КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

В І С Н И К

КИЇВСЬКОГО НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

СЕРІЯ ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНІ НАУКИ

ВИПУСК №4 2014

**Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка,
випуск №4, 2014,
Серія фізико-математичні науки**

З 1991 року серії вісників Київського університету “Математика і механіка”, “Физика”, “Моделирование и оптимизация сложных систем” реорганізовано у “Вісник Київського університету. Серія: фізико-математичні науки”. У віснику містяться результати нових досліджень у різних галузях математики, інформатики, механіки, фізики та радіофізики для наукових працівників, викладачів, аспірантів, інженерів і студентів. Друкується за рекомендаціями Вчених Рад фізичного, радіофізичного, механіко-математичного факультетів та факультету кібернетики.

Журнал “Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія фізико-математичні науки” включено до переліку фахових видань ВАК України та реферується в Реферативному журналі та базах даних ВИНИТИ, Росія, Москва.

Редакційна колегія:

Анісімов Анатолій Васильович, чл.-кор. НАН України, д.ф.-м.н., проф., **головний редактор**;

Хусаінов Денис Яхьєвич, д.ф.-м.н., проф., **заступник головного редактора, відповідальний за видання**;

Arturs Medvids, Dr. habil. Phys., prof., Riga Technical University, Riga, Latvia;

Miklós Rontó, prof., Doctor of Science, Full Professor at the University of Miskolc, Faculty of Mechanical Engineering and Information Science, Department of Analysis;

Milada Bartlova, Ph.D., Brno University of Technology, Department of Physics, Brno, Czech Republic;

Nickolai Kukhtarev, Research professor, Department of Physics, Alabama A&M University;

Sergei Gorlatch, Dr. habil., prof., professor of Computing Science, University of Muenster, Germany;

Sergey Trofimchuk, prof., Universidadde Talca, Instituto de Matematica y Fisica, Talca, Chile;

Stefan Hudak, DSc, prof., professor of Technical University of Kosice, Slovak Republic;

Toru Aoki, Ph.D., prof., Research Institute of Electronics, Shizuoka University, Japan;

Акіменко Віталій Володимирович, д.т.н., проф.;

Анісімов Ігор Олексійович, д.ф.-м.н., проф.;

Буй Дмитро Борисович, д.ф.-м.н., проф.;

Булавін Леонід Анатолійович, акад. НАН України, д.ф.-м.н., проф.;

Волошин Олексій Федорович, д.т.н., проф.;

Гаращенко Федір Георгійович, д.т.н., проф.;

Єжов Станіслав Миколайович, д.ф.-м.н., проф.;

Жук Ярослав Олександрович, д.ф.-м.н., проф.;

Заславський Володимир Анатолійович, д.т.н., доц.;

Кириченко Володимир Васильович, д.ф.-м.н., проф.;

Козаченко Юрій Васильович, д.ф.-м.н., проф.;

Кудін Володимир Іванович, д.т.н., с.н.с.;

Львов Віктор Анатолійович, д.ф.-м.н., проф.;

Макара Володимир Арсенійович, чл.-кор. НАН України, д.ф.-м.н., проф.;

Макарець Микола Володимирович, д.ф.-м.н., проф.;

Перестюк Микола Олексійович, акад. НАН України, д.ф.-м.н., проф.;

Погорілий Сергій Дем’янович, д.т.н., проф.;

Савенков Сергій Миколайович, д.ф.-м.н., доц.;

Скришевський Валерій Антонович, д.ф.-м.н., проф.

Редакційний відділ:

Анісімова Тетяна Харитонівна, **відповідальний секретар**;

Безущак Оксана Омелянівна, bezusch@univ.kiev.ua;

Стукаленко Вікторія Віталіївна, stu@univ.kiev.ua;

Родіонова Тетяна Василівна, rodtv@univ.kiev.ua;

Хмелюк Надія Кузьмівна, khmeluk@univ.kiev.ua;

Сільвейструк Людмила Миколаївна, **технічний редактор**, slm-klm@ukr.net.

Адреса редакційної колегії:

Факультет кібернетики, Київський національний університет імені Тараса Шевченка,
пр. Глушкова, 4 д, 03680 Тел. (044) 259-01-49

ISBN 978-966-2142
ISSN 1812-5409

ЗМІСТ

АЛГЕБРА, ГЕОМЕТРІЯ ТА ТЕОРІЯ ІМОВІРНОСТЕЙ

Бондаренко В.М., Зубарук О.В. Алгебра Ауслендера для пар ідемпотентних матриць з подвійним сендвіч-співвідношенням 9
Головащук Н.С., Гнатюк О.М. Кореневі бази для несиметричних цілих білінійних форм 14
Доронін О.В. Тест для перевірки рівності розподілів у моделі суміші зі змінними концентраціями 20
Жучок Ю.В. Декомпозиції вільних тріоїдів 28
Журавльов В.М., Сурков А.М. Допустимі сагайдаки та черепичні порядки скінченної глобальної розмірності в $M_n(D)$, $n \leq 5$ 35
Плахотник М.В. Системи лінійних функціональних рівнянь в задачі про топологічну спряженість відображень 40
Рябухо О.М., Турка Т.В. Київський період науково-педагогічної діяльності М.Г.Чеботарьова (до 130-річчя з дня народження) 53

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ, МАТЕМАТИЧНА ФІЗИКА ТА МЕХАНІКА

Багно О.М. Хвилі у попередньо деформованому стисливому пружному шарі, який взаємодіє з шаром в'язкої стисливої рідини 63
Вакал Є.С., Вакал Ю.Є., Стеля О.Б. Чисельне розв'язання задачі вологопереносу в області складної форми зі слабко проникними включеннями 69
Горошко О.О., Кикоть С.В. Канонічні рівняння в дослідженні коливань плаваючого трубопроводу 73
Горошко О.О., Лебедєва І.В. Прецесійні рухи та самоцентрування роторів 77
Лук'янов Петро В. Генерація шуму близької взаємодії лопаті і вихору при косому обдуванні потоком 81
Малюга В.С. Характеристики звукового поля, що генерується при обтіканні сфери 87
Острик В.І., Улітко А.Ф. Аналогія між неосесиметричною деформацією та крученням у контактних задачах для півпростору 93
Семенова І.Ю. Побудова координатного базису для задачі коливань рідини в двопорожнинному гіперболоїді 99
Ткач А.Б. Квазітороїдальні багатовиди нелінійних систем рівнянь з частинними похідними з імпульсним впливом 103
Ткаченко Р.В., Лимарченко О.С. Динаміка рідини з вільною поверхнею в резервуарі на рухомій платформі під дією зовнішньої імпульсної сили 107
Трунов О.О. Поширення хвилі у хвилеводі з подвійним згином 111
Трунова Л.А. Точкове джерело в околі конусного відбивача 115

КОМП'ЮТЕРНІ НАУКИ ТА ІНФОРМАТИКА

Верченко А.П., Кравченко Р.В. Метод автоматичного розташування написів точкових об'єктів в електронних картах, побудований на нейронній мережі Хопфілда 121
Галкін О.А. Вплив варіацій смуги пропускання на поведінку показника помилкової класифікації ядерного класифікатора 125
Гаращенко Ф.Г., Яценко В.О., Матвієнко В.Т., Дегтяр О.С. Адаптивний метод дистанційного виявлення хімічних та біологічних компонентів, що базується на градієнтному підході 131
Гаркуша Н.І. Про одну математичну модель динаміки взаємодіючих популяцій 135
Гончар С.А. Криптографія з часовим розкриттям: минуле, теперішнє, майбутнє 139
Завадський І.О. Комбінаторний алгоритм підвищення завадостійкості кодів, що генеруються скінченними автоматами 145
Какойченко А.І., Порхун О.В.Використання RBF-мережі для короткострокового прогнозування фінансових ринків 149
Касьянюк В.С., Малютенко Л.М. Моделювання нечітких множин, предикатів та реляцій на основі теоретико-можливісного підходу 155
Кінаш А.В., Чабанюк Я.М., Хімка У.Т. Асимптотична дисипативність випадкової еволюції з імпульсним збуренням 163
Компан С.В. Особливості побудови запитів у об'єктних базах даних на прикладі об'єктної СУБД db4o 167

Крак Ю.В., Коваль Ю.В., Тернов А.С. До розробки інтерактивного інтерфейсу моделювання та розпізнавання жестової інформації 175
Криволап А.В. Система виводу з T- та F-обмеженнями для монотонної логіки Флойда-Хоара 179
Лялецький О.О., Афонін А.О. Про інтелектуальні та інтерфейсні засоби систем автоматизації доведень теорем 187
Макушенко І.А. Оптимальне керування вхідним потоком в умовах критичного навантаження в мережі 191
Мащенко С.О., Аль Самарраи Мохаммед Саад И. Транспортная задача с нечетким множеством целей 199
Наконечний О. Г., Шушарін Ю. В., Демиденко С. В. Гарантовані оцінки середнього значення випадкових послідовностей 204
Негадайлов П.А., Єщенко А.Ю. Пошук максимальної коаліції в обмеженій кооперативній грі з багатьма гравцями 209
Подлипенко Ю.К., Горбатенко М.Ю., Перцов А.С. Наближені мінімаксні оцінки лінійних неперервних функціоналів від розв'язків системи змішаних варіаційних рівнянь 213
Савкова В.П. Розробка методу оцінки якості організації і проведення підготовки фахівців в інтегрованій системі вищої освіти для вищого навчального закладу 219
Скобелєв В.Г. Про мови, які приймає з заданою ймовірністю 1-кубітовий МО-1QFA з бінарним вхідним алфавітом 225
Терещенко В.М. Один метод тріангуляції множини точок на площині 228
ШакотькоТ.І., Хусаїнов Д.Я., Сіренко А.С. Про один підхід до дослідження стійкості моделі нейронних мереж з запізненням другим методу Ляпунова 232
Шкільняк О.С. Семантичні аспекти модальних логік часткових немонотонних предикатів 238
Юнькова О.О., Кулян А.В., Прокопюк О.С. Про ідентифікацію параметрів у задачах оптимального інвестування 242
Яценко В.О., Кочкодан О.І., Макаричев М.В., Пашенковська І.С., Черемних О.С., Шолохов О.В. Ідентифікація білінійних систем та керування показниками Ляпунова 247

РАДІОФІЗИКА

Глушенков А.М., Говорун Д.М. Повне сімейство Н-зв'язанних гетероасоціатів $m^9Gua{\cdot}m^1Cyt$: квантово-механічне дослідження 253
Горячко А. М., Кулик С. П., Мельник П.В., Находкін М. Г. Нова атомарна модель наноструктурованої поверхні Si(001)-c(8×8) 259
Григорук В.І., Коваленко В.Ф., Петричук М.В., Танигін Б.М., Шулима С.І. Зміна оптичного пропускання тонких шарів магнітної рідини під дією імпульсного магнітного поля 263
Карлаш А.Ю. Еволюція кінетики фотолюмінесценції в композитних зразках arSiO$_x$/ nc-Si в процесі старіння 269
Кузьмич Р.Ю., Павлюк С.П., Ковток В.Г., Вплив конструкції напівпровідникового діода на його розігрів імпульсом ударного струму 273
Павлюк С.П., Оберемок О.С., Телега В.М., Гандзюк В.І. Ефект пам'яті в КСДІ структурах 277

СУЧАСНА ФІЗИКА

Вергун Л.Ю. Кінетика денатурації овальбуміну в умовах гіперпероксії: експериментальна методика 283
Вергун Л.Ю., Теліман К.О., Войтович І.С., Мягченко Ю.О. Вплив електрохімічної активації води на її в'язкість 287
Войтешенко А.В. Вплив додавання наночастинок лапоніту на в'язкість розчину поблизу критичної температури розшарування 291
Манько Д. Ю.,Лопатинська О. Г.,Поперенко Л. В. Особливості розрахунку плазмової і релаксаційної частот в аморфних металевих сплавах на основі заліза 295
Онанко А.П., Онанко Ю.А. Релаксаційні процеси дефектної наноструктури в сплавах, SiO_2 і автоматизована система візуалізації ультразвукової анізотропії 301
Ширінян А. С., Комісаренко О. С., Макара В. А. Використання термоаналізу для побудови фазових діаграм багатокомпонентних матеріалів 305

CONTENTS

ALGEBRA, GEOMETRY AND PROBABILITY THEORY

Bondarenko V.M., Zubaruk O.V. The Auslander algebra for the pairs of idempotent matrices with the double sandwich relation 9
Golovaschuk N.S., Gnatiuk O.M. Root bases for nonsymmetrical integer bilinear forms 14
Doronin O.V. Test for checking the equality of distributions in mixture model with varying concentrations 20
Zhuchok Y.V. Decompositions of free trioids 28
Zhuravlev V.N., Surkov A.M. Admissible quivers and tiled orders of finite global dimension in $M_n(D)$, $n \leq 5$ 35
Plakhotnyk M.V. Linear functional equations systems in the problem of topological conjugation of mappings 40
Ryabukho O.M., Turka T.V. Kyiv Period of the Scientific and Educational Activities by M.H. Chebotaryov (to the 130th Anniversary of His Birth) 53

DIFFERENTIAL EQUATIONS, MATHEMATICAL PHYSICS AND MECHANICS

Bagno O.M. Waves in a pre-deformed compressible elastic layer that interacts with a layer that of an viscous compressible fluid 63
Vakal E.S.,Vakal Yu.E., Stelya O.B. Numerical solution of moisture transfer problem in the area of complex shape with weakly permeable inclusions 69
Goroshko O.O., Kykot S.V. The canonical equations in the investigations of oscillations of a floating conduit 73
Goroshko O.O., Lebedyeva I.V. Precession movements and self centering of rotors 77
Lukianov Petr V. Sound generation by blade and vortex near interaction at oblique angle of flow streamlining 81
Malyuga V.S. Characteristics of aerodynamic sound field generated by the flow past a sphere 87
Ostryk V.I., Ulitko A.F. Analogy between the nonaxisymmetric strain and torsion in the contact problems for a half-space 93
Semenova I.Yu. Construction of coordinate basis of liquid sloshing problem in two-sheeted hyperboloid 99
Tkach A.B. Quasitoroidal manifolds for nonlinear systems of partial differential equations with impulse influence 103
Tkachenko R., Limarchenko O.S. Dynamics of liquid with a free surface in reservoir on movable platform under external impulse loading 107
Trunov O. O. The wave propagation in bent waveguide with two bend 111
Trunova L.A. Point source in the vicinity of conical reflector 115

COMPUTER SCIENCES AND INFORMATIC

Verchenko A.P., Kravchenko R.V. The method of automatic point-feature label placement in digital maps based on the Hopfield neural network 121
Galkin O.A. Effect of bandwidth variations on the behaviour of misclassification rate of kernel classifier 125
Garashchenko F.G., Yatsenko V.O., Matvienko V.T., Degtiar O.S. Adaptive method for remote detection of chemical and biological components based on the gradient approach 131
Garkusha N.I. About one mathematical model of the dynamics of interacting population 135
Gonchar S.A. Time-release cryptography: past, present, future 139
Zavadskyi I.O. Search algorithm for increase the performance of codes generated by finite automatons 145
Kakoichenko A.I., Porkhun O.V. Short-term financial markets forecasting with RBF network 149
Kasyanyuk V.S., Malutenko L.M. Fuzzy sets, predicates and relations modeling using theoretic-possibility approach 155
Kinash A.V., Chabaniuk Ya.M., Khimka U.T. Asymptotic dissipativity of the random evolution with impulse perturbation 163
Kompan S.V. Peculiarities of query construction in object databases on the example of DBMS db4o 167
Krak Iu.V., Koval Iu. V., Ternov A.S. To creation of interactive interface for sign information modeling and recognition 175
Kryvolap A.V. Inference system with T- and F-constrains for monotone Floyd-Hoare logic 179

Lyaletsky A.A., Afonin A.A. On intelligent and interface tools for automated theorem-proving systems 187
Makushenko I.A. Optimal control of input flow in heavy traffic on the network 191
Mashchenko S.O., Mohammed Saad I. Al-Sammarraie The transportation problem with the fuzzy set of goals 199
Nakonechniy O.G., Shusharin Yu.V., Demydenko S.V. Guaranteed estimation of average random sequences 204
Negadailov P.A., Yeschenko A.Y. On the maximum coalition in limitedcooperative game with many players 209
Podlypenko Yu.K., Gorbatenko M.Yu., Pertsov A.S. Approximate minimax estimates of linear continuous functionals from solutions of system of mixed variational equations 213
Savkova V.P. Development methods for evaluating the quality of organizations, and conducting the training of specialists in integrated system of higher education for higher educational institutions 219
Skobelev V.G. On some languages accepted with the given probability by 1-qubit MO-1QFA with binary input alphabet 225
Tereshchenko V.M. One method for triangulation a set of points in the plane 228
Shakotko T.I., Khusainov D.Ya., Sirenko A.S. About one approach to study the stability of models of neural networks with delay Lyapunov second method 232
Shkilniak O.S. Semantic aspects of modal logics of partial non-monotone predicates 238
Yun'kova O.O., Kulian A.V., Prokopyuk O.S. On the identification of parameters in problems of optimal investment 242
Yatsenko V.O., Kochkodan O.I., Makarychev M.V., Pashenkovska I.S., Cheremnikh S.O., Sholohov O.V. Identification of bilinear system and control of Lyapunov exponents 247

RADIOPHYSICS

Glushenkov A.N., Hovorun D.N. Complete family of H-bonded heteroassociates $m^9Gua{\cdot}m^1Cyt$: quantum-mechanical study 253
Goriachko A.M., Kulyk S.P., Melnik P.V., Nakhodkin M.G. New atomic model of the Si(001)-c(8×8) nanostructured surface 259
Grygoruk V.I., Kovalenko V.F., Petrychuk M.V., Tanygin B.M., Shulyma S.I. Changing of the optical transmission of thin ferrofluid layers under the influence of magnetic field pulses 263
Karlash A.Yu. The evolution of PL relaxation processes under aging of arSiO_x/nc-Si nanocomposites 269
Kuzmych R.Yu., Pavljuk S.P., Kovtok V.H. Influence of design of semiconductor diode of the heating by the impact current 273
Pavljuk S.P., Oberemok O.S., Telega V.M. Handziuk V.I. Memory effect in SDI structures 277

MODERN PHYSICS

Voiteshenko A.V. Effect of addition of laponite nanoparticles on viscosity of solution near the critical consolute temperature 283
Vergun L.Yu., Teliman K.O., Voytovich I.S., Myagchenko Yu.O. Influence electrochemical activation of water on its viscosity 287
Vergun L.Yu. The kinetics of ovalbumin denaturation at the temperature of hyperpyrexia: the experimental procedure 291
Manko D. Yu., Lopatynska O. G., Poperenko L.V. Peculiarities of plasma and relaxation frequencies calculation in the iron-based amorphous metal alloys 295
Onanko A. P., Onanko Y. A. Defect nanostructure relaxation processes in alloys, SiO_2 and automated system of ultrasound anisotropy visualization 301
Shirinyan A. S., Komisarenko O. S., Makara V. A. The use of thermal analysis for the construction of phase diagrams of multicomponent materials 305

АЛГЕБРА, ГЕОМЕТРІЯ ТА ТЕОРІЯ ІМОВІРНОСТЕЙ

УДК 512.53+512.64

В.М. Бондаренко[1], *д. ф.-м. н., професор,*
О.В. Зубарук[2], *аспірант*

Алгебра Ауслендера для пар ідемпотентних матриць з подвійним сендвіч-співвідношенням

[1]Інститут математики НАН України, 01601, Київ, вул. Терещенківська, 3
[2]Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 01033, Київ, вул. Володимирська, 64
e-mail: [1]vit-bond@imat.kiev.ua
[2]Sambrinka@ukr.net

V.M. Bondarenko[1], *Doctor of Sciences, Full Professor*, O.V. Zubaruk[2], *Postgraduate Student*

The Auslander algebra for the pairs of idempotent matrices with the double sandwich relation

[1]Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, 01601, Kiev, 3 Tereschenkivska Str.
[2]Taras Shevchenko National University of Kyiv, 01033, Kyiv, 64 Volodymyrska Str.
e-mail: [1]vit-bond@imat.kiev.ua
[2]Sambrinka@ukr.net

У роботі отримано канонічну форму для пари ідемпотентних матриць A, B з додатковим співвідношенням $ABA = BAB$ (яке називається подвійним сендвіч-співвідношенням) та обчислено алгебру Ауслендера для таких пар матриць.

Ключові слова: напівгрупа, ідемпотентна матриця, подвійне сендвіч-співвідношення, матричне зображення, ендоморфізм, алгебра Ауслендера.

One of the important notion of the area of modern representation theory that study categories of representations of various algebraic objects is Auslander algebra (which has been studied for decades by many mathematicians). This algebra is defined for an algebra of finite type (i. e. such that has, up to isomorphism, only finitely many indecomposable modules) as the endomorphism algebra of a direct sum of all indecomposable modules, one from each isomorphism class. We use instead of the module language the equivalent language of matrix representations. Since there is a natural correspondence between the representations of a semigroup and the representations of its semigroup algebra over any field, we can say about the Auslander algebra of each semigroup of finite representation type.

In the first part of this paper we obtain a canonical form of representation of the semigroup generated by two idempotent elements a, b with additional relation $aba = bab$ (which we call the double sandwich relation), or in other term, a canonical form of pairs idempotent matrices such that $ABA = BAB$. We prove that this semigroup has, up to equivalence, only finite number of indecomposable representations.

In the second part of this paper we calculate the Auslander algebra in this situation.

Key Words: semigroup, idempotent matrix, double sandwich relation, matrix representation, endomorphism, Auslander algebra.

Communicated by Prof. Kirichenko V.V.

1 Introduction

Throughout this paper, K denotes a field.

Let $S = S_{dsr}(2, 2)$ denotes the semigroup with the generators $0, a, b$ and the defining relations

1) $0^2 = 0,\ 0a = a0 = 0,\ 0b = b0 = 0$;

2) $a^2 = a,\ b^2 = b$;

3) $aba = bab$.

We call the relation 3) the *double sandwich relation.*

By the general definition, a *matrix representation of the semigroup S over K* is a homomorphisms $T : S \to M_n(K)$, where $M_n(K)$ is the semigroup (with respect to the multiplication) of all $n \times n$ matrices over K (n is called the *dimension* of the representation T). We can assume, essentially without loss of generality, that $T(0) = 0$. Then T is uniquely determined by the pair of matrices $R(T) = (A, B)$ with $A^2 = A$, $B^2 = B$, $ABA = BAB$ (here $A = T(a), B = T(b)$). We identify the representation T with the pairs of matrices $R(T)$.

Representation $R = \{A, B\}$ and $R' = \{A', B'\}$ of the semigroup S are said to be *equivalent* if $A' =$

© В.М. Бондаренко, О.В. Зубарук, 2014

CAC^{-1} and $B' = CBC^{-1}$ for some invertible matrix C. A matrix representation R is said to be *decomposable* if it is equivalent to a direct sum of two representations, and *indecomposable* otherwise. For matrix representations of S, the Krull-Schmidt theorem (on the uniqueness of decomposition into a direct sum of indecomposables) holds.

We identify the problem on matrix representation of the semigroup $S_{dsr}(2,2)$ and the problem on pairs idempotent matrices with double sandwich relation using both notions depending on the particular situation.

The first aim of this paper it to classify (up to equivalence) the indecomposable representations of the semigroup $S_{dsr}(2,2)$. The second part is devoted to the study of the Auslander algebra of this semigroup.

The Auslander algebra (the endomorphism algebra of a direct sum of the representatives of the indecomposable representations) is introduced for algebras (in particular, for semigroup algebras, or equivalently, semigroups themselves) only in the case of finite representation type, i. e. with only finitely many (up to equivalence) indecomposable representations.

We emphasize that the semigroup $S(2,2)$ with the generators a, b and the defining relations $a^2 = a, b^2 = b$ is of infinite representation type; its representations can be classified by one of the method of [1] using a result of [2]. Since the semigroup $S_{dsr}(2,2)$ is of finite representation type (see below Theorem 2.1), we can say about its Auslander algebra.

2 Classification theorem

By E we denote any identity matrix of size $m \times m$ with $m \geqslant 0$.

Theorem 2.1. *Any matrix representation of the semigroup $S_{dsr}(2,2)$ is equivalent to a matrix representation of the form*

$$a \to A = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$b \to B = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E & E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Proof. We carry out the proof on the language of admissible elementary transformations, and following the traditions of the Roiter theory of matrix problems we denote, as rule, the result of applying such transformations to some matrices by the same symbols. When we partition into blocks some matrices of a matrix representation, we always assume (often by default) that all the other matrices are partitioned analogously. The same is assumed with respect to parts of matrices and these matrices themselves, and in the other analogously situations.

Let $R = \{A, B\}$ be a matrix representation of the semigroup $S = S_{dsr}(2,2)$ over K. We reduce A to a normal Jordan form, namely

$$A = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

and partition B into blocks in the same way as A:

$$B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}.$$

First, we use the equality $ABA = BAB$:

$$ABA = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} B_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$BAB = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} B_{11} & 0 \\ B_{21} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} B_{11}^2 & B_{11}B_{12} \\ B_{21}B_{11} & B_{21}B_{12} \end{pmatrix};$$

consequently

$$B_{11}^2 = B_{11} \tag{1}$$

$$B_{11}B_{12} = 0 \tag{2}$$

$$B_{21}B_{11} = 0 \tag{3}$$

$$B_{21}B_{12} = 0 \quad (4)$$

Now we use the equality $B^2 = B$:

$$B_{11}^2 + B_{12}B_{21} = B_{11} \quad (5)$$

$$B_{11}B_{12} + B_{12}B_{22} = B_{12} \quad (6)$$

$$B_{21}B_{11} + B_{22}B_{21} = B_{21} \quad (7)$$

$$B_{21}B_{12} + B_{22}^2 = B_{22} \quad (8)$$

Taking into account relations (1)-(4) we write the equalities (5)-(8) in the following form:

$$B_{12}B_{21} = 0 \quad (9)$$

$$B_{12}B_{22} = B_{12} \quad (10)$$

$$B_{22}B_{21} = B_{21} \quad (11)$$

$$B_{22}^2 = B_{22} \quad (12)$$

Since the matrices B_{11} and B_{22} are idempotent (see (1) and (12)) they can be reduced, by admissible transfornations to be similarity trasformations with A and B (inside the 1st and 2nd horizontal and vertical bands), to the following forms:

$$B_{11} = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ and } B_{22} = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

In accordance with the partitions of B_{11} and B_{22} we partition B_{12} and B_{21} into the new blocks:

$$B_{12} = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ C_3 & C_4 \end{pmatrix} \text{ and } B_{21} = \begin{pmatrix} D_1 & D_2 \\ D_3 & D_4 \end{pmatrix}.$$

Then we have

$$\begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

from equality (2),

$$\begin{pmatrix} D_1 & 0 \\ D_3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

from equality (3),

$$\begin{pmatrix} C_1 & 0 \\ C_3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ C_3 & C_4 \end{pmatrix}$$

from equality (10),

$$\begin{pmatrix} D_1 & D_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_1 & D_2 \\ D_3 & D_4 \end{pmatrix}$$

from equality (11).

So $C_1 = 0$, $C_2 = 0$, $C_4 = 0$ i $D_1 = 0$, $D_3 = 0$, $D_4 = 0$, and consequently we have

$$\begin{pmatrix} 0 & D_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ C_3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

from equality (4) and

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ C_3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & D_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

from equality (9), whence $D_2C_3 = 0$, $C_3D_2 = 0$.

Thus our matrix representation $R = \{A, B\}$ consists of matrices of the following form:

$$A = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C & 0 \\ 0 & D & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (13)$$

where $DC = 0$, $CD = 0$.

Now find out when the matrix representation $R = \{A, B\}$ is equivalent to another matrix representation $\overline{R} = \{\overline{A}, \overline{B}\}$ with the matrices $\overline{A}, \overline{B}$ to be the same form as A, B:

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ \overline{B} = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \overline{C} & 0 \\ 0 & \overline{D} & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Let X be an invertible matrix such that $\overline{A} = XAX^{-1}$, $\overline{B} = XBX^{-1}$, or equivalently,

$$\overline{A}X = XA, \ \overline{B}X = XB.$$

First, we use the equality $\overline{A}X = XA$ (with the matrix X to be partitioned into blocks in accordance with the partitions of B_{11} and B_{22}):

$$\begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} & X_{13} & X_{14} \\ X_{21} & X_{22} & X_{23} & X_{24} \\ X_{31} & X_{32} & X_{33} & X_{34} \\ X_{41} & X_{42} & X_{43} & X_{44} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} & X_{13} & X_{14} \\ X_{21} & X_{22} & X_{23} & X_{24} \\ X_{31} & X_{32} & X_{33} & X_{34} \\ X_{41} & X_{42} & X_{43} & X_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

As result, we have

$$\begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} & 0 & 0 \\ X_{21} & X_{22} & 0 & 0 \\ X_{31} & X_{32} & 0 & 0 \\ X_{41} & X_{42} & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} & X_{13} & X_{14} \\ X_{21} & X_{22} & X_{23} & X_{24} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

whence

$$X = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} & 0 & 0 \\ X_{21} & X_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & X_{33} & X_{34} \\ 0 & 0 & X_{34} & X_{44} \end{pmatrix}.$$

Now we use the equality $\overline{B}X = XB$ (with X to be of the new form):

$$\begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \overline{C} & 0 \\ 0 & \overline{D} & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} & 0 & 0 \\ X_{21} & X_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & X_{33} & X_{34} \\ 0 & 0 & X_{34} & X_{44} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} & 0 & 0 \\ X_{21} & X_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & X_{33} & X_{34} \\ 0 & 0 & X_{34} & X_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C & 0 \\ 0 & D & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

As result, we have

$$\overline{C}X_{33} = X_{22}C, \quad \overline{D}X_{22} = X_{33}D,$$

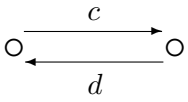
$$X_{12} = 0,\ X_{21} = 0,\ X_{34} = 0,\ X_{43} = 0.$$

Thus, the matrix X is block-diagonal, and the matrix representations $R = \{A, B\}$ and $\overline{R} = \{\overline{A}, \overline{B}\}$ (of the form (13)) are equivalent if and only if the following equalities hold:

$$\overline{C} = X_{22}CX_{33}^{-1} \tag{14}$$

$$\overline{D} = X_{33}DX_{22}^{-1} \tag{15}$$

In other terms this means that $R = \{A, B\}$ and $\overline{R} = \{\overline{A}, \overline{B}\}$ are equivalent if and only if the pairs of matrices (C, D) and $(\overline{C}, \overline{D})$ are equivalent as matrix representations of the quiver



with relations $cd = 0$, $dc = 0$.

It is easy to see (and is well known) that any matrix representation (C, D) of this quiver is equivalent to those of the following form:

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & E \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & E \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(the horizontal and vertical partitions of D are the same as the vertical and horizontal partitions of C, respectively). Substituting these matrices in (13) we obtain the matrices A, B of the form indicated in the theorem, and the proof is complete.

We have the following corollary.

Наслідок 1. *The indecomposable matrix representations of the semigroup $S = S_{dsr}(2, 2)$ over the field K are exhausted, up to equivalence, by the following (pairwise non-equivalent) ones:*

1) $a \to 0, \quad b \to 0;$

2) $a \to 1, \quad b \to 0;$

3) $a \to 0, \quad b \to 1;$

4) $a \to 1, \quad b \to 1;$

5) $a \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad b \to \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix};$

6) $a \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad b \to \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$

Indeed, it follows from Theorem 1 that any matrix representation of $S_{dsr}(2, 2)$ is equivalent to a direct sum of representations of the form 1)−6). On the other hand, all representation 1)−6) are indecomposable: 1) − 4) as one-dimensional representations and 5), 6) as representations with the trivial algebra of endomorphisms.

3 Calculation of the Auslander algebra

Using Theorem 2.1 we describe the Auslander algebra for the pairs of idempotent matrices A, B with the double sandwich relation $ABA = BAB$ over the field K. Since by this theorem the pair of matrices A, B with all blocks E to be of size 1×1, i. e. the pair of matices

$$A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$B_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

is (up to the same permutation of rows and columns) a direct sum of all indecomposable, pairwise non-similar, pairs of idempotent matrices with the double sandwich relation, the (matrix) Auslander algebra in this case consists of all the matrices X such that $A_0X = XA_0, B_0X = XB_0$.

First, we consider the equality $A_0X = XA_0$:

$$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} & x_{15} & x_{16} & x_{17} & x_{18} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} & x_{25} & x_{26} & x_{27} & x_{28} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} & x_{35} & x_{36} & x_{37} & x_{38} \\ x_{41} & x_{42} & x_{43} & x_{44} & x_{45} & x_{46} & x_{47} & x_{48} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_{41} & x_{42} & x_{43} & x_{44} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_{51} & x_{52} & x_{53} & x_{54} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_{61} & x_{62} & x_{63} & x_{64} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_{71} & x_{72} & x_{73} & x_{74} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_{81} & x_{82} & x_{83} & x_{84} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

whence the matrix X has the form

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_{41} & x_{42} & x_{43} & x_{44} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x_{55} & x_{56} & x_{57} & x_{58} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x_{65} & x_{66} & x_{67} & x_{68} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x_{75} & x_{76} & x_{77} & x_{78} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x_{85} & x_{86} & x_{87} & x_{88} \end{pmatrix}.$$

Now, using the above form of X, we consider the equality $B_0X = XB_0$:

$$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x_{75} & x_{76} & x_{77} & x_{78} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_{41} & x_{42} & x_{43} & x_{44} & x_{55} & x_{56} & x_{57} & x_{58} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x_{65} & x_{66} & x_{67} & x_{68} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x_{75} & x_{76} & x_{77} & x_{78} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} x_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_{12} & 0 \\ x_{21} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_{22} & 0 \\ x_{31} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_{32} & 0 \\ x_{41} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_{42} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_{55} & x_{55} & x_{56} & x_{57} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_{65} & x_{65} & x_{66} & x_{67} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_{75} & x_{75} & x_{76} & x_{77} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_{85} & x_{85} & x_{86} & x_{87} & 0 \end{pmatrix}.$$

So it is easy to see that

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_{22} & x_{23} & x_{24} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_{33} & x_{34} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_{44} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x_{44} & x_{56} & x_{57} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_{66} & x_{67} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_{88} \end{pmatrix}. \quad (16)$$

Thus we proved the following theorem.

Theorem 3.1. *The matrix Auslander algebra for the pairs of idempotent matrices A, B over K with the double sandwich relation $ABA = BAB$ consists of all matrices of the form (16).*

Список використаних джерел

1. *Bondarenko V. M.* Linear operators on vector spaces graded by posets with involution: tame and wild cases / V. M. Bondarenko. – Kiev: Institute of Math. of NAS of Ukraine. – 2006. – 168 pp.

2. *Назарова Л. А.* Представления четвериады / Л.А. Назарова // Изв. АН СССР (Сер. матем.). – 1967. – **31**. – №6. – С. 1361 – 1378.

References

1. BONDARENKO V. M. (2006), *Linear operators on vector spaces graded by posets with involution: tame and wild cases*, Kiev: Institute of Math. of NAS of Ukraine, 168 pp.

2. NAZAROVA L. A. (1967), "Predstavleniya chetveriady", *Izv. Akad. Nauk SSSR (Ser. Mat.)*, **v.31**, №6, pp. 1361 – 1378.

Received: 24.06.2014

УДК 519.21

Н.С. Головащук[1], *к.ф.-м.н., науковий співробітник*
О.М. Гнатюк[2], *аспірант*

Кореневі бази для несиметричних цілих білінійних форм

[1]Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 01033, Київ, вул. Володимирська,64.
[2] Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 01033, Київ, вул. Володимирська,64.
e-mail: [1]golovash@gmail.com
e-mail: [2]olena.gnatiuk@gmail.com

N.S. Golovaschuk[1], *Ph.D., Research Worker*
O.M. Gnatiuk[2], *Postgraduate*

Root bases for nonsymmetrical integer bilinear forms

[1]Taras Shevchenko National University of Kyiv, 01033, Kyiv, 64 Volodymyrska st.,
[2]Taras Shevchenko National University of Kyiv, 01033, Kyiv, 64 Volodymyrska st.,
e-mail: [1]golovash@gmail.com
e-mail: [2]olena.gnatiuk@gmail.com

У даній роботі розглядається задача класифікації кореневих баз для несиметричної білінійної форми з додатно визначеною квадратичною формою. Ми використовуємо теорію диференціальних градуйованих категорій та процедуру їх приведення. Градуйований сагайдак допускає тривіальну структуру диференціальної градуйованої категорії. Коренева база градуйованого сагайдака типу Динкіна, яка приведена зі стандартної кореневої бази, визначає структуру диференціальної градуйованої категорії та відповідну несиметричну білінійну форму. В роботі ми показуємо, що якщо на категорії шляхів зв'язного градуйованого графа деякої несиметричної білінійної форми можна визначити структуру диференціальної градуйованої категорії, яка задовольняє очевидним умовам коректності, то стандартна база цієї форми є редукованою з деякого градуйованого сагайдака типу Динкіна. Доведення основної теореми використовує теорему з [4] для білінійних та квадратичних форм відносно їх коренів та кореневих баз.

Ключові слова: дійсний корінь, білінійна форма, диференціальна градуйована категорія, діаграма Динкіна.

This work concerns with the problem of classification of root bases for the nonsymmetrical bilinear forms with positive definite quadratic form. We use the theory of differential graded categories and corresponding nonsymmetrical bilinear forms, and reduction algorithm for them. A graded quiver has the trivial structure of differential category. Any root base of graded quiver of Dynkin type which is reduced from the standard root base, defines the structure of differential graded category and the corresponding nonsymmetrical bilinear form. In this paper we show, if the path category of connected graded graph of some nonsymmetrical bilinear form allows the structure of the differential graded category which satisfies the obvious conditions of correctness, then a standard basis of this bilinear form is reduced from the standard root base of some graded quiver of Dynkin type. In this work we apply the non classical but modified concept of root base to the classical theory of bilinear and quadratic forms and their applications. The proof of the main theorem uses theorem from [4] for the bilinear and quadratic forms with respect to their roots and root bases.

Key words: real root, bilinear form, differential graded category, Dynkin diagram
Communicated by Prof. Ovsienko S.A.

1 Preliminaries

The reduction algorithm of linear categories and other structures is widely used in the representation theory. This approach allows to study representations inductively, reducing the corresponding categories step by step ([1]). On the other hand, the important characteristic of represented structure is the induced quadratic form whose roots correspond to the indecomposable representations. The theory of quadratic forms is well known ([2], [3]). We give the simultaneous reduction algorithm of

© Н.С. Головащук, О.М. Гнатюк, 2014

transformation of the differential graded category with special properties and the underlined bilinear and quadratic form to the canonical forms.

Root systems are just one example among a large number of mathematical objects of "finite type" which are classified by (some class of) Dynkin diagrams. This approach allows to establish a connection between forms theory and representation theory. We use non classical but modified concept of root base. We prove that under certain finiteness and correctness conditions a root base is reduced to some classic one by certain transformations.

2 Differential graded categories and directed graded graphs

2.1 Graphs and forms

Let $\Gamma = (\Gamma_0, \Gamma_1, \deg)$ be a finite directed graded graph with vertex set Γ_0, the arrows set $\Gamma_1 \subset \Gamma_0 \times \Gamma_0$. The graph Γ is called *graded* (or $\mathbb{Z}$-graded) if there is the map $\deg : \Gamma_1 \to \mathbb{Z}$, such that $\Gamma_1^q = \bigsqcup_{\mathtt{i},\mathtt{j}\in\Gamma_0} \Gamma_1^q(\mathtt{i},\mathtt{j}) = \deg^{-1}(q)$, $\Gamma_1 = \bigsqcup_{q\in\mathbb{Z}} \Gamma_1^q$. The graph Γ is assumed to be finite which means that $|\Gamma_0| \leqslant \infty$ and all vector spaces $\Bbbk\Gamma_1(i,j)$ are finite dimensional.

Let $\Bbbk$ be an algebraically closed field. Given a finite graded directed graph $\Gamma = (\Gamma_0, \Gamma_1, \deg)$, we consider $\Bbbk\Gamma$ the $\Bbbk$-linear path category of the graded graph Γ which is freely generated over $\Bbbk$ by all the pathes on Γ. The category $\Bbbk\Gamma$ inherits the graduation from Γ in a natural way.

We denote by $|a| = \deg a \pmod 2$ the parity of $\deg a$. We regard Γ_1 as a union $\Gamma_1 = \Gamma_1^0 \cup \Gamma_1^1$ with Γ_1^0 be a set of arrows of even degree, and Γ_1^1 be a set of arrows of odd degree, the arrows of degree 0 (resp, of degree 1) are called and pictured as solid (resp., dotted) arrows. The graph Γ is called *bigraded* or *bigraph* if $\mathtt{d} : \Gamma_1 \to \{0,1\}$. The graph Γ is called *classic* if $\deg(a) = 0$ for any $a \in \Gamma_1$.

For any $a \in \Gamma_1(i,j)$, we denote by $\bar{a}$ the directed edge from i to j having the degree $\deg \bar{a} = |a|$, and we put $\overline{\Gamma}_1 = \{\bar{a} \mid a \in \Gamma_1\}$. We denote by $\overline{\Gamma} = (\Gamma_0, \overline{\Gamma}_1)$ the directed bigraph obtained from Γ by taking degree modulo 2. Here $\bar{\Gamma}_1 = \bar{\Gamma}_1^0 \cup \bar{\Gamma}_1^1$.

Furthermore, for any $a \in \Gamma_1(i,j)$, we denote by $\tilde{a}$ the undirected edge between vertices i and j, and we put $\widetilde{\Gamma}_1 = \{\tilde{a} \mid a \in \Gamma_1\}$. We denote by $\widetilde{\Gamma} = (\Gamma_0, \widetilde{\Gamma}_1)$ the undirected bigraph obtained from $\overline{\Gamma}$ by deleting the orientation of the arrows. So defined graph $\widetilde{\Gamma}$ will be called the *scheme* of Γ.

All graphs to be considered are assumed to be finite.

We associate with the directed graded graph Γ the non symmetric bilinear form $\langle\ ,\ \rangle : \mathbb{Z}^{\Gamma_0} \times \mathbb{Z}^{\Gamma_0} \to \mathbb{Z}$ together with its quadratic form χ. We denote by $E = \{\mathbf{e}_i\}_{i\in\Gamma_0}$ a standard base (system of generators) of the lattice $\mathbb{Z}^{\Gamma_0}$. The elements of $\mathbb{Z}^{\Gamma_0}$ will be written as either $\mathtt{x} = (x_i)$ or $\mathtt{x} = \sum_{i\in\Gamma_0} x_i \mathbf{e}_i$. Define a non symmetric bilinear form $\langle -,- \rangle = \langle -,- \rangle_\Gamma : \mathbb{Z}^{\Gamma_0} \times \mathbb{Z}^{\Gamma_0} \to \mathbb{Z}$, called the *Euler form* of Γ: for $\mathtt{x} = (x_i)$, $\mathtt{y} = (y_i) \in \mathbb{Z}^{\Gamma_0}$,

$$\langle \mathtt{x}, \mathtt{y} \rangle = \sum_{i\in\Gamma_0} x_i y_i - \sum_{a\in\Gamma_1(i,j)} (-1)^{|a|} x_i y_j,$$

By the definition, the bilinear forms $\langle -,- \rangle_\Gamma$ and $\langle -,- \rangle_{\overline{\Gamma}}$ are identical. The symmetrization of Euler form $(\mathtt{x}, \mathtt{y}) = \langle \mathtt{x}, \mathtt{y} \rangle + \langle \mathtt{y}, \mathtt{x} \rangle$ is independent of the orientation of Γ, so it is defined by $\widetilde{\Gamma}$ and it is called the *symmetric Euler form* of Γ. The integer unit quadratic form $\chi : \mathbb{Z}^{\Gamma_0} \to \mathbb{Z}$ such that

$$\chi(x) = \sum_{\mathtt{i}\in\Gamma_0} x_{\mathtt{i}}^2 - \sum_{a\in\Gamma_1(\mathtt{i},\mathtt{j})} (-1)^{|a|} x_{\mathtt{i}} x_{\mathtt{j}}$$

associated with the Euler form $(-,-)$ is called the *Tits form* on $\mathbb{Z}^{\Gamma_0}$, it only depends on the graph $\widetilde{\Gamma}$.

Recall that a quadratic form χ is called *positive definite* if $\chi(x) > 0$, for all $x \neq 0$. The classic connected undirected graph having the positive Tits form is one of Dynkin diagrams. The connected directed graded graph Γ is called a (graded) *Dynkin quiver* if its scheme $\widetilde{\Gamma}$ is a Dynkin diagram, and *classic Dynkin quiver* (or 0-quiver) if Γ is a classic graph and we assign to each arrow the degree 0.

In path category $\Bbbk\Gamma$, we denote $\mathrm{coeff}_{x_1\dots x_k} x = \kappa$, $\kappa \in \Bbbk$ whenever $x = \kappa x_1 \dots x_k + \dots$ is a basis decomposition. In the category $\Bbbk\Gamma$, we have such that $\deg x_1 x_2 \dots x_k = \sum_{i=1}^k \deg x_i$.

The full subgraph Γ_S, $S \subset \Gamma_0$ is called *closed contour* if there is an ordering $S = \{\mathtt{i}_1, \dots, \mathtt{i}_k\}$ such that $|\Gamma_1(\mathtt{i}_j, \mathtt{i}_{j+1}) \cup \Gamma_1(\mathtt{i}_{j+1}, \mathtt{i}_j)| > 0$, $j = 1, \dots, k-1$, and $|\Gamma_1(\mathtt{i}_1, \mathtt{i}_k) \cup \Gamma_1(\mathtt{i}_k, \mathtt{i}_1)| > 0$. The closed contour Γ_S, $S = \{\mathtt{i}_1, \dots, \mathtt{i}_k\} \subset \Gamma_0$ is called *clear* if $\Gamma_1(\mathtt{i}_s, \mathtt{i}_t) \cup \Gamma_1(\mathtt{i}_t, \mathtt{i}_s) = \varnothing$, $|s-t| > 1 \pmod k$. The closed contour Γ_S is called *cyclic paths* if $|\Gamma_1(\mathtt{i}_j, \mathtt{i}_{j+1})| > 0$, $j = 1, \dots, k-1$, and $|\Gamma_1(\mathtt{i}_k, \mathtt{i}_1)| > 0$. The closed contour Γ_S is called *detour graded contour* if $\Gamma_1(\mathtt{i}_j, \mathtt{i}_{j+1}) = \{a_j\}$,

$j = 1, \dots, k-1$, and $\Gamma_1(\mathtt{i}_1, \mathtt{i}_k) = \{a\}$, besides $\deg a = \sum_{j=1}^{k-1} \deg a_j$.

In further considerations, we will consider the class of graphs with some restrictions. The finite directed graded graph Γ is called *correctly defined graph* if its path category $\Bbbk\Gamma$ does not have cyclic paths and multiple edges, and, moreover, any clear closed contour is detour graded. Then we have $\Gamma_1(i,i) = \varnothing$, $|\Gamma_1(i,j)| \leqslant 1$, and $|\Gamma_1(i,j)| \cdot |\Gamma_1(j,i)| = 0$ for any $1 \leqslant i, j \leqslant |\Gamma_0|$. The Tits form χ_Γ in such case is unit which means that coefficient on x_i^2 equals 1.

Let Γ be a correctly defined graph. For the elements of standard base E holds $(\mathtt{e}_i, \mathtt{e}_i) = \chi(\mathtt{e}_i) = 1$, and $\Gamma_1(\mathtt{i}, \mathtt{j}) = \varnothing$. Moreover, $|\bar{\Gamma}_1^0(\mathtt{i}, \mathtt{j})| = \max\{-\langle \mathtt{e}_i, \mathtt{e}_j \rangle, 0\}$, and $|\bar{\Gamma}_1^1(\mathtt{i}, \mathtt{j})| = \max\{\langle \mathtt{e}_i, \mathtt{e}_j \rangle, 0\}$.

2.2 Real roots and Weyl group

We consider a correctly defined finite directed graded graphs $\Gamma = (\Gamma_0, \Gamma_1, \det)$ together with underlined bigraph $\overline{\Gamma}$, its scheme $\widetilde{\Gamma}$, quadratic forms χ and correspondent bilinear form $\langle , \rangle$.

For any $x \in \mathbb{Z}^{\Gamma_0}$ such that $(x,x) = 1$, we denote by σ_x the *reflection* of $\mathbb{Z}^{\Gamma_0}$ on the hyperplane orthogonal to x, then $\sigma_x(y) = y - 2(x,y)x$, $y \in \mathbb{Z}^{\Gamma_0}$. For simplicity, we assume $\Gamma_0 = \{1, 2, \dots, n\}$, $n = |\Gamma_0|$, then $\mathbb{Z}^{\Gamma_0} \simeq \mathbb{Z}^n$. We give a widely knows description of the basic properties of reflections.

Lemma 1. *For any $x, y, z \in \mathbb{Z}^n$, $(x,x) = 1$ there are: 1) $\sigma_x^2 = id_{\mathbb{Z}^n}$, so $\sigma_x : \mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}^n$ is an involution map; 2) $\sigma_{-x}(y) = \sigma_x(y)$; 3) $\sigma_x(-y) = -\sigma_x(y)$; 4) $\sigma_x(x) = -x$; 5) $(\sigma_x(y), \sigma_x(z)) = (y,z)$; 6) $\sigma_{\sigma_x(y)}(z) = \sigma_x \sigma_y \sigma_x^{-1}(z)$.*

The reflection with respect to i-th element of standard base E is defined by $\sigma_i(y) = y - (y, \mathtt{e}_i)\mathtt{e}_i$. In this case, we call σ_i a *simple reflection* on $\mathbb{Z}^{\Gamma_0}$, we call $\mathtt{e}_i$ a *simple root*, and denote by Π_χ the set of all simple roots.

Define the *Weyl group* W of the graph Γ to be the subgroup of $Aut(\mathbb{Z}^{\Gamma_0})$ generated by the simple reflections σ_i respectively to the elements of standard base E. Because the symmetric bilinear form $(-,-)$ is independent of the orientation of Γ, the group W is independent of the orientation of Γ, so is defined by $\widetilde{\Gamma}$ (or, equivalently, by the quadratic form χ). An element of $\mathbb{Z}^{\Gamma_0}$ is called a *real root* provided it belongs to the W-orbits of some $\mathtt{e}_i$, The set $\Phi_\chi = \bigcup_{w \in W} w(\Pi_\chi) \subset \mathbb{Z}^{\Gamma_0}$ is called the set of real roots of χ (obviously, each $x \in \Phi_\chi$ satisfies $\chi(x) = \langle x, x \rangle = 1$). The root $x \in \mathbb{Z}^{\Gamma_0}$ is called *sincere* if $x_i \neq 0$ for all $i \in \Gamma_0$. It is well-known that all real roots of the classic Dynkin quivers are positive or negative.

Any generator set $R = \{\alpha_i\}_{i \in \overline{1,n}}$ of the lattice $\mathbb{Z}^{\Gamma_0} \simeq \mathbb{Z}^n$ is called a *root base* with respect to the graph Γ (and to the bilinear form $\langle , \rangle_\Gamma$), if $\alpha_i \in \Phi_\chi$ for any $i \in \overline{1,n}$. We denote by $\Gamma_R = \Gamma' = (\Gamma_0', \Gamma_1')$ the directed bigraph constructed in the following way: (i) $\Gamma_0' = R$; (ii) for any $i, j \in \overline{1,n}$, $i \neq j$ there are $|\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle|$ edges from $\Gamma_1'(\alpha_i, \alpha_j)$ either of degree 0 if $\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle < 0$, and of degree 1 otherwise; (iii) $|\Gamma_1'(\alpha_i, \alpha_i)| = \varnothing$. Note that for the positive definite form, $|\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle| \leqslant 1$ and $\langle \alpha_i, \alpha_i \rangle = 1$. We call Γ_R the directed *bigraph associated with a root base* R and non symmetric bilinear form $\langle , \rangle$.

The root base R is *correctly defined* if its underlined graph Γ_R is such. In this case $\Gamma_1'(\alpha_i, \alpha_i) = \varnothing$, $|\Gamma_1'(\alpha_i, \alpha_j)| \leqslant 1$, and $|\Gamma_1'(\alpha_i, \alpha_j)| \cdot |\Gamma_1'(\alpha_j, \alpha_i)| = 0$ for any $i, j \in \overline{1,n}$. We say that the correctly defined graph $\Gamma' = \Gamma_R$ is graded correctly if $\deg(a) \equiv \langle \alpha_i, \alpha_j \rangle \pmod 2$ for any $a \in \Gamma_1'(\alpha_i, \alpha_j)$, $i, j \in \overline{1,n}$, $i \neq j$.

Let $\{\mathtt{e}_i\}_{i \in \overline{1,n}}$ be a standard root base of the lattice $\mathbb{Z}^{\Gamma_0} \simeq \mathbb{Z}^n$. For $\mathtt{i} \in \Gamma_0$, we denote by $T_\mathtt{i} : \mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}^n$ the $\mathbb{Z}$-linear transformation: $T_\mathtt{i}(\mathtt{e}^t) = \begin{cases} \mathtt{e}^t, & \text{if } t \neq i; \\ -\mathtt{e}^i, & \text{if } t = i. \end{cases}$ We call $T_\mathtt{i}$ a *sign change* for χ in the vertex $\mathtt{i}$. For $\mathtt{i}, \mathtt{j} \in \Gamma_0$, we denote by $T_{\mathtt{ij}}^\varepsilon : \mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}^n$ the $\mathbb{Z}$-linear transformation ([3], [4]): $T_{\mathtt{ij}}^\varepsilon(\mathtt{e}^t) = \begin{cases} \mathtt{e}^t, & \text{if } t \neq i; \\ \mathtt{e}^i + (-1)^{|\{\mathtt{i},\mathtt{j}\}|}\mathtt{e}^j, & \text{if } t = i. \end{cases}$ with $\varepsilon = (-1)^{|\{\mathtt{i},\mathtt{j}\}|} \in \{+,-\}$. If a degree $|\{\mathtt{i},\mathtt{j}\}|$ is even then we call $T_{\mathtt{ij}}^+$ an *inflation* for χ, if $|\{\mathtt{i},\mathtt{j}\}|$ is odd, we call $T_{\mathtt{ij}}^-$ a *deflation* for χ.

We denote the corresponding transformations of quadratic form and an integral lattice $\mathbb{Z}^n$ by the same letter. So there are $T : \chi \to \chi' = \chi T$ for the quadratic form and $T : \mathtt{r} \to \mathtt{r}' = \mathtt{r}T$ for vector $r = \sum_{\mathtt{j} \in \Gamma_0} r_\mathtt{j} \mathtt{e}_\mathtt{j}$, such that $\sum_{\mathtt{j} \in \Gamma_0} r_\mathtt{j} \mathtt{e}_\mathtt{j} = \sum_{\mathtt{j} \in \Gamma_0} r'_\mathtt{j} \mathtt{e}'_\mathtt{j}$ or $\chi(\mathtt{r}) = \chi'(\mathtt{r}')$.

Two integral forms $\chi, \chi' : \mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}$ are called *equivalent* (or $\mathbb{Z}$-*equivalent*) if they describe the same maps up to above changes of basis, that is, if there exists a linear $\mathbb{Z}$-invertible transformation $T : \mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}^n$ which is a composition of admitted transformations such that $\chi' = \chi T$. The next simple lemma holds.

Lemma 2. *Let $T : \chi \to \chi T$ be an equivalence of the quadratic forms. If χ is an integral unit form, then χT is an integral unit form as well, and χT is positive (non negative, critical) if and only if χ is positive (non negative, critical).*

Theorem 2.1. *([3])Let χ be a connected integral positive unit form, $\overline{\Gamma}$ its directed bigraph. Then there is a sequence of sign changes and deflations with the composition T such that the bigraph $\overline{\Gamma}T$ of the form χT is a 0-forrest of Dynkin type. For the positive form, $\overline{\Gamma}T$ is a disjoint union of some of the following Dynkin diagrams: A_n $(n > 1)$, D_n $(n \geqslant 4)$, or E_n $(n = 6, 7, 8)$. The Dynkin type is uniquely defined by χ.*

2.3 DGC structure

The $\Bbbk$-linear category $\mathcal{U}$ over an algebraically closed field $\Bbbk$ is called *graded* if it is endowed with a multiplicative mapping $\deg : \mathcal{U} \to \mathbb{Z}$ and $\mathcal{U}(\mathtt{i},\mathtt{j}) = \oplus_{q\in\mathbb{Z}}\mathcal{U}_q(\mathtt{i},\mathtt{j})$ is a sum of finite dimensional vector spaces $\mathcal{U}_q(\mathtt{i},\mathtt{j}) = \deg^{-1}(q)$, $\mathtt{i},\mathtt{j} \in \mathrm{Ob}\mathcal{U}$. For $x \in \mathcal{U}$, we denote $|x| = \deg x \pmod 2$ and $\hat{x} = (-1)^{|x|}x$. The graded $\Bbbk$-category $\mathcal{U}$ is called the *differential graded category* or *dgc* if there is the differential $\mathtt{d} : \mathcal{U} \to \mathcal{U}$ which maps $\mathtt{d} : \mathcal{U}_q(\mathtt{i},\mathtt{j}) \to \mathcal{U}_{q+1}(\mathtt{i},\mathtt{j})$, $q \in \mathbb{Z}$, $\mathtt{i},\mathtt{j} \in \mathrm{Ob}\mathcal{U}$, and the following properties hold:

1) $\mathtt{d}(1_\mathtt{i}) = 0$, $\mathtt{i} \in \mathrm{Ob}\mathcal{U}$;

2) Leibnitz rule: $\mathtt{d}(x_1 \dots x_{i-1}x_i \dots x_k) =$
$= \sum_{i=1}^{k} \hat{x}_1 \dots \hat{x}_{i-1}\mathtt{d}(x_i)x_{i+1} \dots x_k =$
$= \sum_{i=1}^{k} (-1)^{|x_1|}x_1 \dots (-1)^{|x_i|}x_i x_{i+1} \dots x_k$;

3) $\mathtt{d}^2 = 0$.

Let $\Gamma = (\Gamma_0, \Gamma_1, \deg)$ be a graded directed graph, and let $\Bbbk\Gamma$ be its path category. We denote $\mathrm{coeff}_{x_1\dots x_k} x = \kappa$, $\kappa \in \Bbbk$ whenever $x = \kappa x_1 \dots x_k + \dots$ is a basis decomposition. The category $\Bbbk\Gamma$ inherits the degree (graduation) from Γ such that $\deg x_1x_2 \dots x_k = \sum_{i=1}^{k} \deg x_i$.

The full subgraph Γ_S, $S \subset \Gamma_0$ is called *closed contour* if there is an ordering $S = \{\mathtt{i}_1, \dots, \mathtt{i}_k\}$ such that $|\Gamma_1(\mathtt{i}_j, \mathtt{i}_{j+1}) \cup \Gamma_1(\mathtt{i}_{j+1}, \mathtt{i}_j)| > 0$, $j = 1, \dots, k-1$, and $|\Gamma_1(\mathtt{i}_1, \mathtt{i}_k) \cup \Gamma_1(\mathtt{i}_k, \mathtt{i}_1)| > 0$. The closed contour Γ_S, $S = \{\mathtt{i}_1, \dots, \mathtt{i}_k\} \subset \Gamma_0$ is called *clear* if $\Gamma_1(\mathtt{i}_s, \mathtt{i}_t) \cup \Gamma_1(\mathtt{i}_t, \mathtt{i}_s) = \varnothing$, $|s - t| > 1 \pmod k$. The closed contour Γ_S is called *oriented cycle* if $|\Gamma_1(\mathtt{i}_j, \mathtt{i}_{j+1})| > 0$, $j = 1, \dots, k-1$, and $|\Gamma_1(\mathtt{i}_k, \mathtt{i}_1)| > 0$. The closed contour Γ_S is called *detour graded contour* if $\Gamma_1(\mathtt{i}_j, \mathtt{i}_{j+1}) = \{a_j\}$, $j = 1, \dots, k-1$, and $\Gamma_1(\mathtt{i}_1, \mathtt{i}_k) = \{a\}$, besides $\deg a = \sum_{j=1}^{k-1} \deg a_j$. Denote $x_{\mathtt{ij}}$ the edge from the vertice starting in $\mathtt{i}$ and ending in $\mathtt{j}$. Detour contour Γ_S is called *active* (or contour of differenrial type) if $\kappa x_{\mathtt{i}_1\mathtt{i}_2} \dots x_{\mathtt{i}_{k-1}\mathtt{i}_k}$ is a summand of differential of the edge $x_{\mathtt{i}_1\mathtt{i}_k}$. The edge $a \in \Gamma_1(\mathtt{i},\mathtt{j})$ is called *deep* if there are no other pathes on Γ from $\mathtt{i}$ to $\mathtt{j}$. The edge $a \in \Gamma_1(\mathtt{i},\mathtt{j})$ is called *minimal* if $\mathtt{d}(a) = 0$.

We consider a *dgc* $\mathcal{U}$ with $|\mathrm{Ob}\mathcal{U}| < \infty$. Define the underlined directed graded graph $\Gamma = \Gamma(\mathcal{U})$ such that $\Gamma_0 = \mathrm{Ob}\mathcal{U}$, and $\Gamma_1(\mathtt{i},\mathtt{j})$ is a basis of $(\mathcal{U}/\mathcal{U}^{\otimes 2})(\mathtt{i},\mathtt{j})$, $\mathtt{i},\mathtt{j} \in \Gamma_0$ with the induced graduation. The differential $\mathtt{d}$ induces the map $\mathtt{d} : \Gamma_1^q \to \Bbbk\Gamma_{q+1}(\mathtt{i},\mathtt{j})$, $\mathtt{i},\mathtt{j} \in \Gamma_0$, $q \in \mathbb{Z}$ which is extended on the whole $\Bbbk\Gamma$ by Leibnitz rule.

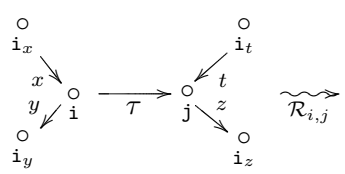
The graph Γ correspondent to the finite dimensional differential graded category is finite. The finitely generated graph Γ is called *correctly defined graph* if its path category $\Bbbk\Gamma$ has no cyclic paths and multiple edges, and, any clear closed contour is detour graded. The *dgc* $\mathcal{U}$ is called *correctly defined* if the underlined directed graded graph Γ is correctly defined, and any clear closed contour is active. In such a case, we call $(\mathcal{U}, \Gamma)$ a *correctly defined* dgc *problem.*

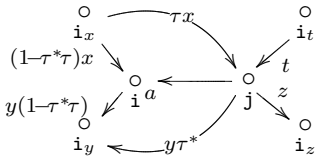
3 Reductions and forms of quiver type

3.1 Reduction of a *dgc*

We consider the *dgc* $\mathcal{U}$ together with underlined graded graph Γ with $\Gamma_0 = Ob\mathcal{U}$. For $\mathtt{i},\mathtt{j} \in \Gamma_0$ we have defined in detail in [4] the reduction $\mathcal{R}_{\mathtt{ij}} : (\mathcal{U}, \Gamma) \to (\mathcal{U}', \Gamma')$. Here we briefly describe the resulting *dgc* and graph. If the vertices $\mathtt{i}$ and $\mathtt{j}$ are not incident on Γ then the reduction $\mathcal{R}_{\mathtt{ij}}$ is trivial, hence $\Gamma' = \Gamma$, $\mathcal{U}' = \mathcal{U}$. We apply the reduction for the case in which there is single deep arrow τ between $\mathtt{i}$ and $\mathtt{j}$ for two possible directions.

We draw all edges as solid arrows but they can have different degrees, we depict the direction of the arrow, if it does not matter. Suppose that $\tau \in \Gamma_1(\mathtt{i},\mathtt{j})$ is a single deep arrow with degree $\deg\tau = d$. The general case is:





Resulting the construction from [4] we conclude, there is $\tau^* : \mathtt{j} \to \mathtt{i}$ such that $\tau\tau^* = \mathtt{1}_\mathtt{j}$, and $\mathtt{1}_\mathtt{i} = \mathtt{1}_{\mathtt{i}_1} + \mathtt{1}_{\mathtt{i}_2} = (1-\tau^*\tau) + \tau^*\tau$ is a decomposition on the sum of mutually commuting idempotents. Then $\deg\tau^* = -\deg\tau = -d$. There is a new arrow $a = \varphi_{21}\tau^* : \mathtt{j} \to \mathtt{i}$ on Γ' with $\deg(a) = \deg\tau^* + 1 = 1 - d$, and $\mathtt{d}(a) = 0$. Each arrow $x \in \Gamma_1(i_x, i)$ splits into two arrows τx and $(1-\tau^*\tau)x$ on Γ', and $a\,(\tau x) \in \partial\big((1-\tau^*\tau)x\big)$. Each arrow $y \in \Gamma_1(i, i_y)$ splits on two arrows $y\tau^*$ and $y(1 - \tau^*\tau)$, and besides $y(1 - \tau^*\tau)\,a \in \partial\big(y\tau^*\big)$. All other arrows do not change. The graduation and differential are defined in algorithmic way from the structure of $\mathcal{U}$. The differential on is obtained by substitution $\mathtt{1}_\mathtt{i} = (1-\tau^*\tau) + \tau^*\tau$. Any path crossing on $\mathtt{i}$ is a combination of pathes:
$y_1 \dots y_q\, yx\, x_p \dots x_1 \iff$
$$y_1 \dots y_q\ (y(1-\tau^*\tau)\ \ y\tau^*\tau)\begin{pmatrix} (1-\tau^*\tau)x \\ \tau^*\tau x \end{pmatrix} x_p \dots x_1.$$

In the second case there is a single deep arrow $\tau \in \Gamma_1(\mathtt{j}, \mathtt{i})$. It can be considered similarly by adding $\tau^* : \mathtt{i} \to \mathtt{j}$ such that $\tau^*\tau = \mathtt{1}_\mathtt{j}$ and using the decomposition $\mathtt{1}_\mathtt{i} = \mathtt{1}_{\mathtt{i}_1} + \mathtt{1}_{\mathtt{i}_2} = (1-\tau\tau^*) + \tau\tau^*$ to the sum of mutually commuting idempotents.

We obtain the directed graded $\Gamma' = (\Gamma_0, \Gamma'_1)$ and the *dgc* $\mathcal{U}'$, the correspondent transformation is denoted by $\mathcal{R}_{ij} : (\Gamma, \mathcal{U}) \to (\Gamma', \mathcal{U}')$ and it is called *reduction* from $\mathtt{i}$ to $\mathtt{j}$ (along the arrow τ).

Let $\Gamma_1(\mathtt{i}, \mathtt{j}) = \{\tau\}$. The reduction $\mathcal{R}_{\mathtt{ij}} : \mathcal{U} \to \mathcal{U}'$ is transferred to the transformation of lattices $\mathcal{R}_{\mathtt{ij}} : \mathbb{Z}^{\Gamma_0} \to \mathbb{Z}^{\Gamma_0}$. For any $x \in \mathbb{Z}^{\Gamma_0}$ we obtain: $\mathcal{R}_{\mathtt{ij}} : \mathtt{x} \to \mathtt{x}'$ where $x'_i = x_i - (-1)^{|\tau|}x_j$ and $x'_k = x_k$ otherwise. Transformation $\mathcal{R}_{\mathtt{ij}} : (\mathcal{U}, \Gamma) \to (\mathcal{U}', \Gamma')$ is defined. Sometimes we denote it by $\mathcal{R}^+_{\mathtt{ij}}$ if $|\tau|$ is even, and by $\mathcal{R}^-_{\mathtt{ij}}$ otherwise.

Note that $\mathcal{R}_{\mathtt{ij}}\mathcal{U}$ is not augmented *dgc* and it is directed cycle-free, but it is not necessarily regular. Namely, it is possible that $\Gamma_1(\mathtt{k}, \mathtt{j}) = \{x, y\}$ for some $\mathtt{k} \in \Gamma_0$. By the construction, in this case $\mathtt{d}(x) = \kappa y + l$ where $l \in \mathcal{P}^2$ and $|y| = |x| + 1$. Then we put: $x = 0$, $\mathtt{d}(x) = 0$, $y = -\kappa^{-1}l$, and obtain the new dgc $\mathcal{U}'$ with the graph Γ'. We say that $\mathcal{U}'$ is obtained from $\mathcal{U}$ by *regularization* on x, y. The quadratic form χ and the attached vector $r \in \mathbb{Z}^{\Gamma_0}$ do not change after regularization operation. The case $|\Gamma_1(\mathtt{j}, \mathtt{k})| = 2$ is analogous. Given a reduced *dgc* $\mathcal{R}_{\mathtt{ij}}\mathcal{U}$, we can do some number of regularization procedures to obtain the regular *dgc* problem. We call this transformation a *complete reduction* and denote it with the same letter $\mathcal{R}_{\mathtt{ij}}$.

Let $\Gamma_1(\mathtt{i}, \mathtt{j}) \cup \Gamma_1(\mathtt{j}, \mathtt{i}) = \{\tau\}$. The standard root base $E = \{\mathtt{e}_i\}$ of $\mathbb{Z}^{\Gamma_0}$ transforms by the reduction $\mathcal{R}_{\mathtt{ij}}$ to the root base $E' = \{\mathtt{e}'_i\}$ where $\mathtt{e}'_j = \mathtt{e}_j + (-1)^{|\tau|}\mathtt{e}_i = \omega_i(\mathtt{e}_j)$ and $\mathtt{e}'_k = \mathtt{e}_k$ for $k \neq j$. Then E' is a root base as well. We denote by $\mathcal{R}_{\mathtt{ij}}\Gamma$ the directed bigraph associated with the root base E' and with the bilinear form $\langle\,,\,\rangle_\Gamma$. The reduction $\mathcal{R}_{\mathtt{ij}}$ of correctly defined *dgc* $\mathcal{U}$ is called *admitted* if $\mathtt{i}$, $\mathtt{j}$ are 1-*connected points*, it means, an edge $\tau \in \Gamma_1(\mathtt{i}, \mathtt{j}) \cup \Gamma_1(\mathtt{j}, \mathtt{i})$ is deep.

Lemma 3. *Let* $(\mathcal{U}, \Gamma)$ *be a correctly defined* dgc *problem having positive definite Tits form, let* $\tau \in \Gamma_1(\mathtt{i}, \mathtt{j})$ *be a deep regular edge, and let* $\mathcal{R}_{\mathtt{ij}} : (\mathcal{U}, \Gamma) \to (\mathcal{U}', \Gamma')$ *be an admitted complete reduction. Then* $\big(\mathcal{R}_{\mathtt{ij}}\mathcal{U}, \mathcal{R}_{\mathtt{ij}}\Gamma\big)$ *is correctly defined* dgc *problem and the bigraphs* $\mathcal{R}_{\mathtt{ij}}\Gamma$, $\overline{\Gamma}'$ *coincide.*

The proof follows from the structure of *dgc* and of the positivity of quadratic form.

Given a correctly defined *dgc* problem $(\mathcal{U}, \Gamma)$ we construct the *compositions of admitted reductions* of a type $\mathcal{R}_{\mathtt{ij}}$. We begin with $(\mathcal{U}, \Gamma)$ and standard root base E of $\mathbb{Z}^{\Gamma_0}$. Assume that $\mathcal{R}' : (\mathcal{U}, \Gamma) \to (\mathcal{U}', \Gamma')$ is a composition of $r > 0$ simple reductions, and let $E' = \{\alpha'_i\}_{i \in \Gamma_0}$ be obtained root base of $(\mathcal{U}', \Gamma')$. For any $i, j \in \Gamma_0$, with 1-connected on Γ' roots α'_i, α'_j, we fulfill reduction $\mathcal{R}'' : (\mathcal{U}', \Gamma') \to (\mathcal{U}'', \Gamma'')$, and we construct root base $E'' = \{\alpha''_i\}_{i \in \Gamma_0}$ such that $\alpha''_j = \omega_{\alpha'_i}(\alpha'_j)$ and $\alpha''_k = \alpha_k$ for $k \neq j$. Reduction $\mathcal{R} = \mathcal{R}''\mathcal{R}' : (\mathcal{U}, \Gamma, E) \to (\mathcal{U}'', \Gamma'', E'')$ is a composition of $r + 1$ simple reductions, it is called admitted reduction.

For the correctly defined *dgc* problem $(\mathcal{U}, \Gamma)$, the root base R is called *reduced root base* (from the standard base E) if there exists an admitted reduction $(\mathcal{U}, \Gamma, E) \to (\mathcal{U}', \Gamma', R)$.

Let $(\mathcal{U}, \Gamma)$ be a *dgc* problem, $\Gamma = (\Gamma_0, \Gamma_1, \deg)$ and $\mathtt{i} \in \Gamma_0$. We construct a new graph $\Gamma' = \mathcal{T}_\mathtt{i}(\Gamma) = (\Gamma_0, \Gamma_1, \deg')$ by changing the grading of Γ in the following way. For any $a \in \Gamma_1(\mathtt{j}, \mathtt{i})$ (resp., $b \in \Gamma_1(\mathtt{i}, \mathtt{j})$) we put $\deg'(a) = \deg(a) + 1$ (resp., $\deg'(b) = \deg(b) - 1$). The structure of *dgc* problem $(\mathcal{U}, \Gamma, \deg)$ is transferred to the problem $(\mathcal{U}, \Gamma, \deg') = \mathcal{T}_\mathtt{i}(\mathcal{U}, \Gamma, \deg)$ because the condition $\deg'\big(\mathtt{d}(a)\big) = \deg\big(\mathtt{d}(a)\big)$ trivially holds for any $a \in \Gamma_1$. The transposition $\mathcal{T}$ of *dgc* problem is called *shift of grading* if it is a composition of transformations of a type $\mathcal{T}_\mathtt{i}$.

3.2 Forms of quiver type

We say that the *dgc* problem $(\mathcal{U},\Gamma)$ is of *quiver type* (resp., of *Dynkin quiver type*) if there exists $Q=(Q_0,Q_1,\deg)$ a graded quiver (resp., a graded quiver of Dynkin type), a reduced root base R of the quiver, and an admitted reduction $(\mathcal{U}_Q,Q,E)\to(\mathcal{U}_R,\Gamma_R,R)$ such that problems $(\mathcal{U},\Gamma)$ and $(\mathcal{U}_R,\Gamma_R)$ coincide. In this case bilinear form is an Euler form of quiver, and the quadratic form is Tits form.

Any graded quiver $Q=(Q_0,Q_1)$ is inherent in the structure of trivial correctly defined differential graded problem $(\mathcal{U}_Q,Q,E^{Q_0})$ where E^{Q_0} is a standard base of $\mathbb{Z}^{|Q_0|}$. Then, by the definition, any problem $(\mathcal{U},\Gamma,E^{\Gamma_0})$ is a correctly defined whenever it is reduced from the problem $(\mathcal{U}_Q,Q,E^{Q_0})$ for some Dynkin quiver Q.

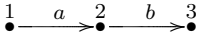
Theorem 3.1. *Let $\mathcal{U}$ be a correctly defined differential graded category, $\Gamma=(\Gamma_0,\Gamma_1)$ be its connected graded graph having a positive definite quadratic form $\chi=\chi_\Gamma$, and E be a standard base of $\mathbb{Z}^{\Gamma_0}$. Then the* dgc *problem $(\mathcal{U},\Gamma,E)$ is of Dynkin graded quiver type.*

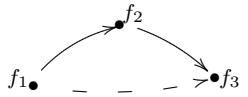
The proof of Theorem consists in modification and application of Theorem from [4] for the bilinear and quadratic forms with respect to their roots and root bases.

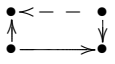
Corollary 1. *Under the assumptions of Theorem* 3.1*, there is a shift of grading $\mathcal{T}:(\mathcal{U},\Gamma,E)\to(\mathcal{U}',\Gamma',E)$ such that the* dgc *problem $(\mathcal{U}',\Gamma',E)$ is of classic Dynkin type.*

Theorem 3.2. *The directed graded graph Γ with positive definite quadratic form χ_Γ is reduced to a Dynkin quiver if and only if Γ can be endowed with the the structure of correctly defined* dgc *problem.*

Corollary 2. *Let $\langle\,,\,\rangle$ be a non symmetric integer bilinear form with associated connected bigraph $B=(B_0,B_1)$, and the quadratic form χ_B is positive definite. Then there exists a graded Dynkin quiver Q and a reduced real root base R such that $\langle\,,\,\rangle=\langle\,,\,\rangle_R$ if and only if there is a correctly defined* dgc *problem $(\mathcal{U},\Gamma,E)$ with E be a standard base of $\mathbb{Z}^{|B_0|}$ such that bigraphs $\overline{\Gamma}$ and B coincide.*

Example 1. For the 0-graded quiver 

we consider the following root base: $R=\{f_1,f_2,f_3\}$ where $f_1=-e_2$, $f_2=e_1+e_2$, $f_3=e_3$. The constructed bigraph Γ_R is a clear closed contour contains 3 vertices, 

of a type where $\deg a_{12}=\deg a_{23}=0$, and $\deg a_{13}=-1$, and the differential is given by $d(a_{13})=a_{23}a_{12}$. It is obtained by the sequence of reductions: $\mathcal{R}_{21}\mathcal{R}_{12}$. $\{e_1,e_2,e_3\}\mapsto\{e_1,w_{e_1}(e_2),e_3\}=\{e_1,e_1+e_2,e_3\}\mapsto\{w_{e_1+e_2}(e_1),e_1+e_2,e_3\}=\{-e_2,e_1+e_2,e_3\}$ Graded graph  can't be reduced.

Список використаних джерел

1. Drozd Y.A. *Reduction algorithm and representations of boxes and algebras.* Comtes Rendue Math. Acad. Sci. Canada, 23 (2001).
2. Ovsienko S.A. *Integer weakly positive forms.* In: Shurian Matrix problems and quadratic forms (1978), Kiev, 3–17.
3. Barot M., de la Pena J.A. *The Dynkin type of a non-negative unit form.* Expo. Math. **17**, (1999), 339–348.
4. Gnatiuk O., Golovashchuk N. *Differential graded categories with positive quadratic form.* Visnyk Kyiv National Taras Schevchenko University, (2012, 3), 15–19.

References

1. DROZD Y.A. *Reduction algorithm and representations of boxes and algebras.* Comtes Rendue Math. Acad. Sci. Canada, 23 (2001), 97–125.
2. OVSIENKO S.A. *Integer weakly positive forms.* In: Shurian Matrix problems and quadratic forms (1978), Kiev, 3–17.
3. BAROT M., de la PENA J.A. *The Dynkin type of a non-negative unit form.* Expo. Math. **17**, (1999), 339–348.
4. GNATIUK O., GOLOVAHCHUK N. *Differential graded categories with positive quadratic form.* Visnyk Kyiv National Taras Schevchenko University, (2012, 3), 15–19.

Received: 24.05.2014

УДК 519.21

О.В. Доронін[1], аспірант

Тест для перевірки рівності розподілів у моделі суміші зі змінними концентраціями

[1]Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 83000, м. Київ, пр-т. Глушкова, 4е,
e-mail: al_doronin@ukr.net

O.V. Doronin[1], PhD Student

Test for checking the equality of distributions in mixture model with varying concentrations

[1]Taras Shevchenko National University of Kyiv, 83000, Kyiv, Glushkova st., 4e,
e-mail: al_doronin@ukr.net

У даній роботі розглядається модель суміші ймовірнісних розподілів, у якій концентрації вважаються відомими, і змінюються від спостереження до спостереження. Для даної моделі ставиться задача перевірки гіпотези про рівність розподілів компонентів між собою, або деякому наперед заданому розподілу. В якості розв'язку пропонується техніка, аналогічна класичному тесту хі-квадрат, де рівність розподілів перевіряється по групованим даним. Дана техніка є модифікацією більш загального підходу до перевірки гіпотез про функціональні моменти у моделі суміші, який був розглянутий у попередній роботі автора. Для конкретно даної модифікації конкретизовано умови її застосування на практиці. На роль тестової статистики обирається вектор, елементами якого є значення навантаженої емпіричної міри на деяких підмножинах простору спостережень. Тест полягає у дослідженні відстані у сенсі Махаланобіса між значенням тестової статистики та нулем. Дана відстань порівнюється із пороговим рівнем, який виводиться із асимптотичних властивостей статистики. Наведений підхід легко може бути узагальнений для перевірки більш широкого класу гіпотез про розподіли компонентів суміші. Якість роботи тесту перевіряється за допомогою імітаційного моделювання.

Ключові слова: модель суміші, перевірка гіпотез, тест хі-квадрат.

In this paper we consider the model of mixture of probability distributions. The concentrations of components (mixing probabilities) are known, and they vary from observation to observation. For the given model, we formulate a problem of testing hypothesis about the equality of components' distributions within each other, or to some distribution given in advance. As a solution we propose a technique analogous to the classical chi-square test, where distributions' equality is checked by the grouped data. This technique is a modification of more general approach to testing hypotheses about functional moments in the model of mixture, which was developed in the author's previous work. For this concrete modification, the conditions of it's application were concretized. As a test statistic, we choose a vector, which elements are the values of the weighted empirical measure on some subsets of the observations' space. To perform the test, we compare the Mahalanobis-type distance between the value of the test statistic and zero. This distance is compared with the threshold value, which we derive from the asymptotic properties of statistic. Introduced approach can easily be generalyzed for checking of much more general class of hypotheses about the mixture components' distributions. Performance of the test is analyzed by simulation.

Key Words: mixture model, hypothesis testing, chi-square test.

Communicated by Prof. Kozachenko Yu.V.

Introduction

We consider a sample consisting of N subjects $O_{1;N}, ..., O_{N;N}$. Each subject $O_{j;N}$ belongs to one of the M subpopulations $\mathcal{P}_1, ..., \mathcal{P}_M$ (mixture's components) of the general population. But we do not know to which subpopulation exactly. We denote the number of this subpopulation as $\text{ind}(O_{j;N}) \in \{1, ..., M\}$. Next we assume that we know only the probabilities that $\text{ind}(O_{j;N})$ takes certain value (component's concentrations):

$$p^m_{j;N} := \mathbf{P}[\text{ind}(O_{j;N}) = m] = \mathbf{P}[O_{j;N} \in \mathcal{P}_m]. \quad (1)$$

© О.В. Доронін, 2014

We observe some characteristics $\xi_{j;N} := \xi(O_{j;N})$ for each subject $O_{j;N}$. Assume next that the values of ξ lie in some measurable space $\mathfrak{X}$ with $\mathfrak{F}$ as it's σ-algebra. Denote as $F_m(A) := \mathbf{P}[\xi(O) \in A | O \in \mathcal{P}_m]$ the conditional distribution of $\xi(O)$ assuming that the subject O is taken from the m-th mixture's subpopulation. Then the distribution of $\xi_{j;N}$ is expressed as

$$\mathbf{P}[\xi_{j;N} \in A] = \sum_{m=1}^{M} p_{j;N}^m F_m(A),\ A \in \mathfrak{F}. \qquad (2)$$

The mixture model with varying concentrations may appear in the analysis of medical and biological data (see [11]), during sociological and politological researches (see [12]), and in scope of economical, psychological and other issues (see [5]).

In this paper we consider testing hypotheses about equality of distributions for different mixture's components. As a solution of this problem, it is proposed a test analogous to the classical chi-square test. This test checks the equality of distributions by the grouped data. This paper is the sequel of [3], where more general scheme of testing hypotheses on functional moments was considered. The test of checking the single-dimentional functional moments for two mixture's components was developed in [11]. The hypothesis of the homogeneity of two different samples is considered in [6].

Another problems for the mixture's model are considered in [1, 2, 4, 14]. Note that the mixture's model with varying concentration is a modification of the classical mixture's model. In the last one, probabilities $p_{j;N}^m$ are the same for all $j = 1, ..., N$. The monographs [13, 15] are devoted to the classical mixture's model. Nonparametric technique is applied to this model in [7, 8, 10].

In this paper, the formal problem statement is placed in section 1. Test statistics are introduced in section 2. We investigate the asymptotic properties of test statistics more thoroughly in section 3. The test itself is constructed in section 4. The results of simulation study is placed in section 5.

1 Problem statement

Our goal is to develop a test for checking the hypotesis about the equality of some component's distribution to the distribution of some another component's distribution. But in fact our test will check the equality of the grouped data distributions. I.e. we check the equality of distributions F_a i F_b on some sets $A_1, ..., A_Q$ from $\mathfrak{F}$:

$$F_a(A_q) = F_b(A_q), \quad q = 1, ..., Q. \qquad (3)$$

Without loss of generality we check the hypothesis about only first mixture's components. Indeed, the mixture's components can be rearranged without change of (2). The first type of hypotheses we are interested in is the hypothesis of the equality of F_1 to some distribution F_0 given in advance:

$$H_0 :\ F_1(A_q) = F_0(A_q),\ q = 1, ..., Q. \qquad (4)$$

The second type of hypotheses is about the equality of distributions of the first two mixture's components:

$$H_0 :\ F_1(A_q) = F_2(A_q),\ q = 1, ..., Q. \qquad (5)$$

In what follows we build the test to check both types of hypotheses, (4) and (5). This test can be considered as the analogue of chi-square test for the model of mixture with varying concentrations.

2 Test statistics

Hereinafter we denote zero vector from $\mathbb{R}^k$ as $\mathbb{O}_k$. Unit k-by-k matrix is denoted as $\mathbb{I}_{k\times k}$, and zero k-by-m matrix as $\mathbb{O}_{k\times m}$. diag$[v]$ will denote the diagonal matrix, the diagonal elements of which are the elements of some vector v. For real-valued m-by-k matrix A we will write $A \in \mathbb{R}^{m\times k}$. We denote the convergence in probability as $\xrightarrow{P}$. And the convergence by distribution as $\xrightarrow{d}$. Moreover, we introduce independent random variables η_m with distributions F_m, $m = 1, ..., M$. For arbitraty sets of values $a_{j;N}$ and $b_{j;N}$, $j = 1, ..., N$ we define the averaging operator $\langle\cdot\rangle_N$:

$$\langle a_{;N}\rangle_N := \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} a_{j;N}. \qquad (6)$$

The operations of summation, multiplication, etc. under the operator $\langle\cdot\rangle_N$ we understand elementwise:

$$\begin{aligned} \langle a_{;N} + b_{;N}\rangle_N &= \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}(a_{j;N} + b_{j;N}), \\ \langle a_{;N} b_{;N}\rangle_N &= \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} a_{j;N} b_{j;N}. \end{aligned} \qquad (7)$$

Corresponding limit values (if they exist) we denote through the operator $\langle\rangle$ without subscript N:

$$\langle a * b\rangle := \lim_{N\to\infty}\langle a_{;N} * b_{;N}\rangle_N. \tag{8}$$

Let us assume that $A_1, ..., A_Q$ are some measurable sets from $\mathfrak{F}$. We denote the values of mixture's component's distributions on these sets as

$$f_q^m := F_m(A_q),\ q = 1, ..., Q,\ m = 1, ..., M, \tag{9a}$$

$$f_{r,s}^m := F_m(A_r \cap A_s),\ r, s = 1, ..., Q,\ m = 1, ..., M. \tag{9b}$$

Then we can reformulate hypotheses (4) and (5) as $f^1 = f^0$ and $f^1 = f^2$ respectively, where $f^0 := \big(F_0(A_q)\big)_{q=1,...,Q}$ is the vector of the values of given in advance distribution on the sets A_q.

We will use the weighted empirical measures $\hat{F}_{m;N}$ to estimate f_q^m i $f_{r,s}^m$:

$$\hat{F}_{m;N}(A) := \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} a_{j;N}^m \mathbb{I}_{\xi_{j;N}\in A},\ A \in \mathfrak{F}, \tag{10}$$

where $a_{j;N}^m$ is the set of some weight coefficients. We define $a_{j;N}^m$ as the minimax weight coefficients (e.g., see [3], [5]):

$$a_{\cdot;N}^m := p_{\cdot;N}\Gamma_N^{-1} e_m, \tag{11}$$

where $p_{\cdot;N} := (p_{j;N}^m)_{j=1,...,N,m=1,...,M} \in \mathbb{R}^{N\times M}$ is the matrix of concentrations, Γ_N^{-1} is the inversed matrix to the Gramm's matrix of concentrations

$$\Gamma_N := \big(\langle p_{;N}^k p_{;N}^l\rangle_N\big)_{k,l=1,...,M} \in \mathbb{R}^{M\times M}, \tag{12}$$

and $e_m := \big(\mathbb{I}_{\{k=m\}}\big)_{k=1,...,M} \in \mathbb{R}^M$. Thus, the values of f_q^m and $f_{r,s}^m$ can be estimated as

$$\hat{f}_q^m := \hat{F}_{m;N}(A_q),\ \hat{f}_{r,s}^m := \hat{F}_{m;N}(A_r \cap A_s). \tag{13}$$

If the space of observations is real-valued ($\mathfrak{X} = \mathbb{R}$) with Borel σ-algebra $\mathfrak{F} = \mathfrak{B}(\mathbb{R})$ we can take the improved weight coefficients $\tilde{a}_{j;N}^m$ (see [3], [5], [9]). We can define them as the coefficients that correspond to improved empirical distribution function

$$\begin{aligned}\tilde{F}_{m;N}(x) &:= \min\{1, \sup_{y<x}\hat{F}_{m;N}(y)\}\\ &= \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\tilde{a}_{j;N}^m \mathbb{I}_{\xi_{j;N}\le x}.\end{aligned} \tag{14}$$

Theorem 1 shows consistency and asymptotic normality of estimators $\hat{F}_{m_0;N}$ and $\tilde{F}_{m_0;N}$. To formulate the theorem we will denote the limit value of Γ_N as

$$\Gamma := \lim_{N\to\infty}\Gamma_N = \big(\langle p^k p^l\rangle\big)_{k,l=1,...,M}. \tag{15}$$

Theorem 1. *Let B_k be some measurable sets from $\mathfrak{F}$, m_k be the indices from $\{1, ..., M\}$, $k = 1, ..., K$, and fulfills the following.*
(i) Limit matrix Γ exists, and $\det\Gamma \neq 0$.
(ii) Limit values $\langle a^{m_k} a^{m_l} p^r p^s\rangle$ exist, $r, s = 1, ..., M$, $k, l = 1, ..., K$.
Then 1. $\sqrt{N}\big(\hat{F}_{m_k;N}(B_k) - F_{m_k}(B_k)\big)_{k=1,...,K} \xrightarrow{d} \zeta \simeq \mathcal{N}(\mathbb{O}_K, \Sigma)$ as $N \to \infty$, where $\hat{F}_{m_k;N}$ is the empirical measure from (10), and Σ is the dispersion matrix with elements defined as

$$\begin{aligned}(\Sigma)_{k,l} = &\sum_{m=1}^{M}\langle a^{m_k} a^{m_l} p^m\rangle F_m(A_k \cap A_l)\\ &- \sum_{r,s=1}^{M}\langle a^{m_k} a^{m_l} p^r p^s\rangle F_r(A_k) F_s(A_l).\end{aligned} \tag{16}$$

2. If moreover the following conditions are fulfilled,
(iii) Distribution functions F_m are continuous on $\mathbb{R}$, $m = 1, ..., M$.
(iv) $\operatorname{supp} F_m \subseteq \operatorname{supp} F_{m_k}$, $m = 1, ..., M$, $k = 1, ..., K$.
then $\sqrt{N}\big(\tilde{F}_{m_k;N}(B_k) - F_{m_k}(B_k)\big)_{k=1,...,K} \xrightarrow{d} \zeta \simeq \mathcal{N}(\mathbb{O}_K, \Sigma)$ as $N \to \infty$, where $\tilde{F}_{m_k;N}$ are the weighted empirical distributions defined in (14).

Proof 1. Consistency of the estimators is obtained by lemma 1 from [12]. Theorem 2 from [3] states the asymptotic normality of the functional moments, and of the necessary estimators as the partial case.

2. Theorem 2.3.1 from [5] states that $\sup_{x\in\mathbb{R}}\sqrt{N}\big|\tilde{F}_{m_k}(x) - \hat{F}_{m_k}(x)\big| \xrightarrow{P} 0$ as $N \to \infty$, $k = 1, ..., K$. From here, and from point 1, obtain the necessary statement. □

We define the vectors of indicators

$$t_{j;N} := \big(\mathbb{I}_{\xi_{j;N}\in A_q}\big)_{q=1,...,Q} \in \mathbb{R}^Q. \tag{17}$$

Then the estimate of f^i takes form

$$\hat{f}_N^i := \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} a_{j;N}^i t_{j;N},\ i = 1, 2. \tag{18}$$

To test the H_0 we will use the test statistic $\hat{T}_N$. One should reject the null hypothesis if $\hat{T}_N$

differs from zero significantly, and accept otherwise. Statistic $\hat{T}_N$ for hypothesis (4) takes form

$$\hat{T}_N := \hat{f}_N^1 - f^0 = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} a_{j;N}^1 t_{j;N} - f^0. \tag{19}$$

And for hypothesis (5) $\hat{T}_N$ becomes

$$\hat{T}_N := \hat{f}_N^2 - \hat{f}_N^1 = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}(a_{j;N}^2 - a_{j;N}^1)t_{j;N}. \tag{20}$$

3 Asymptotics of the test statistics

Assume that statistic $\hat{T}_N$ takes form

$$\hat{T}_N = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} b_{j;N} t_{j;N} - t_0, \tag{21}$$

where $b_{j;N} \in \mathbb{R}$ is some set of weight coefficients, $t_0 \in \mathbb{R}^Q$ is some nonrandom vector. Both statistics (19) and (20) take this form.

Tests for checking the hypotheses (4) and (5) by statistic (21) are modifications of more general scheme for the tests introduced in [3].

Let us introduce the formal random values

$$\zeta_m := \left(\mathbb{I}_{\eta_m \in A_q}\right)_{q=1,...,Q},\ m = 1, ..., M. \tag{22}$$

Denote their covariance matrix as

$$\Phi_m := \operatorname{Var}\zeta_m = \left(f_{r,s}^m - f_r^m f_s^m\right)_{r,s=1,...,Q}. \tag{23}$$

If the sets A_q, $q = 1, ..., Q$ are disjoint, Φ_m takes form

$$\Phi_m = \operatorname{diag}[f^m] - f^m (f^m)^T, \tag{24}$$

where $f^m := (f_q^m)_{q=1,...,Q} \in \mathbb{R}^Q$ is the vector from f_q^m. In this case

$$\det[\Phi_m] = \Big(\prod_{q=1}^{Q} f_q^m\Big)\Big(1 - \sum_{q=1}^{Q} f_q^m\Big). \tag{25}$$

Denote the covariance matrix of $\hat{T}_N$ multiplied by the number of observations as

$$D_N := N \cdot \operatorname{Var}[\hat{T}_N] \ \in \mathbb{R}^{Q\times Q}. \tag{26}$$

The limit matrix for D_N we denote as

$$D := \lim_{N\to\infty} D_N \ \in \mathbb{R}^{Q\times Q}. \tag{27}$$

Lemma 1. *Let $A_1, ..., A_Q$ be some measurable sets from $\mathfrak{F}$, and test statistic $\hat{T}_N$ takes form (21). Then*
(i) Elements of D_N are expressed as

$$(D_N)_{k,l} = \sum_{m=1}^{M} f_{k,l}^m \langle (b_{;N})^2 p_{;N}^m \rangle_N - \sum_{r,s=1}^{M} f_k^s f_l^s \langle (b_{;N})^2 p_{;N}^r p_{;N}^s \rangle_N. \tag{28}$$

(ii) If the limit values $\langle (b)^2 p^m \rangle$ and $\langle (b)^2 p^r p^s \rangle$ exist, then exists the limit matrix D, and it's elements are expressed as

$$(D)_{k,l} = \sum_{m=1}^{M} f_{k,l}^m \langle (b)^2 p^m \rangle - \sum_{r,s=1}^{M} f_k^s f_l^s \langle (b)^2 p^r p^s \rangle. \tag{29}$$

Proof (i) Since $t_{j;N}$ are independent, $\operatorname{Var}[\hat{T}_N] = \frac{1}{N^2}\sum_{j=1}^{N}(b_{j;N})^2 \operatorname{Var}[t_{j;N}]$. At the same time, $\operatorname{Var}[t_{j;N}]_{k,l} = \sum_{m=1}^{M} p_{j;N}^m f_{k,l}^m - \sum_{r,s=1}^{M} p_{j;N}^r p_{j;N}^s f_k^r f_l^s$, $k, l = 1, ..., Q$. Note that the last expression always exist.
(ii) Follows from (i). □

To formulate the following statements we need to find the conditions under which the matrices (26) and (27) are non-singular. They are positively definite since it is some covariance matrices. Thus, to matrices (26) and (27) be non-singular, it is sufficient to obtain some their lower estimates. Lower estimate is meant in Loewner sense. I.e. for matrices A and B we write $A \geq B$ if the matrix $(A - B)$ is non-negatively definite. Lemma 2 gives us the needed estimate.

Lemma 2. *Let $A_1, ..., A_Q$ be some measurable sets from $\mathfrak{F}$, and test statistic $\hat{T}_N$ takes form (21). Then the following fulfills.*
(i) $D_N \geq Z_N$, where

$$Z_N := \sum_{m=1}^{M} \langle (b_{;N})^2 p_{;N}^m \rangle_N \Phi_m \ \in \mathbb{R}^{Q\times Q}. \tag{30}$$

(ii) If the limits $\langle (b)^2 p^m \rangle$ and $\langle (b)^2 p^r p^s \rangle$ exist, then $D \geq Z$, where

$$Z := \sum_{m=1}^{M} \langle (b)^2 p^m \rangle \Phi_m \ \in \mathbb{R}^{Q\times Q}. \tag{31}$$

Proof (i) Let ρ_1, ρ_2 be some square-integrable random values. By the total variance law $\mathrm{Var}[\rho_1] = \mathbf{E}[\mathrm{Var}[\rho_1|\rho_2]] + \mathrm{Var}[\mathbf{E}[\rho_1|\rho_2]]$. I.e. $\mathrm{Var}[\rho_1] \geq \mathbf{E}[\mathrm{Var}[\rho_1|\rho_2]]$.
$\delta^m_{j;N} := \mathbb{I}_{O_{j;N}\in\mathcal{P}_m}$. Denote $\delta^m_{j;N} := \mathbb{I}_{\{O_{j;N}\in\mathcal{P}_m\}}$. Let $c \in \mathbb{R}^Q$ be any non-random vector. Then
$\mathrm{Var}[c^T\hat{T}_N] \geq \mathbf{E}[\mathrm{Var}\left[c^T\hat{T}_N\middle|\{\delta^m_{j;N}\}\right]]$
$= \mathbf{E}[\mathrm{Var}\left[\sum_{m=1}^M c^T\zeta_m \frac{1}{N}\sum_{j=1}^N b_{j;N}\delta^m_{j;N}\middle|\{\delta^m_{j;N}\}\right]]$
$= \mathbf{E}\left[\sum_{m=1}^M(\frac{1}{N}\sum_{j=1}^N b_{j;N}\delta^m_{j;N})^2\,\mathrm{Var}[c^T\zeta_m]\right]$
$= \frac{1}{N}\sum_{m=1}^M\langle(b_{;N})^2p^m_{;N}\rangle_N c^T\Phi_m c = \frac{1}{N}c^TZ_Nc.$
Thus, $D_N \geq Z_N$.
(ii) Follows from (i) and lemma 1. □

The next theorem shows the asymptotic normality of $\hat{T}_N$.

Theorem 2. *Let $A_1, ..., A_Q$ be some measurable sets from $\mathfrak{F}$, and test statistic $\hat{T}_N$ takes form* (21). *Assume that*
(i) Weight coefficients $b_{j;N}$ take form $b_{j;N} = \sum_{i=1}^d h_i a^{m_i}_{j;N}$, and $t_0 = \sum_{i=1}^d h_i f^{m_i}$, where $h_1, ..., h_d$ is some set of real numbers.
(ii) Matrix Γ exists, is finite, and $\det\Gamma \neq 0$.
(iii) Values $\langle(b)^2p^m\rangle$, $\langle(b)^2p^rp^s\rangle$ exist, and are finite, $m, r, s = 1, ..., M$.
(iv) Exists $m_0 \in \{1, ..., M\}$ such that $\langle(b)^2p^{m_0}\rangle > 0$.
(v) Matrix Φ_{m_0} is positively defined.
Then, under H_0, $\sqrt{N}(\hat{T}_N - t_0) \xrightarrow{d} \zeta \simeq \mathcal{N}(\mathbb{O}_Q, D)$. Moreover, matrix D is positively defined.
If conditions (iii) and (iv) of theorem 1 are fulfilled (for $K = d$), then the statement remains true for $b_{j;N} = \sum_{i=1}^d h_i\tilde{a}^{m_i}_{j;N}$.

Proof From conditions (iii), (iv), (v) and lemma 2 it follows that D exists and is positively definite. From conditions (i), (ii) and theorem 1 obtain consistency and asymptotic normality for $\hat{T}_N$. □

Remark 1. Weight coefficients $b_{j;N}$ for statistics (19) and (20) are the partial case of coefficients $b_{j;N} = \sum_{i=1}^d h_i a^{m_i}_{j;N}$. Indeed, for (19) we need to set $d = 1$, $h_1 = 1$, $m_1 = 1$, and for (20): $d = 2$, $h_1 = -1$, $h_2 = 1$, $m_1 = 1$, $m_2 = 2$.

Remark 2. If the sets $A_1, ..., A_Q$ are disjoint, then condition (v) of theorem 2 can be replaced by condition
(v') $f^{m_0}_q > 0$, $q = 1, ..., Q$, $\sum_{q=1}^Q f^{m_0}_q < 1$.
Indeed, from condition (v') and equality (25) obtain $\det\Phi_{m_0} > 0$. Since Φ_{m_0} is the covariance matrix, it is positively definite.

4 Test construction

Theorem 2 shows that the statistic $\hat{T}_N$ of the form (21) has the mean value t_0, and is asymptotically normal with the dispersion matrix D. Note that the matrix D is non-singular. It's elements can be estimated as

$$(\hat{D}_N)_{k,l} := \sum_{m=1}^M \hat{f}^m_{k,l;N}\langle(b_{;N})^2p^m_{;N}\rangle_N - \sum_{r,s=1}^M \hat{f}^r_{k;N}\hat{f}^s_{l;N}\langle(b_{;N})^2p^r_{;N}p^s_{;N}\rangle_N. \quad (32)$$

Thus, we can expect that under H_0 statistic

$$\hat{s}_N := N(\hat{T}_N - t_0)^T\hat{D}_N^{-1}(\hat{T}_N - t_0) \quad (33)$$

converges by distribution to χ^2 distribution with Q degrees of freedom (next we will write χ^2_Q). Since matrix D is non-singular, and its estimate $\hat{D}_N$ is consistent (under conditions from theorem 1), then the matrix $\hat{D}_N$ is non-singular for large enough N.

Remark 3. To estimate D in hypothesis (4), we can put more precise estimate (28) instead of (32). Indeed, if (4) fulfills, then we already know the values f^m_k and $f^m_{k,l}$.

Assume that $\hat{s}_N$ converges by distribution to χ^2_Q. For a given significance level α, we can test the hypothesis by comparing $\hat{s}_N$ with the threshold level:

$$\pi_{\alpha;N}: \begin{cases} \text{accept } H_0 & \text{if } \hat{s}_N \leq Q^{\chi^2_Q}(1-\alpha), \\ \text{reject } H_0 & \text{otherwise,} \end{cases} \quad (34)$$

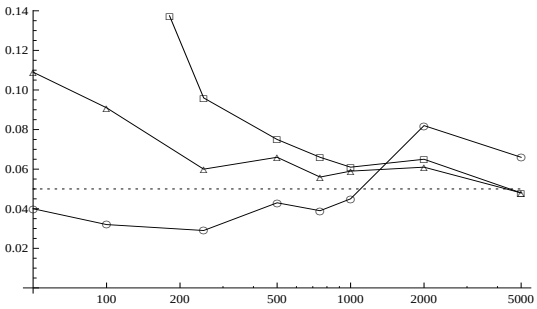
where $Q^{\chi^2_Q}(1-\alpha)$ is the quantile of level $1-\alpha$ for the distribution χ^2_Q. The reached significance level (p-level) can be calculated as

$$p := 1 - F_{\chi^2_Q}(\hat{s}_N), \quad (35)$$

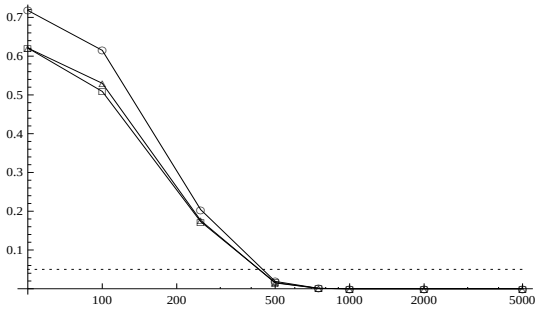
where $F_{\chi^2_Q}$ is the distribution function of χ^2_Q.

Theorem 3 proves that the test (34) is defined correctly. For weight coefficients $b_{j;N}$ defined through $a^m_{j;N}$, this theorem is the direct consequence of theorem 5 from [3]. If we use improved coefficients $\tilde{a}^m_{j;N}$, then it's proof is the same as the proof of the mentioned theorem.

Theorem 3. *Assume the conditions of theorem* 2 *are fulfilled. Then, under H_0, $\lim_{N\to\infty}\mathbf{P}[\pi_{\alpha;N}$ rejects $H_0] = \alpha$.*

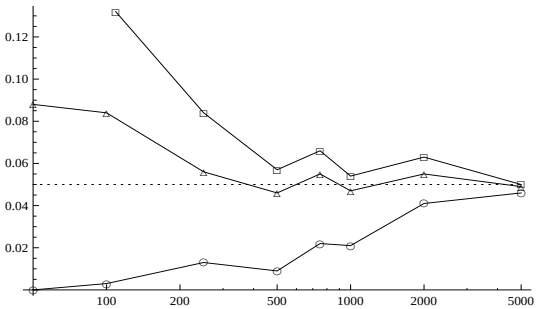


A1. First-type errors (H_0 is true)

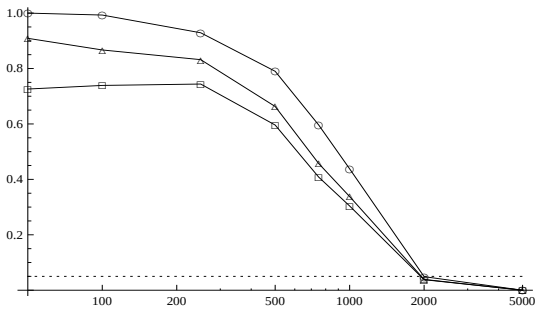


A2. Second-type errors (H_0 is false)

Рис. 1: Frequences of errors. Test checks if the distribution is equal to some known in advance.



B1. First-type errors (H_0 is true)



B2. Second-type errors (H_0 is false)

Рис. 2: Frequences of errors. Test checks if the distribution of first two components are equal.

5 Numerical results

Introduced approach was tested by the simulation study. We took three-component mixture. Each component has the Gaussian distribution with some mean μ_m and variance σ_m^2, $m = 1, 2, 3$. The concentrations were generated with the uniform distribution: $p_{j;N} = (u_1, u_2, u_3)^T/s$, where $u_i \simeq \mathrm{Unif}(0, 1)$, $i = 1, 2, 3$, $s := u_1+u_2+u_3$.

In each experiment it was generated 1000 samples with 50, 100, 250, 500, 750, 1000, 2000 and 5000 observations. As the result, we measured the frequences of the first- and second-type errors for significance level $\alpha = 0.05$.

It was implemented three modifications of $\pi_{\alpha;N}$. In the first modification (next (ss)) both estimates $\hat{T}_N$ and $\hat{D}_N$ were constructed via minimax weight coefficients $a_{j;N}^m$ from (11). In the second modification (next (si)) we built $\hat{T}_N$ via coefficients $a_{j;N}^m$, but we used improved coefficients $\tilde{a}_{j;N}^m$ from (14) to estimate $\hat{D}_N$. The third modification (next (ii)) represents $\hat{T}_N$ and $\hat{D}_N$ both constructed via improved weights.

The results of all three realizations are shown on figures 1 and 2. Line marked by $\square$ represents the realizations (ss), marked by $\triangle$ – (si), and by $\circ$ – (ii). The dashed line is for the significance level $\alpha = 0.05$.

Experiments A. For this pair of experiments we took the Gaussian mixture, which components have zero values $\mu_1 = 0$, $\mu_2 = 1$, $\mu_3 = 0$ and variances $\sigma_1^2 = 1$, $\sigma_2^2 = 4$, $\sigma_3^2 = 9$. In experiment A1 the distribution of the first component was compared to the Gaussian distribution with parameters $\mu_0 = 0$ and $\sigma_0^2 = 1$, i.e. when H_0 is true. We defined the sets A_q as the intervals $\big(\mu_0 + (i - \frac{1}{2})\sigma_0, \mu_0 + (i + \frac{1}{2})\sigma_0\big]$, $i = -2, ..., 2$. Frequencies of the first-type errors are shown on the left part of figure 1. Analogously, in experiment A2 we took the Gaussian distribution with paramenters $\mu_0 = 1$ and $\sigma_0 = 1$, i.e. H_0 is false. Frequencies of the second-type errors are shown on the right part of figure 1.

Experiments B. For this pair of experiments, we checked the hypothesis about equality of the first two components' distributions. We took the sets A_q analogously to experiment A, except that μ_0 and σ_0 were estimated as $\tilde{\mu}_{0;N} :=$

$\frac{1}{2}(\tilde{\mu}_{1;N} + \tilde{\mu}_{2;N})$ and $\tilde{\sigma}^2_{0;N} := \frac{1}{2}(\tilde{\sigma}^2_{1;N} + \tilde{\sigma}^2_{2;N})$ respectfully, where $\tilde{\mu}_{m;N} := \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} \tilde{a}^m_{j;N}\xi_{j;N}$, $\tilde{\sigma}^2_{m;N} := \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} \tilde{a}^m_{j;N}(\xi_{j;N} - \tilde{\mu}_{m;N})^2$, $m = 1, 2$. In experiment B1 we took mean values as $\mu_1 = \mu_2 = 0$, $\mu_3 = 3$, and variances as $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = 1$, $\sigma_3^2 = 9$. I.e. H_0 is true. Frequences of the first-type errors are shown on figure 2. In experiment B2 the mean values were taken as $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 0$, and the variances as $\sigma_1^2 = 1$, $\sigma_2^2 = 4$, $\sigma_3^2 = 9$. I.e. H_0 is false. Frequences of the second-type errors are shown on figure 2.

6 Conclusion

The model of mixture with varying concentrations was considered. We developed the technique of test construction to check the hypotheses about equality of components' distributions. This technique can easily be extended to the case of more than two mixture's components. Quality of the tests was checked by the simulation study. Developed tests can be applied to the analysis of statistical data from medical, biological, sociological, political, economical etc. areas.

Список використаних джерел

[1] Доронін, О. В. Нижня межа матриці розсіяння для семіпараметричного оцінювання у моделі суміші /О. В. Доронін // Теорія ймовірностей та математична статистика. — 2014.— Вип. 90. — С. 64–76.

[2] Доронін, О. В. Адаптивне оцінювання у семіпараметричній моделі суміші, /О. В. Доронін // Теорія ймовірностей та математична статистика. — 2014.— Вип. 91. — С. 27–38.

[3] Doronin, A., Maiboroda, R. Testing hypotheses on moments by observations from a mixture with varying concentrations, /A. Doronin, R. Maiboroda // Modern Stochastics: Theory and Applications. — 2014.— Вип. 1, №2. — С. 61–70.

[4] Лодатко, А., Майборода, Р. Адаптивна моментна оцінка параметру розподілу по спостереженнях з домішкою, /А. Лодатко, Р. Майборода // Теорія ймовірностей та математична статистика. — 2006.— Вип. 75. — С. 61–70.

[5] Майборода, Р. Є., Сугакова, О. В. Оцінювання та класифікація за спостереженнями із суміші, /Р. Є. Майборода, О. В. Сугакова // Київ: Київський університет. — 2008.

[6] Autin, F., Pouet, Ch. Test on the components of mixture densities, /F. Autin, Ch. Pouet // Statistics & Risk Modelling. — 2011.— Вип. 28, №4. — С. 389–410.

References

1. DORONIN, O.V. (2014) Lower bound of dispersion matrix for semiparametric estimation in mixture model. *Theory of Probability and Mathematical Statistics*. 90, p. 64–76.

2. DORONIN, O.V. (2014) Adaptive estimation in semiparametric model of mixture with varying concentrations. *Theory of Probability and Mathematical Statistics*. 91, p. 27–38.

3. DORONIN, O. and MAIBORODA, R. (2014) Testing hypotheses on moments by observations from a mixture with varying concentrations. *Modern Stochastics: Theory and Applications*. 1, 2, p. 195–209.

4. LODATKO, N. and MAIBORODA, R. (2007) An adaptive moment estimator of a parameter of a distribution constructed from observations with admixture. *Theory of Probability and Mathematical Statistics*. 75, p. 71–82.

5. MAIBORODA, R. and SUGAKOVA, O. (2008) *Estimation and Classification of Observations from Mixtures*. Kyiv: Kyiv University Publishers.

6. AUTIN, F. and POUET, Ch. (2011) Test on the components of mixture densities. *Statistics & Risk Modelling*. 28, 4, p. 389–410.

[7] Bordes, L., Delmas, C., Vandekerkhove, P. Semiparametric Estimation of a two-component Mixture model where one component is known, /L. Bordes, C. Delmas, P. Vandekerkhove // Scandinavian Journal of Statistics. — 2006.— Вип. 33. — С. 733–752.

[8] Hall, P., Zhou, X.-H. Nonparametric estimation of component distributions in a multivariable mixture, /P. Hall, X.-H. Zhou // Annals of Statistics. — 2003.— Вип. 31, №1. — С. 201–224.

[9] Maiboroda, R. E., Kubaichuk, O. O. Improved estimators for moments constructed from observations of a mixture, /R. E. Maiboroda, O. O. Kubaichuk // Theory of Probability and Mathematical Statistics. — 2005.— Вип. 70. — С. 83–92.

[10] Maiboroda, R., Sugakova, R. Nonparametric density estimation for symmetric distributions by contaminated data, /R. Maiboroda, O. Sugakova // Metrica. — 2012.— Вип. 75, №1. — С. 109–126.

[11] Maiboroda, R., Sugakova, O. Statistics of mixtures with varying concentrations with application to DNA microarray data analysis, /R. Maiboroda, O. Sugakova // Journal of nonparametric statistics. — 2012.— Вип. 24, №1. — С. 201–205.

[12] Maiboroda, R. E., Sugakova, O. V., Doronin, A. V. Generalized estimating equations for mixtures with varying concentrations, /R. E. Maiboroda, O. V. Sugakova, A. V. Doronin // The Canadian Journal of Statistics. — 2013.— Вип. 41, №2. — С. 217–236.

[13] McLachlan, G. J., Peel, D. Finite Mixture Models, /G. J. McLachlan, D. Peel // New York: Wiley.— 2000.

[14] Sugakova, O. Adaptive estimates for the parameter of a mixture of two symmetric distributions, /O. Sugakova // Theory of Probability and Mathematical Statistics. — 2011.— Вип. 82. — С. 149–159.

[15] Titterington, D. M., Smith, A. F., Makov, U. E. Analysis of Finite Mixture Distributions, /D. M. Titterington, A. F. Smith, U. E. Makov // New York: Wiley.— 1985.

7. BORDES, L., DELMAS, C. and VANDEKERKHOVE, P. (2006) Semiparametric estimation of a two-component mixture model where one component is known. *Scandinavian Journal of Statistics*. 33, p. 733–752.

8. HALL, P. and ZHOU, X.-H. (2003) Nonparametric estimation of component distributions in a multivariable mixture. *Annals of Statistics*. 31, 1, p. 201–224.

9. MAIBORODA, R.E. and KUBAICHUK, O.O. (2005) Improved estimators for moments constructed from observations of a mixture. *Theory of Probability and Mathematical Statistics*. 70, p. 83–92.

10. MAIBORODA, R. and SUGAKOVA, O. (2012) Nonparametric density estimation for symmetric distributions by contaminated data. *Metrica*. 75, 1, p. 109–126.

11. MAIBORODA, R. and SUGAKOVA, O. (2012) Statistics of mixtures with varying concentrations with application to DNA microarray data analysis. *Journal of nonparametric statistics*. 24, 1, p. 201–205.

12. MAIBORODA, R.E., SUGAKOVA, O.V. and DORONIN A.V. (2013) Generalized estimating equations for mixtures with varying concentrations *The Canadian Journal of Statistics*. 41, 2, p. 217–236.

13. MCLACHLAN, G.J. and PEEL, D. (2000) *Finite Mixture Models*. New York: Wiley.

14. SUGAKOVA, O. (2011) Adaptive estimates for the parameter of a mixture of two symmetric distributions. *Theory of Probability and Mathematical Statistics*. 82, p. 149–159.

15. TITTERINGTON, D.M., SMITH, A.F. and MAKOV, U.E. (1985) *Analysis of Finite Mixture Distributions*. New York: Wiley.

Received: 06.06.2014

УДК 512.579

Юлія В. Жучок [1], *аспірантка*

Декомпозиції вільних тріоїдів

[1]Луганський національний університет імені Тараса Шевченка, Україна, 92700, Старобільськ, квартал Гоголя, 1
e-mail: yulia.mih@mail.ru

Yuliia V. Zhuchok [1], *PhD student*

Decompositions of free trioids

[1] Luhansk Taras Shevchenko National University, Ukraine, 92700, Starobilsk, Gogol square, 1
e-mail: yulia.mih@mail.ru

Одним із найкращих методів вивчення будови різних алгебр є метод декомпозиції. Основна ідея цього методу полягає в розкладі алгебри на компоненти, можливо, більш простої структури, детальному вивченні компонент та встановленні взаємозв'язків між компонентами в межах цієї алгебри. Вищевказаний метод має застосування в теорії групоїдів, теорії напівгруп, теорії дімоноїдів. У цій статті охарактеризовано декомпозиції вільних тріоїдів у трисполуки підтріоїдів та представлено деякі найменші конгруенції на вільному тріоїді.

Ключові слова: тріоїд, вільний тріоїд, трисполука підтріоїдів, дімоноїд, напівгрупа, конгруенція.

One of the best methods used in studying the structure of different algebras is the decomposition method. The main idea of this method is to decompose an algebra into components, perhaps of simpler structure, to study components in details and to establish mutual relationships between components within the entire algebra. The mentioned method has applications in groupoid theory, semigroup theory, dimonoid theory. Jean-Louis Loday and María O. Ronco constructed operads associated to the chain modules of simplexes and of Stasheff polytopes. The corresponding algebras have three operations and they are called associative trialgebras and dendriform trialgebras. A trioid is a set equipped with three binary associative operations satisfying some axioms. A trialgebra is just a linear analog of a trioid. Therefore, all results obtained for trioids can be applied to trialgebras. In this paper we characterize decompositions of free trioids into tribands and bands of subtrioids and present the least rectangular band congruence, the least left zero congruence and the least right zero congruence on a free trioid.

Key words: trioid, free trioid, triband of subtrioids, dimonoid, semigroup, congruence.
Communicated by Prof. V. V. Kirichenko

1 Introduction

One of the best methods used in studying the structure of different algebras is the decomposition method. The main idea of this method is to decompose an algebra into components, perhaps of simpler structure, to study components in details and to establish mutual relationships between components within the entire algebra. The mentioned method has applications in groupoid theory, semigroup theory, dimonoid theory (see, e.g., [1], respectively, [2], [3]).

During the study of planar trees J.-L. Loday and M.O. Ronco [4] introduced a type of algebras, called trialgebras, which are vector spaces endowed with three binary associative operations satisfying eight axioms. A trialgebra is just a linear analog of a trioid [4] and therefore all results obtained for trioids can be applied to trialgebras. A free trioid of rank 1 was given in [4]. A trioid which is isomorphic to the free trioid of rank 1 was considered in [5]. Free trioids play an important role in constructing free trialgebras. See [6] for more information about trioids.

In this paper our attention will be aimed to decompositions of trioids. Here we give decompositions of free trioids into tribands and bands of subtrioids. As a consequence, we characterize the least rectangular band congruence, the least left zero congruence and the least right zero congruence on a free trioid.

2 Preliminaries

Recall that a nonempty set T equipped with three binary associative operations $\dashv, \vdash$ and $\perp$ satisfying eight axioms: $(x \dashv y) \dashv z = x \dashv (y \vdash z)\,(T1)$, $(x \vdash y) \dashv z = x \vdash (y \dashv z)\,(T2)$, $(x \dashv y) \vdash z = x \vdash (y \vdash z)\,(T3)$, $(x \dashv y) \dashv z = x \dashv (y \perp z)\,(T4)$,

© Юлія В. Жучок, 2014

$(x \perp y) \dashv z = x \perp (y \dashv z)\,(T5)$, $(x \dashv y) \perp z = x \perp (y \vdash z)\,(T6)$, $(x \vdash y) \perp z = x \vdash (y \perp z)\,(T7)$, $(x \perp y) \vdash z = x \vdash (y \vdash z)\,(T8)$, is called a trioid.

Consider the construction of a free trioid.

Let Y be an arbitrary nonempty set, $\overline{Y} = \{\overline{x} \,|\, x \in Y\}$, $X = Y \cup \overline{Y}$ and $F[X]$ be the free semigroup on X. Let further $P \subset F[X]$ be a subsemigroup which contains words w with the element $\overline{x}$ $(x \in Y)$ occuring in w at least one time.

Let $w \in P$. Denote by $\widetilde{w}$ the word obtained from w by change of all letters $\overline{x}$ $(x \in Y)$ by x. For instance, if $w = x\overline{x}\,\overline{y}x\overline{z}$, then $\widetilde{w} = xxyxz$. Obviously, $\widetilde{w} \in F[X] \backslash P$.

Define operations $\dashv$, $\vdash$ and $\perp$ on P by

$$w \dashv u = w\widetilde{u}, \quad w \vdash u = \widetilde{w}u, \quad w \perp u = wu$$

for all $w, u \in P$. Denote the algebra $(P, \dashv, \vdash, \perp)$ by $Frt(Y)$.

Proposition 1. *$Frt(Y)$ is the free trioid.*

The proof of this statement is the same as the proof of Proposition 1.9 from [4] obtained for the free trioid of rank 1.

Now recall the definition of a dimonoid [7, 8].

A nonempty set D equipped with two binary associative operations $\dashv$ and $\vdash$ satisfying the axioms $(T1) - (T3)$ is called a dimonoid. If $D = (D, \dashv, \vdash)$ is a dimonoid, then the trioid $(D, \dashv, \vdash, \dashv)$ (respectively, $(D, \dashv, \vdash, \vdash)$) will be denoted by $(D)^{\dashv}$ (respectively, $(D)^{\vdash}$). It is clear that $(D)^{\dashv}$ and $(D)^{\vdash}$ are different as trioids but they coincide as dimonoids.

We need some algebras from [9] which will be used in Section 3.

For an arbitrary nonempty set Y let $Y_{\ell z} = (Y, \dashv)$, $Y_{rz} = (Y, \vdash)$, $Y_{rb} = Y_{\ell z} \times Y_{rz}$ be a left zero semigroup, a right zero semigroup and a rectangular band, respectively. By [9] $Y_{\ell z, rz} = (Y, \dashv, \vdash)$ is the free left zero and right zero dimonoid (or the free left and right diband).

Define operations $\dashv$ and $\vdash$ on Y^2 by

$$(x, y) \dashv (a, b) = (x, b), \quad (x, y) \vdash (a, b) = (a, b)$$

for all $(x, y), (a, b) \in Y^2$. By [9] $(Y^2, \dashv, \vdash)$ is the free (rb, rz)-dimonoid. It is denoted by $Y_{rb,rz}$.

Define operations $\dashv$ and $\vdash$ on Y^2 by

$$(x, y) \dashv (a, b) = (x, y), \quad (x, y) \vdash (a, b) = (x, b)$$

for all $(x, y), (a, b) \in Y^2$. By [9] $(Y^2, \dashv, \vdash)$ is the free $(\ell z, rb)$-dimonoid. It is denoted by $Y_{\ell z, rb}$.

Define operations $\dashv$ and $\vdash$ on Y^3 by

$$(x_1, x_2, x_3) \dashv (y_1, y_2, y_3) = (x_1, x_2, y_3),$$

$$(x_1, x_2, x_3) \vdash (y_1, y_2, y_3) = (x_1, y_2, y_3)$$

for all $(x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \in Y^3$. The algebra $(Y^3, \dashv, \vdash)$ is denoted by $FRct(Y)$. According to Theorem 1 from [9] $FRct(Y)$ is the free rectangular diband.

A trioid $(T, \dashv, \vdash, \perp)$ is called a triband [10], if semigroups $(T, \dashv)$, $(T, \vdash)$ and $(T, \perp)$ are bands.

Define operations $\dashv$, $\vdash$ and $\perp$ on Y^3 by

$$(a_1, b_1, c_1) \dashv (a_2, b_2, c_2) = (a_1, b_1, c_1),$$

$$(a_1, b_1, c_1) \vdash (a_2, b_2, c_2) = (a_1, b_2, c_2),$$

$$(a_1, b_1, c_1,) \perp (a_2, b_2, c_2) = (a_1, b_1, c_2)$$

for all $(a_1, b_1, c_1), (a_2, b_2, c_2) \in Y^3$. It is clear that $(Y^3, \perp, \vdash)$ is a rectangular diband [9] and $(Y^3, \dashv)$ is a left zero semigroup. It is immediate to check that $(Y^3, \dashv, \vdash, \perp)$ is a triband. It will be denoted by $Y_{lz,rd}$.

Define operations $\dashv$, $\vdash$ and $\perp$ on Y^3 by

$$(a_1, b_1, c_1) \dashv (a_2, b_2, c_2) = (a_1, b_1, c_2),$$

$$(a_1, b_1, c_1) \vdash (a_2, b_2, c_2) = (a_2, b_2, c_2),$$

$$(a_1, b_1, c_1,) \perp (a_2, b_2, c_2) = (a_1, b_2, c_2)$$

for all $(a_1, b_1, c_1), (a_2, b_2, c_2) \in Y^3$. It is clear that $(Y^3, \dashv, \perp)$ is a rectangular diband [9] and $(Y^3, \vdash)$ is a right zero semigroup. One can check that $(Y^3, \dashv, \vdash, \perp)$ is a triband. It will be denoted by $Y_{rd,rz}$.

Define operations $\dashv$, $\vdash$ and $\perp$ on Y^2 by

$$(a_1, b_1) \dashv (a_2, b_2) = (a_1, b_1),$$

$$(a_1, b_1) \vdash (a_2, b_2) = (a_2, b_2),$$

$$(a_1, b_1) \perp (a_2, b_2) = (a_1, b_2)$$

for all $(a_1, b_1), (a_2, b_2) \in Y^2$. It is clear that $(Y^2, \dashv, \vdash)$ is a left zero and right zero dimonoid [9] and $(Y^2, \perp)$ is a rectangular band. By [10] $(Y^2, \dashv, \vdash, \perp)$ is a triband. It will be denoted by $Y^{rb}_{lz,rz}$.

Define operations $\dashv$, $\vdash$ and $\perp$ on Y^4 by

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) \dashv (y_1, y_2, y_3, y_4) = (x_1, x_2, x_3, y_4),$$

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) \vdash (y_1, y_2, y_3, y_4) = (x_1, y_2, y_3, y_4),$$

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) \perp (y_1, y_2, y_3, y_4) = (x_1, x_2, y_3, y_4)$$

for all $(x_1, x_2, x_3, x_4), (y_1, y_2, y_3, y_4) \in Y^4$. It is clear that $(Y^4, \dashv)$, $(Y^4, \vdash)$ and $(Y^4, \perp)$ are rectangular bands. One routinely verifies that $(Y^4, \dashv, \vdash, \perp)$ is a triband. The triband $(Y^4, \dashv, \vdash, \perp)$ will be denoted by $FRT(Y)$.

A nonempty subset A of a trioid $(T, \dashv, \vdash, \perp)$ is called a subtrioid, if for any $a, b \in T$, $a, b \in A$ implies $a \dashv b$, $a \vdash b, a \perp b \in A$.

If $f : T_1 \to T_2$ is a homomorphism of trioids, then the corresponding congruence on T_1 will be denoted by Δ_f.

3 Decompositions

In this section in terms of tribands of subtrioids we describe the structure of free trioids and characterize the least rectangular band congruence, the least left zero congruence and the least right zero congruence on a free trioid.

In the following, we recall the construction of a triband of subtrioids [10].

Let S be an arbitrary trioid, J be some triband and let $\alpha : S \to J : x \mapsto x\alpha$ be a homomorphism. Then every class of the congruence Δ_α is a subtrioid of the trioid S, and the trioid S itself is a union of such trioids S_ξ, $\xi \in J$, that

$$x\alpha = \xi \Leftrightarrow x \in S_\xi = \Delta_\alpha^x = \{t \in S \mid (x, t) \in \Delta_\alpha\},$$

$$S_\xi \dashv S_\varepsilon \subseteq S_{\xi \dashv \varepsilon}, \quad S_\xi \vdash S_\varepsilon \subseteq S_{\xi \vdash \varepsilon},$$

$$S_\xi \perp S_\varepsilon \subseteq S_{\xi \perp \varepsilon}, \quad \xi \neq \varepsilon \Rightarrow S_\xi \cap S_\varepsilon = \varnothing.$$

In this case we say that S is decomposable into a triband of subtrioids (or S is a triband J of subtrioids S_ξ $(\xi \in J)$). If J is an idempotent semigroup (band), then we say that S is a band J of subtrioids S_ξ $(\xi \in J)$. If J is a commutative band, then we say that S is a semilattice J of subtrioids S_ξ $(\xi \in J)$. If J is a left (right) zero semigroup, then we say that S is a left (right) band J of subtrioids S_ξ $(\xi \in J)$.

Let $\omega \in F[X]$ and $w \in Frt(Y)$. Denote the first (respectively, last) letter of ω by $\omega^{(0)}$ (respectively, $\omega^{(1)}$). Suppose that u is the initial (respectively, terminal) subword of w with the minimal length such that $u^{(1)} \in \overline{Y}$ (respectively, $u^{(0)} \in \overline{Y}$). In this case $\widetilde{u^{(1)}}$ (respectively, $\widetilde{u^{(0)}}$) will be denoted by $w^{[0]}$ (respectively, $w^{[1]}$). For every $\omega \in F[X]$ the set of all letters occurring in ω will be denoted by $c(\omega)$ and for every $w \in Frt(Y)$ assume $\widetilde{c}(w) = c(\widetilde{w})$.

Take an arbitrary nonempty finite subset C of Y. Let $B^C(Y)$ be the set of all finite subsets A of Y such that $C \subseteq A$ and let $B_C(Y)$ be a semilattice defined on $B^C(Y)$ by the operation of the set theoretical union.

Let $i, j, k, s \in Y$,

$$L = \{(i, j, k, s), (i, j, k), [i, j, k], [i, j], (i, j), (i, j], [i, j), (i), [i]\}$$

and

$$U_{(i,j,k,s)} = \{w \in Frt(Y) \mid (\widetilde{w}^{(0)}, w^{[0]}, w^{[1]}, \widetilde{w}^{(1)}) = (i, j, k, s)\},$$

$$U_{(i,j,k)} = \{w \in Frt(Y) \mid (\widetilde{w}^{(0)}, w^{[0]}, w^{[1]}) = (i, j, k)\},$$

$$U_{[i,j,k]} = \{w \in Frt(Y) \mid (w^{[0]}, w^{[1]}, \widetilde{w}^{(1)}) = (i, j, k)\},$$

$$U_{[i,j]} = \{w \in Frt(Y) \mid (w^{[0]}, w^{[1]}) = (i, j)\},$$

$$U_{(i,j)} = \{w \in Frt(Y) \mid (\widetilde{w}^{(0)}, \widetilde{w}^{(1)}) = (i, j)\},$$

$$U_{(i)} = \{w \in Frt(Y) \mid \widetilde{w}^{(0)} = i\},$$

$$U_{[i]} = \{w \in Frt(Y) \mid \widetilde{w}^{(1)} = i\}.$$

For any $l \in L$ assume l^* be the set containing all components of l. Consider the set

$$U_l^A = \{w \in U_l \mid \widetilde{c}(w) = A\}$$

for $A \in B_{l^*}(Y)$ and $l \in L \backslash \{(i, j], [i, j)\}$.

The following three structure theorems give decompositions of $Frt(Y)$ into tribands of subtrioids.

Theorem 3.1. *Let $Frt(Y)$ be the free trioid.*

(i) *$Frt(Y)$ is a triband $FRT(Y)$ of subtrioids $U_{(i,j,k,s)}$, $(i, j, k, s) \in FRT(Y)$. Every trioid $U_{(i,j,k,s)}$, $(i, j, k, s) \in FRT(Y)$, is a semilattice $B_{(i,j,k,s)^*}(Y)$ of subtrioids $U^A_{(i,j,k,s)}$, $A \in B_{(i,j,k,s)^*}(Y)$.*

(ii) *$Frt(Y)$ is a triband $Y_{lz,rd}$ of subtrioids $U_{(i,j,k)}$, $(i, j, k) \in Y_{lz,rd}$. Every trioid $U_{(i,j,k)}$, $(i, j, k) \in Y_{lz,rd}$, is a semilattice $B_{(i,j,k)^*}(Y)$ of subtrioids $U^A_{(i,j,k)}$, $A \in B_{(i,j,k)^*}(Y)$.*

(iii) *$Frt(Y)$ is a triband $Y_{rd,rz}$ of subtrioids $U_{[i,j,k]}$, $(i, j, k) \in Y_{rd,rz}$. Every trioid $U_{[i,j,k]}$, $(i, j, k) \in Y_{rd,rz}$, is a semilattice $B_{[i,j,k]^*}(Y)$ of subtrioids $U^A_{[i,j,k]}$, $A \in B_{[i,j,k]^*}(Y)$.*

(iv) *$Frt(Y)$ is a triband $Y^{rb}_{lz,rz}$ of subtrioids $U_{[i,j]}$, $(i, j) \in Y^{rb}_{lz,rz}$. Every trioid $U_{[i,j]}$, $(i, j) \in Y^{rb}_{lz,rz}$, is a semilattice $B_{[i,j]^*}(Y)$ of subtrioids $U^A_{[i,j]}$, $A \in B_{[i,j]^*}(Y)$.*

Proof. (i) Define a map

$$\varphi_{FRT} : Frt(Y) \to FRT(Y) \quad \text{by}$$

$$w \mapsto (\widetilde{w}^{(0)}, w^{[0]}, w^{[1]}, \widetilde{w}^{(1)}), w \in Frt(Y).$$

For arbitrary elements w, $u \in Frt(Y)$ obtain

$$(w \dashv u)\varphi_{FRT} = (w\widetilde{u})\varphi_{FRT} =$$

$$= (\widetilde{w\widetilde{u}}^{(0)}, (w\widetilde{u})^{[0]}, (w\widetilde{u})^{[1]}, \widetilde{w\widetilde{u}}^{(1)}) =$$

$$= ((\widetilde{w}\widetilde{u})^{(0)}, w^{[0]}, w^{[1]}, (\widetilde{w}\widetilde{u})^{(1)}) =$$

$$= (\widetilde{w}^{(0)}, w^{[0]}, w^{[1]}, \widetilde{u}^{(1)}) =$$

$$= (\widetilde{w}^{(0)}, w^{[0]}, w^{[1]}, \widetilde{w}^{(1)}) \dashv (\widetilde{u}^{(0)}, u^{[0]}, u^{[1]}, \widetilde{u}^{(1)}) =$$

$$= w\varphi_{FRT} \dashv u\varphi_{FRT},$$

$$(w \vdash u)\varphi_{FRT} = (\widetilde{w}u)\varphi_{FRT} =$$

$$= (\widetilde{\widetilde{w}u}^{(0)}, (\widetilde{w}u)^{[0]}, (\widetilde{w}u)^{[1]}, \widetilde{\widetilde{w}u}^{(1)}) =$$

$$= ((\widetilde{w}\widetilde{u})^{(0)}, u^{[0]}, u^{[1]}, (\widetilde{w}\widetilde{u})^{(1)}) =$$

$$= (\widetilde{w}^{(0)}, u^{[0]}, u^{[1]}, \widetilde{u}^{(1)}) =$$

$$= (\widetilde{w}^{(0)}, w^{[0]}, w^{[1]}, \widetilde{w}^{(1)}) \vdash (\widetilde{u}^{(0)}, u^{[0]}, u^{[1]}, \widetilde{u}^{(1)}) =$$

$$= w\varphi_{FRT} \vdash u\varphi_{FRT},$$

$$(w \perp u)\varphi_{FRT} = (wu)\varphi_{FRT} =$$

$$= (\widetilde{wu}^{(0)}, (wu)^{[0]}, (wu)^{[1]}, \widetilde{wu}^{(1)}) =$$

$$= ((\widetilde{w}\widetilde{u})^{(0)}, w^{[0]}, u^{[1]}, (\widetilde{w}\widetilde{u})^{(1)}) =$$

$$= (\widetilde{w}^{(0)}, w^{[0]}, u^{[1]}, \widetilde{u}^{(1)}) =$$

$$= (\widetilde{w}^{(0)}, w^{[0]}, w^{[1]}, \widetilde{w}^{(1)}) \perp (\widetilde{u}^{(0)}, u^{[0]}, u^{[1]}, \widetilde{u}^{(1)}) =$$

$$= w\varphi_{FRT} \perp u\varphi_{FRT}.$$

Thus, φ_{FRT} is a surjective homomorphism. It is clear that $U_{(i,j,k,s)}$, $(i,j,k,s) \in FRT(Y)$, is a class of $\Delta_{\varphi_{FRT}}$ which is a subtrioid of $Frt(Y)$. Moreover, for every $(i,j,k,s) \in FRT(Y)$ the map

$$\zeta : U_{(i,j,k,s)} \to B_{(i,j,k,s)^*}(Y) : w \mapsto \widetilde{c}(w)$$

is a homomorphism. Indeed,

$$(w \dashv u)\zeta = (w\widetilde{u})\zeta = \widetilde{c}(w\widetilde{u}) = c(\widetilde{w\widetilde{u}}) =$$

$$= c(\widetilde{w}\widetilde{u}) = c(\widetilde{w}) \cup c(\widetilde{u}) = \widetilde{c}(w) \cup \widetilde{c}(u) =$$

$$= w\zeta \cup u\zeta,$$

$$(w \vdash u)\zeta = (\widetilde{w}u)\zeta = \widetilde{c}(\widetilde{w}u) = c(\widetilde{\widetilde{w}u}) =$$

$$= c(\widetilde{w}\widetilde{u}) = c(\widetilde{w}) \cup c(\widetilde{u}) = \widetilde{c}(w) \cup \widetilde{c}(u) =$$

$$= w\zeta \cup u\zeta,$$

$$(w \perp u)\zeta = (wu)\zeta = \widetilde{c}(wu) = c(\widetilde{wu}) =$$

$$= c(\widetilde{w}\widetilde{u}) = c(\widetilde{w}) \cup c(\widetilde{u}) = \widetilde{c}(w) \cup \widetilde{c}(u) =$$

$$= w\zeta \cup u\zeta$$

for all $w, u \in U_{(i,j,k,s)}$. Hence $U_{(i,j,k,s)}$ is a semilattice $B_{(i,j,k,s)^*}(Y)$ of subtrioids $U^A_{(i,j,k,s)}$, $A \in B_{(i,j,k,s)^*}(Y)$.

(ii) Define a map

$$\varphi_{lz,rd} : Frt(Y) \to Y_{lz,rd} \quad \text{by}$$

$$w \mapsto (\widetilde{w}^{(0)}, w^{[0]}, w^{[1]}), w \in Frt(Y).$$

One can check that $\varphi_{lz,rd}$ is a surjective homomorphism and $U_{(i,j,k)}$, $(i,j,k) \in Y_{lz,rd}$, is a class of $\Delta_{\varphi_{lz,rd}}$ which is a subtrioid of $Frt(Y)$. Similarly to (i), the second statement of (ii) can be proved.

(iii) Define a map

$$\varphi_{rd,rz} : Frt(Y) \to Y_{rd,rz} \quad \text{by}$$

$$w \mapsto (w^{[0]}, w^{[1]}, \widetilde{w}^{(1)}), w \in Frt(Y).$$

It can be shown that $\varphi_{rd,rz}$ is a surjective homomorphism and $U_{[i,j,k]}$, $(i,j,k) \in Y_{rd,rz}$, is a class of $\Delta_{\varphi_{rd,rz}}$ which is a subtrioid of $Frt(Y)$. As before, the last statement of (iii) can be proved.

(iv) Define a map

$$\varphi^{rb}_{lz,rz} : Frt(Y) \to Y^{rb}_{lz,rz} \quad \text{by}$$

$$w \mapsto (w^{[0]}, w^{[1]}), w \in Frt(Y).$$

By direct verification we can claim that $\varphi^{rb}_{lz,rz}$ is a surjective homomorphism and $U_{[i,j]}$, $(i,j) \in Y^{rb}_{lz,rz}$, is a class of $\Delta_{\varphi^{rb}_{lz,rz}}$ which is a subtrioid of $Frt(Y)$. As above, the second statement of (iv) can be proved. □

For all $i,j,k \in Y$ let

$$R_{(i,j,k)} = \{w \in Frt(Y) \mid (\widetilde{w}^{(0)}, w^{[0]}, \widetilde{w}^{(1)}) = (i,j,k)\},$$

$$R_{[i,j,k]} = \{w \in Frt(Y) \mid (\widetilde{w}^{(0)}, w^{[1]}, \widetilde{w}^{(1)}) = (i,j,k)\},$$

$$R_{(i)} = \{w \in Frt(Y) \mid w^{[0]} = i\},$$

$$R_{[i]} = \{w \in Frt(Y) \mid w^{[1]} = i\},$$

$$R_{(i,j)} = \{w \in Frt(Y) \mid (\widetilde{w}^{(0)}, w^{[0]}) = (i,j)\},$$

$$R_{[i,j]} = \{w \in Frt(Y) \mid (\widetilde{w}^{(0)}, w^{[1]}) = (i,j)\},$$

$$R_{(i,j]} = \{w \in Frt(Y) \mid (w^{[0]}, \widetilde{w}^{(1)}) = (i,j)\},$$

$$R_{[i,j)} = \{w \in Frt(Y) \mid (w^{[1]}, \widetilde{w}^{(1)}) = (i,j)\}.$$

Consider the set

$$R^A_l = \{w \in R_l \mid \widetilde{c}(w) = A\}$$

for $A \in B_{l^*}(Y)$ and $l \in L \backslash \{(i,j,k,s)\}$.

Theorem 3.2. *Let $Frt(Y)$ be the free trioid.*

(i) *$Frt(Y)$ is a triband $(FRct(Y))^{\dashv}$ of subtrioids $R_{(i,j,k)}$, $(i,j,k) \in (FRct(Y))^{\dashv}$. Every trioid $R_{(i,j,k)}$, $(i,j,k) \in (FRct(Y))^{\dashv}$, is a semilattice $B_{(i,j,k)^*}(Y)$ of subtrioids $R^A_{(i,j,k)}$, $A \in B_{(i,j,k)^*}(Y)$.*

(ii) *$Frt(Y)$ is a triband $(FRct(Y))^{\vdash}$ of subtrioids $R_{[i,j,k]}$, $(i,j,k) \in (FRct(Y))^{\vdash}$. Every trioid $R_{[i,j,k]}$, $(i,j,k) \in (FRct(Y))^{\vdash}$, is a semilattice $B_{[i,j,k]^*}(Y)$ of subtrioids $R^A_{[i,j,k]}$, $A \in B_{[i,j,k]^*}(Y)$.*

(iii) *$Frt(Y)$ is a triband $(Y_{lz,rz})^{\dashv}$ of subtrioids $R_{(i)}$, $i \in (Y_{lz,rz})^{\dashv}$. Every trioid $R_{(i)}$, $i \in (Y_{lz,rz})^{\dashv}$, is a semilattice $B_{\{i\}}(Y)$ of subtrioids $R^A_{(i)}$, $A \in B_{\{i\}}(Y)$.*

(iv) *$Frt(Y)$ is a triband $(Y_{lz,rz})^{\vdash}$ of subtrioids $R_{[i]}$, $i \in (Y_{lz,rz})^{\vdash}$. Every trioid $R_{[i]}$, $i \in (Y_{lz,rz})^{\vdash}$, is a semilattice $B_{\{i\}}(Y)$ of subtrioids $R^A_{[i]}$, $A \in B_{\{i\}}(Y)$.*

Proof. (i) Define a map

$$\varphi^{\dashv}_{FRct} : Frt(Y) \to (FRct(Y))^{\dashv} \quad \text{by}$$

$$w \mapsto (\widetilde{w}^{(0)}, w^{[0]}, \widetilde{w}^{(1)}), w \in Frt(Y).$$

For any w, $u \in Frt(Y)$ obtain

$$\begin{aligned}
(w \dashv u)\varphi^{\dashv}_{FRct} &= (w\widetilde{u})\varphi^{\dashv}_{FRct} = \\
&= (\widetilde{w\widetilde{u}}^{(0)}, (w\widetilde{u})^{[0]}, \widetilde{w\widetilde{u}}^{(1)}) = \\
&= ((\widetilde{w}\widetilde{u})^{(0)}, w^{[0]}, (\widetilde{w}\widetilde{u})^{(1)}) = \\
&= (\widetilde{w}^{(0)}, w^{[0]}, \widetilde{u}^{(1)}) = \\
&= (\widetilde{w}^{(0)}, w^{[0]}, \widetilde{w}^{(1)}) \dashv (\widetilde{u}^{(0)}, u^{[0]}, \widetilde{u}^{(1)}) = \\
&= w\varphi^{\dashv}_{FRct} \dashv u\varphi^{\dashv}_{FRct}, \\
(w \perp u)\varphi^{\dashv}_{FRct} &= (wu)\varphi^{\dashv}_{FRct} = \\
&= (\widetilde{wu}^{(0)}, (wu)^{[0]}, \widetilde{wu}^{(1)}) = \\
&= ((\widetilde{w}\widetilde{u})^{(0)}, w^{[0]}, (\widetilde{w}\widetilde{u})^{(1)}) = \\
&= (\widetilde{w}^{(0)}, w^{[0]}, \widetilde{u}^{(1)}) = \\
&= (\widetilde{w}^{(0)}, w^{[0]}, \widetilde{w}^{(1)}) \dashv (\widetilde{u}^{(0)}, u^{[0]}, \widetilde{u}^{(1)}) = \\
&= (\widetilde{w}^{(0)}, w^{[0]}, \widetilde{w}^{(1)}) \perp (\widetilde{u}^{(0)}, u^{[0]}, \widetilde{u}^{(1)}) = \\
&= w\varphi^{\dashv}_{FRct} \perp u\varphi^{\dashv}_{FRct}.
\end{aligned}$$

Similarly for $\vdash$. So, $\varphi^{\dashv}_{FRct}$ is a surjective homomorphism. It is evident that $R_{(i,j,k)}$, $(i,j,k) \in (FRct(Y))^{\dashv}$, is a class of $\Delta_{\varphi^{\dashv}_{FRct}}$ which is a subtrioid of $Frt(Y)$. Furthermore, it is not hard to prove that for every $(i,j,k) \in (FRct(Y))^{\dashv}$ the map

$$R_{(i,j,k)} \to B_{(i,j,k)^*}(Y) : w \mapsto \widetilde{c}(w)$$

is a homomorphism. Hence $R_{(i,j,k)}$ is a semilattice $B_{(i,j,k)^*}(Y)$ of subtrioids $R^A_{(i,j,k)}$, $A \in B_{(i,j,k)^*}(Y)$.

(ii) Define a map

$$\varphi^{\vdash}_{FRct} : Frt(Y) \to (FRct(Y))^{\vdash} \quad \text{by}$$

$$w \mapsto (\widetilde{w}^{(0)}, w^{[1]}, \widetilde{w}^{(1)}), w \in Frt(Y).$$

It is not difficult to show that $\varphi^{\vdash}_{FRct}$ is a surjective homomorphism and $R_{[i,j,k]}$, $(i,j,k) \in (FRct(Y))^{\vdash}$, is a class of $\Delta_{\varphi^{\vdash}_{FRct}}$ which is a subtrioid of $Frt(Y)$. Similarly to the case (i), the second assertion of (ii) can be proved.

(iii) Define a map

$$\varphi^{\dashv}_{lz,rz} : Frt(Y) \to (Y_{lz,rz})^{\dashv} \quad \text{by}$$

$$w \mapsto w^{[0]}, w \in Frt(Y).$$

We can show that $\varphi^{\dashv}_{lz,rz}$ is a surjective homomorphism and $R_{(i)}$, $i \in (Y_{lz,rz})^{\dashv}$, is a class of $\Delta_{\varphi^{\dashv}_{lz,rz}}$ which is a subtrioid of $Frt(Y)$. Similarly to (i), the last statement of (iii) can be proved.

(iv) Define a map

$$\varphi^{\vdash}_{lz,rz} : Frt(Y) \to (Y_{lz,rz})^{\vdash} \quad \text{by}$$

$$w \mapsto w^{[1]}, w \in Frt(Y).$$

It is immediate to check that $\varphi^{\vdash}_{lz,rz}$ is a surjective homomorphism and $R_{[i]}$, $i \in (Y_{lz,rz})^{\vdash}$, is a class of $\Delta_{\varphi^{\vdash}_{lz,rz}}$ which is a subtrioid of $Frt(Y)$. As above, the second statement of (iv) can be proved. □

Theorem 3.3. *Let $Frt(Y)$ be the free trioid.*

(i) *$Frt(Y)$ is a triband $(Y_{lz,rb})^{\dashv}$ of subtrioids $R_{(i,j)}$, $(i,j) \in (Y_{lz,rb})^{\dashv}$. Every trioid $R_{(i,j)}$, $(i,j) \in (Y_{lz,rb})^{\dashv}$, is a semilattice $B_{(i,j)^*}(Y)$ of subtrioids $R^A_{(i,j)}$, $A \in B_{(i,j)^*}(Y)$.*

(ii) *$Frt(Y)$ is a triband $(Y_{lz,rb})^{\vdash}$ of subtrioids $R_{[i,j]}$, $(i,j) \in (Y_{lz,rb})^{\vdash}$. Every trioid $R_{[i,j]}$, $(i,j) \in (Y_{lz,rb})^{\vdash}$, is a semilattice $B_{[i,j]^*}(Y)$ of subtrioids $R^A_{[i,j]}$, $A \in B_{[i,j]^*}(Y)$.*

(iii) *$Frt(Y)$ is a triband $(Y_{rb,rz})^{\dashv}$ of subtrioids $R_{(i,j]}$, $(i,j) \in (Y_{rb,rz})^{\dashv}$. Every trioid $R_{(i,j]}$, $(i,j) \in (Y_{rb,rz})^{\dashv}$, is a semilattice $B_{(i,j]^*}(Y)$ of subtrioids $R^A_{(i,j]}$, $A \in B_{(i,j]^*}(Y)$.*

(iv) *$Frt(Y)$ is a triband $(Y_{rb,rz})^{\vdash}$ of subtrioids $R_{[i,j)}$, $(i,j) \in (Y_{rb,rz})^{\vdash}$. Every trioid $R_{[i,j)}$, $(i,j) \in (Y_{rb,rz})^{\vdash}$, is a semilattice $B_{[i,j)^*}(Y)$ of subtrioids $R^A_{[i,j)}$, $A \in B_{[i,j)^*}(Y)$.*

Proof. (i) Define a map

$$\varphi^{\dashv}_{lz,rb} : Frt(Y) \to (Y_{lz,rb})^{\dashv} \quad \text{by}$$

$$w \mapsto (\widetilde{w}^{(0)}, w^{[0]}), w \in Frt(Y).$$

We can directly prove that $\varphi^{\dashv}_{lz,rb}$ is a surjective homomorphism and $R_{(i,j)}$, $(i,j) \in (Y_{lz,rb})^{\dashv}$, is a class of $\Delta_{\varphi^{\dashv}_{lz,rb}}$ which is a subtrioid of $Frt(Y)$. Similarly to (i) from Theorem 3.1, the second statement of (i) can be proved.

