

**КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА**

ВІСНИК

**КИЇВСЬКОГО НАЦІОНАЛЬНОГО
УНІВЕРСИТЕТУ
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА**

СЕРІЯ ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНІ НАУКИ

ВИПУСК №4 2015

**Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка,
выпуск №4, 2015,
Серія фізико-математичні науки**

З 1991 року серії вісників Київського університету “Математика і механіка”, “Фізика”, “Моделирование и оптимизация сложных систем” реорганізовано у “Вісник Київського університету. Серія: фізико-математичні науки”. У віснику містяться результати нових досліджень у різних галузях математики, інформатики, механіки, фізики та радіофізики для наукових працівників, викладачів, аспірантів, інженерів і студентів. Друкується за рекомендаціями Вчених Рад фізичного, радіофізичного, механіко-математичного факультетів та факультету кібернетики.

Журнал “Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія фізико-математичні науки” включено до переліку фахових видань ВАК України та реферується в Реферативному журналі та базах даних ВИНІТИ, Росія, Москва.

Редакційна колегія:

Анісімов Анатолій Васильович, чл.-кор. НАН України, д.ф.-м.н., проф., **головний редактор**;
Хусаїнов Денис Яхєвич, д.ф.-м.н., проф., **заступник головного редактора, відповідальний за видання**;
Arturs Medvids, Dr. Phys. (habil.), Prof., Riga Technical University, Riga, Latvia;
Miklós Rontó, Dr. Sci., Prof., University of Miskolc, Miskolc, Hungary;
Milada Bartlova, Ph. D., Brno University of Technology, Brno, Czech Republic;
Nickolai Kukhtarev, Prof., Alabama A&M University, Alabama, USA;
Sergei Gorlatch, Dr. Sci. (habil.), Prof., University of Muenster, Muenster, Germany;
Sergey Trofimchuk, Prof., Universidad de Talca, Instituto de Matematica y Fisica, Talca, Chile;
Stefan Hudak, Dr. Sci., Prof., Technical University of Kosice, Kosice, Slovak Republic;
Toru Aoki, Ph. D., Prof., Research Institute of Electronics, Shizuoka University, Shizuoka, Japan;
Акіменко Віталій Володимирович, д.т.н., проф.;
Анісімов Ігор Олексійович, д.ф.-м.н., проф.;
Буй Дмитро Борисович, д.ф.-м.н., проф.;
Булавін Леонід Анатолійович, акад. НАН України, д.ф.-м.н., проф.;
Волошин Олексій Федорович, д.т.н., проф.;
Гарашенко Федір Георгійович, д.т.н., проф.;
Єжов Станіслав Миколайович, д.ф.-м.н., проф.;
Жук Ярослав Олександрович, д.ф.-м.н., проф.;
Заславський Володимир Анатолійович, д.т.н., доц.;
Кириченко Володимир Васильович, д.ф.-м.н., проф.;
Козаченко Юрій Васильович, д.ф.-м.н., проф.;
Кудін Володимир Іванович, д.т.н., с.н.с.;
Львов Віктор Анатолійович, д.ф.-м.н., проф.;
Макара Володимир Арсенійович, чл.-кор. НАН України, д.ф.-м.н., проф.;
Макарець Микола Володимирович, д.ф.-м.н., проф.;
Перестюк Микола Олексійович, акад. НАН України, д.ф.-м.н., проф.;
Погорілий Сергій Дем'янович, д.т.н., проф.;
Савенков Сергій Миколайович, д.ф.-м.н., доц.;
Скришевський Валерій Антонович, д.ф.-м.н., проф.

Редакційний відділ:

Анісімова Тетяна Харитонівна, **відповідальний секретар**;
Безущак Оксана Омелянівна, bezusch@univ.kiev.ua;
Стукаленко Вікторія Віталіївна, stu@univ.kiev.ua;
Родіонова Тетяна Василівна, rodtv@univ.kiev.ua;
Хмелюк Надія Кузьмівна, khmeluk@univ.kiev.ua;
Сільвейструк Людмила Миколаївна, **технічний редактор**, slm-klm@ukr.net.

Адреса редакційної колегії:

Факультет кібернетики, Київський національний університет імені Тараса Шевченка,
пр. Глушкова, 4 д, 03680 Тел. (044) 259-01-49

ISBN 978-966-2142
ISSN 1812-5409

ЗМІСТ

АЛГЕБРА, ГЕОМЕТРІЯ ТА ТЕОРІЯ ІМОВІРНОСТЕЙ

Борисенко О. Д., Борисенко О. В. Усереднення в автономній коливній системі четвертого порядку під дією випадкових збурень у випадку кратного дійсного та двох спряжених чисто умовних коренів характеристичного рівняння	9
Десятерик О. О. Варіанти комутативних зв'язок з нулем	15
Іванюк І. М., Пришляк О. О. Деформація векторних полів на неорієнтованих поверхнях	21

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ, МАТЕМАТИЧНА ФІЗИКА ТА МЕХАНІКА

Городецька Н. С., Щербак Т. М., Нікішов В. І. Розсіювання поверхневих гравітаційних хвиль підводним прямокутним баром	29
Жук Я. О., Васильєва Л. Я. Описання неізотермічної непружної поведінки матеріалу при великих швидкостях деформації	35
Лаврова О. Є. Оптимальне керування системами диференціальних рівнянь на часових шкалах	39
Маринець В. В., Питьовка О. Ю. Один підхід дослідження крайових задач для рівнянь в частинних похідних вищого порядку	45
Михайленко С. В. Побудова наближень стаціонарних розв'язків рівняння осцилятора з кубічною нелінійністю і моногармонічним збудженням	51
Опанасович В. К., Яцик І. М. Одновісний згин ізотропної півплощини з тріщиною, перпендикулярною до її межі, з урахуванням ширини області контакту її берегів	55
Процюк Б. В., Горун О. П. Термопружний стан півбезмежного термочутливого трискладового тіла за дії джерела тепла та складного теплообміну	61
Хашемі М., Жук Я. О. Методика визначення комплексних модулів для полікарбонатного пластика при гармонічному навантаженні	67

КОМП'ЮТЕРНІ НАУКИ ТА ІНФОРМАТИКА

Альхілалі Зайнаб Сааді Хусейн Програмоване, дистанційне, мобільне.... Яке навчання далі?	75
Брила А. Ю., Антосяк П. П., Юрченко Н. В. Досяжність нечітких альтернативних цілей у заданій субординації строгого ранжування	82
Буй Д. Б., Кахута Н. Д., Шишацька О. В., Mohammed Karam Jasim, Fabunmi Sunmade Відношення конфінальності, передпорядки та порядки, семантика фрази ORDER BY запитів SQLподібних мов	88
Буй Д. Б., Колегаєв О. М. Формальні методи розробки програмного забезпечення Z, B, VDM: порівняльний аналіз	96
Галкін О. А. Дослідження непараметричних класифікаторів даних на основі концепції глибинних околів	102
Гаркуша Н. І. Дослідження динаміки моделі «хижак-жертва» з квадратичною нелінійністю при наявності запізнення, обумовленого часом визрівання	107
Деревянченко О. В., Хавро А. Ю. Застосування системи ПАРКС.NET та Amazon EC2 для хмарних обчислень	111
Жигалло А. А., Остаповська Ю. А., Панченко Т. В. Доведення у IPCL коректності алгоритму Пітерсона для взаємного виключення	119

Завадський І. О. Швидкий табличний метод декодування мультироздільникових кодів	125
Зуб С. С., Зуб С. І. Зв'язок канонічної Пуассонової та Лі-Пуассонової структур для гамільтонового формалізму в кватерніонних змінних	131
Козоріз Н. В., Кабан В. О., Бабак А. П., Войцех В. О. Гібридна система машинного перекладу технічних текстів на флективні мови	139
Колянова Т. В. Побудова графічних залежностей біологічних показників при фізичному навантаженні	145
Литвиненко Т. І., Панченко Т. В., Редько В. Д. Прогнозування продажів методами інтелектуального аналізу даних	148
Марченко О. О. Методи невід'ємної тензорної та матричної факторизації в задачах комп'ютерної лінгвістики	156
Мусбах З. Е. Обробка арабської мови, заснована на правилах	162
Новокшенов А. К. Аналіз ефективності «машин, що складають»	168
Рубан Н. Н. Сравнение нереляционных и реляционных баз данных	172
Собко В. Г. Побудова та дослідження алгоритму розв'язування задач математичної фізики за допомогою біортогональних поліномів	176
Стеля О. Б., Потапенко Л. І., Сіренко І. П., Стеля І. О. Монотонна різницева схема для нестационарного рівняння конвекції-дифузії-реакції	181
Харченко І. І. Стратегія розвитку наукових досліджень та оптимізація навчального процесу (до 80-річчя з дня народження видатного вченого, члена-кореспондента НАН України, професора Київського національного університету, заслуженого працівника освіти Бориса Миколайовича Бублика)	187
Хусаїнов Д. Я., Камратов С. В. Динаміка розв'язків квадратичних систем на площині	193

РАДІОФІЗИКА

Хилько О. Л. Розсіяння поверхневого плазмон поляритону на двовимірній напівпровідниковій наносмужці. Ефективна сприйнятливність двовимірної наносмужки	199
--	-----

СУЧАСНА ФІЗИКА

Вовденко С. С., Дмитрук І. М., Березовська Н. І., Медвідь А. Квантово-розмірний ефект у спектрах КРС на лазерно-індукованих структурах на поверхні германію	205
Лисова І. В., Березовська Н. І., Дмитрук І. М. Дослідження характеристик CdSe нанокластерів як флюоресцентних міток для біологічних досліджень	209
Поперенко Л. В., Трубіцин М. П., Неділько С. Г., Юргелевич І. В., Нестеров О. О., Рибак Я. О., Цюк Б. А. Особливості оптичних властивостей літій-германатного скла та склокераміки у видимій області спектра	213
Стащук В. С., Стукаленко В. В., Попенко О. О. Оптичні властивості структури: плівка оксиду алюмінію-масивний алюміній	217

CONTENTS

ALGEBRA, GEOMETRY AND PROBABILITY THEORY

Borysenko O. D., Borysenko O. V. Averaging in autonomous fourth order oscillating system under the action of random disturbances in the case of multiple real root and two conjugate pure imaginary roots of characteristic equation	9
Desiateryk O. O. Variants of commutative bands with zero	15
Ivanyuk I. M., Prishlyak O.O. Deformations of vector fields on non-oriented surfaces	21

DIFFERENTIAL EQUATIONS, MATHEMATICAL PHYSICS AND MECHANICS

Gorodetskaya N. S., Shcherbak T. M., Nikishov V. I. Scattering off surface gravity waves by submerged rectangular bar	29
Hashemi M., Zhuk Y. A. A procedure for complex moduli determination for polycarbonate plastic under harmonic loading	35
Lavrova O. E. Optimal control for systems of differential equations on time scales	39
Marynets V. V., Pityovka O. Y. On one approach of the boundary-value problem investigation for the higher-order partial differential equations	45
Mikhaylenko S. V. Construting approximate stationary solutions to the oscillator equation with cubic nonlinearity and monoharmonic perturbation	51
Opanasovich V. K., Yatsyk I. M. Uniaxial bending of an isotropic half-plane with a crack, which is perpendicular to its boundary, accounting for the width of the contact area of its faces	55
Protsyuk B. V., Gorun O. P. Thermoelastic state of a thermosensitive semi-infinite three – layered body by the action of source heat and convective-radiant heat exchange	61
Zhuk Y. A., Vasiljeva L. Y. Description of nonisothermal inelastic response of material under high strain rate	67

COMPUTER SCIENCES AND INFORMATICS

Al-hilali Zainab Saadi Hussein Programmed, remote, mobile...Which learning to choose further?	75
Brila A. Yu., Antosyak P. P., Yurchenko N. V. Attainability of fuzzy alternative goals in a defined subordination of strict ranking	82
Buy D. B., Kachuta N. D., Shyshatska O. V., Karam Jasim Mohammed, Sunmade Fabunmi Cofinality relation, pre-orders and orders, the semantics of ORDER BY clause of queries in SQL-like language	88
Buy D. B., Kolegaev O. M. Formal methods in software development Z, B and VDM: comparison analysis	96
Galkin O. A. Research of nonparametric data classifiers based on the depth neighborhoods concept	102
Garkusha N. I. Study of the dynamic of the model "predator-prey" with a quadratic nonlinearity in the presence of the delay caused by the time of maturing	107
Derevianchenko O. V., Khavro A. U. The applying of PARCS.NET system and Amazon EC2 for cloud computing	111
Zhygallo A. A., Ostapovska Yu. A., Panchenko T. V. Peterson's Algorithm for Mutual Exclusion Correctness Proof in IPCL	119

Zavadskyi I. O. Fast tabular decoding method for multidelimiter codes	125
Zub S. S., Zub S. I. The relationship of the canonical Poisson and Lie-Poisson structures for the Hamiltonian formalism in the quaternion variables	131
Kozoriz N. V., Kaban V. O., Babak A. P., Voitsekh V. O. Hybrid system of machine translation of technical texts in flexional languages	139
Kolianova T. V. A construction of graphic dependences of biological indexes is at physical activity	145
Lytvynenko T. I., Panchenko T. V., Redko V. D. Sales Forecasting using Data Mining Methods	148
Marchenko O. O. Non-negative tensor and matrix factorization methods for natural language processing	156
Musbah Z. E. Arabic natural language processing with Rule based approach features	162
Novokshonov A. K. Performance analysis of “addition machines”	168
Ruban N. N. Comparison of non-relational and relational databases	172
Sobko V.H. Building and research of the algorithm of the problems of mathematical physics solution with the help of biorthogonal polynomials	176
Stelia O. B., Potapenko L. I., Sirenko I. P., Stelia I. O. Monotone difference scheme for the unsteady convection-diffusion-reaction equation	181
Kharchenko I. I. Strategy of Scientific Research Development and Educational Process Optimization (to the 80-th anniversary of eminent scientist, corresponding member of National Academy of Sciences of Ukraine, Professor of Taras Shevchenko National University of Kyiv, honored worker of education Borys M. Bublyk)	187
Khusainov D. Ya. Kamratov S. V. Dynamics of decisions of quadratic systems on the plane	193

RADIOPHYSICS

Khylko O. L. Scattering of surface plasmon polariton by two-dimensional semiconductor nanostripe. Effective susceptibility of two-dimensional nanostripe	199
--	-----

MODERN PHYSICS

Vovdenko S. S., Dmitruk I. M., Berezovska N. I., Medvid A. Quantum confinement effect in Raman spectra on laser-induced structures on surface of Germanium	205
Lysova I. V., Berezovska N. I., Dmitruk I. M. Study of characteristics of CdSe nanoclusters as fluorescent labels for bioimaging investigations	209
Poperenko L. V., Trubitsyn M. P., Nedilko S. G., Yurgelevich I. V., Nesterov O. O., Rybak Ya. O., Tsiuk B. A. Features of optical properties of the lithium germanate glasses and glass-ceramics in the visible	213
Stashchuk V. S., Stukalenko V. V., Popenko O. O. Optical properties of the structure: aluminum oxide film-bulk aluminum	217

АЛГЕБРА, ГЕОМЕТРИЯ ТА ТЕОРИЯ ІМОВІРНОСТЕЙ

УДК 519.21

О.Д. Борисенко¹, к.ф.-м.н., доцент
О.В. Борисенко², к.ф.-м.н., доцент

Усереднення в автономній коливній системі четвертого порядку під дією випадковий збурень у випадку кратного дійсного та двох спряжених чисто уявних коренів характеристичного рівняння

¹Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 01033, Київ, вул. Володимирська, 64.

² Національний технічний університет України "КПІ" 03056, г.Київ-56, проспект Перемоги, 37

e-mail: ¹odb@univ.kiev.ua

O.D. Borysenko¹, Ph.D., Associate Professor
O.V. Borysenko², Ph.D., Associate Professor

Averaging in autonomous fourth order oscillating system under the action of random disturbances in the case of multiple real root and two conjugate pure imaginary roots of characteristic equation

¹Taras Shevchenko National University of Kyiv, 01033, Kyiv, 64 Volodymyrska st.,

²National Technical University of Ukraine "KPI", 37 Prospect Peremogy, Kyiv 03056

e-mail: ¹odb@univ.kiev.ua

У роботі вивчається асимптотична поведінка автономної коливної системи, яка описується диференціальним рівнянням четвертого порядку з малими нелінійними зовнішніми збуреннями типу "білого" та центрованого Пуассонівського шумів. Розглядається випадок кратного дійсного кореня і пари спряжених чисто уявних коренів характеристичного рівняння.

Ключові слова: асимптотична поведінка, автономна коливна система, стохастичне диференціальне рівняння.

The asymptotic behavior of autonomous oscillating system describing by differential equation of fourth order with small non-linear external perturbations of "white noise" and centered "Poisson noise" types is studied. Every term of external perturbations has own order of small parameter ε . If small parameter is equal to zero, then general solution of obtained non-stochastic fourth order differential equation has an oscillating part. We consider given differential equation with external stochastic perturbations as the system of stochastic differential equations and study the limit behavior of its solution at the time moment t/ε^k , as $\varepsilon \rightarrow 0$. The system of averaging stochastic differential equations is derived and its dependence on the order of small parameter in every term of external perturbations is studied. The case of multiple real root and two conjugate pure imaginary roots of characteristic equation is considered.

Key Words: asymptotic behavior, autonomous oscillating system, stochastic differential equation.

Communicated by Prof. Kozachenko Yu.V.

1 Introduction

In the papers [1] – [3] it is investigated the behavior, as $\varepsilon \rightarrow 0$, of the fourth order autonomous oscillating system driven by stochastic differential equation

$$x^{IV}(t) + b_1 x'''(t) + b_2 x''(t) + b_3 x'(t) + b_4 x(t) = \varepsilon^{k_1} f_1(x(t), x'(t), x''(t), x'''(t)) + f_\varepsilon(x(t), x'(t), x''(t), x'''(t)) \quad (1)$$

with non-random initial conditions $x(0) = x_0^{(1)}$, $x'(0) = x_0^{(2)}$, $x''(0) = x_0^{(3)}$, $x'''(0) = x_0^{(4)}$, where $\varepsilon > 0$ is a small parameter, $f_\varepsilon(x, x', x'', x''')$ is a

random function such that

$$\begin{aligned} & \int_0^t f_\varepsilon(x(s), x'(s), x''(s), x'''(s)) ds = \\ & = \varepsilon^{k_2} \int_0^t f_2(x(s), x'(s), x''(s), x'''(s)) dw(s) + \\ & + \varepsilon^{k_3} \int_0^t \int_R f_3(x(s), x'(s), x''(s), x'''(s), z) \tilde{\nu}(ds, dz), \end{aligned}$$

$k_i > 0, i = 1, 2, 3$; $f_i, i = 1, 2, 3$ are non-random functions; $w(t)$ is the standard Wiener process; $\tilde{\nu}(dt, dy) = \nu(dt, dy) - \Pi(dy)dt$, $E\nu(dt, dy) = \Pi(dy)dt$, $\nu(dt, dy)$ is the Poisson

measure independent on $w(t)$; $\Pi(A)$ is a finite measure on Borel sets in R .

We will study the asymptotic behavior of given oscillating system, as $\varepsilon \rightarrow 0$, in the case when there exists stable harmonic oscillations at the system under condition $\varepsilon = 0$. Under this condition corresponding characteristic equation has a form

$$\lambda^4 + b_1\lambda^3 + b_2\lambda^2 + b_3\lambda + b_4 = 0.$$

The following cases were considered previously:

1) ([1]) $b_1 > 0$, $b_3 > 0$, $b_1b_2 > b_3$, $b_1^2 > 4(b_2 - \frac{b_3}{b_1})$, $b_1^2b_4 = b_3(b_1b_2 - b_3)$. In this case the characteristic equation has a roots

$$\lambda_1 = -\eta_1, \lambda_2 = -\eta_2, \lambda_{3,4} = \pm i\omega, \text{ where } \eta_{1,2} = \frac{1}{2} \left(b_1 \pm \sqrt{b_1^2 - 4 \left(b_2 - \frac{b_3}{b_1} \right)} \right), \omega^2 = \frac{b_3}{b_1}.$$

2) ([2]) $b_1 > 0$, $b_3 > 0$, $b_4 > b_1b_3/4$, $b_1^2b_4 = b_3(b_1b_2 - b_3)$. In this case the characteristic equation has a roots

$$\lambda_1 = -\eta + i\nu, \lambda_2 = -\eta - i\nu, \lambda_{3,4} = \pm i\omega, \text{ where } \eta = \frac{b_1}{2}, \nu = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{b_1(4b_4 - b_1b_3)}{b_3}}, \omega^2 = \frac{b_3}{b_1}.$$

3) ([3]) $b_1 = 0$, $b_3 = 0$, $b_2 > 0$, $b_4 > 0$, $b_2^2 > 4b_4$. In this case the characteristic equation has a roots

$$\lambda_{1,2} = \pm i\omega_1, \lambda_{3,4} = \pm i\omega_2, \text{ where } \omega_1^2 = \frac{1}{2} \left(b_2 + \sqrt{b_2^2 - 4b_4} \right), \omega_2^2 = \frac{1}{2} \left(b_2 - \sqrt{b_2^2 - 4b_4} \right).$$

We will consider the equation (1) as the system of stochastic differential equations

$$\begin{aligned} dy_i(t) &= y_{i+1}(t)dt, \quad i = \overline{1,3} \\ dy_4(t) &= [- (b \cdot y(t)) + \varepsilon^{k_1} f_1(y(t))]dt + \\ &+ \varepsilon^{k_2} f_2(y(t))dw(t) + \varepsilon^{k_3} \int_{\mathbb{R}} f_3(y(t), z) \tilde{\nu}(dt, dz), \\ y(t) &= \{y_i(t)\}_{i=\overline{1,4}}, b = (b_4, b_3, b_2, b_1), \\ y_i(0) &= x_0^{(i)}, \quad i = \overline{1,4}, \end{aligned} \quad (2)$$

$(b \cdot y(t))$ – is a scalar product of vectors b and $y(t)$.

In what follows we will use the constant $K > 0$ for the notation of different constants, which are not depend on ε .

2 Main result

This paper deals with the following case:

$b_1 > 0$, $4b_2 > b_1^2$, $b_3 = b_1(b_2 - b_1^2/4)$, $b_4 = b_1^2(b_2 - b_1^2/4)/4$. Characteristic equation has a roots $\lambda_{1,2} = -\eta$, $\lambda_{3,4} = \pm i\omega$, where $\eta = b_1/2$, $\omega^2 = 4b_4/b_1^2$.

If $\varepsilon = 0$ then the equation (1) has general solution in the form

$$x(t) = C_1 e^{-\eta t} + C_2 t e^{-\eta t} + A_1 \cos \omega t + A_2 \sin \omega t$$

Let us consider the following representation of the solution $y(t)$ to the system (2):

$$\begin{aligned} y_1(t) &= N_1(t) + \\ &+ A_1(t) \cos \omega t + A_2(t) \sin \omega t, \\ y_2(t) &= -\eta N_1(t) + N_2(t) - \\ &- A_1(t) \omega \sin \omega t + A_2(t) \omega \cos \omega t, \\ y_3(t) &= \eta^2 N_1(t) - 2\eta N_2(t) - \\ &- A_1(t) \omega^2 \cos \omega t - A_2(t) \omega^2 \sin \omega t, \\ y_4(t) &= -\eta^3 N_1(t) + 3\eta^2 N_2(t) + \\ &+ A_1(t) \omega^3 \sin \omega t - A_2(t) \omega^3 \cos \omega t, \end{aligned} \quad (3)$$

where

$$N_1(t) = (C_1(t) + tC_2(t))e^{-\eta t}, \quad N_2(t) = C_2(t)e^{-\eta t}.$$

We can solve the system of linear equations (3) with respect to $(N_1(t), N_2(t), A_1(t), A_2(t))$ and using the Ito formula we derive the system of stochastic differential equations:

$$\begin{aligned} dN_1(t) &= [-\eta N_1(t) + N_2(t)]dt + \frac{2\eta}{(\eta^2 + \omega^2)^2} dH(t), \\ dN_2(t) &= -\eta N_2(t)dt + \frac{1}{(\eta^2 + \omega^2)} dH(t), \\ dA_1(t) &= \frac{(\omega^2 - \eta^2) \sin \omega t - 2\eta \omega \cos \omega t}{\omega(\eta^2 + \omega^2)^2} dH(t), \\ dA_2(t) &= -\frac{(\omega^2 - \eta^2) \cos \omega t + 2\eta \omega \sin \omega t}{\omega(\eta^2 + \omega^2)^2} dH(t), \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} dH(t) &= \varepsilon^{k_1} \tilde{f}_1(\omega t, N_1(t), N_2(t), A_1(t), A_2(t))dt + \\ &+ \varepsilon^{k_2} \tilde{f}_2(\omega t, N_1(t), N_2(t), A_1(t), A_2(t))dw(t) + \\ &+ \varepsilon^{k_3} \int_{\mathbb{R}} \tilde{f}_3(\omega t, N_1(t), N_2(t), A_1(t), A_2(t), z) \tilde{\nu}(dt, dz), \end{aligned}$$

where $\tilde{f}_i(\omega t, N_1, N_2, A_1, A_2)$, $i = 1, 2$ are obtained from $f_i(y(t))$, $i = 1, 2$ and $\tilde{f}_3(\omega t, N_1, N_2, A_1, A_2, z)$ is obtained from $f_3(y(t), z)$ using (3).

Theorem 2.1. Let $\Pi(\mathbb{R}) < \infty$, $t \in [0, t_0]$, $k = \min(k_1, 2k_2, 2k_3)$. Let us suppose, that functions $f_j, j = \overline{1, 3}$ bounded and satisfy Lipschitz condition on $y_i, i = \overline{1, 4}$. If given below matrix $\bar{\sigma}^2(A_1, A_2)$ is non-negative definite, then

1. If $k_1 = 2k_2 = 2k_3$, then the stochastic process $\xi_\varepsilon(t) = (N_1(t/\varepsilon^k), N_2(t/\varepsilon^k), A_1(t/\varepsilon^k), A_2(t/\varepsilon^k))$ weakly converges, as $\varepsilon \rightarrow 0$, to the stochastic process $\bar{\xi}(t) = (0, 0, \bar{A}_1(t), \bar{A}_2(t))$, where $\bar{A}(t) = (\bar{A}_1(t), \bar{A}_2(t))$ is the solution to the system of stochastic differential equations

$$d\bar{A}(t) = \bar{\alpha}(\bar{A}(t))dt + \bar{\sigma}(\bar{A}(t))d\bar{w}(t), \quad (5)$$

$$\bar{A}(0) = (A_1(0), A_2(0)),$$

where

$$\bar{\alpha}(A_1, A_2) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \hat{f}_1(\phi, A_1, A_2) \Psi(\phi) d\phi,$$

$$\bar{\sigma}(A_1, A_2) = \left\{ \bar{B}(A_1, A_2) \right\}^{\frac{1}{2}} = \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \hat{f}(\phi, A_1, A_2) \Psi(\phi) \Psi^T(\phi) d\phi \right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$\Psi(\phi) = \frac{1}{\omega(\eta^2 + \omega^2)^2} \times \begin{pmatrix} (\omega^2 - \eta^2) \sin \phi - 2\eta\omega \cos \phi \\ (\eta^2 - \omega^2) \cos \phi - 2\eta\omega \sin \phi \end{pmatrix}$$

$$\hat{f}_i(\phi, A_1, A_2) = \tilde{f}_i(\phi, 0, 0, A_1, A_2), \quad i = 1, 2$$

$$\hat{f}_3(\phi, A_1, A_2, z) = \tilde{f}_3(\phi, 0, 0, A_1, A_2, z),$$

$$\hat{f}(\phi, A_1, A_2) = \hat{f}_2^2(\phi, A_1, A_2) + \int_R \hat{f}_3^2(\phi, A_1, A_2, z) \Pi(dz),$$

$\Psi^T(\phi)$ is the vector transpose to vector $\Psi(\phi)$, $\bar{w}(t) = (\bar{w}_i(t), i = 1, 2)$, $\bar{w}_i(t), i = 1, 2$ are independent one-dimensional Wiener processes.

2. If $k < k_1$ then in the averaging equation (5) we must put $\hat{f}_1 \equiv 0$; if $k < 2k_2$, then in the averaging equation (5) we must put $\hat{f}_2 \equiv 0$; if $k < 2k_3$ then in the averaging equation (5) we must put $\hat{f}_3 \equiv 0$.

Proof. Let us make a change of variable $t \rightarrow t/\varepsilon^k$ at the system (4) and obtain for the process $\xi_\varepsilon(t) = (N_1^\varepsilon(t), N_2^\varepsilon(t), A_1^\varepsilon(t), A_2^\varepsilon(t)) =$

$(N_1(t/\varepsilon^k), N_2(t/\varepsilon^k), A_1(t/\varepsilon^k), A_2(t/\varepsilon^k))$ the system of stochastic differential equations

$$\begin{aligned} dN_1^\varepsilon(t) &= \left[-\frac{\eta}{\varepsilon^k} N_1^\varepsilon(t) + \frac{1}{\varepsilon^k} N_2^\varepsilon(t) \right] dt + \\ &\quad + \frac{2\eta}{(\eta^2 + \omega^2)^2} dH_\varepsilon(t), \\ dN_2^\varepsilon(t) &= -\frac{\eta}{\varepsilon^k} N_2^\varepsilon(t) dt + \frac{1}{(\eta^2 + \omega^2)} dH_\varepsilon(t), \\ dA_1^\varepsilon(t) &= \Psi_1(\omega t/\varepsilon^k) dH_\varepsilon(t), \\ dA_2^\varepsilon(t) &= \Psi_2(\omega t/\varepsilon^k) dH_\varepsilon(t), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} dH_\varepsilon(t) &= \varepsilon^{k_1-k} \tilde{f}_1\left(\frac{\omega t}{\varepsilon^k}, \xi_\varepsilon(t)\right) + \\ &\quad + \varepsilon^{k_2-k/2} \tilde{f}_2\left(\frac{\omega t}{\varepsilon^k}, \xi_\varepsilon(t)\right) dw_\varepsilon(t) + \\ &\quad + \varepsilon^{k_3} \int_{\mathbb{R}} \tilde{f}_3\left(\frac{\omega t}{\varepsilon^k}, \xi_\varepsilon(t), z\right) \tilde{\nu}_\varepsilon(dt, dz), \end{aligned}$$

where $\Psi_i(\phi), i = 1, 2$ are a components of vector $\Psi(\phi)$, $w_\varepsilon(t) = \varepsilon^{k/2} w(t/\varepsilon^k)$, $\tilde{\nu}_\varepsilon(t, A) = \nu(t/\varepsilon^k, A) - \Pi(A)t/\varepsilon^k$, here A is a Borel set in $\mathbb{R}$. For each $\varepsilon > 0$ the process $w_\varepsilon(t)$ is standard one-dimensional Wiener process, and $\tilde{\nu}_\varepsilon(t, A)$ is the centered Poisson measure independent on $w_\varepsilon(t)$.

We have $N_2^\varepsilon(t) = \exp\{-\eta t/\varepsilon^k\} C_2(t/\varepsilon^k)$ and process $C_2^\varepsilon(t) = C_2(t/\varepsilon^k)$, satisfy the stochastic differential equations

$$dC_2^\varepsilon(t) = -\frac{e^{\eta t/\varepsilon^k}}{\eta^2 + \omega^2} dH_\varepsilon(t),$$

where $|C_2^\varepsilon(0)| \leq K$.

So, from boundedness of functions $f_i, i = \overline{1, 3}$ and condition $\Pi(\mathbb{R}) < \infty$ we have the estimate

$$\begin{aligned} \mathbb{E}|N_2^\varepsilon(t)|^2 &\leq K[e^{-2\eta t/\varepsilon^k} + \varepsilon^k(1 - e^{-2\eta t/\varepsilon^k}) \times \\ &\quad \times (t\varepsilon^{2(k_1-k)} + \varepsilon^{2k_2-k} + \varepsilon^{2k_3-k})]. \end{aligned} \quad (6)$$

For the process $C_\varepsilon(t) = N_1^\varepsilon(t)e^{\eta t/\varepsilon^k} = C_1(t/\varepsilon^k) + C_2(t/\varepsilon^k)t/\varepsilon^k$, using the Ito formula, we obtain the stochastic differential equation

$$\begin{aligned} C_\varepsilon(t) &= C_1(0) + \frac{1}{\varepsilon^k} \int_0^t e^{\eta s/\varepsilon^k} N_2^\varepsilon(s) ds + \\ &\quad + \frac{2\eta}{(\eta^2 + \omega^2)^2} \int_0^t e^{\eta s/\varepsilon^k} dH_\varepsilon(s), \end{aligned}$$

then for the stochastic process $N_1^\varepsilon(t)$ we have

$$\begin{aligned} N_1^\varepsilon(t) &= e^{-\frac{\eta t}{\varepsilon^k}} C_1(0) + \frac{e^{-\frac{\eta t}{\varepsilon^k}}}{\varepsilon^k} \int_0^t e^{\frac{\eta s}{\varepsilon^k}} N_2^\varepsilon(s) ds + \\ &\quad + \frac{2\eta e^{-\frac{\eta t}{\varepsilon^k}}}{(\eta^2 + \omega^2)^2} \int_0^t e^{\frac{\eta s}{\varepsilon^k}} dH_\varepsilon(s). \end{aligned}$$

From (6) we derive

$$E \left| \frac{e^{-\frac{\eta t}{\varepsilon^k}}}{\varepsilon^k} \int_0^t e^{\frac{\eta s}{\varepsilon^k}} N_2^\varepsilon(s) ds \right| \leq K \left(\frac{te^{-\frac{\eta t}{\varepsilon^k}}}{\varepsilon^k} + \frac{\varepsilon^{k/2}}{\eta} \left(1 + t^{1/2} \right) \left(1 - e^{-\frac{\eta t}{\varepsilon^k}} \right) \right), \quad (7)$$

and also we have the estimate

$$E \left| \frac{2\eta e^{-\frac{\eta t}{\varepsilon^k}}}{(\eta^2 + \omega^2)^2} \int_0^t e^{\frac{\eta s}{\varepsilon^k}} dH_\varepsilon(s) \right| \leq K \left(\varepsilon^{k_1} \left(1 - e^{-\frac{\eta t}{\varepsilon^k}} \right) + \left(\varepsilon^{k_2} + \varepsilon^{k_3} \right) \left(1 - e^{-\frac{\eta t}{\varepsilon^k}} \right)^{1/2} \right). \quad (8)$$

Because $|C_1(0)| \leq K$, from (6), (7) and (8) we have $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} E|N_2^\varepsilon(t)|^2 = 0$, $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} E|N_1^\varepsilon(t)| = 0$ and it is sufficient to study the behavior, as $\varepsilon \rightarrow 0$, of solution to the system of stochastic differential equations

$$dA_i^\varepsilon(t) = \Psi_i(\omega t/\varepsilon^k) d\hat{H}_\varepsilon(t), \quad i = 1, 2 \quad (9)$$

with initial conditions $A_1^\varepsilon(0) = A_1(0)$, $A_2^\varepsilon(0) = A_2(0)$, where

$$\begin{aligned} d\hat{H}_\varepsilon(t) = & \varepsilon^{k_1-k} \hat{f}_1\left(\frac{\omega t}{\varepsilon^k}, A_1^\varepsilon(t), A_2^\varepsilon(t)\right) + \\ & + \varepsilon^{k_2-k/2} \hat{f}_2\left(\frac{\omega t}{\varepsilon^k}, A_1^\varepsilon(t), A_2^\varepsilon(t)\right) dw_\varepsilon(t) + \\ & + \varepsilon^{k_3} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}_3\left(\frac{\omega t}{\varepsilon^k}, A_1^\varepsilon(t), A_2^\varepsilon(t), z\right) \tilde{\nu}_\varepsilon(dt, dz), \end{aligned}$$

where

$$\hat{f}_j(t, A_1, A_2) = \tilde{f}_j(t, 0, 0, A_1, A_2), \quad j = 1, 2$$

$$\hat{f}_3(t, A_1, A_2, z) = \tilde{f}_3(t, 0, 0, A_1, A_2, z).$$

Let us denote $A_\varepsilon(t) = (A_1^\varepsilon(t), A_2^\varepsilon(t))$. Using conditions on coefficients of equation (9) and properties of stochastic integrals we obtain estimates

$$E\|A_\varepsilon(t)\|^2 \leq K[1 + t^2 \varepsilon^{2(k_1-k)} + t(\varepsilon^{2k_2-k} + \varepsilon^{2k_3-k})],$$

$$E\|A_\varepsilon(t) - A_\varepsilon(s)\|^2 \leq K[|t-s|^2 \varepsilon^{2(k_1-k)} + |t-s|(\varepsilon^{2k_2-k} + \varepsilon^{2k_3-k})].$$

Similarly for the process $\zeta_\varepsilon(t) = (\zeta_1^\varepsilon(t), \zeta_2^\varepsilon(t))$, where

$$\begin{aligned} \zeta_i^\varepsilon(t) = & \varepsilon^{k_2-\frac{k}{2}} \int_0^t \Psi_i\left(\frac{\omega s}{\varepsilon^k}\right) \hat{f}_2\left(\frac{\omega s}{\varepsilon^k}, A_1^\varepsilon(s), A_2^\varepsilon(s)\right) dw_\varepsilon(s) + \\ & + \varepsilon^{k_3} \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \Psi_i\left(\frac{\omega s}{\varepsilon^k}\right) \hat{f}_3\left(\frac{\omega s}{\varepsilon^k}, A_1^\varepsilon(s), A_2^\varepsilon(s), z\right) \tilde{\nu}_\varepsilon(ds, dz), \end{aligned}$$

$i = 1, 2$ we derive estimates

$$\begin{aligned} E\|\zeta_\varepsilon(t)\|^2 & \leq Kt(\varepsilon^{2k_2-k} + \varepsilon^{2k_3-k}), \\ E\|\zeta_\varepsilon(t) - \zeta_\varepsilon(s)\|^2 & \leq K|t-s|(\varepsilon^{2k_2-k} + \varepsilon^{2k_3-k}). \end{aligned}$$

Therefore for stochastic process $\eta_\varepsilon(t) = (A_\varepsilon(t), \zeta_\varepsilon(t))$ conditions of weak compactness [4] are fulfilled

$$\lim_{h \downarrow 0} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{|t-s| < h} P\{|\eta_\varepsilon(t) - \eta_\varepsilon(s)| > \delta\} = 0$$

for any $\delta > 0$, $t, s \in [0, T]$,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{t \in [0, T]} P\{|\eta_\varepsilon(t)| > N\} = 0,$$

and for any sequence $\varepsilon_n \rightarrow 0, n = 1, 2, \dots$ there exists a subsequence $\varepsilon_m = \varepsilon_{n(m)} \rightarrow 0, m = 1, 2, \dots$, probability space, stochastic processes $\bar{A}_{\varepsilon_m}(t) = (\bar{A}_1^{\varepsilon_m}(t), \bar{A}_2^{\varepsilon_m}(t))$, $\bar{\zeta}_{\varepsilon_m}(t)$, $\bar{A}(t) = (\bar{A}_1(t), \bar{A}_2(t))$, $\bar{\zeta}(t)$ defined on this space, such that $\bar{A}_{\varepsilon_m}(t) \rightarrow \bar{A}(t)$, $\bar{\zeta}_{\varepsilon_m}(t) \rightarrow \bar{\zeta}(t)$ in probability, as $\varepsilon_m \rightarrow 0$, and finite-dimensional distributions of $\bar{A}_{\varepsilon_m}(t)$, $\bar{\zeta}_{\varepsilon_m}(t)$ are coincide with finite-dimensional distributions of $A_{\varepsilon_m}(t)$, $\zeta_{\varepsilon_m}(t)$. Since we interesting in limit behaviour of distributions, we can consider processes $A_{\varepsilon_m}(t)$, and $\zeta_{\varepsilon_m}(t)$ instead of $\bar{A}_{\varepsilon_m}(t)$, $\bar{\zeta}_{\varepsilon_m}(t)$. From (9) we obtain equation

$$\begin{aligned} A_{\varepsilon_m}(t) & = A(0) + \int_0^t \alpha_{\varepsilon_m}(s, A_{\varepsilon_m}(s)) ds + \zeta_{\varepsilon_m}(t), \\ A(0) & = (A_1(0), A_2(0)), \end{aligned} \quad (10)$$

where $\alpha_\varepsilon(t, A) = (\alpha_1^\varepsilon(t, A_1, A_2), \alpha_2^\varepsilon(t, A_1, A_2))$,

$$\alpha_i^\varepsilon(t, A_1, A_2) = \varepsilon^{k_1-k} \Psi_i\left(\frac{\omega t}{\varepsilon^k}\right) \hat{f}_1\left(\frac{\omega t}{\varepsilon^k}, A_1, A_2\right),$$

$i = 1, 2$. It should be noted that process $\zeta_\varepsilon(t)$ is the vector-valued square integrable martingale with matrix characteristic

$$\begin{aligned} \langle \zeta_i^\varepsilon, \zeta_j^\varepsilon \rangle(t) & = \\ & = \int_0^t \sigma_i^\varepsilon(s, A_1^\varepsilon(s), A_2^\varepsilon(s)) \sigma_j^\varepsilon(s, A_1^\varepsilon(s), A_2^\varepsilon(s)) ds + \\ & + \frac{1}{\varepsilon^k} \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \gamma_i^\varepsilon(s, A_1^\varepsilon(s), A_2^\varepsilon(s), z) \times \\ & \times \gamma_j^\varepsilon(s, A_1^\varepsilon(s), A_2^\varepsilon(s), z) \Pi(dz) ds, \end{aligned}$$

$i, j = 1, 2$, where

$$\begin{aligned} \sigma_i^\varepsilon(s, A_1^\varepsilon(s), A_2^\varepsilon(s)) = \\ = \varepsilon^{k_2-k/2} \Psi_i\left(\frac{\omega s}{\varepsilon^k}\right) \hat{f}_2\left(\frac{\omega s}{\varepsilon^k}, A_1^\varepsilon(s), A_2^\varepsilon(s)\right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma_i^\varepsilon(s, A_1^\varepsilon(s), A_2^\varepsilon(s), z) = \\ = \varepsilon^{k_3} \Psi_i\left(\frac{\omega s}{\varepsilon^k}\right) \hat{f}_3\left(\frac{\omega s}{\varepsilon^k}, A_1^\varepsilon(s), A_2^\varepsilon(s), z\right), \end{aligned}$$

$i = 1, 2$.

For processes $A_\varepsilon(t)$ and $\zeta_\varepsilon(t)$ following estimates hold

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \|A_\varepsilon(t) - A_\varepsilon(s)\|^4 \leq K[\varepsilon^{4(k_1-k)} |t-s|^4 + \\ + \mathbb{E} \|\zeta_\varepsilon(t) - \zeta_\varepsilon(s)\|^4], \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \|\zeta_\varepsilon(t) - \zeta_\varepsilon(s)\|^4 \leq K[(\varepsilon^{4k_2-2k} + \\ + \varepsilon^{4k_3-2k}) |t-s|^2 + \varepsilon^{4k_3-3k/2} |t-s|^{3/2} + \\ + \varepsilon^{4k_3-k} |t-s|], \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \|A_\varepsilon(t) - A_\varepsilon(s)\|^8 \leq K, \\ \mathbb{E} \|\zeta_\varepsilon(t) - \zeta_\varepsilon(s)\|^8 \leq K. \end{aligned} \quad (13)$$

Since $A_{\varepsilon_m}(t) \rightarrow \bar{A}(t)$, $\zeta_{\varepsilon_m}(t) \rightarrow \bar{\zeta}(t)$ in probability, as $\varepsilon_m \rightarrow 0$, then, using (13), from (11) and (12) we obtain estimates

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \|\bar{A}(t) - \bar{A}(s)\|^4 \leq K(|t-s|^4 + |t-s|^2), \\ \mathbb{E} \|\bar{\zeta}(t) - \bar{\zeta}(s)\|^4 \leq C|t-s|^2. \end{aligned}$$

Therefore processes $\bar{A}(t)$ and $\bar{\zeta}(t)$ satisfy the Kolmogorov's continuity condition [5].

Let us consider the case $k_1 = 2k_2 = 2k_3$. Under these condition we have for $i, j = 1, 2$

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{t} \int_0^t \alpha_i^\varepsilon(s, A_1, A_2) ds = \bar{\alpha}_i(A_1, A_2), \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{t} \int_0^t \left[\sigma_i^\varepsilon(s, A_1, A_2) \sigma_j^\varepsilon(s, A_1, A_2) + \right. \\ \left. + \frac{1}{\varepsilon^k} \int_R \gamma_i^\varepsilon(s, A_1, A_2, z) \gamma_j^\varepsilon(s, A_1, A_2, z) \Pi(dz) \right] ds = \\ = \bar{B}_{ij}(A_1, A_2), \end{aligned} \quad (14)$$

where functions $\bar{\alpha}^{(i)}(A_1, A_2)$ and $\bar{B}(A_1, A_2) = \{\bar{B}_{ij}(A_1, A_2), i, j = 1, 2\}$ are defined in the condition of theorem. Since processes $\bar{A}(t), \bar{\zeta}(t)$ are continuous, then from (Lemma 1 [6]) and relationships (10), (14) it follows

$$\begin{aligned} \bar{A}(t) = A(0) + \int_0^t \bar{\alpha}(\bar{A}_1(s), \bar{A}_2(s)) ds + \bar{\zeta}(t), \\ A(0) = (A_1(0), A_2(0)), \end{aligned} \quad (15)$$

where $\bar{\zeta}(t)$ is continuous vector-valued martingale with matrix characteristic

$$\langle \bar{\zeta}^{(i)}, \bar{\zeta}^{(j)} \rangle(t) = \int_0^t \bar{B}_{ij}(\bar{A}_1(s), \bar{A}_2(s)) ds, i, j = 1, 2.$$

Hence [7] there exists Wiener process $\bar{w}(t) = (\bar{w}_i(t), i = 1, 2)$, such that

$$\begin{aligned} \bar{\zeta}(t) = \int_0^t \bar{\sigma}(\bar{A}_1(s), \bar{A}_2(s)) d\bar{w}(s), \\ \bar{\sigma}(A_1, A_2) = \{\bar{B}(A_1, A_2)\}^{1/2}. \end{aligned} \quad (16)$$

Relationships (15), (16) mean that process $\bar{A}(t)$ satisfies equation (5). Under conditions of theorem the equation (5) has unique solution. Therefore process $\bar{A}(t)$ does not depend on choosing of sub-sequence $\varepsilon_m \rightarrow 0$, and finite-dimensional distributions of process $A_{\varepsilon_m}(t)$ converge to finite-dimensional distributions of process $\bar{A}(t)$. Since processes $A_{\varepsilon_m}(t)$ and $\bar{A}(t)$ are Markov processes then using the conditions for weak convergence of Markov processes we finish the proof of statement 1 of theorem.

Let us consider the case $k < k_1$. Then the corresponding terms in the coefficients $\alpha_\varepsilon^{(i)}(t, A_1, A_2)$, $i = 1, 2$ of equation (10) tend to zero, as $\varepsilon \rightarrow 0$.

In the case $k < 2k_2$ in (14) we have $\sigma_i^\varepsilon(t, A_1, A_2) \sigma_j^\varepsilon(t, A_1, A_2) = O(\varepsilon^{2k_2-k})$, $i, j = 1, 2$. In the case $k < 2k_3$ in (14) we have

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varepsilon^k} \int_R \gamma_i^\varepsilon(s, A_1, A_2, z) \gamma_j^\varepsilon(s, A_1, A_2, z) \Pi(dz) = \\ = O(\varepsilon^{2k_3-k}) \end{aligned}$$

Repeating with obvious modifications the proof of statement 1) of theorem we obtain proof of the statement 2). $\square$

Список використаних джерел

1. Борисенко О.Д., Борисенко О.В. Метод усереднення для автономної коливної системи четвертого порядку під дією випадкових збурень / О.Д. Борисенко, О.В. Борисенко // Вісник Київського університету імені Тараса Шевченка. Серія фізико-математичні науки – 2010. – №4. – С. 11 – 15
2. Борисенко О.Д., Борисенко О.В. Гранична поведінка автономної коливної системи четвертого порядку під дією випадкових збурень у випадку комплексних коренів характеристичного рівняння / О.Д. Борисенко, О.В. Борисенко // Вісник Київського університету імені Тараса Шевченка. Серія фізико-математичних наук. – 2011. – №2. – С.7-11.
3. Борисенко О.Д., Борисенко О.В. Гранична поведінка автономної коливної системи четвертого порядку під дією випадкових збурень у випадку двох пар уявних / О.Д. Борисенко, О.В. Борисенко // Вісник Київського університету імені Тараса Шевченка. Серія фізико-математичних наук. – 2012. – №3. – С.10 – 14.
4. Скороход А.В. Исследования по теории случайных процессов / А.В. Скороход // К.: Изд. Киевского университета. – 1961.
5. Гихман И.И., Скороход А.В. Теория случайных процессов, т.1 /И.И. Гихман, А.В. Скороход // М.: Наука. – 1971. – 664 с.
6. Borysenko O.D., Borysenko O.V., Borysenko D.O. Averaging method for autonomous third order random oscillating system / O.D. Borysenko, O.V. Borysenko, D.O. Borysenko // Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series: Physics & Mathematics – 2013. – №4. – P. 7 – 11.
7. Ikeda, N. and Watanabe, S. Stochastic Differential Equations and Diffusion Processes /N.Ikeda, S.Watanabe // North Holland, Amsterdam and Kadansha, Tokyo. – 1981. – 464 p.

References

1. BORYSENKO, O.D. and BORYSENKO, O.V. (2010), "Averaging method for autonomous fourth order oscillating system under the action of random perturbations", *Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series: Physics & Mathematics*, №4, pp. 11 – 15.
2. BORYSENKO, O.D. and BORYSENKO, O.V. (2011), "Limit behavior of autonomous fourth order oscillating system under the action of random perturbations in the case of complex roots of characteristic equation", *Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series: Physics & Mathematics*, №2, pp. 7 – 11.
3. BORYSENKO, O.D. and BORYSENKO, O.V. (2012), "Limit behavior of autonomous fourth order oscillating system under the action of random perturbations in the case of two pairs of imaginary adjoined under the action of random perturbations in the case of two pairs of imaginary adjoined roots of characteristic equation", *Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series: Physics & Mathematics*, №3, pp. 10 – 14.
4. SKOROKHOD, A.V. (1965) *Studies in the Theory of Random Processes*, Addison-Wesley.
5. GIKHMAN, I.I. and SKOROKHOD, A.V. (1971), *Teoriya sluchainykh processov, v.1*, M.: Nauka.
6. BORYSENKO, O.D., BORYSENKO, O.V. and BORYSENKO, D.O. (2013), "Averaging method for autonomous third order random oscillating system", *Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series: Physics & Mathematics*, №4, pp. 7 – 11.
7. IKEDA, N. and WATANABE, S. (1981), *Stochastic Differential Equations and Diffusion Processes*, North Holland, Amsterdam and Kadansha, Tokyo.

Received: 10.06.2015

УДК 512.53

Десятерик О.О., аспірант

Варіанти комутативних зв'язок з нулем

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 01033, Київ, вул. Володимирська, 64.

e-mail: sasha.desyaterik@gmail.com

O.O. Desiateryk, Ph.D student

Variants of commutative bands with zero

Taras Shevchenko National University of Kyiv, 01033, Kyiv, 64 Volodymyrska st.

e-mail: sasha.desyaterik@gmail.com

Для комутативної зв'язки з нулем у термінах відповідного часткового порядку, встановлено критерій ізоморфності двох варіантів. За допомогою цього критерію описані варіанти множини натуральних чисел з операціями мінімум та найбільший спільний дільник двох елементів, булеану нескінченної множини та решітки підпросторів зліченновимірного векторного простору.

Ключові слова: напівгрупа, варіант, комутативна зв'язка.

We consider the semigroup with the new operation, which is replace a standard product of two elements on product of three elements, where central one is some fixed element of the semigroup. The semigroup with this operation is called the variant.

In this paper we study the variants of a commutative band with zero, we obtain an isomorphism criteria for two variants of a semigroups of this type. Later we focus our attention on applying this criteria to particular infinite semigroups. Using this criterion, we describe variants of the set of natural numbers with the operations minimum and great common divisor of two natural numbers. We show that all variants of the set natural numbers with usual order are non-isomorphic. The main criterion is also used to classify variants of the power set of an infinite set and the lattice of subspaces of an countable-dimensional vector space.

Key Words: semigroup, variant, commutative band.

Communicated by Prof. Kyrychenko V. V.

1 Introduction

Let S be a semigroup with the operation denoted by a dot $(\cdot)$. Frequently we will omit the dot, writing xy for $x \cdot y$.

Let a be a fixed element of a semigroup S . For arbitrary $x, y \in S$ operation $*_a$ defined on the set S by $x *_a y = x \cdot a \cdot y$. We will write

$$x *_a y = xay, \quad (x, y \in S).$$

This binary operation $*_a$ is associative. Then $(S, *_a)$ is a semigroup, which is called a variant of the semigroup S .

The study of variants was initiated in the acclaimed Lyapin's monograph [1]. Although Lyapin formulated this notion for transformation semigroups.

Later on various authors have studied variants of other classes of semigroups. Variants of semigroups of binary relation has been studied by Chase in [2] and [3].

Results on variants of a regular semigroup have been obtained by Hickey in [4] and [5], they

have also been studied by Khan and Lawson[6].

Other classes of semigroup were studied by Mazorchuk and Tsyaputa [7], and by Ganyushkin and Mazorchuk [8], more references could be find in [8],(Chaper 13).

In the present paper we consider variants of commutative bands with zero. A commutative band S is a lower semilattice with respect to the partial order

$$a \leq b \Leftrightarrow ab = a.$$

Note that variants of semilattices were studied in [9], main result in the paper cover the finite case of such semigroups. Also there are a few conclusions in which classification of particular finite semilattices is given.

In this paper we consider variants of the class of infinite semigroups which contain zero.

The main result of the paper is Theorem 1, which gives a criterion for variants of commutative band with zero to be isomorphic.

We use this criterion to describe variants of particular commutative bands with zero. Such as

the set of natural numbers with the operations $\min(n, m)$ and $\text{GCD}(n, m)$, the power set of an infinite set and the lattice of subspaces of an infinite-dimensional countable vector space.

This criterion could be used to classify variants of any finite or infinite semigroup with zero. But it should be noted that parameter $\omega(x)$, the weight of the element x , is sensitive to the type of infinity.

For example, the Corollary 4 could not be directly applied to the infinite-dimensional vector space. Because for a countable-dimensional vector space the greatest value of $\omega(x)$ is countable but for an infinite-dimensional vector space it could reach not only a countable but a continual value. And the possibility of direct generalization to the infinite-dimensional spaces is not obvious.

Let $U \subset V$ and $W \subset V$ be subspaces of countable-dimensional vector space V .

The Proposition 1 is an isomorphism criteria for two lattices of subspaces $\mathcal{L}(U)$ and $\mathcal{L}(W)$ of subspaces U and W .

This proposition is one of the major statements which are used to prove the Corollary 4.

2 Main theorem

Recall that a band is a semigroup S in which every element is idempotent. Such a semigroup has a natural partial order:

$$a \leq b \text{ if and only if } ab = ba = a.$$

A commutative band S is a lower semilattice with respect to the partial order on S . The greatest lower bound $a \wedge b$ of two elements a and b with respect to this partial order coincides with their product ab . Vice versa, every lower semilattice S is a commutative band with respect to $\wedge$.

If there exists a zero element in a commutative band, it coincides with the least element of the corresponding semilattice. For a finite commutative band S , the zero is a product of all elements from S .

We define the interval $S_{[a,b]}$ of a commutative band as the set

$$S_{[a,b]} = \{x \in S \mid x \cdot a = a, b \cdot x = x\}.$$

Let a be a fixed element of a commutative band S with zero. For every element $x \in S_{[0,a]}$, we

define the set

$$\Omega(x) = \{y \in S \mid a \cdot y = x\},$$

and the weight $\omega(x)$ of the element x by $\omega(x) = |\Omega(x)|$.

Theorem 1. *Two variants $(S, *_a)$ and $(S, *_b)$ of a commutative band S with zero are isomorphic if and only if there exists an isomorphism from $S_{[0,a]}$ to $S_{[0,b]}$, which preserves the weights of all elements.*

Proof. Necessity. Let variants $(S, *_a)$ and $(S, *_b)$ of the semigroup S be isomorphic, and let

$$\varphi : (S, *_a) \rightarrow (S, *_b) \quad \text{and} \quad \psi : (S, *_b) \rightarrow (S, *_a)$$

be mutually inverse isomorphisms. Then for every $x, y \in S$ the following equalities hold:

$$\begin{aligned} \varphi(x \cdot a \cdot y) &= \varphi(x) \cdot b \cdot \varphi(y), \\ \psi(x \cdot b \cdot y) &= \psi(x) \cdot a \cdot \psi(y). \end{aligned} \quad (1)$$

If $x = y = a$, then we get from the first equality $\varphi(a \cdot a \cdot a) = \varphi(a) \cdot b \cdot \varphi(a)$, which implies $\varphi(a) = \varphi(a) \cdot b$.

Similarly, if $x = y = b$, then from the second equality in (1) we obtain $\psi(b) = \psi(b) \cdot a$.

Applying isomorphism φ to the both parts of the equality $\psi(b) = \psi(b) \cdot a$, we get a chain of equalities:

$$\begin{aligned} b &= \varphi(\psi(b)) = \varphi(\psi(b) \cdot a) = \varphi(\psi(b) \cdot a \cdot a) = \\ &= \varphi(\psi(b)) \cdot \varphi(a) \cdot \varphi(a) = b \cdot \varphi(a) = \varphi(a). \end{aligned}$$

Using a similar argument, we can prove that $a = \psi(b)$.

Further we will show that isomorphism φ maps every element from $S_{[0,a]}$ to the element from $S_{[0,b]}$. Indeed, let $x \in S_{[0,a]}$. Then $x = x \cdot a$. Applying isomorphism φ to the both parts of this equality, we obtain a chain of equalities:

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \varphi(x \cdot a) = \varphi(x \cdot a \cdot x) = \varphi(x *_a x) = \\ &= \varphi(x) *_b \varphi(x) = \varphi(x) \cdot b \cdot \varphi(x) = \varphi(x) \cdot b. \end{aligned}$$

Since $\varphi(x) = \varphi(x) \cdot b$, then $\varphi(x) \in S_{[0,b]}$. Hence, $\varphi(S_{[0,a]}) \subseteq S_{[0,b]}$.

In the same way we can prove that $\psi(S_{[0,b]}) \subseteq S_{[0,a]}$. Therefore, $\varphi(S_{[0,a]}) = S_{[0,b]}$ and $\psi(S_{[0,b]}) = S_{[0,a]}$. Then the restriction $\tilde{\varphi}$ of the isomorphism φ to $S_{[0,a]}$ is an isomorphism between $(S_{[0,a]}, *_a)$ and $(S_{[0,b]}, *_b)$; the restriction $\tilde{\psi}$ of an

isomorphism ψ to $S_{[0,b]}$ is an isomorphism between $(S_{[0,b]}, *_b)$ and $(S_{[0,a]}, *_a)$.

For $x, y \in S_{[0,a]}$,

$$x *_a y = x \cdot a \cdot y = x \cdot y.$$

Hence, the operations $\cdot$ and $*_a$ coincide on $S_{[0,a]}$. Analogously, the operations $\cdot$ and $*_b$ coincide on $S_{[0,b]}$. Hence, mappings $\tilde{\varphi}$ and $\tilde{\psi}$ are mutually inverse isomorphisms between $S_{[0,a]}$ and $S_{[0,b]}$.

It remains to prove that these isomorphisms preserve weights of the elements. Let $x \in S_{[0,a]}$. Then for any $y \in \Omega(x)$ the equality $x = y \cdot a$ implies

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \varphi(y \cdot a) = \varphi(y \cdot a \cdot a) = \varphi(y *_a a) = \\ &= \varphi(y) *_b \varphi(a) = \varphi(y) \cdot b \cdot b = \varphi(y) \cdot b.\end{aligned}$$

Hence, an isomorphism φ maps every set $\Omega(x)$, where $x \in S_{[0,a]}$, to the set $\Omega(\varphi(x))$, where $\varphi(x) \in S_{[0,b]}$. Since the inverse isomorphism ψ maps $\Omega(\varphi(x))$ to $\Omega(x)$, then these sets have the same cardinality. Since $\tilde{\varphi}(x) = \varphi(x)$, we get:

$$\omega(\tilde{\varphi}(x)) = \omega(\varphi(x)) = |\Omega(\varphi(x))| = |\Omega(x)| = \omega(x).$$

Sufficiency. Let $\tilde{\varphi}$ be an isomorphism between $S_{[0,a]}$ and $S_{[0,b]}$, which preserves the weights of elements. We will show that $\tilde{\varphi}$ can be extended to an isomorphism $\varphi : (S, *_a) \rightarrow (S, *_b)$ between corresponding variants.

From the definition of $\Omega(x)$ it follows that family of sets $\Omega(x)$, $x \in S_{[0,a]}$, forms a partition of the semigroup S . The family of sets $\Omega(\tilde{\varphi}(x))$, $\tilde{\varphi}(x) \in S_{[0,b]}$ is also a partition of S . Since $\tilde{\varphi}$ preserves weights of elements, then for every $x \in [0, a]$ the sets $\Omega(x) \setminus \{x\}$ and $\Omega(\tilde{\varphi}(x)) \setminus \{\tilde{\varphi}(x)\}$ have the same cardinality. For every element $x \in [0, a]$ we introduce a bijection

$$\varphi'_x : (\Omega(x) \setminus \{x\}) \rightarrow (\Omega(\tilde{\varphi}(x)) \setminus \{\tilde{\varphi}(x)\})$$

and extend it to a bijection

$$\varphi_x : \Omega(x) \rightarrow \Omega(\tilde{\varphi}(x)),$$

by setting $\varphi_x = \tilde{\varphi}(x)$. This family of bijections φ_x , $x \in S_{[0,a]}$, can be combined into one bijection

$$\varphi : (S, *_a) \rightarrow (S, *_b),$$

where $\varphi(z) = \varphi_x(z)$ for $z \in \Omega(x) \setminus \{x\}$.

To complete the proof, we have to show that φ is a homomorphism of semigroups. We choose

arbitrary elements $u, v \in S$ and let $u \in \Omega(x)$, $v \in \Omega(y)$. Since

$$u *_a v = u \cdot a \cdot v = u \cdot a \cdot a \cdot v = x \cdot y,$$

then the element $u *_a v$ is in the interval $[0, a]$. Hence $\varphi(u *_a v) = \tilde{\varphi}(x \cdot y) = \tilde{\varphi}(x) \cdot \tilde{\varphi}(y)$. On the other hand, for the elements u and v we have

$$\begin{aligned}\varphi(u) *_b \varphi(v) &= \varphi(u) \cdot b \cdot \varphi(v) = \\ &= \varphi(u) \cdot b \cdot b \cdot \varphi(v) = \tilde{\varphi}(x) \cdot \tilde{\varphi}(y).\end{aligned}$$

Hence, $\varphi(u *_a v) = \varphi(u) *_b \varphi(v)$, and φ is a homomorphism. $\square$

3 Variants of particular commutative bands with zero

3.1 Natural numbers with usual order

Consider the natural numbers $\mathbb{N}$ with the usual order and with the operation $\min(n, m)$.

Corollary 1. *All variants of the set $\mathbb{N}$ with usual order are non-isomorphic.*

Proof. If m and n are different elements from $\mathbb{N}$, then intervals $[1, m]$ and $[1, n]$ have different cardinalities. This is why they are non-isomorphic. It follows from Theorem 1, that variants $(\mathbb{N}, *_m)$ and $(\mathbb{N}, *_n)$ are non-isomorphic too. $\square$

3.2 Natural numbers with the divisibility relation

Denote by $(\mathbb{N}, |)$ the set of natural numbers ordered by the divisibility relation.

On $(\mathbb{N}, |)$ we define the corresponding operation $\text{GCD}(n, m)$ — greatest common divisor of two numbers n and m .

For $n \in \mathbb{N}$, let $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_m^{k_m}$ be its canonical decomposition. We assign the multi-set $\text{pow}(n) = \{k_1, k_2, \dots, k_m\}$ of positive exponents to $n \in \mathbb{N}$.

Corollary 2. *Variants $((\mathbb{N}, |), *_n)$ and $((\mathbb{N}, |), *_t)$ are isomorphic if and only if the multi-sets $\text{pow}(n)$ and $\text{pow}(t)$ coincide.*

Proof. Since in the set $(\mathbb{N}, |)$ the greatest lower bound $a \wedge b$ of a and b is the greatest common divisor, then for every element x from the interval $[1, n]$ the set $\Omega(x)$ is countable. Hence, the weight of every element from the interval $[1, n]$ is equal to

$\aleph_0$. Therefore, it follows from Theorem 1 that variants $((\mathbb{N}, |), *_{\mathbb{N}})$ and $((\mathbb{N}, |), *_{\mathbb{N}})$ are isomorphic if and only if intervals $[1, n]$ and $[1, t]$ are isomorphic.

Denote by $(\mathbb{N}, |)$ a chain of length k , that is, the set of integers $\{0, 1, 2, \dots, k\}$ with the usual order. If $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_m^{k_m}$, then the interval $N_{[1, n]}$ is isomorphic to the Cartesian product of chains L_{k_i} , $i \in \{1, \dots, m\}$ that is

$$N_{[1, n]} \simeq L_{k_1} \times L_{k_2} \times \dots \times L_{k_m}.$$

Two products

$$L_{k_1} \times L_{k_2} \times \dots \times L_{k_m} \quad \text{and} \quad L_{q_1} \times L_{q_2} \times \dots \times L_{q_r}$$

are isomorphic if and only if the multi-sets $\{k_1, k_2, \dots, k_m\}$ and $\{q_1, q_2, \dots, q_r\}$ coincide.

Hence, the variants $((\mathbb{N}, |), *_{\mathbb{N}})$ and $((\mathbb{N}, |), *_{\mathbb{N}})$ are isomorphic if and only if the multi-sets $\text{pow}(n)$ and $\text{pow}(t)$ coincide. $\square$

3.3 The power set of an infinite set

Let $(\mathfrak{B}(M), \subseteq)$ be a power set of an infinite set M , that is, $(\mathfrak{B}(M), \subseteq)$ is the set of all subsets of M , ordered by inclusion.

Corollary 3. *Let A and B be subsets of the set M . Variants $(\mathfrak{B}(M), *_{\mathbb{N}})$ and $(\mathfrak{B}(M), *_{\mathbb{N}})$ are isomorphic if and only if one of the following two conditions holds:*

- (1) *the sets A and B have the same cardinality, which is less than cardinality of M ;*
- (2) *the cardinalities of both A and B are equal to that of M , and their complements $M \setminus A$ and $M \setminus B$ are equipotent.*

Proof. For every set $A \in \mathfrak{B}(M)$, the interval $[\emptyset, A]$ is isomorphic to the power set $\mathfrak{B}(A)$.

It follows from the generalized continuum hypothesis that the intervals $[\emptyset, A]$ and $[\emptyset, B]$ are isomorphic if and only if sets A and B have the same cardinality.

According to Theorem 1, in order to prove that variants $(\mathfrak{B}(M), *_{\mathbb{N}})$ and $(\mathfrak{B}(M), *_{\mathbb{N}})$ are isomorphic, we need to show that the sets A and B have the same cardinality.

Consider arbitrary element $X \in [\emptyset, A]$. Element Y of the power set $\mathfrak{B}(M)$ belongs to the set $\Omega(X)$ if and only if $A \cap Y = X$. Equivalently, Y has the form $Y = X \cup Z$, where Z is a subset of $M \setminus A$. Hence, the set $\Omega(X)$ has the same cardinality as the power set of $M \setminus A$.

Thus, all elements of the interval $X \in [\emptyset, A]$ have the same weight equal to $2^{|M \setminus A|}$.

Now let sets A and B have the same cardinality. Then the intervals $[\emptyset, A]$ and $[\emptyset, B]$ are isomorphic. The elements of every interval have the same weight.

Therefore, in order to prove the existence of a weight-preserving isomorphism, it is necessary and sufficient to show that elements of every interval have the same weight. Since the set M is infinite, then we have $|M \setminus A| = |M|$ whenever $|A| < |M|$.

Hence, if condition (1) holds, then elements of every interval $[\emptyset, A]$ and $[\emptyset, B]$ have the same weight $2^{|M|}$.

Thus, by Theorem 1, variants $(\mathfrak{B}(M), *_{\mathbb{N}})$ and $(\mathfrak{B}(M), *_{\mathbb{N}})$ are isomorphic. If both A and B are equipotent to M , then the equality of weights $2^{|M \setminus A|} = 2^{|M \setminus B|}$ is equivalent to

$$|M \setminus A| = |M \setminus B|,$$

and in this case condition (2) holds. $\square$

3.4 The lattice of subspaces of a countable-dimensional vector space

Let V be a countable-dimensional space over a finite field. Let $\mathcal{L}(V)$ denote the lattice of subspaces of the space V , ordered by inclusion. Let $U \subset V$ and $W \subset V$ be subspaces of V . Note that every subspace of the space V has finite or countable dimension.

Proposition 1. *The lattices of subspaces $\mathcal{L}(U)$ and $\mathcal{L}(W)$ are isomorphic if and only if the dimensions of subspaces U and W are equal.*

Proof. Sufficiency is obvious. Let lattices of subspaces $\mathcal{L}(U)$ and $\mathcal{L}(W)$ be isomorphic. From the Hausdorff maximality theorem it follows that every lattice has a maximal chain. If ψ is an isomorphism of lattices $\mathcal{L}(U)$ and $\mathcal{L}(W)$, then it maps a maximal chain of $\mathcal{L}(U)$ to that of $\mathcal{L}(W)$. Consider a maximal chain of subspaces of subspace U ; it has the form

$$0 \subset U_1 \subset U_2 \subset \dots \subset U.$$

The dimensions of subspaces $U_1, U_2, U_3, \dots$ are exactly $1, 2, 3, \dots$, hence the number of elements in the maximal chain is equal to $\dim(U)$. If $\dim(U) < \infty$, then the maximal chain is finite and its cardinality is equal to $\dim(U) + 1$.

On the other hand, the cardinality of maximal chain is infinite if and only if the subspace U has infinite dimension.

Then $\psi(0) \subset \psi(U_1) \subset \dots \subset \psi(U)$ is the maximal chain of the lattice $\mathcal{L}(W)$.

If the subspace U is a countable-dimensional space, then the maximal chain of its subspaces is infinite and $\dim(U) = \dim(W) = \infty$.

If U is finite-dimensional, then the corresponding maximal chain is finite and has cardinality $\dim(U) + 1$.

Since the corresponding maximal chains of $\mathcal{L}(U)$ and $\mathcal{L}(W)$ are of the same cardinality, then $\dim(U) + 1 = \dim(W) + 1$. Hence the equality $\dim(U) = \dim(W)$ holds. $\square$

Corollary 4. *Let U and W be subspaces of the vector space V . Variants $(\mathcal{L}(V), *_{\mathcal{U}})$ and $(\mathcal{L}(V), *_{\mathcal{W}})$ are isomorphic if and only if one of the following two conditions holds:*

(1) *the subspaces U and W have the same dimension less than that of V ;*

(2) *the dimensions of both U and W are equal to that of V , and their co-dimensions $\text{codim}(V/U)$ and $\text{codim}(V/W)$ are equal.*

Proof. For every subspace U , the interval $[\{0\}, U]$ is isomorphic to the lattice of its subspaces $\mathcal{L}(U)$. The weight of an element $X \in \mathcal{L}(U)$ is equal to the cardinality of $\Omega(X) = \{Y \in \mathcal{L}(V) \mid U \cap Y = X\}$. For each subspace $X \in [\{0\}, U]$ there exists a subspace $U' \in [\{0\}, U]$ such that $U' \cap U = X$ (possibly $U' = X$). Also there exists a subspace $\tilde{X} \in [\{0\}, U]$ such that $U = X \oplus \tilde{X}$.

Since $U' \cap U = X \Leftrightarrow (U' \oplus \tilde{X}) \cap U = U$, a bijection from $\Omega(U)$ to $\Omega(X)$ exists. Thus, these sets have the same cardinality. The sets $\Omega(U)$ and $\mathcal{L}(V/U)$ have the same cardinality.

Hence

$$|\Omega(X)| = |\Omega(U)| = |\mathcal{L}(V/U)|,$$

and all elements from $[\{0\}, U]$ have the same weight $|\mathcal{L}(V/U)|$.

Since lattices of subspaces $\mathcal{L}(U)$ and $\mathcal{L}(W)$ are isomorphic if and only if $\dim(U) = \dim(W)$ that provided by Proposition 1, then by Theorem 1 the variants $(\mathcal{L}(V), *_{\mathcal{U}})$ and $(\mathcal{L}(V), *_{\mathcal{W}})$ are isomorphic if and only if subspaces U and W have the same dimensions.

Hence, if condition (1) holds, then co-dimensions of subspaces U and W are equal to

the dimension of space V :

$$\begin{aligned} \text{codim}(V) &= \text{codim}(U) = \dim(V/U) = \\ &= \dim(V/W) = \dim(V). \end{aligned}$$

In this case lattices of subspaces $\mathcal{L}(U)$ and $\mathcal{L}(W)$ are isomorphic. Then all elements of this lattices have the same weight, which is equal to the cardinality of lattices $\mathcal{L}(V/U)$ and $\mathcal{L}(V/W)$.

By Theorem 1 variants $(\mathcal{L}(V), *_{\mathcal{U}})$ and $(\mathcal{L}(V), *_{\mathcal{W}})$ are isomorphic.

Let $\dim(U) = \dim(W) = \dim(V)$, then the lattices $\mathcal{L}(U)$ and $\mathcal{L}(W)$ are isomorphic. The variants $(\mathcal{L}(V), *_{\mathcal{U}})$ and $(\mathcal{L}(V), *_{\mathcal{W}})$ are isomorphic if and only if this isomorphism is weight-preserving. Since every element from the interval $[\{0\}, U]$ has the weight $|\mathcal{L}(V/U)|$ and every element from the interval $[\{0\}, W]$ has the weight $|\mathcal{L}(V/W)|$, then isomorphism of intervals is weight-preserving if and only if $\text{codim}(U) = \text{codim}(W)$, that is condition (2) holds. $\square$

4 Conclusions

Variants of commutative bands with zero are studied in the paper.

An isomorphism criterion for variants of a lower semilattice with zero is proved. It could be applied to both finite and infinite bands with zero.

This criterion is used to classify variants of particular commutative bands up to isomorphism. We obtained classification for variants of the set of natural numbers with the operations $\min(n, m)$ and $\text{GCD}(n, m)$. The main criterion also is used to describe variants of the power set of an infinite set.

In the final section an isomorphism criteria for two lattices of subspaces is proved.

Later this proposition and main criterion is used to classify variants of the lattice of subspaces of an infinite-dimensional countable vector space.

Список використаних джерел

1. *Ляпин Е.* Полугруппы. / Е. Ляпин. — Москва: ФИЗМАТГИЗ, 1960. — 592 с.
2. *Chase K.* Sandwich semigroups of binary relations. / K. Chase // *Discrete Math.* — 1979. — V. 28(3). — P. 231–236.
3. *Chase K.* New semigroups of binary relation. / K. Chase // *Semigroup Forum.* — 1979. — V. 18. — P. 79–82.
4. *Hickey J.* Semigroups under a sandwich operation. / J. Hickey // *Proc. Edinburg Math. Soc.* (2). — 1983. — V. 26(3). — P. 371–382.
5. *Hickey J.* On variants of a semigroup. / J. Hickey // *BULL. AUSTRAL. MATH. SOC.* — 1986. — V. 34. — P. 447–459.
6. *Khan T.* Variants of regular semigroups / T. Khan, M. Lawson // *Semigroup Forum.* — 2001. — V. 62(3). — P. 358–374.
7. *Mazorchuk V.* Isolated subsemigroups in the variants of $\mathcal{Y}_n$ / V. Mazorchuk, G. Tsyaputa // *Acta Math. Univ. Com.* — 2008. — V. LXXVII, 1. — P. 63–84.
8. *Ganyushkin O.* Classical Finite Transformation Semigroups. An Introduction. / O. Ganyushkin, V. Mazorchuk. — Algebra and Applications, 9. London: Springer–Verlag, 2009. — xii, 314 p.
9. *Ganyushkin O.* Variants of a semilattice / O. G. Ganyushkin, O. O. Desiateriyk // *Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv Series: Physics & Mathematics.* — 2013. — V. 4. — P. 12–16.

References

1. LIAPIN, E. (1960) *Polugruppy*. Moskva: FIZMATGIZ.
2. CHASE, K. (1979) Sandwich semigroups of binary relations. *Discrete Math.* 28(3). pp.231–236.
3. CHASE, K. (1979) New semigroups of binary relation. *Semigroup Forum.* 18. pp. 79–82.
4. HICKEY, J. (1983) Semigroups under a sandwich operation. *Proc. Edinburg Math. Soc.*(2) 26(3). pp. 371–382.
5. HICKEY, J. (1986) On variants of a semigroup. *BULL. AUSTRAL. MATH. SOC.* 34. pp. 447–459.
6. KHAN, T., LAWSON, M. (2001) Variants of regular semigroups. *Semigroup Forum.* 62(3). pp. 358–374.
7. MAZORCHUK, V., TSYAPUTA, G. (2008) Isolated subsemigroups in the variants of $\mathcal{Y}_n$. *Acta Math. Univ. Com.* LXXVII(1). pp. 63–84.
8. GANYUSHKIN O., MAZORCHUK, V. (2009) *Classical Finite Transformation Semigroups. An Introduction*. Algebra and Applications. London: Springer–Verlag.
9. GANYUSHKIN O., DESIATERYK O. (2013) Variants of a semilattice. *Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv Series: Physics & Mathematics.* 4. pp. 12–16.

Received: 09.07.2015

УДК 517.91

І. М. Іванюк¹,
О. О. Пришляк², д. ф.-м. н., професор

Деформація векторних полів на неорієнтованих поверхнях

¹Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, м. Київ, просп. Глушкова, 4е

²Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, м. Київ, просп. Глушкова, 4е
E-mail: ¹ivanna.ivanyuk@gmail.com

I. M. Ivanyuk¹,
A. O. Prishlyak², Dr. Si., Professor

Deformation of vector fields on non-orientable surfaces

¹Taras Shevchenko National University of Kyiv,
Kyiv, Hlushkova prosp., 4e

²Taras Shevchenko National University of Kyiv,
Kyiv, Hlushkova prosp., 4e
E-mail: ²prishlyak@yahoo.com

Розглядаються деформації векторних полів на неорієнтованих поверхнях використовуючи поняття атомів та молекул функції за Фоменком. Описуються всі можливі переходи для неорієнтованих атомів, складність яких не перевищує 3, за допомогою операцій ковзання і скорочення ручок. Складено таблицю всіх суміжних графів; доведено, що два поля можна з'єднати шляхом, якщо існує відповідна послідовність суміжних графів, а також, що якщо двом сім'ям відповідають однакові оснащені послідовності, то вони топологічно еквівалентні.

Ключові слова: Атоми та молекули функцій Морса, f -граф, деформація векторного поля, топологічна класифікація.

Deformations of vector fields on non-orientable surfaces are investigated using notions of atoms and molecules of function by Fomenko. In general position vector field is a Morse-Smale field. But in one-parametrized family of vector fields this condition for vector field can be false. Handle decomposition of surface can be constructed using neighborhoods of stable manifolds of singular points. The atom of function, which is the neighborhood of critical level, can be described using handle attaching. Deformation of vector fields correspond transition of correspondent atoms. We describe all possible transitions for non-oriented atoms of complexity does not exceed 3 by means of operations of the slide and the reduction of the handles. We made a table of all adjacent graphs and proved that two fields can be connected by path if there exists a correspondent sequence of related graphs connecting corresponding atoms. When there several transition from one atom to another, we fix one of them using equipment. If two families correspond to the identical equipped sequences, then they are topologically equivalent.

Key words: Atoms and molecules of Morse functions, f -graph, deformation of vector field, topological classification.

Статтю представив д. ф.-м. н. проф. Кириченко В.В.

Introduction. Bifurcation theory of dynamical systems is a theory that studies the changes of the qualitative picture of the partition of the phase space, depending on the variation of the parameter (or several parameters).

Bifurcation is obtaining a new quality in the movements of a dynamic system at a small change in its parameters. The central concept of bifurcation theory is the concept of stable system. They take any dynamic system and consider a manyparametric family of dynamical systems that the original system is obtained as a special case - at any one value of the parameter(s). If the value of the parameters that are sufficiently close to this, there remains a qualitative picture of the partition of the phase space in the path, then the system

is called rough. Otherwise, if a neighborhood does not exist, the system is called unstable.

Bifurcation theory considers the small parameter changes, and we consider major option changes when passing several bifurcations. In bifurcation theory invariants are applied, and we will use atoms and molecules introduced into the [1] for Morse functions. In the two-dimensional case Morse-Smale systems are structurally stable.

We consider how the atom is given in the form f -graph. The idea of atoms and molecules is applied to trajectory classification Morse-Smale flows on closed two-dimensional surfaces. Various applications of atoms and molecules are in the works [3], [1], [4] developed this approach; bifurcations theory considered in [7].

The main purpose of the research is to explore the topological properties of the family of Morse-Smale vector fields using atoms and molecules; to describe all possible transitions for atoms, the complexity of which is not greater than 3. We proved for orientable graphs in [2], and now explore non-orientable case.

Atoms and f -graphs

Definition 1. An atom is a neighborhood P^2 of a critical fiber (which is defined by the inequality $c - \epsilon \leq f \leq c + \epsilon$ for sufficiently small ϵ), foliated into level lines of f and considered up to the fiber equivalence. An f -atom is a atom with fixed direction of the function arising.

Definition 2. A finite connected graph Γ is said to be an f -graph if the following conditions hold:

- 1) All vertices have degree 3.
- 2) Some of the edges of graph Γ are oriented, and each vertex is adjacent to two oriented edges, one of which enters this vertex and other goes out of it. A vertex can be the beginning and the end of the same oriented edge if this edge is a loop.
- 3) Each non-oriented edge of graph Γ is endowed with a number ± 1 .

Definition 3. We call two f -graphs *equivalent* if one of them can be obtained from the other by a sequence of the following operations. It is allowed to change orientation on all the edges of a certain cycle and at the same time, to change all marks on the non-oriented edges incident to this cycle. If both of a non-oriented edges belong to the same cycle, then the mark is not changed. The equivalence classes of f -graphs are called f -invariants.

There exists a natural one-to-one correspondence between f -invariants and f -atoms.

We show how the idea of atoms and molecules can be applied to the problem of orbital classification of Morse-Smale flows on closed two-dimensional surfaces.

Vector fields v_1 and v_2 given on closed surfaces M_1 and M_2 are called *topologically orbitally equivalent* if there exists a homeomorphism $h : M_1 \rightarrow M_2$ that sends the trajectories of the vector field v_1 to those of v_2 while preserving their natural orientation.

Definition 4. Vector field v on a manifold M is called *structurally stable* if the topological behavior of its trajectories is not changed under small

perturbations; i.e., after any sufficiently small perturbation $v \rightarrow \tilde{v}$ the field $\tilde{v}$ remains orbitally topologically equivalent to v .

Structurally stable vector fields on two-dimensional surfaces are exactly Morse-Smale fields. In the case of two-dimensional surfaces, they can be defined as following way.

A vector field v on a closed two-dimensional surface M^2 is called a *Morse-Smale field* if:

- 1) v has a finite number of singular points and closed trajectories, and all of them are hyperbolic;
- 2) there are no trajectories going from a saddle to a saddle;
- 3) for each trajectory of v , its α -limit ω -limit sets are either a singular point or a closed trajectory, a limit cycle.

We describe the classification of Morse-Smale flows with no closed trajectories. Such flows are called Morse flows.

Morse flows have another natural description. They are exactly gradient-like flows without separatrices going from one saddle to another. A flow is called *gradient-like* if it is topologically orbitally equivalent to the flow $\text{grad}f$ for some Morse function f and Riemannian metric g_{ij} on the manifold M . Each Morse flow on a two-dimensional surface M^2 can be associated with some f -graph or f -atom, in such a way that the correspondence between f -atoms and topological orbital equivalence classes of Morse flows will be bijective. Let us describe this construction explicitly.

The singular points of a Morse flow can be divided into three types: sources, links, and saddles. Besides, the flow has separatrices that connect sources and sinks with saddles. Each saddle has two incoming and two outgoing separatrices.

Consider a small circle around each source which is transversal to the flow. Choose some orientation on it and mark the points of intersection with the separatrices. Consider a graph whose vertices are the marked points and whose edges are of two types. The edges of the first type are the arcs of the circles around sources, the edges of the second type are the curves consisting of two separatrices connecting the pair of vertices. As a result, each vertex is incident to three edges, two of which (edges of the first type) are oriented, but the third (an edge of the second type) is not. This sets the atom of Morse-Smale field.

Atoms of Morse-Smale fields

We consider only the gradient-like Morse-Smale fields, field without closed trajectories.

Let M be a closed two-dimensional surface with a Riemannian metric on it.

Let M be a closed two-dimensional surface with a Riemannian metric on it. Consider a Morse function $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ all of whose critical points are located on the same level $f^{-1}(c)$, and consider its gradient flow with respect to the given Riemannian metric. The mapping $f \rightarrow \text{grad} f$ establishes a natural one-to-one correspondence between fiber equivalence classes of such functions and orbital topological equivalence classes of Morse flows on M .

This one-to-one correspondence does not depend on the choice of a Riemannian metric on M [5].

Class T_i of vector field represents all vector fields which have no more than " i " saddle points.

Two families X_t and Y_t topologically equivalent if there is a homeomorphism $h : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ and there is a set of homeomorphisms $\varphi_t : M \rightarrow M$, $t \in [0, 1]$, such that they are topological equivalences between the vector fields X_t and vector fields $Y_{h(t)}$.

Let M be n -dimensional manifold with boundary M .

n -dimensional disk H is called *handle of index λ* (or λ -*handle*) if there is a homeomorphism $\varphi : D^\lambda \times D^{n-\lambda} \rightarrow H$ such that $\varphi(\partial D^\lambda \times D^{n-\lambda}) = H \cap M \subset \partial M$.

Definition. *Handle decomposition of a closed manifold M* is called the decomposition $M = H_0 \cup H_1 \cup \dots \cup H_m$ where H_0 – n -dimensional disk and H_i – handle attached to $M_{i-1} = \bigcup_{j < i} H_j$.

While working with handles we will use the operations of handles slide and reduction [6].

There is one atom of complexity 1, 4 atoms of complexity 2, which correspond 6 f -graphs and 25 atoms of complexity 3, which correspond to 43 f -graphs. They are depicted in Fig.1-3

Deformation of vector fields We say that two atoms are adjacent if one can be obtained from the other using handles reduction and sliding operations.

Theorem 1. *All possible pairs of adjacent atoms of complexity 1–3 are given in the table.*

1	B_{11}	D_{11}, D_{12}
2	C_{11}	$D_{11}, E_{22}, F_{11}, F_{21}$
3	C_{12}	E_{31}, E_{42}, F_{52}
4	C_{21}	E_{31}, E_{51}, F_{21}
5	D_{11}	$B_{11}, C_{11}, E_{22}, F_{11}, F_{21}, F_{51}, H_{31}, H_{41}$
6	D_{12}	$B_{11}, H_{31}, G_{42}, G_{52}, G_{62}, G_{72}$
7	D_{21}	$G_{22}, G_{21}, F_{21}, F_{41}$
8	E_{11}	$E_{12}, E_{22}, F_{11}, F_{21}$
9	E_{12}	$E_{11}, E_{21}, F_{11}, F_{21}$
10	E_{21}	E_{12}, F_{11}
11	E_{22}	E_{11}, F_{11}
12	E_{31}	$C_{12}, E_{41}, F_{31}, F_{41}$
13	E_{32}	E_{42}, F_{32}, F_{42}
14	E_{41}	E_{31}, E_{51}, F_{41}
15	E_{42}	$C_{12}, E_{32}, E_{51}, F_{42}, F_{71}$
16	E_{51}	$C_{21}, E_{41}, E_{51}, F_{31}$
17	E_{52}	E_{42}, E_{61}, F_{32}
18	E_{61}	E_{52}, E_{62}, F_{61}
19	E_{62}	E_{61}, F_{62}, F_{71}
20	E_{71}	F_{52}
21	E_{72}	F_{51}
22	F_{11}	$E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}, G_{11}, H_{11}$
23	F_{21}	E_{11}, E_{12}
24	F_{31}	$C_{21}, E_{31}, E_{51}, E_{51}, G_{21}, H_{21}$
25	F_{32}	$C_{21}, E_{32}, E_{52}, G_{22}, H_{22}$
26	F_{41}	$D_{21}, E_{31}, E_{41}, G_{21}, G_{31}, H_{21}$
27	F_{42}	$E_{32}, E_{42}, E_{61}, G_{22}, G_{32}, H_{22}$
28	F_{51}	$C_{11}, D_{11}, E_{72}, G_{61}, G_{71}, H_{41}$
29	F_{52}	$C_{12}, E_{71}, G_{61}, G_{71}, H_{42}$
30	F_{61}	$C_{12}, E_{52}, E_{61}, G_{41}, G_{51}, H_{31}$
31	F_{62}	$C_{11}, D_{12}, E_{62}, G_{42}, G_{51}, H_{31}$
32	F_{71}	$D_{12}, E_{42}, E_{62}, G_{41}, G_{42}, H_{31}$
33	G_{11}	F_{11}
34	G_{21}	$D_{21}, F_{11}, F_{31}, F_{41}, H_{21}$
35	G_{22}	$D_{21}, F_{31}, F_{41}, H_{22}$
36	G_{31}	F_{41}
37	G_{32}	F_{42}
38	G_{41}	D_{12}, F_{61}, F_{71}
39	G_{42}	D_{11}, F_{62}, F_{71}
40	G_{51}	$D_{11}, D_{12}, F_{61}, F_{62}, H_{31}$
41	G_{61}	D_{11}, F_{51}, H_{41}
42	G_{62}	D_{12}, F_{52}, H_{42}
43	G_{71}	D_{11}, F_{51}, H_{41}
44	G_{72}	D_{12}, F_{52}, H_{42}
45	H_{11}	F_{11}
46	H_{21}	$D_{21}, F_{31}, F_{41}, G_{21}$
47	H_{22}	$D_{21}, F_{32}, F_{42}, G_{22}$
48	H_{31}	$D_{11}, D_{12}, F_{61}, F_{62}, F_{71}, G_{51}$
49	H_{41}	$D_{11}, F_{51}, G_{61}, G_{71}$
50	H_{42}	$D_{12}, F_{52}, G_{62}, G_{72}$

Proof. We obtain B_{11} from D_{11} by glueing up

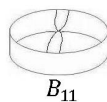


Fig. 1: non-orientable f -graph of complexity 1

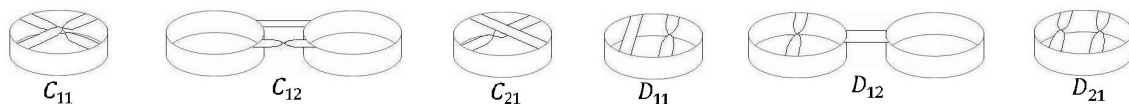


Fig. 2: non-orientable f -graphs of complexity 2

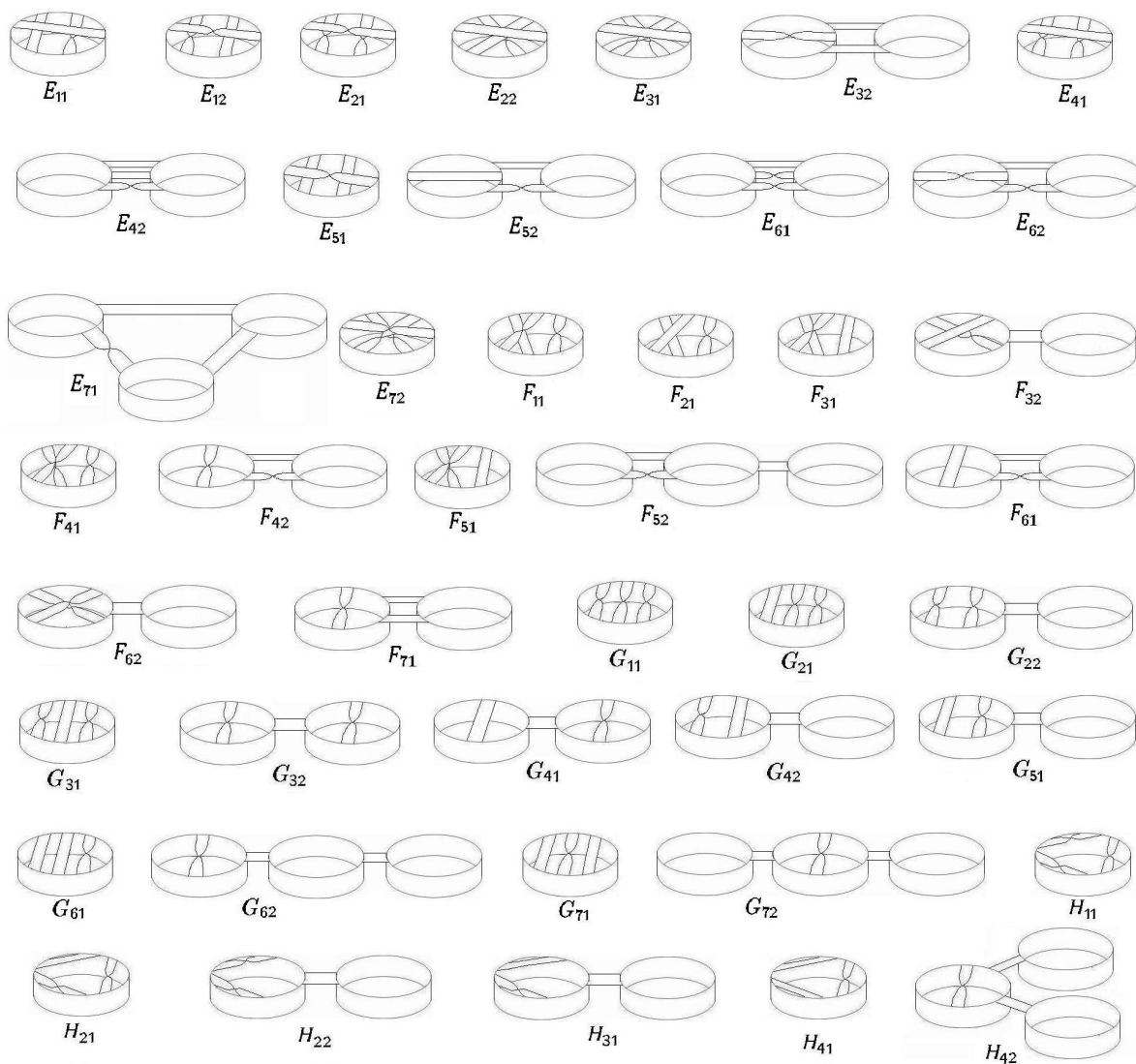


Fig. 3: non-orientable f -graphs of complexity 3

a handle with a disk. Similarly glueing up a handle with a disk we obtain

D_{11} from G_{61}, G_{71}, H_{41} ;
 D_{12} from H_{31}, G_{51} ;
 C_{11} from F_{51} ,
 C_{12} from F_{61} .

We obtain B_{11} from D_{12} by applying a property of handles reduction. From C_{21} to D_{21} one can get by sliding the handle. We obtain D_{21} from G_{21} by glueing up a oriented handle with a disk. From G_{42} to D_{11} we can get by reducing the handle. Using the property of reducing handles we obtain

C_{11} from F_{62} ,
 D_{21} from G_{22} ,
 D_{12} from G_{62} ,
 D_{12} from G_{72} ,
 D_{21} from H_{22} ,
 D_{11} from H_{32} ,
 D_{12} from H_{42} .

Slide handles there is a transition from C_{11} to D_{11} , E_{11} to E_{12} , E_{22} , F_{11} and F_{21} . Similarly sliding the handle we obtain

G_{21}, F_{31}, F_{41} from H_{21} ;
 E_{11}, E_{12} from F_{21} ;
 D_{12}, F_{52}, H_{42} from G_{72} .

Thus, carrying out similar reasoning with the rest of the f -graphs, we will receive all pairs of adjacent elements.

Theorem 2. *If two families are topologically equivalent in the class of T_i , then they set the same sequence of adjacent graphs.*

Proof. Each t corresponds to the graph, except for a finite number of t_k , in which there is a change from one element to another, t_k corresponds to the edges connecting these graphs. Then since $Y_{h(t)}$ is topologically equivalent to X_t , the same f -graphs correspond to them in case when $t = t_k$. Consequently, the corresponding sequences have the same row and adjacent edges, i.e. they coincide.

Conducting considerations in reverse order, we get the following theorem:

Theorem 3. *Two fields of class T_i can be connected by path (family of vector fields) in the class of T_i if there exists a sequence of related graphs connecting corresponding atoms.*

Let the number of movements from one atom to another be n . Let's number possible movement from one atom to the other by integers. These numbers will be called equipment. The sequence of adjacent graphs, each pair of which is specified by equipment, we will call equipped.

Theorem 4. *If two families correspond to identical equipped sequences, then they are topologically equivalent.*

Proof. We can depict the "n" multiple adjacent graphs, then each feature sequence will correspond to one family of vector fields. In case of the vector field deformation, the following situations are possible: 1) topological type of a vector field does not change, then this family is given by Fomenko atom; 2) the bifurcation happens, so the topological type changes. In this case, the deformation is given by a pair of atoms. Then depict all such possible bifurcations. If several bifurcations occur consistently, then they set a sequence of adjacent atoms.

Conclusions

The topological properties of family of vector fields were investigated. All the possible transitions for non-orientable atoms, complexity of which is not greater than 3, was described.

The received results can be used while studying contact structures on 3-dimensional manifolds, namely, when Morse function is given on manifold. If there are no critical levels between two regular levels of this function, then there is a family of vector fields on the surface, which are Morse-Smale fields in general.

In addition, the results will be of interest in the study of deformation of Morse functions that are undergoing similar processes of reducing critical points, but which differ from the flows so that the addition of handles replaced by changing the order of the critical points.

Список використаних джерел

References

1. Болсинов А.В. Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация/ А.В. Болсинов, А.Е. Фоменко // Удмуртский ун-т. – 1999. –1. – 444с.
2. Пришляк О.О. Топологія сім'ї векторних полів на поверхні/ О.О. Пришляк, І.М. Іванюк// Proc. Intern. Geom. Center. – 2013. – 6. – №4. – p.44-51.
3. Болсинов А.В. Топологическая классификация интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы. Список систем малой сложности / А.В. Болсинов, С.В.Матвеев, А.Т.Фоменко// УМН, – 1990. – 45. – №2. – с.49-77.
4. Ошемков А.А О классификации потоков Морса–Смейла на двумерных многообразиях / А.А. Ошемков, В.В. Шарко // Матем. сб. – 1998. – 189. – №8. - с.93-140.
5. Meyer K. R. Energy functions for Morse-Smale systems/ K.R. Meyer // Amer/ J/ Math.. – 1968. – 90. – №4. - pp.1031-1040.
6. Кузаконь В.М Гладкі многовиди. Геометричні та топологічні аспекти / В.М. Кузаконь, В.Ф. Кириченко, О.О. Пришляк // К.: Пр. Ін-ту мат. НАНУ. – 2013. – 97. – 500с.
7. Арнольд В.И Теория бифуркаций / В.И. Арнольд // Физматлит, - 1980. - 218р.
8. Власенко И.Ю. Топологические методы в изучении групп преобразований многообразий / И.Ю. Власенко, С.И. Максименко, Е.А. Полулях // К.: Тр. Ин-та мат. НАНУ. – 2006. – 61. – 338с.
1. BOLSINOV A.V. and FOMENKO A.T.(1999) *Integrable Hamiltonian systems. Geometry, Topology and Classification*, Publ. Houses Udmurtia University, v.1.
2. PRISHLYAK O.O., IVANYUK I.M. (2013) "Topology of set of vector fields on surface Proc. Intern. Geom. Center, vol.6, №4, p.44-51.
3. BOLSINOV A.V.,MATVEEV S.V. and FOMENKO A.T. (1990) "Topological classification of integrable Hamiltonian systems with two degrees freedom. List of systems of small complexity UMN, v.45, №2. p.49-77.
4. OSHEMKOV A.A. and SHARKO V.V. (1998) "Classification of Morse-Smale flows on two-dimensional manifolds Math., v. 189, №8, p.93-140.
5. MEYER K.R. (1968) "Energy functions for Morse-Smale systems Math., v.90, №4, pp. 1031-1040.
6. KUZAKON V.M, KIRICHENKO V.F. and PRISHLYAK O.O (2013) *Smooth manifolds. Geometric and topological aspects*, proceedings of Institute of mathematics vol.97, K.
7. ARNOLD V.I. (1980) *Bifurcation theory*, Physmathlit.
8. VLASENKO I.U., MAKSIMENKO S.I. and POLULYAH E.A. (2006) *Topological methods in the study of transformation groups of manifolds*, Proceedings of Institute of Mathematics, v.61, Kiev: Institute of Mathematics NAS of Ukraine.

Надійшла до редколегії 21.11.2014

**ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ
РІВНЯННЯ,
МАТЕМАТИЧНА ФІЗИКА
ТА МЕХАНІКА**

УДК 532.59

Городецька Н.С., д.ф.-м.н., проф.
Щербак Т.М., асистент
Нікішов В.І., чл.-кор. НАНУ, д.ф.-м.н., проф.

Розсіювання поверхневих гравітаційних хвиль підводним прямокутним баром

Інститут гідромеханіки НАН України, 03680,
Київ, Желябова 8/4
e-mail: vinihm@gmail.com

N.S. Gorodetskaya, Doc. Sci. (Phys.-Math.), Prof.
Shcherbak T.M., assistant
V.I. Nikishov, Cor. Member of NASU, Doc. Sci.
(Phys.-Math.), Prof.

Scattering off surface gravity waves by submerged rectangular bar

Institute of Hydromechanics of NAS of Ukraine,
03680, Kyiv, Zheliabov str., 8/4
e-mail: vinihm@gmail.com

У роботі розвинуто метод поліпшеної редуції для розрахунку розсіювання поверхневих гравітаційних хвиль підводною прямокутною перешкодою (баром) на основі представлення розв'язку рядом по власним функціям. Враховано існування степеневі особливості розподілу швидкості в околі гострих кромek перешкоди, що дозволило отримати асимптотичні вирази для невідомих коефіцієнтів розкладання. В результаті внесок мод високих порядків враховується асимптотично. Перевіряно точність виконання умов спряження. Показано, що застосування методу приводить до спрощення чисельних розрахунків і зменшення області, в якій умови спряження виконуються із незадовільною точністю. Досліджено вплив зміни глибини каналу за перешкодою та довжини перешкоди на залежність коефіцієнтів відбиття та проходження від хвильового числа падаючої хвилі. Показано, що несиметрія розташування перешкоди призводить до того, що коефіцієнт відбиття, який має осцилюючий характер, не дорівнює нулю на відміну від симетричного випадку.

Ключові слова: поверхневі хвилі, розсіювання, власні функції.

The method of improved reduction to calculate the scattering of surface gravity waves by submerged rectangular obstacle (bar) is developed on the basis of eigenfunction expansion of the solution. It is taken into account the presence of power-like singularity in velocity distribution in neighborhood of sharp edges of obstacle. This enables the asymptotic expressions for unknown coefficients of expansion to be found. Consequently, the contribution of high order modes is allowed for asymptotically. The accuracy of the fulfillment of conjugation conditions has been verified. It is demonstrated that the using of the method results in simplification of numerical calculations and reduction of region in which the conjugation conditions are fulfilled with unsatisfactory accuracy. The influence of the change of depth behind the obstacle and its length on the reflection and transmitting coefficients depending the wave number of incident wave has been studied. It is shown that unsymmetry of obstacle arrangement causes the reflection coefficient, whose character is oscillating, differentiates from zero in compared with symmetrical case.

Key Words: surface gravity waves, scattering, eigenfunctions.

Статтю представив професор, д.ф.-м.н. Жук Я.О.

Аналізуючи роботи, присвячені проблемі захисту берегової зони від руйнування поверхневими хвилями за допомогою занурених у рідину штучних конструкцій, слід виділити клас задач, в яких водойма схематично розділена на окремі області, що мають вертикальні границі, а глибина в кожній з областей не змінюється.

Зауважимо, що, довільний профіль донної поверхні може бути представлений в ступінчастому вигляді, саме тому особливості поширення поверхневих хвиль над таким профілем можуть бути вивчені шляхом розв'язання задачі про трансформацію хвиль певною сукупністю ступінчастих структур.

Одним з ефективних підходів до задач розсіювання поверхневих хвиль на перешкодах при наявності вертикальних границь є подання розв'язку для потенціалу швидкості в кожній з областей у вигляді ряду по системі власних функцій, а потім виконанню умов спряження цих розв'язків на вертикальних границях. Використовуючи умову ортогональності власних функцій, задача зводиться до нескінченної системи алгебраїчних рівнянь, до якої застосовується операція редукції. Дана система може бути розв'язана методом найменших квадратів [1], який є по суті інтегральним методом, або шляхом безпосереднього розв'язання зазначеної системи рівнянь чисельним методом [2, 3]. В результаті були знайдені залежності коефіцієнтів проходження та відбиття від хвильового числа падаючої хвилі.

Характерною особливістю конструкцій хвилеломів, що розглядається, є наявність гострих кромek. Це призводить до появи степеневих сингулярностей у виразах для швидкості потоку [4] ($\propto r^{-1/3}$, де r - радіальна координата полярної системи координат з центром у вершині гострої грані), що обумовлює необхідність суттєвого збільшення числа рівнянь, тобто врахування мод високого порядку. Зокрема, в роботі [5] показано, що для отримання точності до другого знаку треба розглядати до $N = 400$ мод у задачі про поширення хвиль над тонким бар'єром. У роботі [6] задачу було зведено до інтегрального рівняння відносно горизонтальної компоненти швидкості, яке розв'язувалось шляхом використання розкладу по Галеркіну, при цьому в якості функцій використовувались ультрасферичні поліноми Гегенбауера, що дозволило врахувати степеневу особливість поля швидкостей.

В даній роботі на основі методу розвинення розв'язку в ряд по власним функціям розглядається задача про розсіювання поверхневих гравітаційних хвиль підводною прямокутною перешкодою (баром) у випадку нормального падіння хвилі. Вираз, що описує особливість представлено рядом по власним функціям, на основі якого знаходиться асимптотика невідомих коефіцієнтів для великих значень N . Це дозволило покращити якість розв'язку при врахуванні меншої кількості рівнянь, в той же час внесок від високочастотних мод враховується асимптотично. Виконано перевірку точності виконання граничних умов і

умов спряження. Проведено порівняння результатів з відомими даними.

Постановка задачі.

Розглянемо розсіювання монохроматичних поверхневих гравітаційних хвиль на підводній прямокутній перешкоді у випадку нормального падіння. На перешкоду падає хвиля з частотою ω_{dim} , що поширюється вздовж вісі x з $x = -\infty$.

Глибина рідини до перешкоди дорівнює H_1 , за перешкодою - H_3 і над перешкодою - H_2 .

Довжина перешкоди дорівнює $2b$. Розташування перешкоди і системи координат з початком відліку на вільній поверхні представлено на рис. 1. Рідина вважається ідеальною, нестисливою.

Поведінка лінійних поверхневих хвиль, що поширюються вздовж вільної поверхні описується рівнянням Лапласа для потенціалу швидкості [5]

$$\Delta\Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0 \quad (1)$$

з відповідними граничними умовами

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0 \quad \text{при } z = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0 \quad \text{при } z = -H, \quad (3)$$

де g - прискорення сили тяжіння.

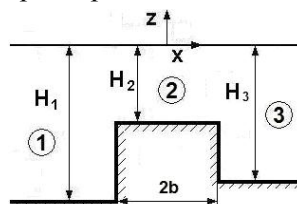


Рис. 1. Розташування перешкоди та системи координат.

Вважаємо, що змінні залежать від часу за гармонічним законом $e^{-i\omega t}$. Введемо характерні масштаби довжини $L^* = H_1$ і часу $T^* = \sqrt{H_1/g}$. Відокремлюємо змінні в рівнянні (1) і отримуємо вираз для потенціалу швидкості хвилі у безрозмірній формі, що поширюється у додатному напрямку вісі x :

$$\Phi = \frac{a}{\omega} \frac{\text{ch } k_1(z + H_1)}{\text{ch } k_1 H_1} e^{i(k_1 x - \omega t)}, \quad (4)$$

де a - амплітуда падаючої хвилі, хвильове число k_1 , що відповідає хвилі, що поширюється, є

дійсним додатнім коренем дисперсійного рівняння

$$\omega^2 = k_1 H_1 \tanh k_1 H_1. \quad (5)$$

Для зручності величину H_1 залишимо у попередньому вигляді, але її значення дорівнює одиниці.

Рівняння (7) має також безліч чисто уявних коренів, які знаходяться як розв'язок наступного рівняння:

$$\omega^2 = -\alpha_n H_1 \tan \alpha_n H_1. \quad (6)$$

Корені рівняння (6) характеризують неоднорідні хвилі (що не поширюються), які генеруються в околі вертикальних границь перешкоди.

Вказаним кореням дисперсійного рівняння (k_1 , α_n) відповідає ортогональна система функцій $\text{ch } k_1(z + H_1)$, $\cos \alpha_n(z + H_1)$, де $n = 1, 2, \dots, n, \dots$.

Енергія, пов'язана з падаючою хвилею, яка падає на перешкоду, частково переноситься в область над перешкодою і частково відбивається. Результируючий хвильовий рух в області 1 (див. рис. 1) складається з падаючої та відбитої хвиль. Хвиля, що пройшла через границю перешкоди ($x = -b$), поширюється в області 2, потім відбивається від другої границі перешкоди ($x = b$), частково проходить через цю границю і поширюється в області 3. Загальний розв'язок задачі для потенціалу швидкості, який задовольняє граничним умовам (2) і (3), в області 1 ($x < 0$) можна записати у вигляді (множник $e^{-i\omega t}$ опускаємо)

$$\Phi_1 = \left(e^{ik_1(x+b)} + \text{Re}^{-ik_1(x+b)} \right) \frac{\text{ch } k_1(z + H_1)}{\text{ch } k_1 H_1} + \sum_{n=1}^{\infty} e^{\alpha_n(x+b)} A_n \frac{\cos \alpha_n(z + H_1)}{\cos \alpha_n H_1}. \quad (7)$$

Відповідно в областях 2 та 3 маємо

$$\Phi_2 = (B_0 \cos k_2 x + C_0 \sin k_2 x) \frac{\text{ch } k_2(z + H_2)}{\text{ch } k_2 H_2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(B_n \frac{\text{ch } \beta_n x}{\text{ch } \beta_n b} + C_n \frac{\text{sh } \beta_n x}{\text{sh } \beta_n b} \right) \frac{\cos \beta_n(z + H_2)}{\cos \beta_n H_2}, \quad (8)$$

$$\Phi_3 = T e^{ik_3(x-b)} \frac{\text{ch } k_3(z + H_3)}{\text{ch } k_3 H_3} + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\gamma_n(x-b)} D_n \frac{\cos \beta_n(z + H_3)}{\cos \beta_n H_3}, \quad (9)$$

де R, T - коефіцієнти відбиття та проходження, коефіцієнти A_n, B_n, C_n, D_n визначаються з умов спряження розв'язків (рівність швидкостей та тиску) у плоскості $x = -b$.

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial x} = \begin{cases} \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} & \text{при } -H_2 < z < 0, \\ 0 & \text{при } -H_1 < z < -H_2 \end{cases}, \quad (10)$$

$$\Phi_1 = \Phi_2 \quad \text{при } -H_2 < z < 0 \quad (11)$$

та у плоскості $x = b$

$$\frac{\partial \Phi_3}{\partial x} = \begin{cases} \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} & \text{при } -H_2 < z < 0, \\ 0 & \text{при } -H_1 < z < -H_3 \end{cases}, \quad (12)$$

$$\Phi_3 = \Phi_2 \quad \text{при } -H_2 < z < 0. \quad (13)$$

Розв'язок задачі.

На відміну від методу простої редукції, в роботі пропонується застосувати метод поліпшеної редукції, який полягає у використанні асимптотичних подань для коефіцієнтів A_n, B_n, C_n, D_n для великих значень n . Ці асимптотичні значення знаходяться на основі розгляду конкретного виду сингулярності. Для даного типу задач характерно існування локальних особливостей за швидкостями. Прямуювання до нескінченності швидкості в околі гострої кромки перешкоди в рамках моделі ідеальної рідини ставить питання про достовірність отриманого рішення. У зв'язку з цим відзначимо, що виникнення локальних особливостей слід розглядати як "розплату" за занадто грубе моделювання реального процесу.

