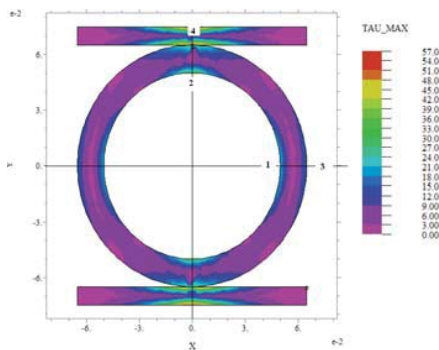


Рис.8. Розподіл напружень τ_{max}

Результат розрахунку напружень σ_y в перетині зон 1-2 показав, що напруження змінюються лінійно (рис. 6), і для їх обчислення можна використовувати відомі методики розрахунку з курсу опору матеріалів або розрахунок за формулою С. П. Тимошенка: $\sigma_\varphi = 2P\kappa / (\pi R)$. Зміна вертикального діаметра визначаємо за формулою $\Delta_y = 0.149R^3 / (EI)$ і горизонтального – $\Delta_x = 0.137R^3 / (EI)$ при стисненні кільця зосередженими силами (E -модуль пружності, I -момент інерції). Тестова перевірка результатів експерименту показала близькість аналітичних і чисельних результатів.

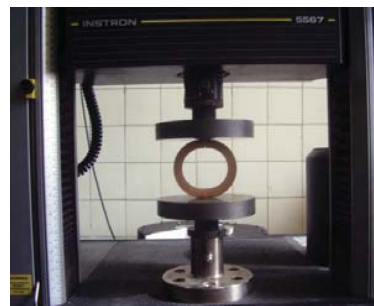
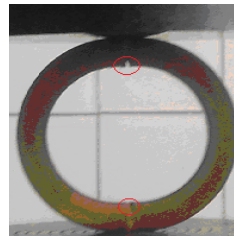
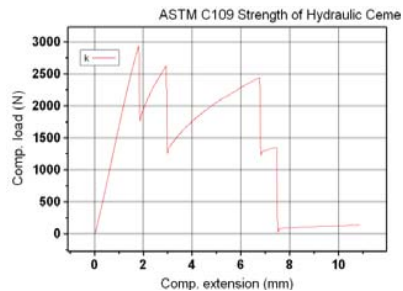


Рис. 9. Результати експериментального випробування труб із композита, зовнішній діаметр – $D_{\text{н}} = 90$ мм, внутрішній діаметр – $D_{\text{в}} = 62$ мм

8. Висновки

Розроблено автоматизовану методику і створено програмний комплекс для знаходження напружень і деформацій шаруватих циліндричних конструкцій з анізотропних матеріалів. Дана оцінка напруженого стану для композиційної труби. Експериментальні дослідження композитної труби на стиск показали, що тріщини виникають в

зоні і в протилежній зоні, де масмо максимальні напруження, тому ці зони слід армувати, що дозволяє оптимізувати укладку волокон.

Список використаних джерел

1. Концепція автоматизації процесу контролю технологічного стану промислових трубопроводних систем, посудин і резервуарів / [В. В. Можаровський, С. А. Мар'їн, І. В. Коробійчук, Н. А. Мар'їна] // Вісник Національного університету «Львівська політехніка». Інформаційні системи і мережі. – 2011. – № 699. – С. 175–184.
2. Программный комплекс контроля и диагностики сосудов и трубопроводов / [В. В. Можаровский, С. А. Мар'їн, В. А. Казак, В. В. Орлов] // Техническая диагностика и неразрушающий контроль – 2002. – № 1. – С. 28–31.
3. Xia M. Analysis of filament-wound fiber-reinforced sandwich pipe under combined internal pressure and thermomechanical loading / M. Xia, K. Kemmochi, H. Takayanagi // *Comp. Structures*. – 2001. – № 51. – P. 273–283.
4. Можаровский В. В. Автоматизированная методика определения характеристик материалов для труб с ППУ-ОЦМ изоляцией / В. В. Можаровский, Д. С. Кузьменков, С. В. Шилько // Вестник Черниговского гос. технологического ун-та. Сер. тех. наук. – 2012. – Т. 59, № 3. – С. 42–47.
5. Можаровский В. В. Напряженно-деформированное состояние слоистых цилиндрических труб / В. В. Можаровский, С. А. Мар'їн, Н. А. Мар'їна // Вестник ХНТУ. – 2008. – Т. 31, № 2. – С.304–309.

References

1. MAZHAROVSKY, V. V., et al. (2011) Concepcia automatizcii procesu kontrolea technologicznogo stanu promyslovih truboprovodnih sistem, trub , rezervuariv. *Visnik Nacionalnogo Universitetu «Lvivska politehnika»*. *Informacieni i Merezhi*. (699). p. 175–184.
2. MAZHAROVSKY, V. V. et al. (2002) Programnie kompleks kontrolea i diagnostiki sosudov i truboprovodov. *Technicheskaya Diagnostika i Nerazrushaetsiy control*. (1). p. 28–31.
3. XIA, M., KEMMOCHI, K. & TAKAYANAGI, H. (2001) Analysis of filament-wound fiber-reinforced sandwich pipe under combined internal pressure and thermomechanical loading. *Comp. Structures*. (51). p. 273–283.
4. MAZHAROVSKY, V. V., KUZME-NKOV, D. S. & SHILKO, S. V. (2012) Avtomatizirovanaia methodika opredeleniya harakteristik materialov dlea trub s PPU-OCM izoliaciey. *Vestnik Chernihivskogo Tehnologichnogo Univ. Ser. Tehn. Nauk*. 59 (3). p. 42–47.
5. MAZHAROVSKY, V. V., MARJIN, S. A. & MARJINA, N. A. (2008) Napryazhenodeformirovanoe sostoyanie sloistih cillindricheskikh trub. *Vestnik KhNTU*. 31 (2). p. 304–309.

Надійшла до редколегії 29.09.15

УДК 539.3

Мусій Р. С., д. ф.-м. н., проф.,
Мельник Н. Б.

**Термонапружений стан і несуча
здатність порожнистої біметалевої кулі
за дії електромагнітного імпульсу**

Національний університет «Львівська полі-
техніка», 79013, м. Львів, вул. С. Бандери, 12
e-mail: musij@polynet.ua
melnyk.n.pz@gmail.com

R. S. Musij, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof.,
N. B. Melnyk

**Thermostressed state and bearing capacity of
hollow bimetallic sphere under
electromagnetic pulse**

Lviv Polytechnic National University, 79013, Lviv,
Bandera str., 12
e-mail: musij@polynet.ua
melnyk.n.pz@gmail.com

Сформульовано початково-крайову задачу термомеханіки для порожнистої біметалевої кулі за однорідної нестационарної електромагнітної дії та запропоновано методику її розв'язування з використанням апроксимації всіх визначальних функцій за радіальною координатою в кожному складовому шарі квадратичними многочленами. Отримано загальний розв'язок цієї задачі та за дії електромагнітного імпульсу. Проаналізовано термонапружений стан і несучу здатність кулі.

Ключові слова: порожниста біметалева куля, електромагнітний імпульс, несуча здатність, властивості контактного з'єднання.

The initial-boundary value problem for thermomechanics of bimetallic hollow sphere under the actions of pulsed electromagnetic field has been formulated. By defining features selected azimuthal component of the vector magnetic field, temperature and radial component of the displacement vector. The method of solving the relevant contact problems of electrodynamics, heat conduction, and thermoelasticity has been proposed, using a quadratic approximation of distributions of the defining features for radial coordinate in each composite layer. Based on this methodology, the initial value problems in defining the functions have been built into their Cauchy integral (total package in layers) characteristics. The general solutions of Cauchy problem for homogenous nonstationary electromagnetic action have been obtained using the integral Laplace transform. These solutions have the form of resultant of the functions that describe the homogenous solutions of the problems and functions that describe the boundary values of the defining functions on the external surface of the bimetallic hollow sphere and on the contact surface of its layers. Based on these solutions the solution of original thermomechanics problem for a bimetallic hollow sphere under the influence of electromagnetic impulse has been obtained. The thermostressed condition and the bearing capacity of the sphere has been numerically analyzed depending on the temporal parameters of the electromagnetic impulse and geometric properties of the sphere. Both layers of the sphere are made of non-ferromagnetic materials.

Key Words: Hollow Bimetallic Spheres, Pulse Electromagnetic, Bearing Capacity, Properties of Contact Connection.

1. Вступ

У сучасних механізмах і пристроях широко використовують кусково-однорідні електропровідні структурні елементи, які перебувають в умовах багатوافакторних навантажень, зокрема електромагнітних імпульсного характеру. Одним з таких елементів, особливо в електромагнітних перехідниках, є порожниста біметалева куля [1, 2]. Від збереження її несучої здатності залежить надійність роботи відповідних пристроїв [1].

У праці [3] проведено дослідження термонапруженого стану та несучої здатності однорідних електропровідних тіл канонічної форми за дії електромагнітного імпульсу (ЕМІ). У даній роботі розглянуто початково-крайову задачу термомеханіки для порожнистої біметалевої кулі за однорідної електромагнітної дії і запропоновано методику її розв'язування. Досліджено термонапружений стан і несучу здатність розглядуваної кулі за дії ЕМІ.

2. Формулювання задачі

Розглядається порожниста біметалева куля з внутрішнім $r = r_0$ і зовнішнім $r = r_2$ радіусами, віднесена до сферичної системи координат (r, φ, θ) , центр O якої співпадає з центром кулі. Матеріали складових шарів кулі однорідні ізотропні неферомагнітні, а їх фізико-механічні характеристики постійні. Куля перебуває за дії нестационарного електромагнітного поля (ЕМП), заданого значеннями азимутальної компоненти $H_\varphi^{(n)}$ вектора напруженості магнітного поля $\vec{H}^{(n)} = \{0; H_\varphi^{(n)}; 0\}$ на її внутрішній і зовнішній поверхнях, які теплоізоляовані від довкілля і вільні від силового навантаження. На поверхні $r = r_1$ з'єднання складових шарів кулі виконуються умови ідеальних електромагнітного, теплового і механічного контактів. Всі визначальні функції задачі – компонента $H_\varphi^{(n)}(r, t)$ вектора $\vec{H}^{(n)}$, температура $T^{(n)}(r, t)$ та радіальна компонента $u_r^{(n)}(r, t)$ вектора переміщень $\vec{u}^{(n)} = \{u_r^{(n)}; 0; 0\}$ – є функціями радіальної змінної r та часу t .

Розрахункова модель визначення термонапруженого стану кулі за дії імпульсного ЕМП складається з трьох етапів [4]. На першому етапі зі співвідношень Максвелла визначається нестационарне ЕМП, яке описується вектором $\vec{H}^{(n)}$, та зумовлені ним джоулеві тепловиділення $Q^{(n)}$ і пондеромоторні сили $\vec{F}^{(n)}$ в кожному n -му ($n=1,2$) складовому шарі за врахування заданих крайових і контактних умов. На другому - з рівняння теплопровідності, в якому джоулеві тепловиділення $Q^{(n)}$ є об'ємними джерелами тепла, визначається нестационарне температурне поле $T^{(n)}$ за конвективного теплообміну з довкіллям і заданих контактних умов. На третьому - з рівнянь центрально-симетричної динамічної задачі термпружності за знайденими температурою $T^{(n)}$ та пондеромоторною силою $\vec{F}^{(n)}$ знаходяться вектор переміщень $\vec{u}^{(n)}$ та тензор динамічних напружень $\hat{\sigma}^{(n)}$ за заданих крайових і контактних умов.

Для оцінки несучої здатності кулі в n -му шарі визначаємо інтенсивності [5]
 $\sigma_i^{(n)} = \sqrt{(3I_2(\hat{\sigma}^{(n)}) - I_1^2(\hat{\sigma}^{(n)}))/2}$ сумарних напружень

$\sigma_{jj}^{(n)} = \sigma_{jj}^{(n)Q} + \sigma_{jj}^{(n)F}$ ($j = r, \varphi, \theta$), які порівнюємо з межею пружності $\sigma_d^{(n)}$ матеріалу n -го шару. Тут $\sigma_{jj}^{(n)Q}$ і $\sigma_{jj}^{(n)F}$ - напруження, зумовлені джоулевым теплом $Q^{(n)}$ і пондеромоторною силою $\vec{F}^{(n)}$, $I_j(\hat{\sigma}^{(n)})$ ($j = 1, 2$) – j -й інваріант тензора напружень $\hat{\sigma}^{(n)}$. Біметалева куля зберігає несучу здатність, якщо в обох її шарах виконуються умови $\sigma_i^{(n)} < \sigma_d^{(n)}$. Розглянемо послідовно кожний з етапів розрахункової моделі.

2.1. Визначення ЕМП. Компонента $H_\varphi^{(n)}(r, t)$ вектора $\vec{H}^{(n)}$ в кожному n -му складовому шарі кулі визначається з рівняння [3]

$$\frac{\partial^2 H_\varphi^{(n)}}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial H_\varphi^{(n)}}{\partial r} - \sigma_n \mu_n \frac{\partial H_\varphi^{(n)}}{\partial t} = 0 \quad (1)$$

за граничних умов на внутрішній і зовнішній поверхнях кулі

$$H_\varphi^{(1)}(r_0, t) = H_\varphi^-(t), \quad H_\varphi^{(2)}(r_2, t) = H_\varphi^+(t),$$

умов ідеального електромагнітного контакту на поверхні з'єднання її шарів

$$H_\varphi^{(1)}(r_1, t) = H_\varphi^{(2)}(r_1, t),$$

$$\frac{\partial H_\varphi^{(1)}(r_1, t)}{\partial r} + \frac{H_\varphi^{(1)}(r_1, t)}{r_1} = k_\sigma \left(\frac{\partial H_\varphi^{(2)}(r_1, t)}{\partial r} + \frac{H_\varphi^{(2)}(r_1, t)}{r_1} \right)$$

та нульових початкових умов. Тут $H_\varphi^\pm(t)$ – задані функції. За знайденою функцією $H_\varphi^{(n)}(r, t)$ питомі густини джоулевих тепловиділень $Q^{(n)}(r, t)$ та пондеромоторних сил $\vec{F}^{(n)} = \{F_r^{(n)}(r, t); 0; 0\}$ визначаються за формулами

$$Q^{(n)} = \frac{1}{\sigma_n} \left(\frac{\partial H_\varphi^{(n)}}{\partial r} + \frac{H_\varphi^{(n)}}{r} \right)^2,$$

$$F_r^{(n)} = -\mu_n \left(\frac{\partial H_\varphi^{(n)}}{\partial r} + \frac{H_\varphi^{(n)}}{r} \right) H_\varphi^{(n)}.$$

2.2. Визначення температурного поля. За відомими питомими густинами джоулевих тепловиділень $Q^{(n)}(r, t)$ визначаємо розподіл температури $T^{(n)}(r, t)$ в кожному n -му шарі кулі з рівнян-

ня теплопровідності [4]

$$\frac{\partial^2 T^{(n)}}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial T^{(n)}}{\partial r} - \frac{1}{\kappa_n} \frac{\partial T^{(n)}}{\partial t} = -\frac{Q^{(n)}}{\lambda_n} \quad (2)$$

за крайових умов теплоізоляції на внутрішній і зовнішній поверхнях кулі

$$\frac{\partial T^{(1)}(r_0, t)}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial T^{(2)}(r_2, t)}{\partial r} = 0,$$

умов ідеального теплового контакту на поверхні з'єднання її складових шарів

$$T^{(1)}(r_1, t) = T^{(2)}(r_1, t), \\ \frac{\partial T^{(1)}(r_1, t)}{\partial r} = k_\lambda \frac{\partial T^{(2)}(r_1, t)}{\partial r}$$

та нульових початкових умов.

2.3. Визначення термонапруженого стану. Для визначення відмінних від нуля радіальної $\sigma_{rr}^{(n)}$, азимутальної $\sigma_{\varphi\varphi}^{(n)}$ та меридіанної $\sigma_{\theta\theta}^{(n)}$ компонент тензора динамічних напружень $\hat{\sigma}^{(n)}(r, t)$ в кожному n -му шарі кулі за вихідну вибираємо систему рівнянь центрально-симетричної задачі термонапруженості в переміщеннях [6]. Радіальна компонента $u_r^{(n)}(r, t)$ вектора переміщень в n -му шарі кулі визначається з рівняння [6]

$$\frac{\partial^2 u_r^{(n)}}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u_r^{(n)}}{\partial r} - \frac{2}{r^2} u_r^{(n)} - \frac{1}{c_n^2} \frac{\partial^2 u_r^{(n)}}{\partial t^2} = \\ = \alpha_n \frac{1 + \nu_n}{1 - \nu_n} \frac{\partial T^{(n)}}{\partial r} - \frac{(1 + \nu_n)(1 - 2\nu_n)}{E_n(1 - \nu_n)} F_r^{(n)} \quad (3)$$

за крайових умов на внутрішній і зовнішній поверхнях кулі

$$\frac{\partial u_r^{(1)}(r_0, t)}{\partial r} + \frac{\nu_1}{1 - \nu_1} \frac{2}{r_0} u_r^{(1)}(r_0, t) = \alpha_1 \frac{1 + \nu_1}{1 - \nu_1} T^{(1)}(r_0, t),$$

$$\frac{\partial u_r^{(2)}(r_2, t)}{\partial r} + \frac{\nu_2}{1 - \nu_2} \frac{2}{r_2} u_r^{(2)}(r_2, t) = \alpha_2 \frac{1 + \nu_2}{1 - \nu_2} T^{(2)}(r_2, t),$$

умов ідеального механічного контакту на поверхні з'єднання її шарів

$$u_r^{(1)}(r_1, t) = u_r^{(2)}(r_1, t),$$

$$(1 - \nu_1) \frac{\partial u_r^{(1)}(r_1, t)}{\partial r} + \nu_1 \frac{2}{r_1} u_r^{(1)}(r_1, t) - \alpha_1 (1 + \nu_1) T^{(1)}(r_1, t) =$$

$$= k_E \left[(1 - \nu_2) \frac{\partial u_r^{(2)}(r_1, t)}{\partial r} + \nu_2 \frac{2}{r_1} u_r^{(2)}(r_1, t) - \alpha_2 (1 + \nu_2) T^{(2)}(r_1, t) \right]$$

та нульових початкових умов.

За знайденою компонентою $u_r^{(n)}(r, t)$ вектора переміщень $\vec{u}^{(n)}$ визначаємо компоненти $\sigma_{ij}^{(n)}$ ($j = r, \varphi, \theta$) тензора напружень $\hat{\sigma}^{(n)}$ в n -му шарі кулі за формулами

$$\sigma_{rr}^{(n)} = E_{*n} \left[(1 - \nu_n) \frac{\partial u_r^{(n)}}{\partial r} + \nu_n \frac{2}{r} u_r^{(n)} - \alpha_n (1 + \nu_n) T^{(n)} \right],$$

$$\sigma_{\varphi\varphi}^{(n)} = E_{*n} \left[\nu_n \frac{\partial u_r^{(n)}}{\partial r} + \frac{u_r^{(n)}}{r} - \alpha_n (1 + \nu_n) T^{(n)} \right], \quad (4)$$

$$\sigma_{\theta\theta}^{(n)} = \sigma_{\varphi\varphi}^{(n)}, \quad E_{*n} = E_n / ((1 + \nu_n)(1 - 2\nu_n)).$$

За відомими сумарними напруженнями $\sigma_{ij}^{(n)}$ обчислюємо інтенсивності напружень $\sigma_i^{(n)}$ в n -му шарі кулі, які у даному випадку будуть

$$\sigma_i^{(n)} = |\sigma_{rr}^{(n)} - \sigma_{\varphi\varphi}^{(n)}|. \quad (5)$$

3. Методика побудови розв'язків початково-крайових задач

Для розв'язування сформульованих початково-крайових задач апроксимуємо розподіли визначальних функцій $\Phi^{(n)} = \{H_\varphi^{(n)}(r, t), T^{(n)}(r, t), u_r^{(n)}(r, t)\}$ за радіальною змінною r в n -му шарі кулі квадратичними многочленами

$$\Phi^{(n)}(r, t) = \sum_{i=0}^2 a_i^{(n)} \Phi^{(n)}(t) r^i. \quad (6)$$

Коефіцієнти $a_i^{(n)}(t)$ апроксимаційних поліномів (6) визначаємо через інтегральні (сумарні по пакету шарів) характеристики $\Phi_s(t)$ ключових функцій $\Phi^{(n)}(r, t)$

$$\Phi_s(t) = \sum_{n=1}^2 \int_{r_{n-1}}^{r_n} \Phi^{(n)}(r, t) r^{s+1} dr, \quad s = 1, 2 \quad (7)$$

та задані крайові умови на внутрішній і зовнішній поверхнях і на поверхні з'єднання шарів. Тут $l = 0$ для визначення $H_\varphi^{(n)}(r, t)$, $T^{(n)}(r, t)$ і $l = 1$ для визначення $u_r^{(n)}(r, t)$. Для знаходження інте-

гральних характеристик $\Phi_s(t)$ вихідні рівняння (1)-(3) інтегруємо відповідно до (7) з врахування виразів (6). В результаті вихідні початково-крайові задачі на ключові функції зведено до відповідних задач Коші на інтегральні характеристики цих функцій, які описуються системами рівнянь

$$\begin{cases} \frac{dH_1(t)}{dt} - d_1 H_1(t) - d_2 H_2(t) = d_3 H_j^-(t) + d_4 H_j^+(t) \\ \frac{dH_2(t)}{dt} - d_5 H_1(t) - d_6 H_2(t) = d_7 H_j^-(t) + d_8 H_j^+(t), \\ \frac{dT_1}{dt} + d_1^T T_1 + d_2^T T_2 = Q_1^*(t) \\ \frac{dT_2}{dt} + d_3^T T_1 + d_4^T T_2 = Q_2^*(t), \\ \frac{d^2 u_{r1}}{dt^2} - d_1^* u_{r1} - d_2^* u_{r2} = W_1^*(t) \\ \frac{d^2 u_{r2}}{dt^2} - d_3^* u_{r1} - d_4^* u_{r2} = W_2^*(t) \end{cases} \quad (8)$$

і розв'язуються за відповідних початкових умов з використанням перетворення Лапласа. Коефіцієнти d_{1+8} , d_{1+4}^T , d_{1+4}^* визначаються через геометричні параметри та фізико-механічні характеристики складових шарів кулі, $Q_s^*(t)$, $W_s^*(t)$ ($s=1,2$) – праві частини рівнянь (2) і (3), зінтегровані відповідно до (7) з урахуванням виразів $T^{(n)}$ і $F_r^{(n)}$ на поверхні з'єднання шарів.

Розв'язки задач Коші (8) записуємо у вигляді згорток заданих крайових умов та однорідних розв'язків. Отримуємо вирази

$$\begin{aligned} H_\phi^{(n)}(r,t) = & \sum_{i=0}^2 \left\{ \sum_{s=1}^2 a_{is}^{(n)} \sum_{k=1}^t [A_{s1}(k) H_j^-(\tau) + \right. \\ & \left. + A_{s2}(k) H_j^+(\tau) \right] e^{p_k(t-\tau)} d\tau + a_{i3}^{(n)} H_j^-(t) + a_{i4}^{(n)} H_j^+(t) \Big\} r^i \end{aligned} \quad (9)$$

компоненти $H_\phi^{(n)}(r,t)$,

$$\begin{aligned} T^{(n)}(r,t) = & \sum_{k=0}^2 \sum_{s=1}^2 \left(b_{ks}^{(n)} \sum_{m=1}^t \int [B_{s1}(m) W_1^Q(\tau) + \right. \\ & \left. + B_{s2}(m) W_2^Q(\tau) \right] e^{p_m(t-\tau)} d\tau \Big) r^k \end{aligned} \quad (10)$$

температури $T^{(n)}(r,t)$,

$$\begin{aligned} u_r^{(n)}(r,t) = & \sum_{i=0}^2 \left\{ \sum_{s=1}^2 c_{is}^{(n)} \sum_{k=1}^t \left[R_{s1}^*(k) W_1^*(\tau) + \right. \right. \\ & \left. \left. + R_{s2}^*(k) W_2^*(\tau) \right] e^{p_k(t-\tau)} d\tau \right\} r^i \end{aligned} \quad (11)$$

радіальних переміщень $u_r^{(n)}(r,t)$.

За знайденими виразами (11) функцій $u_r^{(n)}(r,t)$ зі співвідношень (4)–(5) визначасмо радіальні $\sigma_{rr}^{(n)}$, азимутальні $\sigma_{\phi\phi}^{(n)}$ і меридіанні $\sigma_{\theta\theta}^{(n)}$ компоненти тензора напружень та інтенсивності напружень $\sigma_i^{(n)}$.

4. Розв'язки задачі за дії ЕМІ

Дія ЕМІ математично описується функцією $H_\phi^\pm(t)$ у вигляді [3]

$$H_\phi^\pm(t) = k_0 H_0 (e^{-\beta_1 t} - e^{-\beta_2 t}). \quad (12)$$

Тут k_0 – нормувальний множник, β_1 і β_2 – параметри, що характеризують відповідно часи фронтів наростання t_{iner} і спадання t_{dekr} ЕМІ тривалості t_i , H_0 – максимальне значення напруженості магнітного поля в імпульсі.

Підставляючи вираз (12) у формули (9)–(11), записуємо розв'язки задачі термомеханіки для розглядуваної кулі за дії ЕМІ. Отримуємо вирази

$$\begin{aligned} H_\phi^{(n)}(r,t) = & \frac{k_0 H_0}{2} \sum_{i=0}^2 \left(e^{-\beta_1 t} B_{i1}^{(n)} + e^{-\beta_2 t} B_{i2}^{(n)} + \right. \\ & \left. + e^{p_1 t} B_{i3}^{(n)} + e^{p_2 t} B_{i4}^{(n)} \right) r^i \end{aligned}$$

компоненти $H_\phi^{(n)}(r,t)$,

$$Q^{(n)}(r,t) = \frac{1}{\sigma_n} \frac{k_0^2 H_0^2}{4} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 (i+1)(j+1) \sum_{l=1}^{20} C_{ijl}^{(n)} e^{\alpha_l t} r^{i+j-2},$$

$$F_r^{(n)}(r,t) = -\mu_n \frac{k_0^2 H_0^2}{4} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 (i+1) \sum_{l=1}^{20} C_{ijl}^{(n)} e^{\alpha_l t} r^{i+j-1}$$

питомих густин джоулевого тепла і пондеромоторних сил

$$\begin{aligned} T^{(n)}(r,t) = & \frac{k_0^2 H_0^2}{4} \sum_{p=0}^2 \sum_{m=1}^2 \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 (i+1)(j+1) \times \\ & \times \sum_{l=1}^{20} M_{ijlm}^{(n)} \frac{e^{p_m t} - e^{\alpha_l t}}{p_m - \alpha_l} r^p \end{aligned}$$

температури $T^{(n)}(r, t)$,

$$u_r^{(n)Q}(r, t) = \sum_{\alpha=0}^2 \left[c_{\alpha 1}^{(n)Q} u_{r1}^Q(t) + c_{\alpha 2}^{(n)Q} u_{r2}^Q(t) + \right. \\ \left. + c_{\alpha 3}^{(n)Q} T^{(1)}(r_0, t) + c_{\alpha 4}^{(n)Q} T^{(2)}(r_2, t) + c_{\alpha 5}^{(n)Q} N_0^Q(r_1, t) \right] r^\alpha,$$

$$u_r^{(n)F}(r, t) = \sum_{\alpha=0}^2 \left[c_{\alpha 1}^{(n)F} u_{r1}^F(t) + c_{\alpha 2}^{(n)F} u_{r2}^F(t) \right] r^\alpha$$

складників $u_r^{(n)Q}(r, t)$ та $u_r^{(n)F}(r, t)$ радіальних переміщень. Тут

$$u_{rs}^Q(t) = \frac{k_0^2 H_0^2}{4} \sum_{\beta=1}^2 \sum_{p=0}^2 \sum_{m=1}^2 \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 (i+1)(j+1) \times \\ \times \sum_{l=1}^{20} \frac{1}{p_m - \alpha_l} \left(\frac{e^{p_m t} - e^{p_\beta t}}{p_m - p_\beta} - \frac{e^{\alpha_l t} - e^{p_\beta t}}{\alpha_l - p_\beta} \right) \times \\ \times \left\{ R_{\beta 1}^Q \left[d_3^Q M_{ijlm}^{(1)} r_0^p + d_4^Q M_{ijlm}^{(2)} r_2^p + d_5^Q M_{ijlm}^{(1)} K_{\alpha E} r_1^p - \right. \right. \\ \left. \left. - p \left(g_{p11} M_{ijlm}^{(1)} + g_{p12} M_{ijlm}^{(2)} \right) \right] + \right. \\ \left. + R_{\beta 2}^Q \left[d_8^Q M_{ijlm}^{(1)} r_0^p + d_9^Q M_{ijlm}^{(2)} r_2^p + d_{10}^Q M_{ijlm}^{(1)} K_{\alpha E} r_1^p - \right. \right. \\ \left. \left. - p \left(g_{p21} M_{ijlm}^{(1)} + g_{p22} M_{ijlm}^{(2)} \right) \right] \right\},$$

$$u_{rs}^F(t) = -\frac{k_0^2 H_0^2}{4} \sum_{\beta=1}^2 \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 (i+1) \sum_{l=1}^{20} \frac{e^{\alpha_l t} - e^{p_\beta t}}{\alpha_l - p_\beta} \times \\ \times \sum_{m=1}^2 \sum_{p=1}^2 R_{\beta m}^F \frac{\mu_p}{\rho_p} q_{mp} C_{ijl}^{(p)}, \quad N_0^Q(r_1, t) = K_{\alpha E} T^{(1)}(r_1, t), \\ s=1,2, \quad p_1, p_2, p_m, p_\beta - \text{корені відповідних характеристичних рівнянь, коефіцієнти } B_{ij}^{(n)}, C_{ijl}^{(n)}, \\ M_{ijlm}^{(n)}, N_{sijl}, B_{sjm}, P_{saq}, R_{s\beta k}^Q, R_{s\beta k}^F, g_{ps}, f_{sij}, \\ \gamma_s, K_{\alpha E}, c_{0f}^{(n)}, b_{ij}^{(n)}, c_{ms}^{(n)F} \text{ подаються через гео-} \\ \text{метричні та фізико-механічні параметри кулі.}$$

5. Числовий аналіз задачі

Проаналізовано термонапружений стан і несучу здатність біметалевої кулі з радіусами поверхонь $r_0=8$ мм, $r_1=9$ мм, $r_2=10$ мм, складові шари якої виготовлені зі сталі X18H9T і міді. Характеристики ЕМІ рівні $t_i=10^{-4}$ с, 10^{-3} с, $\beta_1=6,9/t_i$, $\beta_2=2\beta_1$, $k_0=4$, $\sigma_d=300$ Мпа – для сталі і $\sigma_d=70$ Мпа – для міді [3].

На рис. 1–3 показано зміну в часі складників радіальних $\sigma_{rr}^{(n)}$ і азимутальних $\sigma_{\phi\phi}^{(n)}$ напружень

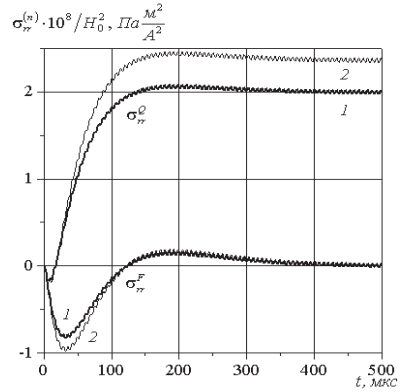


Рис. 1. Зміна в часі радіальних напружень

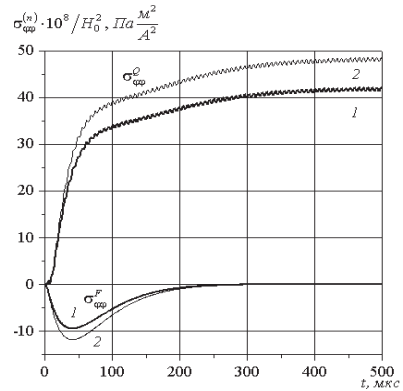


Рис. 2. Зміна в часі азимутальних напружень

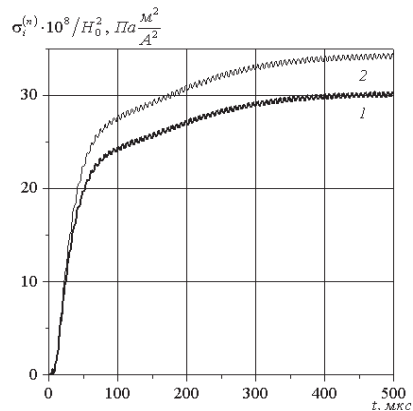


Рис. 3. Зміна в часі інтенсивностей напружень

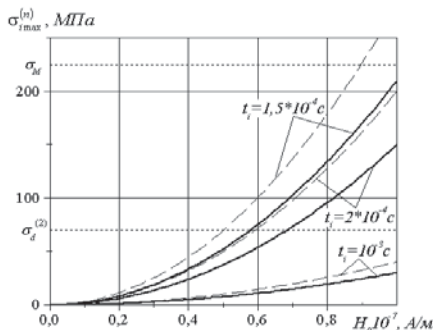


Рис. 4. Залежність максимальних значень інтенсивностей напружень від величини H_0

та інтенсивностей напружень $\sigma_i^{(n)}$ у сталевому (1) і мідному (2) шарах кулі на поверхні їх з'єднання.

На рис.4 подано залежності максимальних значень інтенсивностей напружень $\sigma_i^{(n)\max}$ в n -му шарі від величини H_0 за різних тривалостей ЕМІ.

Список використаних джерел

1. Батыгин Ю. В. Импульсные магнитные поля для прогрессивных технологий / Ю. В. Батыгин, В. И. Лавинский, Л. Т. Хименко. – Харьков: МОСТ – Торнадо, 2003. – 288 с.
2. Сильные и сверхсильные магнитные поля и их применение / Под ред. Херлаха Ф. – М.: Мир, 1988. – 456 с.
3. Мусій Р. С. Динамічні задачі термомеханіки електропровідних тіл канонічної форми / Р. С. Мусій. – Львів: Видавництво «Растр-7», 2010. – 216 с.
4. Термоупругость электропроводных тел / [Я. С. Подстригач, Я. И. Бурак, А. Р. Гачкевич, Л. В. Чернявская]. – К.: Наук. думка, 1977. – 248 с.
5. Бурак Я. Й. Термопружність електропровідних тіл за умов дії імпульсних електромагнітних полів / Я. Й. Бурак, О. Р. Гачкевич, Р. С. Мусій // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2006. – Т. 49, № 1. – С. 75–84.
6. Грибанов В. Ф. Связанные и динамические задачи термоупругости / В. Ф. Грибанов, Н. Г. Паничкин. – М.: Машиностроение, 1984. – 184 с.

Отримано, що несуча здатність розглядуваної кулі втрачається при $t_i \leq 1.5 \cdot 10^{-4}$ с.

6. Висновки

Запропонована методика дала змогу точно врахувати в розв'язках складових задач електродинаміки, теплопровідності і термомпружності всі задані крайові умови як на внутрішній і зовнішній поверхнях порожнистої кулі, так і на поверхні з'єднання її шарів. Вихідні початково-крайові задачі на визначальні функції зведено до задач Коші на їх інтегральні характеристики, розв'язки яких знайдено з допомогою перетворення Лапласа у вигляді згорток заданих крайових умов та однорідних розв'язків для однорідної нестационарної електромагнітної дії на всьому часовому проміжку її зміни. Записано і чисельно проаналізовано розв'язки задачі за дії ЕМІ. З'ясовано закономірності термомеханічної поведінки розглядуваної кулі і критичні значення параметрів ЕМІ, за яких розглядувана куля втрачає несучу здатність.

References

1. BATYGYN, J. V., LAVYNSKYI, V. I. & HYMENKO, L. N. (2003) *Impul'snyje Magnytnyje Polja Dlja Progressivnyh Tehnologij*. Harkov: Most–Tornado.
2. (ed by HERLAH, F.) (1988) *Silnyje i Sverhsilnyje Magnitnyje Polja i Ih Prymjenenije*. Moskva: Myr.
3. MUSIJ, R. S. (2010) *Dynamichni Zadachi Termomehaniky Elektroprovodnyh Til Kanonichnoji Formy*. Lviv: Rastr-7.
4. PODSTRYGACH, J. S. et al. (1977) *Tjermouprugost' Eljetroprovodnyh Tel*. Kyev: Naukova dumka.
5. BURAK, J. J., GACHKEVYCH, A. R. & MUSIJ, R. S. (2006) Termopruzhnist' elektroprovodnyh til za umov diji impulsnyh elektromagnitnyh poliv. *Mat. Metody ta Fiz.-Meh. Polja*. (1). p. 75–84.
6. GRYBANOV, V. F. & PANICHKIN, N. G. (1984) *Svjazannyje Zadachi Tjermouprugosti*. Moskva: Mashynostrojenije.

Надійшла до редколегії 30.09.15

УДК 539.3

Оксенчук Н. Д.¹, м. н. с.,
Сенченков І. К.¹, д. ф.-м. н., с. н. с.,
Якименко С. Н.², к. ф.-м. н., доц.

Вплив тривалості теплового імпульсу на глибину мікроструктурних перетворень

¹Інститут механіки ім. С. П. Тимошенко НАН
України, 03057, м. Київ, вул. П. Нестерова, 3
e-mail: term@inmech.kiev.ua

²Кіровоградський національний техн. ун-т,
25006, м. Кіровоград, пр. Університетський, 8

N. D. Oksenchuk¹, Jr. Sci. Researcher,
I. K. Senchenkov¹, Dr. Sci. (Phys.-Math.),
Sr. Sci. Researcher,
S. N. Yakimenko², Ph. D. (Phys.-Math.), Assoc. Prof.

An influence of a thermal impulse duration on a depth of microstructural transformations

¹S. P. Timoshenko Institute of Mechanics of NAS of
Ukraine, 03057, Kyiv, P. Nesterov str., 3
e-mail: term@inmech.kiev.ua

²Kirovohrad National Technical University, 25006,
Kirovohrad, Universitetskyy av., 8

Розглядається півпростір, опромінений тепловим імпульсом. Нелінійна поведінка матеріалу описується моделлю течії Боднера – Партома, яка узагальнена на випадок багатозфазного складу матеріалу. Задача розв'язується чисельно – методом покрокового інтегрування по часу і МСЕ. Досліджується вплив параметрів імпульсу на глибину мартенситних перетворень.

Ключові слова: імпульсне теплове навантаження, мартенситне перетворення, модель течії.

A half-space irradiated by a heat pulse is considered. The nonlinear behavior of a material is described by the Bodner–Partom unified flow model with temperature dependent parameters generalized for the case of multiphase material state. Martensitic type microstructure transformations under cooling are taken into account. Actual cooling diagrams, continuing cooling diagrams as well as the Koistinen–Marburger law are used for calculation of a volume phase concentration. Mechanical parameters, thermal characteristics and their temperature dependencies are calculated according to the linear mixing rule solely on the basis of microstructural properties of the constituents. The problem is solved numerically by the time step integration method, the iteration technique and FEM. A variable time step scheme is used. Variety of parameters of residual stress-strain state is studied depending on the thermal loading parameter. An influence of a heat pulse intensity parameter on a depth of martensitic transformations is investigated. The linear dependence of the transformation depth on the intensity parameter of a heat flux within double logarithmic axes is established.

Key Words: Pulse Thermal Loading, Martensite Transformations, Flow Model.

1. Вступ

Розвиток технологій поверхневого зміцнення елементів конструкцій за допомогою імпульсного лазерного впливу стимулює розвинення методів чисельного моделювання термомеханічних і мікроструктурних процесів у поверхневих шарах металу [1]. У роботі [2] встановлено, що мікроструктурні перетворення мартенситного типу у процесі охолодження поверхневих шарів можуть бути основним механізмом зміцнення внаслідок більш високого часового опору матеріалу в мартенситній фазі в порівнянні з початковою фазою матеріалу. Отримані результати стосувалися впливу тривалості $10^{-7} \div 10^{-8}$ с, при яких формувалися мартенситні структури у шарах $10^{-7} \div 10^{-6}$ м. При таких параметрах результати, отримані в

рамках континуальних моделей, можуть бути чуттєвими до особливостей структури матеріалу.

У представлений роботі проводиться дослідження залежності товщини мартенситного шару від тривалості теплового імпульсу і з'ясування обмежень континуального підходу до опису термомеханічних процесів.

2. Постановка задачі і метод розв'язання

Розглянемо опромінений тепловим імпульсом півпростір: $z > 0$, $0 < r < \infty$. Використовується термомеханічна модель Боднера – Партома, узагальнена на випадок залежності її параметрів, які відповідають за границю текучості і часовий опір матеріалу, від фазового складу [3]. Модель включає:

1) рівняння адитивності деформації:

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^{in} + \varepsilon_{ij}^{0ph} \quad (i, j = r, z, \varphi); \quad (1)$$

2) рівняння закону Гука, записані для девіаційної і шарової складових тензорів,

$$s_{ij} = 2G(e_{ij} - \varepsilon_{ij}^{in}), \quad \sigma_{kk} = 3K_V(\varepsilon_{kk} - \varepsilon_{kk}^{0ph}); \quad (2)$$

3) закон течії Прандтля – Рейса з умовою непружної нестисливості:

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^{in} = D_0 \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[\frac{(\bar{K}_0 + K)^2}{3J_2} \right]^n \right\} \frac{s_{ij}}{\sqrt{J_2}}, \quad (3)$$

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^{in}(0) = 0, \quad \dot{\varepsilon}_{ii}^{in}(0) = 0;$$

4) рівняння еволюції параметру ізотропного зміцнення:

$$\dot{K}' = m_1(\bar{K}_1 - K')\dot{W}^{in}, \quad K'(0) = 0. \quad (4)$$

Тут ε_{ij}^{in} і ε_{ij}^e – непружна і пружна складові деформації; ε_{ij}^{0ph} – об'ємна термотрансформаційна деформація, що описує температурний і трансформаційний ефекти зміни об'єму [4]; G – модуль зсуву; K_V – модуль об'ємного стиску; s_{ij} , e_{ij} – девіатори тензорів напружень і деформації відповідно; $s_{ij} = \sigma_{ij} - \delta_{ij}\sigma_{kk}/3$, $e_{ij} = \varepsilon_{ij} - \delta_{ij}\varepsilon_{kk}/3$; δ_{ij} – символ Кронекера; J_2 – другий інваріант девіатора тензора напружень; $J_2 = s_{ij}s_{ij}/2$; $\dot{W}^{in} = \sigma_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij}^{in}$ – непружна потужність; $D_0 = 10^8 \text{ c}^{-1}$ – граничне значення швидкості непружної деформації при зсуві; D_0 , n , m_1 , $\bar{K}_0$, $\bar{K}_1$ – параметри моделі, причому параметри моделі, причем $\bar{K}_0$, $\bar{K}_1$ для багатофазного складу матеріалу визначаються за допомогою лінійного правила сумішей.

Мікроструктурні перетворення (МСП) при охолодженні розглядуваного матеріалу характеризуються трансформаційною деформацією і залежністю непружних властивостей від фазового складу матеріалу. Трансформаційна деформація обчислюється за допомогою термкінетичної діаграми. Накопичення концентрації фаз вздовж кривих охолодження мартенситного перетворення обчислюється за допомогою рівняння Коїстінена – Марбурґера.

Окрім вказаних рівнянь моделі течії і

кінетики МСП, постановка динамічної зв'язаної задачі термомеханіки у циліндричній системі координат $Orz\varphi$, включає співвідношення Коші для осесиметричного випадку, рівняння руху, рівняння теплопровідності, граничні і початкові умови:

$$\bar{c}_v \dot{\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\bar{k} r \frac{\partial \theta}{\partial r} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\bar{k} \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) - T \dot{\sigma}_{kk} \bar{\alpha} + \rho \Delta i_{\xi} \dot{C}^{\xi} + D'; \quad (5)$$

де $\xi = a, b, p, f, m$;

$$\bar{c}_v = c_v^{\xi} C^{\xi}, \quad \bar{k} = k^{\xi} C^{\xi}, \quad V_0^{\xi} = V^{\xi}(\theta_r),$$

$$\bar{\alpha} = \sum_{\xi} V_0^{\xi} C^{\xi} \alpha_{\xi} / \sum_{\xi} V_0^{\xi} C^{\xi},$$

$$\alpha_{\xi} = (V^{\xi} - V_0^{\xi}) / 3(\theta - \theta_0) V_0^{\xi},$$

$$\sum_{\xi} C^{\xi} = C^a + C^b + C^f + C^p + C^m = 1.$$

Тут і нижче використовуються наступні позначення: u_r , u_z – компоненти вектору переміщення; ε_{rr} , ε_{zz} , ε_{rz} , $\varepsilon_{\varphi\varphi}$ – компоненти тензору деформації; σ_{rr} , σ_{zz} , σ_{rz} , $\sigma_{\varphi\varphi}$ – компоненти тензору напружень; ρ – густина матеріалу; θ – температура; θ_r – відлікова температура; $\dot{\theta} = \partial\theta/\partial t$; $\bar{c}_v$, $\bar{k}$ – об'ємна теплоємність і коефіцієнт теплопровідності суміші фаз; $\bar{\alpha}$ – узагальнений коефіцієнт об'ємного розширення; $\dot{\sigma}_{kk} = \dot{\sigma}_{rr} + \dot{\sigma}_{zz} + \dot{\sigma}_{rz} + \dot{\sigma}_{\varphi\varphi}$; Δi_{ξ} – латентна теплота МСП; D' – швидкість внутрішньої дисипації; $V^{\xi}(\theta)$ – вільний об'єм об'ємна концентрація фази ξ при температурі θ ; C^{ξ} – об'ємна концентрація фази ξ в долях одиниці; $\xi = a, f, p, b, m$, де a – аустеніт, f – ферит, p – перліт, b – бейніт, m – мартенсит; по індексу, що повторюється, проводиться сумування.

На поверхні півпростору $z=0$ задаються граничні умови імпульсного термічного навантаження і вільної границі:

$$q_z = \begin{cases} q_0 \sin \frac{\pi}{t_q} t, & t \leq t_p; \\ 0, & t > t_p; \end{cases} \quad (6)$$

$$\sigma_{zz} = \sigma_{rz} = 0. \quad (7)$$

Тут q_0 – параметр інтенсивності теплового впливу; t_q – час дії імпульсу.

Початкові умови приймаються у вигляді

$$u_z = 0, \quad \dot{u}_z(0) = 0, \quad \theta(0) = \theta_0, \quad t = 0. \quad (8)$$

Як і у задачі В. І. Даніловської [5] припускається, що

$$u_z = u_z(z, t), \quad u_r = 0, \quad \theta = \theta(r, z). \quad (9)$$

При конкретизації властивостей матеріалу використовуються характеристики сталі 35ХМА.

Задача є нелінійною і розв'язується чисельно – методом покрокового інтегрування і методом скінченних елементів. Алгоритм розв'язання задачі викладено у роботі [4].

3. Результати розрахунків та їх аналіз

Еволюція температури і концентрації фаз для параметрів задачі $q_0 = 7 \cdot 10^9$ Вт/м², $t_q = 1 \cdot 10^{-5}$ с, $\theta_0 = 20$ °С показана на рис. 1.

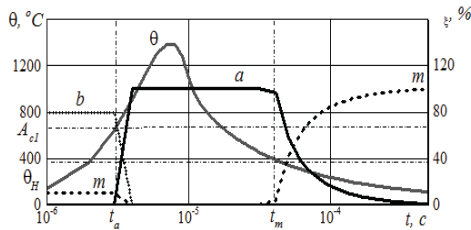


Рис. 1

Видно, що вихідний бейніт-мартенситний фазовий склад при $\theta > A_{c1}$ трансформується у аустенітну фазу, яка у свою чергу при охолодженні $\theta < \theta_H = 390$ °С розпадається у мартенситну фазу. Розподіл по товщині цієї фази для різних моментів часу показано на рис. 2.

Параметр z_m позначає товщину шару, в якому відбулися мартенситні перетворення.

Оскільки об'єм матеріалу в мартенситній фазі є максимальним, то, відповідно, залишкові напруження у області $0 < z < z_m$ будуть стискаючими (рис. 3).

З практичної точки зору важливим є встановлення зв'язку між параметрами термічного навантаження t_q , q_0 з товщиною мартенситного шару z_m (зона термічного

впливу). З цією метою у процесі розрахунків варіювалися значення параметрів таким чином,

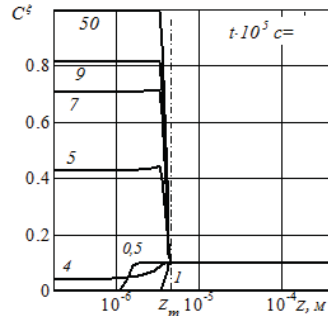


Рис. 2

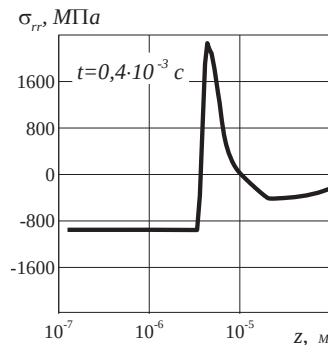


Рис. 3

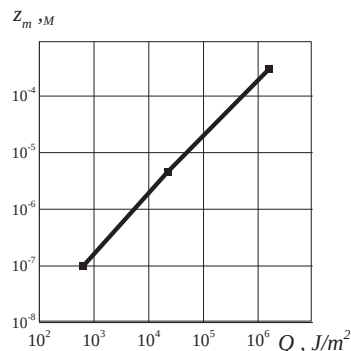


Рис. 4

щоб максимальна температура на поверхні пів-
ростору зберігалася на рівні $\theta_{\max}|_{z=0} \approx 1400^\circ\text{C}$.

Згідно з розрахунками, залежність товщини
мартенситного шару від тривалості імпульсу є
практично лінійною функцією у подвійних
логарифмічних координатах.

У технологічних застосуваннях зручно
оцінювати розмір зони термічного впливу в

залежності від параметру тепловкладення:

$$Q = \int_0^{t_q} q_z dt \quad [\text{Дж/м}^2].$$

Ці дані представлено на рис. 4.

Список використаних джерел

1. Гуляев А. П. Металловедение / А. П. Гуляев. – Москва: Металлургия, 1986. – 544 с.
2. Жук Я. А. Упрочнение цилиндра при импульсном тепловом нагружении с учетом мартенситных превращений / Я. А. Жук, Е. В. Доля, Н. Д. Оксенчук // Теоретическая и прикладная механика. – 2012. – Т. 51, № 5. – С. 58–63.
3. Оксенчук Н. Д. Напружено-деформований стан сталевго циліндра при тепловому опроміненні та врахуванні мікроструктурних перетворень / Н. Д. Оксенчук // Методика розв'язування прикладних задач механіки твердого деформівного тіла. – 2012. – № 13. – С. 301–308.
4. Жук Я. О. Вплив мікроструктурних перетворень на напружено-деформований стан локально опроміненого сталевго диска / Я. О. Жук, І. К. Сенченков, Л. Я. Васильєва // Математичні методи та фізико-механічні поля. – 2011. – Т. 54, № 1. – С. 101–115.
5. Даниловская В. И. Об одной задаче термоупругости / В. И. Даниловская // Прикладная математика и механика. – 1952. – Т. 16, № 3. – С. 341–344.

References

1. GULYAEV, A. P. (1986) Metallovedenie Moskva: Metallurgiya.
2. ZHUK, YA. A., DOLYA, E. V. & OKSENCHUK, N. D. (2012) Uprochnenie tsilindra pri impulsnom teplovom nagruzhennii s uchetom martensitnykh prevrashchenij. *Teoreticheskaya i Prikladnaya Mekhanika*. 51 (5). p. 58–63.
3. OKSENCHUK, N. D. (2012) Napruzhenodeformovanyj stan stalevogo cylindra pry teplovomu oprominenni ta vrahuvanni mikrostrukturnykh peretvoren. *Metodyka rozvyazuvannya prykladnykh zadach mekhaniky tverdogo deformivnogo tila*. 13. p. 301–308.
4. ZHUK, YA. O., SENCHENKOV, I. K. & VASIL'eva, L. YA. (2011) Vplyv mikrostrukturnykh peretvoren na napruzhenodeformovanyj stan lokalno oprominenogo stalevogo dyska. *Matematychni Metody ta Fyzyko-Mekhanichni Polya*. 54 (1). p. 101–115.
5. DANILOVSKAYA, V. I. (1952) Ob odnoj zadache termouprugosti. *Prikladnaya Matematika i Mekhanika*. 16 (3). p. 341–344.

Надійшла до редколегії 05.10.15

УДК 534.22-18

Олійник В. Н., к. ф.-м. н., с. н. с.

Про дисперсію хвиль деяких типів у легеневій паренхімі

Інститут гідромеханіки НАН України, 03057,
м. Київ, вул. Желябова, 8/4
e-mail: v_oliynik@yahoo.com

V. N. Oliynik, Ph. D. (Phys.-Math.),
Sr. Sci. Researcher

On a dispersion of some types of waves in a pulmonary parenchyma

Institute of Hydromechanics of NAS of Ukraine,
03057, Kyiv, Zhelyabov str., 8/4
e-mail: v_oliynik@yahoo.com

Запропоновано просту фізичну модель формування хвильових властивостей газонасичених пружних середовищ типу легеневої паренхіми, у якій може поширюватись «повільна поздовжня» хвиля, не пов'язана з об'ємним деформуванням альвеолярного газу. Для цього розглянуто періодичну структуру із замкненими тонкостінними камерами, заповненими акустичним середовищем. Показано, що при збудження згинних коливань стінок камер супроводжується дисперсійними ефектами, які дозволяють пояснити обмеженість діапазону існування «повільної поздовжньої» хвилі.

Ключові слова: легенева паренхіма, швидкість поширення, акустопружна структура, метод Флоке, згинні коливання, дисперсія, частота замикання.

Nowadays, an extensive database of experimental data for propagation velocities of acousto-mechanical waves in lungs is accumulated. This vital organ is known to be composed of a parenchyma formed by the thin-walled gas-filled bubbles (alveoli). Besides the waves similar to a longitudinal and transverse waves in an elastic media, the additional, so-called «slow longitudinal», wave is registered here. The last one is shown to be not related with a volume deformation of the alveolar gas. Previously, we failed to explain the existence of the «slow longitudinal» wave by the open-cell structure of the alveoli enabling the leakage of the alveolar gas into the bronchial tree. Therefore, a simple physical model was proposed to describe the formation of this wave due to oscillations of the lung accompanied by equivoluminal distortions of the alveoli. For this purpose, a periodic structure with closed thin-walled cells filled with an acoustic medium was introduced and different forms of its excitation were considered. In this paper, it is shown that the allowance for flexural vibrations of cell walls gives rise to the dispersion effects. A presence of the dispersion yields the explanation of the narrow-band nature of frequency range typical for a propagation of «slow longitudinal» wave in lungs.

Key Words: Pulmonary Parenchyma, Propagation Velocity, Acoustoelastic Structure, Floquet Method, Bending Vibration, Dispersion, Cut-Off Frequency.

1. Вступ

У процесі дихання відбувається генерація специфічних звуків, які несуть важливу з діагностичної точки зору інформацію про стан здоров'я людини. Безумовно, центральне місце у респіраторній системі займають легені – парний орган, у якому відбувається газообмін між кров'ю і зовнішнім повітрям, яке доставляється сюди через повітроводи бронхіального дерева [1].

Особлива функція легень визначає особливості їхньої будови: в основі легеневої тканини (паренхіми) лежать мікроскопічні (діаметром до 300 мікрон) тонкостінні повітряні пухирці – альвеоли, щільно упаковані у кластери-

ацинуси, і через альвеолярні ходи з'єднані з термінальними бронхіолами [2].

З точки зору низькочастотної акустики (діапазон $1 \div 2$ кГц) легенева паренхіма трактується як мікроструктуроване газонаповнене середовище, а його тканинну компоненту – стінки альвеол – вважають однорідною пружною або в'язкопружною. Більш того, ряд важливих особливостей поширення хвиль у легенях вдалося пояснити, виходячи з уявлень про паренхіму як про квазіоднорідне середовище з об'ємно усередненими ефективними густиною і пружними модулями, у якій можуть поширюватись поздовжня (дилатаційна) й поперечна (зсувна) хвилі [3, 4]. Справедливість такого підходу обґрунтовується тим, що в

розглянутому частотному діапазоні довжина хвилі в легенях значно перевищує масштаб їхньої мікроструктури – характерний лінійний розмір альвеоли.

Більш детальний аналіз експериментальних даних показав, що в легенях може збуджуватись ще одна хвиля, швидкість поширення якої у кілька разів менша за швидкість дилатаційної хвилі, але значно перевищує швидкість хвилі зсуву. Цю хвилю іноді трактують як «повільну поздовжню» і асоціюють з величиною модуля пружності альвеол, знайденому без урахування присутності альвеолярного газу [4, 5].

Висловлювалось припущення про те, що існування «повільної поздовжньої» хвилі обумовлене відкритістю альвеол, яка робить можливим вільне витікання повітря з них у бронхіальне дерево [5]. Дійсно, паренхіма, на перший погляд, аналогічна насиченому рідиною пористому середовищу, яке описується теорією типу Біо [6]. Утім, спроба перенесення цього підходу на легені показала, що спостережена хвиля не має нічого спільного з другою поздовжньою хвилею типу Біо – Столла [7].

Виходячи з цих міркувань, було запропоновано більш просту фізичну модель цього явища без урахування зв'язку легень із бронхіальним деревом. Розглянута система являє собою довгий ланцюг заповнених акустичним середовищем замкнених камер, обмежених тонкими пружними (поки що без урахування згину) стінками [8, 9]. В залежності від характеру збудження такої структури у ній можуть спостерігатись хвильові рухи, які супроводжуються або не супроводжуються об'ємним деформуванням камер. Виявлено, що у довгохвильовому наближенні знайдені дві швидкості поширення відповідають дилатаційній та «повільній поздовжній» хвилям.

Значимо, що діапазон існування «повільної поздовжньої» хвилі у паренхімі обмежений зверху частотами 100÷150 Гц [4,5]. Вочевидь, таку поведінку системи не можна пояснити за рахунок дисипативних властивостей середовища. Дійсно, дилатаційна хвиля в легенях, для якої характерне суттєве згасання [7], спостерігається на частотах до 10 кГц [3].

Можна припустити, що існування діапазонів поширення й замикання хвиль у паренхімі спричинене їхніми дисперсійними властивостями. Одним з найпростіших способів привнесення дисперсії у тонкостінну пружну структуру можна вважати можливість згинних коливань її елементів. З огляду на це, у даній статті

пропонується розгляд хвильових властивостей модельної системи [8, 9] з урахуванням можливості згину стінок газонаповнених камер.

2. Постановка задачі та її розв'язання

У двовимірній постановці розглянемо нескінченний лінійний періодичний ланцюг, який складається з однакових прямокутних тонкостінних камер довжини $l=0.4$ мм і ширини $2h=l$. Кожний з камер припишемо певний номер $n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ (рис. 1). Нехай у цій структурі поширюється гармонічна хвиля з одиничною амплітудою і циклічною частотою $\omega=2\pi f$. Як це робиться зазвичай, часовий множник у формі $e^{-i\omega t}$ надалі не пишемо, працюючи виключно з амплітудними величинами.

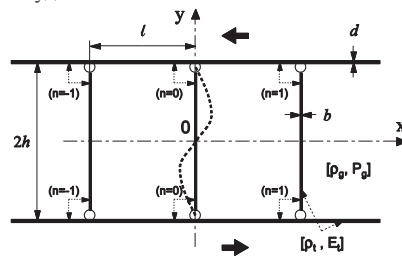


Рис. 1. Модельна періодична структура

Горизонтальні стінки камер вважаються пружними стержнями товщини $b=0.005$ мм, що можуть зазнавати поздовжніх деформацій ($u_n^{\pm}$), де індекси плюс і мінус відповідають верхній і нижній стінкам. Як і в роботі [9], вважаємо, що коливання верхньої і нижньої стінок відбуваються у протифазі ($u_n^+ = -u_n^- \equiv u_n$):

$$\frac{d^2 u_n}{dx^2} + k_t^2 u_n = 0, \quad k_t = \frac{\omega}{c_t}, \quad c_t = \sqrt{\frac{E_t}{(1-\nu)\rho_t}}.$$

Це дозволяє одержати деформування камер без зміни об'єму на всьому періоді коливань.

Вертикальні стінки (поперечні перегородки) мають товщину $b_w = b$ і вважаються балками, здатними деформуватися на згин (w_n):

$$\frac{d^4 w_n}{dx^4} - k_w^4 w_n = 0, \quad k_w^4 = \frac{\omega^2 \rho_t b}{D_t}, \quad D_t = \frac{E_t b^3}{1-\nu^2}.$$

Усім стінкам камер припишемо густину $\rho_t = 1100$ кг/м³, модуль Юнга $E_t = 10^5$ Па і коефіцієнт Пуассона $\nu = 0.4999999$. Ці параметри вибрані достатньо близькими до тих,

які характеризують внутрішню структуру реальних альвеол [8, 9].

Камери заповнені акустичним середовищем з густиною $\rho_g = 1.14 \text{ кг/м}^3$ і швидкістю звуку $c_g = 340 \text{ м/с}$ (повітря при 37°C), гармонічні хвильові процеси в якому описуються рівнянням Гельмгольца відносно потенціалу швидкості φ_n :

$$\frac{d^2 \varphi_n}{dx^2} + \frac{d^2 \varphi_n}{dy^2} + k_g^2 \varphi_n = 0, \quad k_g = \frac{\omega}{c_g}.$$

Для простоти, обмежимося випадком шарнірного закріплення вертикальних перегородок. З урахуванням усього сказаного, система умов спряження кінематичних і динамічних величин має вигляд:

$$\begin{aligned} u_n|_{x=nl} &= u_{n+1}|_{x=nl}, & -\frac{d\varphi_n}{dx}\bigg|_{x=nl} &= -\frac{d\varphi_{n+1}}{dx}\bigg|_{x=nl}, \\ -\frac{d\varphi_n}{dx}\bigg|_{x=nl} &= -i\omega w_n|_{x=nl}, & |y| &\leq h; \\ \frac{d\varphi_n}{dy}\bigg|_{y=\pm h} &= 0, & (n-1)l &\leq x \leq nl; \\ -\frac{2bE_t}{1-\nu} \left(\frac{du_n}{dx} - \frac{du_{n+1}}{dx} \right)_{x=nl} &- \\ -i\omega \rho_g \int_{-h}^h (\varphi_n - \varphi_{n+1})|_{x=nl} dy - D_t \int_{-h}^h \frac{d^2 w_n}{dy^2} \bigg|_{x=nl} dy &= 0. \end{aligned}$$

Як і в роботах [8, 9], для знаходження ефективної швидкості C поширення хвилі у структурі скористаємось методом Флоке [10], у рамках якого всі розв'язки запишемо у вигляді біжучої у напрямку Ox хвилі з амплітудами, модульованими відносно координати y . Для цього запишану систему функціональних співвідношень треба доповнити умовою періодичності фізичних полів у вузлах з номерами $(n-1)$ і n . Вона дозволяє прийти до дисперсійного рівняння, яке визначає дозволених значення довжини хвилі (фазової швидкості) при даній частоті.

Більш детальні пояснення з цього приводу й конкретний вигляд виразів для u_n і φ_n наведені у статті [9]. Практично повна аналогія зберігається і в разі можливості згину поперечних перегородок (загальні вирази для w_n мають стандартний вигляд [11]).

3. Аналіз результатів

На рис. 2 зображено частотну залежність фазової швидкості поширення «повільної поздовжньої» хвилі, тобто її дисперсійну характеристику. Із графіка видно, що у довгохвильовому наближенні (до $k_w h < \pi/4$) швидкість поширення зазначеної хвилі у паренхімі залишається практично сталою і відповідає значенню, отриманому для випадку антисиметричного збудження системи з жорсткими масивними перегородками [9]. Це цілком природно, оскільки тут не відбувається ефективного збудження згинних мод коливань вертикальних стінок.

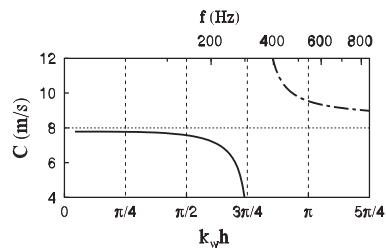


Рис. 2. Частотна залежність швидкості поширення «повільної поздовжньої» хвилі у модельній періодичній структурі

З підвищенням частоти картина поступово змінюється і за рахунок наростання динамічної реакції гнучких балок-перегородок результуюча швидкість c ефективно знижується, а в околі $k_w h = 3\pi/4$ ($f \approx 300 \text{ Гц}$) настає повне гальмування хвилі – відбувається її замикання. Очевидно, практичний поріг спостереження «повільної поздовжньої» хвилі має бути ще нижчим – до 200 Гц, що доволі непогано узгоджується з експериментальними оцінками [4, 5].

Для $k_w h > 3\pi/4$ перенесення властивостей розглянутої моделі на паренхіму стає некоректним, оскільки наявність найменшої нерегулярності або втрат блокуватиме можливість поширення хвилі у цьому діапазоні.

4. Висновки

Описаний ефект замикання біжучої хвилі є яскравим проявом дисперсійних властивостей розглянутої акустомеханічної системи. Ймовірно, саме він дає якісне пояснення суттєвої обмеженості діапазону поширення в легенях хвиль, не пов'язаних з об'ємним деформуванням паренхіми.

Список використаних джерел

1. West J. B. *Respiratory Physiology. The Essentials* / J. B. West. – Baltimore: Williams and Wilkins, 1983. – 183 p.
2. Weibel E. R. *Morphometry of the Human Lung* / E. R. Weibel. – Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 1963. – 153 p.
3. Rice D. A. Sound speed in pulmonary parenchyma / D. A. Rice // *J. Appl. Physiol.* – 1983. – Vol. 54, № 1. – P. 304–308.
4. Propagation of stress waves in inflated sheep lungs / [M. Jahed, S. J. Lai-Fook, P. K. Bhagat, S. S. Kraman] // *J. Appl. Physiol.* – 1989. – Vol. 66, № 6. – P. 2675–2680.
5. Butler J. P. Longitudinal elastic wave propagation in pulmonary parenchyma / J. P. Butler, J. L. Lehr, J. M. Drazen // *J. Appl. Physiol.* – 1987. – Vol. 62, № 4. – P. 1349–1355.
6. Biot M. A. Theory of propagation of elastic waves in fluid-saturated porous solid / M. A. Biot // *J. Acoust. Soc. Am.* – 1956. – Vol. 28, № 2. – P. 168–191.
7. Олійник В. Н. Особливості поширення хвиль у легеневій тканині / В. Н. Олійник // *Акустичний вісник.* – 2007. – Т. 10, № 2. – С. 64–78.
8. Олійник В. Н. Поширення хвиль у системі двох паралельних стержнів, періодично підкріплених жорсткими поперечними перегородками і зв'язаних з акустичним середовищем / В. Н. Олійник // *Акустичний вісник.* – 2008. – Т. 11, № 1. – С. 60–67.
9. Олійник В. Н. Антисиметричні хвилі в системі двох паралельних стержнів, періодично підкріплених жорсткими поперечними перегородками і зв'язаних з акустичним середовищем / В. Н. Олійник // *Акустичний вісник.* – 2008. – Т. 11, № 2. – С. 36–44.
10. Heckl M. A. Investigations on the vibrations of grillages and other simple beam structures / M. A. Heckl // *J. Acoust. Soc. Am.* – 1964. – Vol. 36, № 7. – P. 1335–1343.
11. Timoshenko S. *Vibration Problems in Engineering* / S. Timoshenko – New York: D. Van Nostrand Company, 1937. – 497 p.

References

1. WEST, J. B. (1983) *Respiratory Physiology. The Essentials*. Baltimore: Williams and Wilkins.
2. WEIBEL, E. R. (1963) *Morphometry of the Human Lung*. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag.
3. RICE, D. A. (1983) Sound speed in pulmonary parenchyma. *J. Appl. Physiol.* 54 (1), p. 304–308.
4. JAHED, M. et al. (1989) Propagation of stress waves in inflated sheep lungs. *J. Appl. Physiol.* 66 (6), p. 2675–2680.
5. BUTLER, J. P., LEHR, J. L. & DRAZEN, J. M. (1987) Longitudinal elastic wave propagation in pulmonary parenchyma. *J. Appl. Physiol.* 62 (4), p. 1349–1355.
6. BIOT, M. A. (1956) Theory of propagation of elastic waves in fluid-saturated porous solid. *J. Acoust. Soc. Am.* 28 (2), p. 168–191.
7. OLIINYK, V. N. (2007) Osoblyvosti poshyrennya khvyl u leheneviy tkanyni. *Akustychy Visnyk.* 10 (2), p. 64–78.
8. OLIINYK, V. N. (2008) Poshyrennya khvyl u systemi dvokh paralelnykh sterzhniv, periodychno pidkriplenykh zhorstkymy poperechnymy perehorodkamy i zvyazanykh z akustychnym seredovyschem. *Akustychy Visnyk.* 11 (1), p. 60–67.
9. OLIINYK, V. N. (2008) Antysymetrychni khvyli v systemi dvokh paralelnykh sterzhniv, periodychno pidkriplenykh zhorstkymy poperechnymy perehorodkamy i zvyazanykh z akustychnym seredovyschem. *Akustychy Visnyk.* 11 (2), p. 36–44.
10. HECKL, M. A. (1964) Investigations on the vibrations of grillages and other simple beam structures. *J. Acoust. Soc. Am.* 36 (7), p. 1335–1343.
11. TIMOSHENKO, S. (1937) *Vibration Problems in Engineering*. New York: D. Van Nostrand Company.

Надійшла до редколегії 30.09.15

УДК 539.3

Опанасович В. К., д. ф.-м. н., доц.

V. K. Opanasovich, Dr. Sci. (Phys.-Math.),
Assoc. Prof.

**Двосторонній згин ізотропної пластини з
круговим отвором і пружною шайбою за
повного гладкого лінійчастого контакту
складових**

**Biaxial bending of the isotropic plate with a
circular hole and a elastically disk in
presence of a full smooth linear contact of
components**

Львівський національний університет імені
Івана Франка, 79000, м. Львів, вул.
Університетська, 1
e-mail: kafmech@franko.lviv.ua

Ivan Franko National University of L'viv, 79000,
L'viv, Universytetska str., 1
e-mail: kafmech@franko.lviv.ua

В роботі досліджена задача про двосторонній згин ізотропної пластини розподіленими згинальними моментами на нескінченності за існування в пластині кругового отвору, в який вставлена без натягу кругова пружна шайба. Під дією зовнішнього навантаження береги шайби і отвору приходять у гладкий контакт уздовж колової лінії на одній з основ пластини. Розв'язок задачі подано у вигляді суперпозиції двох розв'язків: плоскої задачі теорії пружності і задачі згину пластини з використанням класичної теорії. За допомогою методів теорії функцій комплексної змінної та комплексних потенціалів задачу зведено до низки задач лінійного спряження, на основі яких отримано явні вирази комплексних потенціалів, контактної зусилля між берегами шайби і отвору. З'ясовано межі зміни відношення згинальних моментів на нескінченності, на основі яких можна виявити, де і за яких умов береги шайби і кругового отвору пластини відставатимуть.

Ключові слова: отвір, шайба, згин, кусково-однорідна ізотропна пластинка, комплексні потенціали, лінійчастий контакт.

This paper concerns with the problem of the bilateral bending of an isotropic plate with the bending moments distributed on infinity in presence of a circular hole in an elastically disk is inserted without a tension. Under the influence of external loading the edges of a disk and a hole come into a smooth contact along a circular curve on one of plate bases. The problem solution is presented in the form of superposition of two solutions: a plane problem of elasticity and a problem of bending of a plate with the use of a classical theory. Using the complex variable method and complex potentials the problem is reduced to a number of problems of linear conjugation based on which the explicit expressions for complex potentials and contact force between the disk and the hole edge are received. The limits of the bending moments ratio on infinity when there exists the problem solution in such formulation are determined. The graphic dependences for contact force between the edge of a circular hole and a disk are presented. Based on them it is possible to detect where and under what conditions the edge of a disk and circular hole in a plate will lag behind.

Key Words: Hole, Washer, Bending, Piecewise Homogeneous Isotropic Plate, Complex Potentials, Linear Contact.

1. Вступ

Згин ізотропної пластини з круговим отвором та пружною шайбою із того ж самого матеріалу, яка вставлена в отвір без натягу за дії згинальних моментів на нескінченності за повного лінійчастого гладкого контакту складових розглянуто в статті [1].

В даній роботі досліджена задача про двосторонній згин кусково-однорідної ізотропної пластини з коловою межею поділу матеріалів та за повного лінійчастого гладкого контакту їх

складових за дії розподіленого згинального навантаження на нескінченності.

2. Формулювання задачі

Розглянемо ізотропну пластину завтовшки $2h$, яка містить круговий отвір радіуса R , в який вставлена пружна шайба завтовшки $2h$ із іншого матеріалу того ж самого радіуса. Вважаємо, що під дією зовнішнього розподіленого згинального навантаження на нескінченності береги шайби і

отвору приходять у гладкий контакт по лінії, поблизу однієї з основ пластини, вздовж усього колового отвору. Так як шайба і отвір контактують, то розв'язування задачі подано у вигляді суперпозиції двох задач: плоскої задачі теорії пружності і задачі згину з використанням класичної теорії згину пластин. В серединній площині пластини виберемо декартову систему координат $Ox\bar{z}$ з початком координат у центрі отвору, направивши вісь $O\bar{z}$ перпендикулярно до неї, причому осі Ox і Oy паралельні до векторів розподілених моментів на нескінченності $M_x^\infty > 0$ і $M_y^\infty > 0$. Межу кругової області позначимо через L , середину кругового отвору – через $S^+(S_1)$, зовнішність – через $S^-(S_2)$. Пружні сталі пластини позначимо через E_2 , ν_2 (модуль Юнга, коефіцієнт Пуассона), шайби – через E_1 , ν_1 (див. рис. 1).

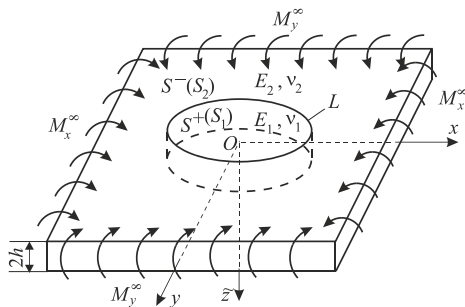


Рис. 1. Схема навантаження пластини з отвором і шайбою

Згідно формулювання задачі маємо такі крайові умови

$$\sigma_{rr}^\pm = -N_r / (2h), \quad \sigma_{r0}^\pm = 0, \quad \text{на } L, \quad (1)$$

$$M_r^\pm = N_r h, \quad P_r^\pm = 0, \quad \text{на } L, \quad (2)$$

$$v_r^+ - v_r^- + h \left((\partial w / \partial r)^+ - (\partial w / \partial r)^- \right) = 0, \quad \text{на } L, \quad (3)$$

де σ_{rr} і σ_{r0} , v_r і v_0 – компоненти тензора напружень та компоненти вектора переміщення в полярній системі координат у плоскій задачі; N_r – контактне зусилля між круговим отвором і шайбою, причому $N_r > 0$; M_r і P_r – згинальний момент та узагальнена в сенсі Кірхгофа перерізувальна сила; w – прогин пластини і шайби; значками «+» і «-» позначено граничне значення відповідної величини із області $S^+(S^-)$ відповідно.

3. Розв'язування задачі

Введемо в розгляд комплексні потенціали Колосова-Мусхелішвілі $\Phi_p^{(j)}(z)$ і $\Psi_p^{(j)}(z)$ [2] плоскої задачі в областях S_j ($j=1,2$) та скористаємося формулами [3]

$$\sigma_{rr} + \sigma_{00} = 4\text{Re}(\Phi_p^{(j)}(z)), \quad (4)$$

$$\sigma_{rr} + i\sigma_{r0} = \Phi_p^{(j)}(z) - R^2 \Phi_p^{(j)}(R^2/z)/r^2 + (1 - R^2/r^2) \left\{ \overline{\Phi_p^{(j)}(z)} - \overline{z \Phi_p^{(j)'}(z)} \right\}, \quad (5)$$

$$2\mu_j \{ v_r + iv_0 + (v_r + iv_0)''_{00} \} = r \left\{ \kappa_j \Phi_p^{(j)}(z) + \frac{R^2}{r^2} \cdot \Phi_p^{(j)}\left(\frac{R^2}{z}\right) + \left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right) \left(\overline{z^2 \Phi_p^{(j)''}(z)} - \Phi_p^{(j)}(z) + \overline{z \Phi_p^{(j)'}(z)} - z \left\{ \kappa_j \Phi_p^{(j)'}(z) + \frac{R^2}{r^2} \Phi_p^{(j)'}\left(\frac{R^2}{z}\right) \right\} \right) \right\}, \quad (6)$$

де μ_j – модуль зсуву, $\kappa_j = (3 - \nu_j)/(1 + \nu_j)$.

Для розв'язування задачі згину введемо комплексні потенціали $\tilde{\Phi}_3^{(j)}(z)$ і $\tilde{\Psi}_3^{(j)}(z)$ [4] для областей S_j ($j=1,2$), які подамо у вигляді

$$\tilde{\Phi}_3^{(j)}(z) = \tilde{\Gamma} + \Phi_3^{(j)}(z), \quad \tilde{\Psi}_3^{(j)}(z) = \tilde{\Gamma}' + \Psi_3^{(j)}(z), \quad (7)$$

де функції $\Phi_3^{(j)}(z)$ і $\Psi_3^{(j)}(z)$ зникають на нескінченності,

$$\tilde{\Gamma} = -3(1 - \nu_2)(1 + \rho)M_x^\infty / (8E_2h^3), \quad (8)$$

$$\tilde{\Gamma}' = 3(1 + \nu_2)(\rho - 1)M_x^\infty / (4E_2h^3), \quad \rho = M_y^\infty / M_x^\infty. \quad (9)$$

Для визначення відповідних величин класичної теорії згину пластин будемо мати залежності [4]

$$M_r + M_0 = -4D_j(1 + \nu_j)\text{Re}(\tilde{\Phi}_3^{(j)}(z)),$$

$$f = (\kappa_j - 1)\tilde{\Gamma} + \frac{\bar{z}}{z}\tilde{\Gamma}' + \bar{\kappa}_j \Phi_3^{(j)}(z) + \frac{R^2}{r^2} \Phi_3^{(j)}\left(\frac{R^2}{z}\right) - \left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right) \left\{ \overline{\Phi_3^{(j)}(z)} - \overline{z \Phi_3^{(j)'}(z)} \right\}, \quad (10)$$

$$\partial w / \partial r + i\partial w / \partial \theta + \partial^2 (\partial w / \partial r + iR^{-1}\partial w / \partial \theta) / \partial \theta^2 = r(2\tilde{\Gamma}' - 3\bar{z}\tilde{\Gamma}'/z) + r \left\{ \Phi_3^{(j)}(z) - R^2 \Phi_3^{(j)}(R^2/z)/r^2 + (1 - R^2/r^2) \left(\overline{\Phi_3^{(j)}(z)} - \overline{z \Phi_3^{(j)'}(z)} - \overline{z^2 \Phi_3^{(j)''}(z)} \right) \right\} -$$

$$-z\left(\Phi_3^{(j)'}(z)-R^4\Phi_3^{(j)'}(R^2/\bar{z})/r^4\right)\Bigg\}, \quad (11)$$

$$f=2\tilde{\mu}_j\left(-M_r+ic_j+\int_0^s P_r ds\right), \quad \tilde{\mu}_j=\left\{2D_j(1-\nu_j)\right\}^{-1},$$

$$\tilde{\kappa}_j=(3+\nu_j)/(1-\nu_j), \quad D_j=2E_j h^3/(3(1-\nu_j^2)),$$

c_j – невідома дійсна стала.

Для комплексних потенціалів $\Phi_p^{(l)}(z)$ і $\Phi_3^{(l)}(z)$ мають місце розвинення [3, 4]

$$\begin{aligned} &(\Phi_3^{(l)}(z), \Phi_p^{(l)}(z)) = \\ &= \begin{cases} (A'_0, A_0) + (A'_1, A_1)z + \dots, z \rightarrow 0, \\ -(\bar{A}'_0, \bar{A}_0) + (\bar{B}'_2, \bar{B}_2)z^{-2} + \dots, z \rightarrow \infty. \end{cases} \end{aligned} \quad (12)$$

Врахувавши (4), (5), (10), (11), на основі крайових умов (1)–(3) отримаємо

$$\begin{aligned} &(\Phi_p^{(l)}(t) - \Phi_p^{(2)}(t))^+ - (\Phi_p^{(l)}(t) - \Phi_p^{(2)}(t))^- = 0, \quad t \in L, \\ &\tilde{\mu}_1^{-1}(\tilde{\kappa}_1 \Phi_3^{(l)+}(t) + \Phi_3^{(l)-}(t)) - \tilde{\mu}_2^{-1}(\tilde{\kappa}_2 \Phi_3^{(2)-}(t) + \\ &+ \Phi_3^{(2)+}(t)) = \tilde{\Gamma} \{ -(\tilde{\kappa}_1 - 1)\tilde{\mu}_1^{-1} + (\tilde{\kappa}_2 - 1)\tilde{\mu}_2^{-1} \} + \\ &+ \tilde{\Gamma}(\tilde{\mu}_2^{-1} - \tilde{\mu}_1^{-1})R^2/t^2, \quad t \in L, \\ &\operatorname{Re}\{2h^2(\Phi_p^{(l)-}(t) - \Phi_p^{(l)+}(t)) - \\ &- \tilde{\mu}_1^{-1}(\tilde{\kappa}_1 \Phi_3^{(l)+}(t) + \Phi_3^{(l)-}(t))\} = \\ &= \tilde{\mu}_1^{-1}\{(\tilde{\kappa}_1 - 1)\tilde{\Gamma} + \tilde{\Gamma}' \operatorname{Re}(R^2/t^2)\}, \quad t \in L, \\ &\operatorname{Im}\{\tilde{\kappa}_1 \Phi_3^{(l)+}(t) + \Phi_3^{(l)-}(t)\} = 2\tilde{\mu}_1 c_1 - \\ &- \tilde{\Gamma}' \operatorname{Im}(R^2/t^2), \quad t \in L, \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} &h \operatorname{Re}\{(\Phi_3^{(l)}(t) + \Phi_3^{(2)}(t))^+ - (\Phi_3^{(l)}(t) + \Phi_3^{(2)}(t))^- - \\ &- t[(\Phi_3^{(l)'}(t) + \Phi_3^{(2)'}(t))^+ - (\Phi_3^{(l)'}(t) + \Phi_3^{(2)'}(t))^-]\} = \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{Re}\left\{\mu_1^{-1}\left[\kappa_1(\Phi_p^{(l)}(t) - t\Phi_p^{(l)'}(t))^+ - (\Phi_p^{(l)}(t) - \right. \right. \\ &\left. \left. - t\Phi_p^{(l)'}(t))\right] - \mu_2^{-1}\left[(\Phi_p^{(2)}(t) - t\Phi_p^{(2)'}(t))^+ + \right. \right. \\ &\left. \left. + \kappa_2(\Phi_p^{(l)}(t) - t\Phi_p^{(2)'}(t))\right]\right\}, \quad t \in L. \end{aligned}$$

З аналізу розв'язку задачі із статті [1] та крайових задач (13) випливає, що комплексні потенціали варто шукати у вигляді

$$\Phi_p^{(l)}(z) = q_1 + q_2 z^2, \quad \Phi_p^{(2)}(z) = q_5 + q_6 z^2,$$

$$\begin{aligned} \Phi_3^{(l)}(z) &= P_1 + P_2 z^2, \quad \Phi_3^{(2)}(z) = P_5 + P_6 z^2, \quad z \in S^+; \quad (14) \\ \Phi_p^{(l)}(z) &= q_3 + q_4 z^{-2}, \quad \Phi_p^{(2)}(z) = q_8 z^{-2}, \\ \Phi_3^{(l)}(z) &= P_3 + P_4 z^{-2}, \quad \Phi_3^{(2)}(z) = P_8 z^{-2}, \quad z \in S^-; \end{aligned}$$

де P_j і q_j ($j=\overline{1,8}$) – невідомі сталі.