(ii) Define a map

$$\varphi^{\vdash}_{lz,rb} : Frt(Y) \to (Y_{lz,rb})^{\vdash} \quad \text{by}$$

$$w \mapsto (\widetilde{w}^{(0)}, w^{[1]}), w \in Frt(Y).$$

It can easily be checked that $\varphi^{\vdash}_{lz,rb}$ is a surjective homomorphism and $R_{[i,j]}$, $(i,j) \in (Y_{lz,rb})^{\vdash}$, is a class of $\Delta_{\varphi^{\vdash}_{lz,rb}}$ which is a subtrioid of $Frt(Y)$. In the same way as above, the second assertion of (ii) can be proved.

(iii) Define a map

$$\varphi^{\dashv}_{rb,rz} : Frt(Y) \to (Y_{rb,rz})^{\dashv} \quad \text{by}$$

$$w \mapsto (w^{[0]}, \widetilde{w}^{(1)}), w \in Frt(Y).$$

By immediate verification we can state that $\varphi^{\dashv}_{rb,rz}$ is a surjective homomorphism and $R_{(i,j]}$, $(i,j) \in (Y_{rb,rz})^{\dashv}$, is a class of $\Delta_{\varphi^{\dashv}_{rb,rz}}$ which is a subtrioid of $Frt(Y)$. As before, the last assertion of (iii) can be proved.

(iv) Define a map

$$\varphi^{\vdash}_{rb,rz} : Frt(Y) \to (Y_{rb,rz})^{\vdash} \quad \text{by}$$

$$w \mapsto (w^{[1]}, \widetilde{w}^{(1)}), w \in Frt(Y).$$

One can prove that $\varphi^{\vdash}_{rb,rz}$ is a surjective homomorphism and $R_{[i,j)}$, $(i,j) \in (Y_{rb,rz})^{\vdash}$, is a class of $\Delta_{\varphi^{\vdash}_{rb,rz}}$ which is a subtrioid of $Frt(Y)$. Similarly to (i) from Theorem 3.1, the second statement of (iv) can be proved. □

The following structure theorem gives decompositions of $Frt(Y)$ into bands of subtrioids.

Theorem 3.4. *Let $Frt(Y)$ be the free trioid.*

(i) *$Frt(Y)$ is a rectangular band Y_{rb} of subtrioids $U_{(i,j)}$, $(i,j) \in Y_{rb}$. Every trioid $U_{(i,j)}$, $(i,j) \in Y_{rb}$, is a semilattice $B_{(i,j)^*}(Y)$ of subtrioids $U^A_{(i,j)}$, $A \in B_{(i,j)^*}(Y)$.*

(ii) *$Frt(Y)$ is a left band Y_{lz} of subtrioids $U_{(i)}$, $i \in Y_{lz}$. Every trioid $U_{(i)}$, $i \in Y_{lz}$, is a semilattice $B_{\{i\}}(Y)$ of subtrioids $U^A_{(i)}$, $A \in B_{\{i\}}(Y)$.*

(iii) *$Frt(Y)$ is a right band Y_{rz} of subtrioids $U_{[i]}$, $i \in Y_{rz}$. Every trioid $U_{[i]}$, $i \in Y_{rz}$, is a semilattice $B_{\{i\}}(Y)$ of subtrioids $U^A_{[i]}$, $A \in B_{\{i\}}(Y)$.*

Proof. (i) Define a map

$$\varphi_{rb} : Frt(Y) \to Y_{rb} \quad \text{by}$$

$$w \mapsto (\widetilde{w}^{(0)}, \widetilde{w}^{(1)}), w \in Frt(Y).$$

One can verify that φ_{rb} is a surjective homomorphism and $U_{(i,j)}$, $(i,j) \in Y_{rb}$, is a class of $\Delta_{\varphi_{rb}}$ which is a subtrioid of $Frt(Y)$. Similarly to (i) from Theorem 3.1, the last assertion of (i) can be proved.

(ii) Define a map

$$\varphi_{lz} : Frt(Y) \to Y_{lz} \quad \text{by}$$

$$w \mapsto \widetilde{w}^{(0)}, w \in Frt(Y).$$

It is easily shown that φ_{lz} is a surjective homomorphism and $U_{(i)}$, $i \in Y_{lz}$, is a class of $\Delta_{\varphi_{lz}}$ which is a subtrioid of $Frt(Y)$. As above, the second statement of (ii) can be proved.

(iii) Define a map

$$\varphi_{rz} : Frt(Y) \to Y_{rz} \quad \text{by}$$

$$w \mapsto \widetilde{w}^{(1)}, w \in Frt(Y).$$

It can easily be checked that φ_{rz} is a surjective homomorphism and $U_{[i]}$, $i \in Y_{rz}$, is a class of $\Delta_{\varphi_{rz}}$ which is a subtrioid of $Frt(Y)$. As before, the last assertion of (iii) can be proved. □

If ρ is a congruence on a trioid $(T, \dashv, \vdash, \perp)$ such that operations of $(T, \dashv, \vdash, \perp)/\rho$ coincide and it is a rectangular band (respectively, left zero semigroup, right zero semigroup), then we say that ρ is a rectangular band congruence (respectively, left zero congruence, right zero congruence).

From Theorem 3.4 we obtain

Corollary 1. *Let $Frt(Y)$ be the free trioid.*

(i) $\Delta_{\varphi_{rb}}$ is the least rectangular band congruence on $Frt(Y)$.

(ii) $\Delta_{\varphi_{lz}}$ is the least left zero congruence on $Frt(Y)$.

(iii) $\Delta_{\varphi_{rz}}$ is the least right zero congruence on $Frt(Y)$.

Proof. (i) It is well-known that Y_{rb} is the free rectangular band. By Theorem 3.4 (i) we obtain (i).

The proofs of (ii) and (iii) are similar. □

Список використаних джерел

1. *Novikov B.V.* On decomposition of Moufang groupoids / B.V. Novikov // Quasigroups and Related Systems. – 2008. – **16**. – № 1. – P. 97 – 101.
2. *Clifford A.H.* Bands of semigroups / A.H. Clifford // Proc. Amer. Math. Soc. – 1954. – **5**. – P. 499 – 504.
3. *Zhuchok A.V.* Dibands of subdimonoids / A.V. Zhuchok // Mat. Stud. – 2010. – **33**. – P. 120 – 124.
4. *Loday J.-L.* Trialgebras and families of polytopes / J.-L. Loday and M.O. Ronco // Contemp. Math. – 2004. – **346**. – P. 369 – 398.
5. *Zhuchok A.V.* Free trioids / A.V. Zhuchok // Visnyk Kyiv. Univ. Ser. Phis.-Math. Nauku. – 2010. – **4**. – P. 23 – 26 (in Ukrainian).
6. *Zhuchok A.V.* Semiretractions of trioids / A.V. Zhuchok // Ukr. Math. J. – 2014. – **66**. – № 2. – P. 218 – 231.
7. *Loday J.-L.* Dialgebras / J.-L. Loday // In: Dialgebras and related operads. – Lect. Notes Math. – 2001. – **1763**. – Springer-Verlag, Berlin. – P. 7 – 66.
8. *Zhuchok A.V.* Dimonoids / A.V. Zhuchok // Algebra and Logic. – 2011. – **50**. – № 4. – P. 323 – 340.
9. *Zhuchok A.V.* Free rectangular dibands and free dimonoids / A.V. Zhuchok // Algebra and Discrete Math. – 2011. – **11**. – № 2. – P. 92 – 111.
10. *Zhuchok A.V.* Tribands of subtrioids / A.V. Zhuchok // Proc. Inst. Applied Math. and Mech. – 2010. – **21**. – P. 98 – 106.

References

1. NOVIKOV B.V. (2008), On decomposition of Moufang groupoids, *Quasigroups and Related Systems,* **v.16**, № 1, pp. 97 – 101.
2. CLIFFORD A.H. (1954), Bands of semigroups, *Proc. Amer. Math. Soc.,* **v.5**, pp. 499 – 504.
3. ZHUCHOK A.V. (2010), Dibands of subdimonoids, *Mat. Stud.,* **v.33**, pp. 120 – 124.
4. LODAY J.-L. and RONCO M.O. (2004), Trialgebras and families of polytopes, *Contemp. Math.,* **v.346**, pp. 369 – 398.
5. ZHUCHOK A.V. (2010), Free trioids, *Visnyk Kyiv. Univ. Ser. Phis.-Math. Nauku,* **v.4**, pp. 23 – 26 (in Ukrainian).
6. ZHUCHOK A.V. (2014), Semiretractions of trioids, *Ukr. Math. J.,* **v.66**, № 2, pp. 218 – 231.
7. LODAY J.-L. (2001), Dialgebras, *In: Dialgebras and related operads, Lect. Notes Math.,* **v.1763**, Springer-Verlag, Berlin, pp. 7 – 66.
8. ZHUCHOK A.V. (2011), Dimonoids, *Algebra and Logic*, **v.50**, № 4, pp. 323 – 340.
9. ZHUCHOK A.V. (2011), Free rectangular dibands and free dimonoids, *Algebra and Discrete Math.,* **v.11**, № 2, pp. 92 – 111.
10. ZHUCHOK A.V. (2010), Tribands of subtrioids, *Proc. Inst. Applied Math. and Mech.,* **v.21**, pp. 98 – 106.

Received: 24.07.2014

УДК 512.552

Журавльов В.М.[1], доцент
Сурков А.М.[2], аспірант

Допустимі сагайдаки та черепичні порядки скінченної глобальної розмірності в $M_n(\mathcal{D})$, $n \leq 5$

[1,2]Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Україна, 01601, м. Київ, вул. Володимирська, 64
E-mail: [1]vshur@univ.kiev.ua

Zhuravlev V.N.[1], Associate Professor
Surkov A.M.,[2] PhD student

Admissible quivers and tiled orders of finite global dimension in $M_n(\mathcal{D})$, $n \leq 5$

[1,2]Taras Shevchenko National University of Kyiv, 01033, Kyiv, 64 Volodymyrska st.
E-mail: [1]vshur@univ.kiev.ua

У роботі вивчаються сагайдаки черепичних порядків скінченної глобальної розмірності. Показано, що не кожен сагайдак зведеного черепичного порядку є сагайдаком чере пичного порядку скінченної глобальної розмірності. Для сагайдаків, що мають не більше п'яти вершин і які є сагайдаками черепичних порядків, доведено наступне. Якщо для такого сагайдака існує зведений черепичний порядок скінченної глобальної розмірності з даним сагайдаком, то такий порядок єдиний з точністю до ізоморфізму. Більш того, такий порядок має мінімальну суму елементів матриці показників поміж усіх черепичних порядків з даним сагайдаком. Черепичні порядки скінченної глобальної розмірності в $M_n(K)$, де $M_n(K)$ – повне матричне кільце над полем K, описані у праці [5] для $n \leq 5$. У даній роботі започатковано дослідження черепичних порядків скінченної глобальної розмірності та їх сагайдаків.

Ключові слова: черепичний порядок, допустимий сагайдак, глобальна розмірність.

We study quivers of tiled orders of finite global dimension. It is well known that the quiver of tiled order of a finite global dimension has no loops. Tiled orders associated with the partially ordered sets with disconnected diagrams have infinite global dimension. It is shown that not every quiver of reduced tiled order is quiver of tiled order of finite global dimension. For quivers on at most five vertices and which are tiled orders, proved the following. If for such quiver there is reduced tiled order of finite global dimension with the given quiver, then such tiled order is unique up to isomorphism. Moreover, such tiled order has the minimum sum of all entries of exponent matrix among all tiled orders with the given quiver. Tiled orders of finite global dimension in $M_n(K)$, where $M_n(K)$ is the ring of all $n \times n$ matrices over a ring K were listed in the following paper H.Fujita, Tiled orders of finite global dimension, Trans. Amer. Math. Soc., v. 327, No.2 (1991), pp. 919-920 for $n \leq 5$. In this paper research of tiled orders of finite global dimension and their quivers was founded.

Key words: tiled order, admissible quiver, global dimension of tiled orders.
Communicated by Prof. Kirichenko V.V.

1 Introduction

Tiled orders appeared in the 1970*s*. In the first articles about tiled orders (see [7], [3], [4]) can be found attempts to calculate global dimentions of those tiled orders. V.A. Jategaonkar in [3] proved that up to isomorphism only finite number of tiled orders in $M_n(\mathcal{D})$ of finite global dimension exists. R.B. Tarsy assumed that finite global dimension of tiled order does not exceed $n-1$. H. Fujita described in [5] up to isomorphism all tiled orders in $M_n(\mathcal{D})$ where $n = 4, 5$. Later Fujita disproved Tarsy's hypothesis with counterexample. Some algebraists in order to construct tiled orders of large finite global dimension were using quiver of tiled order.

It the article research of the connections between admissible quivers (namely quivers of tiled orders) and tiled orders of finite global dimension was founded. Primary aim of the article is to prove that for every admissible quiver with n vertices where $n \leq 5$ up to isomorphism no more than one tiled order of finite global dimension might exist. In the case when admissible quiver is quiver of nonisomorphic tiled orders, tiled order of finite global dimension only when sum of entries of ex-

© Zhuravlev V. N., Surkov A.M. 2014

ponent matrix is minimal.

All additional facts about tiled orders, exponent matrices and their quivers can be found in [1], [2]. The list of all up to isomorphism tiled orders in $M_n(\mathcal{D})$ where $n = 4, 5$ can be found in [5].

2 Tiled orders over discrete valuation rings and exponent matrices

Recall [6] that a *semimaximal ring* is a semiperfect semiprime right Noetherian ring A such that for each primitive idempotent $e \in A$ the ring eAe is a discrete valuation ring (not necessarily commutative).

Denote by $M_n(\mathcal{D})$ the ring of all $n \times n$ matrices over a ring $\mathcal{D}$.

Theorem 2.1 (see [6]). *Each semimaximal ring is isomorphic to a finite direct product of prime rings of the form*

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \mathcal{O} & \pi^{\alpha_{12}}\mathcal{O} & \dots & \pi^{\alpha_{1n}}\mathcal{O} \\ \pi^{\alpha_{21}}\mathcal{O} & \mathcal{O} & \dots & \pi^{\alpha_{2n}}\mathcal{O} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \pi^{\alpha_{n1}}\mathcal{O} & \pi^{\alpha_{n2}}\mathcal{O} & \dots & \mathcal{O} \end{pmatrix}, \quad (1)$$

where $n \geq 1$, $\mathcal{O}$ is a discrete valuation ring with a prime element π, and α_{ij} are integers such that

$$\alpha_{ij} + \alpha_{jk} \geq \alpha_{ik}, \qquad \alpha_{ii} = 0$$

for all i, j, k.

The ring $\mathcal{O}$ is embedded into its classical division ring of fractions $\mathcal{D}$, and (1) is the set of all matrices $(a_{ij}) \in M_n(\mathcal{D})$ such that

$$a_{ij} \in \pi^{\alpha_{ij}}\mathcal{O} = e_{ii}\Lambda e_{jj},$$

where $e_{11}, \dots, e_{nn}$ are the matrix units of $M_n(\mathcal{D})$. It is clear that $Q = M_n(\mathcal{D})$ is the classical ring of fractions of Λ.

Obviously, the ring A is right and left Noetherian.

Definition 2.2. *A module M is* distributive *if its lattice of submodules is distributive, i.e.,*

$$K \cap (L + N) = K \cap L + K \cap N$$

for all submodules K, L, and N.

Clearly, any submodule and any factormodule of a distributive module are distributive modules.

A *semidistributive module* is a direct sum of distributive modules. A ring A is *right* (*left*) *semidistributive* if it is semidistributive as the right (left) module over itself. A ring A is *semidistributive* if it is both left and right semidistributive (see [1]).

Theorem 2.3 (see [1]). *The following conditions for a semiperfect semiprime right Noetherian ring A are equivalent:*

- *A is semidistributive;*
- *A is a direct product of a semisimple artinian ring and a semimaximal ring.*

By a *tiled order* over a discrete valuation ring, we mean a Noetherian prime semiperfect semidistributive ring Λ with nonzero Jacobson radical. In this case, $\mathcal{O} = e\Lambda e$ is a discrete valuation ring with a primitive idempotent $e \in \Lambda$.

Definition 2.4. *An integer matrix $\mathcal{E} = (\alpha_{ij}) \in M_n(\mathbb{Z})$ is called*

- *an* exponent matrix *if $\alpha_{ij} + \alpha_{jk} \geq \alpha_{ik}$ and $\alpha_{ii} = 0$ for all i, j, k;*
- *a* reduced exponent matrix *if $\alpha_{ij} + \alpha_{ji} > 0$ for all i, j, $i \neq j$.*

We use the following notation: $\Lambda = \{\mathcal{O}, \mathcal{E}(\Lambda)\}$, where $\mathcal{E}(\Lambda) = (\alpha_{ij})$ is the exponent matrix of the ring Λ, i.e.

$$\Lambda = \sum_{i,j=1}^{n} e_{ij}\pi^{\alpha_{ij}}\mathcal{O},$$

in which e_{ij} are the matrix units. If a tiled order is *reduced*, i.e. $\Lambda/R(\Lambda)$ is the direct product of division rings, then $\alpha_{ij} + \alpha_{ji} > 0$ if $i \neq j$, i.e., $\mathcal{E}(\Lambda)$ is reduced.

We denote by $\mathcal{M}(A)$ the poset (ordered by inclusion) of all projective right A-modules that are contained in a fixed simple Q-module U. All simple Q-modules are isomorphic, so we can choice one of them. Note that the partially ordered sets $\mathcal{M}_l(A)$ and $\mathcal{M}_r(A)$ corresponding to the left and the right modules are anti-isomorphic.

The set $\mathcal{M}(A)$ is completely determined by the exponent matrix $\mathcal{E}(A) = (\alpha_{ij})$. Namely, if A is reduced, then

$$\mathcal{M}(A) = \{p_i^z \mid i = 1, \dots n, \text{and } z \in \mathbb{Z}\},$$

where

$$p_i^z \le p_j^{z'} \iff \begin{cases} z - z' \ge \alpha_{ij} & \text{if } \mathcal{M}(A) = \mathcal{M}_l(A), \\ z - z' \ge \alpha_{ji} & \text{if } \mathcal{M}(A) = \mathcal{M}_r(A). \end{cases}$$

Obviously, $\mathcal{M}(A)$ is an infinite periodic set.

Recall that a subset of a poset P is called an *antichain* if all of its elements are pairwise incomparable. The maximal number $w(P)$ of elements in an antichain in P is called the *width* of P. The width of $\mathcal{M}(A)$ is called the *width of a tiled order* A and is denoted by $w(A)$.

Let A and Γ be tiled orders over discrete valuation rings $\mathcal{O}$ and Δ.

3 Quivers of tiled orders

Let I be a two-sided ideal of the tiled order Λ. Obviously,

$$I = \sum_{i,j=1}^{n} e_{ij}\pi^{\beta_{ij}}\mathcal{O},$$

where e_{ij} are matrix units. Denote by $\mathcal{E}(I) = (\beta_{ij})$ the exponent matrix of an ideal I.

Let I and J be two-sided ideals of Λ, $\mathcal{E}(I) = (\beta_{ij})$ and $\mathcal{E}(J) = (\gamma_{ij})$. We have $\mathcal{E}(IJ) = (\delta_{ij})$, where $\delta_{ij} = \min\limits_k(\beta_{ik} + \gamma_{kj})$.

Let R be the Jacobson radical of a reduced tiled order Λ, then $\mathcal{E}(R) = (\beta_{ij})$, where $\beta_{ij} = \alpha_{ij}$ for $i \ne j$ and $\beta_{ij} = 1$ for $i = 1, \dots, n$.

Let $Q(\Lambda)$ be a quiver of a reduced tiled order Λ ([1]) and let $[Q(\Lambda)]$ be an adjacency matrix of the quiver $Q(\Lambda)$. Obviously, [1, theorema 14.6.2] $[Q(\Lambda)] = \mathcal{E}(R^2) - \mathcal{E}(R)$ and $[Q(\Lambda)]$ is a $(0,1)$-matrix.

Let $\mathcal{E} = (\alpha_{ij})$ be an $n \times n$ reduced exponent matrix. Define the $n \times n$ matrices $\mathcal{E}^{(1)} = (\beta_{ij})$ and $\mathcal{E}^{(2)} = (\gamma_{ij})$, where

$$\beta_{ij} = \begin{cases} \alpha_{ij}, & \text{if } i \ne j, \\ 1, & \text{if } i = j, \end{cases} \qquad \gamma_{ij} = \min_{1 \le k \le n}(\beta_{ik} + \beta_{kj}).$$

Obviously, $[Q] = \mathcal{E}^{(2)} - \mathcal{E}^{(1)}$ is a $(0,1)$-matrix. By [1, Theorem 4.1.1 and Corollary 5.3], we have the following assertion.

Theorem 3.1. *The matrix $[Q] = \mathcal{E}^{(2)} - \mathcal{E}^{(1)}$ is the adjacency matrix of the strongly connected simply laced quiver $Q = Q(\mathcal{E})$.*

Definition 3.2. *The quiver $Q(\mathcal{E})$ is called the* quiver of the reduced exponent matrix $\mathcal{E}$. *A strongly connected simply laced quiver is called* admissible *if it is the quiver of a reduced exponent matrix.*

Remark 1. *The quiver $Q(A)$ of a reduced tiled order A coincides with $Q(\mathcal{E}(A))$.*

Definition 3.3. *The quiver $Q = (VQ, AQ)$ is called* weighted *if there is a function $w\colon AQ \to \mathbb{R}$. w is called weight function. The value of w on an arrow of Q is called weight of the arrow. The algebraic sum of weights of all arrows of a path is called weight of the path.*

Theorem 3.4. *Simple strongly connected quiver $Q = (VQ, AQ)$ is admissible if and only if there is a weight function $w\colon AQ \to \mathbb{N} \cup \{0\}$ meeting the following conditions:*
(1) weight of the arrow from the point i to the point j is less than weight of the path from the point i to the point j of the length $l \ge 2$,
(2) loop weight in the point i is less than the weight of any cycle of the length $l \ge 2$, passing through i,
(3) weight of any cycle is always not less than 1,
(4) weight of any loop is 1,
(5) for each point without a loop there is a cycle of the length $l \ge 2$ of the weight 1, passing through this point.

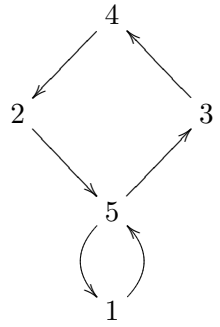
Definition 3.5. *Two reduced tiled orders in $M_n(D)$ are isomorphic if and only if their exponent matrices can be obtained from each other by transformations of the following two types :*
(1) subtract an integer from i-th row and add this number to i-th column;
(2) transpose two rows and corresponding columns.

Quivers of isomorphic tiled orders are isomorphic (see [1])

4 Results

Proposition 4.1. *Not for every admissible quiver Q exists tiled order Λ of finite global dimension with $Q(\Lambda) = Q$*

Proof. As contrexample can be considered the following quiver.



The quiver is admissible. It is quiver of the tiled order with the following exponent matrix.

$$\mathcal{E}(\Lambda) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

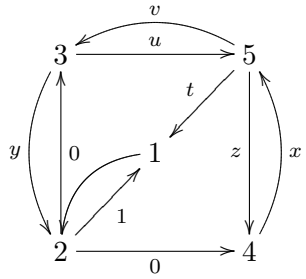
□

Proposition 4.2. *If for admissible quiver Q tiled orders of finite global dimension exist then they are isomorphic.*

Proof. Fujita in the article [5] describes all tiled orders in $M_5(\mathcal{D})$ up to isomorphism of finite global dimension. Fujita provides 40 tiled orders of finite global dimension and their quivers. So as quivers of that tiled orders are not isomorphic then tiled orders are also not isomorphic. □

Proposition 4.3. *Let Λ is tiled order with $\mathcal{E}(\Lambda) = (\alpha_{ij})$ of finite global dimension and L is tiled order with $\mathcal{E}(L) = (\lambda_{ij})$and $Q(L) = Q(\Lambda)$. Then $\sum_{i,j} \alpha_{ij} \leq \sum_{i,j} \lambda_{ij}$.*

Proof. Let's consider the following quiver of tiled order of finite global dimesnion in $M_5(\mathcal{D})$ and calculate minimum sum of exponent matrix of tiled order with the given quiver. Calculations are similar to the rest of tiled orders in [5].



$$\mathcal{E}(\Lambda) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$d = \sum_{i,j=1}^{5} \alpha_{ij} = 16$.

Let's find all tiled orders up to isomorphism with the given quiver.

All verteces of the quiver do not have loops. The following corresponding cycles of weight 1 are passing trought points 1 and 4 $1 \to 2 \to 1$ and $4 \to 5 \to 4$. Cycle of weight 1 is passing trought point 3 as well. Consider $3 \to 2 \to 3$ or $3 \to 5 \to 3$. Then $\alpha_{54} + \alpha_{45} = 1, \alpha_{12} + \alpha_{21} = 1$, $\left[\begin{array}{l} \alpha_{35} + \alpha_{53} = 1 \\ \alpha_{32} + \alpha_{23} = 1 \end{array} \right.$.

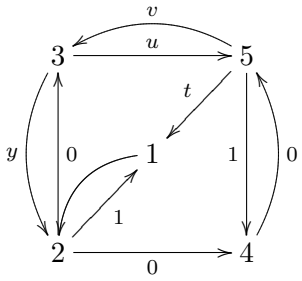
Let's assume that $\alpha_{1j} = 0\ \forall j$ then $\alpha_{21} = 1$. From the following equalities $\alpha_{13} = \alpha_{12} + \alpha_{23}$, $\alpha_{14} = \alpha_{12} + \alpha_{24}$, $\left[\begin{array}{l} \alpha_{15} = \alpha_{13} + \alpha_{35} \\ \alpha_{15} = \alpha_{14} + \alpha_{45} \end{array} \right.$ we obtain $\alpha_{23} = 0$, $\alpha_{24} = 0$ and $\left[\begin{array}{l} \alpha_{35} = 0 \\ \alpha_{45} = 0 \end{array} \right.$.

Then $\left[\begin{array}{l} \alpha_{45} = x = 0 \\ \alpha_{35} = u = 0 \end{array} \right.$, $\left[\begin{array}{l} u + v = 1 \\ 0 + y = 1 \end{array} \right.$, $x + z = 1$. Moreover, $\begin{cases} u + v \geq 1 \\ 0 + y \geq 1 \end{cases}$.

According to (1) in 3.4 the following inequalities are true $u < 0 + y + 0 + x$, $v < t + 0 + 0$, $y < u + t + 0$, $\alpha_{23} = 0 < 0 + x + v$, $\alpha_{24} = 0 < 0 + u + z$, $z < t + 0 + 0$, $z < v + y + 0$, $t < v + y + 1$, $1 < 0 + x + t$, $1 < 0 + u + t$.

Examine the inequality $0 = \alpha_{24} < \alpha_{23} + \alpha_{35} + \alpha_{54} = 0 + u + z$. If $x = 1$ then $u = 0$ and $z = 0$. That's contradiction with $0 < u + z$. So $x = 0$ and z = 1.

Then quiver Q is

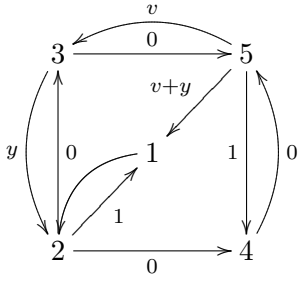


And the following equalities hold $\left[\begin{array}{l} u + v = 1 \\ y = 1 \end{array} \right.$, $\begin{cases} u + v \geq 1 \\ y \geq 1 \end{cases}$, $u < y, v < t, y < u + t, 0 < v$, $0 < u + 1, 1 < t, 1 < v + y$, $t < v + y + 1, 1 < t, 1 < u + t$.

Suppose that $u \geq 1$ then $1 \leq u < y, 1 \leq v$ so $y \geq 2, u + v \geq 2$. But $\left[\begin{array}{l} u + v = 1 \\ y = 1 \end{array} \right.$. We got contradiction. Then $u = 0$. $0 < y < t, 0 < v < t, t < v + y + 1$, $\left[\begin{array}{l} v = 1 \\ y = 1 \end{array} \right.$, $\begin{cases} v \geq 1 \\ y \geq 1 \end{cases}$.

If $v = 1$ then $y < t < y + 2$ so $t = y + 1 = y + v$. If $y = 1$ then $v < t < v + 2$ so $t = v + 1 = v + y$. Then $t = v + y$. $\alpha_{31} = min(y + 1, 0 + t) = y + 1$.

Finally, quiver is



and exponent matrix is

$$\mathcal{E}(\Lambda) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ y+1 & y & 0 & 1 & 0 \\ v+y & v+y & v & 0 & 0 \\ v+y & v+y & v & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$d = 4(v+y) + 2y + 2v + 4 = 6(v+y) + 4$. So $d_{min} = 6(1+1) + 4 = 16$. □

5 Conclusion

If for admissible quiver there is tiled order of finite global dimension with the given quiver then the tiled order is unique up to isomorphism. Furthermore, sum of entries of exponent matrix of the tiled order is minimal among all tiled orders with the given quiver.

Список використаних джерел

1. *Hazewinkel, M.* Algebras, Rings and Modules. Vol. 1, / M. Hazewinkel, N. Gubareni, V.V. Kirichenko. // Series: Mathematics and Its Applications, **575**, Kluwer Acad. Publish., 2004, xii+380pp.

2. *Hazewinkel, M.* Algebras, Rings and Modules. Vol. 2, / M. Hazewinkel, N. Gubareni, V.V. Kirichenko. // Series: Mathematics and Its Applications, **586**, Kluwer Acad. Publish., 2007, xii+400pp.

3. *Jategaonkar, V.A.* Global dimension of triangular orders over a discrete valuation ring, / V. A. Jategaonkar. // *Proc. Amer. Math. Soc.* **38** (1973), pp. 8–14.

4. *Jategaonkar, V.A.* Global dimension of tiled orders over a discrete valuation ring, / V. A. Jategaonkar. // *Trans. Amer. Math.* Soc. **196** (1974), pp. 313–330.

5. *Fujita, H.* Tiled orders of finite global dimension, / H. Fujita. // *Trans. Amer. Math. Soc.*, v.**322**, 1990, pp. 329–342; Erratum to "Tiled orders of finite global dimension", *Trans. Amer. Math. Soc.*, v.**327**, No.2 (1991), pp. 919–920.

6. *Zavadskij, A.G.* Torsion-free Modules over Prime Rings, / A.G. Zavadskij, V.V. Kirichenko. // Zap. Nauch. Seminar. Leningrad. Otdel. Mat. Steklov. Inst. (LOMI) - 1976. - v. 57. - p. 100-116 (in Russian).

7. *Tarsy, R. B.* Global dimension of orders, / R.B. Tarsy, // *Trans. Amer. Math. Soc.* **151** (1970) 335–340.

8. *Zhuravlev, V.N.* Admissible quivers, / V. N. Zhuravlev. // Journal of Mathematical Sciences, January 2010, Volume 164, Issue 2, pp 234-239

References

1. HAZEWINKEL, M, GUBARENI, N. and KIRICHENKO, V.V. Algebras, Rings and Modules. Vol. 1, Series: Mathematics and Its Applications, **575**, Kluwer Acad. Publish., 2004, xii+380pp.

2. HAZEWINKEL, M, GUBARENI, N. and KIRICHENKO, V.V. Algebras, Rings and Modules. Vol. 2, Series: Mathematics and Its Applications, **586**, Kluwer Acad. Publish., 2007, xii+400pp.

3. JATEGAONKAR, V.A. Global dimension of triangular orders over a discrete valuation ring, *Proc. Amer. Math. Soc.* **38** (1973), pp. 8–14.

4. JATEGAONKAR, V.A. Global dimension of tiled orders over a discrete valuation ring, *Trans. Amer. Math. Soc.* **196** (1974), pp. 313–330.

5. FUJITA, H. Tiled orders of finite global dimension, *Trans. Amer. Math. Soc.*, v.**322**, 1990, pp. 329–342; Erratum to "Tiled orders of finite global dimension", *Trans. Amer. Math. Soc.*, v.**327**, No.2 (1991), pp. 919–920.

6. ZAVADSKIJ, A.G. and KIRICHENKO, V.V., *Torsion-free Modules over Prime Rings*, Zap. Nauch. Seminar. Leningrad. Otdel. Mat. Steklov. Inst. (LOMI) - 1976. - v. 57. - p. 100-116 (in Russian). English translation in J. of Soviet Math., v. 11, N 4, April 1979, p. 598-612.

7. TARSY, R.B. Global dimension of orders, *Trans. Amer. Math. Soc.* **151** (1970) 335–340.

8. ZHURAVLEV, V.N. *Admissible quivers*, Journal of Mathematical Sciences, January 2010, Volume 164, Issue 2, pp 234-239

Received on 17.07.2014

УДК 519.21

М.В. Плахотник[1], канд. ф.-м. н.

Системи лінійних функціональних рівнянь в задачі про топологічну спряженість відображень

[1]Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 83000, м. Київ, пр-т. Глушкова, 4е,
e-mail: makar_plakhotnyk@ukr.net

M.V. Plakhotnyk[1], PhD in Math

Linear functional equations systems in the problem of topological conjugation of mappings

[1]Taras Shevchenko National University of Kyiv, 83000, Kyiv, Glushkova st., 4e,
e-mail: makar_plakhotnyk@ukr.net

Вивчено розв'язки лінійних функціональних рівнянь, котрі виникають в задачі встановлення топологічної спряженості унімодальних кусково лінійних відображень інтервалу в себе, котрі складаються з двох кусків лінійності та чий образ містить весь інтервал.

Ми вивчаємо функціональне рівняння, яке отримується після підстановки розв'язку одного з двох лінійних функціональних рівнянь (який знаходиться з точністю до довільної функції) в інше з метою знаходження цієї довільної функції. Ми показуємо складність отримання явних формул для розв'язання функціонального рівняння, яке після такої дії отримується та вивчаємо ітераційні наближення довільної функції, що фігурує у розв'язанні одного з двох функціональних рівнянь.

Ключові слова: Одновимірна динаміка, відображення-капелюшок, топологічна спряженість.

The article deals with topological conjugacy problem for piecewise linear unimodal interval into itself mappings. It is considered such pairs of mappings that the graph of each of them consists of two linear parts and graph of one of them is symmetrical in the center of the function domain. The system of two linear functional equations which determines the topological conjugateness of mentioned maps is studied. The techniques of solving linear functional equations is used for each one of this equations and substituting the solution into another one. As these solutions contain the arbitrary function the substitution makes the second equation to be the equation for that arbitrary function. It is shown that obtained functional equation is complicated and properties of its solutions are studied.We show the complicateness of applying the linear functional equations solving methods for finding the explicit formula for the homeomorphism we study and consider the iterational approximations of the arbitrary function from the explicit formula for the solution of one two functional equations.

Key Words: One-dimensional dynamics, hat mapping, topological conjugateness.

Communicated by Prof. Kozachenko Yu.V.

Introduction

We consider methods of solving the functional equations in the problem of finding the homeomorphism which define the topological conjugateness of mapping

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & x < 1/2; \\ 2 - 2x, & x \geqslant 1/2, \end{cases} \qquad (1)$$

and mapping

$$f_v(x) = \begin{cases} \frac{x}{v}, & x \leqslant v; \\ \frac{1-x}{1-v}, & x > v, \end{cases} \qquad (2)$$

each of them is defined on the interval $[0;\,1]$.

Remind that a mapping f and $\widetilde{f} \in C([0;\,1])$ are called topological conjugate if there exists a homeomorphism $h \in C([0;\,1])$ such that the following diagram

$$\begin{array}{ccc} [0;\,1] & \xrightarrow{f} & [0;\,1] \\ {\scriptstyle h}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle h} \\ [0;\,1] & \xrightarrow{\widetilde{f}} & [0;\,1], \end{array}$$

is commutative i.e. the equality

$$h(f(x)) = f_v(h(x)). \qquad (3)$$

holds for every $x \in [0;\,1]$.

© М.В. Плахотник, 2014

Taking into attention the explicit formulas for mappings f and f_v the commutativeness of the diagram from the definition of the topological conjugate is equivalent to the following system of functional equations.

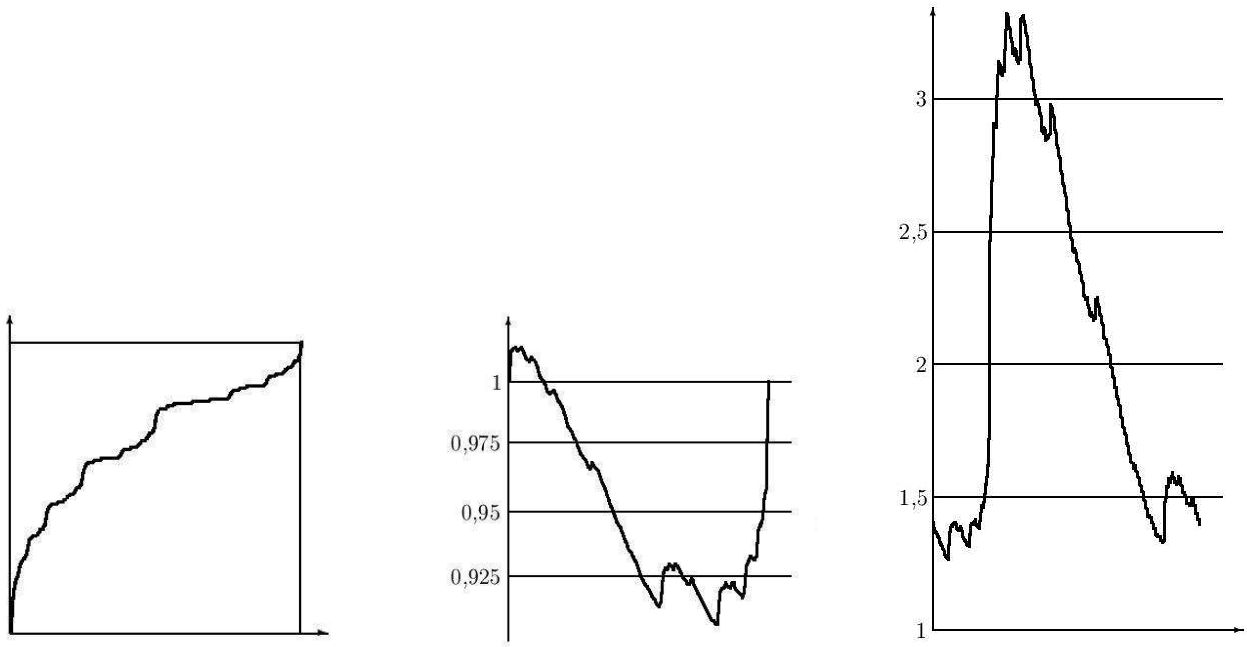
$$\begin{cases} h(2x) = \dfrac{1}{v}\, h(x) & x \leqslant 1/2 \quad (4a) \\ h(2-2x) = \dfrac{1-h(x)}{1-v} & x > 1/2 \quad (4b) \end{cases} \tag{4}$$

Each of these functional equations is a linear functional equation. Methods of solving linear functional equations are well developed and described for example at [1, 3]. In the same time the mentioned works do not contain any methods of solving systems of linear functional equations.

Note that functional equation (3) is reduced to a system of functional equations (4) only in the assumption that the unknown function h is a homeomorphism. We will prove that functional equations system (4) has the unique solutions which is the homeomorphism which satisfy the functional equation (3). The existence and the uniqueness of the solution of the last equations is proved at [2].

The proving of the uniqueness of the solution of the functional equation (3) will be constructive. That is why our calculations will give us a possibility of using the values table of the mapping h obtained with numerical methods.

Example 1. *With the use of methods which we will show below it is possible to get that for $v = 3/4$ the graph of the mapping h looks as shown at the figure 1a). It is possible to show that this mapping is not differentiable at any open interval.*



a) b) c)

Figure 1:

According to methods of solving functional equations which are described at [1] the solution of (4a) looks as

$$h(x) = x^{-\log_2 v}\omega(\log_2 x), \tag{5}$$

where $\omega(x)$ is arbitrary periodical period 1 function. The analogical result is also given at [3, p. 408]. Function ω will appear to be one to one defined if we add the demand for the solution of the functional equation (4a) to be also the solution of the equation (4b).

If for $v = 3/4$ on calculate the function ω from the formula above with the use of the numerical calculations for values of the solution of (3) the get the graph as at the figure 1b).

The solution of the functional equation (4b) looks as

$$h(x) = \frac{1}{2-v} + \left|x - \frac{2}{3}\right|^{-\log_2(1-v)} \cdot \begin{cases} \omega^+\left(\log_2\left|x-\frac{2}{3}\right|\right) & x > \frac{2}{3}; \\ \omega^-\left(\log_2\left|x-\frac{2}{3}\right|\right) & x < \frac{2}{3}. \end{cases} \quad (6)$$

and functions ω^+ and ω^- satisfy the relation

$$\begin{cases} \omega^-(t+1) = -\omega^+(t) \\ \omega^+(t+1) = -\omega^-(t). \end{cases} \quad (7)$$

In the same way like during solving the functional equation (4a) we can find the graph of the function $\omega(x)$ such that

$$\omega\left(\log_2\left|x-\frac{2}{3}\right|\right) = \begin{cases} \omega^+\left(\log_2\left|x-\frac{2}{3}\right|\right) & x > \frac{2}{3}; \\ \omega^-\left(\log_2\left|x-\frac{2}{3}\right|\right) & x < \frac{2}{3}. \end{cases}$$

with the use of homeomorphism h which was found independently earlier. Taking into attention the (7) it is enough to plot the graph of ω only for $x \in [0; 2]$. It is presented at the figure 1c).

It was constructed at [2] the approximation of h with piecewise linear mappings h_n for $n \geqslant 1$ such that each of the is not differentiable only at point of the set A_n which is defines as follows.

For every $n \geqslant 1$ denote with A_n, $n \geqslant 1$ the set of all points of the interval $[0; 1]$ such that $f^n(A_n) = 0$ and denote also B_n, $n \geqslant 1$ the set of all points of the interval $[0; 1]$ such that $f_v^n(B_n) = 0$. It is proved at [2] that sets A_n and B_n are os the same cardinality and that sets $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ and $B = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n$ are dense in the interval $[0; 1]$.

Denote with h_n the increase piecewise linear mapping such that points of A_n maps to B_n and is differentiable on $[0; 1] \setminus A_n$. We may consider h_n as an approximation of the mapping h.

The deal of the work is the study of approximations of functions ω which appear in formulas for solutions of functional equations (4a) and (4b) if we construct these approximations with the use of functions h_n.

1 Constructing and the simplest properties of linear functional equations.

Generally said, The system of functional equations (4) does not yield from the functional equation (3). It yields from it only with the assumption that the mapping h which we try to find satisfy the relations

$$\begin{cases} h([0; 1/2]) = [0; v], \\ h([1/2; 1]) = [v; 1]. \end{cases}$$

For example we prove that the linear equations system (4) has the unique solution which is the homeomorphic solution of (3) whose existence is proved at [2].

In the same time, the functional equation (4) has only the unique solution which is a mentioned homeomorphism. For example, the following mappings defined with equalities $h_1(x) = 0$ and $h_2(x) = x^*$ for all $x \in [0; 1]$ where x^* is a fixed point of f_v will also be solutions of (4).

1.1 A system of linear functional equations as a corollary of the assumption of that mapping which makes the diagram commutative is a homeomorphism

Let a mapping h is a homeomorphism which maps the interval $[0; 1]$ into itself and which makes commutative the diagram from the definition of topological conjugateness.

The mapping h moves each fixed point of the mapping f to a fixed point of the mapping f_v.

As 0 is a fixed point of the mapping f and 1 is not a fixed point of the mapping f_v then the equality $h(0) = 0$ holds and yields that homeomorphism increase.

Substitute the value $x = 1/2$ into the functional equation (3) and get $h(1) = f_v(h(1/2))$. As homeomorphism h increase then the last equality yields that $h(1/2) = v$.

So the functional equation (3) can be rewritten as a pair of commutative diagrams

$$\begin{array}{ccc} [0;\,1/2] & \xrightarrow{x\mapsto 2x} & [0;\,1], \\ {\scriptstyle h}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle h} \\ [0;\,v] & \xrightarrow{x\mapsto \frac{x}{v}} & [0;\,1]; \end{array} \quad \text{and} \quad \begin{array}{ccc} [1/2;\,1] & \xrightarrow{x\mapsto 2-2x} & [0;\,1], \\ {\scriptstyle h}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle h} \\ [v;\,1] & \xrightarrow{x\mapsto \frac{1-x}{1-v}} & [0;\,1]. \end{array}$$

These diagrams together are equivalent to the functional equations system (4).

1.2 The uniqueness of the solution of linear functional equations system

Denote with $x^* = \frac{2}{3}$ the positive fixed point of the mapping f i.e. the solution of the equation $x = -2x + 2$.

Lemma 1. *$h(x^*) = \frac{1}{2-v}$ and $h\left(\frac{x^*}{2}\right) = \frac{v}{2-v}$.*

Proof. Substitute x^* into the equation (4b) and get

$$h(x^*) = \frac{1 - h(x^*)}{1 - v},$$

whence

$$h(x^*) = \frac{1}{2 - v}.$$

If substitute $x = \frac{x^*}{2}$ into the equation (4b) then get

$$h\left(\frac{x^*}{2}\right) = vh(x^*) = \frac{v}{2 - v}.$$

□

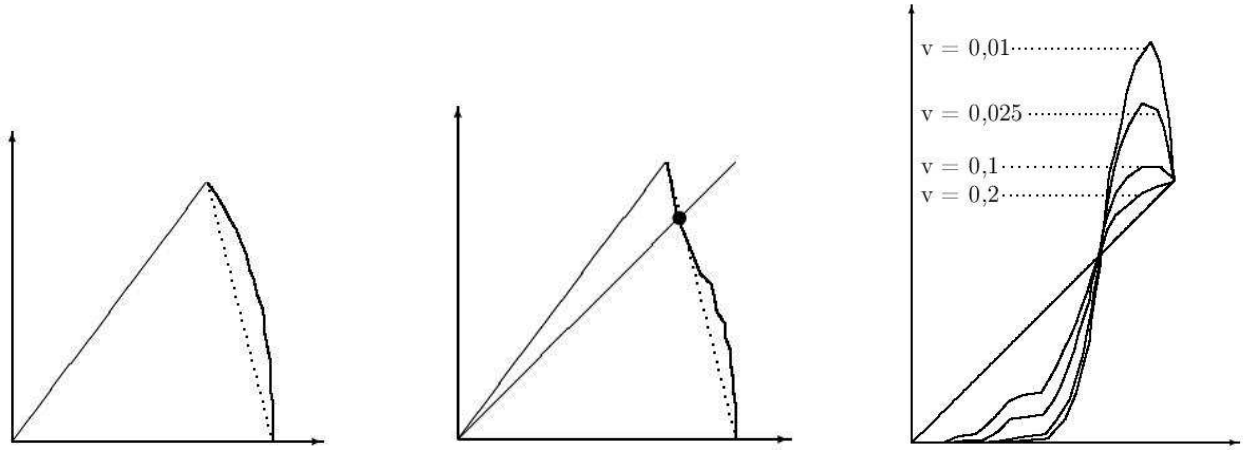
Notation 1. *Call the value of the mapping h at the point x to be **uniquely defined** if some value $h(x)$ at this point is a corollary of the system of functional equations (4). For example the mapping h is uniquely defined at points 0; x^* and $\frac{x^*}{2}$.*

Lemma 2. *If the mapping h is uniquely defined at point $\widetilde{x}$ then it is uniquely defined at each point of the integer trajectory of this point.*

Proof. Let $\widetilde{x}$ is an arbitrary point such that h is uniquely defined at it.

We sill show that in this case the mapping h is uniquely defined at the point $f(\widetilde{x})$. Really if $\widetilde{x} \leqslant \frac{1}{2}$ then the substitution of the value $x = \widetilde{x}$ into the equation (4a) gives that $h(2\widetilde{x}) = \frac{1}{v}h(\widetilde{x})$ which means that $h(f\widetilde{x})$ is uniquely defined.

Let $\widetilde{x}_*$ be some pre image of the point $\widetilde{x}$. In this case the fact that h is uniquely defined at $\widetilde{x}$ can be proved in the same way or with the substituting $x = 2\widetilde{x}_*$ into the equation (4a) or with substituting $x = \frac{2-\widetilde{x}_*}{2}$ into the equation (4b). □



а) б) в)

Figure 2:

Lemma 3. *The union of all integer trajectories of the point x^* is dense in the set [0; 1] and the mapping h is uniquely defined at each point of this union.*

Let us give some note before the proving the lemma. The pre image of the point $x \in [0; 1]$ under the mapping f looks as follows with given binary code of $x = 0, \alpha_1\,\alpha_2, \ldots$.

Remark 1. *If the binary code of the number $x \in [0; 1]$ looks as follows*

$$x = 0, \alpha_1\,\alpha_2, \ldots,$$

then the binary code of the pre image x^- under the action of f (i.e. the binary code of such point that the equality $f(x^-) = x$ holds) has one of the

following forms

$$x^- = \left[\begin{array}{l} 0,0\,\alpha_1\,\alpha_2 \ldots \alpha_n \ldots \\ 0,1\,\overline{\alpha}_1\,\overline{\alpha}_2 \ldots \overline{\alpha}_n \ldots \end{array} \right.$$

Lemma 3 yields from the more general lemma.

Lemma 4. *For the arbitrary point $x \in [0;\,1]$ the union of all its inverse trajectories is dense in* $[0;\,1]$.

Proof. This lemma is an immediate corollary from the note 1. It is enough for proving this lemma to prove that for every point $x \in [0;\,1]$ and every set $\{\alpha_1\,\alpha_2\,\ldots\,\alpha_n\}$ of binary points there is an integer trajectory of x such that it has a point with the first binary digits be equal to 0, $\alpha_1 \ldots \alpha_n \ldots$.

This proposition is a trivial corollary of the inductive reasonings for $n \geqslant 1$ which is a number of first chosen digits of the binary code of some pre image. □

Proving of lemma 3. The lemma 1 gives that the value of the mapping h is uniquely defined at point x^*. The lemma 2 gives that the mapping h is uniquely defined at each point of each integer trajectory of the point x^*.

The density of the union of integer trajectories of x^* is proven at the lemma 4. □

The obtain results can be generalized in the following theorem.

Theorem 1. *The system of functional equations (4) has the unique continuous solution which is increase homeomorphism*

2 Solving the functional equations with analytical methods

Each functional equation of the system (4) can be solved and correspond solutions can be represented analytically.

We will introduce the correspond technique below and will do the calculations with each of obtained solutions for showing the complicatedness of the solutions of each functional equation after substituting it into another equation of the system (4).

2.1 Solving of the equation (4a) with further substituting the solution into the equation (4b).

The equation (4a) is a linear functional equation. According to for example [3](p. 408) its solutions looks as

$$h(x) = x^{-\log_2 v}\omega(\log_2 x) \tag{5}$$

where $\omega(x)$ is a arbitrary periodical 1 function.

If substitute the obtained function into the equation (4b) then obtain

$$(2-2x)^{-\log_2 v}\omega(\log_2(2-2x)) = \frac{1 - x^{-\log_2 v}\omega(\log_2 x)}{1-v}.$$

Taking into attention the periodicity of ω this equation can be rewritten as

$$\begin{array}{c}(1-v)(1-x)^{-\log_2 v}\omega(\log_2(1-x)) = \\ = v(1 - x^{-\log_2 v}\omega(\log_2 x)).\end{array} \tag{8}$$

Remark 2. *If consider the equation (8) as a functional equation of the whole real axis then it will appear that the necessary function h is a constant.*

The deal of the remark. If denote $t = 1 - x$ then obtain

$$(1-v)t^{-\log_2 v}\omega(\log_2 t) =$$

$$= v(1 - (1-t)^{-\log_2 v}\omega(\log_2(1-t))).$$

If write x instead of t and take into attention the equation (8) then we may express $(1 - x)^{-\log_2 v}\omega(\log_2(1-x))$ from each of the equations and make equal the results after which obtain

$$\frac{v}{1-v}\left(1 - x^{-\log_2 v}\omega(\log_2 x)\right) =$$

$$= 1 - \frac{1-v}{v}\,x^{-\log_2 v}\omega(\log_2 x),$$

whence

$$x^{-\log_2 v}\omega(\log_2 x) = v.$$

The obtained condition means that function h is constant and whence is not invertible. □

The explanation for the remark 2. The equation (8) is obtained with substituting the solution of the functional (4a) into the functional equation (4b).

That is wy the substitution $t = 1 - x$ is in fact the substitution at the equation (4a).

Nevertheless the equation (4a) if obtained from the fact that the diagram

$$\begin{array}{ccc} [0;\,1/2] & \xrightarrow{f\colon x\mapsto 2x} & [0;\,1] \\ {\scriptstyle h}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle h} \\ [0;\,v] & \xrightarrow{f_v\colon x\mapsto x/v} & [0;\,1] \end{array}$$

commutes. But it is defined only for $x \in [0;\,1/2]$. As the substitution $t = 1 - x$ for $x \in [0;\,1/2]$ means that $t \in [1/2;\,1]$ then after formal rewritten of this substitution one obtain the functional equation for another domain of a function h and formal expressing of

$$(1-x)^{-\log_2 v}\omega(\log_2(1-x))$$

each of two obtained equations is incorrect. □

If use the mapping h which was constructed at the example 1 then numerical methods will let us to get the mapping $\omega(x)$ whose graph is given at the figure 1b) for $x \in [0;\,1]$.

Remark 3. *Make the remark about the way how the graph of ω was obtained.*

The deal of the remark. As ω is periodic with period 1 then it is enough to find its values at arbitrary interval of the length 1.

If one consider all the values of $x \in [1/2;\,1]$ with the use of the step which then we will get the table of values of the function $\log_2 x$. Now the equation (5) yields the table of values of the function ω defined at $\log_2 x$ for all x from the former set of values.

So for every $x \in [0;\,1]$ with some fixed step for example $\frac{1}{n}$ for n is huge enough we will fix $\log_2 x$ and $\omega(\log_2 x) = h(x) \cdot x^{log_2 v}$ whence obtain the dense set of points of the graph of the function ω on the interval $[-1;\,0]$. □

The function h which is the solution of the system of functional equations (4) is "complicated" yield from the fact that h is not differentiable on any subinterval of $[0;\,1]$. The form of the equation (5) means that complicatedness of h should come from the complicatedness of ω because the multiplier $x^{-\log_2 v}$ is differentiable at any point.

In the same time we will formulate the list os properties of h of the form (5).

Lemma 5. *If the invertible interval $[0;\,1]$ mapping h is of the form (5) then the following hold.*

1. The mapping h increase;

2. For any $n \in \mathbb{N}$ the equality $h\left(\frac{1}{2^n}\right) = v^n$ hold.

More then this, for all integer t the equality $\omega(t) = 1$ holds.

Proof. Prove at first that function ω is bounded. It is so because of its periodicity it is wholly determined with values of $\omega(\log_2 x)$ for $x \in [1/2;\,1]$. Nevertheless for such values of x the function h is bounded and the function $x^{-\log_2 v}$ strictly increase. This means that $\omega(\log_2 x)$ is bounded for all $x \in [0;\,1]$.

If substitute $x = 0$ into the equality (5) then obtain the product of zero times a value of bounded function which means that $h(0) = 0$. This corollary together with the fact of being invertible means that h increase from 0 to 1 for all $x \in [0;\,1]$.

The condition $h(1) = 1$ yields that after substitution $x = 1$ into the equality (5) obtain $1 = \omega(\log_2 x)$. The periodicity of ω with period 1 means that for every $t \in \mathbb{Z}$ the equality $\omega(t) = 1$ holds.

Plugging $x = \frac{1}{2^n}$ into the equality (5) obtain

$$h\left(\frac{1}{2^n}\right) = v^n\,\omega(\log_2 2^{-n}) = v^n.$$

□

Consider the examples of "simple" mappings ω but such that function h which is determined with (5) is invertible and consider the mapping $\widetilde{f}_v$ which is determined with the commutative diagram

$$\begin{array}{ccc} [0;\,1] & \xrightarrow{f} & [0;\,1] \\ {\scriptstyle h}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle h} \\ [0;\,1] & \xrightarrow{\widetilde{f}_v} & [0;\,1]. \end{array} \qquad (9)$$

Lemma 6. *If for invertible mapping h of the form (5) the diagram (9) is commutative then for $x \in [0;\,v]$ the equality*

$$\widetilde{f}_v(x) = \frac{x}{v}$$

holds.

Proof. The condition of that h is invertible yields that $\widetilde{f}_v$ is determined with h. More exactly for every $x \in [0;\,1]$ the equality $\widetilde{f}_v = h(f(h^{-1}(x)))$ holds. But by lemma 5 for $x \in [0;\,v]$ the inclusion $h^{-1}(x) \in [0;\,1/2]$ means that $\widetilde{f}_v(x) = h(2h^{-1}(x))$.

The uniqueness of $\widetilde{f}_v$ and the fact that $\widetilde{f}_v(x) = \frac{x}{v}$ satisfies the functional equation above obtain the proposition of lemma. □

The simplest condition is that when ω is periodical is that when it is constant.

The equality $h(1) = 1$ yields that if ω is constant then $\omega(x) = 1$.

Example 2. *Consider the graph of the mapping $\widetilde{f}_v$ which is determined with the commutative diagram (9) for the mapping h of the form (5) if ω is a constant function.*

The deal of the example. If $\omega(x) = 1$ then for every $x \in [0; 1]$ whence $h(x) = x^{-\log_2 x}$. Then by lemma 6 (also it can be shown with the direct calculations) for $x \in [0; v]$ the equality $\widetilde{f}_v(x) = \frac{x}{v}$ holds.

For such function ω the equality $h^{-1}(x) = x^{-\log_v 2}$ holds whence for $x \in [v; 1]$ obtain

$$\widetilde{f}_v(x) = \left(2 - 2x^{-\log_2 v}\right)^{-\log_v 2}.$$

The graph of the mapping $\widetilde{f}_v$ for $v = 3/4$ is given at figure 2a). □

Example 3. *Find the graph of the mapping $\widetilde{f}_v$ which is defined with the commutative diagram (9) for the mapping h of the form (5) if ω is continuous function whose graph consists of two linear branches on the interval* $[1/2; 1]$.

The deal of the example. Plug $x = 3/4$ into the commutative diagram (9) and get

$$\begin{array}{ccc} 3/4 & \xrightarrow{f} & 1/2 \\ {\scriptstyle h}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle h} \\ h(3/4) & \xrightarrow{\widetilde{f}_v} & v = h(1/2). \end{array}$$

Define $h(3/4)$ such that this number be the biggest pre image of v under the acting of f_v. In this case the values of f_v and $\widetilde{f}_v$ will coincide on this bigger pre image of v under the acting of f_v.

In another words

$$h\left(\frac{3}{4}\right) = \left(\frac{3}{4}\right)^{-\log_2 v} \omega\left(\log_2\left(\frac{3}{4}\right)\right) = v^2 - v + 1.$$

For $v = \frac{3}{4}$ obtain $\omega(0,584) \approx 0,915$.

Define ω on the interval $[0; 1]$ as follows. $\omega(x)$ should be piecewise linear whose graph consists of two lines and has the fracture point with coordinates

$$\left(\log_2 \frac{3}{4};\, (v^2 - v + 1) \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{\log_2 v}\right).$$

The graph of mapping $\widetilde{f}_v$ for such ω for $v = 3/4$ is given at 2b).

On this figure we also mark the point of intersection of f with the line $y = x$ because the construction gives that in this case mappings $\widetilde{f}_v$ and$f$ coincide. □

Examples 2 and 3 can be generalized as follows.

Consider the iteration approximations ω_n for the function ω and use them for iteration approximations $\widetilde{h}_n$ of the function h.

For the arbitrary approximation of h on the interval $x \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$ we can obtain the approximation of ω on the interval $[-1; 0]$ with taking into attention the formula (5). As ω is periodical with period 1 then we obtain the approximation of h on the whole $[0; 1]$.

With using of constructed h_n find the values of ω on the set $A_n \cap \left[\frac{1}{2}; 1\right]$.

Denote with $\omega_n(x)$ the mapping whose values are defined with the values of h_n at points of the set $\{\log_2 x,\, x \in A_n \cap \left[\frac{1}{2}; 1\right]\}$ such that $\omega_n(x)$ is linear at all points except the set $A_n \cap \left[\frac{1}{2}; 1\right]$ and is periodical with period 1.

So, the mapping $\widetilde{h}_n$ looks as

$$\widetilde{h}_n(x) = x^{-\log_2 v} \omega_n(\log_2 x), \qquad (10)$$

and should be considered as iteration approximation of h.

If the constructed $\widetilde{h}_n$ appear to be invertible then there exists the unique mapping $\widetilde{f}_n$ such that the diagram

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & A \\ {\scriptstyle \widetilde{h}_n}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \widetilde{h}_n} \\ B & \xrightarrow{\widetilde{f}_n} & B \end{array} \qquad (11)$$

commutes. This mapping $\widetilde{f}_n$ can be defined with the formula

$$\widetilde{f}_n = \widetilde{h}_n(f(\widetilde{h}_n^{-1})).$$

For example with the use of notations introduced above the mapping $\widetilde{f}_v$ which was constructed at the example 3 is the mapping $\widetilde{f}_2$ and correspond approximation of h is the mapping $\widetilde{h}_2$.

Nevertheless it may appear that the mapping $\widetilde{h}_n$ will not be monotone and so it will not exist a mapping $\widetilde{f}_n$ which make the diagram (11) commutative.

Example 4. *Consider the case when the mapping $\widetilde{h}_3(x)$ which in fact is dependent on v is non monotone for some v.*

The deal of the example. Give the graphs of mappings $\widetilde{h}_3(x)$ for $v = 0,01$, $v = 0,025$, $v = 0,1$ and $v = 0,2$ on the figure 2c).

As a comment for the given graphs note that each of them satisfy the functional equation (4a)

$$h(2x) = \frac{1}{v}\, h(x),$$

i.e. its form on the each of intervals $\left[\frac{1}{2^{k+1}};\, \frac{1}{2^k}\right]$ is its form on the interval $\left[\frac{1}{2};\, 1\right]$ but being squeezed v^k times.

The mapping $\widetilde{h}_3(x)$ which is calculated for $v = \frac{1}{2}$ is given with the formula $\widetilde{h}_3(x) = x$.

Whence we see that with decreasing of v from $v = \frac{1}{2}$ there exist some "critical value" at which the graph of $\widetilde{h}_3(x)$ becomes to be monotone non monotone. □

Notation 2. *Denote with $\widehat{h}_n(t)$ the function such that the equality*

$$\widehat{h}_n(\log_2 x) = \widetilde{h}_n(x)$$

holds.

Use numbers $\alpha_k = \alpha_{k;\,n}$ to construct the numbers $\widetilde{\alpha}_k = \log_2 \alpha_k$.

Denote with $t_k = t_{k;\,n}$ the extremum of the mapping $\widehat{h}_n$ on the interval $(\widetilde{\alpha}_k;\, \widetilde{\alpha}_{k+1})$. The construction lets to prove that this extremum if unique and the proving is quiet simple.

The condition for $\widetilde{h}_n$ to be monotone is equivalent to that for every k the inclusion

$$t_k \in \mathbb{R}\backslash[\widetilde{\alpha}_k;\, \widetilde{\alpha}_{k+1}] = \mathbb{R}\backslash[\log_2 \alpha_k;\, \log_2 \alpha_{k+1}] \quad (12)$$

holds.

Taking into attention the formula (10) rewrite $\widehat{h}_n(t)$ as

$$\widehat{h}_n(t) = 2^{-t\log_2 v}\omega_n(t).$$

Taking into attention the function $y = \log_2 x$ obtain that being monotone of $\widetilde{h}_n$ is equivalent of being monotone of $\widehat{h}_n$.

The equality $h_n(\alpha_k) = \beta_k$ yields the following equality for the function ω_n

$$\omega_n(\widetilde{\alpha}_k) = \beta_k \cdot 2^{\widetilde{\alpha}_k \log_2 v}.$$

Denote with $\widetilde{\beta}_k = \beta_k \cdot 2^{\widetilde{\alpha}_k \log_2 v} = \beta_k v^{\widetilde{\alpha}_k}$.

Let ω_n be of the form $\omega_n(t) = a_k \cdot t + b_k$ on the interval $(\widetilde{\alpha}_k;\, \widetilde{\alpha}_{k+1})$. Then

$$a_k = \frac{\widetilde{\beta}_{k+1} - \widetilde{\beta}_k}{\widetilde{\alpha}_{k+1} - \widetilde{\alpha}_k}, \quad b_k = \frac{\widetilde{\beta}_k\widetilde{\alpha}_{k+1} - \widetilde{\beta}_{k+1}\widetilde{\alpha}_k}{\widetilde{\alpha}_{k+1} - \widetilde{\alpha}_k}.$$

Find the extremum of the curve which is defined with the equation which determines the mapping $\widehat{h}_n(t)$ on the interval $(\widetilde{\alpha}_k;\, \widetilde{\alpha}_{k+1})$. So, we get

$$\widehat{h}_n'(t) = 2^{-t\log_2 v}(a_k - \log_2 v \ln 2 \cdot (a_k t + b_k))$$

whence extremum of the mapping $\widehat{h}_n$ can be found with the formula

$$t_k = \frac{a_k - b_k \log_2 v \ln 2}{a_k \log_2 v \ln 2} = \frac{1}{\ln v} - \frac{b_k}{a_k}. \quad (13)$$

The previous calculations give that

$$\frac{b_k}{a_k} = \frac{\widetilde{\beta}_k\widetilde{\alpha}_{k+1} - \widetilde{\beta}_{k+1}\widetilde{\alpha}_k}{\widetilde{\beta}_{k+1} - \widetilde{\beta}_k}.$$

Coming back to previous calculations obtain that

$$\frac{b_k}{a_k} = \frac{\beta_k v^{\log_2 \alpha_k} \log_2 \alpha_{k+1} - \beta_{k+1} v^{\log_2 \alpha_{k+1}} \log_2 \alpha_k}{\beta_{k+1} v^{\log_2 \alpha_{k+1}} - \beta_k v^{\log_2 \alpha_k}}.$$

As $\alpha(k;\, n) = \frac{k}{2^n}$ and $A_n = \{\alpha(k;\, n-1)\}$ obtain that $\alpha_k = \frac{k}{2^{n-1}}$ whence

$$\log_2 \alpha_k = \log_2 k - n + 1.$$

So,

$$\frac{b_k}{a_k} = n - 1 + \frac{\beta_k v^{\log_2 k} \log_2(k+1)}{\beta_{k+1} v^{\log_2(k+1)} - \beta_k v^{\log_2 k}} -$$

$$- \frac{\beta_{k+1} v^{\log_2(k+1)} \log_2 k}{\beta_{k+1} v^{\log_2(k+1)} - \beta_k v^{\log_2 k}}.$$

The example 4 let to come to a natural assumption that for $v \to 0$ the mapping h_n will be non invertible also for huge values of n. With the use of formula (13) we can prove the following lemma.

Lemma 7. *For any $n \in \mathbb{N}$ there exists $v_0 \in (0;\, 1)$ such that for every $v \in (0;\, v_0)$ the mapping $\widetilde{h}_n(x)$ is monotone on the interval $\left[\frac{2^{n-1}-1}{2^{n-1}};\, 1\right]$.*

Proof. Let us find evident formulas for $\beta(n;\, 2^{n-1}-1)$. We know about this point that

$$\begin{cases} f_v^n(\beta(n;\, 2^{n-1}-1)) = 0; \\ f_v^{n-1}(\beta(n;\, 2^{n-1}-1)) = 1. \end{cases}$$

Find the tangent of the mapping f_v^{n-1} on the last interval where it is monotone. This tangent equals $\frac{1}{v-1}\cdot\frac{1}{v^{n-2}}$ which means that

$$\beta(n;\, 2^{n-1}-1) = 1 + v^{n-2}\cdot(v-1).$$

With the use of notions which were introduced during finding of t_k defined with (13) we get $k = 2^{n-1}-1$, $\beta_k = 1+v^{n-2}\cdot(v-1)$, $\beta_{k+1} = 1$, $\alpha_k = 1 - \frac{1}{2^{n-1}}$, $\alpha_{k+1} = 1$. So, $\log_2 \alpha_{k+1} = 0$ whence

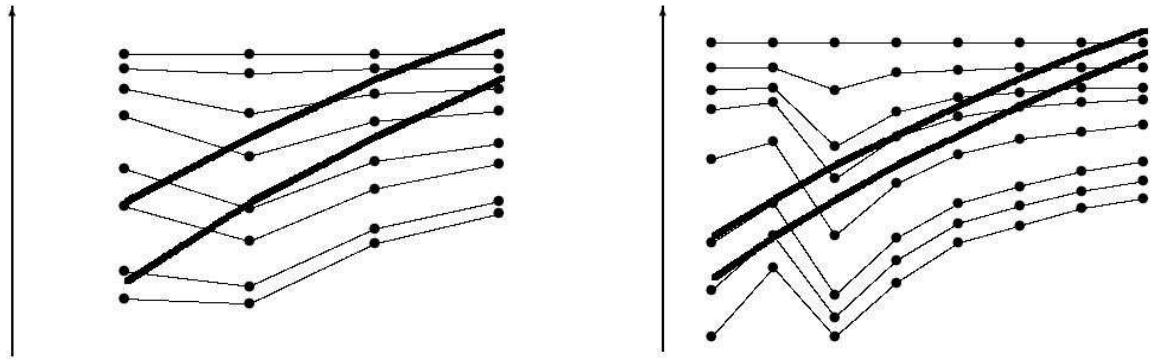
$$t_k = \frac{1}{\ln v} + \frac{\log_2 \alpha_k}{1-(1+v^{n-2}\cdot(v-1))v^{\log_2 \alpha_k}}.$$

Note that inequality $t < 0$ holds because for $v \in (0;\, 1)$ there are inequalities $\ln v < 0$ and $\log_2(1-2^{1-n}) < 0$. In this case the denominator of the fraction is positive.

Also for fixed n and $v \to 0$ we have that $v^{\log_2 \alpha_k} \to \infty$ whence $t_k \to 0$.

The obtained value of limit proves lemma. □

With the use of formula (13) we can study the example 4 more attentively if consider $n = 3$ and study the behavior of numbers t_2 and t_3 dependently on v.



a) b)

Figure 3:

Example 5. *Consider the function $t_2(v)$ for $n = 3$. We will which un succeed attempt of calculation of the limit $\lim\limits_{v\to 1} t_2(v)$. We will show that this limit exists and equals 1 in the time when numerical methods look like the limit does not exist.*

The deal of the example. For $n = 3$ we have a partition of the interval $\left[\frac{1}{2};\, 1\right]$ to 2 intervals with 3 points $\alpha_2 = \frac{1}{2}$, $\alpha_3 = \frac{3}{4}$ and $\alpha_4 = 1$. Correspondingly $\beta_2 = v$, $\beta_3 = \max f_v^{-1}(v) = 1 - v(1-v)$ and $\beta_4 = 1$.

Then

$$t_2 = \frac{1}{\ln v} + \frac{v^2 - v^2\log_2 3}{(v^2-v+1)v^{\log_2 3} - v^2}.$$

For the function $\widetilde{h}_2$ being continuous on the interval int is necessary and sufficient the inclusion

$$t_2 \in \mathbb{R}\backslash[-1;\, \log_2 3 - 2] \approx \mathbb{R}\backslash[-1;\, -0,415]$$

hold.

The numerical analysis of the obtained function $t_2(x)$ lets make a conclusion that it decrease for $x \in [0;\, 0,5]$ and has an asymptote for $x = 0,5$ i.e. $\lim\limits_{x\to 0,5-} t_2 = -\infty$ and $\lim\limits_{x\to 0} t_2 = -1$.

If try plot the graph of $t_2(x)$ for $x \in [0,5;\, 1]$ then numerical methods for $x \in [0,99999;\, 1]$ show that it becomes to be non monotone. So, for $t \in [0,6;\, 0,999999]$ graph of $t_2(x)$ is given at figure 4a).

Nevertheless the graph of $t_2(x)$ for $x \in M = [0,99999999;\, 0,999999995]$ is given at the figure 4b). Strictly said, the given sketch is not exactly the graph of $t_2(x)$ but the set of its points whose x-coordinated are uniformly distributed on

M and are all these points are connected with lines.

Remind that the obvious continuality of the mapping $t_2(v)$ yields that the mapping $t_2(v)$ has on the set M such points that correspond mapping $\widehat{h}_3$ is not continuous on the interval $[\alpha_2;\, \alpha_3]$.

Further experiments show that for each of intervals of the form $\left[1-\frac{1}{10^{m+1}};\, 1-\frac{1}{10^m}\right]$ the mapping $t_2(v)$ has such point that correspond mapping $\widehat{h}_3$ is not continuous on correspond point of $[\alpha_2;\, \alpha_3]$.

In the same time these experiments do not represent the mathematical reality of the function under consideration, because the limit

$$\lim_{v\to 1}\left(\frac{1}{\ln v}+\frac{v^2(1-\log_2 3)}{(v^2-v+1)v^{\log_2 3}-v^2}\right)$$

is a limit of difference of two expressions such that each of them tends to $+\infty$ so trying to calculate this limit directly with calculating of each term may accumulate a huge calculation mistake. Let us prove properly that the limit which was reminded above exists.

As

$$\lim_{v\to\infty} t_2(v)+1=\frac{1}{0}+\frac{0}{0}=\frac{0}{0},$$

make the sum a proper fraction to make possible to differentiate is with the L'Hopital's rule. So,

$$t_2+1=$$

$$=\frac{(v^2-v+1)v^{\log_2 3}-v^2+\ln v(v^2-v^2\log_2 3)}{\ln v((v^2-v+1)v^{\log_2 3}-v^2)}.$$

Denote with

$$s(v)=(v^2-v+1)v^{\log_2 3}-v^2+\ln v(v^2-v^2\log_2 3)$$

and

$$p(v)=\ln v((v^2-v+1)v^{\log_2 3}-v^2).$$

Then$s'(v)=(2v-1)v^{\log_2 3}+\log_2 3(v^2-v+$ $+1)v^{\log_2 3-1}-2v+(v-v\log_2 3)+2(v-v\log_2 3)\ln v$, whence $s'(1)=0$. Also $p'(v)=(v-1)v^{\log_2 3}+$ $v^{\log_2 3-1}-v+((2v-1)v^{\log_2 3}+\log_2 3(v^2-v+$ $1)v^{\log_2 3-1}-2v)\ln v$, whence $p'(1)=0$.

Find second derivatives $s''(v)$ and $p''(v)$ to get $s''(1)=3+(\log_2 3)^2-2\log_2 3\approx 2,3422$ and $p''(1)=2\log_2 3-2\approx 1,1699$. That is why

$$t_2(v)\to\frac{s''(1)}{p''(1)}-1\approx 1,0020.$$

□

Example 6. *Consider the function $t_3(v)$ for $n=3$. We will show that function $t_3(v)$ makes the correspond function $\widehat{h}_3(x)$ non monotone for all $v<v_0$ where $v_0=0,18867\pm 0,00001$. This result is consistent with the one of the example* 4.

The deal of the example. Study the question of being monotone of the mapping $\widehat{h}_3(x)$ on the interval $[\alpha_3;\, \alpha_4]$ for $n=3$. In this case

$$t_3=\frac{1}{\ln v}+\frac{v^2\log_2 3-2v^2}{v^2-(v^2-v+1)v^{\log_2 3}}.$$

For the violation of being monotone of $\widetilde{h}_3$ it is necessary the inclusion

$$t_3\in[\log_2 3-2;\, 0]\approx[-0,415;\, 0].$$

The graph of $t_3(v)$ for $v\in[0;\, 0,21]$ is given at the figure 4c).

As it is shown at the example 4 there is a point near $v_0\approx 0,2$ such that $\widetilde{h}_3$ is non monotone near it for all $v\leqslant v_0$. Our calculations show that this value is about

$$v_0\in[0,18868;\, 0,18869],$$

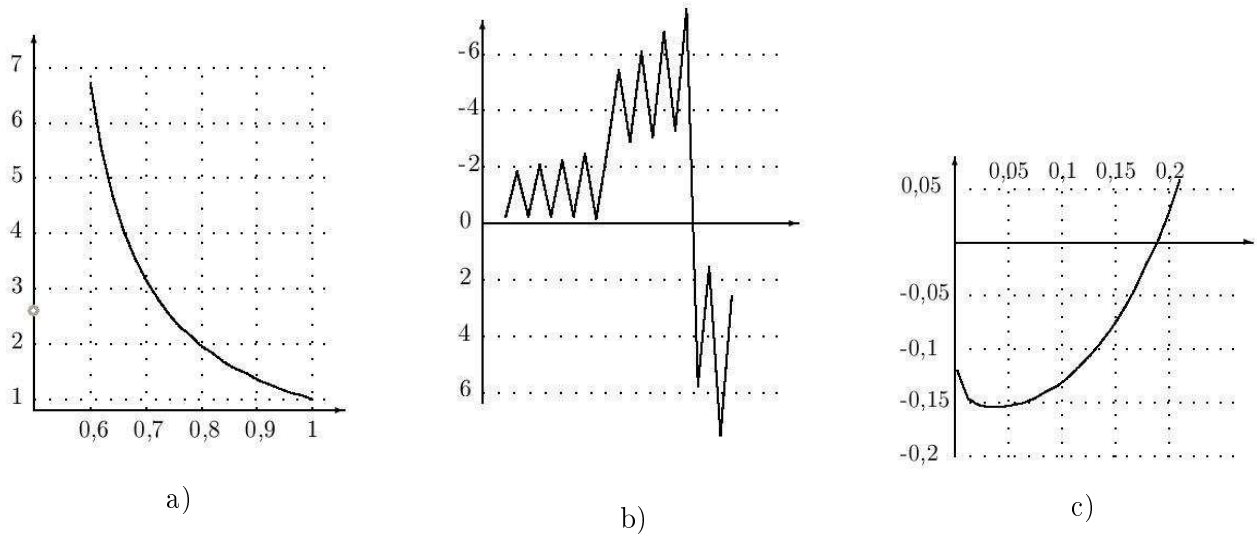
i.e.

$$v_0\approx 0,18867\pm 0,00001.$$

As about $t_3(v)$ on the interval $[0,2;\, 0,5]$, it has an asymptote at the point $0,5$ and increase at the whole interval $[0,2;\, 0,5]$ to positive infinity. □

We will give now the similar investigation for $n=4$. For every v and for every interval $[\frac{1}{2};\, \frac{5}{8}]$, $[\frac{5}{8};\, \frac{3}{4}]$, $[\frac{3}{4};\, \frac{7}{8}]$ and $[\frac{7}{8};\, 1]$ find the value t_k with the use of formula (13).

For different values v and every $k\in[4;\, 7]$ find $t_k(v)$ and this will give us 4 points. Just for convenience concatenate these points to polygons i.e. obtain a polygon for each of v. Also add the following two curves (and put with the bold) to the picture. Let one of them to connects numbers $\{\widetilde{\alpha}_k\}$ and another connects numbers $\{\widetilde{\alpha}_{k+1}\}$ for the same $k\in[4;\, 7]$. The previous explanations give that the mapping $\widehat{h}_{n;\,v}$ will be monotone if and only if each of obtained 4 points will be between these two bold curves, i.e. under then bottom and above then the lower of them.



a) b) c)

Figure 4:

The figure 3a contains these curves for values $v_1 = 0,15$, $v_2 = 0,1$, $v_3 = 0,07$, $v_4 = 0,03$, $v_5 = 0,17$, $v_6 = 0,01$, $v_7 = 0,001$ and $v_8 = 0,00001$. The top curves on the picture correspond to the lower values of v.

As we can see and this corresponds to lemma 7 if the value of v is small enough then curves become close to the horizontal line $y = 1$ and the last point of each of these curves (that one which corresponds to the interval $[\alpha_7;\, 1]$) tends to 1 for $v \to 0$ and so belongs to the interval $(\widetilde{\alpha}_7;\, \widetilde{\alpha}_8) = (\widetilde{\alpha}_7;\, 0)$. This means that $\widetilde{h}_n$ is non monotone on the interval $(\alpha_7;\, \alpha_8) = (\alpha_7;\, 1)$.

The figure 3b contains the analogues calculations for $n = 5$ and values $v_1 = 0,125$, $v_2 = 0,1$, $v_3 = 0,15$, $v_4 = 0,05$, $v_5 = 0,02$, $v_6 = 0,01$, $v_7 = 0,001$ and $v_8 = 0,000000001$.

2.2 Solving the equation (4b) with further substitution o the equation (4a).

The solution of the functional equation (4b) looks as

$$h(x) = \frac{1}{2-v} + \left|x - \frac{2}{3}\right|^{-\log_2(1-v)} \times \\ \times \begin{cases} \omega^+\left(\log_2\left|x-\frac{2}{3}\right|\right) & x > \frac{2}{3}; \\ \\ \omega^-\left(\log_2\left|x-\frac{2}{3}\right|\right) & x < \frac{2}{3}. \end{cases} \tag{6}$$

where functions ω^+ and ω^- satisfy the equation

$$\begin{cases} \omega^-(t+1) = -\omega^+(t) \\ \omega^+(t+1) = -\omega^-(t). \end{cases} \tag{7}$$

In the same way like in the previous section we can use the found h for getting the function ω.

The equation (7) yields that function ω^+ and ω^- are periodical with the period 2.

Consider the function h for

$$x \in \left[\frac{35}{48};\, \frac{11}{12}\right].$$

When the variable x become equal to all the values of the mentioned interval then he values of $\log_2\left(x - \frac{2}{3}\right)$ will become equal to all values of the interval $[-4;\, -2]$ whose length is 2. This will make possible to find the function ω^+ on the interval of its periodicity.

Lemma 8. *If for the invertible mapping h of the form (6) the diagram (9) is commutative then for $x \in [v;\, 1]$ the equation*

$$\widetilde{f}_v(x) = \frac{1-x}{1-v}$$

holds.

Proof. The prove of this lemma is analogous to the prove of the lemma 6. □

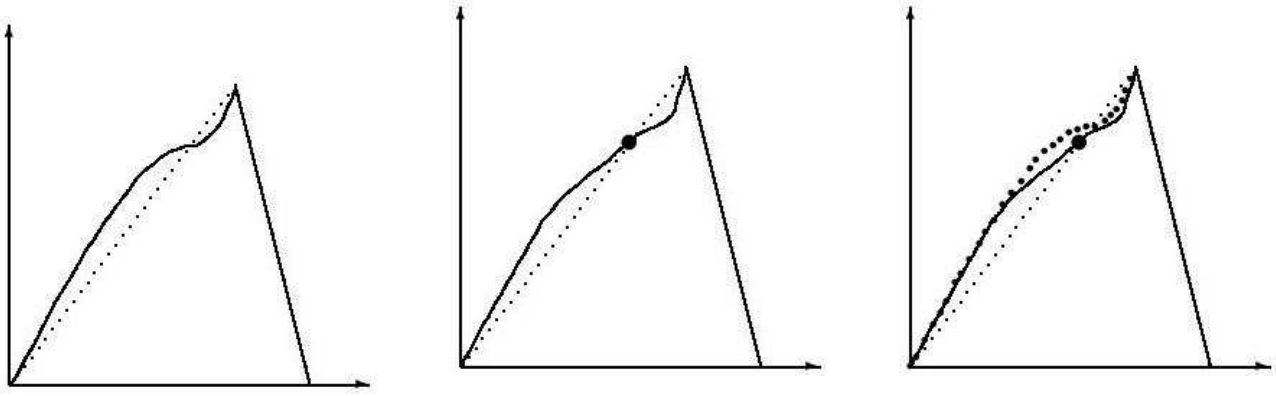
Example 7. *Obtain the graph of the mapping $\widetilde{f}_v$ which is defined with the commutative diagram (9) for the mapping h of the form (6) if ω is the function of the simplest form.*

The deal of the example. The equation (7) makes impossible the case when the function ω is constant and does not equal to 0. So the simplest case for ω is that when $\omega = \omega_0$ for $x < 0$ and $\omega = -\omega_0$ for $x > 0$.

Then the equality $h(0) = 0$ gives that

$$\omega_0 = \frac{-1}{2-v} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{\log_2(1-v)}.$$

In this case the graph of the mapping $\widetilde{f}_v(x) = h(f(h^{-1}(x)))$ which for $v = \frac{3}{4}$ is given at figure 5a). □



a) b) c)

Figure 5:

Example 8. *Obtain the graph of the mapping $\widetilde{f}_v$ which is defined with the commutative diagram (9) for the mapping h of the form (6) if ω is a function such that ω^+ and ω^- are the simplest but non constant.*

The deal of the example. Consider the functions ω^+ and ω^- to be continuous.

The equality $h(0) = 0$ gives that

$$0 = \frac{1}{2-v} + \left(\frac{2}{3}\right)^{-\log_2(1-v)} \omega^- \left(\log_2 \frac{2}{3}\right),$$

i.e.

$$\omega^-(1 - \log_2 3) = \frac{1}{v-2} \left(\frac{2}{3}\right)^{\log_2(1-v)} \qquad (14)$$

As the left pre image of the point $\frac{1}{2}$ for the mapping f goes to

$$h\left(\frac{1}{4}\right) = v^2,$$

under the mapping h, i.e.

$$v^2 = \frac{1}{2-v} + \left(\frac{5}{12}\right)^{-\log_2(1-v)} \omega^- \left(\log_2 \frac{5}{12}\right),$$

whence the periodicity of ω^- with period 2 gives that

$$\omega^- \left(\log_2 \frac{5}{3}\right) = \left(v^2 - \frac{1}{2-v}\right) \left(\frac{5}{12}\right)^{\log_2(1-v)} \qquad (15)$$

Construct the function ω^- as follows. The values of ω^- at points $\log_2 \frac{5}{3} \approx 0,737$ and $2+\log 2\frac{5}{3} \approx 2,737$ are equal and are defines with the equality (15) (according to (7) function ω^- is periodical with period 2).

The value of ω^- at point $3 - \log_2 3 \approx 1,415$ is defined with (14) (because of the periodicity of ω^- the equality (14) can really be used for finding ω^- at this point).

In this case we make the function ω^- to be linear at each of intervals $[\log_2 \frac{5}{3}; 3 - \log_2 3]$ and $[3-\log_2 3; 2+\log 2\frac{5}{3}]$ and is periodical with period 2.

We will construct the function ω^+ with using the function ω^- and taking into attention the equation (7). The graph of the mapping $\widetilde{f}_v$ which was constructed in such a way for $v = 3/4$ is given at the figure 5b).

If compare the graph from the previous example with that one which was constructed yet then

see the plot as at figure 5c) (the dots are used for the first graph). □

Plug the solution (6) of the functional equation (4b) into the functional equation (4a) and obtain

$$\frac{v}{2-v} + v\left|2x-\frac{2}{3}\right|^{-\log_2(1-v)} \times \\ \times\ v\cdot\begin{cases}\omega^+\left(\log_2\left|2x-\frac{1}{3}\right|\right) & x>\frac{2}{3};\\ \\ \omega^-\left(\log_2\left|2x-\frac{1}{3}\right|\right) & x<\frac{2}{3}\end{cases} =$$

$$= \frac{1}{2-v} + \left|x-\frac{2}{3}\right|^{-\log_2(1-v)} \times \\ \times\ \cdot\begin{cases}\omega^+\left(\log_2\left|x-\frac{2}{3}\right|\right) & x>\frac{2}{3};\\ \\ \omega^-\left(\log_2\left|x-\frac{2}{3}\right|\right) & x<\frac{2}{3}.\end{cases}$$

Here the unknown functions ω^+ and ω^- are connected with the equation (7). The complicatedness of this equation in comparison with linear functional equation is obvious. The question on the invertibility of the mappings h which are obtained in such a way is so complicated as in the previous case.

3 The final remarks

We have shown in the work that methods of solving the linear functional equations appear to be practically non useful in the case of the simplest generalization of functional linear equations i.e. for the system of two linear functional equations.

In the same time the problems which were stated in the work may be generalized to the case when f_v is more complicated the that which we consider, for example has home the one point when it is not differentiable.

In spite of the experimental material which is given in the work we were failed to find the reason why the mentioned sequence $\widetilde{h}_n$ sometimes appear to be non monotone. So, we can no formulate the necessary an sufficient conditions for this sequence to be consisted of monotone functions.

Our calculations show that in the case which is considered in more details during the work the mapping $\widehat{h}_n$ becomes close to be constantly equal 1 for $v \to 0$. This means that for all n the mapping $\widetilde{h}_n$ becomes non monotone when $v \to 0$. Nevertheless we were failed to find the exact prove that these $\widetilde{h}_n$ really tend to be constant.

In any way we have found the list of constants like

$$v_0 \approx 0,18867 \pm 0,00001$$

from the example 6 which characterize the topological conjugation of f and each of the mappings f_v. We have calculated these constants only numerically and have failed to catch their deep meaning.

Список використаних джерел

[1] *Пелюх Г.П.* Введение в теорию функциональных уравнений / Г.П. Пелюх, А.Н. Шарковский. — Киев: Наукова Думка .— 1974. — 120 с.

[2] *Плахотник М.* Топологічна спряженість кусково-лінійних унімодальних відображень / М. Плахотник, В. Федоренко — Вісник інстутиту математики НАН України (прийнято до друку)

[3] *Полянин А.Д.* Справочник по интегральным уравнениям. Точные решения. / А.Д. Полянин, А.В. Манжиров — Москва: Факториал.— 1998. — 432 с.

References

1. PELIUKH G.P., SHARKOVSKII A.N. (1974) *Vvedenije v teoriju functsyonalnykh uravnenij.* Kyyiv, Naukova Dumka.

2. PLAKHOTNYK M.V. FEDORENKO V.V (2014) *Topologichna spriajenist kuskovo linijnykh vidobrajen.* Visnyk instytutu matematyky NAN Ukrajiny.

3. POLIANIN A.D., MANGYROV. (1998) *Spravochnik po integralnym uravnenijam. Tochnyje Reshenija.* Moskwa: Faktorial.

Received: 24.03.2014

УДК 51(091)

Олена М. Рябухо[1], к. ф.-м. наук, доцент
Тетяна В. Турка[2], к. ф.-м. наук

Київський період науково-педагогічної діяльності М.Г. Чеботарьова (до 130-річчя з дня народження)

[1], [2] ДВНЗ «Донбаський державний педагогічний університет», 84116, Україна, Донецька обл., м. Слов'янськ, вул. Г. Батюка, 19,
e-mail: [1]rom.olena@gmail.com

Olena M. Ryabukho[1], Ph. D., Associate Prof.
Tetiana V. Turka[2], Ph. D.

Kyiv Period of the Scientific and Educational Activities by M.H. Chebotaryov (to the 130th Anniversary of His Birth)

[1], [2] Donbass State Pedagogical University, 84116, Ukraine, Donetsk region, Slovyansk, Batyk str, 19.
e-mail: [2]tvturka@mail.ua

У даній роботі зроблено аналіз науково-педагогічної творчості М.Г. Чеботарьова київського періоду, наведено деякі факти з його біографії. Описана наукова діяльність студентських і аспірантських років, а саме дослідження абелевих інтегралів, поверхонь переносу, результанту від трансцендентних функцій критерію дійсності коренів трансцендентних рівнянь та задача, обернена задачі Чірнгаузена.

Ключові слова: абелеві інтеграли, поверхні переносу, задача, обернена задачі Чірнгаузена.

In this paper there is analyzed the scientific and educational creative works of the prominent Soviet mathematician and algebraists M.H. Chebotarev, who spent most of his short life in Ukraine. Here he left high classical school and received a university education, here he began the scientific researches and got his most important and most famous scientific results. His Ukrainian period is divided into two parts: Kiev and Odessa. This paper is devoted to Kiev period. There are some facts from the biography, it is described the research activities of his student and postgraduate years. Studying in the second year of the university Chebotarev began attending D. O. Grave algebraic seminar where he was thoroughly familiar with the theory of analytic functions, algebraic number theory, the theory of fields of algebraic functions, Galois theory and others. In the final year of his study at the university M. H. Chebotarev managed to give a new proof of the well-known theorem of Dedekind. After defending his master's thesis and passing the master's examination M. H. Chebotarov began his independent scientific activity. He worked on such scientific themes: algebraic separation units in Abelian integrals; generalized characteristics of Θ-functions; Abelian integrals turnover problem and its inverse sums; surface transport; resultants system of transcendental functions; criterion of validity of roots of transcendental equations; problem inverse to the sums of Chyrnhauzen; width contours and bodies. This paper describes the results of M. H. Chebotarev that, at least in general, were completed in Kyiv period of his creative work. From this brief review one can see how powerful mathematical talent of M. H. Chebotarev was. He could work in the different areas of Mathematics, finding the deep connections between so seemingly different theories. Such work can be done by only truly talented scientists.

Key Words: Abelian integrals, surface of transference, sums which is of inverse to the sums by Chirnhauzen.

Communicated by Prof. V.V. Kyrychenko

1 Вступ

Видатний радянський математик-алгебраїст Микола Григорович Чеботарьов більшу частину свого недовгого життя прожив в Україні. Тут він закінчив гімназію і здобув університетську освіту, тут розпочав наукові дослідження і отримав свої найважливіші

© Olena M. Ryabukho, Tetiana V. Turka, 2014

і найбільш відомі наукові результати. А наукова діяльність Миколи Григоровича поза Україною, на посаді професора Казанського університету, значною мірою опирається на здобутки і досягнення українського періоду. Український період ділиться на дві частини: київську і одеську. В даній роботі ми аналізуємо київський період науково-педагогічної творчості М.Г. Чеботарьова.

2 Біографічні факти

Народився Микола Григорович Чеботарьов 15 червня 1894 року в Кам'янець-Подільську. У 1912 році він закінчив місцеву гімназію і разом з батьками переїхав до Києва. В цьому ж році вступив до Київського університету святого Володимира на фізико-математичний факультет. Це були роки розквіту алгебраїчного семінару Д.О. Граве, у роботі якого вже приймали участь О.Ю. Шмідт, М.П. Кравчук, Б.М. Делоне. До роботи в семінарі активно залучився і М.Г. Чеботарьов. Ще на другому курсі університету він почав займатись науковою роботою. Влітку, 1913 року, після закінчення першого курсу Чеботарьов переклав з німецької на російську мову більшу частину класичного підручника Г.Вебера з алгебри, вивчивши при цьому теорію Ґалуа, яку Граве на той час читав студентам третього курсу. Навчаючись на другому курсі Микола Григорович почав виступати з доповідями на семінарі Д. Граве. Вже в другій своїй доповіді він запропонував нове доведення теореми Бертрана про границі індексів симетричної групи. За період навчання докладно ознайомився з теорією аналітичних функцій, алгебраїчною теорією чисел, теорією полів алгебраїчних функцій, p-адичним аналізом, теорією Ґалуа та ін.

В 1915 році, в зв'язку з невдачами царської армії на фронтах І світової війни виникла загроза окупації Києва, і Київський університет було евакуйовано до Саратова. В Саратові М.Г. Чеботарьов захистив дипломну роботу з теорії p-адичних чисел з оцінкою «цілком задовільно». В 1916 році університет святого Володимира повернувся до Києва і проф. Д. Граве залишив випускника фізико-математичного факультету М. Чеботарьова при університеті «для підготовки до професорського звання», тобто говорячи сучасною мовою, в аспірантурі. Перебуваючи в аспірантурі Чеботарьов викладав в середніх школах м.Києва і готувався до складання т.зв. магістерського екзамену, який був успішно складений в 1918 році. В київських середніх школах М.Г. Чеботарьов працював протягом 1916 - 1921 років. В ті важкі часи з частою зміною влади така праця разом з приватними уроками була, фактично, єдиним джерелом заробітку і давала деякі засоби для існування.

У кінці 1921 року М.Г. Чеботарьов переїздить до Одеси, де на той час мешкали його батьки. Він влаштовується працювати секретарем науково-дослідної кафедри при Одеському інституті народної освіти (в який було реорганізовано на той час Новоросійський університет) і продовжує наукові дослідження, започатковані в Києві. В 1925 році з'явилася можливість виїхати в закордонне відрядження, і М.Г. Чеботарьов виїхав до Німеччини. Відвідав Данціг (нині Гданськ, Польща), де взяв участь в роботі Німецького математичного з'їзду, Берлін і Гетінген. Під час перебування в Німеччині познайомився з багатьма німецькими математиками: Нетер, Гензелем, Хассе, Бляшке, Крулем, Брандтом, Райдемейером, Шуром, Шеферсом, Островським та іншими.

В 1926 році М.Г. Чеботарьов подав до Української академії наук докторську дисертацію за матеріалами своєї роботи [1]. Метод визначення щільності множини простих чисел, які належать до заданого класу автоморфізмів розширень полів – т. зв. метод розширення за допомогою полів поділу круга, було запропоновано М.Г. Чеботарьовим в 1923 році. Основну роботу [2] на цю тему було опубліковано в 1925 році. Захист дисертації відбувся на початку 1927 року. Опонентами виступали академік АН України Д.О. Граве, М.П. Кравчук і Г.В. Пфейфер. Всі вони дали високу оцінку дисертаційній роботі, і захист пройшов успішно. Зазначимо, що на той час захисти дисертацій відбувалися лише в Україні. В інших республіках Радянського Союзу після революції 1917 року наукові ступені були скасовані, і захисти не проводилися. В Україні існував лише один науковий ступінь – доктора наук.

Загалом життя в Одесі родини

Чоботарьових було невлаштованим. Микола Григорович мав малооплачувану роботу, і сім'я ледве зводила кінці з кінцями. Тому, коли після захисту дисертаційної роботи Чеботарьов одержав запрошення зайняти посаду професора казанського університету, то одразу погодився й перебрався до Казані, де працював кінця свого життя. Помер Микола Григорович 24 червня 1947 року в одній з московських лікарень в результаті ускладнень після не зовсім вдалої хірургічної операції.

3 Наукові дослідження студентських і аспірантських років

Ранні алгебраїчні праці М.Г. Чеботарьова були частково охарактеризовані в [3]. Ще в студентські роки, вивчаючи алгебраїчні розклади p-адичних чисел М.Г. Чеботарьов розглянув т. зв. арифметичну теорему монодромії:

Група Ґалуа нормального поля (тобто, нормального розширення поля раціональних чисел) є композитом всіх груп інерції цього поля.

Він вважав, що більш природно розглядати цю теорему в термінах p-адичних чисел і враховувати той факт, що корені даного рівняння розглядаються за цілими степенями простих чисел крім тих, які є дільниками дискримінанту поля, породженого коренями рівняння.

На останньому році навчання в університеті М.Г. Чеботарьову вдалося дати нове доведення відомої теореми Дедекінда:

Нехай $f(x) = 0$ — деяке рівняння з цілими коефіцієнтами, якщо для деякого простого числа p конгруенція $f(x) \equiv 0 (mod\ p)$ розкладається на незвідні множники степенів $n_1, n_2, ..., n_k$, то група Ґалуа рівняння містить підстановку, яка розкладається на добуток циклів довжин $n_1, n_2, ..., n_k$.

Доведення Чеботарьова було незалежне від теорії ідеалів і опубліковане згодом в його статті [4].

Під час перебування в аспірантурі Київського університету Чеботарьов був змушений багато викладати в середніх школах. Революція, а згодом громадянська війна і часті зміни влади в Києві не сприяли науковій праці. Але кілька цікавих результатів Чеботарьову вдалося отримати. Так він зробив вдалу спробу узагальнити комплексне множення еліптичних функцій на гармонічні функції трьох змінних. Продовжуючи розробки Аппеля, він отримав кілька цікавих формул, що виражають функції з потрібним періодом від кількох змінних через функції з потрібним періодом від однієї змінної. В результаті виявилося, що узагальнення теореми множення еліптичних функцій, а також їх комплексного множення на класс гармонічних функцій від трьох змінних неможливе. Але певна геометрична картина в такому напрямку може бути узагальнена, причому навіть на простори довільних розмірностей. При цьому виникає чисто геометрична задача, яка може бути сформульована таким чином:

В n-вимірному просторі R^n дано сітку паралелотопів. Потрібно повернути її навколо однієї з вершин сітки в такий спосіб, щоб застосовуючи гомотетію з коефіцієнтом більшим за 1 можна було дістати нову сітку, кожна з вершин якої збігається з деякою вершиною початкової сітки.

Проблема зводиться до визначення класів матриць, кожна з яких подібна заданій цілочисельній матриці, причому відношення подібності задається цілочисельними унімодулярними матрицями. Часткове розв'язання цієї задачі було опубліковане в роботі [5], пізніше В.А.Тартаковський дав повне її розв'язання [6].

4 Початковий період самостійної творчості. Дослідження абелевих інтегралів

Після захисту магістерської роботи і здачі магістерського екзамену розпочалася самостійна наукова діяльність М.Г.Чеботарьова. Він працював над такими науковими темами (див. [7]):

1) відокремлення алгебраїчних частин в абелевих інтегралах;

2) узагальнені характеристики Θ-функцій;

3) проблема оборотності абелевих інтегралів і обернена до неї задача;

4) поверхні переносу;

5) результант системи трансцендентних функцій;

6) критерій дійсності коренів трансцендентних рівнянь;

7) проблема обернена до задачі Чирнгаузена;

8) ширина контурів і тіл.

Задача відокремлення алгебраїчних частин в абелевих інтегралах була запропонована М.Г.Чеботарьову його вчителем, академіком Д. Граве. Для розв'язання цієї задачі він розробив алгоритм такого відокремлення. Абелеві інтеграли дістаємо при інтегруванні виразів вигляду $\frac{f(x)}{F(x)\cdot\Theta(x)^{\frac{1}{m_0}}}$ де $f(x)$, $F(x)$ і $\Theta(x)$ — деякі цілі раціональні функції (многочлени). Алгоритм базується на тому факті, що за допомогою підстановки інтеграл може бути зведений до вигляду

$$\int \frac{f(x)}{F(x)\cdot\Theta(x)^{\frac{1}{m}}}dx =$$

$$= \frac{P(x)}{Q(x)}\cdot\Theta(x)^{\frac{m-1}{m}} + \sum A_i \lg w_i(x),$$

після чого процес виділення алгебраїчної частини зводиться до знаходження многочленів $P(x)$ і $V(x)$, які задовольняють рівнянню вигляду $f(x) = A(x)\frac{dP(x)}{dx} + B(x)\cdot P(x) + C(x)\cdot V(x)$ де $f(x)$, $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$ — задані многочлени. Розроблений М.Г. Чеботарьовим алгоритм давав повне розв'язування задачі, але отриманий ним результат був опублікований лише в «Математичній автобіографії» [7]. Крім того, ця розробка була використана Чеботарьовим в одній з останніх його робіт Казанського періоду творчості [8].

Певний час Микола Григорович присвятив дослідженню задачі, оберненої до проблеми обернення абелевих інтегралів. Проте жодних істотних результатів на цю тему досягти йому не вдалося. В математичній автобіографії наводиться лише проспект праці, яку планувалося написати.

Хоча цей задум до кінця довести не вдалося, проте роздуми над цією проблемою наштовхнули Миколу Григоровича на два нових цикли досліджень — про поверхні переносу та виключення змінних з трансцендентних рівнянь.

5 Поверхні переносу. Результант від трансцендентних функцій

Поверхнею переносу називають поверхню, яка містить лінію переносу, тобто таку лінію, яку можна пересувати паралельно самій собі, не виходячи за межі поверхні. Нехай

$$z = f(x, y)$$

— рівняння поверхні. Для того щоб існувала лінія переносу необхідно, щоб існував нескінченно малий, але сталий вздовж ліній вектор $(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$, який не виводить ліній з поверхні. Поклавши

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \tau, \qquad \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta z}{\Delta x} = \xi,$$

дістанемо для ліній переносу рівняння вигляду $p + q\tau\tau - \xi = 0$, де τ, ξ — сталі, а

$$p = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}, \qquad q = \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}.$$

Крім того лінія після зсуву повинна задовольняти тому ж рівнянню, але з іншими значеннями τ, ξ.

У київський період творчості М.Г. Чеботарьов отримав лише початкові результати про поверхні переносу, він продовжував займатися дослідженнями в цьому напрямку і в Одесі і в Казані. Одним з перших його результатів є така теорема:

Якщо крива має в кожній точці порядок дотику вище нормального (тобто, принаймні четвертого) зі своїм кругом кривизни, то вона сама є колом.

Ця теорема відіграє важливу роль при дослідженні ліній переносу для поверхонь, для яких наперед відомо, що вони є поверхнями переносу. Особливо важливу роль тут відіграють умови достатності, а для цього й було доведено цитовану вище теорему. Використання розробленого М.Г. Чеботарьовим методу дослідження поверхонь переносу і знаходження ліній переносу опирається на виключення змінних із систем рівнянь. Процедура виключення змінних на той час розглядалася лише для систем алгебраїчних рівнянь, тобто розвинуту теорію можна було застосовувати лише для алгебраїчних поверхонь. Оскільки М.Г. Чеботарьов хотів

досліджувати також поверхні переносу, що задаються трансцендентними рівняннями, то він зайнявся проблемою виключення змінних з таких рівнянь, тобто дослідженням результантів від трансцендентних функцій.

Якщо задано многочлени $f(x)$ і $g(x)$ з коренями $a_1, a_2, ..., a_m$ та $b_1, b_2, ..., b_n$ відповідно, то їх результант, з точністю до сталого множника (нормований результант), має вигляд

$$\prod_{k=1}^{m}\prod_{l=1}^{n}(1-\frac{a_k}{b_l}).$$

Можна розглянути многочлен (припускаючи, що $b_1b_2...b_n \neq 0$)

$$h(x)=\prod_{k=1}^{m}\prod_{l=1}^{n}(x-\frac{a_k}{b_l})$$

степеня mn, який має коренями частки $\frac{a_k}{b_l}$ $(1 \leqslant k \leqslant m,\, 1 \leqslant l \leqslant n)$.

Нормований результант многочленів f і q є значенням $h(x)$ при $x = 1$. Узагальнити цю конструкцію на цілі трансцендентні функції не вдається, бо функція $h(x)$ вже може й не бути такою, адже її корені матимуть точки загущення, відмінні від ∞. Микола Григорович запропонував розглядати результант від функцій $f(z)$ і $g(\frac{1}{z})$, де f і g — цілі трансцедентні функції. Процесс побудови результанта функцій $f(z)$ і $g(\frac{1}{z})$ виглядає таким чином:

(i) обчислюємо логарифмічні похідні

$$\frac{f\prime(z)}{f(z)}, \qquad \frac{g\prime(z)}{g(z)}$$

функцій $f(z)$ і $g(z)$;

(ii) знаходимо їх адамарівський добуток

$$\Theta(z)=[\frac{f\prime(z)}{f(z)}]*[\frac{f\prime(z)}{f(z)}];$$

(iii) знаходимо функцію $\Phi(z)$ таку, що

$$\Phi(z)=e^{\int\Theta(z)dz};$$

(iv) $\Phi(z)$ є цілою функцією, причому $\Phi(1)$ є результантом функцій $f(z)$ і $g(z)$.

Ці результати були подані до друку дещо пізніше, коли М.Г. Чеботарьов вже працював в Одесі, і опубліковані в [9]. Пізніше він застосував ці результати для знаходження умов одномістовості функцій комплексної змінної всередині круга $|z| < 1$.

6 Задача, обернена задачі Чірнгаузена

Нехай задані два незвідних над полем раціональних чисел алгебраїчні рівняння однакового степеня:

$$x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n = 0 \qquad (1)$$

$$x^n + \overline{a_1}x^{n-1} + \ldots + \overline{a_n} = 0 \qquad (2)$$

В задачі, оберненій до задачі Чірнгаузена, потрібно визначити, чи будуть поля розкладу для рівнянь (1) і (2) однакові, чи різні; якщо вони однакові, то знайти перехідну раціональну підстановку, за допомогою якої корені одного рівняння раціонально визначаються через корені іншого. В загальному випадку розв'язання сформульованої задачі залежить від кореня допоміжного рівняння степеня $n!$, коефіцієнти якого раціонально виражаються через коефіцієнти даних рівнянь. Якщо це рівняння має хоча б один раціональний корінь, то поля розкладу рівнянь (1) і (2) однакові; якщо ж воно не має жодного раціонального кореня, то корені розглянутих рівнянь (1) і (2) раціонально незалежні.

Вказаний метод розв'язування є незручним, оскільки вимагає розгляду допоміжних рівнянь великих степенів. Так, для рівняння третього степеня допоміжне рівняння має шостий степінь, для рівняння четвертого степеня воно вже має степінь, який дорівнює 24 і так далі. Окрім того, коефіцієнти допоміжного рівняння виражаються через коефіцієнти заданих рівнянь в дуже складний спосіб, внаслідок чого, його коефіцієнти можуть бути дуже великими, якщо навіть коефіцієнти заданих рівнянь порівняно малі. Звідси виникає питання про спрощення методу або принаймні розбиття його на декілька простіших кроків. Спрощеннями методу займався у 1922 році Б.М. Делоне [10]. Ґрунтуючись на існуванні особливих відношень між інваріантами бінарних кубічних форм і використовуючи так звану тотожність Келі, він розробив простий, практично здійсненний, спосіб розв'язання задачі для рівняння третього степеня. Делоне встановив, що для рівняння третього степеня допоміжне рівняння шостого степеня розпадається на два кубічні рівняння в тому випадку, коли їхні

дискримінанти відрізняються лише множником другого степеня.

Коротко метод Делоне може бути охарактеризований так. Нехай задані два незвідних рівняння третього степеня

$$z^3 = qz + n \tag{3}$$

$$z^3 = \overline{q}z + \overline{n} \tag{4}$$

Потрібно знайти раціональну підстановку переходу від одного рівняння до іншого, якщо така існує, або довести, що рівняння (3) і (4) раціонально незалежні. Перетворивши рівняння (3) за допомогою функції вигляду

$$\varphi(z) = \alpha z^2 + \beta z + \gamma,$$

Делоне отримав співвідношення

$$2\alpha q + 3\gamma = 0 \tag{5}$$

$$3\overline{q} = H(\alpha, \beta) \tag{6}$$

$$27\overline{n} = Q(\alpha, \beta) \tag{7}$$

де

$$H(\alpha, \beta) = 3q\beta^2 + 9n\alpha\beta + q^2\alpha^2.$$

$$Q(\alpha, \beta) =$$

$$= 27n\beta^2 + 18q^2\beta^2\alpha + 27qn\beta\alpha^2 + (27(n^2 - 2q^2))\alpha^3$$

— квадратичний і кубічний коваріанти кубічної бінарної форми

$$f(x, y) = x^3 - qxy^2 - nq^3$$

при

$$x = \beta, \qquad y = \alpha.$$

На підставі тотожності Келі, згідно з якою

$$27Df^2 = 4H^3 - Q^2,$$

де $D = 4q^3 - 27n^2$ — дискримінант рівняння (3), і співвідношень (3) і (4) маємо

$$D(f(\alpha, \beta))^2 = \overline{D},$$

де $\overline{D} = 4\overline{q}^3 - 27, \overline{n}^2$ — дискримінант рівняння (4). Звідси Делоне отримує першу умову: якщо рівняння (3) і (4) утворюють одне і теж поле, то їх дискримінанти можуть відрізнятися лише квадратними множниками. Далі він вважає, що

$$D = D_1\Delta^2, \qquad \overline{D} = D_1\Delta_1^2,$$

де D_1 не має вже квадратних множників, і, ввівши позначення

$$\alpha = \frac{34}{\Delta_1}, \qquad \beta = \frac{v}{\Delta_1}, \qquad \gamma = \frac{w}{\Delta_1},$$

в силу тих же співвідношень (6) і (7) отримує другу умову: якщо рівняння

$$V = \mp\frac{q^2\overline{\Delta} \mp qnn_1}{3Dn_1^2 - q\overline{q}} \tag{8}$$

де $n = 3n_1$ $w = 2qn_1$, не має раціонального кореня, то рівняння (3) і (4) раціонально незалежні. Таким чином, з'ясувалося, що рівняння (3) і (4) утворюють одне і теж саме поле тоді і тільки тоді, коли їх дискримінанти відрізняються лише квадратним множником, і хоча б одне із рівнянь (8) має раціональний корінь.

Елементарний метод Б.М. Делоне для рівнянь третього степеня не підлягає узагальненню на випадок рівнянь вищого степеня, оскільки він ґрунтується на властивостях кубічних бінарних форм. Тут необхідно було шукати нові підходи, і новий шлях розв'язування був знайдений М.Г. Чеботарьовим, який угледів зв'язок оберненої задачі Чирнгаузена з теорією Ґалуа.

Користуючись методами теорії Ґалуа, М.Г. Чеботарьов [11] знайшов розв'язок задачі для рівняння довільного степеня і застосував свій метод для рівнянь третього і четвертого степенів. Його метод розв'язування можна охарактеризувати таким чином.

Нехай задані два рівняння одного і того ж степеня n, незвідних над полем $\mathbb{Q}$:

$$x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n = 0 \tag{9}$$

$$x^n + \overline{a_1}x^{n-1} + \ldots + \overline{a_n} = 0 \tag{10}$$

Необхідно визначити, чи виражається раціонально корінь одного рівняння через корінь іншого і знайти цей вираз, коли це можливо, або довести, що задані рівняння визначають різні поля. Якщо існує раціональний вираз кореня рівняння (10) через будь-який із коренів рівняння (9), наприклад,

$$\overline{x_1} = \alpha_0 + \alpha_1x_1 + \alpha_2x_1^2 + \ldots \alpha_{n-1}x_1^{n-1} \tag{11}$$

то, підставляючи у цей вираз замість x_1 інші корені рівняння (9), отримаємо всі корені

рівняння (10):

$$\begin{aligned}\overline{x_2} &= \alpha_0 + \alpha_1 x_2 + \alpha_2 x_2^2 + \ldots + \alpha_{n-1} x_2^{n-1}\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \overline{x_n} &= \alpha_0 + \alpha_1 x_n + \alpha_2 x_n^2 + \ldots + \alpha_{n-1} x_n^{n-1}\end{aligned} \quad (12)$$

Помножимо рівняння (11) і (12) відповідно на $x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \ldots, x_n^{(i)}$ $(i = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$ і результати почленно додамо, одержимо систему рівнянь відносно невідомих $\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_{n-1}$

$$\begin{aligned}\sum \overline{x} &= s_0\alpha_0 + s_1\alpha_1 + \ldots + s_{n-1}\alpha_{n-1}\\ \sum x^2\overline{x} &= s_1\alpha_0 + s_2\alpha_1 + \ldots + s_n\alpha_{n-1}\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \sum x^{n-1}\overline{x} &= s_{n-1}\alpha_0 + \ldots + s_{2n-2}\alpha_{n-1}\end{aligned} \quad (13)$$

де s_k — сума $k - x$ степенів коренів рівняння (9). Визначник цієї системи не дорівнює нулю.

Група Ґалуа поля, утвореного з'єднанням полів, визначених коренями рівнянь (9) і (10), має бути групою підгрупи, утвореної підстановками коренів

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \overline{x_1}, \overline{x_2}, \ldots, \overline{x_n}.$$

Всі коефіцієнти в лівих частинах рівняння (13) належать деякому розширенню основного поля з групою Ґалуа досить великого порядку. Величини

$$\sum x\overline{x}, \sum x^2\overline{x}, \ldots, \sum x^{n-1}\overline{x},$$

які належать одному й тому ж полю, повинні раціонально виражатися через якусь одну із них, наприклад, через $\sum x\overline{x} = z$.

Величина z може бути визначена як корінь деякого рівняння степеня $n!$. Щоб здійснити раціональне перетворення рівнянь (9) і (10) необхідно і достатньо, щоб z було раціональним числом. Таким чином, задача зводиться до знаходження раціонального кореня рівняння з числовими коефіцієнтами. Складність її розв'язання полягає в тому, що для знаходження z отримуємо рівняння такого ж високого степеня.

М.Г. Чеботарьов запропонував замість функції z розглядати рівняння для функцій, які належать до груп більш високих порядків. При такому підході степінь побудованого рівняння дорівнює індексу його групи Ґалуа у відповідній симетричній групі. Задача зводиться до побудови рівнянь, корені яких належать до розширень з групами Ґалуа, що є обраними дільниками першої групи. Степінь такого рівняння дорівнює індексу цього дільника відносно першої групи. Таким шляхом ми прийдемо до послідовного розв'язання рівнянь менших степенів.

Пізніше Б.М. Делоне, Д.К. Фаддєєв [12] розробили метод розв'язання даної задачі для рівнянь третього степеня, використовуючи результати задачі про добування кореня квадратного з елементів кубічного поля.

7 Заключні зауваження

Ми розглянули результати М.Г. Чеботарьова, які, принаймні в основному, були завершені в київський період його творчості. Насправді, поділ на київський, одеський чи казанський періоди творчості М.Г. Чеботарьова виглядає досить умовно. З його математичної автобіографії випливає, що в київський період були започатковані дослідження і в інших напрямках, зокрема, були зроблені перші кроки в доведенні знаменитої теореми щільності Чеботарьова [1], яке принесло йому міжнародне визнання. Та й багато інших досліджень проведених в Казані мають своїми коренями розробки київського періоду, який був у творчості Чеботарьова дуже плідним. З наведеного нами короткого огляду видно наскільки був потужним математичний талант М.Г. Чеботарьова. Він міг працювати в різних областях математики, знаходячи глибинні зв'язки між так, здавалося би, різними теоріями. Таке до снаги тільки по справжньому талановитим вченим.

Список використаних джерел

1. *Чеботарев Н.Г.* Определение плотности совокупности простых чисел, принадлежащих к заданому классу подстановок / Н.Г. Чеботарев // Изв.Росс.АН — 1923. — **17**. — С.205–250.

2. *Tschebotaröw N.* Die Bestimmung der Dichtigkeit einer Menge von Primzahlen, welche zu einer gegebenen Substitutionsklasse gehören / N. Tschebotaröw // Math.Ann. — 1925. — **95**. — S.191–228.

3. *Мовчан В.О.* Про ранні алгебраїчні праці М.Г.Чоботарьова / В.А. Мовчан // Нариси з історії природознавства і техніки в XXII — 1976. — С.26–34.

4. *Чеботарев Н.Г.* К задаче нахождения алгебраических уравнений с наперед заданной группой / Н.Г. Чеботарев // Изв.Каз.ФМО — 1926. — №1. — С.26–32.

5. *Tschebotaryow N.* Über Drehungen von mehrdimensionalen Gittern / Н. Чеботарев // Изв.Каз.ФМО — 1928. — №3. — С.70–76.

6. *Тартаковский В.А.* О задаче эквивалентности в кольце целочисленных матриц / В.А. Тартаковский // Известия Акдемии наук СССР — 1940. —Т.**4** — С. 128.

7. *Чеботарев Н.Г.* Математическая автобиография / Н.Г. Чеботарев // УМН **3**:4(26) — 1948. — С.3–66.

8. *Чеботарев Н.Г.* О выражении абелевых интегралов через элементарные функции / Н. Чеботарев // УМН **2**:2(18) — 1947. — С.3-–20.

9. *Чеботарев Н.Г.* О методе исключения переменных из трансцендентных уравнений / Н. Чеботарев // Изв.Каз.ФМО — 1924. — №24. — С.1–6.

10. *Делоне Б.Н.* Решение неопределенного уравнения $X^3q + Y^3 = 1$/ <Б.Н. Делоне // Изв.Росс.АН — 1922. — **16**. — С.273–280.

11. *Чеботарев Н.Г.* Задача, обратная задаче Tschirnhausen'a / Н.Г. Чеботарев // Вестник Чистого и Прикл. Знания — Одесса. — 1922. — **I**, вып. 2. — С.1–8.

12. *Делоне Б.Д., Фаддеев Д.К.* Теория иррациональностей третьей степени / Б.Н. Делоне, Д.К. Фаддеев // Труды Матем. ин-та им. В.А. Стеклова. — **11**. — Изд-во АН СССР, М.–Л. — 1940. — С.3–340.

References

1. ChEBOTAREV, N.G.(1923) *Opredelenie plotnosti sovokupnosti prostyih chisel, prinadlezhaschih k zadanomu klassu podstanovok* Izv. Ross. AN — P.205–250.

2. TSCHEBOTARÖW, N. (1925) *Die Bestimmung der Dichtigkeit einer Menge von Primzahlen, welche zu einer gegebenen Substitutionsklasse gehören* Math. Ann. **95**. P.191–228.

3. MOVCHAN, V.O. (1976)*Pro ranni algebrayichni pratsi M.G.Chobotarova* Narisi z istoriyi prirodoznavstva i tehniki v XXII. K. P.26-34.

4. ChEBOTAREV, N.G. (1926) *K zadache nahozhdeniya algebraicheskih uravneniy s napered zadannoy gruppoy* Izv. Kaz. FMO. – №1. P.26-32.

5. TSCHEBOTARÖW, N. (1928) *Über Drehungen von mehrdimensionalen Gittern* Izv. Kaz. FMO. – №3. C.70-76.

6. TARTAKOVSKIY, V.A. (1940) *O zadache ekvivalentnosti v koltse tselochislennyih matrits* Izvestiya Akdemii nauk SSSR, T.4. P.128.

7. ChEBOTAREV, N.G. (1948) *Matematicheskaya avtobiografiya* UMN **3**:4(26). P.3–66.

8. ChEBOTAREV, N.G. (1947) *O vyirazhenii abelevyih integralov cherez elementarnyie funktsii*, UMN, 2:2(18). P.3–20.

9. ChEBOTAREV, N.G. (1924) *O metode isklyucheniya peremennyih iz transtsendentnyih uravneniy* Izv. Kaz. FMO. №24. P.1-6.

10. DELONE, B.N. (1922) Reshenie neopredelennogo uravneniya $X^3q + Y^3 = 1$/ B.N. Delone // Izv.Ross.AN — **16**. — P.273–280.

11. ChEBOTAREV, N.G. (1922) *Zadacha, obratnaya zadache Tschirnhausen'a.* Vestnik Chistogo i Prikl. Znaniya (Odessa) **I**, vyip.2. P.1–8.

12. DELONE, B.N., FADDEEV, D.K., (1940) *Teoriya irratsionalnostey tretey stepeni* Tr.Matem. in-ta im. V.A.Steklova, 11, Izd-vo AN SSSR. P.3–340.

Received: 01.07.2014

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ, МАТЕМАТИЧНА ФІЗИКА ТА МЕХАНІКА

УДК 539.3

Багно О.М, д.ф.-м.н., пров.н.с.

Хвилі у попередньо деформованому стисливому пружному шарі, який взаємодіє з шаром в'язкої стисливої рідини

Інститут механіки імені С.П. Тимошенка Національної академії наук України, 03057, м. Київ, вул. Нестерова, 3
e-mail: alexbag2010@mail.ru

Bagno O.M., doctor of phys.-math. sci.

Waves in a pre-deformed compressible elastic layer that interacts with a layer of an viscous compressible fluid

S. P. Timoshenko Institute of Mechanics, National Academy of Sciences of Ukraine, 3, Nesterova Street, Kyiv, Ukraine, 03057
e-mail: alexbag2010@mail.ru

Досліджується на основі тривимірних рівнянь лінеаризованої теорії пружності скінчених деформацій та тривимірних лінеаризованих рівнянь Нав'є-Стокса хвильовий процес у попередньо деформованому стисливому пружному шарі, що контактує з шаром в'язкої стисливої рідини. Вивчається вплив початкових напружень на частотний спектр хвиль у гідропружній системі.

Ключові слова: пружний стисливий шар, шар в'язкої стисливої рідини, початкові напруження, гармонічні хвилі.

Problem about propagation of acoustic waves in preliminary deformed compressible elastic layer, which contacts with layer of viscous compressible liquid is under consideration. Investigation is done on the basis of three-dimensional equations of linearized theory of elasticity for rigid layer and the three-dimensional Navie-Stokes equations for viscous compressible liquid. We use problem statement and approach, which is based on usage of representation of general solutions of the linearized equations for elastic and liquid layers. We derive dispersion equation describing propagation of harmonic waves in hydroelastic system in wide range of frequencies. The characteristic equation is solved numerically and dispersion curves are constructed for wide spectrum of frequencies in the case of thin elastic layer. Dependencies of phase velocities and decay coefficients for modes on thickness of elastic layer and layer of viscous compressible liquid are adduced as well as dependencies of relative variations of values of phase velocities and coefficients of decay of modes on thickness of liquid layer and initial deformation.

Key Words: elastic compressible layer, layer of viscous compressible fluid, initial stresses, harmonic waves.

Статтю представив доктор фіз.-мат. наук, професор Жук Я.О.

Вступ

Хвилі, що поширюються вздовж границі контакту пружного шару та шару рідини, належать до числа узагальнень ґрунтовно досліджених основних типів акустичних хвиль: Релея, Лява, Стоунлі та Лемба. Огляд робіт і аналіз результатів, отриманих у рамках класичної теорії пружності та моделі ідеальної рідини, наведено в [1]. Разом з тим, значне практичне використання поверхневих хвиль вимагає врахування властивостей, які притаманні реальним середовищам. До числа таких факторів належать початкові напруження твердого тіла та в'язкість рідини. Задачі, які розглянуто, та результати, що отримані з урахуванням у тілах початкових напружень та в'язкості рідини, наведено в [2, 3].

Дане повідомлення присвячене дослідженню в рамках тривимірних рівнянь лінеаризованої теорії пружності при скінчених деформаціях твердого тіла та лінеаризованих рівнянь Нав'є-Стокса впливу початкових напружень на швидкості та коефіцієнти згасання акустичних хвиль у попередньо деформованому стисливому пружному шарі, що взаємодіє з шаром в'язкої стисливої рідини.

© О.М. Багно, 2014

Математична модель

Будемо розглядати такі динамічні процеси у гідропружній системі, при яких додаткові деформації, тобто збурення деформацій, що виникають, значно менше початкових. Далі припустимо, що нелінійно-пружне тверде тіло, пружний потенціал якого є довільною двічі неперервно-диференційованою функцією компонент тензора деформацій Гріна, заповнює об'єм: $-\infty < z_1 < \infty$, $-h_2 \le z_2 \le 0$, $-\infty < z_3 < \infty$ та контактує з шаром в'язкої стисливої рідини, що займає об'єм: $-\infty < z_1 < \infty$, $0 \le z_2 \le h_1$, $-\infty < z_3 < \infty$. Будемо вважати, що зовнішні сили, які діють на зазначені середовища, розподілені рівномірно вздовж осі oz_3. У цьому випадку у всіх площинах, паралельних площині oz_1z_2, явища будуть відбуватися тотожнім чином. Тому задача буде плоскою і можна обмежитися вивченням процесу поширення хвиль у площині oz_1z_2.

Скористаємося постановками задач гідропружності для тіл з початковими напруженнями та в'язкої рідини, а також представленнями загальних розв'язків, запропонованими в роботах [4-6]. У подальшому досліджуються хвильові процеси у попередньо деформованих стисливих пружних тілах, що взаємодіють з рідиною, початковий стан яких є однорідним.

Для плоского випадку, який розглядається, загальні розв'язки будуть мати вигляд [4-6]:

$$u_1 = -\frac{\partial^2 \chi_1}{\partial z_1 \partial z_2};\ u_2 = -\frac{\left(\lambda_1^2 a_{11} + s_{11}^0\right)}{\lambda_2^2\left(a_{12} + \mu_{12}\right)}\left[\frac{\partial^2}{\partial z_1^2} + \right.$$
$$\left. + \frac{\lambda_2^2\left(\lambda_1^2 \mu_{12} + s_{22}^0\right)}{\lambda_1^2\left(\lambda_1^2 a_{11} + s_{11}^0\right)}\frac{\partial^2}{\partial z_2^2} - \frac{\rho}{\lambda_1^2\left(\lambda_1^2 a_{11} + s_{11}^0\right)}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right]\chi_1; \quad (1)$$

$$v_1 = \frac{\partial^2 \chi_2}{\partial z_1 \partial t} + \frac{\partial^2 \chi_3}{\partial z_2 \partial t};\ v_2 = \frac{\partial^2 \chi_2}{\partial z_2 \partial t} - \frac{\partial^2 \chi_3}{\partial z_1 \partial t}, \quad (2)$$

де введені функції χ_i задовольняють рівнянням:

$$\left[\left(\frac{\partial^2}{\partial z_1^2} + \frac{\lambda_2^2\left(\lambda_1^2 \mu_{12} + s_{22}^0\right)}{\lambda_1^2\left(\lambda_1^2 a_{11} + s_{11}^0\right)}\frac{\partial^2}{\partial z_2^2} - \frac{\rho}{\lambda_1^2\left(\lambda_1^2 a_{11} + s_{11}^0\right)}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\cdot\right.$$
$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z_1^2} + \frac{\lambda_2^2\left(\lambda_2^2 a_{22} + s_{22}^0\right)}{\lambda_1^2\left(\lambda_2^2 \mu_{12} + s_{11}^0\right)}\frac{\partial^2}{\partial z_2^2} - \frac{\rho}{\lambda_1^2\left(\lambda_1^2 \mu_{12} + s_{11}^0\right)}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) -$$
$$\left. - \frac{\lambda_2^4\left(a_{12} + \mu_{12}\right)^2}{\left(\lambda_1^2 a_{11} + s_{11}^0\right)\left(\lambda_2^2 \mu_{12} + s_{11}^0\right)}\frac{\partial^4}{\partial z_1^2 \partial z_2^2}\right]\chi_1 = 0; \quad (3)$$

$$\left[\left(1 + \frac{4\nu^*}{3a_0^2}\frac{\partial}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial z_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial z_2^2}\right) - \frac{1}{a_0^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right]\chi_2 = 0; \quad (4)$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} - \nu^*\left(\frac{\partial^2}{\partial z_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial z_2^2}\right)\right]\chi_3 = 0. \quad (5)$$

Дана задача характеризується наступними динамічними

$$P_{21}\big|_{z_2=0} = Q_{21}\big|_{z_2=0};\ P_{22}\big|_{z_2=0} = Q_{22}\big|_{z_2=0};$$
$$Q_{21}\big|_{z_2=-h} = 0;\ Q_{22}\big|_{z_2=-h} = 0; \quad (6)$$
$$P_{21}\big|_{z_2=h} = 0;\ P_{22}\big|_{z_2=h} = 0;$$

та кінематичними

$$v_1\big|_{z_2=0} = \frac{\partial u_1}{\partial t}\big|_{z_2=0};\ v_2\big|_{z_2=0} = \frac{\partial u_2}{\partial t}\big|_{z_2=0}; \quad (7)$$

граничними умовами. Тут введені наступні позначення: u_i – компоненти вектора переміщень пружного тіла; λ_i – подовження пружного шару в напрямках координатних осей; a_{ij} та μ_{ij} – величини, які визначаються з рівнянь стану та залежать від виду пружного потенціалу [7]; $\overline{\sigma}_{ii}^{\,0}$ – початкові напруження ($s_{ii}^0 = \frac{\lambda_1\lambda_2\lambda_3\overline{\sigma}_{ii}^{\,0}}{\lambda^2{}_i}$); ρ – щільність матеріалу пружного шару; v_i – компоненти вектора швидкості рідини; ν^* та μ^* - кінематичний та динамічний коефіцієнти в'язкості рідини; ρ_0 та a_0 – щільність та швидкість звуку в рідині у стані спокою. Q_{ij} та P_{ij} – складові векторів напружень у твердому тілі та рідині.

Далі параметри, що характеризують процес поширення хвиль, розшукуються у класі біжучих хвиль, які обираються у вигляді:

$$\chi_j = X_j(z_2)exp[i(kz_1 - \omega t)],\ j = 1,2, \quad (8)$$

де k $(k = \beta + i\gamma)$ – хвильове число; γ – коефіцієнт згасання хвиль; ω – кругова частота.

Далі розглядаються дві задачі Штурма-Ліувілля на власні значення для рівнянь руху пружного тіла та рідини. Розв'язуючи їх знаходяться відповідні власні функції. Після підстановки розв'язків у граничні умови (6) – (7) отримуємо систему лінійних однорідних алгебраїчних рівнянь відносно сталих інтегрування. Виходячи з умови існування нетривіального розв'язку, та, прирівнюючи

визначник системи до нуля, отримуємо дисперсійне рівняння

$$det\left\|e_{lm}\left(c,\gamma,a_{ij},\mu_{ij},s_{ii}^{0},\rho_0,a_0,\mu^*,\omega h_1/c_s,\omega h_2/c_s\right)\right\|=0,$$
$$l,m=\overline{1,8}, \qquad (9)$$

де c – фазова швидкість хвиль у гідропружній системі, $c_s(c_s^2=\mu/\rho)$ – швидкість хвилі зсуву, μ – модуль зсуву, h_2 – товщина пружного шару, h_1 – товщина шару в'язкої рідини, ρ_0 – щільність рідини, γ – коефіцієнти згасання мод.

Відмітимо, що отримане дисперсійне рівняння (9) не залежить від форми пружного потенціалу. Воно є найбільш загальним і з нього можна отримати ряд частинних випадків. Задачі, які було розглянуто в рамках моделі, яка враховує початкові напруження, наведено в [2]. Якщо покласти $\overline{\sigma}_{ii}{}^0=0$, то отримаємо рівності для добре досліджених в рамках класичної теорії пружності хвиль Релея, Стоунлі та Лемба [1].

Аналіз чисельних результатів

У подальшому дисперсійне рівняння (9) розв'язувалося чисельно. При цьому числові розрахунки проводилися для системи оргскло – вода, яка характеризувалася наступними параметрами: пружний шар – ρ=1160 кг/м^3, μ=1,86*10^9 Па; шар рідини – ρ_0=1000 кг/м^3, a_0=1459,5 м/с, $\overline{\mu}^*$=0,001.

Зауважимо, що рівняння (9) виведено без будь-яких додаткових вимог до виду функції пружного потенціалу, тому воно має місце для пружних потенціалів довільної форми. При чисельній реалізації питання щодо вибору конкретної форми пружного потенціалу має самостійне й важливе значення і суттєвим чином може вплинути на кінцевий результат. Як показано у роботі [7], для попередньо напружених стисливих жорстких матеріалів (сталь, оргскло) закономірності, які спостерігаються експериментально, можуть бути правильно описані теоретично лише у рамках тринваріантних пружних потенціалів. У зв'язку з цим, у даній роботі для оргскла використовувався найпростіший тринваріантний потенціал у формі Мурнагана [7]. З урахуванням цього сталі Мурнагана для оргскла, через які визначаються величини рівнянь стану a_{ij} та μ_{ij}, обиралися такими [7]: a=–3,91*10^9 Па; b=–7,02*10^9 Па; c=–1,41*10^9 Па.

Результати обчислень представлені на малюнках 1–4.

На Рис. 1 для пружного шару, який не взаємодіє з рідиною, приведено залежності безрозмірних величин фазових швидкостей $\overline{c}$ ($\overline{c}=\frac{c}{c_s}$) від безрозмірної товщини пружного шару $\overline{h}_2$ ($\overline{h}_2=\frac{\omega h_2}{c_s}$) при відсутності початкових деформацій. Номерами n_a позначено антисиметричні моди, а n_s - відповідно симетричні моди.

На Рис. 2 представлені дисперсійні криві для гідропружного хвилеводу, які показують залежності безрозмірних фазових швидкостей мод від безрозмірної товщини шару в'язкої рідини $\overline{h}_1$ ($\overline{h}_1=\frac{\omega h_1}{c_s}$) для пружного шару з товщиною рівною $\overline{h}_2$=2, теж при відсутності початкових деформацій.

Характер впливу попереднього розтягу ($\overline{\sigma}_{11}{}^0=0{,}004$) на швидкості мод у пружному шарі, який взаємодіє з шаром в'язкої рідини, ілюструють графіки на Рис. 3, де представлені залежності відносних змін величин фазових швидкостей c_ε ($c_\varepsilon=\frac{c_\sigma-c}{c}$, c_σ – фазова швидкість мод у гідропружній системі при попередньо напруженому шарі, c – фазова швидкість мод у гідропружній системі при відсутності початкових деформацій) від товщини шару в'язкої рідини для перших 7 мод.

На цьому малюнку представлені дисперсійні криві для гідропружного хвилеводу, товщина пружного шару якого дорівнює $\overline{h}_2$=2.

З графіків, представлених на Рис. 1, випливає, що швидкість нульової антисиметричної моди при зростанні товщини пружного шару прямує до швидкості хвилі Релея знизу, а швидкість нульової симетричної моди прямує до швидкості хвилі Релея згори. Швидкості усіх вищих мод при збільшенні товщини пружного шару прямують до швидкості хвилі зсуву в матеріалі пружного тіла.

Графіки для гідропружної системи, які наведені на рис. 2, для випадку тонкого шару з $\overline{h}_2$=2 показують, що при зростанні товщини рідкого шару швидкість нульової антисиметричної моди прямує до величини, яка менше швидкості хвилі Стоунлі. Швидкості

нульової симетричної моди і всіх вищих мод, породжуваних шаром в'язкої рідини, прямують до швидкості поширення звуку в рідкому середовищі

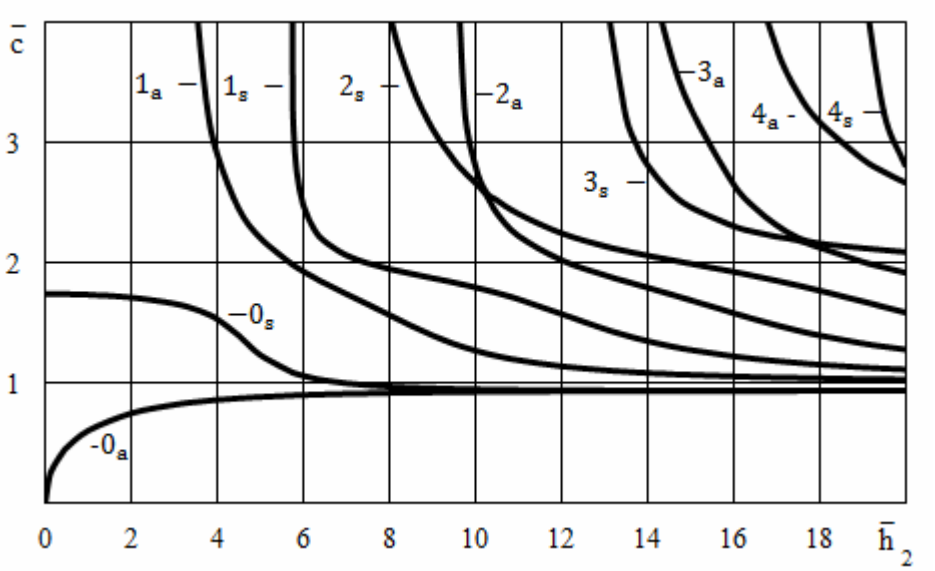


Рис. 1 Залежності фазових швидкостей мод Лемба від товщини пружного шару за відсутності початкових напружень

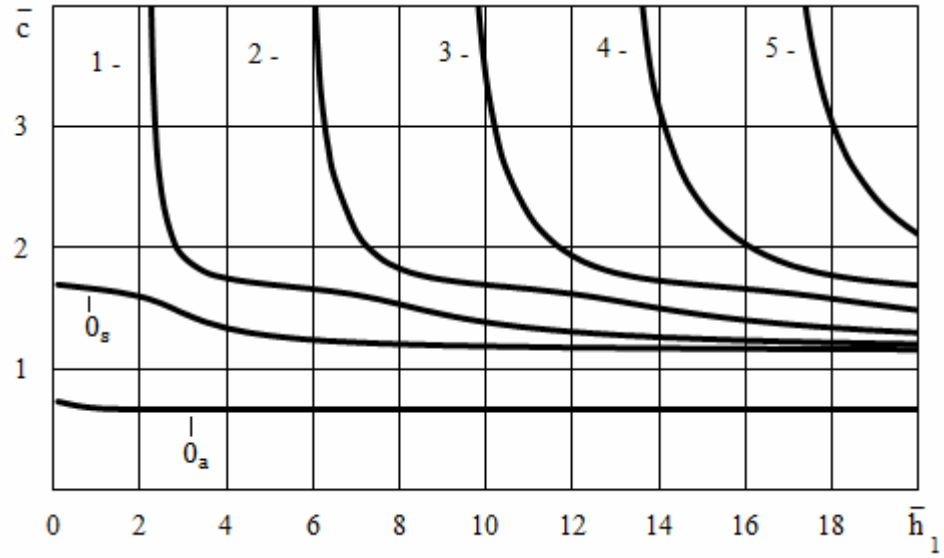


Рис. 2 Залежності фазових швидкостей мод від товщини шару в'язкої рідини за відсутності початкових напружень

Характер впливу попереднього розтягу $(\bar{\sigma}_{11}{}^{0} = 0{,}004)$ на коефіцієнти згасання мод у пружному шарі, який взаємодіє з шаром в'язкої рідини, ілюструють графіки на Рис. 4, де представлені залежності відносних змін величин коефіцієнтів згасання γ_ε $(\gamma_\varepsilon = \frac{\gamma_\sigma - \gamma}{\gamma}$, $\gamma_\sigma -$ коефіцієнти згасання мод у гідропружній системі при попередньо напруженому шарі, $\gamma -$ коефіцієнти згасання мод у гідропружній системі при відсутності початкових деформацій) від товщини шару в'язкої рідини для перших 7 мод. На цьому малюнку представлені криві для гідропружного хвилеводу, товщина пружного шару якого дорівнює $\bar{h}_2$=2.

З графіків, зображених на Рис. 3-4, випливає, що початковий розтяг пружного шару призводить до підвищення фазових швидкостей нульової антисиметричної та симетричної мод. Швидкості усіх вищих мод, які породжені шаром рідини, в околі частот їх зародження стають

менше відповідних швидкостей в шарі без початкових напружень. Вплив початкового розтягу на фазові швидкості усіх мод зі збільшенням товщини шару рідини зменшується. Неважко бачити, що для мод 1-5, які породжені в'язкою рідиною, існують товщини рідкого шару та певні частоти, при яких попереднє деформування не впливає на їх фазові швидкості. Ця якісно нова закономірність, яка відсутня у випадку поширення хвиль у необмежених та напівобмежених тілах, вперше була виявлена для пружного шару, що не взаємодіє з рідиною [6].

Відмітимо також, що з графіків, наведених на Рис. 4, випливає існування для всіх мод певних товщин в'язкого рідкого шару та певних частот, при яких попереднє деформування не впливає на коефіцієнти згасання цих мод.

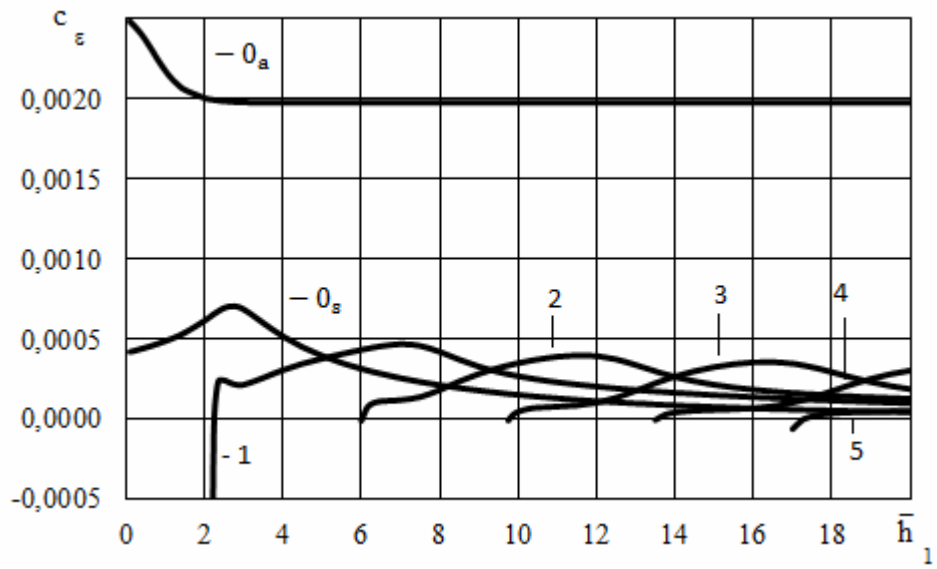


Рис. 3 Залежності відносних змін фазових швидкостей мод від товщини шару в'язкої рідини при дії початкового розтягу

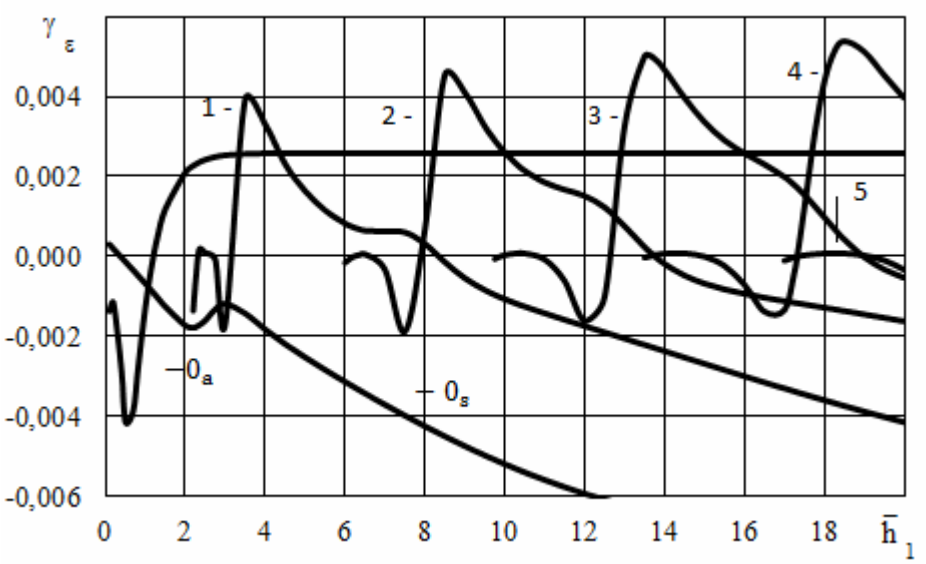


Рис. 4 Залежності відносних змін коефіцієнтів згасання мод від товщини шару в'язкої рідини при дії початкового розтягу

Висновки

У рамках тривимірних лінеаризованих рівнянь для твердого тіла та рідкого середовища дано постановку задачі про поширення акустичних хвиль у попередньо деформованому стисливому пружному шарі, що взаємодіє з

шаром в'язкої стисливої рідини. Проаналізовано вплив товщини шару рідини та початкової деформації пружного шару на фазові швидкості та коефіцієнти згасання мод. Приведено дисперсійні криві для мод у широкому інтервалі частот. Показано, що для мод, які породжені рідиною, існують товщини рідкого шару та певні частоти, при яких попереднє деформування не впливає на їх фазові швидкості. Виявлено існування для всіх мод в'язких рідких шарів певної товщини та певних частот, при яких попереднє деформування не впливає на коефіцієнти згасання цих мод.

Представлений графічний матеріал дозволяє для хвилевих процесів оцінювати межі застосування моделі ідеальної рідини.

З чисельного дослідження випливає також, що для окремих діапазонів частот попередній розтяг пружного шару може призводити як до підвищення, так і до зменшення величин фазових швидкостей та коефіцієнтів згасання хвиль.

Список використаних джерел

1. *Викторов И.А.* Звуковые поверхностные волны в твердых телах / И.А. Викторов - М.: Наука, 1981. - 288 с.
2. *Bagno A.M.* Elastic waves in pre-stressed bodies interacting with a fluid (survey) /A.M. Bagno, A.N. Guz // Int. Appl. Mech. - 1997. - **33**, № 6. - P. 435-463.
3. *Ottenio M.* Acoustic waves at the interface of a pre-stressed incompressible elastic solid and a viscous fluid / M. Ottenio, M. Destrade, R. W. Ogden // Int. J. of Non-Linear Mech. – 2007. – **42**, № 2. - P. 310-320.
4. *Гузь А.Н.* О задачах аэрогидроупругости для тел с начальными напряжениями / А.Н. Гузь // Прикладная механика. - 1980. - **16**, № 3. - С. 3-21.
5. *Гузь А.Н.* Динамика сжимаемой вязкой жидкости / А.Н. Гузь - К.: А.С.К., 1998. - 350 с.
6. *Гузь А.Н.* Упругие волны в телах с начальными (остаточными) напряжениями / А.Н. Гузь - К.: А.С.К., 2004. - 672 с.
7. *Гузь А.Н.* Введение в акустоупругость / А.Н. Гузь, Ф.Г. Махорт, О.И. Гуща - К.: Наук. думка, 1977. - 152 с.

References

1. VIKTOROV, I.A. (1981) *Zvukovye poverkhnostnye volny v tverdykh telakh.* Moskva: Nauka.
2. BAGNO, A.M. and GUZ, A. N. (1997) Elastic waves in pre-stressed bodies interacting with a fluid (survey) *International Applied Mechanics*. 33 (6). p. 435-463.
3. OTTENIO, M., DESTRADE, M. and OGDEN, R.W. (2007) Acoustic waves at the interface of a pre-stressed incompressible elastic solid and a viscous fluid. *Int. J. of Non-Linear Mech*. 42 (2). p. 310-320.
4. HUZ, A.N. (1980) O zadachakh aerohidroupruhosti dlia tel s nachalnymi napriazheniiami. *International Applied Mechanics*. 16 (3). p. 3-21.
5. HUZ, A.N. (1998) *Dinamika szhimaemoi viazkoi zhidkosti.* Kiev: A.S.K.
6. HUZ, A.N. (2004) *Upruhie volny v telakh s nachalnymi (ostatochnymi) napriazheniiami.* Kiev: A.S.K.
7. HUZ, A.N., MAKHORT, F.H. and HUSHCHA, O.I. (1977) *Vvedenie v akustoupruhost.* Kiev: Naukova dumka.

Надійшла до редколегії 23.09.14.

УДК 517.95:519.63

Вакал Є.С.[1], к.ф.-м.н., доц.,
Вакал Ю.Є.[1], к.ф.-м.н.,
Стеля О.Б.[1], к.ф.-м.н., доц.

E. S. Vakal[1], Associate Professor,
Yu. E. Vakal[1], Ph.D.,
O. B. Stelya[1], Associate Professor

Чисельне розв'язання задачі вологопереносу в області складної форми зі слабко проникними включеннями

Numerical solution of moisture transfer problem in the area of complex shape with weakly permeable inclusions

[1] Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, пр-т Глушкова, 4д, e-mail: jvakal@gmail.com

[1] Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03680, Kyiv, Glushkova st., 4d, e-mail: jvakal@gmail.com

Розглянута профільна модель вологопереносу для неоднорідно-шаруватих середовищ у зоні каналів і водоймищ при наявності протифільтраційної завіси. Математична модель формулюється як крайова задача для нелінійного рівняння параболічного типу зі спеціальними умовами спряження в області складної форми. Розроблено та реалізовано алгоритм чисельного розв'язання крайової задачі, що ґрунтується на методі скінченних різниць. Як приклад застосування наведено результати дослідження впливу протифільтраційних заходів на конфігурацію вільної поверхні підземних вод і розподіл напорів у пористій дамбі.

