

**КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА**

ВІСНИК

**КИЇВСЬКОГО НАЦІОНАЛЬНОГО
УНІВЕРСИТЕТУ
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА**

СЕРІЯ ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНІ НАУКИ

ВИПУСК №1 2015



**Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка,
выпуск №1, 2015,
Серія фізико-математичні науки**

З 1991 року серії вісників Київського університету “Математика і механіка”, “Фізика”, “Моделирование и оптимизация сложных систем” реорганізовано у “Вісник Київського університету. Серія: фізико-математичні науки”. У віснику містяться результати нових досліджень у різних галузях математики, інформатики, механіки, фізики та радіофізики для наукових працівників, викладачів, аспірантів, інженерів і студентів. Друкується за рекомендаціями Вчених Рад фізичного, радіофізичного, механіко-математичного факультетів та факультету кібернетики.

Журнал “Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія фізико-математичні науки” включено до переліку фахових видань ВАК України та реферується в Реферативному журналі та базах даних ВИНІТИ, Росія, Москва.

Редакційна колегія:

Анісімов Анатолій Васильович, чл.-кор. НАН України, д.ф.-м.н., проф., **головний редактор**;
Хусаїнов Денис Яхєвич, д.ф.-м.н., проф., **заступник головного редактора, відповідальний за видання**;
Arturs Medvids, Dr. habil. Phys., prof., Riga Technical University, Riga, Latvia;
Miklós Rontó, prof., Doctor of Science, Full Professor at the University of Miskolc, Faculty of Mechanical Engineering and Information Science, Department of Analysis;
Milada Bartlova, Ph.D., Brno University of Technology, Department of Physics, Brno, Czech Republic;
Nickolai Kukhtarev, Research professor, Department of Physics, Alabama A&M University;
Sergei Gorlatch, Dr. habil., prof., professor of Computing Science, University of Muenster, Germany;
Sergey Trofimchuk, prof., Universidad de Talca, Instituto de Matematica y Fisica, Talca, Chile;
Stefan Hudak, DSc, prof., professor of Technical University of Kosice, Slovak Republic;
Toru Aoki, Ph.D., prof., Research Institute of Electronics, Shizuoka University, Japan;
Акіменко Віталій Володимирович, д.т.н., проф.;
Анісімов Ігор Олексійович, д.ф.-м.н., проф.;
Буй Дмитро Борисович, д.ф.-м.н., проф.;
Булавін Леонід Анатолійович, акад. НАН України, д.ф.-м.н., проф.;
Волошин Олексій Федорович, д.т.н., проф.;
Гарашенко Федір Георгійович, д.т.н., проф.;
Єжов Станіслав Миколайович, д.ф.-м.н., проф.;
Жук Ярослав Олександрович, д.ф.-м.н., проф.;
Заславський Володимир Анатолійович, д.т.н., доц.;
Кириченко Володимир Васильович, д.ф.-м.н., проф.;
Козаченко Юрій Васильович, д.ф.-м.н., проф.;
Кудін Володимир Іванович, д.т.н., с.н.с.;
Львов Віктор Анатолійович, д.ф.-м.н., проф.;
Макара Володимир Арсенійович, чл.-кор. НАН України, д.ф.-м.н., проф.;
Макарець Микола Володимирович, д.ф.-м.н., проф.;
Перестюк Микола Олексійович, акад. НАН України, д.ф.-м.н., проф.;
Погорілий Сергій Дем'янович, д.т.н., проф.;
Савенков Сергій Миколайович, д.ф.-м.н., доц.;
Скришевський Валерій Антонович, д.ф.-м.н., проф.

Редакційний відділ:

Анісімова Тетяна Харитонівна, **відповідальний секретар**;
Безущак Оксана Омелянівна, bezusch@univ.kiev.ua;
Стукаленко Вікторія Віталіївна, stu@univ.kiev.ua;
Родіонова Тетяна Василівна, rodtv@univ.kiev.ua;
Хмелюк Надія Кузьмівна, khmeluk@univ.kiev.ua;
Сільвейструк Людмила Миколаївна, **технічний редактор**, slm-klm@ukr.net.

Адреса редакційної колегії:

Факультет кібернетики, Київський національний університет імені Тараса Шевченка,
пр. Глушкова, 4 д, 03680 Тел. (044) 259-01-49

ISBN 978-966-2142

ISSN 1812-5409

ЗМІСТ

АЛГЕБРА, ГЕОМЕТРІЯ ТА ТЕОРІЯ ІМОВІРНОСТЕЙ

Борисенко О.Д., Борисенко О.В. Асимптотична поведінка автономної коливної системи четвертого порядку під дією багатовимірною білого шуму і не центрованого пуассонівського шуму	9
Тимошкевич Т.Д. Мартингалні оцінки для варіації і аналог критерію Макенхаупта для зваженої нерівності Пуанкаре на R	15

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ, МАТЕМАТИЧНА ФІЗИКА ТА МЕХАНІКА

Будак В.Д., Григоренко О.Я., Борисенко М.Ю., Бойчук О.В. Вплив ексцентриситету еліптичної оболонки на розподіл її динамічних характеристик	23
Григоренко О.Я., Авраменко О.А., Романишин М.В. Вільні коливання замкнених конічних оболонок зі змінною товщиною	29
Киричок І.Ф., Жук Я.О., Карнаухова Т.В. Демпфування резонансних осесиметричних коливань нескінченно довгої в'язкопружної циліндричної оболонки з п'єзоелектричними сенсором і актуатором при врахуванні вібророзігріву	35
Острик В.І. Гладкий контакт штамп поліноміального профілю з пружною півплощиною	41
Семенова І.Ю. Динаміка гіперболічного резервуара з рідиною при наявності пружинного погашувача коливань	45
Федорченко Л.М., Жук Я.О. Аналіз напружено-деформівного стану ортотропної циліндричної оболонки при різних способах закріплення контуру	49
Яровой Л.К. Лазерний доплерівський віброметр з поточним налаштуванням оптимальних параметрів трихвильового фото змішування	53

КОМП'ЮТЕРНІ НАУКИ ТА ІНФОРМАТИКА

Аль-Хазаалі Хайдер Джаббар Розробка системи виявлення лісових пожеж з використанням сенсорних мереж	61
Буй Д.Б., Пузікова А.В. Деякі неklasичні нормальні форми в реляційних базах даних	65
Веклич Р.А. Критерій оптимальності для задач керування лінійними системами з дробовими похідними	75
Власюк А.П., Дроздовський Т.А. Побудова числових конформних відображень багатозв'язних областей складної геометричної форми	79
Власюк А.П., Жуковський В.В. Математичне моделювання вертикальної міграції радіонуклідів в каталітичному пористому середовищі	89
Галкін О.А. Вибір смуги пропускання на основі ядерної оцінки щільності розподілу	96
Ганжа Р.О., Лебедев Є.О. Про нормалізовану відстань між контрольною та експериментальною вибірками	102
Гончар С.А. Передача інформації з використанням часових замків шляхом створення файло-інсталлятора з функцією саморозпакування	106
Гордійчук О.В. Приблизний евристичний алгоритм оптимізації надійності мережі	110
Демченко І.Ю. Про одну модель управління запасами	116
Донченко В.С., Скотаренко Ф.М. Прямі формули Гревіля - Кириченка для матричних евклідових просторів	119
Завадський І.О. Префіксний стискальний код на основі нижнього (2,3)-подання чисел	124
Івохін Є.В., Махно М.Ф. Розробка засобів адаптивного тестування та автоматичного оцінювання знань	130
Касьянюк В.С. Відновлення детермінованих полів, спостережуваних на фоні випадкових, за даними від нестабільних рецепторів	134
Колянова Т.В. Уточнення параметрів в математичній моделі, що описує вплив харчування та навантаження на вміст білків системи комплемента	138

Крак Ю.В., Коваль Ю.В., Ставровський А.Б. Віртуальний процес: означення та застосування в створенні системи жестового інтерфейсу	141
Марценюк В.П., Майхрук З.О. Мультиваріативний метод якісного аналізу моделі Ходжкіна-Хакслі з індукцією дерева рішень	145
Машенко С.О., Аль-Саммарраи Мохаммед Саад И. Транспортная задача с нечетким множеством целей	154
Новокшенов А.К. Захищені групові комунікації: особливості програмної реалізації	159
Розора І.В. Точність та надійність моделей випадкових процесів з дискретним спектром з урахуванням лінійного фільтру	163
Сіренко А.С. Про одну різницеву систему зі слабкою нелінійністю	168
Усар І.Я., Протопоп Ю.О., Обруч Т.П. Про швидкість збіжності стаціонарних розподілів систем з повторними викликами, керованих пороговими стратегіями	172
Харченко І.І. Роздуми про вічне (світлій пам'яті професора М.Ф. Кириченка з нагоди 75-річчя з дня народження)	176
Швець О.Ф., Сопронюк О.Л. Про розрахунок допусків на параметри лінійних динамічних систем зі змінною вимірністю фазового простору	181

РАДІОФІЗИКА

Віділ А.Ю. Дослідження явища фолдовера у феромагнітних зразках еліпсоїдальної форми	191
---	-----

СУЧАСНА ФІЗИКА

Альошін О.Д., Рудніков Є.Г., Войтешенко А.В., Білоус О.І. Зіставлення рівнянь критичної в'язкості на основі теорії динамічного скейлінгу та з урахуванням просторової дисперсії системи	199
Вергун Л.Ю. Особливості зсувної пружності ліпідних систем при низьких температурах	203
Лень Т.А., Овсієнко І.В., Мацуй Л.Ю. Отримання графеноподібних структур хімічним методом	207
Лисенко О.Б., Лисенко О.О., Калініна Т.В., Загорулько І.В., Козаченко В.В. Кінетика кристалізації зони лазерного оплавлення металів	211
Розуван Т.С., Шайкевич І.А., Розуван С.Г. Наноокислення міді	219
Юргелевич І. В., Тельбіз Г. М., Стронський О. В., Поперенко Л. В., Лопатинська О. Г., Леоненко Є. В. Оптичні властивості органо-неорганічних мезоструктурних золь-гель плівок на основі оксидів кремнію та титану з інкорпорованим барвником Родамін 6Ж	223
Ящук В.М., Терентьева Ю.Г., Штонь І.М., Коваль Ю.В., Сніцєрова О.М. Особливості спектрів люмінесценції лімфоцитів	229

CONTENTS

ALGEBRA, GEOMETRY AND PROBABILITY THEORY

Borysenko O.D. , Borysenko O.V. Asymptotic behavior of autonomous oscillating system under the action of multidimensional white noise and non-centered Poisson noise	9
Tymoshkevych T.D. A martingale bound for the variation and an analogue of the Muckenhoupt criterion for a weighted Poincare inequality on $\mathbb{R}$	15

DIFFERENTIAL EQUATIONS, MATHEMATICAL PHYSICS AND MECHANICS

Budak V.D., Grigorenko A.Ya., Borisenko M.Yu., Boychuk O.V. The elliptical shell eccentricity impact on the distribution of its dynamic characteristics	23
Grigorenko A.Ya., Avramenko O.A., Romanishyn M.V. Natural vibrations of closed conical shells with variable thickness	29
Kirichok I.F., Zhuk Y.A., Karnaukhova T.V. Damping of the resonant axisymmetric vibration of infinitely long viscoelastic cylindrical shell containing piezoelectric sensor and actuator accounting for vibroheating	35
Ostryk V.I. Smooth contact of polynomial profile with elastic half-plane	41
Semenova I.Yu. Dynamics of partially filled hyperbolic tank with a spring vibration isolator	45
Fedorchenko L.M., Zhuk Y.A. Analysis of stress-strain state of orthotropic cylindrical shell with different method of the edge fixing	49
Yarovoi L.K. The laser Doppler vibrometer with real time adjustment of three-wave interference detection	53

COMPUTER SCIENCES AND INFORMATICS

Al-Khazaali Hayder Jabbar Development system of forest fire detection by using sensor networks	61
Buy D.B., Puzikova A.V. Some nonclassical normal forms in relation databases	65
Veklych R.A. Optimality criterion for control problems for linear systems with fractional derivatives	75
Vlasyuk A.P., Drozdovskiy T. A. Numerical conformal mapping generating of multiconnected domains with complicated geometrical boundary	79
Vlasyuk A.P., Zhukovskyy V.V. Mathematical modelling of radionuclides vertical migration in catalytic porous media	89
Galkin O.A. The bandwidth selection based on kernel density estimate of distribution	96
Ganzha R. O., Lebedev E.O. About normalized distance between case and control samples	102
Gonchar S. A. Information transfer through time-lock puzzles by creating a self-unpacked “dropper”-file	106
Hordiichuk O. V. An approximate heuristic reliability network allocation algorithm	110
Demchenko I.Y. About one model of inventory control	116
Donchenko V.S., Skotarenko F.M. Direct formulas Greivil - Kirichenko for matrix Euclidean spaces	119
Zavadskiy I.O. Compressing prefix code by the means of low (2,3)-representation of numbers	124
Ivohin E.V., Makhno M.F. Adaptive testing and automatic grading methods development	130
Kasyanyuk V.S. Restoring of deterministic fields observed on a background of random fields with data from the unstable receptors	134
Kolianova T.V. Refinement of the parameters in a mathematical model that describes the impact of supply and the load on the content of proteins of the complement system	138
Krak Iu. V., Koval Iu. V., Stavrovskiy A. B. Virtual process: definition and application for gestures interface system creation	141
Marceniuk V.P., Mayhruk Z.V. Multivariate method of qualitative analysis of Hodgkin-Huxley model with the decision tree induction	145
Mashchenko S.O., Mohammed Saad I. Al-Sammarraie The transportation problem with the fuzzy set of goals	154
Novokshonov A. K. Secure group communications: details of software implementation	159

Rozora I.V. Model accuracy and reliability of stochastic processes with discrete spectrum with respect to linear filter	163
Sirenko A.S. On a difference systems with weakly nonlinear	168
Usar I.Ya., Protopop Iu.O., Obruch T.P. On the convergense rate of stationary distribution of retrial systems to control the threshold strategies	172
Kharchenko I.I. "Eternity Reflections" (light memory of professor M.F. Kirichenko in occasion of 75 anniversary of the birth)	176
Shvets O.F., Sopronuk O.L. Models for sensitivity analysis of discontinuous dynamical systems with variable-dimension phase space	181

RADIOPHYSICS

Vidil A.Yu. Investigation of foldover phenomenon in ferromagnetic ellipsoid	191
---	-----

MODERN PHYSICS

Alekhin A.D. , Rudnikov Ye.G., Voiteshenko A.V., Bilous O.I. Comparison of the critical viscosity equations based on the theory of dynamic scaling and taking into account the system spatial dispersion	199
Vergun L.Yu. The Peculiarities of Shear Elasticity of the Lipid Systems at Low Temperatures	203
Len T. A., Ovsiienko I. V., Matzui L. Yu. Getting graphenelike structures by chemical method	207
Lysenko A.B., Lysenko A.A., Kalinina T.V., Zagorulko I.V., Kozachenko V.V. Crystallization kinetics of laser metals infusion zone	211
Rozouvan T.S., Shaykevich I.A., Rozouvan S.G., Nanooxidation of copper	219
Yurglevych I.V., Tel'biz G.M., Stronskyi O.V., Poperenko L.V., Lopatynska O.G., Leonenko E.V. Optical properties of organic-inorganic mesostructure sol-gel films based on the silicium and titanium oxide with incorporated rodamine 6G dye	223
Yashchuk V.M., Terent'yeva J.G., Shton I.M., Koval J.V., Snitserova O.M. Some peculiarities of the lymphocytes luminescence spectra	229

АЛГЕБРА, ГЕОМЕТРІЯ ТА ТЕОРІЯ ІМОВІРНОСТЕЙ



УДК 519.21

О.Д. Борисенко¹, к.ф.-м.н., доцент
О.В. Борисенко², к.ф.-м.н., доцент

**Асимптотична поведінка автономної
коливної системи четвертого порядку
під дією багатовимірного білого шуму і
нецентрованого пуассонівського шуму**

¹Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 01033, Київ, вул. Володимирська, 64.

²Національний технічний університет України "КПІ", 03056, Київ, просп. Перемоги, 37
e-mail: ¹odb@univ.kiev.ua

O.D. Borysenko¹, Ph.D., Associate Professor
O.V. Borysenko², Ph.D., Associate Professor
**Asymptotic behavior of autonomous
oscillating system under the action of
multidimensional white noise and
non-centered Poisson noise**

¹Taras Shevchenko National University of Kyiv, 01033, Kyiv, 64 Volodymyrska st.,

²National Technical University of Ukraine "KPI", 03056, Kyiv, 37 Peremogy prospect
e-mail: ¹odb@univ.kiev.ua

У роботі вивчається асимптотична поведінка автономної коливної системи, яка описується диференціальним рівнянням четвертого порядку з малими нелінійними зовнішніми збуреннями типу багатовимірного "білого" та нецентрованого Пуассонівського шумів. Розглядається випадок пари дійсних і пари спряжених чисто уявних коренів характеристичного рівняння.

Ключові слова: асимптотична поведінка, автономна коливна система, стохастичне диференціальне рівняння.

The asymptotic behavior of autonomous oscillating system described by differential equation of fourth order with small non-linear external perturbations of multidimensional "white noise" and non-centered "Poisson noise" types is studied. Every term of external perturbations has own order of small parameter ε . If small parameter is equal to zero, then general solution of obtained non-stochastic fourth order differential equation has an oscillating part. We consider given differential equation with external stochastic perturbations as the system of stochastic differential equations and study the limit behavior of its solution at the time moment t/ε^k , as $\varepsilon \rightarrow 0$. The system of averaging stochastic differential equations is derived and its dependence on the order of small parameter in every term of external perturbations is studied. The case of pair of real and pair of pure imaginary conjugate roots of characteristic equation is considered.

Key Words: asymptotic behavior, autonomous oscillating system, stochastic differential equation.
Communicated by Prof. Kozachenko Yu.V.

1 Introduction

The averaging method proposed by N.M.Krylov, N.N.Bogolyubov and Yu.A.Mytropolskij ([1], [2]) is one of the main tool in studying of the deterministic oscillating systems under the action of small non-linear perturbations. The autonomous and non-autonomous oscillating systems of second order under the action of "white noise" and Poisson type noise perturbations are studied in the papers of O.V.Borysenko ([4]). Particular case of the third order oscillating systems are investigated in articles of O.D.Borysenko, O.V.Borysenko ([5]), O.D.Borysenko, O.V.Borysenko and I.G.Malyshch ([6]). Limit behavior of autonomous and non-autonomous general type third order oscillating

system under the action of external small nonlinear random disturbances such as multidimensional "white noise" and "Poisson noise" was studied in ([7], [8]).

This paper deals with investigation of the behavior, as $\varepsilon \rightarrow 0$, of the fourth order autonomous oscillating system driven by stochastic differential equation

$$x^{IV}(t) + b_1 x'''(t) + b_2 x''(t) + b_3 x'(t) + b_4 x(t) = \\ = \varepsilon^{k_0} f_0(x(t), x'(t), x''(t), x'''(t)) + \\ + f_\varepsilon(x(t), x'(t), x''(t), x'''(t)) \quad (1)$$

with non-random initial conditions $x(0) = x_0^{(1)}$, $x'(0) = x_0^{(2)}$, $x''(0) = x_0^{(3)}$, $x'''(0) = x_0^{(4)}$, where $\varepsilon > 0$ is a small parameter, $f_\varepsilon(x, x', x'', x''')$ is a

random function such that

$$\begin{aligned} \int_0^t f_\varepsilon(x(s), x'(s), x''(s), x'''(s)) ds &= \sum_{i=1}^m \varepsilon^{k_i} \times \\ &\times \int_0^t f_i(x(s), x'(s), x''(s), x'''(s)) dw_i(s) + \varepsilon^{k_{m+1}} \times \\ &\times \int_0^t \int_{\mathbb{R}} f_{m+1}(x(s), x'(s), x''(s), x'''(s), z) \nu(ds, dz), \end{aligned}$$

$k_i > 0, i = \overline{0, m+1}$; f_i are non-random functions $i = \overline{0, m+1}$; $w_i(t), i = \overline{1, m}$ are independent one-dimensional Wiener processes; $\nu(dt, dy)$ is the Poisson measure independent on $w_i(t), i = \overline{1, m}$, $E\nu(dt, dy) = \Pi(dy)dt$, $\tilde{\nu}(dt, dy) = \nu(dt, dy) - \Pi(dy)dt$, $\Pi(A)$ is a finite measure on Borel sets $A \in \mathbb{R}$.

We will consider the equation (1) as the system of stochastic differential equations

$$\begin{aligned} dy_i(t) &= y_{i+1}(t)dt, \quad i = \overline{1, 3} \\ dy_4(t) &= \left[- (b \cdot y(t)) + \varepsilon^{k_0} f_0(y(t)) + \right. \\ &\quad \left. + \varepsilon^{k_{m+1}} \int_{\mathbb{R}} f_{m+1}(y(t), z) \Pi(dz) \right] dt + \\ &\quad + \sum_{i=1}^m \varepsilon^{k_i} f_i(y(t)) dw_i(t) + \\ &\quad + \varepsilon^{k_{m+1}} \int_{\mathbb{R}} f_{m+1}(y(t), z) \tilde{\nu}(dt, dz), \\ y(t) &= \{y_i(t)\}_{i=\overline{1,4}}, \quad b = (b_4, b_3, b_2, b_1), \\ y_i(0) &= x_0^{(i)}, \quad i = \overline{1, 4} \end{aligned} \quad (2)$$

$(b \cdot y(t))$ – is a scalar product of vectors b and $y(t)$.

In what follows we will use the constant $K > 0$ for the notation of different constants, which are not depend on ε .

2 Main result

We will study the asymptotic behavior of given oscillating system, as $\varepsilon \rightarrow 0$, in the case when there exists stable harmonic oscillations at the system under condition $\varepsilon = 0$. Under this condition corresponding characteristic equation has a form

$$\lambda^4 + b_1 \lambda^3 + b_2 \lambda^2 + b_3 \lambda + b_4 = 0.$$

This paper deals with the following case:

$$b_1 > 0, \quad b_3 > 0, \quad b_1 b_2 > b_3, \quad b_1^2 > 4(b_2 - \frac{b_3}{b_1}),$$

$b_1^2 b_4 = b_3(b_1 b_2 - b_3)$. Characteristic equation has a roots

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -\eta_1, \quad \lambda_2 = -\eta_2, \quad \lambda_{3,4} = \pm i\omega, \quad \text{where} \\ \eta_{1,2} &= \frac{1}{2} \left(b_1 \pm \sqrt{b_1^2 - 4 \left(b_2 - \frac{b_3}{b_1} \right)} \right), \quad \omega^2 = \frac{b_3}{b_1}. \end{aligned}$$

If $\varepsilon = 0$ then the equation (1) has general solution in the form

$$x(t) = C_1 e^{-\eta_1 t} + C_2 e^{-\eta_2 t} + A_1 \cos \omega t + A_2 \sin \omega t$$

Let us consider the following representation of the process $y(t)$:

$$\begin{aligned} y_1(t) &= N_1(t) + N_2(t) + \\ &\quad + A_1(t) \cos \omega t + A_2(t) \sin \omega t, \\ y_2(t) &= -\eta_1 N_1(t) - \eta_2 N_2(t) - \\ &\quad - A_1(t) \omega \sin \omega t + A_2(t) \omega \cos \omega t, \\ y_3(t) &= \eta_1^2 N_1(t) + \eta_2^2 N_2(t) - \\ &\quad - A_1(t) \omega^2 \cos \omega t - A_2(t) \omega^2 \sin \omega t, \\ y_4(t) &= -\eta_1^3 N_1(t) - \eta_2^3 N_2(t) + \\ &\quad + A_1(t) \omega^3 \sin \omega t - A_2(t) \omega^3 \cos \omega t, \\ N_i(t) &= C_i(t) \exp\{-\eta_i t\}, \quad i = 1, 2. \end{aligned} \quad (3)$$

We can solve the system of linear equations (3) with respect to $(N_1(t), N_2(t), A_1(t), A_2(t))$ and using the Ito formula we derive the system of stochastic differential equations:

$$\begin{aligned} dN_1(t) &= -\eta_1 N_1(t) dt + \frac{1}{(\eta_2 - \eta_1)(\eta_1^2 + \omega^2)} dH(t), \\ dN_2(t) &= -\eta_2 N_2(t) dt - \frac{1}{(\eta_2 - \eta_1)(\eta_2^2 + \omega^2)} dH(t), \\ dA_1(t) &= \frac{-\omega(\eta_1 + \eta_2) \cos \omega t + (\omega^2 - \eta_1 \eta_2) \sin \omega t}{\omega(\eta_1^2 + \omega^2)(\eta_2^2 + \omega^2)} dH(t), \\ dA_2(t) &= \frac{-\omega(\eta_1 + \eta_2) \sin \omega t - (\omega^2 - \eta_1 \eta_2) \cos \omega t}{\omega(\eta_1^2 + \omega^2)(\eta_2^2 + \omega^2)} dH(t), \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} dH(t) &= \left[\varepsilon^{k_0} \tilde{f}_0(\omega t, \xi(t)) + \right. \\ &\quad \left. + \varepsilon^{k_{m+1}} \int_{\mathbb{R}} \tilde{f}_{m+1}(\omega t, \xi(t), z) \Pi(dz) \right] dt + \\ &\quad + \sum_{i=1}^m \varepsilon^{k_i} \tilde{f}_i(\omega t, \xi(t)) dw_i(t) + \\ &\quad + \varepsilon^{k_{m+1}} \int_{\mathbb{R}} \tilde{f}_{m+1}(\omega t, \xi(t), z) \tilde{\nu}(dt, dz), \end{aligned}$$

where $\xi(t) = (N_1(t), N_2(t), A_1(t), A_2(t))$, $\tilde{f}_i(\omega t, N_1, N_2, A_1, A_2)$, $i = \overline{0, m}$ are obtained from $f_i(y(t))$, $i = \overline{0, m}$ and $\tilde{f}_{m+1}(\omega t, N_1, N_2, A_1, A_2, z)$ is obtained from $f_{m+1}(y(t), z)$ using (3).

Theorem 2.1. Let $\Pi(\mathbb{R}) < \infty$, $t \in [0, t_0]$, $k = \min(k_0, 2k_1, \dots, 2k_m, k_{m+1})$. Let us suppose, that functions $f_j, j = \overline{0, m+1}$ bounded and satisfy Lipschitz condition on $y_i, i = \overline{1, 4}$. If given below matrix $\bar{\sigma}^2(A_1, A_2)$ is non-negative definite, then

1. If $k_0 = 2k_i = k_{m+1}$, $i = \overline{1, m}$ then the stochastic process $\xi_\varepsilon(t) = \xi(t/\varepsilon^k)$ weakly converges, as $\varepsilon \rightarrow 0$, to the stochastic process $\bar{\xi}(t) = (0, 0, \bar{A}_1(t), \bar{A}_2(t))$, where $\bar{A}(t) = (\bar{A}_1(t), \bar{A}_2(t))$ is the solution to the system of stochastic differential equations

$$\begin{aligned} d\bar{A}(t) &= \bar{\alpha}(\bar{A}(t))dt + \bar{\sigma}(\bar{A}(t))d\bar{w}(t), \\ \bar{A}(0) &= (A_1(0), A_2(0)), \end{aligned} \quad (5)$$

where

$$\bar{\alpha}(A_1, A_2) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \hat{f}_{(1)}(\phi, A_1, A_2) \Psi(\phi) d\phi,$$

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}(A_1, A_2) &= \{\bar{B}(A_1, A_2)\}^{\frac{1}{2}} = \\ &= \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \hat{f}_{(2)}(\phi, A_1, A_2) \Psi(\phi) \Psi^T(\phi) d\phi \right\}^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Psi(\phi) &= \frac{1}{\omega(\eta_1^2 + \omega^2)(\eta_2^2 + \omega^2)} \times \\ &\times \begin{pmatrix} -\omega(\eta_1 + \eta_2) \cos \phi + (\omega^2 - \eta_1 \eta_2) \sin \phi \\ -\omega(\eta_1 + \eta_2) \sin \phi - (\omega^2 - \eta_1 \eta_2) \cos \phi \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{f}_{(1)}(\phi, A_1, A_2) &= \tilde{f}_0(\phi, 0, 0, A_1, A_2) + \\ &+ \int_{\mathbb{R}} \tilde{f}_{m+1}(\phi, 0, 0, A_1, A_2, z) \Pi(dz), \end{aligned}$$

$$\hat{f}_{(2)}(\phi, A_1, A_2) = \sum_{i=1}^m \tilde{f}_i^2(\phi, 0, 0, A_1, A_2),$$

$\Psi^T(\phi)$ is the vector transpose to vector $\Psi(\phi)$, $\bar{w}(t) = (\bar{w}_i(t), i = 1, 2)$, $\bar{w}_i(t), i = 1, 2$ – independent one-dimensional Wiener processes.

2. If $k < k_0$ then in the averaging equation (5) we must put $\tilde{f}_0 \equiv 0$; if $k < 2k_j$ for some $1 \leq j \leq m$, then in the averaging equation (5) we must put $\tilde{f}_j \equiv 0$ for all such j ; if $k < k_{m+1}$ then in the averaging equation (5) we must put $\tilde{f}_{m+1} \equiv 0$.

Доведення. Let us make a change of variable $t \rightarrow t/\varepsilon^k$ at the system (4) and obtain for the process $\xi_\varepsilon(t) = (N_1^\varepsilon(t), N_2^\varepsilon(t), A_1^\varepsilon(t), A_2^\varepsilon(t)) = (N_1(t/\varepsilon^k), N_2(t/\varepsilon^k), A_1(t/\varepsilon^k), A_2(t/\varepsilon^k))$ the system of stochastic differential equations

$$\begin{aligned} dN_1^\varepsilon(t) &= -\frac{\eta_1}{\varepsilon^k} N_1^\varepsilon(t) dt + \frac{1}{(\eta_2 - \eta_1)(\eta_1^2 + \omega^2)} dH_\varepsilon(t), \\ dN_2^\varepsilon(t) &= -\frac{\eta_2}{\varepsilon^k} N_2^\varepsilon(t) dt - \frac{1}{(\eta_2 - \eta_1)(\eta_2^2 + \omega^2)} dH_\varepsilon(t), \\ dA_1^\varepsilon(t) &= \Psi_1(\omega t/\varepsilon^k) dH_\varepsilon(t), \\ dA_2^\varepsilon(t) &= \Psi_2(\omega t/\varepsilon^k) dH_\varepsilon(t), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} dH_\varepsilon(t) &= \left[\varepsilon^{k_0-k} \tilde{f}_0\left(\frac{\omega t}{\varepsilon^k}, \xi_\varepsilon(t)\right) + \right. \\ &+ \varepsilon^{k_{m+1}-k} \int_{\mathbb{R}} \tilde{f}_{m+1}\left(\frac{\omega t}{\varepsilon^k}, \xi_\varepsilon(t), z\right) \Pi(dz) \Big] dt + \\ &+ \sum_{i=1}^m \varepsilon^{k_i-k/2} \tilde{f}_i\left(\frac{\omega t}{\varepsilon^k}, \xi_\varepsilon(t)\right) dw_i^\varepsilon(t) + \\ &+ \varepsilon^{k_{m+1}} \int_{\mathbb{R}} \tilde{f}_{m+1}\left(\frac{\omega t}{\varepsilon^k}, \xi_\varepsilon(t), z\right) \tilde{\nu}_\varepsilon(dt, dz), \end{aligned}$$

where $\Psi_i(\phi), i = 1, 2$ is a components of vector $\Psi(\phi)$, $w_i^\varepsilon(t) = \varepsilon^{k/2} w_i(t/\varepsilon^k)$, $\tilde{\nu}_\varepsilon(t, A) = \nu(t/\varepsilon^k, A) - \Pi(A)t/\varepsilon^k$, here A is a Borel set in $\mathbb{R}$. For each $\varepsilon > 0$ the process $w_i^\varepsilon(t), i = \overline{1, m}$ are independent one-dimensional Wiener processes, and $\tilde{\nu}_\varepsilon(t, A)$ is the centered Poisson measure independent on $w_i^\varepsilon(t), i = \overline{1, m}$.

We have $N_i^\varepsilon(t) = \exp\{-\eta_i t/\varepsilon^k\} C_i(t/\varepsilon^k)$, $i = 1, 2$ and processes $C_i^\varepsilon(t) = C_i(t/\varepsilon^k), i = 1, 2$ satisfy the stochastic differential equations

$$dC_1^\varepsilon(t) = \frac{e^{\eta_1 t/\varepsilon^k}}{(\eta_2 - \eta_1)(\eta_1^2 + \omega^2)} dH_\varepsilon(t),$$

$$dC_2^\varepsilon(t) = -\frac{e^{\eta_2 t/\varepsilon^k}}{(\eta_2 - \eta_1)(\eta_2^2 + \omega^2)} dH_\varepsilon(t),$$

where $|C_i^\varepsilon(0)| \leq K, i = 1, 2$.

From boundedness of functions $f_i, i = \overline{0, m+1}$ and condition $\Pi(\mathbb{R}) < \infty$ we can obtain the estimate

$$\begin{aligned} \mathbb{E}|N_i^\varepsilon(t)|^2 &\leq K[e^{-2\eta_i t/\varepsilon^k} + \varepsilon^k(1 - e^{-2\eta_i t/\varepsilon^k}) \times \\ &\times (t(\varepsilon^{2(k_0-k)} + \varepsilon^{2(k_{m+1}-k)}) + \sum_{i=1}^{m+1} \varepsilon^{2k_i-k})], \\ i &= 1, 2. \end{aligned}$$

Therefore $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbb{E}|N_i^\varepsilon(t)|^2 = 0, i = 1, 2$ and it is sufficient to study the behavior, as $\varepsilon \rightarrow 0$, of solution to the system of stochastic differential equations

$$dA_i^\varepsilon(t) = \Psi_i(\omega t/\varepsilon^k) d\hat{H}_\varepsilon(t), i = 1, 2 \quad (6)$$

with initial conditions $A_1^\varepsilon(0) = A_1(0), A_2^\varepsilon(0) = A_2(0)$, where

$$\begin{aligned} d\hat{H}_\varepsilon(t) &= \left[\varepsilon^{k_0-k} \hat{f}_0\left(\frac{\omega t}{\varepsilon^k}, A_1^\varepsilon(t), A_2^\varepsilon(t)\right) + \right. \\ &+ \varepsilon^{k_{m+1}-k} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}_{m+1}\left(\frac{\omega t}{\varepsilon^k}, A_1^\varepsilon(t), A_2^\varepsilon(t), z\right) \Pi(dz) \Big] dt + \\ &+ \sum_{i=1}^m \varepsilon^{k_i-k/2} \hat{f}_i\left(\frac{\omega t}{\varepsilon^k}, A_1^\varepsilon(t), A_2^\varepsilon(t)\right) dw_i^\varepsilon(t) + \\ &+ \varepsilon^{k_{m+1}} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}_{m+1}\left(\frac{\omega t}{\varepsilon^k}, A_1^\varepsilon(t), A_2^\varepsilon(t), z\right) \tilde{\nu}_\varepsilon(dt, dz), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\hat{f}_j(t, A_1, A_2) &= \tilde{f}_j(t, 0, 0, A_1, A_2), \quad j = \overline{0, m} \\ \hat{f}_{m+1}(t, A_1, A_2, z) &= \tilde{f}_{m+1}(t, 0, 0, A_1, A_2, z).\end{aligned}$$

Let us denote $A_\varepsilon(t) = (A_1^\varepsilon(t), A_2^\varepsilon(t))$. Using conditions on coefficients of equation (6) and properties of stochastic integrals we obtain estimates

$$\begin{aligned}\mathbb{E}||A_\varepsilon(t)||^2 &\leq K[1 + t^2(\varepsilon^{2(k_0-k)} + \\ &+ \varepsilon^{2(k_{m+1}-k)}) + t \sum_{i=1}^{m+1} \varepsilon^{2k_i-k}], \\ \mathbb{E}||A_\varepsilon(t) - A_\varepsilon(s)||^2 &\leq K[|t-s|^2(\varepsilon^{2(k_0-k)} + \\ &+ \varepsilon^{2(k_{m+1}-k)}) + |t-s| \sum_{i=1}^{m+1} \varepsilon^{2k_i-k}].\end{aligned}$$

Similarly for the process $\zeta_\varepsilon(t) = (\zeta_1^\varepsilon(t), \zeta_2^\varepsilon(t))$, $i = 1, 2$, where

$$\begin{aligned}\zeta_i^\varepsilon(t) &= \int_0^t \Psi_i\left(\frac{\omega s}{\varepsilon^k}\right) dM_\varepsilon(s), \quad i = 1, 2, \\ dM_\varepsilon(t) &= \\ &= \sum_{i=1}^m \varepsilon^{k_i-k/2} \hat{f}_i\left(\frac{\omega t}{\varepsilon^k}, A_1^\varepsilon(t), A_2^\varepsilon(t)\right) dw_i^\varepsilon(t) + \\ &+ \varepsilon^{k_{m+1}} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}_{m+1}\left(\frac{\omega t}{\varepsilon^k}, A_1^\varepsilon(t), A_2^\varepsilon(t), z\right) \tilde{\nu}_\varepsilon(dt, dz),\end{aligned}$$

we derive estimates

$$\begin{aligned}\mathbb{E}||\zeta_\varepsilon(t)||^2 &\leq Kt \sum_{i=1}^{m+1} \varepsilon^{2k_i-k}, \\ \mathbb{E}||\zeta_\varepsilon(t) - \zeta_\varepsilon(s)||^2 &\leq K|t-s| \sum_{i=1}^{m+1} \varepsilon^{2k_i-k}.\end{aligned}$$

Therefore for stochastic process $\eta_\varepsilon(t) = (A_\varepsilon(t), \zeta_\varepsilon(t))$ conditions of weak compactness [9] are fulfilled

$$\lim_{h \downarrow 0} \overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{|t-s| < h} \mathbb{P}\{|\eta_\varepsilon(t) - \eta_\varepsilon(s)| > \delta\} = 0$$

for any $\delta > 0$, $t, s \in [0, T]$,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{t \in [0, T]} \mathbb{P}\{|\eta_\varepsilon(t)| > N\} = 0,$$

and for any sequence $\varepsilon_n \rightarrow 0, n = 1, 2, \dots$ there exists a subsequence $\varepsilon_m = \varepsilon_{n(m)} \rightarrow 0, m = 1, 2, \dots$, probability space, stochastic processes $\bar{A}_{\varepsilon_m}(t) = (\bar{A}_1^{\varepsilon_m}(t), \bar{A}_2^{\varepsilon_m}(t))$, $\bar{\zeta}_{\varepsilon_m}(t)$, $\bar{A}(t) = (\bar{A}_1(t), \bar{A}_2(t))$, $\bar{\zeta}(t)$ defined on this space, such that $\bar{A}_{\varepsilon_m}(t) \rightarrow \bar{A}(t)$, $\bar{\zeta}_{\varepsilon_m}(t) \rightarrow \bar{\zeta}(t)$ in probability, as $\varepsilon_m \rightarrow 0$, and finite-dimensional distributions of $\bar{A}_{\varepsilon_m}(t)$, $\bar{\zeta}_{\varepsilon_m}(t)$ are coincide with finite-dimensional

distributions of $A_{\varepsilon_m}(t)$, $\zeta_{\varepsilon_m}(t)$. Since we interesting in limit behaviour of distributions, we can consider processes $A_{\varepsilon_m}(t)$, and $\zeta_{\varepsilon_m}(t)$ instead of $\bar{A}_{\varepsilon_m}(t)$, $\bar{\zeta}_{\varepsilon_m}(t)$. From (6) we obtain equation

$$\begin{aligned}A_{\varepsilon_m}(t) &= A(0) + \int_0^t \alpha_{\varepsilon_m}(s, A_{\varepsilon_m}(s)) ds + \zeta_{\varepsilon_m}(t), \\ A(0) &= (A_1(0), A_2(0)),\end{aligned}\tag{7}$$

where $\alpha_\varepsilon(t, A) = (\alpha_1^\varepsilon(t, A_1, A_2), \alpha_2^\varepsilon(t, A_1, A_2))$,

$$\alpha_i^\varepsilon(t, A_1, A_2) = \Psi_i\left(\frac{\omega t}{\varepsilon^k}\right) \hat{f}_{(1)}^\varepsilon\left(\frac{\omega t}{\varepsilon^k}, A_1, A_2\right),$$

$$\begin{aligned}\hat{f}_{(1)}^\varepsilon(t, A_1, A_2) &= \varepsilon^{k_0-k} \hat{f}_0(t, A_1, A_2) + \\ &+ \varepsilon^{k_{m+1}-k} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}_{m+1}(t, A_1, A_2, z) \Pi(dz).\end{aligned}$$

It should be noted that process $\zeta_\varepsilon(t)$ is the vector-valued square integrable martingale with matrix characteristic

$$\begin{aligned}\langle \zeta_\varepsilon^{(l)}, \zeta_\varepsilon^{(n)} \rangle(t) &= \sum_{j=1}^m \int_0^t \sigma_\varepsilon^{(l,j)}(s, A_1^\varepsilon(s), A_2^\varepsilon(s)) \times \\ &\times \sigma_\varepsilon^{(n,j)}(s, A_1^\varepsilon(s), A_2^\varepsilon(s)) ds + \\ &+ \frac{1}{\varepsilon^k} \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \gamma_\varepsilon^{(l)}(s, A_1^\varepsilon(s), A_2^\varepsilon(s), z) \times \\ &\times \gamma_\varepsilon^{(n)}(s, A_1^\varepsilon(s), A_2^\varepsilon(s), z) \Pi(dz) ds, \quad l, n = 1, 2,\end{aligned}$$

where

$$\begin{aligned}\sigma_\varepsilon^{(1,j)}(s, A_1, A_2) &= \\ &= \varepsilon^{k_j-k/2} \Psi_1\left(\frac{\omega s}{\varepsilon^k}\right) \hat{f}_j\left(\frac{\omega s}{\varepsilon^k}, A_1, A_2\right), \\ \sigma_\varepsilon^{(2,j)}(s, A_1, A_2) &= \\ &= \varepsilon^{k_j-k/2} \Psi_2\left(\frac{\omega s}{\varepsilon^k}\right) \hat{f}_j\left(\frac{\omega s}{\varepsilon^k}, A_1, A_2\right), \\ \gamma_\varepsilon^{(1)}(s, A_1, A_2, z) &= \\ &= \varepsilon^{k_{m+1}} \Psi_1\left(\frac{\omega s}{\varepsilon^k}\right) \hat{f}_{m+1}\left(\frac{\omega s}{\varepsilon^k}, A_1, A_2, z\right), \\ \gamma_\varepsilon^{(2)}(s, A_1, A_2, z) &= \\ &= \varepsilon^{k_{m+1}} \Psi_2\left(\frac{\omega s}{\varepsilon^k}\right) \hat{f}_{m+1}\left(\frac{\omega s}{\varepsilon^k}, A_1, A_2, z\right).\end{aligned}$$

For processes $A_\varepsilon(t)$ and $\zeta_\varepsilon(t)$ following estimates hold

$$\begin{aligned}\mathbb{E}||A_\varepsilon(t) - A_\varepsilon(s)||^4 &\leq \\ &\leq K[(\varepsilon^{4(k_0-k)} + \varepsilon^{4(k_{m+1}-k)})|t-s|^4 + \\ &+ \mathbb{E}||\zeta_\varepsilon(t) - \zeta_\varepsilon(s)||^4],\end{aligned}\tag{8}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}||\zeta_\varepsilon(t) - \zeta_\varepsilon(s)||^4 &\leq \\ &\leq K\left[\sum_{j=1}^{m+1} \varepsilon^{4k_j-2k}|t-s|^2 + \right. \\ &\left. + \varepsilon^{4k_{m+1}-3k/2}|t-s|^{3/2} + \varepsilon^{4k_{m+1}-k}|t-s|\right],\end{aligned}\tag{9}$$

$$\begin{aligned} E\|A_\varepsilon(t) - A_\varepsilon(s)\|^8 &\leq K, \\ E\|\zeta_\varepsilon(t) - \zeta_\varepsilon(s)\|^8 &\leq K. \end{aligned} \quad (10)$$

Since $A_{\varepsilon_m}(t) \rightarrow \bar{A}(t)$, $\zeta_{\varepsilon_m}(t) \rightarrow \bar{\zeta}(t)$ in probability, as $\varepsilon_m \rightarrow 0$, then, using (10), from (8) and (9) we obtain estimates

$$\begin{aligned} E\|\bar{A}(t) - \bar{A}(s)\|^4 &\leq K(|t - s|^4 + |t - s|^2), \\ E\|\bar{\zeta}(t) - \bar{\zeta}(s)\|^4 &\leq C|t - s|^2. \end{aligned}$$

Therefore processes $\bar{A}(t)$ and $\bar{\zeta}(t)$ satisfy the Kolmogorov's continuity condition [10].

Let us consider the case $k_0 = 2k_j = k_{m+1}$, $j = \overline{1, m}$. Under these conditions we have for $l, n = 1, 2$

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{t} \int_0^t \alpha_\varepsilon^{(l)}(s, A_1, A_2) ds &= \bar{\alpha}^{(l)}(A_1, A_2), \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{t} \int_0^t \left[\sum_{j=1}^m \sigma_\varepsilon^{(l,j)}(s, A_1, A_2) \sigma_\varepsilon^{(n,j)}(s, A_1, A_2) + \right. \\ &+ \frac{1}{\varepsilon^k} \int_R \gamma_\varepsilon^{(l)}(s, A_1, A_2, z) \times \\ &\left. \times \gamma_\varepsilon^{(n)}(s, A_1, A_2, z) \Pi(dz) \right] ds = \bar{B}_{ln}(A_1, A_2), \end{aligned} \quad (11)$$

where functions $\bar{\alpha}^{(i)}(A_1, A_2)$ and $\bar{B}(A_1, A_2) = \{\bar{B}_{ij}(A_1, A_2), i, j = 1, 2\}$ are defined in the condition of theorem. Since processes $\bar{A}(t), \bar{\zeta}(t)$ are continuous, then from (Lemma 1 [7]) and relationships (7), (11) it follows

$$\begin{aligned} \bar{A}(t) &= A(0) + \int_0^t \bar{\alpha}(\bar{A}_1(s), \bar{A}_2(s)) ds + \bar{\zeta}(t), \\ A(0) &= (A_1(0), A_2(0)), \end{aligned} \quad (12)$$

where $\bar{\zeta}(t)$ is continuous vector-valued martingale

with matrix characteristic

$$\langle \bar{\zeta}^{(i)}, \bar{\zeta}^{(j)} \rangle(t) = \int_0^t \bar{B}_{ij}(\bar{A}_1(s), \bar{A}_2(s)) ds, i, j = 1, 2.$$

Hence [11] there exists Wiener process $\bar{w}(t) = (\bar{w}_i(t), i = 1, 2)$, such that

$$\begin{aligned} \bar{\zeta}(t) &= \int_0^t \bar{\sigma}(\bar{A}_1(s), \bar{A}_2(s)) d\bar{w}(s), \\ \bar{\sigma}(A_1, A_2) &= \{\bar{B}(A_1, A_2)\}^{1/2}. \end{aligned} \quad (13)$$

Relationships (12), (13) mean that process $\bar{A}(t)$ satisfies equation (4). Under conditions of theorem the equation (4) has unique solution. Therefore process $\bar{A}(t)$ does not depend on choosing of sub-sequence $\varepsilon_m \rightarrow 0$, and finite-dimensional distributions of process $A_{\varepsilon_m}(t)$ converge to finite-dimensional distributions of process $\bar{A}(t)$. Since processes $A_{\varepsilon_m}(t)$ and $\bar{A}(t)$ are Markov processes then using the conditions for weak convergence of Markov processes we finish the proof of statement 1 of theorem.

Let us consider the case $k < k_0$ or $k < k_{m+1}$. Then the corresponding terms in the coefficients $\alpha_\varepsilon^{(i)}(t, A_1, A_2), i = 1, 2$ of equation (7) tend to zero, as $\varepsilon \rightarrow 0$.

In the case $k < 2k_j, j = \overline{1, m}$ in (11) we have $\sigma_\varepsilon^{(l,j)}(t, A_1, A_2) \sigma_\varepsilon^{(n,j)}(t, A_1, A_2) = O(\varepsilon^{2k_j - k}), l, n = 1, 2$. Repeating with obvious modifications the proof of statement 1) of theorem we obtain proof of the statement 2).

□

Список використаних джерел

1. Крылов Н.М. Введение в нелинейную механику / Н.М. Крылов, Н.Н. Боголюбов. – Киев: Изд-во АН УССР – 1937. – 363 с.
2. Боголюбов Н.Н. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний / Н.Н. Боголюбов, Ю.А. Митропольский. – М.: Наука. – 1974. – 501 с.
3. Борисенко О.В. Малые случайные возмущения в колебательных системах второго порядка / О.В. Борисенко // Украинский математический журнал. – 1992. – 44. – №1. – С. 11 – 17.

References

1. KRYLOV, N.M. and BOGOLYUBOV, N.N. (1937), *Vvedenie v nelineynuyu mehaniku*, Kiev: Izd-vo AN USSR, 363 p.
2. BOGOLYUBOV, N.N. and MITROPOLSKIY, Yu.A. (1974), *Asymptoticheskie metody v teorii nelineynykh kolebaniy*, M.: Nauka, 501 p.
3. BORYSENKO, O.V. (1992), "Malyye sluchajnye vozmushcheniya v kolebatelnykh sistemah vtorogo poryadka", *Ukrainskii Matematicheskij Zhurnal*, v.44, №1, pp.11-17.

4. Борисенко О.В. Поведение неавтономной колебательной системы под воздействием малых случайных возмущений в резонансном случае / О.В. Борисенко // Украинский математический журнал. – 1992. – **44**. – №12. – С. 1645 – 1651.
5. Борисенко О.Д. Асимптотическое поведение стохастической динамической системы / О.Д. Борисенко, О.В. Борисенко // Теория оптимальных решений. – Киев: Ин-т кибернетики НАН Украины. – 1999. – С. 38 – 44.
6. Borysenko O.D. Asymptotic behavior of third order random oscillation system in the resonance case / O.D. Borysenko, O.V. Borysenko, I.G. Malyshev // Theory of Stoch. Proc. – 2003. – **9(25)**. – №3-4. – P. 1 – 11.
7. Borysenko O.D. Averaging method for autonomous third order random oscillating system / O.D. Borysenko, O.V. Borysenko, D.O. Borysenko // Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series: Physics & Mathematics – 2013. – №4. – P. 7 – 11.
8. Borysenko O.D. Averaging method for non-autonomous third order random oscillating system in non-resonance case / O.D. Borysenko, O.V. Borysenko // Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series: Physics & Mathematics – 2014. – №1. – P. 7 – 11.
9. Скороход А.В. Исследования по теории случайных процессов / А.В. Скороход // К.: Изд. Киевского университета. – 1961.
10. Гихман И.И. Теория случайных процессов, т.1 / И.И. Гихман, А.В. Скороход // М.: Наука. – 1971. – 664 с.
11. N.Ikeda Stochastic Differential Equations and Diffusion Processes / N.Ikeda, S.Watanabe // North Holland, Amsterdam and Kadansha, Tokyo. – 1981. – 464 p.
4. BORYSENKO, O.V. (1992), "Povedenie neavtonomnoi kolebatelnoj sistemy pod vozdejstviem malyh sluchajnyh vozmushchenij v rezonansnom sluchae", *Ukrainskii Matematicheskij Zhurnal*, **v.44**, №12, pp. 1645 – 1651.
5. BORYSENKO, O.D. and BORYSENKO, O.V. (1999), "Asymptoticheskoe povedenie stohasticheskoy dinamicheskoy sistemy", *Teoriya optimalnyh reshenij*, Kiev, Inst.Kibernetiki NANU, pp. 38 – 44.
6. BORYSENKO, O.D., BORYSENKO, O.V. and MALYSHEV, I.G. (2003), "Asymptotic behavior of third order random oscillation system in the resonance case", *Theory of Stoch. Proc.*, **v.9(25)**, №3-4, pp. 1 – 11.
7. BORYSENKO, O.D., BORYSENKO, O.V. and BORYSENKO, D.O. (2013), "Averaging method for autonomous third order random oscillating system", *Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series: Physics & Mathematics*, №4, pp. 7 – 11.
8. BORYSENKO, O.D. and BORYSENKO, O.V. (2014), "Averaging method for non-autonomous third order random oscillating system in non-resonance case", *Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series: Physics & Mathematics*, №1, pp. 7 – 11.
9. SKOROKHOD, A.V. (1965) *Studies in the Theory of Random Processes*, Addison-Wesley, 199 p.
10. GIKHMAN, I.I. and SKOROKHOD, A.V. (1971), *Teoriya sluchainykh processov, v.1*, М.: Nauka, 664 p.
11. IKEDA, N. and WATANABE, S. (1981), *Stochastic Differential Equations and Diffusion Processes*, North Holland, Amsterdam and Kadansha, Tokyo, 464 p.

Received: 30.09.2014

УДК 519.21

Т.Д. Тимошкевич, аспірант

**Мартингальні оцінки для варіації і
аналог критерію Макенхаупта для
зваженої нерівності Пуанкаре на $\mathbb{R}$**

Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, механіко-математичний фа-
культет, 01601, Київ, вул. Володимирська 64,
e-mail: tymoshkevych@gmail.com

T.D. Tymoshkevych, PhD Student

**A martingale bound for the variation and
an analogue of the Muckenhoupt criterion
for a weighted Poincaré inequality on $\mathbb{R}$**

Taras Shevchenko National University of
Kyiv, Department of Mechanics and Mathemat-
ics, 01601, Kyiv, Volodymyrska str., 64, e-mail:
tymoshkevych@gmail.com

Ця стаття продовжує цикл праць, об'єднаних ідеєю доведення функціональних нерівностей через таку геометричну характеристику мір, як нарізки множин. За допомогою цієї ідеї вже були отримані узагальнення прямої та оберненої логарифмічної нерівностей Соболева. Це стаття компаньйон до роботи Кулика О.М. і Тимошкевича Т.Д. (2014), де запропонований мартингальний метод для доведення зваженої логарифмічної нерівності Соболева. У цій статті ми оцінюємо варіацію, так само за допомогою мартингалів з сигма-алгеброю побудованою на нарізці множин міри. Також наведені два конкретних приклади застосування загальної оцінки, а саме критерій Макенхаупта для класичної нерівності Пуанкаре в $\mathbb{R}$ та зважена нерівність Пуанкаре з хорошим інтегральним ядром.

Ключові слова: Мартингали, нарізка множин, нерівність Пуанкаре.

This article continues a series of works, united by the idea of proof of functional inequalities through such geometrical characteristic of measure as trimmed regions. With this idea we already has received generalization of direct and inverse logarithmic Sobolev inequalities. This paper is a companion to Kulik A.M. and Tymoshkevych T.D. (2014), which proposed martingale method for proving weighted logarithmic Sobolev inequalities. In this paper we estimate the variation, the same way as in the paper of Kulik A.M. and Tymoshkevych T.D. using martingales with sigma-algebra of sets built on trimmed regions of measure. Presented two examples of general assessment, namely the criterion Muckenhoupt for classical Poincare inequality in $\mathbb{R}$ and the weighted Poincare inequality in $\mathbb{R}$ with good integral kernel.

Key Words: Martingale, trimmed regions, Poincaré inequality.

Communicated by Prof. Kozachenko Yu.V.

Introduction

It is said that the *Poincaré inequality* holds true for a probability measure μ on $\mathbb{R}^d$, if for every smooth compactly supported function $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$, the following inequality holds

$$\text{Var}_\mu f \leq c \int_{\mathbb{R}^d} \|\nabla f\|^2 d\mu$$

with some constant c , where

$$\text{Var}_\mu f = \int_{\mathbb{R}^d} f^2 d\mu - \left(\int_{\mathbb{R}^d} f d\mu \right)^2$$

denotes the *variation* of function f .

The least possible constant c , such that the above inequality holds true for every compactly

supported smooth f , is called the *Poincaré constant* for the measure μ .

One possible extension for the Poincaré inequality is given by a *weighted Poincaré inequality* of the form

$$\text{Var}_\mu f \leq \int_{\mathbb{R}^d} \|K \nabla f\|^2 d\mu,$$

where the function K , taking values in $\mathbb{R}^{d \times d}$, has the meaning of a *weight*.

This article is a companion one to [1], where a martingale method is proposed for proving a weighted version of another classical functional inequality, namely, the log-Sobolev inequality. In Theorem 1 below we obtain the martingale representation for variation of function set on $\mathbb{R}^d$. As a corollary of this representation, in Corollary 1

we give another proof of the Muckenhoupt criterion for Poincaré inequality on $\mathbb{R}$, and in Corollary 2 we give sufficient condition for a weighted Poincaré inequality on $\mathbb{R}$ to hold true.

1 A martingale bound for the variation

For probability measure μ in $\mathbb{R}^d$ we fix family of sets

$$\{D_t, t \in [0, 1]\},$$

and their complements

$$\{Q_t = \mathbb{R} \setminus D_t, t \in [0, 1]\};$$

and put

$$\mathcal{F}_t = \{A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}, A \cap Q_t \in \{\emptyset, Q_t\}.$$

Properties of family of sets $D_t \in \mathcal{F}_t$:

- 1) $D_t \nearrow D_0$ – set of one point, $D_1 = \mathbb{R}^d$;
- 2) $\mathcal{F}_t \nearrow \mathcal{F}$, $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \mathbb{R}^d\}$.

We put

$$\tau(x) = \sup\{t \leq 1 : x \in Q_t\}$$

also we put

$$G_t = \frac{1}{\mu(Q_t)} \int_{Q_t} g(y) \mu(dy),$$

then

$$g_t(x) = E(g|\mathcal{F}_t)(x) = g(x)\mathbb{I}_{D_t}(x) + G_t\mathbb{I}_{Q_t}(x).$$

Theorem 1.

$$Var_\mu(g) = \int_{\mathbb{R}} (g(x) - G_{\tau(x)})^2 \mu(dx).$$

Proof.

By Lemma 1 [1], for $0 < s < t < 1$ the following holds:

$$E(g_t^2 - g_s^2) = \int_{D_t \setminus D_s} (g(x) - G_{\tau(x)})^2 \mu(dx).$$

Also we can see, that

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow 0} E_\mu(g_s^2 - (E_\mu g)^2) &= \\ \lim_{s \rightarrow 0} E_\mu(\mathbb{I}_{D_s} g^2) + \lim_{s \rightarrow 0} (\mathbb{I}_{Q_s} G_s^2) - \lim_{s \rightarrow 0} (E_\mu g)^2 &= \\ \lim_{s \rightarrow 0} \mu(Q_s) G_s^2 - (E_\mu g)^2 &= \\ \lim_{s \rightarrow 0} \left(\int_{Q_s} g(x) \mu(dx) \right)^2 - (E_\mu g)^2 &= \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} &= (E_\mu g)^2 - (E_\mu g)^2 = 0, \\ \lim_{t \rightarrow 1} |E_\mu(g^2 - g_t^2)| &= \lim_{t \rightarrow 1} |E_\mu \mathbb{I}_{Q_t}(g^2 - G_t^2)| \leq \\ &\leq \lim_{t \rightarrow 1} E_\mu(\mathbb{I}_{Q_t} g^2) + \lim_{t \rightarrow 1} \mu(Q_t) G_t^2 = \\ &= \lim_{t \rightarrow 1} \mu(Q_t) G_t^2 = \\ &= \lim_{t \rightarrow 1} \mu(Q_t) \left(\frac{\int_{Q_t} g(x) \mu(dx)}{\mu(Q_t)} \right)^2 \leq \\ &\leq \lim_{t \rightarrow 1} \mu(Q_t) \frac{\int_{Q_t} g(x)^2 \mu(dx)}{\mu(Q_t)} = 0. \end{aligned}$$

This means that

$$\begin{aligned} Var(g) &= E_\mu(g^2 - (E_\mu g)^2) = \\ &= \lim_{s \rightarrow 0, t \rightarrow 1} E_\mu(g_t^2 - g_s^2) = \\ &= \lim_{s \rightarrow 0, t \rightarrow 1} \int_{D_t \setminus D_s} (g(x) - G_{\tau(x)})^2 \mu(dx) = \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} (g(x) - G_{\tau(x)})^2 \mu(dx). \end{aligned}$$

This completes the proof. $\square$

2 Muckenhoupt criterion

Our applications will be formulated for the one-dimensional case, therefore further $\{D_t, t \in [0, 1]\}$, is family of segments, $D_1 = \mathbb{R}$ and we put point D_0 equal to median m of measure μ , it means $F_\mu(m) = \frac{1}{2}$. Then we can call one of the endpoints of $D_{\tau(x)}$

$$\{s(x)\} = \Gamma(D_{\tau(x)}) \setminus \{x\}.$$

For the formulation of the application we need the following objects:

$$F(z) = F_\mu(z) - \mathbb{I}_{(D_0; +\infty)}(z)$$

and

$$q_x(z) = F(z)\mathbb{I}_{Q_{\tau(x)}}(z) + F(s(x))\mathbb{I}_{D_{\tau(x)}}(z).$$

Define $u(z) = |\int_m^z \frac{1}{\rho(y)} \mu(dy)|$. Hereafter $\mu_t = \mu(Q_t)$, $t \in [0; 1]$.

Corollary 1. Let $u|F| \leq c$, where c is positive constant, then the Poincaré inequality holds true with constant $50c$:

$$Var_\mu(g) \leq 50c \int_{\mathbb{R}} g'(z)^2 \mu(dz).$$

Proof.

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}} (g(x) - G_{\tau(x)})^2 \mu(dx) = \\ & = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\mu_{\tau(x)}^2} \times \\ & \times \left(\int_{Q_{\tau(x)}} \int_y^x g'(z) dz \mu(dy) \right)^2 \mu(dx) = \\ & = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\mu_{\tau(x)}^2} \left(\int_{\mathbb{R}} g'(z) q_x(z) dz \right)^2 \mu(dx) = (1) \end{aligned}$$

Then we can use the Cauchy inequality for (1):

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\mu_{\tau(x)}^2} \left(\int_{\mathbb{R}} g'(z) q_x(z) dz \right)^2 \mu(dx) \leq \\ & \leq \int_{\mathbb{R}} \frac{2}{\mu_{\tau(x)}^2} \left(\left(\int_{Q_{\tau(x)}} g'(z) q_x(z) dz \right)^2 + \right. \\ & \left. + \left(\int_{D_{\tau(x)}} g'(z) q_x(z) \mu(dz) \right)^2 \right) \mu(dx) = \\ & = \int_{\mathbb{R}} \frac{2}{\mu_{\tau(x)}^2} \left(\left(\int_{Q_{\tau(x)}} g'(z) F(z) dz \right)^2 + \right. \\ & \left. + \left(\int_{D_{\tau(x)}} g'(z) F(s(x)) \mu(dz) \right)^2 \right) \mu(dx). \end{aligned}$$

We put

$$\begin{aligned} A &= \int_{\mathbb{R}} \frac{2}{\mu_{\tau(x)}^2} \times \\ & \times \left(\int_{Q_{\tau(x)}} g'(z) F(z) dz \right)^2 \mu(dx) \\ B &= \int_{\mathbb{R}} \frac{2}{\mu_{\tau(x)}^2} \times \\ & \times \left(\int_{D_{\tau(x)}} g'(z) F(s(x)) \mu(dz) \right)^2 \mu(dx). \end{aligned}$$

Note that

$$\begin{aligned} |F(z)|' &= \rho(z) \operatorname{sign}(m - z), z \neq m \\ u(z)' &= \frac{\operatorname{sign}(z - m)}{\rho(z)}, z \neq m. \end{aligned}$$

We use the Cauchy inequality for A:

$$A \leq \int_{\mathbb{R}} \frac{2}{\mu_{\tau(x)}^2} \int_{Q_{\tau(x)}} g'(z)^2 |F(z)|^\beta \mu(dz) \times$$

$$\begin{aligned} & \times \int_{Q_{\tau(x)}} \frac{|F(z)|^{2-\beta}}{\rho(z)} dz \mu(dx) = \\ & = \int_{\mathbb{R}} \frac{2}{\mu_{\tau(x)}^2} \int_{Q_{\tau(x)}} g'(z)^2 |F(z)|^\beta \mu(dz) \times \\ & \times \int_{Q_{\tau(x)}} |F(z)|^{2-\beta} (u(z) \operatorname{sign}(z - m))' dz \mu(dx) \\ & = \int_{\mathbb{R}} \frac{2}{\mu_{\tau(x)}^2} \int_{Q_{\tau(x)}} g'(z)^2 |F(z)|^\beta \mu(dz) \times \\ & \times (|F(z)|^{2-\beta} u(z) \operatorname{sign}(z - m))|_{Q_{\tau(x)}} - \\ & - (2 - \beta) \int_{Q_{\tau(x)}} |F(z)|^{1-\beta} \times \\ & \times \rho(z) u(z) \operatorname{sign}(z - m) \operatorname{sign}(m - z) dz \mu(dx) = \\ & = \int_{\mathbb{R}} \frac{2}{\mu_{\tau(x)}^2} \int_{Q_{\tau(x)}} g'(z)^2 |F(z)|^\beta \mu(dz) \times \\ & \times \left(-|F(x)|^{2-\beta} u(x) - |F(s(x))|^{2-\beta} u(s(x)) + \right. \\ & \left. (2 - \beta) \int_{Q_{\tau(x)}} |F(z)|^{1-\beta} \rho(z) u(z) dz \mu(dx) \right) \leq \\ & \leq \int_{\mathbb{R}} \frac{2}{\mu_{\tau(x)}^2} \int_{Q_{\tau(x)}} g'(z)^2 |F(z)|^\beta \mu(dz) \times \\ & \times (2 - \beta) \int_{Q_{\tau(x)}} |F(z)|^{1-\beta} \rho(z) u(z) dz \mu(dx) \leq \\ & \leq \int_{\mathbb{R}} \frac{2}{\mu_{\tau(x)}^2} \int_{Q_{\tau(x)}} g'(z)^2 |F(z)|^\beta \mu(dz) \times \\ & \times (2 - \beta) c \int_{Q_{\tau(x)}} |F(z)|^{-\beta} \rho(z) dz \mu(dx) = \\ & = \int_{\mathbb{R}} \frac{2}{\mu_{\tau(x)}^2} \int_{Q_{\tau(x)}} g'(z)^2 |F(z)|^\beta \mu(dz) \times \\ & \times \frac{2 - \beta}{1 - \beta} c \int_{Q_{\tau(x)}} (|F(z)|^{1-\beta} \times \\ & \times \operatorname{sign}(m - z))' dz \mu(dx) = \\ & = \int_{\mathbb{R}} \frac{2}{\mu_{\tau(x)}^2} \int_{Q_{\tau(x)}} g'(z)^2 |F(z)|^\beta \mu(dz) \times \end{aligned}$$

$$\times \frac{2-\beta}{1-\beta} c(|F(x)|^{1-\beta} + |F(s(x))|^{1-\beta}) \mu(dx) = (2)$$

Then, using the Jensen's inequality we obtain

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}(|F(x)|^{1-\beta} + |F(s(x))|^{1-\beta}) \leq \\ & \leq \left(\frac{1}{2}|F(x)| + \frac{1}{2}|F(s(x))|\right)^{1-\beta} = \\ & = \frac{1}{2^{1-\beta}} \mu_{\tau(x)}^{1-\beta}. \end{aligned}$$

From the above it follows that

$$\begin{aligned} (2) & \leq \int_{\mathbb{R}} \frac{2}{\mu_{\tau(x)}^2} \int_{Q_{\tau(x)}} g'(z)^2 |F(z)|^\beta \mu(dz) \times \\ & \times \frac{2-\beta}{1-\beta} c 2^\beta \mu_{\tau(x)}^{1-\beta} \mu(dx) \leq \\ & \leq \int_{\mathbb{R}} \int_{Q_{\tau(x)}} g'(z)^2 |F(z)|^\beta \mu(dz) \times \\ & \times 2^{\beta+1} \frac{c(2-\beta)}{1-\beta} \mu_{\tau(x)}^{-1-\beta} \mu(dx) = \\ & = 2^{\beta+1} \int_{\mathbb{R}} g'(z)^2 |F(z)|^\beta \times \\ & \times \int_{D_{\tau(z)}} \mu_{\tau(x)}^{-\beta-1} \mu(dx) \mu(dz) = \\ & = 2^{\beta+1} \frac{c(2-\beta)}{1-\beta} \int_{\mathbb{R}} g'(z)^2 |F(z)|^\beta \times \\ & \times \int_{\min(z, s(z))}^m \left(\frac{-\mu_{\tau(x)}^{-\beta}}{\beta} \right)' d(\mu_{\tau(x)}) \mu(dz) = \\ & = 2^{\beta+1} \frac{c(2-\beta)}{1-\beta} \times \\ & \times \int_{\mathbb{R}} g'(z)^2 |F(z)|^\beta \frac{\mu_{\tau(z)}^{-\beta} - 1}{\beta} \mu(dz) \leq \\ & \leq 2^{\beta+1} \frac{c(2-\beta)}{1-\beta} \times \\ & \times \int_{\mathbb{R}} g'(z)^2 \mu_{\tau(z)}^\beta \frac{\mu_{\tau(z)}^{-\beta}}{\beta} \mu(dz) = \\ & = 2^{\beta+1} \frac{c(2-\beta)}{\beta(1-\beta)} \int_{\mathbb{R}} g'(z)^2 \mu(dz). \end{aligned}$$

To prove inequality we choose family D_t such, that $u(s(x)) = u(x)$. Then use the Cauchy inequality for B :

$$\begin{aligned} B & \leq \int_{\mathbb{R}} \frac{2F(s(x))^2}{\mu_{\tau(x)}^2} \times \\ & \times \int_{D_{\tau(x)}} g'(z)^2 u(z)^\alpha \mu(dz) \times \\ & \times \int_{D_{\tau(x)}} \frac{u(z)^{-\alpha}}{\rho(z)} dz \mu(dx) = \\ & = \int_{\mathbb{R}} \frac{2F(s(x))^2}{\mu_{\tau(x)}^2} \times \\ & \times \int_{D_{\tau(x)}} g'(z)^2 u(z)^\alpha \mu(dz) \times \\ & \times \int_{D_{\tau(x)}} \left(\frac{u(z)^{1-\alpha} \text{sign}(m-z)}{1-\alpha} \right)' dz \mu(dx) = \\ & = \int_{\mathbb{R}} \frac{2F(s(x))^2}{\mu_{\tau(x)}^2} \times \\ & \times \int_{D_{\tau(x)}} g'(z)^2 u(z)^\alpha \mu(dz) \times \\ & \times \frac{u(x)^{1-\alpha} + u(s(x))^{1-\alpha}}{1-\alpha} \mu(dx) = \\ & = \int_{\mathbb{R}} \frac{2F(s(x))^2}{\mu_{\tau(x)}^2} \times \\ & \times \int_{D_{\tau(x)}} g'(z)^2 u(z)^\alpha \mu(dz) \times \\ & \times \frac{2u(x)^{1-\alpha}}{1-\alpha} \mu(dx) \leq \\ & \leq \int_{\mathbb{R}} 2 \int_{D_{\tau(x)}} g'(z)^2 u(z)^\alpha \mu(dz) \times \\ & \times \frac{2u(x)^{1-\alpha}}{1-\alpha} \mu(dx) = \\ & = \frac{4}{(1-\alpha)} \int_{\mathbb{R}} g'(z)^2 u(z)^\alpha \times \\ & \times \int_{Q_{\tau(z)}} u(x)^{1-\alpha} \mu(dx) \mu(dz) \\ & = \frac{4}{(1-\alpha)} \int_{\mathbb{R}} g'(z)^2 u(z)^\alpha \times \\ & \times (u^{1-\alpha} F|_{Q_{\tau(z)}} - \\ & - (1-\alpha) \int_{Q_{\tau(z)}} u(x)^{-\alpha} u'(x) F(x) dx) \mu(dz) \\ & = \frac{4}{(1-\alpha)} \int_{\mathbb{R}} g'(z)^2 u(z)^\alpha \times \\ & \times (u(z)^{1-\alpha} |F(z)| + u(s(z))^{1-\alpha} |F(s(z))| - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -(1-\alpha) \int_{Q_{\tau(z)}} u(x)^{-\alpha} u'(x) F(x) dx \mu(dz) \leq \\
 & \leq \frac{4}{(1-\alpha)} \int_{\mathbb{R}} g'(z)^2 u(z)^{\alpha} \times \\
 & \quad \times (cu(z)^{-\alpha} + cu(s(z))^{-\alpha} + \\
 & + (1-\alpha) \int_{Q_{\tau(z)}} u(x)^{-\alpha} |F(x)| |u'(x)| dx \mu(dz) = \\
 & = \frac{4}{(1-\alpha)} \int_{\mathbb{R}} g'(z)^2 u(z)^{\alpha} \times \\
 & \quad \times (2cu(z)^{-\alpha} + (1-\alpha) \int_{Q_{\tau(z)}} u(x)^{-1-\alpha} \times \\
 & \quad \times |u(x)F(x)| |u'(x)| dx \mu(dz) \leq \\
 & \leq \frac{4}{(1-\alpha)} \int_{\mathbb{R}} g'(z)^2 u(z)^{\alpha} \times \\
 & \quad \times (2cu(z)^{-\alpha} + c(1-\alpha) \times \\
 & \quad \times \int_{Q_{\tau(z)}} \left(\frac{u(x)^{-\alpha}}{-\alpha} \text{sign}(m-x) \right)' dx \mu(dz) = \\
 & = \frac{4}{(1-\alpha)} \int_{\mathbb{R}} g'(z)^2 u(z)^{\alpha} \times \\
 & \quad \times (2cu(z)^{-\alpha} + \frac{2c(1-\alpha)}{\alpha} u(z)^{-\alpha}) \mu(dz) = \\
 & = \frac{8c}{(1-\alpha)} \int_{\mathbb{R}} g'(z)^2 u(z)^{\alpha} \times \\
 & \quad \times (u(z)^{-\alpha} + \frac{(1-\alpha)}{\alpha} u(z)^{-\alpha}) \mu(dz) = \\
 & = \frac{8c}{(1-\alpha)\alpha} \int_{\mathbb{R}} g'(z)^2 \mu(dz).
 \end{aligned}$$

Then, for $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned}
 Var_{\mu}(g) &= \int_{\mathbb{R}} (g(x) - G_{\tau(x)})^2 \mu(dx) \leq A + B \leq \\
 & 2^{\beta+1} \frac{c(2-\beta)}{\beta(1-\beta)} + \frac{8c}{(1-\alpha)\alpha} \int_{\mathbb{R}} g'(z)^2 \mu(dz) \leq \\
 & \leq 50c \int_{\mathbb{R}} g'(z)^2 \mu(dz).
 \end{aligned}$$

3 Weighted Poincaré inequality

Corollary 2.

$$Var_{\mu}(g) \leq 16 \int_{\mathbb{R}} g'(z)^2 \frac{F(z)^2}{\rho(z)^2} \mu(dz).$$

Proof. To prove inequality we choose family D_t such, that $|F(s(x))| = |F(x)|$.

$$\begin{aligned}
 Var_{\mu}(g) &= \int_{\mathbb{R}} (g(x) - G_{\tau(x)})^2 \mu(dx) \leq \\
 & \int_{\mathbb{R}} \frac{2}{\mu_{\tau(x)}^2} \left(\left(\int_{Q_{\tau(x)}} g'(z) \frac{F(z)}{\rho(z)} \mu(dz) \right)^2 + \right. \\
 & \left. + \left(\int_{D_{\tau(x)}} g'(z) \frac{F(s(x))}{\rho(z)} \mu(dz) \right)^2 \right) \mu(dx).
 \end{aligned}$$

We put

$$\begin{aligned}
 C &= \int_{\mathbb{R}} \frac{2}{\mu_{\tau(x)}^2} \times \\
 & \times \left(\int_{Q_{\tau(x)}} g'(z) \frac{F(z)}{\rho(z)} \mu(dz) \right)^2 \mu(dx) \\
 D &= \int_{\mathbb{R}} \frac{2}{\mu_{\tau(x)}^2} \times \\
 & \times \left(\int_{D_{\tau(x)}} g'(z) \frac{F(s(x))}{\rho(z)} \mu(dz) \right)^2 \mu(dx).
 \end{aligned}$$

We use the Cauchy inequality for C :

$$\begin{aligned}
 C &= \int_{\mathbb{R}} \frac{2}{\mu_{\tau(x)}^2} \left(\left(\int_{Q_{\tau(x)}} g'(z) |F(z)|^{\frac{5}{4}} \times \right. \right. \\
 & \quad \times \frac{1}{|F(z)|^{\frac{1}{4}} \rho(z)} \mu(dz) \Big)^2 \mu(dx) \leq \\
 & \leq \int_{\mathbb{R}} \frac{2}{\mu_{\tau(x)}^2} \int_{Q_{\tau(x)}} g'(z)^2 \frac{|F(z)|^{\frac{5}{2}}}{\rho(z)^2} \mu(dz) \times \\
 & \quad \times \left(\int_{Q_{\tau(x)}} \frac{1}{|F(z)|^{\frac{1}{2}}} \mu(dz) \right) \mu(dx) = \\
 & = \int_{\mathbb{R}} \frac{2}{\mu_{\tau(x)}^2} \int_{Q_{\tau(x)}} g'(z)^2 \frac{|F(z)|^{\frac{5}{2}}}{\rho(z)^2} \mu(dz) \times \\
 & \quad \times 2|F|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(m-z)|_{Q_{\tau(x)}} \mu(dx) = \\
 & = \int_{\mathbb{R}} \frac{2}{\mu_{\tau(x)}^2} \int_{Q_{\tau(x)}} g'(z)^2 \frac{|F(z)|^{\frac{5}{2}}}{\rho(z)^2} \mu(dz) \times \\
 & \quad \times (-4|F(x)|^{\frac{1}{2}}) \mu(dx) =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_{\mathbb{R}} g'(z)^2 \frac{|F(z)|^{\frac{5}{2}}}{\rho(z)^2} \int_{D_{\tau(z)}} \frac{2}{\mu_{\tau(x)}^2} \times \\
 &\quad \times (-4|F(x)|^{\frac{1}{2}} \mu(dx)) \mu(dz) = \\
 &= \int_{\mathbb{R}} g'(z)^2 \frac{|F(z)|^{\frac{5}{2}}}{\rho(z)^2} \times \\
 &\quad \times \int_{D_{\tau(z)}} \frac{-2}{|F(x)|^{\frac{3}{2}}} \mu(dx) \mu(dz) \leq \\
 &\leq \int_{\mathbb{R}} g'(z)^2 \frac{|F(z)|^{\frac{5}{2}}}{\rho(z)^2} 8(F(z)^{-\frac{1}{2}} - 2) \mu(dz) \leq \\
 &\leq \int_{\mathbb{R}} g'(z)^2 \frac{|F(z)|^{\frac{5}{2}}}{\rho(z)^2} 8|F(z)|^{-\frac{1}{2}} \mu(dz) = \\
 &= 8 \int_{\mathbb{R}} g'(z)^2 \frac{|F(z)|^2}{\rho(z)^2} \mu(dz).
 \end{aligned}$$

We use the Cauchy inequality for D :

$$\begin{aligned}
 D &= \int_{\mathbb{R}} \frac{2}{\mu_{\tau(x)}^2} \times \\
 &\quad \times \left(\int_{D_{\tau(x)}} g'(z) \frac{|F(s(x))|}{\rho(z)} \mu(dz) \right)^2 \mu(dx) \\
 &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{D_{\tau(x)}} g'(z) \frac{1}{\rho(z)} \mu(dz) \right)^2 \mu(dx) \leq \\
 &\leq \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \int_{D_{\tau(x)}} g'(z)^2 \frac{|F(z)|^{1+\beta}}{\rho(z)^2} \mu(dz) \times
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\times \int_{D_{\tau(x)}} |F(z)|^{-1-\beta} \mu(dz) \mu(dx) = \\
 &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \int_{D_{\tau(x)}} g'(z)^2 \frac{|F(z)|^{1+\beta}}{\rho(z)^2} \mu(dz) \times \\
 &\quad \times \frac{2}{\beta} \left(\frac{1}{2^{-\beta}} - |F(x)|^{-\beta} \right) \mu(dx) = \\
 &= \frac{1}{\beta} \int_{\mathbb{R}} g'(z)^2 \frac{|F(z)|^{1+\beta}}{\rho(z)^2} \times \\
 &\quad \times \int_{Q_{\tau(z)}} (|F(x)|^{-\beta} - \frac{1}{2^{-\beta}}) \mu(dx) \mu(dz) \leq \\
 &\leq \frac{1}{\beta} \int_{\mathbb{R}} g'(z)^2 \frac{|F(z)|^{1+\beta}}{\rho(z)^2} \times \\
 &\quad \times \int_{Q_{\tau(z)}} |F(x)|^{-\beta} \mu(dx) \mu(dz) = \\
 &= \frac{2}{\beta(1-\beta)} \int_{\mathbb{R}} g'(z)^2 \frac{|F(z)|^{1+\beta}}{\rho(z)^2} \times \\
 &\quad \times |F(z)|^{1-\beta} \mu(dz) = \\
 &= \frac{2}{\beta(1-\beta)} \int_{\mathbb{R}} g'(z)^2 \frac{|F(z)|^2}{\rho(z)^2} \mu(dz).
 \end{aligned}$$

Then we can put $\beta = \frac{1}{2}$, and obtain

$$Var_{\mu}(g) \leq C + D \leq 16 \int_{\mathbb{R}} g'(z)^2 \frac{|F(z)|^2}{\rho(z)^2} \mu(dz).$$

□

Список використаних джерел

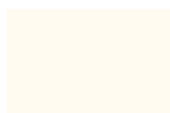
- [1] Kulik A.M. A martingale bound for the entropy associated with a trimmed filtration on $\mathbb{R}^d$ / A.M. Kulik, T.D. Tymoshkevych. — Modern Stochastics: Theory and Applications. — 2014. — Vol. 1. — No. 2. p. 151—165
- [2] Muckenhoupt B. Hardy's inequality with weights / B. Muckenhoupt. — Studia Math. — 1972. — p. 31—38

References

1. KULIK, A.M. TYMOSHKEVYCH, T.D. (2014) A martingale bound for the entropy associated with a trimmed filtration on $\mathbb{R}^d$ *Modern Stochastics: Theory and Applications*. Vol. 1. No. 2. p. 151—165.
2. MUCKENHOUP, B. (1972) Hardy's inequality with weights *Studia Math.* p. 31—38.

Received: 23.9.2014

**ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ
РІВНЯННЯ,
МАТЕМАТИЧНА ФІЗИКА
ТА МЕХАНІКА**



УДК 539.3

Будак В.Д.¹, д.т.н., проф., Григоренко О.Я.²,
д.ф.-м.н., проф., Борисенко М.Ю.¹, аспірант.,
Бойчук О.В.¹, к.ф.-м.н.

Вплив ексцентриситету еліптичної оболонки на розподіл її динамічних характеристик

¹ Миколаївський національний університет ім.
В.О. Сухомлинського, 54000, м. Миколаїв, вул.
Нікольська, 24,
e-mail: maxborisenko530@mail.ru
² Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН
України, 83000, м. Київ, вул. Нестерова, 3,
e-mail: ayagrigorenko@yandex.ru

V.D. Budak¹, Dr Sci., Prof., A.Ya. Grigorenko², Dr
Sci., Prof., M.Yu. Borisenko¹, graduate student,
O.V. Boychuk¹, Ph.D.

The elliptical shell eccentricity impact on the distribution of its dynamic characteristics

¹ Mykolaiv National University after V.O. Sukhomlynsky, 54000, Nikolaev, Nikolska st., 24
e-mail: maxborisenko530@mail.ru
² Institute of Mechanics after S.P. Tymoshenko NAS
of Ukraine, 83000, Kyiv, Nesterov st., 3,
e-mail: ayagrigorenko@yandex.ru

Для дослідження динамічних характеристик тонкої ізотропної еліптичної оболонки від зміни ексцентриситету застосовано один з варіантів методу скінчених елементів. Проведено розрахунки вільних частот та форм коливань еліптичної оболонки для різних значень її ексцентриситету зі збереженням маси. Для оцінки достовірності отриманих результатів виконано порівняльний аналіз з даними для конкретного значення ексцентриситету еліптичної оболонки, які були отримані експериментальним шляхом на основі методу голографічної інтерферометрії.

Ключові слова: еліптична оболонка, ексцентриситет, частота, форма коливань, метод скінчених елементів.

A variant of the finite element method is applied to study the isotropic thin shell's dynamic characteristics based on the elliptical eccentricity changes. Free frequencies and modes of the elliptical shell for different values of eccentricity to the conservation of mass were calculated. The comparative analysis with the data for a specific value of the elliptical shell's eccentricity that were obtained experimentally on the basis of holographic interferometry was performed to evaluate its reliability.

The results analysis suggests that we can derive the coefficients of the frequency shift from circular shell to elliptical one, while maintaining its mass and boundary conditions, that will make it possible to predict the frequency of the shells of any ellipticity, with the help of the known circular shell frequencies. This issue needs further studying.

Key words: elliptical shell, eccentricity, frequency, oscillation form, finite element method.

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Жук Я.О.

Вступ

Однією із широко застосованих форм конструкцій та їх частин, що в процесі експлуатації зазнають динамічних навантажень, є тонкостінні некругові циліндричні оболонки. Дослідження вільних частот і форм коливань таких оболонок пов'язано із значними труднощами, які зумовлені складністю системи вихідних диференціальних рівнянь в частинних похідних із змінними коефіцієнтами та необхідністю задоволення крайових умов. У зв'язку з цим широке застосування для розв'язування задач механіки набуло викорис-

тання систем автоматизованого конструювання (computer-aided engineering – CAE), які можуть розраховувати конструкцію будь-якої форми завдяки використанню метода скінчених елементів. Крім того CAE-системи дають користувачеві можливість оцінити поведінку комп'ютерної моделі виробу в реальних умовах експлуатації, перевірити дієздатність конструкції без значних витрат часу і коштів. Однією з таких систем є пре- і постпроцесор для виконання інженерного аналізу методом скінчених елементів – Femap з розв'язувачем NX Nastran [1].

Постановка проблеми

Метою цієї роботи є встановлення залежності вільних коливань пружних ізотропних некругових циліндричних оболонок від зміни ексцентриситету еліпса поперечного перерізу з використанням програми Femap. Як критерій достовірності отриманих результатів розрахунку було проведено порівняння з даними експериментального дослідження вільних коливань еліптичної оболонки з конкретним значенням ексцентриситету [5].

Задачам про вільні коливання некругових циліндричних оболонок присвячено незначну кількість публікацій. Вільні коливання елементів оболонкових конструкцій розглядалися в [2]. Вивченню вільних коливань незамкнених еліптичних циліндричних оболонок та встановлення залежності власних частот від ексцентриситету присвячена стаття [6]. Для дослідження коливань циліндричних оболонок з еліптичним поперечним перерізом застосовувалася теорія оболонок вищих порядків [7]. Розв'язування задач про вільні коливання ортотропних кругових оболонок змінної товщини методом сплайн-апроксимації та дискретної ортогоналізації запропоновано в [8]. Особливості застосування чисельних методів для вирішення широкого класу задач теорії оболонок описано в [3].

Експериментальне та аналітичне дослідження власних частот еліптичних оболонок еквівалентної маси з різним відношенням півосей широко висвітлене в роботі [4]. Отримані експериментально за допомогою повітряно-реактивного вібраційного грохоту власні частоти та форми коливань добре узгоджуються з аналітичними частотами, розрахованими за допомогою метода Релея – Рітца з урахуванням доданків вищих порядків в позовжних та колових модальних розкладах.

Вихідні співвідношення

Рівняння руху механічної системи з скінченною кількістю ступенів вільності описується системою рівнянь Лагранжа II роду:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = F_j, \quad j = 1, 2, \dots, s. \quad (1)$$

Дане рівняння руху для оболонки при її скінченоелементній апроксимації з урахуванням того, що $L = T - U$, та відсутності зовнішніх сил ($F_j = 0$) прийме вигляд:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, s. \quad (2)$$

Використовуючи дискретну форму функціоналів кінетичної енергії та енергії деформації відповідно

$$T = \frac{1}{2} \dot{\vec{\Phi}}_i^T \mathbf{M}_i \dot{\vec{\Phi}}_i,$$

$$U = \frac{1}{2} \dot{\vec{\Phi}}_i^T \mathbf{K}_i \dot{\vec{\Phi}}_i,$$

де $\mathbf{K}_i$ та $\mathbf{M}_i$ – матриця жорсткості та матриця мас i -того скінченного елемента відповідно, $\vec{\Phi}_i$ – вектор вузлових переміщень i -того елемента.

З рівняння Лагранжа (2) отримаємо наступні рівняння руху оболонки при відсутності демпфування:

$$\mathbf{K} \vec{\Phi}_j + \mathbf{M} \ddot{\vec{\Phi}}_j = 0, \quad (3)$$

де $\mathbf{K}$ та $\mathbf{M}$ – матриця жорсткості та матриця мас механічної системи відповідно, $\vec{\Phi}_j$ – вектор переміщень вузлів системи, що відповідає j -тому ступеню вільності, що відтворює j -ту форму коливань.

При вільних коливаннях оболонок всі вузлові точки здійснюють гармонічні коливання як функції часу:

$$\vec{\Phi}_j(t) = \vec{\Phi}_j \sin \omega_j t. \quad (4)$$

Після підстановки функцій (4) в рівняння руху оболонки (3) визначення власних частот і форм коливань зводиться до розв'язання системи алгебраїчних рівнянь

$$\mathbf{K} \vec{\Phi}_j - \omega_j^2 \mathbf{M} \vec{\Phi}_j = 0, \quad j = 1, 2, \dots, s, \quad (5)$$

де ω_j – пульсація або частота гармонічних коливань.

NX Nastran для визначення власних форм і частот коливань у випадку, коли дисипація енергії і демпфування не враховується, використовує, як основний, метод Ланцоша, що вимагає менших ресурсів у порівнянні з іншими методами. Метод Ланцоша [9] дозволяє визначати n -ну кількість необхідних власних значень і форм за реальний час, при цьому результати можна вважати практично точними для даної дискретної моделі [1, 9], оскільки похибка складає $\|\vec{\Phi}_j - \omega_j^2 \mathbf{K}^{-1} \mathbf{M} \vec{\Phi}_j\| / \|\vec{\Phi}_j\| \leq 10^{-7}$.

Чим більшу кількість власних пар потрібно визначити, тим помітнішими виявляються пере-

ваги цього методу, він гарантує відсутність пропущених власних пар в досліджуваному частотному діапазоні, а також дозволяє аналізувати власні коливання закріплених систем, не спотворюючи їх власний спектр накладенням фіктивних в'язей.

Метод Ланцоша використовує приведення до трьохдіагонального вигляду матриці $\mathbf{T}$

$$\mathbf{T} = \mathbf{Q}_k^T \mathbf{M} \mathbf{K}^{-1} \mathbf{M} \mathbf{Q}_k, \quad (6)$$

де $\mathbf{Q}_k = \{\vec{q}_1, \vec{q}_2, \dots, \vec{q}_k\}$ – прямокутна матриця з елементами $N_{eq} \times k$, N_{eq} – число рівнянь, k – номер кроку по методу Ланцоша, $\vec{q}_k$ – k -ий вектор Ланцоша. Вираз

$$\beta_{k+1} \vec{q}_{k+1} = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{M} \vec{q}_k - \alpha_k \vec{q}_k - \beta_k \vec{q}_k, \quad (7)$$

генерує наступний вектор Ланцоша $\vec{q}_{k+1}$ і визначає поточний рядок матриці $\mathbf{T}$

$$\mathbf{T} = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_2 & & & \\ \beta_2 & \alpha_2 & \beta_3 & & \\ & \beta_3 & \alpha_3 & \beta_4 & \\ & & & \ddots & \ddots \\ & & & & \beta_k & \alpha_k \end{vmatrix}.$$

Таким чином, отримуємо задачу на власні значення:

$$\mathbf{T} \vec{s}_h^k - \lambda_h^k \vec{s}_h^k = 0, \quad h = 1, 2, \dots, k, \quad (8)$$

$(\omega_h^k)^2 = 1/\lambda_h^k$, де ω_h^k – k -та апроксимація кругової частоти ω_h , $h = 1, 2, \dots, n$, n – необхідне число власних пар. Алгоритм продовжує обчислення (при збільшенні k -номера кроку процедури Ланцоша) до тих пір, поки не буде досягнуто необхідної точності по всім необхідним власним значенням.

Процедура вибіркової ортогоналізації підтримує необхідний рівень ортогоналізації векторів Ланцоша $\vec{q}_k$, що забезпечує надійність і стійкість чисельного процесу розрахунку. При цьому застосовуються економічні методи для реалізації процедури вибіркової ортогоналізації й для визначення власних значень (8) шляхом використання подвійних QR -ітерацій зі зсувами. Вихідні власні вектори визначаються за формулою

$$\vec{\Phi}_h^k = \mathbf{Q}_k \vec{s}_h^k, \quad h = 1, 2, \dots, n. \quad (9)$$

Більш детальний опис даного методу можна

знайти в [9, 11].

Методика розв'язування

За допомогою системи Femap побудовано геометрію оболонок еквівалентної маси висотою $h = 120$ мм у вигляді циліндричних поверхонь еліптичного перерізу з різними значеннями ексцентриситету ε . Велика піввісь серединної поверхні a_c та мала піввісь серединної поверхні b_c в залежності від ε вказані в таблиці 1.

Досліджувані оболонки жорстко закріплювалися вздовж одного краю; тобто при $z = 0$ виконуються умови

$$u = v = w = \varphi_x = \varphi_y = \varphi_z = 0.$$

Матеріалом оболонки задавалась сталь 40Х з модулем Юнга $E = 214$ ГПа, коефіцієнтом Пуассона $\nu = 0,32$, густиною $\rho = 7820$ кг/м³. Скінченно-елементна розбивка проводилась лінійними восьмикутними solid-елементами розміром сторони 1 мм.

Таблиця 1

Значення півосей серединної поверхні відповідно до значення ексцентриситету

	ε				
	0	0,1	0,2	0,3	0,4
a_c	43,547	43,657	43,992	44,574	45,444
b_c	43,547	43,438	43,103	42,512	41,651
	ε				
	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
a_c	46,674	48,386	50,810	54,434	60,656
b_c	40,421	38,709	36,285	32,661	26,439

Результати

За допомогою вищеописаної методики досліджувався спектр резонансних частот і форми коливань консольно затисненої ізотропної оболонки при різних значеннях ексцентриситету. Резонансні частоти приведені в порівняльній таблиці 2, де m – кількість вузлів уздовж твірної, n – кількість вузлів по колу, та у вигляді графіків (рис. 1). Для порівняння в таблиці 2 крім частот, отриманих чисельно, наводяться частоти, визначені методом голографічної інтерферометрії для оболонок еквівалентної маси [10]. На рисунку 2 приводиться порівняльна гістограма експериментально та чисельно отриманих частот для оболонок із значенням ексцентриситету 0,7.

Таблиця 2

Чисельно та експериментально отримані частоти ($\Gamma\text{ц}$)

m	n	$f_{\text{чис.}}$										$f_{\text{експ.}}$
		$\varepsilon=0$	$\varepsilon=0,1$	$\varepsilon=0,2$	$\varepsilon=0,3$	$\varepsilon=0,4$	$\varepsilon=0,5$	$\varepsilon=0,6$	$\varepsilon=0,7$	$\varepsilon=0,8$	$\varepsilon=0,9$	$\varepsilon=0,694$
1	4	1836	1836	1835	1833	1827	1812	1779	1712	1576	1284	1723
1	6	2266	2266	2265	2263	2258	2245	2216	2154	2023	1727	2306
1	8	3977	3977	3976	3974	3967	3952	3919	3849	3703	3362	4097
1	10	6318	6317	6315	6310	6298	6273	6225	6129	5921	5381	6519
1	12	9155	9155	9154	9151	9143	9123	9075	8963	8677	7934	9493
2	4	6476	6476	6475	6470	6456	6419	6338	6159	5769	4901	—
2	6	4812	4812	4810	4804	4788	4748	4661	4488	4145	3441	4782
2	8	5302	5302	5300	5293	5271	5219	5109	4895	4486	3661	5597
2	10	7231	7230	7229	7225	7217	7199	7161	7072	6819	5975	—
2	12	9935	9935	9935	9932	9924	9904	9858	9748	9480	8715	—

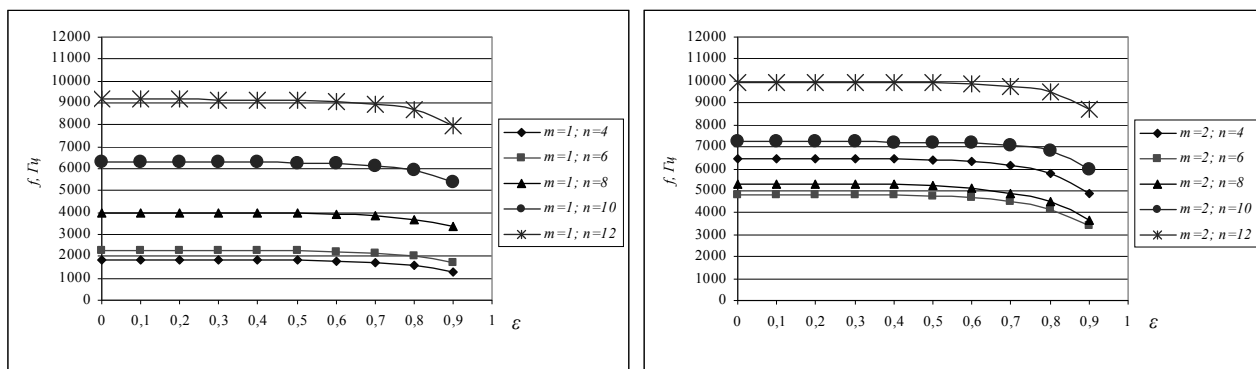


Рис. 1. Графіки залежності власної частоти від ε при однакових формах коливань

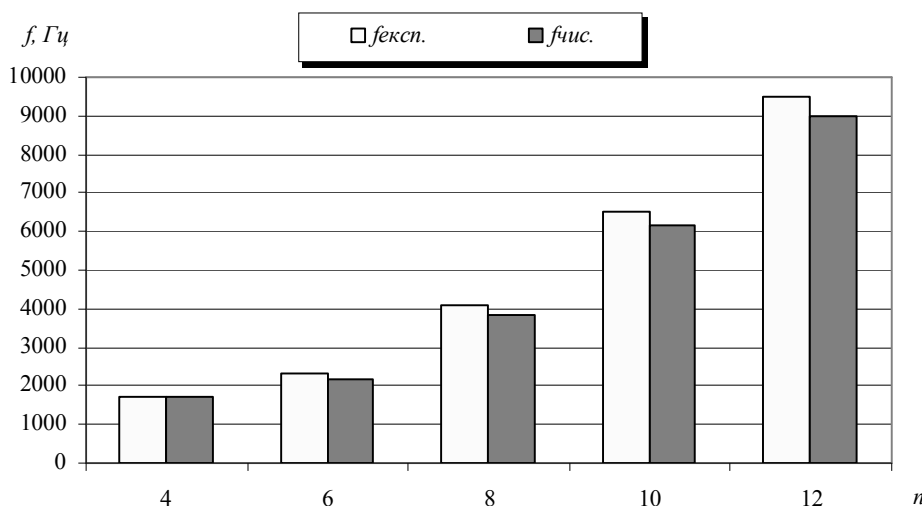


Рис. 2. Порівняння частот для форм коливань при $m = 1$

Форми коливань для оболонок з різними значеннями ексцентриситету на деяких частотах зображено на рис. 3. Переміщення точок

оболонок для візуалізації показані в десятикратному збільшенні.

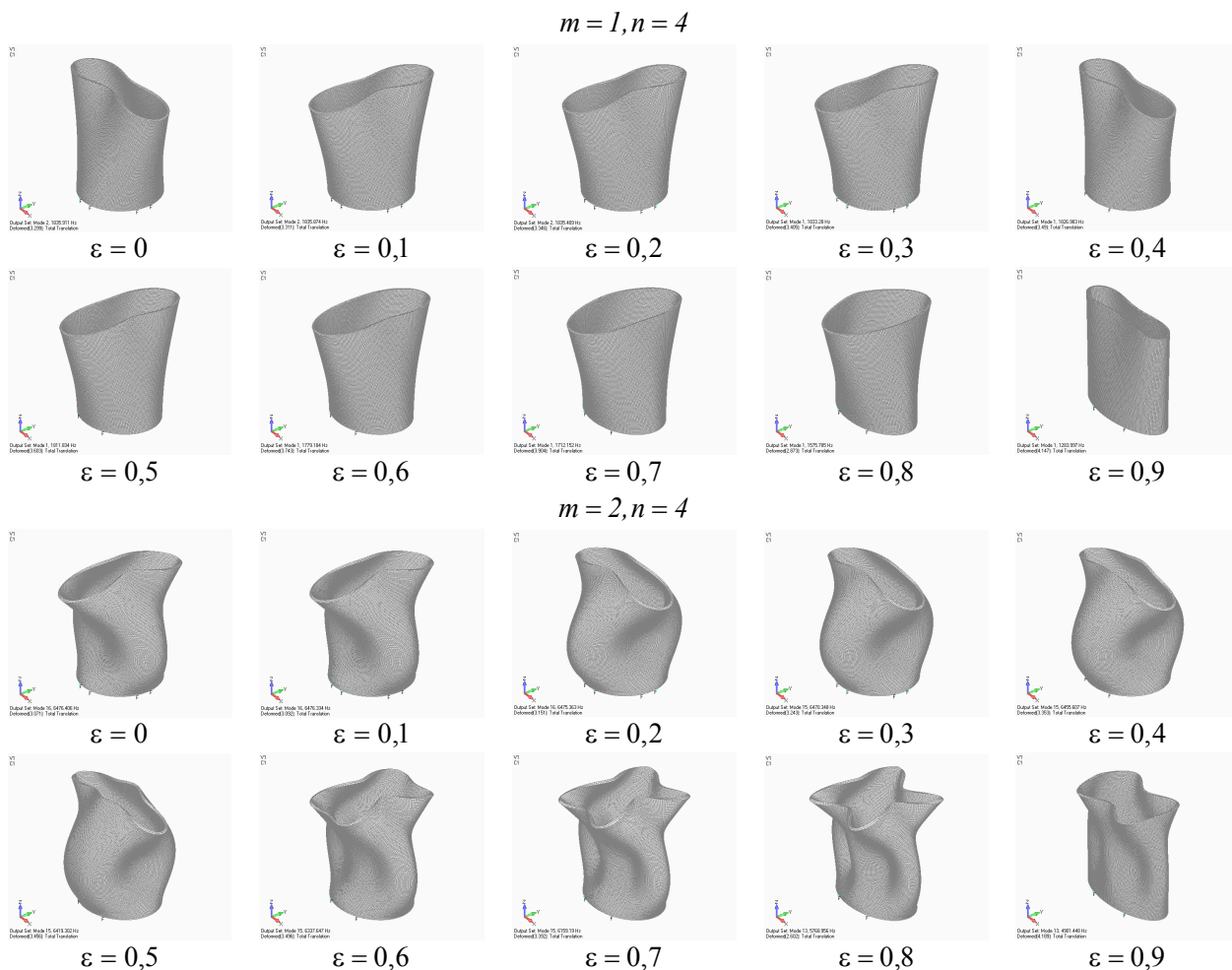


Рис. 3. Форми коливань для оболонки з різними значеннями ε

Висновки

Проведено розрахунки вільних коливань некругових циліндричних оболонок еквівалентних мас з різними значеннями ексцентриситету на основі методу скінчених елементів із застосуванням комплексу FEMAP. Аналіз отриманих результатів показав:

- порядок виникнення форм коливань для всіх оболонок зберігається;
- спостерігається зменшення власної частоти при збільшенні ексцентриситету;
- із збільшенням значення ε від 0 до 0,5 залежність при однакових формах частот від ексцентриситету має лінійний характер, відхилення частот еліптичних оболонок від кругової не перевищує 1,5%;
- в діапазоні ε від 0,5 до 0,9 залежність при однакових формах частот від ексцентриситету має квадратичний характер спадання;
- зміна поведінки оболонки спостерігається й

на зовнішньому вигляді форм коливань, так при $m=1$, $n=4$ спостерігається візуальна мутація форм починаючи із значення ексцентриситету 0,7, а при $m=2$, $n=4$ – з 0,4.

Порівняння отриманих результатів з результатами роботи [4] показало:

- спостерігається однаковість тенденції спадання частот із збільшенням ексцентриситету;
- відхилення відношення частот оболонок із значеннями ексцентриситету 0 та 0,916.

Аналіз відповідностей результатів наштовхує на думку що можна вивести коефіцієнти частотного переходу від кругової оболонки до еліптичної при збереженні маси та граничних умов, що буде давати можливість прогнозувати частоти оболонок будь-якої еліптичності по відомим частотам кругової оболонки. Дана проблема потребує подальшого дослідження.

Список використаних джерел

1. Рудаков К.Н. FEMAP 10.2.0. Геометрическое и конечно-элементное моделирование конструкций / К.Н. Рудаков – К. НТУУ «КПИ», 2011. – 317с.
2. Свободные колебания элементов оболочечных конструкций / Я.М. Григоренко, Е.И. Беспалова, А.Б. Китайгородский, А.И. Шинкарь – Киев: Наук. думка, 1986. – 171 с.
3. Григоренко Я.М. Теория оболочек переменной жесткости / Я.М. Григоренко, А.Т. Василенко – Киев: Наук. думка, 1981. – 544 с. – (Методы расчета оболочек: В 5 т. – Т. 4.).
4. Sewall J.L. An experimental and analytical vibration study of elliptical cylindrical shells / J.L. Sewall, W.M. Thompson, C.G. Pnsey. // NASA TN D-6089, 1971. – 81 p.
5. Определение собственных частот эллиптической оболочки постоянной толщины методом конечных элементов / В.Д. Будак, А.Я. Григоренко, М.Ю. Борисенко, Е.В. Бойчук // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2014 – 57, № 1. – С. 145-152.
6. Григоренко А.Я. Исследование свободных колебаний некруговых цилиндрических оболочек с помощью метода сплайн-коллокации / А.Я. Григоренко, С.В. Пузырев, Е.А. Волчек // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2011. – 54, № 3. – С. 60-69.
7. Hayek S.I. Vibration of elliptic cylindrical shells: higher order shell theory / S.I. Hayek, J.E. Boisvert // J. Acoust. Soc. Amer. – 2010. – 128, No. 3. – P. 1063–1072.
8. Влайков Г.Г. Свободные колебания анизотропных цилиндрических оболочек с переменными параметрами / Г.Г. Влайков, А.Я. Григоренко, Л.В. Соколова // Восточно-Европейский журнал передовых технологий. – 2013. – Том 3, № 12 – С. 13-16.
9. Papadrakakis. Solving large-scale problems in mechanics / Papadrakakis – John Wiley & Sons Ltd., 1993.
10. Експериментальне визначення власних частот тонкостінної оболонки з некруговим поперечним перерізом постійної товщини / В.Д. Будак, О.Я. Григоренко, М.Ю. Борисенко, О.П. Пригода, В.В. Хоришко // Сучасні проблеми фізико-математичних наук та підготовка фахівців у цій галузі. Миколаїв, 2013 – С. 5-6.

References

1. RUDAKOV, K. N. (2011) *FEMAP 10.2.0. Geometricheskoe i konechno-elementnoe modelirovanie konstruktsiy*. Kiev: NTUU «KPI».
2. GRIGORENKO, YA. M. et al. (1986) *Svobodnyie kolebaniya elementov obolocheknyih konstruktsiy*. Kiev: Naukova dumka.
3. GRIGORENKO, YA. M. and VASILENKO, A. T. (1981) *Teoriya obolochek peremennoy zhestkosti*. Kiev: Naukova dumka. (Metodyi rascheta obolochek: V 5 t. – T. 4.).
4. SEWALL, J. L. THOMPSON, W. M. and PNSEY, C. G. (1971) *An experimental and analytical vibration study of elliptical cylindrical shells*. NASA TN D-6089.
5. BUDAK V. D., GRIGORENKO A. YA., BORISENKO M. YU., BOYCHUK E. V. (2014) *Opredelenie sobstvennyih chastot ellipticheskoy obolochki postoyannoy tolshchinyi metodom konechnyih elementov*. *Mat. metody ta fiz.-meh. polya*. 57 (1). p. 145-152.
6. GRIGORENKO A. YA., PUZIRYEV S. V. and VOLCHEK E. A. (2011) *Issledovanie svobodnyih kolebaniy nekrugovyih tsilindricheskikh obolochek s pomoshchyu metoda splayn-kollokatsii*. *Mat. metody ta fiz.-meh. polya*. 54 (3). p. 60-69.
7. HAYEK S. I. and BOISVERT J. E. (2010) *Vibration of elliptic cylindrical shells: higher order shell theory*. *J. Acoust. Soc. Amer.* 128 (3). p. 1063–1072.
8. VLAKOV, G. G., GRIGORENKO, A. YA. and SOKOLOVA, L. V. (2013) *Svobodnyie kolebaniya anizotropnyih tsilindricheskikh obolochek s peremennymi parametrami*. *Vostochno-Yevropeyskiy zhurnal peredovyih tehnologii*. 3 (12). p. 13-16.
9. PAPADRAKAKIS M. (1993) *Solving large-scale linear problems in solid and structural mechanics*. *Solving large-scale problems in mechanics*. Oxford, UK: Wiley. p. 1-37.
10. BUDAK V. D., GRIGORENKO A. YA., BORISENKO M. YU., PRIGODA O. P., KHORISHKO V. V. (2013) *Eksperimental'ne viznachennya vlasnyh chastot tonkostinnoi z nekrugovym poperechnym pererizom postiynoi tovschyny*. In *Suchasni problemy fizyko-matematychnykh nauk ta pidgotovka fakhivtsiv u tsiy galuzi*. pp. 5-6.

Надійшла до редколегії 16.02.2015

УДК 539.3

Григоренко О.Я., д.ф.-м.н., професор,
Авраменко О. А., к.ф.-м.н., Романішин М.В.,
аспірант.

Вільні коливання замкнених конічних оболонок зі змінною товщиною.

Інститут механіки НАН України ім. С. П.
Тимошенка, м. Київ вул. Нестерова 3,

E-mail: Mikhail.romanishyn@yandex.ru

Grigorenko A.Ya., Doctor of science (Phys.-
Math.), Prof., Avramenko O.A., PhD (Phys.-
Math.), Romanishyn M.V. graduate student.

Natural vibrations of closed conical shells with variable thickness

SP Timoshenko Institute of Mechanics, Nesterov
str, 3, 252680 Kiev, Ukraine

E-mail: Mikhail.romanishyn@yandex.ru

Досліджуються вільні коливання замкнених конічних оболонок зі змінною товщиною при різних граничних умовах на краях на основі теорії Тимошенка – Мідліна. Для розрахунку частот застосовано чисельно-аналітичний підхід, який базується на застосуванні сплайн-апроксимації та методу дискретної ортогоналізації разом з методом покрокового пошуку.

Ключові слова: замкнена конічна оболонка, вільні коливання, теорія Тимошенка – Мідліна, сплайн – апроксимація.

The problem on natural vibrations of closed conical shells with variable thickness under various boundary conditions on the basis of Timoshenko – Midlin theory is considered. The numerically-analytical method, based on using the spline-approximation and the discrete-orthogonalization methods, is developed. Using the spline collocation method, the two-dimensional boundary value problem, which describes the natural vibrations of shell, was reduced to one-dimensional and the one dimensional boundary value problem was solved by stable numerical discrete orthogonalization method. Analysis of different formulations and influence of radius size on periodicity of natural vibrations was obtained. The natural vibrations of conical shell in dependency on boundary conditions were studied. Are found to form of natural vibrations for a given shell, which correspond to the first three periodicity. Analysis of the results shows at a sufficiently high precision of calculations, even with a small number point of collocation.

Key Words: closed conical shells, natural vibration, Timoshenko – Midlin theory, spline-approximation.

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Жук Я.О.

1. Вступ

Конічні оболонки в якості конструктивних елементів знаходять широке застосування в сучасній техніці. У випадку змінної товщини оболонки, використання композитних матеріалів або складного навантаження використання класичної моделі в багатьох випадках пов'язано зі значними труднощами, тому при дослідженні динамічних характеристик оболонок змінної товщини використовується уточнена теорія оболонок. В науковій літературі є ряд робіт,

присвячених дослідженню коливань однорідних і неоднорідних конічних оболонок постійної та змінної товщини на основі різних теорій [1-5].

В даному повідомленні для дослідження вільних коливань нетонких конічних оболонок, зі змінною в окружному напрямку товщиною, в рамках уточненої теорії оболонок Тимошенка – Міндліна, застосовується ефективна чисельна методика, яка базується на використанні сплайн – апроксимації, а також методу дискретної ортогоналізації в поєднанні з методом покрокового пошуку [2,4,5]. Одновимірні

крайова задача розв'язується стійким чисельним методом дискретної ортогоналізації.

2. Постановка задачі

Розглянемо задачу про вільні коливання замкнених конічних оболонок в уточненій постановці, яка базується на гіпотезі прямої лінії. В відповідності до неї в системі координат γ, θ, s ($-h/2 \leq \gamma \leq h/2$, $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$, $0 \leq s \leq L$) переміщення можна записати у вигляді,

$$\begin{aligned} u_s(\gamma, \theta, s) &= u(\theta, s) + \gamma \psi_s(\theta, s), \\ u_\theta(\gamma, \theta, s) &= v(\theta, s) + \gamma \psi_\theta(\theta, s), \\ u_\gamma(\gamma, \theta, s) &= w(\theta, s), \end{aligned} \quad (1)$$

де $u(\theta, s), v(\theta, s), w(\theta, s)$ – переміщення точок координатної поверхні, $\psi_\theta(\theta, s), \psi_s(\theta, s)$ – функції, які характеризують повний поворот прямолінійного елемента.

Представимо зв'язок між деформаціями і переміщеннями

$$\begin{aligned} \varepsilon_s &= \frac{\partial u}{\partial s}; \quad \varepsilon_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{\cos \varphi}{r} u + \frac{\sin \varphi}{r} w; \\ \varepsilon_{s\theta} &= \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial s} - \frac{\cos \varphi}{r} v; \quad \kappa_s = \frac{\partial \psi_s}{\partial s}; \\ \kappa_\theta &= \frac{1}{r} \left\{ \frac{\partial \psi_\theta}{\partial \theta} + \psi_s \cos \phi - \frac{\sin \phi}{r} \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} + u \cos \phi + w \sin \phi \right) \right\}; \\ 2\kappa_{s\theta} &= \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_s}{\partial \theta} + \frac{\partial \psi_\theta}{\partial s} - \frac{\psi_\theta}{r} \cos \varphi - \frac{\sin \varphi}{r^2} \left(\frac{\partial u}{\partial \theta} - v \cos \varphi \right); \\ \gamma_s &= \psi_s - \vartheta_s; \quad \gamma_\theta = \psi_\theta - \vartheta_\theta; \\ \vartheta_s &= -\frac{\partial w}{\partial s}; \quad \vartheta_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{v \sin \varphi}{r}. \end{aligned} \quad (2)$$

$\varepsilon_\theta, \varepsilon_s, \varepsilon_{s\theta}$ – тангенціальні, $\kappa_\theta, \kappa_s, \kappa_{s\theta}$ – згинні деформації координатної поверхні, $\vartheta_s, \vartheta_\theta$ – кути повороту нормалі, без урахування поперечних зсувів.; γ_s, γ_θ – кути повороту нормалі, обумовлені поперечними зсувами.

Рівняння руху мають вигляд

$$\cos \varphi N_s + r \frac{\partial N_s}{\partial s} - N_\theta \cos \varphi + \frac{\partial N_{\theta s}}{\partial \theta} = r \rho h \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_\theta}{\partial \theta} + \cos \varphi N_{s\theta} + r \frac{\partial N_{s\theta}}{\partial s} + \cos \varphi N_{\theta s} + \sin \varphi Q_\theta &= r \rho h \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} \\ \cos \varphi Q_s + r \frac{\partial Q_s}{\partial s} + \frac{\partial Q_\theta}{\partial \theta} - \sin \varphi N_\theta &= r \rho h \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} \\ r \frac{\partial M_s}{\partial s} + \cos \varphi M_s - \cos \varphi M_\theta + \frac{\partial M_{\theta s}}{\partial \theta} - r Q_s &= \frac{r \rho h^3}{12} \frac{\partial^2 \Psi_s}{\partial t^2} \\ \frac{\partial M_\theta}{\partial \theta} + \cos \varphi (M_{s\theta} + M_{\theta s}) + r \frac{\partial M_{s\theta}}{\partial s} - r Q_\theta &= \frac{r \rho h^3}{12} \frac{\partial^2 \Psi_\theta}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (3)$$

де $N_s, N_\theta, N_{\theta s}, N_{s\theta}$ – тангенціальні, Q_θ, Q_s – перерізуєчі зусилля; $M_\theta, M_s, M_{\theta s}, M_{s\theta}$ – згинні та зкручуючі моменти; $\rho(\theta, s)$ – густина матеріалу оболонки, h – товщина оболонки.

Співвідношення пружності для ортотропних оболонок симетричної структури по товщині відносно серединної поверхні запишемо у вигляді

$$N_s = C_{11} \varepsilon_s + C_{12} \varepsilon_\theta; \quad N_\theta = C_{12} \varepsilon_s + C_{22} \varepsilon_\theta;$$

$$N_{s\theta} = C_{66} \varepsilon_{s\theta} + \frac{2 \sin \varphi}{r} D_{66} \kappa_{s\theta}; \quad (4)$$

$$M_s = D_{11} \kappa_s + D_{12} \kappa_\theta; \quad M_\theta = D_{12} \kappa_s + D_{22} \kappa_\theta;$$

$$M_{s\theta} = M_{\theta s} = 2 D_{66} \kappa_{s\theta};$$

$$Q_s = K_1 \gamma_s; \quad Q_\theta = K_2 \gamma_\theta, \text{ де}$$

$$C_{11} = \frac{E_s h}{1 - \nu_s \nu_\theta}; \quad C_{12} = \nu_\theta C_{11};$$

$$C_{22} = \frac{E_\theta h}{1 - \nu_s \nu_\theta}; \quad C_{66} = G_{s\theta} h;$$

$$D_{11} = \frac{E_s h^3}{12(1 - \nu_s \nu_\theta)}; \quad D_{12} = \nu_\theta D_{11};$$

$$D_{22} = \frac{E_\theta h^3}{12(1 - \nu_s \nu_\theta)}; \quad D_{66} = \frac{G_{s\theta} h^3}{12};$$

$$K_1 = \frac{5}{6} h G_{s\gamma}; \quad K_2 = \frac{5}{6} h G_{\theta\gamma}$$

де $G_{s\gamma}(\theta, s), G_{\theta\gamma}(\theta, s), G_{s\theta}(\theta, s)$ – модулі поперечних зсувів, $E_s(\theta, s), E_\theta(\theta, s)$ – модулі Юнга, $\nu_s(\theta, s), \nu_\theta(\theta, s)$ – коефіцієнти Пуассона..

З системи рівнянь (2)-(4), за допомогою тотожних перетворень, отримаємо п'ять еквівалентних диференціальних рівнянь відносно п'яти змінних $u, v, w, \psi_s, \psi_\theta$ - точок серединної поверхні оболонки.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} &= b_{11}u + b_{12} \frac{\partial u}{\partial s} + b_{13} \frac{\partial u}{\partial \theta} + b_{14} \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + b_{15}v + b_{16} \frac{\partial v}{\partial s} + \\ &+ b_{17} \frac{\partial v}{\partial \theta} + b_{18} \frac{\partial^2 v}{\partial s \partial \theta} + b_{19}w + b_{1,10} \frac{\partial w}{\partial s}; \\ \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} &= b_{21}u + b_{22} \frac{\partial u}{\partial s} + b_{23} \frac{\partial u}{\partial \theta} + b_{24} \frac{\partial^2 u}{\partial s \partial \theta} + b_{25}v + \\ &+ b_{26} \frac{\partial v}{\partial s} + b_{27} \frac{\partial v}{\partial \theta} + b_{28} \frac{\partial^2 v}{\partial s^2} + b_{29}w + b_{2,11} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \\ &+ b_{2,11} \frac{\partial \psi_s}{\partial \theta} + b_{2,12} \frac{\partial^2 \psi_s}{\partial s \partial \theta} + b_{2,13} \psi_\theta + b_{2,14} \frac{\partial \psi_\theta}{\partial s} + b_{2,15} \frac{\partial^2 \psi_\theta}{\partial s^2}; \\ \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} &= b_{31}u + b_{32} \frac{\partial u}{\partial s} + b_{33}v + b_{34} \frac{\partial v}{\partial \theta} + b_{35}w + b_{36} \frac{\partial w}{\partial s} + b_{37} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \\ &+ b_{38} \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} + b_{39} \psi_s + b_{3,10} \frac{\partial \psi_s}{\partial s} + b_{3,11} \psi_\theta + b_{3,12} \frac{\partial \psi_\theta}{\partial \theta}; \quad (5) \\ \frac{\partial^2 \psi_s}{\partial \theta^2} &= b_{41}u + b_{42} \frac{\partial u}{\partial s} + b_{43} \frac{\partial u}{\partial \theta} + b_{44} \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + b_{45}v + b_{46} \frac{\partial v}{\partial s} + \\ &+ b_{47} \frac{\partial v}{\partial \theta} + b_{48} \frac{\partial^2 v}{\partial s \partial \theta} + b_{49}w + b_{4,10} \frac{\partial w}{\partial s} + b_{4,11} \psi_s + \\ &+ b_{4,12} \frac{\partial \psi_s}{\partial s} + b_{4,13} \frac{\partial \psi_s}{\partial \theta} + b_{4,14} \frac{\partial^2 \psi_s}{\partial s^2} + b_{4,15} \psi_\theta + \\ &+ b_{4,16} \frac{\partial \psi_\theta}{\partial s} + b_{4,17} \frac{\partial \psi_\theta}{\partial \theta} + b_{4,18} \frac{\partial^2 \psi_\theta}{\partial s \partial \theta}; \\ \frac{\partial^2 \psi_\theta}{\partial \theta^2} &= b_{51}u + b_{52} \frac{\partial u}{\partial s} + b_{53} \frac{\partial u}{\partial \theta} + b_{54} \frac{\partial^2 u}{\partial s \partial \theta} + b_{55}v + \\ &+ b_{56} \frac{\partial v}{\partial s} + b_{57} \frac{\partial v}{\partial \theta} + b_{58} \frac{\partial^2 v}{\partial s^2} + b_{59}w + b_{5,10} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \\ &+ b_{5,11} \psi_s + b_{5,12} \frac{\partial \psi_s}{\partial s} + b_{5,13} \frac{\partial \psi_s}{\partial \theta} + b_{5,14} \frac{\partial^2 \psi_s}{\partial s \partial \theta} + \\ &+ b_{5,15} \psi_\theta + b_{5,16} \frac{\partial \psi_\theta}{\partial s} + b_{5,17} \frac{\partial \psi_\theta}{\partial \theta} + b_{5,18} \frac{\partial^2 \psi_\theta}{\partial s^2}; \end{aligned}$$

$(0 \leq s \leq L, 0 \leq \theta \leq 2\pi).$

На криволінійних контурах $s = 0$ і $s = L$ розглянемо такі граничні умови:

1) жорстке закріплення

$$u = v = w = \psi_\theta = \psi_s = 0$$

2) шарнірне обпирання (контур вільний в напрямку твірної)

$$\frac{\partial u}{\partial s} = v = w = \frac{\partial \psi_s}{\partial s} = \psi_\theta = 0$$

При $\theta = \theta_1$ и $\theta = \theta_2$ можна задати один з видів таких граничних умов:

1) контур жорстко закріплений

$$u = v = w = \psi_\theta = \psi_s = 0;$$

2) контур шарнірно опертий

$$u = \frac{\partial v}{\partial \theta} = w = \psi_s = \frac{\partial \psi_\theta}{\partial \theta} = 0;$$

3) умови симетрії (для замкнених оболонок при $\theta_1 = 0, \theta_2 = \pi$ та симетрично неоднорідних відносно $\theta = \theta_i$)

$$\frac{\partial u}{\partial \theta} = v = \frac{\partial w}{\partial \theta} = \frac{\partial \psi_s}{\partial \theta} = \psi_\theta = 0.$$

3. Метод розв'язання

Задачу (5) з відповідними граничними умовами можна розв'язати з використанням методу сплайн - колокації [2,4,5].