У плоскості спряження $x = -b$ вираз для горизонтальної компоненти швидкості в області 1, як випливає з (9), має вигляд

$$U_1|_{x=-b} = ik_1(1-R) \frac{\text{ch } k_1(z + H_1)}{\text{ch } k_1 H_1} + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n A_n \frac{\cos \alpha_n(z + H_1)}{\cos \alpha_n H_1}. \quad (14)$$

Як зазначено вище, у виразі, що описує поле швидкості в околі гострої кромки, існує доданок пропорційний $r^{-1/3}$ [4]. Тоді поведінка горизонтальної компоненти швидкості в околі кромки при $x = -b$ описується залежністю

$$U_1(z) = \frac{V_1}{(H_2^2 - z^2)^{1/3}} \quad \text{при } z \rightarrow -H_2 + 0, \quad (15)$$

де V_1 - константа, що підлягає визначенню.

Додамо і віднімемо до правої частини (14) вираз $V_1 / (H_2^2 - z^2)^{1/3}$, який представимо у вигляді ряду по системі ортогональних функцій

$$\frac{V_1}{(H_2^2 - z^2)^{1/3}} = V_1 E_0 \frac{\operatorname{ch} k_1 (z + H_1)}{\operatorname{ch} k_1 H_1} + V_1 \sum_{n=1}^{\infty} E_n \frac{\cos \alpha_n (z + H_1)}{\cos \alpha_n H_1}. \quad (16)$$

Після ряду перетворень, отримуємо

$$U_1|_{x=-b} = ik_1(1-R) \frac{\operatorname{ch} k_1 (z + H_1)}{\operatorname{ch} k_1 H_1} + \sum_{n=1}^N \kappa_n A_n \frac{\cos \alpha_n (z + H_1)}{\cos \alpha_n H_1} + V_1 \sum_{n=N+1}^{\infty} E_n \frac{\cos \alpha_n (z + H_1)}{\cos \alpha_n H_1}. \quad (17)$$

Було зроблено припущення, що при великих значеннях n (більших деякого N) характер коефіцієнтів A_n визначається поведінкою

$$\kappa_n A_n \cong V_1 E_n \quad \text{при} \quad n \geq N. \quad (18)$$

Для знаходження коефіцієнтів E_n помножимо вираз (16) на $\cos \alpha_m (z + H_1)$ та проінтегруємо від $-H_1$ до 0 . З урахуванням ортогональності власних функцій отримуємо

$$\int_{-H_1}^0 \frac{\cos \alpha_m (z + H_1)}{(H_2^2 - z^2)^{1/3}} dz = \frac{E_m}{N_m \cos \alpha_m H_1}, \quad (19)$$

де

$$N_m = \frac{4 \alpha_m}{\sinh 2 \alpha_m H_1 + 2 \alpha_m H_1}.$$

З іншого боку, використовуючи табличні інтеграли, з (19) отримуємо

$$E_m = \sqrt{N_m} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \left(\frac{2H_2}{k_1} \right)^{1/6} \Gamma\left(\frac{2}{3}\right) \times \quad (20)$$

$$\times \left[\cos \alpha_m^{(1)} \times J_{1/6}(\alpha_m^{(2)}) + \sin \alpha_m^{(1)} \times H_{1/6}(\alpha_m^{(2)}) \right],$$

де $\Gamma(\beta)$ - гамма-функція, $H_{\beta-1/2}(ab)$ -

модифікована функція Струве, $J_{\beta-1/2}(ab)$ -

функція Бесселя першого роду, $\alpha_m^{(1)} = \alpha_m H_1$,

$$\alpha_m^{(2)} = \alpha_m H_2.$$

Коефіцієнти E_m у розрахунках знаходились виходячи з асимптотичних залежностей для функцій Струве і Бесселя для великих значень α_m , які пропорційні m [5].

Аналогічно чинимо з виразом для горизонтальної компоненти швидкості в області 2 при $x = -b$, а також на іншій границі $x = b$.

Після виконання умовам спряження отримуємо систему $4N + 4$ алгебраїчних рівнянь

для $4N + 4$ невідомих коефіцієнтів, але також з невизначеними коефіцієнтами V_i . Останні вибирались з умов, що при достатньо великих значеннях N виконуються співвідношення (18) і аналогічні, які виникають при розгляді виразів, для поля швидкості на границі $x = b$.

Отримана система алгебраїчних рівнянь є системою другого роду, тобто добре обумовленою. Граничні задачі, які зводяться до таких систем, як правило, дають прийнятні результати при простій редукції системи, коли величини коефіцієнтів відбиття R та проходження T практично не змінюються при розрахунках починаючи з деякого N .

В даній задачі починаючи з 50 членів в ряду величини коефіцієнтів R і T практично не змінюються, співпадають до 5 значущих цифр незалежно від того враховується асимптотична поведінка невідомих чи ні. Але, при перевірці виконання умов спряження ситуація інша. Якщо умови спряження по потенціалу (11), (13) виконуються з достатньою точністю навіть при простій редукції системи, то для швидкості (12), (14) проста редукція системи дає значну похибку у виконанні умов спряження особливо в околі кутових точок. При застосуванні методу поліпшеної редукції, який враховує асимптотичну поведінку невідомих, для $N = 50$ похибка виконання умов спряження по потенціалу не перевищувала 0.1% потенціалу падаючої хвилі, а по швидкості – 2% для всіх $z = -H_2 \pm \varepsilon$, $\varepsilon = 0.2$. При збільшенні N величина ε зменшувалась.

Аналіз результатів

На основі вищеописаної системи алгебраїчних рівнянь були розраховані залежності коефіцієнтів відбиття R та проходження T від хвильового числа падаючої хвилі для різних співвідношень глибин H_1, H_2, H_3 та довжини перешкоди $2b$. Основну увагу було приділено впливу величини H_3 на характер відбиття та проходження хвилі. Такий аналіз у відомих літературних джерел практично не проводився. На рис. 2 і 3 як приклад наведено результати розрахунків коефіцієнтів R, T .

Приведені на рис. 2 результати відповідають таким величинам $H_2 = 0.5$, $H_3 = 0.7$, $2b = 1.0$. Видно, що при певних величинах $k_1 H_1$ коефіцієнт відбиття має мінімум, який не дорівнює нулю.

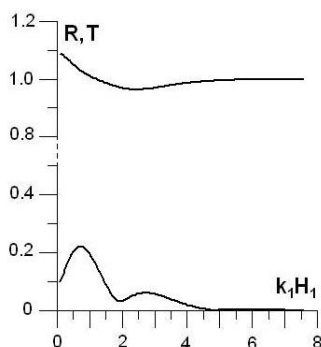


Рис.2. Залежності R, T при $H_2 = 0.5$,
 $H_3 = 0.7$, $2b = 1.0$

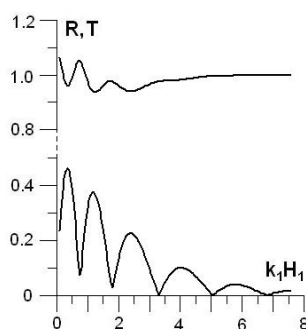


Рис.3. Залежності R, T при $H_2 = 0.3$,
 $H_3 = 0.7$, $2b = 2.0$

У випадку, коли $H_3 = H_1 = 1.0$, тобто картина симетрична, цей коефіцієнт дорівнює нулю для певних значень $k_1 H_1$. Даному феномену, відомому як “береговське” розсіювання хвиль, присвячено значну увагу в дослідженнях різних авторів [2,3]. З рис. 2 видно, що відхилення картини від симетричної призводить до того, що не виникає повного відбиття хвилі. Було знайдено, що повного відбиття не виникає і при зміні глибини рідини за перешкодою.

Подібні висновки зроблено в роботі [7], в якій у наближенні довгих хвиль розглянуто поширення поверхневих хвиль над перешкодою при наявності двох примикаючих до неї заглиблень. Автори показали, що на відміну від симетричного випадку, коли коефіцієнт відбиття досягає нульових значень, його величина відмінна від нуля при наявності несиметричних схилів.

Збільшення ширини перешкоди призводить до появи цілої низки локальних мінімумів в розподілі коефіцієнта відбиття, але знову їх значення не дорівнює нулю. Локальні мінімуми на графіку R виникають при помірних значеннях

$k_1 H_1$. Для хвиль малої довжини вплив перешкоди суттєво зменшується. Це наглядно продемонстровано на рис. 3. В даному випадку при розрахунках були вибрані такими: $H_2 = 0.3$, $H_3 = 0.7$, $2b = 2.0$.

Відмітимо, що у першому випадку максимальні значення величини R знаходились приблизно на одному рівні, в околі 0.25. Зростання висоти перешкоди (зменшення глибини над нею до $H_2 = 0.3$) призводить до збільшення її впливу на поширення хвиль (рис. 3). Можна побачити, що максимальні значення коефіцієнту відбиття суттєво зростають і досягають величин ≈ 0.5 . І знову нульових значень коефіцієнту відбиття не спостерігається.

Що стосується коефіцієнту проходження, практично у всіх випадках його величина спочатку зростає, а потім плавно спадає. Але у випадку високої перешкоди, коли її вплив збільшується, спостерігається осциляції T при невеликих хвильових числах. В цілому величина T близька до одиниці, особливо для великих хвильових чисел.

Висновки

У роботі розглянуто задачу розсіювання поверхневих гравітаційних хвиль на прямокутній зануреній перешкоді (барі). Розглянуто випадок нормального падіння. Одним з ефективних методів розв’язання такого класу задач є представлення розв’язку в ряд по власним функціям задачі [5]. Відомо, що розподіл швидкості потоку має ступеневу особливість в околі гострих кромek перешкоди. Розв’язок задачі зводиться до виконання умов спряження для потенціалу швидкості і горизонтальної компоненти швидкості на вертикальних границях.

Для розгляду класу задач розсіювання поверхневих гравітаційних хвиль зануреним баром запропоновано використовувати метод виділення особливостей і подальше використання асимптотичних залежностей, які визначаються видом зазначених особливостей, для невідомих коефіцієнтів для великих значень N (номерів мод). Це дає можливість зменшити не тільки розмір системи алгебраїчних рівнянь, але й істотно розширити область в околі точки зміни типу граничних умов, в якій поліпшується точність отриманого розв’язку.

Проведено аналіз впливу зміни глибини каналу за перешкодою на характер розподілу

коефіцієнтів відбиття та проходження в залежності від хвильового числа падаючої хвилі. Показано, що несиметричність рельєфу донної поверхні призводить до того, що коефіцієнт відбиття не досягає нульових значень на відміну від симетричного випадку.

Список використаних джерел

1. Dalrymple R.A. Wave diffraction through offshore breakwaters / R.A. Dalrymple, P.A.Martin // J. Waterway, Port, Coastal, and Ocean Engineering. - 1990. - vol. 116, No. 6. - P. 727-741.
2. Takano K. Effets d'un obstacle de parallélipédique rectangle sur la propagation de la houle / K. Takano, H. Nakazawa // J. - Oceanogr. Soc. Japan. - 1966. - vol. 22, No.5. - P. 1-9.
3. Abul-Azm A.G. Diffraction through wide submerged breakwater under oblique waves/ A.G. Abul-Azm // Ocean Engng. - 1994. - vol. 21, No. 7. - P. 683-706.
4. Гринченко В.Т. О локальных особенностях в математических моделях физических полей / В.Т. Гринченко, А.Ф. Улитко // Мат. методы и физ.-мех. поля. -1998. -т. 41, №1. - С.12-34.
5. Linton C.M. Handbook of mathematical techniques for wave / structure interactions / C.M.Linton, P. McIver. - Chapman & Hall/CRC, 2001, 298 p.
6. Mandal B.N. Water Wave Scattering / B.N.Mandal, S. De. - CRC Press, 2015. - 375 p.
7. Xie J.-J. Analytical solution for long-wave reflection by a rectangular obstacle with two scour trenches / J.-J. Xie, H.-W. Liu, P. Liu // J. Eng. Mech. - 2011. - vol. 137, No. 12. - p. 919-930.

References

1. DALRYMPLE, R.A. (1990) Wave diffraction through offshore breakwaters. *J. Waterway, Port, Coastal, and Ocean Engineering*, **116** (6). p.727-741.
2. TAKANO, K. & NAKAZAWA, H. (1966) Effets d'un obstacle de parallélipédique rectangle sur la propagation de la houle. *J. Oceanogr. Soc. Japan*. **22** (5). p.1-9.
3. ABUL-AZM, A.G. (1994) Diffraction through wide submerged breakwater under oblique waves. *Ocean Engng.*, **21** (7). p.683-706.
4. GRINCHENKO, V.T. & ULITKO, A.P. (1998) О локальных особенностях в математических моделях физических полей. *Математичні методи і фізико-механічні поля*. **41**(1). p.12-34.
5. LINTON, C.M., MC IVER, P. (2001) *Handbook of mathematical techniques for wave / structure interactions*. Florida: CRC Press LLC.
6. MANDAL, B.N., DE, S. (2015) *Water Wave Scattering*. Boca Raton: CRC Press.
7. XIE, J.-J., LIU, H.-W. LIU, P. (2011) Analytical solution for long-wave reflection by a rectangular obstacle with two scour trenches. *J. Eng. Mech.* **137** (12). p. 919-930.

Надійшла до редколегії 11.12. 2015

УДК 539.3

Жук Я.О.¹, д.ф.-м.н., проф.
Васильєва Л.Я.², к.ф.-м.н., ст. викл.

Y.A. Zhuk¹, dr. of phys. and math. sci., prof.
L.Y. Vasiljeva², PhD., sr. teacher.

Описання неізотермічної непружної поведінки матеріалу при великих швидкостях деформації

Description of nonisothermal inelastic re- sponse of material under high strain rate

¹ Київський національний університет імені Тара-
са Шевченка, 03680, м. Київ, пр-т. Глушкова 4е,
e-mail: y.zhuk@i.ua

² Миколаївський національний університет
ім. В.О. Сухомлинського, 54030, м. Миколаїв,
вул. Нікольська, 24
e-mail: lara@vasiliev.mk.ua

¹ Taras Shevchenko National University of Kyiv, 4e,
Glushkov ave., Kyiv 03680
e-mail: y.zhuk@i.ua

² V.O. Sukhomlynsky National University of Myko-
layiv, 24, Nikol'ska str., Mykolayiv 54030
e-mail: lara@vasiliev.mk.ua

Досліджується можливість описання реальних термомеханічних процесів із великими швидкостями навантаження в рамках однієї з моделей із внутрішніми змінними стану для характеристики непружної реакції матеріалу в широкому інтервалі зміни температури.

Ключові слова: термомеханічне імпульсне навантаження, непружна деформація, великі швидкості деформування.

The problem of adequate characterization of coupled thermomechanical response of the material to deformation with high strain rate is investigated. The Bodner-Partom model is chosen to describe the material behavior under wide range of temperatures and strain rates. The set of internal state variables is used to simulate the variety of inelastic effects: change in yield limit under loading, strain hardening, Bauschinger's effect etc. Reliability of the inelastic material behavior simulation in the frame of Bodner-Partom model under high strain rate loading and accuracy of numerical technique to attack the boundary problem are studied. As an example, the test problem of short-term loading of the half-space with stress pulse is investigated. The essentially nonlinear problem is solved numerically with the application of especially developed finite element code. Variable time step integration scheme is used. To accelerate the convergence, special averaging procedure is applied. Numerical results are compared with the experimental data. The comparison shows that the model provides reliable simulation of thermomechanical response of the material under loading with the strain rates up to 10^6 s^{-1} .

Key Words: thermomechanical pulse loading, inelastic strain, high strain rate.

Статтю представив академік НАН України Перестюк М.О.

1. Вступ

Один з методів моделювання складної зв'язаної термомеханічної поведінки матеріалів, зокрема металів, в рамках механіки полягає у використанні феноменологічного підходу, який орієнтований на формулювання аналітичних моделей і практичне розв'язування крайових задач, що описують поведінку деформованих тіл під навантаженням [1].

В процесі експлуатації елементи конструкцій зазнають різного роду механічних і теплових впливів, при яких поведінку матеріалу неможливо описати за допомогою тільки лінійних спів-

відношень. Більше того, вимоги зниження матеріалоемності й собівартості конструкції, збільшення строків її роботи призводить до необхідності прогнозування поведінки матеріалу в нелінійній області. Для цього активно використовуються теорії нелінійної в'язкопружності, пластичності й в'язкопластичності.

Отже, в проблемі описання властивостей матеріалу, тобто в проблемі визначальних рівнянь, перетинаються такі фундаментальні концепції механіки деформівних тіл, як фізична нелінійність матеріалів при малих деформаціях, коливання тіл і теплові явища. Кожний із перерахованих аспектів був об'єктом великої кількості екс-

периментальних і теоретичних досліджень, результати яких опубліковані в численних наукових працях. Особливістю сучасного етапу розвитку нелінійної теорії є намагання сформулювати її в достатньо загальному вигляді із залученням термодинаміки необоротних процесів і з використанням строго визначених понять.

Одним з напрямків, в рамках якого проводяться інтенсивні дослідження, на поточний момент є розробка узагальнених моделей непружної поведінки матеріалів [2]. Такі моделі містять набір скалярних і тензорних внутрішніх змінних для описання ефектів ізотропного і кінематичного зміцнення, повзучості, релаксації напружень тощо. Кожна з цих внутрішніх змінних еволюціонує відповідним чином в часі, формуючи феноменологічний процес непружного деформування. При цьому кожна з основних внутрішніх змінних може бути сумою складових, які змінюються окремо, і, в свою чергу, є первинними внутрішніми змінними [2].

Однією з найпоширеніших моделей цього класу є модель Боднера–Партома (Б–П) [2]. Вона часто застосовується для описання складної зв'язаної термомеханічної поведінки металів в широкому інтервалі температур і швидкостей деформування. Проте питання визначеності меж застосування моделі потребує додаткового дослідження. Дана стаття присвячена вивченню можливостей достовірного описання реальних термомеханічних процесів із великими швидкостями навантаження в рамках моделі Б–П.

2. Рівняння моделі Боднера–Партома

Непружне деформування тіл за умов інтенсивного термомеханічного імпульсного навантаження відбувається в широких інтервалах зміни температури та швидкості деформації. При цьому особливо важливого значення набуває питання про достовірність результатів моделювання термомеханічного стану тіл. Серед множини аспектів цього питання слід виділити два основних:

- достовірність описання непружної поведінки матеріалу при високих швидкостях деформації в широкому інтервалі температур на основі моделі Б–П;
- точність чисельної реалізації крайової динамічної задачі термомеханіки.

Можливості моделі Б–П описувати надшвидкісне деформування ($\dot{\varepsilon} > 10^4 \text{с}^{-1}$) присвячена значна кількість публікацій. Як відзначено, наприклад, у [2], модель Б–П добре описує непружне деформування матеріалів, зокрема залежність границі текучості від швидкості деформування в

інтервалі $10^{-6} \text{с}^{-1} - 5 \cdot 10^4 \text{с}^{-1}$. Покажемо, що модель може описувати наведену залежність і для більших швидкостей.

Наведемо коротке зведення рівнянь моделі Б–П. В рамках цієї моделі використовується [2]:

– представлення повної деформації у вигляді суми пружної, непружної і теплової складових

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^p + \varepsilon_{ij}^\theta, \quad ij \leftrightarrow r, z, rz, \varphi, \quad (1)$$

де тепла деформація представляється у вигляді

$$\varepsilon_{ij}^\theta = \delta_{ij} \int_{\theta_0}^{\theta} \alpha(\theta') d\theta'; \quad (2)$$

– закон Гука, записаний для шарової і девіаторної частин,

$$s_{ij} = 2G(e_{ij} - \varepsilon_{ij}^p), \quad \sigma_{kk} = 3K_V(\varepsilon_{kk} - \varepsilon_{kk}^\theta), \quad (3)$$

де s_{ij} і e_{ij} – девіатори тензорів напруження і деформації відповідно; G – модуль зсуву; по індексах, що повторюються, проводиться додавання;

– закон течії з умовою пластичної нестисливості

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^p = \lambda s_{ij}, \quad \dot{\varepsilon}_{kk}^p = 0; \quad (4)$$

– кінетичне рівняння

$$D_2^p = D_0^2 \exp\left[-\left(Z^2/(3J_2)\right)^n\right] \quad (5)$$

де $Z = K + D$, $J_2 = s_{ij}s_{ij}/2$, $D_2^p = \dot{\varepsilon}_{ij}^p \dot{\varepsilon}_{ij}^p / 2$, $\lambda^2 = D_2^p / J_2$;

– рівняння еволюції для внутрішніх змінних ізотропного K та направленою β_{ij} зміцнення

$$\begin{aligned} \dot{K} &= m_1(K_1 - K)\dot{W}_p, \quad K(0) = K_0, \\ \dot{\beta}_{ij} &= m_2(D_1 u_{ij} - \beta_{ij})\dot{W}_p, \quad \beta_{ij}(0) = 0, \end{aligned} \quad (6)$$

де $D = \beta_{ij}u_{ij}$, $u_{ij} = \sigma_{ij}/(\sigma_{ij}\sigma_{ij})^{1/2}$, $\dot{W}_p = \sigma_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij}^p$.

Величини D_0 , D_1 , K_0 , K_1 , m_1 , m_2 і n є константами моделі. Експериментальні і теоретичні дослідження [2] показали, що для більшості металів параметри D_0 , D_1 , m_2 слабко залежать від температури і можуть вважатись сталими в широкому інтервалі температур. Параметри K_0 , K_1 , m_1 , і n – функції температури.

В рівняннях (6) на відміну від роботи [2] відсутні доданки, що визначають тепловий зворот. Оскільки процеси, які розглядаються в даній роботі, достатньо швидкі, то при описанні поведінки матеріалу цим явищем можна знехтувати.

3. Постановка задачі

Розглядається півпростір $z \geq 0$, $0 < r < \infty$, на поверхні $z \geq 0$ якого задають граничні умови імпульсного силового навантаження

$$\sigma_{zz} = \begin{cases} -p_0 \sin \frac{\pi}{t_\sigma} t, & t \leq t_\sigma, \\ 0, & t > t_\sigma; \end{cases} \quad (7)$$

де p_0 – заданий параметр силового навантаження, t_σ – тривалість дії імпульсу.

Постановка осесиметричної задачі також містить співвідношення Коші

$$\begin{aligned} \varepsilon_z &= \frac{\partial u_z}{\partial z}, \quad \varepsilon_r = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \varepsilon_\varphi = \frac{u_r}{r}, \\ \varepsilon_{rz} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z} \right), \end{aligned} \quad (8)$$

рівняння руху

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} (\sigma_r - \sigma_\varphi) + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} &= \rho \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \sigma_{rz} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} &= \rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2}, \end{aligned} \quad (9)$$

рівняння теплопровідності

$$c_v \dot{\theta} + 3\alpha \theta K_V (\dot{\varepsilon}_{kk} - 3\alpha \dot{\theta}) - D' - k\Delta\theta = r_s. \quad (10)$$

Вираз для швидкості дисипації механічної енергії D' у (10), отриманий із залученням термодинаміки незворотних процесів із внутрішніми змінними, має вигляд

$$D' = \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}^p - K \dot{\delta} - \beta_{ij} \dot{\alpha}_{ij} = \dot{W}_p - \dot{W}_{sK} - \dot{W}_{s\beta}. \quad (11)$$

Величини δ_{ij} і α_{ij} є внутрішніми змінними, спряженими до термодинамічних сил K і β_{ij} , які виступають при обраному підході як параметри ізотропного і направленого зміцнення. Останні два доданки у (11) описують частину непружної потужності, що не переходить у тепло, а накопичується у матеріалі.

Постановка задачі також містить рівняння моделі поведінки матеріалу (1)–(6) і замикається заданням відповідних початкових умов

$$u_r = u_z = \dot{u}_r = \dot{u}_z = 0, \quad \theta = \theta_0 \text{ при } t = 0. \quad (12)$$

У формулах (8)–(12) u_r , u_z – переміщення вздовж відповідних осей; c_v і k – коефіцієнти теплоємності при сталому об'ємі і теплопровідності відповідно; r_s – потужність заданих внутрішніх

джерел тепла; θ_0 – початкова температура; n_j – компоненти вектора одиничної нормалі до відповідної граничної поверхні; $\dot{\varepsilon}_{kk} = \dot{\varepsilon}_r + \dot{\varepsilon}_z + \dot{\varepsilon}_\varphi$, Δ – оператор Лапласа.

4. Результати розрахунків і висновки

Задача (1)–(12) розв'язувалась чисельно із застосуванням спеціально розвинутої реалізації методу скінченних елементів [3]. Розрахунки проводились з метою показати, що модель Б–П може адекватно якісно і кількісно описувати непружну поведінку металів не тільки в інтервалі 10^{-6}с^{-1} – $5 \cdot 10^4 \text{с}^{-1}$ а й для більших швидкостей деформації.

На рис. 1 значками показані експериментальні дані залежності границі текучості танталу від швидкості деформації в матеріалі в межах 10^{-6}с^{-1} – 10^6с^{-1} при температурі 20°C на основі даних з [4]. Використані такі позначення експериментальних даних: $\circ$ – Ходж і Мухержі; $\square$ – Чен і Грей; $+$ – Армстронг та інш., ∇ – Веккіо.

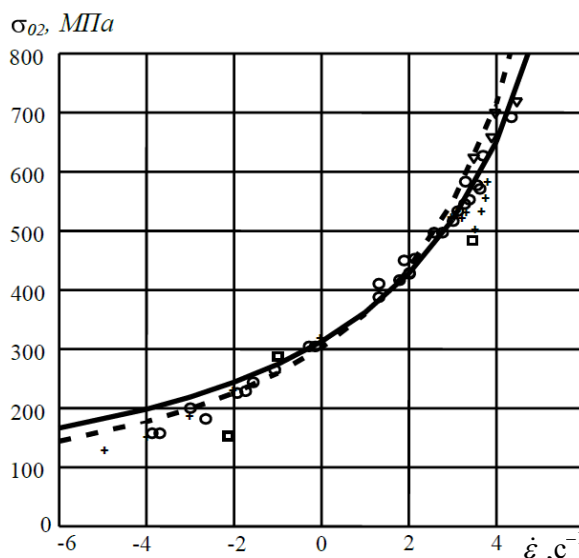


Рис. 1. Залежність границі текучості танталу від швидкості деформування в матеріалі.

Суцільною кривою на цьому рисунку показана розрахункова залежність $\sigma_{02}(\dot{\varepsilon})$ для танталу в інтервалі швидкостей деформацій 10^{-6}с^{-1} – 10^6с^{-1} , отримана з використанням моделі Б–П при таких значеннях параметрів для температури $\theta = 20^\circ \text{C}$ (набір А):

$$n = 0,418; m_1 = 0,1 \text{ МПа}^{-1}; K_0 = 2,57 \cdot 10^4 \text{ МПа}; \\ K_1 = 5,14 \cdot 10^4 \text{ МПа}; D_0 = 10^8 \text{ с}^{-1}.$$

Штрихова лінія відповідає такому набору коефіцієнтів моделі (набір Б):

$$n = 0,355; m_1 = 0,1 \text{ МПа}^{-1}; K_0 = 5,5 \cdot 10^4 \text{ МПа}; \\ K_1 = 1,1 \cdot 10^4 \text{ МПа}; D_0 = 10^8 \text{ с}^{-1}.$$

Для пружних характеристик приймалося $E = 1,88 \cdot 10^5$ МПа, $\nu = 0,35$ [1].

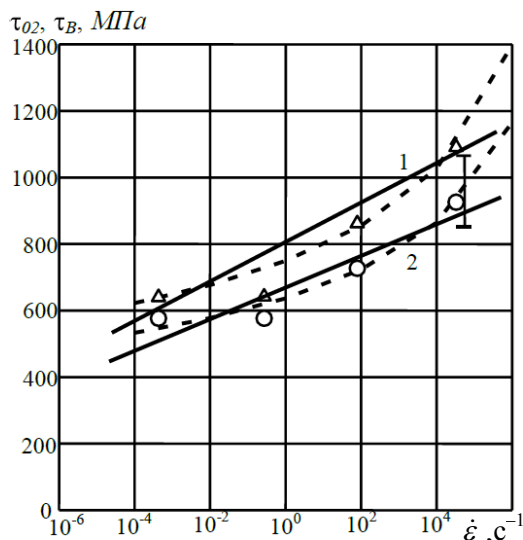


Рис. 2. Залежності границі текучості і границі міцності при зсуві для сталі 35ХМА.

Набір параметрів (А) отриманий шляхом обробки експериментальних результатів в інтервалі швидкостей деформації 10^{-1}с^{-1} – 10^4с^{-1} , а набір (Б) визначався в інтервалі 10^{-2}с^{-1} – 10^2с^{-1} . Обидві криві досить добре якісно і кількісно екстраполюють експериментальні результати, отримані в інтервалах за межами визначення параметрів моделі.

Особливо відмітимо досить хорошу апроксимацію даних при надвеликих швидкостях деформування.

Список використаних джерел

1. Белл Дж. Ф. Экспериментальные основы механики деформируемых твердых тел. Ч.1 Малые деформации / Дж. Ф. Белл. – М. : Наука, 1984. – 596 с.
2. Bodner S. Constitutive equations for elastoviscoplastic strain hardening material / S. Bodner, Y. Partom // ASME. J. Appl. Mech. – 1975. – v. 42. – P. 385-389.
3. Жук Я.О. Залишковий напружено-деформований стан сталевго диска при імпульсному тепловому опроміненні / Я.О. Жук, І.К. Сенченко, О.В. Бойчук // Математичні методи та фізико-механічні поля. – 2008. – 51, № 1. – С. 157-168.
4. Liang R. A. Critical review of experimental results and constitutive models for BCC and FCC metals over a wide range of strain rate and temperatures / R. A. Liang, A. S. Khan // Int. Journal of Plasticity. – 1999. – 15. – P. 963-980.

На рис. 2 штриховими лініями позначено залежність границі текучості (крива 2) і границі міцності (крива 1) при крученні (зсуві), розраховані на основі моделі Б–П для сталі 35ХМА для параметрів визначених в [3] при $\theta = 20^\circ \text{C}$. Трикутниками і кружками позначені експериментальні дані [4]. Суцільні криві відповідають лінійній апроксимації Ейрінга [1], де $A_{1,2}, B_{1,2} = \text{const}$. Вертикальний відрізок визначає розкид експериментальних даних для схожих сталей, отриманих перерахунком від значень пружної границі Гюгоніо та віднесених до швидкості $\lg \dot{\epsilon} = 5 \cdot 10^5 \text{с}^{-1}$.

Наведені дані дозволяють зробити такий висновок: модель Боднера – Партома дає можливість задовільно описати непружні властивості сталі 35ХМА в інтервалі швидкостей деформації 10^{-4}с^{-1} – 10^4с^{-1} і дає екстраполяцію до швидкості $\dot{\epsilon} \sim 10^6 \text{с}^{-1}$, яка корелює з даними для схожих сталей. Видно також: в даному разі екстраполяція за Ейрінгом до значення $\dot{\epsilon} \sim 10^6 \text{с}^{-1}$ дає гірші результати.

З фізичної точки зору суттєве прискорення залежності $\sigma_{02}(\dot{\epsilon})$ при $\dot{\epsilon} \geq 10^5 \text{с}^{-1}$ пов'язане з тим, що такі швидкості близькі до максимально можливих швидкостей дислокацій, що суттєво ускладнює механізми непружного деформування і обмежує можливості континуального підходу до його моделювання.

References

1. BELL, G.F. (1984) *Eksperimental'nye osnovy mekhaniki deformiruemyykh tverdykh tel. Ch.1 Malye deformacii*. Moskva: Nauka.
2. BODNER, S. (1975) Constitutive equations for elastoviscoplastic strain hardening material. *ASME. J. Appl. Mech.* 42. p.385-389.
3. ZHUK, Y.O., SENCHENKOV, I.K. & BOJCHUK, E.V. (2008) Zalyshkovy napruzheno-deformovanyj stan stalevogo dyska pry impul'snomu teplovomu oprominenni. *Matematychni metody ta fizyko-mekhanichni polya*. 51. p.157-168.
4. LIANG, R. A. & KHAN, A. S. (1999) Critical review of experimental results and constitutive models for BCC and FCC metals over a wide range of strain rate and temperatures. *Int. Journal of Plasticity*. 15. p.963-980.

Надійшла до редколегії 30.11.15

УДК 519.9

Лаврова О. Є.¹, аспірант.

**Оптимальне керування системами
диференціальних рівнянь на часових
шкалах.**

¹ Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 83000, м. Київ, пр-т.
Глушкова 4д,
e-mail: lavrova_olia@mail.ru

O. E. Lavrova¹, graduate student.

**Optimal control for systems of differential
equations on time scales.**

¹ Taras Shevchenko National University of Kyiv,
83000, Kyiv, Glushkova st., 4d,
e-mail: lavrova_olia@mail.ru

В роботі розглянуто задачі оптимального керування на часових шкалах. Отримано достатні умови існування оптимального керування в термінах правих частин системи та функції, що входить в критерій якості.

Ключові слова: Часова шкала, оптимальне керування, Δ - вимірність, момент виходу.

This paper is devoted to research the problems of optimal control for systems of differential equations defined on time scales. To solve such problems we must be sure that optimal control exists. For this purpose necessary to have an analogue of existence theorem for optimal control on time scales.

Initially we describe the basic concepts associated with the time scales theory. We consider the problem of Mayer and Bolz on the time scales to the moment when the solution exits from the domain. In this case quality criterion has another parameter which depends on control. This parameter is the time of exit, which greatly considered optimal control problem on time scales.

Sufficient conditions for the existence of optimal control for these optimal control problems are obtained. These conditions are presented in terms of right sides of the system and function which are included in the quality criterions. It turns out that in the proof of the existence of optimal control the important role plays condition of convexity a certain kind.

Key Words: Time scale, optimal control, Δ - measurability, moment of exit.

Статтю представив академік НАН України, д. ф. – н., проф. Перестюк М. О.

Вступ. Вивчення диференціальних рівнянь на часових шкалах викликає великий інтерес серед дослідників. Це пов'язано з тим, що в 1988 році Stefan Hilger в роботі [1] ввів поняття Δ -похідної, яке дозволило об'єднати з єдиної точки зору дискретний і неперервний аналіз. Основи такого аналізу викладено в монографіях [2], [4]. В подальшому диференціальні рівняння на часових шкалах в різних напрямках вивчалися в роботах багатьох авторів.

Теорія оптимального керування на часових шкалах ще досить мало вивчена. В цьому напрямку відзначимо роботу [6], в якій отримано сильну версію принципу максимуму Понтрягіна. Цей результат дає необхідні умови оптимальності, але для їх перевірки потрібно використовувати спеціальний об'єкт - функцію Понтрягіна. Бажано було б мати достатні умови

оптимальності у термінах вихідних даних. Вивченню цих питань і присвячена дана робота.

Сама робота складається зі вступу і трьох частин. В першій частині приведено основні поняття та твердження, які стосуються часових шкал. У другій і третій частинах для задач оптимального керування з критеріями Майєра і Больца отримано теорему існування оптимального керування на часових шкалах.

**1. Основні поняття та необхідні твердження,
пов'язані з часовими шкалами.**

Часовою шкалою T називається довільна, непорожня, замкнена підмножина дійсних чисел. Найбільш відомими прикладами часових шкал є $T = \mathbb{R}$, $T = \mathbb{Z}$, $T = h\mathbb{Z}$ для $h > 0$. Далі довільний інтервал з часової шкали T будемо позначати як I_T , де I – інтервал з $\mathbb{R}$, тобто $I_T = I \cap T$.

Введемо наступні поняття, пов'язані з класифікацією точок часової шкали.

Для $t \in T$ визначимо оператори стрибка вперед і назад $\sigma, \rho: T \rightarrow T$ наступним чином $\sigma(t) = \inf \{s \in T : s > t\}$ і $\rho(t) = \sup \{s \in T : s < t\}$ та функцію зернистості $\mu: T \rightarrow [0, +\infty)$ як $\mu(t) = \sigma(t) - t$. Точка $t \in T$ називається ліво-граничною (ліво-розсіяною, право-граничною, право-розсіяною), якщо $\rho(t) = t$ ($\rho(t) < t$, $\sigma(t) = t$, $\sigma(t) > t$). Якщо T має ліво-розсіяний максимум M , тоді визначимо $T^k = T \setminus \{M\}$, в іншому випадку $T^k = T$.

Означення 1. [2] Функція $f: T \rightarrow R$ називається *rd* – неперервною, якщо вона неперервна в право-граничних точках $t \in T$ і границя зліва цієї функції існує в ліво-граничних точках $t \in T$.

Для функції $f: T \rightarrow R$ визначимо функцію $f^\sigma: T \rightarrow R$ як $f^\sigma = f(\sigma)$. Визначимо поняття Δ - похідної.

Означення 2. [2] Δ - похідною функції f в точці $t \in T^k$ називається таке число $f^\Delta(t)$ (якщо воно існує), що для довільного $\varepsilon > 0$ існує окіл U точки t такий, що для всіх $s \in U \cap T$ виконується нерівність:

$$|f(\sigma(t)) - f(s) - f^\Delta(t)[\sigma(t) - t]| \leq \varepsilon |\sigma(t) - s|.$$

Означення 3. [5] Для функції $f: [a, b]_T \rightarrow R$ визначимо розширення $\tilde{f}: [a, b]_R \rightarrow R$ наступним чином $\tilde{f}(t) = f(\sup[a, t]_T)$ для всіх $t \in [a, b]_R$.

Для рівнянь на часових шкалах справедливим є аналог першої теореми Хеллі.

Теорема 1. З довільної послідовності монотонно неспадних і рівномірно обмежених на $[a, b]_T$ функцій можна виділити підпослідовність, збіжну у всіх точках з $[a, b]_T$.

Доведення теореми очевидним чином отримується із класичної теореми Хеллі переходом від послідовності функцій $\{f_n(t)\}$, заданої на $[a, b]_T$ до їх розширення $\{\tilde{f}_n(t)\}$, заданих на $[a, b]_R$.

Далі для введення поняття абсолютно неперервних функцій на часових шкалах, розглянемо допоміжні твердження з [6].

Нехай μ_Δ – Δ - міра Лебега на T , визначена в термінах продовження Каратеодорі в [2].

Нехай $A \subset T$. Кажуть, що деяка властивість виконується Δ – майже скрізь на A , якщо вона виконується для будь-якого $t \in A \setminus A'$, де $A' \subset A$ – деяка μ_Δ - вимірنا підмножина T , для якої $\mu_\Delta(A') = 0$. Функціональним простором $L_T^1(A, R^n)$ називається множина всіх функцій f , визначених Δ - майже скрізь і таких, що $\int_A \|f(\tau)\|_{R^n} \Delta \tau < +\infty$.

Позначимо через $AC([a, b]_T, R^n)$ множину всіх абсолютно неперервних на $[a, b]_T$ функцій. Має місце наступна теорема.

Теорема 2. [6] Нехай $t_0 \in [a, b]_T$ і $f: [a, b]_T \rightarrow R^n$. Функція $f \in AC([a, b]_T, R^n)$ тоді і тільки тоді коли $f \in \Delta$ - диференційованою Δ - майже скрізь на $[a, b]_T$, $f^\Delta \in L_T^1([a, b]_T, R^n)$ і для кожного $t \in [a, b]_T$ має місце рівність:

$$f(t) = \begin{cases} f(t_0) + \int_{[t_0, t]_T} f^\Delta(\tau) \Delta \tau, & t \geq t_0 \\ f(t_0) - \int_{[t_0, t]_T} f^\Delta(\tau) \Delta \tau, & t \leq t_0. \end{cases}$$

Введемо поняття Δ - вимірності функції та приведемо аналог теореми Лузіна на часових шкалах.

Означення 4. [8] Функція $f: T \rightarrow R$ називається Δ - вимірною, якщо для кожного $\alpha \in R$ множина $f^{-1}([-\infty, \alpha)) = \{t \in T : f(t) < \alpha\}$ є Δ - вимірною.

Теорема 3. [8] Нехай $f: T \rightarrow R$. Функція $f \in \Delta$ - вимірною тоді і тільки тоді, коли для довільного $\varepsilon > 0$ існує така *rd* - неперервна функція $\varphi: [a, b]_T \rightarrow R$, що Δ - міра Лебега множини $\{x: f(x) \neq \varphi(x)\}$ менше ε .

Далі наведемо аналог теореми Лебега про Δ - диференційованість монотонної функції.

Теорема 4. [9] Якщо $f: [a, b]_T \rightarrow R$ - монотонно неспадна функція, тоді існує множина $N \subset [a, b]_T$ така, що Δ - міра цієї множини дорівнює нулю і $f^\Delta(x)$ існує для кожного $x \in [a, b]_T \setminus N$.

2. Постановка задачі. Теорема існування оптимального керування.

На часовій шкалі T , $\sup T = +\infty$, розглянемо наступну задачу оптимального керування:

$$\begin{cases} x' = f(t, x(t), u(t)) \\ e = (t_1, x(0), x(t_1)) \in S \end{cases} \quad (1)$$

з критерієм якості типу Майєра:

$$J(x(0), u) = \Phi_1(e) \rightarrow \inf \quad (2)$$

на відрізку $[0, T_0]_T$, $0 \in T$, $T_0 \in T$, $x \in D$ – фазовий вектор, D – область в R^d , $x(0) \in K \subset D$, K – компакт, t_1 – момент першого виходу розв'язку $x(t)$ на границю області D , $u(t) \in U \subset R^m$ – вектор керувань, U – замкнена множина, вектор-функція $\Phi: [0, T_0]_T \times D \times U \rightarrow R^d$ неперервна на S , де множина S визначається рівняннями $\Phi_j(e) = 0$ при $j = \overline{2, k}$, $\Phi = \{\Phi_j\}_{j=1}^k$.

Функція $f: [0, T_0]_T \times D \times U \rightarrow R^d$ – неперервна за змінною t і неперервна за $x \in D$ і для неї виконуються наступні умови:

a1) умова лінійного росту:

існує така стала $C_1 > 0$, що для будь-яких $t \in [0, T_0]_T$, $x \in D$, $u \in U$:

$$|f(t, x, u)| \leq C(1 + |x| + |u|). \quad (3)$$

a2) існує така стала $C_2 > 0$, що для будь-яких $t \in [0, T_0]_T$, $x \in D$, $u \in U$:

$$|f(t, x', u) - f(t, x, u)| \leq C_2 |x' - x| (1 + |u|). \quad (4)$$

Керування $u(t)$ вважається допустимим, якщо:

в1) $u(t) \in L_p([0, T_0]_T)$, $p \geq 1$,

в2) $u(t) \in U$ при $t \in [0, T_0]_T$.

Розв'язком системи (1) будемо називати функцію $x = x(\cdot)$, що задовольняє рівняння:

$$x(t) = x(0) + \int_{[0, t]_T} f(s, x(s), u(s)) \Delta s, t \in [0, T_0]_T. \quad (5)$$

Позначимо через F' клас усіх пар $(x(0), u)$, для яких u задовольняє умови в1)-в2) і розв'язок рівняння (5) задовольняє граничним умовам $e \in S$. Довільну пару $(x(0), u) \in F'$ будемо називати допустимою.

Розглянемо наступну множину:

$$F(t, x) = \{f(t, x, u) : u \in U\}, t \in [0, T_0]_T, x \in D. \quad (6)$$

Має місце наступна теорема.

Теорема 5. Нехай для системи (1) з критерієм якості (2) виконуються умови a1)–a2) і крім того:

а) F' – непорожня множина,

б) U – компактна множина,

в) Множина $F(t, x)$ є опуклою для $t \in [0, T_0]_T$, $x \in D$.

Тоді існує пара $(x^*(0), u^*) \in F'$, яка мінімізує критерій якості (2).

Доведення теореми складається з чотирьох лем. Позначимо через χ_e множину всіх розв'язків системи (5), які відповідають $(x(0), u) \in F'$ і визначені на $[0, \sigma(t_1))_T$, де

$$t_1 = \sup_{t \in [0, T_0]_T} \{ \forall s \in [0, t]_T : x(s) \in D \}.$$

Розв'язки системи (5), які відповідають $(x(0), u)$ продовжимо на весь інтервал $[0, T_0]_T$ наступним чином:

$$y(t) = \begin{cases} x(t), t \in [0, \sigma(t_1))_T \\ x(\sigma(t_1)), t \in [\sigma(t_1), T_0]_T. \end{cases} \quad (7)$$

Множину всіх таких розв'язків позначимо через χ'_e і покажемо, що вона є множиною рівномірно обмежених і рівностепенно неперервних функцій. Має місце наступна лема.

Лема 1. Існують додатні сталі M_1 і M_2 такі, що для всіх $y \in \chi'_e$ виконуються наступні умови:

$$a) |y(t)| \leq M_1, t \in [0, T_0]_T \quad (8)$$

$$б) |y(t) - y(s)| \leq M_2(t - s), s \leq t, t \in [0, T_0]_T \quad (9)$$

Доведення. Оскільки K – компактна множина, $x(0) \in K$, тоді $y(0) \in K$ і $|y(0)| \leq M_0$ для всіх $y \in \chi'_e$. В силу компактності множини U для всіх керувань u маємо: $|u(t)| \leq B$. Покажемо рівномірну обмеженість розв'язку y при $t \in [0, T_0]_T$.

Нехай $m(t) = |y(t) - y(0)|$. З рівняння (5), умови лінійного росту і нерівності $|y(s)| \leq m(s) + |y(0)|$ для довільного $t \in [0, T_0]_T$ маємо:

$$0 \leq m(t) \leq C_1 \int_{[0, t]_T} m(s) \Delta s + C_1 \int_{[0, t]_T} (1 + |y(0)| + |u(s)|) \Delta s.$$

Використовуючи аналог леми Гронуолла [2, стр. 256] отримаємо наступну нерівність:

$$|y(t) - y(0)| \leq C \int_{[0, t]_T} (1 + |y(0)| + |u(s)|) \Delta s,$$

де $C = e_{C_1}(T_0, 0)C_1$ при $t \in [0, T_0]_T$. Тоді для довільного $t \in [0, T_0]_T$ маємо:

$$|y(t) - y(0)| \leq CT_0(1 + M_0 + B).$$

$$\text{Тоді } |y(t)| \leq M_0 + CT_0(1 + M_0 + B) \leq M_1.$$

Отже, рівномірну обмеженість $y(t)$ на $[0, T_0]_T$ ми показали. Доведемо рівностепеневу неперервність функції $y(t)$ при $t \in [0, T_0]_T$. Розглянемо наступні випадки.

- 1) Для будь-яких $s_1, s_2 \in [0, \sigma(t_1))_T$ таких, що $s_1 < s_2$, використовуючи умову лінійного росту (3) маємо

$$|y(s_1) - y(s_2)| = |x(s_1) - x(s_2)| = \left| \int_{[s_1, s_2)_T} f(t, x(t), u(t)) \Delta t \right| \leq$$

$$\leq C_1(1 + M_1 + B)(s_2 - s_1) \rightarrow 0 \text{ при } |s_2 - s_1| \rightarrow 0.$$

- 2) Якщо $s_1 < \sigma(t_1) < s_2 < T_0$, тоді аналогічно попередньому випадку маємо:

$$|y(s_1) - y(\sigma(t_1))| = |x(s_1) - x(\sigma(t_1))| \leq$$

$$\leq C_1(1 + M_1 + B)(\sigma(t_1) - s_1) \rightarrow 0 \text{ при } |s_2 - s_1| \rightarrow 0.$$

- 3) Якщо ж $\sigma(t_1) < s_1 < s_2 < T_0$, тоді

$$|y(s_1) - y(s_2)| = |x(\sigma(t_1)) - x(\sigma(t_1))| = 0,$$

що і означає рівностепеневу неперервність функції $y(t)$ на $[0, T_0]_T$. Лему 1 доведено.

Означення 5. [3] Нехай $\mu = \inf J(x(0), u)$. Послідовність $(x^r(0), u^r) \in F'$ при $r = 1, 2, \dots$ називається мінімізуючою, якщо

$$\mu = \lim_{r \rightarrow \infty} J(x^r(0), u^r).$$

Нехай $(x^r(0), u^r)$ та $(y^r(0), u^r)$, $r = 1, 2, \dots$ – послідовності з F' , а x^r, y^r – розв'язки системи (5), що відповідають парам $(x^r(0), u^r)$ та $(y^r(0), u^r)$ і визначені на $[0, \sigma(t_1))_T$ та $[0, T_0]_T$.

Відповідні граничні умови вигляд:

$$e_x^r = (t_1^r, x^r(0), x^r(t_1^r)), e_y^r = (t_1^r, y^r(0), y^r(t_1^r)).$$

Має місце наступна лема.

Лема 2. Існує така мінімізуюча послідовність $(y^r(0), u^r)$, $r = 1, 2, \dots$, що y^r рівномірно збігається до y^* на $[0, T_0]_T$ при $r \rightarrow \infty$. Крім того y^* задовольняє умови (8) і (9) і e_y^r збігається до

$$e_y^* = (t_1^*, y^*(0), y^*(t_1^*)).$$

Доведення. Нехай $(\bar{y}^j(0), \bar{u}^j)$, $j = 1, 2, \dots$ – деяка мінімізуюча послідовність, а $\bar{y}_j$ – відповідний

розв'язок системи (5). Оскільки $x(0) \in K$, а K – компакт, тоді $|x(0)| \leq M_0$, $|x(t_1)| \leq |x(t_0)| \cdot e^{T_0}$.

Отже, $\bar{e}_x^j, \bar{e}_y^j$ – обмежені.

Використовуючи аналог теореми Арцела-Асколі [7, теорема 4.2] тепер можна виділити підпослідовність $j_1, j_2, \dots$ таку, що $y^r = \bar{y}^{j_r}$ збігається рівномірно на $[0, T_0]_T$ до y^* , а

$e_y^r = \bar{e}_y^{j_r}$ збігається до e_y^* при $r \rightarrow \infty$. Позначимо $u^r = \bar{u}^{j_r}$. Оскільки y^r задовольняє умови (8)-(9) при кожному $r = 1, 2, \dots$, то y^* також задовольняє цим умовам. Оскільки e_y^r збігається до e_y^* , а y^r рівномірно збігається до y^* , тоді

$$\lim_{r \rightarrow \infty} t_1^r = t_1^*, \lim_{r \rightarrow \infty} y^r(t_1^r) = y^*(t_1^*).$$

Отже, лема 2 доведена.

Далі покладемо $x^*(t) = y^*(t)$ при $t \in [0, \sigma(t_1^*)]_T$.

Нам залишилось показати, що $x^*(t)$ є розв'язком системи (5) при $t \in [0, \sigma(t_1^*)]_T$, що відповідає оптимальному керуванню $u^*(t)$. Функція x^* задовольняє умову Ліпшиця (4), отже, x^* – абсолютно неперервна функція, а отже, Δ -похідна $(x^*)^\Delta$ існує майже скрізь. Має місце наступна лема.

Лема 3. Якщо $(x^*)^\Delta(t)$ існує, то $(x^*)^\Delta(t) \in F(t, x^*(t))$.

Доведення. Позначимо $F(t, x^*(t)) = F$ і розглянемо α -окіл множини F

$$O_\alpha = \{z \in R^n : \text{dist}(z, F) < \alpha\}.$$

Оскільки F – опукла множина, то O_α також опукла множина. Існує додатна послідовність η_a збіжна до нуля при $a \rightarrow 0$, для якої $F(s, x') \subseteq O_a$ при $|s - t| + |x' - x^*(t)| < \eta_a$.

Нехай $z^r(s) = f(s, x^r(s), u^r(s))$. Тоді $z^r(s) \in F(s, x^r(s))$, а отже, $z^r(s) \in O_a$ при $|t - s| < \delta_a$. Розглянемо наступні випадки.

- 1) Нехай $t \in T$ – право-розсіяна точка, тоді

$$(x^r)^\Delta(t) = \frac{x^r(\sigma(t)) - x^r(t)}{\mu(t)} = z^r(s) \in O_a.$$

Перейшовши до границі при $r \rightarrow \infty$, маємо

$$(x^*)^\Delta(t) = \frac{x^*(\sigma(t)) - x^*(t)}{\mu(t)} = z^*(s) \in O_a.$$

Але $a > 0$ ми вибирали довільним чином. Отже,
 $(x^*)^\Delta(t) \in F$.

2) Нехай тепер точка $t \in T$ – право-гранична.
Використовуючи (5), отримаємо

$$(x^r)^\Delta(t) = \frac{x^r(\sigma(t)) - x^r(t)}{\mu(t)} = \frac{1}{h} \int_t^{t+h} z^r(s) ds.$$

Оскільки O_a – опукла множина, та
 $z^r(s) \in O_a$, тоді права частина цієї рівності
належить $\bar{O}_a$. Перейдемо до границі при $r \rightarrow \infty$.
Оскільки $\bar{O}_a$ – замкнена множина, отримаємо:

$$(x^*)^\Delta(t) = \frac{1}{h} \int_t^{t+h} z^*(s) ds \in \bar{O}_a.$$

Нехай $h \rightarrow 0$, тоді $(x^*)^\Delta(t) \in \bar{O}_a$. Але $a > 0$
ми вибирали довільним чином. Отже,
 $(x^*)^\Delta(t) \in F$. Лему доведено.

Має місце наступна лема.

Лема 4. Існує таке керування u^* , що
 $(x^*(0), u^*) \in F'$ і

$$(x^*)^\Delta = f(t, x^*(t), u^*(t)) \quad (10)$$

майже скрізь на $[0, T_0]_T$.

Доведення. За лемою 3 і означенням множини
 $F(t, x)$ отримаємо, що існує керування $u^*(t)$,
яке задовольняє (10). Однак, для того, щоб пара
 $(x^*(0), u^*) \in F'$ необхідно, щоб функція u^* була
вимірною. А це гарантується теоремою про
вимірний вибір на часових шкалах [8, теорема
4.1].

Доведення теореми: Оскільки Φ – неперервна
функція, то $\Phi(e_x^r) \rightarrow \Phi(e_x^*)$ при $r \rightarrow \infty$. А
 $J(x^r(0), u^r) = \Phi(e_x^r)$ збігається до μ , оскільки
ця послідовність мінімізуюча. Отже,
 $J(x^*(0), u^*) = \Phi(e_x^*) = \mu$. Звідси маємо, що
функція $J(x(0), u)$ досягає мінімуму на F' на
парі $(x^*(0), u^*)$. Теорему доведено.

3. Доповнення до теореми існування.

На часовій шкалі $T, \sup T = +\infty$, розглянемо
задачу оптимального керування (1) з критерієм
якості Больца :

$$J(x(0), u) = \int_{[t_0, t_1)} L(t, x(t), u(t)) \Delta t + \Phi_1(e) \rightarrow \inf. \quad (11)$$

Розглянемо наступну множину

$$\tilde{F}(t, x) = \{ \tilde{z} : z = f(t, x, u), z_{n+1} \geq L(t, x, u), u \in U \}. \quad (12)$$

Має місце наступна теорема.

Теорема 6. Нехай для системи (1) з критерієм
якості (11) виконуються умови a1)–a2), L –
неперервна функція, і крім того:

а) F' – непорожня множина,

б) U – замкнена множина,

в) Множина $\tilde{F}(t, x)$ є опуклою для $t \in [0, T_0]_T$,
 $x \in D$.

г) $L(t, x, u) \geq g(u)$, де g – неперервна функція і
 $|u|^{-1} g(u) \rightarrow \infty$ при $|u| \rightarrow \infty, u \in U$.

Тоді існує пара $(x^*(0), u^*) \in F'$, яка мінімізує
критерій якості (11).

Доведення цієї теореми складається з шести
лем (леми 5.1 – 5.6) і повторює доведення
відповідної теореми [3, стр. 97, теорема 4.1]. Ми
не будемо повторювати це доведення,
зупинимось лише на тих моментах, в яких
проявляється специфіка часових шкал. Лема 5.1 в
нашому випадку буде звучати так:

Для довільних $v > 0, \eta > 0$ існує таке $\delta > 0$,
що

$$|A| < \delta \quad \text{і} \quad \int_{[0, T_0]_T} g(u(t)) \Delta t < v \quad \text{впливає}$$

$$\int_A |u(t)| \Delta t < \eta.$$

Доведення цієї леми впливає з переходу до
розширеної функції $\tilde{u}(t)$ і того факту з [5], що

$$\int_{[a, b]_T} u(t) \Delta t = \int_{[a, b]} \tilde{u}(t) dt.$$

Далі в доведенні теореми використовується
поняття рівностепеневості абсолютної
неперервності, яке переноситься і на наш
випадок. Формулювання і доведення лем 5.2 і
5.3 аналогічне, тільки в доведенні леми 5.3
замість теореми Хеллі використовується її аналог
на часових шкалах (теорема 1). Далі аналогічно
будуються множини $\tilde{O}_\eta$ і C_η . Формулювання і
доведення леми 5.4 аналогічне. Формулювання
леми 5.5 аналогічне, а доведення аналогічне за
винятком право-розсіяної точки, але таке
доведення ми проводили в лемі 3.
Формулювання леми 5.6 аналогічне, а доведення
базується на використанні аналогу теореми
Лебага про диференційованість монотонної
функції (теорема 4). Аналогічними
міркуваннями, з використанням лем, доводиться і
сама теорема 6.

Список використаних джерел

1. Hilger S. Analysis on measure chains – a unified approach to continuous and discrete calculus / S. Hilger. Results Math, 18. – 1990. – p.18 – 56.
2. Bohner M, Peterson A. Dynamic equations on time scales / M. Bohner, A. Peterson – Boston: Birkhäuser, 2001. – 369p.
3. Флеминг У., Ришел Р. Оптимальное управление детерминированными и стохастическими системами / У. Флеминг, Р. Ришел – Москва: Мир, 1978. – с. 316.
4. Bohner M. and Peterson A., editors. Advances in dynamic equations on time scales / M. Bohner, A. Peterson – Boston: Birkhäuser, 2003. – 361p.
5. Bohner M., Stanzhytskyi A., Bratochkina A. Stochastic dynamic equations on general time scales / M. Bohner, A. Stanzhytskyi, A. Bratochkina // Electronic Journal of Differential Equations. – 2013. – p. 1-15.
6. Bourdin L., Trelat E. Pontryagin maximum principle for finite dimensional nonlinear optimal control problems on time scales / L. Bourdin, E. Trelat // SIAM J. Control Optimal. 5. – 2013. - p. 3781-3813.
7. Gong Y., Xiang X. A class of optimal control problems of systems governed by the first order linear dynamic equations on time scales / Y. Gong, X. Xiang // Journal of industrial management optimization, 5(1). – 2009. – p. 1-10.
8. Pawluszewicz E., Torres D. Avoidance Control on Time Scales / E. Pawluszewicz, D. Torres // Journal of Optimal Theory. – 2010. – p. 527-542.
9. Pouso R., Sanjurjo A. A new unification of continuous, discrete and impulsive calculus through Stieltjes derivatives. [Електронний ресурс] / R. Pouso, A. Sanjurjo – 2015. – Режим

доступу до журналу: [http:// www.researchgate.net/ publication/ 277952939](http://www.researchgate.net/publication/277952939).

References

1. HILGER, S. (1990) Analysis on measure chains – a unified approach to continuous and discrete calculus. Results Math., p.18 – 56.
2. BOHNER, M., PETERSON, A. (2001) Dynamic equations on time scales. Boston: Birkhäuser.
3. FLEMING, U., RISHEL, R. (1978) Optimal'noe upravlenie determinirovannymi i stohasticheskimi sistemami. Moskva: Mir.
4. BOHNER, M., PETERSON, A. (ed.) (2003) Advances in dynamic equations on time scales. Boston: Birkhäuser.
5. BOHNER, M., STANZHYTSKYI, A., BRATOCHKINA, A. (2013) Stochastic dynamic equations on general time scales. Electronic Journal of Differential Equations, p. 1-15.
6. BOURDIN, L., TRELAT, E. (2013) Pontryagin maximum principle for finite dimensional nonlinear optimal control problems on time scales. SIAM J. Control Optimal, p. 3781-3813.
7. GONG, Y., XIANG, X. (2009) A class of optimal control problems of systems governed by the first order linear dynamic equations on time scales. Journal of industrial management optimization, p. 1-10.
8. PAWLUSZEWICZ, E., TORRES, D. (2010) Avoidance Control on Time Scales. Journal of Optimal Theory, pp. 527-542.
9. POUSO, R., SANJURJO, A. (2015) A new unification of continuous, discrete and impulsive calculus through Stieltjes derivatives. [Online] - Available from: [http:// www.researchgate.net/ publication/ 277952939](http://www.researchgate.net/publication/277952939).

Надійшла до редколегії 18.11. 2015

УДК 519.946

Маринець В.В.¹, д.ф.-м.н., проф,
Питьовка О.Ю.², к.ф.-м.н., доц.

Один підхід дослідження крайових задач для рівнянь в частинних похідних вищого порядку

¹ ДВНЗ «Ужгородський національний
університет», 88000, м.Ужгород, пл.Народна,3,
e-mail: vasyl-marynets@rambler.ru

² Мукачівський державний університет, 89600,
м.Мукачево, вул.Ужгородська, 26,
e-mail: oxana_pityovka@bigmir.net

V.V.Marynets¹, doctor of physic. and mathem., prof.,
O.Y.Pityovka², candidate of physic. and mathem.

On one approach of the boundary-value problem investigation for the higher-order partial differential equations

¹ Uzhhorod National University of Uzhhorod, 88000,
Uzhhorod, Narodna sq., 3,
e-mail: vasyl-marynets@rambler.ru

² Mukachevo State University, 89600, Mukachevo,
Uzhhorodska str., 26,
e-mail: oxana_pityovka@bigmir.net

Будується одна конструктивна модифікація двостороннього методу дослідження та наближеного інтегрування крайової задачі для нелінійного диференціального рівняння в частинних похідних третього порядку на площині, коли край області незалежних змінних має складну структуру.

Ключові слова: двосторонній метод, крайова задача, нелінійне диференціальне рівняння в частинних похідних.

This work is about the investigation and approximate integration of the boundary—value problems in the theory of partial differential equations of the hyperbolic type with a complex structure of the bound. We give one approach of the investigation of the Cauchy-Goursat boundary-value problem for a third order non-linear differential equation of the hyperbolic type with the help of the constructive modification of the two-sided method. On the basis of transformation of the given problem to the equivalent system of integro-differential equations we establish sufficient conditions of existence, regularity of solution of the boundary-value problem, prove theorems about differential inequalities, and give one practical method of construction of the zero approximation functions (functions of the first “blanch”).

The alternative two-sided method built for the investigation of boundary-value problems for partial differential equations has a number of advantages upon other monotone two-sided methods.

Key Words: two-sided method, boundary-value problem, non-linear partial differential equation

Статтю представив докт. фіз.-мат. наук, проф. Мішкольцького ун-ту Ронто М.

Дана робота є продовженням досліджень, приведених в[1,2].

Нехай в R^2 задана область

$$D = D_1 \cup D_2 \cup D_3, \text{ де}$$

$$D_1 = \{(x, y) | x \in [x_0, x_1], y \in (g(x), y_1)\},$$

$$D_2 = \{(x, y) | x \in (x_0, x_1], y \in (y_1, y_2)\},$$

$$D_3 = \{(x, y) | x \in (x_1, x_2], y \in (y_0, y_1)\},$$

$$x_0 < x_1 < x_2, \quad y_0 < y_1 < y_2,$$

де $y = g(x)$ і тоді $x = k(y)$ – «вільна» крива,
 $g'(x) < 0$, $g(x_0) = y_1$, $g(x_1) = y_0$.

Дослідимо задачу: при $(x, y) \in D$ знайти розв'язок диференціального рівняння

$$D^{(2,1)}u(x, y) = f(x, y, u(x, y)), D^{(1,0)}u(x, y), \quad (1)$$

$$D^{(2,0)}u(x, y) := f[u(x, y)]$$

$f: \bar{B} \rightarrow R$, $\bar{B} \in R^5$, який задовольняє крайові умови

$$u(x, g(x)) = \varphi_1(x),$$

$$D^{(0,1)}u(x, g(x)) = \varphi_2(x), \quad (2)$$

$$D^{(1,1)}u(x, g(x)) = \varphi_3(x), x \in [x_0, x_1],$$

$$\begin{aligned} u(x_0, y) &= \omega_1(y), \\ D^{(1,0)}u(x_0, y) &= \omega_2(y), y \in [y_1, y_2], \end{aligned} \quad (3)$$

$$u(x, y_0) = \psi(x), x \in [x_1, x_2], \quad (4)$$

та умови узгодженості

$$\begin{aligned} \omega_1(y_1) &= \varphi_1(x_0), \quad \omega_1'(y_1) = \varphi_2(x_0), \\ \omega_2(y_1) &= \varphi_1'(x_0), \quad \omega_2'(y_1) = \varphi_3(x_0), \\ \varphi_1(x_1) &= \psi(x_1), \\ \psi_1'(x_1) &= \varphi_1'(x_1) - g'(x_1)\varphi_2(x_1), \end{aligned} \quad (5)$$

де $\varphi_1(x) \in C^2([x_0, x_1])$, $\psi(x) \in C^2([x_1, x_2])$,
 $\varphi_2(x), \varphi_3(x) \in C^1([x_0, x_1])$,

$\omega_1(y), \omega_2(y) \in C^1([y_1, y_2])$ – задані функції.

Очевидно [3] шуканий розв'язок задачі

(1) – (5) $u(x, y) = u_s(x, y)$, $(x, y) \in \bar{D}_s$, $s = 1, 2, 3$,
де $u_1(x, y)$ – розв'язок в $\bar{D}_1$ задачі Коші (1), (2),
(5), $u_2(x, y)$ – розв'язок задачі Гурса (1), (3) і
 $u_2(x, y_1) = u_1(x, y_1)$ при $(x, y) \in \bar{D}_2$, а $u_3(x, y)$ –
розв'язок при $(x, y) \in \bar{D}_3$ задачі Гурса (1), (4) і
 $u_3(x_1, y) = u_1(x_1, y)$.

Позначимо:

$$\begin{aligned} \Phi_1(x, y) &:= \varphi_1(x) + \\ &+ \int_{g(x)}^y [\varphi_2(k(\eta)) + (x - k(\eta))\varphi_3(k(\eta))] d\eta, (x, y) \in \bar{D}_1, \\ \Phi_2(x, y) &:= \Phi_1(x, y_1) + \omega_1(y) - \omega_1(y_1) + \\ &+ (x - x_0)[\omega_2(y) - \omega_2(y_1)], (x, y) \in \bar{D}_2, \\ \Phi_3(x, y) &:= \psi(x) + \\ &+ \int_{y_0}^y [\varphi_2(k(\eta)) + (x - k(\eta))\varphi_3(k(\eta))] d\eta, (x, y) \in \bar{D}_3, \\ T_1 f[u_1(\xi, \eta)] &:= \int_{g(x)}^y \int_{k(\eta)}^x (x - \xi) f[u_1(\xi, \eta)] d\xi d\eta, \\ &(x, y) \in \bar{D}_1, \\ T_2 f[u_2(\xi, \eta)] &:= \int_{y_1}^y \int_{x_0}^x (x - \xi) f[u_2(\xi, \eta)] d\xi d\eta, \\ &(x, y) \in \bar{D}_2, \\ T_{2,1} f[u_1(\xi, \eta)] &:= \int_{g(x)}^{y_1} \int_{k(\eta)}^x (x - \xi) f[u_1(\xi, \eta)] d\xi d\eta, \\ &(x, y) \in \bar{D}_2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_3 f[u_3(\xi, \eta)] &:= \int_{y_0}^y \int_{x_1}^x (x - \xi) f[u_3(\xi, \eta)] d\xi d\eta, \\ &(x, y) \in \bar{D}_3. \end{aligned}$$

Справедлива наступна

Лема 1. Нехай $f[u(x, y)] \in C(\bar{B})$. Тоді
крайова задача (1) – (5) є еквівалентною системі
рівнянь

$$\begin{aligned} u_s(x, y) &= \Phi_s(x, y) + \varepsilon_s T_{s,1} f[u_1(\xi, \eta)] + \\ &+ T_s f[u_s(\xi, \eta)], \quad (6) \\ (x, y) &\in \bar{D}_s, \quad s = 1, 2, 3, \quad \varepsilon_s = \begin{cases} 0, & s = 1, \\ 1, & s = 2, 3, \end{cases} \end{aligned}$$

Причому, якщо існує обмежена частинна похідна

$\frac{\partial f[u(x, y)]}{\partial D^{(2,0)}u(x, y)}$ в області $\bar{B}$ і крайова задача

(1) – (5) має розв'язок, то він буде регулярним.

Встановимо достатні умови існування
єдиного розв'язку задачі (1) – (5).

З цією метою надалі будемо вважати, що
функція $f[u(x, y)] \in C_1^*(\bar{B})$, тобто, що вона
задовольняє наступні умови [4]:

1. $f[u(x, y)] \in C(\bar{B})$ і в області $\bar{B}$ має
обмежену частинну похідну $\frac{\partial f[u(x, y)]}{\partial D^{(2,0)}u(x, y)}$,

2. у просторі $C(\bar{B}_1)$, $\bar{B}_1 \subset R^8$,
 $Pr_{xOy} \bar{B}_1 = \bar{D}$, існує така функція
 $H(x, y, u(x, y), D^{(1,0)}u(x, y), D^{(2,0)}u(x, y); v(x, y),$
 $D^{(1,0)}v(x, y), D^{(2,0)}v(x, y)) := H[u(x, y); v(x, y)]$,
що

а) $H[u(x, y); v(x, y)] \equiv f[u(x, y)]$,

б) для довільної з простору $C^{(2,0)}(\bar{D})$ пари
функцій $u(x, y), v(x, y) \in \bar{B}_1$, які задовольняють
умови $D^{(k,0)}u(x, y) \geq D^{(k,0)}v(x, y)$, $(x, y) \in \bar{D}$,
 $k = 0, 1, 2$, в області $\bar{B}_1$ виконується нерівність

$$H[u(x, y); v(x, y)] - H[v(x, y); u(x, y)] \leq 0, \quad (7)$$

3. функція $H[u(x, y); v(x, y)]$ в області $\bar{B}_1$
задовольняє умову Ліпшица, тобто, для всяких з

простору $C^{(2,0)}(\bar{D})$ функцій $u_r(x, y)$,
 $v_r(x, y) \in \bar{B}_l$, $r = 1, 2$ виконується умова

$$|H[u_1(x, y); u_2(x, y)] - H[v_1(x, y); v_2(x, y)]| \leq \\ \leq 0,5L \sum_r (|w_r(x, y)| + |D^{(1,0)}w_r(x, y)| + |D^{(2,0)}w_r(x, y)|),$$

$w_r(x, y) := u_r(x, y) - v_r(x, y)$, $r = 1, 2$, $0,5L -$
стала Ліпшица.

Очевидно, якщо функція $f[u(x, y)] \in C(\bar{B})$
і має обмежені частинні похідні першого порядку
по всім своїм аргументам, розпочинаючи з
третього, то $f[u(x, y)]$ завжди належить
простору $C_l^*(\bar{B})$.

Обернене твердження несправедливе.

Нехай функції $Z_{s,p}(x, y)$,
 $V_{s,p}(x, y) \in C^{(2,0)}(\bar{D}_s)$ належать області $\bar{B}_l$,
 $s = 1, 2, 3$, $p \in N$.

Введемо позначення:

$$W_{s,p}(x, y) := Z_{s,p}(x, y) - V_{s,p}(x, y), \\ (x, y) \in \bar{D}_s, \quad s = 1, 2, 3, \\ f_s^p(x, y) := H[Z_{s,p}(x, y); V_{s,p}(x, y)], \\ f_{s,p}(x, y) := H[V_{s,p}(x, y); Z_{s,p}(x, y)], \\ \Omega_s^p(x, y) := \Phi_s(x, y) + \varepsilon_s T_{s,l} f_l^p(\xi, \eta) + \\ + T_s f_s^p(\xi, \eta), \\ \Omega_{s,p}(x, y) := \Phi_s(x, y) + \varepsilon_s T_{s,l} f_{l,p}(\xi, \eta) + \\ + T_s f_{s,p}(\xi, \eta), \\ \alpha_{s,p}(x, y) := Z_{s,p}(x, y) - \Omega_s^p(x, y), \\ \beta_{s,p}(x, y) := V_{s,p}(x, y) - \Omega_{s,p}(x, y), \\ (x, y) \in \bar{D}_s.$$

Побудуємо послідовності функцій
 $\{Z_{s,p}(x, y)\}$, $\{V_{s,p}(x, y)\}$, згідно формул

$$Z_{s,p+l}(x, y) = \Omega_s^p(x, y), \\ V_{s,p+l}(x, y) = \Omega_{s,p}(x, y), \quad (x, y) \in \bar{D}_s, \quad (9)$$

де за нульове наближення $Z_{s,0}(x, y)$,
 $V_{s,0}(x, y) \in \bar{B}_l$ вибираємо довільні функції з
простору $C^{(2,0)}(\bar{D}_s)$, які задовольняють
відповідно умови (2) – (5) та нерівності

$$D^{(k,0)}W_{s,0}(x, y) \geq 0, \quad D^{(k,0)}\alpha_{s,0}(x, y) \geq 0, \\ D^{(k,0)}\beta_{s,0}(x, y) \leq 0, \quad (x, y) \in \bar{D}_s, \quad (10) \\ s = 1, 2, 3, k = 0, 1, 2.$$

Надалі функції $Z_{s,0}(x, y)$,
 $V_{s,0}(x, y) \in C^{(2,1)}(\bar{D}_s)$, які задовольняють
відповідно умови (2) – (5), нерівності (10) і
належать області $\bar{B}_l$ будемо називати
функціями порівняння крайової задачі (1) – (5).

Має місце наступна

Лема 2. Нехай $f[u(x, y)] \in C_l^*(\bar{B})$ і
рівняння (6) в просторі функцій $C^{(2,0)}(\bar{D}_s)$
мають розв'язки, які при $(x, y) \in \bar{D}_s$, $s = 1, 2, 3$,
задовольняють умови

$$D^{(k,0)}V_{s,0}(x, y) \leq D^{(k,0)}u_s(x, y) \leq D^{(k,0)}Z_{s,0}(x, y).$$

Тоді в області $\bar{B}_l$ справедливі нерівності (10).

Дамо практичний метод побудови функцій
порівняння крайової задачі (1) – (5), коли
 $f[u(x, y)] \in C_l^*(\bar{B})$.

Нехай

$$u_s^*(x, y) = \Phi_s(x, y) + \varepsilon_s T_{l,s} f[u_l^*(\xi, \eta)] + \\ + T_s f_s[h(\xi, \eta)],$$

де $h(x, y) \in C^{(2,0)}(\bar{D})$ – довільна в області $\bar{B}$
функція.

Вважаючи, що $u_s^*(x, y) \in \bar{B}_l$, позначимо
 $\alpha_s^*(x, y) := u_s^*(x, y) - \Phi_s(x, y) - \varepsilon_s T_{l,s} f[u_l^*(\xi, \eta)] - \\ - T_s f[u_s^*(\xi, \eta)].$

Тоді функції

$$D^{(k,0)}Z_{s,0}(x, y) = D^{(k,0)}u_s^*(x, y) + |D^{(k,0)}\alpha_s^*(x, y)|, \\ D^{(k,0)}V_{s,0}(x, y) = D^{(k,0)}u_s^*(x, y) - |D^{(k,0)}\alpha_s^*(x, y)|, \\ (x, y) \in \bar{D}_s, \quad s = 1, 2, 3, k = 0, 1, 2$$

при умові, що $D^{(k,0)}Z_{s,0}(x, y), D^{(k,0)}V_{s,0}(x, y) \in \bar{B}_l$
є функціями порівняння крайової задачі (1) – (5).
Дійсно

$$D^{(k,0)}W_{s,0}(x, y) = 2|D^{(k,0)}\alpha_s^*(x, y)| \geq 0,$$

а приймаючи до уваги умову (7), маємо

$$\begin{aligned}
 D^{(k,0)}\alpha_{s,0}(x,y) &= |D^{(k,0)}\alpha_s^*(x,y)| + D^{(k,0)}\alpha_s^*(x,y) + \\
 &+ \varepsilon_s D^{(k,0)}T_{l,s}(f[u_l^*(\xi,\eta)] - f_l^0(\xi,\eta)) + \\
 &+ D^{(k,0)}T_s(f[u_s^*(\xi,\eta)] - f_s^0(\xi,\eta)) \geq 0, \\
 D^{(k,0)}\beta_{s,0}(x,y) &= -|D^{(k,0)}\alpha_s^*(x,y)| + D^{(k,0)}\alpha_s^*(x,y) + \\
 &+ \varepsilon_s D^{(k,0)}T_{l,s}(f[u_l^*(\xi,\eta)] - f_{l,0}(\xi,\eta)) + \\
 &+ D^{(k,0)}T_s(f[u_s^*(\xi,\eta)] - f_{s,0}(\xi,\eta)) \leq 0, \\
 (x,y) &\in \bar{D}_s, s=1,2,3, k=0,1,2,
 \end{aligned}$$

тобто множина функцій порівняння задачі
(1) – (5) не порожня.

Із (8), (9) одержимо

$$\begin{aligned}
 D^{(k,0)}[Z_{s,p}(x,y) - Z_{s,p+l}(x,y)] &= D^{(k,0)}\alpha_{s,p}(x,y), \\
 D^{(k,0)}[V_{s,p}(x,y) - V_{s,p+l}(x,y)] &= D^{(k,0)}\beta_{s,p}(x,y), \quad (11)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 D^{(k,0)}[\alpha_{s,p}(x,y) + \alpha_{s,p+l}(x,y)] &= \\
 = D^{(k,0)}[Z_{s,p}(x,y) - Z_{s,p+2}(x,y)], \\
 D^{(k,0)}[\beta_{s,p}(x,y) + \beta_{s,p+l}(x,y)] &= \\
 = D^{(k,0)}[V_{s,p}(x,y) - V_{s,p+2}(x,y)], \quad (12)
 \end{aligned}$$

$$D^{(k,0)}W_{s,p+l}(x,y) = D^{(k,0)}[\Omega_s^p(x,y) - \Omega_{s,p}(x,y)], \quad (13)$$

$$\begin{aligned}
 D^{(k,0)}\alpha_{s,p+l}(x,y) &= D^{(k,0)}[\Omega_s^p(x,y) - \Omega_s^{p+l}(x,y)], \\
 D^{(k,0)}\beta_{s,p+l}(x,y) &= D^{(k,0)}[\Omega_{s,p}(x,y) - \Omega_{s,p+l}(x,y)], \quad (14) \\
 (x,y) &\in \bar{D}_s, s=1,2,3, k=0,1,2, p=0,1,2,\dots
 \end{aligned}$$

Враховуючи (7), (10), із (11), (13) при $p=0$
одержимо

$$D^{(k,0)}[Z_{s,0}(x,y) - Z_{s,l}(x,y)] \geq 0,$$

$$D^{(k,0)}[V_{s,0}(x,y) - V_{s,l}(x,y)] \leq 0,$$

$$D^{(k,0)}W_{s,l}(x,y) \leq 0,$$

$$(x,y) \in \bar{D}_s, s=1,2,3, k=0,1,2.$$

Нехай при $(x,y) \in \bar{D}_s$ справедливі нерівності

$$\begin{aligned}
 D^{(k,0)}[V_{s,0}(x,y) - Z_{s,l}(x,y)] &\leq 0, \\
 D^{(k,0)}[Z_{s,0}(x,y) - V_{s,l}(x,y)] &\geq 0, \quad (15) \\
 (x,y) &\in \bar{D}_s, s=1,2,3.
 \end{aligned}$$

Тоді, враховуючи попередні нерівності,
маємо

$$\begin{aligned}
 D^{(k,0)}V_{s,0}(x,y) &\leq D^{(k,0)}Z_{s,l}(x,y) \leq \\
 &\leq D^{(k,0)}V_{s,l}(x,y) \leq D^{(k,0)}Z_{s,0}(x,y),
 \end{aligned}$$

тобто, якщо $Z_{s,0}(x,y), V_{s,0}(x,y) \in \bar{B}_l$, то і
 $Z_{s,l}(x,y), V_{s,l}(x,y) \in \bar{B}_l$.

Із (14) при $p=0$ одержимо $D^{(k,0)}\alpha_{s,l}(x,y) \leq 0$,
 $D^{(k,0)}\beta_{s,l}(x,y) \geq 0$, для всіх $(x,y) \in \bar{D}_s$, а отже із
(11), (13) при $p=l$ і $(x,y) \in \bar{D}_s$ випливає

$$D^{(k,0)}[Z_{s,l}(x,y) - Z_{s,2}(x,y)] \leq 0,$$

$$D^{(k,0)}[V_{s,l}(x,y) - V_{s,2}(x,y)] \geq 0,$$

$$D^{(k,0)}W_{s,2}(x,y) \geq 0,$$

$$(x,y) \in \bar{D}_s, s=1,2,3, k=0,1,2.$$

Оскільки в силу умов (7), (15) при
 $(x,y) \in \bar{D}_s$

$$\begin{aligned}
 D^{(k,0)}[\alpha_{s,0}(x,y) + \alpha_{s,l}(x,y)] &= D^{(k,0)}[Z_{s,0}(x,y) - \\
 - V_{s,l}(x,y) + T_{l,s}(f_{l,0}(\xi,\eta) - f_l^l(\xi,\eta)) + \\
 + T_s(f_{s,0}(\xi,\eta) - f_s^l(\xi,\eta))] &\geq 0,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 D^{(k,0)}[\beta_{s,0}(x,y) + \beta_{s,l}(x,y)] &= D^{(k,0)}[V_{s,0}(x,y) - \\
 - Z_{s,l}(x,y) + T_{l,s}(f_l^0(\xi,\eta) - f_{l,l}(\xi,\eta)) + \\
 + T_s(f_s^0(\xi,\eta) - f_{s,l}(\xi,\eta))] &\leq 0,
 \end{aligned}$$

то із (12) при $p=0, k=0,1,2$ і $(x,y) \in \bar{D}_s$ маємо

$$D^{(k,0)}[Z_{s,0}(x,y) - Z_{s,2}(x,y)] \geq 0,$$

$$D^{(k,0)}[V_{s,0}(x,y) - V_{s,2}(x,y)] \leq 0, s=1,2,3.$$

Але

$$\begin{aligned}
 D^{(k,0)}[Z_{s,p+l}(x,y) - V_{s,p+2}(x,y)] &= \\
 = D^{(k,0)}[\Omega_s^p(x,y) - \Omega_{s,p+l}(x,y)] & \\
 D^{(k,0)}[V_{s,p+l}(x,y) - Z_{s,p+2}(x,y)] &= \\
 = D^{(k,0)}[\Omega_{s,p}(x,y) - \Omega_s^{p+l}(x,y)] & \quad (16)
 \end{aligned}$$

для $p \in N$, а отже, враховуючи попередні
нерівності із (16) при $p=0$ одержимо

$$D^{(k,0)}[Z_{s,1}(x,y) - V_{s,2}(x,y)] \leq 0,$$

$$D^{(k,0)}[V_{s,1}(x,y) - Z_{s,2}(x,y)] \geq 0,$$

$$(x,y) \in \bar{D}_s, \quad s = 1,2,3, \quad k = 0,1,2,$$

тобто мають місце нерівності

$$\begin{aligned} D^{(k,0)}V_{s,0}(x,y) &\leq D^{(k,0)}Z_{s,1}(x,y) \leq D^{(k,0)}V_{s,2}(x,y) \leq \\ &\leq D^{(k,0)}Z_{s,2}(x,y) \leq D^{(k,0)}V_{s,1}(x,y) \leq D^{(k,0)}Z_{s,0}(x,y), \\ (x,y) &\in \bar{D}_s. \end{aligned}$$

Із (14) при $p = 1$ маємо $D^{(k,0)}\alpha_{s,2}(x,y) \geq 0$,
 $D^{(k,0)}\beta_{s,2}(x,y) \leq 0$, а отже функції
 $Z_{s,2}(x,y)$, $V_{s,2}(x,y) \in \bar{B}_1$ і є функціями
порівняння задачі (1) – (5).

Повторюючи вище наведені міркування,
методом математичної індукції переконуємось у
справедливості нерівностей

$$\begin{aligned} D^{(k,0)}V_{s,2p}(x,y) &\leq D^{(k,0)}Z_{s,2p+1}(x,y) \leq \\ &\leq D^{(k,0)}V_{s,2p+2}(x,y) \leq D^{(k,0)}Z_{s,2p+3}(x,y) \leq \\ &\leq D^{(k,0)}V_{s,2p+3}(x,y) \leq D^{(k,0)}Z_{s,2p+2}(x,y) \leq \\ &\leq D^{(k,0)}V_{s,2p+1}(x,y) \leq D^{(k,0)}Z_{s,2p}(x,y), \end{aligned} \quad (17)$$

для $\forall (x,y) \in \bar{D}_s, \quad s = 1,2,3, \quad k = 0,1,2, \quad p = 0,1,2, \dots$

Таким чином, справедлива наступна

Теорема 1. Нехай функція
 $f[u(x,y)] \in C_1^*(\bar{B})$, а в області $\bar{B}_1$ виконуються
умови (15).

Тоді для послідовностей функцій
 $\{D^{(k,0)}Z_{s,p}(x,y)\}, \quad \{D^{(k,0)}V_{s,p}(x,y)\}$, які
побудовані згідно закону (9), де за нульове
наближення $D^{(k,0)}Z_{s,0}(x,y), \quad D^{(k,0)}V_{s,0}(x,y) \in \bar{B}_1$,
 $k = 0,1,2, \quad s = 1,2,3$, вибираються функції
порівняння задачі (1) – (5), в області $\bar{B}_1$
справедливі нерівності (17).

Покажемо, що побудовані послідовності
функцій $\{D^{(k,0)}Z_{s,p}(x,y)\}, \quad \{D^{(k,0)}V_{s,p}(x,y)\}$
збігаються рівномірно при $(x,y) \in \bar{D}_s$ і

$$\begin{aligned} \lim_{p \rightarrow \infty} D^{(k,0)}Z_{s,p}(x,y) &= \lim_{p \rightarrow \infty} D^{(k,0)}V_{s,p}(x,y) = \\ &= D^{(k,0)}u_s(x,y), \quad (x,y) \in \bar{D}_s, \quad s = 1,2,3, \quad k = 0,1,2. \end{aligned} \quad (18)$$

В силу нерівностей (17) для цього достатньо
показати, що

$$\lim_{p \rightarrow \infty} D^{(k,0)}W_{s,p}(x,y) = 0,$$

$$(x,y) \in \bar{D}_s, \quad s = 1,2,3, \quad k = 0,1,2.$$

З цією метою позначимо:

$$\begin{aligned} \max_{s,k} \sup_{\bar{D}_s} |D^{(k,0)}W_{s,0}(x,y)| &= d, \\ \max\{1, \sup_{\bar{D}} (x - x_0 + y - y_0)\} &= \gamma. \end{aligned}$$

Із (13) маємо

$$\begin{aligned} D^{(k,0)}W_{s,p+1}(x,y) &= D^{(k,0)}\{\varepsilon_s T_{s,1}[f_l^p(\xi,\eta) - \\ &- f_{l,p}(\xi,\eta)] + T_s[f_s^p(\xi,\eta) - f_{s,p}(\xi,\eta)]\}, \end{aligned}$$

а отже, в силу умови Ліпшица

$$\begin{aligned} |D^{(k,0)}W_{s,p+1}(x,y)| &\leq L \left\{ \varepsilon_s T_{s,1} \left[\sum_{k=0}^2 |D^{(k,0)}W_{l,p}(\xi,\eta)| \right] + \right. \\ &\left. + T_s \left[\sum_{k=0}^2 |D^{(k,0)}W_{s,p}(\xi,\eta)| \right] \right\}, \end{aligned}$$

звідки методом математичної індукції
переконуємось у справедливості оцінок

$$\begin{aligned} |D^{(k,0)}W_{s,p}(x,y)| &\leq (p!)^{-1} [3L\gamma(x - x_0 + y - y_0)]^p \cdot d, \\ (x,y) &\in \bar{D}_s, \quad s = 1,2,3, \quad k = 0,1,2, \quad p \in \mathbb{N}. \end{aligned} \quad (19)$$

Із оцінок (19) випливає виконання умов (18).

Перейшовши у (9) до границі при $p \rightarrow \infty$
переконуємось, що граничні функції $u_s(x,y)$ є
розв'язками відповідних рівнянь (6) при
 $(x,y) \in \bar{D}_s, \quad s = 1,2,3$.

Теорема 2. Нехай виконуються умови
теорема 1.

Тоді послідовності функцій
 $\{D^{(k,0)}Z_{s,p}(x,y)\}, \quad \{D^{(k,0)}V_{s,p}(x,y)\}$, побудовані
згідно формул (9), де за нульове наближення
 $D^{(k,0)}Z_{s,0}(x,y), \quad D^{(k,0)}V_{s,0}(x,y) \in \bar{B}_1$, вибираємо
функції порівняння крайової задачі (1) – (5):

1. збігаються рівномірно до єдиного
регулярного розв'язку крайової задачі (1) – (5)
при $(x,y) \in \bar{D}$;

2. мають місце оцінки (19);

3. в області $\bar{B}_1$ виконуються нерівності

$$\begin{aligned} D^{(k,0)}V_{s,p}(x,y) &\leq (\geq) D^{(k,0)}u_s(x,y) \leq (\geq) \\ &\leq (\geq) D^{(k,0)}Z_{s,p}(x,y), \end{aligned} \quad (20)$$

для p – парних (непарних), $(x, y) \in \bar{D}_s$, $s = 1, 2, 3$,
 $k = 0, 1, 2$.

Для доведення єдиності розв'язку задачі
(1) – (5), достатньо провести міркування,
аналогічні до тих, які викладені в [5].

Доведемо справедливості нерівностей (20). З
цією метою припустимо супротивне, що в деякій
точці $(x, y) \in \bar{D}_s$ та номера, наприклад, $p = 2k$
виконується нерівність $V_{s,2n}(x, y) > u_s(x, y)$. Тоді
для всякого $v \in N$ в силу нерівностей (17) в
даній точці

$$u_s(x, y) < V_{s,2n}(x, y) \leq V_{s,2(n+v)}(x, y),$$

тобто послідовність функцій $\{V_{s,2(n+v)}(x, y)\}$ в
цій точці не збігається до розв'язку $u_s(x, y)$, що
суперечить доведеному. Аналогічно доводяться
всі інші нерівності в (20).

Наслідок. Нехай права частина рівняння (1)
 $f[u(x, y)] \equiv f[u(x, y); 0]$, $f[0] \geq (\leq) 0$. Тоді
розв'язок крайової задачі (1) – (5) з однорідними
крайовими умовами (2) – (4) задовольняє
нерівності

$$D^{(k,0)}u_s(x, y) \geq (\leq) 0, s = 1, 2, 3, k = 0, 1, 2, (x, y) \in \bar{D}_s$$

Список використаних джерел

1. Маринець В.В., Маринець К.В. Крайова
задача Гурса-Дарбу для нелінійного рівняння
гіперболічного типу // Доповіді НАНУ – 2013. –
№10. – С.23–28.
2. Marynets V.V., Marynets K.V. On Goursat
Darboux boundary-value problem for systems of
non-linear differential equations of hyperbolic
type // Miskolc Mathematical Notes. – 2013. –
Volume 14. – №3–P.1009–1020.
3. Collatz L. Funktionalanalysis und
numerische matematik. Berlin – Göttingen-
Heidelberg: Springer-Verlag – 1964. – P.446.
4. Маринець В.В., Маринець К.В.,
Питьовка О.Ю. Про одну крайову задачу теорії
ДРЧП гіперболічного типу в області із складною
структурою краю / В.В. Маринець,
К.В.Маринець, О.Ю.Питьовка // Наук.вісник
Ужгород.ун-ту. Серія Математика і інформатика
– 2014. – Вип.25, №2. – С.110–117.
5. Маринець В.В. Аналітичні методи в теорії
диференціальних рівнянь в частинних похідних
гіперболічного типу. – Ужгород: Вид-во УжНУ
«Говерла», 2006. – 130с.

References

1. MARYNETS, V. and MARYNETS, K.
(2013) *Krayova zadacha Hursa-Darbu dlya
neliniynoho rivnyannya hiperbolichnoho typu*.
Dopovidi NANU – №10. – P.23–28.
2. MARYNETS, V. and MARYNETS, K.
(2013) *On Goursat Darboux boundary-value
problem for systems of non-linear differential
equations of hyperbolic type* Miskolc Mathematical
Notes. – Volume 14. – №3–P.1009–1020.
3. COLLATZ, L. (1964) *Funktionalanalysis
und numerische matematik*. Berlin – Göttingen-
Heidelberg: Springer-Verlag.
4. MARYNETS, V., MARYNETS, K. and
PITYOVKA, O. (2014) *Pro odnu krayovu zadachu
teoriyi DRCHP hiperbolichnoho typu v oblasti iz
skladnoyu strukturoyu krayu*. Nauk.visnyk
Uzhhorod.un-tu. Seriya Matematyka i informatyka. –
Vyp.25, №2. – P.110–117.
5. MARYNETS, V. (2006) *Analitychni metody
v teorii dyferentsial'nykh rivnyan' v chastynnykh
pokhidnykh hiperbolichnoho typu*. –Uzhhorod:
Vydv-vo UzhNU «Hoverla».

Надійшла до редколегії 4.12. 2015

УДК 539.3

Михайленко С. В.¹, к. ф.-м. н.

S. V. Mikhaylenko¹, Ph. D.

Побудова наближень стаціонарних розв'язків рівняння осцилятора з кубічною нелінійністю і моногармонічним збудженням

Constructing approximate stationary solutions to the oscillator equation with cubic nonlinearity and monoharmonic perturbation

¹ Житомирський державний університет імені
Івана Франка, 10008, м. Житомир, вул. Велика
Бердичівська, 40
e-mail: s.mikhaylenko@ukr.net

¹ Ivan Franko State University of Zhytomyr, 10008,
Zhytomyr, Velyka Berdychivska Str., 40
e-mail: s.mikhaylenko@ukr.net

Пропонується метод побудови наближень стаціонарних розв'язків рівняння, що описує поведінку осцилятора з лінійною дисипативною і кубічною консервативною характеристиками при моногармонічному навантаженні.

Ключові слова: нелінійний осцилятор, коефіцієнти Фур'є, моногармонічне навантаження, стаціонарні коливання, гармонічний баланс.

We propose an approximation method for stationary solutions of an equation that describes the behavior of oscillator with a linear dissipative characteristic and a cubic nonlinear conservative characteristic in a monoharmonic load. The method is based on the representation of complex Fourier coefficients as functions of components of the complex loading amplitude. A general form of these functions appears when their invariance condition regarding conversion shift over time is used. As a result, each complex Fourier coefficient is represented as the product of some complex value function of the square amplitude by the appropriate degree of the complex loading amplitude. This presentation of Fourier coefficients makes it possible to reduce an infinite system of equations of harmonic balance regarding the Fourier coefficients to the infinite system of equations regarding unknown functions of square of the loading amplitude. This system enables the construction of solutions in the form of series in even powers of the loading amplitude, which makes it possible to construct approaching stationary solutions of equation for oscillator in the form of analytical expressions. The managing factor here is the loading amplitude.

Key Words: nonlinear oscillator, Fourier coefficient, monoharmonic load, stationary vibrations, harmonic balance.

Статтю представив д. ф.-м.н., проф. Жук Я. О.

1. Рівняння нелінійного осцилятора і система рівнянь гармонічного балансу

Рівняння осцилятора з лінійною дисипативною і кубічною консервативною характеристиками при моногармонічному навантаженні (рівняння типу Дуфінга) має вигляд [1,2]:

$$\frac{d^2 \varepsilon}{d\tau^2} + \delta_0 \frac{d\varepsilon}{d\tau} + \varepsilon - (f_1' \cos g\tau - f_1'' \sin g\tau) = -d_0 \varepsilon^3, \tau > 0, \quad (1)$$

де $\delta_0, g, f_1', f_1'', d_0 = \text{const}$, причому $\delta_0 > 0, g > 0, d_0 \neq 0$.

У механіці, наприклад, цим рівнянням описується в безрозмірних параметрах поведінка

визкопружного стержня, один кінець якого закріплений, а інший з'єднаний з масою, яка збуджується моногармонічною силою. Матеріал стержня описується моделлю типу Фойгта з кубічною пружністю і лінійною в'язкістю [2,3].

Періодичні розв'язки рівняння (1) шукаємо у вигляді ряду Фур'є

$$\varepsilon = \frac{\varepsilon_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [\varepsilon_n' \cos n g \tau + \varepsilon_n'' \sin n g \tau] = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{\varepsilon}_n e^{i n g \tau}. \quad (2)$$

$$\tilde{\varepsilon}_n = \varepsilon_n' + i \varepsilon_n'', i = \sqrt{-1}, n \geq 1; \quad \tilde{\varepsilon}_{-n} = \overline{\tilde{\varepsilon}_n}; \tilde{\varepsilon}_0 = \varepsilon_0. \quad (3)$$

Риска зверху означає комплексно-спряжену величину.

Якщо підставити (2) в (1), увівши позначення

$$\tilde{\theta}_n = 1 - (n\vartheta)^2 + i\delta_0 n\vartheta, \tilde{f}_1 = f_1' + if_1'', \quad (4)$$

дістанемо

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{\theta}_n \tilde{\varepsilon}_n e^{in\vartheta\tau} - (\tilde{f}_1 e^{-i\vartheta\tau} + \tilde{f}_1 e^{i\vartheta\tau}) = -\frac{d_0}{4} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \tilde{\varepsilon}_k \tilde{\varepsilon}_l \tilde{\varepsilon}_m e^{i(k+l+m)\vartheta\tau}. \quad (5)$$

Помножимо ліву та праву частини (5) на $\frac{\vartheta}{2\pi} e^{-in\vartheta\tau}$ і проінтегруємо по τ від 0 до $\frac{2\pi}{\vartheta}$. Після необхідних викладок, пов'язаних з усередненням потрійної суми, дістанемо нескінчену систему нелінійних рівнянь відносно коефіцієнтів $\tilde{\varepsilon}_n, n \geq 0$ з (2)

$$\tilde{\theta}_n \tilde{\varepsilon}_n - \tilde{f}_n = -\frac{d_0}{4} \left[\sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^{n-k} \tilde{\varepsilon}_k \tilde{\varepsilon}_l \tilde{\varepsilon}_{n-k-l} + 3 \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=0}^{n+k} \tilde{\varepsilon}_k \tilde{\varepsilon}_l \tilde{\varepsilon}_{n+k+l} + 3 \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \tilde{\varepsilon}_k \tilde{\varepsilon}_l \tilde{\varepsilon}_{n+k+l} \right], \quad (6)$$

$$n = 0, 1, 2, \dots,$$

де $\tilde{f}_n = 0$, якщо $n \neq 1$.

2. Побудова наближень для розв'язків перетвореної системи рівнянь гармонічного балансу

Скористаємось загальним представленням комплексних амплітуд $\tilde{\varepsilon}_n$

$$\tilde{\varepsilon}_n = \tilde{E}_n (|f_1|^2)^{n/2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (7)$$

обґрунтування якого наведено в [3] з використанням умови інваріантності коефіцієнтів Фур'є відносно перетворення зсуву в часі.

Тут $\tilde{E}_0$ - довільна дійсна, а $\tilde{E}_1, \tilde{E}_2, \dots$ - довільні комплекснозначні функції дійсного аргументу $|f_1|^2 = f_1'^2 + f_1''^2$. Нижче величину $|f_1|$ називатимемо амплітудою навантаження.

Якщо підставити (7) у систему гармонічного балансу (6), то після скорочення на $\tilde{f}_1^n$ дістанемо нескінченну систему рівнянь відносно величин $\tilde{E}_n$

$$\tilde{\theta}_n \tilde{E}_n - \eta_n = -\frac{d_0}{4} \left[\sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^{n-k} \tilde{E}_k \tilde{E}_l \tilde{E}_{n-k-l} + 3 \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=0}^{n+k} \tilde{E}_k \tilde{E}_l \tilde{E}_{n+k+l} |f_1|^2 + 3 \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \tilde{E}_k \tilde{E}_l \tilde{E}_{n+k+l} |f_1|^{2(k+l)} \right], \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (8)$$

Тут $\eta_1 = 1$ і $\eta_n = 0$, якщо $n \neq 1$.

Якщо розв'язки системи (8) шукати у вигляді

$$\tilde{E}_n = \tilde{E}_n^{(0)} + \sum_{j=1}^{\infty} \tilde{\alpha}_n^{(j)} |f_1|^{2j}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (9)$$

то як і в статті [3], можна дістати загальні формули для обчислення коефіцієнтів $\tilde{E}_n^{(0)}, \tilde{\alpha}_n^{(j)}$. Проте формула для $\tilde{\alpha}_n^{(j)}$ виходить громіздкою.

Оскільки, зазвичай, доводиться обмежуватись скінченними сумами типу (9), застосуємо підхід, який дає ті самі результати.

Знехтуємо в правій частині (8) тими доданками, які містять, як множники, степені амплітуди навантаження. Розв'язок $\tilde{E}_n^{(0)}, n \geq 0$ системи, що отримується, назвемо нульовим наближенням розв'язку системи (8).

Отже, для нульового наближення

$$\tilde{\theta}_n \tilde{E}_n^{(0)} - \eta_n = -\frac{d_0}{4} \sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^{n-k} \tilde{E}_k^{(0)} \tilde{E}_l^{(0)} \tilde{E}_{n-k-l}^{(0)}, \quad (10)$$

$$n = 0, 1, 2, \dots$$

Кубічне рівняння, яке дістаємо з (10) у разі $n = 0$, має один дійсний розв'язок

$$\tilde{E}_0^{(0)} = 0 \quad (11)$$

при $d_0 > 0$ і три дійсних розв'язки

$$\tilde{E}_0^{(0)} = 0, \tilde{E}_0^{(0)} = \frac{2}{\sqrt{|d_0|}}, \quad (12)$$

$$\tilde{E}_0^{(0)} = -\frac{2}{\sqrt{|d_0|}}$$

при $d_0 < 0$.

Інші величини нульового наближення однозначно визначаються загальною формулою

$$\tilde{E}_n^{(0)} = \frac{1}{\tilde{\theta}_n + \frac{3}{4} d_0 (\tilde{E}_0^{(0)})^2} (\eta_n - \frac{d_0}{4} \left[\sum_{k=1}^{n-1} \tilde{E}_0^{(0)} \tilde{E}_k^{(0)} \tilde{E}_{n-k}^{(0)} + \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{l=0}^{n-k} \tilde{E}_k^{(0)} \tilde{E}_l^{(0)} \tilde{E}_{n-k-l}^{(0)} \right]), \quad n \geq 1 \quad (13)$$

(тут і нижче знак суми $\sum$ береться до уваги лише в тому разі, коли число над цим знаком не менше числа, що стоїть під ним).

Систему рівнянь

$$\begin{aligned} \tilde{\theta}_n \tilde{E}_n - \eta_n = & -\frac{d_0}{4} \left[\sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^{n-k} \tilde{E}_k \tilde{E}_l \tilde{E}_{n-k-l} + \right. \\ & \left. + 3 \sum_{l=0}^{n+1} \tilde{E}_1 \tilde{E}_l \tilde{E}_{n+1-l} |f_1|^2 \right], n = 0, 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (14)$$

яку дістанемо, якщо знехтувати в правій частині (8) доданками, що містять як множники $|f_1|^4$ і вищі степені амплітуди навантаження, назовемо системою першого наближення.

Якщо розв'язок системи (14) шукати у вигляді

$$\tilde{E}_n = \tilde{E}_n^{(0)} + \tilde{\alpha}_n^{(1)} |f_1|^2, n = 0, 1, 2, \dots, \quad (15)$$

то після підстановки (15) у (14), урахування (10) і нехтування степенями $|f_1|^m, m \geq 4$ дістанемо

$$\begin{aligned} \tilde{\theta}_n \tilde{\alpha}_n^{(1)} = & -\frac{3}{4} d_0 \left[\sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^{n-k} \tilde{\alpha}_k^{(1)} \tilde{E}_l^{(0)} \tilde{E}_{n-k-l}^{(0)} + \right. \\ & \left. + \sum_{l=0}^{n+1} \tilde{E}_1^{(0)} \tilde{E}_l^{(0)} \tilde{E}_{n+1-l}^{(0)} \right], n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (16)$$

Із (16) випливає, що коефіцієнти $\tilde{\alpha}_n^{(1)}$ однозначно визначаються формулою

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}_n^{(1)} = & -\frac{\frac{3}{4} d_0}{\tilde{\theta}_n + \frac{3}{4} d_0 (\tilde{E}_0^{(0)})^2} * \\ & * \left[\sum_{k=0}^{n-1} \sum_{l=0}^{n-k} \tilde{\alpha}_k^{(1)} \tilde{E}_l^{(0)} \tilde{E}_{n-k-l}^{(0)} + \right. \\ & \left. + \sum_{l=0}^{n+1} \tilde{E}_1^{(0)} \tilde{E}_l^{(0)} \tilde{E}_{n+1-l}^{(0)} \right], n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (17)$$

Назовемо (15) першим наближенням розв'язку системи (8).

Систему другого наближення дістанемо, якщо знехтуємо в правій частині (8) доданками, що містять як множники $|f_1|^6$ і вищі степені амплітуди навантаження.

Якщо розв'язок системи другого наближення шукати у вигляді

$$\tilde{E}_n = \tilde{E}_n^{(0)} + \tilde{\alpha}_n^{(1)} |f_1|^2 + \tilde{\alpha}_n^{(2)} |f_1|^4, n = 0, 1, 2, \dots, \quad (18)$$

то після підстановки (18) у цю систему, урахування (10), (16) і нехтування степенями $|f_1|^m, m \geq 6$ дістанемо загальну формулу, яка однозначно визначає коефіцієнти $\tilde{\alpha}_n^{(2)}$.

Назовемо (18) другим наближенням розв'язку системи (8).

Аналогічно, за попередніми наближеннями будуватимемо будь-яке наступне наближення розв'язку системи (8)

$$\tilde{E}_n = \tilde{E}_n^{(0)} + \sum_{j=1}^k \tilde{\alpha}_n^{(j)} |f_1|^{2j}, n = 0, 1, 2, \dots; k \geq 1. \quad (19)$$

3. Побудова наближень стаціонарного розв'язку рівняння (1)

Якщо скористатись (19) у виразах для комплексних амплітуд (7), а потім у сумі (2), яку перепишемо у вигляді

$$\varepsilon = \frac{\varepsilon_0}{2} + \operatorname{Re} \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{\varepsilon}_n e^{in9\tau},$$

де Re - дійсна частина, то немає сенсу утримувати в цій сумі доданки, абсолютні величини яких містять як множники $|f_1|^{2k+2}$ і вищі степені амплітуди навантаження.

У результаті з умови $2j + n \leq 2k + 1$ дістанемо

$$\begin{aligned} \varepsilon = & \frac{1}{2} (\tilde{E}_0^{(0)} + \sum_{j=1}^k \tilde{\alpha}_0^{(j)} |f_1|^{2j}) + \\ & + \operatorname{Re} \left\{ \sum_{n=1}^{2k+1} (\tilde{E}_n^{(0)} + \right. \\ & \left. + \sum_{j=1}^{[k-\frac{n-1}{2}]} \tilde{\alpha}_n^{(j)} |f_1|^{2j}) \tilde{f}_1^n e^{in9\tau} \right\}, \end{aligned} \quad (20)$$

де $[k - \frac{n-1}{2}]$ - ціла частина.

Назовемо (20) k -им наближенням періодичного (стаціонарного) розв'язку рівняння (1). Згідно з (11), (12) у разі $d_0 > 0$ таких розв'язків один, а в разі $d_0 < 0$ - три.

Для 1-го наближення

$$\begin{aligned} \varepsilon = & \frac{1}{2} (\tilde{E}_0^{(0)} + \tilde{\alpha}_0^{(1)} |f_1|^2) + \\ & + \operatorname{Re} \{ (\tilde{E}_1^{(0)} + \tilde{\alpha}_1^{(1)} |f_1|^2) \tilde{f}_1 e^{i9\tau} + \\ & + \tilde{E}_2^{(0)} \tilde{f}_1^2 e^{i29\tau} + \tilde{E}_3^{(0)} \tilde{f}_1^3 e^{i39\tau} \} \end{aligned} \quad (21)$$

Якщо $\tilde{E}_0^{(0)} = 0$, то згідно з (13), (17)

$$\tilde{E}_1^{(0)} = \frac{1}{\tilde{\theta}_1}, \tilde{E}_2^{(0)} = 0, \tilde{E}_3^{(0)} = \frac{d_0}{4\tilde{\theta}_3\tilde{\theta}_1^3},$$

$$\tilde{\alpha}_0^{(1)} = 0, \tilde{\alpha}_1^{(1)} = -\frac{3d_0}{4\tilde{\theta}_1^2|\tilde{\theta}_1|^2}$$

і формула 1-го наближення набуває вигляду

$$\varepsilon = \operatorname{Re}\left\{\left(\frac{1}{\tilde{\theta}_1} - \frac{3d_0|f_1|^2}{4\tilde{\theta}_1^2|\tilde{\theta}_1|^2}\right)\tilde{f}_1 e^{i9\tau} + \frac{d_0}{4\tilde{\theta}_3\tilde{\theta}_1^3}\tilde{f}_1^3 e^{i39\tau}\right\}.$$

З кожним наступним наближенням розв'язку рівняння (1) уточнюються комплексні амплітуди гармонік попереднього наближення шляхом врахування вищих степенів амплітуди навантаження, і з'являється нова непарна гармоніка.

Відсутність парних гармонік у 1-му і всіх наступних наближеннях характерна лише для випадку $\tilde{E}_0^{(0)} = 0$.

У разі ненульових значень $\tilde{E}_0^{(0)}$ (див.(12)) всі наближення містять як непарні, так і парні гармоніки, зокрема, нульову гармоніку.

Для в'язкопружного стержня з масою, наприклад, ненульовим значенням $\tilde{E}_0^{(0)}$ враховується випадок, коли коливання збуджуються за наявності в стержні залишкової деформації.

5. Висновки

Запропоновано метод знаходження наближень стаціонарних розв'язків

рівняння, що описує поведінку осцилятора з лінійною дисипативною і кубічно-нелінійною консервативною характеристиками при моногармонічному навантаженні.

Метод ґрунтується на зображеннях комплексних коефіцієнтів Фур'є як функцій складових комплексної амплітуди навантаження. Загальний вигляд цих функцій з'ясовується з використанням умови їхньої інваріантності відносно перетворення зсуву у часі. У результаті кожен комплексний коефіцієнт Фур'є зображується як добуток деякої комплекснозначної функції квадрата амплітуди навантаження на відповідний степінь комплексної амплітуди навантаження. Таке представлення коефіцієнтів Фур'є дає можливість звести нескінченну систему рівнянь гармонічного балансу відносно коефіцієнтів Фур'є до нескінченної системи рівнянь відносно невідомих функцій квадрата амплітуди навантаження. Ця система допускає розв'язки у вигляді рядів за парними степенями амплітуди навантаження, що дає можливість будувати наближення стаціонарного розв'язку рівняння осцилятора у вигляді аналітичних виразів. Керуючим фактором при цьому є амплітуда навантаження.

Список використаних джерел

1. Боголюбов Н.Н. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний / Н.Н.Боголюбов, Ю.А.Митропольский. – Москва: Наука, 1974. – 504 с..
2. Карнаухов В. Г. Термомеханическое поведение вязкоупругих тел при гармоническом нагружении / В.Г.Карнаухов, И.К.Сенченков, Б.П.Гуменюк – Киев: Наукова думка, 1985. – 288 с
3. Михайленко С.В. Стаціонарні розв'язки рівняння нелінійного осцилятора з моногармонічним збудженням /С.В. Михайленко // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Сер.:фізико-математичні науки. -2015.-№3.-С

References

1. BOGOLYUBOV N.N. & MITROPOLSKIY Y.A.(1974) *Asimptoticheskiye metodyi v teorii nelineynih kolebaniy* – Moskva: Nauka.
2. KARNAUKHOV V. G., SENCHENKOV I. K. & GUMENYUK B.P. (1985) *Termomekhanicheskoye povedeniye vyazkoupругih tel pry garmonicheskoye nagruzenii..* Kiev: Naukova Dumka.
3. MIKHAYLENKO S.V. (2015) *Statsionarni rosvyazky rivnyannya nelineynogo ostsilyatora z monogarmonichnym zbudzhenniyam.* *Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series: Physics & Mathematics.* (3). pp

Надійшла до редколегії 20.11.2015

УДК 539.3

Опанасович В. К., д.ф.-м.н., доц.,
Яцик І. М.

**Одновісний згин ізотропної півплощини
з тріщиною, перпендикулярною до її
межі, з урахуванням ширини області
контакту її берегів**

Львівський національний університет імені
Івана Франка, 79000, м. Львів, вул.
Університетська, 1,
e-mail: IhorYatsyk@i.ua

Opanasovych V. K., Dr. Sci., Assoc. Prof.,
Yatsyk I. M., engineer

**Uniaxial bending of the isotropic half-plane
with a crack, which is perpendicular to its
boundary, accounting for the width of the
contact area of its faces**

Ivan Franko National University of L'viv, 79000,
L'viv, Universytetska str., 1,
email: IhorYatsyk@i.ua

У роботі досліджено згин рівномірно розподіленими згинальними моментами на нескінченності однорідної ізотропної півплощини з тріщиною, перпендикулярною до її межі, береги якої гладко контактують по області постійної ширини. На основі методів теорії функції комплексної змінної та комплексних потенціалів Колосова-Мухомішвілі отримано сингулярне інтегральне рівняння, яке розв'язано чисельно за допомогою методу механічних квадратур. Проведено числовий аналіз задачі та побудовано графічні залежності для контактної зусиль між берегами тріщини та критичного навантаження при різних параметрах задачі. Для крайової тріщини зроблено порівняння з експериментальними даними та на їхній основі визначено ширину області контакту її берегів.