Ключові слова: вологоперенос, протифільтраційна завіса, умови спряження, різницеві схеми, метод Ньютона – верхньої релаксації.

During exploitation of reservoirs and canals near pools of waste water, rivers and seas, there is a threat of infiltration of polluted, saline or mineralized waters.

It is interesting to conduct a variety of protective measures in place to reduce the output of polluted water into the canal. Such measures include construction of antifiltration curtain (screen) in an area located between the canal and the source of contamination.

We consider the problem of determining the position of the free surface in areas of complex shape in a presence of antifiltration curtain.

A mathematical model is formulated as a boundary value problem for a nonlinear parabolic equation of moisture transfer and enables to take into account stratification of the soil, a presence of weakly permeable inclusions of various types, a complex shape boundary.

In developing the mathematical model of fluid flow in areas of complex shape with thin weakly permeable inclusion - antifiltration curtain, the approach is applied according to which the curtain is excluded from consideration, and its effects taken into account in special coupling conditions of non-ideal contact. This approach avoids unnecessary splitting of difference grid in the construction of a finite difference problem.

Algorithm for the numerical solution of boundary value problem based on finite difference method is developed and implemented. Results of research of antifiltration measures effect on the configuration of the free surface of groundwater and distribution of soil water pressures in a porous dam are given as an example of application.

Key Words: moisture transfer, grout curtain, coupling conditions, difference schemes, method of Newton – SOR.

Статтю представив академік НАН України, д.ф.-м.н. Перестюк М.О.

1. Вступ

При експлуатації водоймищ і каналів, розташованих поблизу басейнів стічних вод, річок і берегів морів, існує загроза проникнення в них забруднених, засолених або мінералізованих вод [2]. На стінках каналу можуть з'являтися проміжки височування, розташування і динаміка яких заздалегідь невідомі і залежать від початкового розподілу ґрунтової вологи, фільтраційного режиму на межах області, характеристик ґрунту.

©Є.С. Вакал, Ю.Є.Вакал, О.Б.Стеля, 2014

В роботах [3–4] наведена математична постановка та метод розв'язання задачі вологопереносу для області прямокутної форми при наявності проміжку височування на межі області. Проблему математично сформульовано як крайову задачу з односторонніми умовами.

В роботі [5] досліджено профільну модель фільтрації та вологопереносу з урахуванням складної форми пористої дамби для комплексного вивчення потоку ґрунтових вод.

Становить інтерес проведення різноманітних захисних заходів, які дозволяють знизити вихід забруднених вод у канал, з метою усунення або зменшення проміжків височування. До їх числа відноситься будівництво протифільтраційної завіси (екрану) в зоні, розташованій між каналом і джерелом забруднення [3]. В [6] виконано дослідження фільтрації та вологопереносу в пористій дамбі прямокутної форми з протифільтраційною завісою, актуальні для оцінки вторгнення забруднених вод у водоносні горизонти при проведенні захисних заходів.

В роботі розглядається задача визначення положення вільної поверхні в області складної форми при наявності протифільтраційної завіси та її характеристик, при яких проміжки височування будуть відсутні.

2. Постановка задачі

Розглянемо область G, обмежену відрізками A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, A_4A_5, A_5A_6, A_6A_7, A_7A_8, A_8A_1, яка лежить у площині перерізу, перпендикулярного осі каналу.

Пористе середовище може складатися з шарів ґрунту, що мають різну гідравлічну проникність (рис.1).

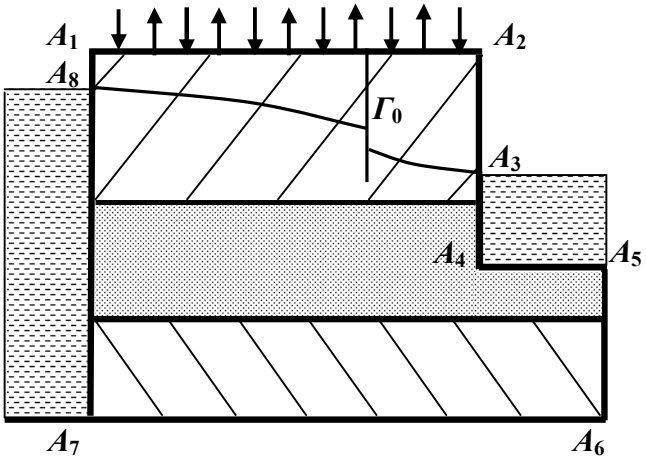


Рис.1. Схема фільтрації та вологопереносу в зоні каналу.

Внаслідок можливої зміни рівня вологи в каналі, поливу та випаровування на поверхні ґрунту рух рідини в області має нестаціонарний характер. На стінках каналу може утворюватися проміжок височування. Для запобігання його появи будується протифільтраційна завіса.

Запишемо математичну модель задачі. Як відомо, процеси вологопереносу відбуваються найчастіше в режимі неповного насичення або взаємодії насиченої та ненасиченої зон і можуть бути описані у двовимірній постановці рівнянням

$$\frac{\partial\theta(x,u)}{\partial t}=\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(k(x,u)\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)+f(x,u), \qquad (1)$$

$$(x,t)\in G_T=G\times(0,T],$$

де $v_i=-k(x,u)\dfrac{\partial u}{\partial x_i}$ – компоненти вектора швидкості вологопереносу, $u(x, t)$ – гідравлічний напір рідини, $\theta(x,u)$ – об'ємна вологість ґрунту (пористість у зоні повного насичення), $k(x,u)$ – коефіцієнт вологопровідності (коефіцієнт фільтрації в зоні повного насичення), $f(x,u)$ – функція внутрішніх джерел в області G, $x=(x_1,x_2)$ – точка області G, x_i, $i=1,2$ – горизонтальна і вертикальна координата, t – час.

В зоні повного насичення можна вважати пористість і коефіцієнт фільтрації кусково-неперервними.

Положення вільної поверхні ґрунтових вод визначається з умови $p(x,t)=0$, де $p(x,t)$ – тиск, зв'язаний з розв'язком рівняння (1) – напором $u(x,t)$ співвідношенням $p = u + x_2$ (за тиск рівний нулю приймається тиск атмосферного повітря). Тоді точки області, для яких $p(x,t)<0$, визначають зону неповного насичення, а точки, де $p(x,t)\geq 0$ – насичену зону.

В залежності від конкретних фізичних умов на межі розглядуваної області задаються крайові умови першого або другого роду.

Крайові умови передбачають можливість подачі води на поверхню ґрунту, випаровування і інфільтрацію, відтік води у нижчі горизонти, підпір ґрунтовими водами, наявність водоупору тощо. Для наведеної схеми фільтрації і вологопереносу при $t>0$ задаються такі крайові умови:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x_1}\right|_{A_1A_8}=\left.\frac{\partial u}{\partial x_1}\right|_{A_5A_6}=0, \qquad (2)$$

$$\left.k\frac{\partial u}{\partial x_2}\right|_{A_1A_2}=-\lambda_1(x_1,t),\ \left.k\frac{\partial u}{\partial x_2}\right|_{A_6A_7}=\lambda_2(x_1,t), \qquad (3)$$

$$u(x,t)\big|_{A_7A_8} = H_1(x_2,t),$$
$$u(x,t)\big|_{A_3A_4} = H_2(x_2,t), \quad (4)$$
$$u(x,t)\big|_{A_4A_5} = H_3(x_1,t).$$

Тут $\lambda_1(x_1,t)$ визначає інфільтрацію, $\lambda_2(x_1,t)$ – величину потоку через нижню межу області. У випадку водоупору покладаємо $\lambda_2(x_1,t)=0$. Функції $H_1(x_2,t)$, $H_2(x_2,t)$, $H_3(x_1,t)$ задають рівень води з правої і лівої сторони дамби.

В задачі не припускається поява проміжку височування, тому на ділянці межі A_2A_3 задається умова відсутності потоку вологи

$$k\frac{\partial u}{\partial x_1}\bigg|_{A_2A_3} = 0, \quad t>0. \quad (5)$$

Рівняння (1) інтегрується при початкових умовах

$$u(x,0)=H_0(x), \quad x\in\overline{\Omega}. \quad (6)$$

Слабко проникна протифільтраційна завіса, товщина якої набагато менше геометричних розмірів області, моделюється лінією Γ_0 з умовами спряження типу неідеального контакту у вигляді

$$\alpha\left(u\big|_{\Gamma_0+0} - u\big|_{\Gamma_0-0}\right) = k\frac{\partial u}{\partial x_1}\bigg|_{\Gamma_0-0}, \quad t>0, \quad (7)$$
$$k\frac{\partial u}{\partial x_1}\bigg|_{\Gamma_0-0} = k\frac{\partial u}{\partial x_1}\bigg|_{\Gamma_0+0},$$

де α – коефіцієнт вологопередачі через завісу. Такий підхід дозволяє уникнути невиправданого подрібнення різницевої сітки при побудові різницевої задачі.

Якщо пористе середовище є шаруватим, то на межах поділу шарів з різними гідродинамічними характеристиками задаються умови спряження, що виражають неперервність напорів і потоків вологи.

3. Метод розв'язання задачі

Крайові задачі для рівняння (1) з початковими умовами (6), крайовими умовами (2)–(5) і умовами спряження (7) розв'язуються за допомогою методу скінченних різниць. Область $\overline{G_T}$ покривається різницевою сіткою $\overline{\omega}_{h_1h_2\tau}$. Інтегро-інтерполяційним методом побудована неявна різницева схема для рівняння (1)

$$Q_{\bar{t}}(y) = \sum_{\alpha=1}^{2}\left(a_\alpha(y)y_{\bar{x}_\alpha}\right)_{x_\alpha} + \varphi. \quad (8)$$

В (4) Q, y, a_α, φ – різницеві аналоги функцій θ, u, k, f.

Похибка апроксимації схеми (8) дорівнює $O\left(\tau + h_1^2 + h_2^2\right)$. Крайові умови і умови спряження апроксимуються з другим порядком по просторових змінних аналогічно [3].

Побудована таким чином різницева схема консервативна, тобто зберігає на різницевій сітці закон збереження, властивий фізичній задачі.

Приєднуючи до рівняння (8) різницеві апроксимації умов спряження, крайових і початкових умов, отримуємо нелінійну систему різницевих рівнянь, яку розв'язуємо за допомогою блочного методу Ньютона – послідовної верхньої релаксації [3–6]. Встановлено умови на кроки різницевої сітки, що забезпечують збіжність ітераційного процесу.

4. Результати чисельних розрахунків

Розроблені чисельні алгоритми обґрунтовано і застосовано до розв'язання двовимірних задач вологопереносу в області складної форми, що містить тонкі слабко проникні протифільтраційні споруди.

Розглядалася задача фільтрації і вологопереносу в пористій дамбі складної форми $\{0\le x_1\le 8.5,\ 0\le x_2\le 8\}\cup\{8.5\le x_1\le 10,\ 7\le x_2\le 8\}$ на непроникній основі з протифільтраційною завісою для запобігання появи проміжків височування. При наявності забрудненої води у верхньому б'єфі завіса дозволяє знизити її вихід у прісноводний канал або водозабір. Припускалося, що в початковий момент часу напір у дамбі дорівнює – 6.5 м. Рівень води у верхньому б'єфі становив 8 м, у нижньому – 0.5 м. Коефіцієнти фільтрації ґрунту і завіси вибирались рівними відповідно $0.2\,\text{м/доба}$ і $0.005\,\text{м/доба}$. Коефіцієнти вологопровідності і вологоємності використовувались у табличній формі та інтерполювались у чисельних розрахунках. Функція джерел $f(x,u)$ у рівнянні (1) покладалась рівною нулю. Припускалось, що заповнення верхнього б'єфа відбувалось миттєво.

Розрахунки проводилися для завіси товщиною 0.2 м, розташованої при $\{x_1=4, x_2\in[0,4]\}$, до практичного встановлення вільної поверхні. Результати розрахунків у вигляді положень вільної поверхні в різні моменти часу наведено на рис. 2.

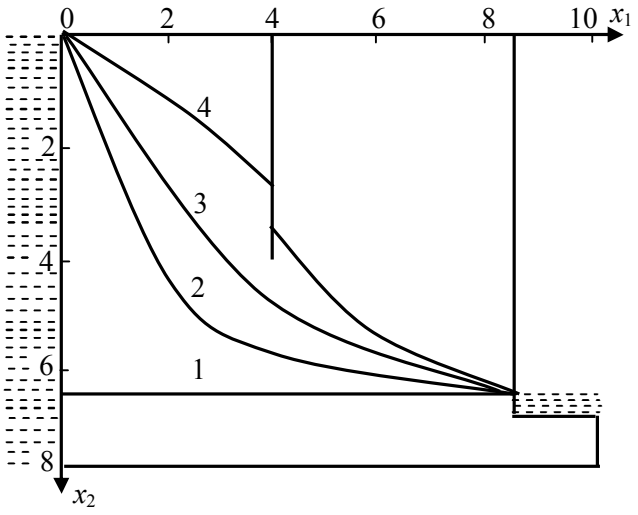


Рис. 2. Динаміка просування вільної поверхні в дамбі (1 – $t = 0$, 2 – $t = 0.2$, 3 – $t = 0.5$, 4 – $t = 2.8$).

5. Висновок

Результати проведених досліджень свідчать про ефективність запропонованого підходу до розв'язання задач вологопереносу в областях складної форми з тонкими слабко проникними включеннями різної природи. Згідно зазначеного підходу при розробці математичної моделі руху рідини в областях із вказаними особливостями слабко проникне включення – завіса виключається із розгляду, а створені нею ефекти враховуються в спеціальних умовах спряження. Наведені розрахунки дозволяють оцінити ефективність протифільтраційних заходів у задачах захисту вод каналів від забруднень. Розроблена модель може бути використана для поліпшення екологічної ситуації шляхом усунення або зниження впливу техногенних та природних факторів на навколишнє середовище.

Список використаних джерел

1. *Самарский А.А.* Теория разностных схем / А.А. Самарский. – Москва : Наука, 1983. – 616 с.
2. *Лаврик В.И.* Некоторые математические модели и методы исследования процессов загрязнения подземных вод / В.И. Лаврик, В.А. Добрынский, И.В. Рогаль // Математика и проблемы водного хозяйства. – Киев, 1986. – С. 100–122.
3. *Вакал Е.С.* Решение одной задачи защиты водотоков и водозаборов от загрязнения / Е.С. Вакал, С.Л. Кивва, Г.Е. Мистецкий, О.Б. Стеля // Теория гидродинамических моделей технических задач. – Свердловск, 1988. – С. 90–95.
4. *Ляшко И.И.* Применение вариационных неравенств для решения нелинейных задач влагопереноса с неизвестной границей / И.И. Ляшко, О.Б. Стеля // Докл. АН УССР. Сер. А. – № 6. – С. 29–32.
5. *Стеля О.Б.* Профільна модель вологопереносу в пористих середовищах / О.Б. Стеля, І.О. Стеля, О.С. Тригуб // Наукові записки НаУКМА. Сер.: Computer science. – 2011. – **125**. – С. 41–45.
6. *Вакал Е.С.* Дослідження процесів вологопереносу в неоднорідних середовищах із слабко проникними прошарками/ Е.С. Вакал, Ю.Є. Вакал, О.Б. Стеля // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Сер.: фіз.-мат. науки. – 2014. – №1. – С. 49–52.

References

1. SAMARSKIY, A. (1983) *Teoriya raznostnyih shem*. – Moskva : Nauka.
2. LAVRIK, V., DOBRYINSKIY, V. and ROGAL, I. (1986) Nekotoryie matematicheskie modeli i metodyi issledovaniya protsessov zagryazneniya podzemnyih vod. *Matematika i problemyi vodnogo hozyaystva*. p. 100–122.
3. VAKAL, E. et al. (1988) Reshenie odnoy zadachi zaschityi vodotokov i vodozaborov ot zagryazneniya. *Teoriya gidrodinamicheskih modeley tehnicheskih zadach*. p. 90–95.
4. LYASHKO, I., STELYA, O. (1987) Primenenie variatsionnyih neravenstv dlya resheniya nelineynyih zadach vlagoperenosa s neizvestnoy granitsey. *Dokl. AN USSR. Ser. A*. (6). p. 29–32.
5. STELYA, O., STELYA, I. and TRIGUB, O. (2011) Profilna model vologoperenosu v porystyh seredovyschah. *Naukovi zapysky NaUKMA. Ser.*: *Computer science.* (**125**). p. 41–45.
6. VAKAL, E., VAKAL, Y. and STELYA, O. (2014) Doslidzhennya protsesiv vologoperenosu v neodnoridnyh seredovyschah iz slabko pronyknymy prosharkamy. *Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Ser.*: *Physics and Mathematics*. (1). p. 49–52.

Надійшла до редколегії 25.09.14

УДК 539.3

Горошко О. О.[1], д.ф.-м.н., проф.,
Кикоть С. В.[2], к.ф.-м.н., доц.

Канонічні рівняння в дослідженні коливань плаваючого трубопроводу

[1] Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 83000, м. Київ, пр-т. Глушкова 4д.
[2] Національний транспортний університет, 01010, м. Київ, вул. Суворова, 1,
e-mail: s.v.kykot@gmail.com

Oleg O. Goroshko[1], Dr.Sci. (Phys.-Math.), Professor,
Sergiy V. Kykot'[2], Ph.D., (Phys.-Math.), Associate Professor.

The canonical equations in the investigations of oscillations of a floating conduit

[1] Taras Shevchenko National University of Kyiv, 83000, Kyiv, Glushkova st., 4d,
[2] National Transport University, 01010, Kiev, Suvorova 1,
e-mail: s.v.kykot@gmail.com

Досліджуються коливання плаваючого трубопроводу під дією поверхневих хвиль водної поверхні. В основу дослідження покладено канонічні рівняння гіперболічного типу, які описують коливання гнучкого трубопроводу з рухомою рідиною. Приводиться точний розв'язок задачі для вимушених коливань. Встановлено три критичні швидкості руху потоку рідини та додаткові резонанси, обумовлені дією поверхневих хвиль водної поверхні.

Ключові слова: гнучкий трубопровід, рухоме навантаження, канонічні рівняння, двохвильовий коливний процес, поверхневі хвилі, вимушені коливання, частота коливань, ексцес, критична швидкість, резонанс.

The paper deals with oscillations of floating conduit under the action of surface waves. The investigation is based on the canonical hyperbolic equations describing oscillations of a flexible conduit with fluid motion. The inertia forces of the moving load in full are taken into consideration in the mathematical model construction.

Object of study is a flexible conduit with fluid flow.

The aim of the paper is investigation of influence of the fluid flow velocity and surface waves on oscillations of a floating conduit.

Method of study is based on generally accepted methods for solving differential equations.

The exact solution of the problem for forced oscillations is given. Three critical velocities of the fluid flow and additional resonances caused by the influence of surface waves are determined.

The results of the paper may be used for further developments of direct methods for constructing approximate solutions of complicated dynamic systems.

Forecast assumptions about the object of study – taking into consideration of the inertia forces of moving load in full gives an opportunity qualitatively reveal the basic characteristics of dynamics of a structure with moving load.

Key words: flexible conduit, moving loading, canonical equations, double wave oscillation process, surface waves, forced oscillations, oscillation frequency, excesses, critical velocity, resonance.

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Жук Я.О.

Хвильові рухи вільної поверхні рідини можуть бути описані плоскими хвилями [1,2], при вивченні яких обмежуються знаходженням профілю хвилі, тобто лінії перетину вільної поверхні рідини з довільною площиною в якій відбувається рух частинок рідини, наприклад площини *xOz*.

При розгляді стоячих хвиль, вузли яких є нерухомими, профіль хвилі – вільна поверхня рідини, що визначається рівнянням

$$\zeta = d \sin pt \sin kx, \qquad (1)$$

де d та p – амплітуда та частота хвилі,

$k = \frac{2\pi}{\lambda}$ – хвильове число, λ – довжина хвилі.

© О.О. Горошко, С.В. Кикоть, 2014

У випадку нескінченно великої глибини рідини період хвилі визначається так

$$T = \frac{2\pi}{p} = \sqrt{\frac{2\pi\lambda}{g}}, \qquad (2)$$

звідки

$$\lambda = \frac{gT^2}{2\pi} \approx 1{,}561\, T^2. \qquad (3)$$

Тобто довжина стоячої хвилі пропорційна квадрату її періоду.

Для прогресивних (біжучих) хвиль рівняння профілю хвилі має вигляд

$$\zeta = d\sin\left(pt - kx\right). \qquad (4)$$

Довжина і період хвилі залишаються незмінними складовим стоячим хвилям.

Слід зазначити, що амплітуда коливань плоских хвиль частинок рідини зменшується із збільшенням глибини; так на глибині рідини рівній довжині хвилі вона буде приблизно в 535 разів меншою амплітуди коливань частинки, яка перебуває на вільній поверхні при рівновазі рідини [1].

Метою даної роботи є вивчення впливу швидкості руху потоку рідини та поверхневих хвиль на коливання плаваючого трубопроводу.

Зведення до канонічного вигляду диференціального рівняння другого порядку з гіроскопічними членами

Поперечні коливання гнучкої труби з рухомою рідиною описуються рівнянням [3]

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2\rho_2 v\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t} - \left(T - \rho_2 v^2\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t), \qquad (5)$$

де $u(x,t)$ – поперечні відхилення труби,

T – початковий натяг трубопроводу,

$\rho = \rho_1 + \rho_2$ – сума розподілених мас труби і рухомої рідини, v – швидкість руху потоку рідини.

У науковій праці [3] для приведення рівняння (1) до канонічної форми від змінних (x,t) перейдено до нових змінних (x_1,t_1), за формулами

$$x = x_1, \quad t = t_1 + \alpha x_1. \qquad (6)$$

Константа α визначається з умови рівності нулю коефіцієнта при змішаній похідній в (5):

$$\alpha = \frac{\rho_2 v}{T - \rho_2 v^2} \qquad (7)$$

Рівняння (5) в нових змінних набуває канонічного вигляду рівняння гіперболічного типу

$$\frac{\partial^2 u(x_1,t_1)}{\partial {t_1}^2} - c^2\frac{\partial^2 u}{\partial {x_1}^2} = b(v)f(x_1,t_1), \qquad (8)$$

де

$$c^2 = \left(T - \rho_2 v^2\right)b(v),$$
$$b(v) = \frac{T - \rho_2 v^2}{T\left(\rho_1 + \rho_2\right) - \rho_1\rho_2 v^2}. \qquad (9)$$

Співвідношеннями (9) представлено складні залежності швидкості поперечної хвилі c гнучкого трубопроводу з рухомою рідиною та функції збурення $b(v)f(x_1,t_1)$ в канонічних змінних (x_1,t_1).

Коливання плаваючого трубопроводу з рухомою рідиною

Коливання плаваючого трубопроводу під дією поверхневих хвиль водної поверхні описуються диференціальним рівнянням

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2\rho_2 v\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t} - \left(T - \rho_2 v^2\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + k_1 u = f(x,t). \qquad (10)$$

Права частина рівняння (10) при хвилюванні водної поверхні визначається функціональними залежностями:

1) при коливанні трубопроводу на поперечних хвилях $f(x,t) = k_1 d\sin pt$;

2) при коливанні трубопроводу на поздовжніх хвилях $f(x,t) = k_1 d\sin\left(pt - kx\right)$,

тут k_1 – коефіцієнт плавучості, d та p – амплітуда та частота вимушених коливань,

$k = \frac{2\pi}{\lambda}$ – хвильове число, λ – довжина хвилі;

3) при коливанні трубопроводу на косих хвилях $f(x,t) = k_1 d\sin\left(pt - kx\right)$,

де $k = \frac{2\pi\left(1 - \sin\beta\right)}{\lambda}$ – хвильове число,

λ – довжина хвилі, β – кут між напрямком руху хвилі відносно трубопроводу.

Для дослідження коливань плаваючого трубопроводу від змінних (x,t) перейдемо до змінних (x_1,t_1). З використанням формул (6)

рівняння вимушених коливань гнучкого трубопроводу (10) в канонічних координатах (x_1, t_1) набуває вигляду

$$\frac{\partial^2 u(x_1,t_1)}{\partial t_1^{\,2}} - c^2 \frac{\partial^2 u(x_1,t_1)}{\partial x_1^{\,2}} + k_1 b(v) u(x_1,t_1) = \\ = b(v) f_1(x_1,t_1). \qquad (11)$$

Праві частини рівняння (11) в канонічних змінних мають вигляд:

– для поперечних хвиль

$$f(x_1,t_1) = k_1 d \sin p(t_1 + \alpha x_1);$$

– для поздовжніх та косих хвиль

$$f(x_1,t_1) = k_1 d \sin\left(pt_1 + (p\alpha - k)x_1\right),$$

де $k = \begin{cases} \dfrac{2\pi}{\lambda}, \\ \dfrac{2\pi(1-\sin\beta)}{\lambda}; \end{cases}$ відповідно.

Власні коливання плаваючого трубопроводу (10) в змінних (x,t) описуються розв'язком

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\frac{n\pi x}{l} \cos\left(\Omega_n t - \gamma_n x + \varphi_n\right),$$

де

$$\Omega_n^{\,2} = \left[\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 \left(T - \rho_2 v^2\right) + k_1\right] b(v), \qquad (12)$$
$$\gamma_n = \alpha \Omega_n.$$

Тут l – довжина трубопроводу.

З аналізу співвідношення (12) визначаємо значення трьох критичних швидкостей руху рідини

$$v_{kp1} = \sqrt{\frac{T}{\rho_2}}, \; v_{kp2} = \sqrt{\frac{T}{\rho_2} + \frac{k_1 l^2}{\rho_2 (\pi n)^2}}, \; v_{kp3} = \sqrt{\frac{T(\rho_1 + \rho_2)}{\rho_1 \rho_2}}.$$

При швидкостях v_{kp1}, та v_{kp2} трубопровід втрачає прямолінійну форму під дією відцентрових сил рухомої рідини. При перевищенні третьої критичної швидкості руху рідини v_{kp3} канонічні рівняння переходять в рівняння еліптичного типу, і має місце якісна зміна стійкості коливних процесів в закритичній області [4].

Відповідно до загально прийнятої схеми дослідження вимушених коливань [3] частинний розв'язок $u_0(x_1,t_1)$ рівняння (11), яким описується вимушений рух, будується у формі розкладання за власними функціями

$$u_0(x_1,t_1) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{n\pi x_1}{l} P_n(t_1), \qquad (13)$$

де $P_n(t_1)$ – фазові функції, які визначаються розв'язками рівняння

$$\ddot{P}_n(t_1) + \Omega_n^{\,2} P_n(t_1) = \frac{2}{l} b(v) h_n(t_1), \; n = 1,2,3,..., \qquad (14)$$

Узагальнені сили $h_n(t_1)$ в рівняннях (14) визначаються за формулою

$$h_n(t_1) = \int_0^l f_1(x_1,t_1) \sin\frac{n\pi x_1}{l} dx_1$$

та мають вигляд:

– для поперечних хвиль

$$h_n(t_1) = \frac{k_1 d \pi n l \left[(-1)^n \sin p(\alpha l + t_1) - \sin pt_1\right]}{(p\alpha l)^2 - (\pi n)^2}; \qquad (15)$$

– для поздовжніх хвиль

$$h_n(t_1) = \frac{k_1 d \pi n l \left[(-1)^n \sin\left(p(\alpha l + t_1) - kl\right) - \sin pt_1\right]}{l^2 (p\alpha - k)^2 - (\pi n)^2}. \qquad (16)$$

Частинні розв'язки рівняння (14) в формі Коші, що визначаються співвідношенням

$$P_n(t_1) = \frac{2b(v)}{\Omega_n l} \int_0^{t_1} h_n(\tau) \sin\omega_n(t_1 - \tau) d\tau, \; n = 1,2,3,\ldots,$$

мають вигляд:

– для поперечних хвиль

$$P_n(t_1) = \frac{2b(v) k_1 d \pi n}{\left(\Omega_n^{\,2} - p^2\right)\left((p\alpha l)^2 - (\pi n)^2\right)} \times \\ \times \left[(-1)^n \left(\sin p(\alpha l + t_1) - \sin p\alpha l \cos\Omega_n t_1\right) - \right. \qquad (17) \\ \left. - \frac{p}{\Omega_n}\left((-1)^n \cos p\alpha l - 1\right)\sin\Omega_n t_1 - \sin pt_1\right];$$

– для поздовжніх хвиль

$$P_n(t_1)=\frac{2b(v)k_1 d\pi n}{\left(\Omega_n{}^2-p^2\right)\left(l^2(p\alpha-k)^2-(\pi n)^2\right)}\times$$

$$\times\Big[(-1)^n\left(\sin\left(p(\alpha l+t_1)-kl\right)-\sin(p\alpha-k)l\cos\Omega_n t_1\right)- \quad (18)$$

$$-\frac{p}{\Omega_n}\left((-1)^n\cos(p\alpha-k)l-1\right)\sin\Omega_n t_1-\sin pt_1\Big].$$

Вимушені коливання плаваючого трубопроводу під дією поверхневих хвиль водної поверхні будуються в формі розкладання за власними функціями (13) з врахуванням формул (17) та (18) та набувають вигляду:

– для поперечних хвиль

$$u_0(x_1,t_1)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2b(v)d\pi n\sin\frac{n\pi x_1}{l}}{\left(\Omega_n{}^2-p^2\right)\left((p\alpha l)^2-(\pi n)^2\right)}\times$$

$$\times\Big[(-1)^n\left(\sin p(\alpha l+t_1)-\sin p\alpha l\cos\Omega_n t_1\right)- \quad (19)$$

$$-\frac{p}{\Omega_n}\left((-1)^n\cos p\alpha l-1\right)\sin\Omega_n t_1-\sin pt_1\Big];$$

– для поздовжніх хвиль

$$u_0(x_1,t_1)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2b(v)d\pi n\sin\frac{n\pi x_1}{l}}{\left(\Omega_n{}^2-p^2\right)\left(l^2(p\alpha-k)^2-(\pi n)^2\right)}\times$$

$$\times\Big[(-1)^n\left(\sin\left(p(\alpha l+t_1)-kl\right)-\sin\left(p\alpha-k\right)l\cos\Omega_n t_1\right)-$$

$$-\frac{p}{\Omega_n}\left((-1)^n\cos\left(p\alpha-k\right)l-1\right)\sin\Omega_n t_1-\sin pt_1\Big]. \quad (20)$$

Повертаючись до старих незалежних змінних (x,t), згідно з (6), матимемо

– для поперечних хвиль

$$u_0(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2b(v)d\pi n}{\left(\Omega_n{}^2-p^2\right)\left((p\alpha l)^2-(\pi n)^2\right)}\sin\frac{n\pi x}{l}\times$$

$$\times\Big[(-1)^n\left(\sin p\left(\alpha(l-x)+t\right)-\sin p\alpha l\cos\left(\Omega_n t-\gamma_n x\right)\right)-$$

$$-\frac{p}{\Omega_n}\left((-1)^n\cos p\alpha l-1\right)\sin\left(\Omega_n t-\gamma_n x\right)-\sin p\left(t-\alpha x\right)\Big];$$

–для поздовжніх хвиль

$$u_0(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2b(v)d\pi n\sin\frac{n\pi x}{l}}{\left(\Omega_n{}^2-p^2\right)\left(l^2(p\alpha-k)^2-(\pi n)^2\right)}\times$$

$$\times\Big[(-1)^n\left(\sin\left(p\left(\alpha(l-x)+t\right)-kl\right)-\sin\left(p\alpha-k\right)l\cos\left(\Omega_n t-\gamma_n x\right)\right)-$$

$$-\frac{p}{\Omega_n}\left((-1)^n\cos\left(p\alpha-k\right)l-1\right)\sin\left(\Omega_n t-\gamma_n x\right)-\sin p\left(t-\alpha x\right)\Big].$$

Таким чином, вимушені коливання представлено біжучими хвилями.

Результати дослідження сформулюємо у вигляді таких висновків:

Рівняння коливань гнучкого трубопроводу приведено до канонічного рівняння гіперболічного типу та побудовано точні розв'язки вимушених коливань, в яких фазові функції представлені біжучими хвилями.

У задачах динаміки плаваючих на водній поверхні трубопроводів виявлено три критичні швидкості транспортування рідини та додаткові резонанси, обумовлені дією поверхневих хвиль водної поверхні.

Розглянуті приклади ілюструють застосування канонічних рівнянь до аналізу ускладнених задач динаміки трубопроводів.

Список використаних джерел

1. *Кузнецов Д.С.* Гидродинамика / Д.С. Кузнецов. – Ленинград: ГИМИЗ, 1951. – 392
2. *Стретенский Л.Н.* Теория волновых движений жидкости / Л.Н. Стретенский. Москва: Наука, 1977. – 816 с.
3. *Горошко О.О.* Дослідження коливань гнучкого трубопроводу з використанням канонічного вигляду рівнянь / О.О. Горошко, С.В. Кикоть // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія : фіз.-мат. науки. – 2014. – №1. – С. 53–56.
4. *Кикоть С.В.* Коливання гнучкого трубопроводу на пружній основі з рухомою рідиною. / С.В. Кикоть // Вісник НТУ: В 2-х частинах: Ч. 2 – К.: НТУ – 2012. – Вип. 26. – С. 559 – 563.

References

1. KUZNETSOV D. (1951) Hydrodynamics. Leningrad: GIMIZ.
2. STREPENSKY L. (1977) Theory of fluid wave motions. Moscow: Nauka.
3. GOROSHKO, O. & KYKOT', S. (2014) Investigations of a flexible conduit using equations in canonical form. *Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kiev. Series: Physics & Mathematics*. (1). p. 53–56.
4. KYKOT' S. (2012) Oscillations of a flexible conduit on an elastic foundation with moving fluid *Visnyk NTU: In two parts. Kyiv: NTU*. 26(2). p. 559–563.

Надійшла до редколегії 28.08.2014

УДК 519.9

Горошко О. О.[1], д. ф.-м. н., проф.,
Лебедєва І. В.[1], к. ф.-м. н., доц.

Прецесійні рухи та самоцентрування роторів

[1] Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, просп. Глушкова, 4е, e-mail: Lebedevai@ukr.net

O. O. Goroshko[1], Doctor of physical and mathematical sciences, professor,
I. V. Lebedyeva[1], Candidate of physical and mathematical sciences, Associate professor

Precession movements and self centering of rotors

[1] Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03680, Kyiv, Glushkova St., 4e, e-mail: Lebedevai@ukr.net

Досліджуються вимушені прецесійні рухи ротора на нелінійних опорах, обумовлені дисбалансами ротора. Отримано нові результати з перебігу резонансних процесів та самоцентрування ротора в умовах зовнішнього та внутрішнього тертя.
Ключові слова: ротор на нелінійних опорах, конічні вимушені прецесії, особливості самоцентрування ротора.

Dynamics of machines, in particular, industrial centrifuges, constantly attracts designers of centrifuges of different purpose. The paper presents the results of investigations of rotor machines self-centering and precessions under conditions of static and dynamic imbalances. Frequencies of forced precessions of unbalanced rotor coincide with the frequencies of proper rotation. The damping of the rotor precessions is realized by external and internal friction. External friction is considered to be proportional to the precessions velocity (Newton friction). Internal friction in the materials of the rotor elastic fixing is presented by complex modulus of rigidity. The equations of conical and cylindrical precessions and center of mass motion of the rotor are determined by the theorems on center of mass motion and the change of angular momentum of the system. Inertia members of these equations are expressed in coordinates of the major central axis of inertia and elastic forces – by the coordinates of the axis of revolution. With the help of relations between the coordinates of the major central axis and the axis of proper rotation the equation of precessions and self-centering are presented in the coordinates of the axis of revolution of the rotor. On the base of analysis to the solutions to these equations it was found that at high speeds of the proper rotation the coordinates of the major central axis of inertia tend to zero, and the axis of proper revolution realizes cylindrical and conical precessions about the "fixed" major central axis of inertia (the self-centering of the rotor is realized). It was established that at high supercritical speeds the external friction factor is offset and the internal factor of friction remains unchanged. It was shown that the resonant peaks of precessions are inversely proportional to the frequencies and factors of damping.

Key Words: rotor on nonlinear bearings, tapered forced precession, features self-centering of the rotor.

Статтю представив д. ф.-м. н., проф. Жук Я.О.

Вступ

Динаміка розбалансованих роторів постійно привертає увагу конструкторів роторних машин різного цільового призначення [3]. Узагальнення досліджень з цього питання проведено в роботах [1,2].

У роботі досліджуються динамічні процеси роторних машин, обумовлені дисбалансами та зовнішніми періодичними силами з урахуванням дисипативних факторів. Метою роботи є вивчення перебігу резонансних циліндричних та конічних прецесій роторних машин, специфіки внутрішніх та зовнішніх дисипативних сил.

Ротор здійснює циліндричні та конічні прецесії на пружних лінійних опорах. Основним фактором збудження є розбалансованість ротора. Вимушені прецесії здійснюються на частотах

© О. О. Горошко, І. В. Лебедєва, 2014

обертання ротора. Демпфування прецесій ротора реалізується зовнішнім та внутрішнім тертям. Зовнішнє тертя у даній роботі вважається пропорційним швидкостям прецесій (ньютонівське тертя). Внутрішнє тертя в матеріалах пружних опор представлено комплексним модулем жорсткості. Представлення внутрішнього тертя комплексними жорсткостями випливає безпосередньо з моделі стандартного реологічного тіла [4].

Рівняння прецесійних рухів та самоцентрування ротора

Статичний та динамічний дисбаланси ротора

Статичний та динамічний дисбаланси описуються ексцентриситетом *e* центра мас відносно осі обертання та перекосом δ осі обертання відносно головної центральної осі інерції ротора (рис.1) [5]. Дисбаланси в роторних центрифугах виникають також унаслідок несиметричного розподілу продукту фугування тощо. Кутом ε визначається положення площини перекосу ротора, $\varphi(t)$ -- закон власного обертання ротора.

Для дослідження прецесійних рухів та самоцентрування ротора необхідно визначити рухи осі обертання та головної центральної осі інерції. Кутові рухи цих осей описуються кутами Резаля. Координати осі обертання ξ_0, η_0, α_0, β_0, головної центральної осі інерції - ξ_C, η_C, α_C, β_C. Обмежимось вивченням руху довгого (A>C) симетрично закріпленого відносно центра мас ротора. Для координат осей мають місце кінематичні співвідношення

(1)

$$\xi_C = \xi_0 + e\cos\varphi(t), \quad \alpha_c = \alpha_o + \delta\cos(\varphi(t)+\varepsilon),$$
$$\eta_C = \eta_0 + e\sin\varphi(t). \quad \beta_C = \beta_o + \delta\sin(\varphi(t)+\varepsilon).$$

У даній роботі сили та моменти зовнішнього тертя вважаються пропорційними швидкостям прецесій (ньютонівське тертя). Внутрішнє тертя в матеріалі опор представлено комплексними модулями жорсткості [4].

Рівняння руху ротора визначаються теоремами про рух центра мас та про зміну кінетичного моменту матеріальної системи [5]. При симетричному закріпленні ротора відносно центра мас у загальноприйнятій символіці [5] прецесійні рухи осі ротора описуються рівняннями

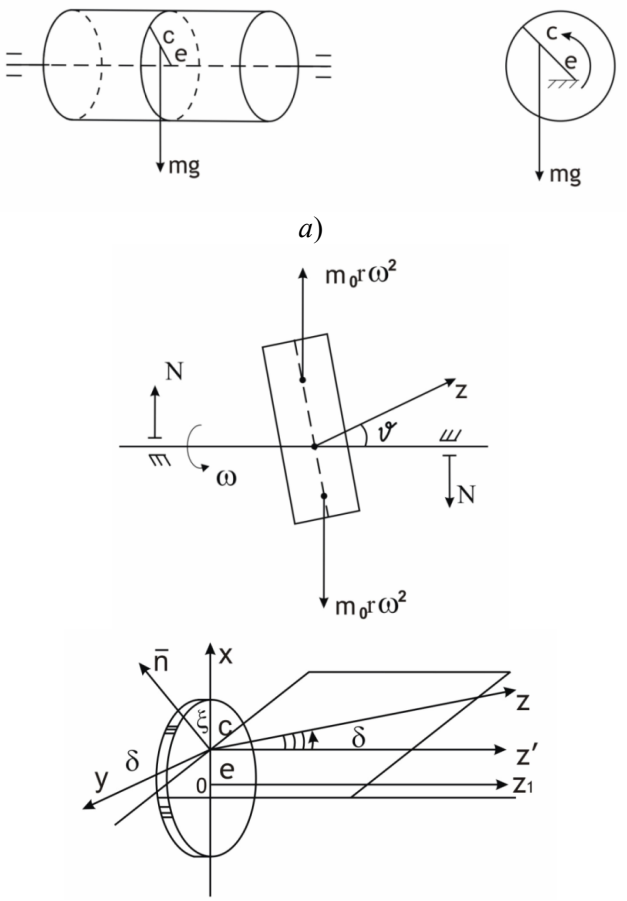
$$m\ddot{\xi}_0 + n\dot{\xi}_0 + c(1+ih)\xi_0 = m_0 e\omega^2\cos\omega t,$$

$$m\ddot{\eta}_0 + n\dot{\eta}_0 + c(1+ih)\eta_0 = m_0 e\omega^2\sin\omega t, \qquad (2)$$

$$A\ddot{\alpha}_0 + H\dot{\beta}_0 + n_1\dot{\alpha}_0 + c_1(1+ih)\alpha_0 = (A-C)\omega^2\delta\cos(\omega t-\gamma),$$

$$A\ddot{\beta}_0 - H\dot{\alpha}_0 + n_1\dot{\beta}_0 + c_1(1+ih)\beta_0 = (A-C)\omega^2\delta\sin(\omega t-\gamma).$$

Тут n та n_1 – коефіцієнти в'зкого зовнішнього тертя, $c(1+ih)$, $c_1(1+ih)$ -- комплексні жорсткості опор [4], введені для опису внутрішнього тертя, $\omega = \dot{\varphi}(t)$ -- кутова швидкість власного обертання ротора.



а)

б)

Рис.1. Статичний *а*) та динамічний *б*) дисбаланси ротора визначаються ексцентриситетом центра мас *e*, кутом перекосу δ та кутом ε, який задає орієнтацію площини перекосу.

Для спрощення опису руху ротора перейдемо до комплексних координат

$$\Phi_0 = \xi_0 + i\eta_0, \ \Phi_1 = \alpha_0 + i\beta_0 \ .$$

У комплексних координатах рівняння (2) записуються так:

$$m\ddot{\Phi}_0 + n_0\dot{\Phi}_0 + c(1+ih)\Phi_0 = me\omega^2 \mathrm{e}^{i(\omega t+\gamma_2)}, \quad (3)$$

$$A\ddot{\Phi}_1 - iH\dot{\Phi}_1 + n_1\dot{\Phi}_1 + c_1(1+ih)\Phi_1 = (A-C)\omega^2\delta \mathrm{e}^{i(\omega t-\gamma_1)},$$

де фазові зсуви $\gamma_1 = \varepsilon + \psi_1$, $\gamma_2 = \varepsilon + \psi_2$ виникають під дією зовнішнього та внутрішнього тертя, $(A - C)$ – різниця осьових моментів інерції

У роботі обмежимось аналізом руху довгого ротора $(A - C) > 0$.

Представимо частинні розв'язки рівнянь (3), які описують вимушені прецесії ротора, у вигляді

$$\Phi_0 = B_0 \mathrm{e}^{i(\omega t+\psi_2)}, \ \Phi_1 = B_1 \mathrm{e}^{i(\omega t-\varepsilon+\psi_1)}.$$

Для визначення амплітуд вимушених прецесій осі обертання B_0 і B_1 дістанемо рівняння

$$B_0\left(-m\omega^2 + i(n\omega + ch) + c\right) = em\omega^2 \mathrm{e}^{-i\psi_2}, \quad (4)$$

$$B_1\left(-(A+C)\omega^2 + i\left(n_1\omega + c_1h\right) + c_1\right) = (A-C)\delta\omega^2 \mathrm{e}^{-i\psi_1}$$

Дійсні та уявні частини рівнянь (4) мають вигляд

$$B_0(\omega_2^2 - \omega^2) = e\omega^2 \cos\psi_2,$$

$$B_1(c_1 - (A+C)\omega^2) = (A-C)\delta\omega^2\cos\psi_1,$$

$$B_0(n\omega + \omega_2^2 h) = -e\omega^2 \sin\psi_2, \quad (5)$$

$$B_1(n_1\omega + h_1\omega^2) = -(A-C)\delta\omega^2\sin\psi_1.$$

Зсуви фаз ψ_1 та ψ_2 визначаються формулами

$$\mathrm{tg}\psi_2 = -\frac{n\omega + \omega_2^2 h}{\omega_2^2 - \omega^2}, \ tg\psi_2 = -\frac{n_1\omega + \omega_1^2 h}{c_1 - (A+C)\omega^2}. \quad (6)$$

З рівнянь (4) для амплітуд циліндричної та конічної прецесій отримаємо вирази

$$B_0(\omega) = \frac{e\omega^2}{\left(\omega_2^2 - \omega^2\right) + i\left(n\omega + \omega_2^2 h\right)} \mathrm{e}^{-i\psi_2} \quad (7)$$

$$B_1(\omega) = \frac{(A-C)\delta\omega^2}{-(A+C)\omega^2 + c_1 + i\left(n_1\omega + c_1h\right)} \mathrm{e}^{-i\psi_1}.$$

Власні частоти прецесії обчислюються за формулами

$$\omega_2^2 = \frac{c}{m}, \ \omega_1^2 = \frac{c_1}{A+C}.$$

Представимо формули (7) у вигляді

$$B_0(\omega) = e\omega^2 \frac{\left(\omega_2^2 - \omega^2\right) - i(n\omega + \omega_2^2 h)}{\left(\omega_2^2 - \omega^2\right)^2 + \left(n\omega + \omega_2^2 h\right)^2} \cos\psi_2, \quad (8)$$

$$B_1(\omega) = \frac{(A-C)\delta\omega^2\left[\left(\omega_1^2 - \omega^2\right) - i(\tilde{n}_1\omega + \omega_1^2 h)\right]}{(A+C)\left(\left(\omega_1^2 - \omega^2\right)^2 + i\left(\tilde{n}_1\omega + \omega_1^2 h\right)^2\right)} \cos\psi_1.$$

Тут $\tilde{n}_1 = \dfrac{n_1}{A+C}$.

Дійсні частини рівнянь (8) описують модулі амплітуд прецесій – уявні декременти. На рис.2 зображені амплітудні криві прецесій та перебігів самоцентрування роторів.

Для резонансних значень швидкостей власного обертання ротора $\omega_{рез}^2 = \omega_0^2$ та $\omega_{рез}^2 = \omega_1^2$ резонансні піки набувають таких значень

$$B_0^{рез} = \frac{e\omega_2^2}{n + \omega_2 h}, \quad B_1^{рез} = \frac{A-C}{A+C}\frac{\omega_1^2\delta}{n_1 + \omega_1 h}. \quad (9)$$

При високих закритичних швидкостях демпфуючий фактор зовнішнього тертя нівелюється, а внутрішнє залишається незмінним.

Для зсувів фаз ψ_1 та ψ_2 при закритичних значеннях ω^2 мають місце такі оцінки $\psi_2 \to O\left(\dfrac{1}{\omega}\right)$, $\psi_1 \to O\left(\dfrac{1}{\omega}\right)$.

На рис.2 зображені резонансні криві циліндричних та конічних прецесій та процеси самоцентрування роторів, побудовані за розв'язками (9).

Зі співвідношень (1) амплітуди відповідних прецесій головної центральної осі інерції визначаються такими рівняннями

$$B_{0C}(\omega) = B_0(\omega) + e, \quad B_{01} = B_1(\omega) + \delta. \quad (10)$$

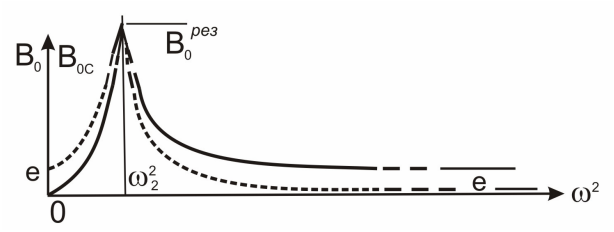
Рівняння (10) описують резонансні процеси та самоцентрування осі обертання ротора. При низьких початкових і високих закритичних швидкостях власного обертання ω амплітуди прецесій набувають таких значень

$$B_0(0) = 0, \ B_0(\omega \to \infty) \to -e,$$

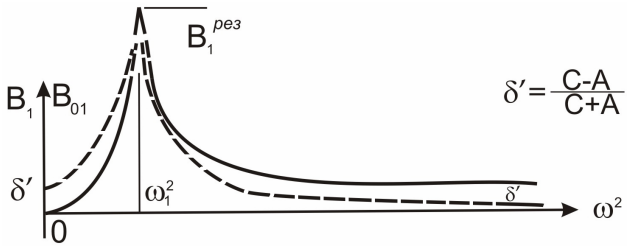
$$B_1(0) = 0, B_1(\omega \to \infty) \to -\delta. \quad (11)$$

$$B_{0C}(0) = e, \quad B_{01}(0) = \delta,$$

$$B_{0C}(\omega \to \infty) = 0, \quad B_{01}(\omega \to \infty) = 0.$$



а)



б)

Рис.2. Прецесії та самоцентрування ротора на пружних опорах за наявності внутрішнього та зовнішнього тертя. Суцільні криві - амплітуда прецесії осі власного обертання; штрихові криві - амплітуда прецесії головної центральної осі інерції (*а*) циліндричні прецесії, *б*) конічні прецесії).

При високих швидкостях власного обертання ротора $(\omega \to \infty)$ координати головної центральної осі інерції прямують до нульових значень, а вісь обертання здійснює циліндричну та конічну прецесії навколо головної центральної осі інерції. Це явище дістало назву «самоцентрування роторів при високих швидкостях власного обертання» [5].

Отримані результати можуть бути використані для вибору робочих режимів промислових центрифуг [3].

Висновки

Встановлено такі закономірності перебігів цилінтричних та конічних прецесій та самоцентрування роторів за наявності дисбалансів та дисипації енергії.

1. При дисбалансному збудженні висоти резонансних піків прецесій пропорційні резонансним частотам та обернено пропорційні декрементам. При високих частотах збудження роль внутрішнього тертя перебігах резонансів зводиться нанівець, а зовнішнє тертя у формуванні декрементів залишається незмінним.

2. Отримано значення резонансних піків циліндричної та конічної прецесій.

3. При високих закритичних швидкостях реалізується самоцентрування роторів: амплітуди прецесійних рухів головної центральної осі інерції прямують до нуля, а амплітуди рухів осі обертання – до від'ємних значень ексцентриситетів та перекосів незалежно від рівня внутрішніх та зовнішніх дисипативних сил.

4. Для сферичних роторів (A=C) вимушені прецесії не збуджуються і самоцентрування ротора відсутнє.

Список використаних джерел

1. *Філімоніхін Г. Б.* Зрівноваження і віброзахист роторів автобалансирами з твердими коригувальними вантажами / Філімоніхін Г. Б. – Кіровоград: КНТУ, 2004. – 352 с.
2. *Кельзон А. С.* Динамика роторов в упругих опорах / Кельзон А. С., Циманский Ю. П., Яковлев В. И. – М.: Наука, 1982. – 278 с.
3. *Лукьяненко В.М.* Промышленные центрифуги / Лукьяненко В.М., Таранец А.В. – М.: Химия, 1974. – 376 с.
4. *Нашиф А.* Демпфирование колебаний / Нашиф А., Джоунс Д., Хендерсон Дж. – М.: Мир, 1988. – 448 с.
5. *Горошко О. О., Лебедєва І.В.* Теорія гіроскопічних систем : Навчальний посібник / – К.: Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет", 2013. – 131 с.

References

1. FILIMONICHIN, G.B., (2004) *Zrivnovazhennya i vibrozahyst rotoriv avtobalansyramy z tverdymy koryguval'nymy vantazhamy*. Kirovograd: KNTU.
2. KEL'ZON, A.S., TSIMANSKIY, U.P. and YAKOVLEV, V.I. (1982) *Dinamika rotorov v uprugikh oporakh*. M. : Nauka.
3. LUKIYANENKO, V.M. and TARANETS, A.V. (1974) *Promyshlennye tsentrifugi.* M.: Khimiya.
4. NASHIF, A., JOHNES, D., HENDERSON J.(1988) *Vibration Damping* – N.Y.:J. Wiley & Sons,.
5. GOROSHKO, O.O. and LEBEDYEVA, I.V. (2013) *Teoriya giroskopichnykh system*. Kiev: KU.

Надійшла до редколегії 28.11. 2014

УДК 533.63, 534.23

Лук'янов Петро В.[1], к.ф.-м.н., ст.н.с.

Генерація шуму близької взаємодії лопаті і вихору при косому обтіканні потоком

[1] Інститут гідромеханіки НАН України, 03680,м. Київ, вул. Желябова,8/4.
e-mail: Petr_Lukianov@bigmir.net

Lukianov Petr V.[1], Ph.D., Senior Researcher

Sound generation by blade and vortex near interaction at oblique angle of flow streamlining

[1] Institute of Hydromechanics NAS of Ukraine, 03680, Kyiv, Zhelyabova st. 8/4
e-mail: Petr_Lukianov@bigmir.net

Розв'язано задачу генерації шуму близької взаємодії вихорів Тейлора і лопаті ротора гелікоптера (BVI- шум) при косому обтіканні її потоком. При цьому запропоновано нову модель виділення звуку з нестаціонарної стисливої течії. Розрахункові дані виявили існування двох серій піків малих збурень густини – зон активної генерації звуку. Варіювання параметрів задачі показало істотну трансформацію енергії першої серії піків в енергію другої серії піків, яка залежить від кута обдування лопаті і швидкості потоку, що набігає на лопать. Процес взаємодії лопаті і вихорів також характеризується генерацією більш високих гармонік, що відображається у частотному розподілу спектру BVI- шуму.

Ключові слова: генерація звуку, лопать гелікоптера, вихор.

A problem of noise generation by Taylor's vortex and helicopter's rotor blade near interaction (BVI-noise) has been solved for the oblique angle streamlining of the blade by flux. For this problem solving a new model of sound extraction out off non-stationary compressible flow has been used. On the base of the model close system of two equations of aero-acoustics is offered. The numerical data has showed existence two types of the density disturbances peaks on the blade shape-areas of the active sound generation. Essential energy transformation from the first type of peaks into energy of the second ones takes place dependently on value of angle between blade and flux velocity: for angle of attack increasing generated noise is transforming from rotational noise to BVI-noise. This process of the blade and vortex interaction is also characterized by high harmonics realization that are shown in the frequency spectrum distribution of the BVI noise: for the harmonic, that are situated near 700Hz, noise level essentially distinguish from neighbors ones in this frequency region.

Key Words: sound generation, helicopter's blade, vortex.

Статтю представив д.ф.-м.н., проф.Жук Я.О.

1. **Вступ**

Проектування роторів гелікоптерів із низьким рівнем шуму пов'язано з вивченням шуму взаємодії лопаті і вихору (BVI- шуму). Даний вид шуму є однією із складових загального шуму обертання лопаті і домінує при маневрах гелікоптера. Присутні в полі течії вихори приймають безпосередню участь в процесі генерації BVI- шуму під час розвороту, зниження гелікоптеру.

Сучасні математичні моделі описання BVI-шуму [1] побудовані на чисельному моделюванні процесу взаємодії заданих відомих розподілів вихорів (Тейлора, Скулли, Ватістаса) з лопаттю за допомогою методів CFD. Але далеко не всі режими течії вже досліджені: генерації шуми при косому обдуванні присвячено лише декілька робот. Розрахункові дані свідчать про певну відмінність впливу прямого та косого обтікання лопаті на генерацію BVI- шуму.

На цей час задача генерації шуму обертання при косому обтіканні лопаті розглядалась у потенціальному наближенні [2],[3]. У роботі [2] встановлено залежність рівня шуму, що генерується, форму розподілу звукового тиску. Вони суттєво відрізняються від випадку прямого обтікання лопаті. В роботі [3] було розглянуто

© Петро В. Лук'янов 2014

взаємодію вихору, що розташований на відстані, більшій за 1,5 безрозмірного радіуса вихору. На відстані меншій від 1,5 радіуса вихору - взаємодія ізольованого вихору з течією навколо лопаті стає суттєвою, і тому задачу вже не можна розв'язувати в межах потенціального наближення. Якщо поле течії розглядати завихреним, тоді воно буде мати інші параметри (швидкість, тиск). Отже, і BVI- шум, що генерується істотно завихреною течією, також буде відрізнятись від спрощених моделей взаємодії лопаті та вихорів в потенціальному наближенні. Тому нижче пропонується постановка та розв'язання наступної задачі: вивчити генерацію шуму взаємодії лопаті і вихорів Тейлора за умови розташування їх під певним кутом до потоку, що набігає на лопать.

2.Мета роботи

Розв'язати задачу генерації BVI- шуму з використанням непотенціальної моделі течії. Виконати порівняльний аналіз отриманих розрахункових даних з даними розрахунку відповідної задачі в потенціальній постановці без урахування вихорів.

3.Постановка задачі

Нехай є лопать прямокутної форми вздовж розмаху, та параболічної форми в перерізі. Лопать розташована під кутом ψ до потоку, що набігає на лопать. Вздовж за розмахом лопаті розподілені вихори Тейлора.

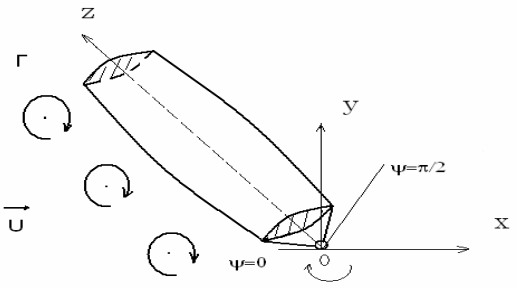


Рис.1. Косе обдування лопаті завихреним потоком

В прямокутній Декартові системі координат *Oxyz* ці вихори розташовані вздовж осі z з розподілом швидкості за законом:

$$v_\theta = v_{\theta\max}\frac{r}{Rc}\cdot e^{(1-(r/R_c)^2)}\,. \qquad (1)$$

Припустимо, що кінці лопаті заокруглені, а потік їх плавно обтікає. Кінцеві ефекти будуть враховані в подальшому дослідженні для більш складної задачі, в якій розглядається варіація форми кінця лопаті з метою мінімізації впливу кінцевих ефектів на BVI- шум, що генерується.

Для визначення характеристик основної течії скористаємось моделлю ідеальної стисливої рідини, оскільки, при обтіканні лопаті реалізується режим течії з великими числами Рейнольдця, що дозволяє нехтувати ефектами в'язкості. Система рівнянь, яка описує рух ідеальної стисливої рідини, має вигляд:

рівняння Ейлера -

$$\rho\frac{d\bar{v}}{dt} = -\nabla p\,, \qquad (2)$$

рівняння нерозривності -

$$div(\rho\bar{v}) + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0\,. \qquad (3)$$

На поверхні лопаті задається умова непроникності:

$$\frac{\partial\bar{v}}{\partial\bar{n}} = 0\ . \qquad (4)$$

В результаті розв'язання задачі (2)-(4) будуть визначені характеристики основної течії, котрі використаємо для розв'язання акустичної частини задачі:

$$\frac{\partial^2\rho'}{\partial t^2} - a^2\Delta\rho' = div[\rho(\nabla(\vec{V}\nabla\varphi)) + \rho'(\nabla(\frac{\vec{V}^2}{2}) + \vec{V}\nabla\varphi) + \\ +\rho\cdot(\nabla\times\vec{V})\times\nabla\varphi + \rho'\cdot(\nabla\times\vec{V})\times\vec{V}] + div[\vec{V}\cdot div(\rho\nabla\varphi + \\ +\rho'\vec{V})] + div[\nabla\varphi div\rho\vec{V})] + \nabla a^2\cdot\nabla\rho' \qquad (5)$$

$$\frac{\partial\rho'}{\partial t} + \rho\nabla^2\varphi + \nabla\varphi\cdot\nabla\rho + \rho' div\vec{V} + \vec{V}\cdot\nabla\rho' = 0 \qquad (6)$$

Тут ρ',φ - малі збурення густини і звуковий потенціал відповідно. В початковий момент часу $\rho',\varphi_{|t=0} = 0$. Оскільки звукові збурення течії безпосередньо генеруються основним потоком, то вони повинні разом з ним задовольняти граничну умову (4).

4.Метод розв'язання задачі

Для розв'язання загальної задачі було використано чисельно-аналітичний підхід, що дозволяє визначити як характеристики основної

течії, так і акустичні змінні ρ',φ. Числова реалізація метода виконана на основі схеми, котру було використано при розгляді потенціальної моделі течії [2],[4],[5]. Розрахунок проводився у безрозмірних координатах, нормованих на розміри лопаті. Тиск та швидкість течії нормувались на параметри потоку, що набігає на лопать з нескінченності - U_∞,ρ_∞. Кількість точок на розрахунковій сітці у напрямку розмаху лопаті вибиралась менше, ніж у поперечному напрямку, де швидше відбувається нестаціонарний процес.

5. Аналіз ближнього поля

Розглянемо лопать з наступними параметрами : $\delta = 0.1, R = 3.0м, c = 0.3м$. Швидкісний режим потоку відповідає числам $M = 0.2;0.4$, а вихори Тейлора знаходяться на відстанях $r_c = 1.0;3.0$. Для вивчення зародження (генерації) звуку у ближньому полі зручніше розглянути безрозмірну пульсацію густини $\bar{\rho}'$ (на рис.2,3,4 просто ρ'), яка є малим збуренням безрозмірної густини основної течії $\bar{\rho} = \rho / \rho_\infty$.

Розрахунок пульсацій густини у ближньому полі виявив наступні закономірності. При порівняльно малих числах Маху $M = 0.2$ та куті обдуванні лопаті потоком $\alpha = 30^\circ$ (рис.2a) спостерігаються дві чітко виражені області генерації звуку. Перша з них, більш рівномірно розподілена вздовж за розмахом лопаті. Вона розташована в тому самому місці, що і в задачі у потенціальному наближенні [2] у відсутності вихорів у течії. Друга серія піків безпосередньо зв'язана з неоднорідністю течії, що набігає на лопать: в ній присутні розподілені вздовж за розмахом лопаті вихори Тейлора. Цей факт, а також варіація кута обдування лопаті, виявила різні за рівнем і формою чотири зони пульсацій ρ', котрі плавно переходять одна в одну.

Із збільшенням кута $\alpha = 45^\circ$ (рис.2b) здійснюється помітна трансформація енергії сусідніх піків: у першій серії піки розподілені вже не так плавно, як у випадку $\alpha = 30^\circ$. Теж саме спостерігається для другої серії піків: два з чотирьох піків залишаються плавними, а решта два піки – різко вираженими. При цьому амплітуди другої серії піків, у центрі лопаті, істотно зросли в порівнянні з амплітудами першої серії. Цей факт був раніше виявлений у потенціальному наближенні [2], і за рахунок присутності у течії вихорів, став ще більш окресленим.

При збільшенні швидкості обдування лопаті, $M = 0,4; \alpha = 30^\circ$ (рис.3a) , перерозподіл енергії між першою та другою серіями піків стає більш істотним. Перша серія піків у декілька разів менше рівня піків другої серії, котрі стали більш різкими. Особливо це проявилось у випадку $M = 0,4; \alpha = 45^\circ$ (рис.3b), де помітна істотна перевага двох піків другої серії над рештою області генерації звука.

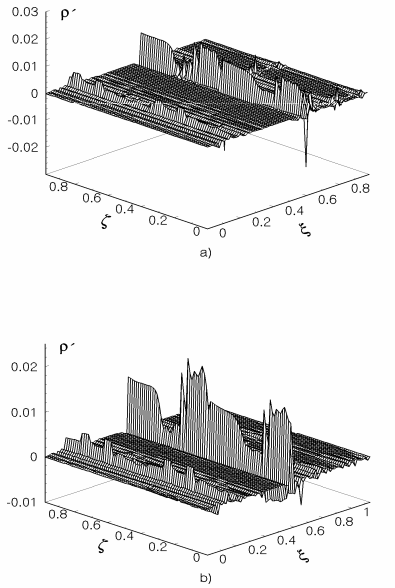


Рис.2. Розподіл пульсацій густини ρ'

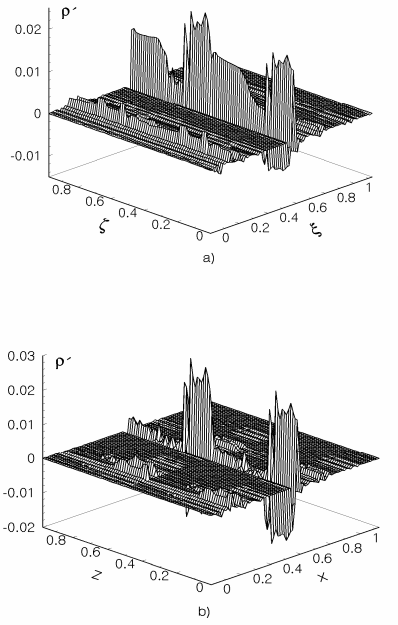


Рис.3. Розподіл пульсацій густини ρ'

6.Аналіз дальнього поля

Використовуючи розрахункові дані ближнього поля, тобто збурення густини $\overline{\rho}'$ та звуковий потенціал φ разом з їх похідними, можна виконати розрахунок дальнього звукового поля. Обчислимо звуковий потенціал в дальньому полі за формулою [2]:

$$\varphi(x,t_1)=\frac{-M_1^2}{4\pi}\left(\int_S[\frac{F_1}{R}]_t dS_x+\int_S[F_2]_t dS\right) \quad (7),$$

де

$$F_1=\rho[(\nabla\varphi\cdot\nabla)\overline{v}+(\overline{v}\cdot\nabla)\cdot\nabla\varphi]+\rho'(\overline{v}\cdot\nabla)\overline{v}+$$
$$+\overline{v}\cdot div(\rho\nabla\varphi+\rho'\overline{v})+\nabla\varphi div(\rho\overline{v}),$$

$$F_2=\frac{1}{R}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial n}+\frac{1}{Ra_\infty}\frac{\partial R}{\partial n}\frac{\partial\varphi}{\partial t}-\varphi\frac{\partial(1/R)}{\partial n}.$$

На рис.5 зображено рівні розподілу звукового тиску (в Дб по відношенню до $2\cdot10^{-5}\,Па$). Максимум рівня шуму, що генерується, розташований на кінці лопаті і співпадає з максимумом швидкості потоку, що набігає на лопать. При цьому абсолютний максимум його Розташований приблизно посередині поперечного перерізу лопаті, що співпадає з другою серією піків (рис. 2a,b). Крім того, оскільки для кута $\alpha=45^\circ$ друга серія піків (рис.2b) крутіша, ніж для кута $\alpha=30^\circ$ (рис.2a), то й рівень шуму L для неї вищий (рис.5b).

Цікавим моментом, на котрий слід звернути увагу при вивченні дальнього поля, є швидкість затухання нелінійних ефектів звукової хвилі, що генерується, в залежності від відстані до лопаті. Розрахунки виявили, що при відстані, що дорівнює трьом розмірам хорди ($y=1,0м$,рис.5c), розподіл рівня звукового тиску вже близький за формою до розподілу у плоскій хвилі. При збільшенні числа Маху $M=0.4$ загальний рівень шуму зріс приблизно на 6Дб, а його розподіл по поверхні став більш плавний.

Що стосується частотного розподілу в спектрі шуму, що генерується, то його нульова гармоніка відповідає мінімуму рівня шуму на поверхні лопаті, а її значення коливається в межах $65\div75\,Дб$ в залежності від параметрів задачі. Рівень першої, основної гармоніки, відповідає максимуму поверхні рівня шуму L. Друга та вищі гармоніки істотно нижчі за рівнем основних гармонік шуму. Із зростанням частоти рівень гармонік спадає, залишаючись в межах 10Дб. Це

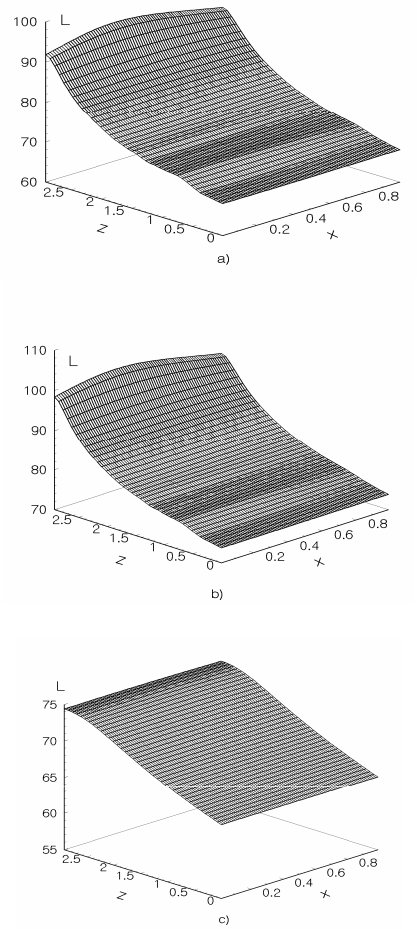


Рис.4. Рівень звукового тиску, M=0.2

свідчить про низькочастотний характер шуму лопаті гелікоптера. І лише в області частоти $f\approx700\,Гц$ спостерігається зона локального максимуму в частотному спектрі. Це є результатом взаємодії вихору та лопаті, тому що вихрова складова шуму проявляється для більш високих частот.

Порівняльний аналіз отриманих розрахункових даних можна виконати якісно, оскільки в такій постановці задачу ще ніхто не розв'язував. Розрахункові дані як ближнього так і дальнього поля, зміна густини і тиску, по формі подібні до даних, отримано за потенціальною моделлю [6],[7],[8] та експериментальними даними [9],[10]. Рівень шуму в частотному спектрі основних гармонік близький до експериментальних даних [11],[12].

7. **Висновки**

1.Встановлено закономірності поведінки акустичного ближнього та дальнього звукових полів для різних кутів обдування лопаті потоком. Зокрема, виявлено суттєву залежність характеру шуму, що генерується, від кута обдування та його розподіл між двома чітко вираженими областями.

2.Виконано порівняльний аналіз отриманих числових даних з даними задачі в потенціальному наближенні. Цей аналіз виявив як певну подібність, так і деяку відмінність в розрахункових даних обох задач, яка пояснюється присутністю в течії вихорів.

3.Частотний розподіл спектра звукового тиску показав, що на частоті $f \approx 700 Гц$ відбувається генерація звука взаємодії лопаті і вихорів, яку не спостерігалось у випадку безвихрового обтікання лопаті.

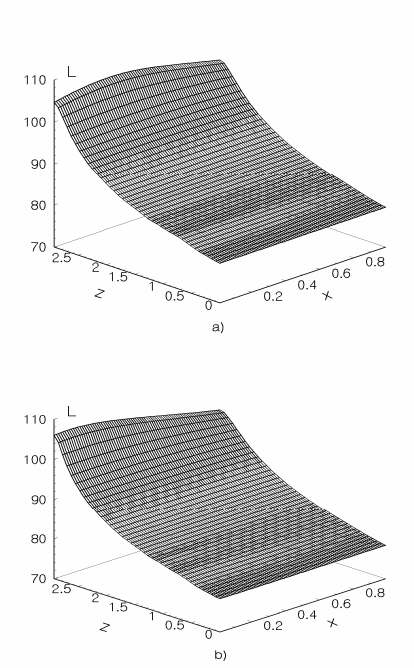
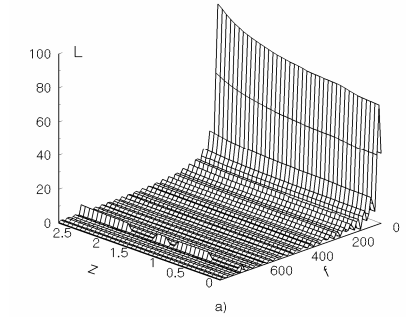


Рис.5. Рівень звукового тиску, M=0.4



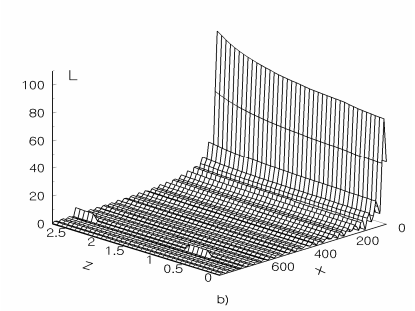
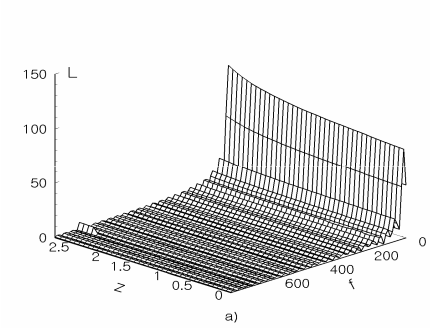


Рис.6. Частотний спектр шуму, що генерується



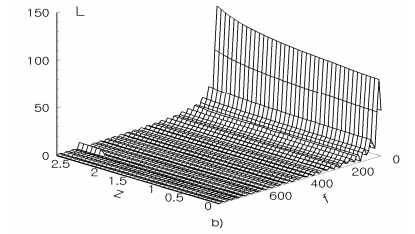


Рис.7. Частотний спектр шуму, що генерується

Список використаних джерел

1. *Alasdair Thom*. High-Resolution Simulation of Parallel Blade-Vortex Interactions /Alasdair Thom and Karthikeyan Duraisamy // AIAA Journal.-2010, -v.48, No10.-p.2313-2324.
2. *Лук'янов Петро В.* Генерація звуку лопаттю гелікоптера про косому обдуванні потоком / Петро В. Лук'янов // Вісник київського національного університету ім. Тараса Шевченка. Серія: фізико- математичні науки.-2011. -№4.-С.91-94.
3. *Лук'янов Петро В.* Шум взаємодії вихору і лопаті гелікоптера / Петро В. Лук'янов // Наукові вісті КПІ. Серія: фізико-математичні науки.- 2013. -№3.-С.132-136.
4. *Лукьянов П.В.* Об одном численно-аналитическом подходе к решению задачи генерации звука тонким крылом. Часть I. Общая схема применения для плоской стационарной задачи / П.В.Лукьянов // Акустичний вісник.-2011.-№3(14).-С.46-52.

5. *Лукьянов П.В*. Об одном численно-аналитическом подходе к решению задачи генерации звука тонким крылом. Часть II. Схема применения для нестационарных задач / П.В. Лукьянов // Акустичний вісник.-2012-№3(15).-С.45-52.
6. *Lyrintzis A.S.* Far Field Noise of Transonic Blade-Vortex Interactions / A.S. Lyrintzis and A.R.George // American Helicopter Society Journal.-1989-№7.-P.30-39.
7. *Lyrintzis A.S.* Study of the Noise Mechanisms of Transonic Blade-Vortex Interactions / A.S. Lyrintzis and Y. Xue // AIAA Journal.-1991.-№10,v.29.-P.1562-1572.
8. *Xue Y.* Rotating Kirchhoff Method for Three-Dimensional Transonic Blade-Vortex Interaction Hover Noise. / Y. Xue and A.S. Lyrintzis //AIAA-Journal.-1994.-№7,vol.32.-P.1350-1359.
9. *Yamauchi Gloria K.* Flight Measurements of blade-vortex interaction noise including comparision with full-scale wind tunnel data / Gloria K.Yamauchi,David B.Signor,Michael E.Watta, Francisco J.Hernadez, and Philip le Masurier // NASA –Tm-112385 (and also AHS 49th Annual Forum, May 19-21,1993,St.Louis,Missuri,USA).
10. *JanakiRam Ram D.* Blade-Vortex Interaction Noise Characteristics of a Full-Scale Active Flap Rotor / Ram D. JanakiRam,Ben W.Sim, Cahit Kitaplioglu and Friedrich K. Straub. // American Helicopter Society 65th Annual Forum, May 27-29,2009Grapevine, Texas.
11. *Мунин А.Г.*Авиационная акустика/ *А.Г.Мунина*. - Москва. :Машиностроение, 1986.-244с.
12. *Голдштейн М.И.* Аэроакустика/ *М.И. Голдштейн*-Москва: Машиностроение, 1981.-296с.

References

1. *Alasdair Thom*. High-Resolution Simulation of Parallel Blade-Vortex Interactions /Alasdair Thom and Karthikeyan Duraisamy // AIAA Journal.-2010, -v.48, No10.-p.2313-2324.
2. LUKIANOV PETRO V. (2011) Sound generation by helicopter's blade at oblique angle of flow blow. *Bulletin of Kyiv national university named after T.Shevchenka, ser.: physics&mathematics*.N4.p.91-94.
3. LUKIANOV PETRO V. (2013) Helicopter Rotor Blade-Vortex Interaction Noise. *Research Bulletin of the National University of Ukraine "Kyiv Politechnic Institute"*. N4.p.132-136.
4. LUKIANOV PETRO V. (2011). On one numerically-analytical approach for solving of the sound generation problem for thin wing. Part I. General scheme approach using for two-dimensional stationary problem. *Acoustic bulletin.* N3.p.46-52.
5. LUKIANOV PETRO V. (2012). On one numerically-analytical approach for solving of the sound generation problem for thin wing. Part II. A scheme approach using for non-stationary problem. *Acoustic bulletin.* N3.p.45-52.
6. LYRINTZIS A.S.,GEORGE A.R.(1989) Far Field Noise of Transonic Blade-Vortex Interactions. // *American Helicopter Society Journal,* July 1989, pp. 30-39.
7. LYRINTZIS A.S., XUE Y. (1991) Study of the Noise Mechanisms of Transonic Blade-Vortex Interactions. *AIAA Journal*.v.29, N10.p1562-1572.
8. XUE Y., . LYRINTZIS A.S. (1994) Rotating Kirchhoff Method for Three-Dimensional Transonic Blade-Vortex Interaction Hover Noise.*AIAA-Journal*.vol.32, N7, p.1350-1359.
9. GLORIA K., YAMAUCHI D., SIGNOR B.,WATTA M.E.,HERMADEZ F.J.,MAUSURIER P.(1993) Flight Measurements of blade-vortex interaction noise including comparision with full-scale wind tunnel data. *NASA –Tm-112385 (and also AHS 49th Annual Forum*, St.Louis, Missuri, May 19-21.
10. JANAKIRAM R.D., SIM B.W., KITAPLIOGLU C.,STRAUB F.K.(2009) Blade-Vortex Interaction Noise Characteristics of a Full-Scale Active Flap Rotor. *American Helicopter Society 65th Annual Forum*, Grapevine, Texas, May 27-29.
11. MUNIN A.G. (1986) *Aviation acoustics*.-Moskva.: Mashinary, p.244.
12. GOLDSTEIN M.E. (1976) *Aeroacoustics.* McGRAW-HILL International Book Company.

Надійшла до редколегії 22.04.14

УДК 532.5

В. С. Малюга[1], к. ф.-м. н., с. н. с.

Характеристики звукового поля, що генерується при обтіканні сфери.

[1] Інститут гідромеханіки НАН України, 03680, м. Київ, вул. Желябова, 8/4,
e-mail: v_s_malyuga@ukr.net

V. S. Malyuga[1], PhD (Phys.-Math.), sen. res.

Characteristics of aerodynamic sound field generated by the flow past a sphere.

[1] Institute of hydromechanics, 03680, Kyiv, Zhelyabova str., 8/4,
e-mail: v_s_malyuga@ukr.net

Розглядається задача випромінювання звуку при обтіканні сфери потоком в'язкої рідини в широкому діапазоні чисел Рейнольдса. Метод розв'язання задачі базується на припущеннях, що дозволяють окремо розв'язувати гідродинамічну і акустичну задачі. Гідродинамічна задача розглядалась в попередніх роботах. Дана стаття присвячена розрахунку звукового поля, що породжується такою течією.

Ключові слова: обтікання сфери, зрив вихорів, LES, турбулентний слід, вихровий звук.

The problem of sound generation by the flow of viscous fluid past a sphere is studied numerically in a wide range of Reynolds number. The method of problem solution is based on some assumptions allowing us to study the hydrodynamic and acoustic problems separately. The hydrodynamic problem was considered in previous works. The present paper addresses evaluation of the sound field generated by the flow. The basic sound field characteristics are calculated. The directional diagrams are built in a wide range of Reynolds number. It is shown that the axis of the directional diagram is not perpendicular to the flow direction as it was observed in the case of flow past a circular cylinder. In the flow past a sphere the axis of the directional diagram is situated at some angle to the flow direction because in this three-dimensional case the vortices alternately shedding behind the sphere are not symmetrical. The directional diagram for the second harmonic of the generated sound field has much more complicated form than in the problem of flow past a cylinder. The acoustic energy is radiated both in the lateral direction and in the flow direction.

Key Words: flow past sphere, vortex shedding, LES, turbulent wake, vortex sound.

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Жук Я.О.

Вступ

Явищам генерації звуку при обтіканні потоком твердих тіл було присвячено велику кількість робіт, починаючи з піонерських праць Струхаля, Релея, Річардсона, Крюгера, Шмідке (див. огляд [1]). Ця тема не втрачає актуальності також у наші дні. Однак слід відзначити, що більшість робіт, в котрих вивчались механізми генерації звуку потоком, що набігає на тіло, розглядали двовимірні задачі, такі як, наприклад, генерація Еолових тонів при обтіканні циліндра [3]. В наші дні розвиток технологій паралельних обчислень дає можливість чисельно розв'язувати складні тривимірні задачі на кластерних суперкомп'ютерах. Дана стаття присвячена дослідженню звукового поля, що генерується при обтіканні потоком твердої сфери.

Метод розв'язання задачі про генерацію звуку потоком було запропоновано в [3] і верифіковано на задачі про генерацію еолових тонів. В основу цього методу були покладені два принципових припущення:

- потужність звуку, утвореного потоком, істотно менше потужності самого потоку
- утворений потоком звук не впливає на характер самого потоку.

З урахуванням цих припущень задачу визначення акустичних характеристик звукового поля при обтіканні твердої сфери можна розділити на два етапи. На першому етапі розглядається гідродинамічна задача. З цією метою в [5] чисельно моделювалось обтікання сфери. На другому етапі розглядається акустична задача. При цьому розподіл тиску на поверхні сфери приймається за граничну умову при постановці акустичної задачі. Тоді задача про визначення звукового поля, що генерується при обтіканні сфери, описується добре відомим розв'язком для сферичного випромінювача [2].

© В.С. Малюга, 2014

Особливості обтікання сфери потоком в'язкої рідини

Задача обтікання твердої сфери потоком в'язкої нестисливої ньютонівської рідини було детально розглянуто в [5]. Задача чисельно розв'язувалась методом скінченних об'ємів. Для дискретизації застосовувались виключно схеми другого порядку, детально описані в [4]. При розрахунках використовувались бібліотеки тулбокса з відкритим кодом OpenFOAM. В даній роботі ми лише коротко наводимо отримані в [5] результати.

При числах Рейнольдса Re < 20 течія являє собою безвідривну ламінарну течію з гладкими незамкнутими лініями течії. Течія за сферою ідентична течії перед сферою. При числах Рейнольдса вище 20 течія відокремлюється від сфери поблизу задньої точки і формує замкнутий рециркуляційний слід в формі осесиметричного вихрового кільця. По мірі зростання числа Рейнольдса довжина сліду зростає. Течія залишається осесиметричною і стаціонарною аж до Re ≈ 212. А в діапазоні чисел Рейнольдса 212 < Re < 275 течія залишається стаціонарною, однак більше не є осесиметричною. При переході через точку регулярної біфуркації при Re ≈ 212 в течії за сферою з'являються два вихрових «хвоста», що витягнуті вздовж потоку і мають рівну за модулем і протилежну за знаком інтенсивність.

Наступна точка переходу (Re ≈ 275) є точкою біфуркації Хопфа. При подальшому збільшенні числа Рейнольдса течія переходить з стаціонарного режиму в періодичний. Починається регулярне скидання вихрових петель. В цьому режимі течія зберігає симетрію відносно площини. На рис. 1 показана ізоповерхня другого інваріанта Q тензора градієнта швидкості при Re = 300, яка використовується багатьма авторами для ідентифікації вихорів. Цілком природно, що періодичний процес скидання вихорів спричинює періодичну варіацію сил, що діють на сферу. На рис. 2 представлено періодичну за часом варіацію коефіцієнта лобового опору C_d при Re = 300. При збільшенні числа Рейнольдса до 350 течія значно ускладнюється (рис. 3). Крива вже представляє собою суперпозицію декількох коливальних процесів. Коливання з більш високою частотою відповідають скиданню вихорів в сліді за сферою. А повільні коливання – коливанням самого струменя за сферою. На рис. 4 показано частотний спектр коливання C_d. Чітко видно два піки, причому другий пік відповідає періодичному скиданню вихорів.



Рис. 1. Ідентифікація вихорів, що зриваються зі сфери. Ізоповерхня Q; Re = 300

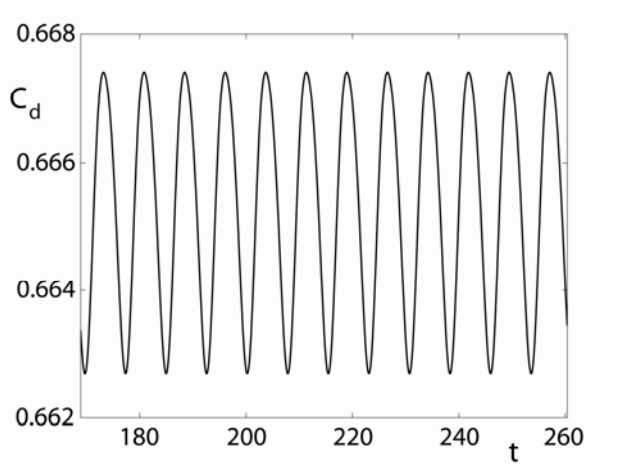


Рис. 2. Змінювання у часі коефіцієнта опору C_d при Re = 300.

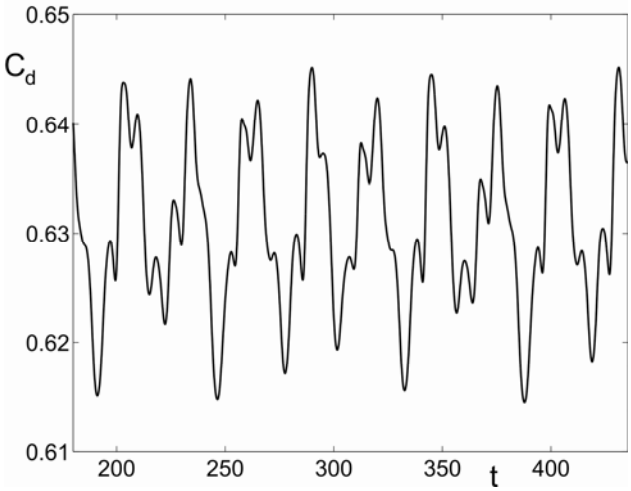


Рис. 3. Змінювання у часі коефіцієнта опору C_d; Re = 350.

У діапазоні чисел Рейнольдса 400 < Re < 1000 течія втрачає симетрію відносно площини, а кут відриву вихорів змінюється іррегулярним чином. На рис. 5 зображено ізоповерхню Q при Re = 500. Видно, що слід за сферою також

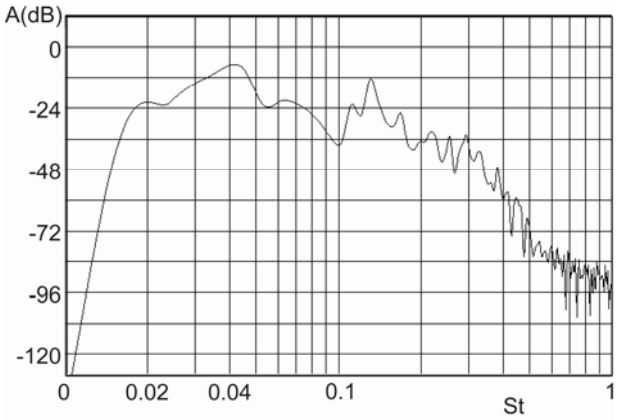


Рис. 4. Частотний спектр коливання коефіцієнта опору C_d; Re = 350.



Рис. 5. Ідентифікація вихорів, що зриваються зі сфери. Ізоповерхня Q; Re = 500



Рис. 6. Ідентифікація вихорів, що зриваються зі сфери. Ізоповерхня Q; Re = 10^4

складається з вихрових петель, але вони мають різну орієнтацію. Часовий спектр швидкості, що взято в декількох точках, тепер вже стає широкосмуговий. Хоча, як і раніше, спостерігається домінуючий пік при St = 0.167. Наступна зміна характеру течії спостерігається при Re > 800. В течії вже присутня не лише великомасштабна нестійкість в сліді (скидання вихорів), але й дрібномасштабна (Кельвіна-Гельмгольца).

Турбулентний режим течії має місце при Re > 1000. Ми проводили чисельні розрахунки для докритичного значення Re = 10^4. Картина течії показана на рис. 6. Видно, як перед екватором сфери відбувається відрив ламінарного примежового шару, який потім розпадається на окремі вихрові кільця. На відстані трохи більше діаметра вниз за потоком відбувається руйнування вихрових кілець і турбулізація струї.

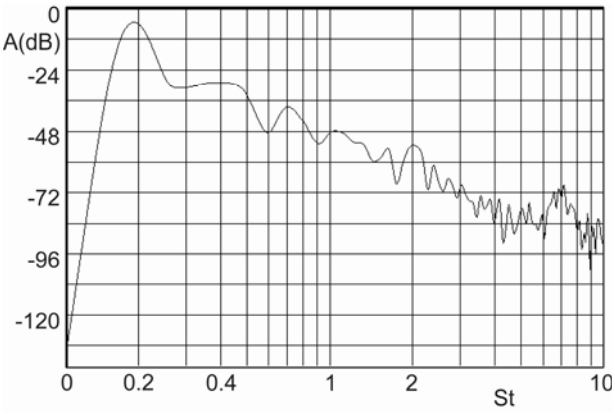


Рис. 7. Частотний спектр коефіцієнта опору C_d; Re = 10^4.

На рис. 7 наведено частотний спектр коефіцієнта опору C_d. Чітко видно домінуючу частоту 0.196, яка відповідає частоті зриву вихорів.

Постановка акустичної задачі і її розв'язок

З чисельного розв'язку відповідної задачі гідромеханіки ми маємо розподіл тиску на поверхні сфери радіуса a, яке періодично змінюється у часі. Такі пульсації тиску на поверхні сфери збуджують звукові коливання в оточуючому середовищі [1]. Тоді звукове поле поза сферою може бути знайдене з відповідної граничної задачі для хвильового рівняння. Гранична умова має вигляд:

$$p(r,\theta,\varphi;t)=\zeta(\theta,\varphi;t), \qquad \text{при} \quad r=d/2, \quad (1)$$

де (r,θ,φ) – сферичні координати з початком координат у центрі сфери, $\zeta(\theta,\varphi;t)$ – розподіл тиску на поверхні сфери, що утворюється потоком.

Оскільки функція $\zeta(\theta,\varphi;t)$, що задана на поверхні сфери, є періодичною з періодом T, розв'язок сформульованої крайової задачі може бути представлено у вигляді ряду Фурьє за часом:

$$p=\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-in\omega t}\, p_n(r,\theta,\varphi), \qquad (2)$$

де $\omega=2\pi/T=2\pi\,\mathrm{St}\,V/d$ – кутова частота, а $p_n(r,\theta,\varphi)$ може бути представлено у вигляді подвійного ряду:

$$p_n=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} h_l^{(1)}(k_n r)\,\mathrm{P}_l^m(\cos\theta)\times \\ \times\left[A_{lmn}\cos m\varphi+B_{lmn}\sin m\varphi\right], \qquad (3)$$

$$h_l^{(1)}(k_n r) = \sqrt{\frac{\pi}{2k_n r}}\,\mathrm{H}_{l+1/2}^{(1)}(k_n r)\,. \qquad (4)$$

Тут $k_n = n\omega/c$ – хвильове число, c – швидкість звуку в середовищі, $\mathrm{H}_s^{(1)}$ – функція Ханкеля першого роду, P_l^m – приєднана функція Лежандра першого роду.

Невідомі коефіцієнти визначаються з граничної умови (1). Отримаємо:

$$A_{lmn} = \frac{1}{(1+\delta_{m0})\pi T\, h_l^{(1)}(k_n a) N_{lm}} \int_0^T\int_0^\pi\int_0^{2\pi} \zeta(\theta,\varphi;t)\times \qquad (5)$$
$$\times\, \mathrm{P}_l^m(\cos\theta)\sin\theta\cos m\varphi\; e^{in\omega t}\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}t\,,$$

де $\delta_{l,l'}$ – символ Кронекера, а

$$N_{lm} = \frac{2}{2n+1}\frac{(n+m)!}{(n-m)!}. \qquad (6)$$

Для B_{lmn} достатньо замінити в (5) функції $\cos m\varphi$ на $\sin m\varphi$.

Слід відзначити, що при $n=1$ даний розв'язок цілком співпадає з відомим розв'язком для сферичного випромінювача [2].

Таблиця 1

Характеристики течії та звукового поля, що вона генерує

Re	300	350	10^4	
V, м/с	0.453	0.5285	15.1	швидкість
M	1.36e-3	1.59e-3	4.5e-2	число Маха
f, Гц	6.024	7.135	296	частота $f = V\,\mathrm{St}/d$
$\frac{d}{\lambda} = \frac{d\,f}{c}$	1.81e-4	2.15e-4	8.9e-3	хвильовий розмір джерела
max $\lvert p\rvert$, Па	1.33e-8	2.44e-8	3.42e-8	тиск на осі діаграми спрямов-ті
$I = \frac{\max p^2}{\rho c}$ кг/с^3	4.39e-19	1.5e-18	2.9e-18	інтенсив-ність звуку
$W_{ак}=IS$, Вт	1.38e-18	4.7e-18	9.1e-18	повна акустич. потужн-ть
$W_{гд}$, ВТ	4.40e-6	6.98e-6	1.63e-1	потужн-ть потоку
$W_{ак}/\,W_{гд}$	3.14e-13	6.73e-13	5.6e-17	ККД

Розрахунок звукового поля

Розрахунок гідродинамічної задачі про обтікання сфери ми проводили для безрозмірних величин. А при розраховуванні звукового поля переходимо до розмірних величин. Параметри середи обираємо такі як для повітря при температурі 20° С: $\rho = 1.204$ кг/м^3, $\nu = 1.51\cdot 10^{-5}$ м^2/с, c = 332 м/с. Діаметр сфери покладемо d = 1 см. Параметри течії і звуку представлені у табл. 1. Перш за все відзначимо, що припущення, які ми поклали в основу нашої моделі, підтверджуються чисельними розрахунками. Зокрема, значення числа Маха і хвильового розміру сфери мають порядок 10^{-4}, тобто є досить малими, щоб можна було вважати, що звук розповсюджується в такій течії так само як в нерухомому середовищі. Крім того, малість числа Маха і хвильового розміру джерела підтверджує правильність формулювання гідродинамічної задачі в рамках моделі в'язкої нестисливої рідини. Відношення повної акустичної потужності породженого звуку до потужності потоку, що набігає на сферу (ККД випромінювача), має порядок 10^{-13}, а інтенсивність випроміненого звуку (сила звуку) має порядок 10^{-19} – 10^{-17}. Такі малі значення ККД випромінювача і інтенсивності випроміненого звуку говорять про справедливість закладених в основу нашої моделі основних положень акустичної аналогії Лайтхілла і її узагальнення, зробленого Керлом, про те, що зворотним впливом звуку на характеристики потоку середовища можна знехтувати.

Автоколивальний процес, що виникає при обтіканні сфери потоком, представляє собою акустичне джерело дипольного типу. На рис. 8 зображено діаграму спрямованості для першої гармоніки p_1. Прямі лінії на рисунку демонструють напрям потоку і вісь діаграми спрямованості. Так само як і в задачі про обтікання циліндра в даній течії домінуючий внесок у звукове поле дає осциляція бокової сили, а не сили опору. Основна якісна відмінність звукового поля, що виникає при обтіканні циліндра [2], від звукового поля, що виникає при обтіканні сфери, полягає в наступному. При обтіканні циліндра в силу симетрії точок відриву верхнього і нижнього вихорів і однакової інтенсивності вихорів, що зриваються з поверхні сфери, вісь діаграми спрямованості для першої гармоніки p_1 строго

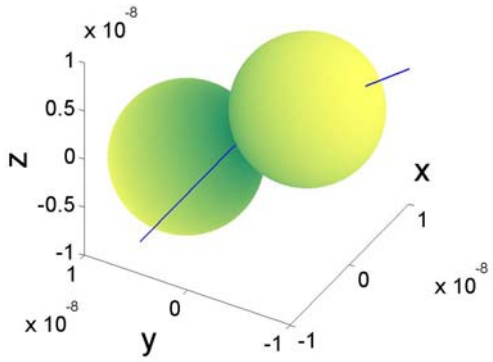


Рис. 8. Діаграма спрямованості для першої гармоніки p_1 при Re = 300.

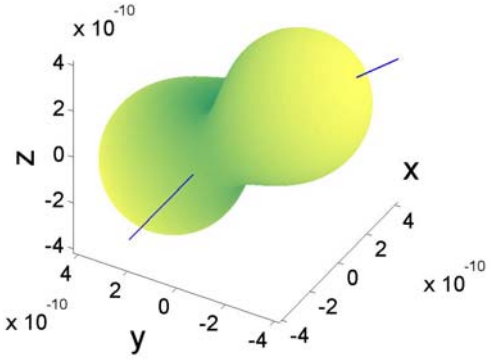


Рис. 9. . Діаграма спрямованості для другої гармоніки p_2 при Re = 300.

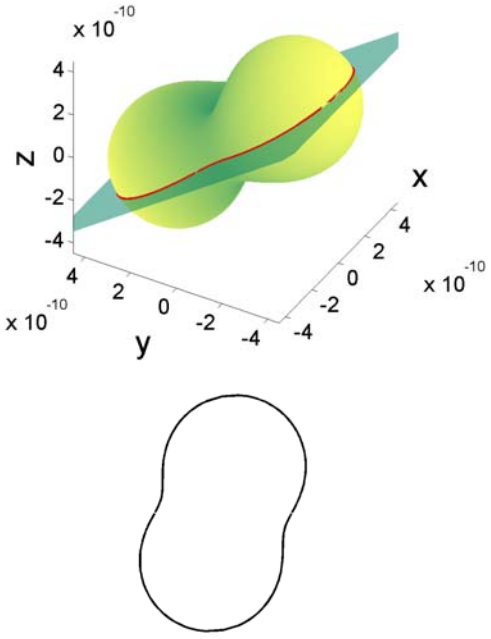
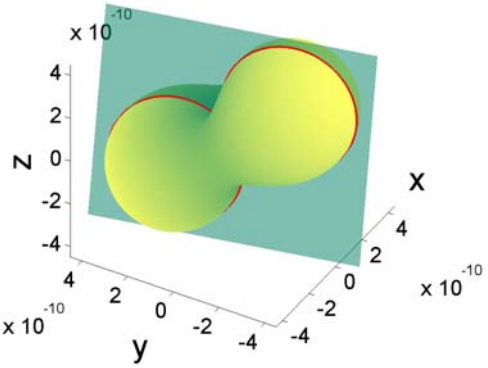


Рис. 10. Перетин діаграми спрямованості p_2 площиною, що проходить через координатну вісь X і вісь діаграми спрямованості (Re = 300).

перпендикулярна напрямку течії. При обтіканні сфери в ламінарному режимі (рис 1) така



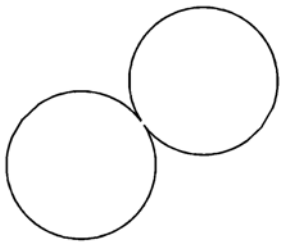


Рис. 11. Перетин діаграми спрямованості p_2 площиною, що проходить через вісь діаграми спрямованості і перпендикулярна площині, зображеній на рис. 10.

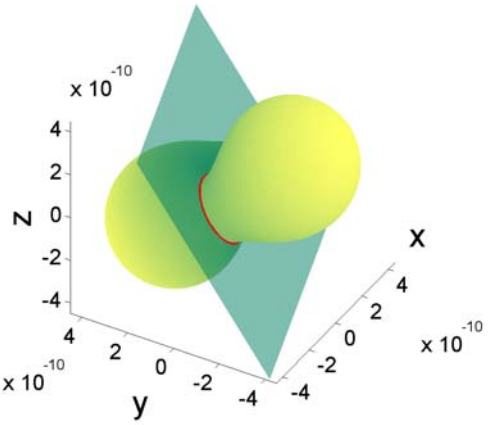




Рис. 12. Перетин діаграми спрямованості p_2 площиною, перпендикулярною до площин, зображених на рис. 10, 11.

симетрія відсутня. Верхня і нижня частини вихрових петель, що по черзі зриваються з поверхні сфери, мають різну інтенсивність, а точки їх відриву від сфери розташовані несиметрично відносно осі потоку. Тому при обтіканні сфери вісь діаграми спрямованості для першої гармоніки p_1 розташована не строго

перпендикулярно напрямку потоку, а під деяким кутом α_1. Значення кутів між напрямком потоку і віссю діаграми спрямованості для гармонік p_1 і p_2 наведені в табл. 2.

Таблиця 2

Амплітуди гармонік p_n і кути нахилу α_n осей діаграм спрямованості до напрямку потоку

Re	max $\|p_1\|$	max $\|p_2\|$	α_1	α_2
300	1.33e-8	5.35e-10	82.8^o	75.6^o
350	2.44e-8	1.50e-9	83.4^o	71.2^o
10^4	3.42e-8	4.1e-9	0°	0°

На рис. 9 зображено діаграму спрямованості для другої гармоніки p_2. Видно, що вона сильно відрізняється від діаграми спрямованості для другої гармоніки в задачі про обтікання циліндра [2]. Якщо при обтіканні циліндра вісь p_2 співпадала з напрямком потоку, то при обтіканні сфери в силу несиметричності почерговго зриву верхньої і нижньої вихрових петель картина буде значно складнішою. На рис. 10 – 12 наведені перетини діаграми спрямованості трьома перпендикулярними площинами. Видно, що звук випромінюється як у бічному напрямку (в площині симетрії течії), так і в напрямку потоку. У той же час у бічному напрямку перпендикулярному до площини симетрії течії акустичне випромінювання відсутнє. Іншими словами, гармоніка p_2 обумовлена як осциляцією бічної сили, так і сили лобового опору. Слід відзначити, що при збільшенні числа Рейнольдса внесок гармоніки p_2 зростає. В табл. 2 представлені амплітуди двох гармонік p_1 і p_2 для трьох значень числа Рейнольдса. Видно, що якщо при Re = 300 відношення амплітуд першої і другої гармонік складає 24.86, то при Re = 350 відношення амплітуд вже складає 16.27, а при Re = 10^4 – лише 8.34.

Висновки

Розв'язано задачу про випромінювання звуку потоком, що набігає на сферу. Розраховано діаграми спрямованості звукового поля в широкому діапазоні значень числа Рейнольдса. Показано, що вісь діаграми спрямованості розташована не перпендикулярно напрямку потоку, як у випадку обтікання кругового циліндра, а під певним кутом нахилу. Цей ефект має місце через те, що вихорі, які по черзі зриваються з поверхні сфери, не будуть симетричні, як у випадку обтікання циліндра.

Для гармоніки p_2 діаграма спрямованості має значно складніший вигляд, ніж у задачі про обтікання циліндра. Акустична енергія випромінюється як у бічному напрямку, так і у напрямку потоку.

Автор висловлює глибоку вдячність професору І.В.Вовку за допомогу в постановці задачі і участь в обговоренні отриманих результатів.

Список використаних джерел

1. *Вовк И.В.* Звук, рожденный потоком / И.В. Вовк, В.Т. Гринченко. – Киев: Наукова думка, 2010. – 221 с.
2. *Грінченко В.Т.* Основи акустики / В.Т. Грінченко, І.В. Вовк, В.Т. Маципура – Киев: Наукова думка, 2007. – 640 с.
3. *Вовк И.В.* Об одном методе оценки звукового поля эоловых тонов / И.В. Вовк, В.С. Малюга // Акустичний вісник. – 2010. – **13**, №2 – С. 3-19.
4. *Малюга В.С.* Численное исследование течения в канале с двумя последовательно расположенными стенозами. Алгоритм решения / В.С. Малюга // Прикладна гідромеханіка. – 2010. – **12**, №4. – С. 45-62.
5. *Малюга В.С.* Численное моделирование обтекания сферы потоком вязкой несжимаемой жидкости / В.С. Малюга // Прикладна гідромеханіка. – 2013. – **15**, №3. – С. 43-67.

References

1. VOVK, I.V. (2010) *Zvuk, rozhdennyy potokom.* Kiev: Naukova dumka.
2. GRINCHENKO, V.T. (2007) *Osnovyi akustiki.* Kiev: Naukova dumka.
3. VOVK, I.V., MALYUGA, V.S. (2010) *Ob odnom metode otsenki zvukovogo polya Eolovyih tonov*. Acoustic bulletin. **13** (2). p. 3-19.
4. MALYUGA, V.S. (2010) *Chislennoe issledovanie techeniya v kanale s dvumya posledovatelno raspolozhennyimi stenozami. Algoritm resheniya*. Prykladna hydromehanika. **12** (4). p. 45-62.
5. MALYUGA, V.S. (2013) *Chislennoe modelirovanie obtekaniya sferyi potokom vyazkoy neszhimaemoy zhidkosti*. Prykladna hydromehanika. **15** (3). p. 43-67.

Надійшла до редколегії 22.09.14

УДК 539.3

Острик В. І.[1], д. ф.-м. н., проф.,
Улітко А. Ф.[1], д. ф.-м. н., проф., член-кор. НАН України

Аналогія між неосесиметричною деформацією та крученням у контактних задачах для півпростору

[1] Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 03680,
м. Київ, просп. Глушкова, 4 е,
e-mail: ostrik_v@rambler.ru

V. I. Ostryk[1], Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof.,
A. F. Ulitko[1], Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Cor. Memb. of NASU

Analogy between the nonaxisymmetric strain and torsion in the contact problems for a half-space

[1] Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03680, Kyiv, Glushkova st., 4 e,
e-mail: ostrik_v@rambler.ru

Виявлено математичну аналогію між задачею Абрамова про гладкий контакт кругового штампа з плоскою похилою основою і пружного півпростору та задачею Рейсснера – Сагоци про кручення пружного півпростору жорстко з'єднаним з ним круговим штампом. Аналогія між цими задачами полягає у співпадінні диференціальних рівнянь і змішаних крайових умов на межі півпростору, що веде також до співпадіння інтегральних рівнянь вказаних контактних задач. Напруження та переміщення виражаються через розв'язувальну функцію по-різному. Наводиться розв'язання задач методом Вінера – Гопфа. Знайдено як контактні напруження, так і переміщення та напруження всередині півпростору.

Ключові слова: контакт, кручення, пружний півпростір, штамп.

Mathematical analogy between V. Abramov's problem of the smooth contact of circular punch with a flat sloping base on the elastic half-space and the E. Reissner – H. Sagocci's problem of the torsion of elastic half-space under the rigidly connected round stamp has been uncovered. The analogy between these problems lies in the coincidence of differential equations and mixed conditions at the half-space's boundary, what leads also to the coincidence of integral equations of mentioned contact problems. In the first case the resolving harmonic function is the principal radial factor multiplied by the cosine of angular coordinate. In the second case such harmonic function is the circular displacement. Stresses and displacement in these two problems are expressed through the resolving function in differen way.

Solutions of problems are given by the Wiener – Hopf's method using Mellin's integral transform in spherical coordinates. Stresses in the contact zones and stresses and displacements inside the half-space are found. Let us notice, that stresses in the contact zones of the half-space were previously determined by V. Abramov, E. Reissner, and H. Sagocci by the use of dual integral equations, tension and displacement from torsion were given by I. Sneddon and N. A. Rostovtsev, but in the V. Abramov's problem they were not fully defined.

Key Words: contact, torsion, elastic half-space, stamps.

Статтю представив д. ф.-м. н., проф. Жук Я. О.

Вступ

Неосесиметрична задача про гладкий контакт кругового штампа з плоскою похилою основою і пружного півпростору вперше розв'язана В. М. Абрамовим [1] методом парних інтегральних рівнянь із застосуванням інтегрального перетворення Ганкеля у циліндричних координатах. Визначено розподіл контактного тиску уздовж основи штампа, а також вертикальні переміщення та нормальні напруження всередині півпростору, виражені в еліптичних координатах. Інших компонентів вектора переміщень і тензора напружень не було знайдено.

Контактний тиск визначено Е. Рейсснером і Х. Сагоци в іншій контактній задачі – про кручення пружного півпростору жорстко з'єднаним з ним круговим штампом [2]. Повний розв'язок задачі Рейсснера – Сагоци із визначенням переміщень та напружень всередині півпростору знайдено І. Снеддоном [3] і Н. А. Ростовцевим [4].

© В. І. Острик, А. Ф. Улітко, 2014

Як буде показано нижче, між задачами Абрамова і Рейсснера – Сагоци існує математична аналогія. Тут ми будуємо повні розв'язки обох задач із застосуванням методу Вінера – Гопфа [5].

Розв'язання неосесиметричної контактної задачі для півпростору методом Вінера – Гопфа

Вперше застосування методу Вінера – Гопфа до визначення контактного тиску в осесиметричній задачі гладкого контакту кругового штампа з пружним півпростором здійснено Г. Я. Поповим [6]. Іншими методами контактна задача для півпростору розв'язувалась у роботах [7-9] та інших.

Надамо розв'язання методом Вінера – Гопфа неосесиметричної контактної задачі для півпростору у випадку кругової області контакту. На відміну від підходу роботи [6], де для виведення інтегрального рівняння задачі застосовувалось інтегральне перетворення Ганкеля у циліндричних координатах, використаємо інтегральне перетворення Мелліна у сферичних координатах.

З пружним півпростором $z \ge 0$ зв'яжемо декартову (x, y, z), циліндричну (r, φ, z) та сферичну $(\rho, \vartheta, \varphi)$ системи координат ($x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $z = \rho\cos\vartheta$, $r = \rho\sin\vartheta$).

Нехай штамп кругової циліндричної форми (a – радіус поперечного перерізу циліндра), основа якого задається рівнянням $z = f_0(r, \varphi)$, вдавлюється на деяку відстань δ нормальною силою P в пружний півпростір. В умовах гладкого контакту змішані крайові умови задачі мають вигляд

$$u_\vartheta\big|_{\vartheta=\pi/2} = -\delta + f_0(r, \varphi) \quad (0 \le r \le a),$$
$$\sigma_\vartheta\big|_{\vartheta=\pi/2} = 0 \quad (a < r < \infty),$$
$$\tau_{\rho\vartheta}\big|_{\vartheta=\pi/2} = 0, \quad \tau_{\varphi\vartheta}\big|_{\vartheta=\pi/2} = 0 \quad (0 < r < \infty). \qquad (1)$$

Крім того, виконується умова рівноваги

$$\iint\limits_{r\le a} \sigma_\vartheta\big|_{\vartheta=\pi/2}\, r dr d\varphi = -P. \qquad (2)$$

В області контакту $0 \le r < a$, $0 \le \varphi < 2\pi$, $\vartheta = \pi/2$ введемо невідому функцію контактного тиску

$$p(r, \varphi) = -\frac{1}{2G}\sigma_\vartheta\big|_{\vartheta=\pi/2}, \qquad (3)$$

де G – модуль зсуву, та розвинемо всі напруження та переміщення разом із функціями $f_0(r, \varphi)$, $p(r, \varphi)$ у ряди Фур'є за окружної координатою, наприклад,

$$f_0(r, \varphi) = f_0^{(0)}(r) + \sum_{m=1}^{\infty}\left[f_0^{(1m)}(r)\cos m\varphi + f_0^{(2m)}(r)\sin m\varphi \right]. \qquad (4)$$

Як відомо [9], переміщення та напруження у випадку відсутності дотичних напружень на межі півпростору виражаються через одну гармонічну функцію Φ за формулами

$$u_r = -\frac{\partial\Psi}{\partial r} - z\frac{\partial\Phi}{\partial r}, \quad u_\varphi = -\frac{1}{r}\frac{\partial\Psi}{\partial\varphi} - \frac{z}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi},$$
$$u_z = 2(1-\nu)\Phi - z\frac{\partial\Phi}{\partial z}, \quad \frac{\sigma_z}{2G} = \frac{\partial\Phi}{\partial z} - z\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2},$$
$$\frac{\sigma_r}{2G} = -\frac{\partial^2\Psi}{\partial r^2} + 2\nu\frac{\partial\Phi}{\partial z} - z\frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2},$$
$$\frac{\sigma_\varphi}{2G} = -\frac{1}{r}\frac{\partial\Psi}{\partial\varphi} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial\varphi^2} + 2\nu\frac{\partial\Phi}{\partial z} - \frac{z}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial r} - \frac{z}{r^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2},$$
$$\frac{\tau_{rz}}{2G} = -z\frac{\partial^2\Phi}{\partial r\partial z}, \quad \frac{\tau_{r\varphi}}{2G} = -\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\Psi}{\partial\varphi}\right) - z\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}\right),$$
$$\frac{\tau_{\varphi z}}{2G} = -\frac{z}{r}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi\partial z}, \quad \frac{\partial\Psi}{\partial z} \equiv (1-2\nu)\Phi, \qquad (5)$$

де ν – коефіцієнт Пуассона.

На підставі (5) крайові умови (1) набувають вигляду

$$2(1-\nu)\Phi^{(jm)}\big|_{\vartheta=\pi/2} = -\delta_{0m}\delta + f_0^{(jm)}(r) \quad (0 \le r \le a),$$
$$\partial\Phi^{(jm)}/\partial\vartheta\big|_{\vartheta=\pi/2} = 0 \quad (a < r < \infty), \qquad (6)$$

де δ_{0m} – символ Кронекера, $f_0^{(j0)}(r) \equiv f_0^{(0)}(r)$. Тут і далі $j = 1, 2$; $m = 0, 1, \ldots$. Кожний із доданків розвинення функції Φ у ряд Фур'є задовольняє рівняння Лапласа:

$$\nabla^2\Phi^{(1m)}\cos m\varphi = 0, \quad \nabla^2\Phi^{(2m)}\sin m\varphi = 0. \qquad (7)$$

Застосовуючи інтегральне перетворення Мелліна, отримаємо інтегральне подання

$$\Phi^{(jm)} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty} A_{jm}(s) P_{s-1}^m(\cos\vartheta)\rho^{-s} ds,$$
$$A_{jm}(s) = \frac{\Gamma((s-m)/2)\Gamma((1-s-m)/2)}{2^{m+1}\sqrt{\pi}}\tilde{p}^{(jm)}(s),$$
$$\tilde{p}^{(jm)}(s) = \int\limits_0^a p^{(jm)}(y) y^s dy \quad (0 < c < 1), \qquad (8)$$

де $P_{s-1}^m(\cos\vartheta)$ – приєднана функція Лежандра [10], яке задовольняє другу умову (6). Звідси

$$\Phi^{(jm)}\big|_{\vartheta=\pi/2} =$$
$$= -\frac{1}{4\pi i}\int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\Gamma((s-m)/2)\Gamma((1-s-m)/2)\tilde{p}_m(s)}{\Gamma((1+s-m)/2)\Gamma(1-(s+m)/2)} r^{-s} ds. \qquad (9)$$

Увівши до розгляду оператори

$$L_{2n} = -D_{-2n}\frac{D_{2n-1}}{D_1}D_{1-2n}^{-1}\prod_{k=1}^{n-1} D_{-2k}D_{2k}^{-1}D_{2k-1}D_{1-2k}^{-1},$$

$$L_{2n-1} = D_{1-2n}\prod_{k=1}^{n-1} D_{2k}D_{-2k}^{-1}\, D_{1-2k}D_{2k-1}^{-1} \quad (n = 1, 2, \dots),$$

$$D_k\, u(r) = -r^{k+1}\frac{d}{dr}\left(\frac{u(r)}{r^k}\right),$$

$$D_k^{-1}\, u(r) = -r^k\int_0^r \frac{u(r)}{r^{k+1}}dr \quad (k = 1, 2, \dots), \qquad (10)$$

із (9) матимемо

$$L_{2n}\,\Phi^{(j,2n)}\Big|_{\vartheta=\pi/2} = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{K(is)}{s+1}\,\tilde{p}_{2n}(s)r^{-s}ds,$$

$$L_{2n-1}\,\Phi^{(j,2n-1)}\Big|_{\vartheta=\pi/2} = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{1}{K(is)}\,\tilde{p}_{2n-1}(s)r^{-s}ds,$$

$$K(is) = \frac{\Gamma(1+s/2)\Gamma(1/2-s/2)}{\Gamma(1/2+s/2)\Gamma(1-s/2)} \quad (n = 1, 2, \dots). \qquad (11)$$

Підставивши в (11) функції $\tilde{p}^{(jm)}(s)$ із (8), виконавши заміни

$$s = -i\tau, \quad r = ae^{-\xi}, \quad y = ae^{-\eta},$$

$$\phi^{(jm)}(\eta) = p^{(jm)}(ae^{-\eta})e^{-\eta} \quad (0 < \eta < \infty), \qquad (12)$$

змінивши порядок інтегрування та змістивши у внутрішньому інтегралі контур інтегрування на дійсну вісь, знайдемо

$$L_m\,\Phi^{(jm)}\Big|_{\vartheta=\pi/2} = a\int_0^\infty k_m(\xi-\eta)\phi^{(jm)}(\eta)d\eta,$$

$$k_m(\xi-\eta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} K_m(\tau)e^{-i\tau(\xi-\eta)}d\tau,$$

$$K_{2n}(\tau) = \frac{K(\tau)}{1-i\tau}, \quad K_{2n-1}(\tau) = \frac{1}{K(\tau)} \quad (n = 1, 2, \dots),$$

$$L_0 = -D_0, \quad K_0(\tau) = K(\tau). \qquad (13)$$

Задовольнивши першу крайову умову (6) після дії на неї оператором L_m, отримуємо інтегральне рівняння

$$\int_0^\infty k_m(\xi-\eta)\phi^{(jm)}(\eta)d\eta = f^{(jm)}(\xi) \quad (0 < \eta < \infty), \qquad (14)$$

$$f^{(jm)}(\xi) = \frac{1}{2(1-\nu)a}L_m f_0^{(jm)}(r), \quad r = ae^{-\xi}.$$

Для розв'язання інтегрального рівняння (14) методом Вінера – Гопфа [5] розповсюдимо його на всю числову вісь, поклавши $\phi^{(jm)}(\eta) = 0$ при $\eta \le 0$, і застосуємо до нього інтегральне перетворення Фур'є. Увівши невідомі функції

$$\Phi^+(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty \phi^{(jm)}(\xi)e^{iz\xi}d\xi,$$

$$\Phi^-(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^0 e^{iz\xi}d\xi\int_0^\infty k(\xi-\eta)\phi^{(jm)}(\eta)d\eta, \qquad (15)$$

аналітичні відповідно у півплощинах $\operatorname{Im} z > c^+$ ($c^+ < 0$), $\operatorname{Im} z < c^-$ ($c^- > 0$) комплексної площини, отримаємо функціональне рівняння

$$K_m(z)\Phi^+(z) - \Phi^-(z) = F^+(z) \quad (c^+ < \operatorname{Im} z < c^-),$$

$$F^+(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty f^{(jm)}(\xi)e^{iz\xi}d\xi. \qquad (16)$$

Факторизуємо коефіцієнт $K_m(z)$ рівняння (16), тобто подамо його у вигляді

$$K_m(z) = K_m^+(z)K_m^-(z), \qquad (17)$$

де функції $K_m^+(z)$ і $K_m^-(z)$ є аналітичними та не обертаються в нуль у півплощинах $\operatorname{Im} z > c^+$ і $\operatorname{Im} z < c^-$ відповідно. Маємо

$$K_{2n}^+(z) = K^+(z)/(1-iz), \quad K_{2n}^-(z) = K^-(z),$$

$$K_{2n-1}^\pm(z) = 1/K^\pm(z) \quad (n = 1, 2, \dots),$$

$$K^+(z) = \frac{\Gamma(1-iz/2)}{\Gamma(1/2-iz/2)}, \quad K^-(z) = \frac{\Gamma(1/2+iz/2)}{\Gamma(1+iz/2)}. \qquad (18)$$

З урахуванням (17) рівняння (16) запишемо так:

$$K_m^+(z)\Phi^+(z) - \Phi^-(z)/K_m^-(z) = F^+(z)/K_m^-(z), \qquad (19)$$

а після подання правої частини рівняння (19) різницею аналітичних функцій:

$$F^+(z)/K_m^-(z) = f^+(z) - f^-(z),$$

$$f^\pm(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty+ic^\pm}^{\infty+ic^\pm}\frac{F^+(\zeta)}{K_m^-(\zeta)}\frac{d\zeta}{\zeta-z}, \qquad (20)$$

перетворимо до наступного вигляду:

$$K_m^+(z)\Phi^+(z) - f^+(z) = \Phi^-(z)/K_m^-(z) - f^-(z). \qquad (21)$$

Функції, які являють собою ліву і праву частину рівності (21), є аналітичним продовженням одна одної на всю комплексну площину. Із оцінок на нескінченності

$$K^+(z) = O(\sqrt{z}), \; K_m^+(z) = O(1/\sqrt{z}), \; \Phi^+(z) = o(1),$$

$$f^+(z) = O(1/z), \; |z| \to \infty, \qquad (22)$$

заключаємо ця єдина аналітична у всій комплексній площині функція є довільною сталою C, якщо $m = 0$, і тотожно дорівнює нулеві при $m = 1, 2, \dots$. Звідси отримуємо розв'язок функціонального рівняння (16):

$$\Phi^+(z) = \left[f^+(z) + \delta_{0m}C\right]/K_m^+(z),$$

$$\Phi^-(z) = K_m^-(z)\left[f^-(z) + \delta_{0m}C\right]. \qquad (23)$$

Розв'язок інтегрального рівняння (14) знаходимо оберненим перетворенням Фур'є першої рівності (15) з урахуванням розв'язку (23):

$$\phi^{(jm)}(\eta)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{f^{+}(t)+\delta_{0m}C}{K_m^{+}(t)}e^{-it\xi}dt\,. \qquad (24)$$

Після цього з використанням замін (12) визначаємо функцію контактного тиску із (3), а сталу C отримуємо із умови рівноваги (2). За формулами (5), (8) знаходимо переміщення та напруження у кожній точці півпростору.

Задача Абрамова

У цій контактній задачі для півпростору круговий штамп має плоску похилу основу так, що $f_0(r,\varphi)=Bx$, $x=r\cos\varphi$, де $B=\operatorname{tg}\varepsilon$, ε – кут нахилу плоскої основи штампа до недеформованої межі півпростору.

У розвиненні (4) відмінним від нуля є тільки коефіцієнт $f_0^{(11)}(r)=Br$. Тоді, наприклад, переміщення u_ϑ подамо у вигляді $u_\vartheta=u_\vartheta^{(0)}+u_\vartheta^{(11)}\cos\varphi$, тобто суми осесиметричної $u_\vartheta^{(0)}$ і неосесиметричної $u_\vartheta^{(11)}\cos\varphi$ складових. Аналогічно подамо всі інші компоненти переміщень та напружень у півпросторі.

В інтегральному рівнянні (14) маємо $f^{(j0)}(\xi)\equiv$ $\equiv f^{(0)}(\xi)\equiv 0$, $f^{(11)}(\xi)=-\dfrac{B}{1-\nu}e^{-\xi}$. Тоді згідно з розв'язком (24) знаходимо

$$\phi^{(j0)}(\xi)\equiv\phi^{(0)}(\xi)=\frac{C}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-it\xi}}{K^{+}(t)}dt\,,$$

$$\phi^{(11)}(\xi)=-\frac{B}{\sqrt{\pi^3}(1-\nu)}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{(1-it)K_1^{+}(t)}e^{-it\xi}dt\,. \qquad (25)$$

Розвинувши інтеграли із (25) у ряди за теорією лишків, отримуємо

$$\phi^{(j0)}(\xi)=\frac{4C}{\sqrt{2\pi}}e^{-\xi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(k+1/2)}{k!}e^{-2k\xi}=\frac{2\sqrt{2}\,Ce^{-\xi}}{\sqrt{1-e^{-2\xi}}},$$

$$\phi^{(11)}(\xi)=4e^{-2\xi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(k+1/2)}{k!}e^{-2k\xi}=\frac{4\sqrt{\pi}e^{-2\xi}}{\sqrt{1-e^{-2\xi}}}, \qquad (26)$$

а врахувавши заміни (12), знаходимо функцію контактного тиску [1]:

$$p(r,\varphi)=p^{(0)}(r)+p^{(11)}(r)\cos\varphi=$$
$$=\left(\frac{P}{4\pi Ga}-\frac{2B}{\pi(1-\nu)}r\cos\varphi\right)\frac{1}{\sqrt{a^2-r^2}}\,, \qquad (27)$$

причому значення $C=P/8\sqrt{2}\,\pi Ga^2$ визначене із умови рівноваги (2).

За формулами (8) маємо

$$\Phi^{(0)}\equiv\Phi^{(j0)}=\frac{P}{8Ga}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{P_{s-1}(\cos\vartheta)}{s\cos(\pi s/2)}\left(\frac{\rho}{a}\right)^{-s}ds\,,$$

$$\Phi^{(11)}=\frac{Ba}{1-\nu}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{P_{s-1}^{1}(\cos\vartheta)}{(s^2-1)\sin(\pi s/2)}\left(\frac{\rho}{a}\right)^{-s}ds\,. \qquad (28)$$

Обчисливши інтеграли за теорією лишків з використанням суми ряду [10]:

$$\sum_{n=0}^{\infty}P_n(x)z^n=\frac{1}{\sqrt{1-2xz+z^2}} \qquad (29)$$

і перейшовши до циліндричних координат, знайдемо

$$\Phi^{(0)}=\frac{P}{4\pi Ga}\operatorname{Re}A,\ \ \Phi^{(11)}=\frac{B}{\pi(1-\nu)}\operatorname{Re}\left(\frac{a-iz}{r}R-rA\right),$$
$$A=\arcsin\frac{a+iz}{r},\quad R=\sqrt{r^2-(a+iz)^2}\,. \qquad (30)$$

За формулами (5) визначаємо переміщення та напруження у кожній точці півпростору:

$$u_r^{(11)}=\frac{2B}{\pi(1-\nu)}\operatorname{Im}\left\{\left[1-2\nu+\frac{iz}{r^2}\Big(\nu a-(1-\nu)iz\Big)\right]R-\right.$$
$$\left.-\frac{1-2\nu}{3r^2}\left(R^3-ia^3\right)-\frac{iaz}{R}+(1-\nu)izA\right\},$$

$$u_\varphi^{(11)}=\frac{2B}{\pi(1-\nu)}\operatorname{Im}\left[\frac{iz}{r^2}\Big(\nu a-(1-\nu)iz\Big)R+\right.$$
$$\left.+\frac{1-2\nu}{3r^2}\left(R^3+ia^3\right)-(1-\nu)izA\right],$$

$$u_z^{(11)}=\frac{2B}{\pi}\operatorname{Re}\left(\frac{(1-\nu)a+\nu iz}{(1-\nu)r}R+\frac{iaz(a+iz)}{(1-\nu)rR}-rA\right),$$

$$\frac{\sigma_z^{(11)}}{2G}=\frac{2Br}{\pi(1-\nu)}\operatorname{Im}\left(\frac{1}{R}-\frac{iaz}{R^3}\right),$$

$$\frac{\sigma_r^{(11)}}{2G}=\frac{2B}{\pi(1-\nu)}\operatorname{Im}\left\{\frac{2}{3r^3}\Big[(1+\nu)r^2-(1-2\nu)a^2-\right.$$
$$\left.-(2-\nu)iz(a-iz)\Big]R+\frac{a(a+iz)+z^2}{rR}+\frac{ariz}{R^3}\right\},$$

$$\frac{1}{2G}\left(\sigma_z^{(11)}+\sigma_r^{(11)}+\sigma_\varphi^{(11)}\right)=\frac{4(1+\nu)B}{\pi(1-\nu)r}\operatorname{Im}\left(R+\frac{a(a+iz)}{R}\right),$$

$$\frac{\tau_{rz}^{(11)}}{2G}=-\frac{2Bz}{\pi(1-\nu)}\operatorname{Im}\left[\frac{a+iz}{R}\left(\frac{iz}{r^2}-\frac{a}{R^2}\right)\right],$$

$$\frac{\tau_{r\varphi}^{(11)}}{2G}=-\frac{2B}{\pi(1-\nu)}\operatorname{Im}\left(\frac{1-2\nu}{3r^3}R^3-\frac{iaz}{rR}+\frac{2i}{3}(1-2\nu)\frac{a^3}{r^3}+\right.$$
$$\left.+\frac{(1-2\nu)a(a+iz)+iz(a-iz)}{r^3}R\right),$$

$$\frac{\tau_{\varphi z}^{(11)}}{2G}=\frac{2Bz}{\pi(1-\nu)r^2}\operatorname{Im}\left(R+\frac{a(a+iz)}{R}\right). \qquad (31)$$

Позначивши

$$\sqrt{r^2-(a+iz)^2}=R_1e^{-i\varphi_0},\quad a+iz=R_0e^{i\vartheta_0}, \qquad (32)$$

залежності (31) також подамо у вигляді

$$u_r^{(11)} = -\frac{2B}{\pi(1-\nu)}\left[\left(1-2\nu+(1-\nu)\frac{z^2}{r^2}\right)R_1\sin\varphi_0 + \right.$$
$$+az\left(\frac{1}{R_1}-\nu\frac{R_1}{r^2}\right)\cos\varphi_0 - \frac{1-2\nu}{3r^2}\left(R_1^3\sin 3\varphi_0 + a^3\right) -$$
$$\left. -(1-\nu)z\cdot\operatorname{arctg}\frac{a+R_1\sin\varphi_0}{z+R_1\cos\varphi_0}\right],$$

$$u_\varphi^{(11)} = \frac{2B}{\pi(1-\nu)}\left\{\frac{zR_1}{r^2}\left[\nu a\cos\varphi_0 - (1-\nu)z\sin\varphi_0\right] - \right.$$
$$\left. -\frac{1-2\nu}{3r^2}\left(R_1^3\sin 3\varphi_0 - a^3\right) - (1-\nu)z\cdot\operatorname{arctg}\frac{a+R_1\sin\varphi_0}{z+R_1\cos\varphi_0}\right\},$$

$$u_z^{(11)} = \frac{2B}{\pi(1-\nu)}\left\{\frac{R_1}{r}\left[(1-\nu)a\cos\varphi_0 + \nu z\sin\varphi_0\right] - \right.$$
$$\left. -\frac{azR_0}{rR_1}\sin(\vartheta_0+\varphi_0) - (1-\nu)r\cdot\operatorname{arctg}\frac{a+R_1\sin\varphi_0}{z+R_1\cos\varphi_0}\right\},$$

$$\frac{\sigma_z^{(11)}}{2G} = \frac{2Br}{\pi(1-\nu)R_1}\left(\sin\varphi_0 - \frac{az}{R_1^2}\cos 3\varphi_0\right),$$

$$\frac{\sigma_r^{(11)}}{2G} = -\frac{2B}{\pi(1-\nu)}\left[\frac{2}{3}\left(1+\nu-(1-2\nu)\frac{a^2}{r^2}-\frac{z^2}{R_1^2}\right)\times\right.$$
$$\times\frac{R_1}{r}\sin\varphi_0 + \frac{2}{3}(2-\nu)\frac{z}{r^3}R_0R_1\cos(\vartheta_0+\varphi_0) -$$
$$\left. -\frac{aR_0}{rR_1}\sin(\vartheta_0+\varphi_0) - \frac{arz}{R_1^3}\cos 3\varphi_0\right],$$

$$\frac{1}{2G}\left(\sigma_z^{(11)}+\sigma_r^{(11)}+\sigma_\varphi^{(11)}\right) =$$
$$-\frac{4(1+\nu)B}{\pi(1-\nu)r}\left(R_1\sin\varphi_0 - \frac{aR_0}{R_1}\sin(\vartheta_0+\varphi_0)\right),$$

$$\frac{\tau_{rz}^{(11)}}{2G} = -\frac{2BzR_0}{\pi(1-\nu)R_1}\left(\frac{z}{r^2}\cos(\vartheta_0+\varphi_0) - \frac{a}{R_1^2}\sin(\vartheta_0+3\varphi_0)\right),$$

$$\frac{\tau_{r\varphi}^{(11)}}{2G} = -\frac{2B}{\pi(1-\nu)r^3}\left\{\frac{1-2\nu}{3}\left(2a^3 - R_1^3\sin 3\varphi_0\right) + R_0R_1\times\right.$$
$$\left.\times\left[(1-2\nu)a\sin(\vartheta_0-\varphi_0) + z\cos(\vartheta_0+\varphi_0)\right] - \frac{az}{R_1}r^2\cos\varphi_0\right\},$$

$$\frac{\tau_{\varphi z}^{(11)}}{2G} = -\frac{2Bz}{\pi(1-\nu)r^2}\left(R_1\sin\varphi_0 - \frac{aR_0}{R_1}\sin(\vartheta_0+\varphi_0)\right). \quad (33)$$

Вирази для переміщень та напружень осесиметричної складової розв'язку можна знайти в [3].

Задача Рейсснера – Сагоци

Деформація кручення пружного середовища навколо осі $\vartheta = 0, \pi$ передбачає наявність тільки однієї компоненти u_φ вектора переміщень ($u_\rho \equiv 0$, $u_\vartheta \equiv 0$), яка не залежить від змінної φ. У цьому разі маємо

$$\tau_{\rho\varphi} = G\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{u_\varphi}{\rho}\right), \quad \tau_{\vartheta\varphi} = G\frac{1}{\rho\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(u_\varphi\sin\vartheta\right). \quad (34)$$

Напруження σ_ρ, σ_φ, σ_ϑ, $\tau_{\rho\vartheta}$ тотожно дорівнюють нулеві. У циліндричних координатах відмінні від нуля тільки напруження

$$\tau_{r\varphi} = Gr\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{u_\varphi}{r}\right), \quad \tau_{z\varphi} = G\frac{\partial u_\varphi}{\partial z}. \quad (35)$$

Із трьох рівнянь рівноваги у напруженнях [8]:

$$\frac{\partial\sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial\tau_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r}\tau_{rz} + \frac{1}{r}\frac{\partial\tau_{z\varphi}}{\partial\varphi} = 0,$$
$$\frac{\partial\sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\left(\sigma_r - \sigma_\varphi\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial\tau_{r\varphi}}{\partial\varphi} + \frac{\partial\tau_{rz}}{\partial z} = 0,$$
$$\frac{\partial\tau_{z\varphi}}{\partial z} + \frac{\partial\tau_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{2}{r}\tau_{r\varphi} = 0 \quad (36)$$

перші два виконуються тотожно. Підстановкою виразів для напружень із (35) у третє рівняння (36) отримуємо рівняння

$$\nabla_0^2 u_\varphi - \frac{1}{r^2}u_\varphi = 0, \quad \nabla_0^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad (37)$$

або у сферичних координатах:

$$\nabla_0^2 u_\varphi - \frac{1}{\rho^2\sin^2\vartheta}u_\varphi = 0, \quad (38)$$
$$\nabla_0^2 = \frac{1}{\rho^2}\left[\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho^2\frac{\partial}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial}{\partial\vartheta}\right)\right].$$

Рівняння (38) подамо у вигляді

$$\nabla^2 u_\varphi\cos\varphi = 0. \quad (39)$$

Отже, функція $u_\varphi\cos\varphi$ є гармонічною так само, як і функція $\Phi^{(11)}\cos\varphi$ із (7). Тому згідно з (8) для колових переміщень маємо подання

$$u_\varphi = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} A(s)P_{s-1}^1(\cos\vartheta)\rho^{-s}ds, \quad (40)$$

$$A(s) = \frac{\Gamma((s-1)/2)\Gamma(-s/2)}{4\sqrt{\pi}}\tilde{t}(s), \quad \tilde{t}(s) = \int_0^a t(r)r^s dr,$$
$$t(r) = \frac{1}{G}\tau_{\vartheta\varphi}\Big|_{\vartheta=\pi/2} \ (0 \le r < a), \quad t(r) = 0 \ (r > a).$$

У задачі Рейсснера – Сагоци круговий штамп з плоскою горизонтальною основою радіуса a жорстко з'єднаний з межею пружного півпростору і повертається навколо своєї осі на кут α. Крайові умови задачі наступні:

$$u_\varphi\Big|_{\vartheta=\pi/2} = \alpha r \ (r \le a), \quad \tau_{\vartheta\varphi}\Big|_{\vartheta=\pi/2} = 0 \ (r > a). \quad (41)$$

З урахуванням другої рівності (34), заключаємо, що умови (41) еквівалентні умовам (6) при $m = 1$ і $f_0^{(11)}(r) = Br$, тобто крайовим умовам задачі Абрамова.

Завдяки тому, що вираз для колових переміщень $u_\varphi\big|_{\vartheta=\pi/2}$ із (40), помножений на $-2(1-\nu)$, співпадає з виразом для меридіональних переміщень $u_\vartheta^{(1m)}\big|_{\vartheta=\pi/2}$ при $m=1$ у неосесиметричні задачі гладкого контакту (якщо $\tilde{t}(s)$ замінити на $\tilde{p}_1(s)$), задача Рейсснера – Сагоци зводиться до інтегрального рівняння задачі Абрамова, де

$$B=-2(1-\nu)\alpha\,. \qquad (42)$$

Отже, із (27) отримуємо контактні напруження

$$t(r)=\frac{4\alpha}{\pi}\frac{r}{\sqrt{a^2-r^2}}\quad (0\le r<a)\,. \qquad (43)$$

Функція u_φ із (40) співпадає з функцією $\Phi^{(11)}$ із (28), якщо множники α і B, які входять до цих виразів зв'язати рівністю (42). Тому, звернувшись до другої формули (30), знаходимо колові переміщення у циліндричних координатах:

$$u_\varphi=-\frac{2\alpha}{\pi}\mathrm{Re}\left(\frac{a-iz}{r}R-rA\right). \qquad (44)$$

Напруження виражаємо через переміщення u_φ із (44) за формулами (35). Знаходимо

$$\tau_{r\varphi}=\frac{4\alpha G}{\pi}\mathrm{Re}\left(\frac{a-iz}{r^2}R-\frac{a}{R}\right),$$

$$\tau_{z\varphi}=-\frac{4\alpha G}{\pi r}\mathrm{Im}\left(R+\frac{a(a+iz)}{R}\right). \qquad (45)$$

У позначеннях (32) залежності (44), (45) подамо у вигляді

$$u_\varphi=-\frac{2\alpha}{\pi}\left(\frac{R_0R_1}{r}\cos(\vartheta_0+\varphi_0)-r\cdot\mathrm{arctg}\frac{a+R_1\sin\varphi_0}{z+R_1\cos\varphi_0}\right),$$

$$\tau_{r\varphi}=\frac{4\alpha G}{\pi}\left(\frac{R_0R_1}{r^2}\cos(\vartheta_0+\varphi_0)-\frac{a}{R_1}\cos\varphi_0\right),$$

$$\tau_{z\varphi}=\frac{4\alpha G}{\pi r}\left(R_1\sin\varphi_0-\frac{aR_0}{R_1}\sin(\vartheta_0+\varphi_0)\right). \qquad (46)$$

Формули (44) – (46) отримані І. Снєддоном [3] та Н. А. Ростовцевим [4] іншим шляхом.

Список використаних джерел

1. *Абрамов В. М.* Исследование случая несимметричного давления штампа круглого сечения на упругое полупространство // Докл. АН СССР. – 1939. – **23**, № 8. – С. 759-763.
2. *Reissner E., Sagoccі H.* Forced torsional oscillations of an elastic half-space // Journal of Applied Physics. – 1944. – **15**, N 9. – P. 652-654.
3. *Снеддон И.* Преобразования Фурье. – Москва: Изд-во иностр. лит., 1955. – 668 с.
4. *Ростовцев Н. А.* К задаче о кручении упругого полупространства // Прикл. математика и механика. – 1955. – **19**. – С. 55-60.
5. *Нобл Б.* Метод Винера – Хопфа. – Москва: Изд-во иностр. лит., 1962. – 280 с.
6. *Попов Г. Я.* Об одном способе решения осесимметричной контактной задачи // Прикл. математика и механика. – 1961. – **25**, вып. 1.
7. *Леонов М. Я.* Общая задача о давлении кругового штампа на упругое полупространство // Прикл. математика и механика. – 1953. – **17**, вып. 1. – С. 87-98.
8. *Лурье А. И.* Пространственные задачи теории упругости. – М.: Гостехиздат, 1955. – 492 с.
9. *Уфлянд Я. С.* Интегральные преобразования в задачах теории упругости. – Ленинград: Наука, 1968. – 402 с.
10. Справочник по специальным функциям / Под ред. Абрамовица М. и Стиган И. – Москва: Наука, 1979. – 832 с.

References

1. ABRAMOV, B. (1939) Issledovanije sluchaja nesimmetrichnogo davlenija shtampa kruglogo sechenija. *Doklady AN SSSR.* V. 23. N 8.
2. REISSNER, E. and SAGOCCI, H. (1944) Forced torsional oscillations of an elastic half-space. *Journal of Applied Physics.* V. 15. N 9. P. 652-654.
3. SNEDDON, I. (1951) *Fourier Transforms.* New York – Toronto – London.
4. ROSTOVTSEV, N. (1955) K zadache o kruchenii uprugogo poluprostranstva. *Prikladnaja matematika i mehanika.* V. 19. P. 55-60.
5. NOBL, B. (1958) *Methods based on the Wiener – Hopf technique.* London – New York – Paris – Los Angeles.
6. POPOV, G. (1961) Ob odnom sposobe reshenija osesimmrichnoi kontaktnoi zadachi. *Prikladnaja matematika i mehanika.* V. 25. Issue 1.
7. LEONOV, M. (1953) Obschaja zadacha o davlenii krugovogo shtampa na uprugoje poluprostranstvo. *Prikladnaja matematika i mehanika.* V. 17. Issue 1. P. 87-98.
8. LUR'JE, A. (1955) *Prostranstvennyje zadachi teorii uprugosti.* Moskva: Gostehizdat.
9. UFLJAND, JA. (1968) *Integral'nye preobrazovanija v zadachah teorii uprugosti.* Leningrad: Nauka.
10. ABRAMOWITZ, M. and STEGUN, A. (ed.) (1964) *Handbook of mathematical Functions.* National Bureau of Standards Applied Mathematics Series 55. New York.

Надійшла до редколегії 28.10.14

УДК 532.595

І. Ю. Семенова[1], к. ф.-м. н.

Побудова координатного базису для задачі коливань рідини в двопорожнинному гіперболоїді.

[1] Київський національний університет імені Тараса Шевченка,03680, м. Київ, пр-т. Глушкова 4е,
e-mail: irina.semenova25@gmail.com

Semenova I.Yu.[1], phD.

Construction of coordinate basis of liquid sloshing problem in two-sheeted hyperboloid.

[1] Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03680, Kyiv, Glushkova st., 4e,
e-mail: irina.semenova25@gmail.com

Для задачі про нелінійні коливання рідини з вільною поверхнею в резервуарі, що має форму двопорожнинного гіперболоїда, побудувана система координатних функцій. Побудований координатний базис задовольняє умові неперетікання на змочуваній в незбуреному стані бічній поверхні бака і на певному подовжені, куди можуть досягати гребені нелінійних хвиль. Для випадку гіперболічного резервуару побудовано системи координатних функцій і для них визначені похибки задоволення граничних умов. Чисельні приклади свідчать про ефективність побудованої моделі.

Ключові слова: рідина, двопорожнинний гіперболоїд, похибки виконання граничних умов.

For the problem about nonlinear oscillations of liquid with a free surface in reservoir of two-sheeted hyperbolic shape we created a system of coordinate functions. The constructed coordinate basis with a high accuracy holds non-flowing conditions on unperturbed moisten boundary and on its prolongation, where crests of nonlinear waves can reach. It is shown that the traditional technique of determination of basis functions results in the violation of solvability conditions of the problem. For two-sheeted hyperbolic reservoir we constructed systems of coordinate functions and determined for them errors of realization of boundary conditions. This approach was generated on the basis of the analysis of the mechanical nature of the statement of the problem about free oscillations of liquid with a free boundary. Numerical examples are evidence of effectiveness of the constructed model.

Key Words: liquid, two-sheeted hyperboloid, errors of boundary conditions.

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Жук Я.О.

Вступ

Розглянуто задачу моделювання нелінійних коливань рідини з вільною поверхнею в резервуарі, що має форму двопорожнинного гіперболоїда обертання. Це некласична нелінійна крайова задача математичної фізики. Труднощі розв'язання нелінійних крайових задач гідродинаміки обмеженого об'єму рідини із вільною поверхнею полягають не тільки в тому, що крайові умови на вільній поверхні нелінійні, але й в тому, що вільна поверхня невідома і наперед невідома область визначення потенціалу швидкостей рідини.

Головною складністю в розв'язанні такого класу задач є залучення великої кількості форм коливань в дискретну модель, що базується на варіаційному принципі Гамільтона - Остроградського. Причому, кінематична і динамічна граничні умови мінімізуються по єдиному ортогональному базису. Побудовані координатні функції задовольняють кінематичним граничним умовам і умові розв'язності задачі. До того ж в резервуарах з нециліндричними стінками виникають геометричні нелінійності, що призводить до додаткової нелінійної залежності всіх форм коливань.

Постановка задачі

Розглянемо задачу коливань рідини у резервуарі, що має форму двопорожнинного гіперболоїда обертання. Рідина вважається ідеальною, однорідною, нестисливою, початковий рух безвихровий. Введені припущення значно спрощують постановку задачі, при цьому зберігається її практичне значення.

© І.Ю. Семенова, 2014

Математичне формулювання задачі динаміки системи резервуар-рідина з вільною поверхнею є сукупністю кінематичних і динамічної граничних умов. Кінематичні умови повинні розглядатися як механічні в'язі, що накладають обмеження на варіації невідомих при описі механічної системи на основі принципу Гамільтона-Остроградського. При цьому динамічні граничні умови витікають з варіаційного принципу Гамільтона-Остроградського як природні.

Першим етапом розв'язання нелінійної задачі про коливання рідини є введення недекартової параметризації області, яку займає рідина [4]. В нових параметрах рідина набуває циліндричної форми, це дає можливість представити рівняння вільної поверхні в розв'язаному щодо однієї з координат вигляді.

Для ефективної реалізації нелінійної дискретної моделі динаміки рідини з вільною поверхнею в гіперболічній порожнині, потрібно визначити набір координатних функцій для представлення потенціалу швидкостей рідини.

Класична задача про визначення частот та форм коливань має вигляд:

$$\Delta\varphi = 0 \text{ в } \tau;$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0 \text{ на } \Sigma_0; \qquad (1)$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z} = \lambda\varphi \text{ на } S_0,$$

а її варіаційне формулювання:

$$\delta I = 0,\ I = \int_{\tau_0} (\vec{\nabla}\varphi)^2 d\tau - \lambda \int_{S_0} \varphi^2 ds. \qquad (2)$$

Основні етапи реалізації методу побудови координатних функцій тісно пов'язані з виконанням умови розв'язності задачі Неймана для рівняння Лапласа. Умова розв'язності є вимогою задоволення в слабкому сенсі умови неперетікання на змоченій в незбуреному стані стінці бака, неперетікання рідини на деякому продовженні стінки бака над вільною поверхнею і вимоги збереження об'єму рідини в збуреному русі. Враховуючи зв'язок умови неперетікання на незбуреній твердій поверхні з умовами розв'язності задачі Неймана для рівняння Лапласа, цю умову необхідно виконати з високою точністю.

На відміну від циліндричних порожнин для випадку гіперболоїда обертання, виконання умови збереження об'єму для кожної форми коливання рідини окремо недостатньо для виконання вимоги збереження в цілому.

З аналізу умов розв'язності крайової задачі Неймана випливає, що для отримання ефективного розв'язку нелінійної задачі координатні функції повинні задовольняти кінематичним умовам задачі і умовам її розв'язності. Тобто необхідно задовольнити з високою точністю умовам неперетікання на змоченої в незбуреному стані стінки бака; також задовольнити умовам неперетікання рідини на деякому продовженні стінки бака над вільною поверхнею; виконати умови збереження об'єму рідини в збуреному русі. Треба підкреслити, що задовольнити цим умовам необхідно на етапі побудови розкладів змінних до реалізації варіаційного принципу.

Для знаходження мінімуму функціоналу (2) застосовується метод Рітца [3].

Після підстановки розкладів за методом Рітца отримуємо задачу на власні значення:

$$Ax - \lambda Bx = 0 \qquad (3)$$

Розклад потенціалу швидкостей представляємо як лінійну комбінацію базисних функцій w_k:

$$\varphi \sim w_k^{(m)}(r,z) \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} m\theta, \qquad (4)$$

де $w_k^{(m)}(r,z)$ є системою гармонічних поліномів [4], які одержуються з фундаментальних розв'язків рівняння Лапласа для сферичної системи координат, перетвореними до циліндричної системи. Ці функції взагалі не залежать від геометрії області і для їх обчислення, а також визначення їх похідних існують відповідні рекурентні співвідношення [4]. Це дозволяє легко отримувати функції та їх похідні навіть для великих індексів, що важливо при комп'ютерній реалізації. Прийнятий розклад задовольняє вимогам повноти, ортогональності та гармонічності, проте не задовольняє кінематичним граничним умовам на твердих стінках і на вільній поверхні.

Оскільки умова неперетікання на входить у постановку задачі (2), тобто не накладається ніяких обмежень на рух рідини вище рівня незбуреної вільної поверхні, для успішного розв'язання нелінійної задачі застосовується метод допоміжної області [1, 2]. При цьому у якості базису приймаються не форми коливань рідини з вільною поверхнею, а близькі до них функції, які додатково задовольняють умовам розв'язності задачі. Першим етапом в алгоритмі побудови системи базисних функцій є додаткове збільшення глибини заповнення резервуару $\Delta\tau$,

де $\Delta\tau$ вибирається на основі вимог умови неперетікання на продовженні змочуваної стінки бака, куди можуть досягати гребні хвиль. Класичним методом розв'язується задача для області $\tau + \Delta\tau$. Знайдений розв'язок уточнюється методом ітерацій, а функції з однаковим окружним номером ортогоналізуються. Для оцінки частотних характеристик і контролю власні числа для кожної функції визначаються за методом Релея.

Чисельна реалізація

Застосуємо метод допоміжної області для резервуара, що має форму двопорожнинного гіперболоїда обертання. Розглянемо результати розв'язання задачі для рівняння твірної $r = \frac{a}{c}\sqrt{(x+H+c)^2 - c^2}$. Розв'язок задачі побудований на основі розкладу по 22 гармонічних поліномах. Алгебраїчна проблема власних чисел розв'язувалась при $\varepsilon = 10^{-19}$. Модифікаційний метод використовувався при $\Delta H = 0.2R$ (значення ΔH визначає розмір допоміжних областей $\Delta\Sigma$ та $\Delta\tau$).