Розв'язувальні функції $u(s, \theta), v(s, \theta), w(s, \theta), \psi_s(s, \theta), \psi_\theta(s, \theta)$ представимо у вигляді

$$\begin{aligned} u &= \sum_{i=0}^N u_i(\theta) \phi_{1i}(s), \quad v = \sum_{i=0}^N v_i(\theta) \phi_{2i}(s), \\ w &= \sum_{i=0}^N w_i(\theta) \phi_{3i}(s), \quad \psi_s = \sum_{i=0}^N \psi_{si}(\theta) \phi_{4i}(s), \quad (6) \\ \psi_\theta &= \sum_{i=0}^N \psi_{\theta i}(\theta) \phi_{5i}(s). \end{aligned}$$

де $u_i(\theta), v_i(\theta), w_i(\theta), \psi_{si}, \psi_{\theta i} (i = 0, \dots, N)$ - шукані функції змінної θ ; $\phi_{ji}(s) (j = 1..5)$, - лінійні комбінації В - сплайнів на рівномірній сітці $\Delta, 0 = s_0 < s_1 < \dots < s_N = L$ з врахуванням граничних умов при $s = 0$ та $s = L$. В розв'язувальну систему (5) входять похідні по координаті s не вище другого порядку, отже можна обмежитися апроксимацією сплайн -

функціями третього степеня. Підставляючи вирази (6) в рівняння (5), вимагаємо, щоб отримана система і граничні умови точно виконувались в $N+1$ точці колокації $\xi_k \in [0, L]$, $k = \overline{0, N}$ [2,5,6]. В результаті отримаємо одновимірну крайову задачу

$$\frac{d\bar{Y}}{d\theta} = A(\theta, \omega)\bar{Y}, \quad (7)$$

$$B_1 \bar{Y} = \bar{0} \text{ при } \theta = \theta_1, \quad (8)$$

$$B_2 \bar{Y} = \bar{0} \text{ при } \theta = \theta_2,$$

де $\bar{Y} = \{\bar{u}, \bar{u}', \bar{v}, \bar{v}', \bar{w}, \bar{w}', \bar{\psi}_s, \bar{\psi}_s', \bar{\psi}_\theta, \bar{\psi}_\theta'\}$, $\bar{u} = \{u_0, \dots, u_N\}$, $\bar{v} = \{v_0, \dots, v_N\}$, $\bar{w} = \{w_0, \dots, w_N\}$, $\bar{\psi}_s = \{\psi_{s0}, \dots, \psi_{sN}\}$, $\bar{\psi}_\theta = \{\psi_{\theta0}, \dots, \psi_{\theta N}\}$, A – квадратна матриця порядку $10(N+1) \times 10(N+1)$, B_1 та B_2 – прямокутні матриці граничних умов порядку $5(N+1) \times 10(N+1)$.

Задачі на власні значення для систем звичайних диференціальних рівнянь (7) з відповідними граничними умовами (8) розв'язувались стійким чисельним методом дискретної ортогоналізації разом з застосуванням метода покровового пошуку [1].

Після підстановки $\bar{Y}$ в (6) одержимо розв'язок двовимірної крайової задачі.

4. Результати розрахунків

Розглядалась замкнена конічна, з поперечним відтином, оболонка змінної в окружному напрямі товщини з довжиною $L = 30$, радіусом при $R_0 = 15$, $0 \leq \theta \leq \pi$, виготовлена з волокнистого склопластику з ортогонально укладеними слоями з наступними характеристиками пружності:

$$v_{\theta s} = 0,149, v_{s\theta} = 0,0648,$$

$$E_s = 4,76 \cdot 10^4 \text{ МПа}, E_\theta = 2,07 \cdot 10^4 \text{ МПа},$$

$$G_{s\theta} = 0,531 \cdot 10^4 \text{ МПа}, G_{s\gamma} = 0,501 \cdot 10^4 \text{ МПа},$$

$$G_{\theta\gamma} = 0,434 \cdot 10^4 \text{ МПа}.$$

Задача дослідження – проаналізувати вплив параметра α , який визначає зміну товщини оболонки в окружному напрямку, на спектр частот вільних коливань ортотропної оболонки

при різній кількості точок колокації. Виконується умова шарнірного опирання на торці.

В таблиці 1 представлені результати розрахунку перших трьох значень частотного $\Omega_m = \omega_m H_0 \sqrt{\rho / E_0}$, $E_0 = 10^4$ МПа, коливання оболонки зі змінною в окружному напрямку товщиною, змінюються за законом

$$H(\theta) = H_0 \left(1 + \alpha \left(6 \cdot \frac{\theta^2}{\pi^2} - 6 \cdot \frac{\theta}{\pi} + 1 \right) \right),$$

$$H_0 = 3 \text{ при } \alpha = -0,2; -0,1; 0; 0,1; 0,2;$$

Розрахунки проводились для $N = 14$ (число точок колокації).

Таблиця 1

Частоти вільних коливань замкнутої ортотропної конічної оболонки перемінної товщини в залежності від параметра α

N	Ω_m	α				
		-0,2	-0,1	0	0,1	0,2
N=10	Ω_1	0,0196	0,0197	0,0197	0,0197	0,0197
	Ω_2	0,0236	0,0238	0,0239	0,0241	0,0242
	Ω_3	0,0272	0,0272	0,0272	0,0272	0,0273
N=14	Ω_1	0,0196	0,0197	0,0197	0,0197	0,0197
	Ω_2	0,0236	0,0238	0,0239	0,0241	0,0242
	Ω_3	0,0271	0,0271	0,0272	0,0272	0,0272
N=18	Ω_1	0,0196	0,0196	0,0197	0,0197	0,0197
	Ω_2	0,0235	0,0237	0,0239	0,0241	0,0242
	Ω_3	0,0271	0,0271	0,0272	0,0272	0,0272
N=22	Ω_1	0,0195	0,0196	0,0197	0,0197	0,0197
	Ω_2	0,0233	0,0237	0,0238	0,0240	0,0242
	Ω_3	0,0271	0,0271	0,0271	0,0272	0,0272

На основі даних в табл. 1 можна прослідкувати характер зміни значень власних частот конічних оболонок зі змінною товщиною відносно оболонок з постійною товщиною при шарнірному опиранні на торці. Аналіз результатів показує на достатньо високу точність розрахунків навіть при малому числі точок колокації. Збільшення числа точок колокації N в умовах даної задачі збільшує точність розрахунків не більше ніж на 0,3 %.

Для даної оболонки знайдені форми вільних

коливань (мал. 1-3), які відповідають першим трьом частотам при шарнірному опиранні торців. Розглядається значення параметра $\alpha = 0,2$. При даному законі зміни товщини оболонки вплив параметра зміни товщини α на форми вільних коливань ортотропної оболонки несуттєві.

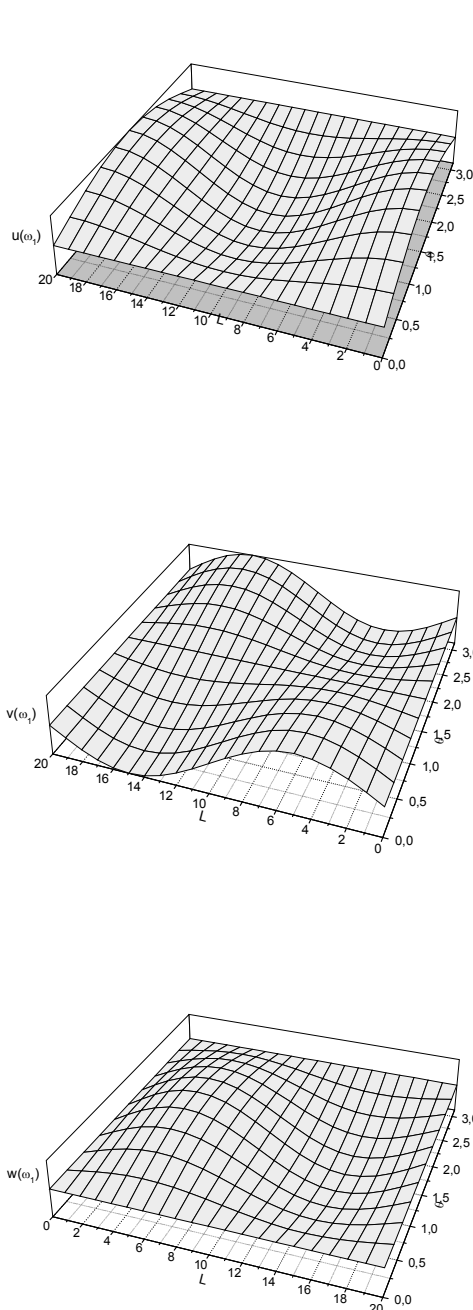


Рис. 1 Перша форма коливань замкнутої ортотропної оболонки при шарнірному опиранні торців.

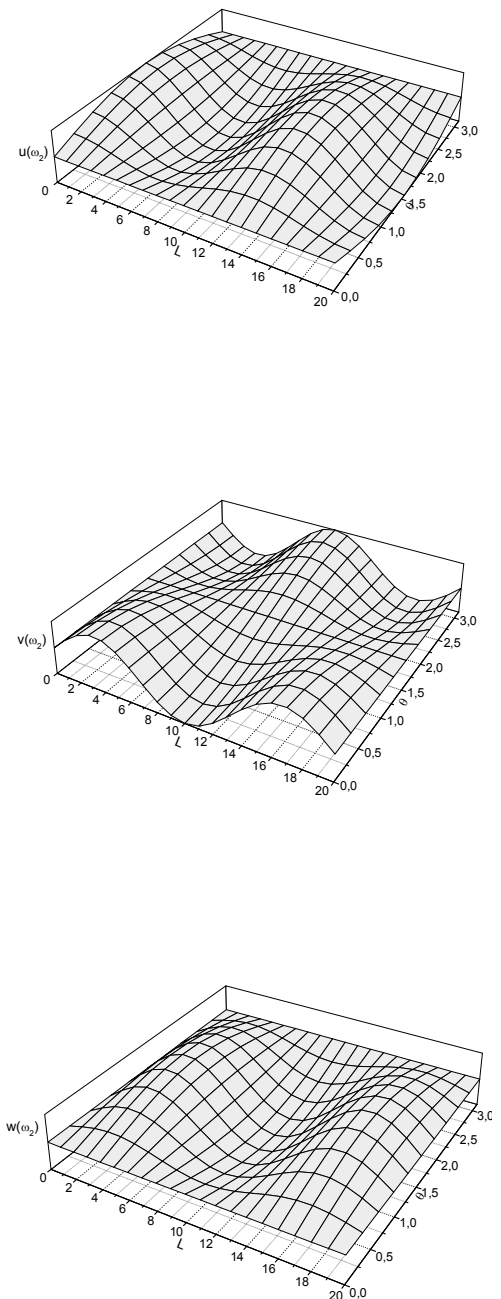


Рис. 2 Друга форма коливань замкнутої ортотропної оболонки при шарнірному опиранні торців

Список використаних джерел

1. Григоренко Я.М. Свободные колебания элементов оболочечных конструкций / Григоренко Я.М., Беспалова Е.И., Китайгородский А.Б., Шинкарь А.И. - К.: Наук. думка, 1986. -- 171 с.
2. Leissa A.W. Vibration of Shells / Leissa A.W. -- NASA SP-288: country-regionUS Government Printing Office, StateplaceWashington, 1973. - Reprinted by the Acoust. Soc. Of Am., 1993. - 428p.
3. Qatu M.S. Recent research advance in the dynamic behavior of shells: 1989-2000, / M.S. Qatu // Appl. Mech. Rev. - 2002. №4- P. 415-434.
4. Григоренко А.Я. Вільні коливання квадратних анізотропних пластин зі змінною товщиною шарів /Григоренко А.Я., Ефимова Т.Л., Власова І.В. // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. – серія – Фізико-математичні науки. – 2012. – вип. №2. – с.55 – 59.
5. Григоренко А. Я. О свободных колебаниях нетонких цилиндрических оболочек переменной толщины на основе метода сплайн-коллокации / Григоренко А. Я., Ефимова Т. Л., Соколов Л. В. // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2010., №4. – с. 169-179.

References

1. GRIGORENKO YA.M., BESPALOVA E.I., KYTAIGORODSKIY A.B., SHYNKAR A.I.(1986) *Svobodnie kolebaniya elementov obolochek konstrukcii*. Kiev:Naukova dumka.
2. LEISSA A.W.(1973) *Vibration of Shells*. NASA SP-288: country-regionUS Government Printing Office
3. QATU M.S(2002). *Recent research advance in the dynamic behavior of shells*. Appl. Mech. Rev.V. 2.pp.415-434.
4. GRIGORENKO A.YA., EFIMOVA T.L., VLASOVA I.V. (2012) *Natural vibrations of square anisotropic plats with variable thickness of layers*. Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series Physics & Mathematics V.2 pp. 55-59.
5. GRIGORENKO A.YA., EFIMOVA T.L., SOKOLOVA L.V.(2010). *O svobodnih kolebaniyah netonkih cilindricheskikh obolochek peremennoi tolschiny na osnove metoda splain-kollokacii*. Lviv: Mat. metody ta fiz.-meh. polia.V.4. pp. 169-179.

Надійшла до редколегії 16.02.15

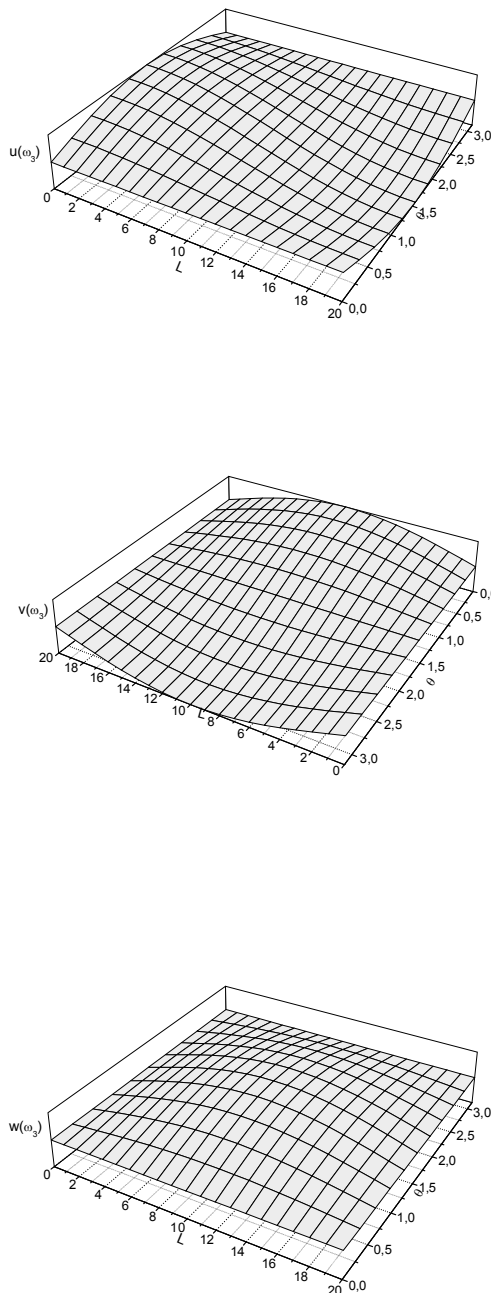


Рис. 3 Третя форма коливань замкненої ортотропної оболонки при шарнірному опиранні торців

УДК 539.3

Киричок І.Ф.¹, д.ф.-м.н., пров. наук. співр.
Жук Я.О.², д.ф.-м.н., проф.
Карнаухова Т.В.³, к. ф.-м. н., доц.

Демпфування резонансних осесиметричних коливань нескінченно довгої в'язкопружної циліндричної оболонки з п'єзоелектричними сенсором і актуатором при врахуванні вібророзігріву

¹ Інститут механіки ім. С.П.Тимошенка НАН України, 03057, м. Київ, вул. П. Нестерова, 3,

² Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, пр-т. Глушкова 4е, e-mail: y.zhuk@i.ua

³ Київський національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут», 03056, м. Київ, пр-т Перемоги, 37

I.F. Kirichok¹, Dr.Sci.
Y.A. Zhuk², Dr.Sci., Prof.
T.V. Karnaukhova³, Ph.D., Assoc. Prof.

Damping of the resonant axisymmetric vibration of infinitely long viscoelastic cylindrical shell containing piezoelectric sensor and actuator accounting for vibroheating

¹S.P.Timoshenko Institute of Mechanics National Academy of Sciences of Ukraine, 3, P. Nesterov str., Kyiv 03057

²Taras Shevchenko National University of Kyiv, 4e, Glushkov ave., Kyiv 03680
e-mail: y.zhuk@i.ua

³National Technical University of Ukraine «Kyiv Polytechnic Institute», 37, Peremohy ave., Kyiv 03056

Розглянуто задачу про вимушені резонансні осесиметричні коливання та вібророзігрів циліндричної оболонки нескінченної довжини з п'єзоелектричними сенсором і актуатором. Досліджено вплив температурної залежності комплексних характеристик пасивного матеріалу на амплітуду коливань і температуру вібророзігріву та можливість активного демпфування коливань оболонки.

Ключові слова: резонансні коливання, дисипативний розігрів, в'язкопружна циліндрична оболонка, сенсор, актуатор, обернений зв'язок.

The problem of forced axisymmetric resonant vibration and dissipative heating of infinite cylindrical shell containing piezoelectric sensor and actuator is investigated. It is assumed that the core layer of the three-layer shell is composed of the electrically passive material while the outer layers are manufactured from the piezoceramics. Theory of coupled thermo-electro-viscoelasticity is used to derive the problem statement in the case of harmonic loading. Within this theory, the concept of complex-value moduli is applied to formulate the relations between main field characteristics. The set of amplitudes of the main field variables is investigated. Influence of temperature dependence of complex characteristics of the electrically passive material on both amplitude of the vibration and temperature of the dissipative heating is studied. Possibility of active damping of the shell vibration is examined. It is shown that this damping can be realized through the linear feedback control law. It is organized as the linear dependence between the actuator rate and the variation rate of the electric potentials of the sensor. The heat transfer coefficient influence onto critical values of the amplitudes of mechanical loading causing the overheating of the shell to the critical temperatures leading to thermal breaking of the shell is studied in details.

Key Words: resonant vibrations, dissipative heating, viscoelastic cylindrical shell, sensor, actuator, feedback.

Статтю представив академік НАН України Перестюк М.О.

1. Вступ

Для зниження рівня коливань тонкостінних оболонкових елементів із пружних і в'язкопружних матеріалів в сучасних конструкціях широко

застосовуються методи активного демпфування з використанням п'єзоактивних включень, які виконують роль сенсорів та актуаторів [1-3]. Побудова електротермомеханічних моделей динаміч-

ної поведінки шаруватих тонкостінних елементів із в'язкопружних пасивних (без п'єзо ефекту) і п'єзоактивних матеріалів з врахуванням температурної залежності властивостей матеріалів, геометричної та фізичної нелінійностей, а також розв'язки конкретних задач отримані в працях [4-8] та ін. Зокрема, в статтях [6-8] подано аналітичні та чисельні результати для задачі про вимушені осесиметричні коливання і вібророзігрів циліндричних оболонок з п'єзоелектричними шарами, які виконують роль актуаторів або сенсорів.

В даній статті досліджуються вимушені осесиметричні коливання і дисипативний розігрів нескінченно довгої в'язкопружної циліндричної оболонки та її демпфування п'єзоактивними шарами, один з яких виконує роль сенсора, а другий – актуатора. Демпфування реалізується шляхом підключення механізму оберненого зв'язку, який впливає на дисипативні характеристики системи. Враховується температурна залежність властивостей пасивного матеріалу несучого шару оболонки.

2. Постановка задачі та її розв'язання.

Розглядається тришарова циліндрична оболонка нескінченної довжини, віднесена до ортогональної системи координат $O\alpha\theta z$ з координатою $z = 0$ на серединній поверхні в'язкопружного середнього шару радіуса R і товщини h_0 . Внутрішній ($z \leq -h_0/2$) і зовнішній ($z \geq h_0/2$) шари товщиною h_1 і h_2 , відповідно, виготовлені із поляризованої по товщині пружної п'єзокераміки. Між пасивним і п'єзоактивними шарами та на зовнішніх поверхнях п'єзошарів нанесено нескінченно тонкі електроди. На внутрішніх електродах задано електричний потенціал $\varphi(\pm h_0/2) = 0$. Вважаємо, що шар товщиною h_1 виконує роль сенсора, а шар товщиною h_2 є актуатором.

Оболонка навантажена осесиметричним поверхневим тиском $q_z = q \cos \omega t$, що гармонічно змінюється за часом t із сталою амплітудою q і близькою до резонансної частотою ω . Крім того, до електродів актуатора з частотою механічного навантаження для компенсації його дії підводиться різниця електричних потенціалів амплітуди ${}^2\varphi(h_0/2 + h_2) - {}^2\varphi(h_0/2) = V_a$. При цьому на розімкнутих електродах сенсора виникає різниця електричних потенціалів невідомої амплітуди ${}^1\varphi(-h_0/2 - h_1) - {}^1\varphi(-h_0/2) = V_s$ та на електродах

ваних поверхнях S виконуються такі електричні граничні умови:

$$\iint_S {}^1D_z ds = 0. \quad (1)$$

Тут 1D_z – нормальна складова електричної індукції. На поверхнях оболонки реалізується конвективний теплообмін із зовнішнім середовищем, температура T_0 якого дорівнює початковій температурі оболонки.

При моделюванні електротермомеханічної поведінки досліджуваної оболонки вважаємо, що по всьому пакету шарів справедливі гіпотези Кірхгофа–Лява, і механічна поведінка описується безмоментною теорією оболонок. Відносно електричних змінних мають місце адекватні припущення [3], з яких витікає, що D_z є сталою по товщині п'єзошарів $D_z = \text{const}$. В'язкопружні властивості пасивного матеріалу при циклічному деформуванні описуються температурозалежними комплексними модулями [9]. Розглядаючи режим усталених коливань і вібророзігріву, вважаємо температуру постійною по товщині пакету.

На основі прийнятих гіпотез із тривимірних співвідношень для поляризованої вздовж вісі Oz п'єзокераміки отримуємо такі вирази для визначальних рівнянь в п'єзоактивних шарах:

$$\begin{aligned} {}^m\sigma_\theta &= {}^m c_{11} \varepsilon_\theta - {}^m b_{31} {}^m E_z; \\ {}^m D_z &= {}^m b_{31} \varepsilon_\theta - {}^m \hat{\varepsilon}_{33} {}^m E_z; \end{aligned} \quad (2)$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{w}{R}; \quad {}^m E_z = -\frac{d {}^m \varphi}{dz},$$

де

$${}^m c_{11} = \frac{1}{{}^m s_{11}^E (1 - {}^m \nu_E^2)}; \quad {}^m \nu_E = -\frac{{}^m s_{12}^E}{{}^m s_{11}^E};$$

$${}^m b_{31} = \frac{{}^m d_{31}}{{}^m s_{11}^E (1 - {}^m \nu_E^2)}; \quad {}^m \hat{\varepsilon}_{33} = {}^m \varepsilon_{33}^T - 2 {}^m b_{31} {}^m d_{31};$$

і ${}^m s_{11}^E$, ${}^m s_{12}^E$, ${}^m d_{31}$, ${}^m \varepsilon_{33}^T$ – податливості, п'єзомодуль і діелектрична проникність матеріалу п'єзомодуль електричних шарів; $w = w' + iw''$ – комплексна амплітуда прогину, $m = 1, 2$.

Для в'язкопружного матеріалу пасивного шару справедливі перша і третя залежності із (2), в яких необхідно покласти ${}^m c_{11} = {}^0 c_{11} = E(T)/(1 - \nu^2)$, ${}^m b_{31} = 0$, де $E = E' + iE''$ – комплексний модуль в'язкопружності, який залежить від температури; $\nu = \text{const}$ – коефіцієнт Пуассона.

Інтегруючи залежності (2) по пакету шарів оболонки, отримуємо вирази для зусилля N_θ

$$N_\theta = D_N \frac{w}{R} - {}^1b_{31}V_s + {}^2b_{31}V_a; \quad (3)$$

$$D_N = {}^1c_{11}h_1 + {}^2c_{11}h_2 + {}^0c_{11}h_0.$$

Електрична індукція в п'єзоелектричному сенсорі визначається за формулою

$${}^1D_z = {}^1b_{31} \frac{w}{R} + {}^1\hat{\epsilon}_{33} \frac{V_s}{h_1}. \quad (4)$$

Задовольняючи граничній умові (1), з (4) отримуємо вираз для амплітуди електричного потенціалу на електродах сенсора

$$V_s = -\frac{{}^1b_{31}h_1}{{}^1\hat{\epsilon}_{33}R} w. \quad (5)$$

В рамках безмоментної теорії рівняння гармонічних коливань досліджуваної оболонки в термінах амплітуд змінних має вигляд (множник $e^{i\omega t}$ опущений)

$$N_\theta - \hat{\rho} R \omega^2 w = \hat{q}, \quad (6)$$

де

$$\hat{\rho} = \rho_1 h_1 + \rho_2 h_2 + \rho_0 h_0; \quad \hat{q} = R(h_0 + h_1 + h_2),$$

а ρ_1 , ρ_2 і ρ_0 – питома густина п'єзокераміки сенсора, актуатора і пасивного матеріалу відповідно.

Для демпфування механічних коливань оболонки шляхом підведення до актуатора різниці електричних потенціалів V_a використовуємо механізм оберненого зв'язку у формі лінійної залежності показника V_a і похідної за часом показника сенсора V_s , тобто

$$V_a = -i\omega G_{as} V_s. \quad (7)$$

Тут G_{as} – параметр керування, який впливає на дисипативні властивості системи. Знак «-» означає протифазне до механічного навантаження підведення потенціалу V_a до актуатора.

В силу прийнятих припущень і умов теплообміну стаціонарне значення температури дисипативного розігріву оболонки визначається співвідношенням

$$-2\alpha_s \theta + \frac{\omega}{2(1-\nu^2)R^2} E''(\theta) |w|^2 = 0, \quad (8)$$

в якому $|w| = (w'^2 + w''^2)^{1/2}$, $\theta = T - T_0$; α_s – коефіцієнт теплообміну із зовнішнім середовищем.

Підставляючи вираз (3) в рівняння (6) з врахуванням (5), (7), після нескладних перетворень знаходимо

$$|w| = |q / (\Delta^2 + \Delta'^2)^{1/2}|, \quad (9)$$

де

$$\Delta' = D_N^0 + \gamma_2 - R\hat{\rho}\omega^2 + m_1 E'(\theta), \quad \Delta'' = \gamma_1 + m_1 E''(\theta),$$

$$D_N^0 = ({}^1c_{11}h_1 + {}^2c_{11}h_2), \quad m_1 = h_0 / [(1-\nu^2)R],$$

$$\gamma_2 = {}^1b_{31}^2 h_1 / ({}^1\hat{\epsilon}_{33} R), \quad \gamma_1 = \omega G_{as}^2 b_{31} \gamma_2.$$

Комбінація співвідношень (8), (9) приводить до трансцендентного рівняння відносно невідомої температури θ при заданих функціях $E'(\theta)$, $E''(\theta)$.

Вважаємо, що складові комплексного модуля характеризуються лінійною залежністю від температури:

$$E'(\theta) = E'_0 + E'_1 \theta; \quad E''(\theta) = E''_0 + E''_1 \theta. \quad (10)$$

З врахуванням залежностей (10) із рівнянь (8), (9) для обчислення температури вібророзігріву оболонки отримуємо таке кубічне рівняння:

$$a_3 \theta^3 + a_2 \theta^2 + a_1 \theta - m_{30} q^2 = 0. \quad (11)$$

Співвідношення (9) для визначення амплітуди прогину зводиться до формули

$$|w| = q / (a_0 + a_2 \theta + a_3 \theta^2)^{1/2}. \quad (12)$$

В рівняннях (11), (12) використані наступні позначення:

$$a_0 = \Delta_1^2 + \Delta_2^2, \quad a_1 = a_0 - m_{31} q^2,$$

$$a_2 = 2(d_1 \Delta_1 + d_2 \Delta_2), \quad a_3 = d_1^2 + d_2^2;$$

$$\Delta_1 = D_N^0 + \gamma_2 + m_1 E'_0 - R\rho_* \omega^2, \quad \Delta_2 = \gamma_1 + m_1 E''_0;$$

$$d_1 = m_1 E'_1, \quad d_2 = m_1 E''_1;$$

$$m_{30} = m_0 E''_0, \quad m_{31} = m_0 E''_1, \quad m_0 = \omega / [4\alpha_s (1-\nu^2) R^2].$$

При незалежних від температури складових комплексного модуля амплітуда прогину і температура вібророзігріву розраховуються на основі залежностей (9) і (8), в яких необхідно покласти $E'(\theta) = E'_0$, $E''(\theta) = E''_0$.

3. Результати розрахунків та їх аналіз.

Числові розрахунки проведено для оболонки з розмірами $R = 0,1$ м, $h_0 = 0,004$ м, $h_1 = h_2 = 0,5 \cdot 10^{-5}$ м. Пасивний шар виготовлений із полімера [10] з параметрами температурної апроксимації матеріалу

$$E'_0 = 0,216594 \cdot 10^{10} \text{ Па}, \quad E'_0 = 0,236994 \cdot 10^8 \text{ Па/}^\circ\text{C},$$

$$\delta_E = 0,092, \quad E''_{0,1} = \delta_E E'_{0,1}, \quad \rho_0 = 929 \text{ кг/м}^3,$$

$$\nu = 0,3636, \quad T_0 = 20^\circ\text{C}.$$

П'єзоелектричні актуатор і сенсор виготовлені з однакової п'єзокераміки типу ЦТСтБС-2 [11] з параметрами

$$\begin{aligned}s_{11}^E &= 12,5 \cdot 10^{-12} \text{ м}^2/\text{Н}, \quad s_{12}^E = -4,62 \cdot 10^{-12} \text{ м}^2/\text{Н}, \\ d_{31} &= -1,6 \cdot 10^{-10} \text{ Кл/м}, \quad \varepsilon_{33}^T = 21 \cdot 10^2 \varepsilon_0 \text{ м}^2/\text{Н}, \\ \varepsilon_0 &= 8,854 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м}, \quad \rho_1 = \rho_2 = 7520 \text{ кг/м}^3.\end{aligned}$$

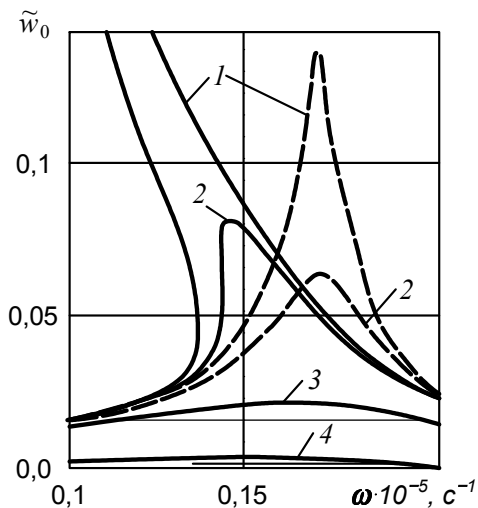


Рис. 1. Частотні залежності амплітуд прогинів оболонки при механічному навантаженні.

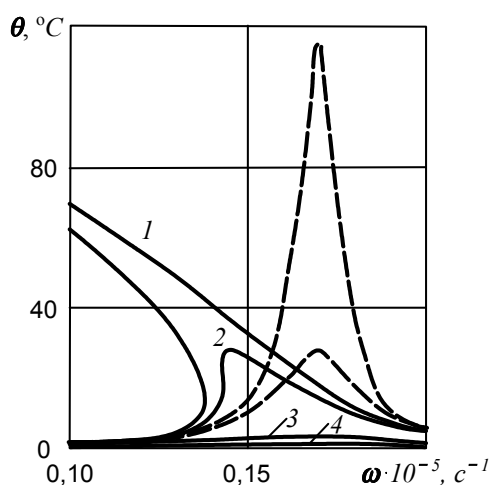


Рис. 2. Температурно-частотні характеристики коливань оболонки при механічному навантаженні.

На рис. 1 кривими 1–4 показано частотні залежності безрозмірних амплітуд прогинів $\tilde{w} = |w| \cdot 10^2 / h_0$ оболонки при механічному навантаженні з амплітудою $\hat{q} = 0,5 \cdot 10^2 \text{ Н}$, які розраховані для параметрів керування $G_{as} = 0; 0,002; 0,01$ і $0,1$ відповідно. Аналогічні температурно-частотні характеристики при $\alpha_s = 25 \text{ Вт/(м}^2 \cdot \text{град)}$ представлено на рис. 2. Тут штрихові криві відповідають ізотермічному модулю пасивного матеріалу, а суцільні – при врахуванні його залежності від температури. З рис. 1, 2 видно, що вра-

хування температурної залежності властивостей матеріалу приводить до відомого явища трансформації ізотермічних характеристик в нелінійні характеристики м'якого типу при зменшенні власної частоти.

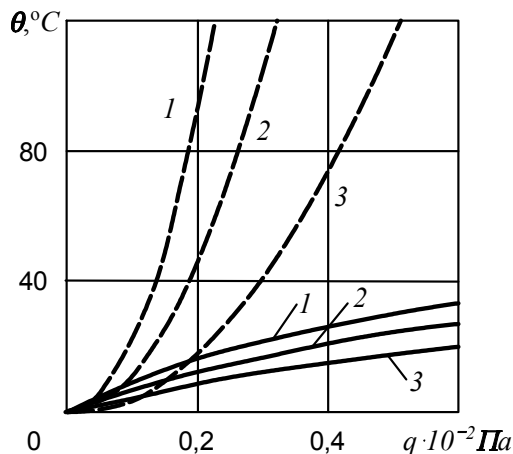


Рис. 3. Залежності температури вібророзігріву від амплітуди механічного навантаження q .

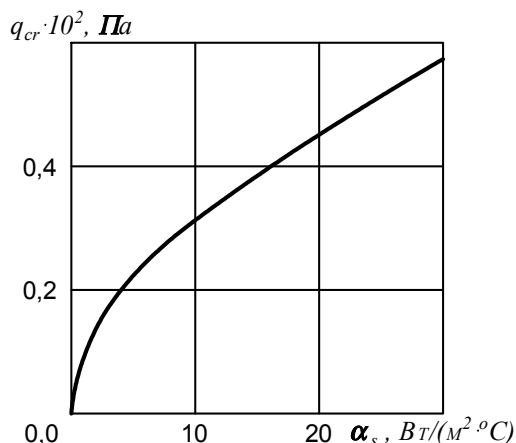


Рис. 4. Залежність критичного значення амплітуди механічного навантаження від параметра теплообміну α_s .

Включення механізму оберненого зв'язку з використанням швидкості зміни електричного показника сенсора дозволяє ефективно керувати коливаннями і вібророзігрівом системи. При цьому, збільшення параметра керування G_{as} супроводжується зменшенням амплітуди механічних коливань аж до їх повного гасіння.

Температура вібророзігріву в'язкопружних елементів, виготовлених з пасивних і п'єзоактивних складових, при відповідних рівнях механічного навантаження і умов теплообміну може досягати критичного значення T_{cr} , при якій настає теплове руйнування системи через розм'якшення пасивного матеріалу, або деполя-

ризацію п'єзокераміки (при досягненні температурою точки Кюрі). На рис. 3 приведені криві 1–3 залежності температури вібророзігріву $\theta = T - T_0$ недемпфованої оболонки ($G_{as} = 0$) від амплітуди механічного навантаження q , розраховані для частоти $\omega = 1700 \text{ с}^{-1}$ при ізотермічному (штрихові лінії) і залежному від температури (суцільні лінії) значеннях комплексного модуля Юнга з коефіцієнтом теплообміну $\alpha_s = 5; 10$ і $25 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{град})$, відповідно. Аналіз кривих на рис. 3 показує, що критичні значення амплітуди навантаження q_{cr} , при яких вібророзігрів досягає температури розм'якшення розглядуваного пасивного матеріалу $\theta_{cr} \approx 120^\circ\text{C}$, суттєво залежить від параметра теплообміну α_s . У випадку ізотермічного модуля пружності таку залежність характеризує крива на рис. 4. Видно, що q_{cr} прямує до нуля при $\alpha_s \rightarrow 0$ і монотонно збільшується при $\alpha_s \rightarrow \infty$.

Список використаних джерел

1. *Gabbert U.* Smart structures and structronic systems / U. Gabbert, H.S. Tzou – Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2001. – 384p.
2. *Tzou H.S.* Piezoelectric Shells / H.S. Tzou. – Dordrecht – Boston – London: Kluwer Academic Publishers, 1993. – 400p.
3. *Карнаухов В.Г.* Нелинейная термомеханика пьезоэлектрических неупругих тел при моногармоническом нагружении / В.Г. Карнаухов, В.В. Михайленко. - Житомир: ЖСТУ, 2005. – 428с.
4. *Zhuk Y.A.* Active damping of the forced vibration of a hinged beam with piezoelectric layers, geometrical and physical nonlinearities taken into account / Y.A. Zhuk, I.A. Guz // International Applied Mechanics. – 2009. – **45**, №1. – P. 94-108
5. *Kirichok I.F.* Control of axisymmetric resonant vibrations and self-heating of shells of revolution with piezoelectric sensors and actuators / I.F. Kirichok // International Applied Mechanics. – 2011. – **46**, № 8. – P. 890-901.
6. *Kirichok I.F.* Forced axisymmetric vibrations and self-heating of thermoviscoelastic cylindrical shells with piezoelectric actuators / I.F. Kirichok, T.V. Karnaukhova // International Applied Mechanics. – 2011. – **46**, № 10. – P. 1132-1138.

4. Висновки.

Дано постановку задачі про вимушені осесиметричні резонансні коливання й вібророзігрів в'язкопружної циліндричної оболонки нескінченної довжини з п'єзоелектричними сенсором і актуатором при врахуванні температурної залежності властивостей пасивного матеріалу. Показано можливість активного демпфування коливань оболонки за допомогою механізму оберненого зв'язку, який реалізується лінійною залежністю показника п'єзоактуатора від швидкості зміни різниці електричних потенціалів на електродах сенсора. Враховується залежність в'язкопружного модуля від температури. Досліджено вплив коефіцієнта теплообміну на критичні значення амплітуди механічного навантаження, при яких температура вібророзігріву досягає критичної і відбувається теплове руйнування оболонки.

References

1. *GABBERT U.* (2001) Smart structures and structronic systems. – Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
2. *TZOU H.S.* (1993) Piezoelectric Shells (Distributed Sensing and Control of Continua). – Dordrecht – Boston – London: Kluwer Academic Publishers, 1993.
3. *KARNAUKHOV V.G., MIKHAILENKO V.V.* (2005) Nelineynaya termomekhanika piezoelektricheskikh neuprugih tel pri monogarmonicheskom nagruzhennii. - Zhytomir: ZSTU.
4. *ZHUK Y.A., GUZ I.A.* (2009) Active damping of the forced vibration of a hinged beam with piezoelectric layers, geometrical and physical nonlinearities taken into account // International Applied Mechanics. – **45**, №1. – P. 94-108
5. *KIRICHOK I.F.* (2011) Control of axisymmetric resonant vibrations and self-heating of shells of revolution with piezoelectric sensors and actuators // International Applied Mechanics. – **46**, № 8. – P. 890-901.
6. *KIRICHOK I.F., KARNAUKHOVA T.V.* (2011) Forced axisymmetric vibrations and self-heating of thermoviscoelastic cylindrical shells with piezoelectric actuators // International Applied Mechanics. – **46**, № 10. – P. 1132-1138.

7. Киричок І.Ф. Влияние граничных условий и температуры виброразогрева на резонансные осесимметричные колебания вязкоупругих цилиндрических оболочек с пьезоактуаторами и сенсорами / И.Ф. Киричок, Я.О. Жук // Теоретическая и прикладная механика. – 2013. – № 7(53). – С. 149-156.
8. Киричок І.Ф. Осесиметричні резонансні коливання і вібророзігрів в'язкопружної циліндричної оболонки з п'єзоелектричними сенсорами при врахуванні температурної залежності властивостей матеріалів / І.Ф. Киричок, Т.В. Карнаухова // Вісник Київського університету. – Сер.: Фізико-математичні науки. – 2013. – №3. – С. 150-153.
9. Карнаухов В.Г. Связанные задачи теории вязкоупругих пластин и оболочек / В.Г. Карнаухов, И.Ф. Киричок. - Киев: Наук. думка, 1986. – 222р.
10. Нестеренко Н.П. Моделирование ультразвукового разогрева структурных элементов полимерных волокнистых композитов / Нестеренко Н.П., Червинко О.П., Сенченков И.К. // Вестник Нац. техн. ун-та «ХПИ». – 2002. – № 9. – С. 3-8.
11. Bolkisev A.M. Temperature dependence of the properties of piezoelectric ceramics / A.M. Bolkisev, V.L. Karlash, N.A. Shul'ga // International Applied Mechanics. - 1984. – 20, № 7. – P. 650-653.
7. KIRICHOK I.F., ZHUK Y.A. (2013) Vliyaniye granichnykh uslovij i temperatury vibrorazogreva na rezonansnyye osesimmetrichnyye kolebaniya vyazkoupругih cilindricheskih obolochek, so-dierzhashchih piezoactuatory i sensory // Teoreticheskaya i prikladnaya mekhanika. – № 7(53). – P. 149-156.
8. KIRICHOK I.F., KARNAUKHOVA T.V. (2013) Osesimmetrychni resonansni kolyvannya i vibrorozigriv vyazkopruzhoji cylindrychnoji obolonky z piezoelectrychnymy sensoramy pry vrakhuvanni temperaturnoji zalezhnosti vlasty-vostej materialiv // Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series Physics and Mathematics. – № 3. – P. 150-153.
9. KARNAUKHOV V. G., KIRICHOK I.F. (1986) Svyazannyye zadachi teorii vyazkoupругih plastin i obolochek. – Kiev: Naukova Dumka.
10. NESTERENKO N.P., CHERVINKO O.P., SENCHENKOV I.K. (2002) Modelirovaniye ul'trazvukovogo razogreva strukturnykh elementov polimernykh voloknistykh compozitov // Bulletin of National Technical University "KhPI". – № 9. – P. 3-8.
11. BOLKISEV A.M., KARLASH V.L., SHUL'GA N.A. (1984) Temperature dependence of the properties of piezoelectric ceramics // International Applied Mechanics. – 20, № 7. – P. 650-653.

Надійшла до редколегії 12.01.15

УДК 539.3

Острик В. І.¹, д. ф.-м. н., проф.

Гладкий контакт штампа поліноміального профілю з пружною півплощиною

¹ Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 03680,
м. Київ, просп. Глушкова, 4 е,
e-mail: ostrik_v@rambler.ru

V. I. Ostryk¹, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof.

Smooth contact of stamp of polynomial profile with elastic half-plane

¹ Taras Shevchenko National University of Kyiv,
03680, Kyiv, Glushkova st., 4 e,
e-mail: ostrik_v@rambler.ru

Розв'язано задачу гладкого контакту штампа поліноміального профілю з пружною півплощиною. В доповнення до відомого результату І. Я. Штаєрмана, який розглядав цю задачу для парного показника профілю штампа, визначено розподіл контактної тиску у випадку непарного показника. Знайдено напруження та переміщення у кожній точці півплощини.

Ключові слова: гладкий контакт, пружна півплощина, штамп, контактний тиск, напруження.

The problem of smooth contact between a stamp with polynomial profile and an elastic half-plane is solved. This problem was considered earlier for pair profile indicator of a stamp and the contact pressure distribution was determined by I. Shtayerman. The contact pressure distribution was also obtained in case of the odd profile indicator in addition to the Shtayerman's result. Herewith the singular integral which appears during the solving of integral equation of the problem is calculated by using the recurrent ratio. The stresses and displacements are found at each point of the half-plane using the Kolosov – Muskhelishvili complex potential. The corresponding Cauchy type integral is expressed through elementary functions by means of using the recurrent formula and applying the technique of contour integration. For varied profile indicators of a stamp the coordinates are calculated for the point of the half-plane in which the maximum shear stresses obtain the largest value. The level lines of maximum shear stress in an elastic half-plane are plotted in case of a stamp with polynomial profile of the fourth power.

Key Words: smooth contact, elastic half-plane, stamp, contact pressure, stress.

Статтю представив д. ф.-м. н., проф. Жук Я. О.

Вступ

Задачу про контактну взаємодію пружної півплощини зі штампом поліноміального профілю, показник якого є парним числом, розглянуто І. Я. Штаєрманом [1]. Без урахування сил тертя, які виникають в області контакту, в роботі [1] в результаті точного розв'язання інтегрального рівняння задачі визначено розподіл контактної тиску та встановлено зв'язок між розміром області контакту і силою, прикладеною до штампа.

Більш повний розв'язок задачі з визначенням напружень у кожній точці півплощини отримано Н. М. Беляєвим [2] у випадку параболічного штампа, коли показник його профілю дорівнює 2.

У даній статті для довільного цілого додатного показника профілю штампа знаходиться функція контактної тиску та визначаються переміщення й напруження всередині півплощини.

Постановка задачі. Контактний тиск

Розглянемо гладкий контакт (без урахування сил тертя в області контакту) абсолютно жорст-

кого штампа, контур якого задається рівнянням $y = -B|x|^n$ ($n = 1, 2, \dots$; $B > 0$, $B = \text{const}$), з пружною півплощиною $y \geq 0$. Під дією нормальної сили P штамп вдавлюється в пружну півплощину. В результаті деформування межі півплощини утворюється область контакту $-a \leq x \leq a$, $y = 0$ між поверхнями контактуючих тіл, розмір $2a$ якої заздалегідь невідомий. Крайові умови задачі такі:

$$\begin{aligned} u_y|_{y=0} &= -B|x|^n \quad (|x| \leq a), \quad \sigma_y|_{y=0} = 0 \quad (|x| > a), \\ \tau_{xy}|_{y=0} &= 0 \quad (|x| < \infty). \end{aligned} \quad (1)$$

За другої та третьої умов (1) справедливе сингулярне інтегральне співвідношення [3]:

$$\frac{\partial u_y}{\partial x} \Big|_{y=0} = 2(1-\nu) \frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \frac{p(s)}{s-x} ds, \quad (2)$$

де $p(x) = -\frac{1}{2G} \sigma_y|_{y=0}$ – функція контактної тиску, G – модуль зсуву, ν – коефіцієнт Пуассона.

На підставі (2) із першої крайової умови (1) отримуємо сингулярне інтегральне рівняння

$$\frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \frac{p(s)}{s-x} ds = -\frac{nB \operatorname{sign} x}{2(1-\nu)} |x|^{n-1} \quad (-a < x < a). \quad (3)$$

Обмежений на кінцях інтервалу $-a < x < a$ розв'язок рівняння (3) знаходимо у вигляді [4]

$$p(x) = \frac{nB}{2(1-\nu)\pi} \sqrt{a^2 - x^2} I_n(x),$$

$$I_n(x) = \int_{-a}^a \frac{|s|^{n-1} \operatorname{sign} s}{\sqrt{a^2 - s^2}} \frac{ds}{s-x}. \quad (4)$$

Для інтеграла із (4) справедливе рекурентне співвідношення

$$I_n(x) = x^2 I_{n-2}(x) + 2J_{n-2} \quad (n=3, 4, \dots), \quad (5)$$

$$J_n = \int_0^a \frac{s^n}{\sqrt{a^2 - s^2}} ds = \frac{n-1}{n} a^2 J_{n-2} = a^n J'_n,$$

$$J'_{2m} = \frac{(2m-1)!!}{(2m)!!} \frac{\pi}{2}, \quad J'_{2m-1} = \frac{(2m-2)!!}{(2m-1)!!} \quad (m=1, 2, \dots),$$

з початковими значеннями

$$I_1(x) = \frac{2}{\sqrt{a^2 - x^2}} \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{|x|}, \quad I_2(x) = \pi.$$

Застосовуючи рекурентну формулу (5) декілька разів, знаходимо

$$I_{2m}(x) = 2(J_{2m-2} + J_{2m-4}x^2 + \dots + J_2x^{n-4}) + I_2(x)x^{2(m-1)},$$

$$I_{2m-1}(x) = 2(J_{2m-3} + J_{2m-5}x^2 + \dots + J_1x^{2m-4}) + I_1(x)x^{2(m-1)}.$$

Отже, на підставі (4) отримуємо розподіл контактного тиску

$$p(x) = \frac{P}{2\pi a^2 G} \left(\frac{1 - (-1)^n}{2} \frac{n!!}{(n-1)!!} \frac{x^{n-1}}{a^{n-2}} \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{|x|} + \sqrt{a^2 - x^2} \sum_{k=1}^{[n/2]} \frac{[n/2]_k}{[(n-1)/2]_k} \left(\frac{x}{a} \right)^{2k-2} \right) \quad (-a \leq x \leq a), \quad (6)$$

де $[n/2]$ – ціла частина $n/2$, $[n]_k = n(n-1)\dots(n-k+1)$. При цьому залежність півдовжини a області контакту від сили P :

$$a = \sqrt[n]{\frac{(1-\nu)P}{2nJ'_n B G}} \quad (7)$$

знайдено із умови рівноваги штамп

$$\int_{-a}^a p(x) dx = \frac{P}{2G}. \quad (8)$$

Формули (6), (7) у випадку парного n отримано І. Я. Штаєрманом [1].

При необмеженому зростанні n знаходимо граничний розподіл контактного тиску із (6):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p(x) = \frac{P}{2\pi G} \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} \quad (-a < x < a) \quad (9)$$

для штамп з прямолінійною основою [3].

На рис. 1 показано розподіли безрозмірного контактного тиску $\bar{p}(x) = (2Ga/P)p(x)$ на половині області контакту ($0 \leq x \leq a$) для різних значень показника n профілю штамп. Видно, що зі збільшенням показника n контактний тиск спадає всередині області контакту і зростає на краю цієї області. При цьому тиск $\bar{p}(x)$ наближається до свого розподілу для штамп з прямолінійною основою ($n = \infty$, пунктирна лінія), коли він стає необмеженим на краю ділянки контакту ($x/a = 1$).

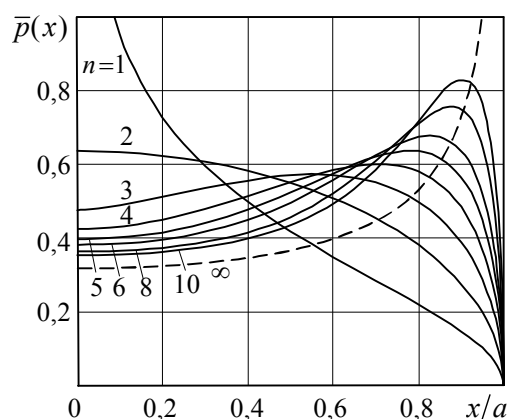


Рис. 1. Розподіли контактного тиску

Напруження та переміщення всередині пружної півплощини

Напруження в кожній точці (x, y) пружної півплощини знайдемо за формулами Колосова [5]:

$$\frac{1}{2G} (\sigma_x + \sigma_y) = -4 \operatorname{Re} \Phi(z),$$

$$\frac{1}{2G} (\sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy}) = 2 [\bar{\Phi}(z) + \Phi(z) + (z - \bar{z})\Phi'(z)], \quad (10)$$

де $\Phi(z)$ – аналітична функція комплексної змінної $z = x + iy$ є потенціалом Колосова – Мусхелішвілі й подається інтегралом типу Коші:

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-a}^a \frac{p(s)}{s-z} ds. \quad (11)$$

1. Випадок парного n . Залучаючи формулу (6), маємо

$$\Phi(z) = -\frac{iP}{4\pi^2 a^2 G} \left(\frac{n}{n-1} U_0(z) + \frac{n(n-2)}{(n-1)(n-3)} \frac{U_1(z)}{a^2} + \dots + \frac{n!!}{(n-1)!!} \frac{U_{n/2-1}(z)}{a^{n-2}} \right),$$

$$U_k(z) = \int_{-a}^a \frac{s^{2k} \sqrt{a^2 - s^2}}{s - z} ds \quad (k = 0, 1, \dots). \quad (12)$$

Для інтеграла $U_k(z)$ із (12) справедлива рекурентна формула

$$U_k(z) = z^2 U_{k-1}(z) + 2z V_{k-1} \quad (k = 1, 2, \dots), \quad (13)$$

$$V_k = \int_0^a s^{2k} \sqrt{a^2 - s^2} ds = \frac{J_{2k+2}}{2k+1} \quad (k = 0, 1, \dots).$$

Інтеграл $U_0(z)$ із (12), який є початковим значенням до формули (13), знаходимо методом контурного інтегрування [5]. В результаті отримуємо

$$U_0(z) = \pi \left(\sqrt{z^2 - a^2} - z \right). \quad (14)$$

Послідовно застосовуючи рекурентну формулу (13), з урахуванням (14) знаходимо

$$U_k(z) = \pi z \left[\frac{(2k-3)!!}{(2k)!!} a^{2k} + \frac{(2k-5)!!}{(2k-2)!!} a^{2k-2} z^2 + \dots + \frac{(-1)!!}{2!!} a^2 z^{2k-2} + z^{2k-1} \left(\sqrt{z^2 - a^2} - z \right) \right] \quad (k = 0, 1, \dots). \quad (15)$$

Підставивши $U_k(z)$ ($k = 0, 1, \dots, n/2 - 1$) із (15) у першу із формул (12), після перетворень дістанемо

$$\Phi(z) = -\frac{iP}{4\pi a^2 G} \sum_{k=1}^{n/2} \left(a_{nk} \sqrt{z^2 - a^2} + c_{nk} z \right) \left(\frac{z}{a} \right)^{2k-2},$$

$$a_{nk} = \frac{[n/2]_k}{[(n-1)/2]_k}, \quad c_{nk} = \sum_{m=k}^{n/2} \frac{(2m-2k-3)!!}{(2m-2k)!!} a_{nm}, \quad (16)$$

якщо вважати, що $(-3)!! = -1$, а також

$$\Phi'(z) = \frac{iP}{4\pi a^2 G} \sum_{k=1}^{n/2} \left(b_{nk} \frac{z}{\sqrt{z^2 - a^2}} - (2k-1)c_{nk} \right) \left(\frac{z}{a} \right)^{2k-2}$$

$$b_{nk} = \frac{[n/2]_k}{[(n-3)/2]_k} \quad (n=2, 4, \dots; k=1, 2, \dots, n/2). \quad (17)$$

На підставі (16), (17) за формулами (10) маємо:

$$\sigma_x + \sigma_y = -\frac{2P}{\pi a^2} \sum_{k=1}^{n/2} \left[a_{nk} \sqrt{r_1 r_2} \sin \left(2(k-1)\vartheta + \frac{\vartheta_1 + \vartheta_2}{2} \right) + c_{nk} \rho \sin(2k-1)\vartheta \right] \left(\frac{\rho}{a} \right)^{2k-2},$$

$$\sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} = -\frac{2Py}{\pi a^2} \sum_{k=1}^{n/2} \left[b_{nk} \frac{\rho}{\sqrt{r_1 r_2}} e^{i((2k-1)\vartheta - \frac{\vartheta_1 + \vartheta_2}{2})} - (2k-1)c_{nk} e^{2i(k-1)\vartheta} \right] \left(\frac{\rho}{a} \right)^{2k-2},$$

$$z - a = r_1 e^{i\vartheta_1}, \quad z + a = r_2 e^{i\vartheta_2}, \quad z = x + iy = \rho e^{i\vartheta}. \quad (18)$$

2. Випадок непарного n . Аналогічно випадку парного n отримаємо

$$\sigma_x + \sigma_y = -\frac{2P}{\pi a} \left\{ \frac{n!!}{(n-1)!!} \left[\frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{J''_{n-k-1}}{n-k} \left(\frac{\rho}{a} \right)^{k-1} \sin(k-1)\vartheta + \left(\frac{\rho}{a} \right)^{n-1} \left(\ln \frac{\rho_0}{\rho} \cdot \cos(n-1)\vartheta - \left(\arccos \frac{\xi}{\rho_0} - \vartheta \right) \sin(n-1)\vartheta \right) \right] + \frac{1}{a} \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{\rho}{a} \right)^{2k-2} \left[a_{nk} \sqrt{r_1 r_2} \sin \left(2(k-1)\vartheta + \frac{\vartheta_1 + \vartheta_2}{2} \right) + \rho c'_{nk} \sin(2k-1)\vartheta \right] \right\},$$

$$\sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} =$$

$$= \frac{2P}{\pi a} \left\{ \frac{n!!}{(n-1)!!} \frac{1}{\pi} \sin \vartheta \cdot \sum_{k=2}^{n-1} \frac{k-1}{n-k} J''_{n-k-1} \left(\frac{\rho}{a} \right)^{k-1} e^{i(k-2)\vartheta} - \frac{1}{2a} \sqrt{r_1 r_2} \sin(\vartheta_1 - \vartheta_2) e^{-i\frac{\vartheta_1 + \vartheta_2}{2}} \sum_{k=1}^{(n-3)/2} b_{nk} \left(\frac{\rho}{a} \right)^{2k-1} e^{i(2k-1)\vartheta} + \frac{n!!}{(n-3)!!} \left(\frac{\rho}{a} \right)^{n-2} e^{i(n-2)\vartheta} \left[\left(i \ln \frac{\rho_0}{\rho} + \vartheta - \arccos \frac{\xi}{\rho_0} \right) \times \right. \right.$$

$$\times \frac{\rho}{a} \sin \vartheta + \frac{1}{2a} \sqrt{r_1 r_2} \sin(\vartheta_1 - \vartheta_2) e^{-i\frac{\vartheta_1 + \vartheta_2}{2}} \left. \right] + \sin \vartheta \cdot \sum_{k=1}^{(n-1)/2} (2k-1) c'_{nk} \left(\frac{\rho}{a} \right)^{2k-1} e^{2i(k-1)\vartheta} \left. \right\},$$

$$c'_{nk} = \sum_{m=k}^{(n-1)/2} \frac{(2m-2k-3)!!}{(2m-2k)!!} a_{nm},$$

$$J''_{2k} = 2J'_{2k}, \quad J''_{2k-1} = 0, \quad \rho_0 = \sqrt{\xi^2 + \eta^2},$$

$$\xi = \sqrt{r_1 r_2} \cos \frac{\vartheta_1 + \vartheta_2}{2}, \quad \eta = a + \sqrt{r_1 r_2} \sin \frac{\vartheta_1 + \vartheta_2}{2}. \quad (19)$$

Далі знаходимо головні напруження $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ і головні дотичні напруження τ_1, τ_2, τ_3 [6]:

$$\sigma_{1,2} = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) \pm \tau_1, \quad \sigma_3 = \sigma_\xi = \nu(\sigma_x + \sigma_y),$$

$$\tau_1 = \frac{1}{2} |\sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy}|, \quad \tau_{2,3} = \frac{1}{2} |\sigma_{2,1} - \sigma_3| \quad (20)$$

та визначаємо максимальні дотичні напруження

$$\tau_{\max} = \max(\tau_1, \tau_2, \tau_3). \quad (21)$$

Значення $\tau_* = \frac{\pi a}{2P} \max \tau_{\max} = \frac{\pi a}{2P} \max \tau_1$, розраховані при $\nu = 0,3$, та відносні координати $\pm \bar{x}_0 = \pm x_0/a$, $\bar{y}_0 = y_0/a$ точок, у яких досягаються ці значення, подано у табл. 1.

Таблиця 1

n	2	3	4	5	6	8	10
τ_*	0,300	0,268	0,277	0,294	0,311	0,347	0,380
$\bar{x}_0$	0	0,762	0,894	0,928	0,945	0,962	0,970
$\bar{y}_0$	0,786	0,513	0,284	0,201	0,156	0,110	0,085

У випадку $n = 4$ отримуємо такі найбільші значення максимальних дотичних напружень залежно від коефіцієнта Пуассона:

$$\max \tau_{\max} = \begin{cases} \max \tau_2, & 0 \leq \nu < 0,2464, \\ \max \tau_1 = 0,2770 \frac{2P}{\pi a}, & 0,2464 \leq \nu \leq 0,5. \end{cases}$$

Коли $\nu = 0$, величина $\tau_{\max}$ досягає найбільшого значення $\max \tau_{\max} = \max \tau_2 = \frac{\sqrt{2}}{3} \frac{2P}{\pi a} = 0,4714 \frac{2P}{\pi a}$ при $y = 0$ ($\sigma_x = \sigma_y = 2Gp(x)$, $\tau_1 = 0$, $\tau_2 = Gp(x)$) у точках $x = \pm a/\sqrt{2}$. Найбільші значення $\tau_* = \max \bar{\tau}_2$ величини $\bar{\tau}_2 = \frac{\pi a}{2P} \tau_2$ при $0 \leq \nu \leq 0,2464$ і відносні координати $\pm \bar{x}'_0 = \pm x'_0/a$, $\bar{y}'_0 = y'_0/a$ точок, у яких $\bar{\tau}_2$ досягає цих найбільших значень, подано у табл. 2. При $0,2464 \leq \nu \leq 0,5$ найбільше значення величини $\tau_{\max} = \tau_1$ досягається у точках $\pm x_0 = \pm 0,894a$, $y_0 = 0,284a$.

Таблиця 2

ν	0	0,05	0,1	0,15	0,2	0,246
τ_*	0,471	0,426	0,384	0,345	0,308	0,277
$\bar{x}'_0$	0,707	0,710	0,718	0,730	0,747	0,765
$\bar{y}'_0$	0	0,035	0,071	0,105	0,138	0,166

Лінії рівня максимальних дотичних напружень $\tau_{\max} = \tau_1$ (ізохори) для $n = 4$, $\nu = 0,3$ зображено на рис. 2.

У випадку $n = 4$ для визначення переміщень у кожній точці пружної півплощини використаємо ще одну формулу Колосова [5]:

Список використаних джерел

1. Штаерман И. Я. Контактная задача теории упругости / И. Я. Штаерман. – Москва: Гостехиздат, 1949. – 272 с.
2. Беляев Н. М. Местные напряжения при сжатии упругих тел / Н. М. Беляев // Инженерные сооружения и строительная механика. – Ленинград: Путь, апрель 1924. – С. 27-108.
3. Джонсон К. Механика контактного взаимодействия / К. Джонсон. – Москва: Мир, 1989. – 510 с.
4. Гахов Ф. Д. Краевые задачи / Ф. Д. Гахов. – Москва: Физматгиз, 1963. – 640 с.
5. Мухелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости / Н. И. Мухелишвили. – Москва: Наука, 1966. – 707 с.
6. Тимошенко С. П. Теория упругости / С. П. Тимошенко, Дж. Гудьер. – Москва: Наука, 1979. – 560 с.

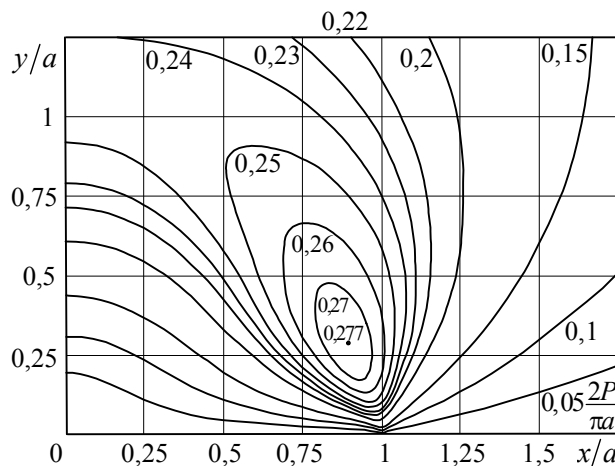


Рис. 2. Ізохори ($n = 4$, $\nu = 0,3$)

$$u_x - iu_y = -(z - \bar{z})\Phi(z) - \bar{\varphi}(z) - (3 - 4\nu)\overline{\varphi(z)} + C,$$

$$\varphi'(z) = \Phi(z), \quad C = \text{const}. \quad (22)$$

Зінтегрувавши функцію $\Phi(z)$ із (16) при $n = 4$ за умови $\bar{\varphi}(0) = 0$ (при $C = 0$) відсутності переміщень у вершині штампа знаходимо функцію

$$\varphi(z) = -\frac{iP}{12\pi G} \left[\frac{z}{a^2} \left(1 + 2\frac{z^2}{a^2} \right) \sqrt{z^2 - a^2} - 3 \ln \frac{z + \sqrt{z^2 - a^2}}{-ia} - 2\frac{z^4}{a^4} \right], \quad (23)$$

яка згідно з формулою (22) повністю визначає компоненти u_x , u_y вектора переміщень у пружній півплощині.

References

1. SHTAJERMAN, I. (1949) *Kontaknaja zadacha teorii uprugosti*. Moskva: Gostehizdat.
2. BELJAJEV, N. (1924) Mestnye naprjazeniya pri szatii uprugih tel. *Inzenernyje sooruzeniya i stroitel'naja mehanika*. Leningrad: Put'. P. 27-108.
3. DZHONSON, K. (1989) *Mehanika kontaktnogo vzaimodeistvija*. Moskva: Mir.
4. GAHOV, F. (1963) *Krajevyje zadachi*. Moskva: Fizmatlit.
5. MUSHELISHVILI, N. (1966) *Nekotoryje osnovnyje zadachi matematicheskoy teorii uprugosti*. Moskva: Nauka.
6. TIMOSHENKO, S. and Gud'jer, D. (1979) *Teorija uprugosti*. Moskva: Nauka.

Надійшла до редколегії 07.04.15

УДК 532.595

І. Ю. Семенова¹, к. ф.-м. н.

Динаміка гіперболічного резервуара з рідиною при наявності пружинного погашувача коливань.

¹ Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, пр-т. Глушкова 4е,
e-mail: irina.semenova25@gmail.com

Semenova I.Yu.¹, PhD.

Dynamics of partially filled hyperbolic tank with a spring vibration isolator.

¹ Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03680, Kyiv, Glushkova st., 4e,
e-mail: irina.semenova25@gmail.com

Розглянуто задачу про нелінійні коливання рідини в рухомому резервуарі гіперболічної форми при наявності пружного закріплення. Визначено власні частоти механічної системи "гіперболічний резервуар – рідина з вільною поверхнею" при наявності пружинного погашувача коливань. Показано, що наявність пружинного погашувача суттєво впливає на характеристики механічної системи.

Ключові слова: рідина, гіперболічний резервуар, пружинне закріплення.

We consider the problem of dynamics of combined motion of liquid bounded volume and reservoir of hyperbolic shape with the presence of elastic fixing. A mathematical model is constructed for a combined motion of a rigid hyperbolic reservoir filled by liquid with a free surface and fixed by spring to immovable point. Investigation is conducted on the basis of analytical methods with applying variational formulation of the problem. Nonlinear discrete model for this system is constructed on the basis of the Kantorovich method applied to kinematic restrictions of the problem and to variation formulation of the problem on the basis of the Hamilton-Ostrogradskiy variational principle with preliminary satisfying of kinematical boundary conditions and solvability conditions of the problem. The natural frequencies of mechanical system "hyperbolic reservoir and liquid with a free surface" with a spring vibration isolator were determined. It is shown that the presence of spring vibration isolator significantly affects the mechanical system characteristics.

Key Words: liquid, hyperbolic reservoir, elastic fixation.

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Жук Я.О.

Вступ

Вимушені коливання рухомих конструкцій з рідиною стають особливо відчутними в зоні резонансів, коли частоти збуджуючих сил збігаються з частотами власних коливань системи. Вірогідність негативного впливу коливних процесів на поведінку систем, у складі яких є частково заповнені рідиною контейнери, значно зростає. Саме тому у механічній системі повинна бути передбачена можливість значного зменшення дії коливальних процесів. Коливальний рух бака з рідиною можна змінити приєднавши додатковий пристрій. В роботі розглядається задача динаміки рідини з вільною поверхнею в гіперболічному резервуарі при обмеженні руху пружинним закріпленням. Резервуар вважається абсолютно твердим тілом, який може рухатись поступально у горизонтальній площині. Рідину вважаємо

ідеальною, нестисливою, однорідною, а її початковий рух – безвихровим. Рух системи з початкового стану спокою збуджується гармонічною силою.

Математична модель механічної системи при наявності пружинного погашувача коливань

В розглянутій задачі досліджуються динамічні особливості сумісного руху механічної системи "гіперболічний резервуар – рідина з вільною поверхнею". Метод дослідження задачі базується на сукупному використанні аналітичних методів нелінійної механіки, варіаційних методів математичної фізики до механічної задачі у варіаційному формулюванні. Математична постановка є сукупністю кінематичних та динамічних умов.

До кінематичних умов відносяться: умова нерозривності:

$$\Delta\varphi = 0 \quad \text{в} \quad \tau \quad (1)$$

умова неперетікання на межі рідина - тверда стінка резервуару та на вільній поверхні:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0 \quad \text{на} \quad \Sigma; \quad \frac{\partial\varphi}{\partial n} = -\frac{\frac{\partial\eta}{\partial t}}{\|\vec{\nabla}\eta\|} \quad \text{на} \quad S. \quad (2)$$

Динамічна гранична умова на вільній поверхні випливає з варіаційного принципу Гамільтона-Остроградського як природна.

Рівняння (1)-(2) по відношенню до варіаційного принципу

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = 0, \text{ де} \\ L = \frac{1}{2} \rho \int_{\tau} (\vec{\nabla}\varphi)^2 d\tau + \frac{1}{2} M_{res} (\dot{\xi})^2 - \\ - \frac{1}{2} \rho g \int_{S_0} \xi^2 dS - (M_{res} + M_{liq}) \varepsilon_z g \quad (3)$$

(ρ – густина рідини, M_{res} – маса резервуара, M_{liq} – маса рідини, g – прискорення вільного падіння) є сукупністю кінематичних в'язей, які необхідно виключити до розв'язку варіаційної задачі. Для повного формулювання задачі слід додати динамічну граничну умову на вільній поверхні, яка випливає з варіаційного принципу Гамільтона-Остроградського:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} (\vec{\nabla}\varphi)^2 + U = 0 \quad \text{на} \quad S. \quad (4)$$

Побудова скінченновимірної моделі механічної системи

Для розв'язку варіаційної задачі використовується прямий метод математичної фізики, зокрема, метод Канторовича. При цьому збурення вільної поверхні розкладається в ряд по функціях, отриманих з розв'язку відповідної лінійної задачі, яке задовольняє умові повноти на S_0 , а розв'язок для потенціалу швидкостей будується з такими додатковими вимогами, щоб ці функції задовольняли умові неперетікання на $\Delta\Sigma$. Для побудови скінченновимірної моделі необхідно від континуальної системи перейти до дискретної (для невилінійної системи), виключаючи кінематичні граничні умови на вільній поверхні, отримуємо функцію Лагранжа, що відповідає вільній системі, і кількість параметрів системи дорівнює кількості ступенів вільності системи.

$$L(\xi, \varphi) \rightarrow L(a_i, b_i) \rightarrow L(a_i, \dot{a}_i). \quad (5)$$

За допомогою існуючих залежностей параметрів розкладу потенціалу швидкостей b_i від a_i та $\dot{a}_i$

отримуємо дискретну функцію Лагранжа вільної механічної системи з незалежними параметрами амплітудами форм коливань та координатами резервуару $\vec{\varepsilon}$.

Таким чином, на основі варіаційного принципу Гамільтона-Остроградського, методу модальної декомпозиції та методу [1], який дозволяє повністю виключити кінематичні граничні умови на вільній поверхні рідини, отримано дискретну модель механічної системи «резервуар – рідина з вільною поверхнею» відносно незалежних параметрів a_i – коефіцієнтів розкладу в ряд збурення вільної поверхні рідини ξ за формами коливань вільної поверхні ψ_i та ε_i – компонент вектора переміщення центру незбуреної вільної поверхні рідини:

$$\sum_i \ddot{a}_i \left\{ V_{ir}^1 + \sum_j a_j V_{irj}^2 + \sum_{j,k} a_j a_k V_{irjk}^3 \right\} + \\ + \ddot{\varepsilon} \cdot \left\{ \bar{U}_r^1 + \sum_i a_i \bar{U}_{ri}^2 + \sum_{i,j} a_i a_j \bar{U}_{rij}^3 + \sum_{i,j,k} a_i a_j a_k \bar{U}_{rijk}^4 \right\} = \\ = \sum_{i,j} \dot{a}_i \dot{a}_j V_{ijr}^{2*} + \sum_{i,j,k} \dot{a}_i \dot{a}_j a_k V_{ijk}^{3*} + \\ + \ddot{\varepsilon} \cdot \left\{ \sum_i \dot{a}_i \bar{U}_{ir}^{2*} + \sum_{i,j} \dot{a}_i a_j \bar{U}_{irj}^{3*} + \sum_{i,j,k} \dot{a}_i a_j a_k \bar{U}_{ijk}^{4*} \right\} - \\ - g \cdot \left\{ \sum_i a_i W_{ir}^2 + \frac{3}{2} \sum_{i,j} a_i a_j W_{ijr}^3 + 2 \sum_{i,j,k} a_i a_j a_k W_{ijk}^4 \right\} \\ \frac{\rho}{(M_{res} + M_{liq})} \left\{ \sum_i \ddot{a}_i \left[\bar{U}_i^1 + \sum_j a_j \bar{U}_{ij}^2 + \sum_{j,k} a_j a_k \bar{U}_{ijk}^3 \right] \right\} + \ddot{\varepsilon} = \\ \frac{F}{(M_{res} + M_{liq})} - g \vec{z}_0 - \frac{\rho}{(M_{res} + M_{liq})} \sum_j \dot{a}_j \dot{a}_j \left\{ \bar{U}_{ij}^2 + 2 \sum_k a_k \bar{U}_{ijk}^3 \right\}$$

(ρ – густина рідини, g – прискорення гравітаційних сил, M_{res} та M_{liq} – маси рідини та резервуару відповідно), c – коефіцієнт жорсткості пружинного погашувача.

Система (6) містить $N+3$ рівнянь (N – кількість форм коливань рідини, що описують динаміку амплітуд коливань вільної поверхні рідини та динаміку резервуара, який рухається поступально. Сумісний рух резервуара з рідиною повністю характеризується незалежними узагальненими координатами a_i та $\vec{\varepsilon}$.

Визначення власних частот механічної системи при наявності пружинного погашувача коливань

Визначимо власні частоти механічної системи "гіперболічний резервуар – рідина з вільною поверхнею" при наявності пружного закріплення. Для визначення власних частот відповідно до теорії механічних коливань [2] запишемо рівняння (6) тільки для амплітуди a_1 першої антисиметричної форми ψ_1 з можливістю горизонтального руху резервуару по координаті ε_y у вигляді:

$$\begin{cases} \ddot{a}_1 V_{11}^1 + U_1^1 \ddot{\varepsilon}_y + g a_1 W_{11}^2 = 0 \\ \left(\frac{\rho}{M_{res} + M_{liq}} \right) U_1^1 \ddot{a}_1 + \ddot{\varepsilon}_y + \frac{c}{M_{res} + M_{liq}} \varepsilon_y = 0 \end{cases} \quad (7)$$

Щоб спростити ці рівняння введемо позначення:

$$\lambda_1 = \frac{U_1^1}{V_{11}^1}, \quad \lambda_2 = \frac{\rho}{(M_{res} + M_{liq})} U_1^1 \quad (8)$$

Тоді рівняння (7) матимуть вигляд:

$$\begin{cases} \ddot{a}_1 + \lambda_1 \ddot{\varepsilon}_y + \omega_1^2 a_1 = 0 \\ \lambda_2 \ddot{a}_1 + \ddot{\varepsilon}_y + \omega_2^2 \varepsilon_y = 0 \end{cases} \quad (9)$$

Простим лінійним перетворенням отримаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} \ddot{a}_1 + \frac{\omega_1^2}{1 - \lambda_1 \lambda_2} a_1 - \frac{\omega_2^2 \lambda_1}{1 - \lambda_1 \lambda_2} \varepsilon_y = 0 \\ \ddot{\varepsilon}_y - \frac{\omega_1^2}{1 - \lambda_1 \lambda_2} \lambda_2 a_1 + \frac{\omega_2^2}{1 - \lambda_1 \lambda_2} \varepsilon_y = 0 \end{cases} \quad (10)$$

де $n_1 = \frac{\omega_1}{\sqrt{1 - \lambda_1 \lambda_2}}$ та $n_2 = \frac{\omega_2}{\sqrt{1 - \lambda_1 \lambda_2}}$ – парціальні частоти системи резервуар з рідиною та резервуар з пружинним погашувачем відповідно.

$$\begin{cases} \ddot{a}_1 + n_1^2 a_1 - \lambda_1 n_2^2 \varepsilon_y = 0 \\ \ddot{\varepsilon}_y - n_1^2 \lambda_2 a_1 + n_2^2 \varepsilon_y = 0 \end{cases} \quad (11)$$

Запишемо у матричному вигляді:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{a}_1 \\ \ddot{\varepsilon}_y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n_1^2 & -\lambda_1 n_2^2 \\ -n_1^2 \lambda_2 & n_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ \varepsilon_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Складемо частотне рівняння:

$$\text{Det} \left[\begin{bmatrix} n_1^2 & -\lambda_1 n_2^2 \\ -n_1^2 \lambda_2 & n_2^2 \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right] = 0,$$

або

$$\begin{vmatrix} n_1^2 - \omega^2 & -\lambda_1 n_2^2 \\ -n_1^2 \lambda_2 & n_2^2 - \omega^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Розкриємо визначник,

$$(n_1^2 - \omega^2)(n_2^2 - \omega^2) - \lambda_1 \lambda_2 n_1^2 n_2^2 = 0,$$

після елементарних перетворень, запишемо:

$$\omega^4 - (n_1^2 + n_2^2) \omega^2 + n_1^2 n_2^2 (1 - \lambda_1 \lambda_2) = 0.$$

В результаті маємо дві власні частоти механічної системи при наявності погашувача:

$$\omega_{I,II}^2 = \frac{1}{2} \left(n_1^2 + n_2^2 \pm \sqrt{(n_1^2 - n_2^2)^2 + 4 n_1^2 n_2^2 \lambda_1 \lambda_2} \right).$$

Вийшло "роздвоєння" власної частоти системи без погашувача.

Зміна величин власних частот для гіперболічного резервуару приведена на рисунку 1. Розглянемо резервуар, що має форму

гіперболоїда обертання $r = \frac{a}{c} \sqrt{(x + H + c)^2 - c^2}$ з

параметрами $a=1$, $c=2.4$, $H=1$ із вертикальною віссю OZ. Крок чисельного інтегрування вибирався $\Delta t=0,01$ с. При розв'язку задачі на власні значення приймався розклад по $N=22$ гармонічним поліномам. Співвідношення мас

резервуару та рідини $\frac{M_{res}}{M_{liq}} = 0.1$. Для такого

співвідношення мас резонансна частота механічної системи без погашувача дорівнює

$$\omega^* = 1.58 \omega_1.$$

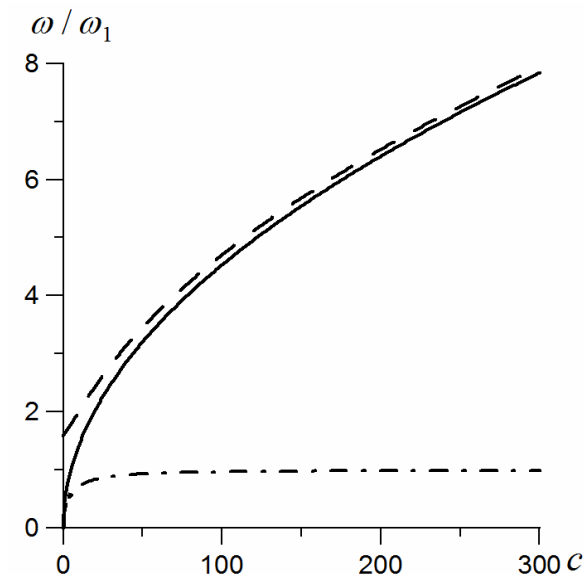


Рис. 1. Залежність власних частот (пунктирна та штрих-пунктирна) механічної системи та парціальної частоти резервуару з пружинним погашувачем (суцільна) від жорсткості пружини.

Графічні залежності власних та парціальних частот для різних значень жорсткості пружини у відношенні до першої частоти коливань рідини $\omega_1 = 3.50$ Гц приведені на рисунку 1. Для системи

з такими характеристиками парціальна частота сумісного руху резервуара з рідиною $n_1 = 1.58\omega_1$ завжди є постійною величиною, а парціальна частота пружинного погашувача зростає при збільшенні жорсткості пружини (Рис. 1, суцільна крива) та має нульове значення при відсутності погашувача. При збільшенні жорсткості пружини друга власна частота системи (Рис. 1, пунктирна крива) наближається до значень парціальної частоти пружинного погашувача.

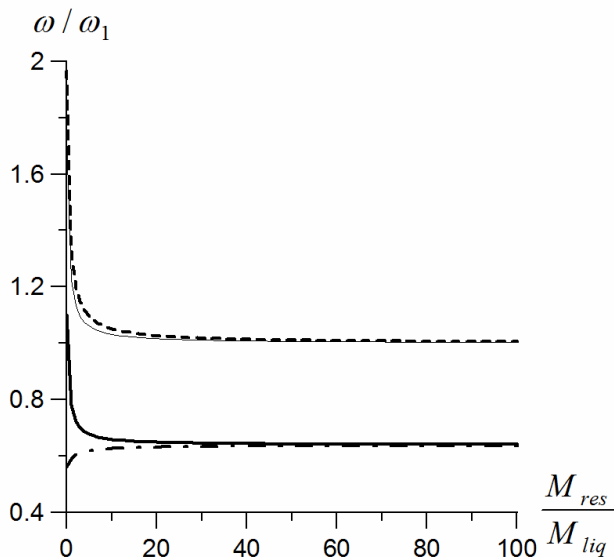


Рис. 2. Залежність власних частот (пунктирна та штрих-пунктирна) механічної системи та парціальної частоти резервуару з рідиною (суцільна) від співвідношення мас резервуару та рідини.

Як видно з графіку, перша власна частота асимптотично прямує до першої власної частоти коливань вільної поверхні ω_1 (Рис. 1, штрих - пунктирна крива), а друга власна частота нескінченно зростає. Із зростанням жорсткості пружини, що відповідає збільшенню механічних в'язей, збільшується розбіжність між власними

частотами системи "гіперболічний резервуар з рідиною - пружинне закріплення".

Графічні залежності власних та парціальних частот для коефіцієнту жорсткості пружини $c = 5$ при збільшенні маси резервуару у відношенні до першої частоти коливань рідини $\omega_1 = 3.50$ Гц приведені на рисунку 2. Для такої системи парціальна частота пружинного погашувача (Рис. 2, суцільна жирна крива) при збільшенні маси резервуару наближається до постійного значення і залежить від жорсткості пружини, а парціальна частота резервуару з рідиною (суцільна тонка крива) зменшується при збільшенні маси резервуару та співпадає з власною частотою при відсутності погашувача. Як видно з графіка, друга власна частота (Рис. 2, пунктирна крива) асимптотично прямує до парціальної частоти резервуару з рідиною (Рис. 2, суцільна тонка крива) і при збільшенні маси бака буде наближатися до першої власної частоти коливань вільної поверхні ω_1 , а перша власна частота (Рис. 2, штрих - пунктирна крива) наближається до графіку парціальної частоти пружинного погашувача. Із зростанням маси резервуару розбіжність між власними частотами системи "гіперболічний резервуар з рідиною - пружинне закріплення" стає постійною.

Висновки

Побудовано математичну модель сумісного руху гіперболічного резервуару з рідиною при наявності пружинного погашувача коливань. Визначено власні частоти механічної системи "гіперболічний резервуар – рідина з вільною поверхнею" при наявності пружного закріплення. Показано залежність власних частот системи від жорсткості пружини та співвідношення мас резервуару та рідини.

References

1. Лимарченко О.С. Нелинейная динамика конструкций с жидкостью / Лимарченко О.С., Ясинский В.В. – Киев: Национальный технический университет Украины «КПИ», 1997. – 338с.
2. Болотин В.В. Динамическая устойчивость упругих систем / Болотин В.В. – Москва, 1956. – 600 с.
1. LIMARCHENKO, O., YASINSKI, V. (1997) *Nonlinear dynamics of structures with liquid*. - Kiev: Nat. Techn. Univ. Ukraine "KPI".
2. BOLOTIN, V. (1956) *Dynamic stability of elastic systems*. – M: GITTL

Надійшла до редколегії 26.11.14

УДК 539.3

Федорченко Л. М.¹, аспірант
Жук Я.О.¹, д.ф.-м.н., проф.

**Аналіз напружено-деформівного ста-ну
ортотропної циліндричної оболонки при
різних способах закріплення контуру**

¹Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, пр-т.
Глушкова, 4е
e-mail: fedorchenko555@gmail.com,
y.zhuk@i.ua

L.N. Fedorchenko¹, graduate student,
Y.A. Zhuk¹, Dr.Sci.(Phys.-Math.), Prof.

**The analysis of stress-strain state of
orthotropic cylindrical shell with different
method of fixing circuit**

¹Taras Shevchenko National University of Kyiv,
03680, Kyiv, Glushkova st., 4 e
e-mail: fedorchenko555@gmail.com,
y.zhuk@i.ua

Розглядається вплив умов закріплення ортотропної оболонки обертання з ортотропною електропровідністю на її напружено-деформівний стан в нестационарному магнітному полі. Проведено аналіз отриманих результатів.

Ключові слова: ортотропна оболонка, магнітне поле, магнітопружність.

The solving of boundary value problems of magnetoelasticity theory of thin shells with finite electrical conductivity in a nonlinear formulation is connected with the large computational difficulties. This is because of the fact that the system is related, which describes the stress-strain state of the shell.

It consists of the equations of motion and electrodynamics. The volume force of Lorentz is present in the equations of motion. The electrodynamics equations contain the derivatives of displacements in time.

Besides, it is a nonlinear mixed hyperbolic-parabolic system of differential equations of the eighth order with variable coefficients. The volumetric forces of Lorentz are nonlinear. They are changing depending on the deformation of the middle surface and changes of the time coordinate.

The offered technique for solving nonlinear problems of numerical of magnetoelasticity shell theory is based on the consistent application of finite-difference scheme of Newmark, the method of quasilinearization and the method of discrete-orthogonalization.

In article the influence of the method of fixing the orthotropic shell with orthotropic electroconductivity to her stress-strain state in the no stationary magnetic field is considered. The analysis results has been carried.

Key Words: orthotropic shell, magnetic field, magnetoelasticity.

Статтю представив докт. фіз.-мат. наук, проф., акад. НАН України М.О.Перестюк

Вступ

Циліндричні оболонки обертання мають широке застосування у вигляді структурних елементів у різних сучасних технологіях, вимоги до яких зростають. Тому виникає велика необхідність у розробці ефективних методів проведення аналізу напружено-деформівного стану струмопровідної ортотропної циліндричної оболонки обертання, яка знаходиться в магнітному полі в осесиметричній постановці.

В даній статті приведено розв'язувальну систему рівнянь магнітопружності осесиметричних ортотропних циліндричних оболонок обертання та запропонована методика її розв'язання. Проведено аналіз впливу різних способів закріплення контуру на напружено-

деформівний стан ортотропної циліндричної оболонки обертання в нелінійному магнітному полі.

При побудові розв'язувальної системи ортотропної циліндричної оболонки враховується також ортотропна електропровідність.

Постановка задачі. Розглянемо гнучку ортотропну циліндричну оболонку змінної товщини з ортотропною електропровідністю. Вважаємо, що тіло знаходиться у зовнішньому магнітному полі під дією механічних навантажень. Нехтуємо впливом процесів поляризації і намагнічування.

Серединну поверхню оболонки в недеформованому стані віднесемо до криволінійної системи координат s, θ , де s –

довжина дуги меридіана, θ – центральний кут. Координатні лінії $s = \text{const}$, $\theta = \text{const}$ є лініями головних кривизн серединної поверхні.

Електромагнітні властивості матеріалу характеризуються тензорами електричної провідності σ_{ij} діелектричної проникливості ε_{ij} та магнітної проникливості μ_{ij} . Розглядаємо тіла з ромбічною кристалічною структурою. Виходячи з кристалографії [2] тензори ε_{ij} , σ_{ij} , μ_{ij} приймають діагональний вигляд.

Враховуючи діагональний вигляд тензорів, геометрію циліндричної оболонки і згідно роботам [1,3] розв'язувальна система рівнянь магнітопружності осесиметричної ортотропної оболонки обертання має вигляд:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial s} &= \frac{1 - \nu_s \nu_\theta}{e_s h} N_s - \frac{\nu_\theta}{r} w - \frac{1}{2} g_s^2, \\ \frac{\partial w}{\partial s} &= -g_s, \quad \frac{\partial g_s}{\partial s} = \frac{12(1 - \nu_s \nu_\theta)}{e_s h^3} M_s, \\ \frac{\partial N_s}{\partial s} &= -F_s - h J_{\text{ост}} B_\gamma - \\ &- \sigma_1 h \left[E_\theta B_\gamma + 0,5 \frac{\partial w}{\partial t} B_\gamma (B_s^+ + B_s^-) - \frac{\partial u}{\partial t} B_\gamma^2 \right] + \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ \frac{\partial Q_s}{\partial s} &= \frac{\nu_\theta e_\theta}{r e_s} N_s + e_\theta h \frac{w}{r} - F_\gamma - \\ &- 0,5 h J_{\text{ост}} (B_s^+ + B_s^-) - \sigma_3 h [-0,5 E_\theta (B_s^+ + B_s^-) - \\ &- 0,25 \frac{\partial w}{\partial t} (B_s^+ + B_s^-)^2 - \frac{1}{12} \frac{\partial w}{\partial t} (B_s^+ - B_s^-)^2 + \\ &+ 0,5 \frac{\partial u}{\partial t} B_\gamma (B_s^+ + B_s^-)] + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial M_s}{\partial s} &= Q_s + N_s g_s - \frac{\nu_s M_s}{r}, \\ \frac{\partial B_\gamma}{\partial s} &= -\mu \sigma_2 \left[E_\theta + 0,5 \frac{\partial w}{\partial t} (B_s^+ + B_s^-) - \frac{\partial u}{\partial t} B_\gamma \right] + \\ &+ \frac{(B_s^+ - B_s^-)}{h}, \quad \frac{\partial E_\theta}{\partial s} = -\frac{\partial B_\gamma}{\partial t}. \end{aligned}$$

Де u , w – переміщення; N_s – нормальні зусилля; Q_s – поперечні зусилля; M_s – згинальний момент; g_s – кут повороту нормалі; $h = h(s)$ – товщина оболонки; ρ – густина матеріалу; $r(s)$ – радіус кола оболонки; ν_s , ν_θ – коефіцієнти Пуассона;

e_s , e_θ – модулі Юнга; F_i – механічна сила; E_θ – компонента напруженості електричного поля; B_γ – нормальна складова магнітної індукції; B_s^+ , B_s^- – відомі складові магнітної індукції на поверхнях оболонки; $J_{\text{ост}}$ – складова густини стороннього електричного струму.

Отримана розв'язувальна система нелінійних диференціальних рівнянь восьмого порядку описує напружено-деформівний стан гнучкої струмонесучої ортотропної циліндричної оболонки з ортотропною електропровідністю.

Алгоритм чисельного розв'язання осесиметричних задач оболонок обертання.

Крайові задачі даного класу розв'язується чисельно відповідно до методики, яка ґрунтується на основі послідовного застосування схеми Ньюмарка [6], методу квазілінеаризації [4] та методу дискретної ортогоналізації [5].

На першому кроці, у системі диференціальних рівнянь в частинних похідних зі змінними коефіцієнтами, щоб відокремити змінні за часом, використовуємо неявну схему Ньюмарка для інтегрування магнітопружних рівнянь.

На наступному кроці застосовуємо метод квазілінеаризації, за допомогою якого нелінійна задача замінюється послідовністю лінійних крайових задач.

Кожна з лінійних задач розв'язується чисельно стійким методом дискретної ортогоналізації. Спочатку, за початкове наближення за часом вибирається розв'язок лінійної задачі, на наступному етапі – обираються розв'язки отримані на попередньому кроці. Така схема значно зменшується кількість ітерацій, необхідних для розв'язання цієї задачі.

Числовий приклад.

Розглянемо задачу про напружено-деформівний стан циліндричної оболонки з заданою змінною товщиною $h = 5 \cdot 10^{-4} (1 + 0,3 \sin \frac{\pi s}{l})$ м (l – довжина оболонки). Оболонка знаходиться під впливом нормального навантаження $P_\gamma = 1 \cdot 10^3$ Н/м² і зовнішнього електричного струму $J_{\text{ов}} = 1 \cdot 10^5 \sin(\omega t)$ А/м². Дослідимо вплив

закріплення контурів на напружено-деформівний стан даної оболонки.

Розглянемо, для прикладу, наступні випадки граничних умов:

$$1) u = 0, Q_s = 1 \cdot 10^3, M_s = 0; B_\gamma = 0,5 \sin \omega t$$

$$\text{при } s = s_0$$

$$u = w = M_s = 0; B_\gamma = 0 \quad \text{при } s = s_N.$$

$$2) u = 0, Q_s = 1 \cdot 10^3, M_s = 0; B_\gamma = 0,5 \sin \omega t$$

$$\text{при } s = s_0$$

$$u = w = \vartheta_s = 0; B_\gamma = 0 \quad \text{при } s = s_N.$$

$$3) N_s = 0, Q_s = 1 \cdot 10^3, M_s = 0; B_\gamma = 0,5 \sin \omega t$$

$$\text{при } s = s_0$$

$$u = w = M_s = 0; B_\gamma = 0 \quad \text{при } s = s_N.$$

$$4) N_s = 0, Q_s = 1 \cdot 10^3, M_s = 0;$$

$$E_\theta = -0,5 \frac{\partial w}{\partial t} (B_s^+ + B_s^-) + \frac{\partial u}{\partial t} B_\gamma \quad \text{при } s = s_0$$

$$u = w = M_s = 0; B_\gamma = 0 \quad \text{при } s = s_N.$$

$$5) N_s = 0, Q_s = 1 \cdot 10^3, \vartheta_s = 0;$$

$$E_\theta = -0,5 \frac{\partial w}{\partial t} (B_s^+ + B_s^-) + \frac{\partial u}{\partial t} B_\gamma \quad \text{при } s = s_0$$

$$u = w = M_s = 0; B_\gamma = 0 \quad \text{при } s = s_N.$$

Параметри оболонки і матеріалу взяті наступні:

$$S_0 = 0i; S_N = 0,5i; \omega = 314,16\tilde{n}^{-1}; B_s^\pm = 0,1I$$

$$e_s = 8,1 \cdot 10^{10} \tilde{I} / i^2; e_\theta = 2,82 \cdot 10^{10} \tilde{I} / i^2;$$

$$\nu_s = 0,3; \nu_\theta = 0,3; \rho = 8640 \tilde{e} \tilde{a} / i^3;$$

$$\mu = 1,256 \cdot 10^{-6} \tilde{A} i / i; \sigma_1 = 0,147 \cdot 10^8 (\tilde{h} \cdot i)^{-1};$$

$$\sigma_2 = 0,147 \cdot 10^8 (\tilde{h} \cdot i)^{-1};$$

Розв'язок задачі отримано на інтервалі часу $t = 1 \cdot 10^{-2} \tilde{n}$, крок інтегрування за часом $\Delta t = 1 \cdot 10^{-3} c$.

Результати розв'язку розглянутої задачі приведені нижче у вигляді графіків. На Рис.1-5 приведені графіки зміни прогину w в залежності від часу t на лівому контурі при $s = 0i$. На Рис. 1 та Рис. 2 зображено зміну прогину для першого та другого випадку граничних умов. На лівому контурі у обох випадках задаються граничні умови у переміщеннях і зусиллях. Графіки подібні, але оскільки у першому випадку на правому кінці маємо шарнірне закріплення, а у другому випадку жорстке закріплення, то на графіках спостерігаються деякі відмінності. На Рис.1 відношення прогину $w/h \approx 1.76$, а на Рис.2

$w/h \approx 1.78$, що відповідає геометричній нелінійності. На Рис. 3. представлено результати при жорсткому защемленні зліва. Графік отримали випуклим угору. Максимальні значення досягаються при $t = 4 \cdot 10^{-3} c$. Абсолютне значення $w/h \approx 1.73$. На Рис. 4 представлені результати для випадку 4. У цьому випадку, зліва маємо граничну умову у зусиллях і моментах, а також умова не протікання струму через контур в нелінійній формі. Максимальне значення досягається на 4 ітерації, а потім зростає. Абсолютне значення $w/h \approx 1.73$. На Рис.5 представлені результати для випадку 5, у якому зліва задається жорстке защемлення з вільним переміщенням по s . У цьому випадку відношення прогину $w/h \approx 0.66$ виходить за межі геометрично-нелінійної теорії і є лінійним.

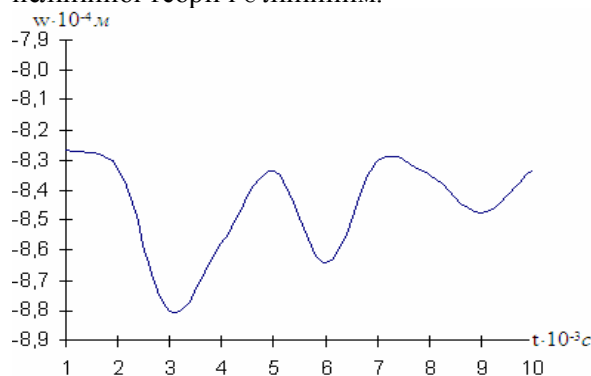


Рис.1. Випадок 1

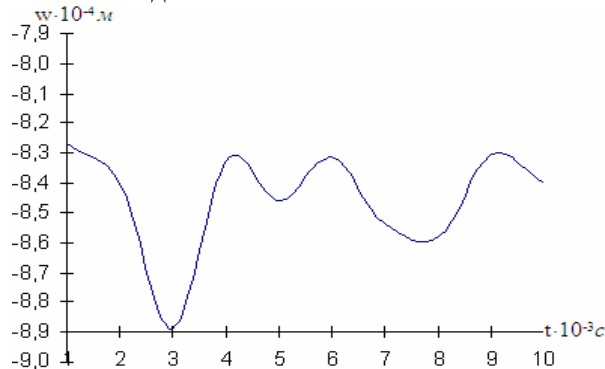


Рис.2 Випадок 2

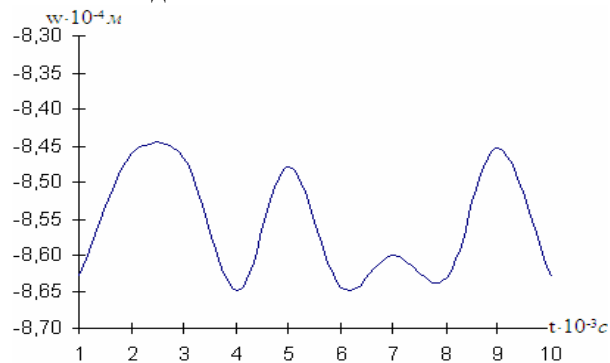


Рис.3 Випадок 3

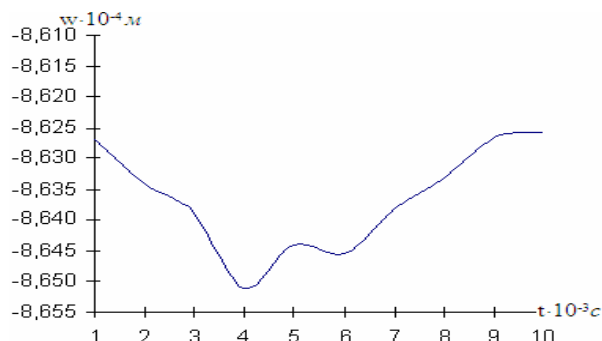


Рис.4 Випадок 4

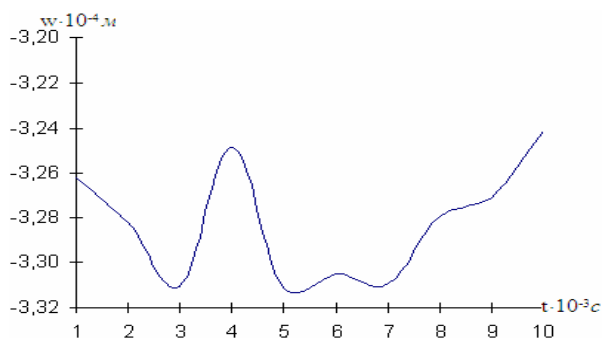


Рис.5 Випадок 5

Список використаних джерел

1. Григоренко Я.М., Основы теории пластин и оболочек с элементами магнитоупругости [Учебник.] / Я.М Григоренко, Л.В Мольченко – К.: ИПЦ «Киевский университет», 2010. – 403с.
2. Келли А. Кристаллография и дефекты в кристаллах. / А.Келли, Г. Гровс – М.: Мир, 1974. – 496 с.
3. Мольченко Л. В. Гибкие оболочки вращения в магнитном поле: монография. [Електронный учебник] / Л.В Мольченко – К., 2013. – 196 с. Режим доступа до учебника: <http://mechmat.univ.kiev.ua/u/publications>
4. Bellman R. Quasilinearization and Nonlinear Boundary / R. Bellman, R. Kalaba - Value Problems - Rand Corp., 1965. - P. 208.
5. Grigorenko Ya. M. Problems of mechanics for anisotropic inhomogeneous shells on the basis of different models. / Ya.M. Grigorenko, A.Ya. Grigorenko, G.G .Vlaikov - Kiev: S. P. Timoshenko Institute of Mechanics, Technical center of the National Academy of Sciences of Ukraine. 2009. - P.550.
6. Newmark N.M. A Method of Computation for Structural Dynamics / N.M. Newmark //J. End Mech. Div. Proc. ASCE. 1959. – 85, No 3. P. 67-94.

Висновки

В даній статті проведено аналіз впливу граничних умов на напружено-деформівний стан ортотропної циліндричної оболонки з ортотропною електропровідністю. Враховуючи проведений аналіз можна відмітити значний вплив способу закріплення ортотропної оболонки обертання на її напружено-деформівний стан. Приведені результати дають можливість стверджувати про ефективність даного підходу до розв'язання задач з урахуванням ортотропії, які є досить новим класом задач магнітопружності. У статті продемонстровано, що дана методика може бути застосована при різних граничних умовах, і, зокрема, при нелінійних.

References

1. GRIGORENKO, Ya. and MOL'CHENKO, L. (2010) *Osnovi teorii plastin i obolonok s elementami magnitoprzhnosti*. Kiev: Kievskiy universitet. – p.403.
2. KELLI, A. and GROVS, G. (1974) *Kristallografiya i defekti v kristalah*. Moskva: Mir. – p.496.
3. MOL'CHENKO, L. (2013) *Gibkie obolochki vrashchehiya v magnitnom pole*. [Online], Kiev. – p. 196. Available from <http://mechmat.univ.kiev.ua/u/publications>
4. BELLMAN, R. and KALABA, R. (1965) *Quasilinearization and Nonlinear Boundary-Value Problems* - Rand Corp. - p. 208.
5. GRIGORENKO, Ya. GRIGORENKO A. and VLAIKOV G. (2009) *Problems of mechanics for anisotropic inhomogeneous shells on the basis of different models*. - Kiev: S. P. Timoshenko Institute of Mechanics, Technical center of the National Academy of Sciences of Ukraine. - p.550.
6. NEWMARK N. (1959) *A Method of Computation for Structural Dynamics* //J. End Mech. Div. Proc. ASCE. – 85, No 3 p. 67-94.

Надійшла до редколегії 26.03.2015

УДК 534+531.7+53.082.5 + 621.375.8

Яровой Л.К., к.т.н.,

L.K. Yarovoi, PhD

**Лазерний доплерівський віброметр з
поточним налаштуванням оптимальних
параметрів трихвильового
фотозмішування**

**The lased Doppler vibrometer with real time
adjustment of three-wave interference
detection**

Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, пр-т.
Глушкова 4д, e-mail: yarovoi@univ.kiev.ua

Taras Shevchenko National University of Kyiv,
03680, Kyiv, Glushkova st., 4d,
e-mail: yarovoi@univ.kiev.ua

Запропоновано підхід, який дозволяє в повній мірі використати переваги лазерних доплерівських віброметрів з додатковим опорним каналом, котрі побудовані на принципі т. з. трихвильового фотозмішування (ТХФ). Ідея полягає в фазовій НЧ модуляції додаткової додаткової лазерної хвилі. Обробка отриманого сигналу дозволяє безпосередньо під час експерименту налаштовувати оптимальні параметри віброметра з ТХФ, тим самим зберігаючи високу чутливість до малих амплітуд під час вимірювань. Висновки розрахунків підтверджено за допомогою модернізованого лазерного віброметра. В експерименті продемонстровано можливість підтримання стабільних характеристик системи в межах 5% в умовах, коли умови експерименту непередбачувано змінюються в часі.

Ключові слова: експериментальна механіка, лазерна доплерівська віброметрія, лазерні гетеродинні системи.

We propose the approach, which allows to fully take advantage of laser Doppler vibrometer, which is built on the principle of, so-called, three-wave interference (TWI) realized by introduction of the additional reference channel. Such laser vibrometers improves sensitivity to small amplitude oscillation, but they require current control of specific the amplitudes and the phase's relations between interfering waves. Only for the some optimal relations the vibrometer can reach the advance characteristics. The new idea is to introduction LF phase modulation of the additional laser wave. Appropriate processing of vibrometer signal allows to directly tune the optimal parameters of the measuring system of TWI during the experiment to support high sensitivity to small amplitudes permanently. The calculations were confirmed by using the upgraded laser Doppler vibrometer. The experiment demonstrated the capability to maintain stable vibrometer parameters within 5% in an environment where unpredictable parameters are changed during the experiment unexpectedly.

Key Words: experimental mechanics, Laser vibrometer, nanoscale measurements, laser heterodyne system.

Статтю представив академік НАНУ, д.ф.-м.н., проф. Перестюк М.О.

В сучасному інструментарії прикладної механіки та вимірювальної техніки важливу роль відіграють безконтактні засоби вимірювання параметрів руху суцільних середовищ, зокрема, вібрації та механічних коливань поверхонь, об'єктів та конструкцій. Лазерні доплерівські віброметри (ЛДВ) – це сучасне вимірювальне обладнання, яке дозволяє безконтактно на відстані від мікрон до десятків метрів досліджувати механічні коливання з нанометровою точністю в широкому частотному діапазоні [1]. Саме тому методики лазерної віброметрії з успіхом застосовуються в

неруйнівному контролі [3], дефектоскопії [2] та ін. Розробка нових відходів лазерної віброметрії та конструкцій ЛДВ подовжується і зараз і одним з нових рішень є метод лазерної віброметрії з трихвильовим фотозмішуванням (ТХФ) – новий перспективний метод, який дозволяє виконувати вимірювання коливань з надвисокою чутливістю до малих амплітуд [5, 6]. Особливістю метода ТХФ є залучення до процесу вимірювання додаткової зондувальної хвилі. Шляхом тонкого налаштування амплітуди і фази цієї хвилі відносно таких в основній зондувальній хвилі можна досягти суттєвого покращення чутливості

приладу [6]. Проблемою є те, що під час вимірювань контролювати оптимальну фазову різницю, котра часто змінюється в часі, складно, а подекуди й неможливо. Ці перешкоди обмежують використання переваг ТХФ випадками, коли експериментом жорстко задані та лишаються незмінними фазові співвідношення між взаємодіючими лазерними хвилями. В даній роботі пропонується підхід, який надає можливість контролювати та налаштовувати фазову різницю в схемі ЛДВ безпосередньо під час процесу вимірювань.

Вихідний сигнал лазерного віброметра з ТХВ в наближенні малих амплітуд вібрації

Розглянемо спочатку відмінності ЛДВ з ТХФ від класичного ЛДВ, в якому зондувальна хвиля e_1 , яка відбивається об'єктом та несе інформацію про його рух, взаємодіє з опорною хвилею e_0 [1]. В результаті фотозмішування цих двох хвиль, струм фотодетектора має компонент, миттєва частота $\omega_D(t)$ якого пов'язана з миттєвою швидкістю коливань $v(t)$ співвідношенням

$$\omega(t) = -kX_1\Omega\sin(\Omega t) \cdot \left[1 + \frac{(\eta^2 - 1)}{2\eta \cdot \cos(2kX_1 \cos(\Omega t) + \Delta\phi) + \eta^2 + 1} \right] \quad (1)$$

де $\eta = E_1/E_2$ – відношення амплітуд, а $\Delta\phi = \phi_1 - \phi_2$ початкова фазова різниця зондувальної e_1 та додаткової e_2 хвиль.

Звернемо увагу, що формула (1) є більш узагальненою порівняно з наведеним вище відповідним співвідношення для класичних двошпроменевих ЛДВ, і зводиться до нього при $E_2 = 0$, та враховуючи, що $v(t) = -X_1\Omega\sin(\Omega t)$. При цьому миттєва частота ω дорівнює доплерівській частоті ω_D коливального процесу.

Як було зазначено в [5] в режимі ТХФ для малих, порівняно з довжиною хвилі лазера, коливань $X_1 < \lambda/2$ при певних співвідношеннях амплітуд і фаз хвиль e_1 та e_2 відбувається суттєве підсилення сигналу миттєвої частоти ω порівняно з ω_D , що спрощує її вимірювання особливо для малих амплітуд коливань. При оптимальних умовах, які впливають з аналізу співвідношення (1), а саме: $\eta \rightarrow 1$ та $\Delta\phi = \pi$ "аномальне підсилення" сигналу на виході ЛДВ

сягає величини $\alpha = \frac{\eta}{\eta - 1}$.

$\omega_D(t) = 2k \cdot v(t)$, де k – хвильовий вектор лазерного випромінювання. Таким чином, миттєва швидкість коливань розраховується, як величина пропорційна ω_D .

В режимі ТХФ три когерентні хвилі e_0 , e_1 та e_2 інтерферують на поверхні фотодетекторі лазерного віброметра та генерують на виході фотодетектора струм, який на частоті гетеродину може бути записаний у вигляді: $i_{\text{det}}(t) = I(t) \cdot \cos(2\pi f_0 t - \phi(t))$, де f_0 – частота гетеродину, на яку зміщено оптичну частоту опорної хвилі e_0 . Для вимірювання параметрів коливального процесу має значення миттєва фаза $\phi(t)$ (а точніше, **миттєва частота**, як похідна від фази) сигналу i_{det} . У випадку ТХФ при гармонічного коливання досліджуваного об'єкту $x_1(t) = X_1 \cos(\Omega t)$, де X_1 – амплітуда, Ω – частота досліджуваних коливань, формула для миттєвої частоти має вигляд [4]:

Експериментально було доведено, що контролювати амплітуди (інтенсивності) E_1 та E_2 можливо за допомогою окремих фотоприймачів, або регулювати їх величину оптоелектронними засобами [5]. На відміну амплітудам, початкова фазова різниця $\Delta\phi$, яка є сталим або повільно змінним чинником вихідного сигналу, не може бути отримана інакше, як за допомогою додаткових незалежних засобів і це є певним недоліком практичного застосування ЛДВ з ТХФ.

Дослідимо спектр функції (1) для довільних величин фази $\Delta\phi \neq \pi$. Для отримання аналітичного результату обмежимося практично важливим випадком, а саме $kX_1 \ll 1$. Для цієї умови можна вважати, що $\cos(2k \cdot X_1 \cdot \cos(\Omega t)) \approx 1$, а $\sin(2k \cdot X_1 \cdot \cos(\Omega t)) \approx 2k \cdot X_1 \cdot \cos(\Omega t)$. Тоді знаменник у формулі (1) можна записати, як $1 + 4\eta k X_1 / (2\eta \cdot \cos(\Delta\phi) + 1 + \eta^2) \cdot \cos(\Omega t)$. І дали розкладемо дріб у формулі (1), виділяючи малу змінну в знаменнику. В результаті отримаємо співвідношення:

$$\omega(t) = -2\eta k X_1 \Omega \sin(\Omega t) \cdot \left[\frac{\cos(\Delta\phi) + \eta}{2\eta \cos(\Delta\phi) + (\eta^2 + 1)} + \frac{k X_1 (\eta^2 - 1) \sin(\Delta\phi) \cos(\Omega t)}{[2\eta \cos(\Delta\phi) + (\eta^2 + 1)]^2} \right] \quad (2)$$

З формули, що надана вище, отримуємо амплітуди першої та другої гармонік сигналу:

$$\omega_I = \left| \frac{2\eta k X_1 (\cos(\Delta\phi) + \eta)}{2\eta \cos(\Delta\phi) + (\eta^2 + 1)} \right| \quad (3A)$$

$$\omega_{II} = \left| \frac{\eta k^2 X_1^2 (\eta^2 - 1) \sin(\Delta\phi)}{[2\eta \cos(\Delta\phi) + (\eta^2 + 1)]^2} \right| \quad (3B)$$

Слід зауважити, що електричний сигнал на виході ЛДВ є пропорційним миттєвій частоті, саме цьому контексті і слід розуміти вживання терміну «відхінний сигнал ЛДВ» по відношенню до частоти $\omega(t)$.

На малюнку рис.1 наведені графіки залежності модуля амплітуд першої та другої гармонік від фазової різниці $\Delta\phi$. Як можна бачити, при умові $\eta < 1$ існують принаймні два видимих мінімуми функції ω_I . Насправді, в точках $\Delta\phi_z$ існує не мінімум функції $\omega_I(\Delta\phi)$, а

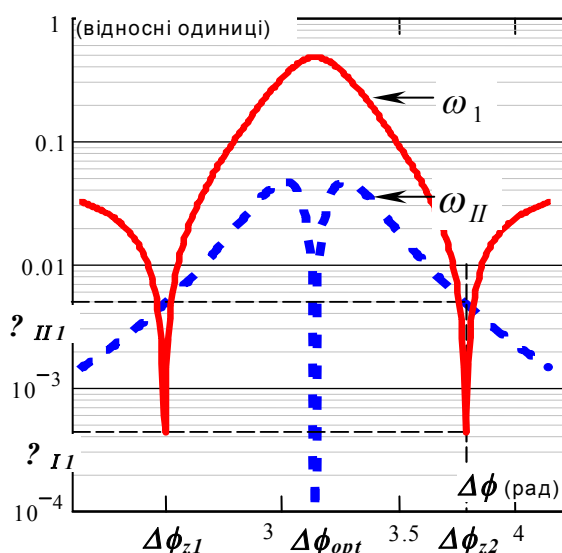


Рис.1 Теоретична залежність першої та другої гармонік сигналу ЛДВ з ТХФ від фази $\Delta\phi$.

вона змінює знак, що означає зміну фази сигналу на π . Ці точки відповідають рішенням $\omega_I(\Delta\phi) = 0$ рівняння (3A):

$$\Delta\phi_z = \pi \pm \arccos(\eta) \quad (4)$$

Аналіз також проказує, що по-перше, зв'язок $\Delta\phi_z(\eta)$ між фазою $\Delta\phi$ та параметром η не залежить від частоти коливання Ω та амплітуди коливання X_1 (за умови $kX_1 \ll 1$).

По-друге, для застосування у вимірюванні визначальним є те, що в окості точки $\Delta\phi_z$ амплітуда другої гармоніки видимо перевищує амплітуду першої $\omega_{II} \gg \omega_I$.

На підставі проведеного аналізу пропонується експериментально знаходити фазу, при якій амплітуда сигналу ЛДВ досягає мінімального значення, і на основі цієї величини змінювати оптичну різницю між пучками e_1 та додаткової e_2 таким чином, щоб $\Delta\phi_{opt} = \pi$.

Практично, це може бути здійснено за допомогою додаткової НЧ модуляції фази в одному з пучків, причому індекс модуляції повинен напевно перевищувати $\Delta\phi_{z2} - \Delta\phi_{z1}$ (див. рис.1). В такому випадку оптимальна фазова різниця буде знаходитись точно посередині між

$$\Delta\phi_{z1} \text{ та } \Delta\phi_{z2}: \Delta\phi_{opt} = \frac{1}{2}(\Delta\phi_{z2} - \Delta\phi_{z1}).$$

Макет лазерного віброметра зі світловодом та експериментальні дослідження

Макет лазерного віброметра з ТХФ, блок схема якого зображена на рис.2, складається з ЛДВ CLV-S виробництва Polytec GmbH (Германія), оптична частина котрого еквівалентна інтерферометру Маха-Цандера 1, а джерелом випромінювання є He-Ne лазер 2. Інтерферометр 1 призначений для формування двох оптичних пучків, один з яких (опорний) I_0 залишається в оптичній системі, а інший виводиться назовні. Суттєво важливим елементом оптичної схеми віброметра CLV-S є комірка Брегга 3, яка зсуває оптичну частоту опорного пучка на частоту гетеродину f_0 .

В класичній схемі ЛДВ оптичний промінь спрямовується на поверхню досліджуваного об'єкту. А в схемі ЛДВ з ТХФ цей промінь потрапляє на вхід другого інтерферометра, що утворений світлоподільним елементом 4 дзеркалом 5 та поверхнею об'єкту 6. В цьому

додатковому інтерферометрі з первинного пучка формуються два вторинних: зондувальний I_1 та другий опорний I_2 (нагадаємо, що оптична частота опорного пучка I_0 зміщена на частоту гетеродину f_0).

Опорні пучки I_0 , I_2 разом з зондувальним пучком I_1 , що розсіяно об'єктом 6, інтерферують на поверхні фотодетектора 7. Результатом їх фотозмішування є фотострум $i_{\text{det}}(t)$. Далі сигнал $i_{\text{det}}(t)$ потрапляє для обробки в електронний процесор 8 віброметра CLV-S, який включає поза інше ВЧ фільтр на частоті гетеродину f_0 , частотний дискримінатор, вихідні НЧ фільтри та ін.

Частина фотоструму $i_{\text{det}}(t)$ відгалужується на амплітудний детектор 9, призначений для індикації інтенсивності суперпозиції оптичних сигналів другого опорного пучка та розсіяного зондувального пучків. Для отримання даних окремо про інтенсивність кожного з них слід по черзі перекривати інший промінь. Хоча індикатор інтенсивності у віброметрі CLV-S не призначений для точного вимірювання оптичних інтенсивностей, вимірювання незалежними оп-

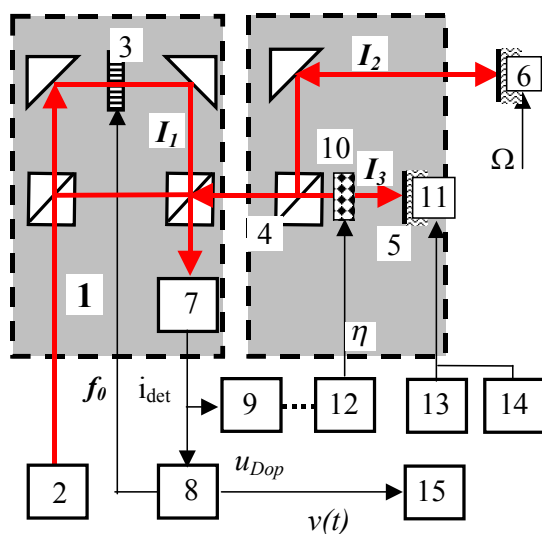


Рис.2 Схема експериментальної установки

тичними засобами підтвердили можливість контролю параметра η з похибкою не гірше 10%.

Додатковими елементами схеми є рідкокристалева комірка 10, яка виконує роль керованого фільтру нейтральної щільності, та фазомодулюючий елемент 11, що виконано у вигляді дзеркала, закріпленого на п'єзоелементі. Ці елементи розташовані у русі пучка I_3 та призначені для налаштування η та $\Delta\phi$. Керування щільністю фільтру 10 виконувалося

вручну шляхом зміни напруги джерелом 12. Для зміна оптичного шляху пучка I_3 також передбачено регульоване джерело напруги 13 та генератор НЧ коливань 14.

Для спостереження та дослідження вихідного сигналу віброметра використовувався осцилоскоп RIGOL 1102E 15

Першим експериментом було дослідження поведінки вихідного сигналу віброметра з ТХВ в окості точки $\Delta\phi_{z1}$ при умові $\eta < 1$. Епюри на рис.3.А-В отримані для таких умов експерименту: частота коливань 4.3 кГц, $X_1 = 7 \text{ nm}$, $\eta \approx 0.8$. Сигнал на рис.3А, отриманий при фазовій різниці, котра розташована значно ліворуч від точки $\Delta\phi_{z1}$ (див. рис.1), має в своєму складі лише основну гармоніку на частоті 4.3 кГц. При налаштуванні системи ближче до $\Delta\phi_{z1}$ (рис.3.Б) у спектрі сигналу з'являється друга гармоніка сигналу на частоті 8.6 кГц, а при $\Delta\phi = \Delta\phi_{z1}$ перша гармоніка зникає взагалі (рис.3.В).

Для того, щоб продемонструвати можливість одночасного виявлення обох точок $\Delta\phi_z$ на фазомодулюючий елемент 11 було подано гармонічний сигнал частотою $F_{\text{mod}} = 0.5 \text{ Гц}$ і амплітудою, яка забезпечила індекс модуляції фази в каналі I_3 $\delta\phi_{\text{mod}} = 0.95 \text{ rad}$. Частота та амплітуда коливань досліджуваного об'єкту складають відповідно 31.6 кГц та $X_1 = 12 \text{ nm}$. Параметр η знаходився приблизно в межах 0.7...0.8. Епюра сигналу з виходу віброметра на осцилоскопі 15 наведена на рис. 4. Дві точки мінімуму амплітуди сигналу в моменти часу t_{z1} та t_{z2} відповідають фазам $\Delta\phi_{z1}$ та $\Delta\phi_{z2}$. Максимум сигналу, як і передбачено розрахунками, знаходиться посередині між точками t_{z1} та t_{z2} , що відповідає $\Delta\phi_{\text{opt}} \approx 3.14$. Таким чином, запропонований підхід не вимагає необхідності явного розрахунку фазових різниць $\Delta\phi_{z1}$ та $\Delta\phi_{z2}$.

Метод визначення оптимальних параметрів за допомогою додаткової модуляції може також позбавити необхідності вимірювати та підтримувати під час експерименту величину параметра η . Розрахуємо η двома різними методами. З однієї сторони, амплітуда, сигналу, яка відповідає класичному віброметру (канал I_3 перекрито) складає $U_g = 0.5 \text{ V}$, а амплітуда при ТХФ (рис.4) $U_{\text{optTXF}} \approx 1.5 \text{ V}$, таким чином

збільшення амплітуди сигналу в віброметрі з
ТХВ складає $\alpha \approx 3$, звідки $\eta' \approx 0.75$.

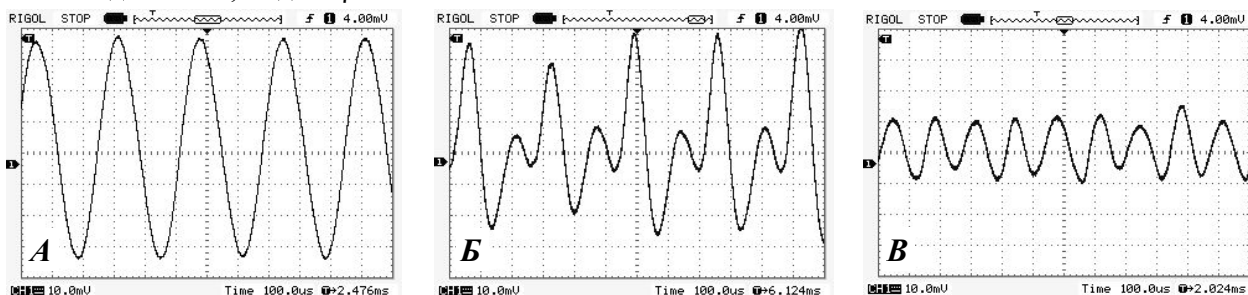


Рис.3 Епюри сигналу ЛДВ з ТХФ та $\eta < 1$. А: $\Delta\phi < \Delta\phi_{z1}$; Б: $\Delta\phi \leq \Delta\phi_{z1}$; С: $\Delta\phi = \Delta\phi_{z1}$

З іншої сторони, η можна розрахувати за допомогою співвідношення (4), використовуючи експериментальні данні $\Delta\phi_{z2} - \Delta\phi_{z1}$. В свою чергу $\Delta\phi_{z2} - \Delta\phi_{z1} \approx \kappa \cdot (t_{z2} - t_{z1})$, де $\kappa = 2\pi F_{\text{mod}} \cdot \delta\phi_{\text{mod}}$ – крутизна лінійної частини модуляційної характеристики. З епюри на рис.4 отримуємо, що $t_{z2} - t_{z1} = 0.44 \text{ ms}$, таким чином, $\eta' \approx 0.78$.

Різниця між η' та η'' складає біля 5%, що є прийнятною похибкою для демонстраційного експерименту. Таким чином, формула (4) вірно

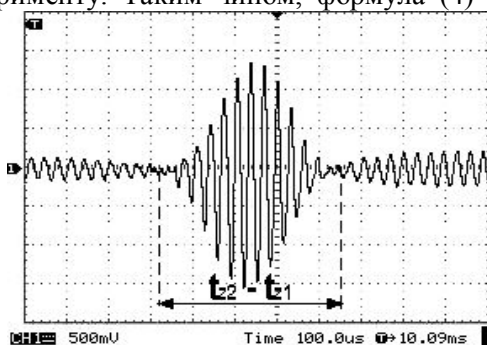


Рис.4 Епюра сигналу ЛДВ з ТХФ та $\eta \approx 0.75$

Для того, щоб підкреслити особливість режиму ТХФ при умові $\eta < 1$ на рис.5 наведено епюру сигналу в експерименті з тими ж самими параметрами за відмінністю того, що $\eta \approx 1.4$. Порівняння епюр на рис.4 та рис.5 демонструє приблизно однакове "аномальне" підсилення сигналу в той же час на рис.5 відсутні точки зникнення основної гармоніки сигналу.

Висновки

Розрахунками показано, що в лазерному віброметрі з трихвильним фотозмішуванням при

відображає зв'язок між $\Delta\phi_z$ та η і може бути також використана для знаходження η при інших відомих параметрах експерименту.

Слід зазначити, що при гармонічній модуляції лінійний зв'язок між $\Delta\phi_{z2} - \Delta\phi_{z1}$ та $t_{z2} - t_{z1}$ існує лише в обмеженій області модуляційної характеристики. Але у всякому випадку розрахунок $\Delta\phi_{z2} - \Delta\phi_{z1}$ за $t_{z2} - t_{z1}$ може бути забезпечений в реальному часі електронними або програмними засобами.