Якщо прийняти до уваги (12) і (14), то отримаємо

$$P_3 = \bar{P}_1, \quad q_3 = -\bar{q}_1. \quad (15)$$

Беручи до уваги (14), з умови однозначності прогину при обході, матимемо

$$\operatorname{Im} P_5 = 0.$$

Врахувавши (14) та задовольнивши крайові умови (13), отримаємо

$$\begin{aligned} q_5 &= -2q_1, \quad q_6 = -q_2, \quad q_4 = -q_8, \quad q_8 = q_2 R^4, \\ c_1 &= c_2 = 0, \quad P_6 = \tilde{\mu}_2 \tilde{\kappa}_1 P_2 / \tilde{\mu}_1, \quad P_4 = \tilde{\kappa}_1 R^4 P_2 - R^2 \tilde{\Gamma}', \\ \operatorname{Im} P_1 &= 0, \quad P_1 = \tilde{a}_{10} q_1 - \tilde{\Gamma}, \quad (16) \\ P_8 &= -(\tilde{\mu}_1 - \tilde{\mu}_2) R^2 \tilde{\Gamma}' / (\tilde{\kappa}_2 \tilde{\mu}_1) + \tilde{\mu}_2 / (\tilde{\kappa}_2 \tilde{\mu}_1), \\ P_2 &= 4\tilde{\mu}_1 h^2 q_2 / \tilde{\kappa}_1, \quad q_1 = 4h(\tilde{\kappa}_2 + 1)\tilde{\Gamma} / (d_1 + 4h\tilde{a}_8 \tilde{a}_{10}), \\ q_2 &= -h\tilde{\kappa}_1 \tilde{a}_9 \tilde{\Gamma}' / (d_2 \tilde{\kappa}_1 + 8h^3 \tilde{\mu}_1 \tilde{a}_7), \\ \tilde{a}_7 &= \tilde{\kappa}_1 \tilde{\mu}_2 (3 + \tilde{\kappa}_2) / (\tilde{\mu}_1 \tilde{\kappa}_2) + 1 + 3\tilde{\kappa}_1, \\ \tilde{a}_9 &= -6(1 + \tilde{\kappa}_2) / (R^2 \tilde{\kappa}_2), \quad \tilde{a}_8 = 2 + (\tilde{\kappa}_1 - 1)\tilde{\mu}_2 / \tilde{\mu}_1, \\ \tilde{a}_{10} &= 8h^2 \tilde{\mu}_1 / (\tilde{\kappa}_1 - 1), \quad d_1 = 2((\kappa_1 - 1)/\mu_1 + 2/\mu_2), \\ d_2 &= (\kappa_1 + 3)/\mu_1 + (3\kappa_2 + 1)/\mu_2. \end{aligned}$$

Якщо пружні сталі матриці і шайби однакові, то матимемо результати статті [1], які отримані іншим шляхом.

4. Числовий аналіз та висновки

Якщо врахувати (16), (14), (5) і (1), то контактне зусилля між берегами шайби і отвору можна подати у вигляді

$$N_r^* = N_r h / M_x^\infty = a + b\rho, \quad (17)$$

де

$$\begin{aligned} a &= d_7 + d_5 \cos 2\theta, \quad b = d_7 - d_5 \cos 2\theta, \quad \beta = E_2 / E_1, \\ d_5 &= \frac{9(1 + \nu_2)}{(3 + \nu_1)(4 + \nu_2) + (12 + 9\nu_1 - \nu_1^2)\beta}, \\ d_7 &= \frac{3}{4((1 - \nu_1)\beta + 1 + \nu_2)}. \end{aligned} \quad (18)$$

Аналіз залежності (17) показав, що для всіх ρ із нерівності

$$\begin{aligned} \rho_* \leq \rho \leq \rho^*, \quad \rho^* > 0, \quad M_x^\infty > 0; \\ \rho \leq \rho^*, \quad \rho^* < 0, \quad M_x^\infty < 0, \\ \rho \geq \rho_*, \quad \rho < 0, \quad M_x^\infty > 0, \quad M_y^\infty < 0, \\ \rho \geq \rho_*, \quad \rho > 0, \quad M_x^\infty > 0, \quad M_y^\infty > 0, \end{aligned} \quad (19)$$

буде завжди проходити контакт берегів шайби і отвору, де $\rho^* = (d_5 + d_7) / (d_5 - d_7) = 1 / \rho_*$.

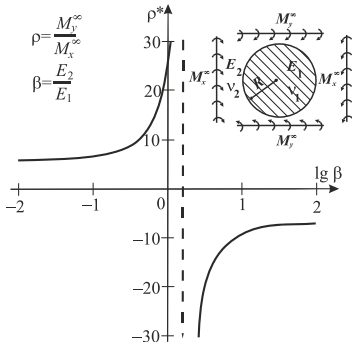


Рис. 2. Графічна залежність ρ^* від $\lg \beta$

Для $v_1 = v_2 = 0.3$ був проведений числовий аналіз, який подано на рис. 2 і 3. На рис. 2 дається графічна залежність ρ^* від $\lg \beta$. Як видно з цього рисунка при переході β через певне значення (в даному випадку 1.65) ρ^* міняє знак,

Список використаних джерел

1. Сулим Г. Двобічний згин пластини з круговим отвором і шайбою за повного гладкого лінійчастого контакту складових / Г. Сулим, В. Опанасович, П. Герасимчук // Вісник Тернопільського державного технічного університету. – 2008. – № 1. – С. 7–12.
2. Мухелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости / Н. И. Мухелишвили. – М.: Наука, 1966. – 708 с.
3. Прусов И. А. Некоторые задачи термоупругости / И. А. Прусов. – Минск: Издательство Белорусского университета, 1972. – 198 с.
4. Прусов И. А. Метод сопряжения в теории плит / И. А. Прусов. – Минск: Издательство Белорусского университета, 1975. – 256 с.

при цьому це значення визначається із рівняння $d_5 = d_7$. На рис. 3 показано розподіл контактної зусилля між матрицею і шайбою при різних ρ , причому крива 1 побудована при $\rho = 0$, крива 2 – при $\rho = \rho_* = 0.1545$, крива 3 – при $\rho = 3$, крива 4 – при $\rho = \rho^* = 6.4714$, крива 5 – при $\rho = 10$. Як видно з рис. 3 при $\rho > \rho^*$ береги шайби і отвору відстають у точках $\theta = 0$ і $\theta = \pi$, а при $\rho < \rho_*$ – у точках $\theta = \pi/2$ і $\theta = 3\pi/2$. Зазначимо, що для довільних v_1 і v_2 ці закономірності зберігаються, а нерівності (19) забезпечує герметичність конструкції, яка залежить як від зовнішнього навантаження, так і від пружних сталей складеної конструкції.

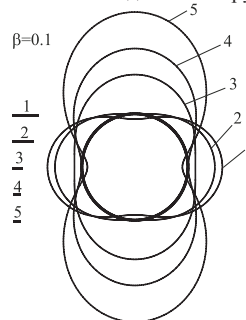


Рис. 3. Графічна залежність контактної зусилля між матрицею і шайбою при різних ρ

References

1. SULYM, H., OPANASOVYCH, V. & HERASYMCHUK, P. (2008) Bilateral bending of the plate with a circular hole and a disk in presence of a full smooth linear contact of components. *Visnyk Ternopil State Technical University*. (1). p. 7–12.
2. MUSHELISHVILI, N. I. (1966) *Nekotorye Osnovnye Zadachi Matematicheskoy Teorii Uprugosti*. Moscow: Nauka.
3. PRUSOV, I. A. (1972) *Nekotorye Zadachi Termouprugosti*. Minsk: Izdatelstvo Belorusskogo Universiteta.
4. PRUSOV, I. A. (1975) *Metod sopragenia v teorii плит*. Minsk: Izdatelstvo Belorusskogo Universiteta.

Надійшла до редколегії 22.09.15

УДК 539.3

Опанасович В. К., д. ф.-м. н., доц.,
Слободян М. С., к. ф.-м. н., доц.,
Звізло І. С., к. ф.-м. н.

**Двовісний згин пластини з круговим
отвором та двома співвісними
крайовими радіальними тріщинами,
береги яких контактують по області
сталого ширини**

Львівський національний університет імені
Івана Франка, 79000, м. Львів, вул.
Університетська, 1
e-mail: slob@yandex.ua

V. K. Opanasovich, Dr. Sci. (Phys.-Math.),
Assoc. Prof.,
M. S. Slobodyan, Ph. D. (Phys.-Math.), Assoc. Prof.,
I. S. Zvizlo, Ph. D. (Phys.-Math.)

**The biaxial bending of the plate with a
circular hole and two edge radial cracks with
the width of the contact area it's shores**

Ivan Franko National University of L'viv, 79000,
L'viv, Universytetska str., 1
e-mail: slob@yandex.ua

У роботі досліджено двовісний згин ізотропної пластини з круговим отвором і двома крайовими радіальними тріщинами з урахуванням гладкого контакту їх берегів по області сталого ширини. Із використанням теорії функцій комплексної змінної та комплексних потенціалів розв'язок задачі зведено до задач лінійного спряження, на основі яких отримано систему сингулярних інтегральних рівнянь, яка розв'язана числово за допомогою методу механічних квадратур. Проведено числовий аналіз контактної зусилля між берегами тріщин, коефіцієнтів інтенсивності зусиль і моментів та критичного навантаження, яке може бути прикладене до пластини.

Ключові слова: крайова тріщина, згин, ізотропна пластинка, комплексні потенціали, контакт берегів, контактне зусилля.

One of the main problems in assessing the strength of the structural element with crack is determining forces and moments intensity factors, which is characterized by stress-strain state in the vicinity of the crack tip. During operation, the following elements under actions bending stress crack interface will be contact. Therefore, it is important to know how this effect influences the mode of deformation of the plate. We investigate the biaxial bending infinite isotropic plate with a circular hole and two edge of the radial cracks. To solve the problem, it was thought that the crack edges come into smooth contact at the top plate based on the area of constant width along its entire length. Because the shores of crack in contact, the solution to the problem presented in the form of solutions of two problems: plane problem and bending problem of plate. Solution of the problem is constructed using the methods of the theory of functions of a complex variable and complex potentials and reduced to a system of singular integral equations in the jumping displacement in the plane problem and the angles of rotation in the bending problem on the crack, which is solved numerically using the method of mechanical quadratures. A numerical analysis of the problem, on which constructed a graph of the contact force, intensity factors moments and efforts.

Key Words: Edge Crack, Bending, Isotropic Plate, Complex Potentials, Contact Shores, Contact Force.

1. Вступ

Пластинчасті елементи констуркцій широко використовуються у авіаційній, машинобудівній, будівельній, суднобудівній та інших галузях техніки. З технічних міркувань ці елементи можуть містити отвори, біля яких під час експлуатації будуть утворюватися тріщино-подібні дефекти, що значно знижують діапазон допустимого навантаження, яке може витримати конструкція. Одним із основних завдань при

оцінці міцності конструкційного елементу з тріщинами є визначення коефіцієнтів інтенсивності зусиль і моментів, за допомогою яких характеризується напружено-деформований стан в околі вершин тріщин.

Під час експлуатації таких елементів за дії згинального навантаження береги тріщин будуть контактувати, а тому важливо знати як цей ефект впливає на напружено-деформований стан пластини. Розв'язок задачі про згин пластини з

однією тріщиною, береги якої гладко контактують по лінії по всій її довжині (лінійчастий контакт), наведено в працях Шацького І. П. [1] та Young M., Sun C. [2]. Напружено-деформований стан пластини з тріщиною, береги якої гладко контактують по області сталої ширини (смуговий контакт), за згину досліджували Slepuyan L. I., Dempsey J. P., Shekhtman I. I. [3] та Опанасович В. К. [4]. Вплив кругового отвору на напружено-деформований стан пластини з тріщинами з урахуванням контакту їх берегів вивчено в [5–7].

У даній роботі досліджується двосторонній згин ізотропної пластини з круговим отвором та двома рівними радіальними крайовими тріщинами з урахуванням ширини області контакту їх берегів. Із застосуванням методів теорії функцій комплексної змінної та комплексних потенціалів розв'язок задачі зведений до системи сингулярних інтегральних рівнянь, яка розв'язана чисельно за допомогою методу механічних квадратур. Проведено числовий аналіз задачі, на основі якого побудовані відповідні графічні залежності контактної зусилля, коефіцієнтів інтенсивності моментів та критичного навантаження.

2. Формулювання задачі

Нехай нескінченна ізотропна пластина завтовшки $2h$ містить круговий отвір радіуса R і дві крайові радіальні тріщини завдовжки $2l$, які вільні від зовнішнього навантаження і знаходяться на одній прямій, що проходить через центр кругового отвору. Виберемо декартову систему координат Ox_1y_1 так, щоб координатна площина Ox_1y_1 лежала в серединній площині пластини, а початок координат O співпадав з центром кругового отвору, причому вісь Ox_1 направлена вздовж тріщин. У площині Ox_1y_1 введемо полярну систему координат r, θ з полюсом у точці O і полярною віссю Ox_1 . Вважатимемо, що центри тріщин O_j знаходяться на відстані x_{0j} від точки O , причому $x_{0j} = R + l$, $j=1,2$. Пов'яжемо з тріщинами декартові системи координат $O_jx_jy_j$ (див. рис. 1). Позначимо область усередині кругового отвору через S^+ , ззовні – через S^- ; лінії, де розміщені тріщини, – через L_j , а межу кругового отвору – через L . Точки площини Ox_1y_1 , що співпадають з кінцями тріщин, позначимо через a_j і b_j , $j=1,2$.

Пластина на нескінченності згинається рівномірно розподіленими моментами M_x^∞ і M_y^∞ , під дією яких береги тріщини приходять у гладкий контакт по області сталої ширини h_1 біля верхньої основи пластини [4].

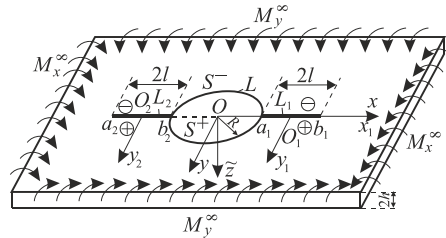


Рис. 1. Схема навантаження пластини та розміщення тріщин

Оскільки береги тріщини контактують, то розв'язок задачі подамо у вигляді розв'язків двох задач: плоскої задачі та задачі згину пластини (теорія Кірхгофа – Лява), при таких крайових умовах:

$$M_r = 0, \quad P_r = 0, \quad t \in L, \quad (1)$$

$$\sigma_r = 0, \quad \sigma_{r0} = 0, \quad t \in L, \quad (2)$$

$$P^\pm = 0, \quad M_{y_j}^\pm = h\beta N, \quad x_j \in L_j, \quad j=1,2, \quad (3)$$

$$\sigma_{x_jy_j}^\pm = 0, \quad \sigma_{y_jy_j}^\pm = -N_j/(2h), \quad x_j \in L_j, \quad j=1,2, \quad (4)$$

$$\partial_{x_j} [v_\Pi] + \alpha h [\partial_{x_jy_j}^2 w] = 0, \quad x_j \in L_j, \quad j=1,2, \quad (5)$$

де $\sigma_{x_jy_j}$, $\sigma_{y_jy_j}$, σ_r і σ_{r0} – компоненти тензора напружень відповідно в j -й декартовій і полярній системах координат; u_Π і v_Π – проекції вектора переміщення точки на вісь O_jx_j і O_jy_j у плоскій задачі відповідно, а w – прогин пластини у задачі згину; M_r і M_{y_j} – згинальні моменти та $P^\pm$ і P_r – узагальнені в сенсі Кірхгофа перерізувальні сили у декартовій і полярній системах координат; $[f] = f^+ - f^-$; індексами «+» і «-» позначено граничні значення функції при прямуванні точки площини до j -ї тріщини при $y_j \rightarrow \pm 0$; константи α і β мають вигляд [4]

$$\alpha = 0.5 \{1 + (1 - \gamma^2)\}, \quad \beta = 1 - \gamma/3, \quad \gamma = h_1/h. \quad (6)$$

3. Розв'язок задачі

З використанням комплексних потенціалів плоскої задачі [8] та задачі згину [9], аналогічно

як у [5], розв'язок задачі зведений до задачі лінійного спряження, на основі яких отримано систему сингулярних інтегральних рівнянь відносно невідомих функцій стрибків кутів повороту нормалі до серединної поверхні в задачі згину $Y_m(\eta)$ та стрибків переміщень на берегах тріщини в плоскій задачі $G_m(\eta)$

$$\begin{aligned} & \operatorname{Im} \left\{ \int_{-1}^1 \left\{ K_{mm}(\xi, \eta) Y_m(\eta) + L_{mm}(\xi, \eta) \overline{Y_m(\eta)} \right\} d\eta + \right. \\ & \left. + \int_{-1}^1 \left\{ K_{mj}(\xi, \eta) Y_j(\eta) + L_{mj}(\xi, \eta) \overline{Y_j(\eta)} \right\} d\eta \right\} = 0, \\ & \operatorname{Re} \left\{ \int_{-1}^1 \left\{ K_{mm}(\xi, \eta) Y_m(\eta) + L_{mm}(\xi, \eta) \overline{Y_m(\eta)} \right\} d\eta + \right. \\ & \left. + \int_{-1}^1 \left\{ K_{mj}(\xi, \eta) Y_j(\eta) + L_{mj}(\xi, \eta) \overline{Y_j(\eta)} \right\} d\eta \right\} + \\ & + 2\tilde{p} \operatorname{Re} \left\{ \int_{-1}^1 \left\{ R_{mm}(\xi, \eta) G_m(\eta) + S_{mm}(\xi, \eta) \overline{G_m(\eta)} \right\} d\eta + \right. \\ & \left. + \int_{-1}^1 \left\{ R_{mj}(\xi, \eta) G_j(\eta) + S_{mj}(\xi, \eta) \overline{G_j(\eta)} \right\} d\eta \right\} = P_m(\xi), \\ & \operatorname{Im} \left\{ \int_{-1}^1 \left\{ R_{mm}(\xi, \eta) G_m(\eta) + S_{mm}(\xi, \eta) \overline{G_m(\eta)} \right\} d\eta + \right. \\ & \left. + \int_{-1}^1 \left\{ R_{mj}(\xi, \eta) G_j(\eta) + S_{mj}(\xi, \eta) \overline{G_j(\eta)} \right\} d\eta \right\} = 0, \\ & \xi \in [-1, 1], \quad j = 3 - m, \quad m = 1, 2, \\ & G_{m1}(\eta) + \frac{(1 + \kappa)}{(1 + \kappa)(1 + \nu)} Y_{m2}(\eta) = 0, \quad \eta \in [-1, 1], \end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned} K_{mj}(\xi, \eta) &= K_{mj}^*(\xi, \eta) - K_{mj}^*(\xi, (-1)^m), \\ L_{mj}(\xi, \eta) &= L_{mj}^*(\xi, \eta) - L_{mj}^*(\xi, (-1)^m), \\ R_{mj}(\xi, \eta) &= R_{mj}^*(\xi, \eta) - R_{mj}^*(\xi, (-1)^m), \\ S_{mj}(\xi, \eta) &= S_{mj}^*(\xi, \eta) - S_{mj}^*(\xi, (-1)^m), \\ K_{mj}^* &= \begin{cases} \tilde{\kappa} / \{ \pi i \cdot (\eta - \xi) \} + \tilde{K}_{mj}, & m = j, \\ \tilde{K}_{mj} + K_{mj}^V, & m \neq j, \end{cases} \\ R_{mj}^* &= \begin{cases} 1 / \{ \pi (\eta - \xi) \} + \tilde{R}_{mj}, & m = j, \\ \tilde{R}_{mj} + R_{mj}^V, & m \neq j, \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_{mj}^* &= \begin{cases} \tilde{L}_{mj}, & m = j, \\ \tilde{L}_{mj} + L_{mj}^V, & m \neq j, \end{cases} \quad S_{mj}^* = \begin{cases} \tilde{S}_{mj}, & m = j, \\ \tilde{S}_{mj} + S_{mj}^V, & m \neq j, \end{cases} \\ \tilde{K}_{mj} &= \tilde{\kappa} K_{mj}^I - (1 + \varepsilon^2 / X_m^2) K_{mj}^{II} - \\ & - (X_m - \varepsilon^2 / X_m) K_{mj}^{III} - \varepsilon^2 K_{mj}^{IV} / X_m^2, \\ \tilde{L}_{mj} &= \tilde{\kappa} L_{mj}^I - (1 + \varepsilon^2 / X_m^2) L_{mj}^{II} - (X_m - \varepsilon^2 / X_m) L_{mj}^{III} - \\ & - \varepsilon^2 L_{mj}^{IV} / X_m^2, \quad \tilde{R}_{mj} = R_{mj}^I + (1 + \varepsilon^2 / X_m^2) \times \\ & \times R_{mj}^{II} + (X_m - \varepsilon^2 / X_m) R_{mj}^{III} + \varepsilon^2 R_{mj}^{IV} / X_m^2, \\ \tilde{S}_{mj} &= S_{mj}^I + (1 + \varepsilon^2 / X_m^2) S_{mj}^{II} + (X_m - \varepsilon^2 / X_m) S_{mj}^{III} + \\ & + \varepsilon^2 S_{mj}^{IV} / X_m^2, \quad K_{mj}^I = \frac{\varepsilon^2}{2\pi i X_m (T_j X_m - \varepsilon^2)}, \\ L_{mj}^I &= \frac{1}{2\pi i \tilde{\kappa}} \left(\frac{1}{T_j} - \frac{X_m^2 + \varepsilon^2}{X_m (T_j X_m - \varepsilon^2)} + \frac{\varepsilon^2 F_m}{(T_j X_m - \varepsilon^2)^2} \right), \\ K_{mj}^{II} &= -L_{mj}^I, \quad L_{mj}^{II} = -\frac{\varepsilon^2}{2\pi i X_m (T_j X_m - \varepsilon^2)}, \\ K_{mj}^{III} &= -\frac{\varepsilon^2}{\tilde{\kappa} \pi i (T_j X_m - \varepsilon^2)^2} \left(1 + \frac{\varepsilon^2}{X_m^2} + \right. \\ & \left. + \frac{T_j X_m - \varepsilon^2}{X_m^2} - \frac{F_m}{X_m} - \frac{\varepsilon^2 F_m}{X_m (T_j X_m - \varepsilon^2)} \right), \\ L_{mj}^{III} &= \frac{\varepsilon^2}{\pi i X_m^2 (T_j X_m - \varepsilon^2)} \left(1 + \frac{\varepsilon^2}{2(T_j X_m - \varepsilon^2)} \right), \\ K_{mj}^{IV} &= -\frac{\tilde{\kappa} X_m}{2\pi i (T_j X_m - \varepsilon^2)}, \quad L_{mj}^{IV} = -\frac{1}{2\pi i T_j}, \\ K_{mj}^V &= \frac{\tilde{\kappa}}{\pi i} \frac{1}{T_j - X_m}, \quad F_m = X_m - \varepsilon^2 / X_m, \\ R_{mj}^I &= i K_{mj}^I, \quad S_{mj}^I = i \tilde{\kappa} L_{mj}^I, \quad R_{mj}^{II} = -i \tilde{\kappa} K_{mj}^{II}, \quad S_{mj}^{II} = -i L_{mj}^{II}, \\ R_{mj}^{III} &= -i \tilde{\kappa} K_{mj}^{III}, \quad S_{mj}^{III} = -i L_{mj}^{III}, \quad R_{mj}^{IV} = -i K_{mj}^{IV} / \tilde{\kappa}, \\ S_{mj}^{IV} &= -i L_{mj}^{IV}, \quad R_{mj}^V = i K_{mj}^V / \tilde{\kappa}, \quad S_{mj}^V = -i L_{mj}^V, \\ L_{mj}^V &= \frac{C_m + A_{mj} - B_{mj}}{2\pi i (T_j - X_m)^2}, \quad A_{12} = 2 + 2\varepsilon, \quad A_{21} = -2 - 2\varepsilon, \\ P_m(\xi) &= \tilde{A} - \tilde{\kappa} \tilde{A} + \tilde{B} + \varepsilon^2 \tilde{A} (1 - \tilde{\kappa}) / X_m^2 - \\ & - \frac{\varepsilon^2 \tilde{B}}{\tilde{\kappa} X_m^2} \left(1 + \frac{\varepsilon^2}{X_m^2} - \frac{2(X_m^2 - \varepsilon^2)}{X_m^2} \right), \\ B_{12} &= 1 + \varepsilon + X_1, \quad B_{21} = -1 - \varepsilon + X_2, \\ C_1 &= X_1 - 1 - \varepsilon, \quad C_2 = X_2 + 1 + \varepsilon, \quad \varepsilon = R/l, \\ x_m &= l\xi, \quad t_m = l\eta, \quad \tilde{p} = -1.5(1 + \nu), \end{aligned}$$

$T_m = (-1)^{1+m} (1+\varepsilon) + \eta$, $y_m(t) = M_y^\infty Y_m(t) / (Eh^3)$,
 $Y_m(t) = Y_{m1}(t) + iY_{m2}(t)$, $\tilde{A} = -0.375(1+\rho)(1-\nu)$,
 $X_m = (-1)^{1+m} (1+\varepsilon) + \xi$, $\tilde{B} = 0.5\tilde{p}(1-\rho)$,
 $g'_m(t) = M_y^\infty G_m(t) / h^2$, $G_m(t) = G_{m1}(t) + iG_{m2}(t)$,
 $y_m(x_m) = (1+\tilde{\kappa})^{-1} \partial[\partial w / \partial x_m + i \partial w / \partial y_m] / \partial x_m$,
 $g'_m(x_m) = -2i\mu(1+\kappa)^{-1} \partial[u_{II} + iv_{II}] / \partial x_m$,
 $\rho = M_x^\infty / M_y^\infty$, $i^2 = -1$, $\mu = 0.5E / (1+\nu)$,
 $\tilde{\kappa} = (3+\nu)/(1-\nu)$, $\kappa = (3-\nu)/(1+\nu)$,
 $Y_{m1}(t)$, $Y_{m2}(t)$, $G_{m1}(t)$ і $G_{m2}(t)$ – дійсні функції;
 E – модуль Юнга; ν – коефіцієнт Пуассона.
 Коефіцієнти інтенсивності моментів
 $K_m = K_{1m} - iK_{2m}$ та зусиль (KІЗ) $k_m = k_{1m} - ik_{2m}$
 можна обчислити за формулами [10]

$$k_m^\pm = \mp h \lim_{x \rightarrow \pm l} (f(x) g'_m(x)), \quad f(x) = \sqrt{(l^2 - x^2)} / l,$$

$$K_m^\pm = \mp 4Eh^3 (3+\nu) \left(3(1-\nu^2) \right)^{-1} \lim_{x \rightarrow \pm l} (f(x) y_m(x)).$$

Оскільки для крайових тріщин КІМ та КІЗ у вершина a_1 і b_2 мають бути нульовими [10], то мають виконуватись умови

$$Y_1(-1) = 0, Y_2(1) = 0, G_1(-1) = 0, G_2(1) = 0. \quad (8)$$

Отже, для знаходження невідомих функцій $Y_m(\eta)$ і $G_m(\eta)$ отримано систему інтегральних рівнянь (7), (8).

4. Числовий аналіз та висновки

Отримана система сингулярних інтегральних рівнянь розв'язана числово за допомогою методу механічних квадратур [11, 12]. Числовий аналіз був проведений для пластинки з коефіцієнтом Пуассона $\nu = 0.3$. На рис. 2-5 суцільними лініями побудовані відповідні величини при $\gamma = 0.13$, штрих пунктирними – при $\gamma = 0$ (контакт по лінії), штриховими – без урахування контакту берегів тріщин.

На рис. 2 побудована графічна залежність зведеного контактного зусилля $N^* = hN / M_y^\infty$ від безрозмірної координати $\xi = x_1 / l$ при $\rho = M_x^\infty / M_y^\infty = 1$. Криві 1 побудовані при $\varepsilon = 0$, криві 2 – при $\varepsilon = 0.2$, криві 3 – при $\varepsilon = 1$, криві 4 – при $\varepsilon = 2$. При збільшенні відносного радіусу отвору ε контактне зусилля у дальніх вершинах тріщини по відношенню до отвору

збільшується, а при збільшенні області контакту берегів тріщини воно зменшується.

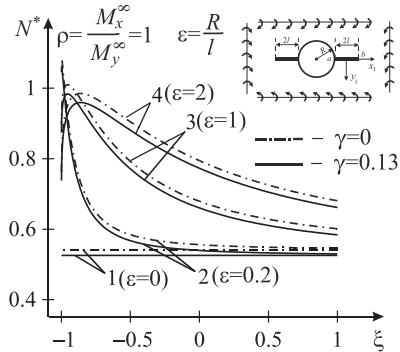


Рис. 2. Графічна залежність зведеного контактного зусилля N^* від безрозмірної координати ξ при різних значеннях ε

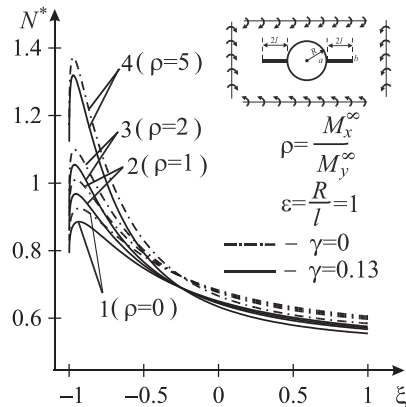


Рис. 3. Графічна залежність зведеного контактного зусилля N^* від безрозмірної координати ξ при різних значеннях ρ

На рис. 3 зображена графічна залежність зведеного контактного зусилля N^* від безрозмірної координати $\xi = x_1 / l$ при $\varepsilon = 1$. Криві 1 побудовані при $\rho = 0$, криві 2 – при $\rho = 1$, криві 3 – при $\rho = 2$, криві 4 – при $\rho = 5$. При збільшенні навантаження ρ контактне зусилля у ближніх вершинах тріщини по відношенню до отвору збільшується, а у дальніх – зменшується. З рис. 2 та рис. 3 бачимо, що при збільшенні області контакту берегів тріщини контактне зусилля зменшується.

На рис. 4 наведена графічна залежність зведеного КІМ $K_1^* = K_1 / (M_y^\infty \sqrt{l})$ від відносного радіуса отвору $\varepsilon = R/l$. Криві 1 побудовані при $\rho = M_x^\infty / M_y^\infty = 0$, криві 2 – при $\rho = 1$, криві 3 – при $\rho = 5$. При збільшенні відносного радіуса отвору ε КІМ K_1^* збільшується. КІМ K_1^* без урахування контакту берегів тріщин значно більший, за КІМ отриманий з урахуванням контакту берегів тріщин.

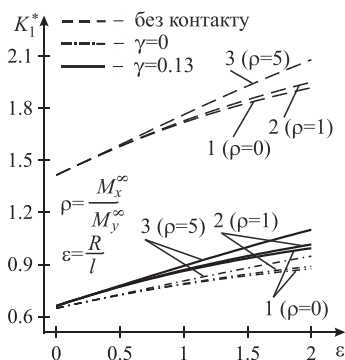


Рис. 4. Графічна залежність зведеного КІМ K_1^* від величини ε при різних значеннях ρ

Числовий аналіз показав, що коефіцієнти інтенсивності моментів та зусиль $K_2^* = K_2 / (M_y^\infty \sqrt{l})$ і $k_2^* = h k_2 / (M_y^\infty \sqrt{l})$ у вершинах a_2 і b_1 дорівнюють нулеві, а між КІМ та КІЗ K_1^* і $k_1^* = h k_1 / (M_y^\infty \sqrt{l})$ у цих вершинах виконується залежність $k_1^* / K_1^* = 3\alpha(1+\nu)/(3+\nu)$.

Для визначення критичного значення навантаження, коли пластина почне руйнуватися,

скористаємося енергетичним критерієм руйнування [13]

$$\tilde{M} = \frac{M_y^\infty}{2h^2} \sqrt{\frac{\pi l}{2\gamma_* E}} = \left(k_1^{*2} + \frac{3(1+\nu)}{3+\nu} K_1^{*2} \right)^{-1/2}, \quad (9)$$

де γ_* – густина ефективної поверхневої енергії матеріалу.

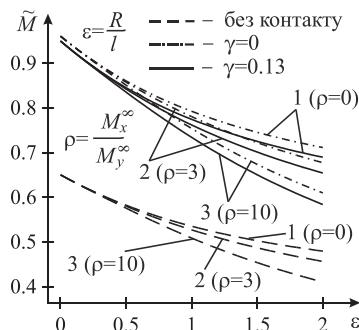


Рис. 5. Графічна залежність зведеного критичного моменту $\tilde{M}$ від величини ε при різних значеннях ρ

На рис. 5 побудовано графічну залежність зведеного критичного моменту $\tilde{M}$ (22) від відносного радіуса отвору $\varepsilon = R/l$. Крива 1 побудована при $\rho = M_x^\infty / M_y^\infty = 0$, крива 2 – при $\rho = 3$, крива 3 – при $\rho = 10$. Із збільшенням відносного радіуса отвору ε критичний момент зменшується $\tilde{M}$. Крім того, він збільшується з урахуванням контакту берегів тріщин, ніж коли вони не контактують.

Список використаних джерел

1. Шацький І. П. Згин пластини, ослабленої розрізом з контактуючими берегами / І. П. Шацький // Доп. АН УРСР. Сер. А. Фіз.-мат. та техн. науки. – 1988. – № 7. – С. 49–51.
2. Young M. Influence of crack closure on the stress intensity factor in bending plates / M. Young, C. Sun // International Journal of Fracture. – 1992. – Vol. 55. – P. 81–93.
3. Dempsey, J. P. Closure of a through crack in a plate under bending / J. P. Dempsey, I. I. Shekhtman, L. L. Slepian // International Journal or Solids and Structures. – 1998. – Vol. 35. –

References

1. SHATSKIY, I. P. (1988) Zgin plastini, oslablenoyi rozrizom z kontaktuyuchimi beregami. *Dopovidi AN URSSR. Ser. A. Fiziko-Matematichni ta Tehnichni Nauki*. (7). p. 49–51.
2. YOUNG, M. & SUN, C. (1992) Influence of crack closure on the stress intensity factor in bending plates. *International Journal of Fracture*. 55. p. 81–93.
3. DEMPSEY, J. P., SHEKTMAN, I. I. & SLEPYAN, L. L. (1998) Closure of a through crack in a plate under bending. *International Journal or Solids and Structures*. 35. p. 4077–

- P. 4077–4089.
4. Опанасович В. К. Згин пластини з наскрізною прямолінійною тріщиною з урахуванням ширини області контакту її поверхонь / В. К. Опанасович // Наукові нотатки Луцького технічного університету. – 2007. – Т. 20, № 2. – С. 123–127.
 5. Опанасович В. К. Двовісний згин пластини з круговим отвором і двома радіальними тріщинами, береги яких контактують / В. К. Опанасович, М. С. Слободян // Математичні методи та фізико-механічні поля. – 2006. – Т. 49, № 3. – С. 106–119.
 6. Опанасович В. Згин пластини з круговим отвором та радіальною тріщиною з урахуванням ширини області контакту її берегів / В. Опанасович, М. Слободян, В. Бедрій // Вісник Львівського університету. Серія мех.-мат. – 2012. – Т. 76. – С. 222–230.
 7. Опанасович В. К. Двовісний згин пластини з круговим отвором та крайовою радіальною тріщиною з урахуванням ширини області контакту її берегів / В. К. Опанасович, М. С. Слободян, І. С. Звізло // Вісник Запорізького національного університету. Фізико-математичні науки. – 2015. – № 1. – С. 127–135.
 8. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости / Н. И. Мусхелишвили. – М.: Наука, 1966. – 708 с.
 9. Прусов И. А. Метод сопряжения в теории плит / И. А. Прусов. – Минск: Изд-во Белорус. ун-та, 1975. – 256 с.
 10. Саврук М. П. Двумерные задачи упругости для тел с трещинами / М. П. Саврук. – К.: Наук. Думка. – 1981. – 324 с.
 11. Панасюк В. В. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках / В. В. Панасюк, М. П. Саврук, А. П. Дацышин. – К.: Наук. думка, 1976. – 444 с.
 12. Сулим Г. Т. Основи математичної теорії пружної рівноваги деформівних твердих тіл з тонкими включеннями / Г. Т. Сулим. – Львів: Дослідно-видавничий центр НТШ, 2007. – 716 с.
 13. Zehnder A. T. Fracture mechanics of thin plates and shells under combined membrane, bending, and twisting loads / A. T. Zehnder, M. J. Viz // Applied Mechanics Reviews. – 2005. – Vol. 58. – P. 37–48.
 4. OPANASOVYCH, V. K. (2007) Zgin plastini z naskriznoyu pramoliniynoyu trishchinoyu z urahuvanniam shirini oblasti kontaktu yiyei poverhon. *Naukovi Notatki Luts'kogo Tehnichnogo Universitetu*. 20 (2). p. 123–127.
 5. OPANASOVYCH, V. K. & SLOBODYAN, M. S. (2006) Dvovishiy zgin plastini z krugovim otvorom i dvoma radialnimi trishchinami, beregi yakih kontaktuyut. *Matematichni Metodi ta Fiziko-Mehanichni Polia*. 49 (3). p. 106–119.
 6. OPANASOVYCH, V., SLOBODYAN, M. & BEDRIY V. (2012) Zgin plastini z krugovim otvorom ta radialnoyu trishchinoyu z urahuvanniam shirini oblasti kontaktu yiyei beregiv. *Visnik Lvivskogo Universitetu. Seriya Mehaniko-Matematichna*. 76. p. 222–230.
 7. OPANASOVYCH, V. K., SLOBODYAN, M. S. & ZVIZLO, I. S. (2015) Dvovisniy zgin plastini z krugovim otvorom ta krayovoyu radialnoyu trishchinoyu z urahuvanniam shirini oblasti kontaktu yiyei beregiv. *Visnik Zaporizkogo Universitetu. Fiziko-Matematichni Nauki*. (1). p. 127–135.
 8. MUSHELISHVILI, N. I. (1966) *Nekotorie Osnovnie Zadachi Matematicheskoy Teorii Uprugosti*. Moscow: Nauka.
 9. PRUSOV, I. A. (1975) *Metod Sopragenia v Teorii Plit*. Minsk: Izdatelstvo Beloruskogo Universiteta.
 10. SAVRUK, M. P. (1981) *Dvumerniye zadachi uprugosti dlya tel s treshchinami*. Kyiv: Naukova Dumka.
 11. PANASUK, V. V., SAVRUK, M. P. & DATSISHIN, A. P. (1976) *Raspredeleniye Napragniy Okolo Treshchin v Plastinakh i Obolochkah*. Kyiv: Naukova Dumka.
 12. SULYM, G. T. (2007) *Osnovi Matematicheskoy Teoriyi Prugnoyi Rivnovagi Deformivnih Tverdiy Til z Tonkimi Vkluchennyami*. Lviv: Naukovo-Vidavnichiy Tsentr NTSh.
 13. ZEHNDER, A. T. & VIZ, M. J. (2005) Fracture mechanics of thin plates and shells under combined membrane, bending, and twisting loads. *Applied Mechanics Reviews*. 58. p. 37–48.

Надійшла до редколегії 25.09.15

УДК 534-213

Петрищев О. М., д. т. н., проф.,
Михеева А. М., аспірант

Розподіл енергії за типами хвиль у задачі збудження з поверхні пружного шару

Київський національний технічний університет
України «Київський політехнічний інститут»,
03056, м. Київ, проспект Перемоги, 37
e-mail: petrishchev@ukr.net,
anastacia.mikheeva@gmail.com

O. M. Petryshchev, Dr. Sci. (Tech.), Prof.,
A. N. Mykheeva, Postgraduate Student

An energy distribution by type of waves in the case of excitation from the surface of an elastic layer

National Technical University of Ukraine «Kyiv Polytechnic Institute», 03056, Kyiv, Peremohy av., 37
e-mail: petrishchev@ukr.net,
anastacia.mikheeva@gmail.com

На підставі отриманих раніше розрахункових співвідношень виконано модельне дослідження процесу збудження хвиль Лемба нормальними силами, які прикладаються в обмеженій області однієї поверхні пружного шару. Показано вплив розмірів площадки навантаження на ефективність збудження розповсюджуваних хвиль Лемба. Дано визначення хвильової характеристики електроакустичного перетворювача. Показано, що при невеликих щодо товщини листа діаметрах площадки докладання зовнішніх сил, енергія, що підводиться до пружного шару, практично повністю несеється поверхневою хвилею Релея, яка утворюється в результаті складання першої симетричної і першої антисиметричної хвиль Лемба.

Ключові слова: хвилі Лемба, радіальне розповсюдження, поверхневе навантаження.

On the basis of earlier received relations, it was done the model study of Lamb waves excitation by normal forces that are applied to a limited area of an elastic layer surface. It was shown the influence of the load platform size on efficiency of Lamb waves excitation. It was given definition of the electroacoustic transducer wave characteristics. In case of small leaf thickness relative to platform diameter of external forces application it was proved that supplied to elastic layer energy is almost completely carried away by the surface Rayleigh wave. This wave is formed by addition of the first symmetric and the first antisymmetric Lamb waves.

Received results can be used to obtain quantitative assessments for elastic waves excitation processes created by contact type transducer. Also received results are base for the creating of the theory of electroacoustic transducers, which are widely used in devices for ultrasonic nondestructive testing, as well as in devices of acoustoelectronics.

Key Words: Lamb Wave, Radial Distribution, Surface Load.

1. Вступ

В роботі [1] представлені результати розв'язання задачі про збудження хвиль Лемба, що поширюються в радіальних напрямках, системою осесиметричних об'ємних і поверхневих навантажень. У цій же роботі розглянута модельна задача про збудження симетричних хвиль Лемба пульсуючим ниткоподібним джерелом, довжина якого дорівнює товщині пластини. У широкому частотному діапазоні були розраховані потоки потужності, що несуться від ниткоподібного джерела в периферійній області пружного шару хвилями Лемба, які розповсюджуються осесиметрично. Було встановлено, що частотно залежна зміна енергоємності збуджуваних хвиль

визначається їх кінематичними характеристиками і повністю відповідає результатам, опублікованим у роботі [2]. У цій роботі П. Торвік розглядав задачу про збудження симетричних хвиль Лемба з торця нескінченної півсмуги. Зазначена відповідність свідчить про достовірність загальних розв'язків, що були опубліковані в роботі [1].

У цій статті, спираючись на отримані в роботі [1] розрахункові співвідношення, розглянуті деякі результати дослідження процесу збудження хвиль Лемба нормальними навантаженнями, прикладеними до однієї поверхні пружного шару. Ця задача є модельною для низки реальних ситуацій, які виникають в ультразвуковому неруйнівному контролі матеріалів і в акустoeлектроніці.

2. Моделі дослідження процесу збудження хвиль Лемба з поверхні пружного шару

Розглянемо ситуацію, коли на верхній поверхні пружного ізотропного листа товщиною $2h$ в колі діаметром $2R_0$ (рис. 1) діють нормальні сили з поверхневою щільністю $\sigma_{zz}^*(\rho, t) = \sigma_0^* e^{i\omega t}$. Таке задавання зовнішніх сил моделює процес збудження ультразвукових хвиль у пружному шарі п'єзокерамічним дисковим перетворювачем, перетворювачем емісійного типу і може бути використане для попередніх оцінок діапазону робочих частот перетворювачів електромагнітного типу.

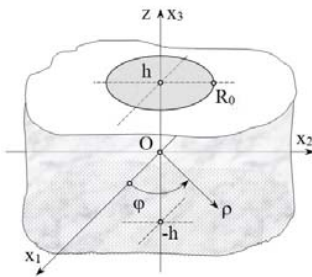


Рис. 1. Розташування площадки докладання нормальних навантажень при односторонньому доступі до металевго листа

У такому разі компоненти вектора зміщення матеріальних часток пружного шару в симетричних (верхній індекс S) і антисиметричних (верхній індекс A) хвилях Лемба, які розповсюджуються у цьому середовищі, записують таким чином:

$$\begin{aligned} u_{\rho}^S(\rho, z) &= \frac{\pi i A(\gamma_n)}{4G\Delta'_S(\chi_n)} u_{\rho}^{0S}(z) H_1^{(2)}(\gamma_n \rho), \\ u_z^S(\rho, z) &= \frac{\pi i A(\gamma_n)}{4G\Delta'_S(\chi_n)} u_z^{0S}(z) H_0^{(2)}(\gamma_n \rho), \end{aligned} \quad (1)$$

де $A(\gamma_n)$ – амплітудний множник n -ї симетричної хвилі Лемба; γ_n , α й β – хвильові числа, пов'язані між собою умовою існування n -ї симетричної хвилі Лемба;

$$\begin{aligned} \Delta_S &= (\gamma_n^2 - \beta^2)^2 \sin \beta h \cos \alpha h + \\ &+ 4\gamma_n^2 \alpha \beta \cos \beta h \sin \alpha h = 0; \end{aligned}$$

$\Delta'_S(\chi_n) = d\Delta_S/d\chi_n$; $\chi_n = \gamma_n^2$; $u_{\rho}^{0S}(z) (\beta = \rho, z)$ – власні функції однорідної граничної задачі, визначені такими розрахунковими формулами:

$$\begin{aligned} u_{\rho}^{0S}(z) &= -\gamma_n \left[\cos \alpha z + \frac{2\alpha \beta \sin \alpha h}{(\gamma_n^2 - \beta^2)} \cos \beta z \right], \\ u_z^{0S}(z) &= -\alpha \left[\sin \alpha z - \frac{2\gamma^2 \sin \alpha h}{(\gamma_n^2 - \beta^2)} \sin \beta z \right]; \end{aligned}$$

$H_v^{(2)}(\gamma_n \rho)$ ($v = 0; 1$) – функції Ганкеля другого роду;

$$\begin{aligned} u_{\rho}^A(\rho, z) &= \frac{\pi i B(\gamma_m)}{4G\Delta'_A(\chi_m)} u_{\rho}^{0A}(z) H_1^{(2)}(\gamma_m \rho), \\ u_z^A(\rho, z) &= \frac{\pi i B(\gamma_m)}{4G\Delta'_A(\chi_m)} u_z^{0A}(z) H_0^{(2)}(\gamma_m \rho), \end{aligned} \quad (2)$$

де $B(\gamma_m)$ – амплітудний множник m -ї антисиметричної хвилі Лемба; γ_m , α й β – хвильові числа, пов'язані між собою умовою існування m -ї антисиметричної хвилі Лемба;

$$\begin{aligned} \Delta_A &= 4\gamma_m^2 \alpha \beta \sin \beta h \cos \alpha h + \\ &+ (\gamma_m^2 - \beta^2)^2 \cos \beta h \sin \alpha h = 0; \end{aligned}$$

$\Delta'_A(\chi_m) = d\Delta_A/d\chi_m$; $\chi_m = \gamma_m^2$; $u_{\rho}^{0A}(z) (\beta = \rho, z)$ – власні функції однорідної граничної задачі, визначені такими розрахунковими формулами:

$$\begin{aligned} u_{\rho}^{0A}(z) &= -\gamma_m \left[\sin \alpha z + \frac{2\alpha \beta \cos \alpha h}{(\gamma_m^2 - \beta^2)} \sin \beta z \right], \\ u_z^{0A}(z) &= \alpha \left[\cos \alpha z - \frac{2\gamma^2 \cos \alpha h}{(\gamma_m^2 - \beta^2)} \cos \beta z \right]. \end{aligned}$$

Амплітудні множники симетричних і антисиметричних хвиль Лемба визначаються через амплітудне значення поверхневої щільності зовнішніх сил таким чином:

$$\begin{aligned} A(\gamma_n) &= [\gamma_n^2 - \beta^2] \sin \beta h \int_0^{R_0} \rho \sigma_{zz}^*(\rho, h) J_0(\gamma_n \rho) d\rho = \\ &= \sigma_0^* R_0^2 [\gamma_n^2 - \beta^2] \sin \beta h W(\gamma_n R_0), \end{aligned} \quad (3)$$

$$B(\gamma_m) = [\gamma_m^2 - \beta^2] \cos \beta h \int_0^{R_0} \rho \sigma_{zz}^*(\rho, h) J_0(\gamma_m \rho) d\rho = \\ = \sigma_0^* R_0^2 [\gamma_m^2 - \beta^2] \cos \beta h W(\gamma_m R_0),$$

де $W(\gamma_\beta R_0) = J_1(\gamma_\beta R_0) / \gamma_\beta R_0$, $(\beta = n, m)$ – залежна від хвильового числа (довжини хвилі) функція, яка визначає вплив розмірів області навантаження на ефективність збудження ультразвукових хвиль на заданій частоті. Оскільки в реальній ситуації джерелом сил поля на поверхні пружного шару є електроакустичний перетворювач, то саме з цієї причини будемо називати функцію $W(\gamma_\beta R_0)$ хвильовою характеристикою електроакустичного перетворювача у режимі збудження нормальних хвиль Лемба відповідного значенню індексу β типу.

Вочевидь, що значення функції $W(\gamma_\beta R_0)$ дуже швидко зменшуються зі зростанням хвильового числа, тобто зі зменшенням довжини хвилі, що збуджується в об'ємі пружного шару. Найсуттєвіша особливість – на деяких частотах, яким відповідають певні значення аргументу $\gamma_\beta R_0$, значення функції $W(\gamma_\beta R_0)$ взагалі обертаються в нуль. При цьому амплітудні множники нормальних хвиль Лемба також дорівнюють нулю і виникає досить неординарна ситуація – силовий вплив є, а пружні хвилі не збуджуються. Зазначені особливості частотної залежності зміни хвильової характеристики пояснюються інтерференцією хвильових полів, випромінюваних у пружне середовище різними ділянками деформованого твердого тіла, що знаходяться в області існування зовнішніх сил.

Для порівняльного аналізу енергоємності збуджуваних хвиль Лемба був виконаний розрахунок потоків потужності. Потоки потужності, які відносяться поширюваними хвилями Лемба в радіальних напрямках, розраховувалися за відомою [3] методикою, що надає таку розрахункову формулу:

$$P_\rho = -\frac{i\omega\pi\rho}{2} \int_{-h}^h [\sigma_{\rho\rho} u_\rho^* + \sigma_{\rho z} u_z^* - \\ \sigma_{\rho\rho}^* u_\rho - \sigma_{\rho z}^* u_z] dz, \quad (4)$$

де ρ – поточне значення радіальної координати; зірочка при символах напруг і зсувів означає комплексно спряжену величину.

Результати обчислень за формулою (4) для симетричних і антисиметричних хвиль Лемба показані в лівій півплощині рис. 2 і рис. 3 відповідно. Розрахунки виконані у припущенні, що радіус площадки навантаження $R_0 = 0,1h$, де h – півтовщина пластини. Коефіцієнт Пуассона матеріалу пластини $\nu = 0,3$. По осях ординат на рис. 2 і рис. 3 відраховується безрозмірна частота $\Omega = 2k_s h / \pi$. По осях абсцис у лівих півплощинах обох рисунків відраховується нормоване значення потоку потужності в радіальному напрямку $\bar{P}_\rho^\beta(\Omega) = P_\rho^\beta(\Omega) / P_0$ ($\beta = S, A$), де $P_0 = \nu_s F_0^2 / (8GR_0^2)$, $F_0 = \pi\sigma_0^* R_0^2$. У правих півплощинах рис. 2 і рис. 3 показані частотні спектри хвильових чисел поширюваних симетричних і антисиметричних хвиль Лемба, тобто величини $\zeta_\beta = 2\gamma_\beta h / \pi$ ($\beta = n, m$). Напівжирним шрифтом у полі лівої і правої півплощини рисунків вказані номери нормальних хвиль. У правих півплощинах рис. 2 і рис. 3 показані хвильові числа перших п'ятнадцяти симетричних і антисиметричних хвиль Лемба. Потоки потужності показані для перших семи (рис. 2) і восьми (рис. 3) поширюваних хвиль.

В області дуже низьких частот ($\Omega \leq 1$) серед хвиль, що розповсюджуються у пружному шарі, існують лише перша симетрична і перша антисиметрична хвилі Лемба. Природно, що тільки вони і переносять енергію від площадки докладання зовнішніх сил у периферійні області пружного шару. В області частот $\Omega \leq 1,5$ перша антисиметрична хвиля Лемба несе більшу частину енергії. Це пояснюється тим, що рух матеріальних частинок пружного шару в першій антисиметричній хвилі в області низьких частот орієнтований переважно уздовж осі Oz . При цьому виникають найбільш сприятливі умови для споживання енергії джерела пружних збурень. Зі зростанням частоти з'являються друга та наступні за номером хвилі, що розповсюджуються. Як впливає з показаних на рис. 2 і рис. 3 результатів, енергія, що переноситься і споживається цими хвилями, становить невелику частину енергії, яка переноситься першими нормальними хвилями Лемба. Порівняно низька енергоємність вищих нормальних хвиль пояснюється їх кінематичними характеристиками. Максимальні рівні зміщень матеріальних часток у другій та наступних за номером нормальних хвиль Лемба спостерігаються в околі серединної площини пружного шару. Малі рівні аксіальних зсувів на поверхні $z = h$ у вищих мо-

дах Лемба обумовлюють їх низьку енергоємність при збудженні пружних коливань з поверхні пластини.

Таким чином, при малих розмірах площадки навантаження з поверхні пластини ефективно збуджуються перші за номером нормальні хвилі Лемба, які в області високих частот мають практично однакові фазові та групові швидкості. Результатом складання цих мод є квазірелеєвська поверхнева хвиля. Вищі моди формують фоновий, шумоподібний сигнал.

3. Висновки

Виконано модельне дослідження процесу збудження хвиль Лемба поверхневими нормальними навантаженнями, які прикладаються до однієї сторони пружного шару. Дано визначення хвильової характеристики електроакустичного перетворювача.

Показано, що при невеликих щодо товщини листа діаметрах площадки докладання зовнішніх сил енергія, що підводиться до пружного шару, практично повністю переходить у поверхневу хвилю Релея, яка утворюється в результаті складання першої симетричної і першої антисиметричної хвиль Лемба.

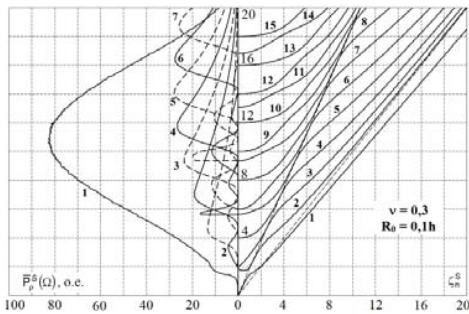


Рис. 2. Потoki потужності (ліва півплощина) і частотний спектр хвильових чисел (права півплощина) симетричних хвиль Лемба

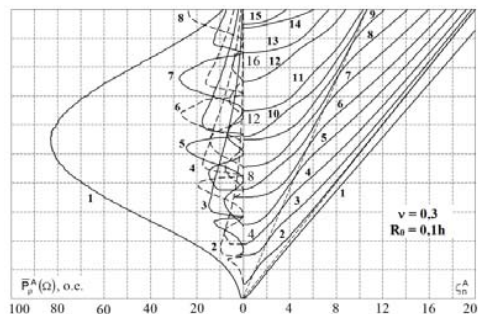


Рис. 3. Потoki потужності (ліва півплощина) і частотний спектр хвильових чисел (права півплощина) антисиметричних хвиль Лемба

Список використаних джерел

1. Petrishev O. N. Modeling the Radiation of Ultrasonic Waves by a Unit Source of Acoustic Emission Noise / O. N. Petrishev, N. S. Trushko // *Int. Appl. Mech.* – 2015. – Vol. 51, № 2. – P. 207 – 222.
2. Torvik P. J. Response of an elastic plate to a cyclic longitudinal force / P. J. Torvik, J. J. McClatchey // *J. Acoust. Soc. Am.* – 1968. – Vol. 44, № 1. – P. 59–64.
3. Гринченко В. Т. Гармонические колебания и волны в упругих телах / В. Т. Гринченко, В. В. Мелешко. – Киев: Наукова думка, 1981. – 283 с.

References

1. PETRISCHEV, O. N. & TRUSHKO, N. S. (2015) Modeling the radiation of ultrasonic waves by a unit source of acoustic emission noise. *Int. Appl. Mech.* 51 (2). p. 207–222.
2. TORVIK, P. J. & MCCLATCHEY, J. J. (1968) Response of an elastic plate to a cyclic longitudinal force. *J. Acoust. Soc. Amer.* 44 (1). p. 59–64.
3. GRINCHENKO, V. T. & MELESHKO, V. V. (1981) *Garmonicheskiye Kolebaniya i Volny v Uprugikh Telah*. Kiev: Naukova Dumka.

Надійшла до редколегії 23.09.15

УДК 539.3

Попов В. Г., д. ф.-м. н., проф.

**Крутильні коливання пружного
циліндра, зчепленого із пружним
півпростором**

Одеська національна морська академія, 65029,
м. Одеса, вул. Дідрихсона, 8
e-mail: dr.vg.popov@gmail.com

V. G. Popov, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof.

**A torsional oscillation of an elastic cylinder
coupled with an elastic half-space**

Odessa National Maritime Academy, Odessa, 65029,
Didrikhson str., 8
e-mail: dr.vg.popov@gmail.com

Розглядається пружний циліндр скінченної довжини, один торець якого зчеплений із пружним півпростором. З іншим торцем зв'язана тверда накладка такого ж радіуса, як і циліндр, що перебуває під дією гармонічно залежного від часу крутного моменту. Сформульована гранична задача зведена до інтегрального рівняння щодо функції, пов'язаної з напруженнями. Поверхня півпростору поза зоною контакту з циліндром і бічна поверхня циліндру вважаються ненавантаженими. Оскільки ядро інтегрального рівняння містить нерухливі особливості, то основним результатом є числовий метод його розв'язання. Цей метод враховує дійсну особливість невідомої функції, її заснований на спеціальних квадратурних формулах для сингулярних інтегралів, виведених у статті. Після розв'язання інтегрального рівняння досліджено особливості розподілу напружень у зоні контакту. Отримано наближені формули для розрахунку кута повороту накладки та напружень в зоні контакту і під накладкою.

Ключові слова: крутильні коливання, циліндр, сингулярне інтегральне рівняння, нерухома особливість.

An elastic cylinder of finite length, which has one end coupled with an elastic half-space, is considered. A rigid pad of the same radius as a cylinder length is connected with the other end. The rigid pad is under the influence of harmonic time-dependent torque. The surface of a half-space outside the contact with a cylinder and the lateral surface of a cylinder are considered to be free of stresses. The formulated boundary problem is reduced to the integral equation relative to the function associated with the stresses. Since the kernel of integral equation contains the fixed singularities, the main result is a numerical method for its solving. This method takes into account the actual singularity of the unknown function, and is based on the special quadrature formulas for singular integrals derived in the paper. After solving the integral equation, the characteristics of stress distribution in the contact area are investigated. The approximate formulas to calculation an angle of rotation of the pad, stresses in the contact zone and under the pad are obtained. The singularity contact stresses near the border of the contact area is defined and shows that the greatest singularity is to take place in the case of contact hard cylinder with elastic half-space.

Key Words: Torsion Oscillation, Cylinder, Singular Integral Equation, Fixed Singularities.

1. Вступ

Один з найбільш застосовуваних у цей час методів розв'язання змішаних задач механіки деформівного тіла є зведення їх до розв'язання інтегральних рівнянь, найчастіше сингулярних. Тому є актуальною проблема створення ефективних числових методів їх розв'язання. При відсутності інших сингулярностей крім ядра Коші є досить багато наближених методів розв'язку цих рівнянь (див., наприклад, [1–3]). Наявність у сингулярній частині ядер з нерухомими особливостями значно ускладнює розв'язання сингулярних інтегральних рівнянь.

Загальна теорія таких рівнянь викладена в [4]. В [4] і в [5–7], де вдалося побудувати точні розв'язки СІР (сингулярних інтегральних рівнянь), встановлено, що наявність у ядрі нерухомої особливості впливає на асимптотику розв'язку поблизу кінців відрізка інтегрування. Незважаючи на це, у більшості випадків числовий розв'язок СІР з нерухомими особливостями заснований на використанні колокаційних методів типу механічних квадратур. При цьому використовуються квадратурні формули інтегрування Гауса – Чебишова [8–10], що передбачають на кінцях відрізка кореневу особливість. Дійсна

особливість розв'язку або зовсім не враховувалася, або накладалася умова, що забезпечує особливість більш слабку, ніж коренева. Дійсна особливість розв'язку СІР враховується в роботах [11, 12], але при цьому для інтегралів з нерухомими особливостями формально використовуються квадратурні формули Гауса – Якобі.

У даній роботі розглянута контактна задача про крутильні коливання циліндра зчепленого із пружним півпростором. Ця задача зведена до СІР, ядро якого містить нерухому особливість на обох кінцях відрізка інтегрування. Запропоновано метод числового розв'язку, що враховує особливість невідомої функції, й заснований на застосуванні для сингулярних інтегралів спеціальних квадратурних формул.

2. Постановка задачі й зведення її до СІР

Нехай на пружному ізотропному півпросторі $0 \leq r < +\infty$, $-\infty < z \leq 0$, $0 \leq \varphi < 2\pi$ розташований зчеплений з ним пружний циліндр $0 \leq r < r_0$, $0 \leq z < a$, $0 \leq \varphi < 2\pi$ (рис. 1). З верхньою основою цього циліндра зчеплена тверда накладка того ж радіуса, що й циліндр, товщиною d . На накладку діє гармонічно залежний від часу крутий момент $Me^{-i\omega t}$ (далі множник $e^{-i\omega t}$, який визначає залежність від часу, опущений).

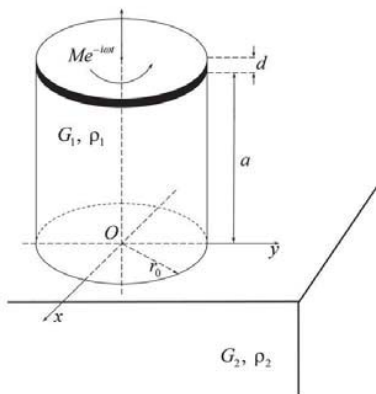


Рис. 1.

За даних умов у циліндрі й півпросторі реалізована осесиметрична деформація кручення, й відмінним від 0 є тільки кутове переміщення $w_j(r, z)$, $j=1, 2$. Воно знаходиться з рівняння

$$\frac{\partial^2 w_j}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w_j}{\partial r} - \frac{w_j}{r^2} + \frac{\partial^2 w_j}{\partial z^2} + \kappa_{2j}^2 w_j = 0; \quad (1)$$

$$\kappa_{2j}^2 = \frac{\rho_j \omega^2}{G_j}, \quad j=1, 2;$$

де $w_1(r, z)$ – переміщення у циліндрі, $w_2(r, z)$ – переміщення у півпросторі, ρ_1, G_1 – густина і модуль зсуву циліндра, ρ_2, G_2 – густина і модуль зсуву півпростору. В області контакту циліндра й півпростору виконуються рівності:

$$\tau_{\varphi z}^{(1)}(r, +0) = G_1 \frac{\partial w_1}{\partial z}(r, +0) = q(r), \quad 0 \leq r < r_0; \quad (2)$$

$$\tau_{\varphi z}^{(2)}(r, -0) = G_2 \frac{\partial w_2}{\partial z}(r, -0) = q(r), \quad 0 \leq r < r_0.$$

де $q(r)$ – невідомі дотичні напруження в області контакту. Також

$$w_1(r, +0) = w_2(r, -0), \quad 0 \leq r < r_0. \quad (3)$$

Поверхня півпростору поза зоною контакту вважається ненавантаженою

$$\tau_{z\varphi}^{(2)}(r, -0) = 0, \quad r > r_0. \quad (4)$$

На верхній основі циліндру з умов зчеплення з накладкою виконується рівність

$$w_1(r, a) = \theta_0 r, \quad 0 \leq r \leq r_0. \quad (5)$$

де θ_0 – невідомий кут повороту накладки. Він визначається з рівняння коливань накладки:

$$-\omega^2 j_0 \theta_0 = M - M_R. \quad (6)$$

де j_0 – момент інерції накладки щодо осі Oz , M_R – момент сил реакції, який діє на накладку. Зазначені моменти дорівнюють

$$j_0 = \frac{\pi}{2} r_0^4 d \rho_0, \quad M_R = 2\pi \int_0^{\eta} r^2 \tau_{\varphi z}^{(1)}(r, a) dr, \quad (7)$$

тут ρ_0 – густина накладки, $\tau_{\varphi z}^{(1)}(r, a)$ – дотичні напруження під накладкою. Бічна поверхня циліндра ненавантажена:

$$\tau_{r\varphi}^{(1)}(r_0, z) = G_1 r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{w_1}{r} \right) \Big|_{r=r_0} = 0, \quad 0 < z < a. \quad (8)$$

Розв'язок крайової задачі (1), (2), (5), (8) щодо кутового переміщення в циліндрі здійснюється методом інтегральних перетворень, так само як і в [13]. У результаті для нього отриманий наступний вираз:

$$u_1(r, z) = - \int_0^{\eta_0} \eta \frac{q(\eta)}{G_1} F_1(\eta, r, z) d\eta + \theta_0 r \frac{\cos \kappa_{21} z}{\cos \alpha \kappa_{21}}. \quad (9)$$

$$F_1(\eta, r, z) = \frac{2}{a} \sum_{k=1}^{\infty} \left[g_k^1(\eta, r) + \frac{K_2(q_{k1} r_0)}{I_2(q_{k1} r_0)} I_1(q_{k1} \eta) I_1(q_{k1} r) \right] \cdot \cos \lambda_k z,$$

$$g_k^1(\eta, r) = \int_0^{+\infty} \frac{\beta}{\beta^2 + q_{k1}^2} J_1(\beta r) J_1(\beta \eta) d\beta =$$

$$= \begin{cases} I_1(q_{k1} r) K_1(q_{k1} \eta), & r < \eta; \\ I_1(q_{k1} \eta) K_1(q_{k1} r), & r > \eta, \end{cases}$$

$$\lambda_k = \frac{\pi(2k-1)}{2a}; \quad q_{k1} = \sqrt{\lambda_k^2 - \kappa_{21}^2}.$$

Кутове переміщення в півпросторі є розв'язком граничної задачі (1)–(3), і дорівнює

$$w_2(\eta, r) = \int_0^{\eta_0} \eta \frac{q(\eta)}{G_2} \int_0^{+\infty} \frac{\beta e^{q_2(\beta)z}}{q_2(\beta)} J_1(\beta r) J_1(\beta \eta) d\beta d\eta,$$

$$q_2(\beta) = \sqrt{\beta^2 - \kappa_{22}^2}. \quad (10)$$

Тепер для остаточного визначення переміщення в циліндрі й півпросторі необхідно знайти невідомі контактні напруження $q(r)$. Для цього в результаті підстановки (9), (10) в (3) отримане інтегральне рівняння буде мати вигляд:

$$\int_0^{\eta_0} \eta \frac{q(\eta)}{G} [D_1(\eta, r) + D_2(\eta, r)] d\eta = \frac{\theta_0 r}{\cos \kappa_{21} a} \quad (11)$$

$$D_1(\eta, r) = F_1(\eta, r, 0);$$

$$D_2(\eta, r) = c \int_0^{+\infty} \frac{\beta}{q_2(\beta)} J_1(\beta r) J_1(\beta \eta) d\beta.$$

Інтегральне рівняння (11) може бути перетворене в інтегральне рівняння другого роду [13] відносно нової невідомої функції, пов'язаної з контактними напруженнями наступними формулами:

$$\varphi(x) = \int_x^{\eta_0} \eta \frac{q(\eta)}{\sqrt{\eta^2 - x^2}} d\eta, \quad q(\eta) = - \frac{2}{\pi} \frac{\partial}{\partial \eta} \int_{\eta}^{\eta_0} \frac{\varphi(x) dx}{\sqrt{x^2 - \eta^2}}. \quad (12)$$

В результаті перетворень, детально викладених у [13], і вилучення сингулярної складової, рівняння (11) приймає наступний вигляд:

$$(1+c)g(\zeta) + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 g(\tau) \left[\frac{1}{2-\tau-\zeta} + \frac{1}{2+\tau+\zeta} - \frac{15}{4} \ln(2+\tau+\zeta) - \frac{\pi}{4} \ln(2+\tau+\zeta) + R(\tau, \zeta) \right] d\tau = \frac{2\theta_0 \zeta}{\cos(\gamma \kappa_0)}, \quad -1 < \zeta < 1. \quad (13)$$

При виведенні рівняння (13) прийняті наступні позначення:

$$R(\tau, \zeta) = Q_1(\tau - \zeta) + cQ_2(\tau - \zeta) + Q_3(\tau, \zeta);$$

$$x = r_0 \tau, \quad y = r_0 \zeta, \quad \varphi(r_0 \tau) = r_0 G_1 g(\tau);$$

$$\gamma = \frac{a}{r_0}, \quad \kappa_0 = \kappa_{21} r_0, \quad \rho_{12} = \frac{\rho_2}{\rho_1}, \quad c = \frac{G_1}{G_2}, \quad \mu_0 = \frac{\kappa_{22}}{\kappa_{21}} = \sqrt{\frac{c}{\rho_{12}}}.$$

Можна бачити, що це рівняння має нерухливу особливість при $\tau = \zeta = 1$ й $\tau = \zeta = -1$.

3. Числове розв'язання інтегрального рівняння

Для побудови ефективного числового методу розв'язання рівняння (13) необхідно з'ясувати особливість невідомої функції при $\zeta \rightarrow \pm 1$. Будемо припускати степеневу особливість – таку, яка забезпечить інтегрованість контактних напружень $q(r)$. Це визначає наступний вид розв'язку:

$$g(\tau) = (1 - \tau^2)^{\sigma} \psi(\tau), \quad \sigma = \frac{1}{\pi} \arcsin \frac{1}{c+1}, \quad (14)$$

де $\psi(\tau)$ – функція, що задовольняє умовам Гельдера на $[-1, 1]$.

Квадратурні формули для сингулярних інтегралів ґрунтуються на наближенні функції $\psi(\tau)$ наступним інтерполяційним багаточленом:

$$\psi(\tau) \approx \Psi_n(\tau) = \sum_{m=1}^n \psi_m \frac{P_n^{\sigma, \sigma}(\tau)}{[P_n^{\sigma, \sigma}(\tau_m)]'(\tau - \tau_m)}, \quad (15)$$

де $\psi_m = \psi(\tau_m)$, $P_n^{\sigma, \sigma}(\tau)$ – многочлен Якобі, τ_m – корені цього многочлена.

Розглянемо інтеграл:

$$I_n^{\pm}(\zeta) = \int_{-1}^1 \frac{(1-\tau^2)^{\sigma}}{2 \pm \tau \pm \zeta} \Psi_n(\tau) d\tau = \\ = \sum_{m=1}^n \frac{\Psi_m}{[P_n^{\sigma\sigma}(\tau_m)]'} \cdot \int_{-1}^1 \frac{P_n^{\sigma\sigma}(\sigma)(1-\tau^2)^{\sigma}}{(\tau-\tau_m)(2 \pm \tau \pm \zeta)} d\tau. \quad (16)$$

Для їх обчислення застосовано метод викладений у [14]. Остаточно для (16) знаходимо:

$$I_n^{\pm}(\zeta) = \sum_{m=1}^n \Psi_m \frac{A_m^{\sigma\sigma} [P_n^{\sigma\sigma}(\tau_m)]' + (\mp 1)^{n+1} B_n \left(\frac{1 \pm \zeta}{2} \right)}{(P_n^{\sigma\sigma}(\tau_m))' (2 \pm \tau_m \pm \zeta)}. \quad (17)$$

$$B_n(Y) = \frac{\Gamma(1+\sigma+n)}{2^{-2\sigma} n!} \left[\sum_{j=0}^{+\infty} C_{nj} Y^{\sigma+j} + \sum_{j=0}^{+\infty} B_{nj} Y^j \right];$$

$$C_{nj} = \frac{(-1)^j \Gamma(-\sigma-n) \Gamma(1+\sigma+n+j)}{j! \Gamma(1+\sigma+n+j)},$$

$$B_{nj} = \frac{(-1)^j \Gamma(\sigma-j) \Gamma(1+n+j)}{j! \Gamma(1+2\sigma+n-j)}.$$

$A_m^{\sigma\sigma}$ – коефіцієнти квадратурної формули Гауса – Якобі [15].

Далі розглянемо інтеграли з логарифмічними особливостями:

$$I_n^{\pm}(\zeta) = \int_{-1}^1 (1-\tau^2)^{\sigma} \Psi_n(\tau) \ln(2 \pm \tau \pm \zeta) d\tau. \quad (18)$$

Для їхнього обчислення теж застосовано методику, докладно викладену у [14], де розглянуто аналогічні інтеграли. Остаточно маємо для інтегралів (18) формули:

$$I_n^{\pm}(\zeta) = \sum_{m=1}^n A_m^{\sigma\sigma} \Psi_m \sum_{j=0}^{n-1} (\mp 1)^j \frac{P_j^{\sigma\sigma}(\tau_m)}{\sigma_j^2} h_j \left(\frac{1 \pm \zeta}{2} \right). \quad (19) \quad \text{де}$$

$$h_j(Y) = \frac{\Gamma(1+\sigma+j)}{2^{-(1+2\sigma)} j!} \left[\sum_{p=0}^{+\infty} D_{jp} Y^{1+p+\sigma} + \sum_{p=0}^{+\infty} E_{jp} Y^p \right],$$

$$D_{jp} = \frac{\Gamma(1+\sigma+p+j) \Gamma(-\sigma-p-1)}{(-1)^p p! \Gamma(1+\sigma+j+p)},$$

$$E_{jp} = \frac{\Gamma(1+\sigma-p) \Gamma(j+p)}{(-1)^p p! \Gamma(2+\sigma+j-p)}.$$

Далі в рівнянні (13) до сингулярних інтегралів застосовуються квадратурні формули (18), (19), а до регулярних – квадратурні формули Гауса – Якобі [15], і в якості точок колокації беруться

$\zeta = \tau_k$, $k=1,2,\dots,n$. Результатом цих дій є система лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$(1+c)(1-\tau_k^2)^{\sigma} \Psi_k + \frac{1}{\pi} \sum_{m=1}^n \Psi_m (D_{km}^{+} + D_{km}^{-} - \\ - \frac{15}{4} b_{km}^{-} + A_m^{\sigma\sigma} R(\tau_m, \tau_k)) = \frac{2\theta_0 \tau_k}{\cos \gamma \kappa_0}, \quad k=1,2,\dots,n. \quad (20)$$

$$D_{km}^{\pm} = \begin{cases} \frac{A_m^{\sigma\sigma}}{2 \pm \tau_m \pm \tau_k}, & 1 \pm \tau_k > \delta > 0; \\ \frac{A_m^{\sigma\sigma} (P_n^{\sigma\sigma}(\tau_m))' + (\mp 1)^{n+1} B_n \left(\frac{1 \pm \zeta_k}{2} \right)}{(2 \pm \tau_m \pm \tau_k) (P_n^{\sigma\sigma}(\tau_m))'}, & 0 < 1 \pm \tau_k < \delta. \end{cases}$$

$$b_{km}^{\pm} = \begin{cases} A_m^{\sigma\sigma} \ln(2 \pm \tau_m \pm \tau_k), & 1 - \tau_k > \delta > 0; \\ A_m^{\sigma\sigma} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{P_j^{\sigma\sigma}(\tau_m)}{\sigma_j^2} (\mp 1)^j h_j \left(\frac{1 \pm \tau_k}{2} \right), & 0 < 1 \pm \tau_k < \delta. \end{cases}$$

4. Обчислення кута повороту накладки й контактних напружень

Безпосередній розв'язок системи (20) неможливий, якщо не буде визначений невідомий кут повороту накладки. Для цього необхідно скористатися рівнянням руху (6). Знайшовши напруження під накладкою з (9) для моменту сили реакції, одержуємо:

$$M_R = -2\pi r_0^3 G_1 \left[\int_{-1}^1 g(\tau) U_R(\tau) d\tau + \right. \\ \left. + \int_{-1}^1 \zeta s(\zeta) V_R(\zeta) d\zeta + \theta_0 \frac{\kappa_0}{4} \operatorname{tg}(\kappa_0 \gamma) \right], \quad (21)$$

$$s(\zeta) = \frac{q(r_0 \zeta)}{G_1},$$

$$U_R(\tau) = \frac{\kappa_0}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{J_2(\kappa_0 u)}{\operatorname{ch}(\gamma \kappa_0 q)} \sin(\kappa_0 u \tau) du,$$

$$V_R(\zeta) = \frac{1}{\gamma} \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \frac{u_k}{d_k} K_2 \left(\frac{\pi d_k}{2\gamma} \right) I_1 \left(\frac{\pi d_k}{2\gamma} \zeta \right).$$

Далі слід одержати вираз для контактних напружень $s(\zeta)$. Для цього з (12) знаходимо:

$$s(\zeta) = \frac{\kappa_0^2}{\pi} \int_0^{+\infty} u G(u) J_1(\kappa_0 u \zeta) du,$$

$$G(u) = \int_{-1}^1 g(\tau) \sin(\kappa_0 u \tau) d\tau. \quad (22)$$

$$G(u) = -\frac{2^{\frac{\sigma+1}{2}} \sqrt{\pi}}{\sigma + \frac{1}{2}} \sum_{m=0}^n \Psi_m A_m^{\sigma\sigma} \sum_{l=1}^{2l-1 \leq n} \frac{(-1)^l P_{2l-1}^{\sigma\sigma}(\tau_m)}{\sigma_{2l-1}^2} \times$$

$$(u \kappa_0) \times \frac{\Gamma(2l + \sigma + 1)}{(2l - 1)!} J_{2l + \sigma + \frac{1}{2}}(u \kappa_0).$$

В останньому інтегралі (22) здійснимо підстановки (14), (15) і скористаємося тотожністю Дарбу – Кристофеля [16]. В результаті отримаємо, після підстановки виразу для $G(u)$ в (22), обчислення інтегралів [17] і перетворення гіпергеометричних функцій для контактних напружень, наступні формули:

$$s(\zeta) = \zeta(1 - \zeta^2)^{\sigma - \frac{1}{2}} \sum_{m=1}^n \Psi_m A_m W_m(\zeta), \quad (23)$$

$$W_m(\zeta) = \sum_{l=1}^{2l-1 \leq n} (-1)^l \frac{P_{2l-1}^{\sigma\sigma}(\tau_m) \Gamma(2l + \sigma + 1) \Gamma\left(l + \frac{3}{2}\right)}{\sigma_{2l-1}^2 \Gamma(l + \sigma)} \times$$

$$\times \left[\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} - \sigma\right)}{\Gamma\left(l + \frac{3}{2}\right)} \cdot F\left(\frac{1}{2} - l, 1 + l + \sigma, \frac{1}{2} + \sigma, 1 - \zeta^2\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{\Gamma\left(-\frac{1}{2} + \sigma\right) (1 - \zeta^2)^{\frac{1}{2} - \sigma}}{\Gamma\left(\frac{1}{2} - l\right) \Gamma(1 + l + \sigma)} F\left(l + \frac{3}{2}, 1 - l - \sigma, 2, \zeta^2\right) \right].$$

Оскільки з (15) випливає, що $0 \leq \sigma \leq \frac{1}{2}$, то (23) показує, що контактні напруження необмежені при $\zeta \rightarrow \pm 1$, крім випадку $\sigma = \frac{1}{2}$, що відповідає пружному циліндру на твердій основі.

Формула (23) надає можливість в (21) наступний вираз для моменту сил реакції:

$$M_R = -2\pi r_0^3 G_1 \left(\sum_{m=1}^n A_m^{\sigma\sigma} \Psi_m Q_m + \frac{\theta_0 \kappa_0}{4} \operatorname{tg}(\kappa_0 \gamma) \right),$$

$$Q_m = U_R(\tau_m) + \sum_{j=1}^n B_j x_j W_m(x_j) V_R(x_j), B_j = A_m^{\sigma - \frac{1}{2}, \sigma - \frac{1}{2}},$$

$$x_j - \text{корені многочленів } P_n^{\sigma - \frac{1}{2}, \sigma - \frac{1}{2}}(x).$$

Тепер з (5) одержимо

$$\theta_0 = \frac{4}{\Delta(\kappa_0)} \left(m_0 - \sum_{m=1}^n A_m^{\sigma\sigma} \Psi_m Q_m \right), \quad (24)$$

де

$$\Delta \kappa_0 = \kappa_0 \operatorname{tg}(\kappa_0 \gamma) - d_0 \rho_{12}, \quad m_0 = \frac{M}{2\pi G_1 r_0^3}, \quad d_0 = \frac{d}{r_0}.$$

Рівність (24) слід додати до системи (20).

Список використаних джерел

1. Erdogan F. E. The numerical solution of singular integral equations / F. E. Erdogan, G. D. Gupta, T. S. Cook // *Mechanics of Fracture*. – Leyden: Noordhoff Intern. Publ., 1973. – P. 368–425.
2. Попов Г. Я. О методе ортогональных многочленов в контактных задачах теории упругости / Г. Я. Попов // *Прикл. мат. мех.* – 1969. – Т. 33, № 3. – С. 518–531.
3. Довгий С. А. Методы решения интегральных уравнений / С. А. Довгий, И. К. Лифанов. – Киев: Наукова думка, 2002. – 343 с.
4. Дудучава Р. В. Интегральные уравнения свёртки с разрывными продольными волнами, сингулярные интегральные уравнения с неподвижными особенностями и их приложения к задачам механики / Р. В. Дудучава // *Труды Тбилисского математического*

References

1. ERDOGAN, F. E., GUPTA, G. D. & COOK, T. S. (1973) The numerical solution of singular integral equations. *Mechanics of Fracture*. 1. Leyden: Noordhoff Intern. Publ.
2. POPOV, G. Ia. (1969) On the method of orthogonal polynomials in contact problems of the theory of elasticity. *J. Appl. Math. Mech.* 33 (3). p. 503–517.
3. DOVGII, S. A. & LIFANOV, I. K. (2002) *Metody Resheniya Integralnyh Uravnenii*. Kiev: Naukova dumka.
4. DUDACHEVA, R. V. (1979) Integralnye uravneniya svertki s razryvnymi prodolnymi volnami, singulyarnye integralnye uravneniya s nepodviynymi osobennostyami i ih prilozheniya k zadacham mehaniki. *Trudy Tbilisskogo matematicheskogo instituta AN SSSR*. 60. p. 3–135.