Таблиця 1. містить значення відносної похибки виконання умови неперетікання на твердій змочуваній стінці резервуара, коли рівень заповнення резервуара змінювався у діапазоні [0.50; 2.00] при збереженні постійного значення радіуса вільної поверхні *R = 1*. Де Δz - рівень вище незбуреної вільної поверхні, куди очікувано досягають гребні хвиль рідини. В таблиці 1 представлені результати визначення перших форм коливань (*k=1*) для параметрів розкладу по кутовій координаті *m=1, m=2, m=3.* Варіант 1 відповідає класичній реалізації методу, варіант 2 - методу допоміжної області, застосованому у сукупності з методом ітераційного уточнення.

Для оцінки точності отриманого розв'язку приймається відносна похибка у вигляді:

Таблиця 1

Залежність похибки виконання умови неперетікання від висоти

z/H	*m=1,k=1*		*m=2,k=1*		*m=3,k=1*	
	1	2	1	2	1	2
Δz	-0.068952	-0.000112	-0.195152	-0.000322	-0.358532	-0.000586
1,00	-0.000101	0.000005	-0.000239	0.000017	-0.000361	0.000037
0,80	-0.000007	0.000006	-0.000016	0.000013	-0.000019	0.000017
0,60	0.000003	-0.000002	0.000008	-0.000008	0.000008	-0.000013
0,40	-0.000003	0.000000	-0.000005	0.000007	0.000001	0.000012
0,20	0.000004	-0.000001	-0.000002	-0.000012	-0.000014	-0.000014
0,00	0.000004	-0.000009	0.000001	-0.000006	0.000000	-0.000002

$$\delta = \left.\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right|_{\Sigma} \Big/ \max\left.\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right|_{S_0} \qquad (5)$$

Раніше на основі методу допоміжної області раніше були побудовані координатні функції для розв'язання задачі про нелінійні коливання рідини в конічному, еліптичному, параболічному та циліндричному баках. Отримані функції з точністю 10^{-5} і вище задовольняли умові неперетікання на стінці, і з точністю порядку 10^{-3} на продовженні стінки над вільною поверхнею. Аналіз похибки умов неперетікання наведені в таблиці 1 показує, що для класичного методу поведінка розв'язку над вільною поверхнею є незадовільною з точки зору використання у якості координатних функцій для нелінійної задачі. Це очікуваний результат, оскільки формулювання крайової задачі (2), отримане на основі гіпотез лінійної теорії, не обмежує характер поведінки розв'язку вище рівня вільної поверхні. Метод допоміжної області покращує значення похибки вище рівня вільної поверхні (приблизно у 600 разів). Значення відхилень δ на Σ_0 також зменшуються (точність виконання умови неперетікання збільшується).

Таблиця 2 містить результати визначення похибки виконання умови неперетікання на стінках бака: δ_h - вище рівня вільної поверхні, δ_c - в кутовій точці і δ_i - максимальне значення на Σ_0. Дані приведені для резервуара з параметрами: *a=1.0, c=2.4, H = 1.*

Таблиця 2

Застосування модифікаційного методу

z/H	*m=1,k=1*	*m=0,k=1*	*m=2,k=1*	*m=1,k=2*	*m=3,k=1*	*m=0,k=2*
δ_h	-0.000112	-0.000912	-0.000322	-0.003074	-0.000586	-0.00778
δ_c	0.000005	0.000010	0.000017	0.000136	0.000037	0.000153
δ_i	0.000007	0.000032	0.000017	0.000199	0.000037	0.000266

Аналіз даних свідчить про те, що одержані базисні функції з прийнятною точністю задовольняють умовам неперетікання як на бічній поверхні ($\delta \sim 10^{-4}$), що відповідає незбуреній рідині, так і на її певному продовженні, куди можуть досягати гребені нелінійних хвиль ($\delta \sim 10^{-3}$).

Висновки

Розглянуто застосування методики визначення координатних функцій, що базується на розв'язку лінійної задачі знаходження частот і форм коливань рідини з вільною поверхнею в резервуарах, що мають форму двопорожнинного гіперболоїда обертання. Застосований метод доповнює класичну задачу низкою вимог, що виходять поза межі лінійної постановки задачі і відображають частину кінематичних обмежень нелінійної задачі. Показано, що виконання цих умов дозволило побудувати систему координатних функцій, що уточнено задовольняють умові неперетікання на збуреній змочуваній межі області, яку займає рідина. Аналіз чисельних результатів показав значне ослаблення впливу особливої точки на контурі при підвищенні точності виконання граничних умов задачі, особливо на ділянці бічної поверхні, куди можуть досягати гребні нелінійних хвиль. Отримані базисні функції уточнено задовольняють умові неперетікання на змочуваній границі і можуть бути використані як координатні функції при побудові нелінійних дискретних моделей руху ідеальної рідини в резервуарах, що мають форму двопорожнинного гіперболоїда.

Список використаних джерел

1. *Лимарченко О.С.* Нелинейная динамика конструкций с *жидкостью/Лимарченко О.С., Ясинский В.В.* – Киев: Национальный технический университет Украины «КПИ», 1997. – 338 *с*.
2. *Лимарченко О.С.* Построение координатных функций для решения нелинейной задачи о колебании жидкости в параболоиде вращения. /*Лимарченко О.С., Семенова И.Ю* // Комплексний аналіз і течії з вільними границями. Збірник праць Інституту математики НАН України. – Київ, Інститут математики НАН України, 2006. – **3**. – №4. – С. 374 – 388.
3. *Михлин С.Г.* Вариационные методы в математической физике / *Михлин С.Г.* – М: Наука, 1970. – 512 с.
4. *Луковский И.А.* Нелинейные колебания жидкости в сосудах сложной геометрической формы./ *Луковский И.А.* – Киев, Издательство "Наукова думка" 1975. –135 с.

References

1. LIMARCHENKO, O., YASINSKI, V. (1997) *Nonlinear dynamics of structures with liquid.* - Kiev: Nat.Techn. Univ. Ukraine "KPI".
2. LIMARCHENKO, O., SEMENOVA, I. (2006) Construction of coordinate functions for nonlinear problem of liquid sloshing in parabolic reservoir. *Complex analysis and free surface flows. Proceedings of the Institute of Mathematics of NAS of Ukraine.* 3(4). p. 374-388.
3. MIKHLIN, S. (1970*) Variational methods in mathematical physics.* – Moskva: Nauka.
4. LUKOVKY, I. (1975) *Nonlinmear oscillations of liquid in vessels of complex geometric.* Kiev: Naukova dumka.

Надійшла до редколегії 18.09.14

УДК 517. 946

Ткач А.Б. здобувач

Квазітороїдальні багатовиди нелінійних систем рівнянь з частинними похідними з імпульсним впливом

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, пр-т Глушкова, 4.

E–mail **us_ukr@yahoo.com**

A.B. Tkach competitor

Quasitoroidal manifolds for nonlinear systems of partial differential equations with impulse influence

Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03680, Kyiv, Glushkova st., 4

E–mail **us_ukr@yahoo.com**

Для нелінійних систем диференціальних рівнянь з частинними похідними з імпульсним впливом досліджуються умови існування квазітороїдальних багатовидів

Ключові слова: нелінійні системи, частинні похідні, квазітороїдальні багатовиди, імпульсний вплив.

The quasitoroidal manifolds for the systems of the usual differential equations with the impulse influence are investigated by Yu. A. Mitropolskiy, A. M. Samoilenko, N. A. Perestyuk. The integral manifolds for the systems of the partial differential equations are studied by J. Kurzweil, A. B. Vasilyeva, Yu. S. Kolesov, S. A. Kashchenko, N.H. Rosov , Yu. A. Mitropolskiy, B. P. Tkach and by author of this article. In this work the sufficient conditions of the existence of the quasitoroidal manifolds for the nonlinear systems of the partial differential equations with the impulse influence are investigated. The impulse influence depends on the space variable, on the values of the unknown function and its partial derivative in the fixed moments of the impulse influences. The quasitoroidal manifolds we costruct by the iterations method. We define a matrixant for the homogeneous system of the partial differential equations. Then using A. M. Samoilenko's approach we introduce a projective matrix which is continuous in its arguments, periodic in second argument. Further we construct Green's function for the problem on the restricted solutions of the unhomogeneous systems of the partial differential equations with the impulse influence. Using this Green's function we obtain the Green's function for finding the quasitoroidal manifold of the nonlinear systems of the partial differential equations with the impulse influence and representation of the quasitoroidal manifold of our system as the uniform limit of the sequence of the approximate quasitoroidal manifolds.

Key word: nonlinear systems, partial derivatives, quasitoroidal manifolds, impulse influence.

Статтю представив академік НАНУ, доктор фіз.-мат. наук, професор Перестюк М.О.

Вступ. Квазітороїдальні багатовиди для систем звичайних диференціальних рівнянь з імпульсним збуренням досліджувалися в роботах Ю.О. Митропольського, А.М. Самойленка, М.О. Перестюка [1,2].

Дослідженню інтегральних багатовидів дифференціальних рівнянь з частинними похідними присвячені роботи Я. Курцвейля, А.Б. Васильєвої, Ю.С. Колесова, С.А. Кащенка, Н.Х. Розова [3, 4], робота Ю.О. Митропольського, Б.П. Ткача [5], а також робота автора [6].

Постановка задачі. В даній роботі досліджуються умови існування квазітороїдальних багатовидів для нелінійних систем диференціальних рівнянь з частинними похідними з імпульсним впливом вигляду

$$\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t \partial x} = A\left(x,\varphi,u(t,x),u'_x(t,x)\right)\frac{\partial u(t,x)}{\partial x} + c\left(x,\varphi,u(t,x),u'_x(t,x)\right),\ t \neq t_j$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = b(\varphi), \qquad (1)$$

$$\Delta\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}\bigg|_{t=t_j} = H_j\left(x,\varphi(t_j),u(t_j,x),u'_x(t_j,x)\right).$$

Тут u, c, $H_j \in E_n$, $\varphi \in E_m$, $A(x, \varphi, u, u'_x)$ – $(n \times n)$-матриця. Вектор-функції $c(x, \varphi, u, u'_x)$, $H_j(x, \varphi, u, u'_x)$, $b(\varphi)$ і матриця $A(x, \varphi, u, u'_x)$ неперервні по своїх аргументах, періодичні по φ з періодом 2π.

Припускаємо, що моменти часу t_j і вектор-функції H_j задовольняють умови

$$t_{j+1} - t_j \geq h, \quad H_{j+p} = H_j \qquad (2)$$

де h, p – деякі додатні числа, $j = 1, 2 \ldots$

Нехай $\varphi_t(\tau_0, \varphi)$ буде розв'язком системи рівнянь

$$\frac{d\varphi}{dt} = b(\varphi)\ , \qquad (3)$$

який задовольняє умову $\varphi_{\tau_0}(\tau_0, \varphi) = \varphi$, причому τ_0, φ – довільні сталі.

©А.Б. Ткач, 2014

Функція $u = u(x,\ \varphi)$ визначає квазіторої-дальний багатовид [1] системи рівнянь (1), якщо $u(x,\ \varphi)$ обмежена, неперервна і періодична по φ з періодом 2π функція, для якої при всіх $(x,t) \in [-a,a]\times(-\infty,\infty)$ виконується тотожність

$$\frac{\partial^2 u(x,\varphi_t(\tau_0,\varphi))}{\partial t\partial x} \equiv$$
$$\equiv A\big(x,\varphi_t(\tau_0,\varphi),u(x,\varphi_t(\tau_0,\varphi)),u'_x(x,\varphi_t(\tau_0,\varphi))\big)\times$$
$$\times\frac{\partial u(x,\varphi_t(\tau_0,\varphi))}{\partial x}+c(x,\varphi_t(\tau_0,\varphi),u(x,\varphi_t(\tau_0,\varphi)),$$
$$u'_x(x,\varphi_t(\tau_0,\varphi))),\quad t\neq t_j$$
$$\Delta\frac{\partial u(x,\varphi_t(\tau_0,\varphi))}{\partial x}\bigg|_{t=t_j}=H_j(x,\varphi_{t_j}(\tau_0,\varphi),\qquad(4)$$
$$u(x,\varphi_{t_j}(\tau_0,\varphi)),u'_x(x,\varphi_{t_j}(\tau_0,\varphi))),\quad j=1,2,...$$

Квазітороїдальний багатовид системи рівнянь з імпульсним впливом (1) будуємо за допомогою методу ітерацій. Для знаходження першого наближення отримуємо систему рівнянь з частинними похідними з імпульсним впливом

$$\frac{\partial^2 u_1(t,x)}{\partial t\partial x}=A(x,\varphi,0,0)\frac{\partial u_1(t,x)}{\partial x}+c(x,\varphi,0,0),\ t\neq t_j,$$
$$\frac{d\varphi}{dt}=b(\varphi),\qquad(5)$$
$$\Delta\frac{\partial u_1(t,x)}{\partial x}\bigg|_{t=t_j}=H_j(x,\varphi_{t_j}(\tau_0,\varphi),0,0),u_1(t,0)=0.$$

якщо за нульове наближення взяти $u_0(t,x)\equiv 0$.

Розглядаємо далі систему диференціальних рівнянь

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x}\right)=A\big(x,\varphi_t(\tau_0,\varphi),0,0\big)\left(\frac{\partial u_1}{\partial x}\right).$$

Визначимо її матрицант як матрицант такої системи диференціальних рівнянь

$$\frac{dz}{dt}=A(x,\varphi_t(\tau_0,\varphi),0,0)z$$

та позначимо цей матрицант через $\Omega_{1\tau}{}^t(x,\varphi)$.

Тепер введемо функцію $G_0{}^1(x,\tau,\varphi)$ співвідношенням

$$G_0{}^1(x,\tau,\varphi)=\begin{cases}\Omega_{1\tau}{}^0(x,\varphi)P(x,\varphi_\tau(\tau_0,\varphi)), & \tau<0\\ \Omega_{1\tau}{}^0(x,\varphi)[P(x,\varphi_\tau(\tau_0,\varphi))-E], & \tau>0\end{cases}$$

де $P(x,\varphi_\tau(\tau,\varphi))$ є проекційна матриця. Вона неперервна по своїх аргументах і періодична по другому аргументу з періодом 2π.

Будемо припускати, що функція $G_0{}^1(x,\tau,\varphi)$ задовольняє нерівність

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\big\|\ G_0^1(x,\tau,\varphi)\ \big\|\,d\tau\ <R_1\ <+\infty,$$

де R_1 є додатна стала.

Функцію $G_t{}^1(x,\tau,\varphi)$ визначимо рівністю [1]

$$G_t{}^1(x,\tau,\varphi)=\begin{cases}\Omega_{1\tau}{}^t(x,\varphi)P(x,\varphi_\tau(\tau_0,\varphi)), & \tau<t\\ \Omega_{1\tau}{}^t(x,\varphi)[P(x,\varphi_\tau(\tau_0,\varphi))-E], & \tau>t\end{cases}$$

Вона є функцією Гріна для задачі про обмежені розв'язки наступної системи диференціальних рівнянь з частинними похідними

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial t\partial x}=A\big(x,\varphi_t(\tau_0,\varphi),0,0\big)\frac{\partial u_1}{\partial x}+c\big(x,\varphi_t(\tau_0,\varphi),0,0\big),$$
$$\Delta\frac{\partial u_1(t,x)}{\partial x}\bigg|_{t=t_j}=H_j(x,\varphi_{t_j}(\tau_0,\varphi),0,0).\qquad(5')$$

Тоді обмежений розв'язок системи рівнянь з частинними похідними з імпульсним впливом (5') записуємо у вигляді

$$u_{1t}(x,\varphi)=\int_0^x\int_{-\infty}^{+\infty}G_t{}^1(\xi,\tau,\varphi)c(\xi,\varphi_\tau(\tau_0,\varphi),0,0)\,d\tau d\xi+$$
$$+\int_0^x\sum_{-\infty<j<+\infty}G_t{}^1(\eta,t_j,\varphi)H_j(\eta,\varphi_{t_j}(\tau_0,\varphi),0,0)d\eta.$$

Визначена вище функція $G_0{}^1(x,\tau,\varphi)$ є функцією Гріна задачі про квазітороїдальний багатовид системи (5). Тоді отримуємо наступне представлення квазітороїдального багатовиду

$$u=u_{10}(x,\varphi)=\int_0^x\int_{-\infty}^{+\infty}G_0{}^1(\xi,\tau,\varphi)c(\xi,\varphi_\tau(\tau_0,\varphi),0,0)d\tau d\xi+$$
$$+\int_0^x\sum_{-\infty<j<+\infty}G_0{}^1(\eta,t_j,\varphi)H_j(\eta,\varphi_{t_j}(\tau_0,\varphi),0,0)d\eta.$$

Для одержання k-го наближення квазітороїдального багатовиду розглядаємо систему рівнянь з частинними похідними з імпульсним впливом

$$\frac{\partial^2 u_k(t,x)}{\partial t\partial x}=A\big(x,\varphi,u_{k-1}(t,x),u'_{(k-1)x}(t,x)\big)\frac{\partial u_k(t,x)}{\partial x}+$$
$$+c\big(x,\varphi,u_{k-1}(t,x),u'_{(k-1)x}(t,x)\big),\quad t\neq t_j$$
$$\frac{d\varphi}{dt}=b(\varphi),$$
$$\Delta\frac{\partial u_k(t,x)}{\partial x}\bigg|_{t=t_j}=H_j\big(x,\varphi_{t_j}(\tau_0,\varphi),\qquad(6)$$
$$u_{k-1}(x,\varphi_{t_j}(\tau_0,\varphi)),u'_{(k-1)x}(x,\varphi_{t_j}(\tau_0,\varphi))\big)$$

Нехай $\Omega_{k\tau}{}^t(x,\varphi)$ є матрицант системи диференціальних рівнянь

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u_k}{\partial x}\right)=A\Big(x,\varphi_t(\tau_0,\varphi),\ u_{k-1}(x,\varphi_t(\tau_0,\varphi)),$$
$$u'_{(k-1)x}(x,\varphi_t(\tau_0,\varphi))\Big)\frac{\partial u_k}{\partial x}.$$

Визначимо функцію $G_t{}^k(x,\tau,\varphi)$ рівністю

$$G_t{}^k(x,\tau,\varphi)=\begin{cases}\Omega_{k\tau}{}^t(x,\varphi)P(x,\varphi_\tau(\tau_0,\varphi)), & \tau<t\\ \Omega_{k\tau}{}^t(x,\varphi)[P(x,\varphi_\tau(\tau_0,\varphi))-E],\tau>t,\end{cases}$$

де $P(x,\varphi_\tau(\tau_0,\varphi))$ є проекційна матриця, неперервна по своїм аргументам *і* періодична по другому аргументу з періодом 2π.

Припускаємо, що

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left\| G_0{}^k(x,\tau,\varphi) \right\| d\tau < R_k < +\infty,$$

де R_k є додатна стала.

Функція $G_t{}^k(x,\tau,\varphi)$ є функцією Гріна задачі про обмежені розв'язки для системи диференціальних рівнянь з частинними похідними

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u_k}{\partial x}\right) = A\big(x,\varphi_t(\tau_0,\varphi),u_{k-1}(x,\varphi_t(\tau_0,\varphi)),$$
$$u'_{(k-1)x}(x,\varphi_t(\tau_0,\varphi))\big)\frac{\partial u_k}{\partial x} +$$
$$+ c\left(x,\varphi_t(\tau_0,\varphi),u_{k-1}(x,\varphi_t(\tau_0,\varphi)),u'_{(k-1)x}(x,\varphi_t(\tau_0,\varphi))\right),$$
$$\Delta\frac{\partial u_k(t,x)}{\partial x}\bigg|_{t=t_j} = H_j\big(x,\varphi_{t_j}(\tau_0,\varphi),u_{k-1}(x,\varphi_{t_j}(\tau_0,\varphi)),$$
$$u'_{(k-1)x}(x,\varphi_{t_j}(\tau_0,\varphi))\big). \qquad (7)$$

Тоді обмежений розв'язок системи рівнянь з частинними похідними з імпульсним впливом (7) записується у вигляді

$$u_{kt}(x,\varphi) = \int_0^x\int_{-\infty}^{+\infty} G_t{}^k(\xi,\tau,\varphi)\,c(\xi,\varphi_\tau(\tau_0,\varphi),$$
$$u_{(k-1)}(\xi,\varphi_\tau(\tau_0,\varphi)),u'_{(k-1)\xi}(\xi,\varphi_\tau(\tau_0,\varphi)))\,d\tau d\xi +$$
$$+\int_0^x \sum_{-\infty<j<+\infty} G_t{}^k(\eta,t_j,\varphi)\,H_j(\eta,\varphi_{t_j}(\tau_0,\varphi), \qquad (8)$$
$$u_{(k-1)}(\eta,\varphi_{t_j}(\tau_0,\varphi)),u'_{(k-1)\eta}(\eta,\varphi_{t_j}(\tau_0,\varphi)))\,d\eta.$$

Функція $G_0{}^k(x,\tau,\varphi) = G_t{}^k(x,\tau,\varphi)\big|_{t=0}$ є функцією Гріна задачі про квазітороїдальний багатовид системи диференціальних рівнянь з частинними похідними з імпульсним впливом (7). Тоді квазітороїдальний багатовид системи диференціальних рівнянь з частинними похідними (7) записується у вигляді

$$u_{k0}(x,\varphi) = \int_0^x\int_{-\infty}^{+\infty} G_0{}^k(\xi,\tau,\varphi)\,c(\xi,\varphi_\tau(\tau_0,\varphi),$$
$$u_{(k-1)}(\xi,\varphi_\tau(\tau_0,\varphi)),u'_{(k-1)\xi}(\xi,\varphi_\tau(\tau_0,\varphi)))\,d\tau d\xi +$$
$$+\int_0^x \sum_{-\infty<j<+\infty} G_0{}^k(\eta,t_j,\varphi)\,H_j(\eta,\varphi_{t_j}(\tau_0,\varphi), \qquad (9)$$
$$u_{(k-1)}(\eta,\varphi_{t_j}(\tau_0,\varphi)),u'_{(k-1)\eta}(\eta,\varphi_{t_j}(\tau_0,\varphi)))d\eta$$

Припускаємо, що:

I. Матриця $A(x,\varphi,u,u'_x)$ неперервна по сукупності своїх аргументів, періодична по φ з періодом 2π і задовольняє умову Ліпшиця

$$\left\| A(x,\varphi,\bar u,\bar u'_x) - A(x,\varphi,u,u'_x)\right\| \le L_1\left\|\bar u - u\right\| + L_2\left\|\bar u'_x - u'_x\right\|, \qquad (10)$$

де L_1, L_2 – додатні сталі.

II. Вектор-функції $c(x,\varphi,u,u'_x), b(\varphi), H_j(x,\varphi,u,u'_x)$ неперервні по своїм аргументам, періодичні по φ з періодом 2π і виконуються нерівності

$$\left\| c(x,\varphi,u,u'_x)\right\| \le M,$$
$$\left\| H_j(x,\varphi(t_j),u(t_j,x),u'_x(t_j,x))\right\| \le M, \qquad (11)$$
$$\left\| c(x,\varphi,\bar u,\bar u'_x) - c(x,\varphi,u,u'_x)\right\| \le$$
$$\le K_1\left\|\bar u - u\right\| + K_2\left\|\bar u'_x - u'_x\right\|,$$
$$\left\| H_j(x,\varphi,\bar u,\bar u'_x) - H_j(x,\varphi,u,u'_x)\right\| \le$$
$$\le K_1\left\|\bar u - u\right\| + K_2\left\|\bar u'_x - u'_x\right\|, \qquad (12)$$

причому K_1, K_2 – додатні сталі.

III. Функції Гріна $G_t{}^k(x,\tau,\varphi), (k=1,2,...)$ періодичні по φ з періодом 2π і задовольняють нерівності

$$\left\| G_t{}^k(x,\tau,\varphi)\right\| \le Ke^{-\gamma|t-\tau|}. \qquad (13)$$

Тут K, γ – додатні сталі.

IV. Стала

$$Q = \left(\frac{2KM}{\gamma}(aL_1+L_2) + aK_1 + K_2\right)\alpha_0 K \qquad (14)$$

менше одиниці. Тут

$$\alpha_0 = \frac{2}{\gamma} + \frac{2}{1-e^{-\gamma h}}. \qquad (15)$$

Основний результат.

Теорема. *Нехай система рівнянь з частинними похідними з імпульсним впливом (1) задовольняє умови I – IV.*

Тоді існує єдиний обмежений розв'язок системи диференціальних рівнянь (1), який є рівномірною по t, x границею при $k\to\infty$ послідовності $\{u_{kt}(x,\varphi)\}$, де $u_{kt}(x,\varphi)$ визначається співвідношенням (8), і система рівнянь (1) має квазітороїдальний багатовид $u = u(x,\varphi)$. Він є рівномірною по x, φ границею при $k\to\infty$ послідовності квазітороїдальних багатовидів $\{u_{k0}(x,\varphi)\}$,

$$u = u(x,\varphi) = \lim_{k\to\infty} u_{k0}(x,\varphi). \qquad (16)$$

Доведення теореми. Доведемо рівномірну збіжність послідовних наближень $u_{kt} = u_{kt}(x,\varphi), k = 1,2,...$

Спочатку оцінимо $\left\| u_{kt}(x,\varphi)\right\|$.

Використовуючи представлення (8) розв'язку системи рівнянь з частинними похідними з

імпульсним впливом (7), а також нерівності (11) – (13), знаходимо оцінки

$$\| u_{kt}(x,\varphi) \| \le a\alpha_0 KM,$$
$$\left\| \frac{\partial}{\partial x} u_{kt}(x,\varphi) \right\| \le \alpha_0 KM \cdot \qquad (17)$$

Використовуючи функцію Гріна $G_t^{(n+1)}(\xi,\tau,\varphi)$ відповідної неоднорідної системи рівнянь з частинними похідними, знаходимо інтегральне представлення різниці $u_{(n+1)t}(x,\varphi) - u_{nt}(x,\varphi)$.

За допомогою умов Ліпшиця (10), (12), нерівностей (13), (17) для різниць $u_{2t}(x,\varphi) - u_{1t}(x,\varphi)$, $u_{3t}(x,\varphi) - u_{2t}(x,\varphi)$, … отримуємо оцінки.

Продовжуючи послідовно процес знаходження оцінок, маємо

$$\| u_{(n+k)t}(x,\varphi) - u_{nt}(x,\varphi) \| \le aQ^n \sum_{i=0}^{k-1} Q^i \alpha_0 KM,$$
$$\left\| \frac{\partial}{\partial x} u_{(n+k)t}(x,\varphi) - \frac{\partial}{\partial x} u_{nt}(x,\varphi) \right\| \le Q^n \sum_{i=1}^{k-1} Q^i \alpha_0 KM. \qquad (18)$$

В силу умови IV із нерівностей (18) при $k \to \infty$ випливає існування рівномірної по x,φ,t границі послідовності $\{ u_{nt}(x,\varphi) \}$,

$$u_{\infty t}(x,\varphi) = \lim_{n\to\infty} u_{nt}(x,\varphi), \qquad (19)$$

а отже, і рівномірної по x,φ границі послідовності квазіторoїдальних багатовидів $\{ u_{n0}(x,\varphi) \}$,

$$u = u_\infty(x,\varphi) = \lim_{n\to\infty} u_{n0}(x,\varphi). \qquad (20)$$

Із оцінок (18) при $k \to \infty$ для граничної функції $u_{\infty t}(x,\varphi)$ одержуємо нерівності

$$\| u_{\infty t}(x,\varphi) - u_{nt}(x,\varphi) \| \le aQ^n (1-Q)^{-1} \alpha_0 KM,$$
$$\left\| \frac{\partial}{\partial x} u_{\infty t}(x,\varphi) - \frac{\partial}{\partial x} u_{nt}(x,\varphi) \right\| \le Q^n (1-Q)^{-1} \alpha_0 KM \cdot \qquad (21)$$

Теорема доведена.

Список використаних джерел:

1.*Митропольский Ю. А.* Системы эволюционных уравнений с периодическими и квазипериодическими коэффициентами /Ю.А.Митропольский, А.М.Самойленко, Д.И.Мартынюк. – Киев: Наукова думка, 1984. - 216 с.

2.*Самойленко А.М.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием / А.М.Самойленко, Н.А.Перестюк. – Киев: Вища школа, 1987. – 287 с.

3. *Kurzweil J.* Exponentially stable integral manifolds, averaging principle and continuos dependence on a parameter / O.Kurzweil// Czechoslovak. Math. J. – 1966. – N 4.– P. 463 – 492.

4.*Васильева А.Б.* Бифуркация автоколебаний нелинейных параболических уравнений с малой диффузией / А.Б.Васильева, С.А. Кащенко, Ю.С.Колесов, Н.Х.Розов // Математический сборник. – 1986. – т.130, №4. – С.489 – 499.

5. *Митропольский Ю. А.* Квазитороидальные многообразия систем уравнений с частными производными с запаздыванием/ Ю.А.Митропольский, Б.П.Ткач //. – Киев, 1992 (Препринт / АН УССР, Институт математики; 92.5). – 40 с.

6. *Ткач А.Б.* Інтегральні багатовиди деяких систем рівнянь з частинними похідними з імпульсним збуренням / А.Б.Ткач // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка,серія:математика, механіка. – 2005. – Вип.. 13–14. – С. 76–80.

References

1.MITROPOLSKIY YU.A., SAMOILENKO A.M., MARTINYUK D.I. (1985) Sistemy evolyutsionnyh uravneniy s periodicheskimi i kvaziperiodicheskimi koeffitsientami. Kiev: Naukova dumka.

2. SAMOILENKO A.M., PERESTYUK N.A. (1987) Differentsialnyie uravneniya s impulsnym vozdeystviem. Kiev: Vyshcha shkola.

3. KURZWEIL J. (1966) Exponentially stable integral manifolds, averaging principle and continuous dependence on a parameter .Czechoslovak. Math. J.(4). P. 463 – 492.

4. VASILYEVA A.B., KASHCHENKO S.A., KOLESOV YU.S., ROSOV N.H. (1986) Bifurkatsiya avtokolebaniy nelineynyh parabolicheskih uravneniy s maloy diffuziey. Matematicheskiy sbornik 130 (4). P. 489 – 499.

5. MITROPOLSKIY YU.A., TKACH B.P. (1992) Kvazitoroidalnyie mnogoobraziya sistem uravneniy s chastnymi proizvodnymi s zapazdyvaniem. Preprint Instituta matematiki AN USSR (92.5). Kiev. 40 p.

6. TKACH A.B. (2005) Integralni bagatovydy deyakyh sistem rivnyan z chastnymy pohidnymy z impulsnym zburennyam. Visnyk of Kyiv Taras Shevchenko National University Series Mathemat., Mech. -2005. V. 13 -14. p. 76 -80.

Надійшла до редколегії 10.09.2014

УДК 539.595

Ткаченко Р.В.[1], аспірант
Лимарченко О.С. [1], д.тех.н., проф.

Динаміка рідини з вільною поверхнею в резервуарі на рухомій платформі під дією зовнішньої імпульсної сили

[1] Київський національний університет імені Тараса Шевченка,03680, м. Київ, пр-т. Глушкова 4е,
e-mail: terri_v@mail.ru
e-mail: olelim2010@yahoo.com

Tkachenko R.V[1], postgraduate student
Limarchenko O.S. [1], doctor of engineering, professor

Dynamics of liquid with a free surface in reservoir on movable platform under external impulse loading

[1] Taras Shevchenko National University of Kyiv,
03680, Kyiv, Glushkova ave., 4e,
e-mail: terri_v@mail.ru
e-mail: olelim2010@yahoo.com

Досліджується сумісний рух жорсткого циліндричного резервуару, частково заповненого ідеальною нестисливою рідиною з вільною поверхнею, приєднаного пружиною до рухомої платформи. Вивчаються нелінійні коливання системи під дією прикладеної до рухомої рами зовнішньої імпульсної сили.

Ключові слова: жорсткий циліндричний резервуар, рідина з вільною поверхнею, рухома платформа, нелінійні коливання, імпульсна сила.

We consider combined motion of cylindrical reservoir, which contains liquid with a free surface, attached by springs to movable platform, on the basis of nonlinear multimodal dynamical model. Nonlinear oscillations of liquid free surface, reservoir motion relative to platform, motion of platform under impulse force were analyzed. It was discovered that oscillations of liquid free surface and reservoir motion relative to platform have nonlinear character, for example, modulation of oscillations, drift of mean value of oscillations effect of high modes of oscillations are manifested. The presence of spring enforced these effects. In general the presence of spring does not result is dynamic off-tuning of oscillation, moreover, spring produces new modes of oscillations when due to transportation motion of reservoir liquid performs oscillations in non-inertial reference frame, which results in drift of mean value of oscillations and their increase on the whole. Mainly the presence of spring in attachment of reservoir with platform results in increase of liquid oscillations, however, there is narrow range of frequencies exceeding frequency of oscillation of the first normal mode approximately in 20%, where the presence of spring promotes lowering of amplitudes of liquid oscillations.

Key Words: rigid cylindrical reservoir, liquid with a free surface, movable platform, nonlinear oscillations, impulse force.

Статтю представив доктор фіз.-мат. наук, професор Я.О. Жук

Вступ

В техниці широко використовуються резервуари з рідиною, які знаходяться на рухомих платформах при різних способах закріплення і під дією різних зовнішніх навантажень [1–3]. Розв‘язання таких задач проводиться на основі наближених методів, переважно основаних на варіаційних алгоритмах.

Досліджується горизонтальний рух абсолютно твердого циліндричного резервуара, частково заповненого рідиною, приєднаного пружиною до рухомої платформи. Розглянуто декілька варіантів жорсткості пружини і жорстке закріплення. В початковий момент часу система знаходиться у спокої. До платформи прикладена сила у вигляді прямокутного імпульсу тривалістю 0.01с, 0.02с, 0.05с, 0.1с, 0.2с, 0.5с, 1с. Вважаємо, що рідина однорідна, нестислива, ідеальна. Рівняння вільної поверхні прийняте в формі $z = \xi(x, y, t)$.

Метою роботи є вивчення динамічних процесів руху системи рідина – резервуар при пружинному закріпленні до рухомої платформи під дією зовнішньої імпульсної сили, прикладеної до платформи.

© Р.В.Ткаченко, О.С.Лимарченко 2014

Математична модель дослідження нелінійної динаміки сумісного руху резервуару з рідиною, який пружиною приєднано до рухомої платформи, побудована в роботі [2] на основі методів роботи [1]. Модель є системою звичайних диференціальних рівнянь відносно параметрів коливань рідини і руху резервуару і платформи.

Чисельні результати

Для чисельних розрахунків приймалася модель, яка включає 12 форм коливань [1,2]. Проведено розрахунки за вказаною моделлю та за моделлю без пружини. Прийнято такі співвідношення мас рідини, резервуару, платформи $M_l = 3141.59$ кг, $M_{res} = 0{,}25\, M_l$, $M_{fr} = 5\ M_l$.

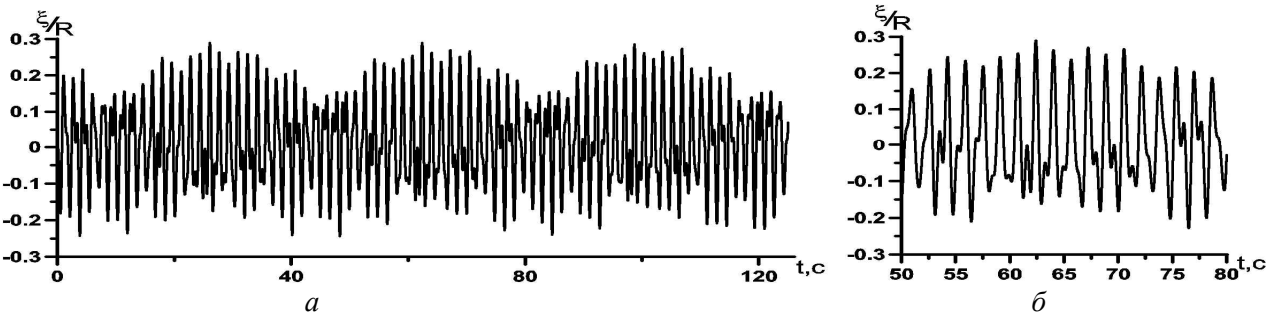
Покладемо: жорсткість пружини C=50 kN/m, 100 kN/m, 200 kN/m, 500 kN/m, 2000 kN/m. Час обрахунку взято. Сумісний рух рухомої платформи, резервуара і рідини розглядався на інтервалі до $t = 125$ с. До платформи прикладена сила у вигляді прямокутного імпульсу з різними амплітудами і тривалістю дії. Амплітуди імпульсів підбирались так, щоб коливання вільної поверхні рідини попадали в діапазон нелінійних коливань. Чим більше тривалість імпульсу тим при меншій амплітуді імпульсу вони досягаються.

На основі чисельних розрахунків знайдено зміну в часі амплітуд коливань вільної поверхні рідини на стінці і першої вісесиметричної форми (як показник збудження нелінійних механізмів), переміщення резервуару відносно платформи (відповідно ξ, a_3, u, віднесені до радіуса резервуара R), в залежності від часу і для різних значень жорсткостей і тривалості імпульсу.

При зміні збурень вільної поверхні рідини за час 125 с відбувається наближено 80 – 85 періодів коливань вільної поверхні рідини. При всіх значеннях імпульсів і жорсткостях пружини відмічаються нелінійні властивості коливань вільної поверхні рідини: модуляція коливань дрейф середнього значення, наявність двогорбих піків, що вказує на вплив вищих гармонік. Найбільший період моду-ляції спостерігається при жорсткості C=100 kN/m, що показано на Рис.1 для тривалості імпульсу 0.01с. На всіх графіках приведено закони зміни параметрів на інтервалі 125с (*а*.) і на меншому інтервалі (*б*) для більш детального аналізу.

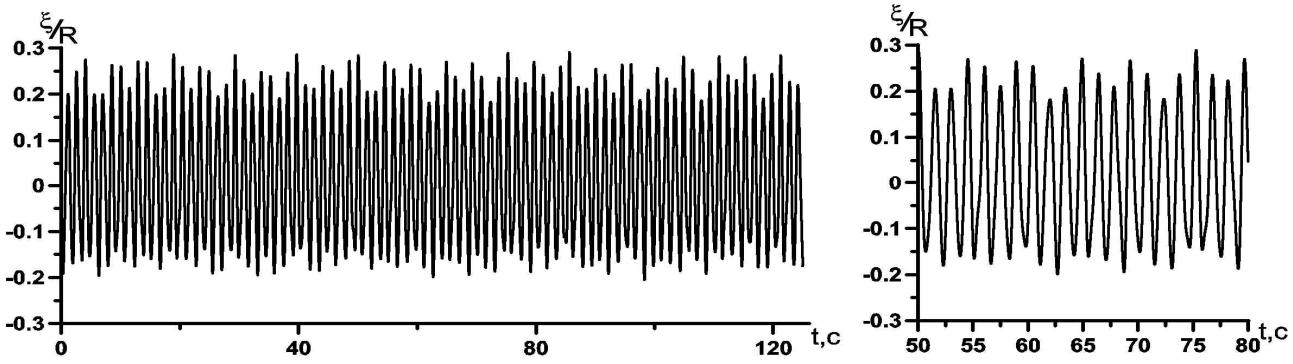
Зі збільшенням жорсткості пружини модуляція стає менш вираженою, період модуляції зменшується, амплітуди коливань вільної поверхні рідини зміщуються в додатному напрямку. Найменше модуляція коливань проявляється при жорсткому закріпленні (Рис. 2), де представлено коливання вільної поверхні рідини при тривалості імпульсу 0.05 с. Дрейф середнього значення амплітуди коливаннь вільної поверхні рідини збільшується зі збільшенням жорсткості пружини і збільшенням тривалості імпульсу. Суттєвий вплив вищих гармонік спостерігається до жорсткостей 500 kN/m включно, що ілюструє Рис. 3, де представлено коливання вільної поверхні рідини при C=200 kN/m (тривалість імпульсу 0.1с). Для цього режиму сильно помітний внесок вищих гармонік (Рис. 3 *б*). Аналіз показав, що вплив вищих гармонік послаблюється зі збільшенням тривалості імпульсу і жорсткості пружини. Найменший вплив вищих гармонік спостерігався при жорсткому закріпленні. При коливаннях вільної поверхні висота горбів хвиль більша за глибину впадин, що є характерним для нелінійного хвиле утворення.

Зміна амплітуд першої вісесиметричної форми коливань вільної поверхні рідини (Рис. 4). зумовлює несиметричність профілів хвиль, що на малюнку проявляється в вигляду суттєвого дрейфу середнього значення.



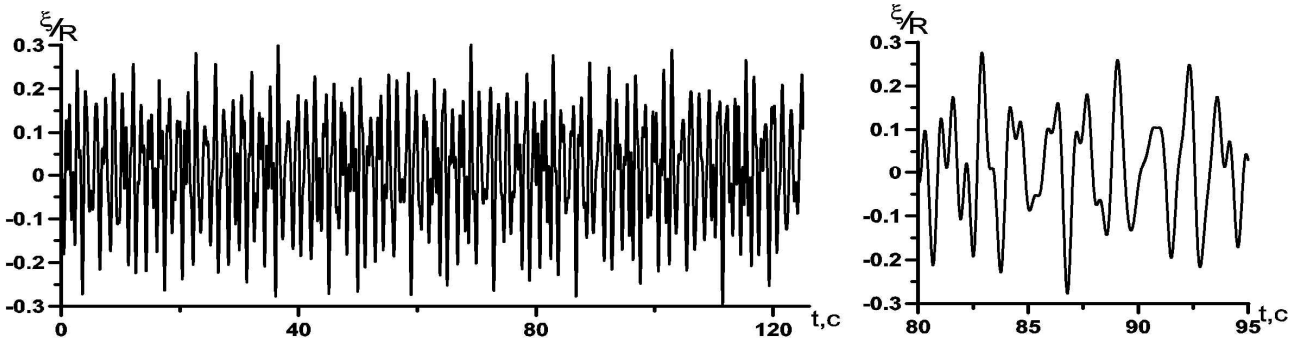
а *б*

Рис 1. Коливання вільної поверхні рідини на стінці при C =100 kN/m, тривалість імпульсу 0.05 с (*а* – інтервал 0–125 с, *б* – 50–80 с)



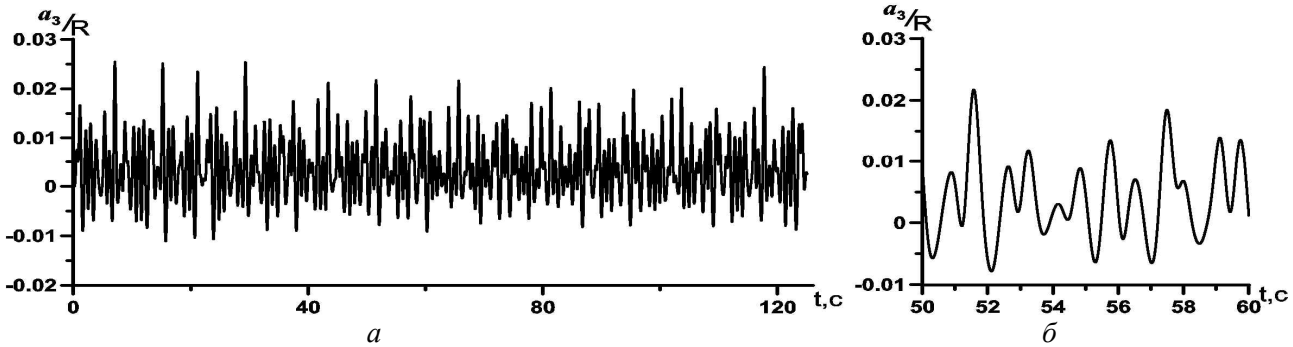
а *б*

Рис 2. Коливання вільної поверхні рідини при жорсткому закріпленні, тривалість імпульсу 0.05 с (*а* – інтервал 0–125 с, *б* – 50–80 с)



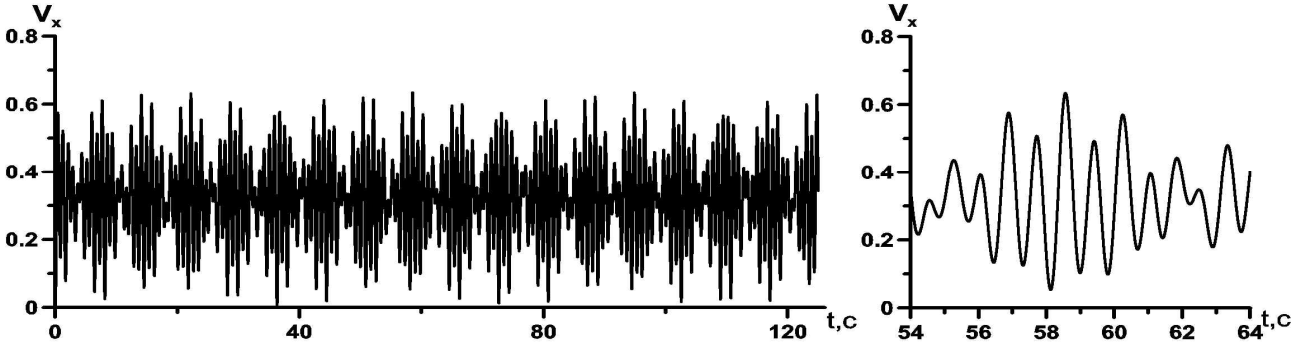
а *б*

Рис 3. Коливання вільної поверхні рідини при *C* =200 kN/m, тривалість імпульсу 0.1 с (*а* – інтервал 0–125 с, *б* – 80–95 с)



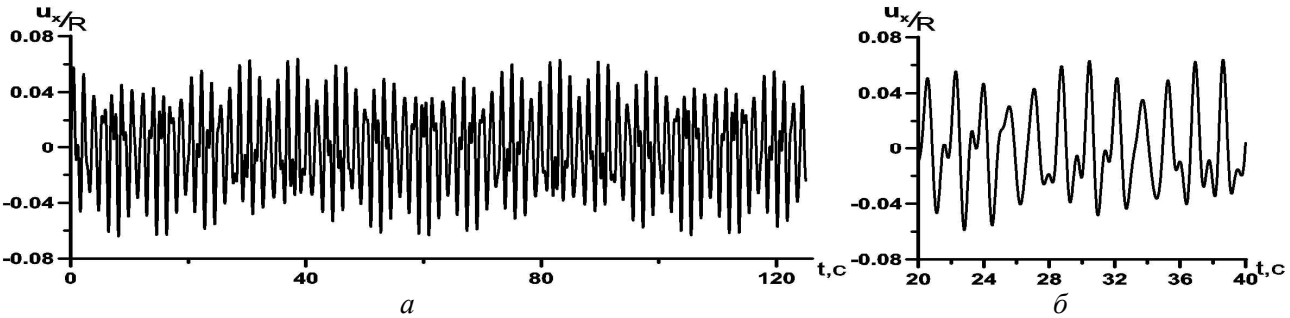
а *б*

Рис. 4. Збурення першої осесиметричної форми при *C*=100 kN/m тривалістю імпульсу 0.05 с (*а* – інтервал 0–125 с, *б* – 50–60 с)



а *б*

Рис 5. Швидкість руху циліндра при *C* =100 kN/m, тривалість імпульсу 0.05 с (*а* – інтервал 0–125 с, *б* – 54–64 с)



а *б*

Рис 6.Рух циліндра відносно рами при C =100 kN/m, тривалість імпульсу 0.5 с. (*а* – інтервал 0–125 с., *б* – 20–40 с.)

Проаналізуємо рух резервуара. Графік швидкості руху резервуара при відсутності пружини має вигляд усталеного гармонічного коливання з малою амплітудою. При наявності пружини маємо коливання з модуляцією з суттєвим впливом вищих гармонік, наприклад, Рис. 5 (з жорсткістю C=100 kN/m, і тривалістю імпульсу 0.05 с).

Розглянуто рух резервуара відносно платформи (Рис. 6). Встановлено, що наявність пружного закріплення сприяє збудженню вищих гармонік спектру і прояву дрейфу середнього значення коливань.

Висновки

В нелінійній постановці розглянуто задачу про сумісний рух циліндричного резервуару, заповненого рідиною з вільною поверхнею, приєднаного пружиною до рухомої платформи, на яку діє імпульсна сила.

Встановлено, що наявність пружинного закріплення сприяє таким механічним ефектам як модуляція коливань, дрейф середнього значення, вплив вищих гармонік спектру, несиметричність профілів хвиль. Показано, що рух резервуара відносно платформи і рух платформи теж мають такі ж властивості.

В цілому аналіз результатів моделювання для різних значень жорсткостей та інтенсивності ім.-пульсного навантаження дозволив встановити, що застосування пружини в якості демпфера коливань вільної поверхні рідини не є ефективним засобом, навпаки, в більшості випадків це призводить до збільшення амплітуд коливань

Список використаних джерел

1. *Limarchenko O.,* Rotational motion of structures with tanks partially filled by liquid / O. Limarchenko, G. Matarazzo, V.Yasinsky – Kyiv: FADA, 2003. – 286 p.
2. *Limarchenko O.* Effect of spring fixation on dynamics of cylindrical reservoir with liquid on movable platform / O. Limarchenko, R. Tkachenko // International Applied Mechanics, 2014. –50. – №3.– P. 69–76.
3. *Faltinsen O.M.* Multidimensional modal analysis of nonlinear sloshing in a rectangular tank with finite water depth / O.M. Faltinsen, O.F. Rognebakke, I.A. Lukovsky, A.N. Timokha // Journal of Fluid Mechanics. Cambridge University Press. 2000, V.407. – P. 201-234.

References

1. LIMARCHENKO, O., MATARAZZO, G., YASINSKY, V. (2003) *Rotational motion of structures with tanks partially filled by liquid*. Kyiv.
2. LIMARCHENKO, O., TKACHENCO, R. (2014) *Effect of spring fixation on dynamics of cylindrical reservoir with liquid on movable platform.* – International Applied Mechanics. – 50. – № 3., p.69-76
3. FALTINSEN, O.M., ROGNEBAKKE, O.F., LUKOVSKY, I.A., TIMOKHA, A.N. (2000) *Multidimensional modal analysis of nonlinear sloshing in a rectangular tank with finite water depth*. – Journal of Fluid Mechanics. Cambridge University Press. V.407., 201-234.

Надійшла до редколегії 19.08.14

УДК 519.9

Трунов О. О., аспірант

Поширення хвилі у хвилеводі з подвійним згином

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, просп. Глушкова, 4е, e-mail: trunov.olexandr@gmail.com

O. O. Trunov, graduate student

The wave propagation in bent waveguide with two bends

Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03680, Kyiv, Glushkova st., 4e, e-mail: trunov.olexandr@gmail.com

Розглянута плоска задача про поширення хвилі у хвилеводах з подвійним згином. Геометричні розміри хвилеводів порівнянні з довжиною хвилі. Досліджено залежність енергетичного коефіцієнта проходження хвилею зони нерегулярності хвилеводу.

Ключові слова: хвилевід, моди, коефіцієнт проходження.

In present article the plane problem of wave propagation in the waveguide with two bends was considered. Two variants of bend were researched: kink and curvature. The results of these variants were compared. The problem using the method of boundary regions was solved. The pressure field in the waveguides with two bends with hard boundaries was determined. The infinite system of algebraic equations from matching condition was determined and using method of reduction was solved. Calculation of energy transmission coefficient through the bends and coefficients of excitation of the modes beyond the first and the second bend in the waveguide depending on geometrical parameters of the waveguide was done. Obtained result fulfillment of matching condition and law of energy conservation was checked. Dimensions of the waveguide are proportional to the wave length. Transmission coefficient in curved waveguide almost equals unity unlike the waveguide with kink. In the frequency characteristic observed the presence of intervals, where the transmission coefficient is reduced to almost zero. These intervals adjacent to the frequencies determine the emergence of another mode waveguide.

Key words: the waveguide, normal wave, transmission coefficient.

Статтю представив д. ф.-м. н., проф. Жук Я.О.

Вступ

В роботах [1, 2] досліджується поширення хвиль в нерегулярних хвилеводах з різкою зміною геометрії хвилеводу. Продовжуючи цю тематику, в даній роботі, розглядається плоский хвилевід з подвійним згином. Геометричні розміри хвилеводу порівняні з довжиною хвилі.

Постановка та побудова розв'язку задачі

Розглянемо плоску задачу про поширення хвилі у хвилеводі, в якому має місце подвійна зміна напрямку поширення хвилі. Два варіанти такого хвилеводу показані на рис. 1. На рис. 1 *а* хвилевід має два злами під кутом 90^0, а хвилевід на рис. 1 *б* – два вигини також під кутом 90^0.

Всі поверхні хвилеводу будемо вважати акустично жорсткими. Хвилевід наповнений ідеальною рідиною, яка має густину ρ та швидкість звуку c. Дана задача, з необхідною заміною параметрів, що визначають хвильовий рух, аналогічна задачі про поширення SH-хвиль в твердому хвилеводі.

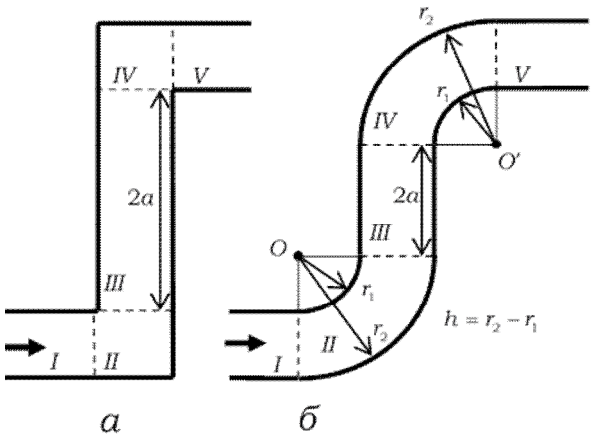


Рис. 1. Геометрія хвилеводу

Спочатку розглянемо хвилевід на рис. 1 *а*. Природнім чином вся область існування звуково-

© О.О. Трунов, 2014

го поля розбивається на п'ять областей (межі між областями виділені на рис. 1 штриховими лініями): області I і V – напівнескінченні плоскопаралельні хвилеводи шириною h, область III – плоскопаралельний хвилевід довжиною $2a$ і шириною h. Області II та IV – зони згину хвилеводу, які оформлені у вигляді зламу. В перерізі ці області являють собою квадрати зі стороною h. Для опису задачі введемо декартову систему координат xOy. Нехай в області I в додатному напрямку вісі Ox поширюється гармонічна з частотою ω m-та мода хвилеводу. Тоді поля в областях I і V запишемо у вигляді суперпозиції мод плоскопаралельного хвилеводу:

$$p_{\mathrm{I}} = \cos\left(\alpha_m\left(y+a+h\right)\right)\exp\left(i\gamma_m x\right) + \\ +\sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos\left(\alpha_n\left(y+a+h\right)\right)\exp\left(-i\gamma_n x\right), \quad (1)$$

$$p_{\mathrm{V}} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \cos\left(\alpha_n\left(y-a\right)\right)\exp\left(i\gamma_n\left(x-h\right)\right), \quad (2)$$

де $\alpha_n = n\pi/h$, $\gamma_n = \sqrt{k^2-\alpha_n^2}$, $k = \omega/c$. Часовий множник $\exp\left(-i\omega t\right)$ не пишемо.

Поле в області III представимо у вигляді суперпозиції мод біжучих назустріч одна одній:

$$p_{\mathrm{III}} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n^{(1)} \cos\left(\alpha_n x\right)\exp\left(i\gamma_n\left(y+a\right)\right) + \\ +\sum_{n=0}^{\infty} C_n^{(2)} \cos\left(\alpha_n x\right)\exp\left(-i\gamma_n\left(y-a\right)\right). \quad (3)$$

Поля в областях II і IV запишемо у вигляді стоячих хвиль з урахуванням граничних умов на жорстких поверхнях цих областей

$$p_{\mathrm{II}} = \\ = \sum_{n=0}^{\infty} D_n^{(1)} \cos\left(\alpha_n\left(y+a+h\right)\right)\frac{\cos\left(\gamma_n\left(x-h\right)\right)}{\cos\left(\gamma_n h\right)} + \\ +\sum_{n=0}^{\infty} D_n^{(2)} \cos\left(\alpha_n x\right)\frac{\cos\left(\gamma_n\left(y+a+h\right)\right)}{\cos\left(\gamma_n h\right)}, \quad (4)$$

$$p_{\mathrm{IV}} = \sum_{n=0}^{\infty} E_n^{(1)} \cos\left(\alpha_n\left(y-a\right)\right)\frac{\cos\left(\gamma_n x\right)}{\cos\left(\gamma_n h\right)} + \\ +\sum_{n=0}^{\infty} E_n^{(2)} \cos\left(\alpha_n x\right)\frac{\cos\left(\gamma_n\left(y-a-h\right)\right)}{\cos\left(\gamma_n h\right)}. \quad (5)$$

Тепер звернемося до хвилеводу на рис. 1 *б*. Тут області згину II і IV оформлені у вигляді вигину з радіусами кривизни r_1 та r_2 відповідно, причому $r_2 - r_1 = h$. Це призводить до того, що ширина хвилеводу на всій його довжині залишається сталою і дорівнює h.

Для опису задачі введемо чотири системи координат: декартову (x,y) і полярну (r,φ) з загальним центром у точці O та декартову (x',y') і полярну (r',φ') з загальним центром у точці O'.

Поля в областях I, V, III запишемо у вигляді суперпозиції мод плоскопаралельного хвилеводу, подібно до формул (1)-(3), але з урахуванням певної системи координат на рис. 1 *б*:

$$p_{\mathrm{I}} = \cos\left(\alpha_m\left(y-r_1\right)\right)\exp\left(i\gamma_m x\right) + \\ +\sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos\left(\alpha_n\left(y-r_1\right)\right)\exp\left(-i\gamma_n x\right), \quad (6)$$

$$p_{\mathrm{V}} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \cos\left(\alpha_n\left(y'-r_1\right)\right)\exp\left(-i\gamma_n x'\right), \quad (7)$$

$$p_{\mathrm{III}} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n^{(1)} \cos\left(\alpha_n\left(x-r_1\right)\right)\exp\left(-i\gamma_n y\right) + \\ +\sum_{n=0}^{\infty} C_n^{(2)} \cos\left(\alpha_n\left(x-r_1\right)\right)\exp\left(i\gamma_n\left(y+2a\right)\right). \quad (8)$$

Поле в областях II і IV запишемо у вигляді суперпозиції мод криволінійного хвилеводу [1, 2], біжучих назустріч одна одній:

$$p_{\mathrm{II}} = \sum_{n=0}^{\infty} R_n\left(kr\right)\cdot \\ \cdot\left[D_n^{(1)}\exp\left(i\nu_n\varphi\right) + D_n^{(2)}\exp\left(-i\nu_n\left(\varphi-\pi/2\right)\right)\right], \quad (9)$$

$$p_{\mathrm{II}} = \sum_{n=0}^{\infty} R_n\left(kr'\right)\cdot \\ \cdot\left[E_n^{(1)}\exp\left(i\nu_n\varphi'\right) + E_n^{(2)}\exp\left(-i\nu_n\left(\varphi'-\pi/2\right)\right)\right], \quad (10)$$

де власні форми мод

$$R_n\left(kr\right) = J_{\nu_n}\left(kr\right) - \frac{J'_{\nu_n}\left(kr_2\right)}{Y'_{\nu_n}\left(kr_2\right)}Y_{\nu_n}\left(kr\right), \quad (11)$$

тут $J_\nu\left(kr\right)$ і $Y_\nu\left(kr\right)$ – функції Бесселя першого та другого роду. Штрих при функції Бесселя означає похідну по повному аргументу.

Умови спряження полів на межах поділу часткових областей (рис. 1) полягають у рівності тисків та нормальних складових коливальної швидкості. Розписуючи ці умови, отримаємо функціональну систему рівнянь. Далі проводимо стандартну процедуру переходу від функціональної до алгебраїчної системи рівнянь [1], використовуючи властивості повноти і ортогональності відповідного набору власних форм плоскопаралельного та криволінійного хвилеводів. Як результат, приходимо до нескінченної системи лінійних алгебраїчних рівнянь другого роду відносно коефі-

цієнтів A_n, B_n, $C_n^{(1),(2)}$, $D_n^{(1),(2)}$, $E_n^{(1),(2)}$. Нескінченна система рівнянь розв'язувалася методом редукції.

Достовірність отриманого розв'язку визначалася завдяки контролю за виконанням умов спряження полів на межах часткових областей, та перевіркою виконання закону збереження енергії. Зазначимо, що у всіх проведених нижче розрахунках умови спряження полів виконувалися з високою точністю так, що відповідні криві з графічною точністю збігалися. Закон збереження енергії виконувався з точністю до четвертого знаку після коми.

Аналіз чисельних результатів

Енергетичний коефіцієнт проходження крізь зони згину m-ої нормальної хвилі $W^{(m)}$ хвилеводу можна записати у вигляді [1]

$$W^{(m)} = \sum_{n=0}^{N_5} W_n^{(m)}, \quad W_n^{(m)} = |B_n|^2 \cdot \frac{\varepsilon_n \operatorname{Re}(\gamma_n)}{\varepsilon_m \operatorname{Re}(\gamma_m)}, \quad (12)$$

де $\varepsilon_0 = 1$; $\varepsilon_n = 0,5$, $n > 0$. Число доданків N_5 дорівнює кількості однорідних хвиль області V.

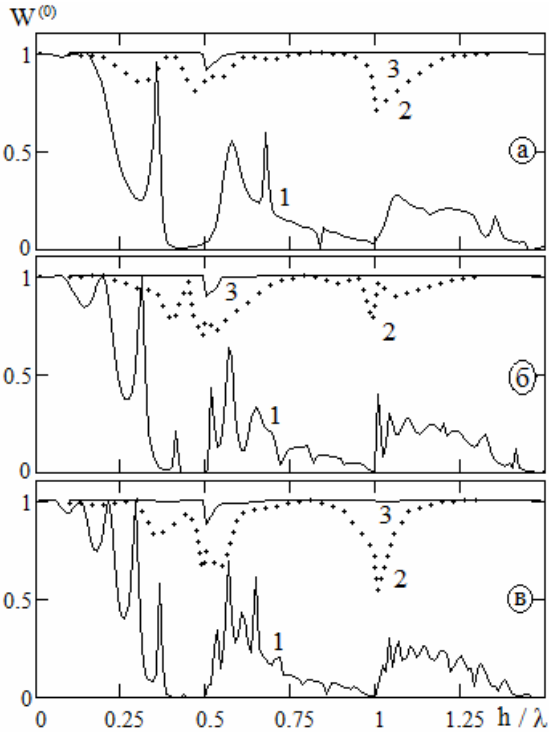


Рис. 2. Частотні залежності коефіцієнту проходження нульової моди $W^{(0)}$: а – $2a/h = 1$, б – $2a/h = 3$, в – $2a/h = 5$, 1 – хвилевід зі зламами, 2 – округлений хвилевід, $r_1/h = 0,01$, 3 – округлений хвилевід, $r_1/h = 1$

Зосередимо нашу увагу на випадку, коли в області I набігає нульова мода ($m = 0$). На рис. 2 показані частотні залежності коефіцієнту проходження нульової моди $W^{(0)}$ для трьох варіантів довжини області III, а саме $2a/h = 1,3,5$. Крива 1 відповідає хвилеводу зі зламами, криві 2 та 3 – хвилеводу з заокругленням. При цьому для кривої 2 радіус заокруглення становить $r_1/h = 0,01$, тобто фактично відповідає зламу під кутом 90^0. Для кривої 3 радіус заокруглення дорівнює $r_1/h = 1$, що обумовлює плавний перехід між областями I і III та III і V.

Відразу зазначимо, що коли $h \ll \lambda/2$, хвилевід являє собою, так звану, "дуже вузьку трубу", поширення хвилі в котрій не залежить від того, пряма її вісь чи вигнута чи навіть має згини [3]. Коефіцієнт проходження дорівнює одиниці.

На трьох рисунках криві 1 для хвилеводу зі зламами (рис. 1 *а*) мають схожий характер. Весь частотний діапазон поділяється на ділянки, межами котрих можна означити значення хвилевої ширини h/λ кратні половині довжини хвилі. На цих ділянках коефіцієнт проходження сягає певних локальних максимумів. В околі значень h/λ кратних половині довжини хвилі маємо глибокі мінімуми, аж до нульових значень коефіцієнта проходження. Особливо широка зона мінімальних значень $W^{(0)}$ прилягає до величини $h/\lambda = 0,5$. Надалі у хвилеводі зі зламами (крива 1) спостерігається загальна тенденція до зменшення коефіцієнту проходження з наявністю різких підйомів та спадів частотної характеристики.

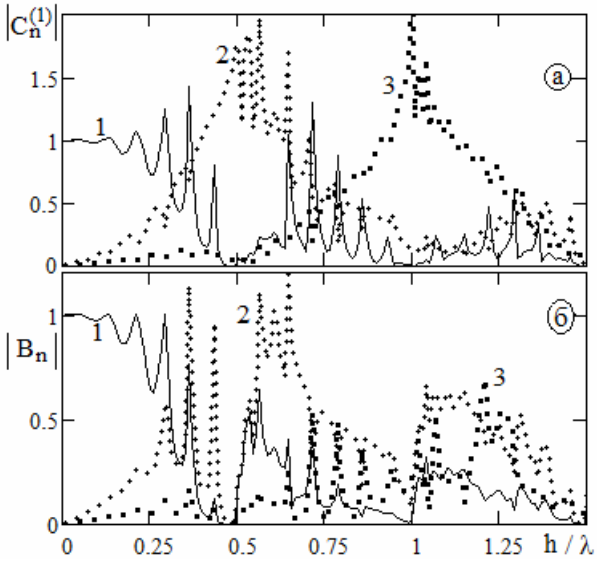


Рис. 3. Частотні залежності коефіцієнтів $|C_n^{(1)}|$ (область III) та $|B_n|$ (область V) у хвилеводі зі зламами, $2a/h = 5$: криві 1, 2, 3 – $n = 0,1,2$

Щоб осмислити наявність суттєвого зниження коефіцієнту проходження у хвилеводі зі зламами при h/λ кратному половині довжини хвилі звернемося до рис. 3. На ньому показані частотні залежності амплітудних коефіцієнтів $\left|C_n^{(1)}\right|$ (область III) та $\left|B_n\right|$ (область V), n – номер моди. Нерівність $h/\lambda > 0,5n$, $n = 1,2,\ldots$ є умовою, за якою вищі моди хвилеводу стають однорідними. Рис. 3 *а* наочно демонструє той факт, що в околі точки $h/\lambda = 0,5$ частотного діапазону значну амплітуду збурення має перша мода (крива 2, $n = 1$), а в околі точки $h/\lambda = 1$ – друга мода (крива 3, $n = 2$). Оскільки при $h/\lambda < 0,5n$ мода (перша чи друга) є неоднорідною, то, як результат, величина коефіцієнту проходження різко падає. Ілюстрацією до сказаного слугує рис. 4, на котрому представлено поле амплітуди тиску у відтінках сірого. Тут білий колір відповідає максимуму амплітуди, а чорний – мінімуму (фактично нулю тиску). Чітко видно як в областях II та III формується домінуюча перша неоднорідна мода, котра і призводить до "запирання" хвилеводу.

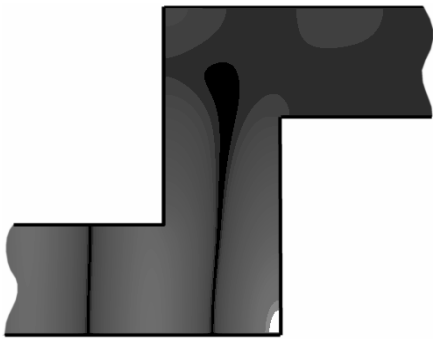


Рис. 4. Поле амплітуди тиску, $h/\lambda = 0,4645$, $2a/h = 1$

На рис. 3 *б* показано як ситуація представлена на рис. 3 *а* (вхід в область III) трансформується у відповідні частотні залежності коефіцієнтів $\left|B_n\right|$ нормальних хвиль в області V. Рисунок показує котра з мод на певному частотному інтервалі є більш "енергоємною".

Загальна тенденція до зменшення коефіцієнту проходження у хвилеводі зі зламами (крива 1 на рис. 2) при збільшенні величини h/λ пояснюється тим, що розподіл тиску на межі областей I і II як своєрідне джерело стає все більш направленим, що і призводить до зниження рівня поля, котре проникає в область III.

Ситуація корінним чином змінюється, коли хвилевід має округлену зону вигину. Крива 3 на рис. 2 відповідає округленому хвилеводу з $r_1/h = 1$, тобто реалізується плавний перехід між областями плоскопаралельних хвилеводів. Як бачимо, хвилевід є практично звукопрозорим. Для кривої 2 радіус заокруглення $r_1/h = 0,01$, що фактично відповідає зламу під кутом 90^0. Незважаючи на провали в частотній характеристиці на певних ділянках діапазону, коефіцієнт проходження має високі значення. Отже наявність навіть однієї поверхні заокруглення робить хвилевід значною мірою звукопрозорим.

Висновки

1. Побудовано розв'язок плоскої задачі про поширення хвилі у хвилеводі з подвійною зміною напрямку поширення хвилі. Розглянуто два варіанти області згину: злам та заокруглення.

2. Показано, що енергетичний коефіцієнт проходження нульовою модою зони зламу хвилеводу суттєво залежить від хвилевої ширини хвилеводу. В частотній характеристиці спостерігається наявність інтервалів, де коефіцієнт проходження зменшується практично до нуля. Ці інтервали примикають до частот, котрі визначають зародження чергової моди хвилеводу.

3. Показано, що заокруглення зони згину робить хвилевід практично звукопрозорим навіть за наявності заокруглення тільки з зовнішнього боку згину.

Список використаних джерел

1. *Гринченко В.Т.* Волновые задачи акустики / В.Т. Гринченко, И.В. Вовк, В.Т. Мацыпура. – Киев: Интерсервис, 2013. – 572 с.
2. *Трунов О.О.* Хвильове поле у хвилеводі з вигином / О.О. Трунов // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка серія фіз.-мат. науки. – 2014. – №2. – с. 83-86.
3. *Исакович М.А*. Общая акустика. – М.: Наука, 1973. – 495 с.

References

1. GRINCHENKO, V.T., VOVK, I.V. and MATSIPURA, V.T. (2013) *Volnovyie zadachi ackustyki*. Kiev: Interservis.
2. *TRUNOV O.O. (2014) A wave field in the waveguide with a bend.* Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv, series Physics & Mathematics. №2. pp. 83-86.
3. ISAKOVICH, M.A. (1973) *Obshchaya akustika. M.:* Nauka.

Надійшла до редколегії 15.10.14

УДК 519.9

Трунова Л.А., аспірантка

L.A. Trunova, graduate student

Точкове джерело в околі конусного відбивача

Point source in the vicinity of conical reflector

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, просп. Глушкова, 4е, e-mail: elvie89@ukr.net

Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03680, Kyiv, Glushkova st., 4e, e-mail: elvie89@ukr.net

Розглянута задача взаємодії точкового джерела з конусним відбивачем скінченних розмірів. Розміри конусного відбивача порівнянні з довжиною хвилі. Проведено дослідження характеристик поля випромінювання джерела.

Ключові слова: характеристика направленості, конусний відбивач, точкове джерело.

The problem of interaction between a point source and conical reflector of finite size was considered. Dimensions of conical reflector are proportional to the wavelength. The research of the characteristics of the radiation field of conical antenna depending on its parameters, namely geometry of cone and location of the source was conducted. The solution of the problem of determining the field of harmonic point source located on the axis of the cone reflector was constructed. Method of boundary regions for solving problem was used. The analysis of numerical results was conducted. Research of characteristics of the far field showed that at fixed geometry of the cone there are two ranges of location of the sources. Directional diagram for different angles of aperture cone were constructed. Possibility to specify the range of variation of the angle of aperture for which the optimum directional diagram is stored in certain limits was shown. The instantaneous pressure distribution in the vicinity of the conical antenna was illustrated.

Key words: directivity characteristic, the conical reflector, point source.

Статтю представив д. ф.-м. н., професор Жук Я.О.

Вступ

Наявність відбивача, у вигляді поверхні конуса, поблизу джерела, вочевидь впливає на поле джерела. Таку сукупність назвемо конусною антеною. В роботах [1, 2] досліджується кутикова антена, тобто розв'язується плоска задача про визначення поля точкового джерела, розташованого в околі кутикового відбивача. Продовжуючи цю тематику, в даній роботі, розглядається задача про визначення поля точкового джерела розміщеного в околі конусного відбивача скінчених розмірів. Геометричні розміри конусу порівняні з довжиною хвилі.

Постановка та побудова розв'язку задачі

Розглянемо задачу про випромінювання точкового джерела, котре розташоване в околиці конусного відбивача з кутом розкриву $2\theta_1$, рис. 1. Джерело S розташовано на осі симетрії конуса на відстані R від вершини O. Джерело створює гармонічну сферичну хвилю з частотою ω. Будемо вважати, що поверхня конуса акустично жорстка, а сам конус занурений в акустичне середовище із густиною ρ і швидкістю звуку c.

Для побудови розв'язку задачі, введемо сферичну систему координат $r\theta\psi$ з центром в точці O. У зв'язку з осьовою симетрією моделі розв'язок задачі не залежить від координати $0 \le \psi \le 2\pi$ (на рис. 1 показано відповідний переріз поверхні конуса). Згідно з методом часткових областей [2] увесь простір існування звукового поля природно ділиться на три області: I – зовнішність сфери радіуса a, тобто $r \ge a$; II – кульовий сектор $0 \le r \le a$, $0 \le \theta \le \theta_1$; III – кульовий сектор $0 \le r \le a$, $\theta_1 \le \theta \le \pi$.

Поле в області I, з урахуванням симетрії відносно осі $\theta = 0$, запишемо у вигляді суперпозиції біжучих сферичних хвиль із кутовою залежністю функцій Лежандра $P_n(\cos\theta)$, $n = 0,1,2,\ldots$

$$p_{\mathrm{I}} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \frac{h_n^{(1)}(kr)}{h_n^{(1)\prime}(ka)} P_n(\cos\theta), \qquad (1)$$

© Л.А. Трунова, 2014

де $k = \omega / c$, $h_n^{(1)}(kr)$ – сферична функція Ханкеля. Часовий множник $\exp(-i\omega t)$ не пишемо.

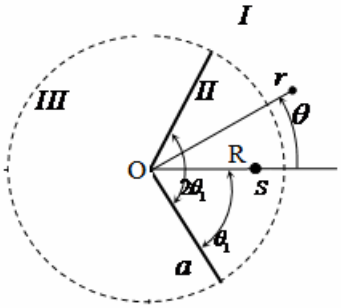


Рис. 1. Геометрія конусної антени

Поле в області II представимо у вигляді суми двох доданків, один з них є поле джерела p_0 в околі поверхні конуса, а другий – суперпозиція, підібраних відповідно до граничної умови на поверхні конуса, стоячих хвиль. Поле в області III – також у вигляді суперпозиції стоячих хвиль:

$$p_{\text{II}} = p_0 + \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{j_{\alpha_n}(kr)}{j'_{\alpha_n}(ka)} P_{\alpha_n}(\cos\theta), \qquad (2)$$

$$p_{\text{III}} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \frac{j_{\beta_n}(kr)}{j'_{\beta_n}(ka)} P_{\beta_n}(\cos(\pi - \theta)), \qquad (3)$$

де $j_\alpha(kr)$ – сферична функція Бесселя. Значення α_n й β_n визначаються із граничної умови на жорсткій поверхні конуса.

Для запису поля p_0, скористаємося виразом для поля джерела в околі конічної поверхні [3]:

$$p_0(r,\theta;R,\theta_0) = \\ = ik\sum_{m=0}^{\infty} \frac{P_{\alpha_m}(\cos\theta_0)}{N_m^{(2)}} j_{\alpha_m}(kr_<) h_{\alpha_m}^{(1)}(kr_>) P_{\alpha_m}(\cos\theta),$$

де $r_<$ і $r_>$ – менше та більше з відстаней r і R, r, θ – координати точки спостереження, R, θ_0 – координати джерела; у нашому випадку $\theta_0 = 0$.

Умови спряження полів на межі часткових областей I і II, III (рис. 1) мають вигляд

$$\frac{\partial p_{\text{I}}}{\partial r} = \begin{cases} \dfrac{\partial p_{\text{II}}}{\partial r}, & r = a, \ 0 \le \theta \le \theta_1, \\ \dfrac{\partial p_{\text{III}}}{\partial r}, & r = a, \ \theta_1 \le \theta \le \pi, \end{cases} \qquad (4)$$

$$p_{\text{I}} = p_{\text{II}}, \ r = a, \ 0 \le \theta \le \theta_1, \qquad (5)$$

$$p_{\text{I}} = p_{\text{III}}, \ r = a, \ \theta_1 \le \theta \le \pi. \qquad (6)$$

Підставивши вирази (1)-(3) в умови (4)-(6), одержимо функціональну систему рівнянь. Далі проводимо стандартну процедуру переходу від функціональної до алгебраїчної системи рівнянь, використовуючи властивості повноти і ортогональності відповідного набору функцій Лежандра [2]. У результаті одержимо нескінченну систему лінійних алгебраїчних рівнянь другого роду відносно невідомих коефіцієнтів A_n, B_n, C_n. Нескінченна система рівнянь розв'язувалася методом редукції.

Для усіх, проведених нижче розрахунків, криві, які визначали поля тиску на межі поділу областей, із графічною точністю збігалися. Збіжність кривих радіальної швидкості була дещо гірша. При цьому енергетичні співвідношення, тобто збереження потоку потужності крізь поверхню сфери радіусу a, виконувалися з точністю до четвертого знаку після коми.

Аналіз чисельних результатів

На рис. 2 представлено залежність основних параметрів дальнього поля в залежності від положення джерела на осі конуса R/a для різних кутів розкриву конуса $2\theta_1$.

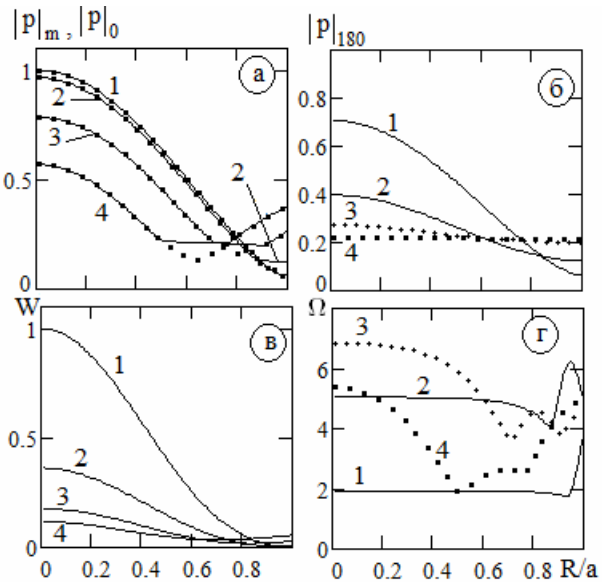


Рис. 2. Характеристики параметрів поля в дальній зоні залежно від величини R/a, $a/\lambda = 0{,}5$:
а – максимальна амплітуда тиску $|p|_m$ (лінія) і амплітуда $|p|_0$ (точки) при $\theta = 0$, *б* – амплітуда тиску $|p|_{180}$ під кутом $\theta = 180^\circ$, *в* – потужність випромінювання W, *г* – коефіцієнт осьової концентрації Ω; $1 - \theta_1 = 25^\circ$, $2 - \theta_1 = 45^\circ$, $3 - \theta_1 = 70^\circ$, $4 - \theta_1 = 90^\circ$

На рис. 2 *а* показані криві максимальної амплітуди тиску $|p|_m$ (лінія) і амплітуди $|p|_0$ (точки)

під кутом $\theta = 0$, тобто вздовж осі конуса, а на рис. 2 *б* – криві амплітуди тиску $|p|_{180}$ під кутом $\theta = 180^\circ$. Криві на рис. 2 *а*, *б* нормовані до однієї величини. Як бачимо, більші значення тиску в напрямку $\theta = 0$ мають місце при розміщенні джерела поблизу вершини конуса ($R/a \le 0,4$). При переміщенні джерела ближче до вихідного перерізу конуса відбувається не тільки зменшення амплітуди $|p|_0$, але й втрата антеною максимального значення в осьовому напрямку. Про це говорить той факт, що криві $|p|_m$ і $|p|_0$ на певних ділянках зміни величини R/a не співпадають. Цікаво відзначити, що для конуса з малим кутом розкриву ($\theta_1 = 25^\circ$, крива 1 на рис. 2 *а*) така ділянка практично відсутня. Надалі при збільшенні величини θ_1 ця ділянка розширюється і у випадку $\theta_1 = 90^\circ$ становить відрізок $R/a \approx 0,5...0,9$.

Про небажане розміщення джерела поблизу вихідного перерізу конуса сигналізують і криві потужності на рис. 2 *в* (криві нормовані до однієї величини). Отже, дивлячись на рис. 2 *а* і *в*, можна сказати, що з точки зору енергетики і створення максимуму в осьовому напрямку, зменшення кута розкриву конуса є бажаним. Але не тільки ці параметри визначають властивості антени. На рис. 2 *б* показані криві амплітуди тиску $|p|_{180}$, котрі визначають рівень тильного випромінювання. Як бачимо, ці криві мають обернений характер по відношенню до кривих на рис. 2 *а* і *в*, тобто зменшення кута θ_1 збільшує рівень тильної пелюстки в діаграмі направленості. Напроти, збільшення кута θ_1 призводить до зменшення рівня тильної пелюстки і робить його слабко залежним від положення джерела. Загальну характеристику направлених властивостей антени дає коефіцієнт осьової концентрації, рис. 2 *г*. Як бачимо, чим менший кут розкриву конуса, тим в більшому діапазоні коефіцієнт концентрації Ω залишається сталою величиною (криві 1 і 2). Це говорить про можливу стабільність характеристики направленості. Але, з іншого боку, зменшення кута θ_1 приводить до зменшення величини Ω, що відповідає погіршенню направлених властивостей антени.

На рис. 3 представлені приклади діаграм направленості для різних кутів розкриву $2\theta_1$ конуса. Звертає на себе увагу відносна стабільність характеристики направленості при кутах розкриву $\theta_1 \ge 40^\circ$. Цей факт у сукупності з характеристиками дальнього поля на рис. 2 дозволяють визначити оптимальні кути розкриву антени. Так для антени з $a/\lambda = 0,5$ і $R/a = 0,2$ оптимальні кути розкриву лежать в межах $\theta_1 = 40^\circ...70^\circ$.

На рис. 4 показані частотні характеристики параметрів дальнього поля антени (тіж, що й на рис. 2), $a/R = 0,2$. Всі амплітуди тисків нормовані на деяке максимальне значення тиску, нормованою до максимуму є також крива потужності. При $a/\lambda \gg 1$ усі криві, природно, мають спадаючий характер, адже, за такої умови, конусний відбивач дуже слабко впливає на точкове джерело.

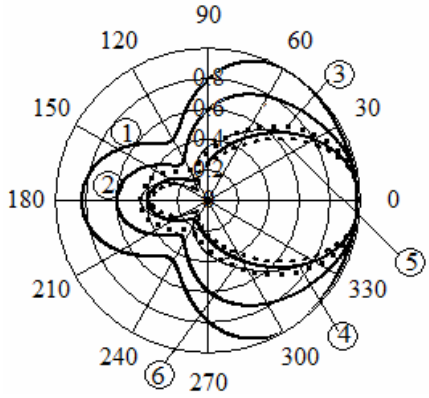


Рис. 3. Діаграми направленості антени для різних кутів розкриву $2\theta_1$, $a/\lambda = 0,5$ і $R/a = 0,2$: 1-6 відповідають $\theta_1 = 20^\circ, 30^\circ, 40^\circ, 50^\circ, 70^\circ, 90^\circ$

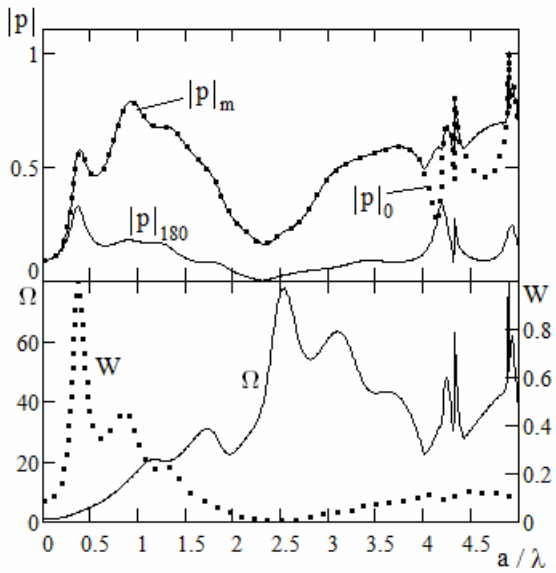


Рис. 4. Частотні характеристики параметрів поля конусної антени в дальній зоні, $R/a = 0,2$, $\theta_1 = 45^\circ$

При збільшенні величини a/λ в усіх характеристиках спостерігається певна нерегулярність. Так крива потужності W має гострий пік при $a/\lambda = 0,375$, потім спадає майже до нуля при

$a/\lambda = 2,45$, надалі при $a/\lambda > 3$ значення потужності змінюється мало. Криві амплітуд тиску $|p|_m$ (лінія) і $|p|_0$ (точки) спочатку зростають, потім спадають, а надалі на певних ділянках розходяться, цей факт говорить про те, що основна пелюстка діаграми направленості ділиться на кілька пелюсток і максимум тиску зміщується з напрямку $\theta = 0$. Що стосується тильної пелюстки, то її рівень також змінюється в певних межах. Крива коефіцієнту осьової концентрації Ω при $a/\lambda > 4$ відслідковує хід кривих $|p|_m$ та $|p|_0$ і, зростає при збільшенні хвильової величини a/λ.

На рис. 5 показано розподіл амплітуди (крива 1) та фази (крива 2) на апертурі (поверхня основи конуса) конусної антени для різних значень величини a/λ. Згідно з кривою потужності W на рис. 4, наведені на рис. 5 графіки відображають такі ситуації: пік максимуму потужності (а), локальний максимум (б), локальний мінімум (в), практично нульове значення потужності (г). Як бачимо, в ситуації, що відповідає піку потужності (рис. 5 *а*) фаза тиску має незначні зміни, амплітуда плавно спадає від центру апертури до краю. В ситуації локального максимуму фаза змінюється дещо більше, але крива амплітуди суттєво змінила характер у порівнянні з кривою 1 на рис. 5 *а*. В точці локального мінімуму суттєвих змін набуває крива фази тиску, що звісно вплинуло на значення потужності. На кінець на рис. 5 *г* маємо різке зменшення амплітуди тиску, що й спричиняє значне падіння потужності випромінювання.

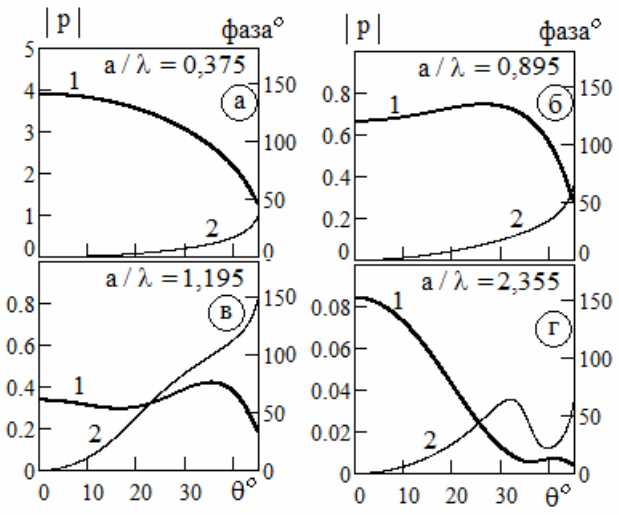


Рис. 5. Розподіл амплітуди (крива 1) та фази (крива 2) тиску на апертурі конусної антени для різних значень хвильової величини a/λ, $R/a = 0,2$, $\theta_1 = 45°$

Висновки

1. Побудовано розв'язок задачі про визначення поля точкового гармонічного джерела, розташованого на осі конусного відбивача, розміри якого порівнянні з довжиною хвилі.

2. Дослідження характеристик дальнього поля показало, що при фіксованій геометрії конуса можна виділити дві ділянки місця розташування джерела. На одній, котра примикає до вершини конуса, характеристики дальнього поля залишаються стабільними, на іншій – вони незадовільні.

3. Показано, що можна вказати діапазон зміни кута розкриву, для якого зберігається, у певних межах, оптимальна діаграма спрямованості.

4. Показано, що аналіз частотних характеристики дальнього поля дозволяє оптимізувати параметри антени.

Список використаних джерел

1. *Трунова Л.А.* Точкове джерело в околі кутикового відбивача / Л.А. Трунова // Вісник Київського національного університету ім. Тараса Шевченка серія фіз.-мат. науки. – 2014. – №2. – с. 87-90.
2. *Гринченко В.Т.* Волновые задачи акустики / В.Т. Гринченко, И.В. Вовк, В.Т. Мацыпура. – Киев: Интерсервис, 2013. –572 с.
3. *Куриляк Д.Б., Назарчук З.Т.* Аналітико-числові методи в теорії дифракції хвиль на конічних і клиноподібних поверхнях. – Київ: Наукова думка, 2006. – 280 с.

References

1. TRUNOVA L.A. (*2014) Point source in the vicinity of the corner reflector*. Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv, series Physics & Mathematics. №2. pp. 87-90.
2. GRINCHENKO, V.T., VOVK, I.V. and MATSIPURA, V.T. (2013) *Volnovyie zadachi ackustyki*. Kiev: Interservis.
3. KURYILYAK, D.B. and NAZARCHUK, Z.T. (2006) *Analityiko-chyislovi metodyi v teoriyi dyifraktsiyi* hvyil na konichnyih i klyinopodibnyih poverhnyah. Kiev: Naukova dumka.

Надійшла до редколегії 20.10.14

КОМП’ЮТЕРНІ НАУКИ ТА ІНФОРМАТИКА

УДК 519.7

Верченко А.П.[1], к.ф.-м.н., с.н.с.,
Кравченко Р.В.[2], студент.

Метод автоматичного розташування написів точкових об'єктів в електронних картах, побудований на нейронній мережі Хопфілда

[1] Київський національний університет імені Тараса Шевченка, факультет кібернетики, 03187, м. Київ, пр-т. Глушкова 4д,
e-mail: [1]An.Verchenko@gmail.com,
[2]Roman.Volod.Kravchenko@gmail.com

A.P. Verchenko[1], PhD,
R.V. Kravchenko[2], student.

The method of automatic point-feature label placement in digital maps based on the Hopfield neural network

[1] Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03187, Kyiv, Glushkova st., 4d,
e-mail: [1]An.Verchenko@gmail.com,
[2]Roman.Volod.Kravchenko@gmail.com

В статті розглянуто підхід для оптимізації автоматичного розташування написів точкових об'єктів на електронних картах, навчання якого відбувається на нейронній мережі Хопфілда. Запропонований алгоритм при виборі відповідних параметрів показав високу швидкість та хороші результати при динамічному збільшенні масштабу та пересуванню на електронній карті, що показало його практичну цінність.

Ключові слова: розташування написів точкових об'єктів, нейронна мережа Хопфілда, функція енергії, проблема оптимізації.

This article shows approach based on Hopfield neural network to resolve the Point-Feature Labeling Placement (PFLP) problem and the practical results that use this method on interactive map ArcGIS API for Flex for labeling the cities. The main goal of this article to find method that can be easy programming, exposed to multithreading and used parallel searching instead sequential as other previously published approaches that solve problem to label point objects. The PFLP is formulated as an optimization problem and described iterative calculations that are based on finding the optimum Hopfield neural network. The proposed algorithm on each step minimize the energy function of neural network while it gets the minimum value. Finding this way minimum is the best label position for each point element. The experimental results proves good permanence and high speed in digital maps that showed possibility of applying to resolve similar tasks.

Key Words: point-feature labeling placement, Hopfield neural network, energy function, optimization problem.

Статтю представив д.т.н., проф. Гаращенко Ф.Г.

1. Вступ

При розробці програмного забезпечення для інтерактивних картографічних систем виникає так звана проблема автоматичного розміщення написів. Її суть полягає в тому, що при хаотичному розташуванні написів всіх об'єктів втрачається доступність та читабельність даних. Тому потрібно максимізувати кількість можливого виведення написів, не порушуючи при цьому встановлені правила.

Протягом останніх десятиліть було запропоновано ряд підходів для розв'язання даної проблематики, які мають як свої переваги, так і недоліки [1]. Тим не менш, автоматизація розміщення є складною алгоритмічною задачею. Дослідження показали, що проблема розміщення написів є NP-важкою задачею [2], і традиційні підходи, такі як підхід експертної системи не в змозі вирішити цю проблему, тому що там використовується послідовна стратегія пошуку. Виходом для вирішення цієї проблеми є спробувати знайти найбільш оптимальне положення за допустимий час, при цьому зменшити складність і підвищити ефективність, тобто розв'язати комбінаторну оптимізаційну задачу.

© А.П. Верченко, Р.В. Кравченко, 2014

Доцільним є використання нейронної мережі Хопфілда [3], оскільки вона може знайти оптимальний розв'язок швидше, ніж традиційні методи, а також вона має переваги при розпаралелюванні процесу розміщення. В своєму початковому вигляді [3] неможливо уникнути проблеми локальних мінімумів, що може привести до небажаних результатів. Дослідники намагаються модифікувати енергетичну функцію або оптимально підібрати чисельні параметри для кожної задачі. В цій роботі розглянуто метод розв'язання комбінаторної оптимізаційної проблеми ітеративними обчисленнями, що засновані на пошуку оптимуму нейронної мережі Хопфілда. В основі даного підходу є традиційний оптимізаційний процес нейронної мережі Хопфілда, що використовується при базовому обчисленні та повторюється у відповідності з визначеним методом навчання на основі принципу балансу [4], який може регулювати параметри обчислювальної ітерації між поточною і наступною ітерацією.

Запропонований метод був реалізований для відображення назв міст на електронній карті і використовувався при виконанні прикладних тематик на кафедрі Моделювання складних систем (МСС), факультет кібернетики [5]. При реалізації було отримано хороші результати та обчислювальну швидкість роботи при динамічному масштабуванні та пересуванні по карті.

2. Моделювання проблеми розташування написів точкових об'єктів

При виведенні написів існує три різні типи розміщення написів: підписи областей та територій (моря, країни), лінійні підписи (назви річок, вулиць) та відображення написів точкових об'єктів (міста, вершини гір) [6]. Проте, в даній статті розглянемо лише останню постановку проблеми, оскільки її можна звести до двох попередніх лінійними перетвореннями та додаванням умов з границями.

Сформулюємо постановку задачі розміщення написів точкових об'єктів як комбінаторну оптимізаційну задачу. Нехай задано *n* точок, кожна з яких повинна бути підписана власною назвою у одній із *m* наперед заданих можливих позицій. Остаточну позицію напису знаходимо у вигляді вектору $\bar{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$, кожна компонента якого $x_i = \{1,2,..., m\}, i = \overline{1,n}$ визначає позицію напису *i*-ого об'єкта. Для кожної позиції

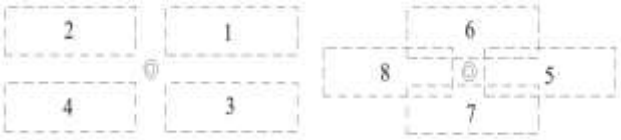


Рис. 1. Можливі розміщення напису об'єкта і їх пріоритет у відповідності із зростанням

напису в картографії найчастіше використовують вісім наперед заданих варіантів (Рис. 1).

Визначимо правила вибору оптимальної позиції для напису:

1) не допускається жодних перетинів напису з іншими написами чи з навколишніми графічними об'єктами;
2) кожному напису відповідає лише один об'єкт, до якого він належить;
3) кожен напис повинен розміщуватися у найбільш сприятливій позиції (серед всіх доступних) у відповідності з заданим пріоритетом.

Вирішення даної проблеми потрібно зробити автоматизованим, при цьому виводячи на екран при заданому масштабі максимальну кількість написів із заданим розміром. Для розміщення самого напису використовуємо деяку прямокутну область. Кожен об'єкт маркування являє собою точку з координатами, самий підпис, що потрібно вивести, і порядок виводу на екран, що використовується при масштабуванні.

3. Алгоритм пошуку оптимальної позиції напису в нейронній мережі Хопфілда

Нейронна мережа Хопфілда є мережею з одним рівнем зворотного зв'язку. Нехай $A_1, A_2, ..., A_n$ становить *n*-нервовий блок, W_{ij} - відношення ваги між A_i та A_j елементами. Утворена матриця *W* з елементів W_{ij} буде симетричною і показуватиме міцність з'єднань між *n* вузлами:

$$W_{ij} = W_{ji}, \quad i, j = \overline{1,n}.$$

Для зворотного зв'язку в мережі між входом та виходом використаємо рівняння стану

$$\begin{cases} C_i \dfrac{du_i}{dt} = -\dfrac{u_i}{t} + \sum\limits_j W_{ij} V_j + I_i \\ V_i = g(U_i) \end{cases} \quad (1)$$

де $g(\circ)$ − постійна монотонна зростаюча функція з верхньою границею, серед яких найчастіше використовується функція гіперболічного тангенсу. U_i представляє вхід *i*-ого нейронного

блоку, V_i - вихід *i*-ого нейронного блоку, I_i - зсув нейронної мережі (вплив від зовнішнього середовища).

Оскільки система працює асинхронно, то в будь-який момент часу лише один нейронний блок змінює свій стан. Припустимо, що $U_i(t)$ складається з суми усіх входів в *i*-ий блок в момент часу *t*, а $V_i(t+1)$ - вихід *i*-ого нейронного блоку в момент часу *t+1*.

$$U_i(t) = \sum_j W_{ij} V_j(t) + I_i, \tag{2}$$

$$V_i(t+1) = g(U_i(t)) = g\left(\sum_j W_{ij} V_j(t) + I_i(t) \right). \tag{3}$$

Функція енергії для нейронної мережі Хопфілда з рівнянням стану (1) має наступний вигляд

$$E = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} W_{ij} V_i V_j - \sum_{i=1}^{n} V_i I_i . \tag{4}$$

Було доведено, що мережа Хопфілда є системою нелінійного руху [7]. В такій системі існує одна або декілька точок мінімуму. Динамічний ітеративний процес на кожному кроці зменшує значення функції енергії нейронної мережі, і коли значення на поточному кроці не відрізняється від попереднього, система досягає свого мінімального значення енергії. Мінімальне значення мережі буде нашим шуканим оптимальним розв'язком.

Припустимо, що карта містить *n* об'єктів, і кожен об'єкт має *m* можливих позицій. Таким чином, $m \times n$ кандидатів, і ці елементи будуть утворювати матрицю, в якій *m* варіантів позицій одного об'єкта будуть стояти в одному рядку. Звідси одній позиції для розміщення напису відповідає один нервовий блок нейронної мережі Хопфілда, яка складається з $m \times n$ нервових блоків.

Для визначення функції енергії опишемо умову обмеження суми і оптимальну ціль: кожен об'єкт може вибрати тільки одну позицію для розташування напису та кількість перетинів між двома прямокутниками з написом є найменшою відповідно. Згідно з цією умовою обмеження і оптимальною цілью, ми можемо задати функцію енергії мережі наступним чином:

$$E = \frac{B}{2} \sum_i \left(\left(\sum_j V_{ij} \right) - 1 \right)^2 + \\ + \frac{A}{2} \sum_i \sum_j \sum_k \sum_l D(i,j,k,l) V_{ij} V_{kl}. \tag{5}$$

В наведеному рівнянні перша сума представляє обмеження стану, і той факт, що тільки одна позиція дозволена на один напис для заданого об'єкту. Якщо ця умова не виконується, то перша сума буде дорівнювати нулю. Оптимальна ціль $D(i,j,k,l)$ визначається наступним чином:

$$D(i,j,k,l) = \begin{cases} 1, & \textit{коли } V_{ij} \textit{ та } V_{kl} \textit{ перетинаються} \\ 0, & \textit{інакше}. \end{cases}$$

Таким чином, друга сума є множенням чисел перетинів між кожними двома прямокутниками. Якщо вибір положення напису є оптимальним, *E* може досягти мінімального значення, а якщо вибір позиції майже оптимальний, *E* буде досить малим.

Відношення ваги між блоком *i* та блоком *j* визначимо як:

$$W_{ij,kl} = -AD(i,j,k,l) - B\delta_{ij,kl}, \tag{6}$$

$$\delta_{ij,kl} = \begin{cases} 1, & ij = kl \\ 0, & ij \neq kl \end{cases} \tag{7}$$

$$I_{ij} = B. \tag{8}$$

Таким чином, підставляючи отримані значення в рівняння стану нейронної мережі (1) отримуємо рівняння такого вигляду:

$$\begin{cases} \dfrac{du_{ij}}{dt} = \dfrac{-u_{ij}}{\tau_i} + \sum_{j \neq i} \left(AD(i,j,k,l) - B\delta_{ij,kl} \right) V_{ij} + B \\ V_{ij} = g(u_{ij}). \end{cases} \tag{9}$$

В якості функції входу-виходу нервового блоку візьмемо сигмоїдну неперервно диференційовану монотонну нелінійну S-подібну функцію $g(x) = \dfrac{1}{1+e^{-x}}$.

Обчислювана ітеративна процедура описується наступним алгоритмом:

1. Встановлюємо початкові значення.
2. Обчислюємо вихід кожного нейрона $V_{ij}(t_0)$ згідно з $V_{ij} = g(u_{ij})$.
3. Підставляємо знайдені $V_{ij}(t_0)$ в (9) і знаходимо $\left. \dfrac{du_{ij}}{dt} \right|_{t=t_0}$.
4. З рівняння $u_{ij}(t_0 + \Delta t) = u_{ij}(t_0) + \Delta t \left. \dfrac{du_{ij}}{dt} \right|_{t=t_0}$ обчислюємо $u_{ij}(t_0 + \Delta t)$ для наступного кроку.
5. Повертаємося до кроку 2.

4. Висновки та отримані результати

В процесі програмної реалізації було реалізовано вищенаведений алгоритм, який для визначення оптимальної позиції напису використовує метод нейронних мереж Хопфілда. Використовуючи ітераційний метод розв'язання нейронної мережі Хопфілда, вдалося для кожного елемента на карті знайти оптимальне положення для його напису.

Для наочної реалізації було використано електронну карту ArcGIS API for Flex. Сама карта являє собою картографічним прикладним програмним інтерфейсом з доступом до всіх її елементів (міст, доріг, тощо). Використовуючи даний інтерфейс, було зафіксовано список з 200 найбільших міст світу. Кожен елемент такого списку міст має три характеристики: координати його положення *x* та *y*, самий текстовий напис та пріоритет його в порівнянні з іншими містами.

Алгоритм нейронної мережі Хопфілда використовує не послідовний пошук, а паралельний, тому перерахунок всіх позицій при масштабуванні та динамічному переміщенні на карті майже не помітний для користувача і виконується дуже швидко (Рис. 2).



Рис. 2. Результат розміщення написів об'єктів у зростаючому пріоритеті.

Список використаних джерел

1. *S. Shieber* An empirical study of algorithms for point feature label placement / S. Shieber, J. Christensen, J. Marks // Transactions on Graphics, 14(3), July 1995.
2. *T. Kato* The NP-completeness of the character placement problem of 2 or 3 degrees of freedom / *T. Kato, H. Imai //* Record of Joint Conference of Electrical and Electronic Engineers in Kyushu, 1988, P.11−38
3. *J. Hopfield* Neural Computation of Decisions in Optimization Problems / *J. J. Hopfield, D. W. Tank* // Biological Cybernetics, 1985, vol. 52, P. 141-152.
4. *Z. He* Balance algorithm for point-feature label placement problem / *Z. He, K. Harada //* lecture notes in computer science, 2005, P. 179-184.
5. *Верченко А.П.* Візуалізація картографічної інформації в навігаційній супутниковій апаратурі // Thesis of conference reports, International Conference "Dynamical systems modelling and stability investigation", Kyiv, May 25-27, 2011– К.: "Київський університет"– 2011.– С.171.
6. *E. Imhof* Positioning names on maps / The American Cartographer, 2(2), 1975, p. 128-144.
7. *J. J. Hopfield* Learning algorithms and probability distributions in feed-forward and feed-back networks / *J. J. Hopfield – Proc. Natl. Acad. Sci. USA, Vol. 84, pp. 8429-8433, December 1987, Biophysics.*

References

1. CHRISTENSEN, J., MARKS, J. and SHIEBER, S. (1995). An empirical study of algorithms for point-feature label placement. *ACM Transactions on Graphics (TOG)*, 14(3), PP.203−232.
2. KATO, T. and IMAI, H. (1988). The NP-completeness of the character placement problem of 2 or 3 degrees of freedom. *Record of Joint Conference of Electrical and Electronic Engineers in Kyushu*, PP.11−38.
3. HOPFIELD, J. and TANK, D. (1985). "Neural" computation of decisions in optimization problems. *Biological cybernetics*, 52(3), PP.141−152.
4. HE, Z. and HARADA, K. (2005). Balance algorithm for point-feature label placement problem. *Springer*, PP.179−184.
5. VERCHENKO, A. (2011) Vizualization of map information in satellite-navigation devices. *Thesis of conference reports, International Conference "Dynamical systems modelling and stability investigation"*, Kyiv, May 25-27, P. 171.
6. IMHOF, E. (1975). Positioning names on maps. *The American Cartographer*, 2(2), PP.128--144.
7. HOPFIELD, J. (1987). Learning algorithms and probability distributions in feed-forward and feed-back networks. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 84(23), PP.8429--8433.

Надійшла до редколегії 22.05.2014

УДК 519.7

Галкін О. А., к.ф.-м.н., м.н.с.

Вплив варіацій смуги пропускання на поведінку показника помилкової класифікації ядерного класифікатора

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, пр-т. Академіка Глушкова 4д,
e-mail: galkin.o.a@gmail.com

O. A. Galkin, candidate of physical and mathematical sciences, junior researcher

Effect of bandwidth variations on the behaviour of misclassification rate of kernel classifier

Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03680, Kyiv, Glushkova st., 4d,
e-mail: galkin.o.a@gmail.com

Стаття присвячена проблемі виявлення відмінностей між використанням оптимальної смуги пропускання, що мінімізує середньо-квадратичні інтегровані помилки ядерної оцінки щільності розподілу та оптимальної смуги пропускання, що мінімізує середню ймовірність помилкової класифікації, коли ядерні оцінки щільності розподілу використовуються для дискримінантного аналізу.

Ключові слова: смуга пропускання, ядерна оцінка, класифікація.

The article is devoted a problem of detecting differences between using the optimal bandwidth that minimizes the mean-integrated square error of kernel density estimate and the optimal bandwidth that minimizes the average probability of misclassification when kernel estimates of distribution used for discriminant analysis. Attention is paid to the behavior of the average probability of misclassification for different choices of the bandwidth parameter depending on whether a priori probabilities for different populations are equal or not. Basic work of experts assignments, and also demonstrated that when all a priori probabilities are equal, depending on the nature of density functions and kernel, large bandwidths can also lead to nearly optimal misclassification rates. The results presented in the article were obtained taking into account the fact that with increasing sample size one should gradually reduce bandwidth to zero to achieve greater performance of kernel density estimates of distribution.

Key Words: bandwidth, kernel estimate, classification.

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Анісімов А.В.

Вступ

Ядерні оцінки щільності розподілу є одним з найбільш відомих методів побудови непараметричних оцінок щільності комплексів. Використання ядерних оцінок щільності в дискримінантному аналізі є досить поширеним в науковій літературі та в багатьох програмних продуктах. Якщо $x_{l1}, x_{l2}, ...x_{ln_l}$ є d–вимірними спостереженнями в навчальній вибірці з $l-$м комплексом, ядерна оцінка щільності $f_l(x)$ обчислюється як

$$\hat{f}_{lS}(x) = n_l^{-1} S^{-d} \sum_{k=1}^{n_l} K\left\{S^{-1}\left(x_{lk} - x\right)\right\},$$

де функція ядра $K(\cdot)$ є функцією щільності в d–вимірному просторі, а $S>0$ - відповідним згладжувальним параметром, відомим як смуга пропускання. Правило класифікації, що грунтується на даних ядерних оцінках щільності розподілу може бути задане як

$$\mathrm{d}_K(x) = \arg\max_l \pi_l \hat{f}_{lS}(x).$$

Для звичайної задачі оцінки щільності оптимальна пропускна здатність береться як така, що мінімізує середньо-квадратичні інтегровані помилки ядерної оцінки щільності розподілу [1], а саме

© О.А. Галкін, 2014

$$E_{інт} = E\left[\int\left\{\hat{f}_{IS}(x) - f_I(x)\right\}^2 dx\right].$$

Оскільки ефективність непараметричного класифікатора залежить від відповідних оцінок щільності класу, вибір згладжувального параметра відіграє важливу роль в задачах класифікації. Постає питання: наскільки відповідним є середній показник помилкової класифікації, коли смуга пропускання, що мінімізує середньо-квадратичні інтегровані помилки в задачах оцінки щільності використовується для задач класифікації?

Виклад основного матеріалу

У спробі дослідити дане питання почнемо з розгляду простої двокласової проблеми з рівними апріорними ймовірностями, де класи є багатовимірними нормалями з однаковою дисперсійною матрицею $\Sigma = \mathrm{I}$, але різними середніми векторами μ_1 та μ_2. У даному випадку смуга пропускання, що мінімізує середньо-квадратичні інтегровані помилки є однаковою для обох класів, якщо вона має однакову кількість даних з двох класів навчальної вибірки. Крім того, якщо використовується нормальне ядро, можна обчислити смугу пропускання, що аналітично мінімізує середньо-квадратичні інтегровані помилки для нормально розподілених даних. Для даної проблеми усереднена ймовірність помилкової класифікації Ξ також може бути оцінена та виведена у якості функції від смуги пропускання S. Оскільки ядерна оцінка щільності розподілу є середнім значенням незалежних та однаково розподілених випадкових величин, можна використовувати нормальне наближення для її розподілу. Середнє значення та дисперсія даного нормального наближення мають відповідні аналітичні вирази, коли розподіли даних та ядро є нормальними. Було зроблено спробу оцінити $\Xi(S)$ для даного значення S по двом різним процедурам, одна з використанням нормального наближення (описана вище), а інша по багатомасштабній симуляції Монте-Карло. Помітної різниці не спостерігалося на побудованих значеннях $\Xi(S)$ для двох різних підходів – розмір вибірки ($n_1 = n_2 = n = 50$) був достатньо вдалим для дуже високого ступеня точності в нормальному наближенні для розподілу ядерних оцінок щільності.

На рис. 1-4 значення $\Xi(S)$ були отримані для різних варіацій S та для різних розмірностей ($d = 1,2,4,6$), де було вибрано $\mu_1 = (0,0,...,0)$ та $\mu_2 = (2,0,...,0)$, а розмір вибірки дорівнював 50 для обох класів. Дані рисунки показують чітку різницю між оптимальною смугою пропускання для звичайної задачі оцінки щільності та для задачі класифікації.

Для різних розмірностей оптимальна смуга пропускання для задач класифікації (смуга пропускання призводить до найнижчої ймовірності помилкової класифікації) позначена як '*', а ширина смуги, що мінімізує середньо-квадратичні інтегровані помилки позначена як '∘'. Дана різниця між двома смугами пропускання стає більшою при зростанні розмірності d. Для розмірності $d = 6$ найкраща ширина смуги для задачі класифікації зменшує середній показник помилкової класифікації майже на 34%, у порівнянні з частотою помилок, що відповідає оптимальній смузі пропускання, яка мінімізує середньо-квадратичні інтегровані помилки в задачі оцінки щільності.

Досить цікавою на рис. 1-4 є поведінка $\Xi(S)$ для великих значень S. Відомо, що для задачі оцінки щільності середньо-квадратичні інтегровані помилки виявляються великими для дуже малих значень смуги пропускання (через велику дисперсію) так само, як і для дуже великих значень смуги пропускання (через великий зсув) [2]. Однак, у всіх випадках на рис. 1-4 $\Xi(S)$ стає маєже гладким після досягнення його мінімального значення. На відміну від того, що відбувається у випадку звичайної оцінки щільності, великі значення ширини смуг не є поганим вибором для розглянутих задач класифікації. Змінюючи μ_1, μ_2 та Σ, ми отримуємо різні графіки для $\Xi(S)$, але основна модель залишається незмінною.

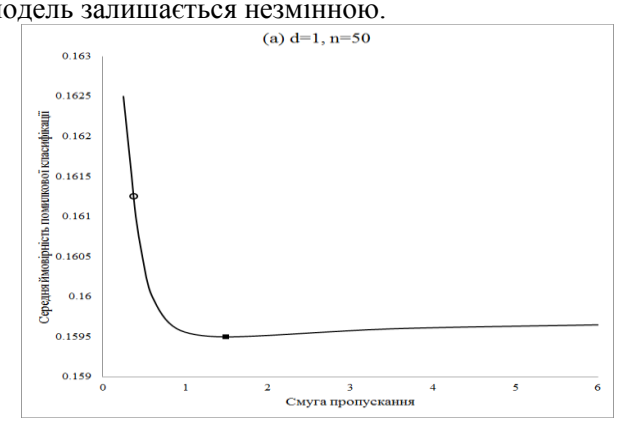


Рис. 1 Істинні Ξ-функції та оптимальні смуги пропускання (1 експеримент)

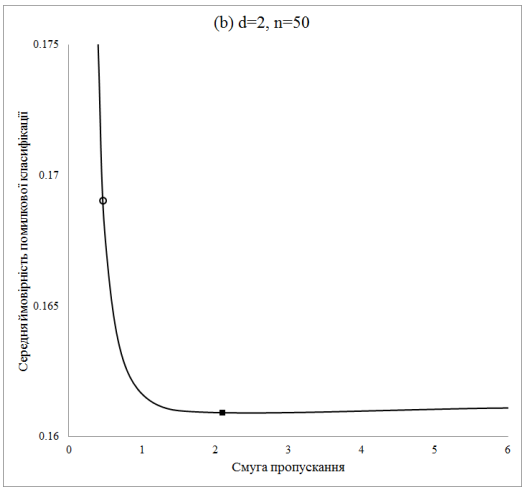


Рис. 2 Істинні Ξ-функції та оптимальні смуги пропускання (2 експеримент)

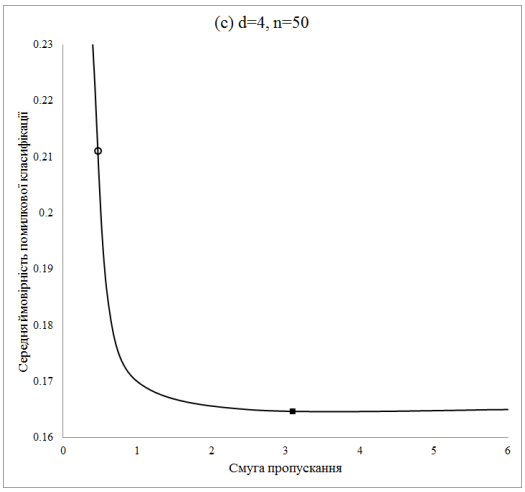


Рис. 3 Істинні Ξ-функції та оптимальні смуги пропускання (3 експеримент)

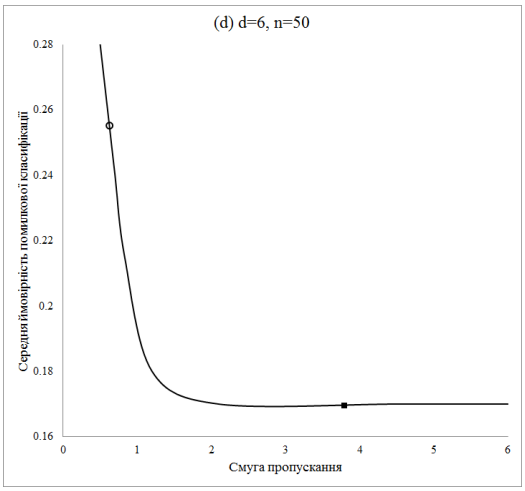


Рис. 4 Істинні Ξ-функції та оптимальні смуги пропускання (4 експеримент)

Існують також інші методи вибору оптимальної смуги для задач класифікації, що базуються на технології перехресної перевірки [3-4]. Наприклад, *Z*-кратний метод перехресної перевірки розділяє навчальну вибірку на *Z* частин, розміри яких є майже рівними. Зазвичай, стратифікована випадкова вибірка використовується для формування складок, де спостереження, що належать до різних класів використовуються як різні формації. Беручи одну складку в той момент, коли і тестову вибірку, вона використовує різні ширини смуг для класифікації своїх членів на основі навчальної вибірки, сформованої всіма спостереженнями, що належать до інших *Z-1* складок. Дана процедура повторюється по *Z* складках, а загальна частка помилкової класифікації використовується для оцінки $\Xi(S)$. Ширина смуги S, для якої оціночне значення $\Xi(S)$ є мінімальним вважається оптимальною шириною смуги. Коли ми маємо усі *N* спостережень, пропускна або *N*-кратна перехресна перевірка може розглядатися як спеціальний випадок цієї процедури, де кожна складка складається з одного спостереження [5]. Оскільки спостережувані частки помилкової класифікації використовуються для оцінки $\Xi(S)$, оцінки представляють собою ступінчасті функції замість того, щоб бути гладкими кривими, коли істинне $\Xi(S)$ є прийнятною гладкою функцією. Отже, замість єдиного унікального мінімуму дана процедура часто призводить до інтервалу, або об'єднання декількох інтервалів, як можливих варіантів вибору для гладкого параметра, з якого важко вибрати єдине оптимальне значення.

Рис. 5-8 чітко демонструють обмеження даної технології на основі перехресної перевірки. Тут було розглянуто таку ж проблему, як і на рис. 1-4 та згенеровано вибірки з тих же нормальних комплексів. Істинні та оцінені (по пропускній та 10-кратній перехресній перевірках) середні ймовірності помилок класифікації виведені одночасно на рис. 4-8. Оцінені криві не лише мають поведінку ступінчастих функцій, але і в деяких випадках пропускають відповідні місця розташування оптимальних смуг пропускання з великим запасом.

Для досить великих смуг пропускання середньо-квадратичної інтегрованої помилки ядерна оцінка щільності розподілу є досить великою, що є результатом значного зсуву. Встановлено, що значення показника помилкової класифікації $\Xi(S)$ спочатку досягає свого мінімуму, а потім стає майже гладким для

широкого діапазону великих значень смуги пропускання S. Спочатку пояснимо таку явну аномальну поведінку $\Xi(S)$ на прикладах. Припустимо, що існує n спостережень в навчальній вибірці з кожного комплексу, а загальна смуга пропускання використовується для різних оцінок щільності комплексів, шо обгрунтовані для таких випадків, як наприклад, моделі локалізації міграції комплексів.

Величини $E\left\{\hat{f}_{lS}(x)\right\}$ та $\hat{f}_{lS}(x)$ можуть розглядатися відповідно як теоретичні та емпіричні масштабно-просторові функції від $l-$го комплексу для різних варіацій згладжувального параметра S [6-7]. Теоретичні масштабно-просторові функції $E\left\{\hat{f}_{lS}(x)\right\}$ є згортками істинних щільностей $f_l(x)$ з ядром K та зі смугою пропускання S.

Відомо, що із зростанням розміру вибірки дисперсія ядерної оцінки щільності розподілу, що є середнім значенням множини незалежних та однаково розподілених випадкових величин зменшується і як наслідок, для деякої фіксованої смуги пропускання S розподіл $\hat{f}_{lS}(x)$ має тенденцію бути майже дегенеративним в $E\left\{\hat{f}_{lS}(x)\right\}$, коли розмір вибірки є досить великим.

Для фіксованого значення S, коли апостеріорні ймовірності для різних комплексів є рівними, а також коли розмір вибірки n прямує до нескінченності, класифікатор на основі ядерної оцінки щільності розподілу має тенденцію класифікувати спостереження до класу, що має найбільше значення для теоретичної функції масштабованого простору. Це виконується, коли апостеріорні ймовірності для різних комплексів є рівними, а розмір вибірки n прямує до нескінченності при фіксованому значенні S. Те ж саме має місце і для випадку згортки, коли функції f та K є сферично-симетричними та строго спадними функціями відстані від їх центрів симетрії. Задовольняючи умови моделі локалізації зсуву, функції масштабованого простору зберігають порядок серед початкових щільностей для всіх значень S.

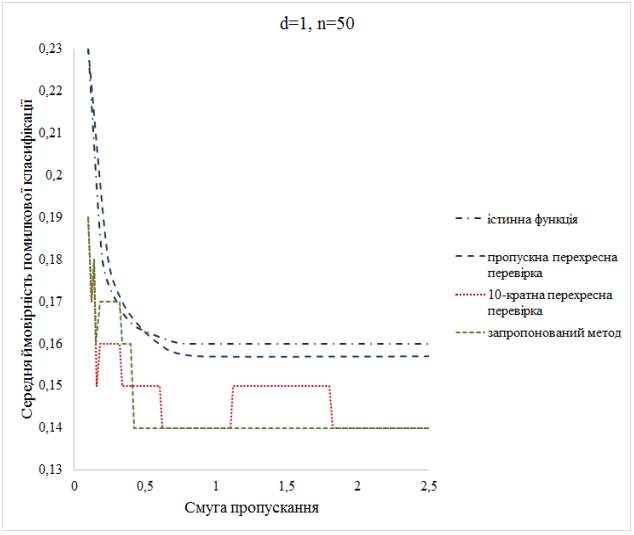


Рис. 5 Середні ймовірності помилкової класифікації (1 експеримент)

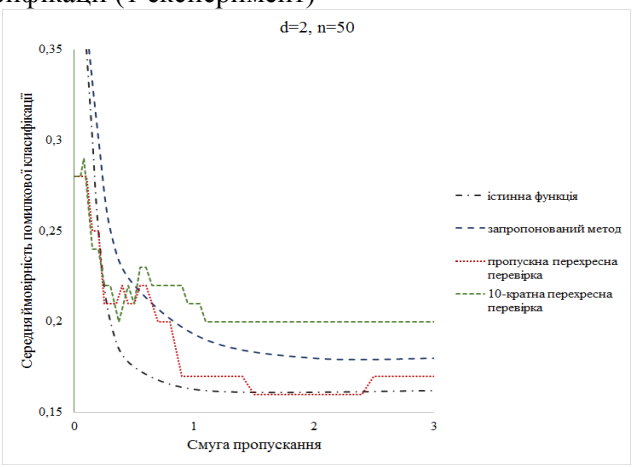


Рис. 6 Середні ймовірності помилкової класифікації (2 експеримент)

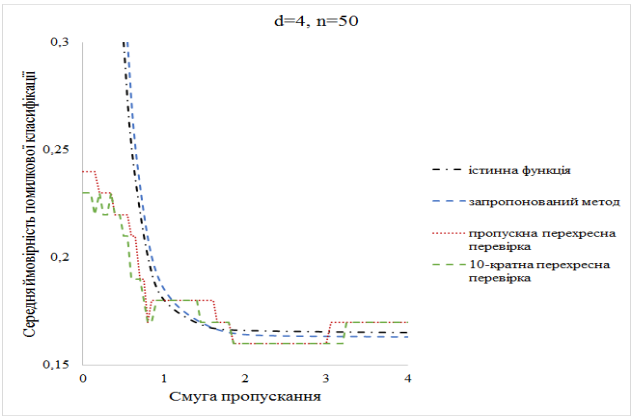


Рис. 7 Середні ймовірності помилкової класифікації (3 експеримент)

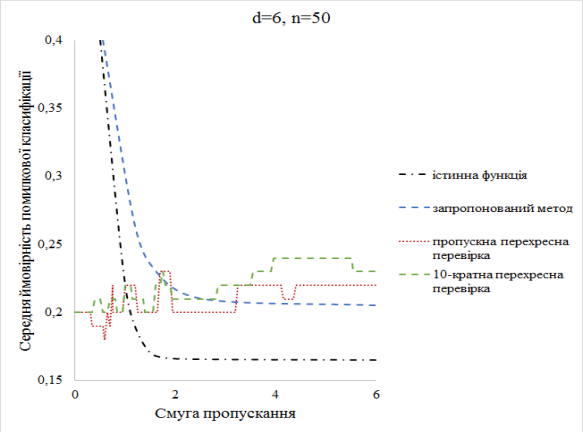


Рис. 8 Середні ймовірності помилкової класифікації (4 експеримент)

На попередньо представлених рисунках продемонстровано випадки рівних апостеріорних ймовірностей.

Теорема 1. Припустимо, що $f_1, f_2, ..., f_L$ та K є сферично-симетричними щільностями, а функції f_l задовольняють умовам моделі локалізації зсуву, тобто $f_l(x) = g(x - \mu_l)$ для деякої загальної щільності g з нульовим середнім значенням та параметром локалізації μ_l. Припустимо також, що f_l та K є строго спадними функціями відстані від їх центрів симетрії. Тоді, для певного позитивного S, при $n \to \infty$, усереднена ймовірність помилкової класифікації класифікатора на основі ядерної оцінки щільності розподілу має тенденцію байесівського ризику за умови, що апріорні ймовірності рівні.

Дана теорема пояснює причину нелогічної поведінки $\Xi(S)$. Наступна теорема дає певне уявлення щодо поведінки класифікаторів на основі ядерної оцінки щільності розподілу для великих розмірів вибірок та великих смуг пропускання, коли щільності комплексів не обов'язково задовольняють умову симетричності.

Теорема 2. Припустимо, що f_l є функціями щільності, що задовольняють умову $\int \|x\|^6 f_l(x)dx < \infty$ для всіх $l = 1, 2, ..., L$, а ядро K є щільністю з режимом в 0 та обмежено третіми похідними. Тоді, якщо апріорні ймовірності є рівними при $n, S \to \infty$, усереднена ймовірність помилкової класифікації класифікатора на основі ядерної оцінки щільності розподілу має тенденцію лінійного класифікатора, що задається таким чином:

$$d_L(x) = \arg\min_l \left[x' \nabla^2 K(0) E_{f_l}(X) - (1/2) E_{f_l}\left\{ X' \nabla^2 K(0) X \right\} \right].$$

Зазначимо, що коли ядро K є сферично-симетричною та строго спадною функцією норми її аргументу, тоді обмежений лінійний класифіктор, що отриманий в попередній теоремі для великої смуги пропускання є майже еквівалентним класифікатору, що класифікує спостереження x в клас l_0, що максимізує $x' E_{f_l}(X) - (1/2) E_{f_l}(XX')$ (оскільки $\nabla^2 K(0)$ є негативно визначеною функцією), або мінімізує $E_{f_l}(\|x - X\|^2)$ для $1 \le l \le L$. Поведінка середньої ймовірності помилкової класифікації виявляється дещо іншою, коли апріорні ймовірності є різними для різних комплексів. Як приклад, розглядаються такі ж розподіли, що і на рис. 1-4 та рис. 5-8, однак встановлено апріорні ймовірності 0.6 та 0.4, відповідно для двох комплексів. Отримані результати узагальнені на рис. 9-10.

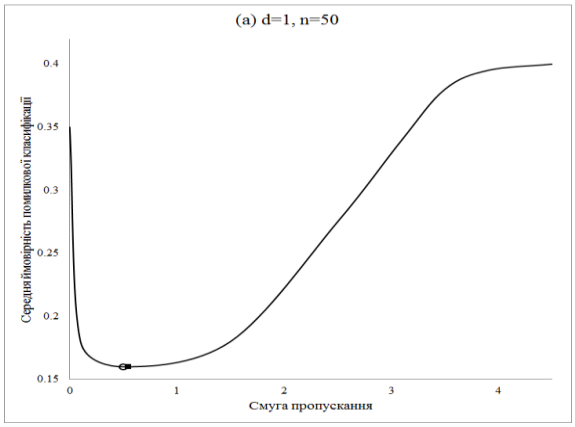


Рис. 9 Істинні Ξ-функції та оптимальні смуги пропускання (1 експеримент)

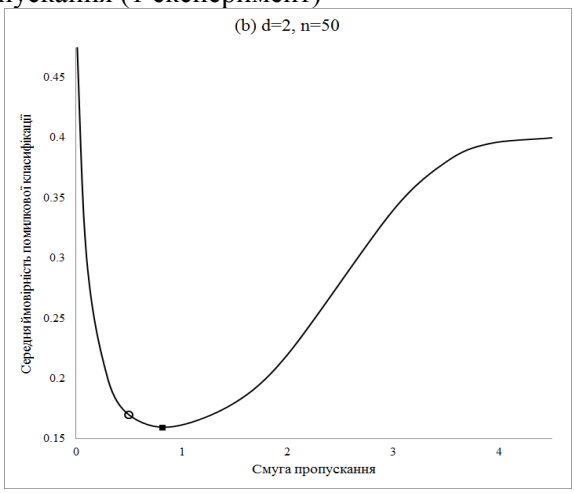


Рис. 10 Істинні Ξ-функції та оптимальні смуги пропускання (2 експеримент)

На попередньо представлених рисунках продемонстровано випадки нерівних апостеріорних ймовірностей.

У деяких випадках смуга пропускання, що мінімізує $\Xi(S)$, позначена '*' та смуга пропускання, що мінімізує середньо-квадратичні інтегровані помилки для ядерних оцінок щільності розподілу, позначена '∘' виявляються різними. Однак важливим є те, що $\Xi(S)$ тепер демонструє абсолютно іншу поведінку при зміні S. Після досягнення свого мінімального значення $\Xi(S)$ значно збільшується, перш ніж стати гладкою. У даному випадку великі смуги пропускання не є належним вибором для задач класифікації.

Висновки

Підводячи підсумки викладеного матеріалу зазначимо, що було досліджено деякі фундаментальні відмінності між оптимальною смугою пропускання, що мінімізує середньо-квадратичні інтегровані помилки ядерної оцінки щільності розподілу та оптимальною смугою пропускання, що мінімізує середню ймовірність помилкової класифікації, коли ядерні оцінки щільності розподілу використовуються для дискримінантного аналізу. Один з основних результатів полягає в тому, що залежно від того, чи апріорні ймовірності для різних комплексів є рівними чи ні, усереднена ймовірність помилкової класифікації демонструє абсолютно різну поведінку для різних варіантів вибору параметра смуги пропускання. В той час як існує загальне переконання, що із зростанням об'єму вибірки слід поступово зменшувати смугу пропускання до нуля для досягнення більшої продуктивності ядерної оцінки щільності розподілу, було показано, що коли усі апріорні ймовірності є рівними, залежно від природи функцій щільності комплексів та ядра, великі смуги пропускання можуть призводити до майже оптимальних коефіцієнтів помилкової класифікації.

Список використаних джерел

1. *Scott D.* Multivariate Density Estimation: Theory, Practice and Visualization / D. Scott. – Wiley, New York.
2. *Wand M.* Kernel Smoothing / M. Wand, M Jones. – London: Chapman and Hall, 1995.
3. *Ripley B.* Pattern Recognition and Neural Networks / B. Ripley. – Cambridge: Cambridge University Press, 1996.
4. *Duda R.* Pattern Classification / R. Duda, P. Hart, D. Stork. – New York: Wiley, 2000.
5. *Lachenbruch P.* Estimation of error rates in discriminant analysis / P. Lachenbruch, M. Mickey. – Technometrics. –1968. – 10. – P. 1-11.
6. *Chaudhuri P.* SiZer for exploration of structures in curves / P. Chaudhuri, J. Marron // Journal of the American Statistical Association. – 1999. – 94. – P. 807-823.
7. *Chaudhuri P.* Scale space view of curve estimation / P. Chaudhuri, J. Marron // The Annals of Statistics. – 2000. – 28. – P.408-428.

References

1. SCOTT, D. (1992) *Multivariate Density Estimation: Theory, Practice and Visualization.* Wiley, New York.
2. WAND, M., JONES, M. (1995) *Kernel Smoothing.* London: Chapman and Hall.
3. RIPLEY, B. (1996) *Pattern Recognition and Neural Networks.* Cambridge: Cambridge University Press.
4. DUDA, R., HART, P. and STORK, D. (2000) *Pattern Classification.* New York: Wiley.
5. LACHENBRUCH, P. & MICKEY, M. (1968) Estimation of error rates in discriminant analysis. *Technometrics*. 10. p.1-11.
6. CHAUDHURI, P. & MARRON, J. (1999) SiZer for exploration of structures in curves. *Journal of the American Statistical Association*. 94. p.807-823.
7. CHAUDHURI, P. & MARRON, J. (2000) Scale space view of curve estimation. *The Annals of Statistics*. 28. p.408-428.

Надійшла до редколегії 29.09.14

УДК 621.391:519.24

Гаращенко Ф.Г. [1], д. т. н., проф.,
Яценко В.О. [2], д. т. н., проф.,
Матвієнко В.Т. [1], к. т. н., доц.,
Дегтяр О.С. [1], аспірант

Адаптивний метод дистанційного виявлення хімічних та біологічних компонентів, що базується на градієнтному підході

[1] Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, пр-т. Глушкова 4д,
e-mail: olga.degtiar@gmail.com
[2] Інститут космічних досліджень НАН України, 03680, м. Київ, пр-т. Глушкова 40а,
e-mail: ikd@ikd.kiev.ua

Garashchenko F.G. [1], Doctor of science, prof.,
Yatsenko V.O., Doctor of science, prof.,
Matvienko V.T. [1], Ph.D., assoc. prof.,
Degtiar O.S. [1], Ph.D. student

Adaptive method for remote detection of chemical and biological components based on the gradient approach

[1] Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03680, Kyiv, Glushkova st., 4d,
e-mail: olga.degtiar@gmail.com
[2] Space Research Institute National Academy of Sciences of Ukraine, 03680, Kyiv, Glushkova st., 40ф,
e-mail: ikd@ikd.kiev.ua

В роботі описується алгоритм для виявлення хімічних забруднень у рослинності на основі спектральних даних. Для цього ставиться задача апроксимації сигналу, що знаходиться у вигляді лінійної комбінації вектору невідомих параметрів та певних базисних функцій, де в якості базисних функцій беруться ретроспективні спостереження забрудень рослинності різними хімічними компонентами.

Для постановки задачі апроксимації розглядається мінімізація декількох типів нев'язок: середньоквадратичне відхилення сигналу від апроксимації безпосередньо в поточний момент часу та інтегральна нев'язка на всьому проміжку. Для адаптивної корекції вектору параметрів, використовуючи метод градієнтного спуску, будується неперервна ітераційна процедура. Задаючи початкові дані ставиться задача Коші, розв'зок якої і є шуканим вектором невідомих параметрів.

Досліджено збіжність ітераційної процедури за допомогою використання методів Ляпунова. Ефективність використання даного алгоритму підтверджено експериментально за рахунок визначення хімічних компонентів у рослинах.

Ключові слова: адаптація, сигнали в реальному часі, апроксимація, базисні функції, спектральні дані, диференціальні схеми.

The goal of the task is to define unknown parameters vector in approximation function and to find out chemical and biological components presence in plats by corresponding spectral data. Approximation function is supposed to be a linear combination of basis functions and unknown parameters. Basis functions are taken as retrospective occurrences of plants pollution with different chemical and biological elements.

Adoptive algorithm for signal approximation described. Iterative procedure is built based on gradient descent method for minimizing certain residuals. For this purpose, two types of residuals investigated: directly at the current moment of time and mean square approximation on the continuous time span which is an integral of the mean square deviation between signal and approximation.

System of ordinary differential equations together with initial conditions forms an iterative procedure. Its convergence analysis conducted using Lyapunov methods.

Numerical experiment for chemical components in plants detection conducted to prove experimentally efficiency of the described algorithm. Unknown parameters vector converges to 1 for the corresponding to detected chemical element basis function.

Key Words: adaptation, real-time signal, approximation, basic function, spectral data, differencing schemes.

Статтю представив д. ф.-м. н., проф. Хусаїнов Д.Я.

© Ф.Г. Гаращенко, В.О. Яценко, В.Т. Матвієнко, О.С. Дегтяр, 2014

Introduction

Despite the fact that there are many works devoted to the problems of approximation both continuous and discrete signals, important practical problems arise, especially in the field of Informatics and applied mathematics [1]. It requires development and testing of new approaches of experimental data approximation. First, it comes from the fact that data processing is mostly conducted in real time. Besides, algorithms should meet strict conditions: they should be constructive, focused on optimal performance and real-time problem solving [3].

These requirements, in our view, meet the below described adaptive algorithms based on gradient approach. Proposed approaches described for the approximation of the continuous processes only, but it is easy to derive discrete counterparts on their basis. As a rule, signals are measured into discrete moments. That is why differencing schemes could prove to be more effective for use.

Approximation of continuous signals

Let suppose that we know of uninterrupted, for ease of scalar signal $x = \varphi(t)$, $t_0 \le t \le T$, which needs to be approximate with parametrically given assemblage

$$x(t) \approx \psi(t,\alpha) = \psi(t,\alpha_1,\alpha_2,...\alpha_n). \quad (1)$$

If the signal is defined on $[t_0,t]$, the task of parameters α vector adaptive correction is to minimize certain residual [5]. For this purpose, we will consider two types of residuals:

a) directly at the moment t

$$I_1(\alpha) = (\psi(t,\alpha) - \varphi(t))^2; \quad (2)$$

b) mean square approximation of $[t_0,t]$

$$I_2(\alpha) = \int_{t_0}^{t} (\psi(\tau,\alpha) - \varphi(\tau))^2 \, d\tau. \quad (3)$$

For correction of parameters in order to minimize residual (2) uninterrupted iterative procedure is written down

$$\frac{d\alpha}{dt} = -grad_\alpha I_1(\alpha) = \\ = -2(\psi(t,\alpha) - \varphi(t)) grad_\alpha \psi(t,\alpha) \quad (4)$$

with some initial data

$$\alpha(t_0) = \alpha^{(0)}. \quad (5)$$

To find vector parameters α solution of Cauchy problem is needed (4), (5). If there is a stationary problem solution (4), (5), that is $\alpha(t) \to \overline{\alpha}$, $t \to \infty$, you can be taken as a solution of given problem. It is necessary to notice that for solving some practical tasks such a simple procedure gives good results.

For the integral residual we write down the same system of ordinary differential equations

$$\frac{d\alpha}{dt} = -grad_\alpha I_2(\alpha) = \\ = -2\int_{t_0}^{t} (\psi(\tau,\alpha) - \varphi(\tau)) grad_\alpha \psi(\tau,\alpha) d\tau. \quad (6)$$

As (6) is a system of ordinary differential equations of order n, recorded in normal form, initial conditions for it must be selected similarly to the previous case

$$\alpha(t_0) = \alpha^{(0)}. \quad (7)$$

That means, in another case is needed to solve the problem numerically with one of the methods, such as Runge-Kutta, a Cauchy (6), (7).

Comment 1. The original data is to be chosen from the convergence of the proposed iterative procedures, e.g. using Lyapunov second method.

Consider a more specific problem of formulated type. Suppose we have a system of basic functions

$$\varphi_1(t), \varphi_2(t), ..., \varphi_n(t), \quad t \ge t_0, \quad (8)$$

and function $\psi(t,\alpha)$ will choose as a linear combination of

$$\psi(t,\alpha) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \varphi_j(t). \quad (9)$$

In this case, the system of ordinary differential equations (4) we write in this form

$$\frac{d\alpha_i}{dt} = -2\varphi_i(t) \sum_{j=1}^{n} \varphi_j(t) \alpha_j + 2\varphi(t)\varphi_i(t), \\ i = 1,2,...,n, \quad (10)$$

System (10) is a linear nonparallel sentence system of ordinary differential equations which can be re rewritten in a vector-matric form

$$\frac{d\alpha}{dt} = A(t)\alpha + f(t), \quad t \ge t_0. \quad (11)$$

According to Cauchy's formula solution of problem (5), (11) can be written as follows

$$\alpha(t) = W(t,t_0)\alpha^{(0)} + \int_{t_0}^{t} W(t,\tau) f(t) d\tau, \quad (12)$$

where $W(t,\tau)$ – scaled under the moment τ fundamental matrix of a homogeneous system, which corresponds to (11), i.e.

$$\frac{dW}{dt} = A(t)W, \quad W(\tau,\tau) = E_n. \quad (13)$$

By analogy, you can extract systems of differential equations for the integral residual (3)

provided (9). In this case, the system (6) could be written in this form

$$\frac{d\alpha_i}{dt} = -2\int_{t_0}^{t}\left(\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\varphi_j(\tau)-\varphi(\tau)\right)\varphi_i(\tau)d\tau, \qquad (14)$$

$i = 1,2,...,n.$

A linear system (14) could be written in a vector-matrix form

$$\frac{d\overline{\alpha}}{dt} = \overline{A}(t)\alpha + 2\overline{f}, \qquad (15)$$

where $\bar{f}^T(t) = \int_{t_0}^{t} f^T(\tau)d\tau$, $\overline{A}(t) = \int_{t_0}^{t} A(\tau)d\tau$.

However, a diverse linear system of ordinary differential equations (14), in effect (7), you need to consider under partially fixed initial conditions. In order to find an overall system solution (14) under any $\alpha^{(0)}$, will use the Cauchy formula

$$\alpha(t) = \overline{W}(t,t_0)\alpha^{(0)} + \int_{t_0}^{t}\overline{W}(t,\tau)\bar{f}(\tau)d\tau, \qquad (16)$$

where $\overline{W}(t,\tau)$ – converging for a moment τ fundamental matrix for homogeneous system

$$\frac{d\alpha}{dt} = \overline{A}(t)\alpha. \qquad (17)$$

This matrix satisfies the system with a single initial conditions

$$\frac{d\overline{W}}{dt} = \overline{A}(t)\overline{W}, \quad \overline{W}(t_0,t_0) = E_n. \qquad (18)$$

Analysis of iterative procedures convergence

Let us conduct analysis of the convergence of iterative procedures using Lyapunov methods of practical stability [4].

Consider two types of residuals (2) and (3).

Let us look at the iterative scheme based on minimization of residual (2). Suppose that solution of the Cauchy problem (5), (11) meets the condition $\alpha^{(1)}(t,t_0,\alpha^{(0)}) \to \overline{\alpha} = const,\ t \to \infty$. Then with the substitute

$$\alpha = \alpha^{(1)}(t,t_0,\alpha^{(0)}) + v(t) \qquad (19)$$

we'll come to a homogeneous system of linear differential equations with respect to the new variable $v(t)$

$$\frac{dv}{dt} = A(t)v, \quad t \ge t_0. \qquad (20)$$

Then, on the assumption that the original data (5) can be perturbed, analysis of convergence of iterative procedure (11) will be equivalent to the research of stability of solution $v(t) \equiv 0,\ t \ge t_0$ of linear homogeneous system (20). Fair's the next theorem.

Theorem 1. For the convergence of iterative scheme (13) at perturbed initial data, i.e.

$$\alpha(t,t_0,\alpha^{(0)} + v^{(0)}) \to \overline{\alpha},\ t \to \infty \qquad (21)$$

is necessary and sufficient, the converging for a moment fundamental matrix $W(t,t_0)$, to meet the conditions

$$W(t,t_0) \to 0, \text{ for } t \to \infty. \qquad (22)$$

The proof of the formulated theorem is based on the framework as a replacement (19), recording and analysis of Cauchy problem solution for a homogeneous system (20)

$$v(t) = W(t,t_0)v^{(0)}. \qquad (23)$$

Here $v^{(0)}$ – n-dimensional vector of initial data for homogeneous system (20), $\overline{\alpha}$ –n-dimensional stationary vector, which is the solution of the given problem.

Detection of chemical components in the plants and calculation experiment

Let's show constructiveness and effectiveness of the proposed approach primarily based on spectral data processing of the plants contaminated with chemical elements. We assume that plants pollution is generated by some chemical elements and its spectral data received. They are considered as basic for recognition of them in new experimental data. Let us designate basic spectral functions

$$\varphi_1(t),\varphi_2(t),...,\varphi_n(t),\quad t_0 \le t \le T,$$

which represent the spectral data of plants pollution by known chemical elements.

Let $\varphi(t), t \in [t_0,T]$ the measured spectral function contaminated by an unknown chemical element. The function $\psi(t,\alpha)$ will choose as a linear combination of (9) $\psi(t,\alpha) = \sum_{j=1}^{n}\alpha_j\varphi_j(t)$.

Solution of differential equations system (10) will give us needed parameters vector.

Numerical experiment conducted under the described above adaptive algorithm. Spectral experimental data on a plant specimens were chosen for the basic functions, which were contaminated by the chemical elements $CaCl$ and $K_2Cr_2O_7$. Spectral values of basic functions displayed on Figure 1. For the recognition of new experimental data for the contamination with selected chemical elements, an adaptive algorithm is applied and the result are shown on Figure 2.

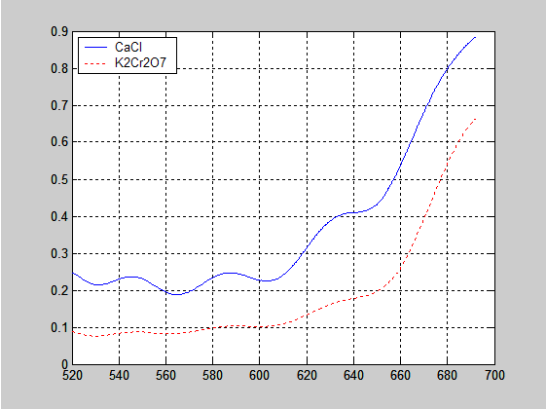


Figure 1. Spectral values of basic functions.

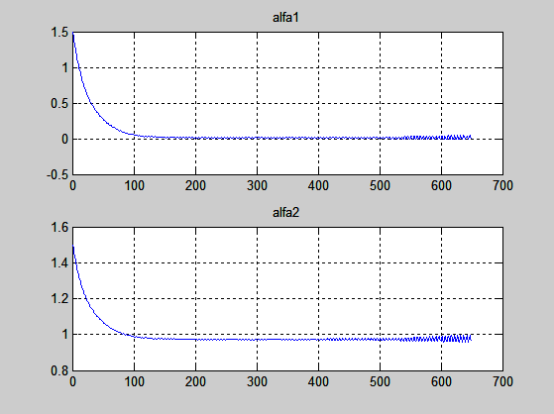


Figure 2. Iterative procedure convergence for experimental data contaminated by the chemical elements $CaCl$ (alfa1) and $K_2Cr_2O_7$ (alfa2).

Unknown parameters vector converges to 0 for the experimental data contaminated by $CaCl$ and to 1 for $K_2Cr_2O_7$ correspondingly. It means that contamination by chemical element $K_2Cr_2O_7$ is recognized. .

Conclusion

Developed concept of adaptive algorithm for approximation of experimental data with discrete dimensions based on gradient approach.

Adaptive algorithm for approximation of discrete experimental data on the basis of gradient approach created.Convergence of proposed adaptive algorithm for detecting chemical and biological components proven. Particularities of application of adaptive algorithm of forecasting at initial detection of components of different types investigated.

Список використаних джерел

1. *Бублик Б.Н.* Структурно-параметрическая оптимизация и устойчивость динамики пучков / Б.Н. Бублик, Ф.Г. Гаращенко, Н.Ф. Кириченко – Киев: Наук.думка, 1985. -304 с.
2. *Евтушенко Ю.Г.* Методы решения экстремальных задач и их применение в системах оптимизации / Ю.Г. Евтушенко – Москва: Наука, 1982. -432 с.
3. *Прэтт У.* Цифровая обработка изображений / У. Прэтт – Москва: Мир, 1982. -790 с.
4. *Башняков А.Н.* Анализ сходимости итерационных процедур на основе методов практической устойчивости / А.Н. Башняков, Ф.Г. Гаращенко // Проблемы управления и информатики. – 1999. – №2. – С. 15-25
5. *Гаращенко Ф.Г.* Адаптивные модели аппроксимации сигналов в структурно-параметрических классах функций / Ф.Г. Гаращенко, О.Ф. Швець, О.С. Дегтяр // Проблемы управления и информатики. - 2011. - №2. - С. 69-77.

References

1. BUBLYK, B., GARASCHENKO, F. and KIRICHENKO, N. (1985) *Structurally-parametrical optimization and sustainability of beams dynamic.* Kyiv: Naukova dumka.
2. EVTUSHENKO, U. (1982) *Methods of extreme tasks solution and their usage in optimization systems.* Moscow: Nauka.
3. PRATT, W. (1978) *Digital image processing.* New York: Wiley-Interscience.
4. GARASCHENKO, F. and BASHNYAKOV, A. (1999) Analysis of convergence of iterative procedures based on practical sustainability methods *Journal of Automation and Information sciences* 2. p. 15-25.
5. GARASCHENKO, F., SHVETS, O. and DEGTIAR, O. Adaptive signals approximation models in structural-parametric classes of functions *Journal of Automation and Information sciences.* 2. p. 69-77.

Надійшла до редколегії 11.09.14

УДК 517.929.4

Гаркуша Н.І., к. е. н., с.н.с.

Про одну математичну модель динаміки взаємодіючих популяцій

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, пр.-т. Глушкова, 4д,
e-mail: ngarkusha@gmail.com

N. I. Garkusha, PhD, senior researcher

About one mathematical model of the dynamics of interacting population

Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03680, Kyiv, Glushkova av., 4d,
e-mail: ngarkusha@gmail.com

Розглянута математична модель взаємодії двох популяцій. Модель має вигляд системи двох диференціальних рівнянь з нелінійністю дробового вигляду. Досліджено ненульовий стан рівноваги. Розглянуто модель з запізнюванням. Проведено дослідження стану рівноваги системи з післядією.

Ключові слова: математична модель, динамічна система, диференціальні рівняння, запізнювання.

The mathematical model of population dynamics is described as a system of two differential equations. The review of the emergence of population dynamics mathematical models is presented since Malthus' "Essay on the Principle of Population" and Verhulst model. It is found that under certain conditions on the parameters of the system, the phase portrait is a collection of zero equilibrium, stable node (or focus) and a saddle lying on the axis Ox. Further, given the time of puberty, the model is refined and the delay is introduced. Equilibrium positions are retained, but their study is more difficult. The greatest interest is the equilibrium position of being in the first quadrant. It determines the number of individuals of the two species that are in mutual equilibrium. As for the system without delay, the linearization of the system is carried out in the neighborhood of the non-zero equilibrium position. Using the results of the location of the roots the quasi-polynomial's of the first order to obtain the conditions for asymptotic stability of the equilibrium position of the non-zero delay system describing the dynamics of model of two interacting populations.

Key words: mathematical model, dynamic system, differential equations, delay.

Статтю представив д.ф.-м.н, проф. Хусаінов Д. Я.

Вступ

Історія застосування математичних методів в екології починається з виходу книги Т. Мальтуса «Досвід про закон народонаселення» [1], в якій було висловлено припущення, що динаміка чисельності не обмежується ресурсами, і швидкість збільшення популяції лінійно залежить від її кількості. Математична модель представляла собою лінійне скалярне диференціальне рівняння

$$\dot{x}(t) = \gamma x(t),\ x(0) = x_0.$$

Наступним кроком був облік обмеженості ресурсів, що призвело до логістичного рівняння Ферхюльста [2]. Воно представляло собою рівняння з квадратичною правою частиною

$$\dot{x}(t) = ax(t)\left[K - x(t)\right]/K, \qquad (1)$$

де α – показник експоненціального зростання популяції при малій чисельності, стаціонарна чисельність популяції, обумовлена доступним ресурсом. Ці роботи описували динаміку окремо взятої популяції, в першу чергу, людського населення. Надалі ці дослідження були продовжені в роботах В. Вольтера, П. Леслі, Дж. Сміта, А.Н. Колмогорова, А.Д. Базикіна. Перша модель, яка описувала динаміку чисельності двох популяцій, що взаємодіють за принципом «хижак-жертва», була запропонована незалежно А.Лотка і В.Вольтерра і мала вигляд системи двох диференціальних рівнянь з квадратичною правою частиною [3,4]

$$\dot{x}(t) = \left[a - by(t)\right]x(t),\ \dot{y}(t) = -\left[a - dx(t)\right]y(t),$$

де x, y – щільності популяції жертви і хижака відповідно, a – швидкість розмноження

© Н.І. Гаркуша, 2014

популяції жертви у відсутності хижака, b – питома швидкість споживання популяції хижака жертви при одиничній щільності, c – природна смертність хижака, d/b – коефіцієнт переробки спожитої хижаком біомаси жертви у власну біомасу.