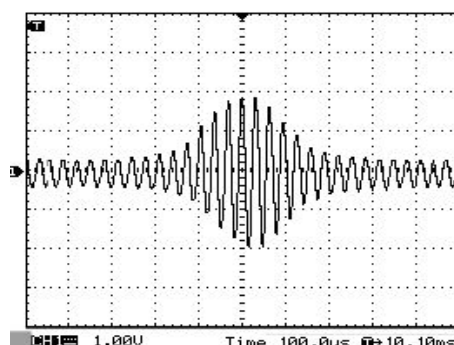


Рис.5 Епюра сигналу ЛДВ з ТХФ та $\eta \approx 1.38$

умові, що амплітуда додаткової опорної хвилі перевищує амплітуду зондувальної хвилі існують такі фазові різниці $\Delta\phi_z$ між цими хвилями, при яких амплітуда основної частоти сигналу дорівнює нулю, і в той же час амплітуда другої гармоніки сигналу значно збільшується. Цей результат покладений в основу методу визначення та налаштування в реальному часі оптимальної фазової різниці $\Delta\phi_{\text{opt}}$, при якій позитивний ефект застосування ТХФ досягає максимального значення.

Спираючись на встановлений факт, що $\Delta\phi_{\text{opt}}$

знаходиться точно посередині між двома сусідніми значеннями $\Delta\phi_z$, запропоновано ввести фазову модуляцію додаткової опорної хвилі з індексом модуляції, що перевищує $\Delta\phi_{z2} - \Delta\phi_{z1}$. Таким чином, максимум сигналу буде автоматично відповідати оптимальному налаштуванню системи віброметра з ТХФ, що позбавляє необхідності спеціально налаштовувати $\Delta\phi_{opt}$ під час експерименту.

Експериментальну перевірку теоретичних висновків було виконано на лазерному віброметрі CLV-S, модернізованому відповідно до схеми ТХФ. Експерименти підтвердили теоретичні висновки. Зокрема продемонстровано існування таких величин $\Delta\phi_z$ (за умови $\eta < 1$),

при яких зникає основна гармоніка вихідного сигналу, або вона значно зменшується порівнянню з другою гармонікою, що суттєво зростає. Також підтверджено зв'язок між фазовими різницями $\Delta\phi_z$ та параметром η , що дозволяє за допомогою додаткової модуляції фази опорної хвилі прямо під час вимірювального процесу визначити також і параметр η . Загалом продемонстровано можливість підтримання стабільних характеристик системи в межах 5% в умовах, коли умови експерименту непередбачувано змінюються в часі.

Список використаних джерел

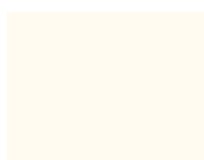
1. Drain L. E. The Laser Doppler Technique / L. E. Drain (New York: Wiley). 1980. – 241 с.
2. Podzorny T. In-site defectoscopy of granite blocks with a laser vibrometer / T.Podzorny, G. Budzyń, and J.Rzepka // AIP Conf. Proc. Conf. on Vibration Measurements by Laser Techniques, Ancona, Italy. – 2012. – V.1457. – P. 377–385.
3. Staszewsk W.J. Fatigue crack detection in metallic structures with Lamb waves and 3D laser vibrometry / W.J. Staszewsk, B.C. Lee And R. Traynor // Meas. Sci. Technol. – 2007. – V.18. – P. 727–739.
4. Yarovoi L. The effect of three-wave interference in laser Doppler vibrometry / L.Yarovoi, G. Siegmund // Meas. Sci. Technol. – 2004. – V. 15. – P.2150 - 2156.
5. Яровой Л. К. Особливості роботи лазерного доплерівського віброметра з трихвильовим фотозмішуванням в нанометровому діапазоні / Л.К. Яровой // Вісник Київського університету. Серія: Математика. Механіка. – 2011. – Випуск. 26. – С. 39-43..
6. Яровой Л. К. Спосіб вимірювання миттєвої віброшвидкості / Л. К. Яровой. Пат. 94564 Україна G01B 9/02, G01C 3/00: заявник власник патенту Київський національний університет імені Тараса Шевченка. – №201013706 заявл. 18.11.10; друк. 10.05.2011, Бюл. № 9.

References

1. DRAIN L. E. (1980) *The Laser Doppler Technique* New York: Wiley.
2. PODŻORNY T., BUDZYŃ G., AND RZEPKA J. (2012) In-site defectoscopy of granite blocks with a laser vibrometer In *AIP Conf. Proc. Conf. on Vibration Measurements by Laser Techniques*, Ancona, Italy. 1457. p. – 377–385.
3. STASZEWSK W.J., LEE B. C. and TRAYNOR R. (2007) Fatigue crack detection in metallic structures with Lamb waves and 3D laser vibrometry. *Meas. Sci. Technol.* .18. p. 727–739.
4. YAROVOI L., SIEGMUND G. (2004) The effect of three-wave interference in laser Doppler vibrometry. *Meas. Sci. Technol.* 15. p.2150 - 2156.
5. YAROVOI L.K. (2011) Some features in LDV with three interacting waves in nanometer range *Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv Series Mechnics & Mathematics*. 26. p. 39-43.
6. YAROVOI L.K. (2011) The method for measurement of vibration velocity submit. *Patent office of Ukraine* no. 94564; print. 10.05.2011, Bull. 9.

Надійшла до редколегії 21.02.2015

КОМП'ЮТЕРНІ НАУКИ ТА ІНФОРМАТИКА



УДК 004.424

Аль-Хазаалі Хайдер Джаббар, магістрант

Al-Khazaali Hayder Jabbar, undergraduate Master

Розробка системи виявлення лісових пожеж з використанням сенсорних мереж

Development System Of Forest Fire Detection By Using Sensor Networks

Кожного року на Землі відбувається понад 400 тисяч лісових пожеж, які пошкоджують близько 0,5% загальної площі і забезпечують викидання мільйонів тон продуктів згоряння в атмосферу. Деякі випадки обертаються катастрофою.

Робота присвячена розробці системи моніторингу лісових пожеж на основі відеоспостереження і бездротових сенсорних мереж для прогнозування раннього виявлення лісових пожеж. Розглянуто варіанти побудови бездротових сенсорних мереж на базі технологій ZigBee та MeshLogic. Запропоновано реалізацію інтелектуального оптоелектронного детектора диму вузла сенсорної мережі.

Ключові слова: лісові пожежі, моніторинг, сенсорні мережі, покриття, проектування.

Every year there are up to 400 thousand forest fires occur on Earth, damaging about 0.5% of the total forest area and discharging millions of tons of products combustion into the atmosphere. Some of them turn into catastrophic.

Was designed system to protection forest fire and we must make analysis of the ground based systems for monitoring forest fires. The proposed architecture of the hybrid system the terrestrial monitoring of forest fires on the basis of video surveillance and wireless sensor networks for forecasting and early detection of forest fires. The variants of the construction of wireless sensor networks based on technology ZigBee, Mesh Logic and Network Equipment by Digi XBee. Proposed implementation of intellectual optoelectronic smoke detector sensor network node.

Key words: forest fires, monitoring, video, sensor networks, coverage, design.

Статтю представив д.т.н., проф. Погорілий С.Д.

1. Introduction

One of the most haunting aspects of naturally caused forest fires is that they form so quickly and are unpredictable. Research has shown that increase heat in areas can be the cause for fires significant economic losses in the forest industry [1]. However around the twentieth century fires mostly occurred because of natural causes and people grew a larger fear of the destruction that they could cause. The researchers from this article have predicted that in about forty years climate will put the world at risk for more fires, specifically in areas with very dry climates. The combustion temperature of about 700°C. Crown fire covers leaves, pine needles, branches, and all the crown, can cover grass-moss cover the soil and under-growth. The speed of propagation of 5-70 km/h. Temperature from 900°C to 1200°C. In forest specifically, help must arrive quickly because the trees act as fuel to the flame. Being able to predict when a fire starts would give an advantage to those controlling it.

This could make for big steps forward for control fire by using computer can bring monitoring of these destructive fires under control.

Based on the foregoing it is clear that the problem of monitoring and early detection of forest fires to date is relevant.

because some time arrive to speed of the fire in the wind 0.25-5 km / h, the flame height up to 2.5 m.

Early detection of fire is the most effective way to fight forest fires.

2. Analysis of the work in this subject area

Ground-based monitoring includes the organization of observation posts, patrols the most fire zones, installation of towers for video surveillance. [2]

Video surveillance systems can significantly improve the efficiency of detection and extinguishing forest fires [3, 4]. However, in the woods with hilly terrain angle and range of cameras is limited. In addition video surveillance is ineffective because of the low probability of

of the fire at the intersection of the lines from 2-3 cameras. The information obtained from the cameras is transmit- ted wirelessly to the control room, which provides re-mote control of cameras. Following the discovery of fire coordinates information is stored on the server for further analysis and implementation of the fire prevention measures. Architecture wireless sensor networks

Any sensor network consists of three parts: a system for the collection, transmission and processing of the data. Today we know two basic options organizations WSN of the standard IEEE 802.15.4: ZigBee technology and MeshLogic. The advantages of each system can be attributed low power consumption and cost of the devices, self-organizing network, thanks to build software support for a large number of clients. ZigBee technology includes three types of devices: coordinator ZigBee, ZigBee router and terminal. The terminal device reads out investigated parameters with embedded sensors and transmits them over the wireless channel to the nearest router, which in turn delivers the delivery of the data to the network coordinator. Meals terminal devices carried from the portable power supply. The life of a single power supply can range from several months to one or two years. Fault tolerance network built on technology ZigBee, is sufficiently low be-cause in the case of failure of one of the routers stops functioning one of the sections of the network and in the case of a failure of the coordinator – network stops functioning altogether. The principle of technology MeshLogic similar to technology ZigBee, but has a number of significant differences. First, the network topology does not require a specific hierarchy of devices, as every node performs a role as a terminal device and a router. Second, the power of each of the nodes is provided by a portable power supply, and a long service life of the latter, as in to the previous technology, carried out due the ability of nodes spend most of their time in sleep mode. Thirdly, the fault tolerance of such a network is rather high, as in the case of failure of one of the nodes, the network automatically paves new route, which is a significant advantage. The disadvantage of this technology is the problem of ensuring of simultaneous exit hibernation all the devices as the "awaken" of a node is measured in milliseconds.

In view of the above problems as an alternative to WSN can serve as a monitoring system in which data is transmitted over a radio frequency channel. In the construction of such a system is necessary to provide a different distance from the terminal devices to the control tower. The time for which the

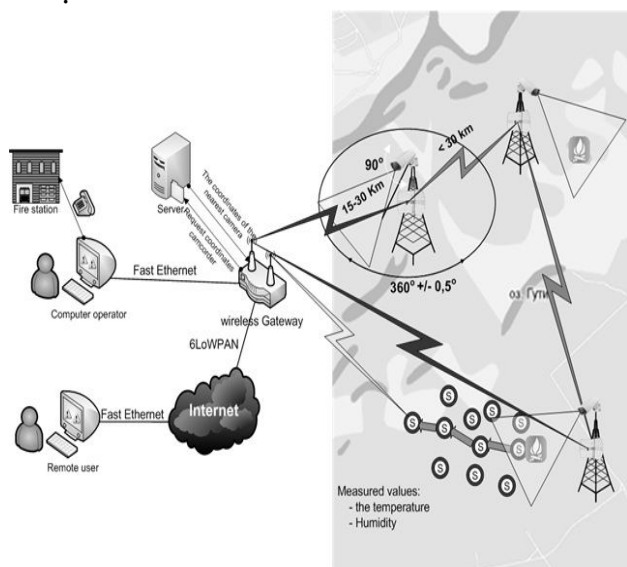


Fig.1 Architecture of the ground system to monitor forest fires

To ensure covering of the observed area during placement and construction of towers are taken into account peculiarities of the terrain. This increases the visibility of each of the chambers, and in the case of fire detection - accurately determine the coordinates

data will overcome the way can be seen as a particular node location coordinates.

5. The node wireless sensor network with optoelectronic smoke detector

Depended on the technology chosen wireless sensor network, its nodes should have sensors for fire detection, the microcontroller (MC) which controls the sensors, processing the data and transmitting WSN by means the transceiver (T). Given the mass character of network nodes which are not subject servicing over an extended service life, a natural requirement is reliability and low cost with rigid restrictions on overall weight and dimensions parameters and energy resources. Keep in mind the limitations of memory and microcontroller performance when selecting data processing algorithms. An important component of the network node is the energy system based chemical current sources (galvanic cells, batteries), electric generators, devices collecting energy from the sun, wind, vibration and others. Instead of batteries for energy storage is widely used ionizers. They are usually designed to be installed in the premises having relatively large size, power consumption, require adjustment and service is what limits their application for the detection of forest fires. The analogue of the proposed sensor is an optoelectronic smoke detector [8], comprising a source (S) and receiver (R) of infrared radiation and positioned so that a straight path from the source to the receiver the light rays cannot penetrate. In the presence of smoke particles in the region where the optical density is monitored radiation smoky environment, smoke particles scattered light radiation enters the

The most effective and affordable receivers are modulated have optical radiation receivers IR transmission channels of remote control commands produced integrally (series TSOPxxxx) for different modulation frequencies. Several sensors can be controlled by one MK (Fig. 2).

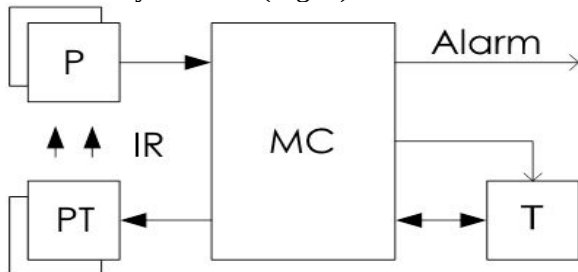


Fig.2 Structural diagram of the device

To assess the choices sensor elements, their optimal placement and layout algorithm implemented interrogation devices based on microcontroller AVR ATtiny13.

The sensor used IR LED and TSOP4836 receiver (36 kHz). Use LED indication of smoke pollution detection. Appearance of the device shown in Figure 3.

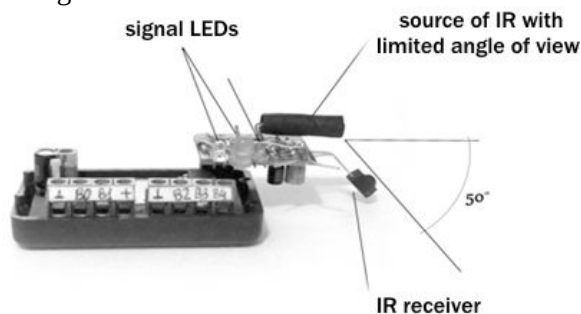


Fig. 3 Appearance of the device

Working principle. IR Source sends intermittent radiation of definite frequency narrow beam that misses to the receiver. As soon as in the zone of intersection of the directivity pattern of the source and the receiver there is smoke - rays are reflected from the smoke particles and strikes on the receiver. At a sufficient intensity of reflected radiation on the receiver output signal varies and apparatus by means of LEDs indicating the detection of smoke. Given the radiation pattern of the receiver and the source of infrared radiation can to change the angle between them, thereby changing the volume and the distance from the zone of intersection of the device, which is a reflection IR radiation. By changing the number of pulses and the parameters of the infrared installing the necessary sensitivity sensor. Is extremely important for increasing the lifetime of the wireless node is to optimize the energy consumption profile, including activity cycle functioning and sleep. In developing the algorithm and program functioning of the microcontroller stipulated deep sleep mode with the awakening of the watchdog timer. The LED indicators, which are included in the active mode, consuming the same power as a transceiver, which gives better understanding of the profile of energy consumption node WSN.

6. Experimental sensor research

As part of this work outdoors in the conditions approached to the real use of WSN, a series of experiments to assess the ability of this device to detect smoke of different densities. As a source of the smoke used smoke bombs and the device was placed at a height of 1.3 m from the ground at different distances from the source of the smoke. As the distance decreases the density of the smoke. The aim of the first experiment was setting mutual position of the IR emitter and receiver unit in the absence of smoke pollution. The emitter emits a signal which is scattered in the air and does not reach the receiver. Subsequent experiments were designed

to assess the sensitivity of the sensor. The distance from the source device to smoke ranged from half a meter to 20 meters in order to ensure different densities of smoke pollution. During performance of all above described experiments, a device to detect the presence of smoke. These results indicate that the device can be used as the basis for the development of a smoke detector in the forest stands.

7. Conclusion

In this work it was an analysis of technologies for construction of ground-based monitoring. We formulate the task of designing a technique of designing terrestrial forest fire detection based on sensor networks. Considered in detail the stages of the procedure including selection of protocols, interfaces, topology, and equipment for a sensor network. The choice of topology and Mesh-defined physical devices, which are the nodes of the network.

The calculation power node which confirmed efficiency of the wireless device sufficient for the sensor network through practical experiences.

Completed development and experimental investigation of the smoke detector, confirming its efficiency. The problem of placing a sensor network hardware. Skill infrastructure design a sensor network to detect forest fires.

The results can be used for the design of terrestrial forest fire detection system based on wireless sensor network technology to build a Zigbee based on the existing infrastructure.

Список використаних джерел

1. Воробьев Ю.Л. Лесные пожары на территории России: Состояние и проблемы / Воробьев Ю.Л., Акимов В.А., Соколов Ю.И. – М.: ДЭКС-ПРЕСС, 2004. – 312 с.

2. ГОСТ Р 22.1.09-99. Безопасность в чрезвычайных ситуациях, мониторинг и прогнозирование лесных пожаров. Общие требования [Действующий от 01.01.2000]. – Госстандарт РФ.

3. Мединцев С.Ю. Системы мониторинга лесных ресурсов: состояние и пути развития / Мединцев С.Ю., Орехов А.А., Кочкарь Д.А. // Радиоелектронні і комп'ютерні системи. - 2009. - №6(40). - С.70–74.

4. Automatic Early Warning System for Forest Fires // FireWatch – [Електронний ресурс]. Режим доступу: <http://www.fire-watch.de/cms> (19.01.15)

5. Hefeeda M. Forest fire modeling and early detection using wireless sensor networks / Hefeeda M., Bagheri M. // Ad Hoc & Sensor Wireless Networks. – 2009. – Vol. 7. – P.169-224.

6. Pripuzic K. Early forest fire detection with sensor networks: sliding window skylines approach / Pripuzic K., Belani H., Vukovic M. // Proceedings 12th International Conference, KES 2008 Zagreb. – 2008. – Part 1. – P. 725-732.

7. Hsu-Yaung Kung Drought forecast model and framework using wireless sensor networks / Hsu-Yaung Kung, Jing-Shiuan Hua, Chaur-Tzuhn Chen // Journal of Information Science and Engineering – 2006. – № 22. – P. 751-769.

8. Детектор дыма (RU 2288505) [Електронний ресурс]. Режим доступу: <http://www.findpatent.ru/patent/228/2288505.html> (19.01.15)

References

1. VOROBIEV, Y., AKIMOV, V., and SOKOLOV, Y. (2004) *Forest fires in Russia: Status and Problems*. Moskva: Dekspress.

2. STATE STANDARD OF THE RUSSIAN FEDERATION. (2000) *Safety in emergencies, monitoring and forecasting of forest fires. General requirements: GOST R 22.1.09-99*.

3. MEDINTSEV, S., OREKHOV, A., KOCHKAR, D. (2009) Monitoring systems of forest resources: the state and the development. *Radioelektronnyie kompyuternyye sistemyi*. 6 (40). p.70-74.

4. FIREWATCH (2015) Automatic Early Warning System for Forest Fires. [Online] Available from: <http://www.fire-watch.de/cms> [Accessed: 19th January 2015].

5. HEFEEDA, M., BAGHERI, M. (2009) Forest fire modeling and early detection using wireless sensor networks. *Ad Hoc & Sensor Wireless Networks*. Volume 7. p.169-224.

6. PRIPUZIC, K., BELANI, H., VUKOVIC, M. (2008) Early forest fire detection with sensor networks: sliding window skylines approach. In *Proceedings 12th International Conference, KES 2008*. Zagreb: 1. p.725-732.

7. HSU-YAUNG KUNG, JING-SHIUAN HUA, CHAUR-TZUHN CHEN (2006) Drought forecast model and framework using wireless sensor networks. *Journal of Information Science and Engineering*. 22. p.751-769.

8. SMOKE DETECTOR (RU 2288505) (2013). [Online] Available from: <http://www.findpatent.ru/patent/228/2288505.html> [Accessed: 19th January 2015].

Надійшла до редколегії 13.03.15

УДК 004.658.2

Буй Д. Б., д.ф.-м.н., проф.,
Пузікова А. В., аспірантка.

Деякі неklasичні нормальні форми в реляційних базах даних

Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 83000, м. Київ, пр-т.
Глушкова 4д,
e-mail: buy@unicyb.kiev.ua
e-mail: anna_inf@mail.ru

D. B. Buy, the doctor of physical and mathematical
sciences, the professor,
A. V. Puzikova, postgraduate.

Some nonclassical normal forms in relation databases

Taras Shevchenko National University of Kyiv,
83000, Kyiv, Glushkova st., 4d,
e-mail: buy@unicyb.kiev.ua
e-mail: anna_inf@mail.ru

Обговорюються означення деяких класичних нормальних форм та основних неklasичних нормальних форм. Показана нееквівалентність двох означень проективно-з'єднувальної нормальної форми, запропонованих Фейґінім. На основі аналізу першоджерел та власних результатів встановлені логічні зв'язки між означеннями класичних та основних неklasичних нормальних форм.

Ключові слова: реляційні бази даних, неklasичні нормальні форми.

We discuss the definitions of some classical normal forms, in particular, Fagin's Projection-Join Normal Form, and basic non-classical normal forms, such as: Zaniolo's Elementary Key Normal Form, Date's Fifth Normal Form, Maier's preliminary Projection-Join Normal Form, Vinsent's Reduced Fifth Normal Form, Normann's Superkey Normal Form, Vinsent's Key-Complete Normal Form, Vinsent's Redundancy Free Normal Form, Essential Tuple Normal Form (authors: Darwen, Date and Fagin), Fagin's Domain-Key Normal Form. It is shown that both definitions of Fagin's Projection-Join Normal Form (so-called classical fifth normal form) are not equivalent. In particular, we discuss the features of the relation scheme which is in one of the definitions of Fagin's Projection-Join Normal Form.

On the basis of analysis of the sources and own results are established logical connections between the definitions of classical and basic non-classical normal forms.

Key Words: relational databases, nonclassical normal forms.

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Анісімов А.В.

Означення класичних нормальних форм (НФ) в реляційних базах даних застосовуються до одного відношення [1-2], схеми одного відношення [3-6], таблиці [7]. Алгоритм зведення відношення до певної НФ повинен задовольняти вимогам (принципам) задачі проектування схеми бази даних (БД). Одним з важливих принципів розробки схеми БД є принцип представлення [8], який включає в себе можливість відновлюваності початкового відношення r_0 зі схемою R_0 (множиною атрибутів) з відношень $r_1, r_2, \dots, r_n$ зі схемами $R_1, R_2, \dots, R_n$ відповідно, де r_i – проекції відношення r_0 на схеми R_i для $i = \overline{1, n}$; іншими словами, вимагається виконання декомпозиції без втрат $r_0 = \bigotimes_{i=1}^n r_i$.

Передумовою виникнення пропозицій щодо покращення існуючих класичних НФ 2-3 порядків та НФ Бойса-Кодда (НФБК) є те, що ні декомпозиція (див., наприклад, [9]), ні деякі алгоритми синтезу (наприклад, алгоритм Берштейна (Bernstein) [10]) не забезпечували виконання принципу представлення для відношення з довільно заданими схемою і множиною функціональних залежностей (ФЗ).

Так, якщо на вхід алгоритма синтезу Берштейна подається реляційна схема $R_0\{A, B, C, D\}$ із множиною ФЗ $\{A \rightarrow B, C \rightarrow D\}$ (приклад з монографії В.П. Дрібаса [11]), результатом виконання алгоритму є схеми $R_1\{A, B\}$ і $R_2\{C, D\}$, кожна з яких знаходиться у 3НФ, але порушується вимога виконання декомпозиції без втрат, оскільки з'єднанням

відповідних відношень r_1 і r_2 є їх декартове з'єднання.

Намагаючись уникнути подібної проблеми, Дрібас поширює означення НФ 2-3 порядків та НФБК на набір проєкцій відношень, наприклад: «Третя нормальна форма (3НФ) відношення $r(R)$ ¹ – це або дане відношення, якщо воно знаходиться у другій нормальній формі (2НФ) і не містить транзитивних залежностей непервинних атрибутів від потенційних ключів, або набір яких-небудь його проєкцій, кожна з яких задовольняє вказаним умовам, причому дане відношення повинно відновлюватись через натуральне з'єднання (natural join) цих проєкцій» [11]; зауважимо, що натуральне з'єднання за термінологією [7] називається з'єднанням та позначається як $\otimes$.

Іншу спробу поєднати вимогу виконання декомпозиції без втрат з означенням 3НФ запропонували Лінг (Ling), Томпа (Tompa) і Камеда (Kameda), які розробили концепцію покращеної 3НФ (An Improved Third Normal Form) та алгоритм зведення до неї [12].

Відомо, що алгоритм синтезу Берштейна моделює схеми відношень, які знаходяться «майже» в НФБК. Маючи на меті охарактеризувати форму цих відношень, Заніоло (Zaniolo) запропонував НФ, яка визначається елементарним ключем (Elementary Key Normal Form – EKNF) [13]. Автор сформулював більш строгі означення 3НФ: «Відношення знаходиться у 3НФ за означенням, якщо для кожної нетривіальної ФЗ $X \rightarrow A$:

а) множина атрибутів X є суперключем відношення із схемою R , або

б) атрибут A належить деякому потенційному ключу»,

та звернув увагу на різницю між означеннями 3НФ і НФБК – остання не містить умову (б).

В означенні EKNF використовуються додаткові поняття *елементарної ФЗ* та *елементарного ключа*:

– ФЗ $X \rightarrow A \in F$ (де F – множина ФЗ) називається *елементарною*, якщо $A \notin X$ і для кожної множини атрибутів $X' \subset X$ ФЗ $X' \rightarrow A$ не належить $[F]$ (де $[F]$ – замикання множини ФЗ); зауважимо, що за термінологією [11] така ФЗ $X \rightarrow A$ є *повною*;

¹ Запис $r(R)$ означає, що відношення r має схему (множину атрибутів) R .

– ключ X у відношенні схеми R є елементарним, якщо для *деякого* атрибута $A \in R$ ФЗ $X \rightarrow A$ є елементарною; наприклад, для схеми відношення $R = \{A, B, C\}$ із заданою множиною ФЗ $\{AB \rightarrow C, C \rightarrow A\}$ ключ $\{A, B\}$ є елементарним, а ключ $\{B, C\}$ – ні.

В означенні EKNF зберігається умова (а) та посилюється умова (б), вказані вище: «Відношення із схемою R знаходиться у EKNF за означенням, якщо для кожної нетривіальної ФЗ $X \rightarrow A$:

а) X є суперключем відношення, або

б) атрибут A належить деякому елементарному ключу».

На зв'язок EKNF з класичними НФ вказують імплікації $\text{НФБК} \Rightarrow \text{EKNF} \Rightarrow \text{3НФ}$, які впливають безпосередньо з наведених вище означень.

Як вже згадувалось, схему відношення у EKNF синтезує алгоритм Берштейна; доведення цього факту спирається на теорему про те, що кожен ключ, який отримується в результаті виконання вказаного алгоритму, є елементарним [13].

Наступною НФ, яка викликала неабиякий інтерес, є проєктивно-з'єднувальна НФ (Projection-Join Normal Form – PJ/NF) або класична 5НФ; для неї Фейгін (Fagin) використовує наступні два означення [6].

В першому означенні PJ/NF використовується алгоритм приналежності (Membership algorithm), який працює наступним чином: на вхід подаються множина потенційних ключів $\Delta = \{K_1, K_2, \dots, K_m\}$ відношення із множиною атрибутів R реляційної схеми² та залежність з'єднання $*(R_1, R_2, \dots, R_n)$. Ініціюється множина підсхем $S = \{R_1, R_2, \dots, R_n\}$. Поки для деякого K_i , $1 \leq i \leq m$, виконується включення $K_i \subseteq R_j \cap R_k$ де $1 \leq j, k \leq n$, в множині S входження множини R_j замінюється на множину $R_j \cup R_k$, а входження R_k знищується. Якщо на виході множина S співпадає з схемою R , тобто $S = \{R\}$, то алгоритм видає значення «True». Приймається без доведення (на

² Зауважимо, що в роботі [6] під реляційною схемою розуміється пара $\langle R, \Sigma \rangle$, де R – множина атрибутів, Σ – множина обмежень, яка складається з ФЗ, багатозначних залежностей (БЗЗ) та залежностей з'єднання (ЗЗ) і є замкненою відносно операції логічного (семантичного) слідування.

прикладі), що алгоритм видає результат «True» тоді і тільки тоді, коли залежність з'єднання $*(R_1, R_2, \dots, R_n)$ логічно (семантично) слідує з множини ключів $\Delta = \{K_1, K_2, \dots, K_m\}$. Таким чином, згідно [6], наступні означення є еквівалентними:

1) «схема відношення знаходиться у PJ/NF, якщо вона знаходиться у 1НФ і для множини ключів Δ та кожної залежності з'єднання $\sigma \in \Sigma$ алгоритм видає результат «True»;

2) «схема відношення знаходиться у PJ/NF, якщо вона знаходиться у 1НФ і кожна залежність з'єднання $\sigma \in \Sigma$ є логічним наслідком множини ключів Δ ($\Delta \models \sigma$)».

Перше означення по суті є синтаксичним, оскільки застосовується до схеми відношення, а друге – семантичним, оскільки в ньому неявно використовується поняття моделі множини ключів Δ , причому на цій моделі повинна виконуватись кожна залежність з'єднання $\sigma \in \Sigma$. Проаналізуємо детальніше, чи дійсно ці означення є еквівалентними.

Лема 1. Якщо таблиця t знаходиться у PJ/NF за означенням 1), то вона знаходиться у PJ/NF за означенням 2). □

Доведення. Нехай таблиця t є моделлю реляційної схеми $\langle R, \Sigma \rangle$, яка знаходиться у PJ/NF за означенням 1). Тоді для довільної ЗЗ $\sigma \in \Sigma$ представленої у вигляді $*(R_1, R_2, \dots, R_n)$ на деякому кроці виконання алгоритму приналежності для деякого потенційного ключа $K_i \in \Delta$, $1 \leq i \leq m$, знайдуться такі компоненти R_j і R_k , $1 \leq j, k \leq n$, що виконується включення $K_i \subseteq R_j \cap R_k$. Звідси за пунктом 2 твердження 2.10.4 монографії [7] випливає, що виконується рівність $\pi_{R_j \cup R_k}(t) = \pi_{R_j}(t) \otimes \pi_{R_k}(t)$.

Продовжуючи застосовувати вказаний пункт для кожного наступного включення $K_i \subseteq R_j \cap R_k$, $1 \leq i \leq m$, в результаті виконання алгоритму приналежності з урахуванням властивостей комутативності та асоціативності операції з'єднання [7] отримаємо рівність:

$$\pi_{R_1 \cup \dots \cup R_n}(t) = \pi_{R_1}(t) \otimes \pi_{R_2}(t) \otimes \dots \otimes \pi_{R_n}(t),$$

оскільки $R = R_1 \cup \dots \cup R_n$, то

$$\pi_R(t) = \pi_{R_1}(t) \otimes \pi_{R_2}(t) \otimes \dots \otimes \pi_{R_n}(t).$$

Звідси випливає, що ЗЗ $\sigma \in \Sigma$ виконується на таблиці t , а отже реляційна схема $\langle R, \Sigma \rangle$ знаходиться у PJ/NF за означенням 2). □

Покажемо, що обернена імплікація не виконується; тобто, якщо таблиця t знаходиться у PJ/NF за означенням 2), то вона необов'язково знаходиться у PJ/NF за означенням 1). Для цього достатньо розглянути наступний контрприклад.

Приклад 1. Нехай над множиною атрибутів $R = \{A, B, C\}$ з потенційним ключем $\{A\}$ задана ЗЗ $*(ABC, C)$. Очевидно, що на довільній таблиці $t(R)$, яка є моделлю множини ключів $\Delta = \{\{A\}\}$ вказана ЗЗ виконується, оскільки вона є тривіальною. Але алгоритм приналежності видасть результат «False».

Отже, можемо зробити висновок, що означення 1) для PJ/NF є більш сильним, ніж означення 2).

Лема 2. Якщо схема відношення $\langle R, \Sigma \rangle$ знаходиться у PJ/NF за означенням 1), то кожен компонент довільної ЗЗ $\sigma \in \Sigma$ є суперключем. □

Доведення проводиться безпосередньо. □

Наслідок 1. Якщо схема відношення $\langle R, \Sigma \rangle$ знаходиться у PJ/NF за означенням 1), то кожен атрибут з множини R є суперключем³.

Доведення. Нехай схема відношення $\langle R, \Sigma \rangle$ знаходиться у PJ/NF за означенням 1) і нехай ЗЗ $\sigma \in \Sigma$ представлена у вигляді $*(R_1, R_2, \dots, R_n)$. Далі враховуємо, що множина ФЗ і ЗЗ Σ є замкненою відносно операції логічного (семантичного) слідування і виконується включення $\{\sigma \mid \Sigma \models \sigma\} \supseteq \{\varphi \mid \Sigma \models \neg \varphi\}$, яке впливає з результату про відсутність повної скінченної множини правил виведення для ЗЗ [14]. Звідси випливає, що $\forall \varphi (\Sigma \models \neg \varphi \Rightarrow \varphi \in \Sigma)$.

Тоді ЗЗ $*(R_1, R_2, \dots, R_n, \{A\})$, яка отримана за правилом виведення $\frac{*(R_1, R_2, \dots, R_n), X \subseteq R}{*(R_1, R_2, \dots, R_n, X)}$, належить множині Σ , а отже, за лемою 2 одноеlementна множина $\{A\}$ є суперключем. □

Із означеннями PJ/NF або 5НФ пов'язаний наступний блок некласичних НФ:

- НФ, яка визначається суперключем (Superkey Normal Form – SKNF) [15];
- спрощена 5НФ (reduced-5NF – 5NFR) [16];
- НФ, яка повністю визначається ключем (Key-Complete Normal Form) [17];

³ Нагадаймо означення суперключа: «Суперключем є множина атрибутів $X \subseteq R$, яка містить ключ. Кожен ключ є також суперключем» [10].

– надлишково-вільна НФ (Redundancy Free Normal Form) [17].

Розглянемо детальніше кожну з них.

SKNF була запропонована Норманом (Normann) [15], який звернув увагу на «некоректне визначення 5НФ» сформульоване Дейтом [2] та попередню версію 5НФ у монографії Мейера [3]. Наведемо обидва визначення:

– змінна-відношення знаходиться в 5НФ (PJ/NF) за означенням, якщо кожен компонент кожної нетривіальної 3З суперключем (Дейт);

– схема відношення R знаходиться у PJ/NF за означенням, якщо кожна 3З $*(R_1, R_2, \dots, R_n)$ ($R_1 \cup R_2 \cup \dots \cup R_n = R$), яка виводиться (синтаксично слідує) з множини обмежень Σ є або тривіальною або її компоненти є суперключами (Мейер).

Наведемо приклад з [3], на якому Мейер демонструє нееквівалентність означень попередньої PJ/NF і класичної PJ/NF за означенням 1):

«Нехай задані схема відношення $R = \{A, B, C\}$ і множина обмежень, яка містить ФЗ і 3З: $\Sigma = \{A \rightarrow BC, C \rightarrow AB, *(AB, BC)\}$. Оскільки множини $\{A, B\}$ і $\{B, C\}$ є суперключами, то схема відношення знаходиться у підготовчій PJ/NF, але вона не знаходиться у класичній PJ/NF, оскільки $\{A, B\} \cap \{B, C\} = \{B\}$ не є ключем».

Насправді, множина $\{B\}$ в даному прикладі є ключем; це впливає з наступної лєми, ідея якої неявно викладена в роботі Вінсента (Vincent) [16].

Лема 3. Якщо на таблиці t схеми R для множин атрибутів R_1, R_2 таких, що $R_1 \cup R_2 = R$ виконується нетривіальна 3З $*(R_1, R_2)$ і R_1, R_2 є суперключами, то $R_1 \cap R_2$ є суперключем. □

Доведення. Нехай на таблиці t виконується нетривіальна 3З $*(R_1, R_2)$, де R_1, R_2 – суперключі, і нехай $R_1 \cap R_2 = X$. Розглянемо випадки:

– $X = \emptyset$; тоді з'єднанням проєкцій $\pi_{R_1}(t)$ і $\pi_{R_2}(t)$ є їх декартове з'єднання, моделями такої 3З можуть бути порожня таблиця ($t_\emptyset$) або однорядкова таблиця, для яких множина $X = \emptyset$ є єдиним ключем [18]; □

– $X \neq \emptyset$; тоді за теоремою 1 Фейгіна [5] з виконання 3З $*(R_1, R_2)$ випливає виконання БЗЗ

$X \rightarrow R_1 \setminus X$. Оскільки R_2 є суперключем, то виконується ФЗ $R_2 \rightarrow R_1 \setminus X$. Звідси за спільним правилом для ФЗ і БЗЗ:

$$\frac{X \rightarrow R_1 \setminus X, R_2 \rightarrow R_1 \setminus X, Z' \subseteq Z, Y \cap Z = \emptyset}{X \rightarrow Z'}$$

впливає виконання ФЗ $X \rightarrow R_1 \setminus X$. За правилом поповнення для ФЗ маємо виконання ФЗ $X \rightarrow R_1$; звідси за правилом транзитивності з урахуванням ФЗ $R_1 \rightarrow R$ випливає, що ФЗ $X \rightarrow R$ також виконується. □

Отже, $R_1 \cap R_2$ є суперключем. □

Лема 4. Якщо відношення знаходиться у PJ/NF за означенням 1) Фейгіна, то воно знаходиться у попередній PJ/NF за означенням Мейера та 5НФ за означенням Дейта. □

Доведення випливає безпосередньо з лєми 2. □

Вінсент у роботі [16] доводить лему про те, що відношення знаходиться у 5НФ (за означенням Дейта) або попередній PJ/NF (за означенням Мейера) тоді і тільки тоді, коли кожен атрибут множини R є ключем.

Вкажемо суттєвий недолік означень Дейта і Мейера, а також означення 1) для PJ/NF. В формулюванні означення 2) для PJ/NF Фейгін дотримується принципу «включення» НФ вищих порядків в НФ нижчих порядків (див. рис. 1).

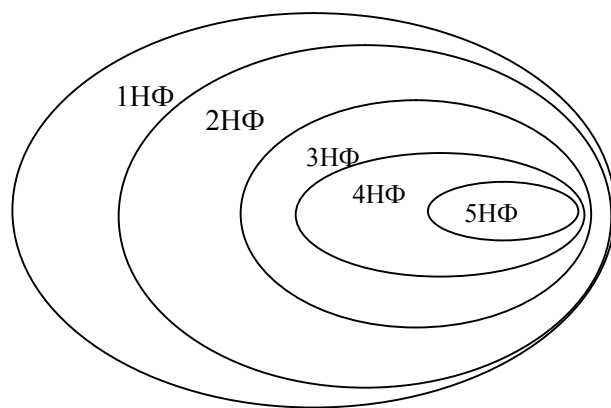


Рис. 1 Співвідношення між НФ

Нагадаймо, що в роботі [6] Фейгін сформулював означення класичних НФБК та 4НФ в семантичному вигляді та довів їх еквівалентність з відповідними класичними означеннями НФ, сформульованими в синтаксичній формі. Так, за означенням Фейгіна, «схема відношення знаходиться у НФБК (4НФ), якщо вона знаходиться у 1НФ і кожна ФЗ (БЗЗ) $\sigma \in \Sigma$ є логічним наслідком множини ключів Δ ,

$(\Delta \models \sigma)$ ». З того, що ФЗ є окремим випадком БЗЗ, яка в свою чергу є окремим випадком ЗЗ, випливають імплікації: PJ/NF (за означенням 2)) $\Rightarrow$ 4НФ $\Rightarrow$ НФБК. Звідси очевидно, що означення 2) PJ/NF еквівалентно означенню 4НФ за умови, що усі ЗЗ є БЗЗ.

Синтаксичні форми означень Дейта і Мейера як і означення 1) для PJ/NF не є узагальненням 4НФ, тобто, не еквівалентні означенню 4НФ, якщо кожна ЗЗ у множині залежностей є БЗЗ [16]. Скористаємось прикладом, наведеним у [16].

Приклад 2. Нехай $R = \{A, B, C\}$ і нехай $\Sigma = \{A \rightarrow B, A \rightarrow C\}$. Очевидно, що реляційна схема $\langle R, \Sigma \rangle$ знаходиться у 4НФ, але не знаходиться у 5НФ (за означеннями Дейта і Мейера) оскільки за правилом виведення $\frac{*(R_1, R_2, \dots, R_n), X \subseteq R}{*(R_1, R_2, \dots, R_n, X)}$ з ЗЗ $*(AC, AB)$ синтаксично слідує ЗЗ $*(AC, AB, C)$, компонент C якої не є ключем.

Враховуючи недоліки означень попередників Вінсент пропонує зменшити множину ЗЗ, які розглядаються, і запроваджує спрощену 5НФ (reduced-5NF – 5NFR). «Нехай Σ – множина ФЗ і ЗЗ, причому кожна ЗЗ $*(R_1, R_2, \dots, R_p)$ задовольняє умовам:

1. $R_1 \cup R_2 \cup \dots \cup R_p = R$, де R – схема відношення;
2. $\forall R_i, 1 \leq i \leq p$, $*(R_1, R_2, \dots, R_{i-1}, R_{i+1}, \dots, R_p)$ або не належить Σ^+ , або $R_1 \cup R_2 \cup \dots \cup R_{i-1} \cup R_{i+1} \cup \dots \cup R_p \neq R$, де Σ^+ – множина усіх залежностей, які сліднують (синтаксично) з множини Σ .

Пара $\langle R, \Sigma \rangle$ знаходиться у 5NFR за означенням, якщо ліва частина кожної її нетривіальної ФЗ є суперключем і для кожної ЗЗ $\sigma \in \Sigma$ кожен компонент σ є суперключем».

Альтернативне означення запропонував Норман, який розглянув поняття нескоротної ЗЗ. За Норманом ЗЗ $*(R_1, R_2, \dots, R_n)$ є нескоротною, якщо не існує підмножини $\{R_{i_1}, R_{i_2}, \dots, R_{i_s}\} \subset \{R_1, R_2, \dots, R_n\}$, такої, що ЗЗ $*(R_{i_1}, R_{i_2}, \dots, R_{i_s})$ належить Σ^+ . Тоді, реляційна схема $\langle R, \Sigma \rangle$ знаходиться у SKNF за означенням, якщо кожен компонент кожної нескоротної ЗЗ в R є суперключем.

Лема 5. Якщо відношення знаходиться у попередній PJ/NF за означенням Мейера, то воно знаходиться у 5NFR за означенням Вінсента та у SKNF за означенням Нормана. $\square$

Доведення впливає безпосередньо з означень. $\square$

У роботі [17] Вінсент запропонував одразу дві НФ: НФ, яка повністю визначається ключем (ключами) (Key-Complete Normal Form – KCNF) і надлишково-вільну НФ (Redundancy-free normal form – RFNF).

В означенні KCNF використовується поняття залежності з'єднання, яка повністю визначається ключами (Key-Complete Join Dependencies): «Нехай множина Σ складається з ФЗ і ЗЗ. ЗЗ $*(R_1, R_2, \dots, R_p)$ повністю визначається ключами, якщо об'єднання тих її компонентів $R_i, 1 \leq i \leq p$, які є суперключами, співпадає з R ».

Розглянемо приклад з [17]. Якщо $R = \{A, B, C, D\}$ і $\Sigma = \{A \rightarrow BCD, B \rightarrow ACD, *(AB, BC, CD), *(AB, BC, ACD)\}$, то множини $\{A\}$ і $\{B\}$ є потенційними ключами. ЗЗ $*(AB, BC, ACD)$ повністю визначається ключами, оскільки всі її компоненти є суперключами, а їх об'єднання $\{AB\} \cup \{BC\} \cup \{ACD\} = R$; тоді як ЗЗ $*(AB, BC, CD)$ не повністю визначається ключами, оскільки суперключами є компоненти $\{AB\}$ і $\{BC\}$, об'єднання яких $\{AB\} \cup \{BC\} \neq R$.

За означенням [17], пара $\langle R, \Sigma \rangle$ знаходиться у KCNF, якщо «ліва частина кожної нетривіальної ФЗ $\varphi \in \Sigma$ є суперключем, а кожна ЗЗ $\sigma \in \Sigma$ повністю визначається ключами».

Положення KCNF і 5NFR по відношенню до інших НФ встановлюють імплікації PJ/NF (за означенням 1)) $\Rightarrow$ 5NFR $\Rightarrow$ KCNF $\Rightarrow$ 4НФ [17].

В означенні RFNF використовується поняття надлишковості для входження значення змінної: «Входження значення змінної $t(A)$ кортежа t відношення r є надлишковим, якщо в результаті заміни $t(A)$ на довільне значення a' , таке, що $t(A) \neq a'$, отримане відношення r' не належить множині $SAT(\Sigma)$, де $SAT(\Sigma)$ – множина екземплярів (моделей) множини Σ , яка складається з ФЗ і ЗЗ». Відповідно визначається надлишкове відношення: «Відношення r є надлишковим, якщо існує входження $t(A)$ значення змінної в r , яке є надлишковим». За означенням [17]: «Пара $\langle R, \Sigma \rangle$ знаходиться у надлишково-вільній нормальній формі, якщо не

існує відношення $r(R) \in SAT(\Sigma)$, яке є надлишковим». Доводиться теорема про еквівалентність RFNF та 4НФ у випадку, коли множина обмежень Σ складається лише з ФЗ і БЗЗ.

Для випадку, коли об'єднання компонентів $R_1, \dots, R_p$ кожної ЗЗ $\sigma \in \Sigma$ співпадає з R , доводиться теорема про еквівалентність RFNF і KCNF.

Описаний підхід до нормалізації відношення в термінах ненадлишковості кортежів привернув увагу Дарвіна (Darwen), Дейта і Фейгіна. У 2012 р. вони розробили НФ з необхідними кортежами (Essential Tuple Normal Form – ETNF), яка визначається в термінах ФЗ і ЗЗ та займає проміжне положення між 4НФ та PJ/NF (за означенням 1)) [19]. В означенні ETNF використовуються додаткові означення частково надлишкового кортежу, логічного слідування кортежу з множини кортежів та повністю надлишкового кортежу:

– кортеж t екземпляра r схеми R називається частково надлишковим, якщо існує кортеж $t' \in r$, $t' \neq t$, що для нетривіальної ФЗ $X \rightarrow A \in \Sigma$ виконується рівність $t[X] = t'[X]$ (тобто, в кортежах t та t' співпадають значення всіх атрибутів з множини X);

– кортеж t логічно слідує з множини кортежів S (відносно схеми $\langle R, \Sigma \rangle$), якщо кожний екземпляр r схеми $\langle R, \Sigma \rangle$, який містить усі кортежі з множини кортежів S , також містить кортеж t ;

– кортеж t екземпляра r схеми $\langle R, \Sigma \rangle$ називається повністю надлишковим, якщо існує множина кортежів S в r причому $t \notin S$, така, що з S логічно слідує t (відносно $\langle R, \Sigma \rangle$).

В термінах часткової надлишковості означення НФБК формулюється так: «Схема відношення R знаходиться у НФБК за означенням, якщо не існує її екземпляра, який би містив частково надлишковий кортеж».

Поняття часткової та повної надлишковості кортежу є спеціальними випадками поняття надлишковості [17].

Згідно означення реляційна схема $\langle R, \Sigma \rangle$ знаходиться в кортеже-необхідній НФ (Essential Tuple Normal Form), якщо кожний кортеж кожного екземпляра схеми $\langle R, \Sigma \rangle$ не є частково чи повністю надлишковим.

На положення ETNF по відношенню до інших НФ вказують імплікації: PJ/NF (за означенням 1)) $\Rightarrow$ SKNF $\Rightarrow$ RFNF $\Rightarrow$ ETNF $\Rightarrow$ 4НФ, причому зворотні імплікації не виконуються. Обговорюються прості умови, за яких схема відношення $\langle R, \Sigma \rangle$ буде знаходитись у ETNF, а саме: 1) схема відношення $\langle R, \Sigma \rangle$ повинна бути зведена до НФБК; 2) деякий ключ повинен складатись з одного атрибута.

Окремим видом ЗЗ є вкладені залежності (ВЗ), для яких пропонувались інші НФ. Ці НФ в даній роботі не розглядаються. Зауважимо лише, що дослідженню вкладених залежностей, їх властивостей та взаємодії з ФЗ присвячено багато робіт. Зокрема, аксіоматика для ВЗ викладена в [20]; відомими є НФ Ніколаса (Nicolas) для вкладених ЗЗ [21], Inclusion Normal Form та алгоритми зведення до неї Лінга (Ling) і Гоха (Goh) [22], Inclusion Dependency Normal Form Левена (Levene) [23].

Наостанок розглянемо доменно-ключову НФ (Domain-Key Normal Form – DK/NF або ДКНФ), запропоновану Фейгіним у роботі [24]. Концепція DK/NF базується на поняттях залежності ключа та залежності домена: «Відношення знаходиться у DK/NF за означенням, якщо кожне обмеження з його схеми є логічним наслідком з об'єднання множин залежності ключа та залежності домена». Доводиться, що реляційна схема знаходиться у DK/NF тоді і тільки тоді, коли немає аномалій вставки та знищення (означення яких формулюються у роботі); проводиться аналогія між класичними та альтернативними означеннями НФБК, 4НФ та PJ/NF (за означенням 2)), розглянутими у роботі [6], пропонуються їх модифікації з урахуванням комбінаторного ефекту розмірів обмежуючого домену та показується, що DK/NF включає в себе ці модифікації; частковим є випадок, коли потужність усіх доменів є нескінченною, тоді DK/NF включає в себе НФБК, 4НФ та PJ/NF (за означенням 2)) у класичному виді. Але під обмеженнями в означенні ДКНФ розуміються не тільки ФЗ, БЗЗ та ЗЗ, означення яких використовуються у попередніх НФ, а й усі, які можна записати у вигляді висловлювання логіки предикатів 1-го порядку. У роботі [25] пропонується форма запису для усіх відомих на той час залежностей:

$$(\forall x_1 \dots x_m)((A_1 \wedge \dots \wedge A_n) \Rightarrow \exists y_1 \dots y_r (B_1 \dots B_s)),$$

де A_i – атомарна реляційна формула для представлення входження індивідних змінних $z_1 \dots z_d$ у d -арне відношення P вигляду $P_{z_1 \dots z_d}$; B_i – або атомарна реляційна формула, або рівність $x=y$, де x і y – індивідні змінні. Зокрема, вбудовані БЗЗ (ББЗЗ) можна задати у вигляді

$$(\forall a b_1 b_2 c_1 c_2 d_1 d_2)((P a b_1 c_1 d_1 \wedge P a b_2 c_2 d_2) \Rightarrow \Rightarrow \exists d_3 P a b_1 c_2 d_3).$$

Оскільки для ББЗЗ не існує скінченної дедуктивної системи [26, 27] і задача перевірки імплікації для таких видів обмежень, як ББЗЗ, є нерозв'язною [25, 28], то неможливо побудувати алгоритм синтезу реляційної схеми у DK/NF.

Висновки. Проаналізовані означення деяких класичних НФ, зокрема PJ/NF, та основних неklasичних НФ, а саме: попередньої PJ/NF Мейєра, 5НФ Дейта, SKNF Нормана, 5NFR, RFNF та KCNF Вінсента, ETNF (автори: Дарвін, Дейт і Фейгін), EKNF Заніоло, DK/NF Фейгіна. Між означеннями цих НФ встановлені логічні зв'язки, які відображені на діаграмі (див. рис. 2). Окрім розглянутих у даній роботі, на діаграмі вказані логічні зв'язки між класичними НФ, які відображаються імплікаціями: НФБК $\Rightarrow$ 3НФ $\Rightarrow$ 2НФ $\Rightarrow$ 1НФ [18].

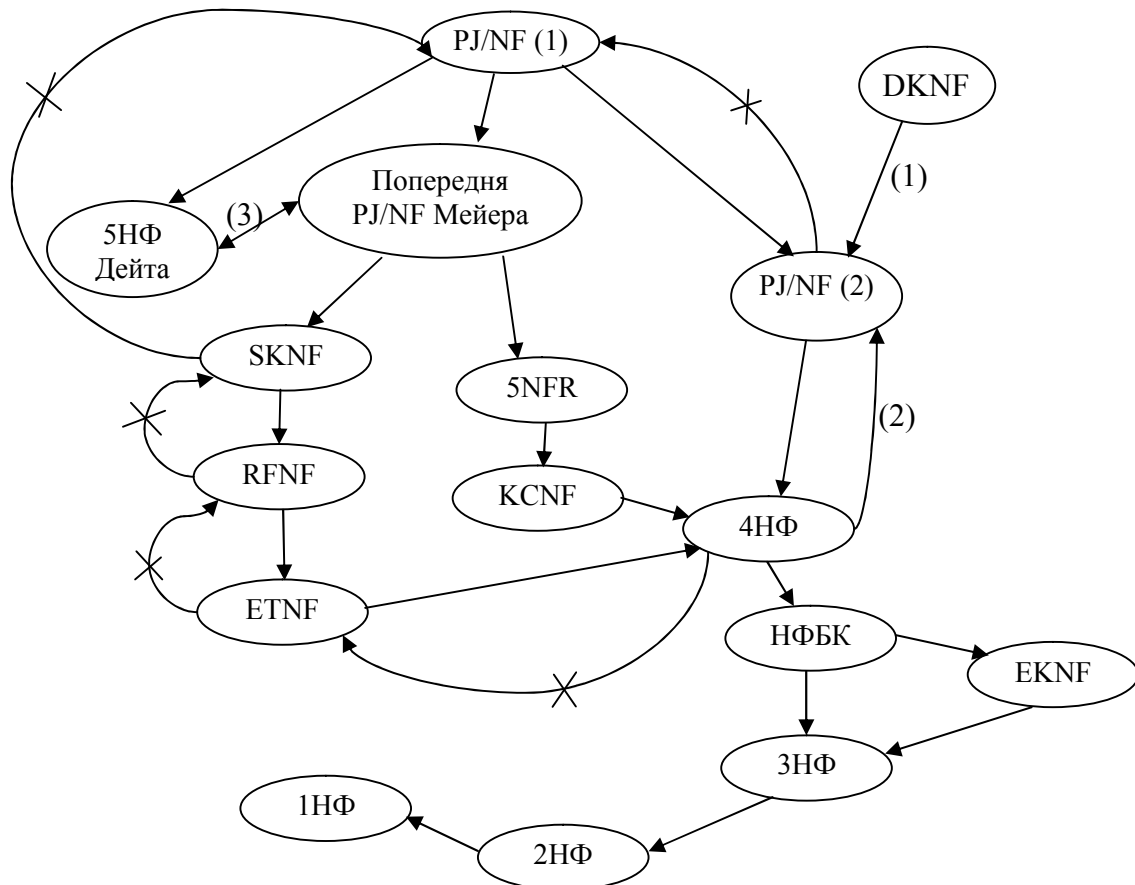


Рисунок 2. Логічні зв'язки між означеннями НФ

Умовні позначення:

- (1) – за умови нескінченності універсального домена [24].
- (2) – за умови, що усі ЗЗ є БЗЗ.
- (3) – якщо вважати, що ЗЗ в означенні Дейта синтаксично слідують з множини Σ .

Список використаних джерел

1. Codd E. F. A Relational Model of Data for Large Shared Data Banks / E. F. Codd // Communications of the ACM. – 1970. – Vol. 13, № 6. – P. 377-387 (русский перевод: Кодд, Е. Ф. Реляционная модель данных для больших совместно используемых банков данных / Е. Ф. Кодд // СУБД. – 1995. – № 1. – С. 145-160).
2. Дейт К. Дж. Введение в системы баз данных, 8-е издание: Пер. с англ. / К. Дж. Дейт. – М.: Вильямс, 2005. – 1328 с.
3. Мейер Д. Теория реляционных баз данных / Д. Мейер. – Москва: Мир, 1987. – 608 с.
4. Ульман Дж. Основы систем баз данных / Дж. Ульман. – М.: Финансы и статистика, 1983. – 334 с.
5. Fagin R. Multivalued Dependencies and a New Normal Form for Relational Databases / R. Fagin // ACM Transactions on Database Systems. – 1977. – Vol. 2, № 1. – P. 262-278.
6. Fagin R. Normal Forms and Relational Database Operators / R. Fagin // Proceedings of the ACM SIGMOD International Conference on Management of Data (Boston, Mass., May 30-June 1), ACM, New York, 1979. – P. 153-160.
7. Редько В.Н. Реляційні бази даних: табличні алгебри та SQL-подібні мови / В. Н. Редько, Ю. Й. Брона, Д. Б. Буй, С. А. Поляков. – Київ: Видавничий дім “Академперіодика”, 2001. – 198 с.
8. Beeri C. A sophisticate's introduction to database normalization theory / C. Beeri, P. Bernstein, N. Goodman // Proceedings of 4th International Conference on Very Large Data Bases, West Berlin, 1978. – P. 113-124.
9. Филиппович, А. Взаимные функциональные зависимости / А. Филиппович // Системный администратор. – 2002. – № 1. – С. 84-89.
10. Bernstein P. A. Synthesizing Third Normal Form relations from functional dependencies / P. A. Bernstein // ACM Transactions on Database Systems. – 1976. – Vol. 1, № 4. – P. 277-298.
11. Дрибас В. П. Реляционные модели баз данных / В. П. Дрибас. – Минск: Изд-во БГУ им. В. И. Ленина, 1982. – 192 с.

References

1. CODD, E. F. (1970) A Relational Model of Data for Large Shared Data Banks. *Communications of the ACM*. 13 (6). p. 377-387.
2. DATE, C. J. (2005) *An Introduction to Database Systems*. 8th Ed. Addison-Wesley.
3. MAIER, D. (1983) *The theory of relational databases*. Computer Science Press.
4. ULLMAN, J. D. (1980) *Principles of Database Systems*. Rockville: Computer Science Press.
5. FAGIN, R. (1977) Multivalued Dependencies and a New Normal Form for Relational Databases. *ACM Transactions on Database Systems*. 2 (1). p. 262-278.
6. FAGIN, R. (1979) Normal Forms and Relational Database Operators. In *International Conference on Management of Data*, Wednesday 30th May to Thursday 1 June 1979. Boston: ACM, New York. – pp. 153-160.
7. REDKO, V. N. et al. (2001) *Reliatsiini bazy danykh: tablychni alhebry ta SQL-podibni movy*. Kyiv: Akademperiodyka.
8. BEERI, C., BERNSTEIN, P. and GOODMAN, N. (1978) A sophisticate's introduction to database normalization theory. In *4th International Conference on Very Large Data Bases*, West Berlin Germany. ACM, IEEE. pp. 113-124.
9. FILIPPOVICH, A. (2002) Vzaimnye funktsionalnye zavisimosti. *Sistemnyi administrator*. (1). p. 84-89.
10. BERNSTEIN, P. A. (1976) Synthesizing Third Normal Form relations from functional dependencies. *ACM Transactions on Database Systems*. 1 (4). p. 277-298.
11. DRIBAS, V. P. (1982) *Relyacionnye modeli bas danyh*. Minsk: Izdatelskiy centr Belorusskiy universytet.
12. LING, T. W., TOMPA, F. W. and KAMEDA, T. (1981) An Improved Third Normal Form for Relational Databases. *ACM Transactions on Database Systems*. 6 (2). p. 329-346.
13. ZANIOLO, C. (1982) A New Normal Form for the Design of Relational Database Schemata. *ACM Transactions on Database Systems*. 7 (3). p. 489-499.

12. Ling T. W. An Improved Third Normal Form for Relational Databases / T. W. Ling, F. W. Tompa, T. Kameda // ACM Transactions on Database Systems. – 1981. – Vol. 6, № 2. – P. 329-346.
13. Zaniolo C. A New Normal Form for the Design of Relational Database Schemata / C. Zaniolo // ACM Transactions on Database Systems. – 1982. – Vol. 7, № 3. – P. 489-499.
14. Петров С. В. Об аксиоматизации зависимостей по соединению / С. В. Петров // Применение методов математической логики: Тезисы докл. IV Всес. конф. «Представление знаний и синтез программ». – Таллин: АН ЭССР, 1986. – С. 151-152.
15. Normann R. Minimal lossless decompositions and some normal forms between 4NF and PJ/NF / R. Normann // Information Systems. – 1998. – Vol. 23, № 7. – P. 509-516.
16. Vincent M. W. A corrected 5NF definition for relational database design / M. W. Vincent // Theoretical Computer Science (TCS). – 1997. – Vol. 185, № 2. – P. 379-391.
17. Vincent M. W. Redundancy Elimination and a New Normal Form for Relational Database Design / M. W. Vincent // In Semantics in Databases (Libkin, L., Thalheim, B., eds.), vol. 1358 of LNCS. – 1998. – P. 247-264.
18. Буй Д. Б. Теорія нормалізації табличних баз даних: 2-3НФ, НФБК / Д. Б. Буй, А. В. Пузікова // Матеріали міжнародної конференції «Теоретичні та прикладні аспекти побудови програмних систем» – ТААПСД'2013 (Ялта, 25 травня – 2 червня 2013 р.). – С. 34-40.
19. Darwen H. A Normal Form for Preventing Redundant Tuples in Relational Databases / H. Darwen, C. Date, R. Fagin // Proceedings of the 15th International Conference on Database Theory – ICDT'2012, March 26–30, 2012, Berlin, Germany. – P. 114-126.
20. Casanova M. A. Inclusion dependencies and their interaction with functional dependencies / M. A. Casanova, R. Fagin, C. H. Papadimitriou // Journal of Computer and System Sciences. – 1984. – № 28. – P. 29-59.
21. Nicolas J. M. Mutual dependencies and same results on indecomposable relations / J. M. Nicolas // Proceedings of the fourth international conference on Very Large Data Bases, 1978. – Vol. 4. – P. 360-367.
14. PETROV, S. V. (1986) Ob aksiomatizacii zavisimostej po soedineniju. Primenenie metodov matematicheskoy logiki. Tezisy dokladov IV Vsesojuznoj konferencii «Predstavlenie znanij i sintez programm». Tallin: AN JeSSR. – pp. 151-152.
15. NORMANN, R. (1998) Minimal lossless decompositions and some normal forms between 4NF and PJ/NF. *Information Systems*. 23 (7). p. 509-516.
16. VINCENT, M. W. (1997) A corrected 5NF definition for relational database design. *Theoretical Computer Science*. 185 (2). p. 379-391.
17. VINCENT, M. W. (1998) Redundancy Elimination and a New Normal Form for Relational Database Design. In *Semantics in Databases*. 1358 of LNCS. p. 247-264.
18. BUI, D. B. and PUZIKOVA, A. V. (2013) Normalization Theory in Table Databases: 2-3NF, BCNF. In *Theoretical and Applied Aspect of Program Systems Development*. Ialta, Saturday 25th May to Sunday 2nd June 2013. Kirovohrad: Avanhard. pp. 34-40.
19. DARWEN, H., DATE, C. and FAGIN, R. (2012) A Normal Form for Preventing Redundant Tuples in Relational Databases. In *Proceedings of the 15th International Conference on Database Theory*. Berlin, Monday 26th to Friday 30th March 2012. pp. 114-126.
20. CASANOVA, M. A., FAGIN, R. and PAPADIMITRIOU, C. H. (1984) Inclusion dependencies and their interaction with functional dependencies. *Journal of Computer and System Sciences*. (28). p. 29-59.
21. NICOLAS, J. M. (1978) Mutual dependencies and same results on indecomposable relations. In *Proceedings of the fourth international conference on Very Large Data Bases*. 4. p. 360-367.
22. LING, T. W. and GOH, C. H. (1992) Logical Database Design with Inclusion Dependencies. In *Proceedings of the Eighth International Conference on Data Engineering*. Tempe, Arizona. pp. 642-649.
23. LEVENE, M. and VINCENT, M. W. (2000) Justification for Inclusion Dependency Normal Form. *IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering*. 12 (2). p. 281-291.

22. Ling T. W. Logical Database Design with Inclusion Dependencies / T. W. Ling, C. H. Goh // In Proceedings of the Eighth International Conference on Data Engineering, Tempe, Arizona, 1992. – P. 642-649.
23. Levene M. Justification for Inclusion Dependency Normal Form / M. Levene, M. W. Vincent // IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering, 2000. – Vol. 12, № 2. – P. 281-291.
24. Fagin R. A Normal Form for Relational Databases That Is Based on Domains and Keys / R. Fagin // Communications of the ACM. – 1981. – Vol. 6. – P. 387-415.
25. Fagin R. The theory of data dependencies – a survey / R. Fagin, M. Y. Vardi // In Mathematics of Information Processing, Proceedings of the. Symposia in Applied Mathematics – American Mathematical Society, 1986. – Vol. 34. – P. 19-71.
26. Цаленко М. III. Моделирование семантики в базах данных / М. III. Цаленко. – М.: Наука, 1989. – 287 с.
27. Sagiv J. Subset Dependencies and a Completeness Result for a Subset of Embedded Multivalued Dependencies / J. Sagiv, S. F. Walecka // Journal of the ACM. – 1982. – Vol. 29, № 1. – P. 103-117.
28. Graham M. H. Notions of dependency satisfaction / M. H. Graham, A. O. Mendelzon, M. Y. Vardi // Journal of the ACM. – 1986. – Vol. 33, № 1. – P. 105-129.
24. FAGIN, R. (1981) A Normal Form for Relational Databases That Is Based on Domains and Keys. *Communications of the ACM*. 6. p. 387-415.
25. FAGIN, R. and VARDI, M. Y. (1986) The theory of data dependencies – a survey. In *Mathematics of Information Processing, Proc. Symposia in Applied Mathematics*. 34. p. 19-71.
26. TSALENKO, M. Sh. (1989) *Modeling semantics in databases*. Moskva: Nauka.
27. SAGIV, J. and WALECKA, S. F. (1982) Subset Dependencies and a Completeness Result for a Subset of Embedded Multivalued Dependencies. *Journal of the ACM*. 29 (1). p. 103-117.
28. GRAHAM, M. H., MENDELZON, A. O. and VARDI, M. Y. (1986) Notions of dependency satisfaction. *Journal of the ACM*. 33 (1). p. 105-129.

Надійшла до редколегії 29.01.15

УДК 517.9

Веклич Р. А., аспірант

R. A. Veklych, PhD student

**Критерій оптимальності для задач
керування лінійними системами з
дробовими похідними**

**Optimality criterion for control problems for
linear systems with fractional derivatives**

Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, пр-т.
Глушкова 4д,
e-mail: vekross@gmail.com

Taras Shevchenko National University of Kyiv,
03680, Kyiv, Glushkova st., 4d,
e-mail: vekross@gmail.com

У статті розглянуті лінійні системи диференціальних рівнянь з дробовими похідними Рімана-Ліувілля та Капуто і доведені необхідні та достатні умови оптимальності розв'язку для задач керування такими системами.

Ключові слова: задача керування, дробова похідна, похідна Рімана-Ліувілля, похідна Капуто.

As fractional calculus is being effectively used in the mathematical modelling of the physical processes, we need tools for solving various control problems with fractional derivatives that often arise in practice. As one possible solution, we can try to adapt existing results in control theory to our needs. In particular, an optimization problem for systems of linear differential equations can be transformed into a set of initial value problems. This article presents a similar approach for systems with Riemann–Liouville and Caputo fractional derivatives. Considered are two separate problems for each derivative type. We introduce direct and dual problems, which are defined by the systems with fractional derivatives and respective initial conditions. Both of these problems have unique solutions, so necessary and sufficient conditions for the original optimal control problem can be established. At first, a set of admissible control function is assumed to be a closed convex domain, and then results for an unbounded domain are given.

Key Words: control problem, fractional derivative, Riemann-Liouville derivative, Caputo derivative.

Статтю представив д.т.н., проф. Кудін В.І.

Вступ

Математичні моделі з дробовою похідною краще описують перебіг деяких фізичних процесів (наприклад, дифузії та передачі тепла у неоднорідних середовищах, деформації в'язко-пружних матеріалів, як показано в [1]), ніж це дозволяє зробити використання звичайної похідної. Розглянемо задачі керування для таких моделей.

Для випадку систем з похідною цілого порядку в [2] представлені необхідні та достатні умови оптимальності. У роботі застосовано аналогічний підхід до лінійних систем з дробовими похідними Рімана-Ліувілля і Капуто та отримані відповідні критерії.

1. Основні поняття

Нехай функція $g(x)$ визначена на відрізку $[a, b]$, $\alpha \in (0, 1)$. Тоді вирази

$${}_a I_x^\alpha g(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{g(t) dt}{(x-t)^{1-\alpha}}; \quad (1.1)$$

$${}_x I_b^\alpha g(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b \frac{g(t) dt}{(t-x)^{1-\alpha}}. \quad (1.2)$$

позначають ліво- та правосторонні дробові інтеграли Рімана-Ліувілля порядку α .

Відповідні похідні Рімана-Ліувілля мають вигляд

$${}_a D_x^\alpha g(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_a^x \frac{g(t) dt}{(x-t)^\alpha}; \quad (1.3)$$

$${}_x D_b^\alpha g(x) = -\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_x^b \frac{g(t) dt}{(t-x)^\alpha}. \quad (1.4)$$

Ліво- та правосторонні дробові похідні Капуто порядку α , $0 < \alpha < 1$, визначаються співвідношеннями:

$${}_a^C D_x^\alpha g(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{-\alpha} \frac{d}{dt} g(t) dt; \quad (1.5)$$

$${}_x^C D_b^\alpha g(x) = -\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_x^b (t-x)^{-\alpha} \frac{d}{dt} g(t) dt. \quad (1.6)$$

Позначимо через ${}_a I_p^\alpha(L_p)$ клас функцій $\psi(x)$, що можуть бути представлені лівостороннім дробовим інтегралом Рімана-Ліувілля порядку α від сумовної функції:

$${}_a I_p^\alpha(L_p) = \{\psi \mid \exists \varphi \in L_p([a, b]): \psi = {}_a I_x^\alpha \varphi, 1 \leq p < \infty\}.$$

Аналогічним чином визначимо клас $I_b^\alpha(L_q)$:

$$I_b^\alpha(L_q) = \{\psi \mid \exists \varphi \in L_q([a, b]): \psi = {}_x I_b^\alpha \varphi, 1 \leq q < \infty\}.$$

Тоді, як показано в [3], має місце формула інтегрування частинами для похідної Рімана-Ліувілля:

$$\int_a^b f(x) {}_a^C D_x^\alpha g(x) dx = \int_a^b g(x) {}_x^C D_b^\alpha f(x) dx, \quad (1.7)$$

де $f(x) \in I_b^\alpha(L_p)$, $g(x) \in {}_a I_q^\alpha(L_q)$, $p^{-1} + q^{-1} \leq 1 + \alpha$.

Із (1.7) маємо формули інтегрування частинами для похідної Капуто:

$$\int_a^b f(x) {}_a^C D_x^\alpha g(x) dx = \int_a^b g(x) {}_x^C D_b^\alpha f(x) dx + [g(x) {}_b^{1-\alpha} f(x)]_a^b; \quad (1.8)$$

$$\int_a^b f(x) {}_x^C D_b^\alpha g(x) dx = \int_a^b g(x) {}_a^C D_x^\alpha f(x) dx - [g(x) {}_x^{1-\alpha} f(x)]_a^b. \quad (1.9)$$

2. Постановка задачі

Розглянемо спочатку задачу оптимального керування, що містить похідну Рімана-Ліувілля.

Нехай задано простір керувань $U = \mathbb{R}^m$ та множину допустимих керувань U_δ , яка є опуклою та замкнутою в U .

Для кожного керування $v \in U_\delta$ стан $y(v) = y(t, v)$ визначається як розв'язок системи:

$${}_0 D_t^\alpha y(v) + Ay(v) = f + Bv, t \in (0, T), T < +\infty; \quad (2.1)$$

$${}_0 I_t^{1-\alpha} y(v)|_{t=0} = a; \quad (2.2)$$

де $f = f(t) \in (C([0, T]))^n$, $A = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^{n,n}$, $a_{ij} \in \mathbb{R}$ та $B = \{b_{ij}\}_{i,j=1}^{n,m}$, $b_{ij} \in \mathbb{R}$ є матрицями розмірності $n \times n$ та $n \times m$ відповідно, $a \in \mathbb{R}^n$.

Позначимо $V = (L_2([0, T]))^n$, і для системи (2.1)-(2.2) задамо спостереження:

$$z(v) = Cy(v); \quad (2.3)$$

де $C: V \rightarrow H$ — лінійний оператор, H — деякий гільбертовий простір.

Функцію вартості визначимо як

$$J(v) = \frac{1}{2} \|Cy(v) - z_d\|_H^2 + \frac{1}{2} \|v\|_U^2, \quad (2.4)$$

де $z_d \in H$. Таким чином, маємо задачу оптимального керування, яка полягає в знаходженні $\inf_{v \in U_\delta} J(v)$.

Зауважимо, що задача (2.1)-(2.4) для звичайної похідної (при $\alpha = 1$) була розглянута в [2].

Аналогічно до попереднього випадку, можемо записати задачу оптимізації для похідної Капуто:

$${}_0^C D_t^\alpha y(v) + Ay(v) = f + Bv, t \in (0, T), T < +\infty; \quad (2.5)$$

$$y(v)|_{t=0} = a; \quad (2.6)$$

$$z(v) = Cy(v), \quad (2.7)$$

$$J(v) = \frac{1}{2} \|Cy(v) - z_d\|_H^2 + \frac{1}{2} \|v\|_U^2. \quad (2.8)$$

3. Результати

Теорема 1. Для задачі (2.1)-(2.4) керування $u \in U_\delta$ є оптимальним тоді і тільки тоді, коли виконуються наступні співвідношення:

$${}_0 D_t^\alpha y(u) + Ay(u) = f + Bu, t \in (0, T); \quad (3.1)$$

$${}_0 I_t^{1-\alpha} y(u)|_{t=0} = a; \quad (3.2)$$

$${}_t^C D_T^\alpha p(u) + A^* p(u) = C^* (Cy(u) - z_d), t \in (0, T); \quad (3.3)$$

$$p(u)|_{t=T} = 0; \quad (3.4)$$

$$(B^* p(u) + u, v - u)_U \geq 0 \quad \forall v \in U_\delta; \quad (3.5)$$

де $y(u) \in {}_0 I^\alpha((L_q([0, T]))^n)$, $p(u) \in I_T^\alpha((L_p([0, T]))^n)$, $p^{-1} + q^{-1} \leq 1 + \alpha$.

Доведення. Обчислимо похідну Фреше $J'(v)$.

Для цього запишемо

$$J(v + \Delta v) - J(v) =$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2} \|Cy(v) - z_d + Cy(\Delta v)\|_H^2 + \frac{1}{2} \|v + \Delta v\|_U^2 - \\
 &- \frac{1}{2} \|Cy(v) - z_d\|_H^2 - \frac{1}{2} \|v\|_U^2 = \\
 &= (Cy(v) - z_d, Cy(\Delta v))_H + (v, \Delta v)_U + \\
 &+ \frac{1}{2} \|\Delta v\|_U^2 + \frac{1}{2} \|Cy(\Delta v)\|_H^2 = \\
 &= (C^*(Cy(v) - z_d), y(\Delta v))_V + (v, \Delta v)_U + \\
 &+ \frac{1}{2} \|\Delta v\|_U^2 + \frac{1}{2} \|Cy(\Delta v)\|_H^2.
 \end{aligned} \quad (3.6)$$

Визначимо спряжений стан $p(v) = p(t, v)$ як розв'язок задачі

$$\begin{aligned}
 {}^C_t D_T^\alpha p(v) + A^* p(v) &= C^*(Cy(v) - z_d), t \in (0, T); \\
 p(v)|_{t=T} &= 0.
 \end{aligned} \quad (3.7) \quad (3.8)$$

Із (2.1) та (2.2) отримаємо, що $y(\Delta v)$ задовольняє рівнянню

$$\begin{aligned}
 {}_0 D_t^\alpha y(\Delta v) + Ay(\Delta v) &= B\Delta v, t \in (0, T); \\
 {}_0 I_t^{1-\alpha} y(\Delta v)|_{t=0} &= 0;
 \end{aligned} \quad (3.9) \quad (3.10)$$

Позначимо через $\langle \cdot, \cdot \rangle$ скалярний добуток в $\mathbb{R}^n$. Тоді, оскільки для $y(v)$ та $p(v)$ виконується (1.9), то, використавши початкові умови (3.8) і (3.10), маємо

$$\begin{aligned}
 \int_0^T \langle {}^C_t D_T^\alpha p(v), y(\Delta v) \rangle dt &= \int_0^T \langle p(v), {}_0 D_t^\alpha y(\Delta v) \rangle dt - \\
 - \langle p(v), {}_0 I_t^{1-\alpha} y(\Delta v) \rangle|_{t=0}^{t=T} &= \int_0^T \langle p(v), {}_0 D_t^\alpha y(\Delta v) \rangle dt,
 \end{aligned}$$

Домноживши (3.7) скалярно на $y(\Delta v)$, для доданку $(C^*(Cy(v) - z_d), y(\Delta v))_V$ із (3.6) запишемо:

$$\begin{aligned}
 \int_0^T \langle C^*(Cy(v) - z_d), y(\Delta v) \rangle dt &= \\
 = \int_0^T \langle {}^C_t D_T^\alpha p(v) + A^* p(v), y(\Delta v) \rangle dt &= \\
 = \int_0^T \langle p(v), {}_0 D_t^\alpha y(\Delta v) + Ay(\Delta v) \rangle dt.
 \end{aligned} \quad (3.11)$$

Тоді з (3.9) отримаємо:

$$\begin{aligned}
 \int_0^T \langle C^*(Cy(v) - z_d), y(\Delta v) \rangle dt &= \\
 = \int_0^T \langle p(v), B\Delta v \rangle dt &= \int_0^T \langle B^* p(v), \Delta v \rangle dt.
 \end{aligned} \quad (3.12)$$

Таким чином, взявши із (3.6) доданки, лінійні відносно Δv , маємо, що: $J'(v) = B^* p(v) + v$.

Як показано в [2], для строго опуклого функціонала $J(v)$ $u \in U_\delta$ буде мінімізуючим елементом (тобто $J(u) = \inf_{v \in U_\delta} J(v)$) тоді і тільки

тоді, коли $(J'(v), v - u)_U \geq 0 \quad \forall v \in U_\delta$. Теорему доведено.

Наслідок 1. Якщо $U_\delta = U$, то нерівність (3.5) зводиться до вигляду

$$B^* p(u) + u = 0. \quad (3.13)$$

Підставивши u з цього рівняння в (3.1), маємо, що оптимальне керування $u = -B^* p(u)$ є розв'язком задачі

$${}_0 D_t^\alpha y(u) + Ay(u) + BB^* p(u) = f; \quad (3.14)$$

$${}_0 I_t^{1-\alpha} y(u)|_{t=0} = a; \quad (3.15)$$

$${}^C_t D_T^\alpha p(u) + A^* p(u) - C^* Cy(u) = -C^* z_d; \quad (3.16)$$

$$p(u)|_{t=T} = 0. \quad (3.17)$$

Теорема 2. Для задачі (2.5)-(2.8) керування $u \in U_\delta$ є оптимальним тоді і тільки тоді, коли виконуються наступні співвідношення:

$${}_0 D_t^\alpha y(u) + Ay(u) = f + Bu, t \in (0, T); \quad (3.18)$$

$$y(u)|_{t=0} = a; \quad (3.19)$$

$${}_t D_T^\alpha p(u) + A^* p(u) = C^*(Cy(u) - z_d), t \in (0, T); \quad (3.20)$$

$${}_t I_T^{1-\alpha} p(u)|_{t=T} = 0; \quad (3.21)$$

$$(B^* p(u) + u, v - u)_U \geq 0 \quad \forall v \in U_\delta; \quad (3.22)$$

де $y(u) \in {}_0 I^\alpha([L_q([0, T]))^n$, $p(u) \in I_T^\alpha([L_p([0, T]))^n$, $p^{-1} + q^{-1} \leq 1 + \alpha$.

Доведення. Спряжений стан $p(v) = p(t, v)$ шукатимемо із системи

$${}_t D_T^\alpha p(v) + A^* p(v) = C^*(Cy(v) - z_d), t \in (0, T); \quad (3.23)$$

$${}_t I_T^{1-\alpha} p(v)|_{t=T} = 0. \quad (3.24)$$

Із (2.5) та (2.6) для $y(\Delta v)$ маємо:

$${}_0^C D_t^\alpha y(\Delta v) + Ay(\Delta v) = B\Delta v, t \in (0, T); \quad (3.25)$$

$$y(\Delta v)|_{t=0} = 0. \quad (3.26)$$

Інтегруючи частинами за (1.8) та використовуючи (3.25) і (3.26), запишемо:

$$\begin{aligned} \int_0^T \langle {}_t D_T^\alpha p(v), y(\Delta v) \rangle dt &= \int_0^T \langle p(v), {}_0^C D_t^\alpha y(\Delta v) \rangle dt - \\ &- \langle {}_t I_T^{1-\alpha} p(v), y(\Delta v) \rangle \Big|_{t=0}^{t=T} = \int_0^T \langle p(v), {}_0^C D_t^\alpha y(\Delta v) \rangle dt. \end{aligned}$$

Тоді, домноживши спряжене рівняння (3.23) на $y(\Delta v)$ та використавши (3.25), отримаємо:

$$\begin{aligned} \int_0^T \langle C^*(Cy(v) - z_d), y(\Delta v) \rangle dt &= \\ &= \int_0^T \langle {}_t D_T^\alpha p(v) + A^* p(v), y(\Delta v) \rangle dt = \\ &= \int_0^T \langle p(v), {}_0^C D_t^\alpha y(\Delta v) + Ay(\Delta v) \rangle dt = \\ &= \int_0^T \langle p(v), B\Delta v \rangle dt = \int_0^T \langle B^* p(v), \Delta v \rangle dt. \end{aligned}$$

Оскільки функція вартості (2.8) збігається із функцією (2.4) для задачі з похідною Рімана-

Ліувілля, то із (3.6) маємо, що $J'(v) = B^* p(v) + v$, і теорема доведена.

Наслідок 2. Якщо $U_\delta = U$, то оптимальне керування $u = -B^* p(u)$ є розв'язком задачі

$${}_0^C D_t^\alpha y(u) + Ay(u) + BB^* p(u) = f; \quad (3.28)$$

$$y(u)|_{t=0} = a; \quad (3.29)$$

$${}_t D_T^\alpha p(u) + A^* p(u) - C^* Cy(u) = -C^* z_d; \quad (3.30)$$

$${}_t I_T^{1-\alpha} p(u)|_{t=T} = 0. \quad (3.31)$$

Зауваження. Явне представлення розв'язку систем вигляду (3.1)-(3.4) та (3.18)-(3.21) подане в [4] та [5].

3. Висновки

Отримано критерії оптимальності для задач керування лінійними системами з дробовими похідними Рімана-Ліувілля і Капуто у випадку замкненої опуклої області допустимих керувань та наведене узагальнення для випадку, коли обмеження на керування відсутні.

В подальшому планується розглянути випадок для необмеженого часового інтервалу та задачі керування для систем з частинними похідними дробового порядку.

Список використаних джерел

1. Учайкин В.В. Метод дробных производных / В.В. Учайкин. – Ульяновск: Артишок, 2008. – 512 с.
2. Лионс Ж.-Л. Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными / Ж.-Л. Лионс. – Москва: Мир, 1972. – 412 с.
3. Kilbas A.A. Theory and applications of fractional differential equations / A.A. Kilbas, H.M. Srivastava, J.J. Trujillo. – Amsterdam: Elsevier, 2006. – 523 p.
4. Chikrii A.A. Presentation of solutions of linear systems with fractional derivatives in the sense of Riemann–Liouville, Caputo and Miller–Ross / A.A. Chikrii, I.I. Matichin // Journal of Automation and Information Sciences. – 2008. – Vol. 40, № 6. – P. 1–11.
5. Bonilla B. On systems of linear fractional differential equations with constant coefficients / B. Bonilla, M. Rivero, J.J. Trujillo // Applied Mathematics and Computation. – 2007. – Vol. 187, № 1. – P. 68–78.

References

1. UCHAIKIN, V.V. (2008) *Metod drobnnykh proizvodnykh*. Ulyanovsk: Artishok.
2. LIONS, J.-L. (1968) *Contrôle optimal de systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles*. Paris: Dunod, Gauthier-Villars.
3. KILBAS, A.A., SRIVASTAVA, H.M. AND TRUJILLO, J.J. (2006) *Theory and applications of fractional differential equations*. Amsterdam: Elsevier.
4. CHIKRII, A.A. AND MATICHIN, I.I. (2008) Presentation of solutions of linear systems with fractional derivatives in the sense of Riemann–Liouville, Caputo and Miller–Ross, *Journal of Automation and Information Sciences*. 40(6). p.1–11.
5. BONILLA, B., RIVERO, M. AND TRUJILLO, J.J. (2007) On systems of linear fractional differential equations with constant coefficients. *Applied Mathematics and Computation*. 187 (1). p.68–78.

Надійшла до редколегії 10.02.15

УДК 517.54:519.63

А. П. Власюк¹, д.т.н., професор,
Т. А. Дроздовський², аспірант.

**Побудова числових конформних відображень
багатозв'язних областей складної
геометричної форми**

¹ Міжнародний економіко-гуманітарний
університет імені акад. Степана Дем'янчука,
33027, м. Рівне, вул. акад. С. Дем'янчука, 4,
e-mail: A.P.Vlasyuk.rv@gmail.com.

² Національний університет водного
господарства та природокористування, 33000,
м. Рівне, вул. Соборна, 11,
e-mail: taras.drozdovskiy@gmail.com.

A. P. Vlasyuk¹, Doctor of Engineering, Professor,
T. A. Drozdovskiy², PhD Student.

**Numerical conformal mapping generating of
multiconnected domains with complicated
geometrical boundary**

¹ International university of Economics and
Humanities named after Academician Stepan
Demianchuk, 33027, Rivne acad. Stepan
Demianchuk str., 4,
e-mail: A.P.Vlasyuk.rv@gmail.com.

² National University of Water Management and
Nature Resources Use, 33000, Rivne, Soborna str.,
11, e-mail: taras.drozdovskiy@gmail.com

Сформульовано математичну постановку задачі конформного відображення багатозв'язної області складної геометричної форми з чотирма відміченими точками на її зовнішньому контурі на параметричний прямокутник з розрізом. Розроблено та програмно реалізовано обчислювальний алгоритм побудови її числового конформного відображення. Розроблено генератор побудови конформних різницьових сіток в таких областях.

Ключові слова: числове конформне відображення, конформна різницьова сітка, обчислювальний алгоритм, числові експерименти.

Conformal mapping of multiconnected domain with four fixed points on its outer boundary on the parametric rectangle with section problem mathematical statement is formulated. Conformal mapping constructing computational algorithm of mentioned domain was elaborated and implemented in software. Conformal differences grid generator was developed for those domains.

Key Words: numerical conformal mapping, conformal difference grid, computational algorithm, numerical experiments.

Статтю представив доктор фізико-математичних наук, професор Гаращенко Ф.Г.

Вступ. Досить актуальним для розв'язування крайових задач математичної фізики для диференціальних рівнянь з частинними похідними є сіткове або вузлове покриття розглядуваної області, оптимальна побудова якого спрощує обчислення і підвищує їх точність. Оптимальним для методу скінченних різниць є використання конформних відображень, які при деяких модифікаціях можуть бути застосовані і для інших числових методів. Конформні відображення знаходять широке застосування для числового розв'язування лінійних та нелінійних крайових задач математичної фізики [1, 3, 16]. Особливий інтерес і складність представляє побудова конформних відображень в багатозв'язних областях складної геометричної форми [5, 7, 9] та

в областях з вільними межами [2]. Розробка відповідних алгоритмів значно поширює можливість розв'язування задач, що описують реальні фізичні процеси в гідро- та газодинаміці, теорії електромагнетизму, теорії фільтрації, тепло- та масоперенесення і т.д. [6, 9].

У науковій літературі розвинуто декілька підходів до побудови конформних відображень [10, 11, 12, 15].

Першим і найпростішим є відшукування аналітичних функцій, якими здійснюється відображення, проте такі функції відомі для обмеженого числа областей [10, 11].

Різновидом цього підходу можна виділити підбір функції, що володіє властивістю розтягу області, наприклад, до круга [14].

Другим підходом є відшукування параметрів

інтегралу Кристоффеля-Шварца для відображення області на многокутник. Проте коефіцієнти в загальному випадку не відомі і їх обчислення може потребувати значних затрат і також буде виконуватись наближено.

Тут застосовано підхід, який базується на розгляді функціоналу Рімана та побудові диференціальних рівнянь на отримання пари гармонічних функцій, якими і здійснюється відображення [1, 2].

Відображення багатозв'язних областей у більшості випадків передбачає зведення області до однозв'язної причому лінія розрізу може бути як фіксована так і встановлюватись в процесі побудови відображення [4].

У роботі [16] при побудові числових конформних відображень багатозв'язних областей використано також розрізання області та її подальше відображення на прямокутник, що зовнішній контур повністю відображається в одну із сторін прямокутника (наприклад, нижню), всі внутрішні контури, сполучені розрізами, відображаються в протилежну, лінія розрізу, що сполучає внутрішній контур із зовнішнім – в дві інші сторони прямокутника (при цьому враховуються умови періодичності).

У даній роботі реалізоване числове конформне відображення багатозв'язної області складної геометричної форми зі збереженням відображення зовнішнього контуру, який відображається у зовнішній контур параметричного прямокутника, а чотири відмічені точки – в чотири його вершини, внутрішні контури, сполучені розрізами, відображаються в розріз на одній із ліній сітки.

1. Постановка задачі побудови конформного відображення

Нехай потрібно конформно відобразити деяку багатозв'язну область з чотирма відміченими точками на її зовнішньому контурі, розрізану певним чином, у фізичній області G_z площини (x, y) (рис. 1) на параметричний

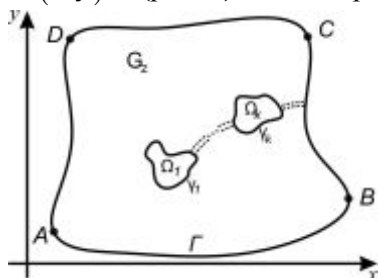


Рис. 1. Багатозв'язна область у фізичній області з 4-ма відміченими точками на зовнішньому контурі

прямокутник з розрізом G_ζ площини (ξ, η) (рис. 2). При цьому чотири відмічені точки A, B, C, D на зовнішньому контурі області G_z відображаються у вершини A', B', C', D' параметричного прямокутника G_ζ відповідно, а внутрішній контур $\gamma = \bigcup_{k=1}^d \gamma_k$ – у відповідний

розріз $\gamma' = \bigcup_{k=1}^d \gamma'_k$ параметричного прямокутника.

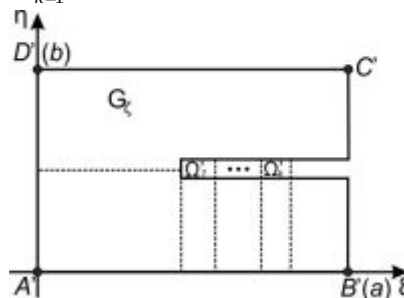


Рис. 2. Параметричний прямокутник з розрізом в комплексній області

2. Математична постановка задачі побудови числового конформного відображення в фізичній області площини (x, y)

Провівши нескінченно тонкі розрізи в фізичній області G_z , відобразимо конформно так розрізану область (рис. 1) на параметричний прямокутник (рис. 2) за допомогою функції

$$\zeta(z) = \xi(x, y) + i\eta(x, y), \quad (1)$$

дійсна і уявна частина якої, як відомо, задовольняє умовам Коші-Рімана

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial \eta}{\partial y}, \quad \frac{\partial \xi}{\partial y} = -\frac{\partial \eta}{\partial x}. \quad (2)$$

На межі області G_z виконуються такі граничні умови:

$$\xi|_{AD} = 0, \quad \xi|_{BC} = a, \quad \eta|_{AB} = 0, \quad \eta|_{CD} = b, \quad (3)$$

$$\eta|_{\gamma_k} = b_0, \quad (4)$$

де b_0 визначається формою області, формою та положенням внутрішніх контурів.

Координати точок на межах зв'язані рівняннями, що задають дані межі

$$f_i(x, y) = 0, \quad (x, y) \in \Gamma_i, \quad i = \overline{1, 4},$$

$$g_k(x, y) = 0, \quad k = \overline{1, d},$$

де $f_i(x, y) = 0$, $i = \overline{1, 4}$ - рівняння кривих Γ_i ,
 $i = \overline{1, 4}$ зовнішнього контуру Γ , $g_k(x, y) = 0$,
 $k = \overline{1, d}$ - рівняння внутрішніх контурів γ_k .

Крім того, в околі меж Γ , γ_k багатозв'язної області виконуються додаткові умови «зв'язку» межових точок з внутрішніми у вигляді, наприклад, умов ортогональності ізоліній сітки до меж області:

$$\xi_x \eta_x + \xi_y \eta_y = 0. \quad (5)$$

$$\Phi(\xi, \eta, M) = \iint_{G_z} \left[\left(\frac{\xi_x}{\sqrt{M}} - \sqrt{M} \eta_y \right)^2 + \left(\frac{\xi_y}{\sqrt{M}} + \sqrt{M} \eta_x \right)^2 \right] dx dy + \iint_{G_z} (\xi_x \eta_y - \xi_y \eta_x) dx dy. \quad (7)$$

З теорії конформних відображень відомо, що існує невіджене однолисне конформне відображення $\bar{\zeta}(z) = \bar{\xi}(x, y) + i\bar{\eta}(x, y)$ області G_z на прямокутник $G_{\bar{\zeta}}$ з деяким певним відношенням сторін $M = a/b$, яке називається модулем прямокутника, тобто існують $\bar{\xi}, \bar{\eta}, M$ такі, що

$$\bar{\xi}_x = \bar{\eta}_y, \quad \bar{\xi}_y = -\bar{\eta}_x, \quad (8)$$

$$\text{де } \bar{\xi} \in \left[0, \frac{1}{\sqrt{M}} \right], \quad \bar{\eta} \in \left[0, \sqrt{M} \right].$$

З (7) видно, що функції $\xi(x, y) = \sqrt{M} \cdot \bar{\xi}(x, y)$, $\eta(x, y) = \frac{1}{\sqrt{M}} \cdot \bar{\eta}(x, y)$ надають мінімум функціоналу (6).

Рівняння Ейлера, які виражають необхідну умову існування екстремуму функціоналу (6), в даному випадку мають вигляд [8]

$$\begin{aligned} \xi_{xx} + \xi_{yy} &= 0, \\ \eta_{xx} + \eta_{yy} &= 0, \end{aligned} \quad (9)$$

$$M^2 = \frac{\iint_{G_z} (\xi_x^2 + \xi_y^2) dx dy}{\iint_{G_z} (\eta_x^2 + \eta_y^2) dx dy}. \quad (10)$$

Єдиність розв'язку задачі (9) з крайовими умовами (3), (5) доведено в роботі [1]. Доведення єдності розв'язку для даної задачі з урахуванням умови (4) проводиться аналогічно.

Обчислювальний алгоритм побудови числового конформного відображення базується на розгляді функціоналу Рімана [8]

$$\Phi(\xi, \eta, M) = \iint_{G_z} \left(\frac{\xi_x^2}{M} + M \eta_x^2 + \frac{\xi_y^2}{M} + M \eta_y^2 \right) dx dy. \quad (6)$$

Функціонал (6) можна представити в такому вигляді:

3. Математична постановка задачі побудови числового конформного відображення в комплексній області площини (ξ, η)

Обернене конформне відображення $G_{\bar{\zeta}} \rightarrow G_z$ здійснюється аналітичною функцією

$$z(\zeta) = x(\xi, \eta) + iy(\xi, \eta), \quad (11)$$

дійсна і уявна частина якої задовольняє умовам Коші-Рімана

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} = \frac{\partial y}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial y}{\partial \xi} = -\frac{\partial x}{\partial \eta}. \quad (12)$$

На зовнішньому контурі справедливі умови

$$f_i(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)) = 0, \quad (x, y) \in \Gamma_i, \quad i = \overline{1, 4}. \quad (13)$$

На внутрішніх контурах виконуються такі залежності:

$$g_k(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)) = 0, \quad k = \overline{1, d} \quad (14)$$

та умови ортогональності

$$\text{grad } x(\xi, \eta) \cdot \text{grad } y(\xi, \eta) = 0. \quad (15)$$

На основі (15) умову ортогональності ізоліній сітки можна записати ще у такому вигляді:

$$x_{\xi} x_{\eta} + y_{\xi} y_{\eta} = 0. \quad (16)$$

В силу регулярності відображення $\zeta(z)$ з якобіаном $J > 0$, обернене відображення (11) існує і його дійсна і уявна частина $x(\bar{\xi}, \bar{\eta})$, $y(\bar{\xi}, \bar{\eta})$ задовольняють системі рівнянь

$$\begin{cases} \alpha \cdot x_{\xi\xi} - 2\beta \cdot x_{\xi\eta} + \gamma \cdot x_{\eta\eta} = 0, \\ \alpha \cdot y_{\xi\xi} - 2\beta \cdot y_{\xi\eta} + \gamma \cdot y_{\eta\eta} = 0, \end{cases} \quad (17)$$

$$\text{де } \alpha = \frac{x_{\eta}^2 + y_{\eta}^2}{J_1}, \quad \beta = \frac{x_{\xi}x_{\eta} + y_{\xi}y_{\eta}}{J_1}, \quad \gamma = \frac{x_{\xi}^2 + y_{\xi}^2}{J_1},$$

$J_1 = x_{\xi}y_{\eta} - x_{\eta}y_{\xi}$ – якобіан оберненого конформного відображення.

В змінних $\bar{\xi}, \bar{\eta}$ формула (10) для модуля параметричного прямокутника прийме вигляд [2]

$$M^2 = \frac{\iint_{G_z} \alpha d\bar{\xi} d\bar{\eta}}{\iint_{G_z} \gamma d\bar{\xi} d\bar{\eta}} = \frac{\int_0^1 d\bar{\eta} \int_0^1 \alpha(\bar{\xi}, \bar{\eta}) J_1(\bar{\xi}, \bar{\eta}) d\bar{\xi}}{\int_0^1 d\bar{\eta} \int_0^1 \gamma(\bar{\xi}, \bar{\eta}) J_1(\bar{\xi}, \bar{\eta}) d\bar{\xi}}. \quad (18)$$

З врахуванням умов ортогональності ізоліній сітки $\beta \equiv 0$ і система рівнянь (17) запишеться

$$\begin{cases} \alpha x_{\xi\xi} + \gamma x_{\eta\eta} = 0, \\ \alpha y_{\xi\xi} + \gamma y_{\eta\eta} = 0. \end{cases} \quad (19)$$

Система нелінійних диференціальних рівнянь (19) є генеруючою і використовується для розрахунку координат внутрішніх вузлів конформної різницевої сітки.

Модуль області, обчислений за формулою (18), будемо називати головним модулем так як він обумовлений чотирма відміченими точками на зовнішньому контурі області G_z . Проте розглядуване конформне відображення володіє ще $(s-1)$ модулем (де s – зв'язність області). Ці модулі відповідають $(s-1)$ підобластям, які виключаються з даної області, а в дискретному варіанті визначають номери ізоліній конформної різницевої сітки, між якими розміщені («затиснуті») $(s-1)$ внутрішніх підобластей-включень, які виключаються з даної області і визначають її зв'язність.

4. Обчислювальний алгоритм побудови конформної різницевої сітки

Для побудови числового конформного відображення, використаємо генеруючу систему нелінійних диференціальних рівнянь (19) з відповідними крайовими умовами (13), (14), (16) з врахуванням (18). Числовий розв'язок даної оберненої крайової задачі отримаємо методом скінченних різниць[12]. Для цього покриємо параметричний прямокутник G_{ξ} рівномірною

різницевою сіткою $w = \{(\xi_i, \eta_j) | \xi_i = ih_1, \eta_j = jh_2\}$, $i = \overline{0, n}, j = \overline{0, m}$, з кроками h_1, h_2 відповідно по осях $O\xi$ та $O\eta$ комплексної площини (ξ, η) .

Окрім того, лінія (i, m_0) , яка відповідає розрізу, роздвоюється на точках $\bigcup_{k=1}^d \bigcup_{p=n_{k1}}^{n_{k2}} (p, m_0)$,

які, в свою чергу, відповідають внутрішнім контурам. Для розрізнення таких точок, використовуватимемо індекс «+» – для точок, які лежать вище розрізу, і «-» – для точок, які лежать нижче розрізу.

Для знаходження координат вузлів конформної різницевої сітки, розв'язуємо задачу (19) з граничними умовами (13), (14), (16). Обчислювальний алгоритм побудови різницевої сітки наступний. Спочатку при фіксованому положенні «плаваючих» вузлів сітки на межі області визначаємо положення внутрішніх вузлів шляхом наближеного розв'язання системи різницевої рівнянь в результаті дискретизації (19). Далі при фіксованих внутрішніх вузлах знаходяться нові положення «плаваючих» вузлів по межах області.

Різницеву сітку будується в результаті багатократного повторення цих ітераційних процесів.

Потім отримана сітка перевіряється на «кофнормність» і, при потребі, змінюється кількість розбиттів сітки або значення модуля області.

4.1. Уточнення координат внутрішніх вузлів конформної різницевої сітки

Провівши дискретизацію системи нелінійних диференціальних рівнянь (19) та лінеаризувавши її на деякому кроці, отримуємо

$$\begin{cases} \alpha^{(s-1)} x_{\xi\xi}^{(s)} + \gamma^{(s-1)} x_{\eta\eta}^{(s)} = 0, \\ \alpha^{(s-1)} y_{\xi\xi}^{(s)} + \gamma^{(s-1)} y_{\eta\eta}^{(s)} = 0 \end{cases}. \quad (20)$$

де s – номер зовнішньої ітерації.

Розв'язок даної системи для пари координат відображення $x(\xi, \eta)$ і $y(\xi, \eta)$ отримуємо методом послідовної верхньої релаксації

$$u_{ij}^{(k+1)} = \omega \cdot \hat{u}_{ij}^{(k)} + (1 - \omega) \cdot u_{ij}^{(k)}, \quad (21)$$

$$\text{де } \hat{u}_{ij}^{(k+1)} = \frac{\alpha(u_{i-1,j}^{k+1} + u_{i+1,j}^k) + \gamma(u_{i,j-1}^{k+1} + u_{i,j+1}^k)}{2(\alpha + \gamma)},$$

$$\omega = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - (\rho^{(s)})^2}},$$

$$\alpha = \left(x_{i,j+1}^{(s-1)} - x_{i,j-1}^{(s-1)} \right)^2 + \left(y_{i,j+1}^{(s-1)} - y_{i,j-1}^{(s-1)} \right)^2, \quad (22)$$

$$\gamma = \left(x_{i+1,j}^{(s-1)} - x_{i-1,j}^{(s-1)} \right)^2 + \left(y_{i+1,j}^{(s-1)} - y_{i-1,j}^{(s-1)} \right)^2. \quad (23)$$

Значення спектрального радіуса на першій ітерації приймаємо наступним:

$$\rho^{(0)} = 1 - 2 \left(\sin^2 \frac{\pi}{2n} + \sin^2 \frac{\pi}{2m} \right).$$

Далі можна скористатись такою формулою [4]

$$\rho^{(s)} = 1 - 2 \min_{i,j} \frac{1}{\alpha + \gamma} \left(\alpha \sin^2 \frac{\pi i}{2n} + \gamma \sin^2 \frac{\pi j}{2m} \right), \quad s = 1, 2, \dots$$

Для точок зліва і справа від розрізу, які примикають до контура на розрізі, коефіцієнти у формулі (21) мають особливий вигляд. Наприклад, для точки зліва вони записуються так:

$$\hat{u}_{im_0}^{(k+1)} = \frac{\alpha (u_{i-1,m_0}^{k+1} + u_{i+1,m_0}^k) + \gamma_+ (u_{i,m_0-1}^{k+1} + u_{i,m_0+1}^k)}{4(\alpha + \gamma_+)} +$$

$$+ \frac{\alpha (u_{i-1,m_0}^{k+1} + u_{i+1,m_0}^k) + \gamma_- (u_{i,m_0-1}^{k+1} + u_{i,m_0+1}^k)}{4(\alpha + \gamma_-)},$$

$$\gamma_+ = \left(x_{i+1,m_0}^{s-1} - x_{i-1,m_0}^{s-1} \right)^2 + \left(y_{i+1,m_0}^{s-1} - y_{i-1,m_0}^{s-1} \right)^2,$$

$$\gamma_- = \left(x_{i+1,m_0}^{s-1} - x_{i-1,m_0}^{s-1} \right)^2 + \left(y_{i+1,m_0}^{s-1} - y_{i-1,m_0}^{s-1} \right)^2.$$

Тут під u розуміються функції x та y у координат оберненого відображення.

Обчислення за формулою (21) проводимо до досягнення заданої точності

$$\max_{ij} \left(\left| x_{ij}^{(k+1)} - x_{ij}^{(k)} \right| + \left| y_{ij}^{(k+1)} - y_{ij}^{(k)} \right| \right) \leq \varepsilon_1,$$

де ε_1 - необхідне значення точності, яке залежить від розміру області та кількості ізоліній сітки, $i = 1, n-1$, $j = 1, m-1$.

4.2. Уточнення координат «плаваючих» вузлів різницевої сітки по межах області

Одним з обов'язкових етапів побудови конформної (ортогональної) сітки є уточнення вузлів, які знаходяться на зовнішній або внутрішній межі області і в ході роботи алгоритму «плавають» по ній. Перерахунок координат здійснюється з використанням одного із способів:

- одна координата обчислюється з

дискретизації умов Коші-Рімана, інша з рівняння межі за однією відомою координатою;

- з умови ортогональності градієнтів;

- геометричною побудовою нормалі з точки до лінії (профілю межі області);

- обчислення нормалі до сплайн-апроксимації межі.

Запишемо в загальному різниці співвідношення для визначення координат "плаваючих" вузлів, які потрібно доповнити умовами (13) для відповідних меж, зокрема для межі Γ_1 :

$$(x_{i+1,0} - x_{i-1,0})(-x_{i2} + 4x_{i1} - 3x_{i0}) +$$

$$+ (y_{i+1,0} - y_{i-1,0})(-y_{i2} + 4y_{i1} - 3y_{i0}) = 0;$$

для межі Γ_2 :

$$(x_{i+1,m} - x_{i-1,m})(-x_{i,m-2} + 4x_{i,m-1} - 3x_{im}) +$$

$$+ (y_{i+1,m} - y_{i-1,m})(-y_{i,m-2} + 4y_{i,m-1} - 3y_{im}) = 0;$$

для меж Γ_1 та Γ_2 $i = \overline{1, n-1}$;

для межі Γ_3 :

$$(-x_{2j} + 4x_{1j} - 3x_{0j})(x_{0,j+1} - x_{0,j-1}) +$$

$$+ (-y_{2j} + 4y_{1j} - 3y_{0j})(y_{0,j+1} - y_{0,j-1}) = 0;$$

для межі Γ_4 :

$$(-x_{n-2j} + 4x_{n-1j} - 3x_{nj})(x_{n,j+1} - x_{n,j-1}) +$$

$$+ (-y_{n-2j} + 4y_{n-1j} - 3y_{nj})(y_{n,j+1} - y_{n,j-1}) = 0;$$

для меж Γ_3 та Γ_4 $j = \overline{1, m-1}$.

Умови «плавання» по лінії розрізу отримуються аналогічним чином.

Нехай потрібно уточнити координати вузла C , який «плаває» по частині межі області G_z (рис. 3), заданої аналітично, наприклад, у явному вигляді $y = g(x)$, якому відповідає внутрішній вузол D різницевої сітки, що прилягає до даного вузла C . Таким чином вектор CD має співпадати з вектором нормалі до межі області G_z .

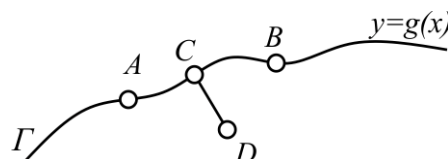


Рис. 3. Схема уточнення координати «плаваючого» вузла по межі Γ області G_z

З умови колінеарності двох векторів (вектора CD і вектора нормалі) отримуємо

$$\frac{d}{dx}g(x_c) \approx \frac{x_c - x_d}{y_c - y_d}.$$

На основі цього, отримуємо формули для проведення ітерацій для уточнення координат «плаваючого» вузла C

$$x_C^{(k+1)} = x_D^{(k+1)} - \left(y_D^{(k+1)} - g(x_C^{(k+1)}) \right) g'(x_C^{(k)}),$$

$$y_C = g(x_C), \quad k = 1, 2, \dots$$

У випадку громіздкості функції $y = g(x)$ можемо скористатись ознакою нормалі (найменша відстань від точки до кривої). Тоді одну з координат «плаваючого» вузла C знайдемо, як аргумент мінімуму відстані від точки D до кривої Γ

$$x_C = \arg \min_{x \in D(g)} \sqrt{(x_D - x)^2 + (y_D - g(x))^2},$$

де $D(g)$ - область визначення функції $y = g(x)$.

У випадку, якщо межі області G_z апроксимуються достатньо густою таблицею точок $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_r, y_r)$, то інтерполюємо їх параметричним кубічним сплайном, який між точками $(x_i, y_i), (x_{i+1}, y_{i+1})$ має вигляд

$$x = s_{x,i}(t) = a_{x,i}t^3 + b_{x,i}t^2 + c_{x,i}t + d_{x,i},$$

$$y = s_{y,i}(t) = a_{y,i}t^3 + b_{y,i}t^2 + c_{y,i}t + d_{y,i},$$

де $t \in [0, 1]$, $i = 0, r-1$.

На основі побудованого інтерполюючого наближення, знаходимо необхідне значення параметра t для обчислення координат «плаваючого» вузла C

$$t = \arg \min_{u \in [0, 1]} \sqrt{(x_D - s_{x,i}(u))^2 + (y_D - s_{y,i}(u))^2},$$

де $u \in [0, 1]$ для кожного $i = 0, r-1$.

4.3. Уточнення модулів області

Головний модуль області G_z обчислюється за формулою

$$M = \frac{a}{b} = \frac{n \cdot h_1}{m \cdot h_2} = \frac{n \cdot h_1}{m \cdot k \cdot h_1}.$$

Звідки

$$M^2 = \frac{n^2}{m^2} \cdot \frac{1}{k^2}.$$

На основі (18) введемо позначення

$$L = \sqrt{\frac{I_1}{I_2}},$$

де $I_1 = \int_0^b d\eta \int_0^a \alpha J_1 d\xi$, $I_2 = \int_0^b d\eta \int_0^a \gamma J_1 d\xi$ – інтеграли,

які легко обчислюються за відомими квадратурними формулами, α , γ , J_1 – функції координат (ξ, η) конформного відображення, які описані вище.

На основі вищевикладеного, отримаємо

$$L = \frac{n}{m} \cdot \frac{1}{k}.$$

В результаті реалізації повного циклу алгоритму і перерахувавши значення модуля, здійснюємо наступне:

- змінюємо кроки h_1 , h_2 різницевої сітки параметричного прямокутника

$$h_2 = \frac{n}{L \cdot m} \cdot h_1;$$

- змінюємо кількість розбиттів сторін параметричного прямокутника

$$n = L \cdot m \cdot \frac{h_2}{h_1}.$$

Таким чином, проводимо перебудову різницевої сітки з метою її покращення

Уточнення наступних решти $(s-1)$ модулів (де s – зв'язність області) реалізовано у напівавтоматичному режимі в ході роботи алгоритму і описане у п. 4.5.

4.4. Перевірка сітки на «конформність»

Для перевірки отриманої різницевої сітки на «конформність», використовуємо низку критеріїв «конформності» різницевої сітки за отриманими вузлами [3]. Розглядатимемо критерії на множині всіх вузлів, крім фіксованих точок у вершинах прямокутника – Q_{all} та множині внутрішніх вузлів – Q_{inner} (рис. 4).

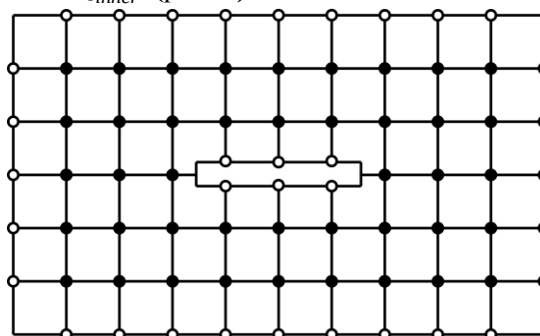


Рис. 4. Множини вузлів сітки

На рисунку 4 вузли множини Q_{inner} позначені чорним кольором, множина Q_{all} крім чорних вузлів включає ще й «виколоті» вузли. Зауважимо, що ні одна з множин не включає чотири відмічені вузли у вершинах прямокутника.

Перших два критерії відповідають ознакам прямокутності клітинок сітки: рівність діагоналей та рівність протилежних сторін чотирикутника. Перший критерій реалізується відношенням довжин діагоналей, другий – сумою відношень довжин протилежних сторін. Для регуляризації відношень, використаємо функцію $w(x) = x + \frac{1}{x} - 2$. Остаточні критерії матимуть такий вигляд:

$$k_1 = \max_{ij \in Q} \left(\frac{d_{ij}^{(1)}}{d_{ij}^{(2)}} + \frac{d_{ij}^{(2)}}{d_{ij}^{(1)}} \right) - 2, \quad (24)$$

$$k_2 = \max_{ij \in Q} \left(\frac{a_{ij}^1}{a_{ij}^2} + \frac{a_{ij}^2}{a_{ij}^1} + \frac{b_{ij}^1}{b_{ij}^2} + \frac{b_{ij}^2}{b_{ij}^1} \right) - 4, \quad (25)$$

де

$$d_{ij}^{(1)} = \|z_{ij} - z_{i+1,j+1}\|, \quad d_{ij}^{(2)} = \|z_{i+1,j} - z_{i,j+1}\|,$$

$$a_{ij}^1 = \|z_{ij} - z_{ij+1}\|, \quad a_{ij}^2 = \|z_{i+1,j} - z_{i+1,j+1}\|,$$

$$b_{ij}^1 = \|z_{ij} - z_{i+1,j}\|, \quad b_{ij}^2 = \|z_{ij+1} - z_{i+1,j+1}\|,$$

$\|z\|$ – довжина вектора $z = (x, y)$:

$$\|z_{kl} - z_{pq}\| = \sqrt{(x_{kl} - x_{pq})^2 + (y_{kl} - y_{pq})^2}.$$

Третій критерій – найменше значення синуса кута між координатними лініями [1], який обчислюємо за формулою

$$\sin \alpha = \frac{x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi}{\sqrt{(x_\xi^2 + y_\xi^2)(x_\eta^2 + y_\eta^2)}}.$$

Регуляризації досягаємо відніманням модуля значення синуса від одиниці. Критерій обчислюємо за формулою

$$k_3 = 1 - \min_{(i,j) \in Q} \frac{|x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi|}{\sqrt{(x_\xi^2 + y_\xi^2)(x_\eta^2 + y_\eta^2)}}. \quad (24)$$

При обчисленні критерію за формулою (24) замість похідних обчислюватимемо значення їх різницевої аналогів (центральної або уточненої) на основі отриманих координат вузлів сітки.

Оптимальною є різницева сітка, для якої значення всіх трьох критеріїв прямують до нуля.

4.5. Конструктивна перевірка різницевої сітки

Перевірка правильності визначення номерів ізоліній різницевої сітки для даної області, між якими знаходиться «включення», здійснюється експериментальним шляхом за наступним алгоритмом. Отримана різницева сітка розділяється по лінії $j = m_0$ на дві підобласті. Для кожної з них будується числове конформне відображення, яке й показує номери ліній n_{k1}, n_{k2} , що обмежують початок і кінець «включення».

5. Програмна реалізація, результати числових експериментів та їх аналіз

На основі описаного обчислювального алгоритму розроблено програмний комплекс «C-MaG» (Conformal Mapping Generator), реалізований засобами об'єктно-орієнтованої мови програмування C# в середовищі Microsoft Visual Studio 2010.

Окрім алгоритмів описаного дослідження, комплекс підтримує побудову числового конформного відображення однозв'язних областей, а також двозв'язних з іншим типом зведення до однозв'язної.

Інтерфейс програми (рис. 5) включає набір MDI-вікон:

- конструктор межі області;
- налаштування параметрів відображення;
- вікно перегляду візуалізації сітки;
- таблиці значень координат x_{ij} , y_{ij} вузлів сітки;
- значень характеристик побудованої сітки.

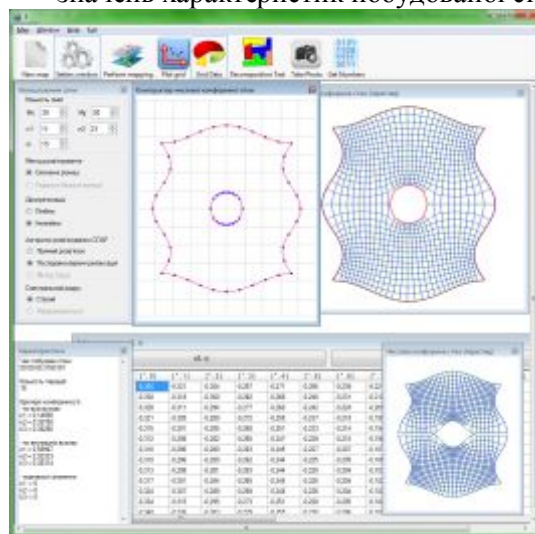


Рис. 5 Інтерфейс пакету «C-MaG»

Наведений алгоритм здійснює числове конформне відображення, при якому чотири відмічені точки на зовнішньому контурі області переходять у вершини параметричного прямокутника. Відмінність між побудованим відображенням та відображенням, при якому зовнішня межа переходить в одну сторону прямокутника, а внутрішні у протилежну [15], зображено на рис 6 а і б.

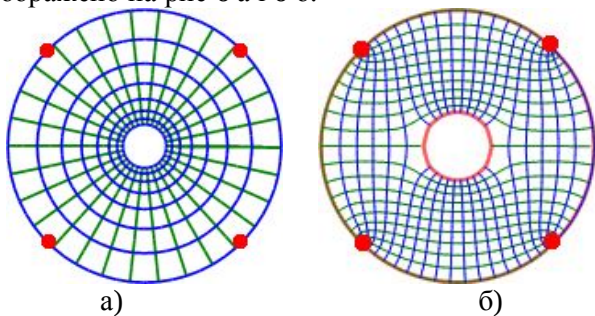


Рис. 6 Конформні різницеві сітки областей дискової форми з 4-ма відміченими точками на зовнішньому контурі, отримані різними методами

Нижче наведено приклади побудованих числових конформних відображень двохзв'язних і тризв'язних областей із 4-ма відміченими точками на зовнішньому контурі, які при відображенні переходять у вершини параметричного прямокутника.

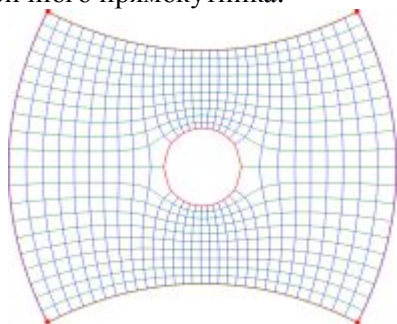


Рис. 7 Конформна різницева сітка в двохзв'язній неопуклій області

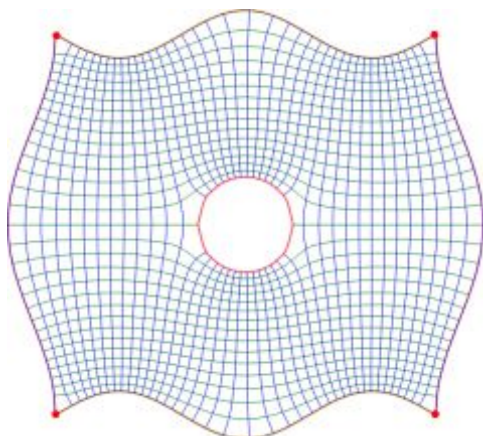


Рис. 8 Конформна різницева сітка в двохзв'язній неопуклій області

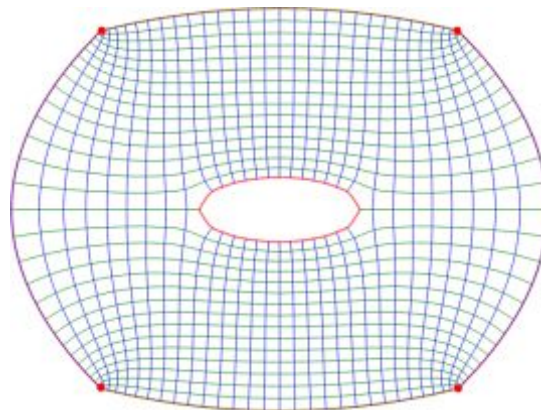


Рис. 9 Конформна різницева сітка в еліпсоподібній двохзв'язній області

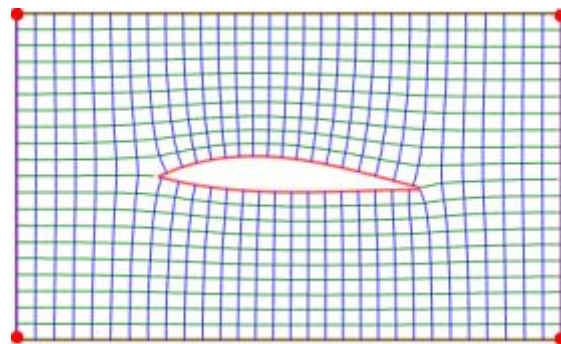


Рис. 10 Конформна різницева сітка при обтіканні крила в аеродинамічній трубі

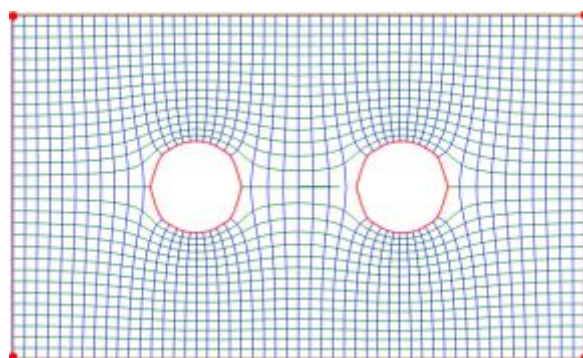


Рис. 11 Конформна різницева сітка в трьохзв'язній області

Значення критеріїв «коформності» для наведених областей занесено в таблиці 1 та 2.

Таблиця 1.

Значення критеріїв «конформності» для наведених різницевих сіток, обчислених з урахуванням всіх вузлів

Область	Значення критеріїв «конформності»		
	k_1	k_2	k_3
Рис. 7	0,041	0,227	0,232
Рис. 8	0,084	0,128	0,263
Рис. 9	0,078	0,153	0,458
Рис. 10	0,009	0,050	0,196
Рис. 11	0,084	0,112	0,380

Значення критеріїв «конформності» для наведених різницевих сіток, обчислених лише для внутрішніх вузлів

Область	Значення критеріїв «конформності»		
	k_1	k_2	k_3
Рис. 7	0,127	0,215	0,240
Рис. 8	0,084	0,207	0,262
Рис. 9	0,075	0,153	0,093
Рис. 10	0,042	0,156	0,196
Рис. 11	0,075	0,108	0,0065

З таблиць 1 та 2 видно, що наведені алгоритми будують різницеві сітки, які задовольняють усім наведеним критеріям.

Список використаних джерел

1. Веретенцев В.А. Построение разностной сетки в области с криволинейными границами с помощью конформного отображения / В.А. Веретенцев // В кн.: Актуальные вопросы прикладной математики. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1989. – С. 88-93.
2. Власюк А.П., Михальчук В.Г. Чисельне розв'язування одного класу крайових задач з вільними межами в криволінійних чотирикутниках для еліптичних систем рівнянь / А.П. Власюк, В.Г. Михальчук. (Препр. №3), – К., 1994. – 24 с.
3. Власюк А.П., Михальчук В.Г. Автоматическое построение конформных и квазиконформных отображений четырехугольных областей с помощью разностных сеток с „плавающими” узлами. – К., 1989. – 55 с. – (Препр. АН УССР. Ин-т матем, 89.79).
4. Власюк А.П., Михальчук В.Г. Автоматическое построение конформных и квазиконформных отображений двух- и трехсвязных областей / А.П. Власюк, В.Г. Михальчук. (Препр. №2), – К., 1991. – 56 с.
5. Власюк А.П., Дроздовський Т.А. Комп'ютерна генерація конформних і квазиконформних різницевих сіток в областях складної геометричної форми / А.П. Власюк, Т.А. Дроздовський // Тез. доп. XVI Міжнар. Конф. Прийняття рішень в умовах невизначеності – Ялта, 2010. – С.153–156.
6. Власюк А.П., Дячук Т.П. Комп'ютерна візуалізація гідродинамічних полів в областях з криволінійними межами / А.П. Власюк, Т.П. Дячук / Вісник НУВГП Збірник наукових праць. Вип. 4(36) ч. 2 Рівне.- 2006. – С. 74–83.
7. Годунов С.К. Об автоматическом построении сеток для уравнений в конечных разностях в областях сложной формы / С.К. Годунов //

Результаты «декомпозиційного» тесту (п. 4.5) співпадають з побудованими сітками.