Ключові слова: тріщина, згин, ізотропна півплощина, комплексні потенціали, контакт берегів тріщини, коефіцієнти інтенсивності зусиль і моментів.

In this paper the stress-strain state of isotropic half-plane with a through-the-thickness crack perpendicular to its boundary, which faces are free from the external loading is investigated. The half-plane is under the action of the uniformly distributed in a remote part bending moments, which vectors are parallel to the axis of the crack. It is assumed that under external loading the crack faces come in a smooth contact on all crack length along the two-dimensional area of constant width near the upper plate basis. As a result of the crack faces contact, solution of problem is presented in the form of two related problems solutions: the problem of the plane stress-strain theory, which is treated in the frame theory of elasticity, and the problem of plates bending, which is based on the equations of Kirchhoff-Love plate theory. On the basis of complex variable function theory methods and complex potentials, the singular integral equation is obtained which is reduced by the mechanical quadratures method to the infinite system of linear algebraic equations. This system is solved numerically by the method of reduction with making use of Gauss technique with a choice of main entry. The numerical analysis of the problem for some parameter values is carried out and graphic dependences for contact force between the faces of crack and critical loading are constructed. In particular cases known in the scientific literature, results for Kirchhoff-Love plate bending appropriate problem are obtained considering the contact of crack faces along the line. For boundary crack, the comparison with experimental data is performed and, on their basis, the contact area width of its faces is determined.

Key Words: crack, bending, isotropic half-plane, complex potentials, crack faces contact, force and moment intensity factors.

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Жук Я.О.

1. Вступ

Як конструктивний елемент пластини широко застосовують у машинобудуванні та багатьох інших галузях техніки. Їхній запас міцності істотно залежить від наявності в них тріщиноподібних дефектів, які є потужними

концентраторами напружень та істотно знижують допустиме навантаження, що може бути прикладено до пластини. Для визначення граничного навантаження, а також ресурсу експлуатації пластинчастого елемента, важливо знати вплив таких дефектів на розподіл полів напружень і деформацій у ньому.

Найчастіше пластини перебувають під дією згинального навантаження. Тому вивчення напружено-деформованого стану пластини за згину з урахуванням можливого контакту берегів тріщиноподібних дефектів не втрачає своєї актуальності. З дослідженнями задач згину пластин з тріщинами та пошуком ефективних методів їхнього розв'язування можна ознайомитися в монографіях [1–3], де контакт берегів тріщин не враховували, вважаючи тріщину щілиною. Однак зрозуміло, що у більшості випадків, незважаючи на істотне ускладнення формулювання задач згину пластини із тріщинами та розв'язування відповідних математичних задач, це все ж треба робити. У працях [4–14] вивчені різноманітні задачі, де у різний спосіб враховано контакт берегів тріщиноподібних дефектів за згину пластини, проте відсутні дослідження, пов'язані зі згином півплощини з тріщиною, береги якої контактують уздовж двовимірної зони постійної ширини з використанням теорії Кірхгофа-Лява. Зазначимо, що в роботі [9] досліджено двобічний згин кусково-однорідної пластини Кірхгофа-Лява з прямолинійною межею поділу матеріалів розподіленими згинальними моментами на нескінченності за наявності перпендикулярної до межі поділу матеріалів тріщини, береги якої приходять у гладкий контакт уздовж лінії поблизу однієї з основ пластини.

Мета роботи – дослідити згин ізотропної півплощини Кірхгофа-Лява з тріщиною, перпендикулярною до її межі, з урахуванням ширини області контакту берегів тріщини. Із застосуванням методів теорії функцій комплексної змінної та комплексних потенціалів розв'язок задачі зведений до системи сингулярних інтегральних рівнянь, яка розв'язана числово за допомогою методу механічних квадратів.

2. Формулювання задачі

Дослідимо напружено-деформований стан напівнескінченної однорідної ізотропної пластини завтовшки $2h$ з прямолинійною межею за наявності в ній наскрізної прямолинійної тріщини завдовжки $2l$ за дії рівномірно розподілених згинальних моментів на нескінченності. До деформування пластини береги тріщини вільні від зовнішнього навантаження та перпендикулярні до її прямолинійної межі. Під дією зовнішнього навантаження береги тріщини гладко

контактують уздовж усієї її довжини по області постійної ширини h_1 .

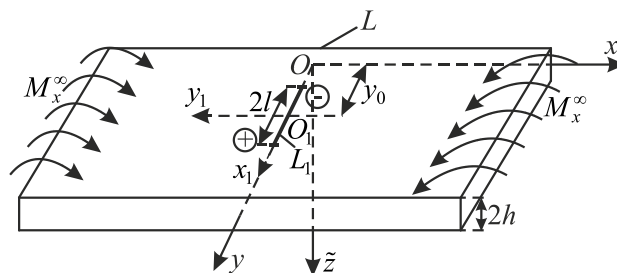


Рис. 1. Схема навантаження пластини та розміщення тріщини.

Виберемо глобальну декартову систему координат $Oxyz$ з координатною площиною Oxy у серединній площині пластини, спрямувавши вісь Ox уздовж її прямолинійної межі, а вісь Oy – уздовж тріщини (рис. 1). З тріщиною зв'яжемо локальну систему координат $O_1x_1y_1$ з початком координат O_1 у центрі тріщини, направивши вісь O_1x_1 уздовж тріщини. Позначимо прямолинійну межу пластини через L , відрізок дійсної осі O_1x_1 , для якого $|x_1| \leq l$, позначимо через L_1 . y_0 – ордината центру тріщини у глобальній системі координат, Позначимо згинальні моменти на нескінченності через M_x^{∞} .

Надалі дотримуємося таких позначень: μ – модуль зсуву; E – модуль пружності; ν – коефіцієнт Пуассона; $D = \frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)}$ –

циліндрична жорсткість пластини, $\kappa = \frac{3-\nu}{1+\nu}$;

$$\tilde{\kappa} = \frac{3+\nu}{1-\nu}; \quad \tilde{\mu} = \frac{1}{2D(1-\nu)}.$$

За рахунок контакту берегів тріщини розв'язок задачі подаємо у вигляді суперпозиції двох розв'язків: плоскої задачі теорії пружності і задачі згину, при чому користуємося класичною теорією згину пластини.

Згідно формулювання задачі маємо такі крайові умови на прямолинійній межі пластини:

$$\sigma_{yy} = \sigma_{xy} = 0, \quad M_y = P_y = 0, \quad x \in L \quad (1)$$

та на берегах тріщини [8]

$$\sigma_{y_1}^{\pm} = -\frac{N}{2h}, \quad \sigma_{x_1 y_1}^{\pm} = 0, \quad P_{y_1}^{\pm} = 0, \quad (2)$$

$$M_{y_1}^{\pm} = \beta h N, [v_1] + \alpha h \left[\frac{\partial w}{\partial y_1} \right] = 0, \quad x_1 \in L_1,$$

де σ_{yy} і σ_{xy} – компоненти тензора напружень у плоскій задачі; N – контактне зусилля між берегами тріщини, причому вважаємо, що $N > 0$; v_1 – компонента вектора переміщення у плоскій задачі на вісь $O_1 y_1$; M_y – згинальний момент; P_y – узагальнена в сенсі Кірхгофа перерізувальна сила; w – прогин пластини; квадратні дужки у формулі (2) означають стрибок відповідної величини на берегах тріщини $[f] = f^+ - f^-$; символами «+» і «-» позначено граничне значення відповідної функції при $y_1 \rightarrow \pm 0$; $\alpha = \frac{1 + (1 - \gamma)^2}{2}$, $\beta = 1 - \frac{\gamma}{3}$, а $\gamma = \frac{h_1}{h}$ – зведена ширина області контакту [8]; індекс «1» указує на прив'язку до системи координат $O_1 x_1 y_1$.

Потрібно знайти напружено-деформований стан пластини та встановити граничне навантаження руйнування пластини.

3. Розв'язок задачі

З використанням комплексних потенціалів плоскої задачі [15] та задачі згину [2], поступаючи аналогічно тому, як це зроблено у праці [9], розв'язок задачі зведений до задач лінійного спряження на прямолінійній межі пластини і на тріщині та знайдено їхній аналітичний розв'язок. Крім того, на берегах тріщини отримано сингулярне інтегральне рівняння відносно невідомої функції стрибка кута повороту нормалі до серединної поверхні в задачі згину $X(t) = \frac{1}{1 + \tilde{\kappa}} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} \right]$ на берегах тріщини

$$\int_{L_1} \{ \tilde{\beta} K(t, x_1) + N(t, x_1) \} X(t) dt = M_x^{\infty}, \quad (3)$$

$$x_1 \in L_1,$$

де

$$K(t, x_1) = -\frac{\beta h^2}{\pi} \left\{ \frac{2}{t - x_1} + \frac{1}{t + x_1 + 2y_0} - \right.$$

$$\left. -\frac{4(t + y_0)}{(t + x_1 + 2y_0)^2} + \frac{8(x_1 + y_0)(t + y_0)}{(t + x_1 + 2y_0)^3} \right\},$$

$$N(t, x_1) = \frac{1}{4\pi\tilde{\mu}} \left\{ \frac{2\tilde{\kappa}}{t - x_1} - \frac{\tilde{\kappa}^2}{t + x_1 + 2y_0} + \right.$$

$$\left. + \frac{4(t + y_0)}{(t + x_1 + 2y_0)^2} - \frac{8(x_1 + y_0)(t + y_0)}{(t + x_1 + 2y_0)^3} \right\},$$

$$\tilde{\beta} = -\frac{\alpha h E}{1 - \nu}.$$

Сингулярне інтегральне рівняння (3) доповнюємо додатковою умовою, що виражає собою однозначність кута повороту при обході контуру тріщини L_1

$$\int_{L_1} X(t) dt = 0. \quad (4)$$

Коефіцієнт інтенсивності моментів (КІМ) K_1 і зусиль (КІЗ) k_1 можна обчислити за формулами [3]

$$k_1^{\pm} = \mp \tilde{\beta} h \lim_{t \rightarrow \pm l} \{ f(t) X(t) \}, \quad f(t) = \sqrt{\frac{l^2 - t^2}{l}},$$

$$K_1^{\pm} = \mp 2D(3 + \nu) \lim_{t \rightarrow \pm l} \{ f(t) X(t) \}.$$

Зауважимо, що у випадку крайової тріщини у ядрах сингулярного інтегрального рівняння (3) потрібно покласти $y_0 = l$. Крім того, оскільки для крайової тріщини КІМ та КІЗ у вершині, що виходить на межу пластини мають бути нульовими [3], то замість (4) має виконуватися умова

$$X(-l) = 0. \quad (5)$$

Звернемо увагу також, що між зведеними КІМ $K_1^{*\pm} = \frac{K_1^{\pm}}{M_x^{\infty} \sqrt{l}}$ та КІЗ $k_1^{*\pm} = \frac{h k_1^{\pm}}{M_x^{\infty} \sqrt{l}}$ виконується залежність $\frac{k_1^{*\pm}}{K_1^{*\pm}} = \frac{3\alpha(1 + \nu)}{3 + \nu}$.

4. Числовий аналіз і висновки

Отримане сингулярне інтегральне рівняння розв'язане числово за допомогою методу механічних квадратур [16, 17]. Числовий аналіз був проведений для пластинки з коефіцієнтом Пуассона $\nu = 0,3$. Для випадку крайової тріщини було здійснено порівняння числових результатів з даними, отриманими експериментальним

шляхом [18], та встановлено, що результати співпадають при відносній ширині області контакту $0,3 \leq \gamma \leq 0,7$. Це узгоджується з даними статті [19], у якій на основі тривимірної теорії пружності із використанням числового методу скінченних елементів показано, що для нескінченної пластини завтовшки h відносна ширина області контакту берегів тріщини є постійною поблизу її вершин (0,342) і дещо відрізняється у центральній частині тріщини (0,3).

На рис. 2 і 3 суцільними лініями побудовані відповідні величини при $\gamma = 0,6$, штрих пунктирними – при $\gamma = 0$ (контакт по лінії), штриховими – без урахування контакту берегів тріщини.

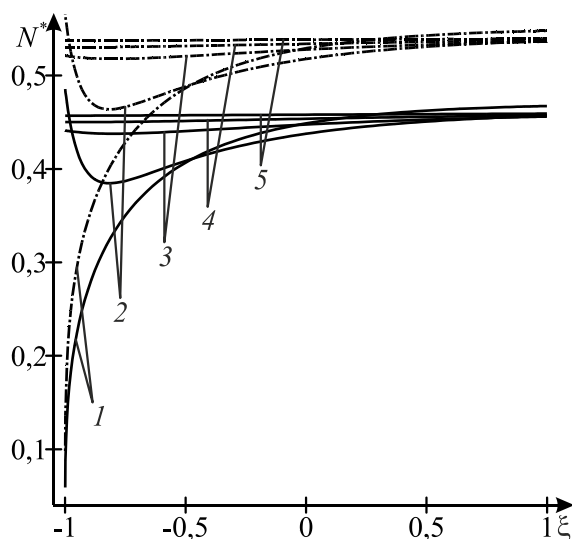


Рис. 2. Графічна залежність зведеного контактного зусилля N^* від безрозмірної координати ξ при різних значеннях $\tilde{\gamma}$ і γ .

На рис. 2 побудована графічна залежність зведеного контактного зусилля $N^* = \frac{hN}{M_x^\infty}$ від безрозмірної координати $\xi = x_1/l$. Криві 1 побудовані при $\tilde{\gamma} = y_0/l = 1$ (випадок крайової тріщини), криві 2 при $\tilde{\gamma} = 1,1$, криві 3 – при $\tilde{\gamma} = 1,5$, криві 4 – при $\tilde{\gamma} = 2$, криві 5 – при $\tilde{\gamma} = 3$. При віддаленні тріщини від межі півплощини контактне зусилля у дальній вершині тріщини по відношенні до її межі зростає, а при зростанні області контакту берегів тріщини воно зменшується.

Для визначення критичного значення навантаження, коли пластина почне руйнуватися,

скористаємося енергетичним критерієм руйнування [20]

$$M^* = \frac{M_x^\infty}{2h^2} \sqrt{\frac{\pi l}{2\gamma_* E}} = \frac{3 + \nu}{K_1^* \sqrt{3(1 + \nu) \{3\alpha^2(1 + \nu) + 3 + \nu\}}}, \quad (6)$$

де $K_1^* = \max K_1^{*\pm}$ і γ_* – густина ефективної поверхневої енергії матеріалу.

На рис. 3 побудовано графічну залежність зведеного критичного моменту M^* (6) від безрозмірної віддалі $\tilde{y}$. Із збільшенням відносної віддалі тріщини від межі пластини $\tilde{y}$ або зменшенням ширини області контакту γ критичний момент M^* збільшується. Крім того, він збільшується у випадку урахування контакту берегів тріщини, порівняно з випадком, коли вони не контактують.

Для крайової тріщини $M^* = 0,777$ при $\gamma = 0,6$, $0,906$ – при $\gamma = 0$ і $0,648$ – при нехтуванні контактом берегів тріщини.

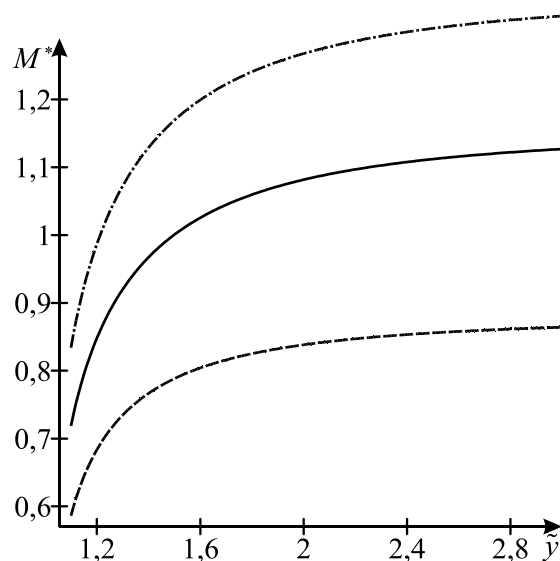


Рис. 3. Графічна залежність зведеного критичного моменту M^* від безрозмірної віддалі $\tilde{y}$ при різних значеннях γ .

Звернемо увагу на те, що у випадку внутрішньої тріщини руйнування пластини розпочнеться з вершини, що знаходиться ближче до її межі.

Список використаних джерел

1. Бережницький, Л.Т. Изгиб тонких пластин с дефектами типа трещин / Л.Т. Бережницький, М.В. Делявский, В.В. Панасюк. – Киев: Наук. думка, 1979. – 400 с.
2. Прусов И.А. Метод сопряжения в теории плит / Прусов И.А. – Минск: Изд-во Белорус. ун-та, 1975. – 256 с.
3. Саврук М.П. Двумерные задачи упругости для тел с трещинами / Саврук М.П. – К.: Наук. Думка. – 1981. – 324 с.
4. Alwar R.S. Influence of crack closure on the stress intensity factor for plates subjected to bending – A 3-D finite element analysis / R.S. Alwar, K.N. Ramachandran Nambissan // Eng. Fracture Mech. – 1983. – 17, No. 4. – P. 323–333.
5. Heming, F.S. Jr. Sixth order analysis of crack closure in bending of an elastic plate / F.S. Jr. Heming // Int. J. Fracture. – 1980. – 16, No. 4. – P. 289–304.
6. Jones, D.P. The influence of crack closure and elasto-plastic flow on the bending of a cracked plate / D.P. Jones, J.L. Swedlow // Int. J. Fracture. – 1975. – 11, No. 6. – P. 897–914.
7. Williams, M.L. The bending stress distribution at the base of a stationary crack / M.L. Williams // Trans ASME. J. Appl. Mech. – 1961. – 28. – P. 78–82.
8. Опанасович В.К. Згин пластини з наскрізною прямолінійною тріщиною з урахуванням ширини області контакту її поверхонь / В.К. Опанасович // Наукові нотатки Луцького технічного університету. – 2007. – Вип. 20 (2). – С. 123–127.
9. Опанасович В.К. Згин кусково-однорідної ізотропної пластини з тріщиною, перпендикулярною до лінії поділу матеріалів з урахуванням контакту берегів / В. Опанасович, І. Звізло // Регіональний міжвузівський збірник наукових праць “Системні технології”. – 2002. – Вип. 4 (21). – С. 124–129.
10. Опанасович В.К. Двовісний згин кусково-однорідної ізотропної пластини з прямолінійною межею поділу матеріалів із двома перпендикулярними тріщинами, з урахуванням контакту їхніх берегів / В.К. Опанасович, І.С. Звізло, І.М. Яцик // Вісник Дніпропетровського університету. Сер. механіка. – 2007, № 2/2 – Вип. 11, том 2. – С. 141–148.
11. Опанасович В. Згин пластини Рейсснера з

References

1. BEREZHNIYSKIY, L.T., DELYAVSKIY, M.V. & PANASYUK, V.V. (1979) *Izhib tonkih plastin z defekami tipa treshchin*. Kiev: Nauk. Dumka. 400 p.
2. PRUSOV, I.A. (1975) *Metod sopragenia v teorii plit*. Minsk: Izdatelstvo Beloruskogo universiteta. 256 p.
3. SAVRUK, M.P. (1981) *Dvumerniye zadachi uprugosti dlya tel s treshchinami*. Kyiv: Naukova Dumka. 324 p.
4. ALWAR, R.S., Ramachandran Nambissan, K.N. (1983) Influence of crack closure on the stress intensity factor for plates subjected to bending – A 3-D finite element analysis. *Eng. Fracture Mech.* Vol. 17, No. 4. pp. 323–333.
5. HEMING, F.S. Jr. (1980) Sixth order analysis of crack closure in bending of an elastic plate. *Int. J. Fracture*. Vol. 16, No. 4. pp. 289–304.
6. JONES, D.P. & SWEDLOW, J.L. (1975) The influence of crack closure and elasto-plastic flow on the bending of a cracked plate. *Int. J. Fracture*. Vol. 11, No. 6. pp. 897–914.
7. WILLIAMS, M.L. (1961) The bending stress distribution at the base of a stationary crack. *Trans ASME. J. Appl. Mech.* Vol 28. pp. 78–82.
8. OPANASOVYCH, V.K. (2007) Zhyn plastyny z naskriznoyu pramoliniynoyu trishchynoyu z urahuvanniam shyryny oblasti kontaktu yiyi poverhon. *Naukovi notatky Lutskogo tehničnogo universitetu*. Issue 20 (2). pp. 123–127.
9. OPANASOVYCH, V.K. & ZVIZLO, I.S. (2002) Zhyn kuskovo-odnoridnoyi izotropnoyi plastyny z trishchynoyu, perpendykulyarnoyu do liniyi podilu materialv z urahuvanniam kontaktu berehiv. *Rehionalnyy mizhvuzivskyy zbirnyk naukovykh prats “Systemni tehnolohiyi”*. Issue 4 (21). pp. 124–129.
10. OPANASOVYCH, V.K., ZVIZLO, I.S. & YATSYK, I.M. (2007) Dvovvisnyy zhyn kuskovo-odnoridnoyi izotropnoyi plastyny z pryamoliniynoyu mezheyu podilu materialv iz dvoma perpendykulyarnymi trishchynami, z urahuvanniam kontaktu yihnih berehiv. *Visnyk Dnipropetrovskoho universytetu. Ser. mehanika*. No. 2/2, Issue 11, Vol. 2. pp. 141–148.
11. OPANASOVYCH, V.K. & YATSYK, I.M. (2008) Zhyn plastyny Reyssnera z naskriznoyu trishchynoyu z urahuvanniam shyryny oblasti kontaktu yiyi berehiv. *Visnyk Lvivskoho universytetu. Ser. meh.-mat.* Issue 69. pp. 125–135.

- наскрізною тріщиною з урахуванням ширини області контакту її берегів / В. Опанасович, І. Яцик // Вісник Львівського університету. Сер. мех.-мат. – 2008. – Вип. 69. – С. 125–135.
12. Опанасович В. Визначення критичного навантаження за згину пластини Рейснера з наскрізними тріщинами та з урахуванням контакту їхніх берегів / В. Опанасович, І. Яцик // Механіка руйнування матеріалів і міцність конструкцій : наук. зб. ; за заг. ред. В.В. Панасюка. – Львів : Фізико-механічний інститут ім. Г.В. Карпенка НАН України, 2009. – С. 155-160.
13. Перепичка В.В. Контактное взаимодействие берегов краевых трещин в изгибаемой полуплоскости / В.В. Перепичка, И.П. Шацкий // Теорет. и прикл. механика. – 1999. – № 29. – С. 83–89.
14. Шацкий І.П. Згин напівнескінченної пластини, ослабленої розрізом з контактуючими берегами / І.П. Шацкий, В.В. Перепичка // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 1992. – 28, № 2. – С. 54–58.
15. Мухелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости / Мухелишвили Н.И. – М.: Наука, 1966. – 708 с.
16. Панасюк В.В. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках / Панасюк В.В., Саврук М.П., Дацышин А.П. – К.: Наук. думка, 1976. – 444 с.
17. Сулим Г.Т. Основы математической теории пружной равновесии деформированных твердых тел с тонкими включениями / Г.Т. Сулим. – Львів: Дослідно-видавничий центр НТШ, 2007. – 716 с.
18. Кальтгоф Дж.Ф. Экспериментальное подтверждение контакту берегов трещины при изгибе пластины / Дж.Ф. Кальтгоф, И.П. Шацкий, А. Бюргель // Мех. руйнув. матер. і міцн. конструкцій (вип. 2): Під заг. ред. В.В. Панасюка. – Львів: Каменяр, 1999. – Т. 1. – С. 72–74.
19. Alwar R.S. Influence of crack closure on the stress intensity factor for plates subjected to bending – A 3-D finite element analysis / R.S. Alwar, Ramachandran N.K.N. // Engineering Fracture Mechanics. – 1983. – 17, № 4. – P. 323–333.
20. Zehnder A.T. Fracture mechanics of thin plates and shells under combined membrane, bending, and twisting loads / Zehnder A.T., Viz M.J. // Applied Mechanics Reviews. – 2005. – Vol. 58. – P. 37–48.
12. OPANASOVYCH, V.K. & YATSYK, I.M. (2009) Vyznachennya krytychnoho navantazhennya za zhyu plastyny Reysnera z naskriznymy trishchynamy ta z urahuvanniam kontaktu yihnih berehiv. *Mehanika ruynuvannya materialiv i mitsnist konstruktsiy*. Scientific collection. Under Gen. Ed. V.V. Panasyuk. Lviv: Fyzyko-mehanichnyy instytut im. H.V. Karpenko NAN Ukrainy. pp. 155–160.
13. PEREPICHKA, V.V. & SHATSKYY, I.P. (1999) Kontaknoye vzayemodeystviye beregov krayevykh tryeshchin v izgibayemoy poluploskosti. *Teoret. i prikl. mehanika*. Vol. 29. pp. 83–89.
14. SHATSKYY, I.P. & PEREPICHKA, V.V. (1992) Zhyu napivneskinchennoyi plastyny, oslablenoyi rozrizom z kontaktuyuchymy berehamy. *Fiz.-him. mehanika materialiv*. Vol. 28, No 2. pp. 54–58.
15. MUSHELISHVILI, N.I. (1966) *Nekotoryye osnovnyye zadachi matematicheskoy teoriiy uprugosti*. Moskva: Nauka. 708 p.
16. PANASUK, V.V., SAVRUK, M.P. & DATSYSHYN, A.P. (1976) *Raspredeleniye naprazheniy okolo treshchin v plastinakh i obolochkah*. Kyiv: Naukova Dumka. 444 p.
17. SULYM, H.T. (2007) *Osnovy matematychnoyi teoriiy pruzhnoyi rivnovahy deformivnykh tverdykh til z tonkymy vklyuchennyamy*. Lviv: Doslidno-vydavnychy tsentr NTSh. 716 p.
18. KALTHOF, J.F., SHATSKYY, I.P. & BYURHEL A. (1999) Experymentalne pidtvverdzhennya kontaktu berehiv trishchyny pry zhyni plastyny. *Mehanika ruynuvannya materialiv i mitsnist konstruktsiy*. Issue 2: In 3 vol. Under Gen. Ed. V.V. Panasyuk. Lviv: Kamenyar. Vol. 1. pp. 72–74.
19. ALWAR, R.S. & RAMACHANDRAN, N.K.N. (1983) Influence of crack closure on the stress intensity factor for plates subjected to bending – A 3-D finite element analysis. *Engineering Fracture Mechanics*. Vol. 17, № 4. pp. 323–333.
20. ZEHNDER, A.T. & VIZ, M.J. (2005) Fracture mechanics of thin plates and shells under combined membrane, bending, and twisting loads. *Applied Mechanics Reviews*. Vol. 58. pp. 37–48.

Надійшла до редколегії 21.12.2015

УДК 539.3

Процюк Б. В., д. ф.-м. н., пров. н. с.
Горун О. П., аспірант.

**Термопружний стан півбезмежного
термочутливого трискладового тіла за
дії джерела тепла та складного
теплообміну**

Інститут прикладних проблем механіки і
математики ім. Я. С. Підстригача НАН
України, 79060, м. Львів, вул. Наукова 3-б,
e-mail: oleggorun@gmail.com

B. V. Protsyuk, Dr. Sci,
O. P. Gorun, graduate student

**Thermoelastic state of a thermosensitive semi-
infinite three-layered body by the action of
source of heat and convective-radiant heat
exchange**

Pidstryhach Institute for Applied Problems of
Mechanics and Mathematics, 79060, L'viv, Naukova
str., 3-b,
e-mail: oleggorun@gmail.com

Запропоновано чисельно-аналітичний підхід для визначення термопружного стану півбезмежного термочутливого трискладового тіла, яке взаємодіє з середовищем шляхом конвективно-променевого теплообміну та перебуває під дією джерел тепла. Підхід передбачає використання перетворення Кірхгофа, узагальнених функцій, функцій Гріна лінійної нестационарної задачі теплопровідності для трискладового нетермочутливого простору та лінійних сплайнів. За дії рівномірно розподіленого по об'єму проміжкового шару імпульсного джерела тепла досліджено вплив термочутливості та параметрів теплообміну на розподіли температур та напружень.

Ключові слова: термочутливість, термопружність, конвективно-променевий теплообмін.

The numerical-analytical approach for determining a thermoelastic state of semi-infinite thermosensitive (physicomechanical properties depend on temperature) threelayer body, which is under the action of the depending on axial coordinate and time heat source and interacts with the environment through convective-radiant heat exchange, is presented. By using Kirchhoff transformation, generalized functions and the Green's function of the linear non-stationary heat conductivity problem for a threelayer space, integral representation of the solution of respective heat conduction problem relatively the variable Kirchhoff is obtained. By approximating of linear splines in this representation the integrands functions, that contain a time-dependent unknown variables Kirchhoff at the division surfaces and limiting surface, recurrent system of three nonlinear algebraic equations is obtained, after solving which the value of the variable Kirchhoff and accordingly the searched temperature field is found, and therefore radial and circular strain and axial displacement. The influence of the thermosensitivity, parameters of heat exchange and heat source to temperature and stress distributions was investigated.

Key words: thermosensitivity, thermoelasticity, convective-radiant heat exchange.

Статтю представив докт. фіз.-мат. наук, проф. Жук Я.О.

Вступ

Широке використання в сучасній техніці кусково-однорідних елементів конструкцій, які перебувають під дією високих температур призводить до необхідності дослідження їх термопружного стану з урахуванням термочутливості (температурної залежності фізико-механічних характеристик (ФМХ)) та теплового випромінювання. Складність відповідних задач термопружності зумовлена нелінійністю як рівняння теплопровідності, так і умов теплообміну. Для їх розв'язання поряд з чисельними

методами використовують чисельно-аналітичні підходи [1-5].

В даній роботі запропоновано чисельно-аналітичний підхід для розв'язання квазі-статичних задач термопружності для півбезмежних тришарових термочутливих тіл, які взаємодіють з середовищем шляхом конвективно-променевого теплообміну та перебувають під дією джерел тепла. Цей підхід передбачає використання узагальнених функцій, перетворення Кірхгофа, функцій Гріна лінійної нестационарної задачі теплопровідності для трискладового простору та лінійних сплайнів.

Постановка задачі

Розглянемо віднесене до циліндричної системи координат r, φ, z півбесмежне трискладове тіло, яке перебуває під дією джерел тепла. На поверхнях поділу $z = z_1 = 0$ та $z = z_2 = h$ виконуються умови ідеального термомеханічного контакту, а поверхня $r = R$ є теплоізолюваною та гладко закріпленою (відсутні радіальні переміщення і дотичні напруження). Через обмежуючу поверхню $z = z_3$, на якій відсутні нормальні та дотичні напруження, відбувається конвективно-променевий теплообмін з середовищем температури t_c . Початкові температури складових є нульовими. Визначимо в такому тілі нестационарне температурне поле та зумовлені ним напруження і переміщення з врахуванням залежності ФМХ від температури.

Розв'язання задачі теплопровідності та термопружності

Для визначення температурного поля маємо рівняння теплопровідності:

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[\lambda_t^{(i)}(t_i) \frac{\partial t_i}{\partial z} \right] = c_V^{(i)}(t_i) \frac{\partial t_i}{\partial \tau} - w_{t,i}(z, \tau), \quad (i = \overline{1,3}) \quad (1)$$

умови контакту:

$$t_i(z, \tau) = t_{i+1}(z, \tau), \quad \lambda_t^{(i)} \frac{\partial t_i(z, \tau)}{\partial z} = \lambda_t^{(i+1)} \frac{\partial t_{i+1}(z, \tau)}{\partial z} \quad \text{при } z = z_i \quad (i = 1, 2) \quad (2)$$

граничні та початкові умови

$$\left[\lambda_t^{(3)} \frac{\partial t_3}{\partial z} + \varepsilon \sigma [R(t_3) - R(t_c)] + \alpha(t_3 - t_c) \right]_{z=z_3} = 0, \quad t_1(z, \tau)|_{z \rightarrow -\infty} = 0, \quad t_i|_{\tau=0} = 0, \quad (3)$$

де $t_i(z, \tau)$ і $w_{t,i}(z, \tau)$ відповідно температура та функції, що описують дію джерела тепла в i -ій складовій, $R(\eta) = (\eta + 273)^4$, ε – ступінь чорноти, σ – стала Стефана-Больцмана, α – коефіцієнт теплообміну; індексу $i = 1$ відповідають величини, які належать першій складовій $-\infty < z < 0$, $i = 2$ – другій (проміжковому шару) $0 < z < z_2$, $i = 3$ – третій $z_2 < z < z_3$.

З використанням перетворення Кірхгофа

$$\theta_i = \frac{1}{\lambda_{0i}} \int_0^{t_i} \lambda_t^{(i)}(x) dx, \quad \text{за припущення, що}$$

коефіцієнти теплопровідності лінійно залежать від температури $\lambda_t^{(i)}(t_i) = \lambda_{0i}(1 + \beta_i t_i)$, коефіцієнти об'ємної теплоємності мають вигляд $c_V^{(i)}(t_i) = c_{0i} c_i(t_i)$ ($i = \overline{1,3}$), а коефіцієнти температуропровідності a_i в межах кожної складової є сталими $\frac{\lambda_t^{(i)}(t_i)}{c_V^{(i)}(t_i)} \approx a_i = \frac{\lambda_{0i}}{c_{0i}}$, що має

місце для ряду матеріалів [6], задачу теплопровідності (1)-(3) зведено до одного рівняння з узагальненими по z похідними та граничних і початкових умов [5]:

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[\lambda_0(z) \frac{\partial \theta}{\partial z} \right] = c_0(z) \frac{\partial \theta}{\partial \tau} + \sum_{j=1}^2 \lambda_{0,j+1} F_{j+1}(\tau) \delta'(z - z_j) - w_t(z, \tau), \quad (4)$$

$$\lambda_{0,3} \frac{\partial \theta_3}{\partial z} \Big|_{z=z_3} + F_1(\tau) = 0, \quad \theta_1|_{z \rightarrow -\infty} = 0, \quad \theta_i|_{\tau=0} = 0, \quad (5)$$

$$F_1(\tau) = \varepsilon \sigma [R(\theta_3^*(\tau)) - R(t_c)] + \alpha [\theta_3^*(\tau) - t_c],$$

$$F_{i+1}(\tau) = (1 - \beta_i \beta_{i+1}^{-1}) [\theta_{i+1}(z_i, \tau) - \beta_{i+1}^{-1} \times \\ \times (\sqrt{1 + 2\beta_{i+1} \theta_{i+1}(z_i, \tau)} - 1)],$$

$$\theta_3^*(\tau) = \beta_3^{-1} (\sqrt{1 + 2\beta_3 \bar{\theta}_3(\tau)} - 1), \quad \bar{\theta}_3(\tau) = \theta_3(z_3, \tau),$$

$$\theta(z, \tau) = \theta_1(z, \tau) + \sum_{k=1}^2 [\theta_{k+1}(z, \tau) - \theta_k(z, \tau)] \times \\ \times S(z - z_k), \quad (6)$$

де $S(z)$ – функція Гевісайда, $\delta'(z)$ – похідна від дельта-функції Дірака, $w_t(z, \tau)$, $\lambda_0(z)$ та $c_0(z)$ мають вигляд (6).

За допомогою функцій Гріна $G(z, \zeta, \tau)$ лінійної нестационарної задачі теплопровідності для трискладового простору [5,7], розв'язок задачі (4), (5) подається у вигляді:

$$\theta(z, \tau) = \sum_{j=1}^2 \lambda_{0,j+1} \int_0^{\tau} \frac{\partial G(z, \zeta, \tau - \tau')}{\partial \zeta} \Big|_{\zeta=z_j+0} F_{j+1}(\tau') d\tau' - \\ - \int_0^{\tau} \{ G(z, \zeta, \tau - \tau') F_1(\tau') + \lambda_{0,3} \bar{\theta}_3(\tau') \times$$

$$\times \frac{\partial G(z, \zeta, \tau - \tau')}{\partial z} \Big|_{z=z_3} \Bigg\} d\tau' + \int_{-\infty}^{\tau} \int_0^{\tau} G(z, \zeta, \tau - \tau') \times \\ \times w_i(\zeta, \tau') d\zeta d\tau'. \quad (7)$$

Спосіб визначення $\theta_{j+1}(z_j, \tau)$ ($j=1,2$) та $\theta_3(z_3, \tau)$, які входять в співвідношеннях (7) у відповідних підінтегральних функціях, проілюструємо для випадку, коли джерело тепла рівномірно розподілене по об'єму проміжкового шару і має імпульсний характер зміни інтенсивності:

$$w_{i,2}(z, \tau) = q_0 \sum_{p=0}^{m-1} \left[S(\tau - b_p) - S(\tau - b_p - \tau_1^*) \right], \quad (8)$$

де q_0 – потужність джерела тепла, $b_p = p(\tau_1^* + \tau_2^*)$, τ_1^* – тривалість імпульсу, τ_2^* – тривалість паузи, m – кількість імпульсів. Апроксимуємо [5] кожен з функцій $F_i(\tau)$ та $\bar{\theta}_3(\tau)$ лінійним сплайном:

$$g(\tau) = s_1^{(1)}(g)\tau + s_1^{(0)}(g) + \sum_{k=1}^{K_\tau-1} \left(s_{k+1}^{(1)}(g)\tau + \right. \\ \left. + (s_{k+1}^{(0)}(g) - s_k^{(1)}(g)\tau - s_k^{(0)}(g))S(\tau - \tau_k) \right), \quad (9)$$

де

$$s_1^{(1)}(\zeta) = [\zeta(\tau_i) - \zeta(\tau_{i-1})] / \Delta\tau_i, \\ s_1^{(0)}(\zeta) = [-\zeta(\tau_i)\tau_{i-1} + \zeta(\tau_{i-1})\tau_i] / \Delta\tau_i, \\ \Delta\tau_i = \tau_i - \tau_{i-1} \quad (i = \overline{1, K_\tau}), \quad 0 = \tau_0 < \tau_1 < \tau_2 \dots < \tau_{K_\tau},$$

K_τ – кількість вузлів сплайна.

Підставивши у (7) вирази для функцій Гріна [7] та знайшовши відповідні інтеграли з урахуванням (9), отримаємо співвідношення для змінних Кірхгофа, які у безрозмірних змінних запишуться так:

$$\theta_i(\bar{z}, \text{Fo}) = f_i(\bar{z}, \text{Fo}) + \eta_{i,1}\gamma_{i,1}(\bar{z}, \text{Fo}, F_2) + \\ + \eta_{i,2}\gamma_{i,2}(\bar{z}, \text{Fo}, F_3) - \eta_{i,3}[\gamma_{i,3}(\bar{z}, \text{Fo}, F_4) - \\ - \frac{a_{i3}^*}{2a_{i0}}\gamma_{i,4}(\bar{z}, \text{Fo}, \theta_3(\bar{z}_3, \text{Fo}))], \quad (10)$$

де

$$\gamma_{i,j}(\bar{z}, \text{Fo}, \zeta) = s_1^{(0)}(\zeta)\psi_1^{i,j}(\bar{z}, \text{Fo}) + s_1^{(1)}(\zeta) \times \\ \times \psi_2^{i,j}(\bar{z}, \text{Fo}) + \sum_{k=1}^{K_\tau-1} \left[(s_{k+1}^{(0)}(\zeta) - s_k^{(0)}(\zeta)) \times \right. \\ \times \psi_3^{i,j}(\bar{z}, \text{Fo} - \text{Fo}_k) + (s_{k+1}^{(1)}(\zeta) - s_k^{(1)}(\zeta)) \times \\ \left. \times \psi_4^{i,j}(\bar{z}, \text{Fo} - \text{Fo}_k) \right],$$

$$F_4(\text{Fo}) = \sigma^* (R(\theta_3^*(\text{Fo})) - R(t_c)) + \\ + \text{Bi}(\theta_3^*(\text{Fo}) - t_c),$$

$$\eta_{1,3} = \frac{2\delta_2\lambda_{0,3}}{\sqrt{a_0}(\delta_1 + \delta_2)(\delta_2 + \delta_3)}, \quad \eta_{2,3} = \frac{\lambda_{0,3}}{\sqrt{a_0}(\delta_2 + \delta_3)}, \\ \eta_{3,3} = \frac{\lambda_{0,3}}{2\sqrt{a_0}\delta_3},$$

$$\psi_\rho^{i,j}(\bar{z}, \text{Fo}) = I_\rho^{i,j}(\bar{z}, \text{Fo}) \quad (j = 1, 2),$$

$$\psi_\rho^{i,3}(\bar{z}, \text{Fo}) = \mathfrak{G}_{\rho,\chi}^{i,1}(\bar{z}, \text{Fo}), \quad \psi_\rho^{i,4}(\bar{z}, \text{Fo}) = \mathfrak{G}_{\rho,\varphi}^{i,2}(\bar{z}, \text{Fo}) \\ \text{при } \rho = 1, 2;$$

$$\psi_\rho^{i,j}(\bar{z}, \text{Fo} - \text{Fo}_k) = I_\rho^{i,j}(\bar{z}, \text{Fo} - \text{Fo}_k) \quad (j = 1, 2),$$

$$\psi_\rho^{i,3}(\bar{z}, \text{Fo}) = \mathfrak{G}_{\rho,\chi}^{i,1}(\bar{z}, \text{Fo} - \text{Fo}_k),$$

$$\psi_\rho^{i,4}(\bar{z}, \text{Fo}) = \mathfrak{G}_{\rho,\varphi}^{i,2}(\bar{z}, \text{Fo} - \text{Fo}_k) \quad \text{при } \rho = 3, 4;$$

$$\mathfrak{G}_{\rho,y}^{1,p}(\bar{z}, \xi) = \sum_{n=0}^{\infty} (v_1 v_2)^n \times$$

$$\times y_{\rho,1}^1 (a_{12}^* (1 + 2n) \bar{h} + a_{13}^* (\bar{z}_3 - \bar{h}) - \bar{z}, \xi),$$

$$\mathfrak{G}_{\rho,y}^{2,p}(\bar{z}, \xi) = y_{\rho,2}^1 (a_{23}^* (\bar{z}_3 - \bar{h}) + \bar{h} - \bar{z}, \xi) +$$

$$- \sum_{n=1}^{\infty} (v_1 v_2)^n y_{\rho,2}^1 (a_{23}^* (\bar{z}_3 - \bar{h}) + 2n\bar{h} - \bar{z} + \bar{h}, \xi) -$$

$$- v_1 \sum_{n=0}^{\infty} (v_1 v_2)^n y_{\rho,2}^1 (a_{23}^* (\bar{z}_3 - \bar{h}) + (1 + 2n)\bar{h} + \bar{z}, \xi),$$

$$\mathfrak{G}_{\rho,y}^{3,p}(\bar{z}, \xi) = y_{\rho,3}^1 (\bar{z}_3 - \bar{z}, \xi) +$$

$$+ (-1)^{\delta_{p2}} v_2 y_{\rho,3}^0 (2\bar{h} - \bar{z}_3 - \bar{z}, \xi) +$$

$$+ v_2 \sum_{n=1}^{\infty} (v_1 v_2)^n y_{\rho,3}^1 (2n\bar{h}a_{32}^* + \bar{z}_3 + \bar{z} - 2\bar{h}, \xi) -$$

$$- v_1 \sum_{n=0}^{\infty} (v_1 v_2)^n y_{\rho,3}^1 (2(1 + n)\bar{h}a_{32}^* + \bar{z}_3 + \bar{z} - 2\bar{h}, \xi),$$

$$\chi_{\rho,i}^{\rho'}(\zeta, \xi) = (S(\xi))^{\delta_{p3}} \left(2 \frac{\sqrt{\xi}}{\sqrt{\pi}} \exp \left[\frac{-\zeta^2}{4a_{i0}^* \xi} \right] - \right.$$

$$\left. - \frac{\zeta}{\sqrt{a_i}} \left((-1)^{\rho'+1} - \text{erf} \left(\frac{\zeta}{2a_{i0}^* \sqrt{\xi}} \right) \right) \right) \quad \text{при } \rho = 1, 3$$

$$\begin{aligned}\chi_{2,i}^{\rho'}(\zeta, \text{Fo}) &= \frac{\sqrt{\text{Fo}}}{\sqrt{\pi}} \exp\left[\frac{-\zeta^2}{4a_{i0}\text{Fo}}\right] \left(\frac{4}{3}\text{Fo}^2 + \frac{\zeta^2}{3a_{i0}}\right) - \\ &\frac{\zeta}{2\sqrt{a_{i0}}} \left(\frac{\zeta^2}{3a_{i0}} + 2\text{Fo}\right) \left((-1)^{\rho'+1} - \text{erf}\left(\frac{\zeta}{2a_{i0}^*\sqrt{\text{Fo}}}\right)\right), \\ \chi_{4,i}^{\rho'}(\zeta, \text{Fo} - \text{Fo}_k) &= S(\text{Fo} - \text{Fo}_k) \left(\frac{\sqrt{\text{Fo} - \text{Fo}_k}}{\sqrt{\pi}} \times \right. \\ &\times \exp\left[\frac{-\zeta^2}{4a_{i0}(\text{Fo} - \text{Fo}_k)}\right] \left(-\frac{2}{3}(\text{Fo} - \text{Fo}_k)^2 + \right. \\ &+ \frac{\zeta^2}{3a_{i0}} + 2\text{Fo}) - \frac{\zeta}{2\sqrt{a_{i0}}} \left(\frac{\zeta^2}{3a_{i0}} + 2\text{Fo}\right) \left((-1)^{\rho'+1} - \right. \\ &\left. \left. - \left(\text{erf}\left(\frac{\zeta}{2a_{i0}^*\sqrt{\text{Fo} - \text{Fo}_k}}\right)\right)\right)\right),\end{aligned}$$

$$\text{де } \text{Fo} = \frac{a_0\tau}{l_0^2}, \quad \text{Fo}_k = \frac{a_0\tau_k}{l_0^2}, \quad \text{Bi} = \frac{\alpha l_0}{\lambda_{0,3}}, \quad \sigma^* = \frac{\varepsilon\sigma l_0}{\lambda_{0,3}},$$

δ_{ij} – символ Кронекера, l_0 – деякий лінійний розмір, a_0 – величина, розмірності коефіцієнта

температуропровідності, $a_{ij}^* = \sqrt{\frac{a_i}{a_j}}$, $\delta_i = \frac{\lambda_i}{\sqrt{a_i}}$,

$$v_1 = \frac{\delta_1 - \delta_2}{\delta_1 + \delta_2}, \quad v_2 = \frac{\delta_3 - \delta_2}{\delta_3 + \delta_2}, \quad \bar{z} = \frac{z}{l_0}, \quad \bar{z}_i = \frac{z_i}{l_0}, \quad \bar{h} = \frac{h}{l_0},$$

$$a_{ij} = \frac{a_i}{a_j}; \quad \text{функціям } \chi_{\rho,i}^{\rho'}(\zeta, \xi) \quad \text{відповідають}$$

функції $\chi(\zeta, \xi)$ або $\phi(\zeta, \xi)$, якщо індекс “у” в $\mathfrak{Y}_{\rho,y}^{i,p}$ дорівнює відповідно ϕ або χ ; $\phi(\zeta, \xi)$, $f_i(\bar{z}, \text{Fo})$ і решта позначень збігаються з наведеними у [8].

Поклавши у співвідношеннях (10) в $\theta_i(\bar{z}, \text{Fo})$ ($i=2,3$) відповідно $\bar{z} = \bar{z}_j + 0$ ($j=1,2$), $\bar{z} = \bar{z}_3$ і $\text{Fo} = \text{Fo}_k$ ($k=1, K_\tau$), отримаємо рекурентну систему трьох нелінійних алгебраїчних рівнянь відносно $\theta_2(\bar{z}_1, \text{Fo}_k)$, $\theta_3(\bar{z}_2, \text{Fo}_k)$ та $\theta_3(\bar{z}_3, \text{Fo}_k)$. Розв'язавши її, знайдемо вирази для змінних Кірхгофа, а температурне поле $t_i(\bar{z}, \text{Fo})$ визначимо зі співвідношення:

$$t_i(\bar{z}, \text{Fo}) = \beta_i^{-1} \left(\sqrt{1 + 2\beta_i \theta_i(\bar{z}, \text{Fo})} - 1 \right).$$

У тілі ненульовими будуть радіальні та кільцеві напруження [5]:

$$\sigma_{rr} = \sigma_{\phi\phi} = \sigma_0(\bar{z}, \text{Fo}) = -\frac{\bar{E}(\bar{z}, \text{Fo})}{1 - \bar{\nu}(\bar{z}, \text{Fo})} \bar{\Phi}(\bar{z}, \text{Fo}).$$

При цьому радіальні переміщення відсутні, а осьові (без урахування переміщень тіла як абсолютно твердого цілого) визначаються із співвідношення

$$w(\bar{z}, \text{Fo}) = \int_{\bar{z}_3}^{\bar{z}} \frac{1 + \bar{\nu}(z, \text{Fo})}{1 - \bar{\nu}(z, \text{Fo})} \bar{\Phi}(\bar{z}, \text{Fo}) dz.$$

Тут функції $\bar{E}(\bar{z}, \text{Fo})$, $\bar{\nu}(\bar{z}, \text{Fo})$, $\bar{\Phi}(\bar{z}, \text{Fo})$, які мають вигляд (6), в межах i -ої складової збігаються відповідно з модулями пружності $E_i(t_i)$, коефіцієнтами Пуассона $\nu_i(t_i)$, тепловими деформаціями $\Phi_i(t_i) = \int_0^{t_i(\bar{z}, \text{Fo})} \alpha_{ii}(\eta) d\eta$, де $\alpha_{ii}(t_i)$ – температурні коефіцієнти лінійного розширення.

Числові дослідження

Апробацію методики проведено для випадку, коли ФМХ першої та третьої складової відповідали ніобію ($a_i = 23,9 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{сек}$, $\lambda_i^{(i)} = 53,17(1 + 0,226 \cdot 10^{-3} t_i) \text{ Вт}/(\text{м} \cdot ^\circ\text{C})$, $\nu_i = 0,33$, $\alpha_{ii}(t_i) = (6,186 + 0,00236 t_i) 10^{-6} ^\circ\text{C}^{-1}$, $E_i(t_i) = (100 - 918 \cdot 10^{-5} t_i - 411 \cdot 10^{-8} t_i^2) 10^9 \text{ Н}/\text{м}^2$), а проміжкового шару – платині [6] ($a_2 = 24,4 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{сек}$, $\nu_2 = 0,35$, $\lambda_i^{(2)} = 71,301(1 + 0,207 \cdot 10^{-3} t_2) \text{ Вт}/(\text{м} \cdot ^\circ\text{C})$, $\alpha_{i2}(t_2) = (8,865 + 0,00278 t_2) 10^{-6} ^\circ\text{C}^{-1}$, $E_2(t_2) = (168 - 338 \cdot 10^{-4} t_2) \times 10^9 \text{ Н}/\text{м}^2$) при $h = 5 \cdot 10^{-3} \text{ м}$, $z_3 = 10h$, $K_\tau = 10$, $t_c = 1100 ^\circ\text{C}$, $m = 5$, $q_0 = 24 \cdot 10^7 \text{ Вт}/\text{м}^3$, $\tau_1^* = 80 \text{ сек}$, $\tau_2^* = 20 \text{ сек}$.

Деякі результати проведених досліджень представлені на рис.1-2 у вигляді графіків. Суцільні лінії побудовані для залежних від температури, а пунктирні та штрих-пунктирні – для сталей ФМХ, які збігаються з температурно-залежними при $700 ^\circ\text{C}$ та $0 ^\circ\text{C}$ відповідно.

З рис.1 бачимо, що нехтування тепловіддачею зумовлює заниження температури, яке найбільш помітне на початку дії другого імпульса і може досягати 25%. За неврахування випромінювання заниження температури спостерігається до

початку останнього імпульсу і не перевищує 5%, після чого помітне незначне її завищення.

Найбільш помітний вплив термочутливості (рис.2) в проміжковому шарі та областях, що до нього прилягають. Різниця між температурами з та без врахування термочутливості спочатку є меншою для характеристик взятих при 0°C , а за подальшого нагріву – для характеристик взятих при 700°C . Максимальне її значення може досягати 300°C .

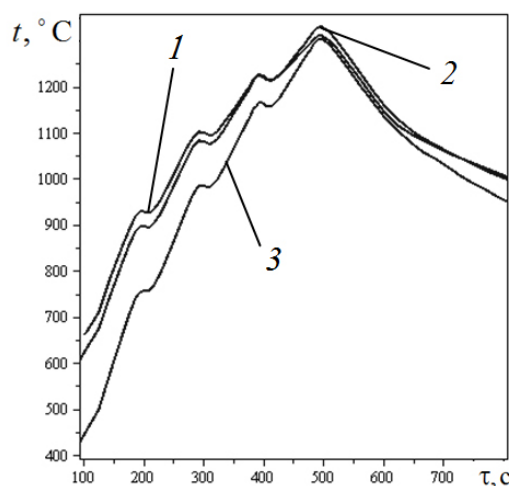


Рис.1. Залежності температури від часу на обмежуючій поверхні $z = z_3$ при різних параметрах теплообміну: 1 – $\alpha = 400 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot ^{\circ}\text{C}}$, $\varepsilon = 0.3$; 2 – $\alpha = 400$, $\varepsilon = 0$; 3 – $\alpha = 0$, $\varepsilon = 0.3$.

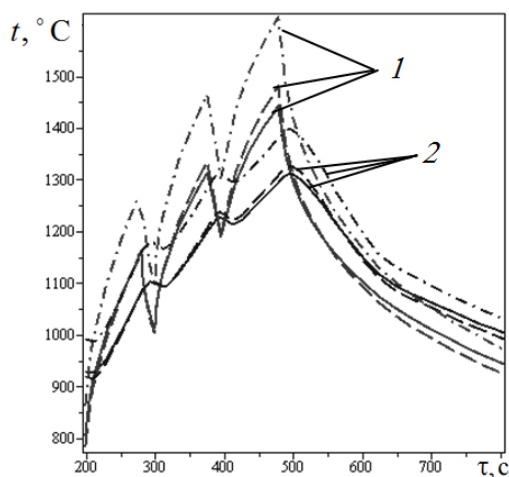


Рис.2. Залежності температури від часу на поверхнях $z = 0$ (1) та $z = z_3$ (2) при

$$\alpha = 400 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot ^{\circ}\text{C}}, \varepsilon = 0.3.$$

На поверхнях поділу напруження є розривними (рис.3). На відміну від температури, нехтування термочутливістю зумовлює

завищення абсолютних значень напружень для характеристик взятих як при 700°C , так і при 0°C . Різниця між напруженнями з та без врахування температурної залежності характеристик є найбільшою на поверхнях проміжкового шару і може досягати 20%, а у 1-ій та 3-ій складовій не більше 15%.

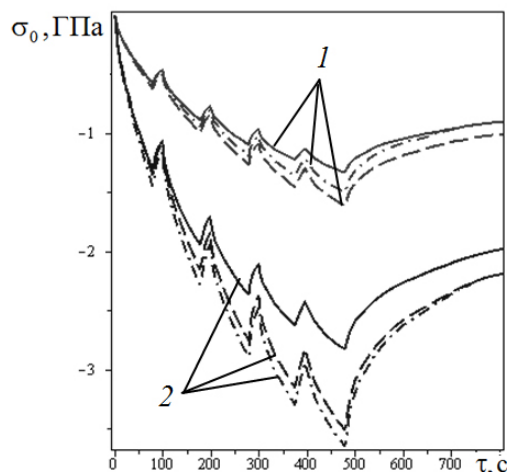


Рис.3. Залежності напружень від часу на поверхнях $z = z_1 - 0$ (1) і $z = z_1 + 0$ (2) при

$$\alpha = 400 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot ^{\circ}\text{C}}, \varepsilon = 0.3.$$

Висновки

Апробовано запропонований чисельно-аналітичний підхід до розв'язання квазістатичних задач термопружності для півбезмежного трискладового термочутливого тіла, яке перебуває під дією рівномірно розподіленого по об'єму проміжкового шару імпульсного джерела тепла. Проаналізовано вплив термочутливості, променевого та конвективного теплообміну на розподіли температури та напружень. Показано, що нехтування конвективним теплообміном зумовлює зниження температури. Неврахування випромінювання також призводить до зниження температури, але до певного моменту часу, після чого спостерігається незначне її завищення. Нехтування термочутливістю може зумовлювати як завищення, так і зниження температури залежно від значень сталих ФМХ. Для напружень неврахування температурної залежності характеристики призводить до завищення абсолютних значень напружень.

Список використаних джерел

References

1. Azadi M. Nonlinear transient heat transfer and thermoelastic analysis of thick-walled FGM cylinder with temperature-dependent material properties using Hermitian transfinite element / Mohammad Azadi, Mahboobeh Azadi // *Journal of Mechanical Science and Technology*. – 2009. – Vol. 23, № 10. – P. 2635–2644.
2. Березовский А. А. Нелинейные краевые задачи теплоизлучающего тела / А. А. Березовский. – Киев: Наукова думка. – 1968. – 166 с.
3. Кушнір Р. М. Моделювання та оптимізація в термомеханіці електропровідних неоднорідних тіл. Т. 3: Термопружність термочутливих тіл [Текст] / Р. М. Кушнір, В. С. Попович; під заг. ред. Я. Й. Бурака, Р. М. Кушніра. – Львів: СПОЛОМ, 2009. – 412 с.
4. Численно-аналитический метод решения нелинейного нестационарного уравнения теплопроводности / [В. Д. Белик, Б. А. Урюков, Г. А. Фролов, Г. В. Ткаченко] // *Инженерно-физический журнал*. – 2008. – Т. 81, № 6. – С. 1058–1062.
5. Процюк Б. В. Квазистатические температурные напряжения в многослойной термочувствительной пластине при нагреве тепловым потоком / Б. В. Процюк // *Теорет. и прикл. механика*. – 2003. – № 38. – С. 63–69.
6. Зиновьев В. Е. Теплофизические свойства металлов при высоких температурах / В. Е. Зиновьев. – М.: Металлургия, 1989. – 384 с.
7. Процюк Б. В. Нестационарне одновимірне температурне поле тришарових тіл з плоско-паралельними межами поділу / Б. В. Процюк, І. І. Верба // *Вісник Львів. ун.-ту. Сер. прикл. матем. та інформ.* – 1999. № 1. – С. 200–205.
8. Процюк Б. Термопружна поведінка безмежного термочутливого трискладового тіла за дії об'ємного джерела тепла / Б. Процюк, О. Горун // *Вісник ТНТУ*. – 2014. – Т. 76, № 4. – С. 53–63.
1. AZADI, M. & AZADI, M. (2009) Nonlinear transient heat transfer and thermoelastic analysis of thick-walled FGM cylinder with temperature-dependent material properties using Hermitian transfinite element. *Journal of Mechanical Science and Technology*. 23 (10). p. 2635–2644.
2. BEREZOVSKIY, A. A. (1968) *Nelinejnye Kraevye Zadachi Teploizluchajushhego Tela*. – Kiev: Naukova dumka.
3. KUSHNIR, R. M. & POPOVICH, V. S. (2009) *Modelyuvannya ta Optymizatsiya v Termomekhanitsi Electroprovodnykh Neodnorodnykh Til: Termopruzhnist Termochutlivih Til*. 3. Lviv: SPOLOM.
4. BELIK, V. D. et al.(2008) Chislennoanaliticheskiy metod resheniya nelinejnogo nestacionarnogo uravneniya teploprovodnosti. *Inzhenerno-Fizicheskij Zhurnal*. 81 (6). p. 1058–1062.
5. PROCJUK, B. V. (2003) Kvazistaticheskie temperaturnye naprjazhenija v mnogoslojnoj termochuvstvitel'noj plastine pri nagreve teplovym potokom. *Teoret. i Prikl. Mehanika*. (38). p. 63–69.
6. ZINOVEV, V. E. (1989) *Teplofizicheskie Svojstva Metallov Pri Vysokih Temperaturah*. M.: Metallurgija.
7. PROCJUK, B. V. & VERBA, I. I. (1999) Nestacionarne odnovimirne temperaturne pole trisharovih til z plosko-paralel'nimi mezhami podilu. *Visnik Lviv. Univ. Ser. Prikl. Matem. ta Inform.* (1). p. 200–205.
8. PROCJUK, B. & GORUN, O. (2014) Termopruzhnna povedinka bezmezhnogo termochutlivogo triskladovogo tila za dii ob'emnogo dzherela tepla. *Visnik TNTU*. 76 (4). p. 53–63.

Надійшла до редколегії 29.09.15

УДК 539.3

Хашемі М.¹, аспірант,
Жук Я.О.¹, д. ф.-м. н., проф.

**Методика визначення комплексних
модулів для полікарбонатного пластика
при гармонічному навантаженні**

¹Київський національний університет імені Тараса
Шевченка, 01033, м. Київ, вул. Володимирська, 64
e-mail: moh.hashemi2013@gmail.com,
y.zhuk@i.ua

M. Hashemi¹, graduate student,
Y.A. Zhuk¹, Dr. Sci., Prof.

**A procedure for complex moduli
determination for polycarbonate plastic under
harmonic loading**

¹Taras Shevchenko National University of Kyiv,
Kyiv, 01033, Volodymyrska Street, 64
e-mail: moh.hashemi2013@gmail.com,
y.zhuk@i.ua

Досліджується циклічна поведінка аморфного полімеру – полікарбоната – в умовах гармонічного навантаження. Для моделювання нестационарної фізично нелінійної поведінки матеріалу використовуються еволюційні рівняння Заїрі. В умовах гармонічного кінематичного навантаження будуються амплітудні фізичні співвідношення, які пов'язують амплітуди основних польових величин і використовують концепцію комплексних модулів. Для знаходження дійсної та уявної частини цих комплексних модулів (модулів накопичення і втрат) використовується модифікована схема методу еквівалентної лінеаризації з використанням циклічних діаграм. Побудовано залежності комплексних модулів від амплітуди інтенсивності навантаження. Показано, що стандартна схема методу еквівалентної лінеаризації завищує значення амплітуди напруження більше ніж на 10%.

Ключові слова: гармонічне навантаження, амплітудні співвідношення, непружна деформація, комплексні модулі.

The problem of characterization of material response to harmonic loading is addressed. In the present research, Zairi unified constitutive model is used to predict the time dependent inelastic response of amorphous glassy polymer, a polycarbonate (PC). The approach that uses the complex-value amplitude relations is preferred rather than direct numerical integration of the complete set of constitutive equation for the material. The key point of the approach adopted lays in determination of complex moduli, i.e. storage and loss moduli under harmonic loading. It is usually done by making use of equivalent linearization technique. It is shown that this technique leads to overestimation of stress amplitude. To avoid this, the modified equivalent linearization technique is used. It relies on special procedure for determination of storage modulus which based on the usage of cyclic stress–strain diagram. Obtained histories of main field variables evolution were used to find the stress–strain cyclic diagram and real as well as imaginary parts of complex shear modulus with making use of both standard and modified equivalent linearization techniques. The prediction of stress amplitude obtained in the frame of the former scheme overestimates the actual value for more than 10% while the latter scheme gives it with desirable accuracy.

Key Words: harmonic loading, amplitude relations, inelastic deformation, complex moduli.

Communicated by Acad. Perestyuk M.O.

1. Introduction

Cyclic loading is one of the most important and widely used types of loading imposed on structural elements. Materials of structures and their members experiencing cyclic deformation can exhibit specific time dependent properties and can be deformed inelastically being exposed to high stress levels. Inelastic deformation of the material is accompanied by heat generation caused by the internal

mechanisms of mechanical energy dissipation. This phenomenon is usually called the “dissipative heating” [1,2]. It's important to notice here that, under some conditions, the dissipative heating, being small over one separate cycle of vibration, can lead to overheating for long term processes causing the change of mechanical properties, degradation of performance and durability of the structure.

At the present, there are two approaches to address this issue. In the frame of the first approach,

the complex set of constitutive equations governing response of numerous internal parameters is introduced. For polymers, the constitutive modeling utilizes, either directly or with some modifications, viscoplastic constitutive equations which have been developed for metals. The Schapery single integral form has been widely used to characterize the nonlinear (stress or strain dependent) viscoelastic behavior of polymers. In general, the models can be divided into two categories. The first category additively combines linear viscoelastic and plastic constitutive relations (see, for example, [3]). In this category, the viscoelastic strain rates depend upon loading histories and time, and the plastic strain rates depend only upon loading path histories. Second category combines linear elastic and viscoplastic constitutive relations, such as the models proposed in [Perzyna, Perzyna and Wojno, Bodner and Partom, Frank and Brockman, Goldberg and Roberts, Gilat and Zaïri [4–6]. To describe the material time dependent behavior accounting for different features and peculiarities over the cycle of vibration, a direct integration of the set of constitutive equations is necessary. Usually it appears to be time and resource costly for multi-cyclic processes.

Within the second approach, the approximate amplitude relations are used to characterize the cyclic response of the material, i.e. the relations between amplitudes of the main mechanical field parameters over the cycle [7]. Naturally, the application of this technique is justified for the class of problems where there is no need for detailed information on the material response during the cycle (life prediction of the structure, failure due to overheating as a result of internal dissipation etc.). The key point of the amplitude theories is concept of complex moduli [7]. For an inelastic (particularly viscoelastic) material, the modulus governing the relation between strain and stress amplitudes is represented by a complex quantity with real and imaginary parts referred to as storage and loss modulus respectively. The former characterizes elastic response of material and the latter one defines the dissipative ability of the material [2]. In other words, the energy is stored during the loading part of cycle and released under unloading phase, whereas the energy loss occurs during complete cycle due to dissipative properties of the material. The drawback of the approach was the overestimation of stress amplitudes as a result of making use of standard equivalent linearization technique for calculation of both storage and loss moduli. To overcome this difficulty, the modified scheme was proposed in [2,7]. But applicability of the method should be

verified for each particular type of the material.

This paper is devoted to investigation of the technique applicability to the typical elastic-viscoplastic materials such as Polycarbonates (PC), and to determination of complex moduli for isothermal loading case for wide range of loading amplitudes. Particular attention will be paid to simulation of cyclic response of pure polymer material (PC) to monoharmonic kinematic loading in the frame of the second approach.

2. Constitutive relations

To accurately predict an overall performance and lifetime of polymer, it is necessary to model time dependent and inelastic responses. Viscoelastic materials such as polymer materials have the particularity of possessing viscous, elastic and, under some conditions, plastic behavior. Constitutive material models of viscoelastic solids have been proposed for isotropic materials undergoing small deformation gradients whereas the inelastic strain can be calculated as the difference of the total strain and elastic strain. In order to determine the viscoelastic-viscoplastic response of the polymer, Zaïri et al. [5] proposed a model for predicting the viscoplastic response of neat polymers, utilizing a set of state variables as an indication of the resistance of polymeric chains against flow. It should also be mentioned that polymer's mechanical properties and loading/strain rate are the two main parameters that govern the nonlinear response of the polymer. Bodner and Partom model [4] is a typical representative of the class of constitutive theories that constitutes a state variable approach with no yield surface. In the frame of this model, the viscoplasticity contribution exists at all non zero stress levels, and it is found to be the more adequate for the viscoplastic part. The model is modified in order to include strain softening immediately after yield and subsequent re-hardening in [8]. Accordingly, the viscoplastic strain component can be expressed in terms of the deviatoric stress components as follows:

$$\dot{\epsilon}^{vp} = \sqrt{3}D_0 \left(\frac{\sigma_e}{Z_1 + Z_2} \right)^{2n} \frac{\sigma'}{\sigma_e}, \quad (1)$$

where $\dot{\epsilon}^{vp}$ is the viscoplastic strain rate which can be defined as a function of deviatoric stress; the internal state variable Z_1 was initially introduced in [8] to account for the horizontal plateau upon yield and the subsequent strain hardening exhibited by a glassy polymer and Z_2 is internal variable to account for

the effect of strain softening. The equivalent (effective) stress is given by expression: $\sigma_e = (3/2 \sigma' : \sigma')^{1/2}$, where $\sigma' = \sigma - \text{tr}(\sigma)\mathbf{I}/3$ is the deviatoric part of the Cauchy stress, σ . Moreover, D_0 and n are material constants; D_0 represents the maximum inelastic strain rate and n is the strain rate sensitivity parameter controlling the viscosity of flow. The rate of change of the other two internal state variables, Z_1 and, Z_2 can be determined using the following evolution equations:

$$\dot{Z}_1 = m \left(\frac{Z_1 - (1 - \alpha)Z_{10}}{Z_{10}} \right) \dot{W}^P, \quad (2)$$

$$\dot{Z}_2 = h(Z_{2s} - Z_2) \dot{W}^P - AZ_{2z} \left(\frac{Z_2 - Z_{2c}}{Z_{2s}} \right)^r, \quad (3)$$

where $\dot{W}^P$, $\dot{W}^P = \sigma : (\dot{\epsilon} - \dot{\epsilon}^e) = \sigma : \dot{\epsilon}^{in}$, is the inelastic work rate and the associated rise of temperature is neglected, $\dot{\epsilon}^{in} = \dot{\epsilon}^{vp} + \dot{\epsilon}^{ve}$ is referred to as inelastic strain; Z_{10} is the initial value of Z_1 introduced to represent the onset of the plasticity, Z_{2s} is the saturation value of Z_2 , m and h are the hardening and softening rate parameters, respectively, α is a parameter controlling the onset of the re-hardening; A , Z_{2c} and r are three parameters introduced in the model equations to simulate the static recovery. It should be emphasized that nonlinearity is also included in the viscoelastic part. In order to determine the viscoelastic response of the polymer, the unmodified Bodner–Partom model [4], used to describe the nonlinear pre-peak viscoelastic behavior, can be expressed as:

$$\dot{\epsilon}^{vp} = \sqrt{3}D_0 \exp \left(-\frac{1}{2} \left(\frac{Z_3}{\sigma_e} \right) \right)^{2n} \frac{\sigma'}{\sigma_e}, \quad (4)$$

where Z_3 is an added internal state variable and the remaining terms are as defined earlier. The parameter Z_3 is governed by the following differential equation:

$$\dot{Z}_3 = q(Z_{3s} - Z_3) \dot{W}^P, \quad (5)$$

where q is the pre-yield hardening rate parameter, Z_{3s} is the saturation value of Z_3 and the initial value of Z_3 is defined by the parameter Z_{30} .

3. Procedure of complex moduli derivation

Harmonic loading is one of the most widely used and important types of loadings imposed upon a mechanical structure. In this investigation, approximate model of inelastic behavior developed in [1,7] for the case of proportional harmonic loading has been used. In this case, the cyclic properties of the material are described in terms of complex moduli. It is important to notice that the inelastic deformation is considered to be incompressible and thermal expansion is dilatational, it may be more convenient in some applications to separate the isotropic stress-strain relations into deviatoric and dilatational components that can be shown by equations as:

$$\sigma' = 2G(\epsilon - \epsilon^{vp} - \epsilon^{ve}), \quad \sigma_{kk} = 3K_V(\epsilon_{kk} - \epsilon^\theta), \quad (6)$$

where G is the shear modulus, K_V is the bulk modulus, $i, j, k = 1, 2, 3$ and repeated index implies a summation over. Due to incompressibility of plastic deformation, $\dot{\epsilon}_{kk}^{in} = 0$, i.e. the plastic strain rate is deviatoric: $\dot{\epsilon}^{in} = \dot{\epsilon}^{in}$.

According to this model, if a body as a system subjected to harmonic deformation or loading, then its response is also close to harmonic law:

$$\begin{aligned} e(t) &= e' \cos \omega t - e'' \sin \omega t, \\ \sigma(t) &= \sigma' \cos \omega t - \sigma'' \sin \omega t. \end{aligned} \quad (7)$$

The complex amplitudes of the deviator of total strain, $\tilde{e}$, inelastic strain, $\tilde{e}^{in}$, and the stress deviator, $\tilde{\sigma}'$, are related in the N^{th} cycle by the complex shear modulus, $\tilde{G}_N$, and plasticity factor, $\tilde{\lambda}_N$, as shown below:

$$\tilde{\sigma}' = 2\tilde{G}\tilde{e}, \quad \tilde{e}^{in} = \tilde{\lambda}\tilde{e}, \quad N = 1, 2, 3, \dots, \quad (8)$$

where

$$\begin{aligned} \tilde{e} &= e' + ie'', \quad \tilde{\sigma} = \sigma' + i\sigma'', \quad \tilde{e}^{in} = e'^{in} + ie''^{in}, \\ \tilde{G} &= G'_N + iG''_N, \quad \tilde{\lambda}_N = \lambda'_N + i\lambda''_N, \end{aligned} \quad (9)$$

where N is the cycle number and $(\cdot)'$ and $(\cdot)''$ denote the real and imaginary parts of complex quantities.

The shear modulus and plasticity factor are functions of the intensity of the strain-range tensor, frequency and temperature

$$\tilde{G} = \tilde{G}_N(e_0, \omega, \theta), \quad \tilde{\lambda}_N = \tilde{\lambda}_N(e_0, \omega, \theta), \quad (10)$$

where the square of the intensity of strain-range tensor is calculated as $e_0^2 = \mathbf{e}' : \mathbf{e}' + \mathbf{e}'' : \mathbf{e}''$.

The imaginary parts of the complex moduli are determined from the condition of equality of the energies dissipated over a period and are calculated according to the formula

$$G_N'' = \frac{\langle D' \rangle_N}{\omega e_0^2}, \quad \lambda_N'' = \frac{G_N''}{G_0}, \quad (11)$$

$$\langle (\cdot) \rangle_N = \frac{1}{T} \int_{T(N-1)}^{TN} (\cdot) dt, \quad T = \frac{2\pi}{\omega},$$

where D' is the rate of dissipation of mechanical energy, G_0 is the elastic shear modulus.

The real parts are found with making use of the condition that generalized cyclic diagrams $\sigma'_{aN} = \sigma'_{aN}(e_0, \omega)$ and $e_{paN} = e_{paN}(e_0, \omega)$, which relate the ranges of the stress and plastic-strain intensities in the N^{th} cycle, coincide in the frame of the complete and approximate approaches

$$G_N'(e_0, \omega) = \left[\frac{\sigma_{aN}'^2(e_0, \omega)}{4e_0^2} - G_N''^2(e_0, \omega) \right]^{1/2}, \quad (12)$$

$$\lambda_N'(e_0, \omega) = \left[\frac{\sigma_{aN}'^2(e_0, \omega)}{4e_0^2} - \lambda_N''^2(e_0, \omega) \right]^{1/2},$$

where G' and λ' are the sought-for real part of shear modulus and plasticity factor.

4. Problem statement and numerical integration procedure

Due to significant nonlinearity of the stiff type, the numerical integration of Zaïri equations was adopted. Three step scheme of attacking the problem of complex moduli determination was designed. At the first step, the elastic-viscoplastic response of the material to harmonic deformation was calculated by direct application of standard MATLAB solver ODE45 to constitutive equations for different amplitudes of loading strain. At the second step, the stabilized cyclic stress-strain and inelastic-strain-strain diagrams were obtained for the whole set of calculated data. At the final step, the complex moduli were calculated by the averaging over the period of vibration of the results of direct integration and making use of cyclic diagrams and formulae (11) and (12).

The system of nonlinear ordinary differential equations that describes the polymer response to harmonic loading in the case of pure shear consists

of the one-dimensional equations of Zaïri model comprising equations (2), (3), (5) and evolutionary equations

$$\dot{\varepsilon}^{vp} = D_0 \left(\frac{3\sigma^2}{(Z_1 + Z_2)^2} \right)^n \frac{\sigma}{|\sigma|}, \quad (15)$$

$$\dot{\varepsilon}^{ve} = D_0 \exp \left(-\frac{1}{2} \left(\frac{Z_3^2}{3\sigma^2} \right) \right)^n \frac{\sigma}{|\sigma|}. \quad (16)$$

The law of strain deviator variation $e = e_0 \sin \omega t$, as well as Hooke law for shear stress

$$\sigma = 2G(e - \varepsilon^{vp} - \varepsilon^{ve}) = 2G(e - \varepsilon^{in}), \quad (14)$$

should be added to the system.

The values of material constants for PC, which were used for calculations, has been taken from [5]. The list of the values is given below

$E = 2000$ MPa, $D_0 = 10^4$ 1/sec, $n = 10.3$, $q = 2.5$, $Z_{10} = 176.5$ MPa, $Z_{2c} = 20$ MPa, $Z_{2s} = -60$ MPa, $Z_{30} = 50$ MPa, $Z_{3s} = 100$ MPa, $\alpha = 0.9$, $a = 0.0035$, $h = 1.25$, $m = 6.5$, $r = 2.0$.

5. Results of calculation

In this section, we present the results of transient response simulation and the complex moduli calculations performed in the frame of modified technique described in Sec. 3. In Fig. 1, the stress-strain curve was obtained for PC polymer under monotonic loading in pure shear. In this figure, the numerical predictions of the model are generated for strain rate $1.0 \cdot 10^{-2} \text{ sec}^{-1}$ at room temperature. As can be seen, this figure demonstrates a very good with the results presented in [5].

Evolution of stress and inelastic strain for PC polymer under harmonic loading in pure shear with strain amplitude $e_0 = 7.0 \cdot 10^{-2}$ are shown in Fig. 2 and Fig. 3 respectively for frequency 1 Hz. The material demonstrates cyclically stable response over the whole interval of loading amplitudes and frequencies investigated. As a result, stabilization of the response amplitude occurs after several initial cycles. Relatively slow stabilization is observed only in the vicinity of yield point.

Fig. 4 illustrates the mechanical hysteresis phenomenon under cyclic loading that enable one to measure the phase shift between stress and total strain. The energy dissipation capacity for PC polymeric material under harmonic loading in the maximum dissipation condition ($e_0 = 7.0 \cdot 10^{-2}$) at the

frequency 1 Hz is quite high. Calculated value of the normalized loss modulus is about 0.34.

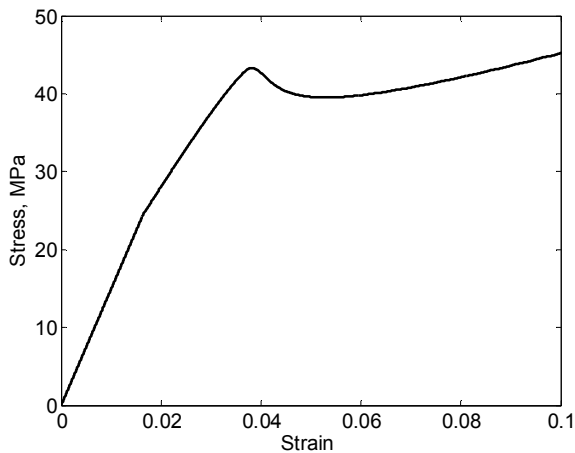


Fig. 1. The stress-strain curve under pure shear monotonic loading.

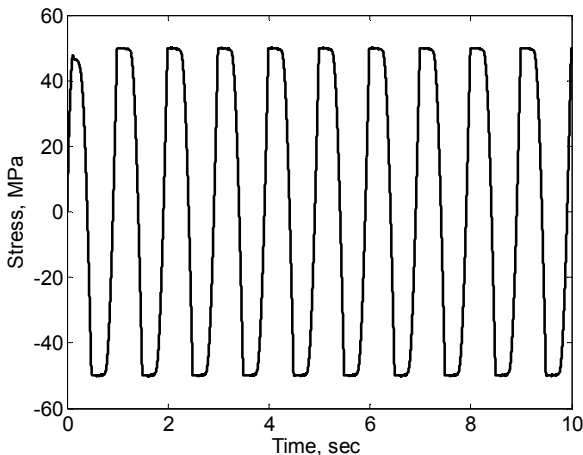


Fig. 2. Stress evolution under harmonic loading.

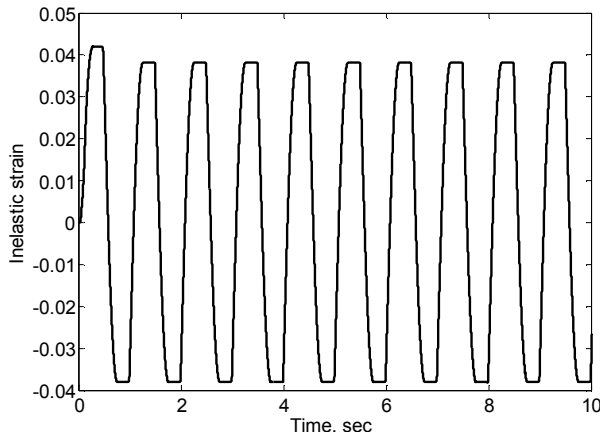


Fig. 3. Inelastic strain evolution under harmonic loading.

As it was mentioned in Sec. 3, this actual loop can be approximated with making use of either standard or modified equivalent linearization scheme. In the same figure, the actual loop (line 1) is shown along with the loops calculated in the frame

of standard (line 2) and modified (line 3) equivalent linearization techniques. The cyclic diagram at stabilized stage of the vibration $\sigma'_a = \sigma'_a(e_0)$ (i.e. concretization of general cyclic diagram $\sigma'_{aN} = \sigma'_{aN}(e_0, \omega)$ used in the formulae (12) for $N \rightarrow \infty$) is shown in Fig. 5. The curve is calculated for cyclic pure shear.

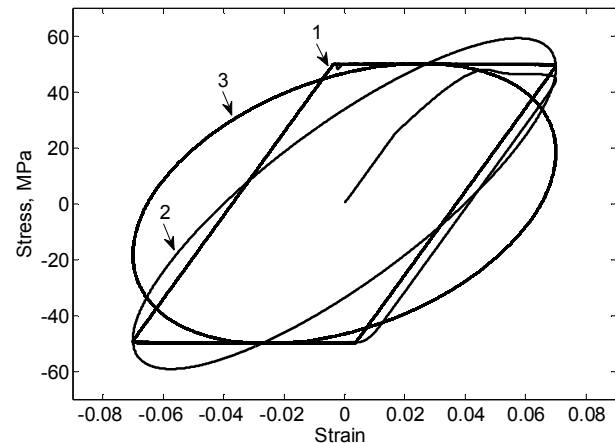


Fig. 4. Hysteresis loops.

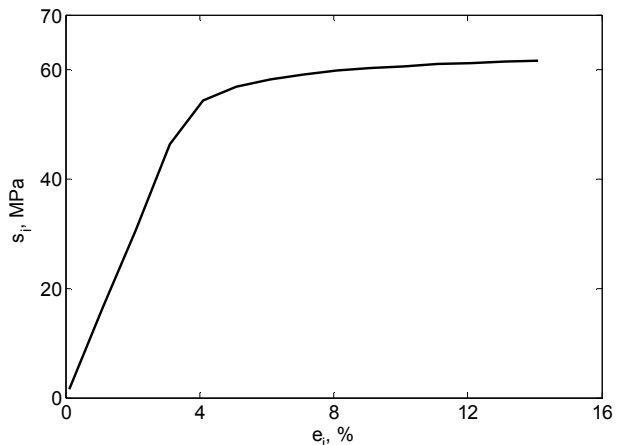


Fig. 5. Cyclic diagram for PC polymer at 1 Hz.

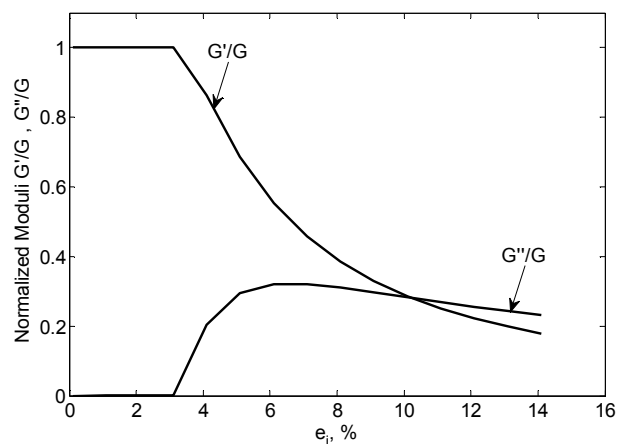


Fig. 6. Normalized values of the real and imaginary parts of complex shear modulus for PC polymer.

Having calculated the cyclic diagram and making

use of formulae (12), it is easy to find the real parts of the complex moduli (storage moduli G' and λ') in the frame of modified equivalent linearization scheme. The imaginary parts of the complex moduli (the loss moduli G'' and λ'') are determined according to the formula (11). The normalized improved values of G'/G and G''/G found according to the modified scheme for frequency 1 Hz at steady-state cyclic regime and constant temperature are shown in Fig.6 for wide range of loading amplitudes. This diagram shows the highest losses occur at strain amplitude of about seven percent for this type of polymer.

6. Conclusions

The problem of characterization of material response to harmonic loading is addressed.

The approach that uses the complex-value ampli-

tude relations is preferred rather than direct numerical integration of the complete set of constitutive equation for the material. The key point of the approach adopted lays in determination of complex moduli, i.e. storage and loss moduli under harmonic loading. It is usually done by making use of equivalent linearization technique. In this paper, Zaïri model was used simulate the time dependent response of PC polymer. Obtained histories of main field variables evolution were used to find the stress-strain cyclic diagram and real as well as imaginary parts of complex shear modulus with making use of both standard and modified equivalent linearization techniques. The prediction of stress amplitude obtained in the frame of the former scheme overestimates the actual value for more than 10% while the latter scheme gives it with desirable accuracy.

Список використаних джерел

1. Zhuk Y. A. Modelling the stationary vibrations and dissipative heating of thin-walled inelastic elements with piezoactive layers / Y. A. Zhuk, Senchenkov I. K. // *Int. Appl. Mech.* – 2004. – Vol. 40. – P. 546–556.
2. Beards C. E. *Structural Vibration: Analysis and Damping* / Beards C. E. – London: Arnold, 1996.
3. Ottosen N. S. *Mechanics of Constitutive Modeling* / N. S. Ottosen, M. Ristinmaa / Elsevier, 2005. – 700p.
4. Bodner S. R. Constitutive equations for elastoviscoplastic strain hardening material / S. R. Bodner, Y. Partom // *Trans. ASME, J. Appl. Mech.* – 1975. – Vol. 42. – P. 385–389.
5. Zaïri F. Phenomenological nonlinear modeling of glassy polymers / F. Zaïri, K. Woznica, A. M. Naï // *C. R. Mecanique.* – 2005. – Vol. 333. –P. 359–364.
6. Goldberg R. K. Computational simulation of the high strain rate tensile response of polymer matrix composites / R. K. Goldberg – NASA/TM-2002-211489, 2002.
7. Senchenkov I. K. Modeling the thermomechanical behavior of physically nonlinear materials under monoharmonic loading / I. K. Senchenkov, Y. A. Zhuk, V. G. Karnaukhov // *Int. Appl. Mech.* –2004. – Vol. 40. – P. 943–969.
8. Frank G. J. A viscoelastic-viscoplastic constitutive model for glassy polymers / G. J. Frank, R. A. Brockman // *Int. J. Solids Struct.* – 2001. – Vol. 38 – P. 5149-5164.

References

1. ZHUK, Y. A. & SENCHENKOV, I. K. (2004) Modelling the stationary vibrations and dissipative heating of thin-walled inelastic elements with piezoactive layers. *Int. Appl. Mech.* 40. p. 546–556.
2. BEARDS, C.E. (1996) *Structural Vibration: Analysis and Damping*. London: Arnold.
3. OTTOSEN, N. S. & RISTINMAA, M. (2005) *Mechanics of Constitutive Modeling*. Elsevier.
4. BODNER, S. R. & PARTOM, Y. (1975) Constitutive equations for elastoviscoplastic strain hardening material. *Trans. ASME, J. Appl. Mech.* 42. p. 385–389.
5. Zaïri, F., Woznica, K. & Naï, A. M. (2005) Phenomenological nonlinear modeling of glassy polymers. *C. R. Mecanique.* 333. p. 359–364.
6. GOLDBERG, R. K. (2002) *Computational simulation of the high strain rate tensile response of polymer matrix composites*. NASA/TM-2002-211489.
7. SENCHENKOV, I. K., ZHUK, Y. A. & KARNAUKHOV, V. G. (2004) Modeling the thermomechanical behavior of physically nonlinear materials under monoharmonic loading. *Int. Appl. Mech.* 40. p. 943–969.
8. FRANK, G. J. & BROCKMAN, R. A (2001) A Viscoelastic-viscoplastic constitutive model for glassy polymers. *Int. J. Solids Struct.* 38. p. 5149-5164.

Надійшла до редколегії 21.12.15

КОМП'ЮТЕРНІ НАУКИ ТА ІНФОРМАТИКА

УДК 004.414.32

Альхілалі Зайнаб Сааді Хусейн,
аспірантка.

**Програмоване, дистанційне,
мобільне.... Яке навчання далі?**

Київський національний університет
імені Тараса Шевченка, 83000, м. Київ,
пр-т. Глушкова 4д,
e-mail: zozet@bk.ru
Університет Мосул, Ірак

Al-hilali Zainab Saadi Hussein,
graduate student.

**Programmed, remote, mobile...
Which learning to choose further?**

Taras Shevchenko National University of
Kyiv, 83000, Kyiv, Glushkova st., 4d,
e-mail: zozet@bk.ru
University of Mosul, Iraq

В статті робиться аналіз становлення сучасних форм електронного навчання: дистанційної та мобільної, проблеми їх розвитку та застосування. Окреслюються шляхи розв'язання цих проблем.

Ключові слова: Електронна освіта, мобільна освіта, Інтернет

*This article represents the analysis of establishment of the modern types of e-learning. The remote learning originates from the extramural education, which arose yet in the XIXth century. The methodology of the remote learning consists in the programmed learning. The use of the computing techniques in education became possible due to the technological revolution and the emergence of the brand new computers. The rise of mobile devices with internet connectivity, such as smartphones and tablets, has transformed many aspects of day-to-day life, but perhaps one of the most significant benefits of mobile technology has been its impact on how we learn. With connected devices becoming increasingly prevalent and affordable, experts believe that more young people will want to employ mobile devices to make education more engaging and personalize it to suit their specific needs. Mobile learning focuses on the mobility of the learner, interacting with portable technologies. Using mobile tools for creating learning aids and materials becomes an important part of **informal learning**. The main problems in introduction of the remote learning became the cost of development and training, and the creation of the appropriate software. In this paper the solutions to these problems are outlined.*

Keywords: e-learning, mobile learning, Internet

Статтю представив д.ф.м.н, проф.Хусаїнов Д.Я.

Вступ. Мініатюризація засобів обчислювальної техніки – смартфони, планшетні комп'ютери, ноутбуки - докорінним чином змінила сучасні навчальні технології, забезпечивши доступ до майже нескінченних обсягів найрізноманітнішої інформації. Ці

технології знаходять своє застосування від дітлахів, що вивчають мову чи арифметику, до пенсіонерів, які намагаються здобути знання з медицини, чи педагогіки.

Становлення електронного навчання. Дистанційна освіта свої корені,

без сумніву, веде від освіти заочної. Багатоконфесійність та розкиданість церков по території країни стимулювало появу релігійної заочної освіти у США ще у XIX столітті. На маленькій території біля озера Чотоква (Chautauqua) на південному заході штату Нью-Йорк преподобний Джон Х.Вінсент і підприємець Льюїс Міллер в 1874 році розпочали невеличкий експеримент в галузі освіти дорослих для вчителів методистської недільної школи, експеримент швидко переріс у загальнонаціональний рух і істотно змінив систему освіти в Сполучених Штатах. Його успіх привів до створення багатьох подібних шкіл на всій території США. “Рух Чотоква”, який розпочав Вінсент у 1886 році, назвали “першою сучасною теорією освіти для дорослих в Сполучених Штатах”.

Індустріальні, політичні та військові потреби дали у середині XIX століття поштовх розвитку майбутньої дистанційної освіти в іншому форматі – вивчення іноземних мов по пошті. Піонерами у цьому питанні були Товариство сучасних мов в Берліні та Страйер (Strayer) бізнес коледж міста Балтімор у США, які запропонували заочні курси французької, німецької та англійської мов.

Явним лідером заочного навчання в американській вищій освіті в кінці 19-го століття був Чиказький університет, який використовував освітню систему Чотокви, починаючи з 1883.

Одним з перших технічних засобів нетрадиційного навчання був проектор слайдів (ліхтар Linnebach), який використовувався в XIX столітті в класах Чотокви і шкіл для дорослих. Іншим значним технологічним нововведенням став фонограф Томаса Едісона (1877).

Завдяки цьому пристрою з’явилися перші лінгафонні класи для вивчення мов, а в 1936 році понад 200 університетських радіостанцій транслювали навчальні програми. На початку 20-го століття, теорії навчання почали концентруватися на візуальних підходах до викладання, на відміну від широко розповсюдженої практики мовного спілкування. Едісон також першим ще до початку II Світової війни запропонував використовувати для занять навчальні фільми. У роки війни навчальні фільми широко використовувалися для підготовки військових, цивільної оборони і пропаганди.

Першим суттєвим кроком до появи сучасних форм електронного навчання стало програмоване навчання, запропоноване в середині 50-х років минулого століття в роботах американського біхейвіорального психолога Берреса Фредеріка Скіннера. Сутність його підходу полягала в розбитті процесу навчання на невеличкі порції, які вивчаються за певною програмою, яка визначає наступну порцію в залежності від поведінки учня (результатів навчання). Управління надходженням нових порцій могло легко здійснюватись не лише простішими електронними, а й механічними пристроями. Коли навчальні порції утворювали лінійну послідовність, управління процесом могло здійснюватись за допомогою спеціально оформленого навчального посібника. Однак найкращою оболонкою для програмованого навчання, звичайно, стала обчислювальна техніка.

З прогресом обчислювальної техніки синхронно розвивалося і програмоване навчання: збільшувалися об’єми інформації і урізноманітнювалися її форми, ускладнювалися алгоритми

управління процесом навчання, вдосконалювалися форми контролю знань.

Однак вже у 80-ті роки за класичним програмованим навчанням залишилися лише дисципліни з достатньо простою логічною структурою, простими формами подачі інформації. Такі програми ще й досі використовуються, наприклад, при перевірці знань правил дорожнього руху чи інших простих формальних інструкцій.

Існує чимало переваг використання комп'ютера для навчання. Насамперед це індивідуальна взаємодія студента/учня з програмою, що дозволяє визначати темп індивідуально для кожного, цьому сприяє і миттєва перевірка контрольних відповідей і швидка відповідь на стандартні запитання студента, особливо це важливо при виконанні вправ на повторення (арифметика, медицина, мова).

Звільнений час викладачем може знову ж використовуватись для індивідуальних контактів

. Комп'ютерний контроль грає і велику соціальну-психологічну роль, бо дозволяє не соромлячись відповідати в зручній для студента формі. Величезний обсяг пам'яті та розрахунків швидкість комп'ютера пропонують широкі можливості для його використання в класі. Він може дати інструкції для учня, викликати відповіді та зворотні результати, може змінити хід його подальшого навчання. Комп'ютер також може бути використаний для вимірювання досягнень кожного учня, порівняння їх з минулими результатами, а потім порадити вчителю про те, які частини навчальної програми слід вивчати/повторювати далі.

Дистанційне навчання. Якісним стрибком, який привів до появи

дистанційного навчання, став розвиток комп'ютерних мереж. Це дозволило рознести спочатку в просторі, а згодом і у часі учасників навчального процесу: вчителів, учнів однієї навчальної групи. Мережа дозволяла ефективніше використовувати досвід викладача, оскільки він міг працювати із значно більшою аудиторією, викладачу і учням не було потрібно збиратися в одному і тому ж місці в один і той же час, результати одного учня легко утаємничувались від іншого, а з іншого боку спрощувався обмін між учнями для групових завдань.

Іншим стимулом для використання дистанційних технологій стало стрімке збільшення об'єму носіїв інформації і відповідно комп'ютерного об'єму навчальної інформації. Це дало можливість подавати інформацію не лише у вигляді текстів і малюнків, а й звуку і відео. Величезний обсяг новітніх навчальних програм часто не дозволяв тримати їх на одному комп'ютері, що також вирішувалось за рахунок використання мережі.

На початку свого становлення дистанційне навчання застосовувалось для навчання студентів/людей з нетрадиційними потребами: тих, хто працює і вчиться одночасно, військовослужбовців, ув'язнених, інвалідів та інших. З часом дистанційне навчання набувало нові форми і якості, охоплювало все ширші маси населення. Сьогодні дистанційні курси охоплюють мільйони людей у різних країнах.

Використання дистанційних технологій дозволяє навчальним інституціям не витрачатись на створення класів, побудову гуртожитків, забезпечувати не збиткове викладання для невеличких груп. Студентам же це дає

можливість комфортніше поєднувати навчання з роботою, не вимагає близькості житла і університету.

Дистанційне навчання не обов'язково конкурує з добре відомими класичними технологіями бо може їх доповнювати і розширювати. Гарна нова модель такої імплементації була запропонована, коли Гарвард і Массачусетський технологічний інститут оголосили про об'єднання, щоб запропонувати безкоштовні онлайн-курси за допомогою спільної некомерційної організації EDX. Обидва університети отримали чудову можливість спостерігати, як студенти реагують на курси дистанційного навчання. Виділимо особливості, які відрізняють дистанційне навчання. **По-перше**, дистанційне навчання не є формою самоосвіти або освіти в неакадемічному середовищі, наприклад удома чи в гуртках за інтересами. Воно проводиться навчальними інституціями, які, як правило, повинні мати відповідний дозвіл (ліцензію, акредитацію).

По-друге, дистанційному навчанню притаманна рознесеність у часі і просторі учасників освітнього процесу. Це зовсім не заперечує використання старих технологій: електронної і звичайної пошти, телебачення, телефону. Гарно розроблені системи і програми_можуть також допомогти подолати інтелектуальні, культурні та соціальні відмінності між студентами.

По-третє, інтерактивні комунікаційні технології об'єднують колективи студентів і викладачів. Приналежність до спільної мережі робить навчальні зв'язки менш залежними від відстані, більш досконалішими, мобільними, універсальними, що значною мірою

сприяє стрімкому розвитку дистанційної освіти.

По-четверте, дистанційна освіта утворює навчальні співтовариства, що об'єднують студентів, викладачів, освітні ресурси. Соціальні мережі сприяють розвитку таких спільнот на базі навіть різних курсів, університетів, країн, тим самим зменшуючи почуття ізоляції притаманне комп'ютерним формам навчання.

Мобільне навчання. У другій половині 10-х років ХХІ століття визначальними для розвитку технологій навчання стали надзвичайна мініатюризація комп'ютерної техніки і поєднання глобальної мережі Інтернет з локальними телефонними мережами мобільного зв'язку. Поява планшетів – персональних мікрокомп'ютерів і смартфонів, що поєднали можливості телефону і комп'ютера, з одного боку, і можливості підключення до Інтернету з кишенькового телефону, призвели до ще більшого розгалуження і розмноження управлінських та інформаційних навчальних зв'язків. Якщо дистанційне навчання передбачало знаходження викладача і студента будь-де, але біля стаціонарної мережі, то відтепер стало можливим отримати навчальний контент у будь-якій точці цивілізованого світу. Звільнений час і викладач, і студент можуть знову ж використовувати для індивідуальних контактів і самостійної роботи сьогодні у світі спостерігається цікава картина: 6% населення планети володіють планшетами, 20% - ПК і 22% - смартфонами. Щороку продається понад 200 мільйонів планшетів, а з 4 мільярдів мобільних телефонів, що знаходяться в користуванні, 1,08 мільярда – смартфони.

Ці величезні технологічні зміни разом із розвитком дистанційного

навчання привели до появи нової форми дистанційного навчання – мобільної. Мобільне навчання – це навчання в багатоплановому середовищі, через навчальне і соціальне спілкування з використанням персональних електронних пристроїв [1]. Основною перевагою мобільного навчання перед дистанційним є зняття будь-яких обмежень на розташування у просторі як викладача, так і студентів.

Мобільне навчання набуває особливого значення в нестабільних регіонах, таких як Ірак, Сирія, Афганістан, де відбуваються збройні конфлікти, а молодь не має доступу до якісного стаціонарного навчання і бібліотек. Мобільні технології дають можливість доступу до освітнього контенту у проміжках вільного часу, під час пауз протягом повсякденного життя або вночі.

У деяких країнах, де, через багатовікові традиції молодим жінкам не дозволений доступ до нормальної освіти, мобільне навчання обіцяє бути в змозі надати дівчатам і жінкам різного віку якісну освіту в приватному порядку і у їх власний час. Мобільні технології також допомагають довести навчальний матеріал людям з обмеженими можливостями, які не можуть фізично дістатися до класу або кампусу на регулярній основі. Мобільні технології дають можливість таким соціальним групам взяти під власний контроль їх освітню, а значить і професійну долю.

Мобільні рішення дозволяють вже зараз зробити доступними величезну кількість існуючих навчальних матеріалів, настанов, керівництв і повноцінних уроків, які можуть бути повторно агреговані по відповідній темі і вмонтовані в навчальний матеріал, наприклад як сервіси YouTube. процес

мобільного навчання може легко перетворити учня чи студента в викладача для своїх молодших/старших родичів, чи в розробника спільно з товаришами нових навчальних матеріалів. Тим самим забезпечується ще один ефективний канал поширення мобільних технологій.

Проблеми електронного навчання.

З самого початку заочне навчання, особливо комерційні курси, набули погану репутацію в академічному середовищі. Вже в 1926 році, дослідження на замовлення Корпорації Карнегі виявили, що у заочних школах Сполучених Штатів було широко поширене шахрайство, і не було жодних адекватних стандартів для захисту суспільства від зловживань. Хоча ситуація була пізніше поліпшена шляхом введення акредитаційних інституцій, які встановлювали стандарти для реалізації програм навчання, завжди були побоювання за якість навчального процесу та перевірки студентських робіт. Крім того, введення дистанційного навчання в традиційних вишах викликало побоювання, що ця технологія одного дня повністю усуне реальні класи і людей-інструкторів.

Невиправдані сподівання початку 2000-х років на швидкий комерційний успіх дистанційних форм навчання змусили більше використовувати ці форми для залучення талановитих студентів і співробітників, здобуття ними нових знань. Це дало свої комерційні наслідки – в 2015 році ринок он-лайн та інших електронних форм навчання сягнув у світі 107 мільярдів доларів.

Оскільки програми дистанційного навчання, як правило, пропонуються комерційними організаціями, дистанційне навчання стало пов'язуватись з комерціалізацією вищої освіти. Як

правило, критики цього підходу вказують на потенційну експлуатацію студентів, які не можуть претендувати на допуск до традиційних коледжів і університетів, в комерційних школах виникає спокуса знизити академічні стандарти для того, щоб збільшити доходи. Корпоративний адміністративний підхід в таких навчальних закладах нав'язує "моделі ринку" в навчальні програми та курси, щоб звернутися до більш широкої аудиторії і генерувати більше інституційних доходів. Все це призводить до зниження академічних стандартів і якості одержаних знань.

Дистанційне навчання комерційних або традиційних університетів використовує дві основних економічні моделі, спрямовані на зниження витрат на співробітників. Перша модель передбачає заміну праці капіталом, у той час як друга пропонує використання більш дешевої робочої сили.

Прихильники першої моделі стверджують, що дистанційне навчання пропонує економію від масштабу за рахунок скорочення витрат на персонал, після початкових інвестицій капіталу для веб-серверів, електронних текстів, мультимедійних додатків та Інтернет-програм для взаємодії зі студентами. Тим не менш, багато установ, які перейшли до дистанційного навчання за такою схемою, виявили, що поточні витрати, пов'язані з реалізацією навчальних програм насправді можуть зробити їх дорожчими для установи, ніж традиційні курси.

Другий основний підхід полягає у розділенні функцій підготовки, викладання та оцінки і призначенні деяких функцій менш високооплачуваним робітникам. Відкриті університети, як правило, зробили це шляхом формування комітетів для розробки курсів та найму

викладачів-сумісників для індивідуальної допомоги студентам і перевірки робіт, залишаючи фактичні обов'язки класних занять, якщо такі є, професорам.

Педагогічна теорія з 90-х років робила сильніший акцент на аудіовізуальні засоби мультимедіа, однак більше поширені були курси з простим використанням електронних текстів і текстових повідомлень. Причина цього була в тому, що тягар розробки курсів лежав на самому викладачеві, який не мав часу/досвіду розробки досконалих мультимедійних курсів, а також концентрувався на полегшенні спілкування між викладачами та студентами, а також між студентами.

Сучасні електронні курси використовують Web-архітектури, які включають в себе цифрові матеріали для читання, підкасти, електронну пошту, форуми, тестові системи в моделюючих віртуальних лабораторіях. Хоча більшість цих технологій є асинхронними і дозволяють працювати в системі коли і де завгодно, обмеження у вигляді прав доступу до ресурсів за розкладом теж використовуються.

Незважаючи на ці складнощі на початок XXI століття більше половини вишів США пропонували понад 100 000 дистанційних курсів через Інтернет. Приблизно чверть американських студентів брала хоча б один такий курс на семестр.

Висновки. Наявність різноманітних методів навчання від аудиторних до мобільних, багатофункціональних технічних пристроїв надає викладачеві можливість вибору і поєднання найбільш адекватних форм викладання. Такі технології, які об'єднують різні технологічні підходи отримали назву

змішаного (колаборативного) навчання [2].

Складність проведення лабораторних робіт з новітньою технікою, з одного боку, і наявність досконалих засобів відображення, які можуть поєднувати реальне зображення з комп'ютерним, враховувати дії студента, привели до появи технології доповненої реальності[3]. Магістральний шлях подолання головних проблем електронного навчання – створення розвинутих інструментальних засобів і

мережевих структур для розробки нових сучасних навчальних систем.

Революційний виклик мобільного навчання полягає не стільки в оцифровці наявних навчальних ресурсів, а в тому, що це буде дозволяти людям самим вибирати свої власні шляхи продовження навчання і використання своїх талантів, йти по життю відповідно до своїх уподобань і покликань.

Література

1. Crompton H. Historical overview of mobile learning: Toward learner-centered education/ Crompton H. In Z. L. Berge & L. Y. Muilenburg (Eds.), Handbook of mobile learning. Florence, KY: Routledge. – 2013. – pp. 3–14.

2.Сергієнко І.В. Програмні засоби створення і супроводу розподіленого навчального середовища / І.В.Сергієнко, М.М.Глибовець, С.С.Гороховський, А.М.Глибовець; за наук.ред. М.М.Глибовця, С.С.Гороховського. – К.:НаУКМА, Аграр Медіа Груп. – 2012. – 710 с.

3. Шабелюк О.В. Використання технології доповненої реальності в дистанційному освітньому процесі/ О.В.Шабелюк// Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія фізико-математичні науки. – 2014. – №2. – с. 215-218.

References

1. CROMPTON, H. (2013) Historical overview of mobile learning: Toward learner-centered education. In Z. L. Berge & L. Y. Muilenburg (Eds.), Handbook of mobile learning Florence, KY: Routledge, pp. 3–14.

2. SERHIENKO, I.V. (2012) The software for creation and maintenance of the distributed learning environmen / Serhienko, I.V., Hlybovets, M.M., Horokhovskiy, S.S., Hlybovets, A.M., under scientific editorship of Hlybovets, M.M., Horokhovskiy, S.S., – K.: National University of “Kyiv-Mohyla Academy”; Agrar Media Group, – 710 pages.

3. SHABELYUK O.V. (2014) Using the augmented reality technology in the remote learning process. *Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv Series Physics & Mathematics*, № 2. pp. 215-218.

Надійшла до редколегії 15.12.2015

УДК 519.8

Брила А.Ю., к.ф.-м.н., доц.,
Антосяк П.П., к.ф.-м.н.,
Юрченко Н.В., к.ф.-м.н.

Досяжність нечітких альтернативних цілей у заданій субординації строгого ранжування

Ужгородський національний університет,
88000, м. Ужгород, вул. Університетська, 14
e-mail: brila_andrij@ukr.net

Ужгородський національний університет,
88000, м. Ужгород, вул. Університетська, 14
e-mail: antosp@ukr.net

Ужгородський національний університет,
88000, м. Ужгород, вул. Університетська, 14
e-mail: yurchnatali@gmail.com

A.Yu. Brila, Ph.D.,
P.P. Antosyak, Ph.D.,
N.V. Yurchenko, Ph.D.

Attainability of fuzzy alternative goals in a defined subordination of strict ranking

Uzhgorod National University, 88000,
Uzhgorod, Universitetska str., 14,
e-mail: brila_andrij@ukr.net

Uzhgorod National University, 88000,
Uzhgorod, Universitetska str., 14,
e-mail: antosp@ukr.net

Uzhgorod National University, 88000,
Uzhgorod, Universitetska str., 14,
e-mail: yurchnatali@gmail.com

Розглядається задача прийняття рішень із нечітко визначеними цілями, які упорядковано за важливістю і для них визначено умови допустимості. Для розв'язання даної задачі запропоновано модифікацію схеми скаляризації та підхід, що ґрунтується на зведенні її до задачі однокритеріальної оптимізації, цільова функція у якій є скалярною згортою критеріїв часткових критеріїв.

Ключові слова: нечітка ціль, лексикографічна оптимізація, досяжність.

The decision-making problem with fuzzy goals are considered. Such problems, for example, are in the case of decision-making based on the opinions of several experts who formulate the estimation not clearly. Goals are ranking by importance, i.e. the strict subordination ranking on set of corresponding membership functions are defined. The set of allowed solutions (alternatives) is a subset of the integer numbers. For each of the membership functions defined the minimum value at which criterion is acceptable. It is required to find an optimal solution of the problem considering only acceptable criteria.

Based on the properties of the considered problem is proposed to reduce this decision-making problem which is the lexicographic optimization problem with alternative criteria to the one criterion optimization problem with objective function, which is a positive linear convolution of partial criteria. This method allows to reduce the optimization problem with vector criterion function to an optimization problem with scalar objective function, which allows to apply known methods for its solve. The proved theorem, justifying that ability. The cases with different kinds of membership functions are considered, and for each of them the corresponding rules for calculating of the coefficients of positive linear convolution are described. Also the modification of scalar scheme for solving lexicographic problem with alternative criteria is proposed.

Key Words: fuzzy goal, lexicographic optimization, attainability, alternative criteria.

Статтю представив д.т.н. Волошин О.Ф.

1. Вступ

Переважає більшість задач прийняття рішень є задачами з нечітко заданими критеріями на підмножині універсальної множини альтернатив, яка у загальному випадку також нечітка. На даний момент розроблено багато підходів до розв'язання багатокритеріальних задач прийняття рішень [1]. Так у [2] запропоновано підхід до розв'язання задачі прийняття рішень із

нечіткими цілями (підхід Белмана-Заде) для випадку рівноважливих нечітких цілей та випадку, коли відомі коефіцієнти відносної важливості ступеню належності до множини альтернатив і відносної важливості цілей. У [3] запропоновано підхід розв'язання задач лексикографічної оптимізації з нечітко заданими цілями шляхом зведення її до задачі

однокритеріальної оптимізації з цільовою функцією, яка є додатною згорткою критеріїв.

У даній статті розглядається задача прийняття рішень, у якій експертів упорядковано за важливістю і для кожного експерта визначається мінімальне допустиме значення функції оцінок, при якому думка експерта враховується. Для розв'язання даної задачі запропоновано підхід, що ґрунтується на зведенні її до задачі однокритеріальної оптимізації з використанням функціоналу, що наводить лексикографічний порядок віддачі переваги на множині альтернатив.

2. Постановка задачі

Нехай $X (X \subset Z)$ – універсальна множина альтернатив (розв'язків). Нечіткими цілями можуть бути нечіткі підмножини X типу:

- 1) «величина x повинна бути приблизно в межах від b до c »;
- 2) «величина x повинна бути близькою до b »;
- 3) «величина x не повинна бути більшою за b »;
- 4) «величина x не повинна бути меншою за b ».

Кожна нечітка ціль подається відповідною функцією належності ([4])

$$\mu_i(x), i=1,2,\dots,q, \text{ де } 0 \leq \mu_i(x) \leq 1, i=1,2,\dots,q.$$

Нечіткі цілі упорядковано за важливістю, тобто на множині відповідних функцій належностей задано субординацію строгого ранжування $Rg(1,2,\dots,q)$. Позначимо κ^L критерій, що є векторною згорткою критеріїв $\mu_i, i=1,2,\dots,q$ у субординації $Rg(1,2,\dots,q)$ з векторною цільовою функцією

$$F(x) = (\mu_1(x), \mu_2(x), \dots, \mu_q(x)).$$

Задача знаходження непокресуваного розв'язку у заданій субординації строгого ранжування є задачею лексикографічної оптимізації [5]

$$\max^L F(x), x \in X. \quad (1)$$

На основі задачі (1) побудуємо задачу лексикографічної оптимізації, у якій розглядаються тільки ті нечітко задані цілі, для яких у оптимальному розв'язку x^* цієї задачі виконуватиметься нерівність (умова допустимості)

$$\mu_i(x^*) \geq t_i, \quad (2)$$

де $0 \leq t_i \leq 1, i=1,2,\dots,q$ – деякі задані наперед константи. Іншими словами, якщо для деякого $\mu_i(x)$ у оптимальному розв'язку x^*

$$\mu_i(x^*) < t_i,$$

то $\mu_i(x)$ має бути виключено з розгляду, і рішення повинно прийматись ґрунтуючись на цілях з меншим значенням рангу для яких виконується умова (2). Цілі, для яких виконується умова допустимості (2) називають допустимими. Задачу лексикографічної оптимізації (1) із додатковими умовами допустимості (2) називають задачею з альтернативними критеріями [5]

$$\max^L \tilde{F}(x), x \in X, \quad (3)$$

де

$$\tilde{F}(x) = (\mu_{j_1}(x), \mu_{j_2}(x), \dots, \mu_{j_k}(x)), k \leq q,$$

$$\{j_1, j_2, \dots, j_k\} \subset \{1, 2, \dots, q\}, j_1 < j_2 < \dots < j_k,$$

$$\mu_{j_i}(x^*) \geq t_i, i=1,2,\dots,k.$$

Позначимо X^* множину оптимальних розв'язків задачі (3).