У даний роботі розглянута модель динаміки популяцій хижак-жертва при наступних припущеннях [3, стор.31-32]:

1) нелінійність (квадратичність) залежності швидкості розмноження популяції жертви від щільності при малих значеннях жертв;

2) конкуренція в популяції жертв;

3) смертність жертв (при обліку нелінійного характеру розмноження при малих щільностях популяції);

4) насичення хижака;

5) нелінійний (квадратичний) характер залежності швидкості поїдання хижаками жертв від щільності популяції жертви при малих значеннях щільності;

6) конкуренція хижака за жертву;

7) конкуренція хижаків за відмінні від жертви ресурси;

8) нелінійний (квадратичний) характер залежності швидкості розмноження хижака.

При зроблених припущеннях динаміка описується системою двох диференціальних рівнянь

$$\dot{x}(t)=\left[\frac{ax(t)}{N+x(t)}-by(t)\right]x(t),$$
$$\dot{y}(t)=-[c-dx(t)]y(t). \qquad (2)$$

Стаціонарні точки визначаються із системи

$$\left[\frac{ax(t)}{N+x(t)}-by(t)\right]x(t)=0,\ -[c-dx(t)]y(t)=0.$$

Ними будуть

$$O(0,0),\ M(x_1,y_1),\ x_1=\frac{c}{d},\ y_1=\frac{ac}{b(Nd+c)}. \qquad (3)$$

Точка $O(0,0)$ нецікава. Вона відповідає відсутності популяції. Розглянемо другу особливу точку. Система лінійного наближення в околі цієї особливої точки має вигляд

$$\dot{x}(t)=\left[\frac{2ax_1}{N+x_1}-\frac{ax_1^2}{(N+x_1)^2}-by_1\right](x-x_1)-bx_1(y-y_1)$$
$$\dot{y}(t)=dy_1(y-y_1)+(-c+dx_1)(y-y_1).$$

Підставивши значення x_1, y_1, отримаємо

$$\dot{x}(t)=\frac{Nacd}{Nd+c}\left(x-\frac{c}{d}\right)-\frac{bc}{d}\left(y-\frac{ac}{b(Nd+c)}\right),$$
$$\dot{y}(t)=\frac{acd}{b(Nd+c)}\left(x-\frac{c}{d}\right).$$

Характеристичне рівняння має вигляд

$$\begin{vmatrix}\frac{Nacd}{Nd+c}-\lambda & -\frac{bc}{d}\\ \frac{acd}{b(Nd+c)} & -\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2-\frac{Nacd}{Nd+c}\lambda+\frac{ac^2}{(Nd+c)}=0.$$

Його коренями є

$$\lambda_{1,2}=\frac{Nacd}{2(Nd+c)}\pm\frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{Nacd}{Nd+c}\right)^2-4\frac{ac^2}{Nd+c}}.$$

Оскільки характеристичне рівняння має від'ємні коефіцієнти, то стан рівноваги нестійкий (нестійкий вузол) [3, стор.35].

Розглянемо систему, в якій враховується внутрішньовидова конкуренція жертв. Це припущення приводить до системи

$$\dot{x}(t)=\left[a\frac{K-x(t)}{K}-by(t)\right]x(t),$$
$$\dot{y}(t)=-[c-dx(t)]y(t). \qquad (4)$$

Точки спокою визначаються із системи рівнянь

$$\left[a\frac{K-x(t)}{K}-by(t)\right]x(t)=0,\ -[c-dx(t)]y(t)=0.$$

Ними будуть

$$O(0,0),\ M_1(x_1,y_1),\ x_1=\frac{c}{d},\ y_1=\frac{a(dK-c)}{bdK},$$
$$M_2(x_2,y_2),\ x_2=K,\ y_2=0. \qquad (5)$$

Знову розглянемо другу особливу точку. Система лінійного наближення в околі цієї особливої точки має вигляд

$$\dot{x}(t)=\left[a-\frac{2a}{K}x_1-by_1\right](x(t)-x_1)-bx_1(y(t)-y_1).$$

Або в векторно-матричному вигляді

$$\dot{z}(t)=Az(t),\ A=\begin{bmatrix} a-\frac{2a}{K}x_1-by_1 & -bx_1 \\ dy_1 & -c+dx_1 \end{bmatrix},$$

$$z(t)=\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}.$$

Підставивши значення x_1, y_1, отримаємо

$$A=\begin{bmatrix} -\frac{ac}{dK} & -\frac{bc}{d} \\ \frac{a(dK-c)}{bK} & 0 \end{bmatrix}.$$

Характеристичне рівняння має вигляд

$$\begin{vmatrix} -\frac{ac}{dK}-\lambda & -\frac{bc}{d} \\ \frac{a(dK-c)}{bK} & -\lambda \end{vmatrix}=\lambda^2+\frac{ac}{dK}\lambda+\frac{ac(dK-c)}{dK}=0.$$

При виконанні умови

$$dK-c>0 \qquad (6)$$

коефіцієнти характеристичного рівняння додатні, і стан рівноваги асимптотично стійкий. Корені рівняння мають вигляд

$$\lambda_{1,2}=-\frac{ac}{2dK}\pm\sqrt{\left(\frac{ac}{2dK}+1\right)^2-(a+1)}. \qquad (7)$$

І, при виконанні умови

$$\left(\frac{ac}{2dK}+1\right)^2-(a+1)>0, \qquad (8)$$

стан рівноваги являє собою стійкий вузол, інакше, стійкий фокус.

Для третьої точки спокою система лінійного наближення має вигляд

$$\dot{x}(t)=-a(x-K)-bKy,\ \dot{y}(t)=(dK-c)y. \qquad (9)$$

Його характеристичним рівнянням є

$$\det\{A-\lambda I\}=\begin{vmatrix} -a-\lambda & -bK \\ 0 & (dK-c)-\lambda \end{vmatrix}=$$

$$=(-a-\lambda)[(dK-c)-\lambda]=0.$$

Коренями будуть $\lambda_1=-a$, $\lambda_2=dK-c$. І, при виконанні умови (6), стан рівноваги являє собою сідло. Таким чином, при виконанні умови (6), фазовий портрет представляє собою стійкий вузол (або фокус), що знаходиться в першому квадранті, і сідло, яке лежить на осі Ox. Нестійка сепаратриса сідла виходить з вузла (або фокуса).

Розглянемо вплив запізнювання, обумовлене часом дозрівання особин. Диференціальні рівняння в цьому випадку будуть мати вигляд

$$\dot{x}(t)=\left[a\frac{K-x(t-\tau)}{K}-by(t-\tau)\right]x(t),$$

$$\dot{y}(t)=-[c-dx(t-\tau)]y(t). \qquad (10)$$

Система має ті ж положення рівноваги (5). Лінійне наближення має вигляд

$$\dot{x}(t)=\left(a-\frac{a}{K}x_1-by_1\right)(x(t)-x_1)-$$

$$-\frac{a}{K}x_1(x(t-\tau)-x_1)-bx_1(y(t-\tau)-y_1),$$

$$\dot{y}(t)=(-c+dx_1)(y(t)-y_1)+dy_1(x(t-\tau)-x_1).$$

Або, в векторно-матричному вигляді,

$$\dot{z}(t)=Az(t)+Bz(t-\tau),\ B=\begin{bmatrix} -\frac{a}{K}x_1 & -bx_1 \\ dy_1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A=\begin{bmatrix} a-\frac{a}{K}x_1-by_1 & 0 \\ 0 & -c+dx_1 \end{bmatrix}. \qquad (11)$$

Характеристичне рівняння системи має вигляд

$$\det\{A+e^{-\lambda\tau}B-\lambda I\}=$$

$$=\begin{bmatrix} a\left(1-\frac{x_1}{K}\right)-by_1-e^{-\lambda\tau}\frac{a}{K}x_1-\lambda & -bx_1e^{-\lambda\tau} \\ e^{-\lambda\tau}dy_1 & -c+dx_1-\lambda \end{bmatrix}=$$

$$=\lambda^2-\left[a\left(1-\frac{x_1}{K}\right)-by_1-e^{-\lambda\tau}\frac{a}{K}x_1-c+dx_1\right]\lambda+$$

$$+\left[a\left(1-\frac{x_1}{K}\right)+by_1-e^{-\lambda\tau}\frac{a}{K}x_1\right][-c+dx_1]+$$

$$+bdx_1y_1e^{-2\lambda\tau}=0.$$

Підставивши значення x_1, y_1, отримаємо

$$\lambda^2+\frac{ac}{dK}e^{-\lambda\tau}\lambda+\frac{ac(dK-c)}{dK}e^{-2\lambda\tau}=0.$$

Позначимо

$$e^{\lambda\tau}\lambda=t. \qquad (12)$$

Тоді характеристичне рівняння прийме вигляд квадратного рівняння

$$t^2 + \frac{ac}{dK}t + \frac{ac(dK-c)}{dK} = 0.$$

Його коренями будуть

$$t_{1,2} = -\frac{ac}{2dK} \pm \sqrt{\left(\frac{ac}{2dK}+1\right)^2 - (a+1)}. \qquad (13)$$

При виконанні умови (8) коріння дійсні, різні.

Отримуємо систему трансцендентних рівнянь

$$e^{\lambda\tau}\lambda = t_1,\ e^{\lambda\tau}\lambda = t_2. \qquad (14)$$

Як видно із залежності (13), при виконанні умови

$$\frac{ac}{dK} > 4(dK - c) \qquad (15)$$

корені характеристичного рівняння дійсні, а при виконанні

$$dK - c > 0 \qquad (16)$$

додатні. Відомо [5], що умовою існування у трансцендентних рівнянь (14) коренів з негативною дійсною частиною (асимптотично стійких) є виконання нерівностей

$$-\frac{\pi}{2\tau} < t_1 < 0,\ -\frac{\pi}{2\tau} < t_2 < 0. \qquad (17)$$

Звідси випливає, що при виконанні нерівностей (15), (16), (17), де

$$t_{1,2} = -\frac{ac}{2dK} \pm \sqrt{\left(\frac{ac}{2dK}+1\right)^2 - (a+1)},$$

стан рівноваги $M_1(x_1.y_1)$ буде локально асимптотично стійким.

Список використаних джерел

1. *Malthus T.R.* An Essay on the Principle of Population / T.R. Maltus.- London: Johnson, 1798. – 134 с.
2. *Базыкин А.Д.* Математическая биофизика взаимодействующих популяцій / А.Д. Базыкин. – Москва: Наука, 1985. – 181 с.
3. *Смит Дж.* Модели в экологии / Дж. Смит. – Москва: Мир, 1976. - 182 с.
4. *Эльсгольц Л.Э., Норкин С.Б.* Введение в теорию дифференциальных уравнений с откланяющимся аргументом. – Москва: Наука, 1970. – 240 с.
5. *Гаркуша Н.І.* Про близькість моделей динаміки Вольтерра та Гудвіна / Н.І. Гаркуша // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія фізико-математичні науки. – 2013. - №2. – С. 131-134.
6. *Гаркуша Н.І.* Динаміка однієї екологічної моделі «хижак-жертва» без врахування вікової структури / Н.І. Гаркуша // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія кібернетика. – 2014. - №14. – С. 22-24.
7. *Verhulst P.F.* Natice sur la loi que la population suit dans son accoroissement / P.F. Verhulst // Corr. Math. Et. Phys. – 1838. - V.10. -P. 113-121.

References

1. MALTHUS, T. (1798) *An Essay on the Principle of Population as it Affects the Future Improvement of Society, with Remarks on the Speculations of Mr. Godwin, M. Condorcet, and Other Writers.* London: Johnson.
2. BAZYKIN, A. (1985) *Mathematical Biophysics of Interacting Populations.* Moskva: Nauka.
3. SMITH, J. (1974) *Models in Ecology*. Cambridge: CambridgeUniversity Press.
4. ELSGOLTZ, L., NORKIN, S. (1970) *Introduction to the Theory of Differential Equations with Deviating Argument.* Moskva: Nauka.
5. GARKUSHA, N. (2013) The Proximity of Models of the Dynamics of Voltaire and Goodwin *Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series Physcs&Mathematics*. №2.– pp.131-134.
6. GARKUSHA, N. (2014) The Dynamics of the Ecological Model “Predator-Prey” Without Age Structure *Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv Series Cybernetics,* №14. - pp.22-24.
7. VERHULST, P. (1838) Natice sur la loi que la population suit dans son accoroissement. In *Corr. math. et phys.*, V.10, pp.113-121.

Надійшло до редколегії 10.09.2014 р.

УДК 004.056.5

Гончар С.А., аспірант

Криптографія з часовим розкриттям: минуле, теперішнє, майбутнє

Київський національний університет імені Тараса Шевченка,03680, м. Київ, пр-т Глушкова 4д, e-mail: sg.gonchar@gmail.com

S. A. Gonchar, postgraduate

Time-release cryptography: past, present, future

Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03680, Kyiv, Glushkova av., 4d, e-mail: sg.gonchar@gmail.com

В роботі розглянуто розвиток концепції криптографії з часовим розкриттям та запропоновано можливі шляхи розвитку цієї концепції.

Ключові слова: криптографія, часові замки, часові сервери.

The article discusses the principles of time-release cryptographic systems and its development since Rivest et al works to modern publications. There are two methods of implementing time-release cryptography: the first is based on the need to perform certain calculations in a specific period of time (time-lock puzzles), and the second requires a third party (or central authority) to carry out the process of issuing some information to open an encrypted text in a certain period or time. Method of time-lock puzzles virtually unchanged since the work of Rivest at al. However, some of its non-standard applications can be developed in a broader sense. In this paper the concept of one of these applications was designated. The use of a third party, usually a time server, received significant development after the introduction of identity base encryption since the early 2000s and reached its peak in 2008. However, new technologies have recently emerged which allow secure online transactions without relying on a central authority. Therefore, in the future such technologies should be used to create time-release cryptographic systems.

Key Words: time-release cryptography, time-lock puzzles, time server.

Статтю представив чл.-кор. НАНУ, д.ф.-м.н., проф. Анісімов А. В.

Вступ

Проблема захисту інформації шляхом її перетворення, що виключає її прочитання сторонньою особою, хвилювала людський розум з давніх-давен. У сучасній криптографії існує безліч підходів, які позволяють захищати певну інформацію. Усі ці підходи застосовуються в певних областях криптографії, які в свою чергу позволяють шифрувати та розшифровувати інформацію в реальному часі або ж з певною затримкою. Серед усіх областей досліджень в криптографії однією із найбільш цікавих і найменш досліджених є так звані "листи у майбутнє". У літературі, як правило, іноземній, для такого роду шифрування існує велика кількість термінів – "time-released crypto"[1], "timed-release encryption"[2], "timed commitments"[3], "time-lapse cryptography "[4], "time-specific encryption"[5]. У зв'язку з тим, що принципових відмінностей серед вищеназваних понять немає, то локалізована версія терміну може звучати як "криптографія з часовим розкриттям" [6]. Дана область криптографії представляє собою сукупність методів, які дозволяють зашифрувати дані таким чином, щоб забезпечити їх розшифрування після закінчення заздалегідь визначеного часу, або у заздалегідь визначений час, та виключити можливість дострокового розкриття.

На відміну від класичних методів шифрування криптографія з часовим відкриттям скоріше відповідає на питання „коли" буде розшифроване повідомлення ніж на питання „хто" його розшифрував. Дійсно, деякі практичні алгоритми, які розроблені у межах криптографії з часовим розкриттям дають можливість будь-кому відкрити зашифроване повідомлення.

Історія

Історія розвитку цієї концепції починається з роботи Мея. Проте найбільш значущою є робота Рівеста та співавторів [1], в якій вони сформулювали основні напрямки криптографії з часовим розкриттям та виділили коло її використання. Так, на думку авторів, використання підходу. що розглядається, можливо якщо [1]:

- людина, яка виступає на торгах у аукціоні бажає закрити ставку до моменту закінчення торгів;

© С.А. Гончар, 2014

- домовласник бажає сплатити свою заставну за допомогою зашифрованих переказів;
- хтось бажає зашифрувати свої нотатки на визначений період часу.

В подальшому сфера застосування криптографії з часовим розкриттям була розширена на ситуації, коли учасникам певного конкурсу, які знаходяться у різних частинах світу, необхідно отримати доступ до певних завдань, або існує необхідність продажу чогось у визначений час.

Підходи, запропоновані в [1], у своїй основі не змінились і до сих пір, а саме:

- використання "математичних замків з часовим механізмом" – представляють собою обчислювальні задачі, які не можуть бути вирішені без обчислення на комп'ютері протягом певного проміжку часу;
- використання третьої сторони для зберігання певної інформації, яка буде важливою в подальшому розшифровуванні повідомлення.

Розглянемо еволюцію кожного з цих підходів більш детально, та сформулюємо можливі напрямки подальшого розвитку виділеної області.

Замки з часовим механізмом

Цей підхід базується на обчислювальній складності. Пропонується використовувати певні математичні операції, які вимагають точно визначений час для їх обчислення. Розкриття таких „замків” дозволяє отримати ключ для розшифрування самого повідомлення.

На етапі розробки основних принципів цього методу виділяли наступні його недоліки:

1. Проблема синхронізації часу для обчислення та реального часу – відсутня можливість відкриття ключа у точно визначений період часу, що пов’язано з різними швидкостями роботи різних комп’ютерних систем.

2. Таке шифрування є практично неможливим у випадку необхідності зберігання даних довготривалий період часу (декілька років). Це пов’язано з тим, що даний підхід потребує безперервних обчислювань, що, у свою чергу, унеможливлює використання для таких цілей персональні комп’ютери.

3. Використання даного підходу унеможливлює обчислення замків шляхом використання паралельного обчислення.

Якщо перші два недоліки актуальні і на сьогоднішній день, то метод усунення останнього був запропонований ще Рівестом та співавторами у [1]. Він, майже не змінившись, використовується і тепер та базується на повторному піднесенні у квадрат.

Так, якщо необхідно передати повідомлення M, яке зашифроване на час T, відправник має зробити наступні кроки:

- Генерується складена величина $n = pq$, в якій p и q – два випадково обраних великих числа.
- Обраховується $\phi(n) = (p-1)(q-1)$.
- Обраховується $t = TS$, де S – число піднесень у квадрат за модулем n у секунду, що може забезпечити техніка одержувача.
- Генерується випадковий ключ K для загально прийнятої криптосистеми (наприклад $RC5$). Довжина ключа повинна бути такою, щоб його підбір був недоцільним у порівнянні з часом обчислення замка.
- Ключем K зашифровується повідомлення M, таким чином отримуємо зашифрований текст $C_M = RC5(K, M)$.
- Випадковим чином обирається a по модулю n ($1 < a < n$) та зашифровується K методом обчислення $C_K = K + a^{2^t} (\mathrm{mod}\, n)$. Для більшої ефективності спочатку обчислюється $e = 2^t (\mathrm{mod}\, \phi(n))$, а потім $b = a^e (\mathrm{mod}\, n)$.
- В результаті получаємо замок (n, a, t, C_K, C_M) та видаляємо усі змінні, що залишилися (наприклад p, q) від попередніх розрахунків.

Для розшифрування ключа не залишається нічого іншого як отримати b шляхом послідовного піднесення у квадрат t раз. При цьому процес обчислення не може проводитися паралельно та залежить тільки від потужності даного комп’ютеру. Рівест запропонував варіант реалізації замка, що представляє собою, за визначенням авторів, „часову капсулу”, яка присвячена річниці лабораторії, у якій вони працювали. Цікаво, що обчислення цієї „капсули” на момент створення було розраховане на декілька років.

Подальший розвиток даного підходу пов’язаний з розширенням математичної основи для реалізації криптографії з часовим розкриттям з використанням замків. Зокрема такі питання розглядаються в [7].

Єдиною спробою модернізації існуючого підходу можна вважати підхід, викладений у [8]. Автори статті дослідили можливість створення часових замків у моделі випадкового оракула,

який представляє собою ідеалізовану функцію, що описує роботу машини з практично нескінченним об'ємом пам'яті, яка на будь-який запит може видати ідеальне випадкове число і запам'ятати пару «запит-відповідь». Основний результат роботи – негативний: виключається можливість створення часових замків, які потребують більшого часу для обчислення, ніж загальна робота, необхідна для генерації замка. Зокрема, викреслюється генерація конструкцій на зразок чорної скриньки, які базуються на часових замках, за допомогою односпрямованих перестановок та хеш-функцій. З іншого боку був сконструйований часовий замок за допомогою одного циклу n паралельних запитів до випадкового оракула, при тому, що для його обчислення потрібно n циклів послідовних запитів.

Варто, втім, відзначити один нестандартний підхід, який в подальшому може мати перспективу розвитку в більш загальному напрямку. Так, Ебрінджер в своїй статті [9] використовував задачі з часовим замком для введення в оману антивірусних аналізаторів щодо безпеки досліджуваного об'єкта. Зокрема в виконуваному файлі, який несе в собі шкідливу програму, створюється, так звана "анти-емуляторна" оболонка, яка захищає упаковку шкідливої програми від емулятора антивірусної програми. Саме ця оболонка і являє собою "замок".

Автор не ставив своїм завданням будь-яким чином модернізувати існуючі шкідливі програми, а хотів показати працездатність свого припущення і продумати можливий захист від такої схеми.

Як результати цієї роботи, так і результати заснованої на ній роботи [6] показують, що при використанні досить великих ступенів при піднесені числа за модулем шкідливий код не розпізнається.

Таке, досить вузьке використання "замків" можна розширити наступним чином: у виконуваний файл записується повідомлення (зашифроване), ключ, інформація про дату або час його розпакування, а також модуль, який опитує який-небудь або кілька публічних часових серверів і саморозпаковується в необхідний час. Дослідження можливості використання такої схеми представлення виходить за рамки цієї статті і буде розглянуте у подальшому.

Делегування повноважень третій стороні

Цей підхід спочатку був сформульований Меєм. Проте в його протоколі не гарантувалася анонімність: сервер знав повідомлення, час розкриття та учасників, які брали участь у груповій сесії(відправник та одержувач). Рівест та співавтори змінили цей протокол так, що серверу необхідно було видавати лише серію ітерацій результатів односторонньої функції ключа. Таким чином оригінальне повідомлення не зберігалось не сервері.

Коротко цей протокол можна сформулювати наступним чином: третя сторона не зберігає у себе повідомлення, а лише виконує шифрування повідомлення або частини повідомлення y ключем s_{it}, де i – певна третя сторона, яка публікує ключ s_{it} через деякий час t. Тобто отримавши запит виду „ось значення y та t, поверніть, будь ласка, $E(s_{it}, y)$, що зашифроване ключем s_{it}, який ви розкриєте у момент часу t”, третя сторона повертає зашифроване відкритим ключем відправника та підписане третьою стороною повідомлення $\left(i, t, t_0, E(s_{it}, y)\right)$

До появи шифрування на основі особистих даних (identity based encryption) здійснювалися лише спроби розвинути оригінальну ідею Рівеста та співавторів. Зокрема, було безліч спроб мінімізувати взаємодію користувача і сервера, гарантувати розширюваність і анонімність користувача. Розглянемо основні публікації за цим напрямом.

Так в роботі [10] була поставлена наступна задача: як може відправник, без постійного опитування сервера, створити документ з часом розкриття так, що одержувач зможе розшифрувати його тільки після часу розкриття, і так, що серверу не буде відома особистість відправника. Своє завдання автори вирішують на основі модифікації "забудькуватої" передачі даних (oblivious transfer data). При цьому відправник контактує безпосередньо з одержувачем, а той вже у свою чергу контактує з "часовим" сервером. При цьому сервер відповідає тільки за відповіді на запити про час від одержувача. Питання про те, яка інформація буде відправлена одержувачу після часу розкриття, автори пропонують вирішити наступним чином: відправник шифрує повідомлення спочатку відкритим ключем одержувача, а потім відкритим ключем сервера. При цьому після часу розкриття сервер на запит одержувача відправляє йому розшифроване повідомлення.

Боне і Нао в роботі [11] створили криптографічний примітив з часовим розкриттям, який вони назвали "тимчасові зобов'язання" (time commitments). Серед іншого вона могла застосовуватися для вирішення проблеми чесності цифрового підпису на контрактах.

В [4] автори дали назву, розробили і детально виклали концепцію так званої "криптографії з розривом у часі" (time-lapse cryptography), за допомогою якої повідомлення відправника обов'язково буде розкрито в певний момент часу, навіть якщо це небажано для відправника. В основу розробки лягли схема створення розподілених ключів Педерсена, пороговий розподіл секрету Фелдмана і Ель-Гамаль шифрування, кожна з яких базується на схемі Діффі-Хеллмана. Автори розглянули можливі атаки і способи захисту від них, а також описали важливі застосування свого сервісу в закритих ставках на аукціонах, біржових продажах, клінічних випробуваннях та електронному голосуванні. За словами авторів, їх концепція схожа на концепцію запропоновану Рівестом і співавторами, але замість однієї третьої сторони використовується мережа третіх сторін.

Докладно і досить просто основні поняття сучасної криптографії з часовим розкриттям, які використовують третю сторону (як правило сервер) розглянуті в презентації [12].

На рис. 1 приведена схема, яка показує еволюцію основних протоколів.

Автори цієї презентації в іншій своїй роботі [7] розглянули питання математичної основи необхідної для реалізації криптографії з часовим розкриттям, включаючи квадратичні залишки і питання білінійних схем Діффі-Хеллмана, навівши приклади для кожного з розглянутих підходів.

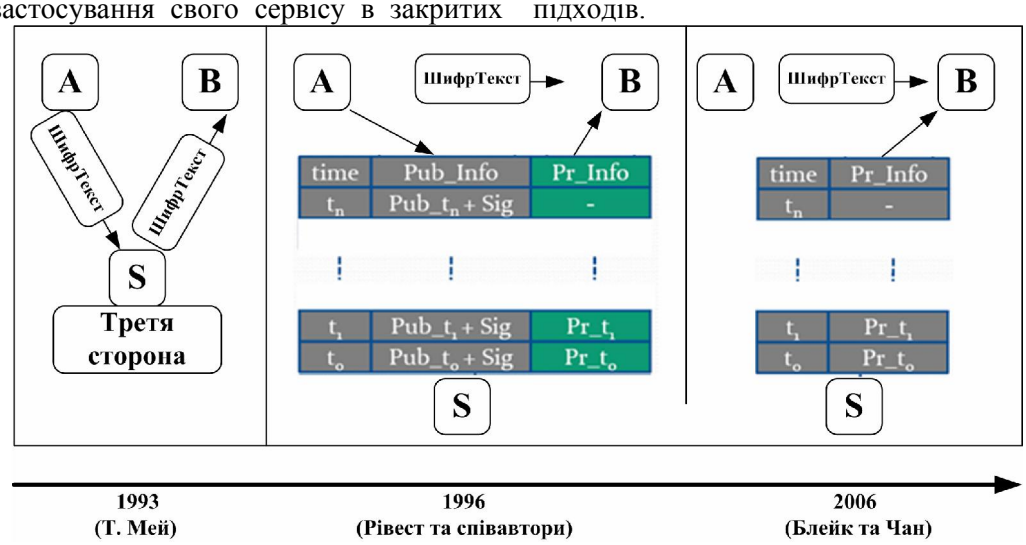


Рис. 1. Схеми шифрування з часовим розкриттям різних авторів

Прорив в питаннях криптографії з часовим розкриттям відбувся після введення шифрування на основі особистих даних. Основою такого типу шифрування є те, що відправник шифрує повідомлення M під особистість конкретного одержувача. Формально таке шифрування можна визначити як кортеж з чотирьох рандомізованих алгоритмів [13]:

- Встановлення (1^k). При вході на цей алгоритм параметра безпеки 1^k , генеруються відкриті параметри π_{IBE}, що містять у собі хеш-функції та повідомлення M . Додатково генерується основний секрет δ_{IBE} , який залишається конфіденційним завдяки серверу.
- Отримання $(\pi_{IBE}, \delta_{IBE}, I)$. Маючи на вході відкриті параметри π_{IBE}, основний секрет δ_{IBE} та характеристики особистості I , видають на вихід закритий ключ sk_I .
- Шифрування (π_{IBE}, I, M) . Генерує шифротекст c на основі вхідних параметрів π_{IBE}, I, M .
- Дешифрування $(\pi_{IBE}, sk_I, \hat{c})$. Видає на вихід оригінальне повідомлення відповідно до $\hat{c}$, або повідомлення про помилку.

Починаючи з 2003 року були запропоновані різні протоколи, які базуються на квадратичних залишках і на властивостях білінійного спарювання (відображення) в групах еліптичних кривих.

На сьогоднішній день існує досить багато напрацювань з використанням шифрування на

основі особистих даних, тому розглянемо лише основні з них.

В роботі [14] автори відштовхувалися від схеми запропонованої Блайк і Чан, в якій сервер не взаємодіє з відправником та одержувачем. Це досягається за допомогою періодичної генерації специфічних часових "лазівок", які дозволяють виконувати дешифровку тексту зашифрованого "на майбутнє" або "лазівок" для цифрового підпису. Дана концепція отримала назву шифрування з часовим розкриттям без взаємодії. Запропонована схема використовує групи білінійних відображень і припускає, що зашифрований текст завжди містить інформацію про час розкриття, яка приводитися в кінці повідомлення. Крім цього, схема запропонована авторами може бути використана при необхідності розкриття тексту в разі настання певної події.

Дуже докладно питання створення криптосистеми з часовим розкриттям за допомогою шифрування на основі особистих даних розглянуто в роботі [5]. Свій метод автори назвали „шифрування визначене у часі" (time-specific encryption).

Згідно цього методу часовий сервер розсилає так званий „постійний у часі" ключ на початку кожного часового інтервалу. Цей ключ доступний для всіх користувачів та вміщує у собі характеристику часу t . Відправник може визначити будь-який інтервал часу під час процесу шифрування, а одержувач може відновити оригінальне повідомлення тільки якщо має „постійний у часі" ключ, який відповідає часу у заданому відправником інтервалі. При цьому одержувачі додатково забезпечуються закритими ключами та або відкритими ключами або параметрами на основі особистих даних, а дешифрування потребує використання як закритого ключа так і відповідного „постійного у часі" ключа. Це забезпечує захист проти нечесного часового серверу, та можливість дешифровки тексту лише для обраної групи користувачів. Автори у [5] особливу увагу приділили безпеці розроблених схем, наголошуючи, що найбільш ефективні конструкції можуть бути отримані лише при використанні моделі випадкового оракулу.

Зазначимо, що всі сучасні схеми криптографії з часовим розкриттям (наприклад [13]), які базуються на білінійному спарюванні, вимагають наявності абелевої адитивної скінченої групи G_1 першого порядку q, і абелевої мультиплікативної циклічної групи того ж порядку G_2. Абелева група це пара $G = (A, *)$, де A – це певна множина, а $*$ - це бінарна операція на A, тобто будь-яким двом елементам a та b з A ставиться у відповідність елемент $a * b$, що також належить A.

Зокрема цей математичний апарат використовується для створення білінійного генератора параметрів Діффі-Хеллмана, що являє собою алгоритм, який при поданні на його вхід додатного цілого числа видає на вихід q.

Висновки

Незважаючи на певні обмеження щодо практичного застосування, криптографічні системи з тимчасовим розкриттям займають цілком певну нішу в галузі безпечної передачі повідомлень. Зокрема це можуть бути електронні аукціони, депонування ключів, виплати за розкладом, закриті ставки на аукціонах, лотереї і т.д.

Очевидно, що кожен з напрямків має свої шляхи розвитку.

Так, у сенсі вирішення проблеми завантаження комп'ютера при обчисленні задач з замком, перспективними є використання багатопроцесорних систем.

Викладена вище концепція використання криптографії з тимчасовим розкриттям з "замком" для створення оболонки в виконуваному файлі з повідомленням, який повинен опитувати деякий часовий сервер і самостійно розшифровувати закладене в ньому повідомлення також має місце для існування.

Для криптографії з тимчасовим розкриттям на основі серверів за останні роки створено безліч як практичних, так і теоретичних напрацювань. Однак розвиток криптографічного інструментарію дасть певний розвиток і цьому напрямку. Очевидно, що можливим і бажаним напрямком такого розвитку може бути створення систем, які не використовують сервери як такі. Зокрема, перспективним може бути використання "bitcoin"-схем.

До того ж певний інтерес має проблема приховання часу відкриття у схемах з використанням серверу від злочинців.

Список використаних джерел

1. Rivest R. L. Time-lock puzzles and timed-released crypto / R. L. Rivest, A. Shamir,

References

1. RIVEST R. L., SHAMIR A. and WAGNER D. A. (1996) *Time-lock puzzles and timed-released*

D. A. Wagner // Massachusetts Institute of Technology. – Cambridge, MA, USA. – 1996. – 9 p.

2. Crescenzo G. Conditional oblivious transfer and timed-release encryption / G. Crescenzo, R. Ostrovsky, S. Rajagopalan // Lecture notes in computer science.– 1999.– volume 1592.– P. 74 – 89.

3. Boneh D. Timed commitments / D. Boneh, M. Naor // Lecture Notes in Computer Science. – 2000. – volume 1880. – P. 236 – 254.

4. Rabin M. O. Time-Lapse Cryptography. Technical Report TR-22-06 / M. O. Rabin, C. Thorpe // Harvard University, School of Engineering and Applied Science, 2006. – 16 P.

5. Paterson K. G. Time-specific encryption / K. G. Paterson , E. A. Quaglia // Lecture notes in computer science. – 2010. – vol. 6280. – P. 1 – 16.

6. Усенко А. В. Использование криптографии с временным раскрытием для противодействия проактивным технологиям детектирования вредоносных программ / А. В. Усенко // Молодой ученый. – 2012. – №2. – С. 66 – 70.

7. Chalkias K. Mathematical problems and algorithms for timed-release encryption / K. Chalkias, F. Baldimtsi, D. Hristu-Varsakelis, G. Stephanides // Bulletin of the Transilvania University of Brasov. – 2008. – vol. 15(50). – 10 P.

8. Mahmoody M. Time-lock puzzles in the random oracle model / M. Mahmoody, T. Moran, S. Vadhan // Lecture notes in computer science. – 2011. – vol. 6841. – P 39-50.

9. Ebringer T. Anti-emulation through time-lock puzzles / T. Ebringer // Second International CARO Workshop. – Hoofddorp, Netherlands, 2008. – 10 p.

10. Crescenzo G. Conditional oblivious transfer and timed-release encryption / G. Crescenzo, R. Ostrovsky, S. Rajagopalan // Lecture notes in computer science. – 1999. – volume 1592. – P. 74 – 89.

11. Boneh D. Timed Commitments / D. Boneh, M. Naor // Lecture Notes in Computer Science. – 2000. – volume 1880. – P. 236 – 254.

12. Chalkias K. Pairing based timed-release cryptography / K. Chalkias, F. Baldimtsi, D. Hristu-Varsakelis, G. Stephanides // Identity Based Encryption Workshop. – Thessaloniki, Greece, 2008. – P. 1-65.

13. Cathalo J. Efficient and non-interactive timed-release encryption / J. Cathalo, B. Libert, J. Quisquater // Lecture Notes in Computer Science. – 2005. – volume 3783. – p. 291 – 303.

14. Cheon J. H. Provably secure timed-release public key encryption / J. H. Cheon, N. Hopper, Y. Kim, I. Osipkov // ACM Trans. Inf. Syst. Secur. – 2008. – vol. 11. – 44 P.

crypto Cambridge, MA, USA.

2. CRESCENZO G., OSTROVSKY R. and RAJAGOPALAN S. (1999) *Conditional oblivious transfer and timed-release encryption*. Lecture notes in computer science. 1592. p.74-89.

3. BONEH D. and NAOR M. (2000) *Timed commitments*. Lecture Notes in Computer Science. 1880. p.236-254.

4. RABIN M. O. and THORPE C. (2006) *Time-Lapse Cryptography. Technical Report TR-22-06*. Harvard University Press.

5. PATERSON K. G. & QUAGLIA E. A. (2010) *Time-specific encryption*. Lecture notes in computer science. 6280. p.1-16.

6. USENKO A.V. (2012) *Using time-release cryptography to counteract proactive technologies for malware detection*. Young scientist. 2. p.66-70.

7. CHALKIAS K. et al (2008) *Mathematical problems and algorithms for timed-release encryption*. Bulletin of the Transilvania University of Brasov. 15(50). p.1-10.

8. MAHMOODY M., MORAN T. and VADHAN S. (2011) *Time-lock puzzles in the random oracle model*. Lecture notes in computer science. 6841. p.39-50.

9. EBRINGER T. (2008) *Anti-emulation through time-lock puzzles*. Hoofddorp, Netherlands.

10. CRESCENZO G. , OSTROVSKY R. and RAJAGOPALAN S. (1999) *Conditional oblivious transfer and timed-release encryption*. Lecture notes in computer science. 1592. p.74-89.

11. BONEH D. and NAOR M. (2000) *Timed Commitments*. Lecture Notes in Computer Science. 1880. p.236-254.

12. CHALKIAS K. et al (2008) *Pairing based timed-release cryptography*. Identity Based Encryption Workshop. Thessaloniki, Greece. p.1-65.

13. CATHALO J., LIBERT B. and QUISQUATER J. (2005) *Efficient and non-interactive timed-release encryption*. Lecture Notes in Computer Science. 3783. p.291-303.

14. CHEON J. H. et al (2008) *Provably secure timed-release public key encryption*. ACM Trans. Inf. Syst. Secur. 11. p.1-44.

Надійшла до редколегії 23.10.14

УДК 519.72

І.О. Завадський, к. ф.-м. н., доцент

Комбінаторний алгоритм підвищення завадостійкості кодів, що генеруються скінченними автоматами

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, пр-т. Глушкова 4д, e-mail: zava@ukr.net

Igor O. Zavadskyi, Associate Professor, Ph. D.

Search algorithm for increase the performance of codes generated by finite automatons

Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03680, Kyiv, Glushkova av., 4d

Описано комбінаторний метод пошуку помилок у кодових словах, що дає змогу суттєво підвищити завадостійкість кодування на основі скінченних автоматів, зокрема згорткових кодів. При цьому часова складність покращуваного базового методу декодування збільшується несуттєво.

Ключові слова: завадостійке кодування, скінченний автомат, завадостійкість, часова складність.

The combinatorial algorithm searching error patterns that improves the performance of forward error correcting codes exploiting the finite automatons as core encoding and decoding unit is introduced. As convolutional codes can be represented in the form of finite automaton diagram, the algorithm discussed can improve convolutional code performance too. Algorithm analyzes the soft output of decoder based on modification of Viterbi algorithm with linear metric. It allows to achieve 0,7 dB gain at BER $1{,}7\cdot10^{-5}$ comparing to conventional convolutional NASA(171,133) code, while the increase of time complexity of decoding is negligibly small. Code performance is simulated on BPSK channel. The impact of different custom parameters on algorithm performance is investigated, i.e. block length, checksum length or number of possible error positions. Only the codes of rate ½ are discussed, although the results could be easily generalized to other error correcting code types.

Key words: error correcting codes, finite automaton, noise immunity, time complexity.

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Анісімов А.В.

У [1] розглянуто метод вдосконалення одного з найпоширеніших різновидів завадостійких кодів — згорткових кодів. Вони розглядаються як частинний випадок більш широкого класу кодів, що генеруються скінченними автоматами. Кожної ітерації такий автомат зчитує t бітів із вхідної послідовності, залежно від зчитаного значення здійснює перехід в один із 2^t станів, записуючи при цьому p бітів у кодове слово. Показано, що хоча структура діаграм стану автоматів, які відповідають згортковим кодам, у певному розумінні є оптимальною, оптимальним не є маркування, тобто зіставлення дугам на діаграмі станів символів, що записуються автоматом у код на виході. Оптимізація способу маркування дала можливість підвищити завадостійкість коду приблизно вдвічі для деяких співвідношень рівня корисного сигналу та шуму в каналі зв'язку.

Для подальшого підвищення завадостійкості коду слід застосовувати інші підходи, наприклад комбінаторні методи пошуку помилок. Ми опишемо один такий метод, що покращує ефективність коду значно суттєвіше за наведений в [1] метод маркування дуг діаграми станів автомату, лише незначно підвищуючи при цьому часову складність декодування. Розглядатимемо м'яке рішення в каналі зв'язку з двійковою фазовою модуляцією [2]: біти вхідного повідомлення кодуються амплітудами 1 (одиничний біт) і –1 (нульовий біт), на які накладається адитивний білий гаусів шум, і на вході декодера отримуємо дійсні числа, що визначають вірогідність хибної інтерпретації того чи іншого сигналу як нульового чи одиничного біта.

Метод дає змогу покращити результати застосування розглянутої в [1] модифікації добре відомого алгоритму декодування Вітербі.

© І.О. Завадський, 2014

Нагадаємо, що алгоритм Вітербі виконується у два проходи: прямий та зворотний. Якщо розглядати коди швидкості ½ з такою структурою діаграми станів автомату, як описано в [1], то в кожен стан існуватимуть переходи з двох інших станів і під час прямого проходу алгоритму Вітербі кожному зі станів *j*, у яких кодувальний автомат може перебувати після *i*-го переходу, приписується метрика

$$m_i^j = \max\left(m_{i-1}^q + \delta(s_{qj}, r_i), m_{i-1}^t + \delta(s_{tj}, r_i)\right) \quad (1)$$

Тут q і t — стани, з яких є переходи в стан *j*, s_{qj} і s_{tj} — двохсимвольні рядки, які записує кодувальний автомат у вихідний код на переході з *q*-го та *t*-го станів в *j*-й, r_i — набір із двох дійсних чисел — сигналів на вході декодера, що відповідають *i*-му переходу, $\delta(s_{qj}, r_i) = -2 + \sum_{k=0}^{1}(-1)^{s_{qj}^k+1} r_i^k$, а $\delta(s_{tj}, r_i)$ обчислюється аналогічно. Зауважимо, що у наведеній сумі величина r_i^k береться зі знаком «–», якщо *k*-й символ у рядку s_{qj} дорівнює «0» та зі знаком «+», якщо він дорівнює «1». Таким чином, величини $\delta(s_{qj}, r_i)$ та $\delta(s_{tj}, r_i)$ будуть тим більшими, чим менше дійсні числа r_i^k відхиляються від значень амплітуд, що відповідають символам, генерованим на переході з *q*-го чи *t*-го стану в *j*-й. Отже, на прямому проході алгоритму Вітербі припускаємо, що на *i*-й ітерації у кожен стан *j* міг відбутися перехід зі стану *q*, якщо $\delta(s_{qj}, r_i) > \delta(s_{tj}, r_i)$ та зі стану *t*, якщо $\delta(s_{qj}, r_i) < \delta(s_{tj}, r_i)$. На зворотному проході вибираємо стан, якому на останній ітерації відповідає максимальна метрика, та відновлюємо переходи автомата у зворотному порядку згідно із зазначеними вище припущеннями. Під час декодування, як і під час кодування, автомат починає роботу в нульовому стані, тому покладемо $m_0^0 = 0$.

Щоб виправити помилки, які можуть виникнути після декодування за описаним вище методом, перед кодуванням послідовності довжини *L* дописуватимемо до неї справа контрольну суму довжини *t*, *i*-й біт якої дорівнює сумі за модулем 2 усіх бітів, номери яких дорівнюють $i \pmod t$. Після декодування знову визначатимемо за першими *L* бітами контрольну суму і, якщо вона збігається з останніми *t* бітами, вважатимемо, що декодування виконано успішно. Інакше шукатимемо переходи, які на зворотному проході методу Вітербі могли бути визначені помилково. А саме, припускатимемо, помилки могли виникнути насамперед у тих переходах, де величина (2) є найменшою. Ця величина являє собою різницю між елементами, серед яких у формулі (1) визначається максимальний.

$$\left|m_{i-1}^q + \delta(s_{qj}, r_i) - m_{i-1}^t - \delta(s_{tj}, r_i)\right| \quad (2)$$

Тоді ми змінюємо цей перехід, як показано на рис. 1: якщо за попереднім припущенням у вершину *j* перехід здійснювався з вершини *q*, то тепер вважатимемо, що він здійснюється з вершини *t*, і навпаки. Після цього ми застосовуємо зворотний прохід алгоритму Вітербі повторно, знову обчислюємо контрольну суму за першими *L* бітами і, якщо вона не дорівнює останнім *t* бітам, припустимо, що помилковим був перехід із другою найменшою різницею (2) або обидва переходи із найменшою та другою найменшою різницею (2) і т.д.

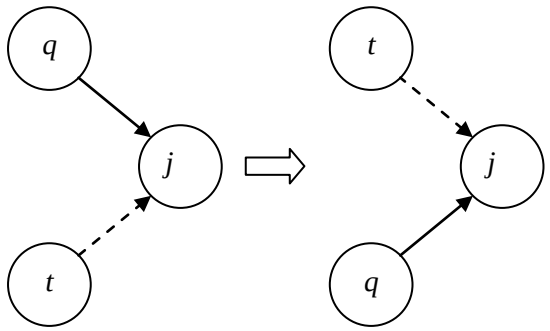


Рис. 1. Змінення переходів, у яких припускається наявність помилки

Унаслідок додавання *t* бітів довжина кодового слова збільшується. Тому, щоб швидкість коду залишалася незмінною, застосуємо так звану «редукцію переходів». Для кодів швидкості ½ ця техніка буде такою. Якщо до вхідної послідовності довжиною *L* бітів додано *t* бітів, під час кодування отриманих $L+t$ бітів $2t$ переходів редукуються: замість двох бітів на кожному з них у вихідний код записується один біт і, таким чином, довжина кодового слова залишається тією самою, тобто $2L$.

Алгоритм декодування детально опишемо нижче. На його вхід подається $2L$-бітове кодове слово.

1. Виконуємо прямий та зворотний проходи алгоритму Вітербі. Результатом

буде послідовність бітів довжини $L+t$, а також отримана на зворотному проході послідовність станів такої само довжини.

2. Обчислюємо t-бітову контрольну суму за першими L бітами. Якщо вона дорівнює останнім t бітам, припускаємо, що вхідне повідомлення успішно декодовано. Інакше переходимо до кроку 3.
3. Нехай $i_1,\ldots,i_n$ — номери переходів із n найменшими значеннями різниць метрик (2), де n — це параметр, значення якого можна добирати.
4. Для будь-якого j, $1 \le j \le n$, припускаємо, що перехід i_j помилковий і змінюємо його, як показано на рис. 1. Це означає, що якщо на зворотному проході на цій ітерації було вибрано стан s, в нього є переходи зі станів q і t і метрика переходу зі стану q вища, цій метриці присвоюємо число, яке значно менше 0, наприклад –1000, і навпаки. Після цього знову виконуємо зворотний прохід алгоритму Вітербі та обчислюємо t-бітову контрольну суму за значеннями перших L бітів. Якщо вона збігається з останніми t бітами, припускаємо, що вхідне повідомлення декодовано успішно. Інакше зміненій метриці надаємо початкового значення і переходимо до наступного значення j.
5. Повторюємо попередній крок за припущення, що є 2 помилкових переходи із номерами з набору $i_1,\ldots,i_n$ і при цьому значення різниці метрик (2) для одного з цих переходів належить до k найменших значень різниць метрик, де $k < n$ — параметр, значення якого можна добирати.
6. Якщо на кроках 4 і 5 успішний результат не отримано, припускаємо, що результатом декодування є $L+t$-бітова послідовність, обчислена на першому кроці.

Зауважимо, що основна обчислювальна складність декодера Вітербі припадає на прямий прохід. Його часова складність становить $O(Lm)$, де L — довжина бітової послідовності, а m — кількість станів кодувального/декодувального автомату. Водночас часова складність зворотного проходу становить лише $O(L)$. Оскільки ми повторюємо лише зворотний прохід, часова складність підвищується незначно, причому чим більшим буде відношення E_b/N_0 рівня корисного сигналу до рівня шуму в каналі зв'язку, тим меншу кількість разів у середньому потрібно повторювати зворотний прохід.

Порівняння удосконаленого згорткового коду, автомат якого має 128 станів, із найкращим з відомих звичайних згорткових кодів із таким само розміром автомату наведено в табл. 1 і на рис. 2. Моделювався канал зв'язку із BPSK-модуляцією та неквантованим м'яким рішенням для декодера. Як базовий кодувальний/декодувальний пристрій було обрано автомат, описаний в [1], результати роботи якого покращувалися завдяки застосуванню описаного в цій статті алгоритму. Його настроюваним параметрам було надано такі значення:

- Довжина вхідної бітової послідовності L=600.
- Довжина контрольної суми t=8.
- Кількість найменших різниць метрик для змінення переходів на кроці 4 алгоритму n=30.
- Кількість найменших різниць метрик для змінення двох переходів на кроці 5 алгоритму k=12.

Як видно, зі збільшенням відношення E_b/N_0 виграш від покращень згорткового коду також зростає, а різниця в середній часовій складності зменшується. Так, рівень бітових помилок у декодованих словах $1{,}7\cdot10^{-5}$ досягається у покращеному методі за рівня шуму в каналі на 0,7Дб вищого, ніж у звичайному згортковому коді NASA, в той час як часова складність декодування є приблизно тією самою, що видно з рис. 3.

Табл. 1. Порівняння завадостійкості згорткового коду NASA та покращеного коду

E_b/N_0, Дб	BER, NASA (171,133)	BER, покращений код
–2	$4{,}8\cdot10^{-2}$	$4{,}5\cdot10^{-2}$
–1	$6{,}7\cdot10^{-3}$	$2{,}4\cdot10^{-3}$
0	$4{,}7\cdot10^{-4}$	$6{,}8\cdot10^{-5}$
1	$1{,}7\cdot10^{-5}$	$1\cdot10^{-6}$

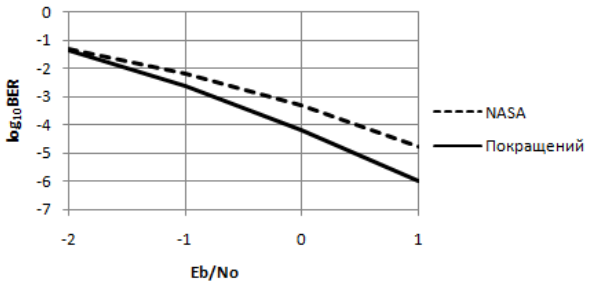


Рис. 2. Порівняння завадостійкості згорткового коду NASA та покращеного коду

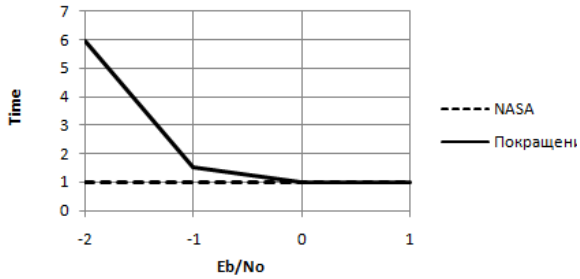


Рис. 3. Порівняння часової складності декодування згорткового коду NASA та покращеного коду

Щоб дослідити вплив довжини *t* контрольної суми на рівень завадостійкості за різних значень довжини вхідної бітової послідовності *L*, за співвідношення E_b/N_0=–1 Дб у каналі зв'язку із BPSK-модуляцією та неквантованим м'яким рішенням проведено чисельний експеримент, результати якого подано в табл. 2. Як бачимо, довжина контрольної суми, за якої забезпечується найвища завадостійкість коду (у таблиці відповідні значення бітової помилки BER виділені жирним), перебуває в межах від 2 до 8, залежно від довжини кодованого блоку. Подальше збільшення довжини контрольної суми до підвищення завадостійкості не приводитиме, оскільки воно не компенсуватиме зростання кількості редукованих переходів, які погіршують якість коду. Варто також зауважити, що зі зростанням довжини кодованого блоку оптимальна довжина контрольної суми теж збільшується.

Табл. 2. Вплив довжини контрольної суми на завадостійкість коду, BER

L \ *t*	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
100	0,0029	**0,0026**	0,0026	0,0029	0,0035	0,0041	0,0048	0,0063	0,0061	0,0090
200	0,0029	0,0026	**0,0024**	0,0027	0,0028	0,0028	0,0032	0,0031	0,0038	0,0041
300	0,0030	0,0028	0,0026	**0,0024**	0,0025	0,0028	0,0025	0,0027	0,0030	0,0031
400	0,0032	0,0027	0,0027	**0,0025**	0,0029	0,0026	0,0026	0,0028	0,0027	0,0025
500	0,0032	0,0030	0,0027	0,0026	0,0025	0,0028	**0,0024**	0,0027	0,0026	0,0027
600	0,0032	0,0028	0,0027	0,0027	0,0027	**0,0022**	0,0024	0,0024	0,0029	0,0025
700	0,0032	0,0032	0,0030	0,0027	0,0028	0,0028	**0,0023**	0,0026	0,0025	0,0025
800	0,0037	0,0031	0,0033	0,0032	0,0030	0,0029	0,0026	**0,0024**	0,0028	0,0029
900	0,0034	0,0032	0,0032	0,0031	0,0031	0,0029	0,0026	**0,0025**	0,0027	0,0031

Список літератури

1. *Завадський І.О.* Завадостійкі коди на основі скінченних автоматів як узагальнення згорткових кодів / І.О. Завадський // Вісник Київського національного університету ім. Т. Шевченка. Серія: фізико-математичні науки. – 2014. – №3. – с. 105–110.

2. *Морелос-Сарагоса Р.* Искусство помехоустойчивого кодирования. Методы, алгоритмы, применение. – М.: Техносфера, 2005. – 320 с.

References

1. ZAVADSKYI I.O. (2014) The error-correcting codes by means of finite automatons as generalization of convolutional codes. *Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series Physics & Mathematics.* No 3. pp. 105–110.

2. MORELOS-ZARAGOZA R. (2002) *The Art of Error Correcting Coding*. John Wiley & Sons. – 320 p.

Надійшла до редколегії 06.10.2014

УДК 519.7

Какойченко А. І.[1], студент,
Порхун О. В.[2], к.ф.-м.н., асистент.

Використання RBF-мережі для короткострокового прогнозування фінансових ринків

[1] Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 83000, м. Київ, пр-т. Глушкова 4д,
e-mail: a.kakoychenko@gmail.com
[2] Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 83000, м. Київ, пр-т. Глушкова 4д,
e-mail: elena_porkhun@mail.ru

A. I. Kakoichenko[1], student,
O. V. Porkhun[2], Ph.D., Assistant Professor.

Short-term financial markets forecasting with RBF network

[1] Taras Shevchenko National University of Kyiv, 83000, Kyiv, Glushkova st., 4d,
e-mail: a.kakoychenko@gmail.com
[2] Taras Shevchenko National University of Kyiv, 83000, Kyiv, Glushkova st., 4d,
e-mail: elena_porkhun@mail.ru

У даній статті розглянуто процес побудови програмного забезпечення для короткострокового прогнозування напряму динаміки ринку за допомогою RBF-мережі. Тестування отриманої програми з використанням даних про всі заявки ф'ючерсного контракту на індекс РТС показало широкі перспективи даного підходу.

Ключові слова: фондовий ринок, прогнозування, RBF-мережі, машинне навчання.

The purpose of the paper is to demonstrate the process of developing the algorithm for short-term financial markets forecasting with RBF-networks (radial basis function networks). The paper also includes overview of the RBF-networks algorithm and deep analysis of the market microstructure. Predictive model based on a fact, that the financial markets pricing process is unambiguously described by flows of transactions. There are three most popular types of transactions: add order, remove order and modify order. Classifier analyzes the features vector, calculated with these flows and state of the order book, and gives predictions about the further market direction. Algorithm application includes learning with the historical data for the RBF-network estimation.

Verification of the software implementation of the algorithm with the data about transactions of the RTS index future contract showed bright results and wide prospects of this approach for risk calculating algorithms and high frequency trading or market-making strategies developing.

Key Words: stock market, forecasting, RBF-networks, machine learning.

Статтю представив чл.-кор. НАН України, д.ф.-м.н. Анісімов А.В.

Використання алгоритмів машинного навчання для прогнозування стану ринку є досить популярним напрямком штучного інтелекту. Як правило, такі дослідження побудовані на аналізі і прогнозуванні цінових рядів. Стан ринку у деякий момент часу у таких роботах описується цінами фінансових інструментів. Таким чином ігнорується інформація про поточний стан та динаміку книги заявок, що робить такі підходи недостатньо ефективними для короткострокового прогнозування та розробки стратегій високочастотної торгівлі.

Однак розвиток високочастотної торгівлі у середині 2000-х років та потреба у алгоритмах для автоматизованого підтримання ліквідності призвів до появи робіт, основаних на аналізі стану книги заявок та характеристиках потоків надходження та видалення нових заявок. Наприклад, у роботі [1] ставиться задача визначення оптимальної стратегії маркет-мейкінгу на американських акціях. Більш цікавою може здатися стаття [2]. У ній дослідники звертають увагу на потоки транзакцій на постановку, видалення та задоволення лімітних заявок на строковому ринку

© А.І. Какойченко, О.В. Порхун, 2014

Московської біржі. Автори припускають, що проміжки часу між транзакціями мають гамма розподіл з параметрами, залежними від часу, хоч статистична перевірка цього твердження авторами даного дослідження і показала його суперечливість [3].

Метою даного дослідження є розробка та

де $n_S(t)$–кількість лімітних заявок на продаж у момент часу t, $n_B(t)$ –кількість лімітних заявок на купівлю у момент часу t.

Лімітна заявка на продаж

$$s_i =< p_i^s, a_i^s, t_i^s >,$$

де p_i – ціна заявки, a_i- залишковий обсяг заявки, t_i- момент часу постановки заявки у чергу.

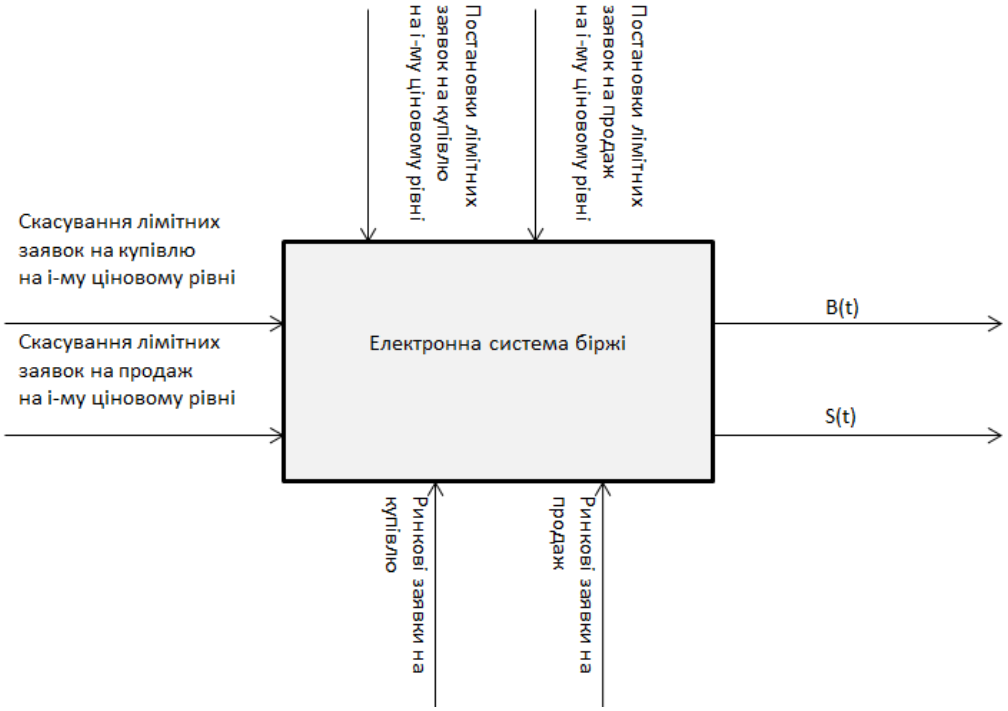


Рис. 1 Схема функціонування електронної системи біржі

подальша перевірка ефективності програмного забезпечення для короткострокового прогнозування динаміки фінансових ринків за допомогою алгоритмів машинного навчання.

Модель ринку

На електронних ринках з неперервним двостороннім аукціоном біржова ціна фінансового інструменту є результуючою характеристикою торгівельної системи, поточний стан якої можна розглядати, як, так звану, книгу заявок. Книга заявок є чергою з пріоритетом. У даному випадку пріоритетом є ціна (у черзі заявок на купівлю більша ціна має більший пріоритет, а у черзі заявок на продаж менша ціна має більший пріоритет). Тобто першою у книзі заявок є заявка, яка першою увійшла до книги серед заявок, що мають найбільший пріоритет(1). Будемо у кожний момент часу $t \epsilon T$, де T-множина моментів часу у торговій сесії, розглядати множину заявок на купівлю $B(t)$ та на продаж $S(t)$.

$$S(t) = \{s_1, s_2, \dots, s_{n_S(t)}\},$$
$$B(t) = \{b_1, b_2, \dots, b_{n_B(t)}\},$$

Лімітна заявка на купівлю

$$b_i =< p_i^b, a_i^b, t_i^b >,$$

де p_i – ціна заявки, a_i- залишковий обсяг заявки, t_i- момент часу постановки заявки у чергу.

Тобто, згідно з (1) для $S(t)$ маємо : $i < j \leftrightarrow (p_i^s < p_j^s) \vee ((p_i^s = p_j^s) \wedge (t_i^s < t_j^s))$, для $B(t)$ маємо :$i < j \leftrightarrow (p_i^b > p_j^b) \vee ((p_i^b = p_j^b) \wedge (t_i^b < t_j^b))$.

На динаміку книги заявок впливають такі події:

1) Постановка лімітної заявка. Означає намір придбати або продати певний обсяг активу за певною ціною. Заявка додається до книги заявок. Якщо після постановки заявки виникає ситуація, що ціна першої заявки у черзі заявок на купівлю більша, чи рівна ціні першої заявки у черзі заявок на продаж, то послідовно відбуваються угоди між новою заявкою та першою заявкою у черзі заявок з протилежним напрямом, доки ціна першої заявки у черзі заявок на купівлю не стане меншою

за ціну першої заявки у черзі заявок на продаж.

2) Ринкова заявка. Означає намір миттєво придбати або продати певний обсяг фінансового інструменту за ринковою ціною . При постановці ринкової заявки з обсягом k електронна система біржі послідовно проводить угоди між ринковою заявкою та першою заявкою у черзі з протилежним напрямом, доки не вичерпається обсяг ринкової заявки, чи усі лімітні заявки з протилежним напрямом не будуть вдоволені. Якщо обсяг усіх заявок з протилежним напрямом вичерпується раніше, аніж обсяг ринкової заявки, то клієнт отримує виконання лише на різницю між початковим та залишковим обсягом заявки, і така заявка більше у торгівельному процесі участі не бере. На деяких ринках (наприклад, на усіх ринках Московської та Української біржі) ринкові заявки не підтримуються електронною системою біржі. У даній роботі будемо вважати ринковими лімітні заявки такі, що після постановки цих заявок виникає ситуація, що ціна першої заявки у черзі заявок на купівлю більша, чи рівна ціні першої заявки у черзі заявок на продаж.
3) Відміна лімітної заявки**.** Означає скасування та вилучення з книги заявок певної заявки.
4) Зміна параметрів лімітної заявки**.** Означає відміну заявки та моментальну постановку нової з новими параметрами. Ми будемо розглядати таку транзакцію, як дві послідовні транзакції зняття лімітної заявки та постановки нової.

Ці чотири потоки однозначно описують стан торгівельної системи у довільний момент часу.

Кращу ціну купівлі визначатимемо, як

$$b(t) = \begin{cases} sup\{p_i^b : < p_i^b, a_i^b, t_i^b > \epsilon\, B(t)\}, \\ \text{якщо } n_B(t) > 0 \\ 0, \text{якщо } n_B(t) = 0 \end{cases}.$$

А кращу ціну продажу визначатимемо, як

$$\mathrm{s}(t) = \begin{cases} \inf\{p_i^s : < p_i^s, a_i^s, t_i^s > \epsilon\, S(t)\}, \\ \text{якщо } n_S(t) > 0 \\ p_{max}, \text{якщо } n_B(t) = 0 \end{cases},$$

де p_{max}- деяке заздалегідь визначене велике число, таке, що ринкова ціна не може його перевищувати. Наприклад, при програмуванні моделі мовою C# та використанні типу decimal для опису цін, можна використовувати максимальне значення для цього типу – 79228162514264337593543950335.

Алгоритм машинного навчання

Для даної задачі було використано мережу радіальних базисних функцій (RBF-мережу). Це нейронна мережа прямого поширення сигналу, яка містить проміжний (прихований) шар радіально симетричних нейронів. Такий нейрон перетворює відстань від даного вхідного вектора до відповідного йому "центру" по деякому нелінійному закону. Радіальна функція - це функція $f(x)$, що залежить тільки від відстані між x і фіксованою точкою простору X. Для визначення наших радіальних функцій введемо метрику: Нормальний розподіл (Гауссіан) $p_j(x) = N(x; \mu_j, \Sigma_j)$ з діагональною матрицею коваріації Σ_j можна записати у вигляді

$$p_j(x) = N_j e^{-\frac{1}{2\rho_j(x,\mu_j)}},$$

де $N_j = (2\pi)^{-\frac{n}{2}}(\sigma_{j1}, \dots, \sigma_{jn})^{-1}$- нормувальний множник,

$\rho_j(x, x')$ - зважена евклідова метрика в n-вимірному просторі X:

$$\rho(x, x') = \sum_{d=1}^{n} \sigma_{jd}^{-2} |\xi_d - \xi_d'|,$$
$$x = (\xi_1, \dots, \xi_n),$$
$$x' = (\xi_1', \dots, \xi_n').$$

Чим менше відстань $\rho_j(x, \mu_j)$, тим вище значення щільності в точці x. Тому щільність $p_j(x)$ можна розглядати як функцію близькості вектора x до фіксованого центру.

Постановка завдання полягає у тому, щоб побудувати алгоритм, який би вирішував завдання класифікації Байєсівським алгоритмом (окремий випадок EM-алгоритму) в припущенні, що щільність розподілу подана в вигляді суміші гаусівських розподілів з діагональними матрицями коваріації.

Нехай $|Y| = M$ - число класів, кожен клас $y \in Y$ має свою щільність розподілу $p_y(x)$ і представлений частиною вибірки $X_y^l = \{(x_i, y_i) \in X^l | y_i = y|\}$. Тут Y – множина відповідей (класів), $y \in Y$, x_i належить множині об'єктів X.

Висувається гіпотеза, що щільності класів $p_y(x), y \in Y$, можливо представити у вигляді комбінації k_y компонент. Кожна компонента має n – вимірну гаусівську щільність з параметрами:

$\mu_{yj} = (\mu_{yj1}, \dots, \mu_{yjn})$ –центр,

$\Sigma_{yj} = diag(\sigma_{yj1}, \dots, \sigma_{yjn})$ - коваріаційна матриця, $j = 1, \dots, k_y$.

$p_y(x) = \sum_{j=1}^{k_y} \omega_{yj} p_{yj}(x)$ - комбінація щільностей, $p_{yj}(x) = N(x; \mu_{yj}, \Sigma_{yj})$ - щільність кожної компоненти комбінації.
$\Sigma_{j=1}^{ky} \omega_{yj} = 1, \omega_{yj} > 0 -$ умови нормування та невід'ємності ваг.

Алгоритм класифікації

Запишемо основну формулу байесівського класифікатора $a(x) = argmax_{y \in Y} \lambda_y P_y p_y(x)$. Тут Y- множина відповідей (класів), $x \in X$, P_y- апріорна ймовірність класу y, $p_y(x)$ –функція правдоподібності класу y, λ_y- ціна помилки на об'єкті класу y. Виразимо щільність кожної компоненти $p_{yj}(x)$ через зважену евклідову відстань від об'єкта x до центра компоненти μ_{yj} (іншими словами – підставимо в основну формулу байесівського класифікатора замість $p_y(x)$ формули, які ми припустили в гіпотезі):

$$a(x) = argmax_{y \in Y} \lambda_y P_y \sum_{j=1}^{k_y} N_{yj} e^{-\frac{1}{2\rho_{yj}(x, \mu_{yj})}},$$

де $N_{yj} = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} (\sigma_{yj1}, \dots, \sigma_{yjn})^{-1}$- нормувальні множники. Алгоритм має вигляд нейронної мережі, що складається з трьох рівнів або шарів.

Перший шар утворений $k_1 + \dots + k_M$ гауссіанами $p_{yj}(x), y \in Y, j = 1, \dots, k_y$. На вході вони приймають опис об'єкта x, на виході видають оцінки близькості об'єкта x до центрів μ_{yj}, рівні значенням щільностей компонент в точці x. Другий шар складається з M суматорів, що обчислюють зважені середні цих оцінок з вагами ω_{yj}. На виході другого шару з'являються оцінки близькості об'єкта x кожному з класів, рівні значенням щільностей класів $p_{yj}(x)$. Третій шар утворюється єдиним блоком $argmax$, приймаючим остаточне рішення про віднесення об'єкта x до одного з класів. Таким чином, при класифікації об'єкта x оцінюється його близькість до кожного з центрів μ_{yj} по метриці $\rho_{yj}(x, \mu_{yj}), j = 1, \dots, k_y$. Об'єкт відноситься до того класу, до чиїх центрам він розташовується ближче.

Описаний трирівневий алгоритм класифікації

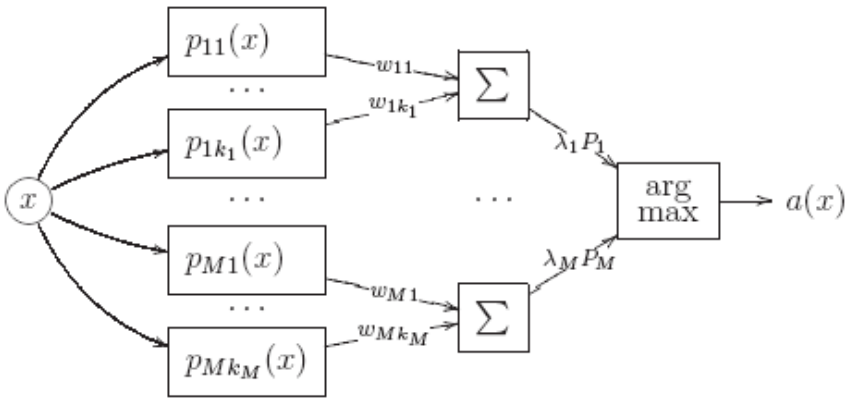


Рис. 2 Схема RBF – мережі

називається мережею з радіальними базисними функціями або RBF-мережею (radial basis function network). Це одна з різновидів нейронних мереж.

Програмне забезпечення

В межах цієї роботи ми будемо використовувати декілька модулів програмного комплексу Watcher та програмне забезпечення для проведення аналізу даних Weka. Програмний комплекс Watcher призначений для накопичення та систематизації біржових історичних даних, аналізу, розробки, тестування, оптимізації та застосування торгових стратегій для строкового ринку. Розроблений співавтором даної роботи А. Какойченком протягом 2011-2013 років для особистого користування. Використані мови програмування C# та C++. Підтримує біржові протоколи прямого доступу до серверів Української та Московської бірж, та пройшов сертифікацію на обох біржах.

Програмний комплекс складається з чотирьох основних модулів:

1) модуль для взаємодії з електронною системою бірж (застосування стратегій та накопичення даних);
2) сховище історичних даних;
3) тестовий полігон для аналізу історичних даних, розробки, тестування, та оптимізації стратегій;
4) модуль для взаємодії з тестовим полігоном.

Weka — це набір засобів візуалізації та алгоритмів для аналізу даних і вирішення задач прогнозування, разом з графічною оболонкою для доступу до них. Weka дозволяє виконувати такі завдання аналізу даних, як підготовку даних (preprocessing), відбір ознак (feature selection), кластеризацію, класифікацію, регресійний аналіз та візуалізацію результатів.

Так, як Weka створено за допомогою мови Java, то це створює деякі перепони для інтеграції цих програмних засобів, так, як C# не підтримує прямої взаємодії з Java-бібліотеками. Через це було створено допоміжну програму мовою Java, яка взаємодіє з Weka API. Ця програма являє собою багатопотоковий сервер класифікації з доступом через TCP протокол. При отриманні відповідного вектору входів та номеру класифікатора вона повертає індекс вихідного класу. Відповідно, було створено модуль взаємодії з цим сервером для програмного комплексу Watcher.

Кроки дослідження

Для проведення дослідження використано дані з повного журналу заявок Московської біржі за 20 та 22 січня 2014 року по ф`ючерсному контракту на індекс РТС. Дані розділяються на дві частини: навчальну вибірку та тестову. За навчальну вибірку узято дані за 20 січня, а за тестову за 22.

На основі ринкових даних формується послідовність векторів ознак. Кожному вектору співставляється момент часу з точність до секунди та знак (“+” чи “–“) сукупного обсягу угод проведених у наступні 5 секунд, що йдуть за моментом часу, якому відповідає даний вектор ознак. Причому, обсяги купівель сумуються зі знаком “+”, а обсяги продажів зі знаком “-“. Для визначеності вважаємо, що якщо сукупний обсяг рівний нулеві, то його знак вважаємо за “+”.

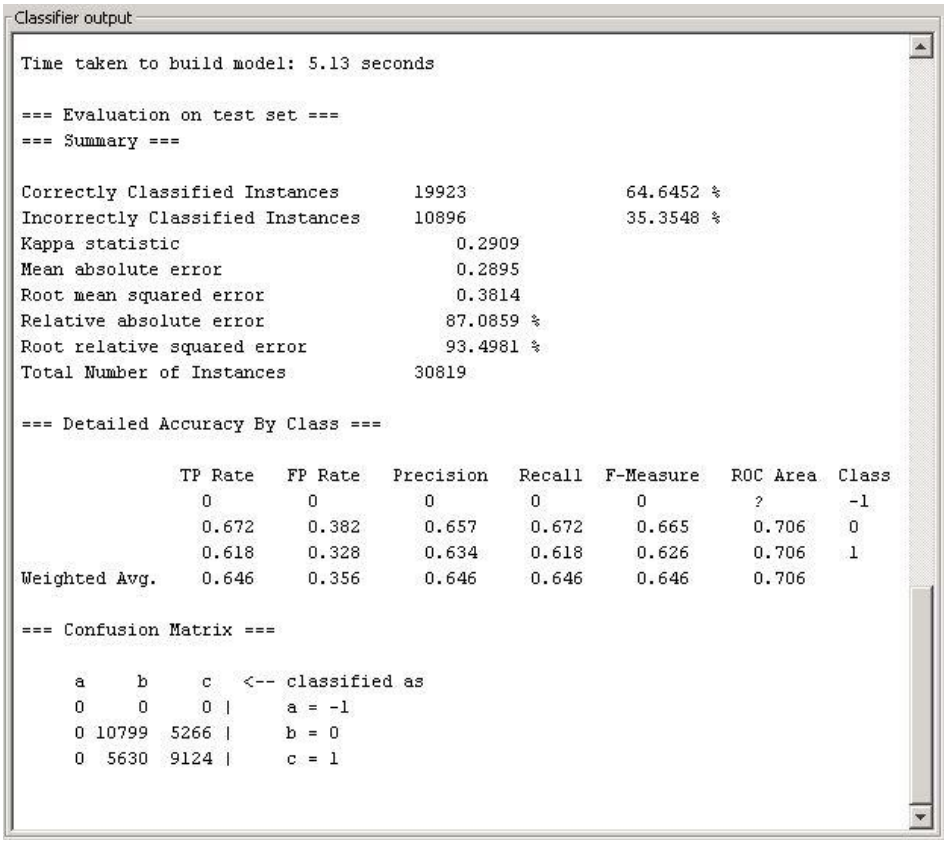


Рис.3 Результати тестування класифікатора у програмі Weka

На основі навчальної та тестової вибірок біржових даних формуються послідовності таких векторів і записуються у текстові файл разом із відповідним знаком (+1 чи -1). У пакеті Weka на базі навчальної послідовності створюється класифікатор. Цей класифікатор тестується за допомогою тестової послідовності. Також, експортувавши файл класифікатора, можна його використовувати через Weka API для використання результатів класифікації у торгових стратегіях та для візуалізації.

Отже, на вхід подається вектор параметрів, що характеризують стан ринку та його динаміку на даний момент часу. Так, як у даній моделі поточний стан ринку характеризується книгою

заявок, то на її основі можна розрахувати ряд характеристик. Будемо розглядати середні ціни, за якими можна купити та продати n одиниць фінансового інструменту у час t. Позначимо їх $mb(n,t)$ та $ms(n,t)$ відповідно. Якщо сукупний обсяг лімітних заявок на продаж менший за n, то покладемо значення $mb(n,t)$ рівним p_{max}. Якщо сукупний обсяг лімітних заявок на купівлю менший за n, то покладемо значення $ms(n,t)$ рівне 0.

Неважко побачити, що отримані нами характеристики нестаціонарні**,** що унеможливлює їх пряме подання на вхід класифікатора. Проте, можна увести функцію $P(t)$, яка визначається, як середнє арифметичне від ціни першої заявки у черзі заявок на купівлю та першої заявки у черзі заявок на продаж у момент часу t. Тоді, віднявши від $P(t)$ $mb(n,t)$ та від $ms(n,t)$ $P(t)$, можна ввести такі характеристики, як відносні середні ціни, за якими можна купити та продати n одиниць фінансового інструменту у час t. Ці характеристики стаціонарні і можуть подаватися на вхід класифікатора.

Також розглянемо послідовності подій надходжень нових транзакцій. Нас цікавить інтенсивність потоків транзакцій, через це будемо підраховувати кількості та сукупні обсяги транзакцій, що відбуваються за останні 5 та 25 секунд окремо для транзакцій на постановку та зняття лімітних та надходження ринкових заявок. Причому, окремо для транзакцій,що стосуються заявок на купівлю та продаж.

Також, додамо до вектора ознак напрям останньої угоди та відхилення ринкової ціни від середньої ціни за 5 та 25 секунд.

Отриманий вектор подається на вхід класифікатора. З результатами класифікації, отриманими на тестовій вибірці можна ознайомитися на рис. 3. Видно, що вдалося досягти результату у 65% правильно класифікованих векторів ознак.

Висновки

В процесі роботи над дослідженням було проведено глибокий аналіз мікроструктури ринку і розроблено алгоритм прогнозування напрямку динаміки ринку у короткотерміновій перспективі на основі застосування RBF-мережі до вектору ознак, що описують стан ринку та його динаміку, використовуючи книгу заявок та потоки транзакцій. Перевірка програмної реалізації алгоритму на історичних даних показала результат у 65% правильно класифікованих векторів ознак на тестовій вибірці, що є досить хорошим результатом. Перспективою подальших досліджень є застосування даного підходу для побудови високочастотних стратегій та створення алгоритмів для розрахунку короткотермінових ризиків.

Список використаних джерел

1. *Avellaneda M.* High-frequency trading in a limit order book / Avellaneda M., Stoikov. S. //Quantitative Finance. – 2008. – Т. 8. – №. 3. – С. 217-224.
2. *Korolev V. Y. et al.* Probability and statistical modeling of information flows in complex financial systems based on high-frequency data //Информатика и ее применения. – 2013. – Т. 7. – №. 1. – С. 12-21.
3. *Какойченко А.І.* On Analysis of futures markets by Monte Carlo method//XXIV International Conference Problems of decision making under uncertainties (PDMU-2014): Матеріали наук. праць міжнародної конференції. – Cesky Rudolec, 2014. – С. 50.

References

1. AVELLANEDA, M. & STOIKOV, S. (2008) High-frequency trading in a limit order book. *Quantitative Finance*. 8(3). p. 17-224.
2. KOROLEV, V. Y. et al. (2013) Probability and statistical modeling of information flows in complex financial systems based on high-frequency data. *Informatics and Applications.*7(1). p. 12-21.
3. KAKOICHENKO, A. (2014) On Analysis of futures markets by Monte Carlo method. In *XXIV International Conference Problems of decision making under uncertainties.* Cesky Rudolec, Monday 1-th to Friday 5-th September 2014. p. 50.

Надійшла до редколегії 22.10.14

УДК 510.6:519.8

Касьянюк В.С.[1], к. ф.-м. н.,
Малютенко Л.М.[1], інженер.

Моделювання нечітких множин, предикатів та реляцій на основі теоретико-можливісного підходу

[1] Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 83000, м. Київ, пр-т Глушкова, 4д,
e-mail: tk@unicyb.kiev.ua

V.S. Kasyanyuk[1], PhD (Phys.-Math.),
L.M. Malutenko[1], engineer.

Fuzzy sets, predicates and relations modeling using theoretic-possibility approach

[1] Taras Shevchenko National University of Kyiv, 83000, Kyiv, Glushkova st., 4d,
e-mail: tk@unicyb.kiev.ua

Досліджено моделювання нечітких множин, нечітких предикатів та нечітких реляцій за допомогою методів теорії можливостей. Розглянуто операції над нечіткими множинами та нечіткими предикатами. На основі логіки нечітких предикатів описана алгебра нечітких реляцій, сигнатурою якої є операції об'єднання, перетину, різниці, добутку, проекції та селекції.

Ключові слова: теоретико-можливісний підхід, нечітка множина, нечіткий предикат, нечітка реляція.

Theoretic-possibility approach gives an efficient way of uncertainty representation in various domains with incomplete information. The paper is concerned with a study of the notions of fuzzy set, fuzzy predicate and fuzzy relation using the research by Yu.P. Pyt'ev in the field of possibility theory. We consider fuzzy sets modeling with theoretic-possibility methods and describe operations over fuzzy sets corresponding to the ones introduced by L. Zadeh in his theory. We refine the concept of a fuzzy predicate and consider operations over fuzzy predicates – logical connectives and quantifiers. Basing on the logic of fuzzy predicates, the notion of a fuzzy relation is defined and a fuzzy relational algebra is specified; the signature of the latter consists of the operations of union, intersection, difference, product, projection and selection. Information processing by fuzzy criteria in relational databases is one of the important applications of fuzzy predicates and fuzzy relations. Theoretic-possibility means permit effective modeling of fuzziness and uncertainty along with their evaluation by possibility and necessity measures. It is advisable to represent database queries as fuzzy predicates and retrieved results as fuzzy sets and fuzzy relations. On the base of fuzzy relational algebra and models of operations expressed by fuzzy relations we plan to develop software dealing with procession of queries with fuzzy criteria.

Key words: theoretic-possibility approach, fuzzy set, fuzzy predicate, fuzzy relation.

Статтю представив д. т. н., проф. Заславський В.А.

Методи моделювання предметних областей мусять брати до уваги нечіткість та неповноту наявної інформації. Плідним підходом до опису й моделювання складних фізичних, соціальних, економічних систем видається теоретико-можливісний підхід [1–3], він дає змогу врахувати неповноту, нечіткість, можливу недостовірність наших знань. Теорія можливостей дозволяє будувати математичні моделі предметних областей на базі емпіричних фактів, знань, гіпотез і суджень, перевіряти адекватність побудованих моделей і на їх основі оптимально оцінювати характеристики досліджуваних процесів і явищ. Тому актуальною і важливою є розробка математичних і логічних формалізмів, орієнтованих на теоретико-можливісний підхід. До таких належать логіки, базовані на класах нечітких предикатів, та будовані на їх основі алгебри нечітких реляцій.

Важливим застосуванням нечітких предикатів і нечітких реляцій є обробка інформації за нечіткими критеріями в реляційних базах даних. Такі бази дозволяють зберігати великі об'єми даних та ефективно їх обробляти за допомогою належних засобів (наприклад, *SQL* та їм подібні). Зазначені засоби дають змогу проводити вибірку, видалення, поновлення та додавання інформації до бази

© В.С. Касьянюк, Л.М. Малютенко, 2014

даних за певними критеріями, які формулюються у вигляді предикатів. Водночас на практиці часто виникають ситуації, коли ці критерії мають нечіткий або невизначений характер. Наприклад, інколи буває необхідним описати такі поняття, як більшість, майже всі, декілька тощо. У цих випадках формулювання відповідного предиката неможливо адекватно здійснити традиційними засобами. Це можна зробити, використовуючи теоретико-можливісний апарат. Він дозволяє ефективно змоделювати нечіткість та невизначеність і оцінити їх за допомогою мір можливості та необхідності. Запити до баз даних доцільно формулювати у вигляді нечітких предикатів, результат запитів – у вигляді нечітких множин та нечітких реляцій.

Метою даної роботи є вивчення нечітких множин, нечітких предикатів та нечітких реляцій, які задаються на основі теоретико-можливісного підходу. Зроблено стислий огляд результатів щодо моделювання нечітких множин та предикатів на основі досліджень в області теорії можливостей, проведених Ю.П. Питьевим [2, 3]) і продовжених, зокрема, в роботах [4–7]. Розглянуто операції над нечіткими множинами, логічні операції над нечіткими предикатами, на основі логіки нечітких предикатів описана алгебра нечітких реляцій.

Поняття, які тут не визначаються, тлумачимо в сенсі робіт [2, 5, 6].

Спочатку розглянемо, базуючись на [1–3], основні поняття теорії можливостей.

1. Міра можливості та міра необхідності

Шкалою значень можливості (можливісною шкалою) називають півкільце $L=([0,1], \le, +, \circ)$, тобто відрізок [0,1] з стандартним відношенням порядку ≤, операцією +, потрактовану як функція "max", та операцією $\circ$, потрактовану як функція "min": $a+b=\max(a,b)$, $a\circ b=\min(a,b)$.

У випадку зліченних суми та добутку трактуємо їх як точну верхню та точну нижню грані.

Так введені операції + та $\circ$ комутативні, асоціативні, взаємно дистрибутивні:

Нейтральними елементами щодо + та $\circ$ є 0 та 1.

Нехай $\mathbf{A}\subseteq 2^X$ – деякий клас підмножин X, замкнений щодо зліченних об'єднань та доповнення, тобто він утворює σ-алгебру підмножин X. Кожна множина $A\in\mathbf{A}$ називається **A**-*вимірною*, чи *подією*.

Введемо кількісну оцінку подій – *можливість*, виходячи з таких вимог. Для кожної події A її можливість невід'ємна, при цьому якщо події A та B з'являються з деякими значеннями можливостей, то подія, яка полягає в тому, що з'явиться або A, або B, буде мати найбільшу з можливостей A та B.

Міра можливості – це функція $P:\mathbf{A}\to[0,1]$ така:

1) $P(A)\ge 0$ для кожної $A\in\mathbf{A}$;

2) P зліченно-адитивна, тобто для кожної послідовності $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$, де $A_i\in\mathbf{A}$, такої, що $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\in\mathbf{A}$, маємо $P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i)=\dot{+}_{i=1}^{\infty} P(A_i)=\sup_i P(A_i)$.

Наведемо властивості міри можливості.

1. $A\subseteq B\Rightarrow P(A)\subseteq P(B)$;

2. Нехай маємо $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$, де $A_i\in\mathbf{A}$, тоді:

– з умови $A_i\subset A_{i+1}$ для всіх i та $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\in\mathbf{A}$ випливає $P(\lim_{n\to\infty} A_n)=\lim_{n\to\infty} P(A_n)$ – неперервність щодо збіжної монотонно зростаючої послідовності;

– з умови $A_{i+1}\subset A_i$ для всіх i та $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\in\mathbf{A}$ випливає $P(\lim_{n\to\infty} A_n)\le\liminf_{n\to\infty} P(A_n)$ – напівнеперервність знизу щодо збіжної спадної послідовності.

Введення лише можливості як варіанта оцінки подій недостатньо для адекватного опису моделей. Доцільно ввести нижню оцінку міри події, суть якої в тому, що подія *мусить* відбутися. Назвемо її мірою необхідності.

Функція $N:\mathbf{A}\to[0,1]$ – *міра необхідності*, якщо:

1) $N(A)\ge 0$ для кожної $A\in\mathbf{A}$;

2) N зліченно-мультиплікативна, тобто для кожної $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$, де $A_i\in\mathbf{A}$, такої, що $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\in\mathbf{A}$, маємо $N(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i)=\circ_{i=1}^{\infty} A_i=\inf_i N(A_i)$.

Суть умов, які накладаються на функцію N, трактуємо так: для двох подій, які відбудуться з деякими значеннями необхідності, сумісна подія відбудеться з найменшою необхідністю.

Властивості міри необхідності;

1) $A\subseteq B\Rightarrow N(A)\subseteq N(B)$;

2) Нехай маємо $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$, де $A_i\in\mathbf{A}$, тоді:

– $A_{i+1}\subset A_i$ для всіх i та $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\in\mathbf{A}$ $\Rightarrow$ $\Rightarrow N(\lim_{n\to\infty} A_n)=\lim_{n\to\infty} N(A_n)$ – неперервність щодо збіжної монотонно спадної послідовності;

– $A_i\subset A_{i+1}$ для всіх i та $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\in\mathbf{A}$ $\Rightarrow$ $\Rightarrow N(\lim_{n\to\infty} A_n)\ge\limsup_{n\to\infty} N(A_n)$ – напівнеперервність зверху щодо збіжної зростаючої послідовності.

Отже, міри необхідності й можливості дуальні.

Позначимо як $L(X)$ клас **A**-вимірних функцій $f:X\to L$ таких, що виконуються властивості:

– $f\in L(X)$, $a\in L\Rightarrow a\circ f\in L(X)$;

– $f, g \in L(X) \Rightarrow f + g \in L(X),\ f \circ g \in L(X)$;

– $f \in L(X) \Rightarrow \sim f \in L(X)$;

– $f_1, ..., f_n, ... \in L(X) \Rightarrow \overset{\infty}{\underset{n=1}{+}} f_n \in L(X),\ \overset{\infty}{\underset{n=1}{\circ}} f_n \in L(X)$.

Тут $\sim : [0, 1] \to [0, 1]$ – строго монотонна функція, для якої маємо: $\sim(0) = 1,\ \sim(1) = 0,\ \sim\sim(a) = a,$ $\sim(a + b) = \sim(a) \circ \sim(b),\ \sim(a \circ b) = \sim(a) + \sim(b)$.

Зокрема, можна задати $\sim(f)(x) =_{df} 1 - f(x)$.

Клас $L(X)$ є повною дистрибутивною решіткою відносно операцій + та $\circ$.

Функціоналом можливості назвемо функцію $p : L(X) \to L$, яка лінійна і зліченно-адитивна:

– $p((a \circ f) + (b \circ g)) = (a \circ p(f)) + (b \circ p(g))$,

– $p(\sup_n f_n) =_{df} p(\overset{\infty}{\underset{n=1}{+}} f_n) = \overset{\infty}{\underset{n=1}{+}} p(f_n) =_{df} \sup_n p(f_n)$.

Вважаємо $f(x) \equiv 1 \Rightarrow p(f) = 1$ (нормування).

Теорема 1. Функціонал можливості p:

1) монотонно не спадний: $f \geq g \Rightarrow p(f) \geq p(g)$;

($f \geq g$ означає, що $f(x) \geq g(x)$ для всіх $x \in X$);

2) неперервний відносно збіжності монотонно неспадної послідовності:

$f_{n+1} \geq f_n$ для всіх $n \Rightarrow p(\lim_{n\to\infty} f_n) = \lim_{n\to\infty} p(f_n)$;

3) напівнеперервний знизу.

Функціонал (інтеграл) можливості p визначає можливість події $A \in \mathbf{A}$. Для цього задамо функцію $P : 2^X \to L$ так: $P(A) = p(\chi_A)$.

Теорема 2. P має властивості міри можливості:

1. $P(A \cup B) = p((\chi_A + \chi_B)) = \max(P(A), P(B))$;
   $P(A \cap B) = p(\chi_A \circ \chi_B) \leq \min(P(A), P(B))$;
2. $A \subseteq B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$ – монотонність;
3. $P(X) = P((X \setminus A) \cup A) = \max(P(X \setminus A), P(A))$;
4. P зліченно-адитивна: для довільної $A_1, A_2, ...$

$$P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sup_n P(A_n) = \overset{\infty}{\underset{n=1}{+}} P(A_n);$$

5. P неперервна щодо збіжної монотонно зростаючої послідовності;
6. P напівнеперервна знизу.

Згідно з умовою нормування p маємо $P(X) = 1$.

Довільну функцію із властивостями, переліченими в теоремі 2, назвемо можливістю.

Трійку $(X, \mathbf{A}, P)$ назвемо *можливісним простором.*

Визначимо спеціальний функціонал можливості p_φ, індукований фіксованою $\varphi \in L(X)$:

$$p_\varphi(f) = \sup_{x \in X} \min(f(x), \varphi(x)).$$

Такий p_φ – лінійна зліченно-адитивна функція:

– для всіх $a, b \in L$ та $f, g \in L(X)$ маємо

$p_\varphi(a \circ f) + (b \circ g)) = (a \circ p_\varphi(f)) + (b \circ p_\varphi(g))$;

– $p_\varphi(\overset{\infty}{\underset{j=1}{+}} f_j(x)) = \overset{\infty}{\underset{j=1}{+}} p_\varphi(f_j(x))$.

Якщо P визначається функціоналом можливості p_φ, то можливість події $A \in \mathbf{A}$ задається так:

$P(A) = p_\varphi(\chi_A) = \sup_{x \in A} \varphi(x)$, ÿêù î $A \neq \varnothing$, $P(\varnothing) = 0$.

Функцію φ назвемо розподілом можливості.

Введемо *дуальну* до L шкалу значень необхідності $L_d = ([0,1], \leq_d, +_d, \circ_d) : +_d$ та $\circ_d$ трактуємо як функції "min" та "max"; нейтральні елементи – це $0_d = 1$ і $1_d = 0$; $\leq_d$ зворотне до природного порядку.

Властивості для $+_d$, $\circ_d$, 0_d, 1_d формулюються як відповідні властивості для +, $\circ$, 0, 1 шкали L.

Зв'язок між шкалами L та L_d можна встановити, задавши бієкцію $\theta : [0,1] \to [0,1]$ таку:

$\theta(0) = 1,\ \theta(1) = 0$;

$\theta(a + b) = \theta(a) +_d \theta(b),\ \theta(a \circ b) = \theta(a) \circ_d \theta(b)$;

$a \leq b \Leftrightarrow \theta(a) \leq_d \theta(b);\ \theta(\theta(a)) = a$.

Така θ – дуальний ізоморфізм L та L_d:

$\theta(a + b) = \theta(a) \circ \theta(b),\ \theta(a \circ b) = \theta(a) + \theta(b)$,

$\theta(a +_d b) = \theta(a) \circ_d \theta(b),\ \theta(a \circ_d b) = \theta(a) +_d \theta(b)$,

$a \leq_d b \Leftrightarrow \theta(a) \geq_d \theta(b)$.

В найпростішому випадку задаємо $\theta(a) = 1 - a$.

Дуальний до $L(X)$ клас $\mathbf{A}$-вимірних функцій $L_d(X)$ вигляду $f : X \to L_d$ задамо аналогічно, враховуючи наведену інтерпретацію для $0_d, 1_d, \leq_d, +_d, \circ_d$.

Функціонал необхідності $n : L_d(X) \to L_d$ задамо як лінійну зліченно-адитивну функцію:

– $n((a \circ_d f) +_d (b \circ_d g)) = (a \circ_d n(f)) +_d (b \circ_d n(g))$,

– $n(\inf_n f_n) =_{df} n(\overset{\infty}{\underset{n=1}{+_d}} f_n) = \overset{\infty}{\underset{n=1}{+_d}} n(f_n) =_{df} \inf_n n(f_n)$.

Вважаємо: $f(x) \equiv 0 \Rightarrow n(f) = 0$ (нормування).

Теорема 3. Функціонал необхідності n:

1) монотонно не спадний: $f \geq g \Rightarrow n(f) \geq n(g)$;

2) неперервний відносно збіжності монотонно незростаючої послідовності;

3) напівнеперервний зверху.

Функціонал необхідності n визначає необхідність події $A \in \mathbf{A}$. Для цього задамо функцію $N : 2^X \to L_d$ так: $N(A) = n(\chi_A)$.

Теорема 4. N має властивості міри необхідності:

1. $N(A \cap B) = \min(N(A), N(B))$,
   $N(A \cup B) \geq \max(N(A), N(B))$,
2. $A \subseteq B \Rightarrow N(A) \leq N(B)$ – монотонність;
3. $N(X) = N((X \setminus A) \cup A) \geq \max(N(X \setminus A), N(A))$.
4. N зліченно адитивна:

$$N(\overset{\infty}{\underset{n=1}{+_d}} A_n) =_{df} N(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n) = \inf_n N(A_n) =_{df} \overset{\infty}{\underset{n=1}{+_d}} N(A_n).$$

5. N неперервна щодо збіжної монотонно спадної послідовності;
6. N напівнеперервна зверху.

Згідно з умовою нормування n маємо $N(\varnothing) = 0$.

Довільну функцію, що має властивості, перелічені в теоремі 4, називатимемо необхідністю. Трійку (X, $\mathbf{A}$, N) назвемо *необхіднісним простором*.

Подібно до спеціального функціонала можливості p_φ, визначимо спеціальний функціонал необхідності n_ψ, індукований фіксованою $\psi \in L_d(X)$:

$$n_\psi(f) = \inf_{x\in X} \max(f(x), \psi(x)).$$

Такий n_ψ – лінійна зліченно-адитивна функція.

Якщо N визначається функціоналом необхідності n_ψ, то необхідність події $A \in \mathbf{A}$ задається так:

$$N(A) = n_\psi(\chi_A) = \inf_{x\in X\setminus A} \psi(x), \text{ ÿêù î } A \neq X, \ N(X) = 1.$$

Функцію ψ назвемо розподілом необхідності.

Міри можливості P та необхідності N, визначені на σ-алгебрі $\mathbf{A} \subseteq 2^X$, можна продовжити на булеан 2^X до відображень $P: 2^X \to [0,1]$ та $N: 2^X \to [0,1]$.

Міри можливості та необхідності, задані розподілами φ та ψ, також позначаємо P_φ та N_ψ.

2. Нечіткі множини та нечіткі події

Нечіткий елемент на множині X визначається функцією $\xi: X \to [0, 1]$. Трактуємо $\xi(x)$ як можливість події "$\xi = x$", або "$\xi \in \{x\}$".

Можливість події "$\xi \in A$" для множини $A \subseteq X$ задамо, використовуючи функціонал p_ξ:

$$P(\xi \in A) = p_\xi(\chi_A) = \sup_{x\in A} \xi(x) = \sup_{x\in X} \min(\xi(x), \chi_A(x)).$$

Трактуючи ξ як розподіл можливості, маємо можливісний простір (X, $\mathbf{A}$, P_ξ). Тоді ξ назвемо канонічним нечітким елементом простору (X, $\mathbf{A}$, P_ξ).

Поняття *нечіткої множини* традиційно [7] уточнюють за допомогою її характеристичної функції $\mu_A: X \to [0, 1]$. Значення $\mu_A(x)$ трактується як "ступінь включення" $x \in X$ в нечітку A.

Зазвичай приймають такі умови нормування:

$\mu_X(x) = 1$, $\mu_\varnothing(x) = 0$.

Операції над нечіткими множинами задають так:

$$\mu_{X\setminus A}(x) = 1 - \mu_A(x);$$
$$\mu_{A\cup B}(x) = \max(\mu_A(x), \mu_B(x));$$
$$\mu_{A\cap B}(x) = \min(\mu_A(x), \mu_B(x));$$
$$\mu_{\bigcup_\alpha A_\alpha}(x) = \sup_\alpha \mu_{A_\alpha}(x); \quad \mu_{\bigcap_\alpha A_\alpha}(x) = \inf_\alpha \mu_{A_\alpha}(x).$$

Тоді маємо: $A = B \Leftrightarrow \mu_A = \mu_B$;

$A \subseteq B \Leftrightarrow \mu_A(x) \le \mu_B(x)$ для всіх $x \in X$.

Нечіткість можна природним чином охарактеризувати в термінах можливості, якщо значення $\mu_A(x)$ трактувати як величину "можливості включення" елемента x в нечітку множину A, тобто визначити $\mu_A(x)$ як $P(x \in A)$ – можливість події "$x \in A$".

Таким чином, доцільно описати нечіткі множини на основі теоретико-можливісного підходу.

Розглянемо можливісний простір $(Y, 2^Y, P_\xi)$ з канонічним нечітким елементом $\xi: Y \to [0,1]$.

Y-нечіткою множиною на X назвемо відображення $\mathrm{A}: Y \to 2^X$.

Для опису нечіткої множини A задамо її характеристичну функцію $\mu_\mathrm{A}: X \to [0,1]$, яка визначається так: $\mu_\mathrm{A}(x) = P_\xi(\{y \mid x \in \mathrm{A}(y)\})$.

Інтерпретуємо $\mu_\mathrm{A}(x)$ як можливість події $x \in \mathrm{A}$, тобто x "покривається" нечіткою множиною A.

Визначимо $\mathrm{A}_x =_{df} \{y \mid x \in \mathrm{A}(y)\}$. Тоді $\mu_A(x)$ можна інтерпретувати як можливість події $\xi \in \mathrm{A}_x$.

Введемо операції над нечіткими множинами, які відповідають традиційним теоретико-множинним операціям. Нехай A та B – Y-нечіткі множини на X.

Множини $\mathrm{A}\cup\mathrm{B}$, $\mathrm{A}\cap\mathrm{B}$, $\mathrm{A}\setminus\mathrm{B}$, $X\setminus\mathrm{B}$ задамо так:

$(\mathrm{A}\cup\mathrm{B})(y) = \mathrm{A}(y)\cup\mathrm{B}(y)$, $(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})(y) = \mathrm{A}(y)\cap\mathrm{B}(y)$,

$(\mathrm{A}\setminus\mathrm{B})(y) = \mathrm{A}(y)\setminus\mathrm{B}(y)$, $(X\setminus\mathrm{B})(y) = X\setminus\mathrm{B}(y)$.

Для характеристичних функцій маємо:

$$\mu_{\mathrm{A}\cup\mathrm{B}}(x) = P(\mathrm{A}_x\cup\mathrm{B}_x) = \max(P_\xi(\mathrm{A}_x), P_\xi(\mathrm{B}_x)) = \max(\mu_\mathrm{A}(x), \mu_\mathrm{B}(x));$$
$$\mu_{\mathrm{A}\cap\mathrm{B}}(x) = P(\mathrm{A}_x\cap\mathrm{B}_x) \le \min(P_\xi(\mathrm{A}_x), P_\xi(\mathrm{B}_x)) = \min(\mu_\mathrm{A}(x), \mu_\mathrm{B}(x))$$

(рівність буде [5] лише за умови P-незалежності A_x та B_x при будь-якому $x \in X$).

Задамо включення для нечітких множин:

$\mathrm{A} \subseteq \mathrm{B} \Leftrightarrow_{df} \mathrm{A}(y) \subseteq \mathrm{B}(y)$ для всіх $y \in Y$,

При цьому $\mathrm{A} \subseteq \mathrm{B} \Rightarrow \mu_\mathrm{A}(x) \le \mu_\mathrm{B}(x)$ для всіх $x \in X$.

Проте обернене твердження невірне: умова "$\mu_\mathrm{A}(x) \le \mu_\mathrm{B}(x)$ для всіх $x \in X$" не означає $\mathrm{A} \subseteq \mathrm{B}$.

Властивості операцій над нечіткими множинами детально досліджено в [5]; зокрема, розглянуто операції над нечіткими множинами, заданими на різних можливісних просторах, встановлено істотні відмінності традиційної теорії нечітких множин і теорії можливості щодо моделювання нечіткості.

Підсумовуючи, говоримо про три класи подій.

Перший клас утворюють події вигляду $\xi \in A$, де $A \in 2^X$, ξ – нечіткий елемент. Можливість події:

$$P(\xi \in A) = P(\chi_A) = P(A) = \sup_{x\in A} \xi(x).$$

Нечіткий елемент ξ задає функціонал можливості p_ξ, він зазвичай фіксований, змінною є множина A, що визначає подію $\xi \in A$, коротше – подію A.

Другий клас утворюють події вигляду $x \in \mathrm{A}$, де $x \in X$, A – нечітка множина. Можливість події:

$$P(x \in \mathrm{A}) = \mu_\mathrm{A}(x).$$

Третій клас – події вигляду $\xi \in A$, де ξ – нечіткий елемент, A – нечітка множина. Можливість події:

$$P(\xi \in A) = p_\xi(\mu_\mathrm{A}) = \sup_{x\in X} \min(\mu_\mathrm{A}(x), \xi(x)).$$

Зазвичай ξ фіксований, тому μ_A називають характеристичною функцією нечіткої події $\xi \in \mathrm{A}$.

Розглянемо тепер питання про незалежність та умовну можливість (необхідність) для подій.

Нехай (X, $\mathbf{A}$, P) – можливісний простір.

Події $A, B \in \mathbf{A}$ назвемо P-незалежними (за можливістю), якщо $P(A \cap B) = \min(P(A), P(B))$.

Умовною відносно події B можливістю події A назвемо клас всіх розв'язків $P(A|B)$ рівняння $\min(P(A|B), P(B)) = P(A \cap B)$ – варіантів умовної можливості.

Подія A *P-незалежна** від події B, якщо існує варіант умовної можливості $P(A|B) = P(A)$.

Події A і B назвемо *P-незалежними**, якщо A P-незалежна* від B та B P-незалежна* від A.

Теорема 5. A P-незалежна* від $B \Leftrightarrow$ події A і B P-незалежні* $\Leftrightarrow$ події A і B P-незалежні.

Незалежність щодо необхідності розглядають аналогічно розгляду незалежності для можливості.

Нехай $(X, \mathbf{A}, N)$ – необхідніcний простір.

Події $A, B \in \mathbf{A}$ назвемо N-незалежними (за необхідністю), якщо $N(A \cup B) = \max(N(A), N(B))$.

Умовною відносно події B необхідністю події A назвемо клас всіх розв'язків $N(A|B)$ рівняння $\max(N(A|B), N(B)) = N(A \cup B)$ – варіантів умовної необхідності.

Подія A *N-незалежна** від події B, якщо існує варіант умовної необхідності $N(A|B) = N(A)$.

Події A і B *N-незалежні**, якщо A N-незалежна* від B та B N-незалежна* від A.

Теорема 6. A N-незалежна* від $B \Leftrightarrow$ події A і B N-незалежні* $\Leftrightarrow$ події A і B N-незалежні.

Подібним чином розглядаємо P-незалежність та N-незалежність для нечітких подій.

Нечіткі події A та B назвемо P-незалежними, якщо $p(\mu_A \circ \mu_B) = p(\mu_A) \circ p(\mu_B)$.

Умовною відносно нечіткої події B можливістю нечіткої події A назвемо клас всіх розв'язків $p(\mu_A | \mu_B)$ рівняння $\min(p(\mu_A | \mu_B), p(\mu_B)) = p(\mu_A \circ \mu_B)$.

Для нечітких подій вводиться поняття *P-незалежності**, при цьому виконується аналог теореми 5.

Поняття N-незалежності, *N-незалежності** та умовної необхідності розглядаються аналогічно.

Події назвемо *цілком незалежними*, якщо вони P-незалежні та N-незалежні.

3. Нечіткі предикати

Нехай $(X, 2^X, P)$ – можливісний простір із множиною елементарних подій X, $(X, 2^X, N)$ – відповідний йому необхіднісний простір, $\xi : X \to [0,1]$ – канонічний нечіткий елемент на просторах.

Під *предикатом* на множині A розуміють функцію вигляду $p : A \to \{T, F\}$, де $\{T, F\}$ – множина істиннісних значень.

Область істинності предиката p – це множина $T_p = \{d \in A \,|\, p(d) = T\}$, вона однозначно визначає предикат, тому множину всіх предикатів на A можна трактувати як 2^A.

Нехай $p : X \times D \to \{T, F\}$ – предикат на $X \times D$.

Параметризовану за нечітким елементом ξ функцію $p^\xi : D \to \{T, F\}$, значення якої задається умовою $p^\xi(d) = p(\mathrm{pr}_1(\xi), d)$, назвемо *нечітким предикатом* з нечітким елементом ξ, визначеним на множині D. Предикат p назвемо *базовим* для нечіткого предиката p^ξ.

Враховуючи ізоморфізм 2^D та множини всіх предикатів $D \to \{T, F\}$, нечіткий предикат p^ξ можна трактувати як нечітку множину $X \to (D \to \{T, F\})$, тобто як $X \to 2^D$. Таку нечітку множину назвемо *областю істинності* нечіткого предиката p^ξ, будемо її позначати T_{p^ξ}: $T_{p^\xi} = \{d \in D \,|\, p^\xi(d) = T\}$.

Питання про істинність чи хибність твердження $p^\xi(d)$ залежить від нечіткої величини ξ, тому залучимо до розгляду можливість та необхідність події $\{p^\xi(d)\}$. Розглянемо простір подій $(\Omega^*, 2^{\Omega^*})$ із множиною $\Omega^* = \bigcup\limits_{d \in D} (\{p^\xi(d)\} \cup \{\neg p^\xi(d)\})$ елементарних подій. Події $\{p^\xi(d)\}$ та $\{d \in T_{p^\xi}\}$ еквівалентні, тому події $\{\neg p^\xi(d)\}$ та $\{d \notin T_{p^\xi}\}$ теж еквівалентні. Таким чином, простір $(\Omega^*, 2^{\Omega^*})$ еквівалентний простору $(\Omega, 2^\Omega)$ із множиною елементарних подій $\Omega = \bigcup\limits_{d \in D} (\{d \in T_{p^\xi}\} \cup \{d \notin T_{p^\xi}\})$.

Позначимо міри можливості й необхідності в просторах $(\Omega^*, 2^{\Omega^*})$ та $(\Omega, 2^\Omega)$ як P^{Ω^*}, N^{Ω^*} та P^Ω, N^{Ω^*}.

Теорема 7. Можливість та необхідність подій $\{p^\xi(d)\}$ і $\{\neg p^\xi(d)\}$ задаються так:

$$\mathrm{P}^{\Omega^*}(\{p^\xi(d)\}) = \mu_{T_{p^\xi}}(d);$$

$$\mathrm{N}^{\Omega^*}(\{p^\xi(d)\}) = \theta(\mu_{D \setminus T_{p^\xi}}(d));$$

$$\mathrm{P}^{\Omega^*}(\{\neg p^\xi(d)\}) = \theta(N(\{x \,|\, d \in T_p(x)\}));$$

$$\mathrm{N}^{\Omega^*}(\{\neg p^\xi(d)\}) = \theta^{-1}(\mu_{T_{p^\xi}}(d)).$$

Тут $\theta : [0,1] \to [0,1]$ – бієкція, що задає зв'язок між шкалами можливості та необхідності.

Виражаючи можливість та необхідність події $\{p^\xi(d)\}$ через ξ, отримуємо:

Теорема 8. $\mathrm{P}^{\Omega^*}(\{p^\xi(d)\}) = \sup\limits_{t \in \{x \,|\, p(x,d)\}} \xi(t)$;

$$\mathrm{N}^{\Omega^*}(\{p^\xi(d)\}) = \inf_{t \in \{x \,|\, \neg p(x,d)\}} \theta^{-1}(\xi(t)).$$

Введемо логічні операції над нечіткими предикатами. Задамо логічні зв'язки $\vee$, $\&$, $\neg$ над нечіткими предикатами p^ξ та p^η з різними нечіткими елементами й одним і тим же базовим предикатом.

Нечіткі предикати $p^\xi \vee p^\eta$, $p^\xi \& p^\eta$, $\neg p^\xi$ мають вигляд $D \to \{T, F\}$, вони визначаються так:

$(p^\xi \vee p^\eta)(d) = p^\xi(d) \vee p^\eta(d)$;

$(p^\xi \& p^\eta)(d) = p^\xi(d) \,\&\, p^\eta(d)$;

$(\neg p^\xi)(d) = \neg(p^\xi(d))$.

Теорема 9. $P^{\Omega^*}(\{p^\xi(d)\vee p^\eta(d)\}) =$
$= \max(P^{\Omega^*}(\{p^\xi d)\}), P^{\Omega^*}(\{p^\eta(d)\}))$,
$N^{\Omega^*}(\{p^\xi(d)\vee p^\eta(d)\}) \ge \max(N^{\Omega^*}(\{p^\xi(d)\}), N^{\Omega^*}(\{p^\eta(d)\}))$,
$P^{\Omega^*}(\{p^\xi(d)\,\&\,p^\eta(d)\}) \le \min(P^{\Omega^*}(\{p^\xi(d)\}), P^{\Omega^*}(\{p^\eta(d)\}))$,
$N^{\Omega^*}(\{p^\xi(d)\,\&\,p^\eta(d)\}) = \min(N^{\Omega^*}(\{p^\xi(d)\}), N^{\Omega^*}(\{p^\eta(d)\}))$.

Питання залежності та незалежності нечітких предикатів відносно мір можливості та необхідності розглядалось в [4, 6]. Зокрема, показано:

Теорема 10. 1) p^ξ та p^η є *P*-незалежними $\Leftrightarrow$ $\neg p^\xi$ та $\neg p^\eta$ є *N*-незалежними.

2) p^ξ та p^η є *N*-незалежними $\Leftrightarrow$ $\neg p^\xi$ та $\neg p^\eta$ є *P*-незалежними.

Логічні операції $\vee$ та & над нечіткими предикатами p^ξ та q^ξ з різними базовими предикатами й одним і тим же нечітким елементом задаємо так. Нечіткі предикати $(p\vee q)^\xi$ та $(p\,\&\,q)^\xi$ визначаються відповідно базовими предикатами $p\vee q$ та $p\&q$.

Операції квантифікації для нечітких предикатів доцільно вводити так, щоб мати змогу описувати нечіткі квантори типу "майже всі", "багато" і т.п.

Нехай $p^Q(d) = Qz\,p^\xi(z,d)$ – нечіткий предикат, отриманий з нечіткого p^ξ операцією квантифікації Q за змінною z. Квантор Q можна розглядати як деяку характеристику області істинності $p^\xi(z,d)$ при фіксованому даному d. Істинність $p^Q(d)$ тоді означає істинність твердження "при фіксованому d область істинності $p^\xi(z,d)$ має властивість Q".

Нехай η – канонічний нечіткий елемент можливісного простору $(Y, 2^Y, P^Y)$, Q – деякий (чіткий) предикат $Q: Y\times 2^Z \to \{T,F\}$,

Нечіткий предикат $Q^\eta: (Y\to[0,1])\times 2^Z \to \{T,F\}$, визначений базовим предикатом Q, назвемо *нечітким квантифікатором* на множині Z.

Нехай $p^\xi(z,d)$ – нечіткий предикат на $Z\times D$, ξ – канонічний нечіткий елемент можливісного простору $(X, 2^X, P^X)$; Q^η – нечіткий квантифікатор на Z.

Результат квантифікації нечітким квантифікатором Q^η за змінною z нечіткого предиката $p^\xi(z,d)$ – це нечіткий $p^{Q^\eta,\xi}: (Y\to[0,1])\times(X\to[0,1])\times D\to\{T,F\}$:

$$p^{Q^\eta,\xi}(d) = Q^\eta z\,p^\xi(z,d) = Q^\eta(\{z\,|\,p^\xi(z,d)\}).$$

Можливість і необхідність подій $\{p^{Q^\eta,\xi}(d)\}$ та $\{\{z\,|\,p^\xi(z,d)\}\in T_{Q^\eta}\}$ рівні.

Конкретизуючи, визначимо нечіткі квантори існування $\exists^\eta$ та узагальнення $\forall^\eta$.

Квантифікатори $\exists^\eta$ та $\forall^\eta$ задаються відповідно базовими предикатами $\mathrm{Ex}: Y\times 2^Z \to \{T,F\}$ та $\mathrm{Al}: Y\times 2^Z \to \{T,F\}$:

$$\mathrm{Ex}(x,A) = \begin{cases} T, & A\neq\varnothing, \\ F, & A=\varnothing, \end{cases} \quad \mathrm{Al}(x,A) = \begin{cases} T, & A = Z, \\ F, & A\subset Z. \end{cases}$$

Нечіткі предикати $p^{\exists^\eta,\xi}$ та $p^{\forall^\eta,\xi}$ – результати квантифікації нечіткого предиката p^ξ нечіткими кванторами $\exists^\eta$ та $\forall^\eta$ за змінною z, – задаємо так:

$$p^{\exists^\eta,\xi}(d) = \exists^\eta z\,p^\xi(z,d) = \exists^\eta(\{z\,|\,p^\xi(z,d)\}),$$

$$p^{\forall^\eta,\xi}(d) = \forall^\eta z\,p^\xi(z,d) = \forall^\eta(\{z\,|\,p^\xi(z,d)\}).$$

Для нечітких предикатів можна природним чином визначити традиційні чіткі квантори $\exists z$ та $\forall z$.

Квантори $\exists z$ та $\forall z$ нечіткому предикату $p^\xi(z,d)$, заданому базовим предикатом $p(x,z,d)$, відповідно зіставляють нечіткі предикати $(\exists z\,p)^\xi(d)$ та $(\forall z\,p)^\xi(d)$, задані базовими предикатами $(\exists z\,p)(x,d)$.

4. Нечіткі реляції

На основі логіки нечітких предикатів побудуємо алгебру нечітких реляцій.

Нехай $D = D_1\times\ldots\times D_n$, де множини $D_1, \ldots, D_n$ – трактуємо як домени. Нехай $(Y, 2^Y, P^Y)$ – можливісний простір із множиною елементарних подій Y та визначеною на 2^Y мірою можливості P^Y.

Нечіткою реляцією (відношенням) на D назвемо нечітку множину $R: Y\to 2^D$ з характеристичною функцією $\mu_R = P^Y(R^{-1})$. Таку μ_R назвемо характеристичною функцією нечіткої реляції R.

Нехай A – деяка множина імен. Задамо відображення $\tilde n: \mathrm{A}\to\{D_1,\ldots,D_n\}$ так: $\mathrm{A}_i = \tilde n^{-1}(\{D_i\})$, де $\mathrm{A}_i\cap\mathrm{A}_j = \varnothing$ для $i\neq j$, усі $\mathrm{A}_i\neq\varnothing$ та $\bigcup_{i=1}^n \mathrm{A}_i = \mathrm{A}$

Пару (A, D_i), будемо називати *атрибутом*.

Символ A_i використовуємо як ім'я домену D_i.

Схемою нечіткої реляції $R: Y\to 2^D$, де $D = D_1\times\ldots\times D_n$, назвемо кортеж $(R, A_1, \ldots, A_n)$, де $A\in A_i$, який також позначаємо $(A_1, \ldots, A_n)$.

Нечіткі реляції R_1 та R_2 зі схемами $(A_1,\ldots,A_k)$ та $B_1,\ldots,B_l)$ *сумісні*, якщо $k = l$ та існує бієкція $\bar s: \{1,\ldots,k\}\to\{1,\ldots,l\}$ така: $\tilde n(A_i) = \tilde n(B_{\bar s(i)})$.

Введемо операції над нечіткими реляціями: $\cup$, $\cap$, \, проекції, добутку, $\tilde\theta$-селекції, $\tilde\theta$-з'єднання, ділення.

Операції $\cup$, $\cap$, \ для нечітких реляцій R_1 та R_2, визначених на домені D, введемо як обмежені на сумісні нечіткі реляції R_1 та R_2 операції об'єднання, перетину, різниці нечітких множин.

Проекцією нечіткої реляції R_1 зі схемою $(A_1,\ldots,A_m)$ відносно схеми $(A_{i_1},\ldots,A_{i_l})$, де $l\ge 1$, $\{i_1,\ldots,i_l\}\subseteq\{1,\ldots,m\}$, назвемо нечітку реляцію $R_1[A_{i_1},\ldots,A_{i_l}]: Y\to 2^{D_{i_1}\times\ldots\times D_{i_l}}$ таку:

$$R_1[A_{i_1},\ldots,A_{i_l}](y) = \{(r_{i_1},\ldots,r_{i_l})\,|\,(r_1,\ldots,r_m)\in R_1(y)\}.$$

Добутком нечітких реляцій R_1 та R_2, заданих на доменах $D^1 = D_{i_1} \times ... \times D_{i_k}$ та $D^2 = D_{j_1} \times ... \times D_{j_l}$, назвемо нечітку реляцію $R_1 \otimes R_2 : Y \to 2^{D^1 \times D^2}$, яка задається так: $R_1 \otimes R_2 (y) =$
$= \{(r_1,\ldots,r_{k+l})\} | (r_1,\ldots,r_k) \in R_1(y_1), (r_{k+1},\ldots,r_{k+l}) \in R_2(y))\}$.

Операція добутку нечітких реляцій дозволяє "з'єднувати" дві несумісні нечіткі реляції.

$\tilde{\theta}$*-селекцією* нечіткої реляції R зі схемою $(A_1,\ldots,A_m)$, визначеної на $D = D_1 \times \ldots \times D_m$, за нечітким предикатом $\tilde{\theta}$, визначеним на $D_{i_1} \times ... \times D_{i_k}$, де $\{i_1,\ldots,i_k\} \subseteq \{1,\ldots,m\}$, назвемо нечітку реляцію $R[\tilde{\theta}\ A_{i_1},...,A_{i_k}] : Y \to 2^D$, що задається так:

$$R[\tilde{\theta}\ A_{i_1},...,A_{i_k}](y) = R[A_{i_1},...,A_{i_k}](y) \cap T_{\tilde{\theta}}(y).$$

Результат операції $\tilde{\theta}$-селекції можна визначити в термінах операцій над нечіткими множинами: $R[\tilde{\theta}\ A_{i_1},...,A_{i_k}] = R[A_{i_1},...,A_{i_k}] \cap T_{\tilde{\theta}}$.

Операція $\tilde{\theta}$-селекції дозволяє вибирати з нечіткої реляції нечітку підмножину, що задовольняє умові, заданій нечітким предикатом $\tilde{\theta}$.

Нехай на доменах D^1 та D^2 задані нечіткі реляції R_1 та R_2 зі схемами $(A_1,\ldots,A_m)$ та $(B_1,\ldots,B_n)$. Позначимо $A = (A_{i_1},...,A_{i_k})$ і $B = (B_{j_1},...,B_{j_l})$ деякі кортежі імен атрибутів нечітких реляцій R_1 та R_2. Нехай $D_{i_1},...,D_{i_k}$ – домени з іменами $A_{i_1},...,A_{i_k}$, $D_{j_1},...,D_{j_l}$ – домени з іменами $B_{j_1},...,B_{j_l}$.

Нехай на множині $D_{i_1} \times ... \times D_{i_k} \times D_{j_1} \times ... \times D_{j_l}$ визначено нечіткий предикат $\tilde{\theta}$.

$\tilde{\theta}$*-з'єднанням* нечітких реляцій R_1 та R_2 назвемо реляцію $R_1 \left[A\tilde{\theta}B \right] R_2 : Y \to 2^{D^1 \times D^2}$, задану так:

$$R_1 \left[A\tilde{\theta}B \right] R_2 = (R_1 \otimes R_2) \left[\tilde{\theta}A \circ B \right].$$

Для нечітких реляцій R_1 та R_2 зі схемами $R_1(A_1,\ldots,A_m)$ та $R_2(B_1,\ldots,B_n)$ позначимо A та B деякі кортежі імен з множин $\{A_1,\ldots,A_m\}$ та $\{B_1,\ldots,B_n\}$; нехай $\overline{A}$ та $\overline{B}$ – множини імен, що не ввійшли до A та B.

Операцію *ділення* $[A \div B]$ вводимо так:

$$R_1 [A \div B] R_2 = R\left[\overline{A}\right] \setminus ((R\left[\overline{A}\right] \otimes R[B]) \setminus R)[A].$$

Для адекватної програмної реалізації нечітких реляцій і операцій над ними введемо важливе поняття *подання* нечіткої реляції.

Під нечіткою реляцією надалі розуміємо відображення $R : X \to 2^{D \times D_1 \times ... \times D_n}$ із можливісного простору $(X, 2^X, P)$ та відповідного йому необхідніс-ного простору $(X, 2^X, N)$, причому областю значень R є скінченна система скінченних множин.

Поданням нечіткої реляції $R : X \to 2^{D \times D_1 \times ... \times D_n}$ назвемо четвірку $(A, I, \boldsymbol{M}, \boldsymbol{N})$ таку:

$A = \{A_1,\ldots,A_n\}$, де $A_i \cap A_j = \varnothing$ при $i \neq j$, $\bigcup\limits_i A_i = X$ та для всіх $x_1, x_2 \in A$ маємо $R(x_1) = R(x_2)$;

$I = \{I_1,\ldots,I_n\}$, де $I_i = R(x)$, $x_2 \in A_i$ та $I_i \neq I_j$ при $i \neq j$;

$\boldsymbol{M} = \{\mu_1,\ldots,\mu_n\}$, де $\mu_i = P(\{I_i = R(\xi)\})$;

$\boldsymbol{N} = \{\psi_1,\ldots,\psi_n\}$, де $\psi_i = N(\{I_i = R(\xi)\})$.

I – це область значень R, A – розбиття X на класи еквівалентності відносно значень R.

Трактуючи R як нечіткий елемент на I із розподілом $\phi^R(I_i) = P(\{R(\xi) = I_i\})$, значення μ_i та ψ_i тоді дають можливість і необхідність події $\{R(\xi) = I_i\}$.

Нечіткі реляції $R_1(\xi)$ та $R_2(\eta)$ із областями значень 2^{D_1} та 2^{D_2}:

– *P-незалежні*, якщо для всіх $I_1 \subset D_1$, $I_2 \subset D_2$
$P(\{R_1(\xi) \supseteq I_1 \wedge R_2(\eta) \supseteq I_2\}) =$
$= \min(P(\{R_1(\xi) \supseteq I_1\}), P(R_2(\eta) \supseteq I_2))$

– *N-незалежні*, якщо для всіх $I_1 \subset D_1$, $I_2 \subset D_2$
$N(\{R_1(\xi) \cap I_1 \neq \varnothing \vee R_2(\eta) \cap I_2 \neq \varnothing\}) =$
$= \max(N(\{R_1(\xi) \cap I_1 \neq \varnothing\}), N(\{R_2(\eta) \cap I_2 \neq \varnothing)\})$.

Для нечітких реляцій маємо:

Теорема 11. $R_1(\xi)$ та $R_2(\eta)$ є *P*-незалежними $\Leftrightarrow$ $D_1 \setminus R_1(\xi)$ та $D_2 \setminus R_2(\eta)$ є *N*-незалежними.

2. $R_1(\xi)$ та $R_2(\eta)$ *є N*-незалежними $\Leftrightarrow$ $D_1 \setminus R_1(\xi)$ та $D_2 \setminus R_2(\eta)$ є *P*-незалежними.

Нечіткі реляції $R_1(\xi)$ та $R_2(\eta)$ назвемо *цілком незалежнимим*, або просто незалежними, якщо вони як *P*-незалежні, так і *N*-незалежні.

Наслідок. $R_1(\xi)$ та $R_2(\eta)$ цілком незалежні $\Leftrightarrow$ $D_1 \setminus R_1(\xi)$ та $D_2 \setminus R_2(\eta)$ цілком незалежні.

Опираючись на визначення нечіткої реляції, наведене на початку розділу, уточнимо операції над нечіткими реляціями так.

Операція об'єднання $R_\cup : X \times X \to 2^{D \times D_1 \times ... \times D_n}$:

$R_\cup(x_1, x_2) = R_1(x_1) \cup R_2(x_2)$.

Операція перетину $R_\cap : X \times X \to 2^{D \times D_1 \times ... \times D_n}$:

$R_\cap(x_1, x_2) = R_1(x_1) \cap R_2(x_2)$.

Операція різниці $_\setminus R_\setminus : X \times X \to 2^{D \times D_1 \times ... \times D_n}$:

$R_\setminus(x_1, x_2) = R_1(x_1) \setminus R_2(x_2)$.

Операція добутку $R_\times : X \times X \to 2^{D \times D_1 \times ... \times D_n}$:

$R_\times(x_1, x_2) = R_1(x_1) \times R_2(x_2) = \{(r_1, r_2) \mid r_1 \in R_1, r_2 \in R_2\}$.

Операція проекції $R[D] : X \to 2^D$ нечіткої реляції R за змінною d (тут $R : X \to 2^{D \times D_1}$):

$R[D](x) = \{d \mid d \in D, \exists\ d_1 \in D_1 : (d_1, d_2) \in R(x)\}$.

Операція $R[\pi^\xi] : X \times X \to 2^D$ селекції нечіткої реляції R за нечітким предикатом π^ξ:

$R[\pi^\xi](X_1, Xx_2) = \{d \mid d \in R(x_1), \pi(x_2, d)\}$.

Тут $R : X \to 2^D$, $\pi : X \times D \to \{0, 1\}$, $\pi^{\xi}(D) = \pi(\xi, D)$.

Якщо нечіткі реляції R_1 та R_2 P-незалежні, то за їх поданнями ρ_1 та ρ_2, можна збудувати подання $\rho_{\cup}, \rho_{\cap}, \rho_{-}, \rho_{\times}$ нечітких реляцій $R_{\cup}, R_{\cap}, R_{-}, R_{\times}$.

За поданням ρ нечіткої реляції R можна збудувати подання $\rho_{[D]}$ нечіткої реляції $R_{[D]}$.

Якщо пара $(R, T_{\pi^{\xi}})$ – P-незалежна, то за поданням ρ нечіткої реляції R можна збудувати подання $\rho_{\pi^{\xi}}$ нечіткої реляції $R[\pi^{\xi}]$.

Висновки

На базі теоретико-можливісного підходу в роботі досліджено поняття нечіткої множини, нечіткого предиката і нечіткої реляції. Розглянуто моделювання нечітких множин та нечітких предикатів за допомогою теоретико-можливісних методів. Описано операції над нечіткими множинами, які відповідають традиційним операціям над такими множинами в теорії Л. Заде. Розглянуто операції над нечіткими предикатами – логічні зв'язки та квантори. На основі логіки нечітких предикатів описана алгебра нечітких реляцій. Сигнатурою цієї алгебри є операції об'єднання, перетину, різниці, добутку, проекції та селекції.

Теоретико-можливісний апарат дозволяє ефективно змоделювати нечіткість і невизначеність та оцінити їх за допомогою мір можливості й необхідності. Запити за нечіткими критеріями до реляційних баз даних доцільно формулювати у вигляді нечітких предикатів, а результат запитів – у вигляді нечітких множин та нечітких реляцій. На базі алгебри нечітких реляцій і моделей операцій, виражених через подання нечіткої реляції, планується розробити програмне забезпечення для ефективної обробки запитів за нечіткими критеріями.

Список використаних джерел

1. *Прад А.* Теория возможностей / А. Прад, Д. Дюбуа. – М.: Радио и связь, 1990. – 288 с.
2. *Пытьев Ю. П.* Возможность. Элементы теории и применения / Ю.П. Пытьев. – М.: Едиториал УРСС, 2000. – 194 с.
3. *Пытьев Ю. П.* Возможность как альтернатива вероятности. Математические и эмпирические основы, применение / Ю.П. Пытьев. – М.: Физматлит, 2007. – 464 с.
4. *Бєлов Ю.А.* Логіка нечітких предикатів / Ю.А. Бєлов, Л.М. Малютенко, М.В. Польща // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія: фізико-математичні науки. – 2004. – Спецвипуск. – С. 20–25.
5. *Касьянюк В.С.* Моделювання нечітких множин засобами теорії можливостей / В.С. Касьянюк, Л.М. Малютенко, М.В. Польща // Наукові записки НаУКМА. Том 138. Комп'ютерні науки. – 2012. – С. 30–34.
6. *Касьянюк В.С.* Побудова логіки нечітких предикатів та алгебри нечітких реляцій на базі теоретико-можливісного підходу / В.С. Касьянюк, Л.М. Малютенко, М.В. Польща // Наукові записки НаУКМА. Том 112. Комп'ютерні науки. – 2010. – С. 103–109.
7. *Zadeh L.* Fuzzy sets / L. Zadeh // Information and Control. – 1965. – **8**. – P. 338–353.

References

1. PRADE, H., DUBOIS, D. (1988). Possibility Theory. – New York: Plenum Press.
2. PYT'EV, Y. (2000). Possibility. Elements of Theory and Applications. – Moscow: Editorial URSS.
3. PYT'EV, Y. (2007). Possibility as an Alternative to Probability. Mathematical and empirical foundations, application. – Moscow: Fizmatlit.
4. BELOV, Y., MALUTENKO, L., POLSHCHA, M. (2004). Logic of fuzzy predicates. In *Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series: Physics & Mathematics.* Special Issue. P. 20–25.
5. KASYANYUK, V., MALUTENKO, L., POLSHCHA, M. (2012). Modeling of fuzzy sets in possibility theory. In *Scientific Notes of NaUKMA. Vol. 138. Computer Science.* P. 30–34.
6. KASYANYUK, V., MALUTENKO, L., POLSHCHA, M. (2010). Construction of fuzzy predicates logic and fuzzy relational algebra on the basis of theoretic-possibility approach. In *Scientific Notes of NaUKMA. Vol. 112. Computer Science.* P. 103–109.
7. ZADEH, L. (1965). Fuzzy sets. In *Information and Control*. **8**. P. 338–353.

Надійшла до редколегії 29.09.2014

УДК 519.21:62

Кінаш А.В.[1] аспірант
Чабанюк Я.М.[2] д.ф.-м.н.
Хімка У.Т.[3] к.ф.-м.н.

Асимптотична дисипативність випадкової еволюції з імпульсним збуренням

[1] Національний університет "Львівська політехніка", 79000, м.Львів, вул. Степана Бандери, 12,
e-mail: anastasiiakinash@gmail.com
[2] Львівський державний університет безпеки життєдіяльності,м.Львів, вул.Клепарівська, 35,
e-mail: yaroslav _ chab@yahoo.com
[3] Національний університет "Львівська політехніка", 79000, м.Львів, вул. Степана Бандери, 12,
e-mail: ulyana.himka@gmail.com

Kinash A.V.[1], postgraduate student
Chabaniuk Ya.M.[2], prof.
Khimka U.T.[3], PhD

Asymptotic dissipativity of the random evolution with impulse perturbation

[1] National university "L'viv Polytechnic", 79000, L'viv, Stepana Banderu str., 12,
e-mail: anastasiiakinash@gmail.com
[2] L'viv state university of life safety, L'viv, Kleparivs'ka str., 35
e-mail: yaroslav _ chab@yahoo.com
[3] National university "L'viv Polytechnic", 79000, L'viv, Stepana Banderu str., 12,
e-mail: ulyana.himka@gmail.com

Отримано достатні умови асимптотичної дисипативності випадкової еволюції з імпульсним збуренням та Марковськими переключеннями

Ключові слова: асимптотична дисипативність, процес з імпульсним збуренням, гранична еволюція, генератор трьохкомпонентного марковського процесу.

In the paper are considered dissipativity of the random evolution with impulse perturbation as a term with Markov switching of evolution and of process with independent increments that generates an impulse process. The form of the asymptotic process through small parameter series and solution of the singular perturbation problem for the generator of corresponding three-component Markov process was established. It was obtained sufficient conditions of asymptotic dissipativity of the random evolution in the terms of Lyapunov function properties of averaged system using stationary distribution of Markov switching process. Conditions of exponential stability of the averaged system turned out crucial and the condition of balance on the first moments of impulse process necessary for construction of a generator of the limiting process. At the same time assumption of the ergodicity of Markov switching process in a standard state space of the process is essential. Basic methods of proof are described in the V.S. Korolyuk, N. Limnios monograph about stochastic system in the phase dimensional space. Continuous stochastic approximation procedure with impulse perturbation under balance condition is studied in Ya. M. Chabanyuk works.

Key Words: asymptotic dissipativity, process with impulse perturbation, limiting evolution, generator of the three-component Markov process.

Статтю представив д.т.н., проф. Акіменко В.В.

Стохастична еволюційна система з імпульсним збуренням задається стохастичним диференціальним рівнянням [1]:

$$du^{\varepsilon}(t) = C\left(u^{\varepsilon}(t); x(t/\varepsilon^4)\right)dt + \varepsilon d\eta^{\varepsilon}(t), u^{\varepsilon}(t) \in R^d \quad (1)$$

де $u(t)$ – випадкова еволюція, $t \geq 0$; $C(u;x)$ – функція регресії; $x(t)$ – марковський процес на просторі $(X, \boldsymbol{X})$ [2] зі стаціонарним розподілом $\pi(B), B \in \boldsymbol{X}$, генератором $\boldsymbol{Q}$ і потенціалом до нього $\boldsymbol{R}_0$.

Генератор марковського процесу $x(t/\varepsilon^4)$, $t \geq 0$, має вигляд

$$\boldsymbol{Q}\varphi(x) = q(x)\int_X Q(x, dy)[\varphi(y) - \varphi(x)]. \quad (2)$$

Імпульсний процес збурень $\eta^{\varepsilon}(t), t \geq 0$ визначений співвідношенням

© А.В. Кінаш, Я.М. Чабанюк, У.Т. Хімка, 2014

$$\eta^{\varepsilon}(t) = \int_0^t \eta^{\varepsilon}\left(ds; x\left(s/\varepsilon^2\right)\right),$$

де сімейство процесів з незалежними приростами задається генераторами

$$\boldsymbol{\Gamma}_u^{\varepsilon}(x)\varphi(u,w,x) = \\ = \varepsilon^{-4}\int_R [\varphi(u+\varepsilon^2 v, w, x) - \varphi(u,w,x)]\Gamma(dv,x), \quad (3)$$

$$\boldsymbol{\Gamma}_w^{\varepsilon}(x)\varphi(u,w,x) = \\ = \varepsilon^{-4}\int_R [\varphi(u,w+\varepsilon^2 v, x) - \varphi(u,w,x)]\Gamma(dv,x). \quad (4)$$

Генератори (3) та (4) на тест-функціях $\varphi(w) \in C^3(R)$ мають представлення

$$\boldsymbol{\Gamma}^{\varepsilon}(x)\varphi(w) = \varepsilon^{-2}\boldsymbol{\Gamma}_1(x)\varphi(w) + \\ + \boldsymbol{\Gamma}_2(x)\varphi(w) + \gamma^{\varepsilon}(x)\varphi(w), \quad (5)$$

де

$$\boldsymbol{\Gamma}_1(x)\varphi(w) = b_1(x)\varphi'(w), \quad (6)$$

$$\boldsymbol{\Gamma}_2(x)\varphi(w) = \frac{1}{2}b_2(x)\varphi''(w), \quad (7)$$

Введемо позначення

$$\tilde{\boldsymbol{L}}(x)\varphi(u,w) = \int_X C(u,x)\varphi'_u(u,w)\pi(dx) + \\ + \int_X b_1(x)\boldsymbol{R}_0 b_1(x)\varphi''_u(u,w)\pi(dx) + \\ + \int_X b_2(x)\varphi''_u(u,w)\pi(dx) - \\ -[\boldsymbol{\Gamma}_1(x)\boldsymbol{R}_0\boldsymbol{\Gamma}_1(x) + \boldsymbol{\Gamma}_2(x) + \boldsymbol{C}(x)]\varphi(u,w).$$

Гранична еволюція системи (1) є розв'язком диференціального рівняння

$$du(t) = a(u)dt + \sigma dW(t), \quad (8)$$

де $W(t)$ – вінерівський процес, $a(u)$ має вигляд

$$a(u) = \int_X C(u,x)\pi(dx).$$

Гранична дифузія σ задана співвідношенням $\sigma\cdot\sigma^* = B$, де

$$B = 2\int_X b_1(x)\boldsymbol{R}_0 b_1(x)\pi(dx) + \int_X b_2(x)\pi(dx),$$

$$b_1(x) = \int_R v\Gamma(dv,x), \quad (9)$$

$$b_2(x) = \int_R v^2\Gamma(dv,x). \quad (10)$$

Нехай також виконується умова балансу

$$\int_X b_1(x)\pi(dx) \equiv 0. \quad (11)$$

та визначений оператор

$$\boldsymbol{C}(x)\varphi(u,w,x) = C(u,x)\varphi'(u,w,x). \quad (12)$$

Означення 1. Система (1) називається асимптотично дисипативною, якщо дисипативною є її гранична еволюція (8) [3].

Теорема.

Нехай існує функція Ляпунова $V(u) \in C^3(R^d)$ системи

$$du/dt = a(u), \quad (13)$$

що задовольняє умови:

$$C1: |\boldsymbol{\Gamma}_1(x)\boldsymbol{R}_0[\tilde{\boldsymbol{L}}(x)V(u)]| < M_1 V(u), M_1 > 0;$$
$$C2: |\boldsymbol{\Gamma}_1^u(x)\boldsymbol{R}_0[\boldsymbol{\Gamma}_1^u(x)V(u)]| < M_2 V(u), M_2 > 0;$$
$$C3: |\boldsymbol{\Gamma}_2(x)\boldsymbol{R}_0[\boldsymbol{\Gamma}_1(x)V(u)]| < M_3 V(u), M_3 > 0;$$
$$C4: |\boldsymbol{C}(x)\boldsymbol{R}_0[\boldsymbol{\Gamma}_1(x)V(u)]| < M_4 V(u), M_4 > 0;$$
$$C5: |\boldsymbol{\Gamma}_1^u(x)\boldsymbol{R}_0[\tilde{\boldsymbol{L}}(x)V(u)]| < M_5 V(u), M_5 > 0;$$
$$C6: |\boldsymbol{\Gamma}_2(x)\boldsymbol{R}_0[\boldsymbol{\Gamma}_1^u(x)V(u)]| < M_6 V(u), M_6 > 0;$$
$$C7: |\boldsymbol{C}(x)\boldsymbol{R}_0[\boldsymbol{\Gamma}_1^u(x)V(u)]| < M_7 V(u), M_7 > 0;$$
$$C8: |\boldsymbol{C}(x)\boldsymbol{R}_0[\tilde{\boldsymbol{L}}(x)V(u)]| < M_8 V(u), M_8 > 0;$$
$$C9: |\boldsymbol{\Gamma}_2(x)\boldsymbol{R}_0[\tilde{\boldsymbol{L}}(x)V(u)]| < M_9 V(u), M_9 > 0.$$

Нехай виконується умова балансу (11) та нерівності

$$a(u)V'(u) < c_1 V(u), \ \sup_{u\in R^d} \mathrm{P}\sigma(u)\mathrm{P} < c_2, \quad (14)$$

де $c_1 > 0$ та $c_2 > 0$.

Тоді система (1) асимптотично дисипативна.

Доведення теореми.

Лема 1. Генератор трьохкомпонентного марковського процесу

$$u^{\varepsilon}(t), \eta^{\varepsilon}(t), x(t/\varepsilon^4), t \ge 0$$

визначений співвідношенням

$$\boldsymbol{L}^{\varepsilon}(x)\varphi(u,w,x) = \varepsilon^{-4}\boldsymbol{Q}\varphi(u,w,x) + \\ + \boldsymbol{\Gamma}_w^{\varepsilon}(x)\varphi(u,w,x) + \boldsymbol{C}(x)\varphi(u,w,x) + \\ + \varepsilon\boldsymbol{\Gamma}_u^{\varepsilon}(x)\varphi(u,w,x), \quad (15)$$

де генератор марковського процесу $\boldsymbol{Q}$, визначений в (2) та $\boldsymbol{\Gamma}_u^{\varepsilon}(x)$ і $\boldsymbol{\Gamma}_w^{\varepsilon}(x)$ – генератори, представлені співвідношеннями (3) і (4).

Доведення. Генератор марковського процесу на збуреній тест-функції визначається зі співвідношення

$$\boldsymbol{L}^{\varepsilon}(x)\varphi(u,w,x) = \\ = \lim_{\Delta\to 0}\left[\boldsymbol{E}\left[\varphi(u^{\varepsilon}_{t+\Delta}, w^{\varepsilon}_{t+\Delta}, x^{\varepsilon}_{t+\Delta}) - \varphi(u,w,x)\right]\middle| u^{\varepsilon}(t) = \right. \\ \left. = u, w^{\varepsilon}(t) = w, x\left(t/\varepsilon^4\right) = x\right]/\Delta.$$

Додамо та віднімемо в умовному математичному сподіванні $\varphi(u, w_{t+\Delta}, x_{t+\Delta})$

$$\boldsymbol{E}[\varphi(u^{\varepsilon}_{t+\Delta}, w^{\varepsilon}_{t+\Delta}, x^{\varepsilon}_{t+\Delta}) - \varphi(u, w_{t+\Delta}, x_{t+\Delta})] - \\ - \boldsymbol{E}[\varphi(u, w_{t+\Delta}, x_{t+\Delta}) - \varphi(u,w,x)].$$

Розклад $u^{\varepsilon}_{t+\Delta}$ має вигляд

$$u^{\varepsilon}_{t+\Delta} = u + C(u,x)\Delta + \varepsilon\Delta w + o(\Delta).$$

Підставимо отриманий вираз в перший доданок умовного математичного сподівання

$$\boldsymbol{E}[\varphi(u + C(u,x)\Delta + \varepsilon\Delta w + o(\Delta), w^{\varepsilon}_{t+\Delta}, x^{\varepsilon}_{t+\Delta}) - \\ - \varphi(u, w^{\varepsilon}_{t+\Delta}, x^{\varepsilon}_{t+\Delta})].$$

Нехай $z = u + C(u,x)\Delta + o(\Delta)$.

Додамо та віднімемо $\varphi(z)$ в співвідношенні для умовного математичного сподівання

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{E}[\varphi(u^{\varepsilon}_{t+\Delta}, w^{\varepsilon}_{t+\Delta}, x^{\varepsilon}_{t+\Delta}) - \varphi(u, w_{t+\Delta}, x_{t+\Delta})] = \\ &= \boldsymbol{E}[\varphi(z + \varepsilon\Delta w, w^{\varepsilon}_{t+\Delta}, x^{\varepsilon}_{t+\Delta}) - \\ &-\varphi(z, w^{\varepsilon}_{t+\Delta}, x^{\varepsilon}_{t+\Delta})] + \\ &+\boldsymbol{E}[\varphi(z, w^{\varepsilon}_{t+\Delta}, x^{\varepsilon}_{t+\Delta}) - \varphi(u, w^{\varepsilon}_{t+\Delta}, x^{\varepsilon}_{t+\Delta})].\end{aligned}$$

Оскільки генератор $\boldsymbol{\Gamma}^{\varepsilon}_{w}(x)$ має вигляд

$$\boldsymbol{\Gamma}^{\varepsilon}_{w}(x)\varphi(w) = \lim_{\Delta\to 0}\big(\boldsymbol{E}[\varphi(w+\Delta w) - \varphi(w)]/\Delta\big),$$

для границі першого доданку отримаємо

$$\begin{aligned}&\lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{\Delta}\boldsymbol{E}[\varphi(z + \varepsilon\Delta w, w^{\varepsilon}_{t+\Delta}, x^{\varepsilon}_{t+\Delta}) - \varphi(z, w^{\varepsilon}_{t+\Delta}, x^{\varepsilon}_{t+\Delta})] = \\ &= \varepsilon\boldsymbol{\Gamma}^{\varepsilon}_{u}(x)\varphi(u, w, x).\end{aligned}$$

Розкладемо $\varphi(z, w_{t+\Delta}, x_{t+\Delta})$ за формулою Тейлора

$$\begin{aligned}&\varphi(u + C(u,x)\Delta + o(\Delta), w_{t+\Delta}, x_{t+\Delta}) = \varphi(u, w_{t+\Delta}, x_{t+\Delta}) + \\ &+\varphi'(u, w_{t+\Delta}, x_{t+\Delta})(C(u,x)\Delta + o(\Delta)) + o(\Delta).\end{aligned}$$

Підставивши отриманий розклад, маємо

$$\begin{aligned}&\lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{\Delta}\boldsymbol{E}[\varphi(z, w^{\varepsilon}_{t+\Delta}, x^{\varepsilon}_{t+\Delta}) - \varphi(u, w^{\varepsilon}_{t+\Delta}, x^{\varepsilon}_{t+\Delta})] = \\ &= \lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{\Delta}\boldsymbol{E}[\varphi'(u, w_{t+\Delta}, x_{t+\Delta})(C(u,x)\Delta + o(\Delta)) + o(\Delta)] = \\ &= C(u,x)\varphi'(u,w,x).\end{aligned}$$

А також,

$$\begin{aligned}&\lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{\Delta}\boldsymbol{E}[\varphi(u, w_{t+\Delta}, x_{t+\Delta}) - \varphi(u,w,x)] = \\ &= \varepsilon^{-4}\boldsymbol{Q}\varphi(u,w,x) + \boldsymbol{\Gamma}^{\varepsilon}_{w}(x)\varphi(u,w,x).\end{aligned}$$

Звідси,

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{L}^{\varepsilon}(x)\varphi(u,w,x) = \varepsilon^{-4}\boldsymbol{Q}\varphi(u,w,x) + \\ &+\boldsymbol{\Gamma}^{\varepsilon}_{w}(x)\varphi(u,w,x) + C(u,x)\varphi'(u,w,x) + \\ &+\varepsilon\boldsymbol{\Gamma}^{\varepsilon}_{u}(x)\varphi(u,w,x).\end{aligned}$$

Оскільки виконується співвідношення (12), то отримаємо генератор вигляду (15).

Лема 2. Генератор (15) допускає асимптотичне прдставлення

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{L}^{\varepsilon}(x)\varphi(u,w,x) = \varepsilon^{-4}\boldsymbol{Q}\varphi(u,w,x) + \\ &+\varepsilon^{-2}\boldsymbol{\Gamma}_1(x)\varphi(u,w,x) + \boldsymbol{\Gamma}_2(x)\varphi(u,w,x) + \\ &+\boldsymbol{C}(x)\varphi(u,w,x) + \varepsilon^{-1}\boldsymbol{\Gamma}^{u}_1(x)\varphi(u,w,x) + \\ &+\hat{\theta}^{\varepsilon}(x)\varphi(u,w,x),\end{aligned} \tag{16}$$

де

$$\hat{\theta}^{\varepsilon}(x) = \gamma^{\varepsilon}(x) + \theta^{\varepsilon}_{\eta}(x) + \varepsilon\boldsymbol{\Gamma}^{u}_2(x), \tag{17}$$

а $\boldsymbol{\Gamma}^{u}_1(x), \boldsymbol{\Gamma}^{u}_2(x)$ визначаються (6) і (7), відповідно.

Доведення.

Підставим у вираз генератора $\boldsymbol{L}^{\varepsilon}(x)\varphi(u,w,x)$

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{L}^{\varepsilon}(x)\varphi(u,w,x) = \\ &= \varepsilon^{-4}\boldsymbol{Q}\varphi(u,w,x) + \varepsilon^{-2}\boldsymbol{\Gamma}_1(x)\varphi(u,w,x) + \\ &+\boldsymbol{\Gamma}_2(x)\varphi(u,w,x) + \gamma^{\varepsilon}(x)\varphi(u,w,x) + \\ &+\boldsymbol{C}(x)\varphi(u,w,x) + \varepsilon^{-1}\boldsymbol{\Gamma}^{u}_1(x)\varphi(u,w,x) + \\ &+\varepsilon\boldsymbol{\Gamma}^{u}_2(x)\varphi(u,w,x) + \theta^{\varepsilon}_{\eta}(x)\varphi(u,w,x).\end{aligned}$$

Зважаючи на представлення залишкового члена (17), отримаємо генератор вигляду (16).