Висновки. В роботі розроблено достатньо ефективний обчислювальний алгоритм числової побудови конформних різницевих сіток в багатозв'язних областях складної геометричної форми. Проведена його програмна реалізація. Уточнено поняття критеріїв «конформності» різницевої сітки, які використовуються для її конструктивної побудови.

Проведені числові експерименти показали достатню ефективність даного алгоритму для побудови конформних різницевих сіток в областях складної геометричної форми з криволінійними межами.

8. Годунов С.К., Прокопов Г.П. О расчетах конформных отображений и построении разностных сеток / С.К. Годунов, Г.П. Прокопов // Журн. вычисл. математики и мат. физики. – 1967. – 7, №5. – С. 1031-1059.
9. Годунов С.К., Ременский Е.И., Чумаков Г.А. Построение разностных сеток в сложных областях с помощью квазиконформных отображений / С.К. Годунов, Е.И. Ременский, Г.А. Чумаков // Труды Ин-та матем. Сиб. Отд. АН СССР. – 1990. – Т. 18. С. 75–83.
10. Коппенфельс В., Штальман Ф. Практика конформных отображений / В. Коппенфельс, Ф. Штальман – М.:ИЛ, 1963. – 406 с.
11. Лаврик В.И., Савенков В.Н. Справочник по конформным отображениям / В.И. Лаврик, В.Н. Савенков. – К.:Наукова думка, 1970. – 252 с.
12. Прокопов Г.П. Некоторые общие вопросы конструирования алгоритмов построения разностных сеток / Г.П. Прокопов – М., 1987. – 13 с. (Препр. АН СССР. Ин-т прикл. мат.; №98).
13. Самарский А.А. Численные методы математической физики: Учеб. пособие для вузов / А.А. Самарский, А.В. Гулин – М.:Научный мир, 2003. — 316 с.
14. Фильчаков П.Ф. Приближенные методы конформных отобразений / П.Ф. Фильчаков – К.:Наукова думка, 1964. – 532 с.
15. Шилов Б.Ф. О приближенном конформном преобразовании двухсвязных областей / Б.Ф. Шилов // Тр. Военно-механич. ин-та. – Л.: 1939. – С. 153-187.
16. Thompson J.F. Numerical Grid Generation / Joe F. Thompson, Z.U.A. Warsi, C. Wayne Mastin. – Mississippi:North-Holland. – 1985. – 327 p.

References

1. VERETENTSEV, V. (1989) Postroeniye raznostnoy setky v oblasti s kryvolyneynymi hranytsamy s pomoshch'yu konformnoho otobrazheniya *Aktualnye voprosy prykladnoy matematyky*. Moskva: Nvauka. pp. 88-93.
2. VLASYUK, A., and MYKHALCHUK, V. (1994) *Chyselne rozvyazuvannya odnogo klasu krayovykh zadach z vilnymi mezhamy v kryvoliniynyykh chotyrykutnykakh dlya eliptychnyykh system rivnyan*. Kiev.
3. VLASYUK, A., and MYKHALCHUK, V. (1989) *Avtomaticheskoe postroeniye konformnykh i kvazykonformnykh otobrazheniy chetyrekhugolnykh oblastey s pomoshchyu raznostnykh setok s „plavayushchymy” uzlamy*. Kiev: Instytut matematyky.
4. VLASYUK, A., and MYKHALCHUK, V. (1991) *Avtomaticheskoe postroeniye konformnykh i kvazykonformnykh otobrazheniy dvukh- y trekhsvyaznykh oblastey*. Kiev Instytut matematyky.
5. VLASYUK, A., and DROZDOVSKYI, T. (2010) Kompyuterna heneratsiya konformnykh i kvazikonformnykh riznytsevykh sitok v oblastiakh skladnoyi heometrychnoyi formy. In *Problems of Decision Making under Uncertainties International Conference*, Monday 4th to Thursday 8th October 2010 at Yalta. Kiev pp.153–156.
6. VLASYUK, A., and DYACHUK, T. Kompyuterna vizualizatsiya hidrodynamichnykh poliv v oblastiakh z kryvoliniynymy mezhamy. *Visnyk NUVHP. Zbirnyk naukovykh prats*. 4(36) p.2. Rivne. pp. 74–83.
7. HODUNOV, S. (1971) Ob avtomaticheskomo postroenyy setok dlya uravnenyy v konechnykh raznostyakh v oblastiakh slozhnoy formy. *Actes Congr. Int. mathem.* 3. Paris. pp. 99-104.
8. HODUNOV, S. and PROKOPOV, H. (1967) O raschetakh konformnykh otobrazhenyy y postroenyy raznostnykh setok. *Zhurn. vychysl. matematyky y mat. fizyky*. 7(5). pp. 1031-1059.
9. HODUNOV, S., REMENSKYY, E. and CHUMAKOV, H. (1990) Postroeniye raznostnykh setok v slozhnykh oblastiakh s pomoshch'yu kvazykonformnykh otobrazhenyy. *Trudy Yn-ta matem. Syb. Otd. AN SSSR*. V. 18. pp. 75–83.
10. KOPPENFELS, V. and SHTALMAN, F. (1963) *Praktyka konformnykh otobrazhenyy*. Moskva:YL.
11. LAVRYK, V. and SAVENKOV, V. (1970) *Spravochnik po konformnym otobrazheniyam*. Kiev:Naukova dumka.
12. PROKOPOV H. (1987) Nekotorye obshchye voprosy konstruyrovannya alhorytmov postroeniya raznostnykh setok. *Prepr. AN SSSR. Yn-t prykl. mat.; №98*. Moskva.
13. SAMARSKYY, A. and HULYN, V. (2003) *Chyslennyye metody matematicheskoy fizyky: Ucheb. posoby dlya vuzov*. Moskva:Nauchnyy myr.
14. FYLCHAKOV, P. (1964) *Pryblyzhennyye metody konformnykh ot obrazhenyy*. Kiev:Naukova dumka.
15. SHYLOV, B. (1939) O pryblyzhennom konformnom preobrazovanny dvukhsvyaznykh oblastey *Tr. Voennno-mekhanich. yn-ta*. Leningrad. pp. 153-187.
16. THOMPSON, J., WARSI, Z., WAYNE MASTIN, C. (1985) *Numerical Grid Generation*. Mississippi:North-Holland.

Надійшла до редколегії 11.12.13

УДК 532.72:519.63:533.15:631.4

Власюк А.П.¹, д.т.н., проф.,
Жуковський В.В.², аспірант

Математичне моделювання вертикальної міграції радіонуклідів в каталітичному пористому середовищі

¹ Міжнародний економіко-гуманітарний університет ім. акад. С. Дем'янчука, 33000, м. Рівне, вул. акад. С. Дем'янчука, 4,
e-mail: A.P.Vlasyuk.rv@gmail.com

² Національний університет водного господарства та природокористування, 33000, м. Рівне, вул. Соборна, 11,
e-mail: ZeonET@gmail.com

A.P. Vlasyuk¹, doctor of engineering, prof.,
V.V.Zhukovskyy², graduate student

Mathematical modelling of radionuclides vertical migration in catalytic porous media

¹ International University of Economics and Humanities Named After Academician Stepan Demianchuk, acad. S.Dem'janchuk street, 4, Rivne, 33000, Ukraine

e-mail: A.P.Vlasyuk.rv@gmail.com

² National University of Water Management and Nature Resources Use, Soborna, 11, Rivne, 33000, Ukraine

e-mail: ZeonET@gmail.com

В статті сформульовано постановку та проведено математичне моделювання процесу вертикальної міграції радіонуклідів у каталітичному пористому середовищі в лінійній постановці.

Отримано чисельний розв'язок відповідної одновимірної крайової задачі методом скінченних різниць. Проведено серію чисельних експериментів та здійснено їх аналіз.

Ключові слова: масоперенесення, очищення, радіонукліди, частинки мікропористої структури, каталітичне пористе середовище, метод скінченних різниць.

An important national economic task now is to clean the fertile lands of various kinds of pollution e.g. radioactive. Modern mechanization allows faster purification of contaminated areas through the usage of advanced irrigation technologies, including filter traps, alternative organic fertilizers with sorbent porous microparticles.

In this paper we used mathematical model for mass transfer in saturated media to special filter trap. Our objective here was to formulate the statement and carry out the mathematical modelling of radionuclides vertical migration process in catalytic porous media in linearly mode.

It was obtained the numerical solution of respective one-dimensional boundary value problem by the method of finite differences. We used implicit and monotone difference schemas for diffusion-convection problems. Appropriate coefficients for Tomas Algorithm were brought. At the same time we prove numerical stability.

Using created software a series of numerical experiments and their analysis were conducted. Brief overviews of these experiments were included in this manuscript. We demonstrated the microporous particles impact to mass process filtration based on our results.

Key words: mass transfer, refinement, microporous particles, catalytic porous media, method of finite differences.

Статтю представив д.т.н., проф. Гаращенко Ф.Г.

1. Вступ. Важливою народно-господарською задачею в даний час є очищення плодородних земель від різного роду забруднень, в тому числі і радіоактивних. Основною метою є прогнозування впливу радіоактивних осадів на навколишнє середовище. Наприклад, повільна міграція радіонуклідів впливає на ріст рослин і це призводить до зовнішнього опромінення [1].

Разом з тим, швидка міграція може призвести до забруднення підземних вод. Тому вивчення даних процесів і їх моделювання є важливим для прогнозування довготермінової поведінки.

Питання підземного масоперенесення при фільтрації в пористих середовищах вивчалось в роботах Веригіна М.М., Сергієнка І.В., Скопечкого В.В., Дейнеки В.С., Ляшка І.І.,

Ляшка С.І., Лаврика В.І., Власюка А.П., Бомби А.Я., Булавацького В.М., Савули Я.Г. та ін. [2- 6]. Дослідження процесів дифузії нуклідів, міграція яких представляє найбільшу радіологічну цікавість, виявилось вдалим для вирішення комплексу задач, що пов'язані з радіаційним контролем. Відповідні математичні моделі розроблені Прохоровим В.М., Власюком А.П., Бураком Я. Й., Чаплею Є.Я., Чернухою О.Ю. [7, 8].

Однак, сучасні засоби механізації дозволяють пришвидшити процес очищення забруднених територій завдяки застосуванню новітніх технологій меліорації, зокрема фільтрів-вловлювачів, нетрадиційних органічних добрив з сорбуючими мікрочастинками [9]. І тут постають питання дослідження дифузії в біпористих сорбентах [10]. Вплив мікропористих частинок на технологічні процеси дифузійного масопереносу досліджувались Фрессардом Ж. [11], Петриком М.Р. [12]. Проте застосування цих ідей до процесів очищення радіонуклідів є новим. Тому важливого значення набувають нові математичні моделі для отримання фундаментального розуміння різних процесів хімічної і фізичної міграційної поведінки для забезпечення розвитку ефективних стратегій оцінки ризику.

2. Постановка задачі. Розглянемо процес очищення горизонтального шару ґрунту від радіонуклідів (наприклад, ^{90}Sr (стронцій-90) або ^{137}Cs (цезій-137)) при їх вертикальній міграції в горизонтальному шарі ґрунту великої протяжності. Міграція радіонуклідів відбувається завдяки переносу їх фільтраційним потоком зі швидкістю v під впливом конвективної дифузії в каталітичному пористому середовищі при наявності фільтра-вловлювача (рис. 1).

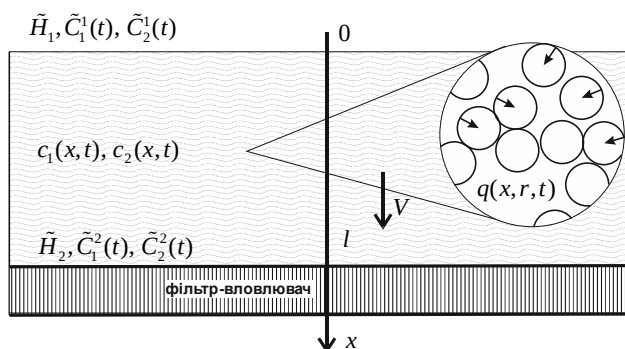


Рис.1. Вертикальна міграція радіонуклідів в каталітичному пористому середовищі при наявності фільтра-вловлювача

На глибині l в ґрунті розміщений фільтр-вловлювач, наповнений сорбуючим елементом (наприклад, вермикулітом). Відомі п'єзометричні напори на верхній та нижній (підстилаючій) поверхнях ґрунту $\tilde{H}_1$ та $\tilde{H}_2$ ($\tilde{H}_1 > \tilde{H}_2$) відповідно. Також відомий розподіл концентрацій радіонуклідів (мігранту) в початковий момент часу $t = 0$: $\tilde{C}_1^0(x)$ (для частинок, що знаходяться в конвективно рухомому поровому розчині), $\tilde{C}_2^0(x)$ (для частинок, що знаходяться у зв'язаній зі скелетом ґрунту воді) та $\tilde{Q}^0(x,r)$. На верхній поверхні ґрунту задані концентрації $\tilde{C}_1^1(x)$ та $\tilde{C}_2^1(x)$, а на фільтрі-вловлювачі задаються концентрації $\tilde{C}_1^2(x)$, $\tilde{C}_2^2(x)$ або відповідні потоки концентрацій $\left. \frac{\partial c_1}{\partial x} \right|_{x=l} = \left. \frac{\partial c_2}{\partial x} \right|_{x=l} = 0$.

Потрібно дослідити розподіл концентрацій $c_1(x,t)$, $c_2(x,t)$, $q(x,r,t)$ по області фільтрації з часом, що дасть можливість зробити прогноз щодо ступеня очищення ґрунтів та їх подальшого використання.

3. Математична модель задачі. Математичну модель поставленої задачі в лінійній постановці в одновимірному випадку на основі робіт [7, 8, 12, 13] можна описати наступною крайовою задачею:

$$\sigma_1 \frac{\partial c_1}{\partial t} = D_1 \frac{\partial^2 c_1}{\partial x^2} - v \frac{\partial c_1}{\partial x} - \gamma_1 c_1 + \gamma_2 c_2, \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial c_2}{\partial t} = D_2 \frac{\partial^2 c_2}{\partial x^2} + \gamma_1 c_1 - \gamma_2 c_2 - \theta \left. \frac{\partial q}{\partial r} \right|_{r=R}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial q}{\partial t} = D_0 \left(\frac{\partial^2 q}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial q}{\partial r} \right), \quad 0 < r < R, \quad t > 0, \quad (3)$$

$$v = -k(c_1) \frac{dh}{dx} + v_c \frac{\partial c_1}{\partial x}, \quad \text{div} \vec{v} + \frac{\partial n}{\partial t} = 0, \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \quad (4)$$

$$\left. \frac{\partial q(x,r,t)}{\partial r} \right|_{r=0} = 0, \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \quad (5)$$

$$q(x,r,t)|_{r=R} = k_e \cdot c_2(x,t), \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \quad (6)$$

$$l_1 c_1(0,t) = \tilde{C}_1^1(t), \quad l_2 c_1(l,t) = \tilde{C}_1^2(t), \quad (7)$$

$$l_3 c_2(0,t) = \tilde{C}_2^1(t), \quad l_4 c_2(l,t) = \tilde{C}_2^2(t), \quad (8)$$

$$h(0) = \tilde{H}_1, \quad h(l) = \tilde{H}_2, \quad (9)$$

$$c_1(x,0) = \tilde{C}_1^0(x), \quad c_2(x,0) = \tilde{C}_2^0(x), \quad q(x,r,0) = \tilde{Q}^0(x,r). \quad (10)$$

Тут: $c_1(x,t)$, D_1 – концентрація та коефіцієнт конвективної дифузії радіонуклідів, що знаходяться у фільтраційному потоці; $c_2(x,t)$,

D_2 – концентрація та коефіцієнт молекулярної дифузії радіонуклідів, що знаходяться у воді, яка зв'язана зі скелетом ґрунту; q , D_0 – концентрація та коефіцієнт дифузії радіонуклідів у частинках радіусу R , що знаходяться у скелеті ґрунту; k_e – коефіцієнт впливу внутрішньочастинкового масопереносу на масоперенос в скелеті ґрунту; v – швидкість фільтрації; k – коефіцієнт фільтрації води з мігрантами; γ_1 , γ_2 – коефіцієнти масообміну; σ_1 – пористість ґрунту; x – вертикальна координата, напрямлена вертикально вниз, l_i , $i = \overline{1, 4}$ – диференціальні оператори, що задають граничні умови відповідно при $x = 0$ та $x = l$; t – час.

Рівняння (1) описує процес міграції радіонуклідів з концентрацією c_1 шляхом конвективної дифузії у фільтраційному потоці (конвективно рухомому поровому розчині); (2) описує процес міграції радіонуклідів, що знаходяться у зв'язаній зі скелетом ґрунту воді; (3) описує внутрішньочастинковий масоперенос радіонуклідів з поточною концентрацією q , що зв'язана із концентрацією c_2 умовою (6), (4) описує фільтрацію в каталітичному пористому середовищі. Крайові умови для концентрацій $c_1(x, t)$, $c_2(x, t)$, $q(x, r, t)$ та напору $h(x)$ мають вигляд (7)–(10).

В результаті різниці напорів відбувається перенесення розчинених у воді речовин фільтраційним потоком. При цьому процеси фільтрації та масоперенесення розчинених у воді речовин підлягають законам Дарсі та Фіка.

4. Чисельний розв'язок крайової задачі.

Для знаходження чисельного розв'язку крайової задачі (1)–(10) використаємо метод скінченних різниць. Для цього запишемо неявну різницеву схему для рівняння (2), а для (1) та (3) використаємо монотонну різницеву схему [14] або [15].

Введемо різницеву сітку $\omega_{h_1 h_2 \tau}$ з кроками h_1 , h_2 і τ по осях Ox , Or та Ot для змінних x , r , t

$$\omega_{h_1 h_2 \tau} = \left\{ (x_i, r_j, t_k) \left| \begin{array}{l} x_i = ih_1, r_j = jh_2, t_k = k\tau, \\ i = \overline{0, n_1}, j = \overline{0, n_2}, k = \overline{0, n_3}, \\ h_1 n_1 = l, r n_2 = R, t n_3 = T, \end{array} \right. \right\} \quad (11)$$

де n_1 , n_2 , n_3 – кількість кроків по просторових змінних та часу відповідно.

Для дискретизації рівняння (1) використаємо монотонну різницеву схему Самарського [14] або

монотонну різницеву схему, побудовану в роботі [15]. В результаті дискретизації скінченнорізницевого аналогу диференціального рівняння (1) та відповідних крайових умов матиме наступний вигляд:

$$\sigma'_1 \frac{c_{1,i}^{(k+1)} - c_{1,i}^{(k)}}{\tau} = \chi_i^{(k)} \frac{c_{1,i+1}^{(k+1)} - 2c_{1,i}^{(k+1)} + c_{1,i-1}^{(k+1)}}{h_1^2} + \frac{(r^+)_i^{(k)} c_{1,i+1}^{(k+1)} - c_{1,i}^{(k+1)}}{D_1 h_1} + \frac{(r^-)_i^{(k)} c_{1,i}^{(k+1)} - c_{1,i-1}^{(k+1)}}{D_1 h_1} - \gamma'_1 c_{1,i}^{(k+1)} + \gamma'_2 c_{2,i}^{(k+1)}, \quad (12)$$

$$c_{1,i}^{(0)} = \tilde{C}_1^0(x_i), \quad c_{1,0}^{(k)} = \tilde{C}_1^1(t_k), \quad c_{1,n_1}^{(k)} = \tilde{C}_1^2(t_k), \quad (13)$$

де $i = \overline{1, n_1 - 1}$, $k = \overline{0, n_3}$.

Тут введені наступні позначення:

$$\chi_i^{(k)} = \frac{1}{1 + \frac{h_1 |r_i^{(k)}|}{2D_1}} = 1 - \frac{h_1 |r_i^{(k)}|}{2D_1} + O(h_1^2), \quad \sigma'_1 = \frac{\sigma_1}{D_1},$$

$$\gamma'_1 = \frac{\gamma_1}{D_1}, \quad \gamma'_2 = \frac{\gamma_2}{D_1}, \quad r_i^{(k)} = (r^+)_i^{(k)} + (r^-)_i^{(k)},$$

$$(r^+)_i^{(k)} = \frac{-v_i^{(k)} + |v_i^{(k)}|}{2} \geq 0, \quad (r^-)_i^{(k)} = \frac{-v_i^{(k)} - |v_i^{(k)}|}{2} \leq 0.$$

Для знаходження концентрації солей $c_1(x, t)$ з різницевого рівняння (12) використаємо метод прогонки. Для цього представимо різницеву схему (12), (13) у такому вигляді:

$$\begin{cases} a_i^1 c_{1,i-1}^{(k+1)} - \tilde{C}_1^1 c_{1,i}^{(k+1)} + b_i^1 c_{1,i+1}^{(k+1)} = -c_{1,i}^{(k)} - f_i^{1,(k+1)}, \\ c_{1,0}^{(k+1)} = \mu_1^1 c_{1,1}^{(k+1)} + \mu_2^1, \\ c_{1,n_1}^{(k+1)} = \mu_3^1 c_{1,n_1-1}^{(k+1)} + \mu_4^1, \end{cases} \quad (14)$$

де

$$a_i^1 = \frac{\tau}{\sigma'_1} \left(\frac{\chi_i^{(k)}}{h_1^2} - \frac{(r^-)_i^{(k)}}{h_1 D_1} \right), \quad b_i^1 = \frac{\tau}{\sigma'_1} \left(\frac{\chi_i^{(k)}}{h_1^2} + \frac{(r^+)_i^{(k)}}{h_1 D_1} \right),$$

$$\tilde{C}_i^1 = 1 + \frac{\tau}{\sigma'_1} \left(\frac{2\chi_i^{(k)}}{h_1^2} + \frac{1}{h_1 D_1} ((r^+)_i^{(k)} - (r^-)_i^{(k)}) + \gamma'_1 \right),$$

$$f_i^{1,(k+1)} = \frac{\tau}{\sigma'_1} \gamma'_2 c_{2,i}^{(k+1)}, \quad \mu_1^1 \equiv 0, \quad \mu_2^1 = \tilde{C}_1^1, \quad \mu_3^1 \equiv 0,$$

$$\mu_4^1 \equiv \tilde{C}_2^1.$$

Значення концентрації $c_1(x, t)$ на часовому шарі $(k+1)$ знаходимо методом прогонки, використовуючи співвідношення

$$c_{1,i}^{(k+1)} = \alpha_{i+1}^1 c_{1,i+1}^{(k+1)} + \beta_{i+1}^1, \quad (15)$$

$$\text{де } \alpha_{i+1}^1 = \frac{b_i^1}{\bar{c}_i^1 - \alpha_i^1 a_i^1}, \quad \beta_{i+1}^1 = \frac{a_i^1 \beta_i^1 + c_{1,i}^{(k)} + f_i^{1,(k+1)}}{\bar{c}_i^1 - \alpha_i^1 a_i^1},$$

$$i = \overline{1, n_1 - 1}, \quad k = \overline{1, n_3}, \quad \alpha_1^1 = \mu_1^1 \equiv 0, \quad \beta_1^1 = \mu_2^1 \equiv \tilde{C}_1^1.$$

Можна показати, що умови стійкості прогонки $|\bar{c}_i^1| > |a_i^1| + |b_i^1|$ виконуються.

Для дискретизації різницевого рівняння (2) використаємо неявну різницеву схему.

Конвективний член $\theta \frac{\partial q}{\partial r} \Big|_{r=R}$ диференціального

рівняння (2) апроксимуємо з точністю до другого порядку [16]. Скінченнорізницевий аналог відповідного диференціального рівняння матиме наступний вигляд:

$$\frac{c_{2,i}^{(k+1)} - c_{2,i}^{(k)}}{\tau} = D_2 \frac{c_{2,i+1}^{(k+1)} - 2c_{2,i}^{(k+1)} + c_{2,i-1}^{(k+1)}}{h_1^2} + \gamma_1 c_{1,i}^{(k)} -$$

$$-\gamma_2 c_{2,i}^{(k+1)} - \theta \left(\frac{\frac{3}{2} q_{n_2}^{(k+1)} - 2q_{n_2-1}^{(k+1)} + \frac{1}{2} q_{n_2-2}^{(k+1)}}{h_2} \right), \quad (16)$$

$$c_{2,i}^{(0)} = \tilde{C}_2^0(x_i), \quad c_{2,0}^{(k)} = \tilde{C}_2^1(t_k), \quad c_{2,n_1}^{(k)} = \tilde{C}_2^2(t_k), \quad (17)$$

де $i = \overline{1, n_1 - 1}, \quad k = \overline{0, n_3}.$

Представимо різницеву схему (16), (17) у такому вигляді:

$$\begin{cases} a_i^2 c_{2,i-1}^{(k+1)} - \bar{c}_i^2 c_{2,i}^{(k+1)} + b_i^2 c_{2,i+1}^{(k+1)} = -f_i^{2,(k+1)}, \\ c_{2,0}^{(k+1)} = \mu_1^2 c_{2,1}^{(k+1)} + \mu_2^2, \\ c_{2,n_1}^{(k+1)} = \mu_3^2 c_{2,n_1-1}^{(k+1)} + \mu_4^2, \end{cases} \quad (18)$$

де

$$a_i^2 = \frac{D_2}{h_1^2}, \quad b_i^2 = \frac{D_2}{h_1^2}, \quad \bar{c}_i^2 = \frac{2D_2}{h_1^2} + \frac{1}{\tau} + \gamma_2,$$

$$f_i^{2,(k+1)} = \frac{c_{2,i}^{(k)}}{\tau} + \gamma_1 c_{1,i}^{(k)} - \theta \left(\frac{\frac{3}{2} q_{n_2}^{(k+1)} - 2q_{n_2-1}^{(k+1)} + \frac{1}{2} q_{n_2-2}^{(k+1)}}{h_2} \right),$$

$$\mu_1^2 \equiv 0, \quad \mu_2^2 = \tilde{C}_2^1, \quad \mu_3^2 \equiv 0, \quad \mu_4^2 \equiv \tilde{C}_2^2.$$

Значення концентрації $c_2(x, t)$ на часовому шарі $(k+1)$ знаходимо методом прогонки, використовуючи співвідношення

$$c_{2,i}^{(k+1)} = \alpha_{i+1}^2 c_{2,i+1}^{(k+1)} + \beta_{i+1}^2, \quad (19)$$

$$\text{де } \alpha_{i+1}^2 = \frac{b_i^2}{\bar{c}_i^2 - \alpha_i^2 a_i^2}, \quad \beta_{i+1}^2 = \frac{a_i^2 \beta_i^2 + f_i^{2,(k+1)}}{\bar{c}_i^2 - \alpha_i^2 a_i^2},$$

$$i = \overline{1, n_1 - 1}, \quad k = \overline{1, n_3}, \quad \alpha_1^2 = \mu_1^2 \equiv 0, \quad \beta_1^2 = \mu_2^2 \equiv \tilde{C}_2^1.$$

Можна показати, що умови стійкості прогонки $|\bar{c}_i^2| > |a_i^2| + |b_i^2|$ виконуються.

Монотонна різницева схема для (3), (5), (6) матиме наступний вигляд:

$$\frac{q_j^{(k+1)} - q_j^{(k)}}{\tau'} = \bar{\chi}_j^{(k)} \frac{q_{j+1}^{(k+1)} - 2q_j^{(k+1)} + q_{j-1}^{(k+1)}}{h_2^2} +$$

$$+ \frac{\tilde{r}_+}{D_0} \frac{q_{j+1}^{(k+1)} - q_j^{(k+1)}}{h_2} + \frac{\tilde{r}_-}{D_0} \frac{q_j^{(k+1)} - q_{j-1}^{(k+1)}}{h_2}, \quad (20)$$

$$q_j^{(0)} = \tilde{Q}^0(x_i, r_j), \quad q_{n_2}^{(k)} = k_e c_{2,i}^{(k)}, \quad (21)$$

$$\bar{\chi}_j^{(k)} = \frac{1}{1 + \frac{h_2 |\tilde{r}_j^{(k)}|}{2D_0}} = 1 - \frac{h_2 |\tilde{r}_j^{(k)}|}{2D_0} + O(h_2^2), \quad \tilde{r} = \frac{2}{r},$$

$$\tau' = D_0 \tau, \quad \tilde{r} = \tilde{r}_+ + \tilde{r}_-, \quad \tilde{r}_+ = \frac{-\tilde{r} + |\tilde{r}|}{2} \geq 0,$$

$$\tilde{r}_- = \frac{-\tilde{r} - |\tilde{r}|}{2} \leq 0.$$

Запишемо різницеву схему (20), (21) в такому вигляді:

$$\begin{cases} a_j^3 q_{j-1}^{(k+1)} - \bar{c}_j^3 q_j^{(k+1)} + b_j^3 q_{j+1}^{(k+1)} = -q_j^{(k)}, \\ q_0^{(k+1)} = \mu_1^3 q_1^{(k+1)} + \mu_2^3, \\ q_{n_2}^{(k+1)} = \mu_3^3 q_{n_2-1}^{(k+1)} + \mu_4^3, \end{cases} \quad (22)$$

де

$$a_j^3 = \tau' \left(\frac{\bar{\chi}_j^{(k)}}{h_2^2} - \frac{\tilde{r}_-}{h_2 D_0} \right), \quad b_j^3 = \tau' \left(\frac{\bar{\chi}_j^{(k)}}{h_2^2} + \frac{\tilde{r}_+}{h_2 D_0} \right),$$

$$\bar{c}_j^3 = 1 + \tau' \left(\frac{2\bar{\chi}_j^{(k)}}{h_2^2} + \frac{1}{h_2 D_0} (\tilde{r}_+ - \tilde{r}_-) \right),$$

$$\mu_1^3 \equiv 1, \quad \mu_2^3 = 0, \quad \mu_3^3 \equiv 0, \quad \mu_4^3 \equiv 0.$$

Чисельний розв'язок різницевої схеми знаходимо методом прогонки

$$q_j^{(k+1)} = \alpha_{j+1}^3 q_{j+1}^{(k+1)} + \beta_{j+1}^3, \quad (23)$$

$$\text{де } \alpha_{j+1}^3 = \frac{b_j^3}{\bar{c}_j^3 - \alpha_j^3 a_j^3}, \quad \beta_{j+1}^3 = \frac{a_j^3 \beta_j^3 + f_j^{3,(k+1)}}{\bar{c}_j^3 - \alpha_j^3 a_j^3},$$

$$j = \overline{1, n_2 - 1}, \quad k = \overline{1, n_3}, \quad \alpha_1^3 = \mu_1^3 \equiv 1, \quad \beta_1^3 = \mu_2^3 \equiv 0.$$

Скінченнорізницевий аналог закону (4) для обчислення швидкості фільтрації має наступний вигляд:

$$v_i^{(k)} = -k_i^{(k)} (c_{1,i}^{(k)}) \frac{h_{i+1}^{(k)} - h_{i-1}^{(k)}}{2h_1} + (v_c)_i^{(k)} (c_{1,i}^{(k)}) \frac{c_{1,i+1}^{(k)} - c_{1,i-1}^{(k)}}{2h_1}, \quad (24)$$

$$i = \overline{1, n_1 - 1}, \quad k = \overline{1, n_3}.$$

5. Програма реалізація. В якості інструментальних комп'ютерних засобів для дослідження вищенаведеної математичної моделі і проведення комп'ютерного моделювання було використано кросплатформенний фреймворк Qt

[17]. Поєднання даного фреймворка і методології об'єктно-орієнтованого програмування дозволило ворити інтелектуальний інтерфейс для чисельного моделювання процесу вертикальної міграції радіонуклідів. Під час роботи даної програми користувач легко маніпулює вихідними даними (коефіцієнтами дифузії, крайовими умовами тощо), виконує необхідні обчислення і отримує 2D/3D графіки та таблиці значень концентрацій $c_1(x,t)$, $c_2(x,t)$, $q(x,r,t)$ по області фільтрації з часом. Усі отримані значення легко імпортуються у файли поширених форматів для подальшої обробки.

6. Результати чисельних експериментів.

Як приклад, розглянуто задачу локалізації радіонуклідів протягом 2 років з такими вихідними параметрами:

$$l = 10\text{ м}, \quad \tilde{H}_1 = 1\text{ м}, \quad \tilde{H}_2 = 0\text{ м}, \quad \nu = 2,8 \cdot 10^{-5} \frac{\text{м}^3}{\text{кг} \cdot \text{доба}},$$

$$\sigma_1 = 0,4, \quad \tau = 30 \text{ діб}, \quad \gamma_1 = \gamma_2 = 0,0065, \quad k_e = 1,$$

$$R = 5 \cdot 10^{-5} \text{ м}, \quad D_1 = 2 \cdot 10^{-4} \frac{\text{м}^2}{\text{доба}}, \quad D_2 = 1 \cdot 10^{-5} \frac{\text{м}^2}{\text{доба}},$$

$$D_0 = 2 \cdot 10^{-6} \frac{\text{м}^2}{\text{доба}}, \quad \tilde{C}_1(t) = 5 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}, \quad \tilde{C}_2(t) = 0 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3},$$

$$\tilde{C}_1^1(t) = 5 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}, \quad \tilde{C}_2^2(t) = 0 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}, \quad \tilde{C}_1^0(x) = 5 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3},$$

$$\tilde{C}_2^0(x) = 5 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}, \quad \tilde{Q}^0(x,r) = 0 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}.$$

Проведено серію чисельних експериментів, результати яких наведені у вигляді графіків.

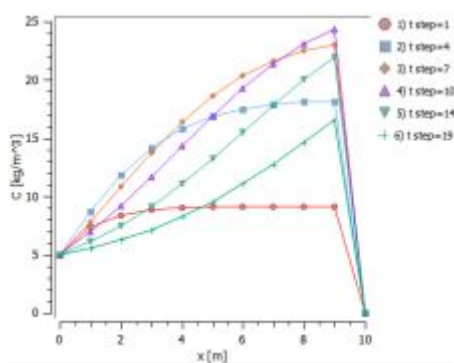


Рис.2. Розподіл концентрації $c_1(x)$ від глибини шару ґрунту x без врахування дифузії радіонуклідів у частинках радіусу R при різних часових кроках:

- 1) $t = 30 \text{ діб}$, 2) $t = 4 \text{ міс.}$, 3) $t = 7 \text{ міс.}$,
- 4) $t = 10 \text{ міс.}$, 5) $t = 14 \text{ міс.}$, 6) $t = 19 \text{ міс.}$

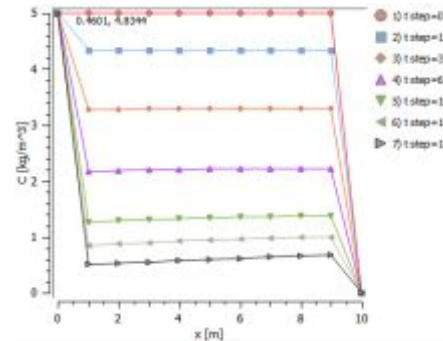


Рис.3. Розподіл концентрації $c_2(x)$ від глибини шару ґрунту x без врахування дифузії радіонуклідів у частинках радіусу R при різних часових кроках:

- 1) $t = 0 \text{ діб}$, 2) $t = 1 \text{ міс.}$, 3) $t = 3 \text{ міс.}$,
- 4) $t = 6 \text{ міс.}$, 5) $t = 10 \text{ міс.}$, 6) $t = 14 \text{ міс.}$,
- 7) $t = 17 \text{ міс.}$

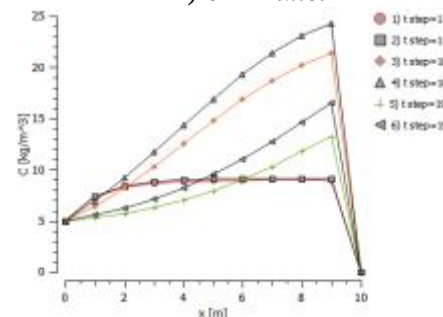


Рис.4. Порівняльні розподіли концентрацій $c_1(x)$ від глибини шару ґрунту x без врахування дифузії радіонуклідів у частинках радіусу R (графіки 1, 3 та 5) та з їх врахуванням (графіки 2, 4 та 6) при різних часових кроках:

- 1) $t = 30 \text{ діб}$, 2) $t = 4 \text{ міс.}$, 3) $t = 7 \text{ міс.}$,
- 4) $t = 10 \text{ міс.}$, 5) $t = 14 \text{ міс.}$, 6) $t = 19 \text{ міс.}$

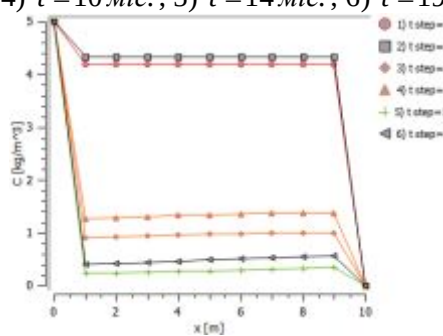


Рис.5. Порівняльні розподіли концентрацій $c_2(x)$ від глибини шару ґрунту x без врахування дифузії радіонуклідів у частинках радіусу R (графіки 1, 3 та 5) та з їх врахуванням (графіки 2, 4 та 6) при різних часових кроках:

- 1) $t = 0 \text{ діб}$, 2) $t = 1 \text{ міс.}$, 3) $t = 3 \text{ міс.}$,
- 4) $t = 6 \text{ міс.}$, 5) $t = 10 \text{ міс.}$, 6) $t = 14 \text{ міс.}$,
- 7) $t = 17 \text{ міс.}$

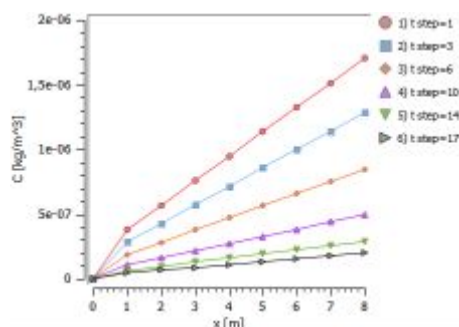


Рис.6. Розподіл концентрації $q(r)$ від радіусу частинки r при $x=1\text{м}$ при різних часових кроках: 1) $t=0$ дб, 2) $t=1\text{міс.}$, 3) $t=3\text{міс.}$, 4) $t=6\text{міс.}$, 5) $t=10\text{міс.}$, 6) $t=14\text{міс.}$, 7) $t=17\text{міс.}$

7. Висновки. В роботі сформульовано постановку та побудовано математичну модель вертикальної міграції радіонуклідів в горизонтальному шарі ґрунту великої

протяжності. Шар ґрунту містить частинки біпористої структури і представляє собою каталітичне пористе середовище при наявності фільтрів-вловлювачів. Чисельний розв'язок знайдено методом скінченних різниць. Здійснено програмну реалізацію поставленої крайової задачі. Отримано графіки розподілів концентрацій $c_1(x,t)$, $c_2(x,t)$, $q(x,r,t)$.

Провівши чисельні експерименти та проаналізувавши отримані графіки, стає очевидним ефективний вплив мікрочастинок на швидкість міграції радіонуклідів. Зокрема, як видно з рис. 4, при наявності мікрочастинок процес фільтраційного очищення шару родючого ґрунту відбувається швидше і родючий шар ґрунту стає більш придатним до використання за менший проміжок часу.

Список використаних джерел

1. Клименко О.М. Екологічні проблеми виробництва сільськогосподарської продукції на забруднених радіонуклідами землях / О.М. Клименко, Л.В. Клименко, Н.В. Кирильчук // Вісник Національного університету водного господарства та природокористування. – 2009. – Випуск 3 (47). – С.38–46.
2. Веригин Н.Н. Диффузия и массообмен при фильтрации жидкостей в пористых средах / Н.Н. Веригин, Б.С. Шержуков // Развитие исследований по теории фильтрации в СССР (1917-1967). – 1969. – С.237–313.
3. Сергиенко И.В. Математическое моделирование и исследование процессов в неоднородных средах / И.В. Сергиенко, В.В. Скопецкий, В.С. Дейнека. – Київ: Наукова думка, 1991. – 432 с.
4. Ляшко И.И. Численное решение задач тепло- и массопереноса в пористых средах / И.И. Ляшко, Л.И. Демченко, Г.Е. Мистецкий. – Киев: Наук. Думка, 1991. – 264 с.
5. Ляшко С.И. Оптимизация и математическое моделирование массопереноса подземных вод / С.И. Ляшко. – Киев: Наук. Думка, 1998. – 256 с.
6. Власюк А.П. Числовые моделирования миграции радионуклидов при горизонтальной фильтрации подземных вод / А.П. Власюк, О.П. Остапчук // Тез. доп. Міжнародної школи-семінару «Прогнозування та прийняття рішень в умовах невизначеності». – 2006. – С.180–181.

References

1. KLYMENKO, O.M., L.V. KLYMENKO, and N.V. KYRYLCHUK (2009) *Ekologichni problemy vyrobnytstva silskohospodarskoi produktsii na zabrudnennykh radionuklidamy zemliakh*. Visnyk Natsionalnoho universytetu vodnoho hospodarstva ta pryrodokorystuvannia. Vypusk 3 (47), p.38-46.
2. VERIGIN, N. N., and B. S. SHERZHUKOV (1969) *Diffuziya i massoobmen pri filtratsii zhidkostey v poristyyh sredah*. Razvitie issledovaniy po teorii filtratsii v SSSR (1917-1967). p.237-313.
3. SERGIENKO, I. V., SKOPETSKIY V. V., and DEYNEKA V. S. (1991) *Matematicheskoe modelirovanie i issledovanie protsessov v neodnorodnykh sredah*. Kiev: Naukova dumka.
4. LYASHKO, I.I, L.I. DEMCHENKO, and G.E. MISTETSKIY, eds. (1991) *Chislennoe reshenie zadach teplo- i massoperenosa v poristyyh sredah*. Kiev: Naukova dumka.
5. LYASHKO S.I. (1998) *Optimizatsiya i matematicheskoe modelirovanie massoperenosa podzemnykh vod*. Kiev: Naukova dumka.
6. VLASIUK, A. P., and O. P. OSTAPCHUK (2006) *Chyslove modeliuvannia mihratsii radionuklidiv pry horyzontalnii filtratsii pidzemnykh vod*. Tez. dop. Mizhnarodnoi shkoly-seminaru «Prohnozuvannia ta priyniattia rishen v umovakh nevyznachenosti», p.180-181.

7. Прохоров В.М. Миграция радиоактивных загрязнений в почвах. (ред. Алексахин Р.М.) / В.М. Прохоров: Энергоиздат, 1981. – 99 с.
8. Бурак Я.І. Вихідні положення математичної моделі гетеродифузного переносу радіонуклідів у приповерхневих шарах Землі / Я.І. Бурак, Є.Я. Чапля // Доп. НАН України. – 1993. – Т.10. – С.59–63.
9. Клименко О. Машина для внесення меліорантів в рідкому стані / О. Клименко // Вісник Рівненського державного технічного університету. Збірник наукових праць. Випуск 1 (3). – 2000. – С.161–166.
10. Ruckenstein E. Sorption by solids with bidisperse pore structures / E. Ruckenstein, A. Vaidyanathan, G. Youngquist // Chemical Engineering Science. – 1971. – Т.26, №9. – С.1305–1318.
11. Conner W.C. Fluid transport in nanoporous materials / W.C. Conner, J.P. Fraissard. – Dordrecht, the Netherlands: Springer in cooperation with NATO Public Diplomacy Division, 2006. – 685 с.
12. Петрик М. Математичне моделювання адсорбційного нелінійного масопереносу в каталітичних пористих середовищах / М. Петрик, Д.М. Михалик // Вісник ТДТУ ім. І. Пулюя. – 2009. – Т.4. – С.193–198.
13. Власюк А.П. Математичне моделювання вертикальної міграції радіонуклідів у каталітичному пористому середовищі / А.П. Власюк, В.В. Жуковський // Тез. XIV Міжнар. наук. конф. ім. академіка М.Кравчука. – 2012. – С.111.
14. Самарский А.А. Теория разностных схем: Учеб. пособие для вузов по спец. "Прикл. математика" / А.А. Самарский. – Москва: Наука, 1989. – 616 с.
15. Власюк А.П. Монотонна різницева схема для нелінійного одновимірного рівняння параболічного типу, що містить першу похідну / А.П. Власюк, О.П. Остапчук, О.М. Степанченко // Вісник Київського університету. Сер. фіз.-мат. наук. – 2005. – Вип. 2. – С.188.
16. Демидович Б.П. Численные методы анализа / Б.П. Демидович, И.А. Марон, Э.З. Шувалова: Наука, 1967. – 368 с.
17. Евеньевич Ш. Qt4.8. Профессиональное программирование на C++ / Ш. Евеньевич. – Санкт-Петербург: БХВ-Петербург, 2012. – 894 с.
7. PROHOROV, V. M. (1981) *Migracija radioaktivnyh zagriznenij v pochvah.* (red. Aleksahin R.M.): Jenergoizdat.
8. BURAK, Ia. I., and Ie. Ia. CHAPLIA (1993) *Vykhidni polozhennia matematychnoi modeli heterodyfuznoho perenosu radionuklidiv u prypoverkhnevyykh sharakh Zemli.* Dop. NAN Ukrainy, 10, p.59-63.
9. KLYMENKO, O.M. (2000) *Mashyna dlia vnesennia meliorantiv v ridkomu stani.* Visnyk Rivnenskoho derzhavnoho tekhnichnoho universytetu. Zbirnyk naukovykh prats. Vypusk 1 (3), p.161-166.
10. RUCKENSTEIN, E., A.S. VAIDYANATHAN, and G.R. YOUNGQUIST (1971) *Sorption by solids with bidisperse pore structures.* Chemical Engineering Science, 26(9), p.1305-1318.
11. CONNER, Wm. Curtis and Jacques P. FRAISSARD (2006) *Fluid transport in nanoporous materials.* Dordrecht, the Netherlands: Springer in cooperation with NATO Public Diplomacy Division. NATO science series. II, Mathematics, physics, and chemistry. v. 219. 1-4020-4380-5.
12. PETRYK, M.R., and D. M. MYKHALYK (2009) *Matematychnie modeliuвання adsorbtsiinoho nelineinoho masoperenosu v katalitychnyykh porystykh seredovyshchakh.* Visnyk TDTU im. I. Puliuia, 4, p.193-198.
13. VLASIUK, A. P., and V. V. ZHUKOVSKYI (2012) *Matematychnie modeliuвання vertykalnoi mihratsii radionuklidiv u katalitychnomu porystomu seredovyshchi.* Tez. XIV Mizhnar. nauk. konf. im. akademika M.Kravchuka, p.111.
14. SAMARSKIY, A. A. (1989) *Teoriya raznostnykh shem: Ucheb. posobie dlja vuzov po spec. "Prikl. matematika".* Moskva: Nauka. 9785020145764.
15. VLASIUK, A. P., O. P. OSTAPCHUK, and O. M. STEPANCHENKO (2005) *Monotonna riznytseva skhema dlia nelineinoho odnovymirnoho rivniannia parabolichnoho typu, shcho mistyt pershu pokhidnu.* Visnyk Kyivskoho universytetu. Ser. fiz.-mat. nauk., Vyp. 2., p.188.
16. DEMIDOVICH, B. P., MARON I. A., and SHUVALOVA Je. Z. (1967) *Chislennyye metody analiza:* Nauka.
17. EVGEN'EVICH, Sh.M. (2012) *Qt4.8. Professional'noe programmirovanie na C++.* Sankt-Peterburg: BHV-Peterburg. 9785977507363.

Надійшла до редколегії 30.10.2014

УДК 519.7

Галкін О. А., к.ф.-м.н.

Вибір смуги пропускання на основі ядерної оцінки щільності розподілу

Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, пр-т.
Академіка Глушкова 4д,
e-mail: oleksandr.galkin@mail.ru

O. A. Galkin, Candidate of Physico-mathematical Sciences

The bandwidth selection based on kernel density estimate of distribution

Taras Shevchenko National University of Kyiv,
03680, Kyiv, Glushkova st., 4d,
e-mail: oleksandr.galkin@mail.ru

Стаття присвячена дослідженню процедури вибору смуги пропускання з використанням класифікатора на основі ядерної оцінки щільності розподілу. Запропонований метод вибору смуги пропускання використовує нормальну апроксимацію певних ймовірностей, замість необроблених емпіричних пропорцій. Встановлено, що середній коефіцієнт помилкової класифікації для класифікатора на основі ядерної оцінки щільності розподілу асимптотично прямує до відповідного коефіцієнта для лінійного дискримінантного правила.

Ключові слова: класифікатор, ядерна оцінка, перехресна перевірка.

The article is devoted to research the bandwidth selection procedure using a classifier based on kernel density estimate of distribution. The proposed method of bandwidth selection uses a normal approximation of certain probabilities rather than raw empirical proportions. It has been shown that the methods of the Z-fold cross-validation type often do not lead to a unique optimal choice of bandwidth is mainly due to a stepwise function as forms of payment error curve with multiple minima. It was found that in some cases the kernel density estimate based on probability of misclassification can lead to high performance. Since the kernel density estimate of distribution is the average of independent and identically distributed random variables, approximate normal distribution is performed very efficiently with a high degree of accuracy for large samples. It was received smooth curve estimation errors that have a unique minimum, where curves of true average probability of misclassification are higher than the curves of Z-fold cross-validation.

Key Words: classifier, kernel estimate, cross-validation.

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Анісімов А.В.

Вступ

Як відомо, у випадку, коли апіорні ймовірності для різних комплексів не є рівними, необхідно проводити ретельний вибір смуги пропускання для того, щоб забезпечити високу продуктивність класифікаторів на основі ядерної оцінки щільності розподілу.

На рис. 1-2 відображено межі класу для двокласової задачі, включаючи сферично-симетричні двовимірні нормальні комплекси з одиничною дисперсією та параметрами локалізації (0,0) та (2,0) для двох класів. Штрихпунктирна лінія відображає межу класу для звичайного лінійного дискримінантного аналізу, а неперервна суцільна лінія - межу класифікатора на основі ядерної оцінки щільності розподілу, де

оптимальна смуга пропускання S для класифікації використовується для оцінки щільностей двох комплексів. Оскільки розподіли комплексів є сферично-симетричними та задовольняють модель зсуву, лінійний дискримінантний аналіз виконується практично ідеально, однак у всіх прикладах методи ядра також мають високу продуктивність.

Коли апіорні ймовірності для двох комплексів є різними (0.7 та 0.3 відповідно), межі класу для двох методів здаються досить різними, однак у випадку рівних апіорних ймовірностей вони, як правило, є однією розділяючою лінією зі збільшеним розміром вибірки.

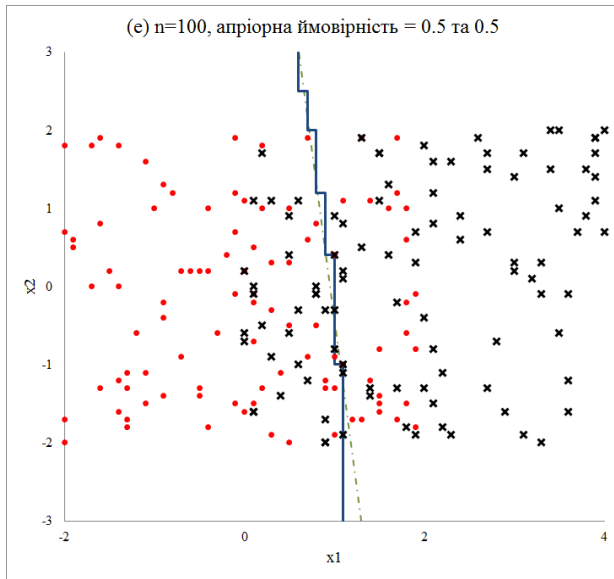


Рис. 1 Ядерний та лінійний класифікатор (межі класифікації: 1 експеримент)

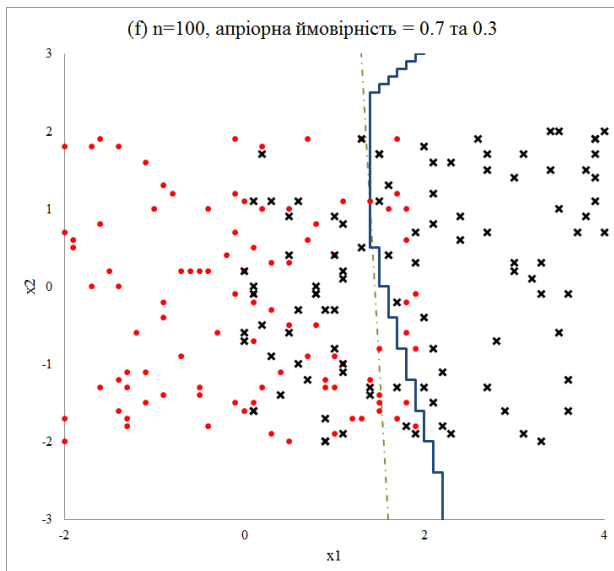


Рис. 2 Ядерний та лінійний класифікатор (межі класифікації: 2 експеримент)

Коли апіорні ймовірності є рівними, при такому сферично-симетричному налаштуванні показник помилкової класифікації для певної фіксованої смуги пропускання класифікатора асимптотично сходиться до оптимального бійсєвського ризику (що є таким, як і частота помилок звичайного лінійного класифікатора). На рис. 3-4 відображено межі класу для двох таких класифікаторів (де $S=1$ та $S=3$) у випадку рівних апостеріорних ймовірностей.

Як можна побачити з наведених рисунків, із зростанням об'єму вибірки межі класу для ядерних класифікаторів сходяться до

розділювальної лінії, отриманої за допомогою звичайного лінійного дискримінантного аналізу.

Для проблеми ядерної оцінки щільності розподілу існує безліч різних підходів щодо вибору смуги пропускання. Незважаючи на те, що дані підходи є досить ефективними для отримання невеликої середньо-квадратичної інтегрованої помилки для оцінки щільності, вони можуть бути невідповідними для обробки задач класифікації.

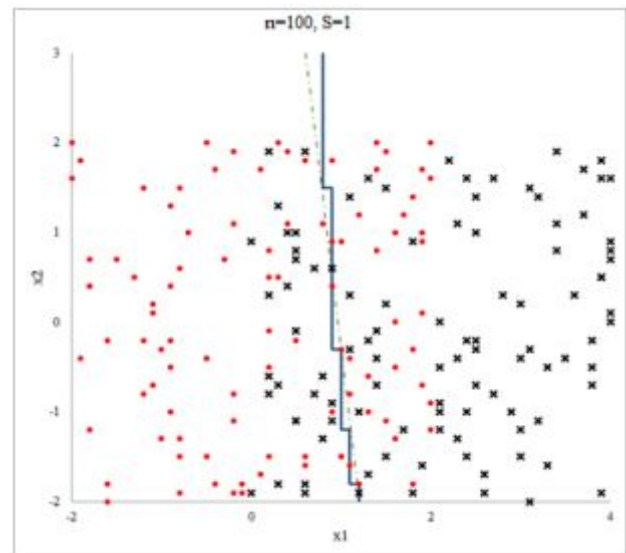


Рис. 3 Ядерний та лінійний класифікатор (межі класифікації для фіксованих смуг пропускання: 1 експеримент)

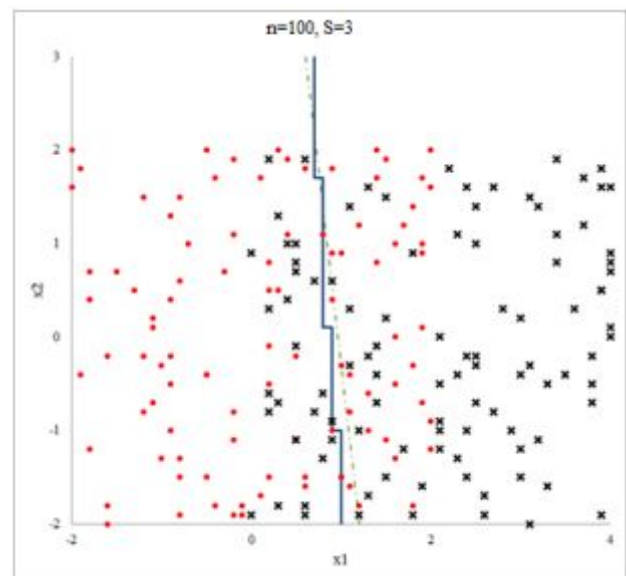


Рис. 4 Ядерний та лінійний класифікатор (межі класифікації для фіксованих смуг пропускання: 2 експеримент)

Як уже було зазначено, інші відомі методи такі, як Z-кратний метод перехресної перевірки,

також мають деякі суттєві обмеження. На рис. 5-8 показано ефективність таких методів перехресної перевірки для проблем нормальних комплексів з нерівними апіорними ймовірностями.

Оцінені Ξ -функції знову стають ступінчастими функціями з багатьма мінімумами як для методу пропуску, так і для 10-кратного методу перехресної перевірки.

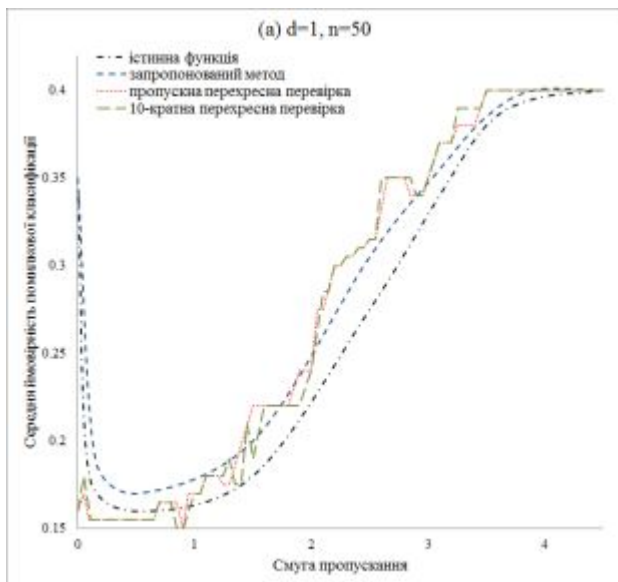


Рис. 5 Середні ймовірності помилкової класифікації (1 експеримент)

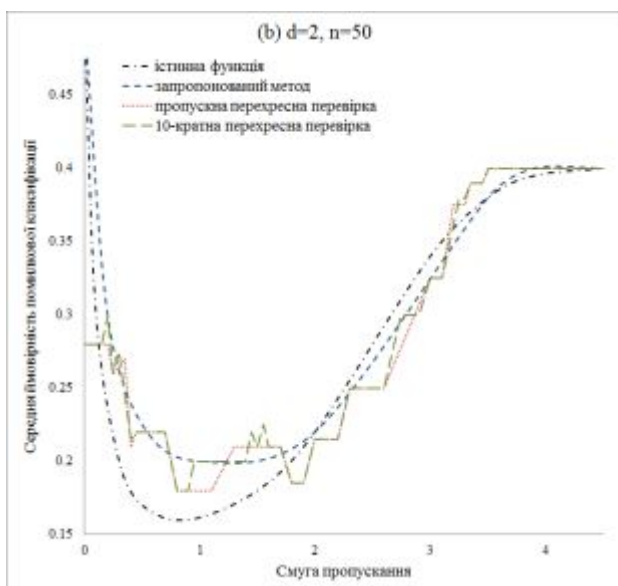


Рис. 6 Середні ймовірності помилкової класифікації (2 експеримент)

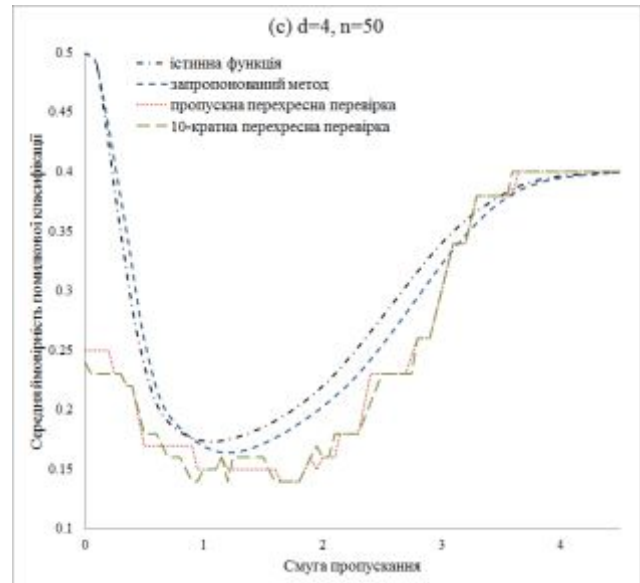


Рис. 7 Середні ймовірності помилкової класифікації (3 експеримент)

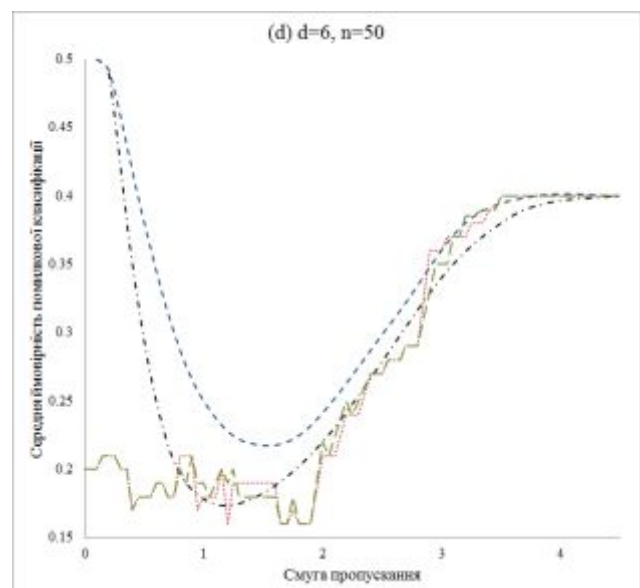


Рис. 8 Середні ймовірності помилкової класифікації (4 експеримент)

Виклад основного матеріалу

Далі запропоновано та досліджено процедуру вибору смуги пропускання з використанням класифікатора на основі ядерної оцінки щільності розподілу. В L -класовій дискримінантній задачі, якщо використовується L різних смуг пропускання $S_1, S_2, \dots, S_L$ для L комплексів, усереднена ймовірність помилкової класифікації знаходиться, як

$$\begin{aligned}\Xi(S_1, S_2, \dots, S_L) &= \\ &= \sum_{l=1}^L \pi_l \int P\left\{\pi_l \hat{f}_{lS_l}(x) \leq \pi_i \hat{f}_{iS_l}(x) \text{ для деяких } i \neq l\right\} f_l(x) dx = \\ &= 1 - \sum_{l=1}^L \pi_l \int P\left\{\pi_l \hat{f}_{lS_l}(x) > \pi_i \hat{f}_{iS_l}(x) \text{ для всіх } i \neq l\right\} f_l(x) dx = \\ &= 1 - \sum_{l=1}^L \pi_l \int \left[\prod_{i \neq l} P\left\{\pi_l \hat{f}_{lS_l}(x) < u\right\} g_{iS_l}(u) du \right] f_l(x) dx\end{aligned}$$

де $g(\cdot)$ є функцією щільності ймовірностей $\pi_l \hat{f}_{lS_l}(x)$. Ймовірнісна функція $P(\cdot)$ не має виразу замкнутої форми. Однією з можливостей є використання таких методів передискретизації, як метод початкового завантаження для оцінки ймовірності [1-2]. Однак, у такому випадку для обчислення ймовірності помилкової класифікації в будь-якій точці даних, вибірки початкового завантаження повинні бути згенеровані за допомогою методу пропуску, а для різних точок даних необхідно використовувати різні вибірки початкового завантаження. В результаті, складність алгоритму істотно зростає, а даний приріст є лінійним у вибірках початкового завантаження. Загалом, велика кількість вибірок початкового завантаження потребує отримання надійної оцінки для функції ймовірності, що на практиці робить використання апроксимації початкового завантаження досить складним, а іноді неможливим.

Для великих вибірок можна використовувати нормальну апроксимацію розподілу ядерних оцінок щільності, а оскільки ядерна оцінка щільності розподілу є середнім значенням незалежних та однаково розподілених випадкових величин, в такій апроксимації не буде великих втрат точності. Нехай $\mu_{lS_l}(x)$ та $s_{lS_l}^2(x)$ є, відповідно, середнім значенням та дисперсією $\hat{f}_{lS_l}(x)$, $(l=1, 2, \dots, L)$. Тоді, усереднена ймовірність помилкової класифікації може бути апроксимована функцією такого вигляду:

$$\begin{aligned}\psi(S_1, S_2, \dots, S_L) &= \\ &= 1 - \sum_{l=1}^L \pi_l \int \left[\prod_{i \neq l} \Phi \left\{ \frac{u - \pi_i \mu_{iS_i}(x)}{\pi_i s_{iS_i}(x)} \right\} \cdot \phi \left\{ u, \pi_l \mu_{lS_l}(x), \pi_i s_{iS_i}(x) \right\} du \right] f_l(x) dx,\end{aligned}$$

де $\Phi(\cdot)$ є кумулятивною функцією стандартного нормального розподілу, а $\phi(\cdot, \mu, s)$ - функцією щільності ймовірностей нормального розподілу з

середнім значенням μ та стандартним відхиленням s .

Теорема 1. Припустимо, що $n_1, n_2, \dots, n_L$ ($N = \sum n_l$) є розмірами навчальної вибірки з L комплексів, а $S_{n_1}, S_{n_2}, \dots, S_{n_L}$ - смугами пропускання, що використовуються в ядерних оцінках щільності розподілу комплексів $f_1, f_2, \dots, f_L$, відповідно. Крім того, припустимо, що щільності $f_1, f_2, \dots, f_L$ обмежені третіми похідними, а ядро K є обмеженим та симетричним відносно 0, що задовольняє умову $\int \|y\|^3 K^2(y) dy < \infty$. Для кожного $l \in \{1, 2, \dots, L\}$, коли $N \rightarrow \infty$, ми також припускаємо, що

(1) $S_{n_l} \rightarrow 0$ та $S_{n_l} / S_{n_i} \rightarrow C_{li} > 0$ для всіх i ,

(2) $n_l S_{n_l}^d \rightarrow \infty$,

(3) $n_l / N \rightarrow \lambda_l$ таке, що $0 < \lambda_l < 1$.

Тоді, при $N \rightarrow \infty$,

$$\left| \Xi(S_{1n_1}, S_{2n_2}, \dots, S_{Ln_L}) - \psi(S_{1n_1}, S_{2n_2}, \dots, S_{Ln_L}) \right| \rightarrow 0,$$

а $\Xi(S_{1n_1}, S_{2n_2}, \dots, S_{Ln_L})$ та $\psi(S_{1n_1}, S_{2n_2}, \dots, S_{Ln_L})$ мають тенденцію до оптимального байєсівського ризику.

Таким чином, якщо проводиться мінімізація $\psi(S_1, S_2, \dots, S_L)$ по відношенню до $S_1, S_2, \dots, S_L$, можна отримати правило класифікації на основі ядерної оцінки щільності розподілу з асимптотичною середньою ймовірністю помилкової класифікації, що дорівнює оптимальному байєсівському ризику при відповідних умовах регулярності.

На практиці є неможливим обчислення ψ , оскільки воно включає в себе невідомі щільності комплексів. Замість цього, ми переходимо до його вибіркового аналога:

$$\begin{aligned}\psi_N(S_1, S_2, \dots, S_L) &= \\ &= 1 - \sum_{l=1}^L \frac{\pi_l}{n_l} \sum_{n=1}^{n_l} \left[\prod_{i \neq l} \Phi \left\{ \frac{u - \pi_i \mu_{iS_i}(x_{lk})}{\pi_i s_{iS_i}(x_{lk})} \right\} \cdot \phi \left\{ u, \pi_l \mu_{lS_l}(x_{lk}), \pi_i s_{iS_i}(x_{lk}) \right\} du \right],\end{aligned}$$

де $x \in k$ -м спостереженням l -го класу. Вирази $\mu_{lS_l}(x_{lk})$ та $s_{lS_l}^2(x_{lk})$, що з'являються у верхньому виразі можуть бути оцінені лише з наявних даних. У даному дослідженні для них було застосовано оцінки з використанням ядерних оцінок щільності розподілу комплексів, де було встановлено, що такі оцінки

дають досить хороші результати. Для ядерних оцінок щільності було використано звичайний метод найменших квадратів на основі перехресної перевірки [3-4], що полягає в мінімізації середньо-квадратичної інтегрованої помилки ядерної оцінки щільності розподілу для вибору смуг пропускання. Оскільки у розрахунковій частині дослідження було використано нормальні ядра, ми отримали вирази замкнутої форми для оцінок $\mu_{IS_l}^*(x_{lk})$ та $s_{IS_l}^{*2}(x_{lk})$ від $\mu_{IS_l}(x_{lk})$ та $s_{IS_l}^2(x_{lk})$, відповідно. Це призвело до подальшої апроксимації $\psi_N(S_1, S_2, \dots, S_L)$ функцією $\psi_N^*(S_1, S_2, \dots, S_L)$, де

$$\psi_N^*(S_1, S_2, \dots, S_L) = 1 - \sum_{l=1}^L \frac{\pi_l}{n_l} \sum_{k=1}^{n_l} \left[\int \prod_{i \neq l} \Phi \left\{ \frac{u - \pi_i \mu_{IS_i}^*(x_{lk})}{\pi_i s_{IS_i}^*(x_{lk})} \right\} \cdot \phi \left\{ u, \pi_l \mu_{IS_l}^*(x_{lk}), \pi_l s_{IS_l}^*(x_{lk}) \right\} du \right]$$

Інтеграл, що фігурує у верхньому виразі може бути чисельно оцінений без особливих складнощів та зі значною мірою точності. Для обчислення оцінок $\mu_{IS_l}^*(x_{lk})$ та $s_{IS_l}^*(x_{lk})$ було використано стратегію пропуску, а вектор x не був використаний у відповідній ядерній оцінці щільності. Дані оцінки мають такий вигляд:

$$\mu_{IS_l}^*(x_{lk}) = \frac{1}{n_l - 1} \sum_{\substack{t=1 \\ t \neq k}}^{n_l} \phi_d(x_{lk}, x_{lt}, \{S_l^2 + S_{ol}^2\} I_d)$$

та

$$s(x) = \frac{1}{n-1} \left[\left(\frac{1}{4\pi S} \right) \left\{ \frac{1}{n-1} \phi(x, x, \{0.5S + S\}I) \right\} - \mu(x) \right],$$

де

$$\phi_d(x, \mu, \Sigma) = (2\pi)^{-d/2} |\Sigma|^{-1/2} \exp\{-(x - \mu)' \Sigma^{-1} (x - \mu / 2)\},$$

а S_{ol} є смугою пропускання, що мінімізує оцінену середньо-квадратичну інтегровану помилку ядерної оцінки щільності розподілу l -го комплексу. Для обчислення $\mu_{IS_i}^*(x_{lk})$ та $s_{IS_i}^{*2}(x_{lk})$ ($i \neq l$) використовуються майже ідентичні формули за винятком того, що сума поширюється на всі $1 \leq t \leq n_i$ (тобто не залишається жодних

спостережень), а фактор $1/(n_l - 1)$ замінюється на $1/n_i$.

Слід зазначити, що на відміну від ступінчастої функції, отриманої за допомогою Z -кратного методу перехресної перевірки, $\psi_N^*(S_1, S_2, \dots, S_L)$ є гладкою функцією, де пропонується мінімізувати її по $S_1, S_2, \dots, S_L$ для знаходження оптимальних смуг пропускання. У всіх розглянутих прикладах було виведено ψ_N^* -функцію для $S_1 = S_2$ разом з відповідними 10-кратними та N -кратними (пропускними) перехресними функціями, а також істинні середні ймовірнісні функції помилкової класифікації. Зазначимо, що оскільки розглядалися лише моделі з нормальним розподілом, де два різних комплекси були лише зсувами локалізації один одного, загальний вибір смуги пропускання для різних комплексів був цілком виправданим, що значно скоротило час обчислень. Цілком зрозуміло з графіків, що запропонована цільова функція (критерій) вибору оптимальної смуги пропускання для класифікації є досить показовим результатом у всіх прикладах і є помітно ефективнішою, ніж 10-кратний та N -кратний перехресний критерій [5-7].

Результати практичних експериментів

Далі ми звітуємо про деякі результати експериментальних досліджень, що демонструють ефективність запропонованого методу.

Спочатку почнемо з деяких двокласових задач з нормально розподіленими комплексами, що відрізняються лише за своїми параметрами локалізації. Для спрощення прикладів, було взято $\sum_1 = \sum_2 = I$ та вибрано параметри локалізації μ_1 та μ_2 таким чином, що вони відрізняються лише за своїми першими координатами. Дана різниця μ береться в експериментах як 1, 2 та 3. Для кожного з цих прикладів було згенеровано 100 множин спостережень з вибірками однакових розмірів (50, або 100) з обох класів. Оскільки істинні щільності є відомими, можна обчислити істинний оптимум, що мінімізує середньо-квадратичну інтегровану помилку S_o та мінімізує середню ймовірність помилкової класифікації S_* . Методи пропуску та 10-кратної перехресної перевірки залежать від проблеми наявності множини мінімумів при оцінці Ξ -функцій. Це ускладнює вибір оптимальної смуги пропускання на основі такого критерію. В таких випадках можна розглянути смугу пропускання, що є

найбільшою серед мінімальних та позначити смуги пропускання, отримані за допомогою методів пропуску та 10-кратної перехресної перевірки як S_+ та $S_+^{(10)}$, відповідно. Істинні Ξ значення було виведено для $S_\circ$ та S_* . Оптимальні байєсівські похибки також були виведені для полегшення порівняльного аналізу. Запропонований метод показав відмінну ефективність та досяг майже істинного оптимального значення середніх показників помилкової класифікації. Методи на основі перехресної перевірки показали кращі результати, ніж $S_\circ$, однак вони не відповідають ефективності запропонованої нами процедури вибору смуги пропускання. Оскільки було розглянуто середні ймовірності помилкової класифікації, запропонований нами вибір смуги пропускання має невелику перевагу над методами на основі перехресної перевірки, але з точки зору узгодженості істотно перевершує S_+ та $S_+^{(10)}$. Було встановлено, що дані технології на основі перехресної перевірки допускають значно більших стандартних помилок у порівнянні із

запропонованим методом вибору смуги пропускання.

Висновки

Підводячи підсумки викладеного матеріалу, слід зазначити, що для великих смуг пропускання середній коефіцієнт помилкової класифікації для класифікатора на основі ядерної оцінки щільності розподілу асимптотично прямує до відповідного коефіцієнта помилкової класифікації для лінійного дискримінантного правила, що є оптимальним при деяких припущеннях щодо базових щільностей комплексів. Оскільки ядерна оцінка щільності розподілу є середнім значенням незалежних та однаково розподілених випадкових величин, нормальна апроксимація її розподілу була виконана досить ефективно з дуже високим ступенем точності для великих, або навіть дуже великих розмірів вибірок. Запропонований метод вибору смуги пропускання істотно використав це за допомогою нормальної апроксимації певних ймовірностей, замість необроблених емпіричних пропорцій.

Список використаних джерел

1. Efron B. The Jackknife, the Bootstrap and Other Resampling Plans / B. Efron. – SIAM, Philadelphia, 1982. – 100 p.
2. Efron B. An Introduction to Bootstrap / B. Efron, R Tibshirani. – New York: Chapman and Hall, 1993.
3. Hall P. Large sample optimality of least squares cross validations in density estimation / P. Hall // The Annals of Statistics. – 1983. – 11. – P.1156-1174.
4. Silverman B.W. Density estimation for Statistics and Data Analysis / B.W. Silverman. – London: Chapman and Hall, 1986. – 22 p.
5. Lachenbruch P., Mickey M. Estimation of error rates in discriminant analysis / P. Lachenbruch, M. Mickey. – Technometrics. – 1968. – 10. – P. 1-11.
6. Chaudhuri P., Marron J. SiZer for exploration of structures in curves / P. Chaudhuri, J. Marron // Journal of the American Statistical Association. – 1999. – 94. – P. 807-823.
7. Chaudhuri P., Marron J. Scale space view of curve estimation / P. Chaudhuri, J. Marron // The Annals of Statistics. – 2000. – 28. – P.408-428.

References

1. EFRON, B. (1982) *The Jackknife, the Bootstrap and Other Resampling Plans*. SIAM, Philadelphia.
2. EFRON, B., TIBSHIRANI, R. (1993) *An Introduction to Bootstrap*. New York: Chapman and Hall.
3. HALL, P. (1983) Large sample optimality of least squares cross validations in density estimation. *The Annals of Statistics*. 11. p.1156-1174.
4. SILVERMAN, B.W. (1986) *Density estimation for Statistics and Data Analysis*. London: Chapman and Hall.
5. LACHENBRUCH, P. & MICKEY, M. (1968) Estimation of error rates in discriminant analysis. *Technometrics*. 10. p.1-11.
6. CHAUDHURI, P. & MARRON, J. (1999) SiZer for exploration of structures in curves. *Journal of the American Statistical Association*. 94. p.807-823.
7. CHAUDHURI, P. & MARRON, J. (2000) Scale space view of curve estimation. *The Annals of Statistics*. 28. p.408-428.

Надійшла до редколегії 23.10.14

УДК 519.21

Ганжа Р.О., аспірант.
Лебєдєв Є.О., д.ф.-м.н., проф.

R. O. Ganzha, graduate student.
E. O. Lebedev, doctor of physical and mathematical
sciences, professor.

**Про нормалізовану відстань між
контрольною та експериментальною
вибірками**

**About normalized distance between case and
control samples**

Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 83000, м. Київ, пр-т.
Глушкова, 4д,
e-mail: ganzha.roman.alex@gmail.com
Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 83000, м. Київ, пр-т.
Глушкова, 4д,
e-mail: leb@unicyb.kiev.ua

Taras Shevchenko National University of Kyiv,
83000, Kyiv, Glushkova st., 4d,
e-mail: ganzha.roman.alex@gmail.com
Taras Shevchenko National University of Kyiv,
83000, Kyiv, Glushkova st., 4d,
e-mail: leb@unicyb.kiev.ua

В статті розглядається метод оптимізації процесу діагностики захворювань через побудову нормалізованої відстані між контрольною та експериментальною вибірками. Запропоновано алгоритм побудови нормалізованої відстані, в основі якого лежить ідея особливого використання техніки перевірки гіпотез про значущість відмінностей між контрольною та експериментальною вибірками з використанням відстані Махаланобіса та розподілу Снедекора-Фішера, для якого отримано явні формули в термінах елементарних функцій. Ці формули лягли в основу алгоритму рекурентного типу для знаходження значень розподілу. Описано використання результатів при знаходженні нормалізованої відстані між вибірками та пошуку набору факторів, оптимального для діагностики.

Ключові слова: Розподіл Фішера, нормалізована відстань, бета-розподіл, відстань Махаланобіса.

In the process of certain disease diagnosis often there is a need to find out how close case and control samples are in a particular set of their features. While selection of the most characteristic features from a complete set is an optimization problem, the task of construction of normalized distance between case and control samples must be solved prior to solving of the optimization problem.

This paper serves to reveal one approach of building an algorithm to calculate normalized distance. The basis of the proposed algorithm for constructing normalized distance is the idea of using a special technique for testing of hypotheses about the significance of differences between case and control samples using Mahalanobis distance and F-distribution. Explicit formulas in terms of elementary functions have been obtained for a distribution of interest. Based on these formulas recurrent type algorithms for finding of distribution values have been proposed. Using of results which were obtained by applying this algorithm were showed for finding the normalized distance between two samples, as well as for finding a set of factors which can be considered as optimal in diagnosis determination.

Key-words: F-distribution, normalized distance, beta distribution, Mahalanobis distance.

Статтю представив д.т.н., проф. Заславський В.А.

В процесі медичного діагностування часто виникає необхідність побудови оцінки близькості двох вибірок по деякому спільному набору їх ознак. В той час, як вибір найбільш характеристикних ознак з їх повного набору є задачею оптимізації, задача побудови нормалізованої відстані між контрольною та експериментальною вибірками має бути розв'язана до розв'язку оптимізаційної задачі.

В основі запропонованого алгоритму побудови нормалізованої відстані лежить ідея особливого використання техніки перевірки гіпотез про значущість відмінностей між контрольною та експериментальною вибірками з використанням відстані Махаланобіса та розподілу Снедекора-Фішера.

Побудуємо нормалізовану відстань, використовуючи підхід з роботи [2]. Нехай $X^{(1)}$ та $X^{(2)}$ – дві вибірки, які складають дані вимірів факторів $F_1, F_2, \dots, F_m$, в контрольній та експериментальній вибірках відповідно, $\rho(X^{(1)}, X^{(2)})$ – статистика критерію (відстань між вибірками). Через $F(x)$ позначимо функцію розподілу $\rho(X^{(1)}, X^{(2)})$.

Нормалізованою відстанню $\rho_N(X^{(1)}, X^{(2)})$ між вибірками $X^{(1)}$ і $X^{(2)}$ будемо називати

$$\rho_N(X^{(1)}, X^{(2)}) = F(\rho(X^{(1)}, X^{(2)})). \quad (1)$$

Якщо $\tilde{X}^{(1)}, \tilde{X}^{(2)}$ – реалізації вибірок $X^{(1)}, X^{(2)}$, $\tilde{\rho}_N = \rho_N(\tilde{X}^{(1)}, \tilde{X}^{(2)})$, $\tilde{\rho} = \rho(\tilde{X}^{(1)}, \tilde{X}^{(2)})$, то нормалізована відстань $\tilde{\rho}_N$ є вірогідністю того, що при повторенні експерименту будуть зустрічатись $\rho(X^{(1)}, X^{(2)})$ не більші за $\tilde{\rho}$.

Оцінка відмінності між вибірками, обрахована по формулі (1), має дві важливі властивості: 1) $\tilde{\rho}_N$ стандартизована та знаходиться в діапазоні від 0 до 1; 2) чим ближче $\tilde{\rho}_N$ до 1, тим менш вірогідна нульова гіпотеза про відсутність ефекту і тим з меншим рівнем значущості (з більшою правдоподібністю) відхиляється нульова гіпотеза згідно традиційній схемі перевірки статистичних гіпотез.

Підрахунок значень розподілу Фішера

Нагадаємо, що функція розподілу Фішера має вигляд $F_{m_1, m_2}(x) = \int_0^x f_{m_1, m_2}(t) dt$, [1]

де $f_{m_1, m_2}(t)$ – щільність, що задається наступною формулою:

$$f_{m_1, m_2}(t) = \begin{cases} \frac{\Gamma(\frac{m_1+m_2}{2}) m_1^{\frac{m_1}{2}} m_2^{\frac{m_2}{2}}}{\Gamma(\frac{m_1}{2}) \Gamma(\frac{m_2}{2})} t^{\frac{m_1}{2}-1} (m_2 + m_1 t)^{-\frac{m_2+m_1}{2}}, & t > 0 \\ 0, & t \leq 0 \end{cases}, \quad (2)$$

де $\Gamma(z) = \int_0^\infty x^{z-1} e^{-x} dx, z > 0$ – функція Ейлера

другого роду (гамма-функція).

Якщо ξ_1, ξ_2 – незалежні випадкові величини, що мають розподіл χ^2 з m_1, m_2 ступенями свободи, то випадкова величина $\xi = \frac{\xi_1/m_1}{\xi_2/m_2}$ (3) має розподіл Фішера

(F – розподіл) з (m_1, m_2) ступенями свободи.

Визначимо розподіл:

$$B_{a,b}(x) = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \int_0^x t^{a-1} (1-t)^{b-1} dt = \frac{1}{B_{a,b}(x)} \int_0^x t^{a-1} (1-t)^{b-1} dt, 0 \leq x \leq 1, a, b > 0, \quad (4)$$

де $B_{a,b}(\cdot)$ – бета-функція розподілу.

Розподіл (4) пов'язаний з розподілом Фішера наступним чином.

Лема 1. Якщо $F_{m_1, m_2}(x)$ – функція розподілу Фішера, а $B_{a,b}(x)$ – визначається за формулою (4), то

$$F_{m_1, m_2}(x) = 1 - B_{\frac{m_2}{2}, \frac{m_1}{2}}(y), \quad (5)$$

де $y = \frac{m_2}{m_2 + m_1 x}$.

Також корисними є такі властивості:

Лема 2. (Властивість симетрії).

Якщо $F_{m_1, m_2}(x)$ – функція розподілу Фішера, то

$$F_{m_1, m_2}(x) = 1 - F_{m_2, m_1}\left(\frac{1}{x}\right), \quad (6)$$

Лема 3. Якщо $B_{a,b}(x)$ визначається формулою (4), то

$$B(a,b) = \frac{1}{B(a,b)} \frac{x^a (1-x)^{b-1}}{a} + B_{a+1, b+1}(x), \quad (7)$$

де $B(a,b) = \int_0^1 x^{a-1} (1-x)^{b-1} dx$ – бета-функція.

На основі вище наведених властивостей можна довести такий результат:

Теорема 1. Якщо $F_{m_1, m_2}(x)$ – функція розподілу Фішера, а $B_{a,b}(x)$ – визначається за формулою (4), то

$$F_{m_1, m_2}(x) = 1 - B_{\frac{m_2}{2}, \frac{m_1}{2}}(y), \quad (8)$$

де:

1. При $m_1 = 2k, m_2 = 2p$:

$$B_{\frac{m_2}{2}, \frac{m_1}{2}}(y) = B_{p,k}(y) = \sum_{i=0}^{k-1} y^{p+1} (1-y)^{k-1-i} \frac{(p+k-1)!}{(p+i)!(k-1-i)!},$$

$$y = \frac{m_2}{m_2 + m_1 x};$$

2. При $m_1 = 2k, m_2 = 2p+1$:

$$B_{\frac{m_2}{2}, \frac{m_1}{2}}(y) = B_{p+\frac{1}{2}, k}(y) = \sum_{i=0}^{k-1} y^{p+\frac{1}{2}+i} (1-y)^{k-1-i} \frac{\prod_{v=1}^{p+k} \left[v - \frac{1}{2} \right]}{\prod_{\mu=1}^{p+k+1} \left[\mu - \frac{1}{2} \right] (k-1-i)!}; \quad (10)$$

3. При $m_1 = 2k+1, m_2 = 2p+1$:

$$B_{\frac{m_2}{2}, \frac{m_1}{2}}(y) = B_{p+\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}}(y) = \frac{1}{\pi} \sum_{i=0}^{k-1} y^{p+\frac{1}{2}+i} (1-y)^{k-\frac{1}{2}-i} \frac{(p+k)!}{\prod_{v=1}^{p-1} \left[v - \frac{1}{2} \right] \prod_{\mu=1}^{p+i+1} \left[\mu - \frac{1}{2} \right]} +$$

$$+ 1 - \frac{2}{\pi} \arctg(z) - \frac{2}{\pi} \sum_{i=1}^{p+k} \frac{2i}{\prod_{j=1}^i (1 - \frac{1}{2j})};$$

$$z = (y^{-1} - 1)^{\frac{1}{2}}.$$

Доведення теореми 1 отримано на основі алгоритму побудови функції розподілу Фішера з початковою ідентифікацією параметрів за одним з чотирьох випадків:

- $m_1 = 2k, m_2 = 2p$
- $m_1 = 2k, m_2 = 2p+1$
- $m_1 = 2k+1, m_2 = 2p$
- $m_1 = 2k+1, m_2 = 2p+1$.

1. Якщо $m_1 = 2k, m_2 = 2p$, то

$$y = \frac{m_2}{m_2 + m_1 x}, B_{p,k}(y) = \sum_{i=0}^{k-1} \exp\{A_i\},$$

$$A_0 = p \ln y + (k-1) \ln(1-y) + \sum_{v=1}^{k-1} \ln(1 + p/v),$$

$$A_{i+1} = A_i + \ln \left[\frac{y}{1-y} \cdot \frac{k-1-i}{p+1+i} \right], \quad i = 0, 1, \dots, k-2,$$

$$F_{m_1, m_2}(x) = 1 - B_{p,k}(y).$$

2. У випадку, якщо $m_1 = 2k, m_2 = 2p+1$, то

$$y = \frac{m_2}{m_2 + m_1 x}, B_{p+1/2, k}(y) = \sum_{i=0}^{k-1} \exp\{B_i\},$$

$$(9) \quad B_0 = (p+1/2) \ln y + (k-1) \ln(1-y) + \sum_{v=1}^{k-1} \ln(1 + \frac{p+1/2}{v}),$$

$$B_{i+1} = B_i + \ln \left[\frac{y}{1-y} \cdot \frac{k-1-i}{p+3/2+i} \right], \quad i = 0, 1, \dots, k-2,$$

$$F_{m_1, m_2}(x) = 1 - B_{p+1/2, k}(y).$$

3. Для випадку, коли $m_1 = 2k+1, m_2 = 2p$

обчислення аналогічні попередньому пункту з аргументом $\frac{1}{x}$.

В результаті: $F_{m_1, m_2}(x) = 1 - F_{2p, 2k+1}(1/x)$.

4. Якщо $m_1 = 2k+1, m_2 = 2p+1$, то

$$y = \frac{m_2}{m_2 + m_1 x}, z = (y^{-1} - 1)^{1/2},$$

$$B_{p+1/2, k+1/2}(y) = \sum_{i=0}^{k-1} \exp\{D_i\} + 1 - \frac{2}{\pi} \arctg z - \frac{2}{\pi} \sum_{i=1}^{p+k} C_i,$$

$$D_0 = -\ln \pi + (p+1/2) \ln y + (k-1/2) \ln(1-y) + \sum_{v=1}^{p+1} \ln \left(\frac{v}{v-1/2} \right) + \sum_{\mu=1}^{k-1} \ln \left(\frac{p+1+\mu}{\mu-1/2} \right) - \ln(k-1/2),$$

$$D_{i+1} = D_i + \ln \left[\frac{y}{1-y} \cdot \frac{k-i-1/2}{p+i+3/2} \right], \quad i = 0, 1, \dots, k-2,$$

$$C_1 = \frac{z}{1+z^2}, C_{i+1} = \frac{2i}{2i+1} \cdot \frac{1}{1+z^2} C_i,$$

$$i = 1, 2, \dots, p+k-1,$$

$$F_{m_1, m_2}(x) = 1 - B_{p+1/2, k+1/2}(y).$$

Застосуємо алгоритм до обробки статистичних даних.

Знаходження нормованої відстані

Нехай експериментальна та контрольна вибірки представлені в виді матриць $X^{(1)} = \|x_{ij}^{(1)}\|$, $X^{(2)} = \|x_{ij}^{(2)}\|$ розміру $m_1 \times n$ та $m_2 \times n$, $x_{ij}^{(1)}$ - значення фактора F_j в i -ому вимірі експериментальної вибірки, $x_{ij}^{(2)}$ - значення фактора F_j в i -ому вимірі контрольної вибірки, m_1, m_2 - об'єм експериментальної та контрольної груп відповідно, n - число факторів. Враховуючи істотну багатовимірність вибірок, для побудови

статистики $\rho(X^{(1)}, X^{(2)})$ використовуємо відстань Махаланобіса

$$D^2(X^{(1)}, X^{(2)}) = \sum_{i,j=1}^n \Delta x_i \Delta x_j s_{ij}^{-1}, \text{ де}$$

$$\Delta x_i = \bar{x}_i^{(1)} - \bar{x}_i^{(2)}, \quad \bar{x}_i^{(1)} = \frac{1}{m_1} \sum_{k=1}^{m_1} x_{ki}^{(1)},$$

$$\bar{x}_i^{(2)} = \frac{1}{m_2} \sum_{k=1}^{m_2} x_{ki}^{(2)} - \text{середнє значення фактора } F_i \text{ в}$$

першій та другій вибірках відповідно,

$$S^{-1} = \|s_{ij}^{-1}\|_1^n - \text{матриця, обернена матриці}$$

$$S = \|s_{ij}\|_1^n, \quad s_{ij} = (s_{ij}^{(1)} + s_{ij}^{(2)}) / (m_1 + m_2 - 2),$$

$$s_{ij}^{(p)} = \sum_{k=1}^{m_p} (x_{ki}^{(p)} - \bar{x}_i^{(p)})(x_{kj}^{(p)} - \bar{x}_j^{(p)}), \quad p = 1, 2.$$

Відомо, що для вибірок $X^{(1)}, X^{(2)}$ з багатовимірних нормальних сукупностей

$$\rho(X^{(1)}, X^{(2)}) = \frac{m_1 + m_2 - n - 1}{n} \cdot \frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)(m_1 + m_2 - 2)} D^2(X^{(1)}, X^{(2)}) \quad (12)$$

має функцію розподілу Фішера $F_{v_1, v_2}(x)$ з $v_1 = n$, $v_2 = m_1 + m_2 - n - 1$ ступенями свободи. Використовуючи цей факт, можна побудувати нормалізовану відстань Фішера між вибірками $X^{(1)}, X^{(2)}$ виду

$$\rho_N(X^{(1)}, X^{(2)}) = F_{v_1, v_2}(D^2(X^{(1)}, X^{(2)})) \quad (13)$$

Застосування

В роботі [3] описана вище рекурентна схема для $F_{v_1, v_2}(x)$ була застосована для аналізу біоелектричної активності мозку в контрольній групі тварин та групі тварин з осередковою структурно-функціональною патологією центральної нервової системи. Об'єми першої та другої груп були рівними 55. Множину факторів біоелектричної активності мозку було розбито на п'ять груп: $(F_1, F_2, F_3), (F_4, F_5, F_6), (F_7, F_8, F_9), (F_{10}, F_{11}, F_{12}), (F_{13}, F_{14}, F_{15})$ відповідно діапазонам [4-6 Гц] - θ_1 -ритми, [6-8 Гц] - θ_2 -ритми, [8-12 Гц] - α -ритми, [12-20 Гц] - β_1 -ритми, [20-40 Гц] - β_2 -ритми. Першим фактором в кожній групі $(F_{1+3i}, i = 0, 1, 2, 3, 4)$ була сумарна потужність (мкв² / Гц), другим фактором $(F_{2+3i}, i = 0, 1, 2, 3, 4)$ була максимальна потужність (мкв), третім фактором $(F_{3+3i}, i = 0, 1, 2, 3, 4)$ – середня частота в діапазоні. Дані збирались при трьох режимах проведення експерименту: фон, світло, після світла. Оптимальні набори наведені в наступній таблиці відповідно:

$\rho_{N, \max}$	Код набору
0,99989	(100010100000010)
0,98757	(000000000111100)
0,99931	(111110111000100)

В стопчику “Код набору” “1” вказує на присутність фактору в наборі, а “0” - на його відсутність. Таким чином код (100010100000010) відповідає набору факторів (F_1, F_5, F_7, F_{14}) .

Список використаних джерел

1. Айвазян С.А. Прикладная Статистика: Основы моделирования и первичная обработка данных: справочное издание / С.А. Айвазян, И.С. Енюков, Л.Д. Мешалкин. – Москва : Финансы и статистика, 1983. – 472 с.
2. Копанев В.А. Метод вероятностной оценки токсического эффект / В.А. Копанев Э.Х. Гинзбург Н.В. Семенова. – Новосибирск : Наука, 1988. – 128 с.
3. E. Lebedev, B. Shurunov, A. Cherchenko Exact formulae for basic statistical distributions and their applications, Proceedings of the 10-th International Symposium on Applied stochastic models and data analysis, 2001, Universite de Technologie de Compiegne, France, vol. 2, p. 660-666.

References

1. IVAZYAN, S., ENYUKOV, I., MESHALKIN, L. (1983) *Applied Statistics*. Moscow. Finance and Statistics. P. 472.
2. KOPANEV, V., GINZBURG, E., SEMENOVA, N. (1988) Probability method of toxic effect evaluation. Novosibirsk. Science. Siberian department. P. 128.
3. LEBEDEV, E., SHURUNOV, B., CHERCHENKO, A. (2001) Exact formulae for basic statistical distributions and their applications. Proceedings of the 10-th International Symposium on Applied stochastic models and data analysis". Universite de Technologie de Compiegne, France, vol. 2, P. 660-666.

Надійшла до редколегії 27.02.2015

УДК 004.056.5

Гончар С.А.¹, аспірант

S. A. Gonchar¹, postgraduate

**Передача інформації з використанням
часових замків шляхом створення файла-
інсталятора з функцією саморозпакування**

**Information transfer through time-lock
puzzles by creating a selfunpacked
“dropper”-file**

¹ Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, пр-т Глушкова
4д, e-mail: sg.gonchar@gmail.com

¹ Taras Shevchenko National University of Kyiv,
03680, Kyiv, Glushkova av., 4d, e-mail:
sg.gonchar@gmail.com

У статті проводиться переосмислення можливостей використання часових замків на сучасних персональних комп'ютерах і, особливо, на мобільних системах шляхом створення файла-інсталятора з функцією саморозпакування, який здатний в певний момент час розкривати зашифровану в ньому інформацію. В основу запропонованої концепції було покладено ідею залучення часових замків для інсталяції шкідливого програмного забезпечення на комп'ютер.

Ключові слова: криптографія з часовим розкриттям, часові замки, часові сервера.

In the article the possibility of the use of time-lock puzzles on modern PCs and especially on mobile systems (smartphones, tablets and etc. which are using complete operation systems like Android, iOS, Windows mobile and etc.) was rethinking. The proposed concept is an extension of an existing approach, which is used by manufacturers of malicious software for misleading anti-virus program. Under this approach, a certain payload (for malicious software is executable file) is encrypted and encapsulated by time-lock puzzle. The result is a situation in which anti-virus must either stop emulation execution file or skip the file, which is then drop the payload on the hard disk. This concept has been extended to more general condition for different kind of information transfer. Resulting executive file must have in addition time-server interrogation module, timer module and self-extract the payload at a certain time. Thus, this reduces the workload on the system and increase the accuracy of the disclosure. The possible variants of execution of above mentioned executive file was observed.

Key Words: time-release cryptography, time-lock puzzles, time server.

Статтю представив чл.-кор. НАНУ, д.ф.-м.н., проф. Анісімов А. В.

Вступ

Сьогодні у всьому світі істотно змінився інтерес до криптографії і прикладним рішенням на її основі. Різко розширилась сфера застосування криптографічних методів для захисту інтелектуальної власності. Одним із таких напрямків є криптографія з часовим розкриттям. Основною її перевагою є те, що отримати доступ до зашифрованої інформації можна у заданий відправником момент часу. При цьому сам відправник після відправлення цієї інформації не зможе вплинути на час її отримання.

Починаючи з першої публікації Рівеста та співавторів [1], на даний момент існує два підходи створення криптографічних систем з часовим розкриттям:

1. Часові замки – базуються на обчислювальній задачі, яка не може бути

вирішена без обчислювання на комп'ютері протягом певного проміжку часу.

2. Залучення третьої сторони для передачі певної частини інформації у зазначений час, яка дасть змогу отримати ключ для розшифрування повідомлення.

З плином часу найбільшого розвитку досягнув другий підхід. Це пов'язане з тим, що у першому підході існувала проблема завантаження ресурсів комп'ютера під час розкриття часового замка, а це обмежувало використання таких систем лише для досить специфічних потреб і унеможливлювало їх використання у побуті.

На сьогоднішній день розвиток процесорних технологій дозволяє розширити перспективи використання криптографії з часовим розкриттям при використанні часових замків. Так для побутових комп'ютерних систем загальноновживаним стало використання

багатоядерних процесорів, які дадуть змогу проводити розкриття декількох часових замків на одному комп'ютері.

Також даний підхід може бути перспективним для використання на мобільних пристроях (смартфони, планшети та інше), оскільки такі пристрої останнім часом набувають все більшого розвитку та розповсюдження, а використання повноцінних операційних систем на них не даватиме нам ніяких обмежень.

Часові замки: принципи формування

Часові замки базуються на складності обчислення наступного виразу

$$a^{2^t} \pmod{n}$$

Якщо схема розкладу числа на множники за n невідома, то єдиним методом обчислення є піднесення виразу a^2 у степінь t разів. Важливо, що кожне наступне піднесення залежить від результатів попереднього, таким чином це унеможливує паралелізацію процесу і багатоядерна система у таких обрахунках не матиме ніяких переваг в порівнянні з одноядерною.

Однак, якщо функція розкладу на множники відома, можна обійти необхідність обчислення ключа шляхом піднесення числа до степеня та зробити усі обчислення за дві операції:

$$r = 2^t \pmod{\varphi(n)}$$

$$b = a^r \pmod{n}$$

Слід зазначити що $\varphi(n)$ визначає фі-функцію Ейлера та може бути ефективно обчислена, якщо відомий розклад на множники.

Фі-функція Ейлера $\varphi(n)$ визначає цілі числа між 0 та n , які є простими відносно n , таким чином $\varphi(n) = \#\{a : 1 \leq a \leq n \text{ та } \gcd(a, n) = 1\}$. Існує проста формула для обчислення $\varphi(n)$ якщо відомий розклад на множники. Якщо $p_1, p_2, \dots, p_r$ різні прості числа, що ділять n , тоді

$$\varphi(n) = n \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{p_r}\right)$$

Слід зазначити що якщо m – це результат множення двох різних простих чисел p та q , тоді формула спрощується до $\varphi(n) = (p-1)(q-1)$.

Іншим чином це можна записати $a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$ для будь-якого a та m з $\gcd(a, m) = 1$

Виходячи з цього, функцію Ейлера можна обійти, використовуючи обчислення ключа шляхом піднесення числа у степінь. Припустимо

$$2^t = k \cdot \varphi(n) + r$$

тоді

$$a^{2^t} = a^{k \cdot \varphi(n) + r} \pmod{n} =$$

$$= \left(a^{\varphi(n)}\right)^k \cdot a^r \pmod{n} =$$

$$= 1^k \cdot a^r \pmod{n} = a^r \pmod{n}$$

Використання часових замків для маскування шкідливого програмного забезпечення

Один цікавий спосіб використання часових замків наводиться у роботах [2,3], в яких автори проаналізували можливість використання часових замків для маскування шкідливого програмного забезпечення. Так, згідно з їх уявленнями, програми-інсталятори (англ. «dropper») на сьогоднішній день стали невід'ємною частиною шкідливого програмного забезпечення. Автори такого програмного забезпечення змогли адаптувати ці інструменти задля дешевого способу запобігання виявленню шкідливих програм у антивірусних сканерах при сигнатурному аналізі.

Для запобігання цієї проблеми виробники антивірусів ввели у свої продукти спеціальні емулятори, які дозволяють виконувати зразок коду, що перевіряється, у захищеній „пісכולці”. Таким чином для того, щоб просканувати підпис, антивірусу достатньо розпакувати вміст і перевірити його.

Використавши такий спосіб захисту в антивірусах, розробники шкідливого програмного забезпечення у відповідь почали використовувати інші засоби у своїх продуктах. Одним із таких засобів був намір збільшити кількість операцій, що витрачаються, на розпакування. Таким чином емулятор антивірусу зіткнеться з наступною проблемою: закінчити операцію розпакування і дозволити потенційно загрозливому файлу пройти, або продовжити розпакування у режимі емуляції, тим самим загрузивши ресурси комп'ютера користувача цим процесом та підірвавши власне саму репутацію антивірусу через сповільнення роботи системи.

Найбільш ранньою роботою в цьому напрямку можна вважати таку, що описує вірус IDEA.6155 [4]. У цій роботі описується використання криптографічних операцій для створення затримки у виконуваному файлі. Власне цією криптографічною операцією були якраз часові замки, які були вперше розроблені Рівестом та співавторами, про що уже було сказано у вступі.

Для створення такої програми-інсталятора автори статті розробили дві програми: програма, яка генерує замок написана на Python та

програма для розкриття замка, яка написана на ANSI C. Подвійна архітектура обрана через те, що кодування на Python досить легке, але з іншого боку Win32 PE файл має найкращі шанси запустити процес емуляції.

Програма, яка генерує замок, має на вході такі параметри як „робочий фактор” (для формування замка) та умовно виконуваний шкідливий файл. Отриманий у результаті роботи вищевказаної програми підготовчий файл містить у якості глобальних змінних параметри замка та зашифроване корисне навантаження у вигляді байтового масиву.

Потім підготовчий файл стає частиною коду файлу „timelock.exe” – програми, яка у подальшому повинна розкрити замок, дешифрувати корисне навантаження та записати результат на диск.

Довжина модуля замка у бітах була зафіксована на рівні 1024, що є загально прийнятим для стандартів RSA. Проте навіть 256-бітний модуль, хоч він і є не повністю безпечним у відповідності RSA, все одно буде розкритий піднесенням до степеня скоріше ніж, якщо він буде розкриватися розкладом на множники.

Наведемо алгоритм „загортання” оригінального бінарного файлу, що є корисним навантаженням, у часовий замок. При цьому на вході алгоритму маємо робочий фактор t та вхідний файл f , а на виході – часовий замок $(n, a, c_k, t, E_k(f))$.

Маємо наступні кроки:

1. Генерується 128-бітний AES ключ для шифрування k .

2. Зашифровується корисне навантаження f за допомогою генерованого ключа k у вигляді $f' \leftarrow E_k(f)$.

3. Генеруються два 512-бітних простих числа p та q .

4. Отримані числа множаться $n \leftarrow p \cdot q$.

5. Обчислюється фі-функція Ейлера $\varphi(n) \leftarrow (p-1) \cdot (q-1)$.

6. Випадковим чином обирається величина a для замка, $1 < a < n$.

7. Обчислюється $a^{2'} \pmod{n}$ наступним чином:

7.1. Обчислюється $r \leftarrow 2' \pmod{\varphi(n)}$;

7.2. Обчислюється $b \leftarrow a^r \pmod{n}$

8. Шифрується ключ k у замку $c_k \leftarrow b + k \pmod{n}$.

9. Видаляються параметри p , q та $\varphi(n)$, щоб попередити можливість дострокового розкриття.

Коли файл проходить через емуляцію антивірусу, вмикається механізм розкриття замка і оригінальний файл f записується на диск.

Розширення концепції

Вищенаведена концепція може бути розширена для використання часових замків за їх початковим призначенням – зашифрована передача інформації.

На рис. 1 зображена схема створення виконуваного файла-інстлятора, в результаті роботи якого на жорсткий диск одержувача має записатися розшифроване повідомлення.

Ця схема є продовженням та доробкою схеми створення файла-інстлятора наведеної у роботі [2].

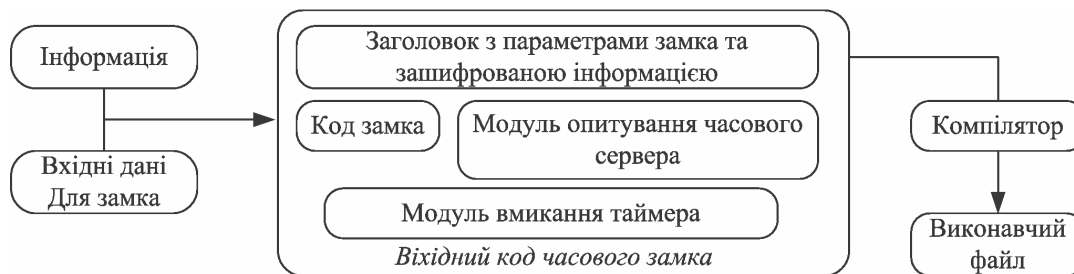


Рис. 1. Схема створення виконавчого файлу часового замка.

Як видно з рис. 1 файл-інстлятор включає в себе зашифровану інформацію, що має в кінцевому результаті записатися на жорсткий диск, модуль опитування часового сервера та модуль включення таймера.

У модулі опитування часового сервера під час створення файлу прописується один із загальнодоступних часових серверів, рівень

довіри до якого має бути найбільшою. Для збільшення точності часу розкриття зашифрованої інформації та зменшення вірогідності емуляції одного з загальновживаних часових серверів у модулі, що розглядається, можна виконувати опитування декількох часових серверів.

Розглянемо більш докладно можливе виконання такого файлу при найпростішому варіанті – пристрій, на якому цей файл виконується не вимикається та є постійний доступ до Інтернету.

Після передачі файлу одержувачу його виконання починається одразу і кожний заздалегідь визначений відправником інтервал часу відбувається опитування часового (часових) сервера. Тут, ще на стадії створення інсталятора, можна передбачити два варіанти часу розкриття – на якийсь конкретний абсолютний час або через деякий проміжок часу.

При першому варіанті як тільки дані з часового сервера показують час рівний або більший за встановлений у параметрах файлу вмикається механізм саморозпакування.

При другому варіанті одразу після отримання відбувається синхронізація з часовим сервером і наявний на ньому час обирається як точка відліку та його значення віднімається від наступних і порівнюється зі значенням часу, який встановлений у параметрах файлу-інсталятора.

Звісно, не завжди у нас можуть бути такі ідеальні умови. Особливо це стосується наявності Інтернету для синхронізації з часовим сервером. Для такої ситуації у коді файлу, що розглядається, присутній модуль включення таймера. Цей модуль вмикається при завантаженні файлу на комп'ютер одержувача за відсутності Інтернету. Через певні проміжки часу файл повторює спроби підключитися до мережі і при позитивному результаті синхронізовує час. Проте, на відміну від ідеального варіанту роботи, модуль таймера вмикається після кожної синхронізації, щоб унеможливити залежність часу розкриття від наявності Інтернету.

Ще складнішим варіантом виконання файлу є

можливість вимикання системи. Можливим вирішенням такої проблеми є додавання виконання файлу-інсталятора у список файлів, які виконуються після кожного завантаження операційної системи і видалення цього файлу після розкриття оригінальної інформації. При цьому кожного разу під час виконання інсталятора виконується синхронізація з часовим сервером або (при відсутності Інтернету) відбувається запуск таймера.

Висновки

Наведена у статті концепція є поки що дуже загальною, але перспективною. У свою чергу в публікації розглядаються можливі проблеми, які можуть виникнути під час виконання файлу-інсталятора. Вже зараз можна сказати, що реалізація цієї концепції є дуже актуальною саме для мобільних комп'ютерних систем, представниками яких є смартфони, планшети та їх гібридні різновиди. Очевидно, що при меншій потужності таких систем, в порівнянні з настільними та портативними системами, розкриття часового-замку шляхом піднесення числа у степінь займе багато процесорного часу. У випадку, коли такий час не є відомим, виконання піднесення буде завантажувати процесор, що унеможливить повноцінну роботу системи. Проте, якщо файл-інсталятор буде лише час від часу проводити опитування часового сервера, а розкриття інформації буде проводитися лише після відповідної команди з модуля опитування часового сервера або модуля таймера за рахунок прямого обчислення фі-функції Ейлера, то це уже не буде настільки завантажувати систему та дозволить виконати вчасно процес розкриття навіть для великого проміжку часу розкриття.

Список використаних джерел

1. Rivest R. L., Shamir A., Wagner D. A. Time-lock puzzles and timed-released crypto // Massachusetts Institute of Technology. — Cambridge, MA, USA. — 1996. — 9 p.
2. Ebringer T. Anti-emulation through time-lock puzzles / Ebringer T. // Second International CARO Workshop.—Hoofddorp, Netherlands, 2008. — 10 p.
3. Усенко А. В. Использование криптографии с временным раскрытием для противодействия проактивным технологиям детектирования вредоносных программ / А. В. Усенко // Молодой ученый. — 2012. — №2. — С. 66—70.
4. Péter S. Bad IDEA // Virus Bulletin. — 1998. — vol. 1. — pp. 18—29.

References

1. RIVEST R. L., SHAMIR A. and WAGNER D. A. (1996) *Time-lock puzzles and timed-released crypto* Cambridge, MA, USA.
2. EBRINGER T. (2008) *Anti-emulation through time-lock puzzles*. Hoofddorp, Netherlands.
3. USENKO A.V. (2012) *Using time-release cryptography to counteract proactive technologies for malware detection*. Young scientist. 2. p.66-70.
4. PÉTER S. (1998) *Bad IDEA*. Virus Bulletin. 1. p. 18-29.

Надійшла до редколегії 11.12.14

УДК 004.75

O. V. Hordiichuk, postgraduate

**An approximate heuristic reliability network
allocation algorithm**

Taras Shevchenko National University of Kyiv,
83000, Kyiv, Glushkova st., 4d,

e-mail: oleg.gordiychuck@gmail.com

Гордійчук О. В., аспірант

**Приблизный эвристический алгоритм оптимизации
надёжности сети**

Київський національний університет імені Тараса
Шевченка, 83000, м. Київ, пр-т. Глушкова 4д,

e-mail: oleg.gordiychuck@gmail.com

Оптимізація надійності мережі це важлива задача, яка необхідна для побудовання стійких однорангових систем та бездротових мереж передачі даних. Головна ціль в цій задачі – побудувати надійну мережу, використовуючи якомога меншу кількість з'єднань поміж вузлами. Ця проблема також відома, як виділення надійності для K -терміналів, яка є NP -складною. В цій статті запропонований новий приблизний алгоритм, який виділяє надійність для мережі, використовуючи метод Монте-Карло для перевірки значення надійності та оптимізаційну евристику, яка базується на властивостях графів розширювачів. Результати, отримані при обчисленні великих мереж до 50000 вузлів та їх різними властивостями, свідчать про те, що цей алгоритм може бути використаний для швидкого приблизного вирішення задачі навіть на комп'ютерах із посередніми обчислювальними можливостями. А для виділення надійності у мережах середніх розмірів (від 100 до 1000 вузлів) цей алгоритм також може застосовуватися у однорангових системах, де присутнє обмеження часу на прийняття рішення.

Ключові слова: оптимізація надійності, однорангові мережі, бездротові мережі.

A reliability allocation is an important task in building robust systems such as peer-to-peer applications and wireless ad-hoc networks. A main goal is to build a reliable network using the smallest number connections between nodes. This problem is also known as a K -terminal redundancy allocation problem, which is NP -hard. This paper presents a new approximate algorithm that can allocate redundancy for network with reliable nodes using Monte-Carlo simulation for reliability checking and an optimization heuristic based on an expander graph properties. The results obtained from calculation large networks with different properties and with up to 50000 nodes show that this algorithm can be used for a fast solving even on a moderate computer capabilities. And for reliability allocation in networks with medium size (from 100 to 1000 nodes) this algorithm also can be used in peer-to-peer networks, where time limitation for execution exists.

Key Words: reliability allocation, peer-to-peer networks, wi-fi ad-hoc networks.

Статтю представив д.т.н., проф. Погорілий С.Д.

Introduction

Today systems without centralized component (decentralized systems) become more popular as they are self-constructive, have huge computation capabilities and good anonymous properties. An example of such systems could be peer-to-peer applications like BitTorrent [1] and wireless ad-hoc networks. All of these systems form a network either software or hardware. However all nodes of such systems are unreliable that's why their topology should be robust as even big networks often fail.

The network could be represented as an undirected graph $G = (V, E)$, where V is a set of nodes (vertices) and E - set of connections (edges) between nodes. Each node has own reliability property that is defined by a function $0 < r(v) \leq 1, v \in V$. Network may have reliable or unreliable nodes and connections, but in this paper it considered only with unreliable nodes and reliable connections. The network is functioning ($\Phi(G) = 1$) if any and only if for any pair $(v, w), v \in V, w \in V$ there exists at least one path $\{v, x_1, x_2, \dots, x_n, w\}, x_1, \dots, x_n \in V$ that connects two nodes or in case when network is empty ($V = \emptyset$). In

all other cases we say that network is defective - $\Phi(G) = 0$.

While functioning network may change its topology as some nodes may fail. As network has $|V|$ nodes there exists a set Ω of all $2^{|V|}$ functioning network states $G' = (V', E'), V' \in V, E' \in E$. This leads to the fact that redundancy could be calculated as a reliability sum of all functioning states of the network:

$$R(G) = \sum_{G' \in \Omega} \Phi(G') \prod_{v' \in V'} r(v') \prod_{v \in V \setminus V'} (1 - r(v)) \quad (1)$$

It's known that computation of network reliability is an NP-hard problem [9]. Another common and not less important task is a network redundancy allocation.

This problem has different formulation, but in this paper considered optimization of network reliability with using the least number of connections between nodes:

$$\begin{aligned} \min |E| \\ R(G) > \varepsilon \end{aligned} \quad (2)$$

The redundancy allocation problem is also not an easy task as computation time of it using classical optimization approaches like Lagrangian multipliers [2] exponentially grows with a network size. That's why in big networks or real time applications approximation methods are used. One of this method is a tabu-search [3], where a meta-heuristic of finding optimal solution is used. The main idea of this method is to choose each new solution candidate x' in neighborhood to a current step at x . Other approaches use quazi-optimal methods like ant-colony algorithm [4] and genetic algorithm [5]. Also some researches proposed optimization redundancy solutions using neural networks [6]. Anyway all of these methods are not well suitable for really big-sized networks neither in computing time nor in accuracy.

In this paper a new approximate redundancy network allocation algorithm is proposed which is suitable for a fast reliability allocations. This solution is based on a expander graphs properties, estimation of the network reliability is done by a Monte-Carlo method and an optimization - by binary search approach. The resulting algorithm is easy to implement and it may be used for redundancy allocation even for big-sized network (> 1000 nodes).

Alternative network reliability concepts

Besides exact and approximate methods of reliability evaluation it also can be expressed in meaning of network connectivity properties. One of them is a minimal cut - set of nodes that divides network into two disconnected subnetworks. It's known that cardinality of a minimal cut is equal to a minimum count of paths between any two nodes in the network (max-flow min-cut theorem [7]). This fact could be used to obtain the minimal cut and there are efficient heuristic algorithms [8] for finding it. If all minimal network cuts is known as well as their reliability values $p_1, p_2, \dots, p_n$ it's also possible in this case use an inclusion-exclusion formula (Poincare theorem)[9] for exact network reliability calculation:

$$\begin{aligned} R(G) = \sum_{1 \leq i \leq n} p_i - \sum_{1 \leq i_1 \leq i_2 \leq n} p_{i_1} p_{i_2} + \dots \\ + (-1)^{m+1} p_1 p_2 \dots p_n \end{aligned} \quad (3)$$

However such approach is used rarely as finding the all minimal cut-set as well as calculation sums of probabilities are a costly operations. Anyway this solution is useful for estimating when most of the right part of the sums is not used.

Another important property in network reliability is a Cheeger constant [11]. Let's define a function $e(A) = \{(x, y) \in E \mid x \in A, y \in V \setminus A\}$ which describes a set of edges from some subset A to a remaining subset $V \setminus A$. Then the Cheeger constant $h(G)$ is defined as following:

$$h(G) = \min \left\{ \frac{|e(A)|}{|A|} \right\}, A \subseteq V, 0 < |A| \leq \frac{|V|}{2} \quad (4)$$

This function describes how any subset $A \subseteq V$ is connected to the remaining subset $V \setminus A$. The bigger value this constant has the bigger the minimal cutset of the network is. A graph with good connectivity properties is called an expander. The network is a (d, ϵ) -expander if it is d -regular and $h(G) > \epsilon$. There are several approaches for building expander graphs: algebraic [12], zig-zag product [13] and random-walks [14]. An algorithm that is proposed in this paper use random-walks approach as building of big random graphs is faster than building structured and it's known [14] that a d -regular random graph is a $(d, \frac{d}{4})$ expander with a high probability. This means that d -regular random graphs have good reliability and this fact is used for allocation in algorithm proposed in paper.

Monte Carlo method for the network reliability

While exact methods for calculation network reliability have exponential complexity, it's possible to use approximate approaches to achieve result with some accuracy. As mentioned before the Poincare theorem may be used for it, but it requires finding all min-cut sets. On the other hand a Monte Carlo method may be used because it only needs to run some amount of tests for achieving provided accuracy. For this an approximate network reliability algorithm should simulate nodes failings according to the provided reliability and after that test resulting network for functioning (function 1). The complexity of Algorithm 1 is equal to $O(2|V| + |E|)$ if network network is represented as list of nodes where each of it contains list of links to other nodes. If to run this operation n times (function 2) and calculate ratio between successful tests with overall number of tests then an approximate value of network reliability will be achieved.

SimulateAndTest

input: network topology $G = (V, E)$
output: true if generated network is functioning and false – otherwise
begin
 $V' \leftarrow \emptyset;$
 $E' \leftarrow \emptyset;$
for $v \in V$ **do**
 $p \leftarrow \text{rand}();$
if $p > r(v)$ **then**
 $V' \leftarrow V' \cup v;$
 $E' \leftarrow E' \cup c(v, V');$
end
end
 $K' \leftarrow \text{BFS}(V', E');$
return $|K'| = |V'|;$
end

Function 1. Simulates possible random network structure and evaluates its reliability using BFS (a breadth-first search function).

CalculateReliability

input: network topology $G = (V, E)$, number of tests n
output: network reliability (probability that it functions)
begin
 $t \leftarrow 0;$
for $i \leftarrow 0$ **to** n **do**

if SimulateAndTest(G) **then**
 $t \leftarrow t + 1;$
end
end
return $\frac{t}{n};$
end

Function 2. An approximate network reliability evaluation using Monte Carlo method.

Binary search of optimal network reliability

Let's investigate properties of reliability function. $R(G) = 0$ is a lower bound of function and it's possible then and only then when all values of $r(v) = 0$, no matter how many connections network has. If the network is a complete graph its reliability is 100% ($R(G) = 1$), because its min-cut set is equal to an empty set. It is a monotonically increasing function to number of edges in the network $R(G = (V, E)) < R(G' = (V, E \cup e))$. Such function behaviour makes possible to increase or decrease reliability by adding or removing connections. In any network there are up to $\frac{|V|(|V|-1)}{2}$ edges and some combination of it provides optimal reliability. The task of finding exact allocation is NP-hard and that is why it's reasonable to use heuristic based on described in previous section properties of expander graph. The main idea of proposed algorithm is to build d-degree random network that will have expander properties by changing a cardinality of connections set E at each step. Adding one edge per turn will significantly affect the algorithm speed in a bad manner. For avoiding this problem a possible solution is to use binary search algorithm. In this case a count of steps that should be done for finding quazi-optimal solution lies in bounds $\left[0, \frac{|V||V|-1}{2}\right]$. If at current step a value of reliability is still far a way from searching value accuracy then the next step should be increased by two times. It continues until searching value is not found. In case when calculated reliability is more than provided searching value R^* and their absolute difference is more than accuracy value, next steps are done using binary search algorithm (function 3).

AllocateReliability

input: set of nodes V , their reliability values of $r(v), v \in V$, desirable network reliability R^* , accuracy ε , number of tests n
output: network topology $G = (V, E)$
begin

```

E ← ∅;
R ← 0;
G ← (V, E);
step ← 1;
fastsearch ← true;
up ← true;
e ← nil;
do
begin
  if up then
    for i to step do
      begin
        e ← GenerateRandomEdge(E);
        E ← E ∪ e;
      end
    else
      for i to step do
        begin
          e ← GetRandomEdge(E);
          E ← E \ e;
        end
      end
    end
  R ← CalculateReliability(G, n);
  if (|R - R*| > ε) then
    if up then
      if R > R* then
        if fastsearch then
          step ← step * 2;
        else
          step ←  $\frac{step}{2}$ ;
        end
      else
        fastsearch ← false;
        up ← false;
        step ←  $\frac{step}{2}$ ;
      end
    else
      step ←  $\frac{step}{2}$ ;
      if R > R* then
        up ← true;
      end
    end
  end
end
while |R - R*| > ε;
end

```

Function 3. The network reliability allocation algorithm.

If there is a need to get some accuracy ε with high probability it's possible to use Laplassian function:

$$P(|R^* - R| < \varepsilon) = 2L\left(\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sqrt{R(1-R)}}\right) \quad (5)$$

, where R^* is observing reliability and R - real reliability and L is a Laplassian function.

Evaluation of method

Methods described in previous sections are implemented in C++. The program has 242 lines of code. It has run with different input data for achieving detailed statistic. All tests have executed 100 times and their average execution time collected. The results presented in a next table:

$ V $	R	ε	n	A	Average execution time
100	0.1	0.05	100	0.9	78
100	0.99	0.05	100	1	96
100	0.9	0.05	100	0.9	163
1000	0.9	0.01	10000	0.99	137267
1000	0.99	0.01	10000	1	130557
1000	0.9	0.5	10000	1	53842
1000	0.5	0.05	1000	0.98	9752
1000	0.9	0.05	1000	1	7280
1000	0.99	0.05	1000	1	7034
1000	0.9	0.05	100	0.9	909
1000	0.5	0.05	100	0.78	1525
10000	0.9	0.05	1000	1	377109
10000	0.99	0.05	1000	1	91814
10000	0.9	0.05	100	0.9	24297
10000	0.99	0.05	100	1	12701
20000	0.99	0.05	100	1	23212
50000	0.99	0.05	100	1	96123
10000	0.85	0.05	100	0.8	17532
20000	0.9	0.05	100	0.9	46542
50000	0.9	0.05	100	0.9	243747

Table 1. Evaluation of the method. Average execution time presented in milliseconds.

It's possible to make next conclusions based on obtained results:

1. Execution time inversely depends on reliability that is allocated;
2. Fast and accurate results could be achieved by using small (100) number of tests n if allocated reliability tends to 1.

The first fact comes up from the behavior of function 2. On the one hand it means that for real tasks such as network reliability allocation for networks smaller than 1000 nodes, where big values of reliability is preferred, it's possible to use this method for redundancy allocation in real time systems such as peer-to-peer applications and wi-fi ad-hoc networks. And on the other hand it's possible to use this method for reliability allocation even for big networks (10000 of nodes).