Для розв'язання задачі (3) у роботі розглянуто модифікацію схеми скаляризації та підхід, що ґрунтується на зведенні її до задачі однокритеріальної оптимізації використовуючи функціонал, що представляє лексикографічний порядок віддачі переваги на множині альтернатив.

3. Модифікована схема скаляризації розв'язання задачі лексикографічної оптимізації з альтернативними цілями (3)

Одним із підходів до розв'язання задачі лексикографічної оптимізації (1) є схема скаляризації [6]. Розглянемо модифікацію схеми скаляризації, що може бути використана для розв'язання задачі лексикографічної оптимізації з альтернативними критеріями.

Покладаємо $X_1 = X$.

1-й крок. Знаходимо оптимальний розв'язок задачі однокритеріальної оптимізації

$$\mu_1^* = \max_{x \in X_1} \mu_1(x). \quad (4)$$

Позначимо $X_1^* = \{x \in X \mid \mu_1(x) = \mu_1^*\}$ множину оптимальних розв'язків задачі (4). Якщо $\mu_1^* < t_1$, то покладаємо $X_2 = X$ і переходимо до кроку 2. Якщо ж $\mu_1^* \geq t_1$ і X_1^* містить тільки одну

альтернативу, то $X^* = X_1^*$. В іншому випадку покладаємо $X_2 = X_1^*$ і переходимо до 2-го кроку.

2-й крок. Знаходимо оптимальний розв'язок задачі однокритеріальної оптимізації

$$\mu_2^* = \max_{x \in X_2} \mu_2(x). \quad (5)$$

Позначимо $X_2^* = \{x \in X_2 \mid \mu_2(x) = \mu_2^*\}$ множину оптимальних розв'язків задачі (5). Якщо $\mu_2^* < m_2$, то покладаємо $X_3 = X_2$ і переходимо до кроку 3. Якщо ж $\mu_2^* \geq m_2$ і X_2^* містить тільки одну альтернативу, то $X^* = X_2^*$. В іншому випадку покладаємо $X_3 = X_1^*$ і переходимо до 3-го кроку.

q-й крок. Знаходимо оптимальний розв'язок задачі однокритеріальної оптимізації

$$\mu_q^* = \max_{x \in X_q} \mu_q(x). \quad (6)$$

Позначимо $X_q^* = \{x \in X_q \mid \mu_q(x) = \mu_q^*\}$ множину оптимальних розв'язків задачі (6). Якщо $\mu_q^* < m_q$, то $X^* = X_q$. В іншому випадку – $X^* = X_q^*$.

4. Досяжність оптимальних розв'язків задачі (3)

Спочатку дослідимо випадок, коли для кожної із функцій належностей

$$\mu_i(x) \in \{0,1\}, x \in X, i \in \{1,2,\dots,q\}. \quad (7)$$

Графічно такі функції виглядають так:

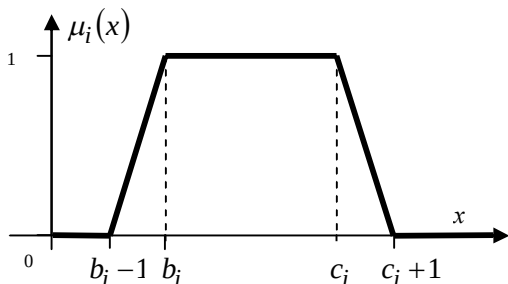


Рис. 1. «Величина x повинна бути приблизно в межах від b до c »

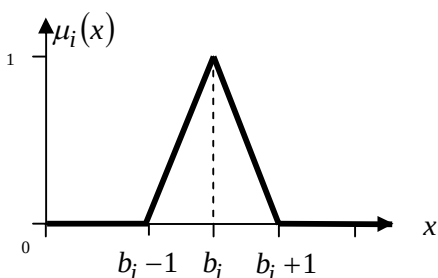


Рис. 2. «Величина x повинна бути близькою до b »

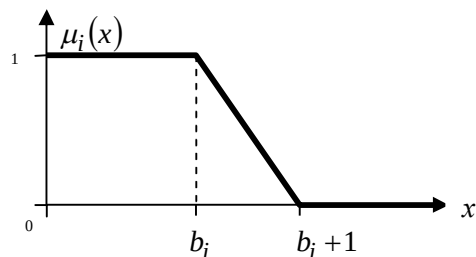


Рис. 3. «Величина x не повинна бути більшою за b »

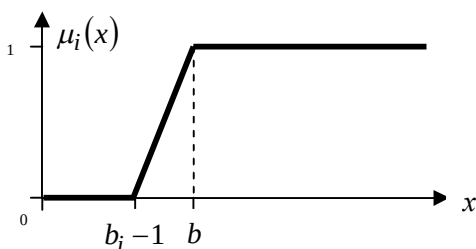


Рис. 4. «Величина x не повинна бути меншою за b »

Будемо вважати, що параметри $b_i, c_i, i = 1,2,\dots,q$ є цілочисловими.

У [3] вказано спосіб знаходження додатних коефіцієнтів $\bar{\alpha}_i, i = 1,2,\dots,q$ таких, що функціонал

$$L(x) = \sum_{i=1}^q \bar{\alpha}_i \mu_i(x)$$
 представляє лексикографічний

порядок віддачі переваги на множині X . При цьому коефіцієнт $\bar{\alpha}_q > 0$ вибрано довільним чином, а інші додатні коефіцієнти вибрано згідно умови

$$\bar{\alpha}_i > \sum_{l=i+1}^q \bar{\alpha}_l, i = q-1, q-2, \dots, 1. \quad (8)$$

Особливістю такого функціоналу є те, що розв'язок задачі

$$\max L(x), x \in X \quad (9)$$

є розв'язком задачі лексикографічної оптимізації (2) [3].

Якщо розв'язок багатокритеріальної задачі оптимізації може бути отриманий як розв'язок відповідної однокритеріальної задачі, з цільовою функцією, яка є лінійною згортою критеріїв цієї багатокритеріальної задачі оптимізації, то вважають ([5]), що даний розв'язок є досяжним за зваженою сумою різноважливих критеріїв.

Грунтуючись на даних коефіцієнтах розглянемо задачу

$$G(x) = \alpha_1 \mu_1(x) + \alpha_2 \mu_2(x) + \dots + \alpha_q \mu_q(x) \rightarrow \max \quad (10)$$

де

$$\begin{aligned} x &\in X, \\ \mu_i(x) &\geq t_i y_i, i = 1, 2, \dots, q, \\ \alpha_i &= \bar{\alpha}_i y_i, i = 1, 2, \dots, q, \\ x_j &\geq 0, j = 1, 2, \dots, n, \\ y_i &\in \{0, 1\}, i = 1, 2, \dots, q. \end{aligned} \quad (11)$$

Теорема. Розв'язок задачі (10)-(11) є розв'язком лексикографічної задачі з альтернативними критеріями.

Доведення теореми легко отримати враховуючи вибір коефіцієнтів $\bar{\alpha}_i, i = 1, 2, \dots, q$, за правилом (8), які дозволяють побудувати функціонал $L(x)$, що представляє лексикографічний порядок віддачі переваги на множині альтернатив. Кожен з коефіцієнтів α_i визначається на основі $\bar{\alpha}_i$ і змінної y_i

$$\alpha_i = \bar{\alpha}_i y_i,$$

яка при неможливості виконання умови допустимості $\mu_i(x^*) \geq t_i$ перетворюється в нуль за рахунок обмеження

$$\mu_i(x) \geq t_i y_i.$$

А отже, у нуль перетворюється і коефіцієнт α_i , що призводить до виключення з розгляду відповідної функції $\mu_i(x)$

Отже, ґрунтуючись на даній теоремі та правилах вибору додатних коефіцієнтів (8) ми можемо знаходити досяжні оптимальні розв'язки задачі (3) з векторною цільовою функцією шляхом розв'язання задачі (10)-(11) зі скалярною цільовою функцією.

Зауваження. Даний підхід дозволяє знаходити оптимальні розв'язки задачі лексикографічної оптимізації з нечіткими альтернативними цілями з додатковою умовою вибору оптимального рішення, ґрунтуючись на p допустимих цільових функціях якнайвищого рангу. Така ситуація еквівалентна задачі прийняття рішень p експертами якнайвищого рангу, для яких виконується умова допустимості. У нашому випадку, до задачі (10)-(11) необхідно додати умову

$$\sum_{i=1}^q y_i = p.$$

Розглянемо тепер задачу лексикографічної оптимізації з нечіткими альтернативними цільовими функціями (3), відмовившись від умови (7). Графічне представлення цільових функцій набуде вигляду:

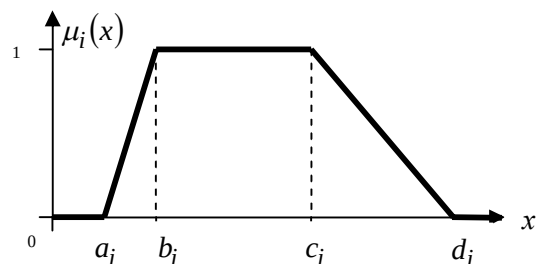


Рис. 5. «Величина x повинна бути приблизно в межах від b до c »

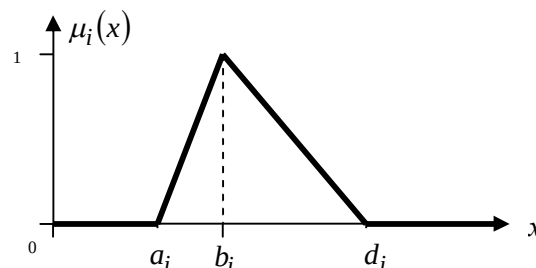


Рис. 6. «Величина x повинна бути близькою до b »

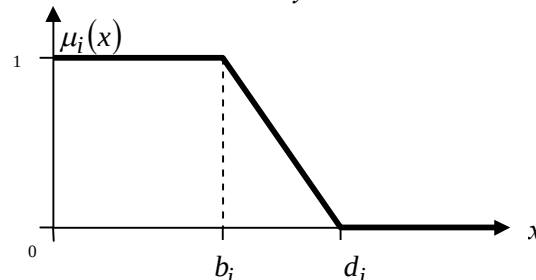


Рис. 7. «Величина x не повинна бути більшою за b »

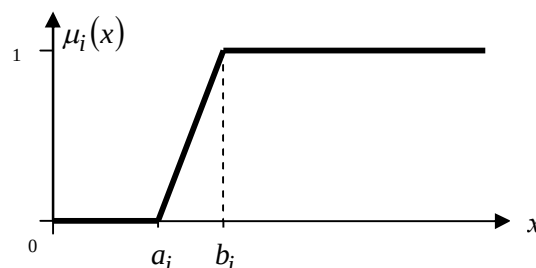


Рис. 8. «Величина x не повинна бути меншою за b »

Будемо вважати, що параметри $a_i, b_i, c_i, d_i, i = 1, 2, \dots, q$ є цілочисловими. Позначимо X^{**} множину оптимальних розв'язків такої лексикографічної задачі оптимізації з довільними функціями.

Дослідимо проблему відшукування досяжних оптимальних розв'язків. Нехай $\bar{\beta}_q > 0$ довільне додатне число, а інші поступово визначено з

$$\bar{\beta}_i > \frac{1}{\alpha_i} \sum_{l=i+1}^q \bar{\beta}_l, i = q-1, q-2, \dots, 1, \quad (12)$$

де

$$\alpha_i = \min_{\mu_i(x) \neq \mu_i(y)} |\mu_i(x) - \mu_i(y)|, i = 1, 2, \dots, q. \quad (13)$$

З використанням коефіцієнтів $\bar{\beta}_i$, знайдених згідно з (12), побудуємо функціонал

$$Z(x) = \sum_{i=1}^q \bar{\beta}_i \mu_i(x)$$

і задачу однокритеріальної оптимізації зі скалярною цільовою функцією

$$\max Z(x), x \in X. \quad (14)$$

У [3] показано, що множина оптимальних розв'язків задачі (14) є множиною оптимальних розв'язків задачі (3) без додаткового припущення (7).

Як і у попередньому випадку, ґрунтуючись на коефіцієнтах $\bar{\beta}_i, i = 1, 2, \dots, q$, задачу знаходження досяжних оптимальних розв'язків лексикографічної оптимізації з нечіткими цілями можна звести до задачі

$$H(x) = \beta_1 \mu_1(x) + \beta_2 \mu_2(x) + \dots + \beta_q \mu_q(x) \rightarrow \max \quad (15)$$

де

$$\begin{aligned} x &\in X, \\ \mu_i(x) &\geq t_i y_i, i = 1, 2, \dots, q, \\ \beta_i &= \bar{\beta}_i y_i, i = 1, 2, \dots, q, \\ x_j &\geq 0, j = 1, 2, \dots, n, \\ y_i &\in \{0, 1\}, i = 1, 2, \dots, q. \end{aligned} \quad (16)$$

5. Приклад

Нехай потрібно прийняти рішення відносно значення деякої величини на основі наступних суджень експертів:

експерт 1: "значення величини повинно коливатись десь у межах від 2 до 4", мінімально допустиме значення $t_1 = 1$;

експерт 2: "значення величини не повинно перевищувати 1", мінімально допустиме значення $t_2 = 0.9$;

експерт 3: "значення величини повинно бути біля 5", мінімально допустиме значення $t_3 = 0.5$;

експерт 4: "значення величини повинно бути біля 6", мінімально допустиме значення $t_4 = 0.5$;

І нехай ці нечіткі експертні оцінки формалізовано функціями належності у відповідності до наступного рисунка:

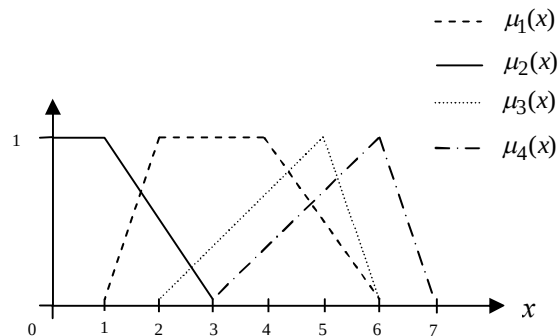


Рис. 9. Формалізовані судження експертів

Для розв'язання можна застосувати модифікацію схеми скаляризації для розв'язання задач лексикографічної оптимізації з альтернативними критеріями.

Покладаємо $X_1 = X = [1, 7]$.

Крок 1. Знаходимо оптимальний розв'язок задачі однокритеріальної оптимізації

$$\mu_1^* = 1 = \max_{x \in X_1} \mu_1(x).$$

Оптимальним розв'язком задачі є $X_1^* = \{2, 3, 4\}$. Оскільки $\mu_1^* = 1 \geq t_1 = 1$ і X_1^* складається з більше ніж однієї альтернативи, то покладаємо $X_2 = X_1^*$ і переходимо до 2-го кроку.

Покладаємо $X_1 = X = [1, 7]$.

Крок 2. Знаходимо оптимальний розв'язок задачі однокритеріальної оптимізації

$$\mu_2^* = 0.5 = \max_{x \in X_2} \mu_2(x).$$

Оскільки $\mu_2^* = 0.5 < t_2 = 0.9$, то покладаємо $X_3 = X_2$ і переходимо до кроку 3.

Крок 3. Знаходимо оптимальний розв'язок задачі однокритеріальної оптимізації

$$\mu_3^* = 0.66 = \max_{x \in X_3} \mu_3(x).$$

Оскільки $\mu_3^* = 0.66 \geq t_3 = 0.5$ і $X_3^* = \{4\}$, тобто множина оптимальних розв'язків складається з одного розв'язку, то $X^* = X_3^*$.

Побудуємо задачу для знаходження досяжних оптимальних розв'язків. Визначимо коефіцієнти $\beta_i, i = 1, 2, 3, 4$ з урахуванням [3]. Маємо:

$$\alpha_3 = \min \left\{ \frac{1}{6-5}, \frac{1}{5-2} \right\} = \frac{1}{3},$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{3-1} = \frac{1}{2},$$

$$\alpha_1 = \min \left\{ \frac{1}{2-1}, \frac{1}{6-4} \right\} = \frac{1}{2},$$

$$\bar{\beta}_4 = 1,$$

$$\bar{\beta}_3 = 4 > \frac{1}{\alpha_3} \bar{\beta}_4 = 3,$$

$$\bar{\beta}_2 = 11 > \frac{1}{\alpha_2} (\bar{\beta}_4 + \bar{\beta}_3) = 10,$$

$$\bar{\beta}_1 = 33 > \frac{1}{\alpha_1} (\bar{\beta}_4 + \bar{\beta}_3 + \bar{\beta}_2) = 32.$$

У відповідності до (15)-(16) маємо:

$$\max H(x) = \beta_1 \mu_1(x) + \beta_2 \mu_2(x) + \beta_3 \mu_3(x) + \beta_4 \mu_4(x),$$

$$x \in X = [1, 7],$$

$$\mu_1(x) \geq 1 * y_1,$$

$$\mu_2(x) \geq 0.9 * y_2,$$

$$\mu_3(x) \geq 0.5 * y_3,$$

$$\mu_4(x) \geq 0.5 * y_4,$$

$$\beta_1 = 33 * y_1,$$

$$\beta_2 = 11 * y_2.$$

Список використаних джерел

1. Волошин О.Ф. Моделі та методи прийняття рішень / О.Ф. Волошин, С.О. Мащенко. – К.: Видавничо-поліграфічний центр «Київський університет», 2010. – 336 с.
2. Bellman R.E. Decision-Making in Fuzzy Environment / R.E. Bellman, L.A. Zadeh // *Management Science*, 1970. – vol.17 – №4. – P.141-160.
3. Брила А.Ю. Досяжність нечітких цілей у заданій субординації строгого ранжування / А.Ю. Брила, П.П. Антосьяк // *Вісник Київського університету. Серія: фіз.-мат. науки.* – 2014. – №3. – С. 76-80.
4. Рыжов А. П. Элементы теории нечетких множеств и измерения нечеткости / А. П. Рыжов. – М.: Диалог-МГУ, 1998. – 116 с.
5. Червак Ю.Ю. Оптимізація. Непокращуваний вибір / Ю.Ю. Червак – Ужгород: Ужгород. нац. ун-т, 2002. – 312 с.
6. Подиновский В.В. Оптимизация по последовательно применяемым критериям / В.В. Подиновский, В.М. Гаврилов. – М.: Сов. Радио, 1975. – 115с.

$$\beta_3 = 4 * y_3,$$

$$\beta_4 = y_4,$$

$$y_i \in \{0,1\}.$$

Як розв'язок отримаємо $\bar{X}^{**} = \{4\}$.

6. Висновки

Запропонований підхід до розв'язання задачі прийняття рішень із нечітко визначеними цілями, які строго упорядковано за важливістю з додатковими умовами допустимості зводиться до лексикографічної задачі оптимізації з альтернативними критеріями. Розглянуто та обгрунтовано можливість розв'язання задачі з використанням модифікації схеми скаляризації та зведення даної задачі, як задачі з векторною цільовою функцією, до задачі однокритеріальної оптимізації зі скалярною цільовою функцією, що в свою чергу дає можливість застосувати для її розв'язання відомі методи.

References

1. VOLOSHIN, O., MASHCENKO, S. (2010) *Models and methods of decision making*. Kyiv: publishing center "Kyiv University"
2. BELLMAN, R., ZADEH, L. (1970) Decision-Making in Fuzzy Environment. *Management Science*. 4. Volume 17. p. 141-160.
3. BRILA, A., ANTOSYAK, P. (2014) Attainability of fuzzy goals in a defined subordination of strict ranking. *Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series: Physics & Mathematics*. 3. p. 76-80.
4. RYZHOV, A. (1998) *Elements of the theory of fuzzy sets and measurement of fuzziness*. Moskva: Dialog-MGU.
5. CHERVAK, Yu. (2002) *Optimization. Non improved choice*. Uzhgorod: Uzhgorod National University.
6. PODINOVSKIY, V., GAVRILOV, V. (1975) *Optimization by consistently applied criteria*. Moskva: Soviet Radio.

Надійшла до редколегії 01.12.2015

УДК 004.652.4+004.657

Буй Д.Б.¹, д.ф.-м.н., проф.,
Кахута Н.Д.², к.ф.-м.н., доц.,
Шишацька О.В.³,
Mohammed Karam Jasim⁴, аспірант,
Fabunmi Sunmade⁵, аспірант

**Відношення конфінальності,
передпорядки та порядки,
семантика фрази ORDER BY запитів SQL-
подібних мов**

¹Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, пр-т. Глушкова 4д, м. Київ,
03680, e-mail: buy@unicyb.kiev.ua

²Університет економіки та права «КРОК», вул.
Лаврська, 30-32, м. Київ, 03113,
e-mail: nadezhdak@krok.edu.ua

³Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, пр-т. Глушкова 4д, м. Київ,
03680, e-mail: oshyshayska@gmail.com

⁴Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, пр-т. Глушкова 4д, м. Київ,
03680, e-mail: karamjasim1978@yahoo.com

⁵Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, пр-т. Глушкова 4д, м. Київ,
03680, e-mail: sunmadefabunmi@yahoo.com

D.B.Buy¹, Dr.Sc.(Phys.-Math.),
N. D. Kachuta², PhD.,
O.V.Shyshatska³,
Karam Jasim Mohammed⁴, postgraduate,
Sunmade Fabunmi⁵, postgraduate

**Cofinality relation,
pre-orders and orders,
the semantics of ORDER BY clause of queries in
SQL-like language**

¹Taras Shevchenko National University of Kyiv,
Glushkova st., 4d, Kyiv, 03680,
e-mail: buy@unicyb.kiev.ua

²«KROK» University, 30-32 Lavherna St, Kyiv,
03113,
e-mail: nadezhdak@krok.edu.ua

³Taras Shevchenko National University of Kyiv,
Glushkova st., 4d, Kyiv, 03680,
e-mail: oshyshayska@gmail.com

⁴Taras Shevchenko National University of Kyiv,
Glushkova st., 4d, Kyiv, 03680,
e-mail: karamjasim1978@yahoo.com

⁵Taras Shevchenko National University of Kyiv,
Glushkova st., 4d, Kyiv, 03680,
e-mail: sunmadefabunmi@yahoo.com

У статті розглядаються такі загальні теоретико-множинні конструкції: (1) відношення конфінальності і коініціальності на множинах елементів, індуковані вихідним відношенням на елементах; (2) відношення порядку на фактор-множині, індуковане вихідним відношенням передпорядку на множині. Крім того, розглянута семантика «упорядкування» рядків таблиць в запитах SQL-подібних мов у вигляді відношення передпорядку на рядках таблиць. Основні результати: (1) встановлені критерії для відношень конфінальності і коініціальності бути передпорядками; (2) показано, що ці відношення, індуковані частковим порядком, є порядками на дискретних множинах, потім цей результат перенесений на таблиці; (3) показана роль конфінальних і коініціальних підмножин для знаходження точних граней множини; (4) знайдений критерій для передпорядку на фактор-множині бути порядком; (5) встановлено критерій, коли передпорядок на рядках таблиць є порядком.

Конфінальність, передпорядок, SQL-подібні мови, фраза ORDER BY

The article discusses such general set-theoretic constructions: (1) the relations of cofinality and coinitality on sets of elements induced by the initial relation on the elements; (2) order on the factor set induced by the initial preorder on the set. In addition, we consider the semantics of the "ordering" of table's rows in SQL-like languages as the pre-order on the table's rows. The main results: (1) the criteria for the cofinality and coinitality relations to be preorders is specified; (2) these relations, induced by partial order, are partial orders on discrete sets, this result is transferred to the tables; (3) the role of cofinal and coinital subsets for finding supremum and infimum of the set is shown; (4) the criteria for preorder on the factor set to be the order is established in terms of cardinalities of cosets of corresponding factor set; (5) the criteria for pre-order on the table's rows (this pre-order specifies the "ordering" of rows in the query) to be an order is specified in terms of the primary key of table:(this pre-order is order if and only if the set of attributers (from the clause ORDER BY) contains primary key.

Cofinality, pre-order, SQL-like languages, clause ORDER BY

Статтю представив д.ф.-м.н. Анісімов А.В.

Стаття присвячена властивостям: (1) відношення конфінальності – бінарного відношення на булеані множини, індукованого бінарним відношенням на множини; (2) відношення порядку на фактор-множині, індукованого відношенням передпорядку на множині; (3) відношення передпорядку на рядках таблиць, яке є семантикою фрази ORDER BY запитів SQL-подібних мов.

Всюди далі символ $\square$ позначає кінець формулювання твердження або кінець доведення, а символ $\blacksquare$ – кінець частини доведення.

Відношення конфінальності та коініціальності: загальні властивості

Поняття конфінальності (точніше кажучи, поняття конфінальної підмножини) є класичним поняттям теорії множин (див., наприклад, [1, гл. III, § 1, п. 7, с. 146; 2, § 2, с. 22]); в теорії табличних алгебр це поняття природно використовується при явному введенні відношення порядку на таблицях, що відповідає комутативній напівгрупі таблиць за з'єднанням ([3, підрозділ 2.8, с. 56-58]). Основні властивості відношення конфінальності наведені в роботах [4, с. 49-50; 5; 6, підрозділ 2.1, с. 40-43].

Зауважимо, в класичних роботах по суті вводиться поняття конфінальної підмножини, яке природно можна розповсюдити на довільні множини (див. далі). Крім того, основний смисл введення поняття конфінальної підмножини полягав в тому, що задача знаходження супремуму множини зводиться до аналогічної задачі для конфінальної підмножини; більш того, не важко показати, що супремуми множини та її конфінальної підмножини існують або не існують одночасно, причому у випадку існування збігаються (див. далі). Перейдемо до точних означень.

Зафіксуємо бінарне відношення $\leq$ на універсумі D . Це відношення індукує бінарне відношення конфінальності $<$ на булеані універсуму $P(D)$:

$$X < Y \stackrel{def}{\iff} \forall x(x \in X \Rightarrow \exists y(y \in Y \& x \leq y)).$$

Зауважимо, що за термінологією [7, розд. I, § 2, с. 39] відношення $X < Y$ означає, що множина Y конфінальна множині X . Безпосередньо перевіряється, що відношення конфінальності має найменшим елементом порожню множину $\emptyset$, тобто виконується $\emptyset < X$ для всіх множин X . Крім того, порожня множина є

і мінімальним елементом в тому розумінні, що виконується імплікація $X < \emptyset \Rightarrow X = \emptyset$. Остання імплікація легко перевіряється від супротивного.

Що стосується властивостей рефлексивності та транзитивності, то мають місце дві наступні леми про зв'язок вказаних властивостей вихідного відношення на універсумі $\leq$ та індукованого відношення конфінальності $<$.

Лема 1 (про рефлексивність відношення конфінальності). Відношення конфінальності $<$ рефлексивне тоді і тільки тоді, коли відношення $\leq$ рефлексивне. $\square$

Доведення. Ідея подальших доведень полягає в тому, що на одноеlementних множинах (сінглітонах) відношення конфінальності по суті збігається з початковим відношенням.

Почнемо з необхідності. Нехай відношення конфінальності $<$ рефлексивне, покажемо від супротивного, що тоді і початкове відношення $\leq$ рефлексивне. Дійсно, нехай відношення $\leq$ не є рефлексивним, тоді існує елемент універсуму x , такий, що $x \not\leq x$. Але відношення конфінальності рефлексивне, тобто виконується $\{x\} < \{x\}$, звідки очевидно випливає, що $x \leq x$. Прийшли до суперечності. $\blacksquare$

Достатність. Нехай відношення $\leq$ рефлексивне, покажемо, що відношення конфінальності $<$ також рефлексивне. Дійсно, розглянемо довільну множину X . Якщо ця множина порожня, то, як зазначалося вище, має місце $\emptyset < \emptyset$. Нехай ця множина непорожня. Тоді розглянемо довільний елемент $x \in X$. Залишається врахувати, що $x \leq x$ (тобто в якості елемента множини X , більшого за x , можна взяти той самий елемент x); таким чином, $X < X$. $\blacksquare$ $\square$

Лема 2 (про транзитивність відношення конфінальності). Відношення конфінальності $<$ транзитивне тоді і тільки тоді, коли відношення $\leq$ транзитивне. $\square$

Почнемо з необхідності. Нехай відношення конфінальності $<$ транзитивне, покажемо від супротивного, що тоді і початкове відношення $\leq$ транзитивне. Дійсно, нехай відношення $\leq$ не є транзитивним, тоді існують елементи універсуму x, y, z , такі, що виконується $x \leq y$, $y \leq z$, але $x \not\leq z$. Очевидно, що $\{x\} < \{y\}$ та $\{y\} < \{z\}$. З транзитивності відношення конфінальності випливає, що тоді $\{x\} < \{z\}$, звідки $x \leq z$; прийшли до суперечності. $\blacksquare$

Достатність. Нехай відношення $\leq$ транзитивне, покажемо, що відношення конфінальності $<$ також транзитивне. Дійсно, розглянемо довільні множини X, Y, Z , такі, що $X < Y, Y < Z$, та покажемо, що тоді $X < Z$.

Випадок порожньої множини X тривіальний, тому розглянемо довільний елемент $x \in X$. Оскільки $X < Y$, то знайдеться елемент $y \in Y$, такий, що $x \leq y$. В свою чергу, оскільки $Y < Z$, то для елемента $y \in Y$ знайдеться елемент $z \in Z$, такий, що $y \leq z$. З транзитивності початкового відношення випливає, що $x \leq z$. Таким чином, для довільного елемента множини X в множині Z знайшовся елемент, його більший, а це і означає виконання $X < Z$. ■ □

Нагадаймо, що рефлексивне і транзитивне бінарне відношення називається відношенням передпорядку (див., наприклад, [1, , гл. III, § 1, п. 2, с. 138; 7, гл. I, § 2, с. 37]).

З лем 1-2 безпосередньо випливає наступний наслідок.

Наслідок 1 (критерій бути передпорядком для відношення конфінальності). Відношення конфінальності $<$ є передпорядком тоді і тільки тоді, коли відношення $\leq$ є передпорядком. □

Розглянемо тепер випадок, коли початкове відношення $\leq$ є порядком (взагалі кажучи, частковим). З наслідку 1 випливає, що відношення конфінальності $<$ є тільки передпорядком. Дійсно, розглянемо наступний простий приклад.

Нехай $<N, \leq>$ – множина натуральних чисел з стандартним порядком; N', N'' – множини парних та непарних натуральних чисел відповідно. Очевидно, що $N' < N''$ та навпаки $N'' < N'$, але $N' \neq N''$.

Таким чином, задача полягає у пошуку умов того, щоб відношення конфінальності було порядком.

Далі будемо вважати, що початкове відношення $\leq$ є порядком. Крім того будемо розглядати відношення конфінальності не на всьому булеані, а на дискретних множинах.

Множину X назвемо дискретною, якщо частково впорядкована множина $<X, \leq>$ (за індукованим порядком) дискретна в звичайному розумінні [8, § 1, с. 8], тобто для всіх $x_1, x_2 \in X$ виконується імплікація $x_1 \leq x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$.

Найпростіший приклад дискретної множини – синглітон.

Твердження 1 (про відношення конфінальності на дискретних множинах). Відношення конфінальності (індуковане частковим порядком) частково впорядковує сім'ю дискретних множин. □

Доведення. Очевидно, достатньо встановити антисиметричність відношення на дискретних множинах. Нехай $X < Y$ та $Y < X$, причому множини X, Y дискретні. Треба показати, що ці множини рівні.

Нехай спочатку $X = \emptyset$, тоді, з огляду на мінімальність порожньої множини, маємо рівність $Y = \emptyset$.

Нехай тепер множина X непорожня і розглянемо довільний елемент $x \in X$. Тоді знайдуться елементи $y \in Y$ і $z \in X$, такі, що $x \leq y \leq z$; звідки, враховуючи транзитивність відношення $\leq$, отримуємо $x \leq z$. Але x, z – елементи дискретної множини X , тобто $x = z$. Таким чином, $x \leq y \leq x$, звідки $x = y$ з огляду на антисиметричність порядку $\leq$. Отже, $x \in Y$, тобто включення $X \subseteq Y$ доведено. Обернене включення $Y \subseteq X$ встановлюється повністю аналогічно (просто множини X, Y міняються ролями). □

Незважаючи на начебто штучність твердження 1, зауважимо, що два природних часткових порядку на таблицях (які є дискретними множинами відносно порядку включення рядків в розумінні теоретико-множинного включення графіків рядків) будуються саме за наведеною логічною схемою [9; 3, підрозділ 2.6, с. 47-48, підрозділ 2.8, с. 56-58]. Це питання ще буде далі розглянуто більш детально.

Наведене доведення можна знайти в [3, підрозділ 1.3, с. 25], крім явного розгляду випадку порожніх множин.

Вказані властивості відношення конфінальності переносяться на випадок відношення коініціальності $\sqsubset$ на булеані універсуму $P(D)$, яке також індукується початковим відношенням:

$$X \sqsubset Y \stackrel{\text{def}}{\iff} \forall x(x \in X \Rightarrow \exists y(y \in Y \& y \leq x)).$$

Відповідні аналоги наведемо без доведення, які проводяться повністю аналогічно випадку конфінальності. Зауважимо, що порожня множина є найменшим та мінімальним елементом в розумінні $\emptyset \sqsubset X$ та імплікації $X \sqsubset \emptyset \Rightarrow X = \emptyset$.

Лема 1' (про рефлексивність відношення коініціальності). Відношення коініціальності $\sqsubset$

рефлексивне тоді і тільки тоді, коли відношення $\leq$ рефлексивне. $\square$

Лема 2' (про транзитивність відношення коініціальності). Відношення коініціальності $\sqsubseteq$ транзитивне тоді і тільки тоді, коли відношення $\leq$ транзитивне. $\square$

Наслідок 1' (критерій передпорядку для відношення коініціальності). Відношення коініціальності $\sqsubseteq$ є передпорядком тоді і тільки тоді, коли відношення $\leq$ є передпорядком. $\square$

Твердження 1' (про відношення коініціальності на дискретних множинах). Відношення коініціальності (індуковане частковим порядком) частково впорядковує сім'ю дискретних множин. $\square$

Застосуємо отримані результати (твердження 1 та 1') для побудови природних впорядкувань таблиць. Всі неозначувані тут поняття та позначення для таблиць використовуються в розумінні монографії [3].

В якості універсального домену розглянемо множину всіх рядків S , впорядкованих за включенням їхніх графіків порядком $\sqsubseteq$. На булеані $P(S)$ розглянемо за вищенаведеною схемою відношення конфінальності та коініціальності:

$$X < Y \stackrel{\text{def}}{\iff} \forall s(s \in X \Rightarrow \exists s'(s' \in Y \& s \leq s')),$$

$$X \sqsubset Y \stackrel{\text{def}}{\iff} \forall s(s \in X \Rightarrow \exists s'(s' \in Y \& s' \leq s)).$$

Оскільки теоретико-множинне відношення включення $\subseteq$ є порядком, то введені відношення конфінальності та коініціальності згідно з наслідками 1 та 1' є передпорядками.

Лема (про дискретність таблиць). Довільна множина односхемних рядків, впорядкована відношенням теоретико-множинного включення $\subseteq$ є дискретною. Зокрема, кожна таблиця, впорядкована аналогічним чином, є дискретною. $\square$

Доведення. Нехай X довільна множина рядків, причому всі рядки мають однакову схему (нагадаймо, в даному випадку схема це область визначення рядка як функції). Розглянемо два довільних рядки цієї множини s, s' , такі, що, наприклад, $s \subseteq s'$. Неважко зрозуміти, що так як $\text{doms} = \text{doms}'$, то $s = s'$. Більш формально доведення можна провести з використанням загальної властивості обмеження $f \subseteq g \& \text{dom}f = \text{dom}g \Rightarrow f = g$ (див., наприклад, [6, підрозділ 1.4, твердження 1.11, п. 10]). $\blacksquare$

Зрозуміло, що встановлена властивість прямо переноситься на таблиці, оскільки, згідно з

означенням, таблиця є скінченною множиною односхемних рядків. $\blacksquare$

З цієї леми та тверджень 1 та 1' безпосередньо випливає наступний наслідок.

Теорема 1 (про відношення конфінальності та коініціальності на таблицях, індуковані теоретико-множинним включенням рядків). Відношення конфінальності $<$ та коініціальності $\sqsubset$ частково впорядковують множину таблиць. $\square$

Зауважимо, що відношення конфінальності $<$ природньо зв'язане з операцією проєкції табличних алгебр [3, підрозділ 2.6, с. 47-48], а відношення коініціальності – з операцією з'єднання цих же алгебр [3, підрозділ 2.8, с. 56-58].

Відношення конфінальності та коініціальності: знаходження точних граней

Всюди далі на універсумі розглядається частковий порядок $\leq$.

Наведемо загальні властивості відношення конфінальності, позначаючи верхній (нижній) конус множини X як X^Δ (відповідно X^∇), а супремум (інфімум) цієї ж множини як $\prod X$ (відповідно $\prod X$).

Твердження 2 (про верхні конуси конфінальних множин). Для довільних множин виконується імплікація $X < Y \Rightarrow Y^\Delta \subseteq X^\Delta$. $\square$

Доведення очевидне, бо кожна верхня грань множини Y є і верхньою гранню множини X . $\square$

Наслідок 2 (про супремуми конфінальних множин). Для довільних множин за умови існування їхніх супремумів виконується імплікація $X < Y \Rightarrow \prod X \leq \prod Y$. $\square$

Доведення впливає з попереднього твердження та означення супремумів, як найменших елементів відповідних верхніх конусів. $\square$

В літературі поняття конфінальності найчастіше використовується для конфінальних підмножин в наступному розумінні: множину Y назвемо конфінальною підмножиною множини X , якщо, по-перше, $Y \subseteq X$ та, по-друге, $X < Y$.

Основна властивість конфінальних підмножин сформульована в наступному твердженні.

Твердження 3 (властивості конфінальних підмножин). Якщо Y конфінальна підмножина множини X , то верхні конуси цих множин співпадають – $X^\Delta = Y^\Delta$; тобто виконується узагальнена рівність $\prod X \simeq \prod Y$. $\square$

Вище через $\simeq$ позначена узагальнена рівність (по іншій термінології сильна рівність Кліні): вираз $\varphi \simeq \phi$ означає, що або обидві частини (одночасно) невизначені, або визначені та мають рівні значення (див., наприклад, [10, вступ, с. 11].)

Доведення. Нехай $X \prec Y$ та $Y \subseteq X$, тоді за твердженням 2 $Y^\Delta \subseteq X^\Delta$. Крім того, за загальними властивостями конусів виконується включення $Y^\Delta \supseteq X^\Delta$ (див., наприклад, [8, § 1, теорема 5, п. (i), с. 11]). Значить, верхні конуси множин X, Y співпадають; і тому вони одночасно мають або не мають найменші елементи – супремуми відповідних множин. Звідси і випливає узагальнена рівність з формулювання твердження. $\square$

Отже, питання про супремум множини еквівалентне тому самому питанню для її конфінальної підмножини.

Зауважимо, що незважаючи на простоту, природність та потужність властивості конфінальних підмножин (твердження 3), в явному вигляді ця властивість відсутня в літературі (див., наприклад, [8, § 1; 7, розд. 1, § 2; 1, розд. III, § 1, п. 7 та § 6, п. 5 з зведення результатів]).

На останок додамо, що згідно з принципом двоїстості (див., наприклад, [8, § 1, с. 10]) при переході до оберненого (інверсного) порядку всі твердження для конфінальності переходять в твердження для коініціальності з заміною верхніх конусів на нижні, супремумів на інфімуми. Наведемо відповідні означення та аналоги вищенаведених тверджень.

Твердження 2' (про нижні конуси коініціальних множин). Для довільних множин виконується імплікація $X \sqsubset Y \Rightarrow Y^\nabla \subseteq X^\nabla$. $\square$

Наслідок 2' (про інфімуми коініціальних множин). Для довільних множин за умови існування їхніх інфімумів виконується імплікація $X \sqsubset Y \Rightarrow \inf X \leq \inf Y$. $\square$

Множину Y назвемо коініціальною підмножиною множини X , якщо, по-перше, $Y \subseteq X$ та, по-друге, $X \sqsubset Y$.

Твердження 3' (властивості коініціальних підмножин). Якщо Y – коініціальна підмножина множини X , то нижні конуси цих множин співпадають – $X^\nabla = Y^\nabla$; тобто виконується узагальнена рівність $\inf X = \inf Y$. $\square$

Передпорядки та порядки

Всюди далі будемо вважати, що вихідне відношення $\leq$ є передпорядком. В літературі

добре відома конструкція побудови по передпорядку порядку на відповідній фактор-множині (див. наприклад, [7, гл. I, § 2, с. 37; 8, § 1, с. 7, теорема 3]). Наведемо цю конструкцію розгорнуто. На універсумі введемо наступне відношення $x \sim y \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} x \leq y \ \& \ y \leq x$.

Лема 3 (про еквівалентність, індуковану передпорядком). Відношення $\sim$ є еквівалентністю. $\square$

Доведення. Рефлексивність відношення $\sim$ випливає з рефлексивності відношення $\leq$. $\blacksquare$

Транзитивність відношення $\sim$ випливає з транзитивності відношення $\leq$. Дійсно, нехай $x \sim y$ та $y \sim z$, покажемо, що тоді $x \sim z$. Очевидно, $x \leq y$ та $y \leq z$, тобто $x \leq z$. Аналогічно встановлюється, що $z \leq x$; отже, $x \sim z$. $\blacksquare$

Симетричність відношення $\sim$ випливає з його означення. $\blacksquare \square$

Лема 4 (про устрій суміжних класів еквівалентності, індукованої передпорядком). Якщо x, y довільні елементи одного суміжного класу еквівалентності $\sim$, то виконується $x \leq y$ та $y \leq x$. $\square$

Доведення. Нехай x, y належать одному суміжному класу еквівалентності з представником $z : x, y \in [z]$. Тоді $x \sim z$ та $y \sim z$. Отже $x \leq z$ та $z \leq y$, звідки $x \leq y$. зворотна нерівність $y \leq x$ встановлюється повністю аналогічно. $\square$

На фактор-множині $D/\sim$ (множині всіх суміжних класів по еквівалентності $\sim$) розглянемо наступне бінарне відношення $\eta \ll \theta \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \exists x \exists y (x \in \eta \ \& \ y \in \theta \ \& \ x \leq y)$, де η, θ суміжні класи.

Зауважимо, що в літературі відношення $\ll$ вводиться через представників суміжних класів наступним чином $[x] \ll [y] \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} x \leq y$. Вада цього шляху в тому, що треба показувати коректність цього означення (незалежність від представників), Це робиться з використанням леми 4.

Твердження 4 (про порядок на фактор-множині, індукований передпорядком). Відношення $\ll$ на фактор-множині є $D/\sim$ є порядком. $\square$

Доведення. Рефлексивність відношення $\ll$ випливає з рефлексивності передпорядку $\leq$. $\blacksquare$

Встановимо транзитивність відношення $\ll$. Нехай $\eta \ll \theta$ та $\theta \ll \vartheta$, покажемо, що тоді $\eta \ll \vartheta$. Дійсно з означення відношення $\ll$

впливає існування таких елементів $x \in \eta, y_1 \in \theta, y_2 \in \theta, z \in \theta$, що має місце $x \leq y_1, y_2 \leq z$. Але елементи y_1, y_2 належать одному суміжному класу, значить згідно з лемою 4 виконується нерівність $y_1 \leq y_2$. З транзитивності вихідного передпорядку випливає $x \leq z$ і залишається скористатися означенням відношення $\ll$. ■

Нарешті встановимо антисиметричність відношення $\ll$. Нехай для суміжних класів η, θ виконуються нерівності $\eta \ll \theta$ та $\theta \ll \eta$.

Покажемо, що ці суміжні класи співпадають. Дійсно, від супротивного: нехай вони різні. З означення відношення $\ll$ випливає існування таких елементів $x_1 \in \eta, y_1 \in \theta, y_2 \in \theta, x_2 \in \eta$ що має місце $x_1 \leq y_1, y_2 \leq x_2$. Але елементи x_1, x_2 належать одному суміжному класу і так само для елементів y_1, y_2 . За лемою 4 маємо нерівності $y_1 \leq y_2$ та $x_2 \leq x_1$ (див рис. 1, на якому направлена стрілка йде від меншого елемента до більшого). Отже маємо ланцюжок нерівностей $y_1 \leq y_2 \leq x_2 \leq x_1$, звідки з огляду на транзитивність вихідного передпорядку випливає нерівність $y_1 \leq x_1$. З врахуванням нерівності $x_1 \leq y_1$ маємо, що $x_1 \sim y_1$. Таким чином, ці елементи повинні належати одному суміжному класу; прийшли до суперечності. ■ □

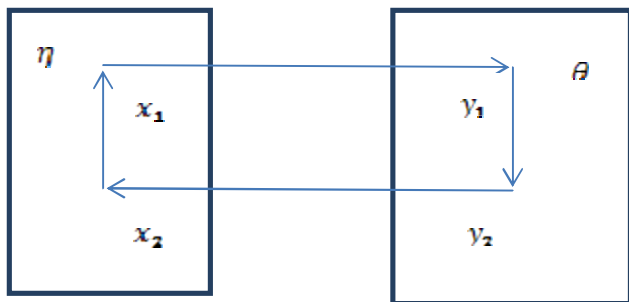


Рисунок 1. До доведення твердження 4
(антисиметричність відношення $\ll$)

В термінах розглянутої фактор-множини наведемо простий, але корисний критерій того, що передпорядок є порядком.

Твердження 5 (критерій передпорядку бути порядком). Передпорядок $\leq$ є порядком тоді і тільки тоді, коли всі суміжні класи фактор-множини $D/\sim$ є синглітонами. □

Доведення. Почнемо з необхідності. Нехай передпорядок є порядком (тобто він є антисиметричним), покажемо від супротивного, що вказана фактор-множина містить тільки синглітони. Отже, нехай існує суміжний клас, що

містить два різних елемента x, y . Тоді за лемою 4 $x \leq y$ та навпаки $y \leq x$. Але це суперечить антисиметричності відношення $\leq$. ■

Достатність встановимо від супротивного. Нехай фактор-множина містить тільки синглітони, але передпорядок не є порядком. Оскільки відношення $\leq$ є рефлексивним та транзитивним, то тоді порушується властивість антисиметричності, тобто існують різні елементи x, y , такі, що $x \leq y$ та навпаки $y \leq x$. Звідси за означенням еквівалентності $x \sim y$, тобто ці елементи належать одному суміжному класу. Значить, знайшовся суміжний клас (наприклад, з представником x), який не є синглітоном. ■ □

Семантика фрази ORDER BY запитів SQL-подібних мов

Семантика фрази ORDER BY запитів SQL-подібних мов була розглянута в монографії [3, підрозділ 3.5, с. 159-165], де було показано, що бінарне відношення, яке уточнює вказану фразу, є в загальному випадку передпорядком, а не порядком на рядках таблиці.

Далі буде наведений критерій того, що відповідне бінарне відношення є не тільки передпорядком, а і порядком (при цьому будемо спиратися на критерій, сформульований у твердженні 5.)

Нагадаймо основні означення з [3] щодо впорядкування рядків таблиць. Нехай t таблиця схеми R , таблиця розглядається як множина рядків s тієї ж схеми R ; в свою чергу рядок схеми R є функцією вигляду $s: R \rightarrow D$, де D універсальна множина, яка вважається лінійно впорядкованою з порядком $\leq$. Нехай $\langle A_1, \dots, A_n \rangle$ – кортеж атрибутів зі схеми R (тобто $A_1, \dots, A_n \in R$). На рядках таблиці вводиться наступне параметризоване за кортежем атрибутів $\langle A_1, \dots, A_n \rangle$ бінарне відношення

$$s \leq s' \stackrel{\text{def}}{\iff} s(A_1) < s'(A_1) \vee (s(A_1) = s'(A_1) \& s(A_2) < s'(A_2)) \vee \dots \vee ((s(A_1) = s'(A_1) \wedge \dots \wedge s(A_{n-1}) = s'(A_{n-1})) \& s(A_n) < s'(A_n)) \vee (s(A_1) = s'(A_1) \& \dots \& s(A_{n-1}) = s'(A_{n-1}) \& s(A_n) \leq s'(A_n)).$$

В наведеному означенні $s(A)$ – значення атрибуту A в рядку s , а $<$ – строга нерівність, тобто $d < d' \stackrel{\text{def}}{\iff} d \leq d' \& d \neq d'$.

Змістовна схема введеного відношення така: спочатку порівнюються значення (в рядках,

що порівнюються) першого атрибуту (A_1); якщо ці значення рівні, то переходимо до порівняння значень другого атрибуту (A_2), якщо значення і першого і другого атрибутів рівні, то переходимо до порівняння значень третього атрибуту і т.д.

Мова по суті йде про лексикографічний добуток згідно з порядком атрибутів кортежу-параметра (див., наприклад, [8, § 2, с. 28]).

Лема 5. Відношення $\preceq$ на рядках таблиці є передпорядком. $\square$

Доведення. Рефлексивність відношення $\preceq$ випливає з його означення та рефлексивності відношення $\leq$ на універсальному домені. $\blacksquare$

Транзитивність відношення $\square$ випливає з його означення та транзитивності відношення $\leq$ на універсальному домені. $\blacksquare$

Отже відношення на рядках таблиці є передпорядком, можна навести прості приклади, коли воно не буде антисиметричним (див. [3, підрозділ 3.5, с. 159-165]). Тому виникає природне питання про пошук критерію, коли цей передпорядок переходить в порядок.

Нам знадобиться наступна лема про устрій суміжних класів рядків для еквівалентності, індукованою передпорядком $\preceq$. Нижче (параметричне) відношення еквівалентності на рядках, індуковане передпорядком, $\sim$ вводиться так само як і для загального випадку:

$$s \sim s' \stackrel{def}{\iff} s \preceq s' \& s' \preceq s.$$

Лема 6 (про устрій суміжних класів еквівалентності $\sim$ на рядках таблиці). Для довільних рядків s, s' виконується еквівалентність

$$s \sim s' \iff s(A_1) = s'(A_1) \& \dots \& s(A_n) = s'(A_n).$$

Іншими словами два рядка належать одному суміжному класу тоді і тільки тоді, коли в цих рядках співпадають значення всіх атрибутів з кортежа-параметра. $\square$

Доведення. Достатність тривіальна, а необхідність доводиться безпосередньо. $\square$

Нижче поняття ключа (точніше кажучи, первинного ключа, *primary key*) таблиці використовується в стандартному розумінні: множина атрибутів X називається ключем таблиці t , якщо виконується наступне твердження

$$\forall s \forall s' (s, s' \in t \& s|X = s'|X \Rightarrow s = s').$$

В цьому означенні $s|X$ – обмеження рядка s (як функції) за множиною атрибутів X .

Змістовно кажучи, множина атрибутів X називається ключем таблиці t , якщо зі співпадіння значень всіх ключових атрибутів в

довільних двох рядках таблиці випливає співпадіння самих рядків (в еквівалентній формі: якщо два довільних різних рядка таблиці розрізняються значенням хоча б одного з ключових атрибутів).

Теорема 2 (критерій передпорядку на рядках $\preceq$ бути порядком). Параметричне відношення передпорядку на рядках буде порядком тоді і тільки тоді, коли множина атрибутів $\{A_1, \dots, A_n\}$ містить ключ. $\square$

Доведення. Достатність. Нехай множина атрибутів $\{A_1, \dots, A_n\}$ містить ключ (в якості підмножини). Тоді, очевидно, що і сама множина атрибутів $\{A_1, \dots, A_n\}$ буде ключем. З леми 6 та означення ключа випливає, що довільний суміжний клас еквівалентності $\sim$ буде одноелементним. Залишається застосувати критерій з твердження 5. $\blacksquare$

Необхідність. Нехай відношення передпорядку $\preceq$ є порядком, тоді, з огляду на критерій твердження 5 кожний суміжний клас фактор множини $t/\sim$ є синглітоном. Але з цього випливає, що множина атрибутів $\{A_1, \dots, A_n\}$ є ключем. $\blacksquare$

Основні результати та висновки

В роботі розглянуті такі загальні теоретико-множинні конструкції: (1) відношення конфінальності та коініціальності на множині елементів, індуковані вихідним відношенням на елементах; (2) відношення порядку на фактор-множині, індуковане відношенням передпорядку на множині. Окрім того розглянута семантика «впорядкування» рядків запитів SQL-подібних мов у вигляді відповідного передпорядку на рядках таблиць (фраза ORDER BY).

Для введених конструкцій встановлені такі основні властивості.

Встановлений критерій того, що відношення конфінальності та коініціальності є передпорядками (наслідки 1, 1').

Показано, що відношення конфінальності та коініціальності, індуковані частковим порядком, є порядками на дискретних множинах (твердження 1, 1').

Показано роль конфінальних (коініціальних) підмножин для знаходження точних верхніх (відповідно нижніх) граней множин (твердження 3, 3').

Знайдений критерій того, щоб передпорядок був порядком в термінах потужностей суміжних класів відповідної фактор-множини (твердження 5).

Знайдений критерій в (термінах первинного ключа таблиці) для того, щоб передпорядок (що

уточнює «впорядкування» рядків таблиці) був порядком (теорема 2).

Список використаних джерел

1. Бурбаки Н. Теория множеств. – М.: Мир, 1965. – 455 с.
2. Архангельский А.В. Канторовская теория множеств. – М.: Издательство Московского университета, 1988. – 112 с.
3. Редько В.Н., Брона Ю.Й., Буй Д.Б., Поляков С.А. Реляційні бази даних: табличні алгебри та SQL-подібні мови. – Київ: Видавничий дім “Академперіодика”, 2001. – 196 с.
4. Буй Д.Б. Теорія програмних алгебр композиційного типу та її застосування: дисертація доктора фізико-математичних наук: 01.05.03 – математичне та програмне забезпечення обчислювальних машин і систем / Буй Дмитро Борисович. – Київ, 2002. – 365 с.
5. Буй Д.Б. Властивості відношення конфінальності та устрій множини часткових функцій / Д.Б. Буй, Н.Д. Кахута // Вісник Київського університету. Сер.: фіз.-мат. науки. – 2006. – Вип. 2. – С. 125-135.
6. Кахута Н.Д. Застосування теоретико-множинних конструкцій повного образу, обмеження, конфінальності та сумісності в табличних базах даних: дисертація кандидата фізико-математичних наук: 01.05.03 – математичне та програмне забезпечення обчислювальних машин і систем / Кахута Надія Дмитрівна. – Київ, 2010. – 116 с.
7. Общая алгебра. Т. 1 / О.В. Мельников, В.Н. Ремесленников, В.А. Романов и др. Под общ. ред. Л.А. Скорнякова. – Москва: Наука, 1990. – 592 с.
8. Скорняков Л.А. Элементы теории структур / Л.А. Скорняков. – Москва: Наука, 1982. – 158 с.
9. Редько В.Н. Реляционные алгебры: операции проекции и соединения / В.Н. Редько, Ю.И. Брона, Д.Б. Буй // Кибернетика и системный анализ. – 1997. – №4. – С. 89-100.
10. Катленд Н. Вычислимость. Введение в теорию рекурсивных функций / Н. Катленд. – М.: Мир, 1983. – 256 с.

References

1. Burbaki, N. (1956, 1957, 1958, 1960), *Theorie des ensembles*, Paris, Hermann.
2. Arkhanhel'skiyy, A.V. (1988), *Kantorovskaya teoryya mnozhestv* [Cantor set theory], Yzdatel'stvo Moskovskoho unyversyteta, Moscow, Russia.
3. Red'ko, V.N., Brona, Yu.Y., Buy, D.B. and Polyakov, S.A. (2001), *Relyatsiyni bazy danykh: tablychni alhebry ta SQL-podibni movy* [Relational databases: table algebra and SQL-like languages], Vydavnychyy dim “Akademperiodyka”, Kiev, Ukraine.
4. Buy, D.B. (2002), Theory of composite type program algebras and its application, Ds. Thesis, Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kiev, Ukraine.
5. Buy, D.B. and Kakhuta, N.D. (2006), “Properties of confinality relation and structure of the set of partial functions”, *Visnyk Kyivs'koho universytetu. Ser. fiz.-mat. Nauky*, vol. 2, pp. 125-135.
6. Kakhuta, N.D. (2010), Applications of set-theoretic constructions of whole image, restriction, confinality and consistency in table databases, Ph.D. Thesis, Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kiev, Ukraine.
7. Mel'nykov, O.V., Remeslennykov, V.N., Romanov, V.A. and other (1990), *Obshchaya alhebra* [Algebra], in Skorniyakov, L.A. (red.), T. 1, Nauka, Moscow, Russia.
8. Skorniyakov, L.A. (1982), *Elementyi teorii struktur* [Elements of the theory of structures], Nauka, Moscow, Russia.
9. Red'ko, V.N., Brona, Yu.Y. and Buy, D.B. (1997), “Relational Algebra: projection and join operations”, *Kybernetyka y systemnyi analyz*, no. 4, pp. 89-100.
10. Cutland, N. (1980), *Computability. An introduction to recursive function theory*, Cambridge University Press, London, UK.

Надійшла до редколегії 09.01.15

УДК 004.423

Буй Д. Б., д.ф.-м.н., проф.,
Колегаєв О. М., аспірант.

Формальні методи розробки програмного забезпечення Z, B, VDM: порівняльний аналіз

Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 03187, м. Київ, пр-т.
Глушкова 4д
e-mail: buy@unicyb.kiev.ua
e-mail: alexkolegaev@mail.ru

D. B. Buy, the doctor of physical and mathematical
sciences, the professor,
O. M. Kolegaev, postgraduate.

Formal methods in software development Z, B and VDM: comparison analysis

Taras Shevchenko National University of Kyiv,
03187, Kyiv, Glushkova st., 4d,
e-mail: buy@unicyb.kiev.ua
e-mail: alexkolegaev@mail.ru

У статті представлений порівняльний аналіз найбільш поширених формальних методів розробки програмного забезпечення: Z, B методу та Vienna Development Method. Розглянуті основні властивості зазначених формальних методів, вказані їх загальні характеристики. Проведений порівняльний аналіз. Мета порівняльного аналізу: визначити можливості вищевказаних формальних методів для створення абстрактних моделей та відтранслявання їх до програмного коду, що задовольняє умовам узгодженості первинної абстрактної моделі. Також запропоновані можливі формули переходу між абстрактними моделями, що створені за допомогою нотації B та VDM. На основі розглянутих формул зроблений висновок щодо взаємозалежності даних методів.

Ключові слова: формальні методи розробки програм, порівняльний аналіз, Z нотація, B метод, VDM.

This paper contains comparative analysis of the most common formal methods for software development: Z, B method and Vienna Development Method. Basic properties of these formal methods are considered, their general characteristics are given. This paper contains comparative analysis of VDM, B and Z methods. The purpose of the comparative analysis: identify opportunities of these formal methods for creation abstract models and translation them into code that satisfies the conditions of the consistency for abstract models. Differences between these methods are placed in three tables (general comparative, OOP support and programming tools for development process) Also some formulas for transition between abstract models created with the notation B and VDM are proposed. On the basis of these formulas conclusion about interdependence of formal methods are given.

Key Words: formal methods in software development, comparison analysis, Z notation, B method, VDM.

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. А.В. Анісімов

Вступ

У відповідності до [1] формальні методи можна визначити як такі, що використовуються в розробці комп'ютерних програмних систем, та базуються на математичних методах, зокрема, численні предикатів та теорії множин. Формальні методи застосовуються для розробки програмних систем: від математично строгої моделі майбутньої програми до власне програмного коду.

Відповідно до класифікації Джона Рашбі (John Rushby) з точки зору застосування формалізації методи створення програм можна умовно розділити на чотири групи або рівня: з

нульового по третій. Третій, найвищий рівень, передбачає використання повністю формалізованих мов специфікацій і дозволяє перевіряти всі програмні конструкції створеної абстрактної моделі засобами математичної логіки. Усі докази на цьому рівні можуть бути проведені або перевірені автоматично за допомогою спеціальних програмних засобів. В статті розглянуто формальні методи, що належать саме до другого та третього рівнів.

Проходячи декілька етапів уточнення (refinement) абстрактна модель зазначених методів зберігає свою коректність та узгодженість (consistency). Наприклад, B

метод, описаний у [2], передбачає декілька стадій переходу від абстрактної моделі до програмної реалізації, наведених на рис.1.

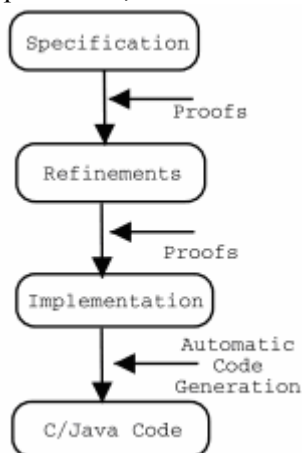


Рис. 1. Стадії переходу від абстрактної моделі до програмного коду

Слід зазначити, що використання формальних методів не гарантує оптимальності (по певному критерію) програмного коду або відсутності помилок в ньому [3]. Коректність визначається як відповідність обмежень (в іншій термінології – аксіом), заданих для початкової (абстрактної) моделі та програмної реалізації. Як зазначав Е. Хехнер в [4] саме в цьому полягає одна з складнощів для застосування формальних методів у розробці прикладного програмного забезпечення.

Вибір для порівняння саме Z, B та VDM обумовлений можливостями їх використання в індустрії (проекти FeliCa Networks та TradeOne в Японії, Automatic Train Protection у Франції тощо).

Загальні характеристики Z, B, VDM

Z метод

Z нотація (Z notation) буда вперше запропонована Абріалем [5], пізніше доповнена Programming Research Group [6]. Основна структура, що використовується для створення Z-специфікацій, є схемою [7], яка складається з декларативної частини (об'явлення змінних) та предикативної частини (накладання обмежень на зазначені змінні). Зв'язок між іменами та типами змінних, вказаних в декларативній частині, задається за допомогою сигнатури. Наприклад [8]:

$books : P \text{ Book}$

$person : P \text{ People}$

$lent_to : P(\text{Book} \times \text{Person})$

Загалом поняття схеми потрібно для визначення множини станів абстрактної моделі, перехід між якими здійснюється за допомогою операцій, що задаються як умови між початковим і кінцевими станами.

Одним з суттєвих недоліків Z нотації є складність її застосування в усталених програмних конструкціях подібно до мови охоронюваних команд Дейкстри [9]. Окрім цього, Z не містить в явному вигляді обробки виключень та, власне кажучи, нотація Z більше спрямована на розуміння моделі людиною, аніж на її програмну реалізацію. Зазначені недоліки були усунені Абріалем при розробці концепції B методу.

B метод

B метод є модельно-орієнтованим формальним методом, заснованим на численні предикатів та типізований теорії множин, застосування і характеристики якого повністю наведені Абріалем в [2].

Семантика B визначається мовою GSL (Generalized Substitution Language). За допомогою цієї мови визначаються основні елементи мови машинних конструкцій AMN (Abstract Machine Notation), яка використовується для створення абстрактних B-моделей. Для кожної конструкції GSL Абріал вказує найслабшу передумову (користуючись термінологією Дейкстри). Наприклад, для конструкції $Q|S$, що виконує оператор S у разі істинності предиката Q (аналог охоронюваної команди у Дейкстри), має місце наступна найслабша передумова:

$$[Q|S]P = Q \wedge [S]P.$$

Зазначені абстрактні моделі, для запису яких використовується мова AMN, складаються з декількох частин, узгоджених між собою. Наприклад, початкові значення змінних, які задаються в INITIALIZATION, мають задовольняти обмеження, вказані в CONSTRAINTS (змінні, що передаються до моделі) та PROPERTIES (умови для констант).

Центральною ідеєю класичного B методу є концепція операції, виконання якої можливе лише за умови істинності обмежень абстрактної моделі та передумов самої операції. Розвиток цієї концепції виявив себе у відгалуженні Event-B [10].

Event-B, як і класичний B метод, призначений для створення та аналізу абстрактних моделей. Однак класичний і Event методи були розроблені для різних цілей: B метод призначений для створення коректних програмних систем, у той час як призначенням Event-B є моделювання повних систем (програмні системи разом з управлінням апаратною частиною). Event-B модель складається з контексту і машин. Контекст включає в себе статичну частину моделі: константи і аксіоми (описують властивості згаданих констант). Машини оперують динамічною частиною моделі, змінюючи її стан, що визначається за допомогою змінних. Змінні, як і константи, зіставляються з такими математичними об'єктами як множини, бінарні відношення, функції, числа і т.д. Вони обмежені умовами, що задаються в пункті INVARIANTS. Ці умови повинні бути дотримані для всіх наборів значень, які можуть набуватись змінними. Зміни стану моделі задаються переліком подій (event), кожна з яких складається з охорони і дії.

Застосування інваріантів, що склеюють (glueing invariants) [11], дозволяє переносити обмеження абстрактних моделей на їх деталізації. Кінцевою метою розробки постає створення доказаної моделі (proved model) [11], яка може бути втілена за допомогою обраної мови програмування (C, Java).

VDM

Vienna Development Method (VDM) [12, 13] є попередником як Z, так і B методів. У відповідності до [13] VDM визначається як сукупність технологій для моделювання та розробки програмних систем. Є декілька підвидів VDM, як, наприклад, VDM-SL або VDM++ (об'єктно-орієнтоване розширення VDM).

Функції VDM можуть бути визначені двома способами: як явним, так і неявним. Наприклад, явне визначення функції, яка кожному числу ставить у відповідність його абсолютне значення, матиме вигляд:

$$\text{abs} : Z \rightarrow N$$

$$\text{abs}(i) \Delta \text{if } i < 0 \text{ then } -i \text{ else } i$$

За допомогою перед- та післяумов можна задати неявну функцію. Наприклад, функція для знаходження максимального значення з масиву, елементами якого є натуральні числа:

$$\text{maxs}(s : N - \text{set}) r : N$$

$$\text{pre } s \neq \{ \}$$

$$\text{post } r \in s \wedge \forall i \in s. i \leq r$$

В перевірці істинності перед- та післяумов і полягає несуперечливість абстрактної моделі. Аналогічно до B методу визначене поняття уточнення (reification, [13, p. 179]), аналогом якої в B методі є поняття refinement.

Таблиця 1. Порівняння Z, B та VDM

Ознака порівняння	Z	B	VDM
Стиль формального методу	Модельно-орієнтований	Модельно-орієнтований	Модельно-орієнтований
Синтаксис	Використання замкнених структур – схем (schema), які включають до себе перелік змінних, предикатів, та операцій	Використання абстрактних машин, які записуються за допомогою ключових слів (PRE, THEN, INVARIANT тощо), що включаються до мови AMN	Використання ключових слів (pre, if, then тощо), які застосовуються для запису функцій (явно або неявно), перед- та післяумов і інваріантів
Визначення множини станів (перед і після операції)	Перед виконанням операції множина станів визначається набором вхідних (undecorated) змінних, після виконання операції – вихідних (primed) змінних [16, p. 98]		Перед виконанням: підключені (hooked) змінні; після виконання відключені (unhooked) змінні. Відключені змінні мають задовольняти післяумові [15]

Ідентифікація вхідних та вихідних даних	Змінні вхідних даних містять символ «?» наприкінці імені. Змінні вихідних даних містять символ «!» наприкінці імені.	Вхідні та вихідні параметри визначаються в заголовку операції за наступним синтаксисом: $Out < - - Name(Input),$ де $Name$ позначає ім'я операції, а Out та $Input$ – набори вихідних та вхідних даних	
Генерація програмного коду	Абстрактна модель не може бути автоматично переведена до програмного коду. Уточнення абстрактної моделі відбувається в напівавтоматичному режимі.		

Таблиця 2. Підтримка ООП

Z	B	VDM
Object Z підтримує поліморфізм, наслідування, інкапсуляцію [16]		VDM++ Підтримує поліморфізм, наслідування, інкапсуляцію [17]

Інструментарій для розробки програмних моделей:

Таблиця 3. Інструментарій розробки

Z	B	VDM
Z Word; Z/Eves Fastest	AteluerB ProB Rodin	SpecBox Overture VDM tools

Трансляція конструкцій VDM в B

Слід зазначити, що незважаючи на синтаксичні відмінності, абстрактні моделі, записані за допомогою одного з розглянутих вище формальних методів, можуть бути записані за допомогою конструкцій іншого методу. Для прикладу розглянемо перехід від VDM до B нотації. Зразок такого переходу для прикладу мережевого протоколу наведений в [18]. Розглянемо деякі аспекти такого переходу, для чого використаємо функцію наступного виду:

$TranslationFunction : [VDM_Term] \rightarrow AMN_Term$

Базовими типами VDM є наступні.

Базовий тип = 'nat' | 'nat1' | 'int' | 'rat' | 'real' | 'char' | 'bool' | 'token'

Зазначені типи являють собою множини, наприклад, тип $nat1$ позначає множину натуральних чисел, а тип nat доповнює тип $nat1$ числом 0.

Базовим типам VDM можна поставити у відповідність наступні типи даних B:

$Type[nat] \rightarrow N;$

$Type[nat1] \rightarrow N_1;$

$Type[char] \rightarrow STRING.$

Звісно, що наявна семантична різниця між типами в VDM та B. Зокрема, роль типів B методу відіграють множини, а всі множини в B скінченні. Типи $bool$ та int , наявні в VDM, потребують об'явлення в бібліотеці машин:

$Type[bool] \rightarrow INCLUDE Bool_Type$

$Type[int] \rightarrow INCLUDE Int_Type$

Типи rat та $real$ можуть бути представлені аналогічним чином. Синоніми, на зразок $Time = N$, можуть бути представлені за допомогою констант. Перерахувні типи в VDM визначаються наступним чином:

$type\ definition = identifier, '=', name, \{ | name \},$

де кожне ім'я є унікальним. Їх можна представити за допомогою множин-констант:

$TypeDef[name=t_1 | \dots | t_k] \rightarrow$

$MACHINE\ name_type'$

SETS

$t_1_set' = \{t_1\},$

...

$t_n_set' = \{t_n\},$

$name_set'$

PROPERTIES

$name_set' = t_1_set' \cup \dots \cup t_n_set' \wedge t_1 \neq t_2 \dots t_{n-1} \neq t_n$

END

Наприклад, перерахувний тип $Result = YES | NO$ буде відтрансльований наступним чином:

MACHINE Result_type

SETS

$Yes_set = \{YES\}, No_set = \{NO\}, Result_set$

PROPERTIES

$Result_set = Yes_set \cup No_set \wedge Yes \neq No$

END

Приклад трансляції конкретної абстрактної машини, створеної за допомогою VDM, в конструкції В методу вказана в [18].

Так як Z та В нотації мають одного розробника, то перехід між ними більш спрощений. Приклад такого переходу на основі B-ToolKit вказаний в [19].

Головні результати та висновки

Зроблений порівняльний аналіз дозволяє стверджувати, що формальні методи мають єдину структуру абстрактних моделей, що

Список використаних джерел

1. Morris D. Concise encyclopedia of software engineering / D. Morris, B. Tamm. – Pergamon Press Ltd, 1993. – 400 p.
2. Abrial J.-R. The B Book: Assigning Programs to Meanings / J.-R. Abrial. – Cambridge University Press, 1996. – 816 p.
3. Hall A. Seven Myths of Formal Methods / A. Hall // IEEE Software. – 1990. – Vol. 5. – P. 11-19.
4. Hehner E. What's wrong with formal programming methods? / Eric C. R. Hehner // Advances in Computing and Information. – 1991. – Vol. 497. – P. 1-23.
5. Abrial J.-R. Data Semantics / J.-R. Abrial. – IFIP Working Conference Data Base Management – 1974. – P. 1-60.
6. Spivey J. The Z notation: a reference manual / J. M. Spivey. – Prentice Hall, 1992. – 150 p.
7. McKeag R. On the Construction of Programs / R. M. McKeag, A.M. MacNaghten. – Cambridge University Press, 1980. – 426 p.
8. Wordsworth J. Software Development With Z: A Practical Approach to Formal Methods in Software Engineering / J. Wordsworth – Addison-Wesley Pub, 1992. – 336 p.

дозволяє здійснювати взаємні трансляції специфікацій. З трьох методів найбільші можливості для індустріального використання має В-метод (зокрема його відгалуження Event-B), тому розглянута можливість трансляції абстрактних моделей в AMN. З розглянутого впливає логічний зв'язок методів, представлений на рис.2.

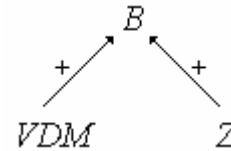


Рис. 2. Діаграма трансляцій специфікацій

Подальша робота полягає в уточненні базових понять В методу на основі композиційного підходу.

References

1. MORRIS, D. (1993) Concise encyclopedia of software engineering. Pergamon Press Ltd.
2. ABRIAL, J. (1996) The B Book: Assigning Programs to Meanings. Cambridge University Press.
3. HALL, A. (1990) Seven Myths of Formal Methods. *IEEE Software*. 5. pp. 11-19.
4. HEHNER, E. (1991) What's wrong with formal programming methods? *Advances in Computing and Information*. 497. pp. 1-23.
5. ABRIAL, J. (1974) Data Semantics. IFIP Working Conference Data Base Management. pp.1-60.
6. SPIVEY, J. (1992) The Z notation: a reference manual. Prentice Hall.
7. MCKEAG, R. (1980) On the Construction of Programs. Cambridge University Press.
8. WORDSWORTH, J. (1992) Software Development With Z: A Practical Approach to Formal Methods in Software Engineering. Addison-Wesley Pub.
9. DIJKSTRA, E. (1976) A Discipline of Programming. Prentice-Hall.
10. ABRIAL, J. (2010) Modeling in Event-B System and Software Engineering. Cambridge University Press.
11. CANSELL, D. (2003) Foundations of the B method. *Computing and Informatics*. 22. pp.221-256.

12. Дейкстра Э. Дисциплина программирования: [пер. с англ.] / Э. Дейкстра. – М.: Мир, 1978. – 274 с.
10. Abrial J.-R. Modeling in Event-B System and Software Engineering / J.-R. Abrial. – Cambridge University Press, 2010. – 612 p.
11. Cansel D./ Foundations of the B method / D. Cansell, M. Cansell // Computing and Informatics – 2003. – Vol. 22. – P. 221-256.
12. Оллонгрэн А. Определения языков программирования интерпретирующими автоматами : [пер. с англ.] / А. Оллонгрэн. – М.: Мир, 1977. – 289 с.
13. Jones C. Systematic Software Development Using VDM / C. Jones. – Prentice Hall, 1990. – 350 p.
14. Fitzgerald J. The Typed Logic of Partial Functions and the Vienna Development Method / J. Fitzgerald // Logics of Specification Languages. – 2008. – P. 453-487.
15. Stolen K. A method for the development of totally correct shared-state parallel programs / K. Stolen // 2nd International Conference on Concurrency Theory. – 1991. – Vol. 527. – P. 510-525.
16. Graeme S. The Object-Z Specification Language / S. Graeme. – Springer US. – 2000. – 146 p.
17. Durr E. VDM++, a formal specification language for object-oriented designs / E. Durr, J. Katwijk // Computer Systems and Software Engineering. – 1992. – P. 214-219.
18. Bicarregui J. Invariants, frames and postconditions: a comparison of the VDM and B notations / J. Bicarregui, B. Ritchie // Lecture Notes in Computer Science. – 2005. – Vol. 670. – P. 168-182.
19. Hoare J. Applying the B technologies to CICS / J. Hoare, Jeremy Dick, David Neilson, Ib Sorensen // Industrial benefit and advances in formal methods. – 1996. P. 74-84.
12. OLLONGREN, A (1974) Definition of programming languages by interpreting automata. Academic Press.
13. JONES, C. (1990) Systematic Software Development Using Vdm. Prentice Hall.
14. FITZGERALD, J. (2008) The Typed Logic of Partial Functions and the Vienna Development Method. Logics of Specification Languages. pp.453-487.
15. STOLEN, K. (1991) A method for the development of totally correct shared-state parallel programs. 2nd International Conference on Concurrency Theory. 527. pp.510-525.
16. GRAEME, S. (2000) The Object-Z Specification Language. Springer US.
17. 15 DURR, E. (1992) VDM++, a formal specification language for object-oriented designs. Computer Systems and Software Engineering. pp.214-219
18. BICARREGUI, J. (2005) Invariants, frames and postconditions: a comparison of the VDM and B notations. Lecture Notes in Computer Science. 670. pp.168-182
19. HOARE, J. (1996) Applying the B technologies to CICS. Industrial benefit and advances in formal methods. pp.74-84.

Надійшла до редакції 14.12.2015

УДК 519.7

Галкін О. А., к.ф.-м.н., асистент

**Дослідження непараметричних
класифікаторів даних на основі
концепції глибинних околів**

Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, пр-т.
Академіка Глушкова 4д,
e-mail: galkin.o.a@gmail.com

O. A. Galkin, candidate of physical and mathematical
sciences, assistant

**Research of nonparametric data classifiers
based on the depth neighborhoods concept**

Taras Shevchenko National University of Kyiv,
03680, Kyiv, Glushkova st., 4d,
e-mail: galkin.o.a@gmail.com

Стаття присвячена дослідженню непараметричних глибинних класифікаторів на основі концепції глибинних околів. Розроблено процедуру симетризації функцій глибини на основі методу k-найближчих сусідів, що забезпечує центрально-зовнішнє впорядкування для визначення найближчих сусідів. Побудова симетризації асимптотично гарантує унікальність найглибшої точки, що вирішує проблему опуклої області з нескінченною множиною найглибших точок. Отримані глибинні оцінки k_m найближчих сусідів є ефективними завдяки використанню несферичних та нееліпсоїдальних околів, форма яких визначається локальною геометрією вибірки даних.

Ключові слова: непараметричний класифікатор, симетризація даних, функція глибини

The article is devoted to research nonparametric depth classifiers based on the depth neighborhoods concept. The symmetrization procedure of depth functions is developed on the basis of k-nearest neighbors, which provides centrally external ordering to determine the nearest neighbors. Construction of symmetrization asymptotically guarantees uniqueness of the deepest point, which solves the problem of a convex domain with an infinite set of the deepest points. The resulting depth based estimates of k_m nearest neighbors are effective through the use of non-spherical and non-ellipsoidal neighborhoods, whose form is determined by the local geometry of the sample data. Data depth in the proposed approach is considered relatively empirical distribution associated with sample obtained by adding to the initial data elements of their reflections. Consistency properties obtained in the classification problem can also be applied to the regression problems and density estimates. It is established that the use of spherical namely ellipsoid neighborhoods in density estimates problems can lead to fundamental finite-sample properties. Using of depth neighborhoods is of interest in regression problems where conditional mean of function is estimated on the basis of mutually independent groups of random vector.

Key Words: nonparametric classifier, data symmetrization, depth function

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Анісімов А.В.

Вступ

В рамках дослідження статистичних функцій глибини важливу роль відіграє поняття області глибини (порядку φ), що визначається як множина $C_\varphi(P) = \{z \in R^r : E(z, P) \geq \varphi\}$ для $\forall \varphi > 0$. Оскільки області глибини є вкладеними, їх індексація проводиться за ймовірнісною схемою, тобто для $\forall \gamma \in [0, 1)$ величина $R^\gamma(P)$ вказує на

найменше значення $R_\varphi(P)$, що має ймовірність $\geq \gamma$. Тому, для глибинних рівнів та ймовірнісного наповнення використовуються верхні та нижні індекси для областей глибини. Вибіркові форми верхніх глибин можна отримати шляхом заміни P на відповідний емпіричний розподіл $P^{(m)}$ для r -вимірних даних $Z_1, \dots, Z_m$. Можна впорядкувати Z_i таким чином, що

$$E(Z_{(1)}, P^{(m)}) \geq E(Z_{(2)}, P^{(m)}) \geq \dots \geq E(Z_{(m)}, P^{(m)}), \quad (1)$$

оскільки вибіркова форма глибини забезпечує центрально-зовнішнє впорядкування елементів даних відносно відповідної найглибшої точки $\bar{\lambda}^{(m)}$. Тому, у глибинному сенсі $Z_{(1)}$ є елементом даних, найближчим до $\bar{\lambda}^{(m)}$, $Z_{(2)}$ - другим елементом даних, найближчим до $\bar{\lambda}^{(m)}$, ..., а $Z_{(m)}$ - елементом даних, найвіддаленішим від $\bar{\lambda}^{(m)}$.

Використовуючи впорядкування (1), статистична функція глибини може застосовуватися для визначення сусідів найглибшої точки $\bar{\lambda}^{(m)}$. Однак, для реалізації класифікатора на основі методу k -найближчих сусідів необхідно визначити сусідів довільної точки $z \in R^r$.

У даній роботі запропоновано підхід, де глибина даних розглядається відносно емпіричного розподілу $P_Z^{(m)}$, що пов'язаний з вибіркою, отриманою шляхом додавання до початкових елементів даних $Z_1, Z_2, \dots, Z_m$ їх відображень $2z - Z_1, \dots, 2z - Z_m$ відносно z . Зазначимо, що z є асимптотично унікальною найглибшою точкою відносно $P_Z^{(m)}$. Тому, відповідна побудова симетризації призводить до z -зовнішнього впорядкування такої форми:

$$E(Z_{Z(1)}, P_Z^{(m)}) \geq E(Z_{Z(2)}, P_Z^{(m)}) \geq \dots \geq E(Z_{Z(m)}, P_Z^{(m)}), \quad (2)$$

елементи даних якого не є впорядкованими, а використовуються лише для визначення порядку.

Отже, глибинні околиці, тобто вибірккові області глибини $C_{Z,\varphi}^{(m)} = C_\varphi(P_Z^{(m)})$ відіграють важливу роль, де $C_Z^{\gamma(m)}$ означає найменшу область глибини $C_{Z,\varphi}^{(m)}$, що містить щонайменше частину γ елементів даних $Z_1, Z_2, \dots, Z_m$. Тому, для $\gamma = k/m$, $C_Z^{\gamma(m)}$ є найменшим глибинним околom, що містить k всіх Z_i .

Виклад основного матеріалу. Ідея запропонованого підходу полягає в побудові глибинних класифікаторів на основі методу k -найближчих сусідів шляхом заміни евклідових околів на відповідно визначені глибинні околиці. Тобто, запропонований підхід k -найближчих сусідів буде класифікувати елемент z в множину 1 тоді і тільки тоді, коли множина 1 містить більшу кількість елементів даних, ніж множина 2 в найменшому глибинному околi z , що містить k елементів даних - тобто, в $C_Z^{\gamma(m)}$, де $\gamma = k/m$.

Отже, запропонований глибинний класифікатор визначається, як

$$\bar{n}_E^{(m)}(z) = \Lambda \left[\sum_{i=1}^m \Lambda[X_i=1] D_i^{\gamma(m)}(z) > \sum_{i=1}^m \Lambda[X_i=0] D_i^{\gamma(m)}(z) \right], \quad (3)$$

$$\text{де } D_i^{\gamma(m)}(z) = \frac{1}{N_z^{\gamma(m)}} \Lambda[Z_i \in C_z^{\gamma(m)}],$$

а $N_z^{\gamma(m)} = \sum_{l=1}^m \Lambda[Z_l \in C_z^{\gamma(m)}]$ визначає число елементів даних в глибинному околi $C_z^{\gamma(m)}$. Зазначимо, що запропонований класифікатор (3) отриманий з використанням глибинної оцінки $\bar{\theta}_E^{(m)}(z)$ умовного математичного сподівання $\theta(z)$, оскільки

$$\bar{n}_E^{(m)}(z) = \Lambda[\bar{\theta}_E^{(m)}(z) > 1/2], \quad (4)$$

$$\text{де } \bar{\theta}_E^{(m)}(z) = \sum_{i=1}^m \Lambda[X_i=1] D_i^{\gamma(m)}(z).$$

Відзначимо, що в одновимірному випадку $\bar{n}_E^{(m)}$ зводиться до евклідового класифікатора k -найближчих сусідів незалежно від статистичної функції глибини E . Крім того, запропонований класифікатор є афінно-інваріантним, тобто, якщо $Z_1, \dots, Z_m$ та z підлягають загальній афінній трансформації, результат класифікації залишиться незмінним [1]. У даному випадку метод визначення афінно-інваріантного класифікатора k -найближчих сусідів полягає у застосуванні класичного методу k -найближчих сусідів на нормалізованих даних $\bar{\Xi}^{-1/2} Z_i$, $i=1, \dots, m$. Для $\forall$ оберненої $r \times r$ матриці G та $\forall r$ -вектора v , оцінка $\bar{\Xi}$ є афінно-інваріантною оцінкою, що має такий вигляд:

$$\bar{\Xi}(GZ_1 + v, \dots, GZ_m + v) \propto G \bar{\Xi}(Z_1, \dots, Z_m) G'. \quad (5)$$

Такий трансформаційний підхід призводить до околів, що не використовують геометрію розподілу в околi точки z та є еліпсоїдами з z -незалежною орієнтацією та формою.

Запропонований глибинний класифікатор на основі методу k -найближчих сусідів є узгодженим при відповідних умовах. Для цього статистична глибинна функція W повинна задовольняти таким властивостям:

(а) Властивість унікальної максимізації в центрі симетрії. Тобто, $E(\bar{\lambda}, P) > E(z, P)$ для всіх $z \neq \bar{\lambda}$, якщо P є симетричним відносно $\bar{\lambda}$ та має щільність, що є додатною в $\bar{\lambda}$.

(б) Властивість узгодженості. Тобто, величина $\sup_{z \in V} |E(z, P^{(m)}) - E(z, P)| = o(1)$ майже напевно при $m \rightarrow \infty$ для $\forall$ обмеженої r -вимірної борелівської множини V . У даному випадку $P^{(m)}$ є емпіричним розподілом, пов'язаним з m випадковими векторами, що є незалежними однаково розподіленими випадковими величинами P .

(в) Властивість неперервності. Тобто, $z \mapsto E(z, P)$ є неперервним в околі $\hat{\lambda}$, якщо розподіл P є симетричним відносно $\hat{\lambda}$ та має щільність, що є додатною в $\hat{\lambda}$.

Теорема 1. Нехай P є ймовірнісною мірою, симетричною в околі $\hat{\lambda}$ та має щільність, що є додатною в $\hat{\lambda}$. Також припустимо, що функція глибини E задовольняє властивостям максимального значення в центрі, монотонності відносно найглибшої точки, неперервності та унікальної максимізації в центрі симетрії. Тоді, для $\forall \varphi < \varphi_*$, $\exists \rho > 0$, що $V_{\hat{\lambda}}(\rho) \subset C_{\varphi}(P)$ та для $\forall \tau > 0$, $\exists \varphi < \varphi_* = \max_{z \in \mathbb{R}^r} E(z, P)$, що

$$C_{\varphi}(P) \subset V_{\hat{\lambda}}(\tau) := \{z \in \mathbb{R}^r : \|z - \hat{\lambda}\| \leq \tau\};$$

Доведення. Властивість унікальної максимізації в центрі симетрії означає, що для $\forall \varphi \in [\varphi_a, \varphi_*)$ відображення d_{φ} приймає значення в $\mathbb{R}_0^+$. Таким чином, $\exists t_0(\varphi) \in W^{r-1}$, що $d_{\varphi}(t) \geq d_{\varphi}(t_0(\varphi)) = \rho_{\varphi} > 0$. Тобто, для $\forall \varphi \in [\varphi_a, \varphi_*)$, ми маємо $V_{\hat{\lambda}}(\rho_{\varphi}) \subset C_{\varphi}(P)$, що доводить результат для цих значень φ . Тому, як слідує з властивості монотонності відносно найглибшої точки, вкладення $C_{\varphi}(P)$ визначає результат для $\forall \varphi < \varphi_*$.

Далі зафіксуємо таке $a > 0$, що $z \mapsto E(z, P)$ є неперервною функцією на $V_{\hat{\lambda}}(a)$ та зауважимо, що існування φ_* слідує з властивості максимального значення в центрі, а існування a гарантується властивістю неперервності [2,3]. Остання властивість означає, що $z \mapsto E(z, P)$ досягає мінімуму в $V_{\hat{\lambda}}(a)$, а властивість унікальної максимізації в центрі симетрії припускає, що це мінімальне значення $\varphi_a < \varphi_*$. Використовуючи властивість неперервності, ми отримуємо, що для кожного $\forall \varphi \in [\varphi_a, \varphi_*]$,

$$d_{\varphi} : W^{r-1} \rightarrow \mathbb{R}^+ \quad t \mapsto \sup\{d \in \mathbb{R}^+ : \hat{\lambda} + dt \in C_{\varphi}(P)\} \quad (6)$$

є неперервною функцією, що поточно сходить до $d_{\varphi_*}(t) \equiv 0$ при $\varphi \rightarrow \varphi_*$. Дана збіжність є рівномірною, тобто $\sup_{t \in W^{r-1}} |d_{\varphi}(t)| = o(1)$ при $\varphi \rightarrow \varphi_*$, оскільки W^{r-1} є компактом. Теорему доведено.

Теорема 2. Нехай P є ймовірнісною мірою, симетричною в околі $\hat{\lambda}$ та має щільність, що є додатною в $\hat{\lambda}$. Також припустимо, що функція глибини E задовольняє властивостям максимального значення в центрі, монотонності відносно найглибшої точки, неперервності, узгодженості та унікальної максимізації в центрі симетрії. Нехай $N_{\hat{\lambda}}^{\gamma_m(m)}$ є кількістю глибинних найближчих сусідів в $C_{\hat{\lambda}}^{\gamma_m}(P^{(m)})$, де $\gamma_m = k_m/m$ ґрунтується на послідовності k_m , $P^{(m)}$ означає емпіричний розподіл $Z_1, \dots, Z_m$, де $Z_1, \dots, Z_m$ є незалежними та однаково розподіленими випадковими величинами P , а $Z_{\hat{\lambda},(i)}$ - i -й глибинний найближчий сусід $\hat{\lambda}$. Тоді, для $\forall \tau > 0$, $\exists m = m(\tau)$, що $\sum_{i=1}^{N_{\hat{\lambda}}^{\gamma_m(m)}} \Lambda[\|Z_{\hat{\lambda},(i)} - \hat{\lambda}\| > \tau] = 0$ майже напевно для $\forall m \geq m(\tau)$.

Доведення. Як слідує з теореми 1, $\exists \varphi < \varphi_*$, що $C_{\varphi}(P) \subset V_{\hat{\lambda}}(\tau)$ для фіксованого $\tau > 0$. Також візьмемо такі $\bar{\varphi}$ та $\mu > 0$ що $\varphi < \bar{\varphi} - \mu < \bar{\varphi} + \mu < \varphi_*$. Оскільки $P_{\hat{\lambda}}^{(m)} \rightarrow P_{\hat{\lambda}} = P$ при $m \rightarrow \infty$, де $P_{\hat{\lambda}}^{(m)}$ та $P_{\hat{\lambda}}$ є $\hat{\lambda}$ -симетризованими версіями $P^{(m)}$ та P , відповідно, можна стверджувати, що $\exists$ таке ціле m_0 , що

$$C_{\bar{\varphi}+\mu}(P) \subset C_{\bar{\varphi}}(P_{\hat{\lambda}}^{(m)}) \subset C_{\bar{\varphi}-\mu}(P) \subset C_{\varphi}(P) \quad (7)$$

майже напевно для всіх $\forall m \geq m_0$.

Крім того, $\exists \rho > 0$, що $V_{\hat{\lambda}}(\rho) \subset C_{\bar{\varphi}+\mu}(P)$, тому для $\forall m \geq m_0$, має місце таке вкладення:

$$V_{\hat{\lambda}}(\rho) \subset C_{\bar{\varphi}}(P_{\hat{\lambda}}^{(m)}) \subset V_{\hat{\lambda}}(\tau) \quad (8)$$

майже напевно.

Отже, виходячи з неперервності, $Z \approx P$ має щільність, що є додатною в околі $\hat{\lambda}$ [4]. Тому, $M_m/m \rightarrow P[V_{\hat{\lambda}}(\rho)] = P[V_{\hat{\lambda}}(\rho)] > 0$ при $m \rightarrow \infty$ для $M_m = \sum_{i=1}^m \Lambda[Z_i \in V_{\hat{\lambda}}(\rho)]$. Крім того, для $\forall m \geq \bar{m}_0 (\geq m_0)$, $\sum_{i=1}^m \Lambda[Z_i \in C_{\bar{\varphi}}(P_{\hat{\lambda}}^{(m)})] \geq M_m \geq k_m$ майже напевно, оскільки $k_m = o(m)$ при $m \rightarrow \infty$.

В результаті,

$$C_{\hat{\lambda}}^{\gamma_m}(P^{(m)}) = C^{\gamma_m}(P_{\hat{\lambda}}^{(m)}) \subset C_{\bar{\varphi}}(P_{\hat{\lambda}}^{(m)}) \subset V_{\hat{\lambda}}(\tau)$$

майже напевно для таких значень m , де $\gamma_m = k_m / m$. Отже, $\max_{i=1, \dots, N_z^{(m)}} \|Z_{\lambda, (i)} - \hat{\lambda}\| \leq \tau$ майже напевно для великих m , звідки слідує результат. Теорему доведено.

Зауважимо, що величина

$$\sum_{i=1}^{N_z^{(m)}} \Lambda[\|Z_{\lambda, (i)} - \hat{\lambda}\| > \tau] = 0 \quad (9)$$

є завжди визначеною на відміну від $Z_{\lambda, (i)}$.

Теорема 3. Нехай k_m є послідовністю таких додатних чисел, що $k_m \rightarrow \infty$ та $k_m = o(m)$ при $m \rightarrow \infty$. Крім того, нехай E є функцією глибини, що задовольняє властивостям максимальності в центрі, монотонності по відношенню до найглибшої точки, а також властивостям неперервності, унікальної максимізації в центрі симетрії та узгодженості. Припустимо, що $Z[X=l]$ має функцію щільності h_l , множина точок розриву якої має міру Лебега нуль для $l=0,1$. Тоді, якщо $\sum_m$ є сигма-алгеброю, пов'язаною з (Z_i, X_i) , $i=1, \dots, m$, має місце узгодженість глибинного класифікатора k_m -найближчих сусідів $n_E^{(m)}$ в (3), тобто:

$$P[n_E^{(m)}(Z) \neq X | \sum_m] - P[n_B(Z) \neq X] = o_p(1), \quad (10)$$

при $m \rightarrow \infty$.

Доведення. Припустимо, що

$$\text{Supp}_+(h) = \{z \in \mathbb{R}^r : h(z) > 0\},$$

а також визначимо $S(h_l)$ для множини точок неперервності h_l , $l=0,1$, де

$$M = \text{Supp}_+(h) \cap S(h_0) \cap S(h_1). \quad (11)$$

Зазначимо, що Z має функцію щільності $z \mapsto h(z) = p_0 h_0(z) + p_1 h_1(z)$, що слідує з теореми Байєса [5].

Отже, при $P[Z \in M] = 1$ ми маємо, що

$$P[Z \in \mathbb{R}^r \setminus M] \leq P[Z \in \mathbb{R}^r \setminus \text{Supp}_+(h)] + \sum_{l \in \{0,1\}} P[Z \in \mathbb{R}^r \setminus S(h_l)] = \int_{\mathbb{R}^r \setminus \text{Supp}_+(h)} h(z) dz = 0, \quad (12)$$

оскільки $\mathbb{R}^r \setminus S(h_l)$ має нульову міру Лебега, де $l=0,1$.

Далі припустимо, що $z \in M$, де

$$z \mapsto \theta(z) = p_1 h_1(z) / (p_0 h_0(z) + p_1 h_1(z))$$

є неперервною функцією на M . Оцінку $\bar{\theta}_E^{(m)}$ з (3) можна записати у такій формі:

$$\bar{\theta}_E^{(m)} = \sum_{i=1}^m X_i D_i^{(m)}(z) = \frac{1}{N_z^{(m)}} \sum_{i=1}^{N_z^{(m)}} X_{z, (i)}, \quad (13)$$

припускаючи, що $X_{z, (i)} = X_{l(z)}$, де $l(z)$ є таким, що $Z_{z, (i)} = Z_{l(z)}$.

Отже,

$$Q^{(m)}(z) := \Omega[\bar{\theta}_E^{(m)}(z) - \theta(z)]^2 \leq 2Q_1^{(m)}(z) + 2Q_2^{(m)}(z), \quad (14)$$

де

$$Q_1^{(m)}(z) = \Omega\left[\left|\frac{1}{N_z^{(m)}} \sum_{i=1}^{N_z^{(m)}} (X_{z, (i)} - \theta(Z_{z, (i)}))\right|^2\right] \quad (15)$$

та

$$Q_2^{(m)}(z) = \Omega\left[\left|\frac{1}{N_z^{(m)}} \sum_{i=1}^{N_z^{(m)}} (\theta(Z_{z, (i)}) - \theta(z))\right|^2\right]. \quad (16)$$

Зауважимо, що величину γ_m замінено на γ для спрощення запису. Крім того, $X_{z, (i)} - \theta(Z_{z, (i)})$, $i=1, \dots, m$ є нульовими середніми значеннями взаємно незалежних випадкових величин, на що вказує $\sum_z^{(m)}$ для сигма-алгебри, породженої Z_i , $i=1, \dots, m$ [6].

В результаті, використовуючи той факт, що $N_z^{(m)} \geq k_m$ майже напевно, ми отримуємо таку рівність:

$$\begin{aligned} Q_1^{(m)}(z) &= \Omega\left[\frac{1}{(N_z^{(m)})^2} \sum_{i,l=1}^{N_z^{(m)}} \Omega[(X_{z, (i)} - \theta(Z_{z, (i)}))(X_{z, (l)} - \theta(Z_{z, (l)})) | \sum_z^{(m)}]\right] = \\ &= \Omega\left[\frac{1}{(N_z^{(m)})^2} \sum_{i=1}^{N_z^{(m)}} \Omega[(X_{z, (i)} - \theta(Z_{z, (i)}))^2 | \sum_z^{(m)}]\right] \leq \\ &\leq \Omega\left[\frac{4}{N_z^{(m)}}\right] \leq \frac{4}{k_m} = o(1), \end{aligned} \quad (17)$$

при $m \rightarrow \infty$.

Далі, використовуючи нерівність Коші-Шварца, має місце така нерівність:

$$\begin{aligned} Q_2^{(m)}(z) &\leq \Omega\left[\frac{1}{N_z^{(m)}} \sum_{i=1}^{N_z^{(m)}} (\theta(Z_{z, (i)}) - \theta(z))^2\right] = \\ &= \Omega\left[\frac{1}{N_z^{(m)}} \sum_{i=1}^{N_z^{(m)}} (\theta(Z_{z, (i)}) - \theta(z))^2 \Lambda[\|Z_{z, (i)} - z\| \leq \tau]\right] + \\ &+ \Omega\left[\frac{1}{N_z^{(m)}} \sum_{i=1}^{N_z^{(m)}} (\theta(Z_{z, (i)}) - \theta(z))^2 \Lambda[\|Z_{z, (i)} - z\| > \tau]\right] \leq \\ &\leq \sup_{z' \in V_z(\tau)} |\theta(z') - \theta(z)|^2 + 4\Omega\left[\frac{1}{N_z^{(m)}} \sum_{i=1}^{N_z^{(m)}} \Lambda[\|Z_{z, (i)} - z\| > \tau]\right] := \\ &:= \bar{Q}_2(z; \tau) + \bar{Q}_2^{(m)}(z; \tau) \end{aligned} \quad (18)$$

для $\forall \tau > 0$.

Тому, для $\forall \mu > 0$ можна вибрати таке $\tau = \tau(\mu) > 0$, що $\bar{Q}_2(z; \tau(\mu)) < \mu$. Даний вивід

слідє з неперервності θ в z . Крім того очевидно, що $Q_2^{(m)}(z; \tau(\mu)) = 0$ для великих m , а оскільки $Q_2^{(m)}(z) \in o(1)$, те ж саме має місце і для $Q^{(m)}(z)$.

$$\begin{aligned} &\text{Отже, при } m \rightarrow \infty, \\ &\Omega \left[\left| P[\bar{n}_E^{(m)}(Z) \neq X \mid \sum_m] - J_* \right| \right] = \\ &= \Omega \left[\left| P[\bar{n}_E^{(m)}(Z) \neq X \mid \sum_m] - J_* \right| \right] = \\ &P[\bar{n}_E^{(m)}(Z) \neq X] - J_* \leq \\ &\leq 2 \left(\Omega \left[\bar{\theta}_E^{(m)}(Z) - \theta(Z) \right]^2 \right)^{1/2} = o(1), \end{aligned} \quad (19)$$

оскільки $P[\bar{n}_E^{(m)}(Z) \neq X \mid \sum_m] \geq J_*$ майже напевно. Теорему доведено.

Висновки. Запропонований метод глибинних околів може бути ефективно застосований не лише для задач класифікації, а й для задач оцінки загальної щільності h незалежних та однаково розподілених випадкових r -векторів Z_i , де $i=1, \dots, m$. Крім того, використання глибинних околів представляє інтерес в регресійних задачах, де умовне середнє значення функції $z \mapsto n(z) = \Omega[X \mid Z = z]$ оцінюється на основі

взаємно незалежних груп (Z_i, X_i) випадкового вектора (Z, X) зі значеннями в $R^r \times R$, де $i=1, \dots, m$. Дослідження властивостей даних глибинних методів виходить за рамки даної роботи, однак, досить ймовірним є те, що властивості узгодженості, які отримані для задач класифікації також поширюються на задачі регресії та оцінки щільності. В задачах оцінки щільності використання несферичних, а саме еліпсоїдних околів може привести до фундаментальних скінченно-випіркових властивостей. У даному випадку глибинні оцінки k_m найближчих сусідів є досить ефективними, оскільки вони використовують несферичні та нееліпсоїдальні околи, форма яких визначається локальною геометрією вибірки.

Список використаних джерел

1. Holmes C.C. A probabilistic nearest neighbor method for statistical pattern recognition / C.C. Holmes, N.M. Adams // Journal of the Royal Statistical Society. – 2002. – 64. – P. 295-306.
2. Godtliebsen F. Significance in scale space for bivariate density estimation / F. Godtliebsen, J.S. Marron, P. Chaudhuri // Journal of Computational and Graphical Statistics. – 2002. – 11. – P. 1-22.
3. Mosler K. Multivariate Dispersions, Central Regions and Depth / K. Mosler. – New York: Springer-Verlag, 2002, P. 1–291.
4. Silverman B.W. Density estimation for Statistics and Data Analysis / B.W. Silverman. – London: Chapman and Hall, 1986. 1–175.
5. Hoeffding W. Probability inequalities for sums of bounded random variables // Journal of the American Statistical Association. – 1963. – 58. – P. 14–27.
6. Zuo Y. Structural properties and convergence results for contours of sample statistical depth functions / Y. Zuo, R. Serfling // The Annals of Statistics. – 2000. – 28. – P. 484–497.

References

1. HOLMES, C.C. and ADAMS N.M. (2002) A probabilistic nearest neighbor method for statistical pattern recognition. *Journal of the Royal Statistical Society*. 64. p. 295-306.
2. GODTLIEBSEN, F., MARRON, J.S., CHAUDHURI P. (2002) Significance in scale space for bivariate density estimation. *Journal of Computational and Graphical Statistics*. 11. p. 1-22.
3. MOSLER, K. (2002) Multivariate Dispersions, Central Regions and Depth, New York: Springer-Verlag. p. 1- 291.
4. SILVERMAN, B.W. (1986) Density estimation for Statistics and Data Analysis, London: Chapman and Hall. p. 1-175.
5. Hoeffding, W. (1963) Probability inequalities for sums of bounded random variables. *Journal of the American Statistical Association*. 58. p. 14-27.
6. ZUO, Y., SERFLING R. (2000) Structural properties and convergence results for contours of sample statistical depth functions. *The Annals of Statistics*. 28. p. 484-497.

Надійшла до редколегії 16.11.15

УДК 517.929.4

Гаркуша Н.І., к. е. н., пров.інж.

Дослідження динаміки моделі «хижак-жертва» з квадратичною нелінійністю при наявності запізнення, обумовленого часом визрівання

Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, пр.-т.
Глушкова, 4д,
e-mail: ngarkusha@gmail.com

N. I. Garkusha, PhD, senior researcher

Study of the dynamic of the model "predator-prey" with a quadratic nonlinearity in the presence of the delay caused by the time of maturing

Taras Shevchenko National University of Kyiv,
03680, Kyiv, Glushkova av., 4d,
e-mail: ngarkusha@gmail.com

У даній роботі продовжено дослідження динаміки систем двох нелінійних диференціальних рівнянь з квадратичною нелінійністю, що моделюють популяційні процеси в системі «хижак-жертва». Модель являє собою систему двох диференціальних рівнянь з одним постійним запізненням. Обчислені точки спокою системи, що представляють сталі режими. Проведено дослідження стійкості ненульового положення рівноваги, відповідне сталій відповідності кількості хижаків і жертви.

Ключові слова: математична модель, динамічна система, диференціальні рівняння, особливі точки, стійкість.

In this article the continuation of the study of longitudinal nonlinear mathematical models of population dynamics such as "predator-prey" with the delay is presented, which was previously published in [1-3]. Those types of models are described by systems of ordinary differential equations considered in [4]. The need to introduce "delay factor", is caused by many factors, in particular, the time of "population manuring". This model is a system of two differential equations with quadratic nonlinearity. Special points of system were found. Particular attention is given to a singular point, which is a steady position of equilibrium between predator and prey. A study of non-zero equilibrium position is done. Investigation of the stability of non-zero equilibrium position comes to the study of the system linearized near this position. For biological models of dynamics of the population, the important factor is the delay due to the time of maturation of the population. Therefore, in the second part of the article, a mathematical model is given and it's representing a system of differential-difference equations with a constant delay. The research of stability of nonzero equilibrium position can also be reduced to the study of stability of the system linearized at a singular point. However, in this case, the left side of the characteristic equation is a quasi-polynomial of the second order, which has a countable number of eigenvalues. The algorithm for his research is proposed.

Key words: mathematical model, dynamic system, differential equations, special points, stability.

Статтю представив д.ф.-м.н, проф. Хусаїнов Д. Я.

Вступ

У запропонованій статті продовжено дослідження математичних моделей динаміки популяцій типу «хижак-жертва», раніше опублікованих у статтях [1-3].

В роботі [4] розглянуті рівняння, що описують взаємодії між видом жертви з щільністю $x(t)$ і

хижаком, що винищує її, з щільністю $y(t)$. Система рівнянь динаміки має вигляд

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= ax(t) - bx^2(t) - cx(t)y(t), \\ \dot{y}(t) &= -ey(t) + c'x(t)y(t).\end{aligned}\tag{1.1}$$

В основі складання системи (1.1) лежать наступні припущення:

- при відсутності хижацтва зростання чисельності жертви відбуватиметься відповідно до

логістичного рівнянням з швидкістю і ємністю середовища a/b ,

- швидкість «поїдання» жертви пропорційна добутку щільності хижака і жертви.

Проведемо дослідження якісної поведінки системи (1.1). Положення рівноваги системи визначаються рішеннями системи рівнянь

$$\begin{aligned} ax(t) - bx^2(t) - cx(t)y(t) &= 0, \\ -dy(t) + c'x(t)y(t) &= 0. \end{aligned}$$

і є особливими точками

$$O(0,0), \quad O_1(x_1,0), \quad x_1 = \frac{a}{b},$$

$$O_2(x_2, y_2), \quad x_2 = \frac{d}{c'}, \quad y_2 = \frac{a}{c} - \frac{bd}{cc'}. \quad (1.2)$$

Перша особлива точка являє собою відсутність популяцій і не представляє інтерес. Друга передбачає відсутність хижака і сталий режим популяції жертви, відповідний наявності їжі. В разі $ac' - bd > 0$ третя особлива точка являє собою сталу взаємодію між хижаків і жертвою. В роботі [4] проведено дослідження цієї особливої точки. Встановлено, що вона може бути або циклом, або стійким (нестійким) фокусом.

У даній роботі проведено аналітичне дослідження. Апаратом дослідження виберемо метод лінійного наближення. Для нелінійної системи загального вигляду

$$\dot{x}(t) = P(x(t), y(t)), \quad \dot{y}(t) = Q(x(t), y(t))$$

система лінійного наближення в околиці особливої точки $O_2(x_2, y_2)$ має вигляд

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \\ &= P_{x(t)}(x_2, y_2)(x(t) - x_2) + P_{y(t)}(x_2, y_2)(y(t) - y_2), \\ \dot{y}(t) &= \\ &= Q_{x(t)}(x_2, y_2)(x(t) - x_2) + Q_{y(t)}(x_2, y_2)(y(t) - y_2) \end{aligned}$$

Або у векторно-матричному вигляді

$$\dot{z}(t) = A_0 z(t). \quad (1.3)$$

$$\begin{aligned} A_0 &= \begin{pmatrix} a_{11}^0 & a_{12}^0 \\ a_{21}^0 & 0 \end{pmatrix}, \quad z(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}, \quad a_{11}^0 = -\frac{bd}{c}, \\ a_{12}^0 &= -\frac{cd}{c'}, \quad a_{21}^0 = \frac{ac' - bd}{c}. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Характеристичне рівняння системи (1.3) має вигляд

$$\begin{aligned} \det(A_0 - \lambda I) &= \begin{vmatrix} a_{11}^0 - \lambda & a_{12}^0 \\ a_{21}^0 & -\lambda \end{vmatrix} = \\ &= \lambda^2 - a_{11}^0 \lambda - a_{12}^0 a_{21}^0 = 0. \end{aligned}$$

Підставивши значення (1.4), отримаємо

$$\lambda^2 + \frac{bd}{c'} \lambda + d \frac{ac' - bd}{c} = 0. \quad (1.5)$$

Умовою стійкості положення рівноваги (системи на площині) буде додатність коефіцієнтів характеристичного рівняння, тобто

$$\frac{bd}{c'} > 0, \quad d \frac{ac' - bd}{c} > 0. \quad (1.6)$$

Причому, якщо буде виконуватися умова

$$\left(\frac{bd}{c'}\right)^2 - 4e \frac{ac' + bd}{c} > 0,$$

то буде стійкий вузол. Інакше буде стійкий фокус.

1. Система з запізнюванням

В роботі [4] зазначено, що істотним фактором, що визначає динаміку, може бути вплив запізнювання. «На практиці стійкість або коливальний характер системи хижак-жертва залежить від того, який із чинників є домінуючим: демпфірування, що створюється системою, що самоорганізується під впливом жертви або хижака, або запізнення, обумовлене дискретністю сезонів розмноження або часом розвитку».

Була розглянута система рівнянь із запізненням

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= ax(t) - bx^2(t) - cx(t)y(t), \\ \dot{y}(t) &= -dy(t) + c'x(t - \tau)y(t - \tau). \end{aligned} \quad (2.1)$$

Ця система рівнянь «схожа» на систему (1.1). Передбачається існування тимчасового інтервалу τ між моментом, коли убита одна особа жертви, і моментом, коли відбувається відповідне збільшення чисельності дорослих хижаків. Особливі точки для системи з запізненням ті ж, що і для системи без запізнення. В роботі [4] стійкість положення

рівноваги визначалася чисельним моделюванням.