Зрізаний генератор

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{L}^{\varepsilon}_0(x)\varphi(u,w,x) = \varepsilon^{-4}\boldsymbol{Q}\varphi(u,w,x) + \\ &+\varepsilon^{-2}\boldsymbol{\Gamma}_1(x)\varphi(u,w,x) + \varepsilon^{-1}\boldsymbol{\Gamma}^{u}_1(x)\varphi(u,w,x) + \\ &+[\boldsymbol{\Gamma}_2(x) + \boldsymbol{C}(x)]\varphi(u,w,x).\end{aligned} \tag{18}$$

Лема 3. Розв'язок проблеми сингулярного збурення для оператора $\boldsymbol{L}^{\varepsilon}_0(x)$ на збуреній тест-функції

$$\begin{aligned}&\varphi^{\varepsilon}(u,w,x) = \varphi(u,w) + \varepsilon^2\varphi_1(u,w,x) + \\ &+\varepsilon^3\varphi_2(u,w,x) + \varepsilon^4\varphi_3(u,w,x)\end{aligned} \tag{19}$$

визначається рівністю

$$\boldsymbol{L}^{\varepsilon}_0(x)\varphi^{\varepsilon}(u,w,x) = \hat{\boldsymbol{L}}\varphi(u,w) + \varepsilon^2\theta^{\varepsilon}_{u}(x)\varphi(u,w),$$

де

$$\begin{aligned}&\theta^{\varepsilon}_{u}(x) = \boldsymbol{\Gamma}_1(x)\boldsymbol{R}_0\tilde{\boldsymbol{L}}(x) + \boldsymbol{\Gamma}^{u}_1(x)\boldsymbol{R}_0\boldsymbol{\Gamma}^{u}_1(x) + \\ &+\boldsymbol{\Gamma}_2(x)\boldsymbol{R}_0\boldsymbol{\Gamma}_1(x) + \boldsymbol{C}(x)\boldsymbol{R}_0\boldsymbol{\Gamma}_1(x) + \varepsilon\boldsymbol{\Gamma}^{u}_1(x)\boldsymbol{R}_0\tilde{\boldsymbol{L}}(x) + \\ &+\varepsilon\boldsymbol{\Gamma}_2(x)\boldsymbol{R}_0\boldsymbol{\Gamma}^{u}_1(x) + \varepsilon\boldsymbol{C}(x)\boldsymbol{R}_0\boldsymbol{\Gamma}^{u}_1(x) + \\ &+\varepsilon^2\boldsymbol{\Gamma}_2(x)\boldsymbol{R}_0\tilde{\boldsymbol{L}}(x) + \varepsilon^2\boldsymbol{C}(x)\boldsymbol{R}_0\tilde{\boldsymbol{L}}(x).\end{aligned} \tag{20}$$

Доведення. Підставимо (19) в (18)

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{L}^{\varepsilon}_0(x)\varphi^{\varepsilon}(u,w,x) = \\ &= \varepsilon^{-4}\boldsymbol{Q}\varphi(u,w) + \varepsilon^{-2}[\boldsymbol{Q}\varphi_1(u,w,x) + \boldsymbol{\Gamma}_1(x)\varphi(u,w)] + \\ &+\varepsilon^{-1}[\boldsymbol{Q}\varphi_2(u,w,x) + \boldsymbol{\Gamma}^{u}_1(x)\varphi(u,w)] + \boldsymbol{Q}\varphi_3(u,w,x) + \\ &+\boldsymbol{\Gamma}_1(x)\varphi_1(u,w,x) + [\boldsymbol{\Gamma}_2(x) + \boldsymbol{C}(x)]\varphi(u,w) + \\ &+\varepsilon[\boldsymbol{\Gamma}_1(x)\varphi_2(u,w,x) + \boldsymbol{\Gamma}^{u}_1(x)\varphi_1(u,w,x)] + \\ &+\varepsilon^2[\boldsymbol{\Gamma}_1(x)\varphi_3(u,w,x) + \boldsymbol{\Gamma}^{u}_1(x)\varphi_2(u,w,x) + \\ &+[\boldsymbol{\Gamma}_2(x) + \boldsymbol{C}(x)]\varphi_1(u,w,x) + \varepsilon\boldsymbol{\Gamma}^{u}_1(x)\varphi_3(u,w,x) + \\ &+\varepsilon[\boldsymbol{\Gamma}_2(x) + \boldsymbol{C}(x)]\varphi_2(u,w,x) + \\ &+\varepsilon^2[\boldsymbol{\Gamma}_2(x) + \boldsymbol{C}(x)]\varphi_3(u,w,x)].\end{aligned}$$

Тут, $\boldsymbol{Q}\varphi(u,w) \equiv 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{Q} \in \boldsymbol{N}_{\boldsymbol{Q}}$.

З умови розв'язності проблеми сингулярного збурення

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{Q}\varphi_1(u,w,x) + \boldsymbol{\Gamma}_1(x)\varphi(u,w) = 0, \\ &\boldsymbol{Q}\varphi_2(u,w,x) + \boldsymbol{\Gamma}^{u}_1(x)\varphi(u,w) = 0.\end{aligned}$$

Звідси та з умови балансу (11)

$$\begin{aligned}&\varphi_1(u,w,x) = \boldsymbol{R}_0\boldsymbol{\Gamma}_1(x)\varphi(u,w); \\ &\varphi_2(u,w,x) = \boldsymbol{R}_0\boldsymbol{\Gamma}^{u}_1(x)\varphi(u,w).\end{aligned}$$

А також,

$$\boldsymbol{Q}\varphi_3(u,w,x)+\boldsymbol{\Gamma}_1(x)\varphi_1(u,w,x)+$$
$$+[\boldsymbol{\Gamma}_2(x)+\boldsymbol{C}(x)]\varphi(u,w)=\hat{\boldsymbol{L}}\varphi(u,w).$$

Підставимо значення функції $\varphi_1(u,w,x)$ в останнє співвідношення

$$\boldsymbol{Q}\varphi_3(u,w,x)+\boldsymbol{\Gamma}_1(x)\boldsymbol{R}_0\boldsymbol{\Gamma}_1(x)\varphi(u,w)+$$
$$+[\boldsymbol{\Gamma}_2(x)+\boldsymbol{C}(x)]\varphi(u,w)=\hat{\boldsymbol{L}}\varphi(u,w).$$

Введемо позначення

$$\boldsymbol{\Gamma}_1(x)\boldsymbol{R}_0\boldsymbol{\Gamma}_1(x)+\boldsymbol{\Gamma}_2(x)+\boldsymbol{C}(x)=\hat{\boldsymbol{L}}(x).$$

Тоді $\varphi_3(u,w,x)=\boldsymbol{R}_0\hat{\boldsymbol{L}}(x)\varphi(u,w)$, де $\tilde{\boldsymbol{L}}(x)=\hat{\boldsymbol{L}}-\hat{\boldsymbol{L}}(x)$.

Підставимо отримані результати в останній доданок виразу для генератора

$$\boldsymbol{\Gamma}_1(x)\boldsymbol{R}_0\tilde{\boldsymbol{L}}(x)\varphi(u,w)+\boldsymbol{\Gamma}_1^u(x)\boldsymbol{R}_0\boldsymbol{\Gamma}_1^u(x)\varphi(u,w)+$$
$$+\boldsymbol{\Gamma}_2(x)\boldsymbol{R}_0\boldsymbol{\Gamma}_1(x)\varphi(u,w)+\boldsymbol{C}(x)\boldsymbol{R}_0\boldsymbol{\Gamma}_1(x)\varphi(u,w)+$$
$$+\varepsilon\boldsymbol{\Gamma}_1^u(x)\boldsymbol{R}_0\tilde{\boldsymbol{L}}(x)\varphi(u,w)+\varepsilon\boldsymbol{\Gamma}_2(x)\boldsymbol{R}_0\boldsymbol{\Gamma}_1^u(x)\varphi(u,w)+$$
$$+\varepsilon\boldsymbol{C}(x)\boldsymbol{R}_0\boldsymbol{\Gamma}_1^u(x)\varphi(u,w)+\varepsilon^2\boldsymbol{\Gamma}_2(x)\boldsymbol{R}_0\tilde{\boldsymbol{L}}(x)\varphi(u,w)$$
$$+\varepsilon^2\boldsymbol{C}(x)\boldsymbol{R}_0\tilde{\boldsymbol{L}}(x)\varphi(u,w)=\theta_u^\varepsilon(x)\varphi(u,w),$$

що співпадає з виглядом залишкового члена (20).

Зважаючи на умови теореми С1-С9, вірним буде обмеження залишкового члена (20)

$$\mathrm{P}\theta_u^\varepsilon(x)\varphi(u,w)\mathrm{P}<MV(u). \qquad (21)$$

З твердження Леми 3, виразу (21) та виконання умов Модельної теореми, маємо слабку збіжність ([2], с.64)

$$\left(u^\varepsilon(t),\eta^\varepsilon(t)\right)\to\left(\hat{u}(t),\sigma W(t)\right),\ \varepsilon\to 0.$$

Нехай тепер $(d^{(1)}V(u)/du)$ – похідна функції Ляпунова, обчислена вздовж траєкторії системи (8). Оскільки функція Ляпунова $V(u)$ задовольняє умові Ліпшиця

$$|V(u_2)-V(u_1)|<K|u_2-u_1|,$$

де $K-const$, то виконується наступне співвідношення

$$d^{(1)}V(u)/du\le dV(u)/du+K\mathrm{P}\sigma(u)\mathrm{P}|dW(t)|,$$

де $(dV(u)/du)$ – похідна функції Ляпунова, обчислена вздовж траєкторії детермінованої системи (13). Згідно з умовами теореми (14) ([4], с.23), маємо

$$d^{(1)}V(u)/du\le -c_1V(u)+Kc_2|dW(t)|.$$

Отже, $V(u)\le V(u_0)\exp\{-c_1t\}+$
$$+Kc_2\int_0^t\exp\{-c_1(t-s)\}\left|dW(s)\right|ds.$$

Обчислимо математичне сподівання обох частин нерівності

$$EV(u)\le V(u_0)\exp\left\{-c_1t\right\}+$$
$$+Kc_2\int_0^t\exp\left\{-c_1(t-s)\right\}E\left|dW(s)\right|ds.$$

Звідси випливає оцінка ([4], с.23)

$$P\{|u(t)|>R\}\le\frac{EV(u)}{\inf\limits_{u\in R^d}V(u)},\ R\to 0.$$

Отже, система (8) дисипативна.

З виконання умов Модельної граничної теореми та дисипативності граничного процесу слідує, що система (1) асимптотично дисипативна.

Список використаних джерел

1. *Chabaniuk Ya.M.* Continuous stochastic approximation procedure with singular perturbation under the balance conditions/ Ya.M. Chabaniuk// Cybernetics and stochastic analysis. – 2006. – vol. 42(3). – P.1-7.

2. *Korolyuk V.S.* Stochastic Systems in Merging Phase Space/ V.S. Korolyuk, N. Limnios. – World Scientific Publishing, 2005. – 330 p.

3. *Кінаш А.В.* Асимптотична дисипативність дифузійного процесу/ А.В. Кінаш, Я.М. Чабанюк, У.Т. Хімка // Problems of Desicion Making Under Uncertainties: International Conference, 12-16 May 2014, Mukachevo, Ukraine: abstracts. – Kyiv. – 2014. – С.115-116..

4. *Хасьминский Р.З.* Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров/ Р.З. Хасьминский. – Москва: Наука, 1969. – 368 с.

References

1. CHABANIUK, YA.M. (2006) Continuous stochastic approximation procedure with singular perturbation under the balance conditions. *Cybernetics and stochastic analysis*. 42(3). p.1-7.

2. KOROLYUK, V.S., LIMNIOS, N. (2005) *Stochastic Systems in Merging Phase Space*. World Scientific Publishing.

3. KINASH, A.V., CHABANIUK, YA.M., KHIMKA, U.T. (2014) Asympotic dissipativity of the diffusion process. In *International Conference "Problems of Desicion Making Under Uncertainties"*. Mykachevo, Monday 12th to Friday 16th May 2014. Kyiv: pp.115-116.

4. KHASMINSKII, R.Z. (1969) *Stability of systems of differential equations with random perturbations of their parameters.* M.: Nayka. 368 p.

Надійшла до редколегії 10.10.2014

УДК 004.519

Компан С.В.[1], аспірант

Особливості побудови запитів у об'єктних базах даних на прикладі об'єктної СУБД db4o

[1]Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, пр-т. Глушкова 4д

e-mail: robin_2005@mail.ru

S.V. Kompan[1], postgraduate

Peculiarities of query construction in object databases on the example of DBMS db4o

[1]Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03680, Kyiv, Glushkova st., 4d

e-mail: robin_2005@mail.ru

Мова запитів є невід'ємною частиною будь-якої системи управління базами даних (СУБД). У статті розглядається типізація та реалізація запитів до об'єктної СУБД db4o. Зроблений аналіз існуючих типів запитів у реляційних СУБД та відповідна їх реалізація в об'єктних СУБД на прикладі СУБД db4o. Для об'єктної СУБД db4o окремо розглянуто використання таких типів запитів як Query By Example (QBE), Native Query (NQ), Simple Object Database Access (S.O.D.A). По кожному типу запиту наведена практична реалізація за допомогою мови програмування Java v.8. Розглянуто SQL оператори та їх аналоги в об'єктних БД на прикладі СУБД db4o. Практично показаний життєвий шлях об'єкта, починаючи від створення його в мові програмування та закінчуючи знищенням з бази даних. Проведена аналогія між мовами запитів реляційних СУБД та об'єктних, виділені спільні їх риси. Практично показана можливість реалізації одного і того ж запиту в об'єктних базах даних різними шляхами.

Ключові слова: об'єктні бази даних, запити в об'єктних базах даних, об'єктна база даних db4o.

Data query language is an integral part of any database management system (DBMS) performance. In this article query typing and implementation of queries to object DBMS db4o are analyzed. The analysis of types of queries existing in relational DBMS and their implementation in object DBMS on the example of db4o have been made. As for object DBMS db4o, the usage of such query types as Query By Example (QBE), Native Query (NQ), Simple Object Database Access (S.O.D.A) have been examined. Practical implementation of every query type has been introduced with the help of Java v.8. software language. SQL operators and their analogues in object DBMS have been examined on the example of DBMS db4o. Object life history is shown starting from its posting on software language and ending up with database destroying. A comparison between relational DBMS and object DBMS query languages has been made and their common features have been singled out. Practical possibilities of implementation of one and the same query in object databases in a variety of ways have been presented.

Key Words: object database, queries in object database, object database db4o.

Статтю представив д.ф.-м.н., професор Буй Д.Б.

Вступ. Одною із важливих функцій систем управління базами даних (СУБД) є зберігання та обробка інформації (даних), що знаходяться в базі даних (БД). Зберігання даних у БД бере на себе безпосередньо СУБД, а можливість оброблювати ці дані СУБД надає користувачу через відповідні мови запитів. Так, для реляційних СУБД існує мова запитів SQL (Structured Query Language), яка застосовується для створення, модифікації та управління даними в реляційних БД. Реалізацій реляційних СУБД існує багато. Це призвело до виникнення багатьох діалектів цієї мови, що спонукало розробників СУБД описати мову SQL на рівні стандарту. Такий підхід дав можливість переносити реляційні БД, в яких зберігаються SQL запити (збережені процедури) з однієї СУБД до іншої. На відміну від реляційних БД (РБД), де інформація зберігається у вигляді рядків таблиць, в об'єктно-орієнтованих базах даних (ООБД) інформація зберігається у вигляді об'єктів, якій є аналогами рядків таблиць в РБД. Тому, для об'єктних СУБД повинен існувати механізм, який дозволяє маніпулювати даними, які зберігаються у таких типах СУБД.

Мову SQL можна умовно розділити на дві складові: мова визначення даних (DDL – Data Definition Language), яка, між іншим, дозволяє описувати схему, визначати тип даних атрибутів таблиць та мова маніпулювання даними (DML – Data Manipulation Language), яка надає можливість

© С.В. Компан, 2014

зберігати, редагувати, знищувати, а також здійснювати пошук рядків в БД. За аналогією з реляційними СУБД в об'єктних існує мова опису об'єктів ODL (Object Definition Language), яка дозволяє описати структуру даних та схему БД для об'єктної моделі ODMG (Object Database Management Group) [1], та мова OQL (Object Query Language), яка дозволяє здійснювати пошук об'єктів у БД. Про мову ODL докладно викладено в статті [2]. З іншого боку, існують такі об'єктні СУБД (NeoDatis, db4o, objectdb, тощо), в яких створення схеми класу та екземплярів класу покладається на мову програмування (Java, C++, тощо). Такі СУБД надають користувачу для використання бібліотеки (класи), які дають можливість працювати з СУБД: записувати, зчитувати, знищувати об'єкти з БД, а також здійснювати вибірку даних з БД. На відміну від реляційних СУБД, в яких існує єдиний підхід до реалізації вибірки даних (мова SQL), в об'єктних СУБД існує декілька шляхів до реалізації вибірки даних (QBE, S.O.D.A, тощо). Реалізацію вибірки даних обирає безпосередньо користувач ООБД.

Мета статті. Метою статті є аналіз існуючих типів запитів у об'єктних СУБД на прикладі об'єктної СУБД db4o [3], проведення аналогії між SQL запитами та їхньою реалізацією в об'єктних СУБД. Зазначимо, що використання того чи іншого типу запиту визначається моделлю даних, які зберігаються у відповідних типах СУБД. Проста реалізація запиту в одному типі СУБД в іншому типі СУБД може бути складною.

Приклади запитів будемо демонструвати на основі об'єктної СУБД db4o.

Постановка задачі. Розглянемо предметну область School для реляційної СУБД. Для цього побудуємо ER-діаграму предметної області (рис. 1).

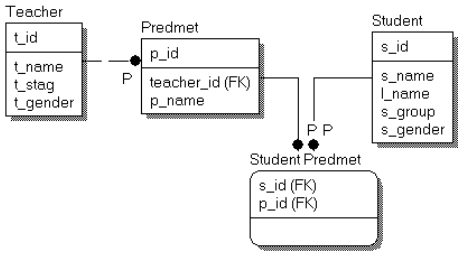


Рис. 1. ER-діаграма БД School

Як видно з рис. 1, відношення багато до багатьох (M:N) між рядками таблиць "Predmet" і "Student" реалізується шляхом створення нової таблиці "Student Predmet", атрибути якої (s_id(FK), p_id(FK)) є зовнішніми ключами (для таблиць "Student" та "Predmet" відповідно).

Можна розглянути предметну область School для об'єктно-орієнтованої парадигми. В цьому випадку таблицям "Teacher", "Predmet", "Student" буде відповідати відповідно клас Teacher, Predmet, Students. Наведемо UML діаграму класів БД School.

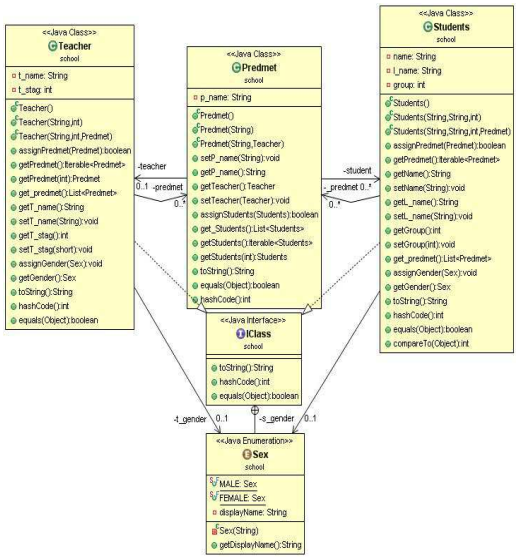


Рис. 2. UML–діаграма класів БД School

Для більш чіткого розуміння інтерпретації запитів у об'єктних СУБД наведемо специфікації класів Teacher, Predmet, Students (без set-, get-методів) на мові програмування Java v.8.0.

```
public class Teacher { private String t_name;
private int t_stag;
/* Для можливості зберігати в об'єкті класу Teacher об'єкти класу Predmet ми описуємо атрибут predmet, який є динамічним масивом типу даних Predmet. */
private final List<Predmet> predmet = new
ArrayList<Predmet>();
Teacher(String name, int stag){
this.t_name=name; this.t_stag=stag; }
public Teacher(String name, int stag, Predmet obj) {
this.t_name = name; this.t_stag = stag;
this.assignPredmet(obj); }
public boolean assignPredmet(Predmet obj){return
predmet.add(obj);} }
public class Predmet {
private String p_name; private Teacher teacher;
/* Для можливості зберігати в об'єкті класу Predmet об'єкти класу Students ми описуємо атрибут student, який є динамічним масивом типу даних Students.*/
private List<Students> student = new
ArrayList<Students>();
public Predmet(String name){ this.p_name=name; }
public Predmet(String name,Teacher obj){
this.p_name = name; this.teacher = obj;
this.student = new ArrayList<Students>(); }
public boolean assignStudents(Students obj){ return
student.add(obj); } }
public class Students {
private String name; private String l_name;
private int group;
```

```
/* Для можливості зберігати в об'єкті класу Students об'єкти класу Predmet ми описуємо атрибут _predmet, який є динамічним масивом типу даних Predmet.*/
private final List<Predmet> _predmet = new ArrayList<Predmet>();
Students(String _name,String lname, int group){
this.name=_name; this.l_name=lname; this.group=group; }
Students(String _name,String lname, int group, Predmet obj){ this.name=_name; this.l_name=lname;
this.group=group; this.assignPredmet(obj); }
public boolean assignPredmet(Predmet obj){
return _predmet.add(obj);} }
```

SQL оператори та їх аналоги в об'єктних БД на прикладі об'єктної СУБД db4o. Для початку роботи в реляційних СУБД ми повинні створити БД. Для створення БД ми використовуємо SQL оператор CREATE DATABASE. На відміну від реляційних СУБД в об'єктних немає чітко визначеного оператора для створення БД. Як правило, СУБД надає користувачу набір методів, які реалізуються Application Programming Interface (API) та дозволяють це реалізувати. Приклади створення БД, як правило, описуються в документації. В об'єктних СУБД БД представляється у вигляді контейнера. Продемонструємо створення контейнера (БД):

```
ObjectContainer container =
Db4oEmbedded.openFile("school.yap");
```

Системний об'єкт container, який має тип ObjectContainer, містить методи (container.store(Object arg0), object.remove(Object arg0), object.delete(Object arg0), тощо), які дають можливість працювати з об'єктами в БД.

Важливою характеристикою будь-якої СУБД є можливість здійснювати збереження інформації у БД, зокрема, для об'єктних СУБД можливість працювати з так званими persistent objects (збереженими об'єктами). Для реляційних СУБД вставка рядка в таблицю реалізується за допомогою SQL оператора INSERT. Збереження рядка таблиці у БД покладається безпосередньо на СУБД і для користувача така дія виконується прозоро. Так, вставка нового рядка в таблицю "Teacher" в реляційних СУБД реалізовується наступним чином:

```
INSERT INTO Teacher VALUES("Ivanov",7);
```

Цю ж саму операцію в об'єктній СУБД ми повинні реалізувати в декілька кроків. Спочатку треба створити новий об'єкт класу Teacher і надати відповідним атрибутам об'єкта значення, реалізувавши тим самим його ініціалізацію. Після цього створений об'єкт за допомогою методів бібліотеки класів СУБД записуємо у БД, яка представляє собою контейнер. Для об'єктної СУБД db4o операція збереження об'єкта в БД реалізовується наступним чином:

```
//створюємо контейнер та відкриваємо його
ObjectContainer container =
Db4oEmbedded.openFile("school.yap");
//створюємо об'єкт
Teacher teach = new Teacher("Ivanov",(byte)7);
//зберігаємо об'єкт у контейнері (БД)
container.store(teach);
//закриваємо доступ до контейнера
container.close();
```

Слід також зазначити, що існують різні способи зберігання об'єктів в БД. Так, в мові програмування Java v.8, починаючи з 5-ї версії, існує набір класів для роботи з об'єктами – JPA (Java persistence API), JDO (Java Data Objects) та EJB (Enterprise JavaBeans).

Будь-яка сучасна СУБД надає можливість оновлювати інформацію, що знаходиться в БД. Для реляційних СУБД існує SQL оператор UPDATE. Так, SQL вираз

```
UPDATE Teacher Set t_stag="33" WHERE t_name="Petrov";
```

дозволяє змінити значення стажу для вчителя з прізвищем Petrov на 33, якщо такий вчитель існує в БД. Як видно, реалізацію пошуку і запису після зміни рядка таблиці бере на себе СУБД. Для об'єктних БД операція оновлення інформації дещо відрізняється. Вона повинна бути проведена у декілька кроків. Спочатку ми повинні знайти в БД об'єкт, який задовольняє критерію пошуку (деякому предикату). Наступним кроком ми оновлюємо відповідні атрибути знайденого об'єкта. Після чого, записуємо оновлений об'єкт до БД. Продемонструємо це на прикладі.

```
// Пошук об'єкта за кретерієм прізвище = "Petrov"
ObjectSet<Teacher> result =
container.queryByExample(new Teacher("Petrov",0));
// якщо такий об'єкт знайдений, оновлюємо інформацію про стаж вчителя
if (!result.isEmpty()){ Teacher found = result.next();
found.setT_stag((byte)33); }
// записуємо оновлений об'єкт до БД
container.store(found);
//закриваємо доступ до контейнера
container.close();
```

Якщо потрібно змінити стаж у всіх викладачів на 15 років, то для реляційних СУБД це буде досягатися наступним SQL запитом:

```
UPDATE Teacher SET t_stag=15;
```

В об'єктних же СУБД користувач повинен самостійно визначати реалізацію вищенаведеної задачі. Ця реалізація залежить від механізмів, які надає об'єктна СУБД та мова програмування, на якій здійснюється доступ до об'єктної БД, з якою працює користувач. Продемонструємо це на прикладі.

```
public static void updateallstag(ObjectContainer db) {
List<Teacher> result = db.queryByExample(new Teacher(null,0));
```

```
ListIterator<Teacher> litr = result.listIterator(result.size());
while(litr.hasPrevious()) { Teacher teach = litr.previous();
teach.setT_stag((byte)15); db.store(teach);} }
```

Як видно з наведеного прикладу, реалізація зміни значення атрибута у всіх об'єктів об'єктної СУБД складніша, ніж в реляційних СУБД, проте поставлена задача може бути реалізована в об'єктних БД.

Для видалення рядка з таблиці, що задовольняє певному критерію, існує SQL оператор DELETE. Наведемо приклад знищення рядка таблиці Teacher, у якого атрибут t_name="Petrov".

```
DELETE FROM Teacher WHERE t_name="Petrov";
```

Для об'єктних СУБД видалення об'єкта з БД реалізується у декілька кроків. Спочатку реалізуємо пошук об'єкта в БД за певним критерієм, а потім знайдений об'єкт знищуємо з БД.

```
// Пошук за критерієм
ObjectSet<Teacher> result =  db.queryByExample(new
Teacher("Petrov",0));
// Знищення знайденого об'єкта з БД
if (!result.isEmpty()) db.delete(result.next());
```

Наступною важливою характеристикою будь-якої СУБД є можливість здійснювати вибірку даних з БД. Так, для вибірки даних в реляційних СУБД використовується мова SQL, зокрема, її оператор SELECT. В об'єктних СУБД, на відміну від реляційних, немає єдиного механізму реалізації вибірки даних. Серед загальноприйнятих шляхів вибірки даних слід виділити наступні: Object SQL (OQL), Java Persistence Query Language (JPQA), Query-By-Example (QBE), Native Queries, Simple Object Database Access (S.O.D.A) та інші. Це пов'язано з тим, що немає загальноприйнятого стандарту до роботи об'єктних СУБД і кожен розробник самостійно вирішує, якими механізмами буде відбуватися вибірка даних.

Тип запитів Query By Example (QBE). Для об'єктної СУБД db4o самим найпростішим з точки зору практичної реалізації є мова запитів типу Query By Example (QBE – пошук за шаблоном). Ця мова запитів за своїм синтаксисом і семантикою є аналогічною до графічної мови запитів QBE реляційних СУБД. Синтаксис мови QBE для реляційних СУБД базується на побудові рядка, в якому атрибутам надаються певні значення, які описують критерій пошуку. В процесі пошуку кожен рядок таблиці співставляється з рядком-шаблоном (по атрибутам, визначеним у рядку-шаблоні). Рядки, у яких атрибути рівні відповідним атрибутам рядка-шаблону, задовольняють умові пошуку. Інтерпретація мови запитів QBE для об'єктних СУБД аналогічна до мови запитів QBE для реляційних СУБД, тільки в якості рядка-шаблону ми будуємо об'єкт-шаблон. Отже, для побудови запиту типу QBE потрібно побудувати шаблон, згідно з яким буде здійснюватися пошук всіх об'єктів, які йому задовольняють. Цей шаблон будується в якості об'єкта, в якому описується критерій пошуку у вигляді предиката. Всі об'єкти, на яких предикат буде істинний, підпадають під критерій пошуку та зберігаються в колекції типу List. В якості значень атрибутів об'єкта-шаблона можна використовувати null, 0, 0.0 та "" (порожній рядок). Значення 0 використовується у шаблоні пошуку для заміщення атрибутів, що мають цілочисельне значення (тип int), 0.0 для заміщення атрибутів, що мають значення з плаваючою комою (тип float/double), "" – для заміщення атрибутів типу String і null – для заміщення атрибутів інших типів даних. Ці значення не використовуються для порівняння значень атрибутів, а лише вказують на те, що значення такого атрибута є довільним. Так, якщо потрібно зпівставити з шаблоном всі об'єкти класу Teacher, то шаблон (об'єкт), побудований за допомогою конструктора класу Teacher, повинен містити в значеннях своїх атрибутів null, 0, 0.0 або "", в залежності від типу даних атрибута.

```
Teacher tch = new Teacher(null, 0);
```

Мова запитів типу QBE не завжди може використовуватися через обмеження, які накладаються на цю мову [4]. Ці обмеження накладаються внаслідок можливості використання у запиті атрибутів із значенням null, 0 та "". На використання мови запитів QBE існують обмеження:

- не можна будувати запити, які містять умовний вираз;
- не можна будувати складних запитів, які містіть логічні операції AND, OR, NOT;
- не можна побудувати запит для пошуку об'єктів, атрибути яких приймають значення null, 0 та "";
- не можна побудувати запит, критерієм пошуку якого є діапазон значень атрибута.

Для побудови QBE запиту потрібна наявність конструктора по замовченню для створення об'єктів без ініціалізації атрибутів (приклад такого конструктора: public Teacher(){}). Такий конструктор створює об'єкт-шаблон, згідно якого будуть знайдені всі відповідні екземпляри класу.

Тип запитів Native Query (NQ). Розглянемо тип запиту Native Query. Запит типу NQ може бути застосований у випадку, коли не можна використати запит типу QBE. Запит типу NQ полягає в тому, що в якості параметра метода db.query() ми передаємо анонімний клас (в нашому прикладі new Predicate<Teacher>() {}). Анонімний

клас не має імені та є підкласом класу, в якому він оголошений [5]. В анонімному класі описуємо метод match(), в якому задаємо логічний вираз. В залежності від того, яке логічне значення (true або false) повертає метод match(), об'єкти класу, над яким виконується запит, додаються до результату запиту або ні. Для побудови логічного виразу, в тілі якого присутні атрибути класу, необхідна наявність методів доступу[1] (принаймні get-методів) до атрибутів класу, що присутні в логічному виразі. Наведемо приклад NQ запиту:

```
List<Teacher> result = db.query(new Predicate<Teacher>()
{ @Override public boolean match(Teacher teach) {
return teach.getT_stag()>9; } } );
```

В запитах типу NQ є можливість використовувати складні умовні вирази, в яких присутні логічні оператори && (AND), || (OR) та | (Not). Наведемо приклад NQ запиту, який здійснює пошук всіх вчителів, у яких стаж роботи не дорівнює 9 рокам:

```
List<Teacher> result = db.query(new Predicate<Teacher>()
{ @Override public boolean match(Teacher teach) {
return (teach.getT_stag() > 9) || (teach.getT_stag() < 9);}});
```

Тип запитів Simple Object Database Access (S.O.D.A.) Наступний тип запиту, який підтримується в СУБД db4o, є S.O.D.A [6]. Запити типу S.O.D.A використовують API (набір методів), що реалізовують низькорівневий доступ до вузлів графа запиту. Застосування запитів типу S.O.D.A надає користувачеві гнучкість в побудові динамічних запитів, хоча для більшості рутинних операцій більш поширеним є запити типу Native. Концепція запиту типу S.O.D.A полягає в тому, що будується граф запиту (query graph), в вузлах якого містяться класи та обмеження на екземпляри класу. В якості прикладу знайдемо всіх вчителів, у яких прізвище Ivanov. Запит типу S.O.D.A буде наступним:

```
Query query = db.query(); query.constrain(Teacher.class);
query.descend("t_name").constraints("Ivanov");
ObjectSet<Teacher> result = query.execute();
```

Граф, згідно якому виконується запит, представлений на рис. 3 [7].

Використовуючи S.O.D.A запити, можна будувати більш складні запити, які містять логічні операції (AND, OR, NOT).

Наведемо S.O.D.A запит, який виводить всіх вчителів, хто читає предмет Muzik та має стаж більше 5 років.

```
Predmet predmet = new Predmet();
predmet.setP_name("Muzik"); Query query = db.query();
query.constrain(Teacher.class);
query.descend("t_stag").constrain(5).greater().and(query.de
scend("predmet").constrain(predmet));
ObjectSet<Teacher> result = query.execute();
```

Як ми вже казали, реалізація запитів залежить від користувача, можливостей об'єктної СУБД та мови програмування. В СУБД db4o існують декілька шляхів реалізації вибірки об'єктів. Розглянемо докладніше типи запитів на прикладі об'єктної СУБД db4o. Даний запит виконується згідно такого S.O.D.A графа запиту (рис. 4).

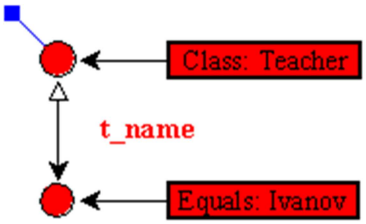


Рис. 3. Приклад графу S.O.D.A запиту

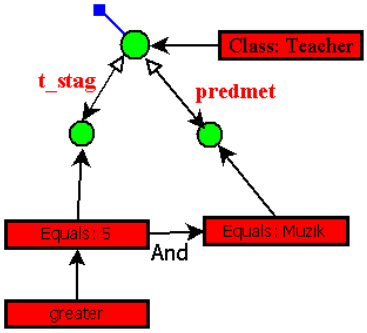


Рис. 4. S.O.D.A граф складного запиту

Поставимо задачу вивести всі рядки (об'єкти) таблиці (класу) "Teacher". Для реляційних СУБД це реалізується за допомогою наступного SQL запиту: SELECT * FROM Teacher. Запит типу QBE для нашого завдання буде виглядати наступним чином:

```
Teacher tch = new Teacher(null, 0);
// або Teacher tch = new Teacher();
List<Teacher> result = container.queryByExample(tch);
```

Результат вибірки даних отримується у вигляді колекції, яку можна потім вивести, наприклад, на екран.

Розглянемо реалізацію SQL запиту SELECT * FROM Teacher за допомогою запиту типу Native Query. Цей запит для нашого завдання такий:

```
List<Teacher> result = container.query(new
Predicate<Teacher>() {@Override
public boolean match(Teacher teach) {
return teach.getT_name()!=null; }}
```

Розглянемо реалізацію SQL запиту SELECT * FROM Teacher за допомогою запиту типу S.O.D.A.

```
Query query = container.query();
query.constrain(Teacher.class);
ObjectSet<Teacher> result1 = query.execute();
```

Знайдемо в БД викладача з прізвищем Ivanov. Для реляційних СУБД це завдання можна

[1] У випадку інкапсуляції.

вирішити за допомогою SQL запиту: SELECT * FROM Teacher WHERE name=”Ivanov”.

Звернемо увагу, на те, що ми можемо в даному SQL запиті вказати тільки частину атрибутів таблиці Teacher. В результатом такого запиту отримаємо таблицю з новою схемою R', відмінної від схеми R початкової таблиці, причому $T' \subseteq T$ $(R' \subseteq R)$. На відміну від реляційних СУБД, де в результаті запиту ми можемо отримати частину таблиці, яку потім при необхідності можна зберегти в БД, в об’єктних СУБД отримати в результаті запиту частину об’єкта не можливо, так як отримуємо з БД в результаті запиту об’єкт з усіма його атрибутами. Але, при необхідності, ми можемо вивести значення тільки частини атрибутів.

Для об’єктної СУБД db4o запит реалізується шляхом створення нового об’єкту типу Teacher, у якого атрибутам, по яким не здійснюємо пошук надаємо значення Null або 0[2]; інші атрибути, по яким здійснюється пошук, мають свої вихідні значення. В нашому випадку побудова об’єкта буде виглядати наступним чином:

```
//створюємо об’єкт-шаблон
Teacher tch = new Teacher(“Ivanov”, 0);
//результат отримуємо у вигляді колекції List, елементи якої мають тип Teacher
List<Teacher> result = container.queryByExample(tch);
```

В колекцію result потраплять всі об’єкти класу Teacher, які “співпадають” з об’єктом-шаблоном tch. Як видно, перевагою використання типу запитів QBE є відносна простота реалізації.

Реалізуємо поставлену задачу за допомогою запиту типу Native.

```
List<Teacher> result = db.query(new Predicate<Teacher>()
{@Override public boolean match(Teacher teach) { return
teach.getT_name().contains("Ivanov"); } });
```

Реалізація поставленої задачи за допомогою запиту типу S.O.D.A була наведена вище.

Оператори мови SQL IN, BETWEEN, LIKE можуть бути реалізованими програмістом в СУБД db4o в запитах типу Native та S.O.D.A. Так, наша реалізація запиту типу Native, який є аналогом SQL запиту:

```
SELECT * FROM Teacher WHERE t_stag IN (3, 7);
```

буде мати вигляд:

```
final HashSet<Integer> set = new HashSet<Integer>
(Arrays.asList(3, 7));
List<Teacher> result = db.query(new Predicate
<Teacher>() { @Override public boolean match(Teacher
teach) { return (set.contains(teach.getT_stag())); } });
```

Реалізація запиту типу S.O.D.A буде виглядати наступним чином:

```
Query query = db.query(); query.constrain(Teacher.class);
query.descend("t_stag").constrain((int)3).or(query.descend(
"t_stag").constrain((int)7));
ObjectSet<Teacher> result = query.execute();
```

Реалізуємо запити типу Native та S.O.D.A для такого SQL запиту:

```
SELECT * FROM Teacher WHERE t_stag BETWEEN 3
AND 7;
```

Реалізація запиту типу Native буде мати вигляд:

```
List<Teacher> result = db.query(new Predicate<Teacher>()
{@Override public boolean match(Teacher teach) {return
(teach.getT_stag()>=3)&&(teach.getT_stag()<=7); } });
```

Реалізація запиту типу S.O.D.A буде мати вигляд:

```
Query query = db.query(); query.constrain(Teacher.class);
query.descend("t_stag").constrain((int)3).greater().like().an
d(query.descend"t_stag").constrain((int)7).smaller().like());
ObjectSet<Teacher> result = query.execute();
```

Об’єктна СУБД db4o не надає в розпорядження користувачу методи, які аналогічні за семантикою до агрегатних функцій мови запитів SQL. Натомість, користувач може самостійно створювати методи за допомогою мови програмування Java v.8.0, в яких реалізована логіка роботи агрегатних функцій.

Покажемо це на прикладі підрахування середнього стажу всіх вчителів школи. Для реляційних СУБД це завдання буде описуватися за допомогою такого SQL запиту:

```
SELECT AVG(t_stag) FROM Teacher;
```

Визначення середнього стажу вчителів в СУБД db4o можемо реалізувати наступним чином [7]:

```
public avg() { int sum = 0; Query query = db.query();
query.constrain(Teacher.class);
query.descend("t_name").constraints();
ObjectSet<Teacher> result = query.execute();
while(result.hasNext()){sum+=result.next().getT_stag();}
System.out.println(“AVG: ”+ (result.size() == 0 ? 0 : sum /
result.size())); }
```

Агрегатні функції MIN, MAX та інші можуть бути реалізовані аналогічно.

Можна припустити, що агрегатні функції, а також оператори в мові SQL представляють собою функції (методи), реалізація яких прихована від користувача. Тому відкритість реалізацій аналогів агрегатних функцій та операторів мови SQL в об’єктних СУБД дає можливість уточнювати в разі необхідності цю реалізацію, що дає можливість більш гнучко оперувати даними, зокрема, проводити оптимізацію.

В об’єктних СУБД, як і в реляційних, існує можливість здійснювати вибірку даних шляхом їх групування. Для цього в мові SQL існує конструкція GROUP BY. Вона дає можливість згрупувати рядки таблиці, в найпростішому випадку, за значеннями одного або декількох атрибутів. Результатом запиту може бути

[2] Для числових даних надаємо значення 0, для текстових даних – Null.

узагальнене значення атрибутів, точно так само, як і значення одного атрибута. Це робиться за допомогою стандартних агрегатних функцій SQL: COUNT, SUM, AVG, MAX, MIN [8].

Як ми вже казали, програмна реалізація SQL конструкції GROUP BY в об'єктній СУБД db4o повністю покладається на користувача. Це, з одного боку, дає можливість користувачу, виходячи з конкретної предметної області або моделі БД, самостійно задати реалізацію цією конструкції, що, в свою чергу, може призвести до оптимізації запиту. (group by по даним з 2 таблиць – можна обирати з 2-х класів, а можно обирати з одного). З іншого боку, на власну реалізацію користувачем конструкції мови SQL впливає рівень користувача, як програміста.

Таблиця 1

Вміст таблиці Student

s_id	s_name	l_name	s_group	s_gender
1	Борис	Ткач	11	MALE
2	Юлия	Гришко	21	FEMALE
3	Светлана	Іванова	21	FEMALE
4	Павел	Іванов	12	MALE

Таблиця 2

Результат виконання запиту з оператором GROUP BY

Група	Кількість
11	1
12	1
21	2

Продемонструємо це на прикладі. Нехай маємо таблицю Student (Табл. 1). Якщо потрібно вивести кількість студентів в кожній групі, то ця задача в реляційних СУБД розв'язується за допомогою такого SQL запиту:

```
SELECT s_group AS “Група”, COUNT(l_name) AS “Кількість” FROM Student GROUP BY s_group;
```

Результатом запиту буде таблиця (Табл. 2).

В об'єктній СУБД db4o цю задачу можна розв'язати декількома способами.

Спосіб 1. Відсортуємо об'єкти класу Students за значенням атрибута s_group. Очевидно, що таким чином ми згрупували студентів за групами, де вони навчаються. Потім підрахуємо кількість студентів в кожній такій групі. Наведемо програмний код.

```
Query query = db.query();
query.constrain(Students.class);
query.descend("s_name").constraints();
query.descend("s_group").orderDescending();
ObjectSet<Students> result = query.execute();
System.out.println("Group"+"\t"+"Count"+"\t");
int sum=0, d1=0, d2=0, size = result.size();
ListIterator<Students> iter = result.listIterator(result.size());
while(iter.hasPrevious()) { Students stud =  iter.previous();
size = size-1; if (d1==0) {
d1=stud.getGroup(); sum=sum+1; continue; }
d2=d1; d1=stud.getGroup();
if ((d1==d2) && (size!=0)) {sum=sum+1;}
else switch(size) { case 0: { sum=sum+1;
System.out.println(d2+"\t"+sum); break; } default:
System.out.println(d2+"\t"+sum);sum=1;; }}
```

Спосіб 2. Використовуємо хеш-таблиці (HashMap), які реалізує інтерфейс Map. Дані, які зберігаються в хеш-таблиці, мають структуру ключ\значення. В якості ключа візьмемо номер групи (атрибут s_group), а значенням відповідного ключа буде виступати масив об'єктів типу Students. Всіх студентів, які мають відповідний ключ (номер групи) у хеш-таблиці, ми будемо додавати до відповідного масиву. Продемонструємо практичну реалізацію[3]:

```
public static void CountStudGroup(ObjectContainer db) {
Map<Integer, ArrayList<Students>> map = new
HashMap<Integer, ArrayList<Students>>();
Query query = db.query(); query.constrain(Students.class);
query.descend("name").constraints(); ObjectSet<Students>
result = query.execute();
System.out.println("Group"+"\t"+"Count"+"\t"+
"Students"); for (Students student : result){ if
(map.containsKey(student.getGroup())) {
ArrayList<Students> values = map.get(student.getGroup());
if (values.isEmpty()) {
values = new ArrayList<Students>();}
map.put(student.getGroup(),values); values.add(student);}
else { ArrayList<Students> st = new
ArrayList<Students>(); st.add(student);
map.put(student.getGroup(),st); } }
Set<Entry<Integer, ArrayList<Students>>> set =
map.entrySet(); Iterator<Entry<Integer,
ArrayList<Students>>> i = set.iterator(); while(i.hasNext())
{ Map.Entry map = (Map.Entry)i.next();
System.out.println(map.getKey() + ": ");
ArrayList<Students> a = (ArrayList<Students>)
map.getValue(); System.out.println("\t"+a.size()); for
(Students stud: a){
System.out.println("\t\t"+stud.getName() +" " +
stud.getL_name());} } }
```

Отже, ми показали, що існують різні способи програмної реалізації SQL операторів на прикладі конструкції GROUP BY.

[3] В прикладі демонструємо заповнення і вивід хеш-таблиці.

```
SELECT * FROM Student ORDER BY s_group DESC;
```

Конструкція ORDER BY може впорядковувати рядки за одним атрибутом або декількома (по суті лексикографічне впорядкування).

В об'єктній СУБД db4o в запитах типу Native та S.O.D.A є можливість впорядковувати об'єкти за атрибутом чи групою атрибутів. Продемонструємо це. Запит типу S.O.D.A:

```
Query query = db.query(); query.constrain(Students.class);
query.descend("s_group").orderAscending();
ObjectSet<Students> result = query.execute();
```

Для реалізації впорядкування в запиту типу Native ми повинні перевизначити в інтерфейсі Comparator метод compare(Object obj1, Object obj2), в якому опишемо правило порівняння об'єктів Students за атрибутом s_group. Наведемо приклад запиту типу Native, в якому реалізоване впорядкування об'єктів Students по атрибуту s_group:

```
List<Students> result = db.query(new
Predicate<Students>() {@Override
public boolean match(Students stud) {
return stud.getName() != null; } }, new
Comparator<Students>() { @Override
public int compare(Students o1, Students o2){
return o1.getGroup()<o2.getGroup()? -1 :
o1.getGroup()==o2.getGroup()? 0 : 1;} });
```

В даному прикладі ми перевизначаємо за допомогою анотації @Override метод compare, в якому описуємо механізм порівняння двох об'єктів класу Students по атрибуту s_group, доступ до якого відбувається за допомогою get-метода getGroup().

Висновки. В реляційних СУБД існує одна мова запитів SQL, яка при переході від одної реляційної СУБД до іншої може бути відмінною своїми діалектами. В об'єктних СУБД, на відміну від реляційних, немає єдиного механізму реалізації вибірки даних. Можна виділити об'єктну мову запитів (Object Query Language), яка є аналогом мови SQL, а також декілька типів запитів, які реалізуються за допомогою мови програмування. Серед таких типів запитів можна виділити QBE, NQ, S.O.D.A, тощо. Саме типи запитів в об'єктних СУБД надають користувачеві гнучкість при написанні запитів. Зазначимо, що якщо для реляційних СУБД результатом запиту є таблиця, то для об'єктних в загальному випадку результатом вибірки є колекція об'єктів.

Список використаних джерел

1. Object Data Management Group [Online]. – Available from: http://www.odbms.org/odmg/
2. *Кузнецов С.Д.* Три манифеста баз данных: ретроспектива и перспективы / *С.Д. Кузнецов* [Online]. – Available from: http://citforum.ru/database/articles/manifests/
3. Object database Db4o [Online]. – Available from: http://en.wikipedia.org/wiki/Db4o
4. Object-Oriented Database Development using db4o [Online]. – Available from: http://www.pdfport.com/view/755759-object-oriented-database-development-using-db4o.html
5. Anonyms class [Online]. – Available from: http://javatutor.net/articles/anonymyous-classes-in-java
6. S.O.D.A – Simple Object Database Access. [Online]. – Available from: http://sourceforge.net/projects/sodaquery .
7. The Definitive Guide to db4o [Online]. – Available from: http://ontwerpen1.khlim.be/~lrutten/cursussen/inf8/db4o.pdf
8. *Копейкин М.В.* Базы данных. Основы SQL реляционных баз данных: Учебное пособие. / М.В. Копейкин, В.В. Спиридонов, Шумова Е.О. – СПб.: СЗТУ, 2005. – 160 с.

References

1. *Object Data Management Group* [Online]. – Available from: http://www.odbms.org/odmg/
2. KUZNETSOV, S.D. (2003) *Three manifest database: Retrospect and Prospect* [Online]. Available from: http://citforum.ru/database/articles/manifests/
3. *Object database Db4o* [Online]. – Available from: http://en.wikipedia.org/wiki/Db4o
4. *Object-Oriented Database Development using db4o* [Online]. – Available from: http://www.pdfport.com/view/755759-object-oriented-database-development-using-db4o.html
5. *Anonyms class* [Online]. – Available from: http://javatutor.net/articles/anonymyous-classes-in-java
6. *S.O.D.A – Simple Object Database Access.* [Online]. – Available from: http://sourceforge.net/projects/sodaquery .
7. *The Definitive Guide to db4o* [Online]. – Available from: http://ontwerpen1.khlim.be/~lrutten/cursussen/inf8/db4o.pdf
8. KOPEIKIN, M.V., SPIRIDONOV, V.V., SHUMOVA, H.O. (2005) *Databases. SQL-based relational databases: Tutorial*. St. Petersburg.

Надійшла до редколегії 31.10.14

УДК 004.5

Крак Ю.В., д.ф.-м.н., проф.,
Коваль Ю.В., асистент,
Тернов А.С., к.т.н.

До розробки інтерактивного інтерфейсу моделювання та розпізнавання жестової інформації

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 83000, м. Київ, пр-т. Глушкова 4д,
e-mail: kafedraTK@unicyb.kiev.ua

Iu. V. Krak, Prof,
Iu. V. Koval, Assistant,
A. S. Ternov, PhD.

To creation of interactive interface for sign information modeling and recognition

Taras Shevchenko National University of Kyiv, 83000, Kyiv, Glushkova ave., 4d,

e-mail: kafedraTK@unicyb.kiev.ua

В статті запропонована загальна архітектура системи для інтерактивно жестового інтерфейсу комунікації людина – комп'ютер. Запропоновано вимоги та принципи до функціонування такої системи.

Ключові слова: жестова мова, інтерфейс жестової мови.

A human – computer interface was discussed in the article. A common architecture of sign language human – computer interface system was discussed and proposed. The main requirements to the system, main principles of architecture construction and their structure were described. Architecture of sign language interface system divided in three levels: data adaptation level, functional modules level and design making, synchronisation and control level. Parallel independent execution of functional modules in main system and their asynchronous control were proposed. System time architecture was discussed and two different solutions proposed. Particular design of what solution to chose was postponed for practical realisation time. Size and bandwidth of human – computer interfaces also discussed. Large amount of data was pointed as crucial problem for such interface realization. Sign and alphabet data representation was discussed as algorithm selection reason.

Key Words: sign language, sign language interface.

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Анісімов А.В.

1. Вступ.

Розвиток комп'ютерів породжує розвиток їх інтерфейсів, тобто засобів комунікації. Особливе місце серед таких інтерфейсів посідають інтерфейси комунікації з людиною [1]. Традиційна клавіатура частково поступилася місцем мишкам, джойстікам, тачпадам, тачскрінам. Екран поки що залишається незамінним, хоча з'являються нові пристрої відображення інформації як то проектори. Друковані інформація та інтерфейси для її створення, незважаючи на їх важливу роль, також поступаються місцем новішим засобам. Людина має зір, слух, голос, нюх, смак, відчуття дотику, тепла, гравітації, болю. Майбутні інтерфейси комп'ютера мають спиратися на ці можливості. Звуковий інтерфейс на сьогодні присутній, хоча може ще не зовсім досконалий. Інтерфейси для решти відчуттів або не розроблені або їх розробки поки що не вийшли за межі лабораторій. Проте певну тенденцію розвитку інтерфейсів вже можливо помітити. Якщо перший інтерфейс – клавіатура – був абсолютно надійним та правильним, то вже мишка та джойстік дозволяли введення інформації з певною точністю. При цьому слід зауважити, що вимога до зменшення точності ішла від користувачів. Спозіціонувати курсор миші з точністю до пікселя таки досить важко. В подальшому позіціонування курсору стало

© Ю.В. Крак, Ю.В. Коваль, А.С. Тернов, 2014

взагалі непотрібно, бо змістовна частина покладалася на форму та напрямок руху. Точність руху для введення інформації від цього зменшилася. Між точністю руху для введення інформації та кількістю значень, що можуть бути введені, існує кількісна залежність – чим менша точність руху, тим менше значень можемо ввести. Якщо простір всіх можливих рухів розбити на класи еквівалентності за типом руху, то отримуємо кількість значень. Чим менша точність – тим більше елементів в класі. Це у випадку чіткої межі між формами та напрямками руху. Проте зрозуміло, що присутня певна, доволі низька, точність визначення цих форм та напрямків. Внаслідок цього виникають форми та рухи, які не можуть бути віднесені до жодного класу, а від так і задати якесь значення. На додачу до цієї особливості, маємо властивість про збільшення обчислювального ресурсу, що необхідно задіяти для визначення значення, що вводиться з інтерфейсу. На підтвердження цього факту, порівняємо кількість даних, що передаються з інтерфейсу в комп'ютер для обчислення значення:

1. Традиційна клавіатура – 1 Б
2. PC-клавіатура – 1 скан код
3. мишка або тачпад – не менше 300 Б за секунду.
4. звуковий інтерфейс – не менше 3кБ за секунду
5. відеоінтерфейс – не менше 1 мБ за секунду.

Як наслідок такого зростання, зростає і обчислювальний ресурс для визначення значення, що вводиться, з інтерфейсу.

Подібне становище і для інтерфейсів, за допомогою яких комп'ютер передає інформацію людині. Текстовий термінал має найменше додаткових видатків на подання інформації. Відео термінал застосовує потужності знакогенератора. Графічне зображення у графічному терміналі генерує графічний адаптер за потужностю практично рівний головному комп'ютеру. Звуковий вивід, в той же час, вимагає потужності доволі помірної та пропорційної співвідношенню кількості графічної та звукової інформації.

2. Постановка задачі.

Чим більше обробляється інформації для введення або виведення даних, тим простіше виникає помилка з одного боку, і тим більше різних методів, що можуть бути застосовані до такої обробки. Так, наприклад, для розпізнавання знаків жестової мови можуть бути застосовані різні підходи і методи [2-4]. В майбутньому кількість цих методів може зрости. Кожен із запропонованих методів має свої недоліки та переваги. Тому загальний принцип роботи систем введення інформації обробкою потоку даних має змінитися від вибору алгоритму, який працює для всіх випадків до системи конкурентного розпізнавання декількома алгоритмами. Виходячи з цього формулюємо постановку задачі: розробити архітектуру системи для узгодження роботи різнорідних модулів розпізнавання рухів жестової мови.

3. Метод вирішення задачі.

Враховуючи складність системи та можливість її подальшого розширення

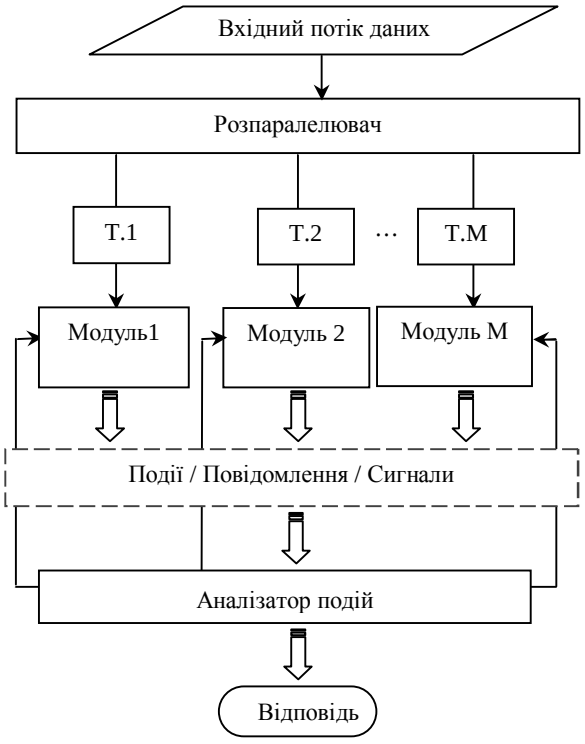


Рис. Загальна архітектура системи

функціональними модулями, загальна архітектура системи пропонується у вигляді, який подано наступною схемою (див. рис.).

Архітектурно системи розподілена на три частини:

1) частина системи, яка займається підготовкою даних для подальшої обробки і аналізу;

2) функціональні та логічні модулі;

3) система прийняття рішень, керування та синхронізації модулів.

Завдання, які покладені на блок «розпаралелювач», зводяться до одночасного і миттєвого (в ідеальному випадку) надання всім функціональним модулям системи даних для обробки.

Додаткові перетворювачі $T.I, \overline{I = 1, M}$ призначені для підготовки вхідних даних (їх попередня обробка) для відповідного функціонального модуля системи з метою узгодження їх з вимогами модуля, якщо такі визначено.

Функціональні модулі системи – певні незалежні обробники вхідних даних мета яких визначити інформацію представлену даними. За визнач енною інформацією формуються повідомлення, які направляються в систему обробки повідомлень та прийняття рішень. В свою чергу система прийняття рішень, при необхідності, надсилає повідомлення функціональним модулям з метою узгодження та синхронізації їх роботи. Кількість модулів може варіюватись в залежності від набору алгоритмів обробки даних які є в наявності і обмежена лише технічними можливостями.

Аналізатор подій приймає рішення про розпізнавання інформаційної одиниці вхідних даних. Для звичайного інтерфейсу: клавіатура-термінал - запропонували досить природню позицію,. що одиницею введеної інформації є буква. Мінімізувавши кількість вхідних або вихідних інформаційних одиниць вдалося підвищити надійність інтерфейсу для уникнення помилок технічного характеру. На противагу європейській традиції абетки існує світова традиція змістовних знаків. Її частиною є традиція ієрогліфів, хоча, безумовно, традиція знаків набагато ширша. Незважаючи на обов'язковість в сучасній освіті вивчення традиції абетки, з ранного дитинства людям прищеплюють традицію знаків. Знак, як означення абстрактного поняття глибоко увійшов в нашу культуру і використовується на всіх рівнях, включно з юридично відповідальними місцями, як наприклад, правила дорожнього руху та техніка безпеки.

Жестова мова[5,6] на сьогодні має в собі як елементи знаків, так і елементи абетки. Виходячи з цього поєднання стає зрозумілою наявність принципово різних алгоритмів розпізнавання знаків жестової мови. На долю аналізатора події припало узгодити різнорідну поведінку алгоритмів, на яку вже вказано. Для узгодження роботи алгоритмів має бути введена єдина система часу та подій. Завершення будь-якого алгоритму не обов'язкове, а також, алгоритм (модуль) може бути примусово зупинений аналізатором подій виходячи з рішень, прийнятих іншими алгоритмами (модулями).

Одним із способів обліку та визначення часу в системі є прийняття абсолютного часу, під яким будемо розуміти час так, як його сприймає людство в цілому: є один годинник з яким всі решта годинників синхронізуються. Синхронізація годинників стала на сьогодні домінуючим способом визначення часу в усіх комп'ютерних системах від end-user до найбільш потужних серверів. Тоді кожна подія, що відбувається в системі повинна мати мітку часу. Узгодженість дій частин системи в часі, знову ж таки, забезпечується аналізатором подій.

Іншим можливим способом обліку часу є використання часу як міри надходження даних на обробку. Тоді поняття час взагалі можна замінити порядковим номером одиниці вхідних даних. Цей підхід суттєво спрощує орієнтування в часі обробників послідовностей даних, проте має один суттєвий недолік. Вхідні данні можуть бути неоднорідними. Це пов'язано з достатнім різноманіттям пристроїв введення початкових даних як, наприклад, фотокамери, спеціалізовані камери зчитування рухів, тачпади, тачскріни, мишки, джойстіки або інші пристрої, які практично

поки що не реалізовані, але які можуть і будуть реалізовані для визначення руху (наприклад 3D мишка).

Остаточне рішення, що до обліку часу буде прийнято при практичній реалізації системи і можливо перероблене в майбутніх реалізаціях.

4. **Висновки та подальші напрямки роботи**.

В результаті проведених досліджень була розроблена та запропонована загальна архітектура системи аналізу жестового мовлення в реальному часі та принципи взаємодії модулів. Дана система інтегрується до систем повноцінної підтримки інтерактивної взаємодії людини-носія жестової мови з комп'ютером [7,8].

Подальші дослідження спрямовані на реалізацію запропонованих функціональних модулів та модулів керування, створення загальної системи розпізнавання жестової мови.

Список використаних джерел

1. *Летичевський О.А.* В.М. Глушков і сучасна інформатика (від теорії автоматів до когнітивних архітектур) / О.А. Летичевський // Вісн. НАН України. – 2013. – № 8. – С. 21-33.
2. *Vapnik V.N.* Statistical Learning Theory. / V.N.Vapnik //New York: Wiley, 1998
3. *Wang, X.* An HOG-LBP Human Detector with Partial Occlusion Handling /X.Wang, T.X.Han // IEEE Computer Engineering. – 2009. – P. 32-39.
4. *Kirichenko N.F.* Analysis and synthesis of signal classification systems by means of perturbation of pseudoinverse and projection operations / *N.F.Kirichenko*, G.I.Kudin // Cybernetics and Systems Analysis. – 2009. – №3. – P. 47-57.
5. *Stokoe W.C.* Sign Language Structure: An Outline of the Visual Communication Systems of the American Deaf / W.C.Stokoe // Studies in Linguistics. – 1960. – №8. –78 p.
6. Sing Languages. Ed. by D. Brentari. Cambridge: Cambridge University Press, 2010. – 714 p.
7. *Кривонос Ю.Г.* Формалізація жесто-утворення за допомогою трьохмірної моделі людини для української жестової мови / Ю.Г.Кривонос, Ю.В.Крак, О.В.Бармак, Г.М.Єфімов // Проблеми програмування. – 2012, №2-3. – С. 398-405.
8. *Крак Ю.В.* Розробка архітектури та основних інструментів комп'ютерної анімації для побудови системи синтезу жестової мови. / Ю.В.Крак, А.С.Тернов, М.П.Лісняк //Штучний інтелект. – 2013. – №3(61). – С.147-153.

References

1. LETYCHEVSKYY O.A. (2013) *V.M. Glushkov and modern science (from automata theory to cognitive architectures).* Visn. NAS of Ukraine. 8. p. 21-33.
2. VAPNIK V.N. (1998) *Statistical Learning Theory.* New York: Wiley,
3. WANG X., HAN T.X. (2009) *An HOG-LBP Human Detector with Partial Occlusion Handling*. IEEE Computer Engineering. p.32-39.
4. KIRICHENKO N.F., KUDIN G.I. (2009) *Analysis and synthesis of signal classification systems by means of perturbation of pseudoinverse and projection operations.* Cybernetics and Systems Analysis. 3. p.47-57.
5. STOKOE W.C. (1960) *Sign Language Structure: An Outline of the Visual Communication Systems of the American Deaf.* Studies in Linguistics. 8. p.78.
6. BRENTARI D. (ed.) (2010) *Sing Languages.* Cambridge: Cambridge University Press,
7. KRYVONOS IU.G., KRAK IU.V., BARMAK G.M., EFIMOV A.V. (2012) *Formalizing of gestures creation using three-dimensional models for human Ukrainian Sign Language*. Problems of Programming. 2-3. p.398-405.
8. KRAK IU.V., TERNOV A.S., LISNYAK M.P. (2013) *Development of architecture and basic tools for building computer animation synthesis system of sign language.* Artificial Intelligence. 3(61). p.147-153.

Надійшла до редколегії 29.10.14

УДК 004.42, 510.649

Криволап А.В. [1], аспірант

Система виводу з T- та F-обмеженнями для монотонної логіки Флойда-Хоара

[1] Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, пр-т. Глушкова 4д,
e-mail: krivolapa@gmail.com

A.V. Kryvolap[1], PhD student.

Inference system with T- and F-constrains for monotone Floyd-Hoare logic

[1] Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03680, Kyiv, Glushkova st., 4d,
e-mail: krivolapa@gmail.com

В роботі розглядається розширення логіки Флойда-Хоара на випадок часткових предикатів. Для цього семантика трійки Флойда-Хоара перевизначена за допомогою спеціальної монотонної композиції. Щоб підкреслити цей факт, в подальшому побудоване розширення іменується монотонною логікою Флойда-Хоара.

Основна увага приділяється системам виводу для мови WHILE, як прикладу простої мови програмування в наведеному розширенні логіки Флойда-Хоара. Розглядаються модифікації класичної системи виводу, які будуть коректними і у випадку часткових предикатів. Одна з модифікацій ґрунтується на додаткових обмеженнях для правил, а інша – на властивостях трійок Флойда-Хоара, що зберігаються правилами системи. Проте ці системи мають недоліки, пов'язані з повнотою та складністю додаткових обмежень. Тому пропонується система виводу з T- та F-обмеженнями, які є більш простими. Для побудованої системи доводиться повнота та коректність.

Ключові слова: програмні логіки, системи виводу, часткові предикати.

Extension of Floyd-Hoare logic on partial predicates is considered in this work. For this purpose semantics of the Floyd-Hoare assertion is redefined using special monotone composition. To underline this fact, presented extension is being further referred to as monotone Floyd-Hoare logic.

Main consideration is given to the inference systems for the WHILE language as an example of the simple imperative programing language. References to examples showing that it is impossible to use classical inference system for monotone Floyd-Hoare logic are given. Modifications of the classical inference system that are sound in the case of partial predicates are studied.One of those is based upon additional constraints for the rules and the other upon properties of the Floyd-Hoare assertions that rules of the inference system preserve. Both of the abovementioned inference systems have disadvantages related to completeness and complexity of the added constraints. Thus new inference system with T- and F-constraints is suggested. It has more simple constraints for the rules. Soundness and completeness is proved for the presented inference system.

Key Words: program logic, inference system, partial predicates.

Статтю представив д. ф.-м. н., проф. Буй Д.Б.

Розширення логіки Флойда-Хоара на випадок часткових предикатів

Логіка Флойда-Хоара [1, 2] є однією з найбільш досліджених та розповсюджених програмних логік. Вона широко використовується для специфікації та верифікації програм. Основою є так звані трійки або ассерції Флойда-Хоара. Вони складаються з передумови, програми і післяумови. Трійка вважається істиною, якщо виконання програми на даних, на яких істина передумова, завершується, то на результуючих даних післяумова теж істинна. Такий простий і інтуїтивний підхід і дозволив логіці Флойда-Хоара набути такого широкого розповсюдження.

З часом все потужніші засоби ставали доступні при створенні програм, серед них вказівники, динамічна пам'ять, об'єкти. Саме тому виникли численні розширення логіки Флойда-Хоара, які б дозволяли доводити

© А.В. Криволап 2014

властивості програм, які використовували ці засоби. Серед них Динамічна логіка (Dynamic logic) [3], Логіка розділення (Separation Logic) [4]. Проте в зазначених вище розширеннях, як і в класичному формулюванні, предикати вважаються тотальними. Але це справедливо не для всіх задач, тому у випадку, коли предикати можуть бути частковими, доводиться виконувати додаткові кроки, щоб звести їх до тотальних. Це зумовлює актуальність створення розширення логіки Флойда-Хоара на випадок часткових предикатів. Для цієї мети ми застосуємо композиційно-номінативний підхід. Він полягає в тому, що дані вважаються номінативними та складні предикати і функції утворюються з більш простих за допомогою композицій. За такого підходу поняття ассерції Флойда-Хоара можна задати за допомогою спеціальної композиції, яку ми будемо називати композицією Флойда-Хоара. Вона, приймаючи на вхід програму та два предикати, що задають передумову та післяумову, має результатом предикат, що задає істинність відповідної трійки.

Якщо при визначенні композиції Флойда-Хоара використати класичне означення, то отримана композиція не буде монотонною [5]. Монотонність розуміється як монотонність за включеннями графіків відображень. Вона є однією з найважливіших особливостей композиції Флойда-Хоара, так як дозволяє доводити властивості програм, базуючись на відповідних властивостях апроксимацій програм, що розглядаються. Монотонність гарантує, що при переході від менш визначених даних до більш визначених результат обчислення функцій та значення предикатів не зміняться. Саме тому було визначено спеціальну монотонну композицію Флойда-Хоара, а отримане розширення має назву монотонна логіка Флойда-Хоара.

При визначенні розширення логіки Флойда-Хоара використовується семантико-синтаксичний підхід, який полягає в тому, що спочатку визначається семантика, з якої природно випливає синтаксис як терми відповідної алгебри. Виключення складають лише формули для позначення трійок Флойда-Хоара, для яких використовується усталена нотація. А саме: $\{p\}pr\{q\}$, де p – формула, що відповідає передумові, pr – терм, що відповідає програмі, q – формула, що відповідає післяумові. Для решти випадків в подальшому не проводиться явного розрізнення між формулами та предикатами, які вони позначають, якщо це несуттєво.

Для того щоб визначити семантику, дамо спочатку деякі додаткові означення. Всі поняття, що не визначені в даній роботі, будемо розглядати в смислі [5].

Нехай V – множина імен, A – множина базових значень. Тоді клас номінативних множин ${}^{V}A$ визначається як клас всіх часткових відображень з множини імен V в множину базових значень A. Тобто ${}^{V}A = V \to A$.

В деяких випадках більш природно використовувати позначення, аналогічні позначенню множин. Записом $[v_i \mapsto a_i \mid i \in I]$ позначатимемо номінативну множину, в якій імена v_i мають значення a_i. А $v_i \mapsto a_i \in_n d$ позначатимемо той факт, що в даному d значенням імені v_i є a_i.

Основною функцією для номінативних множин є бінарна функція накладання. Інтуїтивно результатом застосування функції накладання до двох номінативних множин є номінативна множина, яка містить всі пари ім'я-значення з другої множини і ті пари ім'я-значення з першої, для яких в другій множині не існує пари ім'я-значення з відповідним іменем.

$$d_1 \nabla d_2 = [v \mapsto a \mid v \mapsto a \in_n d_2 \vee \\ \vee (v \mapsto a \in_n d_1 \wedge \neg \exists a'(v \mapsto a' \in_n d_2))].$$

Додатково для довільного відображення f та даних d і d' будемо використовувати наступні позначення: $f(d)\downarrow = d'$ – f визначено на d і має значення d', або ж в скороченій формі $f(d)\downarrow$ – f визначено на d; $f(d)\uparrow$ – f невизначено на d; $f[S] = \{f(d) \mid f(d)\downarrow, d \in S\}$ будемо позначати образ S відносно f; $f^{-1}[S'] = \{d \mid f(d)\downarrow, f(d) \in S'\}$ будемо позначати повний прообраз S' відносно f.

Далі дамо визначення класів відображень, що є основами в алгебрі що задає семантику розширення логіки Флойда-Хоара.

$Pr^{V,A} = {}^{V}A \to \{T, F\}$ – множина квазіарних предикатів над ${}^{V}A$, вони, зокрема, задають семантику умов в програмі. $Fn^{V,A} = {}^{V}A \to A$ – множина квазіарних ординарних функцій над ${}^{V}A$, що задають семантику виразів в програмі, $FPrg^{V,A} = {}^{V}A \to {}^{V}A$ – множина біквазіарних функцій над ${}^{V}A$, як варіант подання семантики програм.

Тоді програмні алгебри для довільних V та A, що використовується для подання семантики

монотонної логіки Флойда-Хоара, мають наступний вигляд:

$$PA(V,A) = < Pr^{V,A}, Fn^{V,A}, FPrg^{V,A}; \vee, \neg, \exists x, S_P^{\bar{x}}, S_F^{\bar{x}}, '{}x, AS^x, id, \bullet, IF, WH, FH, PC > .$$

Тепер дамо формальне визначення композиціям для довільних $x, x_1, \ldots, x_n \in V$, $d \in {}^V A$, $p, q, r \in Pr^{V,A}$, $f, g_1, \ldots, g_n \in Fn^{V,A}$, $pr, pr_1, pr_2 \in FPrg^{V,A}$.

Бінарна композиція диз'юнкції $\vee : Pr^{V,A} \times Pr^{V,A} \to Pr^{V,A}$:

$$(p \vee q)(d) = \begin{cases} T, \text{ якщо } p(d)\downarrow = T \text{ або } q(d)\downarrow = T, \\ F, \text{ якщо } p(d)\downarrow = F \text{ та } q(d)\downarrow = F, \\ \text{невизначено інакше.} \end{cases}$$

Унарна композиція заперечення $\neg : Pr^{V,A} \to Pr^{V,A}$:

$$(\neg p)(d) = \begin{cases} F, \text{ якщо } p(d)\downarrow = T, \\ T, \text{ якщо } p(d)\downarrow = F, \\ \text{невизначено інакше.} \end{cases}$$

Унарна композиція квантифікації з параметром $x \in V$, $\exists x : Pr^{V,A} \to Pr^{V,A}$:

$$(\exists x\, p)(d) = \begin{cases} T, \text{ якщо для деякого } a \in A, \\ \quad p(d\nabla[x \mapsto a])\downarrow = T, \\ F, \text{ якщо } p(d\nabla[x \mapsto a])\downarrow = F \\ \quad \text{для всіх } a \in A, \\ \text{невизначено інакше.} \end{cases}$$

n+1-арна параметрична композиція суперпозиції для предикатів з параметрами $x_1, \ldots, x_n \in V$, $S_P^{\bar{x}} : Pr^{V,A} \times \underbrace{Fn^{V,A} \times \ldots \times Fn^{V,A}}_{n} \to Pr^{V,A}$:

$$S_P^{\bar{x}}(p, g_1, \ldots, g_n)(d) \simeq \simeq p(d\nabla[x_1 \mapsto g_1(d), \ldots, x_n \mapsto g_n(d)]),$$

n+1-арна параметрична композиція суперпозиції для функцій з параметрами $x_1, \ldots, x_n \in V$, $S_F^{\bar{x}} : Fn^{V,A} \times \underbrace{Fn^{V,A} \times \ldots \times Fn^{V,A}}_{n} \to Fn^{V,A}$:

$$S_F^{\bar{x}}(f, g_1, \ldots, g_n)(d) \simeq \simeq f(d\nabla[x_1 \mapsto g_1(d), \ldots, x_n \mapsto g_n(d)]),$$

Нуль-арна параметрична композиція деномінації з параметром $x \in V$, $`x : Fn^{V,A}$:

$$`x(d) \simeq d(x) .$$

Унарна параметрична композиція присвоєння з параметром $x \in V$, $AS^x : Fn^{V,A} \to FPrg^{V,A}$:

$$AS^x(f)(d) \simeq d\nabla[x \mapsto f(d)] .$$

Нуль-арна композиція тотожної програми $id : FPrg^{V,A}$:

$$id(d) = d .$$

Бінарна композиція послідовного виконання $\bullet : FPrg^{V,A} \times FPrg^{V,A} \to FPrg^{V,A}$:

$$pr_1 \bullet pr_2(d) \simeq pr_2(pr_1(d)) .$$

Тернарна композиція розгалуження $IF : Pr^{V,A} \times FPrg^{V,A} \times FPrg^{V,A} \to FPrg^{V,A}$:

$$IF(r, pr_1, pr_2)(d) = \begin{cases} pr_1(d), \text{ якщо } r(d)\downarrow = T \\ \quad \text{та } pr_1(d)\downarrow, \\ pr_2(d), \text{ якщо } r(d)\downarrow = F \\ \quad \text{та } pr_2(d)\downarrow, \\ \text{невизначено інакше.} \end{cases}$$

Бінарна циклічна композиція $WH : Pr^{V,A} \times FPrg^{V,A} \to FPrg^{V,A}$:

$WH(r, pr)(d) = d_n$, якщо існують такі $d_1, d_2, \ldots, d_n \in {}^V A$, що $r(d)\downarrow = T$, $pr(d)\downarrow = d_1$, $pr(d_1)\downarrow = d_2, \ldots, pr(d_{n-1})\downarrow = d_n$, $r(d_1)\downarrow = T$, $r(d_n)\downarrow = F$, інакше $WH(r, pr)(d)\uparrow$.

Тернарна монотонна композиція Флойда-Хоара $FH : Pr^{V,A} \times FPrg^{V,A} \times Pr^{V,A} \to Pr^{V,A}$:

$$FH(p, pr, q)(d) = \begin{cases} T, \text{ якщо } p(d)\downarrow = F \\ \quad \text{або } q(pr(d))\downarrow = T, \\ F, \text{ якщо } p(d)\downarrow = T \\ \quad \text{та } q(pr(d))\downarrow = F, \\ \text{невизначено інакше.} \end{cases}$$

Бінарна композиція умови за прообразом $PC : FPrg^{V,A} \times Pr^{V,A} \to Pr^{V,A}$:

$$PC(pr,q)(d)=\begin{cases}T, \text{ якщо } q(pr(d))\downarrow=T,\\ F, \text{ якщо } q(pr(d))\downarrow=F,\\ \text{невизначено інакше.}\end{cases}$$

Композиція Флойда-Хоара є не лише монотонною, але й неперервною [5]. Також монотонними є решта композицій, зокрема, композиція умови за прообразом. Формально умова монотонності композиції Флойда-Хоара може бути записана наступним чином:

$$p\subseteq p', pr\subseteq pr', q\subseteq q' \Rightarrow \\ \Rightarrow FH(p,pr,q)\subseteq FH(p',pr',q').$$

Композиція умови за прообразом є в певною мірою аналогом перетворювача предикатів під назвою найслабкішої передумови, запропонованого Дейкстрою. Основною складністю при перенесенні означення Дейкстри [6] для монотонної логіки Флойда-Хоара є існування декількох можливих визначень логічного наслідку для часткових предикатів. Композиція умови за прообразом використовується для подання додаткових обмежень на правила систем виводу.

Слід зазначити, що композиція присвоєння AS^X відповідає оператору присвоєння := мови WHILE; композиція *id* відповідає оператору *skip*; умовна композиція *IF* відповідає оператору *if_then_else*; циклічна композиція *WH* відповідає оператору *while_do*.

Під істинністю предиката будемо розуміти неспростовність. Те, що предикат всюди істинний, позначатимемо $\models p$. Для того, щоб дати формальне визначення істинності, введемо позначення для областей істинності, хибності та невизначеності довільного предиката $p\in Pr^{V,A}$:

$$p^T=\{d \mid p(d)\downarrow=T\},$$

$$p^F=\{d \mid p(d)\downarrow=F\},$$

$$p^{\perp}=\{d \mid p(d)\uparrow\}.$$

Тоді за визначенням $\models p \Leftrightarrow p_J^F=\varnothing$ для довільної інтерпретації *J*. Також будемо використовувати $p\models q$ для позначення $\models p\to q$. Також визначимо додаткові відношення логічного наслідку для часткових предикатів. Вони будуть використані в наступних розділах в додаткових обмеженнях для правил.

Логічний наслідок за істиною $p\models_T q \Leftrightarrow p_J^T\subseteq q_J^T$ для кожної інтерпретації *J*.

Логічний наслідок за хибою $p\models_F q \Leftrightarrow q_J^F\subseteq p_J^F$ для кожної інтерпретації *J*.

Системи виводу монотонної логіки Флойда-Хоара

Для того, щоб використовувати програмну логіку не лише для специфікації програм, але і для верифікації, необхідно задати систему виводу.

Перед тим, як розглянути приклади систем виводу, потрібно дати додаткові означення.

Будемо позначати $\vdash_{IC} p$, якщо формула *p* може бути виведена в системі виводу *IC*. Або $\vdash p$, якщо система виводу задана неявно.

Система виводу називається коректною, коли для довільної формули $p \vdash p \Rightarrow \models p$. Іншими словами, якщо кожна формула, що може бути виведена, є істинною.

Система виводу називається повною, коли для довільної формули $p \models p \Rightarrow \vdash p$. Іншими словами, якщо кожна істинна формула може бути виведена.

Повнота може розумітись як екстенсіональна або інтенсіональна. За екстенсіональної повноти передумови та післяумови можуть бути довільними предикатами. За інтенсіональної повноти передумови та післяумови мають бути задані формулами деякої заданої мови. В роботі розглядається лише екстенсіональна повнота.

Система виводу *CI* мови WHILE в класичній логіці Флойда-Хоара, подана в [7], є повною та коректною. Проте для випадку часткових предикатів вона перестає бути коректною. Записана для монотонної логіки Флойда-Хоара, система CI має вигляд:

$$\{S_P^x(p,h)\}\, AS^x(h)\, \{p\},$$

$$\{p\}\, id\, \{p\},$$

$$\frac{\{p\}\, pr_1\, \{q\}, \{q\}\, pr_2\, \{r\}}{\{p\}\, pr_1 \bullet pr_2\, \{r\}},$$

$$\frac{\{r\wedge p\}\, pr_1\, \{q\}, \{\neg r\wedge p\}\, pr_2\, \{q\}}{\{p\}\, IF(r, pr_1, pr_2)\, \{q\}},$$

$$\frac{\{r\wedge p\}\, pr\, \{p\}}{\{p\}\, WH(r, pr)\, \{\neg r\wedge p\}},$$

$$\frac{\{p'\}\ pr\ \{q'\}}{\{p\}\ pr\ \{q\}}, p \to p', q' \to q\,.$$

Правила позначатимемо відповідно *R_AS, R_SKIP, R_SEQ, R_IF, R_WH, R_CONS.*

Для часткових предикатів правила *R_SEQ, R_WH* та *R_CONS* не гарантують, що з істинних засновків будуть виведені істинні висновки [5]. Тому система перестає бути коректною при переході до монотонної логіки Флойда-Хоара. Одним з розв'язків цієї проблеми є використання додаткових обмежень для відповідних правил.

Система виводу з додатковими обмеженнями *AC* має наступний вигляд:

$$\{S_P^x(p,h)\}\ AS^x(h)\ \{p\}\,,$$

$$\{p\}\ id\ \{p\}\,,$$

$$\frac{\{p\}\ pr_1\ \{q\},\{q\}\ pr_2\ \{r\}}{\{p\}\ pr_1 \bullet pr_2\ \{r\}}, p \models PC(pr_1 \bullet pr_2, r)\,,$$

$$\frac{\{r \wedge p\}\ pr_1\ \{q\},\{\neg r \wedge p\}\ pr_2\ \{q\}}{\{p\}\ IF(r, pr_1, pr_2)\ \{q\}}\,,$$

$$\frac{\{r\wedge p\}pr\{p\}}{\{p\}WH(r,pr)\{\neg r\wedge p\}}, p \models PC(WH(r,pr),\neg r\wedge p),$$

$$\frac{\{p'\}\ pr\ \{q'\}}{\{p\}\ pr\ \{q\}}, p \models_T p', q' \models_F q\,.$$

Правила позначатимемо відповідно *R_AS, R_SKIP, R_SEQ', R_IF, R_WH', R_CONS'.*

Представлена система виводу з додатковими обмеженнями є повною та коректною[5]. Проте, обмеження для правил дуже складні. Це зумовлює потребу в пошуку систем виводу з спрощеними обмеженнями або іншого підходу до побудови коректної та повної системи.

Розглянемо правила системи виводу *CI*. Всі вони окрім *R_CONS* зберігають наступні властивості ассерцій Флойда-Хоара. Якщо для трійки Флойда-Хоара $\{p\}pr\{q\}$ виконується $p \models_T PC(pr,q)$, будемо називати її *T*-зростаючою. Якщо для трійки Флойда-Хоара $\{p\}pr\{q\}$ виконується $p \models_F PC(pr,q)$, будемо називати її *F*-спадаючою. Неважко переконатись, що *T*-зростаючі та *F*-спадаючі ассерції є істинними.

Теорема. Правила *R_SEQ, R_IF, R_WH* не виводять ассерції з класу *T*-зростаючих (*F*-спадаючих) .

Доведення може бути знайдено в [5] і тому не приводиться.

Наведені вище факти показують, що якщо модифікувати правило *R_CONS* таким чином, щоб воно зберігало або властивість ассерції бути *T*-зростаючою, або *F*-спадаючою, можна отримати коректні системи виводу.

Система виводу *TI* для *T*-зростаючих ассерцій виглядає наступним чином:

$$\{S_P^x(p,h)\}\ AS^x(h)\ \{p\}\,,$$

$$\{p\}\ id\ \{p\}\,,$$

$$\frac{\{p\}\ pr_1\ \{q\},\{q\}\ pr_2\ \{r\}}{\{p\}\ pr_1 \bullet pr_2\ \{r\}}\,,$$

$$\frac{\{r \wedge p\}\ pr_1\ \{q\},\{\neg r \wedge p\}\ pr_2\ \{q\}}{\{p\}\ IF(r, pr_1, pr_2)\ \{q\}}\,,$$

$$\frac{\{r \wedge p\}\ pr\ \{p\}}{\{p\}\ WH(r, pr)\ \{\neg r \wedge p\}}\,,$$

$$\frac{\{p'\}\ pr\ \{q'\}}{\{p\}\ pr\ \{q\}}, p \models_T p', q' \models_T q\,.$$

Правила позначатимемо відповідно *R_AS, R_SKIP, R_SEQ, R_IF, R_WH, R_CONS''.*

Аналогічна система виводу може бути побудована для *F*-спадаючих ассерцій. Так як існують істинні ассерції, що не належать жодному з вищезазначених класів, очевидним є те, що жодна з побудованих систем виводу не є повною. Проте вони є повними для відповідних класів ассерцій.

Таким чином, хоча наведені системи виводу є коректними, але мають суттєві недоліки. Складні додаткові обмеження та повнота лише для певного класу ассерцій ускладнюють використання відповідних систем виводу. Тому знову постає проблема пошуку коректної та повної системи виводу з достатньо простими обмеженнями на правила.

Системи виводу з T- та F-обмеженнями

Розглянемо систему виводу *AC*, основним її недоліком є складність обмежень в правилах *R_SEQ'* та *R_WH'*. Щоб спростити ці обмеження, варто взяти до уваги властивості ассерцій, що були використані при побудові системи *TI*.

Система виводу *TF* з *T*- та *F*-обмеженнями виглядає наступним чином:

$$\{S_P^x(p,h)\}\ AS^x(h)\ \{p\}\,,$$

$$\{p\}\, id\, \{p\},$$

$$\frac{\{p\}pr_1\{q\},\{q\}pr_2\{r\}}{\{p\}pr_1 \bullet pr_2\{r\}}, \quad \begin{matrix} p \models_T PC(pr_1,q) \vee \\ \vee q \models_F PC(pr_2,r) \end{matrix},$$

$$\frac{\{r \wedge p\}\ pr_1\ \{q\},\{\neg r \wedge p\}\ pr_2\ \{q\}}{\{p\}\ IF(r, pr_1, pr_2)\ \{q\}},$$

$$\frac{\{r \wedge p\} pr \{p\}}{\{p\} WH(r, pr) \{\neg r \wedge p\}}, \quad \begin{matrix} r \wedge p \models_T PC(pr,p) \vee \\ \vee r \wedge p \models_F PC(pr,p) \end{matrix},$$

$$\frac{\{p'\}\ pr\ \{q'\}}{\{p\}\ pr\ \{q\}}, p \models_T p', q' \models_F q.$$

Правила позначатимемо відповідно *R_AS, R_SKIP, R_SEQ'', R_IF, R_WH'', R_CONS'.* Для зручності правила *R_SEQ''* та *R_WH''* можна розділити на два правила кожне:

$$\frac{\{p\}pr_1\{q\},\{q\}pr_2\{r\}}{\{p\}pr_1 \bullet pr_2\{r\}}, p \models_T PC(pr_1,q),$$

$$\frac{\{p\}pr_1\{q\},\{q\}pr_2\{r\}}{\{p\}pr_1 \bullet pr_2\{r\}}, q \models_F PC(pr_2,r),$$

$$\frac{\{r \wedge p\} pr \{p\}}{\{p\} WH(r, pr) \{\neg r \wedge p\}}, r \wedge p \models_T PC(pr,p),$$

$$\frac{\{r \wedge p\} pr \{p\}}{\{p\} WH(r, pr) \{\neg r \wedge p\}}, r \wedge p \models_F PC(pr,p).$$

Для позначення розділених правил будемо використовувати відповідно *R_SEQ_T, R_SEQ_F, R_WH_T, R_WH_F.*

Теорема. Система виводу *TF* коректна.

Доведемо індукцією за довжиною виводу.

База індукції.

Для правила *R_AS* потрібно довести $\models \{S_P^x(p,h)\}\, AS^x(h)\, \{p\}$. Іншими словами, потрібно показати, що не існує такого $d \in {}^V A$, що $S_P^x(p,h)(d)\downarrow = T$ та $p(AS^x(h)(d))\downarrow = F$. Проте за визначенням $S_P^x(p,h)(d) = p(d\nabla[x \mapsto h(d)])$ та $p(AS^x(h)(d)) = p(d\nabla[x \mapsto h(d)])$. Що і доводить неможливість існування такого $d \in {}^V A$.

Для правила *R_SKIP* потрібно довести $\models \{p\} id \{p\}$. Це очевидно, бо для довільного даного $d \in {}^V A$, $id(d) = d$, звідки $p(id(d)) = p(d)$.

Крок індукції.

Для правила *R_SEQ_T* потрібно довести, що маючи $\models \{p\}pr_1\{q\}$ та $\models \{q\}pr_2\{r\}$ разом з $p \models_T PC(pr_1,q)$, отримуємо $\models \{p\}pr_1 \bullet pr_2\{r\}$.

Розглянемо довільне $d \in {}^V A$, таке, що $p(d)\downarrow = T$. З $p \models_T PC(pr_1,q)$ отримуємо $q(pr_1(d))\downarrow = T$. А з $\models \{q\}pr_2\{r\}$ отримуємо, що неможливо, щоб $r(pr_2(pr_1(d)))\downarrow = F$. Разом з тим, що за визначенням $pr_2(pr_1(d)) = pr_1 \bullet pr_2(d)$ це доводить $\models \{p\}pr_1 \bullet pr_2\{r\}$.

Для правила *R_SEQ_F* доведення аналогічне.

Для правила *R_IF* потрібно довести, що маючи $\models \{r \wedge p\}pr_1\{q\}$ та $\models \{\neg r \wedge p\}pr_2\{q\}$, отримуємо $\models \{p\} IF(r, pr_1, pr_2)\{q\}$.

Візьмемо довільне $d \in {}^V A$, таке, що $p(d)\downarrow = T$. Розглянемо декілька випадків значень $r(d)$. Якщо $r(d)\downarrow = T$, тоді $(r \wedge p)(d)\downarrow = T$. А отже з $\models \{r \wedge p\}pr_1\{q\}$ отримаємо, що неможливо, щоб $q(pr_1(d))\downarrow = F$. Також за умови $r(d)\downarrow = T$, маємо $IF(r, pr_1, pr_2)(d) = pr_1(d)$. Таким чином при $r(d)\downarrow = T$ неможливо, щоб $q(IF(r, pr_1, pr_2)(d))\downarrow = F$. У випадку $r(d)\downarrow = F$ все аналогічно. А якщо $r(d)\uparrow$, то $IF(r, pr_1, pr_2)(d)\uparrow$. Отже, маємо $\models \{p\} IF(r, pr_1, pr_2)\{q\}$.

Для правила *R_WH_T* потрібно довести, що маючи $\models \{r \wedge p\} pr \{p\}$ та $r \wedge p \models_T PC(pr,p)$, отримуємо $\models \{p\} WH(r, pr)\{\neg r \wedge p\}$.

Розглянемо довільне $d \in {}^V A$, таке, що $p(d)\downarrow = T$. Випадок, коли $WH(r, pr)(d)\uparrow$ тривіальний. Якщо $WH(r, pr)(d)\downarrow = d_n$, то за визначенням існують елементи $d_0, d_1, \ldots, d_n$. Для них виконується $d_0 = d, d_1 = pr(d_0), \ldots, d_n = pr(d_{n-1})$ разом з $r(d_0)\downarrow = T, \ldots, r(d_{n-1})\downarrow = T, r(d_n)\downarrow = F$. Тоді за $r \wedge p \models_T PC(pr,p)$ маємо $p(d_1)\downarrow = T, \ldots, p(d_n)\downarrow = T$. Таким чином $(\neg r \wedge p)(d_n)\downarrow = (\neg r \wedge p)(WH(r, pr)(d)) = T \neq F$. Це доводить $\models \{p\} WH(r, pr)\{\neg r \wedge p\}$.

Для правила *R_WH_F* доведення аналогічне.

Для правила *R_CONS'* потрібно довести, що маючи $\models \{p'\} pr \{q'\}$ разом з $p \models_T p'$ та $q' \models_F q$, отримуємо $\models \{p\} pr \{q\}$.

Розглянемо $d \in {}^V A$, довільний такий, що $p(d)\downarrow = T$. З $p \models_T p'$ отримуємо $p'(d)\downarrow = T$. Якщо $q(pr(d))\downarrow = F$, тоді з $q' \models_F q$ маємо $q'(pr(d))\downarrow = F$. Проте це неможливо, бо

$\models\{p'\}pr\{q'\}$, отже невірно, що $q(pr(d))\downarrow=F$ і отримуємо $\models\{p\}pr\{q\}$.

Було розглянуто всі правила, отже кожна ассерція, що виводиться, є істинною і система виводу *TF* коректна. Що і треба було довести.

Теорема. Система виводу *TF* екстенсіонально повна.

Спочатку індукцією за будовою програми доведемо, що для довільних $pr\in FPrg^{V,A}$, $q\in Pr^{V,A}$ виконується $\vdash\{PC(pr,q)\}pr\{q\}$.

База індукції.

Неважко перевірити, що для композицій тотожної програми та присвоєння справедливо $PC(id,q)=q$ та $PC(AS^x(h),q)=S_p^x(q,h)$ для довільних $q\in Pr^{V,A}$, $h\in Fn^{V,A}$ та $x\in V$. Тому використовуючи правила *R_AS, R_SKIP*, маємо $\vdash\{PC(id,q)\}id\{q\}$ і $\vdash\{PC(AS^x(h),q)\}AS^x(h)\{q\}$.

Крок індукції.

Розглянемо композицію послідовного виконання. Потрібно показати, що $\vdash\{PC(pr_1\bullet pr_2,q)\}pr_1\bullet pr_2\{q\}$. За припущенням індукції $\vdash\{PC(pr_2,q)\}pr_2\{q\}$ та $\vdash\{PC(pr_1,PC(pr_2,q))\}pr_1\{PC(pr_2,q)\}$. Тоді за правилом *R_SEQ_T або R_SEQ_F* отримуємо $\vdash\{PC(pr_1,PC(pr_2,q))\}pr_1\bullet pr_2\{q\}$. Додаткові умови виконуються, так як для *R_SEQ_F* умова має вигляд $PC(pr_2,q)\models_F PC(pr_2,q)$. Якщо $PC(pr_1\bullet pr_2,q)\models_T PC(pr_1,PC(pr_2,q))$, то застосовуючи правило *R_CONS'*, отримаємо шукане твердження $\vdash\{PC(pr_1\bullet pr_2,q)\}pr_1\bullet pr_2\{q\}$.

Щоб довести потрібний логічний наслідок, розглянемо довільне $d\in{}^VA$, таке, що $PC(pr_1\bullet pr_2,q)(d)\downarrow=T$. За визначенням, маємо $q(pr_1\bullet pr_2(d))\downarrow=T$, або $q(pr_2(pr_1(d)))\downarrow=T$. Згортаючи за визначення композиції передумови за прообразом $(PC(pr_2,q))(pr_1(d))\downarrow=T$ і $PC(pr_1,PC(pr_2,q))(d)\downarrow=T$, що і доводить $PC(pr_1\bullet pr_2,q)\models_T PC(pr_1,PC(pr_2,q))$.

Розглянемо умовну композицію. Потрібно показати, що виконується наступне: $\vdash\{PC(IF(r,pr_1,pr_2),q)\}IF(r,pr_1,pr_2)\{q\}$. За припущенням індукції $\vdash\{PC(pr_1,q)\}pr_1\{q\}$ та $\vdash\{PC(pr_2,q)\}pr_2\{q\}$. Якщо довести $r\wedge PC(IF(r,pr_1,pr_2),q)\models_T PC(pr_1,q)$ та $\neg r\wedge PC(IF(r,pr_1,pr_2),q\models_T PC(pr_2,q)$, то використовуючи правила *R_CONS'* та *R_IF*, отримаємо шукане твердження.

Доведемо першу умову, друга умова доводиться аналогічно. Візьмемо довільне $d\in{}^VA$, таке, що $r\wedge PC(IF(r,pr_1,pr_2),q)(d)\downarrow=T$. Тоді маємо $r(d)\downarrow=T$ і $q(IF(r,pr_1,pr_2)(d))\downarrow=T$. Так як $r(d)\downarrow=T$, то $IF(r,pr_1,pr_2)(d)=pr_1(d)$, а отже $q(pr_1(d))\downarrow=T$, або $PC(pr_1,q)(d)\downarrow=T$, що і треба було довести.

Розглянемо циклічну композицію. Потрібно показати, що $\vdash\{PC(WH(r,pr),q)\}WH(r,pr)\{q\}$. Позначимо для зручності $p=PC(WH(r,pr),q)$. Розглянемо предикат p', такий, що $p'(d)\downarrow=T\Leftrightarrow p(d)\downarrow=T$ і $p'(d)\downarrow=F$ у всіх інших випадках. За припущенням індукції $\vdash\{PC(pr,p')\}pr\{p'\}$. Якщо довести, що $r\wedge p'\models_T PC(pr,p')$, тоді за правилом *R_CONS'* отримаємо $\vdash\{r\wedge p'\}pr\{p'\}$, звідки за правилом *R_WH_T* маємо $\vdash\{p'\}WH(r,pr)\{\neg r\wedge p'\}$. Тоді якщо $p\models_T p'$ та $\neg r\wedge p'\models_F q$ за *R_CONS'* маємо $\vdash\{PC(WH(r,pr),q)\}WH(r,pr)\{q\}$.

Твердження $p\models_T p'$ виконується за побудовою p'.

Доведемо $\neg r\wedge p'\models_F q$. Візьмемо деяке дане d, таке, що $q(d)\downarrow=F$, можливо три випадки відносно значення предикату r.

Якщо $r(d)\downarrow=T$, то $\neg r\wedge p'(d)\downarrow=F$.

Якщо $r(d)\downarrow=F$, то $WH(r,pr)(d)\downarrow=d$ і тоді $p(d)\downarrow=PC(WH(r,pr),q)(d)=q(d)=F$. Звідки $p'(d)\downarrow=p(d)=F$, а отже $\neg r\wedge p'(d)=F$.

Якщо $r(d)\uparrow$, то $WH(r,pr)(d)\uparrow$, а отже і $p(d)\uparrow$. Звідки $p'(d)\downarrow=F$, а отже $\neg r\wedge p'(d)=F$.

Для всіх випадків отримали $\neg r\wedge p'(d)=F$, отже $\neg r\wedge p'\models_F q$.

Доведемо $r\wedge p'\models_T PC(pr,p')$. Якщо для деякого даного d виконується $(r\wedge p')(d)\downarrow=T$, то відповідно $r(d)\downarrow=T$ і $p(d)\downarrow=p'(d)=T$. За визначенням p маємо $q(WH(r,pr)(d))\downarrow=T$. Отже $WH(r,pr)(d)\downarrow$, що разом з $r(d)\downarrow=T$ дає існування стану $d'=pr(d)$ такого, що $WH(r,pr)(d')\downarrow=WH(r,pr)(d)$. Тоді за визначення композиції передумови за

прообразом отримуємо $p(d')\downarrow = T$, а отже і $p'(d') = p'(pr(d))\downarrow = T$, або $PC(pr, p')(d)\downarrow = T$.

Було розглянуто всі композиції, отже $\vdash \{PC(pr,q)\}pr\{q\}$ для довільних *pr* та *q*.

Для довільної істинної ассерції $\models \{p\}pr\{q\}$ можна визначити предикат q', наступним чином:

$$q'(d) = \begin{cases} T, \text{ якщо } p(pr^{-1}(d))\downarrow = T, \\ F, \text{ якщо } q(d)\downarrow = F, \\ \text{невизначено інакше.} \end{cases}$$

Такий предикат можливий завдяки визначення істинності, що гарантує однозначність $q'(d)$ для довільного даного. Неважко перевірити, що $p \models_T PC(pr, q')$ та $q' \models_F q$. За доведеним раніше $\vdash \{PC(pr,q')\}pr\{q'\}$. Тоді за правилом *R_CONS'* можна отримати $\vdash \{p\}pr\{q\}$, а отже система виводу повна. Що і треба було довести.

Висновки

В роботі було розглянуто монотонну логіку Флойда-Хоара. Особливу увагу було приділено системам виводу. Наведено класичну систему виводу, яка перестає бути коректною при застосуванні для часткових предикатів. Також розглянуто систему виводу з додатковими обмеженнями та систему виводу для класів *T*-зростаючих та *F*-спадаючих ассерцій. Відповідні системи коректні та екстенсіонально повні, проте мають ряд недоліків.

Побудовано систему виводу з T- та F-обмеженнями, яка була позбавлена від більшості з приведених недоліків. Для побудованої системи доведено коректність та екстенсіональну повноту. Проте, проблема побудови систем виводу з більш простими обмеженнями залишається актуальною.

Список використаних джерел

1. *Floyd R.W.* Assigning meanings to programs / Floyd R.W. // Proceedings of the American Mathematical Society Symposia on Applied Mathematics. – 1967. – Vol. **19**. – P. 19-31.
2. *Hoare C.A.R.* An axiomatic basis for computer programming / Hoare C.A.R. // Communications of ACM. – 1969. – Issue **12**. – P. 578-580,583.
3. *Harel D., Kozen D., Tiuryn J.* Dynamic logic / Harel D., Kozen D., Tiuryn J. // Handbook of Philosophical Logic. – 1984. – P. 497-604.
4. *Reynolds J.C.* Separation logic: A logic for shared mutable data structures / Reynolds J.C. // LICS'02. – 2002. – P. 55-74.
5. *Kryvolap A., Nikitchenko M., Schreiner W.* Extending Floyd-Hoare logic for partial pre- and postconditions / Kryvolap A., Nikitchenko M., Schreiner W // ICTERI 2013, CCIS.– Springer, Heidelberg. – 2013. – Vol. **412**. –P. 355-378.
6. *Edsger W. Dijkstra*. Guarded commands, nondeterminacy and formal derivation of program / Edsger W. Dijkstra // Communications of the ACM. – 1975. – №**18(8)**. – P. 453-457.
7. *Nielson H.R., Nielson F.* Semantics with applications: a formal introduction / Nielson H.R., Nielson F. – John Wiley & Sons Inc. – 1992. – 240 p.

References

1. FLOYD, R.W. (1967) Assigning meanings to programs. In *Proceedings of the American Mathematical Society Symposia on Applied Mathematics.* vol. 19 p. 19-31.
2. HOARE, C.A.R. (1969) An axiomatic basis for computer programming. In *Communications of ACM*. isssue 12 p. 578-580,583.
3. HAREL, D., KOZEN, D. and TIURYN, J. (1984) Dynamic logic. In *Handbook of Philosophical Logic.* P. 497-604.
4. REYNOLDS, J.C. (2002) Separation logic: A logic for shared mutable data structures. In LICS'02. P. 55-74.
5. KRYVOLAP, A., NIKITCHENKO, M. and SCHREINER, W. (2013) Extending Floyd-Hoare logic for partial pre- and postconditions. In ICTERI 2013, CCIS vol. 412 P. 355-378.
6. DIJKSTRA, E. (1975) Guarded commands, nondeterminacy and formal derivation of program. *Communications of the ACM*. 18(8) p. 453-457.
7. NIELSON, H.R. and NIELSON, F. (1992) *Semantics with applications: a formal introduction*. John Wiley & Sons Inc.

Надійшла до редколегії 01.07.14

УДК 004.82

Лялецький О.О.[1], к.ф.-м.н.
Афонін А.О.[2], к.ф.-м.н.

Про інтелектуальні та інтерфейсні засоби систем автоматизації пошуку доведень

[1]Київський національний університет імені Тараса Шевченка,03680, м. Київ, пр-т Глушкова 4д, e-mail: foraal@mail.ru
[2]Національний університет «Києво-Могилянська академія» , 04655, м. Київ, вул. Сковороди 2, e-mails: andrew.afomin@gmail.com

A.A.Lyaletsky[1], PhD (Physics&Mathematics)
A.A.Afonin[2], PhD (Physics&Mathematics)

On intelligent and interface tools for automated theorem-proving systems

[1]Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03680, Kyiv, Glushkov av., 4d, e-mail: foraal@mail.ru
[2] National University of Kyiv-Mohyla Academy, 04655, Kyiv, Skovorody vul., 2, e-mail: andrew.afomin@gmail.com

У статті обговорюються деякі питання побудови інтелектуальних та інтерфейсних засобів систем автоматизації пошуку доведень. Дається опис загального підходу до їх вирішення, концентруючи увагу на таких засобах, як формальна природна мова, дедуктивні перетворення, інформаційне середовище, взаємодія з людиною в ході розв'язанні задачі, що розглядається. Формулюються вимоги до них з точки зору ефективності пошуку доведень теорем та верифікації математичних текстів. Звертається увага на важливість їх розвитку у зв'язку з їх активним використанням у прикладних інформаційних системах, що призначені для перевірки властивостей протоколів, ефективного витягання та управління математичними знаннями, поповнення наявних баз даних новими фактами, генерування нових знань, добування інформації у репозиторіях, яка є необхідною для вирішення поставленого завдання. Демонструється, що інтелектуальні та інтерфейсні засоби, яки були розвинуті у рамках так званого Алгоритму Очевидності, добре відповідають сучасним дослідженням в області комп'ютерних наук та автоматизації міркувань.

Ключові слова: система автоматизації пошуку доведень теорем, інтелектуальні засоби, інтерфейсні засоби, формальна мова, дедуктивні перетворення.

Some problems of the construction of intelligent and interface tools for automated theorem-proving systems are discussed in the paper. The description of a general approach to their solving is given focusing attention on such tools as a formal natural language, deductive transformations, information environment, man-machine interaction in the process of solving of a task under consideration. Requirements to them are described from the point of view of efficiency of theorem proving and mathematical text verification. An attention is drawn to the importance of their development due to their active use in applied information systems intended for the verifying of protocol properties, efficient mining and managing of mathematical data, updating of existing databases with new facts, generation of new knowledge, extracting of an information from repositories that is necessary for solving a task. It is shown that the tools being developed in the framework of the so-called Evidence Algorithm are well corresponded with current approaches and investigations in the fields of theoretical and applied computer sciences and automated reasoning.

Key Words: automated theorem-proving system, intelligent tools, interface tools, formal language, deductive transformations.

Статтю представив д.ф.-м.н., чл.-кор. НАНУ, проф. Анісімов А.В.

1. Процес ведення інтелектуальної й інтерфейсної взаємодії можна визначити як обмін даними між обчислювальною/інформаційною системою та користувачем, здійснюваний за допомогою інтерактивного терміналу за певними правилами, головним чином, за допомогою діалогу між комп'ютером і людиною (іноді, діалогу між комп'ютером і людиною (іноді, фактично, в формі монологу з боку людини). Він може розглядатися як оболонка, що включає всі процеси, що здійснюються в системі по виконанню певних завдань. Процеси введення-виведення даних забезпечують обмін на самому верхньому рівні, на якому інтерфейсний модуль

© О.О.Лялецький, А.О.Афонін, 2014

повинен правильно інтерпретувати кожне завдання, що він отримує від людини. Його основне призначення - коректно визначити задачу, яку користувач покладає на систему; при цьому виявляються важливими правила ведення інтерфейсної взаємодії комп'ютера з людиною при обробці даних.

Розробка інтелектуального інтерфейсу спрямована на підвищення узгодження творчих можливостей системи і людини, знаходження та узгодження стилю діалогу з існуючими потребами й уявленнями людини.

2. Існують різні види діалогів, серед яких діалог, керований системою, більш зручний тим, що він краще підлаштовується під комп'ютер. Але при цьому він має більше обмежень, ніж діалог, керований користувачем на деякому формальному діалекті природної мови.

При використанні машинної штучної мови розпізнається лише невелика кількість слів і у кожний конкретний момент вхідні повідомлення складаються з дуже невеликого числа слів.

Тому у поточний час головні зусилля розробників систем автоматизації міркувань концентруються на використанні різних (формальних) фрагментів природної мови, які є найбільш зручними для користувача засобами ведення діалогу з системою. Саме використання обмеженої, а в ідеалі, і необмеженої природної мови в тій або іншої предметній області веде до найбільш ефективного вирішення задач на комп'ютері з використанням інтелектуального інтерфейсу. Тому для полегшення взаємодії користувача з системою в процесі вирішення інтелектуальних завдань на комп'ютері необхідним елементом є перехід на той чи інший (формальний) фрагмент природної мови, який враховує предметну область і специфіку вирішуваних завдань.

3. Якщо з позицій вищесказаного звернутися до розробки інтелектуальних та інтерфейсних засобів систем автоматизації міркувань, то їх важливість ще додатково посилюється складністю обробки інформації, пов'язаної з тим, що доводиться розробляти і досліджувати підходи, пов'язані з одночасним проведенням числових викладок та/або аналітичних перетворень та/або дедуктивних побудов.

Один з можливих підходів в напрямку створення систем такого типу з розвитим мовним інтерфейсом був запропонований академіком В.М. Глушковим ще на початку 1970-х років в рамках робіт з так званої програми Алгоритм Очевидності, АО (Evidence Algorithm, див. http://nevidal.org). В.М.Глушков запропонував в [1] проводити одночасно дослідження:

(1) з формальних мов природного типу для подання математичних текстів у формі, найбільш зручною для користувача;

(2) з побудови програм "очевидних" дедуктивних перетворень, тобто по формалізації та еволюційному розвитку поняття машинного кроку доведення;

(3) з створення інформаційного середовища, що має вплив на поточний поняття комп'ютерного кроку доведення;

(4) з інтерактивних засобів підтримки користувачем процесу пошуку доведень.

4. В рамках робіт за алгоритмом Очевидності в кінці 1970-х - початку 1980-х рр.. була реалізована російськомовна версія системи автоматизації дедукції, САД [2], а починаючи з кінця 1990 рр. активно розвивається її англомовна версія SAD [3], яка увібрала в себе сучасне бачення так званої *евиденціальної парадигми*. Зупинимося докладніше на її основних положеннях відносно пунктів (1) - (4).

(1) Мови повинні задовольняти наступним вимогам: вони повинні мати формальний синтаксис і формальну семантику; для одержання замкнених текстів, вони повинні забезпечувати можливість формулювання аксіом теорій, визначень, необхідних тверджень, теорем і доведень; їх тезаурус повинен бути відділений від їх граматики, що повинна бути розширюваною; вони повинні бути максимально наближені до природних мов математичних публікацій; з метою використання добре розвинутих методів пошуку доведення, вони повинні допускати можливість трансляції математичних текстів, записаних на них, у множину формул 1-го порядку.

(2) Відповідно до евіденциальної парадигми, ядро будь-якої системи пошуку доведень повинна утворювати так звана "евіденциальна процедура", яка призначена для встановлення як коректності верифікованого кроку, так і істинності твердження, що доводиться в цілому деякою дедуктивною технікою. Природно, що для досягнення цієї мети повинні бути передбачені різні методи посилення "евіденциальної процедури", зокрема: пошук допоміжних тверджень та іншої релевантної інформації, яка може бути корисною; використання можливостей систем комп'ютерної алгебри; перетворення звичайних для людини прийомів доведення у машинні; використання різноманітних методів рішення рівнянь.

(3) Евіденціальна парадигма передбачає побудову і розвиток інформаційного середовища (бази математичних знань), що містить описи властивостей, які змінюються по мірі одержання нових знань і, у кінцевому рахунку, що впливає на поняття машинної очевидності кроку доведення. Вона повинна використовувати вже існуючі засоби представлення, здобування й обробки математичних знань.

(4) Інтерфейсні засоби повинні передбачати можливість активного втручання користувача в процес пошуку доведення і полегшувати людині розуміння процесу пошуку.

Це з необхідністю приводить до проблеми створення, теоретичного дослідження та імплементації різноманітних інтелектуальних методів та інтерфейсних засобів як людини з системами автоматизації пошуку доведеннь теорем на формальної мові, максимально наближеної до звичайної мови людини, так різних систем та/або їх частин.

Стислий опис досліджень в цьому напрямку, що базуються на досвіді, накопиченому в ходу робіт по системі SAD, представлений нижче.

5. Сказане вище приводить до того, що найбільш розумною виявляється трирівнева архітектура систем автоматизації пошуку доведень, коли на першому рівні проводиться лінгвістична обробка вихідних (формалізованих) математичних знань, яка полягає в тому, що на ньому проводиться синтаксичний аналіз введеної інформації з наступною її трансляцією у внутрішнє подання, яке в подальших рівнях підлягає логічним і математичним перетворенням. На другому рівні виконується спрощення даної задачі за допомогою її зведення до ряду підзадач простішої структури. У певні моменти часу обрана підзадача, яка задовольняє певним вимогам, піддається її обробці дедуктивними засобами з метою встановлення її вивідності, тобто встановлення її логічного слідування з обраних передумов. На третьому рівні, для поліпшення дедуктивних можливостей систем автоматизації пошуку доведень, повинне використовуватися інформаційне середовище за допомогою різноманітних інтерфейсних засобів.

6. З викладеного вище випливає, що для систем пошуку доведень першочерговим завданням з розробки інтелектуального інтерфейсу є розвиток лінгвістичних засобів.

В історичному плані розробка мовних засобів у рамках евіденціальної парадигми почалася ще на початку 1970-х років після появи Алгоритму Очевидності в роботі В.М.Глушкова [1]. Як результат, незабаром з'явилася мова TL (Theory Language) [4] в російськомовному варіанті, яка на той час не мала аналогів у світовій практиці і була орієнтована на запис замкнених математичних текстів, що містять теорему, яка призначена для встановлення її істинності, і все необхідне для її доведення.

Після отримання системою вхідного TL-тексту, він транслювався у внутрішнє середовище для знаходження доведення виділеної теореми або для інших цілій.

Ця ж сама ідея була використана при створенні англомовної версії мови TL, яка отримала назву ForTheL (FORmal THEory Language) [5] і мала ряд особливостей, пов'язаних, головним чином, з переходом від російської граматики до англійської, що суттєво дозволило наблизитися до природного написання (англійських) текстів. Як і TL, ForTheL у первісному варіанті не мав засобів для запису доведень. Її подальший розвиток дозволив надати їй сучасного вигляду і говорити про те, що мова покриває значну частину практичних потреб у запису формальних математичних текстів.

7. Одним з основних положень евіденціальної парадигми є поняття кроку очевидності, який еволюційне розвивається, що визначається тими наявними в розпорядженні дедуктивними засобами, які використовуються для доведення тверджень [6]. На поточний час розвинутий спеціальний секвенційний формалізм для логіки першого порядку. Він дозволяє не тільки будувати різні машінні секвенційні числення для класичної логіки, але й дає підхід до побудови досить ефективних секвенційних числень для інтуїціоністської логіки.

У реалізованій версії (англомовної) системи SAD секвенційний формалізм знайшов своє вираження у вигляді логічної процедури, що представляє оригінальне секвенційне числення і дозволяє провести як верифікацію заданого математичного тексту, так і автоматичне доведення обраного твердження [7].

8. Логічна обробка інформації в системі SAD пов’язана з вирішенням різноманітних задач з доведення деяких фактів в предметних областях, головним чином, в математиці. В даний час накопичено велику кількість проблем для автоматичного або автоматизованого пошуку доведень в самих різних її розділах. З метою впорядкувати їх і дати можливість використовувати ці проблеми самим різним системам автоматизації міркувань для

проведення тестових перевірок їх обчислювальних можливостей, була створена бібліотека TPTP (Thousands of Problems for Theorem Provers, див. http://www.tptp.org/), яка дає надійні і прості механізми доступу до математичних знань, накопичених в ній. Тому у системі SAD було вирішене завдання її інтерфейсного підключення до TPTP, що призводить не тільки до простого використання всього математичного багатства TPTP, але також може забезпечити поповнення бібліотеки TPTP новими знаннями, отриманими в ході експлуатації системи SAD.

Висновок. Робота демонструє, що підхід до побудови інтелектуальних та інтерфейсних засобів систем пошуку доведень, розвинутий у рамках евиденциальной парадигми і в ході проектування і реалізації систем САД і SAD, показав свою спроможність не тільки тому, що у даний час він повністю відповідає існуючим трендами розвитку комп'ютерних наук та автоматизації міркувань, але ще й тому, що за допомогою таких засобів вдалося верифікувати ряд нетривіальних математичних фактів. Тому представляється перспективним подальше проведення фундаментальних і прикладних робіт по реалізації програми Алгоритм Очевидності.

Список використаних джерел

1. *Глушков В. М.* Некоторые проблемы теории автоматов и искусственного интеллекта / В.М. Глушков // Кибернетика. – 1970. – № 2. – С. 3-13.
2. *Капитонова Ю.В.* О системе обработки математических текстов / Ю.В. Капитонова, К. П. Вершинин, А. И. Дегтярев, А. П. Жежерун, А. В. Лялецкий // Кибернетика. – 1979. – № 2. – С. 48.
3. *Lyaletski A.* System for Automated Deduction (SAD): Linguistic and Deductive Peculiarities / A. Lyaletski, A. Degtyrev, K. Verchinine, A. Paskevich // Advances in Soft Computing: Intelligent Information Systems 2002. – Physica-Verlag, Springer. – 2002. – Vol. 4603. – P. 398-403.
4. *Глушков В. М.* О формальном языке для записи математических текстов / В.М. Глушков, К.П. Вершинин, Ю.В. Капитонова и др. // В сб.: Автоматизация поиска доказательств теорем в математике. – Киев: ИК АН УССР, 1974. – С. 3-36.
5. *Vershinin K.* ForTheL - the language of formal theories / *K*. Vershinin, A. Paskevich // Journal of Information Theories and Applications. – 2000. – V. 7 (3). – P. 120-126.
6. *Асельдеров З.М.* Эвиденциальная парадигма и обработка компьютерных математических знаний / З.М. Асельдеров, О.В. Лялецький, Л.З. Фролова // Системні дослідження та інформаційні технології. – 2004. – № 1. – С. 7-17.
7. *Lyaletski A.* Theorem proving and proof verification in the system SAD / A. Lyaletski, A. Paskevich, K. Verchinine // Lecture Notes in Computer Science. – 2004. – V. 3119. – P. 236-250.

References

1. GLUSHKOV, V.M. (1970) Some problems of automata theory and artificial intelligence. *Cybernetics and System Analysis.* 6(2). p. 17-27.
2. KAPITONOVA, Y.V., VERSHININ, K.P., DEGTYAREV, A.I., ZHEZHERUN, A.P., and LYALETSKI, A.V. (1979) System for processing mathematical texts. *Cybernetics and System Analysis*. 15(2). p. 209-210.
3. LYALETSKI A., DEGTYREV A., VERCHININE K., and PASKEVICH A. (2002) System of Automated Deduction (SAD): Linguistic and Deductive Peculiarities. *Advances in Soft Computing: Intelligent Information Systems 2002*. 4603. p. 398-403.
4. GLUSHKOV, V.M., VERSHININ, K.P., KAPITONOVA, Y.V. et al. (1974) O formal'nom yazyke dlya zapisi matematicheskikh tekstov. *Avtomatizatsiya poiska dokazatel'stv teorem v matematike*. Kiev: IK AN UkSSR. p. 3-36.
5. VERSHININ, K. and PASKEVICH, A. (2000) ForTheL - the language of formal theories. *Journal of Information Theories and Applications*. 7(3). p. 120-126.
6. ASEL'DEROV, Z.M., LYALETSKI, A.V., FROLOVA L.Z. (2004) Evidentzial'naya paradigma i obrabotka komp'yuternykh matematicheskikh znanij. *Sistemni doslidzhennya ta informatzijni tekhnologii*. p. 7-17.
7. LYALETSKI A., PASKEVICH A., and VERCHININE K. (2004) Theorem proving and proof verification in the system SAD. *Lecture Notes in Computer Science*. 3119. p. 236-250.

Надійшла до редколегії 22.09.2014

УДК 519.21

Макушенко І.А., к. ф.-м. н.

Оптимальне керування вхідним потоком в умовах критичного навантаження в мережі

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, пр-т. Глушкова 4д,
e-mail: iamak@ukr.net

I.A. Makushenko, Ph.D.

Optimal control of input flow in heavy traffic on the network

Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03680, Kyiv, Glushkova st., 4d**,**
e-mail: iamak@ukr.net

Стаття присвячена перспективному напрямку теорії стохастичних систем, пов'язаному з вивченням мереж з керованими параметрами. Проведено асимптотичний аналіз систем інтегральних рівнянь, що описують роботу багатоканальної стохастичної мережі. Розроблено метод гауссівської апроксимації для підрахунку функціоналів оптимізаційних задач в умовах критичного навантаження в мережі. Показано, що основними умовами для апроксимації процесу накопичення прибутку гауссівським процесом є справедливість функціональної центральної граничної теореми для вхідного потоку та відкритість мережі.

Ключові слова: багатоканальна мережа, інтегральне рівняння, перевантажений режим, гауссівська апроксимація.

The paper is devoted to perspective direction of queuing theory connected with investigation of queuing systems and networks with controlled parameters. The service network which involve "r" nodes of the same type is considered. From the outside common flow arrives at the input of the network. For service of the call each node has unbounded number of servers. The main purpose of the proposed work is a choice of the control of input flow which maximize an average income.Work of the multichannel stochastic network described above is modeled by the branching process. The characteristics of accumulative process of income are studied. Asymptotical analysis of systems of integral equations for the stochastic network is realized. Conditions in which the network operates in heavy traffic are formulated. To calculate of the goal functions of optimization problems for the multichannel stochastic network in heavy traffic the method of Gaussian approximation is developed. It is shown that the main conditions for approximation of accumulative process of income Gaussian process is justice of the functional central limit theorem for the input flow and openness of the network. Evident and approximate formulas for the goal functions of optimization problems via model parameters are constructed on the basis of the performed research.

Key Words: multichannel network, heavy traffic regime, Gaussian approximation.

Статтю представив д. т. н., проф. Заславський В.А.

1. Вступ

Становлення теорії стохастичних мереж та її розвиток в значній мірі стимулювались практичними задачами з проектування та модернізації інформаційно-обчислювальних систем та мереж. Слід зазначити, що область застосування моделей стохастичних мереж значно розширюється, якщо зняти припущення про експоненційний характер часу обробки інформації у вузлах мережі, оскільки в реальних інформаційно-обчислювальних мережах функції розподілу часу обробки у вузлах відрізняються від експоненційних. На сьогоднішній день теорія стохастичних мереж є одним з основних перспективних напрямків моделювання систем мережевої структури. Тісний зв'язок з практикою весь час розширює клас моделей мережевої структури і цим обумовлюється інтенсивний розвиток теорії стохастичних мереж.

Важливим класом задач у дослідженні стохастичних мереж є оптимізаційні задачі

© І.А. Макушенко, 2014

пов'язані з розподілом інформаційних потоків, вибором пропускних спроможностей і топологічної структури мережі. Розв'язки таких задач надають можливість вирішувати практичні задачі керування ресурсами інформаційно-обчислювальних мереж та мереж зв'язку. Сучасний стан досліджень в цій області представлено в роботах [1], [2].

Тема даної роботи пов'язана з проблемою оптимального поділу між вузлами мережі зовнішнього навантаження. У роботі для немарковських стохастичних мереж розглянуто задачу оптимального керування напрямком вхідного потоку. При цьому вибір стратегії керування базується на такому показнику якості функціонування мережі як середній прибуток від роботи всієї мережі в перехідному та стаціонарному режимах.

1. Опис моделі

Розглянемо модель $\left[G\,|\,GI\,|\,\infty\right]^r$ – мережі, в якій на структуру вхідного потоку $\nu'(t)=\left(\nu_1(t),\nu_2(t),...,\nu_r(t)\right)$ не накладається ніяких обмежень. Компоненти вектора $\nu(t)$ мають наступну інтерпретацію: $\nu_i(t),\ \ i=1,2,...,r$ – кількість інформаційних пакетів, що надійшли іззовні в *i*-тий вузол мережі на проміжку часу *[0,t]*. Компоненти можуть бути залежними, але ця залежність не обов'язково пов'язана з керуванням входу напівмарковським процесом *x(t)*. Таке узагальнення, по-перше, дозволяє отримати більш загальні результати. По-друге, в $\left[G\,|\,GI\,|\,\infty\right]^r$ – моделях стає прозорою структура апроксимативного процесу для перевантаженого режиму функціонування.

Траєкторія інформаційного пакету в $\left[G\,|\,GI\,|\,\infty\right]^r$ – мережі описується напівмарковським процесом $y^m(t)\in\{1,2,...,r,r+1\}$, напівмарковська матриця якого $\left\|G_{ij}(t)\right\|_1^{r+1}$ будується за функціями розподілу часу обробки $G_i(t),\ \ i=1,2,...,r$ у вузлах мережі і матрицею маршрутизації $P=\left\|p_{ij}\right\|_1^r$.

Індекс "m" вказує на те, що інформаційний пакет надійшов у мережу через m-тий вузол, стан "$r+1$" для $y^m(t)$ є поглинаючим. Поглинання в "$r+1$" означає вихід пакету з мережі. Через $p_i^m(t)=P(y^m(t)=i),\quad m,i=1,2,...,r$, будемо позначати перехідні імовірності напівмарковського процесу $y^m(t),\ \ P(t)=\left\|p_i^m(t)\right\|_1^r$.

Для моделювання процесу обробки інформації сумісно з процесом накопичення прибутку будемо використовувати 2r-вимірний гіллястий процес Беллмана-Харріса $(\chi_1^m(t),...,\chi_r^m(t),\gamma_1^m(t),...,\gamma_r^m(t))=((\chi^m(t))',(\gamma^m(t))')$, $m=1,...,2r$, який задається генератрисою безпосередніх нащадків: $f^i(x,y)=y_i(\sum_{j=1}^r p_{ij}x_j+p_{ir+1})$, $\quad f^{r+i}(x,y)=y_i$, $i=1,2,...,r$, $\ |y|\le 1$, де $p_{ij},\ \ i,j=1,2,...,r$ – компоненти матриці маршрутизації, p_{ir+1} – імовірність виходу пакету з мережі після обробки в і-ому вузлі. Тривалості життя мають функції розподілу: $G_i(t)$ для $i=1,2,...,r$ (ф. р. часу обробки в і-ому вузлі) і

$$G_i(t)=\begin{cases}0, & t<1\\ 1, & t\ge 1\end{cases},$$

для $i=r+1,...,2r$.

У зв'язку з випадковими процесами $((\chi^m(t))',(\gamma^m(t))')$, $m=1,...,r$ введемо такі позначення:

$$\chi(t)=\left\|\chi_i^m(t)\right\|_1^r,\ \ \Gamma(t)=\left\|\gamma_i^m(t)\right\|_1^r,$$

$$P(t)=\left\|p_i^m(t)\right\|_1^r=\left\|M\chi_i^m(t)\right\|_1^r,$$

$$A(t)=\left\|A_i^m(t)\right\|_1^r=\left\|M\gamma_i^m(t)\right\|_1^r.$$

Режим критичного навантаження в $\left[G\,|\,GI\,|\,\infty\right]^r$ – мережі означає, що її параметри залежать від "n" (номера серії) так, що виконуються наступні умови.

1) Для багатовимірного вхідного потоку $\nu^{n'}(t)=\left(\nu_1^n(t),\nu_2^n(t),...,\nu_r^n(t)\right)$ ($\nu_i^n(t)$ – кількість інформаційних пакетів, що надійшли іззовні в і-ий вузол мережі на проміжку часу $[0,t]$) існують константи $\lambda_i\ge 0,\ \ i=1,2,...,r,\ \ \lambda_1+\lambda_2+...+\lambda_r\ne 0$ такі, що

$$n^{-1/2}\left(\nu_1^{(n)}(t)-\lambda_1 nt,...,\nu_r^{(n)}(t)-\lambda_r nt\right)\overset{U}{\underset{n\to\infty}{\Rightarrow}}$$

$$\overset{U}{\underset{n\to\infty}{\Rightarrow}}W'(t)=(W_1(t),...,W_r(t)),$$

де $\nu^{(n)}(t)=\nu^n(nt)$, $W(t)$ – r-вимірний процес броунівського руху з нульовим вектором математичних сподівань $MW(t)=0$ і кореляційною матрицею $MW(1)W'(1)=\sigma^2=\left\|\sigma_{ij}\right\|_1^r$, символ "$\overset{U}{\Rightarrow}$" означає слабку збіжність у рівномірній топології.

2) Послідовність (за параметром n) функцій розподілу часу обробки у вузлах мережі $G_i^n(nt)=G_i^{(n)}(t)$ слабко збігається до граничної

$$G_i^{(n)}(t)\overset{d}{\underset{n\to\infty}{\Rightarrow}}G_i(t),\ \ i=1,2,...,r.$$

Нехай для будь-яких випадкових векторів $\xi'=(\xi_1,...,\xi_r)$, $\eta'=(\eta_1,...,\eta_r)$

$$R(\xi,\eta)=M\xi\eta'-M\xi\ M\eta',$$

і для випадкових матриць $\Xi(t)=\left\|\xi_j^i(t)\right\|_1^r$, $H(t)=\left\|\eta_j^i(t)\right\|_1^r$, компоненти яких залежать від часу $t\ge 0$

$R(\Xi(s),H(t))=M[\Xi'(s)\Delta(\lambda)H(t)-\tilde{\Xi}'(s)\Delta(\lambda)\tilde{H}(t)]$, де $\tilde{\Xi}(s)=\left\|M\xi_j^i(s)\right\|_1^r$, $\tilde{H}(t)=\left\|M\eta_j^i(t)\right\|_1^r$, $\Delta(\lambda)=\left\|\lambda_i\delta_{ij}\right\|_1^r$ – деяка фіксована (невипадкова) діагональна матриця.

Щоб для $(X^{n'}(t),S^{n'}(t))$, $t\ge 0$ побудувати апроксимативний процес, необхідні два незалежні гауссівські процеси:

$$\left(\xi^{(1)'}(t),\eta^{(1)'}(t)\right)=\left(\xi_1^{(1)}(t),...,\xi_r^{(1)}(t),\eta_1^{(1)}(t),...,\eta_r^{(1)}(t)\right)\overset{d}{=}$$

$$\overset{d}{=}\left(\int_0^t dW'(u)P(t-u),\int_0^t dW'(u)A(t-u)\right)$$

і

$$\left(\xi^{(2)'}(t),\eta^{(2)'}(t)\right)=\left(\xi_1^{(2)}(t),...,\xi_r^{(2)}(t),\eta_1^{(2)}(t),...,\eta_r^{(2)}(t)\right),$$

які мають нульові середні значення і наступні кореляційні характеристики:

$$R(\xi^{(2)}(t),\xi^{(2)}(t))=\int_0^t R(\chi(u),\chi(u))du,$$

$$R(\eta^{(2)}(t),\eta^{(2)}(t))=\int_0^t R(\Gamma(u),\Gamma(u))du,$$

$$R(\xi^{(2)}(t),\eta^{(2)}(t))=\int_0^t R(\chi(u),\Gamma(u))du,$$

$$R(\xi^{(2)}(s),\xi^{(2)}(t))=\int_0^s R(\chi(u),\chi(u+t-s))du,$$

$$R(\xi^{(2)}(s),\eta^{(2)}(t))=\int_0^s R(\chi(u),\Gamma(u+t-s))du,$$

$$R(\eta^{(2)}(s),\eta^{(2)}(t))=\int_0^s R(\Gamma(u),\Gamma(u+t-s))du,$$

$$R(\eta^{(2)}(s),\xi^{(2)}(t))=\int_0^s R(\Gamma(u),\chi(u+t-s))du,\ s<t.$$

Розглянемо послідовність випадкових процесів $(\xi^{(n)'}(t),\eta^{(n)'}(t))$, $n=1,2,...$, де

$$\xi^{(n)'}(t)=n^{-1/2}(X^{n'}(nt)-n\lambda'\int_0^t P^{(n)}(u)du),$$

$$\eta^{(n)'}(t)=n^{-1/2}(S^{n'}(nt)-n\lambda'\int_0^t A^{(n)}(u)du),$$

$P^{(n)}(t)=P^n(nt)$, $A^{(n)}(t)=A^n(nt)$, матриці $P^n(t),A^n(t)$ визначаються так само, як $P(t)$ і $A(t)$ із заміною функції розподілу $G_i(t)$ на $G_i^n(t)$.

За визначенням $(\xi^{(n)'}(t),\eta^{(n)'}(t))$ представляє собою нормований процес обробки інформації та накопичення прибутку в мережі типу $\left[G^{(n)}\,|\,GI^{(n)}\,|\,\infty\right]^r$. Мережі такого типу використовуються при моделюванні інформаційно-обчислювальних мереж та мереж зв'язку ([3], [4], [5]).

3. Постановка оптимізаційних задач

При умові 1) на багатовимірний вхідний потік $\nu'(t)=(\nu_1(t),\nu_2(t),...,\nu_r(t))$ і умові 2) на функції розподілу часу обробки інформації $\left[G\,|\,GI\,|\,\infty\right]^r$ – мережа функціонує у перевантаженому режимі.

Будемо вважати, що ми можемо керувати інтенсивностями вхідних потоків на окремі вузли $\lambda_i\ge 0, i=1,2,...,r$, залишаючи при цьому сталу інтенсивність сумарного потоку в мережу $\Lambda=\lambda_1+...+\lambda_r>0$. Тоді процес керування зводиться до вибору вектора $h'=(h_1,...,h_r)$, $h_i\ge 0,\sum_{i=1}^l h_i=1$, де $h_i=\lambda_i/\Lambda$, $i=1,...,r$. Нехай $C_i, i=1,...,r$ – прибуток від обробки одного інформаційного потоку в і-ому вузлі, $m_i^{(n)}(h,t)=MS_i^n(nt)$, $i=1,...,r$ – математичне сподівання числа пакетів, що завершили обробку в і-ому вузлі на проміжку часу $[0,nt]$ при фіксованому керуванні

$h' = (h_1,...,h_r)$, $M^{(n)}(h,t) = \sum_{i=1}^{r} C_i m_i^{(n)}(h,t)$ – середній прибуток від роботи всієї мережі типу $\left[G^{(n)} \mid GI^{(n)} \mid \infty\right]^r$ за час nt. Тоді в перехідному режимі важливою буде оптимізаційна задача:

$$M(h,t) = \lim_{n\to\infty} n^{-1} M^{(n)}(h,t) \to \max, \qquad (1)$$

при умові

$$h_1 + h_2 + ... + h_r = 1, h_i \ge 0, i = 1,...,r. \qquad (2)$$

Співвідношенням (1), (2) можна дати наступну інтерпретацію: при фіксованій сумарній інтенсивності вхідного потоку треба так розподілити її між вузлами мережі, щоб середній прибуток був максимальним. Очевидно, розв'язок задачі максимізації прибутку h^+ в перехідному режимі буде залежати від t, $h^+ = h^+(t)$.

Враховуючи те, що мережі обробки інформації функціонують "достатньо довгий час", більш змістовною буде наступна постановка:

$$M(h) = \lim_{t\to\infty} t^{-1} M(h,t) \to \max, \qquad (3)$$

при умові

$$h_1 + h_2 + ... + h_r = 1, h_i \ge 0, i = 1,...,r. \qquad (4)$$

Оптимізаційну задачу (3), (4) будемо називати максимізацією прибутку у стаціонарному режимі.

4. Процес обробки інформації і накопичення прибутку в мережі типу $\left[G \mid GI \mid \infty\right]^r$

Для того, щоб вивчати процес обробки інформації у $\left[G \mid GI \mid \infty\right]^r$ – мережі $X'(t) = (X_1(t), X_2(t),..., X_r(t))$ сумісно з процесом накопичення прибутку $S'(t) = (S_1(t), S_2(t),..., S_r(t))$, треба до компонент вектора $\chi^m(t)$ додати компоненти вектора $\left(\gamma^m(t)\right)' = \left(\gamma_1^m(t), \gamma_2^m(t),..., \gamma_r^m(t)\right)$, де $\gamma_i^m(t)$ – число відвідувань і-го стану на проміжку часу [0,t] напівмарковським процесом $y^m(t)$.

Позначимо через $\gamma^{m,k}(t)$, $k = 1,2,...$ послідовність незалежних випадко-вих процесів, скінченновимірні розподіли яких співпадають з $\gamma^m(t)$. Тоді при умові, що у початковий момент часу $t = 0$ $\left[G \mid GI \mid \infty\right]^r$ – мережа порожня і фіксована траєкторія вхідного потоку, для $(X'(t), S'(t))$ маємо подання

$$(X'(t), S'(t)) = \sum_{m=1}^{d} \sum_{k=1}^{r} \sum_{k=1}^{\nu_m(t)} \left([\chi^{m,k}\left(t - \tau_k^m\right)]', [\gamma^{m,k}\left(t - \tau_k^m\right)]'\right).$$

Позначимо через $\Phi^m(t,x,y) = Mx^{\chi^m(t)} \cdot y^{\gamma^m(t)}$, $m = 1,2,...,r$ генератрису 2r-вимірного вектора

$$\left(\left(\chi^m(t)\right)', \left(\gamma^m(t)\right)'\right),$$

$x' = (x_1, x_2,..., x_r)$, $y' = (y_1, y_2,..., y_r)$, $|x| \le 1$, $|y| \le 1$. Для вивчення одновимірних розподілів процесу $\left(\left(\chi^m(t)\right)', \left(\gamma^m(t)\right)'\right)$, $t \ge 0$ важливе значення має наступний результат.

Лема 1. Функції $\Phi^m(t,x,y)$, $m = 1,2,...,r$ є єдиним розв'язком системи інтегральних рівнянь

$$\Phi^m(t,x,y) = x_m[1 - G_m(t)] + \qquad (5)$$

$$+ y_m \sum_{j=1}^{r} \int_0^t dG_m(u) p_{mj} \Phi^j(t-u,x,y) + y_m p_{mr+1} G_m(t),$$

$$m = 1,2,...,r.$$

Доведення леми базується на властивостях гіллястого процесу Беллмана-Харріса, який описаний в роботі [6].

В термінах перетворень Лапласа систему (5) можна розв'язати в явному вигляді.

Нехай

$$\Phi^m(s,x,y) = \int_0^\infty \Phi^m(t,x,y) e^{-st} dt,$$

$$G_m(s) = \int_0^\infty e^{-st} dG_m(t), \quad m = 1,2,...,r,$$

перетворення Лапласа і Лапласа-Стільтьєса функцій $\Phi^m(t,x,y)$ і $G_m(t)$ відповідно. В термінах перетворень Лапласа рівняння (5) має вигляд

$$\Phi^m(s,x,y) = x_m \frac{1 - G_m(s)}{s} + \qquad (6)$$

$$+ y_m \sum_{j=1}^{r} G_m(s) p_{mj} \Phi^j(s,x,y) + y_m p_{mr+1} \frac{1}{s} G_m(s),$$

$$m = 1,2,...,r.$$

Введемо позначення:

$$\Phi'(s,x,y) = (\Phi^1(s,x,y),..., \Phi^r(s,x,y)),$$

$$(x(1 - G(s)))' = (x_1(1 - G_1(s)),..., x_r(1 - G_r(s))),$$

$$\Delta(y) = \left\|\delta_{mk} y_m\right\|_1^r, \quad \Delta(G(s)) = \left\|\delta_{mk} G_m(s)\right\|_1^r,$$

$$(yp_{r+1}G(s))' = (y_1 p_{1r+1} G_1(s),..., y_r p_{rr+1} G_r(s)).$$

Тоді у векторно-матричному вигляді система (6) має такий запис

$$\Phi(s,x,y)=\Delta(y)\Delta(G(s))P\Phi\left(s,x,y\right)+ \\ +\frac{1}{s}[(x(1-G(s)))+(yp_{r+1}G(s))]. \quad (7)$$

З рівняння (7) випливає такий результат.

Наслідок 1. В термінах перетворень Лапласа розв'язок системи (5) має такий вигляд

$$\Phi(s,x,y)=\frac{1}{s}[I-\Delta\left(y\right)\Delta\left(G(s)\right)P]^{-1}\times \quad (8) \\ \times[(x(1-G(s))+(yp_{r+1}G(s))].$$

Нехай $\Phi^m(s,x)=\Phi^m(s,x,\overline{1})$, $m=1,2,...,r$, $\overline{1}'=(1,1,...,1)$ – r-вимірний вектор, складений з одиниць; $\Phi(s,x)=\left(\Phi^1(s,x),...,\Phi^r(s,x)\right)$. Тоді з (8) випливає, що

$$\Phi(s,x)=\frac{1}{s}[I-\Delta\left(G(s)\right)P]^{-1}\times \quad (9) \\ \times[(x(1-G(s))+(p_{r+1}G(s))].$$

Покомпонентно рівність (9) означає

$$\Phi^m(s,x)=x_1G_{m1}^{(-1)}(s)\frac{1-G_1(s)}{s}+ \\ +x_2G_{m2}^{(-1)}(s)\frac{1-G_2(s)}{s}+...+ \\ +x_rG_{mr}^{(-1)}(s)\frac{1-G_r(s)}{s}+\frac{1}{s}\sum_{j=1}^{r}G_{mj}^{(-1)}(s)G_j(s)p_{jr+1},$$

$$m=1,2,...,r,$$

де $\left\|G_{ij}^{(-1)}(s)\right\|_1^r=[I-\Delta\left(G(s)\right)P]^{-1}$.

Для факторіальних моментів першого і другого порядку приймемо наступні позначення:

$$\left.\frac{\partial\Phi^m(t,x,y)}{\partial y_\alpha}\right|_{\substack{x=\overline{1}\\y=\overline{1}}}=A_\alpha^m(t),\ \left.\frac{\partial^2\Phi^m(t,x,y)}{\partial x_\alpha\partial y_\beta}\right|_{\substack{x=\overline{1}\\y=\overline{1}}}=B_{\alpha\beta}^m(t)$$

,

$$\left.\frac{\partial^2\Phi^m(t,x,y)}{\partial y_\alpha\partial y_\beta}\right|_{\substack{x=\overline{1}\\y=\overline{1}}}=D_{\alpha\beta}^m(t),\ m,\alpha,\beta=1,2,...,r.$$

З леми 1 випливає, що функції $A_\alpha^m(t)$, $B_{\alpha\beta}^m(t)$, $D_{\alpha\beta}^m(t)$, $m,\alpha,\beta=1,2,...,r$ можна задавати як єдиний розв'язок систем інтегральних рівнянь:

$$A_\alpha^m(t)=\sum_{j=1}^{r}\int_0^t dG_m(u)p_{mj}A_\alpha^j(t-u)+\delta_{m\alpha}G_m(t), \quad (10)$$

$$D_{\alpha\beta}^m(t)=\sum_{j=1}^{r}\int_0^t dG_m(u)p_{mj}D_{\alpha\beta}^j(t-u)+ \\ +\delta_{m\beta}\sum_{j=1}^{r}\int_0^t dG_m(u)p_{mj}A_\alpha^j(t-u)+ \quad (11) \\ +\delta_{m\alpha}\sum_{j=1}^{r}\int_0^t dG_m(u)p_{mj}A_\beta^j(t-u),$$

$$B_{\alpha\beta}^m(t)=\sum_{j=1}^{r}\int_0^t dG_m(u)p_{mj}B_{\alpha\beta}^j(t-u)+ \quad (12)$$

$$+\delta_{m\beta}\sum_{j=1}^{r}\int_0^t dG_m(u)p_{mj}p_\alpha^j(t-u),\ m,\alpha,\beta=1,2,...,r.$$

Інший підхід – задавати $A_\alpha^m(t)$, $B_{\alpha\beta}^m(t)$, $D_{\alpha\beta}^m(t)$ їх перетвореннями Лапласа $A_\alpha^m(s)$, $B_{\alpha\beta}^m(s)$, $D_{\alpha\beta}^m(s)$, $m,\alpha,\beta=1,2,...,r$.

Нехай $A'_\alpha(s)=(A_\alpha^1(s),A_\alpha^2(s),...,A_\alpha^r(s))$,

$D'_{\alpha\beta}(s)=(D_{\alpha\beta}^1(s),D_{\alpha\beta}^2(s),...,D_{\alpha\beta}^r(s))$,

$B'_{\alpha\beta}(s)=(B_{\alpha\beta}^1(s),B_{\alpha\beta}^2(s),...,B_{\alpha\beta}^r(s))$,

$I_\alpha=\left\|\delta_{ij}\delta_{i\alpha}\right\|_{i,j=1}^r$ – матрця розміром $r\times r$, на головній діагоналі якої елемент з номером "α" дорівнює одиниці, а інші елементи матриці дорівнюють нулю. Тоді з (10) – (12) маємо:

$$A_\alpha(s)=\frac{1}{s}G_\alpha(s)[I-\Delta\left(G(s)\right)P]^{-1}e_\alpha, \quad (13)$$

$$D_{\alpha\beta}(s)=\frac{1}{s}G_\alpha(s)[I-\Delta\left(G(s)\right)P]^{-1}\times \\ \times I_\beta\Delta\left(G(s)\right)P[I-\Delta\left(G(s)\right)P]^{-1}e_\alpha+ \quad (14) \\ +\frac{1}{s}G_\beta(s)[I-\Delta\left(G(s)\right)P]^{-1}\times \\ \times I_\alpha\Delta\left(G(s)\right)P[I-\Delta\left(G(s)\right)P]^{-1}e_\beta,$$

$$B_{\alpha\beta}(s)=\frac{1-G_\alpha(s)}{s}[I-\Delta\left(G(s)\right)P]^{-1}\times \quad (15) \\ \times I_\beta\Delta\left(G(s)\right)P[I-\Delta\left(G(s)\right)P]^{-1}e_\alpha.$$

Зазначимо, що формули (13) – (15) задають перші два моменти процесу $((\chi^m(t))',(\gamma^m(t))')$, $t\ge0$ через параметри стохастичної мережі.

Перейдемо тепер до аналізу скінченновимірних розподілів процесу $((\chi^m(t))',(\gamma^m(t))')$, $t\ge0$.

Нехай $0<t_1<...<t_N$ деякі фіксовані моменти часу і

$$\Phi^m(t_1,...,t_N,x(1),y(1),...,x(N),y(N))= \\ =M\left(\prod_{k=1}^{N}x^{\chi^m(t_k)}(k)\cdot y^{\gamma^m(t_k)}(k)\right),$$

$$x'(k)=(x_1(k),...,x_r(k)),\ y'(k)=(y_1(k),...,y_r(k)),$$
$$|x(k)|\le 1,\ |y(k)|\le 1,$$

$k=1,2,...,N$ – багатовимірна генератриса вектора

$$((\chi^m(t_1))',(\gamma^m(t_1))',...,(\chi^m(t_N))',(\gamma^m(t_N))').$$

При визначенні генератрис $\Phi^m(\cdot)$, $m=1,2,...,r$ через локальні характеристики процесу $\left((\chi^m(t))',(\gamma^m(t))'\right)$, $t\ge 0$ важливе значення має наступний результат.

Лема 2. Генератриси $\Phi^m(t_1,...,t_N,x(1),y(1),...,x(N),y(N))$, $N=1,2,...,$ $0<t_1<...<t_N$ є єдиним розв'язком взаємопов'язаних систем інтегральних рівнянь

$$\Phi^m(t_1,...,t_N,x(1),y(1),...,x(N),y(N))=$$
$$=y_m(1)\cdot...\cdot y_m(N)\times$$
$$\times\int_0^{t_1}[\sum_{j=1}^{r}p_{mj}\Phi^j(t_1-u,...,t_N-u,x(1),y(1),...,x(N),y(N))+$$
$$+p_{mr+1}]dG_m(u)+ \qquad (16)$$
$$+\sum_{k=1}^{N-1}x_m(1)\cdot...\cdot x_m(k)\cdot y_m(k+1)\cdot...\cdot y_m(N)\times$$
$$\times\int_{t_k}^{t_{k+1}}[\sum_{j=1}^{r}p_{mj}\Phi^j(t_{k+1}-u,...,t_N-u,$$
$$x(k+1),y(k+1),...,x(N),y(N))+$$
$$+p_{mr+1}]dG_m(u)+x_m(1)\cdot...\cdot x_m(k)[1-G_m(t_N)],$$
$$m=1,2,...,r;\ N=1,2,...$$

Скінченновимірні розподіли вектора $\left(\chi^{m'}(t),\gamma^{m'}(t)\right)$, $t\ge 0$ визначають скінченновимірні розподіли процесу обробки інформації і накопичення прибутку $(X'(t),S'(t))$ в мережі типу $\left[G|GI|\infty\right]^r$.

Якщо у початковий момент часу $t=0$ $\left[G|GI|\infty\right]^r$ – мережа порожня і фіксована траєкторія вхідного потоку $\nu'(t)=(\nu_1(t),...,\nu_r(t))$, то для будь-якої послідовності моментів часу $0<t_1<...<t_N$

$$(X'(t_1),S'(t_1),...,X'(t_\alpha),S'(t_\alpha),...,X'(t_N),S'(t_N))\overset{d}{=}$$
$$\overset{d}{=}\sum_{m=1}^{r}(\sum_{k=1}^{\nu_m(t_1)}([\chi^{m,k}(t_1-\tau_k^m)]',[\gamma^{m,k}(t_1-\tau_k^m)]'),... \qquad (17)$$
$$...,\sum_{k=1}^{\nu_m(t_\alpha)}([\chi^{m,k}(t_\alpha-\tau_k^m)]',[\gamma^{m,k}(t_\alpha-\tau_k^m)]'),...$$
$$...,\sum_{k=1}^{\nu_m(t_N)}([\chi^{m,k}(t_N-\tau_k^m)]',[\gamma^{m,k}(t_N-\tau_k^m)]')).$$

Нехай $\Phi(t_1,...,t_N,x(1),y(1),...,x(N),y(N))$ генератриса вектора $(X'(t_1),S'(t_1),...,X'(t_N),S'(t_N))$. Тоді з (17) випливає

$$\Phi(t_1,...,t_N,x(1),y(1),...,x(N),y(N))= \qquad (18)$$
$$=M\left\{\prod_{m=1}^{r}\prod_{\alpha=1}^{N}\prod_{k=\nu_m(t_{\alpha-1})+1}^{\nu_m(t_\alpha)}\Phi^m(t_\alpha-\tau_k^m,...\right.$$
$$\left.,t_N-\tau_k^m,x(\alpha),y(\alpha),...,x(N),y(N))\right\}.$$

Розглянемо окремо частковий випадок $N=2$. З леми 2 і подання (18) випливає наступний результат.