- института АН СССР. – 1979. – Т. 60 С. 3–135.
5. Stullybrass M. P. A crack perpendicular to an elastic half-plane / M. P. Stullybrass // *Int. J. Eng. Sci.* – 1970. – Vol. 8, № 5. – P. 351–362.
 6. Храпков А. А. Задачи об упругом равновесии бесконечного клина с несимметричным надрезом в вершине, разрешенные в замкнутой форме / А. А. Храпков // *Прикладная математика и механика*. – 1971. – Т. 36. № 6. – С. 1062–1069.
 7. Афан Б. А. Об интегральных уравнениях с неподвижными особенностями в теории ветвящихся трещин / Б. А. Афан // *Докл. АН Арм.ССР*. – 1984. – Т. 79, № 4. – С. 60–65.
 8. Gupta G. D. The problem of edge cracks in an infinity strip / G. D. Gupta, F. E. Erdogan // *Applied Mechanics*. – 1974. – Vol. 41, № 4. – P. 1001–1006.
 9. Панасюк В. В. О предельном равновесии полуплоскости с произвольно ориентированной трещиной, выходящей на её границу / В. В. Панасюк, А. П. Дацишин // *Физико-математическая механика материалов*. – 1971. – Т. 7, № 1. – С. 102–103.
 10. Саврук М. Р. Двумерные задачи упругости для тел с трещинами / М. Р. Саврук. – Киев: Наук. думка, 1981. – 323 с.
 11. Андреев А. В. Прямой численный метод решения сингулярных уравнений с обобщенными ядрами / А. В. Андреев // *МТТ*. – 2005. – № 1. – С. 128–146.
 12. Максименко В. Н. К контактной задаче для анизотропной пластины, подкреплённый ребром жесткости / В. Н. Максименко // *МТТ*. – 1981. – № 1. – С. 159–165.
 13. Попов В. Г. Напряжённое состояние конечного упругого цилиндра с краевой трещиной при крутильных колебаниях / В. Г. Попов // *Прикладная механика*. – 2012. – Т. 48, № 4. – С. 86–93.
 14. Попов В. Г. Динамическая контактная задача, приводящая к сингулярному интегральному уравнению с двумя неподвижными особенностями / В. Г. Попов // *Прикладная математика и механика*. – 2012. – Т. 76, № 3. – С. 484–496.
 15. Крылов В. И. Приближённое вычисление интегралов / В. И. Крылов. – М.: Наука, 1967. – 500 с.
 16. Сеге Г. Ортогональные многочлены / Г. Сеге. – М.: Физматгиз, 1962. – 500 с.
 17. Градштейн И. С. Таблицы интегралов, сумм рядов и произведений / И. С. Градштейн, И. М. Рыжик. – М.: Наука, 1971. – 1008 с.
 5. STULLYBRASS, M. P. (1970) A crack perpendicular to an elastic half-plane. *Int. J. Eng. Sci.* 8 (5). p. 351–362.
 6. HRAPKOV, A. A. (1971) Zadachi ob uprugom равновесии beskonechnogo klina s nesimmetrichnym nadrezom v vershine, razreshennye v zamknutoi forme. *Prikladnaya matematika i mehanika*. 36 (6). p. 1062–1069.
 7. AFYAN, B. A. (1984) Ob integralnyh uravneniyah s nepodvizhnymi osobennostyami v teorii vetvyaschihsya treschin. *Dokl. AN Arm.SSR*. 79 (4). p. 60–65.
 8. GUPTA, G. D. & ERDOGAN, F. E. (1974) The problem of edge cracks in an infinity strip. *Applied Mechanics*. 41 (4). p. 1001–1006.
 9. PANASYUK, V. V. & DACISHIN, A. P. (1971) O predel'nom равновесии poluploskosti s proizvol'no orientirovannoi treschينوi, vyhodyaschei na ee granicu. *Fiziko-matematicheskaya mehanika materialov*. 7 (1). p. 102–103.
 10. SAVRUK, M. R. (1981) *Dvumernye Zadachi Uprugosti Dlya Tel s Treschinami*. Kiev: Nauk. dumka
 11. ANDREEV, A. V. (2005) Pryamoi chislennyi metod resheniya singulyarnykh uravnenii s obobschennymi yadrami. *Mehanika Tverdogo Tela*. (1). p. 128–146.
 12. MAKSIMENKO, V. N. (1981) K kontaktnoi zadache dlya anizotropnoi plastyny, podkreplennyi rebrom zhestkosti. *Mehanika Tverdogo Tela*. (1). p. 159–165.
 13. POPOV, V. G. (2012) Napryajennoe sostoyanie konechnogo uprugogo cilindra s kraevoi treschينوi pri krutilynykh kolebaniyah. *Prikladnaya Mehanika*. 48 (4). p. 86–93.
 14. POPOV, V. G. (2012) Dinamicheskaya kontaktnaya zadacha, privodyaschaya k singulyarnomu integral'nomu uravneniyu s dvumya nepodvizhnymi osobennostyami. *Prikladnaya Matematika i Mekhanika*. 76 (3). p. 484–496.
 15. KRYLOV, V. I. (1967) *Priblizhennoe Vychislenie Integralov*. M.: Nauka
 16. SEGE, G. (1962) *Ortogonalnye Mnogochleny*. M.: Fizmatgiz.
 17. GRADSHTEIN, I. S. & RYJIK, I. M. (1971) *Tablicy Integralov, Summ, Ryadov i Proizvedenii*. M.: Nauka.

Надійшла до редколегії 05.10.15

УДК 539.3

Попович В. С., д. т. н., проф.,
Вовк О. М., к. ф.-м. н.

**Термопружний стан контактуючих
термочутливих півпросторів з
тепловиділеннями впродовж
певного часу на межі дотику**

Інститут прикладних проблем механіки і
математики ім. Я. С. Підстригала НАН
України, 79060, м. Львів, вул. Наукова, 3-б
e-mail: dept19@iapmm.lviv.ua

V. S. Popovych, Dr. Sci. (Tech.), Prof.,
O. M. Vovk, Ph. D. (Phys.-Math.)

**A thermoelastic state of contact thermo-
sensitive half-spaces with a heat release for
some time on the contact boundary**

Pidstryhach Institute for Applied Problems of Me-
chanics and Mathematics of NAS of Ukraine, 79060,
L'viv, Naukova 3-b
e-mail: dept19@iapmm.lviv.ua

Побудовано розв'язок квазістатичної задачі термопружності для двох термочутливих півпросторів з тепловиділеннями впродовж певного проміжку часу на межі контакту. Досліджено вплив термочутливості на їх тепловий та термопружний стан.

Ключові слова: нелінійна задача теплопровідності, термопружний стан, термочутливі півпростори, тепловиділення, метод лінеаризувальних параметрів, аналітично-числова методика, метод послідовних наближень.

Modern scientific-technological development imposes increased demands to determination the stress-strain state of structural elements, their mathematical models in order to represent more completely real physical processes. This, in turn, anticipates accounting such important factors as thermosensitivity of materials, complex heat exchange, presence of internal heat sources, power loads, contact interaction etc. When neglecting mechanical energy transformation into heat energy we arrive at solution a quasi-static uncoupled thermoelasticity problem, which is divided into separate problems: determination the temperature field of the body and determination of its thermoelastic state caused by this field and other possible power factors. Besides numerical methods, analytical-numerical approaches are widely used to solve such class of problems. They make it possible to verify the reliability of purely numerical solutions and to widen the possibilities of engineering practice as to choice of efficient and available means of solution actual problems.

One of such approach, based on utilization Kirchhoff and Laplace integral transformations, the linearizing parameters method, method of successive approximations, which were widely approved on non-stationary heat conduction problems for thermosensitive bodies of simple geometric shape under complex heat exchange with the surroundings, was introduced for solving the heat conduction problems for contacting thermosensitive bodies for heat sources acting on the contact boundary. The solution of quasi-static thermoelasticity problem for two contacting half-spaces with heat release for some time on the contact boundary was constructed. The influence of thermosensitivity on their heat and thermoelastic state was studied.

Key Words: Nonlinear Heat Conduction Problems, Thermoelastic State, Thermosensitive Half-Space, Linearizing Parameters Method, Analytic-Numerical Method, Method of Successive Approximations.

1. Вступ

Складність визначення термопружного стану контактуючих елементів конструкцій за значних перепадів температур на основі математичних моделей термочутливого тіла полягає у розв'язуванні нелінійних задач термопружності. Для цього, переважно, використовують числові або аналітично-числові підходи. Один з таких підходів, що базується на використанні інтегральних пере-

творень Кірхгофа та Лапласа та методу лінеаризувальних параметрів, був апробований нами щодо розв'язування нелінійних контактних задач термопружності на прикладі незв'язаної задачі термопружності для двох півпросторів з миттєвими та постійними тепловиділеннями на межі дотику за припущення, що матеріали, з яких вони виготовлені, володіють властивістю простої нелінійності [1]. Тут, використовуючи цю методику у поєднанні з методом послідовних набли-

жень, побудовано розв'язок аналогічної задачі з тепловідленнями впродовж певного часу без обмежень на залежності теплових характеристик від температури та досліджено вплив термо-чутливості матеріалів на розподіли температур та напружень у півпросторах.

2. Формулювання задачі теплопровідності

Визначимо температурні поля t_1 і t_2 ідеально контактуючих різнорідних півпросторів, що нагріваються рівномірно розподіленими у площині контакту джерелами тепла інтенсивності q_0 , які продукують тепло впродовж певного проміжку часу τ_k . Вважаємо, що спричинені джерелами тепла розподіли температур є таких рівнів, коли стає істотною залежність теплових та механічних характеристик матеріалів півпросторів від температури, а їх початкові температури однакові і дорівнюють t_p .

Задача для визначення нестационарних температурних полів півпросторів включає: рівняння теплопровідності

$$\begin{aligned} \partial(\lambda_t^{(1)}(t_1)\partial t_1/\partial z)/\partial z &= c_v^{(1)}(t_1)\partial t_1/\partial \tau, \quad z > 0; \\ \partial(\lambda_t^{(2)}(t_2)\partial t_2/\partial z)/\partial z &= c_v^{(2)}(t_2)\partial t_2/\partial \tau, \quad z < 0; \end{aligned} \quad (1)$$

початкові

$$t_1|_{\tau=0} = t_p, \quad (2)$$

крайові умови

$$\partial t_i/\partial z|_{|z|\rightarrow\infty} = 0, \quad t_i|_{|z|\rightarrow\infty} = t_p \quad (3)$$

та умови контакту

$$t_1|_{z=0} = t_2|_{z=0}, \quad \left[\lambda_t^{(2)}(t_2) \frac{\partial t_2}{\partial z} - \lambda_t^{(1)}(t_1) \frac{\partial t_1}{\partial z} \right]_{z=0} = q(\tau), \quad (4)$$

де $q(\tau) = q_0 S_+(\tau_k - \tau)$ - діюче впродовж часу τ_k

джерело тепла, $S_+(\tau) = \begin{cases} 1, \tau > 0, \\ 0, \tau \leq 0, \end{cases} \quad \lambda_t^{(i)}(t_i), \quad c_v^{(i)}(t_i)$

($i=1,2$) - залежні від шуканих температур коефіцієнти теплопровідності та об'ємні теплоємності матеріалів півпросторів відповідно.

3. Побудова розв'язку задачі теплопровідності (1)–(4)

Введемо безрозмірні температури $T_i = t_i/t_0$, координату $\bar{z} = z/l_0$, де t_0 - відлікова температу-

ра (деяке її значення), l_0 - характерний розмір (одиниця виміру довжини). Подамо характеристики матеріалів півпросторів у вигляді $\chi(t) = \chi_0 \chi^*(T)$, де величини з нуликом мають відповідні розмірності, а співмножники з зірочкою описують залежність відповідної характеристики від безрозмірної температури. В результаті задачу (1)–(4) запишемо у безрозмірному вигляді:

$$\begin{aligned} \partial(\lambda_t^{(1)*}(T_1)\partial T_1/\partial \bar{z})/\partial \bar{z} &= c_v^{(1)*}(T_1)\partial T_1/\partial Fo, \quad \bar{z} > 0; \\ \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(\lambda_t^{(2)*}(T_2) \frac{\partial T_2}{\partial \bar{z}} \right) &= c_v^{(2)*}(T_2) K_a \frac{\partial T_2}{\partial Fo}, \quad \bar{z} < 0; \end{aligned} \quad (5)$$

$$T_i|_{Fo=0} = T_p, \quad (6)$$

$$\partial T_i/\partial \bar{z}|_{|\bar{z}|\rightarrow\infty} = 0, \quad T_i|_{|\bar{z}|\rightarrow\infty} = T_p, \quad (7)$$

$$T_1|_{\bar{z}=0} = T_2|_{\bar{z}=0},$$

$$K_\lambda \lambda_t^{(2)*}(T_2) \frac{\partial T_2}{\partial \bar{z}} - \lambda_t^{(1)*}(T_1) \frac{\partial T_1}{\partial \bar{z}} = q(Fo), \quad (j=1,2) \quad (8)$$

де $q(Fo) = KiS(Fo - Fo)$, $Fo = a_0^{(1)}\tau/l_0^2$ - час Фур'є, $Ki = q_0 l_0 / (\lambda_{t_0}^{(1)} t_0)$ - опорний критерій Кірпічова, $Fo_k = a_0^{(1)}\tau_k/l_0^2$, $a_0^{(i)} = \lambda_{t_0}^{(i)} / c_{v_0}^{(i)}$, $K_a = a_0^{(1)} / a_0^{(2)}$, $K_\lambda = \lambda_{t_0}^{(2)} / \lambda_{t_0}^{(1)}$, $T_p = t_p/t_0$.

До задачі (5) – (8) застосуємо інтегральне перетворення Кірхгофа

$$\theta_i = \int_{T_p}^{T_i} \lambda_t^{(i)*}(T) dT. \quad (9)$$

У результаті отримаємо таку крайову задачу на змінні θ_i

$$\partial^2 \theta_1 / \partial \bar{z}^2 = a_1^*(T_1(\theta_1)) \partial \theta_1 / \partial Fo, \quad \bar{z} > 0;$$

$$\partial^2 \theta_2 / \partial \bar{z}^2 = a_2^*(T_2(\theta_2)) K_a \partial \theta_2 / \partial Fo, \quad \bar{z} < 0; \quad (10)$$

$$\theta_i|_{Fo=0} = 0, \quad (11)$$

$$\partial \theta_i / \partial \bar{z}|_{|\bar{z}|\rightarrow\infty} = 0, \quad \theta_i|_{|\bar{z}|\rightarrow\infty} = 0, \quad (12)$$

$$T_1(\theta_1)|_{\bar{z}=0} = T_2(\theta_2)|_{\bar{z}=0}, \quad (13)$$

$$K_\lambda \partial \theta_2 / \partial \bar{z} - \partial \theta_1 / \partial \bar{z} = q(Fo), \quad (14)$$

де $a_i^*(T_i(\theta_i)) = c_v^{(i)*}(T_i(\theta_i)) / \lambda_t^{(i)*}(T_i(\theta_i))$ - вирази, що описують залежність коефіцієнтів темпера-

туропровідності від температури, $T_i(\theta_i)$ – подання температур через змінні Кірхгофа.

В задачі спряження на змінні Кірхгофа θ_i ($i=1,2$) (10) – (14) нелінійними є диференціальні рівняння (10), а також умова (13), яку відповідно до методу лінеаризувальних параметрів [2], замінімо лінійною

$$\theta_i|_{\bar{z}=0} = (1+\kappa)\theta_{2,m}|_{\bar{z}=0}, \quad (15)$$

де κ – невідомий поки що лінеаризувальний параметр.

Для розв'язання задачі (10) – (12), (14), (15) застосуємо метод послідовних наближень [3]. За її m -те наближення візьмемо розв'язок наступної лінійної задачі спряження

$$\partial^2 \theta_{1,m} / \partial \bar{z}^2 = K_{m-1}^{(1)} \partial \theta_{1,m} / \partial Fo, \quad \bar{z} > 0;$$

$$\partial^2 \theta_{2,m} / \partial \bar{z}^2 = K_{m-1}^{(2)} \partial \theta_{2,m} / \partial Fo, \quad \bar{z} < 0; \quad (16)$$

$$\theta_{i,m}|_{Fo=0} = 0, \quad (17)$$

$$\partial \theta_{i,m} / \partial \bar{z}|_{|\bar{z}| \rightarrow \infty} = 0, \quad \theta_{i,m}|_{|\bar{z}| \rightarrow \infty} = 0, \quad (18)$$

$$\theta_{1,m}|_{\bar{z}=0} = (1+\kappa)\theta_{2,m}|_{\bar{z}=0},$$

$$K_\lambda \partial \theta_{2,m} / \partial \bar{z} - \partial \theta_{1,m} / \partial \bar{z} = q(Fo), \quad (19)$$

де $K_{m-1}^{(1)} = a_1^*(T_{1,m-1}(\theta_{1,m-1}))$, $K_{m-1}^{(2)} = K_a \times a_2^*(T_{2,m-1}(\theta_{2,m-1}))$, $m=2,3,\dots$. Зауважимо, що на кожному кроці ітераційного процесу змінні Кірхгофа визначаються в конкретні моменти часу та за певних значень координати.

За початкове наближення виберемо розв'язок задачі на змінну Кірхгофа, вважаючи, що коефіцієнти температуропровідності не залежать від температури, тобто $K_1^{(1)} = 1$, $K_1^{(2)} = K_a$.

Для розв'язання задачі (16) – (19) скористасмося перетворенням Лапласа за часом Fo . В результаті отримаємо задачу на трансформанти m -их наближень змінних Кірхгофа:

$$d^2 \tilde{\theta}_{1,m} / d\bar{z}^2 = K_{m-1}^{(1)} s \tilde{\theta}_{1,m}, \quad \bar{z} > 0$$

$$d^2 \tilde{\theta}_{2,m} / d\bar{z}^2 = K_{m-1}^{(2)} s \tilde{\theta}_{2,m}, \quad \bar{z} < 0, \quad (20)$$

$$d \tilde{\theta}_{i,m} / d\bar{z}|_{|\bar{z}| \rightarrow \infty} = 0, \quad \tilde{\theta}_{i,m}|_{|\bar{z}| \rightarrow \infty} = 0, \quad (21)$$

$$\tilde{\theta}_{1,m}|_{\bar{z}=0} = (1+\kappa) \tilde{\theta}_{2,m}|_{\bar{z}=0},$$

$$K_\lambda d \tilde{\theta}_{2,m} / d\bar{z}|_{\bar{z}=0} - d \tilde{\theta}_{1,m} / d\bar{z}|_{\bar{z}=0} = \tilde{q}, \quad (22)$$

де $\tilde{\theta}_{i,m} = \int_0^\infty \theta_{i,m} e^{-sFo} dFo$, s – параметр перетворення Лапласа, $\tilde{q} = Ki(1 - e^{-sFo_k})/s$.

Розв'язки рівнянь (20), які задовольняють умови (21), мають вигляд

$$\tilde{\theta}_{1,m} = C_1 e^{-\sqrt{s K_{m-1}^{(1)}} \bar{z}}, \quad \bar{z} > 0, \quad \tilde{\theta}_{2,m} = C_2 e^{-|\bar{z}| \sqrt{s K_{m-1}^{(2)}}}, \quad \bar{z} < 0.$$

Визначивши сталі інтегрування з умов (22), отримаємо трансформанти змінних Кірхгофа для $\bar{z} > 0$ та $\bar{z} < 0$ відповідно

$$\tilde{\theta}_{1,m} = \frac{(1+\kappa)\tilde{q}}{\sqrt{s}(K_\lambda \sqrt{K_{m-1}^{(2)}} + \sqrt{K_{m-1}^{(1)}}(1+\kappa))} e^{-\sqrt{s K_{m-1}^{(1)}} \bar{z}}, \quad (23)$$

$$\tilde{\theta}_{2,m} = \frac{\tilde{q}}{\sqrt{s}(K_\lambda \sqrt{K_{m-1}^{(2)}} + \sqrt{K_{m-1}^{(1)}}(1+\kappa))} e^{-|\bar{z}| \sqrt{s K_{m-1}^{(2)}}}, \quad (24)$$

Здійснивши в (23), (24) обернене перетворення Лапласа [4], знаходимо m -і наближення оригіналів змінних Кірхгофа, які за дії джерела тепла впродовж часу Fo_k є згортками функції $S_-(Fo_k - Fo)$ зі змінними Кірхгофа для миттєвого джерела тепла

$$\theta_{1,m}(Fo, \bar{z}, \kappa) = (1+\kappa)Ki / K_\lambda \sqrt{K_m^{(2)}} + \sqrt{K_m^{(1)}}(1+\kappa) \times$$

$$\times \begin{cases} \int_0^{Fo} f_1(\bar{z}, Fo - \xi) d\xi, & Fo < Fo_k \\ \int_0^{Fo_k} f_1(\bar{z}, Fo - \xi) d\xi, & Fo \geq Fo_k \end{cases}, \quad \bar{z} > 0, \quad (25)$$

$$\theta_{2,m}(Fo, \bar{z}, \kappa) = Ki / K_\lambda \sqrt{K_m^{(2)}} + \sqrt{K_m^{(1)}}(1+\kappa) \times$$

$$\times \begin{cases} \int_0^{Fo} f_2(\bar{z}, Fo - \xi) d\xi, & Fo < Fo_k \\ \int_0^{Fo_k} f_2(\bar{z}, Fo - \xi) d\xi, & Fo \geq Fo_k \end{cases}, \quad \bar{z} < 0. \quad (26)$$

$$\text{де } f_1(\bar{z}, \xi) = \frac{1}{\sqrt{\pi \xi}} e^{-\frac{K_m^{(1)} \bar{z}^2}{4\xi}}, \quad f_2(\bar{z}, \xi) = \frac{1}{\sqrt{\pi \xi}} e^{-\frac{K_m^{(2)} \bar{z}^2}{4\xi}}.$$

Температури за відомими змінними Кірхгофа обчислюємо для конкретних залежностей коефіцієнтів теплопровідності від температури з рівнянь (9). За лінійних залежностей коефіцієнтів

теплопровідності від температури
($\lambda_i^{(i)*}(T_i) = 1 + k_i(T_i - T_p)$), формули для обчислення просторово-часових розподілів температур півпросторів мають вигляд

$$T_{im}(Fo, \bar{z}, \kappa) = k_i^{-1} \left(\sqrt{1 + 2k_i \theta_{im}(Fo, \bar{z}, \kappa)} - 1 \right) + T_p, \text{ де } k_i = \text{const}.$$

Невідомий лінеаризувальний параметр κ визначасмо з нелінійної умови рівності температур на межі контакту (13), яка після нескладних перетворень набуває вигляду

$$(k_2(1 + \kappa) - k_1)^2 \theta_{2m}(Fo, 0, \kappa) = 2(k_1 - k_2)\kappa.$$

4. Визначення термпружного стану

У випадку вільного від зовнішнього навантаження кусково-однорідного термочутливого простору термпружний стан описується виразами

$$\sigma_{xx}^{(i)} = \sigma_{yy}^{(i)} = \sigma_i(z, Fo) = E_i(t_i)/(1 - \nu_i(t_i)) \times \\ \times [C_1(Fo) + C_2(Fo)z - \hat{O}_i(t_i)],$$

$$\sigma_{zz}^{(i)} = \sigma_{xz}^{(i)} = \sigma_{yz}^{(i)} = \sigma_{xy}^{(i)} = 0, \quad (27)$$

де $C_1(Fo), C_2(Fo)$ – невідомі функції,
 $\hat{O}_i(t_i) = \int_{t_p}^{t_i} \alpha_{ii}(t_i) dt_i$ – суто теплові деформації,
 $E_i(t_i), \nu_i(t_i), \alpha_{ii}(t_i)$ – залежні від температури модулі Юнга, коефіцієнти Пуассона і температурні коефіцієнти лінійного розширення матеріалів півпросторів.

З умови обмеженості напружень на безмежності отримуємо, що $C_2(Fo) = 0$. Врахувавши, що при $z \rightarrow \infty$ $t_i \rightarrow t_p$, напруження σ при $z \rightarrow \infty$ будуть прямувати до нуля. Ці вимоги будуть забезпечені за $C_1(Fo) = 0$.

Таким чином,

$$\sigma_i(z, Fo) = -E_i(t_i) \hat{O}_i(t_i)/(1 - \nu_i(t_i)). \quad (28)$$

Якщо механічні характеристики аналогічно тепловим подати у вигляді $\chi_i(t_i) = \chi_0^{(i)} \chi_i^*(T_i)$, де $\chi_0^{(i)}$ – розмірні величини, які дорівнюють значенням відповідних характеристик при температурі t_p ($T_i = T_p$), а величини з зірочкою безрозмірні, причому $\chi_i^*(T_p) = 1$, то після введення безрозмірних напружень $\bar{\sigma}_i = \sigma_i/(E_0^{(o)} \alpha_{i0}^{(o)} t_0)$ формули

(28) набувають вигляду

$$\bar{\sigma}_i(z, Fo) = -K_\sigma^{(i)} E_i^*(t_i) \bar{O}_i(t_i)/(1 - \nu_i(t_i)), \quad (29)$$

де $K_\sigma^{(i)} = E_0^{(i)} \alpha_{i0}^{(i)} / (E_0^{(o)} \alpha_{i0}^{(o)})$, $t_0, E_0^{(o)}, \alpha_{i0}^{(o)}$ – вибрані нами відлікові значення температури, модуля Юнга і ТКЛР, $\bar{O}_i(t_i) = \int_{T_p}^{T_i} \alpha_{ii}^*(\xi) d\xi$.

5. Числові дослідження

Проведено числові дослідження температурного поля і зумовленого ним напруженого стану півпросторів, виготовлених з окису цирконію ($\bar{z} > 0$) та титанового сплаву ($\bar{z} < 0$) з фізико-механічними характеристиками, температурні залежності яких змінюються за відповідними законами у діапазоні температур 300÷1100 K [5] за діючого впродовж певного проміжку часу джерела тепла сталої потужності. Подання фізико-механічних характеристик у вигляді добутку розмірної величини на безрозмірну функцію наведено в роботі [1].

За відлікову t_0 брали максимальну температуру з проміжку зміни характеристик 1100 K, а початкову t_p вважали рівною 300 K. Усі обчислення виконано для безрозмірних величин. Проведено порівняння розподілів температури та напружень у випадках нетермочутливих матеріалів півпросторів (взяті сталі значення відповідних залежних від температури теплових характеристик при $T = T_p$), термочутливих з простою нелінійністю (припускалося, що коефіцієнти теплопровідності та об'ємні теплосмності залежать від температури, а їх відношення залежать від температури незначно, тобто $\lambda_i^{(i)}(t_i)/c_v^{(i)}(t_i) = a_{i0} \approx \text{const}$) та без обмеження характеру зміни залежностей від температури теплових характеристик матеріалів за дії джерела тепла різної тривалості та потужності. Результати досліджень представлені на рис. 1 – 3, де криві 1 відповідають результатам, отриманим за припущення простої нелінійності матеріалів, криві 2 – для нетермочутливих матеріалів, криві 3 – для реальних залежностей теплових характеристик від температури.

Зазначимо, що напруження на межі контакту півпросторів мають стрибок, тому графіки розподілів напружень за часом при $z = 0$ (рис. 3) зображено суцільними лініями, коли вони обчислені за формулою (24) для півпростору, виготовленого з окису цирконію, а штриховими,

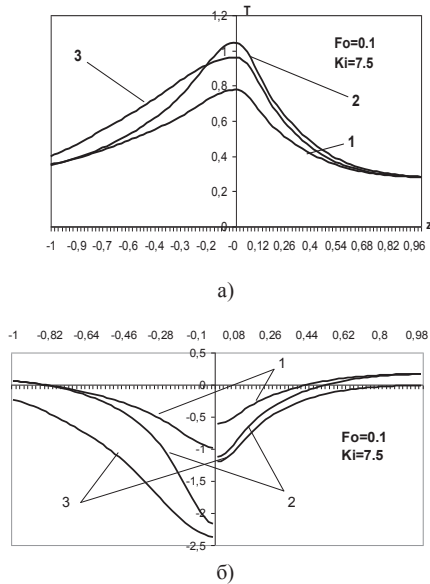


Рис. 1. Розподіли температури (а) та напружень (б) в залежності від координати за дії джерела тепла потужності $Ki = 7.5$ тривалістю $Fo_k = 2$, в момент часу $Fo = 0.1$

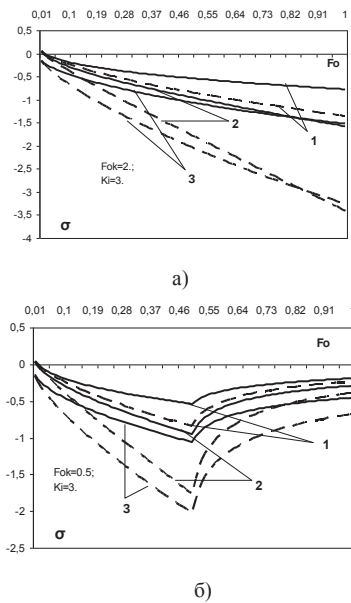


Рис. 3. Зміна напружень з часом за різної тривалості дії джерела тепла потужності $Ki = 3$ (а) – $Fo_k = 2$ та (б) – $Fo_k = 0.5$.

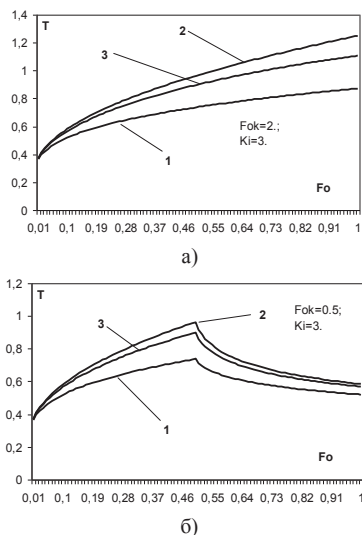


Рис. 2. Зміна температури з часом за різної тривалості дії джерела тепла потужності $Ki = 3$ (а) – $Fo_k = 2$ та (б) – $Fo_k = 0.5$

– коли з титанового сплаву. За дії джерела тепла впродовж певного проміжку часу спостерігається зростання значень температури до деякої величини, а потім поступове її зменшення після припинення дії джерела (рис. 2 б). Зауважимо, що саме в цей момент часу маємо найбільшу різницю між значеннями температури і напружень, отриманими за врахування описаних вище припущень, що відповідають кривим 1, 2, 3. Так, зокрема, розбіжність в момент часу $Fo_k = 0.5$ між значеннями температур для термочутливих півпросторів (крива 3) і за припущення простої нелінійності їх матеріалів (крива 1) становила 18%, а за припущення нетермочутливості матеріалів (крива 2) – 7%. Розбіжність між аналогічними значеннями напружень становила 50% (суцільні криві 3, 1 на рис. 3 б), 58% (пунктирні криві 3, 1 на рис. 3 б) та 10% (суцільні криві 3, 2 на рис. 3 б) та 13% (пунктирні криві 3, 2 на рис. 3 б) відповідно. Така значна розбіжність у значеннях температур та напружень за припущення простої нелінійності матеріалів пояснюється тим, що насправді для взятих у роботі матеріалів, припущення щодо простої нелінійності справедливе лише для окису

цирконію, а для титанового сплаву ця властивість для деяких значень температури не виконується.

6. Висновки

Використовуючи аналітико-числовий підхід, що базується на застосуванні перетворення Кірхгофа, методів лінеаризувальних параметрів та послідовних наближень, побудовано розв'язки квазістатичної задачі термопружності для двох контактуючих півпросторів з тепловиділеннями на межі їх дотику впродовж певного часу. На основі отриманих розв'язків та розв'язків, одержаних при розв'язанні аналогічної задачі за припущень простої нелінійності або нетермочутливості матеріалів, проведено порівняння розподілів температур півпросторів та відповідних їм компонент термопружень. Виявлено момент

часу (момент припинення дії джерела тепла) та координату ($z = 0$), коли спостерігається найбільша розбіжність між числовими результатами за розглянутими в роботі припущеннями щодо термочутливості матеріалів півпросторів. Підсумовуючи отримані результати можна стверджувати, що не завжди виправданим є спрощення задачі термопружності за рахунок певних припущень щодо теплових характеристик матеріалів, а саме прийняття їх сталими величинами або такими, що володіють простою нелінійністю. Особливо це стосується випадків, коли треба визначити тепловий та термопружний стан півпросторів поблизу межі контакту в моменти часу близькі до припинення дії джерела тепла і досягнення температури свого максимального значення.

Список використаних джерел

1. Попович В. Дослідження термопружного стану контактуючих термочутливих півпросторів з тепловиділеннями на межі дотику / В. Попович, О. Вовк // Вісник ТНТУ. – 2014. – Т. 74, № 2. – С. 38–47.
2. Моделювання та оптимізація в термомеханіці електропровідних неоднорідних тіл / Під заг. ред. Я. Й. Бурака, Р. М. Кушніра. Т.3: Термопружність термочутливих тіл / Р. М. Кушнір, В. С. Попович. – Львів: Сполом, 2009. – 412 с.
3. Беляев Н. М. Математические методы теплопроводности / Н. М. Беляев, А. А. Рядно. – К.: Вища школа, 1993. – 415 с.
4. Лыков А. В. Теория теплопроводности / А. В. Лыков. – М.: Высшая школа, 1967. – 599 с.
5. Transient heat conduction and thermal stress problems of a nonhomogeneous plate with temperature-dependent material properties / [Y. Tanigawa, T. Akai, R. Kawamura, N. Oka] // J. Thermal Stresses. – 1996. – Vol. 19, № 1. – P. 77–102.

Reference

1. POPOVYCH, V. & VOVK, O. (2014) Doslidzhennya termoprugnogo stanu kontaktuyuchykh termochutlyvykh pivprostorig z teplovydilennyamy na mezhi dotyku. *Bulletin of TNTU*. 74 (2). p. 38–47.
2. KUSHNIR, R. M. & POPOVYCH, V. S. (2009) *Termopruzhnist Termochutlyvyh Til*. L'viv: Spolom.
3. BELYAEV, N. M. & RYADNO, A. A. (1993) *Matematycheskiye Metody Teploprovodnosti*. Kiev: Vyshcha shkola.
4. LYKOV, A. V. (1967) *Teoriya Teploprovodnosti*. Moscow: Vysshaya shkola.
5. TANIGAWA, Y. et al. (1996) Transient heat conduction and thermal stress problems of a nonhomogeneous plate with temperature-dependent material properties. *J. Thermal Stresses*. 19 (1). p. 77–102.

Надійшла до редколегії 17.09.15

УДК 539.3

Приходько Д. Ф.¹, аспірант,
Кір'єв А. М.¹, пров. інженер-електронік,
Краснопольська Т. С.², д. ф.-м. н., с. н. с.

Стабілізація закритичного стрижня при вертикальній вібрації

¹Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, проспект Акад.
Глушкова, 4-е
e-mail: dmitry.prykhodko@gmail.com,
amkir@i.ua

²Інститут гідромеханіки НАН України, 03057,
м. Київ, вул. Желябова, 8/4
e-mail: t.krasnopol'skaya@tue.nl

D. F. Prykhodko¹, Postgraduate Student,
A. M. Kiriev¹, Leading Electronic Engineer,
T. S. Krasnopol'skaya², Dr. Sci. (Phys.-Math.),
Sr. Sci. Researcher

A stabilization of a supercritical bar under the vertical vibration

¹Taras Shevchenko National University of Kyiv,
03680, Kyiv, Acad. Glushkova pr., 4-e
e-mail: dmitry.prykhodko@gmail.com,
amkir@i.ua

²Institute of Hydromechanics NAS of Ukraine,
03057, Kyiv, Zhelyabova str., 8/4
e-mail: t.krasnopol'skaya@tue.nl

Експериментально досліджуються коливання та стабілізація консольного гнучкого закритичного стрижня, який у статичних умовах знаходиться тільки під дією рівномірно розподіленої по довжині сили тяжіння, втрачає стійкість і згинається під своєю вагою. Точка закріплення стрижня коливається вертикально по гармонічному закону, при цьому частота вібрацій може повільно змінюватись. Теоретичні висновки про стабілізацію і резонансні коливання підтверджено експериментальними результатами: при проведенні експериментальних досліджень досягнуто ефект стабілізації та знайдені частоти, при яких виникає стабілізація. Знайдено інтервали частот параметричних коливань на другій та третій власних формах. Експериментально отримані частоти стабілізації добре співпадають з обчисленими по теоретичному критерію стабілізації закритичного консольного стрижня, запропонованого в роботі Шамні і Фрейзера.
Ключові слова: закритичний стрижень, коливання, стабілізація, консольний стрижень.

Oscillations and stabilization of a cantilever flexible supercritical bar (such bar in static conditions under a homogeneously distributed over its length gravity force buckles under its own weight) are studied experimentally and theoretically. The bottom support point of the cantilever bar is subjected to a vertical vibration and the frequency of these vibrations can be slowly changed and recorded by a special experimental setup. Theoretical results of stabilization and resonant oscillations are experimentally confirmed by using a constructed experimental model, for which frequencies of stabilization are found and an effect of stabilization is studied. Intervals of vibration frequencies for realization of parametric resonant bar oscillations on the second and the third eigenmodes are also experimentally found. Experimentally determined frequencies of the bar stabilization are in good agreement with the numerically obtained frequency based on the theoretical criterion of stabilization of a cantilever supercritical bar. This criterion was analytically determined and constructed in the famous paper by Champneys and Fraser.

Key Words: Supercritical Bar, Oscillations, Stabilization, Cantilever Bar.

1. Вступ

Вельми важливі в інженерній практиці питання вібраційної стійкості тонких стрижнів, що знаходяться під дією повздовжніх сил, що періодично змінюються, вивчені відносно мало. Математично задача в цьому випадку зводиться до вивчення рівнянь з періодичними коефіцієнтами.

Метою представленої роботи є експериментальне дослідження коливань і стабілізації «закритичного» стрижня при наявності вертикальних вібрацій. Згідно теорії Тимошенка при відсутності зовнішнього впливу, окрім рівномірно розподіленої сили ваги буде спостерігатися явище випучування гнучкого стрижня, яке полягає в тому, що він втрачає прямолінійний вигляд і його вісь викривляється, тобто в стані спокою вісь стрижня має великий

кут відхилення від вертикалі. Такий стрижень називається «закритичним» [1].

2. Експериментальне дослідження та опис експериментальної установки

Для експериментального підтвердження ефекту стабілізації стрижня з закритичною жорсткістю при консольній фіксації на віброуючій основі, а також з метою перевірки теоретичного розрахунку в лабораторії кафедри теоретичної та прикладної механіки були поставлені та проведені наступні досліді.

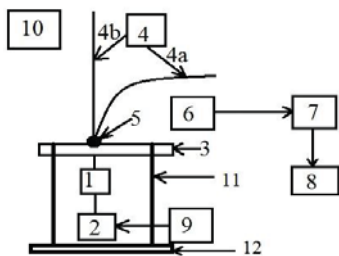


Рис. 1. Схема експериментальної установки:

- 1 – кривошипно-шатунний механізм;
- 2 – двигун;
- 3 – жорстка фіксована станина;
- 4 – стрижень; стрілкою 4a показано початкове положення, а стрілкою 4b положення стабілізації;
- 5 – маркер;
- 6 – фотоелемент;
- 7 – осцилограф;
- 8 – ПК;
- 9 – регулятор обертів двигуна;
- 10 – камера

Для збудження гармонічних коливань у вертикальному напрямі використано електродвигун «ИНТЕРСКОЛ МП-65/550Э», приєднаний до жорсткої платформи. Двигун був з'єднаний з кривошипно-шатунним механізмом. Закритичний стрижень жорстко защемлювався на кінці шатуна, який рухається у вертикальному напрямі з постійною амплітудою.

Частота коливань зчитувалась фотодатчиком, який приєднувався до платформи, та розраховувалась за допомогою осцилографа.

Керування частою збурення відбувалося за допомогою транзистора, що дає змогу проходити частоти від 0 Гц до 50 Гц з амплітудою вібрацій $\Delta = 0.9$ см.

Експериментальна модель стрижня складається зі сталевго дрота, який являв собою

щільну кругову намотанку у вигляді джгута з 35 сталевих струн діаметра 0.025 см; вага 1 см проволоки 0.12 г, довжина використаного в моделі зразка $l = 26.7$ см. Зовні джгут покритий пластиковою оболонкою. Такий стрижень закріплювався консольно, тобто один кінець жорстко закріплений та приєднаний до кривошипно-шатунного механізму, який з'єднаний з валом електродвигуна, інший кінець був вільним.

Схема експериментальної установки показана на рис. 1. Кривошипно-шатунний механізм «1» приводиться в дію електродвигуном «2» та жорстко приєднаний до станини «3», яка в свою чергу зафіксована на важкій основі «11» за допомогою стійок «12». Під важкою основою мається на увазі така основа, що при русі кривошипно-шатунного механізму вся система залишається нерухомою. Стрижень з закритичною жорсткістю «4» був жорстко закріплений на кривошипно-шатунному механізмі, і точка закріплення стрижня позначена маркером «5». На схемі показано два положення стрижня: положення «4a» – стан спокою, «4b» – стабілізація. Для здійснення експерименту необхідно було, щоб електродвигун помірно набрав обертів. Цю функцію виконував регулятор обертів «9». Для фіксації частоти коливань використовувався фотодатчик «6», який фіксував рухи маркера «5». Данні з фотодатчика оброблялися за допомогою осцилографа «7», і за допомогою персонального комп'ютера «8» переводилися в зручний для сприйняття формат. Весь процес проведення експерименту фіксувався за допомогою камери «10».

3. Методика випробувань

Експеримент проводився наступним чином.

До ввімкнення двигуна стрижень з закритичною жорсткістю знаходився в положенні «4a» (рис. 1). Після ввімкнення живлення двигуна кривошипно-шатунний механізм починав повільно рухатися по вертикалі, разом з ним починала свій рух точка жорсткого закріплення стрижня з закритичною жорсткістю «5». При малій частоті коливань стрижень з закритичною жорсткістю рухався у вертикальній площині за точкою закріплення «5», але при цьому не змінював свою форму «4a».

Поступове збільшення частоти коливань відбувалося повертанням ручки регулятора обертів «9». При збільшенні частоти коливань точка закріплення стрижня з закритичною жорсткістю збільшувала свою швидкість

коливань. При збільшенні частоти до 7 Гц можна було спостерігати, що стрижень з малою жорсткістю на згин починав коливатись на другій власній формі [2], в якій є два вузли – один рухається разом з точкою жорсткого закріплення, а другий на самому стрижні: він рухається вертикально з тією ж амплітудою, що і точка жорсткого закріплення. Таким чином, спостерігаємо, що стрижень з закритичною жорсткістю має сталу форму коливань у вертикальній площині, яка утримується при частоті від 7 Гц до 9 Гц (рис. 2).

При подальшому проведені експериментальних досліджень спостерігається перехід стрижня з закритичною жорсткістю від плоских коливань до просторових коливань. Спочатку стрижень починає розкручуватись відносно вертикальної вісі, що проходить через точку закріплення. При цьому реалізовувалась друга форма коливань з двома вузлами. Потім вільний кінець стрижня починав коливатись з дуже великою амплітудою, що по величині дорівнювала до 1/2 довжини стрижня.

При наближенні до частоти 24 Гц стрижень сповільнював своє розкручування, і вільний кінець зменшував свою амплітуду. При частоті 24 Гц коливання стрижня переходили в одну площину і реалізовувались коливання на третій власній формі [3], що показана на рис. 3. У цьому випадку спостерігалися три вузли: один це – точка закріплення, а два інших знаходяться на стрижні. Такі коливання спостерігалися при збільшенні частоти до 26 Гц.

При подальшому збільшенні частоти спостерігалася ситуація подібна до тієї як при переході від 9 Гц до 24 Гц.

Збільшивши частоту коливань до 28,5 Гц спостерігаємо стабілізацію стрижня (рис. 4).

4. Аналіз результатів експерименту

В початковому положенні стрижень займає майже горизонтальне положення, тобто має велике відхилення від вертикалі. Після запуску двигуна стрижень починає розгойдуватись біля свого положення рівноваги. Починаючи з 7 Гц стрижень коливається на другій власній формі [4]. Якщо провести уявну лінію по вузлах коливань, можна зафіксувати збільшення кута нахилу стрижня від горизонталі (в порівнянні з початковим положенням). Такі коливання відбуваються до 9 Гц.

Продовжуючи збільшувати частоту обертання двигуна до 24 Гц можна візуально побачити третю власну форму коливань стрижня, яка

утримується до 26 Гц. При подальшому збільшенні частоти так само, як при переході від другої форми коливань до третьої, відбувається перехід до просторових коливань, але на відміну від минулого випадку амплітуда коливань вільного кінця збільшується. Та вже при збільшенні частоти до 28.5 Гц стрижень займає стійке вертикальне положення, тобто стабілізується.

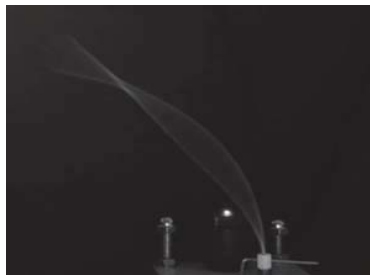


Рис.2. Коливання на другій формі



Рис.3. Коливання на третій формі



Рис.4. Стабілізація стрижня

Критерій стабілізації «закритичного» консольного стрижня при наявності вертикальних вібрацій точки закріплення отримано на основі аналізу з застосуванням методу послідовних наближень Шамні і

Фрейсера [2]. Умови для стабілізації, згідно цього критерію, мають вигляд:

$$\omega_{cr}^2 \Delta^2 > (1.275) l \cdot g \left(1 - \frac{l_{cr}^3}{l^3} \right), \quad (1)$$

де ω_{cr} – критична кругова частота коливань, при якій стрижень стабілізується у вертикальному положенні, Δ – амплітуда коливань закріплення, l – довжина стрижня, l_{cr} – критична довжина стрижня, g – прискорення вільного падіння, де $g = 980 \text{ см/с}^2$. У використаній в експериментах моделі стрижня $l_{cr} = 16.5 \text{ см}$. Зауважимо, що ця критична довжина визначалась експериментальним шляхом для досліджуваного стрижня – вона дорівнює максимальній довжині досліджуваного стрижня, при якій стрижень зберігає вертикальне положення без впливу зовнішніх навантажень, тобто в стані спокою.

Використавши перехід від кругової частоти до звичайної, коли $\omega = 2\pi f$, отримуємо такий вираз для критичної частоти коливань, більше якої відбувається стабілізація стрижня,

$$(f_{cr})^2 > \frac{(1.275) l \cdot g \left(1 - \frac{l_{cr}^3}{l^3} \right)}{\Delta^2 (2\pi)^2}. \quad (2)$$

Підставивши значення довжин та амплітуди коливань, які використовувалися у експерименті, у формулу (2), отримуємо, що $f_{cr} > 28.25 \text{ Гц}$. Порівнюючи значення частоти стабілізації закритичного стрижня в більшості проведених експериментів, коли частота була приблизно рівна 28.5 Гц , зі значенням частоти отриманим вище з критерія стабілізації, приходимо до висновку про їх добру узгодженість, з похибкою у межах 1%.

5. Висновки

Показано, що ефекти стабілізації і резонансних коливань закритичного стрижня підтверджуються експериментальними результатами. Експериментально отримані частоти стабілізації добре співпадають з обрахованими по теоретичному критерію стабілізації, аналітично побудованому в роботах Шамні і Фрейсера [2].

Список використаних джерел

1. Timoshenko S. Theory of Elastic Stability [2d ed.] / S. Timoshenko, J. Gere. – New York: McGraw-Hill, 1961. – 541 p.
2. Champneys A. The 'Indian rope trick' for a parametrically excited flexible rod: linearized analysis / A. Champneys, B. Fraser // Proc. R. Soc. London. – 2000. – Vol. 456. – P. 553–570.
3. Краснопольська Т. С. Динамічні характеристики консольного закріпленого стрижня з малою жорсткістю на згин / Т. С. Краснопольська, Д. Ф. Приходько, О. А. Гуржій // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія фізико-математичні науки. – 2012. – № 4. – С. 52–55.
4. Chaos in parametrically excited continuous systems / [T. S. Krasnopolskaya, A. A. Gourjii, V. M. Spektor, D. F. Prykhodko] // Chaotic Modeling and Simulation (CMSIM). – 2013. – № 3. – P. 413–422.

References

1. TIMOSHENKO, S. & GERE, J. (1961) *Theory of Elastic Stability*. 2d Ed. New York: MCGRAW-HILL.
2. CHAMPNEYS, A. & FRAZER, B. (2000) The 'Indian rope trick' for a parametrically excited flexible rod: linearized analysis. *Proc. R. Soc. London*. 456. p. 553–570.
3. KRASNOPOLSKA, T. S., PRYKHODKO, D. F. & GOURZHIY, A. A. (2012) Dynamichni kharakterystyky konsolnogo zakriplenogo stryzhnya z maloiu zhorstkistiu na zgin. *Visnyk Kyivskogo Natsionalnogo Universytetu Imeni Tarasa Shevchenka. Seriya: Fizyko-Matematychni Nauky*. (4), p. 52–55.
4. KRASNOPOLSKAYA, T. S. et al. (2013) Chaos in parametrically excited continuous systems. *Chaotic Modeling and Simulation (CMSIM)*. (3). p. 413–422.

Надійшла до редакції 23.09.15

УДК 539.3

Процеров Ю. С., к. ф.-м. н., доц.

**Осесимметричная задача кручения
багатошарового цилиндра скінченної
довжини з круговою тріщиною**

Одеський національний університет імені І. І.
Мечнікова, 65082, м. Одеса, вул. Дворянська, 2
e-mail: protserov@onu.edu.ua

Yu. S. Protserov, Ph. D. (Phys.-Math.), Assoc. Prof.

**Axisymmetric torsion problem for the finite
length multilayered cylinder with the circular
crack**

Odessa I. I. Mechnikov National University, 65082,
Odessa, Dvoryanskaya str., 2
e-mail: protserov@onu.edu.ua

Розглянуто осесимметричну задачу про кручення циліндра скінченної довжини, який складається з довільного числа циліндричних шарів та містить кругову тріщину у першому шарі. Нижня основа циліндра нерухомо закріплена, верхня вільна від напружень, а до бічної поверхні прикладене осесимметричне дотичне навантаження. Відповідна крайова задача зведена до інтегро-диференційного рівняння, яке розв'язано методом ортогональних многочленів. Отримано вираз для знаходження КІН. Для випадку двох шарів досліджено залежність КІН від впливу розміру тріщини, її розташування та відношення модулів зсуву шарів.

Ключові слова: багатошаровий циліндр, кручення, кругова тріщина, КІН.

The axisymmetric tangent stress is applied to the lateral surface of the multilayered elastic finite cylinder with the fixed bottom face. The upper face of the cylinder is free from stresses. The layers are coaxial and the conditions of the ideal mechanical contact are fulfilled between them. In the internal layer the circular crack parallel to the cylinder's faces with the branches free from stress is situated. This problem is solved for the arbitrary quantity of the layers. The corresponding boundary problem is reduced to the integro-differential equation, which is solved with the help of the orthogonal polynomials' method. It allows to take into consideration the real singularity of the unknown function at the ends of the integration interval. The solving of the equation is reduced to infinite system of the linear equations. During the calculation of the system's coefficients the integrals of the special functions, which are not shown in the known integrals' tables, are obtained. The expression for the stress intensity factor (SIF) is found with the help of the analytical continuing of the spectral correspondence. The concretization of stated problem was done on the example of two-layered cylinder. The evaluation of the cylinder's stress state was done and SIF was estimated in dependence from the crack's geometry, its location and a ratio of the shear modules.

Key Words: Multilayered Cylinder, Torsion, Circular Crack, SIF.

1. Вступ

Пружні циліндри скінченної довжини (суцільні, порожнисті, багатошарові) часто використовуються як елементи деталей машин та будівельних конструкцій. Наявність у них тріщин суттєво знижує їх експлуатаційні характеристики та може привести до їх руйнування. Тому дослідження напруженого стану циліндричних тіл з тріщинами є актуальною задачею. Напружений стан, який виникає при крученні однорідних нескінченних циліндрів з круговими тріщинами розглянуто у роботі [1]. У роботі [2] задача кручення двошарового циліндра з круговою тріщиною зведена до інтегрального рівняння Фредгольма II роду, яке розв'язувалось чисельно.

У даній статті подано розв'язок задачі про знаходження напруженого стану та коефіцієнта

інтенсивності напружень (КІН) у багатошаровому циліндрі з круговою тріщиною.

2. Постановка задачі та її розв'язання

Розглядається пружний циліндр, заданий у циліндричній системі координат співвідношеннями $0 \leq r \leq a, -\pi \leq \varphi \leq \pi, 0 \leq z \leq h$, який складається з n шарів $r_{j-1} \leq r \leq r_j, 0 \leq z \leq h, j = \overline{1, n}$, $r_0 = 0, r_n = a$. Кожен шар має свій модуль зсуву G_j . Між шарами виконуються умови ідеального механічного контакту, які полягають у неперервності переміщень та напружень, коли ми переходимо від одного шару до іншого. Нижня основа циліндра нерухомо закріплена, верхня -- вільна від напружень, а до бічної поверхні прикладене осесимметричне дотичне навантаження, яке при-

водить до кручення циліндру. У першому шарі при $z = d$ знаходиться кругова тріщина радіусу $r = c < r_1$, береги якої вільні від напружень. У такій постановці задача є осесиметричною, і у кожному шарі відмінними від нуля є тільки тангенціальне переміщення $u_\phi^j(r, z)$ та два дотичних напруження

$$\tau_{r\phi}^j(r, z) = G_j \left(\rho \frac{\partial u_\phi^j}{\partial r} - \frac{1}{r} u_\phi^j \right), \quad \tau_{z\phi}^j(r, z) = G_j \frac{\partial u_\phi^j}{\partial z}.$$

Якщо перейти до безрозмірних координат $\rho = ra^{-1}$, $\zeta = zh^{-1}$ та позначити $\alpha = ah^{-1}$, $c' = ca^{-1}$, $\delta = dh^{-1}$, $u_j(\rho, \zeta) = u_\phi^j(a\rho, h\zeta)$, $c_j = r_j a^{-1}$, $j = \overline{1, n}$, то потрібно знайти розв'язок рівнянь рівноваги

$$\frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial u_j}{\partial \rho} \right) - \frac{1}{\rho} u_j + \alpha^2 \rho \frac{\partial^2 u_j}{\partial \zeta^2} = 0, \quad (1)$$

$$c_{j-1} < \rho < c_j, \quad 0 < \zeta < 1, \quad j = \overline{1, n}, \quad c_0 = 0, \quad c_n = 1,$$

які задовольняють крайовим умовам

$$u_j(r, 0) = 0, \quad \frac{\partial u_j}{\partial \zeta} \Big|_{\zeta=1} = 0, \quad (2)$$

$$G_n \left(\rho \frac{\partial u_n}{\partial \rho} - u_n \right) \Big|_{\rho=1} = aP(\zeta), \quad (3)$$

умовам сполучення шарів

$$u_j(c_j \zeta) = u_{j+1}(c_j \zeta), \quad j = \overline{1, n-1},$$

$$G_j \left(\rho \frac{\partial u_j}{\partial \rho} - u_j \right) \Big|_{\rho=c_j} = G_{j+1} \left(\rho \frac{\partial u_{j+1}}{\partial \rho} - u_{j+1} \right) \Big|_{\rho=c_j} \quad (4)$$

та умовам на тріщині

$$u_1(\rho, \delta - 0) - u_1(\rho, \delta + 0) = \chi(\rho),$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial \zeta} \Big|_{\zeta=\delta-0} = \frac{\partial u_1}{\partial \zeta} \Big|_{\zeta=\delta+0} = 0, \quad 0 < \rho < c'. \quad (5)$$

де $\chi(\rho)$ – невідомий стрибок переміщення берегів тріщини, $\chi(\rho) = 0$, $\rho \notin (0, c')$.

Для зведення цієї крайової задачі до одновимірної, скористаємося скінченим інтегральним перетворенням Фур'є

$$u_{jk}(\rho) = \int_0^1 u_j(\rho, \zeta) \sin \beta_k \zeta d\zeta,$$

$$u_j(\rho, \zeta) = 2 \sum_{k=1}^{\infty} u_{jk}(\rho) \sin \beta_k \zeta, \quad \beta_k = \frac{\pi}{2} (2k-1). \quad (6)$$

Застосуємо його до рівнянь (1) при $j=1$ за загальною схемою [3] з урахуванням (5), а при $j \geq 2$ – за класичною (при цьому крайові умови (2) будуть задоволені) та отримаємо

$$(\rho u'_{1k})' - (\rho^{-1} + \alpha^2 \beta_k^2) u_{1k} = \alpha^2 \beta_k \cos \beta_k \delta \cdot \rho \chi(\rho),$$

$$0 < \rho < c_1$$

$$(\rho u'_{jk})' - (\rho^{-1} + \alpha^2 \beta_k^2) u_{jk} = 0, \quad c_{j-1} < \rho < c_j, \quad j = \overline{2, n}.$$

Загальні розв'язки цих рівнянь мають вигляд

$$u_{1k}(\rho) = A_{1k} I_1(\alpha \beta_k \rho) +$$

$$+ \alpha^2 \beta_k \cos \beta_k \delta \int_0^{c'} \Phi_k(\rho, \xi) \chi(\xi) \xi d\xi, \quad 0 < \rho < c_1;$$

$$u_{jk}(\rho) = A_{jk} I_1(\alpha \beta_k \rho) + B_{jk} K_1(\alpha \beta_k \rho),$$

$$c_{j-1} < \rho < c_j, \quad j = \overline{2, n}, \quad (7)$$

де $I_1(x)$ та $K_1(x)$ – модифіковані функції Бесселя, A_{jk} та B_{jk} – невідомі сталі, а

$$\Phi_k(\rho, \xi) = - \begin{cases} I_1(\alpha \beta_k \xi) K_1(\alpha \beta_k \rho), & 0 \leq \xi < \rho \leq c_1; \\ I_1(\alpha \beta_k \rho) K_1(\alpha \beta_k \xi), & 0 \leq \rho < \xi \leq c_1, \end{cases}$$

– фундаментальна функція, яку за допомогою 6.541 з [4] можна записати у вигляді

$$\Phi_k(\rho, \xi) = - \int_0^{\infty} J_1(\rho x) J_1(\xi x) \frac{x dx}{x^2 + \alpha^2 \beta_k^2},$$

де $J_1(x)$ – функція Бесселя.

Застосування інтегрального перетворення (6) до крайової умови (3) дає нам рівність

$$G_n [u'_{nk}(1) - u_{nk}(1)] = aP_k, \quad P_k = \int_0^1 P(\zeta) \sin \beta_k \zeta d\zeta,$$

яку з урахуванням (7) запишемо у вигляді

$$G_n t_{nk} [A_{nk} I_2(t_{nk}) - B_{nk} K_2(t_{nk})] = aP_k, \quad (8)$$

а до умов сполучення шарів (4) – приводить до співвідношень

$$u_{jk}(c_j) = u_{j+1k}(c_j), \quad j = \overline{1, n-1};$$

$$G_j \left[c_j u'_{jk} (c_j) - u_{jk} (c_j) \right] = \\ = G_{j+1} \left[c_j u'_{j+1k} (c_j) - u_{j+1k} (c_j) \right].$$

які дадуть нам систему рівнянь для знаходження A_{jk} та B_{jk} . Для зручності запису та розв'язування цій системи введемо вектори та матриці

$$\bar{X}_{1k} = \begin{pmatrix} A_{1k} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{X}_{jk} = \begin{pmatrix} A_{jk} \\ B_{jk} \end{pmatrix}, j = \overline{2, n}; \\ \bar{Y}_k = \alpha^2 \beta_k \cos \beta_k \delta \begin{pmatrix} -K_1(t_{1k}) \\ K_2(t_{1k}) \end{pmatrix}; \\ R_{1k}^0 = \begin{pmatrix} I_1(t_{1k}) & 0 \\ I_2(t_{1k}) & 0 \end{pmatrix}, \quad R_{jk} = \begin{pmatrix} I_1(t_{jk}) & K_1(t_{jk}) \\ I_2(t_{jk}) & -K_2(t_{jk}) \end{pmatrix}, \\ j = \overline{1, n-1}; \\ g_j = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & G_j \end{pmatrix}, \quad j = \overline{1, n}, \quad t_{jk} = \alpha \beta_k c_j.$$

Тоді умови сполучення шарів запишуться у вигляді

$$g_1 R_{1k}^0 \bar{X}_{1k} + g_1 \bar{Y}_k D_k = g_2 R_{1k} \bar{X}_{2k}, \\ g_j R_{jk} \bar{X}_{jk} = g_{j+1} R_{jk} \bar{X}_{j+1k}, \quad j = \overline{2, n-1}, \\ D_k = \int_0^{c'} I_1(\alpha \beta_k \xi) \chi_1(\xi) \xi d\xi.$$

З одержаних співвідношень знайдемо

$$\bar{X}_{2k} = R_{1k}^{-1} g_2^{-1} g_1 R_{1k}^0 \bar{X}_{1k} + R_{1k}^{-1} g_2^{-1} g_1 \bar{Y}_k D_k, \\ \bar{X}_{j+1k} = R_{jk}^{-1} g_{j+1}^{-1} g_j R_{jk} \bar{X}_{jk}, \quad j = \overline{2, n-1}; \\ R_{jk}^{-1} = t_{jk} \begin{pmatrix} K_2(t_{jk}) & K_1(t_{jk}) \\ I_2(t_{jk}) & -I_1(t_{jk}) \end{pmatrix}.$$

Якщо ввести матриці

$$U_{jk} = R_{jk}^{-1} g_{j+1}^{-1} g_j, \quad V_{jk} = U_{jk} R_{jk},$$

то співвідношення (9) можна записати у вигляді

$$\bar{X}_{2k} = U_{1k} R_{1k}^0 \bar{X}_{1k} + U_{1k} \bar{Y}_k D_k, \\ \bar{X}_{j+1k} = V_{jk} \bar{X}_{jk}, \quad j = \overline{2, n-1}, \quad (10)$$

звідки послідовно знаходимо

$$\bar{X}_{nk} = V_{n-1k} \bar{X}_{n-1k} = V_{n-1k} V_{n-2k} \bar{X}_{n-2k} = \dots =$$

$$= V_{n-1k} V_{n-2k} \dots V_{2k} \bar{X}_{2k} = V_{n-1k} V_{n-2k} \dots V_{2k} U_{1k} R_{1k}^0 \bar{X}_{1k} + \\ + V_{n-1k} V_{n-2k} \dots V_{2k} U_{1k} \bar{Y}_k D_k.$$

Якщо тепер введемо матрицю

$$\Psi(k) = V_{n-1k} V_{n-2k} \dots V_{2k} U_{1k} = \begin{pmatrix} \Psi_{11}(k) & \Psi_{12}(k) \\ \Psi_{21}(k) & \Psi_{22}(k) \end{pmatrix},$$

то вектор коефіцієнтів n -го шару буде виражено через вектор коефіцієнтів першого шару

$$\bar{X}_{nk} = \begin{pmatrix} A_{nk} \\ B_{nk} \end{pmatrix} = \Psi(k) R_{1k}^0 \bar{X}_{1k} + \Psi(k) \bar{Y}_k D_k.$$

Підставимо знайдені значення A_{nk} та B_{nk} у крайову умову (8) та знайдемо

$$A_k = \frac{\alpha P_k}{G_n t_{nk} \Delta(k)} + \alpha^2 \beta_k \cos \beta_k \delta \frac{F(k)}{\Delta(k)} D_k; \\ \Delta(k) = [\Psi_{11}(k) I_1(t_{1k}) + \Psi_{12}(k) I_2(t_{1k})] I_2(t_{nk}) - \\ - [\Psi_{21}(k) I_1(t_{1k}) + \Psi_{22}(k) I_2(t_{1k})] K_2(t_{nk}), \\ F(k) = [\Psi_{11}(k) K_1(t_{1k}) - \Psi_{12}(k) K_2(t_{1k})] I_2(t_{nk}) - \\ - [\Psi_{21}(k) K_1(t_{1k}) - \Psi_{22}(k) K_2(t_{1k})] K_2(t_{nk}).$$

Тепер за допомогою рекурентних формул (10) ми можемо послідовно знайти усі сталі A_{jk} та B_{jk} . Таким чином будуть знайдені трансформанти (7) переміщень. Далі за формулою обернення (6) можна знайти переміщення, наприклад,

$$u_1(\rho, \zeta) = \frac{2a}{G_n} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{P_k \sin \beta_k \zeta}{t_{nk} \Delta(k)} I_1(\alpha \beta_k \rho) + \\ + 2\alpha^2 \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \cos \beta_k \delta \sin \beta_k \zeta \int_0^{c'} [\Phi_k(\rho, \zeta) + \\ + \frac{F(k)}{\Delta(k)} I_1(\alpha \beta_k \rho) I_1(\alpha \beta_k \zeta)] \chi(\zeta) \zeta d\zeta, \\ 0 < \rho < c_1, \quad 0 < \zeta < h. \quad (11)$$

Перетворимо вираз (11). Розглянемо вираз

$$\sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \cos \beta_k \delta \sin \beta_k \zeta \Phi_k(\rho, \xi) = \\ = - \int_0^{\infty} J_1(\rho x) J_1(\xi x) \left[\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta_k \cos \beta_k \delta \sin \beta_k \zeta}{x^2 + \alpha^2 \beta_k^2} \right] x dx$$

та за допомогою формули (1.445(1)) з [4] просуюмо ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta_k \cos \beta_k \delta \sin \beta_k \zeta}{x^2 + \alpha^2 \beta_k^2} = \frac{1}{4\alpha^2} \operatorname{sech} \frac{x}{\alpha} \cdot \left[\operatorname{sgn}(\zeta - \delta) \cosh \frac{x}{\alpha} (1 - |\zeta - \delta|) + \cosh \frac{x}{\alpha} (1 - \zeta - \delta) \right].$$

Тепер переміщення (11) можна записати так

$$u_1(\rho, \zeta) = -\frac{1}{2} \int_0^{\zeta'} \chi(\xi) \xi d\xi \int_0^{\infty} J_1(\rho x) J_1(\xi x) x \operatorname{sech} \frac{x}{\alpha} \cdot \left[\operatorname{sgn}(\zeta - \delta) \cosh \frac{x}{\alpha} (1 - |\zeta - \delta|) + \cosh \frac{x}{\alpha} (1 - \zeta - \delta) \right] dx + \\ + 2\alpha^2 \int_0^{\zeta'} \chi(\xi) \xi \left[\sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \cos \beta_k \delta \sin \beta_k \zeta \frac{F(k)}{\Delta(k)} I_1(\alpha \beta_k \rho) \cdot \right. \\ \left. \cdot I_1(\alpha \beta_k \xi) \right] d\xi + \frac{2\alpha}{G_n} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{P_k \sin \beta_k \zeta}{t_{nk} \Delta(k)} I_1(\alpha \beta_k \rho).$$

Отримана формула містить невідому функцію $\chi(\rho)$. Для її знаходження треба скористатися другою з умов на тріщині (5). Використовуючи тотожність

$$J_1(\rho x) J_1(\xi x) = \frac{1}{x^2} \frac{\partial^2}{\partial \rho \partial \xi} J_0(\rho x) J_0(\xi x),$$

підставимо отриманий вираз для переміщення у другу з умов (5). У результаті приходимо до інтегрального рівняння I-го роду

$$\frac{d}{d\rho} \int_0^{\zeta'} \chi_1(\xi) \xi d\xi \frac{\partial}{\partial \xi} \int_0^{\infty} J_0(\rho x) J_0(\xi x) dx + \\ + \int_0^{\zeta'} \chi(\xi) K_1(\rho, \xi) \xi d\xi + \int_0^{\zeta'} \chi(\xi) K_2(\rho, \xi) \xi d\xi = \\ = -\frac{4\alpha}{G_n} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{P_k \cos \beta_k \delta}{\Delta(k)} I_1(\alpha \beta_k \rho); \\ K_1(\rho, \xi) = \int_0^{\infty} J_1(\rho x) J_1(\xi x) x^2 \cdot \\ \cdot \left[2 \cosh \frac{x \delta}{\alpha} \sinh \frac{x}{\alpha} (1 - \delta) \operatorname{sech} \frac{x}{\alpha} - 1 \right] dx \\ K_2(\rho, \xi) = 4\alpha^3 \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k^2 \cos^2 \beta_k \delta \frac{F(k)}{\Delta(k)} \cdot \\ \cdot I_1(\alpha \beta_k \rho) I_1(\alpha \beta_k \xi).$$

В отриманому рівнянні зробимо заміну $y = c'x$, $\xi = c'\eta$, $\rho = c'\tau$, $\psi(\eta) = G_n \chi_1(c'\eta)$

$$R_1(\tau, \eta) = K_1(c'\tau, c'\eta), \quad R_2(\tau, \eta) = c'^3 K_2(c'\tau, c'\eta),$$

$$B(\tau) = -4ac' \sum_{k=1}^{\infty} \frac{P_k \cos \beta_k \delta}{\Delta(k)} I_1(t'_k \tau), \quad t'_k = \alpha \beta_k c'.$$

Тоді воно набуде вигляду

$$\frac{d}{d\tau} \int_0^1 \eta \psi(\eta) \frac{\partial}{\partial \eta} W_{00}^0(\tau, \eta) d\eta + \\ + \int_0^1 \eta \psi(\eta) [R_1(\tau, \eta) + R_2(\tau, \eta)] d\eta = B(\tau), \quad 0 < \tau < 1; \quad (12)$$

де $W_{\lambda\mu}^v(\tau, \eta) = \int_0^{\infty} J_{\lambda}(\tau y) J_{\mu}(\eta y) y^v dy$ – інтеграл Вебера – Шафхейтліна, який має розрив, коли $\tau = \eta$. Таким чином, сингулярна частка ядра інтегрального рівняння є похідна від розривного інтегралу. Наявність спектрального співвідношення (A 11.5) з [3]

$$\frac{d}{d\tau} \int_0^1 \eta^2 \sqrt{1 - \eta^2} P_j^{1/2}(1 - 2\eta^2) \frac{\partial}{\partial \eta} W_0^{00}(\tau, \eta) d\eta = \\ = \frac{\Gamma\left(j + \frac{5}{2}\right) \Gamma\left(j + \frac{3}{2}\right)}{j!(j+1)!} \tau P_j^{1/2}(1 - 2\tau^2), \quad 0 < \tau < 1, \quad (13)$$

де $P_j^{1/2}(1 - 2\eta^2)$ – многочлени Якобі, дозволяє шукати розв'язок рівняння (12) у вигляді

$$\psi(\eta) = \eta \sqrt{1 - \eta^2} \sum_{j=0}^{\infty} \sqrt{4j+5} \lambda_j^{-1} \psi_j P_j^{1/2}(1 - 2\eta^2), \quad (14)$$

де $\lambda_j = \Gamma\left(j + \frac{3}{2}\right) (j!)^{-1}$. Реалізація схеми методу

ортогональних многочленів приводить до нескінченної системи лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\psi_m + \sum_{j=0}^{\infty} \left[A_{mj}^{(1)} + A_{mj}^{(2)} \right] \psi_j = B_m, \quad m = 0, 1, \dots \quad (15)$$

$$A_{mj}^{(1)} = 2\sqrt{(4m+5)(4j+5)} \int_0^{\infty} \left[2 \operatorname{sech} \frac{y}{ac'} \cosh \frac{y\delta}{ac'} \cdot \right. \\ \cdot \left. \sinh \frac{y(1-\delta)}{ac'} - 1 \right] J_{2m+\frac{5}{2}}(y) J_{2j+\frac{5}{2}}(y) \frac{dy}{y}, \\ A_{mj}^{(2)} = 8\sqrt{(4m+5)(4j+5)} (-1)^{m+j} \cdot \\ \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \cos^2 \beta_k \delta \frac{F(k)}{\beta_k \Delta(k)} I_{2m+\frac{5}{2}}(t'_k) I_{2j+\frac{5}{2}}(t'_k),$$

$$B_m = 4h\sqrt{2(4m+5)}(-1)^m \sum_{k=1}^{\infty} \frac{P_k \cos \beta_k \delta}{\beta_k \Delta(k) \sqrt{t'_k}} I_{2m+\frac{5}{2}}(t'_k).$$

При обчисленні коефіцієнтів системи за допомогою методу роботи [5] були знайдені інтеграли

$$\int_0^1 \tau^2 \sqrt{1-\tau^2} P_m^{\frac{1}{2}}(1-2\tau^2) J_1(y\tau) d\tau = \\ = -\sqrt{2}\lambda_m y^{-\frac{3}{2}} J_{2m+\frac{5}{2}}(y),$$

$$\int_0^1 \tau^2 \sqrt{1-\tau^2} P_m^{\frac{1}{2}}(1-2\tau^2) I_1(t'_k \tau) d\tau = \\ = -\sqrt{2}\lambda_m (-1)^m (t'_k)^{-\frac{3}{2}} I_{2m+\frac{5}{2}}(t'_k).$$

Знайдемо вираз для КІН в околі тріщини

$$K_{III} = \lim_{r \rightarrow c+0} \sqrt{2\pi(r-c)} \tau_{z\varphi}^1(r, d) = \\ = \frac{G_1}{h} \sqrt{2\pi a} \lim_{\rho \rightarrow c'+0} \sqrt{\rho-c'} \frac{\partial u_1}{\partial \zeta} \Big|_{\zeta=\delta}.$$

Враховуючи отриманий вище вираз для $u_1(\rho, \zeta)$ та проведені заміни, маємо

$$K_{III} = \frac{G_1}{hG_n} \sqrt{\frac{\pi}{2ac'}} \lim_{\tau \rightarrow 1+0} \sqrt{\tau-1} \cdot \\ \cdot \frac{d}{d\tau} \int_0^1 \eta \Psi(\eta) \frac{\partial}{\partial \eta} W_{00}^0(\tau, \eta) d\eta,$$

де відкинута доданки, які мають скінчену границю при $\tau \rightarrow 1+0$. Підставимо сюди (14):

$$K_{III} = \frac{G_1}{hG_n} \sqrt{\frac{\pi}{2ac'}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\sqrt{4j+5}}{\lambda_j} \Psi_j \cdot \\ \cdot \lim_{\tau \rightarrow 1+0} \frac{d}{d\tau} \int_0^1 \eta^2 \sqrt{1-\eta^2} P_j^{\frac{1}{2}}(1-2\eta^2) \frac{\partial}{\partial \eta} W_{00}^0(\tau, \eta) d\eta.$$

У цьому виразі $\tau > 1$, так що скористатися спектральним співвідношенням (13) не можна. Тому застосуємо тотожність

$$\frac{\partial^2}{\partial \tau \partial \eta} W_{00}^0(\tau, \eta) = -D W_{11}^0,$$

де оператор

$$D = \frac{d^2}{d\tau^2} + \frac{1}{\tau} \frac{d}{d\tau} - \frac{1}{\tau^2},$$

та розглянемо

$$L_j(\tau) = \frac{d}{d\tau} \int_0^1 \eta^2 \sqrt{1-\eta^2} P_j^{\frac{1}{2}}(1-2\eta^2) \frac{\partial}{\partial \eta} W_{00}^0(\tau, \eta) d\eta = \\ = -D \int_0^1 \eta^2 \sqrt{1-\eta^2} P_j^{\frac{1}{2}}(1-2\eta^2) W_{11}^0(\tau, \eta) d\eta.$$

Останній інтеграл обчислюється за допомогою формули (1.3.42) з [4]. Застосовуючи до результату оператор D з урахуванням формули (I.1.18) з [3], отримуємо

$$L_j(\tau) = \frac{(4j^2-1)\Gamma\left(j+\frac{5}{2}\right)}{2\Gamma\left(2j+\frac{7}{2}\right)j!} \tau^{-2j-4} \cdot {}_2F_1\left(j+\frac{5}{2}, j+\frac{3}{2}; 2j+\frac{7}{2}; \tau^{-2}\right), \tau > 1,$$

де ${}_2F_1(a, b; c; x)$ гіпергеометрична функція Гаусса. Використовуючи аналітичне продовження гіпергеометричної функції Гаусса (9.131(2)) з [4] при $\tau \rightarrow 1+0$, прийдемо до асимптотичного співвідношення

$$L_j(\tau) = \frac{\sqrt{\pi}(4j^2-1)}{2\Gamma\left(j+\frac{3}{2}\right)j!} (\tau^2-1)^{-\frac{1}{2}} + O(1), \tau \rightarrow 1+0.$$

З його допомогою отримаємо формулу для обчислення КІН

$$K_{III} = \frac{\pi G_1}{4G_n \sqrt{ac'}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(4j^2-1)\sqrt{4j+5}}{\Gamma^2\left(j+\frac{3}{2}\right)} \Psi_j. \quad (16)$$

3. Результати розрахунків та їх аналіз

Числові розрахунки проведено для циліндра з відношенням радіуса до висоти $\alpha = a:h = 1:4$ для зовнішнього навантаження

$$p(z) = \begin{cases} p^*, & bh < z < h; \\ 0, & 0 < z < bh, \end{cases}$$

для якого $P_k = \beta_k^{-1} \cos \beta_k b$. Обчислення КІН за формулою (16) проводились для двох шарового циліндра за таких відношень модулів зсуву внутрішнього та зовнішнього шарів $G_1:G_2 = 2:1, G_1:G_2 = 1:1, G_1:G_2 = 1:2$ (криві 1, 2, 3 на обох рисунках) та $b = 0.8$.

На рис. 1 представлена залежність величини $K = K_{III} : P^*$ від відношення радіуса тріщини до радіуса першого шару $X = c' : c_1$. Тріщина розташована на середині висоти циліндра ($\delta = 0.5$), а обидва шари мають однакову товщину ($c_1 = 0.5$). На рис. 2 представлена залежність величини K від висоти розташування тріщини δ при радіусі тріщини $c' = 0.5c_1$ та $c_1 = 0.5$.

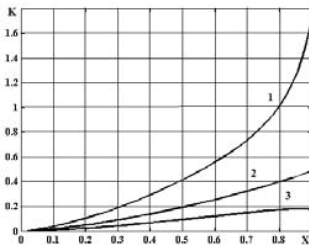


Рис. 1. Залежність величини $K = K_{III} : P^*$ від відношення радіуса тріщини до радіуса першого шару $X = c' : c_1$

4. Висновки

Дано розв'язок осесиметричної задачі про кручення багат шарового циліндра, послабленого круговою тріщиною. Досліджено вплив на КІН модулів зсуву шарів, розміру тріщини та її роз-

ташування. Аналіз чисельних результатів свідчить що:

- значення КІН суттєво залежить від відношення модуля зсуву першого шару до модуля зсуву другого: чим більше це відношення, тем більше значення КІН;
- при збільшенні радіуса тріщини відносно радіуса першого шару значення КІН зростає;
- найбільших значень КІН досягає, коли тріщина знаходиться на середині висоти циліндра.

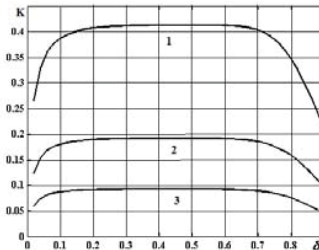


Рис. 2. Залежність величини K від висоти розташування тріщини δ при радіусі тріщини $c' = 0.5c_1$ та $c_1 = 0.5$

Список використаних джерел

1. Akiyawa T. Torsion of an infinite cylinder with multiple parallel circular cracks / T. Akiyawa, T. Hara, T. Shibua // *Theor. Appl. Mech.* – 2001. – Vol. 50. – P. 143–173.
2. Yantian Lin. Torsion of a finite length laminar composite circular cylinder debonded over a penny shaped area / Lin Yantian, Yuan Hong // *Eng. Fracture Mechanics.* – 1988. – Vol. 31, № 1. – P. 1–8.
3. Попов Г. Я. Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений / Г. Я. Попов. – Москва: Наука, 1982. – 344 с.
4. Градштейн И. С. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений / И. С. Градштейн, И. М. Рыжик. – М.: Физматгиз, 1963. – 1100 с.
5. Маричев О. И. Метод вычисления интегралов от специальных функций / О. И. Маричев. – Минск: Наука и техника, 1978. – 311 с.

References

1. AKIYAWA, T., HARA ,T. & SHIBUA, T. (2001) Torsion of an infinite cylinder with multiple parallel circular cracks. *Theor. Appl. Mech.* 50. p. 143–173.
2. YANTIAN, LIN & HONG, YUAN (1988) Torsion of a finite length laminar composite circular cylinder debonded over a penny shaped area. *Eng. Fracture Mechanics.* 31 (1). p. 1–8.
3. POPOV, G. YA. (1982) *Koncentraciya Uprugih Napryazheniy Vozle Shtampov, Razrezov, Tonkih Vkllyucheniy i Podkrepleniy.* Moskva: Nauka.
4. GRADSHTEIN, I. S. & RYGIK, I. M. (1963) *Tablitsy Integralov, Sum, Ryadov i Proizvedeniy.* Moskva: Fizmatgiz.
5. MARYCHEV, O. I. (1978) *Metod Vychysleniya Integralov ot Specialnykh Funkciy.* Minsk: Nauka i Tehnika.

Надійшла до редколегії 28.09.15

УДК 539.3

П'ятецька О. В., к. ф.-м. н., с. н. с.

Знаходження КЕМЗ при коливаннях п'єзоелектричних тіл з врахуванням втрат у матеріалі

Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, проспект Акад.
Глушкова, 4-е
e-mail: pyatetska@univ.kiev.ua

O. V. Pyatetska, Ph. D. (Phys.-Math.),
Sr. Sci. Researcher

An evaluation of the electromechanical coupling coefficient by the vibrations of piezoelectric solids accounting losses of a material

Taras Shevchenko National University of Kyiv,
03680, Kyiv, Acad. Glushkova av., 4-e
e-mail: pyatetska@univ.kiev.ua

Розглядається методика розрахунку КЕМЗ для повздовжніх коливань в'язкопружного п'єзоелектричного стержня, збудженого електричним полем, перпендикулярним до його довжини.

Ключові слова: коефіцієнт електро механічного зв'язку, коефіцієнт затухання, електро механічні коливання.

The methodic of evaluation of the electromechanical coupling coefficient for longitudinal vibrations of a viscoelastic piezoelectric bar under an influence of electric field is considered. An accumulation of electromechanical energy and a dissipation are the fundamental integral characteristics of vibrations of piezoelectric solids. As opposed to Meson's formula, the energy method permits to evaluate the effect of transformation of energy under resonance and nonresonance frequency. The reductive method of finding the electromechanical coupling coefficient within the limits of energy theory was used. In the dynamic case, the electromechanical coupling coefficient depends on distribution of the electromechanical magnitudes. By means of introducing a complex piezomodulus, it is observed a better correlation between the theoretical and experimental data. In this paper, the formulas to calculate the electromechanical coupling coefficient in the case of inelastic vibrations of piezoelectric solids accounting losses of material are given. The different types of losses as well as the amplitude dependence of the coefficients, which characterizes these losses, complicate quantitative analysis of an energy dissipation of piezoelectric vibrations. The attenuation coefficient of electromechanical vibrations is considered as a relative measure of losses within an elementary volume under resonance and nonresonance vibrations.

Key Words: Electromechanical Coupling, Damping Coefficient, Electromechanical Vibrations.