Проведемо аналітичне дослідження особливої точки $O_2(x_2, y_2)$ системи з запізненням (2.1). В основу досліджень також покладено метод лінійного наближення в околиці особливої точки і оцінку характеру нелінійності. У загальному випадку система двох рівнянь із запізненням має вигляд

$$\dot{x}(t) = P(x(t), y(t), x(t-\tau), y(t-\tau)),$$

$$\dot{y}(t) = Q(x(t), y(t), x(t-\tau), y(t-\tau)).$$

Система лінійного наближення в околиці особливої точки $O_2(x_2, y_2)$ записується в вигляді

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= P_{x(t)}(x_2, y_2, x_2, y_2)(x(t) - x_2) + \\ &+ P_{y(t)}(x_2, y_2, x_2, y_2)(y(t) - y_2) + \\ &+ P_{x(t-\tau)}(x_2, y_2, x_2, y_2)(x(t-\tau) - x_2) + \\ &+ P_{y(t-\tau)}(x_2, y_2, x_2, y_2)(y(t-\tau) - y_2), \\ \dot{y}(t) &= Q_{x(t)}(x_2, y_2, x_2, y_2)(x(t) - x_2) + \\ &+ Q_{y(t)}(x_2, y_2, x_2, y_2)(y(t) - y_2) + \\ &+ Q_{x(t-\tau)}(x_2, y_2, x_2, y_2)(x(t-\tau) - x_2) + \\ &+ Q_{y(t-\tau)}(x_2, y_2, x_2, y_2)(y(t-\tau) - y_2). \end{aligned}$$

Так як

$$\begin{aligned} P(x(t), y(t), x(t-\tau), y(t-\tau)) &= \\ &= ax(t) - cx(t)y(t) - bx^2(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q(x(t), y(t), x(t-\tau), y(t-\tau)) &= \\ &= -cy(t) + c'x(t-\tau)y(t-\tau) \end{aligned}$$

то, обчисливши похідні, одержимо систему лінійного наближення

$$\dot{z}(t) = Az(t) + Bz(t-\tau). \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}, \quad z(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}, \\ z(t-\tau) &= \begin{pmatrix} x(t-\tau) \\ y(t-\tau) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned} a_{11} &= -\frac{bd}{c'}, \quad a_{12} = -\frac{cd}{c'}, \quad a_{21} = 0, \quad a_{22} = -d, \\ b_{21} &= -\frac{ac' - bd}{c}, \quad b_{22} = d. \end{aligned}$$

Характеристичне рівняння системи з запізненням (2.2) вже має вигляд

$$\begin{aligned} \det(A + e^{-\lambda\tau} B - \lambda I) &= \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ e^{-\lambda\tau} b_{21} & a_{22} + e^{-\lambda\tau} b_{22} - \lambda \end{vmatrix} = \\ &= \lambda^2 - [(a_{11} + a_{22}) + e^{-\lambda\tau} b_{22}] \lambda + \\ &+ [a_{11} a_{22} + (a_{11} b_{22} - a_{12} b_{21}) e^{-\lambda\tau}] = 0 \end{aligned}$$

Підставивши значення коефіцієнтів, отримаємо

$$\lambda^2 + \left[\left(\frac{b}{c'} + 1 \right) - e^{-\lambda\tau} \right] d \lambda - [bd - ac' e^{-\lambda\tau}] \frac{d}{c'} = 0. \quad (2.3)$$

У разі відсутності запізнювання, тобто при $\tau = 0$, воно збігається з (1.5). Досліджуємо вплив запізнювання на стійкість положення рівноваги системи з запізненням (2.2).

Рішення характеристичного рівняння (2.3) шукаємо у вигляді комплексного числа $\lambda = x + iy$. Після підстановки в (2.3), отримуємо

$$\begin{aligned} (x^2 - y^2 + 2ixy) + \left[\left(\frac{b}{c'} + 1 \right) - e^{-x\tau} (\cos y\tau - i \sin y\tau) \right] \times \\ \times d e^{(x-iy)\tau} + \\ + [bd - ac' e^{-x\tau} (\cos y\tau - i \sin y\tau)] \frac{d}{c'} = 0. \end{aligned}$$

Напишемо одержане комплексне рівняння у вигляді системи двох дійсних рівнянь

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 \left[\left(\frac{b}{c'} + 1 \right) + e^{x\tau} \cos y\tau \right] x - d y e^{-x\tau} \cos y\tau + \\ + (bd - ac' e^{-x\tau} \cos y\tau) \frac{d}{c'} + \\ + i \{ 2xy + y \left[\left(\frac{b}{c'} + 1 \right) - e^{-x\tau} \cos y\tau \right] - x e^{-x\tau} \cos y\tau + \\ + a d e^{-x\tau} \sin y\tau \} = 0. \end{aligned}$$

Таким чином, отримуємо наступне твердження.

Нехай існує таке $\tau > 0$, що рішення $M_i(x_i, y_i)$, $i = 1, 2, \dots$ системи нелінійних рівнянь

$$x^2 + y^2 \left[\left(\frac{b}{c'} + 1 \right) + e^{x\tau} \cos y\tau \right] x - d y e^{-x\tau} \cos y\tau + (bd - ac' e^{-x\tau} \cos y\tau) \frac{d}{c'} = 0,$$

Література

1. Смит Дж. Модели в экологии / Дж. Смит. – Москва: Мир, 1976. – 182 с.
2. Эльсгольц Л.Э. Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом / Л.Э.Эльсгольц, С.Б.Норкин. – Москва: Наука, 1970. – 240 с.
3. Гаркуша Н.І. Про одну математичну модель динаміки взаємодіючих популяцій // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія: Фізико-математичні науки. – 2014. – №4. С. 135-138.
4. Гаркуша Н.І. Динаміка однієї екологічної моделі «хижак-жертва» без врахування вікової структури // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія: Кібернетика. – 2014. – №14. – С.22-24.
5. Гаркуша Н.І. Отримання оцінки області стійкості моделі популяції з післядією // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія: Фізико-математичні науки. – 2015. – №2. – С. 123-127.

$$2xy + y \left(\frac{b}{c'} + 1 \right) - (x + y) e^{-x\tau} \cos y\tau + a d e^{-x\tau} \sin y\tau = 0$$

задовольняє умові

$$\operatorname{Re} x_i < 0, \quad i = 1, 2, \dots$$

Тоді точка спокою $O_2(x_2, y_2)$ нелінійної системи (2.1) при $\tau > 0$ буде асимптотично стійкою.

References

1. SMITH, J. (1974) *Models in Ecology*. Cambridge: Cambridge University Press.
2. ELSGOLTZ, L., NORKIN, S. (1970) *Introduction to the Theory of Differential Equations with Deviating Argument*. Moskva: Nauka.
3. GARKUSHA, N. (2014) About One Mathematical Model of the Dynamics of Interacting Population. In *Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series Physics & Mathematics*. №4. – p.135-138.
4. GARKUSHA, N. (2014) The Dynamics of the Ecological Model “Predator-Prey” without Age Structure. In *Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv Series Cybernetics*, №14. – p. 22-24.
5. GARKUSHA, N. (2015) Obtaining the estimation of the stability area of equilibrium in the model of population with aftereffect. In *Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series Physics & Mathematics*. №2. – p.123-127.

Надійшло до редколегії 01.11.2015 р.

УДК 681.3

Дерев'янченко О. В., к.ф.-м. н., доц.,
Хавро А.Ю., студент

Застосування системи PARCS.NET та Amazon EC2 для хмарних обчислень

Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 83000, м. Київ, пр-т.
Глушкова 4д, e-mail: alexanderder@mail.ru

O.V. Derevianchenko, PhD, Associate Professor
A.U. Khavro, student

The applying of PARCS.NET system and Amazon EC2 for cloud computing

Taras Shevchenko National University of Kyiv,
83000, Kyiv, Glushkova st., 4d,
e-mail: alexanderder@mail.ru

В статті запропоновано застосування системи для паралельних розподілених обчислень PARCS.NET (ПАРКС - Паралельні Асинхронні Рекурсивні Керуючі Системи) та хмарних обчислень. У якості технології для хмарних обчислень було використано Amazon Elastic Compute Cloud (Amazon EC2).

В роботі надано опис роботи систем ПАРКС.NET та можливості її налаштування для роботи з технологією Amazon Elastic Compute Cloud. Наведено результати тестування систем для вирішення класичної задачі множення матриць. Розглянуто можливості цих систем при вирішенні практичних задач паралельного програмування.

Ключові слова: хмарні обчислення, паралельні розподілені обчислення, система ПАРКС, C#, Amazon EC2.

In the article provides the use of the system for parallel distributed computing PARCS.NET (PARCS - Parallel Asynchronous Recursive Control System) and cloud computing. As the technology for cloud computing was used Amazon Elastic Compute Cloud (Amazon EC2).

The paper provided a description of the systems PARCS.NET and its possible settings for the technology Amazon Elastic Compute Cloud.

The basic terms of the PARCS-technology are point, programming channel and algorithmic module. Pattern of control space is a graph. Top is a point of control space and edge is programming channels. The points are connected per programming channels. Each point of control space is assigned with the algorithmic module. The algorithmic module is a procedure PARCS and extension of the basic programming languages. Algorithmic modules are executed in parallel. In practice this means that in a computer network one major computer (Server) is selected. This computer is accessible to all others (Clients). It generates a queue of all tasks. Tasks from the queue are sent for computing. Each computer obtains a task from the queue and executes it. After finishing computing the active task it sends the results to the server and selects the new task. The model is designed for distributed network. Description of these systems is provided

The results of testing systems for solving the classical problem of matrix multiplication are presented. Capabilities of these systems in solving practical problems of parallel programming were considered.

Keywords: cloud computing, parallel distributed computing, PARCS system, C#, Amazon EC2.

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Анісімов А.В.

Вступ

В даній статті розглядається застосування технології для паралельних розподілених обчислень ПАРКС (Паралельні Асинхронні Рекурсивні Керуючі Системи) [1], а саме системи ПАРКС.NET [6,7] та хмарних обчислень. У якості технології для хмарних обчислень було використано Amazon Elastic

Compute Cloud (Amazon EC2) [8]. Ця робота присвячена розширенню (паралельні властивості) множини алгоритмічних мов програмування (Pascal, C, JAVA[2-4]), які вже реалізовані за допомоги технології ПАРКС, новими за допомогою технології .NET та мови програмування C# [5], а також використанню таких технологій у хмарних обчисленнях.

Технологія ПАРКС

ПАРКС (паралельні асинхронні рекурсивні керовані системи) - технологія програмування, що являє собою деяку сукупність програмних засобів, які забезпечують процес розробки і реалізації алгоритмів паралельної обробки інформації. Вона базується на концепції *керуючого простору* (КП) [1] – динамічний граф, який використовується для опису логічної та комунікаційної структури досліджуваної задачі.

Основні терміни ПАРКС-технології:

- 1) точка;
- 2) програмний канал (ПК);
- 3) алгоритмічний модуль (АМ).

Структура КП – граф, вершини якого – точки КП, ребра – ПК. До кожної точки КП приписаний АМ, який є процедурою ПАРКС-розширення базової мови. В нашому випадку ми застосовуємо базову мову програмування C#.

Програмні засоби розширення базових алгоритмічних мов програмування[1]:

1. Програмні засоби, що забезпечують побудову і модифікацію КП.
2. Програмні засоби, що забезпечують зберігання та передачу інформації за допомогою КП.
3. Програмні засоби, що забезпечують роботу з АМ.
4. Програмні засоби, що забезпечують процедурно – об'єктно-орієнтоване програмування.

Технологія Microsoft .NET Framework

Microsoft .NET Framework – сучасна програмна платформа, що дозволяє створювати програми із застосуванням комп'ютерних мереж та паралельних обчислень, а також надає можливість переносу програм між різними апаратними платформами, на яких встановлене середовище Microsoft .NET Framework. Однією з переваг .NET є сумісність бібліотек, написаних різними мовами. Система ПАРКС-.NET написана на мові C# [5], але її можна використовувати і для інших мов .NET, наприклад Visual Basic або F#.

До позитивних якостей технології .NET, що вплинули на її вибір для проектування системи ПАРКС.NET, також належать:

- наявність мови C#, яка набуває все більшої популярності завдяки простій об'єктній моделі та постійному розвитку;
- відповідність сучасним вимогам: бібліотека TPL (Task Parallel Library), яка використовується в системі ПАРКС.NET і надає широкий набір можливостей для розробки паралельних програм, підтримка засобів мережевого програмування, забезпечення пересилання даних по комп'ютерній мережі, рефлексія – процес виявлення типів під час виконання та інше.

Система ПАРКС.NET

Архітектура системи складається з наступних частин [6,7]:

1. *Parcs* – основна бібліотека класів системи. Містить всі основні класи, що будуть використовуватись для моделювання паралельних обчислень.
2. *Daemon* – клієнт. Являє собою програму, за допомогою якої будуть проводитись обчислення.
3. *HostServer* – сервер. Має список доступних клієнтів, а також інформацію про поточні задачі та точки. При запуску модуль починає роздавати завдання клієнтам в залежності від кількості ядер процесорів (потужності) та їх завантаженості.
4. АМ – окремий проект, що використовує бібліотеку *Parcs* та реалізує інтерфейс *IModule*.

На всіх машинах, що призначені для обчислень, запускається програма *Daemon*, а початковий АМ та *HostServer* можуть запускатися або на тих же, або на інших машинах. В окремому випадку навіть всі три елементи системи можуть бути запущені в одному місці. Файл *server.txt* використовується початковим АМ для знаходження комп'ютера, на якому запущений *HostServer* (IP-адреса).

У створеній реалізації клієнта та сервера зв'язок проходить у такій послідовності:

1. При запуску модуля сервер перевіряє всі зазначені у файлі *hosts.txt* і видаляє ті, з якими не вдалося з'єднатися. Після цього сервер запитує у кожного з клієнтів кількість ядер процесора і зберігає собі ці результати.

2. Сервер розподіляє точки, що створюються в алгоритмічному модулі, по

комп'ютерах, на яких виконується програма *Daemon*.

3. Після цього на комп'ютері, де буде створена нова точка, початковий АМ передає exe-файл, в якому міститься інформація про всі АМ, що будуть запуснені під час виконання поточної задачі. За допомогою рефлексії *Daemon* створює екземпляр класу АМ і викликає метод *Run()*. Таким чином запускаються необхідні обчислення.

4. Після завершення обчислень *Daemon* відсилає результат назад на початковий АМ. Після того, як завершилися обчислення на всіх машинах, початковий АМ оброблює всі результати, виводить загальний результат на екран та зберігає його в файл.

Amazon Elastic Compute Cloud (EC2)

Amazon Elastic Compute Cloud (Amazon EC2) - веб-сервіс [8], який надає хмарні обчислювальні потужності. Сервіс входить в інфраструктуру *Amazon Web Services (AWS)*.

Простий веб-інтерфейс сервісу дозволяє отримати доступ до обчислювальних потужностей і налаштувати ресурси з мінімальними витратами. Він надає користувачам повний контроль над обчислювальними ресурсами, а також доступне середовище для роботи. Служба скорочує час, необхідний для отримання і завантаження нового сервера.

За допомогою EC2 дозволяється створювати хмарні віртуальні машини, використовуючи потужності хмари *Amazon*. Користувачу надається вибір операційної системи: *Windows Server* або різні версії *Linux*. Також можна вибрати характеристики віртуальної машини.

Серед інших особливостей EC2 варто відзначити можливість створення образів віртуальних машин (*Amazon Machine Image (AMI)*), а також їх зберігання. AMI дозволяє встановлювати програми, бібліотеки, дані та налаштовувати пов'язані з ними параметри. За допомогою AMI можна створювати нові машини на основі існуючих (фактично копіювати віртуальні машини).

Також важливою особливістю є можливість налаштування безпеки та мережевого доступу. Це дозволяє відкрити доступ до віртуальної машини для зовнішнього світу (за замовчуванням він закритий), а також дозволити комунікацію між самими віртуальними машинами.

Веб-інтерфейс *Amazon Elastic Compute Cloud* легко дозволяє запускати і зупиняти віртуальні машини, а також робити всі вищеприписані дії.

Використання технології Amazon Elastic Compute Cloud

Для використання *Amazon Elastic Compute Cloud* необхідно зареєструватися на сайті <http://aws.amazon.com/>. Для цього потрібно ввести свої персональні дані і пройти підтвердження реєстрації по телефону. Також при реєстрації потрібно вказати номер кредитної картки, хоча сервіс можна використовувати і безкоштовно – кожному користувачу надається обмежений пакет користування сервісом на рік.

Після проходження реєстрації користувач може починати працювати з сервісом. Так на Рис.1 можна побачити веб-інтерфейс сервісу *Amazon Elastic Compute Cloud*. Видно, що на даний момент створено одну віртуальну машину з ім'ям «*host server*» і приватним IP. Варто зазначити, що при перезапуску машин приватний IP залишається сталим, а публічний IP може змінюватися. На рисунку видно, що машині не присвоєно публічний IP, оскільки вона знаходиться у зупиненому стані.

Для того, щоб створити нову віртуальну машину, потрібно натиснути на кнопку «*Launch Instance*». Після цього потрібно обрати образ (AMI), з якої буде створена віртуальна машина (VM), Рис.2. Це може бути як стандартний образ операційної системи, такі як *Red Hat Enterprise Linux* або *Microsoft Windows Server 2012*, так і власноруч створені образи, або будь-які образи, створені спільнотою.

Наступним кроком є вибір типу машини. Є один безкоштовний варіант: машина з одним процесором *Intel Xeon* з потужністю 2.5 GHz і 1 ГБ оперативної пам'яті Рис.3.

Далі можна обрати інші налаштування машини. Зокрема, можна створити декілька віртуальних машин за один раз Рис.4.

Далі можна додати місце на диску (за замовчуванням 30 ГБ), позначити машину тегами, налаштувати *security group* (множина правил мережевого екрану). Ці кроки можна пропустити, але для роботи системи *ПАРКС.NET* необхідно забезпечити зв'язок між машинами, тому покажемо, як можна налаштувати мережевий екран.

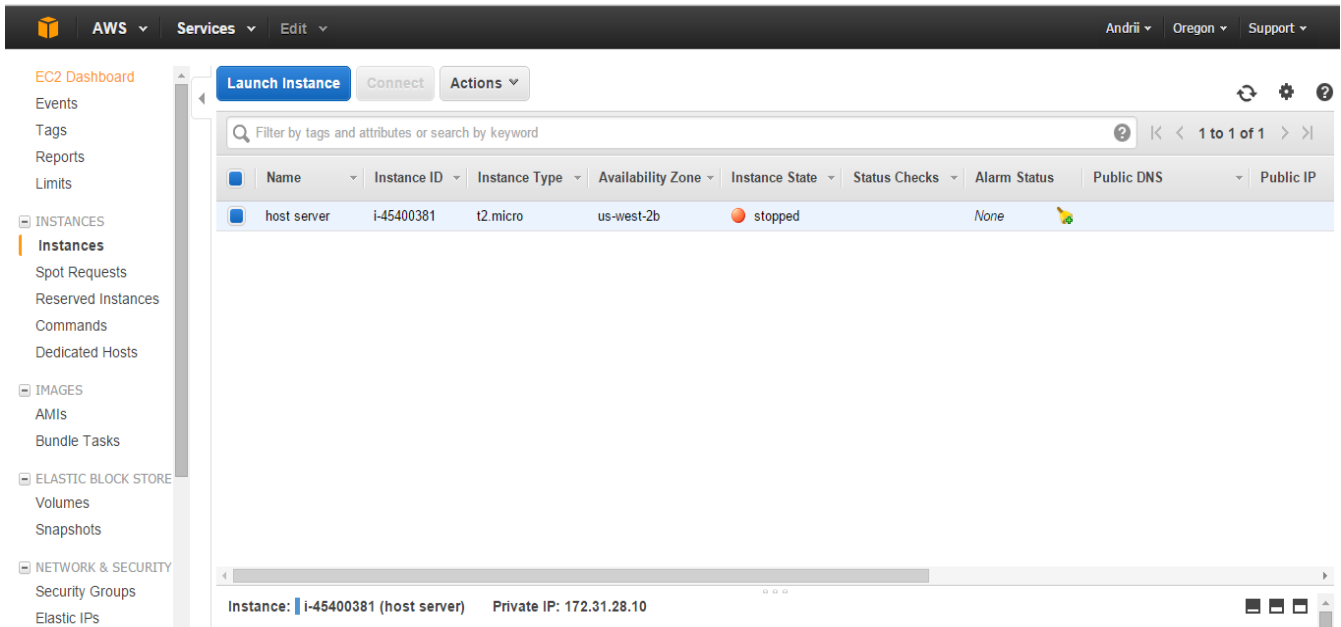


Рис.1. Сервіс Amazon EC2

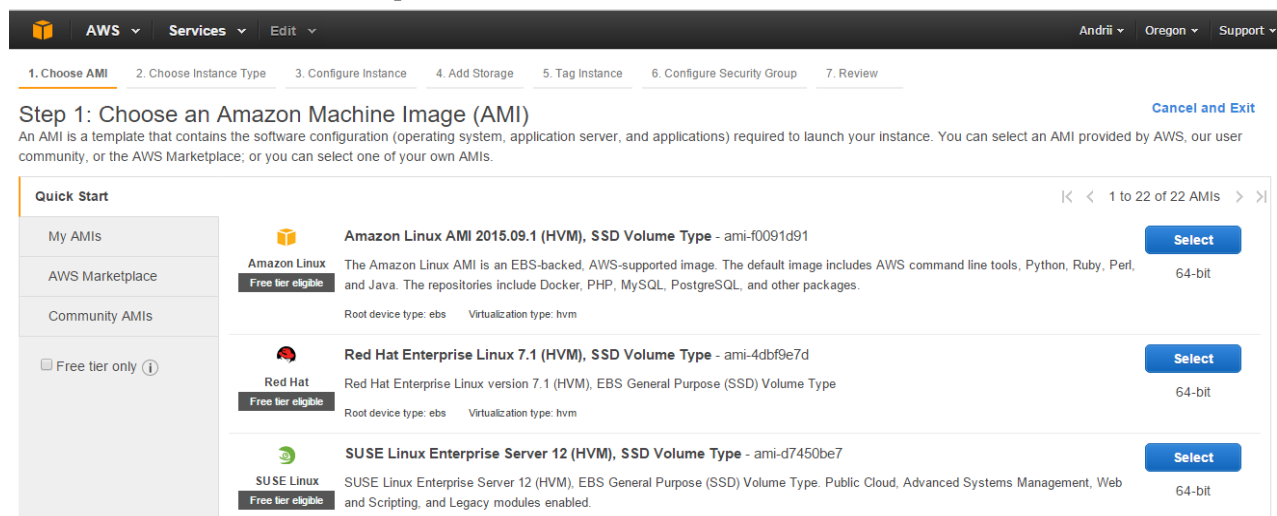


Рис.2. Створення нової VM

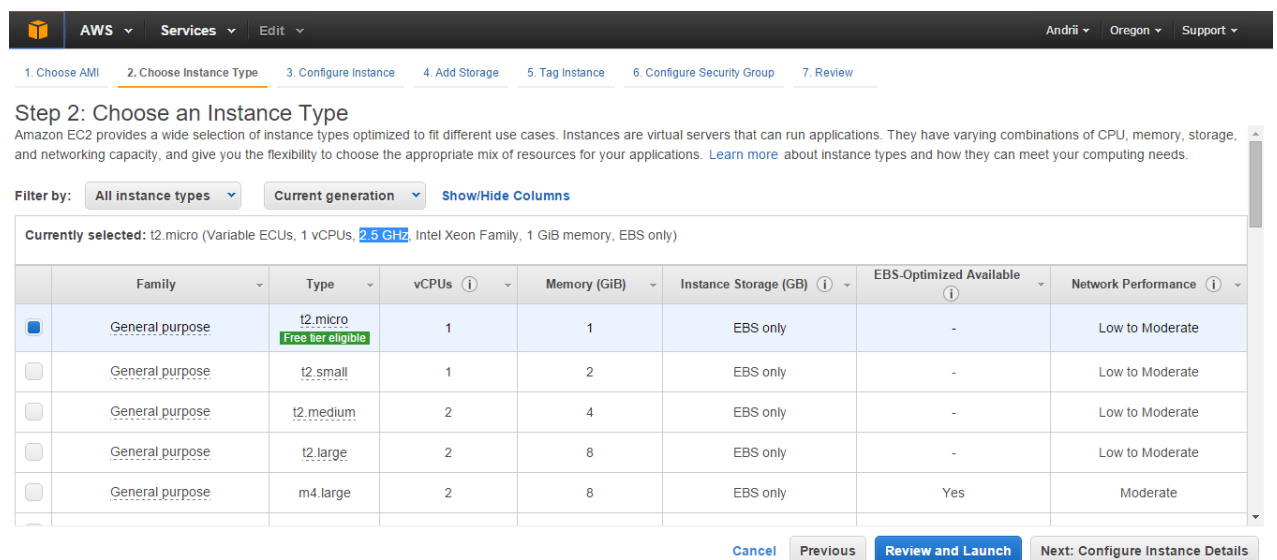


Рис.3. Вибір типу машини

Рис.4. Створення віртуального простору

Type	Protocol	Port Range	Source
All traffic	All	0 - 65535	Anywhere
RDP	TCP	3389	Anywhere

Рис.5. Налаштування мережі

Name	Instance ID	Instance Type	Availability Zone	Instance State	Status Checks	Alarm Status	Public DNS	Public IP
host server	i-45400381	t2.micro	us-west-2b	stopped		None		
	i-b69fab72	t2.micro	us-west-2b	running	Initializing	None	ec2-52-34-71-50.us-we...	52.34.71.50

Рис.6. Працюючі VM

Для спрощення дозволимо будь-якому трафіку проходити через мережевий екран для будь-якого порту Рис.5.

Також ці правила потрібно продублювати в налаштуваннях безпеки Windows після створення віртуальної машини.

Після того, як всі налаштування обрано, потрібно натиснути на кнопку «Review and Launch», де можна перевірити правильність введених налаштувань. Після цього, потрібно натиснути на кнопку «Launch». На екрані

з'явиться діалог, що дозволяє створити пару ключів для отримання і розшифрування паролю до машини.

Після завантаження ключа і натискання на кнопку «Launch Instances» починається створення віртуальної машини. Тепер, якщо повернутися до початкового меню, що показує список віртуальних машин, можна побачити нову машину в стані «running», тобто така, що запущена і працює Рис.6.

Create Image

Instance ID

i-b69fab72

Image name

Image description

No reboot

☐

Instance Volumes

Volume Type	Device	Snapshot	Size (GiB)	Volume Type	IOPS	Delete on Termination	Encrypted
Root	/dev/sda1	snap-567b1408	30	General Purpose (SSD)	90 / 3000	☒	Not Encrypted

Add New Volume

Total size of EBS Volumes: 30 GiB

When you create an EBS image, an EBS snapshot will also be created for each of the above volumes.

Cancel

Create Image

Рис.7. Створення образу машини

AWS

Services

Edit

Andrii

Oregon

Support

EC2 Dashboard

Events

Tags

Reports

Limits

INSTANCES

Instances

Spot Requests

Reserved Instances

Commands

Dedicated Hosts

IMAGES

AMIs

Bundle Tasks

ELASTIC BLOCK STORE

Volumes

Snapshots

Launch

Actions

Owned by me

Filter by tags and attributes or search by keyword

	Name	AMI Name	AMI ID	Source	Owner	Visibility	Status	Creation Date	Platform
☐	New Parcs (10...		ami-210c1040	859183279164/...	859183279164	Private	available	December 10, 2015 at 6:27:...	Windows
☐	no firewall and...		ami-84bface5	859183279164/n...	859183279164	Private	available	November 27, 2015 at 11:41:...	Windows

Select an AMI above

Рис.8. Відображення нового образу

Машині надається публічні DNS і IP-адреса. Для того, щоб працювати з новою віртуальною машиною, необхідно до неї підключитися. Для цього потрібно обрати машину і натиснути на кнопку «Connect». Після Натиснувши кнопку «Get Password», з'явиться діалог для отримання паролю до машини. Для цього потрібно використати завантажений на попередніх кроках ключ. Варто зазначити, що якщо машина була створена з власного образу, то пароль на неї буде такий же, як і на машину, з образу якої вона була створена. Отриманий пароль потрібно використати для підключення до машини через Remote Desktop Protocol (RDP).

Для цього потрібно завантажити файл підключення через Remote Desktop, натиснувши кнопку «Download Remote Desktop File». Відкривши цей файл, потрібно ввести отриманий пароль. Після цього за допомогою захищеного RDP- з'єднання почнеться сеанс роботи з віртуальною машиною, з якою можна працювати так само, як і зі звичайною машиною.

Також важливо вміти створювати образи машин. Для цього потрібно натиснути правою кнопкою на потрібну машину, обрати пункт «Image» і «Create Image». В діалозі, що з'явиться, можна ввести ім'я образу та інші деталі Рис.7.

Після цього і натиснення на кнопку «Create Image», почнеться створення образу. Коли образ створиться, він з'явиться в меню «АМІ» під вкладкою «Images» Рис.8.

Створити нову машину на основі образу можна за допомогою кнопки «Launch» на вкладці «АМІ», або, як описано вище, обравши створений образ у якості образу нової машини.

Таким чином, було описано основні засоби налаштування WEB-сервісу Amazon Elastic Compute Cloud (EC2).

Використання системи ПАРКС.NET на Amazon Elastic Compute Cloud

Для використання системи ПАРКС.NET на Amazon Elastic Compute Cloud необхідно виконати наступні кроки:

1. Створити віртуальну машину і скопіювати на неї файли ПАРКС.NET. Також є сенс додати в автоматичний запуск програму *Daemon* для того, щоб не запускати її окремо на кожній машині, яка буде брати участь в обчисленнях.
2. Створити образ цієї машини.
3. Створити достатню кількість (у безкоштовній версії максимальна кількість – 20 машин) віртуальних машин на основі образу (інакше потрібно копіювати необхідні для роботи системи файли на кожен машину).
4. Запустити *Daemon* на всіх машинах, які будуть брати участь в обчисленнях.
5. Запустити *HostServer* на машині, яка буде відповідати за диспетчеризацію завдань.
6. Прописати в файлі *hosts.txt*, що лежить в одній директорії з *HostServer*, IP-адреси машин, на яких запущено *Daemon*. Це можуть бути як приватні, так і публічні IP-адреси. У випадку, якщо алгоритмічний модуль (АМ), який буде

запускатися на системі, розташований не на одній зі створених віртуальних машин, потрібно використати публічні IP-адресу. Якщо АМ знаходиться на одній з цих машин, то можливо є сенс використовувати приватні IP-адреси, оскільки вони не змінюються після кожного перезапуску машини.

7. У файлі *server.txt*, що знаходиться в одній директорії з АМ, прописати IP-адресу *HostServer*.

Після виконання цих кроків можна запускати алгоритмічні модулі, які будуть обчислюватися з використанням системи.

Тестування системи ПАРКС.NET на Amazon Elastic Compute Cloud

Для тестування роботи системи був реалізований класичний алгоритм множення матриць. Обчислення проводились на Amazon Elastic Compute Cloud з використанням до 16 віртуальних машин типу «*Burstable Performance Instances*» з мінімальною потужністю - *Intel Xeon* процесор з одним ядром і частотою до 3.3GHz. Особливістю даного типу машини є те, що Amazon EC2 надає таким машинам базовий рівень продуктивності, а також можливість «вибухати» в моменти великої завантаженості на період часу, пов'язаний з часом перебування незайнятою. Результати наведені в таблиці 1.

Результати показують, що зі збільшенням кількості машин досягнуто покращення в часі до 9 разів. Також результати множення на великих матрицях показують, що даний тип машин не дуже підходить для великих обчислень через свою неможливість працювати на повній потужності протягом довгого часу. Для цього існують інші типи машин, що не доступні в безкоштовній версії.

Таблиця 1

Час (с.) множення матриць для різної кількості машин (процесорів)

Матриці Машини	1000x1000	2000x2000	4000x4000	10000x10000
1	15.1	118.6	1098.5	-
2	8.2	61.5	571	-
4	4.7	39.2	330.5	-
8	3.5	20.6	180.7	8119.9
16	-	14.1	132.7	2635.3

Висновки

В даній роботі була представлена система для паралельних розподілених обчислень на комп'ютерній мережі *ПАРКС.NET*, а також можливість її використання для хмарних обчислень. Було показано, як налаштовувати систему *ПАРКС.NET* для хмарних обчислень із застосуванням сервісу Amazon Elastic Compute Cloud та проведено тестування системи на класичній задачі множення матриць. При виконанні обчислень на *Amazon Elastic Compute Cloud* із застосуванням 16 віртуальних машин було досягнуто покращення в часі в 8-9 разів. При збільшенні розмірності обчислень маємо збільшення ефективності застосування системи *ПАРКС.NET*, що на практиці дає досить непоганий результат.

Результати роботи можуть бути використаними при створенні різноманітних хмарних обчислювальних комплексів. Поєднання даних технологій може застосовуватися для розв'язування широкого класу задач, що потребують паралельної розподіленої обробки. На цьому роботі над вдосконаленням систем не завершується.

Як варіант безкоштовного використання хмарних обчислень у тестовому варіанті (більш ніж 20 обчислювальних вузлів) можливо використати підключення до *Amazon EC2* багатьох користувачів та застосування системи *ПАРКС.NET* для керування розподіленими паралельними обчисленнями.

Список використаних джерел

1. Анисимов А.В. Особенности ПАРУС-технологии /Анисимов А.В., Кулябко П.П. // Кибернетика и системный анализ. – 1993. – №3. – С.128-137.
2. Анисимов А.В. Система ПАРУС-JAVA для параллельных вычислений на компьютерных сетях / Анисимов А.В., Деревянченко О.В. // Кибернетика и системный анализ. – 2005. – №1. – С.25-36
3. Деревянченко О.В. Моделирование параллельных программ за допомогою системи ПАРКС-JAVA // Наукові записки НаУКМА, Комп'ютерні науки. – 2005. – С.47-58.
4. Анисимов А.В. Паралельне програмування із застосуванням технології ПАРКС-JAVA / Анисимов А.В., Деревянченко О.В. // К.: ТОВ «Компанія ВАІТЕ». – 2013. – 78с.
5. Рихтер Дж. CLR via C#. Программирование на платформе Microsoft .NET Framework 4.0 на языке C#. 3-е изд. // СПб.: Питер, 2012. –928 с.
6. Деревянченко О.В. Система паралельних обчислень на комп'ютерній мережі ПАРКС-.NET / Деревянченко О.В., Хавро А.Ю. // Матеріали СКІТ'14. – 2014. – С.118-119.
7. Деревянченко О.В. Системи паралельних обчислень на комп'ютерній мережі на базі технології ПАРКС // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка Серія фізико-математичні науки. – 2014. – №2. – С. 124-127.
8. Amazon Elastic Compute Cloud веб-сервіс // Ел. ресурс, режим доступу: <http://aws.amazon.com>

References

1. ANISIMOV A.V., KULYABKO P.P. (1993) Features PARCS-technology, Cybernetics and Systems Analysis # 3, pp. 128-137.
2. ANISIMOV A.V., DEREVIANCHENKO A.V. (2005) The System PARCS-JAVA for Parallel Computations on Computer Networks, Cybernetics and Systems Analysis # 1, pp. 25-36.
3. DEREVIANCHENKO O.V. (2005) Simulation of parallel programs using the system PARCS-JAVA, Scientific notes Kyiv-Mohyla Academy, Computer Science, pp.47 -58.
4. ANISIMOV A.V., DEREVIANCHENKO O.V. (2013) Parallel programming applying the technology PARCS-JAVA, Company VAITE, 78p.
5. RICHTER J. (2010) CLR via C#, Third Edition , Microsoft Press, 896 p.
6. DEREVIANCHENKO O.V. KHAVRO A.U. (2014) The system of parallel computing in computer network PARCS-.NET, Materials ACIT '14, pp. 118-119.
7. DEREVIANCHENKO O.V. (2014) Systems of parallel computing in computer network based on PARCS-technology, Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv, Series Physics & Mathematics # 2, pp. 124-127.
8. Amazon Elastic Compute Cloud: <http://aws.amazon.com>

Надійшла до редколегії 21.12.15

УДК 004.415.52, 681.3

Жигалло А.А., студент,
Остаповська Ю.А., студентка,
Панченко Т.В., к.ф.-м.н., доц.

A.A. Zhygallo, student,
Yu.A. Ostapovska, student,
T.V. Panchenko, PhD, assoc.prof.

Доведення у IPCL коректності алгоритму Пітерсона для взаємного виключення

Peterson's Algorithm for Mutual Exclusion Correctness Proof in IPCL

Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, Україна, 01601, місто Київ,
вул. Володимирська, 64/13
e-mail: tp@infosoft.ua

Taras Shevchenko National University of Kyiv,
64/13, Volodymyrska Street, City of Kyiv, Ukraine,
01601
e-mail: tp@infosoft.ua

Доведено властивість взаємного виключення алгоритму Пітерсона для критичної секції. За програмою зафіксовано стани та переходи транзиторної системи. Середовище виконання – паралельне з по черговим переключенням зі спільною пам'яттю. Сформульовано і доведено інваріант, з якого випливає потрібна властивість. Судження проведено в рамках методу доведення властивостей програм (у тому числі – коректності) у Interleaving Parallel Compositional Languages (IPCL). Мова класу IPCL є адекватною моделлю суперкомп'ютерів з архітектурою пам'яті UMA та NUMA, апаратних архітектур симетричної багатопроцесорної обробки, операційних систем, систем управління базами даних (СУБД), централізованих сховищ даних, серверної частини програмного забезпечення клієнт-серверних комплексів тощо. Спираючись на дану та інші роботи авторів зроблено висновки щодо адекватності застосування методу для подібних задач завдяки гнучкості композиційно-номінативної платформи та його практичності і легкості застосування для реальних систем.

Ключові слова: алгоритм Пітерсона, взаємне виключення, критична секція, доведення властивостей програм, коректність програм, паралельна програма, interleaving, IPCL, композиційно-номінативні мови.

Mutual exclusion property of Peterson's Algorithm for critical section has been proved. States and transitions were fixed by the program. Runtime environment considered is interleaving concurrency with shared memory. Invariant of the program was constructed and it is proven that it keeps true over all transitions. The program property required is just implication of the invariant. All reasoning provided in terms of Method for software properties proof (including safety and correctness ones) in Interleaving Parallel Compositional Languages (IPCL). IPCL class is an adequate model for supercomputers with UMA and NUMA memory architecture, SMP-based computer hardware architectures, operating systems, database management systems (DBMS), centralized databases and data warehouses, server-side software in client-server environments, etc. Conclusions about adequacy of the Method usage for such a kind of tasks (thanks to flexibility of composition-nominative platform) and its practicality as well as ease of use for real-world systems have been made based on this and other authors' works.

Key Words: Peterson's algorithm, mutual exclusion, critical section, software properties proof, software correctness, concurrent program, interleaving, IPCL, composition-nominative languages.

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Буй Д.Б.

Introduction

Almost every day while operating on up-to-date computers or working with modern software

products we have to deal with systems which are based on shared memory concurrency [1]. Those are supercomputers with UMA and NUMA memory architecture, SMP-based computer hardware

architectures, operating systems, database management systems (DBMS), centralized databases and data warehouses, server-side software in client-server environments, etc. At the same time, it is noticeable that a current situation with hardware, specifically CPU, implies increasing the number of processor cores in order to raise computational capacity which leads to the development of software parallelization. Therefore, the problem of program verification is still acute and open to debate. Especially it concerns the necessity to prove the correctness of safety-critical systems whose failure or malfunction may result in death or serious injury to people, loss or severe damage to equipment/property, environmental harm. [1]

In this particular work the partial correctness (the safety) of Peterson's algorithm will be proven with a help of Method for program properties proof in IPCL. Paterson's algorithm is a concurrent programming [2] algorithm for mutual exclusion (i.e. no two concurrent processes are in their critical section at the same time [3]) that allows two processes to share a single-use resource without conflict, using only shared memory for communication.

We will do the reasoning based on Interleaving Parallel Composition Language (IPCL) [4] – the class of compositional [5-7] languages, which provide an adequate model for interleaving concurrency with shared memory [8]. We will also use the Method for software properties proof in IPCL (including safety and correctness ones) [8].

Although there is a broad range of approaches to handle this issue most of them have remarkable disadvantages in terms of using them on practice as they are too complicated or too theorized. Moreover, some of them are not applicable for coping with real tasks in general. For instance, without specifying the details, original Owicki-Gries method [9] requires the quadratic number of verifications relating to the program operators amount. While the extended version of the rely-guarantee Owicki-Gries method [10] needs the implementation of additional variables as well as non-evident formulating of rely- and guarantee- conditions in order to tackle this task. In TLA [11] (Temporal Logic of Actions) Lamport offers to construct a model which is not much easier than two previous ones. Moreover, TLA is characterized with a big difference between the program and its proving formula. In such a way

Interleaving Parallel Composition Language (IPCL) [4] might be one of the most efficient solutions. While IPCL is up to solve the verification problem of the parallel software it describes the so-called serializability mechanism. Though ultimately, we will work with sequential processes which steps will be interrupted by parallel running programs in an unpredictable way.

IPCL Syntax

The syntax of such languages is defined as follows:

$$\begin{aligned} P ::= & P1;P2 \mid \\ & \text{if } b \text{ then } P1 \text{ else } P2 \mid \\ & \text{while } b \text{ do } P \mid \\ & x := e \mid \\ & P1 \parallel P2, \end{aligned}$$

where $x := e$ is an atomic, vector assigning and $P1 \parallel P2$ implies interleaving parallelism.

IPCL Semantics

Let us define compositional semantics of IPCL. The semantics of the first three compositions is standard while semantics of interleaving parallelism is defined through its arguments semantics and syntactic context in traditional way with its algebraic and semantic properties. An Index-parameter of the semantics function is a syntactic context - piece of the program or the program itself. So:

Semantics of “;”:

$$sem_{A;B}(d) = d \nabla' sem_A(d) \nabla' sem_B(d \nabla' sem_A(d))$$

where ∇' – component-wise superposition of Cartesian product of nominative data:

$$d_1 \nabla' d_2 = (Pr_1(d_1) \nabla Pr_1(d_2), Pr_2(d_1) \nabla Pr_2(d_2))$$

$Pr_i(d)$ is a projection of the Cartesian product d by the i -th component, $d_1, d_2 \in D \times D$,

This small modification is due to the fact that data is considered as two-component one – such that contains "global" and "local" parts and ∇ – is a simple operation of the data superposition (two nominal or nominative sets) in accordance with [5-7] here.

Semantics of “:=”:

$$sem_{x:=e}(d) = d \nabla' f(d),$$

where $f \in \text{Oper}$ – is a (semantic) function, which complies with syntactic operator $x := e$. An assignment (the result of f) provides two-component result, as global and local data are evaluated, and superposition is occurring to the relevant components of d data: global variables – to the first component, local variables – to the second; x and e are the vectors of names and values (expressions) respectively,

semantics of “if”:

$$\begin{aligned} \text{sem}_{\text{if } b \text{ then } P \text{ else } Q}(d) &= \text{sem}_P(d), \text{ iff } b(d) = \text{True}, \\ \text{sem}_{\text{if } b \text{ then } P \text{ else } Q}(d) &= \text{sem}_Q(d), \text{ iff } b(d) = \text{False}, \end{aligned}$$

semantics of “while”:

$$\begin{aligned} \text{sem}_{\text{while } b \text{ do } P}(d) &= \text{sem}_P; \text{ while } b \text{ do } P(d), \text{ iff } b(d) = \text{True}, \\ \text{sem}_{\text{while } b \text{ do } P}(d) &= d, \text{ iff } b(d) = \text{False}, \end{aligned}$$

semantics of “||”:

|| is associative and commutative:

$$\begin{aligned} \text{sem}_{(A \parallel B) \parallel C}(d) &= \text{sem}_{A \parallel (B \parallel C)}(d) \\ \text{sem}_{A \parallel B}(d) &= \text{sem}_{B \parallel A}(d) \end{aligned}$$

on the syntactic level it means respectively:

$$\begin{aligned} ((A \parallel B) \parallel C)(d) &= (A \parallel (B \parallel C))(d) \\ (A \parallel B)(d) &= (B \parallel A)(d) \end{aligned}$$

|| relatively to “if”:

$$\begin{aligned} \text{sem}_{\text{if } b \text{ then } P \text{ else } Q \parallel R}(d) &= \text{sem}_{P \parallel R}(d), \text{ iff } b(d) = \text{True}, \\ \text{sem}_{\text{if } b \text{ then } P \text{ else } Q \parallel R}(d) &= \text{sem}_{Q \parallel R}(d), \text{ iff } b(d) = \text{False}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{sem}_{\text{if } b \text{ then } P \text{ else } Q; P' \parallel R}(d) &= \text{sem}_{P; P' \parallel R}(d), \\ \text{iff } b(d) &= \text{True}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{sem}_{\text{if } b \text{ then } P \text{ else } Q; P' \parallel R}(d) &= \text{sem}_{Q; P' \parallel R}(d), \\ \text{iff } b(d) &= \text{False}, \end{aligned}$$

|| relatively to “while”:

$$\begin{aligned} \text{sem}_{\text{while } b \text{ do } P \parallel R}(d) &= \text{sem}_{P; \text{ while } b \text{ do } P \parallel R}(d), \\ \text{iff } b(d) &= \text{True}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{sem}_{\text{while } b \text{ do } P \parallel R}(d) &= \text{sem}_R(d), \\ \text{iff } b(d) &= \text{False}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{sem}_{\text{while } b \text{ do } P; P' \parallel R}(d) &= \text{sem}_{P; \text{ while } b \text{ do } P; P' \parallel R}(d), \\ \text{iff } b(d) &= \text{True}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{sem}_{\text{while } b \text{ do } P; P' \parallel R}(d) &= \text{sem}_{P' \parallel R}(d), \\ \text{iff } b(d) &= \text{False}, \end{aligned}$$

|| relatively to “;”:

$$\begin{aligned} \text{sem}_{(A; B) \parallel P}(d) &= \text{sem}_{A; (B \parallel P)}(d), \\ \text{sem}_{A \parallel P}(d) &= \text{sem}_{A; P}(d), \end{aligned}$$

where $A, B, C, P, P', Q, R \in \text{Terms}$ – programs in IPCL (terms in IPCL Algebra), b is a syntax notation

of an appropriate condition of the predicate pred from Pred that is $b(d) = \text{sem}_b(d) = \text{pred}(d)$ and $d \in D \times D$.

In all the above definitions if the value of $b(d)$ is undefined then the value of the left side of the relevant equality will also be undefined. Similarly, if any of the definitions of the right side of equality is undefined then the value of the left side is undefined.

F is a set of functions for the data conversion, C is the compositions over functions from F . $F = \text{Oper} \cup \text{Pred}$, where $\text{Oper} = D \times D \rightarrow D \times D$ and $\text{Pred} = D \times D \rightarrow \{\text{True}, \text{False}\}$, where the first occurrence of D to the Cartesian product is “global data” while the second is “local data” for the current process; functions which return values from the set $\{\text{True}, \text{False}\}$ (predicates) do not change the current state (i.e. does not have “side effect”) of data $D \times D$ – they are used as conditions in branching and cycle operators; $D = ND(V, W)$ in the usual sense (as simple nominative data [5-7]).

The specific IPCL class language is formed by fixing F .

The functions from F are atomic transactions which are indivisible in the sense of parallelism – their execution cannot be interrupted. Thus, the conditions in compositions are also atomic.

Peterson’s algorithm notation in IPCL

The problem statement of this work is to provide a formal proof of mutual exclusion criteria for Peterson’s Algorithm. This states the safety property of the algorithm.

The main idea of the Peterson’s algorithm uses three variables, flag1 , flag2 and turn . flag1 or flag2 value of 1 indicates that the process n wants to enter the critical section. Entrance to the critical section is granted for process $T1$ if $T2$ does not want to enter its critical section or if $T2$ has given priority to $T1$ by setting turn to 1, and also entrance to the critical section is granted for process $T2$ if $T1$ does not want to enter its critical section or if $T1$ has given priority to $T2$ by setting turn to 2.

Despite the fact that this algorithm is widely common and might seem obvious from the first view, it has complicated correctness proof using known methods.

According to the method for program’s properties correctness proof [1,4,8] the sources of $T1$ and $T2$ programs with labels will have the form:

```

T1≡ [M11] flag1:=1;
[M12] turn:=2;
while [M13] (flag2 = 1 && turn = 2) do
    skip;
[M14] r:=do_critical_operations();
//critical section
[M15] flag1:=0;[M16]

T2≡ [M21] flag2:=1;
[M22] turn:=1;
while [M23] (flag1 = 1 && turn = 1) do
    skip;
[M24] r:=do_critical_operations();
//critical section
[M25] flag2:=0;[M26]

```

In this work while-cycle condition (for instance in T1 program: $flag2 = 1 \ \&\& \ turn = 1$) is considered as an atomic operation while we may as well use the method dividing this process into three independent stages, like:

```

varflag2 = flag2;
varturn = turn;
while(varflag2 = 1 && varturn = 1) do
    begin
        varflag2 = flag2;
        varturn = turn;
    end;

```

This case could be researched as separate question in further works.

The whole program system will have the following structure:

program = T1||T2.

States and Transitions

The state of this program will be as follows:

$State = (S_1, S_2, [flag1 \mapsto f_1, flag2 \mapsto f_2, turn \mapsto t], d_1, d_2),$

where $S_1 \in \{M11, M12, M13, M14, M15, M16\}$ – labels of T1; $S_2 \in \{M21, M22, M23, M24, M25, M26\}$ – labels of T2; $[flag1 \mapsto f_1, flag2 \mapsto f_2, turn \mapsto t]$ – global data; d_1 and d_2 are the local data of T1 and T2 respectively. States will denote the set of all possible states.

The transition system will have the following scheme of transitions:

$Transitions = \{S_1 \rightarrow S_2 \mid S_1, S_2 \in States \wedge (Tr_{11}(S_1, S_2) \vee Tr_{12}(S_1, S_2) \vee Tr_{13}(S_1, S_2) \vee$

$Tr_{14}(S_1, S_2) \vee Tr_{15}(S_1, S_2) \vee Tr_{16}(S_1, S_2) \vee Tr_{21}(S_1, S_2) \vee Tr_{22}(S_1, S_2) \vee Tr_{23}(S_1, S_2) \vee Tr_{24}(S_1, S_2) \vee Tr_{25}(S_1, S_2) \vee Tr_{26}(S_1, S_2)\},$

where each predicate Tr_{ij} $i = 1:2, j = 1:6$ describes the possible program step between states.

For program T1 we have 6 different steps:

1. Move **M11** → **M12** (assigning variable $flag1$ to 1):

$Tr_{11}(S_1, S_2) = (Pr_1(S_1) = M11) \wedge (Pr_1(S_2) = M12) \wedge (Pr_2(S_1) = Pr_2(S_2)) \wedge (Pr_3(S_1) = d) \wedge (Pr_3(S_2) = d \vee [flag1 \mapsto 1]) \wedge (Pr_4(S_1) = Pr_4(S_2)) \wedge (Pr_5(S_1) = Pr_5(S_2))$

2. Move **M12** → **M13** (assigning variable $turn$ to 1):

$Tr_{12}(S_1, S_2) = (Pr_1(S_1) = M12) \wedge (Pr_1(S_2) = M13) \wedge (Pr_2(S_1) = Pr_2(S_2)) \wedge (Pr_3(S_1) = d) \wedge (Pr_3(S_2) = d \vee [turn \mapsto 2]) \wedge (Pr_4(S_1) = Pr_4(S_2)) \wedge (Pr_5(S_1) = Pr_5(S_2))$

3. Move **M13** → **M13** (true value of while-cycle condition):

$Tr_{13}(S_1, S_2) = (Pr_1(S_1) = M13) \wedge (Pr_1(S_2) = M13) \wedge (Pr_2(S_1) = Pr_2(S_2)) \wedge (Pr_3(S_1) = Pr_3(S_2) = [flag1 \mapsto f_1, flag2 \mapsto f_2, turn \mapsto t]) \wedge (Pr_4(S_1) = Pr_4(S_2)) \wedge (Pr_5(S_1) = Pr_5(S_2)) \wedge (f_2 = 1) \wedge (t = 2)$

4. Move **M13** → **M14** (false value of while-cycle condition):

$Tr_{14}(S_1, S_2) = (Pr_1(S_1) = M13) \wedge (Pr_1(S_2) = M14) \wedge (Pr_2(S_1) = Pr_2(S_2)) \wedge (Pr_3(S_1) = Pr_3(S_2) = [flag1 \mapsto f_1, flag2 \mapsto f_2, turn \mapsto t]) \wedge (Pr_4(S_1) = Pr_4(S_2)) \wedge (Pr_5(S_1) = Pr_5(S_2)) \wedge (f_2 \neq 1 \vee t \neq 2)$

5. Move **M14** → **M15** (execution of the critical section as ‘atomic’ operation):

$Tr_{15}(S_1, S_2) = (Pr_1(S_1) = M14) \wedge (Pr_1(S_2) = M15) \wedge (Pr_2(S_1) = Pr_2(S_2)) \wedge (Pr_3(S_1) = Pr_3(S_2)) \wedge (Pr_4(S_1) = d_1) \wedge (Pr_4(S_2) = func_1(d_1)) \wedge (Pr_5(S_1) = Pr_5(S_2))$

6. Move **M15** → **M16** (assigning variable $flag1$ to 0):

$Tr_{16}(S_1, S_2) = (Pr_1(S_1) = M15) \wedge (Pr_1(S_2) = M16) \wedge (Pr_2(S_1) = Pr_2(S_2)) \wedge (Pr_3(S_1) = d) \wedge (Pr_3(S_2) = d \vee [flag1 \mapsto 0]) \wedge (Pr_4(S_1) = Pr_4(S_2)) \wedge (Pr_5(S_1) = Pr_5(S_2))$

Similar transitions could be fixed for program T2.

The set of the fixed Starting states will have the following structure:

$StartStates = \{S \in States \mid Pr_1(S) = M11 \wedge Pr_2(S) = M21\}$

Final states are:

$$\begin{aligned} FinalStates &= \{S \in States \mid \\ Pr_1(S) &= \mathbf{M16} \wedge Pr_2(S) = \mathbf{M26}\} \end{aligned}$$

Invariant and the proof

In these terms the mutual exclusion condition for the algorithm, that no two concurrent processes are in their critical section at the same time, can be formulated as:

$$\neg (Pr_1(S) \in \{\mathbf{M14}, \mathbf{M15}\} \wedge Pr_2(S) \in \{\mathbf{M24}, \mathbf{M25}\})$$

which have to be proven.

The invariant of *program* system is:

$$Inv(S) = I_1(S) \wedge I_2(S) \wedge I_3(S) \wedge I_4(S),$$

where

$$\begin{aligned} I_1(S) &= Pr_1(S) \in \{\mathbf{M12}, \mathbf{M13}, \mathbf{M14}, \mathbf{M15}\} \rightarrow \\ &flag1 \Rightarrow (Pr_3(S)) = 1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_2(S) &= Pr_1(S) \in \{\mathbf{M14}, \mathbf{M15}\} \rightarrow \\ &(Pr_2(S) \notin \{\mathbf{M24}, \mathbf{M25}\} \wedge \\ &Pr_2(S) = \mathbf{M23} \rightarrow turn \Rightarrow (Pr_3(S)) = 1), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_3(S) &= Pr_2(S) \in \{\mathbf{M22}, \mathbf{M23}, \mathbf{M24}, \mathbf{M25}\} \rightarrow \\ &flag2 \Rightarrow (Pr_3(S)) = 1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_4(S) &= Pr_2(S) \in \{\mathbf{M24}, \mathbf{M25}\} \rightarrow \\ &(Pr_1(S) \notin \{\mathbf{M14}, \mathbf{M15}\} \wedge \\ &Pr_1(S) = \mathbf{M13} \rightarrow turn \Rightarrow (Pr_3(S)) = 2) \end{aligned}$$

The idea of invariant $Inv(S)$ is clear and follows from the definition of critical section. If $T1$ is located previously to while-cycle $\{\mathbf{M12}, \mathbf{M13}\}$ or is inside its critical section $\{\mathbf{M14}, \mathbf{M15}\}$, then $flag1 = 1$, namely it wants to enter critical section (getting access to the resource). If $T1$ “goes through” while-cycle $\{\mathbf{M14}, \mathbf{M15}\}$, that means it come out of the cycle (entrance to critical section and getting access to the resource), then the other process ($T2$) is outside critical section (i.e. not in $\{\mathbf{M24}, \mathbf{M25}\}$), and

also if $T2$ is located previously to critical section $\{\mathbf{M23}\}$ – then it has not access, because it is $T1$'s turn to entrance now: $turn = 1$.

The proof that invariant holds true over all transitions is rather technical and will not be presented here.

It is obvious, that $Inv(S)$ implies that

$$\begin{aligned} Pr_1(S) \in \{\mathbf{M14}, \mathbf{M15}\} &\rightarrow Pr_2(S) \notin \{\mathbf{M24}, \mathbf{M25}\} \wedge \\ Pr_2(S) \in \{\mathbf{M24}, \mathbf{M25}\} &\rightarrow Pr_1(S) \notin \{\mathbf{M14}, \mathbf{M15}\} \end{aligned}$$

which is equal to:

$$\neg (Pr_1(S) \in \{\mathbf{M14}, \mathbf{M15}\} \wedge Pr_2(S) \in \{\mathbf{M24}, \mathbf{M25}\})$$

namely, the mutual exclusion condition: for any state S it is not possible to appear in critical section (marks $\mathbf{M14}, \mathbf{M15}$ for $T1$ and marks $\mathbf{M24}, \mathbf{M25}$ for $T2$) for both processes ($T1$ and $T2$) at the same time.

Conclusion

In this paper we proved mutual exclusion property of well-known Peterson's Algorithm for critical section. It states that no two concurrent processes are in their critical section at the same time. Namely, we have:

- 1) noted the algorithm in IPCL terms,
- 2) provided semantics in terms of states and transitions,
- 3) formulated and proved invariant of the program as well as required condition.

In this way we prove what has been stated at the start – as a consequence of invariant, that it is not possible to appear in critical section for both processes ($T1$ and $T2$) at the same time in Peterson's algorithm for mutual exclusion.

We can conclude that Method for program properties proof in IPCL provides an appropriate technique for software correctness proof in terms of safety properties. The same conclusion is obtained in [12] also.

Список використаних джерел

1. Панченко Т.В. Композиційні методи специфікації та верифікації програмних систем. Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук.: 01.05.03 / Т.В. Панченко. - Київ, 2006. - 177 с.

References

1. PANCHENKO, T. (2006) *Compositional Methods for Software Systems Specification and Verification* (PhD Thesis), Kyiv, 177 p.

2. Tanenbaum A.S. Modern operating systems, 3Ed. / A.S. Tanenbaum. – Upper Saddle River, NJ: Pearson Prentice Hall, 2008. – 1104 p.
3. Peterson G.L. Myths About the Mutual Exclusion Problem / G.L. Peterson // Information Processing Letters. – 1981. – 12 (3). – P.115–116.
4. Панченко Т.В. Методологія доведення властивостей програм в композиційних мовах IPCL / Т.В. Панченко // Доповіді Міжнародної конференції “Теоретичні та прикладні аспекти побудови програмних систем” (ТАAPSD’2004). – К., 2004. – С.62–67.
5. Редько В.Н. Композиции программ и композиционное программирование / В.Н. Редько // Программирование. – 1978. – № 5. – С.3–24.
6. Редько В.Н. Основания композиционного программирования / В.Н. Редько // Программирование. – 1979. – № 3. – С.3–13.
7. Nikitchenko N. A Composition Nominative Approach to Program Semantics / N. Nikitchenko. – Technical Report IT-TR: 1998-020. – Technical University of Denmark, 1998. – 103 p.
8. Панченко Т.В. Метод доведення властивостей програм в композиційно-номінативних мовах IPCL / Т.В. Панченко // Проблеми програмування. – 2008. – №1. – С.3–16.
9. Owicki S. An Axiomatic Proof Technique for Parallel Programs / S. Owicki, D. Gries // Acta Informatica. – 1976. – Vol. 6, № 4. – P.319–340.
10. Xu Q. The Rely-Guarantee Method for Verifying Shared Variable Concurrent Programs / Q. Xu, W.-P. de Roever, J. He // Formal Aspects of Computing. – 1997. – Vol. 9, № 2. – P.149–174.
11. Lamport L. Verification and Specification of Concurrent Programs / L. Lamport // deBakker J., deRoever W., Rozenberg G. (eds.) A Decade of Concurrency, Vol. 803. – Berlin: Springer-Verlag, 1993. – P.347–374.
12. Polishchuk N.V. Safety Property Proof using Correctness Proof Methodology in IPCL / N.V. Polishchuk, M.O. Kartavov, T.V. Panchenko // Theoretical and Applied Aspects of Cybernetics. Proceedings of the 5th International Scientific Conference of Students and Young Scientists. – K.: Bukrek, 2015. – P.37–44.
2. TANENBAUM, A.S. (2008) *Modern operating systems*, 3Ed. Upper Saddle River, NJ: Pearson Prentice Hall, 1104 p.
3. PETERSON, G.L. (1981) Myths About the Mutual Exclusion Problem. *Information Processing Letters*, 12(3), pp.115–116.
4. PANCHENKO, T. (2004) The Methodology for Program Properties Proof in Compositional Languages IPCL. In *Proceedings of the International Conference "Theoretical and Applied Aspects of Program Systems Development" (TAAPSD'2004)*, Kyiv, pp.62–67.
5. REDKO, V. (1978) Compositions of Programs and Composition Programming. *Programming*, 5, pp.3–24.
6. REDKO, V. (1979) Foundation of Composition Programming. *Programming*, 3, pp.3–13.
7. NIKITCHENKO, N. (1998) *A Composition Nominative Approach to Program Semantics*. Technical Report IT-TR: 1998-020. Technical University of Denmark. 103 p.
8. PANCHENKO, T. (2008) The Method for Program Properties Proof in Compositional Nominative Languages IPCL. *Problems of Programming*. 1. pp.3–16.
9. OWICKI, S. and GRIES, D. (1976) An Axiomatic Proof Technique for Parallel Programs. *Acta Informatica*, Vol. 6, № 4, pp.319–340.
10. XU, Q., de ROEVER, W.-P. and HE, J. (1997) The Rely-Guarantee Method for Verifying Shared Variable Concurrent Programs. *Formal Aspects of Computing*, Vol. 9, № 2, pp.149–174.
11. LAMPORT, L. (1993) Verification and Specification of Concurrent Programs. *A Decade of Concurrency*, deBakker J., deRoever W., Rozenberg G. (eds.), Berlin: Springer-Verlag, Vol. 803, pp.347–374.
12. POLISHCHUK, N.V., KARTAVOV, M.O. and PANCHENKO, T.V. (2015) Safety Property Proof using Correctness Proof Methodology in IPCL. *Theoretical and Applied Aspects of Cybernetics. Proceedings of the 5th International Scientific Conference of Students and Young Scientists*, Kyiv: Bukrek, pp.37–44.

Надійшла до редколегії 10.09.2015

УДК 519.72

І.О. Завадський, к. ф.-м. н., доцент

Швидкий табличний метод декодування мультироздільникових кодів

Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, пр-т.
Глушкова 4д, e-mail: zava@ukr.net

Igor O. Zavadskyi, Associate Professor, Ph. D.

Fast tabular decoding method for multi- delimiter codes

Taras Shevchenko National University of Kyiv,
03680, Kyiv, Glushkova av., 4d

Описано метод декодування для родини префіксних стискальних кодів, що мають кілька роздільників. Метод базується на побайтовій обробці коду за допомогою таблиць, що визначені на стадії передобчислень. Метод є ефективнішим за аналогічний метод для відомих кодів Фібоначчі як за ємнісними, так і за часовими витратами.

Ключові слова: стискальні коди, мультироздільникові коди, декодування, табличний метод.

This article presents the further investigation of multi-delimiter compressing codes introduced in one of the previous issues of Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. The distinctive feature of this family is the use of multiple codeword delimiters in the same code. The conventional bitwise encoding and decoding algorithms are considered. The fast byte-wise decoding algorithm is presented in details for one representative of multi-delimiter codes family. This algorithm utilizes the pre-computed table, which allows to process one byte of encoded text at each iteration. This table serves as two-dimensional array, where bytes of encoded text are indices and element values are represented by the words of the source text that can be obtained from the encoded byte. The time and space complexity of algorithm is assessed and compared with the complexity of similar algorithm for known Fibonacci code Fib3. The space consumption of our algorithm is 3.7 times less than for the Fib3 one and time complexity is 20% lower.

Key words: compression codes, multi-delimiter, decoding, tabular method.

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Анісімов А.В.

Вступ

У роботі [1] було вперше розглянуто родину стискальних префіксних кодів, основною відмінною рисою яких є можливість розділення кодових слів за допомогою кількох спеціальних послідовностей бітів. Це так звані (Δ, k) -коди, або мультироздільникові коди. Представник цієї родини кодів позначається як $C_{m_1, \dots, m_t}$. Цей код містить усі слова, що задовольняють таким умовам:

- слово не починається з послідовності 1...10, що містить m_1 або m_2 або... або m_t одиниць;
- слово закінчується послідовністю 01...10, що містить m_1 або m_2 або... або m_t одиниць;
- слово не містить послідовності 01...10 із m_1 або m_2 або... або m_t одиницями ніде, крім кінця.

Тут і надалі ми припускаємо, що $0 < m_1 < \dots < m_t$.

У [1] доведено такі важливі властивості мультироздільникових кодів, як повноту та універсальність. Цю роботу ми присвяtimo розробці алгоритмів кодування та декодування зазначених кодів. Спочатку буде наведено алгоритми, що опрацьовують вхідні числа або кодові слова біт за бітом. Такі алгоритми є досить неефективними за обчислювальними витратами, оскільки складність обробки машинного слова (як правило, 4- чи 8-байтового) не вища за складність обробки одного біта, тож опрацьовувати інформацію біт за бітом недоцільно.

Потім ми наведемо значно швидший метод декодування, що дає змогу обробляти за одну ітерацію один байт закодованого тексту. Подібний підхід застосовувався у [2] для відомих кодів Фібоначчі, що були введені в [3]. Однак запропонований нами метод має нижчі як часові, так і ємнісні витрати.

Стандартне кодування та декодування

На вхід кодувального алгоритму надходить натуральне число x , двійковий вигляд якого – $x_n x_{n-1} \dots x_0$, а на виході отримуємо відповідне слово з коду $C_{m_1, \dots, m_t}$. Нехай $J = \{j_1, j_2, \dots\}$ – така нескінченна зростаюча послідовність натуральних чисел, що j_1 – найменше число, яке не належить множині $\{m_1, \dots, m_t\}$, а j_i – таке найменше число, що $j_i > j_{i-1}$ і $j_i \notin \{m_1, \dots, m_t\}$. Стандартний алгоритм кодування є таким:

- 1) $x \leftarrow x - 2^n$, тобто видаляємо найстарший біт числа x , який завжди дорівнює 1.
- 2) Якщо $x=0$, до рядка $x_{n-1} \dots x_0$, який містить лише нулі або є порожнім, дописуємо справа послідовність $1 \dots 10$, що містить m_1 одиниць. Шукане кодове слово має вигляд $x_{n-1} \dots x_0 1 \dots 10$. Кінець алгоритму.
- 3) Якщо двійкове подання x набуває вигляду рядка $1 \dots 10$ або $0 \dots 01 \dots 10$ із m_2 або ... або m_t одиницями, шукане кодове число – це $x_{n-1} \dots x_0$. Кінець алгоритму.
- 4) Замінюємо кожну бітову послідовність вигляду $01 \dots 10$, що містить d одиниць і розташована не в кінці слова, послідовністю $01 \dots 10$, що містить j_d одиниць.
- 5) Якщо кінець слова – це рядок вигляду $01 \dots 10$ із m_1 одиницями, замінюємо його рядком подібної структури $01 \dots 10$, що містить j_{m_1} одиниць.
- 6) Якщо слово починається з послідовності $1 \dots 10$, що містить d одиниць, замінюємо її послідовністю подібної структури $1 \dots 10$, що містить j_d одиниць.
- 7) Якщо слово закінчується послідовністю $01 \dots 10$, яка містить m_2 або ... або m_t одиниць, це шукане слово. Кінець алгоритму.
- 8) Допишемо до слова справа рядок $01 \dots 10$, що містить m_1 одиниць.

Згідно з цим алгоритмом, якщо $x - 2^n \neq 0$, роздільник $01 \dots 10$ із m_1 одиницями дописується штучно і тому має бути видалений під час декодування, а роздільники вигляду $01 \dots 10$ із m_2 або ... або m_t одиницями є інформативними частинами кодових слів і тому під час декодування повинні оброблятися. Якщо ж $x - 2^n = 0$, останні $m+1$ бітів вигляду $1 \dots 10$ мають бути видалені.

Далі описано стандартний алгоритм декодування, на вхід якого подається кодове

слово, а на виході отримуємо відповідне йому число.

- 1) Якщо кодове число має вигляд $0 \dots 01 \dots 10$ або $1 \dots 10$ і містить m_1 одиниць, видаляємо останні m_1+1 бітів і переходимо на крок 5.
- 2) Якщо число закінчується послідовністю $01 \dots 10$, яка містить m_1 одиниць, видаляємо останні m_1+2 бітів.
- 3) Замінюємо кожну послідовність вигляду $01 \dots 10$ із $j_d \in J$ одиницями послідовністю подібного вигляду $01 \dots 10$, що містить d одиниць.
- 4) Якщо слово починається з рядка $1 \dots 10$ із $j_d \in J$ одиницями, замінюємо його подібним рядком $1 \dots 10$, що містить d одиниць.
- 5) Допишемо символ "1" до початку числа.

Прискорене побайтове декодування

Стандартні кодувальний та декодувальний алгоритми обробляють біт за бітом, а тому є достатньо повільними. У разі обробки неперервного потоку закодованого тексту їх можна значно прискорити, застосувавши побайтові табличні методи, основна ідея яких подібна до описаної в [2], [4], [5] для кодів Фібоначчі.

Оскільки декодування виконується в режимі реального часу частіше, ніж кодування, і в цілому триває довше, прискорення декодування є важливішою задачею, на якій ми і зосередимо увагу далі. На кожній ітерації у побайтовому методі декодування зчитується ціле число байтів закодованого тексту, і з таблиці, подібної до табл. 1, відразу визначаються всі числа, які можна отримати в результаті декодування цих байтів. У табл. 1 ці числа наведено без старших одиничних бітів і позначено як w_1, w_2, w_3 , а їхні довжини – як $|w_1|, |w_2|, |w_3|$. Можливо, на певних ітераціях вдасться отримати не повний двійковий запис останнього з цих чисел, а лише його старші біти. «Прапорці» f_i вказують, чи повністю декодовано число w_i . Крім того, певну кількість наймолодших бітів у байтах, що обробляються на певній ітерації, можливо, не вдасться декодувати однозначно (оскільки для цього потрібно знати початок наступної порції байтів), або не потрібно обробляти внаслідок особливостей алгоритму. Такі біти позначено через s . Значення цих бітів впливають на спосіб декодування наступної порції байтів. Тому табл. 1 можна розглядати як сукупність двовимірних масивів з індексами s_{prev} (біти, які на попередній ітерації не були оброблені) та u

(чергова порція байтів закодованого тексту). Ці індекси записано в перших двох стовпцях таблиці, а всі інші стовпці містять значення елементів двовимірних масивів.

Для прикладу дослідимо детально побайтовий метод декодування коду C_2 , що на кожній ітерації обробляє по одному байту. Заголовок табл. 1 відповідає саме цьому методу, оскільки, за невеликим винятком, в одному байті може вміститися щонайбільше 3 повних чи неповних кодових слова C_2 . Це легко побачити з огляду на те, що найкоротше кодове слово C_2 має вигляд 110. Єдиний варіант, коли

байт може охоплювати повністю чи частково чотири кодових слова, – це 0110110x, де x – довільний останній біт. Тут перший біт відповідає останньому біту коду w_1 , потім записано коди w_2 і w_3 – двічі 110, а останній біт – це перший біт коду четвертого числа, який можна віднести до необробленого залишку s і обмежитись, таким чином, трьома результуючими числами. Під заголовком у табл. 1 записано зверху вниз ті рядки, що використовуються для декодування тексту 11000111 01101011 11001011 11101101 10011000.

Таблиця 1. Таблиця для побайтового методу декодування коду C_2

s_{prev}	u	w_1	$ w_1 $	f_1	w_2	$ w_2 $	f_2	w_3	$ w_3 $	f_3	s
	11000111		0	1	0011	4	0				1
1	01101011		0	1	1	1	0				011
011	11001011	0111001	7	0							011
011	11101101	01111	5	1		0	0				1
1	10011000		0	1	0	1	1	00	2	0	

На рис. 1 проілюстровано декодування останнього байта з наведеного прикладу.

s_{prev}	поточний байт						
...	1	1	0	0	1	1	0
	$w_1=(1)$			$w_2=(1)0$			w_3

Рис. 1. Декодування байта 10011000

Визначимо множину можливих значень величини s . Насамперед зробимо такі зауваження.

- Якщо до складу байта входить повністю деяка (Δ, k) -група, то вона може бути декодована однозначно незалежно від вмісту наступного байта, а отже, її біти до складу s не входять.
- Якщо байт закінчується $p \geq 3$ одиницями поспіль, то вони декодуватимуться як $p-1$ одиниць незалежно від вмісту наступного байта. У цьому випадку рядок s складатиметься з одного останнього одиничного біта, який під час декодування наступного байта слугуватиме ознакою того, що попередній байт не закінчився нулем.
- Рядок 10 або міститься в кінці (Δ, k) -групи, або кодує значення Δ . В обох випадках його можна декодувати незалежно від вмісту наступного байта: у першому випадку він декодуватиметься разом із (Δ, k) -групою, до складу якої

входить, а в другому декодуватиметься як 10.

З першого із цих трьох тверджень випливає, що послідовність s не може містити двох нулів поспіль, адже така ситуація можлива лише якщо ці два нулі складають повну (Δ, k) -групу (тоді її біти не ввійдуть у s) або якщо перший "0" – це кінець однієї (Δ, k) -групи, а другий "0" – початок наступної (у такому разі в s ввійде тільки другий нуль). З другого і третього тверджень безпосередньо випливає, що послідовність s не може містити трьох одиниць поспіль та рядка 10. Таким чином, отримуємо всього 6 можливих значень s : порожній рядок, 0, 1, 01, 11, 011.

Тепер покажемо, що будь-який рядок табл. 1 може бути «запаковано» в одне 32-розрядне машинне слово. Усі можливі значення s пронумеруємо двійковими числами від 0 до 5, а отже, для зберігання будь-якого такого значення буде достатньо трьох бітів. Зауважимо, що якщо певний прапорець f_i є нульовим (це означає, що слово w_i декодовано не повністю), то слова $w_{i+1}, w_{i+2}, \dots$, як і прапорці $f_{i+1}, f_{i+2}, \dots$, можна не розглядати, адже код w_i поширюватиметься до початку рядка s або до правої межі байта. Позначивши ті значення f_i , які можна не враховувати, нулями, отримаємо такі можливі комбінації значень прапорців (f_1, f_2, f_3) : 000, 100 та 11x, де x – довільне двійкове значення. Для кожного з цих випадків опишемо свій спосіб пакування рядка табл. 1 у чотирибайтове слово (рис. 2), однак за будь-якого способу значення

(f_1, f_2, f_3) записуватимемо в 3 найстарші біти, а значення $w_1, |w_1|, w_2, |w_2|$ (якщо ϵ), $w_3, |w_3|$ (якщо ϵ) та s – від наймолодшого біта до старших, у зазначеній послідовності.

$(f_1, f_2, f_3)=000$. У цьому випадку значення w_1 займатиме не більше 10 бітів. Дійсно, якщо $s_{prev}=011$ і $f_1=0$, то найстарший біт байта u не може бути нулем, оскільки інакше склалася б послідовність 0110, яка означає кінець кодового слова і $f_1=1$. Якщо всі біти u одиничні, то останній біт відноситься до s , а довжина декодованого значення w_1 становить $3+7=10$ бітів. Якщо u містить нульовий біт, то під час декодування w_1 оброблятиметься послідовність вигляду 01...10 із $p \geq 3$ одиницями, якій відповідатиме на один біт коротший фрагмент коду w_1 , а отже, загальна бітова довжина w_1 не перевищуватиме $3+8-1=10$ бітів. Якщо ж значення s містить менше трьох бітів, то довжина w_1 , очевидно, не може бути більшою за $8+2=10$ бітів. Таким чином, у випадку $(f_1, f_2, f_3)=000$ для зберігання величини $|w_1|$ достатньо чотирьох бітів, а загалом пакування рядка табл. 1 у чотирибайтове слово виглядає так, як на рис. 2а.

$(f_1, f_2, f_3)=100$. У цьому випадку, якщо $s_{prev} \in \{0, 01, 011\}$, то конкатенація рядків s_{prev} та u повинна містити роздільник 0110. Те саме справедливо і в тому випадку, якщо $s_{prev} \in \{1, 11\}$ і роздільник міститься не на початку конкатенації s_{prev} та u . Значення w_1 буде найдовшим, якщо цей роздільник зсунуто до правої межі байта. Оскільки роздільник під час декодування не враховується, значення w_1 буде отримано в результаті декодування щонайбільше 7 бітів, а з міркувань, викладених для випадку $(f_1, f_2, f_3)=000$, найбільша можлива довжина w_1 буде на одиницю меншою, тобто $|w_1| \leq 6$ і для зберігання значення $|w_1|$ достатньо трьох бітів. Якщо ж s_{prev} – порожній рядок чи

$s_{prev}=0$, то роздільником для w_1 може бути й рядок 110, але нерівність $|w_1| \leq 6$ у цьому разі є очевидною.

У випадку $(f_1, f_2, f_3)=100$ потрібно також зберігати значення w_2 . Оскільки код w_1 займає принаймні один біт байта u , для коду w_2 залишається не більше 7 бітів, що потребує 3 біти для значення $|w_2|$ і в цілому приводить до такого пакування, як на рис. 2б.

$(f_1, f_2, f_3)=11x$. У цьому випадку код w_1 задовольняє тим самим обмеженням, що й у випадку $(f_1, f_2, f_3)=100$, а код w_2 , загальна довжина якого не перевищує 7 бітів, повинен також містити роздільник із не менш ніж трьох бітів. Таким чином, для значення w_2 достатньо чотирьох бітів, для $|w_2|$ – трьох. Оскільки код w_1 займає принаймні один біт байта u , а найкоротший код w_2 – це 110, довжина закодованого й декодованого значення w_3 не більша чотирьох, $|w_3| \leq 3$, і в цілому маємо таке пакування, як на рис. 2в.

Тепер детально опишемо побайтовий алгоритм декодування для коду C_2 . Через $x \ll c$ позначатимемо операцію зсуву значення x вліво, а через $x \gg c$ – зсуву вправо на c бітів (зсув нециклічний, а нові біти заповнюються нулями). Символом «&» позначатиметься операція побітового «і», а символом «|» – побітового «або». Через $text_i$ позначатимемо черговий байт закодованого тексту, через r – запакований у чотирибайтове слово рядок табл. 1, у змінній w формуватиметься декодоване число як конкатенація рядків w_1, w_2 чи w_3 , а у змінній len зберігатимуться довжини цих рядків. Спочатку значення w складається з одного одиничного біта, потім воно зсувається вліво, а праві біти замінюються значеннями w_1, w_2 або w_3 (з відповідних ділянок слова r) і, таким чином, найстарший біт w завжди залишається одиничним.

```
i ← 1;
s ← 0;
w ← 1;
```

```
while (не досягнуто кінця тексту) {
    r ← TAB[s][texti];
    if(r & 0x80000000) {
        len ← (r >> 6) & 0x7;
        output (w << len) | (r & 0x3f);

        w ← 1;
        if(x & 0x40000000) {
```

```
// номер байта закодованого тексту
// спочатку s – порожній рядок
// ця “1” буде найстаршим бітом
// декодованого числа
```

```
// зчитуємо 4-байтовий рядок табл. 1
// якщо f1 = 1
// len ← |w1|
// декодоване число: w із дописаними
// справа 6 наймолодшими бітами r
```

```
// якщо f2 = 1
```

```

len ← (r >> 13)&0x7;           // len ← |w2|
output (w << len)((r >> 9)&0xf); // декодоване число: 1w2
w ← 1;
len ← (r >> 20)&0x7;           // len ← |w3|
if(r&0x20000000) {             // якщо f3 = 1
    output (w << len)((r >> 16)&0xf); // декодоване число: 1w3
    w ← 1;
} else                          // (f1, f2, f3)=110
    w ← (w << len)((r >> 16)&0xf); // w ← 1w3
s ← (r >> 23)&0x7;              // s у бітах 24–26
} else {                       // (f1, f2)=10
    len ← (r >> 16)&0x7;         // len ← |w2|
    w ← (w << len)((r >> 9)&0xf); // w ← 1w3
    s ← (r >> 19)&7;            // s у бітах 20–22
}
} else {                       // якщо f1 = 0
    len ← (r >> 10)&0xf;         // len ← |w1|
    w ← (w << len)((r&0x3ff);    // дописуємо до w справа w1
    s ← (r >> 14)&0x7;          // s у бітах 15–17
}
i ← i+1;                       // переходимо до наступного байту
}

```

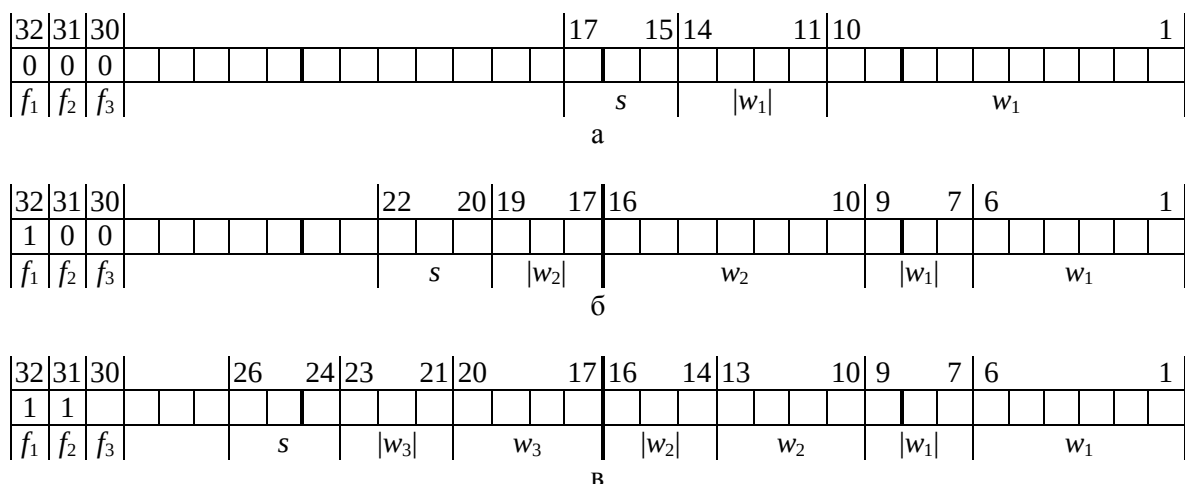


Рис. 2. Пакування рядка декодувальної таблиці у чотирибайтне машинне слово

Оцінка складності

Оцінимо ємнісну складність описаного методу. Для кожного з 6 можливих значень s_{prev} існує 256 значень u_i , а отже, табл. 1 містить $6 \times 256 = 1,5$ Кб рядків, кожен із яких займає 4 байти. Тому побайтове декодування потребує 6 Кб пам'яті. Зазначимо, що описаний у [2] найоптимальніший із побайтових методів декодування для коду Фібоначчі Fib3 (який, у свою чергу, є найефективнішим серед кодів Фібоначчі в застосуванні до стиснення природномовних текстів) потребує 21,4 Кб

пам'яті, тобто у 3,7 разів більше, ніж наведений нами метод.

Таблиця 2. Порівняння складнісних характеристик побайтових методів декодування

	Побайтове декодування C_2	Побайтове декодування Fib3
Час	0,255 с	0,321 с
Пам'ять	6 Кб	21,4 Кб

Часову складність побайтового декодування було визначено за допомогою чисельного експеримента. Для прикладу було взято код C_2 і декодовано 20 млн. випадкових кодових слів із частотами, відповідними розподілу Зіпфа (що близький до розподілу слів у природномовних текстах) і цю процедуру повторено 100 разів. Результати експеримента наведено в табл. 2. Як видно, побайтове декодування коду C_2 приблизно на 20% швидше за найоптимальніший з методів декодування коду Фібоначчі Fib3.

Насамперед таке прискорення пов'язане з тим, що у методі декодування для коду Fib3 кожної ітерації виконується 3 читання з таблиць, що зберігаються в пам'яті, в той час як

у запропонованому нами методі – лише одне. Це найбільш затратна операція для сучасних процесорів. Решта операцій може бути виконана в регістрах процесора значно швидше.

Висновки

У статті описано швидкий метод декодування мультироздільникових кодів, що базується на обробці відразу одного чи кількох байтів закодованого тексту. Оцінено часову та ємнісну складність методу на прикладі представника сімейства мультироздільникових кодів – коду C_2 . Зазначений метод декодування виявився ефективнішим за найкращий з подібних методів для кодів Фібоначчі як за часом, так і за витратами пам'яті.

Список літератури

1. Завадський І.О. Префіксні (Δ, k) -коди / І.О. Завадський // Вісник Київського національного університету ім. Т. Шевченка. Серія: фіз.-мат. науки. – 2015. – №2. – с. 139–142.
2. Klein S.T. On the usefulness of Fibonacci compression codes / S.T. Klein, M.K. Ben-Nissan // Computer Journal. – 2010. – vol. 53, no. 6, pp. 701–716.
3. Apostolico A. Robust transmission of unbounded strings using Fibonacci representations / A. Apostolico, A. Fraenkel // IEEE Trans. on Inform. Theory. – 1987. – vol. IT-33, pp. 238–245.
4. Klein S.T. Fast decoding of Fibonacci encoded texts / S.T. Klein // Proc. of the Intern. 2007 Data Compression Conf., DCC 2007, IEEE Computer Society, p. 388, 2008.
5. Walder J. Fast Fibonacci Encoding Algorithm / J. Walder, M. Kratky, J. Platos // Proceedings of the DATESO 2010 Annual International Workshop on DATABASES, TEXTS, SPECIFICATIONS AND OBJECTS, STEDRONIN-PLAZY, CZECH REPUBLIC, April 21-23, 2010, p. 72–83.

References

1. ZAVADSKYI, I.O. (2015) Prefix (Δ, k) -codes, *Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series Physics & Mathematics*. No 2. pp. 139–142.
2. KLEIN, S.T., BEN-NISSAN, M.K. (2010) On the usefulness of Fibonacci compression codes. *Computer Journal*. vol. 53, no. 6, pp. 701–716.
3. APOSTOLICO A., FRAENKEL A. (1987) Robust transmission of unbounded strings using Fibonacci representations. *IEEE Trans. on Inform. Theory*. vol. IT-33, pp. 238–245.
4. KLEIN, S.T. (2008) Fast decoding of Fibonacci encoded texts. *Proc. of the Intern. 2007 Data Compression Conf., DCC 2007*, IEEE Computer Society, p. 388, 2008.
5. WALDER, J., KRATKY, M., PLATOS, J. (2010) Fast Fibonacci Encoding Algorithm. *Annual International Workshop on DATABASES, TEXTS, SPECIFICATIONS AND OBJECTS, STEDRONIN-PLAZY, Czech Republic*, April 21-23, 2010, p. 72–83.

Надійшла до редколегії 25.11.2015

УДК 519.6 531

Зуб С. С.¹, к.т.н.,
Зуб С. І.², с.н.с.

**Зв'язок канонічної Пуассонової та
Лі-Пуассонової структур для
гамільтонового формалізму в
кватерніонних змінних**

¹Харківський національний педагогічний
університет імені Г.С. Сковороди, 61002,
м.Харків, вул. Артема, 29,
e-mail: stah@univ.kiev.ua

²Національний науковий центр «Інститут
метрології», 61002, м.Харків, вул. Мироно-
сицька, 42,
e-mail: sergii.zub@gmail.com

S. S. Zub¹, PhD,
S. I. Zub², researcher.

**The relationship of the canonical Poisson
and Lie-Poisson structures for the
Hamiltonian formalism in the quaternion
variables**

¹H.S. Skovoroda Kharkiv National Pedagogical
University, 61002, Kharkiv, Artema str., 29,
e-mail: stah@univ.kiev.ua

²National Scientific Centre «Institute of Metrology»,
61002, Kharkiv, Myronosicka st., 42,
e-mail: sergii.zub@gmail.com

Наведено групу Лі для якої симплектична структура орбіт коприсданого представлення є симплектичною структурою динаміки твердого тіла в кватерніонних змінних. Показано, що дужки Пуассона відповідної Лі-Пуассонової структури за формою співпадають з канонічними дужками Пуассона на кодотичному розшируванні групи одиничних кватерніонів.

Ключові слова: кватерніон, дужки Пуассона, Лі-Пуассона, симплектична структура Кириллова-Константа-Сур'є.

We proposed Lie group that symplectic structure of the orbits of its coadjoint representation is the symplectic structure of the rigid body dynamics in the quaternions variables. It is shown that the Poisson brackets of the corresponding Lie-Poisson structures coincide with the canonical Poisson brackets on the cotangent bundle of the group of unit quaternions. We specified the relationship of symplectic structure of Kirillov-Kostant-Souriau on the coadjoint orbits of the group with the canonical symplectic structure on the cotangent bundles of the spheres in 4-dimensional space of quaternions with the standard metric. The approach of study of orbits that proposed similar to the consideration of the orbits of the coadjoint representation of the group $SE(3)$. In view of the fact that in this investigation of Lie-Poisson structure has only one Casimir function, there are two, not three types of orbits. In this case the orbit of the 1-st type are completely analogous. The orbits of the 2-nd type have a different dimension, but in many respects similar to the orbits of the 2-nd type. For the orbits of the 3-d type that have the additional magnetic member in the form of Kirillov-Kostant-Souriau, then such orbits do not occur for the study group.

Key Words: quaternion, Poisson and Lie-Poisson brackets, symplectic structure of Kirillov-Kostant-Souriau.

Статтю представив д.т.н. Кудін В.І.

1. Вступ

Застосуванню кватерніонів в механіці твердого тіла присвячено величезну кількість публікацій. Переважна більшість з них стосується кінематики твердого тіла, тобто

опису орієнтації твердого тіла в просторі за допомогою кватерніонних параметрів [1], і лише невелика кількість робіт присвячена динамічним аспектам застосування кватерніонів.

В роботі В.В. Козлова [2] дано лагранжевий опис динаміки твердого тіла на основі класичного підходу, що був розвинений Пуанкаре. Виходячи з глибоких зв'язків між алгеброю кватерніонів та групами $SO(3)$ і $SO(4)$, А.В. Борисов та І.С. Мамаїв [3-5] запропонували вирази для дужок Пуассона між параметрами кватерніона та компонентами власного моменту імпульсу тіла, розглядаючи їх як твірні деякої структури Лі-Пуассона, що пов'язана з групою $SO(4)$. Також відзначено зв'язок із стандартним гамільтоновим формалізмом на $T^*(S^3)$.

В нашій роботі [6] кватерніонні параметри розглядаються як динамічні змінні в гамільтоновій динаміці твердого тіла. Таким чином дужки Пуассона, що отримані в [3-5] є просто деякою підмножиною в алгебрі Лі дужок Пуассона для динамічних змінних твердого тіла. Їх єдиною специфікою при такому розгляді є добре відома двозначність цих змінних.

В роботі [7] показано, що дужки Пуассона кватерніонних змінних відповідають канонічній симплектичній структурі [8,9] на кодотичному розшаруванні групи одиничних кватерніонів. Тим самим в одній математичній моделі об'єднуються дві математичні структури, що запропоновані В. Гамільтоном, а саме алгебра кватерніонів та гамільтонів формалізм.

В роботі [10] розглянуті геометричні та алгебраїчні аспекти гамільтонового формалізму для твердого тіла в кватерніонних змінних, а також його застосування до опису динаміки малого асиметричного магнітного тіла (диполя) в постійному зовнішньому магнітному полі.

В роботах [6,7,10] кватерніонні дужки Пуассона розглядаються як канонічні, що відповідають формі Ліувілля на $T^*(SO(3))$, $T^*(SE(3))$ і $T^*(S^3)$. З другого боку очевидно, що ці дужки є лінійними за змінними, тобто мають вид дужок Лі-Пуассона, що є провідною ідеєю в піонерських роботах [3-5]. Виникає питання про зв'язок цих двох аспектів.

В даній роботі пропонується група Лі для якої симплектична структура орбіт копрієданного представлення є симплектичною структурою динаміки твердого тіла в кватерніонних змінних. Вказується зв'язок симплектичної структури Кириллова-Константа-Сур'є (ККС) на орбітах копрієданного представлення даної групи з канонічною симплектичною структурою на

кодотичних розшаруваннях сфер в 4-х вимірному просторі кватерніонів із стандартною метрикою.

Запропонований підхід щодо дослідження орбіт аналогічний розгляду орбіт копрієданного представлення групи $SE(3)$ [11-12]. Так як в досліджуваній нижче Лі-Пуассон-овій структурі є лише одна функція Казимира, існує два, а не три типи орбіт. При цьому орбіти 1-го типу повністю аналогічні. Орбіти 2-го типу мають іншу розмірність, але багато в чому подібні до орбіт 2-го типу [11]. Щодо орбіт 3-го типу, що характеризуються наявністю додаткового магнітного членом у формі Кириллова- Константа-Сур'є, то подібні орбіти не виникають для досліджуваної групи.

2. Алгебра Лі, що асоційована з кватерніонними дужками Пуассона

Як відомо, положення твердого тіла, що обертається навколо центру мас може бути описано кватерніоном $q = q^0 e_0 + q^1 e_1 + q^2 e_2 + q^3 e_3$ [4-6]. Власний момент обертання тіла також може бути представлено кватерніоном, а саме, чистим кватерніоном $\mu = \mu^1 e_1 + \mu^2 e_2 + \mu^3 e_3$.

Їх компоненти q^α , $\alpha = 0, \dots, 3$ і μ^i , $i = 1, \dots, 3$ можуть розглядатися як підмножина динамічних змінних гамільтонового формалізму для твердого тіла [6], що повністю описують його динаміку.

Тоді, в системі відліку, що пов'язана з тілом (в представленні лівої тривіалізації [8,7]), маємо наступні базові дужки Пуассона (ДП).

$$\begin{cases} \{\mu_i, \mu_j\} = -2\varepsilon_{ijk}\mu_k; \\ \{\mu_i, q_0\} = q_i; \\ \{\mu_i, q_j\} = -q^0\delta_{ij} - q^k\varepsilon_{ijk}; \\ \{q_\mu, q_\nu\} = 0. \end{cases} \quad (2.1)$$

Ці співвідношення можуть бути записані в бескоординатному вигляді з використанням алгебри кватерніонів [6,7] так

$$\begin{cases} \{\mu, \langle \mu, \xi \rangle\} = ad_\xi^*[\mu] = 2\mu \times \xi; \\ \{q, \langle \mu, \xi \rangle\} = q\xi = L_q\xi; \\ \{\langle q, a \rangle, \langle q, b \rangle\} = 0, \end{cases} \quad (2.2)$$

де ξ - фіксований чистий кватерніон, a, b - фіксовані кватерніони.

Незважаючи на те, що в [6,7] ці ДП отримані як канонічні, тобто ті що відповідають канонічній симплектичній структурі на $T^*S^3(T^*SO(3))$, яка визначається формою

Ліувілля, вони мають вигляд дужок Лі-Пуассона, тобто лінійні за q, μ .

Спочатку дужки (2.1) були отримані А.В. Борисовим та І.С. Мамаєвим при дослідженні застосування алгебри Лі групи $E(4)$ [3] до завдань механіки.

Логічно поставити задачу про знаходження групи Лі, що обумовлена співвідношеннями (2.1) та безпосередньо пов'язаної зі структурою Лі-Пуассона. Зокрема, розмірність цієї групи повинна бути 7, а не 10 як в роботі [3].

Розглянемо алгебру Лі розмірності 7 з базисними елементами: ε_i , $i=1, \dots, 3$ і e_α , $\alpha=0, \dots, 3$.

Вважаючи, що лівій тривіалізації відповідають ДП зі знаком “-” (див. (13.1.1) в [11, с. 426]), отримуємо наступні базові співвідношення для алгебри Лі $g = H_0 \oplus H$ (див. нижче)

$$\begin{cases} [\varepsilon_i, \varepsilon_j] = 2\varepsilon_{ijk}\varepsilon_k; \\ [\varepsilon_i, e_0] = -e_i; \\ [\varepsilon_i, e_j] = \delta_{ij}e^0 + \varepsilon_{ijk}e^k; \\ [e_\mu, e_\nu] = 0 \end{cases} \quad (2.3)$$

Використовуючи, як і в (2.2), алгебру кватерніонів, отримаємо співвідношення еквівалентні до (2.3)

$$\begin{cases} [\xi, \eta] = 2\xi \times \eta; \\ [\xi, \nu] = -\nu\xi^3; \\ [\nu, \xi] = \nu\xi^3; \\ [\nu, \nu'] = 0; \end{cases} \quad (2.4)$$

де “ $\times$ ” - лінійний ізоморфізм $\varepsilon_i \rightarrow e_i$.

Ці ж співвідношення можуть бути записані в більш компактному вигляді

$$[\xi + \nu, \xi' + \nu'] = 2\xi \times \xi' + \nu\xi'^3 - \nu'\xi^3 \quad (2.5)$$

3. Група Лі, асоційована з кватерніонами дужками Пуассона

Введемо позначення:

H - алгебра кватерніонів;

H_0 - лінійний простір чистих кватерніонів, що є також алгеброю Лі щодо комутатора (виділяються жирним шрифтом);

H_1 - підмножина одиничних кватерніонів, тобто кватерніонів одиничної довжини, що є групою Лі з алгеброю Лі H_0 ;

$S^3 = H_1$ - сфера одиничного радіусу в H , що розглядається як 4-вимірний евклідовий простір.

Розглянемо групу G кватерніонів 2×2 матриць виду

$$G = \left\{ g = \begin{bmatrix} 1 & q \\ 0 & s \end{bmatrix} : q \in H, s \in S^3 \right\} \quad (3.1)$$

Тоді

$$gg' = \begin{bmatrix} 1 & q \\ 0 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & q' \\ 0 & s' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & q' + qs' \\ 0 & ss' \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

Для зворотнього елемента маємо

$$g^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & q \\ 0 & s \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -qs^{-1} \\ 0 & s^{-1} \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

Група Лі G є напівпрямим добутком $G = S \& H$, де група H - це векторний простір H , що розглядається як абелева група щодо додавання, а $S = S^3$.

Таким чином

$$\begin{aligned} H &= \left\{ \begin{bmatrix} 1 & q \\ 0 & e \end{bmatrix} : q \in H \right\}, \\ S &= \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} : s \in S^3 \right\}, \quad S \cap H = e \end{aligned} \quad (3.4)$$

Перш за все, підгрупа H - абелева та ізоморфна H щодо додавання

$$\begin{bmatrix} 1 & q \\ 0 & e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & q' \\ 0 & e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & q' + qe \\ 0 & e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & q' + q \\ 0 & e \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

а група S ізоморфна S^3

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & s' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & ss' \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

Для внутрішнього автоморфізму групи маємо

$$I_g(g') = gg'g^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & (q' - q + qs')s^{-1} \\ 0 & ss's^{-1} \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

Зокрема

$$H \ni h = \begin{bmatrix} 1 & p \\ 0 & e \end{bmatrix} \longrightarrow I_g(h) = \begin{bmatrix} 1 & ps^{-1} \\ 0 & e \end{bmatrix} \in H \quad (3.8)$$

Тобто H - нормальний дільник в G .

Будь-який елемент групи $g \in G$ може бути представлений у вигляді $g = sh, s \in S, h \in H$.

Дійсно

$$g = sh = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & q \\ 0 & e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & q \\ 0 & s \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

і права частина (3.9) повністю визначає s, h .

Зауваження. Було сказано, що G є напівпрямим добутком $G = S \ltimes H$. Однак, звичайне визначення ([12, с. 119], [14, с. 48]) відрізняється від нашого. Звичайний напівпрямий добуток можна назвати *лівим*, а даний - *правим*.

4. Алгебра Лі групи G і приєднане представлення

Те, що група G є матричною (хоча і з некомутуючими елементами), спрощує знаходження приєданого представлення та дужки Лі.

Вочевидь, алгебра Лі $\mathfrak{g}$ даної групи G утворена матрицями виду

$$\mathfrak{g} = \left\{ \nu = \begin{bmatrix} 0 & \nu \\ 0 & \xi \end{bmatrix} : \nu \in H, \xi \in H_0 \right\} \quad (4.1)$$

Наступні позначення будемо вважати еквівалентними

$$\nu = \begin{bmatrix} 0 & \nu \\ 0 & \xi \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} \nu \\ \xi \end{bmatrix} \cong (\nu, \xi) \cong \nu + \xi \quad (4.2)$$

Розглянемо оператор приєданого представлення групи G Ad .

Він може бути знайдений диференціюванням по аргументу $I_g(g')$ в дужках (3.7) при $q' = 0, s' = e$, а також, враховуючи матричну структуру групи, матричним автоморфізмом, що застосований до елементів (4.1).

$$\text{Ad}_{(q,s)}[(\nu, \xi)] = \begin{bmatrix} 0 & (\nu + q\xi)s^{-1} \\ 0 & s\xi s^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & (\nu + q\xi)s^{\dagger} \\ 0 & s\xi s^{\dagger} \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

Оператор ad тепер може бути знайдений диференціюванням по (q, s) при $(q, s) = (0, e)$

$$\text{ad}_{(\nu, \xi)} \begin{bmatrix} \nu' \\ \xi' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \nu\xi' - \nu'\xi \\ \xi\xi' - \xi'\xi \end{bmatrix} = \nu\xi' - \nu'\xi \quad (4.4)$$

що узгоджується з (5).

Отже, групу Лі G , що нас цікавить знайдено.

5. Коприєднане представлення групи G

В алгебрі Лі $\mathfrak{g}$ можна ввести скалярний добуток за формулою

$$\begin{aligned} \langle \nu, \nu' \rangle &= \frac{1}{2} \text{tr}(\nu\nu' + \nu'\nu) = \\ \frac{1}{2}(\nu\nu'^{\dagger} + \nu'\nu^{\dagger} + \xi\xi'^{\dagger} + \xi'\xi^{\dagger}) &= \langle \xi, \xi' \rangle + \langle \nu, \nu' \rangle \end{aligned} \quad (5.1)$$

Зауваження 1. Скалярний добуток (5.1) дозволяє ототожнити векторні простори $\mathfrak{g}$ та $\mathfrak{g}^*$.

Для кватерніонного скалярного добутку справедливі співвідношення

$$\begin{cases} \langle a, qb \rangle = \langle q^{\dagger}a, b \rangle, & q \in H; \\ \langle a, bq \rangle = \langle aq^{\dagger}, b \rangle, & q \in H. \end{cases} \quad \text{ю. /} \quad (5.2)$$

Використовуючи визначення (5.1) та властивості (5.2) знайдемо оператор, що спряжений до оператора Ad (4.3) відносно до скалярного добутку (5.1).

$$\text{Ad}_{(q,s)}^* \begin{bmatrix} \pi \\ \mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \pi s^{\dagger} \\ s \left(\mu - \frac{1}{2} (q^{\dagger} \pi - \pi^{\dagger} q) \right) s^{\dagger} \end{bmatrix} \quad (5.3)$$

або

$$\text{Ad}_{(q,s)}^* \begin{bmatrix} \pi \\ \mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \pi s^{\dagger} \\ s \left(\mu - q^{\dagger} \pi - s^{\dagger} \langle q, \pi \rangle \right) \end{bmatrix} \quad (5.4)$$

де $(\pi, \mu) \in \mathfrak{g}^*$ (позначення (4.2), зауваження 1).

6. Орбіти кодотичного представлення групи

Давайте дослідимо орбіти коприєданого представлення групи G .

Нехай $|\pi| = 0^{\text{TM}} \quad \pi = 0$.

Тоді з формул (21) або (22) маємо

$$\text{Ad}_{g^{-1}}^* \begin{bmatrix} 0 \\ \mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ s\mu s^{\dagger} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ S[\mu] \end{bmatrix} \quad (6.1)$$

де S - ортогональне перетворення 3-вимірного евклідового простору (обертання) [6] та орбіти дифеоморфні сферам $S_{|\mu|}^2$.

Розглянемо основний випадок: $\rho = |\pi| \neq 0$.

Покажемо, що $\begin{bmatrix} |\pi| e_0 \\ 0 \end{bmatrix}$ належить орбіті $\begin{bmatrix} \pi \\ \mu \end{bmatrix}$.

□

Возьмем

$$s_0 = \frac{\pi}{|\pi|}, \quad q_0 = -|\pi|^{-2} \pi \mu \quad (6.2)$$

тоді $\pi s_0^\dagger = |\pi| e_0$ та

$$\begin{aligned} \langle q_0, \pi \rangle &= -|\pi|^{-2} \langle \pi \mu, \pi \rangle = \\ &= -|\pi|^{-2} \langle \mu, \pi^\dagger \pi \rangle = -\langle \mu, e_0 \rangle = 0 \end{aligned} \quad (6.3)$$

а також

$$q_0^\dagger = |\pi|^{-2} \mu \pi^\dagger \longrightarrow q_0^\dagger \pi = \mu \quad (6.4)$$

За (5.4) отримуємо

$$\text{Ad}_{(q_0, s_0)}^* \begin{bmatrix} \pi \\ \mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |\pi| e_0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6.5)$$

■

Застосовуючи (6.1) та враховуючи $\mathfrak{I}(q^\dagger) = -q$, отримуємо довільну точку орбіти у вигляді

$$\text{Ad}_{(q, s)}^* \begin{bmatrix} \rho e_0 \\ 0 \end{bmatrix} = \rho \begin{bmatrix} s^\dagger \\ sqs^\dagger \end{bmatrix} \quad (6.6)$$

Це, зокрема, означає, що довільну точку орбіти можна отримати діючи на фіксовану точку $(\rho e_0, 0)$ підмножиною елементів групи виду (q, s) , тобто обмежуючись лише чистими кватерніонами.

$$\text{Ad}_{(q, s)}^* \begin{bmatrix} \rho e_0 \\ 0 \end{bmatrix} = \rho \begin{bmatrix} s^\dagger \\ sqs^\dagger \end{bmatrix} \quad (6.7)$$

Таким чином, вище доведено наступне твердження:

Пропозиція 1. Орбіти копрієданого представлення групи G можуть бути двох типів:

1) Орбіти точки $(0, re_3)$, $r \geq 0$, які дифеоморфні 2-вимірним сферам S_r^2 , r - радіус сфери;

2) Орбіти O_c точки $(se_0, 0)$, $s > 0$, які дифеоморфні $S_c^3 \times H_0$, де S_c^3 3-вимірна сфера радіуса c .

7. Симплектична структура на орбітах копрієданого представлення

Як і для будь-якої групи Лі, на орбітах копрієданого представлення групи G існує симплектична 2-форма Кириллова-Константа-Сур'є (ККС).

Для фіксованого елемента алгебри Лі $v = (v, \xi) \in \mathfrak{g}$ в кожній точці (π, μ) орбіти визначено значення векторного поля $v_{g^*}((\pi, \mu))$, що є інфінітезимальним генератором копрієданної дії групи $v_{g^*}((\pi, \mu)) \in G$ [11, с. 371].

Використовуючи формулу (14.2.5) з [11, с. 467] і диференціюючи (5.4), отримуємо

$$\begin{aligned} v_{g^*}((\pi, \mu)) &= -\text{ad}_{(v, \xi)}^* \begin{bmatrix} \pi \\ \mu \end{bmatrix} = \\ &= - \begin{bmatrix} \pi \xi \\ \text{ad}_{\xi}^*[\mu] + (v^\dagger \pi - \langle \pi, v \rangle) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (7.1)$$

Тоді симплектична 2-форма ККС визначається виразом (14.3.1) з [11, с. 469]

$$\begin{aligned} \omega_{(\pi, \mu)}(v_{g^*}, v'_{g^*}) &= -\langle (\pi, \mu), [v, v'] \rangle \\ &= -\langle (\pi, \mu), (v\xi' - v'\xi, [\xi, \xi']) \rangle = \\ &= -\langle \pi, v\xi' - v'\xi \rangle - \langle \mu, [\xi, \xi'] \rangle \end{aligned} \quad (7.2)$$

За визначенням будь-яка симплектична 2-форма є замкнутою. За теоремою Дарбу кожна така 2-форма є локально точною, тобто є зовнішнім диференціалом деякої 1-форми.

Однак, ні в загальному випадку, ні в разі ККС ці форми не зобов'язані бути глобально точними. Проте, для орбіт 2-го типу (тобто $|\pi| \neq 0$) форма (7.2) є точною.

А саме: розглянемо наступний вираз для 1-форми θ

$$\theta_{(\pi, \mu)}(v_{g^*}((\pi, \mu))) = -\langle \mu, \xi \rangle, \quad v = (v, \xi) \quad (7.3)$$

Форма θ при $|\pi| \neq 0$ визначена коректно, так як з (7.1) видно

$$v_{g^*} = v'_{g^*} \longrightarrow \xi = \xi' \longrightarrow \langle \mu, \xi \rangle = \langle \mu, \xi' \rangle$$

Скористаємося відомим співвідношенням для зовнішнього диференціала 1-форми

$$\begin{aligned} d\theta_{(\pi, \mu)}(v_{g^*}, v'_{g^*}) &= \\ &= \partial_{v_{g^*}} \theta(v'_{g^*}) - \partial_{v'_{g^*}} \theta(v_{g^*}) - \theta([v_{g^*}, v'_{g^*}]) \end{aligned} \quad (7.4)$$

Для інфінітезимальних генераторів виконується співвідношення (11.1.5) з [11, с. 372]

$$[v_{g^*}, v'_{g^*}] = -[v, v']_{g^*} \quad (7.5)$$

Враховуючи (7.5) і те, що скалярні та чисті кватерніони ортогональні, з (7.3) та (7.4) маємо

$$\begin{aligned} d\theta_{(\pi, \mu)}(v_{g^*}, v'_{g^*}) &= -\partial_{v_{g^*}} \langle \mu, \xi' \rangle + \partial_{v'_{g^*}} \langle \mu, \xi \rangle - \langle \mu, [\xi, \xi'] \rangle = \\ &= \langle \text{ad}_{\xi}^*[\mu] + (v^\dagger \pi - \langle \pi, v \rangle), \xi' \rangle \\ &\quad - \langle \text{ad}_{\xi'}^*[\mu] + (v'^\dagger \pi - \langle \pi, v' \rangle), \xi \rangle - \langle \mu, [\xi, \xi'] \rangle \\ &= \langle \text{ad}_{\xi}^*[\mu] + v^\dagger \pi, \xi' \rangle - \langle \text{ad}_{\xi'}^*[\mu] + v'^\dagger \pi, \xi \rangle - \langle \mu, [\xi, \xi'] \rangle \\ &= \langle \text{ad}_{\xi}^*[\mu], \xi' \rangle + \langle v^\dagger \pi, \xi' \rangle - \langle \text{ad}_{\xi'}^*[\mu], \xi \rangle - \langle v'^\dagger \pi, \xi \rangle - \langle \mu, [\xi, \xi'] \rangle \\ &= \langle \mu, \text{ad}_{\xi}[\xi'] \rangle + \langle \pi, v\xi' \rangle - \langle \mu, \text{ad}_{\xi'}[\xi] \rangle - \langle \pi, v'\xi \rangle - \langle \mu, [\xi, \xi'] \rangle \\ &= \langle \mu, [\xi, \xi'] \rangle - \langle \pi, v'\xi \rangle + \langle \pi, v\xi' \rangle \end{aligned}$$

тобто

$$\begin{aligned} -d\theta_{(\pi,\mu)}(v_{g^*}, v'_{g^*}) = \\ -\langle (\pi, \mu), (v\xi' + v'\xi, [\xi, \xi']) \rangle = \\ \omega_{(\pi,\mu)}(v_{g^*}, v'_{g^*}) \end{aligned} \quad (7.6)$$

Таким чином, вище було доведено наступне твердження:

Пропозиція 2. На орбітах копрієданого представлення групи G 2-го типу (тобто $|\pi| \neq 0$) 2-форма ККС є точною, тобто існує форма θ така, що $\omega = -d\theta$, де ω та θ даються виразами (7.2) і (7.3).

8. Орбіта 2-го типу копрієданого представлення групи G симплектично ізоморфна $T^*(S_c^3)$

Пропозиція 1 встановлює дифеоморфізм орбіти 2-го типу копрієданого представлення групи G прямому добутку $S_\rho^3 \times \mathfrak{H}^3$.

Як показано в [7], кодотичне розшарування $T^*(S^3)$ ($S^3 = S_1^3$) має вигляд прямого добутку $S^3 \times H_0$ в представленні лівої (правої) тривіалізації.

Сфера S_c^3 на відміну від S^3 не є групою щодо кватерніонного множення, проте тривіалізація $T^*(S_c^3)$ може бути виконана аналогічним чином.

Визначимо ізоморфізм розшарувань φ

$$\varphi : S_c^3 \times H_0 \mapsto T^*(S_c^3) \quad (8.1)$$

таким чином, щоб φ було симплектичним дифеоморфізмом.

Нехай дотичний вектор τ до орбіти копрієданого представлення в точці (π, μ) має вигляд $\tau = -\pi\xi$ (див. (7.1)).

Визначимо елемент $T_\pi^*(S_c^3)$ є $\alpha = \varphi(\pi, \mu)$ так, щоб $\langle \alpha, \tau \rangle = \langle \mu, \xi \rangle, \forall \xi \in \mathfrak{g}$.

Тоді у відповідності до визначення форми Ліувілля Θ на кодотичному розшаруванні (6.2.1) [11, с.163] та (7.3) маємо

$$\theta = \varphi^* \Theta \quad (8.2)$$

Таким чином, має місце наступне твердження:

Пропозиція 3. Симплектична структура на орбіті 2-го типу O_c копрієданого представлення групи G симплектично

дифеоморфна до канонічної симплектичної структури на кодотичному розшаруванні $T^*(S_c^3)$.

Необхідно зробити кілька зауважень, що пояснюють сенс виведеної вище еквівалентності різних за побудовою пуассонових структур.