Наслідок 2. Для будь-яких $0<s<t$ генератрису $\Phi(s,t,x(1),y(1),x(2),y(2))$ двовимірного розподілу процесу (X',S') можна подати у вигляді

$$\Phi(s,t,x(1),y(1),x(2),y(2))= \qquad (19)$$
$$=M\prod_{m=1}^{r}\left\{\prod_{k=1}^{\nu_m(s)}\Phi^m(s-\tau_k^m,t-\tau_k^m,x(1),y(1),x(2),y(2))\times\right.$$
$$\left.\times\prod_{k=\nu_m(s)+1}^{\nu_m(t)}\Phi^m(t-\tau_k^m,x(2),y(2))\right\},$$

де генератриси $\Phi^m(s,t,x(1),y(1),x(2),y(2))$, $m=1,2,...,r$ однозначно визначаються системою інтегральних рівнянь

$$\Phi^m(s,t,x(1),y(1),x(2),y(2))=y_m(1)y_m(2)\times \qquad (20)$$
$$\times\int_0^{s}[\sum_{j=1}^{r}p_{mj}\Phi^j(s-u,t-u,x(1),y(1),x(2),y(2))+$$
$$+p_{mr+1}]dG_m(u)+x_m(1)y_m(2)\times$$
$$\times\int_0^{t}[\sum_{j=1}^{r}p_{mj}\Phi^j(t-u,x(2),y(2))+p_{mr+1}]dG_m(u)+$$
$$+x_m(1)x_m(2)[1-G_m(t)],\ m=1,2,...,r.$$

5. Гауссівська апроксимація режиму критичного навантаження в мережі

В наступній теоремі показано, що апроксимативним процесом для нормованого процесу обробки інформації та накопичення прибутку буде $\left(\xi^{(1)'}(t)+\xi^{(2)'}(t),\eta^{(1)'}(t)+\eta^{(2)'}(t)\right)$.

Теорема 1. Нехай стохастична мережа типу $\left[G^{(n)}|GI^{(n)}|\infty\right]^r$ у початковий момент часу порожня, задовольняє умовам 1), 2) і

спектральний радіус матриці маршрутизації P строго менший 1. Тоді на будь-якому скінченному проміжку $[0,T]$ послідовність випадкових процесів $\left(\xi^{(n)'}(t),\eta^{(n)'}(t)\right)$, $n\geq 1$, слабко збігається у рівномірній топології до $\left(\xi^{(1)'}(t)+\xi^{(2)'}(t),\eta^{(1)'}(t)+\eta^{(2)'}(t)\right)$.

Доведення теореми базується на лемі 3 і проводиться з використанням апарату характеристичних функцій. Збіжність скінченновимірних розподілів посилюється до збіжності функціоналів так само, як це було зроблено в роботі [7].

Розглянемо спочатку один допоміжний результат, пов'язаний з гауссівською компонентою $\left(\xi^{(1)'}(t),\eta^{(1)'}(t)\right)$ граничного процесу.

Лема 3. Скінченновимірні розподіли 2r-вимірного випадкового процесу

$$\zeta'(t)=\left(\zeta^{(1)'}(t),\zeta^{(2)'}(t)\right)=$$

$$=\left(\int_0^t dW'(u)P(t-u),\int_0^t dW'(u)A(t-u)\right)$$

співпадають із скінченновимірними розподілами гауссівського процесу $\left(\xi^{(1)'}(t),\eta^{(1)'}(t)\right)$.

Лема 3 вказує на те, що компонента $\left(\xi^{(1)'}(t),\eta^{(1)'}(t)\right)$ граничного процесу пов'язана з флуктуаціями вхідного потоку.

В процесі перетворень кореляційних матриць потрібен наступний результат технічного характеру.

Лема 4. Нехай $A=\left\|a_i^m\right\|_1^r$, $B=\left\|b_i^m\right\|_1^r$ - дві квадратні матриці розміром $r\times r$, $a^{m'}=\left(a_1^m,a_2^m,...,a_r^m\right)$, $b^{m'}=\left(b_1^m,b_2^m,...,b_r^m\right)$ - вектор-рядки цих матриць. Тоді для будь-яких $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_m$

$$\sum_{m=1}^r \lambda_m a^m b^{m'}=A'\Delta(\lambda)B, \qquad (21)$$

де $\Delta(\lambda)=\left\|\lambda_m\delta_{mk}\right\|_i^r$ - діагональна матриця.

Формулу (21) можна довести прямим підрахунком компонент матриць, що стоять зліва і справа у цій формулі.

Зазначимо, що підрахунок кореляційних характеристик апроксимативного процесу зводиться до розв'язку систем інтегральних рівнянь типу марковського відновлення, які представлені співвідношеннями (10) – (12). Таким чином через керуючі параметри $\left[G\,|\,GI\,|\,\infty\right]^r$ – мережі вони визначені опосередковано. Явний вигляд цих характеристик можна виписати при переході до границі за часом $(t\to\infty)$.

Побудуємо розрахункові формули для функціоналів $M(h,t), M(h)$, $h'=\left(h_1,...,h_r\right)$.

Нехай $D_{[0,T]}$ – простір функцій без розривів другого роду, що визначені на проміжку $[0,T]$, $\rho_T(x(t),y(t))=\sup\limits_{t\in[0,T]}\left|x(t)-y(t)\right|$ – рівномірна метрика в цьому просторі. Розглянемо для вхідного потоку $\nu^{(n)}(t)$ наступну умову:

а) для будь-якого $T>0$

$$\lim_{n\to\infty}\rho_T(n^{-1}M\nu_\alpha^{(n)}(t),\ \lambda_\alpha t)=0,\ \ \alpha=1,...,r.$$

Тоді з подання процесу накопичення у вигляді

$$S^{(n)}(t)=\sum_{m=1}^d\sum_{k=1}^{\nu_m^{(n)}(t)}\gamma^{(n)m,k}\left(t-\frac{\tau_k^{n,m}}{n}\right)$$

випливає такий результат.

Лема 5. Нехай $\left[G^{(n)}\,|\,GI^{(n)}\,|\,\infty\right]^r$ – мережа у початковий момент часу порожня, спектральний радіус матриці маршрутизації строго менший 1 і виконуються умови 2), а). Тоді

$$n^{-1}MS_\alpha^{(n)}(t)=\Lambda\sum_{m=1}^r h_m\int_0^t A_\alpha^{(n)m}(u)du+o(1).$$

При виконанні умов леми 5

$$\lim_{n\to\infty}n^{-1}M^{(n)}(h,t)=\Lambda h'\int_0^t A(u)duC,$$

де $C'=(C_1,...,C_r)$, а компоненти матриці $A(t)=\left\|A_i^m(t)\right\|_1^r$ визначаються своїми перетвореннями Лапласа (див. (13))

$$A(s)=\left\|A_\alpha^m(s)\right\|_1^r=\frac{1}{s}[I-\Delta\left(G(s)\right)P]^{-1}\Delta\left(G(s)\right),$$

де $\Delta\left(G(s)\right)=\left\|\delta_{m\alpha}G_\alpha(s)\right\|_1^r$, $G_\alpha(s)=\int_0^\infty e^{-st}dG_\alpha(t)$ – перетворення Лапласа-Стільтьєса функції розподілу $G_\alpha(t)$, $\alpha=1,...,r$.

За визначенням функції $A_\alpha^m(t)$ монотонно неспадкі і тому

$$\lim_{t\to\infty}t^{-1}\int_0^\infty A(u)du=\lim_{t\to\infty}A(t)=\lim_{s\to 0+}sA(s)=(I-P)^{-1}.$$

Підсумком проведеного аналізу є такий результат.

Наслідок 3. При виконанні умов леми 5 оптимізаційні задачі (1) – (4) є задачами лінійного програмування, цільові функції яких дорівнюють відповідно

$$M(h,t) = \Lambda h' \int_0^t A(u)duC,\ M(h) = \Lambda h'(I-P)^{-1}C.$$

6. Висновок

У роботі на основі теореми 1 побудовано апроксимативний процес для перевантаженого режиму роботи мережі типу $\left[G^{(n)} \mid GI^{(n)} \mid \infty\right]^r$. Цей процес використовується для побудови цільових функцій в оптимізаційних задачах. Так у наслідку 3 виписані цільові функції для задачі максимізації прибутку у перехідному та стаціонарному режимах при загальних умовах на параметри моделі. Одержані результати можуть знайти застосування при розв'язуванні сучасних практичних задач, пов'язаних з оптимальним керуванням складними технологічними процесами, вибором оптимальної структури інформаційних потоків у мережах мобільного зв'язку та інформаційно-обчислювальних системах і мережах.

Список використаних джерел

1. *Лебєдєв Є.О.* Оптимізація ризику для багатоканальних стохастичних мереж: Навчальний посібник / Є.О. Лебєдєв, І.А. Макушенко. – Киев: НБУВ, 2007. – 65 с.
2. *Вишневский М.В.* Теоретические основы проектирования компьютерных сетей / М.В. Вишневский. – Москва: Техносфера, 2003. – 512 с.
3. *Клейнрок Л.* Вычислительные системы с очередями / Л. Клейнрок. – Москва: Мир, 1979. – 600 с.
4. *Бройдо В.Л.* Вычислительные системы, сети и телекоммуникации / В.Л. Бройдо. – Санкт-Петербу́рг: Питер, 2006. – 703 с.
5. MASSEY W. A stochastic model to capture space and time dynamics in wireless communication systems / W. MASSEY and W. WHITT // Probability in the Engineering and Information Sciences. – 1994. – Vol. 8. – P. 541-569.
6. *Ватутин В.А.* Критический ветвящийся процесс Белмана-Харриса с иммиграцией и несколькими типами частиц / В.А. Ватутин // Теория вероятностей и ее применения. – 1976. – Т. 21, №2. – С. 447-454.
7. *Лебєдєв Є.О.* Одна гранична теорема для стохастичних мереж та її застосування / Є.О. Лебєдєв // Теорія ймовірностей та математична статистика. – 2002. – Вип. 68. – С. 86-97.

References

1. LEBEDEV, E.O. and MAKUSHENKO, I.A. (2007) *Risk optimization for multi-channel stochastic network*. Kyiv: National Library of Ukraine.
2. VISHNEVSKY, M.V. (2003) *The theoretical basis of the design of computer networks*. Moskow: Technosphere.
3. KLEINROCK, L. (1976) *Queueing systems*. New York: Wiley-Interscience.
4. BROIDO, V.L. (2006) *Computer systems, networks and telecommunications.* St. Petersburg: Piter.
5. MASSEY, W. and WHITT, W. (1994) A stochastic model to capture space and time dynamics in wireless communication systems. In *Probability in the Engineering and Information Sciences*. – Vol. 8. – P. 541-569.
6. VATUTIN, V.A. (1976) The critical Bellman-Harris branching processes with immigration and several types of particles. In *Probability theory and its applications*. – Vol. 21, №2. – P. 447-454.
7. LEBEDEV, E.O. (2002) One limit theorem for stochastic networks and its application. In *Probability and Mathematical Statistics*. - Vol. 68 - P. 86-97.

Надійшла до редколегії 23.10.14

УДК 519.8

Мащенко С.О. [1], д. ф.-м. н., доц.,
Аль-Саммарраи Мохаммед Саад И.[2], аспирант

Транспортная задача с нечетким множеством целей

Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко, 83000, м. Киев, пр-т. Глушкова 4д,
[1]e-mail: msomail@yandex.ua
[2]e-mail: blackhawk_is@yahoo.com

S.O. Mashchenko[1], D.Sci(Phys-Math.), Ass. Prof.,
Mohammed Saad I. Al-Sammarraie [2], Grad. Stud.

The transportation problem with the fuzzy set of goals

Taras Shevchenko National University of Kyiv, 83000, Kyiv, Glushkova st., 4d,

[1]e-mail: msomail@yandex.ua
[2]e-mail: blackhawk_is@yahoo.com

Рассматривается транспортная задача, в которой цель лица, принимающего решение, задана нечетким множеством нечетких целевых множеств. Рассмотрено конструктивное представление функции принадлежности нечеткого целевого множества типа 2. Предлагается двух-критериальная задача поиска рационального решения.

Ключевые слова: нечеткая цель, функция принадлежности, нечеткое множество типа 2, принятие решений.

In known formulations of fuzzy transportation problems the fuzziness is manifested in the description of both the set of alternatives and the objective function, not concerning the set of goals. The transportation problem, in which the goal of decision-maker is defined by the fuzzy set of fuzzy targets, is considered in this paper. In this case the decision-maker's goal may be defined by the intersection of fuzzy set of fuzzy sets. Then for each fixed alternative value of membership functions also create fuzzy set and can be define as so-called fuzzy set of type-2 (fuzzy set with membership function that has fuzzy set of values). It was considered a constructive representation of the membership function of goal set. The two-criterion problem of rational decision search is considered. There is defined general solution notion of the transportation problem with fuzzy set of goals in this paper. More simple method of receipt of rational decision with reliability of membership to goal set, equal one, and reliability of it abstention of the no less set number is offered.

Keywords: fuzzy goal, membership function, fuzzy set of type 2, decision making.

Статью представил д. т. н., проф. Гаращенко Ф.Г.

Одной из важных проблем, которые возникают в логистике является проблема принятия многоцелевых решений в условиях нечеткой информации. Для формирования целей в транспортных задачах в первую очередь используются простые количественные характеристики транспортного процесса: объемно-массовые характеристики планируемой доставки груза, количество используемых транспортных средств, пробег автомобилей, длительность работы и др. Постановка транспортных задач с несколькими целями — это следствие возникновения рынка транспортных услуг и природное стремление автотранспортных предприятий удовлетворить интересы всех участников транспортного бизнеса, а не только грузополучателей или грузоотправителей.

В этой работе рассматривается задача рационального выбора плана перевозок в условиях, когда цель лица, принимающего решение (ЛПР), задана нечетким множеством нечетких целевых множеств. Такие модели обобщают известные транспортные задачи, в которых цель ЛПР задается одной целевой функцией или в более сложном случае характеризуются четким множеством нечетких множеств (подход Беллмана – Лотфи-Заде [1]). С одной стороны, такое обобщение позволяет анализировать ситуации в случае, если невозможно четко указать, какие множества характеризуют цель ЛПР, а с другой – помогает глубже и более точно понять процесс принятия

© С.О.Мащенко, М.С.Аль-Саммарраи, 2014

решений, пути поиска и выбора рациональных альтернатив в условиях нечеткой информации.

Пусть $I=\{1,,...,n\}$ – множество пунктов производства, $J=\{1,...,m\}$ – множество пунктов потребления, n и m – соответственно их количества. Обозначим a_i – максимальный объем производства продукта пунктом $i\in I$; b_j – объём продукта, который необходимо доставить j- му пункту потребления. Тогда множество допустимых планов перевозок $x=(x_{ij})_{i\in I, j\in J}$, которое обозначим D, будет задаваться следующими условиями:

$$\sum_{j\in J} x_{ij}\le a_i,\ \ i\in I;$$

$$\sum_{i\in I} x_{ij}\ge b_j,\ \ j\in J;$$

$$x\in X=\{x=(x_{ij})_{i\in I, j\in J}\,\big|\ \ x_{ij}\ge 0,\ \ i\in I, j\in J\}.$$

Множество X будем называть универсальным множеством планов перевозок.

Предположим, что цели ЛПР заданы нечеткими множествами F_k, $k\in K$, универсального множества планов перевозок X, где $K=\{1,...,k\}$ – множество их индексов, а k – их количество. Обозначим $\varphi_k(x)$, $k\in K$, – соответственно их функции принадлежности. Тогда согласно [1] нечеткое множество $F=\bigcap\limits_{k\in K} F_k$ с функцией принадлежности $\varphi(x)=\min\limits_{k\in K}\varphi_k(x)$ называется нечетким целевым множеством ЛПР, а нечеткое множество $X^*=F\bigcap D$ называется нечетким множеством решений. Если ЛПР интересует какой-либо конкретный план перевозок, то рациональным решением считается так называемый максимизирующий план перевозок [1], который удовлетворяет условию $x^*=\arg\max\limits_{x\in D}\varphi(x)$.

Иногда ЛПР не может четко указать, какие нечеткие множества F_k, $k\in K$, характеризуют его цель, но может задать некоторое нечеткое подмножество $\tilde{K}\subseteq K$ этих множеств. Далее множество K будем называть универсальным множеством индексов целей.

Обозначим $\kappa: K\to[0,1]$ функцию принадлежности нечеткого множества $\tilde{K}$ нечетких множеств G_k, $k\in K$, которые характеризуют цели ЛПР. Тогда в целом его цель может быть задана пересечением $\tilde{F}=\bigcap\limits_{k\in\tilde{K}} F_k$ нечеткого множества $\tilde{K}$ нечетких множеств F_k, $k\in K$. Определим это понятие в соответствии с подходом, который был предложен в [2].

Для произвольного плана перевозок $x\in X$ введем отношение доминирования на универсальном множеством индексов целей K.

Будем говорить, что цель с индексом $k\in K$ доминирует цель с индексом $j\in K$ для плана перевозок $x\in X$ и обозначать это $k\overset{x}{\succ} j$, если справедливы такие неравенства: $\varphi_k(x)\le\varphi_j(x)$, $\kappa(k)\ge\kappa(j)$, и хотя бы одно из них строгое.

Обозначим

$$\eta(x,k)=\begin{cases}\kappa(k), & k\in PO(x),\\ 0, & k\notin PO(x),\end{cases}$$

где $PO(x)=\{k\in K\mid j\overset{x}{\not\succ} k,\ \forall j\in K\}$.

Пересечением нечеткого множества $\tilde{K}$ нечетких множеств F_k, $k\in K$, будем называть $\tilde{F}=\bigcap\limits_{k\in\tilde{K}} F_k$ – нечеткое множество типа 2, задаваемое тройками $(x,\varphi(x,y))$, где

$\varphi: X\times Y\to[0,1]$ – функция принадлежности нечеткого отображения $\tilde{\Phi}$, выполняющего роль нечеткой функции принадлежности, и определенная таким образом:

$$\varphi(x,y)=\max_{k\in K}\{\eta(x,k)\mid\varphi_k(x)=y\}, \qquad (1)$$

если $\exists k\in K:\ \varphi_k(x)=y$;

$$\varphi(x,y)=0, \qquad (2)$$

если $\varphi_k(x)\ne y,\ \ \forall k\in K$;

x – элемент универсального множества планов перевозок X;

y – степень принадлежности x нечеткому множеству $\tilde{F}$ типа 2, $y\in Y=[0,1]$.

При фиксированном $x^*\in X$ функция принадлежности $\varphi(x^*,y)$, $y\in Y=[0,1]$, нечеткого отображения $\tilde{\Phi}$ имеет смысл функции принадлежности, описывающей нечеткое множество типа 1 значений степеней принадлежности $y\in Y=[0,1]$.

Поскольку функция принадлежности $\varphi(x,y)$ однозначно определяет нечеткое отображение $\tilde{\Phi}$, которое, в свою очередь, однозначно определяет нечеткое множество $\tilde{F}$ типа 2, то в дальнейшем будем называть $\varphi(x,y)$ функцией

принадлежности нечеткого множества $\tilde{F}$ типа 2, а ее значение – достоверностью степени принадлежности $y \in Y = [0,1]$ элемента $x \in X$ нечеткому множеству $\tilde{F}$ типа 2.

Вычисление функции принадлежности $\varphi(x, y)$ по формулам (1), (2) можно несколько упростить, если использовать следующую теорему [2].

Теорема 1. Пусть F_k, $k \in K$, – некоторые нечеткие множества универсального множества X, которые задаются соответствующими функциями принадлежности $\varphi_k(x)$, $k \in K$; $\tilde{K}$ – нечеткое множество универсального множества индексов K с функцией принадлежности $\kappa(k)$, $k \in K$. Тогда функция принадлежности нечеткого множества $\tilde{F} = \bigcap_{k \in \tilde{K}} F_k$ типа 2 задается такой формулой:

$$\varphi(x, y) = \begin{cases} \max\limits_{k \in K^{PO}(x,y)} \kappa(k), & K^{PO}(x, y) \neq \varnothing, \\ 0, & K^{PO}(x, y) = \varnothing. \end{cases}$$

где

$$K^{PO}(x, y) = \{k \in K \mid \varphi_k(x) = y,$$
$$y = \min_{j \in K} \{\varphi_j(x) \mid k(j) \geq k(k)\},$$
$$\kappa(k) = \max_{j \in K} \{\kappa(j) \mid \varphi_j(x) \leq y\}\}, \; x \in X, \; y \in [0,1].$$

Рассмотрим вопрос выбора рациональных решений. Из приведенных выше рассуждений следует, что целевое множество $\tilde{F}$ представляет собой нечеткое множество типа 2, которое задается функцией принадлежности $\varphi(x, y)$, $x \in X$, $y \in [0,1]$.

Логично предположить, что ЛПР будет стараться максимизировать на множестве допустимых планов перевозок D кроме степени $y \in [0,1]$ принадлежности $x \in X$ целевому множеству $\tilde{F}$, также и ее достоверность $\varphi(x, y)$.

Таким образом, перед ЛПР возникает следующая двухкритериальная задача:

$$y \to \max, \; \varphi(x, y) \to \max, \; x \in D, \; y \in [0,1]. \quad (3)$$

Обозначим G – множество ее оптимальных по Парето решений (x, y), $x \in X$, $y \in Y$.

Из приведенных выше предположений следует, что рациональное решение исходной задачи определяется множеством G. Эти рассуждения приводят к следующему определению.

Общим решением транспортной задачи с нечетким множеством целей будем называть нечеткое множество $G*$ типа 2 с функцией принадлежности

$$\varphi_{G^*}(x, y) = \begin{cases} \varphi(x, y), & (x, y) \in G, \\ 0, & (x, y) \notin G, \end{cases}$$

где $x \in X$, $y \in Y = [0,1]$.

Обозначим $G_D = \{x \in D \mid \exists y \in [0,1] \; (x, y) \in G\}$ – подмножество векторов $x \in D$, образующих оптимальные по Парето решения задачи (3). В случае, когда ЛПР интересует конкретное решение исходной задачи, то его можно выбрать из G_D с помощью того или иного метода многокритериальной оптимизации, решив (3).

Поскольку функция $\varphi(x, y)$ достаточно сложна, то есть смысл попробовать несколько упростить задачу (3). Для этого предложим ЛПР максимизировать не произвольную степень $y \in [0,1]$ принадлежности $x \in X$ множеству допустимых решений $\tilde{F}$, а лишь ее гарантированное значение $\hat{y}(x) = \min_{k \in K} \varphi_k(x)$. В этом случае (3) примет следующий вид:

$$\hat{y}(x) = \min_{k \in K} \varphi_k(x) \to \max_{x \in D}, \; \varphi(x, \hat{y}(x)) \to \max_{x \in D}. \quad (4)$$

Оказывается задача (4) значительно проще, чем (3).

Утверждение 1. Если $\hat{y}(x) = \min_{k \in K} \varphi_k(x)$, то $\varphi(x, \hat{y}(x)) = \max_{k \in K} \{\kappa(k) \mid \varphi_k(x) = \hat{y}(x)\}$.

Доказательство. Пусть для некоторого $x \in D$ индекс

$$k^*(x) = \arg\max_{k \in K} \{\kappa(k) \mid \varphi_k(x) = \hat{y}(x)\}. \quad (5)$$

Это означает, что

$$\kappa(k^*(x)) \geq \kappa(k) \;\; \forall k \in K, \quad (6)$$
$$\varphi_{k^*(x)}(x) \leq \varphi_k(x) \;\; \forall k \in K. \quad (7)$$

Покажем, что $k^*(x) \in K^{PO}(x)$. Предположим противное, что $k^*(x) \notin K^{PO}(x)$. Тогда $\exists \hat{k} \in K$ такой, что $\hat{k} \succ k^*(x)$. Это означает, что либо $\kappa(\hat{k}) > \kappa(k^*(x))$ и $\varphi_{\hat{k}}(x) \geq \varphi_{k^*(x)}(x)$, либо $\kappa(\hat{k}) \geq \kappa(k^*(x))$ и $\varphi_{\hat{k}}(x) > \varphi_{k^*(x)}(x)$. В первом случае мы получим противоречие с (6), во втором

– с (7). Таким образом, $k^*(x) \in K^{PO}(x)$. Тогда из (5) и (6) выплывает:

$$\max_{k\in K}\{\eta(x,k) \mid \varphi_k(x) = \hat{y}(x)\} = \eta(x,k^*(x)) = \\ = \kappa(k^*(x)) = \max_{k\in K}\{\kappa(k) \mid \varphi_k(x) = \hat{y}(x)\}. \quad (8)$$

Теперь определим значение $\varphi(x,\hat{y}(x))$. Поскольку по условию $\hat{y}(x) = \min_{k\in K}\varphi_k(x)$, то $\exists k \in K:\ \varphi_k(x) = \hat{y}(x)$. Поэтому из (1), (2) следует $\varphi(x,\hat{y}(x)) = \max_{k\in K}\{\eta(x,k) \mid \varphi_k(x) = \hat{y}(x)\}$. Тогда из (8) следует $\varphi(x,\hat{y}(x)) = \max_{k\in K}\{\kappa(k) \mid \varphi_k(x) = \hat{y}(x)\}$.

Утверждение доказано.

Обозначим достоверность гарантированной степени принадлежности $x \in D$ целевому множеству $\tilde{F}$ через

$$\phi(x) = \varphi(x,\hat{y}(x)) = \max_{k\in K}\{\kappa(k) \mid \varphi_k(x) = \hat{y}(x)\}.$$

Тогда задача (4) примет следующий вид:

$$\hat{y}(x) = \min_{k\in K}\varphi_k(x) \to \max, \\ \phi(x) = \max_{k\in K}\{\kappa(k) \mid \varphi_k(x) = \hat{y}(x)\} \to \max,\ x \in D. \quad (9)$$

Кроме того, что в силу конструктивного представления функции $\varphi(x,y)$ эта задача стала проще, чем (4), теперь все ее критерии являются функциями лишь от x. Решая эту задачу, ЛПР хочет максимизировать кроме гарантированной степени принадлежности $x \in D$ нечеткому целевому множеству типа 2 и ее достоверность. Поэтому целесообразно ввести такое понятие.

Рациональным решением исходной транспортной задачи с гарантированной степенью принадлежности множеству ее допустимых решений будем называть оптимальное по Парето решение двухкритериальной задачи (9).

Поскольку ЛПР часто интересует конкретное решение, то его можно выбрать с помощью того или иного метода многокритериальной оптимизации.

Попробуем, далее упростить процесс получения рационального решения задачи (3). Значительный интерес для ЛПР может представлять однокритериальная задача

$$\hat{y}(x) \to \max,\ \phi(x) \ge \alpha,\ x \in D, \quad (10)$$

максимизации гарантированной степени принадлежности $x \in D$ нечеткому целевому множеству типа 2 при заданном уровне $\alpha \in [0,1]$ – ее достоверности.

Следует отметить, что из теории многокритериальной оптимизации [3] следует, что решение задачи (10) будет слабо эффективным решением (9), что в ряде случаев приемлемо для ЛПР.

Обозначим $K^\alpha = \{k \in K \mid \kappa(k) \ge \alpha\}$ множество индексов целей, которые имеют достоверность степени принадлежности нечеткому множеству $\tilde{K}$ не менее $\alpha \in [0,1]$.

Докажем следующее утверждение.

Утверждение 2. Задача (10) эквивалентна следующей:

$$z \to \max_{x\in D},\ \forall k \in K\ \exists j \in K^\alpha\ \varphi_k(x) \ge \varphi_j(x) \ge z\ . \quad (11)$$

Доказательство. Сначала покажем, что (10) эквивалентна задаче:

$$z \to \max_{x\in D}, \\ \hat{y}(x) = \min_{k\in K}\varphi_k(x) \ge z, \quad (12) \\ \min_{k\in K^\alpha}\varphi_k(x) = \hat{y}(x).$$

Для этого достаточно показать равенство множеств: $A = \{x \in D \mid \min_{k\in K^\alpha}\varphi_k(x) = \hat{y}(x)\}$ и $B = \{x \in D \mid \max_{k\in K}\{\kappa(k) \mid \varphi_k(x) = \hat{y}(x)\} \ge \alpha\}$. Пусть $x \in B$. Тогда $\max_{k\in K}\{\kappa(k) \mid \varphi_k(x) = \hat{y}(x)\} \ge \alpha$. Отсюда $\exists k \in K$, для которого $\varphi_k(x) = \hat{y}(x)$ и $\kappa(k) \ge \alpha$. Тогда очевидно

$$\exists k \in K^\alpha\ \ \varphi_k(x) = \hat{y}(x). \quad (13)$$

Предположим противное, что $\min_{k\in K^\alpha}\varphi_k(x) \ne \hat{y}(x)$. Поскольку $\hat{y}(x) = \min_{k\in K}\varphi_k(x)$, а $K^\alpha \subseteq K$, то $\min_{k\in K^\alpha}\varphi_k(x) > \hat{y}(x)$. Поэтому для $\forall k \in K^\alpha\ \ \varphi_k(x) > \hat{y}(x)$. Получили противоречие с (13). Таким образом, $x \in A$ и $A \supseteq B$.

Покажем $B \supseteq A$. Пусть $x \in A$. Тогда $\min_{k\in K^\alpha}\varphi_k(x) = \hat{y}(x)$. Отсюда $\exists k \in K^\alpha\ \ \varphi_k(x) = \hat{y}(x)$. Поэтому $\exists k \in K$, для которого $\varphi_k(x) = \hat{y}(x)$ и $\kappa(k) \ge \alpha$. Тогда $\max_{k\in K}\{\kappa(k) \mid \varphi_k(x) = \hat{y}(x)\} \ge \alpha$ и $x \in B$. Таким образом, $B \supseteq A$ и отсюда следует $B = A$. Таким образом, задачи (10) и (12) – эквивалентны.

В силу эквивалентности соотношений: $z \to \max_{x\in D},\ \varphi_k(x) \ge y \ge z\ \ \forall k \in K;\ \min_{j\in K^\alpha}\varphi_j(x) = y \Leftrightarrow$

$z \to \max\limits_{x\in D}, \quad \varphi_k(x) \geq \min\limits_{j\in K^\alpha} \varphi_j(x) \geq z, \quad \forall k \in K \quad \Leftrightarrow$

$z \to \max,\ \forall k \in K\ \exists j \in K^\alpha\ \varphi_k(x) \geq \varphi_j(x) \geq z, x \in D,$

очевидно следует эквивалентность (10) и (11).

Утверждение доказано.

Если множество K^α индексов целей, имеющих достоверность степени принадлежности нечеткому множеству $\tilde{K}$ не менее заданного ЛПР числа $\alpha \in [0,1]$, состоит всего из одного элемента j^*, то мы получим задачу математического программирования: $z \to \max,\ x \in D,\ \varphi_k(x) \geq \varphi_{j^*}(x) \geq z\ \ \forall k \in K$.

В противном случае задача (11) может быть многоэкстремальной. Поэтому рассмотрим подход к ее конструктивному решению.

Утверждение 3. Задача (11) – эквивалентна задаче:

$$\max_{j\in K^\alpha} \max_{x\in D} \{z \mid \ \varphi_k(x) \geq \varphi_j(x) \geq z\ \ \forall k \in K\}. \quad (14)$$

Доказательство. Пусть x^* – решение задачи (11). Тогда имеем $z^* \geq z \quad \forall x \in D$ и $\forall k \in K\ \ \exists j \in K^\alpha : \varphi_k(x) \geq \varphi_j(x) \geq z$. Обозначим через $D^{kj}(z) = \{x \in D \mid \ \varphi_k(x) \geq \varphi_j(x) \geq z\}$. Отсюда $z^* \geq z \quad \forall x \in D^*$, где $D^*(z) = \bigcap\limits_{k\in K} \bigcup\limits_{j\in K^\alpha} D^{kj}(z)$. Поскольку $\bigcap\limits_{k\in K} \bigcup\limits_{j\in K^\alpha} D^{kj}(z) = \bigcup\limits_{j\in K^\alpha} \bigcap\limits_{k\in K} D^{kj}(z)$, то $\exists j \in K^\alpha$, для которого $z^* \geq z \quad \forall x \in \bigcap\limits_{k\in K} D^{kj}(z)$. Таким образом, выполняется (14).

С другой стороны. Пусть имеет место (14). Тогда $\exists j \in K^\alpha$, для которого $z^* \geq z \quad \forall x \in \bigcap\limits_{k\in K} D^{kj}$. Поскольку $\bigcap\limits_{k\in K} \bigcup\limits_{j\in K^\alpha} D^{kj}(z) = \bigcup\limits_{j\in K^\alpha} \bigcap\limits_{k\in K} D^{kj}(z)$, то $z^* \geq z$ $\forall x \in \bigcap\limits_{k\in K} \bigcup\limits_{j\in K^\alpha} D^{kj}(z)$. Тогда $z^* \geq z \quad \forall x \in X$ и $\forall k \in K\ \ \exists j \in K^\alpha : \varphi_k(x) \geq \varphi_j(x) \geq z$. Поэтому x^* – решение задачи (11).

Утверждение доказано.

Таким образом, если множество K^α содержит более одного индекса, то для каждого $j \in K^\alpha$ надо получить решение задачи вида:

$$z(x^{(j)}) = \max\{z \mid \ x \in D,\ \varphi_k(x) \geq \varphi_j(x) \geq z,\ k \in K\}.$$

Тогда решение x^* задачи (10) будет выбираться из условия

$$x^* = \arg\max_{j\in K^\alpha} z(x^{(j)}).$$

В заключение следует отметить, что предложенный метод расширяет область применения нечеткого математического программирования на случай транспортной задачи с нечетким множеством целей ЛПР и может дать новый поход к решению других постановок нечетких задач оптимизации.

Список використаних джерел

1. *Bellman R.* Decision making in a fuzzy environment / R. Bellman // Management science. – 1970. – **17**. – 4. – pp. 141 – 162.
2. *Мащенко С.О.* Задача математического программирования с нечетким множеством индексов ограничений / Мащенко С.О. // Кибернетика и системный анализ. – 2013. – № 1. – С. 62 – 68.
3. *Орловский С.А.* Проблемы принятия решений при нечеткой исходной информации / С.А. Орловский. – М. : Наука, 1981.

References

1. BELLMAN, R. (1970) Decision making in a fuzzy environment. *Management science*. 17(4). pp. 141 – 162.
2. MASHCHENKO, S. (2013) The problem of the mathematical programming with the fuzzy set of indexes of constraints. *Cybernetics and systems analysis*. 49(1). pp. 62 – 68.
3. ORLOVSKY, S. (1981) *Problems of decision making at fuzzy initial information*. Moskva: Nauka.

Надійшла до редколегії 11.11.2014.

УДК 517.9

Наконечний О. Г.[1], д.ф.-м.н., проф.,
Шушарін Ю. В.[2], к.ф.-м.н.,
Демиденко С. В.[3], асист.

Гарантовані оцінки середнього значення випадкових послідовностей

[1] Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 83000, м. Київ, пр-т. Глушкова 4д,
e-mail: a.nakonechniy@gmail.com
[2] Київський національний економічний університет імені Вадима Гетьмана, 03680, Україна, Київ, проспект Перемоги, 54/1,
e-mail: shusharin@meta.ua
[3] Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 83000, м. Київ, пр-т. Глушкова 4д,
e-mail: s.demydenko@gmail.com

O. G. Nakonechniy[1], Doc. Sci., prof.,
Yu. V. Shusharin[2], senior teacher
S. V. Demydenko[3], assistant.

Guaranteed estimation of average random sequences

[1] Taras Shevchenko National University of Kyiv, 83000, Kyiv, Glushkova st., 4d,
e-mail: a.nakonechniy@gmail.com

[2] National Economic University named after Vadym Hetman, 03680, Kyiv, Prospect Peremogy 54/1
e-mail: shusharin@meta.ua

[3] Taras Shevchenko National University of Kyiv, 83000, Kyiv, Glushkova st., 4d,
e-mail: s.demydenko@gmail.com

Досліджуються проблеми оцінки середнього значення нестаціонарної послідовності із невідомими кореляційними матрицями. Припускається, що відомі обмеження на перші різниці середніх значень та обмеження на кореляційні матриці.

Для гарантованих лінійних середньоквадратичних оцінок одержані вирази для похибок. При певних обмеженнях на множини, яким належать середні значення та кореляційні матриці показано, що такі оцінки виражаються через розв'язки систем різницевих рівнянь.

Ключові слова: математична статистика, оцінка середніх значень, випадкові величини, кореляційна матриця, різницеве рівняння.

One of mathematical statistics tasks is the problem of assessing the mean values of random variables by the observations. In the case when distribution class of the random variable is known can (apply) be applied the method of maximum probability. Obtained estimations may have good asymptotic properties after repeated observation of their values. For a single observation of stationary sequences of random variables value (using) are used linear estimations. If the sequence of random variables is non-stationary, then it is possible to get a good estimation if set, which owns sequence of average values, is known.

The problems of the estimation of average value for non-stationary sequences with unknown correlation matrix are investigated. It is assumed that the restriction on the first differences of averages and restrictions on the correlation matrix are given.

For guaranteed linear RMS estimates are derived expressions for the errors(faults). Under certain restrictions on the sets, which contain average values and correlation matrices is showed that such estimates are expressed through solutions of difference equations systems.

Key Words: mathematical statistics, estimation of mean values, random variables, correlation matrix difference equation.

Статтю представив д.т.н. Гаращенко Ф.Г.

Нехай θ_k, $k=\overline{0,N-1}$ послідовність випадкових величин із значеннями в R' та невідомими середніми вигляду $E\theta_k = h_k x_{1,k} + x_{2,k} b_k$. Припустимо далі, що $h_k, b_k, k=\overline{0,N-1}$ задані послідовності, а кореляційна матриця $R=(r_{kj})$, $k, j=\overline{0,N-1}$, $\sigma^2(u,c)=\infty$ невідома. Нехай також спостерігаються реалізації θ_k, які ми

© О.Г. Наконечний, Ю.В. Шушарін, С.В. Демиденко, 2014

позначимо через $y_k, k=\overline{0,N-1}$ і відомо, що вектор $x^T=(x_{1,0},...,x_{1,N-1},x_{2,0},...,x_{2,N-1})$ та кореляційна матриця R належать множинам G_1 і G_2 у відповідних просторах. Позначимо через L матрицю розмірності $m\times 2(N-1)$, $m\le 2(N-1)$.

Означення 1. Лінійною оцінкою вектора Lx за спостереженнями $y_0,...,y_{n-1}$ назвемо вираз

$$\hat{L}x=\sum_{k=0}^{N-1}u_k y_k+c, \qquad (1)$$

де u_k, c із простору R^m.

Означення 2. Гарантованою лінійною середньоквадратичною оцінкою (ГЛСК оцінкою) називають вектор $\hat{\hat{L}}x$, що знаходиться з умови

$$\inf_{u_k,c}\sup_{G_1,G_2}\left\{E\left|Lx-\hat{L}x\right|^2\right\}^{\frac{1}{2}}=\sup_{G_1,G_2}\left\{E\left|Lx-\hat{\hat{L}}x\right|^2\right\}^{\frac{1}{2}}=\sigma, \qquad (2)$$

де σ називають похибкою такої оцінки.

Розглянемо далі випадок, коли множини G_1 та G_2 мають вигляд:

$$G_1=\left\{x:\sum_{k=0}^{N-1}(x_{1,k+1}-x_{1,k})^2q_{1,k}+\sum_{k=0}^{N-1}x_{2,k}^2q_{2,k}\le 1\right\}, \qquad (3)$$

$$G_2=\left\{R:spQR\le 1\right\}, \qquad (4)$$

де $q_{1,k}, q_{2,k}$ – задані додатні числа, Q – додатно означена матриця.

Запишемо вектор Lx у вигляді

$$Lx=\sum_{k=0}^{N-1}l_k x_{1,k}+\sum_{k=0}^{N-1}g_k x_{2,k}+l_N x_{1,N},$$

де $l_0,...,l_N$ – вектори із простору R^m.

Твердження 1. Має місце рівність

$$\sup_{G_1,G_2}E\left|Lx-\hat{L}x\right|^2=\sup_{G_1}\left|\sum_{k=0}^{N-1}z_{k+1}(x_{1,k+1}-x_{1,k})+z_0x_{1,0}-\sum_{k=0}^{N-1}(g_k-u_kb_k)x_{2,k}-c\right|^2+\sup_{G_2}E\left|\sum_{k=0}^{N-1}u_k\xi_k\right|^2=\sigma^2(u,c), \qquad (5)$$

де вектори $z_k\in R^m$ визначаються із рівняння

$$\Delta_- z_k=z_k-z_{k+1}=l_k-h_ku_k,\quad k=\overline{0,N-1},\qquad z_N=l_N,\ \xi_k=\theta_k-E\theta_k. \qquad (6)$$

Доведення. Оскільки

$$Lx-\hat{L}x=\sum_{k=0}^{N-1}l_kx_{1,k}+\sum_{k=0}^{N-1}g_kx_{2,k}+l_Nx_{1,N}-\sum_{k=0}^{N-1}u_kh_kx_{1,k}-\sum_{k=0}^{N-1}u_kb_kx_{2,k}-c-\sum_{k=0}^{N-1}u_k\xi_k=$$
$$=\sum_{k=0}^{N-1}(l_k-u_kh_k)x_{1,k}+l_Nx_{1,N}+\sum_{k=0}^{N-1}(g_k-u_kb_k)x_{2,k}-c-\sum_{k=0}^{N-1}u_k\xi_k,$$

то

$$E\left|Lx-\hat{L}x\right|^2=\left|\sum_{k=0}^{N-1}(l_k-u_kh_k)x_{1,k}+l_Nx_{1,N}+\sum_{k=0}^{N-1}(g_k-u_kb_k)x_{2,k}\right|^2+E\left|\sum_{k=0}^{N-1}u_k\xi_k\right|^2.$$

Зауважимо далі, що якщо z_k є розв'язком рівняння (6), то

$$\sum_{k=0}^{N-1}(l_k-u_kh_k)x_{1,k}+l_Nx_{1,N}=\sum_{k=0}^{N-1}\Delta_-z_kx_{1,k}+l_Nx_{1,N}=$$
$$=\sum_{k=0}^{N-1}z_{k+1}(x_{1,k+1}-x_{1,k})+z_0x_{1,0}.$$

Враховуючи ці рівності одержимо потрібне співвідношення (5).

Позначимо через U множину $U=\{u:z_0=0\}$.

Твердження 2. Справедлива рівність

$$\inf_c\sigma^2(u,c)=\begin{cases}\infty, u\notin U,\\ \sigma^2(u),\end{cases} \qquad (7)$$

де

$$\sigma^2(u)=\lambda_{\max}(P_1)+\lambda_{\max}(P_2), \qquad (8)$$

$$P_1=\sum_{k=0}^{N-1}z_{k+1}z_{k+1}^Tq_{1k}^{-1}+\sum_{k=0}^{N-1}(g_k-u_kb_k)(g_k-u_kb_k)^Tq_{2k}^{-1},$$

$$P_2=\sum_{k,j=0}^{N-1}u_ku_j^Tq_{kj},$$

де q_{kj} – елементи матриці Q^{-1}, $\lambda_{\max}(\cdot)$ – максимальні власні числа матриць P_1 та P_2 відповідно.

Доведення. Із рівності (5) випливає, що якщо $u\notin U$, то $\sigma^2(u,c)=\infty$. Далі зауважимо, що при $u\in U$

$$\sup_{G_1}\left|\sum_{k=0}^{N-1}z_{k+1}(x_{1,k+1}-x_{1,k})+\sum_{k=0}^{N-1}(g_k-u_kb_k)x_{2,k}-c\right|^2\ge$$

$$\geq \sup_{|a|\leq 1}\sup_{G_1}\left[\sum_{k=0}^{N-1}(z_{k+1},a)(x_{1,k+1}-x_{1,k})+\right.$$

$$\left.+\sum_{k=0}^{N-1}(g_k-u_kb_k,a)x_{2,k}\right]^2=\sup_{|a|\leq 1}\sup_{G_1}J^2(x,a).$$

Оскільки

$$J^2(x,a)\leq\sum_{k=0}^{N-1}(z_{k+1},a)^2q_{1k}^{-1}+\sum_{k=0}^{N-1}(g_k-u_kb_k,a)^2q_{2k}^{-1}$$

і знак рівності досягається при $x_{1,k+1}-x_{1,k}=q_{1k}^{-1}(z_{k+1},a)F(u)$,

$x_{2,k}=q_{2k}^{-1}(g_k-u_kb_k,a)F(u)$, де

$$F^{-1}(u)=\left\{\sum_{k=0}^{N-1}(z_{k+1},a)^2q_{1k}^{-1}+\sum_{k=0}^{N-1}(g_k-u_kb_k,a)^2q_{2k}^{-1}\right\}^{\frac{1}{2}},$$

то при $u\in U$

$$\sup_{G_1}J^2(x,a)=\sum_{k=0}^{N-1}(z_{k+1},a)^2q_{1k}^{-1}+$$

$$+\sum_{k=0}^{N-1}(g_k-u_kb_k,a)^2q_{2k}^{-1}=(P_1a,a),$$

то

$$\sup_{|a|\leq 1}\sup_{G_1}J^2(x,a)=\sup_{|a|\leq 1}(P_1a,a)=\lambda_{\max}(P_1).$$

Крім того, в силу рівності

$$\sup_{G_2}E\left|\sum_{k=0}^{N-1}u_k\xi_k\right|^2=\sup_{D}\left|\sum_{k=0}^{N-1}u_kv_k\right|^2=$$

$$=\sup_{|a|\leq 1}\sup_{D}\left[\sum_{k=0}^{N-1}(u_k,a)v_k\right]^2=\sup_{|a|\leq 1}\sup_{(Qv,v)\leq 1}(u,v)^2=$$

$$=\sup_{|a|\leq 1}(Q^{-1}u,u)=\sup_{|a|\leq 1}\sum_{k,j=0}^{N-1}q_{kj}(u_k,a)(u_j,a)=$$

$$=\sup_{|a|\leq 1}(P_2a,a)=\lambda_{\max}(P_2),$$

де $D=\{v:(Qv,v)\leq 1\}$, $v^T=(v_0,...,v_N)$, $u^T=((u_0,a),...,(u_N,a))$, одержимо, що при $u\in U$

$$\sigma^2(u,c)\geq\lambda_{\max}(P_1)+\lambda_{\max}(P_2),$$

звідки

$$\inf_c\sigma^2(u,c)=\lambda_{\max}(P_1)+\lambda_{\max}(P_2),$$

що і потрібно було показати.

Наслідок 1. Для ГЛСК оцінки $\hat{c}=0$.

Наслідок 2. Існують вектори $\hat{u}_k$, $k=\overline{0,N-1}$, такі що

$$\inf_{u_k}\sup_{G_1,G_2}E\left|Lx-\sum_{k=0}^{N-1}u_ky_k\right|^2=\sup_{G_1,G_2}E\left|Lx-\sum_{k=0}^{N-1}\hat{u}_ky_k\right|^2. \quad (9)$$

Доведення. Функція $\sigma_1(u)=\inf_c\sigma^2(u,c)$ є неперервною опуклою і такою, що $\lim\limits_{\sum_{k=0}^{N-1}|u_k|^2\to\infty}\sigma_1(u)=\infty$. Множина U – опукла та замкнена. Звідки випливає існування векторів $\hat{u}_k$, таких, що виконується рівність (9).

Наслідок 3. Нехай матриця R відома та невироджена. Тоді існує єдина ГЛСК оцінка.

Доведення. Оскільки $\inf_c\sigma^2(u,c)=$

$=\lambda_{\max}(P_1)+\sum_{k,j=0}^{N}r_{kj}(u_k,u_j)$, а матриця R невироджена, то функція $\sigma_1(u)=\inf_c\sigma^2(u,c)$ є сильно опуклою на непорожній опуклій замкненій множині U. Звідки випливає єдиність ГЛСК оцінки.

Розглянемо більш детально випадок, коли похибка оцінки вектора $\hat{L}x$ має вигляд

$$\delta(u,c)=\left\{\sum_{j=1}^{m}\max_{G_1,G_2}E(e_j,Lx-\hat{L}x)^2\right\}^{\frac{1}{2}}, \quad (10)$$

де $e_1,...,e_m$ – орти в просторі R^m.

Введемо вектори p_k як розв'язки системи рівнянь

$$\begin{cases}\Delta_+p_k=p_{k+1}-p_k=q_{1k}^{-1}\hat{z}_{k+1}, & p_0=\lambda,\\ \Delta_-z_k=l_k-h_k\hat{u}_k, k=\overline{0.N-1},\\ z_N=l_N, z_0=0,\end{cases} \quad (11)$$

де вектори $\hat{u}_k$ визначаються із рівнянь

$$\hat{u}_kb_k^2q_{2k}^{-1}+\sum_{i=0}^{N-1}q_{ki}\hat{u}_i=h_kp_k+g_kb_kq_{2k}^{-1}. \quad (12)$$

Твердження 3. Існує єдина ГЛСК оцінка, що має вигляд $\hat{\hat{L}}x=\sum_{k=0}^{N-1}\hat{u}_ky_k$, де $\hat{u}_k$ визначаються із системи рівнянь (11), (12) при цьому

$$\inf_{u,c}\sup_{G_1,G_2}\delta^2(u,c)=\sum_{k=0}^{N-1}sp\,\hat{z}_{k+1}\hat{z}_{k+1}^Tq_{1k}^{-1}+$$

$$+\sum_{k=0}^{N-1}sp\,(g_k-\hat{u}_kb_k)(g_k-\hat{u}_kb_k)^Tq_{2k}^{-1}+\sum_{i,j}^{N-1}sp\,\hat{u}_i\hat{u}_j^Tq_{ij}. \quad (13)$$

Доведення. Нехай z_k, $k=\overline{0,N-1}$ розв'язок рівнянь (11), а $u\in U$. Тоді будемо мати рівність

$$(e_j, Lx-\hat{L}x)=\sum_{k=0}^{N-1}(z_k,e_j)x_{1,k}-$$

$$-\sum_{k=0}^{N-1}(g_k-u_kb_k,e_j)x_{2,k}-(c,e_j)+\sum_{k=0}^{N-1}(u_k,e_j)\xi_k.$$

Звідки

$$\sup_{G_1,G_2}E(e_j,Lx-\hat{L}x)^2=J_{1j}(u,c)+J_{2j}(u,c),$$

де

$$J_{1j}(u,c)=\sup_{G_1}\left(\sum_{k=0}^{N-1}(z_k,e_j)x_{1,k}-\right.$$

$$\left.-\sum_{k=0}^{N-1}(g_k-u_kb_k,e_j)x_{2,k}-(c,e_j)\right)^2,$$

$$J_{2j}(u,c)=\sup_{G_2}E(u^{(j)},\xi)^2,$$

$$u^{(j)}=((u_{0j},e_j),...,(u_{N-1},e_j))^T,\quad \xi=(\xi_0,...,\xi_N)^T.$$

Оскільки

$$\delta^2(u,c)=\sum_{j=1}^{m}J_{1j}(u,c)+\sum_{j=1}^{m}J_{2j}(u),$$

то

$$\delta_1^2(u)=\inf_c\delta^2(u,c)=\inf_c\sum_{j=1}^{m}J_{1j}(u,c)+$$

$$+\sum_{j=1}^{m}J_{2j}(u)=\sum_{j=1}^{m}J_{1j}(u,0)+\sum_{j=1}^{m}J_{2j}(u).$$

В силу узагальнених нерівностей Коші-Буняковського одержимо

$$J_{1j}(u,0)=\sum_{k=0}^{N-1}(z_{k+1},e_j)^2q_{1k}^{-1}+\sum_{k=0}^{N-1}(g_k-u_kb_k,e_j)^2q_{2k}^{-1}.$$

$$J_{2j}(u,0)=(Q^{-1}u^{(j)},u^{(j)})=\sum_{k,i}q_{ki}(u_k,e_j)(u_i,e_j).$$

Тобто $\delta_1^2(u)=\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{j=1}^{m}(z_{k+1},e_j)^2q_{1k}^{-1}+$

$$+\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{j=1}^{m}(g_k-u_kb_k,e_j)^2q_{2k}^{-1}+$$

$$+\sum_{k,i=0}^{N-1}\sum_{j=1}^{m}q_{ki}(u_k,e_j)(u_i,e_j)=\sum_{k=0}^{N-1}sp\,z_{k+1}z_{k+1}^Tq_{1k}^{-1}+$$

$$+\sum_{k=0}^{N-1}(g_k-u_kb_k)(g_k-u_kb_k)^Tq_{2k}^{-1}+\sum_{k,i=0}^{N-1}sp\,q_{ki}u_ku_i^T.$$

Оскільки функція $\delta_1^2(u)$ сильно опукла, а множина U непорожня, опукла і замкнена та існує єдиний вектор $\hat{u}=(\hat{u}_0,...,\hat{u}_N)$ такий, що $\inf_{u\in U}\delta_1^2(u)=\delta_1^2(\hat{u})$.

Введемо функцію Лагранжа

$$\delta_\lambda^2(u)=\delta^2(u)+2(\lambda,z_0).$$

Існують вектор $\hat{u}$ та множник λ такі, що

$$\frac{d}{d\tau}\delta_\lambda^2(\hat{u}+\tau v)\Big|_{\tau=0}\equiv 0\quad\forall v=(v_0,...,v_N)^T.$$

Враховуючи, що $\hat{z}_k$ і p_k є розв'язками системи рівнянь (11), (12) одержимо

$$\frac{1}{2}\delta_\lambda^2(\hat{u}+\tau v)\Big|_{\tau=0}=\sum_{k,i}spq_{ik}\hat{u}_iv_k^T-\sum_k sph_kp_kv_k^T-$$

$$-\sum_k sp(g_k-\hat{u}_kb_k)q_{2k}^{-1}v_k^T\equiv 0.$$

Звідки для $\hat{u}_k, k=\overline{0,N-1}$ одержимо систему рівнянь (12).

Розглянемо далі випадок, коли $m=1$, а величини Lx мають вигляд

$$Lx=\sum_{k=0}^{N-1}l_kx_{1,k}+l_Nx_{1,N}\,.$$

Введемо величини $\hat{p}_k$ та $\hat{x}_k$ як розв'язок системи рівнянь

$$\begin{cases}\Delta_-\hat{p}_k=\sum_{j=0}^{N}\tilde{q}_{kj}(y_j-h_j\hat{x}_j),\\ \hat{p}_0=0,\hat{p}_N=0,\\ \Delta_+\hat{x}_{1,k}=q_{1k}^{-1}\hat{p}_{k+1},\end{cases}\qquad(14)$$

де $\tilde{q}_{kj}$ – елементи матриці $(B+Q^{-1})^{-1}$, $B=diag(b_0q_{20}^{-1},...,b_Nq_{2N}^{-1})$.

Нехай величини $p_k,\hat{z}_k$ є розв'язками систем рівнянь (11) при $m=1, g_k=0$, а величини $\hat{p}_k$ та $\hat{x}_k$ задовольняють рівняння (14). Тоді має місце

Твердження 4. ГСКЛ оцінка має вигляд

$$\hat{\hat{L}}x=\sum_{k=0}^{N-1}\hat{u}_ky_k=\sum_{k=0}^{N-1}l_k\hat{x}_{1k}+l_N\hat{x}_N,\qquad(15)$$

При цьому

$$\sup_{G_1,G_2}E\left|Lx-\hat{\hat{L}}x\right|^2=\sum_{k=0}^{N-1}l_kp_k+l_Np_N.\qquad(16)$$

Доведення. Враховуючи твердження 3 будемо мати рівність

$$\delta_1^2(\hat{u}) = \sum_{k=0}^{N-1} \hat{z}_{k+1}^2 q_{1k}^{-1} + \sum_{k=0}^{N-1} \hat{u}_k^2 b_k^2 q_{2k}^{-1} + \sum_{k,j} q_{kj} \hat{u}_k \hat{u}_j .$$

Оскільки

$$\sum_k \hat{u}_k^2 b_k^2 q_{2k}^{-1} + \sum_k \sum_j q_{kj} \hat{u}_k \hat{u}_j = \sum_k \hat{u}_k h_k p_k ,$$

а

$$\sum_k \hat{z}_{k+1}^2 q_{1k}^{-1} = \sum_k \hat{z}_{k+1} \Delta_+ p_k = \sum_k \Delta_- z_k p_k + l_N p_N =$$

$$= \sum_k l_k p_k + l_N p_N - \sum_k \hat{u}_k h_k p_k ,$$

то із цих співвідношень одержимо рівність (16).

Далі запишемо систему рівнянь (11) при $m = 1, g_k = 0$ у векторній формі, тобто

$$B\hat{u} + Q^{-1}u = Hp, H = diag(h_0, ..., h_N),$$

$$p^T = (p_0, ..., p_N).$$

Звідки $\hat{u} = (B + Q^{-1})^{-1} Hp.$ Оскільки

$$\sum_{k=0}^{N} \hat{u}_k y_k = (\hat{u}, y) = ((B + Q^{-1})^{-1} Hp, y) =$$

$$= (p, H^T (B + Q^{-1})^{-1} y) = \sum_k p_k h_k \sum_j \tilde{q}_{kj} y_j$$

із системи рівнянь (14) одержимо

$$\sum_k p_k h_k \sum_j \tilde{q}_{kj} y_j = \sum_{k=0}^{N-1} l_k \hat{x}_{1k} + l_N \hat{x}_{1N} ,$$

що і потрібно було показати.

Запропонований вище алгоритм для обчислення гарантованих лінійних середньоквадратичних оцінок реалізований у програмному середовищі Wolfram Mathematica, результати обчислень наведемо для наступного прикладу.

Моделювання спостережень y_k, $k = \overline{0, N-1}, N = 20$ здійснювалося за умови $x_{1,k} = \ln(k+2) + 2^{(k-1)} * \sin(k)$, $h_k = 1$, $b_k = 0$, ξ_k – нормально розподілена величина з параметрами 0 та $\sqrt{2}$. Крім цього $q_{k1} = 1$, $q_{k2} = 0$.

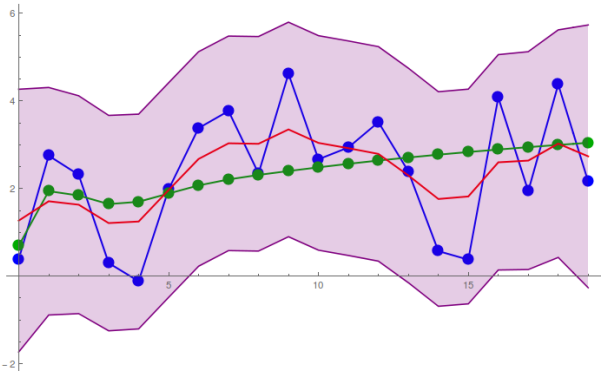


Рис. 1. Графіки істинного значення вектору $x_{1,k}$, спостереження та ГЛСК оцінка.

На рисунку 1 зображено графіки істинного значення вектору $x_{1,k}$ (майже пряма лінія в центрі графіку з колами у вузлах), спостереження та ГЛСК оцінка (найбільш «зашумлена» лінія з колами, та суцільна тонка лінія відповідно). Інтервал 3σ зображений на графіку як затемнена область.

Список використаних джерел

1. *Наконечний О.Г.* Оцінювання параметрів в умовах невизначеності / О.Г. Наконечний. // Наукові записки КНУ ім. Т.Г. Шевченка. – 2004. – Том 7. – С. 78 – 81.

2. *Наконечный А.Г.* Гарантированные оценки параметров линейных алгебраических уравнений при нестационарных наблюдениях / О.Г. Наконечний, С.В. Демиденко. // Проблемы управления и информатики. – 2014. – №1. – С. 23-31.

3. *Жук С.М.* Оцінювання розв'язків алгебраїчно–диференціальних рівнянь в умовах невизначеності / С.М. Жук, О.Г. Наконечний. – Рівне: НУВГП, 2009. – 120 с.

References

1. NAKONECHNIY, O. (2004) *Estimation of parameters under uncertainty*. Scientific Notes KNU T. Shevchenko. – V. 7 pp. 78–81.

2. NAKONECHNIY, O., DEMIDENKO S. (2014) *Guaranteed estimates of the parameters of linear algebraic equations with time-dependent observations.* Control and Informatics. –№1. pp. 23-31.

3. ZHUK, S., NAKONECHNIY, O. (2009) *Evaluation of solutions of differential equations algebraically under uncertainty*. Rivne: NUVGP. –P 120.

Надійшла до редколегії 25.11.14

УДК 519.72

Негадайлов П.А., к. ф.-м. н., асистент
Єщенко А.Ю., студент

Пошук максимальної коаліції в обмеженій кооперативній грі з багатьма гравцями

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, пр-т Глушкова 4д.

P.A. Negadailov, Assistant Professor, Ph. D
A.Y. Yeschenko, student

On the maximum coalition in limited cooperative game with many players

Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03680, Kyiv, Glushkova av., 4d
e-mail: pnegadailov@gmail.com, mazepa007@gmail.com

В даній роботі роглядається задача обмеженої кооперативної гри з N гравцями, де можливі коаліції задаються графом зв'язків. Описаний алгоритм пошуку максимальної коаліції.

Ключові слова: кооперативна гра, коаліція, гібридний генетичний алгоритм.

The traditional assumption in cooperative game theory is that every coalition is feasible and can form to attain its payoff (see Mayerson[4]). However, in many real life situations not every group of players has the opportunity to cooperate and to collect their own payoff. In this paper we deal with restrictive cooperative game, where not all coalitions can be formed. There have been previous models developed to study the problem of games with partial cooperation. Games restricted by a communication graph were introduced by Myerson [3] and Owen [4]. Our goal is to find permissible coalition of maximum value. This task is very similar to the maximum clique problem from graph theory which is NP-hard (see, for example, Dinur [2]). That means that it will be interesting to find at least an approximate solution in a reasonable time. For this purpose we developed an hybrid genetic-type algorithm. To substantiate its performance, we conducted a series of experiments on different size graphs.

Keywords: cooperation game, coalition, hybrid genetic algorithm.

Статтю представив д.т.н., проф. Гаращенко Ф.Г.

Кооперативною грою (V,ν) називають функцію $\nu: 2^V \to \Re, \nu(0) := 0$. Гравці є елементами скінченної множини $V = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$, а коаліцією є будь-яка підмножина $S \subseteq V$. Розглянемо граф $G = (V, E)$, де V - множина вершин, $E \subseteq V * V$ множина ребер. Будемо казати, що два гравці v_i та v_j можуть належати одній коаліції, якщо ребро $(v_i, v_j) \in E$. Кооперативна гра, в якій можливі не всі коаліції, називається обмеженою кооперативною грою з багатьма гравцями. Подібні задачі розглядалися в роботах [3,5].

На множині гравців задамо невід'ємну функцію $f: V \to R^+$, що характеризує вклад кожного окремого гравця ту чи іншу коаліцію. Задача про максимальну коаліцію полягає у максимізації загальної ваги вершин підграфу:

$$V^* \subseteq V : \sum_{v_i \in V^*} f(v_i) \to max,$$

зберігаючи властивість, що кожні дві вершини з множини V^*, мають містити ребро у множині E (тобто V^*, це обов'язково повний граф):

$$V^* \subseteq V, \forall v_i, v_j \in V^* : (v_i, v_j) \in E$$

Легко бачити. що подібна проблема є аналогом задачі пошуку максимальної кліки (повного підграфу) у зваженому графі, що, як відомо, належить до класу NP-повних, а тому цікавим є питання розробки алгоритму пошуку хоча б наближеного розв'язку задачі за прийнятний час. Для досягнення цієї мети було вирішено застосувати алгоритми генетичного типу.

Проте для задачі пошуку максимальної коаліції, спроба адаптувати класичний

© П.А. Негадайлов, А.Ю. Єщенко, 2014

генетичний алгоритм не є продуктивною. Класичні оператори мутації, схрещування і прості випадкові оптимізації не дають хороших результатів через специфіку задачі. Будь-яка зміна хромосом, що представляє повний граф цими операторами, часто веде до кардинальної його зміни та руйнування повноти. Також великою з проблем є розробити ефективний алгоритм для визначення функції пристосовності. Для звичайного генетичного алгоритму, потрібна функція пристосовності, що враховує повноту графу, тобто значення функції має перераховуватися як еквівалент повноти. Проблеми що виникають при таких підходах - граф часто не повний, що веде до складності перевірки на повноту.

Іншою можливістю стало застосування евристичного рандомізованого алгоритму, який зможе гарантувати повноту графу, тим самим елімінуючи проблему з розробкою функції пристосовності. Гарантуючи повний грав на кожній ітерації генетичного алгоритму, значення пристосовності оптимально обирати за сумарною вагою вершин що входять у підграф.

Запропонований нами алгоритм включає в себе жадібну евристичну процедуру. Будуючи максимальну кліку, ми спочатку випадково збільшуємо граф додаючи випадкові вершини, потім ми робимо граф повним, і в кінці спроба збільшення графу, без порушення його повноти.

Перед тим, як описувати розв'язок задачі нагажаємо деякі стандартні означення, пов'язані з генетичними алгоритмами:

Популяція - це множина хромосом X.

Хромосома - це вектор $x=(x_1,x_2,...,x_n)$, $x_i\in\{0,1\}$. $x_i=1$ означає що підграф містить i-ту вершину з основного графа.

Локус - це позиція x_i.

Всі операції алгоритму здійснюва-тимуться на хромосомах. Відомо, що для опису генетичного алгоритму достатнью показати роботу оператора схрещування та мутації. В нашій задачі були використані багатоточкове схрещування та мутація.

Багаточкова мутація

$$if(x_i=1)\to x_i:=0$$
$$if(x_i=0)\to x_i:=1$$

Ця операція виконується для вибірки з n випадкових локусів.

Мотивацією цієї операції є збільшення ймовірності отримати локально правильний розв'язок, тобто можливість потрапити на вершини, які справді знаходяться у максимальній кліці. При розріджених графах він може добавити вершину, що ще не була у розгляді, тоді коли у близьких до повного, може видалити вершину, що може спровокувати неповність підграфу.

Приклад одноточкової мутації: $(1,0,0,0)\to(1,0,1,0)$.

Багатоточкове схрещення

На вході два вектори x і y. Вибираємо вектор випадкових, впорядкованих за зростанням цілих чисел $g=(g_1,g_2,...,g_n)$, $g_i\in(1,|V|)$, $i\in(1,n)$

Створюємо нову хромосому z за таким правилом -локуси з непарних проміжків беремо з x, з парних з y:

$$z=(x_0,x_1,..x_{g_1},y_{g_1+1},y_{g_1+2},..y_{g_2},x_{g_2+1},x_{g_2+2},...,y_{g_{n-1}+(g_n-g_{n-1})-1},y_{g_n})$$

Приклад схрещення: $x=(0,1,0,0,1,1,1,0)$, $y=(1,1,1,1,0,0,0,0)$, обрано вектор $g=(3)$ (одноточкова мутація).

Вектор на виході: $z=(0,1,0,1,0,0,0,0)$

Функція пристосовності

На вході хромосома x, що представляє повний підграф графа V.

$$Fvalue:=\sum_{\forall x_i=1} f(v_i), v_i\in V$$

Евристична процедура

Отримуючи вектор x на вхід ми виконуємо дві процедури. Перша - це приведення до обов'язково повного графу.

- **Ремонт:**

Виберемо випадковий локус у хромосомі ind

(а) **Для кожного** x_i **з** $i=ind$ **до** N: **якщо** $x_i=1$:

* **Або** $x_i:=0$

* **Або з** $j=i+1$ **до** N:

якщо ($x_j=1$ **і** $(v_i,v_j)\notin E$) $x_j:=0$

з $j=1$ **до** $i-1$:

якщо ($x_j=1$ **і** $(v_i,v_j)\notin E$) $x_j:=0$

(b) **З** $i = ind - 1$ **до** 1: **якщо** $x_i = 1$:

* **Або** $x_i = 0$

* **Або з** $j = i - 1$ **до** 1:

якщо ($x_j = 1$ **і** $(v_i, v_j) \notin E$) $x_j = 0$

Легко показати те, що результатом цієї процедури це повний граф. Не залишиться вершин які не зв'язані власним ребром із кожною з хромосоми. Після цієї процедури, завдяки великій залежності від випадковості, може бути видалено багато вершин, що насправді входять у повний підграф. Тому використовується наступна процедура, розширення графу без втрати його повноти.

• **Розширення:**

Виберемо випадковий локус у хромосомі ind

- **Для кожного** x_i **з** $i = ind$ **до** N:

якщо $x_i = 0$ **і** $\forall x_j = 1, j = \overline{1,n} : (v_i, v_j) \in V$:

$x_i := 1.$

- **Для кожного** x_i **з** $i = 1$ **до** $ind - 1$:

якщо $x_i = 0$ **і** $\forall x_j = 1, j = \overline{1,n} : (v_i, v_j) \in V$:

$x_i := 1.$

Ця операція теж дуже залежить від випадкового вибору початкового місця. Після виконання, ми отримуємо обов'язково повний граф, до якого не можна додати жодної вершини, не руйнуючи повноту.

Загальний генетичний алгоритм

Розпишемо детально загальний алгоритм:

Ініціалізація X (локуси хромосом заповнюються значеннями з $\{0,1\}$ з ймовірністю $1/2$)

While(не виконується умова) **DO**

Виконуємо **багатоточкове схрещення**.

Виконуємо **багатоточкову мутацію**.

Виконуємо **евристичну процедуру**.

Виконуємо **оцінювання пристосов-ності** і сортуємо по спаданню її значенн.

Залишаємо кращі $1/3$ значень і додаємо ще $1/6$ значень з проміжку $(4/6,5/6)$ відсортованого вектору.

Оцінюємо умову для виходу з циклу.

END

За допомогою такого підходу, алгоритм не зациклюється на локальних максимумах, і за достатньо малу кількість ітерацій збігається до точного розв'язку. Можна довести що час однієї ітерації $O(n^2)$, що є дуже непоганою альтернативою для точних алгоритмів що потребують $O(2^{n/3})$ часу для незваженої версії. Далі наведені дані з тестування.

Порівняння з алгоритмами перебору

Для оцінки точності розв'язку були проведені порінняння отриманих результатів з точним роз'язком (знайденим за допомогою алгоритму перебору).

Генеруємо спочатку граф на 10 вершин. З коефіцієнтом розрідженості 10 (кожна вершина має максимально 9 ребер, 5 мінімально).

Протестувавши цей граф програмою, отримаємо такі результати:

	t	$W_{\max}$	V_{opt}	V
Перебір	**6 мс**	366	5	10 20
Генетичний	**15 мс**	366	5	10 20

де t - середній час роботи алгоритму, $W_{\max}$- вага максимальної знайденої каоліції. V_{opt} - кількість вершин в максимальній коаліції. V - кількість верщин графа. Остання колонка таблиці відображає кількість запусків алгоритму.

Отже, на дуже малих графах, алгоритм працює швидко як точний так і евристичний. У 20 випадків з 20 знайшов правильну відповідь.

Змінимо граф:

	t	$W_{\max}$	V_{opt}	V
Перебір	**12373 мс**	539	7	20 10
Генетичний	**23 мс**	539	7	20 10

Можна помітити, що час виконання вже відрізняється суттєво. Також змінились результати, у середній кількості вершин, і результат у функції пристосовності (у двох випадках був трішки більший).

Змінимо граф третій раз. Згенеруємо граф з 25 вершинами:

	t	$W_{\max}$	V_{opt}	V
Перебір	**590928 мс**	428	8	25 5

Генетичний **50 мс** 428 8 25 15

Цього разу час иконання відрізняється дуже помітно. Якщо згенерувати більший граф, наприклад з 30ма вершинами, час виконання буде занадто великий.

Тестування на графах великих розмірностей

Наш алгоритм дозволяє знаходити розв'язки для графів великих розмірів за відносно невеликий час. Результати тестування алгоритму на близькому до повного графі що містить 200 верши:

	t,с	$W_{\max}$	V_{opt}
1	**4**	1449	21
2	**5**	1477	22
3	**5**	1492	20
4	**4**	1492	20
5	**8**	1493	20

де перша колонка відповідає номеру запуска. Середній результат за 20 запусків:

t	$W_{\max}$	V_{opt}	V
5.2	1458	21	200

Мінімальне значення функції пристосовності (сумарна вага): 1449, максимальне: 1493.

Маючи NP-повну задачу, точний алгоритм для якої є надзвичайно повільним, незважаючи на особливості задачі, вдалося побудувати ефіктивний евристичний рандо-мізований алгоритм. Експериментальні резльтати показали, що швидкість роботи алгоритму дозволяє застосовувати його для рафів розмірів, отримуючи при ціому розв'язки дуже близькі до точних.

Шляхами до розвитку алгоритму можуть бути, зважена випадковість при видаленні вершин в другому кроці (ремонті). Також, можливо, зміна стандартних операцій мутації, може надати швидшу збіжність до точного розв'язку.

Список використаних джерел

1. E. Algaba. Algorithms for Computing the Myerson Value by Dividends / J.M. Bilbao, J. R. Fernandez, N. Jimenez, J.J. Lopez // Discrete Mathematics Research Progress. – 2007 – P. 1—13.
2. I. Dinur. On the hardness of appro-ximating minimum vertex cover / S. Safra // Annals of Mathematics. – №162. – 2005. – P. 439–485.
3. R.B. Myerson. Graphs and cooperation in games // *Math Oper. Res.* – №2. – 1977. – P. 225–229.
4. R.B. Myerson. Game theory. Analysis of conflict // *Harvard university press. – Cambridge, Massachusetts. London. England*. – 1991. – 568 P.
5. G. Owen. Values of graph-restricted games // *SIAM J Algebraic and Discrete Methods.* – №7. – 1986. – P. 210–220.

References

1. ALGABA E., BILBAO J.M., FER-NANDEZ J.R., LOPEZ J.J. (2007) Algorithms for Computing the Myerson Value by Dividends. Discrete Mathe-matics Research Progress – pp. 1-13.
2. DINUR I. and SAFRA S. (2005) On the hardness of appro-ximating minimum vertex cover. Annals of Mathematics. – 162. – 2005. – pp. 439–485.
3. MYERSON R.B. (1977) Graphs and cooperation in games. *Math Oper. Res.* – 2. – pp. 225–229.
4. MYERSON R.B. (1991) Game theory. Analysis of conflict. *Harvard university press. – Cambridge, Massachusetts. London. England*. – 568 P.
5. OWEN G. (1986) Values of graph-restricted games *SIAM J Algebraic and Discrete Methods.* – 7. – pp. 210–220.

Надійшла до редколегії 23.09.2014

УДК 517.977

Подлипенко Ю.К.[1], д.ф.-м.н., проф.,
Горбатенко М.Ю.[2], к.ф.-м.н., асистент,
Перцов А.С.[3], к.ф.-м.н., асистент

Наближені мінімаксні оцінки лінійних неперервних функціоналів від розв'язків системи змішаних варіаційних рівнянь

[1] Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, пр-т. Глушкова 4д,
e-mail: yourip@mail.ru
[2] Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, 58000, м. Чернівці, вул.. Університетська, 28,
e-mail: mykola.gorbatenko@gmail.com
[3] Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, 58000, м. Чернівці, вул. Університетська, 28,
e-mail: pertsov@ukr.net

Yu. K. Podlypenko[1], Prof.,
M. Yu. Gorbatenko[2], PhD,
A. S. Pertsov[3], PhD

Approximate minimax estimates of linear continuous functionals from solutions of system of mixed variational equations

[1] Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03680, Kyiv, Glushkova st., 4d,
e-mail: yourip@mail.ru
[2] Yuriy Fedkovych Chernivtsi National University, 58000, Chernivtsi, Universytetska st., 28,
e-mail: mykola.gorbatenko@gmail.com
[3] Yuriy Fedkovych Chernivtsi National University, 58000, Chernivtsi, Universytetska st., 28,
e-mail: pertsov@ukr.net

В даній статті вводиться поняття наближених мінімаксних середньоквадратичних оцінок значень лінійних неперервних функціоналів від розв'язків системи змішаних варіаційних рівнянь, до якої зводиться крайова задача для еліптичного рівняння 2-го порядку, і доводиться їх збіжність до точних мінімаксних оцінок.

Ключові слова: мінімаксні оцінки, спостереження, системи змішаних варіаційних рівнянь.

In the paper, we introduce the concept of approximate minimax mean-square values of estimates of linear continuous functionals of solutions of mixed variational equations with quadratic constraints on the unknown deterministic data of these problems and the second moments of noise in the observations, which reduces boundary value problem for elliptic equations of 2nd order and have their convergence to the exact minimax estimates.

Proposed new approach for retrieving of the approximate minimax mean-square estimations.

Obtained the new allegations of constructions of minimax estimation to special problems of optimal control systems, which are described by mixed variational equations of elliptic type with quadratic quality criteria. Also received the similar result for the special case when the estimation of the state of the system is directly determined from the solution of the appropriate mixed variational equations system.

Elaborated approximation of their solutions and proved the convergence of approximate solutions to exact. The systems of the linear algebraic equations for finding approximate solutions are given.

Key Words: minimax exstimates, observations, system of mixed variational equations.

Статтю представив д.т.н. Гаращенко Ф. Г.

Вступ. В роботі [1] за спостереженнями випадкових елементів вигляду

$$y_1 = C_1\mathbf{j} + \eta_1, \quad y_2 = C_2\varphi + \eta_2, \qquad (1)$$

де $(\mathbf{j},\varphi) \in H(div;D)\times L^2(\Omega)$ є розв'язком системи змішаних варіаційних рівнянь[1]

[1] З фізичної точки зору, задача задача (2), (3), моделює усталений процесс розповсюдження тепла в області D, при цьому функції $\varphi(x)$, $A^{-1}(x)\mathbf{j}(x)$ і $f(x)$ відповідно мають смисл температури, теплового потоку і об'ємної щільності теплових джерел в точці x

© Ю.К. Подлипенко, М.Ю. Горбатенко, А.С. Перцов, 2014

$$\int_D (\mathbf{A}^{-1}(x)\mathbf{j}(x),\mathbf{q}(x))_{\mathbb{R}^n}dx+\int_D \varphi(x)div\,\mathbf{q}(x)dx=0$$
$$\forall \mathbf{q}\in H(div;D) \qquad (2)$$

$$\int_D v(x)div\,\mathbf{j}(x)dx=\int_D f(x)v(x)dx\ \forall v\in L^2(D), \quad (3)$$

$$f\in G_0:=\{\tilde f\in L^2(D):$$
$$(Q(\tilde f-f_0),\tilde f-f_0)_{L^2(D)}\le 1\}, \qquad (4)$$

$C_1\in\mathcal{L}(L^2(D)^n,H_1)$ і $C_2\in\mathcal{L}(L^2(D),H_2)$ – лінійні неперервні оператори, а похибки η_1 і η_2 в спостереженнях (1) задовольняють умову

$$(\eta_1,\eta_2)\in G_1:=\{\tilde\eta_1\in L^2(\Omega,H_1),\tilde\eta_2\in L^2(\Omega,H_2):$$
$$\mathbb{E}\tilde\eta_1=0,\ \mathbb{E}\tilde\eta_2=0,\ \mathbb{E}(\xi_1,u_1)_{H_1}(\xi_2,u_2)_{H_2}=0$$
$$\forall u_1\in H_1,\ u_2\in H_2,\quad \mathbb{E}(\tilde Q_1\tilde\eta_1,\tilde\eta_1)_{H_1}\le 1,$$
$$\mathbb{E}(\tilde Q_2\tilde\eta_2,\tilde\eta_2)_{H_2}\le 1\}, \qquad (5)$$

були одержані представлення для мінімаксної оцінки виразу

$$l(\mathbf{j},\varphi):=\int_D(\mathbf{l}_1(x),\mathbf{j}(x))_{\mathbb{R}^n}dx+\int_D l_2(x)\varphi(x)dx, \quad (6)$$

тобто для такої оцінки вигляду

$$l(\mathbf{j},\varphi)=(y_1,\hat u_1)_{H_1}+(y_2,\hat u_2)_{H_2}+\hat c, \qquad (7)$$

в якій елементи $\hat u_1\in H_1$, $\hat u_2\in H_2$ і число $\hat c$ визначаються із умови

$$\inf_{u\in H,c\in\mathbb{R}}\sigma(u,c)=\sigma(\hat u,\hat c),$$

де $\sigma(u,c):=\sup_{\tilde f\in G_0,(\tilde\eta_1,\tilde\eta_2)\in G_1}\mathbb{E}\,|\,l(\tilde{\mathbf{j}},\tilde\varphi)-l(\tilde{\mathbf{j}},\tilde\varphi)\,|^2$,

$(\tilde{\mathbf{j}},\tilde\varphi)$ – розв'язок задачі (2), (3) при $f(x)=\tilde f(x)$,

$l(\tilde{\mathbf{j}},\tilde\varphi):=(\tilde y_1,u_1)_{H_1}+(\tilde y_2,u_2)_{H_2}+c$, $\tilde y_1=C_1\tilde{\mathbf{j}}+\tilde\eta_1$,

$\tilde y_2=C_2\tilde\varphi+\tilde\eta_2$, $u:=(u_1,u_2)\in H:=H_1\times H_2$.

Тут H_1 і H_2 сепарабельні гільбертові простори над $\mathbb{R}$ із скалярними добутками $(\cdot,\cdot)_{H_1}$ та $(\cdot,\cdot)_{H_2}$ і нормами $\|\cdot\|_{H_1}$ та $\|\cdot\|_{H_2}$; $L^2(\Omega,H_i)$ – простір Бохнера, що складається з випадкових елементів $\xi_i=\xi_i(\omega)$, визначених на деякому ймовірнісному просторі $(\Omega,\mathcal{B},P)$ зі значеннями в H_i таких, що $\mathbb{E}\|\xi_i(\omega)\|^2_{H_i}<\infty$, $i=1,2$, де $\mathbb{E}$ – символ математичного сподівання; D – обмежена область в $\mathbb{R}^n$ з ліпшицевою границею; $H(div;D):=\{\mathbf{v}\in L^2(D)^n, div\,\mathbf{v}\in L^2(D)\}$; $\mathbf{A}=\mathbf{A}(x)=(a_{ij}(x))$ симетрична $n\times n$ – матриця з елементами $a_{ij}\in L^\infty(D)$, для якої існують такі додатні числа μ_1 і μ_2, що виконується нерівність $\mu_1\sum_{i=1}^n\xi_i^2\le\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\xi_i\xi_j\le\mu_2\sum_{i=1}^n\xi_i^2$, $\forall x\in D$, $\xi=(\xi_1,\dots,\xi_n)\in\mathbb{R}^n$, через $\mathbf{A}^{-1}$ позначена, обернена до $\mathbf{A}$; $\mathbf{l}_1$ і l_2 – задані елементи із $L^2(D)^n$ і $L^2(D)$; $u_1\in H_1$, $u_2\in H_2$, $c\in\mathbb{R}$; $f_0\in L^2(D)$ – задана функція; Q, $\tilde Q_1$ і $\tilde Q_2$ – задані в $L^2(D)$, H_1 і H_2 обмежені самоспряжені додатньо визначені оператори, що мають обмежені обернені. Були доведені такі твердження.

Лема 1. *Нехай при фіксованому $u\in H$ пара функцій $(\mathbf{z}_1(\cdot;u),z_2(\cdot;u))\in H(div;D)\times L^2(D)$, визначається як єдиний розв'язок наступної змішаної варіаційної задачі:*

$$\int_D(\mathbf{A}^{-1}(x)\mathbf{z}_1(x;u),\mathbf{q}(x))_{\mathbb{R}^n}dx+\int_D z_2(x;u)div\,\mathbf{q}(x)dx=$$
$$=\int_D(\mathbf{l}_1(x)-(C_1^tJ_{H_1}u_1)(x),\mathbf{q}(x))_{\mathbb{R}^n}dx$$
$$\forall\mathbf{q}\in H(div,D), \qquad (8)$$

$$\int_D v(x)div\,\mathbf{z}_1(x;u)dx=$$
$$=\int_D(l_2(x)-(C_2^tJ_{H_2}u_2)(x))v(x)dx\quad\forall v\in L^2(D), \quad (9)$$

де $J_{H_i}\in\mathcal{L}(H_i,H_{i'})$ – оператор, який діє з H_i на його спряжений простір $H_{i'}$ та визначається рівністю[2] $(v,u)_{H_i}=$ $=<v,J_{H_i}u>_{H_i\times H_{i'}}$ $\forall u,v\in H_i$, *де* $<x,f>_{H_i\times H_{i'}}:=f(x)$ *для* $x\in H_i$, $f\in H_{i'}$, $i=1,2$, $C_1^t:H_{1'}\to L^2(D)^n$ *і* $C_2^t:H_{2'}\to L^2(D)$ – *оператори, транспоновані до* C_1 *і* C_2, *що визначаються співвідношеннями*

$$.\int_D(v(x),C_1^tw(x))_{\mathbb{R}^n}dx=<Cv,w>_{H_1\times H_{1'}}.$$

для всіх $v\in L^2(D)^n$, $w\in H_{1'}$

і

$$\int_D v(x)C_2^tw(x)dx=<Cv,w>_{H_2\times H_{2'}}$$

для всіх $v\in L^2(D)$, $w\in H_{2'}$.

Із (8) і (9) маємо $z_2\in H_0^1(D)$.

Тоді задача знаходження мінімаксної оцінки виразу $l(\mathbf{j},\varphi)$ є еквівалентною задачі оптимального керування системою, що

[2] Цей оператор існує в силу теореми Ріса.

описується задачею (8) – (9) з функцією вартості вигляду

$$I(u) = (Q^{-1}z_2(\cdot;u), z_2(\cdot;u))_{L^2(D)} + (\tilde{Q}_1^{-1}u_1, u_1)_{H_1} + \\ + (\tilde{Q}_2^{-1}u_2, u_2)_{H_2} \to \inf_{u\in H}. \quad (10)$$

В теоремах 1 і 2 з [1] показано, що розв'язок задачі оптимального керування (8) – (10) (а отже, знаходження мінімаксної оцінки) зводиться до розв'язання деяких систем змішаних варіаційних рівнянь спеціального вигляду, тобто має місце такий результат.

Теорема 1 *Існує єдина мінімаксна оцінка значення* $l(\mathbf{j},\varphi)$*, яка має вигляд*

$$l(\mathbf{j},\varphi) = (y_1,\hat{u}_1)_{H_1} + (y_2,\hat{u}_2)_{H_2} + \hat{c} = l(\hat{\mathbf{j}},\hat{\varphi}),$$

де

$$\hat{c} = \int_D \hat{z}_2(x) f_0(x)dx, \quad \hat{u}_1 = \tilde{Q}_1 C_1 \mathbf{p}_1, \quad \hat{u}_2 = \tilde{Q}_2 C_2 p_2,$$

а функції $\mathbf{p}_1 \in H(div, D)$, $\hat{z}_2, p_2 \in L^2(D)$ *і* $\hat{\mathbf{j}} \in H(div, D)$, $\hat{\varphi} \in L^2(D)$ *знаходяться з розв'язку наступних однозначно розв'язних систем варіаційних рівнянь:*

$$\int_D (\mathbf{A}^{-1}(x)\hat{\mathbf{z}}_1(x), \mathbf{q}_1(x))_{\mathbb{R}^n} dx + \int_D \hat{z}_2(x)\ div\,\mathbf{q}_1(x)dx = \\ = \int_D (\mathbf{l}_1(x) - C_1^t J_{H_1} \tilde{Q}_1 C_1 \mathbf{p}_1(x), \mathbf{q}_1(x))_{\mathbb{R}^n} dx \\ \forall \mathbf{q}_1 \in H(\ div, D), \quad (11)$$

$$\int_D v_1(x)\ div\,\hat{\mathbf{z}}_1(x)dx = \\ = \int_D (l_2(x) - C_2^t J_{H_2} \tilde{Q}_2 C_2 p_2(x)) v_1(x)dx \\ \forall v_1 \in L^2(D), \quad (12)$$

$$\int_D (\mathbf{A}^{-1}(x)\mathbf{p}_1(x), \mathbf{q}_2(x))_{\mathbb{R}^n} dx + \\ + \int_D p_2(x)\ div\,\mathbf{q}_2(x)dx = 0 \quad \forall \mathbf{q}_2 \in H(div, D), \quad (13)$$

$$\int_D v_2(x)\ div\,\hat{\mathbf{p}}_1(x)dx = \int_D v_2(x) Q^{-1}\hat{z}_2(x)dx \\ \forall v_2 \in L^2(D) \quad (14)$$

і

$$\int_D (\mathbf{A}^{-1}(x)\hat{\mathbf{p}}_1(x), \mathbf{q}_1(x))_{\mathbb{R}^n} dx + \int_D \hat{p}_2(x)\ div\,\mathbf{q}_1(x)dx = \\ = \int_D (C_1^t J_{H_1} \tilde{Q}_1 (y_1 - C_1\hat{\mathbf{j}})(x), \mathbf{q}_1(x))_{R^n} dx \\ \forall \mathbf{q}_1 \in H(div, D), \quad (15)$$

$$\int_D v_1(x)\ div\,\hat{\mathbf{p}}_1(x)dx = \\ = \int_D v_1(x) C_2^t J_{H_2} \tilde{Q}_2 (y_2 - C_2\hat{\varphi})(x)dx \\ \forall v_1 \in L^2(D), \quad (16)$$

$$\int_D (\mathbf{A}^{-1}(x)\hat{\mathbf{j}}(x), \mathbf{q}_2(x))_{\mathbb{R}^n} dx + \int_D \hat{\varphi}(x) div\,\mathbf{q}_2(x)dx = 0 \\ \forall \mathbf{q}_2 \in H(div, D), \quad (17)$$

$$\int_D v_2(x) div\,\hat{\mathbf{j}}(x)dx = \int_D v_2(x)(Q^{-1}\hat{p}_2(x) + f_0(x))dx \\ \forall v_2 \in L^2(D), \quad (18)$$

відповідно, в яких рівності (15)–(18) виконуються з ймовірністю 1. Тут $\hat{\mathbf{z}}_1, \hat{\mathbf{p}}_1 \in H(div, D)$, $\hat{p}_2 \in L^2(D)$.

Відзначимо, що функції $\hat{\mathbf{z}}_1(x) = \mathbf{z}_1(x;\hat{u})$ і $\hat{z}_2(x) = z_2(x;\hat{u})$ є розв'язком задачі (8)–(9), а $\hat{u}$ – оптимальне керування системою, що описується цими рівняннями з критерієм якості (10).

Основні результати. Далі вводиться поняття наближених мінімаксних середньоквадратичних оцінок виразу $l(\mathbf{j},\varphi)$ і доводиться їх збіжність до $l(\mathbf{j},\varphi)$.

Для формулювання відповідних результатів спочатку дамо таке означення. Нехай W^h – скінченновимірні підпростори деякого гільбертового простору W, де параметр h означає довільний елемент деякої послідовності, яка прямує до нуля, і кожному значенню h відповідає простір $W^h \subset W$. Послідовність підпросторів W^h будемо називати повною в W, якщо для будь-якого елемента $\varphi \in W$ знайдеться послідовність елементів $\varphi^h \in W^h$ така, що

$$\left\|\varphi - \varphi^h\right\|_W \to 0, \quad при \quad h \to 0.$$

Позначимо через V_1^h та V_2^h повні підпростори в $V_1 := H(div, D)$ і $V_2 := L^2(D)$ відповідно, тобто підпростори, що задовольняють умовам

$$\forall \boldsymbol{\varphi} \in H(div, D), \forall \psi \in L^2(D)$$
$$\exists \text{ посл. } \{\boldsymbol{\varphi}^h\}, \{\psi^h\}, \boldsymbol{\varphi}^h \in V_1^h, \psi^h \in V_2^h \text{ такі, що}$$
$$\left\|\boldsymbol{\varphi} - \boldsymbol{\varphi}^h\right\|_{H(div,D)} \to 0, \quad \left\|\psi - \psi^h\right\|_{L^2(D)} \to 0$$
$$\text{при } h \to 0,$$

Підпростори з такими властивостями відомі та використовуються при розв'язанні крайових задач для еліптичних рівнянь в їх змішаній варіаційній постановці виду (2)–(3) методом скінченних елементів. Прикладом послідовності підпросторів V_1^h, що є повною в $H(div, D)$, у

випадку $n=2$ може слугувати послідовність скінченноелементних підпросторів, побудована Рав'яром і Томасом (Raviart P.A., Thomas J.M. [4]) та у випадку $n=3$ – послідовність підпросторів Неделека та Брецці, Дагласа та Фортена (їх детальний опис та властивості див. в роботах [3] та [2]). В якості послідовності підпросторів V_2^h, яка є повною в просторі $L^2(D)$, можна взяти послідовность підпросторів $V_2^h = divV_1^h$.

В якості наближеної мінімаксної оцінки величини $l(\mathbf{j},\varphi)$ візьмемо вираз

$$l^h(\mathbf{j},\varphi) = (\hat{u}_1^h, y_1)_{H_1} + (\hat{u}_2^h, y_2)_{H_1} + \hat{c}^h,$$

де

$$\hat{u}_1^h = \tilde{Q}_1 C_1 \mathbf{p}_1^h, \hat{u}_2^h = \tilde{Q}_2 C_2 p_2^h, \hat{c}^h = \int_D \hat{z}_2^h(x) f_0(x) dx, \quad (19)$$

а функції $\hat{\mathbf{z}}_1^h, \mathbf{p}_1^h \in V_1^h$ і $\hat{z}_2^h, p_2^h \in V_2^h$ знаходяться з розв'язку наступної однозначно розв'язної системи варіаційних рівнянь

$$\int_D (\mathbf{A}^{-1}(x)\hat{\mathbf{z}}_1^h(x), \mathbf{q}_1^h(x))_{\mathbb{R}^n} dx + \int_D \hat{z}_2^h(x)\ div\,\mathbf{q}_1^h(x) dx =$$
$$= \int_D (\mathbf{l}_1(x) - C_1^t J_{H_1} \tilde{Q}_1 C_1 \mathbf{p}_1^h(x), \mathbf{q}_1^h(x))_{\mathbb{R}^n} dx$$
$$\forall \mathbf{q}_1^h \in V_1^h, \quad (20)$$

$$\int_D v_1^h(x)\ div\,\hat{\mathbf{z}}_1^h(x) dx =$$
$$= \int_D (l_2(x) - C_2^t J_{H_2} \tilde{Q}_2 C_2 p_2^h(x)) v_1^h(x) dx$$
$$\forall v_1^h \in V_2^h, \quad (21)$$

$$\int_D (\mathbf{A}^{-1}(x)\mathbf{p}_1^h(x), \mathbf{q}_2^h(x))_{\mathbb{R}^n} dx +$$
$$+ \int_D p_2^h(x)\ div\,\mathbf{q}_2^h(x) dx = 0 \quad \forall \mathbf{q}_2^h \in V_1^h, \quad (22)$$

$$\int_D v_2^h(x)\ div\,\mathbf{p}_1^h(x) dx = \int_D v_2^h(x) Q^{-1} \hat{z}_2^h(x) dx$$
$$\forall v_2^h \in V_2^h. \quad (23)$$

Відзначимо, що з теореми 2.1 в [2] і з міркувань за допомогою яких була доведена теорема 1, в яких простори $V_1 := H(div, D)$ і $V_2 := L^2(D)$ замінені на V_1^h і V_2^h, відповідно, випливає, що система (20)–(23) однозначно розв'язна.

Теорема 2. *Наближена мінімаксна оцінка $l^h(\mathbf{j},\varphi)$ виразу $l(\mathbf{j},\varphi)$ при $h \to 0$ збігається до мінімаксної оцінки $l(\mathbf{j},\varphi)$ цього виразу в тому розумінні, що*

$$\lim_{h\to 0} \sup_{\tilde{f}\in G_0, (\tilde{\eta}_1, \tilde{\eta}_2)\in G_1} \mathbb{E}\,|l^h(\tilde{\mathbf{j}},\tilde{\varphi}) - l(\tilde{\mathbf{j}},\tilde{\varphi})|^2 = 0,$$

при цьому

$$\lim_{h\to 0} \sup_{\tilde{f}\in G_0, (\tilde{\eta}_1, \tilde{\eta}_2)\in G_1} \mathbb{E}\,|l^h(\tilde{\mathbf{j}},\tilde{\varphi}) - l(\tilde{\mathbf{j}},\tilde{\varphi})|^2 =$$
$$= \sup_{\tilde{f}\in G_0, (\tilde{\eta}_1, \tilde{\eta}_2)\in G_1} \mathbb{E}\,|l(\tilde{\mathbf{j}},\tilde{\varphi}) - l(\tilde{\mathbf{j}},\tilde{\varphi}))|^2,$$

де $\tilde{\varphi}$ має той же смисл, що і в означенні мінімаксної оцінки, яке міститься на стор. 2, $l^h(\tilde{\mathbf{j}},\tilde{\varphi}) = (\hat{u}_1^h, \tilde{y}_1)_{H_1} + (\hat{u}_2^h, \tilde{y}_2)_{H_1} + \hat{c}^h$, $\tilde{y}_1 = C_1\tilde{\mathbf{j}} + \tilde{\eta}_1$, $\tilde{y}_2 = C_2\tilde{\varphi} + \tilde{\eta}_2$.

Доведення. Позначимо через $\{h_n\}$ довільну послідовниість додатних чисел, таку що $h_n \to 0$ при $n \to \infty$. Нехай $\mathbf{z}_1^{h_n}(\cdot;u) \in V_1^{h_n}$, і $z_2^{h_n}(\cdot;u) \in V_2^{h_n}$ – розв'язок задачі

$$\int_D (\mathbf{A}^{-1}(x)\mathbf{z}_1^{h_n}(x;u), \mathbf{q}^{h_n}(x))_{\mathbb{R}^n} dx +$$
$$+ \int_D z_2^{h_n}(x;u) div\,\mathbf{q}^{h_n}(x) dx =$$
$$= \int_D (\mathbf{l}_1(x) - (C_1^t J_{H_1} u_1)(x), \mathbf{q}^{h_n}(x))_{\mathbb{R}^n} dx$$
$$\forall \mathbf{q}^{h_n} \in V_1^{h_n}, \quad (24)$$

$$\int_D v(x) div\,\mathbf{z}_1^{h_n}(x;u) dx =$$
$$= \int_D (l_2(x) - (C_2^t J_{H_2} u_2)(x)) v^{h_n}(x) dx \ \forall v^{h_n} \in V_2^{h_n}. \quad (25)$$

Тоді, внаслідок нерівності (2.36) з [2] і того факту, що підпростори V_1^h і V_2^h є повними в просторах $H(div, D)$ і $L^2(D)$ відповідно, випливає, що

$$\left\|\mathbf{z}_1(\cdot;u) - \mathbf{z}_1^{h_n}(\cdot;u)\right\|_{H(div,D)} +$$
$$+ \left\|z_2(\cdot;u) - z_2^{h_n}(\cdot;u)\right\|_{L^2(D)} \to 0 \quad (26)$$

при $n \to \infty$.

Доведемо тепер, що

$$\lim_{n\to\infty} \left\|u^{h_n} - \hat{u}\right\|_H = \lim_{n\to\infty} \left(\left\|u_1^{h_n} - \hat{u}_1\right\|_{H_1} + \left\|u_2^{h_n} - \hat{u}_2\right\|_{H_2} \right) = 0,$$

де $u^{h_n} = (u_1^{h_n}, u_2^{h_n})$, $\hat{u} = (\hat{u}_1, \hat{u}_2)$, $H = H_1 \times H_2$.

Покладемо

$$I_n(u) = (Q^{-1} z_2^{h_n}(\cdot;u), z_2^{h_n}(\cdot;u))_{L^2(D)} +$$
$$+ (\tilde{Q}_1^{-1} u_1, u_1)_{H_1} + (\tilde{Q}_2^{-1} u_2, u_2)_{H_2}. \quad (27)$$

Зрозуміло, що

$$\inf_{u\in H} I_n(u) = I_n(u^{h_n}),$$

$$I_n(u^{h_n}) \le I_n(\hat{u}).$$

Внаслідок сильної збіжності $(\mathbf{z}_1^{h_n}(\cdot;\hat{u}), z_2^{h_n}(\cdot;\hat{u}))$ до $(\mathbf{z}_1(\hat{u}), z_2(\hat{u}))$ в просторі $V\times Q,$ маємо

$$\lim_{n\to\infty} I_n(\hat{u}) = I(\hat{u}),$$

і, отже, $\overline{\lim}_{n\to\infty} I_n(u^{h_n}) \le I(\hat{u}).$ Оскільки $I_n(u^{h_n}) \ge (\tilde{Q}_1^{-1}u_1^{h_n}, u_1^{h_n})_{H_1} + (\tilde{Q}_2^{-1}u_2^{h_n}, u_2^{h_n})_{H_2},$ то з послідовності $\{u^{h_n}\}$ можна виділити таку підпослідовность $\{u^{h_{n_k}}\}$, що $u^{h_{n_k}} \to \tilde{u}$ слабко в H. В силу напівнеперевності знизу функціонала $I(u)$ в слабкій топології простора H випливає, що

$$\underline{\lim}_{k\to\infty} I_{n_k}(u^{h_{n_k}}) \ge I(\tilde{u}).$$

Так як

$$I(\tilde{u}) \le \underline{\lim}_{k\to\infty} I_{n_k}(u^{h_{n_k}}) \le \overline{\lim}_{k\to\infty} I_n(u^{h_{n_k}}) \le I(\hat{u}),$$

то внаслідок єдиності елемента, на якому досягається мінімум функціонала $I(u),$ одержуємо що $\tilde{u} = \hat{u}.$ Це означає, що при $n\to\infty$ зокрема,

$$z_2^{h_n}(\cdot;u^{h_n}) \xrightarrow{\text{м.с.}} z_2(\cdot;\hat{u}) = \hat{z}_2 \quad \text{в} \quad L^2(D).$$

Крім того з сказаного вище випливає, що $I_n(u^{h_n}) \to I(\hat{u}).$ Але тоді

$$(\tilde{Q}_1^{-1}u_1^{h_n}, u_1^{h_n})_{H_1} + (\tilde{Q}_2^{-1}u_2^{h_n}, u_2^{h_n})_{H_2} \to$$
$$\to (\tilde{Q}_1^{-1}u_1, u_1)_{H_1} + (\tilde{Q}_2^{-1}u_2, u_2)_{H_2},$$

з цієї рівності та з того, що послідовність $\{u^{h_n}\}$ слабко збігається до $\hat{u}$ впливає її сильна збіжність в просторі H.

Далі, нехай тепер $(\tilde{\mathbf{j}}, \tilde{\varphi})$ – будь-який розв'язок крайової задачі (2)–(3) при $f(x) = \tilde{f}(x)$. Тоді, внаслідок (19) і (20)–(23), маємо

$$\mathbb{E}\,|\,l^{h_n}(\tilde{\mathbf{j}},\tilde{\varphi}) - l(\tilde{\mathbf{j}},\tilde{\varphi})\,|^2 = \mathbb{E}[(\hat{u}_1^{h_n}, \tilde{y}_1)_{H_1} + (\hat{u}_2^{h_n}, \tilde{y}_2)_{H_1} +$$
$$+\hat{c}^{h_n} - (\hat{u}_1, \tilde{y}_1)_{H_1} - (\hat{u}_2, \tilde{y}_2)_{H_2} - \hat{c}]^2 =$$
$$= \mathbb{E}[(\hat{u}_1^{h_n} - \hat{u}_1, \tilde{y}_1)_{H_1} + (\hat{u}_2^{h_n} - \hat{u}_2, \tilde{y}_2)_{H_2} + \hat{c}^{h_n} - \hat{c}]^2 =$$
$$= [(\hat{u}_1^{h_n} - \hat{u}_1, C_1\tilde{\mathbf{j}})_{H_1} + (\hat{u}_2^{h_n} - \hat{u}_2, C_2\tilde{\varphi})_{H_2} + \hat{c}^{h_n} - \hat{c}]^2 +$$
$$+\mathbb{E}[(\hat{u}_1^{h_n} - \hat{u}_1, \tilde{\eta}_1)_{H_1} + (\hat{u}_2^{h_n} - \hat{u}_2, \tilde{\eta}_2)_{H_2}]. \qquad (28)$$

Але враховуючи, що $\hat{z}_2^{h_n}$ слабко збігається до $\hat{z}_2$ в просторі $L^2(D)$ і, отже $\hat{c}^{h_n} \to \hat{c}$ при $n\to\infty,$ а також той факт, що $\tilde{f}\in G_0$ і нерівність (див. [2]) $\|\tilde{\mathbf{j}}\|_{H(div,D)} + \|\tilde{\varphi}\|_{L^2(D)} \le \alpha \|\tilde{f}\|_{L^2(D)},$ де $\alpha = const$, бачимо, що вираз

$$[(\hat{u}_1^{h_n} - \hat{u}_1, C_1\tilde{\mathbf{j}})_{H_1} + (\hat{u}_2^{h_n} - \hat{u}_2, C_2\tilde{\varphi})_{H_2} + \hat{c}^{h_n} - \hat{c}]^2 \le$$
$$\le C\left(\|\hat{u}_1^{h_n} - \hat{u}_1\|_{H_1}^2 + \|\hat{u}_2^{h_n} - \hat{u}_2\|_{H_2}^2 + (\hat{c}^{h_n} - \hat{c})^2\right)\times$$
$$\times\left(\|\tilde{\mathbf{j}}\|_{H(div,D)}^2 + \|\tilde{\varphi}\|_{L^2(D)}^2\right) \le$$
$$\le \tilde{C}\left(\|\hat{u}^{h_n} - \hat{u}\|_H^2 + (\hat{c}^{h_n} - \hat{c})^2\right)\|\tilde{f}\|_{L^2(D)}^2 \ (C,\ \tilde{C} = const)$$

прямує до 0 при $n\to\infty$. Аналогічно доводиться, що останній доданок

$$\mathbb{E}[(\hat{u}_1^{h_n} - \hat{u}_1, \tilde{\eta}_1)_{H_1} + (\hat{u}_2^{h_n} - \hat{u}_2, \tilde{\eta}_2)_{H_2}]$$

в правій частині співвідношення (28) також прямує до 0 при $n\to\infty$. Звідси та з того, що

$$\mathbb{E}\,|\,l^{h_n}(\tilde{\mathbf{j}},\tilde{\varphi}) - l(\tilde{\mathbf{j}},\tilde{\varphi})\,|^{1/2} = \mathbb{E}[l^{h_n}(\tilde{\mathbf{j}},\tilde{\varphi}) - l(\tilde{\mathbf{j}},\tilde{\varphi}) +$$
$$+l(\tilde{\mathbf{j}},\tilde{\varphi}) - l(\tilde{\mathbf{j}},\tilde{\varphi})\,|^{1/2} \le \left\{\mathbb{E}\,|\,l^{h_n}(\tilde{\mathbf{j}},\tilde{\varphi}) - l(\tilde{\mathbf{j}},\tilde{\varphi})\,|^2\right\}^{1/2} +$$
$$+\left\{\mathbb{E}[l(\tilde{\mathbf{j}},\tilde{\varphi}) - l(\tilde{\mathbf{j}},\tilde{\varphi})]^2\,|\right\}^{1/2}$$

випливає справедливість твердження теореми.

Наведемо тепер аналогічний результат для випадку, коли оцінка стану $\hat{\mathbf{j}},\ \hat{\varphi}$ беспосередньо визначається з розв'язку змішаної системи варіаційних рівнянь (15)–(18).

Теорема 3. *Нехай* $(\hat{\mathbf{j}}^h, \hat{\varphi}^h) \in V_1^h \times V_2^h$ *наближена оцінка стану системи, що визначається із розв'язку варіаційної задачі*

$$\int_D (\mathbf{A}^{-1}(x)\hat{\mathbf{p}}_1^h(x), \mathbf{q}_1^h(x))_{\mathbb{R}^n} dx + \int_D \hat{p}_2^h(x)\ div\,\mathbf{q}_1^h(x)dx =$$
$$= \int_D (C_1^t J_{H_1}\tilde{Q}_1(y_1(x) - C_1\hat{\mathbf{j}}^h), \mathbf{q}_1^h(x))_{\mathbb{R}^n} dx$$
$$\forall \mathbf{q}_1^h \in V_1^h, \qquad (29)$$

$$\int_D v_1^h(x)\ div\,\hat{\mathbf{p}}_1^h(x)dx = \int_D (C_2^t J_{H_2}\tilde{Q}_2(y_2(x) -$$
$$-C_2\hat{\varphi}^h(x))v_1^h(x)dx \quad \forall v_1^h \in V_2^h, \qquad (30)$$

$$\int_D (\mathbf{A}^{-1}(x)\hat{\mathbf{j}}^h(x), \mathbf{q}_2^h(x))_{\mathbb{R}^n} dx +$$
$$+\int_D \hat{\varphi}^h(x) div\,\mathbf{q}_2^h(x)dx = 0 \ \forall \mathbf{q}_2^h \in V_1^h, \qquad (31)$$

$$\int_D v_2^h(x)\ div\,\hat{\mathbf{j}}^h(x)dx = \int_D v_2(x)(Q^{-1}\hat{p}_2^h(x) +$$
$$+ f_0(x))dx \quad \forall v_2^h \in V_2^h. \qquad (32)$$

Тоді наближену мінімаксну оцінку $l^h(\mathbf{j},\varphi)$ *виразу* $l(\mathbf{j},\varphi)$ *можна представити у вигляді*

$$l^h(\mathbf{j},\varphi) = l(\hat{\mathbf{j}}^h,\hat{\varphi}^h),$$
$$\left\|\hat{\mathbf{j}}-\hat{\mathbf{j}}^h\right\|_{H(div,D)} + \left\|\hat{\varphi}-\hat{\varphi}^h\right\|_{L^2(D)} \to 0 \quad \text{при} \quad h \to 0.$$

Вводячи базиси у просторах V_1^h і V_2^h, задачу (20)–(23) можна записати у вигляді системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Для цього позначимо елементи базисів через ξ_i $(i=1,\ldots,n_1)$ і η_i $(i=1,\ldots,n_2)$, де $n_1 = dimV_1^h$, $n_2 = dimV_2^h$. Належність $\hat{\mathbf{z}}_1^h$, $\mathbf{p}_1^h$ і $\hat{z}_2^h$, p_2^h до просторів V_1^h і V_2^h означає існування констант $\hat{z}_i^{(1)}$, $p_i^{(1)}$ і $\hat{z}_i^{(2)}$, $p_i^{(2)}$ таких, що

$$\hat{\mathbf{z}}_1^h = \sum_{j=1}^{n_1}\hat{z}_j^{(1)}\xi_j, \quad \mathbf{p}_1^h = \sum_{j=1}^{n_1}p_j^{(1)}\xi_j \qquad (33)$$

$$\hat{z}_2^h = \sum_{j=1}^{n_2}\hat{z}_j^{(2)}\eta_j, \quad p_2^h = \sum_{j=1}^{n_2}p_j^{(2)}\eta_j. \qquad (34)$$

Покладаючи в (20) і (22) $\mathbf{q}_1^h = \mathbf{q}_2^h = \xi_i$ $(i=1,\ldots,n_1)$ та в (21) і (23) $v_1^h = v_2^h = \eta_i$ $(i=1,\ldots,n_2)$ відповідно, отримаємо, що знаходження $\hat{\mathbf{z}}_1^h$, $\mathbf{p}_1^h$, z_2^h і p_2^h із (20)–(23) еквівалентно розв'язанню наступної системи лінійних алгебраїчних рівнянь відносно коефіцієнтів $\hat{z}_j^{(1)}$, $p_j^{(1)}$, $\hat{z}_j^{(2)}$, $p_j^{(2)}$ розкладів (33), (34):

$$\sum_{j=1}^{n_1}a_{ij}^{(1)}\hat{z}_j^{(1)} + \sum_{j=1}^{n_2}a_{ji}^{(2)}\hat{z}_j^{(2)} + \sum_{j=1}^{n_1}a_{ij}^{(3)}p_j^{(1)} = b_i^{(1)},$$
$$i=1,\ldots,n_1,$$
$$\sum_{j=1}^{n_1}a_{ij}^{(2)}\hat{z}_j^{(1)} + \sum_{j=1}^{n_2}a_{ij}^{(5)}p_j^{(2)} = b_i^{(1)}, \quad i=1,\ldots,n_2,$$
$$\sum_{j=1}^{n_1}a_{ij}^{(1)}p_j^{(1)} + \sum_{j=1}^{n_2}a_{ji}^{(2)}p_j^{(2)} = 0, \quad i=1,\ldots,n_1,$$
$$\sum_{j=1}^{n_1}a_{ij}^{(2)}p_j^{(1)} - \sum_{j=1}^{n_2}a_{ij}^{(5)}\hat{z}_j^{(2)} = 0, \quad i=1,\ldots,n_2.$$

де

$$a_{ij}^{(1)} = \int_D(\mathbf{A}^{-1}(x)\xi_i(x),\xi_j(x))_{\mathbb{R}^n}dx, \quad i,j=1,\ldots,n_1,$$
$$a_{ij}^{(2)} = \int_D\eta_i(x)\ div\,\xi_j(x)dx, \quad i=1,\ldots,n_2, \quad j=1,\ldots,n_1,$$
$$a_{ij}^{(3)} = \int_D(C_1^tJ_{H_1}\tilde{Q}_1C_1\xi_i(x),\xi_j(x))_{\mathbb{R}^n}dx, \quad i,j=1,\ldots,n_1,$$
$$a_{ij}^{(4)} = \int_D C_2^tJ_{H_2}\tilde{Q}_2C_2\eta_i(x)\eta_j(x)dx, \quad i,j=1,\ldots,n_2,$$
$$a_{ij}^{(5)} = \sum_{i=1}^{n_2}\hat{z}_i^{(2)}\int_D\eta_j(x)Q^{-1}\eta_i(x)dx, \quad i,j=1,\ldots,n_2,$$
$$b_j^{(1)} = \int_D(\mathbf{l}_1(x),\xi_j(x))_{\mathbb{R}^n}dx, \quad j=1,\ldots,n_1,$$
$$b_j^{(2)} = \int_D l_2(x)\eta_j(x)dx, \quad j=1,\ldots,n_2.$$

Аналогічну систему лінійних алгебраїчних рівнянь можна отримати і для задачі (29)–(32).

Список використаних джерел

1. *Подлипенко Ю.К.* Оцінювання узагальнених розв'язків лінійних еліптичних рівнянь, що допускають змішане варіаційне формулювання. / Ю.К. Подлипенко, М.Ю. Горбатенко // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія:фізико-математичні науки.– 2008.– Випуск 3.– С.158-164.

2. *Brezzi F.* Mixed and Hybrid Finite Element Methods / F. Brezzi, M. Fortin // Springer-Verlag New York, Inc, 1991.

3. *Nedelec J.C.* Mixed finite element in $\mathbb{R}^3$ // J.C. Nedelec Numer. Math., 35, pp. 315-341, 1980.

4. *Raviart P.A.* A mixed finite element method for second order elliptic problems / A.P. Raviart, J.M. Thomas // Mathematical Aspects of the Finite Element Method, Lecture Notes in Math. 606, Springer-Verlag, New York, 1977.

References

1. PODLYPENKO, Yu.K and GORBATENKO, M.Yu (2008), Evaluation of generalized solutions of linear elliptic equations that allowing the mixed variational formulation, Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv Series Physics & Mathematics, Vol. 3, pp. 158-164.

2. BREZZI, F. and FORTIN, M (1991), . *Mixed and Hybrid Finite Element Methods*, Springer-Verlag New York, Inc.

3. NEDELEC, J.C. (1980) *Mixed finite element in* $\mathbb{R}^3$, Numer. Math., 35, pp. 315-341.

4. RAVIART, P.A. and THOMAS, J.M. (1977) *A mixed finite element method for second order elliptic problems, Mathematical Aspects of the Finite Element Method*, Lecture Notes in Math. 606, Springer-Verlag, New York.

Надійшла до редколегії 10.06.14

УДК 358.3:528

Савкова В.П., аспірант

Розробка методу оцінки якості організації і проведення підготовки фахівців в інтегрованій системі вищої освіти для вищого навчального закладу

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, пр. Академіка Глушкова, 4д,
e-mail: valentina.savkova@gmail.com

V. P. Savkova, PhD student

Development methods for evaluating the quality of organizations, and conducting the training of specialists in integrated system of higher education for higher educational institutions

Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03680, Kyiv, Glushkova st., 4d,
e-mail: valentina.savkova@gmail.com

У статті представлено метод оцінки якості організації і проведення навчально виховного процесу у вищих навчальних закладах, який дозволяє здійснити оцінку відповідності реальних значень показників з еталонними та в подальшому сформувати адекватні управлінські впливи на коригування цього процесу для досягнення рівня якості освіти вищого навчального закладу не нижче заданого. Використання цього методу дозволяє знайти кількісне співвідношення значень еталонних параметрів і реальних процесів. Метод відрізняється від існуючих тим, що дозволяє здійснити аналіз невідповідності параметрів організації і проведення навчально-виховного процесу у вищому навчальному закладі, сформувати параметри коригування для забезпечення рівня якості освіти вищого навчального закладу не нижче заданого.

Ключові слова: якість освіти, теорія нечітких множин.

Ключові слова: якість освіти, теорія нечітких множин.

The article reviewed a method for assessing the quality of education of higher education institution, based on information technology. The bottom line of this method is in using and coordination of the developed mathematical models and methods for the formation of management actions with a goal of correcting the organization and conducting of the educational process in order to achieve the level of quality of education higher education institution, which is not lower, then the given. Also, the method allows quickly make an assessment of the quality level of higher education and to provide alternatives in the way of intellectualization of the process of management actions formation for correcting an educational process in higher educational institutions. The method differs from existing ones in that it allows to make an analyze of organization and conducting of educational process parameters in higher educational institution mismatching and to form the correcting parameters for guarantee the level of education quality of higher education institutional not lover then the given. Quality as a set of the research object characteristics, which determines its ability to comply with fixed or foreseen requirements in this method conveniently presented in the form of linguistic variable.

Key Words: Quality of education, the theory of fuzzy sets.

Статтю представив д.т.н., проф. Акіменко В.В.

Реформування сфери освіти в Україні є пріоритетним завданням держави, яка передбачає якісні зміни освітньої системи із застосуванням інформаційних технологій. Необхідність

© В.П. Савкова, 2014

удосконалення навчально-виховного процесу у вищому навчальному закладі (НВП у ВНЗ) як складової системи освіти висуває невідкладні проблеми його комп'ютеризації, впровадження сучасних інформаційних технологій щодо оцінки рівня якості освіти, формування на їх основі нових стратегій. Під інформаційною технологією оцінки рівня якості освіти ВНЗ розуміється технологічний процес, вихідними даними якого є значення показників і критеріїв, що впливають на якість організації і проведення НВП у ВНЗ і у разі його невідповідності – надати альтернативи для формування управлінських впливів щодо коригування НВП у ВНЗ для забезпечення рівня якості освіти (ЯО) не нижче заданого.

Метою статті є розробка методу оцінки якості організації і проведення НВП у ВНЗ, який дозволяє знайти кількісне співвідношення значення параметрів еталонних і реальних.

Застосування сучасних інформаційних технологій дозволяє здійснити оцінку відповідності результатів, отриманих за допомогою математичного моделювання, до очікуваних. Пропонуємий метод оцінки якості організації і проведення НВП у ВНЗ є своєрідним "індикатором", який сигналізує про відповідність організації і проведення НВП у ВНЗ еталонному/заданому. Даний метод оцінки якості організації і проведення НВП у ВНЗ базується на математичному апараті теорії нечітких множин, який дозволяє здійснювати оцінювання при відсутності певних статистичних закономірносте і використовувати експертні якісні лінгвістичні значення перейти на кількісні з метою обробки і навпаки. Наведемо два взаємопов'язані підходи до використання методу нечітких множин для оцінки рівня ЯО у ВНЗ:

Підхід № 1. Сутність методу оцінки якості організації і проведення НВП у ВНЗ полягає в оцінюванні отриманих результатів шляхом порівняння реальних кількісних показників зі значеннями, що належать до еталонних на основі математичного апарату нечітких множин.

Розробка методики складається з трьох етапів:

1. Побудова еталонних функцій належності показників впливу на ЯО ВНЗ.

2. Обґрунтування і визначення інтегральних еталонних показників якості засвоєння начального матеріалу $S_{\text{ет.засв.}}$ для рівнів, що відповідають значенням лінгвістичних термів: "відмінно", "добре", "задовільно" та "незадовільно".

3. Порівняння реальних отриманих показників якості засвоєння блоку навчального матеріалу з відповідними еталонними значеннями.

Оскільки на первинному етапі необхідно отримати еталонні значення показників впливу на ЯО ВНЗ, а інформація про них є нечіткою, то для формалізації нечіткого опису цих показників застосуємо лінгвістичний підхід теорії нечітких множин [6]. Застосування зазначеного підходу дозволяє:

– використовувати для опису показників впливу на ЯО ВНЗ наближені, суб'єктивні оцінки експертів, які виражені за допомогою нечітких понять, відносин і висловів;

– формалізувати нечіткий опис показників впливу на ЯО ВНЗ за допомогою нечітких множин, лінгвістичних змінних та нечітких свідчень;

– оперувати отриманими формалізованими даними за допомогою апарату нечітких множин;

– представляти отримані дані як у вигляді нечіткого опису, так і у вигляді чітких рекомендацій.

Вибір функцій належності для показників ЯО ВНЗ здійснюється методом експертних оцінок [5]. При цьому сучасні дослідження в сфері організації і проведення НВП здійснюють аналітичний опис цього процесу в вигляді кусково-лінійних функцій належності трапецієподібної форми [7].

Для побудови функції приналежності $f(x;a,b,c,d)$ у вигляді трапеції використаємо наступні формули (1, 2):

$$f(x;a,b,c,d)=\begin{Bmatrix}0, x\le a\\ \dfrac{x-a}{b-a}, a\le x\le b\\ 1, b\le x\le c\\ \dfrac{d-x}{d-c}, c\le x\le d\\ 0, d\le x\end{Bmatrix}, \qquad (1)$$

де a, b, c – певні числові параметри, що можуть приймати довільні значення (різні значення для різних функцій належності) та впорядковані за зростанням. Параметри a і d характеризують нижню основу трапеції, параметри b і c – верхню.

Для отримання параметрів a, b, c, d підставляємо по черзі значення елементів даного вектору, що характеризує значення шуканого показника впливу на ЯО ВНЗ, у власний вектор $f = \{f_1, f_2 \dots f_n\}$:

$$y_i = \frac{f_i - a}{b - a}, a \le f_i \le b$$
$$y_i = \frac{d - f_i}{d - c}, c \le f_i \le d$$
$$y_i = 0, f_i \le a, f_i \ge d$$
$$y_i = 1, b \le f_i \le c \qquad (2)$$

Розв'язком системи рівнянь (2) будуть значення параметрів a, b, c, d на основі яких будується функція належності у вигляді трапеції.

Оскільки при нульовій значимості показників впливу на ЯО ВНЗ значення функції приналежності дорівнює 0, то параметр a дорівнює 0. Крім того, при досягнені певного рівня значимості якість НВП не понижується і не підвищується при подальшому зростанні показника, тобто параметр c=d=1. Таким чином, аргументи всіх таблично фіксованих даних про функцію приналежності знаходяться між параметрами a і b. Отримані функції приналежності використовуються для завдання таких властивостей множин, які характеризують невизначеність типу "знаходиться в інтервалі" між: "відмінно і добре"; "добре і задовільно"; "задовільно і незадовільно" для надання якісної оцінки значень показників впливу на ЯО ВНЗ за допомогою використання лінгвістичних термів [5].

В свою чергу кожний показник впливу на ЯО ВНЗ A_i складається з добутку певної множини коефіцієнтів $\{u_{Ai_1}, u_{Ai_2} \dots u_{Ai_m}\}$ на чисельний коефіцієнт i_k показника A_i, що в цілому становить його кількісне значення. Добуток всіх еталонних коефіцієнтів кожного показника впливу на ЯО ВНЗ дорівнює одиниці.

$$A_i(u) = \prod_{i=1}^{m} u_{Aim}(u) \times i_k \qquad (3)$$

Визначення коефіцієнтів та міри оцінювання для кожного еталонного показника впливу на ЯО ВНЗ здійснюється за допомогою експертного оцінювання [2].

Побудуємо еталонні функції приналежності для показників впливу на ЯО ВНЗ для блоку "Навчально-виховний процес".

I. Побудова еталонної функції приналежності для показника A_{21}={організація самостійної підготовки}; $i_{21\text{еталон}} = 0{,}345$. Для надання якісної оцінки значення показника за допомогою використання лінгвістичних термів було проведено експертне оцінювання в результаті чого отримані результати, що представлені в таблиці 1.

Таблиця.1

Значення лінгвістичних термів для показника A_{21}

Найменування терму	Кількісний показник
ВІДМІННО	0,345
ДОБРЕ	0,25875
ЗАДОВІЛЬНО	0,1725
НЕЗАДОВІЛЬНО	0,08625

При цьому критичний рівень відповідає терму "незадовільно" зі значенням 0,08625. Використовуючи формулу (2) отримаємо графік еталонної функції приналежності з параметрами a=0; b=0,345; c=d та точками (0,08625;0,25), (0,1725; 0,5), (0,25875;0,75), який представлено на рис. 1.

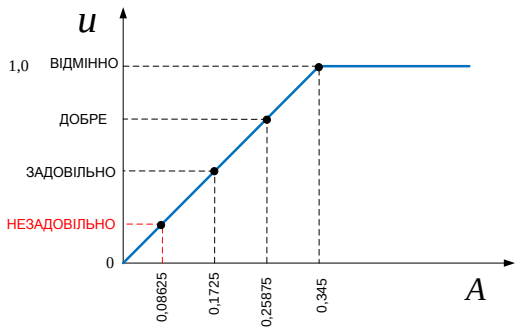


Рис. 1. Еталонна функція приналежності для показника A_{21}

Аналогічним чином можна визначити функції приналежності для всіх інших показників впливу (A_{22}, A_{23}, A_{24}, A_{25}, A_{26}, A_{27}).

Таким чином, побудовані еталонні функції приналежності показників впливу на ЯО ВНЗ дозволяють здійснити оцінку відповідності реальних значень показників з еталонними та в подальшому сформувати адекватні управлінські впливи на коригування організації і проведення НВП у ВНЗ для досягнення рівня ЯО ВНЗ не нижче заданого.

Оцінка якості перехідного процесу в САУ використовується за допомогою лінійної інтегральної оцінки якості. Інтегральні оцінки якості є інтегралами по часу від деяких функцій перехідного процесу вільної складової вихідної величини або помилки. Метою використання зазначеної оцінки є отримання загальної оцінки та відхилення регульованої величини від потрібного значення.

Для визначення інтегральних еталонних показників якості засвоєння начального матеріалу $S_{\text{ет.засв.}}$ для рівнів, що відповідають значенням лінгвістичних термів: "відмінно", "добре", "задовільно" та "незадовільно" здійснюється перехід від чисельних показників навчання з останнього, найнижчого рівня декомпозиції показників впливу на ЯО ВНЗ до параметрів динамічних ланок, що утворюють відповідну групу параметрів, що характеризують перехідний процес опису функціонування математичної моделі оцінки організації і проведення НВП у ВНЗ.

Кожен із параметрів блоку k_{ij} або T_{ij} задається функцією $f(A_{11} \div A_{37})$, причому дані показники A_{ij}, відповідно, залежать від: складових показника критеріїв u_{ij}; оцінок за конкретний вид навчального заняття (практичне заняття, семінар і т.ін.); відвідуваність занять; дисциплінарного впливу та інших складових критеріїв показників впливу на ЯО ВНЗ з відповідними ваговими коефіцієнтами v_{ij}: $A_i = \sum_{j=1}^{N_i} u_{ij} v_{ij}$. (4)

Оскільки для кожного з лінгвістичних термів ми маємо задані значення показників впливу на ЯО ВНЗ, даним лінгвістичним термам будуть відповідати конкретні значення параметрів динамічних ланок блоків математичної моделі. Перехідний процес опису функціонування математичної моделі оцінки організації і проведення НВП у ВНЗ, для досліджуємого блоку задається інтегрованою функцією $f(t)$, при цьому площа підграфіку розраховується за формулою $S = \int_0^T f(t)dt$ (5), де T – кількість навчальних годин для даного блоку. Площа підграфіку перехідного процесу групи динамічних ланок з параметрами для відповідного лінгвістичного терму є відносним показником якості засвоєння даного блоку математичної моделі, що відповідає значенню лінгвістичних термів "відмінно", "добре" та "задовільно".

Побудовані графіки перехідного процесу при вивченні навчальної дисципліни, яка складається з чотирьох змістовних модулів, кожен з яких має 30 навчальних годин, для відповідних лінгвістичних термів (жовтий – "відмінно", фіолетовий – "добре", блакитний – "задовільно") представлено на Рис. 2.

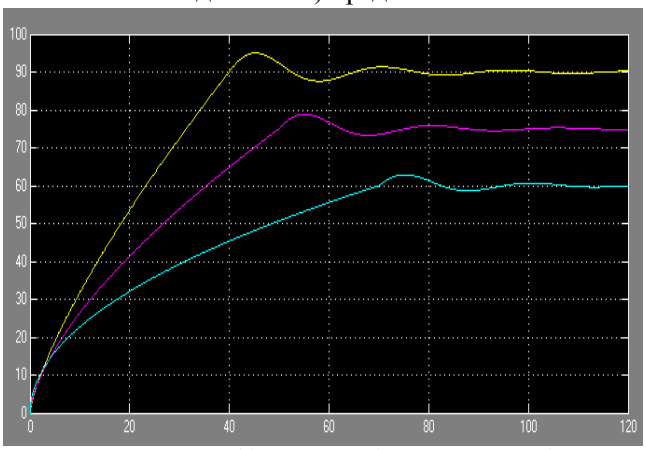


Рис 2. Графіки перехідних процесів при вивченні навчальної дисципліни

Оскільки дані перехідні процеси задаються аналітичними функціями, для обчислення площі використовується наведена вище формула $S = \int_0^T f(t)dt$ (6).

Абсолютні та відносні значення площ даних графіків (максимальне значення площі "відмінно" приймаємо за одиницю) знаходяться в інтервалах:

– "$S_{\text{відмінно}}$" – $9{,}2837 \cdot 10^3 \div 1{,}0$;

– "$S_{\text{добре}}$" – $7{,}5442 \cdot 10^3 \div 0{,}8126$, оскільки $0{,}9 \geq 0{,}8126 \geq 0{,}75$, даний показник площі відповідає лінгвістичному терму "добре";

– "$S_{\text{задов}}$" – $6{,}0146 \cdot 10^3 \div 0{,}6479$, оскільки $0{,}75 \geq 0{,}6479 \geq 0{,}6$, даний показник площі відповідає зазначеному лінгвістичному терму "задовільно".

У випадку, якщо значення площі, яка визначає якість засвоєння навчального матеріалу студентом, є меншою за $S_{\text{задов}}$, то показники даного студента не враховуються на наступному етапі методу (вважається, що студент взагалі не засвоїв відповідний навчальний модуль).

Даний етап необхідний для отримання інформації про відповідність отриманих реальних показників еталонним. Визначається реальним інтегральним показником якості

засвоєння блоку навчального матеріалу $S_{ср}$ для обраного навчального підрозділу в порівнянні з відповідним еталонним. Процес знаходження $S_{ср.}$ визначається за формулою $S_{ср.} = \sum_{i=1}^{n} S_i / N_{ост.}$ (7), де S_i (i=1…n) – інтегральний показник якості засвоєння блоку навчального матеріалу i-го студента обраного навчального підрозділу, $N_{ост.}$ – кількість студентів в навчальному підрозділі, яка засвоїла блок навчального матеріалу на рівні не нижче заданого. При цьому повинна виконуватись умова $S_{ет.засв.} \le S_{ср.}$, інакше – коригування НВП у ВНЗ не проводиться.

Оскільки параметри k_{ij} або T_{ij} блоку математичної моделі задаються функцією $f(A_{11 \div} A_{37})$, то проаналізувавши відповідні реальні показники навчання певного студента (групи студентів), ми перетворюємо (за допомогою заданих експертами еталонних функцій приналежності) кількісні показники в параметри динамічних ланок математичної моделі оцінки організації і проведення НВП у ВНЗ відповідного досліджуваного блоку даної математичної моделі. Після аналізу перехідного процесу, утвореного даною групою динамічних ланок, визначається рівень засвоєння навчального матеріалу в досліджуваному блоці математичної моделі, який відповідає одному з заданих вище лінгвістичних термів в разі досягнення інтегрального показника підграфіку перехідного процесу відповідних значень площ $S_{відм}$, $S_{добр}$, $S_{задов}$.

Таким чином, використання методу оцінки якості організації і проведення НВП у ВНЗ дозволяє знайти кількісне співвідношення значення параметрів еталонних і реальних. Розроблена математична модель оцінки організації і проведення НВП у ВНЗ і метод оцінки якості організації і проведення НВП у ВНЗ є складовими при розробці методики оцінки рівня ЯО ВНЗ.

Підхід № 2

Якість як сукупність характеристик об’єкта дослідження, що визначає його здатність відповідати встановленим або передбачуваним вимогам, зручно можна представити у вигляді лінгвістичної змінної.

Лінгвістична змінна (ЛЗ) визначається кортежем:

$\langle E,\ E_i,\ i = \overline{1,n},\ X,\ \mu_{E_i}(x) \in [0,1],\ i = \overline{1,n} \rangle$,(8),

де E – ім'я лінгвістичної змінної, тобто «якість освіти», E_i- множина термів лінгвістичної змінної, X – універсальна множина, μ_{Ei}(x)- функція належності значень x нечіткій множині (терму) E_i.

Якщо μ_{Ei}(x)=1 для деякого $x \in X$, то це означає, що елемент x «точно» належить і E_i, а якщо μ_{Ei}(x)=1 – «точно» не належить множині E_i.

Терми для лінгвістичної змінної «якість освіти» вибираються аналогічним чином, що й у першому підході:

- E_1 – незадовільно;
- E_2 – задовільно;
- E_3 – добре;
- E_4 – відмінно.

Оскільки кількісної характеристики змінної «якість освіти» не існує, то областю її визначення можна взяти, наприклад інтервал [0; 12]. Тоді зазначена лінгвістична змінна ЯО (її терми та функції приналежності) можна представити на Рис. 3.21:

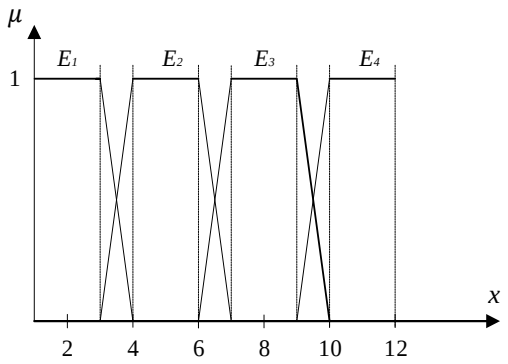


Рис 3. Лінгвістична змінна «якість освіти»

Кожен терм задається трапецеїдальною функцією приналежності, параметри якої визначаються у спосіб, описаний у підході № 1. У загальному випадку бічні гілки функцій приналежності можуть описуватися складними нелінійними функціями. Проблема визначення «найкращих» функцій приналежності є важливою.

Відомо, що параметр x, який є комплексним показником якості об’єкта дослідження, є деякою функцією часткових показників X_i [37]:

$x = \psi(X_1, X_2, \ldots, X_m),\ i = \overline{1,m};$ (9)

Визначити цей функціональний (4)зв’язок у загальному неможливо. Єдине, що можна зробити, це визначити характер зміни комплексного

показника x залежно від зміни якогось часткового показника X_i. Для цього вводять функцію T_i:

$$T_i = \begin{cases} 1, \text{якщо при} \uparrow X_i \uparrow x \text{ або при} \downarrow X_i \downarrow x \\ -1, \text{якщо при} \uparrow X_i \downarrow x \text{ або при} \downarrow X_i \uparrow x \end{cases} \quad (10)$$

Для визначення коефіцієнтів пріоритетності часткових показників можна використовувати два різні методи: метод Фішберна і метод Уея.

Висновки

Розроблено метод оцінки якості організації і проведення підготовки фахівців в інтегрованій системі вищої освіти для ВНЗ.

Сутність методу оцінки якості організації і проведення підготовки фахівців в інтегрованій системі ВО для НВП у ВНЗ полягає при першому підході в оцінюванні отриманих результатів шляхом порівняння реальних кількісних показників зі значеннями, що належать до еталонних функцій приналежності.

Метод відрізняється від існуючих тим, що дозволяє здійснити аналіз невідповідності параметрів організації і проведення НВП у ВНЗ, сформувати параметри коригування для забезпечення рівня ЯО ВНЗ не нижче заданого. В другому підході здійснити оцінювання якості організації і проведення НВП у ВНЗ, як сукупність характеристик об'єкта дослідження, що визначає його здатність відповідати встановленим або прогнозованим вимогам, які можна представити у вигляді лінгвістичної змінної. (6)

Впровадження запропонованого методу дасть змогу удосконалити систему управління якістю підготовки фахівців в інтегрованій системі ВО для ВНЗ за допомогою автоматизації процесу моніторингу ЯО, яка базується на інтелектуалізації процесів формування управлінських впливів щодо здійснення коригування НВП у ВНЗ.

Список використаних джерел

1. *Биркгоф Г.* Теория решеток / Г. Биркгоф.– Москва: Наука, 1984. – 564 с.
2. *Глушков В.М.* Алгебра. Языки. Программирование: [изд. 3-е, перераб. и доп.] / В.М. Глушков, Г.Е. Цейтлин, Е.Л. Ющенко. – Киев: Наукова думка, 1989. – 376 с.
3. *Горин С.В.* CASE-средство S-Designor 4.2 для разработки структуры базы данных [Електронний ресурс] / С.В. Горин, А.Ю. Тандоев // Системы управления базами данных. – 1996. – №1. – С. 79-86. – Режим доступу до журн.: http://www.csu.ac.ru/osp/dbms/1996/01/source/case.html.
4. *Тиори Т.* Проектирование структур баз даннях / Т. Тиори, Дж. Фрай. – Москва: Мир, 1985. – 320 с.
5. *Іванов І.І.* Схема доведення основної теореми / І.І. Іванов // Theoretical and Applied Aspects of Program Systems Development: international conference, 17-19 September 2007, Berdyansk, Ukraine: abstracts. – Kyiv. – 2007. – P. 22-23.

References

1. Byrkhov, H. (1984) *Lattice theory*. Moskva: Nauka.
2. Gluchkov, V. (1989) *Algebra. Languages. Programming*. [3 ed., edited and complement] Kiev: Naukova dumka.
3. GORIN, S. (1996) CASE-facility S-Designor 4.2 for databases structure development [electronic recourse] / *Systems of databases development*. №1. - p. 79-86. – Available at: http://www.csu.ac.ru/osp/dbms/1996/01/source/case.html.
4. Tiori, T., Fray J. (1985) *Database structure projection*. Moskva: Mir.
5. Ivanov I. (2007) Main theorem diagram substantiation. In *Theoretical and Applied Aspects of Program Systems Development Conference*, 17-19 September 2007. Berdyansk, pp. 22-23.

Надійшла до редколегії 29.11.14

УДК 519.713+530.145

Скобелєв В.Г., д.ф.-м.н., д.т.н., професор

Про мови, які приймає з заданою ймовірністю 1-кубітовий MO-1QFA з бінарним вхідним алфавітом.

Київський національний університет імені Тараса Шевченка 83000, м. Київ, Проспект Академіка Глушкова,4е,
e-mail: skobelevvg@mail.ru

V. G. Skobelev, Dr. (Phys.-Math., Tech.) Sci, Prof.

On some languages accepted with the given probability by 1-qubit MO-1QFA with binary input alphabet.

Taras Shevchenko University of Kyiv, 83000, Kyiv, Academician Glushkov Avenue 4e,
e-mail: e-mail: skobelevvg@mail.ru

У статті досліджено структуру мови, яку приймає з заданою ймовірністю 1-кубітовий квантовий скінченний автомат MO-1QFA з бінарним вхідним алфавітом, літерам якого відповідають унітарні оператори, що є оберненнями сфери Блоха відносно координатної осі Oy. Встановлено критерій, при якому підмножина всіх вхідних слів, що містять задані кількості нулів та одиниць або належить мові, яку приймає досліджувана модель, або не перетинається з цією мовою. Обговорюється використання отриманих результатів при вирішенні задач перетворення інформації.

Ключові слова: квантові скінченні автомати, комутуючі унітарні оператори, мови, що приймаються з заданою ймовірністю.

In the given paper it is investigated the structure of the language accepted with the given probability by 1-qubit quantum finite automaton MO-1QFA with binary input alphabet, under supposition that unitary operators associated with input symbols are rotations of the Bloch sphere around the y-axe. It is established criteria under which any subset of all input strings that contain specified numbers of zeros and ones either is contained in the language accepted by investigated model, or does not intersects with this language. Application of established results for solving problems of converting information is discussed briefly.

Key Words: quantum finite automata, unitary operators that commute each with the others, languages accepted with the given probability.

Статтю представив професор Буй Д.Б.

Introduction.

It is well known that MO-1QFA [1] is the simplest model of quantum finite automaton. In [2,3] some properties of 1-qubit MO-1QFA with unitary operators that commute each with the others were investigated.

In the given paper we characterize the set of languages accepted with the given probability by 1-qubit MO-1QFA with binary input alphabet under supposition that unitary operators associated with input symbols are rotations of the Bloch sphere around the y-axe (and thus commute each with the other).

All undefined notions are the same as in [2-4].

1. Basic notions.

Let $\mathrm{M} = (Q, X, |\varphi_0>, |0>)$ be any MO-1QFA, such that $Q = \{|0>, |1>\}$ is the set of basic states (where $|0> = (1,0)^T$ and $|1> = (0,1)^T$), unit vector $|\varphi_0> = (\cos\ 0.5\mu, \sin\ 0.5\mu)^T$ $(\mu \in (0;4\pi))$ is initial state, $|0>$ is accepting state, $X = \{0,1\}$ and for fixed $\alpha_x \in (0;4\pi)$ $(x \in X)$

$$U_x = \begin{pmatrix} \cos\ 0.5\alpha_x & -\sin\ 0.5\alpha_x \\ \sin\ 0.5\alpha_x & \cos\ 0.5\alpha_x \end{pmatrix} \quad (x \in X).$$

The model M accepts the language L with the given probability p $(0.5 < p \le 1)$, if any string $w \in L$ is accepted with probability not less then p, while any string $w \notin L$ is accepted with probability not exceeding $1 - p$.

© В.Г. Скобелєв, 2014

Since unitary operators U_0 and U_1 commute each with the other then for any two input strings $w_1, w_2 \in X^*$ consisting of m 0's and n 1's the following identities hold

$$U_{w_1} = U_{w_2} = U_{0^m 1^n} \quad (m, n \in \mathbf{Z}_+).$$

Thus, to investigate the structure of the language L we can restrict ourselves with input strings of the form $0^m 1^n$ $(m, n \in \mathbf{Z}_+)$.

2. Main result.

Since for any $k \in \mathbf{Z}_+$

$$U_{x^k} = \begin{pmatrix} \cos 0.5k\alpha_x & -\sin 0.5k\alpha_x \\ \sin 0.5k\alpha_x & \cos 0.5k\alpha_x \end{pmatrix} \quad (x \in \{0,1\})$$

then

$$U_{0^m 1^n} = \begin{pmatrix} \cos 0.5\nu_{m,n} & -\sin 0.5\nu_{m,n} \\ \sin 0.5\nu_{m,n} & \cos 0.5\nu_{m,n} \end{pmatrix} \quad (m, n \in \mathbf{Z}_+),$$

where

$$\nu_{m,n} = 0.5(m\alpha_0 + n\alpha_1) \quad (m, n \in \mathbf{Z}_+). \qquad (1)$$

Thus, for any $m, n \in \mathbf{Z}_+$ we get

$$U_{0^m 1^n} |\varphi_0> =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos 0.5\mu \cos 0.5\nu_{m,n} - \sin 0.5\mu \sin 0.5\nu_{m,n} \\ \cos 0.5\mu \sin 0.5\nu_{m,n} + \sin 0.5\mu \cos 0.5\nu_{m,n} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos 0.5(\mu + \nu_{m,n}) \\ \sin 0.5(\mu + \nu_{m,n}) \end{pmatrix}. \qquad (2)$$

Formula (2) implies that

$$0^m 1^n \in L \Leftrightarrow |\cos 0.5(\mu + \nu_{m,n})| \geq p \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} \cos 0.5(\mu + \nu_{m,n}) \geq p \\ \cos 0.5(\mu + \nu_{m,n}) \leq -p \end{bmatrix}. \qquad (3)$$

Without loss of generality we can set $p = \cos\lambda$, where $\lambda \in (0, 0.5\pi)$.

Thus, formula (3) can be transformed into the form

$$0^m 1^n \in L \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} \cos 0.5(\mu + \nu_{m,n}) \geq \cos\lambda \\ \cos 0.5(\mu + \nu_{m,n}) \leq -\cos\lambda \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} \cos 0.5(\mu + \nu_{m,n}) \geq \cos\lambda \\ \cos 0.5(\mu + \nu_{m,n}) \leq \cos(\pi - \lambda) \end{bmatrix}. \qquad (4)$$

Since $\mu \geq 0$ and $\nu_{m,n} \geq 0$ $(m, n \in \mathbf{Z}_+)$ then the first inequality in (4) implies that for any fixed integers $m, n \in \mathbf{Z}_+$ the string $0^m 1^n$ is contained in the language L if and only if there exists some integer $k \in \mathbf{Z}_+$ such that

$$2\pi k - \lambda \leq 0.5(\mu + \nu_{m,n}) \leq 2\pi k + \lambda \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4\pi k - 2\lambda - \mu \leq \nu_{m,n} \leq 4\pi k + 2\lambda - \mu.$$

Similarly, the second inequality in (4) implies that for any fixed integers $m, n \in \mathbf{Z}_+$ the string $0^m 1^n$ is contained in the language L if and only if there exists some integer $k \in \mathbf{Z}_+$, such that

$$\pi(2k+1) - \lambda \leq 0.5(\mu + \nu_{m,n}) \leq \pi(2k+1) + \lambda \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \pi(4k+2) - 2\lambda - \mu \leq \nu_{m,n} \leq \pi(4k+2) + 2\lambda - \mu.$$

Thus, we have proved that the following theorem holds.

Theorem. For any fixed integers $m, n \in \mathbf{Z}_+$ the subset of all strings consisting of m 0's and n 1's:

1) is contained in the language L if and only if there exists some integer $k \in \mathbf{Z}_+$ such that

$$4\pi k - 2\lambda - \mu \leq \nu_{m,n} \leq 4\pi k + 2\lambda - \mu$$

or

$$\pi(4k+2) - 2\lambda - \mu \leq \nu_{m,n} \leq \pi(4k+2) + 2\lambda - \mu;$$

2) is not intersected with the language L if and only if for all integers $k \in \mathbf{Z}_+$ there hold neither of inequalities

$$4\pi k - 2\lambda - \mu \leq \nu_{m,n} \leq 4\pi k + 2\lambda - \mu$$

and

$$\pi(4k+2) - 2\lambda - \mu \leq \nu_{m,n} \leq \pi(4k+2) + 2\lambda - \mu.$$

It is evident that for any set of fixed numbers $\mu \in (0; 4\pi)$, $\alpha_x \in (0; 4\pi)$ $(x \in \{0,1\})$ and $\lambda \in (0, 0.5\pi)$, for all fixed integers $m, n \in \mathbf{Z}_+$ checking if the subset of all strings consisting of m 0's and n 1's either is contained in the language L, or is not intersected with the language L can be performed effectively.

It is also evident that by varying the set of numbers $\mu \in (0; 4\pi)$, $\alpha_x \in (0; 4\pi)$ $(x \in \{0,1\})$ and $\lambda \in (0, 0.5\pi)$ (possibly under some additional restrictions) we can generate some family of languages accepted with the given probability by investigated model of quantum finite automaton.

Just this circumstance determines the use of the investigated model of quantum finite automaton for solving of a wide range of applied problems.

Conclusions.

It is evident that similar results would be obtained if instead of rotations of the Bloch sphere around the y-axe, we would consider rotations of the Bloch sphere either around x-axe, or around z-axe.

Established results can be applied for solving data transformation problems in the following way.

Let $p > 1 - \varepsilon$, where ε is sufficiently small positive number, C be some sufficiently large fixed positive integer and $S_{m,n}$ $(m, n \in \mathbf{Z}_+; m + n = C)$ be the set of all ordered pairs (m, n) such that the subset of all strings consisting of m 0's and n 1's is in L.

The set $S_{m,n}$ can be considered as the set of values of some hash-function. In this case MO-1QFA plays the role of checker for transmitted value of hash-function.

Let $|S_{m,n}| << C$. Then elements of the set $S_{m,n}$ can also be considered as some part of digital signature. In this case MO-1QFA is some part of checker for transmitted digital signature.

Analysis of computational security for these two applications of established results forms some trend for future research.

Список використаних джерел

1. *Moore C., Crutchfield J.* Quantum automata and quantum grammars // Theor. Comput. Sci. – 2000. – Vol. 237. – P. 257-306.
2. *Skobelev V.G.* Analysis of finite 1-qubit quantum automata unitary operators of which are rotations // Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv: Series Physics & Mathematics. – 2014. – N 2. – P. 234-238.
3. *Skobelev V.G.* Quantum automata with operators that commute // Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv: Series Physics & Mathematics. – 2013. – Special issue. – P. 34-41.
4. *Williams C.P.* Explorations in quantum computing. – London: Springer Verlag, 2011. – 717 p.

References

1. *MOORE C., CRUTCHFIELD J.* (2000) Quantum automata and quantum grammars Theor. Comput. Sci. Vol. 237., P. 257-306.
2. *SKOBELEV V.G. (2014)* Analysis of finite 1-qubit quantum automata unitary operators of which are rotations. *Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv: Series Physics & Mathematics*. N 2., P. 234-238.
3. *SKOBELEV V.G. (2013)* Quantum automata with operators that commute. . *Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv: Series Physics & Mathematics.* Special issue. P. 34-41.
4. *WILLIAMS C.P.*(2011) Explorations in quantum computing. London: Springer Verlag.

.

Надійшла до редколегії 29.09.14

УДК 681.3

Терещенко В.М., д. ф.-м.н., професор

Один метод тріангуляції множини точок на площині

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 83000, м. Київ, пр-т. Глушкова 4д,
e-mail: v_ter@ukr.net

V.M. Tereshchenko, Dr. Sci.(Ph.-M.), Professor

One method for triangulation a set of points in the plane

Taras Shevchenko National University of Kyiv, 83000, Kyiv, Glushkovast., 4d,
e-mail: v_ter@ukr.net

У роботі пропонується метод тріангуляції множини точок на площині. В основі методу лежить ідея побудови опуклих шарів обходом Грехема, що дозволяє розробити алгоритм з оптимальною складністю θ(NlogN) та простою реалізацією. На множині S із N точок будуються опуклі оболонки, які утворюють k шарів, кожен з яких тріангулюється за один обхід сусідніх опуклих оболонок. Алгоритм легко розпаралелюється: кожен із шарів можна тріангулювати незалежно. Головна особливість запропонованого алгоритму у тому, що він має дуже просту реалізацію, а елементи (трикутники) одержаної тріангуляції представляються у вигляді простих і водночас швидких структур даних: зчеплена черга трикутників чи дерево трикутників. Це робить алгоритм зручним при розв'язанні широкого класу прикладних задач обчислювальної геометрії та комп'ютерної графіки, зокрема: перетин, рендеринг та морфінг.

Ключові слова: тріангулція, опукла оболонка, множина точок , опуклі шари, обхід Грехема.

In this paper, we propose a triangulation method for a set of points in the plane. The method is based on the idea of constructing convex layers by Graham's scan. It allows to develop an algorithm with the optimal complexity of θ(NlogN) and an easy implementation. First, convex hulls are constructed for the set S of N points, forming k layers. Then, each layer is triangulated in one scan of the adjacent convex hulls. Algorithm is easily parallelized: each layer can be triangulated independently. The main feature of the proposed algorithm is that it has a very simple implementation and the elements (triangles) of the resulting triangulation are presented in the form of simple and at the same time fast data structures: concatenable triangle queue or triangle tree. This makes the algorithm convenient for solving a wide range of applied problems of computational geometry and computer graphics, including intersection, rendering and morphing.