1. Вступ

Найбільш повною характеристикою ефективності електро механічного перетворення енергії в теорії п'єзоелектричних тіл є коефіцієнт електро механічного зв'язку (КЕМЗ). Він характеризує перетворення енергії у п'єзоелектричних матеріалах краще, ніж сукупність п'єзоелектричних, діелектричних і механічних властивостей. У динамічному випадку КЕМЗ залежить від розподілу електро механічних величин і тому є також функцією геометричних розмірів п'єзоелемента. В рамках електропружної теорії існує декілька підходів до визначення КЕМЗ: енергетичний підхід, формула Мезона, метод скорочення числа незалежних змінних у визначальній системі алгебраїчних рівнянь при чисельному розв'язуванні задач електропружності. Згідно енергетичного підходу

КЕМЗ повинен цілком визначатися полем деформацій ϵ_{ij} в об'ємі тіла і характером розташування електродів на поверхні або всередині тіла. Для багатоелектродних п'єзоелектричних тіл КЕМЗ повинен визначатися для пари електродів, що припускаються розімкнутими або короткозамкнутими. При цьому КЕМЗ залежить від способу підключення всіх інших електродів. Необхідно сформулювати електричні граничні умови на цих електродах. У нестационарних задачах КЕМЗ буде функцією часу. Квадрат КЕМЗ вводиться як відношення спроможної до обернення накопиченої на даній деформації електричної (механічної) енергії до всієї підведеної до тіла механічної (електричної) енергії. Використовуючи методику знаходження КЕМЗ у рамках енергетичного підходу, необхідно розв'язувати поряд із головною

задачею електропружності дві додаткові задачі для електричного потенціалу ϕ : $(\mu_{ki} \phi_{ij})_{,k} = (e_{kij} \epsilon_{ij})_{,k}$ відповідно при розіркненнях і короткозамкнених електродах. Тут μ_{ki} – тензор діелектричних проникливостей, e_{kij} – тензор п'єзоконстант. На відміну від формули Мезона енергетичний підхід дозволяє оцінити ефект перетворення енергії як на резонансних, так і нерезонансних частотах коливань п'єзоелектричних тіл.

2. Спрощена методика знаходження КЕМЗ в рамках енергетичної теорії

У [1] отримано співвідношення, які спрощують методику знаходження КЕМЗ, оскільки дозволяють зробити це безпосередньо за допомогою розв'язку основної задачі:

$$k_s^2 = \frac{k^2}{k^2 + 1}, \quad k^2 = \frac{(Q_1 - C_r \Delta\phi)^2 C^{-1}}{2U_T - C_r (\Delta\phi)^2}. \quad (1)$$

Тут U_T – внутрішня енергія в об'ємі п'єзоелемента, Q_1 – електричний заряд, $\Delta\phi$ – напруга на електродах, C_r – смінь п'єзоелемента на нульових деформаціях. Формули (1) особливо ефективні при розв'язуванні задач чисельними методами, зокрема задач про вимушені коливання п'єзоелектричних тіл.

Необхідність використання комплексних п'єзоелектричних характеристик при аналізі коливань непружних п'єзоелектричних тіл підтверджує гіпотезу про спадкову залежність між механічними та електричними величинами. П'єзоматеріалам властиві механічні та діелектричні втрати, які приводять при гармонічних процесах навантаження до розсіювання частини електро-механічної енергії і затухання коливань. Основними інтегральними (енергетичними) характеристиками коливань п'єзоелектричних тіл є дисипація та накопичення електромеханічної енергії. Розглянемо коливання п'єзоелектричного тіла, що має вигляд:

$$f = \{ \epsilon_{ij}, E_j, \sigma_{ij}, D_j \} = f'(\vec{x}) \cos \omega t - f''(\vec{x}) \sin \omega t. \quad (2)$$

Для відповідної енергії у повному об'ємі тіла маємо:

$$U_T = \int_V \bar{U}_{эм} dV,$$

де $\bar{U}_{эм}$ – подвоєна середня за період коливань електромеханічна енергія у елементарному об'ємі тіла, яку формально пов'язуємо з накопиченням електромеханічної енергії. У випадку коливань непружних п'єзоелектричних тіл з врахуванням діелектричних втрат у матеріалі [1] значення КЕМЗ обчислюється за формулами:

$$k_s^2 = \frac{k^2}{1 + k^2}, \quad k^2 = \frac{|\tilde{Q}_1 - \tilde{C}_e \Delta\tilde{\phi}|^2}{2U_T - C'_e |\Delta\tilde{\phi}|^2} \cdot \frac{C'_e}{|\tilde{C}_e|^2}, \quad (3)$$

$$U_T = \frac{1}{2} \int_V (\tilde{\sigma}_{ij} \tilde{\epsilon}_{ij} + \tilde{E}_j \tilde{D}_j) dV,$$

де $\tilde{Q}_1, \Delta\tilde{\phi}$ – комплексні амплітуди електричного заряду і напруги на електродах, $\tilde{C}_e = C'_e + i C''_e$ – комплексна смінь на нульових деформаціях, яка знаходиться з розв'язку електростатичної задачі з врахуванням діелектричних втрат, V – об'єм п'єзоелемента. За умови, що втрати малі, величиною $(C''_e/C'_e)^2$ можна знехтувати (у порівнянні з одиницею). Тоді друге із співвідношень (3) набуває вигляду:

$$k^2 = \frac{|(Q' - C_e \Delta\phi')^2 + (Q'' - C_e \Delta\phi'')^2| C_e^{-1}}{2U_T - C_e [(\Delta\phi')^2 + (\Delta\phi'')^2]}, \quad (4)$$

$C_e = C'_e$, і може бути отримане формально шляхом усереднення за період чисельника і знаменника другого співвідношення (1), якщо в останньому врахувати, що:

$$U_T = \frac{1}{2} \int_V (\sigma_{ij} \epsilon_{ij} + E_j D_j) dV.$$

Як і в електропружності, вирази для КЕМЗ у деяких частинних випадках можуть спрощуватись. Так, при роботі п'єзоелемента в режимі «прийому» по напрузі ($\tilde{Q}_1 = 0$), можна записати:

$$k_s^2 = \frac{C'_e [(\Delta\phi')^2 + (\Delta\phi'')^2]}{2U}.$$

Розрахунки коливань п'єзоелектричних тіл різної форми і розмірів [3] із відомими в літературі в'язкопружними властивостями матеріалу показали, що значення КЕМЗ, обчислені відповідно до (3) або (4), із точністю до двох-трьох

знаків збігаються із відповідними електропружними значеннями КЕМЗ, що обчислюються за формулами (1). Для резонансних частот формули (3) або (4) дають трохи завищені у порівнянні з формулами (1) значення КЕМЗ, а для нерезонансних частот – хоча і дуже малі, але відмінні від нуля значення КЕМЗ. Виняток становлять п'єзоелектрично дуже слабкі резонансні частоти, для яких ширина п'єзоактивної ділянки $\omega_a - \omega_p$ сумірна з розміром резонансної області внаслідок втрат матеріалу, а також частоти, на яких електропружний КЕМЗ перетворюється в нуль. При цьому зазначені розходження якісну картину залежності КЕМЗ від частоти не змінюють.

3. Приклад розрахунку КЕМЗ при коливаннях п'єзоелектричного стержня

Як приклад, знайдемо КЕМЗ для повздовжніх коливань в'язкопружного п'єзоелектричного стержня, збудженого електричним полем, перпендикулярним до його довжини. Використовуючи співвідношення аналогічної задачі в [2], одержимо:

$$k_s^2 = \frac{k^2}{1+k^2}, \quad k^2 = \frac{k_{31}'^2}{1-k_{31}'^2} \cdot \frac{2\sin^2 H'}{\sin 2H'}; \quad (5)$$

$$H' = \frac{\omega l}{2} \sqrt{\rho S_{11}^E}, \quad k_{31}'^2 = \frac{d_{31}^2}{S_{11}^E \mu_{33}};$$

де $k_{31}'^2$ – поперечний коефіцієнт електро-механічного зв'язку матеріалу. Завдяки введенню комплексного п'єзомодуля спостерігається краще узгодження розрахункових та експериментальних даних, зокрема при аналізі дисипації на характеристичних частотах коливань п'єзоелементів. Наявність різноманітного роду втрат, а також амплітудна залежність коефіцієнтів, що описують ці втрати, значно ускладнюють кількісний аналіз дисипації енергії при коливаннях п'єзоелектричних тіл. Для моногармонічної деформації

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon'_{ij} \cos \omega t - \varepsilon''_{ij} \sin \omega t$$

і відповідної реакції

$$\sigma_{ij} = \sigma'_{ij} \cos \omega t - \sigma''_{ij} \sin \omega t$$

напружень у якості відносної міри втрат в елементарному об'ємі матеріалу в [4] пропо-

нується використовувати величину:

$$\Psi = \frac{2\pi(\sigma'_{ij}\varepsilon'_{ij} - \sigma''_{ij}\varepsilon''_{ij})}{(\sigma'_{ij}\varepsilon'_{ij} + \sigma''_{ij}\varepsilon''_{ij})}, \quad (6)$$

в якій дисипація енергії характеризується точно, а накопичення у загальному випадку – наближено. Важливою особливістю характеристики (6) є її визначеність через величини, що вимірюються механічно. Узагальнюючи (6) на випадок коливань в'язкопружних п'єзоелектричних тіл, в якості кількісної оцінки внутрішньої дисипації можна використовувати величину:

$$\Psi = 2\pi \frac{\bar{D}}{\bar{U}}, \quad (7)$$

$$\text{де } \bar{U} = \sigma'_{ij}\varepsilon'_{ij} + \sigma''_{ij}\varepsilon''_{ij} + E'_k D'_k + E''_k D''_k,$$

$$D' = \frac{\omega}{2}(\sigma'_{ij}\varepsilon'_{ij} - \sigma''_{ij}\varepsilon''_{ij} + E'_k D'_k - E''_k D''_k),$$

$$\bar{D} = \frac{2}{\omega} D'.$$

Величина (7) характеризує відношення електромеханічної енергії $\frac{2\pi}{\omega} D'$, дисипованої в елементарному об'ємі за період коливань, до подвоєного середнього за період значення $\frac{1}{2} \bar{U}$ накопиченої електромеханічної енергії. Характеристику (7) будемо називати коефіцієнтом зату-хання електромеханічних коливань (КЗЕМК). Вона може використовуватися як відносна міра втрат в елементарному об'ємі при резонансних і нерезонансних режимах коливань. Для повного об'єму V п'єзоелемента КЗЕМК визначається наступним чином:

$$\Psi_V = 2\pi \frac{\bar{D}_V}{\bar{U}_V}, \quad \bar{D}_V = \int_V \bar{D} dV, \quad \bar{U}_V = \int_V \bar{U} dV. \quad (8)$$

Зв'язок КЗЕМК з провідністю п'єзоелемента P_m на резонансних і P_n на антирезонансних частотах встановлюють наближені співвідношення:

$$\Psi_V^{(p)} \approx \frac{2\pi k_s^2 \omega_p c'_e}{P_m}, \quad \Psi_V^{(a)} \approx \frac{2\pi k_s^{(a)2} P_n}{\omega_a c'_e}, \quad (9)$$

$$k_s^2 = \frac{k_s^{(p)2}}{1 - k_s^{(p)2}}.$$

Тим самим, співвідношення (9) дають мож-

лівість експериментального визначення КЗЕМК. У випадку простих одномірних лінійних задач електров'язкопружності і при малих втратах величина Ψ_V вироджується в характеристику матеріалу. Наприклад, при поздовжніх коливаннях в'язкопружного п'єзоелектричного стержня в електричному полі, перпендикулярному його довжині, формули (9) приводять до таких наближених значень Ψ_V на резонансних ($H'_p = \pi/2$) і антирезонансних ($\tan H'_a = -[H'_a(1 - k_{31}^{\prime 2})]/k_{31}^{\prime 2}$) частотах:

$$\Psi_V^{(p)} \approx 2\pi\delta_{11}^s, \quad \Psi_V^{(a)} \approx \Psi_V^{(p)} + 2\pi \frac{k_3^{(a)2}}{1 - k_{31}^{\prime 2}} (\delta_{11}^s - 2\delta_{31}^d + \delta_{33}^u); \quad (10)$$

де $k_3^{(a)2}$ – КЕМЗ на антирезонансній частоті, що обчислюється згідно (5):

$$k_3^{(a)2} = 2k_1^{\prime 2} / (H_a^{\prime 2} + k_1^{\prime 2} + k_4^{\prime 4}), \quad k_1^{\prime 2} = \frac{k_{31}^{\prime 2}}{1 - k_{31}^{\prime 2}}.$$

При квазістатичних коливаннях величина Ψ_V

визначається переважно тангенсом кута діелектричних втрат ($\Psi_V \approx 2\pi\delta_{33}^u$). З другої формули (10) випливає, що КЗЕМК на резонансних і антирезонансних частотах відрізняються.

4. Висновки

У даній статті розглянуто спрощену методику розрахунку КЕМЗ для поздовжніх коливань в'язкопружного п'єзоелектричного стержня. Як висновок, слід відмітити, що слабка реакція КЕМЗ на втрати в матеріалі обумовлена в першу чергу самою структурою формули (3) і є своєрідною особливістю КЕМЗ як характеристики енергоперетворення. Розглянутий коефіцієнт затухання електромеханічних коливань можна використовувати при довольному напружено-деформованому та електричному стані в резонансному і нерезонансному режимах коливань. Наведено наближені формули, які дозволяють оцінити величину КЗЕМК на резонансних та антирезонансних частотах за відомими (обчисленими або вимірними) значеннями максимальної P_m та мінімальної P_n провідності.

Список використаних джерел

1. Михайленко В. В. Нахождение коэффициентов электромеханической связи при колебаниях вязкоупругих пьезоэлектрических тел / В. В. Михайленко // Доклады НАН Украины. Сер. А. – 1997. – № 6. – С. 66–69.
2. Карнаухов В. Г. Электротермовязкоупругость: Механика связанных полей в элементах конструкций / В. Г. Карнаухов, И. Ф. Киричок. – Киев: Наукова думка, 1988. – Т. 4. – 320 с.
3. Карнаухов В. Г. Резонансные колебания осесимметрической электромеханической системы с автоподстройкой частоты / В. Г. Карнаухов, И. К. Сенченков, В. В. Михайленко // Прикладная механика. – 1995. – Т. 31, № 6. – С. 57–63.
4. Сенченков И. К. О коэффициенте поглощения энергии при циклическом деформировании вязкоупругих материалов и элементов конструкций из них / И. К. Сенченков, В. Г. Карнаухов, О. П. Червинко // Прикладная механика. – 1988. – Т. 24, № 9. – С. 90–98.

References

1. MIKHAYLENKO, V. V. (1997) Nakhozhdienie koeffitsientov electromekhanicheskoy svyazi pri kolebaniyakh vyazkoupругikh pezeoelektricheskikh tel. *Doklady NAN Ukrainy. Ser. A.* (6). p. 66–69.
2. KARNAUKHOV, V. G. & KIRICHOK, I. F. (1998). *Electrotermovязkoupругost: Mekhanika Svyazannykh Poley v Elementakh Konstrukciy*. 4. Kiev: Naukova dumka.
3. KARNAUKHOV, V. G., SENCHENKOV, I. K. & MIKHAYLENKO, V. V. (1995) Resonant vibrations of an axisymmetric electromechanical system with automatic frequency tuning. *Int. Appl. Mech.* 31 (6). p. 462–468.
4. SENCHENKOV, I. K., KARNAUKHOV, V. G., & CHERVINKO, O. P. (1988) Absorption coefficient in the cyclic deformation of structural materials and their constituent viscoelastic elements. *Int. Appl. Mech.* 24 (9). p. 904–912.

Надійшла до редакції 30.09.15

УДК 539.3

Сальнікова А. М., студент

A. M. Salnikova, Student

Дослідження нелінійних коливань пружного троса

The investigation of nonlinear oscillations of an elastic rope

Київський національний університет імені Тараса
Шевченка, 03680, м. Київ, проспект Акад.
Глушкова, 4-е
e-mail: salnikova1@ukr.net

Taras Shevchenko National University of Kyiv,
03680, Kyiv, Acad. Glushkova av., 4-e
e-mail: salnikova1@ukr.net

У цій роботі вивчаються нелінійні коливання лінійно пружного троса з малою жорсткістю на згин. Метою дослідження є встановлення зон хаотизації в фазовому просторі. Раніше подібна проблема досліджувалась за допомогою часткової лінеаризації рівнянь, застосування методу Гальоркіна, асимптотичних та чисельних методів [1, 2]. Ми для аналізу цієї задачі використовуємо дискретну модель троса: скінченний набір абсолютно твердих стрижнів, що поєднані між собою пружинами, які підкорюються лінійному закону пружності. Досліджуємо нелінійні коливання дволанкового наближення троса. Під час вивчення даної апроксимації троса використовуємо безпосередній графічний аналіз розбігання початково близьких траєкторій, перетини Пуанкаре. На основі отриманих даних визначаємо області хаотичності в просторі початкових умов.

Ключові слова: динамічний хаос, перетин Пуанкаре, подвійний маятник.

This paper studies nonlinear oscillations of linearly elastic rope with low bending rigidity. Aim of the study is to establish zones of chaotic motion in phase space. Earlier, a similar problem was studied by means of partial linearization of equations, by applying Galerkin's method, asymptotic and numerical methods [1,2]. As a result all these methods lead to a system of nonlinear ordinary differential equations.

To analyze this problem, we use a discrete model rope: a finite set of rigid rods connected by springs that are submitted linearly elastic. We investigate nonlinear oscillations of model of a cable that consists of two parts. We use direct graphical analysis of recession initially close trajectories and Poincaré sections for its investigation. These methods are widely used in this kind of problems [1, 2, 8]. Using received data, we determined chaotic regions in space of initial conditions.

Key Words: Dynamical Chaos, Poincaré Sections, Double Pendulum.

1. Вступ

Трос – легкий, гнучкий структурний елемент, що часто застосовується в космічній, цивільній та військовій інженерії, завдячуючи можливості нести корисне навантаження, проводити сигнали, передавати сили. Небажаною поведінкою такої механічної системи є хаотичні коливання, які можуть бути спричинені коливанням системи на резонансній частоті [1].

В переважній більшості робіт [1–8] отримують континуальні рівняння для даної механічної системи, використовуючи такі гіпотези: трос нерозтяжний, повздовжні коливання малі, матеріал ізотропний, згинаючий момент залежить лінійно від кривизни троса. Після отримання континуальних рівнянь зазвичай використовують або метод Гальоркіна [1–5], або методи теорії збурень [6, 7], обидва шляхи ведуть до зведення континуальних рівнянь

до зліченного набору звичайних диференціальних рівнянь, потім досліджують від двох до чотирьох невідомих функцій (рівнянь) [1]. Отримані рівняння є рівняннями типу Дуффінга, їх аналізують за допомогою чисельних методів: біфуркаційні діаграми, перетини Пуанкаре. Також існує інший шлях для дослідження даної системи: із експериментальних даних обраховують показник Ляпунова, за допомогою нього визначають розмірність вкладеного простору (відбувається дискретизація системи та перехід до скінченновимірного фазового простору без втрати інформації про поведінку системи) [8]. Далі проводиться чисельний аналіз отриманої системи.

В цій роботі ми моделюємо трос як набір абсолютно твердих стрижнів, що поєднані між собою пружинами, які підкорюються лінійному закону пружності. Отримаємо рівняння для цієї моделі, які при спрямуванні кількості стрижнів

до нескінченності прямують до рівняння континуальної моделі. Для простоти дослідження ми вивчаємо дволанкове наближення. Аналіз системи виконаний чисельно: безпосередній графічний аналіз розбігання початково близьких траєкторій, перетини Пуанкаре. На основі отриманих даних визначаємо області хаотичності в просторі початкових умов.

2. Перехід від континуальної моделі троса до дискретної

Сили реакції в n -му шарнірі, що діють на n -ту ланку: $\vec{T}_n^n = -\vec{T}_{n-1}^n \vec{\tau}_n$, $\vec{V}_n^n = \alpha_n^n \vec{V}_{n-1}^n + \gamma_n^n \vec{\beta}_n$.

Тут $\vec{\tau}_n$ – вектор, паралельний ланці, $\vec{V}_n$ та $\vec{\beta}_n$ – вектори нормалі й бінормалі n -ї ланки. Момент, що діє на n -й шарнір з боку пружини: $\vec{M}_n^n = -c(\theta_n - \theta_{n-1})\vec{\beta}_n$, де θ_n – кут відхилення від вертикалі n -ї ланки.

Рівняннями руху дискретної моделі троса, що складається із N стрижнів, є N -й закон Ньютона та закон зміни моменту кількості руху:

$$\begin{aligned} \rho \frac{d^2 \vec{r}_n}{dt^2} &= \frac{\vec{T}_n^{n+1} - \vec{T}_n^n}{l} + \frac{\vec{V}_n^{n+1} - \vec{V}_n^n}{l} + \rho g \vec{k}; \\ \frac{d^2 \vec{L}_n}{dt^2} &= \frac{1}{2} \vec{\tau}_n \times (\vec{V}_n^{n+1} + \vec{V}_n^n - \vec{T}_n^n) + \frac{\vec{M}_n^{n+1} - \vec{M}_n^n}{l}, \end{aligned} \quad (1)$$

тут $n = \overline{1, N}$

Щоб отримати рівняння руху континуальної моделі троса, спрямуємо N до нескінченності:

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial^2 \vec{r}(t, \xi)}{\partial t^2} &= \frac{\partial \vec{T}(t, \xi)}{\partial \xi} + \frac{\partial \vec{V}(t, \xi)}{\partial \xi} + \rho g \vec{k}; \\ \frac{\partial^2 \vec{L}(t, \xi)}{\partial t^2} &= \vec{\tau}(\xi) \times \vec{V}(t, \xi) + \frac{\partial \vec{M}(t, \xi)}{\partial \xi}. \end{aligned} \quad (2)$$

Тут ξ – нормальна координата, $\vec{T}$ – сила розтягу, $\vec{V}$ – перерізуючі сила, $\vec{M}$ – момент згину. Останні рівняння описують коливання середньої лінії троса при врахуванні гіпотез: нехтування опором на кручення і зсув, повздовжні коливання нехтовно малі, довжина троса постійна, матеріал троса ізотропний, згинаючий момент лінійно залежить від кривизни троса [2].

3. Визначення зон регулярного і хаотичного руху дволанкового наближення троса

Відомо, що плоский рух нестійкий (вже при малій початковій різниці радіальних кутів

необхідно розглядати рух у тривимірному просторі), тому ми сконцентрувалися на дослідженні просторового (в початкових умовах це виражається тим, що різниця між радіальними кутами φ_1, φ_2 не рівна нулю). За допомогою чисельних експериментів вдалося встановити приблизні зони хаотичного і регулярного руху при малих початкових кутових швидкостях обертання навколо вертикалі.

Зона регулярної поведінки:

$$\begin{aligned} \theta_1 &\in [0, \pi/13 \pm 10^{-2}], \quad \theta_2 \in (0, \pi/13 \pm \Delta\theta], \\ \Delta\theta &\in [0, 10^{-1}], \quad \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2 \in [0, 0.3], \\ \Delta\varphi &= \varphi_2 - \varphi_1 \in [0, 10^{-1}], \quad \dot{\varphi}_1, \dot{\varphi}_2 \in [0, 10^{-2}]. \end{aligned}$$

Зона хаотичної поведінки:

$$\begin{aligned} \theta_1 &\in [0, \pi], \quad \theta_2 \in (0, \pi], \\ \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2 &> 0.6 \times 10^{-2}, \\ \Delta\varphi &= \varphi_2 - \varphi_1 \in [0, \pi/10], \quad \dot{\varphi}_1, \dot{\varphi}_2 \in [0, 10^{-2}]. \end{aligned}$$

Регулярний рух відрізняли від хаотичного шляхом безпосереднього графічного аналізу розбігання початково близьких траєкторій та перерізів Пуанкаре (рис. 1–6).

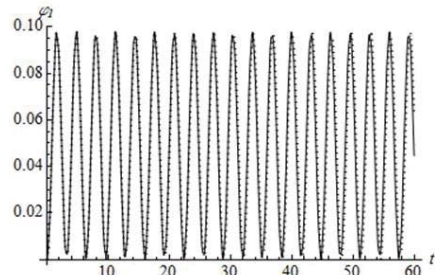


Рис. 1. Графік розбігання початково близьких траєкторій для

$$\begin{aligned} \theta_1^0 &= \pi/120, \quad \theta_2^0 = \pi/120 + 10^{-2}, \\ \dot{\theta}_1^0 &= \dot{\theta}_2^0 = 0, \quad \Delta\varphi^0 = 10^{-1}, \quad \dot{\varphi}_1^0 = \dot{\varphi}_2^0 = 0 \end{aligned}$$

4. Дія сили Коріоліса

В тому випадку, коли стрижень один, а кутова швидкість обертання навколо вертикалі відмінна від нуля, сила Коріоліса змінює свій напрям разом із швидкістю центра мас, таким чином, система постійно обертається в одному напрямі навколо вертикалі. У випадку дволанкової системи із порівняно малими кутовими

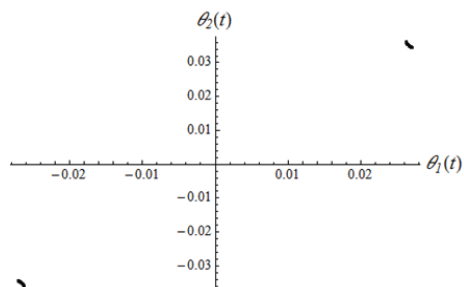


Рис. 2. Переріз Пуанкаре для
 $\theta_1^0 = \pi/120$, $\theta_2^0 = \pi/120 + 10^{-2}$,
 $\dot{\theta}_1^0 = \dot{\theta}_2^0 = 0$, $\Delta\varphi^0 = 10^{-1}$, $\dot{\varphi}_1^0 = \dot{\varphi}_2^0 = 0$

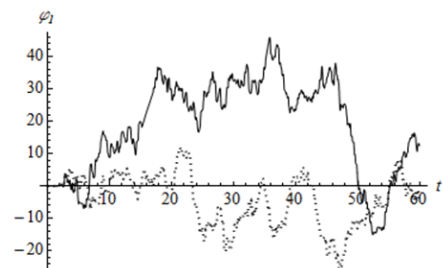


Рис. 3. Графік розбігання початково близьких траєкторій для

$$\theta_1^0 = \pi/6, \theta_2^0 = \pi/6 + 10^{-2},$$

$$\dot{\theta}_1^0 = \dot{\theta}_2^0 = 0.6, \Delta\varphi^0 = 10^{-2}, \dot{\varphi}_1^0 = \dot{\varphi}_2^0 = 0$$

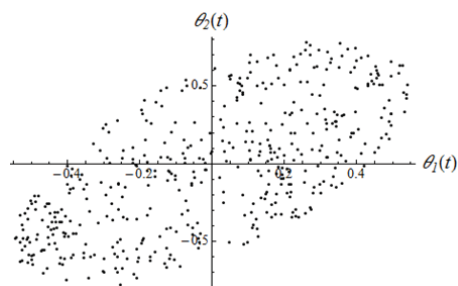


Рис. 4. Переріз Пуанкаре для
 $\theta_1^0 = \pi/6$, $\theta_2^0 = \pi/6 + 10^{-2}$,
 $\dot{\theta}_1^0 = \dot{\theta}_2^0 = 0.6$, $\Delta\varphi^0 = 10^{-1}$, $\dot{\varphi}_1^0 = \dot{\varphi}_2^0 = 0$

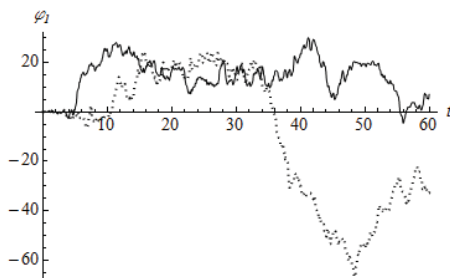


Рис. 5. Графік розбігання початково близьких траєкторій для

$$\theta_1^0 = \pi/10, \theta_2^0 = \pi/10 + 10^{-2},$$

$$\dot{\theta}_1^0 = \dot{\theta}_2^0 = 0.6, \Delta\varphi^0 = 10^{-1}, \dot{\varphi}_1^0 = \dot{\varphi}_2^0 = 0$$

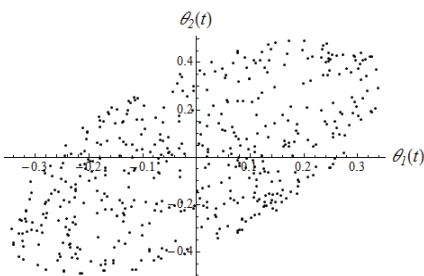


Рис. 6. Переріз Пуанкаре для

$$\theta_1^0 = \pi/10, \theta_2^0 = \pi/10 + 10^{-2},$$

$$\dot{\theta}_1^0 = \dot{\theta}_2^0 = 0.6, \Delta\varphi^0 = 10^{-1}, \dot{\varphi}_1^0 = \dot{\varphi}_2^0 = 0$$

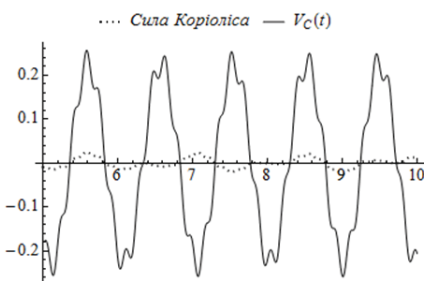


Рис. 7. Зміна із часом сили Коріоліса та швидкості центра мас. Регулярний випадок

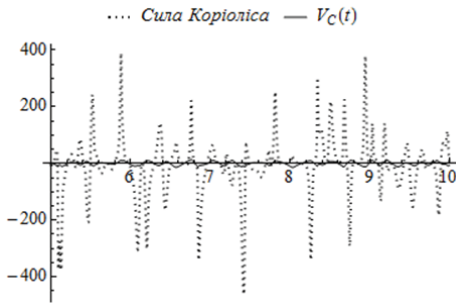


Рис. 8. Зміна із часом сили Коріоліса та швидкості центра мас. Хаотичний випадок

швидкостями обертання навколо вертикалі ланки взаємодіють між собою і обертаються то в одну, то в іншу сторону. Це спричинює зміну напрямку швидкості центра мас ланки, що може виступати в ролі «розгойдування» системи. Із рис. 7, 8 помітимо, що у випадку регулярного руху сила Коріоліса змінює свій напрям разом із швидкістю, а у випадку хаотичного руху сила змінює свій напрям частіше і не періодично. Така поведінка зустрічається у всіх випадках відповідно регулярного і хаотичного рухів.

Така закономірність зумовлена зокрема тим, що кутова швидкість обертання навколо вертикалі змінює свій напрям. Якщо початкова кутова швидкість рівна нулю або дуже мала, то ланки обертаються то за годинниковою стрілкою, то проти, що спричиняє неперіодичну зміну напрямку дії сили Коріоліса. Це наштовхнуло на думку збільшити початкову кутову швидкість таким чином, щоб у процесі руху вона не змінювала свого напрямку, тобто, щоб система із двох ланок постійно оберталась в одному напрямку навколо вертикалі.

5. Вплив кутової швидкості обертання на хаотизацію системи

За допомогою багатьох чисельних експериментів встановили, що при перевищенні кутових швидкостей певних значень хаотична поведінка зникає. Наведемо приклади руху з малими кутовими швидкостями та тими, що перевищують необхідне для регулярного руху значення.

Видно із перетинів Пуанкаре, що зі збільшенням цих початкових кутових швидкостей хаотична поведінка зникає.

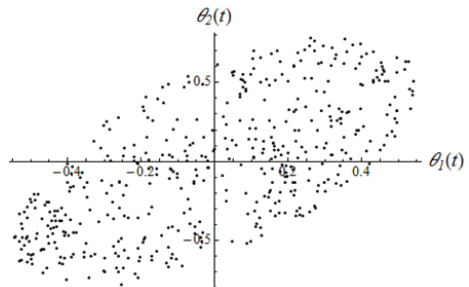


Рис. 9. Переріз Пуанкаре для $\dot{\varphi}_1^0 = \dot{\varphi}_2^0 = 0$

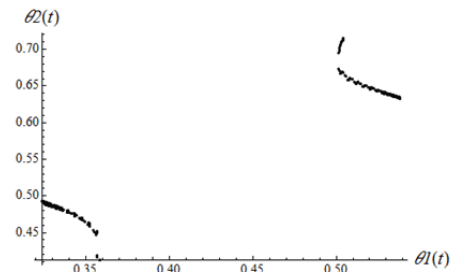


Рис. 10. Переріз Пуанкаре для $\dot{\varphi}_1^0 = \dot{\varphi}_2^0 = 5$

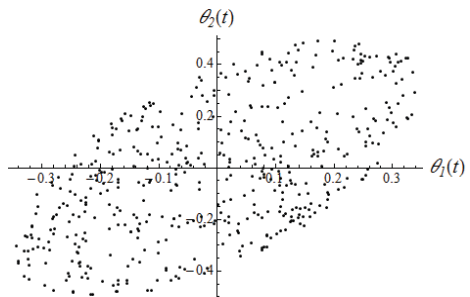


Рис. 11. Переріз Пуанкаре для $\dot{\varphi}_1^0 = \dot{\varphi}_2^0 = 10$

Також покажемо, що в цьому разі сила Коріоліса стає періодичною (рис. 13, 14).

На жаль, знайти такі початкові значення кутових швидкостей, які роблять рух системи регулярним, вдається не завжди. А саме, в тому

разі, коли кути відхилення від вертикалі менші за 10^{-1} , це зробити не вдається.

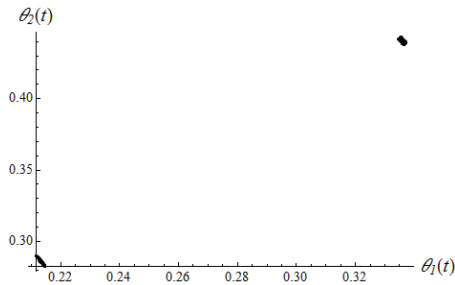


Рис. 12. Переріз Пуанкаре для $\phi_1^0 = \phi_2^0 = 4$

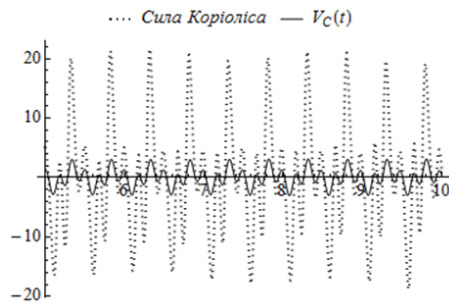


Рис. 13. Зміна із часом сили Коріоліса та швидкості центра мас

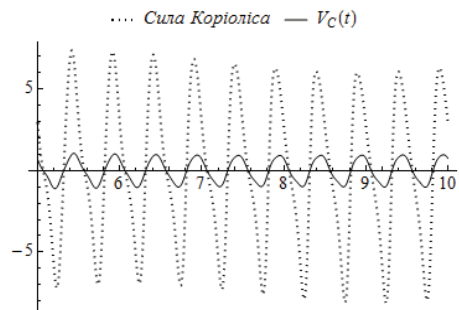


Рис. 14. Зміна із часом сили Коріоліса та швидкості центра мас

6. Висновки

Побудована дискретна модель пружного троса. Показано, що при нескінченному збільшенні ланок вона прямує до відомої моделі тросу у частинних похідних.

Досліджене дволанкове наближення троса. За допомогою перетинів Пуанкаре та аналізу графіків розбігання початково близьких траєкторій встановлення зони хаотичного і регулярного руху для малих швидкостей обертання навколо вертикалі.

Встановлена закономірність появи хаотичного руху від сили Коріоліса, тобто фізичний зміст регулярної зони.

Список використаних джерел

1. Giuseppe R. Nonlinear vibrations of suspended cables—Part I: Modeling and analysis / R. Giuseppe // *Applied Mechanics Reviews*. – 2005. – Vol. 6. – P. 443–478.
2. Champneys A. R. The 'Indian rope trick' for a parametrically excited flexible rod: linearized analysis / Fraser W. B. // *Proceedings of the Royal Society of London*. – 2000. – Vol. 456. – P. 553–570.
3. Ho C.-H. Non-planar, non-linear oscillations of a beam-i. forced motions / C.-H. Ho, R. A. Scott, J. G. Easley // *Non-Linear Mechanics*. – 1975. – Vol. 10, № 2. – P. 137–127.
4. Younesian D. Analytical solutions for free oscillations of beams on nonlinear elastic foundations using the variational iteration method / D. Younesian, Z. Saadatnia, H. Askari // *Journal*

References

1. GIUSEPPE, R. (2005) Nonlinear vibrations of suspended cables—part I: modeling and analysis. *Applied Mechanics Reviews*. 6. p. 443–478.
2. CHAMPNEYS, A. R. & FRASER, W. B. (2000) The 'Indian rope trick' for a parametrically excited flexible rod: linearized analysis. *Proceedings of the Royal Society of London*. 456. p. 553–570.
3. HO, C.-H., SCOTT, R. A. & EISLEY, J. G. (1975) Non-planar, non-linear oscillations of a beam-i. forced motions. *Non-Linear Mechanics*. 10 (2). p. 137–127.
4. YOUNESIAN, D., SAADATNIA, Z. & ASKARI, H. (2012) Analytical solutions for free oscillations of beams on nonlinear elastic foundations using the variational iteration

- of Theoretical and Applied Mechanics. – 2012. – Vol. 50, № 2. – P. 639–652.
5. Wang L. Large amplitude motion mechanism and non-planar vibration character of stay cables subject to the support motions / L. Wang, Y. Zhao // *Journal of Sound and Vibration*. – 2009. – Vol. 327. – P. 121–133.
 6. Wang L. Multiple internal resonances and non-planar dynamics of shallow suspended cables to the harmonic excitations / L. Wang, Y. Zhao // *Journal of Sound and Vibration*. – 2009. – Vol. 319. – P. 1–14.
 7. Lenci S. Chaotic dynamics of an elastic beam resting on a winkler-type soil / S. Lenci, A. M. Tarantino // *Chaos, Solitons & Fractals*. – 1996. – Vol. 7, № 10. – P. 1601–1614.
 8. Bontempi F. Nonlinear dynamics versus chaotic motion for MDOF structural systems / F. Bontempi, F. Casciati // *Chaos, Solitons & Fractals*. – 1996. – Vol. 7, № 10. – P. 1659–1682.
 - method. *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*. 50 (2). p. 639–652.
 5. WANG, L. & ZHAO, Y. (2009) Large amplitude motion mechanism and non-planar vibration character of stay cables subject to the support motions. *Journal of Sound and Vibration*. 327. p. 121–133.
 6. WANG, L. & ZHAO, Y. (2009) Multiple internal resonances and non-planar dynamics of shallow suspended cables to the harmonic excitations. *Journal of Sound and Vibration*. 319. p. 1–14.
 7. LENCI, S. & TARANTINO, A. M. (1996) Chaotic dynamics of an elastic beam resting on a winkler-type soil. *Chaos, Solitons & Fractals*. 7 (10). p. 1601–1614.
 8. BONTEMPI, F. & CASCIATI, F. (1996) Nonlinear dynamics versus chaotic motion for MDOF structural systems. *Chaos, Solitons & Fractals*. 7 (10). p. 1659–1682.

Надійшла до редколегії 30.09.15

УДК 539.595

Семенович К. О., аспірант

Внутрішній резонанс в системі резервуар—рідина на маятниковому підвісі

Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 83000, м. Київ, проспект
Акад. Глушкова, 4-е
e-mail: kateryna.semenovych@gmail.com

К. О. Semenovych, Postgraduate Student

Internal resonance in the system reservoir– liquid on pendulum suspension

Taras Shevchenko National University of Kyiv,
83000, Kyiv, Acad. Glushkova av., 4-e
e-mail: kateryna.semenovych@gmail.com

Розглянуто задачу про рух циліндричного резервуару на маятниковому підвісі, частково заповненого ідеальною нестисливою рідиною, під дією зовнішнього періодичного навантаження. Вивчено зміни розподілу власних частот системи в залежності від довжини підвісу при врахуванні сумісності руху, виявлено ефект внутрішнього резонансу, що проявляється у значному зростанні амплітуди першої вісесиметричної форми коливань рідини, яку не можна збудити зовнішнім впливом на резервуар.

Ключові слова: нелінійна динаміка рідини, вільна поверхня рідини, кутовий рух резервуара, циліндричний резервуар, внутрішній резонанс.

Problem of dynamics of cylindrical reservoir, partially filled by ideal incompressible liquid, on pendulum suspension under external periodic loading is investigated within the framework of model of combined motion. Redistribution of normal frequencies of the system depending on pendulum length is analyzed. It was shown that resonant properties of the system in combined motion undergo substantial changes in comparison with the case of immovable reservoir. Partial frequencies of the system become non-resonant frequencies and the system manifests no special effects in their vicinities. Normal frequencies of liquid modes differ considerably from their partial values. At the same time depending on length of pendulum suspension their arrangement is also changed in comparison with arrangement of partial frequencies. We showed potential of existence of resonant lengths of pendulum suspension. In the case of such internal resonance phenomenon of increase of amplitude of axisymmetric mode in comparatively durable period is manifested. It is worthy to note that axisymmetric mode of liquid motion cannot be excited by external loading of the reservoir, however, on excitation of the system with parameters, which corresponds to internal resonant, this becomes possible.

Key Words: Nonlinear Liquid Dynamics, Liquid Free Surface, Angular Motion of Reservoir, Cylindrical Tank, Internal Resonance.

1. Вступ

Розглянуто задачу про рух циліндричного резервуару, частково заповненого ідеальною нестисливою рідиною, під дією зовнішнього гармонічного навантаження. До початку руху система знаходиться в стані рівноваги, зовнішнє навантаження діє на резервуар протягом всього часу вивчення динаміки системи. Задачу розглянуто в сумісній постановці. Як показали дослідження, в такому випадку власні частоти системи суттєво змінюються і не дорівнюють парціальним. Було виявлено, що на частотах зовнішнього навантаження, які є близькими до власної частоти маятника, яскраво проявляються резонансні ефекти, натомість на власній частоті першої антисимет-

ричної форми коливань рідини резонанс не проявляється і система після тривалого перехідного періоду виходить на квазіусталений режим руху. На парціальних частотах системи резонансних ефектів не виявлено. Було вивчено зміну резонансних властивостей системи в залежності від довжини підвісу та встановлено, що існує такий набір параметрів системи, при якому частоти першої антисиметричної та першої вісесиметричної форм коливань рідини співпадають, і виникає внутрішній резонанс, який проявляється зростанням амплітуди вісесиметричної форми рідини після тривалого часу руху.

2. Математична модель

Для вивчення динаміки системи було використано математичну модель [1]. Резервуар являє собою круговий циліндр з абсолютно гладкими та твердими стінками, рідина є ідеальною, нестисливою та однорідною, рух рідини вважається безвихровим. Кінематичні обмеження задачі наступні:

$$\begin{aligned} \Delta\phi &= 0; \quad \Delta\vec{\Omega} = 0 \text{ в } \tau; \\ \frac{\partial\phi}{\partial n} &= \vec{\varepsilon} \cdot \vec{n} \text{ на } \Sigma, \quad \frac{\partial\vec{\Omega}}{\partial n} = \vec{r} \times \vec{n} \text{ на } S_0 + \Sigma; \\ \frac{\partial\xi}{\partial t} + \vec{\nabla}\xi \cdot [\vec{\nabla}\phi_0 + \vec{\nabla}(\vec{\omega} \cdot \vec{\Omega}) - \dot{\vec{\varepsilon}} - \vec{\omega} \times \vec{r}] &= \\ = \frac{\partial\phi_0}{\partial z} + \vec{\omega} \cdot \frac{\partial\vec{\Omega}}{\partial z} - \dot{\varepsilon}_z - (\vec{\omega} \times \vec{r})_z &\text{ при } z = \xi. \end{aligned} \quad (1)$$

Динамічні граничні умови та рівняння руху отримуються з варіаційного принципу Гамільтона – Остроградського.

При розв'язанні поставленої задачі були застосовані варіаційні принципи та алгоритми. Оскільки варіаційні підходи вимагають попереднього задовільнення кінематичних граничних умов, були обрані відповідні представлення шуканих змінних [1]:

$$\begin{aligned} \xi &= \sum_n a_n(t) \psi_n(r, \theta), \\ \phi &= \sum_n b_n(t) \psi_n(r, \theta) \frac{\cosh \kappa_n(z+H)}{\kappa_n \sinh \kappa_n H}, \\ \vec{\Omega} &= \vec{\Omega}_0 + \sum_n \vec{q}_n(t) \psi_n(r, \theta) \frac{\cosh \kappa_n(z+H)}{\kappa_n \sinh \kappa_n H}. \end{aligned} \quad (2)$$

Для побудови нелінійної дискретної моделі системи резервуар–рідина були введені наступні узагальнені координати: a_i – амплітуди збудження форм коливань рідини; α_i – кути відхилення резервуару; ε_i – параметри поступального руху резервуару. Після переходу до дискретної моделі шляхом застосування представлень (2) і задовільнення кінематичних в'язей переходимо до розгляду вільної механічної системи, рівняння руху якої в параметрах a_i , α_i , ε_i можна подати в наступному загальному вигляді:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N p_{rn} \ddot{a}_n + \sum_{n=N+1}^{N+3} p_{rn} \ddot{\alpha}_{n-N} + \sum_{n=N+4}^{N+6} p_{rn} \ddot{\varepsilon}_{n-N-3} &= q_r, \\ r &= 1, N+6. \end{aligned} \quad (3)$$

де p_{rn} і q_r – квадратна матриця та вектор розміру $N+6$ відповідно, N – кількість форм коливань рідини, прийнятих до розгляду. Розмірність отриманої розв'язуючої системи рівнянь (3) є мінімальною і дорівнює кількості ступенів вільності механічної системи, що вивчається. Наведена система рівнянь записана в загальному вигляді і придатна для вивчення довільного руху резервуара. За рахунок вибору системи координат з центром в точці підвісу, яка є нерухомою, поступальні рухи резервуару виключено з розгляду, тому друга сума в лівій частині рівнянь (3) зникає і в решті розмірність системи вдається скоротити до $N+3$. Для отримання чисельних результатів до розгляду було прийнято $N=12$ форм коливань рідини, відповідно до роботи [1].

3. Чисельні результати

Було розглянуто задачу сумісного руху системи резервуар–рідина під дією зовнішнього моментного навантаження $M = M_0 \cos \omega t$. В початковий момент часу резервуар знаходиться в спокої в положенні рівноваги, зовнішнє навантаження діє на систему протягом усього часу розгляду.

При врахуванні фактору сумісності спостерігається суттєва зміна власних частот коливань системи. При цьому лише частина частот залежить від довжини маятникового підвісу та співвідношення мас резервуару і рідини, внаслідок цього можуть виникати внутрішні резонанси. На рис. 1 наведено розподіл парціальних та власних частот резервуару та рідини у випадку маятникового підвісу довжиною $l = R$, де R – радіус резервуару.

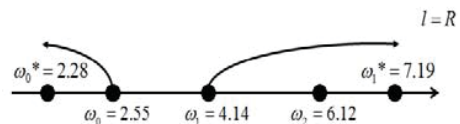


Рис. 1. Розподіл парціальних та власних частот системи резервуар–рідина для випадку $l = R$

На рис. 1 використано наступні позначення: ω_0 – парціальна частота фізичного маятника, утвореного резервуаром з рідиною, ω_1 – парціальна частота першої антисиметричної форми коливань рідини, ω_2 – парціальна частота першої осесиметричної форми коливань рідини, ω_0^* – власна частота фізичного маятника в сумісному русі,

ω_1^* – власна частота першої антисиметричної форми коливань рідини.

Частота першої вісесиметричної форми ω_2 не залежить від довжини маятникового підвісу, оскільки, як відомо, приєднані маси цієї форми, що відповідають кутовому та поступальному рухам резервуару, дорівнюють нулю [2]. Тому її власна частота не зазнає змін в сумісному русі і співпадає з парціальною:

$$\omega_2 = \omega_2^* = \text{const.} \quad (4)$$

Натомість власні частоти як фізичного маятника, так і першої антисиметричної форми коливань рідини змінюються в залежності від довжини маятникового підвісу. Для коротких підвісів (зокрема, для випадку, представленою на рис. 1) частота першої вісесиметричної форми ω_2 стає першою, саме цим фактом пояснюється характерна відмінність поведінки системи на коротких підвісах [3]. Для довгих підвісів порядок розташування частот співпадає з розташуванням парціальних частот системи. Наприклад, значення частоти першої антисиметричної форми для довжини маятникового підвісу $l=7R$ складає $\omega_1^*=5.8$ (при цьому $\omega_2=6.12$), отже, ця частота стає головною.

Цікавим є дослідження поведінки системи для значень частоти ω зовнішнього навантаження, близьких до кожної з частот, представлених на схемі рис. 1. Слід очікувати резонансні ефекти в поведінці системи при значеннях частоти зовнішньої сили, близьких до частот сумісного руху. Натомість для парціальних частот не повинно бути резонансних ефектів. Зазначимо, що для власної частоти першої антисиметричної форми в сумісному русі прояви резонансних ефектів не є значними, оскільки ця частота у випадку малих

довжин підвісу буде третьою резонансною частотою.

Існує такий набір параметрів системи, при якому власні частоти першої антисиметричної та першої вісесиметричної форм коливань рідини співпадають. Це співпадіння відбувається при довжині маятникового підвісу $l=3.08R$, тоді:

$$\omega_1^* = \omega_2 = 6.12 \quad (5)$$

Дослідження показали, що в цьому випадку на частоті зовнішнього навантаження $\omega=6.12$ в системі виникають резонансні ефекти, що проявляються у значному зростанні амплітуди першої вісесиметричної форми коливань після тривалого часу руху.

Розглянемо поведінку системи на частоті зовнішнього навантаження $\omega=6.11$, близької до резонансного значення. На Рис. 3 подано зміну в часі першої вісесиметричної форми коливань рідини. Після приблизно 80 періодів коливань резервуару амплітуда цієї форми стрімко зростає і сягає $0.1R$.

Зазначимо, що динаміка системи описується системою диференціальних рівнянь (3), яка зводиться до нормальної форми Коші, подальше розв'язання проводиться методом Рунге – Кутта. Порівняння результатів для різних значень кроку інтегрування дає підстави вважати, що спостережений процес не є результатом накопичення обчислювальної похибки. Спектральний аналіз показав, що узагальнена сила в правій частині відповідного рівняння для вісесиметричної форми містить компоненту з частотою, близькою до резонансної; для частот поза резонансною ділянкою така складова відсутня.

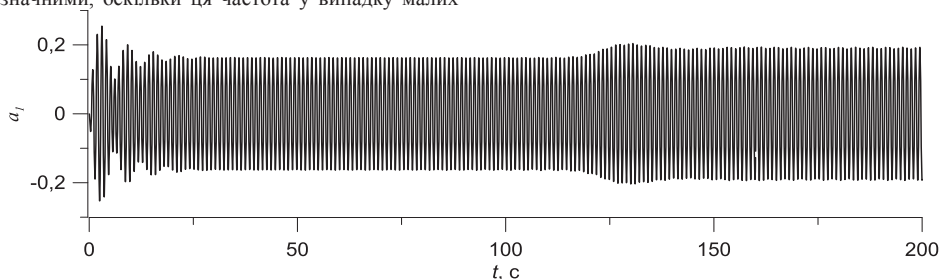


Рис. 2. Зміна в часі першої антисиметричної форми рідини при $\omega=6.11$

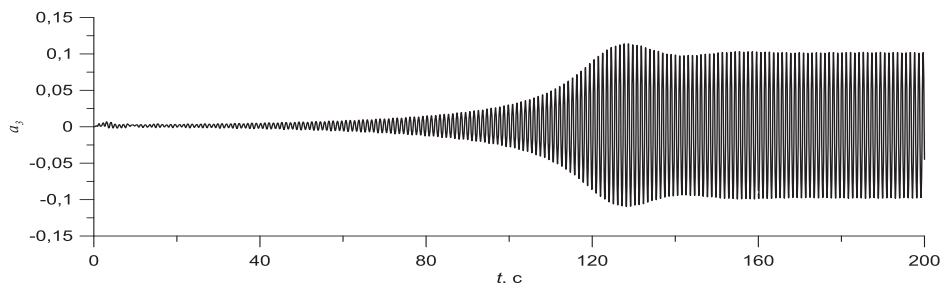


Рис. 3. Зміна в часі першої антисиметричної форми рідини при $\omega = 6.11$

На відміну від резонансу на власній частоті фізичного маятника, діапазон частот в околі власної частоти рідини, в якому проявляються резонансні ефекти, є дуже вузьким, і найменше відхилення призводить до кардинальної зміни поведінки системи: вісесиметрична форма, що є показником нелінійності коливань, практично не зазнає збурення, а коливання за домінуючою першою формою відбуваються з незначними відхиленнями від гармонічного закону.

4. Висновки

В сумісній постановці розглянуто задачу про коливання циліндричного резервуару на маятниковому підвісі і рідини з вільною поверхнею. Модель динаміки, побудовану на основі варіаційних принципів та методу модальної декомпозиції, використано для дослідження резонансних ефектів в системі. Показано, що при врахуванні фактору сумісності суттєво змінюється розподіл частот в

досліджуваній системі. Резонансні явища яскраво проявляються на частоті зовнішнього навантаження, близької до власної частоти маятника. На парціальних частотах рідини та резервуару в системі не проявляються резонансні ефекти та після нетривалого перехідного періоду система виходить на квазіусталений режим руху. Власні частоти системи істотно залежать від довжини маятникового підвісу, співвідношення мас рідини та резервуару. Знайдено довжину маятникового підвісу, при якій виникає внутрішній резонанс, що проявляється у значному зростанні амплітуди першої вісесиметричної форми коливань рідини після тривалого часу руху. Оскільки цю форму неможливо збудити через зовнішній вплив на резервуар, це явище є проявом нелінійного перерозподілу енергії в системі між формами коливань рідини та між різними формами рухів.

Список використаних джерел

1. Limarchenko O. Rotational Motion of Structures with Tanks Partially Filled by Liquid / O. Limarchenko, G. Matarazzo, V. Yasinsky. – Kyiv: «FADA LTD», 2003. – 286 p.
2. Нариманов Г. С. Нелинейная динамика космических аппаратов с жидкостью / Г. С. Нариманов, Л. В. Докучаев, И. А. Луковский. – Москва: «Машиностроение», 1977. – 208 с.
3. Лимарченко О. С. Поверхневе хвилюєтворення в системі резервуар–рідина при кутовому збуренні руху резервуару / О. С. Лимарченко, К. О. Семенович // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія: фізико-математичні науки. – 2014. – №. 3. – С. 50–53.

References

1. LIMARCHENKO, O., MATARAZZO, G. & YASINSKY, V. (2003) *Rotational Motion of Structures with Tanks Partially Filled by Liquid*. Kyiv: «FADA LTD».
2. NARIMANOV, G. S., DOKUCHAEV, L. V. & LUKOVSKY, I. A. (1977) *Nelineynaya Dinamika Kosmicheskikh Apparatov s Zhidkostyu*. Moscow, Mashinostroenie.
3. LIMARCHENKO, O. S. & SEMENOVYCH, K. O. (2014) Poverkhneve hvyleutvorennia v systemi rezervuar–ridyna pry kutovomu zburenni ruhu rezervuaru. *Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series: Physics & Mathematics*. (3). p. 50–53.

Надійшла до редколегії 30.09.15

УДК 539.3

Середницька Х. І., к. ф.-м. н.,
Мартиняк Р. М., д. ф.-м. н., с. н. с.

Міжфазна теплопроникна щілина змінної висоти у біматеріалі з нульовим параметром Дандерса

Інститут прикладних проблем механіки і мате-
матики ім. Я. С. Підстригача НАН України,
79060, м. Львів, вул. Наукова, 3-б
e-mail: labmtd@iapmm.lviv.ua

Kh. I. Serednytska, Ph. D. (Phys.-Math.),
R. M. Martynyak, Dr. Sci. (Phys.-Math.),
Sr. Sci. Researcher

The interface heat-permeable crack having variable height in the biomaterial, where Dundurs constant is zero

Pidstrygach Institute for Applied Problems of Me-
chanics and Mathematics, National Academy of
Sciences of Ukraine, 79060, Lviv, Naukova str., 3-b
e-mail: labmtd@iapmm.lviv.ua

Розглянуто задачу термопружності для біматеріалу з нульовим параметром Дандерса, на лінії з'єднання компонент якого розташована заповнена теплопровідним середовищем щілина змінної висоти. Досліджено вплив теплопровідності заповнювача, механічного і теплового навантаження на зміну форми щілини та стрибок температури між її берегами у випадках цілком розкритої та частково закритої щілини.

Ключові слова: біматеріал, міжфазна щілина, теплопровідний заповнювач.

The thermoelastic behavior of a bimaterial having zero Dundurs parameter in the presence of a height-varying interfacial crack filled with a heat-conducting medium is investigated. The bimaterial is subjected to a uniformly distributed mechanical load and a uniform heat flow. The crack that is completely opened and the crack with faces that are in contact at the regions located near the crack edges are considered. The relevant thermoelastic problems are reduced to nonlinear systems of singular integro-differential equations for a temperature jump between the crack faces and an opening of the crack due to the applied load. Analytical-numerical solutions of these systems are constructed and the effects of the thermal conductivity of the crack filler, the applied thermal and mechanical load on the crack opening and the temperature jump across the crack are analyzed. It is revealed that the crack opening and the temperature jump increase, if the heat flow is into the material with the larger distortivity, and decrease, if the heat flow is into the material with the smaller distortivity. A decrease in the thermal conductivity of the crack leads to an increase in the crack opening, when heat flows into the material with the larger distortivity, and to a decrease in the crack opening, when heat flow has the opposite direction.

Key Words: Bimaterial, Interfacial Crack, Heat-Permeable Filler.

1. Вступ

У праці [1] започатковано дослідження температурних полів і напружень у тілах з тріщинами, що містять заповнювач, який проводить тепло. Плоскі задачі термопружності для однорідного тіла з теплопроникними тріщинами розв'язано у монографії [2]. Термонапружений стан біматеріального тіла з міжфазною тріщиною з урахуванням термоопору її заповнювача вивчено у праці [3].

У цій статті досліджується термомеханічна поведінка біматеріалу, параметр Дандерса якого рівний нулю, з міжфазною щілиною змінної висоти, порожнина якої заповнена теплопровідним середовищем, що не чинить опору деформуванню тіла. Проаналізовано залежності розкриття

щілини і стрибка температури між її берегами від силового й теплового навантаження і коефіцієнта теплопровідності заповнювача у випадках, коли щілина цілком розкрита або її береги контактують на привершинних ділянках.

2. Формулювання задачі

Розглянемо біматеріальне тіло, компонентами якого є півплощини D_1 і D_2 , що характеризуються коефіцієнтами теплопровідності λ_1 і λ_2 , коефіцієнтами лінійного теплового розширення α_1 і α_2 , коефіцієнтами Пуассона ν_1 і ν_2 , модулями зсуву G_1 і G_2 . Вважаємо, що теплофізичні сталі поєднаних матеріалів різні ($\lambda_1 \neq \lambda_2$, $\alpha_1 \neq \alpha_2$), а пружні сталі, взагалі кажучи, різні

($v_1 \neq v_2$, $G_1 \neq G_2$), проте такі, що пов'язані між собою залежністю $(1-2v_1)/G_1 = (1-2v_2)/G_2$. В цьому разі параметр Дандерса біматеріалу $\beta = \frac{G_2(1-\kappa_1) - G_1(1-\kappa_2)}{G_2(1-\kappa_1) + G_1(1-\kappa_2)}$, де $\kappa_i = 3-4\nu_i$ ($i=1,2$), рівний нулеві: $\beta=0$. У праці [4] наведено числові значення параметра Дандерса різних біматеріалів, зокрема й з рівним нулю параметром β .

На міжфазній лінії біматеріалу розташована щілина завдовжки $2a$ змінної висоти, яка описується парною функцією $h_0(x)$. Береги щілини плавно змикаються $h_0'(\pm a)=0$, а її висота є малою проти довжини $h_0(x) \ll a$. Порожнина щілини заповнена теплопровідним середовищем (газом, рідиною) з коефіцієнтом теплопровідності λ_c .

Біматеріал перебуває в умовах плоскої деформації під дією заданих на безмежності перпендикулярних до міжфазної лінії однорідного стаціонарного теплового потоку $q_y^\infty = q$ та рівномірно розподілених нормальних навантажень $\sigma_y^\infty = p$ – розтягувальних ($p > 0$) або стискальних ($p < 0$). Окрім того, в напрямі, паралельному міжфазній лінії, до півплощин D_1 і D_2 на нескінченності прикладені лінійно розподілені по координаті у нормальних напрямках S_1 і S_2 , що усувають глобальне викривлення границь півплощин, зумовлене тепловим потоком q .

За дії розтягувальних навантажень ($p > 0$) тріщина цілком розкрита (рис. 1). За стискальних навантажень ($p < 0$) її береги контактуватимуть на привершинних ділянках $b < |x| < a$ (рис. 2). Береги тріщини на розкритих ділянках вільні від напружень, а вплив теплопровідності заповнювача тріщини на теплопередачу між берегами враховуватимемо [3] термоопором, пропорційним розкриттю тріщини $h(x)$ після навантаження, і обернено пропорційним коефіцієнту теплопровідності заповнювача λ_c . Поза тріщиною виконуються умови ідеального теплового і механічного контакту півплощин D_1 і D_2 . Вважаємо, що на ділянках налягання берегів тріщини між ними відбувається безфрикційний механічний та ідеальний тепловий контакт.

3. Сингулярні інтегро-диференціальні рівняння задачі

Згідно з викладеною у працях [3] методикою, стаціонарне температурне поле, напруження і переміщення у біматеріалі з нульовим параметром Дандерса подамо через розкриття тріщини

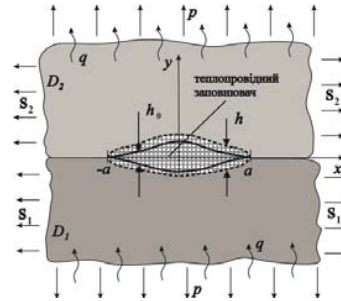


Рис. 1. Біматеріал з цілком розкритою щілиною

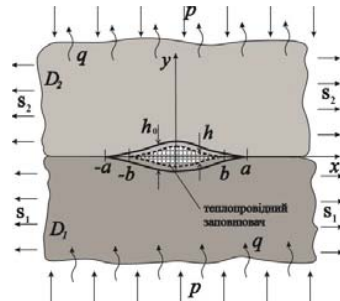


Рис. 2. Біматеріал з частково закритою щілиною

$h(x)$ та стрибок температури між її берегами $\gamma(x)$, для визначення яких отримано систему нелінійних сингулярних інтегро-диференціальних рівнянь (СІДР). Зокрема, у випадку цілком розкритої щілини (рис. 1) ця система має вигляд

$$\frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \frac{h'(t) dt}{t-x} = -\frac{Kp}{2} - \frac{\lambda \eta^-}{2} \gamma(x) + \frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \frac{h_0'(t) dt}{t-x},$$

$$\lambda_c \frac{\gamma(x)}{h(x)} - \frac{\lambda}{2\pi} \int_{-a}^a \frac{\gamma'(t)}{t-x} dt = q, \quad |x| < a, \quad (1)$$

де шукані функції на кінцях тріщини задовольняють умови $h(\pm a)=0$, $\gamma(\pm a)=0$.

У випадку контакту берегів тріщини функції $\gamma(x)$ і $h(x)$ визначаються із системи СІДР

$$\frac{1}{\pi} \int_{-b}^b \frac{h'(t) dt}{t-x} = -\frac{Kp}{2} - \frac{\lambda \eta^-}{2} \gamma(x) + \frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \frac{h'_0(t) dt}{t-x},$$

$$\lambda_c \frac{\gamma(x)}{h(x)} - \frac{\lambda}{2\pi} \int_{-b}^b \frac{\gamma'(t)}{t-x} dt = q, \quad |x| < b, \quad (2)$$

за виконання в точках змикання берегів тріщини умов $h(\pm b) = h'(\pm b) = 0$, $\gamma(\pm b) = \gamma'(\pm b) = 0$.

Тут $K = (1 - \kappa_1 \kappa_2) / (G_1 (1 - \kappa_2))$, $\eta^- = \eta_2 - \eta_1$, $\lambda = 2\lambda_1 \lambda_2 / (\lambda_1 + \lambda_2)$, $\eta_i = \alpha_i (1 + \nu_i) / \lambda_i$ – термічна дистортивність компонент біматеріалу D_i .

Для розв’язування систем СІДР (1) та (2) застосовано аналітично-числові ітераційні процедури, запропоновані у працях [3] та [5].

4. Числові результати та їх аналіз

Розв’язок задачі побудовано для щілини, початкова висота якої описується функцією $h_0(x) = 0.001a(1 - (x/a)^2)^{3/2}$. Числові розрахунки проведено для безрозмірних величин: висоти щілини $\bar{h} = h/a$, коефіцієнта теплопровідності заповнювача $\bar{\lambda}_c = \lambda_c/\lambda$, механічних зусиль $\bar{p} = Kp$, теплового потоку $\bar{q} = qa\eta^-$, півдовжини розкритої частини щілини $\bar{b} = b/a$.

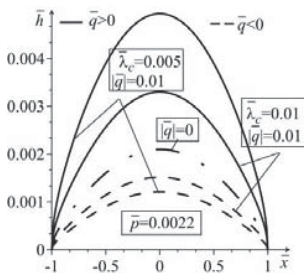


Рис. 3. Форма щілини при розтязі ($\bar{p} > 0$)

Вплив теплових деформацій на термомеханічну поведінку біматеріалу з міжфазною щілиною якісно залежить від того, чи тепловий потік скерований від матеріалу з меншою термічною дистортивністю (ТД) до матеріалу з більшою ТД, чи, від матеріалу з більшою ТД до матеріалу з меншою ТД. В першому випадку $q(\eta_2 - \eta_1) > 0$ і безрозмірний тепловий потік додатний ($\bar{q} > 0$), в другому випадку $q(\eta_2 - \eta_1) < 0$ і безрозмірний потік від’ємний ($\bar{q} < 0$).

Зміну розкриття щілини $\bar{h}$ зі зміною коефіці-

єнта теплопровідності заповнювача $\bar{\lambda}_c$ і напрямку теплового потоку проілюстровано на рис. 3 і рис. 4 для розтягуювального ($\bar{p} > 0$) і стискального ($\bar{p} < 0$) навантажень відповідно.

Суцільні лінії відповідають теплового потоку, скерованому до матеріалу з більшою ТД ($\bar{q} > 0$), штрихові – до матеріалу з меншою ТД ($\bar{q} < 0$).

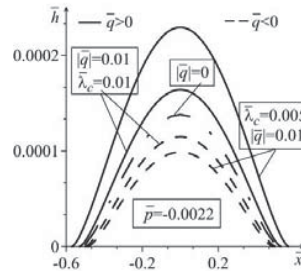


Рис. 4. Форма щілини при стиску ($\bar{p} < 0$)

Штрих-пунктирна лінія зображає розкриття тріщини за дії лише силового навантаження, коли тепловий потік відсутній ($\bar{q} = 0$). Бачимо, що термічні деформації зумовлюють збільшення розкриття щілини, якщо тепловий потік скерований до матеріалу з більшою ТД ($\bar{q} > 0$), та зменшення її розкриття, якщо напрямом потоку протилежний ($\bar{q} < 0$). Зменшення коефіцієнта теплопровідності заповнювача $\bar{\lambda}_c$ приводить до збільшення розкриття щілини у випадку $\bar{q} > 0$, та зменшення її розкриття у випадку $\bar{q} < 0$. Що менший коефіцієнт теплопровідності заповнювача, то більше змінюється розкриття тріщини при зміні напрямку теплового потоку.

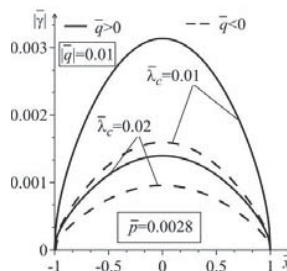


Рис. 5. Стрибок температури при розтязі ($\bar{p} > 0$)

Вплив коефіцієнта теплопровідності заповнювача щілини $\bar{\lambda}_c$ та напрямку теплового потоку на абсолютну величину стрибка температури $|\gamma|$ за

дії розтягувальних і стискальних зусиль проілюстровано на рис. 5 і рис. 6 відповідно. Бачимо, що $|\bar{\gamma}|$ спадає з ростом коефіцієнта теплопровідності заповнювача $\bar{\lambda}_c$ для обох напрямів теплового потоку. Що менша теплопровідність заповнювача, то більша різниця між абсолютними величинами стрибка температури при зміні напрямку потоку на протилежний. Зміна коефіцієнта теплопровідності заповнювача впливає на стрибок температури між берегами щілини у випадку розтягувального навантаження значно істотніше, ніж у випадку стискального.

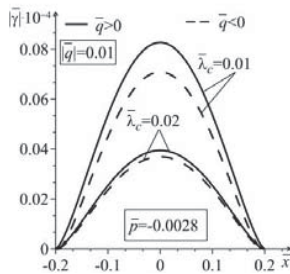


Рис. 6. Стрибок температури при стиску ($\bar{p} < 0$)

Список використаних джерел

1. Kit G. S. Determination of the stationary temperature field and stresses in the vicinity of a slit possessing heat resistance / G. S. Kit, Ya. S. Podstrigach // *Material Science*. – 1968. – Vol. 2, №3. – P. 177–181.
2. Кит Г. С. Плоские задачи термоупругости для тел с трещинами / Г. С. Кит, М. Г. Кривцун. – К.: Наук. думка, 1983. – 280 с.
3. Мартыняк Р. М. Термоупругость кусочно-однородного тела с межфазной теплопроницаемой трещиной / Р. М. Мартыняк, Х. И. Середническая // *Теоретическая и прикладная механика*. – 2012. – Т. 50. – С. 91–98.
4. Schmauder S. Correlation between Dundurs' parameters and elastic constants / S. Schmauder, M. Meyer // *Z. Metallkunde*. – 1992. – Vol. 83. – P. 524–527.
5. Martynyak R. M. Effect of heat-conductive filler on interface gap on thermoelastic contact of solids / R. M. Martynyak, K. A. Chumak // *Int. J. Heat Mass Transf.* – 2012. – Vol. 55, № 4. – P. 1170–1178.

5. Висновки

У статті задачу термопружності для біматеріалу з міжфазною щілиною змінної висоти, що містить теплопровідний заповнювач, зведено до системи нелінійних сингулярних інтегродиференціальних рівнянь відносно розкриття щілини і стрибка температури у випадках цілком розкритої і частково закритої на привершинних ділянках щілини. На основі аналітично-числового розв'язку цієї системи проаналізовано залежність термомеханічної поведінки біматеріалу від коефіцієнта теплопровідності заповнювача, силового й теплового навантаження. Виявлено, що розкриття тріщини і стрибок температури зростають, якщо тепловий потік скерований від матеріалу з меншою ТД до матеріалу з більшою ТД, і спадають, якщо напрям теплового потоку протилежний. Зі зменшенням коефіцієнта теплопровідності щілини її розкриття зростає, якщо потік скерований до матеріалу з більшою ТД, і спадає, якщо потік скерований до матеріалу з меншою ТД; водночас стрибок температури зменшується для обох напрямів теплового потоку.

References

1. KIT, G. S. & PODSTRIGACH, Ya. S. (1968) Determination of the stationary temperature field and stresses in the vicinity of a slit possessing heat resistance. *Soviet Material Science*. 2 (3). p. 177–181.
2. KIT, G. S. & KRYVTCUN, M. G. (1983) *Ploskiye Zadachi Termouprugosti Dlya Tel s Treshchinami*. Kiev: Naukova dumka.
3. MARTYNYAK, R. M. & SEREDNYTSKA, K. I. (2012) Termouprugost kusochno-odnorodnogo tela s megfaznoy teplopronitayemoy treshchinoy. *Teoreticheskaya i Prikladnaya Mekhanika*. 50 (4). p. 91–98.
4. SCHMAUDER, S. & MEYER, M. (1992) Correlation between Dundurs' parameters and elastic constants. *Z. Metallkunde*. 83. p. 524–527.
5. MARTYNYAK, R. M. & CHUMAK, K. A. (2012) Effect of heat-conductive filler on interface gap on thermoelastic contact of solids. *Int. J. Heat Mass Transf.* 55(4). p. 1170–1178.

Надійшла до редколегії 30.09.15

УДК 539.3

Сінчило С. В.¹, к. ф.-м. н., наук. співр.,
Савельєва К. В.¹, к. ф.-м. н., ст. наук. співр.,
Симчук Я. В.², к. ф.-м. н., наук. співр.

Комп'ютерне моделювання квадратично нелінійної гіперпружної циліндричної хвилі

¹Інститут механіки ім. С. П. Тимошенка НАН
України, 03057, м. Київ, вул. П. Нестерова, 3
e-mail: svsinchilo@gmail.com

²Київський національний технічний університет
України «Київський політехнічний інститут»,
03056, м. Київ, проспект Перемоги, 37

S. V. Sinchilo¹, Ph. D. (Phys.-Math.), Sci. Researcher
K. V. Savelieva¹, Ph. D. (Phys.-Math.),
Sr. Sci. Researcher
Y. V. Simchyk², Ph. D. (Phys.-Math.), Sci. Researcher

Computer modelling of square nonlinear hyperelastic cylindrical wave

¹S. P. Timoshenko Institute of Mechanics NAS of
Ukraine, 03057, Kyiv, P. Nesterov str., 3
e-mail: svsinchilo@gmail.com

²National Technical University of Ukraine «Kyiv
Polytechnic Institute», 03056, Kyiv, Peremohy pr., 37

Розглянуто задачу про циліндричну хвилю в гіперпружному матеріалі, деформування якого відбувається квадратично нелінійно згідно моделі Мурнагана. В роботі вивчається осесиметричний стан та представлений загальний підхід до аналізу в рамках багатьох наближень та для різних матеріалів. При використанні методу послідовних наближень обмежувались двома першими наближеннями – нульовими (лінійним) та першим. Обмеження приводиться двома аргументами: – результат у двох наближеннях збігається з результатом рішення еволюційного рівняння; – основні нелінійні хвильові явища, що описуються рішення у вигляді наближень та рішенням еволюційного рівняння, підтверджується експериментальним спостереженням. Проведено комп'ютерне моделювання профілю поширення хвилі для різних матеріалів та проведено аналіз взаємодії двох протилежних тенденцій – зростання амплітуди хвилі внаслідок врахування нелінійності деформування та зменшення амплітуди внаслідок природи циліндричної хвилі. Визначено основні етапи спотворення початкового профілю внаслідок другого та третього наближень, що характеризують собою ефекти, притаманні циліндричним (асимптотично гармонічним) хвилям, етапи розповсюдження з особливостями нелінійних плоских хвиль, вплив другого та третього наближень на початковий профіль.

Ключові слова: циліндричні хвилі, квадратично нелінійні хвилі, модель Мурнагана.

The problem of a cylindrical wave in hyperelastic material whose deformation is nonlinear quadratic model under Murnaghana. In this work, the axisymmetric condition and presented a common approach to the analysis under many approximations and for different materials. When using the method of successive approximations limited first two approximations–zero (linear) and first. Restrictions driven by two arguments:–the result of two matches approximations by solving evolutionary equations; –basic nonlinear wave phenomena, described the decision as a decision approximations and evolutionary equations confirmed by experimental observation. Computer modelling of wave propagation profile for various materials and the analysis of the interaction of two opposing trends–the growth wave amplitude nonlinearity due consideration of deformation and decrease in amplitude due to the nature of a cylindrical wave. The basic stages of the original profile distortion due to the second and third approximations describing the effect inherent cylindrical (asymptotically harmonic) wave, stages nonlinear propagation characteristics of plane waves, the effect of the second and third approximations to the original profile.

Key Words: Cylindrical Wave, Quadratically Nonlinear Wave Equation, Murnaghan Model.

1. Вступ

В даній статті розглядається циліндрична хвиля [1, 2, 6] в гіперпружному матеріалі, деформування якого проходить квадратично нелінійно згідно моделі Мурнагана. Ця хвиля може розгля-

датися в різних постановках (стан плоскої деформації, осесиметричний та інші стани) [7–9]. Вивчається осесиметричний стан. В роботі розглядається загальний підхід до аналізу в рамках багатьох наближень через функції Ханкеля.

При використанні методу послідовних наближень обмежувались двома першими наближеннями – нульовими (лінійним) та першим. В обґрунтуваннях цього обмеження приводились два аргументи [3]: 1) результат в рамках двох наближень співпадає з результатом рішення еволюційного рівняння при застосуванні методу повільної зміни амплітуд; 2) основні нелінійні хвильові явища, що описуються рішенням у вигляді наближень та рішенням еволюційного рівняння, підтверджується експериментальним спостереженням.

2. Постановка задачі та її розв'язання

Приймаємо в якості вихідного нелінійне хвильове рівняння, яке відповідає осесиметричному залежному тільки від координати r та з віссю симетрії Oz стану континуума (цей стан характерний для класичної циліндричної хвилі) та в якому враховані фізична та геометрична нелінійність [8, 9]

$$u_{r,tt} - \frac{\lambda + 2\mu}{\rho} \left(u_{r,r} + \frac{u_r}{r} \right)_{,r} = S(u_r, u_{r,r}, u_{r,rr}), \quad (1)$$

$$S(u_r, u_{r,r}, u_{r,rr}) = -\tilde{N}_1 u_{r,rr} u_{r,r} - \tilde{N}_2 \frac{1}{r} u_{r,rr} u_r - \\ - \tilde{N}_3 \frac{1}{r^2} u_{r,r} u_r - \tilde{N}_4 \frac{1}{r} (u_{r,r})^2 - \tilde{N}_5 \frac{1}{r^3} (u_r)^2;$$

$$\tilde{N}_1 = \left[3 + \frac{2(A + 3B + C)}{\lambda + 2\mu} \right];$$

$$\tilde{N}_2 = \frac{\lambda + 2B + 2C}{\lambda + 2\mu}; \quad \tilde{N}_3 = \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu};$$

$$\tilde{N}_4 = \frac{2\lambda + 3\mu + A + 2B + 2C}{\lambda + 2\mu};$$

$$\tilde{N}_5 = \frac{2\lambda + 3\mu + A + 2B + C}{\lambda + 2\mu}.$$

Прийняті такі позначення: $u_r(r, t)$ – радіальне переміщення, r – пройдена хвилею відстань, t – час пройдений хвилею, ρ – постійна густина, λ, μ – пружні постійні другого порядку (постійні Ляме), A, B, C – пружні постійні третього порядку (постійні Мурнагана), точкою позначено диференціювання по часу t , комою після індексу – диференціювання по просторовій змінній r .

Розглянемо гармонічні по часу циліндричні хвилі, що виникають в гіперпружному середовищі з циліндричною порожниною радіуса r_o , коли до цієї порожнини прикладена гармонічна в

часі потужність $\sigma^r(r_o, t) = p_o e^{i\omega t}$ або гармонічне в часі зміщення $u_r(r_o, t) = u_{ro} e^{i\omega t}$. В лінійному випадку такі хвилі задаються аналітичним рішенням лінійного хвильового рівняння

$$u_{r,tt} - (v_{ph})^2 \left(u_{r,r} + \frac{u_r}{r} \right)_{,r} = 0 \quad (2)$$

через функції Ханкеля першого роду и першого порядку [3–6]

$$u_r^{(0)}(r, t) = u_{ro} H_1^{(1)}(k_L r) e^{i\omega t}, \quad (3)$$

де u_{ro} – амплітудний множник, що визначається по граничній умові на поверхні площини

$$u_{ro} = - \frac{p_o k_L}{k_L (\lambda + 2\mu) H_0^{(1)}(k_L r_o) - \frac{2\mu}{r_o} H_1^{(1)}(k_L r_o)};$$

$k_L = (\omega/v_L)$ – хвильове число повздовжньої плоскої хвилі.

Основними особливостями циліндричної хвилі є те, що вона вже є гармонічна (асимптотично гармонічна) та її інтенсивність затухає з часом розповсюдження.

В той же час особливістю нелінійних плоских та циліндричних хвиль при їх аналізі методом послідовних наближень є зростання розмаху коливань (зростання інтенсивності хвилі) з часом проходження відстані хвилею.

Таким чином, в прийнятій роботі проведений аналіз взаємодії двох протилежних тенденцій – зростання амплітуди хвилі внаслідок врахування нелінійності деформування та зменшення амплітуди внаслідок природи циліндричної хвилі.

В рамках перших двох наближень, розповсюдження циліндричної хвилі описується формулою

$$u_r(r, t) = u_r^{(0)}(r, t) + u_r^{(1)}(r, t) = u_{ro} H_1^{(1)}(k_L r) e^{i\omega t} + \\ \left\{ B_{00} [H_0^{(1)}(k_L r)]^2 + B_{11} [H_1^{(1)}(k_L r)]^2 + \right. \\ \left. + B_{01} H_0^{(1)}(k_L r) H_1^{(1)}(k_L r) \right\} e^{2i\omega t}, \quad (4)$$

де

$$B_{00} = \left(\frac{1}{(k_L r)^2} - 2 \right)^{-1} \left(k_L \left(\tilde{N}_1 + \tilde{N}_4 \right) \frac{1}{(k_L r)} - 2B_{11} \right); \\ B_{11} = k_L \left(-2 + \frac{3}{(k_L r)^2} - 2 \left(\frac{1}{1 - 2(k_L r)^2} \right) + \right.$$

$$\begin{aligned}
 &+8\left(\frac{1}{1-4(k_L r)^2}\right)^{-1} \times \left(\left(-\tilde{N}_1+\tilde{N}_2\right) \frac{1}{k_L r}+\right. \\
 &+\left.\left(2 \tilde{N}_1-2 \tilde{N}_2+\tilde{N}_3-\tilde{N}_4-\tilde{N}_5\right) \frac{1}{\left(k_L r\right)^3}-\right. \\
 &\left.-2\left(\tilde{N}_1+\tilde{N}_4\right)\left(\frac{\left(k_L r\right)^2}{1-2\left(k_L r\right)^2}\right) \frac{1}{\left(k_L r\right)}-\right. \\
 &\left.-\tilde{N}_1 \frac{2}{k_L r}\left(\frac{\left(k_L r\right)^2}{1-4\left(k_L r\right)^2}\right)-\left(-\tilde{N}_1+\tilde{N}_2-\tilde{N}_3+2 \tilde{N}_4\right) \times\right. \\
 &\left.\times \frac{2}{k_L r} \frac{1}{\left(k_L r\right)^2}\left(\frac{\left(k_L r\right)^2}{1-4\left(k_L r\right)^2}\right)\right)
 \end{aligned}$$

Рішення (4) спростуємо при умові, що пройдений хвилюю проміжок $(r-r_0)$ відповідає довжині хвилі λ_L таким чином, що

$$k_L = 2\pi / \lambda_L \rightarrow k_L r = 2\pi r / \lambda_L \rightarrow r > 3\lambda_L \rightarrow k_L r > 20.$$

Тоді в рамках перших трьох наближень та прийнятих спрощень, розповсюдження циліндричної хвилі описується формулою

$$\begin{aligned}
 u_r(r, t) &= u_r^{(0)}(r, t) + u_r^{(1)}(r, t) + u_r^{(2)}(r, t) = \\
 &u_0 H_1^{(1)}(k_L r) e^{i\omega t} - \frac{1}{4} u_0^2 k_L \frac{N_1}{\lambda + 2\mu} H_0^{(1)}(k_L r) H_1^{(1)}(k_L r) e^{2i\omega t} + \\
 &+ \frac{1}{48} u_0^4 k^3 \left(\frac{N_1}{\lambda + 2\mu}\right)^3 H_0^{(1)}(k_L r) H_1^{(1)}(k_L r) \times \\
 &\times \left(\left(H_1^{(1)}(k_L r)\right)^2 - \left(H_0^{(1)}(k_L r)\right)^2\right) e^{4i\omega t}
 \end{aligned}$$

Рішення виражається через функції Ханкеля нульового та першого порядку та містить перші, другі та четверті гармоніки.

Далі приведені результати аналізу спотворення початкового профілю циліндричної хвилі для різних матеріалів. Окрема увага приділена моделюванню впливу другого та третього наближення.