Conclusion

In this paper proposed the new hybrid approximate algorithm for reliability allocation. While there are a lot of existing approximate and exact solutions, it has shown that there is still no algorithm that is suitable for real time systems such as peer-to-peer applications and wireless ad-hoc networks. The network redundancy allocation is done in 2 steps: calculating graph reliability and next step guessing. The proposed approach uses idea that comes from the expander graph properties and that's why by its nature the algorithm produces random graphs, where all vertices have nearly a same value of edges. However it should be additional investigated possibility of building reliable networks with fixed number of vertex edges.

The algorithm described in this paper evaluates network functioning at each step that is done by using so known breadth-first search algorithm. Also the Monte Carlo method, which is often used for solving tasks by collecting statistically information, is used for calculating network reliability that gives ability to do it fast. And finally the upgraded version of the binary search algorithm is used for finding semi-optimal solution.

The proposed solution has been implemented and evaluated in C++ language with different input data. It has been noticed that an execution speed of this algorithm depends not only on the actual network size and number of Monte Carlo tests, but also on the achieving reliability. As well as it's possible to achieve accurate and fast results with small number of tests (100) in case when allocated reliability tends to the 1. So this method could be used for obtaining very accurate result for even networks with 10000 nodes running only 6 minutes in average on moderate computer capabilities and at the same time it could be used for a real-time calculations (less than 1s) in

medium-size networks with number of nodes equal to 1000.

Список використаних джерел

1. *BitTorrent.* " <http://www.bittorrent.com> ".
2. Kuo W. Reliability optimization with the Lagrange-multiplier and branch-and-bound technique / Kuo W. Reliability, IEEE Transactions on. – 1987. – Vol. 36. – №. 5. – P. 624-630.
3. Kulturel-Konak S. Efficiently solving the redundancy allocation problem using tabu search / Kulturel-Konak S., Smith A. E., Coit D. W. IIE transactions. – 2003. – Vol. 35. – №. 6. – P. 515-526.
4. Liang Y. C. An ant colony optimization algorithm for the redundancy allocation problem (RAP) / Liang Y. C., Smith A. E. Reliability, IEEE Transactions on. – 2004. – Vol. 53. – №. 3. – P. 417-423.
5. Kanagaraj G. A hybrid cuckoo search and genetic algorithm for reliability-redundancy allocation problems / Kanagaraj G., Ponnambalam S. G., Jawahar N. Computers & Industrial Engineering. – 2013. – Vol. 66. – №. 4. – P. 1115-1124.
6. Coit D. W. Solving the redundancy allocation problem using a combined neural network/genetic algorithm approach / Coit D. W., Smith A. E. Computers & operations research. – 1996. – Vol. 23. – №. 6. – P. 515-526.
7. Christos H. 6.1 The Max-Flow, Min-Cut Theorem. Combinatorial Optimization: Algorithms and Complexity. / Christos H., Papadimitriou, Kenneth Steiglitz. Dover., 1998. – P. 120-128.
8. Ugurlu O. et al. New Algorithm for Finding Minimum Vertex Cut Set / Ugurlu O. et al., Problems of Cybernetics and Informatics (PCI), 2012 IV International Conference. – IEEE, 2012. – P. 1-4.
9. Lucet C. Exact methods to compute network reliability / Lucet C., Manouvrier J. F. Statistical and Probabilistic Models in Reliability. – Birkhäuser Boston, 1999. – P. 279-294.
10. Srivaree-ratana C. Estimation of all-terminal network reliability using an artificial neural network / Srivaree-ratana C., Konak A., Smith A. E. Computers & Operations Research. – 2002. – Vol. 29. – №. 7. – P. 849-868.

11. Donetti L. Optimal network topologies: Expanders, Cages, Ramanujan graphs, Entangled networks and all that / Donetti L., Neri F., Munoz M. A. *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment*. – 2006. – Vol. 2006. – №. 08. – P. 807.
12. Michael Holroyd, Synchronization and Connectivity of Discrete Complex Systems / Michael Holroyd *International Conference on Complex Systems*, 2006.
13. Reingold O. Entropy waves, the zig-zag graph product, and new constant-degree expanders and extractors / Reingold O., Vadhan S., Wigderson A. *Foundations of Computer Science*, 2000. *Proceedings. 41st Annual Symposium on*. – IEEE, 2000. – P. 3-13.
14. Goldreich O. Basic facts about expander graphs / Goldreich O. *Studies in Complexity and Cryptography. Miscellanea on the Interplay between Randomness and Computation*. – Springer Berlin Heidelberg, 2011. – P. 451-464.
15. Kuo W. Recent advances in optimal reliability allocation / Kuo W., Wan R. *Computational Intelligence in Reliability Engineering*. – Springer Berlin Heidelberg, 2007. – P. 1-36.
- combined neural network/genetic algorithm approach. *In Computers & operations research* 23 (6). p. 515-526.
7. CHRISTOS H., PAPADIMITRIOU, KENNETH S.. (1998) 6.1 The Max-Flow, Min-Cut Theorem. *Combinatorial Optimization: Algorithms and Complexity*. Dover. p. 120-128.
8. UGURLU O.. (2012) New Algorithm for Finding Minimum Vertex Cut Set. *In Problems of Cybernetics and Informatics (PCI), IV International Conference*. – IEEE. p. 1-4.
9. LUCET C. MANOUVRIER (1999) J. F. Exact methods to compute network reliability. *Statistical and Probabilistic Models in Reliability*. Birkhäuser Boston. p. 279-294.
10. SRIVAREE-RATANA C., KONAK A., SMITH A. E. (2002) Estimation of all-terminal network reliability using an artificial neural network. *Computers & Operations Research* 29 (7). p. 849-868.
11. DONETTI L., NERI F., MUNOZ M. A. (2006) Optimal network topologies: Expanders, Cages, Ramanujan graphs, Entangled networks and all that. *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment* 2006 (08). p. 807.
12. MICHAEL H. (2006). Synchronization and Connectivity of Discrete Complex Systems. *International Conference on Complex Systems* 2006.
13. REINGOLD O., VADHAN S., WIDGERSON A. (2000) Entropy waves, the zig-zag graph product, and new constant-degree expanders and extractors. *Foundations of Computer Science, 2000. Proceedings. 41st Annual Symposium on*. p. 3-13.
14. GOLDRICH O. (2011) Basic facts about expander graphs. *Studies in Complexity and Cryptography. Miscellanea on the Interplay between Randomness and Computation*. – Springer Berlin Heidelberg. – p. 451-464.
15. KUO W., WAN R. Recent advances in optimal reliability allocation. *Computational Intelligence in Reliability Engineering*. – Springer Berlin Heidelberg. p. 1-36.

References

1. BIT TORRENT. A peer-to-peer file distribution client application. "<http://www.bittorrent.com>".
2. KUO W. (1987) Reliability optimization with the Lagrange-multiplier and branch-and-bound technique. *In Reliability, IEEE Transactions on* 36 (5). – p. 624-630.
3. KULTUREL-KONAK S., SMITH A.E., COIT D.W. (2003) Efficiently solving the redundancy allocation problem using tabu search. *In IIE transactions* 35 (6). p. 515-526.
4. LIANG Y. C., SMITH A. E. (2004) An ant colony optimization algorithm for the redundancy allocation problem (RAP). *In Reliability, IEEE Transactions on* 53 (3). p. 417-423.
5. KANAGARAJ G., PONNAMBALAM S.G., JAWAHAR N. (2013) A hybrid cuckoo search and genetic algorithm for reliability–redundancy allocation problems. *In Computers & Industrial Engineering* 66 (4). p. 1115-1124.
6. COIT D. W., SMITH A. E. (1996) Solving the redundancy allocation problem using a

Надійшла до редколегії 20.06.14

УДК 519.9

Демченко І.Ю., аспірант

Про одну модель управління запасами

Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, пр.
Академіка Глушкова, 4д,
e-mail: irinka_8891@mail.ru

I.Y. Demchenko, graduate student

About one model of inventory control

Taras Shevchenko National University of Kyiv,
03680, Kyiv, Glushkova st., 4d,
e-mail: irinka_8891@mail.ru

Досліджується деяка модель управління запасами, для якої знаходяться умови оптимальності (s, S) -стратегії.

Ключові слова: (s, S) -стратегія, оптимальна стратегія, управління запасами.

In this paper it is considered the problem of inventory control of warehouse of infinite capacity. One of the most important challenges is to find the conditions when the optimal control problem can be reduced to a problem of stochastic programming. Of course, it allows to describe the searched optimal strategy. The paper presents conditions when it is possible. What is more, view of the optimal strategy was found. The result is formulated in the form of a theorem. It is considered a model of the inventory control system in stationary mode, besides the cost for one period of its operation are optimized. The quality of the operation of the system is determined by several features, namely the cost of maintaining the goods, fine for the goods shortage and the cost of the order of a new product. However, and in the situation when it is considered a system that operates in an unlimited time interval, and it is necessary to find a strategy that minimizes the average cost per unit of time, the problem can often be reduced to a stationary case.

Key Words: (s, S) -strategy, the optimal strategy, inventory control.

Статтю представив д.т.н., проф. Кудін В.І.

Розглянемо задачу поповнення запасами деякого сховища нескінченної місткості. Припустимо, що в деякий момент часу рівень запасу дорівнює x . В момент перевірки наявного рівня запасу приймається рішення про його поповнення на величину $y - x$. Таким чином, стратегія замовлення – вибрати величину $y = y(x)$. Між моментами перевірок є попит на товар, що є випадковою величиною ξ з функцією розподілу $F(v)$. Якість функціонування системи визначається деякими функціями $r_i(x)$, $i = 1, 2, 3$, де $r_1(x) = cx$ – вартість утримання товару в

кількості x одиниць, $r_2(x)$ – штраф за дефіцит товару в кількості x одиниць, $r_3(x) = K$ – вартість замовлення нового товару.

Розглянемо функцію втрат вигляду

$$W(x, y, \xi) = cy + r_2(\xi - y)I_{[y < v]} + KI_{[x < y]},$$

де $I_{[z < s]}$ – індикатор події $[z < s]$.

Визначимо функцію ризику наступним чином:

$$V(x, y) = E[W(x, y, \xi)] = \\ = cy + \int_{y^+}^{\infty} \varphi(v - y) dF(v) + KI_{[x < y]},$$

де

$$\varphi(x) = r_2(x)I_{[x > 0]}.$$

Будемо казати, що $y = y(x)$ – оптимальна стратегія, якщо

$$V(x, y(x)) = \inf_{y \geq x} V(x, y)$$

для всіх $x \geq 0$.

Якщо існує функція $y = y(x)$ така, що

$$y(x) = SI_{[x < s]} + xI_{[x \geq s]}$$

для деяких констант $0 \leq s \leq S$, та

$$V(x, y(x)) = \min_{y \geq x} V(x, y)$$

для всіх $x \geq 0$, то будемо казати, що оптимальна стратегія є (s, S) -стратегією.

Справедливо наступне твердження.

Лема. Нехай виконуються умови:

1) функція $\varphi(z)$ монотонно не зростає та диференційована при $z > 0$;

$$2) \quad \varphi(0) = 0;$$

$$3) \quad \text{рівняння} \quad \int_{y^+}^{\infty} \varphi'(v - y) dF(v) = c$$

має єдиний корінь.

Тоді існує $S > 0$ таке, що:

а) при $0 < y < S$ функція $V(y, y)$ монотонно не зростає;

б) якщо $c > 0$, то при $y > S$ функція $V(y, y)$ монотонно не зростає.

Доведення. Розглянемо функцію

$$\int_{y^+}^{\infty} \varphi(v - y) dF(v) = \psi(y).$$

Покажемо, що функція $\psi(y)$ є монотонно незростаючою.

Позначимо

$$\zeta(x) = \begin{cases} \xi - x, & \xi > x, \\ 0, & \xi \leq x. \end{cases}$$

Тоді

$$\int_{y^+}^{\infty} \varphi(v - y) dF(v) = M\varphi(\zeta(y)).$$

Випадковий процес $\zeta(x)$ є монотонно незростаючим, а функція $\varphi(z)$ – монотонно неубуваючою, оскільки $M\varphi(\zeta(y))$ – монотонно незростаюча функція.

Розглянемо функцію $V(y, y)$, знайдемо її похідну та прирівняємо до нуля:

$$V'(y, y) = c - \int_{y^+}^{\infty} \varphi'(v - y) dF(v),$$

$$V'(y, y) = 0,$$

тобто

$$\int_{y^+}^{\infty} \varphi'(v - y) dF(v) = c.$$

Позначимо S єдиний корінь останнього рівняння.

Тоді

$$\inf_{y \geq 0} V(y, y) = \min_{y \geq 0} V(y, y) = V(S, S).$$

Очевидно, що при $y \leq S$ функція $V(y, y)$ монотонно не зростає, а при $y > S$ монотонно не зростає.

Теорема. Нехай виконуються умови леми. Тоді існують $0 \leq s \leq S$ такі, що (s, S) -стратегія є оптимальною.

Доведення. Розглянемо три випадки.

1. Нехай $x > S$. Тоді

$$V(x, y) = V(y, y) + KI_{[x < y]} \geq$$

$$\geq V(x, x) + KI_{[x < y]} \geq$$

$$\geq V(x, x)$$

для всіх $y \geq x$.

А це означає, що

$$\inf_{y \geq x > S} V(x, y) = \min_{y \geq x > S} V(x, y) = V(x, x).$$

2. Нехай $0 \leq x < S$ та

$$V(0, 0) < V(S, S) + K. \text{ Тоді}$$

$$V(x, y) =$$

$$= V(y, y) + KI_{[x < y]} \geq V(S, S) + KI_{[x < y]} =$$

$$= V(S, S) + K \geq V(0, 0) \geq V(x, x)$$

для всіх $y \geq x$.

Отже,

$$\inf_{y \geq x, 0 \leq x \leq S} V(x, y) = V(x, x).$$

3. Нехай $0 \leq x < S$ та

$$V(0, 0) > V(S, S) + K.$$

В силу леми $V(y, y)$ є монотонно незростаючою і неперервною справа для

$0 \leq y \leq S$. Тому існує точка $0 < s \leq S$ така, що

$$V(s, s) = V(S, S) + K.$$

А це означає, що для $0 \leq x < s \leq y \leq S$

$$V(0, 0) \geq V(x, x) > V(s, s) =$$

$$= V(S, S) + K \geq V(y, y) \geq V(S, S).$$

Таким чином, маємо наступний результат.

1. Якщо $0 \leq x < s \leq S$, то

$$V(x, S) = V(S, S) + K = V(s, s) < V(x, x),$$

$$V(x, y) = V(y, y) + K \geq V(S, S) + K = \\ = V(x, S)$$

при $y > x$.

Це означає, що

$$\inf_{y \geq x, 0 \leq x \leq S} V(x, y) =$$

$$= \min_{y \geq x, 0 \leq x \leq S} V(x, y) = V(x, x).$$

2. Якщо $s \leq x \leq S$, то

$$V(x, y) = V(y, y) + K \geq V(S, S) + K = \\ = V(x, x)$$

при $y > x$.

Це означає, що

$$\inf_{y \geq x, 0 \leq x \leq S} V(x, y) = \\ = \min_{y \geq x, 0 \leq x \leq S} V(x, y) = V(x, x).$$

Таким чином, оптимальна стратегія $y = y(x)$ має вигляд

$$y(x) = SI_{[x < s]} + xI_{[x \geq s]}.$$

Теорема доведена.

Відносно знаходження точок s та S , можна помітити наступне. З леми випливає, що точка S є єдиною точкою мінімуму функції

$$V(y, y) = cy + M\varphi(\zeta(y)),$$

або

$$V(y, y) = E\psi(\xi, y),$$

де

$$\psi(\xi, y) = cy + \varphi(\xi - y)I_{[y < v]}.$$

Таким чином, знаходження точки $y \geq 0$, в якій досягається мінімум $V(y, y)$, – типова задача стохастичного програмування. Для її розв'язання можна скористатися, наприклад, методами роботи [1].

Точка s – розв'язок рівняння

$$V(s, s) = V(S, S) + K,$$

для якого існує безліч методів вирішення.

Список використаних джерел

1. Ермольев Ю.М. Методы стохастического программирования / Ю.М. Ермольев. – Москва: Наука, 1976. – 240 с.
2. Wald A. Statistical decision functions / A. Wald. – New York: Wiley, 1950. – 179 p.
3. Howard R. Dynamic programming and Markov processes / R. Howard. – New York: Wiley, 1960. – 136 p.
4. Дынкин Е.Б. Управляемые марковские процессы и их приложения / Дынкин Е.Б., Юшкевич А.А. – Москва: Наука, 1975. – 289 с.

References

1. ERMOLEV Y.M. (1976) *Methods of stochastic programming*. Moscow: Science.
2. WALD A. (1950) *Statistical decision functions*. New York: Wiley.
3. HOWARD R. (1960) *Dynamic programming and Markov processes*. New York: Wiley.
4. DYNKIN E.B., YUSHKEVICH A.A. (1975) *Controlled Markov decision processes and their applications*. Moscow: Science.

Надійшла до редколегії 10.03.2015

УДК 004.93

Донченко В.С.¹, д.ф.м.-н., професор,
Скотаренко Ф.М.², аспірант

V.S. Donchenko¹, D. Sci., Professor,
F.M. Skotarenko², postgraduate student

Прямі формули Гревіля - Кириченка для матричних евклідових просторів

Direct formulas Greevil - Kirichenko for matrix Euclidean spaces

¹⁻² Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, пр.-т
Глушкова 4д,

¹⁻² Taras Shevchenko National University of Kyiv,
03680, Kyiv, Glushkova av., 4d,

e-mail: voldon@bigmir.net

e-mail: fred.unicyb@gmail.com

e-mail: voldon@bigmir.net

e-mail: fred.unicyb@gmail.com

Пропонована робота використовує основні конструкції згаданої роботи [1] для подальшого розвитку техніки оперування в матричних евклідових просторах: для доведення твердження, на яке посилаємось як на формулу Гревіля - Кириченка. Результат перетворення залежить від того, чи є рядок, яким розширюється матриця лінійно залежним чи ні від решти рядків матриці. Можна говорити також про таку саму задачу, але пов'язану з викреслюванням рядку чи стовпчика. Комбінація двох варіантів: викреслювання та розширення дають можливість досліджувати задачу опису зміни ПДО матриці за заміни рядка чи стовпчика на інший. Прикладне значення формул Гревіля - Кириченка в прямому варіанті: розширення, - чи в оберненому: викреслювання, - визначається тим, що техніка ПДО в лінійному регресійному аналізі дозволяє отримати повний опис задачі МНК- оцінювання параметрів як за виконання умов однозначності рівнянь Гаусса - Маркова (повний стовпчиковий ранг матриці плану). Формули Гревіля-Кириченка дозволяють конструктивно реалізувати етапи статистичного аналізу, пов'язані із появою у вибірці нових спостережень, вилученням певних спостережень - аутлайєрів, заміну одних спостережень на інші.

Ключові слова: матричні евклідові простори, ПДО матриці, формула Гревіля - Кириченка.

This paper uses the basic design mentioned in [1] for further development of technology operating in the matrix of Euclidean space, to prove the assertion for which cited as the formula Greevil - Kirichenko. Actually, in the classic version of this result [2] the question is how the PDO extension matrix of row or column. Considering switching PDO and transposition, the result is usually formulated for extension line option. The result of the transformation depends on whether the line which extends linearly dependent matrix or not the rest of the rows of the matrix. You can also talk about the same problem, but related strikeouts row or column. The combination of the two options: deletion and expansion make it possible to investigate the problem of describing changes PDO matrix by replacing the row or column to another. Applied formulas Greevil - Kirichenko live version: expansion - or inverted: deletion - determined that the equipment PDO in linear regression analysis provides a complete description of the problem MNK- parameter estimation as the conditions for the uniqueness of equations Haussa - Markov (full rank matrix Column plan). Formula Greevil -Kirichenko allow constructive steps to implement statistical analysis related to the emergence of new observations in the sample, removing certain observations - outlayers, replacing some other observations.

Key Words: matrix of Euclidean space, PDO matrix, the formula Greevil - Kirichenko.

Статтю представив д.т.н., професор Гаращенко Ф.Г

1 Формули Гревіля- Кириченка: евклідові простори числових векторів

Зважаючи на важливість прямого варіанту формул Гревіля - Кириченка для евклідових просторів числових векторів, нижче наводиться їхній вигляд для матриць за [Обчислювальна математика] у наступних визначеннях та позначеннях.

Для матриці $A \in R^{m \times n}$ та вектора $a \in R^n$ через $\begin{pmatrix} A \\ a^T \end{pmatrix} \in R^{(m+1) \times n}$ позначатиметься розширена матриця через $^{++}$ - позначатиметься ПДО матриць: $A^+ : R^m \rightarrow R^n$, $\begin{pmatrix} A \\ a^T \end{pmatrix}^+ : R^{m+1} \rightarrow R^n$.

Саме ПДО визначається через SVD- подання оператора, який визначається відповідною матрицею.

Крім того, у зв'язку із вихідною матрицею та ПДО визначається дві пари асоційованих з ПДО операторів:

- ортогональні проектори:

$$Z(A) = E_n - A^+ A,$$

$$Z(A^T) = E_m - (A^T)^+ A^T \stackrel{\text{теорема}}{=} E_m - A A^+$$

- групувальні оператори:

$$R(A) = A^+ A^T \stackrel{\text{теорема}}{=} (A^T A)^+,$$

$$R(A^T) = (A^T)^+ \left((A^T)^+ \right)^T \stackrel{\text{теорема}}{=} (A A^T)^+$$

Лінійна залежність рядка a^T від решти рядків матриці A описується через оператор ортогонального проектування $Z(A) : a^T$ лінійно не залежить від решти рядків матриці A
 $\Leftrightarrow a^T Z(A) a \neq 0$; a^T лінійно залежить від решти рядків матриці A
 $\Leftrightarrow a^T Z(A) a = 0$.

У введених вище позначеннях має вигляд наступної теореми.

Теорема 1 (пряма формула Гревіля - Кириченка над R^n). За розширення рядком ПДО розширеної матриці пов'язане із ПДО вихідної матриці співвідношеннями:

$$\begin{pmatrix} A \\ a^T \end{pmatrix}^+ = ((E_n - q a^T) A^+ : q), \quad (1)$$

$$q = \begin{cases} \frac{Z(A)a}{a^T Z(A)a}, & a^T Z(A)a \neq 0 \text{ (лін. нез.)} \\ \frac{R(A)a}{1 + a^T R(A)a}, & a^T Z(A)a = 0 \text{ (лін. зал.)} \end{cases}$$

2 Формули Гревіля- Кириченка: евклідові простори матриць

Як вже зазначалося вище, тим важливим класом лінійних операторів, який дозволяє перенести техніку оперування на основі SVD та ПДО в евклідові простори є клас так званих кортежних операторів (КорО), введених, зокрема, в роботі [5]. Ці оператори породжуються матричними кортежами $\alpha = (A_1, \dots, A_K)$, $A_k \in R^{m \times n}$. Зокрема, КорО $\wp_\alpha : R^K \rightarrow R^{m \times n}$ визначається як лінійний оператор, дія якого на елемент $z \in R^K$ визначається співвідношенням:

$$\wp_\alpha z = \sum_{k=1}^K z_k A_k, z = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_K \end{pmatrix} \in R^K. \quad (2)$$

Зауваження 1. Зауважимо, що у варіанті КорО транспонування як замінюється спряженістю, чим, власне є транспонованість, реалізована засобами матричної алгебри.

Зауваження 2. Зауважимо також, що перехід від вектору $a \in R^n$ до вектору - рядку a^T у евклідових просторах числових векторів в матричних евклідових просторах є еквівалентним переходу до відповідної лінійної

форми $l_a x = (a, x), x \in R^n$.

У вже цитованій вище роботі, доводиться, що спряжений $\wp_a^*$ до операторів згаданого класу визначається співвідношенням:

$$\wp_a^* X = \begin{pmatrix} (A_1, X) \\ \dots \\ (A_K, X) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{A_1} \\ \dots \\ l_{A_m} \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} l_{A_1} X \\ \dots \\ l_{A_m} X \end{pmatrix} : R^{m \times n} \rightarrow R^K, (3)$$

$$l_A X = (A, X), X, A \in R^{m \times n}.$$

І оператори типу (2) і типу (3) побудовані за впорядкованими наборами матриць - за кортежами: рядковими чи стовпчиковими - і тому позначатимуться одним і тим самим терміном КорО.

В роботі [5] зазначається, що SVD - розклад КорО типу (2) чи (3), як і визначення псевдо обернення (ПдО) для них зводиться до задачі на власні значення для лінійного оператора над R^K , що задається матрицею

$$F = \left((A_i, A_j) \right)_{i,j=1,\overline{K}} : R^K \rightarrow R^K,$$

- власне, матрицею Грама набору матриць $A_k \in R^{m \times n}, k=1,\overline{K}$ в евклідовому просторі $R^{m \times n}$.

Є справедливими наступні теореми.

Теорема 1. Нехай $(v_i, \lambda_i^2), i=1,\overline{r}$ - набір ненульових сингулярностей матриці $F, r = \text{rank} F \leq K, \lambda_1^2 \geq \dots \geq \lambda_r^2 > 0$ та

$$U_i = \frac{\wp_a v_i}{\lambda_i}, i=1,\overline{r}.$$

Тоді є справедливим SVD - подання двох пов'язаних між собою операторів:

$$\wp_a = \sum_{i=1}^r \lambda_i U_i v_i^T, \wp_a^* X = \sum_{i=1}^r \lambda_i v_i (U_i, X) = \sum_{i=1}^r \lambda_i v_i l_{U_i} X, (4)$$

а ПдО для обох типів операторів визначається співвідношеннями:

$$\wp_a^+ X = \sum_{i=1}^r \lambda_i^{-1} v_i (U_i, X) = \sum_{i=1}^r \lambda_i^{-1} v_i l_{U_i} X : R^{m \times n} \rightarrow R^K, (5)$$

$$\wp_a^{*+} = \sum_{i=1}^r \lambda_i^{-1} U_i v_i^T : R^K \rightarrow R^{m \times n}. (6)$$

Зауваження 1. Зауважимо, що як і в стандартному варіанті визначення ПдО,

спряження та перехід до ПдО комутують між собою:

$$(\wp_a^*)^+ = (\wp_a^+)^*$$

Зауваження 2. Загалом структура КорО типу (3) представляє собою набір значень лінійних функціоналів $l_{A_k}, k=1,\overline{K}$, заданих на евклідовому просторі $R^{m \times n}$. У випадку евклідового простору числових векторів таким набором лінійних функціоналів є рядки матриці лінійного оператора. Таким чином, кортежний оператор типу (3) - узагальнення матриці лінійного оператора, що діє між двома евклідовими просторами числових векторів.

Для пов'язаних між собою КорО (2), (3) розглядаються їхні розширення: позначатимуться відповідно $\wp_{a,A}, \wp_{a,A}^*$, отриманих додаванням іще одного елементу до кортежу, за якими будуються відповідні оператори:

$$\wp_{a,A} \begin{pmatrix} z \\ \beta \end{pmatrix} = (\wp_a : A) \begin{pmatrix} z \\ \beta \end{pmatrix} = \wp_a z + \beta A = \sum_{k=1}^K z_k A_k + \beta A : z \in R^K, \beta \in R^1,$$

$$z \in R^K, z_{K+1} \in R^1$$

$$\wp_{a,A}^* X = \begin{pmatrix} (A_1, X) \\ \dots \\ (A_K, X) \\ (A, X) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{A_1} \\ \dots \\ l_{A_m} \\ l_A \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} l_{A_1} X \\ \dots \\ l_{A_m} X \\ l_A X \end{pmatrix} : R^{m \times n} \rightarrow R^{K+1},$$

де $l_A, A \in R^{m \times n}$ позначає лінійний функціонал, що природним чином визначається скалярним добутком: $l_A X = (A, X), X, A \in R^{m \times n}$.

Зауваження 3. Очевидним чином, КорО $\wp_{a,A}^*$ є спряженим до КорО:

$$\wp_{a,A} : (\wp_{a,A})^* = \wp_{a,A}^*. (7)$$

Обидва оператори визначаються за набором елементів $A_k \in R^{m \times n}, k=1,\overline{K}$, що очевидним чином визначають набори лінійних функціоналів $l_{A_k} X = (A_k, X), k=1,\overline{K}, X \in R^{m \times n}$ чи $l_A X = (A, X), X \in R^{m \times n}$ відповідно

Зауваження 4. Очевидним чином $l_A^* z_1 = z_1 A, z_1 \in R^1$.

Зауваження 5. Спряжений до оператора $Ql_A: R^{m \times n} \rightarrow R^{m \times n}$, $Q, A \in R^{m \times n}$, дія якого визначається як $Ql_A X = Q(A, X)$, $X \in R^{m \times n}$, задається співвідношенням:

$$(Ql_A)^* = Al_Q, \text{ тобто}$$

для довільного $Y \in R^{m \times n}$

$$(Ql_A)^* Y = A(Q, Y).$$

Загалом, в прямих формулах Гревіля - Кириченка, власне, мова йде про рекурентні формули, що визначають псевдо обернення розширеного оператора через псевдо обернення вихідного оператора для операторів - матриць між евклідовими просторами числових векторів. У цьому випадку теорема вказує, як псевдо обернення матриці, доповненої рядком виражається через псевдо обернення для вихідної матриці. Нижче цей результат переноситься на кортежні оператори. Як і випадку матриць лінійних операторів вигляд рекурентної залежності визначається тим, чи є лінійний функціонал, яким розширюється оператор, - лінійно залежним від решти функціоналів, що формують кортежний оператор. Так само, умова лінійно залежності конструктивно описується в термінах слухних операторів ортогонального проектування, що будується за SVD - розкладом КорО.

Так само, як і для просторів числових векторів, з ПдО КорО асоціюються дві пари КорО: ортогональні проектори та групувальні оператори (зважені проекційні) із тими самим способом використання:

Крім того, у зв'язку із вихідною матрицею та ПдО визначається дві пари асоційованих з ПдО операторів:

- ортогональні проектори:

$$Z(\wp_\alpha) = E_{m \times n} - \wp_\alpha^* \wp_\alpha, \quad ,$$

$$Z(\wp_\alpha^*) = E_m - (\wp_\alpha^*)^+ \wp_\alpha^* \stackrel{\text{теорема}}{=} E_m - \wp_\alpha \wp_\alpha^+$$

$E_{m \times n}$ - тотожний в матричному просторі, з необхідними і достатніми умовами лінійної залежності - незалежності доданої матриці від

решти матриць-елементів кортежу:
 $(A, Z(\wp_\alpha)A) = 0$ - лінійна залежність,

$(A, Z(\wp_\alpha)A) > 0$ - лінійна незалежність;

- групувальні оператори

$$R(\wp_\alpha) = \wp_\alpha^+ \wp_\alpha^{+*} \stackrel{\text{теорема}}{=} (\wp_\alpha^* \wp_\alpha)^+,$$

$$R(\wp_\alpha^*) = (\wp_\alpha^*)^+ \left((\wp_\alpha^*)^+ \right)^T \stackrel{\text{теорема}}{=} (\wp_\alpha \wp_\alpha^*)^+$$

Загалом, формулювання результату має вигляд наступної теореми.

Теорема 2. Псевдо обернення розширеного КорО $\wp_{\alpha, A}^*$ за лінійної незалежності чи залежності A від елементів $A_1, \dots, A_K$ кортежу $\alpha = (A_1, \dots, A_K)$ визначається співвідношенням

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \wp_\alpha^* \\ l_A \end{pmatrix}^+ &= \left((E_{m \times n} - Ql_A) \wp_\alpha^{*+} : Q \right), \\ Q &= \begin{cases} \frac{Z(\wp_\alpha^*)l_A}{(A, Z(\wp_\alpha^*)A)} A \text{ лін. нез.} \Leftrightarrow (A, Z(\wp_\alpha^*)A) > 0 \\ \frac{R(\wp_\alpha^*)A}{1 + (A, R(\wp_\alpha^*)A)} \text{ лін. зал.} \Leftrightarrow (A, Z(\wp_\alpha^*)A) = 0 \end{cases} \quad (8) \end{aligned}$$

Висновки

В статті продовжений розвиток математичних засобів оперування з базовими структурами в матричних евклідових просторах на основі побудови стандартних конструкцій SVD - та ПдО для важливого класу так званих кортежних операторів. Запропоновано перенесення важливої у застосуваннях формули Гревіля - Кириченка для лінійних операторів над R^n на матричні евклідові простори з тими самими можливостями застосування, що і для евклідового простору числових векторів.

Список використаних джерел

1. Кириченко Н.Ф. Применение псевдо-обратных и проекционных матриц к исследованию задач управления, наблюдения и идентификации / Н.Ф. Кириченко, Н.П.Лепеха // Кибернетика и системный анализ. – 2002. – № 4. – С. 107 - 124.
2. Кириченко Н.Ф. Нелинейные рекурсивные регрессионные преобразователи: динамические системы и оптимизация/ Н.Ф. Кириченко, В.С. Донченко, Д.П. Сербаев // Кибернетика и системный анализ. – №3, 2005. – С. 58 - 68.
3. Кириченко Н.Ф. Синтез систем нейрофункциональных преобразователей в решении задач классификации/ Н.Ф. Кириченко, Ю.Г. Кривонос, Н.П. Лепеха // Кибернетика и системный анализ. – 2007. – №3. С. 47 – 57
4. Донченко В.С. Евклидовы пространства числовых векторов и матриц: конструктивные методы описания базовых структур и их использование. //International Journal “Information technologies & Knowledge”. - 2011. - Vol. 5.- Number 3. - С. 203 - 216.
5. Донченко В. “Вектори ознак” в задачі групування інформації: вектори і матриці/ В. Донченко, Т. Зінко, Ф. Скотаренко// Problems of Computer Intellectualization.- Institute of Cybernetics NASU, ITHEA.-Kyiv, Ukraine -Sofia, Bulgaria. - 2012. - С. 111 – 124.

References

1. KIRICHENKO, M., LEPEHA, M. (2002) *The use of pseudo-and projection matrices to research problems of control, surveillance and identification*. Cybernetics and Systems Analysis. Vol.4. P. 107 - 124.
2. KIRICHENKO, M., DONCHENKO, V. & SERBAEV, D (2005). *Nonlinear regression recursive converters: dynamical systems and optimization*. Cybernetics and Systems Analysis. Vol.3. P. 58 - 68.
3. KIRICHENKO, M., KRIVONOS, Y., LEPEHA, M. (2007) *Synthesis systems neurofunctional converters in solving classification problems*. Cybernetics and Systems Analysis. Vol.3. P. 47 – 57.
4. DONCHENKO, V. (2011) *Euclidean spaces numerical vectors and matrices: design methods for describing the basic structures and their use*. International Journal “Information technologies & Knowledge”. Vol. 5. - Number 3. - P. 203 - 216.
5. DONCHENKO, V., ZINKO, T., SKOTARENKO, F. (2012) *“Feature Vectors” in Grouping Information Problem in Applied Mathematics: Vectors and Matrixes*. - Problems of Computer Intellectualization.- Institute of Cybernetics NASU, ITHEA.-Kyiv, Ukraine -Sofia, Bulgaria. - 2012. - P. 111 - 124.

Received 17.02.2015

УДК 519.72

І.О. Завадський, к. ф.-м. н., доцент

Префіксний стискальний код на основі нижнього (2,3)-подання чисел

Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, пр-т.
Глушкова 4д, e-mail: zava@ukr.net

Igor O. Zavadskyi, Associate Professor, Ph. D.

Compressing prefix code by the means of low (2,3)-representation of numbers

Taras Shevchenko National University of Kyiv,
03680, Kyiv, Glushkova av., 4d

Описано ефективний метод стискання природномовних текстів за допомогою префіксного коду, що базується на нижньому (2,3)-поданні цілих чисел. Запропонований код має приблизно таку саму ефективність, що й один із найкращих на сьогодні кодів для стискання текстів — код Фібоначчі Fib3, однак, на відміну від останнього, має властивість негайного розділення.

Ключові слова: стискальні коди, (2,3)-подання, стискання текстів, префіксний код.

The low (2,3)-representation of numbers is the alternative binary representation of numbers in the 2-radix numeration system. It has different applications in coding theory. Its properties can be used for constructing error correction or compression prefix codes. Two compression codes by the means of low (2,3)-representation of numbers are constructed in the paper. The first one, named C_1 , is intended for storing the sequence of numbers and the second one (C_2) effectively compresses the natural language texts. The C_2 code is asymptotically better than the well-known Fib3 code — the best code for text compression in Fibonacci codes family and has approx. the same efficiency for realistic alphabet size. However, the C_2 code has better properties for fast search in compressed file. Namely, if some codeword has been found, it is enough to check 4 previous bits to be sure that this is true codeword entry, not the suffix of other codeword, while in Fib3 code the number of bits to be checked is not fixed in general case.

Key words: compression code, (2,3)-representation, text compression, prefix code.

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Анісімов А.В.

Вступ

Подання чисел у двохбазисній системі з основним базисом 2 і допоміжним базисом 3 було вперше досліджено в [1]. У [2] було введено так зване *нижнє (2,3)-подання* чисел. Опишемо стисло його сутність.

Нехай $N_{2,3}$ — множина натуральних чисел, які є взаємно простими із 2 і 3, $x \in N_{2,3}$, $x > 1$, $n = \lfloor \log_2 x \rfloor$. Тоді x можна подати як $2^{n-1} + 3^k x_1$ або $2^{n-2} + 3^k x_1$, де $k \in N_{2,3}$, $x_1 \in N_{2,3}$, $x_1 < x$ і лише в одній із цих форм. Застосовуючи аналогічний розклад до x_1 , отримаємо x_2 ; далі обчислюватимемо x_{i+1} з рівняння $x_i = 2^{n_i} + 3^{k_i} x_{i+1}$, поки на певній ітерації t не отримаємо $x_t = 1$ або $x_t = 2$. *Нижнім (2,3)-кодом* називається будь-який двійковий код, за яким можна відновити послідовність значень $x_t, \dots, x_1, x$.

Для однозначного декодування чисел достатньо зберігати величини

$\Delta_i = \lfloor \log_2 3^{k_i} x_{i+1} \rfloor - n_i$ і k_i , які отримуємо на кожній ітерації під час розкладання x . У [2] показано, що Δ_i може набувати лише значень 0, 1 або 2.

У цій статті на основі нижнього (2,3)-подання чисел буде побудовано префіксний код, призначений для кодування послідовності двійкових чисел — назовемо його C_1 . Також код C_1 буде розширено до повного префіксного коду C_2 , за допомогою якого можна ефективно стискати природномовні тексти.

Код C_1

Розглянемо задачу кодування послідовності чисел. Розв'язуючи її, слід насамперед забезпечити можливість розділення чисел, тобто відділення в результуючій послідовності коду одного числа від коду іншого. З цією метою визначають *роздільник* — послідовність двійкових символів, яка може зустрічатися лише в кінці чи лише на початку кодового

слова. Коди з роздільником є *префіксними*, тобто такими, що жодне кодове слово не є префіксом іншого. Далі буде побудовано префіксний двійковий код на основі нижнього (2,3)-подання чисел.

Кодове слово являє собою конкатенацію (Δ, k) -блоків, тобто двійкових рядків, що складаються з двох частин – кодів величин Δ_i та k_i , отримуваних на кожній ітерації під час побудови (2,3)-розкладу числа. Блоки записують у зворотному порядку відносно того, як їх отримують під час кодування: $(\Delta_{t-1}, k_{t-1}), \dots, (\Delta_0, k_0)$. Значення Δ кодується так: $\Delta=2$ – символом 0, $\Delta=1$ – символами 11, а $\Delta=0$ – символами 10. Значення k кодується послідовністю 1...10, де кількість одиниць дорівнює $k-1$, за деякими винятками, що виникають внаслідок вибору роздільника.

Для утворення роздільника в кінець слова дописують символи 110. Оскільки кожен (Δ, k) -блок, а також кожне кодове слово закінчуються символом 0, то роздільником можна вважати рядок 0110. Якщо блок (Δ_0, k_0) кодового слова має вигляд 0110 або 10110, тобто $k_0=3$ і $\Delta_0 \neq 1$, то він уже містить роздільник і дописувати рядок 110 у кінець слова не потрібно.

Таким чином, (Δ, k) -блоки 110, 0110, 10110 є розділовими; коли якийсь із них трапляється, на ньому кодове слово і закінчується. При цьому останній блок 110 не позначає ніяких Δ й k і під час декодування має ігноруватися, а блоки 0110 та 10110 — враховуватися. Отже, жоден (Δ, k) -блок, що відповідає елементу нижнього (2,3)-розкладу, не повинен мати вигляд 110, і жоден (Δ, k) -блок, крім останнього, не повинен мати вигляд 0110 чи 10110. Однак, звичайно, отримувані в нижньому (2,3)-розкладі значення (Δ_i, k_i) можуть порушувати ці умови. А саме, ця небажана ситуація виникає, якщо:

- $\Delta=1$ і $k=1$ (тоді утворюється блок 110);
- $\Delta \neq 1$, $k=3$ і (Δ, k) -блок не є останнім (це блок 0110 чи 10110).

Легко перевірити (і це показано в [2]), що для блоку (Δ_{t-1}, k_{t-1}) , який записується в кодовому слові першим, перший із цих двох випадків неможливий. Тому щоб уникнути зазначеної небажаної ситуації, значення k в (Δ, k) -блоці кодуватимемо послідовністю 1...10, де кількість одиниць дорівнює k , а не $k-1$, у таких випадках:

- $\Delta=1$ і (Δ, k) -блок не є першим;
- $\Delta \neq 1$, $k \geq 3$ і (Δ, k) -блок не є останнім.

У такий спосіб певний префіксний код зіставляється множині натуральних чисел, взаємно простих із 2 і 3. Числу 1, нижній (2,3)-розклад якого є пустим, зіставлено найкоротше кодове слово, що складається лише з розділової послідовності 110. Разом із останнім нулем попереднього кодового слова ця послідовність утворює роздільник. Щоб зіставити певне кодове слово довільному натуральному числу a , можна знайти число під номером a у зростаючому ряді чисел, взаємно простих із 2 й 3, та закодувати його. Таке число дорівнюватиме $3a - a \bmod 2 - 1$.

У табл. 1 наведено 15 найменших чисел, взаємно простих із 2 і 3, їхні нижні (2,3)-розклади та коди.

Табл. 1. (2,3)-розклади та коди 15 найменших чисел, взаємно простих із 2 і 3.

a	x	(Δ_0, k_0)	x_1	(Δ_1, k_1)	x_2	код
1	1					110
2	5	0, 1	1			100 110
3	7	2, 1	2			00 110
4	11	2, 2	1			010 110
5	13	1, 2	1			1110 110
6	17	0, 2	1			1010 110
7	19	1, 1	5	0, 1	1	100 1110 110
8	23	0, 1	5	0, 1	1	100 100 110
9	25	2, 1	7	2, 1	2	00 00 110
10	29	1, 1	7	2, 1	2	00 1110 110
11	31	2, 3	1			0110
12	35	1, 3	1			11110 110
13	37	0, 1	7	2, 1	2	00 100 110
14	41	2, 1	11	2, 2	1	010 00 110
15	43	0, 3	1			10110

Декодування C_1

Як було зазначено вище, останнім елементом (2,3)-розкладу є число $x_t = 1$ або $x_t = 2$. З нього і починається декодування, тобто обчислення послідовності $x_t, \dots, x_1, x_0=x$. Виконується воно так: за величинами x_{i+1}, Δ_i та k_i можна обчислити $n_i = \lfloor \log_2 3^{k_i} x_{i+1} \rfloor - \Delta_i$, а відтак – $x_i = 2^{n_i} + 3^{k_i} x_{i+1}$. У [2] показано, як вибирати одне з двох початкових значень: $x_t=2$ тоді й тільки тоді, коли $\Delta_{t-1}=2$ і $k_{t-1}=1$; у решті випадків $x_t=1$.

Опишемо алгоритм декодування детальніше, почавши із процедури видобування (Δ, k) -блоку, якщо відомий його перший біт. Вона очевидна: якщо перший біт дорівнює 0, він кодує значення Δ , інакше це значення кодується двома першими бітами. Після коду Δ записано код k , що являє собою послідовність одиничних

символів (можливо, порожню), доповнену розташованим за нею нульовим символом. Загальний алгоритм декодування, тобто знаходження за кодовим словом відповідного йому натурального числа a , є таким.

1. Зчитуємо перший (Δ, k) -блок. Якщо він дорівнює 110, то $x \leftarrow 1$; якщо 0110, то $x \leftarrow 31$; якщо 10110, то $x \leftarrow 43$ і в усіх цих випадках переходимо на крок 9. Інакше визначаємо значення Δ за його кодуванням і переходимо на крок 2.
2. Якщо $\Delta=1$ або код k містить більше 2 одиниць, покладемо значення k рівним кількості одиниць у коді k , інакше покладемо значення k рівним кількості символів у коді k .
3. Якщо $\Delta=2$ і $k=1$, покладемо $x \leftarrow 2$, інакше $x \leftarrow 1$.
4. $n \leftarrow \lfloor \log_2 3^k x \rfloor - \Delta$, $x \leftarrow 2^n + 3^k x$.
5. Зчитуємо черговий (Δ, k) -блок. Якщо він дорівнює 110, то переходимо на крок 9, інакше визначаємо значення Δ за його кодуванням і переходимо на крок 6.
6. Якщо зчитаний (Δ, k) -блок дорівнює 0110 або 10110, покладемо $k \leftarrow 3$, обчислюємо $n \leftarrow \lfloor \log_2 3^k x \rfloor - \Delta$, $x \leftarrow 2^n + 3^k x$ і переходимо на крок 9. Інакше переходимо на крок 7.
7. Якщо $\Delta=1$ або код k містить більше 2 одиниць, покладемо значення k рівним кількості одиниць у коді k , інакше – кількості символів у коді k .
8. Переходимо на крок 4.
9. Якщо $x \bmod 3 = 1$, покладемо $a \leftarrow (x+2)/3$, інакше $a \leftarrow (x+1)/3$. Алгоритм завершено.

(Δ, k) -код C_2

Наявність однозначного алгоритму декодування для коду C_1 означає, що цей код є роздільним. Однак він не є повним, тобто множину його кодових слів можна розширити і при цьому властивість роздільності не втратиться. Щоб показати це, побудуємо роздільний код, який містить всі кодові слова C_1 , а також ще деякі. Цей код означити досить просто: він складається зі слова 110, а також усіх двійкових слів, які не починаються з послідовності 110, закінчуються послідовністю 0110 і не містять її ніде, крім кінця слова. Позначимо цей код як C_2 . Очевидно, що код C_2 містить всі кодові слова коду C_1 , є роздільним і

роздільником у ньому, як і в коді C_1 , служить послідовність 0110.

Прикладом слова, яке належить коду C_2 , але не належить C_1 , є 100 00 110. За наведеним вище алгоритмом воно декодується так.

1. За (Δ, k) -блоком 100 визначаємо $\Delta=0$, $k=1$ і покладемо $x \leftarrow 1$.
2. $n \leftarrow \lfloor \log_2 3^1 \cdot 1 \rfloor - 0 = 1$, $x \leftarrow 2^n + 3^k x = 5$.
3. За (Δ, k) -блоком 00 визначаємо $\Delta=2$, $k=1$.
4. $n \leftarrow \lfloor \log_2 3^1 \cdot 5 \rfloor - 2 = 1$, $x \leftarrow 2^n + 3^k x = 17$.
5. (Δ, k) -блок 110 позначає кінець кодового слова та не впливає на результат декодування, що становить 17.

Однак, як видно з табл. 1, код числа $x=17$ зовсім інший – 1010 110 і застосування до нього алгоритму декодування також дає в результаті 17. Річ у тім, що послідовність (17, 5, 1), якій відповідає код 100 00 110, не є нижнім (2,3)-розкладом числа 17, оскільки передбачає подання числа 17 у вигляді $17 = 2^1 + 3^1 \cdot 5$, хоча $n = \lfloor \log_2 17 \rfloor = 4$ і зазначене подання має вигляд $2^{n-3} + 3^k x_1$, а не $2^{n-1} + 3^k x_1$ чи $2^{n-2} + 3^k x_1$, як мало б бути в нижньому (2,3)-розкладі. Загалом така ситуація пов'язана з тим, що, як показано в [2], у випадку, коли $7/8 \cdot 2^{m+1} < 3^k x_i < 2^{m+1}$ для деякого m , величина Δ може набувати лише двох значень: 0 і 1, але не значення 2. Тому кодові слова з C_2 , які призводять до порушення цієї умови, не належать коду C_1 . Так, у розглянутому вище прикладі $3^k x_1 = 15$ і вказані нерівності виконуються: $14 < 15 < 16$, а отже, значення Δ_1 не може дорівнювати 2, хоча з (Δ, k) -блоку 00 ми отримуємо саме це значення.

Зазначимо, що довільне кодове слово з C_2 можна розглядати як послідовність означених вище (Δ, k) -блоків, не пов'язуючи їх, однак, із нижнім (2,3)-розкладом чисел. Нагадаємо, кодом Δ вважаємо послідовності 0, 10 та 11, а послідовність вигляду 1...10, де кількість одиниць може бути нульовою, – кодом k . Конкатенація коду Δ та коду k утворює (Δ, k) -блок.

Цілком очевидно, що будь-яку послідовність двійкових символів можна інтерпретувати, як послідовність (Δ, k) -блоків, у якій, можливо, останній блок неповний. Справді, якщо послідовність починається із символу 0, його інтерпретуємо як код значення Δ , а якщо із символу 1, то кодом Δ вважаємо перші два символи послідовності. Якщо за кодом Δ

розташовано 0, то цей символ вважаємо кодом k , а якщо 1, то кодом k вважаємо послідовність $1 \dots 10$. Таким чином можна виокремити перший (Δ, k) -блок, а послідовність, що залишилася, інтерпретувати в той само спосіб знову.

У свою чергу, всі кодові слова C_2 можна інтерпретувати як послідовність (Δ, k) -блоків навіть без обтинання останнього блоку. Дійсно, є лише 3 слова з C_2 , які складаються з одного (Δ, k) -блоку: 110, 0110 та 10110, а решта слів закінчуються символами 0110, перед якими записано певний префікс. Якщо цей префікс закінчується символом 1, то останні 5 символів слова – це 10110. Зауважимо, що перші 2 з цих символів (10) можуть траплятися лише або на початку (Δ, k) -блоку, або в його кінці. У першому випадку останнім блоком кодового слова є 10110, а в другому – 110 і в обох випадках перед останнім (Δ, k) -блоком записано цілу кількість інших (Δ, k) -блоків. Якщо ж префікс закінчується символом 0, то отримуємо два нулі поспіль: 00110, а така ситуація може мати місце лише якщо ці нулі являють собою повний (Δ, k) -блок або якщо перший 0 є кінцем певного (Δ, k) -блоку. У першому випадку останнім (Δ, k) -блоком кодового слова є 110, а в другому – 0110 і в обох випадках перед останнім (Δ, k) -блоком записано цілу кількість інших (Δ, k) -блоків.

Таким чином, код C_2 можна вважати (Δ, k) -кодом, тобто таким, що його кодові слова складаються з (Δ, k) -блоків.

Повнота коду C_2

Визначимо формулу, за якою обчислюється f_n – кількість кодових слів довжини n у коді C_2 . Розглянемо деяке кодове слово x довжини n та припустимо, що його утворено додаванням зліва (Δ, k) -блоку до коротшого кодового слова u . Такий блок назвемо *нетермінальним*, оскільки він не є кінцевим блоком слова (*термінальними* вважатимемо блоки 110, 0110 та 10110, якими закінчуються кодові слова). Так, якщо $|u|=n-2$, то першим нетермінальним (Δ, k) -блоком слова x може бути тільки 00. Справедливе й зворотне твердження: з будь-якого кодового слова довжини $n-2$ можна утворити кодове слово довжини n , додавши зліва блок 00. Взагалі, якщо до кодового слова довжини $n-t$ додати зліва (Δ, k) -блок довжини t , то утвориться кодове слово довжини n . Зауважимо, що загалом кількість нетермінальних блоків така:

1 (Δ, k) -блок довжини 2: 00;
2 (Δ, k) -блоки довжини 3: 010, 100;
2 (Δ, k) -блоки довжини 4: 1110, 1010;
2 (Δ, k) -блоки довжини 5: 11110, 01110;
3 (Δ, k) -блоки довжини 6: 111110, 011110, 101110;
3 (Δ, k) -блоки довжини 7: 1111110, 0111110, 1011110 і т.д.

Загалом для $t > 6$ усі (k, Δ) -блоки довжини t утворюються з (k, Δ) -блоків довжини $t-1$ вставленням символу «1» після 2-ї позиції і тому, якщо $t \geq 6$, то кількість (k, Δ) -блоків довжини t становить 3.

Отже, якщо утворювати кодові слова з коротших слів додаванням зліва одного (Δ, k) -блоку, то, з огляду на зазначені вище кількості блоків певної довжини, отримаємо таке рекурентне співвідношення для f_n , що справедливе для $n \geq 6$:

$$f_n = f_{n-2} + 2(f_{n-3} + f_{n-4} + f_{n-5}) + 3(f_{n-6} + f_{n-7} + \dots) \quad (1)$$

Зведемо це співвідношення до скінченної форми:

$$f_n = f_{n-2} + 2(f_{n-3} + f_{n-4} + f_{n-5}) + 3(f_{n-6} + f_{n-7} + \dots) = f_{n-2} + f_{n-3} + [f_{n-3} + 2(f_{n-4} + f_{n-5} + f_{n-6}) + 3(f_{n-7} + f_{n-8} + \dots)] + f_{n-6} = f_{n-1} + f_{n-2} + f_{n-3} + f_{n-6} \quad (2)$$

Формула (2) справедлива для $n \geq 7$, оскільки під час її виведення за формулою (1) було виражено величину f_{n-1} , а формула (1) справедлива для $n \geq 6$.

Достатньо очевидно, що код C_2 , як і C_1 , є роздільним і префіксом. Однак, на відміну від коду C_1 , він є також повним. Доведемо всі ці факти як теорему.

Теорема 1. Код C_2 є роздільним, префіксом і повним.

Доведення. Необхідною і достатньою умовою того, що код має зазначені в умові теореми властивості, є виконання нерівності Крафта-Макмілана як рівності: $\sum_{c \in C_2} 2^{-|c|} = 1$. Якщо f_n – кількість кодових слів довжини n , то цю рівність можна переписати у вигляді $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} f_n = 1$. Позначивши $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} f_n$ через s , врахувавши, що $f_1 = f_2 = 0$, $f_3 = f_4 = 1$, $f_5 = 2$, $f_6 = 3$ та розклавши f_n за формулою (2) для $n \geq 7$, отримаємо:

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} f_n = \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{2}{32} + \frac{3}{64} + \sum_{n=7}^{\infty} 2^{-n} (f_{n-1} + f_{n-2} + f_{n-3} + f_{n-6}) = \frac{19}{64} + \frac{1}{2} \sum_{n=7}^{\infty} 2^{-(n-1)} f_{n-1} + \frac{1}{4} \sum_{n=7}^{\infty} 2^{-(n-2)} f_{n-2} +$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{8} \sum_{n=7}^{\infty} 2^{-(n-3)} f_{n-3} + \\
 & + \frac{1}{64} \sum_{n=7}^{\infty} 2^{-(n-6)} f_{n-6} = \\
 & = \frac{19}{64} + \frac{1}{2} \left(s - \frac{1}{4} \right) + \frac{1}{4} \left(s - \frac{3}{16} \right) + \frac{1}{8} \left(s - \frac{1}{8} \right) + \frac{1}{64} s = \\
 & = \frac{7}{64} + \frac{57}{64} s.
 \end{aligned}$$

Звідси випливає, що $\frac{7}{64} - \frac{7}{64} s = 0$, а отже $s=1$.

Теорему доведено.

Асимптотична щільність коду C_2

Однією з найважливіших характеристик коду з точки зору його застосування до стискання інформації є щільність, що визначається кількістю кодових слів, довжина яких не перевищує n . Позначимо цю кількість через $s_n = \sum_{i=1}^n f_i$. Врахуємо, що $f_3 = f_4 = 1$, $f_5 = 2$, $f_6 = 3$ і, підсумовуючи за всіма індексами $n \geq 7$ обидві частини формули (2), для $n \geq 7$ отримаємо:

$$s_n = \sum_{i=3}^6 f_i + \sum_{i=7}^n f_i = 7 + \sum_{i=7}^n (f_{i-1} + f_{i-2} + f_{i-3} + f_{i-6}). \quad (3)$$

Зауважимо, що

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=7}^n f_{i-1} &= \sum_{i=6}^{n-1} f_i = s_{n-1} - 4 \\
 \sum_{i=7}^n f_{i-2} &= \sum_{i=5}^{n-2} f_i = s_{n-2} - 2 \\
 \sum_{i=7}^n f_{i-3} &= \sum_{i=4}^{n-3} f_i = s_{n-3} - 1 \\
 \sum_{i=7}^n f_{i-6} &= \sum_{i=1}^{n-6} f_i = s_{n-6}
 \end{aligned}$$

Підставляючи ці вирази до формули (3), отримаємо:

$$s_n = s_{n-1} + s_{n-2} + s_{n-3} + s_{n-6} \quad (4)$$

Оскільки $s_2 = s_1 = s_0 = s_{-1} = \dots = 0$, $s_3 = 1$, $s_4 = 2$, $s_5 = 4$, $s_6 = 7$, то співвідношення (4) виконується для $n \geq 6$. Знайдемо для нього твірну функцію $G(z)$:

$$\begin{aligned}
 G(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} s_n z^n = z^3 + 2z^4 + 4z^5 + \\
 &+ n=6 \infty s_n z^n = z^3 + 2z^4 + 4z^5 + n=6 \infty (s_{n-1} + s_{n-2} + s_{n-3} + s_{n-6}) z^n
 \end{aligned} \quad (5)$$

Врахуємо, що

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=6}^{\infty} s_{n-1} z^n &= z \sum_{n=6}^{\infty} s_{n-1} z^{n-1} = \\
 &= z n=5 \infty s_n z^n = z G z - z^4 - 2z^5; \\
 \sum_{n=6}^{\infty} s_{n-2} z^n &= z^2 \sum_{n=6}^{\infty} s_{n-2} z^{n-2} = \\
 &= z^2 n=4 \infty s_n z^n = z^2 G z - z^5; \\
 \sum_{n=6}^{\infty} s_{n-3} z^n &= z^3 \sum_{n=6}^{\infty} s_{n-3} z^{n-3} = \\
 &= z^3 n=3 \infty s_n z^n = z^3 G z; \\
 \sum_{n=6}^{\infty} s_{n-6} z^n &= z^6 \sum_{n=6}^{\infty} s_{n-6} z^{n-6} = \\
 &= z^6 n=0 \infty s_n z^n = z^6 G z.
 \end{aligned}$$

Підставляючи ці співвідношення у формулу (5) та розв'язуючи отримане рівняння відносно $G(z)$, матимемо:

$$G(z) = \frac{z^3 + z^4 + z^5}{1 - z - z^2 - z^3 - z^6} = \frac{z^3}{1 - 2z + z^3 - z^4}.$$

Розкладемо у суму найпростіших дробів:

$$\begin{aligned}
 G(z) &= \frac{-0,3618 + 0,2982i}{z - 0,809 - 0,9816i} + \frac{-0,3618 - 0,2982i}{z - 0,809 + 0,9816i} - \\
 &- \frac{0,1888}{z + 1,1537} - \frac{0,0876}{z - 0,5357}
 \end{aligned} \quad (6)$$

Як видно з (5), коефіцієнт s_n дорівнює n -му коефіцієнту ряду Маклорена для функції $G(z)$. Якщо розкласти в ряд Маклорена функцію $g(z) = \frac{1}{z-a}$, то n -й член ряду дорівнюватиме $\frac{x^n}{n!} g^{(n)}(0) = \frac{(-1)^n n! x^n}{n! (-a)^n} = \frac{x^n}{a^n}$. Таким чином, порядок росту величини s_n визначатиметься як $\frac{1}{a^n}$, де величину a слід вибирати за умовою, що $|a|$ є найменшим серед усіх дробів вигляду $\frac{b}{z-a}$ у формулі (6). Це останній дріб, тому $a=0,5357$ і порядок росту величини s_n становить

$$\left(\frac{1}{0,5357} \right)^n \approx 1,867^n \quad (7)$$

Застосування коду C_2 для стискання природномовних текстів

Для визначення ефективності стискання природномовних текстів, як правило, припускають, що слова в мові розподілено за законом Зіпфа: якщо обсяг словника становить N і його впорядковано за спаданням частот слів, то ймовірність того, що певне слово в тексті буде займати i -у позицію у словнику, становить $p_i = 1/iH_N$, де $H_N = \sum_{j=1}^N 1/j \approx \ln N + 0,5772$ – N -е гармонійне число. Ефективність кодування текстів мовою, словник якої містить N слів, визначається середньою довжиною кодового слова, що дорівнює

$$\sum_{i=1}^N p_i |c_i| = \frac{1}{H_N} \sum_{i=1}^N \frac{1}{i} |c_i| \quad (8)$$

Нехай s_n – кількість кодових слів, довжина яких не перевищує n , а M_N дорівнює найменшому значенню n , за якого $s_n \geq N$. Покладемо також

$$q_n = \begin{cases} s_n, & \text{якщо } s_n \leq N \\ N, & \text{якщо } s_n > N \end{cases}$$

Тоді формулу (8) можна переписати у вигляді

$$\frac{1}{H_N} \sum_{k=1}^{M_N} k \sum_{i=q_{k-1}+1}^{q_k} \frac{1}{i} \approx \frac{1}{H_N} \sum_{k=1}^{M_N} k \ln \frac{q_k}{q_{k-1}+1} \quad (9)$$

Розраховані за формулою (9) середні довжини кодових слів для різних кодів наведено в табл. 2. Серед кількох класів кодів, що застосовуються для стискання текстової інформації, до розглянутих у цій статті кодів найближчими є коди Фібоначчі, детально

досліджені в [3], оскільки вони також є префіксними кодами із підтримкою синхронізації, у яких довжина кодового слова не дорівнює цілому числу байтів. Як показано у [3], серед цього сімейства кодів найбільший коефіцієнт стиснення у разі застосування до природномовних текстів має код Fib3. Асимптотична щільність цього коду становить $(1,839)^n$, тобто є меншою за асимптотичну щільність коду C_2 (див. (7)). Як видно з табл. 2, у разі розподілу частот елементів алфавіту за законом Зіпфа код C_2 матиме вищу щільність, ніж Fib3, для обсягу алфавіту від 100 млн. слів і вище. Те, що ступінь стиснення великих алфавітів кодом C_2 буде кращим за аналогічний показник коду Fib3, видно також із того простого факту, що кількість слів довжини n у коді C_2 визначається за формулою (2): $f_n = f_{n-1} + f_{n-2} + f_{n-3} + f_{n-6}$, в той час як для коду Fib3 вона становить $f_{n-1} + f_{n-2} + f_{n-3}$. Для більш реалістичних для природних мов обсягів словників (від 100 тис. до 10 млн. слів) код C_2 має дещо нижчу щільність, ніж Fib3, однак погіршення є незначним і не перевищує 1 %.

Однак у коду Fib3, порівняно з кодом C_2 , є принаймні один недолік, який стосується властивості негайного розділення, важливої для пошуку слів у стиснутому файлі без його розархівування. Як Fib3, так і C_2 , а також всі інші застосовувані для стиснення текстів коди характеризуються тим, що якщо в стиснутому файлі знайдено входження певного слова w , то ми не можемо гарантувати, що це входження справді відповідає слову w , оскільки воно може бути суфіксом іншого слова. У коді C_2 для перевірки, чи є w справді окремим словом, достатньо переглянути 4 біти, які передують w :

якщо це біти 0110, то w – окреме слово, інакше – ні. Проте в коді Fib3 перевірки будь-якої фіксованої кількості бітів, що передують кодовому слову, недостатньо, оскільки роздільником і найкоротшим словом у цьому коді є 111, а кілька таких слів можуть «склеюватися», якщо записані одне за одним. Як один зі способів уникнення цієї проблеми, у [3] пропонується вилучати з коду Fib3 найкоротше кодове слово 111 – такий код позначимо як Fib3⁻. Однак щільність коду Fib3⁻ є суттєво гіршою за щільність коду C_2 навіть за реалістичних обсягів алфавітів, елементи яких розподілено за законом Зіпфа (табл. 2, за базу порівняння відносних величин взято код Fib3).

Табл. 2. Середня довжина кодового слова

Обсяг алфавіту	Fib3	Fib3 ⁻	C_2
1000	8,21	8,88 (+8%)	8,35 (+1,7%)
10 000	10,1	10,61 (+5%)	10,23 (+1,3%)
100 000	11,99	12,4 (+3,4%)	12,09 (+0,8%)
1 млн	13,87	14,22 (+2,5%)	13,94 (+0,5%)
10 млн	15,76	16,06 (+1,9%)	15,8 (+0,2%)
100 млн	17,65	17,91 (+1,5%)	17,65 (0 %)

Висновки

Властивості (2,3)-подання чисел дають змогу сконструювати стискальний код, який усуває деякі недоліки відомого коду Фібоначчі Fib3, майже не знижуючи його стискальної ефективності у разі застосування до природномовних текстів. За розглянутими в статті принципами може бути сконструйовано також інші стискальні коди, що можуть виявитися ще ефективнішими для алфавітів певного обсягу.

Список літератури

1. Anisimov A.V. Prefix Encoding by Means of the 2,3-Representation of Numbers / A.V. Anisimov // IEEE Transactions on Information Theory. – 2013. – No 4. – P. 2359-2374.
2. Анисимов А.В. Помехоустойчивое префиксное кодирование на основе нижнего (2,3)-представления чисел / А.В. Анисимов, И.А. Завадский // Кибернетика и системный анализ. – 2014. – № 2. – С. 3–14.
3. Klein S.T. On the usefulness of Fibonacci compression codes / S.T. Klein, M.K. Ben-Nissan // Computer Journal. – 2010. – vol. 53, no. 6, p. 701–716.

References

1. ANISIMOV, A.V. (2013) Prefix Encoding by Means of the 2,3-Representation of Numbers, *IEEE Transactions on Information Theory*. vol. 59, no 4, pp. 2359-2374.
2. ANISIMOV, A.V., ZAVADSKYI, I.O. (2014) Pomekhoustojchivoe prefiksnoe kodirovanie na osnove nizhnego (2,3)-predstavlenija chisel. *Kibernetika i systemnyj analiz*. No 2, pp. 3–14.
3. KLEIN, S.T., BEN-NISSAN, M.K. (2010) On the usefulness of Fibonacci compression codes. *Computer Journal*. vol. 53, no. 6, pp. 701–716.

Надійшла до редколегії 17.12.2014

УДК 517.9

Івохін Є.В.¹, д.ф.-м.н, доцент,
Махно М.Ф.², аспірант

Розробка засобів адаптивного тестування та автоматичного оцінювання знань

^{1,2} Київський національний університет
імені Тараса Шевченка, м.Київ, пр-т Глушкова,
4д, e-mail: ivohin@univ.kiev.ua

Ivohin E.V.¹, Dr.Sci.,
Makhno M.F.², postgraduate

Adaptive testing and automatic grading methods development

^{1,2} Taras Shevchenko National University of Kyiv,
Kyiv, Glushkova st., 4d,
e-mail: ivohin@univ.kiev.ua

У даній статті розглянуто основні підходи, що використовуються для проведення адаптивного тестування. Розглянуто модель параметричної оцінки рівнів знань осіб, що проходять тестування, та рівнів складності тестових завдань за допомогою методики теорії тестових завдань Item Response Theory. Запропоновано реалізацію процесу автоматизованого проведення адаптивного тестування та інтерпретації його результатів.

Ключові слова: адаптивне тестування, теорія тестових завдань, параметрична оцінка.

This article analyzes the main approaches used for the process of adaptive testing. There are considered the concept of adaptive test control and methods effective implementation of adaptive testing. The model parametric estimation of levels of knowledge of persons tested and difficulty levels of test problems using methods of the theory test items Item Response Theory are considered. It was chosen model of one-parameter logistic Rush function, called the characteristic curve. It is illustrated calculation of latent characteristics. The formulas for calculating the values of the characteristics are discussed. The problem of adequate assessment of the complexity of test items and initial level of person tested knowledge is considered. The formula for estimating the initial level of tested persons is considered. The estimation of task complexity based on the fuzzy approach is proposed. The adaptive estimation scheme is given. The approach to the implementation of the automated adaptive testing process and interpretation of the results is proposed. The tasks of adaptive testing practical using are defined.

Key words: adaptive testing, item response theory, parametric estimation.

Статтю представив д.т.н., проф. Волошин О.Ф.

Комп'ютерні системи контролю професійної підготовки є одним із різновидів автоматизованих систем навчання та контролю знань, які, у свою чергу, відносяться до спеціалізованих експертних систем. Визначальними характеристиками систем перевірки профпідготовки є багатокритеріальність процесу оцінювання знань і навичок осіб, що навчаються, та одержання висновків про рівень їх професійної підготовки і професійної спрямованості.

Комп'ютерні системи реалізують певні інформаційні технології, які за визначенням є сукупністю методів та засобів збору, збереження та перетворення вихідної інформації (апріорні дані) у кінцевий продукт (апостеріорні знання). Технологічність використання комп'ютерних систем для навчання та контролю знань визначає високий професійний рівень їх реалізації та забезпечує мінімальні часові витрати осіб, що проходять тестування (ОПТ), і максимально об'єктивний процес оцінювання. Одним з підходів для створення систем контролю профпідготовки є реалізація схем адаптивного тестування

та ефективної інтерпретації його результатів.

Поняття адаптивного тестування

Під адаптивним тестовим контролем [1] розуміють комп'ютеризовану систему науково обгрунтованої перевірки та оцінки результатів навчання, що відзначається високою ефективністю за рахунок оптимізації процедур генерації, пред'явлення та оцінювання результатів виконання адаптивних тестів. Ефективність контрольно-оціночних процедур підвищується при використанні багатокрокової стратегії відбору та пред'явлення завдань, що базується на алгоритмах з повною контекстною залежністю, в яких черговий крок здійснюється лише після оцінки результатів виконання попереднього кроку. Після виконання чергового завдання щоразу виникає потреба у прийнятті рішення про підбір складності наступного завдання в залежності від того, вірною або невірною була попередня відповідь. Алгоритм формулювання завдань будується за принципом зворотного зв'язку, коли при правильній відповіді ОПТ чергове завдання вибирається більш важким, а невірна відповідь

тягне за собою пред'явлення більш легкого завдання, ніж те, на яке було дано невірну відповідь. Існує можли-вість задання додаткових питань з інших тем, які тестований знає не дуже добре. Це дозволяє більш точно визначити рівень знань за обраними тестами. Таким чином, можна сказати, що адаптивна модель нагадує викладача на іспиті - якщо відповіді на поставлені питання здійснюються впевнено і правильно, викладач досить швидко ставить ОПТ позитивну оцінку. Якщо тестований починає «плавати», то викладач задає йому додаткові або спрямовуючі питання того ж рівня складності або з тієї ж теми. І, нарешті, якщо від ОПТ із самого початку викладач не отримує або отримує неправильні відповіді на поставлені питання, викладач теж досить швидко виставляє оцінку, але негативну.

Методом ефективної реалізації систем адаптивного тестування повинні стати системи навчання, які з розвитком мультимедійних технологій вивели на новий рівень викладання навчальних дисциплін. Інтеграція систем навчання і контролю дозволяє реалізувати замкнений цикл навчання. Жорсткість такої структури стала причиною впровадження в автоматизовані системи (АС) адаптаційних механізмів, що базуються на різних принципах і моделях.

Одним з прикладів таких моделей є методика проведення оцінювання знань на основі тестових завдань (IRT). IRT - це проведення високоякісних педагогічних вимірювань рівня підготовленості тестованих і рівня складності завдань, куди входить пошук відповідних прогностичних моделей та проведення розрахунків придатності моделі для наявних даних.

Завдання IRT зводяться до розробки методів вимірювання, які дозволяють отримати найкращі (оптимальні) параметричні оцінки рівня підготовленості ОПТ і оцінки складності завдань на основі вибірових статистик та інших емпіричних даних [2].

У технологіях, що базуються на використанні IRT, вводиться основне припущення про існування деякого взаємозв'язку між результатами тестування, що спостерігаються, і латентними якостями осіб, що проходять тестування. Передбачається, що кожній особі ставиться у відповідність тільки одне значення латентного параметра. Елементи першої множини θ_i - це рівні знань групи з N осіб, де $i = \overline{1, N}$. Другу множину утворюють значення латентного параметра δ_j , $j = \overline{1, K}$, що дорівнюють складності j завдання тесту. На практиці завдання полягає в оцінці значення латентних

параметрів за відповідями тестованих осіб на завдання тесту.

Функціональна залежність ймовірності правильної відповіді на завдання від латентної характеристики визначається у вигляді характеристичної кривої завдання (Item characteristic curve - ICC). Найчастіше в теорії IRT передбачається, що ICC мають S-подібну форму (рис. 1). З графіка випливає, що із зростанням оцінки латентної характеристики збільшується ймовірність правильної відповіді на завдання тесту. На відміну від класичної теорії з статистиками, що показують складність і відмінність завдань [3], у цьому випадку можна перевіряти, як ймовірність правильної відповіді залежить від латентної характеристики.



Рис.1. Приклад ICC.

Важливим моментом в моделях латентних характеристик є те, що вони дозволяють провести порівняння тестованих навіть у тих випадках, коли вони виконують різні завдання тесту. Цей ефект іноді називають вимірюванням, вільним (незалежним) від тесту. Для ілюстрації припустимо, що особа, яка проводить тестування, знає, що чотири завдання поділяються за складністю на два рівні. Екзаменатор пред'являє два найбільш легких завдання одній особі, а два найважчих - другій. Перший тестований відповідає на завдання №1 правильно, а на завдання №2 - неправильно. Таким чином, робиться висновок, що оцінка його латентної здатності знаходиться в інтервалі $\theta_1 \leq \theta < \theta_2$. Другий тестований відповідає на завдання №3 правильно, а на завдання №4 - неправильно, тому екзаменатор робить висновок про те, що оцінка латентної здатності випробовуваного $\theta_3 \leq \theta < \theta_4$. На підставі цього екзаменатор може зробити висновок, що перший відповідаючий має меншу латентну здатність, ніж другий.

Цей приклад показує, що завдяки можливостям теорії латентних характеристик результати ОПТ можуть бути розміщені на одній шкалі навіть у випадках, коли виконуються тести з різних завдань, за умови, що вимірюється одна

латентна характеристика.

Найбільш поширеною математичною моделлю з використання IRT є модель з одно-параметричною логістичною функцією Раша, що називається *характеристичною кривою* і має вигляд [3,4]:

$$P_j = \frac{e^{(\theta - \delta_j)}}{1 + e^{(\theta - \delta_j)}}, \quad (1)$$

де P_j - імовірність правильної відповіді особи будь-якого рівня підготовки на завдання певного рівня складності з номером $j, j = \overline{1, K}$; δ_j - рівень складності конкретного j -го завдання проектного тесту; θ - рівень знань (латентна змінна).

Чим вище рівень зростання функції P_j для довільного завдання j , тим вужче інтервал рівня складності, для якого ймовірна правильна відповідь. Пропонується поліпшити модель Раша за рахунок введення у вираз додаткового параметра $a_j, j = \overline{1, K}$, який дає інформацію про завдання з точки зору оцінки його диференціюючої здібності на заданому інтервалі. Геометрично значення параметра виражається рівнем зростання характеристичної кривої, аналітично - значенням похідної функції в точці перегину. Після введення в вираз параметра a_j отримаємо двопараметричну модель:

$$P_j = \frac{e^{a_j(\theta - \delta_j)}}{1 + e^{a_j(\theta - \delta_j)}}, \quad (2)$$

у якій емпіричні межі значень для параметра $a_j, j = \overline{1, K}$, задаються в межах від -2,80 до +2,80.

Наступною є проблема адекватної оцінки складності тестових завдань і початкового рівня знань тестованих. Початкова оцінка рівня знань ОПТ визначається за формулою $\theta_i = \ln(p_i / q_i)$, де p_i - частка правильних відповідей i -ї особи, q_i - частка неправильних відповідей, $i = \overline{1, N}$. Аналогічно визначається початкова оцінка рівня складності завдання тесту $\delta_j = \ln(q_j / p_j)$, де p_j, q_j - частки правильних та неправильних відповідей на j -е завдання тесту, $j = \overline{1, K}$.

З огляду на дії різних випадкових факторів оцінки параметрів θ_i і δ_j для будь-яких $i = \overline{1, N}$ та $j = \overline{1, K}$, отримані на різних вибірках, будуть, звичайно, різними. Якщо обсяг вибірки досить великий, то можна ставити питання про обчислення значень параметрів θ_i і δ_j , що будуть найбільш ефективними та об'єктивними оцінками параметрів. При довільному тестуванні результати обчислення $\bar{\theta}_i (i = \overline{1, N})$ - статистичних оцінок θ_i і $\bar{\delta}_j (j = \overline{1, K})$ - статистичних оцінок δ_j будуть відрізнятися від існуючих точних значень.

Оцінка та інтерпретація результатів

При звичайному оцінюванні результатів тестів кожна тестова оцінка є сумою оцінок за завданнями для кожного відповідаючого, якому присуджується 1 бал за правильну відповідь і 0 за будь-який інший варіант відповіді. Це правило іноді називають оцінкою числа правильних відповідей. Такий результат оцінювання можна виразити формулою:

$$X_a = \sum_{i=1}^n x_{ai}, \quad (3)$$

де X_a - загальна (повна) тестова оцінка ОПТ a ; x_{ai} - оцінка виконання ОПТ a завдання i . Якщо завдання оцінюються дихотомічно, значення x_{ai} дорівнюють 0 або 1. Згідно з цим оціночним правилом всі завдання мають однакову вагу.

Концепція оцінюючої формули може бути врахована при отриманні наближених оцінок істинних балів для розроблених тестів. Необхідно згадати, що $P_j(\theta)$ можна інтерпретувати як імовірність того, що ОПТ з рівнем здатності θ виконає завдання j правильно. Тому справжній бал тестованого може бути оцінений шляхом врахування ймовірностей усіх правильних відповідей на всі завдання. Лордом Ф.М.[3] запропоновано модифікацію, за якою визначають справжню оцінку числа правильних відповідей ОПТ a за допомогою процедури:

- 1) встановити всі завдання, на які відповів a ;
- 2) для кожного з цих завдань отримати $P_j(\theta)$ - ймовірність, з якою a з оцінкою здатності θ відповість на це завдання вірно;
- 3) підсумувати ці ймовірності.

Це можна представити у вигляді формули

$$\xi_a = \sum^{(a)} P_j(\theta), \quad (4)$$

де ξ_a - істинний бал, отриманий за кількістю правильних відповідей a ; $\sum^{(a)}$ - сумування результатів тільки за тими завданнями, на які відповідав a . Наближена оцінка істинного бала, отриманого за кількістю правильних відповідей a , коригується для врахування поправки на випадок вгадування за формулою:

$$\eta_a = \sum^{(a)} P_j(\theta) - \frac{\sum^{(a)} Q_j(\theta)}{k-1}, \quad (5)$$

де $Q_j(\theta) = 1 - P_j(\theta)$; k - кількість варіантів відповіді на кожне завдання.

Припустимо, що заздалегідь відома оцінка параметра δ_j , $j = \overline{1, K}$. Тоді для реалізації адаптивного тестування може бути запропонована процедура опитування. Якщо відповідь на питання є правильною, то вважається, що рівень підготовки тестованого вище складності завдання, і він здатний вирішувати задачі заданої складності, інакше - нездатний. Надалі, якщо відповідаючий успішно впорався з наданим завданням, то у нього з'являється бажання отримати більш важке завдання. Якщо ні - то йому буде запропонована ще одна спроба розв'язування завдання тієї ж складності. У випадку, якщо воно також не розв'язане, то пропонується більш просте завдання. У випадку невиконання цього завдання, пропонується завдання ще меншою складності.

Аналогічно відбувається процес підвищення складності завдань. У результаті особа, що проходить тестування, вибере для себе певний рівень складності, відповідно до якого і буде формуватися складність завдань. Таким чином, функція «рівня знань» є перетворенням функції «складності» завдання через «здатність розв'язання задач» певної «складності». Ці терміни мають нечіткий характер. Тому для формалізації цих понять доцільно застосовувати теорію нечітких множин [5].

Список використаних джерел

1. Hambleton R.K., Jones R.W. Comparison of Classical Test Theory and Item Response Theory and Their Applications to Test Development. University of Massachusetts at Amherst, 1993.
2. Нейман Ю.М. Введение в теорию моделирования и параметризации педагогических тестов / Ю.М. Нейман, В.А. Хлебников. - М.: Прометей, 2000. - 168 с.
3. Lord, F.M., Novick, M.R. Statistical theories of mental test scores. Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1968.
4. Croker L., Algina J. Introduction to Classical and Modern Test Theory. - SF: Cengage Learning, 2006. - 527 p.
5. Орловский С.А. Проблемы принятия решения при нечеткой исходной информации. - М.: Наука, 1981. - 206с.

Існують три варіанти схем адаптивного контролю, що відповідають сучасному рівню автоматизації процесів освіти:

- пірамідальне тестування (завдання однакового середнього рівня складності, що в залежності від відповідей доповнюються або більш важкими, або більш простими);
- flexilevel-тестування (контроль починається з будь-якого рівня складності завдань);
- stradaptive тестування (кожне наступне завдання відрізняється від попереднього за складністю на один рівень).

Залучення сучасних методик адаптивного тестування спрямоване на наближення процесу навчання до індивідуальних особливостей в умовах колективного навчання. Контроль за результатами навчання дозволяє оцінити стан навчання і необхідні дії для відповідної корекції навчального процесу. В цілому, адаптивне тестування є адекватним сучасним напрямком розвитку дистанційної освіти і відкриває нові можливості у підвищенні ефективності навчальних процесів.

Висновок. У даній статті розглянуто основні поняття адаптивного тестування. Для проведення адаптивних тестів пропонується застосування теорії тестових завдань IRT, яка дозволяє визначити рівні знань осіб, що проходять тестування за допомогою оцінки латентних характеристик θ_i і δ_j . Запропоновано підхід до проведення адаптивного тестування та інтерпретації його результатів.

References

1. HAMBLETON R. and JONES R. (1993) *Comparison of Classical Test Theory and Item Response Theory and Their Applications to Test Development*, University of Massachusetts at Amherst.
2. NEUMANN J. and KHLBNIKOV V. (2000). *Vvedenie v teoriju modelirovaniya i parametrizacii pedagogicheskikh testov*. Moskva:Prometey.
3. LORD, F., and NOVICK, M. (1968) *Statistical theories of mental test scores*. Reading, Mass.: Addison-Wesley.
4. CROKER L. and ALGINA J. (2006) *Introduction to Classical and Modern Test Theory*. SF: Cengage Learning.
5. ORLOVSKY S. (1981) *Problemy prinjatija reshenija pri nechetkoj ishodnoj informacii*. Moskva: Nauka.

Надійшла до редколегії 22.12.2014

УДК 519.6

Касьянюк В.С.¹, к. ф.-м. н.

V.S. Kasyanyuk¹, PhD (Phys.-Math.)

**Відновлення детермінованих полів,
спостережуваних на фоні випадкових, за
даними від нестабільних рецепторів**

**Restoring of deterministic fields observed
on a background of random fields with data
from the unstable receptors**

¹ Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 83000, м. Київ, пр-т
Глушкова, 4д,
e-mail: tk@unicyb.kiev.ua

¹ Taras Shevchenko National University of Kyiv,
83000, Kyiv, Glushkova st., 4d,
e-mail: tk@unicyb.kiev.ua

Розглянуто задачу відновлення поля (або процесу), що спостерігається на фоні випадкового поля, за даними вимірювань (спостережень) скінченної множини датчиків (рецепторів) з нестабільними характеристиками; крім того, дані вимірювань містять адитивну шумову компоненту. В якості розв'язку запропоновано парето-оптимальні оцінки, отримані в ході вирішення двокритеріальної задачі мінімізації рівня шумового фону (дисперсії) шуканої оцінки і величини її операторної нев'язки. Досліджено властивості побудованих оцінок, розглянуто часткові випадки.

Ключові слова: обробка і інтерпретація експериментальних даних, похибки вимірювань, нестабільні характеристики, парето-оптимальне оцінювання.

The problem that is actual for practical application of the restoration of field (or process) observed on a background of random field on measurements (observations) of finite set of sensors (receptors) with unstable characteristics is considered; besides, measurements' data contain an additive noise component. In mathematical terms, the problem is reduced to the estimation of a linear functional on a finite set of values of other linear functionals by function that contains an additive random component; the functionals' kernels are unstable and values are distorted by random errors. Pareto-optimal estimates obtained through solving the problem of two-criterion minimization of background noise level (variance) of the desired estimates and its operator residual are suggested as solution. Properties of estimates obtained are studied, recommendations on the estimate choice of the continuum of Pareto-optimal estimates are suggested, particular cases important for the practical application are considered.

Key words: processing and interpretation of experimental data, measurement's error, unstable characteristics, Pareto-optimal estimation.

Статтю представив д. ф.-м. н., проф. Хусаїнов Д.Я.

Широкий клас задач обробки і інтерпретації експериментальних даних [1–4] може бути зведений до задачі відновлення поля (або процесу) $w(x)$, $x \in D$, $D \in E^m$, $w(x) \in L_2[D]$ - комплекснозначна функція x , що спостерігається в області D m -вимірного фазового простору параметрів $x \in E^m$, за даними вимірювань (спостережень) n датчиків (рецепторів)

Задача відновлення $w(x)$ за даними (1) у припущенні, коли характеристики $q_k(x)$ вимірювальних приладів стабільні, поле $w(x)$ детерміноване, а щодо шумів вимірювань вважаються відомими їх перші два моменти, розглянута в [4], де побудовано псевдоінверсні, максимально-правдоподібні, регуляризовані та парето-оптимальні розв'язки системи (1), встановлений зв'язок між ними.

$$y_k = \int_D q_k(x) w(x) dx + v_k, \quad k = 1, \dots, n \quad (1)$$

$q_k(x) \in L_2[D]$ - комплекснозначні характеристики датчиків, $v_k, k = 1, \dots, n$ - шуми вимірювань.

Постановка задачі

В даній роботі розглядається випадок, коли окрім шумів вимірювань v_k в (1) поле

$w(x)$ містить випадкову компоненту, а характеристики датчиків $q_k(x)$ нестабільні. Такого роду припущення широко зустрічаються на практиці [1] і значно розширюють коло задач, які описуються схемою вимірювань (1). Система (1) в цьому випадку приймає вигляд

$$y = \int_D q(x)w(x)dx + v, \quad (2)$$

де $y = (y_1, \dots, y_n)^T \in C^n$ - вектор даних, $q(x) = g(x) + \gamma(x)$, $w(x) = u(x) + \omega(x)$, $g(x) = (g_1(x), \dots, g_n(x))^T$ - вектор-функція паспортних характеристик рецепторів (тренд $q(x)$), $g(x) = M(q(x)) \neq \text{const}$, $\gamma(x) = (\gamma_1(x), \dots, \gamma_n(x))^T$ - випадкова вектор-функція (нестабільна компонента) з нульовим середнім $M(\gamma(x)) = 0$ і кореляційною матрицею-функцією $\Gamma(x, \xi) = M(\gamma(x)\gamma^*(\xi))$ (M - символ математичного сподівання, $*$ - символ ермітова спряженість), $\omega(x)$ - фонове випадкове поле, на якому спостерігається $u(x)$, що підлягає оцінюванню. Будемо вважати, що $M(\omega(x)) = 0$, $M(\omega(x)\omega^*(\xi)) = \Omega(x, \xi)$. Нарешті, $v = (v_1, \dots, v_n)^T \in C^n$ - вектор шумів спостережень з $M(v) = 0$ і $M(vv^*) = R$, $\det R \neq 0$.

Для вирішення задачі відновлення поля $u(x)$ розглянемо спочатку задачу оцінювання деякого лінійного функціоналу

$$\Pi u = \int_D \pi(x)u(x)dx, \quad (3)$$

$\pi(x)$ - задана функція, $\pi(x)$, $u(x)$, $g(x) \in L_2[D]$, $\Gamma(x, \xi)$, $\Omega(x, \xi) \in L_2[D \times D]$ за даними (2) (задачу оцінювання за даними (2) виходу поля $u(x)$ з деякого приладу з заданими характеристиками). Оцінку Πu будемо шукати у вигляді Bu , де $B = (b_1, \dots, b_n)$ - ваговий вектор, визначений таким чином, щоб оцінка $\hat{\Pi}u = Bu$ мала мінімальну дисперсію і мінімальну операторну нев'язку, що характеризує її зсув.

Парето-оптимальне оцінювання

Для отримання оптимальної лінійної відносно даних (2) оцінки функціоналу (3) множенням (2) зліва на B перетворимо (2) до вигляду

$$Bu = \int_D \pi(x)u(x)dx + \int_D (Bg(x) - \pi(x))u(x)dx + \quad (4)$$

$$+ \int_D B\gamma(x)u(x)dx + \int_D Bg(x)\omega(x)dx + \int_D B\gamma(x)\omega(x)dx + Bv.$$

З рівності (4) видно, що оцінюваний функціонал Πu відрізняється від Bu наступними доданками:

$$\text{артефактом} \quad \psi(u) = \int_D (Bg(x) - \pi(x))u(x)dx \quad \text{і}$$

шумовою складовою

$$\Delta = \int_D B\gamma(x)u(x)dx + \int_D Bg(x)\omega(x)dx +$$

$$\int_D B\gamma(x)\omega(x)dx + Bv \quad \text{з} \quad M\Delta = 0. \quad \text{Оскільки} \quad \text{з}$$

нерівності Шварца випливає

$$\left| \int_D (Bg(x) - \pi(x))u(x)dx \right| \leq \int_D |Bg(x) - \pi(x)| |u(x)| dx \leq$$

$$\leq \left(\int_D |Bg(x) - \pi(x)|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_D |u(x)|^2 dx \right)^{1/2}, \quad \text{і функція}$$

$u(x)$ невідома, вектор B будемо вибирати з умови мінімізації операторної нев'язки

$$\varphi(B) = \int_D |Bg(x) - \pi(x)|^2 dx = BKB^* - \Pi g^* B^* -$$

$$- B(\Pi g^*)^* + \Pi \pi^*, \quad K = \int_D g(x)g^*(x)dx, \quad \text{яка}$$

визначає міру близькості синтезованої характеристики $Bg(x)$ до заданої $\pi(x)$. У припущенні некорельованості величин $\gamma(x)$, $\omega(x)$ і v оцінимо рівень шумового фону:

$$h(B) = M\Delta\Delta^* = B(R + \int_D \int_D \gamma(x)\Omega(x, \xi)\gamma^*(\xi)dxd\xi +$$

$$+ \int_D \int_D g(x)\Omega(x, \xi)g^*(\xi)dxd\xi +$$

$$+ \int_D \int_D \Gamma(x, \xi)u(x)u^*(\xi)dxd\xi) B^*. \quad \text{Якщо ввести}$$

$$\text{позначення} \quad \Omega\Gamma = \int_D \int_D \gamma(x)\Omega(x, \xi)\gamma^*(\xi)dxd\xi,$$

$$\Omega K = \int_D \int_D g(x)\Omega(x, \xi)g^*(\xi)dxd\xi, \quad \text{а матрицю}$$

$$\int_D \int_D \Gamma(x, \xi)u(x)u^*(\xi)dxd\xi \quad \text{оцінити величиною} \quad Q,$$

$$\text{то} \quad h(B) = B(R + \Omega\Gamma + \Omega K + Q)B^*.$$

Для побудови парето-оптимальної оцінки $\hat{\Pi}u = Bu$ розглянемо наступну задачу двокритеріальної мінімізації за Парето

$$\begin{cases} \varphi(B) = BKB^* - Pg^*B^* - B(Pg^*)^* + \Pi\pi^* \rightarrow \min_B \\ h(B) = B(R + \Omega\Gamma + \Omega K + Q)B^* \rightarrow \min_B \end{cases} \quad (5)$$

розв'язок якої з урахуванням опуклості критеріїв задачі (5) і застосуванням підходу, запропонованого в [2], можна отримати у вигляді $B = Pg^*(K + \alpha(R + \Omega\Gamma + \Omega K + Q))^{-1}$, $0 < \alpha < \infty$.

Відповідно, парето-оптимальні оцінки $\hat{\Pi}u$ мають вигляд

$$\hat{\Pi}u = Pg^*(K + \alpha(R + \Omega\Gamma + \Omega K + Q))^{-1}u, \quad (6) \\ 0 < \alpha < \infty$$

Можливий і інший варіант визначення критеріїв парето-оптимізації, який лишається єдиним, коли матриця Q невідома. Якщо з (4)

$$\text{визначити артефакт як } \psi(u) = \int_D (Bg(x) - \pi(x) + B\gamma(x))u(x)dx, \text{ шумову компоненту, відповідно, як } \Delta = \int_D Bg(x)\omega(x)dx + \int_D B\gamma(x)\omega(x)dx + Bv, \text{ то}$$

операторна нев'язка визначається як

$$\begin{aligned} \varphi(B) &= M \int_D |B(g(x) + \gamma(x)) - \pi(x)|^2 dx = B(K + \Gamma)B^* - \\ &- Pg^*B^* - B(Pg^*)^* + \Pi\pi^*, \quad \Gamma = \int_D \gamma(x)\gamma^*(x)dx = \\ &= \int_D \Gamma(x, x)dx, \text{ а рівень шумового фону } h(B) = \\ &= M\Delta\Delta^* = B(\Omega K + \Omega\Gamma + R)B^*. \end{aligned}$$

Двокритеріальна задача мінімізації за Парето, яка визначає оптимальний ваговий вектор B , має вигляд

$$\begin{cases} \varphi(B) = B(K + \Gamma)B^* - Pg^*B^* - B(Pg^*)^* + \\ + \Pi\pi^* \rightarrow \min_B \\ h(B) = B(R + \Omega\Gamma + \Omega K)B^* \rightarrow \min_B \end{cases}.$$

Її розв'язок, по аналогії з розв'язком задачі (5), нескладно отримати у вигляді

$$B = Pg^*(K + \Gamma + \alpha(R + \Omega\Gamma + \Omega K))^{-1}, \quad 0 < \alpha < \infty,$$

і тоді

$$\hat{\Pi}u = Pg^*(K + \Gamma + \alpha(R + \Omega\Gamma + \Omega K))^{-1}u, \quad (7) \\ 0 < \alpha < \infty.$$

Зауваження 1. Оцінки (6) і (7) супроводжуються одночасно незменшуваними рівнем шумового фону і величиною операторної нев'язки, які мають протилежні тенденції: рівень шумового фону $h(\alpha)$ монотонно спадає до нуля із зростанням α від 0 до ∞ , а величина операторної нев'язки $\varphi(\alpha)$ монотонно зростає від

$\varphi(+0)$ до $\Pi\pi^*$.

Зауваження 2. Отримані континуальні множини парето-оптимальних оцінок (6) і (7) залежать від параметра парето-оптимізації α , $0 < \alpha < \infty$, для визначення конкретного значення якого досліджується множина Парето – параметрична залежність $\varphi(h)$, $0 < \alpha < \infty$. Вибір конкретного значення α може здійснюватись особою, що приймає рішення, і реалізує компроміс між зростанням величини операторної нев'язки і спаданням рівня шумової компоненти і навпаки.

Деякі часткові випадки

Розглянемо тепер деякі часткові випадки задачі(2).

1. Характеристики $q(x)$ стабільні, поле $w(x)$ не детерміноване, тобто $q(x) = g(x)$, $\gamma(x) = 0$. Тоді $\Gamma = 0$, $\Omega\Gamma = 0$ і з (7) маємо

$$\hat{\Pi}u = Pg^*(K + \alpha(R + \Omega K))^{-1}u, \quad 0 < \alpha < \infty.$$

2. Характеристики $q(x)$ нестабільні, поле $w(x)$ детерміноване, тобто $\omega(x) = 0$, $w(x) = u(x)$. Тоді $\Omega = 0$, $\Omega K = 0$, $\Omega\Gamma = 0$ і (7) перетворюється на $\hat{\Pi}u = Pg^*(K + \Gamma + \alpha R)^{-1}u$, $0 < \alpha < \infty$.

3. Характеристики $q(x)$ стабільні, поле $w(x)$ детерміноване, тобто $\gamma(x) = 0$, $\omega(x) = 0$, $q(x) = g(x)$, $w(x) = u(x)$. Тоді $\Gamma = 0$, $\Omega\Gamma = 0$, $\Omega = 0$, $\Omega K = 0$, і з (7) отримуємо $\hat{\Pi}u = Pg^*(K + \alpha R)^{-1}u$, $0 < \alpha < \infty$.

Відновлення поля $u(x)$

Парето-оптимальні оцінки (6) і (7) функціонала (3) можуть бути використані для побудови парето-оптимальних оцінок функції $u(x)$ за даними (2), якщо ввести систему функціоналів

$$\Pi_{\lambda z}u = \int_D \pi(x, z, \lambda)u(x)dx, \quad \lambda > 0, \text{ визначивши для}$$

будь-якої точки $z \in \text{int } D$ дійсну невід'ємну функцію

$$\pi(x, z, \lambda) = \begin{cases} \tau(x), \|x - z\| < \lambda, \{ \|x - z\| < \lambda \} \subset D \\ 0 & \text{в інших точках } x \in D \end{cases},$$

неперервну по x в D , при цьому

$$\int_D \pi(x, z, \lambda)dx = \int_{\|x-z\|<\lambda} \tau(x)dx = 1. \text{ Тоді, якщо функція}$$

$u(z)$ неперервна в околі точки $z \in \text{int } D$, то на основі другої теореми про середнє маємо

$$\Pi_{\lambda z}u = \int_D \pi(x, z, \lambda)u(x)dx = \int_{\|x-z\|<\lambda} \tau(x)u(x)dx =$$

$$= \int_{\|x-z\|<\lambda} \tau(x) \operatorname{Re} u(x) dx + i \int_{\|x-z\|<\lambda} \tau(x) \operatorname{Im} u(x) dx =$$

$$= \int_{\|x-z\|<\lambda} \tau(x) dx (\operatorname{Re} u(z_1) + i \operatorname{Im} u(z_2)) = \operatorname{Re} u(z_1) +$$

$$+ i \operatorname{Im} u(z_2), \quad z_1, z_2 \in \|x-z\|<\lambda. \quad \text{Переходячи до}$$

границі при $\lambda \rightarrow 0$, отримуємо $\Pi_{\lambda z} u \rightarrow \operatorname{Re} u(z) + i \operatorname{Im} u(z) = u(z)$. Отже, для будь-якої точки $x \in \operatorname{int} D$, в околі якої $u(x)$ неперервна, можна побудувати систему функцій $\pi(x, z, \lambda)$ таким чином, що з парето-оптимальних оцінок функціоналу $\Pi_{\lambda z} u$ в (6) і (7) граничним переходом при $\lambda \rightarrow 0$ можна отримати парето-оптимальні оцінки функції $u(x)$ у вигляді

$$\hat{u}(x) = \Pi g^*(K + \alpha(R + \Omega\Gamma + \Omega K + Q))^{-1} y \quad (8)$$

$$0 < \alpha < \infty,$$

і

$$\hat{u}(x) = \Pi g^*(K + \Gamma + \alpha(R + \Omega\Gamma + \Omega K))^{-1} y \quad (9)$$

$$0 < \alpha < \infty$$

Список використаних джерел

1. *Пытьев Ю.П.* Методы математического моделирования измерительно-вычислительных систем. / Ю.П.Пытьев – М.:ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 400с.
2. *Белов Ю.А.* Математичні методи і алгоритми обробки в задачі інтерпретації непрямих вимірювань. / Ю.А.Белов, В.С.Касьянюк – К.: Науковий світ, 1999. – 79 с.
3. *Верлань А.Ф.* Методы и алгоритмы восстановления сигналов и изображений./Верлань А.Ф., Мосенцова Л.В. и др. – К.: НАН Украины, Ин-т проблем моделирования в энергетике им. Г.Е.Пухова, 2011. – 368 с.
4. *Kasyanyuk V.* Problem of restoring the function-signals by finite set of data with errors./ V.Kasyanyuk, I.Volchyna //Information Models and Analysys. – 2013. – v.2.- №4. – P.361 – 369.

відповідно (вважається, що функції $g_k(x)$, $k=1, \dots, n$ також неперервні в околі точки x).

Висновки

Таким чином, для задач обробки і інтерпретації вимірювань, що задовольняють лінійній схемі вимірювань (1), запропоновано парето-оптимальний підхід до відновлення спостережуваного поля (або процесу) у випадку, коли це поле спостерігається на фоні випадкового поля рецепторами (датчиками) з нестабільними характеристиками, а результати спостережень (вимірювань) містять випадкові похибки. Отримані парето-оптимальні оцінки супроводжуються одночасно незменшуваними рівнем шумового фону і величиною операторної нев'язки. Надано рекомендації щодо вибору конкретної оцінки з континуальної множини парето-оптимальних оцінок. Розглянуто важливі для практичного застосування часткові випадки.

References

1. PYT'EV, Y. (2004). Mathematical modeling methods of measuring and computing systems. – Moscow: Fizmatlit.
2. BELOV, Y., KASYANYUK, V. (1999). Mathematical methods and processing algorithms for the problem of interpretation of indirect measurements. – Kyiv: Naukovyi Svit.
3. VERLAN, A., MOSENTOVA, L. (2011). Methods and algorithms recovery signals and pictures. – Kiev: NAN Ukraine, Inst. Problem Modelirovaniya v Energetike im. G.E. Puhova.
4. KASYANYUK, V. (2013). Problem of restoring the function-signals by finite set of data with errors. – Kyiv: Naukovyi Svit. In *Information Models and Analysys Vol. 2. №4*. P. 361–369.

Надійшла до редколегії 03.03.2015р.

УДК 519.876:51-7:612.017

Колянова Т.В.¹, к.ф.-м. н.

T.V. Kolianova¹, PhD assistant

Уточнення параметрів в математичній моделі, що описує вплив харчування та навантаження на вміст білків системи комплемента

Refinement of the parameters in a mathematical model that describes the impact of supply and the load on the content of proteins of the complement system

¹ Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, пр-т. Глушкова 4д,

¹ Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03680, Kyiv, Glushkova st., 4d,

e-mail: tania.kolianova@gmail.com

e-mail: tania.kolianova@gmail.com

В будь-якому трудовому колективі від працівника бажано отримати максимальну продуктивність праці. Та зрозуміло, що максимальне навантаження, нервові стреси або фізичне виснаження можуть призвести до виснаження або порушення функціонального стану організму людини. Тому постає природне запитання: «Яким є оптимальний обсяг навантаження (фізичного та психологічного) на організм людини?» Щоб відповісти на це запитання, потрібно вивчити, яким чином навантаження (фізичне і/або психологічне) впливає на імунітет людини. Оскільки від стану імунної системи залежить здоров'я людини і можливість її ефективної праці.

Розглядається математична модель, що описує вплив харчування та навантаження на імунітет людини. Враховуючи особливості біологічної системи імунітету, автор пропонує рівняння математичної моделі представити у вигляді логістичної кривої, що описує процес нарощування з ефектом насичення. Аналізуються параметри даної моделі, за допомогою методу найменших квадратів відшукуються невідомі числові параметри, та записуються відповідні функціональні залежності, які більш точно відображають біологічні процеси, що відбуваються в організмі.

Ключові слова: логістичне рівняння, імунітет, антиген, рівень насичення.

In any workplace employee desirable to get maximum productivity. And it is clear that the maximum load, nervous stress or physical exhaustion can lead to exhaustion or violation of the functional state of the human body. A natural question appears therefore: «What is an optimum volume of loading (physical and psychological) on the organism of man?» To answer this question, it is needed to learn, how loading (physical and/or psychological) influences on immunity of man. As on the state of the immune system the health of man and possibility of it depends effective work.

The article discusses a mathematical model that describes the effect of supply and the load on the human immune system. The equation of a mathematical model is presented in the form of a logistic curve that describes the process of building a saturation effect. Analyzed parameters of the model, using the method of least squares are found unknown number of parameters and recorded relevant functional dependence, which more accurately reflect biological processes in the body.

Key words: logistic equation, the immunity system, load, saturation level.

Статтю представив д. т. н., с. н. с. Кудін В.І.

Враховуючи особливості біологічної системи імунітету, автор висуває гіпотезу про розвиток процесу у вигляді логістичної кривої, що описує процес нарощування з ефектом

насичення [1]. Враховуючи відмічений якісний характер поведінки функцій $y_1(x_1)$ (логістична крива), де x_1 – рівень харчування, x_2 – рівень фізичного або психологічного навантаження,

відповідну залежність можна розглядати як розв'язок такого диференціального рівняння

$$\frac{dy_1}{dx_1} = r \left(1 - \frac{y_1}{q} \right) y_1, \quad y_1(x_1^0) = y_1^0, \quad (1)$$

де r, q, y_1^0 – невідомі числові параметри.

Розв'язком задачі (1) при $x_1^0 = 0, x_2^0 = 0$ відповідно будуть

$$y_1(x_1) = \frac{q}{1 + \left(\frac{q}{y_1^0} - 1 \right) e^{-rx_1}}, \quad (2)$$

Специфіка логістичної кривої в загальному вигляді [4,5] полягає в тому, що для неї характерні: асимптотичний лівий кінець кривої $y_1(-\infty) = 0$, асимптотичний правий кінець кривої $y_1(+\infty) = 1$, значення в середній точці $y_1(0)$ та крутизна, що вимірюється показником r .

При переході від інтервалу $(-\infty; +\infty)$ до інтервалу $(0; 1)$ потрібно врахувати, що значення y_1^0 близьке до нуля і воно не впливає на логістичний характер поведінки кривої. Тому інтервал $(0; 1)$ можна звести до відрізка $[0 + \varepsilon; 1 - \varepsilon]$, де ε – мала додатня величина, тоді маємо:

$$\begin{aligned} x_i \rightarrow +0 &\Rightarrow y \rightarrow +0, \quad i = 1, 2; \\ x_i \rightarrow 1 - 0 &\Rightarrow y \rightarrow 1 - 0, \quad i = 1, 2; \\ y(0) &\rightarrow y(0.5) = y_1^0. \end{aligned}$$

Значення $y_1(1) = 1$ дає підставу стверджувати, що рівень насичення $q = 1$. Тоді (4.7) набуває вигляду

$$y_1(x_1) = \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{y_1^0} - 1 \right) e^{-r(x_1 - 0.5)}}. \quad (3)$$

Залишається один параметр r , що характеризує параметр росту логістичної кривої [2,3] та залежить від рівня навантаження x_2 .

Для визначення невідомого числового параметру r скористаємось методом найменших квадратів і мінімізуємо сумарне середньоквадратичне відхилення.

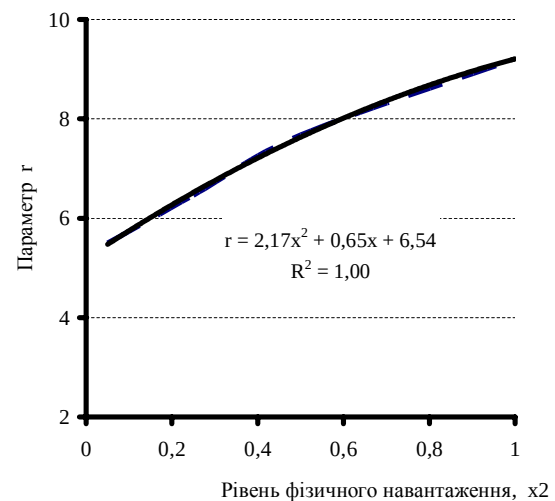


Рис.1а. Залежність числового параметру r^{C_3} від фізичного навантаження та одержана апроксимація з вказаним коефіцієнтом детермінації R (розрахунок автора).

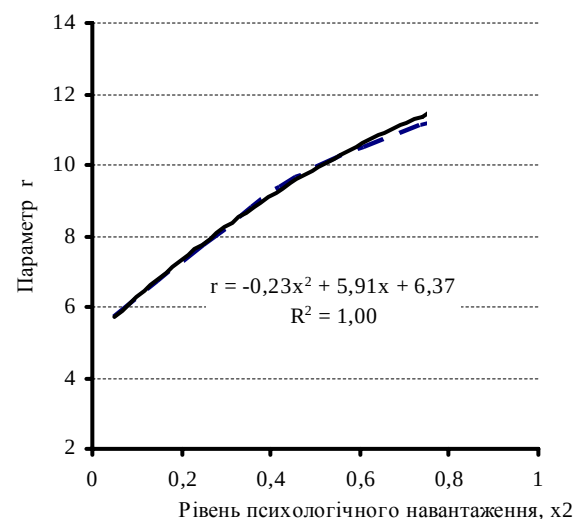


Рис.2б. Залежність числового параметру r^{C_9} від психологічного навантаження та одержана апроксимація з вказаним коефіцієнтом детермінації R (розрахунок автора).

В результаті отримаємо аналітичну залежність параметру $r(x_2)$ у такому вигляді:

для фізичного навантаження

$$r^{C_3}(x_2) = 2,17x_2^2 + 0,65x_2 + 6,54$$

та

психологічного навантаження відповідно

$$r^{C_9}(x_2) = -0,23x_2^2 + 5,91x_2 + 6,37.$$

На основі логістичної кривої (3) отримано функціональні залежності концентрації білка C_3 та C_9 від рівня харчування для фізичного та психологічного навантаження відповідно у наступному вигляді:

$$y(x_1, x_2) = \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{y_1^0} - 1\right) e^{-\left(2,17x_2^2 + 0,65x_2 + 6,54\right)(x_1 - 0,5)}}$$

та

$$y(x_1, x_2) = \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{y_1^0} - 1\right) e^{-\left(-0,23x_2^2 + 5,91x_2 + 6,37\right)(x_1 - 0,5)}}.$$

Як загальний висновок зазначимо, що наш підхід характеризується такою позитивною властивістю, що при побудові математичної моделі враховується специфіка моделі біологічної системи, в результаті чого підвищується точність апроксимаційної моделі

Список використаних джерел

1. Kolianova T.V. Modeling of influence of nutrition, physical and psychical loading on albumen content in the system of complement. Mathematical treatment of experiment results. / T.V. Kolianova // Journal of Automation and Information Sciences. – 2011. – 43. – № 4. – P. 53 – 60.
2. Бернет Ф. Клеточная иммунология / Ф. Бернет. – Москва: Мир. – 1971. – 542с.
3. Hege J. S. A mathematical model relating circulating antibody and antibody forming cells / J.S. Hege, G. Cole // J. Immunol. 1966. V. 97. P. 34-40.
4. Хайпер Э. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи / Хайпер Э., Нёрсет С., Ваннер Г. – Москва: Мир. – 1990. – 685 с.
5. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения / Л.С.Понтрягин. – Москва: Наука. – 1974. – 332 с.

References

1. KOLIANOVA T.V. (2011) Modeling of influence of nutrition, physical and psychical loading on albumen content in the system of complement. Mathematical treatment of experiment results. Journal of Automation and Information Sciences, Volume 43, Issue 4, p. 53 – 60.
2. BERNET F.M. (1959) *The clonal selection theory of acquired immunity*. Nashville: Vanderbilt University Press.
3. HEGE J. S. (1966) A mathematical model relating circulating antibody and antibody forming cells. J. Immunol, V. 97, p. 34-40.
4. E. HAIRER, S.P. NERSETT, G. WANNER (1987) *Solving Ordinary Differencetial Equation I. Nonstiff Problems*. – Hardcover.
5. PONTRYAGIN L.S. (1974) *Obyknovennye differencialnye uravneniya*. Moskva: Nauka.

Надійшла до редколегії 16.03.15

УДК 004.2:004.5

Крак Ю.В., д.ф.-м.н., проф.,
Коваль Ю.В., асистент,
Ставровський А.Б., к.ф.-м.н., доцент

Віртуальний процес: означення та застосування в створенні системи жестового інтерфейсу

Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 83000, м. Київ, пр-т.
Глушкова 4д,
e-mail: kafedraTK@unicyb.kiev.ua

Iu. V. Krak, Prof.,
Iu. V. Koval, Assistant,
A. B. Stavrovskiy, Assoc.prof.

Virtual process: definition and application for gestures interface system creation

Taras Shevchenko National University of
Kyiv, 83000, Kyiv, Glushkova ave., 4d,

e-mail: kafedraTK@unicyb.kiev.ua

В статті розглянуто поняття процесу та віртуального процесу. Запропоновано узагальнення поняття віртуальний процес та основи нотації віртуальних процесів. Розглянуто адресний простір як середовище виконання процесу, простір імен як відповідне загальне середовище віртуального процесу та зазначено відмінності простору адрес та простору імен. В якості прикладу віртуального процесу розглянуто загальну архітектуру системи для інтерактивного жестового інтерфейсу комунікації людина-комп'ютер та описано відповідний віртуальний процес. Запропоновано паралельне незалежне виконання на різних платформах частин головної системи та їх асинхронне керування.

Ключові слова: віртуальний процес, простір імен, жести́ва мо́ва, інтерфейс жести́вої мо́ви.

Process and virtual process term were discussed. Proposed an extension for virtual process term. The syntax and semantics of some virtual process operators were proposed, the main architecture construction was described as virtual process using proposed operators. Other virtual process operators will be discussed in the future. Address space and name space were discussed and compared. The main features of both kinds of space were mentioned and advantages and disadvantages of name space were declared. A general architecture of sign language human-computer interface system was discussed and was represented as an example of virtual process. Sign language interface system architecture was divided into three levels: data adaptation level, functional modules level, and design making, synchronisation and control level. Parallel independent execution on different computing platforms of functional modules in the main system and their asynchronous control were proposed.

Key Words: virtual process, name space, sign language, sign language interface.

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Анісімов А.В.

1. Вступ

Процесом у програмуванні зазвичай називають власне процес виконання програми. За принципами фон Неймана (von Neumann) побудови комп'ютера, процес розміщується в оперативній пам'яті комп'ютера й у ньому є код (команди, що виконуються процесором) та значення (оброблювані дані) [1]. Пам'ять комп'ютера має адресацію, і відповідно до цього процес фактично розміщується в адресному просторі. Команди та значення мають адреси, за допомогою яких їх можна використати. Команди та значення розрізняються

процесором тільки під час виконання коду. Коли процес завершується, пам'ять вивільняється й адресний простір зникає. Проте для інтерпретованих програм наявність адресного простору не є обов'язковою. В таких процесах ідентифікація змінних може відбуватися за іменами й, відповідно, змінні розміщуються не в адресному просторі, а в просторі імен.

Альтернативою описаному процесу є поняття віртуального процесу [2,3], що базується на однопоточній моделі, з можливістю паралельного виконання. Компонент управління планує виконання

інших компонентів і передає їм управління. Планування може виконуватися періодично або на основі подій. Компоненти, виконання яких заплановано, відповідають за виконання запланованих дій і повертають управління в компонент управління. Ця модель заснована на логічному розкладанні дій на прості кроки, для виконання яких потрібні тільки короткі проміжки часу. Програміст несе відповідальність за розкладання дій компонентів відповідно до вимог до програми. Прикладом такого процесу є утиліта *make*, яка, як правило, керує побудовою коду, викликаючи компілятор, компоновальник та інші програми.

2. Розширення поняття віртуальний процес

У віртуальному процесі, описаному вище, його складові частини можуть бути лише однопоточними й обмінюватися даними тільки з компонентом управління. Розширимо це поняття в такий спосіб. Віртуальний процес – це сукупність кодів та значень, що можуть виконуватися та оброблятися на різних, навіть архітектурно, обчислювальних системах з метою розв'язання певної задачі за певним алгоритмом. Нижче це поняття буде уточнено, а спочатку розглянемо два приклади.

1. На веб сервері для повноцінної роботи використовується база даних, яка сама є сервером. Ця алгоритмічно регламентована взаємодія серверів є прикладом віртуального процесу. Більше того, якщо керування обома серверами відбувається за допомогою браузера (і це на сьогодні є типовим), то робота браузера та серверів також складає віртуальний процес, наприклад бухгалтерського обліку.

2. У клієнт-серверній архітектурі браузер – це програма першого користувача, веб сервер – другого. Перший дає другому запит на отримання даних, які браузер потім, можливо, відображує. Користувачів першого та другого типів може бути скільки завгодно, а вибір даних, що передаються, є хаотичним і, як наслідок, неалгоритмізованим. Тут є взаємодія різних процесів, а не віртуальний

процес, оскільки акти взаємодії веб сервера та клієнта не алгоритмізуються.

Складовими частинами віртуального процесу мають бути звичайні процеси. Але й віртуальні процеси можуть бути складовими елементами більшого віртуального процесу.

Уточнимо поняття віртуального процесу.

1. Віртуальний процес спрямований на алгоритмізовану обробку значень і зберігає значення й, можливо, частини коду в просторі імен.
2. Звичайний процес є атомарним віртуальним процесом.
3. Процеси роботи апаратних пристроїв, що генерують потоки значень або керуються складовими віртуального процесу, є атомарними віртуальними процесами.
4. Спільна обробка значень у двох або більше віртуальних процесах утворює віртуальний процес.
5. В межах віртуального процесу один складовий віртуальний процес може запустити інший складовий віртуальний процес.
6. Коди складових віртуальних процесів можуть генеруватися в межах віртуального процесу.
7. Складові віртуальні процеси можуть тимчасово припиняти свою роботу, проте, стартувавши знову, вони мають доступ до спільного простору імен, де зберігаються значення, і продовжують загальний процес їх обробки.
8. Деякі складові віртуальні процеси можуть аварійно завершуватися, міняти свій код, і це не призводить до припинення віртуального процесу.
9. Віртуальний процес зникає, якщо руйнується його простір імен.

Віртуальний процес має команди й значення, проте не має адресного простору. Отже, віртуалізація процесу не моделює об'єкт, як, наприклад, віртуальна пам'ять, а лише відтворює його головну функцію – виконання команд для обробки значень.

Атомарний процес віртуального процесу може мати доволі складну реалізацію, навіть з застосуванням віртуалізації, проте для головного віртуального процесу, якщо немає

жодних втручань у внутрішню структуру, він залишається атомарним.

Простір імен суттєво відрізняється від простору адрес. Причина в тому, що нумерація адрес відбувається за допомогою натуральних чисел i , як наслідок, існують сусідні елементи. Для простору імен, де нумерація відбувається лексикографічними одиницями, відсутнє поняття сусідства елементів, незважаючи на упорядкованість. Отже, втрачається можливість переходу від елемента до сусіднього йому, проте з'являється ряд беззаперечних переваг.

1. Можливість вставити елемент між двома сусідніми.
2. Неможливість, за доступності деякого елемента, мати доступ до сусіднього елемента, що підвищує надійність зберігання значень.
3. Можливість утворення незалежних підпросторів імен.

3. Постановка задачі

Як зазначено в [4], для побудови систем інтерфейсу на базі жестової інформації (зокрема, розпізнавання елементів жестової мови) можуть бути застосовані різні підходи й методи. Кожен із цих методів має переваги й недоліки, тому не існує алгоритму, що є найкращим за всіх можливих вхідних даних. Звідси, в основу роботи системи, яка отримує інформацію шляхом обробки потоку даних, кладеться конкурентне розпізнавання за кількома різними алгоритмами. Отже, маємо таку постановку задачі: розробити метод та здійснити алгоритмічну реалізацію віртуального процесу розпізнавання елементів жестової мови.

4. Метод побудови віртуальних процесів

Віртуальний процес розв'язання задачі в якості атомарних процесів має реалізації окремих алгоритмів розпізнавання елементів жестової мови. Його схему, запропоновану в [4], наведено на рис. 1. Система складається з трьох частин:

- розпаралелювач вхідного потоку, що готує дані для подальшої обробки та аналізу;
- $M_1, \dots, M_n$ – функціональні та логічні модулі;

– аналізатор подій – система прийняття рішень, керування та синхронізації модулів.

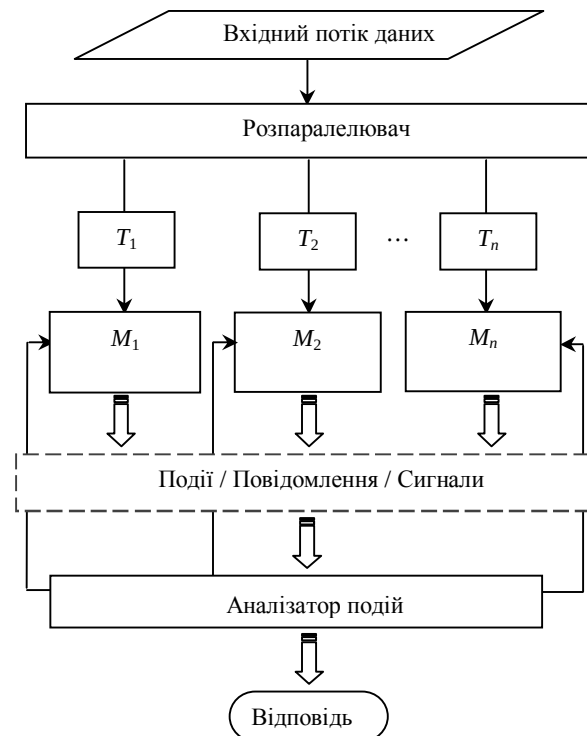


Рис. 1. Загальна схема системи

Для опису взаємодії аналізатора подій та інших процесів скористаємося позначеннями $>>$, $()$, $[]$, $<=>$. Вони мають такий зміст.

$>>$ – операція, що забезпечує передачу значень від першого складового процесу до другого. Спосіб передачі не уточнюється й може бути довільний: через файл, пайп, udr-або tcp-потік, чи навіть у спосіб, досі невідомий.

$[]$ – процес, вказаний у цих дужках, може бути відсутнім. Операція вводиться, оскільки деякі елементи наведеної схеми можуть бути відсутні.

$<=>$ – процес, вказаний ліворуч, має двосторонній обмін значеннями з елементами керування процесу, вказаного праворуч. Реалізація цієї операції вимагає наявності двосторонніх потоків значень або можливості двостороннього обміну сигналами чи повідомленнями.

$()$ – цим фіксується, що є віртуальний процес, утворений процесами, вказаними в цих дужках.

Необхідно зауважити, що вхідний потік значень не є простим. Значення можуть надходити з різноманітних апаратних пристроїв або сховищ і баз даних, що зберігають потрібну інформацію. Ці частини утворюють множину процесів, які позначимо $D_1, D_2, \dots, D_s$. Розпаралелювач реалізується множиною відповідних процесів $P_1, P_2, \dots, P_s$, де кожен P_i забезпечує розпаралелювання значень, породжених процесом D_i . Отже, в системі можуть відбуватися віртуальні процеси $(D_i > P_i)$, $i = 1, \dots, s$.

Перетворювачі T_{ji} , де $j = 1, \dots, n_i$, є необов'язковими. Вони поєднуються з функціональними модулями M_{ji} : $[T_{ji}] > M_{ji}$. Поєднання процесу отримання вхідних даних $(D_i > P_i)$ та процесів передачі даних на модулі утворює множину процесів $((D_i > P_i) > ([T_{ji}] > M_{ji}))$, $i = 1, \dots, s$, $j = 1, \dots, n_i$.

Аналізатор подій A приймає рішення про розпізнавання інформаційної одиниці вхідних даних та узгоджує різноманітну

поведінку функціональних модулів. Взаємодія процесу в аналізаторі подій і процесів у функціональних модулях під час обробки вхідних даних від процесу D_i описується виразами

$$((D_i > P_i) > ([T_{ji}] > M_{ji})) \leq A, \quad i = 1, \dots, s, \quad j = 1, \dots, n_i.$$

5. Висновки та подальші напрямки роботи

В результаті проведених досліджень було запропоновано розширення поняття віртуального процесу та описано віртуальний процес системи інтерфейсу людини з комп'ютером через засоби жестового мовлення, що відкриває шлях до реалізації такої системи.

Подальші дослідження спрямовані на реалізацію модуля керування та узгодження запропонованих функціональних модулів і створення загальної системи розпізнавання жестової мови та дослідження її роботи.

Список використаних джерел

1. von Neumann J. First Draft of a Report on the EDVAC/ J. von Neumann/Moore School of Electrical Engineering, University of Pennsylvania. – 1945. – p.49.
2. Brugali D. Software Development: Case Studies in Java /D. Brugali, M. Torchiano // Addison-Wesley. – 2005.
3. Garlan, D. Using Style to Give Meaning to Software Architecture / Abowd G., Allen R., Garlan D.// SIGSOFT '93: Foundations of Software Engineering, Software Engineering Notes, ACM Press. – Los Angeles, USA. – 1993. – Proceedings.– 1993. – Vol. 118. – No. 3. – pp. 9-20.
4. Крак Ю.В., Коваль Ю.В., Тернов А.С. До розробки інтерактивного інтерфейсу моделювання та розпізнавання жестової інформації / Ю.В.Крак, Коваль Ю.В., А.С.Тернов //Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка Серія фізико-математичні науки. – 2014. – №4. – С.175-178.