Спочатку кватерніоні ДП (2.1) були отримані в межах дослідження структури Лі-Пуассона групи $SE(4)$ [3], де вони є деякою підмножиною ДП в цій структурі.

В даній роботі знайдено групу Лі, структура Лі-Пуассона якої безпосередньо відповідає даним ДП (2.1).

У попередніх роботах [6,7,10] ті ж самі ДП були отримані як канонічні ДП гамільтонової механіки твердого тіла.

Кватерніоні змінні q в співвідношеннях (2.1) мають сенс групових параметрів, що визначають положення твердого тіла (формула Родріга-Гамільтона), при цьому на ці параметри накладено зв'язок $|q| = 1^{\text{TM}}$ $q \in S_1^3 = S^3$.

Пропозиція 3 встановлює математичну еквівалентність структури Лі-Пуассона та канонічної пуассонівської структури на $T^*(S^3)$. При цьому вихідні групові кватерніоні змінні q замінюються в структурі Лі-Пуассона на кватерніоні змінні $\pi \in \mathfrak{g}^*$. Якщо відштовхуватися від сутності даного підходу то обмеження $|\pi| = 1$ немає. Змінні q та π , отже, мають різний геометричний та механічний зміст.

Таким чином, безпосередній механічний сенс для динаміки твердого тіла має канонічна пуассонівська структура, що отримана в [6,7,10], тоді як структури Лі-Пуассона, що отримані в [3] і в даній роботі, являють собою альтернативні підходи до опису динаміки твердого тіла, що дають додаткові можливості для застосування теоретико-групових, або широко, алгебраїчних методів дослідження.

Зауваження. В нашій роботі виведено Гамільтонові рівняння руху для магнітної дзиги-диполя у зовнішньому магнітному полі (див. (9.2) – (9.5), [10, с.116]), які можна записати в суто алгебраїчній формі, якщо надати потенційну енергію системи та її похідні по просторовим та кватерніонним змінним в явному вигляді.

Потенційна енергія диполя в магнітному полі є

$$V(\vec{x}, q) = -\langle \vec{\mu}, \vec{B} \rangle = -|\vec{\mu}| \langle \vec{v}, \vec{B} \rangle \quad (8.3)$$

Матриця перетворення від змінних в системі тіла до змінних в інерціальній системі

$$\vec{E}_k = Q_{ik} \vec{e}_i$$

де матриця Q_{ik} має в кватерніонних змінних вигляд

$$Q_{ik} = (2q_0^2 - 1)\delta_{ik} + 2q_i q_k - 2q_0 q_j \epsilon_{jik}$$

Вектори $\vec{E}_k$ – напрямні орти головних осей інерції тіла. Зв'язок між компонентами N_k направляючого орта магнітного моменту в системі тіла та в інерціальній системі v_i має вигляд

$$v_i = Q_{ik} N_k \quad (8.4)$$

Тоді

$$\begin{aligned} \langle \vec{v}, \vec{B} \rangle &= v_i B^i = B^i Q_{ik} N_k \\ &= (2q_0^2 - 1)(N_i B^i) + 2(N^k q_k)(q_i B^i) \\ &\quad + 2q_0 q_j \epsilon_{jki} N^k B^i \end{aligned} \quad (8.5)$$

Виразу (8.5) можна надати інваріантний вигляд.

Припустимо, що N^k і B^i – компоненти чистих кватерніонів (хоча за геометричним змістом – це компоненти векторів в різних системах відліку). Використовуючи кватерніони, вираз (8.4) можна записати у вигляді

$$v = q N q^{-1} \quad (8.6)$$

Відповідно

$$\langle \vec{v}, \vec{B} \rangle = \langle B, q N q^{-1} \rangle = \langle B q, q N \rangle \quad (8.7)$$

Тоді повний диференціал по q має вигляд

$$\begin{aligned} d^{(q)} \langle \vec{v}, \vec{B} \rangle &= d^{(q)} \langle B q, q N \rangle \\ &= \langle B dq, q N \rangle + \langle B q, dq N \rangle \end{aligned} \quad (8.8)$$

тобто

$$d^{(q)} \langle \vec{v}, \vec{B} \rangle = \langle B e_\mu dq^\mu, q N \rangle + \langle B q, e_\mu dq^\mu N \rangle \quad (8.9)$$

Звідси

$$\frac{\partial}{\partial q^\mu} \langle \vec{v}, \vec{B} \rangle = \langle B e_\mu, q N \rangle + \langle B q, e_\mu N \rangle \quad (8.10)$$

Примітка. Для скалярного добутку кватерніонів дійсні такі вирази

$$\begin{aligned} \langle a, b \rangle &= \frac{1}{2}(ab^\dagger + ba^\dagger) \\ &= \langle a^\dagger, b^\dagger \rangle = \frac{1}{2}(a^\dagger b + b^\dagger a) \end{aligned} \quad (8.11)$$

Звідси впливають важливі властивості скалярного добутку

$$\begin{aligned} \langle qa, b \rangle &= \langle a, q^\dagger b \rangle; \\ \langle a, bq \rangle &= \langle a q^\dagger, b \rangle, \end{aligned} \quad (8.12)$$

де q, a, b – довільні кватерніони.

Тоді маємо ($B^\dagger = -B$ и $N^\dagger = -N$)

$$\begin{aligned} \nabla^{(q)} \langle \vec{v}, \vec{B} \rangle &= e_\mu \langle B e_\mu, q N \rangle + e_\mu \langle B q, e_\mu N \rangle = \\ &= -e_\mu \langle e_\mu, B q N \rangle - e_\mu \langle B q N, e_\mu \rangle = \\ &= -2e_\mu \langle e_\mu, B q N \rangle = -2B q N \end{aligned} \quad (8.13)$$

та

$$q^{-1} \nabla^{(q)} \langle \vec{v}, \vec{B} \rangle = -2(q^{-1} B q) N \quad (8.14)$$

аналогічно з (8.7), диференціюючи по $\vec{x}$, одержимо

$$\dot{p}_i = -\partial_x V = |\vec{\mu}| \langle q^{-1} N q, \partial_i B \rangle \quad (8.15)$$

Підставляючи (8.14) та (8.15) в ((12а), [13, с.43]):

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{1}{m} p; \\ \dot{p}_i = -\partial_x V; \\ \dot{q} = q \frac{\Omega}{2}, \quad q^{-1} \dot{q} = \frac{1}{2} \Omega; \\ \dot{M} = -\Im(\Omega M + q^{-1} \nabla^{(q)} V) \end{cases} \quad (8.16)$$

отримаємо рівняння руху для дзиги-диполя у суто алгебраїчній формі, як і було заявлено

де $\Im()$ – мніма частина кватерніону; x_i – координати центру мас твердого тіла, $q = (q_0, \mathbf{q})$ – одиничний кватерніон, що описує поворот від фіксованої (інерційної) системи відліку до системи відліку, що пов'язана з тілом, p_i – компоненти імпульсу тіла, M_i – компоненти моменту імпульсу в системі відліку, що пов'язана з тілом. Тут поступальні ступені свободи дано в інерціальній системі відліку, а обертальні – в системі відліку, що пов'язана з тілом, тобто в "змішаному" представленні.

Список використаних джерел

1. Whittaker E.T. A treatise on the analytical dynamics of particles and rigid bodies / E.T. Whittaker. – New York, 1944. – 432 p.
2. Козлов В.В. Симметрия, топология и резонансы в гамильтоновой механике / В.В. Козлов. – Ижевск: УдГУ, 1995. – 429 с.
3. Борисов А.В. Нелинейные скобки Пуассона и изоморфизмы в динамике / А.В. Борисов, И. С. Мамаев // Рег. и хаот. дин. – 1997. – Т.2, №3/4. – С. 72-89.
4. Борисов А.В. Пуассоновы структуры и алгебры Ли в гамильтоновой механике / А.В. Борисов, И. С. Мамаев. – Ижевск: РХД, 1999. – 464 с.
5. Борисов А. В. Динамика твердого тела / А. В. Борисов, И. С. Мамаев. — Ижевск-Москва: РХД, 2001. — 384 с.
6. Зуб С.С. Канонічна пуассонова структура на $T^*SE(3)$ в кватерніонних змінних / С.С. Зуб, С.І. Зуб // Вісник Київський національний університету – 2013. – №2. – С. 17-24.
7. Зуб С.С. Група одиничних кватерніонів S^3 і пов'язані з нею симплектична і пуассонова структури / С. С. Зуб, С. І. Зуб // Вісн.Київ.нац.унів.-2013.- №4.-С.108-113.
8. Abraham R. Foundations of mechanics / R. Abraham, J. E. Marsden. — Addison Wesley, 1978. – 848 p.
9. Зуб С.С. Группа Ли как конфигурационное пространство для простой механической системы / С. С. Зуб // Журнал обчисл. та прикл. мат. – 2013. – Т.112, №2. – С.89-99.
10. Зуб С.С. Рівняння гамильтонової динаміки твердого тіла в кватерніонних змінних. Магнітний диполь в зовнішньому полі / С. С. Зуб, С. І. Зуб // Вісник Київського нац. Унів. – 2014. – №3. – С. 20-28.
11. Marsden J. E. Introduction to mechanics and symmetry / J.E. Marsden, T.S. Ratiu. – Berlin: Springer, 1994. – 535 p.
12. Marsden J.E. Hamiltonian Reduction by Stages / J.E. Marsden, G. Misiolek, J.-P. Ortega, M. Perlmutter, T.S. Ratiu – New York: Springer, 2007. – 524 p.
13. ZUB, S.S.&ZUB, S.I. (2015) Quaternions in Hamiltonian dynamics of a rigid body - Part I. [Online]: arXiv:1508.02916.
14. Зуланке, Р. Дифференциальная геометрия и расслоения / Р.Зуланке, П. Винтген. – Москва: Мир, 1975. – 348 с.

References

1. WHITTAKER, E.T (1944) A treatise on the analytical dynamics of particles and rigid bodies. New York: Camb. Univ. Press.
2. KOZLOV, V.V. (1995) Simmetriya, topologiya i rezonansy v gamiltonovoj mexanike. Izhevsk: UdGU.
3. BORISOV, A.V. & MAMAEV, I.S. (1997) Non-linear Poisson brackets and isomorphisms in dynamics. Reg.Ch.Dyn.
4. BORISOV, A.V. & MAMAEV, I.S. (1999) Poisson Structures and Lie Algebras in Hamiltonian Mechanics. Reg.Ch.Dyn.
5. BORISOV, A.V. & MAMAEV, I.S. (2001) Rigid body dynamics. Reg.Ch.Dyn.
6. ZUB, S.S. & ZUB, S.I. (2013) Canonical Poisson structure on $T^*SE(3)$ in the quaternion variables. Bull. of Taras Shevchenko National University of Kyiv Ser. Physics&Math., no. 2. pp.17-24.
7. ZUB, S.S. & ZUB, S.I. (2013) The group of unit quaternion S^3 and associated symplectic and Poisson structure. Bull. of Taras Shevchenko National Univ of Kyiv Ser. Physics&Math., no. 4., pp.108-113.
8. ABRAHAM, R., MARSDEN, J. E. (1978) Found. of mech. Addison Wesley.
9. ZUB, S.S. (2013) Gruppy Li kak konfiguratsionnoe prostranstvo dlya prostoy mehanicheskoy sistemy. Journal of Num. and App.Math., vol.112, no.2. pp. 89-99.
10. ZUB, S.S. (2014) Rivnyannya gamiltonovoi dinamiki tverdogo tila v kvaternionnizminnix. magnitnij dipol v zovnishnomu poli. Bull. of Taras Shevchenko National University of Kyiv Ser. Physics&Math. 3.
11. MARSDEN, J. E., RATIU, T. S. (1994) Introduction to mechanics and symmetry. Berlin: Springer.
12. MARSDEN, J., MISIOLEK, J., ORTEGA, M., PERLMUTTER, T., RATIU, T. (2007) Hamiltonian Reduction by Stages. Springer.
13. ZUB, S.S. & ZUB, S.I. (2015) Quaternions in Hamiltonian dynamics of a rigid body – Part I. [Online]: arXiv:1508.02916.
14. ZULANKE, R., VINTGEN, P. (1975) Dyferencialna heometrija i rozšaruvannja.

УДК 004.93

Козоріз Н.В., студент
Кабан В.О., студент
Бабак А.П., студент
Войцех В.О., студент

Гібридна система машинного перекладу технічних текстів на флективні мови

Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, пр-т.
Глушкова 4д,
e-mail: kozoriz.nataliia@gmail.com
e-mail: vitalkaban@yahoo.com
e-mail: babak.anton@yandex.ua
e-mail: vlad.voitsekh@yandex.ua

Kozoriz N.V., student
Kaban V.O., student
Babak A.P., student
Voitsekh V.O., student

Hybrid system of machine translation of technical texts in flexional languages

Taras Shevchenko National University of Kyiv,
03680, Kyiv, Glushkova av., 4d,
e-mail: kozoriz.nataliia@gmail.com
e-mail: vitalkaban@yahoo.com
e-mail: babak.anton@yandex.ua
e-mail: vlad.voitsekh@yandex.ua

Описано структуру перекладача гібридного типу. Наведені етапи перекладу. Описано результат роботи парсера. Вказано будову правил та порядок їх застосування. Описано структуру словника. Наведено приклад обробки речення.

Ключові слова: перекладач, парсер, правила, словник.

A general structure of a hybrid-type translator is described. Stages of translation are listed. A parser builds a dependency tree for each sentence and binds each word with a tag indicating its part of speech and some grammar attributes. A structure of rules is described. In the left part of a rule, there is assigned a sub-tree, which it should apply to. In the right part, there is described the translation of the sentence's part that corresponds to the sub-tree. Words are listed in the order they should appear in the Russian sentence; part of speech of each sentence should be indicated, as well as grammar attributes, which a word has in the sentence structure specified. Rules are applied to the tree by decreasing number of nodes it encompasses. After the tree is folded, there will be left only one node containing all information about the structure of the sentence translated. Each word is transformed into its canonical form and sent to the dictionary, which finds a correct Russian equivalence based on the grammar attributes specified. Dictionary is a database containing words, their parts of speech and English translation, as well as tables corresponding to inflexional word groups. An example of sentence processing is provided.

Key words: translator, parser, rules, dictionary.

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Анісімов А.В.

Вступ

На сьогоднішній день основними підходами до машинного перекладу є такі: на основі правил (RBMT), статистичний (SMT) та гібридний, який поєднує в собі особливості двох попередніх. Жоден з підходів не є універсальним. Вибір способу машинного перекладу залежить від таких факторів, як тип тексту, мовна пара, а іноді й напрямок перекладу в мовній парі, наявність двомовних текстів для навчання системи тощо.

У статті [1]-[2] показано, що з перекладом на російську мову краще справляються системи на основі правил або гібридні системи завдяки

своїм здатності пристосовуватися до специфічної морфологічної структури цієї мови.

Ми представимо розробку машинного перекладача, яка здійснюється на кафедрі математичної інформатики факультету кібернетики КНУ ім. Т. Шевченка. Систему призначено для перекладу технічних текстів. Вона має модуль перекладу на основі правил, а оскільки наявна достатня кількість двомовних текстів відповідної тематики для навчання статистичної складової, то було обрано гібридний тип перекладача.

На сьогодні не існує безкоштовних гібридних систем для російської чи української мов. Такі перекладачі, як Google Translate, є суто статистичними, що не дає достатньо якісного результату в разі перекладу на флективні мови, наприклад слов'янські.

Структура системи

Перекладач, що розробляється, має гібридну природу: текст перекладається за допомогою правил, а потім коректується на основі статистичних даних. Переклад здійснюється з англійської мови на російську.

Етапи перекладу:

- поділ тексту на речення;
- побудова дерев граматичних структур речень;

- знаходження канонічних форм слів;
- обробка дерев на основі правил, знаходження граматичних ознак слів та правильної послідовності слів;
- переклад слів на основі їх граматичних ознак за допомогою словника;
- корекція і виправлення помилок.

Перекладач зчитує текст і розбиває на речення. На наступних етапах кожне речення обробляється окремо.

Для знаходження граматичної структури англійського дерева та побудови дерева використовується Стенфордський парсер [3]. Кожному слову та розділовому знаку парсер ставить у відповідність його порядковий номер у реченні, нумерація починається з одиниці.

На основі даних, отриманих з парсера,

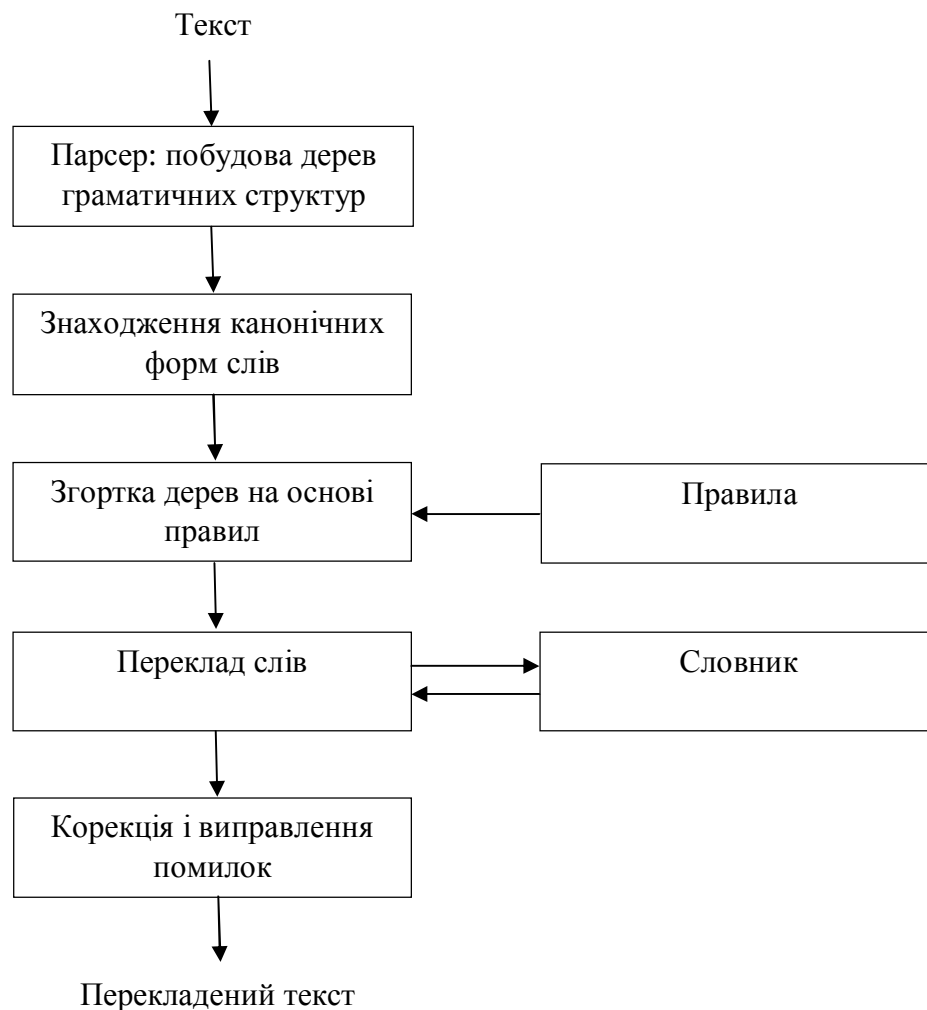


Схема 1. Структура перекладача

програма будує дерево залежностей. Кожна вершина дерева містить слово і його граматику – інформацію з теґу. Сполучаються вершини зв'язками залежностей. Коренем дерева є вершина ROOT, яка має порядковий номер 0 і вказує на головне слово речення.

Далі програма поступово об'єднує піддерева в одну вершину за допомогою правил. При цьому граматика слів доповнюється новими ознаками. Під час цього процесу вершина може містити не одне слово, а частину речення, в якій виділяється головне слово. Після закінчення об'єднання, залишається одна вершина, яка містить всі слова у тій послідовності, у якій вони мають бути перекладені, а також граматика цих слів.

Програма відправляє англійське слово з його граматичними ознаками словнику, який знаходить російське слово, що відповідає йому. Перекладене слово ставиться у потрібну форму на основі отриманої граматики і повертається програмі.

Отриманий переклад речення редагується за допомогою статистичних даних, що зберігається у базі даних програми.

Парсер

Стенфордський Парсер [3] працює на основі статистичних даних.

Парсер присвоює кожному слову теґ, який визначає частину мови та граматичні ознаки цього слова, такі як множина, ступінь порівняння – тобто ті, які змінюють форму англійського слова.

Стенфордське представлення зв'язків залежності [4] забезпечує простий опис граматичних зв'язків у реченні. А саме: замість представлення фразової структури, воно зображує усі зв'язки речення як зв'язки залежностей. Всі зв'язки є бінарними, мають головне слово і залежне. Кожне слово, крім ROOT, має лише одне головне слово.

Максимальна кількість випадків, коли парсер неправильно визначає структуру речення, повинні виправлятися при обробці дерева парсером.

Правила

Синтаксис правил

```
<rule>::=<left side>#<right side>
<left side>::=<PN>[.<w>](<Lnk>.<subtree>
{,<Lnk>.<subtree>})
<subtree>::=<PN>[.<w>]|<left side>
```

<PN>::=<Pos><N>

Pos – part of speech, N – число, Lnk – dependency, w – word

<left side> правила репрезентує деяке піддерево dependency tree, де <PN> відповідає одному вузлу, а <Lnk> – дузі, що з нього виходить. У лівій частині правила можуть також зазначатися самі англійські слова. Усі Pos у лівій частині нумеруються. Піддерева перелічуються в лівій частині зліва направо. Правило може охоплювати не все піддерево, а довільну його частину.

<right side>::=<right rule>{\$<right rule>} [(<new root Pos>)]

<right rule>::=<right part>{,<right part>}

<right part>::=<TPN>[.<Grammar> {&<Grammar>}]<w>

<TPN>::=<Pos><N>

<Grammar>::=<gr attribute>:<value>

<gr attribute>::=Рід|Число|Відмінок|Час|Особа

<value>::=жін|чол|сер|наз|род|дав|...|одн|мн|...

new root Pos – це Pos вузла, яким замінюється гілка дерева після її обробки (якщо цей параметр не вказано, то та Pos, яка була в 1-му вузлі гілки, і залишається).

Права частина складається з одного або кількох правил. Переклад komponується згідно з одним із цих правил шляхом послідовної підстановки конкретних слів/словосполучень (w) або взятих зі словника TPN, які є перекладами PN з відповідними номерами N. Оскільки одному сорсовому слову можуть відповідати різні таргетові частини мови, то яку саме з них вибирати визначається параметром Pos у правій частині. У правилах правої частини повинні використовуватися ті самі номери Pos, що й у лівій частині, але порядок зазначення цих номерів та самі Pos можуть бути іншими. Можливо, деякі номери з лівої частини у правилі правої частини будуть опущені (але нових номерів, тобто тих, яких немає зліва, справа виникати не повинно).

Граматична форма таргетової лексеми визначається списком атрибутів Grammar (рід, число, відмінок тощо), значенням кожного з яких є граматична категорія (жін, чол, одн, мн і т.д.).

Якщо певна граматична ознака одного слова впливає на таку ж ознаку іншого слова (наприклад, рід іменника впливає на рід прикметника), але вона береться саме з перекладеного слова, тоді у правилі ми пишемо велику англійську літеру замість цієї ознаки у головному слові, і маленьку літеру – у

залежному слові (наприклад: С1.чис:Х,Г2.чис:х).

У лівих частинах правил Pos можуть замінятися на більш загальні. Для іменників NN – є найбільш загальним, NNS, NNP та NNPS – більш специфічні. Форма дієслова VBZ узагальнюється до VBP, яка в свою чергу разом з VBD, VBG, VBN може бути замінена на VB. Якщо для даних Pos не знайдено правила, шукається правило для більш загальних Pos.

До тегів, які розрізняє Стенфордський парсер додано VBC, яке позначає дієслово умовного способу.

За замовчуванням дієслова мають наказовий спосіб.

Якщо у граматику певного слова було занесено різні значення одного й того ж атрибуту, обирається останнє входження, тобто останній варіант покриває всі попередні.

Правила будуть застосовуватись у порядку спадання кількості вершин, які вони охоплюють. Також першим обробляється те піддерево, вершини якого знаходяться найближче до кореня піддерева (тобто різниця номера слова кореня піддерева і слів у піддереві мінімальна).

Знаходження канонічної форми слова

При приведенні англійського слова до його початкової форми всі його граматичні ознаки запам'ятовуються. Під час формування речення будуть грати роль тільки граматичні ознаки слова, російський переклад слова в канонічній формі, а також статистичні дані (наприклад, частота вживання деякого слова в деякому словосполученні з деяким іншим словом).

Таку ознаку, як число, вирішено отримувати із англійського слова. Модуль *Evo Inflector* реалізує алгоритм визначення числа, перетворення в множину чи однину слів. Алгоритм базується на роботі Даміана Конвея "An Algorithmic Approach to English Pluralization" [5]. У даній роботі розглядається алгоритм плюралізації, який повинен впоратися з трьома категоріями формами множини: універсальних (за замовчуванням), загальних правил на суфіксній основі слів, і конкретних виняткових випадках. Цей алгоритм,

реалізовано в модулі *Evo Inflector*, що дає нам змогу легко отримати потрібну нам ознаку - число слова. Оскільки правила англійської мови щодо утворення однини становлять скінченну кількість, то доцільно використовувати готову базу цих правил.

Словник

Для знаходження перекладу слова за його початковою формою використовується база даних, оскільки пошук по ній достатньо швидкий. У створеній базі містяться слова, їх частини мови, англійський переклад, а також таблиці, що відповідають флексивним групам слів.

Для побудови бази флексивних груп потрібні таблиці з усіма можливими основами, з усіма флексивними групами, і відповідно з усіма закінченнями. Кожне закінчення має свій код (дві букви російського алфавіту), яким відповідають певні ознаки (рід, число і відмінок). Пошуком по базі за основою досліджуваного слова можна отримати рід цього слова.

База флексивних груп включає такі таблиці:

- Таблиця основ – це список всіх можливих основ російських слів.
- Таблиця флексивних груп – номери відповідних флексивних груп.
- Таблиця закінчень – всі можливі закінчення російських слів (включає нульове).
- Таблиця індексів закінчень – коди закінчень та ознаки (рід, число, відмінок), що їм відповідають.

Для заповнення таблиць флексивних груп використовувались файли з заздалегідь записаною туди інформацією про основи, та номер флексивної групи, що їй відповідає. Список флексивних груп складає 3176 груп. В цих групах міститься різна кількість пар двобуквений індекс – закінчення, між якими є певні роздільники (символи, які допомагають при занесенні в базу). Окремо також зчитувався файл з розшифруваннями індексів, тобто вказаними наборами індекс та граматичні ознаки слів, наприклад, рід, число, відмінок, вид, стан тощо.

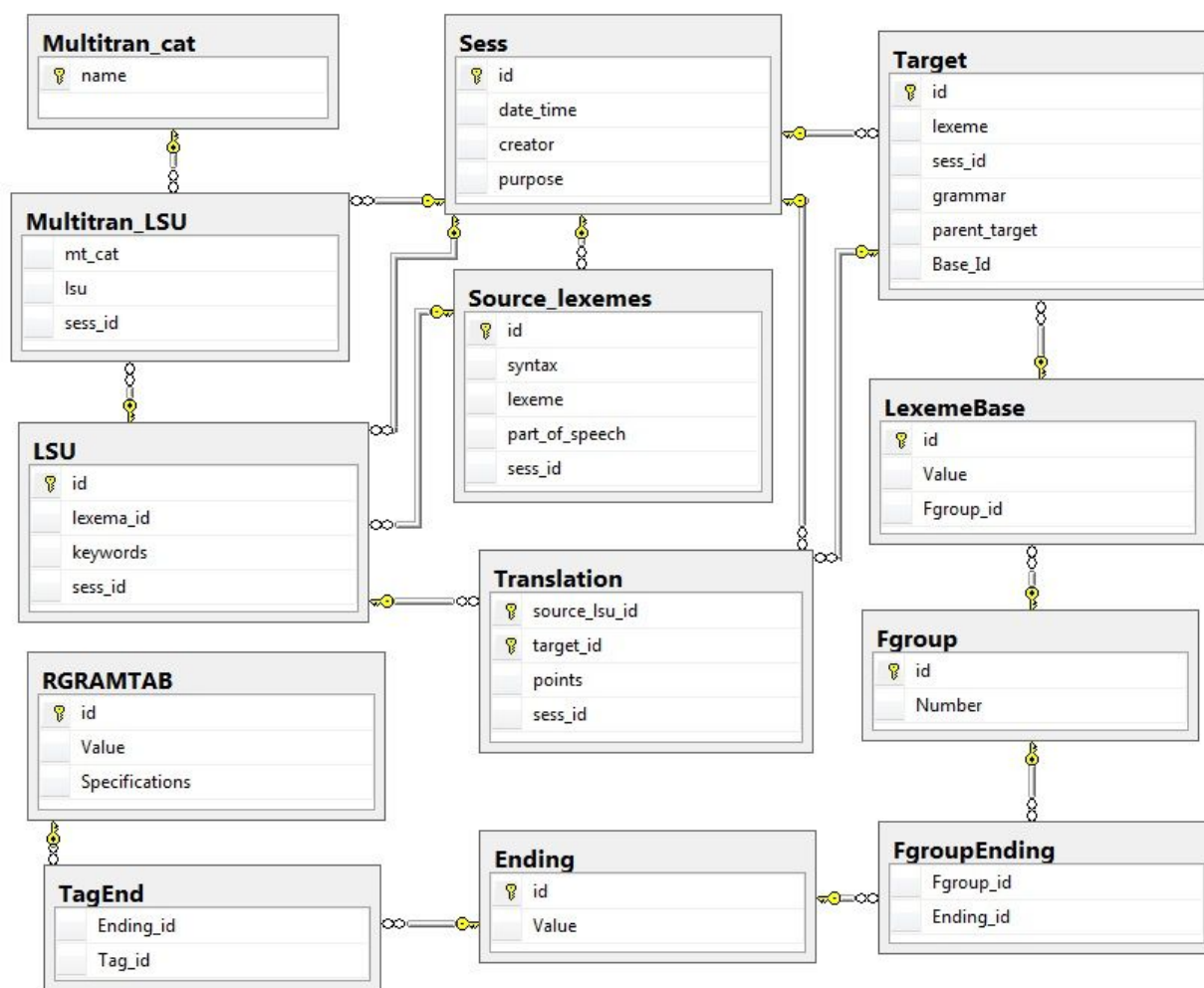


Схема 2. Структура словника

Приклад обробки речення

A database is an organized collection of data.

Теги

A/DT database/NN is/VBZ an/DT
organized/VBN collection/NN of/IN data/NNS ./.

Зв'язки

det(database-2, A-1)
nsubj(collection-6, database-2)
cop(collection-6, is-3)
det(collection-6, an-4)
amod(collection-6, organized-5)
root(ROOT-0, collection-6)
case(data-8, of-7)
nmod(collection-6, data-8)

При обробці речення парсер надає кожному слову і розділовому знаку тег і

порядковий номер, а також будує зв'язки залежностей.

У даному реченні:

- a, an – DT, артиклі
- database, collection – NN, іменники в однині, data – NNS, іменник у множині. Зводимо його до канонічної форми, а у граматичні ознаки заносимо число.
- is – VBZ, дієслово теперішнього часу 3 особи однини. Зводимо до інфінітиву – форми «be» – та зберігаємо граматичні ознаки.
- organized – VBN, дієприкметник минулого часу
- of – IN, прийменник

Правила

У російській мові прийменників немає, тому правила їх видаляють з дерева.
NN2(det.DT1.a)#C2

NN2(det.DT1.an)#C2

Іменник-підмет впливає на граматичні ознаки частини складного присудка – частки «to be», тому правило має охоплювати всі три слова. Так як речення в теперішньому часі, то у російському варіанті «бути» випадає. Після обробки піддерева вершина набуває теґу VB – дієслова в початковій формі.

NN3(nsubj.NN1, cop.VBZ2.be)#C1.пад:им&чис:Y&род:Z, C3.пад:им&чис:y&род:z(VB)

Дієприкметник граматичними ознаками залежить від головного для нього слова.

NN2(amod.VBN1)#ПРИЧ1.пад:x&чис:y&род:z, C2.пад:X&чис:Y&род:Z

Граматичні ознаки російських слів у структурі іменник-прийменник-іменник залежать від прийменника, тому для кожного з них будується окреме правило. У даному

реченні прийменник «of» не перекладається, а залежний іменник ставиться у родовий відмінок.

NN1(nmod.NN3(case.IN2.of))#C1, C3.пад:род

У дереві залишається всього одна вершина, яка містить всі слова у правильному порядку та граматику цих слів:

database – С.пад:им&чис:Y&род:Z

organized – ПРИЧ.пад:x&чис:y&род:z

collection – С.пад:им&чис:y&род:z

data – С.чис:мн&пад:род

Число і рід слова «database» беремо з російського перекладу. Це жіночий рід, однина. Ці граматичні ознаки передаємо словам «organized» та «collection».

Російський переклад:

База данных – упорядоченный набор данных.

Список літератури

1. Лори Тике Технолого-агностический машинный перевод. Часть первая. / Лори Тике // Профессиональный перевод и управление информацией – 2015. – №4. – с. 16-20.
2. Лори Тике Технологически независимый машинный перевод: часть вторая. / Лори Тике // профессиональный перевод и управление информацией – 2015. – №5. – с. 34-38.
3. The Stanford Parser. <http://nlp.stanford.edu/software/lex-parser.shtml>
<http://nlp.stanford.edu:8080/parser/>
4. Marie-Catherine de Marneffe Stanford typed dependencies manual. / Marie-Catherine de Marneffe, Christopher D. Manning. // http://nlp.stanford.edu/software/dependencies_manual.pdf
5. Damian Conway An Algorithmic Approach to English Pluralization. <http://www.csse.monash.edu.au/~damian/papers/H TML/Plurals.html>

References

1. LORI THICKE (2014) Technology agnostic machine translation: Part one, профессиональный перевод и управление информацией. No 4. pp. 16-20.
2. LORI THICKE (2014) Technology agnostic machine translation: Part two, профессиональный перевод и управление информацией. No 5. pp. 34-38.
3. The Stanford Parser. <http://nlp.stanford.edu/software/lex-parser.shtml>
<http://nlp.stanford.edu:8080/parser/>
4. Marie-Catherine de Marneffe Stanford typed dependencies manual. / Marie-Catherine de Marneffe, Christopher D. Manning. // http://nlp.stanford.edu/software/dependencies_manual.pdf
5. Damian Conway An Algorithmic Approach to English Pluralization. <http://www.csse.monash.edu.au/~damian/papers/H TML/Plurals.htm>

Надійшла до редколегії 06.11.2015

УДК 519.876:51-7:612.017

Колянова Т.В., к.ф.-м. н.

T.V. Kolianova, PhD assistant

**Побудова графічних залежностей
біологічних показників при фізичному
навантаженні**

**A construction of graphic dependences of
biological indexes is at physical activity**

Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, пр-т. Глушкова
4д,

Taras Shevchenko National University of
Kyiv, 03680, Kyiv, Glushkova st., 4d,

e-mail: tania.kolianova@gmail.com

e-mail: tania.kolianova@gmail.com

Статтю представив д. т. н., с. н. с. Кудін В.І.

Розглядається стан фізичного здоров'я людини, який встановлюється за серією клінічних, морфологічних та фізіологічних, біохімічних та інших показників з урахуванням відповідно статі та віку і залежить від географічних, метеорологічних і соціальних факторів. В роботі проаналізовано вплив фізичних навантажень на ті показники організму, які найкраще відображають зміни, що відбуваються під час фізичних тренувань та навантажень.

Наведені показники (клінічні, морфо-фізіологічні, біохімічні) піддаються вимірюванню або в лабораторних умовах або на спортивних майданчиках, та дають змогу оцінити фізичний стан людини. Для таких показників наведено відповідні графіки залежності, яку дають змогу отримати якісну візуальну картину процесів, що відбуваються з подальшим їх математичним представленням у вигляді функціональних залежностей, що надасть можливість подальшого аналізу фізичного стану організму людини та прогнозу його фізичної активності.

Ключові слова морфологічні та фізіологічні, біохімічні показники, фізичне навантаження, графічне представлення

The state of physical health of man, that is set after the series of clinical, morphological and physiology, biochemical et al indexes taking into account according to sex and age and depends on geographical, meteorological and social factors is examined. Influence of physical activities is in-process analysed on those indexes of organism, that represent changes that take place during the physical training and loading better in all.

The brought indexes (clinical, morphological and physiology, biochemical indexes) over yield to measuring or in laboratory terms or on sporting grounds, and give an opportunity to estimate the bodily condition of human. For such indexes corresponding graphic arts over of dependence, that give an opportunity to get the quality visual picture of processes that take place with further them by mathematical presentation as functional dependences, are brought, that will give possibility of further analysis of bodily condition of organism of human and prognosis of him physical activity.

Key words: morphological and physiology, biochemical indexes, physical activities, graphic arts.

Організм людини – дивовижний механізм! У ньому відбувається нескінченна кількість добре скоординованих явищ. Протягом століть вчені вивчали, як працює організм людини. В останні декілька століть вчені зайнялися вивченням того, як змінюються функції чи фізіологія організму під час занять фізичною діяльністю.

В основі дослідження фізичних вправ лежать анатомія та фізіологія. Фізіологія вправ – відносно нова в світі науки. Проблема реакції

організму на фізичні навантаження майже не вивчалась. Не дивлячись на загальноприйняту значимість регулярної м'язової діяльності вже у середині XIX ст., до кінця століття на фізіологію м'язової діяльності уваги майже не звертали.

Починаючи вивчати фізіологію фізичних навантажень, необхідно перш за все з'ясувати, як реагує організм на певний вид навантаження. Як визначити фізіологічні реакції на фізичне навантаження? Лише деякі фізіологічні змінні можливо контролювати під час виконання фізичних вправ, причому деякі з них можна

точно виміряти, не порушуючи фізичну діяльність. Наприклад, засоби радіотелеметрії і мініатюрні магнітоли можна використовувати під час виконання фізичного навантаження для контролю різних показників організму.

Останні розробки дозволяють навіть безпосередньо контролювати використання кисню під час довільної фізичної діяльності за межами дослідницької лабораторії.

Існує досить велика кількість біологічних показників, за якими можна дати відповідь про стан людського організму. Тому використовуючи дані спостережень, які були зібрані лікарями у догляді за спортсменами, ми зробили спробу привнести фізичні навантаження у життя звичайної людини.

Найбільш чутливими до фізичних навантажень [] є такі біологічні показники організму

- МПК (максимальна потреба в кисні);
- лактат крові;
- ЧСС (частота серцевих скорочень);
- норадреналін (гормон).

Тому для дослідження були вибрані саме ці показники.

Максимальна потреба в кисні (МПК). Це один з кращих показників тренуваності спортсмена в тих видах спорту, де потрібна значна витривалість. Дослідження показують, що МПК збільшується внаслідок фізичних тренувань.

Однак для контролю адаптаційних реакцій кардіореспіраторної і м'язової системи (МПК) потрібні спеціальні прилади, які можна знайти тільки в фізіологічних лабораторіях. Тому більшість тренерів і спортсменів позбавлені можливості використовувати даний метод.

Нещодавно було запропоновано вимірювати вміст лактату крові під час тренування, що дозволяє оцінити навантаження від тренувань, а також ступінь адапційних реакцій м'язів. При збільшенні фізичного навантаження концентрація лактату різко збільшується. Цю зміну можна використовувати для оцінки інтенсивності тренувального процесу.

Як бачимо з рис.1, тренування, що направлене на підвищення витривалості, підвищує лактатний поріг. Людина з високим рівнем витривалості можуть виконувати роботу при більш високому МПК, до того як відбудеться накопичення лактату.

На думку спеціалістів цей процес досить гарно відображає рівень м'язової діяльності, що потребує витривалості, а також дозволяє більш точно визначити зміни, що призведені тренуванням, чим МПК.

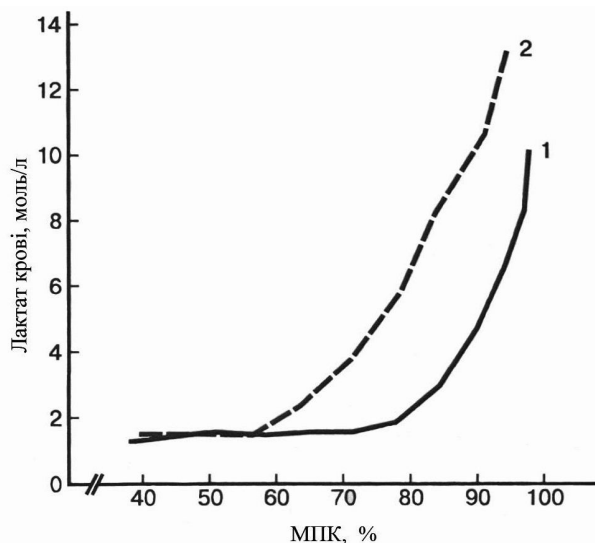


Рис.1. Вплив тренування, направленного на підвищення витривалості, на поріг лактату крові: 1- тренувані; 2- нетреновані.

Але проведення таких тестів займає занадто багато часу. Тому це призвело до появи більш простого методу контролю, який полягає у вимірі концентрації лактату крові після виконання одноразового стандартного фізичного навантаження з фіксованою швидкістю.

Відновлення нормальних рівней лактату крові і м'язів після виснажливого тренування – відносно довготривалий процес (1-2 години). З рис.2 стає зрозуміло, що більш швидкому відновленню нормального рівня лактату крові сприяє активне відновлення.

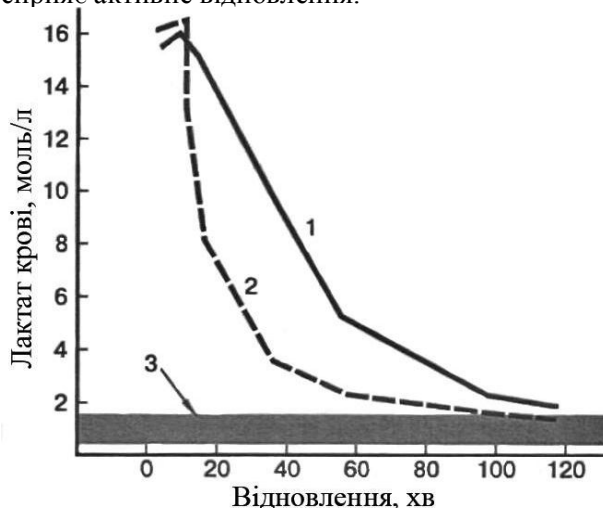
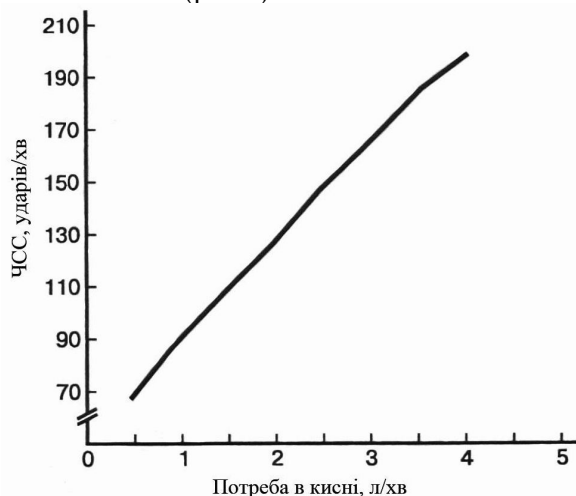


Рис.2 Вплив активного та пасивного відновлення рівня лактату крові після серії спринтерських забігів: 1- пасивне; 2- активне; 3- рівень в стані спокою.

ЧСС – частота серцевих скорочень. Це простий і найбільш інформативний параметр серцево-судинної системи. Його визначення включає перевірку пульсу, зазвичай в області

зап'ястя або сонної артерії. ЧСС відображає кількість роботи, яку повинно виконати серце, щоб задовольнити завищені вимоги організму при його включенні у фізичну діяльність. Середнє значення ЧСС в спокої складає 60-80 ударів/хв. У людей середнього віку, у малорухливих і у тих, хто не займається м'язовою діяльністю, ЧСС в спокої може перевищувати 100 ударів/хв. Чим ближчий показник ЧСС до середнього значення, тим більш здорове і працездатне серце.

Коли людина починає виконувати вправи, ЧСС швидко зростає пропорційно інтенсивності навантаження (рис.3).



Норадреналін. Мозкова речовина утворює і виділяє два гормони - адреналін і норадреналін. При стимуляції мозковою речовиною симпатичної нервової системи, виділяється біля 0,8 (80%) адреналіну та біля 0,2 (20%) норадреналіну (рівень показників може коливатися в залежності від виду фізичного навантаження). Адреналін і норадреналін допомагають боротися з кризовими ситуаціями.

Список використаних джерел

1. Дж.Х. Уилмор. Физиология спорта и двигательной активности. / Дж.Х. Уилмор, Д. Л. Костилл // Киев: Олимпийская литература. – 2001. – 495 с.
2. Сергієнко Л.П. Тестування рухових здібностей школярів. / Сергієнко Л.П. // Київ: Олімпійська література. – 2001. – 439с.
3. Зуев С.М. Оценка параметров процесса функционального восстановления по лабораторным данным. / Зуев С.М. // Новосибирск: Наука. – 1978. – 146с.

Хоча їх вплив на організм відрізняється, обидва гормони “працюють” разом.

На виділення певного рівня адреналіну та норадреналіну впливають багато факторів, у тому числі й фізичне навантаження.

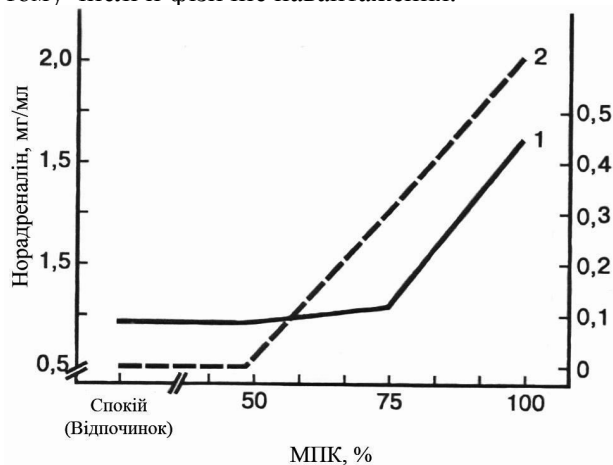


Рис.5. Зміна концентрацій адреналіну (1) та норадреналіну (2) в крові в стані спокою і при різній інтенсивності (МПК) бігу на тредбані.

Враховуючи характер поведінки функції в залежності від вибраних параметрів було запропоновано наступний вигляд функцій:

$$y_i = f_i(x_1, x_2) = c_i x_1^{\alpha_i} x_2^{\beta_i}, \quad i = \overline{1, 4},$$

де y_1 / y_2 – для тренуваних людей залежність лактату крові від МПК та часу пасивного / активного відновлення; y_3 / y_4 – для нетренуваних людей залежність лактату крові від МПК та часу пасивного / активного відновлення; x_1 – рівень МПК у відносних величинах; x_2 – час відновлення.

References

1. UILMOR J.H., KOSTILL D.L. (2001) Fiziologija sporta i dvigatel'noy aktivnosti. Kiev: Olimpiyskaja literatura.
2. SERGIENKO L.P. (2001) Testuvannja ruhovyh zdibnostey shkoljariv. Kiev: Olimpiyskaja literatura.
3. ZUEV S.M. (1978) Otsenka parametrov protsessa funkcional'nogo vosstanovlenija po laboratornym dannym. novosibirsk: Nauka.

Надійшла до редколегії 09.12.15

УДК 681.3, 004.6

Литвиненко Т.І., студентка,
Панченко Т.В., к.ф.-м.н., доц.,
Редько В.Д., студентка

T.I. Lytvynenko, student,
T.V. Panchenko, PhD, assoc.prof.,
V.D. Redko, student

Прогнозування продажів методами інтелектуального аналізу даних

Sales Forecasting using Data Mining Methods

Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, Україна, 01601, місто Київ,
вул. Володимирська, 64/13
e-mail: tp@infosoft.ua

Taras Shevchenko National University of Kyiv,
64/13, Volodymyrska Street, City of Kyiv, Ukraine,
01601
e-mail: tp@infosoft.ua

Розглядається задача прогнозування продажів продукції за відомою історією продажів та без урахування додаткових факторів. Ця задача часто зустрічається на практиці, коли немає можливості використати факторний аналіз, і ми маємо покладатись лише на історичні дані. У даній роботі подано порівняльний аналіз трьох основних алгоритмів для задачі прогнозування. Дослідження включає традиційні статистичні методи та перспективні структурні алгоритми прогнозування, а саме: ARIMA (на базі рішення Microsoft SQL Server алгоритму часових рядів), еволюційного (або генетичного) алгоритму та побудови дерев рішень. Ми не будемо досліджувати комбінації методів, застосовуваних послідовно або паралельно, у цій роботі, хоча це питання також варто уваги. Основна увага в прогнозуванні зазвичай приділяється деталям реалізації. У даній роботі сконцентровано увагу на порівняльному аналізі переваг та недоліків кожного із зазначених алгоритмів. Отримане апіорне порівняння слід співставити з результатами застосування цих методів до реальних даних, аби перевірити кореляцію апостеріорних результатів, що буде зроблено у наступних роботах.

Ключові слова: прогнозування, ARIMA, ARTXP, еволюційний алгоритм, генетичний алгоритм, дерево рішень.

Forecasting of product sales by known sales history and without other factors influence task is the subject of this work. This represents real-life practical task when we cannot use factor analysis and must rely on historical data solely. This study presents a description and comparison of three basic algorithms of forecasting. Our research covers both traditional statistical and perspective structural predictive methods, including ARIMA (based on Microsoft SQL Server Time Series Model Query package), evolutionary algorithm (or genetic) and constructing decision forests. We will not analyze method combinations, sequentially applied nor parallel, in this review though it worth attention. Much of previous attention on forecasting focuses on its implementations. This study is concentrated on the comparative analysis of advantages and disadvantages of algorithms mentioned above. A-priory comparative results obtained here should be matched with results of these methods application to real-life data in order to correlate them and this will be done in the next papers.

Key Words: forecasting, ARIMA, ARTXP, evolutionary algorithm, genetic algorithm, decision tree.

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Буй Д.Б.

Introduction

The necessity of forecasting presupposes a paramount significance of the problems of prognosis. Forecasting of product sales by known sales history

and without other factors influence task is the subject of this work. This represents real-life practical task when we cannot use factor analysis and must rely on historical data solely. Software solutions are built in

order to cope with an enormous amount of data. In [1] it is observed that in general all predictive techniques may be divided into two principal groups: statistical and structural methods correspondingly. The first group includes predictive models, which leverages statistics to predict outcomes [2] – ultimate model is represented by analytical formula. The second group consists of step-by-step methods, where terminate algorithm looks like a definite set of stages. In our research statistical approaches are represented by ARIMA (implemented in Microsoft Time Series). Microsoft SQL Server [3] provides regression algorithms that are optimized for the forecasting of continuous values. Classical structural approaches are represented by decision trees, combined in random forests. According to [4], a decision tree describes the process graphically and simplifies a major goal of the analysis – to determine the best decisions. In addition to the traditional approaches mentioned above, in this research we investigate comparatively non-popular nowadays, but prospective method – evolutionary algorithm. In [5] it is underlined, that this approach is based on the evolution of set of rules genetically codified. Overall, despite all three methods are applied to a wide range of decision making processes, in this study we compare the potential, effectiveness and quality of forecasting for universal problems.

In this paper we preliminarily analyze approaches to solve the task of sales forecasting. The actual task is to estimate the efficiency of marketing campaigns with the goal to advertise and deliver (or push) the product to the market. These activities are the means to increase the sales. So, if we could predict the sales of some product in advance and then compare it with the actual data, we can fix the profitability of marketing campaigns conducted.

In our review we will not analyze method combinations, sequentially applied nor parallel, though it worth attention. But we concentrate attention on basic approaches and fix the a-priori advantages and disadvantages of each. We will revert and compare our conclusions with new, ad hoc, results after application of them to real-life data.

Problem Formalization

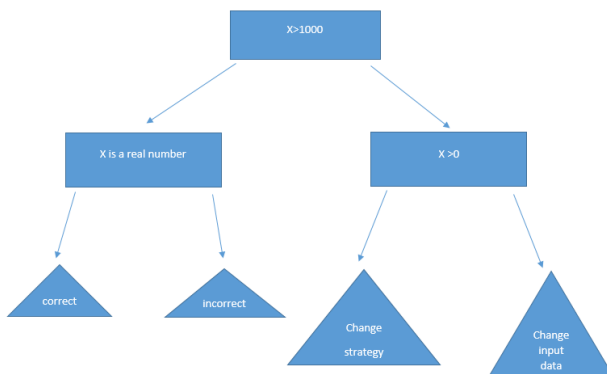
The predictive methods make forecast based on the statistical relationships between input columns in a dataset. The major idea is to interpret current data in a proper way in order to obtain the objective laws.

Input data is represented by a dataset. In our formulation three basic categories are considered to be processed: product name, sales and period under consideration. In order to facilitate the perception of forecasting model, we investigate the case of the one product name. The predictive approaches are applied to a dataset to obtain a probable prognosis for the future period.

We discuss Decision Trees approach, Evolutionary or genetic algorithms class and compare them to Microsoft Time Series algorithm, the practical realization of known methods.

Decision Trees Method

A decision tree is a drawing [6], consisting of lines and boxes, that shows the different choices which are available to people before they make a decision, and the possible results of these choices. According to [7], decision trees are produced by algorithms that identify various ways of splitting a data set into branch-like segments. These segments form an inverted decision tree that originates with a root node at the top of the tree. It is mentioned in [8], that graphically a decision tree looks like a flowchart-like structure in which each internal node represents a “test” on an attribute. Commonly a decision tree consists of three types of nodes: decision nodes (represented by squares), chance nodes (represented by circles) and end nodes (represented by triangles). According to [9] it is also easier for many to read and understand flow chart symbols mentioned above. Classification and regression trees were originally introduced and investigated by Breiman [10] in 1984. As asserted in [11], the main idea behind tree methods is to recursively partition the data into smaller and smaller strata in order to improve the fit as best as possible. Tree models where the target variable can take a finite set of values are called classification trees. Decision trees where the target variable can take continuous values (typically real numbers) are called regression trees [12]. As explained in [13], that classification trees are designed for dependent variables that take a finite number of unordered values, with prediction error measured in terms of misclassification cost. Regression trees are for dependent variables that take continuous or ordered discrete values, with prediction error typically measured by the squared difference between the observed and predicted values.



Picture 1. Decision Tree.

In CART (classification and regression tree) data are handled in their raw form; no binning is required or recommended [14]. In our model data is represented by a training sample of n observations on a variable Y , which represent sales, and m variables, $X_1, \dots, X_m$, which represent time period. A major aim is to find a model for predicting the values of Y for new periods. Classical algorithm generates a model by building a series of tree splits (traditionally nodes serve as representations of these splits). A node is added to the ultimate model every time that an element of Y -dataset substantially influences the predictable column ($Y_{n+1}, \dots, Y_{n+k}$, where k – is a predictable period). It is worth noting, that data required for the forecasting also includes a key basic category that serves as identifier. In our study we use a product name for these purposes.

CART splitting rules [14] are represented by the following construction:

*An instance goes left if CONDITION,
otherwise goes right.*

General algorithm includes the following steps:

- 1) Start at the root node.
- 2) To each X_i , apply a condition split
- 3) If a stopping criterion is reached, exit. Otherwise, apply step 2 to each child node in turn.

Evolutionary Algorithm

According to [15] the term “genetic and evolutionary algorithms” is used to name a family of

computational procedures where a number of potential solutions to a problem makes the way to an evolving population. Before a genetic algorithm can be put to work on any problem, a method is needed to encode potential solutions to that problem in a form that a computer can process. One common approach is to encode solutions as binary strings: sequences of 1's and 0's, where the digit at each position represents the value of some aspect of the solution [18]. Each individual codes a solution in a string (chromosome) of symbols (genes), being assigned a numerical value (fitness function), that stands for a solution quality's measure. New solutions are created as a result of application of operators to the current solutions. There are three main operators are widely used: mutation, crossover and selection. The main effect of mutation is to invert a bit in a chromosome [16]. In [17] it is supposed a chromosome:

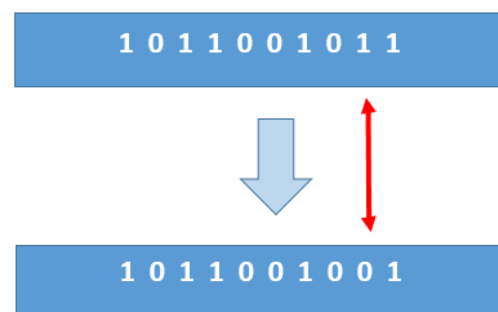
$$S_1 = \{s_{11}, s_{12}, \dots, s_{1n}\}.$$

Select a random integer number:

$$0 \leq r \leq n.$$

S_2 is a mutation of S_1 in this case:

$$S_2 = \{s_i | \text{if } i \neq r \text{ then } s_i = s_{1i} \text{ else } s_i = \text{random}(s_{1i})\}.$$



Picture 2. Mutation in genetic algorithm.

Crossover causes exchange of bits string between two chromosomes [16], [17]. Two chromosomes are supposed:

$$S_1 = \{s_{11}, s_{12}, \dots, s_{1n}\}$$

$$S_2 = \{s_{21}, s_{22}, \dots, s_{2n}\}$$

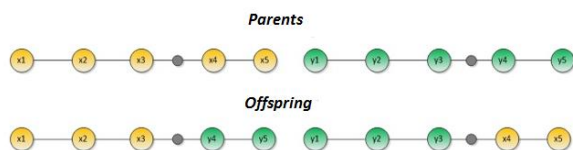
Then select a random integer number:

$$0 \leq r \leq n.$$

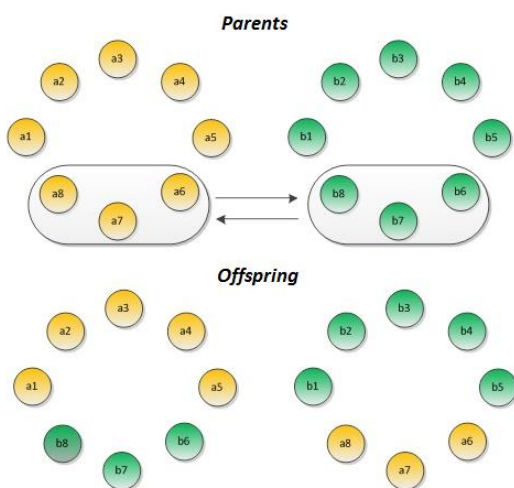
S_3, S_4 are offspring of S_1 and S_2 crossover in this case:

$$S_3 = \{s_i | \text{if } i \leq r, s_i \in S_1, \text{else } s_i \in S_2\}.$$

$$S_4 = \{s_i | \text{if } i \leq r, s_i \in S_2, \text{else } s_i \in S_1\}.$$



Picture 3. Crossover in genetic algorithm.



Picture 4. Crossover in genetic algorithm.

As it is mentioned in [17], in selection operator we suppose there are m individuals, we select $[m/2]$ individuals but erase the others, the ones we selected are “more fitness” that means their profits are greater.

The basic steps of the genetic algorithm involve:

- 1) Initialization of start population
- 2) Test of the stopping criteria. If it is false – continue, else – stop.
- 3) Mutation operator application
- 4) Crossover operator application
- 5) Selection procedure (choosing the best chromosomes).

When it comes to practical applications, in [16] it is highly recommended to estimate the scope of the

parameters domain in order to make genetic algorithm search more effective. It is proposed to use heuristic knowledge about the explored demand. In our study it namely means to set amplitude for sales (minimum and maximum level). In our case we concentrate on predictive analysis. Observations are represented by a dataset, so, the main idea is to test input data with the usage of various operators in order to find the correlation between operators and predictive results. We must note here, that originally evolutionary algorithms were constructed for optimization tasks that is why this approach is principally different from the algorithms mentioned above. This method is completely dependent on the operators. Nevertheless, this fact enables to take into consideration the influence of external factors, which is significant for the problem of forecasting. For our particular case classic genetic algorithm is slightly modified. Initialization procedure is more clear: there is no necessity to generate a random dataset.

Time Series Analysis

The Microsoft Time Series Algorithm provides regression algorithms that are optimized for the forecasting of continuous values, such as product sales, over time. Whereas other Microsoft algorithms, such as decision trees, require additional columns of new information as input to predict a trend, a time series model does not. A time series model can predict trends based only on the original dataset that is used to create the model. You can also add new data to the model when you make a prediction and automatically incorporate the new data in the trend analysis [3].

The Microsoft Time Series algorithm includes two separate algorithms for analyzing time series:

1) The ARTXP (short for Auto Regression Trees with Cross Predict) [20] algorithm, which was introduced in SQL Server 2005, is optimized for predicting the next likely value in a series.

2) The ARIMA algorithm was added in SQL Server 2008 to improve accuracy for long-term prediction.

By default, Analysis Services uses each algorithm separately to train the model and then blends the results to yield the best prediction for a variable number of predictions. You can also choose to use just one of the algorithms, based on your data and prediction requirements [3].

Microsoft Research developed the original

ARTXP algorithm that was used in SQL Server 2005, basing the implementation on the Microsoft Decision Trees algorithm. Therefore, the ARTXP algorithm can be described as an autoregressive tree model for representing periodic time series data. This algorithm relates a variable number of past items to each current item that is being predicted [3].

The ARIMA algorithm was added to the Microsoft Time Series algorithm in SQL Server 2008 to improve long-term prediction. It is an implementation of the process for computing autoregressive integrated moving averages that was described by Box and Jenkins. The ARIMA methodology makes it possible to determine dependencies in observations taken sequentially in time, and can incorporate random shocks as part of the model. The ARIMA method also supports multiplicative seasonality [3].

By default, the Microsoft Time Series algorithm uses both methods, ARTXP and ARIMA, and blends the results to improve prediction accuracy. If you want to use only a specific method, you can set the algorithm parameters to use only ARTXP or only ARIMA, or to control how the results of the algorithms are combined [3].

Advantages and disadvantages of decision trees

The benefits of the usage of decision trees are rather obvious:

1) The model is having a single meaning; the process is well-defined and stepwise. This approach is clear for both understanding and implementation. Decision trees are simple to understand and interpret.

2) The tree anticipates the dead ends and there is no problem with stopping criteria (in comparison with evolutionary algorithms).

3) In [22] it is noticed, that decision trees require relatively little effort from users for data preparation. Moreover, it is worth noting, this approach is also able to cope with different types of data. In this research we work with only numerical data, nevertheless, in more complicated cases, this aspect may presuppose the choice of algorithm.

The most substantial disadvantages are the following:

1) The prediction is defined just once; all the consequences are based on the previous experience. It is mentioned in [21], that the reliability of the information in the decision tree depends on feeding

the precise internal and external information at the onset. Even a small change in input data can at times, cause large changes in the tree. Changing variables, excluding duplication information, or altering the sequence midway can lead to major changes and might possibly require redrawing the tree.

2) As [21] states, another fundamental flaw of the decision tree prognosis is that the decisions contained in the decision tree are based on expectations, and irrational expectations can lead to flaws and errors in the decision tree. Although the decision tree follows a natural course of events by tracing relationships between events, it may not be possible to plan for all contingencies that arise from a decision, and such oversights can lead to bad decisions.

Advantages and disadvantages of genetic algorithm

The major advantages of the genetic algorithm are:

1) The vitally important point is that genetic algorithms are intrinsically parallel. Most other algorithms are serial and can only explore the solution space to a problem in one direction at a time, and if the solution they discover turns out to be suboptimal, there is nothing to do but abandon all work previously completed and start over. Genetic algorithms are able to explore the solution space in multiple directions at once. If one path turns out to be a dead end, they can easily eliminate it and continue work on more promising avenues, giving them a greater chance each run of finding the optimal solution [18]. This fact is particularly significant especially for our case owing to the colossal perspective amount of input data.

2) Another notable strength of genetic algorithms is that they perform well in problems for which the fitness landscape is complex – ones where the fitness function is discontinuous, noisy, changes over time, or has many local optima [18]. Many search algorithms can become trapped by local optima: if they reach the top of a hill on the fitness landscape, they will discover that no better solutions exist nearby and conclude that they have reached the best one, even though higher peaks exist elsewhere on the map. Evolutionary algorithms, on the other hand, have proven to be effective at escaping local optima and discovering the global optimum in even a very rugged and complex fitness landscape. This aspect is

also substantial for our problem due to the fact that such category as “desirable sales” may be changed during the period.

The main disadvantages are the following:

1) A drawback of any evolutionary algorithm is that a solution is “better” only in comparison to other, presently known solutions; such an algorithm actually has no concept of an “optimal solution,” or any way to test whether a solution is optimal (for this reason, evolutionary algorithms are best employed on problems where it is difficult or impossible to test for optimality) [19]. This also means that an evolutionary algorithm never knows for certain when to stop, aside from the length of time, or the number of iterations or candidate solutions, that you wish to allow it to explore. Nevertheless, this factor is acceptable when it comes to our study because period of time is always known beforehand. In addition to this, the main goal is forecasting based on the previous data, and genetic algorithm is applicable to this problem better than to optimization.

2) Anyway, to find a stopping condition is not a trivial task. That is why the number of iterations is traditionally serves instead of it. In general, it may lead to worse solutions. It is not as crucial in our problem of prognosis as in the widespread problem of optimization, but, definitely, it may deteriorate the computational accuracy. Steven S. Skiena, in [20] strictly disbelieves in genetic approach and suggests that there is no clear problem which may be resolved with the usage of this algorithm even conditionally optimal.

Advantages and disadvantages of Microsoft Time Series Algorithm

Taking into account that this algorithm is “closed-source” and comes “out of the box”, it is ready to use and we can quickly start applying it to the raw data. But the limitation is that we can manipulate only allowed parameter values and this defines its pros & cons. As a Microsoft’s concrete realization of Decision Trees concept at high level, this approach inherits advantages and disadvantages of Decision Trees approach as well.

If we analyze two built-in models inside this approach, namely ARIMA and ARTXP, then

advantages and disadvantages can be presented in the following form:

ARIMA model pros:

1. Good for long-term prediction.
2. Supports multiplicative seasonality.
3. Combines autoregression.
4. Well-known model, checked over time.

ARIMA model cons:

1. Not possible to run policy simulation.
2. Traditional model identification techniques are subjective.
3. Does not support cross-prediction.

ARTXP model pros:

1. Supports cross-prediction.
2. Gives appropriate predictions in the near future.
3. Better to look at different variables influencing each other over time.

ARTXP model cons:

1. Less stable.
2. Not appropriate for long-term prediction.
3. High complexity of calculations for long-term predictions (requires much more time).

Conclusion

In this paper we investigated most appropriate a-priori methods for the task of product sales forecasting by known sales history and without other factors influence. This represents real-life practical task when we cannot use factor analysis and must rely on historical data solely.

We fixed

- Decision Trees with Random Forests approach,
- Evolutionary and Genetic algorithms and
- Microsoft Time Series Algorithm (realization)

as most appropriate (a-priori) for the task stated and discussed these methods here.

Advantages and disadvantages of each of them were shown and argued in details.

The next step is to apply all the methods to real-life data, i.e. real production sales historical data, tune the models and then analyze and compare a-priori with a-posteriori results to make the final decision about methods applicability as well as results obtained in each case.

Список використаних джерел

1. Чугуєва І.А. Модель прогнозування часових рядів по виборке максимального подобию. Дисертація на соискание ученой степени кандидата технических наук.: 05.13.18 / И.А. Чугуева. – М., 2012. – 153 с.
2. Geisser S. Predictive Inference: An Introduction. Monographs on Statistics and Applied Probability / S. Geisser. – NY: Chapman & Hall, 1993. – 265 p.
3. Microsoft Developer Network, Available from: <www.msdn.com>.
4. TreePlan Software. Introduction to Decision Trees. Available from: <http://treeplan.com/chapters/introduction-to-decision-trees.pdf>.
5. del Arco-Calderón C.L. Forecasting Time Series by Means of Evolutionary Algorithms / C.L. del Arco-Calderón, P.I. Viñuela, J.C.H. Castro // Parallel Problem Solving from Nature – PPSN VIII, Berlin, Springer Berlin Heidelberg, LNCS. – 2004. – Vol.3242. – pp. 1061-1070.
6. Cambridge Dictionaries Online: English Dictionary. Available from: <http://dictionary.cambridge.org/dictionary/english/decision-tree>.
7. SAS Institute. Decision Trees – What Are They? Available from: <http://support.sas.com/publishing/pubcat/chaps/57587.pdf>.
8. Pandey A.K. Early Software Reliability Prediction: A Fuzzy Logic Approach / A.K. Pandey, N.K. Goyal. – New Dehli: Springer India, 2013. – 153 p.
9. Xu G. Applied Data Mining / Guandong Xu, Yu Zong, Zhenglu Yang. – CRC Press, 2013. – 284 p.
10. Breiman L. Classification and Regression Trees / L. Breiman, J. Friedman, C.J. Stone, R.A. Olshen. – Chapman and Hall/CRC, 1984. – 368 p.
11. Gordon L. Using Classification and Regression Trees (CART) in SAS Enterprise Miner For Applications in Public Health / Leonard Gordon // SAS Global Forum 2013. Paper 089-2013. – 2013. – 8 p.
12. Jopp F. Modelling Complex Ecological Dynamics: An Introduction into Ecological Modelling for Students, Teachers & Scientists / F. Jopp, H. Reuter, B. Breckling (Eds.). – Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2011. – 397 p.
13. Loh W.-Y. Classification And Regression Trees / W.-Y. Loh // WIREs Data Mining and Knowledge Discovery. – 2011. – Vol.1. – pp.14-23.

References

1. CHUGUEVA, I. (2012) *Time Series Forecasting Model by Maximal Similarity Sample* (PhD Thesis). Moscow. 153 p.
2. GEISSER, S. (1993) *Predictive inference: an introduction. Monographs on Statistics and Applied Probability*. NY, Chapman&Hall. 265 p.
3. Microsoft Developer Network, Available from: <www.msdn.com>.
4. TreePlan Software. *Introduction to Decision Trees*. Available from: <http://treeplan.com/chapters/introduction-to-decision-trees.pdf>.
5. Del ARCO-CALDERÓN, C.L., VIÑUELA, P.I. and CASTRO J.C.H. (2004) Forecasting Time Series by Means of Evolutionary Algorithms. *Parallel Problem Solving from Nature – PPSN VIII*. LNCS, Springer Berlin Heidelberg, Vol.3242. pp. 1061-1070.
6. Cambridge Dictionaries Online: English Dictionary. Available from: <http://dictionary.cambridge.org/dictionary/english/decision-tree>.
7. SAS Institute. Decision Trees – What Are They? Available from: <http://support.sas.com/publishing/pubcat/chaps/57587.pdf>.
8. PANDEY, A.K. and GOYAL, N.K. (2013) *Early Software Reliability Prediction: A Fuzzy Logic Approach*. New Dehli: Springer India. 153 p.
9. XU, G., ZONG, Yu and YANG, Zh. (2013) *Applied Data Mining*. CRC Press. 284 p.
10. BREIMAN, L., FRIEDMAN, J., STONE, C.J. and OLSHEN, R.A. (1984) *Classification and Regression Trees*. Chapman and Hall/CRC. 368 p.
11. GORDON, L. (2013) Using Classification and Regression Trees (CART) in SAS Enterprise Miner For Applications in Public Health. *SAS Global Forum 2013*. Paper 089-2013. 8 p.
12. JOPP F., REUTER, H. and BRECKLING, B., Eds. (2011) *Modelling Complex Ecological Dynamics: An Introduction into Ecological Modelling for Students, Teachers & Scientists*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg. 397 p.
13. LOH W.-Y. (2011) Classification and regression trees. *WIREs Data Mining and Knowledge Discovery*, Vol.1. pp. 14-23.
14. WU, X., KUMAR, V., QUINLAN, J.R., GHOSH, J., et al. (2008) Top 10 algorithms in data mining. *Knowledge and Information Systems*, Vol.14, issue 1. pp. 1-37.

14. Wu X. Top 10 Algorithms In Data Mining / Xindong Wu, Vipin Kumar, J. Ross Quinlan, Joydeep Ghosh, Qiang Yang, Hiroshi Motoda, Geoffrey J. McLachlan, Angus Ng, Bing Liu, Philip S. Yu, Zhi-Hua Zhou, Michael Steinbach, David J. Hand, Dan Steinberg // Knowledge and Information Systems. – 2008. – Vol.14, Iss.1. – pp.1-37.
15. Cortez P. Genetic and Evolutionary Algorithms for Time Series Forecasting / Paulo Cortez, Miguel Rocha, José Neves // Engineering of Intelligent Systems, Proceedings of 14th International Conference on Industrial and Engineering Applications of Artificial Intelligence and Expert Systems, IEA/AIE 2001 Budapest, Hungary, June 4–7, 2001. – Springer Berlin Heidelberg, LNCS, Vol.2070. – pp.393-402.
16. Chodak G. Genetic Algorithms in Seasonal Demand Forecasting / Chodak Grzegorz, Kwaśnicki Witold // In Proceedings of “Information Systems Architecture and Technology '2000, Wrocław University of Technology”. – Wrocław, 2000. – pp.91-98.
17. Lin L. The applications of genetic algorithms in stock market data mining optimisation / L. Lin, L. Cao, J. Wang & C. Zhang // Proceedings of Fifth International Conference on Data Mining, Text Mining and their Business Applications (September 15-17, 2004, Malaga, Spain). – Southampton, Boston: WITPress, 2004. – pp.273-280.
18. Marczyk A. Genetic Algorithms and Evolutionary Computation / Adam Marczyk. – The TalkOrigins Archive 2004. – 2004. Available from: <www.talkorigins.org/faqs/genalg/genalg.html>.
19. FrontlineSolvers. Genetic Algorithms And Evolutionary Algorithms – Introduction. Available from: <<http://www.solver.com/genetic-evolutionary-introduction>>.
20. Skiena S. The Algorithm Design Manual / Steven S. Skiena. – London: Springer-Verlag, 2008. – 730 p.
21. Bright Hub Project Management. Disadvantages to Using Decision Trees. Available from: <<http://www.brighthubpm.com/project-planning/106005-disadvantages-to-using-decision-trees/>>.
22. Deshpande B. 4 key advantages of using decision trees for predictive analytics / Bala Deshpande. Available from: <www.simafore.com/blog/bid/62333/4-key-advantages-of-using-decision-trees-for-predictive-analytics>.
15. CORTEZ, P., ROCHA, M. and NEVES, J. (2001) Genetic and Evolutionary Algorithms for Time Series Forecasting. *Engineering of Intelligent Systems, Proceedings of 14th International Conference on Industrial and Engineering Applications of Artificial Intelligence and Expert Systems, IEA/AIE 2001 Budapest, Hungary, June 4–7, 2001*. Springer Berlin Heidelberg, LNCS, Vol.2070. pp.393-402.
16. CHODAK, G. and KWAŚNICKI, W. (2000) Genetic Algorithms in Seasonal Demand Forecasting. *Proceedings of “Information Systems Architecture and Technology '2000”*, Wrocław University of Technology, Wrocław. pp. 91-98.
17. LIN, L., CAO, L., WANG, J. and ZHANG, C. (2004) The applications of genetic algorithms in stock market data mining optimisation. *Proceedings of Fifth International Conference on Data Mining, Text Mining and their Business Applications* (September 15-17, 2004, Malaga, Spain). Southampton, Boston, WITPress. pp.273-280.
18. MARCZYK, A. (2004) *Genetic Algorithms and Evolutionary Computation*. The TalkOrigins Archive 2004. Available from: <<http://www.talkorigins.org/faqs/genalg/genalg.html>>.
19. FrontlineSolvers. *Genetic Algorithms And Evolutionary Algorithms – Introduction*. Available from: <<http://www.solver.com/genetic-evolutionary-introduction>>.
20. SKIENA, S. (2008) *The Algorithm Design Manual*. London: Springer-Verlag. 730 p.
21. Bright Hub Project Management. *Disadvantages to Using Decision Trees*. Available from: <<http://www.brighthubpm.com/project-planning/106005-disadvantages-to-using-decision-trees/>>.
22. DESHPANDE, B. *4 key advantages of using decision trees for predictive analytics*. Available from: <<http://www.simafore.com/blog/bid/62333/4-key-advantages-of-using-decision-trees-for-predictive-analytics>>.

Надійшла до редколегії 10.09.2015

УДК 681.3

Марченко О. О., д.ф.-м.н., доц.

**Методи невід'ємної тензорної та
матричної факторизації в задачах
комп'ютерної лінгвістики**

Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 83000, м. Київ, пр-т.
Глушкова 4д, e-mail: rozenkrans@yandex.ua

O.O. Marchenko, Doctor of Sciences (Physics &
Mathematics), Associate Professor

**Non-negative tensor and matrix
factorization methods for natural language
processing**

Taras Shevchenko National University of Kyiv,
83000, Kyiv, Glushkova st., 4d,
e-mail: rozenkrans@yandex.ua

В роботі розглянуто застосування методів невід'ємної матричної та тензорної факторизації в задачах комп'ютерної лінгвістики, зокрема для латентного семантичного аналізу, кластеризації великих масивів текстів природною мовою, для автоматизації генерації таких лінгвістичних структур як селективні преференції та опису структур фреймової семантики дієслів. Також представлено модель опису композиційної семантики речень природною мовою, де за допомогою тензорної факторизації семантика кожного окремо взятого слова визначається та уточнюється у контексті інших слів речення та у контексті всього речення у цілому.

Ключові слова: комп'ютерна лінгвістика, семантичний аналіз текстів природною мовою, невід'ємна факторизація тензорів, невід'ємна матрична факторизація.

In the paper the use of non-negative matrix and tensor factorization methods in classical tasks of computational linguistics is considered. These tasks include latent semantic analysis and large natural language texts corpora clustering, automation methods for generation of such linguistic structures as selectional preferences and descriptions of the verbs semantics frame structures etc. The N-dimensional tensor is implemented as a multiway array of data obtained from the frequency analysis of large text corpora. Factorization of N-dimensional tensor with decomposition rank k generates N matrixes consisting of k columns that represent a mapping of each individual dimension of the tensor on k factor-dimensions of latent semantic space. The paper describes an algorithm for unsupervised generation of verb subcategorization frames and selectional preference information. The method improves previous non-negative tensor factorization approaches by predicting whether a syntactic argument is likely to be used with a verb.

The paper also describes the model of compositional semantics of natural language sentences where non-negative tensor factorization is employed. Semantics of every single word is defined and clarified in the context of other words of the sentence and in the context of the entire sentence.

Keywords: natural language processing, semantic analysis, non-negative tensor and matrix factorization.

Статтю представив д.ф.-м.н., проф., чл.-кор. НАН України Анісімов А.В.

Методи невід'ємної тензорної та матричної факторизації є ефективними методами аналізу, класифікації та кластеризації багатовимірних даних, що зберігаються у великих масивах.

Дані методи широко застосовуються у багатьох напрямках штучного інтелекту, а також у інформаційних технологіях загалом, коли є необхідність аналізу залежностей та

взаємозв'язків у даних, що мають різну природу та модальність.

Серед основних напрямів застосувань методів невід'ємної тензорної і матричної факторизації великих багатовимірних масивів даних слід відзначити обробку та аналіз графічних зображень, обробку відеозображень, кластеризацію великих текстових корпусів,

виділення лінгвістичних даних з великих корпусів текстів природною мовою [1, 2].

Методи невід'ємної тензорної і матричної факторизації дозволяють автоматизувати заповнення контентом лінгвістичних баз знань онтологічного типу [3].

Застосування невід'ємної матричної факторизації в задачах семантичного аналізу природномовних текстів

Теми, концепції та семантика є ключовими ознаками тексту природною мовою, які дають уявлення про його зміст та смисл. Для отримання таких ознак з тексту були розроблені спеціальні методи, відомі під загальною назвою "виділення ознак" (feature extraction). Метою таких методів є виділення основних концепцій (або тем) текстів та представлення документів у вигляді їх комбінації. Ці методи успішно застосовуються у задачах обробки природномовних текстів, таких як кластеризація документів, знаходження семантичної відстані та багато інших.

Матричні розклади, такі як сингулярний розклад матриці (відомий під назвою «латентний семантичний аналіз») [4] або невід'ємний матричний розклад (невід'ємна матрична факторизація, NMF) [5], використовуються в якості основи даних методів.

Загалом, NMF є розкладом (або факторизацією) матриці V в добуток двох матриць W і H . Причому, на елементи матриць V , W та H накладаються додаткові обмеження невід'ємності. Потрібно зазначити, що такий розклад не є обов'язково унікальним і матриці W та H не повинні бути ортогональними.

Ця факторизація матриць стала популярною після публікації статті Лі та Сунга [5]. В цій роботі було запропоновано алгоритм побудови невід'ємного розкладу матриці.

В цій статті використовується оригінальний метод Лі та Суна, ще відомий під назвою «мультиплікативні правила оновлення» В якості цільової функції використовується норма Фробеніуса.

У області обробки природномовних текстів NMF зазвичай застосовується до TD-матриці (матриці терм×документ). Кожен рядок матриці TD відповідає певному документу з корпусу текстів, а кожен стовпець матриці відповідає певному слову. Якщо задано m документів і загальна кількість слів у них рівна n , то розмір TD матриці V рівний m на n . NMF використовується для розкладу матриці V у

добуток двох матриць W і H з розмірами m на k і k на n відповідно, де зазвичай $k \ll \min(m, n)$. Наприклад, k може бути встановлено в значення очікуваної кількості кластерів. Часто параметр k називають «кількість ознак».

Інтуїтивно, параметр k може бути пояснений наступним чином: TD матриця V («документи» × «слова») розкладається у добуток двох матриць – $V=WH$. Матриця W пов'язує «документи» і «ознаки», а матриця H пов'язує «ознаки» і «слова». Тому, як випливає з властивостей добутку матриць, кожен документ представляється у вигляді лінійної комбінації виділених ознак. Після цього, традиційні методи кластеризації можуть бути застосовані до рядків матриці W . Рядки матриці W можна розглядати як вектори семантичних або тематичних ознак m документів. Для визначення тематичної або семантичної близькості двох документів можна використовувати косинусну міру, що обчислюється через скалярний добуток векторів ознак документів.

В цілому повний процес кластеризації виглядає наступним чином:

1. Побудувати TD-матрицю V
2. Нормалізувати стовпці матриці V
3. Застосувати NMF: $V = WH$
4. Побудувати кластеризацію на основі матриць W і H

NMF, як засіб обробки природної мови, має кілька переваг над іншими методами виділення ознак. По-перше, матриці W і H мають тільки невід'ємні елементи, що робить процес їх інтерпретації у термінах обробки природної мови простішим і більш інтуїтивним. По-друге, стовпці W не повинні бути ортогональними, а отже виділені теми можуть мати спільні риси, що є досить звичайним для реальних документів.

Використання невід'ємної факторизації тензорів для моделювання та виділення лінгвістичних семантико-синтаксичних структур з великих текстових корпусів

У роботі [1] було запропоновано модель невід'ємної факторизації тензорів, у яких зберігаються дані про частоту використання різних словосполучень у великих текстових корпусах із врахуванням синтаксичної позиції слів. Факторизовані тензорні лінгвістичні моделі дозволяють автоматизовано виділяти з корпусів текстів опис таких лінгвістичних структур, як селективні преференції (selectional preferences)[1]

та субкатегоріальні фрейми дієслів [2], що містять дані про семантичні та синтаксичні властивості зв'язків між дієсловами та їх аргументами-іменниками у реченнях.

Тривимірний тензор для зберігання частотних оцінок сполучностей слів – підметів, присудків та прямих додатків, отриманих в результаті аналізу великих текстових корпусів, зображений на рисунку 1.

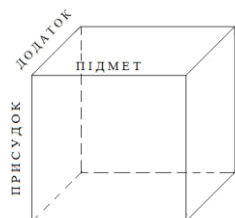


Рисунок 1. Тривимірний тензор для зберігання частотних даних сполучностей слів – підметів, присудків та прямих додатків.

В результаті частотного аналізу текстових корпусів формується розріджений тензор великої розмірності. З метою отримання більш стислого та зручного представлення до тензору застосовується невід'ємна тензорна факторизація.

Основна ідея методу полягає в мінімізації суми квадратів різниць значень між оригіналом тензору та його факторизованою моделлю. Для тривимірного випадку тензору $T \in R^{D1 \times D2 \times D3}$ це відповідає рівнянню

$$\min_{x_i \in R^{D1}, y_i \in R^{D2}, z_i \in R^{D3}} \|T - \sum_{i=1}^k x_i \circ y_i \circ z_i\|_F^2, \text{ де } k -$$

число вимірів у факторизованій моделі.

При невід'ємній тензорній факторизації додається обмеження невід'ємності, перетворюючи модель у

$$\min_{x_i \in R_{\geq 0}^{D1}, y_i \in R_{\geq 0}^{D2}, z_i \in R_{\geq 0}^{D3}} \|T - \sum_{i=1}^k x_i \circ y_i \circ z_i\|_F^2$$

Моделю можна представити графічно наступним чином, враховуючи, що дана декомпозиція складається з суми тензорних добутків трійок векторів (по числу вимірів тензору).

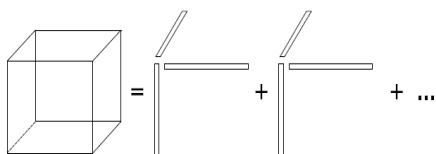


Рисунок 2. Графічне представлення невід'ємної тензорної факторизації як суми зовнішніх добутків.

Декомпозиція невід'ємної тензорної факторизації для тензору частотних оцінок сполучностей «підмет» $\times$ «присудок» $\times$ «додаток» у вигляді трьох матриць представлена на рисунку 3.

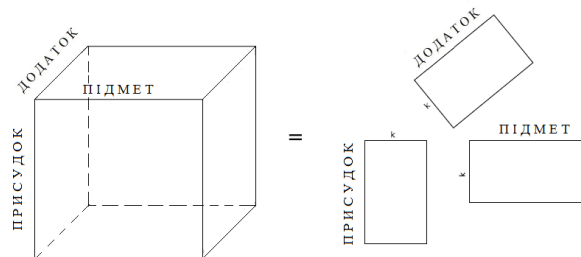


Рисунок 3. Графічне представлення невід'ємної тензорної факторизації для лінгвістичного тензору.

В результаті факторизації кожен підмет-іменник, присудок-дієслово та додаток-іменник отримує власний вектор розмірності k з відповідних матриць.

Оригінальне значення з тензору T для трійки (s, v, o) x_{svo} може бути відновлене у факторизованій моделі обчисленням суми

$$x_{svo} = \sum_{i=1}^k s_i v_i o_i.$$

Для того, щоб обчислити оцінку частоти для сполучення *кухар готує борщ* потрібно знайти вектор-підмет для слова *кухар*, потім вектор-присудок для значення *готує*, і, нарешті, вектор-додаток для слова *борщ*. Потім згідно попередньої формули обчислюється оцінка частоти для даного сполучення слів. Якщо оцінка більша за деякий пороговий рівень, то можна зробити висновок про можливість існування даного речення у мові.

Вектори з матриць факторизованого тензору описують комутативні властивості слів. Вони прописують, які зв'язки утворюють дані слова – з якими лексемами та у яких синтаксичних позиціях. У даних векторів присутня як синтаксична, так і семантична складова. Тому вони були названі векторами семантико-синтаксичної валентності слів.

Моделювання композиційної семантики речень природної мови шляхом застосування невід'ємної факторизації лінгвістичних тензорів

У роботі [6] було запропоновано застосувати декомпозицію Такера для факторизації

лінгвістичних тензорів з метою моделювання семантики слів в контексті семантики всього речення. Таким чином обчислення семантичних значень окремих слів йде від визначення семантики цілого речення.

Побудова латентних факторів іменників. Першим етапом методу є побудова латентної факторної моделі для іменників, базуючись на словах з їх контексту. Для цієї цілі використовується невід’ємна матрична факторизація (алгоритм Лі та Сунга). Невід’ємна матрична факторизація мінімізує цільову функцію (у даному випадку збіжності Кулбека-Ліблера моделі добутку двох матриць $\mathbf{W}_{I \times K}$ $\mathbf{H}_{K \times J}$ до початкової матриці $\mathbf{V}_{I \times J}$ при умові невід’ємності елементів усіх матриць. При цьому $K \ll I, J$, таким чином має місце значна редукція над даними початкової матриці. Модель факторизації представлено на рисунку 4.

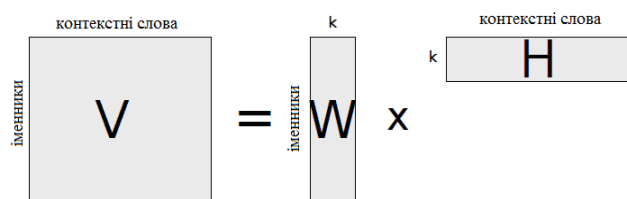


Рисунок 4. Модель невід’ємної факторизації матриці контексту

Для такої цільової функції Кулбека-Ліблера та для двох початкових матриць $\mathbf{W}_0$ і $\mathbf{H}_0$ NMF алгоритм складається з ітераційного виконання двох кроків:

1. $(\mathbf{H}_k)_{i,j} = (\mathbf{H}_{k-1})_{i,j} \times \frac{(\mathbf{W}_{k-1}^T \mathbf{V})_{i,j}}{(\mathbf{W}_{k-1}^T \mathbf{W}_{k-1} \mathbf{H}_{k-1})_{i,j}},$
2. $(\mathbf{W}_k)_{i,j} = (\mathbf{W}_{k-1})_{i,j} \times \frac{(\mathbf{V} \mathbf{H}_{k-1}^T)_{i,j}}{(\mathbf{W}_{k-1} \mathbf{H}_{k-1} \mathbf{H}_{k-1}^T)_{i,j}}.$

Метод гарантовано збігається до локального мінімуму функції Кулбека-Ліблера.

Моделювання багатовимірної взаємодії. На другому етапі будується багатовимірний модель взаємодії для трійок підмет-присудок-додаток, базуючись на латентних факторах, отриманих на першому етапі. Дана латентна модель взаємодії розроблена на основі декомпозиції Такера [7], хоча конкретна реалізація суттєво відрізняється в деталях.

Декомпозиція Такера – мультилінійне узагальнення добре відомої сингулярної декомпозиції матриць, що використовується у латентному семантичному аналізі. У декомпозиції Такера тензор розкладається на ядерний тензор, який множиться на матриці по кожному з вимірів. Для тривимірного тензору $\mathcal{X} \in R^{I \times J \times L}$ модель визначається як

$$\mathcal{X} = \mathcal{G} \times_1 \mathbf{A} \times_2 \mathbf{B} \times_3 \mathbf{C} = \sum_{p=1}^P \sum_{q=1}^Q \sum_{r=1}^R g_{pqr} \mathbf{a}_p \circ \mathbf{b}_q \circ \mathbf{c}_r$$

При цьому $P, Q, R \ll I, J, L$. Ядерний тензор $\mathcal{G}$ представляє стиснутий латентний варіант оригінального тензору $\mathcal{X}$; матриці $\mathbf{A} \in R^{I \times P}$, $\mathbf{B} \in R^{J \times Q}$ та $\mathbf{C} \in R^{L \times R}$ представляють латентні фактори для кожного виміру, у той час як $\mathcal{G} \in R^{P \times Q \times R}$ показує рівень взаємодії між різними латентними факторами. На рисунку 5 зображено графічне представлення декомпозиції Такера.

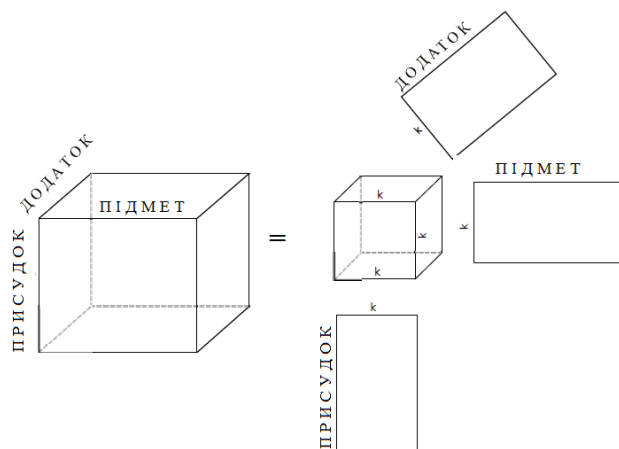


Рисунок 5. Графічне представлення декомпозиції Такера

Побудова моделі Такера з двовимірних факторів. Обчислення моделі декомпозиції Такера для тензору вимагає багато ресурсів у термінах часу та пам’яті. Крім того, декомпозиція не є унікальною. Враховуючи ці недоліки, було розроблено альтернативний метод побудови моделі Такера. Розглядаються фактор-матриці як такі (як вихід першого етапу методу) та обчислюється ядерний тензор $\mathcal{G}$. Крім того, не використовується латентне представлення для першого виміру, що означає, що перший вимір представлений безпосередньо через оригінальні дані. Дана модель напряму використовується до лінгвістичних даних. Ядерний тензор $\mathcal{G}$ моделює латентну взаємодію між дієсловами-присудками, підметами та додатками. Ядерний тензор $\mathcal{G}$

обчислюється застосуванням n -мірного добутку відповідного виміру оригінального тензору:

$$\mathcal{G} = \mathcal{X}_{\times_2} \mathbf{W}^T \times_3 \mathbf{C}^T,$$

де $\mathcal{X}^{V \times N \times N}$ – оригінальний тензор, що містить частотні оцінки сумісного використання трійок *підмет-присудок-додаток* (отримані з корпусу текстів), а $\mathbf{W}^{N \times K}$ – латентна фактор-матриця для іменників. Латентне представлення для виміру дієслів не використовується. Для ефективного обчислення семантичної близькості дієслів тільки виміри підметів та додатків представлені у моделі факторами, у той час як вимір дієслів представлений безпосередньо оригінальними даними. Отже, ядерний тензор $\mathcal{G}$ матиме розмір $V \times K \times K$. Модель матиме вигляд як на рисунку 6.

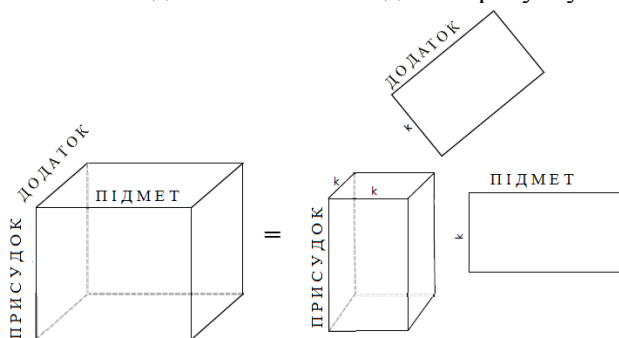


Рисунок 6. Модель без латентного виміру дієслів-присудків

Композиція трійок підмет-присудок-додаток. Для того, щоб обчислити композицію конкретної трійки *підмет-присудок-додаток*, треба виділити відповідний вектор-підмет $\mathbf{w}_s$ та вектор-додаток $\mathbf{w}_o$ з фактор-матриці $\mathbf{W}$ та обчислити тензорний добуток обох векторів, результатом якого буде матриця $\mathbf{Y}$ розміром $K \times K$.

$$\mathbf{Y} = \mathbf{w}_s \circ \mathbf{w}_o$$

Фінальним кроком є порівняння оригінальної матриці дієслів $\mathbf{G}_v$ (матриці латентної взаємодії факторів, яка є шаром тензору $\mathcal{G}$, що відповідає даному дієслову) та матриці $\mathbf{Y}$, що описує латентну взаємодію даного підмета й додатку. Порівняння виконується застосуванням операції добутку Хадамарда над $\mathbf{G}_v$ та $\mathbf{Y}$.

$$\mathbf{Z} = \mathbf{G}_v * \mathbf{Y}.$$

В такий спосіб обчислюється матриця композиційності для словосполучень *підмет-присудок-додаток*.

Приклад. Обчислимо матриці композиційності для дієслова *to damage* у контексті речень:

- Man damages car.
- Car damages man.

Зазначимо, що контекст дієслова відрізняється у цих реченнях лише порядком слів. У першому реченні підметом є *man*, додатком – *car*, а у другому все навпаки.

Першим кроком потрібно виділити латентні вектори для підмету та додатку з матриці $\mathbf{W}$ ($\mathbf{w}_{man}$ та $\mathbf{w}_{car}$ для першого речення та $\mathbf{w}_{car}$ та $\mathbf{w}_{man}$ – для другого). Далі треба обчислити тензорні добутки векторів підметів та векторів додатків – $\mathbf{w}_{man} \circ \mathbf{w}_{car}$ та $\mathbf{w}_{car} \circ \mathbf{w}_{man}$, результатом чого будуть матриці $\mathbf{Y}_{(man,car)}$ та $\mathbf{Y}_{(car,man)}$. Далі береться матриця дієслова $\mathbf{G}_{damage}$, що є шаром тензору $\mathcal{G}$, якій відповідає даному дієслову, та обчислюються добутки Хадамарда:

$$\mathbf{Z}_1 = \mathbf{G}_{damage} * \mathbf{Y}_{(man,car)};$$

$$\mathbf{Z}_2 = \mathbf{G}_{damage} * \mathbf{Y}_{(car,man)}.$$

У матрицях композиційності виділяються найбільші значення, що відповідають найтиповішим парам *підмет-додаток* у рамках контекстів наведених речень. Далі у тензорі $\mathcal{G}$ можна пошукати такі матриці дієслів, які мають подібні набори значень у тих самих елементах, що і в $\mathbf{Z}_1$ та $\mathbf{Z}_2$. Матриця $\mathbf{Z}_1$ виявила значну кореляцію з матрицями дієслів *crash*, *drive* та *ride*, що свідчить про семантичну зв'язність дієслова *to damage* у контексті першого речення до даного набору дієслів. Матриця $\mathbf{Z}_2$ виявила кореляцію з матрицями дієслів *scare*, *kill*, *hurt*, що демонструє суттєву відмінність семантики дієслова *to damage* у контексті другого речення. Таким чином, модель при обчисленні контекстної семантики речення враховує не лише набір контекстних слів, але і їх синтаксичну позицію.

Висновки

В роботі розглянуто застосування методів невід'ємної матричної та тензорної факторизації в задачах комп'ютерної лінгвістики, зокрема для латентного семантичного аналізу та кластеризації великих масивів текстів природною мовою, для автоматизації генерації таких лінгвістичних структур як селективні преференції та опису структур фреймової семантики дієслів. Також представлено модель опису композиційної семантики речень природною мовою, де за допомогою тензорної факторизації семантика кожного окремо взятого слова визначається та уточнюється у контексті інших слів речення та у контексті всього речення в цілому.

Список використаних джерел

1. Van de Cruys T. A Non-negative Tensor Factorization Model for Selectional Preference Induction / T. Van de Cruys // Journal of Natural Language Engineering. – 2010. – №16 (4). – P. 417-437.
2. Van de Cruys T. Multi-way Tensor Factorization for Unsupervised Lexical Acquisition / T. Van de Cruys, L. Rimell, T. Poibeau, A. Korhonen // In Proceedings of the International Conference on Computational Linguistics (COLING-12), Mumbai, India. – 2012. – P. 2703-2720.
3. Анисимов А.В. Определение семантических валентностей концептов онтологий с помощью неотрицательной факторизации тензоров больших текстовых корпусов / А.В. Анисимов, А.А. Марченко, Т.Г. Вознюк // Кибернетика и системный анализ. – 2014. – № 3. – С. 3-16.
4. Deerwester S. Indexing by latent semantic analysis / S. Deerwester, S. T. Dumais, G.W. Furnas, T.K. Landauer, R. Harshman// Journal of the Association for Information Science. – 1990. – № 41(6). – P. 391-407.
5. Lee D.D. Algorithms for non-negative matrix factorization / D.D. Lee, S.H. Seung // In Proceedings of the NIPS-2000. – 2000. – P. 556-562.
6. Van de Cruys T. A Tensor-Based Factorization Model of Semantic Compositionality / T. Van de Cruys, T. Poibeau, A. Korhonen // Proceedings of NAACL-2013. – 2013. – P. 1142-1151.
7. Cichocki A. Nonnegative Matrix and Tensor Factorizations: Applications to Exploratory Multi-way Data Analysis and Blind Source Separation / A. Cichocki, R. Zdunek, A.-H. Phan, S.-I. Amari// Chichester: J. Wiley & Sons. – 2009. – p. 477.

References

1. VAN DE CRUYS T. (2010) *A Non-negative Tensor Factorization Model for Selectional Preference Induction*, Journal of Natural Language Engineering, 16 (4), pp. 417-437.
2. VAN DE CRUYS T., RIMELL L., POIBEAU T., KORHONEN A. (2012) *Multi-way Tensor Factorization for Unsupervised Lexical Acquisition*, Proceedings of the International Conference on Computational Linguistics (COLING-12), pp. 2703-2720.
3. ANISIMOV A. V., MARCHENKO A. A., VOZNIUK T. G. (2014), *Determination of semantic valences of ontologies concepts using non-negative tensor factorization of large text corpora*, Cybernetics and System Analysis 3, pp. 3-16.
4. DEERWESTER S., DUMAIS S. T., FURNAS G. W., LANDAUER T. K., HARSHMAN R. (1990) *Indexing by latent semantic analysis*, Journal of the Association for Information Science 41(6), pp. 391-407.
5. LEE D. D., SEUNG S. H. (2000) *Algorithms for non-negative matrix factorization*, Proceedings of the NIPS-2000, pp. 556-562.
6. VAN DE CRUYS T., POIBEAU T., KORHONEN A. (2013) *Tensor-Based Factorization Model of Semantic Compositionality*, Proceedings of NAACL-2013, pp. 1142-1151.
7. CICHOCKI A., ZDUNEK R., PHAN A.-H., AMARI S.-I. (2009) *Nonnegative Matrix and Tensor Factorizations: Applications to Exploratory Multi-way Data Analysis and Blind Source Separation*, Chichester: J. Wiley & Sons, P. 477.

Надійшла до редколегії 01.12.15

УДК 004.912

Мусбах Заїд Енвейджи, аспірант

Обробка арабської мови, заснована на правилах

Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, пр-т.
Академіка Глушкова 4д,
e-mail: s.cc85@yahoo.com

Musbah Zaid Enweiji postgraduate

Arabic natural language processing with Rule based approach features

Taras Shevchenko National University of Kyiv,
03680, Kyiv, Glushkova st., 4d,
e-mail: s.cc85@yahoo.com

Підхід на основі правил був успішно використаний при розробці багатьох систем обробки природної мови. Ця стаття присвячена вивченню проблем та особливостей використання даного підходу до сімейства арабських мов. Особливу увагу було приділено характеристикам арабської мови та показано можливості машинного перекладу, заснованого на правилах.

Ключові слова: обробка арабської мови, машинний переклад, морфологічний аналіз

The rule-based approach has successfully been used in developing many natural language processing systems. Systems that use rule-based transformations are based on a core of solid linguistic knowledge. The linguistic knowledge acquired for one natural language processing system may be reused to build knowledge required for a similar task in another system. In this paper we explained how to involved rule-based approach for different Arabic natural language processing tasks. Also We focused on the characteristics of Arabic language as rich morphologically language and the rule of ruled based approach in some applications that can be used such as machine translation .

Key Words: Arabic language processing, machine translation , morphological analysis

I. INTRODUCTION

ARABIC is a Semitic language spoken by more than 330 million people as a native language, in an area extending ill-formed learner input. Furthermore, the linguistic knowledge acquired for one natural language processing from the Arabian/Persian Gulf in the East to the Atlantic Ocean in the West. Moreover, it is the language in which 1.4 billion Muslims around the world perform their daily prayers. Arabic is a highly structured and derivational language where morphology plays a very important role [2].

Over the last few years, Arabic natural language processing (ANLP) has gained increasing importance, and several state of the art systems have been developed for a wide range of applications. These applications had to deal with several complex problems pertinent to the nature and structure of the Arabic language [7]. The lack of available resources and their limitations have motivated many scholars

to follow the rule- based approach and rely on hand-constructed linguistic rules in developing their tools, systems, and resources. ANLP tools based on this approach generally include morphological analyzers/generators and syntactic analyzers/generators. The approach is also used for some specific tasks. Moreover, rule-based ANLP systems include machine translators, named entity recognizers, and intelligent computer assisted language learning systems.

Systems and tools that use rule-based transformations are based on a core of solid linguistic knowledge [8]. The characteristics of a rule-based approach are :

- 1 . It has a strict sense of well-formedness in mind .
- 2 . It imposes linguistic constraints to satisfy well- formedness .
- 3 . It allows the use of heuristics (such as a verb cannot be

preceded by a preposition)

4. It relies on hand-constructed rules that are to be acquired from language specialists rather than automatically trained from data.

The advantages of this approach are that it is easy to incorporate domain knowledge into the linguistic knowledge which provides highly accurate results. Domain rules have been used in generating Arabic sentences [9] and analysis of ill-formed learner input [1]. Furthermore, the linguistic knowledge acquired for one natural language processing system may be reused to build knowledge required for a similar task in another system.

Because time was of the essence, and in the absence of complete computationally viable grammars of Arabic, statistical approaches that rely primarily on training data and parallel texts gained momentum. Machine learning approach usually gives good results when the training set and the testing data are similar. There is also a point at which more training data does not make significant improvement. Moreover, there may be some structures or entities that are sparse. In this case the machine learning component does not have enough data to make the right generalization. Regardless of sparseness of the data, the statistical-based or machine learning approaches have some difficulties with specific natural language processing tasks such as distinguishing between well-formed and ill-formed input, whereas the rule-based approaches have the advantage of providing detailed analyses of the Arabic learner's answer using linguistic (morphological and syntactic) knowledge which, in applications such intelligent tutoring systems, enables feedback elaboration that helps learners to understand better their knowledge gap.

II. ASPECTS OF THE ARABIC LANGUAGE

Arabic is rooted in the Classical or Quranic Arabic, but over the centuries, the language has developed to what is now accepted as MSA. MSA is a simplified form of Classical Arabic, and follows its grammar [8]. The main differences between Classical Arabic and MSA are that MSA has a larger (more modern) vocabulary, and does not use some of the more complicated forms of grammar found in Classical Arabic. For example, short vowels are omitted in MSA such that letters of the Arabic text are written without diacritic signs. The Arabic language is written from right to left. It has 28 letters, some of which have one form (like "ا"),

while others have two forms ("س"; "س"), three forms ("ه"; "ه"; "ه") or four forms

("ع"; "ع"; "ع"; "ع") [14]. Arabic words are generally classified into three main categories [19]: noun, verb, and particle.

Arabic is a language of rich and complex morphology, both derivational and inflectional [7]. Word derivation in Arabic involves three concepts the root, pattern, and form. Word forms (e.g. verbs, verbal nouns, agent nouns, etc.) are obtained from roots by applying derivational rules to obtain corresponding patterns. Generally, each pattern carries a meaning which, when combined with the meaning inherent in the root, gives the target meaning of the lexical form. For example, the meaning of the word form "كاتب" (writer) is the combination of the meaning inherent in the root "ك" (write) and the meaning carried by the pattern (or 'template') "فـاعـل" (fa'il) which is the pattern of the doer of the root. Arabic inflectional morphology involves adding morph syntactic features such as tense, number, person, case, etc. Arabic also has some more morphological peculiarities. For example, an indefinite word can be made definite by attaching the prefix definite article "الـ" (the) to it, but there is no indefinite article. As another example, a verb can take affix pronouns such as "سأعطيكما" (will-I-give-you); this also shows that the verb is conjugated with the dual suffix pronoun "كما" (you). An Arabic inflected verb can form a complete sentence, e.g. the verb "سمعتك" (heard-I-you) contains a complete syntactic structure in just a one-word sentence. Moreover, the rich morphology of Arabic allows the dropping of the subject pronoun ('pro-drop'), i.e. to have a null subject when the inflected verb includes subject affixes. There are two types of Arabic sentences [10]: nominal and verbal sentence. An Arabic compound sentence is formed from a simple sentence followed by a complementary sentence [11], such as a conjunction form "نحن نرغب في تأجير سيارة وسنحتاج (عطف) e.g. (We want to rent a car and we- will-need to park near the-hotel), or a quasi-sentence "بالفندق" (in-the-hotel). e.g. (شبه جملة). Agreement is a major syntactic principle that affects the generation of an Arabic sentence. Agreement in Arabic is full or partial and is determined by word order [10]. An adjective in Arabic usually follows the noun it modifies "الموصوف" (and fully agrees with it with respect to number, gender, case, and definiteness. The verb in Verb-Subject-Object order agrees with the subject in gender, e.g. "جاء الولد" (came the- boy/the-boys) versus "جاءت البنات"

" البنات/(came the-girl/the- girls). In Subject-Verb-Object (SVO) order, the verb agrees with the subject with respect to number and gender, e.g " الولد جاء " . البنات / البنات جاءت/(came the-boy/the-boys) versus البنات / البنات جنن (came the-girl/the-girls).

III. MACHINE TRANSLATION

Machine translation (MT) is the area of information technology and applied linguistics dealing with the translation of human languages such as English and Arabic. There are three different approaches of rule-based translation systems : direct, transfer, and interlingual. The simplest approach is the direct translation approach where a word-by-word translation (lexical transfer) from the source language to the target language is performed. From a linguistic point of view, what is missing in this approach is any analysis of the internal structure of the source text, particularly the grammatical relationships between the constituents of the sentences. Such systems gave the kind of translation that was characterized by frequent mistranslations at the lexical level and largely inappropriate syntactic structures which mirrored too closely those of the source language.

In the transfer approach, the translation process is decomposed into three steps: analysis, transfer, and generation. In the analysis step, the input sentence is analyzed syntactically (and in some cases semantically) to produce an abstract representation of the source sentence, usually an annotated parse tree. In the transfer step, this representation is transferred into a corresponding representation in the target language; a collection of tree-to-tree transformations is applied recursively to the analysis tree of the source language in order to construct a target-language analysis tree. In the generation step, the target-language output is produced. The (morphological and syntactic) generator is responsible for polishing and producing the surface structure of the target sentence. We developed a transfer-based machine translation system of English noun phrase to Arabic. The architecture is shown in Figure 1 [13]. In our noun phrase translator, the actual translation occurs in the transfer step in which one side of the tree-to-tree transfer rules is matched against the input structure, resulting in the structure on the right-hand-side. Figure 2 [14] illustrates the translation of the noun phrase (NP) "networks performance evaluation" into "تقييم أداء شبكة", which shows the switching of words that is indicated by the following transfer rule:

$$[w_i : \$1, w_{i+1} : \$2, \dots, w_k : \$k] \quad (1 \leq i \leq k)$$

$$[w_k : \$k, w_{k-1} : \$k-1, \dots, w_i : \$i] \quad (1 \leq i \leq k)$$

This rule says that the translation of the word at level i is switched with the word at level $k-i+1$. Where k is the number of NPs equivalent to maximum (sub)tree level. Transfer-based approach in some cases cannot give a correct transfer of distance relationships. For example, consider the translation of "intelligent tutoring systems" into "نظم التعليم الذكي" (intelligent.adj.fem tutoring.noun.masc systems.noun.fem) and incorrectly takes the noun directly preceding the adjective as the noun it modifies.

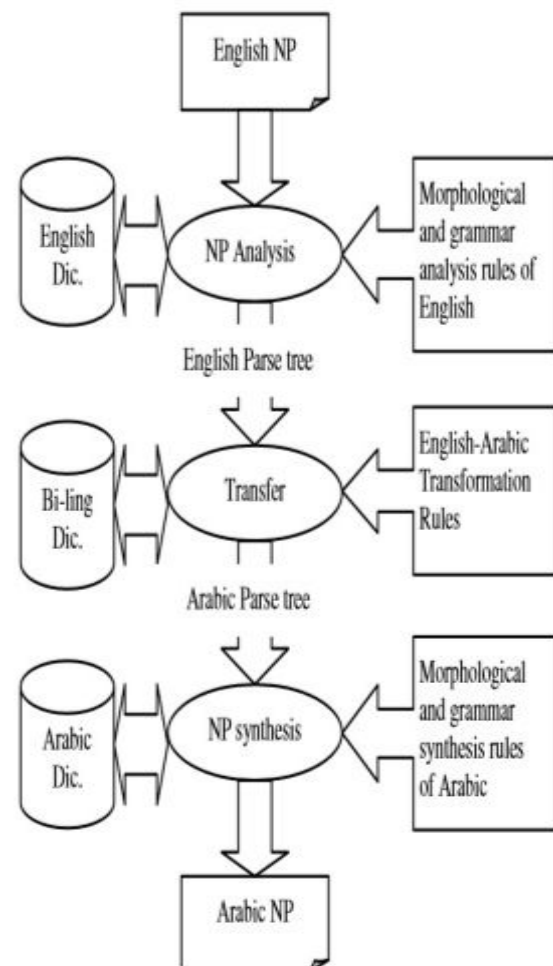


Fig. 1 Overall structure of English-Arabic noun phrase translator

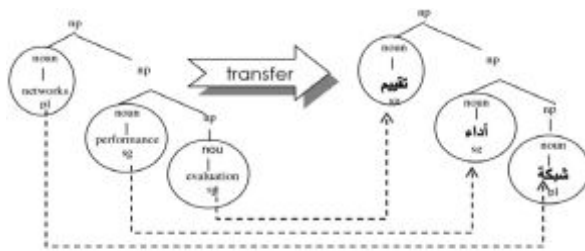


Fig. 2 . Simple transfer

The Interlingual approach MT is used successfully in multilingual translation. It aims to achieve the translation task in two independent steps. First, meanings of the source- language sentences are represented in an intermediate language-independent (Interlingua) representation. Then, sentences of the target language are generated from those meaning representations. The Interlingua representation plays an important role in the accuracy of the translation as it should be a language-neutral representation and captures the intended meaning of the source sentence.