3. Результати розрахунків та їх аналіз

Для комп'ютерного аналізу використовувались дані про фізичні постійні матеріалів (густина, дві постійні Ляме, три постійні Мурнагана).

При розрахунках приймалися такі значення (в системі СИ): початкова амплітуда $u_0 = 1 \cdot 10^{-3}$ м, частота хвилі $\omega = 1.5$ МГц, хвильове число $k_L = 4000$ 1/м., $r_0 = 5 \cdot 10^{-3}$ м. На представлених нижче рисунках 1–4 показано спотворення поча-

ткового профілю циліндричної хвилі для сталі, як показові.

Рис. 1–4 однотипні, по вісі абсцис відкладена величина r . По вісі ординат відкладена амплітуда осциляції u_r .

Вивчення декількох матеріалів показав повторюваність основного принципу спотворення хвилі, який наведений рис. 1–4. Рис. 2 та 3 показують достатньо швидку осциляцію при другому та третьому наближенні осциляції. З рис. 4 видно, що при достатньо швидкому початковому збільшенні амплітуди вона згасає з часом та з часом

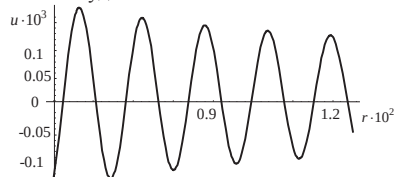


Рис. 1. Спотворення початкового профілю

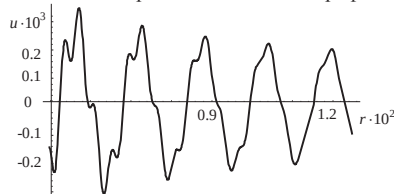


Рис. 2. Спотворення початкового профілю при другому наближенні

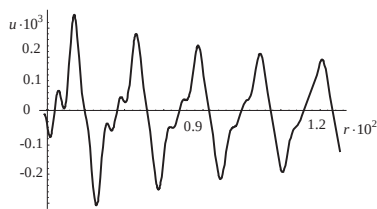


Рис. 3. Спотворення початкового профілю при другому та третьому наближенні

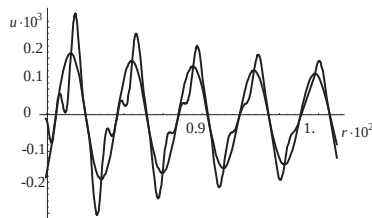


Рис. 4. Суміщення початкового профілю та профілю при другому та третьому наближенні

повторює початковий профіль (на відстані от $2.5r_0$ до $5r_0$).

Основні хвильові ефекти:

- з часом розповсюдження хвилі спостерігаються ефекти притаманні циліндричним (асимптотично гармонічним) хвилям, а саме її інтенсивність згасає з часом розповсюдження;
- спочатку розповсюдження спостерігаються особливості нелінійних плоских хвиль при їх аналізі методом послідовних наближень, а саме зростання розмаху коливань (зростання інтенсивності хвилі) з часом проходження відстані хвилею;
- з часом вплив другого та третього наближень зменшується і має незначний вплив на початковий профіль.

Список використаних джерел

1. Рушницький Я. Я. Хвилі в матеріалах з мікроструктурою / Я. Я. Рушницький, С. І. Цурпал. – К.: Інст. механіки ім. С. П. Тимошенка, 1998. – 377 с.
2. Achenbach J. D. Wave Propagation in Elastic Solids / J. D. Achenbach. – Amsterdam: North Holland Publishing Company, 1973. – 425 p.
3. Cattani C. Wavelet and Wave Analysis as Applied to Materials with Micro or Nanostructure / C. Cattani, J. J. Rushchitsky. – Singapore-London: World Scientific, 2007. – 466 p.
4. Kratzer A. Transcendente Funktionen / A. Kratzer, W. Franz. – Leipzig: Akademische Verlagsgesellschaft, 1960. – 466 S.
5. Olver F. W. J. Asymptotics and Special Functions / F. W. J. Olver. – New York: Academic Press, 1974. – 528 p.
6. Rushchitsky J. J. Nonlinear Elastic Waves in Materials / J. J. Rushchitsky. – Heidelberg: Springer, 2014. – 454 p.
7. Rushchitsky J. J. Quadratically nonlinear cylindrical hyperelastic waves – derivation of wave equations. Plane strain state / J. J. Rushchitsky // Int. Appl. Mech. – 2005. – Vol. 41, № 5. – P. 701–712.
8. Rushchitsky J. J. Quadratically nonlinear cylindrical hyperelastic waves – derivation of wave equations. Axisymmetrical and other states / J. J. Rushchitsky // Int. Appl. Mech. – 2005. – Vol. 41, № 6. – P. 831–840.
9. Rushchitsky J. J. Quadratically nonlinear cylindrical hyperelastic waves – primary analysis of evolution / J. J. Rushchitsky // Int. Appl. Mech. – 2005. – 41, N 7. – P. 825 – 833.

4. Висновки

До задачі про поширення плоскої поздовжньої гармонічної хвилі в гіперпружному матеріалі з циліндричною порожниною радіуса r_0 , деформування якого відбувається квадратично нелінійно згідно з класичною моделлю Мернагана, застосовано метод збурень (метод малого параметра).

Комп'ютерним моделюванням показано основні ефекти спотворення початкового профілю хвилі під впливом другого та третього наближення. Основні ефекти були отримані для різних матеріалів та різних початкових даних та проведений аналіз взаємодії двох протилежних тенденцій – врахування нелінійності деформування хвилі та природа циліндричної хвилі

References

1. RUSHCHITSKY, J. J. & TSURPAL, S.I. (1998) *Hvili v Materialah z Mikrostrukturoyu*. K.: Inst. Mehaniki im.S. P.Timoshenka.
2. ACHENBACH, J. D. (1973) *Wave Propagation in Elastic Solids*. Amsterdam: North Holland Publishing Company.
3. CATTANI, C. & RUSHCHITSKY, J. J. (2007) *Wavelet and Wave Analysis as Applied to Materials with Micro or Nanostructure*. Singapore-London: World Scientific.
4. KRATZER, A. & FRANZ, W. (1960) *Transcendente Funktionen*. Leipzig: Akademische Verlagsgesellschaft.
5. OLVER, F. W. J. (1974) *Asymptotics and Special Functions*. New York: Academic Press.
6. RUSHCHITSKY, J. J. (2014) *Nonlinear Elastic Waves in Materials*. Heidelberg: Springer.
7. RUSHCHITSKY, J. J. (2005) Quadratically nonlinear cylindrical hyperelastic waves – derivation of wave equations. Plane strain state. *Int. Appl. Mech.* 41 (5). p. 701–712.
8. RUSHCHITSKY, J. J. (2005) Quadratically nonlinear cylindrical hyperelastic waves – derivation of wave equations. Axisymmetrical and other states. *Int. Appl. Mech.* 41 (6). p. 831–840.
9. RUSHCHITSKY, J. J. (2005) Quadratically nonlinear cylindrical hyperelastic waves – primary analysis of evolution *Int. Appl. Mech.* 41 (7). p. 825–833.

Надійшла до редколегії 30.09.15

УДК 539.3

Сулим Г. Т.¹, д. ф.-м. н., проф.,
Оліярник Н. Р.², к. ф.-м. н.,
Піскозуб Й. З.², к. ф.-м. н., доц.,
Пастернак Я. М.³, к. ф.-м. н., доц.

**Поздовжній зсув біматеріального бруса з
міжфазною тріщиною з урахуванням
фрикційного проковзування**

¹Львівський національний університет імені
Івана Франка, 79000, м. Львів, вул.
Університетська, 1
e-mail: sulym@franko.lviv.ua
²Українська академія друкарства, 79020, м.
Львів, вул. Підголосько, 19
e-mail: piskozub@pancha.lviv.ua
³Луцький національний технічний університет,
43018, м. Луцьк, вул. Львівська, 75
e-mail: pasternak@ukrpost.ua

Sulym H. T.¹, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Prof.,
Oliarynyk N. R.², Ph.D. (Phys.-Math.),
Piskozub Y. Z.², Ph.D. (Phys.-Math.), Assoc. Prof.,
Pasternak Ia. M.³, Ph.D. (Phys.-Math.), Assoc. Prof.

**A longitudinal shear of the bimaterial beam
with an interfacial crack with taking into
account the frictional slippage**

¹Ivan Franko National University of L'viv, 79000,
L'viv, Universytetska str., 1
e-mail: sulym@franko.lviv.ua
²Ukrainian Academy of Printing, 79020, L'viv,
Pidgolosko str. 19
e-mail: piskozub@pancha.lviv.ua
³Lutsk National Technical University, 43018, Lutsk,
Lvivska str., 75
e-mail: pasternak@ukrpost.ua

Побудовано гранично-елементний розв'язок антиплоскої задачі для біматеріального бруса із закритою міжфазною тріщиною, навантаженого розподіленою зосередженою силою у поздовжньому напрямку та нормальним стиском для запобігання втраті контакту поверхонь тріщини. Береги тріщини можуть взаємно проковзувати з урахуванням сухого тертя.

Для розв'язування застосовано гранично-елементний метод функцій стрибка з використанням розширеного формалізму Стро, побудовано гіперсингулярне рівняння для визначення стрибка переміщень та напружень на ділянці проковзування з тертям.

Здійснено числові розрахунки для різних поперечних перерізів бруса (квадрат, прямокутник), навантаженого зсувними зосередженими силами. Проаналізовано вплив їхньої інтенсивності та розміщення, відношення розмірів поперечного перерізу бруса до ширини тріщини та відношення модулів зсуву матеріалів тіла на виникнення зони фрикційного проковзування та її ширини, а також на характеристики розподілу стрибків переміщень. Зіставленням отриманих даних у часткових випадках квадратного бруса із відповідним аналітичним розв'язком для біматеріалу підтверджено достовірність результатів та ефективність застосованої методики до розв'язування цього класу задач.

Ключові слова: тертя, міжфазна тріщина, антиплоска деформація, біматеріал.

We constructed the boundary-element solution of the anti-plane problem for a bi-material beam with the closed interfacial crack exposed to the loading by a concentrated force in the longitudinal direction and normal load required to prevent a loss of contact between the surfaces of the cracks. The faces of the crack can move relatively to each other with a dry friction.

Using the boundary-element jump function method and Stroh formalism, the problem is reduced to solution of the hypersingular integral equations for the jumps of the displacements and stresses in areas with a sliding friction.

Several forms (square, rectangle) of beam cross sections exposed to the concentrated shear forces are numerically calculated. The friction zone width and displacements dependence on the intensity of the forces and location of their points of application, the aspect ratio of the beam cross-section, and shear modulus of the beam materials are analyzed. A comparison of the data for the square timber in partial cases with the corresponding analytical solution for a bimaterial confirmed the accuracy of the results and effectiveness of the methodology applied to the solution of this class of problems.

Key Words: Friction, Interface Crack, Anti-Plane Deformation, Bi-Material.

1. Вступ

Задачі теорії пружності та руйнування для тіл з тріщинами, де можуть контактувати поверхні, постійно викликають велике зацікавлення дослідників (див. огляди [1–3]). Можливість фрикційної взаємодії на поверхні контакту тіл значно ускладнює розв'язування задач. Помітний внесок у вивчення впливу фрикційного проковзування на напружено-деформований стан контактуючих тіл у цьому напрямі зроблено у працях [1, 2, 4–8].

Метою даної публікації є узагальнення на випадок довільного навантаження та обмеженості розмірів контактуючих тіл результатів попередніх робіт авторів [3, 9, 10], де методом стрибків та сингулярних інтегральних рівнянь отримані аналітичні розв'язки антиплоскої задачі для двох стиснених півпросторів із міжфазним фрикційним проковзуванням за симетричного навантаження.

2. Постановка задачі

Розглянемо безмежний у напрямі твірної брус скінченного поперечного перерізу ширини $2W$ та висоти $2H$, що складається з двох матеріалів (шарів) з пружними сталими E_k, ν_k , ($k=1,2$) взаємно притиснутих до межі поділу нормальними рівномірними зусиллями $\sigma_{yy} < 0$ (рис. 1). Зовнішнє навантаження у поздовжньому напрямі визначається квазістатично зростаючими від нуля до деякого максимального значення збалансованими зосередженими силами інтенсивності $Q_2(t) = -Q_1(t) = Q(t)$ в точках $z_k \in S_k$, де t – параметр зміни навантаження (час).

Розглянемо переріз бруса площиною xOy , перпендикулярною до осі z (рис. 1). Межа $L = [-W; W]$ поділу матеріалів розміщена по осі абсцис x , а на проміжку $L' = [-b; b] \subset L$ лежить серединна лінія перерізу тунельної тріщини, береги якої знаходяться у контакті. Поза межами тріщини на ділянці $L'' = L \setminus L'$ задовольняються умови ідеального механічного контакту. Умови контакту берегів тріщини формулюємо наступним чином: 1) на L' , коли $\sigma_{yz}(x, 0) \leq \tau_{yz}^{\max}$ маємо ідеальний механічний контакт; 2) при досягненні дотичними напруженнями значення $\tau_{yz}^{\max}$ на деякій ділянці $\gamma = [a_-, a_+] \subset L'$ відбувається проковзування. При дії на поверхнях бруса стискувальних напружень $\sigma_{yy}(x, 0) < 0$ зусилля тертя $\sigma_{yz}(x, 0)$ у всіх точках ділянки $\gamma \subset L'$ згідно класичного закону Амонтона дорівнюють

$$\sigma_{yz}^{\pm}(x, 0) = -\operatorname{sgn}([w])\tau_{yz}^{\max}, \quad \tau_{yz}^{\max} = -\alpha\sigma_{yy}(x, 0), \quad (1)$$

де α – коефіцієнт тертя ковзання, $[w] = w^-(x, 0) - w^+(x, 0)$ – стрибок переміщень. Індеси «+» та «-» відповідають граничним значенням функцій на верхньому і нижньому краях лінії L' . Поза ділянкою $\gamma \subset L'$ величина дотичних напружень у місці відсутності проковзування не перевищує рівня максимально допустимих $|\sigma_{yz}(x, 0)| \leq \tau_{yz}^{\max}$ і $[w] = 0$. Знак (напрямок дії) дотичних напружень вибираємо у залежності від знаку різниці переміщень $[w]$ на L' у розглядуваній точці.

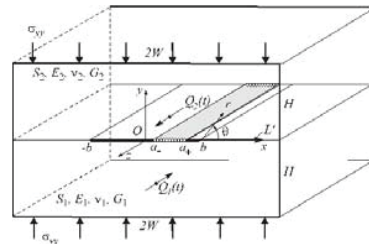


Рис. 1. Силова й геометрична схема задачі

Взаємне переміщення берегів у зоні проковзування моделюватимемо стрибком компонент вектору переміщень на L' , а саме:

$$[w]_{L'} \equiv \begin{cases} F_b(x, t), & x \in L'; \\ 0, & x \notin L'. \end{cases} \quad (2)$$

Таким чином, сформульована задача поздовжнього зсуву бруса скінченного поперечного перерізу парою квазістатичних зосереджених сил $Q_1(t), Q_2(t)$ з додатковим впливом стискувальних напружень $\sigma_{yy}(x, 0)$.

3. Розв'язування задачі та числовий аналіз

Розв'язування задачі здійснюємо на основі відомого для антиплоскої задачі теорії пружності гранично-елементного методу функцій стрибка [11, 12]. Його суть полягає у використанні методу функцій стрибка, формули Сомільяни для визначення переміщень у тілі з розрізом та теорем теорії комплексної змінної про граничні значення голоморфних функцій для побудови системи сингулярних інтегральних рівнянь тіла з тонкою неоднорідністю. При цьому ядра відповідних інтегральних рівнянь записуються із використанням деяких комплексних сталих, які визначаються формалізмом Стро і залежать від механічних вла-

стивостей матеріалу тіла. Таким чином, сформульована задача поздовжнього зсуву зосередженою силою біматеріалу з тріщиною зводиться до системи інтегральних рівнянь (CIP):

$$\frac{1}{2} w(\mathbf{\hat{\theta}}) = -CPV \int_{\Gamma} T(\mathbf{x}, \mathbf{\hat{\theta}} w(\mathbf{x})) d\Gamma(\mathbf{x}) + \int_{L'} T(\mathbf{x}, \mathbf{\hat{\theta}} F(\mathbf{x}, t)) d\Gamma(\mathbf{x}) + \sum_{k=1}^2 Q_k(t) W(\mathbf{x}_k^*, \mathbf{\hat{\theta}}), \quad (3)$$

$$\frac{1}{2} \langle w(\mathbf{\hat{\theta}}) \rangle = \int_{\Gamma} T(\mathbf{x}, \mathbf{\hat{\theta}} w(\mathbf{x})) d\Gamma(\mathbf{x}) - CPV \int_{L'} T(\mathbf{x}, \mathbf{\hat{\theta}} F(\mathbf{x}, t)) d\Gamma(\mathbf{x}) + \sum_{k=1}^2 Q_k(t) W(\mathbf{x}_k^*, \mathbf{\hat{\theta}}), \quad (4)$$

$$\frac{1}{2} [\sigma(\mathbf{\hat{\theta}})] = n_j^+ \left(HPV \int_{L'} S_j(\mathbf{x}, \mathbf{\hat{\theta}} F(\mathbf{x}, t)) d\Gamma(\mathbf{x}) - \int_{\Gamma} S_j(\mathbf{x}, \mathbf{\hat{\theta}} w(\mathbf{x})) d\Gamma(\mathbf{x}) + \sum_{k=1}^2 Q_k(t) D_j(\mathbf{x}_k^*, \mathbf{\hat{\theta}}) \right) \quad (5)$$

Тут CPV означає головне значення інтеграла (Cauchy Principal Value), RPV – головне значення невластивого інтеграла (Riemann Principal Value), HPV – скінченна частина гіперсингулярного інтегралу за Адамаром (Hadamard Principal Value); $\mathbf{x}_k^*$ – точки прикладання сил $Q_k(t)$. Ядра інтегральних рівнянь (3)–(5) означені у [10].

До розв'язування цієї CIP застосовуємо модифіковану схему методу граничних елементів (ГЕ) [11, 12] із використанням розривних квадратичних елементів.

Проаналізуємо вплив властивостей геометричної та силової схем задачі на величину стрибка переміщень на прикладі навантаження бруса двома антипаралельними силами $Q_1/\pi aP = Q_2/\pi aP = 2$, прикладеними у точках $(d; h)$ та $(d; -h)$ ($0 < h < H$; $0 < d < W$). Виявлено, що зменшення відношення b/H наближає значення стрибків переміщень $C[w]/bQ$ ($C = G_1 G_2 / (G_1 + G_2)$) до відповідних результатів аналітичного розв'язку (штрихова лінія), отриманих за такого ж навантаження для безмежного тіла [9] (рис. 2). Зміщення уздовж осі абсцис точок прикладання зосереджених сил, зміщує в цьому ж напрямі екстремальне значення стрибка $[w]$ та робить несиметричною зону проковзування. При цьому у даній конфігурації задачі зміщення сили на відстань більшу за ширину тріщини істотно зменшує розмір зони проковзування і величину стрибків переміщень, зменшуючи їх практично до нуля.

Зменшення відносного розміру тріщини у брусі при незмінності способу і величини навантаження істотно збільшує значення стрибків пе-

реміщень (рис. 3, суцільні лінії відповідають значенням стрибків переміщень $[w]$ обчислених для бруса із розмірами $W = H = 2b$, а штрихові – для $W = H = 4b$).

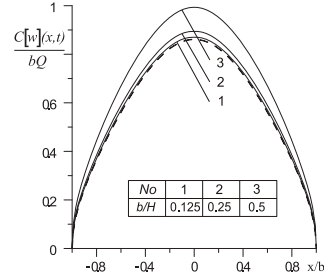


Рис. 2. Залежність нормованих значень стрибків переміщень $[w]$ від розмірів квадратного бруса.

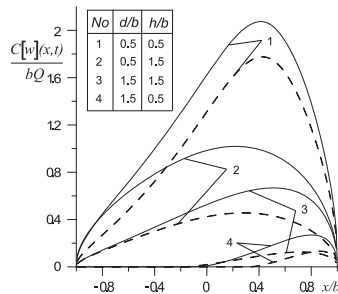


Рис. 3. Залежність значень нормованих стрибків переміщень від зміщення точок прикладання сил.

При гранично-елементному моделюванні задачі при $W = H = 2b$ для розбиття осі тріщини використано 40, а для сторони прямокутника – 80 тривузлових граничних елементів [12].

4. Висновки

Побудовано гранично-елементний розв'язок задачі антиплоского деформування безмежного бруса скінченного поперечного перерізу з міжфазною тріщиною з урахуванням проковзування. Верифікацію отриманих результатів здійснено зіставленням із аналітичним розв'язком для двох стиснутих півпросторів із ділянкою проковзування у контакті, навантаженого зосередженими силами прикладеними на осі ординат.

Числові розрахунки дали змогу проаналізувати вплив основних силових та геометричних чинників (величина сил, розміщення точок їх прикладання, розміри поперечного перерізу та тріщини) на величину зони проковзування та характеристики розподілу стрибків переміщень на ній.

Список використаних джерел

1. Горячева И. Г. Механика фрикционного взаимодействия / И. Г. Горячева. – М.: Наука, 2001. – 478 с.
2. Сулим Г. Т. Основи математичної теорії термopужної рівноваги деформівних твердих тіл з тонкими включеннями / Г. Т. Сулим. – Л.: Досл.-видавн. центр НТШ, 2007. – 716 с.
3. Сулим Г. Т. Умови контактної взаємодії (огляд) / Г. Т. Сулим, Й. З. Піскозуб // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2004. – Т. 47, № 3. – С. 110–125.
4. Черепанов Г. П. О развитии трещин в сжатых телах / Г. П. Черепанов // Прикл. мат. мех. – 1966. – Т. 30, № 1. – С. 82–93.
5. Herrmann K. P. On interface crack models with contact zones situated in an anisotropic bimaterial / K. P. Herrmann, V. V. Loboda // Arch. Appl. Mech. – 1999. – Vol. 69. – P. 317–335.
6. Архипенко К. М. Міжфазна балка при різних типах контактної взаємодії з неоднорідною анізотропною площиною / К. М. Архипенко, О. Ф. Кривий // Машинознавство. – 2008. – Т. 129, № 3. – С. 16–21.
7. Острик В. И. Метод Винера –Хопфа в контактных задачах теории упругости / В. И. Острик, А. Ф. Улитко. – К.: Наук. думка, 2006. – 328 с.
8. Jager J. Half-planes without coupling under contact loading / J. Jager // Arch. Appl. Mech. – 1997. – Vol. 67. – P. 247–259.
9. Sulym H. Antiplane deformation of a bimaterial containing an interfacial crack with account of friction. I. Single loading / H. Sulym, L. Piskozub, Y. Piskozub, Ia. Pasternak // Acta Mech. et Automatica. – 2015. – Vol. 9, № 2. – P. 1–8.
10. Піскозуб Л. Антиплоска деформація бруса скінченного поперечного перерізу з міжфазною тріщиною з урахуванням фрикційного проковзування / Л. Піскозуб, Н. Оліярник, Я. Пастернак, Г. Сулим // Фіз.-мат. моделювання та інф. техн. – 2015. – Т. 21. – С. 142–153.
11. Пастернак Я. М. Метод граничних елементів у задачах антиплоского деформування анізотропних тіл із тонкими неоднорідностями / Я. М. Пастернак, Г. Т. Сулим, Н. Р. Оліярник // Вісн. Львів. ун-ту. С. мех-мат. – 2012. – Т. 76. – С. 119–134.
12. Bozhydarnyk V. BEM approach for the antiplane shear of anisotropic solids containing thin inhomogeneities. / V. Bozhydarnyk, I. Pasternak, H. Sulym, N. Oliyarnyk // Acta Mechanica et Automatica. – 2011. – Vol. 5, № 4. – P. 11–16.

References

1. GORYACHEVA, I. G. (2001) *Mechanica Frikcinnoho Vzaimodeystviya*. M.: Nauka.
2. SULYM, H. T. (2007) *Osnovy Matematychnoyi Teoriyi Termopruzhnoyi Rivnovahy Deformivnyh Til z Tonkymy Vkluchenniamy*. Lviv: Research and Publishing Center of NTSh.
3. SULYM, G. T. & PISKOZUB, J. Z. (2004) Contact conditions (a survey). *Mat. Metody ta Fiz.-Mekh. Polya*. 47 (3). p. 110–125.
4. CHEREPANOV, G. P. (1966) O razvitiyi treshchin v szhatyh telah. *Prikladnaya Matematika i Mehanika*. 30 (1). p. 82–93.
5. HERRMANN, K. P. & LOBODA, V. V. (1999) On interface crack models with contact zones situated in an anisotropic bimaterial. *Archive of App. Mech*. 69. p. 317–335.
6. ARHIPENKO, K. M. & KRIVII, O. F. (2008) Mizhfazna balka pry riznyh typhakh kontaktnoyi vzayemodiyi z neodnorodnoyu anizotropnoyu ploshchynoyu. *Mashynoznavstvo*. 129 (3). p. 16–21.
7. OSTRYK, V. I. & ULITKO, A. F. (2006) *Metod Wienera-Hopfa v Kontaktnykh Zadachakh Teoriyi Uprugosti*. Kiev: Naukova dumka.
8. JAGER, J. (1997) Half-planes without coupling under contact loading. *Arch. Appl. Mech*. 67. p. 247–259.
9. SULYM, H. et al. (2015) Antiplane deformation of a bimaterial containing an interfacial crack with account of friction. I. Single loading. *Acta mechanica et automatica*. 9 (2). p. 1–8.
10. PISKOZUB, L. et al. (2015) Antyploska deformaciya brusa skinchenoho poperechnoho pererizu z mizhfaznoyu trishchynoyu z urahuvanniam frykciynoho prokovzuvannia. *Fizyko-Matematychnye Modelyuvannya ta Informatsiini Tekhnologii*. 21. p. 142–153.
11. PASTERNAK, I. A., SULYM, H. & OLIYARNYK, N. (2012) Metod granychnykh elementiv u zadachakh antyploskoho deformuvannia anizotropnykh til z tonkymy neodnorodnostiamy. *Visn. Lviv. Un-tu. S. Mekh-Mat*. 76. p. 119–134.
12. BOZHYDARNYK, V. et al. (2011) BEM approach for the antiplane shear of anisotropic solids containing thin inhomogeneities. *Acta Mechanica et Automatica*. 5 (4). p. 11–16.

Надійшла до редколегії 30.09.15

УДК 539.3

Сулим Г. Т.¹, д. ф.-м. н., проф.,
Онишкевич В. М.², к. ф.-м. н., доц.

**Термопружний контакт півплощини з
прямокутним жорстким штампом у разі
подачі тепла на його зовнішню
поверхню**

¹Львівський національний університет імені
Івана Франка, 79000, м. Львів, вул.
Університетська, 1
e-mail: sulym@franko.lviv.ua
²Національний лісотехнічний університет
України, 79057, м. Львів, вул. Генерала
Чупринки, 103
e-mail: vlodkoo@meta.ua

G. T. Sulym¹, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof.,
V. M. Onyshkevych², Ph. D. (Phys.-Math.),
Assoc. Prof.

**The thermoelastic contact of a half-plane with
the rectangular rigid punch in the case of heat
providing on its external surface**

¹Ivan Franko National University of L'viv, 79000,
L'viv, Universytetska str., 1
e-mail: sulym@franko.lviv.ua
²Ukrainian National Forestry University, 79057,
L'viv, General Chuprynka str., 103
e-mail: vlodkoo@meta.ua

Розглядається плоский штамп деякої висоти, який втискується заданою силою у пружну півплощину. Між бічними поверхнями штамп і зовнішнім середовищем здійснюється теплообмін за законом Ньютона. На верхній межі штамп відбувається конвективне нагрівання штамп зовнішнім середовищем деякої температури. Через незавантажену поверхню півплощини із зовнішнім середовищем здійснюється конвективний теплообмін. Тепловий контакт між штампом і півплощиною неідеальний з заданим коефіцієнтом теплопроникності контакту. Розв'язок задачі термопружності для півплощини побудовано за допомогою інтегрального перетворення Фур'є, задачу теплопровідності для штамп розв'язано за допомогою методу прямих. Отримано систему парних інтегральних рівнянь, яку за допомогою методу поточної колокації зведено до системи лінійних алгебричних рівнянь. Запропоновано розрахункові формули для температурних полів, теплових потоків та контактних напружень. При числових розрахунках прикладів отримано розподіли контактних напружень, які за певних значень параметрів задачі дають якісно різні випадки контактної взаємодії. Враховано можливість відставання півплощини від штамп. Для розрахунку за схемою поступового уточнення зони безпосередньої контактної взаємодії застосовано ітераційний процес.

Ключові слова: неідеальний контакт, конвективний теплообмін, термічна проникність.

The plane punch of a certain height pressing by the given force into an elastic half-plane is considered. Equations of plane deformations are used. The heat exchange between the side surfaces of the punch and the external medium occurs according to Newton's law. The convective heating of punch occurs on the upper boundary line of the punch by the external medium of given temperature. The convective heat exchange occurs with the external medium through the unloaded surface. The heat contact between the punch and half-plane is non-ideal with a given thermal resistance. The solution of the problem of thermoelasticity for a half-plane is obtained by means of the Fourier integral transformation. The heat conductivity problem for the punch is solved by the method of straight lines. The obtained system of dual integral equations is reduced to the system of linear algebraic equations by means of the points collocation method. Formulae for thermal fields, heat fluxes and contact stresses are proposed. During computing the distributions of contact stresses were obtained with quality-different cases of contact interaction for some values of parameters. It was found that the half-plane detaching zones from the punch may occur. For numerical computations, the iterative process is applied by the scheme of gradual precision of the immediate contact interaction zone.

Key Words: Non-Ideal Contact, Convective Heat Exchange, Thermal Resistance.

1. Вступ

Оскільки в інженерній практиці типовим є використання неоднорідних матеріалів [1], то при дослідженні теплового режиму контактної пари необхідно враховувати вплив різноманітних механічних і теплофізичних чинників [2]. Вперше розв'язок плоскої задачі термопружності про тиск штампа з неповним контактом було отримано в [3], де для випадку тепловіддачі від штампа в півплощину виявлено втрату контакту на краях штампа, а при зміні напрямку теплового потоку втрата контакту спостерігалася всередині деякої ділянки зони контакту. В запропонованій роботі розглядається подача теплового потоку в півплощину через жорсткий штамп і, на відміну від [3], розв'язується додаткова задача теплопровідності для штампа, оболонки.

2. Постановка задачі

Розглядається плоский штамп заввишки H , який втискується силою P у пружну півплощину. Використовується рівняння плоскої деформації. Між бічними поверхнями штампа і зовнішнім середовищем здійснюється теплообмін за законом Ньютона з коефіцієнтом теплообміну γ_a . На верхній межі штампа відбувається конвективне нагрівання зовнішнім середовищем з температурою t_c при коефіцієнті теплообміну γ_0 . Через незавантаженою поверхню півплощини із зовнішнім середовищем нульової температури здійснюється конвективний теплообмін з коефіцієнтом теплообміну γ_H . Тепловий контакт між штампом і півплощиною неідеальний з коефіцієнтом теплопроникності контакту h .

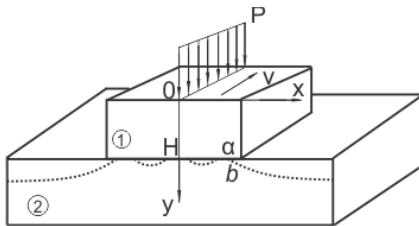


Рис. 1. Схема силової взаємодії

З урахуванням цього для розв'язання задачі необхідно проінтегрувати систему рівнянь

$$\mu \Delta u + (\lambda + \mu \partial \theta / \partial x) - \beta \partial t^{(2)} / \partial x = 0, \quad (1)$$

$$\mu \Delta u + (\lambda + \mu \partial \theta / \partial y) - \beta \partial t^{(2)} / \partial y = 0, \quad (2)$$

$$\Delta t^{(i)} = 0, \quad i = 1, 2, \quad (3)$$

де Δ – оператор Лапласа; $\theta = \partial u / \partial x + \partial u / \partial y$; u та v – компоненти вектора переміщень; λ та μ – коефіцієнти Ламе; $\beta = (3\lambda + 2\mu)\alpha_T$; α_T – температурний коефіцієнт лінійного розширення. При цьому треба врахувати температурні крайові умови

$$y = 0: \quad \partial t^{(1)} / \partial y = \gamma_0 (t^{(1)} - t_c), \quad |x| \leq a; \quad (4)$$

$$x = \pm a: \quad \partial t^{(1)} / \partial x = \mp \gamma_a t^{(1)}, \quad |y| \leq a; \quad (5)$$

$$y = H:$$

$$\lambda^{(1)} \partial t^{(1)} / \partial y - \lambda^{(2)} \partial t^{(2)} / \partial y = 0, \quad |x| \leq a; \quad (6)$$

$$\lambda^{(1)} \partial t^{(1)} / \partial y + \lambda^{(2)} \partial t^{(2)} / \partial y = h (t^{(2)} - t^{(1)}) 0, \quad |x| \leq a, \quad (7)$$

$$\partial t^{(2)} / \partial y = \gamma_H t^{(2)}, \quad |x| > a; \quad (8)$$

та силові крайові умови

$$y = H: \quad v(x, H) = f(x) + \delta, \quad |x| \leq a; \quad (9)$$

$$\sigma_y(x, H) = 0, \quad |x| > a; \quad (10)$$

$$\tau_{xy}(x, H) = 0, \quad |x| < \infty; \quad (11)$$

при заданих γ_0 , γ_a , γ_H γ_0 – коефіцієнтах теплообміну відповідно між верхньою межею штампа, бічними поверхнями штампа, незавантаженою поверхнею півплощини з одного боку і зовнішнім середовищем з іншого, коефіцієнті теплопроникності контакту h , півширині штампа a , формі основи штампа $f(x)$, величині осідання штампа δ , коефіцієнтах теплопровідності $\lambda^{(i)}$ ($i=1$ відноситься до штампа, $i=2$ – до півплощини).

3. Розв'язок задачі для штампа

Використовуючи скінченно-різницеву апроксимацію рівняння теплопровідності для штампа і крайових умов (4) за координатою x , розв'язок задачі для штампа будуватиметься методом прямих в області $G = \{-a \leq x \leq a; \quad 0 \leq y \leq H\}$ і зводиться до системи лінійних диференціальних рівнянь

$$d\vec{s} / dy = A\vec{s}, \quad (12)$$

де

$$\vec{s}^T = (t_1^{(1)}, \dots, t_N^{(1)}, \partial t_1^{(1)} / \partial y, \dots, \partial t_N^{(1)} / \partial y), \quad A = \begin{bmatrix} 0 & I \\ B & 0 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & 0 & \dots & 0 \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & b_{j,j-1} & b_{jj} & b_{j,j+1} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & b_{N-2,N-1} & b_{N-1,N-1} & b_{N-1,N} \\ 0 & \dots & 0 & b_{N,N-1} & b_{NN} \end{pmatrix};$$

$$\left[((\lambda + \mu)\xi^2 C_1 - \lambda |\xi| C_2 + (\lambda + \mu)\xi^2 y C_2) \right],$$

$$t^{(2)F} = C_0 e^{-|\xi|y}.$$

Задовольняючи крайову умову (11), отримаємо:

$$C_2 = -\beta C_0 / 2\lambda \xi^2 + (\lambda + \mu) |\xi| C_1 / \lambda.$$

Задовольняючи крайові умови (6)–(10), задачу зведено до системи парних інтегральних рівнянь: при $|x| \leq a$:

$$\frac{\lambda + 2\mu}{2\pi\lambda} \int_{-\infty}^{\infty} \left((\lambda + \mu) C_1 \xi^2 - \frac{\beta C_0}{2|\xi|} \right) e^{-i\xi x} d\xi = f(x) + \delta,$$

$$\frac{\lambda^{(2)}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} C_0 |\xi| e^{-i\xi x} d\xi = -\lambda^{(1)} \frac{\partial t^{(1)}}{\partial y},$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(h + \lambda^{(2)} |\xi| \right) C_0 e^{-i\xi x} d\xi = \lambda^{(1)} \frac{\partial t^{(1)}}{\partial y} + h t^{(1)},$$

при $|x| > a$:

$$\frac{\mu}{\pi\lambda} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\mu\beta C_0}{2} - (\lambda + \mu)^2 \xi^2 |\xi| C_1 \right) e^{-i\xi x} d\xi = 0,$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (\gamma_H + |\xi|) C_0 e^{-i\xi x} d\xi = 0.$$

Продовжимо співвідношення на ділянку $|x| \leq a$ шляхом введення функції Хевісайда

$$\frac{\mu}{\pi\lambda} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\mu\beta C_0}{2} - (\lambda + \mu)^2 \xi^2 |\xi| C_1 \right) e^{-i\xi x} d\xi = \sigma_y(x) H(a - |x|), \quad (13)$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (\gamma_0 + |\xi|) C_0 e^{-i\xi x} d\xi = \psi(x) H(a - |x|),$$

Подамо невідомі контактні напруження $\sigma_y(x)$ та невідому функцію $\psi(x)$ у вигляді рядів Фур'є

$$\sigma_y(x) = \sum_{n=-N}^N a_n e^{i\pi n x / a}, \quad \psi(x) = \sum_{n=-N}^N b_n e^{i\pi n x / a}. \quad (14)$$

Враховуючи, що

$$\int_{-a}^a \sigma_y(x) e^{i\xi x} dx = 2 \sum_{n=-N}^N a_n \frac{\sin(\xi a + \pi n)}{\xi + \pi n / a},$$

$$b_{11} = b_{NN} = 2(2\Delta x \gamma_a + 1) / (2\Delta x \gamma_a + 3) \Delta x^2,$$

$$b_{12} = b_{N,N-1} = -2(\Delta x \gamma_a + 1) / (2\Delta x \gamma_a + 3) \Delta x^2,$$

$$b_{j,j-1} = b_{j,j+1} = -1 / \Delta x^2, \quad b_{j,j} = 2 / \Delta x^2, \quad j = 2, \dots, N-1,$$

$\Delta x = 2a / (N+1)$, $N+1$ – кількість інтервалів розбиття; 0 – нульова, I – одинична $N \times N$ матриці.

Розв'язок системи будується за допомогою матричної експоненти $\vec{s}(y) = \exp(B y) \vec{d}$, де $\vec{d}$ – довільний сталлий вектор, що визначається з крайових умов (4), (6) і (7) для кожної прямої півплощини. При обчисленні матричної експоненти використовувалась формула

$$t^{(1)}(y) = \exp(B y) = \left\{ \exp[B(y \cdot 2^{-p})] \right\}^{2^p},$$

де $q = y 2^{-p}$ підбирається таким чином, щоб забезпечити стійкість обчислень.

4. Розв'язок задачі для півплощини

Загальний розв'язок рівнянь термопружності для півплощини в просторі трансформант Фур'є має вигляд:

$$u^F = i e^{-|\xi|y} \left[\text{sign } \xi \beta C_0 y / 2 - i(\lambda + \mu) \xi (-|\xi| C_1 + C_2 (1 - |\xi| y)) \right],$$

$$v^F = e^{-|\xi|y} \left[-\beta (1 - |\xi| y) C_0 / 2 |\xi| + ((\lambda + \mu) \xi^2 C_1 + 2\mu |\xi| C_2 + (\lambda + \mu) \xi^2 C_2 y) \right],$$

$$\sigma_x^F = -\mu e^{-|\xi|y} \left[\beta C_0 (2 - |\xi| y) - 2\mu \xi^2 \right],$$

$$((\lambda + \mu) |\xi| C_1 - (2\lambda + \mu) C_2 + (\lambda + \mu) |\xi| y C_2),$$

$$\sigma_y^F = -\mu e^{-|\xi|y} \left[\beta C_0 |\xi| y - 2\xi^2 \right],$$

$$((\lambda + \mu) |\xi| C_1 + \mu C_2 + (\lambda + \mu) |\xi| y C_2),$$

$$\tau_{xy}^F = i \mu e^{-|\xi|y} \left[\text{sign } \xi \beta C_0 (1 - |\xi| y) - 2\xi \right].$$

$$\int_{-a}^a \psi(x) e^{i\xi x} dx = 2 \sum_{n=-N}^N b_n \frac{\sin(\xi a + \pi n)}{\xi + \pi n / a},$$

та замінюючи в інтегральних рівняннях інтеграли на суми, отримаємо співвідношення:

$$\begin{aligned} & \frac{\lambda + 2\mu}{\mu(\lambda + \mu)} \sum_{n=-N}^N a_n \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\xi a + \pi n)}{|\xi|(\xi + \pi n / a)} e^{-i\xi x} d\xi + \\ & + \frac{\beta(\lambda + 2\mu)}{(\lambda + \mu)} \cdot \sum_{n=-N}^N b_n \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\xi a + \pi n)}{|\xi|(\gamma_H + |\xi|)(\xi + \pi n / a)} e^{-i\xi x} d\xi = \\ & = -2\pi(f(x) + \delta), \\ & \frac{\lambda_T^{(2)}}{\pi} \sum_{n=-N}^N b_n \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\xi| \sin(\xi a + \pi n)}{(\gamma_H + |\xi|)(\xi + \pi n / a)} e^{-i\xi x} d\xi + \\ & + \lambda_T^{(1)} \frac{\partial t^{(1)}}{\partial y} = 0, \\ & \frac{1}{\pi} \sum_{n=-N}^N b_n \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(h + \lambda_T^{(2)} |\xi|) \sin(\xi a + \pi n)}{(\gamma_H + |\xi|)(\xi + \pi n / a)} e^{-i\xi x} d\xi - \\ & - \lambda_T^{(1)} \frac{\partial t^{(1)}}{\partial y} - h t^{(1)} = 0. \end{aligned}$$

Використовуючи метод поточної колокації при $x = x_j$, $x_j = -a + \Delta x$, ($j = 1, \dots, N$), отримано систему лінійних алгебричних рівнянь для знаходження невідомих коефіцієнтів розкладу. Відповідні інтеграли можна записати через функції Ei [4], але зручнішим виявилось безпосереднє числове інтегрування методом Філона. Повертаючись у простір оригіналів та використовуючи обчислені значення коефіцієнтів, отримано вирази для контактних напружень, температури і теплових потоків у контактуючих тілах та переміщень півплощини.

5. Числові результати

Вважалося, що основа штампа має закруглені краї, тобто $f(x) = x^2 H(|x| - x^*) / 2R$, де x^* є близьким до a . При числових розрахунках отримано розподіл контактних напружень, який за різних значень параметрів задачі може дати два якісно різні випадки контактної взаємодії. У першому випадку розраховані контактні напруження σ_y на всій ділянці $L_0: x \in [-a; a]$ не є додатними. Це означає, що на всій цій ділянці штамп прилягає до основи, крайові умови (6), (7)

і (9) виконані, а отримані контактні напруження та розподіл температури будуть остаточними.

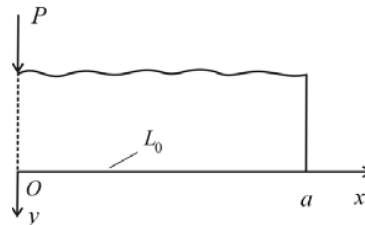


Рис. 2. Схема контактної взаємодії при повному контакті (область контакту $L_0: x \in [-a; a]$)

При цьому прикладена до нього сила, яка спричинила задане осідання δ , обчислюється з умови рівноваги штампа:

$$P = - \int_{-a}^a \sigma_y(x) dx = - \int_{-a}^a \sum_{n=-N}^N a_n e^{i\pi n x / a} dx = -2a a_0. \quad (15)$$

Зазначимо, що на тих ділянках, де нормальні напруження дорівнюють нулю при виконанні умови $v = 0$, можна вважати, що існує дотиковий контакт. У подальшому відсутність контакту вважатимемо умову, коли поверхня штампа перебуває на певній відстані від поверхні здеформованої півплощини. Відтак такі ділянки, де $\sigma_x = 0$, $u_z = 0$ будемо відносити до області контакту.

У другому випадку (рис. 3) на певній ділянці $L_1 = \bigcup_{m=1}^M L^{2m}$, яка складається з сукупності M проміжків $L^{2m} = [x_{2m-1}; x_{2m}]$ ($-a = x_0 \leq x_1$, $x_i < x_{i+1}$, $x_{2M} \leq x_{2M+1} = a$; $m = 1, \overline{M}$, $i = 1, 2\overline{M}$), розраховані значення напруження σ_y є строго додатними. Це означало б, що на цих ділянках якісь зусилля мали би притягувати штамп до півплощини, а тому отриманий розв'язок не є коректним розв'язком контактної задачі, оскільки існує велика ймовірність того, що штамп контактує з півплощиною на ділянці $L'_0 = L_0 - L_1 = \bigcup_{m=0}^M L^{2m+1}$, а на L_1 контакт відсутній. Тут $L^1 = [x_0; x_1]$, $L^{2m+1} = (x_{2m}; x_{2m+1})$, $(m = 1, \overline{M-1})$, $L^{2M+1} = (x_{2M}; x_{2M+1}]$, причому проміжки L^1 , L^{2M+1}

кожен зокрема чи обидва разом можуть дорівнювати нулю.

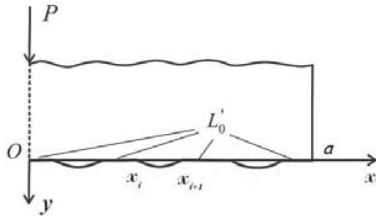


Рис. 3. Схема контактної взаємодії при неповному контакті (область контакту $L'_0 = L_0 - L_1$)

Тому треба змінити первісне формулювання крайових умов (6), (7), (9). Інші умови залишаються у незмінному вигляді. У нульовому наближенні вважатимемо, що справджується припущення про контакт штамп на L'_0 , а тому замість L_0 тепер треба брати L'_0 , а для лінії L_1 умова відсутності контакту запишеться так:

$$y = H, x \in L_1: \sigma_y(x, H) = 0, v(x, H) > \delta, \quad (16)$$

$$\lambda^{(1)} \frac{\partial t^{(1)}}{\partial y} + \lambda^{(2)} \frac{\partial t^{(2)}}{\partial y} = h_0 (t^{(2)} - t^{(1)}), \quad (17)$$

де h_0 – коефіцієнт теплопровидності контакту на ділянці L_1 . Така зміна крайових умов змушує розв'язувати основну систему рівнянь вже лише на проміжку L'_0 , а на ділянці L_1 – систему рівнянь, яка забезпечує виконання крайових умов (16)–(17).

Числові розрахунки здійснено для випадку, коли матеріал циліндра – сталь, а матеріал півпростору – алюміній, $\lambda = 5.6 \times 10^{10}$ Н/м², $\mu = 2.6 \times 10^{10}$ Н/м², $f(x) = 0$, $\alpha_T = 23.8 \times 10^{-6}$ 1/К, $\lambda_T^{(1)} = 25$ Вт/(м·К), $\lambda_T^{(2)} = 209$ Вт/(м·К), $\gamma_a = \gamma_H = 1/\text{м}$, $\delta = -0.0065$ м, $\gamma_a = 10000$ 1/м, $h = 5$ кВт/(м²·К), $t_c = 100^\circ\text{C}$, $a = 0.25$ м. За таких вхідних даних при використанні однакої для кожного проміжку розбиття L^i кількості точок розбиття $N_i = 25$ після семи ітерацій було отримано другий випадок (відставання штамп) з областю контакту $L'_0 = L^1 = (-b; b)$, $L_1: (b < |x| \leq a)$ при числовому значенні $b \approx 0.18$.

Обчислення проводились для штампів різної висоти (наприклад, на рис. 4–7 крива 1 відповідає $H = 0.05$ м, крива 2 – $H = 0.15$ м).

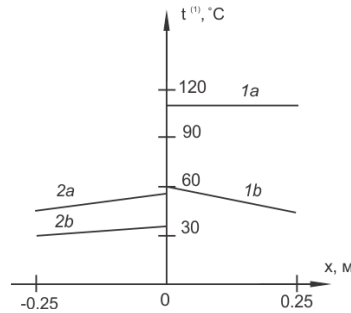


Рис. 4. Розподіл температури в штампі (a – на висоті 0.05 м від рівня контакту, b – безпосередньо на ділянці контакту).

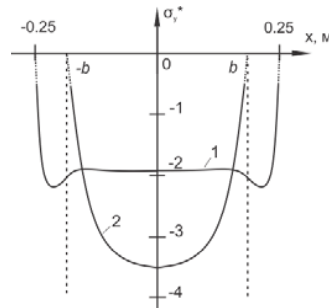


Рис. 5. Розподіл приведених контактних напружень $\sigma_y^* = 2a\sigma_y/P$.

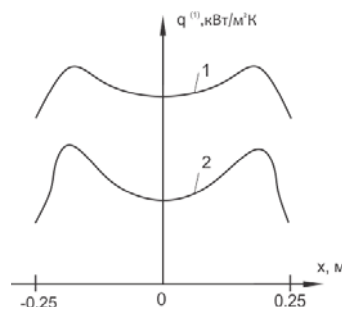


Рис. 6. Теплові потоки в штампі

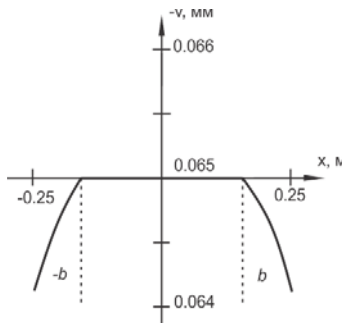


Рис. 7. Вертикальні переміщення

Список використаних джерел

1. Сулим Г. Т. Основи математичної теорії термопружної рівноваги деформівних твердих тіл з тонкими включеннями / Г. Т. Сулим. – Львів: Дослідно-видавничий центр НТШ, 2007. – 716 с.
2. Онишкевич В. М. Дослідження впливу властивостей «третього тіла» на теплоутворення від тертя / В. П. Левицький, В. М. Онишкевич // Математичні методи та фізико-механічні поля. – 1999. – Т. 42, № 1. – С. 82–86.
3. Comninou M. Heat conduction through flat punch / M. Comninou, J. R. Barber, J. Dundurs // J. Appl. Mech. – 1981. – Vol. 48. – P. 871–874.
4. Абрамовиц М. Справочник по специальным функциям / М. Абрамовиц, И. Стиган. – Москва: Наука, 1979. – 832 с.
5. Сулим Г. Т. Взаємодія жорсткого циліндра з пружним півпростором при теплоутворенні на ділянці контакту / Г. Т. Сулим, В. М. Онишкевич // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Сер.: фізико-математичні науки. – 2013. – № 3. – С. 228–231.
6. Сулим Г. Т. Втискування нагрітого циліндричного штампа з плоскою основою в пружний півпростір / Г. Т. Сулим, В. М. Онишкевич // Механіка і фізика руйнування будівельних матеріалів та конструкцій. – 2014. – № 10. – С. 124–135.

References

У випадку штампа малої висоти явище відставання не спостерігалось. Зауважимо, що на отриманий розв'язок слід накласти відомий розв'язок антиплоскої задачі з заданими дотичними напруженнями під штампом.

Розроблена методика з успіхом може бути застосована і при розв'язуванні контактних задач в осесиметричній постановці [5, 6].

1. SULYM, G. T. (2007) *Osnovy Matematychnoji Teoriji Termopruznoji Rivnovagy Deformivnyh Tverdih Til z Tonkymy Vkluchennyamy*. Lviv: Doslidno-Vydavnychij Centr NTSH.
2. LEVYTSKYJ, V. P. & ONYSHKEVYCH, V. M. (1999) Doslidzhennya vplyvu vlastyvostej «tretjogo tila» na teploutvorennja vid tertja. *Matematychni Metody ta Fyzyko-mechanichni Polya*. 42 (1). p. 82–86.
3. COMNINO, M., BARBER, J. R. & DUNDURS, J. (1981) Heat conduction through flat punch. *J. Appl. Mech.* 48. pp. 871–874.
4. ABRAMOVIC, M. & STIGAN, I. (1979) *Spravochnik po Specialnym Funkcijam*. Moskva: Nauka.
5. SULYM, G. T. & ONYSHKEVYCH, V. M. (2013) Vzaemodija zhorstkogo cylindra z pruzhnyj pivprostorum pry teploutvorenni na dilyanci kontaktu. *Visnyk Kyivskogo Natsionalnogo Universytetu Imeni Tarasa Shevchenka. Seriya: Fyzyko-Matematychni Nauky*. (3). p. 228–231.
6. SULYM, G. T. & ONYSHKEVYCH, V. M. (2014) Vtyskuvannya nagrityj cylindrychnyj shtampa z ploskoju osnovoju v pruzhnyj pivprostir. *Mehanika i Fyzyka Ruinuвання Budivelnih Materialiv ta Konstrukcii*. (10). p. 124–135.

Надійшла до редколегії 29.01.15

УДК 539.3

Токовий Ю. В., д. ф.-м. н., пров. наук. співр.

**Розв'язування тривимірних задач
теплопровідності, пружності та
термопружності для неперервно-
неоднорідних тіл**

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, 79060, м. Львів, вул. Наукова, 3-б
e-mail: tokovyy@iapmm.lviv.ua

Yu. V. Tokovyy, Dr. Sci. (Phys.-Math.),
Leading Sci. Researcher

**The solution to three-dimensional heat-
conduction, elasticity, and thermoelasticity
problems for continuously-inhomogeneous
solids**

Pidstryhach Institute of Applied Problems of Mechanics and Mathematics of NAS of Ukraine, 79060, Lviv, Naukova str., 3-b
e-mail: tokovyy@iapmm.lviv.ua

Розроблено методику розв'язування тривимірних задач теорії пружності, термопружності та теплопровідності для простору та шару, пружні та теплофізичні властивості яких є неперервними функціями однієї з просторових координат. З використанням методу безпосереднього інтегрування розв'язування задач зведено до ключового рівняння або системи таких рівнянь відносно визначальних функцій. Застосуванням подвійного інтегрального перетворення Фур'є, ключові рівняння зведено до інтегральних рівнянь, які розв'язано у явному вигляді з використанням методу резольвентного ядра.

Ключові слова: неоднорідний простір, неоднорідний шар, тривимірна задача, пружність, термопружність, теплопровідність, інтегральні рівняння, явний розв'язок.

This paper presents an approach to the solution of three-dimensional elasticity, thermoelasticity, and heat-conduction problems for a space and a layer, which are subjected to force and thermal loadings and exhibit an arbitrarily-inhomogeneous variation of their elastic and thermophysical properties with respect to one of the spatial coordinates. This approach rests upon the direct integration of the equilibrium equations, which are irrespective of the material properties. This fact allows for the establishment of expressions for all the stress-tensor components in terms of the key functions (the normal stresses and their combinations) as well as for the derivation of integral equilibrium conditions for the key functions on the basis of the original boundary conditions. By making use of the obtained relations and the double-Fourier integral transformation, in order to perform the proper separation of the variables, the set of original equations with arbitrarily-variable coefficients are reduced to the complete set of the governing equations for the key functions. The latter equations are then reduced to the integral equations for the key functions. It is worth noting that the kernels of these equations are expressed through the material properties only and they do not involve the loading factors. The obtained integral equations can be solved explicitly by means of the resolvent-kernel technique. After the key functions are determined, the remaining stress-tensor components can be easily found by making use of the relationship obtained from the equilibrium equations. The same solution strategy has been employed to analytically solve the heat-conduction problem for the mentioned solids.

Key Words: Inhomogeneous Space, Inhomogeneous Layer, Three-Dimensional Problem, Elasticity, Thermoelasticity, Heat-Conduction, Integral Equations, Explicit Solution.

1. Вступ

Покладені в основу класичних теорій теплопровідності, пружності і термопружності гіпотези та моделі здебільшого приймають пружні та теплофізичні макрохарактеристики ізотропних або анізотропних матеріалів сталими по цілому об'єму тіла. Однак згодом, насамперед завдяки глибшому емпіричному вивченню поведінки реальних тіл та потребам інженерної практики, постала необхідність урахування залежності

властивостей матеріалів від координат. Матеріали із такими властивостями називають неоднорідними. У даний час дослідження термомеханічної поведінки неоднорідних структур під дією інтенсивних силових та теплових навантажень привертає дедалі більше уваги спеціалістів як академічної сфери, так і інженерів, що запроваджують новаторські ідеї у виробництві. Зокрема, це пов'язано з розвитком концепції функційно-градієнтних матеріалів та новітніх технологій щодо формування неоднорідних структур

із наперед заданим розподілом теплофізичних та механічних характеристик, що інтенсивно за-
проваджуються та досліджуються у наукових та
виробничих центрах у цілому світі. Ґрунтовні
огляди досліджень стосовно виготовлення, за-
стосувань і термолупної поведінки неоднорід-
них й, у тому числі, функційно-градієнтних ма-
теріалів дано, зокрема, у працях [1–4] та ін.

Урахування залежності характеристик мате-
ріалу від координати місця точки спричинює
суттєві ускладнення при аналітичному розв’я-
занні відповідних задач математичної фізики.
Основна складність полягає у потребі розв’язан-
ня ключових диференціальних рівнянь зі змін-
ними наперед невідомими коефіцієнтами. Це
унеможливило, за виключенням деяких три-
вільних випадків, аналітичне розв’язання задач
з використанням класичних методів [5].

У статті з використанням методу безпосеред-
нього інтегрування розроблено методику розв’я-
зування просторових задач теорії пружності й
термолупності в напруженнях для неоднорід-
них ізотропних простору та шару, пружні харак-
теристики яких є функціями координати z . Вста-
новлено ключові рівняння для компонент тензо-
ра напружень у випадку неоднорідного матеріа-
лу і запропоновано методику до їх зведення до
інтегральних рівнянь. Аналогічний підхід засто-
совано для розв’язання тривимірної задачі теп-
лопровідності за умови залежності коефіцієнта
теплопровідності від координати z .

2. Постановка задачі

Розглянемо задачу про визначення квазістаціо-
нарної температури $T(x, y, z)$ та компонент тензора
напружень $\sigma_{\xi\eta}(x, y, z)$, $\{\xi, \eta\} = \{x, y, z\}$, у непе-
рервно-неоднорідних за координатою z просторі
 $\Pi_1 = \{(x, y, z) \in (-\infty, \infty)^3\}$ та шарі $\Pi_2 = \{(x, y, z) \in$
 $(-\infty, \infty)^2 \times [-1, 1]\}$. Відповідна задача термолуп-
ності описується рівняннями рівноваги [6]:

$$\frac{\partial \sigma_{\xi x}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{\xi y}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{\xi z}}{\partial z} + F_{\xi} = 0, \quad \xi = \{x, y, z\} \quad (1)$$

та суцільності, що в термінах напружень їх пода-
но з використанням підходу [7, 8] у вигляді:

$$\Delta \sigma_{zz} = \frac{\Delta_{xy}(\sigma + \alpha ET)}{1 + \nu} - \frac{\partial F_z}{\partial z} - \frac{\partial F_x}{\partial x} - \frac{\partial F_y}{\partial y},$$

$$\Delta \left(\frac{\sigma_{\xi\xi}}{2G} \right) = \Delta \left(\frac{\nu \sigma}{E} - \alpha T \right) - \frac{1}{E} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial \xi^2} +$$

$$+ \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{G} \right) \frac{\partial \sigma_{\xi z}}{\partial \xi} - \frac{1}{G} \frac{\partial F_y}{\partial \xi} - \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial \xi^2}, \quad \xi = \{x, y\}, \quad (2)$$

$$\Delta \left(\frac{1 - \nu}{E} \sigma + 2\alpha T \right) = \frac{\sigma_{zz}}{2} \frac{d^2}{dz^2} \left(\frac{1}{G} \right) -$$

$$- F_z \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{G} \right) - \frac{1}{2G} \left(\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \right).$$

$$\text{Тут } \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}; \quad \Delta_{xy} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}; \quad x, y, z$$

– безрозмірні декартові координати; $\sigma = \sigma_{xx} + \sigma_{yy}$
+ σ_{zz} – сумарні напруження; F_{ξ} – проекція на
вісь $\xi = \{x, y, z\}$ вектора масових сил; $E(z), G(z)$
– модулі пружності та зсуву; $\nu(z)$, $\alpha(z)$ –
коефіцієнти Пуассона та лінійного температурно-
го видовження. Легко переконатися, що для од-
норідного матеріалу, тобто коли пружні власти-
вості не залежать від координати z , рівняння (2)
зводяться до отриманих у роботах [7, 8].

Напружений стан неоднорідних простору Π_1
та шару Π_2 спричинено дією масових сил та не-
рівномірним розподілом температурного поля.
Крім того, у випадку задачі для шару Π_2 врахо-
вуємо умови вільних від силових навантажень
обмежуючих поверхонь

$$\sigma_{zz}(x, y, \pm 1) = \sigma_{\xi z}(x, y, \pm 1) = 0, \quad \xi = \{x, y\}. \quad (3)$$

Визначення квазістаціонарного температурно-
го поля здійснюватимемо шляхом розв’язання
рівняння теплопровідності [9]

$$\kappa(z) \Delta_{xy} T + \frac{\partial}{\partial z} \left(\kappa(z) \frac{\partial T}{\partial z} \right) = -R. \quad (4)$$

Тут $\kappa(z)$ – коефіцієнт теплопровідності; $R(x, y, z)$
– кількість тепла, яка продукується тепловими
джерелами, розподіленими в об’ємі шару. У ви-
падку задачі для шару Π_2 рівняння (4) доповню-
ємо крайовими умовами першого

$$T(x, y, \pm 1) = \tau^{\pm}(x, y), \quad (5)$$

або другого роду

$$\frac{\partial T(x, y, \pm 1)}{\partial z} = q^{\pm}(x, y). \quad (6)$$

Тут $\tau^{\pm}(x, y)$ та $q^{\pm}(x, y)$ – задані функції.

3. Побудова розв'язку

3.1. Розв'язок задачі теплопровідності. Для відокремлення змінних у рівнянні (4) застосуємо подвійне інтегральне перетворення Фур'є [10]

$$\bar{\varphi}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x, y, z) e^{-i(s_x x + s_y y)} dx dy, \quad (7)$$

де $i^2 = -1$, s_ξ – параметр перетворення $\xi = \{x, y\}$; φ – довільна функція, для якої перетворення (7) існує. Застосувавши перетворення (7) до (4), отримаємо звичайне диференціальне рівняння

$$\frac{d^2 \bar{T}(z)}{dz^2} - k^2 \bar{T}(z) = -\frac{1}{\kappa(z)} \left(\bar{R}(z) + \frac{d\kappa(z)}{dz} \frac{d\bar{T}(z)}{dz} \right), \quad (8)$$

де $k^2 = s_x^2 + s_y^2$.

У випадку задачі для неоднорідного простору Π_1 , розв'язок рівняння (8) має вигляд

$$\bar{T}(z) = q(z) + \int_{-\infty}^{\infty} \bar{T}(\zeta) \mathcal{K}_1(z, \zeta) d\zeta, \quad (9)$$

де

$$q(z) = \frac{1}{2|k|} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{R}(\zeta)}{\kappa(\zeta)} e^{-|k||z-\zeta|} d\zeta, \\ \mathcal{K}_1(z, \zeta) = \left[\left(\frac{1}{\kappa(\zeta)} \frac{d\kappa(\zeta)}{d\zeta} - |k| \operatorname{sgn}(z - \zeta) \right) \frac{d\kappa(\zeta)}{d\zeta} - \frac{d^2 \kappa(\zeta)}{d\zeta^2} \right] \frac{e^{-|k||z-\zeta|}}{2|k|\kappa(\zeta)}.$$

Рівняння (9) розв'язано з використанням методу резольвентного ядра [11]:

$$\bar{T}(z) = q(z) + \int_{-\infty}^{\infty} q(\zeta) \mathcal{R}(z, \zeta) d\zeta. \quad (10)$$

Тут

$$\mathcal{R}(z, \zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{K}_{n+1}(z, \zeta), \\ \mathcal{K}_{n+1}(z, \zeta) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{K}_1(z, \xi) \mathcal{K}_n(\xi, \zeta) d\xi.$$

При $\kappa(z) = \text{const}$ (10) набуває вигляду:

$$\bar{T}(z) = \frac{1}{2|k|\kappa} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{R}(\zeta) e^{-|k||z-\zeta|} d\zeta. \quad (11)$$

Для неоднорідного шару Π_2 розв'язок рівняння (8) має вигляд

$$\bar{T} = A_1 T_1(z) + A_2 T_2(z) + \bar{q}(z) + \int_{-1}^z \bar{T}(\zeta) \tilde{\mathcal{K}}_1(z, \zeta) d\zeta, \quad (12)$$

де A_1 і A_2 – сталі інтегрування, які слід знайти із заданих крайових умов (5) чи (6);

$$\bar{q}(z) = -\frac{1}{k} \int_{-1}^z \frac{\operatorname{sh} k(z - \zeta)}{\kappa(\zeta)} \bar{R}(\zeta) d\zeta,$$

$$\tilde{\mathcal{K}}_1(z, \zeta) = \frac{1}{k} \frac{d}{d\zeta} \left(\frac{1}{\kappa(\zeta)} \frac{d\kappa(\zeta)}{d\zeta} \operatorname{sh} k(z - \zeta) \right),$$

$$T_1(z) = \operatorname{ch} kz + \frac{1}{k\kappa(-1)} \frac{d\kappa(-1)}{dz} \operatorname{ch} k \operatorname{sh} k(1+z),$$

$$T_2(z) = \operatorname{sh} kz - \frac{1}{k\kappa(-1)} \frac{d\kappa(-1)}{dz} \operatorname{sh} k \operatorname{sh} k(1+z).$$

Розв'язок інтегрального рівняння (12) будемо із застосування методу резольвенти, що дозволяє записати наступний вираз:

$$\bar{T}(z) = A_1 t_1(z) + A_2 t_2(z) + t_q(z), \quad (13)$$

де

$$t_q(z) = \bar{q}(z) + \int_{-1}^z \bar{q}(\zeta) \tilde{\mathcal{R}}(z, \zeta) d\zeta,$$

$$t_j(z) = T_j(z) + \int_{-1}^z T_j(\zeta) \tilde{\mathcal{R}}(z, \zeta) d\zeta, \quad j=1, 2,$$

$$\tilde{\mathcal{R}}(z, \zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{\mathcal{K}}_{n+1}(z, \zeta),$$

$$\tilde{\mathcal{K}}_{n+1}(z, \zeta) = \int_{\zeta}^z \tilde{\mathcal{K}}_1(z, \xi) \tilde{\mathcal{K}}_n(\xi, \zeta) d\xi.$$

Із використанням відповідного набору крайових умов, слід визначити невідомі сталі A_1 і A_2 у розв'язку (13). У випадку умов (5) ці сталі знаходимо у вигляді:

$$A_1 = \frac{\bar{t}^+ \operatorname{sh} k + \bar{t}^- t_2(1) - t_q(1) \operatorname{sh} k}{t_1(1) \operatorname{sh} k + t_2(1) \operatorname{ch} k},$$

$$A_2 = \frac{\bar{t}^+ \operatorname{ch} k - \bar{t}^- t_1(1) - t_q(1) \operatorname{ch} k}{t_1(1) \operatorname{sh} k + t_2(1) \operatorname{ch} k};$$

якщо задано теплові потоки (6), то

$$A_1 = \frac{(\bar{q}^+ - \bar{t}_q(1))\bar{t}_2(-1) - (\bar{q}^- - \bar{t}_q(-1))\bar{t}_2(1)}{\bar{t}_1(1)\bar{t}_2(-1) - \bar{t}_1(-1)\bar{t}_2(1)},$$

$$A_2 = \frac{(\bar{q}^+ - \bar{t}_q(-1))\bar{t}_1(1) - (\bar{q}^- - \bar{t}_q(1))\bar{t}_1(-1)}{\bar{t}_1(1)\bar{t}_2(-1) - \bar{t}_1(-1)\bar{t}_2(1)},$$

де

$$\bar{t}_q = \frac{dt_q}{dz}, \quad \bar{t}_j = \frac{dt_j}{dz}, \quad j=1,2.$$

Аналогічно можна знайти A_1 і A_2 для інших типів крайових умов на гранях $z = \pm 1$ шару P_2 .

Для практичних обчислень $\mathcal{R}(z, \zeta)$ викорис-
таємо наближену формулу

$$\mathcal{R}(z, \zeta) \approx \mathcal{R}_N(z, \zeta) = \sum_{n=0}^N \mathcal{K}_{n+1}(z, \zeta), \quad (14)$$

де N – номер, який забезпечує задану точність задоволення рівняння теплопровідності (8). Аналогічну формулу застосуємо і для $\tilde{\mathcal{R}}(z, \zeta)$.

Після визначення температурного поля у просторі зображення за Фур'є, повернення до оригіналу здійснюється за формулою

$$\varphi(x, y, z) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\varphi}(z) e^{is_x x + is_y y} dsdp.$$

3.2. Розв'язок задачі термпружності. Зауважимо, що перше та останнє рівняння (2) містять у якості невідомих тільки сумарні напруження σ та напруження σ_{zz} . Таким чином, із цих двох рівнянь можна отримати інтегральні рівняння для кожної з цих визначальних функцій. Для розв'язання другого і третього рівнянь (2) слід використати додаткові співвідношення, які дозволять виразити наявні у цих рівняннях дотичні напруження через нормальні. З цією метою використаємо рівняння рівноваги (1), з яких за допомогою низки перетворень знаходимо

$$2 \frac{\partial^2 \sigma_{\xi z}}{\partial \xi \partial z} = \frac{\partial^2 \sigma_{\xi \xi}}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 \sigma_{\eta \eta}}{\partial \eta^2} - \frac{\partial^2 \sigma_{zz}}{\partial z^2} +$$

$$+ \frac{\partial F_{\xi}}{\partial \xi} - \frac{\partial F_{\eta}}{\partial \eta} - \frac{\partial F_z}{\partial z}, \quad \xi, \eta = \{x, y\}, \xi \neq \eta. \quad (15)$$

У результаті застосування до рівнянь (2), інтегрального перетворення Фур'є (7) отримаємо:

$$\bar{\Delta} \bar{\sigma}_{zz} = -\frac{k^2}{1+\nu} [\bar{\sigma} + \alpha E \bar{T}] + \Phi,$$

$$\bar{\Delta} \left[\frac{1-\nu}{E} \bar{\sigma} + 2\alpha \bar{T} \right] = \frac{\bar{\sigma}_{zz}}{2} \frac{d^2}{dz^2} \left(\frac{1}{G} \right) - \frac{d}{dz} \left(\frac{\bar{F}_z}{G} \right) - \frac{\Phi}{2G},$$

$$\bar{\Delta} \left[\frac{\bar{\sigma}_{\xi \xi}}{2G} \right] = \bar{\Delta} \left[\frac{\nu \bar{\sigma}}{E} - \alpha \bar{T} \right] + s_{\xi}^2 \left(\frac{\bar{\sigma}}{E} + \alpha \bar{T} \right) +$$

$$+ i s_{\xi} \bar{\sigma}_{\xi z} \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{G} \right) - \frac{i s_{\xi}}{G} \bar{F}_{\xi}, \quad \xi = \{x, y\}.$$

Тут

$$\bar{\Delta} = \frac{d^2}{dz^2} - k^2, \quad \Phi = i(s \bar{F}_x + p \bar{F}_y) - \frac{d \bar{F}_z}{dz}.$$

Перше та друге рівняння системи (16) містять лише дві з шуканих функцій, а саме $\bar{\sigma}_{zz}$ та $\bar{\sigma}$. Загальні розв'язки цих двох рівнянь для простору нескладно знайти у вигляді:

$$\bar{\sigma}(z) = \frac{E(z)}{1-\nu(z)} \left[-2\alpha(z) \bar{T}(z) + \right.$$

$$+ \frac{1}{2|k|} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{d\xi} \left(\frac{\bar{F}_z(\xi)}{G(\xi)} \right) e^{-|k||z-\xi|} d\xi +$$

$$+ \frac{1}{4|k|} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\Phi(\xi)}{G(\xi)} - \bar{\sigma}_{zz}(\xi) \frac{d^2}{d\xi^2} \left(\frac{1}{G(\xi)} \right) \right] e^{-|k||z-\xi|} d\xi \left. \right],$$

$$\bar{\sigma}_{zz}(z) = \frac{|k|}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha(\eta) E(\eta)}{1+\nu(\eta)} \bar{T}(\eta) e^{-|k||z-\eta|} d\eta -$$

$$- \frac{1}{2|k|} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\eta) e^{-|k||z-\eta|} d\eta + \frac{|k|}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{\sigma}(\eta) e^{-|k||z-\eta|}}{1+\nu(\eta)} d\eta.$$

Підставивши тепер перший вираз (17) в другий, отримаємо інтегральні рівняння для $\bar{\sigma}_{zz}$

$$\bar{\sigma}_{zz}(z) = \Theta_z(z) + \Psi_z(z) + \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\sigma}_{zz}(\xi) \mathcal{K}_z(z, \xi) d\xi, \quad (18)$$

де

$$\Theta_z(z) = -\frac{|k|}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha(\eta) E(\eta) \bar{T}(\eta)}{1-\nu(\eta)} e^{-|k||z-\eta|} d\eta,$$

$$\mathcal{K}_z(z, \xi) = -\frac{1}{4} \frac{d^2}{d\xi^2} \left(\frac{1}{G(\xi)} \right) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{G(\eta)}{1-\nu(\eta)} e^{-|k|(|z-\eta|+|\eta-\xi|)} d\eta,$$

$$\Psi_z = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{G(\eta) e^{-|k||z-\eta|}}{2(1-\nu(\eta))} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{d}{d\xi} \frac{\bar{F}_z(\xi)}{G(\xi)} + \frac{\Phi(\xi)}{2G(\xi)} \right] e^{-|k||\eta-\xi|} d\xi d\eta.$$

Розв'язок рівняння (18) знаходимо у явному вигляді з використанням методу резольвенти, як і у вищерозглянутому випадку задачі теплопровідності. Знайшовши таким чином вираз для $\bar{\sigma}_{zz}$ з урахуванням умов (3) та підставивши його у перший вираз (17), знайдемо інтегральне рівняння для $\bar{\sigma}$, яке розв'язується аналогічно. Підставивши рівняння (15) при $\xi = x$ та $\eta = y$ у третє рівняння (16), останнє з використанням співвідношення $\sigma_{xx} = \sigma - \sigma_{yy} - \sigma_{zz}$ зводиться до інтегрального рівняння, записаного для шуканих напружень σ_{yy} та знайдених вже напружень σ та σ_{zz} . Аналогічно отримується рівняння для напружень σ_{xx} з використанням (15) при $\xi = y$ та $\eta = x$.

4. Числовий приклад та обговорення

У якості прикладу застосування розробленого підходу розглянемо розрахунок температурного поля в просторі Π_1 внаслідок дії точкового стаціонарного джерела тепла, розташованого у початку координат, у випадку $\kappa(z) = \kappa_0 \psi(z)$, де $\psi(z) = 2 + (\exp(-|z|) - 1)\text{sgn}(z)$. Розподіл цієї залежності наведено на рис. 1. Зауважимо, що при $|z| > z_0$, де $z_0 > 0$ є достатньо великим числом, $\kappa(z)$ асимптотично прямує до сталих значень, причому, для $z < 0$ ці значення перевищують відповідні при $z > 0$. Таким чином таке задання коефіцієнта теплопровідності описує неоднорідний простір, який складається з двох однорідних півпросторів $z < -z_0$ і $z > z_0$, які вважатимемо відповідно «металом» і «керамікою», що сполучені функціонально-градієнтним шаром («ФГМ») $|z| \leq z_0$, у межах якого коефіцієнт теплопровідності гладко змінюється від «металу» до «кераміки». Зауважимо, що у випадку однорідного матеріалу, розв'язок такої задачі, знайдений на основі виразу (11), є відомий і має простий вигляд $T = q_0 / (4\pi\kappa_0\rho)$, де $\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2$, q_0 – інтенсивність джерела тепла. Нас цікавитиме розподіл температури уздовж осі z при $x = y = 0$, де температурне поле для однорідного матеріалу розраховується за формулою $T = q_0 / (4\pi\kappa_0 |z|)$.

На рис. 2 наведено розподіл температурного поля, розрахованого за запропонованими формулами (10), (11) у випадку неоднорідного та однорідного матеріалів. При цьому у формулі (14) взято $N = 3$, що забезпечує точність задоволення рівняння (8) у 99 %. Як бачимо, на відміну від

однорідного випадку, для неоднорідного матеріалу цей розподіл вже не є симетричним відносно точки $z = 0$. Крім того, у зоні «ФГМ-метал» ($z < 0$) температура поширюється далі від джерела тепла внаслідок кращої теплопровідності. У зоні «ФГМ-кераміка» ($z > 0$) температурне поле згасає значно швидше з віддаленням від джерела тепла внаслідок нижчої теплопровідності. Цей приклад унаочнює вплив неоднорідності матеріалу на розподіл температурного поля.

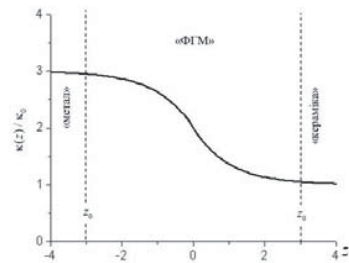


Рис. 1. Розподіл коефіцієнта теплопровідності $\kappa(z) / \kappa_0$ при $\psi(z) = 2 + (\exp(-|z|) - 1)\text{sgn}(z)$

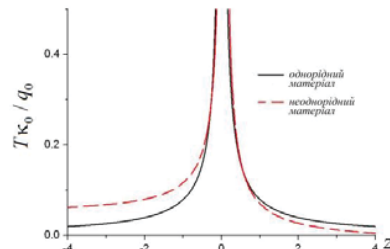


Рис. 2. Температурне поле в однорідному та неоднорідному просторі

5. Висновки

Запропоновано підхід до розв'язування просторових задач теплопровідності, пружності й термопружності для неоднорідних в одному з напрямків простору та шару, що ґрунтується на методі безпосереднього інтегрування. У рамках цього підходу розвинуто методику зведення вихідної системи рівнянь рівноваги та суцільності в напруженнях до інтегральних рівнянь. Для їх розв'язання застосовано метод резольвенти, у результаті чого розв'язки вихідних задач вдається побудувати у явному аналітичному вигляді. З цієї точки зору запропонована методика надає зручний для подальшого застосування явний розв'язок прямої задачі, що задовольняє вихідні умови, основоположні принципи та моделі меха-

ніки деформівного твердого тіла та має форму
явної функціональної залежності від факторів
навантаження та характеристик матеріалу.

Роботу виконано за часткової фінансової під-
тримки спільного гранту НАН України та Ро-
сійського Фонду Фундаментальних Досліджень
(номер проекту 0114U005082).

Список використаних джерел

References

1. Birman V. Modeling and analysis of functionally graded materials and structures / V. Birman, L. W. Byrd // *Appl. Mech. Rev.* – 2007. – Vol. 60, № 5. – P. 195–216.
2. Mortensen A. Functionally graded metals and metal-ceramic composites: Part 1 Processing / A. Mortensen, S. Suresh // *Int. Mater. Rev.* – 1995. – Vol. 40, № 6. – P. 239–265.
3. Колчин Г. Б. Расчет элементов конструкций из упругих неоднородных материалов / Г. Б. Колчин. – Кишинев: Картя Молдовеняскэ, 1971. – 172 с.
4. Плевако В. П. Общие решения в задачах теории упругости неоднородных сред / В. П. Плевако. – Харьков: Основа, 1997. – 159 с.
5. Tanigawa Y. Some basic thermoelastic problems for nonhomogeneous structural materials / Y. Tanigawa // *Appl. Mech. Rev.* – 1995. – Vol. 48, № 6. – P. 287–300.
6. Тимошенко С. П. Теория упругости / С. П. Тимошенко, Дж. Гудьер. – Москва: Наука, 1975. – 576 с.
7. Вигак В. М. Метод прямого интегрирования уравнений трехмерных задач упругости и термоупругости для пространства и полупространства / В. М. Вигак, А. В. Рычагивский. // *Прикл. механика.* – 2000. – Т. 36, № 11. – С. 74–81.
8. Вигак В. М. Решение трехмерной задачи теории упругости для слоя / В. М. Вигак, А. В. Рычагивский // *Прикл. механика.* – 2002. – Т. 38, № 9. – С. 78–86.
9. Hetnarski R. B. Thermal stresses – advanced theory and applications / R. B. Hetnarski, M. R. Eslami. – Amsterdam: Springer, 2009. – 562 с.
10. Брычков, Ю. А. Интегральные преобразования обобщенных функций / Ю. А. Брычков, А. П. Прудников. – Москва: Наука, 1977. – 288 с.
11. Верлань А. Ф. Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы / А. Ф. Верлань, В. С. Сизиков. – Киев: Наукова думка, 1986. – 544 с.
1. BIRMAN, V. & BYRD, L. W. (2007) Modeling and analysis of functionally graded materials and structures. *Appl. Mech. Rev.* 60(5). p. 195–216.
2. MORTENSEN, A. & SURESH, S. (1995) Functionally graded metals and metal-ceramic composites: Part 1 Processing. *Int. Mater. Rev.* 40 (6). p. 239–265.
3. KOLCHIN, G. B. (1971) *Raschiot Elementov Konstruktsiy iz Uprugikh Neodnorodnykh Materialov*. Kishinev: Kartya Moldovenyaske.
4. PLEVAKO, V. P. (1997) *Obshchiye Resheniya v Zadachakh Teorii Uprugosti Neodnorodnykh Sred*. Kharkov: Osnova.
5. TANIGAWA, Y. (1995) Some basic thermoelastic problems for nonhomogeneous structural materials. *Appl. Mech. Rev.* 48 (6). p. 287–300.
6. TIMOSHENKO, S. P. & GOODIER, J. N. (1970) *Theory of Elasticity*, New York: McGraw Hill.
7. VIGAK, V. M. & RYCHAGIVSKII, A. V. (2000) The method of direct integration of the equations of three-dimensional elastic and thermoelastic problems for space and a half-space. *Int. Appl. Mech.* 36 (11), p. 1468–1475.
8. VIGAK, V. M. & RYCHAGIVSKII, A. V. (2002) Solution of a three-dimensional elastic problem for a layer. *Int. Appl. Mech.* 38 (9), p. 1094–1102.
9. HETNARSKI, R. B. & ESLAMI, M. R. (2009) *Thermal Stresses – Advanced Theory and Applications*. Amsterdam: Springer.
10. BRYCHKOV, Yu. A. & PRUDNIKOV, A. P. (1989) *Integral Transforms of Generalized Functions*. New York: Gordon and Breach Science Publishers.
11. VERLAN, A. F. & SIZIKOV, V. S. (1986) *Integralnyie Uravneniya: Metody, Algoritmy, Programy*. Kiev: Naukova Dumka.

Надійшла до редколегії 30.09.15

УДК 539.3

Федорченко Л. М., аспірант

**Вплив фізичних властивостей матеріалу
на напружений стан ортотропної
сферичної оболонки з ортотропною
електропровідністю**

Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, проспект
Акад. Глушкова, 4-е
e-mail: fedorchenko555@gmail.com

L. N. Fedorchenko, Postgraduate Student

**An influence of physical properties of the
material on a stress state of an orthotropic
spherical shell with an orthotropic
electroconductivity**

Taras Shevchenko National University of Kyiv,
03680, Kyiv, Acad. Glushkova av., 4-e
e-mail: fedorchenko555@gmail.com

Отримано розв'язок одновимірної нелінійної задачі магнітопружності для ортотропної сферичної оболонки змінної жорсткості. Отримано розв'язувальну систему, яка описує напружено-деформівний стан тонких оболонок обертання. Проведено аналіз отриманих результатів розподілу механічних та магнітних напружень для оболонок із цинку та берилію.