References

1. von NEUMANN J. (1945) *First Draft of a Report on the EDVAC*. Moore School of Electrical Engineering, University of Pennsylvania.
2. BRUGALI D., TORCHIANO M. (2005) *Software Development: Case Studies in Java* Addison-Wesley.
3. ABOWD G., ALLEN R., GARLAN, D. (1993) *Using Style to Give Meaning to Software Architecture*. Los Angeles, USA. Proc. of SIGSOFT '93: Foundations of Software Engineering. Software Engineering Notes, ACM Press. Vol. 118, No.3, pp. 9–20.
4. KRAK IU.V., KOVAL IU.V., TERNOV A.S. (2014) *To creation of interactive interface for sign information modeling and recognition*. Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv Series Physics & Mathematics. Vol. 4. p.175-178.

Надійшла до редколегії 15.02.15

УДК 519.71:612.171.1

Марценюк В.П., д.т.н., професор
Майхрук З.В., асистент

**Мультиваріативний метод якісного
аналізу моделі Ходжкіна-Хакслі з
індукцією дерева рішень**

Тернопільський державний медичний
університет ім. І. Я.Горбачевського, 46000
м. Тернопіль, майдан Воли, 1 e-mail:
marceniuk@yahoo.com
e-mail:zorana_majhruk2010@mail.ru

Marceniuk V.P, professor
Mayhruk Z.V., assistant

**Multivariate method of qualitative analysis
of Hodgkin-Huxley model with the decision
tree induction**

I.Ya.Horbachevsky Ternopil State Medical
University., 46001, Ternopil, Voli Square, 1 e-mail:
marceniuk@yahoo.com
e-mail:zorana_majhruk2010@mail.ru

У роботі запропоновано підхід якісного аналізу системи Ходжкіна-Хакслі на основі мультиваріативного методу. При цьому на виході отримуємо дерево рішень для прогнозування типу збудливості нейрона. Підхід доведено до програмної реалізації в пакеті Java-класів.

Ключові слова: якісний аналіз, система Ходжкіна-Хакслі, дерево рішень.

The paper presents an approach of qualitative analysis of the Hodgkin-Huxley model based on multivariate method including sequential covering algorithm. Earlier this method was developed as a multivariate approach to research dependence trajectory form on initial conditions. Here we extend this method to rate constants also.

Method developed consists of 5 steps: at the first step we determine different excitability types, namely type I, type II, type III introduced in the Hodgkin's works; at the second step we randomly generate initial values and rate constants, like in the Monte-Carlo methods; the third step is running the model and classification of trajectories obtained; at the forth step we construct matrix of relations between random initial values and rate constants in categorized form – as a result we have the set of learning tuples; the fifth step is application of sequential covering algorithm to learning tuples.

Thus we get as output the set of classification rules for prediction of neuron excitability type.

We also analyze computational complexity of sequential algorithm applied. Estimate of time necessary for induction of classification rules is obtained. Experiments investigating dependences of classification rules and number of attributes or amount of tuples are presented. The approach is implemented as software consisting of package of Java-classes.

Keywords: qualitative analysis, Hodgkin-Huxley system, decision tree

Статтю представив д.т.н., п.н.с. Кудін В.І.

Вступ. Якісна теорія диференціальних рівнянь у застосуванні до динамічних систем виявилася вкрай важливою у визначенні топології і структурної стійкості. Теорія бере початок з робіт Пуанкаре, далі отримала розвиток у роботах Біркгофа, Ляпунова, Андронова, Арнольда і ін.

У багатьох практичних задачах необхідно з'ясувати характер розв'язку диференціального рівняння, що описує певний фізичний процес та описати властивості розв'язків, коли незалежна змінна знаходиться на скінченному або нескінченному інтервалі.

На жаль існує лише кілька відносно простих рівнянь, загальні розв'язки яких можуть бути виражені в термінах інтегралів відомих функцій.

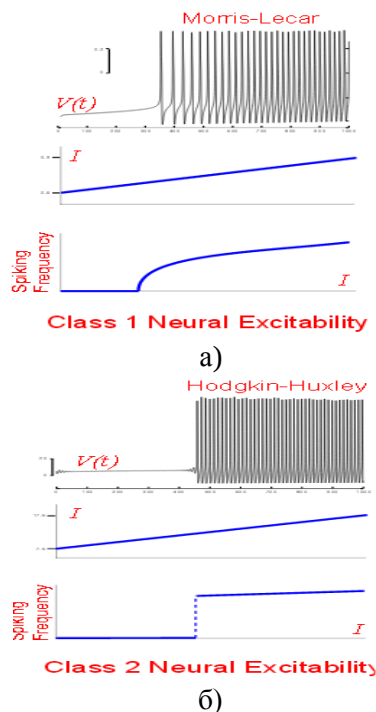
Отже, виникає проблема дослідження властивостей розв'язків диференціального рівняння виходячи безпосереднього із самого рівняння. Оскільки розв'язок диференціального рівняння задається у вигляді кривої на площині або у просторі, то задача полягає у дослідженні властивостей інтегральних кривих, їх розподілів та їх поведінки в околі сингулярних точок. Наприклад, чи вони знаходяться у обмеженій частині площини, чи вони не містять відгалужень, що прямують до нескінченності, чи деякі із них є замкнутими кривими і та. ін. [1]

Використання диференціальних рівнянь для математичного моделювання зовсім не означає отримання аналітичної формули для їх розв'язків (або апроксимацій). Тим більше, що у більшості

випадків таких формул не існує. До того ж дуже часто формула для явного або наближеного аналітичного розв'язку настільки складна, що вона нічого не зможе сказати про природу розв'язку доти, поки не буде побудований графік [2]. Тому у практичних дослідженнях переважно генерують графіки розв'язків (принаймні їх загальну форму) не вдаючись до отримання розв'язків у вигляді формул [2].

Попередньо вже вивчалось питання різних типів збудливості нейронів. При збільшенні прикладеного струму збудливі мембрани можуть переходити із стану спокою до повторних спалахів потенціалу дії кількома способами [3]:

- для збудливих нейронів типу I частота потенціалу дії збільшується плавно від початку спалаху, таким чином проходячи увесь діапазон частот;
- для збудливих нейронів типу II спостерігається різкий скачок частоти потенціалу дії для певного порогового значення сили струму. Потенціал дії не індукується для значень частоти, нижчих від порогового;
- відповіддю на стійкі надпорогові імпульси струму є один зубець. Така поведінка отримала назву «збудливість типу III» (рис.2). [4]



$$\frac{dV}{dt} = -g_K n^4 (V - V_K) - g_{Na} m^3 h (V - V_{Na}) - g_L (V - V_L) + I_{app}, \quad (1)$$

Рис. 1. Класифікація збудливості нейронів (з роботи [5]: а) тип I; б) тип II

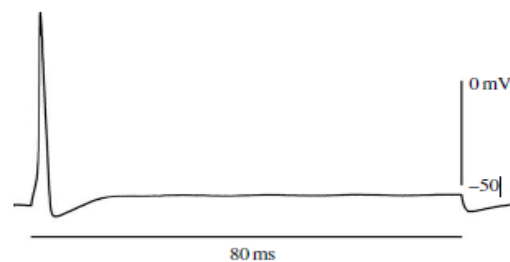


Figure 1. Response of a squid giant axon, type 3, to a sustained current pulse $15 \mu A \text{ cm}^{-2}$ in amplitude. $T = 8^\circ C$.

Рис. 2. Тип III збудливості нейронів (з роботи [4])

Модель електричної активності мембрани клітини Ходжкіна-Хакслі. Розглядається модель електричної активності гігантського аксона кальмара, запропонована в роботі [6]. У моделі кожен компонент збудливої клітини розглядається як електричний елемент. Ліпідний шар представляється як ємність C_m . Іонні канали представлені електричною провідністю g_i , де i – специфічний іонний канал, яка залежить як від напруги, так і часу. Іонні насоси представлені джерелом струму I_{app} . Позначимо через V різницю між мембранним потенціалом та залишковим потенціалом.

Струм через біліпідний шар становитиме:

$$I_c = C_m \frac{dV}{dt}.$$

Струм через заданий іонний канал буде:

$$I_i = g_i (V - V_i),$$

де V_i – рівноважний потенціал i -го іонного каналу.

Для клітини з калієвими, натрієвими та хлорними каналами загальний струм через мембрану I становитиме:

$$I = I_c + I_K + I_{Na} + I_L.$$

Остаточна типова модель Ходжкіна-Хакслі має вигляд:

$$\frac{dm}{dt} = (1-m) \cdot 0.1 \cdot \frac{25-V}{\exp^{\frac{10-V}{10}} - 1} - m \cdot 4 \cdot \exp^{\frac{V}{18}}, \quad (2)$$

$$\frac{dn}{dt} = (1-n) \cdot 0.1 \cdot \frac{10-V}{\exp^{\frac{10-V}{10}} - 1} - n \cdot 0.125 \cdot \exp^{\frac{V}{80}}, \quad (3)$$

$$\frac{dh}{dt} = 0.07 \cdot \exp^{\frac{V}{20}} \cdot (1-h) - \frac{h}{1 + \exp^{\frac{30-V}{10}}}. \quad (4)$$

На сьогодні існує широкий клас пакетів програмного забезпечення з метою отримання чисельних розв'язків основних початкових задач для систем звичайних диференціальних рівнянь.

Метою даної роботи є розробити мультиваріативний метод якісного аналізу моделі Ходжкіна-Хакслі, що зводиться до дерева рішень і враховує як швидкісні константи, так і початкові умови.

Мультиваріативний метод якісного аналізу моделі Ходжкіна-Хакслі. Завданням методу є встановлення механізмів багатопараметричних впливів у моделі Ходжкіна-Хакслі.

Параметри

$$\begin{aligned} p \in P = \{ & (g_K, g_{Na}, g_L, V_K, V_{Na}, V_L, C_m, x_m, x_n, x_h) : g_K^{\min} \leq g_K \leq g_K^{\max}, \\ & g_{Na}^{\min} \leq g_{Na} \leq g_{Na}^{\max}, g_L^{\min} \leq g_L \leq g_L^{\max}, V_K^{\min} \leq V_K \leq V_K^{\max}, V_{Na}^{\min} \leq V_{Na} \leq V_{Na}^{\max}, \\ & V_L^{\min} \leq V_L \leq V_L^{\max}, C_m^{\min} \leq C_m \leq C_m^{\max}, x_m^{\min} \leq x_m \leq x_m^{\max}, x_n^{\min} \leq x_n \leq x_n^{\max}, \\ & x_h^{\min} \leq x_h \leq x_h^{\max} \} \subset R^{10}, \end{aligned}$$

а початкові умови

$$\begin{aligned} (V_0, m_0, n_0, h_0) \in X_0 = \{ & (V_0, m_0, n_0, h_0) : V_0^{\min} \leq V_0 \leq V_0^{\max}, m_0^{\min} \leq m_0 \leq m_0^{\max}, \\ & n_0^{\min} \leq n_0 \leq n_0^{\max}, h_0^{\min} \leq h_0 \leq h_0^{\max} \} \subset R^4 \end{aligned}$$

Далі випадковим чином генеруватимемо початкові значення та значення швидкісних параметрів, які б належали практично обгрунтованій області. Для кожного з наборів таких параметрів здійснюється інтегрування системи (1)-(4) з отриманням відповідних траєкторій. До отриманих результатів далі застосовується алгоритм індукції дерева рішень з метою знаходження певних шаблонів для прийняття рішень.

Отже, в цілому підхід включає такі п'ять кроків.

Загальні ідеї методу були розроблені в роботі [7] для випадку ЗДР. При цьому використовуємо підхід Монте-Карло, який полягає у випадковій генерації параметрів та побудові на їх основі моделі Ходжкіна-Хакслі. Далі застосовують алгоритм індукції дерева рішень. Зауважимо, що метод роботи [7] застосовувався лише для дослідження впливу початкових умов на траєкторію системи ДР. В даній роботі метод буде розвинено також до швидкісних параметрів.

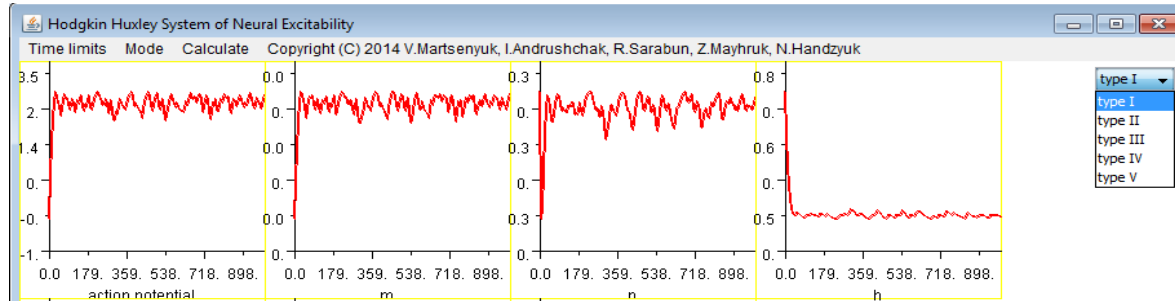
Отже, припускається існування моделі на основі (1)-(4) при початкових значеннях та швидкісних параметрах із заданих інтервалів.

Параметри

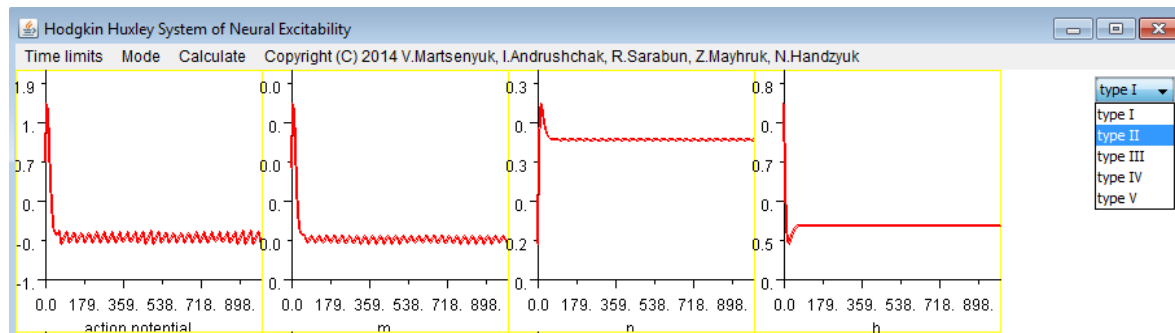
1. Означення класів траєкторій системи. Зазначимо, що в практичних застосуваннях переважно мають справу з набагато складнішими формами поведінки, щоб охарактеризувати їх поняттями «стійка-нестійка» і відповідно вдатися до аналізу власних значень або ж експонент Ляпунова динамічної системи. Тому визначення якісних форм процесу доцільно передати до компетенції експертів. В даному випадку використовуватимемо класи, пов'язані з формами збудливості нейронів: тип I, тип II, тип III. Для позначення класу траєкторії вводиться атрибут

класу C , який приймає одне з 3-х дискретних представлення для 3-х класів траєкторій – типів значень $C \in \overline{1,3}$. На рисунках наведені типові збудливості нейронів:

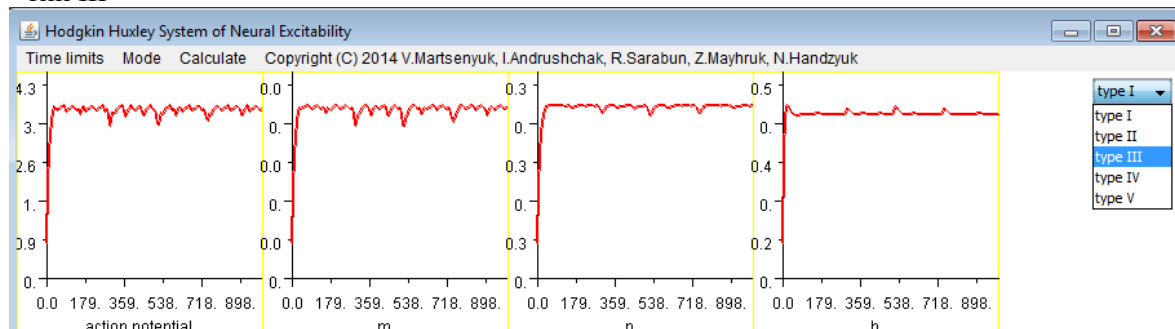
- тип I



- тип II



- тип III



Зазначимо, що при цьому визначальним є зміна частоти потенціалу дію у відповідь на зростання сили прикладеного струму.

2. Генерація матриці випадкових початкових значень та швидкісних параметрів. Для того, щоб дослідити весь простір початкових значень та швидкісних параметрів щодо генерації класів траєкторій, визначених на першому кроці, генерується матриця випадкових початкових значень та швидкісних параметрів на основі

ймовірнісних розподілів у визначених інтервалах. У даній роботі ми припускаємо, що початкові значення та швидкісні параметри розподілені рівномірно на інтервалах. Кожен стовпчик відповідає множині значень одного параметру – або початкове значення, або швидкісний параметр. Кожен рядок є набором початкових значень та швидкісних параметрів для одного запуску моделі на основі (1)-(4):

$$M = \begin{pmatrix} V_0^1 & m_0^1 & n_0^1 & h_0^1 & g_K^1 & g_{Na}^1 & g_L^1 & V_K^1 & V_{Na}^1 & V_L^1 & C_m^1 & x_m^1 & x_n^1 & x_h^1 \\ V_0^2 & m_0^2 & n_0^2 & h_0^2 & g_K^2 & g_{Na}^2 & g_L^2 & V_K^2 & V_{Na}^2 & V_L^2 & C_m^2 & x_m^2 & x_n^2 & x_h^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ V_0^N & m_0^N & n_0^N & h_0^N & g_K^N & g_{Na}^N & g_L^N & V_K^N & V_{Na}^N & V_L^N & C_m^N & x_m^N & x_n^N & x_h^N \end{pmatrix} \in R^{N \times 14}$$

3. Запуск моделі і класифікація набору вхідних даних. Кожен набір початкових значень та швидкісних параметрів, згенерованих на другому кроці, використовуються в якості входу для моделі Ходжкіна-Хакслі. Чисельне інтегрування рівнянь здійснюється за допомогою методу Адамса [8]. Вихідні траєкторії класифікуються на основі критеріїв, запропонованих на першому кроці. Виходячи з результатів класифікації наборам початкових значень і швидкісних параметрів приписуються відповідні атрибути класів.

4. Побудова матриці залежностей між початковими значеннями та між швидкісними параметрами. Метод припускає, що для форми траєкторій системи співвідношення між початковими значеннями та між швидкісними значеннями є набагато важливішими порівняно з їх абсолютними значеннями. Тому будується матриця, що включає інформацію у категоризованому кодованому вигляді про співвідношення між початковими значеннями та між швидкісними параметрами, з генерованими на кроці 2

$$D = \begin{pmatrix} m_0 \otimes n_0 & m_0 \otimes h_0 & n_0 \otimes h_0 & g_K \otimes g_{Na} & g_K \otimes g_L & g_{Na} \otimes g_L & V_K \otimes V_{Na} \\ x(m_0^1, n_0^1) & x(m_0^1, h_0^1) & x(n_0^1, h_0^1) & p(g_K^1, g_{Na}^1) & p(g_K^1, g_L^1) & p(g_{Na}^1, g_L^1) & p(V_K^1, V_{Na}^1) \\ x(m_0^2, n_0^2) & x(m_0^2, h_0^2) & x(n_0^2, h_0^2) & p(g_K^2, g_{Na}^2) & p(g_K^2, g_L^2) & p(g_{Na}^2, g_L^2) & p(V_K^2, V_{Na}^2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x(m_0^k, n_0^k) & x(m_0^k, h_0^k) & x(n_0^k, h_0^k) & p(g_K^k, g_{Na}^k) & p(g_K^k, g_L^k) & p(g_{Na}^k, g_L^k) & p(V_K^k, V_{Na}^k) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} V_K \otimes V_L & V_{Na} \otimes V_L & C_m \otimes 1 & x_m \otimes x_n & x_m \otimes x_h & x_n \otimes x_h & C \\ p(V_K^1, V_L^1) & p(V_{Na}^1, V_L^1) & p(C_m^1, 1) & p(x_m^1, x_n^1) & p(x_m^1, x_h^1) & p(x_n^1, x_h^1) & C_1 \\ p(V_K^2, V_L^2) & p(V_{Na}^2, V_L^2) & p(C_m^2, 1) & p(x_m^2, x_n^2) & p(x_m^2, x_h^2) & p(x_n^2, x_h^2) & C_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ p(V_K^k, V_L^k) & p(V_{Na}^k, V_L^k) & p(C_m^k, 1) & p(x_m^k, x_n^k) & p(x_m^k, x_h^k) & p(x_n^k, x_h^k) & C_k \end{pmatrix} \in R^{k \times 14}$$

$$\text{Тут } x(u, v) = p(u, v) = \begin{cases} 0, & \text{if } u < v \\ 1, & \text{if } u = v \\ 2, & \text{if } u > v \end{cases}$$

$C_l \in \overline{1,3}$ – значення атрибуту класу, пов'язані з відповідними формами траєкторій.

Отже, на даному кроці чисельні значення початкових значень та швидкісних параметрів трансформуються у категоріальні значення атрибутів наборів навчальних даних. Оскільки ймовірність рівності випадкових чисел дорівнює нулю, то матриця D виглядає свого роду «бінаризацією» співвідношень між початковими значеннями та між швидкісними параметрами. Тобто матриця D включатиме лише значення 0 та 2.

5. Застосування алгоритму індукції дерева рішень до співвідношень між початковими значеннями та між швидкісними параметрами. Матриця бінарних співвідношень D , побудована на кроці 4, є набором навчальних даних для алгоритму індукції дерева рішень. Побудоване дерево рішень міститиме перевірку співвідношень між початковими значеннями та швидкісними параметрами у своїх вузлах. В якості листків дерева будуть класи траєкторій моделі $C \in \overline{1,4}$.

Програмна реалізація мультиваріативного методу. Для реалізації методу розроблено пакет Java-класів `decision_tree.fde.hh`. До складу пакету входять класи (рис.1):

`DataManager` – клас – менеджер даних для отримання інформації з бази даних через посередництво відповідних класів-слуг;

MultiVariateMethod – клас для реалізації мультіваріативного методу, представленого в роботі – головний клас пакету;

TuplesPeer – клас-слуга для формування і обробки навчальних наборів, що використовуватиметься у класифікаційному алгоритмі.

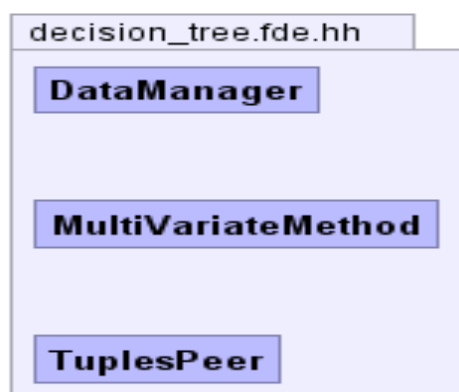


Рис. 3. Пакет decision_tree.fde.hh

У класі MultiVariateMethod (рис.4) здійснюється генерація випадкових значень параметрів (крок 2):

```

M_x0 = dm.getRandomInitialValues();
M_rateConstants = dm.getRandomRateConstants();
  
```

Далі запускається аплет інтегрування системи Ходжкіна-Хакслі. При цьому експерт здійснює вибір форми отриманої траєкторії (крок 3). Після цього запускається крок генерації матриці взаємозв'язків параметрів (крок 4). Зауважимо, що послідовність кроків 2-4 може виконуватися як завгодно багато разів. У будь-який момент користувач може запустити алгоритм індукції дерева рішень (крок 5):

```

dtDecision_tree_NH = new
decision_tree.fde.hh.DecisionTree(dmtnRoot,
dataManager_FDE, htAttribute_list, "Information
gain");
  
```

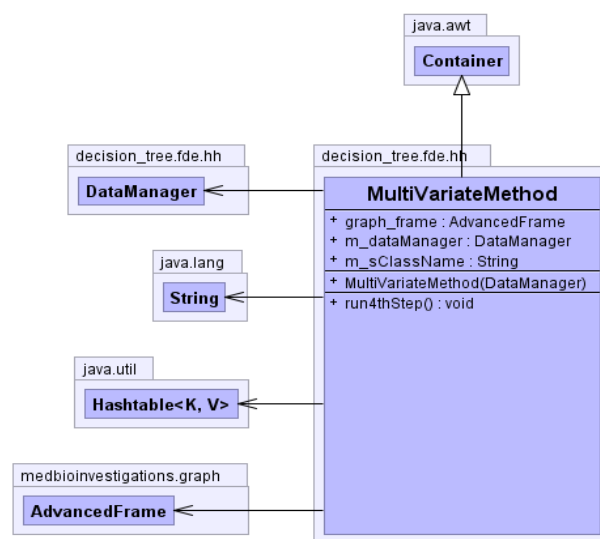


Рис.2. UML-діаграма класу MultiVariateMethod

База даних hh, що використовується в пакеті, реалізована в СУБД MySQL. Вона включає такі таблиці (рис.3):

attribute – опис атрибутів для побудови дерева рішень, тобто взаємозв'язків між початковими значеннями та між швидкісними константами; categorized_data – навчальні набори, що використовуються в класифікаційному алгоритмі (в даному випадку індукції дерева рішень) і представляють собою матрицю D на четвертому кроці; init_values_values – матриця згенерованих випадковим чином початкових значень:

$$\begin{pmatrix} V_0^1 & m_0^1 & n_0^1 & h_0^1 \\ V_0^2 & m_0^2 & n_0^2 & h_0^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ V_0^N & m_0^N & n_0^N & h_0^N \end{pmatrix} \in R^{N \times 4}$$

initial_values – опис початкових значень (включаючи мінімальні та максимальні значення);

parameter_kind – вид параметру;

rate_constants – опис швидкісних констант (включаючи мінімальні та максимальні значення);

rate_constants_values – матриця згенерованих випадковим чином швидкісних констант:

$$\begin{pmatrix} g_K^1 & g_{Na}^1 & g_L^1 & V_K^1 & V_{Na}^1 & V_L^1 & C_m^1 & x_m^1 & x_n^1 & x_h^1 \\ g_K^2 & g_{Na}^2 & g_L^2 & V_K^2 & V_{Na}^2 & V_L^2 & C_m^2 & x_m^2 & x_n^2 & x_h^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ g_K^N & g_{Na}^N & g_L^N & V_K^N & V_{Na}^N & V_L^N & C_m^N & x_m^N & x_n^N & x_h^N \end{pmatrix} \in R^{N \times 10}$$

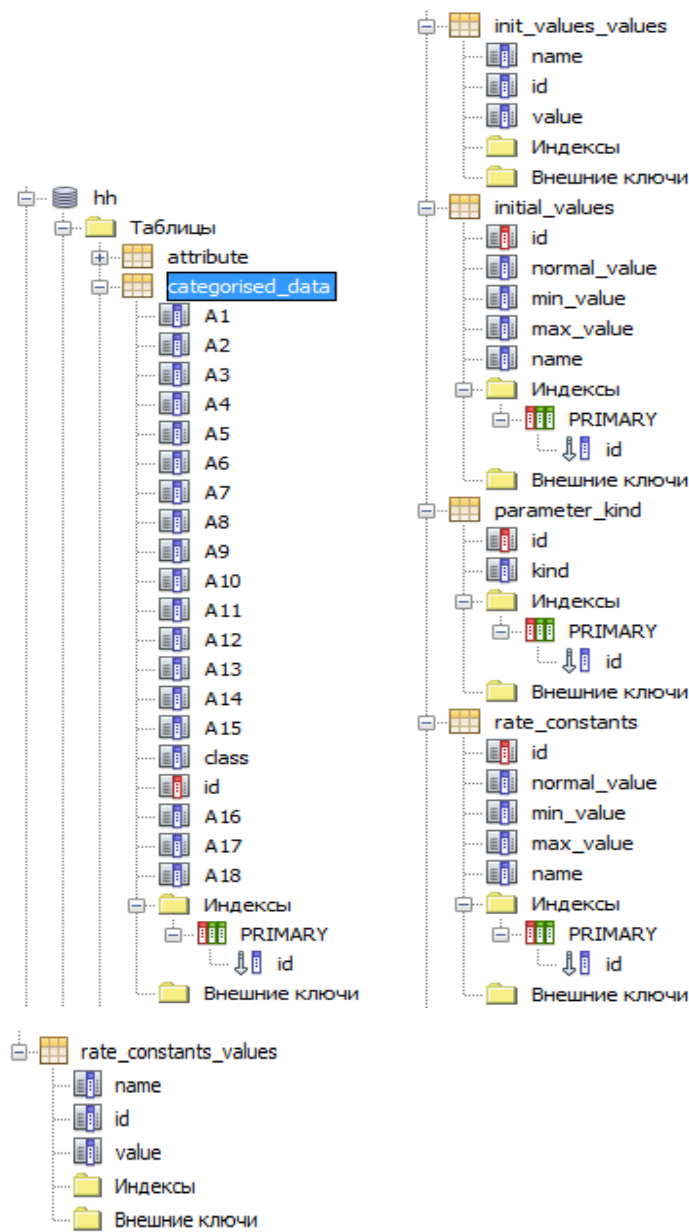


Рис.3. Таблиці бази даних hh

Особливості програмної реалізації моделі Ходжкіна-Хакслі. Пакет `decision_tree.fde.hh` може бути використаний для широкого класу систем функціонально-диференціальних рівнянь. Для цього модель на основі функціонально-

диференціальних рівнянь повинна бути реалізована у вигляді відповідного пакету Java-класів. Прикладом такого пакету у випадку моделі Ходжкіна-Хакслі є пакет `medbioinvestigations.hodgkin_huxley` (рис.4).

Для інтеграції з пакетом `decision_tree.fde.hh` в класі `Hodgkin_HuxleyGraph`, що здійснює графічну візуалізацію моделі, поряд з існуючим було додано новий конструктор, що використовує посилання за значенням на інстанцію класу `MultiVariateMethod`. У цьому конструкторі додатково створюється об'єкт класу `JComboBox`, що дозволяє вибирати тип

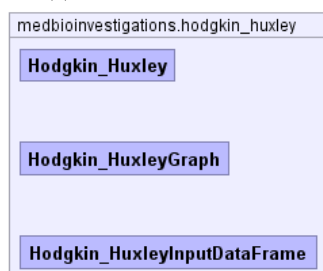


Рис. 4. Пакет `medbioinvestigations.hodgkin_huxley`

збудливості нейрона та запускати виконання 4-го кроку методу:

```
String[] classStrings = {"type I","type II","type  
III","type IV","type V"};  
JComboBox m_jcbClassName = new  
JComboBox(classStrings);  
  
m_jcbClassName.addActionListener(new  
ActionListener() {  
    public void actionPerformed(ActionEvent e)  
    {  
        JComboBox jcbClass = (JComboBox)  
e.getSource();  
        m_sClassName=(String)jcbClass.getSelected  
Item();  
        mvm.m_sClassName = m_sClassName;  
        ((AdvancedFrame)getParent()).dispose();  
        mvm.run4thStep();  
    }  
});
```

Також слід внести відповідні зміни у таблиці бази даних hh в такому порядку:

- описати усі початкові значення та швидкісні константи в таблицях initial_values та rate_constants відповідно;
- описати залежності між початковими значеннями та між швидкісними константами, які досліджуватимемо, у таблиці attribute;
- у таблиці categorised_data створити поля у відповідності з даними таблиці attribute.

Оцінка складності виконання алгоритму.

Як показано в роботі [9] обчислювальна складність для індукції дерева рішень для множини з n навчальних наборів, що використовують p атрибутів, $T(n)$ виражається таким рекурентним співвідношенням:

$$T(n) = \begin{cases} b \equiv \text{const}, & \text{if } n = 1 \\ 2T(n/2) + pn, & \text{if } n > 1 \end{cases} \quad (5)$$

Зауважимо, що дане співвідношення відображає оптимальне значення обчислювальної складності, яке має місце у випадку добре збалансованої множини навчальних наборів. У такому разі з (5) маємо:

$$T(n) = pn \sum_{i=0}^{\log_2 n} 1^i = pn \log_2 n. \quad (6)$$

На основі моделі (1)-(4) було проведено чисельний експеримент з метою з'ясування узгодженості часу побудови дерева рішень з оцінкою (6). Використовувалась система на основі процесора Celeron(R) Dual-Core CPU

T3300 @ 2.00 GHz та 2 Гб RAM. Результати представлені на рис. 5.

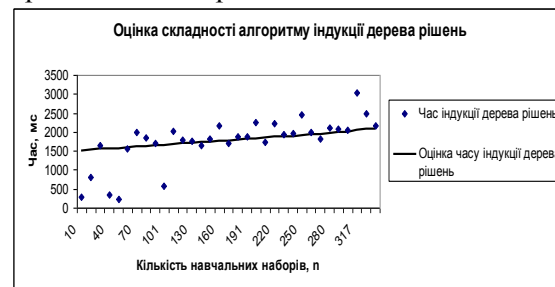


Рис.5. Оцінка складності алгоритму індукції дерева рішень

З рисунка 5 бачимо певний розкид в часі індукції дерева рішень залежно від величини n , що по'язано в першу чергу із незбалансованістю множини навчальних наборів. Дійсно, застосування методу Монте-Карло гарантує рівномірне представлення усіх початкових значень та швидкісних констант. У той же час це не гарантує рівномірного представлення значень атрибуту класу, від чого залежить виконання порядку редукційного алгоритму індукції дерева рішень.

Побудоване дерево рішень для $n=17$ наведене на рисунку 6. Час побудови дерева рішень 1402 мс.

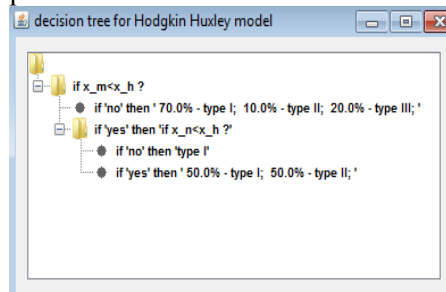


Рис.6. Дерево рішень

Висновки. В роботі запропоновано та програмно реалізовано мультиваріативний метод якісного аналізу моделі Ходжкіна-Хакслі.

1. На п'ятому кроці алгоритму до набору навчальних даних можуть бути застосовані інші алгоритми data mining – наприклад, з метою отримання класифікаційних правил – метод послідовного покриття.
2. Набори класифікаційних правил також можуть бути отримані виходячи з дерева рішень.
3. Існує чимало реалізацій алгоритму індукції дерева рішень, зокрема у складі програм Mathcad, StatSoft Statistica і ін. Суттєвою перевагою даної реалізації є те, що алгоритм розвинено до Інтернет-проекту, де до формування навчальних

наборів залучаються експерти з Інтернет-множини навчальних наборів.
доступом, що значно розширює та балансує

Список використаних джерел

References

1. Alexandrov A. D. Mathematics: Its Content and Meaning / A. D. Alexandrov, A. N. Kolmogorov // Courier Dover Publications, 1999. – 1120pp.
2. Lea A. Segel, Mathematical Models in Molecular and Cellular Biology / Segel Lea A. // CUP Archive, 1980. – 757pp.
3. Hodgkin A. L. The local electric changes associated with repetitive action in a non-modulated axon / A. L. Hodgkin // J. Physiol., 107: 1948. – 165–181pp.
4. J. R. Clay et al. A simple modification of the Hodgkin and Huxley equations explains type 3 excitability in squid giant axons / J. R. Clay et al // J. R. Soc. Interface 5, 2008. – 1421 – 1428pp.
5. Izhikevich E. M. Neural Excitability, Spiking and Bursting / Izhikevich E.M. // International Journal of Bifurcation and Chaos, Volume 10, Issue 6: 2000. – 1171 – 1266pp.
6. Hodgkin A. L. A quantitative description of membrane current and its application to conduction and excitation in nerve / A. L. Hodgkin, A. F. Huxley // The Journal of physiology 117 (4): 1952. – 500 – 544pp.
7. Koch Y. Decision-Tree Based Model Analysis for Efficient Identification of Parameter Relations Leading to Different Signaling States / Y. Koch, T. Wolf, P. K. Sorger, R. Eils, B. Brars // PLOS ONE | www.plosone.org, December 2013, Volume 8, Issue 12, e82593.
8. Хайпер Э. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи. / Э. Хайпер, С. Нерсетт, Г. Ваннер. Под ред. С. С. Филиппова. – 1 изд. – М.: Мир, 1990. – 512 с.
9. Latkowski R. High Computational Complexity of the Decision Tree Induction with many Missing Attribute Values / R. Latkowski // In: L. Czaja (Ed.) "Proceedings of Concurrency, Specification and Programming. CS&P'2003, Czarna, September 25-27, Volume 2." Zaklad Graficzny UW, 318 – 325pp.
1. ALEXANDROV, A. D., KOLMOGOROV A.N., (1999) Mathematics: Its Content and Meaning. Courier Dover Publications.
2. LEA A. SEGEL, (1980) Mathematical Models in Molecular and Cellular Biology. CUP Archive.
3. HODGKIN, A. L. (1948) The local electric changes associated with repetitive action in a non-modulated axon. J. Physiol.
4. CLAY, J. R. et al. (2008) A simple modification of the Hodgkin and Huxley equations explains type 3 excitability in squid giant axons. J. R. Soc. Interface 5, 1421–1428pp.
5. IZHIKEVICH, E. M. (2000) Neural Excitability, Spiking and Bursting. International Journal of Bifurcation and Chaos, Volume 10, Issue 6.
6. HODGKIN, A. L., HUXLEY, A. F. (1952). A quantitative description of membrane current and its application to conduction and excitation in nerve. The Journal of physiology 117 (4): 500–544. PMC 1392413. PMID 12991237.
7. KOCN, Y., WOLF, T, SORGER, P. K., EILS, R., BRARS, B. (2013) Decision-Tree Based Model Analysis for Efficient Identification of Parameter Relations Leading to Different Signaling States / PLOS ONE | www.plosone.org, December 2, Volume 8, Issue 12, e82593.
8. HAIRER, E., NORSETT, S., WANNER H. (2008) Solving Ordinary Differential Equations1. — 2 edition. — Berlin: Springer.
9. LATKOWSKI, R. (2003) "High Computational Complexity of the Decision Tree Induction with many Missing Attribute Values" In: L. Czaja (Ed.) "Proceedings of Concurrency, Specification and Programming. CS&P'2003, Czarna, September 25 – 27, Volume 2." Zaklad Graficzny UW, 318 – 325pp.

Надійшла до редколегії 07.10.14

УДК 519.8

Машченко С.О.¹, д. ф.-м. н., доц.,
Аль-Саммаррай Мохаммед Саад И.², аспирант

Транспортная задача с нечетким множеством целей

Киевский национальный университет имени
Тараса Шевченко, 83000, м. Киев, пр-т.
Глушкова 4д,

¹e-mail: msomail@yandex.ua

²e-mail: blackhawk_is@yahoo.com

S.O. Mashchenko¹, D.Sci(Phys-Math.), Ass. Prof.,
Mohammed Saad I. Al-Sammarraie², Grad. Stud.

The transportation problem with the fuzzy set of goals

Taras Shevchenko National University of Kyiv,
83000, Kyiv, Glushkova st., 4d,

¹e-mail: msomail@yandex.ua

²e-mail: blackhawk_is@yahoo.com

Рассматривается транспортная задача, в которой цель лица, принимающего решение, задана нечетким множеством нечетких целевых множеств. Рассмотрено конструктивное представление функции принадлежности нечеткого целевого множества типа 2. Предлагается двух-критериальная задача поиска рационального решения.

Ключевые слова: нечеткая цель, функция принадлежности, нечеткое множество типа 2, принятие решений.

In known formulations of fuzzy transportation problems the fuzziness is manifested in the description of both the set of alternatives and the objective function, not concerning the set of goals. The transportation problem, in which the goal of decision-maker is defined by the fuzzy set of fuzzy targets, is considered in this paper. In this case the decision-maker's goal may be defined by the intersection of fuzzy set of fuzzy sets. Then for each fixed alternative value of membership functions also create fuzzy set and can be define as so-called fuzzy set of type-2 (fuzzy set with membership function that has fuzzy set of values). It was considered a constructive representation of the membership function of goal set. The two-criterion problem of rational decision search is considered. There is defined general solution notion of the transportation problem with fuzzy set of goals in this paper. More simple method of receipt of rational decision with reliability of membership to goal set, equal one, and reliability of it abstention of the no less set number is offered.

Keywords: fuzzy goal, membership function, fuzzy set of type 2, decision making.

Статью представил д. т. н., проф. Гаращенко Ф.Г.

Одной из важных проблем, которые возникают в логистике является проблема принятия многоцелевых решений в условиях нечеткой информации. Для формирования целей в транспортных задачах в первую очередь используются простые количественные характеристики транспортного процесса: объемно-массовые характеристики планируемой доставки груза, количество используемых транспортных средств, пробег автомобилей, длительность работы и др. Постановка транспортных задач с несколькими целями — это следствие возникновения рынка транспортных услуг и природное стремление автотранспортных предприятий удовлетворить интересы всех участников транспортного

бизнеса, а не только грузополучателей или грузоотправителей.

В этой работе рассматривается задача рационального выбора плана перевозок в условиях, когда цель лица, принимающего решение (ЛПР), задана нечетким множеством нечетких целевых множеств. Такие модели обобщают известные транспортные задачи, в которых цель ЛПР задается одной целевой функцией или в более сложном случае характеризуются четким множеством нечетких множеств (подход Беллмана – Лотфи-Заде [1]). С одной стороны, такое обобщение позволяет анализировать ситуации в случае, если невозможно четко указать, какие множества характеризуют цель ЛПР, а с другой – помогает глубже и более точно понять процесс принятия

решений, пути поиска и выбора рациональных альтернатив в условиях нечеткой информации.

Пусть $I = \{1, \dots, n\}$ – множество пунктов производства, $J = \{1, \dots, m\}$ – множество пунктов потребления, n и m – соответственно их количества. Обозначим a_i – максимальный объем производства продукта пунктом $i \in I$; b_j – объем продукта, который необходимо доставить j -му пункту потребления. Тогда множество допустимых планов перевозок $x = (x_{ij})_{i \in I, j \in J}$, которое обозначим D , будет задаваться следующими условиями:

$$\sum_{j \in J} x_{ij} \leq a_i, \quad i \in I;$$

$$\sum_{i \in I} x_{ij} \geq b_j, \quad j \in J;$$

$$x \in X = \{x = (x_{ij})_{i \in I, j \in J} \mid x_{ij} \geq 0, \quad i \in I, j \in J\}.$$

Множество X будем называть универсальным множеством планов перевозок.

Предположим, что цели ЛПР заданы нечеткими множествами F_k , $k \in K$, универсального множества планов перевозок X , где $K = \{1, \dots, k\}$ – множество их индексов, а k – их количество. Обозначим $\varphi_k(x)$, $k \in K$, – соответственно их функции принадлежности. Тогда согласно [1] нечеткое множество $F = \bigcap_{k \in K} F_k$ с функцией принадлежности $\varphi(x) = \min_{k \in K} \varphi_k(x)$ называется нечетким целевым множеством ЛПР, а нечеткое множество $X^* = F \cap D$ называется нечетким множеством решений. Если ЛПР интересуется какой-либо конкретный план перевозок, то рациональным решением считается так называемый максимизирующий план перевозок [1], который удовлетворяет условию $x^* = \arg \max_{x \in D} \varphi(x)$.

Иногда ЛПР не может четко указать, какие нечеткие множества F_k , $k \in K$, характеризуют его цель, но может задать некоторое нечеткое подмножество $\tilde{K} \subseteq K$ этих множеств. Далее множество K будем называть универсальным множеством индексов целей.

Обозначим $\kappa: K \rightarrow [0, 1]$ функцию принадлежности нечеткого множества $\tilde{K}$ нечетких множеств G_k , $k \in K$, которые характеризуют цели ЛПР. Тогда в целом его цель

может быть задана пересечением $\tilde{F} = \bigcap_{k \in \tilde{K}} F_k$ нечеткого множества $\tilde{K}$ нечетких множеств F_k , $k \in K$. Определим это понятие в соответствии с подходом, который был предложен в [2].

Для произвольного плана перевозок $x \in X$ введем отношение доминирования на универсальном множестве индексов целей K .

Будем говорить, что цель с индексом $k \in K$ доминирует цель с индексом $j \in K$ для плана перевозок $x \in X$ и обозначать это $k \succ^x j$, если справедливы такие неравенства: $\varphi_k(x) \leq \varphi_j(x)$, $\kappa(k) \geq \kappa(j)$, и хотя бы одно из них строгое.

Обозначим

$$\eta(x, k) = \begin{cases} \kappa(k), & k \in PO(x), \\ 0, & k \notin PO(x), \end{cases}$$

где $PO(x) = \{k \in K \mid j \not\succ^x k, \forall j \in K\}$.

Пересечением нечеткого множества $\tilde{K}$ нечетких множеств F_k , $k \in K$, будем называть $\tilde{F} = \bigcap_{k \in \tilde{K}} F_k$ – нечеткое множество типа 2, задаваемое тройками $(x, \varphi(x, y))$, где

$\varphi: X \times Y \rightarrow [0, 1]$ – функция принадлежности нечеткого отображения $\tilde{F}$, выполняющего роль нечеткой функции принадлежности, и определенная таким образом:

$$\varphi(x, y) = \max_{k \in K} \{\eta(x, k) \mid \varphi_k(x) = y\}, \quad (1)$$

если $\exists k \in K: \varphi_k(x) = y$;

$$\varphi(x, y) = 0, \quad (2)$$

если $\varphi_k(x) \neq y, \forall k \in K$;

x – элемент универсального множества планов перевозок X ;

y – степень принадлежности x нечеткому множеству $\tilde{F}$ типа 2, $y \in Y = [0, 1]$.

При фиксированном $x^* \in X$ функция принадлежности $\varphi(x^*, y)$, $y \in Y = [0, 1]$, нечеткого отображения $\tilde{F}$ имеет смысл функции принадлежности, описывающей нечеткое множество типа 1 значений степеней принадлежности $y \in Y = [0, 1]$.

Поскольку функция принадлежности $\varphi(x, y)$ однозначно определяет нечеткое отображение $\tilde{F}$, которое, в свою очередь, однозначно

определяет нечеткое множество $\tilde{F}$ типа 2, то в дальнейшем будем называть $\varphi(x, y)$ функцией принадлежности нечеткого множества $\tilde{F}$ типа 2, а ее значение – достоверностью степени принадлежности $y \in Y = [0, 1]$ элемента $x \in X$ нечеткому множеству $\tilde{F}$ типа 2.

Вычисление функции принадлежности $\varphi(x, y)$ по формулам (1), (2) можно несколько упростить, если использовать следующую теорему [2].

Теорема 1. Пусть F_k , $k \in K$, – некоторые нечеткие множества универсального множества X , которые задаются соответствующими функциями принадлежности $\varphi_k(x)$, $k \in K$; $\tilde{K}$ – нечеткое множество универсального множества индексов K с функцией принадлежности $\kappa(k)$, $k \in K$. Тогда функция принадлежности нечеткого множества $\tilde{F} = \bigcap_{k \in \tilde{K}} F_k$ типа 2 задается такой формулой:

$$\varphi(x, y) = \begin{cases} \max_{k \in K^{PO}(x, y)} \kappa(k), & K^{PO}(x, y) \neq \emptyset, \\ 0, & K^{PO}(x, y) = \emptyset. \end{cases}$$

где

$$\begin{aligned} K^{PO}(x, y) &= \{k \in K \mid \varphi_k(x) = y, \\ y &= \min_{j \in K} \{\varphi_j(x) \mid \kappa(j) \geq k(k)\}, \\ \kappa(k) &= \max_{j \in K} \{\kappa(j) \mid \varphi_j(x) \leq y\}, \quad x \in X, y \in [0, 1]. \end{aligned}$$

Рассмотрим вопрос выбора рациональных решений. Из приведенных выше рассуждений следует, что целевое множество $\tilde{F}$ представляет собой нечеткое множество типа 2, которое задается функцией принадлежности $\varphi(x, y)$, $x \in X$, $y \in [0, 1]$.

Логично предположить, что ЛПР будет стараться максимизировать на множестве допустимых планов перевозок D кроме степени $y \in [0, 1]$ принадлежности $x \in X$ целевому множеству $\tilde{F}$, также и ее достоверность $\varphi(x, y)$.

Таким образом, перед ЛПР возникает следующая двухкритериальная задача:

$$y \rightarrow \max, \varphi(x, y) \rightarrow \max, x \in D, y \in [0, 1]. \quad (3)$$

Обозначим G – множество ее оптимальных по Парето решений (x, y) , $x \in X$, $y \in Y$.

Из приведенных выше предположений

следует, что рациональное решение исходной задачи определяется множеством G . Эти рассуждения приводят к следующему определению.

Общим решением транспортной задачи с нечетким множеством целей будем называть нечеткое множество G^* типа 2 с функцией принадлежности

$$\varphi_{G^*}(x, y) = \begin{cases} \varphi(x, y), & (x, y) \in G, \\ 0, & (x, y) \notin G, \end{cases}$$

где $x \in X$, $y \in Y = [0, 1]$.

Обозначим $G_D = \{x \in D \mid \exists y \in [0, 1] (x, y) \in G\}$ – подмножество векторов $x \in D$, образующих оптимальные по Парето решения задачи (3). В случае, когда ЛПР интересуется конкретное решение исходной задачи, то его можно выбрать из G_D с помощью того или иного метода многокритериальной оптимизации, решив (3).

Поскольку функция $\varphi(x, y)$ достаточно сложна, то есть смысл попробовать несколько упростить задачу (3). Для этого предложим ЛПР максимизировать не произвольную степень $y \in [0, 1]$ принадлежности $x \in X$ множеству допустимых решений $\tilde{F}$, а лишь ее гарантированное значение $\hat{y}(x) = \min_{k \in K} \varphi_k(x)$. В этом случае (3) примет следующий вид:

$$\hat{y}(x) = \min_{k \in K} \varphi_k(x) \rightarrow \max, \varphi(x, \hat{y}(x)) \rightarrow \max, x \in D. \quad (4)$$

Оказывается задача (4) значительно проще, чем (3).

Утверждение 1. Если $\hat{y}(x) = \min_{k \in K} \varphi_k(x)$, то $\varphi(x, \hat{y}(x)) = \max_{k \in K} \{\kappa(k) \mid \varphi_k(x) = \hat{y}(x)\}$.

Доказательство. Пусть для некоторого $x \in D$ индекс

$$k^*(x) = \arg \max_{k \in K} \{\kappa(k) \mid \varphi_k(x) = \hat{y}(x)\}. \quad (5)$$

Это означает, что

$$\kappa(k^*(x)) \geq \kappa(k) \quad \forall k \in K, \quad (6)$$

$$\varphi_{k^*(x)}(x) \leq \varphi_k(x) \quad \forall k \in K. \quad (7)$$

Покажем, что $k^*(x) \in K^{PO}(x)$. Предположим противное, что $k^*(x) \notin K^{PO}(x)$. Тогда $\exists \hat{k} \in K$ такой, что $\hat{k} \succ k^*(x)$. Это означает, что либо

$$\kappa(\hat{k}) > \kappa(k^*(x)) \quad \text{и} \quad \varphi_{\hat{k}}(x) \geq \varphi_{k^*(x)}(x), \quad \text{либо}$$

$\kappa(\hat{k}) \geq \kappa(k^*(x))$ и $\varphi_{\hat{k}}(x) > \varphi_{k^*(x)}(x)$. В первом случае мы получим противоречие с (6), во втором – с (7). Таким образом, $k^*(x) \in K^{PO}(x)$. Тогда из (5) и (6) vyplывает:

$$\begin{aligned} \max_{k \in K} \{\eta(x, k) \mid \varphi_k(x) = \hat{y}(x)\} &= \eta(x, k^*(x)) = \\ &= \kappa(k^*(x)) = \max_{k \in K} \{\kappa(k) \mid \varphi_k(x) = \hat{y}(x)\}. \end{aligned} \quad (8)$$

Теперь определим значение $\varphi(x, \hat{y}(x))$. Поскольку по условию $\hat{y}(x) = \min_{k \in K} \varphi_k(x)$, то $\exists k \in K: \varphi_k(x) = \hat{y}(x)$. Поэтому из (1), (2) следует $\varphi(x, \hat{y}(x)) = \max_{k \in K} \{\eta(x, k) \mid \varphi_k(x) = \hat{y}(x)\}$. Тогда из (8) следует $\varphi(x, \hat{y}(x)) = \max_{k \in K} \{\kappa(k) \mid \varphi_k(x) = \hat{y}(x)\}$.

Утверждение доказано.

Обозначим достоверность гарантированной степени принадлежности $x \in D$ целевому множеству $\tilde{F}$ через

$$\phi(x) = \varphi(x, \hat{y}(x)) = \max_{k \in K} \{\kappa(k) \mid \varphi_k(x) = \hat{y}(x)\}.$$

Тогда задача (4) примет следующий вид:

$$\begin{aligned} \hat{y}(x) &= \min_{k \in K} \varphi_k(x) \rightarrow \max, \\ \phi(x) &= \max_{k \in K} \{\kappa(k) \mid \varphi_k(x) = \hat{y}(x)\} \rightarrow \max, \quad x \in D. \end{aligned} \quad (9)$$

Кроме того, что в силу конструктивного представления функции $\varphi(x, y)$ эта задача стала проще, чем (4), теперь все ее критерии являются функциями лишь от x . Решая эту задачу, ЛПР хочет максимизировать кроме гарантированной степени принадлежности $x \in D$ нечеткому целевому множеству типа 2 и ее достоверность. Поэтому целесообразно ввести такое понятие.

Рациональным решением исходной транспортной задачи с гарантированной степенью принадлежности множеству ее допустимых решений будем называть оптимальное по Парето решение двухкритериальной задачи (9).

Поскольку ЛПР часто интересуется конкретное решение, то его можно выбрать с помощью того или иного метода многокритериальной оптимизации.

Попробуем, далее упростить процесс получения рационального решения задачи (3). Значительный интерес для ЛПР может представлять однокритериальная задача

$$\hat{y}(x) \rightarrow \max, \quad \phi(x) \geq \alpha, \quad x \in D, \quad (10)$$

максимизации гарантированной степени принадлежности $x \in D$ нечеткому целевому множеству типа 2 при заданном уровне $\alpha \in [0, 1]$ – ее достоверности.

Следует отметить, что из теории многокритериальной оптимизации [3] следует, что решение задачи (10) будет слабо эффективным решением (9), что в ряде случаев приемлемо для ЛПР.

Обозначим $K^\alpha = \{k \in K \mid \kappa(k) \geq \alpha\}$ множество индексов целей, которые имеют достоверность степени принадлежности нечеткому множеству $\tilde{K}$ не менее $\alpha \in [0, 1]$.

Докажем следующее утверждение.

Утверждение 2. Задача (10) эквивалентна следующей:

$$z \rightarrow \max_{x \in D}, \quad \forall k \in K \exists j \in K^\alpha \quad \varphi_k(x) \geq \varphi_j(x) \geq z. \quad (11)$$

Доказательство. Сначала покажем, что (10) эквивалентна задаче:

$$\begin{aligned} z &\rightarrow \max_{x \in D}, \\ \hat{y}(x) &= \min_{k \in K} \varphi_k(x) \geq z, \\ \min_{k \in K^\alpha} \varphi_k(x) &= \hat{y}(x). \end{aligned} \quad (12)$$

Для этого достаточно показать равенство множеств: $A = \{x \in D \mid \min_{k \in K^\alpha} \varphi_k(x) = \hat{y}(x)\}$ и

$B = \{x \in D \mid \max_{k \in K} \{\kappa(k) \mid \varphi_k(x) = \hat{y}(x)\} \geq \alpha\}$. Пусть $x \in B$. Тогда $\max_{k \in K} \{\kappa(k) \mid \varphi_k(x) = \hat{y}(x)\} \geq \alpha$. Отсюда $\exists k \in K$, для которого $\varphi_k(x) = \hat{y}(x)$ и $\kappa(k) \geq \alpha$. Тогда очевидно

$$\exists k \in K^\alpha \quad \varphi_k(x) = \hat{y}(x). \quad (13)$$

Предположим противное, что $\min_{k \in K^\alpha} \varphi_k(x) \neq \hat{y}(x)$. Поскольку $\hat{y}(x) = \min_{k \in K} \varphi_k(x)$, а $K^\alpha \subseteq K$, то $\min_{k \in K^\alpha} \varphi_k(x) > \hat{y}(x)$. Поэтому для $\forall k \in K^\alpha \quad \varphi_k(x) > \hat{y}(x)$. Получили противоречие с (13). Таким образом, $x \in A$ и $A \supseteq B$.

Покажем $B \supseteq A$. Пусть $x \in A$. Тогда $\min_{k \in K^\alpha} \varphi_k(x) = \hat{y}(x)$. Отсюда $\exists k \in K^\alpha \quad \varphi_k(x) = \hat{y}(x)$. Поэтому $\exists k \in K$, для которого $\varphi_k(x) = \hat{y}(x)$ и $\kappa(k) \geq \alpha$. Тогда $\max_{k \in K} \{\kappa(k) \mid \varphi_k(x) = \hat{y}(x)\} \geq \alpha$ и

$x \in B$. Таким образом, $B \supseteq A$ и отсюда следует $B = A$. Таким образом, задачи (10) и (12) – эквивалентны.

В силу эквивалентности соотношений:
 $z \rightarrow \max_{x \in D} \varphi_k(x) \geq y \geq z \quad \forall k \in K; \min_{j \in K^\alpha} \varphi_j(x) = y \Leftrightarrow$
 $z \rightarrow \max_{x \in D} \varphi_k(x) \geq \min_{j \in K^\alpha} \varphi_j(x) \geq z, \quad \forall k \in K \Leftrightarrow$
 $z \rightarrow \max_{x \in D} \varphi_k(x) \geq \varphi_j(x) \geq z, \quad \forall k \in K, \exists j \in K^\alpha$
 очевидно следует эквивалентность (10) и (11).

Утверждение доказано.

Если множество K^α индексов целей, имеющих достоверность степени принадлежности нечеткому множеству $\tilde{K}$ не менее заданного ЛПР числа $\alpha \in [0, 1]$, состоит всего из одного элемента j^* , то мы получим задачу математического программирования:
 $z \rightarrow \max_{x \in D} \varphi_k(x) \geq \varphi_{j^*}(x) \geq z \quad \forall k \in K$.

В противном случае задача (11) может быть многоэкстремальной. Поэтому рассмотрим подход к ее конструктивному решению.

Утверждение 3. Задача (11) – эквивалентна задаче:

$$\max_{j \in K^\alpha} \max_{x \in D} \{z \mid \varphi_k(x) \geq \varphi_j(x) \geq z \quad \forall k \in K\}. \quad (14)$$

Доказательство. Пусть x^* – решение задачи (11). Тогда имеем $z^* \geq z \quad \forall x \in D$ и $\forall k \in K \exists j \in K^\alpha : \varphi_k(x) \geq \varphi_j(x) \geq z$. Обозначим через $D^{kj}(z) = \{x \in D \mid \varphi_k(x) \geq \varphi_j(x) \geq z\}$. Отсюда $z^* \geq z \quad \forall x \in D^*$, где $D^*(z) = \bigcap_{k \in K} \bigcup_{j \in K^\alpha} D^{kj}(z)$.

Список використаних джерел

1. Bellman R. Decision making in a fuzzy environment / R. Bellman // Management science. – 1970. – 17. – 4. – pp. 141 – 162.
2. Мащенко С.О. Задача математического программирования с нечетким множеством индексов ограничений / Мащенко С.О. // Кибернетика и системный анализ. – 2013. – № 1. – С. 62 – 68.
3. Орловский С.А. Проблемы принятия решений при нечеткой исходной информации / С.А. Орловский. – М. : Наука, 1981.

Поскольку $\bigcap_{k \in K} \bigcup_{j \in K^\alpha} D^{kj}(z) = \bigcup_{j \in K^\alpha} \bigcap_{k \in K} D^{kj}(z)$, то $\exists j \in K^\alpha$, для которого $z^* \geq z \quad \forall x \in \bigcap_{k \in K} D^{kj}(z)$.

Таким образом, выполняется (14).

С другой стороны. Пусть имеет место (14). Тогда $\exists j \in K^\alpha$, для которого $z^* \geq z \quad \forall x \in \bigcap_{k \in K} D^{kj}(z)$.

Поскольку $\bigcap_{k \in K} \bigcup_{j \in K^\alpha} D^{kj}(z) = \bigcup_{j \in K^\alpha} \bigcap_{k \in K} D^{kj}(z)$, то $z^* \geq z \quad \forall x \in \bigcap_{k \in K} \bigcup_{j \in K^\alpha} D^{kj}(z)$. Тогда $z^* \geq z \quad \forall x \in X$ и

$\forall k \in K \exists j \in K^\alpha : \varphi_k(x) \geq \varphi_j(x) \geq z$. Поэтому x^* – решение задачи (11).

Утверждение доказано.

Таким образом, если множество K^α содержит более одного индекса, то для каждого $j \in K^\alpha$ надо получить решение задачи вида:

$$z(x^{(j)}) = \max\{z \mid x \in D, \varphi_k(x) \geq \varphi_j(x) \geq z, k \in K\}.$$

Тогда решение x^* задачи (10) будет выбираться из условия

$$x^* = \arg \max_{j \in K^\alpha} z(x^{(j)}).$$

В заключение следует отметить, что предложенный метод расширяет область применения нечеткого математического программирования на случай транспортной задачи с нечетким множеством целей ЛПР и может дать новый подход к решению других постановок нечетких задач оптимизации.

References

1. BELLMAN, R. (1970) Decision making in a fuzzy environment. *Management science*. 17(4). pp. 141 – 162.
2. MASHCHENKO, S. (2013) The problem of the mathematical programming with the fuzzy set of indexes of constraints. *Cybernetics and systems analysis*. 49(1). pp. 62 – 68.
3. ORLOVSKY, S. (1981) *Problems of decision making at fuzzy initial information*. Moskva: Nauka.

Надійшла до редколегії 11.11.2014.

УДК 004.056.5

Новокшонов А. К., аспірант

A. K. Novokshonov, graduate student

Захищені групові комунікації: особливості програмної реалізації

Secure group communications: details of software implementation

Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, факультет кібернетики,
03680, м. Київ, пр. Академіка Глушкова, 4д,
e-mail: andrey.novokshonov@ukr.net

Taras Shevchenko National University of Kyiv,
Faculty of Cybernetics, 03680, Kyiv, 4d Academician
Glushkov avenue,
e-mail: andrey.novokshonov@ukr.net

У роботі представлені результати реалізації протоколів захищених групових комунікацій, а також проведено порівняння ефективності даних протоколів при роботі на персональних комп'ютерах та мобільних пристроях. Особливостями даного дослідження є: реалізація не тільки стандартних алгоритмів захищених групових комунікацій, а й їх оптимізованих версій з метою ефективного виконання масових групових операцій; здійснення порівняння ефективності алгоритмів на малопотужних пристроях на базі операційної системи Android.

Ключові слова: захищені групові комунікації, груповий протокол Діффі-Хеллмана на основі дерева, мобільні пристрої.

The exponential growth of modern communication technologies treats group communications as an important area of research and practical use. Security is crucial for distributed applications that work in dynamic environments and perform information exchange over insecure public networks (such as the Internet). Examples of such applications include multimedia content multicasting, teleconferencing, distance teaching and learning, collaborative work, remote voting, interactive games and information services. The paper presents results of software implementation of secure group communication protocols. Besides, it contains performance comparison of these protocols when working on personal computers and mobile devices. The main results are as follows. Successful application of TGDH (tree-based group Diffie-Hellman) algorithm modifications not only to personal computers but also to mobile platforms is introduced. Significant performance growth of implemented optimizations for bulk group operations is shown (this fact is confirmed by experimental data). Comparison of efficiency of implemented algorithms for low-power devices (based on the Android operating system) is presented.

Key words: secure group communications, tree-based group Diffie-Hellman protocol, mobile devices.

Статтю представив чл.-кор. НАНУ, д. ф.-м. н., проф. Анісімов А. В.

Вступ

Захищені групові комунікації представляють собою сценарій, в якому сукупність довірених суб'єктів приймає участь у групових комунікаціях і потребує захисту важливих даних, що передаються. Захист цих даних ґрунтується на володінні спільними криптографічними параметрами (наприклад, знання спільного ключа шифрування). При цьому зовнішні спостерігачі, які не є учасниками групи, не мають змоги розшифрувати зміст групових повідомлень, навіть якщо вони мають можливість перехоплювати зашифровані повідомлення.

Метою алгоритмів захищених групових комунікацій є створення технології для обміну криптографічними ключами між учасниками групи, які потребують утворення спільного для них секретного ключа. Далі такий ключ може бути використаний для шифрування всіх повідомлень між учасниками групи за допомогою деякого швидкого алгоритму симетричного шифрування. Особливістю даного сценарію взаємодії є використання для комунікацій відкритих каналів зв'язку, що, правда, необхідні механізми автентифікації всіх учасників для захисту від атак типу «людина посередині».

Основна складність таких групових протоколів полягає у тому, що при будь-якій зміні складу учасників групи (приєднання нових учасників, вихід старих) необхідно обчислювати новий спільний груповий ключ. Дана вимога присутня з тією метою, щоб нові учасники групи не мали доступу до попередніх зашифрованих групових повідомлень, а старі учасники, що вийшли зі складу групи, відповідно, не могли прочитати наступні повідомлення, що будуть надсилатися новим складом групи. Крім того, спільний груповий ключ необхідно періодично оновлювати і при відсутності зміни складу групи, щоб мінімізувати ризик компрометації поточних групових повідомлень.

Безпека групових комунікацій є вкрай важливою для розподілених додатків та застосувань зі спільним доступом, які функціонують у динамічних мережевих середовищах та здійснюють обмін інформації через незахищені мережі, такі, як Інтернет.

Методика дослідження

В якості основи реалізованих алгоритмів використовується *груповий протокол Діффі-Хеллмана на основі дерева* [1]. Детальне порівняння даного алгоритму з аналогами наведено у [2]. Принцип побудови дерева наступний. Для кожного учасника групи маємо ідентичне збалансоване бінарне дерево, у листових вузлах якого знаходиться інформація про учасників групи та їх публічні ключі. Кожен учасник на початку роботи протоколу має тільки свій власний приватний ключ, який він вибирає майже довільним чином (враховуються лише обмеження, необхідні для забезпечення бажаного рівня криптографічної стійкості). У проміжних вузлах дерева на вищих рівнях розташовані відповідні приватні та публічні ключі, спільні для їх нащадків і необхідні для обчислення спільного групового ключа. Відповідно, у кореневому вузлі бінарного дерева розташований спільний секретний груповий ключ, обчислення якого є основною метою даного протоколу.

У даній роботі обмежимося розглядом і порівнянням таких операцій (без зайвої деталізації):

- *обчислення спільного групового ключа одним учасником* – означає, що даний учасник має актуальне дерево, у якому наявні всі необхідні публічні ключі, і він на основі власного приватного ключа обчислює спільний секретний груповий ключ;
 - *одиночне приєднання* – означає, що до групи приєднується новий учасник, у дереві додається новий листовий вузол (при необхідності й вузли вищих рівнів) та всіма учасниками групи здійснюється переобчислення нового спільного групового ключа;
 - *одиночний вихід* – означає, що з групи вибуває один учасник, відповідний листовий вузол помічається як неактивний (при необхідності і вузли вищих рівнів) та всіма учасниками групи здійснюється переобчислення нового спільного групового ключа;
 - *масове приєднання* – означає, що до групи умовно одночасно входить велика кількість учасників (можна вважати, що більше двох), але особливістю є те, що дану операцію можна ефективно оптимізувати (позбутися зайвих переобчислень після приєднання кожного нового учасника та використати «пакетний» алгоритм (англ. bursty algorithm) [3, с. 54]);
 - *масовий вихід* – означає, що з групи умовно одночасно виходить велика кількість учасників, і можна застосувати оптимізацію, аналогічну тим, що використовуються у операції масового приєднання.
- У процесі роботи були реалізовані такі версії системи захищених групових комунікацій:
- стандартна версія для персонального комп'ютера;
 - версія для персонального комп'ютера з оптимізованими алгоритмами масового додавання учасників до групи та масового виходу учасників з групи;
 - стандартна версія для мобільних пристроїв на базі ОС (операційної системи) Android;
 - версія для мобільних пристроїв на базі ОС Android з оптимізованими алгоритмами масового додавання учасників до групи та масового виходу учасників з групи.
- Для порівняння ефективності реалізованих алгоритмів за основу були взяті наступні параметри:
- швидкодія операції генерування ключа одним учасником;
 - швидкодія одиночних операцій приєднання та виходу учасників з групи;
 - швидкодія оптимізованих масових операцій приєднання та виходу учасників з групи;
 - обсяг використовуваної оперативної пам'яті для зберігання структури бінарного дерева.

Результати дослідження

Реалізовані програмні системи були протестовані за допомогою персонального комп'ютера з процесором Intel Pentium Duo 2.3 ГГц, 4 Гб DDR3 оперативної пам'яті, ОС Ubuntu 12.04 LTS x64 та смартфона з процесором 720 МГц, 256 Мб оперативної пам'яті, ОС Android 2.3.7.

У табл. 1 та 2 наведено результати тестування обсягу використовуваної оперативної пам'яті на персональному комп'ютері та мобільному пристрої при зберіганні структури бінарного дерева з відповідною кількістю учасників групи.

Таблиця 1

Обсяг використовуваної оперативної пам'яті для зберігання структури дерева (на персональному комп'ютері)

Кількість учасників групи	Обсяг використання оперативної пам'яті (Мб)
100	2,456
1000	3,248
10000	12,352
50000	51,660
100000	101,664

Таблиця 2

Обсяг використовуваної оперативної пам'яті для зберігання структури дерева (на мобільному пристрої)

Кількість учасників групи	Обсяг використання оперативної пам'яті (Мб)
10	0,556
100	0,616
1000	0,972

Результати вимірювання швидкодії обчислення групового ключа одним учасником на персональному комп'ютері свідчать про те, що час обчислення змінюється від 4723 мкс для групи з 10 учасників і до 19849 мкс для групи з 100000 учасників.

Порівняльні графіки одиничних та оптимізованих масових версій операцій приєднання та виходу учасників з групи наведені на рис. 1, 2 (для персонального комп'ютера) та у табл. 3 (для мобільного пристрою).



Рис. 1 Порівняння часу виконання одиничних та масових операцій приєднання учасників до групи (на персональному комп'ютері)



Рис. 2 Порівняння часу виконання одиничних та масових операцій виходу учасників з групи (на персональному комп'ютері)

Висновки

Підтримка групових комунікацій у динамічних групах з великою кількістю учасників створює серйозну проблему у сенсі обсягу необхідних обчислювальних ресурсів. Класичний підхід з обміном ключами між кожною парою учасників у такій ситуації стає і

Таблиця 3

Швидкодія групових операцій залежно від кількості учасників групи (на мобільному пристрої)

Тип операції \ Розмір групи	10 учасників	100 учасників	1000 учасників
Створення групи одиничним приєднанням	0 с 17517 мкс	0 с 321625 мкс	6 с 866699 мкс
Створення групи масовим приєднанням	0 с 12391 мкс	0 с 129181 мкс	1 с 325195 мкс
Приєднання 1 учасника до існуючої групи	0 с 2167 мкс	0 с 3144 мкс	0 с 11994 мкс
Видалення 1 учасника з існуючої групи	0 с 122 мкс	0 с 488 мкс	0 с 6226 мкс
Приєднання 10 учасників до існуючої групи	0 с 13977 мкс	0 с 15046 мкс	0 с 17883 мкс
Видалення всієї групи (масовий вихід)	0 с 885 мкс	0 с 5158 мкс	0 с 17090 мкс
Обчислення групового ключа 1 учасником	0 с 1709 мкс	0 с 3051 мкс	0 с 4395 мкс

неефективним, і потребує наявності центрального сервера, що є потенційною точкою відмови всієї системи. Тому зараз на перший план виходять децентралізовані алгоритми захищених групових комунікацій, які володіють такими властивостями:

- дозволяють значно скоротити кількість обчислювальних операцій для отримання всіма учасниками групи спільного ключа шифрування;
- дозволяють значно зменшити кількість повідомлень, якими необхідно обмінятися учасникам групи, щоб узгодити спільний груповий ключ;
- дозволяють ефективно вирішувати проблему одночасного приєднання або виходу великої кількості учасників групи;
- дозволяють позбутися єдиної точки відмови (центрального сервера).

У свою чергу, такі оптимізації відкривають можливість ефективного використання захищених групових комунікацій у середовищі дуже поширених нині мобільних пристроїв, які характеризуються відносно невеликою обчислювальною потужністю та не завжди стабільним бездротовим доступом до мережі Інтернет.

Відповідно, як показують результати проведеного дослідження, децентралізовані групові алгоритми узгодження ключа (у нашому випадку модифікації групового протоколу Діффі-Хеллмана на основі дерева) дозволяють ефективно (у розумінні швидкодії та обсягу використовуваних ресурсів) здійснювати підтримку захищених групових комунікацій на базі не тільки персональних комп'ютерів, а і на базі малопотужних мобільних пристроїв з популярною у наш час операційною системою Android.

Список використаних джерел

1. Kim Y. Tree-based group key agreement / Y. Kim, A. Perrig, G. Tsudik // ACM Transactions on Information and System Security, 7(1). – 2004. – P. 60-96.
2. Amir Y. On the performance of group key agreement protocols / Y. Amir, Y. Kim, C. Nita-Rotaru, G. Tsudik // ACM Transactions on Information and System Security, 7(3). – 2004. – P. 457-488.
3. Zou X. Secure group communications over data networks / X. Zou, B. Ramamurthy, S. Magliveras // Springer Science and Business Media. – 2007. – 172 p.

References

1. KIM, Y., PERRIG, A. and TSUDIK, G. (2004). *Tree-based group key agreement*. ACM Transactions on Information and System Security, 7(1), p. 60-96.
2. AMIR, Y., KIM, Y., NITA-ROTARU, C. and TSUDIK, G. (2004). *On the performance of group key agreement protocols*. ACM Transactions on Information and System Security, 7(3), p. 457-488.
3. ZOU, X., RAMAMURTHY, B. AND MAGLIVERAS, S. (2007). *Secure group communications over data networks*. Springer Science and Business Media.

Надійшла до редколегії 15.03.15

УДК 519.9

Розора І.В., к. ф.-м. н.

Rozora I.V. PhD

**Точність та надійність моделей
випадкових процесів з дискретним
спектром з урахуванням лінійного
фільтру**

**Model accuracy and reliability of
stochastic processes with discrete
spectrum with respect to linear filter**

Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, пр-т
Глушкова 4е,
e-mail: irozora@bigmir.net

Taras Shevchenko National University of Kyiv,
03680, Kyiv, Glushkova ave., 4e,
e-mail: irozora@bigmir.net

В сьогоденні теорія випадкових процесів широко використовується в різних галузях науки і не тільки в природничій області. Тому однією з актуальних проблем залишається побудова математичних моделей випадкових процесів та вивчення їх властивостей. Завдяки потужним можливостям комп'ютерних технологій, проблеми чисельного моделювання стають особливо важливими та дозволяють прогнозувати поведінку випадкових процесів. Існує велика кількість методів моделювання випадкових процесів та полів. Деякі з них можна знайти в роботах [3], [4], [5]. Зауважимо, що більшість праць, присвячених моделюванню випадкових процесів та полів, не досліджують питання точності та надійності моделей. В даній статті ці питання вивчаються, це означає, що спершу будується модель випадкового процесу, а потім, використовуючи певні критерії узгодженості, перевіряємо її на адекватність.

В роботі розглядаються гауссові випадкові процеси з дискретним спектром. Будуються моделі, які наближують ці процеси з даною точністю та надійністю в банаховому просторі $C([0,1])$ з урахуванням лінійного фільтру. Для цього застосовуються методи та властивості квадратично-гауссових процесів.

Ключові слова: моделювання, гауссовий стаціонарний процес з дискретним спектром, квадратично-гауссовий процес, лінійний фільтр.

Nowadays the theory of stochastic processes is widely used in different branches of science and not only in natural science. That's why one of the actual problems is to build a mathematical model of stochastic process and study its properties. Due to the powerful possibilities of computer techniques the problems of numerical simulations become especially important and allow to predict the behaviour of a random process. There are various simulation methods of stochastic processes and fields. Some of them can be found in [3], [4], [5]. Notice that in most papers dealing with the simulation of stochastic processes the question of accuracy and reliability isn't studied. In this article such problem is investigated, it means that at first we construct the model and then using some adequacy tests verify it.

In the paper a Gaussian stochastic processes with discrete spectrum are considered. The model which approximates the process with given accuracy and reliability in Banach space $C([0,1])$ with respect to linear filter are constructed. For these purposes the methods and properties of Square-Gaussian processes are used.

Key Words: simulation, Gaussian stationary process with discrete spectrum, Square-Gaussian process, linear filter.

Статтю представив – д. т. н., проф. В.А. Заславський

1. Вступ

У зв'язку з розвитком комп'ютерних технологій моделювання випадкових процесів

та полів почало широко застосовуватись в різних областях природничих та соціальних наук таких, як метеорологія, радіотехніка, соціологія, актуарна та фінансова математика, при випробуванні різних механізмів тощо.

Над розробкою теорії моделювання випадкових процесів та полів працювало велика кількість вчених, серед них Г. Корн, С.М. Єрмаков, Г.О. Михайлов, М.Й. Ядренко, Ю.В. Козаченко та ін. Існує багато методів моделювання випадкових процесів. Pozнайомитись з цими методами можна в таких книжках [3], [5]. Ряд нових напрямків у галузі моделювання випадкових процесів зроблено Г.О. Михайловим та його учнями. Це спектральні моделі гауссових полів, моделі випадкових процесів по точкових потоках, метод подвійної рандомізації тощо. Зауважимо, що в більшості робіт, які присвячені моделюванню випадкових процесів та полів, не вивчаються питання про надійність та точність побудованих моделей. Вперше такі питання розглядались в роботах Ю.В. Козаченка.

В більшості книг та робіт з даної тематики, розглядаються в основному методи моделювання гауссових процесів та полів. *Означення 1.* Стаціонарний процес є процесом з дискретним спектром, якщо його кореляційну функцію можна представити у вигляді

$$B(h) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k^2 \cos \lambda_k h,$$

де $b_k^2 > 0$, $\sum_{k=0}^{\infty} b_k^2 < \infty$, а λ_k такі числа, що $0 \leq \lambda_k \leq \lambda_{k+1} \rightarrow \infty$ при $k \rightarrow \infty$.

З цього означення випливає [3], що стаціонарний процес з дискретним спектром зображається в такому вигляді

$$\xi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k (\xi_k \cos \lambda_k t + \eta_k \sin \lambda_k t), \quad (2.1)$$

де ξ_k, η_k – незалежні випадкові величини,

$$E\xi_k = E\eta_k = E\xi_k \eta_l = 0$$

та

$$E\xi_k \xi_l = E\eta_k \eta_l = \delta_k^l, k \geq 0, l \geq 0.$$

Зауважимо, що ряд (2.1) збігається в середньому квадратичному [3]. Якщо випадкові величини ξ_k, η_k є гауссовими, то і сам процес (2.1) буде гауссовим.

Відомо, що, як правило, виникає потреба моделювати процеси та поля, що є сумою великого числа випадкових факторів, дія кожного з яких незалежна. Згідно з центральною граничною теоремою такі процеси є близькі до гауссових. Отже, задача моделювання гауссових процесів є одною з найбільш важливих задач теорії моделювання.

В роботі розглядаються гауссові стаціонарні процеси з дискретним спектром. Будуються моделі, які наближують даний випадковий процес з даною точністю та надійністю з урахуванням процесу на виході лінійного фільтру. В статті розглядаються моделі, в яких значення амплітуд процесу b_k задані наближено, тобто з певною точністю.

Подібні задачі моделювання розглядались в [1], [3] для різних процесів в різних банахових просторах.

2. Основна частина

Нехай задано стаціонарний центрований гауссовий процес $\xi(t), t \in [0, T], T > 0$ на ймовірнісному просторі $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ ($E\xi(t) = 0$).

В даній роботі будуть розглядатися центровані гауссові стаціонарні процеси з дискретним спектром. Для них будуть використовуватись властивості квадратично-гауссових випадкових процесів. Тому дамо зараз означення та деякі властивості квадратично-гауссових випадкових величин та процесів.

Означення 2. Випадкову величину η називають квадратично-гауссовою, якщо її можна представити у вигляді

$$\eta = \zeta A \zeta^T - E\zeta A \zeta^T, \quad (2.2)$$

де ζ – центрований гауссів випадковий вектор, а A – матриця, або, якщо η є границею у середньому квадратичному виразів з (2.2), тобто

$$\eta = \lim_{n \rightarrow \infty} (\zeta_n A \zeta_n^T - E\zeta_n A \zeta_n^T),$$

Позначимо простір квадратично-гауссових випадкових величин, визначених на одному ймовірнісному просторі Ω , через $SG(\Omega)$.

Зауваження 1.[2] Простір $SG(\Omega)$ є банаховим простором відносно норми $\|\xi\| = \sqrt{E\xi^2}$.

Означення 3. Випадковий процес $X(t)$, $t \in [0, T]$, є квадратично-гауссовим, якщо для будь-якого фіксованого $t \in [0, T]$ $X(t)$ є квадратично-гауссовою випадковою величиною та $\sup_{t \in [0, T]} |X(t)| < \infty$.

Для квадратично-гауссових процесів має місце наступна теорема.

Теорема 1.[1] Нехай $X(t)$ – сепарабельний квадратично-гауссовий випадковий процес та

$$\sup_{|t-s|<h} (D(X(t) - X(s)))^{\frac{1}{2}} \leq \sigma(h) = kh^{\alpha}, \alpha \in (0, 1],$$

де k – деяка стала. Якщо для цілого $M > 0$ та $x > 0$ виконуються нерівності

$$x > \frac{\sqrt{2}\delta_0 M}{\alpha},$$

$$t_0 \left(\frac{\sqrt{2}\delta_0 M}{x\alpha} \right)^{M-1} < \delta_0,$$

тоді

$$P \left\{ \sup_{t \in [0, T]} |X(t)| > x \right\} < 4e^{\frac{M+1}{\alpha}} \exp \left\{ -\frac{x}{\sqrt{2}\delta_0 M} \right\} \times \left(\frac{x\alpha}{\sqrt{2}\delta_0 M} \right)^{M/\alpha} \left(1 + \frac{2x}{\sqrt{2}\delta_0} \right)^{1/2},$$

$$\text{де } \delta_0 = \sup_{t \in [0, T]} (D(X(t)))^{1/2}.$$

Розглянемо деяку фізичну систему з лінійним фільтром. На вхід даного фільтру поступає сигнал, тобто процес $\xi(t)$, $t \in [0, T]$, $T > 0$. На виході системи отримується лінійне перетворення

$$\eta(t) = \langle \xi(t), z \rangle = \sum_{k=0}^{\infty} z_k b_k (\xi_k \cos \lambda_k t + \eta_k \sin \lambda_k t),$$

$$\text{де } \sum_{k=0}^{\infty} z_k^2 b_k^2 < \infty.$$

У роботі знаходяться умови, при яких побудована модель процесу $\xi(t)$, $t \in [0, T]$, враховує і вихідні значення фільтру $\eta(t)$, $t \in [0, T]$. Для цього запишемо невід’ємно-визначену квадратичну форму, що побудована на вхідному та вихідному процесах,

$$X(t) = a^2 \xi^2(t) + 2c(\xi(t)\eta(t)) + b^2(\eta(t))^2,$$

а, c і b – деякі константи.

Тоді легко помітити, що процес $X(t)$ – $EX(t)$ є квадратично гауссовим.

Побудуємо модель $\tilde{\xi}_N(t)$ процесу $\xi(t)$ таким чином, щоб модель наближувала процес з даною точністю та надійністю в банаховому просторі $C^1([0, T])$, при цьому беручи до уваги вихідні значення на лінійному фільтрі.

Будемо вважати, що константи b_k визначаються з певною точністю γ_k , а отже

$$|\tilde{b}_k - b_k| \leq \gamma_k.$$

Означення 4. Процес $\tilde{\xi}_N(t)$ буде моделлю процесу $\xi(t)$ з (2.1), якщо

$$\tilde{\xi}_N(t) = \sum_{k=0}^N \tilde{b}_k (\xi_k \cos \lambda_k t + \eta_k \sin \lambda_k t),$$

де $\tilde{b}_k$ є наближеними значеннями до b_k з точністю γ_k .

При побудові моделі на практиці вважаємо, що коефіцієнти γ_k відомі.

Означення 5. Модель $\tilde{\xi}_N(t)$ наближує процес $\xi(t)$ з урахуванням лінійного фільтру з даною надійністю $1-\nu$, $\nu \in (0, 1)$ та точністю $\delta > 0$ в просторі $C^1([0, T])$, якщо

$$P \left\{ \sup_{t \in [0, T]} |X(t) - \tilde{X}_N(t) - E(X(t) - \tilde{X}_N(t))| > \delta \right\} < \nu,$$

де

$$\tilde{X}_N(t) = a^2 \tilde{\xi}_N^2(t) + 2c(\tilde{\xi}_N(t)\tilde{\eta}_N(t)) + b^2(\tilde{\eta}_N(t))^2.$$

Доведемо наступну теорему

Теорема 2. Нехай $\sum_{k=0}^{\infty} b_k^2 z_k^{2+2\alpha} < \infty$, $\alpha \in (0, 1]$.

Модель $\tilde{\xi}_N(t)$ наближує гауссовий сепарабельний стаціонарний процес з дискретним спектром $\xi(t)$ з урахуванням лінійного фільтру з даною надійністю $1-\nu$, $\nu \in (0, 1)$ та точністю $\delta > 0$ в просторі $C^1([0, T])$, якщо для цілого $M > 0$ та $\alpha \in (0, 1]$ значення N , верхня межа сумування моделі, задовольняє умовам

$$\delta > \frac{\sqrt{2}\delta_0(N)M}{\alpha},$$

$$A_N \left(\frac{T}{2} \right)^\alpha \left(\frac{\sqrt{2}\delta_0(N)M}{\alpha\delta} \right)^{M-1} < \delta_0(N),$$

$$4e^{\frac{M+1}{\alpha}} \exp \left\{ -\frac{\delta}{\sqrt{2}\delta_0(N)M} \right\} \times$$

$$\left(\frac{\alpha\delta}{\sqrt{2}\delta_0(N)M} \right)^{M/\alpha} \left(1 + \frac{2\delta}{\sqrt{2}\delta_0(N)} \right)^{1/2} < \nu,$$

де

$$\delta_0^2(N) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} 2\hat{b}_{kk}\hat{b}_{ll}(a^4 + 2c^2(z_k^2 + z_l^2) + b^4 z_k^2 z_l^2),$$

$$A_N^2 = 2^{5-2\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} [2\hat{b}_{kk}\hat{b}_{ll}\lambda_k^\alpha \lambda_l^\alpha (a^2 + 2cz_k + b^2 z_k^2) \times$$

$$(a^2 + 2cz_l + b^2 z_l^2) +$$

$$+ (\hat{b}_{kl})^2 (\lambda_k^\alpha + \lambda_l^\alpha)^2 (a^2 + c(z_k + z_l) + b^2 z_k z_l)^2], \quad (2.3))$$

$$b_{\max} = \max_{0 \leq k \leq N} \{b_k, \tilde{b}_k\} \text{ та}$$

$$\hat{b}_{kl} = \begin{cases} b_{\max}(\gamma_k + \gamma_l), & \text{при } k \leq N, l \leq N; \\ b_k \gamma_l, & \text{при } k > N, l \leq N; \\ \gamma_k b_l, & \text{при } k \leq N, l > N; \\ b_k b_l, & \text{при } k > N, l > N. \end{cases} \quad (2.4)$$

Доведення. Введемо нове позначення $X_N(t) = X(t) - \tilde{X}_N(t)$. Помітимо, що процес $X_N(t)$ -Е $X_N(t)$ є квадратично-гауссовим. Отже, для нього має місце теорема 1.

Легко показати, що невід'ємно-квадратичну форму $X(t)$ можна подати у вигляді

$$X(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} [\phi_{kl}^1(t) \xi_k \xi_l + \phi_{kl}^2(t) \eta_k \eta_l + \theta_{kl}(t) \xi_k \eta_l], \quad (2.5)$$

де

$$\phi_{kl}^1(t) = b_k b_l (a^2 \cos \lambda_k t \cos \lambda_l t + z_k z_l b^2 \cos \lambda_k t \cos \lambda_l t +$$

$$+ c(z_l \cos \lambda_k t \cos \lambda_l t + z_k \cos \lambda_l t \cos \lambda_k t)),$$

$$\phi_{kl}^2(t) = b_k b_l (a^2 \sin \lambda_k t \sin \lambda_l t + z_k z_l b^2 \sin \lambda_k t \sin \lambda_l t +$$

$$+ c(z_l \cos \lambda_k t \sin \lambda_l t + z_k \cos \lambda_l t \sin \lambda_k t)),$$

$$\theta_{kl}(t) = 2b_k b_l (a^2 \cos \lambda_k t \sin \lambda_l t + z_k z_l b^2 \sin \lambda_k t \cos \lambda_l t +$$

$$+ c(z_l \cos \lambda_k t \sin \lambda_l t + z_k \cos \lambda_l t \sin \lambda_k t)), \quad (2.6)$$

також для $X(t)$ мають місце наступні співвідношення

$$DX(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} b_k^2 b_l^2 (a^4 + 2c^2(z_k^2 + z_l^2) + b^4 z_k^2 z_l^2) \quad (2.7)$$

$$D(X(t) - X(s)) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} [\phi_{kk}^1 \phi_{ll}^1 + \phi_{kk}^2 \phi_{ll}^2 + 2(\phi_{kl}^1)^2 +$$

$$+ 2(\phi_{kl}^2)^2 + (\theta_{kl})^2 + 2\phi_{kk}^1 \phi_{ll}^2], \quad (2.8)$$

де

$$\phi_{kl}^i = \phi_{kl}^i(t) - \phi_{kl}^i(s), i = 1, 2,$$

$$\theta_{kl} = \theta_{kl}(t) - \theta_{kl}(s).$$

Оскільки

$$|b_k| \leq b_{\max}, |\tilde{b}_k| \leq b_{\max},$$

Тоді $|b_k b_l - \tilde{b}_k \tilde{b}_l| < b_{\max}(\gamma_k + \gamma_l)$ для $0 \leq k \leq N, 0 \leq l \leq N$.

Введемо новий коефіцієнт $\hat{b}_{kl}$ як показано в (2.4). Тоді легко бачити, що процес $X_N(t)$ дорівнює

$$X_N(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} [\hat{\phi}_{kl}^1(t) \xi_k \xi_l + \hat{\phi}_{kl}^2(t) \eta_k \eta_l +$$

$$+ \hat{\theta}_{kl}(t) \xi_k \eta_l], \quad (2.9)$$

де функції $\hat{\phi}_{kl}^i(t) = \frac{\hat{b}_{kl}}{b_k b_l} \phi_{kl}^i(t)$, $i=1,2$,

$$\hat{\theta}_{kl}(t) = \frac{\hat{b}_{kl}}{b_k b_l} \theta_{kl}(t). \text{ Тобто функції } \hat{\phi}_{kl}^i(t), \hat{\theta}_{kl}(t)$$

відрізняються від $\phi_{kl}^i(t), \theta_{kl}(t)$ тільки тим, що в них використовуються коефіцієнти $\hat{b}_{kl}$ замість $b_k b_l$.

З представлення (2.9) випливає, що для $X_N(t)$ виконуються рівності (2.5), (2.7) та (2.8).

Для оцінки функцій $\hat{\phi}_{kl}^i(t), \hat{\theta}_{kl}(t)$, $i=1,2$, застосуємо нерівність

$$|\sin \lambda_k t - \sin \lambda_k s| < 2^{1-\alpha} \lambda_k^\alpha |t - s|^\alpha, \alpha \in (0,1].$$

Тоді

$$|\hat{\phi}_{kl}^i| \leq 2^{1-\alpha} \hat{b}_{kl} (\lambda_k^\alpha + \lambda_l^\alpha) \times$$

$$(a^2 + c(z_l + z_k) + b^2 z_k z_l) |t - s|^\alpha.$$

$$i = 1, 2, \alpha \in (0,1]$$

Аналогічну нерівність можна довести і для $\Delta \hat{\theta}_{kl}$. А саме:

$$|\hat{\theta}_{kl}| \leq 2^{2-\alpha} \hat{b}_{kl} (\lambda_k^\alpha + \lambda_l^\alpha) (a^2 + c(z_l + z_k) + b^2 z_k z_l) \times$$

$$\times |t - s|^\alpha.$$

Використовуючи ці оцінки, отримаємо

$$\sup_{t \in [0, T]} D(X_N(t) - X_N(s)) =$$

$$\sup_{t \in [0, T]} E(X_N(t) - X_N(s))^2 = (A_N |t - s|^\alpha)^2, \alpha \in (0, 1],$$

де значення A_N з (2.3).

$$\sup_{t \in [0, T]} DX(t) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \hat{b}_{kk} \hat{b}_{ll} (a^4 + 2c^2(z_k^2 + z_l^2) + b^4 z_k^2 z_l^2) = \delta_0^2(N).$$

Теорема буде повністю доведена, якщо до отриманих співвідношень застосувати

Список використаних джерел

1. Kozachenko, Yu. Simulation of Gaussian stochastic processes/ Kozachenko, Yu., Rozora, I. //Random Oper. and Stochastic Equ. – 2003. – 11(№ 3). – С.275-296.
2. Козаченко Ю.В. Метрические характеристики случайных величин и процессов. / Ю.В.Козаченко, В.В. Булдин – Київ: ТВіМС, 1998. – 290 с.
3. Козаченко Ю.В. Моделювання випадкових процесів та полів./ Ю.В. Козаченко, А.О. Пашко, І.В. Розора – Київ: “Задруга”, 2007.– 230с.
4. Kozachenko Yu. On an expansion of random processes in series/ Kozachenko Yu., Rozora I., Turchyn Ye // Random Operators and Stochastic Equations.– 2007– 15. – P.15-33.
5. Михайлов Г.А. Численное статистическое моделирование. Учебное пособие./ Г.А. Михайлов, А.В. Войтишек – М.: Издательский дом «Академия», 2006. – 368с.

результати теореми 1 та використати означення 5.

3. Висновок

В статті розглядались гауссові стаціонарні процеси з дискретним спектром вигляду (2.1). Була доведена теорема 2 для моделювання цих процесів з урахуванням лінійного фільтру. Для побудови моделі процесу з даною надійністю та точністю потрібно знайти таке натуральне N , при якому виконувались всі нерівності теореми 2.

References

1. KOZACHENKO, YU., ROZORA, I. (2003) Simulation of Gaussian stochastic processes. *Random Oper. and Stochastic Equ.* 11(3). p.275-296.
2. KOZACHENKO, YU., BULDYGIN V. (2000) *Metric characterization of random variables and random processes.* American Mathematical Society.
3. KOZACHENKO, YU., PASHKO A., ROZORA, I. (2007) *Simulation of stochastic processes and fields.* Kyiv: Zadruha.
4. KOZACHENKO YU., ROZORA I., TURCHYN YE., (2007) On an expansion of random processes in series. *Random Operators and Stochastic Equations.* 15. p.15-33.
5. MICHAYLOV H., VOITISHEK A. (2006) *Numeric Statistical Modelling. Tutotial.* Moscow: "Academiya".

Надійшла до редакції 14.12. 2014

УДК 517.929

Сіренко А.С., аспірант

A.S. Sirenko, graduate student

Про одну різницеву систему зі слабкою нелінійністю

On a difference systems with weakly nonlinear

Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 83000, м. Київ, пр-т.
Глушкова 4д, e-mail: sandrew@online.ua

Taras Shevchenko National University of Kyiv, 83000,
Kyiv, Glushkova st., 4d,
e-mail: sandrew@online.ua

У роботі розглядаються різницеві системи в тривимірному просторі. Праві частини систем являють собою діагональну лінійну частину і нелінійні функції, що задовольняють умові Ліпшиця з «досить малою» сталою. Одержано умови, при виконанні яких з асимптотичної стійкості лінійної частини слідує асимптотична стійкість положення рівноваги вихідної системи.

Ключові слова: різницєва система, асимптотична стійкість, умови Ліпшиця.

In this paper, we consider a system of three nonlinear differential equations "with a weak nonlinearity." By this term refers to a system with a dedicated part of the linear and nonlinear function satisfying the Lipschitz condition with a sufficiently small Lipschitz constant. If the non-linear function depends on a single argument, which is a linear combination of the phase coordinates, the asymptotic stability in the large of the zero equilibrium position is called absolute stability. Conditions for absolute stability of systems of various types are studied in detail and published in several papers. Recently difference systems of this type have been used for modeling the dynamics of the neural networks.

We consider the system of difference in three-dimensional space. The right side of the diagonal are the linear part and nonlinear functions satisfying Lipschitz with "very low" constant. The conditions under which asymptotic stability of linear part follows the asymptotic stability of the equilibrium position of the original system.

Key words: difference system, asymptotic stability, Lipschitz conditions.

Статтю представив д.ф.-м.н, проф. Хусаїнов Денис Ях'євич

Вступ

У цій роботі розглядається система трьох нелінійних різницевих рівнянь «зі слабкою нелінійністю». За цим терміном розуміються системи з виділеною лінійною частиною і нелінійної функцією, що задовольняє умові Ліпшиця з досить малою постійною Ліпшиця. Якщо нелінійна функція залежить від одного аргументу, що є лінійною комбінацією фазових координат, то асимптотична стійкість в цілому нульового положення рівноваги називається абсолютною стійкістю. Умови абсолютної стійкості систем різного виду досить докладно досліджені і опубліковані в ряді робіт, наприклад, в роботах [1-4]. Останнім часом різницеві системи такого виду стали використовуватися при моделюванні динаміки нейронних мереж [5,6].

Модель в просторі. Система без запізнення.

Розглянемо різницеву систему, динаміка якої описується трьома нелінійними різницевиими рівняннями.

$$\begin{aligned} y_1(k+1) &= a_{11}y_1(k) + f_{11}(y_1(k)) + f_{12}(y_2(k)) + \\ &\quad + f_{13}(y_3(k)) + b_1 \\ y_2(k+1) &= a_{22}y_2(k) + f_{21}(y_1(k)) + f_{22}(y_2(k)) + \\ &\quad + f_{23}(y_3(k)) + b_2 \\ y_3(k+1) &= a_{33}y_3(k) + f_{31}(y_1(k)) + f_{32}(y_2(k)) + \\ &\quad + f_{33}(y_3(k)) + b_3. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Тут a_{11}, a_{22}, a_{33} – сталі, $f_{ij}(k)$, $i, j = \overline{1,3}$ – нелінійні функції, залежні від одного аргументу і задовольняють умові Ліпшиця зі сталими L_{ij} , $i, j = \overline{1,3}$ тобто

$$|f_{ij}(y_j + \Delta y_j) - f_{ij}(y_j)| \leq L_{ij} |\Delta y_j|, \quad i, j = \overline{1,3} \quad (1.2)$$

Припустимо, що система рівнянь

$$\begin{aligned} (1 - a_{11})y_1 - f_{11}(y_1) - f_{12}(y_2) - f_{13}(y_3) &= b_1, \\ (1 - a_{22})y_2 - f_{21}(y_1) - f_{22}(y_2) - f_{23}(y_3) &= b_2, \\ (1 - a_{33})y_3 - f_{31}(y_1) - f_{32}(y_2) - f_{33}(y_3) &= b_3 \end{aligned} \quad (1.3)$$

Має єдиний розв'язок точку $M_0(y_1^0, y_2^0, y_3^0)$,

$$y_1^0 > 0, \quad y_2^0 > 0, \quad y_3^0 > 0.$$

Зробимо заміну

$$y_1(k) = x_1(k) + y_1^0, \quad y_2(k) = x_2(k) + y_2^0, \\ y_3(k) = x_3(k) + y_3^0.$$

Після підстановки в систему (1.1) отримуємо наступне

$$x_1(k+1) + y_1^0 = a_{11}(x_1(k) + y_1^0) + f_{11}(x_1(k) + y_1^0) + \\ + f_{12}(x_2(k) + y_2^0) + f_{13}(x_3(k) + y_3^0) + b_1 \\ x_2(k+1) + y_2^0 = a_{22}(x_2(k) + y_2^0) + f_{21}(x_1(k) + y_1^0) + \\ + f_{22}(x_2(k) + y_2^0) + f_{23}(x_3(k) + y_3^0) + b_2 \\ x_3(k+1) + y_3^0 = a_{33}(x_3(k) + y_3^0) + f_{31}(x_1(k) + y_1^0) + \\ + f_{32}(x_2(k) + y_2^0) + f_{33}(x_3(k) + y_3^0) + b_3 \quad (1.4)$$

Перепишемо отриману систему (1.4) у вигляді

$$x_1(k+1) = a_{11}x_1(k) + [f_{11}(x_1(k) + y_1^0) - f_{11}(y_1^0)] + \\ + [f_{12}(x_2(k) + y_2^0) - f_{12}(y_2^0)] + \\ + [f_{13}(x_3(k) + y_3^0) - f_{13}(y_3^0)] - \\ - [(1 - a_{11})y_1^0 - f_{11}(y_1^0) - f_{12}(y_2^0) - f_{13}(y_3^0) - b_1], \\ x_2(k+1) = a_{22}x_2(k) + [f_{21}(x_1(k) + y_1^0) - f_{21}(y_1^0)] + \\ + [f_{22}(x_2(k) + y_2^0) - f_{22}(y_2^0)] + \\ + [f_{23}(x_3(k) + y_3^0) - f_{23}(y_3^0)] - \\ - [(1 - a_{22})y_2^0 - f_{21}(y_1^0) - f_{22}(y_2^0) - f_{23}(y_3^0) - b_2], \\ x_3(k+1) = a_{33}x_3(k) + [f_{31}(x_1(k) + y_1^0) - f_{31}(y_1^0)] + \\ + [f_{32}(x_2(k) + y_2^0) - f_{32}(y_2^0)] + \\ + [f_{33}(x_3(k) + y_3^0) - f_{33}(y_3^0)] - \\ - [(1 - a_{33})y_3^0 - f_{31}(y_1^0) - f_{32}(y_2^0) - f_{33}(y_3^0) - b_3].$$

зробивши заміну

$$F_{11}(x_1(k)) = f_{11}(x_1(k) + y_1^0) - f_{11}(y_1^0), \\ F_{12}(x_2(k)) = f_{12}(x_2(k) + y_2^0) - f_{12}(y_2^0), \\ F_{13}(x_3(k)) = f_{13}(x_3(k) + y_3^0) - f_{13}(y_3^0), \\ F_{21}(x_1(k)) = f_{21}(x_1(k) + y_1^0) - f_{21}(y_1^0), \\ F_{22}(x_2(k)) = f_{22}(x_2(k) + y_2^0) - f_{22}(y_2^0), \\ F_{23}(x_3(k)) = f_{23}(x_3(k) + y_3^0) - f_{23}(y_3^0), \\ F_{31}(x_1(k)) = f_{31}(x_1(k) + y_1^0) - f_{31}(y_1^0), \\ F_{32}(x_2(k)) = f_{32}(x_2(k) + y_2^0) - f_{32}(y_2^0), \\ F_{33}(x_3(k)) = f_{33}(x_3(k) + y_3^0) - f_{33}(y_3^0)$$

і використовуючи співвідношення (1.3), одержуємо, що система (1.4) прийме вигляд

$$x_1(k+1) = a_{11}x_1(k) + F_{11}(x_1(k)) + F_{12}(x_2(k)) + \\ + F_{13}(x_3(k)), \\ x_2(k+1) = a_{22}x_2(k) + F_{21}(x_1(k)) + F_{22}(x_2(k)) + \\ + F_{23}(x_3(k)),$$

$$x_3(k+1) = a_{33}x_3(k) + F_{31}(x_1(k)) + F_{32}(x_2(k)) + \\ + F_{33}(x_3(k)). \quad (1.5)$$

оскільки

$$F_{11}(0) = 0, \quad F_{12}(0) = 0, \quad F_{13}(0) = 0, \\ F_{21}(0) = 0, \quad F_{22}(0) = 0, \quad F_{23}(0) = 0, \\ F_{31}(0) = 0, \quad F_{32}(0) = 0, \quad F_{33}(0) = 0,$$

то після цієї заміни дослідження стійкості положення рівноваги $M_0(y_1^0, y_2^0, y_3^0)$ системи (1.1) звелось до дослідження стійкості нульового положення рівноваги системи (1.5). Мають місце наступні умови асимптотичної стійкості.

Теорема 1.1. Нехай система рівнянь (1.3) має єдиний розв'язок $M_0(y_1^0, y_2^0, y_3^0)$, $y_1^0 > 0$, $y_2^0 > 0$, $y_3^0 > 0$ і існують сталі $h_{11} > 0$, $h_{22} > 0$, $h_{33} > 0$ при яких виконуються нерівності

$$\Delta_1 = c_{11} > 0, \quad \Delta_2 = c_{11}c_{22} - c_{12}^2 > 0, \\ \Delta_3 = c_{11}c_{22}c_{33} + c_{12}c_{13}c_{23} + c_{12}c_{13}c_{23} - \\ - c_{13}^2c_{22} - c_{12}^2c_{33} - c_{23}^2c_{11} > 0 \quad (1.6)$$

де

$$c_{11} = h_{11}(1 - a_{11}^2) - 2h_{11}|a_{11}|L_{11} - h_{11}L_{11}^2 - h_{22}L_{21}^2 - h_{33}L_{31}^2 \\ c_{12} = -h_{11}L_{12}(|a_{11}| + L_{11}) - h_{22}L_{21}(|a_{22}| + L_{22}) - h_{33}L_{31}L_{32} \\ c_{13} = -h_{11}L_{13}(|a_{11}| + L_{11}) - h_{22}L_{21}L_{23} - h_{33}L_{31}(|a_{33}| + L_{33}) \\ c_{22} = h_{22}(1 - a_{22}^2) - 2h_{22}|a_{22}|L_{22} - h_{11}L_{12}^2 - h_{22}L_{22}^2 - h_{33}L_{32}^2 \\ c_{23} = -h_{11}L_{12}L_{13} - h_{22}L_{23}(|a_{22}| + L_{22}) - h_{33}L_{32}(|a_{33}| + L_{33}) \\ c_{33} = h_{33}(1 - a_{33}^2) - 2h_{33}|a_{33}|L_{33} - h_{11}L_{13}^2 - h_{22}L_{23}^2 - h_{33}L_{33}^2 \quad (1.7)$$

Тоді положення рівноваги $M_0(y_1^0, y_2^0, y_3^0)$ системи (1.1) є асимптотично стійкою.

Доведення. Для дослідження стійкості положення рівноваги $M_0(y_1^0, y_2^0, y_3^0)$ скористаємося функцією Ляпунова квадратичного виду:

$$V(x_1, x_2, x_3) = h_{11}x_1^2 + h_{22}x_2^2 + h_{33}x_3^2$$

її перша різниця в силу системи (1.6) має вигляд:

$$\Delta V(x_1(k), x_2(k), x_3(k)) = \\ = [h_{11}x_1^2(k+1) + h_{22}x_2^2(k+1) + h_{33}x_3^2(k+1)] - \\ - [h_{11}x_1^2(k) + h_{22}x_2^2(k) + h_{33}x_3^2(k)].$$

або

$$\Delta V(x_1(k), x_2(k), x_3(k)) = \\ = h_{11}[a_{11}x_1(k) + F_{11}(x_1(k)) + \\ + F_{12}(x_2(k)) + F_{13}(x_3(k))]^2 +$$

$$+h_{22}\left[a_{22}x_2(k)+F_{21}(x_1(k))+\right. \\ \left.+F_{22}(x_2(k))+F_{23}(x_3(k))\right]^2+ \\ +h_{33}\left[a_{33}x_3(k)+F_{31}(x_1(k))+\right. \\ \left.+F_{32}(x_2(k))+F_{33}(x_3(k))\right]^2- \\ -\left[h_{11}x_1^2(k)+h_{22}x_2^2(k)+h_{33}x_3^2(k)\right].$$

Перетворимо отриманий вираз, виділивши квадратичні складові, наступним чином

$$\Delta V(x_1(k), x_2(k), x_3(k)) = -h_{11}(1-a_{11}^2)x_1^2(k) - \\ -h_{22}(1-a_{22}^2)x_2^2(k) - h_{33}(1-a_{33}^2)x_3^2(k) + \\ +h_{11}\left\{2a_{11}x_1(k)\left[F_{11}(x_1(k))+F_{12}(x_2(k))+\right. \right. \\ \left.+F_{13}(x_3(k))\right]+\left[F_{11}(x_1(k))+F_{12}(x_2(k))+\right. \\ \left.+F_{13}(x_3(k))\right]^2\left\}+h_{22}\left\{2a_{22}x_2(k)\left[F_{21}(x_1(k))+\right. \right. \\ \left.+F_{22}(x_2(k))+F_{23}(x_3(k))\right]+\left[F_{21}(x_1(k))+\right. \\ \left.+F_{22}(x_2(k))+F_{23}(x_3(k))\right]^2\left\}+ \\ +h_{33}\left\{2a_{33}x_3(k)\left[F_{31}(x_1(k))+F_{32}(x_2(k))+\right. \right. \\ \left.+F_{33}(x_3(k))\right]+\left[F_{31}(x_1(k))+\right. \\ \left.+F_{32}(x_2(k))+F_{33}(x_3(k))\right]^2\left\}.$$

Використовуючи умови Ліпшиця (1.2), накладені на функції $F_{ij}(\cdot)$, перепишемо отриманий вираз наступним чином:

$$\Delta V(x_1(k), x_2(k), x_3(k)) \leq -h_{11}(1-a_{11}^2)x_1^2(k) - \\ -h_{22}(1-a_{22}^2)x_2^2(k) - h_{33}(1-a_{33}^2)x_3^2(k) + \\ +2h_{11}|a_{11}||x_1(k)|\left[L_{11}|x_1(k)|+L_{12}|x_2(k)|+L_{13}|x_3(k)|\right]+ \\ +h_{11}\left[L_{11}|x_1(k)|+L_{12}|x_2(k)|+L_{13}|x_3(k)|\right]^2+ \\ +2h_{22}|a_{22}||x_2(k)|\left[L_{21}|x_1(k)|+L_{22}|x_2(k)|+L_{23}|x_3(k)|\right]+ \\ +h_{22}\left[L_{21}|x_1(k)|+L_{22}|x_2(k)|+L_{23}|x_3(k)|\right]^2+ \\ +2h_{33}|a_{33}||x_3(k)|\left[L_{31}|x_1(k)|+L_{32}|x_2(k)|+L_{33}|x_3(k)|\right]+ \\ +h_{33}\left[L_{31}|x_1(k)|+L_{32}|x_2(k)|+L_{33}|x_3(k)|\right]^2.$$

Уявімо праву частину у вигляді квадратичної форми

$$\Delta V(x_1(k), x_2(k), x_3(k)) \leq \\ \leq -\left[h_{11}(1-a_{11}^2)-2h_{11}|a_{11}|L_{11}-h_{11}L_{11}^2-h_{22}L_{21}^2-h_{33}L_{31}^2\right]x_1^2(k)+ \\ +2\left[h_{11}L_{12}(|a_{11}|+L_{11})+h_{22}L_{21}(|a_{22}|+L_{22})+h_{33}L_{31}L_{32}\right]|x_1(k)||x_2(k)|-$$

$$-\left[h_{22}(1-a_{22}^2)-2h_{22}|a_{22}|L_{22}-h_{11}L_{12}^2-h_{22}L_{22}^2-h_{33}L_{32}^2\right]x_2^2(k)+ \\ +2\left[h_{11}L_{13}(|a_{11}|+L_{11})+h_{22}L_{21}L_{23}+h_{33}L_{31}(|a_{33}|+L_{33})\right]|x_1(k)||x_3(k)|- \\ -\left[h_{33}(1-a_{33}^2)-2h_{33}|a_{33}|L_{33}-h_{11}L_{13}^2-h_{22}L_{23}^2-h_{33}L_{33}^2\right]x_3^2(k)+ \\ +2\left[h_{11}L_{12}L_{13}+h_{22}L_{23}(|a_{22}|+L_{22})+h_{33}L_{32}(|a_{33}|+L_{33})\right]|x_2(k)||x_3(k)|$$

Запишемо отриману нерівність у вигляді:

$$\Delta V(x_1(k), x_2(k), x_3(k)) \leq -z^T(k)Cz(k),$$

$$z(k) = \begin{pmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} \end{pmatrix},$$

$$c_{11} = h_{11}(1-a_{11}^2)-2h_{11}|a_{11}|L_{11}-h_{11}L_{11}^2-h_{22}L_{21}^2-h_{33}L_{31}^2, \\ c_{12} = -h_{11}L_{12}(|a_{11}|+L_{11})-h_{22}L_{21}(|a_{22}|+L_{22})-h_{33}L_{31}L_{32}, \\ c_{13} = -h_{11}L_{13}(|a_{11}|+L_{11})-h_{22}L_{21}L_{23}-h_{33}L_{31}(|a_{33}|+L_{33}), \\ c_{22} = h_{22}(1-a_{22}^2)-2h_{22}|a_{22}|L_{22}-h_{11}L_{12}^2-h_{22}L_{22}^2-h_{33}L_{32}^2, \\ c_{23} = -h_{11}L_{12}L_{13}-h_{22}L_{23}(|a_{22}|+L_{22})-h_{33}L_{32}(|a_{33}|+L_{33}), \\ c_{33} = h_{33}(1-a_{33}^2)-2h_{33}|a_{33}|L_{33}-h_{11}L_{13}^2-h_{22}L_{23}^2-h_{33}L_{33}^2.$$

Як впливає з критерію Сильвестра, умова негативної визначеності функції Ляпунова, тобто умова асимптотичної стійкості положення рівноваги системи (1.5) має вигляд (1.6).

Якщо скористатися нерівністю:

$$2AB \leq A^2 + B^2 \quad (1.8)$$

то можна отримати більш «грубу», але легше перевіряємо умову.

Теорема 1.2. Нехай система рівнянь (1.3) має єдиний розв'язок $M_0(y_1^0, y_2^0, y_3^0)$, $y_1^0 > 0$, $y_2^0 > 0$, $y_3^0 > 0$ і існують сталі $h_{11} > 0$, $h_{22} > 0$, $h_{33} > 0$ при яких виконуються нерівності:

$$c_{11} > 0, \quad c_{22} > 0, \quad c_{33} > 0 \quad (1.9)$$

де

$$c_{11} = h_{11}(1-a_{11}^2)-2h_{11}|a_{11}|L_{11}-h_{11}L_{11}^2-h_{22}L_{21}^2-h_{33}L_{31}^2- \\ -h_{11}L_{12}(|a_{11}|+L_{11})-h_{22}L_{21}(|a_{22}|+L_{22})-h_{33}L_{31}L_{32}- \\ -h_{11}L_{13}(|a_{11}|+L_{11})-h_{22}L_{21}L_{23}-h_{33}L_{31}(|a_{33}|+L_{33}), \\ c_{22} = h_{22}(1-a_{22}^2)-2h_{22}|a_{22}|L_{22}-h_{11}L_{12}^2-h_{22}L_{22}^2-h_{33}L_{32}^2- \\ -h_{11}L_{12}(|a_{11}|+L_{11})-h_{22}L_{21}(|a_{22}|+L_{22})-h_{33}L_{31}L_{32}- \\ -h_{11}L_{12}L_{13}-h_{22}L_{23}(|a_{22}|+L_{22})-h_{33}L_{32}(|a_{33}|+L_{33}) \\ c_{33} = h_{33}(1-a_{33}^2)-2h_{33}|a_{33}|L_{33}-h_{11}L_{13}^2-h_{22}L_{23}^2-h_{33}L_{33}^2- \\ -h_{11}L_{13}(|a_{11}|+L_{11})-h_{22}L_{21}L_{23}-h_{33}L_{31}(|a_{33}|+L_{33})- \\ -h_{11}L_{12}L_{13}-h_{22}L_{23}(|a_{22}|+L_{22})-h_{33}L_{32}(|a_{33}|+L_{33}) \quad (1.10)$$

Тоді положення рівноваги $M_0(y_1^0, y_2^0, y_3^0)$ система (1.1) є асимптотично стійким.

Доведення. Для дослідження стійкості положення рівноваги $M_0(y_1^0, y_2^0, y_3^0)$ знову скористаємося функцією Ляпунова квадратичного виду:

$$V(x_1, x_2, x_3) = h_{11}x_1^2 + h_{22}x_2^2 + h_{33}x_3^2.$$

Як було показано в попередній теоремі, її перша різниця в силу системи (1.6) має вигляд:

$$\begin{aligned} \Delta V(x_1(k), x_2(k), x_3(k)) \leq & -[h_{11}(1-a_{11}^2) - 2h_{11}|a_{11}|L_{11} - h_{11}L_{11}^2 - h_{22}L_{21}^2 - h_{33}L_{31}^2]x_1^2(k) + \\ & + 2[h_{11}L_{12}(|a_{11}| + L_{11}) + h_{22}L_{21}(|a_{22}| + L_{22}) + h_{33}L_{31}L_{32}]x_1(k)x_2(k) - \\ & - [h_{22}(1-a_{22}^2) - 2h_{22}|a_{22}|L_{22} - h_{11}L_{12}^2 - h_{22}L_{22}^2 - h_{33}L_{32}^2]x_2^2(k) + \\ & + 2[h_{11}L_{13}(|a_{11}| + L_{11}) + h_{22}L_{21}L_{23} + h_{33}L_{31}(|a_{33}| + L_{33})]x_1(k)x_3(k) - \\ & - [h_{33}(1-a_{33}^2) - 2h_{33}|a_{33}|L_{33} - h_{11}L_{13}^2 - h_{22}L_{23}^2 - h_{33}L_{33}^2]x_3^2(k) + \\ & + 2[h_{11}L_{12}L_{13} + h_{22}L_{23}(|a_{22}| + L_{22}) + h_{33}L_{32}(|a_{33}| + L_{33})]x_2(k)x_3(k) \end{aligned}$$

Скориставшись нерівністю (1.8), запишемо отриману нерівність у вигляді

$$\Delta V(x_1(t), x_2(t), x_3(t)) \leq -c_{11}x_1^2(k) - c_{22}x_2^2(k) - c_{33}x_3^2(k),$$

де

Список використаних джерел

1. Лурье А.И. Некоторые нелинейные задачи теории автоматического регулирования / А.И. Лурье – Москва: Гостехиздат, 1951. – 432 с.
2. Айзерман М.А., Абсолютная устойчивость регулируемых систем / М.А. Айзерман, Ф.Р. Гантмахер – Москва: Изд.-во АН СССР, 1963. – 556 с.
3. Баркин А.И. Оценки качества нелинейных систем регулирования / А.И. Баркин – Москва: Наука, 1982. – 256 с.
4. Гелиг А.Х. Устойчивость нелинейных систем с неединственным состоянием равновесия / А.Х. Гелиг, Г.А. Леонов, В.А. Якубович – Москва: Наука, 1978. – 400 с.
5. Хайкин С. Нейронные сети: полный курс, 2-е издание / С. Хайкин – Москва: Издательский дом «Вильямс», 2006. – 1104 с.
6. Berezansky L. New Global Exponential Stability Criteria for Nonlinear Delay Differential Systems with Application to BAM Neural Network / L. Berezansky, E. Braverman and L. Idels // Applied Mathematics and Computation 243 (2014) pp. 899–910.
7. Khusainov D. Stability of nonlinear difference systems, which describes the dynamics of neutral networks / D. Khusainov, J. Diblik, J. Bastinec, A. Sirenko // Mathematics, Information Technologies and Applied Sciences: post-conference proceedings of selected papers extended versions. – Brno, 2014. – pp. 65–77.

$$\begin{aligned} c_{11} = & h_{11}(1-a_{11}^2) - 2h_{11}|a_{11}|L_{11} - h_{11}L_{11}^2 - h_{22}L_{21}^2 - h_{33}L_{31}^2 - \\ & - h_{11}L_{12}(|a_{11}| + L_{11}) - h_{22}L_{21}(|a_{22}| + L_{22}) - h_{33}L_{31}L_{32} - \\ & - h_{11}L_{13}(|a_{11}| + L_{11}) - h_{22}L_{21}L_{23} - h_{33}L_{31}(|a_{33}| + L_{33}), \\ c_{22} = & h_{22}(1-a_{22}^2) - 2h_{22}|a_{22}|L_{22} - h_{11}L_{12}^2 - h_{22}L_{22}^2 - h_{33}L_{32}^2 - \\ & - h_{11}L_{12}(|a_{11}| + L_{11}) - h_{22}L_{21}(|a_{22}| + L_{22}) - h_{33}L_{31}L_{32} - \\ & - h_{11}L_{12}L_{13} - h_{22}L_{23}(|a_{22}| + L_{22}) - h_{33}L_{32}(|a_{33}| + L_{33}) \\ c_{33} = & h_{33}(1-a_{33}^2) - 2h_{33}|a_{33}|L_{33} - h_{11}L_{13}^2 - h_{22}L_{23}^2 - h_{33}L_{33}^2 - \\ & - h_{11}L_{13}(|a_{11}| + L_{11}) - h_{22}L_{21}L_{23} - h_{33}L_{31}(|a_{33}| + L_{33}) - \\ & - h_{11}L_{12}L_{13} - h_{22}L_{23}(|a_{22}| + L_{22}) - h_{33}L_{32}(|a_{33}| + L_{33}) \end{aligned}$$

Умова негативної визначеності функції Ляпунова, тобто умова асимптотичної стійкості положення рівноваги системи (1.5) має вигляд (1.9), (1.10).

Зауваження 1.1. З нерівностей (1.6), (1.10) видно, що необхідною умовою асимптотичної стійкості рішень до положення рівноваги є «малість» нелінійних членів, тобто постійних Ліпшиця.

References

1. LURIE A. (1951) *Nekotorye nelineynye zadachi teorii avtomaticheskogo regulirovaniya*. Moskva: Gostehizdat.
2. AYZERMAN M., GANTMAHER F. (1963) *Absoliutnaia ustoichivost reguliruemyyh sistem*. Moskva: AN SSSR.
3. BARKIN A. (1982), *Otsenki kachestva nelineynykh system regulirovaniia*. Moskva: Nauka.
4. GELIG A., LEONOV G., YAKUBOVICH V. (1978) *Ustoichivost nelineynykh system s needinstvennym sostoianiem ravnovesiia*. Moskva: Nauka.
5. HAYKIN S. (1999) *Neural networks*, Upper Saddle River, N.J.: Prentice Hall.
6. BEREZANSKY L., BRAVERMAN E. AND IDELS L. (2014) *New Global Exponential Stability Criteria for Nonlinear Delay Differential Systems with Application to BAM Neural Network*, Applied Mathematics and Computation 243, pp. 899–910.
7. KHUSAINOV D., DIBLIK J., BASTINEC J., SIRENKO A. (2014) *Stability of nonlinear difference systems, which describes the dynamics of neutral networks* // Mathematics, Information Technologies and Applied Sciences: post-conference proceedings of selected papers extended versions. Brno, 2014, pp. 65–77.

Надійшла до редколегії 15.01.2015

УДК 519.21

Усар І.Я., к. ф.-м. н.
Протопоп Ю.О., аспірант
Обруч Т.П., студент

**Про швидкість збіжності стаціонарних
розподілів систем з повторними
викликами, керованих пороговими
стратегіями**

Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, пр-т.
Глушкова 4д,
e-mail: usar@unicyb.kiev.ua

I.Ya. Usar, Ph.D.
Iu.O. Protopop, graduate student
T.P. Obruch, student

**On the convergense rate of stationary
distribution of retrial systems to control the
threshold strategies**

Taras Shevchenko National University of
Kyiv, 03680, Kyiv, Glushkova st., 4d,
e-mail: usar@unicyb.kiev.ua

Стаття присвячена перспективному напрямку теорії стохастичних систем, пов'язаному з вивченням систем з повторними викликами. Розглядаються марковські моделі систем з повторними викликами та змінною інтенсивністю вхідного потоку без обмежень на ємність орбіти, керованих пороговими стратегіями. Спочатку для таких моделей з'ясовані умови існування стаціонарного режиму. Подальший аналіз базується на апроксимації вихідних систем системами з обмеженою орбітою, для яких знайдено явні векторно-матричні формули для стаціонарних імовірностей. Отримано швидкості збіжності стаціонарного розподілу скінченних систем з повторними викликами до стаціонарного розподілу нескінченних систем.

Ключові слова: стохастична система, повторні виклики, порогова стратегія, стаціонарний режим, швидкість збіжності.

The paper is devoted to perspective direction of queuing theory connected with investigation of queuing systems and networks with controlled parameters. The service network which involve "r" nodes of the same type is considered. From the outside common flow arrives at the input of the network. For service of the call each node has unbounded number of servers. The main purpose of the proposed work is a choice of the control of input flow which maximize an average income. Work of the multichannel stochastic network described above is modeled by the branching process. The characteristics of accumulative process of income are studied. Asymptotical analysis of systems of integral equations for the stochastic network is realized. Conditions in which the network operates in heavy traffic are formulated. To calculate of the goal functions of optimization problems for the multichannel stochastic network in heavy traffic the method of Gaussian approximation is developed. It is shown that the main conditions for approximation of accumulative process of income Gaussian process is justice of the functional central limit theorem for the input flow and openness of the network. Evident and approximate formulas for the goal functions of optimization problems via model parameters are constructed on the basis of the performed research.

Key Words: queue, repeated calls, threshold strategies, stationary regime, convergense rate.

Статтю представив д. т. н., проф. Заславський В.А.

Одним із важливих розділів теорії масового обслуговування є теорія систем з повторними викликами. Такі системи детально розглянуті в монографіях [1], [2]. Математичні моделі систем з повторними викликами мають широке застосування в практиці [4].