IV. CONCLUSION

We have presented the rule-based approach in Arabic natural language processing. One possible criticism of the rule- based approach is that it is a traditional and widely studied topic especially when it regards to European languages. The current studies and researches still gives a steps towards helping Arabic language technology to catch up with other mature languages technology such as English.

The rapid development of rule-based systems is feasible, especially in the absence of linguistic resources and the difficulties faced in adapting tools from other languages due to peculiarities the nature of Arabic language. Finally, the necessity of adopting general solutions as much as possible, as this increases the chances that the linguistic knowledge and tools can be used in other domains and systems as well.

Список використаних джерел

1. Magdy M. Lexical Error Diagnosis for Second Language Learners of Arabic. / M. Magdy, K. Shaalan, A. Fahmy // In the Proceedings of The Seventh Conference on Language Engineering, Egyptian Society of Language Engineering (ELSE). - Cairo, Egypt, 2007. – pp. 5-6.
2. Attia M. A large scale computational processor of Arabic morphology and applications / M. Attia. - Cairo University, Egypt. - 1999. – 223p.
3. Farghaly A. Arabic Natural language processing challenges and solution, ACM Transaction on asian language information processing (TALIP) / Farghaly A., Shaalan K.. Proceedings to the Association for Computing Machinery (ACM). TALIP Vol. 8, Issue 4, December 2009. – pp.2-10.

References

1. MAGDY M., SHAALAN K., FAHMY A.. (2007) Lexical Error Diagnosis for Second Language Learners of Arabic. *In the Proceedings of The Seventh Conference on Language Engineering, Egyptian Society of Language Engineering (ELSE), Cairo, Egypt.* – pp. 5-6.
2. ATTIA M.(1999) A large scale computational processor of Arabic morphology and applications. Cairo University, Egypt.
3. FARGHALY A., SHAALAN K. (2009) Arabic Natural language processing challenges and solution, ACM Transaction on asian language information processing (TALIP), *Proceedings to the Association for Computing Machinery (ACM). TALIP Vol 8, Issue 4.* - pp.2-10.

4. *Abdel Monem A.* Generating Arabic Text in Multilingual Speech-to-Speech Machine Translation Framework, Machine Translation /A. Abdel Monem, K. Shaalan, A. Rafea, H. Baraka. - Cairo University, Egypt. - 2008. – 350 p.
5. *Ryding K.* Reference Grammar of Modern Standard Arabic / K. Ryding. - Cambridge University Press, Cambridge, UK. - 2005. – 150 p.
6. *Mace J.* Arabic Grammar: A Reference Guide. /J.Mace. -Edinburgh University Press, Edinburg, UK. - 1998. – 200p.
7. *Trujillo A.* Translation Engines: Techniques for Machine Translation / A.Trujillo. - Springer Verlag, USA. - 1999. – 220p.
8. *Shaalán K.* Machine Translation of English Noun Phrases into Arabic / K. Shaalan, A Rafea, A .Abdel Monem, H.Baraka // The International Journal of Computer Processing of Oriental Languages (IJCPOL),World Scientific Publishing Company, 17(2), 2004. – p.121-134.
9. *Shaalán K.* Rule-based Approach in Arabic Natural Language Processing, International / K. Shaalan // Journal on Information and Communication Technologies, Vol. 3, No. 3, June 2010. - pp.3-7.
4. *ABDEL MONEM A., SHAALAN K., RAFAA A., BARAKA N.* (2008) Generating Arabic Text in Multilingual Speech-to-Speech Machine Translation Framework, Machine Translation. Cairo University, Egypt.
5. *RYDING K.* (2005) Reference Grammar of Modern Standard Arabic, Cambridge University Press, Cambridge, UK.
6. *MACE J.* (1998) Arabic Grammar: A Reference Guide. Edinburgh University Press, Edinburgh, UK.
7. *TRUJILLO A.* (1999) Translation Engines: Techniques for Machine Translation, Springer Verlag, USA.
8. *SHAALAN K., RAFAA A., ABDEL MONEM A., BARAKA N.* (2004) Machine Translation of English Noun Phrases into Arabic, The International Journal of Computer Processing of Oriental Languages (IJCPOL),World Scientific Publishing Company, 17(2):121-134.
9. *SHAALAN K.* (2010) Rule-based Approach in Arabic Natural Language Processing. International Journal on Information and Communication Technologies, Vol. 3, No. 3, pp.3-7.

Надійшла до редколегії 01.12.2015

УДК 004.021

Новокшонов А. К., аспірант

A. K. Novokshonov, graduate student

Аналіз ефективності «машин, що складають»

Performance analysis of “addition machines”

Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, факультет кібернетики,
03680, м. Київ, пр. Академіка Глушкова, 4д,
e-mail: andrey.novokshonov@ukr.net

Taras Shevchenko National University of Kyiv,
Faculty of Cybernetics, 03680, Kyiv, 4d Academician
Glushkov avenue,
e-mail: andrey.novokshonov@ukr.net

У даній роботі представлені результати обчислювального експерименту, метою якого є уточнення реальної ефективності арифметичних алгоритмів цілочисельної «машини, що складає». «Машина, що складає» - це математична абстракція, введена Р. Флойдом та Д. Кнудом, суть якої полягає у тому, що лише за допомогою операцій додавання, віднімання, порівняння, присвоювання та обмеженої кількості регістрів можна з прийнятною обчислювальною ефективністю виразити більш складні операції, такі як знаходження лишку за модулем, множення, знаходження найбільшого спільного дільника, піднесення до степеня за модулем. Особливістю даного експерименту є використання арифметики довільної точності, що може бути корисним для використання у криптографічних алгоритмах. В результаті дослідження були отримані практичні оцінки складності основних алгоритмів цілочисельної «машини, що складає».

Ключові слова: додавання, віднімання, найбільший спільний дільник, піднесення до степеня, числа Фібоначчі, C++, Python, GMP.

This paper presents the results of the numerical experiment, which aims to clarify the real performance of integer "addition machine" arithmetic algorithms. "Addition machine" is a mathematical abstraction, introduced by R. Floyd and D. Knuth. The essence of "addition machine" is the following: using only operations of addition, subtraction, comparison, assignment and a limited number of registers it is possible to calculate more complex operations such as finding the residue modulo, multiplication, finding the greatest common divisor, exponentiation modulo with reasonable computational efficiency. One of the features of this implementation is the use of arbitrary precision arithmetic, which may be useful in cryptographic algorithms. Practical complexity estimates of main integer "addition machines" algorithms have been computed and compared with original theoretical complexity estimates given by R. Floyd and D. Knuth. Graphical performance comparison results of "addition machines" algorithms implemented both in C++ with GMP library and Python programming languages have been presented too.

Key words: addition, subtraction, greatest common divisor, exponentiation, Fibonacci numbers, C++, Python, GMP.

Статтю представив чл.-кор. НАНУ, д. ф.-м. н., проф. Анісімов А. В.

Вступ

Розвиток криптографії та поява великої кількості сучасних малопотужних обчислювальних пристроїв спричиняють необхідність більш детального дослідження і розробки арифметичних алгоритмів, які могли б бути ефективно реалізовані програмно і володіли б необхідними властивостями. Однією з таких цікавих математичних моделей є «машина, що складає», яка має наступні властивості.

Розглянемо обмежений набір операцій: присвоєння, додавання, віднімання та порівняння

двох цілих чисел. Виникає задача ефективної реалізації інших, більш складних операцій, використовуючи тільки наведені вище прості операції.

У роботі [1] Р. Флойдом та Д. Кнудом була запропонована така математична абстракція, як «машини, що складають» (англ. *addition machines*), і було доведено, що з їх допомогою можлива реалізація складних операцій з лінійним уповільненням. До таких складних операцій відносять знаходження лишку за модулем, множення, ділення, знаходження найбільшого спільного дільника та піднесення до степеня за

модулем. Варто зазначити, що за допомогою цих складних операцій виражається значна частина арифметичних алгоритмів, які використовуються у сучасних криптографічних протоколах.

Таким чином, «машини, що складають» - це математична модель, яка являє собою обчислювальний пристрій з обмеженою кількістю регістрів, над якими можна здійснювати лише такі операції: 1) введення: $read\ x$; 2) виведення: $write\ x$; 3) присвоювання: $x \leftarrow y$; 4) додавання: $x \leftarrow x + y$; 5) віднімання: $x \leftarrow x - y$; 6) порівняння: $x \geq y$.

«Машини, що складають» можуть працювати як з цілими числами, так і з дійсними. У даній роботі усі операції вважаємо такими, що здійснюються над цілими числами, тому описаний пристрій називається цілочисельною «машиною, що складає».

Метою даної роботи є дослідження ефективності цілочисельної «машини, що складає» при її реалізації за допомогою мов програмування C++ і Python та використанні арифметики довільної точності. Використання арифметики довільної точності були вибрані у зв'язку із можливим подальшим застосуванням результатів даного дослідження у криптографії.

Методика дослідження

У даній роботі обмежимося розглядом і порівнянням таких операцій над цілими числами: 1) множення двох чисел; 2) піднесення до степеня за модулем; 3) знаходження лишку за модулем; 4) знаходження найбільшого спільного дільника (НСД).

У роботі [1] були наведені наступні теоретичні оцінки складності операцій, які можуть бути реалізовані за допомогою «машини, що складає» (табл. 1). Також дані оцінки можна знайти у роботі [2].

Таблиця 1

Число команд регістрової машини при виконанні арифметичних операцій

Операція	Час виконання
лишок $x \bmod y$	$O(\log(x/y))$
множення xy	$O(\log(\min(x , y)))$
найбільший спільний дільник $НСД(x, y)$	$O(\log(\max(x, y)/НСД(x, y)))$
експонента $x^y \bmod z$	$O((\log y)(\log z) + \log(x/z))$

Основною ідеєю алгоритму знаходження лишку від цілочисельного ділення, який був запропонований Р. Флойдом та Д. Кнудом у [1], є використання представлення Фібоначчі замість традиційного бінарного представлення. Відомо, що будь-яке невід'ємне ціле число може бути представлене сумою чисел Фібоначчі. Далі ключовими моментами є те, що, по-перше, за допомогою «машини, що складає» можна легко переходити від пари чисел Фібоначчі $\langle F_t, F_{t+1} \rangle$ до наступної пари $\langle F_{t+1}, F_{t+2} \rangle$ використанням лише однієї операції додавання, або до попередньої пари $\langle F_{t-1}, F_t \rangle$ лише за допомогою однієї операції віднімання. Числа Фібоначчі зростають експоненційно, а саме тому можуть бути використані як аналоги степенів двійки.

У командах регістрової «машини, що складає» алгоритм знаходження лишку від цілочисельного ділення $x \bmod y$ (P1) має наступний вигляд [1]:

```
P1: read x; read y; { вважається, що  $x \geq 0, y > 0$  }
if  $x \geq y$  then
  begin  $z \leftarrow y$ ;
  repeat  $\langle y, z \rangle \leftarrow \langle z, y + x \rangle$  until not  $x \geq z$ ;
  repeat if  $x \geq y$  then  $x \leftarrow x - y$ ;
     $\langle y, z \rangle \leftarrow \langle z - y, y \rangle$ ;
  until  $y \geq z$ ;
  end;
write x.
```

Операція $\langle y, z \rangle \leftarrow \langle z, y + x \rangle$ позначає одночасне присвоювання $y \leftarrow z$ та $z \leftarrow y + x$.

Аналогічно алгоритм обчислення $x[y/z]$ (P2) у командах регістрової «машини, що складає» є наступним [1]:

```
P2: read x; read y; read z; { вважається, що  $y \geq 0, z > 0$  }
 $w \leftarrow w - w$ ;
if  $y \geq z$  then
  begin  $u \leftarrow x$ ;  $v \leftarrow z$ ;
  repeat  $\langle u, x \rangle \leftarrow \langle x, u + x \rangle$ ;  $\langle v, z \rangle \leftarrow \langle z, v + z \rangle$ ;
  until not  $y \geq z$ ;
  repeat if  $y \geq v$  then  $\langle w, y \rangle \leftarrow \langle w + u, y - v \rangle$ ;
     $\langle u, x \rangle \leftarrow \langle x - u, u \rangle$ ;  $\langle v, z \rangle \leftarrow \langle z - v, v \rangle$ ;
  until  $v \geq z$ ;
  end;
write w.
```

Алгоритм обчислення найбільшого спільного дільника $НСД(x, y)$ (P3) у командах регістрової «машини, що складає» виглядає наступним чином [1]:

P3: read x ; read y ; { вважається, що $x > 0, y \geq 0$ }
 $z \leftarrow y; z \leftarrow z + z$;
 while not $y \geq z$ do
 begin while $x \geq z$ do $\langle y, z \rangle \leftarrow \langle z, y + z \rangle$
 repeat if $x \geq y$ then $x \leftarrow x - y$;
 $\langle y, z \rangle \leftarrow \langle z - y, y \rangle$
 until $y \geq z$;
 $\langle x, y \rangle \leftarrow \langle y, x \rangle$; $z \leftarrow y; z \leftarrow z + z$;
 end;
 write x .

І, нарешті, останній важливий алгоритм обчислення $x^y \bmod z$ (P5) за допомогою «машини, що складає» виконується наступним чином, враховуючи допоміжний алгоритм P4, який використовується для обчислення представлення Фібоначчі [1]:

P4: $u \leftarrow 1; v \leftarrow 1; w \leftarrow y; \{ u = F_l, v = F_{l+1}, l = 1 \}$
 repeat $\langle u, v \rangle \leftarrow \langle v, u + v \rangle$
 until not $w \geq v$; { $u = F_l, v = F_{l+1}, y \geq u$ }
 $r \leftarrow 1; s \leftarrow 1; t \leftarrow t - t$; { $u = F_l, v = F_{l+1}, l = \lambda y$ }
 repeat if $w \geq u$ then
 begin $w \leftarrow w - u; t \leftarrow t + s$;
 end;
 $\langle u, v \rangle \leftarrow \langle v - u, u \rangle$; $\langle r, s \rangle \leftarrow \langle s, r + s \rangle$
 { $l \leftarrow l - 1$ }
 until $u \geq v$.

P5: read x ; read y ; read z ;
 $\langle r, s, t \rangle \leftarrow \langle F_{\lambda y}, F_{\lambda y+1}, y^R \rangle$
 $x \leftarrow x \bmod z; w \leftarrow x; u \leftarrow 1$; { $x = x_l, w = x_{l+1}, l = 1$ }
 repeat if $t \geq r$ then
 begin $t \leftarrow t - r; u \leftarrow (uw) \bmod z$;
 end;
 $\langle r, s \rangle \leftarrow \langle s - r, r \rangle$; $\langle x, w \rangle \leftarrow \langle w, (xw) \bmod z \rangle$;
 { $l = l + 1$ }
 until $r \geq s$;
 write u .

Результати дослідження

Метою експериментального дослідження є уточнення наведених вище теоретичних оцінок при практичній реалізації алгоритмів.

Для реалізації та порівняння швидкодії алгоритмів були використані наступні мови програмування, що входять до першої п'ятірки світового рейтингу мов програмування [3] – це мова C++ з бібліотекою арифметики довільної точності GMP [4] та мова Python, яка набрала найбільшу популярність за останні 5 років [5], з використанням вбудованої арифметики довільної точності.

Таким чином, було виконане у тому числі порівняння швидкодії цих двох мов

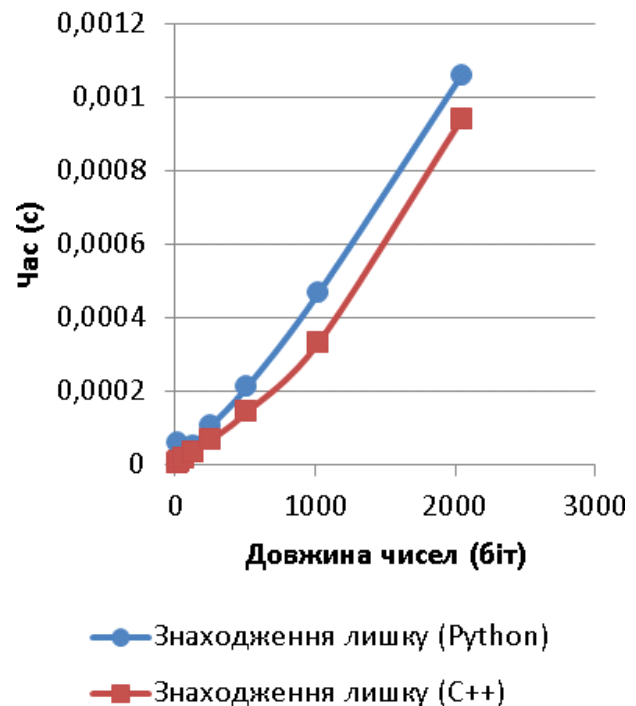


Рис. 1 Порівняння часу виконання операції знаходження лишку від ділення при реалізації на мовах програмування C++ та Python

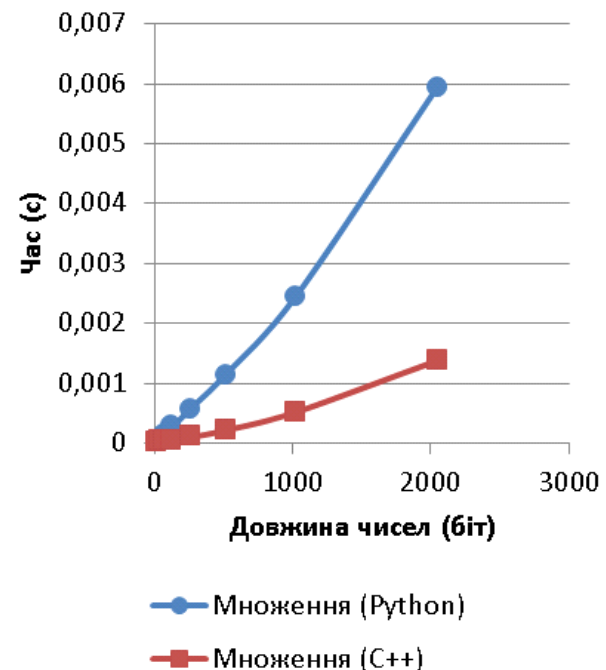


Рис. 2 Порівняння часу виконання операції множення при реалізації на мовах програмування C++ та Python

програмування (звичайно, у межах даних арифметичних алгоритмів). Деякі більш глибокі результати порівняння швидкодії мов

програмування C++ та Python можна знайти у роботі [6].

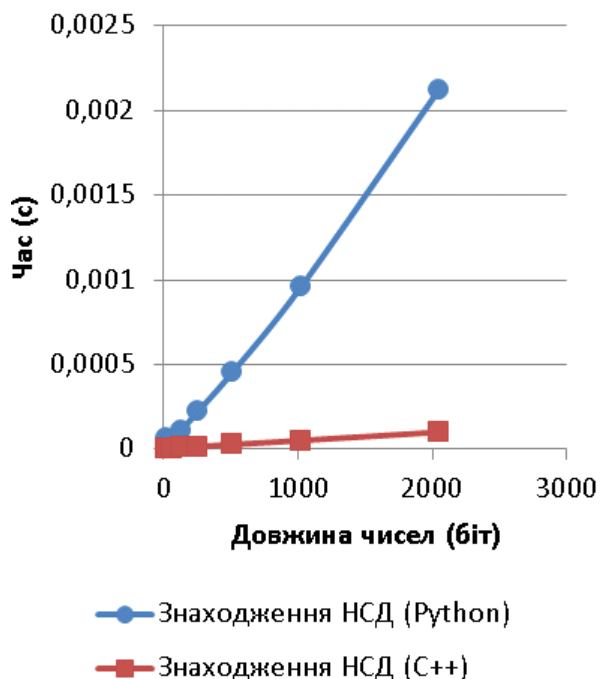


Рис. 3 Порівняння часу виконання операції знаходження найбільшого спільного дільника при реалізації на мовах програмування C++ та Python

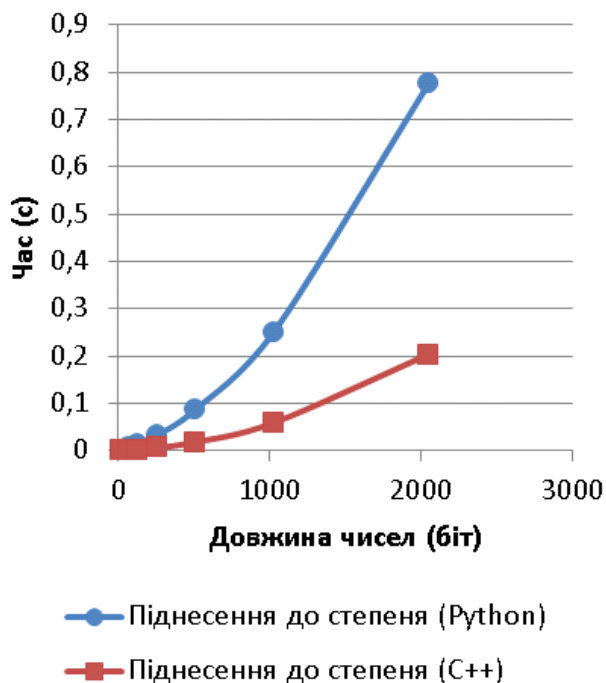


Рис. 4 Порівняння часу виконання операції піднесення до степеня при реалізації на мовах програмування C++ та Python

Характеристики персонального комп'ютера, на якому було проведено тестування

реалізованих алгоритмів, такі: процесор Intel Pentium Duo 2.8 ГГц, 4 Гб оперативної пам'яті, ОС Ubuntu 14.04 LTS x64. Версії програмного забезпечення: GCC 4.8.4, GMP 5.1.3, Python 2.7.6.

На рис. 1 наведені результати порівняння швидкодії алгоритму $P1$ ($x \bmod y$) на персональному комп'ютері при реалізації його за допомогою мов програмування C++ та Python.

На рис. 2 представлені результати порівняння швидкодії алгоритму $P2$ ($x[y/z]$) на персональному комп'ютері при реалізації його за допомогою мов програмування C++ та Python.

На рис. 3 наведені результати порівняння швидкодії алгоритму $P3$ (НСД(x, y)) на персональному комп'ютері при реалізації його за допомогою мов програмування C++ та Python.

На рис. 4 представлені результати порівняння швидкодії алгоритму $P5$ ($x^y \bmod z$) на персональному комп'ютері при реалізації його за допомогою мов програмування C++ та Python. Для зручності тестування в якості степеня у була обрана константа 16.

Висновки

В результаті дослідження були отримані чисельні характеристики ефективності алгоритмів «машини, що складає», побудовані відповідні графіки та практичні оцінки складності алгоритмів, що дозволило експериментально підтвердити та уточнити теоретичні оцінки складності даних алгоритмів, виведені Р. Флойдом та Д. Кнудом.

Одним із практичних застосувань розглянутих алгоритмів може бути їх ефективне використання на спеціально побудованому апаратному забезпеченні, наприклад, для схеми RSA [1, 7], основою якої є операція піднесення до степеня за модулем ($x^y \bmod z$), а також застосування у криптографічних протоколах для випадків, коли набір доступних операцій є обмеженим.

Цікавим фактом є те, що швидкодія алгоритму НСД(x, y) на C++ є повністю однаковою як для вбудованої операції `mpz_gcd()` з бібліотеки GMP [4], так і для його реалізації за допомогою «машини, що складає». Для Python-реалізації алгоритму НСД(x, y) ситуація схожа: стандартна функція `fractions.gcd()` лише у 2 рази швидша за реалізацію за допомогою «машини, що складає».

Також експериментальним шляхом було визначено, що:

- для C++/GMP середня швидкодія вбудованих складних операцій є у 47 разів

більшою, ніж їх аналогів, реалізованих за допомогою «машини, що складає»;

- для Python середня швидкість вбудованих складних операцій є у 228 разів більшою, ніж їх аналогів, реалізованих за допомогою «машини, що складає»;
- реалізація на C++/GMP арифметичних алгоритмів «машини, що складає» є у 3,8 рази швидшою за аналогічну реалізацію на Python.

Отже, результати експериментального порівняння надають можливість зробити висновок про те, що реалізація арифметичних алгоритмів над цілими числами довільної точності на C++ є в середньому у 3,8 рази швидшою за Python-реалізацію, але у той же час процес програмування на C++ є складнішим.

Втім для кожного класу задач необхідно використовувати правильні інструменти та керуватися визначеними пріоритетами (швидкість розробки, розмір виконуваного файлу, швидкість програми, доступні платформи та бібліотеки), тоді процес розробки та отримані результати будуть найоптимальнішими.

Загалом, інтерпретатор Python показав досить високу швидкість, що разом з вбудованою арифметикою довільної точності, зручністю програмування та різноманітним програмним модулем, у тому числі математичних, робить мову Python одним з досить перспективних інструментів для дослідників в області інформатики та математики.

Список використаних джерел

1. Floyd R. Addition Machines / R. Floyd, D. Knuth. // SIAM J. Comput.–1990.– №19(2).– P. 329–340.
2. Анісімов А. В. Алгоритмічна теорія великих чисел. Модулярна арифметика великих чисел / А. В. Анісімов // К.: Академперіодика, 2001.
3. TIOBE Index | Tiobe - The Software Quality Company [Електронний ресурс] – Режим доступу до ресурсу: http://www.tiobe.com/tiobe_index.
4. The GNU MP Bignum Library [Електронний ресурс] – Режим доступу до ресурсу: <https://gmplib.org/>.
5. PYPL PopularitY of Programming Language index [Електронний ресурс] – Режим доступу до ресурсу: <https://pypl.github.io/PYPL.html>.
6. Prechelt L. An empirical comparison of C, C++, Java, Perl, Python, Rexx and Tcl / L. Prechelt. // IEEE Computer. – 2000. – №33(10). – P. 23–29.
7. Rivest R. A method for obtaining digital signatures and public-key cryptosystems / R. Rivest, A. Shamir, L. Adleman. // Communications of the ACM. – 1978. – №21(2). – P. 120–126.

References

1. FLOYD, R. and KNUTH, D. (1990). *Addition Machines*. SIAM J. Comput., 19(2), pp.329-340.
2. ANISIMOV, A. V. (2001). *Algorithmic Theory of Large Numbers. Modular Arithmetic of Large Numbers*, Akademperiodika, Kyiv.
3. TIOBE.COM, (2015). *TIOBE Index | Tiobe - The Software Quality Company*. [online] Available at: http://www.tiobe.com/tiobe_index [Accessed 10 Dec. 2015].
4. GMPLIB.ORG, (2015). *The GNU MP Bignum Library*. [online] Available at: <https://gmplib.org/> [Accessed 10 Dec. 2015].
5. PYPL.GITHUB.IO, (2015). *PYPL PopularitY of Programming Language index*. [online] Available at: <https://pypl.github.io/PYPL.html> [Accessed 10 Dec. 2015].
6. PRECHELT, L. (2000). *An empirical comparison of C, C++, Java, Perl, Python, Rexx and Tcl*. IEEE Computer, 33(10), pp.23-29.
7. RIVEST, R., SHAMIR, A. and ADLEMAN, L. (1978). *A method for obtaining digital signatures and public-key cryptosystems*. Communications of the ACM, 21(2), pp.120-126.

Надійшла до редколегії 13.12.15

УДК 004.65

Рубан Н.Н., аспирант

Сравнение нереляционных и реляционных баз данных

Киевский национальный университет имени
Тараса Шевченко, 03187, г.Киев, пр-т. Глушкова
4д
e-mail: rubannn@gmail.com

N. N. Ruban, postgraduate

Comparison of non-relational and relational databases

Taras Shevchenko National University of Kyiv,
03187, Kyiv, Glushkova st., 4d,
e-mail: rubannn@gmail.com

В работе приведено сравнение наиболее распространенных баз данных (БД), которые используются для хранения информации. БД в значительной степени связаны с управлением большим количеством данных, при этом необходимо учитывать стабильность и скорость работы. Рассмотрены основные характеристики реляционных и нереляционных БД.

Ключевые слова: базы данных, SQL, NoSQL, нереляционные БД, sharding.

Relational database (DB) provide good support data for grid before defined structure. But recent developments in the IT sphere need tools for big data (Big Data), which have very large volumes and various data structures. Using a traditional relational database compounded by the fact that they have a strict limit on the data structure. One of the key elements of all document-oriented databases is that they can work with much larger data sets and structures than usual. In particular, because of their distributed nature, and other means of physical data storage, they are ideal where you need to process huge amounts of information, as is often the case for data mining. In other words, canonical data structure relational approach is hindering their effective use. The paper compares the most common database, which are used for storing information. DB is largely associated with the management of large amounts of data, and the need to consider the stability and speed. Considered the main characteristics of the non-relational and relational databases.

Key Words: databases SQL, NoSQL, non-relational DB, sharding.

Статью представил д.ф.-м.н., проф. Буй Д.Б.

Реляционная модель основывается на математической теории (теория множеств, теории отношений, математической логике), тогда как нереляционные БД могут не иметь единой математической теории. Реляционная модель выгодна, когда БД должна иметь следующие характеристики – надежность, гибкость, устойчивость, масштабируемость. Но чтобы соответствовать потребностям современных приложений, где данные огромны и обычно неструктурированные, то следует прибегнуть к использованию одной из нереляционных БД, которая даст гораздо больше удобства при обработке данных. Далее рассмотрены инструменты работы с данными как в реляционном, так и в нереляционном подходах.

Надежность модели БД должна быть проверена с помощью свойств ACID.

✓ Atomicity. Атомарность обозначает ‘все или ничего’. Если какую-либо часть транзакции

не выполнена, то тогда всю транзакцию считают неудавшейся.

✓ Consistency. Непротиворечивость гарантирует, что любая транзакция сохраняет согласованность БД.

✓ Isolation. Изоляция гарантирует, что многократные транзакции, выполняющиеся одновременно, не влияют на выполнение друг друга.

✓ Durability. Долговечность гарантирует, что как только транзакция была выполнена, то данные останутся в том же состоянии.

Когда набор элементов данных организован с помощью формально описанных таблиц, полученную БД называют реляционной БД. К элементам такой БД можно легко получить доступ, создать новые данные, расширить. Данный вид хранения информации является наиболее распространенным для хранения

данных, имеющих иерархическую или сетевую структуры.

С другой стороны, когда традиционные таблицы не используются для хранения данных, то такие БД называют нереляционными. Эти БД могут хранить данные в форме хранилищ ключ-значение, формата XML и т.д.

Нереляционные БД, также известные как NoSQL (Not Only SQL), обеспечивают гибкое масштабирование (sharding), означающее, что они увеличиваются прозрачно, добавляя новый узел, и обычно разрабатываются с недорогими аппаратными средствами. Также одним из преимуществ нереляционных БД являются: простая поддержка репликации, простой API (Application Programming Interface), огромные объемы данных (BigData).

Реляционные базы данных

В 1970 г. Э. Кодд заложил основы теории реляционных БД. БД – приложение, которое позволяет хранить и получать данные очень быстро. Реляционная БД – набор элементов данных, организованных в формально описанных таблицах, в которых к данным можно получить доступ различными способами. Реляционная БД – множество взаимосвязанных таблиц, каждая из которых содержит информацию об объектах определенного типа. Каждая строка содержит уникальный экземпляр данных для соответствующей категории данных. Главным инструментом обработки данных в реляционных БД является язык структурированных запросов (SQL – Structured Query Language), который позволяет получить доступ и изменить данные, хранящиеся в БД. Язык SQL основан на реляционном исчислении и алгебре отношений, опирается на использование предикатов, запросов и операторов.

Представим некоторые преимущества БД, разработанной согласно реляционной модели:

- Большая часть информации хранится в БД, а не в приложении.
- Просто добавить, обновить или удалить данные.
- Это дает преимущества агрегации данных, поиска и создания отчетов.
- Любые изменения в схеме БД довольно просты.

Две наиболее интенсивно используемые реляционные СУБД (системы управления БД) – MySQL и Oracle. MySQL в большей мере используется в веб-среде. Это легкая система, которая чрезвычайно быстра и проста в

использовании, а вот Oracle зачастую используется при работе с большими БД, которые используются в банковском деле, страховании, ERP (Enterprise Resource Planning – система управления предприятием) и инвестиционных компаниях. Oracle используется для решения сложных проблем и поддержки сложных OLTP (Online Transaction Processing). Хотя MySQL и Oracle работают схожим образом, все же есть несколько принципиальных различий между ними.

У Oracle имеется множество различных функций, запуская которые пользователь легко может управлять БД, при этом используя простой синтаксис XML. Ввиду высокой функциональности это уменьшает потребность во внешнем программном обеспечении или другом инструментарии, что в свою очередь позволяет поддерживать приложения крупного бизнеса.

MySQL используется для web-сценариев и игр. Позволяет поддерживать небольшие хранилища данных и системы OLTP. Таким образом, эта СУБД может использоваться в маленьких проектах в меньших компаниях и по меньшей стоимости. Однако это требует внешнего программного обеспечения, что влечет за собой недостатки в надежной функциональности, которую обеспечивает Oracle.

Опишем некоторые недостатки, которые характерны для реляционных БД.

1. Реляционные БД не поддерживают высокую масштабируемость.
2. Поскольку данные в реляционной БД сохранены в виде таблиц, то использование такой структуры потенциально может привести к высокой сложности в случае, если данные нельзя адекватно представить в табличном виде.
3. Большая часть функционала, обеспеченного реляционными БД, может быть просто не использована, что может привести к излишней сложности.
4. Реляционные БД используют SQL, чтобы работать над структурированными данными, но SQL может быть очень сложным в использовании при работе с неструктурированными (слабоструктурированными) данными.
5. Когда объем данных становится значительным (огромным), БД должна быть физически разделена на несколько серверов. Это разделение влечет за собой проблему,

потому что соединение (JOIN) таблиц в распределенных серверах является, вообще говоря, сложной задачей.

Таким образом, возникла потребность хранить и получать доступ к огромным массивам данных, используя современные инструменты; тем самым возникла потребность хранения данных в новой форме, т.е. использование нереляционных БД.

Нереляционные базы данных

Нереляционные БД – класс систем, которые управляют БД, существенным отличием которых является то, что не используются таблицы в качестве структуры хранения. Другие отличительные особенности таких систем: SQL не используется в качестве языка запросов, операции соединения не поддерживаются; это не гарантирует выполнения свойств ACID, но есть возможность простого горизонтального масштабирования (sharding). На сегодняшний день существует много классификаций для NoSQL БД, одна из классификаций основывается на CAP теореме [1]. Нереляционные БД могут быть классифицированы в зависимости от способа хранения данных [3]

1. Ключ-значение.

Данный подход позволяет хранить данные без особо выраженной структуры. Эти данные состоят из ключа, который представлен строкой и фактическими данными, которые являются значением в паре ключ-значение. Данные могут быть любым примитивом языка программирования (последовательность, целое число или массив) [2]. Таким образом, это ослабляет требование форматирования данных для хранения, избавляя от необходимости использования фиксированную модель данных.

2. Хранилища документов (документно-ориентированная БД).

Хранилища документов, также известные как документно-ориентированные БД, являются в основном (компьютерными) программами, используемыми для хранения, получения, обновления данных из БД.

Базовая структура хранения, используемая в таких БД – документ. Каждое хранилище документов может отличаться по своей реализации данных, однако предполагается, что данные включены и закодированы в некотором стандартном формате, например, это может быть XML, BSON, PDF или документ Microsoft Office. Каждый документ представлен уникальным

ключом, который является последовательностью (URI – Uniform Resource Identifier). API или язык запросов поддерживают быстрое извлечение документов на основе его содержания. Например, запрос, который получает все документы, в которых определенное поле имеет некоторое определенное значение.

3. Графовые базы.

Графовые БД – безструктурные базы данных, которые в качестве структуры данных используют граф, вершины и ребра которого наделены определенными свойствами, которые представляют данные. Вершины представляются как объекты (люди, бизнес или любой другой элемент) подобно тому, как объекты представлены в любом языке программирования. Свойства таких объектов представлены в виде ребер, которые связывают соответствующие вершины графа. Путем последовательного перехода от одной вершины к другой находится необходимая информация.

4. Колоночные базы.

Колоночные БД хранят свои данные в форме столбцов в отличие от общепринятой формы хранения по строкам. Данный подход оправдан тем, что часто возникает потребность в обновлении всего столбца в таблице, при этом остальные данные строки в модификации не нуждаются, т.е. при изменении одного столбца данных остальные столбцы остаются без изменений.

5. Объектно-ориентированные базы данных.

Объектно-ориентированные БД также обычно известны как OODBMS (Object-Oriented Database Management System). Данные хранятся в виде объектов, поддерживается наследование и, следовательно, возможность многократного использования (по аналогии с объектно-ориентированным программированием).

Кроме различных преимуществ, таких как высокая пропускная способность, горизонтальная масштабируемость, у нереляционных БД есть некоторые недостатки. Наиболее значительные представлены ниже.

1. Большинство нереляционных БД используют программное обеспечение с открытым исходным кодом и, хотя оно себя хорошо зарекомендовало, но никто не несет ответственности во времена отказов.
2. Много нереляционных БД обеспечивают свойства BASE (Basic Availability, Soft state, Eventual consistency) и жертвуют стандартными свойствами ACID, чтобы увеличить производительность.

3. Из-за пренебрежения свойствами ACID степень надежности, обеспеченной нереляционными БД, ниже, чем в реляционном случае. Разработчикам необходимо прибегать к программированию, чтобы обеспечить ACID, которые, возможно, можно было легко обеспечить в реляционной БД.

Выводы

Представим основные существенные различия между двумя типами БД в виде таблицы (таблица 1).

Беспрецедентные объемы данных, гетерогенные данные, требования производительности и масштабируемости современных приложений реляционных СУБД

вызов как единственный подход для управления данными. Это положило начало в спектре вариантов. Уровни целостности данных, высокой доступности и толерантности разделов есть три основных проблемы, определяющие, какие данные управления Система подходит для данного приложения.

Некоторые вопросы исследования остаются нерешенными для систем NoSQL, чтобы достичь уровня надежности и зрелости СУБД. Это захватывающее время для исследователей баз данных для работы по этим вопросам и разработать ассортимент вариантов управления данными.

Таблица 1

Сравнение некоторых характеристик реляционных и нереляционных БД

	Нереляционные базы данных	Реляционные базы данных
1	Высокая пропускная способность	Низкая пропускная способность
2	Хорошо масштабируются	Менее масштабируются
3	Данные могут быть вставлены в любое время, не определяя схемы данных. Данные могут быть изменены в любое время. Гибкий поход к структуре данных	Данные должны храниться в предопределенных таблицах или структурах
4	Производительность может быть улучшена, кэшируя данные в системную память	Кэширование должно быть сделано с помощью специальной структуры
5	Поддержка BASE свойств	Поддержка ACID свойств
6	Данные не обязательно должны быть непротиворечивыми	Лучшая непротиворечивость (целостность), чем для нереляционных БД
7	Дублирование данных позволено, что угрожает целостности данных. Кроме того, обновление одной записи означает, что необходимо обновлять все другие экземпляры этой записи	Процесс проектирования реляционной БД устраняет проблему дублирования, препятствуя тому, что возникнут противоречивые данные

Список використаних джерел

1. Jing H. Survey on NoSQL database / H.Jing, E. Haihong, L. Guan, D. Jian. // Pervasive Computing and Applications (ICPCA). – 2011. – P. 363–366.
2. Jing H. A Novel Solution of Distributed Memory NoSQL Database for cloud Computing / H. Jing, S. Meina, S. Junde. // ICIS '11 Proceedings of the 2011 10th IEEE/ACIS International Conference on Computer and Information Science. – 10. – P. 351–355.
3. Date C. Database in Depth: Relational Theory for Practitioners / C. J. Date., 2005. – 232 p. – (O'Reilly Media).

References

1. JING H. et al. (2011). Survey on NoSQL database. 2011 6Th International Conference On Pervasive Computing And Applications, p. 363 - 366.
2. JING H. et al. (2011). A Novel Solution of Distributed Memory NoSQL Database for Cloud Computing. 2011 10Th IEEE/ACIS International Conference On Computer And Information Science, p. 351-355.
3. Date C. (2005). Database in depth. Sebastopol, CA: O'Reilly.

Надійшла до редколегії 15.12.2015.

УДК 517.5

В.Г.Собко, старший викладач

**Побудова та дослідження алгоритму
розв'язування задач математичної фізики
за допомогою біортогональних поліномів**

Кафедра інформатики та прикладної математики
РДГУ, 33000, м. Рівне, вул. Остафова, 31,
e-mail: vg_sobko@ukr.net

V.H.Sobko, Senior Lecturer,

**Building and research of the algorithm of the
problems of mathematical physics solution
with the help of biorthogonal polynomials**

Department of Computer Science and Applied
Mathematics of RSUH, 33000, Rivne, Ostafova
Str., 31, e-mail: vg_sobko@ukr.net

В праці на базі розв'язку модельної задачі типу теплопровідності побудовано та досліджено спосіб розв'язування сформульованої задачі методом розділення змінних в базисі біортогональних поліномів. Вивчено вплив параметрів методу, зокрема порядку часткової суми, розрядної сітки обчислювальної системи та похибки обчислення на точність отриманого розв'язку. Результати наближених обчислень порівнювались з відповідними значеннями точного розв'язку та подані у вигляді таблиць.

Ключові слова: спектральні методи, біортогональні поліноми, задачі математичної фізики.

The algorithms of construction of quasiorthogonal and biorthogonal polynomials are developed on the base of Chebyshev's orthogonal polynomials of the first kind. The obtained results were tested in the process of calculating experiment on the examples of modeling tasks.

The properties of spectral expansions in the bases of orthogonal, and quasiorthogonal and biorthogonal polynomials were investigated for efficient use of constructed orthogonal spectra and proportion among them were found. The recurrent formulas for representation of one investigated basis through other one and formulas of transition from one spectral expansion to another.

The method of solution of the formulated problem by means of division of variables in the basis of biorthogonal polynomials is constructed and studied on the basis of the model problem of heat conductivity solution. The influence of the method of parameters including the order of partial sums, decade frame of the calculating system and errors in calculation for accuracy of obtained solution are learned. The results of approximate calculations were compared with corresponding values of exact solution and presented in tables.

Keywords: spectral methods, biorthogonal polynomials, problems of mathematical physics.

Статтю представив д.т.н., професор Гаращенко Ф.Г.

Вступ. Спектральні методи застосовуються як в теоретичних дослідженнях, так і для розв'язування широкого класу прикладних задач. Позитивними сторонами є те, що багато ортогональних базисів достатньо добре досліджені, прості у використанні та побудовані на їх основі алгоритми розв'язування легко піддаються автоматизації. До негативних сторін можна віднести те, що сумування відповідних рядів, як правило, є некоректною задачею. Далі, не всі критерії, які ставляться до рішень задач, можна задовольнити застосуванням одного ортогонального базису. У зв'язку з тим для більш широкого задоволення критеріїв або

модифікуються існуючі базиси, або будуються нові. Одним з шляхів врахування згаданих зауважень є застосування біортогональних розкладів. В літературі є незначна кількість робіт стосовно застосування біортогональних розкладів до розв'язування прикладних задач. Однією із причин є та, що побудова біортогональних базисів пов'язана із значними обчислювальними труднощами.

Метою роботи є апробація та дослідження побудованих в роботах [6], [7] на базі поліномів Чебишева першого роду повної системи біортогональних поліномів для знаходження рішення модельної задачі типу теплопровідності.

Формулювання задачі. Необхідно знайти функцію $f(x, t)$ для довільного часу $t, t > 0$, на проміжку $x \in [-1, 1]$, яка задовольняє рівняння

$$\frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial x^2} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial f(x, t)}{\partial t} = 0 \quad (1)$$

за наступних крайових умов:

$$f(x, 0) = 0, \quad (2)$$

$$f(-1, t) = \sqrt{\pi} / (a\sqrt{t}), \quad (3)$$

$$f(1, t) = 0. \quad (4)$$

Розв'язок задачі (1)-(4) шукатимемо у вигляді

$$\tilde{F}_{n+1}(x, t) = \sum_{\bar{i}=0}^1 \sum_{i=1}^s q_{2i-\bar{i}}(t) (V_{2i-\bar{i}}^{n+\bar{i}}(x) + \gamma_{2i-\bar{i}} T'_{n+1+\bar{i}}(x)), \quad (5)$$

де $V_{2i-\bar{i}}^{n+\bar{i}}(x)$, $\bar{V}_{2i-\bar{i}}^{n+\bar{i}}(x)$ - біортогональні многочлени порядку $n+\bar{i}$, $T'_{n+1+\bar{i}}(x)$ - перша похідна многочлена Чебишева першого роду степеня $n+1+\bar{i}$ [5], для яких справджуються рівності

$$\int_{-1}^1 \rho(x) V_{2i-\bar{i}}^{n+\bar{i}}(x) T'_{n+1+\bar{i}}(x) dx = 0, \quad (6)$$

$$\int_{-1}^1 \rho(x) \bar{V}_{2i-\bar{i}}^{n+\bar{i}}(x) T'_{n+1+\bar{i}}(x) dx = 0, \quad (7)$$

$$\int_{-1}^1 \rho(x) V_{2i-\bar{i}}^{n+\bar{i}}(x) \bar{V}_{2i-\bar{i}}^{n+\bar{i}}(x) dx = N_{2i-\bar{i}}, \quad (8)$$

$$\int_{-1}^1 \rho(x) (T'_{n+1+\bar{i}}(x))^2 dx = (n+1+\bar{i})^3 \pi, \quad (9)$$

$$\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad n=2s, \quad \bar{i}=0 \text{ - для парних}$$

функцій та $\bar{i}=1$ - для непарних функцій. Для того, щоб розв'язок (5) задовольняв умову (2), потрібно знайти такі функції $q_i(t)$, $i=1, \dots, n$ щоб $q_i(0) = 0$. Оскільки $V_{2i-\bar{i}}^{n+\bar{i}}(-1) = V_{2i-\bar{i}}^{n+\bar{i}}(1) = 0$, $T'_{n+1+\bar{i}}(-1) = (-1)^{\bar{i}} T'_{n+1+\bar{i}}(1) = (-1)^{\bar{i}} (n+1+\bar{i})^2$ [5], то з умов (3) та (4) дістанемо відповідно

$$\tilde{F}_{n+1}(-1, t) = \sum_{\bar{i}=0}^1 \sum_{i=1}^s (-1)^{\bar{i}} (n+1+\bar{i})^2 \gamma_{2i-\bar{i}} q_{2i-\bar{i}}(t) = \frac{\sqrt{\pi}}{a\sqrt{t}},$$

$$\tilde{F}_{n+1}(1, t) = \sum_{\bar{i}=0}^1 \sum_{i=1}^s (n+1+\bar{i})^2 \gamma_{2i-\bar{i}} q_{2i-\bar{i}}(t) = 0,$$

або

$$\frac{\tilde{F}_{n+1}(1, t) - \tilde{F}_{n+1}(-1, t)}{2(n+2)^2} = \sum_{i=1}^s \gamma_{2i-1} q_{2i-1}(t) = \frac{\sqrt{\pi}}{2(n+2)^2 a\sqrt{t}}, \quad (10)$$

$$\frac{\tilde{F}_{n+1}(1, t) + \tilde{F}_{n+1}(-1, t)}{2(n+1)^2} = \sum_{i=1}^s \gamma_{2i} q_{2i}(t) = \frac{\sqrt{\pi}}{2(n+1)^2 a\sqrt{t}}. \quad (11)$$

Тоді

$$\frac{\partial^2 \tilde{F}_{n+1}(x, t)}{\partial x^2} = \sum_{\bar{i}=0}^1 \sum_{i=1}^s q_{2i-\bar{i}}(t) \left(-\frac{V_{2i-\bar{i}}^{n+\bar{i}}(x)}{\lambda_{2i-\bar{i}}^n} + \frac{\tau_{2i-\bar{i}}^n}{\lambda_{2i-\bar{i}}^n} T'_{n+1+\bar{i}}(x) + \right.$$

$$\left. + \gamma_{2i-\bar{i}} \left[\frac{(n+1+\bar{i})^2 \pi}{2^{2\bar{i}+1}} \sum_{j=1}^s \frac{\bar{c}_{1+\bar{i}}^{2j-1-\bar{i}}}{\lambda_{2j-1-\bar{i}}^n} \frac{V_{2j-\bar{i}}^{n+\bar{i}}}{N_{2j-\bar{i}}} + \right. \right.$$

$$\left. + \frac{1}{15} (n-1+\bar{i})(n+\bar{i})(n+2+\bar{i})(n+3+\bar{i}) T'_{n+1+\bar{i}}(x) \right], \quad (12)$$

$$\frac{\partial \tilde{F}_{n+1}(x, t)}{\partial t} = \sum_{\bar{i}=0}^1 \sum_{i=1}^s \frac{dq_{2i-\bar{i}}(t)}{dt} \times (V_{2i-\bar{i}}^{n+\bar{i}}(x) + \gamma_{2i-\bar{i}} T'_{n+1+\bar{i}}(x)). \quad (13)$$

Підставимо формули (12) та (13) в рівняння (1). Отримане таким чином співвідношення домножимо на $\bar{V}_{2i-\bar{i}}^{n+\bar{i}}(x)$ та зінтегруємо з вагою $\rho(x)$ в межах від -1 до 1 [2]. Враховуючи умови (10), (11) та рівності (7), (8), дістанемо

$$-q_{2i-1}(t) \frac{N_{2i-1}}{\lambda_{2i-1}^n} - \frac{\pi^{\frac{3}{2}}}{16at^{\frac{1}{2}}} \frac{\bar{c}_2^{2i}}{\lambda_{2i}^n} - \frac{N_{2i-1}}{a^2} \frac{dq_{2i-1}(t)}{dt} = 0$$

$$i=1, \dots, s, \quad (14)$$

$$-q_{2i}(t) \frac{N_{2i}}{\lambda_{2i-1}^n} + \frac{\pi^{\frac{3}{2}}}{4at^{\frac{1}{2}}} \frac{\bar{c}_1^{2i-1}}{\lambda_{2i-1}^n} - \frac{N_{2i}}{a^2} \frac{dq_{2i}(t)}{dt} = 0,$$

$$i=1, \dots, s. \quad (15)$$

Отже, ми отримали n диференціальних рівнянь, розв'язками яких є інтеграли Досона [1]

$$q_{2i-1}(t) = -\frac{\pi^{\frac{3}{2}} \bar{c}_2^{2i}}{8\sqrt{\lambda_{2i}^n} N_{2i-1}} \exp\left(-\frac{a^2}{\lambda_{2i}^n} t\right) \int_0^{\frac{a}{\sqrt{\lambda_{2i}^n}} \sqrt{t}} e^{q^2} dq,$$

$$q_{2i}(t) = \frac{\pi^{\frac{3}{2}} \bar{c}_1^{2i-1}}{2\sqrt{\lambda_{2i-1}^n} N_{2i}} \exp\left(-\frac{a^2}{\lambda_{2i-1}^n} t\right) \int_0^{\frac{a}{\sqrt{\lambda_{2i-1}^n}} \sqrt{t}} e^{q^2} dq,$$

$i = 1, \dots, s$.

Підставимо формули (12) та (13) в рівняння (1). Отримане таким чином співвідношення домножимо на $T'_{n+1+\bar{i}}(x)$ та зінтегруємо з вагою $\rho(x)$ в межах від -1 до 1 [2]. Враховуючи умови (10), (11), рівності (6), (9) та вирази (14), (15), дістанемо

$$\sum_{i=1}^s q_{2i-1}(t) \left(\frac{\tau_{2i}^n}{\lambda_{2i}^n} + \frac{\gamma_{2i-1}}{\lambda_{2i}^n} \right) - \frac{\sqrt{\pi}}{2a\sqrt{t}} \left(\frac{n(n+1)(n+3)(n+4)}{15(n+2)^2} - \sum_{i=1}^s \gamma_{2i-1} \frac{\pi \bar{c}_2^{2i}}{8\lambda_{2i}^n N_{2i-1}} \right) = 0, \quad (16)$$

$$\sum_{i=1}^s q_{2i}(t) \left(\frac{\tau_{2i-1}^n}{\lambda_{2i-1}^n} + \frac{\gamma_{2i}}{\lambda_{2i-1}^n} \right) + \frac{\sqrt{\pi}}{2a\sqrt{t}} \left(\frac{(n-1)n(n+2)(n+3)}{15(n+1)^2} - \sum_{i=1}^s \gamma_{2i} \frac{\pi \bar{c}_1^{2i-1}}{2\lambda_{2i-1}^n N_{2i}} \right) = 0. \quad (17)$$

З рівнянь (16) та (17) знаходимо невідомі коефіцієнти $\gamma_{2i-1} = -\tau_{2i}^n$, $\gamma_{2i} = -\tau_{2i-1}^n$, $i = 1, \dots, s$. Отже, розв'язок задачі (1)-(4) записується у вигляді

$$\tilde{F}_{n+1}(x, t) = \sum_{\bar{i}=0}^1 \sum_{i=1}^s (-1)^{\bar{i}} \frac{\pi^{\frac{3}{2}} \bar{c}_{1+\bar{i}}^{2i-1+\bar{i}}}{2^{\bar{i}+1} \sqrt{\lambda_{2i-1+\bar{i}}^n} N_{2i-\bar{i}}} \exp\left(-\frac{a^2}{\lambda_{2i-1+\bar{i}}^n} t\right) \times$$

$$\times \int_0^{\frac{a}{\sqrt{\lambda_{2i-1+\bar{i}}^n}} \sqrt{t}} e^{q^2} dq \left(V_{2i-\bar{i}}^{n+\bar{i}}(x) + (-1)^{\bar{i}} \tau_{2i-1+\bar{i}}^n T'_{n+1+\bar{i}}(x) \right). \quad (18)$$

Слід зазначити, що параметри $\bar{c}_{1+\bar{i}}^{2i-1+\bar{i}}$, $\lambda_{2i-1+\bar{i}}^n$, $N_{2i-\bar{i}}$, $\tau_{2i-1+\bar{i}}^n$ із розв'язку (18) можуть бути обчислені з довільною точністю і знайдені з алгоритму побудови біортогональних функцій $V_{2i-\bar{i}}^{n+\bar{i}}(x)$, $\bar{V}_{2i-\bar{i}}^{n+\bar{i}}(x)$. Для довільного натурального числа n можна побудувати бази даних із значеннями цих параметрів і використовувати їх

під час обчислення розв'язку [3], [4]. Для інтегралу Досона в літературі побудовані таблиці, якими ми можемо скористатися під час обчислення отриманого розв'язку.

Обчислювальний експеримент. Результати обчислень для різних значень параметрів при $n = 8$, $a = 0,5$ з точністю обчислень 10^{-8} подано у вигляді таблиць та рисунків. При цьому для $a = 0,5$ і різних часів t вираз $\sqrt{\pi}/(a\sqrt{t})$ приймає наступні точні значення:

$$\sqrt{\pi}/(a\sqrt{0,5}) = 5,0132566;$$

$$\sqrt{\pi}/(a\sqrt{1}) = 3,5449078; \quad \sqrt{\pi}/(a\sqrt{10}) = 1,1209983;$$

$$\sqrt{\pi}/(a\sqrt{50}) = 0,50132568; \quad \sqrt{\pi}/(a\sqrt{100}) = 0,35449078;$$

$$\sqrt{\pi}/(a\sqrt{500}) = 0,15853310.$$

Таблиця 1.
Значення шуканого розв'язку для різних значень часів та координати.

x_i	$t = 0,5$	$t = 1$	$t = 10$	$t = 50$	$t = 100$	$t = 500$
-1	5,0119420	3,5468288	1,1211398	,50149199	,35477064	,15928751
-9	4,9144021	3,5092275	1,0830804	,47754666	,33723766	,15072589
-8	4,6285700	3,4057835	1,0428577	,45354789	,31983641	,14268065
-7	4,1868309	3,2400544	1,0004051	,42940746	,30243921	,13481420
-6	3,6391157	3,0209707	,95570088	,40509050	,28498734	,12696397
-5	3,0402885	2,7607144	,90876102	,38059519	,26746463	,11907438
-4	2,4412196	2,4729552	,85962547	,35593443	,24987556	,11114569
-3	1,8831349	2,1714683	,80835482	,33112572	,23223202	,10319951
-2	1,3947101	1,8690781	,75502516	,30618499	,21454532	,095257504
-1	,99142618	1,5768986	,69972601	,28112384	,19682194	,087330585
0	,67669312	1,3038416	,64255998	,25594976	,17906362	,079416826
1	,44425132	1,0563606	,58364281	,23066810	,16126896	,071504905
2	,28135562	,83839813	,52310384	,20528483	,14343648	,063580996
3	,17225023	,65150504	,46108657	,17980904	,1256772	,055636338
4	,10144246	,49510018	,39774847	,15425459	,10766902	,047673168
5	,05628390	,36683914	,33325995	,12863945	,089751459	,039706400
6	,02836146	,26305917	,26780120	,10298214	,071827106	,031758533
7	,01321320	,17927103	,20155770	,077294281	,053901096	,023845386
8	,00787294	,11066534	,13471296	,051568348	,035958215	,015950117
9	,00574532	,05259748	,06743745	,025758993	,017942518	,007982812
1	-,0116674	,00102866	-,00012446	-,00024159	-,000270306	-,000276427

Всі результати здійснювались для $n \leq 30$ при 32 вузлах у квадратурах Гауса. Так, як для $x = -0,5$ нам не відомі точні значення, то потрібно знайти значення якомога точніше, а це означає, що потрібно буде збільшувати кількість членів ряду і, очевидно, кількість вузлів квадратур Гауса та точність обчислень. Знайдені таким чином значення у цих точках, надалі

позначатимемо через $F(t)$, $\tilde{F}(t)$ - наближене значення, $\varepsilon = F(t) - \tilde{F}(t)$ - абсолютна похибка, n - кількість членів ряду. Розрахунки проведено з точністю 10^{-32} .

Таблиця 2.

Значення наближеного розв'язку та абсолютної похибки в точці $x = -0,5$.

$$F(1) = 2,76075993697717381749275$$

n	$\tilde{F}(1)$	$\varepsilon = F(1) - \tilde{F}(1)$
2	2,6	,964 e-1
4	2,70	,523e-1
6	2,75	,444e-2
8	2,76071	,458e-4
10	2,76076	-,422e-5
12	2,76075998	-,453e-7
14	2,760759939	-,233e-8
16	2,760759937	-,421e-9
18	2,76075993699	-,136e-10
20	2,76075993697718	-,642e-14
22	2,76075993697716	,786e-14
24	2,7607599369771736	,161e-15
26	2,7607599369771738171	,382e-18
28	2,7607599369771738175	-,267e-19
30	2,760759936977173817493	-,318e-21

Таблиця 3.

Значення наближеного розв'язку та абсолютної похибки в точці $x = -0,5$.

$$F(10) = 0,9087551653485876796473857289$$

n	$\tilde{F}(10)$	$\varepsilon = F(10) - \tilde{F}(10)$
2	,904	,405e-2
4	,909	-,351e-3
6	,908758	-,350e-5
8	,9087551659	-,605e-9
10	,9087551652	,604e-10
12	,90875516534854	,419e-13
14	,90875516534858764	,365e-16
16	,908755165348587675	,412e-17
18	,90875516534858767963	,138e-19
20	,908755165348587679647386	-,864e-24
22	,9087551653485876796473858	-,719e-25
24	,90875516534858767964738575	-,291e-25
26	,9087551653485876796473854	,242e-24
28	,908755165348587679647384	,168e-23
30	,908755165348587679647386	-,105e-23

Таблиця 4.

Значення наближеного розв'язку та абсолютної похибки в точці $x = -0,5$.

$$F(100) = 0,26745329907430745958847151009$$

n	$\tilde{F}(100)$	$\varepsilon = F(100) - \tilde{F}(100)$
2	,2673	,763e-4
4	,2674538	-,582e-6
6	,2674532996	-,528e-9
8	,26745329907432	-,166e-13
10	,2674532990743072	,161e-15
12	,26745329907430745951	,711e-19
14	,267453299074307459588470	,753e-24
16	,267453299074307459588471518	-,798e-26
18	,2674532990743074595884715101	-,281e-28
20	,26745329907430745958847151003	,597e-28
22	,26745329907430745958847150	,190e-26
24	,267453299074307459588471519	-,917e-26
26	,2674532990743074595884714	,766e-25
28	,267453299074307459588470	,531e-24
30	,2674532990743074595884718	-,331e-24

Таблиця 5

Значення наближеного розв'язку та абсолютної похибки в точці $x = -0,5$.

$$F(500) = 0,119039129594350210033684399299$$

n	$\tilde{F}(500)$	$\varepsilon = F(500) - \tilde{F}(500)$
2	,119032	,665e-5
4	,11903913	-,100e-7
6	,119039129596	-,179e-11
8	,11903912959435022	-,115e-16
10	,11903912959435021001	,211e-19
12	,119039129594350210033682	,183e-23
14	,1190391295943502100336843993	-,569e-28
16	,11903912959435021003368439926	,295e-28
18	,1190391295943502100336843993	-,343e-29
20	,11903912959435021003368439927	,194e-28
22	,119039129594350210033684398	,711e-27
24	,1190391295943502100336844	-,406e-26
26	,11903912959435021003368436	,343e-25
28	,1190391295943502100336841	,237e-24
30	,1190391295943502100336845	-,148e-24

Висновки. Отримані результати підтверджують ефективність застосування побудованих біртогональних поліномів для розв'язування задач математичної фізики. На обчислення наближеного розв'язку нашої задачі суттєвий вплив має не лише кількість доданків n суми відповідного ряду, але й точність обчислення. В ході обчислювального експерименту, із таблиці 3 чітко видно, що при $n \geq 26$ абсолютна похибка зростає. Зростання похибки спостерігається і в таблиці 4 та 5 при $n \geq 20$. В таких випадках слід збільшити точність обчислень, оскільки, з точністю обчислення 10^{-32} спостерігається накопичення похибок.

Список використаних джерел

1. Абрамович[°]М. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами. / М.[°]Абрамович, И.[°]Стиган. – Москва: Наука. 1979. – 832[°]с.
2. Глетчер[°]К. Численные методы на основе метода Галеркина. / К.[°]Глетчер. – Москва: Мир. 1988. – 352[°]с.
3. Дзядык[°]В.К. Аппроксимационные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений. / В.К.[°]Дзядык. – Киев: Наук. думка. 1998. – 370[°]с.
4. Дзядык[°]В.К. Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. / В.К.[°]Дзядык. – Москва: Наука. 1977. – 512[°]с.
5. Пашковский[°]С. Вычислительные применения многочленов и рядов Чебышева. / С.[°]Пашковский. – Москва: Наука. 1983. – 384[°]с.
6. П'янило[°]Я.Д. Побудова та дослідження біртогональних поліномів на базі многочленів Чебишева [Електронний ресурс] / Я.Д.[°]П'янило, В.Г.[°]Собко // Прикл. Проблеми мех. і мат. – 2013. Вип. 11. – С. 135-141. – Режим доступу до журн.: <http://journals.iapmm.lviv.ua/ojs/index.php/APMM/article/viewFile/548/581>.
7. П'янило[°]Я.Д. Дослідження властивостей спектральних розкладів у базисах ортогональних, квазіортогональних і біртогональних поліномів [Електронний ресурс] / Я.Д.[°]П'янило, В.Г.[°]Собко // Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології. – 2014. Вип. 19. – С. 146-156. – Режим доступу до журн.: http://journals.iapmm.lviv.ua/ojs/index.php/APMM/article/Fmmit_2014_19_17.pdf.

References

1. ABRAMOVYCH, °M. (1979) *Spravochnyk po spetsyal'nym funktsyyam s formulamy, hrafykamy y matematycheskymy tablytsamy*. [Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables], Nauka, 1979, Moskva,
2. HLETCHER, °K. (1988) *Chyslennyye metody na osnove metoda Halerkyna*. [Numerical methods based on the Galerkin method], Myr, 1988, Moskva
3. DZYADYK, °V.K. (1998) *Approksymatsyonnye metody reshenyya dyfferentsyal'nykh y yntehral'nykh uravnenyy* [Approximate methods for the solution of differential and integral equations], Nauk dumka, 1998, Kyev, Ukraine.
4. DZYADYK, °V.K. (1977) *Vvedenye v teoryyu ravnomernoho pryblzhenyya funktsyy polynomamy*. [Introduction to the theory of uniform approximation of functions by polynomials], Nauka, 1977, Moskva
5. PASHKOVSKYY, °S. (1983) *Vychyslytel'nye prymenyya mnohochlenov y ryadov Chebyshova*. [Numerical applications of polynomials and Chebyshev series], Nauka, 1983, Moskva.
6. P'YANYLO, °Ya.D. (2013) *Pobudova ta doslidzhennya biortohonal'nykh polinomiv na bazi mnohochleniv Chebysheva* [Design and research biortohonalnyh polynomials Chebyshev polynomials based], [Elektronnyy resurs] / Prykl. Problems fur. and Math. – Vyp. 11. – pp. 135-141. – Available from: <http://journals.iapmm.lviv.ua/ojs/index.php/APMM/article/viewFile/548/581>.
7. P'YANYLO, °Ya.D. (2014) *Doslidzhennya vlastyvestey spektral'nykh rozkladiv u bazysakh ortohonal'nykh, kvaziortohonal'nykh i biortohonal'nykh polinomiv* [Research spectral properties in the bases of orthogonal expansions, polynomials kvazyortohonalnye and biortohonalnyh], Physical and mathematical modeling and information technologies, Vyp. 19. – pp. 146-156, Available from http://journals.iapmm.lviv.ua/ojs/index.php/APMM/article/Fmmit_2014_19_17.pdf

Надійшла до редколегії 01.12.2015

УДК 519.63+519. 652

Стеля О. Б., к.ф.-м.н., с.н.с.
Потапенко Л. І., к.т.н., пров. інж.
Сіренко І. П., пров. інж.
Стеля І. О., к.т.н., м.н.с.

Монотонна різницева схема для нестационарного рівняння конвекції- дифузії-реакції

Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 83000, м. Київ, пр-т.
Глушкова 4д,
e-mail: oleg.stelya@gmail.com

O. B. Stelia, Cand. Phys. Math. Sci.
L. I. Potapenko, Cand. Techn. Sci.
I. P. Sirenko, senior engineer
I. O. Stelia, Cand. Techn. Sci.

Monotone difference scheme for the unsteady convection-diffusion-reaction equation

Taras Shevchenko National University of Kyiv,
83000, Kyiv, Glushkova st., 4d,
e-mail: oleg.stelya@gmail.com

В роботі запропоновано монотонну різницеву схему для нестационарного рівняння конвекції-дифузії-реакції. Записується дискретизована по часовій змінній задача. Для побудови різницевої схеми використовується параболічний сплайн. Показана монотонність одержаної різницевої схеми. Наведено приклади розрахунків в разі домінування конвективного члена над дифузійним. Чисельний розв'язок задачі може бути відтворений у вигляді параболічного сплайна на всьому відрізьку інтегрування для вибраних дискретних моментів часу.

Ключові слова: рівняння конвекції-дифузії-реакції, монотонна різницева схема.

This paper presents the Dirichlet boundary value problem for the unsteady-state equation of convection-diffusion-reaction with the prevailing convection. For differencing is used the parabolic spline that is continuous together with its first-order derivative which does not demand any additional conditions for its construction. Search for solution of the task in the form of a spline is applied to time-discretizable equation of convection-diffusion-reaction. For the received of difference scheme its monotonicity is proved. Theoretical researches and results of numerous experiments show that the offered scheme for the equation of convection-diffusion-reaction allows to solve boundary value problem for the wide range of values of the equation coefficients. This applies especially cases when convection far exceeds diffusion. The monotonic scheme provides stability of the computational solution, and application of a parabolic spline for its construction allows to reproduce the solution in the form of continuous function for the timepoints determined by discretization. There are given examples of calculations for a case of domination of the convective term over diffusion one.

Key Words: equation of convection-diffusion-reaction, monotonic difference scheme.

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Буй Д.Б.

Вступ

Велика кількість прикладних застосувань, зокрема, у балістиці, моделюванні навколишнього середовища, медицині та ін. ґрунтується на крайових задачах для рівнянні типу конвекції-дифузії-реакції. Фізичні аспекти процесів, що описує рівняння та аналітичні розв'язки для деяких частинних випадків можна знайти в [2]. Таке широке застосування рівняння обумовлює

необхідність створення нових високоефективних чисельних методів для його розв'язування, особливо при значному домінуванні конвекції над дифузією. Значна увага в наукових публікаціях приділяється побудові монотонних різницевих схем. Властивістю монотонних схем є те, що при їх чисельній реалізації зберігається монотонність розв'язку вихідної задачі з тим же напрямком зростання. Для монотонних схем легко обґрунтовується їх стійкість. У [6] викладено ідеї та підходи до чисельного

моделювання взаємодії конвективних та дифузійних процесів. Наведено огляд сіткових методів, що використовуються для розв'язування рівняння конвекції-дифузії та приклади їх застосування. В роботі [4] викладено основні проблеми, що виникають при пошуках наближених розв'язків рівняння конвекції-дифузії чисельними методами. Розглядається скінченно-різницеви метод та метод скінченних елементів. У роботі [3] розглядаються різні вимоги до чисельних алгоритмів, такі як їх адаптованість до особливостей явищ, які моделюються. Розглядається використання нерегулярних та рухомих сіток, монотонних схем. Чисельним методам розв'язування рівняння конвекції-дифузії-реакції присвячені роботи [1, 5].

Деякі підходи до розв'язування рівняння конвекції-дифузії з переважаючою конвекцією, зокрема побудова різницевих сіток, що адаптуються до особливостей розв'язку задач, наведені в публікаціях [8, 12, 13]. Застосування рівнянь типу конвекції-дифузії для вивчення різних явищ наведено в [7, 9].

В роботі надається розвинення сплайнової різницевої схеми запропонованої в роботі [11] на рівняння типу конвекції-дифузії-реакції.

Постановка задачі

Розглянемо крайову задачу для нестационарного рівняння конвекції-дифузії-реакції

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} &= D(x,t) \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - V(x,t) \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} + \\ &+ A(x,t)u(x,t) + f(x,t), \quad x \in (0, L), t > 0, \\ u(0,t) &= U_0(t), \\ u(L,t) &= U_L(t), \\ u(x,0) &= g(x), \end{aligned} \quad (1) \quad (2) \quad (3) \quad (4)$$

де $V(x,t) \neq 0$, $0 < D(x,t) < 1$.

$$\begin{aligned} D^{k+1}(x) &\left\{ \varphi_i \frac{2}{(x_{i+1} - \tau_i)(\tau_{i+1} - \tau_i)} - C_{i+1} \frac{2}{(x_{i+1} - \tau_i)(\tau_{i+1} - x_{i+1})} + \varphi_{i+1} \frac{2}{(\tau_{i+1} - x_{i+1})(\tau_{i+1} - \tau_i)} \right\} - \\ &- V^{k+1}(x) \left\{ \varphi_i \frac{(x - x_{i+1}) + (x - \tau_{i+1})}{(x_{i+1} - \tau_i)(\tau_{i+1} - \tau_i)} - C_{i+1} \frac{(x - \tau_i) + (x - \tau_{i+1})}{(x_{i+1} - \tau_i)(\tau_{i+1} - x_{i+1})} + \varphi_{i+1} \frac{(x - \tau_i) + (x - x_{i+1})}{(\tau_{i+1} - x_{i+1})(\tau_{i+1} - \tau_i)} \right\} + \\ &+ \left(A^{k+1}(x) - \frac{1}{\rho} \right) \left\{ \varphi_i \frac{(x - x_{i+1})(x - \tau_{i+1})}{(x_{i+1} - \tau_i)(\tau_{i+1} - \tau_i)} - C_{i+1} \frac{(x - \tau_i)(x - \tau_{i+1})}{(x_{i+1} - \tau_i)(\tau_{i+1} - x_{i+1})} + \varphi_{i+1} \frac{(x - \tau_i)(x - x_{i+1})}{(\tau_{i+1} - x_{i+1})(\tau_{i+1} - \tau_i)} \right\} = \\ &= -f^{k+1}(x) - \frac{1}{\rho} u^k(x). \end{aligned} \quad (10)$$

Введемо рівномірну сітку по часовій змінній

$$\Delta_t : t_{k+1} = t_k + \rho, \quad k = 0, 1, 2, \dots, t_0 = 0, \quad \rho = \text{const.}$$

Тоді запишемо дискретизовану по часовій змінній задачу:

$$D(x, t_{k+1}) \frac{d^2 u(x, t_{k+1})}{dx^2} - V(x, t_{k+1}) \frac{du(x, t_{k+1})}{dx} - \quad (5)$$

$$- \frac{1}{\rho} u(x, t_{k+1}) + A(x, t_{k+1}) u(x, t_{k+1}) =$$

$$= -f(x, t_{k+1}) - \frac{1}{\rho} u(x, t_k),$$

$$u(0, t_{k+1}) = U_0(t_{k+1}), \quad (6)$$

$$u(L, t_{k+1}) = U_L(t_{k+1}), \quad (7)$$

$$u(x, t_0) = g(x). \quad (8)$$

Нехай на відрізку $[0, L]$ задані розбиття Δ_x і Δ_τ

$$a) \Delta_x : 0 = x_0 < x_1 < \dots < x_N = L,$$

$$б) \Delta_\tau : 0 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_{N-1} = L, \quad (9)$$

де $x_i < \tau_i < x_{i+1}$, $i = \overline{1, N-2}$.

Позначимо C_i та φ_i значення деяких сіткових функцій, відповідно, на сітках (9а) та (9б), причому $\varphi_0 = C_0$, $\varphi_{N-1} = C_N$. Будемо шукати розв'язок задачі у вигляді параболічного сплайна [10]. Для цього запишемо кусково-квадратичну функцію $C(x)$ в $k+1$ -й момент часу, $x \in [\tau_i, \tau_{i+1}]$, $i = \overline{0, N-2}$ та знайдемо першу та другу похідні цієї функції на кожному з відрізків, підставимо їх разом із самою функцією у рівняння (5). Одержуємо:

Не обмежуючи загальності алгоритма покладемо $D = \text{const}$, $V = \text{const}$, $A = \text{const}$. Також покладемо $x = x_{i+1}$. Одержимо

$$\begin{aligned} & \varphi_i \frac{2D}{(x_{i+1} - \tau_i)(\tau_{i+1} - \tau_i)} - C_{i+1} \frac{2D}{(x_{i+1} - \tau_i)(\tau_{i+1} - x_{i+1})} + \varphi_{i+1} \frac{2D}{(\tau_{i+1} - x_{i+1})(\tau_{i+1} - \tau_i)} - \varphi_i \frac{V(x_{i+1} - \tau_{i+1})}{(x_{i+1} - \tau_i)(\tau_{i+1} - \tau_i)} + \\ & + C_{i+1} \frac{V((x_{i+1} - \tau_i) + (\tau_{i+1} - x_{i+1}))}{(x_{i+1} - \tau_i)(\tau_{i+1} - x_{i+1})} - \varphi_{i+1} \frac{V(x_{i+1} - \tau_i)}{(\tau_{i+1} - x_{i+1})(\tau_{i+1} - \tau_i)} + \left(A - \frac{1}{\rho}\right) C_{i+1} = -f^{k+1}(x_{i+1}) - \frac{1}{\rho} u^k(x_{i+1}). \end{aligned}$$

З останнього виразу визначимо C_{i+1}

$$\begin{aligned} C_{i+1} = & \left\{ \varphi_i \left[\frac{2D - V(x_{i+1} - \tau_{i+1})}{(x_{i+1} - \tau_i)(\tau_{i+1} - \tau_i)} \right] + \varphi_{i+1} \left[\frac{2D - V(x_{i+1} - \tau_i)}{(\tau_{i+1} - x_{i+1})(\tau_{i+1} - \tau_i)} \right] + f_{i+1} + \left(\frac{1}{\rho} + A \right) u^k_{i+1} \right\} : \\ & \left[\frac{2D - V((x_{i+1} - \tau_i) + (x_{i+1} - \tau_{i+1}))}{(x_{i+1} - \tau_i)(\tau_{i+1} - x_{i+1})} + \frac{1}{\rho} - A \right] \end{aligned}$$

Аналогічно, для відрізка $[\tau_{i-1}, \tau_i]$ покладемо з урахуванням знайдених значень C_i та C_{i+1} , $x = x_i$ і знайдемо C_i . Далі з умов неперервності одержуємо перших похідних функції $C(x)$ в точках τ_i та

$$\varphi_{i-1} Q_{i-1} - \varphi_i Q_i + \varphi_{i+1} Q_{i+1} = F_i, \quad i = \overline{1, N-2},$$

де

$$\begin{aligned} Q_{i-1} = & \left\{ \frac{(\tau_i - x_i)}{(x_i - \tau_{i-1})(\tau_i - \tau_{i-1})} - \left[\frac{(2D - V(x_i - \tau_i))(\tau_i - \tau_{i-1})}{(x_i - \tau_{i-1})(\tau_i - \tau_{i-1})(x_i - \tau_{i-1})(\tau_i - x_i)} \right] : \left[\frac{2D - V((x_i - \tau_{i-1}) + (x_i - \tau_i))}{(x_i - \tau_{i-1})(\tau_i - x_i)} + \frac{1}{\rho} - A \right], \right. \\ Q_i = & \left\{ \left[\frac{(2D - V(x_i - \tau_{i-1}))(\tau_i - \tau_{i-1})}{(\tau_i - x_i)(\tau_i - \tau_{i-1})(x_i - \tau_{i-1})(\tau_i - x_i)} \right] : \left[\frac{2D - V((x_i - \tau_{i-1}) + (x_i - \tau_i))}{(x_i - \tau_{i-1})(\tau_i - x_i)} + \frac{1}{\rho} - A \right] - \right. \\ & - \frac{(\tau_i - \tau_{i-1}) + (\tau_i - x_i)}{(\tau_i - x_i)(\tau_i - \tau_{i-1})} + \frac{(\tau_i - x_{i+1}) + (\tau_i - \tau_{i+1})}{(x_{i+1} - \tau_i)(\tau_{i+1} - \tau_i)} - \left[\frac{(2D - V(x_{i+1} - \tau_{i+1}))}{(x_{i+1} - \tau_i)(\tau_{i+1} - \tau_i)} \right] \times \\ & \times \left[\frac{(\tau_i - \tau_{i+1})}{(x_{i+1} - \tau_i)(\tau_{i+1} - x_{i+1})} \right] : \left[\frac{2D - V((x_{i+1} - \tau_i) + (x_{i+1} - \tau_{i+1}))}{(x_{i+1} - \tau_i)(\tau_{i+1} - x_{i+1})} + \frac{1}{\rho} - A \right] \Big\} \\ Q_{i+1} = & \left\{ \frac{[2D - V(x_{i+1} - \tau_i)](\tau_i - \tau_{i+1})}{(\tau_{i+1} - x_{i+1})(\tau_{i+1} - \tau_i)(x_{i+1} - \tau_i)(\tau_{i+1} - x_{i+1})} \right\} : \left[\frac{2D - V((x_{i+1} - \tau_i) + (x_{i+1} - \tau_{i+1}))}{(x_{i+1} - \tau_i)(\tau_{i+1} - x_{i+1})} + \frac{1}{\rho} - A \right] - \\ & - \frac{(\tau_i - x_{i+1})}{(\tau_{i+1} - x_{i+1})(\tau_{i+1} - \tau_i)} \Big\}, \\ F_i = & - \left\{ \frac{\left[f_{i+1} + \left(\frac{1}{\rho} - A \right) u^k_{i+1} \right] (\tau_i - \tau_{i+1})}{(x_{i+1} - \tau_i)(\tau_{i+1} - x_{i+1})} \right\} : \left[\frac{2D - V((x_{i+1} - \tau_i) + (x_{i+1} - \tau_{i+1}))}{(x_{i+1} - \tau_i)(\tau_{i+1} - x_{i+1})} + \frac{1}{\rho} - A \right] + \end{aligned}$$

$$+ \left\{ \frac{\left[f_i + \left(\frac{1}{\rho} - A \right) u_i^k \right] (\tau_i - \tau_{i-1})}{(x_i - \tau_{i-1})(\tau_i - x_i)} \right\} \cdot \left[\frac{2D - V((x_i - \tau_{i-1}) + (x_i - \tau_i))}{(x_i - \tau_{i-1})(\tau_i - x_i)} + \frac{1}{\rho} - A \right].$$

Відмітимо, що починаючи з моменту часу $k=1$ в якості значень $u(x_{i+1})$ та $u(x_i)$ використовуються значення C_{i+1} та C_i . Розглянемо рівномірну сітку Δ_τ з кроком h . Сітка Δ_x розміщена відносно сітки Δ_τ так, що $\tau_i - x_i = \mu$. Після перетворень виразів Q_{i-1} , Q_i , Q_{i+1} та F_i одержуємо систему рівнянь для внутрішніх вузлів сіткової області на момент часу t_{k+1}

$$\alpha \varphi_{\tau_{i-1}}^{k+1} - \gamma \varphi_{\tau_i}^{k+1} + \beta \varphi_{\tau_{i+1}}^{k+1} = - \frac{f_{x_i}^{k+1} + f_{x_{i+1}}^{k+1}}{2} - \frac{u_{x_{i+1}}^k + u_{x_i}^k}{2\rho},$$

$$i = \overline{1, N-2}, \quad (11)$$

де

$$\alpha = a + \frac{\mu^2}{2h^2} \left(\frac{1}{\rho} - A \right),$$

$$\gamma = a + b + \frac{2h^2 - \mu^2 - (h - \mu)^2}{2h^2} \left(\frac{1}{\rho} - A \right),$$

$$\beta = b - \frac{(h - \mu)^2}{2h^2} \left(\frac{1}{\rho} - A \right),$$

$$\text{де } a = \frac{D}{h^2} + \frac{V}{h^2} \mu, \quad b = \frac{D}{h^2} - \frac{V}{h} \left(1 - \frac{\mu}{h} \right).$$

Теорема. Різницєва схема (11) є монотонною за умови $\rho > \max(\rho_1, \rho_2)$, де

$$\rho_1 = \frac{\mu^2}{2(D + V\mu) + A\mu^2},$$

$$\rho_2 = \frac{(h - \mu)^2}{2(D + V\mu - Vh) + A(h - \mu)^2},$$

та умови $\rho \leq \frac{1}{A}$, якщо $A > 0$.

Доведення. З умови $\rho > \rho_1$ маємо $\alpha > 0$. З умови $\rho > \rho_2$ маємо $\beta > 0$. Тоді

$$\gamma - \alpha - \beta = \frac{2h^2 - \mu^2 - (h - \mu)^2}{2h^2} \left(\frac{1}{\rho} - A \right) +$$

$$+ \frac{\mu^2}{2h^2} \left(\frac{1}{\rho} - A \right) + \frac{(h - \mu)^2}{2h^2} \left(\frac{1}{\rho} - A \right) = \frac{1}{\rho} - A \geq 0.$$

Таким чином $\gamma \geq \alpha + \beta$, а це означає, що за визначених умов різницєва схема (11) є монотонною [3].

Дослідження похибки апроксимації схеми наведено в [11]. Відмітимо, що наявність реакції в рівнянні (1) не впливає на точність схеми.

Приклади розрахунків

За допомогою розробленого програмного забезпечення проведено чисельні розрахунки. Коефіцієнти рівняння, крайові та початкова умови були задані так: $L = 6$; $D = 0,0005$; $A = \pm 0,2$; $h = 0,001$; $u(0) = 1$; $u(L) = 0$; $u(x, 0) = 0$; $V = 1$.

Порівняння чисельного розв'язку задачі (1)–(4) з точним розв'язком при $A = 0$ наведено в роботі [11]. Член $A \cdot u$ не впливає на точність чисельного розв'язку, тому в наведеному прикладі нас буде цікавити лише його вплив на якісні характеристики розв'язку задачі. На рисунку 1 наведено знайдений розв'язок задачі у вигляді “сходинок” при $A = -0,2$ для різних моментів часу.

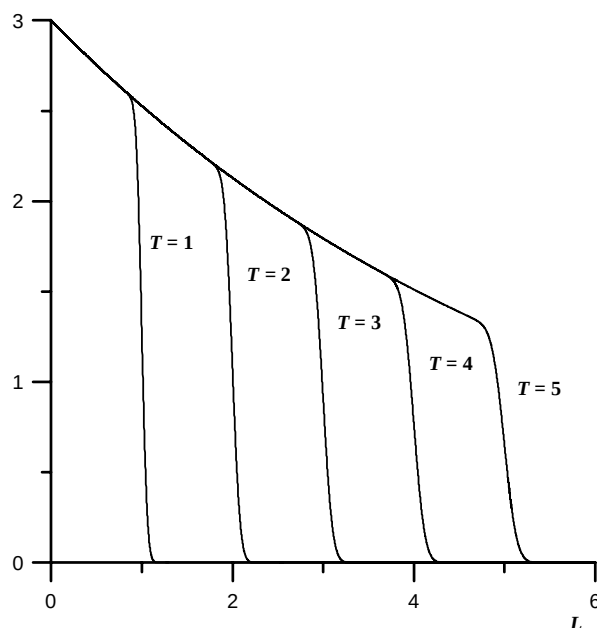


Рис. 1. Результат розрахунку при від'ємному A

На рисунку 2 наведено аналогічні результати для $A = 0,2$.

Чисельний розв'язок задачі може бути відтворений у вигляді параболічного сплайна на всьому відрізку інтегрування.

Висновки

Теоретичні дослідження та результати чисельних експериментів показують, що запропонована монотонна різницева схема для рівняння конвекції-дифузії-реакції дозволяє розв'язувати крайові задачі для широкого діапазона значень коефіцієнтів рівняння. Особливо це стосується випадків, коли конвекція значно перевищує дифузію. Монотонна схема забезпечує стійкість чисельного розв'язку, а застосування параболічного сплайна для її побудови дозволяє відтворювати розв'язок у вигляді неперервної функції для кожного моменту часу.

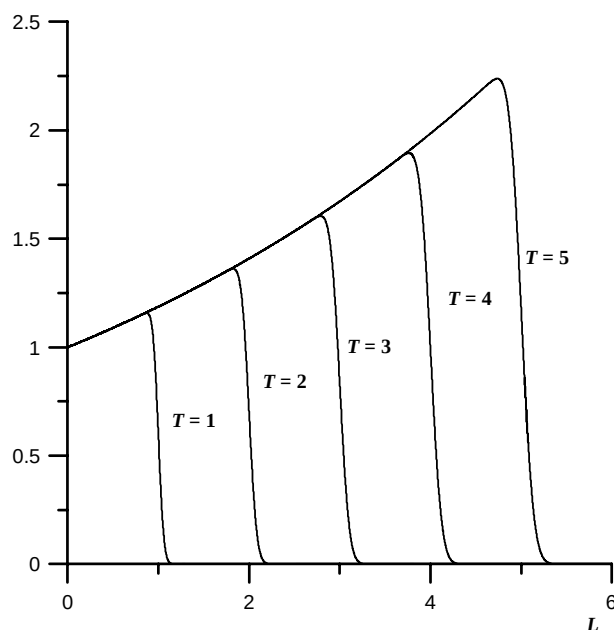


Рис. 2. Результат розрахунку при позитивному A

Список використаних джерел

1. Багаев Б.М. Сеточные методы решения задач с пограничным слоем: В 5 ч./ Б.М. Багаев, Е.Д. Карпова. В.В.Шайдуров – Новосибирск: Наука, 2001. – Ч. 2. – 224 с.
2. Байков Н.В. Теплофизика. Т. 2. / Н.В. Байков, Н.В. Павлюкевич, А.К. Федотов, Шнип А.И. – Минск: Институт тепло- и массообмена им. А.В. Лыкова НАНБ, 2014. – 371 с.
3. Годунов С.К. Численное решение многомерных задач газовой динамики. / С.К. Годунов, А.В. Забродин, М.Я. Иванов, А.Н. Крайко, Г.П. Прокопов. – Москва: Наука, 1976. – 400 с.
4. Самарский А.А. Численные методы решения задач конвекции-диффузии / А.А. Самарский, П.Н. Вабищевич – Москва: Едиториал УРСС, 1999. – 248 с.
5. Hundsdorfer W. Numerical Solution of Time-Dependent Advection-Diffusion-Reaction Equations. Series in Computational Mathematics. Vol. 33. / W. Hundsdorfer, J. Verwer. – Springer, 2003. – 466 p.
6. Morton K. W. Numerical Solution Of Convection-Diffusion Problems. 1st edition. Series: Applied Mathematics (Book 12). – Publisher: Chapman and Hall/CRC; 1996. – 384 p.

References

1. BAGAEV B.M., (2001) *Grid methods for solving boundary layer: In 5 parts. Part 2.* Novosibirsk: Nauka.
2. BAYKOV N.V., PAVLYUKEVICH N.V., FEDOTOV A.K., SHNIP A.I. (2014) *Thermal physics. Vol. 2.* Minsk: A.V. Luikov Heat And Mass Transfer Institute Of The NASB.
3. SAMARSKY A.A., VABISHEVICH P.N. (1999) *Numerical methods for solving convection-diffusion problems.* Moscow: Edytorial URSS.
4. GODUNOV S.K., ZABRODIN A.V., IVANOV M.YA., KRAYKO A.N., PROKOPOV G.P. (1976) *Numerical solution of multi-dimensional problems of gas dynamics.* Moscow: Nauka.
5. HUNDSDORFER W., VERWER J. (2003) *Numerical Solution of Time-Dependent Advection-Diffusion-Reaction Equations.* Series in Computational Mathematics. Vol. 33. Springer.
6. MORTON K. W. (1996) *Numerical Solution Of Convection-Diffusion Problems.* 1st edition. Series: Applied Mathematics (Book 12). Publisher: Chapman and Hall/CRC.

7. Бомба А.Я. Моделирование нелинейных сингулярно возмущенных трехкомпонентных процессов типа «диффузия-конвекция-массообмен» в наносредовищі / А.Я. Бомба, М.Р. Петрик, Д. Леклерк, О.В. Присяжнюк, Ж. Фресар // Журн. обчис. та приклад. матем. – 2015. – №3(120). – С. 107–115.
8. Власюк А.П. Монотонна різницева схема для нелинійної одновимірної рівняння параболічного типу, що містить першу похідну. / А.П. Власюк, О.П. Остапчук, О.М. Степанченко // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія фізико-математичні науки. – 2005. – Вип. 3. – С. 217–226.
9. Ляшко С.І. Якісне та чисельне дослідження сингулярного керування конвективної дифузії суміші радіо-ізо-топів. / С.І. Ляшко, Д.А. Ключин, Г.М. Стешенко // Доп. НАНУ. – 2012. – №8. – С. 42–46.
10. Стеля О.Б. Про існування одного параболічного сплайну. / О.Б. Стеля // Журн. обчисл. та прикл. матем. – 1997. – №1(81). – С. 62–67.
11. Стеля О.Б. Сплайнова схема розв'язання нестационарного рівняння конвекції-дифузії. / О.Б. Стеля // Журн. обчис. та приклад. матем. – 2011. – №1(104). – С. 136–142.
12. Шишкин Г.И. Аппроксимация сингулярно возмущенных уравнений реакции-диффузии на адаптивных сетках. / Г.И. Шишкин // Математическое моделирование. – 2001. – 13, №3. – С. 103–118.
13. Шишкин. Г.И. Апостериорно адаптируемые (по градиенту решения) сетки в аппроксимации сингулярно возмущенных уравнений конвекции-диффузии. – Вычислительные технологии – 2001 – 6, № 1. – С. 3–18.
7. BOMBA A.YA., PETRYK M.P., LECLERC S., PRYSIAZHNIUK O.V., FRAISSARD J. (2015) Modeling of nonlinear singularly perturbed three-component processes such as «diffusion-convection mass transfer» in nanoporous media. *Journ. of Comput. & Appl. Mathem.* №3(120). pp. 107–115.
8. VLASYUK A.P. OSTAPCHUK O.P., STEPANCHENKO O.M. (2005) Monotone difference scheme for one-dimensional nonlinear parabolic equations containing the first derivative. *Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series Physics & Mathematics.* (3). pp. 217–226.
9. LYASHKO S.I., KLYUSHYN D.A., STESHENKO H.M. (2012) Qualitative and numerical research of singular control of convective diffusion of radioisotopes mixture. *Reports of the National Academy of Sciences of Ukraine.* (8). – pp. 42–46.
10. STELYA O.B. (1997) The existence of a parabolic spline. *Journal of Comput. Appl. Mathem.* (1(81)). pp. 62–67.
11. STELYA O.B. (2011) Spline scheme for solving the nonstationary convection-diffusion equation. *Journal of Comput. Appl. Mathem.* (1(104)). – pp. 136–142.
12. SHYSHKYN G.I. (2001) Approximation of a singularly perturbed reaction-diffusion equations on adaptive grids. *Matematicheskoe Modelirovanie.* 13(3). pp. 103–118.
13. SHYSHKYN G.I. (2001) Posteriorly adapted (to the solution gradient) grids in the approximation of a singularly perturbed convection-diffusion equations. *Computational Technologies.* 6(1). pp. 3–18.

Надійшла до редколегії 10.12.2015

УДК 004.942:519.876.5

Харченко І. І., к.т.н., доц.

**Стратегія розвитку наукових
досліджень та оптимізація навчального
процесу
(до 80-річчя з дня народження
видатного вченого, члена-
кореспондента НАН України, професора
Київського національного університету,
заслуженого працівника освіти Бориса
Миколайовича Бублика)**

Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 83000, м. Київ, пр-т.
Глушкова 4 д,
e-mail: ihar@unicyb.kiev.ua

I. I. Kharchenko, Ph.D. (Technics),

**Strategy of Scientific Research
Development and Educational Process
Optimization
(to the 80-th anniversary of eminent
scientist, corresponding member of National
Academy of Sciences of Ukraine, Professor of
Taras Shevchenko National University of
Kyiv, honored worker of education Borys M.
Bublyk).**

Taras Shevchenko National University of Kyiv,
83000, Kyiv, Glushkova st., 4 d,
e-mail: ihar@unicyb.kiev.ua

Стаття «Стратегія розвитку наукових досліджень та оптимізація навчального процесу» присвячена світлій пам'яті члена-кореспондента Національної академії наук України, професора факультету кібернетики КНУ імені Тараса Шевченка Бублика Бориса Миколайовича. Висвітлено шляхи у науку та здобутки видатного вченого у галузях прикладної математики та кібернетики. Особливу увагу приділено його організаційній роботі на посаді декана факультету та створенню кафедри моделювання складних систем, яку він очолював тридцять років. Володіючи колосальним досвідом у проведенні наукових досліджень у математиці та інформатиці, Б.М.Бублик зміг окреслити стратегію розвитку наукових напрямків у різних галузях прикладної математики та перспективи подальшого навчального процесу на факультеті кібернетики, розвитку інформаційних технологій. Автор публікації звертає увагу на педагогічну майстерність професора Б.М.Бублика та той вклад, який він вніс у розвиток вищої школи.

Ключові слова: моделювання, прикладна математика, інформаційні технології.

The article “Strategy of Scientific Research Development and Educational Process Optimization” is devoted to the blessed memory of corresponding member of National Academy of Sciences of Ukraine, Professor of Faculty of Cybernetics of Kyiv Taras Shevchenko National University Borys M. Bublyk.

It illuminates eminent person's scientific way and achievements in domains of applied mathematics and cybernetics. Particular attention is paid to his organizational work at the position of Faculty Dean and creation of Complex System Modelling Chair headed by him for thirty years. Having enormous experience in performing scientific researches in mathematics and informatics, Borys M. Bublyk could outline scientific branches' development strategy in different domains of applied mathematics and perspectives of future studying process at the Faculty of Cybernetics as well as informational technologies' development. Author of publication outlines Professor's teaching skills and input he made to the high school development.

Key Words: modelling, applied mathematics, informational technologies.

Статтю представив д.т.н., проф. Гаращенко Ф.Г.



У січні 2016 р. факультет кібернетики, кафедра моделювання складних систем відзначають знаменну дату – 80 років з дня народження доктора фізико-математичних наук, професора, засновника кафедри моделювання складних систем Бориса Миколайовича Бублика. Згадаємо ту визначну роль, яку відіграв Борис Миколайович у розвитку освіти і науки в Україні.

Невдовзі в університеті буде відзначатися 50 років від утворення факультету кібернетики, фундаторами якого були академіки В.М. Глушков та І.І. Ляшко. Однією з перших новоутворених у 1969 році кафедр була кафедра моделювання складних систем, яку очолив молодий доктор фізико-математичних наук 33-літній Б.М. Бублик.

Починаючи від назви кафедри, яка залишається незмінною й сьогодні, саме зараз ми усвідомлюємо глибоку стратегію розуміння напрямку розвитку наукових досліджень та підготовки кадрів. Згадуючи 70-ті роки минулого століття, можна лише дивуватися тій прозорливості та розумінню перспектив розвитку прикладної математики, що дала не тільки поштовх у розвитку новітніх тогочасних технологій, але, головне, виховала плеяду науковців, які до сьогодні очолюють і продовжують здобутки школи з моделювання й оптимізації, одним із засновників якої був Борис Миколайович Бублик.

Б.М. Бублик народився 25.01.1936 р. в селі Клюки Тетіївського району Київської області в сім'ї сільських інтелігентів [1]. Його батько, Микола Миронович Бублик, змушений був виїхати на Донбас, де працював бухгалтером, а у 1938 р. був безпідставно репресований сталінським більшовицьким режимом, арештований 29 квітня, а розстріляний 4 травня

вироком особливої трійки «за контрреволюційну діяльність». Реабілітований у 1958 році. Місце поховання, незважаючи на клопотання сім'ї перед відповідними органами, так і не було встановлено. Збереглася лише одна фотографія батька в колі своїх родичів. Мати, Марія Михайлівна, в надзвичайно тяжкі часи воєнного лихоліття та післявоєнної відбудови знайшла сили й можливості дати освіту двом синам Борису та Віктору, передала їм кращі моральні засади, виховала як достойних громадян.

Середню школу Б.М. Бублик закінчив у сусідньому м. Оратові на Вінниччині у 1953 р. Того ж року склав іспити для вступу на механіко-математичний факультет Київського державного університету ім. Т.Г. Шевченка, але не пройшов за конкурсом. Зважаючи на відмінні оцінки з профільюючих предметів, був зарахований спочатку як вільний слухач – цьому сприяла тодішній декан факультету Клавдія Яківна Латишева. Після здачі на «відмінно» всіх іспитів у першу зимову сесію став студентом денної форми навчання. Наступні роки навчався надзвичайно успішно, брав активну участь у науковій і громадській роботі факультету та університету. Як відмінник навчання був делегований від Київського державного університету ім. Т.Г. Шевченка на IV Всесвітній фестиваль молоді і студентів, що проводився в Москві 1956 року. Про студентські роки Бориса є цікаві спогади його однокурсників та тих, хто вчився на декілька курсів пізніше – О.Г. Бодрика, І.М. Ляшенка, Л.О. Максименка, А.П. Мукоїда, О.В. Вознюка та ін. Усі вони відзначають величезну працездатність, наполегливість у досягненні мети, надзвичайну вимогливість до себе, людяність, почуття справедливості, товариськості. Борис Миколайович любив Україну, глибоко знав літературу, історію, був закоханий в українську пісню.

Після закінчення університету в 1958 році Б.М. Бублик вступив до аспірантури. У 1962 р. захистив кандидатську дисертацію на тему: «Коливання пластин та пологих оболонок підкріплених ребрами жорсткості». В ці роки почалася педагогічна діяльність Б.М. Бублика. Спочатку він працював асистентом на кафедрі загальної математики на радіофізичному факультеті КДУ. У 1963–1964 рр. перебував у Монголії як викладач вищої математики в Монгольському державному університеті ім. Чойбалсана в м. Улан-Баторі. Повернувшись до Києва, Б.М. Бублик працював на кафедрі вищої

математики та математичної фізики радіофізичного факультету КДУ. У 1964 році одержав звання доцента.

У період становлення факультету кібернетики у 1969 р. Б.М. Бублик очолив новостворену кафедру моделювання складних систем. Одночасно, з 1972 р. по 1975 р., був деканом спецфакультету прикладної математики, на якому здійснювалася перепідготовка спеціалістів у галузі кібернетики. Цікаву інформацію про тодішню діяльність спецфакультету надав староста групи П.В. Бурдух, з великою повагою згадуючи педагогічний колектив, який згуртував Б.М. Бублик і визначив для нього програму навчання та стратегію підготовки кадрів. Ці ідеї через тридцять років були втілені при створенні факультету високих технологій, очолюваному проф. О.В. Третьяком. Така перепідготовка була дуже важливим заходом, оскільки бурхливий розвиток обчислювальної техніки вимагав нових знань і навичок від спеціалістів різних галузей для роботи з ЕОМ. У цей час Б.М. Бублик почав гуртувати біля себе талановитих учених, відбирати здібних студентів та аспірантів, які потім створили наукову школу.

У 1969 р. Б.М. Бублик захистив докторську дисертацію з фізико-математичних наук на тему: «Метод сумарних представлень в динамічних задачах теорії пластин і оболонок» і в 1971 р. одержав звання професора по кафедрі моделювання складних систем. У цей час на кафедрі була створена унікальна наукова атмосфера, яка дозволила об'єднати зусилля молодих тоді вчених – М.Ф. Кириченка, І.В. Бейка, О.Ф. Ткаліч, І.С. Федорченка, М.П. Лепехи, Р.О. Сороки, М.В. Цибаньова, М.В. Ногіна, В.А. Стояна, Г.І. Кудіна, О.Г. Наконечного, В.Л. Гірка, Д.Я. Хусаїнова, І.П. Ковальського, Ф.Г. Гаращенко, В.Я. Данилова та інших – у єдиний творчий колектив, який міг розв'язувати найскладніші наукові проблеми в галузі моделювання та оптимального керування складними технічними системами.

Від початку організації кафедри був створений науковий семінар з проблем оптимізації, який згодом переріс у республіканський. Цей науковий семінар став одним з найпотужніших і відомих у всіх куточках колишнього СРСР. У 1979 р. в Міністерстві освіти України була утворена секція оптимізації, якою керував Б.М. Бублик – це свідчило про дуже великий науковий авторитет Бориса Миколайовича як ученого. Стало правилом практично всі дисертації з методів

оптимізації, що з'являлися в Україні (особливо докторські), апробувати на семінарі кафедри.

З 1974 року почали проводитися щорічні школи з моделювання та оптимізації, на яких виступали найвідоміші фахівці у цьому напрямку. Того ж року у м. Каневі була проведена перша всеукраїнська конференція «Обчислювальна математика і науково-технічний прогрес» під керівництвом І.І. Ляшка та Б.М. Бублика. На конференцію приїхали всесвітньо відомі вчені: А.О. Дородніцин, В.М. Глушков, В.С. Михалевич, Ю.М. Єрмольєв, Б.М. Пшеничний та багато інших.

У 1978 та 1987 рр. кафедра МСС провела у Києві, а згодом і в Одесі, дві всесоюзні конференції «Оптимальне керування в механічних системах». Після цього центром досліджень по оптимізації систем з розподіленими параметрами в Україні остаточно утвердилася кафедра моделювання складних систем.

Досягнення наукового колективу, який очолював Б.М. Бублик, та його особистий внесок були високо оцінені науковою спільнотою колишнього СРСР і в 1979 році його було обрано членом-кореспондентом АН України.

На долю Б.М. Бублика випала складна робота на посаді декана факультету кібернетики у 1977 – 1984 рр., особливо в період добудови корпусу факультету кібернетики по проспекту академіка В. Глушкова, введення його в експлуатацію та оснащення сучасними на той час обчислювальними засобами. Силами факультету кібернетики при підтримці ректорів М.У. Білого та В.В. Скопенка був добудований та устаткований новітнім обладнанням загальноуніверситетський Обчислювальний центр. Добрими порадиниками та щирими друзями, які підтримували його в цей час, були академіки В.М. Глушков, І.І. Ляшко, В.С. Михалевич, І.В. Сергієнко.

Борис Миколайович був визначним організатором науки. Створений і керований ним Республіканський семінар з моделювання та оптимального керування складними системами свого часу відіграв значну роль. Заснований ним Вісник Київського університету «Моделювання і оптимізація складних систем» та видані під його редактуванням збірники навіть сьогодні впливають на розвиток науки, дають поштовх до теоретичних досліджень у галузі прикладної математики. За час роботи в університеті Б.М. Бублик був членом Вченої ради факультету і університету, головою спеціалізованих

наукових рад із захисту докторських та кандидатських дисертацій в університеті, членом кількох інших спеціалізованих рад, членом редколегії багатьох наукових журналів.

Із здобуттям Україною незалежності була створена Експертна Рада з інформатики та кібернетики ВАК України, очолювана Б.М. Бубликом з 1992 до 1997 р.

Б.М. Бублик щедро ділився своїми знаннями і життєвим досвідом із студентами та аспірантами, колегами. Всі, хто був поруч з ним, відчували особливу притягальність його особистості, щире зацікавлення проблемами, людяність, тепло серця і шляхетну вдачу. Під керівництвом Б.М. Бублика захистили кандидатські дисертації: Г.І. Хархун, І.С. Федорченко, Увгун Легнеційн, О.І. Невідомський, І.І. Харченко, О.П. Лобок, О. Омаров, Т.І. Славова, Б. Сіддіков, Ю.В. Семенюк, кандидатські і докторські Л.В. Мольченко, В.Я. Данилов, С.І. Черняк, Б.М. Ляшенко. Як науковий керівник Борис Миколайович одразу вникав у глибину задачі і знаходив шляхи її розв'язання. Так він працював з кожним, незважаючи на неймовірну завантаженість. Сьогодні більшість з них гідно представляють його наукову школу.

Перелік друкованих праць Б.М. Бублика є вельми значним і кількісно налічує понад 120 назв. Це, насамперед, наукові монографії, підручники, навчальні посібники і програми наукових курсів, наукові статті, тези наукових конференцій, фундаментальні розділи в наукових звітах, рецензії, статті в енциклопедичних та довідникових виданнях, газетні публікації з актуальних проблем організації науки.

З цього творчого доробку слід особливо відзначити монографії – «Численное решение динамических задач теории пластин и оболочек», – К., 1976; «Методы и алгоритмы решения задач оптимизации» (співавтори І.В. Бейко, П.М. Зінко), – К., 1983; «Структурно-параметрическая оптимизация и устойчивость динамики пучков» (співавтори Ф.Г. Гаращенко та М.Ф. Кириченко), – К., 1985; навчальний посібник «Основы теории управления» (співавтор М.Ф. Кириченко), – К., 1975.

Б.М. Бублик розвинув метод сумарних представлень для динамічних задач теорії пластин та оболонок. Його прикладні дослідження пов'язані з моделюванням просторового руху літальних апаратів, локацією підводних об'єктів, оптимізацією динаміки пучків елементарних частинок та іонів у різних типах прискорювачів [2]. Із провідних учених

факультету кібернетики, кафедри та науковців лабораторії під його керівництвом сформувалася відома наукова школа з моделювання й оптимізації, одним з наукових здобутків якої на сьогоднішній день є захист більше 24 докторських та понад 130 кандидатських дисертацій. Результати наукових досліджень були впроваджені в КБ ім. О. Антонова, Інституті ядерної фізики НАНУ (Київ), Московському радіотехнічному інституті, Інституті теоретичної та експериментальної фізики АН СРСР, Льотному дослідному інституті (м. Жуковський, Росія) та в ряді інших провідних центрах та установах. З 1993 р. Б.М. Бублик працював над проблемами математичного моделювання природоохоронних процесів та над узагальненням отриманих раніше теоретичних результатів. Примітною рисою його наукової біографії є те, що він завжди намагався працювати у колективі однодумців, сповнював їх новими науковими ідеями та всіляко підтримував запровадження ними цих ідей до практичного використання.

Викладацька майстерність професора Б.М. Бублика не залишала байдужими студентів. Він завжди вмів зацікавити слухачів новими проблемами, неординарними методами розв'язування задач, щиро ділився науковим досвідом з підготовки нових лекційних курсів та нових напрямків у виборі спецкурсів, які читалися на кафедрі. В останні роки ним були прочитані лекційні курси з диференціальних рівнянь, теорії керування і спеціальні курси за тематикою «Математичні методи моделювання та оптимального керування складними системами».

Багатогранна наукова та педагогічна діяльність Б.М. Бублика відзначалася глибиною та перспективністю, а отримані наукові результати є вагомим внеском в українську науку. Держава високо оцінила наукові та педагогічні здобутки Б.М. Бублика, удостоївши його почесним званням «Заслужений працівник освіти України», преміями та державними нагородами, зокрема трьома медалями та двома орденами – «Знак пошани» та «За заслуги» III ступеня.

За роки незалежності України з'явилися нові можливості в обміні досвідом для вчених різних країн. Тісні наукові зв'язки були встановлені між кафедрами МСС і САТР та представниками науки з української діаспори в рамках CRDF проектів, зокрема з професором Романом Куцом, провідним спеціалістом у галузі інформатики в

Йельському університеті США. За сприянням Б.М. Бублика кафедра разом з Національним космічним агентством України в жовтні 1994 р. провела міжнародний німецько-український “workshop”, на якому ознайомила представників фірми GMD зі своїми здобутками та обговорила можливості співпраці в майбутньому.



За цією короткою інформацією, яка була представлена у виданнях [1, 2, 4], можна лише відзначити віхи та розуміння стратегії розвитку науки та інформаційних технологій 21 століття. Сьогодні, через 16 років від того часу, коли Б.М. Бублик відійшов у вічність, ми можемо лише неповною мірою оцінити той внесок, який він залишив у кожному зі своїх учнів, колег та однодумців.

У пам'ять про Б.М. Бублика кафедра моделювання складних систем організовувала наукову конференцію «Моделювання і оптимізація складних систем» (МОСС- 2001) присвячену 65-річчю від дня народження Б.М. Бублика та науковий семінар (МОСС- 2006), з нагоди 70-річчя, участь у яких взяли понад 160 провідних учених.

Вчена рада університету схвалила створення премії імені Б.М. Бублика для відзначення успіхів у навчанні та наукових досягнень кращих студентів факультету кібернетики. Першим лауреатом цієї премії став відмінник навчання В.В. Стоян.

Визначним досягненням створеної Бубликом Б.М. школи було одержання у 2012 році Державної премії України в галузі науки і техніки, лауреатами якої були провідні науковці кафедр МСС, САТР, ІК ім. В.М. Глушкова НАН України.

У стінах корпусу факультету кібернетики встановлено меморіальну дошку, з якої на прийдешнє покоління студентів дивиться відносно молода людина. За останні роки суттєво змінився контингент студентів, стали новими умови вступу на факультет, змінилися назви кафедр та оновився педагогічний колектив. Незмінними все ж залишилися ті принципи людяності, ставлення до творчого пошуку та не тільки вдосконалення методів передачі знань, а й розуміння місця вирошеного у стінах університету випускника. Ширшими стали можливості працевлаштування та вибору місця проживання магістрів та бакалаврів, яких підготував факультет кібернетики. Саме ці молоді люди будуть визначати новітні інформаційні технології, про які міг лише здогадуватися Б.М. Бублик. Утворюючи комп'ютерні класи тридцять-двадцять років тому, важко було уявити потужні можливості сучасної техніки, можливості Інтернету та засобів комунікації. Студентам не потрібно більше писати та ховати «шпаргалки» з формулами та доведенням теорем. Вже тоді Б.М. Бублик розумів, як зміниться система освіти, а це означає, що сучасним освітянам доведеться робити акцент передусім на вмінні думати й аргументувати свої відповіді, а не просто запам'ятовувати колосальні об'єми інформації. Розроблені ним методичні посібники, програми та підручники не втратили своєї актуальності й сьогодні, через двадцять років.

Життя та діяльність Б.М. Бублика у багатьох відношеннях є безпрецедентними. Він належав до дітей повоєнного покоління, які у більшості не мали батька, які закінчили сільські або міські школи з медалями і дійсно мали здібності у різних галузях. Саме це покоління створило кістяк інтелігенції, яку називають шістдесятниками. Ці особистості й сьогодні формують суспільну думку, вони доклали неймовірних зусиль для відродження не лише національних традицій у культурі та науці. Важко навіть перелічити імена науковців, учителів, письменників, лікарів, інженерів, які своїм прикладом, сумлінною працею, мужністю та боротьбою створили обличчя нової власної держави – самостійної незалежної України. Це

те покоління, яке пережило лихоліття війни та повоєнного періоду, яке не було заражене сьогоденними вадами розвитку суспільства. Зараз дивними здаються та безкорисливість, доброзичливість, толерантність, боротьба за свої переконання та ідеали.