Ключові слова: ортотропна оболонка, магнітне поле, магнітопружність.

The increased interest in problems of coupled-field mechanics – in particular, electroelasticity and magnetoelasticity – is due to the requirements of modern engineering process in the development of new technologies. The coupling of the fields is governed by Maxwell's stress and the Lorentz force. A Solution of the boundary value problems of magnetoelasticity theory of thin shells with a finite electrical conductivity in a nonlinear formulation is connected with large computational difficulties. This is because of the fact that system that describes the stress-strain state of the shell is coupled. The volumetric Lorentz forces are nonlinear. The ponderomotive forces depend on the speed of the conductive elements of a continuous medium and the external magnetic field, the magnitude and orientation of the conduction current in reference to external magnetic field. The proposed technique for solving of the nonlinear problems of magnetoelasticity of shells is based on the consecutive application of the finite-difference scheme of Newmark, the method of quasilinearization, and the method of discrete-orthogonalization. In paper, the analysis of mechanical and magnetic strain within an orthotropic spherical shell made of the zinc and beryllium has been carried out.

Key Words: Orthotropic Shell, Magnetic Field, Magnetoelasticity.

1. Вступ

Важливе місце в механіці зв'язаних полів займають питання вивчення напруженого стану оболонок з урахуванням електромагнітних ефектів. Наслідком впливу стороннього стуму чи механічних навантажень на тонкі струмопровідні ортотропні оболонки, що знаходяться в магнітному полі, є поява масових сил, які спричиняють великі напруження в даному твердому тілі. Тому для аналізу напруженості ортотропних сферичних оболонок необхідне застосування нелінійної теорії. У зв'язку з цим, виникає велика необхідність у розробці ефективних методів проведення аналізу напруженого стану струмопровідної ортотропної сферичної оболонки обертання, яка знаходиться в магнітному полі в осесиметричній постановці.

В даній статті, застосовуючи геометрично нелінійну теорію в квадратичному наближенні, в основі якої лежать гіпотези Кірхгофа – Лява, та використовуючи гіпотези магнітопружності побудовано розв'язувальну систему рівнянь магнітопружності осесиметричних ортотропних сферичних оболонок обертання та запропонована методика її розв'язання. Проведено порівняльний аналіз зміни механічних напружень та напружень Максвелла при різних фізичних властивостях матеріалу ортотропних сферичних оболонок обертання в нелінійному магнітному полі.

При побудові розв'язувальної системи ортотропної сферичної оболонки враховується також ортотропія електропровідності.

2. Постановка задачі

Розглянемо в лагранжевих змінних струмопровідну ортотропну сферичну оболонку

змінної товщини з ортотропною електропровідністю. Вважаємо, що тіло знаходиться у зовнішньому магнітному полі під дією механічних навантажень. Тоді рівняння магнітопружності в області, що займає тіло запишуться у вигляді [3]

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} \vec{E} &= \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}; \operatorname{rot} \vec{H} = \vec{J}, \\ \operatorname{div} \vec{B} &= 0, \quad \operatorname{div} \vec{D} = 0;\end{aligned}$$

де $\vec{J}$ – густина індукованого електричного струму; $\vec{E}$ – напруженість електричного поля; $\vec{H}$ – напруженість магнітного поля; $\vec{D}$ – електрична індукція; $\vec{B}$ – магнітна індукція; $\vec{v}$ – швидкість деформації; $\vec{F}$ і $\vec{F}^{\wedge}$ – об'ємна механічна сила і сила Лоренца відповідно.

Нехтуємо впливом процесів поляризації і намагнічування. Вважаємо, що пружні властивості матеріалу ортотропні, головні напрямки пружності співпадають з напрямками відповідних координатних ліній. Електромагнітні властивості матеріалу характеризуються тензорами електричної провідності σ_{ij} , діелектричної проникності ε_{ij} та магнітної проникності μ_{ij} . Виходячи з кристалографії [2] і згідно роботи [5] тензори ε_{ij} , σ_{ij} , μ_{ij} мають діагональний вигляд.

Серединну поверхню оболонки в недеформованому стані віднесемо до криволінійної системи координат s і Θ , де s – довжина дуги меридіана, Θ – центральний кут. Координатні лінії $s = \text{const}$, $\Theta = \text{const}$ є лініями головних кривизн серединної поверхні.

Враховуючи діагональний вигляд тензорів, геометрію сферичної оболонки і згідно роботам [1, 3] розв'язувальна система рівнянь магнітопружності осесиметричної ортотропної оболонки обертання має вигляд:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial s} &= \frac{1 - v_s v_\theta}{e_s h} N_s - \frac{v_\theta \cos \phi}{r} u - \frac{v_\theta \sin \phi}{r} w - \frac{1}{2} \vartheta_s^2; \\ \frac{\partial w}{\partial s} &= -\vartheta_s; \\ \frac{\partial \vartheta_s}{\partial s} &= \frac{12(1 - v_s v_\theta)}{e_s h^3} M_s - \frac{v_\theta \cos \phi}{r} \vartheta_s; \\ \frac{\partial N_s}{\partial s} &= \frac{\cos \phi}{r} \left(v_s \frac{e_0}{e_s} - 1 \right) N_s + \frac{e_0 h \cos^2 \phi}{r^2} u +\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}& + \frac{e_0 h \cos \phi \sin \phi}{r^2} w - P_s + h J_{\theta CT} B_\gamma - \\ & - \sigma_1 h \left[E_\theta B_\gamma - \frac{\partial u}{\partial t} B_\gamma^2 + 0,5 \frac{\partial w}{\partial t} B_\gamma (B_s^+ + B_s^-) \right] + \\ & + \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}; \\ \frac{\partial Q_s}{\partial s} &= -\frac{\cos \phi}{r} Q_s + v_s \frac{e_0 \sin \phi}{e_s r} N_s + \\ & + \frac{e_0 h \sin \phi \cos \phi}{r^2} u + e_0 h \frac{\sin^2 \phi}{r^2} w - P_\gamma - \\ & - 0,5 h J_{\theta CT} (B_s^+ + B_s^-) - \\ & - \sigma_3 h \left[-0,5 E_\theta (B_s^+ + B_s^-) - 0,25 \frac{\partial w}{\partial t} (B_s^+ + B_s^-)^2 - \right. \\ & \left. - \frac{1}{12} \frac{\partial w}{\partial t} (B_s^+ - B_s^-)^2 + 0,5 \frac{\partial u}{\partial t} B_\gamma (B_s^+ + B_s^-) \right] + \\ & + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}; \\ \frac{\partial M_s}{\partial s} &= \frac{\cos \phi}{r} \left(v_s \frac{e_0}{e_s} - 1 \right) M_s + \frac{e_0 h^3 \cos^2 \phi}{12 r^2} \vartheta_s + \\ & + Q_s + N_s \vartheta_s - \frac{\sin \phi}{r} v_s \frac{e_0}{e_s} M_s + \frac{e_0 h^3 \sin \phi \cos \phi}{12 r^2} \vartheta_s^2; \\ \frac{\partial B_\gamma}{\partial s} &= -\sigma_2 \mu \left[E_\theta + 0,5 \frac{\partial w}{\partial t} (B_s^+ + B_s^-) - \frac{\partial u}{\partial t} B_{\gamma 0} \right] + \\ & + \frac{B_s^+ - B_s^-}{h}; \\ \frac{\partial E_\theta}{\partial s} &= -\frac{\partial B_\gamma}{\partial t} - \frac{\cos \phi}{r} E_\theta.\end{aligned}$$

Де u , w – переміщення; N_s – нормальні зусилля; Q_s – поперечні зусилля; M_s – згинальний момент; ϑ_s – кут повороту нормалі; $h = h(s)$ – товщина оболонки; ρ – густина матеріалу; $r(s)$ – радіус кола оболонки; v_s , v_θ – коефіцієнти Пуассона; e_s , e_θ – модулі Юнга; F_i – механічна сила; E_θ – компонента напруженості електричного поля; B_γ – нормальна складова магнітної індукції; B_s^+ , B_s^- – відомі складові магнітної індукції на поверхнях оболонки; $J_{\theta CT}$ – складова густини стороннього електричного струму.

Отримана розв'язувальна система нелінійних диференціальних рівнянь восьмого порядку описує напружено-деформований стан гнучкої

струменесучої ортотропної оболонки з ортотропною електропровідністю.

3. Алгоритм чисельного розв'язання осесиметричних задач оболонок обертання

Крайові задачі даного класу розв'язуються чисельно відповідно до методики, яка ґрунтується на основі послідовного застосування схеми Ньюмарка [6], методу квазілінеаризації [4] та методу дискретної ортогоналізації [1].

На першому кроці, у системі диференціальних рівнянь в частинних похідних зі змінними коефіцієнтами, щоб відокремити змінні за часом, використовуємо неявну схему Ньюмарка для інтегрування магнітопружних рівнянь.

На наступному кроці застосовуємо метод квазілінеаризації, за допомогою якого нелінійна задача замінюється послідовністю лінійних крайових задач.

Кожна з лінійних задач розв'язується чисельно стійким методом дискретної ортогоналізації [7].

4. Числовий приклад

Розглянемо задачу про напружений стан сферичної оболонки змінної товщини $h = 5 \cdot 10^{-4} (1 + 0.2 \sin \frac{\pi S}{l})$ м (l – довжина дуги). Оболонка знаходиться під впливом нормального навантаження $P_y = 1.3 \cdot 10^2 \sin \omega t$ н/м² і зовнішнього електричного струму $J_{\theta CT} = 5 \cdot 10^{-3} \sin \omega t$ А/м².

Граничні умови обрані наступним чином:

$u = w = \vartheta_s = 0$; $B_y = 0.3 \sin \omega t$ при $s = s_0$;

$u = w = M_s = 0$; $E_\theta = 0$ при $s = s_n$.

Проводиться порівняльний аналіз механічних напружень та напружень Максвелла для оболонок з берилію та цинку.

Параметри оболонок і матеріалу взяті наступні:

1) берилій

$$e_s = 28.8 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2; e_\theta = 33.53 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2;$$

$$\nu_s = 0.03; \nu_\theta = 0.09; \rho = 2300 \text{ кг/м}^3;$$

$$\mu = 1.256 \cdot 10^{-6} \text{ Гн/м}; \sigma_1 = 0.279 \cdot 10^8 (\text{Ом} \cdot \text{м})^{-1};$$

$$\sigma_2 = 0.0321 \cdot 10^8 (\text{Ом} \cdot \text{м})^{-1};$$

2) цинк

$$e_s = 11.9 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2; e_\theta = 3.48 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2;$$

$$\nu_s = 0.3; \nu_\theta = 0.35; \rho = 7100 \text{ кг/м}^3;$$

$$\mu = 1.256 \cdot 10^{-6} \text{ Гн/м}; \sigma_1 = 0.169 \cdot 10^8 (\text{Ом} \cdot \text{м})^{-1};$$

$$\sigma_2 = 0.169 \cdot 10^8 (\text{Ом} \cdot \text{м})^{-1}.$$

Розв'язок задачі отримано на інтервалі часу $t = 1 \cdot 10^{-2}$ с, крок інтегрування за часом $\Delta t = 1 \cdot 10^{-3}$ с.

Результати розв'язку розглянутої задачі приведені нижче у вигляді графіків.

На рис. 1 та рис. 2 показані максимальні напруження Максвелла на зовнішній поверхні оболонки в момент часу $t = 4 \cdot 10^{-3}$ с. Екстремальні значення магнітних напружень для оболонок з цинку досягаються при $s = 0.552$ м, а для оболонок з берилію при $s = 0.476$ м. Потрібно відмітити, що напруження Максвелла для оболонок з цинку на декілька порядків більші за напруження оболонок з берилію, що свідчить про значний вплив параметрів матеріалу оболонки.

На рис. 3 та рис. 4 показані максимальні значення механічних напружень для оболонок з цинку та берилію. Максимальне значення для оболонок з кадмію досягаються при $s = 0.552$ м, а для оболонок з берилію при $s = 0.476$ м.

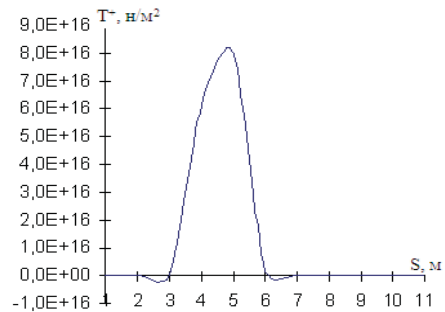


Рис. 1. Напруження Максвелла T_θ^+ для оболонки з цинку

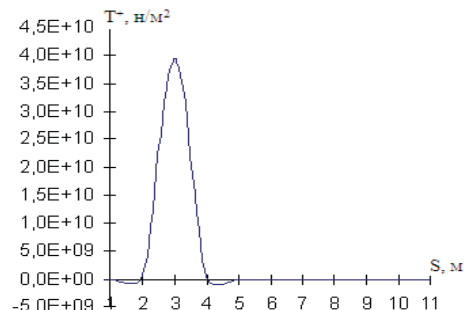


Рис. 2. Напруження Максвелла T_θ^+ для оболонки з берилію

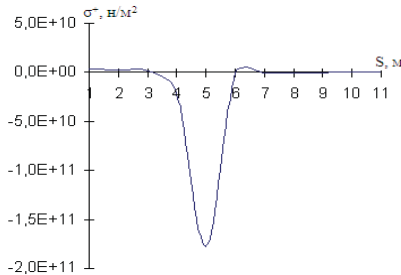


Рис. 3. Механічні напруження σ_0^+ для оболонки з цинку

Механічні та магнітні напруження для оболонок мають протилежні напрямки дії, що пояснюється прикладним навантаженням та стороннім струмом. Слід відмітити, що абсолютні значення напружень Максвелла на декілька порядків більша абсолютні значення механічних напружень для оболонок, що розглядаються. Це свідчить про значний вплив зовнішнього магнітного поля на оболонку.

Список використаних джерел

1. Григоренко Я. М. Основы теории пластин и оболочек с элементами магнито-упругости / Я. М. Григоренко, Л. В. Мольченко. – К.: ИПЦ «Киевский университет», 2010. – 403 с.
2. Келли А., Кристаллография и дефекты в кристаллах / А. Келли, Г. Гровс. – М.: Мир, 1974. – 496 с.
3. Мольченко Л. В. Гибкие оболочки вращения в магнитном поле: монография. [Электронный учебник] / Л. В. Мольченко. – Киев, 2013. – 196 с.
4. Bellman R. Quasilinearization and Nonlinear Boundary-Value Problems / R. Bellman, R. Kalaba. – Rand. Corp., 1965. – 208 p.
5. Moon F. C. Magneto-Solid Mechanics / F. C. Moon. – New- York: Wiley, 1984. – 437 p.
6. Newmark N. M. A method of computation for structural dynamics / N. M. Newmark // J. Eng. Mech. Div. Proc. ASCE. – 1959. – Vol. 85, № 7. – P. 67–94.
7. Mol'chenko L. V. A method for solving two-dimensional nonlinear boundary-value problems of magnetoelasticity for thin shells / L. V. Mol'chenko // Int. Appl. Mech. – 2005. – Vol. 41, № 5. – P. 490–495.

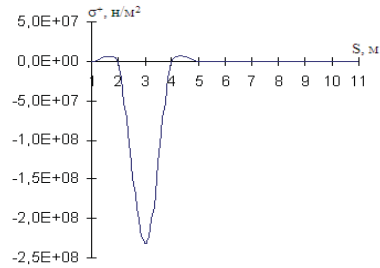


Рис. 4. Механічні напруження σ_0^+ для оболонки з берилію

5. Висновки

В даній статті зроблено порівняльний аналіз зміни механічних та магнітних напружень сферичних оболонок з цинку та берилію з ортотропною електропровідністю. Враховуючи проведений аналіз можна відмітити значний вплив параметрів матеріалу ортотропної оболонки обертання на механічні та магнітні напруження.

References

1. GRIGORENKO, Ya. & MOL'CHENKO, L. (2010) *Osnovi Teorii Plastin i Obolonok s Elementami Magnitoprzhnosti*. Kiev: Kievskiy universitet.
2. KELLI, A. & GROVS, G. (1974) *Kristallografiya i Defekti v Kristalah*. Moskva: Mir.
3. MOL'CHENKO, L. (2013) *Gibkie Obolochki Vrashchehiya v Magnitnom Pole*. [Online], Kiev. Available from <http://mechmat.univ.kiev.ua/u/publications>.
4. BELLMAN, R. & KALABA, R. (1965) *Quasilinearization and Nonlinear Boundary-Value Problems*. Rand Corp.
5. MOON, F. (1984) *Magneto-Solid Mechanics*. New-York: Wiley.
6. NEWMARK, N. (1959) A method of computation for structural dynamics. *J. Eng Mech. Div. Proc. ASCE*. 85 (7). p. 67–94.
7. MOL'CHENKO, L. (2005) A method for solving two-dimensional nonlinear boundary-value problems of magnetoelasticity for thin shells. *Int. Appl. Mech.* 41 (5). p. 490–495.

Надійшло до редколегії 30.09.15

УДК 539.3

Фесенко Г. О., к. ф.-м. н., м. н. с.

**Контактна задача про втискування
кругового штампa у півнескінченний
пружний шар**

Одеський національний університет імені
І. І. Мечникова, 65082, м. Одеса, вул.
Дворянська, 2
e-mail: 81anna81@gmail.com

A. A. Fesenko, Ph. D. (Phys.-Math.),
Jr. Sci.Researcher

**The contact problem for a circular stamp
penetrating into an elastic semi-infinite layer**

Odessa I. I. Mechnikov National University, 65082,
Odessa, Dvoryanskaya str., 2
e-mail: 81anna81@gmail.com

Розв'язано контактну задачу про втискування з ексцентриситетом кругового штампa у напів-нескінченний пружний шар. На бічній та нижній гранях напівнескінченного шару задано умови гладкого контакту. Отримано сингулярне інтегральне рівняння відносно невідомого контактного напруження. Рівняння розв'язане методом ортогональних многочленів, і зведене до нескінченної двовимірної системи алгебраїчних рівнянь, яку розв'язано методом редукції. Отримані осадка штампa і момент сили, що забезпечує поступальний рух штампa.

Ключові слова: контактна задача, круговий штамп, півнескінченний шар, сингулярне інтегральне рівняння, метод редукції.

The contact problem of the action of a circular stamp with an eccentricity loading on an elastic semi-infinite layer has been solved under the conditions of the smooth contact at the lateral side of a layer and on its bottom surface. To reach this goal, the analytic solution of the problem of elasticity for a semi-infinite layer with the concentrated force on the upper surface of a layer has been obtained. The novel method has been introduced, which is based on the reduction of Lamé's equations into two coupled and one independent equations with respect to new unknown functions associated with displacements. The subsequent usage of the integral transform reduces the problem to one-dimensional vector boundary value problem, which is solved by means of the matrix differential calculus. The singular integral equation with respect to the unknown contact pressure has been obtained. It was solved by the method of orthogonal polynomials and was reduced to the infinite two-dimensional system of algebraic equations. These equations were solved by the reduction method. As a result, the eccentricity and precipitation of the stamp, which provide its forward movement, were determined.

Key Words: Contact Problem, Circular Stamp, Semi-Infinite Layer, Singular Integral Equation, Reduction Method.

1. Вступ

Дослідження контактної взаємодії твердих тіл розпочинається з класичних робіт Ж. Буассієса та Г. Герца [1, 2]. Г. Герцем було створено достатньо загальну теорію контакту пружних тіл з гладкою поверхнею. Ж. Буассієсом фактично було побудовано розв'язок контактної задачі про втискування кругового штампa у пружний півпростір. Велику кількість робіт присвячено розв'язку просторових контактних задач для пружного шару. У цьому класі більш складних задач не знайдено точних розв'язків, але запропоновано ефективні методи відшукування наближених. М. Н. Лебедєвим та Я. С. Уфляндом у [3] розв'язано задачу про втискування кругового штампa у

пружний шар. Розв'язок побудовано за допомогою інтегрального перетворення Ханкеля та зведено до рівняння Фредгольма з симетричним ядром. У роботі І. І. Воронича та Ю. А. Устинова [4] було запропоновано асимптотичний розв'язок цієї задачі для товстого шару. Пізніше В. М. Александровим та І. І. Вороничем було зроблено асимптотичні методи, що дозволяють знаходити розв'язки як для товстого, так і для тонкого шару [5].

Втискування штампa неосьювою силою у пружний шар розглянуто у роботах К. Є. Єгорова [6], А. Л. Флоренса [7]. Більш проста задача про кручення шару круговим штампом досліджена Я. С. Уфляндом [8], А. Л. Флоренсом [7], Д. В. Грілицьким [9]. У роботах Р. Лоу [10],

К. Срівастави та В. Саксени [11] розглянуто осесиметричні контактні задачі для пружного шару, що стискається парою штампів кругової або кільцевої форми. Г. Я. Поповим у роботі [12] наближено розв'язано контактну задачу з круговою областю контакту у випадку пружної основи загального типу. К. Є. Єгоровим розглянуто контактну задачу для пружного шару за дії неосійової вертикальної сили на круговий штамп, де розв'язок задачі розділено на дві частини відповідно для центральної сили та пари сил з моментом. Задачу зведено до системи парних інтегральних рівнянь Фредгольма [6]. У роботі [13] розглянуто неосиметрична контактна задача для кругового штампа на пружній основі. Інтегральне рівняння, завдяки ортогоналізації за системою косинусів, зведено до окремих інтегральних рівнянь відносно контактних напружень під штампом, що розв'язані за методом ортогональних многочленів [14] та зведені до нескінчених систем лінійних алгебраїчних рівнянь, що розв'язані за методом редукції. Проте, відмітимо, що проблеми збіжності двовимірних нескінчених систем лінійних алгебраїчних рівнянь практично не досліджувалися. Основний внесок тут зроблено Г. Я. Поповим у роботі [15].

Аналіз робіт, присвячених контактним задачам теорії пружності для шару за дії кругового штампа показав, що залишається відкритою проблема дослідження напруженого стану напівнескінченного шару за дії кругового штампа з ексцентриситетом. Не встановлено момент сили, що забезпечує поступальний рух штампу.

2. Постановка задачі та її розв'язання

Розглянуто контактну задачу про втискання кругового жорсткого штампу $0 \leq r \leq A$, $-\pi \leq \varphi \leq \pi$ у напівнескінченний пружний шар товщини h (модуль зсуву G , коефіцієнт Пуассона μ), який спирається на абсолютно жорстку основу без тертя, причому лінія дії зосередженої сили не співпадає з віссю штампа (рис. 1, 2).

На торці півшару і на нижній грані задано умови гладкого контакту. Слід знайти такий момент M прикладеної зосередженої сили P , при якому штамп буде зміщуватися поступально на невідому величину осадки δ .

При розв'язуванні використовується формула вертикального переміщення точок півшару під дією сили P , що прикладена у довільній точці (a, b) на грані $z = h$, аналітичне подання якого отримано у роботі [16]

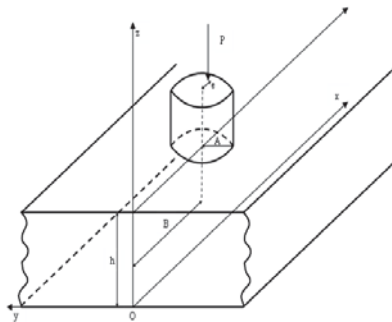


Рис. 1 Втискання кругового жорсткого штампу у напівнескінченний пружний шар – геометрія задачі.

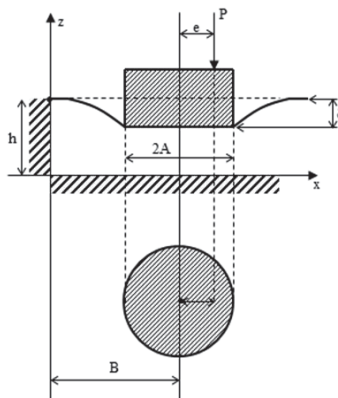


Рис. 2. Розрахункова схема: геометричні параметри $2A$, B , e та δ

$$w_0(x, y, h) = -\frac{\mu_1^{-1}}{4\pi G} \int_0^\infty J_0^*(t, x, y, a, b) F(ht) dt,$$

$$F(ht) = \frac{\text{ch}(2ht) - 1}{\text{sh}(2ht) + 2ht}, \quad \mu_1 = (2 - 2\mu)^{-1},$$

$$J_0^*(t, x, y, a, b) = J_0\left(t\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}\right) + J_0\left(t\sqrt{(x+a)^2 + (y-b)^2}\right),$$

де $J_0(t)$ – функція Бесселя.

З урахуванням кругової форми штампа зроблено заміну змінних $x = B + r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, $a = B + r \cos \psi$, $b = r \sin \psi$, де B – відстань від бічної стінки до центру штампа.

Переміщення від розподіленого по круговій

ділянки навантаження описується формулою:

$$w(r, \varphi) = -\frac{\mu_1^{-1}}{4\pi G} \int_0^A \int_{-\pi}^{\pi} [W(r, \rho, \varphi, \psi) + W_B(r, \rho, \varphi, \psi)] p(\rho, \psi) \rho d\rho d\psi,$$

де

$$W = \int_0^{\infty} J_0 \left(t \sqrt{r^2 + \rho^2 - 2r\rho \cos(\varphi - \psi)} \right) (1 + R(ht)) dt,$$

$$R(ht) = \frac{e^{-2ht} - 2ht - 1}{\text{sh}(2ht) + 2ht},$$

$$W_B(r, \rho, \varphi, \psi) = \int_0^{\infty} J_0(t \cdot R^*) (1 + R(ht)) dt,$$

$$R^* = \sqrt{4B^2 + 4B(r \cos \varphi + \rho \cos \psi) + r^2 + \rho^2 + 2r\rho \cos(\varphi + \psi)}$$

Навантаження будемо задавати таким чином, що функція переміщень являє собою площину, паралельну вісі Oy

$$Ax + Cz + D = 0 \Rightarrow z = -\frac{A}{C}x - \frac{D}{C}.$$

З іншого боку, якщо δ – відстань, на яку втискається штамп, ω – кут повороту штампка відносно вісі Oy , то розглянувши локальну систему координат, отримаємо

$$w = -\delta - x_* \sin \omega, \quad x = x_* + B \Rightarrow x_* = x - B,$$

а значить

$$w = -\delta - (x - B) \sin \omega = -x \sin \omega - (\delta - B \sin \omega).$$

Тоді прирівнюючи коефіцієнти, маємо

$$\frac{A}{C} \sin \omega = \delta, \quad \frac{D}{C} = \delta - B \sin \omega,$$

$$z = -\delta - (x - B) \sin \omega.$$

Запишемо рівняння переміщень точок штампка

$$w_0(r, \varphi) = -\delta - (x - B) \sin \omega.$$

З урахуванням заміни

$$w_0(r, \varphi) = -\delta - r \cos \varphi \sin \omega.$$

Інтегральне рівняння відносно невідомого контактного напруження $p(\rho, \psi)$ отримане за рахунок рівності переміщень точок штампку та напівнескінченного шару на верхній грані у наступній формі

$$-\frac{\mu_1^{-1} A}{4\pi G} \int_0^A \int_{-\pi}^{\pi} [W(r, \rho, \varphi, \psi) + W_B(r, \rho, \varphi, \psi)] p(\rho, \psi) \rho d\rho d\psi =$$

$$= -\delta - r A \cos \varphi \sin \omega, \quad 0 < r < A, \quad -\pi < \varphi < \pi. \quad (1)$$

Враховуючі те, що сила діє симетрично відносно штампка, площина zOy є площиною симетрії, а тому контактне напруження буде парним відносно полярного кута, а отже – його можна задавати у вигляді розвинення за системою косинусів

$$p(\rho, \psi) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(\rho) \cos n\psi,$$

після підстановки якого у інтегральне рівняння (1) та деяких перетворень отримаємо систему інтегральних рівнянь

$$\pi^2 \delta_k \int_0^1 \rho p_k(\rho) \left(W_{k,k}(r, \rho) + \int_0^{\infty} J_k(tr) J_k(tp) R(ht) dt \right) d\rho + F_{nk}(r, \rho) = f_k(r),$$

де $F_{nk}(r, \rho)$, $f_k(r)$, $k = 0, 1, 2, \dots$ – відомі функції,

$$\delta_k = \begin{cases} 2, & k = 0 \\ 1, & k \geq 1 \end{cases}, \quad W_{k,k}(r, \rho) = \int_0^{\infty} J_k(tr) J_k(tp) dt.$$

З урахуванням структури ядра інтегрального рівняння та наявності відповідного спектрального співвідношення [14]

$$\int_0^1 \frac{W_{k,k}(x, y)}{\sqrt{1-y^2}} P_m^{k, -\frac{1}{2}}(1-2y^2) y^{k+1} dy = \sigma_{mk} x^k P_m^{k, -\frac{1}{2}}(1-2x^2),$$

де $\sigma_{mk} = \frac{\Gamma(m + \frac{1}{2}) \Gamma(m + k + \frac{1}{2})}{2m! \Gamma(m + k + 1)}$, а $P_m^{k, -\frac{1}{2}}(1-2y^2)$ –

многочлени Якобі, розв'язок шукається у вигляді

$$p_k(\rho) = \frac{\rho^k}{\sqrt{1-\rho^2}} \sum_{m=0}^{\infty} p_{km} P_m^{k, -\frac{1}{2}}(1-2\rho^2).$$

В подальшому застосовано стандартну схему методу ортогональних многочленів. Враховуючи формулу ортогональності

$$\int_0^1 \frac{P_m^{k, -\frac{1}{2}}(1-2y^2) P_j^{k, -\frac{1}{2}}(1-2y^2)}{\sqrt{1-y^2}} y^{2k+1} dy = \sigma_{jk} \delta_{jm},$$

де $\sigma_{jk} = \frac{\Gamma(j + \frac{1}{2}) \Gamma(k + j + 1)}{2j! \Gamma(m + k + \frac{1}{2}) (k + 2j + \frac{1}{2})}$, δ_{jm} – символ

Кронекера, проінтегруємо рівняння (1) за змінною r на проміжку $[0, 1]$ з вагою

$$r^{k+1} (1-r^2)^{-\frac{1}{2}} P_j^{k, -\frac{1}{2}}(1-2r^2).$$

Після деяких перетворень отримано нескінченну двовимірну систему алгебраїчних рівнянь, яка у регуляризованому вигляді має вигляд

$$p_{kj} - \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} T_{nlkj} p_{nl} = f_{kj}, \quad (2)$$

де

$$T_{nlkj} = -\frac{1}{\sqrt{\Lambda_{kj}} \sqrt{\Lambda_{nl}}} \left[A_{lj}^{(k)} \delta_{nk} + \delta_k B_{jnl}^{(k)} \right],$$

$$p_{kj} = \sqrt{\Lambda_{kj}} P_{kj}^*, \quad \Lambda_{nl} = \left[\frac{\Gamma(l + \frac{1}{2})}{2l!} \right]^2 \frac{1}{n + 2l + \frac{1}{2}},$$

$$f_{kj} = \delta_k \frac{2G\mu_1}{A} \frac{f_{kj}^*}{\sqrt{\Lambda_{kj}}}, \quad \delta_k = \begin{cases} 1, k=0 \\ 2, k \geq 1 \end{cases},$$

$$A_j^{(k)} = \int_0^1 \int_0^1 \frac{\rho^{k+1}}{\sqrt{1-\rho^2}} P_l^{k-\frac{1}{2}} (1-2\rho^2) \frac{r^{k+1}}{\sqrt{1-r^2}} \times$$

$$\times P_j^{k-\frac{1}{2}} (1-2r^2) \int_0^\infty R(ta) \cdot J_k(tp) \cdot J_k(tr) dp dr dt,$$

$$R(ta) = \frac{e^{-2ta} - 1 - 2ta}{\operatorname{sh} 2ta + 2ta}, \quad a = h/A,$$

$$B_{jnl}^{*(k)} = \frac{1}{\pi^2} [C_{jnl}^k - B_{jnl}^k],$$

$$C_{jnl}^k = \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^1 \frac{\rho^{n+1}}{\sqrt{1-\rho^2}} P_l^{n-\frac{1}{2}} (1-2\rho^2) \frac{r^{k+1}}{\sqrt{1-r^2}} \times$$

$$\times P_j^{k-\frac{1}{2}} (1-2r^2) \int_{-\pi}^\pi F(\psi, \varphi; r, \rho) d\rho dr d\psi d\varphi,$$

$$F(\psi, \varphi; r, \rho) = \frac{\cos n\psi \cdot \cos k\varphi}{R(\psi, \varphi; r, \rho)},$$

$$R(\psi, \varphi; r, \rho) = \sqrt{4b^2 + 4b(r \cos \varphi + \rho \cos \psi)^2 +$$

$$+ r^2 + \rho^2 + 2r\rho \cos(\varphi + \psi)}, \quad b = B/A,$$

$$B_{jnl}^k = \int_0^1 \int_0^1 \frac{\rho^{n+1}}{\sqrt{1-\rho^2}} P_l^{n-\frac{1}{2}} (1-2\rho^2) \frac{r^{k+1}}{\sqrt{1-r^2}} \times$$

$$\times P_j^{k-\frac{1}{2}} (1-2r^2) \int_0^\infty R(ta) \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N F(t, \tau_i, \rho, r) d\rho dr dt,$$

$$F(t, \tau_i, \rho, r) =$$

$$= \cos \left[2t \frac{B}{A} \sin \tau_i \right] \left\{ I_{ni}^{(1)}(\rho) \cdot I_{ki}^{(1)}(r) - I_{ni}^{(2)}(\rho) \cdot I_{ki}^{(2)}(r) \right\} -$$

$$- \sin \left[2t \frac{B}{A} \sin \tau_i \right] \left\{ I_{ni}^{(1)}(\rho) \cdot I_{ki}^{(2)}(r) + I_{ni}^{(2)}(\rho) \cdot I_{ki}^{(1)}(r) \right\},$$

$$I_{ni}^{(1)}(\rho) =$$

$$= \int_0^\pi \cos(n\psi) \cos[tp \cos \tau_i \sin \psi] \cos[tp \sin \tau_i \cos \psi] d\psi,$$

$$I_{ni}^{(2)}(\rho) =$$

$$= \int_0^\pi \cos(n\psi) \cos[tp \cos \tau_i \sin \psi] \sin[tp \sin \tau_i \cos \psi] d\psi,$$

$$\tau_i = \frac{2i-1}{2N} \pi; \quad i = \overline{1, N}.$$

Вважаємо, що штамп під дією сили рухається поступально, тобто кут повороту $\omega = 0$. Права частина рівняння (2) за таким припущенням запишеться у формі

$$f_{kj} = \delta_k \cdot \delta_{k0} \frac{2G\mu_1}{A} \frac{\delta}{\sqrt{\Lambda_{kj}}} \int_0^1 \frac{r^{k+1} P_j^{k-\frac{1}{2}} (1-2r^2)}{\sqrt{1-r^2}} dr.$$

Систему (2) розв'язано за методом редукції.

Переміщення штамп δ і момент сили M знайдено з умов рівноваги штамп:

$$\int_0^A \int_0^\pi p(\rho, \psi) \rho d\rho d\psi = P,$$

$$\int_0^A \int_0^\pi p(\rho, \psi) \rho^2 \sin \psi d\rho d\psi = M.$$

3. Результати розрахунків та їх аналіз

Числові розрахунки проведено для шару одиничної товщини $h=1$ з міді ($\mu = 1/3$, $G = 44.7 \text{ ГПа}$) в залежності від відстані від бічної стінки півшару до центра штамп B , штамп має одиничний радіус $A = 1$. У таблиці 1 наведено значення осадки штамп і моменту сили при відстані від бічної стінки півшару до центру кругового штамп, рівній $B = 1$, $B = 5$, $B = 10$ відповідно, при різних значеннях N редукції двовимірної нескінченної системи (2).

Таблиця 1

Осадка штамп і момент сили

B		δ	M
$B=1$	$N=1(4 \times 4)$	0.00310	0.50046
	$N=2(9 \times 9)$	0.00291	0.51493
$B=5$	$N=1(4 \times 4)$	0.00274	0.51527
	$N=2(9 \times 9)$	0.00235	0.51406
$B=10$	$N=1(4 \times 4)$	0.00312	0.51303
	$N=2(9 \times 9)$	0.00290	0.51301

У роботі [17] цю задачу було розв'язано за методом розвинення за малим параметром $-1/(2B)$. На відміну від безпосереднього розв'язування, де отримано двовимірну нескінченну систему алгебраїчних рівнянь, тут отримана система рекурентних сингулярних інтегральних рівнянь, кожне з яких за допомогою метода ортогональних многочленів приводиться до одновимірних нескінченних систем, метод редукції для яких досліджено. Результати, отримані цими двома способами, наведені у таблиці 2.

Порівняльний аналіз результатів, отриманих двома способами розв'язування, показав їх співпадіння з точністю до 10^{-3} для значень $B \geq 3$. Збіжність метода редукції при розв'язуванні двовимірних нескінченних систем алгебраїчних

рівнянь досягається при $N = 2$, що відповідає матриці коефіцієнтів з розмірністю 9×9 .

Порівняння результатів за двома способами розв'язання

Таблиця 2

В	δ		М	
	Метод 1	Метод 2	Метод 1	Метод 2
1	0.00291	0.00270	0.51493	0.51450
2	0.00290	0.00283	0.51491	0.51444
3	0.00243	0.00231	0.51422	0.51431
5	0.00235	0.00285	0.51406	0.51404

4. Висновки

Розв'язано контактну задачу про втискування кругового жорсткого штампу неосовою силою у пружний напівнескінченний шар. Побудовано наближені формули для визначення осадки штампта та момента сили, що забезпечує поступальний рух штампта. Проблему зведено до сингулярного інтегрального рівняння відносно невідомого контактного напруження, що розв'язане за методом ортогональних многочленів і зведене до нескінченної двовимірної системи алгебраїчних рівнянь, яка розв'язується за методом редукції. Проведено порівняння результатів, отриманих безпосереднім розв'язуванням та за методом розвинення за малим параметром.

Список використаних джерел

1. Boussinesq J. Application des potentiels à l'étude l'équilibre et du mouvement des solides élastiques / J. Boussinesq. – Paris: Gauthiers. Villars. –1885. – 721 p.
2. Hertz H. Über die Berührung fester elastischer Körper / H. Hertz // Journal für die reine und angewandte Mathematik. – 1882. – Vol. 92. – S. 156–171.
3. Лебедев Н. Н. Осесимметричная контактная задача для упругого слоя / Н. Н. Лебедев, Я. С. Уфлянд // Прикл. математика и механика. – 1958. – Т. 22, № 3. – С. 320–326.
4. Ворovich И. И. О давлении штампта на слой конечной толщины / И. И. Ворovich, Ю. А. Устинов // Прикл. математика и механика. – 1959. – Т. 22, № 3. – С. 445–454.
5. Александров В. М. О действии штампта на упругий слой конечной толщины/ В. М. Александров, И. И. Ворovich // Прикл. математика и механика. – 1960. – Т. 24, № 2. – С. 323–330.
6. Егоров К. Е. Контактная задача для упругого слоя при действии внецентренной вертикальной силы на круглый жесткий штамп / К. Е. Егоров // Докл. АН СССР. – 1960. – Т. 133, № 4. – С. 781–784.
7. Florence A. L. Two contact problems for an elastic layer / A. L. Florence // Quart. Journ. Mech. Appl. Math. – 1961. – Vol. 14, № 4. – P. 453–459.
8. Уфлянд Я. С. Кручение упругого слоя / Я. С. Уфлянд // Докл. АН СССР. – 1959. – Т. 129, № 5.
9. Грилицкий Д. В. Кручения двошарового пружного

References

1. BOUSSINESQ, J. (1885) *Application des Potentiels à L'étude L'équilibre et du Mouvement des Solides Elastiques*. Paris: Gauthiers. Villars.
2. HERTZ, H. (1882) Über die Berührung fester elastischer Körper. *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik*. 92. p. 156–171.
3. LEBEDEV, N. N. & UFLYAND, YA. S. (1958) Osessimmetrichnaya contactnaya zadacha dlya uprugogo sloya. *Prikladnaya Matematika i Mekhanika*. 22 (3). p. 320–326.
4. VOROVICH, I. I. & USTINOV, U. A. (1959) O davlenii shtampa na sloi konechnoi tolshini. *Prikladnaya matematika i mekhanika*. 22 (3). p. 445–454.
5. ALEKSANDROV, V. M. & VOROVICH, I. I. (1960) O deystvii shtampa na uprugiy sloi konechnoi tolshini. *Prikladnaya Matematika i Mekhanika*. 24 (1). p. 323–330.
6. EGOROV, K. E. (1960) Contactnaya zadacha dlya uprugogo sloya pri deistvii vnezentrenoi verticalnoi sili na kruglii jestkii shamp. *Dokl. AN SSSR*. 133 (4). p. 781–784.
7. FLORENCE, A. L. (1961) Two contact problems for an elastic layer. *Quart. J. Mech. Appl. Math.* 14 (4). p. 453–459.
8. UFLYAND, YA. S. (1959) Krucheniye uprugogo sloya. *Dokl. AN SSSR*. 129 (5).
9. GRILIZKIY, D. V. (1961) Krucheniya dvo-sharovogo prujnogo seredovisha. *Prikladnaya Mekhanika*. 7 (1).
10. LOW, R. (1964) On a doubly mixed boundary value problem for an elastic layer. *Quart.*

- жного середовища / Д. В. Гриліцький // Прикл. механіка. – 1961. – Т. 7, № 1.
10. Low R. On a doubly mixed boundary value problem for an elastic layer / R. Low // *Quart. Appl. Math.* – 1964. – Vol. 22, № 2. – P. 153–160.
11. Srivastava K. Axisymmetric problem of an infinite elastic plane in contact with two punches / K. Srivastava, V. Saxena // *Ind. J. Pure Appl. Math.* – 1972. – Vol. 3, № 6. – P. 1278–1285.
12. Попов Г. Я. Контактная задача теории упругости при наличии круговой области контакта / Г. Я. Попов // *Прикл. математика и механика.* – 1962. – Т. 26, № 1. – С. 152–164.
13. Босаков С. В. Об одном подходе в контактной задаче для круглого штампа на упругом основании / С. В. Босаков // *Прикл. механика.* – 2008. – Т. 44, № 4. – С. 65–71.
14. Попов Г. Я. Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений / Г. Я. Попов – М.: Наука, 1982. – 344 с.
15. Попов Г. Я. Основы теории двумерных бесконечных систем / Г. Я. Попов // *Мат. методы и физ.-мех. поля.* – 2010. – Т. 53, №2. – С. 17–27.
16. Fesenko A. A. Mixed problems of stationary heat conduction and elasticity theory for a semiinfinite layer / A. A. Fesenko // *Mat. Met. Fiz.-Mekh. Polya.* – 2014. – Vol. 56, № 3. – P. 182–191.
17. Фесенко А. А. Об одном способе решения контактной задачи для упругого полуслоя / А. А. Фесенко // *Вест. ОНУ. Сер.: Мат. и мех.* – 2014. – Т. 19, № 3. – С. 93–105.
- Appl. Math.* 22 (2). p. 153–160.
11. SRIVASTAVA, K. & SAXENA, V. (1972) Axisymmetric problem of an infinite elastic plane in contact with two punches. *Ind. J. Pure Appl. Math.* 3 (6). p. 1278–1285.
12. POPOV, G. YA. (1962) Contactnaya zadacha teorii uprugosti pri nalichii krugovoi oblasni kontakta. *Prikladnaya Matematika i Mekhanika.* 26 (1). p. 152–164.
13. BOSAKOV, S. V. (2008) Ob odnom podhode v contactnoi zadache dlya kruglogo shtampa na uprugom osnovanii. *Prikladnaya Mekhanika.* 44 (4). p. 65–71.
14. POPOV, G. YA. (1982) *Konzentraziya Uprugikh Napryazhenii Vozle Shtampov, Razrezov, Tonkih Vklyuchenii i Podkreplenii.* Moskva: Nauka.
15. POPOV, G. YA. (2010) Osnovi teorii dvumernih beskonechnih system. *Matematychni Metody ta Fyzyko-Mekhanichni Polya.* 53 (2). p. 17–27.
16. FESENKO, A. A. (2014) Mixed problems of stationary heat conduction and elasticity theory for a semiinfinite layer. *Matematychni Metody ta Fyzyko-Mekhanichni Polya.* 56 (3). p. 182–191.
17. FESENKO, A. A. (2014) Ob odnom sposobe resheniya contactnoi zadachi dlya uprugogo polusloya. *Visnyk ONU. Ser.: Matematika i Mekhanika.* 19 (3). p. 93–105.

Надійшла до редколегії 25.09.15

УДК 532.595+612.13

Філіппова О. М.¹, викладач,
Кізілова Н. М.², д. ф.-м. н., проф.

Дослідження руху в'язкої рідини у в'язкопружній камері з біоактивного матеріалу

¹Національний технічний університет
«Харківський політехнічний інститут», 61000,
м. Харків, вул. Фрунзе, 21
e-mail: helenfilippova@yahoo.co.uk

²Харківський національний університет імені
В. Н. Каразіна, 61022, м. Харків, пл. Свободи, 4

O. M. Philippova¹, Lecturer,
N. M. Kizilova², Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof.

An investigation of viscous fluid flow in a viscoelastic chamber from a bioactive material

¹National Technical University «Kharkiv Polytechnic
Institute», 61000, Kharkiv, Frunze str., 21
e-mail: helenfilippova@yahoo.co.uk

²V. N. Karazin Kharkov National University, 61022,
Kharkiv, Svobody sq., 4

В роботі досліджується модель артеріального русла як єдиної в'язкопружної камери з біоактивного матеріалу. Біоактивність полягає в реакції стінок камери на підвищення гідростатичного тиску та зміну в'язких напружень на стінках камери, що відповідає активним реакціям стінки артеріальних судин на зміни умов течії крові. Для випадку в'язкопружного матеріалу Кельвіна – Фойхта та наявності гідродинамічної та механо-хімічної регуляції задача зведена до системи двох звичайних диференціальних рівнянь. У випадку гідродинамічної регуляції розв'язок задачі можна отримати у вигляді розкладень за малим параметром. Проведено порівняння отриманого розв'язку з моделлю в'язкопружної камери без регуляції. Запропонована модель може бути застосована в медичній діагностиці для аналізу пульсових кривих та кількісної оцінки в'язкопружних властивостей стінок артерій.

Ключові слова: артеріальне русло, математичне моделювання, біоактивний матеріал, гідродинамічна регуляція.

The model of arterial vasculature as a single viscoelastic chamber from a biological active (bioactive) material is considered. The bioactivity is considered as a property of the material of the chamber walls respond to any increase in hydrodynamic pressure inside the chamber and in wall shear stress at the inner surface of the walls. That behavior corresponds to the active reaction of the arterial wall for variations of the arterial blood pressure and blood flow conditions. For the Kelvin–Voigt viscoelastic body and presence of local hydrodynamical, mechanical and chemical regulations, the mathematical problem formulation is reduced to the system of two ordinary differential equations for pressure and volume of the chamber. When the mechanism of active regulation is purely hydrodynamic, a solution of the problem may be found as the power expansion over a small parameter. The solution of the problem is obtained and compared to the case of passive viscoelastic chamber without regulation. The developed model can be used in medical diagnostics for a pulse wave analysis and a quantitative estimation of the viscoelastic parameters of the arterial wall.

Key Words: Arterial Vasculature, Mathematical Modeling, Bioactive Material, Hydrodynamic Regulation.

1. Вступ

Математичне моделювання динаміки серцево-судинної системи викликає значний інтерес у зв'язку з можливостями використання в клінічній діагностиці для біомеханічної інтерпретації вимірюваних фізіологічних сигналів, таких як коливання артеріального тиску та швидкості течії крові, осциляції діаметра судин та кровонаповнення органів. Складність ієрархічної будови судинних систем, нелінійних в'язкопружних влас-

тливостей стінок судин та органів приводить до неможливості прямих чисельних розрахунків на повних тривимірних моделях, і тому значна увага приділяється пошуку спрощених комбінованих моделей. Артеріальні системи представлені сукупностями сегментів артерій різних довжин і діаметрів, які зв'язані між собою в складні деревоподібні структури, що можуть мати цикли. Якщо цикли відсутні, розрахунки гемодинамічних параметрів можуть проводитися на основі лінійних систем рівнянь для амплітуд тиску P_a та об'ємної

витрати Q_a крові [1], а при наявності циклів потрібно проводити розрахунки нелінійних систем рівнянь для P_a та Q_a в кожній судині [2].

Моделювання течії крові в таких системах представляє складну задачу, особливо враховуючи істотні індивідуальні варіації будови таких русел. Найбільш детальні чисельні розрахунки можуть бути проведені на основі 3-d моделей, які базуються на розв'язанні рівнянь Нав'є – Стокса для нестисливої рідини в фіксованих або рухливих областях заданої форми, які можуть бути відновлені з комп'ютерних томограм окремих ділянок тіла або органів пацієнта. Такі розрахунки вимагають істотних витрат часу і обчислювальних ресурсів, тому можуть бути проведені в окремих невеликих за протяжністю, як правило, великих судинах: сегментах артерій, великих ділянках сонних, ниркових, коронарних артерій. Нелінійні 1-d моделі течії рідини по податливим трубкам з довільним перерізом [3] вимагають значно меншого часу розрахунків, і в даний час дуже популярні при розрахунках гемодинаміки системного русла людини, яке налічує 50–100 крупних судин [4]. 2-d моделі, які базуються на розв'язанні лінеаризованих рівнянь Нав'є – Стокса в трубках кругового перетину, дозволяють проводити детальні розрахунки в реальному часі на системах, які налічують більше 10^3 артерій [5]. Вищевказані моделі не враховують біоактивність артерій, які змінюють свій діаметр та товщину стінки у відповідь на зміну умов кровотоку. В даній роботі розглядається узагальнення 0-d моделі пружної камери з урахуванням біоактивності стінки.

2. Біоактивність та саморегуляція в артеріях

Підтримка постійного тиску P і об'ємної витрати кровотоку Q в артеріях відбувається за рахунок зміни просвіту артерій – шляхом скорочення гладком'язових клітин (ГМК), які розташовані в середньому шарі стінки. При підвищенні/пониженні трансмурального тиску $P_{tm} = P - P_e$, де P_e – тиск у тканинах навколо судини, відбувається скорочення/розслаблення ГМК і відповідне зменшення/збільшення просвіту S судини, що супроводжується збільшенням/зменшенням товщини h і окружний жорсткості k стінки (ефект Остроумова – Бейліса). Ці активні зміни просвіту накладаються на пасивне розширення/звуження артерій при підвищеному/зниженому тиску відповідно, що призводить до підтримання постійної витрати крові [6].

Інша реакція, яка спрямована на підтримку постійного тиску P , пов'язана зі скороченням/розслабленням ГМК у відповідь на збільшення/зменшення напруження зсуву τ_w на стінці судини, яке реєструється механосенсорними клітинами судинного ендотелію, а після цього відповідний сигнал передається до ГМК.

Запропоновані математичні моделі біоактивності стінки засновані на рівнянні для радіуса судини, у тому числі за умов наявності реакції запізнювання, у вигляді [7]:

$$\frac{dR}{dt} = f(R(t), P_{tm}(t - t^*), \tau_w(t - t^*)), \quad (1)$$

де t^* – час запізнювання.

Рівняння (1) доповнюється залежностями «керуючих» параметрів від характеристик моделі

$$\tau_w, P_{tm} = \tau_w, P_{tm}(R(t), Q_{in}(t), P_a(t), P_v(t)), \quad (2)$$

де $P_{a,v}$ – тиск на вході і на виході з судини (на артеріальному та венозному кінцях).

Співвідношення (2) можна визначити з рішення відповідної 1-d або 0-d задачі. Оскільки реакції саморегуляції залежать від концентрацій C_i активних речовин (кальцію, оксиду азоту та ряду інших вазоактивних факторів), то коефіцієнти в (1)–(2) залежать від концентрацій C_i , еволюція яких описується відповідними рівняннями балансу [8]:

$$\frac{dC_i}{dt} = -\alpha_i C_i + \psi_i(P) + \beta_i \frac{dP}{dt}, \quad (3)$$

де α_i – швидкість поглинання активної речовини, функція $\psi_i(P)$ описує її виділення (секрецію) у відповідь на тиск P в судині, а β_i – у відповідь на осциляції тиску та відповідні напруження зсуву на стінках.

Модель (1)–(3) не враховує взаємозв'язаних змін R , h і k при скороченні і розслабленні ГМК. Більш загальна 2-d модель [9] вимагає завдання великого числа біохімічних параметрів, що вимагає постановки спеціальних експериментів та вимірювань *in vivo*. Таким чином, узагальнення 0-d моделі на випадок біоактивної стінки дає можливість провести найбільш загальні оцінки динамічної поведінки системи з використанням мінімального набору параметрів моделі. Детальний огляд існуючих моделей біоактивності стінки артерій та деякі теоретичні оцінки наведено в [9, 10].

3. Модель пружної камери

Дана модель була запропонована О. Франком для течії крові по аорті і її крупним розгалуженням без урахування їх складної геометрії. Модель Франка широко використовується в сучасній гемодинаміці в якості моделі, яка задає граничні умови на відкритих кінцях розгалуженої системи труб, що моделює артеріальну систему органів або тіла в цілому. В моделі пружної камери система артерій розглядається як єдина камера з об'ємом $V(t)$, зміни якого за часом визначаються різницею об'єму крові, яка надходить в одиницю часу із серця $Q_{in}(t)$ і об'єму крові, який витікає із камери $Q_{out}(t)$ в інші ділянки (рис. 1), так що

$$\frac{dV}{dt} = Q_{in}(t) - Q_{out}(t) \quad (4)$$

Завдяки пружності стінок камери маємо:

$$V = V(P), \quad (5)$$

а для відтоку крові із камери приймається лінійна залежність, аналогічна закону Пуазейля,

$$Q_{out}(t) = \frac{P(t) - P_v(t)}{Z(t)}, \quad (6)$$

де $P_v(t)$ – коливання тиску в дальніх ділянках (наприклад, в венах), $Z(t)$ – гідрравлічний опір, у загальному випадку змінний відповідно до діаметру судини.

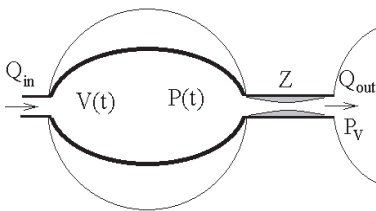


Рис. 1. Модель артеріальної системи як єдиної пружної камери

З (4)–(6) для тиску можна отримати звичайне диференціальне рівняння (ЗДР) першого порядку зі змінними коефіцієнтами

$$V' \frac{dP(t)}{dt} + \frac{P(t)}{Z(t)} = Q_{in}(t) + \frac{P_v(t)}{Z(t)}. \quad (7)$$

Класичне рівняння пружної камери виходить із (7) при припущенні $P_v(t) \approx 0$, $Z(t) = \text{const}$,

$V = kP$, $k = \text{const}$, де k і Z – жорсткості стінки камери і гідрравлічна провідність периферичного судинного русла

$$k \frac{dP(t)}{dt} + \frac{P(t)}{Z} = Q_{in}(t). \quad (8)$$

Тоді (8) має аналітичний розв'язок:

$$P(t) = e^{-t/kZ} \left(\int_0^t Q_{in}(\tau) e^{\tau/kZ} d\tau + P_d \right), \quad (9)$$

де $P_d = P(0)$ – кінцево-діастолічний тиск на вході в відповідну ділянку судинного русла.

В (9) перший доданок відповідає підвищенню тиску під час надходження крові від серця, а другий – експоненціальному спаду тиску протягом діастолі, коли закриті клапани на дозволяють подальше надходження крові.

До (7), (8) можуть бути додані функції, які відповідають інерції крові та судинної стінки [6].

4. Модифікація моделі у випадку в'язкопружної біоактивної стінки

Приймемо замість (5) реологічний закон для в'язкопружного тіла Кельвіна – Фойхта

$$\tau_v \frac{dV}{dt} + V = F(P) + \tau_p \frac{dP}{dt} + \Lambda(C_i), \quad (10)$$

де $F(P)$ – закон пружності для пасивної стінки, $\Lambda(C_i)$ – функція, яка відповідає активному управлінню об'ємом камери залежно від концентрацій активатора, $\tau_{v,p}$ – коефіцієнти.

Внаслідок реакції Бейліса $V(P)$ – спадаюча функція, а внаслідок механо-хімічної регуляції $V(Q)$ – зростаюча функція. Оскільки $Q(t) \equiv Q_{in} - Q_{out} = dV/dt$, то наявність саморегуляції означає наявність залежності між V , P , dV/dt , dP/dt , а тому коефіцієнти $\tau_{v,p}$ в (10) мають сенс не часів релаксації і ретардації, а керуючих функцій. Будемо вважати, що $\tau_{v,p} = \tau_{v,p}(P)$, тоді (10) визначає зв'язок між тиском, об'ємом і їх похідними за часом. Не обмежуючи загальності, можна вважати $\tau_{v,p} = \tau_{v,p}^0 + \varsigma_{v,p}(P)$, де $\tau_{v,p}^0$ – час релаксації деформацій і напруг, а $\varsigma_{v,p}(P)$ – активна регуляція допомогою гемодинамічних параметрів, причому $\varsigma_{v,p} \equiv 0$ в пасивній судині.

Підставляємо (10) в (4), (6) і отримаємо замість (7) нелінійне ЗДР другого порядку:

$$\frac{d^2 P}{dt^2} + f_1 \left(\frac{dP}{dt} \right)^2 + f_2 \frac{dP}{dt} - f_3 P \frac{dP}{dt} + f_4 P = -\tilde{Q}(t) - \frac{\Lambda_i'}{\tau_p} \frac{dC_i}{dt}, \quad (11)$$

де $f_1 = \frac{\tau_p'}{\tau_p}$, $f_2 = \frac{F' + \tau_v Y}{\tau_p}$, $f_3 = \frac{\tau_v Y'}{\tau_p}$, $f_4 = \frac{Y}{\tau_p}$, а штрих позначає похідну функції по P , $\tilde{Q}(t) = \frac{1}{\tau_p} \left[1 + \tau_v \frac{d}{dt} \right] Q_{in}(t)$, $\Lambda_i' = d\Lambda(C_i) / dC_i$.

Для замикання (11) потрібно задати залежності $F, \tau_{v,p} = F, \tau_{v,p}(P, q, p_a, p_v)$, де $\{q, p_a, p_v\} = T^{-1} \int_0^T \{Q_{in}(t), P_a(t), P_v(t)\} dt$, $\Lambda = \Lambda(C_i)$,

а також додати рівняння (3) і відповідні граничні умови. У загальному випадку рішення нелінійної системи ЗДР (3), (11) можна отримати чисельними методами після завдання всіх параметрів моделі.

5. Аналіз розв'язку задачі для випадку чисто гідродинамічної регуляції

Для порівняння моделей активної і пасивної в'язкопружних камер розглянемо докладніше випадок $f_3 = 0$, коли саморегуляція пружної камери і периферичного русла незалежні, так що $Z_p' = 0$. Крім цього, обмежимося випадком гідродинамічної регуляції коли $\Lambda_i' = 0$. Тоді задача зводиться до нелінійного ЗДР:

$$\frac{d^2 P}{dt^2} + f_1 \left(\frac{dP}{dt} \right)^2 + f_2 \frac{dP}{dt} + f_4 P = \tilde{Q}(t). \quad (12)$$

Чисельні оцінки порядків величини τ_p' / τ_p в фізіологічним діапазоні значень параметрів показали, що $f_1 = \tau_p' / \tau_p \approx \varepsilon$ можна вважати малим параметром. Будемо шукати розв'язок (12) у вигляді розкладання по ступеням малого параметра $P(t) = P^{(0)} + \varepsilon P^{(1)} + \varepsilon^2 P^{(2)} + \dots$

Запишемо вираз для $f_{2,4}$ у вигляді $f_{2,4}(P) = f_{2,4}^0 + \varepsilon f_{2,4}^{0'} + \dots$, де $f_{2,4}^0 = f_{2,4}(P^{(0)})$, $f_{2,4}^{0'} = f_{2,4}'(P^{(0)})$, $\dots$. Підставивши ці розкладання в (12) і прирівнявши коефіцієнти при доданках одного порядку малості по ε , отримаємо

наступні задачі для наближень нульового та першого порядків відповідно:

$$\frac{d^2}{dt^2} P^{(0)} + f_2^0 \frac{d}{dt} P^{(0)} + f_4^0 P^{(0)} = \tilde{Q}(t), \quad (13)$$

$$\frac{d^2}{dt^2} P^{(1)} + f_2^0 \frac{d}{dt} P^{(1)} + f_4^0 P^{(1)} = - \left(\left(\frac{d}{dt} P^{(0)} \right)^2 + f_2^{0'} \frac{d}{dt} P^{(0)} + f_4^{0'} P^{(0)} \right). \quad (14)$$

Для отримання розв'язку задачі потрібно визначитися з вибором моделі стінки камери, тобто функції $F(P)$. Точний розв'язок (13)–(14) можна отримати для випадку лінійнопружної стінки, коли $F(P) = kP$. Тоді розв'язок (13) можна записати у вигляді:

$$P^{(0)}(t) = A_1 e^{-\lambda_1 t} + A_2 e^{-\lambda_2 t} + e^{\lambda_1 t} \int_0^t e^{-\lambda_1 \tau} \tilde{Q}(\tau) d\tau - e^{\lambda_2 t} \int_0^t e^{-\lambda_2 \tau} \tilde{Q}(\tau) d\tau, \quad (15)$$

де $\lambda_{1,2} = \frac{k + \tau_v Y}{2\tau_p} \pm \frac{1}{2\tau_p} \sqrt{(k + \tau_v Y)^2 - 4Y^2 \tau_p^2} > 0$,

при умові $\tau_p < \frac{k + \tau_v Y}{2Y}$.

Розв'язок (15) описує в'язкопружну релаксацію напружень при фіксованій деформації (для підтримання сталості об'ємної витрати) і релаксацію деформацій при фіксованих напруженнях (для підтримання сталості тиску). Якщо обмежитись тільки першим наближенням, невідомі постійні інтегрування $A_{1,2}$ можна отримати із граничних умов

$$P^{(0)}(0) = P^{(0)}(T_h) = P_d, \quad (16)$$

де T_h – період скорочень серця.

Для визначеності розглянемо найбільш просту апроксимацію функції $Q_{in}(t) = Q_0 \cos^2(2\pi t / T_h)$, яка найчастіше використовується в моделях системи кровообігу [11]. Тоді після інтегрування (15) отримаємо:

$$P^{(0)} = \frac{16\pi^2}{2\kappa\gamma} \left(\frac{\lambda_1 e^{\lambda_2 t} - \lambda_2 e^{\lambda_1 t}}{\lambda_1 \lambda_2} \right) + \frac{4\pi T \tau_v}{\kappa\gamma} (e^{\lambda_2 t} - e^{\lambda_1 t}) + (\lambda_1 - \lambda_2) \frac{T^2}{2\kappa\gamma} \left[1 + 2\tau_v \sin\left(\frac{4\pi t}{T}\right) - \cos\left(\frac{4\pi t}{T}\right) \right] + \frac{16\pi^2}{2\kappa\gamma} \left(\frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_1 \lambda_2} \right), \quad (17)$$

$$\text{де } \kappa = ((\lambda_2 - \lambda_1)\tau_p)^{-1}, \quad \gamma = (\lambda_1^2 T^2 + 16\pi^2)^{-1}.$$

Розв'язок (14) має такий самий вигляд як (15), тільки замість $\tilde{Q}(\tau)$ в (15) потрібно підставити результат підстановки (15) в праву частину (14). Фундаментальний розв'язок (14) має такий самий вигляд, як і розв'язок (13), тому невідомі постійні $A_{1,2}$ для $P^{(1)}(t)$ можна отримати із (16), підставив в умови $P^{(0)} + \varepsilon P^{(1)}$ замість $P^{(0)}$. Повна формула для $P^{(1)}(t)$ не приведена тут в зв'язку з її громіздкістю.

Відмінність моделі активної стінки резервуара від пасивної складається у виразах для $\tau_{v,p} = \tau_{v,p}(q, P_a, P_v)$, які для пасивної стінки переходять в $\tau_{v,p} = \text{const}$ і не залежать від крайових умов вихідної задачі.

Аналіз результатів чисельних розрахунків отриманих розв'язків (17) для $P^{(0)}$ та $P^{(0)} + \varepsilon P^{(1)}$ для сукупності параметрів, які відповідають характеристикам крові та стінки кровоносних судин, показує, які саме особливості геометрії судинної системи та механічних властивостей стінок судин відповідають за зміни особливостей пульсових кривих, які спостерігаються при наявності судинних патологій, наприклад, стенозів коронарних судин. Відомо, що при незначних звуженнях коронарних судин діастолічний спад тиску на ділянках перед та за ділянкою стенозу є подібним за швидкістю (рис. 2 а), але при наявності стенозу, який потребує негайного стентування, різниця у швидкостях діастолічного спаду стає більш помітною (рис. 2 б).

Звичайні моделі пружної камери (8) відповідають тільки спаданню тиску зі швидкістю $\sim 1/(kZ)$ [4, 6, 11], що відповідає рис. 2 а. Запропонована модифікована модель з урахуванням регуляції відповідає випадку, коли спадання тиску $\sim \lambda_1$ або $\sim \lambda_2$ відповідно до ступеню стенозу коронарної артерії (рис. 2 б). Таким чином, чисельний експеримент з використанням геометричних та механічних параметрів моделі відповідно фізіологічним параметрам підтверджує важливість використання саме модифікованої моделі в'язко-пружної біоактивної стінки для прийняття рішення відносно стентування.

Для порівняння моделей лінійно- і нелінійно-пружної стінки потрібно розв'язати ЗДР (12) при нелінійній залежності, наприклад,

$$F(P) = (V_0^{1/3} + \kappa(P - P_c))^3, \quad \kappa = \frac{(1 - v^2)V_0^{2/3}}{Eh\sqrt{\pi}},$$

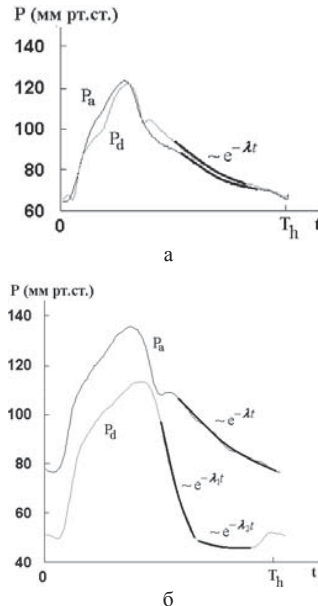


Рис. 2. Криві тиску, виміряні в коронарній судині до (P_a) та після (P_d) стенозу, який не потребує (а) та потребує (б) стентування

яка є найбільш популярною і відповідає сучасним експериментальним даним [4]. У цьому випадку теж можна використовувати метод розкладання по ступеням малого параметру, що складе предмет подальших досліджень.

6. Висновки

В роботі сформульована модифікація моделі артеріального русла як єдиної в'язкопружної камери, яка здатна до саморегуляції, спрямованої на підтримку режимів течії з постійною об'ємною витратою і постійним артеріальним тиском за рахунок зменшення або збільшення просвіту судин з одночасними змінами товщини і жорсткості стінок внаслідок скорочення ГМК в середньому шарі артеріальної стінки. Властивості моделей активної і пасивної в'язкопружної стінок мають суттєві відмінності навіть у разі лінійнопружної стінки. Показано, що запропонована модель добре відповідає експериментальним даним про двохступеневий спад тиску в діастолічній фазі за наявності стенозу і, таким чином, може використовуватися в медичній діагностиці для оцінки ступеню

стенозу, а також для кількісної оцінки в'язкості і біоактивної реакції стінки у відповідь на варіації

артеріального тиску і об'ємної витрати крові в нормі та при судинних патологіях.

Список використаних джерел

1. Bondarenko M. Ye. Pulse wave reflections in asymmetrically branching arterial networks / M. Ye. Bondarenko, N. N. Kizilova // *Russian J. Biomech.* – 2002. – № 4. – P. 49–58.
2. Kizilova N. N. Pulse wave reflections in branching arterial networks and pulse diagnosis methods / N. N. Kizilova // *J. Chinese Inst. of Engineers.* – 2003. – Vol. 26, № 6. – P. 869–880.
3. Shapiro A. H. Steady flow in collapsible tubes / A. H. Shapiro // *J. Biomech. Eng.* – 1977. – Vol. 99, № 8. – P. 126–147.
4. One-dimensional modelling of a vascular network in space-time variables / [S. J. Sherwin, F. Franke, J. Piero, K. H. Parker] // *J. Eng. Math.* – 2003. – Vol. 47. – P. 217–250.
5. Kizilova N. N. detailed model of the human arterial system / N. Kizilova // «1-st International Conference on Complex Medical Engineering», Japan: Proc. – 2005. – P. 287–292.
6. Milnor W. R. Hemodynamics / W. R. Milnor. – Baltimore: Williams & Wilkins. – 1989. – 408 p.
7. Регирер С. А. Элементарная модель сосуда со стенкой, чувствительной к механическим стимулам / С. А. Регирер, Н. Х. Шадрин // *Биофизика.* – 2002. – Т. 47, № 5. – С. 908–913.
8. Регирер С. А. Модель сосудистого тонуса / С. А. Регирер, И. М. Руткевич, П. И. Усик // *Мех. полимеров.* – 1975. – № 4. – С. 585–589.
9. Филиппова Е. Н. Течение жидкости и распространение волн в вязкоупругих трубках из биоактивного материала / Е. Н. Филиппова, Н. Н. Кизилова // «Математичне моделювання прикладних задач математики, фізики, механіки»: Харків: матеріали конференції. – Харків: Вид. ХАДНУ, 2013. – С. 60–63.
10. Филиппова Е. Н. Стационарные и волновые процессы в заполненных жидкостью трубках из вязкоупругого биоактивного материала. / Е. Н. Филиппова, Н. Н. Кизилова // «Современные проблемы механики сплошной среды»: Ростов-на-Дону, Россия. – 2014. – Т. 2. – С. 205–209.
11. Лишук В. А. Математическая теория кровообращения / В. А. Лишук. – М.: Медицина. – 1991. – 256 с.

References

1. BONDARENKO, M. Ye. & KIZILOVA, N. N. (2002). Pulse wave reflections in asymmetrically branching arterial networks. *Russian J. Biomech.* (4). p. 49–58.
2. KIZILOVA, N. N. (2003). Pulse wave reflections in branching arterial networks and pulse diagnosis methods. *J. Chinese Inst. of Engineers.* 26 (6). p. 869–880.
3. SHAPIRO, A. H. (1977) Steady flow in collapsible tubes. *J. Biomech. Eng.* 99 (8). pp. 126–147.
4. SHERWIN, S. J. et al. (2003) One-dimensional modelling of a vascular network in space-time variables. *J. Eng. Math.* 47. p. 217–250.
5. KIZILOVA, N. N. (2005). A detailed model of the human arterial system. In *1-st International Conference on Complex Medical Engineering.* Japan. p. 287–292.
6. MILNOR, W. R. (1989). *Hemodynamics.* Baltimore: Williams & Wilkins.
7. REGIRER, S. A. & SHADRINA, N. Kh. (2002). Elementarnaya model sosuda so stenкой, chuvstvitelnoy k mekhanicheskim stimulam. *Biophizika.* 47 (5). p. 908–913.
8. REGIRER, S. A., RUTKEVICH, I. M. & USIK, P. I. (1975). Model sosudistogo tonusa. *Mekh. Polimerov.* (4). p. 585–589.
9. PHILIPPOVA, E. N. & KIZILOVA N. N. (2013) Tehenie zhydkosti i rasprostranenie voln v vyazkouprugikh trubkakh iz bioaktivnogo materiala. In *Matematychnе Modelyuvannya Prykladnykh Zadach Matematyky, Fyzyky, Mekhaniky.* Kharkiv: KhADNU. p. 60–63.
10. PHILIPPOVA, E. N. & KIZILOVA N. N. (2014) Statsionarnyye i volnovyye protsessyy v zapolnennyih zhidkostyu trubkakh iz vyazkouprugogo bioaktivnogo materiala. In *Sovremennyye Problemy Mehaniki Sploshnoy Sredy.* Rostov-na-Donu, Rossiya. 2. p.205–209.
11. LISCHUK, V. A. (1991) *Matematicheskaya Teoriya Krovoobrashcheniya.* M. Meditsina.

Надійшла до редколегії 30.09.15

УДК 539.3

Хотенко О. О., к. ф.-м. н., н. с.,
Хотенко І. М., к. ф.-м. н., с. н. с.

Аналіз нелінійного рівняння Релея

Інститут механіки ім. С. П. Тимошенка НАН
України, 03057, м. Київ, вул. Нестерова, 3
e-mail: h.khotenko@gmail.com

O. O. Khotenko, Ph. D. (Phys.-Math.),
Sci. Researcher
I. M. Khotenko, Ph. D. (Phys.-Math.),
Sr. Sci. Researcher

An analysis of a nonlinear Rayleigh equation

S. P. Timoshenko Insitute of Mechanics of NAS of
Ukraine, 03057, Kyiv, Nesterova str., 3
e-mail: h.khotenko@gmail.com

В статті розглянуто плоску задачу про поширення квадратично нелінійної пружної хвилі Релея в класичній постановці. Визначальні співвідношення відповідають нелінійному потенціалу Мурнагана. Нелінійне рівняння Релея досліджується для дев'яти пружних матеріалів.

Ключові слова: плоска нелінійна пружна задача, модель Мурнагана, нелінійна хвиля Релея, квадратично нелінійні хвильові рівняння, генерація другої гармоніки.

In the paper, the plane problem of the quadratically nonlinear elastic Rayleigh wave propagation in classical statement is studied. Constitutive relations correspond to the nonlinear five constant Murnaghan potential. The paper continues the study on nonlinear Rayleigh wave propagation conducted by authors previously. Additionally to numerical analysis, computer aided design is applied (MathCad 15). The numerical analysis of the nonlinear Rayleigh equation is applied to nine elastic materials of different types (metals, glasses, polymers) such as: aluminum, wolfram, copper, molybdenum, steel, steel Hecla 17, polystyrene, plexiglas, fused quartz. The graph of the frequency depending on initial amplitude is plotted. Results of the studies problem are presented in tabular form. Common conclusions on the effect of mechanical properties of materials on results are made. New effects are detected. One of the new effects is that increasing of the initial amplitude or frequency leads to decreasing of the Rayleigh wave velocity.

Key Words: Nonlinear Elastic Two-Dimensional Plane Problem, Murnaghan Model, Nonlinear Rayleigh Wave, Quadratically Nonlinear Wave Equations, Second Harmonic Generation.

1. Вступ

Стаття є продовженням дослідження поширення плоскої нелінійної хвилі Релея. В попередніх публікаціях [1 – 5] було отримано квадратично нелінійні хвильові рівняння для варіантів загальної, геометричної та фізичної нелінійностей для випадків нехтування та врахування нелінійного перехресного впливу переміщень та потенціалів. Наближені розв'язки рівнянь отримані за допомогою методу послідовних наближень. Досліджена роль граничних умов в нелінійному аналізі хвилі Релея. Проведений числовий аналіз впливу початкової амплітуди, частоти та параметрів пружного матеріалу на затухання нелінійної хвилі Релея, тобто, залежність зміщень u_1 та u_3 від координати x_3 . Обраний метод послідовних наближень не враховує можливості зміни фазової швидкості у нелінійному процесі поширення хвилі. Однак отримане в [4, 5] нелінійне рівняння для визначення швидкості хвилі,

рівняння Релея, свідчило про явну залежність швидкості хвилі від її початкової амплітуди. На жаль, це рівняння залишилося по за увагою авторів [4, 5]. В даній роботі буде проведено дослідження нелінійного рівняння Релея, отриманого раніше.

2. Постановка задачі та її розв'язання

Досліджується гармонічна поверхнева хвиля Релея, що поширюється вздовж границі розподілу ізотропного півпростору та вакууму. Гіперпружне деформування півпростору описується п'ятиконстантним нелінійно-пружним потенціалом Мурнагана [6,7]

$$W = \frac{\lambda}{2}(u_{1,1} + u_{3,3})^2 + \mu \left\{ u_{1,1}^2 + u_{3,3}^2 + \frac{(u_{1,3} + u_{3,1})^2}{2} \right\} + \\ + \frac{1}{2} \lambda (u_{1,1} + u_{3,3}) \left[u_{1,1}^2 + u_{3,3}^2 + u_{1,3}^2 + u_{3,1}^2 \right] +$$

$$\begin{aligned}
 & +\mu\left\{u_{1,1}^2+u_{3,3}^2+2u_{1,1}u_{3,3}+2u_{1,1}u_{3,1}^2+\right. \\
 & \left.+u_{1,3}u_{3,1}\left(u_{1,1}+u_{3,3}\right)\right\}+ \\
 & +\frac{1}{3}A\left[u_{1,1}^2+u_{3,3}^2+\frac{3}{4}\left(u_{1,3}+u_{3,1}\right)^2\left(u_{1,1}+u_{3,3}\right)\right]+ \\
 & +B\left(u_{1,1}+u_{3,3}\right)\left[u_{1,1}^2+u_{3,3}^2+\frac{1}{2}\left(u_{1,3}+u_{3,1}\right)^2\right]+ \\
 & +\frac{1}{3}C\left(u_{1,1}+u_{3,3}\right)^3.
 \end{aligned} \quad (1)$$

де λ , μ – пружні сталі другого порядку (сталі Ляме); A , B , C – пружні сталі третього порядку (сталі Мурнагана). Нелінійний тензор деформацій Коші – Гріна у вигляді

$$\epsilon_{nm} = \frac{1}{2}(u_{n,m} + u_{m,n} + u_{i,n}u_{i,m}), \quad (2)$$

де u_n – компонент вектора зміщень.

У даному дослідженні проведено первинний аналіз вказаного рівняння Релея. Нелінійне рівняння спрощується через врахування лише першого з трьох нелінійних доданків, що можливо лише за певних обмежень на величину початкової амплітуди хвилі. Таке рівняння має вигляд:

$$\begin{aligned}
 -l_1l_4 + l_2l_3 - \left[\frac{l_3^2n_2^2 + l_1^2n_5^2 - 2l_1l_3n_2n_5}{l_2n_5 - l_4n_2} - \right. \\
 \left. - \frac{l_4n_1n_2 + l_2n_2n_4 - 2l_2n_1n_5}{n_2} \right] A_\phi = 0,
 \end{aligned} \quad (3)$$

де l_i , n_j – величини, що залежать від параметрів матеріалу (пружних сталей і густини), швидкості і фази хвилі.

Рівняння (3) можна записати у наступній формі:

$$L + N \cdot A_\phi \cdot \omega^2 = 0, \quad (4)$$

де L , N – лінійна та нелінійна частини, відповідно.

Тобто, для певного значення швидкості хвилі Релея лінійна та нелінійна частина рівняння є сталими, то ж і значення $C = A_\phi \cdot \omega^2$ є сталим.

Прийнявши, що нелінійна частина з точністю Δ рівна нулеві, для частоти $\omega_0 = 1$ кГц визначили значення початкової амплітуди A_ϕ ,

що не суперечить припущенню про малу нелінійність, але є приграничним значенням.

Геометричне місце точок, що відповідають співвідношенню $C = A_\phi \cdot \omega^2$ можна схематично зобразити на графіку залежності частоти (рис. 1). Точки, що знаходяться під кривою – значення частот та початкових амплітуд, при яких вклад нелінійної частини рівняння буде незначним.

3. Результати розрахунків та їх аналіз

В дослідженні проведено комп'ютерне моделювання та числовий аналіз рівняння (3) для дев'яти пружних матеріалів різних типів (метали, полімери, стекла): алюміній, вольфрам, мідь, молібден, сталь, сталь Несла17, полістирол, оргскло та плавлений кварц. Параметри досліджених матеріалів (густина, пружні сталі другого порядку, Ляме, та третього порядку, Мурнагана) наведені в табл. 1.

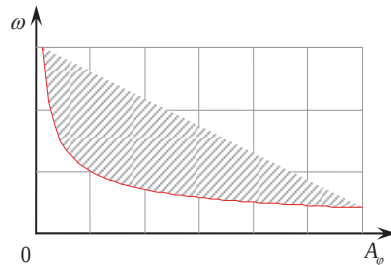


Рис. 1. Залежність частоти від початкової амплітуди

Задача є багато параметричною, тому при числовому аналізі було обрано метод, коли фіксувалися значення частоти ω та фази $k_R x - \omega t$ і сканувалося значення початкової амплітуди A_ϕ .

Визначено значення початкових амплітуд та відповідних їм частот, при яких вплив нелінійності стає помітним. Для частоти $\omega = 1$ кГц та заданого значення похибки $\Delta = 1 \cdot 10^{-3}$, визначили значення початкової амплітуди A_ϕ , що не суперечать припущенню про малу нелінійність, але є приграничними значеннями.

На наступному етапі визначено значення лінійної швидкості хвилі Релея та швидкості хвилі Релея за формулою Вікторова, а також визначено, за якого значення похибки, значення початкової амплітуди усе ще не суперечить

припущенню про малу нелінійність. Результати занесені до табл. 2.

Теоретичне спостереження певних нових нелінійних хвильових ефектів стало можливим

завдяки побудованим графікам залежності швидкості хвилі Релея від значень початкової амплітуди для фіксованих частот.

Таблиця 1

Фізико-механічні параметри досліджуваних матеріалів

Матеріали	$\rho, 10^3 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$	$\lambda, 10^{10} \frac{\text{Н}}{\text{м}}$	$\mu, 10^{10} \frac{\text{Н}}{\text{м}}$	$A, 10^{11} \frac{\text{Н}}{\text{м}^3}$	$B, 10^{11} \frac{\text{Н}}{\text{м}^3}$	$C, 10^{11} \frac{\text{Н}}{\text{м}^3}$
Алюміній	2.7	5.2	2.7	-0.65	-2.05	-3.7
Вольфрам	18.9	7.5	7.3	-1.08	-1.43	-9.08
Мідь	8.93	10.7	4.8	-2.8	-1.72	-2.4
Молибден	10.2	15.7	1.1	-0.26	-2.83	3.72
Сталь	7.8	9.4	7.9	-3.25	-3.1	-8
Сталь Hecla 17	8.72	11	8.2	-6.68	-2.61	-0.67
Полістирол	1.05	0.369	0.114	-0.108	-0.079	-0.098
Оргскло	1.16	3.9	11.9	0.19	-0.07	-0.04
Плавлений кварц	2.3	1.6	3.1	-0.044	0.9.3	0.27

Таблиця 2

Результати розрахунків

Матеріали	$c_{lin}, \frac{\text{м}}{\text{с}}$	$c_R, \frac{\text{м}}{\text{с}}$	Δ	$A_\phi, \cdot 10^{-4} \text{ м}$
Алюміній	2947	2958	0.0001	2.89
Вольфрам	1808	1815	0.001	1.61
Мідь	2166	2174	0.01	3.23
Молибден	988	990	0.1	5.67
Сталь	979	982	0.001	4.83
Сталь Hecla 17	2937	2949	0.001	7.44
Полістирол	2837	2849	0.001	2.39
Оргскло	9089	9117	0.00000001	1.76
Плавлений кварц	3325	3338	0.00001	311

З табл. 2 видно, що чим більша швидкість поширення хвилі Релея, тим більше точність, тобто тим менше значення похибки.

Також з отриманих результатів видно, що лінійна швидкість завжди менша за загальноприйняте значення фазової швидкості поширення хвилі Релея, що визначається за формулою Вікторова. Чим більше абсолютне значення фазової швидкості, тим відхилення від c_R більше.