В даній статті розглядаються системи обслуговування з повторними викликами типу

$M/M/1/N$ та $M/M/1/\infty$, в яких інтенсивність вхідного потоку λ_j залежить від j - числа джерел повторних викликів. Час обслуговування приладів має показниковий розподіл з параметром μ . Якщо всі прилади зайняті, то вимога переходить на орбіту і знову повторює спробу отримати обслуговування через

випадковий час, розподілений за показниковим законом з параметром ν . Процес керування роботою систем визначається на основі порогових стратегій, які реалізують наступний алгоритм управління процесом обслуговування: вважаємо $\lambda_j = \lambda_1$, якщо $j = 0, 1, \dots, H$, і $\lambda_j = \lambda_2$, якщо $j = H + 1, \dots, N$ представляє собою поріг, при переході через який стрибком змінюється інтенсивність вхідного потоку. Змінний характер інтенсивності вхідного потоку в моделях такого типу дає можливість ставити і розв'язувати для них оптимізаційні задачі.

Процес обслуговування будемо моделювати двовимірним процесом Маркова $Q(t) = (Q_1(t), Q_2(t))$ з неперервним часом у фазовому просторі $S = \{0, 1, \dots, m\} \times \{0, 1, \dots\}$, де $Q_1(t)$ – число зайнятих приладів у момент часу t , $Q_2(t)$ – число джерел повторних вимог.

При цьому для $M_Q / M / 1 / N$ стаціонарний розподіл завжди існує

$$\pi_{ij}^{(N)} = \lim_{t \rightarrow \infty} P(Q_1(t) = i, Q_2(t) = j).$$

При виконанні умови $\lambda/\mu < 1$, де $\lambda = \limsup_{j \rightarrow \infty} \lambda_j < \infty$ і $N \rightarrow \infty$ стаціонарні ймовірності $\pi_{ij}^{(N)}$ наближають ймовірності π_{ij} для системи $M_Q / M / 1 / \infty$. Результати роботи [3] щодо похибки такого наближення можуть бути поширені і на випадок моделей з керованою інтенсивністю вхідного потоку.

Відмітимо (див. [1]), що завжди є справедливою нерівність

$$\pi_{ij} \leq \pi_{ij}^{(N)}.$$

В роботі ми оцінюємо швидкість збіжності стаціонарного розподілу $\pi_{ij}^{(N)}$ системи $M_Q / M / 1 / N$ до відповідного розподілу π_{ij} системи $M_Q / M / 1 / \infty$ з повторними викликами.

Формули для стаціонарних розподілів для m обслуговуючих приладів та умови їх існування були знайдені в роботі [5]. З них для $M_Q / M / 1 / N$ - системи маємо

$$\pi_{0j}^{(N)} = \frac{\pi_{0N}^{(N)} N! B(N)}{j! \nu^j} \prod_{k=0}^{j-1} \lambda_k (\lambda_k + k\nu), \quad (1)$$

$$\pi_{1j}^{(N)} = \frac{\pi_{0N}^{(N)} N! B(N)}{\lambda_j j! \nu^j} \prod_{k=0}^j \lambda_k (\lambda_k + k\nu), \quad (2)$$

$$j = 0, \dots, N-1,$$

$$\pi_{1N}^{(N)} = \frac{\pi_{0N}^{(N)} (N\nu + \lambda_N)}{\mu},$$

де

$$\pi_{0N}^{(N)} = \left(1 + N! B(N) \sum_{j=0}^{N-1} \frac{(1 + \lambda_j + j\nu) \prod_{k=0}^{j-1} \lambda_k (\lambda_k + k\nu)}{j! \nu^j} + N\nu + \lambda_N \right)^{-1}$$

$$B(N) = \prod_{k=0}^{N-1} \frac{\nu}{\lambda_k (\lambda_k + k\nu)},$$

а для $M_Q / M / 1 / \infty$ - системи відповідно маємо

$$\pi_{0j} = \frac{R}{j! \nu^j} \prod_{k=0}^{j-1} \lambda_k (\lambda_k + k\nu), \quad j = 0, \dots, \quad (3)$$

$$\pi_{1j} = \frac{R}{\lambda_j j! \nu^j} \prod_{k=0}^j \lambda_k (\lambda_k + k\nu), \quad j = 0, \dots, \quad (4)$$

де

$$R = \lim_{N \rightarrow \infty} \pi_{0N}^{(N)} N! B(N) =$$

$$= \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(1 + \lambda_j + j\nu) \prod_{k=0}^{j-1} \lambda_k (\lambda_k + k\nu)}{j! \nu^j} \right)^{-1}.$$

Позначимо

$$R(N) = \left(\sum_{j=N+1}^{\infty} \frac{(1 + \lambda_j + j\nu) \prod_{k=0}^{j-1} \lambda_k (\lambda_k + k\nu)}{j! \nu^j} \right)^{-1},$$

$$Q(N) = \left(\sum_{j=0}^N \frac{(1 + \lambda_j + j\nu) \prod_{k=0}^{j-1} \lambda_k (\lambda_k + k\nu)}{j! \nu^j} \right)^{-1}.$$

Тоді для кожного фіксованого j з формул (1), (2) та (3), (4) маємо

$$\left| \pi_{0j}^{(N)} - \pi_{0j} \right| = \frac{\pi_{0N}^{(N)} N! B(N) - R}{j! v^j} \prod_{k=0}^{j-1} \lambda_k (\lambda_k + kv),$$

$$\left| \pi_{1j}^{(N)} - \pi_{1j} \right| = \frac{\pi_{0N}^{(N)} N! B(N) - R}{\lambda_j j! v^j} \prod_{k=0}^j \lambda_k (\lambda_k + kv),$$

$$j = 0, \dots, N.$$

З цих рівностей видно, що нам потрібно оцінити швидкість збіжності $\pi_{0N}^{(N)} N! B(N)$ до R . Скористаємось наступною лемою

Лема 1. Нехай $\mu = 1$, $\overline{\lim}_{j \rightarrow \infty} \lambda_j < 1$. Тоді

$$\lim_{N \rightarrow \infty} R(N) \left(\pi_{0N}^{(N)} N! B(N) - R \right) = R^2. \quad (5)$$

Нехай $\overline{\lim}_{j \rightarrow \infty} \lambda_j = q_0 < 1$. Тоді для всіх $1 < \gamma < 1/q_0$ справедлива нерівність

$$0 \leq \pi_{0N}^{(N)} N! B(N) - R \leq \frac{2(q_0 \gamma)^{N+1}}{(1 - q_0 \gamma) R Q \left(\left[(1 + q_0) ((\gamma - 1)v)^{-1} \right] \right)} \quad (6)$$

для всіх $N \geq \frac{1 + q_0}{(\gamma - 1)v} - 1$.

Доведення. Враховуючи, що

$$(B(N))^{-1} = v^{-N} \prod_{k=0}^{N-1} \lambda_k (\lambda_k + kv),$$

маємо

$$\pi_{0N}^{(N)} N! B(N) - R = \frac{(R(N))^{-1}}{\sum_{j=0}^N \frac{(1 + \lambda_j + jv) \prod_{k=0}^{j-1} \lambda_k (\lambda_k + kv)}{j! v^j} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(1 + \lambda_j + jv) \prod_{k=0}^{j-1} \lambda_k (\lambda_k + kv)}{j! v^j}}$$

звідки, очевидно, впливає наша формула.

Доведемо нерівність (6). Позначимо

$$a_j = \frac{(1 + \lambda_j + jv) \prod_{k=0}^{j-1} \lambda_k (\lambda_k + kv)}{j! v^j}$$

та виберемо $\gamma \in (1, 1/q_0)$ так, щоб виконувалась нерівність $q_0 \gamma < 1$. Маємо

$$\frac{a_{j+1}}{a_j} = \frac{(1 + \lambda_{j+1} + (j+1)v) \lambda_j (\lambda_j + jv)}{(1 + \lambda_j + jv)(j+1)v} \leq \frac{1 + q_0 + (j+1)v}{(j+1)v} q_0. \quad (7)$$

Виберемо j так, щоб виконувалась нерівність

$$\frac{1 + q_0 + (j+1)v}{(j+1)v} \leq \gamma.$$

Маємо

$$j \geq \frac{1 + q_0}{(\gamma - 1)v} - 1,$$

а, отже, з (7) знаходимо

$$\frac{a_{j+1}}{a_j} \leq q_0 \gamma \quad \text{для} \quad j \geq \frac{1 + q_0}{(\gamma - 1)v} - 1.$$

Звідки

$$a_j \leq (q_0 \gamma)^j a_0 \leq 2(q_0 \gamma)^j \quad \text{для} \quad j \geq \frac{1 + q_0}{(\gamma - 1)v} - 1.$$

Тепер для $N \geq \frac{1 + q_0}{(\gamma - 1)v} - 1$ маємо

$$(R(N))^{-1} = \sum_{j=N+1}^{\infty} \frac{(1 + \lambda_j + jv) \prod_{k=0}^{j-1} \lambda_k (\lambda_k + kv)}{j! v^j} \leq \sum_{j=N+1}^{\infty} (q_0 \gamma)^j = \frac{2(q_0 \gamma)^{N+1}}{1 - q_0 \gamma}$$

і тоді отримаємо

$$\pi_{0N}^{(N)} N! B(N) - R \leq \frac{2(q_0 \gamma)^{N+1}}{(1 - q_0 \gamma) R Q \left(\left[(1 + q_0) ((\gamma - 1)v)^{-1} \right] \right)}$$

для $N \geq \frac{1 + q_0}{(\gamma - 1)v} - 1$ ($[a]$ позначає цілу частину числа для a). Лему 1 доведено.

Теорема 1. Нехай у системі з повторними викликами типу $M_Q / M / 1 / \infty$ $\mu = 1$ і $\overline{\lim}_{j \rightarrow \infty} \lambda_j < 1$.

Тоді для будь-якого j

$$\lim_{N \rightarrow \infty} R(N) \left| \pi_{0j}^{(N)} - \pi_{0j} \right| = \frac{R^2}{j! v^j} \prod_{k=0}^{j-1} \lambda_k (\lambda_k + kv), \quad j = 0, \dots,$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} R(N) \left| \pi_{1j}^{(N)} - \pi_{1j} \right| = \frac{R^2}{\lambda_j j! v^j} \prod_{k=0}^{j-1} \lambda_k (\lambda_k + kv), \quad j = 0, \dots,$$

Нехай $\overline{\lim}_{j \rightarrow \infty} \lambda_j = q_0 < 1$. Тоді для всіх $1 < \gamma < 1/q_0$, $j \leq N$ справедливі нерівності

$$0 \leq \left| \pi_{0j}^{(N)} - \pi_{0j} \right| \leq$$

$$\leq \frac{2(q_0\gamma)^{N+1}}{(1-q_0\gamma)RQ\left(\left[(1+q_0)((\gamma-1)\nu)^{-1}\right]\right)} j! \nu^j \prod_{k=0}^{j-1} \lambda_k (\lambda_k + k\nu)$$

$$0 \leq \left| \pi_{1j}^{(N)} - \pi_{1j} \right| \leq$$

$$\leq \frac{2(q_0\gamma)^{N+1}}{(1-q_0\gamma)RQ\left(\left[(1+q_0)((\gamma-1)\nu)^{-1}\right]\right)} \lambda_j j! \nu^j \prod_{k=0}^j \lambda_k (\lambda_k + k\nu)$$

$$\text{для } N \geq \frac{1+q_0}{(\gamma-1)\nu} - 1.$$

Доведення. Враховуючи (5), маємо

$$\begin{aligned} & \lim_{N \rightarrow \infty} R(N) \left| \pi_{0j}^{(N)} - \pi_{0j} \right| = \\ & = R(N) \frac{\pi_{0N}^{(N)} N! B(N) - R \prod_{k=0}^{j-1} \lambda_k (\lambda_k + k\nu)}{j! \nu^j} = \\ & = \frac{R^2}{j! \nu^j} \prod_{k=0}^{j+1} \lambda_k (\lambda_k + k\nu), \quad j = 0, \dots, \\ & \lim_{N \rightarrow \infty} R(N) \left| \pi_{1j}^{(N)} - \pi_{1j} \right| = \\ & = R(N) \frac{\pi_{0N}^{(N)} N! B(N) - R \prod_{k=0}^j \lambda_k (\lambda_k + k\nu)}{\lambda_j j! \nu^j} \end{aligned}$$

$$= \frac{R^2}{\lambda_j j! \nu^j} \prod_{k=0}^{j+1} \lambda_k (\lambda_k + k\nu), \quad j = 0, \dots$$

Враховуючи (6) отримаємо

$$0 \leq \left| \pi_{0j}^{(N)} - \pi_{0j} \right| \leq$$

$$\leq \frac{2(q_0\gamma)^{N+1}}{(1-q_0\gamma)RQ\left(\left[(1+q_0)((\gamma-1)\nu)^{-1}\right]\right)} j! \nu^j \prod_{k=0}^{j-1} \lambda_k (\lambda_k + k\nu),$$

$$0 \leq \left| \pi_{1j}^{(N)} - \pi_{1j} \right| \leq$$

$$\leq \frac{2(q_0\gamma)^{N+1}}{(1-q_0\gamma)RQ\left(\left[(1+q_0)((\gamma-1)\nu)^{-1}\right]\right)} \lambda_j j! \nu^j \prod_{k=0}^j \lambda_k (\lambda_k + k\nu).$$

Теорему 1 доведено.

У статті отримано нові результати для класу систем з повторними викликами і керованою інтенсивністю вхідного потоку, які суттєво розвивають теорію стохастичних систем з повторними викликами і у сукупності розв'язують важливе наукове завдання дослідження і розрахунку характеристик ефективності функціонування систем. Ці результати можуть знайти застосування для розв'язку практичних задач при проектуванні комп'ютерних мереж, створенням мобільних систем зв'язку.

Список використаних джерел

1. Falin G.I. Retrial Queues / G.I. Falin, J.G.C. Templeton. – London Chapman & Hall, 1997. – 331 p.
2. Artalejo J.R. Retrial Queueing Systems. A Computational Approach / J.R. Artalejo, A. Gomes-Corral. – Springer-Verlag, 2008.
3. Степанов С.Н. Численные методы расчета систем с повторными вызовами / С.Н. Степанов. – М.: Наука, 1983. – 232 с.
4. Anisimov V.V. Analysis of Markov multiserver retrial queues with negative arrivals / V.V. Anisimov, J.R. Artalejo // Queuing Systems. – 2001. – Vol.39. – P. 157-182.
5. Лебедев Є.О. Про системи з повторними викликами та керованим вхідним потоком / Є.О. Лебедев, І.Я. Усар // Доповіді Національної академії наук України. – 2009. – №5. – С. 52-59.

References

1. FALIN, G.I., TEMPLETON J.G.C. (1997) *Retrial Queues*. London Chapman & Hall, 331 p.
2. ARTALEJO, J.R., GOMES-CORRAL, A. (2008) *Retrial Queueing Systems. A Computational Approach*. Springer-Verlag.
3. STEPANOV, S.N. (1983) *Numerical methods for calculating systems with repeated calls*. Moscow: Science, 232 p.
4. ANISIMOV, V.V., ARTALEJO, J.R., (2001) *Analysis of Markov multiserver retrial queues with negative arrivals*. Queuing Systems. Vol.39, pp. 157-182.
5. LEBEDEV, E.O., USAR, I.YA., (2009) *About of retrial systems and controlled of input flow*. Reports of the National Academy of Sciences of Ukraine. Vol. 8, pp. 541-569.

Надійшла до редколегії 23.01.15

УДК 004.942:519.876.5

Харченко І. І., к.т.н., доц.

Роздуми про вічне (світлій пам'яті професора М.Ф. Кириченка з нагоди 75-річчя з дня народження)

Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 83000, м. Київ, пр-т.
Глушкова 4д,
e-mail: ihar@unicyb.kiev.ua

I. I. Kharchenko*, Ph.D. (Technics),

“Eternity Reflections” (light memory of professor M.F. Kirichenko in occasion of 75 anniversary of the birth)

Taras Shevchenko National University of Kyiv,
83000, Kyiv, Glushkova st., 4d,
e-mail: ihar@unicyb.kiev.ua

Стаття «Роздуми про вічне» присвячена світлій пам'яті професора факультету кібернетики КНУ імені Тараса Шевченка Кириченка Миколи Федоровича, відтворюючи оригінальний рукопис видатного українського вченого-кібернетика. Володіючи колосальним досвідом у математиці та інформатиці М.Ф. Кириченко окреслює сучасний стан наукових досліджень у різних галузях і висловлює свій персональний погляд на перспективи подальшого розвитку інформаційних технологій. Автор публікації з глибокою пошаною згадує цікаві бесіди зі своїм учителем – талановитою непересічною людиною, чий світоглядні засади допомагали молодим ученим глибше осягнути суть кібернетичної науки. Тільки тепер ми почали замислюватися над багатьма проблемами з онтологічної точки зору, спираючись на вчення про першооснови буття, субстанцію, матерію, простір, час, рух, причинність тощо. Особливо значущими були ці бесіди для тих, чий студентські й аспірантські роки припали на часи, коли викладання суспільних та філософських дисциплін було жорстко регламентованим, а деякі проблеми взагалі не підлягали обговоренню. Стаття наводить на цікаві роздуми та може послужити поштовхом для поглиблених наукових досліджень про сутність явищ, їх інформаційне дослідження та перспективи розвитку науки в майбутньому. Роздуми про вічність – це погляд у майбутнє, заповіт ученого прийдешнім поколінням.

Ключові слова: моделювання, розпізнавання сигналів, інформаційні технології.

The article “Eternity Reflections” is written in honor of memory of Mykola F. Kirichenko, professor of Taras Shevchenko National University of Kyiv (faculty of cybernetics). It recreates original manuscript of outstanding Ukrainian cybernetics scientist. Being enormously experienced in mathematics and informatics, M.F.Kirichenko describes contemporary condition of scientific research in various domains and states his personal opinion regarding perspectives of informational technologies' future development. The author of publication reminds with deep respect interesting conversations with his teacher – gifted and outstanding person whose conception of the world made input to young scientists' deeply understanding of cybernetics' science essence. Only now we started to study many problems from the ontology point of view based on studies of fundamental principles of being, substance, matter, space, time, motion, causality, etc. The conversations were mainly significant to those people whose university and postgraduate studies incurred period when studies of society and philosophy disciplines were strictly regulated and some problems weren't subject of discussion at all. The article leads to interesting reflections and may be a push to deep scientific researches of phenomenon essence, informational studies and future science development. “Eternity Reflections” is look to the future, scientist's testament to the future generations.

Key Words: modeling, signals recognition, information technology.

Статтю представив д.т.н., проф. Гаращенко Ф.Г.



Микола Федорович Кириченко (нар. 15 червня 1940 р. в м. Ічня, Чернігівської області – помер 19 грудня 2008 р. в м. Києві) – видатний український вчений-кібернетик та педагог. доктор фізико-математичних наук, професор.

У 1962 р. закінчив механіко-математичний факультет Київського державного університету ім. Т.Г. Шевченка за фахом «механіка».

У 1966 р. в Інституті гідромеханіки АН України під керівництвом проф. О.М. Голубенцева захистив кандидатську дисертацію на тему «Оцінки стійкості руху систем з випадковими параметрами».

З 1970 р. – старший викладач кафедри моделювання складних систем ф-ту кібернетики Київського університету, з 1971 р. – доцент кафедри. У 1973 р. захистив докторську дисертацію на тему «Дослідження задач стійкості і стабілізації руху при обмежених збуреннях». З 1976 р. – професор кафедри МСС.

З 1982 р. до 1986 р. – завідувач кафедри теоретичної кібернетики. У 1984 р. отримав звання соросівського професора.

З 1986 р. до 1991р. працював у Чернівецькому державному університеті імені Юрія Федьковича, де створив та очолив кафедру математичних проблем управління і кібернетики.

У 1992 р. М.Ф. Кириченко повернувся до Києва і з того часу працював провідним науковим співробітником відділу інтелектуальних систем

управління і обробки інформації Інституту кібернетики імені В.М.Глушкова НАН України.

Його наукові інтереси були пов'язані з теорією оптимального керування динамічними системами, обробкою сигналів, розпізнаванням образів, комп'ютерною графікою, математичним моделювання робото-технічних систем, розробкою інтелектуальних систем прийняття рішень.

Серед досягнень М.Ф. Кириченка – розробка аналітичної теорії збурення, псевдообернення за Муром-Пенроузом, яка надає широкі можливості для розв'язування важливих прикладних задач у різноманітних галузях: від класифікації, кластеризації і розпізнавання образів до теорії керування динамічними системами.

Автор та співавтор 5 монографій, 11 наукових посібників, більше 190 наукових праць.

Підготував 30 кандидатів та 5 докторів наук.

Нагороджений медалями «В пам'ять 1500 річчя Києва» (1982 р.), «За трудову доблесть» (1984 р.), відзнакою «Відмінник освіти України», лауреат Державної премії в галузі науки і техніки 2011 р. за цикл наукових праць «Конструктивна теорія моделювання, аналізу та оптимізації систем з неповними даними та її застосування» (у складі колективу, посмертно)

Подана вище інформація наводить лише суху констатацію фактів біографії визначної людини, але за нею не можна відтворити уявлення про внутрішній світ особистості.

Вічна тема людської пам'яті турбує не одне покоління людей. Що треба створити, щоб залишити добру згадку у нащадків? Цю проблему на прикладі власного життя успішно розв'язав М.Ф.Кириченко.

Головна заслуга великої людини, непересічного вченого полягає насамперед в тому, щоб виховати послідовників, знайти однодумців своїх ідей, втілити в життя наукові задуми, передати моральні засади.

Якщо проаналізувати віхи життя та бути знайомим з біографією М.Ф. Кириченка, то вражає природна скромність вченого в оцінці своїх здобутків. Разом з тим він пишався своїми учнями, всіляко сприяв зростанню їх наукового потенціалу. Як визначний педагог він підготував декілька підручників, які не втратили своєї актуальності і через багато років після написання.

Результати його наукових праць відомі не тільки в Україні. Цікавою була співпраця М.Ф.Кириченка з американськими вченими, коли він разом зі своїми учнями працював у Йелльському університеті США в лабораторії Романа Куца.

зображенню її обличчя і т.п. Кількість прикладів не важко розширити своєю уявою.

2.2. Проблема побудови алгоритмів керування погано формалізованими процесами, об'єктами, явищами (складними фізичними та механічними системами, виробничими та технологічними процесами, фінансовими, соціально-економічними та політичними процесами розвитку ситуації).

Тут головне – синтез по доступній інформації структур відповідних математичних моделей та законів керування. Ключовими тут є властивості адаптивності, робастності та гнучкості створюваних засобів згідно до потреб користувача.

Можливі сюжети у використанні: адаптивні за структурою, параметрами, глибиною пам'яті з передісторії спеціальні PID регулятори для промконтролерів, систем підтримки та прийняття рішень (DSS – DECISION SUPPORT SYSTEM) з наявністю фаз розпізнавання та прогнозу ситуацій, рекурсивного нелінійного прогнозу процесів, CASE технології автономного і адаптивного проектування структур розвитку досліджуваних систем.

2.3. Проблеми побудови конструктивної теорії збурення операторів та відповідних їм обернених операторів з метою розвитку засобів синтезу систем при дослідженні проблем п. 2.1., 2.2. Особливо важливою задачею тут є знаходження аналітичних залежностей (збурень) сингулярних складових (власних значень та власних векторів матриць та лінійних функціональних перетворень).

Перспектива використання: вибір інформаційних ознак, оптимальний синтез систем керування, синтез систем класифікації образів та прогнозу розвитку ситуацій.

2.4. Проблеми конструктивної реалізації синтезу систем перетворень сигналів на основі суперпозиції лінійних та нелінійних функцій із заданого базису у формі рекурсивного представлення.

Можливі сюжети у використанні: нові принципи організації DSS з наявністю фаз оптимізації структур та генетичної їх самоорганізації у виробничому середовищі, ефективний за реалізацією у реальному часі на персональному комп'ютері процесу трьохвимірної графічної анімаційного представлення людського обличчя із супроводом емуляції мовного процесу, емоцій, нові засоби проектування узагальнених нейрокомп'ютерних середовищ.

2.5. Проблеми механічно-контактної графіки з моделюванням і візуальним відтворенням геометричної та механічної (у розумінні кінематичної, статичної, динамічної та ударної) взаємодії трьохмірних тіл між собою та складання комплексних віртуальних об'єктів при наявності цих взаємодій.



Виступ професора М.Ф. Кириченка на відзначенні 70-річчя чл.-кор. НАН України, завідувача кафедри моделювання складних систем Б.М. Бублика, 2006 р.

3. Які задачі будуть важливими у майбутньому (мій персональний погляд).

3.1. Побудова віртуального середовища і його керованого динамічного розвитку для трьохмірних сцен з наявністю фаз синтезу 3-D механічно-контактної графіки, розпізнавання суб'єктів та об'єктів на трьохмірних сценах, моделювання з урахуванням прогнозу їх можливої поведінки, супровід цих процесів відповідними синтезованими сигналами (мова, ударна та інша контактна взаємодія, звуки живої природи та інш.). Тут вхідною інформацією можуть бути результати кіно-фотозйомки.

3.2. Створення принципово нових комп'ютерних середовищ (квантово-механічної та польової природи з аналоговими та нейрокомп'ютерними схемами обробки інформації) і відповідних засобів математичного (інформаційного) моделювання навколишнього середовища з метою прогнозу, що і як буде далі розвиватись у залежності від прийняття людиною тих чи інших рішень. Тобто створення SUPER DECISION SUPPORT SYSTEM для всіх сфер людського життя.

3.3. Організація прямого запису інформації з електромагнітних хвильових (радіохвильових) носіїв на польові комп'ютерні середовища

(можливо таким середовищем буде сам навколишній простір) і активізація інформації з польового комп'ютерного середовища на електромагнітних хвилях носії (без використання дискретних перетворювачів і комп'ютерів з арифметичними регістрами).

4. Прогноз безпеки розвитку інформатики (мій персональний погляд).

Подальше пізнання людиною нового в інформатиці (а загалом і в інших наукових напрямках) для безпеки людства мусить бути в гармонії з ростом духовного і морального стану самого людства. В іншому випадку гряде катастрофа або для всього людства, або для тієї частини людства, яка якраз і розвиває науку. Чи є випадковістю, що винахідник принципів організації сучасного комп'ютера Б. Паскаль і генератор ідей диференціального числення Г. Лейбніц основну задачу свого життя вбачали у вивченні проблем духовності і християнства, були глибоко віруючими людьми і свій день, безумовно, починали з молитов до Господа Бога?

Дай Боже, щоб для людей у майбутньому було Пізнання Знань у гармонії з вірою в Господа Бога нашого!...»

Ознайомившись із цим рукописом професора, ще раз можна переконалися, що М.Ф.Кириченко до останніх днів залишався активним учасником наукового процесу. Його учні згадують традиційні наукові семінари, які проводив професор у день свого народження 15 червня.

У цей день він звітував за рік роботи, окреслював наукові проблеми, які він розглянув за останній період, ставив теми наукових робіт, пропонував теми для майбутніх кандидатів, більш зрілих молодих вчених заохочував до написання докторських дисертацій. Саме на таких наукових семінарах була окреслена тематика досліджень професорів Ф.Г. Гаращенко, Ф.О. Сопронюка, В.С. Донченка, В.А. Стояна, Ю.В. Крака. Викладачі, співробітники та студенти кафедр моделювання складних систем, теоретичної кібернетики, системного аналізу та прийняття рішень, прикладної статистики, обчислювальної математики факультету кібернетики згадують цікаві лекції професора М.Ф. Кириченка, на яких він окреслював не тільки головні

актуальні задачі, але й вказував на сучасні нетривіальні методи та алгоритми до їх розв'язування.

Багато з теперішніх науковців провідних університетів України вважають себе причетними до створеної ним наукової школи.

М.Ф.Кириченко був натхненником створення колективу, який згодом отримав Державну премію України в галузі науки і техніки. Дуже прикро, що творчий злет видатного вченого зупинила хвороба й смерть.

Микола Федорович пішов у вічність, залишивши не тільки наукових послідовників, які можуть вважатися його учнями й онуками, але вже й науковими правнуками, що втілюють його наукові здобутки.

На останній світлині М.Ф. Кириченко зображений у колі своєї великої сім'ї, де крім учнів ми бачимо дочку Тетяну, онуку та правнучку. Саме така гармонія поєднання пізнання, насаги до праці, щедрості душі і дає нам нагоду згадати з великою пошаною видатного українського вченого Миколу Федоровича Кириченка.



М.Ф. Кириченко приймає вітання з 65-м днем народження в колі родини та учнів

Надійшла до редколегії 18.03. 2015

УДК 621.391 : 519.24

Швець* О.Ф.¹, к.фіз.-мат.н., доцент,
Сопронюк О.Л.², аспірантка

**Про розрахунок допусків на параметри
лінійних динамічних систем зі змінною
вимірністю фазового простору**

¹Київський національний університет
імені Тараса Шевченка, 03022, м. Київ,
вул. Васильківська, 90-а,
e-mail: olia.poshta@gmail.com

²Чернівецький національний університет
імені Юрія Федьковича, 58029, м. Чернівці,
вул. Університетська, 28,
e-mail: f.sopronyuk@chnu.edu.ua

O.F. Shvets¹, Ph.D., associate professor
O.L. Sopronuk², postgraduate student

**Models for sensitivity analysis of
discontinuous dynamical systems with
variable-dimension phase space**

¹Taras Shevchenko National University of Kyiv ,
03022, Kyiv, Vasylykivska st., 90a,
e-mail: olia.poshta@gmail.com

²Yurii Fedkovych National University of
Chernivtsi, 58029, Chernivtsi, Universytetska
st., 28,
e-mail: f.sopronyuk@chnu.edu.ua

Приведено алгоритми для чисельного аналізу чутливості параметричних систем зі змінною вимірністю фазового простору з позицій матричних диференціальних рівнянь. Основна увага зосереджується на чисельному моделюванні рівнянь чутливості для систем зі змінною вимірністю фазового простору. Акцентовується увага на тому, що для векторного параметру необхідно розв'язувати матричне диференціальне рівняння зі змінною вимірністю відносно компонент матриці чутливості. Запропоновано ефективний спосіб чисельної реалізації такої процедури за допомогою виведеної формули Коші для матричного диференціального рівняння. Приведено алгоритм для обчислення допусків на параметри лінійних динамічних систем звичайних диференціальних рівнянь зі змінною вимірністю фазового простору на основ методів практичної стійкості та теорії чутливості.

Ключові слова: практична стійкість, допуски на параметри, динамічна система, аналіз чутливості, змінний фазовий простір.

We propose algorithms for numerical sensitivity analysis of parametric systems with variable dimension of phase space in terms of matrix differential equations. Such problems arise from the need to ensure the normal operation of the object for real. This includes taking into account factors of different nature, environment parameters and operating conditions.

The main attention is focused on numerical modelling of sensitivity equations for systems with variable dimension of phase space. Emphasis on the fact that for the parameter vector to be solved matrix differential equation with variable dimension relative sensitivity matrix component. This paper shows the sensitivity equations for common systems with variable dimension of phase space in matrix form. An efficient method of numerical realization of this procedure using the formulas for the Cauchy matrix differential equation. Proposed algorithms for calculating parameters tolerances of linear dynamic systems of ordinary differential equations with variable dimension of phase space based methods practical stability and sensitivity theory.

We proposed algorithms for calculating parameters tolerances of linear dynamic systems of ordinary differential equations with variable dimension of phase space based on methods practical stability and sensitivity theory.

Key words: practical stability, permission on parameters, dynamical system, sensitivity analysis, variable phase space.

Роботу представив д.т.н., проф. Гаращенко Ф.Г.

Вступ

Дана робота присвячена розробці алгоритмів знаходження множини допусків на параметри динамічних систем керування зі змінною вимірністю фазового простору на оптимальних режимах. Така задача являється досить складною. На сьогодні немає загальних методів для її розв'язування. Деякі частинні підходи до вибору допусків викладені, наприклад, у роботах [1-7]. Найбільш поширеними є методи, що базуються на використанні функцій чутливості [6, 7]. На відміну від вказаних підходів в даній статті задача розрахунку допусків розглядається з позицій практичної стійкості параметричних систем [1-6], що узагальнюється на динамічні системи зі змінною вимірністю фазового простору [1, 8-10]. В роботі приведені рівняння чутливості для загальних систем зі змінною вимірністю фазового простору, а для лінійних параметричних моделей сформульовані конструктивні критерії розв'язування поставленої задачі.

Рівняння руху параметричних систем зі змінною вимірністю фазового простору

Нехай рівняння руху об'єкта описується системою диференціальних рівнянь зі змінною вимірністю фазового простору [8-10]

$$\frac{dx^{(i)}}{dt} = f^{(i)}(x^{(i)}, t, \alpha), \quad t_{i-1} < t < t_i, \quad (1)$$

де $x^{(i)T} = (x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \dots, x_{n_i}^{(i)})$, $f^{(i)}(x^{(i)}, t)$ – n_i -вимірні вектор-функції, які задовольняють умови теореми існування та єдиності розв'язку, α – m -вимірний вектор параметрів.

Моменти t_i , які визначають зміну одного диференціального рівняння іншим називають моментами перемикання. Припускаємо, що вектор фазового стану в момент t_i змінює свою структуру згідно з співвідношеннями

$$x^{(i+1)}(t_i + 0) = x^{(i+1)+} = \Phi^{(i)}(x^{(i)-}, t_i, \alpha), \quad (2)$$

де $x^{(i+1)+} = x^{(i+1)}(t_i + 0)$, $x^{(i)-} = x^{(i)}(t_i - 0)$, $\Phi^{(i)}$ – вектор-функції розмірності n_{i+1} , диференційовані за всіма аргументами. Співвідношення (2) називається умовами зміни вимірності фазового простору. Моменти перемикання в загальному випадку знаходяться з умов

$$\psi_i(x^{(i)-}, t_i, \alpha) = 0, \quad (3)$$

які будемо називати умовами перемикання. Тут $\psi_i(\cdot)$ – скалярні функції, неперервно-диференційовані за своїми аргументами. Вибираючи індекси i , можна знайти розривний розв'язок для (1) – (3) з початковими умовами, які теж залежать від α

$$t_0 = t_0(\alpha), \quad x^{(1)}(t_0) = x^{(1)+}(t_0) = x^{(1)+}(t_0, \alpha) = x^{(1,0)}(\alpha). \quad (4)$$

В (4) $t_0(\alpha)$ та $x^{(1,0)}(\alpha)$ являються диференційованими функціями векторного параметра α . Припускаємо, що система додаткових співвідношень (2)–(4) така, що для будь-яких α з деякої множини можна однозначно побудувати розв'язки на інтервалі $t_0 \leq t < \bar{t}(\alpha)$. При цьому моменти перемикання також залежать від α , тобто $t_i = t_i(\alpha)$. В результаті можна побудувати множину розв'язків зі змінною вимірністю

$$x^{(i)} = x^{(i)}(t, \alpha), \quad t_{i-1}(\alpha) < t < t_i(\alpha) < \bar{t}(\alpha), \quad i=1,2,\dots \quad (5)$$

В реальних ситуаціях зміна одного рівняння іншим описується більш складними співвідношеннями, які можна отримати з попереднього аналізу задачі.

Матричні рівняння чутливості систем зі змінною вимірністю фазового простору

Матрицею функцій чутливості параметричного сімейства (5) будемо називати похідну $U^{(i)}(t, \alpha) = \frac{\partial x^{(i)}(t, \alpha)}{\partial \alpha}$ розмірності $n_i \times m$, в якій оператор $\frac{\partial}{\partial \alpha}$ означає звичайну похідну в точках диференційованості $x^{(i)}(t, \alpha)$ і не визначену в точках зміни розмірності вектора фазових координат.

Нехай (5) – параметричне сімейство розв'язків. Тоді знайдеться $t_1(\alpha) > t_0(\alpha)$ таке, що для будь-яких $\alpha^{(1)} \leq \alpha \leq \alpha^{(2)}$

$$\frac{dx^{(1)}}{dt} = f^{(1)}(x^{(1)}, t, \alpha), \quad t_0(\alpha) \leq t < t_1(\alpha). \quad (6)$$

Якщо $t_0(\alpha)$, $x^{(1,0)}(\alpha)$ – неперервно-диференційовані за компонентами вектора α , а $f^{(1)}(x, t, \alpha)$ – неперервна за всіма аргументами і неперервно-диференційована за x , α , тоді

початковими умовами (4) і системою (1) визначено на цьому інтервалі параметричне сімейство розв'язків, для яких існує матриця функцій чутливості першого порядку в класичному розумінні

$$\frac{dU^{(1)}}{dt} = A^{(1)}(t)U^{(1)} + B^{(1)}(t), \quad (7) \quad \text{де}$$

з початковими умовами

$$U^{(1)}(t_0) = U^{(1,0)} = \frac{dx^{(1,0)}(\alpha)}{d\alpha} - \dot{x}^{(1,0)} \frac{dt_0(\alpha)}{d\alpha}. \quad (8)$$

Тут

$$A^{(1)}(t) = \frac{\partial f^{(1)}(x^{(1)}, t, \alpha)}{\partial x^{(1)}} \Big|_{x^{(1)}=x^{(1)}(t, \alpha)},$$

$$B^{(1)}(t) = \frac{\partial f^{(1)}(x^{(1)}, t, \alpha)}{\partial \alpha} \Big|_{x^{(1)}=x^{(1)}(t, \alpha)}.$$

По аналогії для i -ої підсистеми

$$\frac{dx^{(i)}}{dt} = f^{(i)}(x^{(i)}, t, \alpha), \quad t_{i-1}(\alpha) < t < t_i(\alpha)$$

матриця функцій чутливості існує в класичному розумінні і визначається системою рівнянь

$$\begin{aligned} \frac{dU^{(i)}}{dt} &= \frac{\partial f^{(i)}(x^{(i)}, t, \alpha)}{\partial x^{(i)}} \Big|_{x^{(i)}=x^{(i)}(t, \alpha)} \cdot U^{(i)} + \\ &+ \frac{\partial f^{(i)}(x^{(i)}, t, \alpha)}{\partial \alpha} \Big|_{x^{(i)}=x^{(i)}(t, \alpha)}. \end{aligned} \quad (9)$$

Для обчислення матриці функцій чутливості необхідно отримати для (9) початкові умови, які даються наступною теоремою.

Теорема 1. Нехай функції $\Phi^{(i)}$, ψ_i – неперервно-диференційовані за всіма аргументами, а $f^{(i)}$ неперервні за всіма аргументами та неперервно-диференційовані за $x^{(i)}$, α . Нехай для деякого $\alpha^{(0)}$ виконується співвідношення

$$\frac{\partial \psi_i^{-T}}{\partial x^{(i)}} f^{(i)-} + \frac{\partial \psi_i^-}{\partial t} \neq 0 \quad (10)$$

(тут індекс “–” означає, що всі величини обчислюються при $t = t_i - 0$). Тоді матриця функцій чутливості існує і задовольняє рівняння (9) при початкових умовах (8). При цьому переходи від одного рівняння (9) до іншого відбуваються згідно умов

$$\begin{aligned} U^{(i+1)+} &= \frac{\partial \Phi^{(i)-}}{\partial x^{(i)}} U^{(i)-} + \\ &+ \left[\frac{\partial \Phi^{(i)-}}{\partial x^{(i)}} f^{(i)-} - f^{(i+1)+} \right] \frac{dt_i}{d\alpha} + \frac{\partial \Phi^{(i)-}}{\partial \alpha}, \end{aligned} \quad (11)$$

$$U^{(i+1)+} = \frac{\partial x^{(i+1)}(t, \alpha)}{\partial \alpha} \Big|_{t=t_{i+0}}, \quad (12)$$

$$\frac{dt_i}{d\alpha} = - \frac{\frac{\partial \psi_i^{-T}}{\partial x^{(i)}} U^{(i)-} + \frac{\partial \psi_i^-}{\partial \alpha}}{\frac{\partial \psi_i^{-T}}{\partial x^{(i)}} f^{(i)-} + \frac{\partial \psi_i^-}{\partial t}}. \quad (13)$$

Доведення теореми можна знайти в [10].

Зупинимось на властивостях отриманих співвідношень.

1). Підставимо (13) в (11) і запишемо скачки для функцій чутливості в такій конструктивній формі

$$U^{(i)+} = P^{(i)} U^{(i)-} + Q^{(i)}, \quad (23)$$

де матриці $P^{(i)}$ та $Q^{(i)}$ розмірностей $n_{i+1} \times n_i$ та $n_{i+1} \times m$ обчислюються за формулами

$$\begin{aligned} P^{(i)} &= \frac{\partial \Phi^{(i)-}}{\partial x^{(i)}} - \\ &- \frac{\left(\frac{\partial \Phi^{(i)-}}{\partial x^{(i)}} f^{(i)-} - f^{(i+1)+} \right) \left(\frac{\partial \psi_i^-}{\partial x^{(i)}} \right)^T}{\left[\left(\frac{\partial \psi_i^-}{\partial x^{(i)}} \right)^T f^{(i)-} + \frac{\partial \psi_i^-}{\partial t} \right]} \left(\frac{\partial \psi_i^-}{\partial x^{(i)}} \right)^T, \end{aligned} \quad (24)$$

$$Q^{(i)} = - \frac{\left(\frac{\partial \Phi^{(i)-}}{\partial x^{(i)}} f^{(i)-} - f^{(i+1)+} \right) \left(\frac{\partial \psi_i^-}{\partial \alpha} \right)^T}{\left[\left(\frac{\partial \psi_i^-}{\partial x^{(i)}} \right)^T f^{(i)-} + \frac{\partial \psi_i^-}{\partial t} \right]} + \frac{\partial \Phi^{(i)-}}{\partial \alpha}. \quad (25)$$

2). Зрозуміло, що співвідношення залишаться такими ж, якщо система рівнянь (1) має один і той же порядок для будь-яких i . При цьому $\frac{\partial \Phi^{(i)-}}{\partial x^{(i)}}$ будуть квадратними матрицями.

3). Перерахунок скачків в точках перемикання (11) або (23) являється лінійним відносно функцій чутливості.

4). Якщо t_i фіксовано, то $\frac{dt_i}{d\alpha} = 0$, то з (11)

$$U^{(i+1)+} = \frac{\partial \Phi^{(i)-}}{\partial x^{(i)}} U^{(i)-} + \frac{\partial \Phi^{(i)-}}{\partial \alpha}, \quad (26)$$

тобто

$$P^{(i)} = \frac{\partial \Phi^{(i)-}}{\partial x^{(i)}}, \quad Q^{(i)} = \frac{\partial \Phi^{(i)-}}{\partial \alpha}.$$

Це говорить про те, що формули для обчислення функцій чутливості отримані досить загальні. З них можна отримати різні частинні випадки.

Випадок неперервних розв'язків

Приведені формули спрощуються, якщо розглянути

$$n_1 = n_2 = \dots = n_N = n, \quad x^{(1)} = x^{(2)} = \dots = x^{(N)} = x, \\ U(t, \alpha) = \frac{\partial x(t, \alpha)}{\partial \alpha},$$

а розв'язок системи (1) є неперервний. В цьому випадку умови скачка (2) мають вигляд $x(t_i + 0) = x(t_i - 0) = x(t_i)$. Тоді

$$\frac{\partial \Phi^{(i)-}}{\partial x} = E, \quad \frac{\partial \Phi^{(i)\pm}}{\partial \alpha} = 0, \quad \frac{\partial \Phi^{(i)\pm}}{\partial t} = 0. \quad (27)$$

З формули (11) отримаємо

$$U(t_i + 0) - U(t_i - 0) = -\Delta f^{(i)} \frac{dt_i}{d\alpha}, \quad (28)$$

де $\Delta f^{(i)} = f^{(i+1)}(x(t_i), t_i, \alpha) - f^{(i)}(x(t_i), t_i, \alpha)$ – величина розриву правої частини в точці t_i . Звідси

$$P^{(i)} = \frac{1}{\dot{\psi}_i} \Delta f^{(i)} \left(\frac{\partial \psi_i}{\partial x} \right)^T + E, \quad Q^{(i)} = \frac{1}{\dot{\psi}_i} \frac{\partial \psi_i}{\partial \alpha} \Delta f^{(i)}. \quad (29)$$

В неперервному випадку разом з (17) можна використовувати інші співвідношення, які важливі для прикладних задач. Наприклад, при $x(t_1 - 0) = x(t_1 + 0) = x^{(1)}$ маємо

$$\frac{dx^{(1)-}}{dt} = f^{(1)}(x^{(1)}, t_1, \alpha), \quad \frac{dx^{(1)+}}{dt} = f^{(2)}(x^{(1)}, t_1, \alpha) \quad (30)$$

та умови перемикавання

$$\psi_1(x(t_1 + 0, \alpha), t_1, \alpha) = \psi_1(x(t_1 - 0, \alpha), t_1, \alpha) = 0. \quad (31)$$

Тоді,

$$\frac{d\psi_1}{dt_1} = \frac{\partial \psi_1^T}{\partial x} \frac{dx^{(1)+}}{dt} + \frac{\partial \psi_1}{\partial t_1} = \frac{\partial \psi_1}{\partial x} \frac{dx^{(1)-}}{dt} + \frac{\partial \psi_1}{\partial t_1},$$

отримаємо два вирази

$$\frac{dt_1}{d\alpha} = - \frac{\frac{\partial \psi_1^T}{\partial x} U^{(1)-} + \frac{\partial \psi_1}{\partial \alpha}}{\frac{\partial \psi_1^T}{\partial x} f^{(1)-} + \frac{\partial \psi_1}{\partial t}} = - \frac{\frac{\partial \psi_1}{\partial x} U^{(1)+} + \frac{\partial \psi_1}{\partial \alpha}}{\frac{\partial \psi_1}{\partial x} f^{(1)+} + \frac{\partial \psi_1}{\partial t}}. \quad (32)$$

При використанні другого співвідношення з (32) отримаємо

$$U^{(i)-} = R^{(i)} U^{(i)+} + S^{(i)}, \quad (33)$$

де

$$R^{(i)} = E - \frac{1}{\dot{\psi}_i^+} \Delta f^{(i)} \left(\frac{\partial \psi_i}{\partial x} \right)^T, \quad S^{(i)} = \frac{1}{\dot{\psi}_i^+} \frac{\partial \psi_i}{\partial \alpha} \Delta f^{(i)}. \quad (34)$$

Відмітимо деякі особливості обчислення матриць функцій чутливості на основі отриманих формул:

1). Матриці функцій чутливості в момент перемикавання t_i залишаються неперервними в двох випадках, коли $\Delta f^{(i)} = 0$, тобто права частина системи (1) є неперервною при $t = t_i$ та при $\frac{dt_i}{d\alpha} = 0$, тобто моменти перемикавання не залежать від α ;

2). Розглянемо загальні властивості матриць $P^{(i)}$, $R^{(i)}$. Відмітимо, якщо a , b – вектор-стовпці, то

$$\det(E + ab^T) = 1 + b^T a. \quad (35)$$

Якщо, крім цього, $1 + b^T a \neq 0$, то

$$(E + ab^T)^{-1} = E - \frac{ab^T}{1 + b^T a}. \quad (36)$$

Формули (35), (36) перевіряються безпосередніми обчисленнями.

Тоді

$$\det P^{(i)} = 1 + \frac{1}{\dot{\psi}_i^-} \left(\frac{\partial \psi_i}{\partial x} \right)^T \Delta f^{(i)} =$$

$$= 1 + \frac{1}{\dot{\psi}_i^-} (\dot{\psi}_i^+ - \dot{\psi}_i^-) = \frac{\dot{\psi}_i^+}{\dot{\psi}_i^-},$$

$$\det R^{(i)} = \frac{\dot{\psi}_i^-}{\dot{\psi}_i^+}. \quad (38)$$

Звідси випливає, якщо $\dot{\psi}_i^- = 0$, то матриця $R^{(i)}$ – вироджена і з умови (33) не можна безпосередньо виразити $U^{(i)+}$. Крім цього, з (33), (34) та (36) при умовах $\dot{\psi}_i^+ \neq 0$, $\dot{\psi}_i^- \neq 0$ випливає

$$P^{(i)} = (R^{(i)})^{-1}; \quad (39)$$

3). Для неперервного випадку
 $x(t_i + 0) = x(t_i - 0) = x(t_i)$. Отже

$$\begin{aligned} \frac{dx(t_i(\alpha), \alpha)}{d\alpha} &= U^{(i)-} + f^{(i)-} \frac{dt_i}{d\alpha} = \\ &= U^{(i)+} + f^{(i)+} \frac{dt_i}{d\alpha}. \end{aligned} \quad (40)$$

Про розрахунок допусків на параметри лінійних систем зі змінною вимірністю фазового простору

Знаходження множини допусків системи керування на оптимальних режимах являє собою досить складну інверсну задачу. На сьогодні немає загальних методів для її розв'язування. Деякі частинні підходи до вибору допусків викладені, наприклад, у роботах [1-7]. Найбільш поширеними є методи, що базуються на використанні функцій чутливості [7]. При цьому вважається, що відхилення реальних значень від їх номінальних є досить малими величинами, а змінювання параметрів в межах поля допуску лінійні.

На відміну від відомих методів, в даній роботі задача розрахунку допусків розглядається з єдиних позицій – з позицій практичної стійкості параметричних систем. В залежності від вигляду рівнянь руху, функціонала, що мінімізується, вектора оптимізаційних параметрів чисельно оцінюється область допусків за заданими розкидами фазових координат та критерію якості.

Розглянемо спочатку лінійну систему звичайних диференціальних рівнянь, що залежать від параметрів

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + B(t)\alpha, \quad t \in [t_0, T], \quad (41)$$

де $A(t)$, $B(t)$ – неперервні матриці розмірності $n \times n$ та $n \times m$ відповідно.

Припустимо, що початкові умови для системи (41) є фіксованими: $x(t_0) = x_0$. Тоді вектори розкидів $y = x - \bar{x}$ та $\beta = \alpha - \bar{\alpha}$ задовольняють систему

$$\frac{dy}{dt} = A(t)y + B(t)\beta, \quad t \in [t_0, T], \quad (42)$$

з нульовими початковими умовами $y(t_0) = 0$ (тут $\bar{\alpha}$, $\bar{x} = x(t, \bar{\alpha})$), як і раніше, відповідно

розрахункові вектори параметрів та стану системи (41)).

Задача розрахунку допусків полягатиме у визначенні області допустимих параметрів $G^{(\beta)}$ таким чином, щоб траєкторії системи (42) належали множині допустимих станів Φ_t , $t \in [t_0, T]$.

Наведена постановка задачі $\{G^{(\beta)}, \Phi_t, t_0, T\}$ – оцінки допусків на параметри β є частинним випадком задачі $\{G_0^x, G_0^\alpha, \Phi_t, t_0, T\}$ – стійкості, коли множина G_0^x складається з однієї точки [1-6]. Тому розв'язання задачі оцінки допусків повністю вкладається у розроблені алгоритми аналізу практичної стійкості параметричних систем.

Щоб отримати чисельні критерії розрахунку області допусків $G^{(\beta)}$ розглянемо конкретні множини допустимих розкидів вектора стану:

$$\Phi_t \stackrel{\Delta}{=} \Gamma_t = \{y : |l_s^T(t)y| \leq 1, s = 1, 2, \dots, N\}, t \in [t_0, T]; \quad (43)$$

$$\Phi_t \stackrel{\Delta}{=} \Psi_t = \{y : \psi(y, t) \leq 1\}, t \in [t_0, T]. \quad (44)$$

Згідно з загальною методикою, задамо множину $G^{(\beta)}$ у формі еліпсоїда: $G^{(\beta)} = \{\beta : \beta^T G \beta \leq c^2\}$, де G – відома симетрична додатно означена матриця розмірності $m \times m$. Тоді якість допусків, в залежності від вигляду обмежень Φ_t , $t \in [t_0, T]$, буде визначатись $\{c, G, \Gamma_t, t_0, T\}$ – або $\{c, G, \Psi_t, t_0, T\}$ – оцінкою.

Нехай допустима множина обмежень на вектор розкиду y має вигляд (43). Запишемо загальний розв'язок системи (42) у формі

$$y(t) = \int_{t_0}^t X(t, \tau) B(\tau) d\tau \beta = Y(t) \beta,$$

де $X(t, \tau) = X(t)X^{-1}(\tau)$, а $X(t)$ – фундаментальна матриця, що визначається згідно з такими матричними рівняннями:

$$\frac{dX(t)}{dt} = A(t)X(t), \quad X(t_0) = E,$$

E – одинична матриця,

$Y(t) = \int_{t_0}^t X(t, \tau) B(\tau) d\tau$ – прямокутна матриця

чутливості розв'язків системи (41) по вектору параметрів β , тобто

$$\frac{dY(t)}{dt} = A(t)Y(t) + B(t), \quad Y(t_0) = 0. \quad (45)$$

При наявності лінійних обмежень (43)

константа C , що фігурує в оцінці множини $G^{(\beta)}$, повинна підпорядковуватися умові $|l_s^T(t)Y(t)\beta| \leq 1$ для будь-яких $s = 1, 2, \dots, N$, $t \in [t_0, T]$. Розв'язуючи відповідну екстремальну задачу, приходимо до такого твердження.

Критерій 1. Для $\{c, G, \Gamma_t, t_0, T\}$ – оцінки необхідно та достатньо, щоб

$$c^2 \leq \min_{t \in [t_0, T]} \min_{s=1, 2, \dots, N} [l_s^T(t)Y(t)G^{-1}Y^T(t)l_s(t)]^{-1}. \quad (46)$$

Якщо ж обмеження задачі у вигляді (44), то записавши множину Ψ_t таким чином:

$\Psi_t = \{y : g^T(\bar{y}, t)y \leq g^T(\bar{y}, t)\bar{y}, \bar{y} \in \Psi'_t\}$,
 $t \in [t_0, T]$, де $g(\bar{y}, t) = \text{grad}_y \psi(y, t)$, за аналогією дістанемо оцінку множини $G^{(\beta)}$.

Критерій 2. Для $\{c, G, \Psi_t, t_0, T\}$ – оцінки необхідно та достатньо, щоб справджувалось співвідношення

$$c^2 \leq \min_{t \in [t_0, T]} \min_{\bar{y} \in \Psi'_t} \frac{[g^T(\bar{y}, t)\bar{y}]^2}{g^T(\bar{y}, t)Y(t)G^{-1}Y^T(t)g(\bar{y}, t)}, \quad g^T(\bar{y}, t)\bar{y} > 0, \bar{y} \in \Psi'_t, t \in [t_0, T], \quad (47)$$

де Ψ'_t – межа опуклої замкненої множини Ψ_t , $t \in [t_0, T]$.

Припустимо тепер, що початкові умови у системі (41) залежать від вектора параметрів α , тобто $x(t_0) = x_0(\alpha)$, $t_0 = t_0$. Для отримання конструктивних алгоритмів оцінки допусків візьмемо конкретний тип початкових умов, наприклад, $x_0(\alpha) = X_0\alpha$, де X_0 – відома матриця розмірності $n \times m$. Тоді вектори розкидів u та β задовольнятимуть систему (42) з ненульовими початковими умовами $y(t_0) = X_0\beta$. При цьому рівняння чутливості збігаються з рівняннями (45), але $Y(t_0) = X_0$. Записуючи загальний розв'язок системи (42) з початковими умовами $y(t_0) = X_0\beta$ у формі Коші

$$y(t, \beta) = X(t, t_0)X_0\beta + \int_{t_0}^t X(t, \tau)B(\tau)d\tau\beta$$

та розв'язуючи екстремальні задачі для множин (43), (44), оцінимо область допусків.

Сформулюємо критерій оцінки для лінійних початкових умов.

Критерій 3. Для $\{c, G, \Gamma_t, t_0, T\}$ – або $\{c, G, \Psi_t, t_0, T\}$ – оцінки необхідно і достатньо, щоб виконувалась, відповідно, одна з нерівностей:

$$c^2 \leq \min_{t \in [t_0, T]} \min_{s=1, 2, \dots, N} [l_s^T(t)P(t)G^{-1}P(t)l_s(t)]^{-1};$$

$$c^2 \leq \min_{t \in [t_0, T]} \min_{\bar{y} \in \Psi'_t} \frac{[g^T(\bar{y}, t)\bar{y}]^2}{g^T(\bar{y}, t)P(t)G^{-1}P(t)g(\bar{y}, t)}, \quad g^T(\bar{y}, t)\bar{y} > 0, \bar{y} \in \Psi'_t, t \in [t_0, T],$$

де $P(t) = X(t, t_0)X_0 + Y(t)$,

$Y(t) = \int_{t_0}^t X(t, \tau)B(\tau)d\tau$ – матриця чутливості

розмірності $n \times m$, що задовольняє систему (45) з нульовими початковими умовами.

У загальному випадку нелінійних початкових умов $x(t_0) = x_0(\alpha)$, $t_0 = t_0$ потрібно провести їх лінеаризацію в околі розрахункового значення $\alpha = \bar{\alpha}$ за допомогою лінійно-незалежних функцій $\varphi_1(\beta), \varphi_2(\beta), \dots, \varphi_i(\beta) = \beta_i, i = 1, 2, \dots, m$. Позначаючи через $\gamma_i = \varphi_i(\beta)$, $i = 1, 2, \dots, M$, $M \geq m$, отримаємо систему лінійних диференціальних рівнянь відносно векторів u та γ більш високого порядку, ніж вихідна система (42) з початковими умовами $y(t_0) = \tilde{X}_0\gamma$ ($\tilde{X}_0$ – матриця розмірності $n \times m$). Тим самим задача зводиться до розглянутої вище ($x(t_0) = X_0\alpha$).

Запропонований підхід можна використовувати й для розрахунку допусків на параметри нелінійних систем. Для цього необхідно привести її до лінійної системи з постійно діючими збуреннями.

За допомогою критеріїв $\{G_0^{x, \alpha}, \Phi_{t, \alpha}, t_0, T\}$ – стійкості можна розв'язувати задачі оцінювання множини допусків та розкиду початкових умов $x(t_0, \alpha)$ при наявності сумісних обмежень на вектори u та β у динаміці. При цьому, якщо $x(t_0) = x_0$, приходимо до задачі розрахунку допусків за заданими обмеженнями $y, \beta \in \Phi_{t, \beta}$, $t \in [t_0, T]$.

Розглянемо задачу розрахунку допусків на оптимізаційні параметри при заданому розкиді критерію якості.

Припустимо, що $\bar{\alpha}$ є розв'язком екстремальної задачі

$$I(\bar{\alpha}) = \min_{\alpha \in G_{\alpha}} \Phi(x(T, \alpha)) \quad (48)$$

на траєкторіях системи диференціальних рівнянь (41), $\bar{x} = x(t, \bar{\alpha})$ – траєкторія, що відповідає вектору $\bar{\alpha}$, G_{α} – відома множина допустимих значень параметрів.

Необхідно визначити множину векторів $\beta = \alpha - \bar{\alpha}$ так, щоб розкид критерію якості знаходився в заданих межах, тобто справджувалось співвідношення

$$|\Phi(x(T, \alpha)) - \Phi(x(T, \bar{\alpha}))| = |\Phi(x(T, \bar{\alpha} + \beta)) - \Phi(x(T, \bar{\alpha}))| < \varepsilon, \quad (49)$$

ε – відоме число.

Згідно з роботою [2], при наявності припущення, що відхилення значень вектора параметрів α від номінальних є достатньо малим, а змінювання вектора параметрів у межах поля допуску лінійні, подамо варіацію показника якості у вигляді

$$\begin{aligned} \Phi(x(T, \bar{\alpha} + \beta)) - \Phi(x(T, \bar{\alpha})) &= \sum_{i=1}^m \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha_i} \bigg|_{\substack{x=\bar{x}|_{t=T} \\ \beta_i=0}} \cdot \beta_i = \\ &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial x_j}{\partial \alpha_i} \bigg|_{\substack{x=\bar{x}|_{t=T} \\ \beta_i=0}} \cdot \beta_i = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} \cdot U_j^{(i)}(T) \bigg|_{\substack{x=\bar{x}|_{t=T} \\ \beta_i=0}} \cdot \beta_i. \end{aligned}$$

Тут $U_j^{(i)}(T)$, $i=1,2,\dots,m$, $j=1,2,\dots,n$ – компоненти матриці чутливості розмірності $n \times m$, що обчислюються в точці T .

Для того, щоб отримати чисельні алгоритми оцінки допусків при заданому розкиді (49), запишемо вираз для варіації показника якості у вигляді лінійної форми

$$\Phi(x(T, \bar{\alpha} + \beta)) - \Phi(x(T, \bar{\alpha})) = \sum_{i=1}^m l_i(T) \beta_i = l^T(T) \beta,$$

$$\text{де } l_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} U_j^{(i)}(T) \bigg|_{\substack{x=x(t, \bar{\alpha})|_{t=T} \\ \beta_i=0}}.$$

Тоді вихідна задача розрахунку допусків на параметри при обмеженні (49) буде зводитися до визначення множини $G^{(\beta)}$ з умови

$$\max_{\beta \in G^{(\beta)}} |\Phi(x(T, \alpha)) - \Phi(x(T, \bar{\alpha}))| = \max_{\beta \in G^{(\beta)}} |l^T(T) \beta| < \varepsilon. \quad (50)$$

Якщо область $G^{(\beta)}$ задати у вигляді спеціальної структури, наприклад, $G^{(\beta)} = \{\beta : \beta^T G \beta \leq c^2\}$, то константу c , що задовольнятиме (50), можна оцінити явним чином:

$$c^2 \leq \varepsilon^2 [l^T(T) G^{-1} l(T)]^{-1}. \quad (51)$$

Нерівність (51) отримуємо шляхом знаходження максимуму лінійної форми на еліпсоїді $\beta^T G \beta = c^2$ з урахуванням умови (50).

Наведені результати можна використати для задачі розрахунку допусків й у випадку лінійного змінювання вектора параметрів у межах поля допуску. Для цього потрібно, шляхом застосування спеціальних прийомів [5], лінеаризувати варіацію показника якості відносно вектора параметрів β .

Описаний алгоритм можна використати без принципових змін і для обчислення допусків на параметри лінійних систем звичайних диференціальних рівнянь зі змінною вимірністю фазового простору

$$\frac{dx^{(i)}}{dt} = A^{(i)}(t)x^{(i)} + B^{(i)}(t)\alpha, \quad t_{i-1} < t < t_i, \quad i=1,\dots,N, \quad (52)$$

де $x^{(i)T} = (x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \dots, x_{n_i}^{(i)})$, α – m -вимірний

вектор параметрів, $A^{(i)}(t)$, $B^{(i)}(t)$ – неперервні матриці розмірності $n_i \times n_i$ та $n_i \times m$ відповідно.

Запишемо, наприклад, чисельний критерій типу 1 розрахунку області допусків $G^{(\beta)}$ для множини допустимих розкидів вектора стану:

$$\Gamma_i = \{y^{(i)} : |l_{is}^T(t)y^{(i)}| \leq 1, s=1,2,\dots,N_i\}, \quad t_{i-1} < t < t_i, \quad i=1,\dots,N \quad (53)$$

Критерій 4. Для $\{c, G, \Gamma_i, t_0, T\}$ – оцінки необхідно та достатньо, щоб

$$c^2 \leq \min_{i=1,2,\dots,N} \min_{t_{i-1} < t < t_i} \min_{s=1,2,\dots,N_i} \left[l_{is}^T(t) Y^{(i)}(t) G^{-1} Y^{(i)T}(t) l_{is}(t) \right]^{-1}. \quad (54)$$

По аналогії з вищеописаним тут

$$Y^{(i)}(t) = \int_{t_0}^t X^{(i)}(t, \tau) B^{(i)}(\tau) d\tau$$

– прямокутна матриця

чутливості розв'язків однорідної системи (52) по вектору параметрів α відповідної розмірності, тобто

$$\frac{dY^{(i)}(t)}{dt} = A^{(i)}(t)Y^{(i)}(t) + B^{(i)}(t), \quad Y^{(i)}(t_0) = 0, \quad (55)$$

де $X^{(i)}(t, \tau) = X^{(i)}(t)X^{(i)-1}(\tau)$, а $X^{(i)}(t)$ – фундаментальна матриця, що визначається згідно з такими матричними рівняннями

$$\frac{dX^{(i)}(t)}{dt} = A^{(i)}(t)X^{(i)}(t), \quad X^{(i)}(t_{i-1}) = E^{(i)}$$

$E^{(i)}$ – одинична матриця відповідної розмірності.

Висновки

В роботі приведені алгоритми для обчислення допусків на параметри лінійних

систем звичайних диференціальних рівнянь зі змінною вимірністю фазового простору. Для чисельного знаходження функцій чутливості виписані моделі, які також являються системами звичайних диференціальних рівнянь зі змінною

вимірністю фазового простору. Побудовані алгоритми є досить загальними і можуть бути використані для обчислення допусків на параметри широкого класу динамічних систем.

Список використаних джерел

1. Бублик Б.Н., Гаращенко Ф.Г., Кириченко Н.Ф. Структурно-параметрическая оптимизация и устойчивость динамики пучков. – К.: Наукова думка, 1985. – 304 с.
2. Гаращенко Ф.Г., Панталиєнко Л.А. Аналіз та оцінка параметричних систем. – К.: ІСДО, 1995. – 140 с.
3. Гаращенко Ф.Г., Панталиєнко Л.А. Анализ и оценка параметрических систем на основе методов практической устойчивости // Проблемы управления и информатики. – 1996. – № 1–2. – С. 145 – 161
4. Гаращенко Ф.Г., Панталиєнко Л.А. Исследование задач теории чувствительности методами практической устойчивости // Изв. АН СССР. – Техническая кибернетика. – 1989. – Вып.6. – С. 17– 25.
5. Гаращенко Ф.Г., Панталиєнко Л.А. Исследование задач расчета допусков на параметры с помощью методов практической устойчивости // Автоматика и телемеханика. – 1993. – № 4. – С. 43 – 55.
6. Гаращенко Ф.Г., Швець О.Ф. Вступ до аналізу чутливості параметричних систем. . - К.: Видавничо-поліграфічний центр «Київський університет», 2006. – 115 с.
7. Розенвассер Е.Н., Юсупов Р.М. Чувствительность систем управления. – М.: Наука, 1981. – 484с.
8. Сопронюк Ф.О. Моделювання та оптимізація систем управління з розгалуженням структур. – Чернівці: Рута, 1995. – 155с.
9. Сопронюк Є.Ф. Практична стійкість лінійних систем зі змінною вимірністю фазового простору // Науковий Вісник Чернівецького Університету. Математика. – Випуск № 269. – Чернівці: 2005. – С. 119–122.
10. Швець О.Ф., Сопронюк О.Л. Про матричні моделі для чисельного аналізу параметричної чутливості систем зі змінною вимірністю фазового простору // Вісник Київського університету. – Сер. фізико-математичні науки. – 2010. – №1. – С. 152-157.

References

1. BUBLIK B.N., GARASHCHENKO F.G., KYRYCHENKO M.F. (1985) *Scrunches-parameters optimization and stability of dynamics of bunches*. Kiev, Naukova dumka.
2. GARASHCHENKO F.G., PANTALIYENKO L.A. (1995) *Analysis and estimation of parametric systems*. Kiev, ISPO.
3. GARASHCHENKO F.G., PANTALIENKO L.A. (1996) *Analysis and estimation of the parameters systems on the basis methods of practical stability*. Problems of management and informatics, №1-2, p. 145-161.
4. GARASHCHENKO F.G., PANTALIENKO L.A. (1989) *Research of tasks of theory of sensitiveness by the methods of practical stability*. AN USSR, Technical cybernetics, V.6, p.17-25.
5. GARASHCHENKO F.G., PANTALIYENKO L.A. (1993) *Investigation of problems of calculation of permission on parameters with the help of methods of practical stability*. Avtomatika i Telemekhanika, N4, p. 43–55.
6. GARASHCHENKO F.G., SHVETS O.F. (2006) *Introduction to sensitivity analysis of parametric systems*. Kiev., publishing center "Kyiv University"
7. ROZENVASSER E.N., YUSUPOV R.M. (1981) *The sensitivity of the control systems*. Moskva, Nauka.
8. SOPRONUK F.O. (1995) *Simulation and optimization of control systems with branching structures*. Chernivtsi, Ruta.
9. SOPRONYUK E.F. (2005) *The practical stability of linear systems with changing dimension phase space*. Chernivtsi, Scientific Bulletin of Chernivtsi University. Mathematics. № 269, p. 119–122.
10. SHVETS O.F., SOPRONUK O.L (2010) *On matrix model for numerical analysis of parametric sensitivity systems with variable dimension of phase space*. Kiev, Bulletin of the University of Kyiv, Ser. Physics and Mathematics., №1. p. 152-157.

Надійшла до редколегії 30.12.14

РАДІОФІЗИКА



УДК 537.635

Віділ А.Ю.¹, аспірант

A. Yu. Vidil¹, post grad. student

**Дослідження явища фолдовера у
феромагнітних зразках еліпсоїдальної
форми**

**Investigation of foldover phenomenon in
ferromagnetic ellipsoid**

¹Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, пр-т.
Глушкова 4г,
e-mail: vidil@univ.net.ua

¹Taras Shevchenko National University of Kyiv,
03680, Kyiv, Glushkova st., 4g,
e-mail: vidil@univ.net.ua

Теоретично і експериментально досліджені форма резонансних кривих та порогові поля виникнення бістабільності при поглинанні НВЧ потужності феритовим резонатором. Експериментальні результати описані розв'язком рівняння Ландау-Ліфшица із використанням релаксаційного члена Гільберта, модифікованого у формі ряду по ступенях похідної по часу від намагніченості, для якого константа релаксації Гільберта визначалась в режимі лінійного феромагнітного резонансу (ФМР), емпіричний коефіцієнт розкладу в релаксаційному доданку – з аналізу нелінійного ФМР. В ході експерименту в режимі нормального підмагнічування виявлена невідповідність матриці розсіювання. Невідповідність зростає в нелінійному режимі. Проведені порівняння теоретично розрахованих резонансних кривих та порогових полів початку фолдовера з експериментом показують задовільну кількісну відповідність.

Ключові слова: феромагнітний еліпсоїд, магнітна кристалографічна анізотропія, порогові поля початку фолдовера.

The resonant curves shape and threshold fields of bistable power absorption (foldover) investigated theoretically and experimentally. The experimental results are described by solution of the Landau-Lifshitz equation with the Gilbert relaxation term modified in the form of a power series in the time derivative of the magnetization. Gilbert's relaxation rate was denoted from the linear ferromagnetic resonance (FMR) while the first empirical parameter of the series expansion was defined from observation of nonlinear FMR. Conducted investigations discuss the method of determination of the first empirical parameter. Two methods were suggested: fitting by the nonlinear frequency shift and using the equation for foldover threshold. As it shown in the paper the first method gives the best quantitative result. Also conducted experiment shown a nonreciprocity of scattering matrix in normal biasing regime. The magnitude of effect tends to grow with nonlinearity. The theoretically calculated resonant responses and foldover thresholds are in satisfactory quantitative agreement with the experimental ones.

Key Words: magnetic crystallographic anisotropy, ferromagnetic ellipsoid, the threshold of parametric excitation.

Статтю представив д.ф.-м.н., доц. Савенков С.М.

Вступ

В процесі вивчення властивостей магнітовпорядкованих середовищ важливим є експериментальне спостереження і коректний теоретичний опис феромагнітного резонансу. Відомо, що підвищення потужності сигналу накачки призводить до збільшення ролі нелінійних процесів, які спричиняють зміщення резонансної частоти, асиметрію відгуку ФМР та

його уширення, а також явище фолдовера – вперше передбачене і спостережене в роботах [1,2].

Фолдовером прийнято називати процес виникнення на резонансній кривій бістабільної ділянки, в межах якої рівень поглинання залежить від напрямку сканування за частотою або полем. Авторами в роботі [3] запропоновано метод опису нелінійного відгуку ФМР за допомогою механізму Андерсона і Сула [1].

Однак отриманий результат суттєво відрізняється від даних експерименту за шириною резонансної кривої, зсувом резонансної частоти та пороговим полем фолдовера. Теоретичний аналіз порогів фолдовера також проводився на основі точного розв'язку рівняння Ландау-Ліфшица для еліпсоїдальних зразків без врахування анізотропії матеріалу [4,5]. Проте, запропонований метод знаходження точних розв'язків застосовний для обмеженого набору систем із належною симетрією. Окрім того, як показано далі в роботі, константи релаксації, знайдені в лінійному режимі ФМР з експерименту та з порогу фолдовера, відрізняються вдвічі. Зазначена невідповідність є суттєвим недоліком теорії із використанням релаксаційного члена Гільберта. В даному контексті доцільно звернути увагу на експерименти із нанорозмірними резонаторами з керуванням спин-поляризованим струмом [6], які можуть бути описані на якісному рівні за допомогою модифікації релаксаційного члена Гільберта у формі ряду [7].

В поточній роботі продемонстровано результат застосування в рівнянні Ландау-Ліфшица релаксаційного члена Гільберта, модифікованого у формі ряду по ступенях похідної по часу від намагніченості [7], із врахуванням полів анізотропії для нормально намагнічених плівок залізо-ітрієвого гранату. Проведено порівняння теоретично розрахованих параметрів однорідного феромагнітного резонансу із експериментальними даними.

Теорія

Розв'язок нелінійного рівняння Ландау-Ліфшица дає можливість теоретичного передбачення величини порогового НВЧ поля початку фолдовера. У зв'язку з цим з'являється дві принципових можливості визначення константи релаксації Гільберта: експериментально з ширини лінії ФМР в лінійному режимі або із порогового виразу початку фолдовера. Проведені за такою схемою розрахунки константи релаксації відрізняються вдвічі.

Для усунення цього принципового недоліку в даній роботі для опису феромагнітного резонансу пропонується застосувати в рівнянні Ландау-Ліфшица релаксаційний член Гільберта, модифікований у формі ряду [7]:

$$\vec{R} = \bar{\sigma}(z) \left[\vec{m}, \frac{\partial \vec{m}}{\partial t} \right],$$

$$\bar{\sigma}(z) = \bar{\sigma}_G (1 + q_1 z + q_2 z^2 + \dots), \quad z = \frac{1}{u_M^2} \left(\frac{\partial \vec{m}}{\partial t} \right)^2,$$

де $\bar{\sigma}_G$ – константа релаксації Гільберта, q_i – емпіричні коефіцієнти, з яких використано тільки перший. Традиційна константа релаксації Гільберта визначається з ширини резонансної кривої в лінійному режимі – при малих потужностях накачки. Емпіричний коефіцієнт q_1 знаходиться в нелінійному режимі (великі потужності накачки).

Тоді порогове поле початку фолдовера в випадку лінійно поляризованого поля накачки з амплітудою h_0 може бути записане у формі

$$h_{0th} = \frac{\Delta H_0 \cdot B}{\sqrt{2}} \sqrt{B[c^2 - 4(q_1 r)^2] - 4q_1 r}, \quad (1)$$

де

$$\Delta H_0 = \frac{2\bar{\sigma}_G u_0}{z}, \quad B = \frac{8q_1 r + 2\sqrt{c^2 + 20(q_1 r)^2}}{c^2 + 4(q_1 r)^2},$$

$$r = \frac{u_0^2}{u_M^2}, \quad c = z \frac{4\pi M_0 (N_z - N_T) - H_{u1} - 3H_{u2}}{\bar{\sigma}_G u_0},$$

H_{u1}, H_{u2} - поля одновісної анізотропії першого і другого порядків відповідно. Доцільно провести порівняння виразу (1) із результатом дослідження порогового поля шляхом точного розв'язку рівняння Ландау-Ліфшица [5]:

$$h_{0cr} = \frac{\sqrt{2}\Delta H_0}{c} \sqrt{\sqrt{c^2 + 1} - 1}. \quad (2)$$

Формула (2) отримана для феромагнітного еліпсоїда без врахування магнітної кристалографічної анізотропії. Отже, порівняння порогових виразів буде коректним за умови нехтування в (1) полями анізотропії і емпіричним коефіцієнтом q_1 . В тонких дисках, де виконується умова $c \gg 1$, порогові поля знайдені за формулами (1-2) демонструють якісно схожу поведінку:

$$h_{0th} \approx h_{cr} \propto \frac{\Delta H_0}{\sqrt{c}},$$

але відношення амплітуд полів $h_{0th}/h_{cr} = \sqrt{2}$. Така відмінність обумовлена використанням рівняння Ландау-Ліфшица для однорідної прецесії в наближенні Сула при отриманні

формули (1).

Методика знаходження константи релаксації Гільберта b_G в лінійному режимі ФМР добре вивчена. Проте методика знаходження емпіричного коефіцієнта q_1 з нелінійного режиму може бути предметом обговорення. Так в статті [8] запропоновано знаходити коефіцієнт з умови відповідності теоретичних зсуву частоти ФМР і добротності резонатора із експериментальними спостереженнями. Знайдене за такою методикою значення $q_1 = 250$ для матеріалу ЗІГ із намагніченістю насичення 1750 Гс [8]. Водночас, отримана формула порогового поля дає можливість визначати емпіричний параметр q_1 безпосередньо з рівняння (1) шляхом підстановки експериментального значення порогового поля фолдовера. Визначення емпіричного коефіцієнта q_1 з порогового поля для попереднього матеріалу ЗІГ дає значення $q_1 = 670$. Детальне обговорення отриманого таким чином результату і його порівняння з експериментом проводиться в наступному розділі.

Загалом можна відмітити, що використання модифікованого релаксаційного члена Гільберта ($q_1 \neq 0$) в рівнянні руху намагніченості додатково обмежує інтенсивність коливань на кривій неізохронності і призводить до зростання порогових полів фолдовера. Вплив анізотропії на порогові поля обумовлений комбінацією полів H_{u1} і H_{u2} , яка визначає збільшення або зменшення порогу.

Запропонована в роботі [3] теорія фолдовера визначає порогову потужність НВЧ сигналу накачки у вигляді

$$P_{th} = \frac{8\sqrt{3}}{9} \frac{Df}{2AB}, \quad (3)$$

де введені емпіричні параметри: Df – ширина резонансної кривої, A , B – коефіцієнти поглинання потужності в резонансі і зсуву резонансної частоти від потужності накачки відповідно. Зазначені параметри визначаються окремо для кожного експерименту з умови відповідності теоретичного Лоренцового контуру з експериментальним відгуком ФМР при малих потужностях накачки. Знайдене з формули (3) порогове поле для нормально намагніченого диску ЗІГ порівняне із результатом, отриманим в цій роботі за формулою (1). Але теоретичні криві резонансного поглинання і зсув резонансної

частоти [3] сильно відрізняються від спостережених експериментальних.

Результати

Для перевірки теорії проведено експеримент і досліджено резонансні криві нелінійного ФМР у дисковому резонаторі діаметром 1.6 мм і товщиною 23.3 мкм в режимі нормального підмагнічування. Матеріал резонатора – (111) плівка ЗІГ із намагніченістю насичення $4\pi M_0 = 1750$ Гс, полем кубічної анізотропії $H_c = -50$ Е, полями одновісної анізотропії першого і другого порядку $H_{u1} = -50$ Е і $H_{u2} = 45$ Е відповідно. В якості вимірювальної комірки використовувався мікросмужкова лінія передачі, яка забезпечувала лінійно поляризовану накачку резонатора, включеного в лінію в якості неоднорідності. Зв'язок між амплітудою поля і потужністю накачки в лінії задається формулою

$$P = \frac{120d^2}{\sqrt{\varepsilon_d}} \ln\left(\frac{r_B}{r_A}\right) h^2, \quad (4)$$

де r_A , r_B – корені трансцендентного рівняння

$$r - \ln r - 1 - \frac{\pi b}{2d} - \left(\frac{2\Delta}{d} + \sqrt{\frac{2\Delta}{d}} \right) (r - 1) = 0.$$

В рівнянні використовуються параметри хвилевода: товщина діелектричного шару $d = 0.5$ мм, товщина смужки зі струмом $\Delta = 50$ мкм, ширина смужки зі струмом $b = 1.5$ мм. Діелектрична проникність матеріалу лінії $\varepsilon_d = 2.35$. Вимірювання коефіцієнта передачі мікросмужкової лінії з резонатором проводилось за допомогою векторного аналізатора НВЧ кіл ROHDE & SCHWARZ RS ZVA8.

На графіку Рис. 1 показані експериментальні залежності коефіцієнтів проходження S_{21} і S_{12} матриці розсіювання. Рівень потужності НВЧ накачки -30 дБм відповідає лінійному режиму ФМР, з якого визначається константа релаксації Гільберта. Для обраного матеріалу вона становить $\alpha_G = 3.8 \cdot 10^{-4}$ і використовується в подальших теоретичних розрахунках. В нелінійному режимі при збільшенні потужності накачки спостерігається невзаємність передачі НВЧ потужності в прямому і зворотньому напрямках. Запропонована в даній статті теорія не передбачає такої поведінки феромагнітних резонансів.

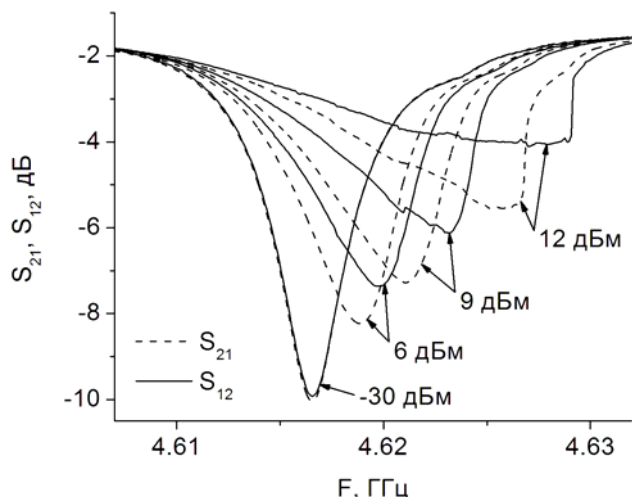


Рис. 1 Експериментальні залежності коефіцієнтів проходження при різних потужностях накачки.

Релаксаційні процеси у феромагнетиках прийнято описувати шириною лінії ФМР, яка фактично характеризує добротність феритового резонатора. Для порівняння спостереженої в експерименті ширини лінії ФМР із результатом теорії необхідно відкинути наявні в експерименті втрати на перевипромінювання НВЧ потужності феритовим резонатором, що визначаються коефіцієнтом зв'язку резонатора з хвильоводом. Вимірювання коефіцієнта зв'язку в ході експерименту здійснювалось за допомогою діаграми Сміта за методикою [9,10]. За умови відомого коефіцієнта зв'язку ширина лінії ФМР в експерименті визначається у вигляді

$$\Delta H = \frac{\Delta F}{\gamma(1+K)},$$

де ΔF – ширина ФМР навантаженої лінії передачі на рівні половини потужності поглинання, K – коефіцієнт зв'язку резонатора з хвильоводом. Оскільки в теорії враховуються лише власні втрати в матеріалі, то ширина лінії ФМР буде визначається безпосередньо з відношення $\Delta F/\gamma$. На Рис. 2 для порівняння наведені теоретичні графіки ширини лінії ФМР разом з результатами експерименту (точки).

В експериментальній залежності ширини лінії ФМР від потужності накачки можна виділити критичну потужність близько 3 дБм, починаючи з якої спостерігається зміна характеру залежності і стрімке зростання ширини лінії. Така поведінка пов'язана з початком нелінійного спотворення резонансного відгуку при подоланні критичної потужності накачки. Збільшення впливу нелінійних процесів із подальшим підвищенням потужності накачки призводить до виникнення

фолдовера при потужності 10 дБм. Пунктирними кривими на графіку позначено результати застосування релаксаційного члена у формі Гільберта. Видно, що при визначенні параметра релаксації b_G з порогового поля ширина лінії ФМР у два рази більша за спостережену в експерименті. Усунути розбіжність можна в рамках моделі модифікованого релаксаційного члена Гільберта введенням другого параметра релаксації q_1 . Новий емпіричний параметр має вплив тільки в нелінійному режимі, тоді як в лінійному режимі традиційний параметр релаксації Гільберта узгоджений з експериментом. Можна зробити висновок, що використання модифікованого релаксаційного члена Гільберта дає якісно кращий результат в порівнянні з традиційним релаксаційним членом Гільберта (Рис. 2).

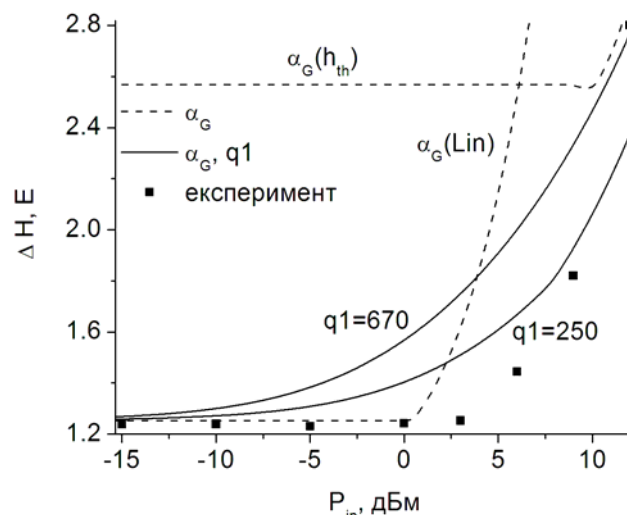


Рис. 2 Залежності ширини лінії ФМР від потужності НВЧ накачки при різних значеннях емпіричного коефіцієнта q_1 .

Як зазначалося раніше, задачу знаходження емпіричного параметра q_1 можна вирішувати з умов співпадіння зсуву резонансної частоти ($q_1=250$) або з пологового виразу ($q_1=670$). В другому випадку отримаємо слабшу залежність зсуву резонансної частоти від потужності накачки. Це добре видно при порівнянні розрахункових резонансних кривих поглинання НВЧ потужності феритовим резонатором з даними експерименту при різних значеннях потужності накачки (Рис. 3). Суцільними кривими на графіку зображені дані експерименту, поглинута резонатором потужність визначається в вигляді

$P_a = P_{in} (1 - 10^{S_{21}/10} - 10^{S_{11}/10})$, де P_{in} – потужність вхідного сигналу.

Таким чином, порогове поле фолдовера, знайдене з точного розв'язку рівняння руху намагніченості [5] рівне 35 мЕ; застосування опису нелінійного ФМР за допомогою механізму Андерсона і Сула [3] дає значення порогового поля 85 мЕ; знайдене із запропонованої у статті теорії порогове поле рівне 75 мЕ при $q_1 = 250$ і 0.1 Е при $q_1 = 670$. Знайдене з експерименту порогове поле рівне 0.1 Е.

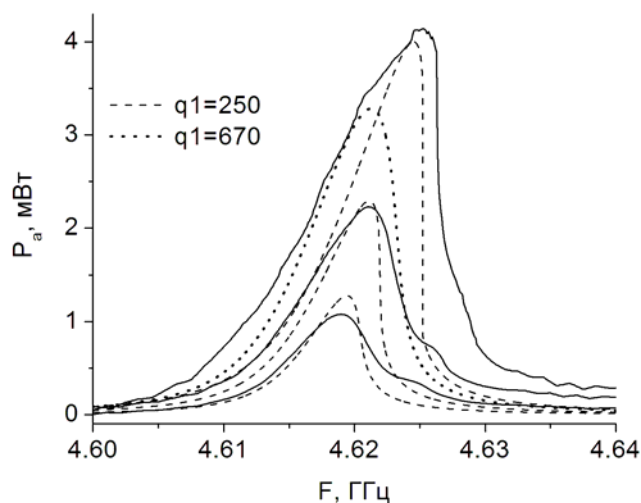


Рис. 3 Залежності поглинутої резонатором енергії при потужностях накачки 6 дБм, 9 дБм і 12 дБм. Суцільними кривими позначено результати експерименту, пунктирними – теоретичні розрахунки, крива $q_1 = 670$ побудована для потужності накачки 12 дБм.

Як вже було зазначено раніше, для коректного порівняння теорії з експериментом необхідно враховувати наявні в експерименті втрати на перевипромінювання. В першому наближенні ці втрати можна врахувати в теорії шляхом введення ефективного об'єму зразка V_{ef} . Для наведених на Рис. 3 теоретичних результатів $V_{ef} = 1.5 \cdot V_0$, де V_0 – фізичний об'єм зразка.

Висновки

Проведені дослідження вказують на переваги застосування запропонованої теорії, оскільки знаходження точного розв'язку рівняння Ландау-Ліфшица можливе для обмеженого кола задач, а опис характеристик нелінійного ФМР класичним Лоренцовим контуром містить багато емпіричних параметрів. Теорія із використанням модифікованого у формі ряду релаксаційного члена Гільберта усуває неоднозначність визначення параметра релаксації Гільберта з лінійного режиму ФМР і з порогу фолдовера. Обговорено можливі підходи пошуку коефіцієнту q_1 , зокрема, використання виразу порогового поля для його знаходження. Застосування отриманого таким чином параметра в теорії якісно покращує поведінку ширини лінії ФМР в порівнянні з традиційним релаксаційним членом Гільберта. Результати дослідження також виявили невзаємність передачі НВЧ потужності у хвилеводі й принципову необхідність врахування в теорії зв'язку резонатора з лінією передачі.

Список використаних джерел

1. Anderson P. Instability in the motion of ferromagnets at high microwave power levels / P. Anderson, H. Suhl // Phys. Rev. – 1955. – 100. – P. 1788-1792.
2. Weiss M. Microwave and low frequency oscillation due to resonance instabilities in ferrites / M. Weiss // Phys. Rev. Lett. – 1958. – 1. N 7. – P. 239-241.
3. Fetisov Yu. Nonlinear ferromagnetic resonance and foldover in Yttrium Iron Garnet thin films – inadequacy of the Classical model / Yu. Fetisov, C. Patton, V. Synogach // IEEE Trans. on Magn. – 1999. – 35, N 6. – P. 4511-4521.

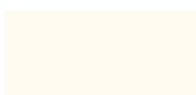
References

1. ANDERSON P., SUHL H. (1955) Instability in the motion of ferromagnets at high microwave power levels. *Phys. Rev.* 100. p. 1788-1792.
2. WEISS M. (1958) Microwave and low frequency oscillation due to resonance instabilities in ferrites. *Phys. Rev. Lett.* 1 (7). P. 239-241.
3. FETISOV YU., PATTON C., SYNOGACH V. (1999) Nonlinear ferromagnetic resonance and foldover in Yttrium Iron Garnet thin films – inadequacy of the Classical model. *IEEE Trans. on Magn.* 35 (6). p. 4511-4521.

4. Скроцкий Г. Ферромагнитный резонанс в поляризованном по кругу электромагнитном поле произвольной амплитуды / Г. Скроцкий, Ю. Алимов // ЖЭТФ – 1958. – **35**, N 6 – С. 1481-1484.
5. Скроцкий Г. Влияние формы образца на ферромагнитный резонанс в сильном радиочастотном поле / Г. Скроцкий, Ю. Алимов // ЖЭТФ – 1959. – **36**, N 4 – С. 1267-1271.
6. Kiselev S. Microwave oscillations of a nanomagnet driven by a spin-polarized current / S. Kiselev, J. Sankey, I. Krivorotov, N. Emley, R. Schoelkopf, R. Burhrman, D. Ralph // Nature – 2003. – 425 – P380-383.
7. Tiberkevich V. Nonlinear phenomenological model of magnetic dissipation for large precession angles: Generalization of Gilbert model / V. Tiberkevich, A. Slavin // Phys. Rev. B – 2007. – **75**. – P. 0144401-0144406.
8. Vidil A. Relaxation at nonlinear ferromagnetic resonance / Vidil A., Zavislyak I., Popov M. // Ukr. J. Phys. – 2014. – **59**, N 2. – P. 141-147.
9. Kajfez D. Numerical determination of two-port parameters from measured unrestricted data / D. Kajfez // IEEE Trans. on instrumentation and measurement – 1975. – **24** N 1. – P. 4-11.
10. Hady L. Dielectric resonator antenna in a polarization filtering cavity for dual function applications / L. Hady, D. Kajfez, A. Kishk // IEEE Trans. on microwave theory and tech. – 2008. – **56** N 12. – P. 3079-3085.
4. SKROTSKY G., ALIMOV YU. (1958) Ferromagnitniy resonans v polyarizovannom po krugu electromagnitnom pole proizvolnoy amplitudi. *JETP*. 35 (6). p. 1481-1484.
5. SKROTSKY G., ALIMOV YU. (1959) Vliyanie formy obraztsa na ferromagnitniy resonans v silnom radiochastotnom pole. *JETP*. 36 (4). p. 1267-1271.
6. KISELEV S., J. SANKEY, KRIVOROTOV I., EMLEY N., SCHOELKOPF R., BURHRMAN R., RALPH D. (2003) Microwave oscillations of a nanomagnet driven by a spin-polarized current. *Nature* 425. p. 380-383.
7. TIBERKEVICH V., SLAVIN A. (2007) Nonlinear phenomenological model of magnetic dissipation for large precession angles: Generalization of Gilbert model. *Phys. Rev. B*. 75. p. 0144401-0144406.
8. VIDIL A., ZAVISLYAK I., POPOV M. (2014) Relaxation at nonlinear ferromagnetic resonance. *Ukr. J. Phys.* 59 (2). p. 141-147.
9. KAJFEZ D. (1975) Numerical determination of two-port parameters from measured unrestricted data. *IEEE Trans. on instrumentation and measurement*. 24 (1). p. 4-11.
10. HADY L., KAJFEZ D., KISHK A. (2008) Dielectric resonator antenna in a polarization filtering cavity for dual function applications. *IEEE Trans. on microwave theory and tech.* 56 (12). p. 3079-3085.

Надійшла до редколегії 5.12.2014

СУЧАСНА ФІЗИКА



УДК 519.9

Альошин О.Д.¹, д.ф.-м. н., проф.,
Рудніков Є.Г.², к.ф.-м. н., с.н.с.,
Войтешенко А.В.³, асп.,
Білоус О.І.⁴, к.ф.-м. н., доц.

Зіставлення рівнянь критичної в'язкості на основі теорії динамічного скейлінгу та з урахуванням просторової дисперсії системи

^{1,2,3,4}Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 01601, м. Київ, вул. Володимирська 64/13,
e-mail: ¹alekhin@univ.kiev.ua, ⁴o_bilous@ua.fm

Alekhin A.D.¹, Sci.Dr., Prof.,
Rudnikov Ye.G.², Ph.D., Sen. Sci. Res.,
Voiteshenko A.V.³, PhD stud.,
Bilous O.I., Ph.D.⁴, Assistant Prof.

Comparison of the critical viscosity equations based on the theory of dynamic scaling and taking into account the system spatial dispersion

^{1,2,3,4}Taras Shevchenko National University of Kyiv, 01601, Kyiv, Volodymyrska st. 64/13,
e-mail: ¹alekhin@univ.kiev.ua, ⁴o_bilous@ua.fm

У роботі представлено результати експериментальних досліджень температурних та концентраційних залежностей зсувної в'язкості розчину ізомасляна кислота-вода поблизу критичної температури розшарування. На основі одержаних результатів досліджено область застосування рівнянь в'язкості на основі динамічного скейлінгу та з урахуванням просторової дисперсії системи. Показано, що рівняння в'язкості з урахування просторової дисперсії системи може бути застосоване в усьому дослідженому інтервалі температур та концентрацій в околі критичної температури розшарування. Рівняння в'язкості на основі теорії динамічного скейлінгу може бути застосоване лише уздовж напрямку критичної ізоконцентрації, у вузькому температурному інтервалі.

Ключові слова: зсувна в'язкість, критична температура розшарування, динамічний скейлінг, просторова дисперсія

The paper presents the results of experimental studies of the temperature and concentration dependences of the shear viscosity of the isobutyric acid – water solution near the stratification critical temperature. On the basis of the results the range of application of the viscosity equations both based on dynamic scaling and taking into account the spatial dispersion of the system has been investigated. It has been shown that the viscosity equation taking into account spatial dispersion system can be used all over the measured temperature and concentration range in the vicinity of the stratification critical temperature. Viscosity equation based on the theory of dynamic scaling can be applied only along the direction of critical isoconcentrate in a narrow temperature range of the critical temperature. Experimental results show that the approach to the critical temperature stratification viscosity of the solution tends to a finite value. This result confirms the critical viscosity equation taking into account the spatial dispersion system.

Key words: the shear viscosity, stratification critical temperature, dynamic scaling, spatial dispersion

Статтю представив академік НАН України, д.ф.-м.н., проф. Булавін Л.А.

На даний час у зв'язку із широким практичним використанням унікальних властивостей речовини у критичному стані: критичного флюїду (КФ) у новітніх технологіях [1-3] значно зріс інтерес до експериментальних та теоретичних досліджень різноманітних властивостей цього стану речовини. Особливо це відноситься до кінетичних властивостей речовини: коефіцієнту дифузії та в'язкості.

У зв'язку із цим, у даній роботі досліджено в'язкість $\eta(x, T)$ подвійного розчину ізомасляна кислота-вода у широкому діапазоні концентрацій

та температур, включаючи їхні критичні значення. Виходячи з принципу ізоморфізму критичних явищ [4], такі дослідження в'язкості подвійних розчинів $\eta(x, T)$ поблизу критичної температури розшарування можуть бути корисні для аналізу причин успішного практичного застосування унікальних властивостей критичного флюїду рідина-пара в новітніх промислових технологіях.

Ми побудували поверхні критичної в'язкості $\eta(x, T)$ на основі сучасної динамічної теорії

критичних явищ [5, 6], а також рівняння критичної в'язкості [7], що враховує просторову дисперсію системи поблизу критичної точки (КТ) [8].

Виходячи з [5, 6], рівняння в'язкості КФ представляється у вигляді:

$$\eta_l(T) = \eta_r(T) + \eta_f(T) = \eta_r \left(1 + \frac{\eta_f}{\eta_r} \right) = \eta_r (q_1 R_c)^{\varepsilon_\eta} \quad (1)$$

Тут $\eta_r = A \exp B/T$ [9] та η_f відповідно регулярна та флуктуаційна складові в'язкості, $R_{cl} = r_l t^{-\nu}$ - радіус кореляції системи уздовж термодинамічного напрямку критичної ізохори, q_1 - параметр розмірності хвильового вектора, ν , z_η - критичні показники відповідно радіуса кореляції [10, 11] та в'язкості [5, 6], $t = (T - T_k)/T_k$, T_k - критична температура речовини.

Паралельно з (1) у даній роботі було використано рівняння критичної в'язкості [7], в якому враховано просторову дисперсію системи [8] поблизу критичної точки ($q_2 R_c \neq 0$). У цьому випадку, виходячи з флуктуаційної теорії фазових переходів [10, 11], рівняння критичної в'язкості представляється у вигляді [7]:

$$\eta_2(T) = \eta_r(T) + \eta_f(T) = A \exp \frac{B}{T} + \frac{A R_c(x, t)}{\left[1 + (q_2 R_c)^2 \right]^{\frac{1}{2}(1-\eta)}} \quad (2)$$

Тут, як і в (1), $\eta_r = A \exp B/T$ та $\eta_f(t, \Delta x)$ - відповідно регулярна та флуктуаційна складові в'язкості; $q_2 \neq q_1$ (1) - параметр розмірності хвильового вектора в даній моделі. Уздовж різних термодинамічних напрямків - критичної ізоконцентрати, межі розділу фаз, критичної ізотерми, величина радіуса кореляції $R_c(x, t)$ представляється відповідно у вигляді, $R_{cl} = r_l t^{-\nu}$, $R_{c2} = r_2 |t|^{-\nu}$, $R_{c3} = r_3 |\Delta x|^{-\nu/\beta}$; ν , β - критичні показники ФТФП [10, 11]; $\Delta x = (x - x_k)/x_k$ - параметр порядку подвійного розчину. З вигляду співвідношення (2) випливає, що в'язкість системи в критичній точці ($t=0$, $\Delta x=0$) є скінченною ($\eta_r(R_c \rightarrow \infty) = A/q_2 = \text{const}$). Цей результат узгоджується із розрахунками М. Фіксмана [8].

У даній роботі для побудови поверхонь рівнянь флуктуаційної частини в'язкості η_{f1} (1) та η_{f2} (2), були використані експериментальні дані поведінки в'язкості розчину ізомаляна кислота - вода у широкій області температур $t > 0$ та $t < 0$ ($|t| < 10^{-1}$), і концентрацій $x > x_k$,

$x < x_k$, включаючи їх критичні значення T_k , x_k [12]. Ці експериментальні дані наведені на рис. 1.

При побудові поверхонь флуктуаційних складових в'язкості $\eta_{f1} = \eta_l - \eta_r$ (1) та $\eta_{f2} = \eta_2 - \eta_r$ (2) спочатку в області температур $t > 10^{-2}$ та концентрацій $x > x_k$, $x < x_k$, далеких від критичних значень, були визначені параметри $A(x, T)$, $B(x, T)$ регулярної частини в'язкості. Після цього, підставляючи значення $A(x, T)$, $B(x, T)$ в рівняння $\eta_r(x, t) = A \exp B/T$, побудована тривимірна поверхня регулярної частини в'язкості, рис. 2.

Використовуючи вигляд цієї поверхні рис. 2., були побудовані поверхні флуктуаційної частини

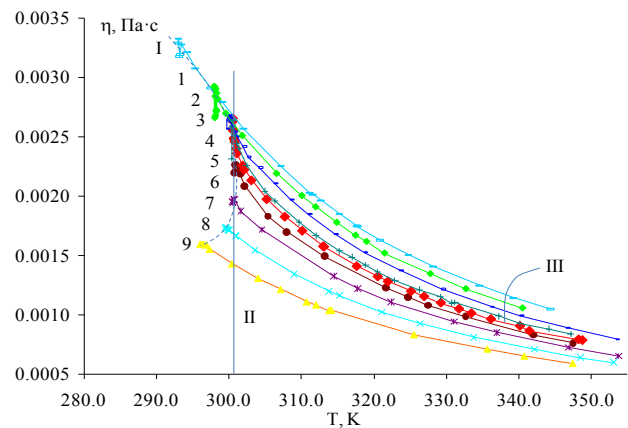


Рис. 1. Температурні залежності в'язкості розчину $\eta(x, T)$ ізомаляна кислота-вода поблизу критичної температури розшарування для різних концентрацій розчину.

в'язкості $\eta_{f1} = \eta_l - \eta_r$ (1) та $\eta_{f2} = \eta_2 - \eta_r$ (2), що відповідають рівнянням в'язкості (1), (2).

Аналіз вигляду тривимірної поверхні $\eta_{f2} = \eta_2 - \eta_r$ показав, що розрахована флуктуаційна складова в'язкості розчину (2), у всьому дослідженому діапазоні температур та концентрацій $t = 0 \div 10^{-2}$, $x = 0 \div 0,5$, адекватно описує експериментальні дані $\eta(x, T)$, представлені на рис. 1.

У той же час, вигляд поверхні флуктуаційної частини в'язкості, побудованої на основі динамічної теорії критичних явищ [5, 6] (1), узгоджується з експериментальними даними (рис. 1) у вузькому діапазоні температур $t \approx 10^{-4} \div 10^{-3}$ лише при критичній концентрації розчину $x = x_k$.

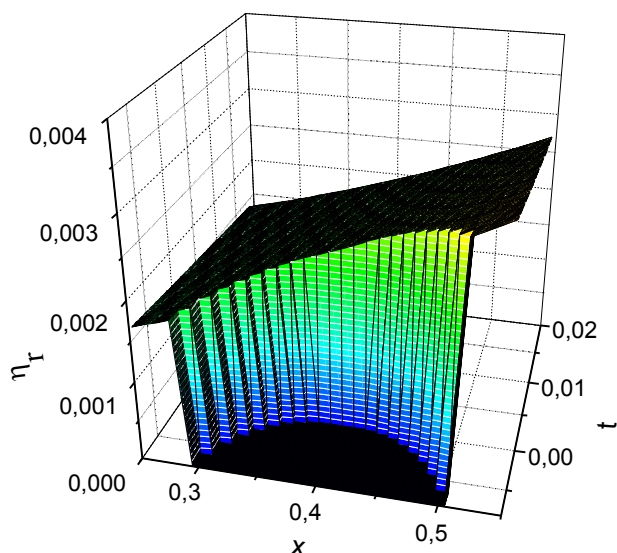


Рис. 2. Тривимірна поверхня регулярної частини в'язкості $\eta_r(x, T)$.

Цей висновок впливає при порівнянні вигляду двох рівнянь в'язкості $\eta_{f1}(x, T)$ (1) та $\eta_{f2}(x, T)$ (2) уздовж термодинамічного напрямку критичної ізоконцентрати. Ці графіки функцій представлені на рис. 3.

Дійсно, як видно з цього рисунка, виходячи з динамічної теорії [5, 6], флуктуаційна частина в'язкості $\eta_f \sim t^{-\nu_z}$ (1) при підході до критичної температури ($t \rightarrow 0, |t| < 10^{-4} \div 10^{-5}$) необмежено зростає. У той же час, величина флуктуаційної частини в'язкості $\eta_{f2}(x, T)$ (2) з урахуванням просторової дисперсії [7] в критичній точці досягає скінченного значення.

Крім того, з рис. 3. впливає також, що при віддаленні від критичної температури розшарування в області температур ($|t| > 10^{-3}$), де величина $q_1 R_c < 1$, спостерігається істотна відмінність експериментальних даних $\eta(T)$ від результатів теорії [5, 6].

Отже, в експериментальних умовах не виконується припущення теорії динамічного скейлінгу $\eta_f(x, T) \gg \eta_r(x, T)$ [5, 6]. Ця

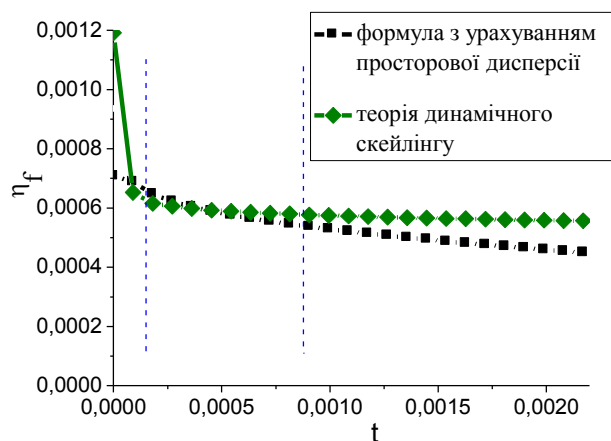


Рис. 3. Температурні залежності флуктуаційної частини в'язкості динамічної теорії критичних явищ $\eta_{f1}(x_k, T)$ та з урахуванням просторової дисперсії системи $\eta_{f2}(x_k, T)$ уздовж критичної ізоконцентрати.

особливість вказує на обмеженість застосування формули (1).

Отже, можна зробити наступні висновки:

1. Представлені експериментальні дані концентраційної та температурної залежностей флуктуаційної частини в'язкості $\eta_f(x, T)$

розчину ізомасляна кислота-вода підтверджують вигляд рівняння в'язкості (2), що враховує просторову дисперсію системи у всій області температур $t \approx 10^{-4} \div 10^{-2}$ та концентрацій $x = 0 \div 0,5$.

2. При підході до критичної температури розшарування ($t \rightarrow 0, x = x_k$) в'язкість розчину прямує до скінченного значення $\eta_f(t \rightarrow 0, x \rightarrow x_k) = const$. Отриманий результат підтверджує вигляд рівнянь критичної в'язкості (2), в якому врахована просторова дисперсія системи ($q_2 R_c \neq 0$).

3. Рівняння критичної в'язкості (1) [5, 6] та рівняння (2) з урахуванням просторової дисперсії системи ($q_2 R_c \neq 0$) узгоджуються між собою, рис. 1, лише у вузькому інтервалі концентрацій поблизу критичної ізоконцентрати в інтервалі температур $t \approx 10^{-4} \div 10^{-3}$.

Список використаних джерел

1. Образование наночастиц Al_2O_3 при окислении алюминия водой при суб- и сверхкритических параметрах / А. А.Востриков, И. И. Федяева, О. Н. Федяева, М. Я. Сокол. // Сверхкритические флюиды: Теория и практика. – 2010. – №1. – С. 12–25.

References

1.VOSTRIKOV A. A., FEDYAEVA I. I., FEDYAEVA O. N., SOKOL M. J. (2010) Formation of Al_2O_3 nanoparticles in the oxidation of aluminum with water in sub- and supercritical. *Supercritical Fluids: Theory and Practice*. 5 (1). p. 12-25.

2. Горбатый Ю. Э. Сверхкритическое состояние воды / Ю. Э. Горбатый, Г. В. Бондаренко. // Сверхкритические флюиды: Теория и практика. – 2007. – №2. – С. 5–19.
3. Развитие технологий, основанных на использовании сверхкритических флюидов / Д. Ю. Залепугин, Н. А. Тилькунова, И. А. Чернышова, В. С. Поляков. // Сверхкритические флюиды: Теория и практика. – 2006. – №1. – С. 27–51.
4. Анисимов М. И. Критические явления в жидкостях и жидких кристаллах / М. И. Анисимов. – Москва: Наука, 1987. – 271 с. – (Современные проблемы физики).
5. Kadanoff L. Transport coefficients near the liquid-gas critical point / L. Kadanoff, J. Swift. // *Physical Review*. – 1968. – №1. – P. 89–101.
6. Halperin B. A. Scaling laws for dynamic critical Phenoma / B. A. Halperin, P. C. Hohenberg. // *Physical Review*. – 1969. – №2. – P. 952–971.
7. Alekhin A. D. Equations of Critical Viscosity and Limits of their Application / A. Alekhin // *Ukrainian Journal of Physics*. – 2004. – №2. – P. 138–140.
8. Fixman M. Absorption and Dispersion of Sound in Critical Mixtures / M. Fixman. // *J. Chem. Phys.* – 1962. – №36. – P. 3123–3128.
9. Гиршфельдер Д. Молекулярная теория газов и жидкостей / Д. Гиршфельдер, Ч. Кертис, Р. Берд. – Москва: Изд. иностранной лит-ры, 1961. – 930 с.
10. Паташинский А. З. Флуктуационная теория фазовых переходов / А. З. Паташинский, В. Л. Покровский. – Москва: Наука, 1982. – 382 с. – (2-е изд., перераб.).
11. Стенли Г. Фазовые переходы и критические явления / Г. Стенли. – Москва: Мир, 1973. – 419 с.
12. Концентрационная зависимость вязкости раствора изомасляная кислота-вода на границе раздела фаз и критической изотерме / А. Д. Алехин, Б. Ж. Абдикаримов, Ю. Л. Остапчук та ін. // Доклады Академии наук Республики Казакстан. – 2013. – №4. – С. 65–73.
13. Alekhin A. D. Behavior of the Viscosity of Liquid Systems near the Critical Temperature of Stratification / A. D. Alekhin, O. I. Bilous. // *Ukr. J. Phys.* – 2007. – №8. – P. 793–797.
14. Oleinikova A. Viscosity anomaly near the lower critical consolute point / A. Oleinikova, B. Bulavin, V. Pipich. // *International Journal of Thermophysics*. – 1999. – №3. – P. 889–898.
15. Viscosity of liquid In-Se-Tl alloys in the miscibility gap region / Y. Plevachuk, V. Sklyarchuk, O. Alekhin, L. Bulavin. // *Journal of Alloys and Compounds*. – 2008. – №1. – P. 174–177.
2. GORBATII Y.E., BONDARENKO G.V. (2007) Supercritical water. *Supercritical Fluids: Theory and Practice*. 2 (2). p. 5-19.
3. ZALEPUGIN D. Yu., TILKUNOVA N. A., CHERNYSHOV I. A., POLYAKOV V. S. (2006) The development of technologies based on the use of supercritical fluids. *Supercritical Fluids: Theory and Practice* 1 (1). p. 27-51.
4. ANISIMOV M. A. (1987) *Critical phenomena in liquids and liquid crystals*. Moskva: Nauka.
5. KADANOFF L., SWIFT J. (1968) Transport coefficients near the liquid-gas critical point. *Physical Review*. 166 (1). p. 89-101.
6. HALPERIN B. A., HOHENBERG P. C. (1969) Scaling laws for dynamic critical Phenoma. *Physical Review* 177 (2). p. 952-971.
7. ALEKHIN A. D. (2004) Equations of Critical Viscosity and Limits of their Application. *Ukrainian Journal of Physics*. 49 (2). p. 138-140.
8. FIXMAN M. (1962) Absorption and Dispersion of Sound in Critical Mixtures *J. Chem. Phys.* 36. p. 3123-3128.
9. HIRSCHFELDER D., CURTIS C., BYRD R. (1961) *The molecular theory of gases and liquids*. Moscow: Izd. Foreign Lit-ry.
10. PATASHINSKII A. Z., POKROVSKY V. L. (1982) *Fluctuation theory of phase transitions*. Moscow: Nauka.
11. STANLEY G. (1973) *Phase transitions and critical phenomena*. Moscow: Mir.
12. ALEKHIN A. D., ABDIKARIMOV B. J., OSTAPCHUK YU. L., RUDNIKOV E. G., VOITESHENKO A. V. (2013) Concentration dependence of the viscosity of the solution isobutyric acid-water interfacial and critical isotherm. *Reports of the Academy of Sciences of the Republic of Kazakstan*. 4. p. 65-73.
13. ALEKHIN A.D., BILOUS O.I. (2007) Behavior of the Viscosity of Liquid Systems near the Critical Temperature of Stratification. *Ukr. J. Phys.* 52 (8). p. 793-797.
14. OLENIKOVA A., BULAVIN L., PIPICH V. (1999) Viscosity anomaly near the lower critical consolute point. *International Journal of Thermophysics*. 20 (3). p. 889-898.
15. PLEVACHUK YU., SKLYARCHUK V., ALEKHIN O., BULAVIN L. (2008) Viscosity of liquid In-Se-Tl alloys in the miscibility gap region. *Journal of Alloys and Compounds*. 452 (1). p. 174-177.

Надійшла до редколегії 25.12.15

УДК 541.64: 539.2: 536.41

Вергун Л.Ю. к.ф.-м.н., н.с.

Особенности зсувной пружности липидных систем при низких температурах

Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 01601, м. Київ, вул.
Володимирська 64/13,
e-mail: vergunliena@rambler.ru

L.Yu. Vergun, PhD, Sci. Res.

The Peculiarities of Shear Elasticity of the Lipid Systems at Low Temperatures

Taras Shevchenko National University of Kyiv,
01601, Kyiv, Volodymyrska st. 64/13,
e-mail: vergunliena@rambler.ru

Розглядається питання щодо причин деструкції біологічної тканини під дією низьких температур. Врахована роль клітинних мембран в цьому процесі. Експериментально досліджена температурна залежність комплексного модуля зсуву та теплоємності модельної системи (суміші триацилгліцеридів) в інтервалі температур 250-290K. Встановлено існування в цьому інтервалі температур трьох фазових переходів – рекристалізації, передплавлення та плавлення. Запропоновано гіпотезу щодо участі у процесі передплавлення специфічних дефектів – супервакансій.

Ключові слова: криоконсервація, модуль зсуву, супервакансія.

A question about reasons of the biological tissue destruction under the action of low temperatures is examined. The changing of structure connects with inner strains. A considerable role of the cells membranes is taken into account. The biphasic system with solid and liquid phases is studied by the torsion pendulum. The model system as mixture of triacylglycerids is used. The temperature dependence of the complex shear modulus and heat capacity of this system are experimentally investigated in the temperature range of 250-290K. This temperature range is the range of enzymatic activity of cell. The existence of three phase transitions, namely, recrystallization, pre-melting and melting, in this temperature rang is set. All phase transitions for oleic acid are reffered. A hypothesis about the participation in the pre-melting process of the specific defects (supervacancies) is offered. At low temperature the monolayer of biological membrane contains large number of supervacancies. The supervacancies together with narrow pores act to weaken the membrane. Such acting is the reason of destruction of the biological tissue during cryoconservation.

Key Words: cryoconservation, shear modulus, supervacancy.

Статтю представив академік НАН України, д.ф.-м.н., проф. Булавін Л.А.

Вступ

Як відомо, в сучасній медицині використовуються низькі температури для зберігання біологічної сировини (криоконсервація) [1]. Впродовж дії низьких температур змінюється структура біологічної тканини. Зміна структура при зазначених умовах може бути причиною появи внутрішніх напружень. При достатньо значному рівні останніх відбувається деструкція тканинної структури. Подальше застосування такої біологічної сировини в медичній практиці є недоцільним. На клітинному рівні деструкція біотканин визначається розривом мембран [1].

Основу біологічної мембрани, як відомо, складає ліпідний бішар [2]. Виникнення тріщин в ліпідному бішарі визначається його деформаційними та механічними властивостями [1]. Однак, вивчати ці властивості безпосередньо на окремій мембрані ускладнено малою кількістю речовини. Зважаючи на цю обставину, пропонується використовувати модельні системи [3]. Однією з таких модельних

систем для вивчення триацилгліцеролів, що є основною ліпідних бішарів біологічної мембрани, можуть слугувати триацилгліцериди. [4].

В даній роботі, зважаючи на наведені рекомендації, викладені результати експериментальних досліджень щодо деформаційних та теплових властивостей триацилгліцеридів. Як відомо, властивості ліпідного бішару суттєво змінюються в області, що визначається протіканням фазового переходу, на протязі якого відбувається перехід ліпідної мембрани із твердого стану, що відповідає фазі із значним вмістом впорядковано розташованих молекулярних одиниць, в рідкий стан – фазу, яка характеризується наявністю впорядкованих і переплутаних областей [5]. Зміна співвідношення між «твердою» та «рідкою» фазами, як відомо [див. наприклад 6] пропорційна зсувові. Виходячи з вищевикладеного в даній роботі головна задача полягала у дослідженні теплових і деформаційних властивостей в околі температурної області, де

імовірно можуть відбуватись фазові перетворення модельної ліпідної системи. Зміна величини крутильних коливань досліджуваного зразка, як відомо, пов'язано із зміною його жорсткості.

Методика експерименту

Модельна система являла собою суміш триацилгліцеридів (олеїнової та лінолевої жирних кислот), які є одними із головних компонентів мембранних ліпідів [7]. Визначення деформаційних властивостей експериментально досліджувалось на крутильному маятнику за методикою [8]. Кювета з досліджуваною речовиною розміщувалась в термоізоляційну камеру і охолоджувалась до температури 250 К – температури початку ферментної активності клітини, що залежить від структури біологічної мембрани [1, 2]. Після охолодження починався процес нагрівання. При кожному новому значенні температури (з кроком 1°C) вимірювалась частота та амплітуда коливань маятника. На рис. 1. зображено розміщення закріпленої кювети в термоізоляційну камеру.



Рис. 1. Розміщення кювети в термоізоляційній камері

За методикою, викладеною в роботі [8], в'язкопружні характеристики визначаються для речовин, що являють собою двохфазні конденсовані системи. Основними параметрами, що характеризують стан об'єкту дослідження, є дійсна G' та уявна частина G'' комплексного модуля зсуву G^* в температурній області протікання імовірного фазового переходу. Визначення теплоємності модельної системи провадилось за допомогою динамічного калориметра із швидкістю нагрівання 4К/ хв. Принцип дії такого калориметра наведено в роботі [див., наприклад 9].

Результати експерименту та їх обговорення

На рис. 2 наведено температурну залежність дійсної частини модуля зсуву $G'(T)$ модельної системи. На рис. 3 наведено температурну залежність уявної частини модуля зсуву $G''(T)$ модельної системи. На

рис. 4 наведено температурну залежність питомої теплоємності $c_p(T)$ модельної системи.

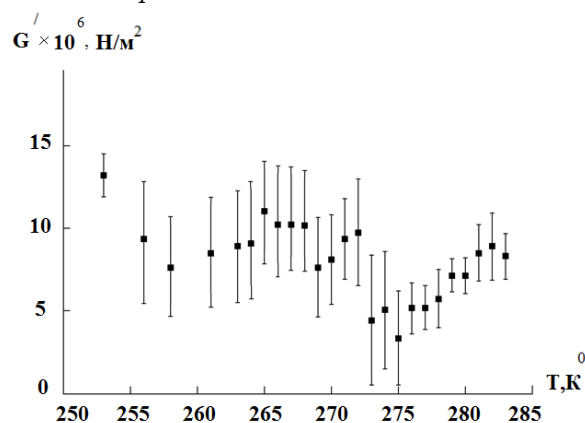


Рис. 2. Залежність $G'(T)$.

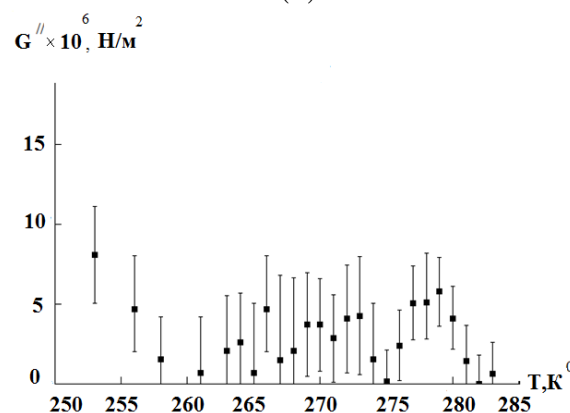


Рис. 3. Залежність $G''(T)$.

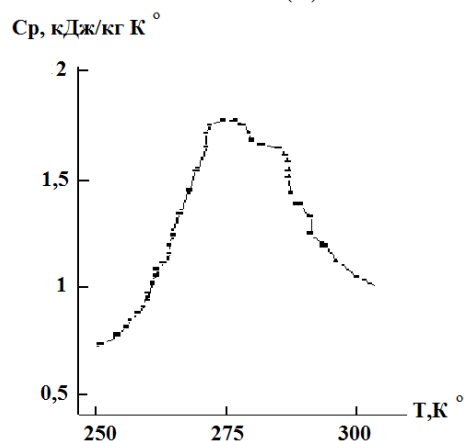


Рис. 4. Температурна залежність питомої теплоємності $c_p(T)$.

Як видно з рис. 2 до температури 272 К° модуль G' практично не змінюється в межах точності вимірів. Надалі, його величина суттєво зменшується до температури мінімуму, що дорівнює 275К°. Після цієї температури модуль G' починає зростати до 282К° і , знову зменшується. Відомо, що із збільшенням температури величина G' , як правило, повинна

зменшуватись. Зростання модуля із збільшенням температури є аномалією.

Таке аномальне зростання модуля в інтервалі 275K°-282K° може бути пов'язане тільки з тим, що в системі виникає структура, жорсткість якої більша за жорсткість початкової структури. Виникнення такої структури може відбутись за рахунок процесу рекристалізації [10]. При цьому швидкість охолодження виявилась настільки швидкою, що процес кристалізації при охолодженні не зміг завершитись. Як відомо, температура плавлення лінолевої кислоти складає 268K° [11]. Істотно, що спостережений процес рекристалізації можна віднести до цієї складової суміші. Таким чином, спостережений процес можна віднести до рекристалізації олеїнової кислоти.

З рис. 3 можна встановити наявність максимуму G'' в точці 278 K°. Температура плавлення олеїнової кислоти складає за довідковими даними 286 K° [12]. Відповідно до цього, спостережений максимум не пов'язаний із процесом плавлення цієї кислоти. З роботи [13] відомо, що процесу плавлення повинен передувати процес передплавлення. Це дозволяє стверджувати, що спостережений пік G'' пов'язаний із передплавленням. Наявність процесу передплавлення підтверджується також наявністю подвійного максимуму на температурній залежності питомої теплоємності. (рис. 4). Високотемпературний максимум спостерігається при 286 K°. Зважаючи на цю величину, максимум при 286K° відповідає плавленню. Низькотемпературний максимум в околі температури плавлення прийнято відносити до процесу передплавлення. Як видно з рис. 4 його температура складає 276K°. Враховуючи точність вимірювання можна стверджувати про те, що температура низькотемпературного максимуму G' та питомої теплоємності c_p співпадають. Таким чином спостережений максимум G'' на рис.3 відповідає передплавленню олеїнової кислоти.

В роботах [14,15] було зазначено, що в околі точки плавлення відбувається перехід в деяку мезоморфну фазу. Ця фаза являє собою ґратку, яка містить специфічні дефекти супервакансії, що заповнені неупорядкованим матеріалом. Механізм утворення таких дефектів для модельної системи триацилгліцеридів розглядався в роботі [15]. Виникнення порожнин є причиною збільшення рухливості молекул і, відповідно, до розпорядкування системи. Система починає готуватися до плавлення, а тому логічно ототожнити зазначений фазовий перехід з процесом передплавлення. Оскільки молекулярна структура дослідженої модельної системи аналогічна молекулярній структурі ліпідного бішару, то логічно припустити, що типові дефекти повинні виникати також і ліпідному бішарі.

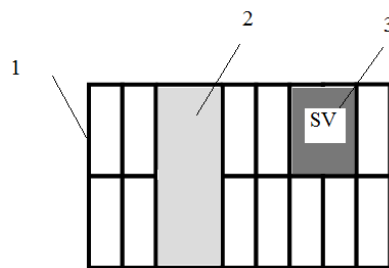


Рис. 5. Співіснування дефектів – наскрізних пор та супервакансій в ліпідному бішарі.