Кафедра МСС у 1997 р. – стоять у 1 ряду:
І.В. Бейко, Ф.Г. Гаращенко, М.Ф. Кириченко,
М.П. . Лепеха, Б.М. . Бублик, І.І. Харченко; 2 ряд:
Г.І. Кудін, В.А. Стоян, П.М. Зінко, В.Р. Кулян,
Ю.В. Крак, В.І. Петрук, В.А. Висоцький,
О.М. Башияков; сидять: Н.І. Требіна,
Л.Т. Аджубей, О.Г. Павлюченко, Н.І. Давиденко,
А.Г. Вайніленко, Ж.Ю. Белоносова.

Список використаних джерел

1. Сучасні методи та інформаційні технології математичного моделювання, аналізу й оптимізації складних систем: Монографія. / [за редакцією Ф.Г. Гаращенко, І.І. Харченка] – К.: Видавничо-поліграфічний центр «Київський університет», 2006. – 200 с.
2. Петрук В. Факультету кібернетики 40. Нарис історії/ В. Петрук – К.: ДП «Інформаційно-аналітичне агентство», 2009. – 672 с.
3. Формула вічності. Книга спогадів / Укладач: Ж. Бублик. – К.: Видавництво ТОВ «ДІА», 2009. – 184 с.
4. Петрук В.І. Кафедра моделювання складних систем. До 45-річчя з дня застудання. Наукове видання / В.І. Петрук. – К.: ДП «Інформаційно-аналітичне агентство», 2014. – 168 с.

Свою внутрішню культуру вони перенесли в сімейне коло. Глибоку повагу до батьків, любов до жінки, дітей та онуків можна знайти у спогадах дружини Бориса Миколайовича Жанны Олексіївни Бублик у книзі «Формула вічності» [3]. Тут ми бачимо портрет прекрасної людини, здібної в усіх проявах душі, про які згадують у книзі друзі та колеги Бориса Миколайовича.

«Борис Миколайович Бублик був Людиною з великої літери. Високий і красивий зовні, розумний, чесний і благородний, відданий науці, сім'ї. Він був справжнім товаришем, чоловіком, батьком і другом тим людям, які оточували його, в першу чергу – то була його кафедра моделювання складних систем факультету кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка» – цими словами його дружини Жанны Олексіївни Бублик можна завершити спогади про людину, яка всім своїм життям довела, що справжній талант, глибока людяність, наукова безкомпромісність та щедрість душі можуть поєднуватися в одній людській особистості.

References

1. Modern Methods and Informational Technologies of Mathematic Modelling, Analysis and Complex Systems' Optimization: Monography (2006) [by edition F.Garashchenko, I.Kharchenko] . – K.: Kyiv University Publishing Center. – p.200.
2. PETRUK, V. (2009) Faculty of Cybernetics 40. History Sketch – K.: Information and analysis agency Affiliate. – p.672.
3. BUBLIK, Zh. (2009) Eternity Formula. Book of Memories. – K.: Publisher DIA Ltd. – p.184.
4. PETRUK, V. (2014) Complex System Modelling Chair. To the 45th Anniversary of Foundation) – K.: Information and analysis agency Affiliate. – p.168.

Надійшла до редколегії 29.09.15

УДК 517.929.4

Хусаїнов Д.Я., д. ф.-м. н., проф.

Камратов С.В., інж.

Динаміка розв'язків квадратичних систем на площині

Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, пр.-т.
Глушкова, 4д,
e-mail:

Khusainov D.Ya., D.-r. of Science, prof.,

Kamratov S., V., senior researcher

Dynamics of decisions of quadratic systems on the plane

Taras Shevchenko National University of Kyiv,
03680, Kyiv, Glushkova av., 4d,
e-mail:

Нелінійні динамічні системи, описувані звичайними диференціальними рівняннями з квадратичною правою частиною, знайшли широке застосування в математичних моделях популяції, економіки, біології. Вони досить адекватно відображають динаміку протікаючих процесів, враховують обмеженість області проживання популяції, зворотні ефекти в економічних процесах та ін.[1-2]. У даній роботі в припущенні асимптотичної стійкості ненульового положення рівноваги проводиться оцінка збіжності рішень. Отримані результати продемонстровані на одній математичній моделі динаміки популяції. Основні результати отримані з використанням другого методу Ляпунова.

Ключові слова: математична модель, динамічна система, диференціальні рівняння, системи з квадратичною правою частиною.

The nonlinear run-time systems described by ordinary differential equalizations with quadratic right part found wide application in the mathematical models of population, economy, biology. They display the dynamics of aleak processes adequately enough, take into account limit nature of area of residence of population, reverse effects in economic processes and other[1-2].

As known, solving systems of linear stationary differential equations can be done using a matrix exponential, and the rate decision using the extreme eigenvalues of symmetric positive definite matrices, included in the Lyapunov matrix equation. For non-linear dependency of the general form similar systems do not exist. In this work two nonlinear differential equations with quadratic nonlinearity of the general form considered. Systems recorded in the universal vector-matrix form [3,4]. It is assumed that the linear part of the system is asymptotically stable. Calculation of "guaranteed stability of the region" and assessment estimates the convergence of solutions in this area is carried out using a quadratic Lyapunov function. Calculate the total derivative of a quadratic Lyapunov function. The inequality for the derivative of the form, "like" on the scalar Riccati equation. The solution of the inequality and, consequently, to assess the rate of inequality for differential equations with quadratic right-hand side of the general form of the plane. In the second part, we consider a system of differential equations "quasi-linear type." Systems of this kind are the "extension" linear time-invariant systems. In ecological models suggest they study in a limited area of populations residing. The estimates of the convergence of solutions "quasi-linear" systems with initial data from a small neighborhood of the zero equilibrium position.

Basic results are got with the use of the second method of Lyapunova.

Key words: mathematical model, dynamic system, differential equalizations, systems with quadratic right part.

Статтю представив д.т.н, проф. Гаращенко Ф.Г.

1. Оцінки збіжності рішень квадратичних систем на площині.

Для скалярного диференціального
рівняння з квадратичною правою частиною
(рівняння Бернуллі)

$$\dot{x}(t) = -ax(t) + bx^2(t), \quad a > 0, \quad b > 0$$

розв'язок задачі Коши $x(0) = x_0$ має вигляд

$$x(t) = \frac{ax_0 e^{-at}}{a - bx_0 [1 - e^{-at}]}$$

Областю стійкості є напівінтервал
 $-\infty < x < a/b$. Для систем диференціальних
рівнянь (навіть на площині) аналогічний
результат відсутній.

Розглянемо систему звичайних
диференціальних рівнянь на площині з
квадратичною правою частиною, записану в
векторно-матричному вигляді [3,4]

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) + b_{11}^1x_1^2(t) + \\ &\quad + 2b_{12}^1x_1(t)x_2(t) + b_{22}^1x_2^2(t), \\ \dot{x}_2(t) &= a_{22}x_1(t) + a_{22}x_2(t) + b_{11}^2x_1^2(t) + \\ &\quad + 2b_{12}^2x_1(t)x_2(t) + b_{22}^2x_2^2(t). \end{aligned} \quad (1.1)$$

Перепишемо її у векторно-матричній формі у
вигляді

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + X^T(t)Bx(t), \quad (1.2)$$

де

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} b_{11}^1 & b_{12}^1 \\ b_{12}^1 & b_{22}^1 \end{bmatrix}, \\ B_2 &= \begin{bmatrix} b_{11}^2 & b_{12}^2 \\ b_{12}^2 & b_{22}^2 \end{bmatrix}, \quad X^T(t) = \{X_1^T(t), X_2^T(t)\}, \\ X_1^T(t) &= \begin{bmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad X_2^T(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ x_1(t) & x_2(t) \end{bmatrix}, \\ x(t) &= \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Дослідження стійкості нульового стану
рівноваги будемо проводити з використанням
квадратичної функції Ляпунова $V(x) = x^T Hx$.
Якщо матриця A асимптотично стійка, то при
будь-якій додатно визначеній матриці C

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{12} & c_{22} \end{bmatrix}$$

матричне рівняння Ляпунова

$$A^T H + HA = -C \quad (1.4)$$

має єдиний розв'язок - додатно визначену
матрицю H

$$H = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{12} & h_{22} \end{bmatrix}.$$

Повна похідна функції Ляпунова в силу
системи (1.2) має вигляд

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}V(x(t)) &= \\ &= -x^T(t) \left[(A + X^T(t)B)^T H + H(A + X^T(t)B) \right] x(t). \end{aligned}$$

Або

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}V(x(t)) &= -x^T(t) \left[C - (B^T X(t)H + HX^T(t)B) \right] x(t) = \\ &= -(x_1(t), x_2(t)) \left\{ \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{12} & c_{22} \end{bmatrix} - \right. \\ &\quad \left. \begin{bmatrix} b_{11}^1 & b_{12}^1 & b_{11}^2 & b_{12}^2 \\ b_{12}^1 & b_{22}^2 & b_{12}^2 & b_{22}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) & 0 \\ x_2(t) & 0 \\ 0 & x_1(t) \\ 0 & x_2(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{12} & h_{22} \end{bmatrix} - \right. \\ &\quad \left. - \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{12} & h_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) & x_2(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_1(t) & x_2(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11}^1 & b_{12}^1 \\ b_{12}^1 & b_{22}^2 \\ b_{12}^2 & b_{12}^2 \\ b_{12}^2 & b_{22}^2 \end{bmatrix} \right\} \times \\ &\quad \times \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

І для повної похідної функції Ляпунова буде
мати місце нерівність

$$\frac{d}{dt}V(x(t)) \leq -\{\lambda_{\min}(C) - 2\|H\|\|B\|\|x(t)\|\} \|x(t)\|^2, \quad (1.5)$$

де

$$\begin{aligned} |H| &= \lambda_{\max}(H) = \frac{1}{2} \left\{ (h_{11} + h_{22}) + \sqrt{(h_{11} - h_{22})^2 + 4h_{12}^2} \right\}, \\ \|x(t)\| &= \sqrt{x_1^2(t) + x_2^2(t)}, \\ \lambda_{\min}(C) &= \frac{1}{2} \left\{ (c_{11} + c_{22}) - \sqrt{(c_{11} - c_{22})^2 + 4c_{12}^2} \right\}, \end{aligned}$$

$$|B| = \left\{ \lambda_{\max}(B^T B) \right\}^{1/2} = \left\{ \lambda_{\max}(B_1^T B_1 + B_2^T B_2) \right\}^{1/2}.$$

Областю стійкості нульового стану рівноваги є
внутрішня частина поверхні рівня функції
Ляпунова $V(x) = r > 0$, яка знаходиться
всередині області

$$G_0 = \{x \in R^n : C - B^T XH - HX^T B > \Theta\},$$

де під символом

$$C - B^T XH - HX^T B > \Theta \quad (1.6)$$

розуміється додатна визначеність матриці. Замінімо умову (1.6) більш «грубою». Оскільки, в силу обраних матричних і векторних норм буде виконуватися

$$|X(t)| = |x(t)|,$$

то область «гарантованої» стійкості має вигляд

$$G_{r_0} = \max_{r>0} \{G_r : G_r \subset G_0\},$$

$$G_r = \{x \in R^n : x^T H x < r^2\}. \quad (1.7)$$

Як впливає з цієї залежності, для визначення «максимальної» області стійкості слід помістити еліпсоїд $x^T H x = r^2$ всередину сфери радіуса $R = \lambda_{\min}(C)/2\|H\|B$ і «розтягувати» $r \rightarrow \infty$ до тих пір, поки еліпс не торкнеться сфери.

Розглянемо оцінку збіжності розв'язків системи (1.2), початкові умови яких знаходяться всередині області стійкості.

Теорема 1.1. Нехай матриця A системи (1.2) асимптотично стійка. Тоді для розв'язків системи (1.1), що задовольняють початковим умовам

$$|x(0)| < \frac{\gamma(H)}{2|B|\varphi(H)}, \quad \varphi(H) = \frac{\lambda_{\max}(H)}{\lambda_{\min}(H)},$$

$$\gamma(H) = \frac{\lambda_{\min}(C)}{\lambda_{\max}(H)}, \quad (1.8)$$

має місце наступна оцінка збіжності

$$|x(t)| \leq \frac{\gamma(H)\sqrt{\lambda_{\min}(H)}|x(0)|}{[\gamma(H) - 2|B|\varphi(H)|x(0)|]e^{\frac{1}{2}\gamma(H)t} + 2|B|\varphi(H)|x(0)|}$$

$$\lambda_{\min}(H) = \frac{1}{2} \left\{ (h_{11} + h_{22}) - \sqrt{(h_{11} - h_{22})^2 + 4h_{12}^2} \right\}. \quad (1.9)$$

Доведення. Вище показано, що для повної похідної квадратичної функції Ляпунова в силу системи (1.2) має місце нерівність (1.5). Оскільки функція Ляпунова квадратична, то для неї має місце двостороння нерівність квадратичних форм

$$\lambda_{\min}(H)|x|^2 \leq V(x) \leq \lambda_{\max}(H)|x|^2. \quad (1.10)$$

І нерівність (1.5) можна переписати у вигляді

$$\frac{dV(x(t))}{dt} \leq -\frac{\lambda_{\min}(C)}{\lambda_{\max}(H)}V(x(t)) + 2\lambda_{\max}(H)|B|\frac{V^{3/2}(x(t))}{\lambda_{\min}^{3/2}(H)}.$$

Використовуючи позначення (1.8) перепишемо (1.10) у вигляді

$$\frac{dV(x(t))}{dt} \leq -\gamma(H)V(x(t)) + 2\frac{|B|\varphi(H)}{\sqrt{\lambda_{\min}(H)}}V^{3/2}(x(t)).$$

Вираз (1.10) є нерівністю «типу рівняння Бернуллі». Розділимо її на $V^{3/2}(x(t))$. Отримаємо

$$V^{-3/2} \frac{dV(x(t))}{dt} + \gamma(H)V^{-1/2}(x(t)) \leq 2\frac{|B|\varphi(H)}{\sqrt{\lambda_{\min}(H)}}.$$

Позначивши $V^{-1/2}(x(t)) = z(t)$, запишемо

$$-2\frac{dz(t)}{dt} + \gamma(H)z(t) \leq 2\frac{|B|\varphi(H)}{\sqrt{\lambda_{\min}(H)}}.$$

Звідси

$$\frac{dz(t)}{dt} - \frac{1}{2}\gamma(H)z(t) \geq -\frac{|B|\varphi(H)}{\sqrt{\lambda_{\min}(H)}}.$$

Розв'язуючи отриману нерівність (за аналогією з лінійним неоднорідним рівнянням), одержимо

$$z(t) \geq \left[z(0) - 2\frac{|B|\varphi(H)}{\gamma(H)\sqrt{\lambda_{\min}(H)}} \right] e^{-\frac{1}{2}\gamma(H)t} + 2\frac{|B|\varphi(H)}{\gamma(H)\sqrt{\lambda_{\min}(H)}}.$$

Підставивши $V^{-1/2}(x(t)) = z(t)$, одержимо

$$V^{-1/2}(x(t)) \geq \left[V^{-1/2}(x(0)) - 2\frac{|B|\varphi(H)}{\gamma(H)\sqrt{\lambda_{\min}(H)}} \right] \times e^{-\frac{1}{2}\gamma(H)t} + 2\frac{|B|\varphi(H)}{\gamma(H)\sqrt{\lambda_{\min}(H)}}.$$

Звідси

$$V^{1/2}(x(t)) \leq \left\{ \left[V^{-1/2}(x(0)) - 2\frac{|B|\varphi(H)}{\gamma(H)\sqrt{\lambda_{\min}(H)}} \right] e^{-\frac{1}{2}\gamma(H)t} + 2\frac{|B|\varphi(H)}{\gamma(H)\sqrt{\lambda_{\min}(H)}} \right\}^{-1}.$$

Знову використавши двосторонні нерівності квадратичних форм, отримуємо

$$V^{1/2}(x(t)) \leq \left\{ \left[V^{-1/2}(x(0)) - 2\frac{|B|\varphi(H)}{\gamma(H)\sqrt{\lambda_{\min}(H)}} \right] e^{-\frac{1}{2}\gamma(H)t} + 2\frac{|B|\varphi(H)}{\gamma(H)\sqrt{\lambda_{\min}(H)}} \right\}^{-1} \leq$$

$$\leq \left\{ \left[\frac{1}{\sqrt{\lambda_{\min}(H)}|x(0)|} - 2 \frac{|B|\varphi(H)}{\gamma(H)\sqrt{\lambda_{\min}(H)}} \right] e^{-\frac{1}{2}\gamma(H)t} + 2 \frac{|B|\varphi(H)}{\gamma(H)\sqrt{\lambda_{\min}(H)}} \right\}^{-1} \leq$$

$$= \frac{\gamma(H)\sqrt{\lambda_{\min}(H)}|x(0)|}{[\gamma(H) - 2|B|\varphi(H)|x(0)|]e^{\frac{1}{2}\gamma(H)t} + 2|B|\varphi(H)|x(0)|}.$$

Таким чином, для розв'язків $x(t)$ системи (1.2) з початковими умовами $x_0 \in G_0$, буде справедлива оцінка збіжності (1.8).

2. Системи «квазілінійного виду».

Однією з перших математичних моделей, описуваних диференціальним рівнянням з квадратичною правою частиною була модель Ферхюльста. Вона мала вигляд

$$\dot{x}(t) = [a + bx(t)]x(t).$$

Її модернізацією була модель Лотки-Вольтерра типу «хижак-жертва». Вона являла собою систему двох рівнянь з квадратичною правою частиною

$$\dot{x}(t) = [a + by(t)]x(t), \quad \dot{y}(t) = -[c + dx(t)]y(t).$$

Розглянемо систему з квадратичною правою частиною загального вигляду (квазілінійну систему)

$$\dot{x}_1(t) = [a_{11} + b_{11}^1 x_1(t) + 2b_{12}^1 x_2(t)]x_1(t),$$

$$\dot{x}_2(t) = [a_{22} + 2b_{12}^2 x_1(t) + b_{22}^2 x_2(t)]x_2(t).$$

Її можна записати у вигляді (1.2), де відповідні матриці мають вигляд

Список використаних джерел

1. Занг В.-Б. Синергетическая экономика. Время и перемены в нелинейной экономической теории. М.: Мир, 1999. – 335 с.
2. Смит Дж. Модели в экологии. – М., 1976.
3. Хусаїнов Д.Я. Оцінка області стійкості квадратичних диференціальних систем. // Хусаїнов Д.Я., Давидов В.Ф. Вісник Київського університету. Серія: Фізико-математичні науки, в.2, 1991. - С.3-6.
4. Хусаїнов Д.Я. Оцінка області стійкості диференціальної системи з квадратичною правою частиною. // Хусаїнов Д.Я., Джалладова І.А., Шатирко О.А. Вісник Київського університету. Серія: Фізико-математичні науки, в.3, 2011. – С. 227-230.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} b_{11}^1 & b_{12}^1 \\ b_{12}^1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} b_{11}^2 & b_{12}^2 \\ b_{12}^2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Матричне рівняння Ляпунова (1.4) має вигляд

$$2a_{11}h_{11} = -c_{11}, \quad (a_{11} + a_{22})h_{12} = -c_{12},$$

$$2a_{22}h_{22} = -c_{22}.$$

Поклавши $c_{11} = c_{22} = c > 0$, $c_{12} = 0$, отримаємо

$$h_{11} = -c_{11}/2a_{11}, \quad h_{12} = 0, \quad h_{22} = -c_{22}/2a_{22}.$$

Умовою стійкості системи лінійного наближення є $a_{11} < 0$, $a_{22} < 0$. Як впливає із залежностей (1.5),

$$\lambda_{\max}(H) = \max \left\{ -\frac{c_{11}}{2a_{11}}, -\frac{c_{22}}{2a_{22}} \right\},$$

$$\lambda_{\min}(H) = \max \left\{ -\frac{c_{11}}{2a_{11}}, -\frac{c_{22}}{2a_{22}} \right\}, \quad \lambda_{\min}(C) = c,$$

$$|B| = \left\{ \lambda_{\max}(B^T B) \right\}^{1/2} = \left\{ \lambda_{\max} \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{12} & B_{22} \end{bmatrix} \right\}^{1/2},$$

$$B_{11} = (b_{11}^1)^2 + (b_{12}^1)^2 + (b_{11}^2)^2 + (b_{12}^2)^2,$$

$$B_{12} = b_{11}^1 b_{12}^1 + b_{11}^2 b_{12}^2, \quad B_{22} = (b_{12}^1)^2 + (b_{12}^2)^2.$$

$$\gamma(H) = \frac{c}{\lambda_{\max}(H)}.$$

References

1. Zang V.-B. Synergetic economy. Time and changes in the nonlinear economic theory. M.: World, 1999. – 335 pages.
2. Smith Dzh. Models in ecology. – M, 1976.
3. Khusainov D.Ya., Davidov W.F. Estimation of area of firmness of the quadratic differential systems // Announcer the Kyiv university. Series: Physical and mathematical sciences, in.2, 1991. - C.3-6.
4. Khusainov D.Ya., Dzhalladova I.A., Shaturko O.A. Estimation of area of firmness of the differential system with quadratic right part // Announcer of the Kyiv university. Series: Physical and mathematical sciences, in.3, 2011. - C. 227-230.

Надійшло до редколегії 12.12.2015 р.

РАДІОФІЗИКА

УДК 621.315.592

О. Л. Хилько¹, аспірант

**Розсіяння поверхневого плазмон
поляритону на двовимірній
напівпровідниковій наносмузці.
Ефективна сприйнятливість
двовимірної наносмузки**

¹ Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 83000, м. Київ, пр-т.
Глушкова 4г,
e-mail: o.khylko@gmail.com

O. L. Khylyko¹, PhD student

**Scattering of surface plasmon polariton by
two-dimensional semiconductor nanostripe.
Effective susceptibility of two-dimensional
nanostripe**

¹ Taras Shevchenko National University of Kyiv,
83000, Kyiv, Glushkova st., 4g,
e-mail: o.khylko@gmail.com

Запропоновано метод розрахунку інтенсивності локального поля навколо нескінченно довгої наносмузки на поверхні зі збудженим поверхневим плазмоном. Розрахунок проводиться за допомогою методу функцій Гріна в рамках концепції ефективної сприйнятливості, використовуючи наближення ближнього поля. Розглянуто метод аналітичного розрахунку ефективної сприйнятливості двовимірної наносмузки. Отримано розподіл локального поля навколо кремнієвої наносмузки з шириною та висотою 100 нм. Отриманий розподіл несиметричний і дуже неоднорідний.

Ключові слова: поверхневий плазмон поляритон, розсіяння поверхневих хвиль, ефективна сприйнятливість, напівпровідникова наносмузка

Local-field intensity calculation of infinity-long nanostripe on the surface with excited surface plasmons is proposed. Calculation is performed using Green's function method in the frame of concept of effective susceptibility using near-field approximation. The method of analytically calculation of effective susceptibility of two-dimension nanostripe was considered. The main characteristic of the proposed approach is maximal using analytical calculations. Obtained results are universal and could be able to calculate local-field intensity of any low-dimension rectangular nanostripe with any aspect ratio or material of nanostripe or surface. The local-field intensity distribution near infinitely-long nanostripe was numerically calculated. For calculations was chosen silicon nanostripe placed on the gold surface with linear dimensions: width – 100 nm, height – 100 nm. Obtained distribution is unsymmetrical and highly inhomogeneous with “hot spots” (local field enhancement) on the nanostripe surface.

Key Words: plasmon polaritons, surface waves scattering, effective susceptibility, semiconductor nanostripe

Статтю представив д.ф.-м.н. Скришевський В.А.

Introduction. Surface plasmon polaritons (SPPs) are electromagnetic surface waves propagating along metal-dielectric interfaces with their intensity maximum in the surface and exponential decaying perpendicular to the surface [2]. In recent years SPP propagating features has been intensively studied. Theoretical research of SPP scattering [3, 5] shows how to calculate scattered field intensity far from the scatterer. But sometimes we need to know local-field distribution near the scatterer. For calculation SPP scattering by some nanoobjects we need to solve Maxwell's equations [1], but this is quite

difficult task. Of course, we can use numerical methods such as Finite Difference Time Domain (FDTD) method [4], but it requires huge computational resources.

In this article theoretical study of SPP scattering by infinitely long nanostripe using Green's function method is presented. The main characteristic of the proposing approach is maximal using analytical calculations. Calculation is performed using concept of effective susceptibility [7-8], which is a characteristics of both nano-object and material and it is a linear response on external field.

The main goal of our work is to calculate effective susceptibility of infinitely-long nanostripe and obtain local-field intensity distribution near silicon nanostripe.

Effective susceptibility of infinitely-long nanostripe. The system under consideration represents an infinitely-long homogeneous

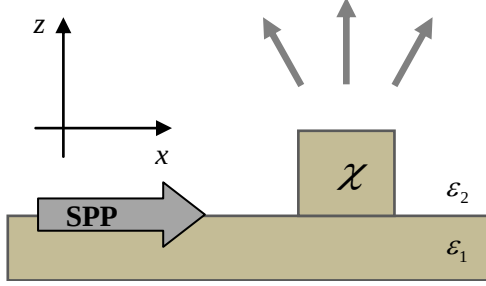


Fig.1. Schematic of the scattering system: an external SPP propagating along the dielectric-metal interface (x-axis) is scattered by a rectangular nanostripe.

nanostripe (Fig.1) placed along y-axis with susceptibility χ_p placed on the surface with dielectric constant ε_1 (in the region $z < 0$) and upper semi space has dielectric constant ε_2 (in the region $z > 0$). Of course, considered nanostripe has determined length, but we assume that length of nanostripe much greater than wave length and SPP width. The response of that system on external field can be found using Lippmann-Schwinger equation in the frame of concept of effective susceptibility [7]:

$$E_i(\mathbf{R}) = E_i^0(\mathbf{R}) + k_0^2 \int_V d\mathbf{R}' G_{ij}(\mathbf{R}, \mathbf{R}') X_{jk}(\mathbf{R}') E_k^0(\mathbf{R}') \quad (1)$$

$$G_{ji}^D(\mathbf{R}, \mathbf{R}') = \frac{1}{4\pi k_0^2 R^3} \left[-\delta_{ij} + 3 \frac{R_i R_j}{R^2} \right] \quad (2)$$

$$G_{ji}^I(\mathbf{R}, \mathbf{R}') = \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_2 + \varepsilon_1} \frac{1}{4\pi k_0^2 R^3} \left[-\delta_{ij} + 3 \frac{R_i R_j}{R^2} \right] \quad (3)$$

where $G_{ij}(\mathbf{R}, \mathbf{R}')$ is the sum of direct (2) and indirect (3) part of Green's function with near-field approximation [8], $\mathbf{R}'' = \{x', y', -z'\}$ and

$R = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z+z')^2}$. And effective susceptibility is:

$$X_{ij}(\mathbf{R}) = \frac{\chi_{ij}(\mathbf{R})}{\delta_{ij} - S_{ij}(\mathbf{R})} \quad (4)$$

$$S_{ij}(\mathbf{R}) = k_0^2 \int_V d\mathbf{R}' G_{ij}(\mathbf{R}, \mathbf{R}') \chi_{jk}(\mathbf{R}') \quad (5)$$

Taking into account that nanostripe is infinitely-long along y-axis and homogeneous let us integrate eq. (5):

$$S_{ij}(\mathbf{R}) = \chi_{jk} k_0^2 \int_{s'}^{+\infty} ds' \int_{-\infty}^{-\infty} dy' G_{ij}(\mathbf{R}, \mathbf{R}') \quad (6)$$

$$S_{ij}(\mathbf{R}) = \chi_{jk} k_0^2 \int_s ds' G_{ij}^{2D}(x, z, x', z') \quad (7)$$

where $G_{ij}^{2D}(x, z, x', z')$ is Green's function (photon propagator) of two-dimensional system with an interface between two media and it is:

$$G_{ij}^{2D}(x, z, x', z') = \frac{1}{2\pi k_0^2} \times \begin{bmatrix} g_{11} & 0 & g_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ g_{31} & 0 & g_{33} \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$g_{11} = \frac{(x-x_0)^2 - (z-z_0)^2}{((x-x')^2 + (z-z')^2)^2} + \kappa \frac{(x-x_0)^2 - (z+z_0)^2}{((x-x')^2 + (z+z')^2)^2} \quad (9)$$

$$g_{13} = \frac{2(x-x_0)(z-z_0)}{((x-x')^2 + (z-z')^2)^2} - \kappa \frac{2(x-x_0)(z+z_0)}{((x-x')^2 + (z+z')^2)^2} \quad (10)$$

$$g_{31} = \frac{2(x-x_0)(z-z_0)}{((x-x')^2 + (z-z')^2)^2} + \kappa \frac{2(x-x_0)(z+z_0)}{((x-x')^2 + (z+z')^2)^2} \quad (11)$$

$$g_{33} = -\frac{(x-x_0)^2 - (z-z_0)^2}{((x-x')^2 + (z-z')^2)^2} + \kappa \frac{(x-x_0)^2 - (z+z_0)^2}{((x-x')^2 + (z+z')^2)^2} \quad (12)$$

where $\kappa = (\varepsilon_2 - \varepsilon_1) / (\varepsilon_2 + \varepsilon_1)$. After all, effective susceptibility can be easily analytically calculated.

$$X_{ij}(\mathbf{R}) = \frac{\chi_{ij}}{1 - c_{11}\chi_{11} - c_{33}\chi_{33} - c_{13}c_{31}\chi_{11}\chi_{33} + c_{11}c_{33}\chi_{11}\chi_{33}} \times \begin{bmatrix} 1 - c_{33}\chi_{33} & 0 & c_{13}\chi_{11} \\ 0 & 1 & 0 \\ c_{31}\chi_{33} & 0 & 1 - c_{11}\chi_{11} \end{bmatrix} \quad (13)$$

$$c_{11}(x, z) = \frac{1}{2\pi} \left(-\arctan\left(\frac{z-z_1}{x-x_1}\right) + \arctan\left(\frac{z-z_1}{x-x_2}\right) + \arctan\left(\frac{z-z_2}{x-x_1}\right) - \arctan\left(\frac{z-z_2}{x-x_2}\right) + \right. \\ \left. + \kappa \left(\arctan\left(\frac{z+z_1}{x-x_1}\right) - \arctan\left(\frac{z+z_1}{x-x_2}\right) \right) - \kappa \left(\arctan\left(\frac{z+z_2}{x-x_1}\right) - \arctan\left(\frac{z+z_2}{x-x_2}\right) \right) \right) \quad (14)$$

$$c_{13}(x, z) = \frac{1}{4\pi} \left(\begin{aligned} & -\ln((x-x_1)^2 + (z-z_1)^2) + \ln((x-x_2)^2 + (z-z_1)^2) + \ln((x-x_1)^2 + (z-z_2)^2) - \ln((x-x_2)^2 + (z-z_2)^2) - \\ & -\kappa \left(\ln((x-x_1)^2 + (z+z_1)^2) - \ln((x-x_2)^2 + (z+z_1)^2) - \ln((x-x_1)^2 + (z+z_2)^2) + \ln((x-x_2)^2 + (z+z_2)^2) \right) \end{aligned} \right) \quad (15)$$

$$c_{31}(x, z) = \frac{1}{4\pi} \left(\begin{aligned} & -\ln((x-x_1)^2 + (z-z_1)^2) + \ln((x-x_2)^2 + (z-z_1)^2) + \ln((x-x_1)^2 + (z-z_2)^2) - \ln((x-x_2)^2 + (z-z_2)^2) + \\ & + \kappa \left(\ln((x-x_1)^2 + (z+z_1)^2) - \ln((x-x_2)^2 + (z+z_1)^2) - \ln((x-x_1)^2 + (z+z_2)^2) + \ln((x-x_2)^2 + (z+z_2)^2) \right) \end{aligned} \right) \quad (16)$$

$$c_{33}(x, z) = \frac{1}{2\pi} \left(\begin{aligned} & \arctan\left(\frac{z-z_1}{x-x_1}\right) - \arctan\left(\frac{z-z_1}{x-x_2}\right) - \arctan\left(\frac{z-z_2}{x-x_1}\right) + \arctan\left(\frac{z-z_2}{x-x_2}\right) + \\ & + \kappa \left(\arctan\left(\frac{z+z_1}{x-x_1}\right) - \arctan\left(\frac{z+z_1}{x-x_2}\right) \right) - \kappa \left(\arctan\left(\frac{z+z_2}{x-x_1}\right) - \arctan\left(\frac{z+z_2}{x-x_2}\right) \right) \end{aligned} \right) \quad (17)$$

Here, x_1, x_2, z_1, z_2 are coordinates of the sides of the nanostripe (Fig.2.). In addition, it should be noted that $X_{yy} = \chi_{yy}$ which corresponds to a bulk material.

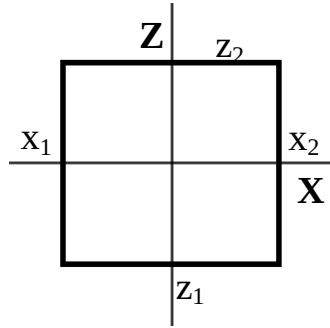


Fig.2. The coordinates of the sides of the nanostripe.

Numerical calculation. Let us consider the case when external field is surface plasmon polariton (SPP) that propagating along x-direction and perpendicular to the nanostripe that leads to SPP's scattering. Using eq. (1) we can easily calculate response of nanostripe on the SPP. In this case external field is [6]:

$$E_i^0(\mathbf{R}) = \exp(ik_{spp}x - ik_{spp}Z_s z) \times [Z_s, 0, 1] \quad (18)$$

where SPP's wave number is $k_{spp} = (\omega/c) \sqrt{\epsilon_1 \epsilon_2 / (\epsilon_1 + \epsilon_2)}$, $Z_s = -i \sqrt{\epsilon_2 / (-\epsilon_1)}$. Let us calculate local-field intensity distribution at the nanostripe. For example, SPP propagating along gold-air interface with $\epsilon_1 = -20.13 + 0.29i$ (for $\lambda = 632nm$) and $\epsilon_2 = 1$ respectively. For stripe were used axial dimensions: $h_x = h_z = 100nm$, h_y much

greater than wave length and SPP width, and material is silicon $\chi_p = 14.045 + 0.008i$. The results of numerical calculations of local-field intensity are presented on Fig.3.

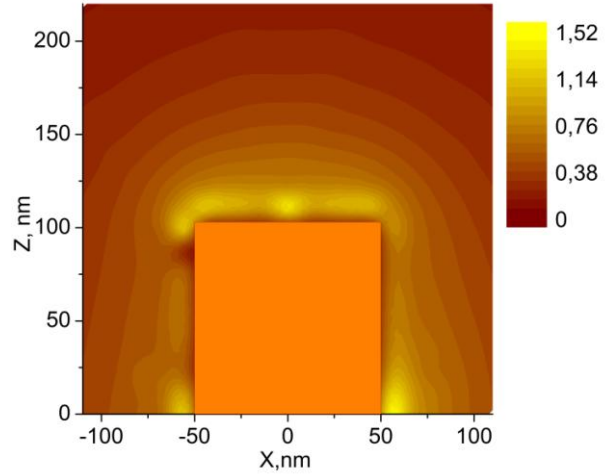


Fig.3. The coordinates of the sides of the nanostripe.

One can see the local-field intensity distribution is very inhomogeneous with “hot spots” – local-field enhancement on the stripe surface. It should be noted, local field distribution is unsymmetrical. The local field is lower on the front side to the surface wave then on the opposite side

Conclusions. The method of analytical calculation of effective susceptibility of infinity-long rectangular nanostripe and local-field intensity distribution is proposed. Developed approach is universal and could be able to find local-field distribution for any low-dimension nanostripe with

any aspect ratio or material of the nanostripe or surface. The local-field intensity distribution near infinitely-long nanostripe was numerically calculated. For calculations was chosen silicon nanostripe placed on the gold surface with linear

dimensions: width – 100 nm, height – 100 nm. Obtained distribution is unsymmetrical and highly inhomogeneous with “hot spots” (local field enhancement) on the nanostripe surface.

Список використаних джерел

1. Landau L.D. Electrodynamics of Continuous Media. / L.D. Landau, E.M. Lifshitz, L.P. Pitaevskii. – Butterworth-Heinemann, 1984. – 460 p.
2. Raether H. Surface plasmons on smooth and rough surfaces and on gratings. / H. Rether. – Berlin: Springer, 1988. – 132 p.
3. Bozhevolnyi S.I. Vectorial model for multiple scattering by surface nanoparticles via surface polariton-polariton interactions / S.I. Bozhevolnyi, T. Sondergaard // *Phys. Rev. B* **67**. – 2003 – P. 165405(1)-165405(8)
4. Chen S. Sharp plasmonic resonance on gold gratings in amplitude and phase domains / S. Chen, G. Li, W. Wong, E. Pun, K. Cheah // *Applied Optics*, **51**. – 2012. – No. 36 – P. 8563-8566
5. Evlyukhin A.B. Surface plasmon polariton scattering by finite-size nanoparticles. / A.B. Evlyukhin, S.I. Bozhevolnyi, G. Brucoli, L. Martin-Moreno, F.J. Garcia-Vidal // *Phys. Rev. B* **76**. – 2007 – P. 075426(1)-075426(9)
6. Evlyukhin A. Surface plasmon polariton scattering by small ellipsoid particles / A. Evlyukhin, S. Bozhevolnyi // *Surface Science*, **590**. – 2005. – P. 173-180
7. Lozovski V. Near-field images calculations of exciton clouds interacting with defects under semiconductor surface / V. Lozovski, O. Khylyko // *Quantum Matter*, **3** – 2014. – P. 1-14
8. Lozovski V. Near-field visualization of dynamical processes of semiconductor surface / V. Lozovski, V. Vasilenko // *Ultramicroscopy*. – 2008. – 109. – P. 39-43

References

1. LANDAU L.D., LIFSHITZ E.M., PITAEVSKII L.P. (1984). *Electrodynamics of Continuous Media*. Butterworth-Heinemann
2. RAETHER H. (1988) *Surface plasmons on smooth and rough surfaces and on gratings*. Berlin: Springer
3. BOZHEVOLNYI S.I., SONDERGAARD T. (2003) Vectorial model for multiple scattering by surface nanoparticles via surface polariton-polariton, *Phys. Rev. B* **67**, p.165405(1)-165405(8)
4. CHEN S., LI G., WONG W., PUN E., CHEAH K. (2012) Sharp plasmonic resonance on gold gratings in amplitude and phase domains, *Applied Optics*, **51**(36), p.8563-8566
5. EVLYUKHIN A.B., BOZHEVOLNYI S.I. BRUCOLI G., MARTIN-MORENO L., GARCIA-VIDAL F.J. (2007) Surface plasmon polariton scattering by finite-size nanoparticles, *Phys. Rev. B* **76**, p. 075426(1)-075426(9)
6. EVLYUKHIN A., BOZHEVOLNYI S. (2005) Surface plasmon polariton scattering by small ellipsoid particles, *Surface Science*, **590**, p.173-180
7. LOZOVSKI V., KHYLYKO O. (2014) Near-field images calculations of exciton clouds interacting with defects under semiconductor surface, *Quantum Matter*, **3**, p.1-14
8. LOZOVSKI V., VASILENKO V. (2008) Near-field visualization of dynamical processes of semiconductor surface, *Ultramicroscopy*, **109**, p.39-43

Надійшла до редколегії 12.12.15

СУЧАСНА ФІЗИКА

УДК 535.375.5

Вовденко С.С.¹, асп.,
Дмитрук І.М.², д.ф.-м.н., проф.,
Березовська Н.І.³, к.ф.-м.н.,
Медвідь А.⁴, проф.

Квантово-розмірний ефект у спектрах КРС на лазерно-індукованих структурах на поверхні германію

^{1,2,3}Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 01601, м. Київ, вул.
Володимирська 64/13,
e-mail: ¹sviatoslav.vovdenko@gmail.com,

²igor_dmitruk@univ.kiev.ua,

³n_berezovska@univ.kiev.ua

⁴Ризький технічний університет, лабораторія
напівпровідникової фізики, LV-1048, Латвія,
м. Рига, вул. Азенес14,
e-mail: medvids@latnet.lv

S. S. Vovdenko¹, Phd. stud.,
I. M. Dmitruk², Dr. Sci., Prof.,
N. I. Berezovska³, PhD.,
A. Medvid⁴, Prof.

Quantum confinement effect in Raman spectra on laser-induced structures on surface of Germanium

^{1,2,3}Taras Shevchenko National University of Kyiv,
01601, Kyiv, Volodymyrska st. 64/13,
e-mail: ¹sviatoslav.vovdenko@gmail.com,

²igor_dmitruk@univ.kiev.ua,

³n_berezovska@univ.kiev.ua,

⁴Riga Technical University, Laboratory of
Semiconductor Physics, LV-1048, 14 Azenes Str.,
Latvia,

e-mail: medvids@latnet.lv

За допомогою спектроскопії комбінаційного розсіювання світла (КРС) досліджувались самоорганізовані структури на поверхні германію, які утворювались під дією випромінювання YAG:Nd лазера. Виявлено зсув смуг в спектрах КРС у низькочастотну область, який інтерпретовано як прояв квантово-розмірного ефекту на фонових. За методом Ріхтера проведено моделювання спектрів КРС для нанокристалів різних розмірів. Аналіз теоретично розрахованих та експериментальних спектрів КРС дозволив оцінити розміри нанокристалів на поверхні германію після лазерної обробки, які склали 3,3 нм.

Ключові слова: комбінаційне розсіювання світла, наноструктура, квантово-розмірний ефект.

Self-organized structures on the germanium surface have been formed under the YAG:Nd powerful laser irradiation of 1.06 μm wavelength. Obtained quasi-periodic structures on Ge surface are characterized by submicron period of about 700 nm. These structures have been studied using Raman spectroscopy. Raman spectra are measured with DFS-24 double-grating spectrometer under the Ar⁺ laser excitation line of 514.5 nm. The observed shift of the Brillouin zone-center optical phonon in Raman spectra to low-frequency region by about 5 cm^{-1} are interpreted as a manifestation of a quantum size effect on phonons. The modelling of Raman spectra for different sizes of nanocrystals based on Richter's method and the estimation of sizes of nanocrystals on Ge surface are carried out. Frequencies of Raman lines in nanocrystalline germanium calculated from the known dispersion relation in Ge crystal are compared with the measured lines frequencies. That allows to estimate characteristic sizes of the features on treated surface that provide confinement of phonons as 3.3 nm. Thus, in addition to the methods of scanning electron or atomic-force microscopy Raman spectra measurements permit with sufficient accuracy to characterize the nanosized self-organized structures on the surface, which has complex morphology after laser processing.

Key Words: Raman scattering, nanostructure, quantum-size effect.

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Макарець М. В.

Вступ

На сьогоднішній час створюється все більша кількість приладів та структур, які мають розмір порядку 10-100 Å чи менше, з метою їх використання в оптоелектроніці. Виникає

питання впливу просторового обмеження на властивості фононів в таких наноструктурах напівпровідників та на особливості електрон-фононної взаємодії в них.

У роботі досліджується наноструктура на поверхні кристалу германію, яка є

самоорганізованою лазерно-індукованою мікроструктурою, отриманою при фото-стимульованому локальному нагріві за допомогою імпульсного лазерного опромінення.

Теоретична частина

Один з можливих механізмів утворення цієї структури пов'язаний з частковим перетворенням енергії лазерного випромінювання в енергію поверхневої хвилі, завдяки дифракції на наявних періодичних ґратках [1]. Резонансними ґратками є випадкові нерівності рельєфу, які у тій чи іншій мірі притаманні будь-якій поверхні. При достатній інтенсивності випромінювання відбувається нерівномірний підігрів середовища і, викликане ним, збільшення висоти резонансного рельєфу внаслідок теплових процесів на поверхні [2].

В літературі [3,4] розглядається дві альтернативні моделі формування структур - теплова та плазмова. Теплова модель [3] базується на швидкій передачі енергії із системи гарячих носіїв в ґратку. При високій густині енергії лазерного імпульсу приповерхневий шар товщиною 50 – 500 нм плавиться, тобто, має місце фазовий перехід першого роду. Фронт розплаву швидко рухається від поверхні всередину зразка. При зворотньому русі фронту розплаву до поверхні під час охолодження зразка після закінчення імпульсу відбувається процес автоепітаксії.

У плазмовій моделі фазовий перехід тверде тіло - рідина викликаний “зм'якшенням” поперечних акустичних фононів в ковалентних напівпровідниках при зростанні концентрації електрон - діркової плазми. Цей ефект зумовлений тим, що коли при переході із валентної зони в зону провідності електрон переходить із зв'язуючого стану в антизв'язуючий, ковалентний зв'язок послаблюється. Ефект “зм'якшення” акустичних фононів може привести також до зменшення температури плавлення [4].

Як електронні, так і фононні збудження в наноструктурах відчувають вплив ефекту просторового обмеження (квантово-розмірний ефект). В коливальних спектрах нанокристалів ефекти розмірного квантування проявляються як в області акустичних, так і оптичних коливань. Невеликий об'єм кристалічної структури

призводить до вираженого квантування коливальних станів в зоні Бріллюена, а малі розміри наноутворень є фактором, який призводить до зняття правил відбору по імпульсу.

Сформовані структури на поверхні германію, який досліджується у роботі, були отримані при опроміненні зразка випромінюванням YAG:Nd лазера. Внаслідок самоорганізації на поверхні була сформована двовірсна ґратка з точковою групою симетрії C_{6i} [5].

Для дослідження наноструктури використовувався метод спектроскопії комбінаційного розсіювання світла (КРС), оскільки він дозволяє досить просто дослідити спектр фононів і визначити вплив розмірного обмеження.

Експериментальна частина

Кристал германію був опромінений YAG:Nd лазером з довжиною хвилі випромінювання 1,06 мкм. Поверхня опромінювалась імпульсами з тривалістю 15 нс, періодом 12,5 Гц та інтенсивністю 30 МВт/см². Під дією випромінювання на поверхні германію була сформована квазі-періодична структура, морфологія якої була досліджена за допомогою оптичного мікроскопа. Використовуючи отримане зображення сформованої структури (рис. 1), було виявлено період структури - приблизно 700 нм.

Сpektри КРС збуджувалися випромінюванням неперервного аргонного лазера ЛГН-503 з довжиною хвилі 514,5 нм.

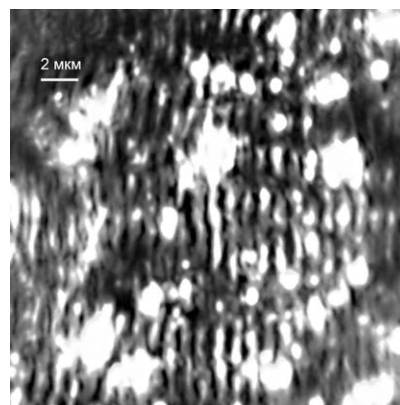


Рис. 1. Мікрофотографія зразка.

Спектри КРС реєструвалися за допомогою автоматизованого спектрального комплексу на базі спектрометра ДФС-24. В спектрометрі використовується подвійний монохроматор з додаванням дисперсії. Диспергуючим елементом є дві однакові дифракційні ґратки 1200 шт/мм, які обертаються з однаковою кутовою швидкістю відносно загального центру. Центральний промінь попадає на обидві ґратки під одним кутом, унаслідок подвійного розкладення підвищується чистота спектру та вдвічі збільшується лінійна дисперсія.

Проводилась реєстрація спектрів КРС від об'ємного германію (для цього використовувався торець зразка) та від поверхні з наноструктурою.

В спектрі КРС об'ємного германію була зафіксована смуга КРС 304 см^{-1} . В спектрах розсіяння від поверхні з наноструктурою спостерігалось зміщення смуги КРС в область менших хвильових чисел (смуга КРС на 299.3 см^{-1}) (рис. 2). Подібна величина зсуву свідчить про те, що на обробленій поверхні присутні структурні особливості, розміри яких відповідають нанометровому діапазону, а саме, нанокристали з характерним розміром порядку декількох нанометрів.

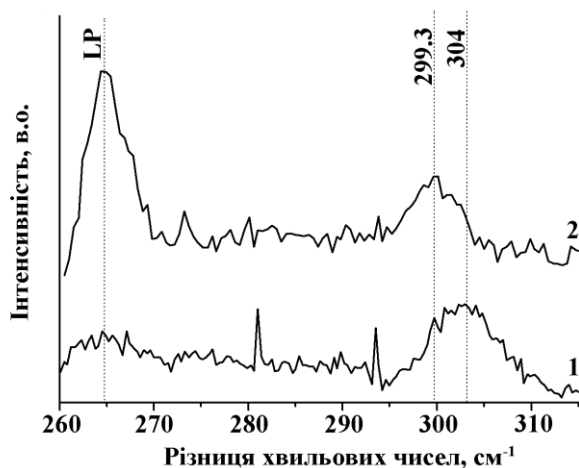


Рис. 2. Спектри КРС: 1 – від об'ємного германію, 2 – від наноструктури на поверхні зразка

За допомогою моделі Ріхтера [6], використовуючи дисперсійну залежність частоти фононів від хвильового вектора $\omega(q)$ були розраховані спектри КРС для ряду наночастинок, та побудована залежність положення піку КРС від розміру частинки (рис. 3).

Використана модель описує коливальний стан набором гармонік з різними хвильовими векторами q з інтенсивністю, яка описується функцією Гауса.

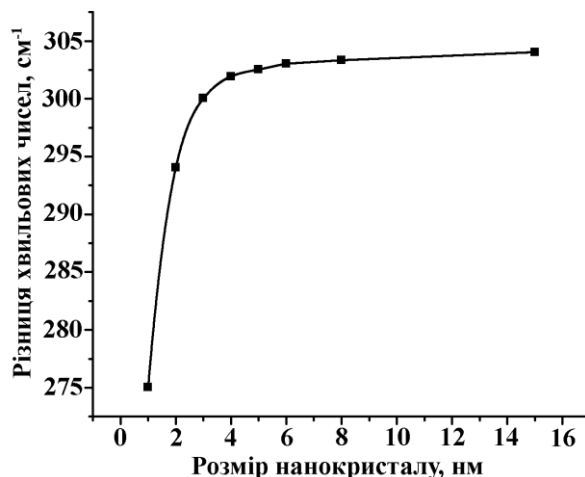


Рис. 3. Залежність положення піку КРС від розміру нанокристалу

Спектр, отриманий експериментально, найближче описується розрахованим спектром для частинки розміром 3,3 нм (6 елементарних комірок уздовж однієї осі) (рис. 4). В наближенні сферичної зони Бріллюена контур лінії колювання, що спостерігається описується суперпозицією окремих ліній на дискретних частотах оптичної гілки з ваговими множниками, які задаються типом локалізації фонона в сфері.

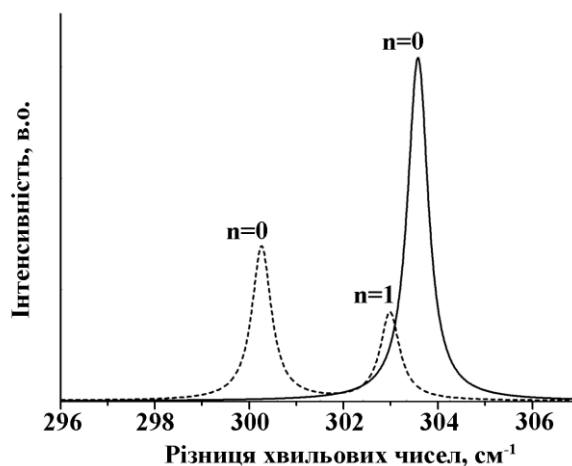


Рис. 4. Розраховані спектри КРС на наночастинок розміром 3,3 нм (пунктирна лінія) та на об'ємному германію (суцільна лінія)

Висновки

В результаті експериментальних досліджень спектрів КРС самоорганізованої структури на поверхні германію, яка утворилась після лазерної обробки, виявлено зсув піку КРС у низькочастотний бік, що інтерпретується як квантово-розмірний ефект на фононах. Беручи до уваги цей ефект, можна зробити висновки про наявність нанокристалів у сформованій структурі. За методом Ріхтера, який враховує просторове обмеження фононів в нанокристалі,

розраховано внесок фононних станів у спектр комбінаційного розсіяння та побудовано розмірну залежність ліній КРС. Порівняння експериментального та розрахованого спектрів КРС дозволило визначити, що на обробленій лазером поверхні германію присутні нанокристали з характерними розмірами 3,3 нм.

Список використаних джерел

1. Femtosecond laser-based fabrication of a new model material to study fracture / [A. Weck, T. Crawford, A. Borowiec та ін.]. // *Applied Physics A*. – 2006. – №86. – С. 55–61.
2. Ripple formation during deep hole drilling in copper with ultrashort laser pulses / [A. Weck, T. Crawford, D. S. Wilkinson та ін.]. // *Applied Physics A*. – 2007. – №89. – С. 1001–1003.
3. Medvid' A. Self-organization of 2D lattice on a surface of Ge single crystal after irradiation with YAG: ND laser / A. Medvid', A. Mychko, P. Onufrievs. // *Microelectronics Journal*. – 2008. – №39. – С. 237–240.
4. Kurz H. Fundamentals of pulsed laser irradiation of silicon / H. Kurz, L. A. Lompré, J. M. Liu. // *J. Phys. Colloques*. – 1983. – №44. – С. 23–36.
5. Bok J. Plasma assisted melting of covalent semiconductors / J. Bok. // *J. Phys. Colloques*. – 1983. – №44. – С. 3.
6. Richter H. The one phonon Raman spectrum in microcrystalline silicon / H. Richter, Z. P. Wang, L. Ley. // *Solid State Commun*. – 1981. – №39. – С. 625.

References

1. WECK A., CRAWFORD T. and BOROWIEC A. (2006). Femtosecond laser-based fabrication of a new model material to study fracture. *Applied Physics A*. 86(1). p.55-61.
2. WECK A., CRAWFORD T. and WILKINSON D. S. (2007). Ripple formation during deep hole drilling in copper with ultrashort laser pulses. *Applied Physics A*. 89(4). p.1001-1003.
3. MEDVID' A., MYCHKO A. and ONUFRIEVS P. (2008). Self-organization of 2D lattice on a surface of Ge single crystal after irradiation with YAG: ND laser. *Microelectronics Journal*. 39 (2). p.237-240.
4. KURZ H., LOMPRES L. A. and LIU J.M. (1983). Fundamentals of pulsed laser irradiation of silicon. *J. Phys. Colloques*. 44. p.23-36.
5. BOK J. (1983). Plasma assisted melting of covalent semiconductors. *J. Phys. Colloques*. 44. p.3-9.
6. RICHTER H., WANG Z. P. and LEY L. (1981). The one phonon Raman spectrum in microcrystalline silicon. *Solid State Commun*. 39. p.625-629.

Надійшла до редколегії 03.12.15

УДК 535.37

Лисова І.В.¹, асп.,
Березовська Н.І.², к.ф.-м.н.,
Дмитрук І.М.³, д.ф.-м.н., проф.

Дослідження характеристик CdSe нанокластерів як флуоресцентних міток для біологічних досліджень

^{1,2,3}Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 01601, м. Київ,
вул. Володимирська 64/13,
e-mail: lisova_ira@ukr.net ,
n_berezovska@univ.kiev.ua,
igor_dmitruk@univ.kiev.ua.

I.V. Lysova¹, PhD stud.,
N.I. Berezovska², PhD,
I.M. Dmitruk³, Dr.Sci., Prof.

Study of characteristics of CdSe nanoclusters as fluorescent labels for bioimaging investigations

^{1,2,3}Taras Shevchenko National University of Kyiv,
01601, Kyiv, Volodymyrska st. 64/13,
e-mail: lisova_ira@ukr.net ,
n_berezovska@univ.kiev.ua,
igor_dmitruk@univ.kiev.ua.

В цій роботі досліджуються властивості малих CdSe кластерів, що були синтезовані у водному розчині з L-цистеїном як поверхневим лігандом, для подальшого використання в біологічних дослідженнях. Виявлено ефекти дестабілізації нанокластерів (НК) при зниженні значення pH з лужного до нейтрального і кислотного. Досліджено поведінку НК при зберіганні у натрієво-фосфатному буфері при фізіологічному pH 7,5. Виявлено ефекти незначної дестабілізації НК та значного спадання інтенсивності фотолюмінесценції. Для підвищення яскравості НК використано гідрофільний аналог фосфіну, що призвело до зростання інтенсивності фотолюмінесценції на 70%.

Ключові слова: напівпровідникові нанокластери, L-цистеїн, pH, фотолюмінесценція.

This paper deals with the investigation of the properties of small CdSe clusters formed by the one-pot synthesis in an aqueous solution with L-cysteine as a surface ligand for further use in biological research. Theoretically estimated small sizes of nanoclusters (NC) of 1.2-1.5 nm are proved by the method of atomic force microscopy (AFM). It is found that NC exhibit destabilizing effects with the decreasing of pH value from alkaline to neutral and acidic, that is followed by the decreasing intensity of the 420 nm absorption peak. Time-dependent behaviour of NC in the sodium phosphate buffer (PBS 1x) at physiological pH 7.5 has been observed by means of optical spectroscopy measurements. According to the decrease of intensity of the 420 nm peak of absorption destabilization of NC has been detected as well as significant decrease of photoluminescence intensity. In order to increase the NC brightness in these conditions hydrophilic analogue of phosphine Tris(2-carboxyethyl)phosphine hydrochloride solution (TCEP) has been used. Almost 70% increase of photoluminescence is achieved.

Key Words: semiconductor nanoclusters, L-cysteine, pH, photoluminescence.

Статтю представив академік НАН України, д.ф.-м.н., проф. Булавін Л.А.

Вступ

Явище флуоресценції, вперше описане в 1852 році Г. Стоксом, широко досліджувалось в 19 сторіччі. Було виявлено, що багато речовин, включаючи мінеральні кристали та неорганічні сполуки, флуоресціюють. Починаючи з 1930-х років, використання флюорофорів набуло широкого застосування в біології. Поява нових, яскравих та високо специфічних міток сприяло розвитку функціональної флуоресцентної мікроскопії. Нові методи мікроскопії високої роздільної здатності дають змогу отримати

інформацію про індивідуальні молекули [1]. Мітки, що використовуються для біологічних досліджень, мають задовольняти наступні умови: 1) специфічне зв'язування з об'єктом дослідження; 2) малий розмір, що не перешкоджає нормальному функціонуванню об'єкта; 3) яскрава флуоресценція; 4) наявність миготіння та висока фотостабільність, що необхідно для деяких методів мікроскопії високої роздільної здатності; 5) біологічна сумісність. Звичайні органічні флюорофори малі та яскраві. Але зазвичай вони мало специфічні та потребують складних технік маркування, до того

ж мають низьку фотостабільність. Флюоресцентні протеїни, такі як Green Fluorescence Protein (GFP) та його похідні мають вищу специфічність, але розмір близько 5 нм обмежує можливості їх застосування [2]. Напівпровідникові квантові точки, відносно новий тип міток, мають високу інтенсивність випромінювання. Специфічне зв'язування та біологічна сумісність забезпечуються функціоналізацією поверхні нанокристалів. Але розмір квантових точок, готових до застосування, – близько 15-20 нм значно звужує можливості їх використання для біологічних досліджень [3].

Нещодавно було показано [4], що і не кристалічні форми напівпровідникових наночастинок, такі як CdSe нанокластери (НК) здатні випромінювати світло, але мають надзвичайно малі розміри порядку 1 нм. Крім того НК мають вузькі піки поглинання та фотолюмінесценції (ФЛ), подібні до органічних флюорофорів [4,5,6]. Довгий час була актуальною проблема виготовлення макроскопічної кількості кластерів одного розміру при простому послідовному синтезі. В 2010 році Й.С. Парк із співавторами створив метод синтезу кластерів з точно відомою кількістю атомів у водному розчині [4].

Надзвичайно малі та фотостабільні нанокластери при подальшій функціоналізації та пасивації поверхні можуть стати потужним засобом для мікроскопії. Для того, щоб перевірити можливість використання кластерів селеніду кадмію як флюоресцентних маркерів, нами було досліджено їх спектральні властивості та стабільність у фосфатному буфері, при різних рН та при додаванні фосфін-містких лігандів.

Об'єкт дослідження та експеримент

В даній роботі досліджувались спектральні властивості CdSe НК, які складаються з 33-34 пар атомів кадмію та селену, вкритих лігандом L-цистеїн. Синтез кластерів у водній фазі проводився послідовним додаванням та перемішуванням прекурсорів селену, кадмію та ліганду при кімнатній температурі та атмосферних умовах згідно методики раніше описаної в роботі [4]. Відразу після додавання останнього реагента розчин кластерів починав жовтіти. При подальшому дозріванні наночастинок, розчин набував більш інтенсивного жовтого кольору. Стабільний розчин НК зберігався у темноті при кімнатній

температурі. Для вимірювання спектральних властивостей при різних рН, розчин НК був розведений у співвідношенні 1:9 безпосередньо у воді, з результуючим рН 10 та у 37,5 мМ розчині NaOH з рН 12. Подальше зниження рівня рН проводилося послідовним додаванням 0,1 М розчину HCl. Для дослідження властивостей НК при фізіологічному значенні рН, було приготовано 1:15 розчин НК у стандартному натрій-фосфатному буфері PBS 1x (Lonza), що використовується в біологічних дослідженнях. Розчин тріс (2-карбоксіетил) фосфіну (TCPE) з фінальною концентрацією 200 мМ в натрій-фосфатному буфері був приготовлений безпосередньо перед використанням, для запобігання окисленню. До розчину 1:15 НК у PBS 1x послідовно додавали по 5 мікролітрів 200 мМ розчину TCPE, що відповідає 25% концентрації вже наявного у розчині ліганда L-цистеїну. Для вимірювань на атомно-силовому мікроскопі розведений у співвідношенні 1:50 розчин НК був нанесений на атомарно гладку поверхню слюди та висушений.

Дослідження спектральних властивостей НК проводились при нормальних умовах. Вимірювання спектрів флюоресценції було виконано на спектрофлюориметрі HORIBA Scientific FluoroMax-4, спектрів поглинання – на спектрофотометрі Agilent Cary 4000. Отримання зображення НК та вимірювання розміру НК було виконано за допомогою атомно-силової мікроскопії (АСМ).

Результати та обговорення

Спостереження за дозріванням кластерів у часі проводилось за допомогою спектрів поглинання НК у різні моменти після приготування. Положення піка поглинання на довжині хвилі 420 нм відповідає частинкам діаметром 1,22 нм, що було оцінено за емпіричною формулою [7]. Розмір НК також був підтверджений за допомогою методики АСМ.

Природний рН розчину НК 12, завдяки високій концентрації NaOH (37,5 мМ). Для біологічних досліджень значення рН має бути в межах 7 - 8, тому ми дослідили стабільність (положення та інтенсивність піку поглинання) та яскравість (інтенсивність фотолюмінесценції) кластерів при 1-12 рН. Як видно зі спектру поглинання на рис. 1 а, значення рН в межах 8 - 10 незначно дестабілізує кластери, але повне руйнування виникає при закисленні розчину. Але

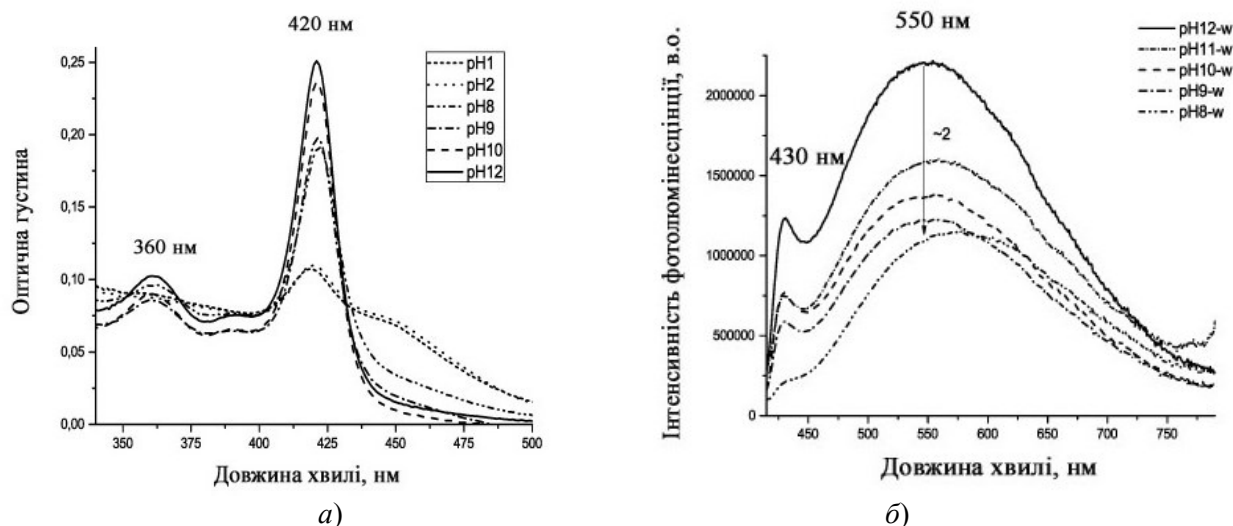


Рис. 1. Зміна спектрів поглинання (а) та фотолумінесценції (б) НК при значеннях рН 1-12

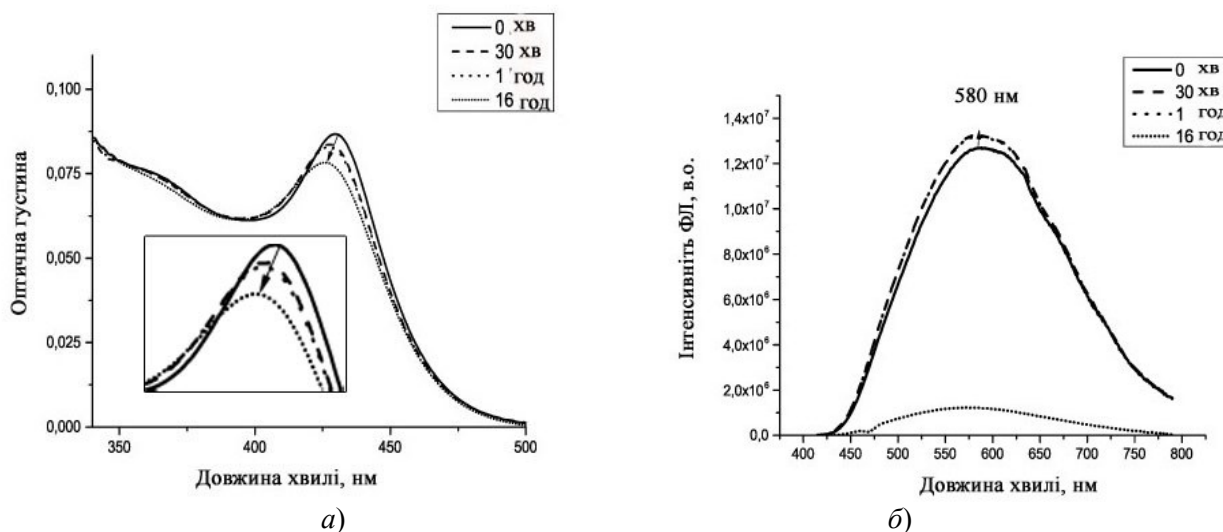


Рис. 2. Спектри поглинання (а) та фотолумінесценції (б) CdSe НК у PBS у часі

навіть незначне зниження рН розчину з 12 до 10 викликає значне зниження інтенсивності фотолумінесценції НК для піків 430 та 545 nm.

Внаслідок цих явищ інтенсивність ФЛ знижується майже в два рази. Оскільки дестабілізація НК при фізіологічному значенні рН виявилася незначною, було досліджено стан наночастинок розведених у фосфатному буфері у часі (рис. 2). Згідно спектру поглинання, НК у розчині з рН 7,5 навіть після 16 годин знаходилися у відносно стабільному стані. Також незначні коливання інтенсивності ФЛ спостерігались при зберіганні протягом часу від 0 хв до 60 хв. Але знаходження НК у розчині з рН 7,5 протягом 16 годин викликало різкий спад інтенсивності ФЛ.

Для покращення яскравості НК, що значно спадала при зниженні рН до фізіологічного рівня, без значної дестабілізації було використано гідрофільний аналог фосфіну ТСЕР (рис. 3). В присутності 0,33-1,4 мМ концентрації ТСЕР пік поглинання НК на 420 nm зсунувся до 435 nm та зменшився по інтенсивності на 10% (див. рис. 3 а). Поступове збільшення концентрації ТСЕР викликало зростання інтенсивності ФЛ, яка при 100% ТСЕР відрізнялась від початкової на 70%. Зростання яскравості НК при контакті з фосфінами може бути викликано створенням зв'язків з атомами селену, що запобігає втраті зарядів з поверхні наночастинок.

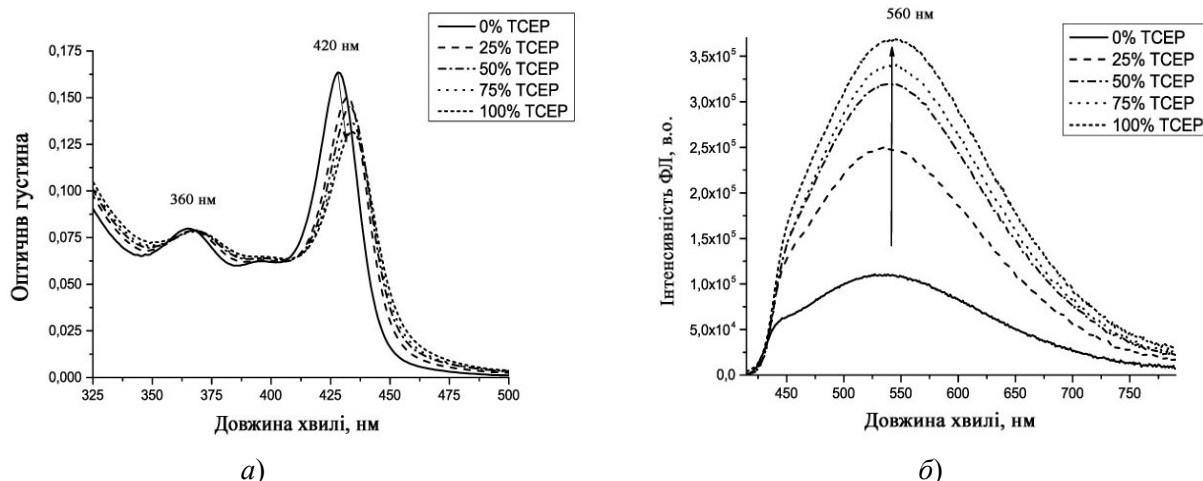


Рис. 3. Спектри поглинання (а) та фотолюмінесценції (б) CdSe НК у натрій-фосфатному буфері при різних концентраціях ТСЕР.

Висновки

Досліджено властивості напівпровідникових нанокластерів у водному розчині, при різних значеннях рН. Відносна стабільність нанокластерів у розведеному стані та при менших від природнього значеннях рН дозволяє використовувати наночастинки CdSe як базу для створення нових флюоресцентних міток для

флюоресцентної мікроскопії. Додаткова пасивація поверхні похідними фосфінів дозволяє значно збільшити інтенсивність фотолюмінесценції нанокластерів. Подальша функціоналізація поверхні для специфічного зв'язування надасть можливість маркувати біологічні молекули та внутрішньо клітинні об'єкти.

Список використаних джерел

1. Chi K. Super-resolution microscopy: breaking the limits / Kelly Chi. // *Nature Methods*. – 2008. – №6. – С. 15–18.
2. Tsien R. The green fluorescent protein/ Roger Y. Tsien. // *Annual Review of Biochemistry*. – 1998. – №67. – С. 509–544.
3. Quantum dots for live cells, in vivo imaging, and diagnostics / X. Michalet, F. Pinaud, L. Bentolila та ін. // *Science*. – 2005. – №28. – С. 538–544.
4. Aqueous phase synthesized CdSe nanoparticles with well-defined numbers of constituent atoms / Y. Park, A. Dmytruk, I. Dmitruk та ін. // *The Journal of Physical Chemistry C*. – 2010. – №114. – С. 18834–18840.
5. Size-selective growth and stabilization of small CdSe nanoparticles in aqueous solution / Y. Park, A. Dmytruk, I. Dmitruk та ін. // *ACS Nano*. – 2010. – №4. – С. 121–128.
6. Ultra-stable nanoparticles of CdSe revealed from mass spectrometry / A. Kasuya, R. Sivamohan, Y. Barnakov та ін. // *Nature Materials*. – 2004. – №3. – С. 99–104.
7. Influence of CdSe nanoparticles on stability of polymethine dyes in water / S. Y. Vyshnevskyy, I. M. Dmitruk, A. P. Naumenko та ін. // *Ukrainian Journal of Physics*. – 2014. – №3. – С. 326–330.

References

1. CHI K., (2008) Super-resolution microscopy: breaking the limits. *Nature Methods*. 6. p. 15–18.
2. TSIEN R., (1998) The green fluorescence protein. *Annual Review of Biochemistry*. 67. p. 509–544.
3. MICHALET X. et al., (2005) Quantum dots for live cells, in vivo imaging, and diagnostics. *Science*. 28. p. 538–544.
4. PARK Y.S. et al., (2010) Aqueous phase synthesized CdSe nanoparticles with well-defined numbers of constituent atoms. *The Journal of Physical Chemistry C*. 114. p. 18834–18840.
5. PARK Y.S. et al., (2010) Size-selective growth and stabilization of small CdSe nanoparticles in aqueous solution. *ACS Nano*. 4. p. 121–128.
6. KASUYA A. et al., (2004) Ultra-stable nanoparticles of CdSe revealed from mass spectrometry. *Nature Materials*. 3. p. 99–104.
7. VYSHNEVSKYY S. Y. et al., (2014) Influence of CdSe nanoparticles on stability of polymethine dyes in water. *Ukrainian Journal of Physics*. 3. p. 326–330.

Надійшла до редколегії 03.12.15

УДК 535.399

Поперенко Л.В.¹, д.ф.-м.н., проф.,
Трубіцин М. П.², д.ф.-м.н., проф.,
Неділько С. Г.³, д.ф.-м.н., с.н.с.,
Юргелевич І. В.⁴, к.ф.-м.н., с.н.с.,
Нестеров О. О.⁵, інж.,
Рибак Я. О.⁶, асп.,
Цюк Б. А.⁷, асп.

Особливості оптичних властивостей літій-германатного скла та склокераміки у видимій області спектра

^{1,3,4,6,7}Київський національний університет
імені Тараса Шевченка, 01601, м. Київ, вул.
Володимирська 64/13, e-mail:
¹plv@univ.kiev.ua, ³snedilko@univ.kiev.ua,
⁴vladira_19@ukr.net, ⁶yar.rybak@gmail.com,
⁷btsiuck@gmail.com
^{2,5}Дніпропетровський національний
університет імені Олеся Гончара, 49000,
м.Дніпропетровськ, проспект Гагаріна, 72,
²trubitsyn_m@ua.fm,
⁵nesterov.alexsey@gmail.com

L.V. Poperenko¹, Dr.Sci., Prof.,
M. P. Trubitsyn², Dr.Sci., Prof.
S. G. Nedilko³, Dr. Sci., Sen. Sci. Res.,
I. V. Yurgelevich⁴, PhD., Sen. Sci. Res.,
O.O. Nesterov⁵, Eng.,
Ya. O. Rybak⁶, PhD stud.,
B. A. Tsiuk⁷, PhD stud.

Features of optical properties of the lithium germanate glasses and glass-ceramics in the visible

^{1,3,4,6,7}Taras Shevchenko University of Kyiv, 01601,
Kyiv, Volodymyrska str. 64/13, e-mail:
¹plv@univ.kiev.ua, ³snedilko@univ.kiev.ua,
⁴vladira_19@ukr.net, ⁶yar.rybak@gmail.com,
⁷btsiuck@gmail.com
^{2,5}Oles Honchar Dnipropetrovsk National University ,
49000, Dnipropetrovsk, Gagarin avenue, 72,
²trubitsyn_m@ua.fm,
⁵nesterov.alexsey@gmail.com

Було досліджено зразки $\text{Li}_2\text{O}-x\text{GeO}_2$ ($x = 7, 11.5$) у трьох станах: скло, склокераміка та полікристалічна стадія. За допомогою еліпсометра ЛЕФ-3М було визначено еліпсометричні параметри Δ (зсув фаз) та Ψ (азимут відновленої лінійної поляризації). З цих даних було розраховано значення показника заломлення та кута Брюстера для всіх типів зразків. Фотолюмінесценція досліджувалася на спектрометрі СДЛ-2М, всі зразки характеризуються свіченням у видимій області спектра. Отримані результати були порівняні з літературними даними та з даними про структуру зразків.

Ключові слова: літій-германатне скло, еліпсометрія, показник заломлення, склокераміка.

The structures based on the germanate glasses were intensively studied last years. One of the most popular substances of the family is lithium germanate of $\text{Li}_2\text{O}-x\text{GeO}_2$ composition. The $\text{Li}_2\text{O}-x\text{GeO}_2$ ($x = 7, 11.5$) glasses were synthesized by quick quenching of the melts. Three types of the samples were prepared using several stage of heat treatment: initial glasses, intermediate glass-ceramics and polycrystalline stage. The ellipsometric investigations were carried out on a 632,8 nm wavelength of LEF-3M compensatory zero ellipsometer. In the process of measuring the ellipsometric parameters such as phase shift Δ between the orthogonal component of polarization vector and azimuth Ψ of the restored linear polarization were determined the refraction index and the Brewster's angle for all samples. The photoluminescence data were measured on SDL-2 spectrometer. All samples under study are characterized with intensive PL in visible region of the spectra The obtained results were compared with known literature data about $\text{Li}_2\text{O}-x\text{GeO}_2$ glasses and with morphology data.

Key Words: lithium germanates glass, ellipsometry, refractive index, glass-ceramics.

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Макарець М. В.

Вступ

Структури в основі яких є германатне скло, активно досліджуються останнім часом. Одними з найпопулярніших є сімейство літій-

германатних стекол складу $\text{Li}_2\text{O}-x\text{GeO}_2$. Відомо, що термічна обробка вихідного скла дозволяє отримувати гетерофазні сполуки, фізичні властивості яких визначаються фазовим складом і морфологією. Було показано, що у стадії

часткової кристалізації (стан склокераміки) іонна електропровідність є значно вищою ніж у скла та полікристалічної фази [1, 2]. Припускається, що це може бути пов'язано із зміною структури зразків, а саме з появою великої кількості зародків впорядкованої фази малого розміру у проміжній стадії.

В цій роботі досліджувалися оптичні властивості скла та склокераміки $\text{Li}_2\text{O}-x\text{GeO}_2$ ($x = 7, 11.5$), такі як показник заломлення та кут Брюстера. Також було досліджено люмінесцентні властивості літій-германатного скла та склокераміки. Отримані результати співставлялися з даними щодо внутрішньої будови зразків.

Методика виготовлення зразків та проведення вимірів

Досліджувані зразки були отримані методом швидкого гартування розплавів $\text{Li}_2\text{O}-7\text{GeO}_2$ (стехіометричний склад) та $\text{Li}_2\text{O}-11.5\text{GeO}_2$ (нестехіометричний склад) між холодними металевими пластинами [1]. Фазовий склад у процесі кристалізації досліджувався за допомогою диференціального термічного аналізу – реєстрації різниці температур між досліджуваним зразком та еталоном при їх одночасному нагріванні чи охолодженні.

При першому нагріванні скла, при температурі $T_g = 785 \text{ K}$, починається процес розстеклування. При подальшому нагріванні на дериватограмі фіксується два або три екзотермічних піка для стехіометричного і нестехіометричного скла відповідно (рис. 1). Пік при $T_1 = 840 \text{ K}$ співвідноситься з утворенням в аморфній фазі GeO_2 впорядкованих областей $\text{Li}_2\text{Ge}_4\text{O}_9$ (склокераміка). Вище $T_2 = 915 \text{ K}$

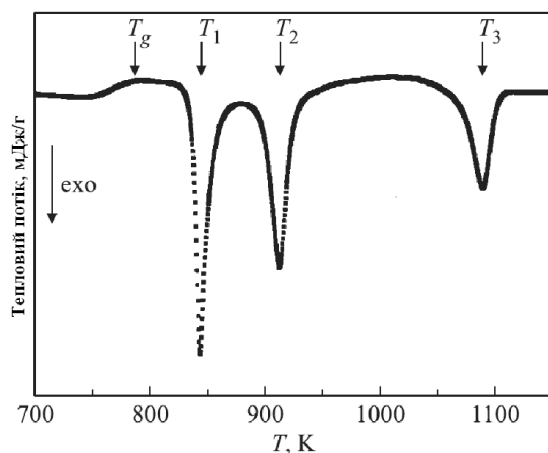


Рис. 1. Дериватограма для скла складу $\text{Li}_2\text{O} - x\text{GeO}_2$

відбувається зникнення фази $\text{Li}_2\text{Ge}_4\text{O}_9$ і остаточно кристалізується фаза $\text{Li}_2\text{Ge}_7\text{O}_{15}$ (полікристал). Пік $T_3 = 1090 \text{ K}$ спостерігається тільки для нестехіометричних зразків і пов'язаний з кристалізацією надлишків аморфної фази GeO_2 .

Кристалізація скла може відбуватися двома способами: нагріванням скла або його витримкою протягом певного часу за сталої температури в інтервалі між T_g та T_1 (ізотермічний метод) [2].

В цій роботі досліджувалися поліровані зразки скла (а), склокераміки (б) і полікристали (с) стехіометричного складу, що були кристалізовані методом нагрівання та зразки скла (д) і склокераміки (е) нестехіометричного складу, котрі були кристалізовані ізотермічним методом.

Результати вимірювань та їх обговорення

Поляризаційні оптичні вимірювання проводилися на багатокуттовому еліпсометрі ЛЕФ-3М-1 на одній довжині хвилі $\lambda = 632,8 \text{ nm}$ при кімнатній температурі.

Визначення кута Брюстера відбувалося за допомогою вимірювань еліпсометричних параметрів таких як: Δ - зсув фаз між компонентами поляризації і Ψ - азимут відновленої лінійної поляризації. По вимірюваним значенням Δ і Ψ було знайдено кути Брюстера та значення цих кутів з мінімальним азимутом для наших досліджуваних зразків.

Результати еліпсометричних вимірювань наведено на рис.2. Для кута Брюстера виконується умова $\cos\Delta(\varphi_{\text{бр}}) = 0$, за її допомогою з залежностей $\cos\Delta(\varphi)$ було визначено кути Брюстера. Використовуючи співвідношення $n = \tan \varphi_{\text{бр}}$ було визначено показник заломлення середовища у видимій області спектру на довжині хвилі $\lambda = 632,8 \text{ nm}$. Отримані результати наведено в табл. 1.

Видно, що нестехіометричні зразки д та е мають близькі значення показника заломлення: $n_d = 1,630$ і $n_e = 1,623$. При цьому, для відповідних стехіометричних зразків а та б, значення показника заломлення менші: $n_a = 1,522$ і $n_b = 1,603$.

Таблиця 1

Значення n та $\varphi_{\text{бр}}$ досліджуваних зразків

Зразок	n	$\varphi_{\text{бр}}, ^\circ$
a	1.522 ± 0.003	56.69 ± 0.01
b	1.603 ± 0.003	58.05 ± 0.01
c	1.688 ± 0.003	59.36 ± 0.01
d	1.630 ± 0.003	58.63 ± 0.01
e	1.623 ± 0.003	58.37 ± 0.01

У роботі [3] було досліджено фазовий склад та значення показника заломлення для систем $\text{Li}_2\text{O} - x\text{GeO}_2$ (де x – молярна частка). Значення показника заломлення визначалися методом петрографічної мікроскопії. За цими даними для скла складу $\text{Li}_2\text{O}-7\text{GeO}_2$ значення показника заломлення становить $n_{x=7} = 1.699 \pm 0.001$, а для нестехіометричного скла $\text{Li}_2\text{O}-11.5\text{GeO}_2$ $n_{x=11.5} \approx 1.665 \pm 0.001$. Як видно отримані нами значення показника заломлення є меншими за ці, і якщо для нестехіометричних зразків **c** та **d** різниця є не дуже великою, то для зразка **a** вона є суттєвою. Цей результат для зразка **c**, імовірно, пов'язаний з тим, що цей зразок є полікристалом.

Можна припустити, що зразок **a** має показник поглинання, k , відмінний від нуля, через що залежність $\cos \Delta(\varphi)$ є пологою, а залежність $\text{tg} \Psi(\varphi)$ в мінімумі не прямує до нульового значення у порівнянні з іншими зразками. В той же час зразок **a** є досить прозорим у видимому діапазоні, і тому, очевидно, для нього $k \approx 0$.

З результатів вимірів для зразків **c** та **d** можна бачити, що значення показників заломлення склокераміки менші ніж у скла. Якщо ці дані екстраполювати на стехіометричні зразки, то можна припустити, що показник заломлення зразка **a** має бути більшим за 1.600. Те що, отримані значення n менші за літературні можна пояснити наступним чином. Як відомо, при поліруванні поверхні ми не отримуємо ідеальну площину і вона буде мати певну шорсткість. Також при цьому утворюється так званий «порушений шар», тобто під час механічної обробки поверхневий шар речовини частково деформується і за своєю структурою відрізняється від структури речовини у глибині зразка [4, 5]. Сильне ж відхилення для зразка **a** можливо пов'язано із використанням іншого абразиву, або із забрудненням поверхні зразка органічними речовинами.

Пологу залежність $\cos \Delta(\varphi)$ для цього зразка також можна було б пов'язати із наявністю металевих домішок, але спектроскопічні дослідження показали відсутність таких у цьому зразку, тоді як у зразках **b** та **c** методом люмінесцентного аналізу, нами було виявлено наявність іонів Cr^{3+} (рис. 3). Якщо ж вважати, що домішки не впливають на результати вимірів, то показник поглинання зразків k може збільшуватися у наступному порядку: $e \rightarrow d \rightarrow c \rightarrow b \rightarrow a$.

Спектри люмінесценції були записані на спектрометрі СДЛ-2 при кімнатній температурі,

джерелом збудження був лазер з довжиною хвилі $\lambda_{36} = 532$ нм. Спектр зразка **a** має широку смугу свічення у районі 550-700 нм. Зразок **b** також має широку смугу свічення у цьому діапазоні, але

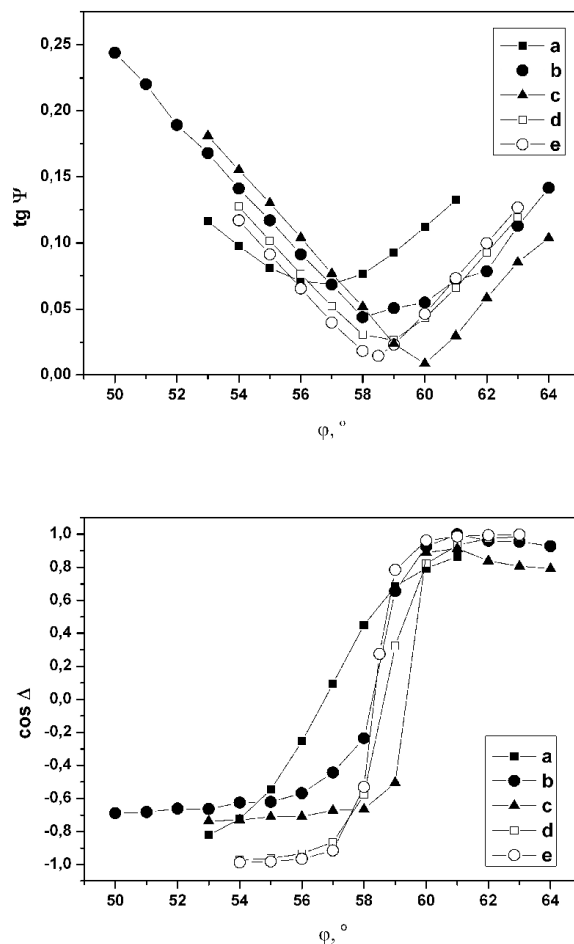


Рис. 2. Експериментальні залежності $\text{tg} \Psi(\varphi)$ та $\cos \Delta(\varphi)$.

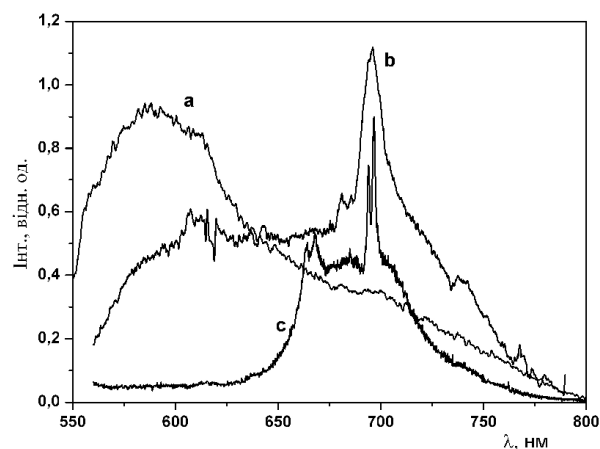


Рис. 3. Спектри люмінесценції зразків **a**, **b** та **c**, $\lambda_{36} = 532$ нм, кімнатна температура.

Висновки

при цьому у його спектрі з'являється лінія на довжині хвилі 696 нм. У спектрі зразка **с** спостерігаються потужні лінії на довжинах хвиль 669 та 696 нм. В роботі [6] досліджувалася люмінесценція йонів Cr^{3+} у стеклах $\text{Li}_2\text{O}-7\text{GeO}_2$, де було показано, що у вихідному склі свічення R-ліній хрому не спостерігається, а є тільки широка смуга свічення 680-750 нм. Ця смуга є типовою для йонів Cr^{3+} у слабкому октаєдричному полі, у цьому випадку – це поле кисневих октаєдрів, в центрі яких, на місці германію знаходяться йони хрому. При наступному прогріві інтенсивність цієї смуги зменшувалася і з'являлися R-лінії. Для наших зразків **б** та **с** також можна спостерігати зростання інтенсивності цих ліній. Але у спектрах зразка **а** відсутні як і R-лінії так і широка смуга 680-750 нм, тому можна вважати, що у в цьому зразку йони Cr^{3+} відсутні.

Список використаних джерел

1. Волнянський М. Д. Тепловые и электрические свойства стеклокерамики на основе гептагерманата лития / М. Д. Волнянський, А. А. Нестеров, М. П. Трубицын. // Физика твердого тела. – 2012. – №54. – С. 889–890.
2. Нестеров А. А. Метастабильное состояние стеклокерамики $\text{Li}_2\text{O}-11.5\text{GeO}_2$ с повышенной электропроводностью / А. А. Нестеров, М. П. Трубицын, Д. М. Волнянський. // Физика твердого тела. – 2015. – №57. – С. 668–673.
3. Murthy M. K. Studies in Germanium Oxide Systems: I, Phase Equilibria in the System $\text{Li}_2\text{O}-\text{GeO}_2$ / M. K. Murthy, J. IP. // Journal of the American Ceramic Society. – 1964. – №47. – С. 328–331.
4. Маслов В. П. Эллипсометрические исследования механическиполированных образцов некоторых оптических стекол / В. П. Маслов, В. А. Одарич. // ОМП. – 1983. – №3. – С. 60–61.
5. Одарич В. А. Эллипсометрические исследования поверхностного слоя полированного оптического стекла / В. А. Одарич. // Оптический журнал. – 2008. – №75. – С. 79–86.
6. Люминесценция примесных ионов Cr^{3+} в нанокристаллах и кластерах $\text{Li}_2\text{Ge}_7\text{O}_{15}$ в литиево-германатных стеклах / Т. Н. Василевская, А. А. Каплянский, А. Б. Куликин, С. П. Феофилов. // Физика твердого тела. – 2003. – №45. – С. 914–921.

Методом кутової еліпсометрії для зразків літій-германатного скла та кристалізованих з нього керамік було визначено показники заломлення, значення яких лежать у межах від 1.52 до 1.69. У фазі склакераміки показник заломлення менший ніж у скляної фази. Відмінність від літературних даних, може бути пов'язана із шорсткістю полірованих поверхонь, так само як і суттєве відхилення значення n для зразка **а** може бути викликано іншими умовами обробки його поверхні. Тому необхідні додаткові дослідження з урахуванням моделей шорсткості поверхні.

Результати люмінесцентних досліджень показали широку смугу свічення у видимому діапазоні, а також виявили наявність йонів Cr^{3+} у зразках **б** та **с**.

References

1. VOLNIANSKII M. D. NESTEROV A. A., TRUBITSYN M. P. (2012) Thermal and electrical properties of glass-ceramics based on lithium heptagermanate, *Physics of the Solid State*, 54. p.889-890.
2. NESTEROV A. A., TRUBITSYN M. P. VOLNIANSKII M. D (2015). Metastable state of the $\text{Li}_2\text{O}-11.5\text{GeO}_2$ glass-ceramics with a high electrical conductivity, *Physics of the Solid State*, 57. p.668–673.
3. MURTHY M., J. IP. (1964) Studies in Germanium Oxide Systems: I, Phase Equilibria in the System $\text{Li}_2\text{O}-\text{GeO}_2$, *Journal of the American Ceramic Society*, 47. p.328-331.
4. MASLOV V. P., ODARYCH W. A. (1983) Elipsometric investigation of the mechanical polished samples of the some optical glasses, *Opto-Mechanical Industry*, 3. p.60-61.
5. ODARYCH W. A (2008), Elipsometric investigation of the surface layer of the polished optical glasses., *Optical Journal*, 75. p.79-86.
6. VASILEVSKAYA T. N., KAPLYANSKII A. A., KULINKIN A. B. FEOFILOV S. P., (2013), Luminescence of Cr^{3+} impurity ions in $\text{Li}_2\text{Ge}_7\text{O}_{15}$ nanocrystals and clusters embedded in lithium germanate glasses, *Physics of the Solid State*, 45. p.915-922.

Надійшла до редколегії 11.12.15

УДК 535.3: 535.016

Стащук В.С.¹, д.ф.-м.н., проф.,
Стукаленко В.В.², к.ф.-м.н., м.н.с.
Попенко О.О.³, студ.

Оптичні властивості структури: плівка оксиду алюмінію-масивний алюміній

^{1,2,3}Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 01601, м. Київ, вул.
Володимирська 64/13,
e-mail: ²stu@univ.kiev.ua

V.S. Stashchuk¹, Dr. Sci., Prof.,
V.V. Stukalenko², PhD., Sci. Res.
O.O. Popenko³, stud.,

Optical properties of the structure: aluminum oxide film-bulk aluminum

^{1,2,3}Taras Shevchenko National University of Kyiv,
01601, Kyiv, Volodymyrska st. 64/13,
e-mail: ²stu@univ.kiev.ua

Розраховано на основі розробленої двошарової моделі дисперсію коефіцієнта відбивання в спектральній області $\lambda = 0,22 - 1,2$ мкм за кімнатної температури для системи оксид алюмінію-перехідний шар-масивний алюміній. Визначено оптичні і геометричні характеристики перехідного шару вказаної структури. Одержані результати задовільно узгоджуються з отриманими нами експериментальними даними коефіцієнта дзеркального відбивання $R(\lambda)$ в цій же спектральній області.

Ключові слова: двошарова модель, оксид алюмінію, оптичні сталі, коефіцієнт відбивання.

The optical properties of aluminium oxide's thin film – bulk metal system were modeled. Two-layer model: aluminium oxide – interlayer – bulk metal was used in the work. Spreading light through these system was representing in matrix form. The refractive index of transition layer n_3^* was deemed as a complex value $n_3^* = n_3 + i k_3$, where n_3 and k_3 – the index of refraction and absorption of the transition layer, respectively. The reflection coefficient's dispersion $R(\lambda)$ in wide spectrum range ($\lambda = 0.2 - 1.2$ nm) was calculated for dielectric-transition layer-substrate system using two layer model. The aluminium oxide layer were applied with different thickness (180 -600 nm). Oxide films deposited on a specially prepared surface of metal laser mirrors from solid aluminum. The results obtained from the use of single and dual-layer models were compared and determined that the transition layer was formed. The characteristics of this layer were determined by comparing the experimental and calculated data in whole range of reflection coefficient's dispersion measurements and in some areas of the spectrum. Optical and geometric characteristics of oxide-metal system's transition layer were determined. It was a good agreement between calculated and measured data.

Key Words: two layer model, thin film, aluminum oxide, optical constants, reflection coefficient.

Статтю представив представив д.ф.-м.н., проф. Макарець М. В.

Вступ

Плівка діелектрика на поверхні металевих дзеркал покращує їхню променеву стійкість, підвищує механічну міцність та твердість [1]. Важливо з'ясувати вплив плівки на дисперсію коефіцієнта відбивання $R(\lambda)$ структури: плівка діелектрика-металева основа [2-4].

При моделюванні властивостей таких систем, зазвичай, використовуються відомі залежності коефіцієнта відбивання від оптичних сталей плівки і металу. Як відомо [5], поширення світла через шаруваті системи можна представляти в матричній формі.

В загальному випадку амплітудний коефіцієнт відбивання шаруватого середовища,

згідно [5], пов'язаний з елементами характеристичної матриці M_x співвідношенням:

$$r = \frac{(m_{11} + m_{12} p_{oc}) p_c - (m_{21} + m_{22} p_{oc})}{(m_{11} + m_{12} p_{oc}) p_c + (m_{21} + m_{22} p_{oc})}, \quad (1)$$

де m_{ij} елементи матриці M_x , $p_s = n_s \cos \theta$, s – індекс, що характеризує, відповідно, c – середовище, з якого падає світло, oc – основу, на яку нанесено покриття, n – показник заломлення середовища, θ – кут падіння.

Для одношарової системи діелектрик – масивний метал елементи характеристичної матриці є дійсними величинами і розрахунок r не викликає труднощів [6].

У двошаровій моделі ситуація ускладнюється [7].

Зразки. Метод вимірювання. Методика розрахунку

Зразки отримані шляхом розпорошування оксиду алюмінію магнетронним методом на поверхню алюмінію (чистотою 99,99 %), отриманої шляхом алмазного мікроточіння [8]. Товщина шарів оксиду алюмінію змінювалася дискретно в інтервалі товщин $d_2 = 180 - 600$ нм і визначалася за допомогою кварцового товщиноміра та фотометричним методом.

Вимірювання коефіцієнта дзеркального відбивання $R(\lambda)$ при нормальному падінні світла на зразок здійснювалися в області $\lambda = 0,22 - 1,2$ мкм за кімнатної температури за допомогою нестандартної установки, що складалася з джерел випромінювання та їхніх блоків живлення, монохроматора ДМР-4, приймально-реєструвальної системи (фотопомножувачів, підсилювачів, цифрових вольтметрів) та відбивної приставки. Відбивна приставка змонтована на столику гоніометра Г5, складалася із таких елементів: світлоподільника, кварцової призми повного внутрішнього відбивання (еталон, перший канал, сигнал $I_0(\lambda)$) і досліджуваного зразка (другий канал, сигнал $I(\lambda)$). Коефіцієнт відбивання визначався, зрозуміло, за формулою $R(\lambda) = I(\lambda)/I_0(\lambda)$. Точність вимірювання цієї величини залежала від довжини хвилі і змінювалась в інтервалі 0,05 – 0,1 %.

Теоретичні розрахунки проведені на основі описаної нами в [7] моделі. У створеній програмі для моделювання оптичних характеристик двошарової системи діелектрик-перехідний шар-основа вважалося, що показник заломлення плівки діелектрика є дійсною величиною n_2 , а ця величина для перехідного шару (ПШ) є комплексною величиною $n_3^* = n_3 + i k_3$. Характеристичні матриці цих плівок M_2 та M_3 (індекс 2 відноситься до плівки діелектрика, індекс 3 – до ПШ) в загальному випадку дорівнюють:

$$M_2 = \begin{pmatrix} \cos(k_0 n_2 d_2 \cos \theta) & -(i/p_2) \sin(k_0 n_2 d_2 \cos \theta) \\ -ip_2 \sin(k_0 n_2 d_2 \cos \theta) & \cos(k_0 n_2 d_2 \cos \theta) \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$M_3 = \begin{pmatrix} \cos(k_0 n_3^* d_3 \cos \theta) & -(i/p_3) \sin(k_0 n_3^* d_3 \cos \theta) \\ -ip_3 \sin(k_0 n_3^* d_3 \cos \theta) & \cos(k_0 n_3^* d_3 \cos \theta) \end{pmatrix}$$

де k_0 – хвильовий вектор, d – товщина плівки (шару), $p = n \cos \theta$, θ – кут падіння.

Результуючу матрицю системи плівка-перехідний шар знаходимо як векторний добуток вказаних матриць $M_r = M_2 \times M_3$. Підставивши у формулу (1) відповідні елементи матриці M_r ,

можна розрахувати амплітудний коефіцієнт відбивання r , а далі – енергетичний $R = r r^*$. У нашому випадку основою є метал, а це означає, що показник заломлення є комплексною величиною, отож і відповідні елементи характеристичної матриці теж є комплексними величинами.

Товщина ПШ варіювалась в межах від кількох нанометрів до десятків нанометрів. Показник заломлення n_3 і коефіцієнт поглинання k_3 ПШ визначаємо за формулами:

$$n_3 = X n_2 + Y n_4, \quad k_3 = Z k_4, \quad (3)$$

де коефіцієнти X, Y, Z змінювалися в широких межах (індекс 4 стосується основи).

Отож, створена програма дозволяє визначати дисперсію $R(\lambda)$, змінюючи характеристики кожного із шарів, а також основи (металу) в широких межах.

Результати та їх обговорення

На рис. 1 показані розраховані криві дисперсії коефіцієнта відбивання $R(\lambda)$ структури: плівка оксиду алюмінію (товщиною $d_2 = 230$ нм) – масивний алюміній для одношарової (товщина ПШ $d_3 = 0$), двошарової моделей (товщина ПШ між плівкою оксиду та масивним алюмінієм $d_3 = 10$ нм); експериментальна крива для цього зразку та для чистого алюмінію. Видно, що

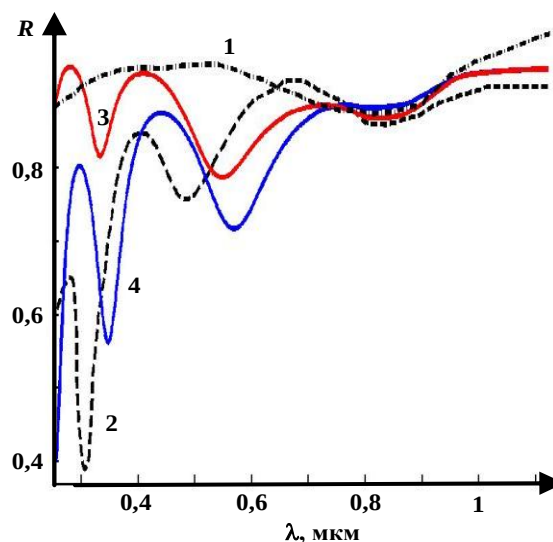


Рис. 1. Дисперсія коефіцієнта відбивання $R(\lambda)$ чистого Al (1) та структури: плівка оксиду алюмінію – масивний алюміній (товщина плівки $d_2 = 230$ нм), 2 – експ. дані, 3 – результати розрахунку в одношаровій моделі ($d_3 = 0$ нм), 4 – в двошаровій моделі ($d_3 = 10$ нм. $n_3 = X n_2 + Y n_4, k_3 = Z k_4, X = 0,5; Y = 0,5; Z = 1$).

нанесення плівки оксиду на масивний алюміній приводить до зниження коефіцієнта відбивання у

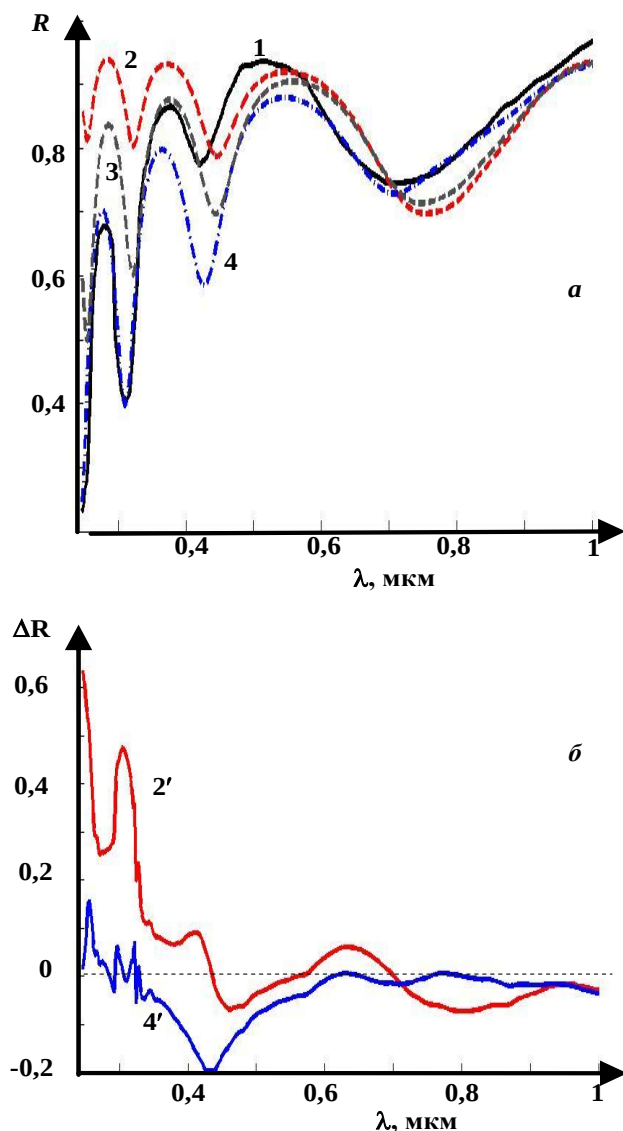


Рис. 2. Дисперсія коефіцієнта відбивання $R(\lambda)$ структури плівка оксиду алюмінію ($d_2 = 300$ нм) -масивний алюміній (а).

1 – експериментальні дані, 2 – результати розрахунку з використанням одношарової моделі без варіації оптичних і геометричних характеристик, 3 – результати розрахунку в двошаровій моделі, при $X = 0,5$; $Y = 0,5$; $Z = 1$; товщина ПШ $d_3 = 5$ нм; 4 – результати розрахунку в двошаровій моделі, при $X = 1$, $Y = 0,1$; $Z = 1$ і товщині ПШ $d_3 = 6$ нм; $n'_2 = n_2 - 0,02 n_2$, $n^*_4 = (n_4 + 0,02 n_4) + ik_4$.

Різниця $\Delta R(\lambda)$ між експериментальними та розрахованими даними в одношаровій (2') та двошаровій (4') моделях відповідно (б).

всьому спектральному діапазоні.

Результати розрахунків в одношаровій моделі суттєво різняться з результатами експериментальних досліджень і подолати таку розбіжність не вдається шляхом варіацій оптичних характеристик плівки оксиду і масивного металу. З рисунка також видно, що, дійсно, результати розрахунку в одношаровій моделі $d = 0$ нм незадовільно описують експериментальні дані. Набагато кращого узгодження вдалося досягти шляхом введення перехідного шару між плівкою оксиду і масивним алюмінієм, оптичні характеристики якого, зрозуміло, займають проміжні значення між характеристиками плівки і металу.

Зрозуміло, що із великої кількості розрахунків тут наведено лише один із результатів, який більш-менш адекватно описує експериментальні дані. При цьому було вибрано такі характеристики ПШ: $d_3 = 10$ нм, $n_3 = Xn_2 + Yn_4$, $k_3 = Zk_4$, $X = 0,5$; $Y = 0,5$; $Z = 1$, при яких уже спостерігається краще порівняно з одношаровою моделлю узгодження розрахованих та експериментальних даних.

Отож, більш ефективними виявились результати розрахунків в двошаровій моделі при варіаціях товщини d_3 перехідного шару, показника заломлення n_3 , коефіцієнта поглинання k_3 , а також при варіаціях цих же величин для плівки оксиду і масивного металу.

Всі параметри та характеристики змінювались в широких межах, виходячи із фізичних міркувань.

На рис. 2, для прикладу, показано експериментальні дані разом з результатами розрахунків дисперсії коефіцієнта відбивання $R(\lambda)$ тієї ж системи при товщині плівки оксиду алюмінію $d_2 = 300$ нм як в одношаровій, так і в двошаровій моделях при товщині перехідного шару $d_3 = 6$ нм та різниця між експериментальними і розрахованими даними $\Delta R(\lambda)$ в одношаровій (2') і двошаровій (4') моделях. Як видно, узгодження експериментальних і розрахованих даних в двошаровій моделі є набагато кращим.

Подібні закономірності спостерігаються і для усіх інших досліджених зразків, що мають різні товщини шару оксиду.

Отож, в системі: оксид алюмінію – масивний алюміній утворюється достатньо товстий перехідний шар, характеристики якого займають проміжні значення між величинами шару оксиду і масивного алюмінію.

Висновки

Встановлено, що оптичні властивості структури: плівка оксиду алюмінію – масивний алюміній визначаються не лише властивостями плівки оксиду та масивного алюмінію, а й властивостями перехідного шару.

На основі моделювання властивостей досліджених структур та порівняння результатів з експериментальними даними визначають

дисперсію показників заломлення $n_3(\lambda)$ та поглинання $k_3(\lambda)$ та товщину d_3 перехідного шару.

Для повного узгодження експериментальних і теоретичних даних слід враховувати неоднорідність за товщиною перехідного шару.

Список використаних джерел

1. Поперенко Л. В. Основи фізики матеріалів оптотехніки / Л. В. Поперенко, В. С. Сташук. – Київ: ВПЦ Київський університет, 2011. – 686 с.
2. Jung Jy. Optical Properties of Variable-Composition Aluminum/Alumina Thin Films, Part 2 / Jy-Yun Jung, M.Quinn Brewster. // *Journal of Thermophysics and Heat Transfer*. – 2015. – 29, №2. – С. 390–402.
3. Andreev S. V. Determining the optical constants of thin metallic films while they are being deposited in vacuum / S. V. Andreev, E. S. Putilin // *Journal of Optical Technology*. – 2008. – 75, №4. – Р. 78–81..
4. Shamala K.S. Studies on optical and dielectric properties of Al_2O_3 thin films prepared by electron beam evaporation and spray pyrolysis method / Shamala K.S., Murthy L.C.S. and K Narasimha Rao /// *Materials Science and Engineering:B*. – 2004. – 106. – Р. 269-274.
5. Born M. Principles of Optics (4th.ed.) / M. Born, E. Wolf. – Oxford: Pergamon Press, 1970. – 856 с.
6. Оптичні властивості системи: плівка оксиду алюмінію-мідь / [В. С. Сташук, В. В. Стукаленко, Я. В. Філіпов та ін.]. // *Вісник КНУ, серія фіз.-мат. науки*. – 2012. – №3. – С. 363–366.
7. Сташук В. С. Моделювання оптичних властивостей системи плівка діелектрика-метал / В. С. Сташук, В. В. Стукаленко, О. П. Полянська. // *Вісник КНУ, серія фіз.-мат. науки*. – 2014. – №1. – С. 297–298.
8. Odarich V.A. Optical performances of dielectric coatings on copper and aluminium mirrors made by diamond microgrinding mirrors made by diamond microgrinding / V.A. Odarich, L.V. Poperenko, V.S. Staschuk, Y.V. Filipov // *Functional Materials*. – 2001. – V.10, № 3. – p. 464-466.

References

1. POPERENLO L.V., STASHCHUK V.S. (2011) *The basis of physics' optotechnique materials*. Kyiv: VPC «Kyiv Univ».
2. JUNG, JY-YUN, BRÉWSTER, M.QUINN. (2015) Optical Properties of Variable-Composition Aluminum/Alumina Thin Films, Part 2. *Journal of Thermophysics and Heat Transfer*. 29 (2). p.390-402.
3. ANDREEV, S.V., PUTILIN, E.S. (2008) Determining the optical constants of thin metallic films while they are being deposited in vacuum. *Journal of Optical Technology*. 75(4). p.78-81.
4. SHAMALA, K.S., MURTHY, L.C.S., NARASIMHA RAO, K. (2004) Studies on optical and dielectric properties of Al_2O_3 thin films prepared by electron beam evaporation and spray pyrolysis method. *Materials Science and Engineering:B*. 106. p.269-274.
5. BORN, M., WOLF, E. (1970) *Principles of Optics*. Oxford: Pergamon Press.
6. STASHCHUK, V.S. et al. (2012) Optical properties of the aluminium oxide film - copper system. *Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv Series Physics & Mathematics*. (3). p.363-366.
7. STASHCHUK, V.S., STUKALENKO, V.V., POLIANSKA, O.P. (2014) Modelling of the optical properties of the dielectric's film-metal system. *Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv Series Physics & Mathematics*. (1). p.297-298.
8. ODARICH, V.A., POPERENKO, L.V., STASCHUK, V.S., FILIPOV, Y.V. (2001) Optical performances of dielectric coatings on copper and aluminium mirrors made by diamond microgrinding mirrors made by diamond microgrinding. *Functional Materials*. 10(3). p. 464-466.

Надійшла до редколегії 16.12.2015

Підписано до друку _____. Формат _____. Друк. офс.
Папір офс. № _____. Друк. арк. _____. Тираж _____. Зам. _____.
Друкарня _____.