4. Висновки

В дослідженні проведено аналіз нелінійного рівняння Релея. Результати аналізу узагальнено на дев'ять пружних матеріалів різних типів та представлено у табличному вигляді (табл. 2).

Один з виявлених нових нелінійних ефектів полягає в тому, що при збільшенні початкової амплітуди або частоти, швидкість хвилі Релея зменшується.

Швидкість хвилі Релея обмежується зверху максимально можливим значенням – швидкістю лінійної хвилі.

Список використаних джерел

References

1. Рушицкий Я. Я. О волне Рэлея в квадратично нелинейном упругом материале (модель Мурнагана) / Я. Я. Рушицкий, Е. А. Хотенко // Прикладная механика. – 2011. – Т. 47, № 3. – С. 50–58.
2. Рушицкий Я. Я. Наближені розв'язки нелінійних хвильових рівнянь, що описують пружні поверхневі хвилі Релея / Я. Я. Рушицкий, О. О. Хотенко // Доповіді НАН України. – 2012. – № 1. – С. 64–69.
3. Рушицкий Я. Я. О роли граничных условий в нелинейном анализе волны Рэлея / Я. Я. Рушицкий, Е. А. Хотенко // Прикладная механика – 2012. – Т. 48, № 3. – С. 89–102.
4. Хотенко О. О. Аналіз впливу початкової амплітуди на затухання нелінійної пружної хвилі Релея / О. О. Хотенко // Вісник КНУ ім. Т. Г. Шевченка. Серія фізико-математичні науки. – 2012. – № 4. – С. 73–76.
5. Хотенко О. О. До теорії квадратично нелінійних хвиль Релея: дис. ... канд. фіз.-мат. наук : 01.02.04 / Хотенко Олена Олександрівна. – Київ, 2014. – 185 с.
6. Achenbach J. D. Wave Propagation in Elastic Solids / J. D. Achenbach. – Amsterdam: North Holland. – 1973. – 436 p.
7. Farnell G. W. Properties of elastic surface waves / In Physical acoustics. [ed. W. P. Mason, R. N. Thurston] / G. W. Farnell. – New York: Acad. Press, 1970. – Vol. 6. – P. 109 – 166.
1. RUSHCHITSKY, J. J. & KHOTENKO, E. A. (2011) On Rayleigh wave in quadratically nonlinear elastic half-space (Murnaghan model). *Int. Appl. Mech.* 47 (3). p. 100–108.
2. RUSHCHITSKY, J. J. & KHOTENKO, O. O. (2012) Nablyzheni rozv'iazky nelineinykh khvylovykh rivnyan, shcho opysuiut pruzhni poverkhnevi hvyli Releya. *Dopovidi NAN Ukrainy*. p. 64–69.
3. RUSHCHITSKY, J. J. & KHOTENKO, E. A. (2012) On the role of boundary conditions in the nonlinear analysis of a Rayleigh wave. *Int. Appl. Mech.* 48 (6). p. 719–726.
4. KHOTENKO, O. O. (2012) Analysis of the effect of the initial amplitude on the nonlinear elastic Rayleigh wave attenuation. *Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series Physics & Mathematics.* (4). p. 73–76.
5. KHOTENKO, O. O. (2014) *Toward a Theory of Quadratically Nonlinear Rayleigh Waves*. Dissertatsiya Kandydata Fiziko-Matematicheskyykh Nauk po Spetsialnosti: 01.02.04. Kyiv.
6. ACHENBACH, J. D. (1973) *Wave Propagation in Elastic Solids*. Amsterdam: North Holland.
7. FARNELL, G. W. (Ed. W.P. MASON, W. P. & THURSTON, R. N.) (1970) *Physical acoustics*. New York: Academic Press,. 6. p. 109 –166.

Надійшла до редколегії 30.09.15

УДК 532.529+577

Черевко В. О., інженер,
Кізілова Н. М., д. ф.-м. н., проф.

Моделювання кінетики агрегації еритроцитів крові при проведенні тестів на алергію

Харківський національний університет імені
В. Н. Каразіна, 61022, м. Харків, пл. Свободи, 4
e-mail: cherevko.vita@gmail.com

V. O. Cherevko, Engineer,
N. M. Kizilova, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof.

The modeling of red blood cell aggregation during the test on an allergy

V. N. Karazin Kharkov National University, 61022,
Kharkiv, Svobody sq., 4
e-mail: cherevko.vita@gmail.com

Розроблена математична модель кінетики агрегації еритроцитів крові як двохфазної суспензії частинок, взаємодія яких та утворення агрегатів обумовлені наявністю алергенів, які змінюють адгезивні властивості поверхні клітин. Розглянута задача про осідання крові в тонкій вертикальній трубці в присутності в крові алергену. Вирази для швидкості агрегації еритроцитів отримані методами теорії розмірностей. Розв'язок задачі отриманий чисельно – методом характеристик. Проведені чисельні розрахунки при варіації параметрів моделі відповідно до фізіологічних даних. Показано, що наявність алергії та ступінь зміни агрегаційної здатності еритроцитів впливає на динаміку седиментації, а саме на наявність в седиментаційній трубці та розмір дифузійно розмитого стовпця агрегатів, які осідають. Запропоновано використання цього показника разом зі звичайним часовим показником або часом досягнення максимальної швидкості седиментації для більш достовірної діагностики алергії.

Ключові слова: еритроцити крові, агрегація, седиментація, алергія.

The mathematical model of red blood cell aggregation as a two-phase suspension of aggregating particles is developed. The aggregation of the particles is promoted by presence of allergens that change adhesiveness of the cell surface. The problem of blood sedimentation within a thin vertical tube in a presence of allergen is considered. The expression for the red blood cells aggregation rate is obtained by the dimensional analysis method. A numerical solution of the formulated hyperbolic problem is obtained by the method of characteristics. Detailed numerical computations at variation of all the model parameters within the physiological limits have been carried out. It was shown; the allergens and the red blood cell aggregation rate influence on the sedimentation dynamics, in particular on the presence and length of the diffusive region of the settling aggregates. It is suggested that this parameter together with the standard sedimentation rate and the time when the maximal sedimentation velocity is reached can be used for more reliable diagnostics of an allergy.

Key Words: Red Blood Cells, Aggregation, Sedimentation, Allergy.

1. Introduction

Pollen, food and drug allergies are common in the developed world and ~10-30% of population are affected depending on the country. Early diagnosis of the allergy is still very topical because most of the cases are detected when the corresponding signs are already presented. Among the widely-spread tests are injections of small amounts of potential allergens (skin allergy test), determination of the levels of antibodies produced as a result of exposure to food, pollen or drugs [1]. *In vitro* estimation based on addition of equal amount of drug to the blood serum and subsequent analysis of the optical density of the sample in comparison with the control sample was

proposed in [2]. The special equipment for the optical studies at the wavelength 450 nm is needed. A simple method based on the standard blood sedimentation test carried out simultaneously on a control sample and the samples with small amounts of drugs/allergens added has been proposed in [3]. Here the results of the experimental study are reported and a mathematical model of blood sedimentation in a presence of allergen is studied.

2. Materials and methods

The experimental study has been carried out in the Allergy Lab of Kharkov Institute of Dermatology. The native venous blood has been

taken from 9 patients (4 males and 5 females; average age 58 ± 9 years) and split into small portions. One portion was studied as a control test while into other portions small amounts of different drugs prescribed to the patient by his/her doctors were added. All the portions have been placed in the standard Panchenkov glass tubes ($d=1\text{mm}$, $L=100\text{mm}$) and microtubes ($d=0,5\text{ mm}$, $L=50\text{mm}$). The tubes were placed in a rack in a vertical position for 3 hours at the room temperature. The height h of the transparent layer of blood plasma in the upper part of each tube has been measured each 10 min. As a result of the study the sedimentation curves $h(t)$ have been obtained for each tube. The value h at $t=60\text{ min}$ is used in contemporary medical diagnostics as the erythrocyte sedimentation rate (ESR) index.

The curves have been smoothed by numerical filters and the time derivative curves $h'(t)$ have been computed. The typical example of the simultaneous ESR tests for the blood of the same patient in the Panchenkov tubes and the microtubes are presented in fig. 1. Thick solid lines in fig. 1 a-d correspond to the control sample and the ESR indexes correspond to the healthy individuals ($\text{ESR} < 10\text{ mm}$). The addition of the potential allergen influences on the sedimentation rate by some acceleration or deceleration of the rate. Since the ESR is determined by the aggregate ability of the red blood cells (RBC) [4] that means a direct influence on the allergen on the RBC surface. The cases with no allergy for the added drugs are presented in fig. 1 a-d by thin solid lines, while the cases with the confirmed allergy denoted by dashed lines.

The curves $h'(t)$ exhibit similar dynamics (fig. 1 b) with the noticeable maximum at $t=t_{\text{max}}$, which corresponds to the maximal velocity of a sedimentation followed then by decrease in the ESR. The decrease in the ESR is caused by an influence of the settled aggregates accumulated at the bottom of the sedimentation tube [4]. The time t_{max} was shown to be a good diagnostic index, which almost independent of the initial concentration of a RBC plasma viscosity, and reflects the RBC aggregation rate only [5].

A sedimentation in the microtubes allows to use a smaller amount of blood extracted for the diagnostics and the sedimentation in the Panchenkov and microtubes are similar for the blood of the same individual (fig. 1 a, c). The difference between the control sample and the sample affected by potential allergens were more distinct in the microtubes

(fig. 1 c). The maximal velocity was reached in the microtubes much earlier and the dispersion was

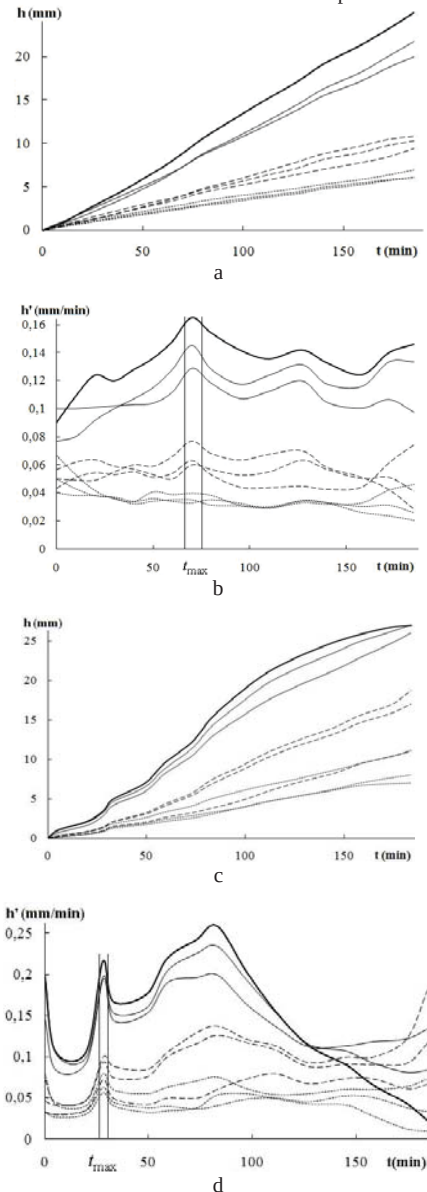


Fig. 1. Experimental curves $h(t)$ (a, c) and $h'(t)$ (b, d) measured in the Panchenkov tubes (a, b) and the microtubes (c, d)

smaller than in the standard tubes (fig.1 d). When $t_{\max}$ is used as a diagnostic index, the test in the microtubes gives the results earlier, in 30–40 min of sedimentation.

Thus, the diagnostic information here can be obtained faster, more accurate, and by using a smaller portion of the blood when the microtubes are used.

The results of 20 simultaneous tests with the blood of the same patient in the microtubes are presented in fig. 2. The variety of the dynamics can be explained by the instability of sedimentation of a suspension of aggregating particles [4]. Anyway, $t_{\max}$ values are located for all the curves in a quite narrow limits providing a high exactness in a diagnosis of the allergy on the sedimentation tests in the microtubes.

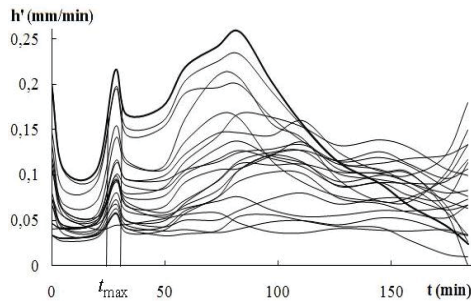


Fig. 2. $h'(t)$ curves and $t_{\max}$ location for 20 blood samples of the same patient

3. Mathematical formulation of the problem

Blood as a suspension of aggregating particles settling in the non-uniform force field $G(x)$ in a thin vertical tube is considered. The mixture model of the blood as a two-phase continuous media includes the mass and momentum balance equations as well as the equation describing kinetics of RBC aggregation for the particles (RBCs, phase 1) and liquid (blood plasma, phase 2). Since the tube is thin ($d \ll L$), the radial and azimuthal motion is neglected in comparison with a vertical sedimentation. The 1-d governing equations are:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho^{(1)}}{\partial t} + \frac{\partial \rho^{(1)} u^{(1)}}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial \rho^{(2)}}{\partial t} + \frac{\partial \rho^{(2)} u^{(2)}}{\partial x} &= 0; \end{aligned} \quad (1)$$

$$\rho^{(1)} \frac{du^{(1)}}{dt} = -\frac{\partial p^{(1)}}{\partial x} + \rho^{(1)} G + R^{(1)}, \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \rho^{(2)} \frac{du^{(2)}}{dt} &= -\frac{\partial p^{(2)}}{\partial x} + \rho^{(2)} G + R^{(2)}, \\ \frac{\partial N}{\partial t} + \frac{\partial Nu^{(1)}}{\partial x} &= \phi, \end{aligned} \quad (3)$$

where $u^{(1)}$, $u^{(2)}$ are velocities of the phases, $R^{(1)}$, $R^{(2)}$ are the interphase interaction forces, $p^{(1)}$, $p^{(2)}$ are hydrostatic pressures in the phases, ϕ is the velocity of the aggregate formation, $\rho^{(1)} = H\rho_s$, $\rho^{(2)} = (1-H)\rho_f$ are the effective densities of the phases, ρ_s and ρ_f are real densities of the RBC contents and blood plasma, N is the numerical concentration of the aggregates equals to the total number of aggregates per unit volume.

For the gravitational sedimentation $G(x) = g = \text{const}$, g is the gravitational acceleration, while in the centrifugal force field $G(x) = ax + b$, $a, b = \text{const}$ [6]. The expressions for the hydrostatic pressures and the interphase interaction forces have the form [4]:

$$p^{(1)} = Hp, \quad p^{(2)} = (1-H)p; \quad (4)$$

$$R^{(1)} = -R^{(2)} = -F(u^{(1)} - u^{(2)}) + p \frac{\partial H}{\partial x}, \quad (5)$$

where p is the hydrostatic pressure in a mixture, F is the coefficient of resistance of the aggregate at its motion in a blood plasma, H is the mass concentration of the aggregates equals to the ratio of the mass of all the aggregates in a volume to the total mass of a volume.

Expressions for the coefficients F and ϕ may be obtained by the dimension analysis. As it was shown in numerous experiments [7–9]

$$\begin{aligned} \phi &= \frac{g\delta\rho}{\mu} N^{2/3} f_1(H, C_j, \gamma_j, \Pi), \quad \Pi = \frac{E_f}{g\delta\rho} N^{4/3}, \\ F &= \mu N^{2/3} H^{1/3} f_2(H, C_j, \gamma_j, \Pi), \end{aligned} \quad (6)$$

where $f_{1,2}$ are the functions of nondimensional parameters, γ_j is the shape coefficients of the RBC, E_f is the energy of the fluctuational motion of the aggregates, C_j , $j = 1, 2, \dots, m$ are the concentrations of specific immune complexes produced during allergic reactions, μ is the viscosity of plasma, $\delta\rho = \rho_s - \rho_f$.

290

20 segments. The location of the cross section point ($t_{\max}$) is strongly determined by H_0 , L and k .

Based on this model, the following expression for the time $t_{\max}$, when the maximal sedimentation velocity is reached, can be obtained:

$$t_{\max} = \frac{1}{kH_0} \left[\left(\frac{5kH_0 f(H_0)}{3[1-\gamma(H_0)](1-H_0)^2} + 1 \right)^{0.6} - 1 \right]. \quad (12)$$

where $\gamma(H) = 1 + (H/u) / (\partial u / \partial H)$.

The expression (12) can be used for determination of the RBC aggregation rate k from the measured values H_0 and $t_{\max}$. One of the computational results is presented in fig. 5. The values of H_0 and $t_{\max}$ measured by the ESR test have been used for computing the aggregation rate $k(m^{-3}s^{-1})$. Different drugs have been tested at 18 portions of the blood of a patient who was diagnosed in an allergy to verapamil. Three tubes with blood+verapamil are number 13, 14, 15 in fig. 5. In these cases the RBC aggregation rate is 4–10 times higher than in the control sample as well as in the probes with other drugs. Some scatter in the k values computed on the $t_{\max}$ values in the N 13–15 tubes can also be explained by an instability of the sedimentation process. The k value in this case can be estimated as an average value over the three tests ($k=9.2$ when verapamil is added versus $k=2.2$ in other tests).

The example presented in fig. 4 demonstrates a decelerating influence of the allergen on the blood, but among the studied cases both variations in the sedimentation dynamics under the influence of the allergen have been observed.

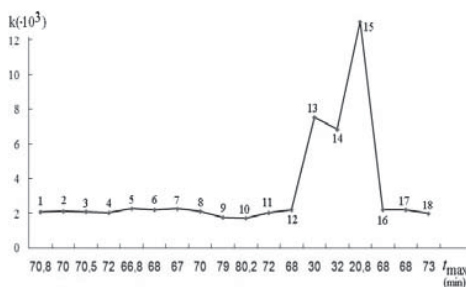


Fig. 5. Values of the time $t_{\max}$ (min) in the presence of the different allergens

5. Conclusions

The ESR is a very simple test, which is widely used for non-specific diagnostics of the state of an organism. A modification of the test with addition to the portion of the venous blood of a small amount of potential allergen (pollen, drug or food allergens) gives a new tool for fast and cheap quantitative estimation of the allergy. An addition of the allergen can lead either to acceleration or to deceleration of the ESR in comparison with the control probe. Due to instability of the sedimentation process when occasional formation of a large aggregate at the top of the tube could fall down faster and accelerate the process, the study of several (3–5) probes with the same allergen is recommended. The decision can be made on the averaged value of $t_{\max}$ and averaged sedimentation dynamics.

Usage of the microtubes is preferable in connection with the smaller amounts of the blood needed, faster sedimentation, smaller values of $t_{\max}$ with low dispersion produced by the instability. The diagnostic conclusions done on the standard Panchenkov test and the test in the microtubes were similar in all the cases studied. In some cases $t_{\max} > 60$ min therefore the standard 1hour Panchenkov test is insufficient for the diagnostics and must be prolonged till 2–2.5 hours.

The developed mathematical model of the blood as two-phase suspensions of aggregating particle leads to the simple transcendental equation (12) that can be easily solved by numerical methods that allows fast and reliable diagnostics of the allergy.

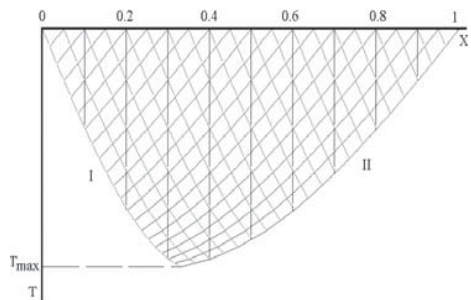


Fig.4. Two families of the characteristics I and II and determination of the dimensionless value $T_{\max}$

Список використаних джерел

1. US Patent Application Publication 2010/0317033 A1. Methods and materials for detecting food containing allergens / M. P. Abdel; US, December 16, 2010.
2. Пат. 2301423 Российская Федерация. Способ диагностики лекарственной аллергии выявлением специфических иммунных комплексов / В. А. Батурин, Е. В. Грудина; Ставрополь, 2007.
3. Патент 57165 Україна. Метод діагностики медикаментозної та харчової алергії / Н. М. Кизилова, В. О. Черевко; Харків. – № U201009671; опубл. 02.08.2010.
4. Левтов В. А. Реология крови/ В. А. Левтов, С. А. Регирер, Н. Х. Шадрин. – Москва: Медицина, 1982. – 272 с.
5. Лосев Е. С. К гидродинамической теории оседания эритроцитов / Е. С. Лосев // Мех. композит. матер. – 1980. – № 1. – С. 136–141.
6. Дацок О. М. Анализ оседания эритроцитов в неоднородном поле сил / О. М. Дацок, Е. Н. Жолонский, Н. Н. Кизилова // Электроника и связь. – 2002. – № 15. – С. 145–149.
7. Lademann J. Investigation of the aggregation and disaggregation properties of erythrocytes by light scattering measurements / J. Lademann, H.-J. Weigmann // Laser Physics. – 1999. – Vol. 9, № 1. – P. 357–362.
8. Кизилова Н. Н. Теоретическое и экспериментальное исследование оседания эритроцитов как агрегирующих частиц в неоднородном поле сил / Н. Н. Кизилова, В. А. Черевко // «Современные проблемы механики сплошных сред»: XIII международная конференция, 2009, Ростов-на-Дону, РФ: сборник трудов. – Т. 2. – С. 98–102.
9. Кизилова Н. Н. Гравитационная седиментация эритроцитов: эксперименты и теоретическая модель / Н. Н. Кизилова, В. А. Черевко // Вісник Харківського національного університету ім. В. Н. Каразіна. Серія: Математика, прикладна математика і механіка. – 2009. – Т. 60, № 875. – С. 80–94.
10. Волощук В. М. Процессы коагуляции в дисперсных системах / В. М. Волощук, Ю. С. Седунов. – Ленинград: Гидрометеоздат. – 1975. – 319 с.

References

1. ABDEL, M. P. (2010) Methods and materials for detecting food containing allergens. *US Patent Application Publication*. US 2010/0317033 A1.
2. BATURIN, V. A. & GRUDINA, E. V. (2007) Sposob diagnostiki lekarstvennoy allergii vyyavleniem spetsificheskikh immunnykh kompleksov. *Patent*. 2301423. Rossiyskaya Federaciya, Stavropol.
3. KIZILOVA, N. N. & CHEREVKO V. O. (2010) Metod diagnostyky medykamentoznoi ta kharchovoi alergii. *Patent*. 57165. (U201009671). Kharkiv, Ukraina.
4. LEVTOV, V. A., REGIRER, S. A. & SHADRINA, N. H. (1982) *Reologiya Krovi*. Moskva: Meditsina.
5. LOSEV, E. S. (1980) K gidrodinamicheskoy teorii osedaniya erotrotsitov. *Mekh. Compozit. Mater.* (1). p. 136–141.
6. DATSOK, O. M., ZOLONSKY, E. N. & KIZILOVA, N. N. (2002) Analiz osedaniya erotrotsitov v neodnorodnom pole sil. *Electronics and Communications*. (15). p. 145–149.
7. LADEMANN, J. & WEIGMANN, H.-J. (1999) Investigation of the Aggregation and Disaggregation Properties of Erythrocytes by Light Scattering Measurements. *Laser Physics*. 9 (1). p. 357–362.
8. KIZILOVA, N. N. & CHEREVKO, V. A. (2009) Teoreticheskoe i eksperimentalnoe issledovanie osedaniya erotrotsitov kak agregiruyuschikh chasits v neodnorodnom pole sil. In *Modern Problems of Mechanics of the Continuous Media*. Rostov-on-Don, RF. 2. p. 98–102.
9. KIZILOVA, N. N. & CHEREVKO, V. A. (2009) Gravitatsionnaya sedimentatsiya erotrotsitov krovi: eksperimenty I teoreticheskaya model. *Visnyk Kharkivskogo Natsionalnogo Universytetu Imeni V. N. Karazina. Seriya: Matematyka, Prykladna Matematyka i Mekhanika*. 60 (875). p. 80–94.
10. VOLOSHCHUK, V. M. & SEDUNOV, Yu. S. (1975) *Processy Koagulatsii v Dispersionnykh Sistemakh*. Leningrad: Gidrometeoizdat.

Надійшла до редколегії 30.09.15

УДК 539.3

Чумак К. А., к. ф.-м. н., с. н. с.

**Термопружний контакт тіл з
хвилястими поверхнями за наявності
теплопровідного середовища в
міжконтактних зазорах**

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України,
79060, м. Львів, вул. Наукова, 3-б
e-mail: chumakostya@i.ua

K. A. Chumak, Ph. D. (Phys.-Math.),
Sr. Sci. Researcher

**Thermoelastic contact between bodies with
wavy surfaces in the presence of
a heat-conducting medium in
intercontact gaps**

Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics of NAS of Ukraine, 79060,
L'viv, Naukova str., 3-b
e-mail: chumakostya@i.ua

Розглянуто задачу про термопружний безфрикційний контакт двох ізотропних півплощин, межа однієї з яких є хвилястою, з урахуванням наявності теплопровідного середовища в міжконтактних зазорах. Її розв'язок побудовано для випадку рівних термічних дистортивностей матеріалів тіл. Проаналізовано вплив коефіцієнта теплопровідності заповнювача зазорів та інтенсивності силового навантаження на геометричні параметри зазорів, стрибок температури між їх берегами та ефективний контактний термоопір.

Ключові слова: термопружний контакт, хвиляста поверхня, міжконтактний зазор, теплопровідне середовище.

The thermoelastic contact problem for two isotropic half-planes, one of which possesses a wavy boundary, is considered. The interface between the bodies consists of periodically arranged gaps, which are filled with a heat-conducting medium, and periodically arranged contact regions, where perfect thermal and frictionless contact occurs. The effect of the interstitial medium on heat transfer between the bodies is simulated by thermal resistance dependent on a height of the gaps. The contact problem is reduced to a system of two nonlinear singular integro-differential equations for a height of the gaps and a temperature jump across them. Its solution is constructed for the case of equal thermal distortivities of the contacting materials. The effects of the thermal conductivity of the interstitial medium and the applied pressure on the height and width of the gaps, the temperature jump across them and the effective thermal contact resistance at the interface are investigated. In particular, it is revealed that the effective thermal contact resistance increases as the applied pressure and the thermal conductivity of the interstitial medium decrease.

Key Words: Thermoelastic Contact, Wavy Surface, Intercontact Gap, Heat-Conducting Medium.

1. Вступ

Підвищення вимог до надійності вузлів і елементів сучасної техніки, на функціонування яких мають вплив контактні деформації, зумовило інтенсивне дослідження контактної взаємодії тіл з мікрогеометрією поверхонь (шорсткістю, хвилястістю). Характерною особливістю взаємодії таких тіл є істотне зменшення висоти міжконтактних зазорів при збільшенні навантаження. Внаслідок цього середовище, яке заповнює зазор, істотно впливає на передачу зусиль і теплоти між тілами, а тому і на розподіл температури, напружень і переміщень в тілах, контактну міцність, жорсткість і провідність.

Наближений та точний розв'язки контактної задачі термопружності для двох півплощин з

хвилястими поверхнями з використанням методу парних суматорних рівнянь побудовано в працях [1, 2]. В них вважалося, що вплив середовища, яке заповнює міжконтактні зазори, на теплообмін між тілами є неістотним (зазори є теплоізованими). У даній роботі досліджено термопружний контакт двох півплощин, одна з яких має хвилясту межу, з урахуванням термічного опору заповнювача зазорів. Розв'язок задачі побудовано для випадку рівних термічних дистортивностей матеріалів тіл.

2. Постановка задачі та її розв'язування

Розглянемо контакт двох півплощин S_1 і S_2 (рис. 1) за умов плоскої деформації під дією стискальних зусиль p та теплового потоку q , нор-

маленьких до інтерфейсу між тілами. Матеріали тіл є пружними й ізотропними та характеризуються різними модулями Юнга E_1 , E_2 , коефіцієнтами Пуассона ν_1 , ν_2 , лінійного теплового розширення α_1 , α_2 і теплопровідності λ_1 , λ_2 . У недеформованому стані межа півплощини S_1 є ідеально прямою, а межа півплощини S_2 – хвилястою. Форма хвилястості в системі координат Oxy описується періодичною функцією

$$r(x) = r(x + kd) = r_0 \cos^2(\pi x / d), \quad r_0 \ll d, \quad (1)$$

де $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$; r_0 – амплітуда хвилястості, d – її період.

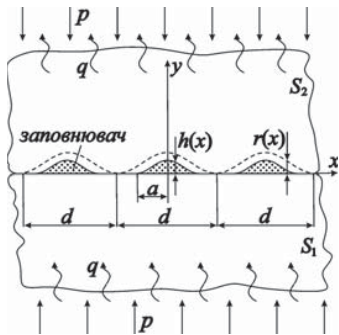


Рис. 1. Контакт півплощин (штриховою кривою зображено хвилястість меж півплощини S_2 у недеформованому стані)

Інтерфейс між тілами утворюють періодично розташовані зазори висоти $h(x)$ і довжини $2a$ кожен та періодично розташовані ділянки контакту довжини $d - 2a$ кожна. Зазори містять теплопровідне середовище (газ, рідину) з коефіцієнтом теплопровідності λ . Його вплив на контактний теплообмін моделюється термоопором [3]:

$$R(x) = h(x) / \lambda, \quad x \in (-a + kd, a + kd). \quad (2)$$

Термоопір зазорів $R(x)$ зумовлює неідеальний тепловий контакт тіл, у зв'язку з чим між берегами кожного зазору виникає стрибок температури $\gamma(x) = T^-(x, 0) - T^+(x, 0)$, $x \in (-a + kd, a + kd)$. Тут T – температура, індексами «+» і «-» позначено граничні значення функції на осі Ox у верхній і нижній півплощинах відповідно. На ділянках налягання меж тіл сили тертя відсутні, а тепловий контакт є ідеальним. Щоб запобігти

глобальному викривленню тіл, зумовленому тепловим потоком q , до півплощини S_j , $j=1, 2$, прикладено лінійно залежні від координати y зусилля σ_{xx}^∞ [2].

Інтегральний вплив періодичної системи міжконтактних зазорів на температуру півплощин є відчутним в обох тілах навіть на далеких відстанях від інтерфейсу ($y \rightarrow \pm \infty$) і проявляється у вигляді усередненого стрибка температури γ_{av} між ними [4]:

$$\gamma_{av} = \frac{1}{d} \int_{-d/2}^{d/2} \gamma(x) dx. \quad (3)$$

Зважаючи на вищесказане, крайові умови сформульованої періодичної контактної задачі термопружності є такими:

на ділянках контакту ($x \in [a + kd, -a + (k+1)d]$):

$$\begin{aligned} T^- &= T^+, \quad q_y^- = q_y^+, \\ \sigma_{yy}^+ &= \sigma_{yy}^-, \quad \sigma_{xy}^- = \sigma_{xy}^+ = 0, \quad u_y^+ = u_y^- - r(x); \end{aligned} \quad (4)$$

вздовж зазорів ($x \in (-a + kd, a + kd)$):

$$\begin{aligned} T^- - T^+ &= R(x) q_y^+, \quad q_y^+ = q_y^-, \\ \sigma_{yy}^+ &= 0, \quad \sigma_{yy}^- = \sigma_{yy}^+, \quad \sigma_{xy}^- = \sigma_{xy}^+ = 0; \end{aligned} \quad (5)$$

на нескінченності в кожній із півплощин S_j , $j=1, 2$:

$$\begin{aligned} q_x^\infty &= 0, \quad q_y^\infty = q, \\ \sigma_{yy}^\infty &= -p, \quad \sigma_{xy}^\infty = 0, \quad \sigma_{xx}^\infty = -\frac{\alpha_j E_j q}{\lambda_j (1 - \nu_j)} y. \end{aligned} \quad (6)$$

Тут q_x , q_y – компоненти вектора теплового потоку; σ_{xx} , σ_{yy} , σ_{xy} – компоненти тензора напружень; u_y – компонента вектора переміщень в напрямку осі Oy .

З використанням методики, описаної в роботі [5], сформульовану контактну задачу зведено до системи двох нелінійних сингулярних інтегродиференціальних рівнянь (СІДР) відносно висоти зазорів $h(\xi)$ та стрибка температури між їх берегами $\gamma(\xi)$:

$$\frac{2}{d} (\xi^2 + 1) \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{h'(\eta)}{\eta - \xi} d\eta - \lambda_{12} (\delta_1 - \delta_2) (\gamma(\xi) - \gamma_{av}) =$$

$$= \frac{2\pi r_0}{d} \frac{\xi^2 - 1}{\xi^2 + 1} + Kp, \quad |\xi| < \alpha, \quad (7)$$

$$\lambda \frac{\gamma(\xi)}{h(\xi)} - \frac{\lambda_{12}}{2} (1 + \xi^2) \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{\gamma'(\eta)}{\eta - \xi} d\eta = q, \quad |\xi| < \alpha, \quad (8)$$

де $\xi = \operatorname{tg}(\pi x / d)$, $\eta = \operatorname{tg}(\pi t / d)$, $\alpha = \operatorname{tg}(\pi a / d)$,
 $\lambda_{12} = 2\lambda_1\lambda_2 / (\lambda_1 + \lambda_2)$, $K = 4 \sum_{j=1}^2 (1 - v_j^2) / E_j$, δ_j
– термічна дистортивність матеріалу півплощини
 S_j ($j=1, 2$) [1], $\gamma_{av} = \frac{1}{\pi} \int_{-\alpha}^{\alpha} \gamma(\xi) / (1 + \xi^2) d\xi$.

Шукані функції $h(\xi)$ і $\gamma(\xi)$ задовольняють умови [3]

$$h(\pm\alpha) = 0, \quad h'(\pm\alpha) = 0, \quad \gamma(\pm\alpha) = 0, \quad \gamma'(\pm\alpha) = 0. \quad (9)$$

Надалі вважатимемо, що матеріали тіл підібрані таким чином, що їх термічні дистортивності є рівними ($\delta_1 = \delta_2$). У цьому разі рівняння (7) має вигляд:

$$\frac{2}{d} \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{h'(\eta)}{\eta - \xi} d\eta = \frac{2\pi r_0}{d} \frac{\xi^2 - 1}{(\xi^2 + 1)^2} + \frac{Kp}{\xi^2 + 1}, \quad |\xi| < \alpha. \quad (10)$$

Як бачимо, в сингулярне інтегральне рівняння (СІР) (10) не входять стрибок температури $\gamma(\xi)$ і усереднений стрибок температури γ_{av} , тобто у разі рівних термічних дистортивностей матеріалів тіл температура не впливає на висоту зазорів.

Визначивши обмежений в точках $\xi = \pm\alpha$ розв'язок СІР (10), що задовольняє другу умову (9), та проінтегрувавши його з урахуванням першої умови (9), отримаємо висоту зазорів:

$$h(\xi) = \frac{r_0}{S(\alpha)} \left(\frac{\sqrt{\alpha^2 - \xi^2}}{\xi^2 + 1} + \frac{1}{2S(\alpha)} \ln \frac{F_1(\alpha, \xi)}{F_2(\alpha, \xi)} \right), \quad (11)$$

де $S(\alpha) = \sqrt{\alpha^2 + 1}$, $F_1(\alpha, \xi) = S(\alpha) - \sqrt{\alpha^2 - \xi^2}$,
 $F_2(\alpha, \xi) = S(\alpha) + \sqrt{\alpha^2 - \xi^2}$.

З умови існування обмеженого в точках $\xi = \pm\alpha$ розв'язку СІР (10) знайдемо півдовжину зазорів α , яка відповідає навантаженню p :

$$\alpha = \sqrt{2\pi r_0 / (dKp) - 1}. \quad (12)$$

За відомих $h(\xi)$ і α розв'язок СІДР типу Прандтля (8), який задовольняє третю і четверту умову (9), побудовано з використанням розробленого в [3] аналітично-числового підходу до роз-

в'язування СІДР типу Прандтля у класі функцій, рівних нулю разом з їх першими похідними в крайніх точках відрізка інтегрування.

3. Результати розрахунків та їх аналіз

Числові розрахунки проведено для відношення амплітуди хвилястості до її періоду $r_0 / d = 0.01$.

На рис. 2 зображено безрозмірну висоту зазорів $\bar{h} = h / d$ для різних інтенсивностей безрозмірного тиску $\bar{p} = Kp$. Значенню $\bar{p} = 0.057$ відповідає безрозмірна довжина зазорів $\bar{a} = a / d = 0.1$, $0.041 \div 0.2$, $0.022 \div 0.3$, $0.006 \div 0.1$.

Рис. 3 ілюструє безрозмірний стрибок температури між берегами зазорів $\bar{\gamma} = \lambda_{12} \gamma / dq$ для різних значень безрозмірного коефіцієнта теплопровідності заповнювача $\bar{\lambda} = \lambda / \lambda_{12}$ за дії тиску $\bar{p} = 0.031$ ($\bar{a} = 0.25$). Стрибок температури $\bar{\gamma}$ зростає зі зменшенням коефіцієнта теплопровідності міжконтактного середовища $\bar{\lambda}$.

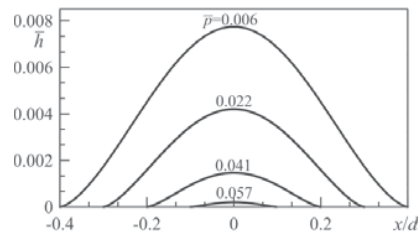


Рис. 2. Висота міжконтактних зазорів $\bar{h}$

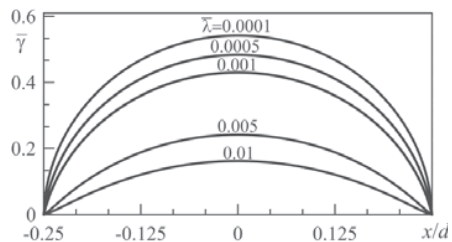


Рис. 3. Стрибок температури між берегами зазорів $\bar{\gamma}$

Для розрахунку ефективного контактного термопору Ω досліджуваної структури скористаємось формулою [6] $\Omega = \gamma_{av} / q$. Безрозмірний термопір $\bar{\Omega} = \lambda_{12} \Omega / d$ спадає зі збільшенням тиску $\bar{p}$ та стає рівним нулю при $\bar{p} = 0.02p \approx 0.0628$ (за

цього значення тиску тіла контактують без зазорів) (рис. 4). Збільшення коефіцієнта теплопровідності $\bar{\lambda}$ також зумовлює зменшення термоопору $\bar{\Omega}$.

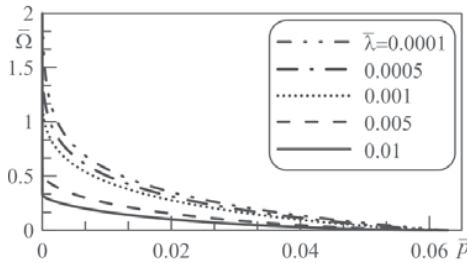


Рис. 4. Залежність ефективного контактного термоопору $\bar{\Omega}$ від прикладеного тиску $\bar{p}$

Список використаних джерел

1. Dundurs J. Heat conduction between bodies with wavy surfaces / J. Dundurs, C. Panek // *Int. J. Heat Mass Transf.* – 1976. – Vol. 19, № 7. – P. 731–736.
2. Panek C. Thermoelastic contact between bodies with wavy surfaces / C. Panek, J. Dundurs // *ASME. J. Appl. Mech.* – 1979. – Vol. 46, № 4. – P. 854–860.
3. Martynyak R. M. Thermoelastic contact of half-spaces with equal thermal distortivities in the presence of a heat-permeable intersurface gap / R. M. Martynyak, K. A. Chumak // *J. Math. Sci.* – 2010. – Vol. 165, № 3. – P. 355–370.
4. Das A. K. Analytical solution for constriction resistance with interstitial fluid in the gap / A. K. Das, S. S. Sadhal // *Heat Mass Transf.* – 1998. – Vol. 34, № 2-3. – P. 111–119.
5. Chumak K. A. Thermoelastic interaction of the bodies with regular surface textures in the presence of heat-permeable media in the intercontact gaps / K. A. Chumak, R. M. Martynyak // *J. Math. Sci.* – 2014. – Vol. 201, № 1. – P. 60–71.
6. Шлыков Ю. П. Контактное термическое сопротивление / Ю. П. Шлыков, Е. А. Ганин, С. Н. Царевский. – Москва: Энергия, 1977. – 328 с.

4. Висновки

Досліджено термопружну взаємодію двох півплощин, одна з яких має хвилясту межу, за наявності в зазорах між тілами теплопровідного середовища, термоопір якого залежить від висоти зазорів. Контактну задачу зведено до системи двох нелінійних сингулярних інтегро-диференціальних рівнянь відносно висоти зазорів і стрибка температури між їх берегами та побудовано розв'язок цієї системи для випадку рівних термічних дистортивностей матеріалів тіл. Проаналізовано вплив коефіцієнта теплопровідності заповнювача зазорів та інтенсивності прикладеного тиску на довжину і висоту зазорів, стрибок температури між їх берегами та ефективний контактний термоопір досліджуваної структури. Зокрема, виявлено, що ефективний контактний термоопір зростає зі зменшенням тиску та теплопровідності міжконтактного середовища.

References

1. DUNDURS, J. & PANEK, C. (1976) Heat conduction between bodies with wavy surfaces. *Int. J. Heat Mass Transf.* 19 (7). p. 731–736.
2. PANEK, C. & DUNDURS, J. (1979) Thermoelastic contact between bodies with wavy surfaces. *ASME. J. Appl. Mech.* 46 (4). p. 854–860.
3. MARTYNYAK, R. M. & CHUMAK, K. A. (2010) Thermoelastic contact of half-spaces with equal thermal distortivities in the presence of a heat-permeable intersurface gap. *J. Math. Sci.* 165 (3). p. 355–370.
4. DAS, A. K. & SADHAL, S. S. (1998) Analytical solution for constriction resistance with interstitial fluid in the gap. *Heat Mass Transf.* 34 (2–3). p. 111–119.
5. CHUMAK, K. A. & MARTYNYAK, R. M. (2014) Thermoelastic interaction of the bodies with regular surface textures in the presence of heat-permeable media in the intercontact gaps. *J. Math. Sci.* 201 (1). p. 60–71.
6. SHLYKOV, YU. P., HANIN, YE. A. & TSARIEVSKII, S. N. (1977) *Kontaknoie Termichieskoie Soprotivlenie*. Moskva: Enerhiia.

Надійшла до редколегії 24.09.15

УДК 539.3

Шакері Мобаракє П.¹, аспірант,
Грінченко В. Т.², д. ф.-м. н., професор,
Зражевський Г. М.¹, к. ф.-м. н., доцент

**Чисельно-аналітичний метод розв'язання
крайової задачі еліптичного типу для
пластини у формі паралелограма**

¹Київський національний університет імені Тараса
Шевченка, 01033, м. Київ, вул. Володимирська, 64
e-mail: pouyan.shakeri@gmail.com
zgrig@univ.kiev.ua

²Інститут гідромеханіки НАН України, м. Київ,
03057, вул. Желябова, 8/4
e-mail: vgrinchenko@yahoo.com

P. Shakeri Mobarakeh¹, Postgraduate Student,
V. T. Grinchenko², Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof.,
G. M. Zrazhevsky¹, Ph.D. (Phys.-Math.), Assoc. Prof.

**A numerical-analytical method for solving
boundary value problem of elliptical type
for a parallelogram shaped plate**

¹Taras Shevchenko National University of Kyiv,
Kyiv, 01033, Volodymyrska str., 64
e-mail: pouyan.shakeri@gmail.com,
zgrig@univ.kiev.ua

²Institute of Hydromechanics NAS of Ukraine, Kyiv,
03057, Zhelyabova str., 8/4
e-mail: vgrinchenko@yahoo.com

У роботі розглядається задача теорії потенціалу у паралелограмній області. Розв'язок задачі будується за методом частинних областей; особливістю його реалізації у даному випадку є те, що аналітичний розв'язок в області, що розглядається, розшукється у вигляді суми більш простих розв'язків, представлених у вигляді рядів Фур'є, для прямокутних областей, перетином яких є паралелограм. Однак дуже важливим питанням при реалізації даного підходу є те, які способи мають бути використані для ефективного визначення довільних коефіцієнтів рядів, що входять до загального розв'язку. У даній роботі ці невідомі коефіцієнти знаходяться методом редукції з нескінченних систем лінійних алгебраїчних рівнянь, які отримуються у результаті застосування методів Гальоркіна та колокацій для задоволення умов на границях області. Обчислювальні експерименти продемонстрували досить швидку збіжність чисельних розв'язків для обох вказаних методів. Для методу Гальоркіна середньоквадратична похибка задоволення граничних умов у 10 разів нижча ніж для методу колокацій. У разі застосування квадратичних формул обидва методи дають порівняно однакову точність. Вибір найбільш оптимального методу залежить від форми неканонічної області, типу задачі та наявної обчислювальних можливостей.

Ключові слова: теорія потенціалу, задача Діріхле, метод редукції, метод колокацій, метод Гальоркіна, метод часткових областей.

The problem of potential theory in a parallelogram shaped domain is considered in this paper. The solution of the problem is based on the method of partial domains; the particularity of its implementation in this case is that the analytical solution in the considered domain is sought as a sum of simpler solutions presented in the form of Fourier series for rectangular areas, which intersection is a parallelogram. However, the methods that should be used for effective determination of arbitrary coefficients of the series included in the general solution is the very important question in the implementation of this approach. These unknown coefficients are obtained using the reduction method from infinite systems of linear algebraic equations resulting from the application of the Galerkin and collocation methods to satisfy the conditions on the boundaries of the domain in this paper. Computational experiments demonstrated the quite fast convergence of numerical solutions for both these methods. The root-mean-square error of satisfying boundary conditions via the Galerkin method is 10 times lower than that provided by the collocation method. In case of application of quadrature formulas, the Galerkin method and the collocation one will exhibit comparable accuracies. The optimal choice of the technique depends on the particular tasks, types of non-canonical domains and available numerical capabilities.

Key Words: Potential Theory, Dirichlet Problem, Reduction Method, Galerkin Method, Collocation Method, Method of Partial Domains.

1. Introduction

Analytical solutions of boundary value problems of mathematical physics have played significant role in development of this branch of mathematics [1–3].

In terms of solving applied problems, analytical solutions have only one drawback – the number of such solutions is severely restricted. Hence, for a long time, various approaches have been proposed to expand the number of domains through which the effective and useful solutions capable of quantifying the characteristics of physical fields can be built. These approaches are constructed based on division of complex domains to relatively simple subdomains. Analytical representative of such unknown function can be constructed for these subdomains. Following satisfaction of boundary conditions, results in infinite systems of algebraic equations, whose properties allow the use of reduction method. In some cases, such as in the case of T–matrix method, derived solutions are valid only within a limited range of variation of the field geometry. Analysis of the existing work in this area shows that the potential possibilities of domain decomposition method is not fully used. Among a great variety of methods for solving boundary problems of the mathematical physics, the method of finite differences seems to be the only purely numerical one. Here the differential statement of a problem is used only at the stage of derivation of the basic equations. In further analysis, partial derivatives are substituted by finite differences, and the initial continuum – by a system with a finite number of degrees of freedom [4]. Other methods, at higher or less extent, involve certain analytical solutions for construction of the general procedure for the method [2, 5]. The general idea behind this is quite straightforward: application of some analytical solutions, as a rule, allows one to obtain the problem statement in the form of dependencies of a smaller dimension, in comparison to the initial one [2]. In the most cases, the initial boundary problem is reduced to some system set of equations formulated for the domain boundary. Noteworthy is a close correlation of the method of finite differences with methods of partial domains, concatenated sets, the Riemann–Hilbert problem technique, and the Neumann–Schwarz method [6]. Application of the sets of specific solutions of wave-type and other type equations for the canonical co-ordinate systems, in order to construct the analytical solutions in non-canonical domains, is most consistently performed within the framework of the method of partial domains [2]. In the majority of practical cases, of

interest are the numerical estimations of the phenomenon controlled by the Laplace equation in some domain Ω , and therefore it is necessary to derive the Dirichlet problem solution for the Laplace equation.

In canonical domains, this problem has exact analytical solutions, while for noncanonical domains it is quite problematic to construct exact analytical solutions, and therefore the method of partial domains is used. In many practical cases, it is possible to present a noncanonical domain in the form of sum/union of several partial canonical domains, e.g., rectangles, for which the solutions are available. This paper presents a range of tasks, which illustrates the new possibilities of constructing analytical solutions in the domains of complex geometry. Using the non-traditional concept of the general solution for the boundary value problems expands insights to use such approach to solve wide range of problems in mathematical physics.

2. Statement of the problem

Let us consider a boundary problem for the two-dimensional Laplace equation in case of a parallelogram

$$\Delta \phi = \frac{\partial^2 \phi(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi(x, y)}{\partial y^2} = 0, \quad (x, y) \in \Omega; \quad (1)$$

$$\phi(x, y) = \bar{\phi}_1(x, y), \quad (x, y) \in OD;$$

$$\phi(x, y) = \bar{\phi}_2(x, y), \quad (x, y) \in BC;$$

$$\phi(x, y) = \bar{\phi}_3(x, y), \quad (x, y) \in DC;$$

$$\phi(x, y) = \bar{\phi}_4(x, y), \quad (x, y) \in BC;$$

where $\bar{\phi}_i(x, y), i=1,2,3,4$ are given functions.

Then, consider the two coordinate systems (fig. 1): $(x_1, y_1) \equiv (x, y)$ and (x_2, y_2) , which are related:

$$\begin{cases} x_1 = x_2 \sin \alpha + y_2 \cos \alpha, \\ y_1 = -x_2 \cos \alpha + y_2 \sin \alpha; \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} x_2 = x_1 \sin \alpha - y_1 \cos \alpha, \\ y_2 = x_1 \cos \alpha + y_1 \sin \alpha. \end{cases} \quad (3)$$

Introduce the notation (fig. 1): Ω_1 – the domain OGCE; Ω_2 – the domain OHCF; $(\Omega = \Omega_1 \cap \Omega_2)$; a, b, a', b', h, L – the length of the line segments OF, OH, OD, OB, OG, OE respectively. Then

$$\Gamma_I : y_1 = 0, \quad x_1 \in [0, a']; \quad (4)$$

$$\Gamma_{II} : y_1 = h, \quad x_1 \in [b' \cos \alpha, a' + b' \cos \alpha]; \quad (5)$$

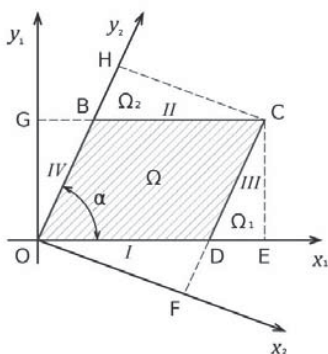


Fig. 1. Parallelogram plate domain

$$\begin{aligned}\Gamma_{III}: x_2 = a, \quad y_2 \in [a' \cos \alpha, b' + a' \cos \alpha]; \\ \Gamma_{IV}: x_2 = 0, \quad y_2 \in [0, b'].\end{aligned}\quad (6)$$

The solution of the boundary value problem will be sought by the method of partial domains, namely, the function $\phi(x, y)$ is sought as the sum of decisions $\phi_1(x, y)$ in the rectangular area Ω_1 and $\phi_2(x, y)$ in rectangular area Ω_2 .

Let us write the boundary conditions:

$$\phi_{\Gamma_I} = -\frac{\cosh\left(\frac{\pi}{a'}\left(x_1 - \frac{a'}{2}\right)\right)}{\cosh\left(\frac{\pi}{2}\right)} + 1 \equiv \overline{\phi_I}(x_1); \quad (8)$$

$$\phi_{\Gamma_{II}} = -\frac{\cosh\left(\frac{\pi}{a'}\left(-\frac{a'}{2} - b' \cos \alpha + x_1\right)\right)}{\cosh\left(\frac{\pi}{2}\right)} + 1 \equiv \overline{\phi_{II}}(x_1); \quad (9)$$

$$\phi_{\Gamma_{III}} = \cos\left(\frac{2\pi}{b'}\left(-a' \cos \alpha - \frac{b'}{2} + y_2\right)\right) + 1 \equiv \overline{\phi_{III}}(y_2); \quad (10)$$

$$\phi_{\Gamma_{IV}} = \cos\left(\frac{2\pi}{b'}\left(-\frac{b'}{2} + y_2\right)\right) + 1 \equiv \overline{\phi_{IV}}(y_2). \quad (11)$$

The combined of boundary conditions: let

$$\phi_2(x_2(x_1, y_1), y_2(x_1, y_1)) = \hat{\phi}_2(x_1, y_1). \quad (12)$$

Γ_I :

$$\phi_1(x_1, 0) + \hat{\phi}_2(x_1, 0) = \overline{\phi_I}(x_1), \quad 0 < x_1 < a', \quad (13)$$

$$\phi_1(x_1, 0) = \overline{\psi_I}(x_1), \quad a' < x_1 < L; \quad (14)$$

Γ_{II} :

$$\phi_1(x_1, h) + \hat{\phi}_2(x_1, h) = \overline{\phi_{II}}(x_1), \quad (15)$$

$$b' \cos \alpha < x_1 < a' + b' \cos \alpha,$$

$$\phi_1(x_1, h) = \overline{\psi_2}(x_1), \quad 0 < x_1 < b' \cos \alpha. \quad (16)$$

Then let

$$\phi_1(x_1(x_2, y_2), y_1(x_2, y_2)) = \hat{\phi}_1(x_2, y_2). \quad (17)$$

Γ_{III} :

$$\hat{\phi}_1(a, y_2) + \phi_2(a, y_2) = \overline{\phi_{III}}(y_2), \quad (18)$$

$$a' \cos \alpha < y_2 < b' + a' \cos \alpha;$$

$$\phi_2(a, y_2) = \overline{\psi_3}(y_2), \quad 0 < y_2 < a' \cos \alpha, \quad (19)$$

Γ_{IV} :

$$\hat{\phi}_1(0, y_2) + \phi_2(0, y_2) = \overline{\phi_{IV}}(y_2), \quad 0 < y_2 < b'; \quad (20)$$

$$\phi_2(0, y_2) = \overline{\psi_4}(y_2), \quad b' < y_2 < b. \quad (21)$$

Thus, it is alleged that $\overline{\psi_1}, \overline{\psi_2}, \overline{\psi_3}, \overline{\psi_4}$ are the arbitrary functions.

Firstly, note that, in view of the Laplace equation linearity, any linear combination of harmonic functions with real constant coefficients is also a harmonic function. It is obvious that the required solution satisfies the condition of parity by both arguments. This brings us to the first boundary problem, or the Dirichlet problem. Reduction to the Dirichlet problem is provided for various problems, such as derivation of a thermal field temperature or an electrostatic field potential in some domain at the preset temperature or potential at the domain boundary.

3. Analytical solution in the domain

The solution is derived in the form of the sum of two potential functions

$$\phi(x_1, y_1; x_2, y_2) = \phi_1(x_1, y_1) + \phi_2(x_2, y_2), \quad (22)$$

where

$$\phi_1(x_1, y_1) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(y) \sin \frac{n\pi}{l} x_1, \quad (23)$$

$$\phi_2(x_2, y_2) = \sum_{p=0}^{\infty} D_p(x) \sin \frac{p\pi}{b} y_2. \quad (24)$$

Whereas these functions should satisfy the condition of parity by both arguments.

After deriving the derivatives $\phi_1(x_1, y_1)$ and substituting them into equation (1), we obtain the following system of equations for determination of functions $A_n(y)$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{d^2 A_n(y)}{dy^2} - \left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 A_n(y) \right) \sin \frac{n\pi}{l} x_1 = 0. \quad (25)$$

Insofar as $\frac{\sin \pi n}{a} x \neq 0$, we get the following system of ordinary homogeneous differential equations for determination of $A_n(y)$:

$$\frac{d^2 A_n(y)}{dy^2} - \left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 A_n(y) = 0, \quad n=0,1,\dots,\infty. \quad (26)$$

The solution of this system of equations looks like:

$$A_n(y) = A_n^{(1)} e^{-\frac{n\pi}{l} y_1} + A_n^{(2)} e^{\frac{n\pi}{l} (y_1-h)}. \quad (27)$$

Then the solution takes the form

$$\phi_1(x_1, y_1) = \sum_{n=0}^{\infty} \sin \frac{n\pi}{l} x_1 \left[A_n^{(1)} e^{-\frac{n\pi}{l} y_1} + A_n^{(2)} e^{\frac{n\pi}{l} (y_1-h)} \right]. \quad (28)$$

Similarly, we find $\phi_2(x_2, y_2)$:

$$\phi_2(x_2, y_2) = \sum_{p=0}^{\infty} \sin \frac{p\pi}{b} y_2 \left[D_p^{(1)} e^{-\frac{p\pi}{b} x_2} + D_p^{(2)} e^{\frac{p\pi}{b} (x_2-a)} \right]. \quad (29)$$

The first terms of the sums in (28) and (29) are equal to zero under $n=0$, $p=0$. Taking into account (22), (28), (29) the general solution has the form:

$$\begin{aligned} \phi(x_1, y_1; x_2, y_2) = & \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi}{l} x_1 \left[A_n^{(1)} e^{-\frac{n\pi}{l} y_1} + A_n^{(2)} e^{\frac{n\pi}{l} (y_1-h)} \right] + \\ & + \sum_{p=1}^{\infty} \sin \frac{p\pi}{b} y_2 \left[D_p^{(1)} e^{-\frac{p\pi}{b} x_2} + D_p^{(2)} e^{\frac{p\pi}{b} (x_2-a)} \right]. \end{aligned} \quad (30)$$

4. Numerical solution of the boundary problem

4.1. Galerkin method. In the Galerkin method, the residuals of the boundary conditions satisfaction are projected on the basis functions over which the construction of the solution is performed. At this, the reduction of series, i.e., limiting a number of terms to finite value, is carried out. In the result, a system of linear algebraic equations is obtained (below its section corresponding to the part I of the boundary is presented):

$$I: \sum_{n=1}^N \left\{ A_n^{(1)} a_{1n\bar{n}}^1 + A_n^{(2)} a_{2n\bar{n}}^1 \right\} + \sum_{p=1}^P \left\{ D_p^{(1)} d_{1p\bar{p}}^1 + \right.$$

$$\left. + D_p^{(2)} d_{2p\bar{p}}^1 \right\} = \phi_{\bar{n}}^1, \quad (31)$$

$$d_{1n\bar{n}}^1 = \int_0^{a'} \sin \frac{n\pi}{l} x_1 \sin \frac{\bar{n}\pi}{l} x_1 dx_1, \quad (32)$$

$$d_{2n\bar{n}}^1 = \int_0^l \sin \frac{n\pi}{l} x_1 \sin \frac{\bar{n}\pi}{l} x_1 e^{\frac{n\pi}{l} (-h)} dx_1, \quad (33)$$

here

$$d_{1p\bar{p}}^1 = \int_0^{a'} \sin \frac{p\pi}{b} x_1 \cos \alpha \sin \frac{\bar{p}\pi}{l} x_1 e^{\frac{-p\pi}{b} x_1 \sin \alpha} dx_1, \quad (34)$$

$$d_{2p\bar{p}}^1 = \int_0^{a'} \sin \frac{p\pi}{b} x_1 \cos \alpha \sin \frac{\bar{p}\pi}{l} x_1 e^{\frac{p\pi}{b} (x_1 \sin \alpha - a)} dx_1, \quad (35)$$

$$\phi_{\bar{n}}^1 = -\frac{1}{\cosh(\frac{\pi}{2})} \int_0^{a'} \cosh\left(\frac{\pi}{a'} (x_1 - \frac{a'}{2})\right) \sin \frac{\bar{n}\pi}{l} x_1 dx_1 -$$

$$- \int_0^{a'} \sin \frac{\bar{n}\pi}{l} x_1 dx - \int_{a'}^l \bar{\Psi}_1(x_1) \sin \frac{\bar{n}\pi}{l} x_1 dx_1.$$

Thus, the solution of the first basic boundary problem for a parallelogram domain is obtained.

Here the basic difficulty is encountered not during construction of the general solution for differential equations, but during estimation of coefficients/factors of series, which, in particular, can be expressed through a solution of an infinite system of linear algebraic equations. Noteworthy is that for solving the infinite systems of equations the method of simple reduction is frequently used. The essence of this method is that solution of an infinite system of equations is approximated by solving a finite one.

However, a practical application of such approach in many cases leads to occurrence of essential errors in the solution.

In particular, the above fact takes place, if unknown values in the infinite system tend to a nonzero limit. This case was investigated by Grinchenko [5] on the basis of the Koyalovych asymptotic expressions [7]. Usage of the known asymptotical behaviour of unknown values in an infinite system allows one to provide an essential improvement of the solution convergence and, as a consequence, to improve the solution accuracy in case of using the reduction method. On the other hand, for completely regular infinite systems the boundedness of absolute/free terms implies the uniqueness of a solution, which can be derived by the reduction method or the method of successive approximations.

According to classification of methods of weighed residuals [8–9], the above method of solving the problem is treated as the Galerkin method, insofar as the solution of a system of

functional equations is derived by minimization of the root-mean-square (rms) error functional (or, in accordance with [8], one can easily observe the coincidence of weight and basis functions).

4.2. Collocation method. In the collocation method, the satisfaction of boundary conditions in the individual points of the boundary (collocation points) is required [8].

Below the section of a system of linear algebraic equations corresponding to the part I of the boundary is presented:

$$I: \sum_{n=1}^N \left\{ A_n^{(I)} a_{1n}^I + A_n^{(2)} a_{2n}^I \right\} + \sum_{p=1}^P \left\{ D_p^{(I)} d_{1p}^I + D_p^{(2)} d_{2p}^I \right\} = \phi_n^I; \quad (36)$$

$$x_2 = x_1 \sin \alpha, \quad y_2 = x_1 \cos \alpha; \quad (37)$$

$$a_{1n}^I = \sin \frac{n\pi}{l} x_{1n}, \quad a_{2n}^I = \sin \frac{n\pi}{l} x_{1n} e^{\frac{n\pi}{l}(-h)},$$

$$d_{1p}^I = \sin \frac{p\pi}{b} x_{1p} \cos \alpha e^{\frac{-p\pi}{b} x_{1p} \sin \alpha},$$

$$d_{2p}^I = \sin \frac{p\pi}{b} x_{1p} \cos \alpha e^{\frac{p\pi}{b} (x_{1p} \sin \alpha - c)},$$

$$\phi_n^I = \bar{\phi}_1(x_{1n}),$$

$$x_{1n} = 0 + \tilde{n} \times \text{step } I, \quad \tilde{n} = 1, N_{\text{main}}^I, N_{\text{main}}^I + N_{\text{add}}^I = N,$$

$$\text{step } I = \frac{l}{(N+1)}.$$

Observation:

$N_{\text{main}}^{(I/II)}$ are determined so that, $\{x_{1n}, (0, h)\} \in (I/II)$.

$P_{\text{main}}^{(III/IV)}$ are determined so that, $\{(a, 0), y_{2n}\} \in (III/IV)$.

$N_{\text{add}}^{(I/II)}$ — additions to the, $N_{\text{main}}^{(I/II)}$.

$P_{\text{add}}^{(III/IV)}$ — additions to the, $P_{\text{main}}^{(III/IV)}$.

In this way $N_{\text{main}}^{(I/II)} + N_{\text{add}}^{(I/II)} = N$; $P_{\text{main}}^{(III/IV)} + P_{\text{add}}^{(III/IV)} = P$.

The order of the system is equal to $(2N+2P) \times (2N+2P)$.

Implemented modification:

$$\psi_1(x_1) = C_1 = \text{const}, \quad \psi_2(x_1) = C_2 = \text{const},$$

$$\psi_3(y_2) = C_3 = \text{const}, \quad \psi_4(y_2) = C_4 = \text{const}.$$

Thus, C_1, C_2, C_3, C_4 , considered to be unknown.

Additional equations:

$$\phi_1(a', 0) = C_1, \quad \phi_1(b' \cos \alpha, h) = C_2,$$

$$\phi_2(0, b') = C_3, \quad \phi_3(a, a' \cos \alpha) = C_4,$$

the order of the system is equal to $(2N+2P+4) \times (2N+2P+4)$.

4.3. Computational results of the Galerkin method (N=P=100). The results of numerical analysis of the potential function behavior at the boundary of parallelogram plate are shown in the following figures. Figure 2 shows the values of the function $\phi(x_1, y_1; x_2, y_2)$ on the boundary

$y_1 = 0, \quad x_1 \in [0, a']$ (Γ_I). A similar behavior of this function is at the boundary $y_1 = h, \quad x_1 \in [b' \cos \alpha, a' + b' \cos \alpha]$ (Γ_{II}).

However, comparing the error values obtained by satisfying the boundary conditions (figures 3 and 4), we see that at the angles of the parallelogram solution holds the oscillation.

The values of $\phi(x_1, y_1; x_2, y_2)$ were found at the boundary $x_2 = a, y_2 \in [a' \cos \alpha, b' + a' \cos \alpha]$ and $x_2 = 0, y_2 \in [0, b']$. It was established that at these boundaries the error values have similar character of behavior, i.e., in the angle points there is values oscillation (figures 5 and 6).

The values of $\phi(x_1, y_1; x_2, y_2)$ were found at the

boundary $x_2 = a, y_2 \in [a' \cos \alpha, b' + a' \cos \alpha]$ and $x_2 = 0, y_2 \in [0, b']$. It was established that at these boundaries the error values have similar character of behavior, i.e., in the angle points there is values oscillation (figures 5 and 6).

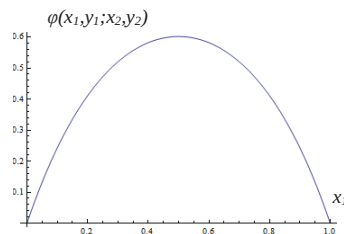


Fig. 2. Boundary values of the solution obtained by the Galerkin method at the boundary $y_1 = 0, \quad x_1 \in [0, a']$

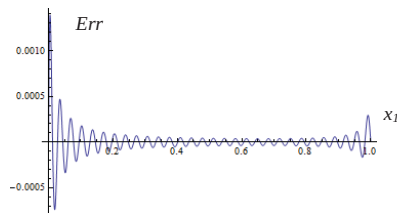


Fig. 3. Error in satisfying the boundary conditions I.

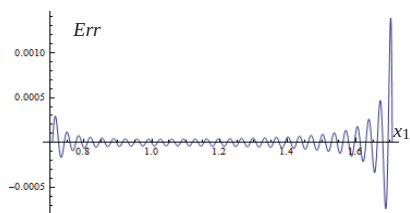


Fig. 4. Error in satisfying the boundary conditions II

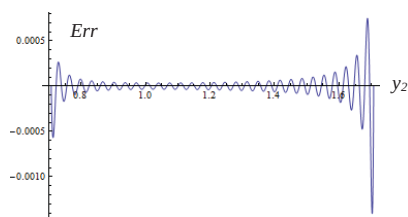


Fig. 5. Error in satisfying the boundary conditions III

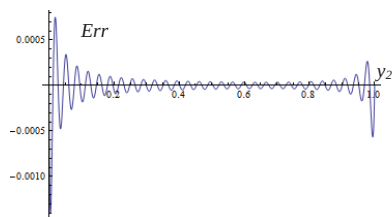


Fig. 6. Error in satisfying the boundary conditions IV.

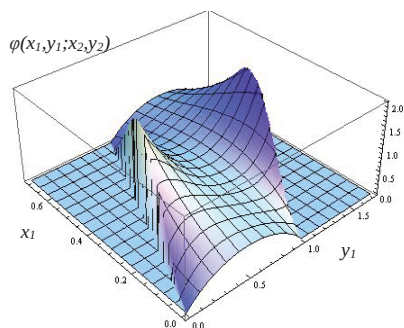


Fig.7. Solution obtained by the Galerkin method in the domain under study.

The solution obtained by the Galerkin method in the parallelogram shaped domain is shown in the Fig.7.

4.4. Computational results of the collocation method ($N=P=100$).

Figure 8 shows the values of the function $\phi(x_1, y_1; x_2, y_2)$ at the boundary Γ_I . The graph of this function at the boundary Γ_{II} has the same form. Figures 9 and 10 show the error values in satisfying the boundary conditions on the sides Γ_I and Γ_{II} of the parallelogram.

The behavior of the error in satisfying the condition II under $x_1 \rightarrow a' + b' \cos \alpha$ has the same behavior of the errors in satisfying the condition I close from 0.

The graf of boundary values of solution at the boundary Γ_{III} is given in Fig.11.

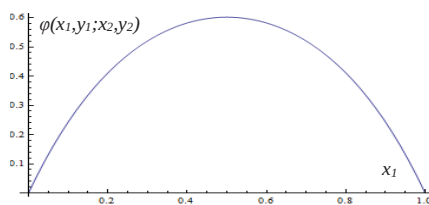


Fig. 8. Boundary values of the solution obtained by the collocation method at the boundary Γ_I

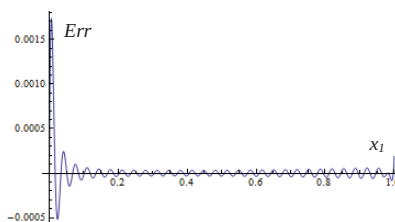


Fig. 9. Error in satisfying the boundary conditions I

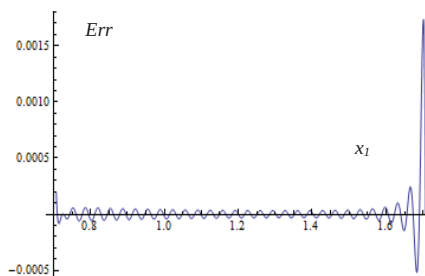


Fig. 10. Error in satisfying the boundary conditions II.

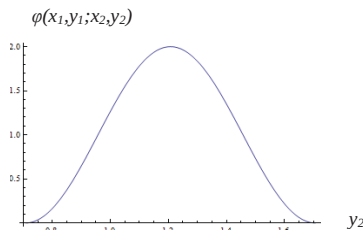


Fig. 11. Boundary values of the solution obtained by the collocation method at the boundary $\Gamma_{III} : x_2 = a, y_2 \in [a' \cos \alpha, b' + a' \cos \alpha]$

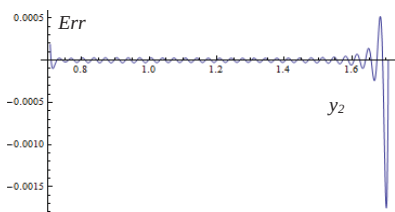


Fig. 12. Error in satisfying the boundary conditions III

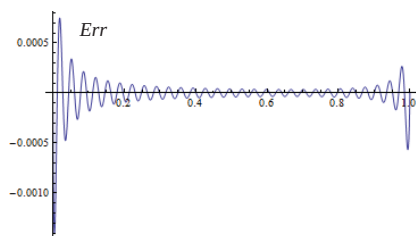


Fig. 13. Error in satisfying the boundary conditions IV

The graph of the solution has the same form at the boundary $\Gamma_{IV} : x_2 = 0, y_2 \in [0, b']$.

Errors graphs in satisfying the boundary conditions III and IV are given below.

Comparing the figures 3 and 9, figures 4 and 10 one can see that the application of the method of collocation gives error more half as large again as the Galerkin method error.

The solution of the Dirichlet boundary problem for harmonic function is shown in Fig. 14. As can be seen this solution has the maximum and minimum values which are located at the boundaries. This fact corresponds to the theorem on the behavior of harmonic functions.

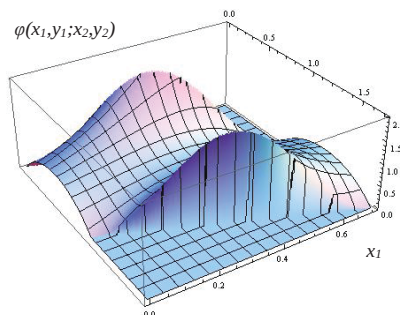


Fig. 14. Solution obtained by the collocation method in the parallelogram shaped domain

5. Conclusions

This study provides a comparative analysis of various methods for solving the Dirichlet problem for a parallelogram domain.

Two methods under study are semi-analytical ones. According to classification of methods of weighed residuals [8], these are boundary solution methods. The first one is the Galerkin method, in which the root-mean-square (rms) error of satisfying the boundary conditions is minimized. The second method is the collocation method—an interpolation technique, which implies that the equation of weighed residuals is based on the condition of zeroing boundary residuals in the collocation nodes. The selected example has a simple solution, which allows one to analyze the singularities of application of various methods.

The Galerkin method has essential advantages, in comparison with the collocation method, due to the fact that for linear problems the equation of weighed residuals has either symmetric, or block-diagonal matrix with a dominant diagonal. Moreover, it is based on minimization of the rms integral residual.

However, the pointwise collocation method has its own advantages consisting in simplicity of realization and flexibility of its application, based on a possibility of collocation mesh selection.

In the considered example, the rms error of satisfying boundary conditions via the Galerkin method is 10 times lower than that provided by the collocation method. However, this can be attributed to the fact that, in this particular case, it was possible to achieve an analytical integration, so that the error value was controlled by the error in solving the system of linear equations. In case of application of

quadrature formulas, the Galerkin method and the collocation one will exhibit comparable accuracies.

The results of this study can be applied to realization of the method of the combined domains for solving linear boundary problems of mathematical physics in complex domains. Provided the fields under study are smooth enough, both methods ensure quite precise

estimations of the derived characteristics. However, since their practical realization imply different scope of analytical work, computing procedures, etc., the optimal choice of the technique depends on the particular tasks, types of non-canonical domains and available numerical capabilities.

Список використаних джерел

1. Гринченко В. Т. Гармонические колебания и волны в упругих телах / В. Т. Гринченко, В. В. Мелешко. – Киев: Наукова думка, 1981. – 284 с.
2. Shakeri Mobarakeh P. Construction method of analytical solutions to the mathematical physics boundary problems for non-canonical domains / P. Shakeri Mobarakeh, V. T. Grinchenko // Reports on Mathematical Physics. – 2015. – Vol. 75, № 3. – P. 417–434.
3. Гринченко В. Т. Основы акустики / В. Т. Гринченко, І. В. Вовк, В. Т. Маципура. – Київ: Наукова думка, 2007. – 640 с.
4. Папков С. О. Бесконечные системы линейных уравнений в случае первой основной граничной задачи для прямоугольной призмы / С. О. Папков // Динамические системы. – 2010. – № 28. – С. 89–98.
5. Гринченко В. Т. Равновесие и установившиеся колебания упругих тел конечных размеров / В. Т. Гринченко. – Киев: Наукова думка, 1978. – 264 с.
6. Mathew T. Domain Decomposition Methods for the Numerical Solution of Partial Differential Equations / T. Mathew. – Berlin, Heidelberg: Springer–Verlag, 2008. – 775 с.
7. Коялович Б. М. Исследования о бесконечных системах линейных алгебраических уравнений / Б. М. Коялович // Известия физ.-мат. института им. В. А. Стеклова. – 1930. – № 3. – С. 41–167.
8. Zienkiewicz O. C. Finite elements and approximation / O. C. Zienkiewicz, K. Morgan. – New York: Wiley, 1983.
9. Brebbia C. A. Boundary Element Techniques / C. A. Brebbia, J. C. F. Telles, L. C. Wrobel. – New York: Springer Verlag, 1984.

References

1. GRINCHENKO V. T. & MELESHKO V. V. (1981) *Garmonicheskie Kolebaniya i Volni v Uprugikh Telakh*. Kiev: Naukova Dumka.
2. SHAKERI, MOBARAKEH P. & GRINCHENKO, V. T. (2015) Construction method of analytical solutions to the mathematical physics boundary problems for non-canonical domains. *Reports on Mathematical Physics*. 75 (3). p. 417–434.
3. GRINCHENKO, V. T., VOVK, I. V. & MATSYUPURA, V. T. (2007) *Osnovy Akustyky*. Kyiv: Naukova Dumka.
4. PAKOV, S. O. (2010) *Bez konechnie systemy lineinikh uravneniy v sluchaye pervoy osnovnoy granichnoy zadachi dlya pryamougolnoy prizmy*. *Dinamicheskie systemy*. (28). p. 89–98.
5. GRINCHENKO, V. T. (1978) *Ravnovesiye i Ustanovivshiesya Kolebaniya Uprugikh Tel Konechnikh Razmerov*. Kiev: Naukova Dumka.
6. MATHEW, T. (2008) *Domain Decomposition Methods for the Numerical Solution of Partial Differential Equations*. Berlin, Heidelberg: Springer–Verlag.
7. KOYALOVYCH, B. M. (1930) *Issledovanie o beskonechnih systemah lineinikh algebricheskih uravneniy*. *Izvestiya Phys.-Math. Instituta im. V. A. Steklova*. 3. p. 41–167.
8. ZIENKIEWICZ, O. C. & MORGAN, K. (1983) *Finite Elements and Approximation*. New York: Wiley.
9. BREBBIA, C. A., TELLES, J. C. F. & WROBEL, L. C. (1984) *Boundary Element Techniques*. New York: Springer Verlag.

Надійшла до редколегії 30.09.15

УДК 539.3

Яцків О. І.,
Швець Р. М., к. ф.-м. н., с. н. с.

**Визначення теплофізичних
властивостей тонкого приповерхневого
шару циліндра за відомими
переміщеннями поверхні**

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України,
79060, м. Львів, вул. Наукова, 3-б
e-mail: viktsya@gmail.com

O. I. Yatskiv,
R. M. Shvets, Ph. D. (Phys.-Math.),
Sr. Sci. Researcher,

**Cylinder undersurface thin layer
thermophysical parameters identification
using surface displacements data**

Ya. S. Pidstrygach Institute to Applied Problems of
Mechanics and Mathematics NAS of Ukraine, 79060,
Lviv, Naukova str., 3-b
e-mail: viktsya@gmail.com

Розглянуто задачу визначення теплофізичних параметрів тонкого приповерхневого шару довгого суцільного циліндра, який нагрівається довкіллям, якщо в низці послідовних моментів часу задано значення поверхневих переміщень. Досліджено вплив малих похибок задання вхідних даних на точність визначення параметрів та термонапруженого стану циліндра. Порівняно точність ідентифікації з такою, якщо як вхідні дані задано дискретні за часом значення температури поверхні.

Ключові слова: термопружність, теплофізичні параметри, ідентифікація параметрів, стійкість ідентифікації, поверхневі переміщення, інтегро-диференціальне рівняння, циліндр, приповерхневий шар.

The problem of determining the thermostressed state in a long isotropic cylinder with unknown undersurface thin layer thermophysical properties is considered. Cylinder is heated by the environment of constant temperature. The heat exchange of the cylinder with its environment obeys the Newton law. The presence of a thin layer is taken into account in the formulated boundary-value problem by means of a Pidstrygach nonclassical nonstationary boundary condition. The additional data for inverse problem of determining unknown thermophysical parameters is formed by the discrete-in-time data set of surface displacements. In that case the representation for cylinder displacements by the surface temperature is obtained. When surface displacements are known this representation transforms into integral Volterra equation for unknown temperature at the cylinder surface. After determination of the surface temperature thermophysical parameter is calculated as a result of integro-differential operator acting on the surface temperature. Identification instability depending upon small input data errors is investigated. After identification of thermophysical parameter the temperature and stresses in a cylinder are calculated.

Key Words: Thermoelasticity, Thermophysical Parameters, Parameters Identification, Stability for Identification Procedure, Surface displacements, Integro-Differential Equation, Cylinder, Undersurface Layer.

1. Вступ

Фізико-механічні властивості елементів конструкцій можуть змінюватись під час виготовлення та експлуатації. Найбільших змін у цьому разі переважно зазнають структура і властивості їх тонких приповерхневих шарів. Тому для розрахунку термонапруженого стану таких елементів актуальною є проблема урахування приповерхневої неоднорідності і визначення реальних значень її фізико-механічних параметрів, зокрема теплофізичних. Для цього використовують методи теорії обернених задач (ОЗ) з ідентифікації невідомих параметрів. Як вхідні дані таких ОЗ

переважно задають значення вимірів температури або теплових потоків [1]. Однак не завжди ці виміри можна здійснити. Тому для випадку поверхнево-однорідних тіл було запропоновано використовувати зв'язаність механічного і температурного полів, і як вхідні дані брати результати вимірів однієї з характеристик механічного процесу: напружень, деформацій чи переміщень [2, 3]. На цій основі формують неklasичну ОЗ термопружності і визначають термонапружений стан в тілі. Такий підхід розширює клас задач механіки і залучає до їх розв'язання апробовані методи теорії ОЗ.

У цій статті дані вимірювань поверхневих переміщень використано для ідентифікації невідомих реальних значень теплофізичних параметрів тонкого приповерхневого шару циліндра і обчислення температури й напружень. Відомо, що ОЗ належать до некоректних задач, зокрема вони нестійкі до малих збурень вхідних даних [1], а збільшення кількості вхідних даних часто може лише посилювати цю нестійкість. Тому тут досліджується стійкість процесу ідентифікації параметрів щодо похибки вимірювань переміщень. Крім того точність визначення теплофізичних параметрів і термонапруженого стану на основі вимірів поверхневих переміщень порівнюється з точністю їх визначення на основі вимірів температури поверхні, здійсненого раніше у праці [4].

2. Постановка задачі та її розв'язання

Розглянуто ізотропний суцільний довгий циліндр, що нагрівається довкіллям сталої температури. Тонкий приповерхневий шар циліндра має неоднакові з основним матеріалом теплофізичні властивості, які є невідомі. Натомість задано результати вимірювань в низці моментів часу радіальних поверхневих переміщень. Потрібно в межах квазістатичної осесиметричної задачі термopружності знайти поля напружень і температури в циліндрі. Така задача термopружності є неklasичною, так як граничні умови задачі теплопровідності є недоозначеними – відсутня інформація про значення зведених параметрів тепловіддачі з поверхні циліндра та теплоємності тонкого приповерхневого шару. Процес теплопровідності в циліндрі описуємо таким рівнянням

$$\Delta T(r, \tau) = \alpha^2 \frac{\partial T(r, \tau)}{\partial \tau}, \quad 0 \leq r < r_1. \quad (1)$$

Тут $T(r, \tau)$ – температура; α^{-1} – коефіцієнт температуропровідності; Δ – оператор Лапласа в циліндричній системі координат; r – радіальна координата; τ – час; r_1 – радіус циліндра.

Наявність в циліндрі тонкого приповерхневого шару задаємо неklasичними, нестационарними межовими умовами Підстригача [4]

$$\frac{\partial T(r, \tau)}{\partial r} + BT(r, \tau) + H \frac{\partial T(r, \tau)}{\partial \tau} = 0, \quad r = r_1. \quad (2)$$

Тут B, H – відповідно зведені коефіцієнти тепловіддачі та теплоємності приповерхневого шару.

В початковий момент часу температура в циліндрі однакова за товщиною

$$T(r, 0) = T^0, \quad \tau = 0. \quad (3)$$

Додатково вимагаємо виконання умов обмеженості температури і рівності нулю теплового потоку в центрі циліндра

$$T(r, \tau) < \infty, \quad \frac{\partial T(r, \tau)}{\partial r} = 0, \quad r = 0. \quad (4)$$

Для знаходження напружено-деформованого стану запишемо рівняння рівноваги в переміщеннях

$$\Delta \bar{u} + \frac{1}{1-2\nu} \text{grad div } \bar{u} = 2 \frac{1+\nu}{1-2\nu} \alpha_T g \text{ grad } T, \quad (5)$$

$$r \in [0, r_1]$$

Тут $\bar{u}$ – вектор переміщень; ν – коефіцієнт Пуассона; α_T – коефіцієнт лінійного температурного розширення.