Прийнято стверджувати, що однією із причин розриву біологічної мембрани при термообробці є наявність структурних дефектів (наскрізних пор) в бішарі [16]. Зважаючи на можливість існування супервакансій, схематично ліпідний бішар можна зобразити на рис. 5, де цифрою «1» позначено ліпідний бішар, цифрою «2» - наскрізну пору, цифрою «3» - супервакансію (SV). Наявність останніх також послаблює мембрану і, відповідно, є внеском в деструкцію тканини. Проведений експеримент вказав на швидке переохолодження мезоморфної фази. Приймаючи до уваги цей факт, можна припустити, що швидко охолоджена суміш жирних кислот повинна містити велику кількість супервакансій. Можливо, подібна ситуація зберігається і у випадку біологічних мембран. При низьких температурах моношар біологічної мембрани повинен містити значну кількість супервакансій. Таким чином нерегульоване охолодження біотканин є причиною зберігання значної кількості супервакансій в структурі, збільшуючи імовірність розриву біотканини.

Висновки

За результатами досліджень температурної залежності комплексного модуля зсуву та теплоємності триацилгліцеридів в інтервалі температур 250-290 K було встановлено існування в цьому інтервалі температур трьох фазових переходів, а саме, рекристалізації, передплавлення та плавлення. Всі зазначені переходи відносяться до зміни структури олеїнової кислоти. Запропоновано гіпотезу щодо участі специфічних дефектів «супервакансій» в процесі передплавлення. Зважаючи на те, що триацилгліцероли відносяться до класу ліпідів, можна припустити, що подібні дефекти повинні існувати в ліпідному бішарі біологічних мембран. Поряд із наскрізними порами такі дефекти послаблюють мембрану і є причиною розриву біоткан при кріоконсервації.

Список використаних джерел

1. Bakhach J. The cryopreservation of composite tissues/ J. Bakhach// *Organogenesis*.- 2009.-5(3).-P.119–126.
2. Spector A. Membrane lipid composition and cellular function/ A.A.Spector, M.A.Yorek// *The Journal of Lipid Research*.-1985.-26.-P.1015-1035.
3. De Gennes P. G. The Physics of Liquid Crystals- Oxford: Clarendon Press, 1974.-400p.
4. Sum K. Predictive Molecular Model for the Thermodynamic and Transport Properties of Triacylglycerols/ K. Sum, M. J. Bidy, J. J. de Pablo, and M. J. Tupy// *J. Phys. Chem. B*.-2003.-107.-P.14443-14451.
5. Nagle J.F. Theory of the Main Lipid Bilayer Phase Transition/John F.Nagle// *Ann. Rev. Phys. Chem.*-1989.-31.-P.157-196.
6. Darsono N. Rheological Study of the Solidification of Photopolymer and Dispersed Nanotube Systems/ N. Darsono, H. Mizunuma, H. Obara// *Applied Rheology*.-2011.-21(6).-P.63566-63581.
7. Prades J. Effects of unsaturated fatty acids and triacylglycerols on phosphatidylethanolamine membrane structure/ J.Prades, S.Funari, P.V. Escribá, F. Barceló// *Journal of Lipid Research*.-2003.-44.-P.1720-1727.
8. Bulavin L.A. Method for determining the rheological characteristics of consistent liquid/ L.A. Bulavin, O.Yu. Aktan, T.Yu. Nikolaenko, Yu.F.Zabashta // *Ukraine Patent* .-2007.-№ 78094.
9. Garden J.-L. Macroscopic non-equilibrium thermodynamics in dynamic calorimetry/ J.-L.Garden// *Therochimica Acta*.-2007.- 452(2).-P.85-105.
10. Arudi R.L. Purification of oleic acid and linoleic acid/ Ravindra L. Arudi, Mark W.Sutherland, Benon H.J.Bielski// *J.Lipid Research*.-1983.-24(4).-P.458-488.
11. Markley K.S. Fatty Acids-New York: Interscience Publishers,1960.-714p.
12. Ferreira F. Dielectric Properties of Oleic Acid in Liquid Phase/ Francisco Ferreira de Sousa, Sanclayton G.C. Moreira, Shirrsley J.dos Santos da Silva, Jordan Del Nero, Petrus Alcantara// *Journal of Bionanoscience*.-2010.-3.-P.1-4.
13. Ubbelohde A.R. Melting and Crystal Structure-Oxford: Clarendon Press,1965.-307p.
14. Bulavin L.A. Anisotropic and Isotropic Phases in Polymer Melts/ L.A.Bulavin, O.Yu.Aktan, Yu.F.Zabashta// *Journal of Molecular Liquids*.-2005.-120.-P.139-141.
15. Bulavin L.A. The mechanism of melting of lamellar crystals with the branched chains/ L.A.Bulavin, O.Yu.Aktan, M.M.Lazarenko// *Ukrainian Journal of Physics*.-2005.-50(9).-P.952-957.
16. Notman R. The Permeability Enhancing Mechanism Of DMSO in Ceramide Bilayers Simulated by Molecular Dynamics/ R.Nortman, W.K. den Otter, M. G.Noro, W.J.Briels, J.Anwar// *Biophys.J.*-2007.-93(6).-P.2056-2068.

References

1. BAKHACH, J.(2009) The cryopreservation of composite tissues. *Organogenesis*.5(3).p.119–126.
2. SPECTOR, A. & YOREK, M.A. (1985) Membrane lipid composition and cellular. *The Journal of Lipid Research*.26.p.1015-1035.
3. DE GENNES, P.G. (1974). *The Physics of Liquid Crystals*.Oxford: Clarendon Press.
4. SUM, K., BIDDY, M.J., DE PABLO, J.J. & TUPY, M.J. (2003) Predictive Molecular Model for the Thermodynamic and Transport Properties of Triacylglycerols. *J. Phys. Chem. B*.107.p.14443-14451.
5. NAGLE, J.F. (1989) Theory of the Main Lipid Bilayer Phase Transition. *Ann. Rev. Phys. Chem.*31.p.157-196.
6. DARSONO, N., MIZUNUMA, H. & OBARA, H. (2011) Rheological Study of the Solidification of Photopolymer and Dispersed Nanotube Systems. *Applied Rheology*.21(6).p.63566-63581.
7. PRADES, J., FUNARI, S., ESCRIBÁ, P.V. & BARSELÓ, F. (2003) Effects of unsaturated fatty acids and triacylglycerols on phosphatidylethanolamine membrane structure. *Journal of Lipid Research*. 44.p.1720-1727.
8. BULAVIN, L.A., AKTAN, O.Yu., NIKOLAENKO, T.Yu. & ZABASHTA, Yu.F. (2007) Method for determining the rheological characteristics of consistent liquid. *Ukraine Patent*. № 78094.
9. GARDEN, J.-L.(2007) Macroscopic non-equilibrium thermodynamics in dynamic calorimetry. *Therochimica Acta*. 452(2). p.85-105.
10. ARUDI, R.L. SUTHERLAND, M.W., BIELSKI, B.H.J. (1983) Purification of oleic acid and linoleic acid. *J.Lipid Research*.24(4). p.458-488.
11. MARKLEY, K.S.(1960). *Fatty Acids*. New York: Interscience Publishers.
12. FERREIRA DE SOUSA, F., MOREIRA, S.G.C., DOS SANTOS DA SILVA, S.J., DEL NERO, J. & ALCANTARA, P. (2010) Dielectric Properties of Oleic Acid in Liquid Phase. *Journal of Bionanoscience*. 3.p.1-4.
13. UBBELHODE, A.R. (1965). *Melting and Crystal Structure*. Oxford: Clarendon Press.
14. BULAVIN, L.A., AKTAN, O.Yu. & ZABASHTA, Yu.F. (2005) Anisotropic and Isotropic Phases in Polymer Melts. *Journal of Molecular Liquids*.120.p.139-141.
15. BULAVIN, L.A., AKTAN, O.Yu. & LAZARENKO, M.M. (2005).The mechanism of melting of lamellar crystals with the branched chains. *Ukrainian Journal of Physics*. 50(9). p.952-957.
16. NOTMAN, R., DEN OTTER, W.K., NORO, M.G., BRIELS, W.J. & ANWAR, J. (2007). The Permeability Enhancing Mechanism Of DMSO in Ceramide Bilayers Simulated by Molecular Dynamics. *Biophys. J.* 93(6). p.2056-2068.

Надійшла до редколегії 20.03.15

УДК 539

Лень Т. А.¹, к.ф.-м.н.
Овсієнко І. В.², к.ф.-м.н.
Мацуї Л. Ю.³, д.ф.-м.н., с.н.с.

T.A. Len¹, PhD
I. V. Ovsienko², PhD
L. Y. Matzui³, Dr. Sci., Sen. Sci. Res.

Отримання графеноподібних структур хімічним методом

Getting graphenelike structures by chemical method

^{1, 2, 3}Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 01601, м. Київ, вул.
Володимирська 64/13,
e-mail: talen148@gmail.com

^{1,2,3}Taras Shevchenko National University of Kyiv,
01601, Kyiv, Volodymyrska st. 64/13,
e-mail: talen148@gmail.com

В роботі наведено результати експериментальних досліджень структури вуглецевих нанотрубок та графену. За даними електронно-мікроскопічних досліджень показана можливість отримання шарів графену шляхом термохімічної дії на нановуглецевий матеріал, що містить вуглецеві нанотрубки та терморозширений графіт.

Ключові слова: вуглецеві нанотрубки, графен, наноматеріал, термохімічна обробка, терморозширений графіт.

Paper present the results of the experimental investigations of structure carbon nanotubes and graphene. It is shown from the electron- transmission microscope research the possibility of obtaining graphenelike structures by thermochemical treatment of nanocarbon material containing carbon nanotubes and thermoexfoliated graphite. X-ray diffraction and transmission electron microscopy were carried out studies of the structure and phase composition of carbon nanotubes and thermoexfolited graphite before and after chemical treatment. Carbon nanotubes are not observed after exposure to chemical treatment of them. After chemical treatment observed individual graphene plane. Carbon nanotubes walls were destroyed by the action of acid and formed graphenelike material. For samples functionalization thermoexfoliated graphite obtained using a mixture of nitric and sulfuric acids without boiling the size of particles is directly dependent on the time of re-dispersing magnetic mixer. Structure of particles functionalization thermoexfoliated graphite significantly depends on functionalization substance and on time dispersion.

Key Words: carbon nanotubes, grapheme, nanomaterial, thermochemical treatment, thermoexfoliated graphite

Статтю представив: член-кор. НАН України, д.ф.-м.н., проф. Макара В.А.

Вступ

Відкриття вуглецевих нанотрубок (ВНТ) [1] і створення на їхній основі наноматеріалів із незвичними комплексом властивостей [2-4] стимулювали численні теоретичні і експериментальні роботи [5-6] пошуку і отриманню можливих аналогів [7-9] на основі інших речовин і неорганічних з'єднань [10-12]. Одним із таких наноматеріалів є графен. Графен можна уявити як складову частину графіту, ВНТ та інших вуглецевих матеріалів.

Графен – це графітова площа, у якій sp^2 – гібридизовані атоми вуглецю утворюють гексагональну решітку.

В наш час дослідження графену не обмежуються лише одношаровими зразками, інтерес представляють також структури, які

містять два і більше (до 10) графенових шарів. Значний інтерес до дослідження графену пов'язаний з його унікальними властивостями: електронними, механічними, електричними та ін. Отже, графен розглядають як основу майбутньої наноелектроніки. Існує декілька методів отримання графену [12 - 14], а саме:

- а) отримання графена із природного графіту;
- б) отримання графена із терморозширеного графіту (ТРГ);
- в) отримання графену відновленням оксиду графіту;
- г) отримання графену із інтеркальованих сполук графіту (ІСГ);
- д) отримання графену розвертанням ВНТ (рис. 1);
- е) отримання графену іншими хімічними методами.

Найбільш важливим питанням при отриманні графена залишається можливість контролю та тонкого регулювання властивостей синтезованих графенів – їхньої дефектності, розмірів, вмісту функціональних груп. Актуальною задачею залишається розробка нових та вдосконалення існуючих методів отримання графену. Метою

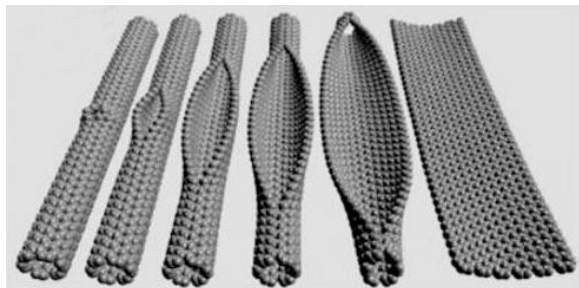


Рис. 1. Отримання графенових нанострічок із ВНТ – поступове розгортання стінки ВНТ із утворенням нанострічки [15].

роботи було отримання графеноподібних структур методом хімічної обробки нановуглецевих структур.

Експериментальні результати та їх обговорення

В даній роботі як початковий матеріал для отримання графеноподібних структур використовувались ВНТ та ТРГ. ВНТ були отримані фірмою Carbolex inc. електродуговим методом з використанням Ni в якості каталізатора. Методами рентгенівської дифракції і просвічуючої електронної мікроскопії (ПЕМ) були проведені дослідження структури та фазового складу ВНТ. На рис. 2 та рис. 3 наведені результати рентгенографічних та електронно-мікроскопічних досліджень зразків ВНТ.

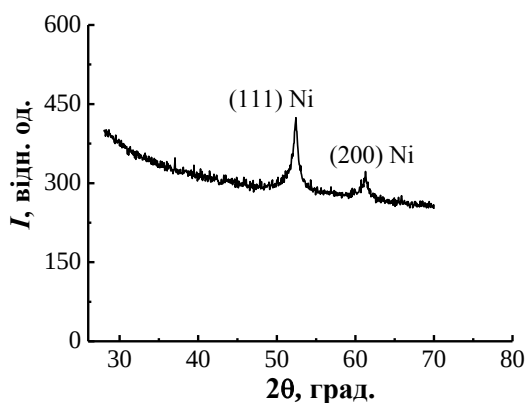


Рис. 2. Фрагмент дифрактограми зразка ВНТ.

Як видно з рис. 2, дифрактограма необробленого зразка не містить рефлексів, що відповідають відбиттям від графітових площин. На дифрактограмі присутні лише дифракційні максимуми каталізатора. Відсутність графітових рефлексів вказує на те, що даний матеріал містить тільки одностінні ВНТ.

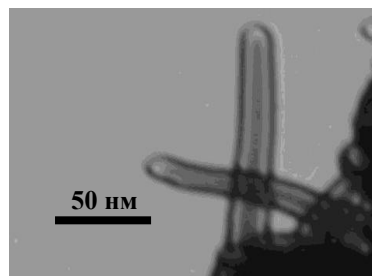


Рис. 3. Електронно-мікроскопічне зображення зразка початкових ВНТ.

У необробленому зразку спостерігаються ВНТ, які мають правильну циліндричну форму з відкритими кінцями (рис. 3). Діаметр окремих

ВНТ складає 6-9 нм та 15 нм, середня довжина ВНТ 20-100 нм. ВНТ такого діаметру мають товщину стінки ВНТ 1,5÷4,5 нм і відповідно містять 2-3 вуглецеві шари, тобто належать до так званих ВНТ з невеликою кількістю шарів. ВНТ мають вигнуту форму, що свідчить про дефекти на поверхні стінок ВНТ.

Іншим матеріалом, який використовувався для отримання графеноподібних структур був ТРГ. Як відомо, ТРГ, який отримують з ІСГ методом термоудару, має пухку комірчасту структуру (рис. 4). Товщина стінок комірок ТРГ складає, в середньому, 10 ÷ 15 нм.

Для отримання графеноподібних структур були запропоновані методи, які включають термохімічну та механічну обробку необроблених вуглецевих матеріалів. Основні етапи обробки наведені в таблиці 1.

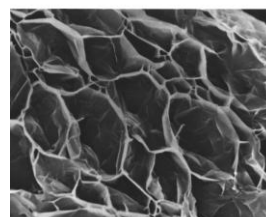


Рис. 4. Електронно-мікроскопічне зображення ТРГ, отриманого з ІСГ

Таблиця 1

Методи обробки ВНТ та функціоналізації ТРГ

№	Матеріал	Хімічна обробка	Термообробка	Механічна обробка
Зразок 1	ВНТ	Азотна кислота	Кип'ятіння 2 години	-
Зразок 2	ТРГ	сумішшю кислот сірчаної та азотної (відношення об'ємів кислот 1:3)	Без кип'ятіння	Магнітна мішалка 1 година
Зразок 3	ТРГ	сумішшю кислот сірчаної та азотної (відношення об'ємів кислот 1:3)	Кип'ятіння 1 година	Магнітна мішалка 1 година + 20 годин.

На рис. 5 наведений типовий фрагмент ПЕМ-зображення ВНТ після хімічної обробки. Як видно з рисунку, спостерігаються окремі графенові площини, ВНТ не спостерігаються взагалі. Очевидно, внаслідок дії кислоти стінки ВНТ були зруйновані в місцях дефектів й утворився графеноподібний наноматеріал.

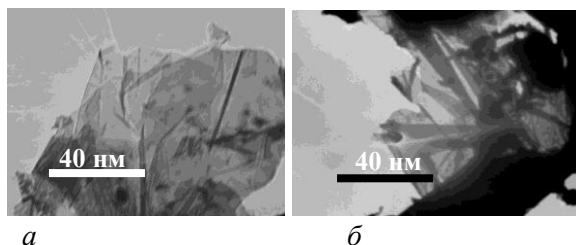


Рис. 5. Електронно-мікроскопічні зображення графену: *a* та *б* різні ділянки зразка ВНТ після хімічної обробки.

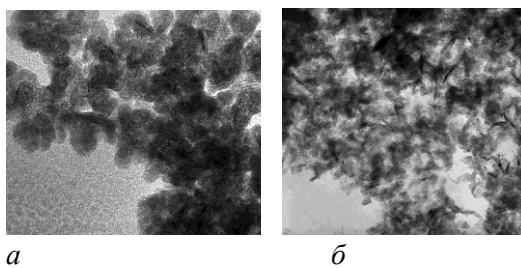


Рис. 6 Фрагмент ПЕМ зображення графеноподібних частинок: *a* - зразка 2; *б* - зразка 3.

На рис. 6 наведено фрагмент ПЕМ зображення частинок функціоналізованого ТРГ.

Як видно з рис. 6, дія термохімічної та механічної обробки приводить до повної руйнації комірчастої структури ТРГ. На рисунку 5 *a* (зразок 2) спостерігаються окремі частинки округлої, проте неправильної форми, начебто з

рваними краями, як пелюстки квітів, розміром 20÷40нм. В частинках ідентифікуються графітові площини, але вони непаралельні між собою, а вигнуті, викривлені по периметру частинок.

На ПЕМ зображенні зразка 3 спостерігаються частинки дещо витягнутої форми з округленими краями розмірами від 1 до 30нм. Дуже добре ідентифікуються графітові шари, які в одних частинках є паралельними, а в інших – хвилястими та викривленими.

В наслідок дії на ТРГ дуже сильних окислювачів спостерігається інтенсивне руйнування π - зв'язків між графітовими шарами, що приводить до розділення черв'якоподібних частинок ТРГ на окремі лусочки.

Висновки

В роботі описано метод отримання графенового наноматеріалу шляхом термохімічної обробки ВНТ та ТРГ. Проведені дослідження змін структурно-фазового складу ВНТ та кінцевого наноматеріалу.

Структура частинок функціоналізованого ТРГ суттєво залежить як від функціоналізуючої речовини, так і від часу диспергування

Для зразків функціоналізованого ТРГ, отриманих з використанням суміші азотної та сірчаної кислот без кип'ятіння розміри частинок прямо залежать від часу повторного диспергування на магнітній мішалці. При малих часах диспергування розміри частинок великі, бічна поверхня частинок не рівна. При збільшенні часу повторного диспергування зменшуються розміри частинок, більш округлою стає форма частинок.

Список використаних джерел

1. Iijima S. Helical microtubules of graphitic carbon / S. Iijima // *Nature*. – 1991. – V. 354. – P. 56–58.
2. Ovsienko I.V. Magnetometric studies of catalyst refuses in nanocarbon materials / I.V. Ovsienko, L.Yu. Matzuy, T.A. Len, N.I. Zakharenko, N.G. Babich, Y.I. Prylutsky, D. Hui, Yu.M. Strzhemechny, P.C. Eklund // *Nanoscale Res. Lett.* – 2008. – V. 3. – P. 60-64.
3. Ovsienko I. Transport properties of carbon nanotube-metal nanocomposites / I. Ovsienko, T. Len, L. Matzui, Yu. Prylutsky, P. Eklund, F. Normand, U. Ritter, P. Scharff // *Physica E*. – 2007. – V. 37, № 1-2 – P. 78-80.
4. Matzui L.Yu. Transport properties of carbon nanotubes-based composite / L.Yu. Matzui, I.V. Ovsienko, T.A. Len, Yu.I. Prylutsky, P. Scharff // *Fullerenes, Nanotubes and Carbon Nanostructures*. – 2005. – V. 13, Supplement 1 – P. 259-265.
5. Ovsienko I.V. The effect of thermal and chemical treatment on the structural and phase composition of nanocarbon materials / I. Ovsienko, T. Len, L. Matzui, Yu. Prylutsky // *Material science and engineering C*. – 2006. – V. 26, P. 1180-1184.
6. Лень Т. Дія термохімічної обробки на структурно-фазові перетворення в нановуглецевому матеріалі / Т. Лень, І. Овсієнко, Л. Мацуй, А. Брусиловець // *Фізика і хімія твердого тіла*. – 2005. – т. 6, №4. – С. 680-684.
7. Лозовик Ю.Е. Образование и рост углеродных наноструктур – фуллеренов, наночастиц, нанотрубок и конусов / Ю.Е. Лозовик, А.М. Попов // *Успехи физ. Наук*, 1997, т. 167, № 7. – С.751–774.
8. Ивановский А.Л. Моделирование нанотрубярных форм вещества / А.Л. Ивановский // *Успехи химии*. 1999, т. 68, № 2. – С.119–135.
9. Раков Э.Г. Пиролитический синтез углеродных нанотрубок и нановолокон / Э.Г. Раков // *Успехи химии*. 2001, т. 70. – С.934–973.
10. Tenne R. Inorganic nanoclusters with fullerene-like structure and nanotubes / R. Tenne // *Progr. Inorg. Chem.* 2001, v. 50. – P.269–315.
11. Sano N. Synthesis of carbon onions in water / N. Sano, H. Wang // *Nature*. 2001, v. 414, № 29. – P. 506–507.
12. Грайфер Е.Д. Графен: химические подходы к синтезу и модифицированию / Е.Д. Грайфер, В.Г. Макотченко, А.С. Назаров, В.Е. Федоров // *Успехи химии* 2011, т. 80, №8. – с. 784-804.
13. Hernandez Y. High-yield production of graphene by liquid-phase exfoliation of graphite / Y. Hernandez, V. Nicolosi, M. Lotya, et al. // *Nat. Nanotechnol.* – 2008. – v3, – №9. – P. 563-568.
14. Qian W. Solvothermal-Assisted Exfoliation Process to Produce Graphene with High Yield and High Quality / W. Qian, R. Hao, Y. Hou, Y. Tian // *Nano Res.* 2009, v. 2. – С. 706-712.
15. Kosynkin D.V. Improved synthesis of graphene oxide / D.V. Kosynkin, A.L. Higginbotham, A. Sinitskii, J.R. Lomeda, A. Dimiev, B.K. Price // *Nature*. – 2009. – V. 458. – P. 872–876.

References

1. IJIMA, S. (1991) Helical microtubules of graphitic carbon. // *Nature*. 354. p. 56–58.
2. OVSIENKO, I.V., MATZUI, L.YU. et al. (2008) Magnetometric studies of catalyst refuses in nanocarbon materials // *Nanoscale Res. Lett.* 3. p. 60-64.
3. OVSIENKO, I.V., LEN, T.A. et al. (2007) Transport properties of carbon nanotube-metal nanocomposites // *Physica E*. 37(1). p. 78-80.
4. MATZUI, L.YU., OVSIENKO, I.V. et al. (2005) Transport properties of carbon nanotubes-based composite // *Fullerenes, Nanotubes and Carbon Nanostructures*. 13(1). p. 259-265.
5. OVSIENKO, I.V., LEN, T.A. et al. (2006) The effect of thermal and chemical treatment on the structural and phase composition of nanocarbon materials // *Material science and engineering C*. 26. p. 1180-1184.
6. LEN, T.A., OVSIENKO, I.V. et al. (2005) Exposure the thermochemical treatment on structurally phase transformations in nanocarbon materials // *Physics and Chemistry of Solid State*. 6(4). p. 680-684.
7. LOZOVIK, Yu. E., POPOV, A.M. (1997) Formation and growth of carbon nanostructures - fullerenes, nanoparticles, nanotubes and cones // *Usp. Physics Sciences*. 167(7). p. 751-774.
8. IVANOVSKY, A.L. (1999) Modeling nanotube forms of the substance // *Usp. Chemistry*. 68(2). p. 119-135.
9. RAKOV, E.G. (2001) Pyrolytic synthesis of carbon nanotubes and nanofibers // *Usp. Chemistry*. 70. p. 934-973.
10. TENNE, R. (2001) Inorganic nanoclusters with fullerene-like structure and nanotubes // *Progr. Inorg. Chem.* 50. p. 269–315.
11. SANO, N., WANG, H. (2001) Synthesis of carbon onions in water // *Nature*. 414(29). p. 506–507.
12. GRAIFER, E.D., MAKOTCHENKO, E.G. et al. (2011) Graphene: chemical approaches to the synthesis and modification // *Usp. Chemistry*. 80(8). p. 784-804.
13. HERNANDEZ, Y., NICOLOSI, V. et al. (2008) High-yield production of graphene by liquid-phase exfoliation of graphite // *Nat. Nanotechnol.* 3(9). p. 563-568.
14. QIAN, W., HAO, R. et al. (2009) Solvothermal-Assisted Exfoliation Process to Produce Graphene with High Yield and High Quality // *Nano Res.* 2. p. 706-712.
15. KOSYNKIN, D.V., HIGGINBOTHAM, A.L. (2009) Improved synthesis of graphene oxide // *Nature*. 458. p. 872–876.

Надійшла до редколегії 12.12.2014

УДК 532.78

Лисенко О.Б.¹, д.ф.-м.н., доцент
Лисенко О.О.², асп.
Калініна Т.В.³, к.ф.-м.н., доцент
Загорулько І.В.⁴, асп.
Козаченко В.В.⁵, к.ф.-м.н., доцент

A.B. Lysenko¹, Dr. Sci
A.A. Lysenko², PhDstud.
T.V. Kalinina³, PhD
I.V. Zagorulko⁴, PhDstud.
V.V. Kozachenko⁵, PhD

**Кінетика кристалізації зони лазерного
оплавлення металів**

**Crystallization kinetics of laser metals
infusion zone**

^{1,2,3,4}Дніпродзержинський державний технічний
університет, 51900, м. Дніпродзержинськ, вул.
Дніпробудівська, 2,
¹e-mail: ablysenko@ukr.net
⁵Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 01601, м. Київ, вул.
Володимирська 64/13, ⁵victorc@univ.kiev.ua

^{1,2,3,4}Dneprodzerzhinsk State Technical University,
51900, Dniprodzerzhinsk, Dniiprostroyvska str., 2
¹e-mail: ablysenko@ukr.net
⁵Taras Shevchenko National University of Kyiv,
01601, Kyiv, Volodymyrskast. 64/13,
⁵e-mail: victorc@univ.kiev.ua

Запропоновано модель кристалізації лазерної ванни, в якій розглядаються конкуруючі механізми росту матричних кристалів від границі оплавлення (g-механізм) та утворення нових кристалів в рідкій частині об'єму (ng-механізм), а також враховується ефект викривлення форми та розмірів ng - кристалів внаслідок їх взаємодії з фронтом g-кристалів, що рухається, та вільною поверхнею оплавленої зони. Отримано кінетичні рівняння, які дозволяють визначити відносні внески x_g та x_{ng} двох механізмів перетворення в загальну частку x закристалізованого об'єму. Показано, що максимальне зниження об'ємної частки ng-кристалів за рахунок їх блокування граничними поверхнями складає 0,42.

Ключові слова: лазерна ванна, кінетика кристалізації, конкуруючі g- та ng-механізми, блокування ng-кристалів поверхнями.

The model of laser bath crystallization which examines the competing mechanisms of the matrix crystals growth from the fusion border (g-mechanism) and the formation of new crystals in the liquid part of the volume (ng-mechanism) has been proposed. The model is based on the following assumptions: g-type crystals acquire a columnar shape and predominant spatial orientation on the direction along the heat sink. They're advancing into the melt in the form of a flat front, parallel to the boundary melting, forming an independent structural zone and the share the crystallized volume x_g . The second mechanism of crystallization is realized in the bath areas free of columnar crystals. It lies in a homogeneous spherical nuclei formation and subsequent isotropic crystal growth. A homogeneously crystallized part of the laser bath consists of three zones: central (I) and two critical, one of which (II) abut on the free surface, and the other (III) – is located along the front of the matrix crystals (FMC). ng-crystals nucleating in the central zone do not reach the surfaces bounding the examined area of the bath and retain full length spherical shape in the growth process. Crystals that arise within critical zones II and III, are experiencing a blocking effect either of the free surface or of moving FMC, thereby fixed in the form of truncated spheres or spherical segments. The total contribution of ng-mechanism to share the converted volume is consist of three components. The shares of crystallized volume formed by two competing mechanisms are related to the fraction of liquid phase persisting in a bath. Within the limits of proponed assumptions the kinetic equations to calculate the value of x_g and x_{ng} are derived. It was shown that the maximum reduction of the ng-crystals volume fraction due to their blocking by boundary surfaces is 0,42.

Key words: laser bath, crystallization kinetics, competing g- and ng-mechanisms, blocking of ng-crystals by surfaces.

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Єжов С.М.

Introduction

The design-theoretical investigations of crystallization processes of metallic materials undergoes the surface melting by laser emission are usually based on the model of matrix crystals sprouting from the melting boundary to the treatment plane [1 – 3]. Within the limits of this approach the impact of technological factors to the characteristic dimensions of the microstructure elements formed at the high-speed crystallization of the laser bath is analyzed [1, 2], as well as the conditions under which the melted surface layers transferred to the amorphous state [3].

At the same time, according to the metallographic studies data [4, 5], under the certain conditions of laser treatment in the cross sections of melted layers two distinct structural zones are revealed: the zone of columnar crystals adjacent to the not-fritted target area, or dendrites which are oriented along the heat-removing direction, and located above it the area of small equiaxed crystals. These results indicate that, in addition to the traditionally analyzed mechanism of the advancement of the front matrix crystals (FMC) in the melt, the hardening of the laser bath can be

realized by the formation of new crystals in the upper horizons of bath located above the FMC.

In works [6 – 8] the model of competitive crystallization of laser infusion zone by means of two co-occurring mechanisms that further will be denoted by the symbol "g" (the mechanism of matrix crystals growth) and "ng" (the mechanism of nucleation and growth of new crystals) has been proposed. The kinetic equations permitting to determine the relative contributions of analyzing mechanisms x_g , x_{ng} in the total amount of crystallizing fraction x has been obtained.

The disadvantage of this approach is that in the calculations of x_{ng} values the effects of the form and size distortion of the new crystallization due to their interaction with the FMC and the free surface of the fused zone are not taken into account. The presented below improved model of laser bath crystallization lacks this disadvantage. It allows obtaining more correct estimates of the relative contributions of g- and ng-mechanisms in the volume fraction that has undergone the transformation.

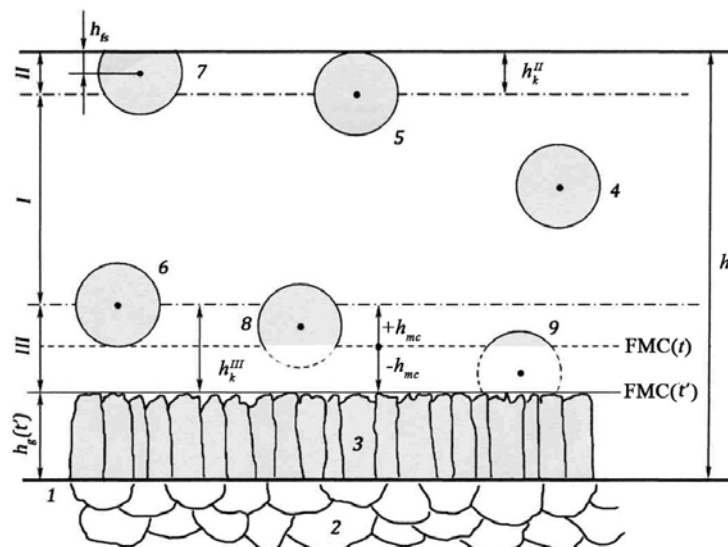


Fig. 1. The crystallization scheme of fused by laser layer: 1 – fusion boundary; 2 – partially fused target crystals; 3 – columnar crystals growing from the fusion boundary; 4 – 9 – the hypothetical spherical crystals forming in the liquid part of the zone which lies over the FMC: 4-6 – the full-sized crystals nucleated at t' in the interior (4) or at the boundaries (5, 6) of the central zone I; 7 – the truncated crystal formed in the time interval $t' - t$ within the limits of near-surface critical zone II; 8, 9 – the crystals arising in the front critical zone III and undergoing the blocking (8) or partial absorption (9) by moving FMC.

Physical assumptions of the model

The essence of the proposed model explains the scheme of competitive laser bath crystallization processes, which reflects the probable results of the interaction of ng -type crystals with surfaces, limiting the volume of fused zone (Fig. 1).

The constructing of the given scheme is based on the following assumptions:

1) The partially melted crystals located on the interface 1 of treated material 2 form the extensive surface where the formation of crystallization centers is facilitated, germinating in the liquid layers of a bath at cooling below the melting point T_m .

2) g -type crystals growing out of these centers acquire dendritic or columnar form and primary spatial orientation along the heat removal direction. They're moving into the melt in the form of a flat front, parallel to the fusion boundary forming the independent structural zone 3 and the crystallized volume fraction x_g .

3) The second mechanism is realized in the crystallization bath sections which are free of columnar crystals. It consists formation of the homogeneous spherical nuclei formation and subsequent isotropic crystal growth.

4) Homogeneously crystallizing part of the laser bath consists of three zones (fig. 1): the central zone (I) and two critical, one of which (II) is adjacent to the free surface, and the other (III) is located along the FMC. The crystals 4 – 6 nucleating in the central zone in the course of growth does not go beyond the surfaces bounding the considered area of baths and retain a full-length spherical form. The crystals 7 – 9 arising inside the critical zones II and III undergo the blocking action of either free surface (7) or moving FMC (8, 9), hereupon they are fixed in the form of truncated spheres (7, 8) or spherical segments (9).

5) The growth rate of columnar and the newly formed spherical crystals is characterized by the effective parameter $u^{eff}(t)$ which is proportional to the volume fraction of the parent phase in the zones I – III lying over the FMC, and is calculated using the expression [6–8]:

$$u^{eff}(t) = \frac{1 - x_g(t) - x_{ng}(t)}{1 - x_g(t)} \cdot u(t), \quad (1)$$

where $u(t)$ is the physical rate of crystal growth depending on the process mechanism and of thermal conditions at the interface.

6) The width of the critical zone II is specified by condition that the crystals nucleated at its boundary at t' (crystal 5 in Fig. 1), in another control moment of time $t > t'$ reach the free surface of the bath, i.e.:

$$h_k^{II}(t', t) = R_k(t') + \int_{t'}^t u^{eff}(t'') dt'', \quad (2)$$

where $R_k(t')$ is the radius of the critical nucleus.

The width of the zone III includes two segments (fig. 1), one of which is equal to the radius of the spherical crystal 6 growing during the time interval $t' - t$, and a the second is equal to the distance which overcomes the FMC for the same period of time.

It is assumed that these distances are equal and, consequently:

$$h_k^{III}(t', t) = 2h_k^{II}(t', t). \quad (3)$$

7) The total contribution of x_{ng} mechanism of new crystals formation in the transformed volume fraction is composed of three components:

$$x_{ng} = x_{ng}^I + x_{ng}^{II} + x_{ng}^{III}, \quad (4)$$

where x_{ng}^I , x_{ng}^{II} , x_{ng}^{III} - a volume fractions of crystals nucleated within the zones I, II and III, respectively.

8) Crystallized volume fractions x_g , x_{ng} forming by means of two competing mechanisms are related with the fraction of liquid phase x_L remaining in the bath by relation:

$$x_g + x_{ng} + x_L = 1. \quad (5)$$

The influence of boundary surfaces of a laser bath on the size and form of ng -type crystals

Within the bounds of considered above assumptions, we derive the kinetic equations $x_g(t)$, $x_{ng}(t)$ taking into account the effects of the interaction of ng -type crystals with a free surface of a laser bath and a moving FMC. Suppose that for some moment of time $t_m < t' < t_k$ (where t_m is the time of the melting temperature achievement T_m ; t_k – time of the crystallization completion) crystals growing from the boundary fusion penetrated deep into the melt at a distance $h_g(t')$ and occupied a volume $V_g(t')$. The increment of volume fraction $dx_g(t')$ occupied by growing matrix crystals, for a small period of time from t' to $t' + dt'$ is:

$$\begin{aligned} dx_g(t') &= (1/V_0) \cdot S_g(t') dh_g(t') = \\ &= (1/V_0) \cdot S_g(t') \cdot u_g^{eff}(t') dt', \end{aligned} \quad (6)$$

where V_0 is initial volume of the bath; $S_g(t')$ is the area of columnar crystals front.

Assuming that the value $S_g(t') = S_g$ is constant, by integration of the expression (6) we obtain:

$$\begin{aligned} x_g(t) &= (1/h_0) \int_{t_m}^t \left[\frac{1 - x_g(t') - x_{ng}(t')}{1 - x_g(t')} \right] \times \\ &\times u_g(t') dt' \end{aligned} \quad (7)$$

where $h_0 = V_0 / S_g$ is an initial depth of laser bath.

Passing to the analysis of the kinetics of ng -type crystals formation, we define the number of crystal nuclei which are formed spontaneously in the liquid part of the observable volume for the elementary time interval dt' :

$$dN(t') = V_0 \cdot x_L(t') \cdot I(t') dt', \quad (8)$$

where $I(t')$ is the nucleation rate.

From the total number of crystallization centers we distinguish three parts proportional to the relative volumes of zones I, II, III in which they arise, and differing by final shape of crystals growing out of them. According to fig. 1 the relative volume of the central zone I is as follows:

$$\begin{aligned} K_I(t', t) &= (h_0 - h_g(t') - h_k^{II}(t', t) - \\ &- h_k^{III}(t', t)) / (h_0 - h_g(t')) = 1 - 3H(t', t). \end{aligned} \quad (9)$$

where h_k^{II} and h_k^{III} is the width of near-surface critical zones II and III defined by the relations (2) and (3);

$$H(t', t) = h_k^{II}(t', t) / (h_0 - h_g(t')). \quad (10)$$

Then the number of crystallization centres arising within the zone I during the time interval dt' can be found using the expression:

$$dN_I(t', t) = K_I(t', t) dN(t'). \quad (11)$$

As agreed above, considered centers in the growth process retains the shape of spherical particles, radius of which $R(t', t)$ is numerically equal to the right side of expression (2). Hence it follows that the increment of crystallized volume caused by the formation of new crystals into the zone I during the interval $t' - t$ is:

$$dV_{ng}^I(t', t) = \frac{4}{3} \pi R^3(t', t) dN_I(t', t). \quad (12)$$

By integrating (12) taking into account the relations (8) – (11) we obtain the volume fraction occupied by the ng -crystals crystals in the central zone at a given time moment t :

$$\begin{aligned} x_{ng}^I(t) &= \frac{4}{3} \pi \int_{t_m}^t [1 - 3H(t', t)] x_L(t') \times \\ &\times I(t') \cdot R^3(t', t) dt' \end{aligned} \quad (13)$$

Next, we consider the second part of the crystals which are formed in the critical zone II with relative volume:

$$K_{II}(t', t) = h_k^{II}(t', t) / (h_0 - h_g(t')) = H(t', t) \quad (14)$$

At a certain time between t' and t these crystals reach the free surface of the fused layer which causes a reduction of their final volume. Quantitatively, this effect can be estimated using the model of a crystal in the form of a truncated sphere (crystal 7 in fig. 1) and the corresponding formula for its volume:

$$\begin{aligned} v_{ng}^{II}(t', t) &= \frac{\pi}{3} \times \\ &\times (2R^3(t', t) + 3R^2(t', t)h_{fs}(t', t) - h_{fs}^3(t', t)) \end{aligned} \quad (15)$$

where $h_{fs}(t', t)$ is the distance from the free surface of the laser bath to the center of crystal, which nucleated at the moment t' in the zone II ($0 \leq h_{fs}(t', t) < h_k^{II}(t', t)$).

Consequently, the increase of the converted volume per elementary time interval dt' related with the formation of truncated spherical crystals in the zone II is determined by the expression (16):

$$dV_{ng}^{II}(t', t) = v_{ng}^{II}(t', t) \cdot K_{II}(t', t) dN(t'). \quad (16)$$

Hence we obtain the expression for the calculation of the crystals contribution of II zone in a fraction of converted volume $x_{ng}(t)$:

$$\begin{aligned} x_{ng}^{II}(t) &= \frac{1}{3} \pi \int_{t_m}^t H(t', t) \cdot x_L(t') \cdot I(t') \times \\ &\times [2R^3(t', t) + 3R^2(t', t)h_{fs}(t', t) - h_{fs}^3(t', t)] dt' \end{aligned} \quad (17)$$

Last, the third part of ng -type crystals nucleates in the critical zone III which is located near the moving front of matrix crystals. As can be seen from fig. 1 the relative volume of this zone is:

$$\begin{aligned} K_{III}(t', t) &= 2h_k^{II}(t', t) / (h_0 - h_g(t')) = \\ &= 2H(t', t) \end{aligned} \quad (18)$$

Number of nuclei formed in the considered zone for the elementary time interval dt' we find from the expression:

$$dN_{III}(t', t) = K_{III}(t', t) dN(t'). \quad (19)$$

The resulting crystal form generating in the zone III is specified by the plane, which corresponds to the position on the FMC in time moment t (fig. 1). During transformation the crystallization centers can arise on either side of this plane.

The crystals nucleating from the side of the moving front are more or less (not less than 50% by volume) absorbed by g -type crystals increasing from the fusion boundary and at the control time moment t they gain the form of a spherical segment projecting over the FMC (crystal 9 on fig.1). The crystals nucleating from the opposite side of the plane FMC (t) with further growth are blocked by moving opposite to front with the result that they acquire the form of truncated sphere (crystal 8 in fig. 1).

Considered above types of ng -crystals interaction with FMK are influenced their final volume which can be defined by the expression:

$$\begin{aligned} v_{ng}^{III}(t', t) &= \frac{\pi}{3} \times \\ &\times [2R^3(t', t) + 3R^2(t', t)h_{mc}(t', t) - h_{mc}^3(t', t)] \end{aligned} \quad (20)$$

where $h_{mc}(t', t)$ is the distance from the nucleation point to the finishing position of the front matrix crystals FMC(t) ($-R(t', t) \leq h_{mc}(t', t) \leq R(t', t)$).

When changing $h_{mc}(t', t)$ from $-R(t', t)$ to 0 the formula (20) gives the segment of sphere volume and at symmetrical change in positive values h_{mc} it gives the volume of a truncated sphere. Knowing the number of crystallization centers arising in the zone III for a small period of time dt' , as well as the volume of crystals growing out of them, by the relations analogous to (16) and (17) we can determine the corresponding increment of the crystallized volume $dV_{ng}^{III}(t', t)$ and the magnitude of contribution of considered crystals $x_{ng}^{III}(t)$ in a total fraction of transformed volume:

$$dV_{ng}^{III}(t',t) = v_{ng}^{III}(t',t) \cdot K_{III}(t',t) dN(t') \quad (21)$$

$$x_{ng}^{III}(t) = \frac{2}{3} \pi \int_{t_m}^t H(t',t) \cdot x_L(t') \cdot I(t') \times \\ \times [2R^3(t',t) + 3R^2(t',t)h_{mc}(t',t) - h_{mc}^3(t',t)] dt' \quad (22)$$

As it can be seen the obtained kinetic equations (16) and (21) contain in the integrands undefined variables $h_{fs}(t',t)$ and $h_{mc}(t',t)$ which have the sense of the distances from the free surface (*fs*) or the front of matrix crystals (*mc*) to the center of crystals nucleating in critical zones II and III. Under the proposed model we'll assume that the changes in the considered parameters in time t' are described by the following linear relations:

$$h_{fs}(t',t) = R(t',t) \cdot (t' - t_m) / (t - t_m), \quad (23)$$

$$h_{mc}(t',t) = R(t',t) \cdot (2t' - t_m - t) / (t - t_m). \quad (24)$$

Equations (23) and (24) provide the passage by parameters $h_{fs}(t',t)$ and $h_{mc}(t',t)$ specified by the model of value intervals $0 \leq h_{fs}(t',t) \leq R(t',t)$ and $-R(t',t) \leq h_{mc}(t',t) \leq R(t',t)$ when the t' changes from t_m to t . From the physical point of view, the use of dependencies (23), (24) means that in initial time moments the crystals are nucleated on the free surface of the fused layer and at the boundary zone of matrix crystals, and at the later stages of process the nucleation points displace deep into the melt.

Taking into account (23) and (24) the equations (17) and (22) are transformed to the form:

$$x_{ng}^{II}(t) = \frac{1}{3} \pi \int_{t_m}^t H(t',t) \cdot A(t',t) \cdot x_L(t') I(t') \times \\ \times R^3(t',t) dt', \quad (25)$$

$$x_{ng}^{III}(t) = \frac{2}{3} \pi \int_{t_m}^t H(t',t) \cdot B(t',t) \cdot x_L(t') I(t') \times \\ \times R^3(t',t) dt', \quad (26)$$

where

$$A(t',t) = \\ = 2 + 3(t' - t_m) / (t - t_m) - ((t' - t_m) / (t - t_m))^3, \quad (27)$$

$$B(t',t) = \\ = 2 + 3(2t' - t_m - t) / (t - t_m) - ((2t' - t_m - t) / (t - t_m))^3. \quad (28)$$

For estimation comparing of relative amounts of *ng*-type crystals forming in different zones of laser baths and for the approximate determination of the total volume fraction of these crystals $x_{ng}(t)$ we substitute the functions $A(t',t)$ and $B(t',t)$ for their average variation interval $t_m \leq t' \leq t$ values: $\bar{A}=3$, $\bar{B}=2$. Then:

$$x_{ng}^{II}(t) \approx \pi \int_{t_m}^t H(t',t) \cdot x_L(t') \cdot I(t') \times \\ \times R^3(t',t) dt', \quad (29)$$

$$x_{ng}^{III}(t) \approx \frac{4}{3} \pi \int_{t_m}^t H(t',t) \cdot x_L(t') \cdot I(t') \times \\ \times R^3(t',t) dt', \quad (30)$$

$$x_{ng}(t) = x_{ng}^I(t) + x_{ng}^{II}(t) + x_{ng}^{III}(t) \approx \\ \approx \frac{4}{3} \pi \int_{t_m}^t \left[1 - \frac{4}{5} H(t',t) \right] \cdot x_L(t') \cdot I(t') \times \\ \times R^3(t',t) dt'. \quad (31)$$

Analysis of the kinetic varieties of *ng*-process

The volume fraction of *ng*-type crystals, defining by equation (31), essentially depends on the relative volume of critical zones II and III within the limits of spontaneously crystallizing laser bath. This value is specified by relation $3h_k^{II}(t',t)/(h_0 - h_g(t')) = 3H(t',t)$ and changes in the

values range from 0 to 1. Taking into account the above mentioned, we consider the possible variants of dependencies $x_{ng}(t)$.

1. If the time-averaged values of the critical zones thickness is much smaller than the corresponding linear size of the area in which the mechanism of *ng*-crystallization is realized, i.e. $\bar{h}_k / (h_0 - \bar{h}_g) \rightarrow 0$ or $\bar{H} \rightarrow 0$, the interaction of the newly formed crystals with surfaces limited by crystallized volume of the laser bath, can be neglected. In this case, the formation of *ng*-type crystals have a purely volume character, that provides the maximum x_{ng}^v contribution of this crystallization mechanism in the total share of the transformed volume:

$$x_{ng}^v(t) \approx \frac{4}{3} \pi \int_{t_m}^t x_L(t') \cdot I(t') \cdot R^3(t', t) dt'. \quad (32)$$

2. If the total thickness of the critical zones is commensurate with the length of spontaneously crystallized area, i.e. $3\bar{h}_k \rightarrow (h_0 - \bar{h}_g)$ or $3\bar{H} \rightarrow 1$ then at this conditions all *ng*-crystals are blocked by boundary surfaces, so that their total volume, and therefore the contribution to the total value x_{ng} is reduced to the minimum of x_{ng}^s . Corresponding kinetic equation acquires the form:

$$x_{ng}^s(t) \approx \frac{7}{9} \pi \int_{t_m}^t x_L(t') \cdot I(t') \cdot R^3(t', t) dt'. \quad (33)$$

As can be seen from a comparison of equations (32) and (33), the maximum relative reduction of the spontaneously crystallizing volume fraction due to the effects of interaction of crystals with the free surface of fused layer and FMC is:

$$(x_{ng}^v(t) - x_{ng}^s(t)) / x_{ng}^v(t) = 5/12 \approx 0,42. \quad (34)$$

Summary

1. The improved model of laser bath competitive crystallization has been presented. In this model the distortions of crystals size and form spontaneously generating due to their blocking by the free surface of the fused layer and matrix crystals front moving from the fusion border are estimated.

2. Within the developed model the kinetic equations permitting to determine the relative contributions to the total crystallized volume fraction by *g*- and *ng*-mechanisms of transformation at different ratios of the volumes of the central and critical zones in formation *ng*-crystals regions are derived.

3. It has been shown that the maximum reduction of the *ng*-crystals volume fraction owing to the loss of full-dimensional spherical form due to their interaction with the boundary surfaces is 0,42. It is significantly higher than the inaccuracy of the model calculations and argues about the reasonability of using the proposed model to derive the correct numerical estimates of analyzed parameters x_g and x_{ng} .

Список використаних джерел

References

1. Галенко П.К. Высокоскоростная кристаллизация конструкционной стали при лазерной обработке поверхности / П.К. Галенко, Е.В. Харанжевский, Д.А. Данилов // Журнал технической физики. – 2002. – Т. 72, вып. 5. – С.48-55.
2. Астапчик С.А. Конвективный теплоперенос на фронте кристаллизации бинарных сплавов в условиях лазерного воздействия / С.А. Астапчик, Н.А. Берёза // Физика металлов и металловедение. – 2007. – Т. 103, № 1. – С. 3–14.
3. Шкловский В.А. К теории лазерного остекловывания с учетом кинетики фазового превращения / В.А. Шкловский // Поверхность. Физика, химия, механика. – 1986. – № 6. –С. 91–98.
4. Yatsuya S. Laser beam interaction with the PdSiCu and AgCuGe eutectics / S. Yatsuya, T.B. Massalski // Proc. 4 Int. Conf. on Rapidly Quenched Metals. – Sendai: Jap. Inst. of Metals. – 1982. – Vol. 1. – P. 169 – 172.
5. Лысенко А.Б. Влияние технологических факторов на состав, строение и свойства зоны лазерной химико-термической обработки / А.Б. Лысенко // Физика и химия обработки материалов. – 2001. – № 2. – С.25 – 30.
6. Lysenko A.B. Metal crystallization kinetics in conditions of laser rapid hardening / A. B. Lysenko, N.A. Korovina, I.A. Pavluchenkov // Laser Technologies in Welding and Materials Processing. - Kiev: E.O. Paton Electric Welding Institute, NASU. – 2005. – P.85 – 87.
7. Лысенко А.Б. Моделирование процессов формирования структуры в условиях лазерной обработки с оплавлением поверхности / А.Б. Лысенко, Н.А. Коровина, Е.А. Якунин // Математическое моделирование и информационные технологии в сварке и родственных процессах. – Киев: ИЭС им. Е. О. Патона НАН Украины. – 2010. – С. 97 – 100.
8. Лысенко А.Б. Кинетическая модель массовой кристаллизации в приближении эффективных скоростей зарождения и роста кристаллов / А.Б. Лысенко // Вісник Дніпропетровського університету. Фізика. Радіоелектроніка. – 2011. – Т. 19, № 2. – С. 3 – 11.

1. GALENKO, P., KHARANGEVSKIY, E. and DANILOV, D. (2002) High speed crystallization of structural steel by laser surface treatment. Jurnal tekhnicheskoy fiziki. 73(5), pp. 48 – 55.
2. ASTAPCHIK, S., BEREZA, N. (2007) Convective heat transfer at the front crystallization of binary alloys under laser exposure. Fizika metallor i metallovedenie.103(1), pp. 3–14.
3. SHKLOVSKIY, V. (1986) On the theory of laser vitrification with the kinetics of phase transformation. Poverkhnost. Fizika, himiya, mekhanika, vol.6, pp. 91–98.
4. YATSUYA, S., MASSALSKI, T. (1982) Laser beam interaction with the PdSiCu and AgCuGe eutectics. Proc. 4 Int. Conf. on Rapidly Quenched Metals. Sendai: Jap. inst. of Metals, vol.1, pp. 169 – 172.
5. LYSENKO, A. (2001) Influence of technological factors on the composition, structure and properties of laser zone thermochemical treatment. Fizika i himiya obrabotki materialov, vol.3, pp.25 – 30.
6. LYSENKO, A., KOROVINA, N. and PAVLUCHENKOV, I. (2005) Metal crystallization kinetics in conditions of laser rapid hardening. Laser Technologies in Welding and Materials Processing. Kiev: E.O. Paton Electric Welding institute, NASU. pp.85 – 87.
7. LYSENKO, A., KOROVINA, N. and YKUNIN, Ye.(2010) Modeling of formation of structure in a laser treatment with surface melting. Matematicheskoe modelirovanie I informatsionnye tekhnologii v svarke i rodstvennyh protsessah. Kiev, IES im. E. O. Patona NAN Ukrainy. pp. 97 – 100.
8. LYSENKO, A. (2011) Kinetic model of bulk crystallization in the effective rate of nucleation and crystal growth. Visnyk Dnipropetrovskogo universytetu. Fyzyka. Radioelektronika. 19 (2), pp. 3–11.

Надійшла до редколегії 10.03.15

УДК 539.194

Розуван Т.С.¹, асп.,
Шайкевич І.А.¹, д.ф.-м.н, проф.,
Розуван С.Г.¹, к.ф.-м.н, н.с.

T.S.Rozouvan¹, Ph.D. stud.,
I.A. Shaykevich¹, Dr.Sc., Prof.
S.G. Rozouvan¹, Ph.D., Sci. Res.

Наноокислення міді

Nanooxidation of copper

¹Київський національний університет імені
Тараса Шевченка 01601, м. Київ, вул.
Володимирська 64/13, e-mail: sgr@univ.kiev.ua

¹Taras Shevchenko National University of Kyiv,
01601, Kyiv, Volodymyrska st. 64/13,
e-mail: sgr@univ.kiev.ua

Нанокластери окислів міді вивчалися за допомогою скануючої тунельної мікроскопії. Була зареєстрована двофазна структура кластерів з просторовою роздільною здатністю 0,12 нм. Просторовий розподіл хвильових функцій, а також “замивання” країв забороненої зони наноокисдованих ділянок були знайдені при чисельних розрахунках за методом функціоналу густини. Електрична провідність нанокластерів була проаналізована з точки зору формалізму фізики твердого тіла аморфних тіл.

Ключові слова: окисли міді, скануюча тунельна мікроскопія, електронна густина.

Copper oxide nanoclusters were studied by scanning tunneling microscopy technique. Structure of the clusters was registered with spatial resolution 0,12 nm and was found having two phases which are distinctly different by electrical conductivity and morphology. The clusters contain mixture of CuO, Cu₂O and copper atoms. Spatial wave functions distributions as well as spreading of bandgap edges in the nanooxidates spots were found by numerical calculations applying quantum functional density theory. Oxygen atoms embedded into copper crystal lattice resulted in open gaps in spatial distribution of electron density. Electrical conductivity of the nanoclusters were analyzed from the point of view of condensed matter physics of amorphous systems. The obtained results have to be taken into account for electrical contacts construction in carbon nanotubes nanodevices because the clusters dimensions are comparable with typical carbon nanostructures (fullerenes, nanotubes, vertical graphene clusters).

Key Words: copper oxides, scanning tunneling microscopy, electron density.

Статтю представив: член-кор. НАН України, д.ф.-м.н., проф.. Макара В.А.

Мідь це базовий метал для електричних контактів при розробці нанoeлементів завдяки її великої електричної провідності та відносної дешевизни. Одним із можливих технологічних рішень побудови такого контакту є нанесення нанооб'єктів на поліровану мідну підкладку. При таких конструктивних рішеннях можуть виникати проблеми деградації поверхні такої підкладки з часом, наприклад, внаслідок окислення, корозії тощо. Фізичні властивості окислів міді порівняно добре вивчені з двох причин. По-перше, окисли міді є напівпровідниками і, по-друге, структури з кластерами окислів міді можуть бути високотемпературними надпровідниками. Стійкі напівпровідникові оксиди міді CuO та Cu₂O мають ширину забороненої зони відповідно 1,45 eV та 2 eV, що видно також з залежностей густин електронних станів [1]. Як правило, Cu₂O має провідність *p*-типу, кубічну кристалічну ґратку з довжиною базисного вектора 0,4270 нм,

а CuO – моноклінну ґратку (mS8 [1]) з довжиною базисного вектора 0,46837 нм. При цьому CuO може характеризуватись як *p*- , так и *n*-типом електричної провідності [2]. В той же час, наноструктурні параметри оксидів міді мають свої специфічні особливості. Так спектроскопія нанокристалів CuO та Cu₂O розмірами 10 ÷ 90 нм зареєструвала зсув краю фундаментальної поглинання в низькоенергетичну область відповідно на 0,1-0,15 eV, та на 0,35 eV в високоенергетичну область в порівнянні зі спектрами монокристалів [2]. Структуровані нанокластери з електричним зарядом були зареєстровані в монокристалах CuO [3]. Наноструктуровані кластери оксидів міді – довгі одновимірні структури послідовності іонів Cu та O, або моноплосини Cu₂O з додатковими площинами атомів O [4], які відповідають за високотемпературну надпровідність композитних матеріалів. Сама наноструктура оксида міді може

характеризуватись наявністю наночастинок Cu_2O , CuO та Cu_4O_3 [5]. З точки зору будови кристалічної ґратки така морфологія є не стільки дефектами ґратки, а скоріш упорядкованими кластерами з різним рівнем окислення іонів міді. Базовою методикою для вивчення структури кристалічної ґратки окислів міді є скануюча тунельна мікроскопія (СТМ). Так виміри СТМ зареєстрували дефекти кристалічної ґратки – заміщення атомами кисню атомів міді в площинах CuO_2 в надпровіднику [5]. При початкових стадіях окисдації Cu (111) проходить зміна структури поверхні міді, а тераси поверхні стають включеннями в наростаючі кластери Cu_2O (111). Кристалічна структура цих кластерів при цьому співпадає з структурою кристалічної ґратки мідної підкладки [6]. СТМ дослідження окислів на поверхні $\text{Cu}(100)$ вказують на зміщення атомів міді, що, можливо, є проявами впорядкованої підґратки атомів кисню [7]. При вимірах за допомогою СТМ можлива ідентифікація атомів міді і атомів кисню, як в невеликих оксидних кластерах, так і в нанооксидній кристалічній ґратці [7].

Приведені літературні дані вказують на те, що фізичні властивості окислів міді на нанорозмірному рівні можуть суттєво впливати на фізичні параметри наноконтактів. Задачею даної статті являється вивчення процесів нанооксидзації полірованої мідної поверхні за допомогою скануючої тунельної мікроскопії високої роздільної здатності та квантовомеханічних методик.

Для експериментів ми використовували скануючий тунельний мікроскоп на базі нанолaboratorії ІНТЕГРА, що дозволяло нам реєструвати топологію поверхні з просторовою роздільною здатністю, яка досягала 0,12 нм. Гостру голку для СТМ ми виготовляли з дроту діаметром 0,5 мкм, зі сплаву $\text{Pt}_{0.8}\text{Ir}_{0.2}$, виготовленого шляхом механічного відрізання його кінця. Полірування поверхні міді проводилось спочатку абразивами (оксид хрому), а на кінцевій стадії бавовняними тампонами для того, щоб не допустити забруднення поверхні хімічними елементами абразиву. Кородування поверхні зразків досягалось двома способами – або витриманням їх на повітрі один місяць, або підігріванням до 300°C протягом хвилини в муфельній пічці ПМ-8М з терморегулятором. При цьому якість полірування візуально не погіршувалась. Виміри поверхні зразків за допомогою СТМ показали ідентичність процесів окислення на їх поверхні для двох способів

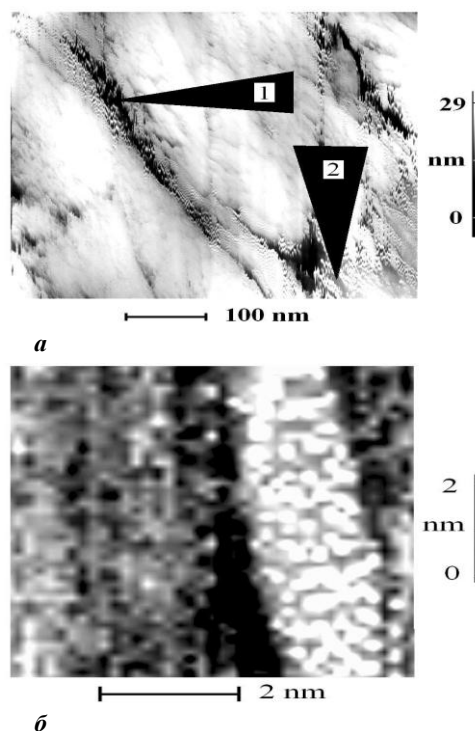


Рис. 1. Скануюча тунельна мікроскопія наночастинок окисленої міді. Просторова роздільна здатність 0,12 нм.

отримання. На рис. 1 приведені дані вимірювання окисованої поверхні міді за допомогою скануючої тунельної мікроскопії. З рис. 1 а видно, що нанооксидация відбувається вздовж прямих ліній, які на початковій стадії окисдації визначались положенням атомних площин кристалічної ґратки міді. Цей результат корелює з даними [6]. На це вказує також те, що ділянки окисованої міді утворюють примітивну ромбовидну структуру.

Збільшена частина рис. 1 а приведена на рис. 1 б, звідки видно, що нанокластер оксиду на поверхні міді складається з двох областей позначених стрілками 1 та 2. Область 1 – заповнена напівпровідниковими оксидами міді. Оскільки електрична провідність оксидів набагато нижча від електричної провідності міді, тому зареєстровані при вимірах електрони проходять через окисований кластер у тунельному режимі. Це проявляється у темному кольорі острівців окисдації на рис. 1 а. Область 2 рис. 1 а характеризується рихлою структурою в порівнянні з оточуючими областями мідної підкладки. Це корелює з даними роботи [8], де показано, що шар Cu_2O містить кластери міді оскільки є продуктом хімічного розкладу CuO . В той же час область має високу електричну провідність, оскільки її яскравість не

відрізняється суттєво від яскравості оточуючих областей міді. Зрозуміло, що зона 1 це початкова в часі фаза окиснення міді, а зона 2 – наступна. Результати вимірювання зони 1 рис. 1 а з атомною роздільною здатністю приведені на рис. 1 б. По-перше на рисунку видна кристалічна ґратка міді (більш темна частина зображення). Нанокластер міді з атомами кисню характеризується частково впорядкованою структурою ґратки з досить великими просторовими щілинами (до 0,6 нм) між локалізованими максимумами електронної густини.

Для аналізу процесів початкової оксидзації міді нами були проведені розрахунки за методом функціоналу густини для плоскої надкомірки міді (2x2x1). Для розрахунків використовувався пакет програм ABINIT в операційній системі LINUX. При розрахунках частина атомів міді заміщувалась атомами кисню. Таким чином, з точки зору питомої концентрації ми розраховували надкомірки хімічно еквівалентні

окислам Cu_2O та CuO , хоча з точки зору будови кристалічної ґратки, це були нанокластери з заміщеними атомами міді на атоми кисню. Таким чином, моделювалась початкова фаза окиснення при якій атоми кисню приєднувались, наприклад, в зоні терас (виходу атомних площин) на поверхню зразка. На рис. 2 приведені результати розрахунків просторового розподілу електронної густини в надкомірках міді та двох оксидних нанокластерів. З рисунків видно, що зі збільшенням концентрації атомів кисню, збільшується питома величина проміжків між максимумами хвильових функцій при збереженні періодичної структурованості просторового розподілу хвильових функцій. Дані розрахунків корелюють з результатами рис. 1 б.

Розподіл густини електронних станів надкомірок рис. 2 зображений на рис. 3. Розрахована густина електронних станів міді аналогічна приведеній в літературі [9]. Розподіли густин для надкомірок оксидів характеризуються «замиванням» країв забороненої зони, утворенням локалізованих «хвостів», яке взагалі характерне для аморфних тіл [9]. Це зрозуміло, оскільки фактично при початковій фазі окиснення – приєднання невеликої кількості атомів кисню до поверхні кристалу міді не приводить до зміни кристалічної ґратки. Величина «замивання» збільшується зі збільшенням концентрації атомів кисню. Кристалічна ґратка наноксидних кластерів є кубічною гранецентрованою ґраткою міді. З точки зору будови оксидів міді, це є порушенням впорядкованості, що і призводить до замивання країв щілини в розподілі густин електронних станів. Оскільки рівень Фермі проходить при цьому на деякій відстані від краю забороненої зони, в даних системах може

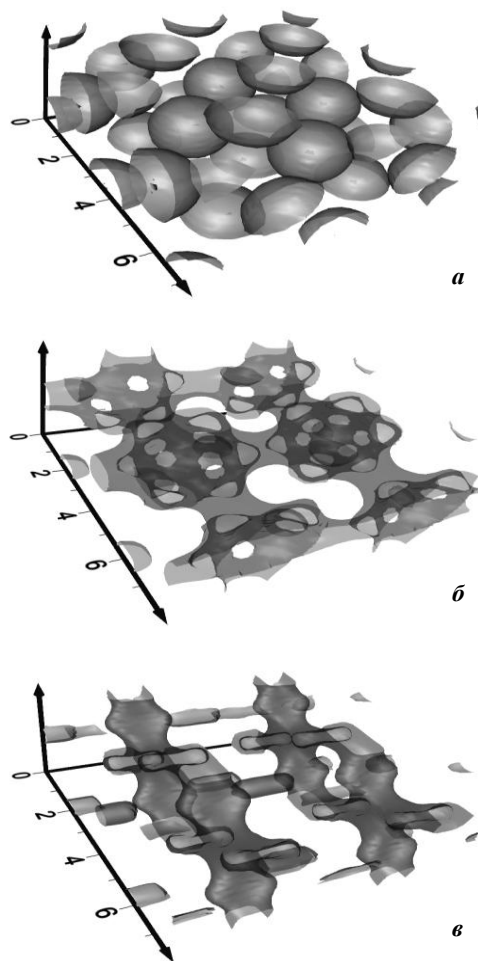


Рис. 2. Просторовий розподіл електронної густини на рівні Фермі в нанокмірках: а – Cu; б – Cu_2O ; в – CuO . Поділкі на осях в ангстремах.

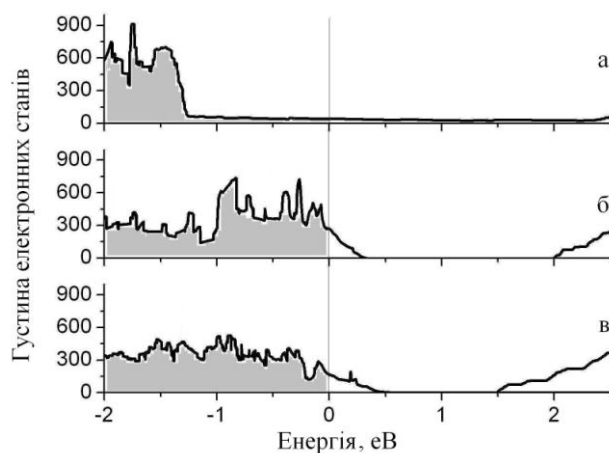


Рис. 3. Густина електронних станів нанокмірок Cu (а), Cu_2O (б), та CuO (в). Рівень Фермі - 0 eV.

реалізуватись “стрибкова” провідність по локалізованним станам, що і відображається на результатах СТМ вимірів (рис. 1).

Таким чином, дослідження полірованих мідних зразків за допомогою СТМ свідчать, що з часом або під впливом високої температури на поверхні утворюються нанокластери окислів міді. Розташування нанокластерів, а також їхня неоднорідна структура вказує на двофазну оксидацію поверхні міді, при якій перша фаза оксидзації має порівняно велику електричну провідність і утворюється, наприклад, в місцях виходу атомних площин на поверхню («сходінка»). Оксиди міді утворюють наступну фазу оксидзації зі зміною кристалічної ґратки на типову для Cu_2O та в CuO сполук. Розрахунки за методом функціоналу густини показали, що

заміщення атомами кисню атомів міді призводить до рихлого просторового розподілу хвильових функцій, а також до замивання країв щілини в розподілах густин електронних станів. Останнє може бути інтерпретоване з точки зору фізики твердого тіла аморфних тіл і може відповідати за суттєву електричну провідність таких утворень. З практичної точки зору, утворення нанокластерів сполук міді на поверхні мідного контакту може суттєво впливати на характеристики потенціального нанопристрою, оскільки розміри таких утворень співпадають з лінійними розмірами типових карбонових нанооб’єктів (нанотрубок, фулеренів тощо), що може привести до зміни властивостей інтерфейсного шару нанооб’єкт-підкладка.

Список використаних джерел

1. Овчинников С. Г. Особенности структуры наночастиц / С. Г. Овчинников, Б. А. Гижевский, Ю. А. Котов // Физика твердого тела. – 2007. – №49. – С. 1061–1065.
2. Грушевская С. Н. Свойства полупроводниковых оксидов меди сформированных на сплавах Cu-Au / С. Н. Грушевская, Д. С. Елисеев, С. В. Ганжа // Конденсированные среды и межфазные границы. –2013. –Том 15. –№ 3. –С. 253–265.
3. Zheng X. G. Observation of Charge Stripes in Cupric Oxide / [X. G. Zheng, C.N. Xu, Y. Tomokiyo та ін.]. // Physical Review Letters. -2000. – Том.85. –№ 24. –С.5170–5173.
4. Manthiram A. C-axis oxygen in copper oxide superconductors / A. Manthiram, X. X. Tang, J. B. Goodenough. // Physical Review B 42. – 1990. –№1. –С.138-149.
5. Heinemann M. Band structure and phase stability of the copper oxides Cu_2O , CuO , and Cu_4O_3 / M. Heinemann, B. Eifert, C. Heiliger // Physical Review B. –2013. –№87. – С. 115111–115116.
6. Perez L. C. Formation of copper oxide surface structures via pulse injection of air onto Cu(111) surfaces / L. C. Perez, C. Surgers, H. Lohneysen // Physical Review B. – 2012. – №85. – С. 035434–035441.
7. Baykara M. Z. Atom-specific forces and defect identification on surface-oxidized Cu(100) with combined 3D-AFM and STM measurements / M. Z. Baykara, U. D. Schwarz // Physical Review B. – 2013. –№87. – С. 155414–155419.
8. Губанов В.А. Оптические свойства поверхностного слоя на меди / В.А. Губанов, Л.Ю. Мельниченко, И.А. Шайкевич // Поверхность. –2001. –№11. – С. 82-85.
9. Mott N.F., Davis E.A. Electronic Properties of Non-Crystalline Materials – Oxford: Oxford University Press, 1979. – 590 с. – (Oxford University Press).

References

1. OVCHINIKOV, C.G., GIZHEVSKY, B.A. & KOTOV, Yu.A. (2007) Electron structure of nanoparticles. *Physics of the Solid State*. 49. p.1061-1065.
2. GRUSHEVSKA, S. N., ELISEEV, D. S., GANZHA, S. V. (2013) Properties of semiconductor copper oxides formed on Cu-Au alloys. *Condensed media and interphase borders*. 15(3). p.253-265.
3. ZHENG, X. G., XU, C.N., TOMOKIYO, Y., TANAKA, E., YAMADA, H. & SOEJIMA, Y. (2000) Observation of Charge Stripes in Cupric Oxide. *Physical Review Letters*. 85(24). p.5170-5173.
4. MANTHIRAM, A., TANG, X. X., and GOODENOUGH, J. B. (1990) C-axis oxygen in copper oxide superconductors. *Physical Review B*. 42(1). p.138-149.
5. HEINEMANN, M., EIFERT, B. & HEILIGER, C. (2013) Band structure and phase stability of the copper oxides Cu_2O , CuO , and Cu_4O_3 . *Physical Review B*. 87. p.115111–115116.
6. PEREZ, L. C., SURGERS, C. & LOHNEYSEN, H. (2012) Formation of copper oxide surface structures via pulse injection of air onto Cu(111) surfaces. *Physical Review B*. 85. p.035434–035441.
7. BAYKARA, M. Z. & SCHWARZ, U. D. (2013) Atom-specific forces and defect identification on surface-oxidized Cu(100) with combined 3D-AFM and STM measurements. *Physical Review B*. 87. p.155414–155419.
8. GUBANOV, V.A., MELNICHENKO, L.U. & SHAYKEVICH, I.A. (2001) Optical properties of a surface layer on copper. *Surface* 11. p.82-85.
9. MOTT, N.F. and DAVIS, E.A. (1979) *Electronic Properties of Non-Crystalline Materials*, 2nd Ed. -Oxford: Oxford University Press.

Надійшла до редколегії 12.03.15

УДК 535.333

Юргелевич І. В.¹, к.ф.-м.н., с.н.с.,
Тельбіз Г. М.², к.х.н., с.н.с.,
Стронський О. В.³, д.ф.-м.н., с.н.с.,
Поперенко Л. В.⁴, д.ф.-м.н., проф.,
Лопатинська О. Г.⁵, асист.,
Леоненко Є. В.⁶, асп.

Оптичні властивості органо-неорганічних мезоструктурних золь-гель плівок на основі оксидів кремнію та титану з інкорпорованим барвником Родамін 6Ж

^{1,4,5}Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 01601, м. Київ, вул.
Володимирська, 64/13,
e-mail: ¹vladira_19@ukr.net,

⁴plv@univ.kiev.ua, ⁵olga_lopatynska@ukr.net

^{2,6}Інститут фізичної хімії імені Л. В.
Писаржевського НАН України, 03028, м. Київ,
просп. Науки, 31, e-mail: ²gtelbiz@yahoo.com

³Інститут фізики напівпровідників ім. В.Є.
Лашкарьова НАН України, 03028, м. Київ,
просп. Науки, 41, e-mail: ³stronski@isp.kiev.ua

I. V. Yurgelevych¹, PhD, Sen. Res.,
G. M. Tel'biz², PhD, Sen. Res.,
A. V. Stronski³, Dr. Sci., Sen. Res.,
L. V. Poperenko⁴, Dr. Sci., Prof.,
O. G. Lopatynska⁵, assist.,
E. V. Leonenko⁶, PhD stud.

Optical properties of organic-inorganic mesostructure sol-gel films based on the silicium and titanium oxide with incorporated rodamine 6G dye

^{1,4,5}Taras Shevchenko National University of Kyiv,
01601, Kyiv, Volodymyrska st., 64/13,
e-mail: ¹vladira_19@ukr.net,

⁴plv@univ.kiev.ua, ⁵olga_lopatynska@ukr.net

^{2,6}L. V. Pisarzhevskii institute of the physical
chemistry of the National Academy of Sciences of
Ukraine, 03028, Kyiv, Nauki ave., 31,
e-mail: ²gtelbiz@yahoo.com

³V. Lashkaryov institute of semiconductor physics of
the National Academy of Sciences of Ukraine, 03028,
Kyiv, Nauki ave., 41, e-mail: ³stronski@isp.kiev.ua

Органо-неорганічні мезоструктурні золь-гель плівки на основі оксидів кремнію та титану з інкорпорованим барвником Родамін 6Ж були одержані різним способом нанесення (spin- або dip-coating) плівкоутворюючого золю на субстрат. Оптичний аналіз зразків проводився на основі спектрів поглинання і люмінесценції та кутової еліпсометрії. Показано, що отримані методом центрифугування та осадження з розчину тонкі плівки на основі барвника Р6Ж проявляють у видимій області спектра властивості, що притаманні типовим діелектрикам чи слабопоглинальним напівпровідникам. Останнє однозначно зафіксовано у випадку плівки, до складу якої було введено оксид TiO₂. По куту Брюстера цих плівок визначено показники заломлення, значення яких знаходяться в межах від 1,39 до 1,69.

Ключові слова: золь-гель гібридні плівки, фотолюмінесценція, еліпсометрія.

Hybrid films based on inorganic matrices and organic dyes are perspective ones as luminescence materials, laser elements, sensors, solar cells, optical switches etc. Organic and inorganic mesostructural sol-gel film based on silicon and titanium oxides incorporated Rhodamine 6G were obtained by deposition of film-forming sol on the substrate using different techniques (spin- or dip-coating). Optical analysis of the samples was based on luminescence and absorption spectra and angular ellipsometry. It is shown that the angular ellipsometry method is sensitive for the changes fixing in the structure of the hybrid films and their complex dielectric function through $\Delta(\varphi)$ and $\Psi(\varphi)$ dependences. These changes are the result of technological procedures and their specificity during the formation of these films. Thin films based on rodamine 6G dye obtained by spin- or dip coating methods according to the ellipsometrical experiment data reveal in the visible spectrum the properties inherent to typical dielectrics or low absorbing semiconductors. Last fact is uniquely fixed in the case of the film containing TiO₂ oxide. Knowing the Brewster angle of these films the refractive indices were determined. They very form 1.39 to 1.69. The luminescence measurements results correlate well with the results of ellipsometrical experiments and confirm abovementioned conclusions.

Key words: sol-gel hybrid films, photoluminescence, ellipsometry.

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Макарець М. В.

Вступ

Гібридні плівки на основі неорганічних матриць і органічних барвників є перспективними для використання в якості люмінесцентних матеріалів, елементів лазерів, сенсорів, сонячних елементів, оптичних перемикачів тощо [1-4]. Введення молекул в жорстку золь-гель матрицю підвищує стабільність оптичної структури матеріалів за рахунок інгібування міжмолекулярної взаємодії, яка призводить до агрегації [5-7]. Золь-гель процес є зручним та надійним методом приготування гібридних плівок, властивості яких зумовлені процесами, що супроводжують їх формування. При одностадійному золь-гель синтезі всі компоненти, включаючи молекули барвника і поверхнево-активних речовин (ПАР) [8, 9], знаходяться в плівкоутворюючому золі, і локалізація молекул барвника відбувається в процесі формування мезоструктурної плівки під час старіння золю, що теж функціонально залежить від способу отримання плівок. Застосування ПАР дозволяє змінити величину середньої відстані між молекулами барвника при його фіксованій концентрації та впливати на процес агрегації. В роботах [10, 11] показано, що природа ПАР може впливати на утворення гібридних міцел і розподіл молекул барвника Р6Ж в них. Природа неорганічної матриці також суттєво впливає на спектральні властивості гібридних плівок. Цей вплив зумовлений особливістю взаємодії "хазяїн-гість", напрямком агрегації молекул барвника в структурі.

Структура та кількість агрегатів барвника залежить від складу, концентрації і умов приготування матеріалу [3]. Екситонна теорія [12] задовільно пояснює взаємозв'язок між структурою агрегатів та їх оптичними характеристиками. Згідно з цією моделлю типи димерів з різною орієнтацією молекул барвника характеризуються положенням смуг поглинання в низько- та високоенергетичній області спектру в порівнянні зі смугою мономеру. Це нелюмінесцентні Н-агрегати, які поглинають світло при значно більшій енергії фотонів, ніж мономери, і J-агрегати, для яких характерним є червоний зсув абсорбційної смуги. Теорія, також, допускає існування похідних димерів барвника, для яких, на відміну від класичних, дозволені переходи на низку інших збуджених станів. Агрегація молекул барвника в нелюмінесцентні димери є небажаним явищем у жорстких зразках при збільшенні їх концентрації. Передбачається, що просторова орієнтація і димеризація молекул барвника в мезоструктурі золь-гель плівки буде змінюватись в залежності від способу нанесення плівкоутворюючого золя на субстрат, природи неорганічної матриці, просторової орієнтації гостей молекул, а саме родаміна 6Ж (Р6Ж), найчастіше використовуваного в якості лазерного барвника [3, 13, 10]. Тому, контроль агрегаційного

стану молекул барвника Р6Ж, в жорсткій матриці є критичною умовою її ефективного використання [5, 13] і потребує методів оптичної діагностики даних плівкових структур. Одним із таких методів є еліпсометрія, що дає можливість неруйнівним чином отримати практично важливі характеристики поверхні гібридних плівок (показник заломлення, товщину) та їх залежність від складу та способів формування.

Проведені в [14] дослідження впливу швидкості формування структури гібридної плівки нанесеної на субстрат способами центрифугування або осадження з розчину (spin-, або dip-coating), а також концентрації обраного ПАР (Pluronic P123, або СТАВr) в плівкоутворюючому золі, на перебіг агрегації молекул барвника (на прикладі родаміна 6Ж) показали, що ці фактори суттєво модифікують оптичні та люмінесцентні властивості сформованих гібридних золь-гель плівок.

Метою роботи було з'ясування рівня змін оптичних характеристик гібридних металоксидних плівок, що містять просторово впорядковані в матрицю діоксидів кремнію і титану молекули родаміна 6Ж методом кутової еліпсометрії та фотолюмінесценції в залежності від типу ПАР, концентрації барвника та умов виготовлення.

Технологія виготовлення мезоструктурних плівок та методика експерименту

Плівкоутворюючий золь з прекурсорами силіцію та титану виготовляли за методикою, описаною в [8, 14]. До золю додавали розраховану кількість барвника Р6Ж (0,0036-0,0100 моль/л), розчин підлягав ультразвуковій обробці протягом 10 хв. Для дослідження впливу типу ПАР використовували золі із Pluronic P123 та СТАВr, в кількості $2,5 \cdot 10^{-4}$ М (зразки № 4, 5 на рисунках) при постійній концентрації барвника. Вплив природи матриці (Si, Ti) досліджували на іншій парі зразків (позначених № 2, 6 на рисунках). Концентраційну залежність оцінювали на зразках 2, 3. Для порівняння використовували мезопоруватий зразок (№ 1) одержаний після видалення органічних компонентів шляхом кальцинування при 500°C.

Гібридні мезоструктурні покриття отримували шляхом нанесення плівкоутворюючого золю на субстрат spin- та dip-coating методами (2000 об/хв та 20 см/хв, відповідно) при 20 °C та відносній вологості 40 – 45 % і витримували перед вимірюваннями протягом 5 – 7 днів. Вплив способу нанесення порівнювали на зразках № 3, 4. Поверхню підкладки (предметне скло) попередньо знежирювали в хромовій суміші з наступним промиванням в розчині ацетону. Спектри фотолюмінесценції вимірювали за допомогою спектральної установки в режимі лічби фотонів. Довжина хвилі збуджуючого світла складала 406 нм.

Поляризаційні оптичні вимірювання проводилися на багатокуттовому еліпсометрі

ЛЕФ-ЗМ-1 на одній довжині хвилі $\lambda = 632,8$ нм при кімнатній температурі в декількох областях поверхні виготовлених зразків при різних кутах падіння ϕ світла на поверхню [15].

Результати та обговорення

На основі кутових залежностей таких еліпсометричних параметрів, як зсув фаз Δ між компонентами вектора поляризації та азимут ψ відновленої лінійної поляризації, знайдено кути Брюстера ϕ_B ($\Delta = 90^\circ$) та кутові положення найменшого значення азимута ψ_{min} для всіх досліджуваних зразків.

На рис. 1 представлено результати еліпсометричних вимірювань для досліджуваних зразків. За залежністю Δ ϕ на рівні $\Delta = 90^\circ$ можна визначити кут Брюстера ϕ_B (або у випадку слабопоглинальних середовищ його називають псевдобрюстерівським кутом [16]). Тоді у відповідності до співвідношення $n = \tan \phi_B$ [17] можна визначити показник заломлення n середовища певної сформованої плівки у видимій області при $\lambda = 632,8$ нм.

Видно (рис. 1а), що значення $\phi_B = 54,3^\circ$ для кр. 1 значно менше ніж значення $\phi_B = 59,4^\circ$ для кр. 6. Це означає, що серед досліджених зразків екстремальні значення показника заломлення мають два зразки, до складу одного з яких не входить барвник взагалі (кр. 1), і йому притаманне мінімальне значення $n = 1,39$, а до складу другого входить оксид TiO_2 (кр. 6), для нього значення n є максимальним ($n = 1,69$).

Залежність Δ ϕ для зразка $\text{TiO}_2 + \text{P123} + \text{R6G}$ характеризується більш пологою кр. 6. Однак, існує різкий стрибок еліпсометричного параметра Δ поблизу кута Брюстера для зразків, виго-

товлених методом центрифугування [18], в складі яких не було компонента CTABr , $\text{SiO}_2 + \text{P123} + \text{R6G}$ (кр. 2 та 3), так і для зразка $\text{SiO}_2 + \text{CTABr} + \text{R6G}$ (кр. 5), який містить цей компонент.

Показово, що всі ці різко спадаючі криві характеризують зразки, отримані саме методом центрифугування. В той же час однакові за складом зразки 3 і 4, але отримані двома різними способами, хоч і мають однакові значення кута Брюстера, мають поблизу нього різний кутовий інтервал $\Delta\phi_B$, в межах якого Δ спадає від 180° до 0° . По відношенню до зразка 3, виготовленого методом центрифугування, для залежності Δ ϕ зразка 4, отриманого осадженням з розчину, зазначений кутовий інтервал $\Delta\phi_B$, – як міра змін певних фізичних властивостей поверхневого шару [17], – набагато більший. Чим різкіше спадає крива залежності Δ ϕ поблизу кута Брюстера для окремого зразка, тим кращим індикатором вона стає щодо фіксації його фактично нульової оптичної провідності $\sigma = nk\omega$ (n і k – показники заломлення і поглинання, ω – частота світлової хвилі), тобто твердження, що k прямує до 0. Тоді така поведінка залежності Δ ϕ зразка є характерною для матеріалів, що проявляють у видимій області типові діелектричні властивості, як, наприклад, у випадку полірованої поверхні пластинки оптичного кварца з найвищим класом точності її механічної обробки [17]. В останньому випадку цей кут $\Delta\phi_B$ характеризує висотні та крокові параметри шорсткості поверхні [18] і оптичні сталі та глибину (товщу) так званого “порушеного” перехідного шару, який залишається на скляній поверхні навіть після її тонкої механічної поліровки з досягненням 13-14 класу оптичної чистоти [17, 19]: чим вищі параметри шорсткості, викликаної наявністю такого “порушеного”

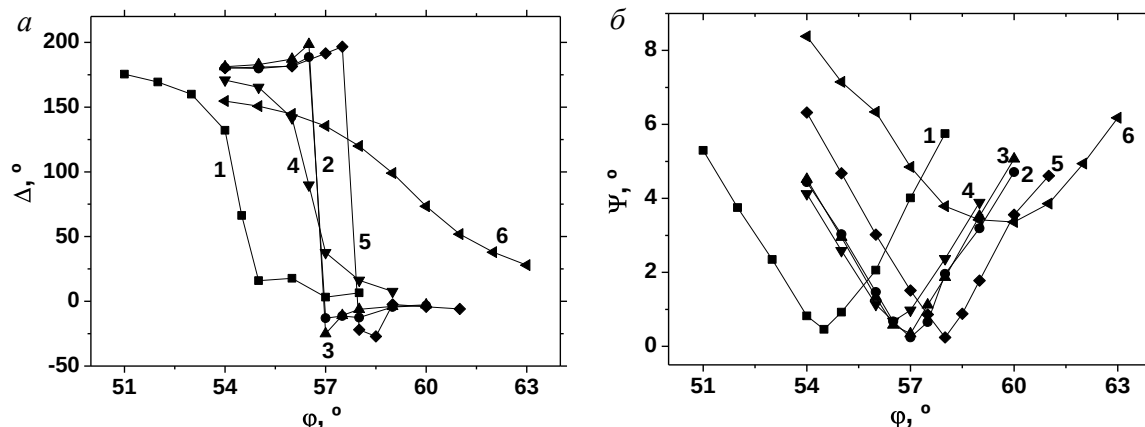


Рис. 1. Кутові залежності еліпсометричних параметрів Δ – а та ψ – б для зразків: 1 – $\text{SiO}_2 + \text{P123}$, 2 – $\text{SiO}_2 + \text{P123} + \text{R6G}$ (0,0036), центрифугування, 3 – $\text{SiO}_2 + \text{P123} + \text{R6G}$ (0,01), центрифугування, 4 – $\text{SiO}_2 + \text{P123} + \text{R6G}$ (0,01), осадження з розчину, 5 – $\text{SiO}_2 + \text{CTABr} + \text{R6G}$ (0,01), центрифугування, 6 – $\text{TiO}_2 + \text{P123} + \text{R6G}$ (0,0036), центрифугування.

перехідного шару, тим більшим стає і зазначений кут $\Delta\varphi_B$. Тому для поверхневих шарів зразків 3 і 4 (рис. 1 а), отриманих методами центрифугування та осадження з розчину, відповідно, збільшення кута $\Delta\varphi_B$ слід трактувати як наслідок того, що поверхневий шар утвореної структури плівки (зразок 4) після осадження є більш рихлим, і його шорсткість теж вища, ніж та, що залишається на поверхні зразка 3 після його формування методом центрифугування. Більш того, визначені за кривими 3 і 4 на рівні $\Delta = 90^\circ$ через кути Брюстера φ_B показники заломлення $n = 1,51$ (кр. 4) і $n = 1,52$ (кр. 3) доводять це у відповідності до формули Лорентц-Лоренца [20] і співвідношення Клаузіуса-Масотті [21], якими, зокрема, для колоїдних розчинів, добре описують залежність показника заломлення від густини речовини, бо тоді при збільшенні густини речовини зразка 3 внаслідок центрифугування зростатиме і показник заломлення $n = 1,52$. Проте, суттєве збільшення кута Брюстера у випадку плівки, до складу якої введено оксид TiO_2 (рис. 2а, кр. 6), не можна повністю пояснити тільки впливом шорсткості її поверхні, бо іншим зразкам (рис. 2 а, кр. 2, 3 та 5) притаманні набагато менші кути Брюстера. Єдиним додатковим фактором, котрим можна однозначно пояснити своєрідну поведінку кривої 6 на рис. 1 а, є відмінність складу плівки, викликана, перш за все, наявністю оксиду TiO_2 , введення якого призводить до того, що показник поглинання κ вже не є наближеним до нульового значення. Фактично, утворена структура плівки цього зразка відгукується на оптичне збудження вже не як типовий діелектрик ($\kappa = 0$), а як напівпровідниковий матеріал (κ мала) на довжині хвилі світла $\lambda = 632,8$ нм. Останнє добре підтверджується і залежністю ψ φ (рис. 1 б) для цього зразка (кр. 6): бо збільшення самого значення цієї величини у мінімумі кривої та його зсув по шкалі кутів падіння в сторону більших φ для провідних середовищ ($\kappa \neq 0$) однозначно вказує на зростання показника заломлення світла в середовищі цієї плівки, що вміщує оксид TiO_2 . Таке пояснення зміщення мінімуму кр. 6 (рис. 1б) в сторону більших кутів падіння світла φ , як і зростання значення ψ в самому мінімумі є принциповим при розгляді провідної (по струму) системи (зразок 6) у порівнянні до менших однакових значень азимута відновленої лінійної поляризації в мінімумі кривих ψ φ (рис. 1б) всіх інших зразків.

Залежності інтенсивності фотолюмінесценції від довжини хвилі $I(\lambda)$ (спектри фотолюмінесценції), що були виміряні для даних зразків і наведені на рис. 2, добре корелюють з результатами еліпсометричних вимірювань.

Спектр зразка 6 значно зміщений у сторону менших довжин хвиль по відношенню до

спектрів інших зразків, що може пояснюватись, аналогічно до результатів еліпсометричних експериментів, появою слабого поглинання, пов'язаного із введенням до складу зразка оксиду титану. Слід також зазначити, що для зразка 1 фотолюмінесценція відсутня взагалі, що може бути пояснене тим, що цей зразок не містить барвника. Спектр фотолюмінесценції для зразка 5 є дещо розширеним по відношенню до інших та має меншу інтенсивність, що може бути пов'язано з додаванням компонента СТАВr.

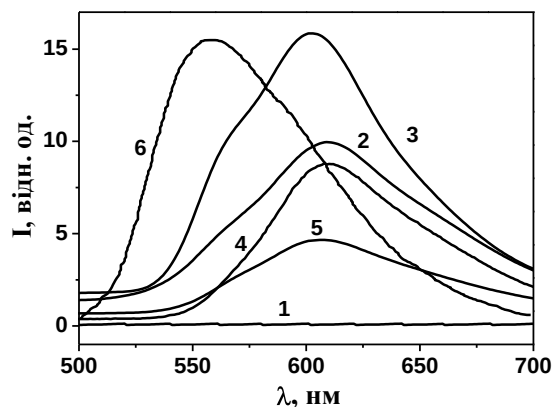


Рис. 2. Спектри фотолюмінесценції зразків:

- 1 – $\text{SiO}_2 + \text{P123}$,
- 2 – $\text{SiO}_2 + \text{P123} + \text{R6G}$ (0,0036), центрифугування,
- 3 – $\text{SiO}_2 + \text{P123} + \text{R6G}$ (0,01), центрифугування,
- 4 – $\text{SiO}_2 + \text{P123} + \text{R6G}$ (0,01), осадження з розчину,
- 5 – $\text{SiO}_2 + \text{CTABr} + \text{R6G}$ (0,01), центрифугування,
- 6 – $\text{TiO}_2 + \text{P123} + \text{R6G}$ (0,0036), центрифугування.

Висновки

Таким чином, метод кутової еліпсометрії тонких плівок органічного барвника Р6Ж виявився дуже чутливим щодо фіксації через $\Delta\varphi$ та $\psi\varphi$ залежності змін в структурі гібридних плівок та їхній комплексній діелектричній проникності, які є наслідком впливу умов приготування, концентрації компонентів та природи неорганічної матриці, а також специфіки технологічних процедур при формуванні даних плівок.

Отримані методом центрифугування та осадження з розчину тонкі плівки на основі барвника Р6Ж згідно з даними еліпсометричного експерименту проявляють у видимій області спектра оптичні поляризаційні властивості, що притаманні типовим діелектрикам чи слабопоглинальним напівпровідникам. Останнє однозначно зафіксовано у випадку плівки, до складу якої було введено оксид TiO_2 . По куту Брюстера цих плівок визначено показники заломлення, значення яких знаходяться в межах від 1,39 до 1,69 на довжині хвилі $\lambda = 632,8$ нм.

Результати фотолюмінесцентних вимірювань добре узгоджуються з результатами еліпсометричних експериментів та підтверджують вищенаведені висновки.

Ця робота була частково підтримана проектом FP-7 SECURE-R2I

Список використаних джерел

1. Enciso E. Conventional unidirectional laser action enhanced by dye confined in nanoparticle scatters / Enciso E., Costela A., Garcia-Moreno I., Martin V., Sastre R. // *Langmuir*. – 2010. – Vol. 26. – P. 6154-6157.
2. Garcia-Moreno I. Materials for a reliable solid-state dye laser at the red spectral edge / Garcia-Moreno I., Costela A., Martin V., Pintado-Sierra M., Sastre R. // *Advanced Functional Materials*. – 2009. – Vol. 19. – P. 2547-2552.
3. Carbonaro C.M. Hybrid materials for solid-state dye laser applications / Carbonaro C. M., Anedda A., Grandi S., Magistris A. // *The Journal of Physical Chemistry B*. – 2006. – Vol. 110. – P. 12932-12937.
4. Cheng D.M. Pure red emission of dye-doped organic molecules from microcavity organic light emitting diode / Cheng D.M., Ma F.Y., Liu X.Y. // *Optics and Laser Technology*. – 2007. – Vol. 39. – P. 720-723.
5. Malfatti L. Aggregation states of rhodamine 6G in mesostructured silica films / Malfatti L., Kidchob T., Aiello D., Aiello R., Testa F., Innocenzi P. // *The Journal of Physical Chemistry C*. – 2008. – 112. – P. 16225-16230.
6. Tikhonov E. Spectroscopic manifestation of dye pair interaction at high concentration in structurally organized SiO₂ films / Tikhonov E., Telbiz G. // *Molecular Crystals and Liquid Crystals*. – 2011. – Vol. 535. – P. 82-92.
7. Minoofar P. Multiply doped nanostructured silicate sol-gel thin films: spatial segregation of dopants, energy transfer, and distance measurements / Minoofar P., Dunn B., Zink J. // *Journal of the American Chemical Society*. – 2005. – Vol. 127. – P. 2656-2665.
8. Telbiz G. Optical manifold of spatial localization of dyes molecules self-organized in the body of silica thin films / Telbiz G., Leonenko E., Goer D., Manoryk P. // *Springer Proceedings in Physics*. – 2013. – Vol. 146. – P. 83-91.
9. Minoofar P. Strategies for spatially separating molecules in mesostructured sol-gel silicate films / Minoofar P., Hernandez R., Franville A.-C., Chia Sh., Dunn B., Zink J. // *Journal of Sol-Gel Science and Technology*. – 2003. – Vol. 26. – P. 571-575.
10. Vogel R. Dimer-to-monomer transformation of rhodamine 6G in aqueous PEO-PPO-PEO block copolymer solutions / Vogel R., Harvey M., Edwards G., Meredith P., Heckenberg N., Trau M., Rubinsztein-Dunlop H. // *Macromolecules*. – 2002. – Vol. 35. – P. 2063-2070.

References

1. ENCISO, E., COSTELA, A., GARCIA-MORENO, I., MARTIN, V., SASTRE, R. (2010) Conventional unidirectional laser action enhanced by dye confined in nanoparticle scatters. *Langmuir*. 26. p. 6154-6157.
2. GARCIA-MORENO, I., COSTELA, A., MARTIN, V., PINTADO-SIERRA, M., SASTRE, R. (2009) Materials for a reliable solid-state dye laser at the red spectral edge. *Advanced Functional Materials*. 19. p. 2547-2552.
3. CARBONARO, C. M., ANEDDA, A., GRANDI, S., MAGISTRIS, A. (2006) Hybrid materials for solid-state dye laser applications. *The Journal of Physical Chemistry B*. 110. P. 12932-12937.
4. CHENG, D.M., MA, F.Y., LIU, X.Y. (2007) Pure red emission of dye-doped organic molecules from microcavity organic light emitting diode. *Optics and Laser Technology*. 39. p. 720-723.
5. MALFATTI, L., KIDCHOB, T., AIELLO, D., AIELLO, R., TESTA, F., INNOCENZI, P. (2008) Aggregation states of rhodamine 6G in mesostructured silica films. *The Journal of Physical Chemistry C*. 112. p. 16225-16230.
6. TIKHONOV, E., TELBIZ, G. (2011) Spectroscopic manifestation of dye pair interaction at high concentration in structurally organized SiO₂ films. *Molecular Crystals and Liquid Crystals*. 535. p. 82-92.
7. MINOOFAR, P., DUNN, B., ZINK, J. (2005) Multiply doped nanostructured silicate sol-gel thin films: spatial segregation of dopants, energy transfer, and distance measurements. *Journal of the American Chemical Society*. 127. p. 2656-2665.
8. TELBIZ, G., LEONENKO, E., GOER, D., MANORYK, P. (2013) Optical manifold of spatial localization of dyes molecules self-organized in the body of silica thin films. *Springer Proceedings in Physics*. 146. p. 83-91.
9. MINOOFAR, P., HERNANDEZ, R., FRANVILLE, A.-C., CHIA, SH., DUNN, B., ZINK, J. (2003) Strategies for spatially separating molecules in mesostructured sol-gel silicate films. *Journal of Sol-Gel Science and Technology*. 26. p. 571-575.
10. VOGEL, R., HARVEY, M., EDWARDS, G., MEREDITH, P., HECKENBERG, N., TRAU, M., RUBINSZTEIN-DUNLOP, H. (2002) Dimer-to-monomer transformation of rhodamine 6G in aqueous PEO-PPO-PEO block copolymer solutions. *Macromolecules*. 35. p. 2063-2070.

11. Леоненко Є.В. Фізико-хімічні закономірності взаємодії ПАР-барвник формування гібридних міцел / Леоненко Є.В., Тельбіз Г.М., Гребенніков В.Н., Ординський В.В. // Наукові записки НаУКМА, Хімічні науки і технології. – 2014. – 157. С. 43-48.

12. Kasha M. The exciton model in molecular spectroscopy / Kasha M., Rawls H.R., El-Bayoum Ashraf M. // Pure and Applied Chemistry. – 1965. – Vol. 11. – P. 371-392.

13. Anedda A. Formation of fluorescent aggregates in Rhodamine 6G doped silica glasses / Anedda A., Carbonaro C., Corpino R., Ricci P., Grandi S., Mustarelli P. // Journal of Non-Crystalline Solids. – 2007. – Vol. 353. – P. 481-485.

14. Leonenko E.V. Effect of aggregation of rhodamine 6G on the spectral and luminescence characteristics of hybrid mesostructured silica films / Leonenko E.V., Telbiz G.M., Bogoslovskaya A.B., Manoryk P.A. // Theoretical and Experimental Chemistry. – 2014. – Vol. 50. – P. 354-359.

15. Поперенко Л.В. Оптика металевих структур / Поперенко Л.В., Кудрявцев Ю.В., Стащук В.С., Лі Янг Пак. – Київ: ВПЦ "Київський Університет", 2013. – 531 с.

16. Поперенко Л.В. Діагностика поверхні поляризованим світлом / Поперенко Л.В., Стащук В.С., Шайкевич І.А., Одарич В.А. – Київ: ВПЦ "Київський Університет", 2007 – 336 с.

17. Shestopal O.H. Ellipsometric investigation of mechanically polished siall and quartz glass / Shestopal O.H., Poperenko L.V., Odarych V.A., Yurglevych I.V. // 11th International young Scientists Conference "Optics & High Technology Material Science" – SPO-2010, 21-24 October 2010, Kyiv, Ukraine: abstracts. – Kyiv. – 2010. – P. 161-162.

18. Negrub M.M. Ellipsometric diagnostic of R6G-based thin dye films / Negrub M.M., Leonenko E.V., Poperenko L.V., Stronski A.V., Telbiz G.M. Yurglevich I.V. // 15th International young Scientists Conference "Optics & High Technology Material Science" – SPO-2014, 23-26 October 2014, Kyiv, Ukraine: abstracts part 1. – Kyiv. – 2014. – P. 102-103.

19. Одарич В.А. Прикладна оптика. Оптична система і теорія, розрахунок, конструювання, технологія / Одарич В.А., Поперенко Л.В., Стащук В.С., Якунов А.В. – Київ: ВПЦ "Київський Університет", 2010. – 332 с.

20. Шишловский А.А. Прикладная физическая оптика / Шишловский А.А. – Москва: Физматгиз, 1961. – 823 с.

21. Сугаков В.Й. Теоретична фізика. Електродинаміка / Сугаков В.Й. – Київ: Вид-во "Вища школа", 1974. – 271 с.

11. LEONENKO, E.V., TELBIZ, G.M., GREBENNIKOV, V.M., ORDYNS'KYI, V.V. (2014) Physico-chemical laws of surfactant-dye interaction and hybrid micelles formation. *Proceedings NaUKMA, Chemical sciences and technologies*. 157. p. 43-48.

12. KASHA, M., RAWLS, H.R., EL-BAYOUM, ASHRAF, M. (1965) The exciton model in molecular spectroscopy. *Pure and Applied Chemistry*. 11. p. 371-392.

13. ANEDDA, A., CARBONARO, C., CORPINO, R., RICCI, P., GRANDI, S., MUSTARELLI, P. (2007) Formation of fluorescent aggregates in Rhodamine 6G doped silica glasses. *Journal of Non-Crystalline Solids*. 353. p. 481-485.

14. LEONENKO, E.V., TELBIZ, G.M., BOGOSLOVSKAYA, A.B., MANORYK, P.A. (2014) Effect of aggregation of rhodamine 6G on the spectral and luminescence characteristics of hybrid mesostructured silica films. *Theoretical and Experimental Chemistry*. 50. p. 354-359.

15. POPERENKO, L.V., KUDRIAVCEV, YU.V., STASHCHUK, V.S., LI, YANG PAK (2013) *Optics of metal structures*. Kyiv: Vydavnycho-polihrafichnyj centr "Kyivskyj universytet".

16. POPERENKO, L., STASHCHUK, V., SHAIKEVYCH, I., ODARYCH, V. (2007) *Surface diagnostic by polarized light*. Kyiv: Vydavnycho-polihrafichnyj centr "Kyivskyj universytet".

17. SHESTOPAL, O.H., POPERENKO, L.V., ODARYCH, V.A., YURGELEVYCH, I.V. (2010) Ellipsometric investigation of mechanically polished siall and quartz glass. In 11th International young Scientists Conference "Optics & High Technology Material Science" – SPO-2010, 21-24 October 2010. Kyiv: Vydavnycho-polihrafichnyj centr "Kyivskyj universytet". pp. 161-162.

18. NEGRUB, M.M., LEONENKO, E.V., POPERENKO, L.V., STRONSKI, A.V., TELBIZ, G.M. YURGELEVICH, I.V. (2014) Ellipsometric diagnostic of R6G-based thin dye films. In 15th International young Scientists Conference "Optics & High Technology Material Science" – SPO-2014, 23-26 October 2014. Kyiv: Vydavnycho-polihrafichnyj centr "Kyivskyj universytet". pp. 102-103.

19. ODARYCH, V.A., POPERENKO, L.V., STASHCHUK, V.S., YAKUNOV, A.V. (2010) *Applied optics. Optical system and theory, calculation, construction, technology*. Kyiv: Vydavnycho-polihrafichnyj centr "Kyivskyj universytet".

20. SHYSHLOVSKYI, A.A. (1961) *Applied physical optics*. Moskva: Physmathgiz.

21. SUGAKOV, V.Y. (1974) *Theoretical physics. Electrodynamics*. Kyiv: Vydavnytstvo "Vyshcha shkola".

Надійшла до редколегії 23.03.15

УДК 519.9

Яшук В.М.¹, проф
Терент'єва Ю.Г.², к.ф.-м.н., доц..
Штонь І.О.³ пров. інж.,
Коваль Ю.В.⁴ асист.
Сніцєрова О.М.⁵, студ.

Особливості спектрів люмінесценції лімфоцитів

^{1,2,4,5}Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 01601, м. Київ, вул.
Володимирська 64/13,
e-mail:¹ yashchukvaleriy@gmail.com

³Інститут експериментальної патології, онкології
і радіобіології ім. Р.Е. Кавецького НАН України,
03022, м. Київ, вул. Васильківська, 45
e-mail:³ irina_shton@ukr.net

V. M. Yashchuk¹, Prof
Y.G. Terent'yeva², PhD, assoc. Prof.
I.O. Shton³, lead. Eng,
Yu. V. Koval⁴, ass. Prof
O.M. Snitserova⁵, stud.

Some peculiarities of the lymphocytes luminescence spectra

^{1,2,4,5}Taras Shevchenko National University of
Kyiv, 01601, Kyiv, Volodymyrska st. 64/13,
¹e-mail: yashchukvaleriy@gmail.com

³R.E. Kavetsky Institute of Experimental
Pathology, Oncology and Radiobiology NAS of
Ukraine, 03022 Kyiv, 45 Vasylkivska St.
e-mail:³ irina_shton@ukr.net

Вперше отримані спектри люмінесценції лейкоцитарної маси здорової людини та лейкоцитарної маси від хворих на В-клітинний хронічний лімфолейкоз (В-ХЛЛ) при кімнатних температурах і температурі рідкого азоту(78K). Проаналізовано спектральний прояв окремих біологічних компонент (білків, нуклеїнових кислот, коферментів), що входять до складу лімфоцитів і впливають на інтегральну форму спектру в обох випадках. Спектри флюоресценції для здорових і патологічно змінених клітин при кімнатних температурах практично ідентичні. Отже, такі спектри не можуть застосовуватись в діагностичних цілях. Спектри фосфоресценції для клітин отриманих від здорових і хворих на В-ХЛЛ донорів при низьких температурах істотно відрізняються. Головний внесок у спектри люмінесценції лейкоцитарної маси у хворих на В-ХЛЛ дають скоріше за все нуклеїнові кислоти (РНК,ДНК). Можна зробити припущення, що внесок РНК є домінуючим, що і зумовлює зміни в спектрах, які настають внаслідок онкологічної патології.

Ключові слова: спектр люмінесценції(флюоресценції, фосфоресценції), лімфоцит, РНК, В-клітинний хронічний лімфолейкоз.

For the first time the optical luminescence spectrum of the lymphocytes from healthy humans and from patients with B-cell chronic lymphocytic leukemia (B-CLL) at the room temperature and the temperature of the liquid azote(78K) were obtained. Spectral manifestations of individual biological components (proteins, nucleic acids, nucleotides) that are constitutive parts of the white blood cells and affect the integral form of the spectrum are analyzed. Fluorescence spectra for normal and pathological modified cells at room temperature are almost identical. Therefore, these spectra can not be used as a diagnostic tool. Phosphorescence spectra for cells obtained from healthy donor and patients with B-CLL at low temperatures are significantly different. According to results of the research, a presumable cause of established differences in luminescence spectra of lymphocytes from healthy persons and patients with B-CLL is in the latters of large quantities RNA and possibly DNA. One can assume the dominant contribution of RNA, which causes changes in the spectra, occurring as a result of cancer.

Key Words: luminescence spectrum(fluorescence, phosphorescence), lymphocytes, RNA, B-cell chronic lymphocytic leukemia.

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Макарець М. В.

Традиційний підхід до вивчення процесів, які відбуваються у клітинах живих організмів, полягає у використанні барвників, що взаємодіють з певними біологічними молекулами або складовими клітини, та візуальної фіксації такої взаємодії з допомогою мікроскопів. Такий метод потребує доволі дорогих реактивів, великого досвіду візуальної ідентифікації патології в клітинах, і, нажаль, не є 100%

надійним. В той же час, досвід показує, що люмінесцентна спектроскопія може стати альтернативним методом діагностики патології клітини, оскільки може надати не лише загальну інформацію про клітину, а й детальну - про її молекулярний склад, наявність чи відсутність певних центрів випромінювання, що, в свою чергу, пов'язане з наявністю або відсутністю певних патологій. Люмінесцентна спектроскопія в поєднанні з

абсорбційною спектроскопією [1] має ряд переваг перед іншими методами медико-біологічного аналізу: неінвазивність, швидкість, наочність, відсутність потреби у дорогих хімічних реагентах.

Дана робота полягає в такому спектральному підході, а саме, в аналізі патологічно змінених клітини як цілісного, живого об'єкту.

Експериментальні дослідження та матеріали

В якості досліджуваних клітин використано лімфоцити людини, виділені з крові здорових донорів та хворих на великий хронічний лімфолейкоз (В-ХЛЛ). Метою роботи було отримання та аналіз спектрів флюоресценції та фосфоресценції цих клітин при кімнатній температурі і при 78 К, ідентифікація можливих біохімічних складових, що формують досліджувані спектри та визначення спектральних відмінностей між патологічно зміненими та нормальними лімфоцитами.

Матеріал для аналізу (патологічно змінені і нормальні клітини) був одержаний за сприяння Інституту експериментальної патології, онкології та радіобіології ім. Р.Є. Кавецького НАНУ. Виділення лімфоцитів із цільної крові людини здійснювалось шляхом сепарування її на центрифугі у градієнті щільності феколурографіну з подальшим триразовим відмиванням клітин у фізіологічному розчині Хенкса. Концентрація лімфоцитів у досліджуваних зразках складала 10^6 клітин/мл. Від моменту приготування зразка до отримання спектрів проходило від 15 до 30 хвилин. На момент запису спектрів ~90% клітин були живими. Розчини біохімічних сполук (ДНК, РНК, NAD, NAD-H, NADP, NADP-H) люб'язно надані Інститутом молекулярної біології та генетики (ІМБГ).

Спектри люмінесценції при кімнатній температурі і температурі рідкого азоту вимірювались на серійному спектрофлюориметрі Cary Eclipse (Varian Inc., Agilent Tech.) з використанням кріостату Optistat DN (Oxford Instruments); Максимальна роздільна здатність приладу Cary Eclipse - 1,5 нм, що визначається апаратною функцією та найменшою шириною щілини. Але оскільки досліджувані смуги люмінесценції досить широкі (~50 нм), то обрана спектральна ширина щілини для вимірів становила 10 нм. [Геометрична ширина] × [дисперсія приладу], що за рекомендацією виробника становить 1/10 від напівширини смуги випромінювання. Похибка визначення інтенсивності не перевищує 1%. Для врахування спектральної чутливості ФЕП, що використовується у флюориметрі, у програмному

забезпеченні приладу передбачена можливість корекції спектрів за рахунок врахування кривої чутливості. Для спектральних вимірювань використовували стандартні кварцеві кювети розміром 1×1 см.

Слід зауважити, що під час досліджень спектрів лейкоцитарної маси хворих з підтвердженим діагнозом В-ХЛЛ було використано більше десяти різних зразків, взятих у хворих різної вікової категорії на різних стадіях захворювання.

Люмінесценція лейкоцитів при кімнатних температурах

Як відомо, лейкомаза здорової людини містить в собі лейкоцити різного типу, в тому числі Т, та В-лімфоцити. Навпаки, у крові хворого на В-ХЛЛ накопичуються у величезній кількості ($>10^{10}$ /л) саме В-лімфоцити [2]. Для проведення коректного аналізу спектральних властивостей потрібно порівнювати між собою спектри клітин однакового типу. Тому з лейкомази крові здорового донора були виділені В-лімфоцити (методом розеткоутворення на еритроцитах барана). В результаті, лейкомаза була розділена на дві фракції: в одній знаходились В-лімфоцити, в другій – залишки лейкомази після виокремлення В-лімфоцитів. Ми вважаємо, що в останній фракції присутні переважно клітини Т-лімфоцитів і деяка (відносно невелика) кількість інших клітин лейкоцитів, таких, як моноцити,

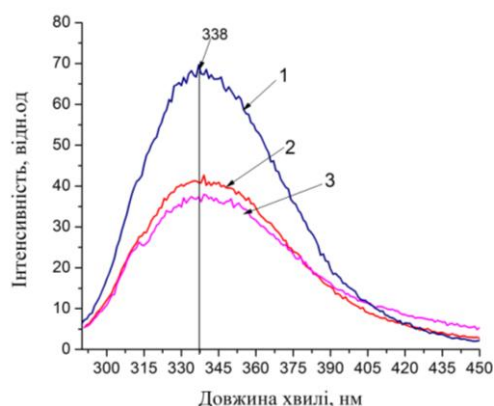


Рис. 1. Спектри флюоресценції лейкомази (1), В-лімфоцитів (2), Т-лімфоцитів (3); $\lambda_{365} = 280$ нм, $T = 293$ К.

тощо. Це припущення було підтверджено шляхом традиційного контролю складу клітинного препарату за допомогою мікроскопу. Для цільної лейкомази здорових клітин та для її фракцій, які складаються з переважно В та Т лімфоцитів були отримані спектри флюоресценції при кімнатній температурі

(рис. 1). Як видно, форми спектрів (кр. 1 та кр. 2) абсолютно ідентичні. Це дає можливість зробити висновок, що в подальшому є доволі коректним проведення порівняльного аналізу спектрів

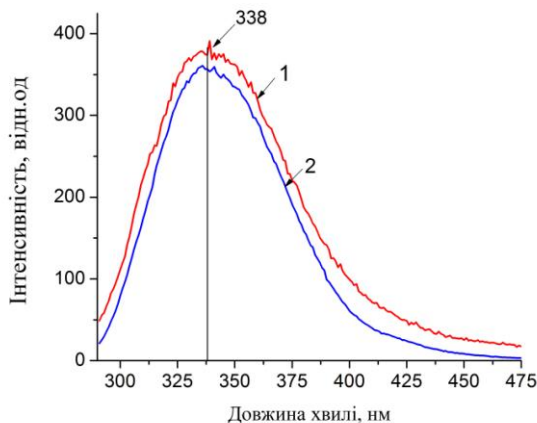


Рис. 2. Спектри флюоресценції при $T=300\text{K}$ здорових лімфоцитів (1) і лейкоцитів хворого на В-ХЛЛ (2); $\lambda_{36} = 280\text{ nm}$.

лейкомаси від пацієнта хворого на В-ХЛЛ та здорового донора, використовуючи в обох випадках недиференційовані лейкомаси.

Спектри флюоресценції В-лімфоцитів (рис. 2) демонструють практично ідентичну форму для здорових та патологічно змінених В-клітин; а максимумами, що спостерігаються на довжині хвилі $\lambda_{\text{max}} = 338\text{ nm}$ чітко співпадають з максимумом спектра флюоресценції триптофану [3]. Як наслідок, спектр флюоресценції при кімнатних температурах не дає додаткової інформації про наявність патології всередині клітин, а скоріше за все, характеризує випромінювання клітинних оболонок, до складу яких входять пептиди. Нажаль, при кімнатних температурах випромінювання РНК і ДНК неможливо зареєструвати через дуже малий ($\sim 10^{-9}$) квантовий вихід [4, 5]. Таким чином, ці спектри при кімнатній температурі могли б відобразити лише такі зміни, що відбуваються саме в білковій частині клітини. В живих клітинах присутні коферменти NAD, NAD-H, NADF, NADF-H, відповідальні за окисно-відновлювальні процеси. Спектр флюоресценції як здорових, так і патологічно змінених клітин має максимум на довжині хвилі $\lambda_{\text{max}} = 338\text{ nm}$ (рис. 1, рис. 2), в той час як типовий спектр флюоресценції ко-ферментів (рис. 3) має максимум, розташований в більш довгохвильовій області. Тому їх вклад в спектр флюоресценції лейкоцитів є мініорним, що корелює з результатами [1]. Спектри фосфоресценції лімфоцитів при кімнатних температурах

отримати, нажаль, не вдалось через погане співвідношення сигнал/шум.

З порівняння низькотемпературних спектрів фосфоресценції лейкоцитів здорової людини та спектрів лейкомаси пацієнтів, хворих на В-ХЛЛ

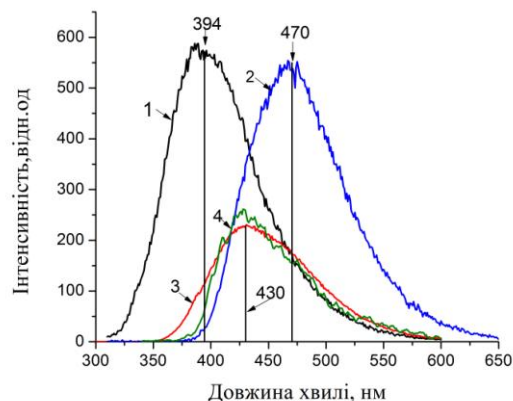


Рис. 3. Спектри флюоресценції при кімнатних температурах ко-ферментів NAD (1), NADH (2) і фосфоресценції при $T = 78\text{ K}$ NAD (3), NADH (4).

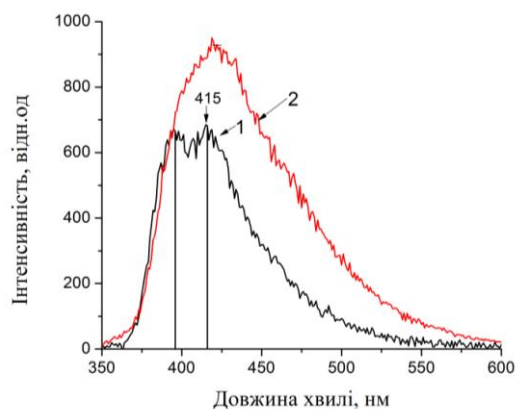


Рис. 4. Спектри фосфоресценції при $T=78\text{ K}$: (1) – В-лімфоцитів здорової людини, (2) – лейкомаси пацієнта, хворого на В-ХЛЛ.

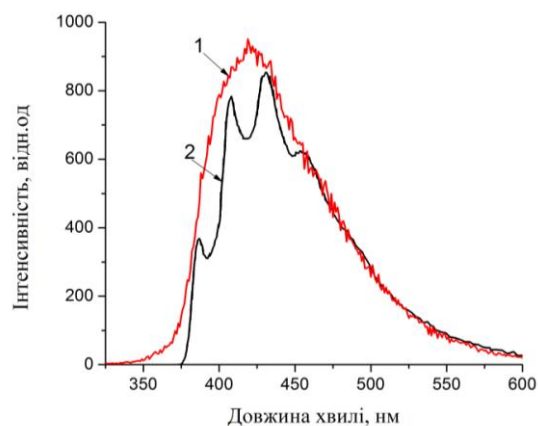


Рис. 5. Спектри фосфоресценції лейкоцитів отриманих від пацієнта, хворого на В-ХЛЛ. $T = 78\text{ K}$, $\lambda_{36} = 230\text{ nm}$ (1) і РНК, $T = 4\text{ K}$ (2) [4].

(рис. 4) впливає: по-перше, спектри відрізняються за формою: два чітких максимуми в спектрі здорових клітин і один – в спектрі патологічно змінених. По-друге, у спектрах патологічно змінених клітин наявне довгохвильове плече, на відміну від спектру флуоресценції для здорових В-лімфоцитів.

По-третє – максимум зсувається в область більших довжин хвиль. Такі зміни можуть бути спричинені присутністю великої кількості нуклеїнових кислот – ДНК і РНК, що узгоджується з результатами, отриманими в [1]. Спектр низькотемпературної флуоресценції ДНК є безструктурним [5], а спектр РНК – навпаки має характерну структуру [3,4]. На рис. 5 наведено спектр низькотемпературної флуоресценції для патологічно змінених клітин і спектр РНК [4]. Можна зробити припущення, що всередині клітини лімфоцита спектрально проявляється комбінація РНК і ДНК, причому РНК, на наш погляд, дає домінуючий внесок,

який і зумовлює зміни в спектрах, що настають внаслідок онкологічної патології.

Висновки

1. Спектри флуоресценції лімфоцитів при кімнатних температурах ідентичні для клітин здорового донора і для патологічно змінених клітин. Такі спектри не можуть застосовуватись з діагностичною метою.
2. Спектри флуоресценції для здорових клітин і клітин від донорів, хворих на В-ХЛЛ, радикально відрізняються при низьких температурах. Спектр флуоресценції здорових клітин має два максимуми, що відповідають довжинам хвиль $\lambda_{\max 1} = 395$ нм, $\lambda_{\max 2} = 415$ нм. Спектр патологічно змінених клітин має складну форму, що скоріше за все обумовлено наявністю великої кількості нуклеїнових кислот (РНК) в клітині хворого.
3. Аналіз спектрів флуоресценції при низьких температурах може виступати як додатковий метод діагностики наявності патології.

References

1. Ящук В.М. Особливості УФ-спектрів поглинання лімфоцитів / В.М. Ящук, Ю. Г. Терентьева, О. М. Сніцєрова, Коваль Ю.В., Штонь І.О.// Вісник КНУ ім. Тараса Шевченка, сер. фіз-мат науки. – 2014. – №3. – С. 291–296.
2. Глузман Д. Диагностическая онкогематология / Д. Глузман, Л. Скляренко, В. Надгорная. – Киев: ДИА, 2011. – 253 с.
3. Yashchuk V.M. Optical response of the Polynucleotides-proteins interaction / V. M. Yashchuk, V.V. Kudrya, S.M. Levchenko, Z.Y. Tkachuk, D.M. Hovorun, V.I. Mel'nik, V.P. Vorob'yov, G.V. Klishevich // Mol. Cryst. Liq. Cryst.– 2011. – Vol. 535. – P. 93–110.
4. Yashchuk V.M. The Peculiarities of the RNA Luminescence / V.Yu. Kudrya, V.M. Yashchuk, S.M.Levchenko, V.I.Mel'nik, L.A.Zaika, D.M.Govorun // Mol. Cryst. Liq. Cryst.- 2008.- Vol. 497.- P.93–100.
5. Yashchuk V.M. The nature of the electronic excitations capturing centres in the DNA/ V. Yashchuk , V. Kudrya , M.Losytsky, H. Suga, T. Ohul'chansky // Journal of Molecular Liquids – 2006.- Vol. 127.- P.79-83.
1. YASHCHUK V.M. et al. (2014) Some peculiarities of the lymphocytes UV-absorption spectra. *Visn., Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ser. Phys.-Math. Science*. 3. p. 291-296.
2. GLUZMAN, D., SKLIARENKO, L. and NADGORNAYA, V., (2011) *Diagnostic onkogematology*. Kyiv:DIA.
3. YASHCHUK, V. et al. (2011) Optical Response of the Polynucleotides-Proteins Interaction. *Mol. Cryst. Liq. Cryst.* 535. p. 93–110.
4. YASHCHUK V.M. et al. (2008) The Peculiarities of the RNA Luminescence. *Mol. Cryst. Liq. Cryst.* 497. p.93–100.
5. YASHCHUK V. et al. (2006) The nature of the electronic excitations capturing centres in the DNA. *Journal of Molecular Liquids*.127. p.79–83.

Надійшла до редколегії 26.03.2015

Підписано до друку _____. Формат _____. Друк. офс.
Папір офс. № _____. Друк. арк. _____. Тираж _____. Зам. _____.
Друкарня _____.