Механічним впливом приповерхневого шару на напружений стан циліндра нехтуємо. На поверхні циліндра радіальні напруження рівні нулю

$$\sigma_{rr} = 0, \quad r = r_1. \quad (6)$$

Для поперечного перерізу циліндра виконується умова рівноваги

$$\int_0^{r_1} r \sigma_{zz} dr = 0. \quad (7)$$

Розв'язки рівнянь рівноваги (5) подаємо у вигляді Папковича – Нойбера, враховуючи осесиметрію задачі

$$u_r = \Lambda_r + \frac{1}{4(1-\nu)} \frac{\partial}{\partial r} (\Lambda - r \Lambda_r - z \Lambda_z) \quad (8)$$

$$u_z = \Lambda_z + \frac{1}{4(1-\nu)} \frac{\partial}{\partial z} (\Lambda - r \Lambda_r - z \Lambda_z)$$

Тут $\Lambda_r(r, \tau)$, $\Lambda_z(z, \tau)$ подаються через довільні функції часу $K_1(\tau)$, $K_2(\tau)$:

$$\Lambda_r(r, \tau) = K_2(\tau) r, \quad \Lambda_z(z, \tau) = K_1(\tau) z. \quad (9)$$

Використовуючи побудовану раніше [4] спеціальну структуру розв'язку прямої задачі теплопровідності (1)–(4), отримано такий вираз для складової $\Lambda(r, \tau)$ з подання (8):

$$\Lambda(r, \tau) = 8(1 + \nu) \alpha_T \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\Phi(\tau) (\alpha \mu_n r_1)^2 - 4}{(\alpha \mu_n r_1)^2} - T^0 e^{-\mu_n^2 \tau} - \alpha \mu_n^2 \int_0^{\tau} \frac{\Phi(t)}{B} e^{-\mu_n^2(\tau-t)} dt \right] x \right. \\ \left. x \frac{1}{(\alpha \mu_n)^3 r_1} \frac{J_0(\alpha \mu_n r)}{J_1(\alpha \mu_n r_1)} + \frac{r^4}{32 r_1^2} \frac{\Phi(\tau)}{B} \right\}. \quad (10)$$

Тут $\Phi(\tau)$ – температура поверхні циліндра; $J_0(\alpha \mu_n r)$, $J_1(\alpha \mu_n r_1)$ – функції Бесселя; μ_n – власні числа межевої задачі (1)–(2). Використовуючи для напружень закон Дюгамеля-Неймана, конкретизуємо $K_1(\tau)$, $K_2(\tau)$ з умов (6) та (7) і отримуємо для поверхневих радіальних переміщень таке подання:

$$u_r(r_1, \tau) = 2\alpha_T \left[\frac{r_1}{4} \frac{\Phi(\tau)}{B} + \sum_{n=1}^{\infty} L_n(\tau) \frac{J_1(\alpha \mu_n r_1)}{\alpha \mu_n} \right] \quad (11)$$

Тут $L_n(\tau)$ має вигляд

$$L_n(\tau) = \frac{2}{J_1(\alpha \mu_n r_1)} \left\{ \frac{\mu_n}{\alpha r_1} \int_0^{\tau} \frac{\Phi(t)}{B} e^{-\mu_n^2(\tau-t)} dt + \right.$$

$$\left. + T^0 \frac{e^{-\mu_n^2 \tau}}{\alpha \mu_n r_1} - \left(\frac{(\alpha \mu_n r_1)^2 - 4}{(\alpha \mu_n r_1)^2} \right) \frac{\Phi(\tau)}{B} \right\}. \quad (12)$$

Якщо поверхневі радіальні переміщення відомі, то (12) є інтегральним рівнянням типу Вольтерри для визначення $\Phi(\tau)$.

3. Результати розрахунків та їх аналіз

Для розв'язання інтегрального рівняння (11), використано сплайн-інтерполяцію переміщень та сплайн-апроксимацію розв'язку. Вхідні дані задавали з 2% похибкою. За знайденою температурою поверхні, на основі розробленого раніше методу [4], ідентифіковано параметри приповерхневого шару. Далі параметри уточнено перебором їх околу за мінімального середньо-квадратичного відхилення обчислених переміщень від заданих. Як приклад, в таблиці 1 наведено результати ідентифікації параметра B . В ній позначено: B_T – точне значення параметра; B_{int}^* – ідентифікований з інтегро-диференційного виразу параметр; δ_{int} – похибка визначення B_{int}^* ; ζ – інтервал значень параметра, за яких обчислені поверхневі переміщення відрізняються від заданих не більше ніж на 2%; $B_{об}^*$ – уточнене значення параметра; $\delta_{об}$ – похибка визначення $B_{об}^*$; $B_{сер}^*$ – середина інтервалу ζ ; $\delta_{сер}$ – відхилення $B_{сер}^*$ від B_T . Після визначення параметрів, обчислено температуру й напруження в циліндрі. Аналіз отриманих результатів показав, що задання поверхневих переміщень дає кращу точність визначення теплофізичних параметрів і термонапруженого стану по-

Таблиця 1

Результати ідентифікації параметра B та уточнення його значення

	B_T	B_{int}^*	δ_{int} , %	ζ	$B_{об}^*$	$\delta_{об}$, %	$B_{сер}^*$	$\delta_{сер}$, %
1	0.5	0.65	30 %	[0.493; 0.508]	0.508	1.6 %	0.5005	0.1 %
2	1	1.35	35 %	[0.995; 1.02]	1.016	1.6 %	1.0075	0.75 %
3	2	0.917	54 %	[1.945; 2.029]	1.966	1.7 %	1.987	0.65 %
4	3	0.98	67 %	[3.0; 3.104]	3.1	3.3 %	3.052	1.73 %
5	5	- 4.4	-	[4.847; 5.132]	4.88	2.26 %	4.989	0.22 %
Задача розв'язувалась за фіксованого параметра $H=0.5$								
1	0.5	0.45	10 %	[0.5; 0.522]	0.512	2.4 %	0.511	2.2 %
2	1	0.91	9 %	[1; 1.044]	1.024	2.4 %	1.022	2.2 %
3	2	1.64	18 %	[1.998; 2.076]	2.05	2.5 %	2.037	1.85 %
4	3	4.95	65 %	[3; 3.104]	3.1	3.3 %	3.052	1.73 %
5	5	7.77	55 %	[4.992; 5.139]	5.1	2 %	5.07	1.4 %
Задача розв'язувалась за фіксованого параметра $H=2.5$								

рівняно із заданням температури поверхні [4].

4. Висновки

Сформульовано обернену задачу термопружності про визначення термонапруженого стану довгого суцільного циліндра з тонким приповерхневим шаром за невідомих тепловіддачі та теплосмності шару, якщо задано поверхневі переміщення. Використано зв'язаність переміщень і температури та отримано для температури поверхні інтегральне рівняння типу Вольтерри. Застосовано сплайн-інтерполяцію заданих в дискретні моменти часу переміщень та сплайн-апроксимацію розв'язку інтегрального рівняння. Для ідентифікації теплофізичних параметрів приповерхневого шару за знайденою поверхневою температурою застосовано розроблений раніше метод,

оснований на побудові спеціальної структури розв'язку прямої задачі і отриманні для шуканих параметрів залежних від поверхневої температури інтегро-диференційних виразів. Знайдені теплофізичні параметри уточнено за допомогою перебору їх околу і вибору таких, для яких середньо-квадратичне відхилення обчислених переміщень від заданих є мінімальним. Досліджено стійкість ідентифікації параметрів і визначення полів температури і напружень щодо малих похибок вимірів переміщень. Виявлено, що вона краща, ніж у разі задання поверхневої температури [4]. Отримано інтервали для теплофізичних параметрів, за яких відхилення температури і напружень є в межах певного, наперед заданого діапазону. Розроблений метод можна поширити на випадок змінних в часі параметрів шару [5].

Список використаних джерел

1. Бек Дж. Некорректные обратные задачи теплопроводности / Дж. Бек, Б. Блэкуэлл, Ч. Сент-Клэр мл. – М.: Мир, 1989. – 312.
2. Blanc G. Solution of the inverse heat conduction problem from thermal strain measurements / G. Blanc., M. Raynaud // ASME. J. Heat Transfer. – 1996. – Vol. 118. – P. 842–849.
3. Кушнір Р. М. Обернена задача термопружності для неоднорідного циліндра за неповної інформації про теплове навантаження / Р. М. Кушнір, А. В. Ясінський // Мат. методи і фіз.-мех. поля. – 2007. – Т. 50, № 3. – С. 140–145.
4. Швець Р. М. Ідентифікація межових теплофізичних параметрів циліндра за нестационарних умов теплообміну з довкіллям / Р. М. Швець, О. І. Яцків, Б. Я. Бобик // Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології. – 2010. – Т. 12. – С. 198–207.
5. Яцків О. І. Термонапружений стан циліндра з тонким приповерхневим шаром, теплофізичні властивості якого змінюються з часом / О. І. Яцків, Р. М. Швець, Б. Я. Бобик // Мат. методи і фіз.-мех. поля. – 2011. – Т. 54, № 4. – С. 90–105.

References

1. BECK, J. V. (1985) *Inverse Heat Conduction: Ill-Posed Problems*. New York: Wiley-Interscience Publication.
2. BLANC, G. & RAYNAUD, M. (1996) Solution of the inverse heat conduction problem from thermal strain measurements. *ASME. J. Heat Transfer*. 118. p. 842–849.
3. KUSHNIR, R. M. & YASINSKYI, A. V. (2007) Obernena zadacha termoprzhnosti dlya neodnorodnogo tsylindra za nepovnoyi informatsiji pro teplove navantazheniya. *Matematychni Metody i Fyzyko-mekhanichni Polya*. 50 (3). p. 140–145.
4. SHVETS, R. M., YATSKIV, O. I., BOBYK, B. YA. (2010) Identyfikatsiya mezhovykh teplofizychnykh parametriv tsylindra za nestatsionarnykh umov teploobminu z dovkilliam. *Fyzyko-matematychne Modelyuvannya ta Informatsijni Tekhnologiji*. 12. p. 198–207.
5. YATSKIV, O. I., SHVETS, R. M., BOBYK, B. YA. (2011) Termonapruzhenyj stan tsylindra z tonkym prypoverkhnevym sharom, teplofizychni vlastyvyosti yakogo zminyut'sya z chasom. *Matematychni Metody i Fyzyko-mekhanichni Polya*. 54 (4). p. 90–105.

Надійшла до редколегії 30.09.15

КОМП'ЮТЕРНІ НАУКИ ТА ІНФОРМАТИКА

Волошин О.Ф., проф., д.т.н.
Лавер В.О., аспірант

Нечіткі узагальнення методів розподілу у випадку нечітко заданих витрат і запасів грошей агентів

¹Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 01601, м. Київ, вул. Володимирська, 60
e-mail: olvoloshyn@ukr.net
²Ужгородський національний університет, 88000, м. Ужгород, вул. Університетська, 14
e-mail: v.laver@gmail.com

O.F.Voloshyn, prof., Doctor of Technical Science
V.O. Laver, Ph.D. student

Fuzzy generalizations of the fuzzy rationing methods in the case when the cost value and agents' initial money amounts are fuzzy numbers

¹Taras Shevchenko National University of Kyiv, 01601, Kyiv, Volodymyrska, str. 60
e-mail: olvoloshyn@ukr.net
²Uzhgorod National University, 88000, Uzhgorod, Universitetska str., 14, e-mail: v.laver@gmail.com

В статті розглядається застосування теорії нечітких множин до класичної задачі розподілу витрат. Розглядається випадок нечітких витрат та нечітких запасів грошей агентів. Для випадку нечіткої величини витрат знайдено аналітичний розв'язок. Також розглянуто частковий випадок рівневого податку.

Ключові слова: розподіл витрат, нечіткі моделі і методи, методи розподілу, задача банкрутства, оподаткування.

The application of the fuzzy sets theory to the classical rationing problem is being considered. Cases of the fuzzy costs and agents' initial amounts of money are under consideration. The set of agents is divided into two subsets – the subset of “poor” agents and the subset of “rich” agents. For each agent fuzzy membership function, representing the agents' preferences is defined. “Poor” agents are allowed to pay less than their share; the «rich» agents compensate the obtained deficit. The obtained fuzzy rationing problem is reduced to corresponding linear programming problem using the Lotfi-Zadeh approach. In general case this problem can be solved by classical methods. In particular cases the fuzzy rationing problem has an analytical solution. In this paper the analytical solution for the case of fuzzy cost value is found. Also, the particular case of uniform losses rationing method is being observed and special formulas for finding the analytical solution are obtained.

Key Words: rationing, fuzzy sets, rationing methods, bankruptcy problems, taxation.

Статтю представив д.т.н. Кудін В.І.

Вступ

Однією із найпоширеніших і часто використовуваних моделей є модель розподілу. Дослідження проблем розподілу почалося ще у середньовічній талмудичній літературі. Згодом на дані задачі вернули увагу вчені-математики. Одними з перших робіт в цьому напрямку були роботи Баррі О'Ніла [2], Роберта Аумана та Міхаеля Машлера [3], Пейтона Янга [4]. Серед сучасних вчених, котрі займаються цією проблематикою, слід згадати Ерве Мулена [5], Вільяма Томсона [6] та ін.

Слід відмітити, що вищенаведені автори (так, як і чимало інших) у своїх роботах розглядають «чіткі» задачі розподілу. В даній статті розглядається застосування апарату нечітких

множин [7] до чітких задач розподілу та пропонуються деякі нечіткі узагальнення класичної задачі розподілу.

Постановка задачі

Задача розподілу визначається трійкою (N, c, b) , де $N = \{1, 2, \dots, n\}$ – скінченна множина агентів, невід'ємне дійсне число c визначає кількість ресурсів, яку необхідно розподілити, вектор $b = (b_i)_{i \in N}$ визначає для кожного агента i

його заявку b_i , причому $\sum_{i=1}^n b_i > 0$ та

$$0 \leq b_i, \forall i \in N: 0 \leq c \leq \sum_{i=1}^n b_i, \quad (1)$$

Розв'язком задачі розподілу є вектор $x = (x_i)_{i \in N}$, який ставить у відповідність кожному агенту i його частку x_i , причому

$$0 \leq x_i \leq b_i, \quad (2)$$

$$\forall i \in N : \sum_{i=1}^n x_i = c. \quad (3)$$

Метод розподілу визначається відображенням r , яке кожній трійці (N, c, b) ставить у відповідність вектор витрат $x = (x_i)_{i \in N}$, $x = r(N, c, b)$.

Наведені в даній роботі узагальнення застосовні до таких методів розподілу, як пропорційний, подушний та рівневий податки, Талмудичний, обернений Талмудичний методи та метод Пініла. Відповідні формули для їх обчислення приведені в [6].

Нечітке узагальнення

При нечіткому узагальненні довільного методу розподілу витрат $r(N, c, b)$ у відповідності з підходом Лотфі-Заде [7]: приходимо до розв'язання такої параметричної (відносно параметру λ , $0 \leq \lambda \leq 1$) задачі [8]:

$$\lambda \rightarrow \max, \quad (4)$$

$$\mu_k(x_k) \geq \lambda, \forall k \in N; \quad (5)$$

$$\sum_{i=1}^n x_i = c; \quad (6)$$

$$x_k \geq 0, k \in N. \quad (7)$$

Нехай N_1, N_2 ($N_1 \cup N_2 = N$) – розбиття множини агентів, відповідні частки витрат яких є правосторонніми трапецевидними нечіткими числами вигляду, $X_i = (\underline{x}_i, \hat{x}_i)$, $\forall i \in N_1$ і $X_j = (\hat{x}_j, \bar{x}_j)$, $\forall j \in N_2$, з функціями належності μ_k , $\forall k \in N$, де $\hat{x}_k = r_k(N, c, b)$ для всіх $k \in N$, $\sum_{i=1}^n \hat{x}_i = c$. Без обмеження загальності, вважаємо, що агенти впорядковані за зростанням запасів грошей.

Нехай вектор $(x_1, x_2, \dots, x_n; \lambda)$ є розв'язком задачі (4)-(7). Тоді вектор $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ називається розподілом витрат при нечіткому узагальненні методу $r(N, c, b)$, а параметр λ показує міру узгодженості максимальної коаліції.

В загальному випадку рішення про віднесення конкретного агента до підгрупи N_1 чи N_2 залишається на розсуд особи, що приймає рішення (ОПР).

Розв'язок $(x_1, x_2, \dots, x_n; \lambda)$ задачі (4)-(7) завжди існує, причому рівень узгодженості максимальної коаліції $0 < \lambda < 1$ [9].

Оскільки функції належності агентів є правосторонніми нечіткими числами трапецевидного вигляду, то можемо позначити x_k^L лівий кінець інтервалу нечіткості відповідного нечіткого числа, а через x_k^R – правий кінець. Позначимо

$$\lambda_0 = \mu_{\Sigma}(c) = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^R - c}{\sum_{i=1}^n x_i^R - \sum_{i=1}^n x_i^L} \quad (8)$$

$\lambda = \lambda_0$ є розв'язком задачі (4)-(7), $\mu_{\Sigma}(c)$ – функція належності суми нечітких чисел x_k . При цьому чіткі частки витрат агентів визначаються за формулою [9]

$$x_k = x_k^R - \lambda_0(x_k^R - x_k^L), \forall k \in N \quad (9)$$

Випадок нечітких витрат

Нехай величина витрат $c = (\underline{c}, \hat{c}, \bar{c})$ є нечітким числом трикутного вигляду з функцією належності $\mu_c(c)$. Розіб'ємо задачу на дві підзадачі – задачу «оптиміста» (коли витрати є «меншими», тобто $c \in [\underline{c}, \hat{c}]$) і задачу «песиміста» (коли витрати є «більшими», тобто $c \in [\hat{c}, \bar{c}]$).

Припустимо, що розглядається деякий метод розподілу r . Задача оптиміста матиме вигляд:

$$\lambda \rightarrow \max,$$

$$\mu_k(x_k) \geq \lambda, \forall k \in N;$$

$$\mu_c(c) \geq \lambda$$

$$\sum_{i=1}^n x_i = c;$$

$$0 \leq x_i \leq b_i, \forall i \in N, 0 \leq \lambda \leq 1, c \in [\underline{c}, \hat{c}].$$

Тут функції належності витрат агентів шукаються із розрахунку, що витрати $\hat{x}_k = r_k(N, \hat{c}, b)$.

Для задачі песиміста потрібно перерахувати $\hat{x}_k = r_k(N, \bar{c}, b)$ для всіх k . Сама ж задача матиме аналогічний вигляд.

Розв'язавши обидві задачі, за кінцевий розподіл вибираємо той, для якого рівень λ є більшим. Якщо ж λ є однаковим у обох випадках, вибір розподілу залишається на розсуд особи, що приймає рішення (ОПР).

Функції належності агентів $\mu_i(x_i), \forall i \in N$ є спадними, тому функція належності суми часток

витрат агентів $\mu_z(z)$ також буде спадною функцією. Тому дана функція перетне графік $\mu_c(c)$ на проміжку $c \in [\underline{c}, \hat{c}]$. Знайдемо точку перетину c_0 з рівності

$$\frac{c_0 - \underline{c}}{\hat{c} - \underline{c}} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^R - c}{\sum_{i=1}^n x_i^R - \sum_{i=1}^n x_i^L}.$$

Отримуємо, що

$$c_0 = \frac{\hat{c} \sum_{i=1}^n x_i^R - \underline{c} \sum_{i=1}^n x_i^L}{\sum_{i=1}^n x_i^R - \sum_{i=1}^n x_i^L + \hat{c} - \underline{c}}. \quad (10)$$

Можемо знайти λ_0 , де величина витрат c_0 обчислюється за формулою (10).

При цьому чіткі частки витрат агентів визначаються за формулою (9).

Розглянемо задачу «песиміста». Нехай частки витрат агентів є правосторонніми нечіткими числами вигляду $(x_i^L; x_i^R)$, де

$$x_i^L = \begin{cases} (1 - \alpha)\hat{x}_i', i \in N_1; \\ \hat{x}_i', i \in N_2; \end{cases} \quad x_i^R = \begin{cases} \hat{x}_i', i \in N_1; \\ (1 + \beta)\hat{x}_i', i \in N_2; \end{cases}$$

Причому $\sum_{i=1}^n \hat{x}_i' = \bar{c}$.

Функція належності суми часток витрат агентів буде правостороннім нечітким числом

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i^L; \sum_{i=1}^n x_i^R \right), \text{ або } \left(\bar{c} - \alpha \sum_{i \in N_1} \hat{x}_i'; \bar{c} + \beta \sum_{i \in N_2} \hat{x}_i' \right).$$

Повинна виконуватись нерівність $\bar{c} + \beta \sum_{i \in N_2} \hat{x}_i' > \bar{c}$, так як у протилежному випадку

$c \in [\underline{c}, \hat{c}]$. Оскільки $\bar{c} + \beta \sum_{i \in N_2} \hat{x}_i' > \bar{c}$, то функції

належності суми часток агентів та витрат на проміжку $c \in [\underline{c}, \bar{c}]$ будуть перетинатись тільки при $c_0 = \hat{c}$. Тобто на даному відрізку задача зводиться до пошуку оптимального розподілу витрат $c_0 = \hat{c}$, при функціях належності витрат агентів, розрахованих для $\bar{c}$.

Розв'язком задачі буде вектор розподілу, для якого величина λ_0 буде більшою.

Випадок нечітких запасів грошей агентів

Нехай запаси грошей агентів є нечіткими числами трикутного вигляду:

$$B_i = (\underline{b}_i, \hat{b}_i, \bar{b}_i), \forall i \in N.$$

Позначимо

$$\hat{x}_i^L = r_i(N, c, \underline{b}_i); \hat{x}_i^C = r_i(N, c, \hat{b}_i); \hat{x}_i^R = r_i(N, c, \bar{b}_i); \forall i \in N.$$

Частки агентів наближено можна представити нечіткими числами трикутного вигляду $\hat{x}_i = (\hat{x}_i^L; \hat{x}_i^C; \hat{x}_i^R), \forall i \in N$. В той же час, бажані частки витрат агентів є нечіткими числами трапецеїдального вигляду, $X_i = (\underline{x}_i, \hat{x}_i^C), \forall i \in N_1$ і $X_j = (\hat{x}_j^C, \bar{x}_j), \forall j \in N_2$, де

$$\underline{x}_i = (1 - \alpha)\hat{x}_i^C \text{ і } \bar{x}_i = (1 + \beta)\hat{x}_i^C.$$

Результуюча функція належності часток витрат агентів матиме вигляд

$$\mu_i(\tilde{x}_i) = \min \{ \mu_i(\hat{x}_i); \mu_i(x_i) \}, \forall i \in N_1.$$

Враховуючи вигляд відповідних функцій належності, отримаємо, що

$$\tilde{X}_i = (\tilde{x}_i^L; \tilde{x}_i^C; \tilde{x}_i^R) = (\underline{x}_i; \tilde{x}_i^C; \hat{x}_i), \text{ де}$$

$$\tilde{x}_i^C = \hat{x}_i^C \frac{\alpha \hat{x}_i^L + \hat{x}_i^C - \hat{x}_i^L}{\alpha \hat{x}_i^C + \hat{x}_i^C - \hat{x}_i^L}.$$

Оскільки найвищий рівень λ досягається на $\tilde{x}_i^C$, покладемо $x_i = \tilde{x}_i^C$ для $\forall i \in N_1$ і

$$\tilde{c} = c - \sum_{i \in N_1} x_i.$$

Частки витрат для агентів з другої групи визначаються з наступної задачі лінійного програмування:

$$\lambda \rightarrow \max,$$

$$\mu_k(x_k) \geq \lambda, \forall k \in N_2;$$

$$\sum_{i \in N_2} x_i = \tilde{c},$$

$$0 \leq \lambda \leq 1, x_i \in [\hat{x}_i^C, \max(\hat{x}_i^R, \bar{x}_i)], \forall i \in N_2.$$

Тут

$$\mu_i(x_i) = \begin{cases} \frac{\hat{x}_i^R - x_i}{\hat{x}_i^R - \hat{x}_i^C}, \hat{x}_i^R > \bar{x}_i; \\ \frac{\bar{x}_i - x_i}{\bar{x}_i - \hat{x}_i^C}, \hat{x}_i^R \leq \bar{x}_i. \end{cases}$$

Випадок нечітких запасів грошей агентів і нечітких витрат

Нехай величина витрат і запаси грошей агентів є нечіткими числами трикутного вигляду: відповідно, $C = (\underline{c}, \hat{c}, \bar{c})$, $B_i = (\underline{b}_i, \hat{b}_i, \bar{b}_i), \forall i \in N$.

Функції належності $\hat{x}_i = (\hat{x}_i^L; \hat{x}_i^C; \hat{x}_i^R), \forall i \in N$ будуть нечіткими числами трикутного вигляду, причому $\hat{x}_i^L$ розраховуються з розрахунку, що витрати рівні $\underline{c}$, $\hat{x}_i^C$ з розрахунку, що витрати

рівні $\hat{c}$, а x_i^R з розрахунку, що витрати рівні $\bar{c}$.
Результуючі величини витрат знаходяться
аналогічно попередньому випадку.

Оскільки найвищий рівень λ досягається на
 $\tilde{x}_i^C$, покладемо $x_i = \tilde{x}_i^C$ для $\forall i \in N_1$. Тоді

$$\tilde{c} = \left(\bar{c} - \sum_{i \in N_1} x_i; \bar{c} - \sum_{i \in N_1} x_i; \bar{c} - \sum_{i \in N_1} x_i \right). \text{ Задача зводиться до}$$

задачі знаходження часток витрат агентів при
нечіткій величині витрат.

Висновки

В даній статті пропонується новий алгоритм
розподілу витрат, який базується на класичних
методах розподілу і дозволяє коригувати
величини витрат, отримані з їх допомогою. Отже,
дані узагальнення дозволяють враховувати не
тільки нечіткість реальних даних, але і існуючу
нерівність між агентами.

Список використаних джерел

1. Волошин О.Ф. Моделі та методи прийняття рішень / О.Ф. Волошин, С.О. Машенко. - К.: Видавничо-поліграфічний центр «Київський університет», 2010. - 336 с.
2. O'Neill B. A problem of rights arbitration from the Talmud / B.O'Neill. - Mathematical Social Sciences, 2, 1982. - pp. 345-371.
3. Aumann R. Game theoretic analysis of a bankruptcy problem from the Talmud / R.Aumann, M.Mashler. - Journal of Economic Theory, 36, 1985. - pp. 195-213.
4. Young H.P. Distributive justice in taxation / H.P. Young. - Journal of Economic Theory, 48, 1988. - pp. 321-335.
5. Moulin H. Axiomatic Cost and Surplus-Sharing / H.Moulin. - Working Papers 2001-06, Rice University, Department of Economics, 2001.
6. William T. Axiomatic and game-theoretic analysis of bankruptcy and taxation problems: an update / T.Thomson - RCER Working Papers 578, University of Rochester, 2013.
7. Zimmermann H.J. Fuzzy Set Theory and its Applications, Fourth Edition / H.J.Zimmermann. - Kluwer Boston, 2001.
8. Laver V. O. Fuzzy generalizations for the proportional rule / V. O. Laver. // Вісник КНУ імені Тараса Шевченка. Серія: Фізико-математичні науки. - 2013. - №2. - С. 85-88.
9. Волошин О.Ф. Аксиоматична характеристика нечітких узагальнень методів розподілу витрат / О.Ф.Волошин, В.О. Лавер. Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія: фізико-математичні науки. - 2014. №1. - с.128-132.

References

1. VOLOSHYN O.F., MASCHENKO S.O. (2010). *Models and Methods of Decision-Making*. Textbook. Publishing center "Kyiv University", Kyiv.
2. O'NEILL B. (1982). *A problem of rights arbitration from the Talmud*. Mathematical Social Sciences 2, pp. 345-371.
3. AUMANN R., MASHLER M.(1985) *Game theoretic analysis of a bankruptcy problem from the Talmud*. Journal of Economic Theory, 36, pp. 195-213.
4. YOUNG H.P. (1988). *Distributive justice in taxation*. Journal of Economic Theory, 48, pp. 321-335.
5. MOULIN H. (2001). *Axiomatic Cost and Surplus-Sharing*. Working Papers 2001-06, Rice University, Department of Economics.
6. THOMSON W. (2013). *Axiomatic and game-theoretic analysis of bankruptcy and taxation problems: an update*. RCER Working Papers 578, University of Rochester.
7. ZIMMERMANN H.J. (2001). *Fuzzy Set Theory and its Applications*. Fourth Edition, Kluwer Boston.
8. LAVER V.O. (2013) *Fuzzy generalizations for the proportional rule*. Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series: Physics & Mathematics. - 2013. -№2. - pp. 85-88.
9. VOLOSHYN O.F., LAVER V.O. (2014) *Axiomatic characterization of fuzzy rationing methods*. Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series: Physics & Mathematics. - 2014. -№1. - pp.128-132.

Надійшла до редколегії 11.09.15

РАДІОФІЗИКА

УДК 537.86/.87:530.182;577.38

Іванчук А. В.¹, аспірант,
Кононов М. В.¹, к.ф.-м.н., доц.

A.V. Ivanchuk¹, postgraduate,
M.V. Kononov¹, PhD, assoc. prof.

**Вплив кількості інформації у вхідних
даних на середнє значення бінарних
синаптичних з'єднань в нейронній мережі
з локальною обробкою інформації**

**Quantity of information in the input data
effect on the mean value of binary synaptic
connections in a neural network with local
information processing**

¹. Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 83000, м. Київ, пр.-т. Глушкова
4д,
e-mail: tassadar@univ.kiev.ua
e-mail: m_v_k@univ.kiev.ua

¹ Taras Shevchenko National University of Kyiv,
83000, Kyiv, Glushkova st., 4d,
e-mail: tassadar@univ.kiev.ua
e-mail: m_v_k@univ.kiev.ua

В даній роботі був розроблений метод оцінки ентропії серій сигналів високої розмірності (растрових зображень) за допомогою нейронної мережі з латеральними синаптичними з'єднаннями та локальною обробкою інформації. Його було застосовано для ентропійного аналізу двох вибірок зображень, перша з яких відповідає білому шуму, а друга — відеозйомці реального світу. Підтверджена залежність між статистичними характеристиками сигналу та виходом ентропійного аналізатора.

Ключові слова: ентропія, нейронні мережі, теорія інформації, ентропійний аналіз.

Entropy analysis is a powerful approach which is widely used in communications, information coding, and cryptography. Its application in biological cybernetics is not as wide, but promising and can give us valuable information on the state of a neural system, its information processing and transformation and possibly more. This research investigates the influence of entropy in the input data on neural systems. For this purpose a method of entropy evaluation was developed using a neural network with binary lateral connections and local information processing, which makes it suitable for high-resolution raster images analysis. This method is based on merging sets of synaptic weights. From the technical point of view the process of building the resulting neural network state which corresponds to the orthogonal subset of input data is binary addition of the vectors of synaptic weights evaluated from individual signals. This method of entropy evaluation has been tested on two data sets of raster images: the first consisted of images with the uniform highly random distribution of pixels and the second was a movie record of a real world scene. Mathematical computation shows, that the higher is entropy in the input data of the neural network, the bigger is the number of nonzero binary synaptic weights that are developed in the system.

Key words: entropy, neural networks, information theory, entropy analysis.

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Погорілий С.Д.

Вступ

Поняття ентропії як кількості інформації широко використовується в сучасних методах обробки сигналів та розпізнавання образів. Для декомпозиції сигналів мінімізація взаємної інформації виходів системи-аналізатора дозволяє розділити сигнали з різними характеристиками, без апіорного знання про ці сигнали [8]. Розміри нейронної мережі, яка розрізняє класи сигналів у гіперпросторі ознак, пропорційні топографічній складності границі розділення сигналів, а, отже, і

їх ентропії.

Слід відмітити, що на сьогодні проблема оцінки кількості інформації у сигналі остаточно не розв'язана. Іншими словами, якщо даний сигнал складається з N бітів, то неможливо сказати, якою мінімальною кількістю бітів $N_{min} < N$ можна представити цей сигнал без втрати інформації.

Особливим класом сигналів є медійні дані (фото, відео тощо), які, як правило, містять надлишкову кількість інформації і мають велику

розмірність. Застосування методів оцінки динамічних систем, наприклад, [2], [3] не можуть дати адекватних результатів внаслідок того, що швидкість генерації ентропії змінюється в часі. Тому системи для аналізу медійних даних повинні враховувати ці особливості. Важливим класом таких систем є нейронні мережі.

Практично елементами пам'яті нейронних мереж є синаптичні з'єднання між нейронами. Гіпотезу про те, що при одночасному спрацюванні двох клітин між ними підсилюється синаптична передача і таким чином утворюються ансамблі нейронів висунув ще Д. Хебб [1]. На даній концепції була побудована мережа Хопфілда, яка була тривалий час об'єктом інтенсивних досліджень [4],[5]. Однак вона має два суттєві недоліки.

По-перше, у реалізаціях для практичного використання сигнал подається безпосередньо на нейрони, а не через рецептивні поля, що не дозволяє стискати інформацію.

По-друге це — повнозв'язна система, де кожен нейрон з'єднаний з усіма іншими. Такий підхід працює у випадку невеликих ансамблів нейронів (і з урахуванням цього дана модель і була побудована). Однак кількість з'єднань у повнозв'язній системі зростає як квадрат від кількості нейронів. Тому масштабувати таку систему для аналізу сигналів великої розмірності практично неможливо. В той же час реальний нейрон має синаптичні з'єднання приблизно з 10^2 - 10^3 іншими нейронами, а їх у корі порядку 10^{10} . Це свідчить про те, що з'єднання у реальній корі мозку суттєвим чином проріджені.

Загалом у корі можна класифікувати чотири типи з'єднань: 1) вертикальні з'єднання між сусідніми шарами нейронів, які у моделях нейронних мереж відповідають рецептивним полям; 2) вертикальні з'єднання між декількома шарами нейронів — через апікальні дендрити; 3) проекційні довгі з'єднання між віддаленими ділянками кори та іншими частинами нервової системи; 4) відносно короткі латеральні з'єднання між нейронами у одному й тому ж шарі.

Нас будуть цікавити з'єднання четвертого типу, які модифікуються в процесі роботи мережі і які, ймовірно, дозволяють відновити сигнал за його частинами. Ми дослідимо зв'язок між кількістю інформації, яка проходить через мережу і сумарною величиною синаптичних з'єднань між нейронами сусідніх карт ознак, які модифікуються за спрощеним принципом Хебба.

Локальні карти ознак з бінарними латеральними зв'язками і їх використання для вимірювання ентропії

В роботі [6] було використано принцип локальної обробки інформації для аналізу даних великої розмірності, якими є растрові зображення і побудовано нейронну мережу LSOM (Local Self-Organizing Feature Maps, мережа із самовпорядкованих карт ознак). За основу було взято нейронну мережу Кохонена [9], яку було розбито на квадрати, кожен з яких аналізував свою частину зображення. Внаслідок цього обчислювальна складність алгоритму лінійно залежить від розмірності вектора вхідних даних, на відміну від класичного варіанту, де розмір карти ознак потрібно було збільшувати експоненційно зі збільшенням розмірності вхідних даних для отримання прийнятних результатів.

Застосування мережі LSOM в даній роботі має дві мети. По-перше, вона зменшує розмірність вхідних даних шляхом стиснення зображень, і, відповідно, знижує рівень шуму. По-друге, як вже було сказано, вона заснована на принципі локальної обробки даних. Для ентропійного аналізу в мережу LSOM було додані латеральні бінарні з'єднання між нейронами сусідніх локальних карт ознак; ці з'єднання і є носіями інформації.

Кожен вузол у локальній карті ознак має з'єднання з усіма вузлами найближчих сусідніх карт ознак. Всього таких карт буде вісім. Вхідні з'єднання кожного вузла можна представити у вигляді матриці розмірності $3 \times 3 \times (M \times M)$, де $M \times M$ — розмір локальної карти ознак. Таке представлення набагато більш ефективне, ніж при використанні однієї матриці для всієї мережі, яка є сильно прорідженою внаслідок використання локальних синаптичних з'єднань.

Принцип Хебба твердить, що при повторюваному одночасному спрацюванні двох нервових клітин сила синаптичного з'єднання між ними збільшується. Це явище досліджувалось на малих системах нейронів простих організмів. При цьому був виявлено, що повторне одночасне спрацювання двох клітин призводило до різкого підсилення синаптичної передачі між цими клітинами.

В даному розгляді використовується простіший принцип. Використовуються бінарні синаптичні з'єднання, тобто 0 відповідає відсутності з'єднання, а 1 — наявності. В

початковий момент часу всі з'єднання дорівнюють нулю. При однократному одночасному збудженні нейронів із сусідніх карт ознак величина з'єднання між ними збільшується від 0 до 1 або залишається рівним 1 (якщо це з'єднання вже було підсилене, тобто

$$l_i(i, j) = l_{i-1}(i, j) \vee (a_i \wedge a_j) \quad (1)$$

де a – активності нейронів i та j в момент часу t , які також є бінарними величинами.

Локальні карти ознак побудовані на принципі взаємовиключного збудження нейронів, тобто в кожен момент часу в даній карті може бути активним лише один нейрон. Тому при такому підході з'єднання між вузлами однієї й тієї ж карти ознак будуть завжди рівними нулю. Також вважаємо, що з'єднання $l(i, i)$ вузлів самих із собою відсутні, або

$$l(i, j) \equiv 0, \forall i = j$$

Внаслідок цього, якщо розглядати функцію сумарної величини латеральних з'єднань в залежності від часу, то ця функція $L(t)$ буде монотонно зростаючою, оскільки для кожного з'єднання $a_i \wedge a_j \geq 0$ і, отже, $l_i(i, j) \geq l_{i-1}(i, j)$.

Розглянемо графи синаптичних з'єднань $\tilde{L}(x)$ та $\tilde{L}(y)$, які відповідають двом довільним сигналам x та y . В силу співвідношення (1) граф, який відповідає дії цих двох сигналів на мережу буде об'єднанням графів $\tilde{L}(x)$ та $\tilde{L}(y)$:

$$L(x, y) = \tilde{L}(x) \cup \tilde{L}(y) = \tilde{L}(x) \cup [\tilde{L}(y) \setminus \tilde{L}(x)]$$

Відповідні цим графам функції суми синаптичних ваг задовольняють рівності:

$$L(x, y) = L(x) + L_x(y)$$

де $L_x(y)$ дорівнює графові $\tilde{L}(y) \setminus \tilde{L}(x)$, він відповідає тій частині сигналу, яка ортогональна до множини всіх попередніх сигналів, яка, в свою чергу, відповідає $L(x)$

Оскільки $\tilde{L}(y) \setminus \tilde{L}(x) \subset \tilde{L}(y)$, то $L_x(y) \leq L(y)$. Отже, маємо:

$$L(x, y) = L(x) + L_x(y) \leq L(x) + L(y)$$

Дана нерівність є тотожною із співвідношенням для ентропії двох сигналів [7] і стає рівністю для ортогональних сигналів. Подивимось, при яких умовах функцію L можна

розглядати як наближення для оцінки ентропії серії сигналів.

Розглянемо систему, яка може фіксувати наявність сигналів з деякого набору S , але не взаємне розташування їх у вхідному потоці. Нехай кожен сигнал несе однакову кількість інформації H_s і всі сигнали у наборі S взаємно ортогональні. Розглянемо випадок, коли сумарна кількість інформації одиничних сигналів $D \cdot H_s$ велика у порівнянні з інформацією, яка пов'язана із взаємним розташуванням сигналів у вибірці. Максимум другої складової при довжині вибірки D можна визначити співвідношенням [7]

$$H = - \sum_{i=1}^D \sum_{j=1}^D p \log p = - \sum_{i=1}^D \sum_{j=1}^D \frac{1}{D} \log \frac{1}{D} = D \log D$$

Тобто наш випадок відповідає умові

$$H_s \gg \log D \quad (2)$$

В такому разі ентропію серії сигналів можна визначити як ентропію найбільшої підмножини взаємно ортогональних сигналів із даної серії, яка, в свою чергу, дорівнюватиме сумі ентропій окремих сигналів:

$$H = D \cdot H_s$$

Підмножину взаємно ортогональних сигналів S будемо наступним способом. Спочатку S – пуста множина, тобто $S=0$. На кожному кроці беремо із вибірки D один сигнал і порівнюємо його з кожним із сигналів множини S . Коли такого сигналу у вибірці не знайдено, додаємо його у множину. Знайдемо залежність розміру S від часу при рівномірному розподілі сигналів у вхідній вибірці. Коли ж сигнали у вибірці взаємно ортогональні, то приріст ΔS не залежить від часу, а отже, S зростатиме лінійно.

Важливим випадком є рівномірний розподіл синаптичних ваг у мережі, це відповідає білому шуму. Середній приріст S на кожному кроці пропорційний ймовірності сигналу попасти в остаточний клас R - S :

$$\Delta S(t) = G \frac{R - S(t)}{R} = G \left(1 - \frac{S(t)}{R} \right)$$

Коли мінімальний проміжок часу прийняття за одиницю, то дане співвідношення можна переписати таким чином:

$$\frac{dS}{dt} = G \left(1 - \frac{S}{R} \right)$$

Розв'язок даного диференційного рівняння будемо шукати у вигляді

$$S = a + ce^{-bt}$$

Підставивши даний розв'язок у рівняння, маємо

$$c\left(\frac{G}{R} - b\right)e^{-bt} = G\left(1 - \frac{a}{R}\right)$$

Нетривіальний розв'язок для будь-яких моментів часу отримаємо при $b = G/R$ та $a = R$.

Константу c знайдемо із початкових умов:

$$S(0) = 0 = R + ce^0, \quad c = -R$$

Отже, залежність розміру множини взаємно ортогональних сигналів від часу

$$S(t) = R \left(1 - e^{-\frac{G}{R}t}\right)$$

Розглянемо приріст функції суми синаптичних ваг локальної карти ознак

$$\Delta L(t) = (1 - L(t))N$$

де N – кількість сусідів (в нашому випадку 8), $\langle L \rangle$ – зважене значення L :

$$\langle L \rangle = \frac{L}{L_{\max}}$$

Максимальне значення L при бінарних синапсах дорівнює всій кількості синаптичних з'єднань локальної карти ознак (ми не враховуємо з'єднань між вузлами самої карти):

$$L_{\max} = N \cdot M^2, \quad M - \text{кількість нейронів у локальній карті ознак}$$

Для $\langle L \rangle$ співвідношення можна записати у вигляді:

$$\langle L \rangle(t) = (1 - \langle L \rangle(t-1)) \frac{N}{L_{\max}}$$

Це рівняння аналогічне диференційному рівнянню для S з коефіцієнтами $R=1$ та

$$G = \frac{N}{L_{\max}} = \frac{1}{M^2}. \quad \text{Також, вважаючи, що середнє за часом дорівнює середньому за ансамблем,}$$

рівняння з $\langle L \rangle$ для однієї карти ознак буде тотожним рівнянню для всієї мережі з локальних карт ознак. Тому у випадку, коли ймовірності всіх

можливих сигналів, які поступають на вхід кожної з локальних карт ознак мережі рівні і не залежать від часу середнє значення синаптичного з'єднання мережі $\langle L \rangle$ залежатиме від часу таким чином:

$$\langle L \rangle(t) = 1 - e^{-\frac{t}{M^2}} \quad (3)$$

Для диференціальної ентропії (тут під цим терміном вважатимемо похідну від ентропії за часом) отримаємо:

$$\frac{d\langle L \rangle}{dt} = \frac{1}{M^2} e^{-\frac{t}{M^2}} \quad (4)$$

Слід відмітити, що хоча $\langle L \rangle$ може змінюватись в процесі навчання від 0 до 1, кожен із поданих на вхід сигналів можна в принципі відновити, коли для кожної локальної карти $\langle L \rangle$ не перевищує $1/2$. Коли всю інформацію про сигнали, яка зберігається в бінарних синаптичних з'єднаннях, розглядати як потік бітів, то максимум його ентропії досягається, коли значення 0 та 1 мають однакову ймовірність, тобто, коли $\langle L \rangle = 1/2$. Також при використанні реальних сигналів різні локальні карти будуть з різною швидкістю насичувати $\langle L \rangle$, тому в прикладних застосуваннях потрібно детектувати досягнення в кожній з частин мережі максимуму $\langle L \rangle$ і визначати процент насичених карт ознак для характеристики якості оцінки ентропії. Ця особливість має також важливе прикладне значення, оскільки вона дозволяє оцінювати ентропію не лише у часі, але й у просторі — для різних частин зображення.

Результати математичного експерименту

З урахуванням співвідношення (3) довжина вибірки, на якій можна оцінити даний метод, має порядок M^2 . Для локальних карт розміром 8×8 , які використовувались у дослідженні це значення дорівнює 2^{16} . Коли говорити більш строго, то потрібно також враховувати співвідношення (2) для кількості інформації, яка відповідає сигналу, поданому на вхід локальної карти.

$$N \log M \gg \log D$$

При $N=8$, розміру локальної карти 8×8 та довжині вибірки 2^{16} це припущення також справедливе:

$$8 \cdot \log 2^8 = 64 \gg \log 2^{16} = 16$$

Практично даний метод було випробувано на двох вибірках довжиною $8 \cdot 10^4$. Перша складалася з кадрів художнього фільму, друга – оцифрованим телевізійним сигналом “снігу”, коли приймач не настроєний на частоту передавача. Такий сигнал можна наближено вважати білим шумом, що приблизно відповідає припущенням, виходячи з яких отримана формула (3). Використовувалась мережа із локальних карт ознак з рецептивним полем 2×2 і розміром 128×64 локальних карт, що відповідає розмірності вхідного сигналу 256×128 . Дана мережа була попередньо тренувана на іншій вибірці із 800 зображень методом релаксаційної кластеризації [6].

На рис.1 наведено залежність L від часу. Крива, яка проходить вище, відповідає другій вибірці. Це цілком узгоджується з теорією, оскільки ентропія шуму більша ентропії корельованого сигналу.

На рис.2 представлено похідні від цих функцій, що являють собою залежності швидкості надходження ентропії в систему. Висока крива на першому графіку та гладка крива на другому відповідають шумовому сигналу. Потрібно відмітити, що потік ентропії корельованого сигналу в деякі моменти часу перевищує потік ентропії шуму. Це явище можна пояснити швидшим насиченням синаптичних з'єднань при постійному великому надходженні ентропії в систему.

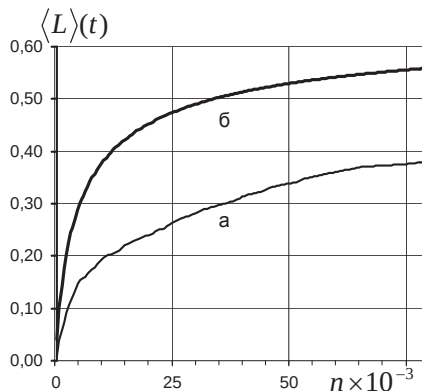


Рис.1 Залежність середнього значення синаптичних ваг ентропійного аналізатора від часу (номеру ітерації n), а – для потоку відео, б – для шуму

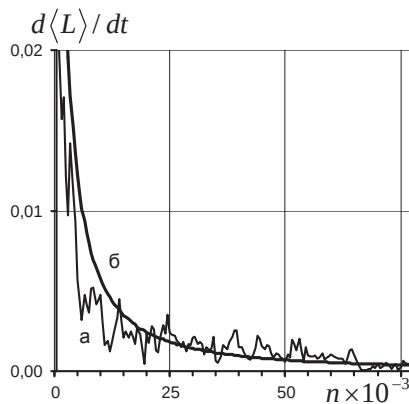


Рис.2 Залежність швидкості зміни синаптичних ваг від часу (номеру ітерації n), а – для потоку відео, б – для шуму

Висновки

Ентропійний аналізатор на основі локальних самовпорядкованих карт ознак з латеральними з'єднаннями заснований на локальності обробки інформації та дозволяє аналізувати медійні дані високої розмірності. Коректність цього підходу було перевірено експериментально на двох вибірках сигналів, одна з яких приблизно відповідала білому шуму. Для неї, як і передбачалося теоретично, значення ентропії на виході аналізатора значно перевищило відповідні значення для даних відеозйомки, які відповідають реальному сигналу. Крім того, шумовому сигналу відповідають гладкі криві, схожі до аналітично отриманих (3) (4). Ці співвідношення, в свою чергу, базувалися на припущеннях про сталість статистичних характеристик сигналу, що, очевидно, справедливо для шуму. Особливо добре це видно на рис. 2, де вихід ентропійного аналізатора свідчить про неоднорідність статистичних характеристик реального сигналу у часі. Але основний результат полягає в тому, що чим більше інформації у вхідному сигналі, тим більшою стає сумарна величина синаптичних з'єднань нейронної мережі з бінарними синаптичними з'єднаннями, що модифікуються за правилом Хебба.

Разом з тим цей метод розглядає вхідні дані як неупорядкований набір зображень, хоча реальні сигнали, наприклад, відеозйомка мають значні кореляції між сусідніми кадрами. Це

означає, що реальна кількість інформації у таких даних значно нижча і це призводить до завищення оцінки ентропії даним методом. Тому

подальші роботи в цьому напрямку повинні враховувати кореляції сигналу в просторовій та часовій областях.

Список використаних джерел

1. *Heb D.O.* The organization of behavior: A neuropsychological theory. / D.O. Heb. – New York: John Wiley, 1949. – 335 p.
2. *Мачехин Ю.П.* Энтропийный анализ динамических переменных / Ю.П. Мачехин, Ю.С. Курской // Системы обработки информации. – 2013. – № 1. – С. 100-104.
3. *Richman J.S.* Physiological time-series analysis using approximate entropy and sample entropy / J.S. Richman, J.R. Moorman // *Am. J. Physiol. Heart Circ Physiol.* – 2000. – 278. – P. H2039–H2049.
4. *McEliece R.J.* The Capacity of the Hopfield Associative Memory / R.J. McEliece, E.C. Posner, E.R. Rodemich, S.S. Venkatesh // *IEEE Transactions on Information Theory*, – 1987. – 33. – №4. – P. 461–482.
5. *Kanter I.* Associative Recall of Memory without Errors / I. Kanter, H. Sompolinsky // *Physical Review A*, 1987. – A35. – №1. – P. 380-392.
6. *Іванчук А.В.* Кодування зображень за допомогою локальних самовпорядкованих карт ознак з релаксацийним механізмом кластеризації / А.В.Іванчук, М.В.Кононов // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка, серія: Радіофізика та електроніка. – 2006. – №9. – С. 24-27.
7. *Shannon C.E.* A Mathematical Theory of Communication / C.E. Shannon // *Bell System Technical Journal*. 1948 – 27. – №3. – P. 379–423.
8. *Ukraine A.* Enhancement of radar images using mutual information based unsupervised neural networks / A. Ukraine, S. Haykin // *Canadian Conference on Electrical and Computer Engineering*, pp. 13-16 September 1992, Toronto, Canada: proceedings. – P. MA6.9.1-MA6.9.4.
9. *Kohonen T.* Automatic formation of topological maps of patterns in a self-organizing system / T. Kohonen // *The 2nd Scandinavian Conference on Image Analysis: 1981, Espoo, Finland: proceedings of the Pattern Recognition Society of Finland.* – 1981. – P. 214-220.

References

1. *HEBB, D.* (1949) *The Organization of Behavior.* New York: John Wiley.
2. *МАЧЕХИН, J.* (2013) Entropiynyi analiz dinamicheskikh peremennyh. *Systemy obrobky informatsii*. 108 (1). p. 100-104.
3. *RICHMAN, J. & MOORMAN, R* (2000) Physiological time-series analysis using approximate entropy and sample entropy. *Am. J. Physiol. Heart and Circulatory Physiology*. 278 (6). p. H2039-H2049.
4. *MCELIECE, R., POSNER, E., RODEMICH, E. & VENKATESH, S.* (1987) The capacity of the hopfield associative memory. *IEEE Transactions on Information Theory*. 33 (4). p. 461-482.
5. *KANTER, I & SHOMPOLINSKY, H* (1987) Associative Recall of Memory without Errors. *Physical Review A*. A35 (1). p. 380-392.
6. *IVANCHUK, A. & KONONOV, M.* (2006) Koduvannya zobrazen za dopomogoyu lokalnyh samovporyadkovanyh kart oznak z relaksatsiynum mehanizmom klasteryzatsii. *Visnyk Kyivskogo natsionalnogo universytetu imeni Tarasa Shevchenka, seriya: Radiofizyka ta Elektronika*. (9). p. 24-27.
7. *SHANNON, K.* (1948) A mathematical theory of communication. *Bell System Technical Journal*. 27 (3). p. 379–423.
8. *UKRAINEC, A.* (1992) Enhancement of radar images using mutual information based unsupervised neural networks. In *Canadian Conference on Electrical and Computer Engineering*, Toronto, Canada, 13-16 September 1992. Proc. pp. MA6.9.1-MA6.9.4.
9. *KOHONEN, T.* (1981) Automatic formation of topological maps of patterns in a self-organizing system. In *The 2nd Scandinavian Conference on Image Analysis*, Espoo, Finland, 1981. Proceedings of the Pattern Recognition Society of Finland. pp. 214-220.

Надійшла до редколегії 09.10.15

СУЧАСНА ФІЗИКА

УДК 538.951.

Макарець М.В.¹, д.ф.-м.н., проф.,
Прядко Д.І.¹, асп.

Моделювання утворення і росту тріщин у нанокристалах кварцу методом молекулярної динаміки

¹Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 01601, м. Київ, вул. Володимирська 64/13,
e-mail: mmv@univ.kiev.ua

M.V. Makarets¹, Dr. Sci. Prof.,
D.I. Pryadko¹, PhD st.

Molecular dynamics simulation of crack origination and propagation in quartz nanocrystals

¹Taras Shevchenko National University of Kyiv,
01601, Kyiv, Volodymyrska st. 64/13,
e-mail: mmv@univ.kiev.ua

Створено програмне забезпечення, що дозволяє проводити молекулярно-динамічні розрахунки для нанокристалів кварцу під дією зовнішніх сил. Використано потенціал міжатомної взаємодії, який враховує поляризованість атомів кисню у колективному електричному полі. Змодельовано ріст розколюючої тріщини і динаміку дипольного моменту системи. Встановлено, що: 1) поверхня тріщини має форму параболи, яку передбачає лнійна теорія суцільного середовища, хоча вона і несправедлива поблизу вершини тріщини; 2) при рості тріщини у кристалі генеруються акустичні хвилі власної частоти кристалу; 3) внаслідок цього дипольний момент є нестационарним.

Ключові слова: п'єзоелектрик, молекулярна динаміка, ріст тріщини, генерація звуку, змінний дипольний момент

Computer simulations of quartz crystal fracture under external forces can be useful for modernizing and developing methods for prediction and study of earthquakes and other kinds of seismic activities, as the future goal is to simulate and study electromagnetic emission that can usually be registered on early stages of seismic activities. A software has been developed that enables its user to conduct molecular dynamics simulation of quartz nanocrystals under external forces. An interatomic potential model that takes into account polarizability of oxygen atoms by collective electric field was employed. Crack growth was simulated and the time dependence of the dipole moment of the system had been obtained. It was found that: 1) the crack is parabolic-shaped in accordance with linear continuous medium theory, although the latter is not applicable near the tip of a crack; 2) acoustic waves of crystal eigenfrequency are generated during the crack propagation; 3) this leads to dipole moment of the system being fluctuant.

Key words: piezoelectricity, molecular dynamics, crack growth, sound generation, fluctuating dipole moment.

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Макарець М.В.

Вступ

Відомо [1, 2], що під час назрівання землетрусу поблизу його епіцентру, як правило, можна зареєструвати характерне електромагнітне випромінювання, що надходить із надр земної кори. Загальноприйнято вважати, що причиною цього є високий вміст в корі мінералу із яскраво вираженими п'єзоелектричними властивостями – кварцу. Справді, загалом на двоокис кремнію припадає більш як 60% маси земної кори, а кварц – найпоширеніша форма двоокису кремнію в складі земної кори.

Своєчасне передбачення землетрусів є пра-

ктично важливою задачею. І хоча у її вирішенні досягнуто певних успіхів [3, 4], проте події останніх років показують, що до її вирішення ще далеко і існує потреба в достовірних критеріях та методах прогнозування землетрусів.

У [5, 6] в рамках лінійної теорії суцільного середовища було досліджено генерацію електромагнітного випромінювання під час проходження тріщин різних типів через п'єзоелектрики різної симетрії. Але застосування лінійного наближення поблизу вершини тріщини, де механічні напруження сягають порогу руйнування, не було обґрунтоване, тому ці результати

можна розглядати лише як оцінку.

Метою даної роботи є моделювання процесів зародження та розвитку тріщини у нанокристалах кварцу величиною від кількох сотень до кількох тисяч атомів методом молекулярної динаміки.

Модель та основні рівняння

Провести квантові розрахунки для тисяч взаємодіючих частинок виходячи із перших принципів можливо лише на деяких сучасних комп'ютерах, тому в роботі використали метод молекулярної динаміки.

Потенціал міжатомної взаємодії відіграє в цьому методі головну роль. Щоб сумістити точність квантових розрахунків зі швидкістю чисельного інтегрування класичних рівнянь, використовують потенціали, які мають параметри, підігнані під експериментальні дані чи результати квантово-механічних розрахунків. Зокрема, параметри потенціалу TS [7] підігнані під значення сил, напруг та енергій, отриманих у квантово-механічних розрахунках.

Результати розрахунків методом молекулярної динаміки, отримані з використанням TS, добре узгоджуються, наприклад, із такими даними: а) густина коливальних станів, отримана із квантових розрахунків [8] - рис. 1, а); б) тем-

пературна залежність відношення параметрів кристалічної ґратки для альфа- та бета-кварцу, отримана із експериментів - рис.1, б). Таким чином, цей потенціал добре відтворює коливальні та структурні властивості кварцу, що важливо для даної роботи. Окрім цього, він дає найкраще наближення в порівнянні з іншими потенціалами для залежності об'єму елементарної комірки від температури та для кутів у зв'язках Si-O-Si для всіх фаз кварцу.

Цей потенціал враховує високу поляризаційну здатність кисню. На кожному кроці по часу у чисельній схемі розраховуються дипольні моменти атомів кисню. Таким чином враховується диполь-дипольна та диполь-зарядова взаємодія, що робить потенціал багаточастинковим, оскільки дипольний момент кожного атома залежить від положень, зарядів та дипольних моментів усіх інших атомів. Двочастинкова частина потенціалу TS (без врахування диполів) виглядає наступним чином:

$$U_{ij} = \frac{q_i q_j}{r_{ij}} + D_{ij} \left(e^{\gamma_{ij} \left(1 - \frac{r_{ij}^0}{r_{ij}} \right)} - 2e^{\frac{\gamma_{ij}}{2} \left(1 - \frac{r_{ij}^0}{r_{ij}} \right)} \right), \quad (1)$$

де q_i, r_{ij}, r_{ij}^0 - заряд i -го та j -го атомів, відстань між ними в даний момент та рівноважне значення цієї відстані відповідно.

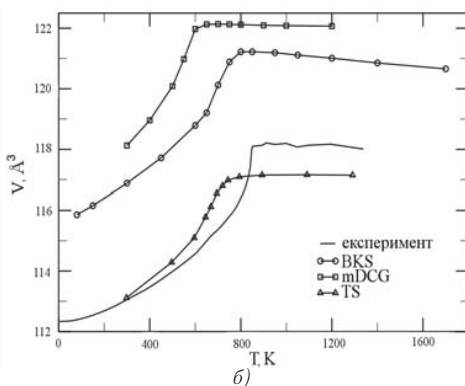
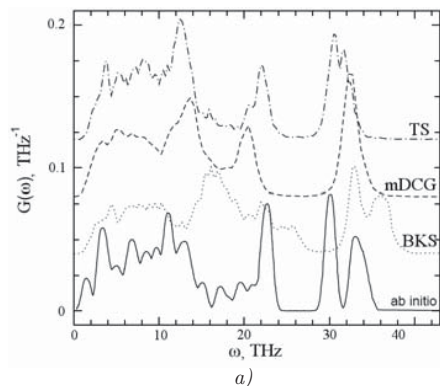


Рис. 1. а) густина коливальних станів для α -кварцу при температурі 300К (криві рознесено по вертикалі); б) залежність відношення довжин ребер елементарної комірки c/a при фазовому переході від α -кварцу до β -кварцу. Позначення біля кривих: TS – потенціал [7]; BKS - потенціал [9]; mDCG - модифікований потенціал DCG [10].

Взаємодія атомів задається константами $q_i, q_j, D_{ij}, \gamma_{ij}, r_{ij}^0$. Значення цих та інших констант для TS наведені у таб. 1 (в атомних одиницях).

Таблиця 1

Параметри TS (в атомних одиницях)

qO	qSi	α
-1.38257	2.76514	8.89378
b	c	
2.02989	-1.50435	
D_{O-O}	D_{Si-O}	D_{Si-Si}
$2.4748 \cdot 10^{-4}$	$1.9033 \cdot 10^{-3}$	$-2.08460 \cdot 10^{-3}$
γ_{O-O}	γ_{Si-O}	γ_{Si-Si}
12.07082	11.15230	10.45517
r_{O-O}^0	r_{Si-O}^0	r_{Si-Si}^0
7.17005	4.63710	6.76038

Тут і далі α - поляризованість атомів кисню.

Графіки потенціалу (15) для різних пар взаємодіючих атомів наведені на рис. 2. З нього видно, що при малій відстані між двома атомами Si енергія їх взаємодії має глибокий мінімум (біля -460 еВ), який не має фізичної причини, а зумовлений лише виразом (15). Тому його можна застосовувати лише при низьких тисках та температурах, коли енергія взаємодії двох атомів Si не перевищує приблизно 54 еВ ($2 E_h$). В даній роботі окремі атоми під час руху могли здолати цей бар'єр, тому потенціал взаємодії двох атомів Si модифікували як показано на рис. 2 пунктирною кривою.

Щоб врахувати заряд-дипольну та диполь-дипольну взаємодії, на кожному кроці часової дискретної сітки шукали дипольні моменти усіх атомів кисню у лінійному наближенні:

$$\vec{p}_i^n = \alpha \vec{E}(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N; \vec{p}_1^{n-1}, \dots, \vec{p}_N^{n-1}) + \vec{p}_i^{SR}, \quad (2)$$

де $\vec{p}_i^n$ - дипольний момент k -го атома кисню на n -ій ітерації, α - його поляризованість, $\vec{E}$ - напруженість електричного поля, $\vec{p}_i^{SR}$ - дипольний момент, зумовлений перекриванням електронних оболонок атомів. Розрахунки по цій формулі проводили методом ітерацій для фіксова-

них координат $\vec{r}_i$ всіх атомів до тих пір, поки значення дипольних моментів $\vec{p}_i^n$ переставали змінюватися в порівнянні з попередньою ітерацією.

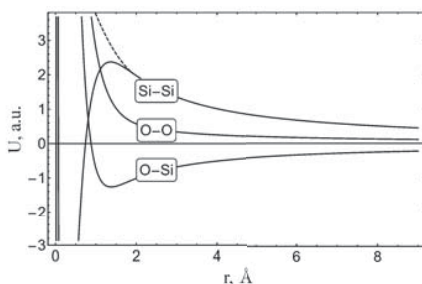


Рис. 2. Потенціал TS для різних комбінацій атомів без врахування динамічно наведених диполів), див. формулу (15).

Із (2) видно, що дипольний момент атома наводиться полем, яке, у свою чергу, створене зарядами та дипольними моментами усіх інших атомів. Короткодійним доданком $\vec{p}_i^{SR}$ нехтували для атомів Si, а для атомів O його враховували у вигляді:

$$\vec{p}_i^{SR} = \alpha \sum_{j \neq i} \frac{q_j \vec{r}_{ij}}{r_{ij}^3} f(r_{ij}), \quad (3)$$

де $f(r_{ij})$ - функція, яка враховує короткодійний характер взаємодії, обумовленої перекриванням електронних оболонок [11]:

$$f(r_{ij}) = c \sum_{k=0}^4 \frac{(br_{ij})^k}{k!} e^{-br_{ij}}, \quad (4)$$

де значення коефіцієнтів α , b і c наведені у таб. 1. Коефіцієнт b задає відстань, на якій діє функція. Такий вигляд $\vec{p}_i^{SR}$ використовується дуже широко, зокрема в [12-14]. Сила, яка діє на i -й атом має наступний вигляд:

$$\vec{F}_i = -\vec{\nabla}_i U^T, \quad (5)$$

де $U^T = U^C + U^B + U^{DD} + U^{CD} + U^{SR} + U^D$ - повний потенціал із наступними складовими:

1. Кулонова взаємодія заряджених частинок:

$$U^C = \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j>i}^N \frac{q_i q_j}{r_{ij}}. \quad (6)$$

2. Ковалентна взаємодія атомів:

$$U^B = \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j>i}^N D_{ij} \left(e^{\gamma_{ij}(1-\frac{r_{ij}}{r_0^{ij}})} - 2e^{\frac{\gamma_{ij}}{2}(1-\frac{r_{ij}}{r_0^{ij}})} \right). \quad (7)$$

3. Диполь-зарядова взаємодія:

$$U^{DC} = - \sum_{i=1}^N \vec{p}_i \cdot \vec{E}_i^q, \quad (8)$$

де $\vec{E}_i^q$ - електростатичне поле, зарядами усіма інших атомів:

$$\vec{E}_i^q = \sum_{j \neq i}^N \frac{q_j}{r_{ij}^3} \vec{r}_{ij}. \quad (9)$$

Тут і далі $\vec{r}_{ij} = \vec{r}_i - \vec{r}_j$.

4. Диполь-дипольна взаємодія:

$$U^{DD} = - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \vec{p}_i \cdot \vec{E}_i^p, \quad (10)$$

де $\vec{E}_i^p$ - електростатичне поле створене дипольними моментами усіма інших атомів:

$$\vec{E}_i^p = \sum_{j \neq i}^N \left(3 \frac{\vec{p}_j \cdot \vec{r}_{ij}}{r_{ij}^5} \vec{r}_{ij} - \frac{\vec{p}_j}{r_{ij}^3} \right). \quad (11)$$

5. Енергія, пов'язана із короткодійним внеском до дипольних моментів (3):

$$U^{SR} = \sum_{i=1}^N \vec{p}_i \cdot \sum_{j \neq i}^N f(r_{ij}) \vec{E}_{ij}^q. \quad (12)$$

6. Енергія поляризації атомів:

$$U^D = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \frac{p_i^2}{\alpha}. \quad (13)$$

Доданки U^{DD} , U^{CD} та U^D дають звичайний вираз для потенціальної енергії системи дипольних моментів, які лінійно індукуються електричним полем [15], [16], [17], а U^{SR} отримується коли на потенціальну енергію системи накладається умова рівноваги відносно дипольних моментів, тобто

$$\vec{\nabla}_{\vec{p}_i} U^T = 0, \quad i = 1, \dots, N. \quad (14)$$

В свою чергу це означає, що, розраховуючи сили, що діють на атоми системи, достатньо взяти лише похідні по координатам, адже похідні по дипольним моментам рівні нулю:

$$\vec{F}_i = - \left(\frac{\partial U}{\partial \vec{r}_i} \right) \bigg|_{\vec{p}_j}. \quad (15)$$

Ітеративний процес розрахунку дипольних моментів (2) забезпечує виконання умови рівноваги (14).

Дану модель міжатомної взаємодії з врахуванням наведеної поляризації можна узагальнити, якщо вважати, що на $\vec{p}^{SR}$ впливає електричне поле, створене як зарядами, так і диполями. Тоді відповідні зміни треба внести в (3) та (12). Проте, для системи, в якій поляризованими є тільки атоми кисню, в цьому немає потреби [18].

Модель кристалу. Із фазової діаграми кварцу та геотермічних кривих (залежність температури від глибини) для різних видів тектонічних плит [19, 20], можна зробити висновок, що до глибин в 100 кілометрів і температур до 1000°C α -кварц є найпоширенішою фазою двоокису кремнію у земній корі. Виключенням є області у мантиї під молодією океанічною плитою.

В даній роботі досліджуються нанокристали кварцу в вакуумі, тобто при нульовому тиску та без добавок будь-яких інших речовин. Їх ґратку будували розміщуючи атоми у вузлах ідеальної кристалічної ґратки SiO_2 – рис. 3.

Оскільки при розрахунках система не є нескінченною, а потенціал взаємодії є модельним, система, отримана після процедури розстановки атомів по своїх місцях, знаходиться в нерівноважному, напруженому стані.

Для того, щоб дати системі перейти в рівноважний, ненапружений стан, проводилися мо-

делювання кристалу з вільними поверхнями, аж доки потенціальна енергія системи не досягне мінімуму. При цьому різниця рівнів енергії системи до і після її релаксації є досить великою, і тому, аби дати системі релаксувати в рівноважний стан та уникнути руйнування кристалічної ґратки, в розрахунки введено ефективну силу тертя шляхом зменшення швидкості атомів на кожному кроці на невелику у порівнянні із значенням швидкості величину.

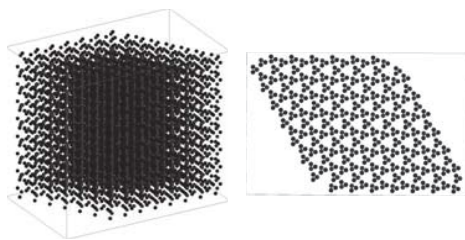


Рис. 3. Початковий стан системи розміром $50 \text{ \AA} \times 50 \text{ \AA} \times 50 \text{ \AA}$. Вигляд вздовж осей $\{1,1,1\}$ та $\{0,0,1\}$.

В режимі релаксації кристалу спеціально розроблений алгоритм відслідковує температуру системи в кожен момент часу i , впливаючи на коефіцієнт штучної в'язкості, намагається підтримувати температуру в районі заданого значення. Таким чином вдається швидко провести процедуру релаксації кристалу, уникаючи руйнування кристалічної структури при високих температурах.

Обрізання взаємодії на великих відстанях.
Модель міжатомної взаємодії TS має досить високий рівень обчислювальної складності, тож було імплементовано обрізання взаємодії, коли при досить великих відстанях між двома атомами взаємодією між цією парою атомів нехтують.

Результати розрахунків

Для утворення тріщини в системі на двох довільних гранях кристалу задаються рухомі граничні умови. Інші 4 грані вільні.

Після того, як відбулась релаксація системи у стійкий стан із мінімальною потенціальною енергією, фіксуються положення атомів крем-

нію на двох рухомих гранях кристалу. Далі користувач програми задає характер руху цих атомів (граней).

Утворення тріщини. На рисунку 4 зображено стан кристалу з 4128 атомів у різні моменти розрахунку із рухомими граничними умовами.

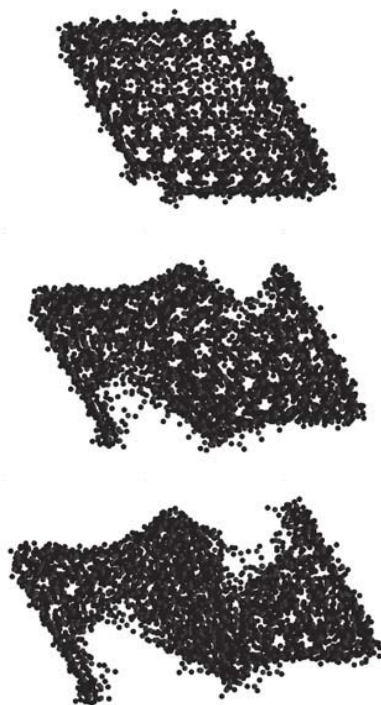


Рис. 4. Процес руйнування кристалу під дією рухомих граничних умов.

Як видно, розриви утворюються переважно біля рухомих граней кристалу, що зумовлено насамперед його конфігурацією (після операції видалення зайвих з точки зору повного дипольного моменту атомів біля рухомих граней утворилися невеличкі затравки для майбутніх розривів) та його формою. Є сенс провести наступні розрахунки із іншими конфігураціями та формами кристалу, а також із різноманітними початковими затравками для майбутніх розривів.

Досить цікавим виявилось наступне спостереження: на графіку 5, на якому зображена залежність дипольного моменту системи від часу, чітко видно коливання з періодом, що зростає по мірі проходження чисельного експерименту. Причому період цих коливань досить добре співпадає із часом проходження звуковою хвилею в кварці відстані, рівної розміру кристалу. Протягом чисельного експерименту кристал розтягувався, а отже і розмір його збільшувався, чим пояснюється збільшення частоти коливань дипольного моменту системи. Ймовірно, що саме ці коливання і дають вагомий вклад в електромагнітне випромінювання, про яке йшла мова у вступі.

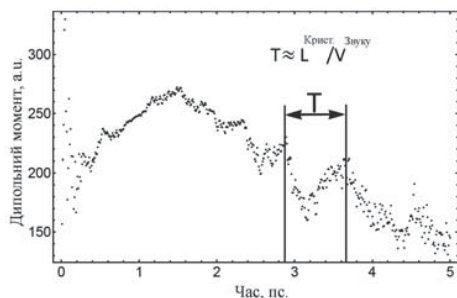


Рис. 5. Динаміка дипольного моменту системи протягом чисельного експерименту.

Ця гіпотеза потребує подальших досліджень в цьому напрямку, а результати цих досліджень можуть бути корисними для розвитку

методів інтерпретації інформації про стан земних надр, що надходить до нас із електромагнітним випромінюванням [1, 2].

Висновки

Отримані в межах даної роботи дані досить добре збігаються із картиною, отриманою при застосуванні теорії суцільного середовища, що свідчить про застосовність теорії суцільного середовища до кристалу кварцу, що розтріскується.

Окрім вищезазначеного, можна зробити наступні спостереження та висновки:

1. Моделювання показало, що рівноважна структура і форма змодельованих обмежених кристалів помітно відрізняється від структури ідеального нескінченного кристалу.

2. Моделювання показало, що окрім утворення поверхонь розриву, які формують краї тріщини, можуть з'являтися і групи атомів, слабо зв'язаних із решетою кристалу, особливо біля вершини тріщини.

3. Динаміка нестационарної поляризації та повного дипольного моменту кристалу відображає періодичний процес розповсюдження по кристалу звукових хвиль, які утворюються на краях тріщини.

4. Розроблена програма дає можливість будувати кристали довільних розмірів, досліджувати їх релаксацію до рівноважного стану та моделювати його поведінку на атомному рівні за різних зовнішніх умов.

Список використаних джерел

- 1 Observation by the intercosmos-24 satellite of elf-vlf electromagnetic emissions associated with earthquakes / O. Molchanov, O. Mazhaeva, A. Golyavin, M. Hayakawa // *Annales Geophysicae*. — 1993. — T. 11. — C. 431–440.
- 2 Parrot M., Mogilevsky M. Vlf emissions associated with earthquakes and observed in the ionosphere and the magnetosphere // *Physics of the Earth and Planetary Interiors*. — 1989. — T. 57, № 1. — C. 86–99.
- 3 Kanamori H. Earthquake prediction: An

References

- 1 MOLCHANOV, O., MAZHAIEVA, O., GOLYAVIN, A. & HAYAKAWA, M. (1993) Observation by the intercosmos-24 satellite of elf-vlf electromagnetic emissions associated with earthquakes. *Annales Geophysicae*. 11. p. 431–440.
- 2 PARROT, M. & MOGILEVSKY, M. (1989) Vlf emissions associated with earthquakes and observed in the ionosphere and the magnetosphere. *Physics of the Earth and Planetary Interiors*. 57(1). p. 86–99.
- 3 KANAMORI, H. (2003) Earthquake predicti-

- overview // *International handbook of earthquake and engineering seismology, part B.* — 2003. — C. 1205–1216.
- 4 Uyeda S., Nagao T., Kamogawa M. Short-term earthquake prediction: Current status of seismo-electromagnetics // *Tectonophysics.* — 2009. — T. 470, № 3. — C. 205–213.
- 5 Electromagnetic emission caused by the fracturing of piezoelectric crystals with an arbitrarily oriented moving crack / A. Gernets, M. Makarets, S. Koshevaya та ін. // *Physics and Chemistry of the Earth, Parts A/B/C.* — 2004. — T. 29, № 4. — C. 463–472.
- 6 Electromagnetic emission from magnetite plate cracking under seismic processes / S. Koshevaya, V. Grimalsky, N. Makarets та ін. // *Advances in Geosciences.* — 2008. — T. 14. — C. 25–28.
- 7 Tangney P., Scandolo S. An ab initio parametrized interatomic force field for silica // *The Journal of chemical physics.* — 2002. — T. 117. — C. 8898.
- 8 Herzbach D., Binder K., Muser M. H. Comparison of model potentials for molecular-dynamics simulations of silica // *The Journal of chemical physics.* — 2005. — T. 123, № 12. — C. 124711.
- 9 Van Beest B., Kramer G. J., Van Santen R. Force fields for silicas and aluminophosphates based on ab initio calculations // *Physical Review Letters.* — 1990. — T. 64, № 16. — C. 1955–1958.
- 10 Demiralp E., Çağın T., Goddard III W. A. Morse stretch potential charge equilibrium force field for ceramics: Application to the quartz-stishovite phase transition and to silica glass // *Physical review letters.* — 1999. — T. 82, № 8. — C. 1708.
- 11 Tang K., Toennies J. P. An improved simple model for the van der waals potential based on universal damping functions for the dispersion coefficients // *The Journal of chemical physics.* — 1984. — T. 80, № 8. — C. 3726–3741.
- on: An overview. *International handbook of earthquake and engineering seismology, part B.* p. 1205–1216.
- 4 UYEDA, S., NAGAO, T. & KAMOGAWA, M. (2009) Short-term earthquake prediction: Current status of seismo-electromagnetics. *Tectonophysics.* 470(3). p. 205–213.
- 5 GERNETS, A., MAKARETS, M., KOSHEVAYA, S., GRIMALSKY, V., ROMERO, D. J. & KOTSARENKO, A. (2004) Electromagnetic emission caused by the fracturing of piezoelectric crystals with an arbitrarily oriented moving crack. *Physics and Chemistry of the Earth, Parts A/B/C.* 29(4). p. 463–472.
- 6 KOSHEVAYA, S., GRIMALSKY, V., MAKARETS, N., KOTSARENKO, A., SIQUIEROS-ALATORRE, J., PEREZ-ENRIQUEZ, R. & JUAREZ-ROMERO, D. (2008) Electromagnetic emission from magnetite plate cracking under seismic processes. *Advances in Geosciences.* 14. p. 25–28.
- 7 TANGNEY, P. & SCANDOLO, S. (2002) An ab initio parametrized interatomic force field for silica. *The Journal of chemical physics.* 117. p. 8898.
- 8 HERZBACH, D., BINDER, K. & MUSER, M. H. (2005) Comparison of model potentials for molecular-dynamics simulations of silica. *The Journal of chemical physics.* 123(12). p. 124711.
- 9 VAN BEEST, B., KRAMER, G. J. & VAN SANTEN, R. (1990) Force fields for silicas and aluminophosphates based on ab initio calculations. *Physical Review Letters.* 64(16). p. 1955–1958.
- 10 DEMIRALP, E., ÇAĞIN, T. & GODDARD III, W. A. (1999) Morse stretch potential charge equilibrium force field for ceramics: Application to the quartz-stishovite phase transition and to silica glass. *Physical review letters.* 82(8). p. 1708.
- 11 TANG, K. & TOENNIES, J. P. (1984) An improved simple model for the van der

- 12 Wilson M., Madden P. Short-and intermediate-range order in mcl2 melts: the importance of anionic polarization // *Journal of Physics: Condensed Matter*. — 1993. — Т. 5, № 37. — С. 6833.
- 13 Wilson M., Madden P. Anion polarization and the stability of layered structures in mx2 systems // *Journal of Physics: Condensed Matter*. — 1994. — Т. 6, № 1. — С. 159.
- 14 Wilson M., Madden P. Polarization effects on the structure and dynamics of ionic melts // *Journal of Physics: Condensed Matter*. — 1994. — Т. 6, № 23A. — С. A151.
- 15 Rick S. W., Stuart S. J. Potentials and algorithms for incorporating polarizability in computer simulations // *Reviews in computational chemistry*. — 2002. — Т. 18. — С. 89–146.
- 16 A molecular dynamics study of polarizable water / P. Ahlström, A. Wallqvist, S. Engström, B. Jönsson // *Molecular Physics*. — 1989. — Т. 68, № 3. — С. 563–581.
- 17 Böttcher C. third edn. Theory of Electric Polarization, vol. 1. — Amsterdam: Elsevier, 1993.
- 18 Hutchinson F., Wilson M., Madden P. A. A unified description of mci3 systems with a polarizable ion simulation model // *Molecular Physics*. — 2001. — Т. 99, № 10. — С. 811–824.
- 19 Fowler C. The Solid Earth - An Introduction to Global Geophysics. — Cambridge: Cambridge University Press, 2004.
- 20 Skinner B., Porter S. Physical geology. — New York: John Wiley and Sons Inc., 1987.
- waals potential based on universal damping functions for the dispersion coefficients. *The Journal of chemical physics*. 80(8). p. 3726–3741.
- 12 WILSON, M. & MADDEN, P. (1993) Short-and intermediate-range order in mcl2 melts: the importance of anionic polarization. *Journal of Physics: Condensed Matter*. 5(37). p. 6833.
- 13 WILSON, M. & MADDEN, P. (1994) Anion polarization and the stability of layered structures in mx2 systems. *Journal of Physics: Condensed Matter*. 6(1). p. 159.
- 14 WILSON, M. & MADDEN, P. (1994) Polarization effects on the structure and dynamics of ionic melts. *Journal of Physics: Condensed Matter*. 6(23A). p. A151.
- 15 RICK, S. W. & STUART, S. J. (2002) Potentials and algorithms for incorporating polarizability in computer simulations. *Reviews in computational chemistry*. 18. p. 89–146.
- 16 AHLSTROM, P., WALLQVIST, A., ENGSTROM, S. & JONSSON, B. (1989) A molecular dynamics study of polarizable water. *Molecular Physics*. 68(3). p. 563–581.
- 17 BÖTTCHER, C. (1993) *Theory of Electric Polarization*. 3rd Ed. Amsterdam: Elsevier
- 18 HUTCHINSON, F., WILSON, M. & MADDEN, P. A. (2001) A unified description of mci3 systems with a polarizable ion simulation model. *Molecular Physics*. 99(10). p. 811–824.
- 19 FOWLER, C. (2004) *The Solid Earth - An Introduction to Global Geophysics*. Cambridge: Cambridge University Press.
- 20 SKINNER, B. & PORTER, S. (1987) *Physical geology*. New York: John Wiley and Sons Inc.

Надійшла до редколегії 10.09.15.

Наукове видання



ВІСНИК

КИЇВСЬКОГО НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНІ НАУКИ

Спецвипуск

Статті подано в авторській редакції.

The authors are responsible for the given opinions, made statements, accuracy of the quotations, economical and statistical data, terminology, proper names and other information. The Editorial Board reserves the right to shorten and edit the submitted materials. Manuscripts will not be returned.

Автори опублікованих матеріалів несуть повну відповідальність за підбір, точність наведених фактів, цитат, економіко-статистичних даних, власних імен та інших відомостей. Редколегія залишає за собою право скорочувати та редагувати подані матеріали. Рукописи та електронні носії не повертаються.



Формат 70x100^{1/16}. Ум. друк. арк. 26,8. Наклад 300. Зам. № 215-7551.
Вид. № М13. Гарнітура Arial. Папір офсетний. Друк офсетний.
Підписано до друку 17.12.15

Видавець і виготовлювач
Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет"
01601, Київ, б-р Т. Шевченка, 14, кімн. 43
☎ (38044) 239 32 22; (38044) 239 31 72; тел./факс (38044) 239 31 28
e-mail: vpc@univ.kiev.ua
http: vpc.univ.kiev.ua
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 1103 від 31.10.02