KeyWords: triangulation, convex hull, set of points, convex layers, Graham scan .

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Анісімов А.В.

1. **Вступ**

Постановка проблеми. В роботі пропонується оптимальний алгоритм тріангуляції множини точок на площині. Головною перевагою тріангуляції є те, що від об'єкта, який є потенційно дуже складний, ми можемо перейти до більш простих полігонів (трикутників), для їх подальшого дослідження.

Актуальність. На сьогоднішній день, для розв'язання задачі тріангуляції на множині точок існує ряд ефективних алгоритмів [1]. Розрізняють такі групи алгоритмів побудови тріангуляції: ітеративні алгоритми (найменш ефективні і досить складні в реалізації) [2], алгоритми на основі стратегії «розділяй та володарюй» (найшвидші і відносно прості в реалізації) [2-5], алгоритми прямої побудови (дають непогану (навіть лінійну) швидкість побудови в середньому, прості в реалізації) [6] та

© В.М.Терещенко, 2014

двопрохідні алгоритми (найбільш складні в реалізації, не дуже ефективні) [7].

Найбільш ефективними, на мій погляд, є методи тріангуляції на основі стратегії «розділяй та пануй», які дають час виконання $O(N\log N)$ у гіршому і середньому випадках [2-5]. А з поміж них варто виділити алгоритми, які на кроці злиття використовують структури даних у вигляді зчеплених черг [4, 5]. Ці алгоритми дають оптимальний результат, що стосується оцінок складності $\theta(N\log N)$, проте, бажано б мати більш простішу реалізацію. Тому природно постає питання – а чи можна розробити алгоритм, який давав би високу ефективність і , водночас, був би простий в реалізації? Це, ще раз підкреслюю, важливо з точки зору практичного використання алгоритму. Таким прикладом може бути метод Грехема побудови опуклої оболонки, який дає оптимальну часову складність і в той же час дуже простий в реалізації [8]. І тому цей метод надихнув на ідею розробити алгоритм тріангуляції такий же ефективний і простий в реалізації, як і алгоритм побудови опуклої оболонки.

Мета. Розробити алгоритм тріангуляції на основі методу Грехема, який би давав оптимальну оцінку складності по часу ($\theta(N\log N)$) і водно час був простий в реалізації.

Новизна. В роботі запропоновано новий алгоритм тріангуляції множини точок на основі методу Грехема, який дає оптимальну оцінку складності $\theta(N\log N)$.

2. Постановка та метод розв'язання задачі

Постановка. На множині S із N точок на площині побудувати тріангуляцію, використовуючи обхід Грехема з часовою складністю $\theta(N\log N)$.

Метод розв'язання задачі

Нехай задана множина S із N точок на площині, рис. 1.

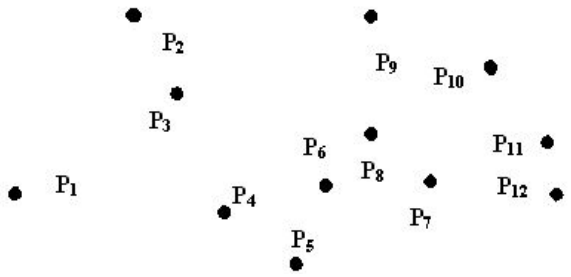


Рис.1. Приклад вхідної множини точок.

1. Згідно методу Грехема знаходимо центроїд q (x_q, y_q) перших трьох неколінеарних точок. Для прикладу на рис. 11 це буде центроїд точок P_1, P_2, P_3, з координатами x_q, y_q , відповідно, рис.2.:

$$x_q = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \; y_q = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}.$$

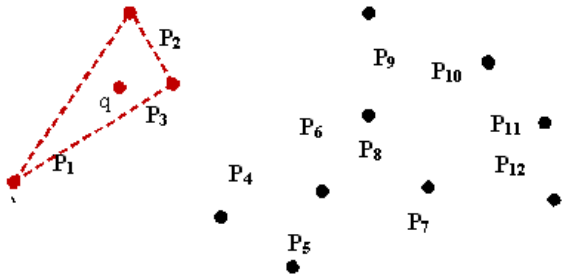


Рис.2. Визначення точки q.

2. Сортуємо відносно точки q задану множину S із N точок за полярним кутом (проти годинникової стрілки) одержавши упорядкований список U. Для прикладу з рис. 1 матимемо U= {P_4, P_5, P_6, P_7, P_{12}, P_8, P_{11}, P_3, P_{10}, P_9, P_2, P_1}.

3. До списку U застосовуємо обхід Грехема, в результаті чого одержимо опуклу оболонку для множини S з границею CH(S) = {P_5, P_{12}, P_{11}, P_{10}, P_9, P_2, P_1}, рис.3.

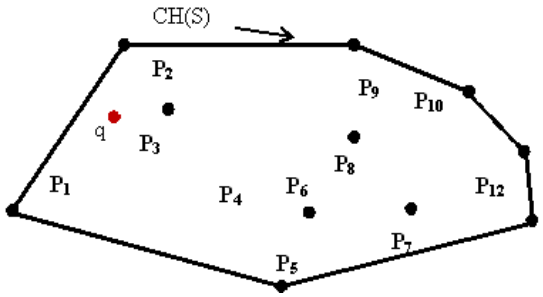


Рис. 3. Опукла оболонка для S.

4. До множини точок S_1, що залишилася в середині опуклої оболонки будуємо опуклу оболонку $CH(S_1)$ обходом Грехема. Аналогічно будуємо опуклі оболонки $CH(S_2)$, …, $CH(S_k)$ для наступних множин S_2, …, S_k , доки це можливо, рис.4.

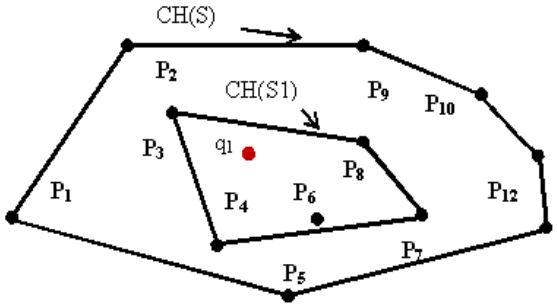


Рис. 4. Побудова опуклих оболонок $CH(S_2)$, …, $CH(S_k)$

5. Шари утворені сусідніми границями опуклих оболонок тріангулюємо відповідним чином, рис. 5. Це можна робити, навіть, підчас кожного наступного обходу, а при наявності можливості паралельної обробки, тріангулювати незалежно кожен шар.

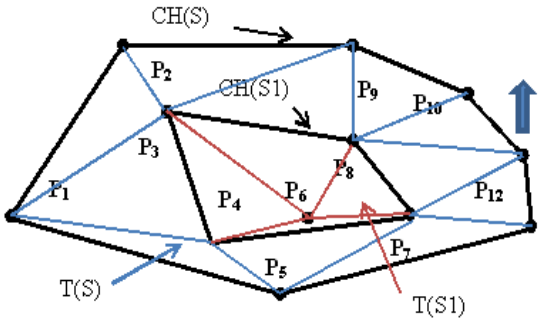


Рис.5 . Триангуляція опуклих шарів

3. **Побудова структури даних**.

Постає питання підтримки одержаної тріангуляції у вигляді певної структури даних, яку можна було б використовувати для обробки та розв'язання наступних задач (розфарбування, пошук перетинів, морфінг, рендеренінг, булеві операції і т. і.). І в цьому випадку процедура побудови тріангуляції надає нам і зручний її підтримки, а саме:

1) під час обходу побудови кожного нового трикутника ми присвоюємо йому ім'я і додаємо його до створеного циклічно упорядкованого списку таких трикутників. На рис. 6 показано відповідний приклад.

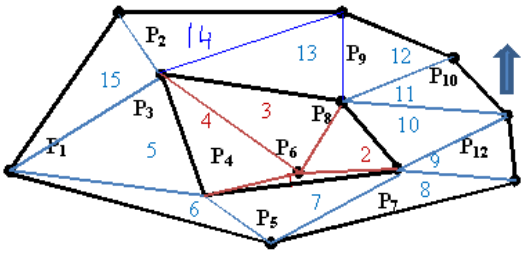


Рис.6. Побудова списку трикутників: T= { 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14,15}

2) утворений список ми можемо представити у вигляді зчепленої черги (рис.7), яка зберігає зв'язність в кожному із шарів (сині та коричневі лінії), а також містить вказівники на зв'язок між гранями сусідніх шарів (зелені лінії).

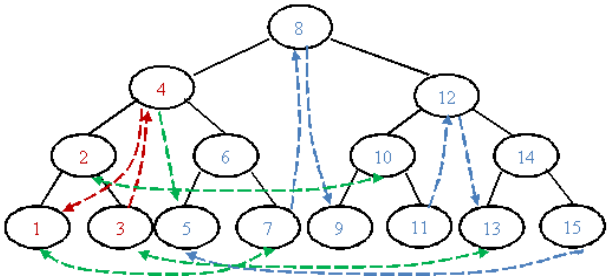


Рис. 7. Структура даних у вигляді зчепленої черги для рис. 6. Червоним помічені грані першого шару {1,2,3,4} синім-другого шару {5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14,15}

Це дозволяє здійснювати логарифмічний пошук по тріангуляції у будь-якому шарі та напрямку.

3) саму пошарову тріангуляцію можна представити у вигляді бінарного дерева граней (рис.8), яке зберігає зв'язність .

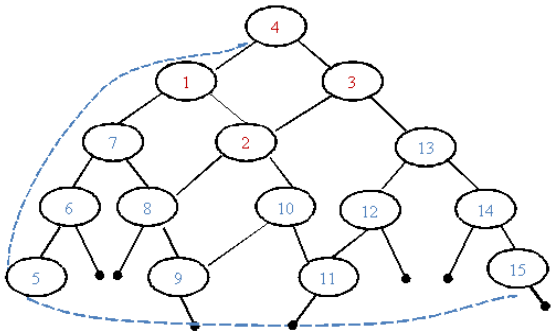


Рис. 8. Структура даних у вигляді бінарного дерева граней.

За допомогою цієї структури даних можна здійснювати логарифмічний пошук з будь-якого трикутника.

3. Обґрунтування складності

Твердження. Запропонований алгоритм має часову складність як і метод Грехема побудови опуклої оболонки – $O(N\log N)$ та використовує лінійну пам'ять.

Доведення. 1-й, 2-й та 3-й кроки це кроки алгоритму Грехема і вони виконуються за час $O(N)$, $O(N\log N)$, $O(N)$, відповідно. 4-й крок – це обхід Грехема і виконується він за час $O(N)$, але уже над множиною точок, що лишились після 3-го кроку. 5-й крок- тріангуляція шарів, яка здійснюється (з врахуванням упорядкованості точок на границі кожної опуклої оболонки за полярним кутом) за один прохід з часом $O(N)$.

4. Висновки

У роботі запропоновано оптимальний алгоритм тріангуляції на множині точок з оцінкою складності $O(N\log N)$. В основі цього алгоритму лежить алгоритм обходу Грехема побудови опуклої оболонки. На множині S із N точок будуються опуклі оболонки. Які утворюють k шарів, кожен з яких тріангулюється за один обхід сусідніх опуклих оболонок. Алгоритм легко розпаралелюється: кожен із шарів можна тріангулювати незалежно. Саме головна особливість запропонованого алгоритму у тому, що він має дуже просту реалізацію.

Список використаних джерел

1. *Скворцов А.В.*Триангуляция Делоне и её применение / А. В. Скворцов. – Томск:Том. Ун-т. – 2002. – 128 с.
2. *Скворцов А.В.* Эффективные алгоритмы построения триангуляции Делоне / А. В. Скворцов, Ю. Л. Костюк // Геоинформатика. Теория и практика. –Томск: Изд-во Том. ун-та. –1998. – Вып. 1.– С. 22–47.
3. *Guibas L.* Primitives for the manipulation of general subdivisions and the computation of Voronoi diagrams / L.Guibas, J. Stolfi // ACM Transactions on Graphics. –1985. –Vol. 4, N. 2. – P. 74–123.
4. Терещенко В.М. Узагальнений підхід розв'язання деяких задач обчислювальної геометрії на основі рекурсивно-паралельної технології / В.М. Терещенко // Наукові нотатки. –2008. – Випуск 22 (частина 2). – С. 344–349.
5. Терещенко В.Н. Рекурсия и параллельные алгоритмы в задачах геометрического моделирования / В.М. Терещенко, А.В. Анисимов // Кибернетика и системный анализ. – 2010. – №2.– С. 9 – 22.
6. Kirkpatrik D.G. Optimal search in planar subdivisions / D.G. Kirkpatrik // SIAM J. Comput. – 1983. – Vol. 12, N. 1. – P. 28–35.
7. Lewis B. Triangulation of planar regions with applications/ B. Lewis, J. Robinson // The Computer Journal. – 1978. – Vol. 21, N. 4. – P. 324–332.
8. Graham R. L. An efficient algorithm for determining the convex hull of a finite planar set / R. L. Graham // Info. Proc. Lett., 1. – 1972. – P. 132– 133.

References

1. SKVORCOV A.B.(2002) Trianguliacia Delone i eyio primenenie. Tomsk: Tom. Un-t. 128 p.
2. SKVORCOV A.B., KOSTIUK Y.L. (1998) Effectivnie algoritmi postroenia trianguliacii Delone // Geoinformatika. Teoria i praktika.- Tomsk: Un-t. - P. 22–47.
3. GUIBAS L., STOLFI J.(1985) Primitives for the manipulation of general subdivisions and the computation of Voronoi diagrams // *ACM Transactions on Graphics*.- 4, N 2. - P. 74–123.
4. TERESHCHENKO V. (2008) The generalized approach of the decision of some problems of computing geometry on the basis of recursively-parallel technology // Naukovi notatki, Luck-2008. - 22 , N 2.- P. 344-349.
5. TERESHCHENKO V.N., Anisimov A.V. (2010) Recursion and parallel algorithms in geometric modeling problems // *Journal: Cybernetics and Systems Analysis:*- 46, N 2**.**- P. 173 - 184.
6. KIRPATRIK D.G.(1983) Optimal search in planar subdivisions // *SIAM J. Comput.* – 12, N 1. – P. 28–35.
7. LEWIS B., ROBINSON J. (1978) Triangulation of planar regions with applications // *The Computer Journal.* – 21, N 4. - P. 324–332.
8. GRAHAM R. L.(1972) An efficient algorithm for determining the convex hull of a finite planar set // *Info. Proc. Lett*.- 1.- P. 132-133.

Надійшла до редколегії 03.12.14

УДК 517.929

Шакотько[1] Т.І., інженер
Хусаїнов[2] Д.Я., д.ф.-м.н, проф.
Сіренко[3] А.С., аспірант

Про один підхід до дослідження стійкості моделі нейронних мереж з запізненням другим методу Ляпунова

[1] Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 83000, м. Київ, пр-т. Глушкова 4д, e-mail: trachuk_85@ukr.net
[2] Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 83000, м. Київ, пр-т. Глушкова 4д, e-mail: d.y.khusainov@gmail.com
[3] Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 83000, м. Київ, пр-т. Глушкова 4д, e-mail: sandrew@online.ua

T.I. Shakotko[1] , engineer
D. Ya. Khusainov[2] , doctor of physical and mathematical sciences , professor.
A.S. Sirenko[3], graduate student

About one approach to study the stability of models of neural networks with delay Lyapunov second method

[1] Taras Shevchenko National University of Kyiv, 83000, Kyiv, Glushkova st., 4d,
e-mail: trachuk_85@ukr.net
[2] Taras Shevchenko National University of Kyiv, 83000, Kyiv, Glushkova st., 4d,
e-mail: d.y.khusainov@gmail.com
[3]Taras Shevchenko National University of Kyiv, 83000, Kyiv, Glushkova st., 4d,
e-mail: sandrew@online.ua

У даній роботі розглядається модель динаміки нейронної мережі, що описується системою диференціальних рівнянь, а для дослідження стійкості використовується метод функцій Ляпунова з додатковою умовою Разуміхіна. При оцінці повної похідної враховуються поза діагональні елементи.

Ключові слова: метод Ляпунова, асимптотична стійкість,умови Ліпшиця.

The modern theory of dynamical neural networks has two directions. The first section is the training of the neural network, i.e. actually determine the parameters of the network. The second section presents its functioning, i.e. recognition process sent a signal sequence and determining the membership of the input training.

This work is a further development of the theory of stability of solutions of differential systems with delay. Investigation of the stability of linear systems with delay previously held various works. In this work the stability of a nonzero equilibrium weakly nonlinear system of differential equations describes the dynamics of a mathematical model of the dynamics of neural networks. Firstly recearch was conducted on the system planar without delay. With using of a quadratic Lyapunov function obtained stability conditions of balance. Then the system was examined with delay. Using the second method of Lyapunov and with an additional condition B.S. Razumikhina formulated conditions of asymptotic stability for arbitrary rejection of the argument. All received results are constructive and can be used in practical research.

Key words: Lyapunov method, asymptotic stability, Lipschitz conditions.

Статтю представив д.т.н., проф. Ф.Г. Гаращенко

Вступ

Математичні моделі динаміки нейронних мереж, описані нелінійними диференціальними рівнями, з виділеною асимптотичною стійкою діагональною частиною, розглянуті в [1]. Більш адекватними моделями є системи з запізненням. Про це було зазначено в роботах [2,3]. Апаратом дослідження таких систем був обраний метод функціоналів Ляпунова-Красовського [2] і метод порівняння [3]. Для дослідження стійкості використовується метод функцій Ляпунова з додатковою умовою Разуміхіна [4,5]

1. Модель на площині. Система без запізнення.

Розглядається наступна модель динаміки нейронної мережі, що описується системою диференціальних рівнянь:

$$\dot{y}_1(t) = -a_{11}y_1(t) + f_{11}(y_1(t)) + f_{12}(y_2(t)) + b_1,$$
$$\dot{y}_2(t) = -a_{22}y_2(t) + f_{21}(y_1(t)) + f_{22}(y_2(t)) + b_2. \quad (1.1)$$

Тут $a_{11} > 0$, $a_{22} > 0$ – сталі, $f_{ij}(y)$, $i, j = \overline{1,2}$ - безперервні функції, задовольняють умові Ліпшиця тобто:

© Т.І. Шакотько, Д.Я. Хусаїнов , А. С. Сіренко, 2014

$$\left|f_{ij}\left(y+\Delta y\right)-f_{ij}\left(y\right)\right|\le L_{ij}\left|\Delta\right|,\ i,j=\overline{1,2}.$$

Припустимо, що система рівнянь:

$$-a_{11}y_1+f_{11}\left(y_1\right)+f_{12}\left(y_2\right)+b_1=0,$$
$$-a_{22}y_2+f_{21}\left(y_1\right)+f_{22}\left(y_2\right)+b_2=0. \quad (1.2)$$

Має єдиний розв'язок точку $M_0\left(y_1^0,y_2^0\right)$, $y_1^0>0$, $y_2^0>0$.

Після заміни

$y_1(t)=x_1(t)+y_1^0,\ y_2(t)=x_2(t)+y_2^0$

отримаємо:

$$\dot{x}_1(t)=-a_{11}x_1(t)+F_{11}\left(x_1(t)\right)+F_{12}\left(x_2(t)\right),$$
$$\dot{x}_2(t)=-a_{22}x_2(t)+F_{21}\left(x_1(t)\right)+F_{22}\left(x_2(t)\right), \quad (1.3)$$
$$F_{11}\left(x_1(t)\right)=f_{11}\left(x_1(t)+y_1^0\right)-f_{11}\left(y_1^0\right),$$
$$F_{12}\left(x_1(t)\right)=f_{12}\left(x_2(t)+y_2^0\right)-f_{12}\left(y_2^0\right),$$
$$F_{21}\left(x_1(t)\right)=f_{21}\left(x_1(t)+y_1^0\right)-f_{21}\left(y_1^0\right),$$
$$F_{22}\left(x_1(t)\right)=f_{22}\left(x_2(t)+y_2^0\right)-f_{22}\left(y_2^0\right). \quad (1.4)$$

Мають місце наступні умови асимптотичної стійкості.

Теорема 1.1. Нехай система рівнянь (1.2) має єдине рішення $M_0\left(y_1^0,y_2^0\right), y_1^0>0$, $y_2^0>0$ і існують сталі $h_{11}>0$, $h_{22}>0$ при яких виконуються нерівності:

$$\left(a_{11}-L_{11}\right)h_{11}>0,$$
$$4\left(a_{11}-L_{11}\right)\left(a_{22}-L_{22}\right)h_{11}h_{22}-\left(L_{12}h_{11}+L_{21}h_{22}\right)^2>0. \quad (1.5)$$

Тоді положення рівноваги $M_0\left(y_1^0,y_2^0\right)$ є асимптотично стійким.

Доведення. Для дослідження стійкості положення рівноваги $M_0\left(y_1^0,y_2^0\right)$ скористаємося функцією Ляпунова квадратичного виду:

$$V\left(x_1,x_2\right)=h_{11}x_1^2+h_{22}x_2^2$$

Її повна похідна в силу системи (1.4) має вигляд:

$$\frac{d}{dt}V\left(x_1(t),x_2(t)\right)=2h_{11}x_1(t)\left[-a_{11}x_1(t)+F_{11}\left(x_1(t)\right)+F_{12}\left(x_2(t)\right)\right]+$$
$$+2h_{22}x_1(t)\left[-a_{22}x_1(t)+F_{21}\left(x_1(t)\right)+F_{22}\left(x_2(t)\right)\right].$$

або

$$\frac{d}{dt}V\left(x_1(t),x_2(t)\right)=$$
$$=2\left[a_{11}h_{11}x_1^2(t)+a_{22}h_{22}x_2^2(t)\right]+$$
$$+2h_{11}x_1(t)\left\{F_{11}\left(x_1(t)\right)+F_{12}\left(x_2(t)\right)\right\}+$$
$$+2h_{22}x_2(t)\left\{F_{21}\left(x_1(t)\right)+F_{22}\left(x_2(t)\right)\right\}.$$

Використовуючи умови Ліпшиця, отримуємо:

$$\frac{d}{dt}V\left(x_1(t),x_2(t)\right)\le$$
$$\le-2\left[a_{11}h_{11}x_1^2(t)+a_{22}h_{22}x_2^2(t)\right]+$$
$$+2h_{11}x_1(t)\left\{L_{11}\left|x_1(t)\right|+L_{12}\left|x_2(t)\right|\right\}+$$
$$+2h_{22}x_2(t)\left\{L_{21}\left|x_1(t)\right|+L_{22}\left|x_2(t)\right|\right\}.$$

Перепишемо отриманий вираз у вигляді:

$$\frac{d}{dt}V\left(x_1(t),x_2(t)\right)\le$$
$$\le-2\left[\left(a_{11}-L_{11}\right)h_{11}x_1^2(t)-\left(L_{12}h_{11}+L_{21}h_{22}\right)\left|x_1(t)\right|\left|x_2(t)\right|+\right.$$
$$\left.+\left(a_{22}-L_{22}\right)h_{22}x_2^2(t)\right].$$

Як випливає з критерію Сильвестра [6], умовою негативної визначеності повної похідної є виконання нерівностей:

$$\left(a_{11}-L_{11}\right)h_{11}>0,$$
$$\left(a_{11}-L_{11}\right)\left(a_{22}-L_{22}\right)h_{11}h_{22}-\frac{1}{4}\left(L_{12}h_{11}+L_{21}h_{22}\right)^2>0,$$

тобто отримуємо умови (1.5).

Зауваження 1.1. Друге з нерівностей (1.5), що забезпечує асимптотичну стійкість положення рівноваги, можна уточнити і переписати у вигляді:

$$\left(a_{11}-L_{11}\right)\left(a_{22}-L_{22}\right)-L_{12}L_{21}>0. \quad (1.6)$$

Дійсно, друга нерівність є однорідним за елементами $h_{11}>0$, $h_{22}>0$. Поділивши його на $h_{22}>0$, отримаємо:

$$g(h)=\left(a_{11}-L_{11}\right)\left(a_{22}-L_{22}\right)h-\frac{1}{4}\left(L_{12}h+L_{21}\right)^2>0,$$

$$h=\frac{h_{11}}{h_{22}}>0.$$

Взявши похідну по змінній $h>0$ функції $g(h)$, отримаємо:

$$g'(h)=\left(a_{11}-L_{11}\right)\left(a_{22}-L_{22}\right)-\frac{1}{2}\left(L_{12}h+L_{21}\right)L_{12}.$$

Екстремум функції $g(h)$ буде виконуватися при

$$h=h_0=\frac{2\left(a_{11}-L_{11}\right)\left(a_{22}-L_{22}\right)-L_{12}L_{21}}{{L_{12}}^2}.$$

Таким чином, якщо $g\left(h_0\right)>0$, то становище рівноваги $M_0\left(y_1^0,y_2^0\right)$ буде асимптотично стійким. Підставивши отримане значення h_0 в функцію $g(h)$, отримаємо умову ((1.6).

2. Модель на площині. Система з запізненням

Розглянемо систему на площині із запізненням

$$\dot{y}_1(t)=-a_{11}y_1(t)+f_{11}\left(y_1\left(t-\tau_{11}\right)\right)+f_{12}\left(y_2\left(t-\tau_{12}\right)\right)+b_1,$$
$$\dot{y}_2(t)=-a_{22}y_2(t)+f_{21}\left(y_1\left(t-\tau_{21}\right)\right)+f_{22}\left(y_2\left(t-\tau_{22}\right)\right)+b_2. \quad (2.1)$$

Вважаємо, що $\tau_{ij} > 0$, $i, j = 1,2$, $a_{11} > 0$, $a_{22} > 0$,а функції $f_{ij}(y)$, $i, j = \overline{1,2}$, неперервні і задовольняють умові Ліпшиця. Зробимо заміну $y_1(t) = x_1(t) + y_1^0$, $y_2(t) = x_2(t) + y_2^0$ і система (2.1) зведеться до вигляду:

$$\dot{x}_1(t) = -a_{11}x_1(t) + F_{11}(x_1(t-\tau_{11})) + F_{12}(x_2(t-\tau_{12})),$$
$$\dot{x}_2(t) = -a_{22}x_2(t) + F_{21}(x_1(t-\tau_{21})) + F_{22}(x_2(t-\tau_{22})). \quad (2.2)$$

Дослідження стійкості положення рівноваги $M_0(y_1^0, y_2^0)$звелося до дослідження стійкості нульового положення рівноваги системи (2.2). Мають місце наступні умови асимптотичної стійкості.

Теорема 2.1. Нехай система рівнянь (1.2) має єдине рішення $M_0(y_1^0, y_2^0)$ і існують постійні $h_{11} > 0$, $h_{22} > 0$, при яких виконуються умови:

$$2[a_{11} - L_{11} - L_{12}\sqrt{\frac{h_{11}}{h_{22}}}]h_{11} > 0,$$

$$4[a_{11} - L_{11} - L_{12}\sqrt{\frac{h_{11}}{h_{22}}}]\,[a_{22} - L_{21}\sqrt{\frac{h_{22}}{h_{11}}} - L_{22}]h_{11}h_{22} -$$

$$-[(L_{11}\sqrt{\frac{h_{22}}{h_{11}}} + L_{12})h_{11} + (L_{21} + L_{22}\sqrt{\frac{h_{11}}{h_{22}}})h_{22}]^2 > 0. \quad (2.3)$$

Тоді положення рівноваги $M_0(y_1^0, y_2^0)$ є асимптотично стійким.

Доведення. При дослідженні стійкості будемо використовувати квадратичну функцію Ляпунова $V(x_1, x_2) = h_{11}x_1^2 + h_{22}^2x_2^2$, при обчисленні повної похідної функції Ляпунова в силу системи (2.2) будемо використовувати умову Б. С. Разуміхіна [4,5]. Для функції Ляпунова $V(x_1, x_2) = h_{11}x_1^2 + h_{22}^2x_2^2$ вона матиме вигляд:

$$h_{11}x_1^2(s) + h_{22}^2x_2^2(s) = V(x_1(s), x_2(s)) <$$
$$< V(x_1(t), x_2(t)) = h_{11}x_1^2(t) + h_{22}x_2^2(t),\ s < t. \quad (2.4)$$

Звідси випливає, що

$$|x_1(s)| < \sqrt{x_1^2(t) + \frac{h_{22}}{h_{11}}x_2^2(t)},$$

$$|x_2(s)| < \sqrt{\frac{h_{11}}{h_{22}}x_1^2(t) + x_2^2(t)},\ s < t. \quad (2.5)$$

Повна похідна функції Ляпунова в силу системи (2.2) має вигляд

$$\frac{d}{dt}V(x_1(t), x_2(t)) =$$
$$= 2h_{11}x_1(t)\{-a_{11}x_1(t) + F_{11}(x_1(t-\tau_{11})) + F_{12}(x_2(t-\tau_{12}))\} +$$
$$+ 2h_{22}x_2(t)\{-a_{22}x_2(t) + F_{21}(x_1(t-\tau_{21})) + F_{22}(x_2(t-\tau_{22}))\}.$$

Використовуючи умови Ліпшиця, отримуємо

$$\frac{d}{dt}V(x_1(t), x_2(t)) \le -2[a_{11}h_{11}x_1^2(t) + a_{22}h_{22}x_2^2(t)] +$$
$$+ 2h_{11}x_1(t)\{L_{11}|x_1(t-\tau_{11})| + L_{12}|x_2(t-\tau_{12})|\} +$$
$$+ 2h_{22}x_2(t)\{L_{21}|x_1(t-\tau_{21})| + L_{22}|x_2(t-\tau_{22})|\}.$$

Розкриємо дужки і отримаємо

$$\frac{d}{dt}V(x_1(t), x_2(t)) \le -2[a_{11}h_{11}x_1^2(t) + a_{22}h_{22}x_2^2(t)] +$$
$$+ 2h_{11}x_1(t)L_{11}|x_1(t-\tau_{11})| + 2h_{11}x_1(t)L_{12}|x_2(t-\tau_{12})| +$$
$$+ 2h_{22}x_2(t)L_{21}|x_1(t-\tau_{21})| + 2h_{22}x_2(t)L_{22}|x_2(t-\tau_{22})|.$$

Відомо, що для довільних $A > 0$ і $B > 0$ справедлива нерівність

$$\sqrt{A^2 + B^2} < A + B. \quad (2.6)$$

Використовуючи умови Б.С. Разуміхіна (2.5) і нерівність (2.6), отримуємо

$$|x_1(t-s)| < \sqrt{x_1^2(t) + \frac{h_{22}}{h_{11}}x_2^2(t)} \le |x_1(t)| + \sqrt{\frac{h_{22}}{h_{11}}}|x_2(t)|,$$

$$|x_2(t-s)| < \sqrt{\frac{h_{11}}{h_{22}}x_1^2(t) + x_2^2(t)} \le \sqrt{\frac{h_{11}}{h_{22}}}|x_1(t)| + |x_2(t)|. \quad (2.7)$$

Звідси випливає, що

$$\frac{d}{dt}V(x_1(t), x_2(t)) \le$$
$$\le -2[a_{11}h_{11}x_1^2(t) + a_{22}h_{22}x_2^2(t)] +$$
$$+ 2L_{11}h_{11}|x_1(t)|[\ |x_1(t)| + \sqrt{\frac{h_{22}}{h_{11}}}|x_2(t)|\ ] +$$
$$+ 2L_{12}h_{11}|x_1(t)|[\sqrt{\frac{h_{11}}{h_{22}}}|x_1(t)| + |x_2(t)|] +$$
$$+ 2L_{21}h_{21}|x_2(t)|[\ |x_1(t)| + \sqrt{\frac{h_{22}}{h_{11}}}|x_2(t)|\ ] +$$
$$+ 2L_{22}h_{22}|x_2(t)|[\sqrt{\frac{h_{11}}{h_{22}}}|x_1(t)| + |x_2(t)|].$$

або

$$\frac{d}{dt}V(x_1(t), x_2(t)) \le -2[a_{11} - L_{11} - L_{12}\sqrt{\frac{h_{11}}{h_{22}}}]h_{11}x_1^2(t) +$$
$$+ 2[(L_{11}\sqrt{\frac{h_{22}}{h_{11}}} + L_{12})h_{11} + (L_{21} + L_{22}\sqrt{\frac{h_{11}}{h_{22}}})h_{22}]|x_1(t)||x_2(t)| -$$
$$-2[a_{22} - L_{21}\sqrt{\frac{h_{22}}{h_{11}}} - L_{22}]h_{22}x_1^2(t).$$

І, як випливає з критерію Сильвестра [6], умовою асимптотичної стійкості буде виконання системи нерівностей

$$2[a_{11} - L_{11} - L_{12}\sqrt{\frac{h_{11}}{h_{22}}}]h_{11} > 0,$$

$$4[a_{11} - L_{11} - L_{12}\sqrt{\frac{h_{11}}{h_{22}}}]\,[a_{22} - L_{21}\sqrt{\frac{h_{22}}{h_{11}}} - L_{22}]h_{11}h_{22} -$$

$$-[(L_{11}\sqrt{\frac{h_{22}}{h_{11}}} + L_{12})h_{11} + (L_{21} + L_{22}\sqrt{\frac{h_{11}}{h_{22}}})h_{22}]^2 > 0$$

тобто виконуються умови (2.3).

3. Системи в n-вимірному просторі.

Розглянемо систему з запізненням в n-вимірному просторі. Отримаємо аналогічні умови рівномірної стійкості. Система має вигляд

$$\dot{y}_i(t) = -a_{ii}y_i(t) + \sum_{j=1}^{n} f_{ij}\left(y_j\left(t - \tau_{ij}\right)\right) + b_i\,. \quad (3.1)$$

Як і раніше, вважаємо, що $\tau_{ij} > 0$, $a_{ii} > 0$, $i, j = \overline{1,n}$, а функції $f_{ij}(y)$, $i, j = \overline{1,n}$ задовольняють умові Ліпшиця з показниками L_{ij}. Припустимо, що система рівнянь

$$-a_{ii}y_i + \sum_{j=1}^{n} f_{ij}\left(y_j\right) + b_i = 0\,,\ i = \overline{1,n}$$

має рішенням точку $M_0\left(y_1^0, y_2^0, ..., y_n^o\right)$. Зробимо заміну $y_i(t) = x_i(t) + y_1^0$ і система (3.1) зводиться до системи

$$\dot{x}_i(t) = -a_{ii}\left(x_i(t) + y_i^0\right) + \sum_{j=1}^{n} f_{ij}\left(x_{ij}\left(t - \tau_{ij}\right) + y_j^0\right) + b_i\,. \quad (3.2)$$

Перепишемо її в іншому вигляді

$$\dot{x}_i(t) = -a_{ii}x_i(t) + \sum_{j=1}^{n} F_{ij}\left(x_{ij}\left(t - \tau_{ij}\right)\right), \quad (3.3)$$

$$F_{ij}\left(x_{ij}\left(t - \tau_{ij}\right)\right) = f_{ij}\left(x_{ij}\left(t - \tau_{ij}\right) + y_j^0\right) - f_{ij}\left(y_j^0\right) \quad (3.4)$$

І дослідження стійкості положення рівноваги $M_0\left(y_1^0, y_2^0, ..., y_n^o\right)$ звелося до дослідження стійкості нульового положення рівноваги системи (3.3).

Введемо наступні позначення

$$L_1 = \frac{L_{11}}{\sqrt{h_{11}}} + \frac{L_{12}}{\sqrt{h_{22}}} + ... + \frac{L_{1n}}{\sqrt{h_{nn}}}\,,$$

$$L_2 = \frac{L_{21}}{\sqrt{h_{11}}} + \frac{L_{22}}{\sqrt{h_{22}}} + ... + \frac{L_{2n}}{\sqrt{h_{nn}}}\,, ...,$$

$$L_n = \frac{L_{n1}}{\sqrt{h_{11}}} + \frac{L_{n2}}{\sqrt{h_{22}}} + ... + \frac{L_{nn}}{\sqrt{h_{nn}}}\,, \quad (3.5)$$

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{12} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ . & . & \dots & . \\ c_{1n} & c_{2n} & \dots & c_{nn} \end{bmatrix}, \quad (3.6)$$

$$c_{11} = 2h_{11}\left(a_{11} - L_1\sqrt{h_{11}}\right),$$

$$c_{12} = \sqrt{h_{11}h_{22}}\left[L_1\sqrt{h_{11}} + L_2\sqrt{h_{22}}\right], ...,$$

$$c_{1n} = -\sqrt{h_{11}h_{nn}}\left[L_1\sqrt{h_{11}} + L_n\sqrt{h_{nn}}\right],$$

$$c_{22} = 2h_{22}\left(a_{22} - L_2\sqrt{h_{22}}\right),$$

$$c_{23} = -\sqrt{h_{22}h_{33}}\left[L_2\sqrt{h_{22}} + L_3\sqrt{h_{33}}\right], ...,$$

$$c_{2n} = -\sqrt{h_{22}h_{nn}}\left[L_2\sqrt{h_{22}} + L_n\sqrt{h_{nn}}\right], ...,$$

$$c_{n-1,n-1} = 2h_{n-1,n-1}\left(a_{n-1,n-1} - L_{n-1}\sqrt{h_{n-1,n-1}}\right),$$

$$c_{n-1,n} = -\sqrt{h_{n-1,n-1}h_{n,n}}\left[L_{n-1}\sqrt{h_{n-1,n-1}} + L_n\sqrt{h_{n,n}}\right],$$

$$c_{n,n} = 2h_{nn}\left(a_{n,n} - L_n\sqrt{h_{n,n}}\right). \quad (3.7)$$

Мають місце наступні умови стійкості

Теорема 3.1. Нехай система рівнянь (3.1) має єдине положення рівноваги $M_0\left(y_1^0, y_2^0, ..., y_n^o\right)$ і існують постійні $h_{11} > 0$, $h_{22} > 0$, ..., h_{nn} при яких виконуються умови

$$\Delta_1 = h_{11} > 0\,,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{12} & c_{22} \end{vmatrix} > 0\,, \dots$$

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{12} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ . & . & \dots & . \\ c_{1n} & c_{2n} & \dots & c_{nn} \end{vmatrix} > 0 \quad (3.8)$$

Тоді положення рівноваги $M_0\left(y_1^0, y_2^0, ..., y_n^o\right)$ є асимптотично стійким.

Доведення. Для дослідження стійкості положення рівноваги $M_0\left(y_1^0, y_2^0, ..., y_n^o\right)$ будемо використовувати функцію Ляпунова

$$V\left(x_1, x_2, ..., x_n\right) = \sum_{n=1}^{n} h_{ii}x_i^2\,. \quad (3.9)$$

При обчисленні повної похідної функції Ляпунова в силу системи (3.9) будемо використовувати умови Б.С.Разуміхіна [4,5]. Для функції Ляпунова (3.9) вони мають вигляд

$$\sum_{i=1}^{n} h_{ii}x_{ii}^2(s) = V\left(x_1(s), x_2(s), ..., x_n(s)\right) <$$

$$< V\left(x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t)\right) = \sum_{k=1}^{n} h_{kk}x_k^2(t)\,,\ s < t\,. \quad (3.10)$$

Звідси випливає, що

$$|x_i(s)| < \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \frac{h_{kk}}{h_{ii}} x_k^2(t)} \le \sqrt{\frac{h_{11}}{h_{ii}}}|x_1(t)| +$$

$$+ \sqrt{\frac{h_{22}}{h_{ii}}|x_2(t)|} + ... + \sqrt{\frac{h_{nn}}{h_{ii}}}|x_n(t)|\,,$$

$$s < t\,,\ i = \overline{1,n}\,. \quad (3.11)$$

Повна похідна функції Ляпунова (3.9) в силу системи (3.3) має вигляд

$$\frac{d}{dt}V\left(x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t)\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} 2h_{ii}x_i(t)\{-a_{ii}x_i(t) + \sum_{j=1}^{n} F_{ij}\left(x_j\left(t - \tau_{ij}\right)\right)\}\,.$$

Використовуючи умови Ліпшиця, отримуємо

$$\frac{d}{dt}V\left(x_1(t),x_2(t),...,x_n(t)\right)\le$$

$$\le -2\sum_{i=1}^{n}a_{11}h_{ii}x_{ii}^2(t)+2\sum_{i=1}^{n}h_{ii}x_i(t)\sum_{j=1}^{n}L_{ij}\left|x_j\left(t-\tau_{ij}\right)\right|.$$

Розглянувши другий доданок. Використовуючи умови Б.С.Разуміхіна (3.11) і нерівність (2.6), отримуємо:

$$S_2=2\sum_{i=1}^{n}h_{ii}x_i(t)[\sum_{j=1}^{n}L_{ij}\left|x_j\left(t-\tau_{ij}\right)\right|]=$$

$$=2h_{11}x_1(t)\left[L_{11}\left|x_1\left(t-\tau_{11}\right)\right|+L_{12}\left|x_2\left(t-\tau_{12}\right)\right|+...+L_{1n}\left|x\left(t-\tau_{1n}\right)\right|\right]+$$

$$+2h_{22}x_2(t)\left[L_{21}\left|x_1\left(t-\tau_{21}\right)\right|+L_{22}\left|x_2\left(t-\tau_{22}\right)\right|+...+L_{2n}\left|x\left(t-\tau_{2n}\right)\right|\right]+...$$

$$+2h_{nn}x_n(t)\left[L_{n1}\left|x_1\left(t-\tau_{n1}\right)\right|+L_{n2}\left|x_2\left(t-\tau_{n2}\right)\right|+...+L_{nn}\left|x\left(t-\tau_{nn}\right)\right|\right]=$$

$$=2h_{11}x_1(t)\{L_{11}[\sqrt{\frac{h_{11}}{h_{11}}}\left|x_1(t)\right|+\sqrt{\frac{h_{22}}{h_{11}}}\left|x_2(t)\right|+...+\sqrt{\frac{h_{nn}}{h_{11}}}\left|x_n(t)\right|]+$$

$$+L_{12}[\sqrt{\frac{h_{11}}{h_{22}}}\left|x_1(t)\right|+\sqrt{\frac{h_{22}}{h_{22}}}\left|x_2(t)\right|+...+\sqrt{\frac{h_{nn}}{h_{22}}}\left|x_2(t)\right|]+...$$

$$+L_{1n}[\sqrt{\frac{h_{11}}{h_{nn}}}\left|x_1(t)\right|+\sqrt{\frac{h_{22}}{h_{nn}}}\left|x_2(t)\right|+...+\sqrt{\frac{h_{nn}}{h_{nn}}}\left|x_n(t)\right|]\}+$$

$$=2h_{22}x_2(t)\{L_{21}[\sqrt{\frac{h_{11}}{h_{11}}}\left|x_1(t)\right|+\sqrt{\frac{h_{22}}{h_{11}}}\left|x_2(t)\right|+...+\sqrt{\frac{h_{nn}}{h_{11}}}\left|x_n(t)\right|]+$$

$$+L_{22}[\sqrt{\frac{h_{11}}{h_{22}}}\left|x_1(t)\right|+\sqrt{\frac{h_{22}}{h_{22}}}\left|x_2(t)\right|+...+\sqrt{\frac{h_{nn}}{h_{22}}}\left|x_2(t)\right|]+...$$

$$+L_{2n}[\sqrt{\frac{h_{11}}{h_{nn}}}\left|x_1(t)\right|+\sqrt{\frac{h_{22}}{h_{nn}}}\left|x_2(t)\right|+...+\sqrt{\frac{h_{nn}}{h_{nn}}}\left|x_n(t)\right|]\}+$$

$$=2h_{nn}x_n(t)\{L_{n1}[\sqrt{\frac{h_{11}}{h_{11}}}\left|x_1(t)\right|+\sqrt{\frac{h_{22}}{h_{11}}}\left|x_2(t)\right|+...+\sqrt{\frac{h_{nn}}{h_{11}}}\left|x_n(t)\right|]+$$

$$+L_{n2}[\sqrt{\frac{h_{11}}{h_{22}}}\left|x_1(t)\right|+\sqrt{\frac{h_{22}}{h_{22}}}\left|x_2(t)\right|+...+\sqrt{\frac{h_{nn}}{h_{22}}}\left|x_2(t)\right|]+...$$

$$+L_{nn}[\sqrt{\frac{h_{11}}{h_{nn}}}\left|x_1(t)\right|+\sqrt{\frac{h_{22}}{h_{nn}}}\left|x_2(t)\right|+...+\sqrt{\frac{h_{nn}}{h_{nn}}}\left|x_n(t)\right|]\}.$$

Введемо наступні позначення:

$$L_1=\frac{L_{11}}{\sqrt{h_{11}}}+\frac{L_{12}}{\sqrt{h_{22}}}+...+\frac{L_{1n}}{\sqrt{h_{nn}}},$$

$$L_2=\frac{L_{21}}{\sqrt{h_{11}}}+\frac{L_{22}}{\sqrt{h_{22}}}+...+\frac{L_{2n}}{\sqrt{h_{nn}}},...,$$

$$L_n=\frac{L_{n1}}{\sqrt{h_{11}}}+\frac{L_{n2}}{\sqrt{h_{22}}}+...+\frac{L_{nn}}{\sqrt{h_{nn}}}.$$

Тоді

$$S\le 2h_{11}x_1(t)L_1\left\{\sqrt{h_{11}}\left|x_1(t)\right|+\sqrt{h_{22}}\left|x_2(t)\right|+...+\sqrt{h_{nn}}\left|x_n(t)\right|\right\}+$$

$$+2h_{22}x_2(t)L_2\left\{\sqrt{h_{11}}\left|x_1(t)\right|+\sqrt{h_{22}}\left|x_2(t)\right|+...+\sqrt{h_{nn}}\left|x_n(t)\right|\right\}+...$$

$$+2h_{nn}x_n(t)L_n\left\{\sqrt{h_{11}}\left|x_1(t)\right|+\sqrt{h_{22}}\left|x_2(t)\right|+...+\sqrt{h_{nn}}\left|x_n(t)\right|\right\}.$$

Перегрупувавши квадратичні члени, отримаємо:

$$S\le 2h_{11}L_1\sqrt{h_{11}}x_1^2(t)+$$

$$+2\left[h_{11}L_1\sqrt{h_{22}}+h_{22}L_2\sqrt{h_{11}}\right]x_1(t)\left\|x_2(t)\right|+$$

$$+2\left[h_{11}L_1\sqrt{h_{33}}+h_{33}L_3\sqrt{h_{11}}\right]x_1(t)\left\|x_3(t)\right|+...$$

$$+2\left[h_{11}L_1\sqrt{h_{nn}}+h_{nn}L_{nn}\sqrt{h_{11}}\right]x_1(t)\left\|x_n(t)\right|+$$

$$+2h_{22}L_2\sqrt{h_{22}}x_2^2(t)+$$

$$+2\left[h_{22}L_2\sqrt{h_{33}}+h_{33}L_3\sqrt{h_{22}}\right]x_2(t)\left\|x_3(t)\right|+...$$

$$+2\left[h_{22}L_2\sqrt{h_{nn}}+h_{nn}L_n\sqrt{h_{22}}\right]x_2(t)\left\|x_n(t)\right|+...$$

$$+2h_{n-1,n-1}L_{n-1}\sqrt{h_{n-1,n-1}}x_{n-1}^2(t)+$$

$$+2\left[h_{n-1,n-1}L_{n-1}\sqrt{h_{n,n}}+h_{n,n}L_n\sqrt{h_{n-1,n-2}}\right]x_{n-1}(t)\left\|x_n(t)\right|+$$

$$+2h_{n,n}L_n\sqrt{h_{n,n}}x_n^2(t).$$

Перетворимо отриманий вираз наступним чином:

$$S\le 2h_{11}L_1\sqrt{h_{11}}x_1^2(t)+$$

$$+2\sqrt{h_{11}h_{22}}\left[L_1\sqrt{h_{11}}+L_2\sqrt{h_{22}}\right]x_1(t)\left\|x_2(t)\right|+$$

$$+2\sqrt{h_{11}h_{33}}\left[L_1\sqrt{h_{11}}+L_3\sqrt{h_{33}}\right]x_1(t)\left\|x_3(t)\right|+...$$

$$+2\sqrt{h_{11}h_{nn}}\left[L_1\sqrt{h_{11}}+L_n\sqrt{h_{nn}}\right]x_1(t)\left\|x_n(t)\right|+$$

$$+2h_{22}L_2\sqrt{h_{22}}x_2^2(t)+$$

$$+2\sqrt{h_{22}h_{33}}\left[L_2\sqrt{h_{22}}+L_3\sqrt{h_{33}}\right]x_2(t)\left\|x_3(t)\right|+...$$

$$+2\sqrt{h_{22}h_{nn}}\left[L_2\sqrt{h_{22}}+L_{nn}\sqrt{h_{nn}}\right]x_2(t)\left\|x_n(t)\right|+...$$

$$+2h_{n-1,n-1}L_{n-1}\sqrt{h_{n-1,n-1}}x_{n-1}^2(t)+$$

$$+2\sqrt{h_{n-1,n-1}h_{nn}}\left[L_{n-1}\sqrt{h_{n,n}}+L_n\sqrt{h_{n-1,n-1}}\right]x_{n-1}(t)\left\|x_n(t)\right|+$$

$$+2h_{n,n}L_n\sqrt{h_{n,n}}x_n^2(t).$$

Введемо наступні позначення

$$C=\begin{bmatrix}c_{11}&c_{12}&...&c_{1n}\\c_{12}&c_{22}&...&c_{2n}\\.&.&...&.\\c_{1n}&c_{2n}&...&c_{nn}\end{bmatrix},$$

$$c_{11}=2h_{11}\left(a_{11}-L_1\sqrt{h_{11}}\right),$$

$$c_{12}=\sqrt{h_{11}h_{22}}\left[L_1\sqrt{h_{11}}+L_2\sqrt{h_{22}}\right],...,$$

$$c_{1n}=-\sqrt{h_{11}h_{nn}}\left[L_1\sqrt{h_{11}}+L_n\sqrt{h_{nn}}\right],$$

$$c_{22}=2h_{22}\left(a_{22}-L_2\sqrt{h_{22}}\right),$$

$$c_{23}=-\sqrt{h_{22}h_{33}}\left[L_2\sqrt{h_{22}}+L_3\sqrt{h_{33}}\right],...,$$

$$c_{2n}=-\sqrt{h_{22}h_{nn}}\left[L_2\sqrt{h_{22}}+L_n\sqrt{h_{nn}}\right],...,$$

$$c_{n-1,n-1}=2h_{n-1,n-1}\left(a_{n-1,n-1}-L_{n-1}\sqrt{h_{n-1,n-1}}\right),$$

$$c_{n-1,n}=-\sqrt{h_{n-1,n-1}h_{n,n}}\left[L_{n-1}\sqrt{h_{n-1,n-1}}+L_n\sqrt{h_{n,n}}\right],$$

$$c_{n,n} = 2h_{n,n}\left(a_{n,n} - L_n\sqrt{h_{n,n}}\right).$$

Тоді для повної похідної функції Ляпунова в силу системи з запізненням (3.3) буде мати місце нерівність

$$\frac{d}{dt}V\left(x_1(t), x_2(t), ..x_n(t)\right) \le$$

$$\le -\left(|x_1(t)|, |x_2(t)|, ..., |x_n(t)|\right) C \left(|x_1(t)|, |x_2(t)|, ..., |x_n(t)|\right)^T .$$

І умовою стійкості є позитивна визначеність матриці. Як випливає з критерію Сильвестра, для цього необхідно і достатньо, щоб всі головні діагональні мінори були позитивні, тобто виконувалися умови теореми 3.1.

Зауваження 3.1. Стосовно до системи на площині (1.3) отримуємо наступне

$$L_1 = \frac{L_{11}}{\sqrt{h_{11}}} + \frac{L_{12}}{\sqrt{h_{22}}},\ L_2 = \frac{L_{21}}{\sqrt{h_{11}}} + \frac{L_{22}}{\sqrt{h_{22}}}.$$

Тому

$$c_{11} = 2h_{11}\left|a_{11} - L_1\sqrt{h_{11}}\right| =$$

$$= 2h_{11}[a_{11} - (\frac{L_{11}}{\sqrt{h_{11}}} + \frac{L_{12}}{\sqrt{h_{22}}})\sqrt{h_{11}}] =$$

$$= 2h_{11}[a_{11} - L_{11} - L_{12}\sqrt{\frac{h_{11}}{h_{22}}}],$$

$$c_{22} = 2h_{22}\left|a_{22} - L_2\sqrt{h_{22}}\right| =$$

$$= 2h_{22}[a_{22} - (\frac{L_{21}}{\sqrt{h_{11}}} + \frac{L_{22}}{\sqrt{h_{22}}})\sqrt{h_{22}}] =$$

$$= 2h_{22}[a_{22} - L_{22} - L_{21}\sqrt{\frac{h_{22}}{h_{11}}}],$$

$$c_{12} = -\sqrt{h_{11}h_{22}}\left|L_1\sqrt{h_{11}} + L_2\sqrt{h_{22}}\right| =$$

$$= -\sqrt{h_{11}h_{22}}[(\frac{L_{11}}{\sqrt{h_{11}}} + \frac{L_{12}}{\sqrt{h_{22}}})\sqrt{h_{11}} + (\frac{L_{21}}{\sqrt{h_{11}}} + \frac{L_{22}}{\sqrt{h_{22}}})\sqrt{h_{22}}] =$$

$$= -\sqrt{h_{11}h_{22}}L_{11} - h_{11}L_{12} - h_{22}L_{21} - \sqrt{h_{11}h_{22}}L_{22}.$$

І умови асимптотичної стійкості мають вигляд

$$\Delta_1 = c_{11} = 2h_{11}[a_{11} - L_{11} + L_{12}\sqrt{\frac{h_{11}}{h_{22}}}] > 0,$$

$$\Delta_2 = c_{11}c_{22} - c_{12}^2 = 4[a_{11} - L_{11} - L_{12}\sqrt{\frac{h_{11}}{h_{22}}}] \times$$

$$\times [a_{22} - L_{22} - L_{21}\sqrt{\frac{h_{22}}{h_{11}}}]h_{11}h_{22} -$$

$$-\left[\sqrt{h_{11}h_{22}}L_{11} + h_{11}L_{12} + h_{22}L_{21} + \sqrt{h_{11}h_{22}}L_{22}\right]^2 =$$

$$= 4[a_{11} - L_{11} - L_{12}\sqrt{\frac{h_{11}}{h_{22}}}] \times$$

$$\times [a_{22} - L_{22} - L_{21}\sqrt{\frac{h_{22}}{h_{11}}}]h_{11}h_{22} -$$

$$-[(L_{11}\sqrt{\frac{h_{22}}{h_{11}}} + L_{12})h_{11} + (L_{21} + L_{22}\sqrt{\frac{h_{11}}{h_{22}}}h_{22})h_{22}]^2.$$

Таким чином, для окремого випадку $n = 2$ умови асимптотичної стійкості (3.8) збігаються з умовами стійкості (2.3) системи на площині.

Список використаних джерел

1. *Хайкин С.* Нейронные сети: полный курс, 2-е издание / С. Хайкин - М.: Издательский дом «Вильямс», 2006.

2. *Gopalsamy K.* Leakage Delays in BAM/ K. Gopalsamy // Journal of Mathematical Analysis and Applications, 325 (2007), pp.1117-1132.

3. *Berezansky L.* New Global Exponential Stability Criteria for Nonlinear Delay Differential Systems with Application to BAM Neural Network / L. Berezansky, E. Braverman and L. Idels // Applied Mathematics and Computation 243 (2014) pp. 899–910

4. *Хусаинов Д.Я.* Метод функций Ляпунова в исследовании устойчивости дифференциально-функциональных систем. / Д.Я. Хусаинов, А.В. Шатырко – Киев, Изд.-во Киевского университета, 1997.

5. *Разумихин Б.С.* Устойчивость эредитарных систем. / Б.С. Разумихин – М., Наука, 1988.

6. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. / Ф.Р. Гантмахер – М., Наука, 1988.

References

1. HAYKIN S. (1999) *Neural networks,* Upper Saddle River, N.J. : Prentice Hall.

2. GOPALSAMY K. (2007) *Leakage Delays in BAM* // Journal of Mathematical Analysis and Applications, 325, pp.1117-1132.

3. BEREZANSKY L., BRAVERMAN E. AND IDELS L. (2014) *New Global Exponential Stability Criteria for Nonlinear Delay Differential Systems with Application to BAM Neural Network,* Applied Mathematics and Computation 243, pp. 899–910

4. KHUSAINOV D., SHATYRKO A. (1997) *Metod funkcii Lyapunov v issledovanii ustoichivosti differentsialnogo-funktsionalnyh system*, Kiev, Kievskii universitet.

5. RAZUMIHIN B. S. (1988) *Ustoichivost ereditarnyh system*, Moskva, Nauka

6. GANTMAHER F. (1988) *Teoria matrits*, Moskva, Nauka.

Надійшла до редколегії 01.12.2014

УДК 004.42:510.69

Шкільняк О.С.[1], к. ф.-м. н.

Семантичні аспекти модальних логік часткових немонотонних предикатів

[1] Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 83000, м. Київ, пр-т Глушкова, 4д,
e-mail: tk@unicyb.kiev.ua

O.S. Shkilniak[1], PhD (Phys.-Math.).

Semantic aspects of modal logics of partial non-monotone predicates

[1] Taras Shevchenko National University of Kyiv, 83000, Kyiv, Glushkova st., 4d,
e-mail: me.oksana@gmail.com

Запропоновано новий клас програмно-орієнтованих логічних формалізмів – транзиційні модальні логіки часткових квазіарних предикатів, не обмежених умовою монотонності (еквітонності). Описано семантичні моделі та мови чистих першопорядкових логік цього класу, досліджено їх семантичні властивості. Показана відмінність пропонованих логік від відповідних логік еквітонних предикатів.

Ключові слова: модальна логіка, мова, семантика, предикат.

Modal logics are successfully used in computer science and programming. Temporal logics are used in dynamic systems modelling, program specification and verification; epistemic logics are used for information systems description, in data bases and knowledge bases. Traditionally, modal logics are based on classical predicate logic. However, classical logic has fundamental limitations. Thus, it makes important the problem of description of new program oriented logical formalisms. Composition-nominative modal logics (CNML) are one of such formalisms. Modal transitional logics (MTL) are an important variant of CNML; they represent the fact of changing and evolution in subject domains. The paper is concerned with a further study of these logics. We propose to remove the monotonicity restriction which was usually considered (equitone predicates) and introduce a new class of pure first-order MTL of partial non-monotone predicates. We distinguish multimodal and temporal logics as subclasses of MTL; in multimodal MTL we specify general MTL and epistemic MTL. Semantic models and languages for MTL are described, their semantic properties are studied. Various classes of MTL are defined depending on the conditions imposed on the transition relations. Interactions of modalities with renominations and quantifiers in MTL are investigated. We show the difference between corresponding classes of MTL of non-monotone and monotone (equitone) predicates.

Key words: modal logic, language, semantics, predicate.

Статтю представив д. ф.-м. н., проф. Буй Д.Б.

Для опису й моделювання різноманітних предметних областей і аспектів діяльності людини з великим успіхом використовується апарат модальних логік. Темпоральні логіки застосовуються для моделювання динамічних систем, специфікації та верифікації програм, на базі цих логік розроблено низку систем і мов специфікацій. Епістемічні логіки використовуються для опису інформаційних та експертних систем, баз даних і баз знань з неповною інформацією. Водночас принципові обмеження класичної логіки предикатів, яка лежить в основі традиційних модальних логік, висувають на перший план задачу побудови нових, програмно-орієнтованих класів логічних формалізмів модального типу. Такими є композиційно-номінативні модальні логіки (КНМЛ), які поєднують можливості традиційних модальних логік [1] і композиційно-номінативних логік часткових квазіарних предикатів [2]. Важливим класом КНМЛ є транзиційні модальні логіки (ТМЛ), вони відбивають аспект зміни й розвитку предметних областей. В межах ТМЛ природним чином можуть розглядатися традиційні модальні логіки. Низку класів ТМЛ еквітонних (монотонних) предикатів запропоновано та досліджено, зокрема, в роботах [3, 4]

Метою даної роботи є побудова та дослідження нових класів КНМЛ. Запропоновано ТМЛ часткових квазіарних предикатів, *не обмежених* умовою монотонності. Підкласами ТМЛ є мультимодальні (ММЛ) та темпоральні (ТмМЛ) логіки, в межах ММЛ виділено ТМЛ епістемічного

© О.С. Шкільняк, 2014

типу та загальні ТМЛ. Описано семантичні моделі та мови чистих першопорядкових ТМЛ зазначених класів, розглянуто їх семантичні властивості. Показан а відмінність ТМЛ немонотонних предикатів від ТМЛ еквітонних предикатів.

Поняття, які в цій роботі не визначаються, тлумачимо в сенсі робіт [2–4].

1. Транзиційні модальні системи

Основним семантичним поняттям КНМЛ є поняття композиційно-номінативної модальної системи (КНМС). Такі системи описують світи розгляду модальної логіки і є моделями цих світів. КНМС – це об'єкт вигляду $\boldsymbol{M} = (Cms, Fm, Im)$. Тут Cms – композиційна модальна система (КМС), вона задає семантичні аспекти світу; Fm – множина формул відповідної мови КНМЛ; Im – відображення інтерпретації формул на станах світу.

КМС є семантичними моделями реляційного типу. Вони мають вигляд $Cms = (S, R, Pr, C)$, де S – множина станів світу, R – множина відношень на S вигляду $\rho \subseteq S \times S^n$, Pr – множина предикатів на станах світу, C – множина композицій на Pr.

В роботі розглядаємо чисті першопорядкові КНМЛ. Для них S – це множина алгебраїчних систем вигляду $\alpha = (A_\alpha, Pr_\alpha)$, де Pr_α – множина квазіарних предикатів вигляду ${}^V A_\alpha \to \{T, F\}$, їх називаємо предикатами стану α.

Множина $A = \bigcup\limits_{\alpha \in S} A_\alpha$ – це множина усіх базових даних світу. Предикати вигляду ${}^V A \to \{T, F\}$ назвемо глобальними.

Для чистих першопорядкових КНМЛ множина композицій задається базовими загальнологічними композиціями кванторного рівня $\neg$, $\vee$, $\mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}$, $\exists x$ та базовими модальними композиціями.

Нагадаємо, що V-квазіарний предикат на A – це функція вигляду ${}^V A \to \{T, F\}$, де ${}^V A$ – множина всіх V-іменних множин (V-ІМ) над A, $\{T, F\}$ – множина істиннісних значень. V-ІМ над A – це однозначна функція вигляду $d : V \to A$, де V та A – множини предметних імен (змінних) та предметних значень. Подаємо V-ІМ як $[v_1 \mapsto a_1, ..., v_n \mapsto a_n, ...]$, де $v_i \in V$, $a_i \in A$. Для V-ІМ задаємо операції вилучення компоненти $\|_{-x}$, накладки ∇, реномінації $\mathrm{r}_{\bar{x}}^{\bar{v}}$.

Ім'я $x \in V$ (строго) неістотне для квазіарного предиката P, якщо для довільних $d_1, d_2 \in {}^V A$ таких, що $d_1\|_{-x} = d_2\|_{-x}$, маємо $P(d_1) = P(d_2)$.

Предикат P еквітонний (монотонний), якщо: $P(d)\downarrow$ та $d \subseteq d' \Rightarrow P(d')\downarrow = P(d)$.

Області істинності та хибності предиката $P : {}^V A \to \{T, F\}$ визначаються так:
$T(P) = \{d \in {}^V A \mid P(d) = T\}$, $F(P) = \{d \in {}^V A \mid P(d) = F\}$.

Предикат $P : {}^V A \to \{T, F\}$ (частково) істинний, або неспростовний, якщо $F(P) = \varnothing$.

Композиції $\neg$, $\vee$ задамо через області істинності й хибності відповідних предикатів:

$T(\neg P) = F(P)$, $F(\neg P) = T(P)$;

$T(P \vee Q) = T(P) \cup T(Q)$, $F(P \vee Q) = F(P) \cap F(Q)$.

Композиція реномінації $\mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}$ визначається так:

$$\mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(f)(d) = f(\mathrm{r}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(d)).$$

Транзиційні модальні системи (ТМС) – це КНМС, у яких R складається з відношень вигляду $\mathrm{R} \subseteq S \times S$. Трактуємо їх як відношення переходу (досяжності) на станах.

ТМС із множиною відношень $R = \{\triangleright_i \mid i \in I\}$ та базовими модальними композиціями K_i, $i \in I$, у яких кожному $\triangleright_i \in R$ зіставлено відповідну K_i, назвемо *мультимодальними* (ММС).

Загальні ТМС є окремим випадком ММС, для них R складається з єдиного відношення $\triangleright$ та наявна єдина базова модальна композиція $\Box$ (необхідно). Для загальних ТМС задають похідну композицію $\Diamond$ (можливо): $\Diamond P$ означає $\neg\Box\neg P$.

ТМС, у яких R складається з єдиного бінарного відношення, а базовими модальними композиціями є $\Box_\uparrow$ (завжди буде) та $\Box_\downarrow$ (завжди було), називають *темпоральними* (ТмМС).

Для ТмМС також задають похідні композиції $\Diamond_\uparrow$ (колись буде) і $\Diamond_\downarrow$ (колись було): $\Diamond_\uparrow P$ означає $\neg\Box_\uparrow\neg P$; $\Diamond_\downarrow P$ означає $\neg\Box_\downarrow\neg P$.

Опишемо мову чистих першопорядкових КНМС. Алфавіт мови: множина V предметних імен; множина Ps предикатних символів (сигнатура мови); символи базових композицій $\neg$, $\vee$, $R_{\bar{x}}^{\bar{v}}$, $\exists x$; множина Ms символів базових модальних композицій (модальна сигнатура).

Множина Fm формул мови визначається індуктивно. Маємо $Ps \subseteq Fm$; а далі:

$\Phi, \Psi \in Fm \Rightarrow \neg\Phi, \vee\Phi\Psi, R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\Phi, \exists x\Phi \in Fm$;

$\Phi \in Fm$ та $\mathfrak{M} \in Ms \Rightarrow \mathfrak{M}\Phi \in Fm$.

Tun КНМС задається її модальною сигнатурою Ms, однотипністю відношень із R для кожного $\mathfrak{M} \in Ms$ та сигнатурою синтетичної неістотності [3].

Задамо відображення інтерпретації атомарних формул на станах $Im : Ps \times S \to Pr$. При цьому має виконуватись умова $Im(p, \alpha) \in Pr_\alpha$, це означає, що базові предикати є предикатами станів. Таке Im продовжимо до відображення $Im : Fm \times S \to Pr$ інтерпретації формул на світах:

$Im(\neg, \alpha) = \neg(Im(\Phi, \alpha))$;

$Im(\vee\Phi\Psi, \alpha) = \vee(Im(\Phi, \alpha), Im(\Psi, \alpha))$;

$Im(R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\Phi, \alpha) = \mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(Im(\Phi, \alpha))$;

для кожних $d\in {}^{V}A$ задаємо $Im(\exists x\Phi,\alpha)(d) =$

$$= \begin{cases} T, \text{ якщо існує } a\in A_\alpha\colon Im(\Phi,\alpha)(d\nabla x\mapsto a)=T,\\ F, \text{ якщо } Im(\Phi,\alpha)(d\nabla x\mapsto a)=F \text{ для всіх } a\in A_\alpha,\\ \text{невизначене в усіх інших випадках.}\end{cases}$$

Предикати, які є значеннями немодалізованих формул (при їх побудові не використовуються символи із *Ms*), належать до предикатів станів.

Визначення *Im* для формул вигляду $\mathbin{⌘}\Phi$ конкретизуємо залежно від різновидності ТМС.

У випадку ММС для формул вигляду $K_i\Phi$, де $K_i\in Ms$, для кожних $\alpha\in S$ та $d\in {}^{V}A$ задаємо

$Im(K_i\Phi,\alpha)(d) =$

$$= \begin{cases} T, \text{ якщо } Im(\Phi,\delta)(d)=T \text{ для всіх } \delta\in S:\ \alpha\rhd_i\delta,\\ F, \text{ якщо існує } \delta\in S:\alpha\rhd_i\delta \text{ та } Im(\Phi,\delta)(d)=F,\\ \text{невизначене в усіх інших випадках.}\end{cases}$$

Якщо для $\alpha\in S$ не існує такого β, що $\alpha\rhd_i\beta$, то $Im(K_i\Phi,\alpha)(d)\uparrow$ для кожного $d\in {}^{V}A$.

У випадку ТмМС для формул вигляду $\Box_\uparrow\Phi$ та $\Box_\downarrow\Phi$ для кожних $\alpha\in S$ та $d\in {}^{V}A$ задаємо:

$Im(\Box_\uparrow\Phi,\alpha)(d) =$

$$= \begin{cases} T, \text{ якщо } Im(\Phi,\delta)(d)=T \text{ для всіх } \delta\in S:\ \alpha\rhd\delta,\\ F, \text{ якщо існує } \delta\in S:\alpha\rhd\delta \text{ та } Im(\Phi,\delta)(d)=F,\\ \text{невизначене в усіх інших випадках.}\end{cases}$$

$Im(\Box_\downarrow\Phi,\alpha)(d) =$

$$= \begin{cases} T, \text{ якщо } Im(\Phi,\delta)(d)=T \text{ для всіх } \delta\in S:\ \delta\rhd\alpha,\\ F, \text{ якщо існує } \delta\in S:\delta\rhd\alpha \text{ та } Im(\Phi,\delta)(d)=F,\\ \text{невизначене в усіх інших випадках.}\end{cases}$$

Якщо для $\alpha\in S$ не існує такого β, що $\alpha\rhd\beta$, то для кожного $d\in {}^{V}A$ вважаємо $Im(\Box_\uparrow\Phi,\alpha)(d)\uparrow$.

Якщо для $\alpha\in S$ не існує такого β, що $\beta\rhd\alpha$, то для кожного $d\in {}^{V}A$ вважаємо $Im(\Box_\downarrow\Phi,\alpha)(d)\uparrow$.

Предикат $Im(\Phi,\alpha)$, який є значенням формули Φ у стані α, позначаємо Φ_α.

Формула Φ *істинна в стані* α (позначаємо $\alpha\models\Phi$), якщо Φ_α – істинний предикат.

Формула Φ *істинна в КНМС* $\boldsymbol{M}$ (позн. $\boldsymbol{M}\models\Phi$), якщо для кожного $\alpha\in S$ предикат Φ_α є істинним. Формула Φ *усюди істинна* (позн. $\models\Phi$), якщо $\boldsymbol{M}\models\Phi$ для всіх КНМС $\boldsymbol{M}$ одного типу.

Залежно від умов, накладених на відношення переходу, можна визначати різні класи ТМС. Традиційно ці відношення розглядають як рефлексивні, симетричні чи транзитивні.

Для ММС розглянемо випадки, коли всі відношення переходу однотипні (рефлексивні, симетричні чи транзитивні). Якщо вони рефлексивні, то в назві ММС пишемо *R*; якщо транзитивні, то пишемо *T*; якщо симетричні, то пишемо *S*.

Отримуємо такі чисті типи ММС:

R-ММС, *T*-ММС, *S*-ММС, *RT*-ММС, *RS*-ММС, *TS*-ММС, *RTS*-ММС.

ММС із скінченними множинами однотипних відношень переходу назвемо *епістемічними*, або ММС епістемічного типу. Загальні ТМС можна трактувати як окремий випадок епістемічних.

Розглядаючи для ТмМС випадки, коли відношення переходу може бути рефлексивним, симетричним чи транзитивним, маємо такі їх класи:

R-ТмМС, *T*-ТмМС, *S*-ТмМС, *RT*-ТмМС, *RS*-ТмМС, *TS*-ТмМС, *RTS*-ТмМС.

2. Властивості транзиційних модальних систем

При умові $d\notin {}^{V}A_\delta$ постає питання: як задати значення $\Phi_\delta(d)$? Залежно від відповіді на нього для логік еквітонних предикатів виділено [3] ТМС із сильною та із загальною умовами визначеності на станах. Для загального випадку КНМЛ квазіарних предикатів ми виділяємо предикати станів та глобальні предикати. Предикати, які є значеннями немодалізованих формул, належать до предикатів станів. Вони задаються так: для $d\in {}^{V}A$ вважаємо $\Phi_\delta(d)=\Phi_\delta(d_\delta)$, де d_δ позначає ІМ $[v\mapsto a\in d\mid a\in A_\delta]$. Неформально це означає, що предикати стану δ "відчувають" лише компоненти вигляду $v\mapsto a$ із $a\in A_\delta$.

Символи модальних композицій можна проносити через реномінації.

Теорема 1. Для кожних $⌘\in Ms$, $\Phi\in Fm$, $d\in {}^{V}A$ маємо $R^{\bar v}_{\bar x}\mathbin{⌘}\Phi(d)=\mathbin{⌘}R^{\bar v}_{\bar x}\Phi(d)$

Тут і надалі вважаємо: $Ms=\{\Box\}$ для випадку загальних ТМС, $Ms=\{\Box_\uparrow,\Box_\downarrow\}$ для випадку ТмМС, $Ms=\{K_i\mid i\in I\}$ для випадку ММС.

Наслідок 1. Кожна формули вигляду $R^{\bar v}_{\bar x}\mathbin{⌘}\Phi\leftrightarrow\mathbin{⌘}R^{\bar v}_{\bar x}\Phi$, де $⌘\in Ms$, всюди істинна.

Розглянемо взаємодію в ТМС модальних композицій та кванторів.

Для ТМЛ еквітонних предикатів формули вигляду $\mathbin{⌘}\forall x\Phi\to\forall x\mathbin{⌘}\Phi$ та $\exists x\mathbin{⌘}\Phi\to\mathbin{⌘}\exists x\Phi$ всюди істинні [3, 4]. Це не так для загального випадку ТМЛ немонотонних (нееквітонних) предикатів.

Приклад 1. Формули вигляду $\Box\forall x\Phi\to\forall x\Box\Phi$ та $\exists x\Box\Phi\to\Box\exists x\Phi$ не є всюди істинними.

Побудуємо загальну ТМС, в якій спростовується формула вигляду $\Box\forall x\Phi\to\forall x\Box\Phi$. Нехай $S=\{\alpha,\beta\}$, $R=\{\alpha\rhd\beta\}$, $A_\alpha=\{a\}$, $A_\beta=\{b\}$. Візьмемо $p\in Ps$, для якого неістотні усі імена, окрім x. Задамо $p_\alpha(\varnothing)=F$, $p_\beta(\varnothing)=F$, $p_\beta([x\mapsto b])=T$. Тоді маємо $(\forall x\,p)_\beta(\varnothing)=T$, звідки $(\Box\forall x\,p)_\alpha(\varnothing)=T$. Водночас $(\Box p)_\alpha([x\mapsto a])=F$, адже в силу $[x\mapsto a]_\beta=\varnothing$ маємо $p_\beta([x\mapsto a]_\beta)=p_\beta(\varnothing)=F$. Звідси $(\forall x\Box p)_\alpha(\varnothing)=F$. Отже, $(\Box\forall x\,p\to\forall x\Box p)_\alpha(\varnothing)=F$, тому $\alpha\not\models\Box\forall x\,p\to\forall x\Box p$.

Побудуємо загальну ТМС, в якій спростовується формула вигляду $\exists x\Box\Phi\to\Box\exists x\Phi$. Нехай $S=\{\alpha,\beta\}$, $R=\{\alpha\triangleright\beta\}$, $A_\alpha=\{a,b\}$, $A_\beta=\{b\}$. Візьмемо $p\in Ps$, для якого неістотні усі імена, окрім x, y. Задамо $p_\beta([x\mapsto b,y\mapsto b])=F$, $p_\beta([y\mapsto b])=T$. Із $p_\beta([x\mapsto b,y\mapsto b])=F$, враховуючи $A_\beta=\{b\}$, маємо $\exists x\,p_\beta([y\mapsto b])=F$, звідки $\Box\exists x\,p_\alpha([y\mapsto b])=F$. Із $p_\beta([y\mapsto b])=T$ маємо $\Box p_\alpha([x\mapsto a,y\mapsto b])=T$, звідки $\exists x\Box p_\alpha([y\mapsto b])=T$. Тому $(\exists x\Box p\to\Box\exists x\,p)_\alpha([y\mapsto b])=F$, звідки $\alpha\not\models\exists x\Box p\to\Box\exists x\,p$.

Зауважимо, що предикати p_β нееквітоні в обох побудованих тут ТМС.

Приклад 2. Формули вигляду $\Box\exists x\Phi\to\exists x\Box\Phi$ та $\forall x\Box\Phi\to\Box\forall x\Phi$ не є всюди істинними.

Побудуємо загальну ТМС, в якій спростовується формула вигляду $\Box\exists x\Phi\to\exists x\Box\Phi$. Нехай $S=\{\alpha,\beta\}$, $R=\{\alpha\triangleright\beta\}$, $A_\alpha=\{a\}$, $A_\beta=\{a,b\}$. Візьмемо $p\in Ps$, для якого неістотні усі імена, окрім x. Задамо $p_\alpha([x\mapsto a])=F$, $p_\beta([x\mapsto a])=F$, $p_\beta([x\mapsto b])=T$. Тоді $(\Box p)_\alpha([x\mapsto a])=F$, звідки $(\exists x\Box p)_\alpha([x\mapsto a])=F$ згідно $A_\alpha=\{a\}$. Але згідно $p_\beta([x\mapsto b])=T$ маємо $(\exists x\,p)_\beta([x\mapsto a])=T$, звідки $(\Box\exists x\,p)_\alpha([x\mapsto a])=T$. Отже, $(\Box\exists x\,p\to\exists x\Box p)_\alpha([x\mapsto a])=F$, тому $\alpha\not\models\Box\exists x\,p\to\exists x\Box p$.

Загальну ТМС, в якій спростовується формула вигляду $\forall x\Box\Phi\to\Box\forall x\Phi$, будуємо аналогічно, задаючи $p_\alpha([x\mapsto a])=T$, $p_\beta([x\mapsto a])=T$, $p_\beta([x\mapsto b])=F$. Тоді $(\forall x\,p)_\beta([x\mapsto a])=F\Rightarrow(\Box\forall x\,p)_\alpha([x\mapsto a])=F$. Із $R=\{\alpha\triangleright\beta\}$ маємо $p_\beta([x\mapsto a])=T\Rightarrow(\Box p)_\alpha([x\mapsto a])=T$. Згідно $A_\alpha=\{a\}$ маємо $(\forall x\Box p)_\alpha([x\mapsto a])=T$. Отже, $(\forall x\Box p\to\Box\forall x\,p)_\alpha([x\mapsto a])=F$, тому $\alpha\not\models\forall x\Box p\to\Box\forall x\,p$.

Зауважимо, що предикати, які фігурують у прикладі 2 – еквітонні.

Аналогічні контрмоделі можна збудувати для випадків ММС та ТмМС.

Отже, формули вигляду $\forall x\Cmd\Phi\to\Cmd\forall x\Phi$ та $\Cmd\exists x\Phi\to\exists x\Cmd\Phi$ теж не є всюди істинними, причому вже для ТМЛ еквітонних предикатів.

Формула $\forall x\Box\Phi\to\Box\forall x\Phi$ відома як формула Баркан, $\Box\forall x\Phi\to\forall x\Box\Phi$ – це її конверсія. Як показують приклади 1 та 2, формула Баркан та її конверсія не є всюди істинними. Водночас [3] конверсія формули Баркан істинна в кожній загальній ТМС еквітонних предикатів.

Висновки

В роботі запропоновано і досліджено новий клас програмно-орієнтованих логічних формалізмів – транзиційні модальні логіки часткових квазіарних предикатів, не обмежених умовою монотонності (еквітонності). Описано семантичні моделі та мови чистих першопорядкових ТМЛ, досліджено їх семантичні властивості. Залежно від умов, накладених на відношення переходу, визначено різні класи ТМЛ. Розглянуто взаємодію модальних композицій із реномінаціями та кванторами. Показана відмінність пропонованих класів ТМЛ немонотонних предикатів та відповідних класів ТМЛ монотонних (еквітонних) предикатів.

Дослідження ТМЛ планується продовжити в наступних роботах. Зокрема, будуть розглянуті властивості відношень логічного наслідку для множин специфікованих станами формул.

Список використаних джерел

1. *Cocchiarella N.B.* Modal logic / N.B. Cocchiarella, M.A. Freund. – Oxford University Press, 2008. – 267 p.
2. *Нікітченко М.С.* Прикладна логіка / М.С. Нікітченко, С.С. Шкільняк. – Київ: ВПЦ Київський університет, 2013. – 278 с.
3. *Шкільняк О.С.* Семантичні властивості композиційно-номінативних модальних логік / О.С. Шкільняк // Проблеми програмування. – 2009. – № 4. – С. 11–23.
4. *Шкільняк О.С.* Семантичні моделі та секвенційні числення транзиційних модальних логік / О.С. Шкільняк // Компьютерная математика. – 2013. – Вып. 1. – С. 141–150.

References

1. COCCHIARELLA, N. and FREUND, M. (2008). *Modal logic*. Oxford University Press.
2. NIKITCHENKO, M. and SHKILNIAK, S. (2013). *Applied logic*. Kyiv: VPC Kyivskyi Universytet.
3. SHKILNIAK, O. (2009). Semantic properties of transitional modal logics. In *Problems in progamming*. № 4, p. 11–23.
5. SHKILNIAK, O. (2013). Semantic models and sequent calculi of transitional modal logics. In *Computer mathematics*. **1**, p. 141–150.

Надійшла до редколегії 30.09.2014

УДК 519.925.51

Юнькова О.О.[1], к.ф.-м.н.,
Кулян А.В.[2], студ.,
Прокопюк О.С.[2], студ.

Про ідентифікацію параметрів у задачах оптимального інвестування

[1]Київський національний економічний університет імені Вадима Гетьмана, м. Київ, 03680, пр-т Перемоги, 54/1
e-mail: v.kulyan@gmail.com
[2]Київський національний університет імені Тараса Шевченка,
03068, м. Київ, пр-т Глушкова, 4д
e-mail: firebird0001@gmail.com

O.O.[1] Yun'kova, Ph.D.,
A.V. Kulian[2], stud.,
O.S. Prokopyuk[2] , stud.

On the identification of parameters in problems of optimal investment

[1]Vadym Getman National Economics University of Kyiv, 03680, Kyiv, Peremogy ave., 54/1
e-mail: v.kulyan@gmail.com
[2]Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03068, Kyiv, Glushkova ave., 4d
e-mail: firebird0001@gmail.com

Розглядається задача про побудову оптимальних значень параметрів математичних моделей, що застосовуються при інвестуванні у цінні папери.

Ключові слова: математична модель, ідентифікація параметрів, оптимальне інвестування, портфель акцій.

This study aims to address the problem of identification of parameters of mathematical models of dynamic processes that can be described by ordinary differential equations and systems of equations. In this paper we outline three different approaches to build optimal parameters of parametric models of dynamic systems. On the example of mathematical models of dynamic formation of the market value per share and stock portfolio developed algorithms for constructing optimal values of the parameters of such models. The algorithm can determine the multiple parameters estimation of mathematical models of dynamic processes in the class of ellipsoidal sets. When solving applied problems of financial analysis it allows researchers to obtain guaranteed financial performance of investment operations. The algorithm is based on the use of iterative procedure at each stage which formed ellipsoids containing the model parameters obtained through solving the additional problems of parametric identification. Each point in the space of such a set of model parameters is internal, or belongs to its boundary.

Key Words: mathematical model, control parameters of portfolio, diversification of the investment portfolio

Статтю представив д.т.н., проф. Гаращенко Ф.Г.

Як показано в роботі [2], математична модель формування ринкової вартості акції та портфеля акцій мають вигляд

$$\dot{r}_i = \frac{dr_i}{dt} = f(r_i, t, \alpha),\ r_i(t_0) = r_{i_0},\ t \in (t_0, T), \qquad (1)$$

$$i = \overline{1, n}.$$

і

$$\dot{r}_p = f^p(r_p, x_i, \dot{x}_i, r_i, \dot{r}_i, t) \qquad (2)$$

відповідно, і є заданими параметрично. Тут r_i – очікувана ринкова вартість акції; r_p – очікувана ринкова вартість інвестиційного портфеля; x_i – частка акцій i – того виду у портфелі; t – час.

Задача про оптимізацію портфеля акцій з точки зору його прибутковості у статичному випадку має вигляд

$$r_p = \sum_i x_i r_i \to \max_x .$$

При практичному інвестуванні вона розглядається у такій постановці

$$r_p(T) = \sum_i x_i(T) r_i(T) \to \max_x$$

і полягає у побудові оптимального за прибутковістю у кінцевий момент часу інвестиційного портфеля.

Праві частини рівнянь системи (1) є лінійними і залежать від параметрів. Для забезпечення можливості її інтегрування

© О.О. Юнькова, А.В. Кулян, О.С. Прокопюк 2014

$$\frac{dr_i}{dt} = (\alpha_1 SM_{ind}(t) + \alpha_2 I(t))r_i(t) + \alpha_3 r_j(t)),$$
$$i, j = \overline{1,n}$$

побудуємо процедуру визначення параметрів α. При різних постановках задачі за вектор параметрів можна розглядати вектори $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \rho_{ij})$ або $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$, $\alpha \in A$,

де A – обмежена замкнута множина.

Скористаємось при цьому відомою статистичною інформацією про динаміку ринкової вартості відповідних акцій $\overline{r}_i(t)$.

На основі цієї динаміки розіб'ємо інтервал інтегрування на підінтервали $t_0 < t_1 < t_2 < ... < t_T$. Будемо шукати оптимальні на підінтервалах значення параметрів α. Для цього на початковому підінтервалі для i – тої акції і для вибраного значення параметра α_0 розв'яжемо задачу Коші

$\dot{r}_i(t) = f(r_i, t, \alpha_0)$, $r_i(t_0) = r_{i0}$, $t \in (t_0, t_1)$.

З метою отримання оптимального значення параметра α_0^* сформулюємо оптимізаційну задачу

$$\alpha_0^* = arg \min_{\alpha \in A}(r_i^0(r(t_0), t, \alpha) - \overline{r}_i(t))^2. \qquad (3)$$

Тут через $r^0(r(t_0), t, \alpha)$ позначено розв'язок задачі Коші на першому інтервалі. Таким чином, можемо визначити оптимальне, у розумінні критерія якості (3), значення параметрів моделі (1) на першому інтервалі. Сформулюємо та розв'яжемо аналогічні задачі на інших інтервалах розбиття. На k – тому кроці алгоритму процедура розрахунку оптимальних значень параметрів динамічної моделі є такою:

1. Розв'язуємо задачу Коші

$\dot{r}_i(t) = f(r_i, t, \alpha_{k-1})$, $r_i(t_{k-1}) = r_{i_{k-1}}$ $t \in (t_{k-1}, t_k)$.

2. Будуємо траєкторію руху системи із точки t_{k-1} до точки t_k при значенні параметра α_{k-1}^*. При цьому значенням функції у момент часу t_k буде r_k.
3. Оптимізуємо параметр α системи на цьому інтервалі. Для цього сформулюємо та розв'яжемо оптимізаційну задачу

$$\alpha_k^* = arg \min_{\alpha \in A}(r^0(r(t_{k-1}), t, \alpha) - \overline{r}_{k-1}(t))^2 \qquad (4)$$

Розв'язок задачі (4) дозволяє оптимально перейти із точки r_{k-1} у точку r_k. Наведена вище процедура дає можливість на основі відомої статистичної інформації будувати послідовність значень параметрів α математичної моделі для моделювання поведінки та прогнозування очікуваної прибутковості акції r_i у вибрані моменти заданого інвестором інтервалу часу.

Розглянемо алгоритм побудови гарантованої множинної оцінки параметрів для математичної моделі загального вигляду (1) у просторі R^n параметрів α.

1. Алгоритм 1 побудови допустимої множини параметрів математичної моделі (1).

Вектор параметрів моделі запишемо у вигляді $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ за умови $x(t_0) = x_0$ при $t \in [t_0, t_1]$.

Розглянемо точку α_0 у просторі параметрів математичної моделі

$\alpha_0 = (\alpha_{0_1}, \alpha_{0_2})$.

І нехай це значення параметрів буде розв'язком задачі параметричної ідентифікації моделі (1). Навколо точки α_0 опишемо коло одиничного радіуса

$$(\alpha_1 - \alpha_{0_1})^2 + (\alpha_2 - \alpha_{0_2})^2 = 1$$

з центром у т. $(\alpha_{0_1}, \alpha_{0_2})$. Довжина кола при цьому буде $l = 2\pi$. Поділимо цю лінію на n рівних частин, причому значення n вибирається у залежності від точності отриманого розв'язку задачі з побудови гарантованої множинної оцінки параметрів. Розглянемо довільну точку $\alpha_k = (\alpha_{k_1}, \alpha_{k_2})$.

Проведемо дотичну до кола у цій точці. Рівнянням її буде

$$F'_{\alpha_1}(\alpha_{k_1}, \alpha_{k_2})(\alpha_1 - \alpha_{k_1}) = F'_{\alpha_2}(\alpha_{k_1}, \alpha_{k_2})(\alpha_2 - \alpha_{k_2}).$$

Рівняння нормалі до дотичної у цій точці матиме вигляд

$$F'_{\alpha_1}(\alpha_{k_1}, \alpha_{k_2})(\alpha_2 - \alpha_{k_2}) = F'_{\alpha_2}(\alpha_{k_1}, \alpha_{k_2})(\alpha_1 - \alpha_{k_1}).$$

Нові значення параметрів α, які задовольняють умовам програмного функціонування системи, будемо шукати на нормалі. Із рівняння нормалі визначимо α_2

$$\alpha_2 = \frac{F'_{\alpha_2}(\alpha_{k_1}, \alpha_{k_2})(\alpha_1 - \alpha_{k_1})}{F'_{\alpha_1}(\alpha_{k_1}, \alpha_{k_2})} + \alpha_{k_2}.$$

Нове положення координати α_2 визначимо, змінивши положення координати α_1

$$\alpha_{N_1} = \alpha_1 + \delta\alpha_1, \quad \delta > 0.$$

$$\alpha_{N_2} = \frac{F'_{\alpha_2}(\alpha_{k_1}, \alpha_{k_2})(\alpha_1 + \delta\alpha_1 - \alpha_{k_1})}{F'_{\alpha_1}(\alpha_{k_1}, \alpha_{k_2})} + \alpha_{k_2}.$$

Таким чином, отримано нове положення значення параметра $\alpha_N \in A$, де A – обмежена

замкнута множина параметрів математичної моделі

$\alpha_N = (\alpha_{N_1}, \alpha_{N_2})$.

Серед критеріїв якості для перевірки належності параметра допустимій множині можемо розглянути такі:

$$\sum_i (x^0(x_0, t_i, \alpha) - x_{\exp}(t_i))^2 < \varepsilon, \qquad (5)$$

$$\max_t (x^0(x_0, t, \alpha) - x_{\exp}(t)) < \varepsilon,\ t \in [t_0, t_1], \qquad (6)$$

Наведена вище процедура реалізує рух параметра α вздовж нормалі в один або інший бік до тих пір, доки виконується один із вибраних наведених вище критеріїв

Алгоритм 2 побудови допустимої множини параметрів математичної моделі (1).

Після побудови та аналізу розв'язків задачі ідентифікації параметрів математичної моделі формування ринкової вартості акції або портфеля акцій) визначимо точку, що найбільш віддалена від точки $D(\alpha_1^c, \alpha_2^c)$, координати якої визначимо за допомогою формул

$$\alpha_i^c = \frac{1}{k}\sum_{j=0}^{k} \alpha_i^j, \quad i = 1, 2.$$

Для цього розв'яжемо задачу одномірної оптимізації

$$R = \max_i L(\alpha_i, \alpha^c),$$

де $L(p, q)$ – функція відстані між точками p та q.

На границі кола $S(1, D)$ радіусу 1, із центром у точці $D(\alpha_1^c, \alpha_2^c)$ сформуємо довільну δ – сітку $\{y_i\}_{i \in K_s}$ з вузлами y_i. В кожному вузлі y_i побудуємо вектор зовнішньої нормалі $\overline{n}_{e_i}$ до кола за правилами, описаними вище, і розв'яжемо допоміжну задачу з побудови нових значень параметрів α аналогічно підходу, описаному в Алгоритмі 1.

Виконавши наведену процедуру для кожного із векторів $n_i, i \in K_n$ отримаємо новий набір точок $\alpha_{e_n} \in A$.

Опишемо еліпсоїд найменшого об'єму (еліпс найменшої площі у площині) навколо таким чином побудованих точок, який будемо називати "гарантованою еліпсоїдальною оцінкою" параметрів моделі (1), побудованою на основі критеріїв (5) або (6).

На основі розв'язків задачі параметричної ідентифікації математичної моделі (1) та відомих спостережень гарантовану множинну оцінку параметрів побудуємо у класі еліпсоїдальних множин

$$Q(B, d): \{(B(\alpha - d), \alpha - d) \le 1\}, \qquad (7)$$

де B - симетрична додатньо–визначена матриця, що задає геометрію множинної оцінки у просторі параметрів α, $\alpha \in R^n$; d – геометричний центр еліпсоїда, $d \in R^n$. Множину (7) будемо називати "гарантованою множинною оцінкою", якщо кожне значення параметра α, отримане для довільних спостережень, належить $Q(B, d)$.

Ітераційна процедура методу побудови гарантованої множинної оцінки реалізує уточнення елементів матриці B та вектора d на кожному кроці. Початкову матрицю B оберемо одиничною $B^0 = E$, а початкове положення центру d визначимо як центр мас

$$d^0 = \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k} \alpha_j,$$

де k – кількість точок.

На $k+1$ – кроці процедури формули для визначення B^{k+1} та d^{k+1} мають вигляд

$$B^{k+1} = B^k + \lambda_1^{k+1} \nabla_B \{(B^k(\alpha - d^k), \alpha - d^k)\},$$

$$d^{k+1} = d^k + \lambda_2^{k+1} \nabla_d \{(B^k(\alpha - d^k), \alpha - d^k)\},$$

де λ_1^{k+1} та λ_2^{k+1} такі, що

$$(B^{k+1}(\lambda_1^{k+1})(\alpha_{\bar{i}} - d^{k+1}(\lambda_2^{k+1}), \alpha_{\bar{i}} - d^{k+1}(\lambda_2^{k+1})) <$$

$$(B^k(\alpha_{\bar{i}} - d^k), \alpha_{\bar{i}} - d^k),$$

де $\bar{i} = \arg\max_i (B(\alpha_i - d), \alpha_i - d)$.

$$(B^j(\alpha - d^j), \alpha - d^j) < 1.$$

На границі сфери $S(1, d^j)$ з центром у точці d^j, (j – номер кроку процедури такий, що $(B^j(p - d^j), p - d^j) < 1$

сформуємо довільну δ – сітку $\{y_i\}_{i \in K_s}$ з вузлами y_i. У кожному вузлі за допомогою описаного методу побудови еліпсоїда найменшого об'єму навколо заданих точок знаходимо гарантовану множинну оцінку параметрів, яка, як і побудована за допомогою Алгоритму 1, забезпечує виконання обраних критеріїв якості.

Іншим підходом до розв'язання задачі параметричної ідентифікації є застосування функцій чутливості.

Для зручності перетворень праву частину позначимо через $f(t,r,\alpha),$ де $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2).$ Вважатимемо також, що мають місце початкові умови $r(t_0)=r_0=r_0(\alpha),\quad t_0=t_0(\alpha)$, а також, що α є скаляром і $\alpha=\alpha_1$, оскільки при короткотерміновому моделюванні динаміки формування ціни акції α_2 є сталою. У такій постановці $\rho_{ij}-$ коефіцієнти кореляції між акціями, які можна обчислити на основі відомої статистичної інформації. Згідно [2], за умови, що права частина (1) неперервна за своїми аргументами і неперервно-диференційована за r,α, а також за неперервної диференційованості функцій r_0,t_0 за α_1 існує неперервна похідна

$$u(t,\alpha_1)=\frac{\partial r(t,\alpha_1)}{\partial\alpha_1}.$$

Ця похідна задовольняє диференціальному рівнянню

$$\frac{du}{dt}=\frac{\partial f(r,t,\alpha_1)}{\partial r}u+\frac{\partial f(r,t,\alpha_1)}{\partial\alpha_1} \tag{8}$$

при початковій умові

$$u(t_0)=\frac{dr_0(\alpha_1)}{d\alpha_1}-f(r_0(\alpha_1),t_0(\alpha_1),\alpha_1)\frac{dt_0(\alpha_1)}{d\alpha_1}. \tag{9}$$

Рівняння (9) отримано прямим диференціюванням $u(t,\alpha_1)$ за α_1, а початкова умова – із диференціювання інтегрального рівняння

$$r(t,\alpha_1)=\int\limits_{t_0(\alpha_1)}^{t}f(r(\tau,\alpha_1),\tau,\alpha_1)d\tau+r_0(t_0,\alpha_1)$$

і має вигляд

$$u(t,\alpha_1)=\frac{\partial r(t,\alpha_1)}{\partial\alpha_1}=$$

$$\int\limits_{t_0(\alpha_1)}^{t}\left[\begin{array}{l}\dfrac{\partial f(r(\tau,\alpha_1),\tau,\alpha_1)}{\partial r}u(\tau,\alpha_1)+\\ \dfrac{\partial f(r(t,\alpha_1),\tau,\alpha_1)}{\partial\alpha_1}\end{array}\right]d\tau+$$

$$\frac{dr_0(\alpha_1)}{d\alpha_1}-f(r(t_0(\alpha_1),\alpha_1),t_0(\alpha_1),\alpha_1)\frac{dt_0(\alpha_1)}{d\alpha_1}. \tag{10}$$

Початкову умову для функції чутливості $u(t_0)$ отримаємо, поклавши в (10) $t=t_0$.

Застосуємо функцію чутливості до ідентифікації параметрів α_1,α_2 математичної моделі (1). Математична задача має такий вигляд $\min\limits_{\alpha_{i1},\alpha_{i2}}(r_i(t,\alpha_{i1},\alpha_{i2})-z_i(t))^2,\quad t\in[t_0,T].$

Тут $z_i(t)-$ спостереження за поведінкою ціни акції на ринку.

2. Алгоритм 3 побудови параметрів математичної моделі (1).

Розглянемо рівняння формування динаміки ринкової вартості однієї акції у вигляді

$$\frac{dr_i(t)}{dt}=(\alpha_1 SM_{ind}(t)+\alpha_2 I(t))r_i(t)+\sum_{i=1}^{n}\rho_{ij}r_j(t)+\xi(t), \tag{11}$$

Тут α_1,α_2- параметри моделі; $\rho_{ij}-$ враховує кореляційні залежності між акціями, $-1\le\rho_{ij}\le1$; $\varsigma(t)-$ вектор збурень.

У випадку, якщо $\alpha_1,\alpha_2=\text{const}$, із (20) можемо отримати

$$(\alpha_1 SM_{ind}(t)+\alpha_2 I(t))r(t)+\sum_{i=1}^{n}\rho_{ij}=(\xi(t)-\frac{dr}{dt})r^{-1}(t), \tag{12}$$

У матричному вигляді

$$\alpha=(\xi-\dot{R})R^{-1}. \tag{13}$$

Якщо вектори $\dot r,r,\xi$ є доступними для визначення, то (13) можна розглядати як прямий алгоритм ідентифікації параметрів математичної моделі. Похибка ідентифікації лінійно залежить від похибок визначень $\dot r,\xi$. Аналіз (13) вказує на те, що вплив похибок визначень r на оцінювання параметрів збільшується, якщо рівняння системи погано обумовлені, тобто коли матриця R близька до особливої, а визначник цієї матриці $|R|$ близький до 0. Для того, щоб рівняння

$$\dot R-\alpha R=\xi$$

було добре обумовленим, необхідно, щоб вектори $r_i(t)$ були незалежними. Якщо ж процес є стохастичним, то ця умова зводиться до некорельованості значень $r(t_i)$, $i=\overline{1,k}$.

Подальша процедура ідентифікації параметрів моделі зводиться до отримання розв'язку рівняння (13) для різних моментів часу $t\in[t_0,T]$.

Побудувавши розв'язки рівняння (13) для $k+2-$ моментів часу, отримаємо систему

із $k+2$ алгебраїчних рівнянь відносно невідомих параметрів моделі.

Розглянувши $\sum_{i=1}^{n}\rho_{ij}$ як параметр моделі, маємо можливість уточнити кореляційні залежності між акціями на збуреному фінансовому ринку.

Важливим недоліком першої частини алгоритму є те, що в ньому відсутнє усереднення або згладжування змінних, оскільки мають місце не лише ринкові, але і спекулятивні операції. Це може викликати великі похибки результатів обчислень у випадках, коли величини $\dot{r}, r, \xi$ спостерігаються у поєднанні зі збуреннями.

Помножимо (13) справа на r^T і осереднимо за інтервалом $t \in [t_0, T]$

$$\frac{1}{T}\int_{t_o}^{T}\dot{r}r^T dt + \frac{1}{T}\alpha\int_{t_o}^{T} rr^T dt = \frac{1}{T}\int_{t_o}^{T}\xi r^T dt\ .$$

Вважаючи, як і раніше, що $\alpha_1, \alpha_2 = \text{const}$, отримаємо

$$\alpha = (\int_{t_o}^{T}\xi r^T dt - \int_{t_o}^{T}\dot{r}r^T dt)(\int_{t_o}^{T} rr^T dt)^{-1}.$$

Модифікацією цього підходу може слугувати алгоритм розрахунку середніх значень параметрів на відрізку $[t_0, t_0 + T_k]$ при достатньо значній їх зміні в межах вказаного інтервалу

$$\alpha = (\int_{t_o}^{t_0+T_k}\xi r^T dt - \int_{t_o}^{t_0+T_k}\dot{r}r^T dt)(\int_{t_o}^{t_0+T_k} rr^T dt)^{-1}.$$

Список використаних джерел

1. *Шарп У.* Инвестиции / *Уильям Ф. Шарп, Гордон Дж. Александер, Джеффри В. Бэйли*. –Москва: Инфра-М, 1999. –с.1027.
2. Гаращенко Ф.Г. Качественный анализ математических моделей инвестиционного менеджмента / Гаращенко Ф.Г., Кулян В.Р., Рутицкая В.В. // Кибернетика и вычислительная техника. – 2005. – №148. –с. 3-10.

Помножимо (13) справа на r^T і осереднимо за інтервалом $t \in [t_0, T]$

$$\frac{1}{T}\int_{t_o}^{T}\dot{r}r^T dt + \frac{1}{T}\alpha\int_{t_o}^{T} rr^T dt = \frac{1}{T}\int_{t_o}^{T}\xi r^T dt\ .$$

Вважаючи, як і раніше, що $\alpha_1, \alpha_2 = \text{const}$, отримаємо

$$\alpha = (\int_{t_o}^{T}\xi r^T dt - \int_{t_o}^{T}\dot{r}r^T dt)(\int_{t_o}^{T} rr^T dt)^{-1}.$$

Модифікацією цього підходу може слугувати алгоритм розрахунку середніх значень параметрів на відрізку $[t_0, t_0 + T_k]$ при достатньо значній їх зміні в межах вказаного інтервалу

$$\alpha = (\int_{t_o}^{t_0+T_k}\xi r^T dt - \int_{t_o}^{t_0+T_k}\dot{r}r^T dt)(\int_{t_o}^{t_0+T_k} rr^T dt)^{-1}.$$

Побудувавши розв'язки рівняння (13) для $k+2-$моментів часу, отримаємо систему із $k+2$ алгебраїчних рівнянь відносно невідомих параметрів моделі. Розглянувши $\sum_{i=1}^{n}\rho_{ij}$ як параметр моделі, маємо можливість уточнити кореляційні залежності між акціями на збуреному фінансовому ринку.

Для математичних моделей динаміки формування ринкової вартості однієї акції та портфеля акцій розглянуто задачі про ідентифікацію параметрів. Розроблено алгоритми пошуку гарантованих множинних оцінок таких параметрів.

References

1. SHARPE, W., ALEXANDER, G. and BAILEY, J. (1995) *Investments*. New Jersey: Prentice Hall.
2. GARASHCHENKO, F., KULYAN, V. and RUTITSKAYA, V. (2005*)* Quality analysis of mathematical models of investment management: *Cybernetics and computing engineering*. 148. p.3-10.

Надійшла до редколегії 10.10.2014 р.

УДК 550.38:519.6

Яценко В. О.[1], д.т.-н., проф.
Кочкодан О. І.[1], аспірант
Макаричев М. В.[1], аспірант
Пашенковська І. С.[1], аспірант
Черемних О. С.[1], аспірант
Шолохов О. В.[1], провідний інженер

Ідентифікація білінійних систем та керування показниками Ляпунова

[1] Інститут космічних досліджень НАНУ-ДКАУ, 03680, м. Київ, вул. Академіка Глушкова, 40,
e-mail: vyatsenko@gmail.com

V. 0. Yatsenko[1], Ph.D, Professor
O. I. Kochkodan[1], Ph.D student
M. V. Makarychev[1], Ph.D student
I. S. Pashenkovska[1], Ph.D student
S. O. Cheremnikh[1], Ph.D student
O. V. Sholohov[1], leading engineer

Identification of bilinear system and control of Lyapunov exponents

[1] Space Research Institute of NASU-SSAU, 03680, Kyiv, Academik Glushkov str., 40,
e-mail: vyatsenko@gmail.com

В роботі на основі системно-теоретичного опису відкритих фізичних систем розглянуто проблему ідентифікації нелінійних процесів, математичні моделі яких приводяться до білінійного вигляду. При вирішенні поставлених задач використовувались методи теорії білінійних систем, теоретичної і експериментальної фізики, диференційної геометрії, математичної теорії систем. В роботі розглянуто проблему ідентифікації нелінійних процесів, математичні моделі яких приводяться до білінійного вигляду. Викладено сучасні результати щодо білінійних керованих динамічних систем та їх показників Ляпунова. При дослідженні моделей молекулярних систем використано методи керування процесами на макрорівні, динамічного хаосу та самоорганізації. В статті представлено розроблені алгоритми ідентифікації, орієнтовані на використання в адаптивних сенсорах та прецизійних приладах. Розв'язано задачу ідентифікації та реалізації певних нелінійних систем за експериментальними часовими рядами. Виявлено умови виникнення процесів самоорганізації в динамічних системах з електромагнітною взаємодією. На основі отриманих результатів покращено конструкцію чутливого елементу гравіметра та його математичну модель.

Ключові слова: білінійна модель, ідентифікація, керування показниками Ляпунова, сенсор

This paper focuses on identification nonlinear process problem which based on system-theoretical description of open systems that can be reduced to bilinear form. Bilinear systems theory methods, theoretical and experimental physics, differential geometry, and mathematical systems theory were used while solving these tasks. The problem of identification of non-linear processes, mathematical models of which are reduced to a bilinear form, is described in the paper. Results were used for bilinear controlled dynamic systems and Lyapunov exponents. Processes management at the macro level, dynamic chaos and self-organization were used while investigating molecular models. The paper presents the algorithms of identification, which are focused on the use of adaptive sensor and precision instruments. The problem of identification and implementation of certain non-linear system from experimental time series is solved and described in this paper. Conditions of self-organization processes in dynamic systems with electromagnetic interaction are defined. Based on the results, construction of Gravity sensing element and its mathematical model are improved.

Key Words: bilinear model, identification, control of Lyapunov exponents, sensor

Статтю представив д.т.н., проф. Гаращенко Ф.Г.

© В.О. Яценко, О.І. Кочкодан, М.В. Макаричев, І.С. Пашенковська, С.О. Черемних, О.В. Шолохов 2014

1. Проблеми керування та ідентифікації білінійних систем

Одним з головних питань сучасної кібернетики є розробка нелінійної теорії керування динамічними процесами [1]. На сьогодні ця надзадача далека від завершення і розділена на декілька чітко визначених напрямків [1]. Одним з них є теорія нелінійних систем, що приводяться до білінійного вигляду. Ця теорія спрямована на розв'язування задач аналізу нелінійних процесів з наступним синтезом систем керування (СК) зі зворотним зв'язком. Ефективність такої теорії істотно залежить від того, наскільки широкий клас нелінійних явищ може бути досліджено в рамках даної теорії. Тому нелінійні системи, що приводяться до білінійного вигляду, посідають особливе місце в теорії керування і математичній теорії систем [2-3]. Є досить широкий клас фізичних процесів з локально білінійною поведінкою, які необхідно вивчати з позицій глобального аналізу системних властивостей. Отже, проблема побудови білінійної системної теорії, орієнтованої на цей клас нелінійних явищ, є актуальною. Накопичений досвід в теорії керування, а також в інших галузях науки (теоретична фізика, синергетика, механіка) показав, що в багатьох аспектах в основі динаміки нелінійних процесів лежить білінійна поведінка. На цю особливість неодноразово вказували різні автори. В "фізичній" теорії керування також часто виникають задачі дослідження процесів білінійного типу. З концептуальної точки зору перспектива розвитку новітніх технологій на базі керованих мікропроцесорів була намічена в доповіді Р. Фейнмана на засіданні американського фізичного товариства в 1972 р [1].

Слід зазначити і наявність прикладних проблем, для вирішення яких необхідно використання нових методів [4-7]. Так, на сьогодні актуальною є проблема створення принципово нових аналітичних пристроїв на онові широкого використання закономірностей перетворення інформації динамічними системами, зокрема, нелінійних просторово розподілених динамічних систем з періодичною структурою. З'ясувалось, що в багатьох випадках достатньо використовувати білінійні системні властивості фізичних процесів.

В цілому, незважаючи на значні досягнення, багато актуальних задач керування нелінійними системами залишаються нерозв'язаними (хаотична динаміка систем керування з зворотним зв'язком) або дослідженими недостатньо (оптимальне керування та ідентифікація білінійних систем). Більш того, існує значний розрив між існуючими теоретичними досягненнями і можливостями їх практичного застосування. Тому нелінійні системи, що приводяться до білінійного вигляду, являють собою клас систем, на прикладі яких може бути вирішена ця проблема і побудовані конструктивні алгоритми керування, що задовольняють вимогам фізичної реалізації.

Завершуючи цей підрозділ зауважимо, що у розв'язанні проблеми керування білінійними системами вагомий внесок зробили ряд відомих вчених [1-3].

2. Методи дослідження білінійних систем

При вирішенні поставлених задач використовувались методи теорії білінійних систем, теоретичної і експериментальної фізики, диференційної геометрії, математичної теорії систем. В роботі на основі системно-теоретичного опису відкритих фізичних систем розглянуто проблему ідентифікації нелінійних процесів, математичні моделі яких приводяться до білінійного вигляду. Викладено сучасні результати щодо білінійних керованих динамічних систем та їх показників Ляпунова.

При дослідженні моделей молекулярних систем використано методи керування процесами на макрорівні, динамічного хаосу та самоорганізації [1].

3. Керування показниками Ляпунова білінійної системи

Проблема керування показниками Ляпунова розглядалась в різних робота [6-7]. В даній роботі розглядається наступна білінійна система

$$\dot{y} = (C(t)y + \sum_{i=1}^{m} D(t)yu_i), y \in R^n, \qquad (1)$$

$$u \in R^m, t \geq 0$$

з обмеженими кусково-неперервними коефіцієнтами та її лінійне наближення

$$\dot{x} = (A(t)x + B(t)u), x \in R^n, u \in R^m, t \geq 0 \qquad (2)$$

Якщо керування u, що входить в (2), визначається лінійним принципом зворотного

зв'язку $u = U(t)x$, де U – обмежена кусково-неперервна $m \times n$ матриця, то система (2) стає однорідною замкнутою системою

$$\dot{x} = (A(t) + B(t)U(t))x,\ x \in R^n, t \geq 0 \qquad (3)$$

з обмеженими кусково-неперервними коефіцієнтами і з показниками Ляпунова

$$\lambda_1 (A + BU) \leq ... \leq \lambda_n (A + BU).$$

У свою чергу, матрицю U (коефіцієнт зворотного зв'язку), що входить в систему (3) можна розглядати як новий параметр керування. Таким чином, виникає задача керування для характеристичних показників Ляпунова, яка вимагає побудови зворотного зв'язку $u = U(t)x$ для системи (2), забезпечуючи справедливість співвідношення

$$\lambda_1 (A + BU) = \mu_i, i = 1, \ldots, n,$$

де $\mu_1 \leq ... \leq \mu_n$ задані дійсні числа. Ця задача є узагальненням відомої задачі на керування спектром у випадку нестаціонарних систем.

Існують різні методи дослідження такого узагальнення. Один з них передбачає використання повної керованості системи (2). Цей підхід був використаний багатьма авторами для отримання ряду результатів, що стосуються керованості показників лінійних систем.

Справедливі наступні теореми 1 та 2.

Теорема 1. *Нехай* $m = n$. *Якщо для лінійного наближення БС (1) існують числа* $\sigma > 0$ *і* $\alpha > 0$ *такі, що*

$$\int_{t_0}^{t_0+\sigma} |\det B(\tau)| d\tau \geq \alpha, \qquad (4)$$

для всіх $t_0 \geq 0$, *тоді для довільних чисел* $r > 0$ *і* $\rho > 0$ *існує число* $\Theta = \Theta(r, \rho) > 0$ *таке, що для будь-якого* $t_0 \geq 0$ *і будь-якої матриці* $H \in H(r, \rho)$, *існує допустиме керування* U, *що забезпечує справедливість відношення*

$$X_U (t_0 + \sigma, t_0) = X(t_0 + \sigma, t_0)H \qquad (5)$$

і задовольняє оцінці $\|U(t)\| \leq \Theta \|H - E\|$ *для будь-якого* $t \in [t_0, t_0 + \sigma]$.

Теорема 2. *Якщо умови теореми 1 справедливі, то для довільних чисел* $\mu_1 \leq ... \leq \mu_n$, *існує допустиме керування* U білінійної системи, *таке що локальні показники Ляпунова БС (1) задовольняють співвідношенню*

$$\lambda_i (A + BU) = \mu_i, i - 1, \ldots, n. \qquad (6)$$

4. Білінійна модель вимірювально-обчислювальної системи

Розглядається вимірювально-обчислювальна система для вимірювання гравітаційних збурень, що впливають на левітуюче пробне тіло. Зв'язок зміщення y_1 пробного тіла в магнітному полі під дією u_3 і сигналу на виході вимірювача, що задається системою рівнянь для перемінних стану $y_3, ..., y_6$ і функціоналом z (модель квантового інтерферометра S), припускає спрощене описання білінійною моделлю (БМ)

$$\dot{y} = Ay + (Bu_1 + Cu_1^2)y + Du_1 + Eu_1^2 + Fu_3 + Gu_4,$$
$$z = Ly, \qquad (6)$$

де A, B, C, D, E, F, G, L – матриці відповідних розмірів; $y \in \hat{Y} \subset R^2; z \in R^1$. При цьому існує можливість оптимізації інформаційних характеристик виміру вибором матриці параметрів α і керування $u(\hat{n})$, що забезпечують синтез визначених матричних і топологічних властивостей дискретної апроксимації БМ $\{T, \hat{Y}, S, \Psi\}$, де $\{T^n; n \in Z\}$ каскад; $T : \hat{Y} \to \hat{Y}, \Psi : \hat{Y} \to \Theta$ – відображення «вхід-вихід» системи S; Θ – скінченний алфавіт, методами символічної динаміки. Подальша оптимізація досягається при синтезі процесу виміру в околі підкови Смейла додатної міри Лебега динамічної системи $\{T, \hat{Y}, S, \Psi\}$. Показана можливість керування показниками Ляпунова за рахунок лінійного оберненого зв'язку.

Висновки

Одержано подальший розвиток методів ідентифікації білінійних процесів у вимірювально-обчислювалних системах. Розроблено алгоритми ідентифікації, орієнтовані на використання в адаптивних сенсорах та прецизійних приладах. Розв'язано задачу ідентифікації та реалізації певних нелінійних систем за

експериментальними часовими рядами. Виявлено умови виникнення процесів самоорганізації в динамічних системах з електромагнітною взаємодією.

Розв'язано проблему адаптивного оцінювання слабких збурень гравітаційного поля з невідомими параметрами спектральної щільності. Вперше синтезовано спостережники майже періодичних сигналів за дискретними та неперервними білінійними моделями вимірювання. Розроблено алгоритм еліпсоїдального оцінювання вектору стану білінійної моделі гравіметричного датчика. Досліджена задача керування спектром показників Ляпунова з використанням лінійного наближення БС. Запропоновано білінійні моделі сенсорів і з'ясована роль нільпотентних алгебр Лі в їх синтезі.

Розроблено і досліджено моделі чутливих елементів із стабілізованою та керованою рівновагою левітуючого пробного тіла. Запропоновано методи проектування кріосенсорів на основі теорії білінійних систем.

Запропоновано алгоритми релейного та нейромережного оцінювання невідомої сили, що діє на пробне тіло в умовах впливу перешкод. На основі отриманих результатів покращено конструкцію чутливого елементу гравіметра та його математичну модель.

Список використаних джерел

1. *Самойленко Ю.И.* Проблемы и методы физической кибернетики // НАНУ, Институт математики, Киев. – 2006.
2. *Kalouptsidis N.* Blind identification of bilinear systems // N. Kalouptsidis, P. Koukoulas // IEEE Transactions On Signal Processing 51. – 2003. – P. 484–499.
3. *Mathews V. J.* Parameter estimation for a bilinear time series model // V. J. Mathews, T. K. Moon // IEEE Int. Conf. Acoust. Speech Signal Process. – 1991. – P. 3513–3516.
4. *Tsoulkas V.* Identification of input output bilinear systems using cumulants // V. Tsoulkas, P. Koukoulas, N. Kalouptsidis // IEEE Trans. Signal Processing 49. – 2001. – P. 2753–2761.
5. *Pardalos P.M.* Seizure Warning Algorithm Based on Optimization and Nonlinear Dynamics // P.M. Pardalos, W. Chaovalitwongse, Iasemidis and others // Mathematical Programming. – 2004. Vol. 101. – P. 365-385.
6. *Yatsenko V.O.* Linear and nonlinear analysis of time series: correlation dimension, Lyapunov exponents, and prediction prediction // V.O. Yatsenko, O.I. Kochkodan, M.V. Makarychev, I.S. Pashenkovska, S.O. Cheremnikh // Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv Series Physics & Mathematics. – 2013. Vol. 4. – P. 84-89
7. *Pardalos P.* Optimization and Control of Bilinear Systems // P. Pardalos, V.A. Yatsenko // Springer Optimization and Its Application. – 2008. Vol. 11. – P. 374.

References

1. SAMOYLENKO, Y.I. (2006) *Problems and methods of physical cybernetics*. Institut matematiki NANU. Kiev.
2. KALOUPTSIDIS, N., KOUKOULAS, P., MATHEWS, V.J. (2003) Blind identification of bilinear systems. *IEEE Transactions On Signal Processing 51*. p. 484-499.
3. MATHEWS, V.J., MOON, T.K. (1991) Parametet estimation for a bilinear time series model. *IEEE Int. Conf. Acoust. Speech Signal Process.* p. 3513-3516.
4. TSOULKAS, V., KOUKOULAS, P., KALOPTSIDIS, N. (2001) Identification of input output bilinear systems using cumulants. *IEEE Trans. Signal Processing 49*. p. 2753–2761.
5. PARDALOS, P.M., CHAOVALITWONGE, W., IASEMIDIS (2004) Seizure Warning Algorithm Based on Optimization and Nonlinear Dynamics. *Mathematical Programming.* Volume 101. p. 365-385.
6. YATSENKO, V.O., KOCHKODAN, O.I., MAKARYCHEV, M.V., PASHENKOVSKA, I.S and CHEREMNIKH, S.O. (2013) Linear and nonlinear analysis of time series: correlation dimension, Lyapunov exponents, and prediction. *Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv*. Volume 4. p. 84-89.
7. PARDALOS, P., YATSENKO, V.A. (2008) Optimization and Control of Bilinear Systems. *Springer Optimization and Its Application.* Volume 11. p. 374.

Надійшла до редколегії 28.08.14

РАДІОФІЗИКА

УДК 577.3

Глушенков А.М.[1], аспірант
Говорун Д.М.[1,2], д.б.н., проф.

Повне сімейство Н-зв'язанних гетероасоціатів $m^9Gua{\cdot}m^1Cyt$: квантово-механічне дослідження

[1] Київський національний університет імені Тараса Шевченка,83000, м. Київ, пр-т. Глушкова 4г,
e-mail: s4rduk4r@gmail.com
[2] Інститут молекулярної біології і генетики НАН України,03680, м. Київ, вул.. Академіка Заболотного 150,
e-mail: dhovorun@imbg.org.ua

A. N. Glushenkov[1], post.grad.stud.,
D. N. Hovorun[2], Dr.Sci., Prof.

Complete family of H-bonded heteroassociates $m^9Gua{\cdot}m^1Cyt$: quantum-mechanical study

[1] Taras Shevchenko National University of Kyiv, 83000, Kyiv, Glushkova st., 4g,
e-mail: s4rduk4r@gmail.com
[2] The Institute of Molecular Biology and Genetics of NASU, 03680, Kyiv, Zabolotnogo st., 150,
e-mail: dhovorun@imbg.org.ua

На рівні квантово-механічної теорії MP2/6-311++G(2df,pd)//B3LYP/6-311++G(d,p) у вакуумному наближенні вперше показано, що повне сімейство гетероасоціатів $m^9Gua{\cdot}m^1Cyt$, що стабілізуються специфічними міжмолекулярними контактами, нараховує 26 структур у діапазоні відносних вільних енергій Гіббса 0÷36,77 ккал/моль за нормальних умов. Глобальному мінімуму енергії відповідає канонічна Вотсон-Криківська пара. Ентальпія її утворення практично збігається з результатами мас-спектрометричного експерименту. Проаналізовано основні фізико-хімічні властивості міжмолекулярних Н-зв'язків, що стабілізують гетероасоціати.

Ключові слова: нуклеотидна основа, повне сімейство, гуанін-цитозин, гуанін, цитозин, водневий зв'язок.

For the first time on the MP2/6-311++G(2df,pd)//B3LYP/6-311++G(d,p) theory level in vacuo it has been shown that complete family of $m^9Gua{\cdot}m^1Cyt$ heteroassociates which are stabilized by specific intermolecular contacts counts 26 structures and occupy relative Gibbs energies diapason of 0-36.77 kcal/mol in standard conditions. Canonical Watson-Crick base pair has occupancy of 99,99% and corresponds to global minima of Gibbs free energy. It's stabilized by three H-bonds N2H…O2, N4H…O6 and N1H…N3. It's complexing enthalpy practically the same as results obtained in classical mass-spectrometry experiment. We've established that most energetically favourable heteroassociate which holds mutagenic tautomer has relative Gibbs energy of 9,73 kcal/mol and can be created through DPT-mechanism along neighboring antiparallel H-bonds of canonical WC base pair. For the first time classical mass-spectrometry experiment data has been theoretically explained for GC base pair. Has been performed detailed analysis of common physico-chemical properties and intermolecular H-bonds.

Keywords: nucleic base pair, complete family, guanine-cytosine, guanine, cytosine, hydrogen bond.

Статтю представив д.ф.-м.н. Анісімов І.О.

Вступ.

Специфічні взаємодії основ нуклеїнових кислот (ОНК) відіграють важливу роль у кодуванні генетичної інформації, просторовій структурі РНК, а також при конструюванні синтетичних ДНК для технологічних цілей. Вотсон і Крик вперше показали [3], що генетична інформація в ДНК кодується комплементарними парами Gua·Cyt і Ade·Thy. Мутації, в свою чергу, можливі за рахунок утворення неправильних пар, зокрема, за участю рідкісних таутомерних форм ОНК [4], що призводить до утворення неканонічних пар та виникнення помилок при біосинтезі ДНК. Просторова структура РНК багато в чому визначається міжмолекулярними Н-зв'язками, утвореними між ОНК. Особливу увагу в літературі приділяють неканонічним парам ОНК, які при цьому спостерігаються [5-8].

© А.М. Глушенков, Д.М. Говорун, 2014

В той же час синтетичні ДНК, в принципі, теж можуть містити неканонічні пари ОНК, в залежності від технологічного задуму.

Кожен із вказаних вище аспектів потребує знання геометричних і фізико-хімічних властивостей як окремих ОНК, так і повного сімейства їхніх Н-зв'язаних гомо- та гетероасоціатів.

Об'єкти та методи дослідження.

Мета роботи — отримати геометричні та основні фізико-хімічні властивості всіх можливих гетероасоціатів 9-метилгуанін (m^9Gua) · 1-метилцитозин (m^1Cyt) за участі усіх їхніх можливих таутомерних форм [9].

Вихідні структурні гіпотези генерували автоматично за допомогою оригінального алгоритму [10]. Квантово-механічні розрахунки геометричної та електронної будови досліджуваних об'єктів проводили на рівні теорії DFT B3LYP/6-311++G(d,p) у вакуумі. Всі зоптимізовані структури перевіряли на стійкість за відсутністю уявних частот у їхніх коливальних спектрах, розрахованих у гармонійному наближенні. Електронна енергія взаємодії основ у комплексах і відносна енергія Гіббса останніх визначалась на рівні теорії MP2/6-311++G(2df,pd)//B3LYP/6-311++G(d,p). Квантово-механічні розрахунки проведено з використанням програмного пакету Gaussian 03 для Win32 (Gaussian 03, RevisionE.01, M. J. Frisch, G. W. Trucks, H. B. Schlegel, et. al.).

Міжмолекулярні Н-зв'язки ідентифікували за допомогою методу аналізу електронної густини QTAIM [10] з використанням хвильових функції, отриманих на рівні теорії B3LYP/6-311++G(d,p). Додатково для ідентифікації Н-зв'язків CH...O/N використовувався NBO-аналіз [2] і метод Грюненберга [11, 12]. Для розрахунку констант Грюненберга користувалися програмою Compliance 3.0.2 (http://www.oc.tu-bs.de/Grunenberg/compliance.html). Енергії класичних Н-зв'язків розраховували методом Іогансена [13], а неканонічних CH...O/N Н-зв'язків та ван-дер-Ваальсових контактів CH...H — за методом Еспінози-Молінса-Лекомте [14].

Результати та їхнє обговорення.

Загальні фізико-хімічні властивості гетероасоціатів. Результати дослідження наведені в таблиці 1. Повне сімейство Н-зв'язаних гетероасоціатів m^9Gua·m^1Cyt складається із 26 структур. До сімейства належать як асоціати, що містять основні таутомерні форми основ m^9Gua і m^1Cyt (17 структур), так і їхні редкісні таутомерні форми (9 структур). Найбільш енергетично вигідною структурою 1 є канонічна Уотсон-Криківська пара, яка має дипольний момент 6,43 дебай. Її заселеність за нормальних умов складає 99,99%. Енергетично найвигідніший гетероасоціат 3, який містить основи у мутагенній таутомерній формі, має відносну енергію Гіббса 9,73 ккал/моль та утворений подвійним перенесенням протонів вздовж сусідніх антипаралельних Н-зв'язків з конформера 1 [15].

Встановлено, що всі можливі гетероасоціати m^9Gua·m^1Cyt асоційовані шістьма типами Н-зв'язків: NH...O/N, OH...O/N і CH...O/N. Енергії класичних Н-зв'язків знаходяться у діапазоні 1,26÷16,72 ккал/моль, а неканонічних CH...O/N — у діапазоні 0,41÷3,99 ккал/моль (табл. 1). Для всіх специфічних контактів CH..O/N NBO-аналіз показав наявність характерного перенесення заряду і дав усі підстави вважати їх справжніми Н-зв'язками ($E^{(2)}$=0,01÷4,45) [16], тим більше, що всі вони мають додатнє значення сталих Грюненберга. Єдиний випадок специфічного контакту CH...H з енергією 0,11 ккал/моль у конформері 23 відповідає ван-дер-Ваальсовому контакту.

Серед зафіксованих гетероасоціатів m^9Gua·m^1Cyt 15 (1,3-8,10-13,15,19,21 і 26) мають плоскосиметричну будову; решта 11 (2, 9, 14, 16-18, 20, 22-25) — суттєво непланарні структури. Низка конформерів (2, 9, 16-25) утворені, зокрема, за рахунок участі метильної групи як донора протону Н-зв'язування.

Пояснення класичного мас-спектрометричного експерименту. У роботах [17,18] описано мас-спектрометричний експеримент з реєстрації ентальпії зв'язування біомолекул у вакуумі який нині вважається класичним. Зокрема, за температури 383K зареєстровано реакцію m^9Gua + m^1Cyt ↔ m^9Gua·m^1Cyt з ентальпією комплексоутворення ΔH = 87,9 кДж/моль.

Спираючись на дані заселеності енергетично найвигіднішого асоціата 1, нами проведено розрахунок його ентальпії комплексоутворення ΔH з урахуванням так званої BSSE поправки [19,20] при T=383K. Отримане теоретичне значення ΔH = 99,97 кДж/моль збігається із експериментальним з точністю 13,7%.

Похибка, що виникла, пояснюється найімовірніше тим фактом, що під час експерименту авторам не вдалось виміряти польові залежності константи асоціації для пари $m^9Gua{\cdot}m^1Cyt$ через слабку інтенсивність піка, яка при зменшенні потенціалу на емітері

Таблиця 1

Основні фізико-хімічні властивості Н-зв'язаних гетероасоціатів $m^9Gua{\cdot}m^1Cyt$

Комплекс	ΔG0, ккал/моль	μ, D	Н-зв'язок/ вдВ контакт AH...B / A...B	ρ, а.о.	Δρ, а.о.	100ε	E_{HB}, ккал/моль	d_{AB}, Å	d_{HB}, Å	Δd_{AH}, Å	∠AHB, град
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)	(12)
1	0,00	6,43	N1H...N3	0,031	0,085	6,02	7,85	2,958	1,927	0,020	176,8
			N4H...O6	0,036	0,116	2,74	10,94	2,808	1,774	0,026	178,4
			N2H...O2	0,026	0,096	3,98	6,83	2,928	1,907	0,012	178,0
2	9,70	7,93	C1H...O6	0,012	0,035	1,98	2,02	3,430	2,370	0,001	163,2
			N1H...O2	0,028	0,107	5,52	7,09	2,842	1,881	0,009	155,7
			N2H...O2	0,016	0,061	3,12	3,34	3,012	2,139	0,005	143,1
3	9,73	6,51	N3H...N1	0,036	0,085	5,64	9,73	2,914	1,870	0,033	176,2
			O6H...N4	0,051	0,093	3,94	16,53	2,707	1,705	0,039	172,2
			N2H...O2	0,021	0,083	4,17	5,14	3,008	1,995	0,007	177,0
4	10,93	6,33	N3H...N7	0,042	0,097	5,00	12,75	2,832	1,787	0,032	179,5
			C8H...O2	0,003	0,012	6,88	0,58	3,664	3,021	0,000	118,6
			O6H...N4	0,047	0,095	3,35	14,84	2,703	1,733	0,037	161,0
5	11,41	6,28	N3H...N1	0,034	0,084	5,71	8,76	2,938	1,899	0,030	174,2
			O6H...O2	0,036	0,115	2,05	11,62	2,728	1,750	0,018	170,9
			N2H...N4	0,025	0,079	6,39	5,80	3,029	2,009	0,013	178,0
6	12,32	13,40	N2H...N3	0,033	0,088	6,00	8,78	2,923	1,894	0,021	178,9
			N4H...N3	0,022	0,070	7,42	4,81	3,087	2,063	0,017	177,0
7	12,72	5,79	N3H...N7	0,042	0,097	5,07	12,44	2,835	1,793	0,030	176,9
			C8H...N4	0,004	0,013	3,06	0,70	3,671	3,003	0,000	120,5
			O6H...O2	0,032	0,113	0,97	9,85	2,730	1,782	0,016	160,7
8	13,00	1,80	C8H...N3	0,014	0,047	4,32	2,40	3,192	2,350	0,003	133,4
			N4H...N7	0,026	0,083	5,93	6,43	2,981	1,969	0,018	168,3
9	13,57	4,50	C8...N3	0,009	0,028	15,52	1,50	3,101	-	-	-
			C9H...O2	0,010	0,029	4,11	1,68	3,511	2,452	0,003	162,7
			N4H...N7	0,021	0,066	4,31	3,81	3,077	2,083	0,012	164,0
10	14,05	8,78	N7H...N3	0,052	0,092	5,10	16,72	2,765	1,709	0,046	177,4
			C8H...O2	0,006	0,022	10,45	1,19	3,326	2,715	0,001	115,6
			N4H...O6	0,042	0,127	1,76	14,11	2,736	1,700	0,035	172,0
11	14,76	12,43	N4H...N7	0,014	0,047	4,19	2,42	3,101	2,311	0,003	134,2
			N4H...O6	0,016	0,060	4,70	3,35	3,039	2,140	0,004	147,2
12	15,25	16,21	N4H...O6	0,021	0,083	3,74	4,60	2,991	1,991	0,007	168,9
			C5H...N7	0,008	0,023	5,72	1,19	3,686	2,604	0,001	179,5
13	15,32	15,65	N4H...N7	0,019	0,063	7,62	3,55	3,132	2,130	0,009	168,7
			C5H...O6	0,010	0,034	3,54	1,82	3,458	2,376	0,000	179,4
14	15,33	14,42	N2H...O2	0,025	0,092	1,25	5,83	2,932	1,933	0,012	165,1
15	15,73	14,58	N4H...N7	0,018	0,060	6,98	3,22	3,134	2,162	0,007	160,2
			N4H...O6	0,009	0,033	6,78	1,81	3,102	2,469	0,001	120,2
16	16,04	13,60	C9H...O2	0,013	0,047	1,91	2,65	3,330	2,276	-0,001	162,7
			N3H...N3	0,021	0,067	6,86	4,48	3,104	2,076	0,019	174,6
			N2H...N4	0,032	0,089	5,71	8,46	2,926	1,901	0,021	172,9
17	16,13	14,38	C1H...N3	0,008	0,023	7,17	1,31	3,700	2,632	0,000	165,8
			N2H2...O2	0,025	0,106	3,64	7,00	2,874	1,868	0,010	168,3

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)	(12)
18	16,34	14,08	C1H...N3	0,008	0,024	6,54	1,37	3,675	2,609	0,000	165,6
			N2H...O2	0,026	0,107	3,65	7,15	2,873	1,866	0,011	168,5
19	17,16	15,29	C6H...O6	0,012	0,040	2,29	2,23	3,368	2,310	0,000	164,8
			C6H...N7	0,003	0,010	145,9	0,45	3,882	3,134	0,000	126,9
			C1H...O6	0,006	0,021	31,44	1,12	3,643	2,621	-0,001	156,0
			C5H...N7	0,003	0,009	6,47	0,41	3,938	3,229	0,000	124,1
20	17,35	13,38	N3H...N3	0,020	0,063	6,86	3,95	3,134	2,114	0,017	170,8
			N2H...O2	0,027	0,102	2,94	7,38	2,896	1,882	0,012	171,6
			C9H...N4	0,014	0,045	6,26	2,43	3,407	2,329	0,001	169,1
21	17,41	14,56	C1H...N7	0,008	0,022	4,31	1,21	3,699	2,626	-0,001	168,0
			C6H...O6	0,012	0,040	2,97	2,15	3,343	2,310	0,001	158,6
22	17,85	1,94	C8H...O2	0,015	0,057	5,39	3,00	3,181	2,166	0,000	155,1
			C1H...N7	0,011	0,032	5,59	1,70	3,504	2,432	0,001	165,0
23	18,04	2,75	C1H...H5	0,001	0,004	47,17	0,11	4,154	3,296	0,001	136,3
			N4H...N3	0,021	0,071	2,00	4,36	3,051	2,101	0,013	154,3
			N2H...N4	0,014	0,049	21,42	2,58	3,190	2,284	0,001	148,1
24	18,60	12,55	C9H...N3	0,009	0,028	9,91	1,58	3,525	2,540	-0,001	149,8
			N4H...N3	0,022	0,074	3,73	4,91	3,049	2,058	0,017	162,6
			N2H...N4	0,007	0,025	70,82	1,26	3,459	2,619	0,001	140,6
25	20,85	12,52	N3H...N3	0,022	0,068	6,75	4,76	3,083	2,063	0,022	170,1
			C9H...O2	0,010	0,070	3,22	3,99	3,183	2,108	-0,002	168,2
			N4H...N2	0,038	0,095	5,73	10,97	2,864	1,829	0,031	173,9
26	36,77	9,73	N7H...N3	0,049	0,114	6,68	13,84	2,762	1,746	0,024	168,4
			N4H...C8	0,015	0,037	6,13	2,04	3,317	2,333	0,019	160,1
			O6H...O2	0,023	0,085	2,94	5,26	2,893	1,943	0,017	162,7

*Примітка. ΔG^0 - відносна енергія Гіббса (T=298,15K; P=1атм); μ — дипольний момент; AH...B/A...B — атоми, що беруть участь в утворенні Н-зв'язку / ван-дер-ваальсового контакту (рис. 1); ρ — електронна густина; Δρ — лапласіан електронної густини; ε — еліптичність у критичних точках (3,-1); E_{HB} — енергія Н-зв'язку; відстані d_{AB}, d_{HB} та кути ∠AHB між центрами Н-зв'язку; подовження Δd_{AH} групи AH при утворенні Н-зв'язку AH..B.

знижувалась до рівня фону. Таким чином, гетероасоціат $m^9Gua{\cdot}m^1Cyt$, який спостерігався в експерименті [17, 18] відповідає комплексу 1, котрий є канонічною Вотсон-Криківською парою (табл. 1), яка стабілізується трьома міжмолекулярними Н-зв'язками N1H...N3 (7,85), N4H...O6 (10,94), N2H...O2 (6,83 ккал/моль).

Висновки.

Вперше отримано повне сімейство гетероасоціатів $m^9Gua{\cdot}m^1Cyt$, яке складається із 26 структур у діапазоні відносної енергії Гіббса 0÷36,77 ккал/моль. Усі вони стабілізуються класичними (NH...N/O і OH...N/O), слабкими (CH...N/O) Н-зв'язками та двома ван-дер-Ваальсовими контактами (CH...H і C...N).

Доведено, що метильна група, яка моделює цукровофосфатний кістяк ДНК, є донором міжмолекулярних Н-зв'язків. Вперше теоретично пояснено результат класичного мас-спектрометричного експерименту щодо визначення ентальпії реакції комплексоутворення $m^9Gua + m^1Cyt \leftrightarrow m^9Gua{\cdot}m^1Cyt$ у вакуумі.

Список використаних джерел

1. *Бейдер Р.* Атомы в молекулах. Квантовая теория. / Р. Бейдер. – Москва: Мир, 2001. – 532 с.
2. *Weinhold F.* Discovering Chemistry With Natural Bond Orbitals / F. Weinhold,
3. *Watson J.D.* Molecular Structure of Nucleic

4. **References**

1. BEIDER, R. (2001) Atomy v molekulakh. Kvantovaja teorija. MOSKVA: Mir.
2. WEINHOLD, F., LANDIS, C. (2012) Discovering Chemistry With Natural Bond. New Jersey: John Wiley & SONS, Inc.
3. WATSON, J., CRICK, F. (1953) Molecular

Acids: A Structure for Deoxyribose Nucleic Acid / J.D. Watson, F.H.C. Crick // Nature. — 1953. — **171**. — P. 737−738.

4. *Watson J.D.* Genetical Implications of the Structure of DNA / J.D. Watson, F.H.C. Crick // Nature. - 1953. - **171**. - P. 964-967.
5. *Sponer J.E.* Principles of RNA Base Pairing: Structures and Energies of the Trans Watson-Crick/Sugar Edge Base Pairs / J.E. Sponer, N. Spackova, J. Leszczynski, J. Sponer // J.Phys.Chem. B. – 2005. – **109**. – P. 11399-11410.
6. *Sponer J.E.* Non-Watson-Crick Base Pairing in RNA. Quantum Chemical Analysis of the cis Watson-Crick/Sugar Edge Base Pair Family / J.E. Sponer, N. Spackova, P. Kulhanek, J. Leszczynski, J. Sponer // J.Phys.Chem. A. – 2005. – **109**. – P. 2292-2301.
7. *Van Nostrand K.P.* Molecular Mechanics Investigation of an Adenine-Adenine Non-Canonical Pair Conformational Change / K.P. Van Nostrand, S.D. Kennedy, D.H. Turner, D.H. Mathews // J.Chem.Theory Comput. – 2011. – **11**. –P. 3779-3792.
8. *Lemieux S.* RNA canonical and non-canonical base pairing types: a recognition method and complete repertoire / S. Lemieux, F. Major // Nucleic Acids Research. – 2002. – **30**. – P. 4250-4263.
9. *Глушенков А.Н.* Прототропная таутомерия 9-метилгуанина: квантово-механическое исследование / Глушенков А.Н., Говорун Д.Н. // Доповіді НАН України - 2014. - №9 – С. 151-156.
10. *Глушенков А.Н.* Геометрическое построение всех возможных ассоциированных водородными связями пар нуклеотидных оснований / Глушенков А.Н., Говорун Д.Н. // Доповіді НАН України - 2014. - №8. – С. 133-137.
11. *Brandhorst K.* Efficient computation of compliance matrices in redundant internal coordinates from Cartesian Hessians for nonstationary points / K. Brandhorst, J. Grunenberg // J.Chem.Phys., 2010. – **132**. – P. 184101-1–184101-7.
12. *Brandhorst K.* How strong is it? The interpretation of force and compliance constants as bond strength descriptors. / K. Brandhorst, J. Grunenberg // Chem.Soc.Rev., 2008. – **37**. – P. 1558-1567.
13. *Iogansen A.V.* Direct proportionality of the hydrogen bonding energy and the

Structure of Nucleic Acids: A Structure for Deoxyribose Nucleic ACID. *Nature*. 171. pp. 737−738.

4. WATSON, J., CRICK, F. (1953) Genetical Implications of the Structure of DNA. *Nature*. 171. pp. 964-967.
5. SPONER, J.E., SPACKOVA, N., LESZCZYNSKI, J., SPONER, J. (2005) Principles of RNA Base Pairing: Structures and Energies of the Trans Watson-Crick/Sugar Edge Base Pairs. *J.Phys.Chem. B.* 109. pp. 11399-11410.
6. SPONER, J.E., SPACKOVA, N., KULHANEK, P., LESZCZYNSKI, J., SPONER, J. (2005) Non-Watson-Crick Base Pairing in RNA. Quantum Chemical Analysis of the cis Watson-Crick/Sugar Edge Base Pair Family. *J.Phys.Chem. A.* 109. pp. 2292-2301.
7. VAN NOSTRAND, K., KENNEDY S., TURNER, D., MATHEWS, D. (2011) Molecular Mechanics Investigation of an Adenine-Adenine Non-Canonical Pair Conformational Change. *J.Chem.Theory Comput.* 11. pp. 3779-3792.
8. LEMIEUX, S., MAJOR, F. (2002) RNA canonical and non-canonical base pairing types: a recognition method and complete repertoire. *Nucleic Acids Research*. 30. pp. 4250-4263.
9. GLUSHENKOV, A., HOVORUN, D. (2014) Prototropnaja tautomerija 9-metilguanina: kvantovo-mekhanicheskoe issledovanie. *Dopovidi NAN Ukrainy*. 9. pp. 151-156.
10. GLUSHENKOV, A., HOVORUN, D. (2014) Geometricheskoe postroenie vsekh vozmozhnykh assotsiirovannykh H-svjazjami par nukleotidnykh osnov. *Dopovidi NAN Ukrainy*. 8. pp. 133-137.
11. BRANDHORST, K., GRUNENBERG, J. (2010) Efficient computation of compliance matrices in redundant internal coordinates from Cartesian Hessians for nonstationary points. *J.Chem.Phys.* 132. pp. 184101-1–184101-7.
12. BRANDHORST, K., GRUNENBERG, J. (2008) How strong is it? The interpretation of force and compliance constants as bond strength descriptors. *Chem.Soc.Rev.* 37. pp. 1558-1567.
13. IOGANSEN, A. (1999) Direct proportionality of the hydrogen bonding energy and the intensification of the stretching (XH) vibration in infrared spectra. *Spectrochimica Acta Part A.* 55. pp. 1585-1612.
14. ESPINOSA, E., Molins, E., LECOMTE, C. (1998) Hydrogen bond strengths revealed by topological analyses of experimentally observed

intensification of the stretching (XH) vibration in infrared spectra / A.V. Iogansen // Spectrochimica Acta Part A. – 1999. – **55**. – PP. 1585-1612.

14. *Espinosa E.* Hydrogen bond strengths revealed by topological analyses of experimentally observed electron densities / E. Espinosa, E. Molins, C. Lecomte // Chem.Phys.Letters. – 1998. – **285**. – P. 170-173.
15. *Brovarets' O.O.* Why the tautomerization of the G·C Watson–Crick base pair via the DPT does not cause point mutations during DNA replication? QM and QTAIM comprehensive analysis / O.O. Brovarets', D.M. Hovorun // J.Biomol.Struct.Dyn. - 2013. – **32**. – P. 1474-1499
16. *Brovarets' O.O.* Intermolecular CH...O/N H-bonds in the biologically important pairs of natural nucleobases: a thorough quantum-mechanical study / O.O. Brovarets', Y.P. Yurenko, D.M. Hovorun // J.Biomol.Struct.Dyn. – 2013. – **32**. – P. 993-1022.
17. *Суходуб Л.Ф.* Масс-спектрометрическое изучение взаимодействия азотистых оснований нуклеиновых кислот в вакууме / Л.Ф. Суходуб, И.К. Янсон // Stud.Biophys. – 1976. – №59. – С. 209-220.
18. *Янсон И.К.* Ряд стабильности пар азотистых оснований нуклеиновых кислот. / И.К. Янсон, Л.Ф. Суходуб // Докл. АН СССР. – 1975. – №.223. – С. 1010-1013.
19. *Boys S.F.* Calculation of Small Molecular Interactions by Differences of Separate Total Energies - Some Procedures with Reduced Errors / S.F. Boys, F. Bernardi // Mol. Phys. - 1970. - **19**. - P. 553–566.
20. *Simon S.* How does basis set superposition error change the potential surfaces for hydrogen bonded dimers? / S. Simon, M. Duran, J.J. Dannenberg // J. Chem. Phys. - 1996. - **105**. - P. 11024-11031.

electron densities. *Chem.Phys.Letters*. 285. pp. 170–173.

15. BROVARETS', O., HOVORUN, D. (2013) Why the tautomerization of the G·C Watson–Crick base pair via the DPT does not cause point mutations during DNA replication? QM and QTAIM comprehensive analysis.

J.Biomol.Struct.Dyn. 32. pp. 1474-1499.

16. BROVARETS', O., YURENKO, Y., HOVORUN, D. (2013) Intermolecular CH...O/N H-bonds in the biologically important pairs of natural nucleobases: a thorough quantum-mechanical study. *J.Biomol.Struct.Dyn*. 32. pp. 993-1022.
17. SUKHODUB, L., YANSON, I. (1976) Mass-spektrometricheskoe izluchenie vzaimodejstvija azotistykh osnovanij nukleinovykh kislot v vakuume. *Stud.biophys*. 59. pp. 209-220
18. YANSON, I., SUKHODUB, L. (1975) Rjad stabilnosti par azotistykh osnovanij nukleinovykh kislot. *Dokl. AN SSSR*. 223. pp. 1010-1013.
19. BOYS, S., BERNARDI, F. (1970) Calculation of Small Molecular Interactions by Differences of Separate Total Energies - Some Procedures with Reduced Errors. *Mol. Phys*. 19. pp. 553–566.
20. SIMON, S., DURAN, M., DANNENBERG, J. (1996) How does basis set superposition error change the potential surfaces for hydrogen bonded dimers? *J. Chem. Phys*. 105. pp. 11024-11031.

Надійшла до редколегії 06.06.14

УДК 538.911

Горячко А. М.[1], к.ф.-м.н.,
Кулик С. П.[1], к.ф.-м.н., доцент,
Мельник П. В.[1], к.ф.-м.н., професор,
Находкін М. Г.[1], д.ф.-м.н., професор.

Нова атомарна модель нано-структурованої поверхні Si(001)-c(8×8)

[1] Київський національний університет імені Тараса Шевченка,
83000, м. Київ, пр-т. Глушкова 4г,
e-mail: andreandy2000@gmail.com

A. M. Goriachko[1], Ph.D,
S. P. Kulyk[1], Ph. D. Assoc. Prof.,
P. V. Melnik[1], Ph. D. Prof.,
M. G. Nakhodkin[1], Dr. Sc. Prof.

New atomic model of the Si(001)-c(8×8) nanostructured surface

[1] Taras Shevchenko National University of Kyiv, 83000, Kyiv, Glushkova ave., 4g,
e-mail: andreandy2000@gmail.com

Методом скануючої тунельної мікроскопії (СТМ) із атомною роздільною здатністю досліджено наноструктуровану поверхню Si(001)-c(8×8) та запропоновано атомарну модель цієї надструктури.

Ключові слова: кремній, реконструкція, СТМ, наноструктуризація.

The Si(001)-c(8×8) reconstruction is a rarely observed nanostructured state of the Si(001) surface. An exact mechanism of its stabilization is not yet clear, but the factor giving rise to this reconstruction is the presence of trace amounts of Cu or Bi (below the detection limit of Auger electron spectroscopy). We present high resolution STM images of the Si(001)-c(8×8) nanostructure, which provide a detailed view of its constituents: elementary building blocks of three epitaxial Si ad-dimers with non-dense packing. Such blocks are separated by double dimer vacancies within the Si(001) substrate and are arranged with a c(8×8) periodicity. A detailed atomic model of the ideal Si(001)-c(8×8) reconstruction as well as its nonstandard building blocks, which lead to the absence of a long range order, are suggested. The model consists of only Si atoms, since the concentration of Bi or Cu was found below the detection limit of electron spectroscopy. The scope and complexity of this surface phenomenon are of the same order as for the well known Si(111)-(7×7) reconstruction.

Key Words: silicon, reconstruction, STM, nanostructuring.

Статтю представив д.ф.-м.н. Скришевський В.А.

В науковій літературі існує консенсус щодо стану глобального мінімуму вільної енергії поверхні Si(001), яким є димернорядова реконструкція 2×1. Періодичність в площині поверхні Si(001)-(2×1) складає 0.768 нм × 0.384 нм, що не дає можливості вважати її наноструктурованою. Також існує консенсус щодо способу приготування реконструйованої поверхні Si(001)-(2×1). Він полягає у відпалюванні надчистого зразка Si(001) в умовах надвисокого вакууму при температурі 1200ºС та достатньо повільного охолодження до кімнатної температури. В окремих роботах спостерігалась структура Si(001)-c(8×8) як результат наявності домішок Cu [1-3]. В цьому випадку періодичність надструктури в площині поверхні складає 3.072 нм × 3.072 нм, тобто дозволяє розглядати таку поверхню як наноструктуровану. Атомарні моделі реконструкції Si(001)-c(8×8) запропоновані в роботах [1-3] не узгоджуються одна із одною. Метою даної роботи було з'ясування деталей атомарної будови цієї поверхні за допомогою методики скануючої тунельної мікроскопії (СТМ).

В наших експериментах використовувалися зразки Si(001), що є стандартними підкладинками для мікроелектронних технологій. Відпалювання до 1200ºС, а також СТМ дослідження при кімнатній температурі відбувалося у надвисоковакуумній камері із базовим тиском 3×10^{-10} мбар. Єдиною відмінністю від приготування стандартної реконструкції Si(001)-(2×1) було внесення домішок Cu або Bi в кількостях нижчих за межу чутливості електронної Оже-спектроскопії (відносні атомні концентрації менше за 1%).

© Горячко А.М., Кулик С.П., Мельник П.В., Находкін М.Г., 2014

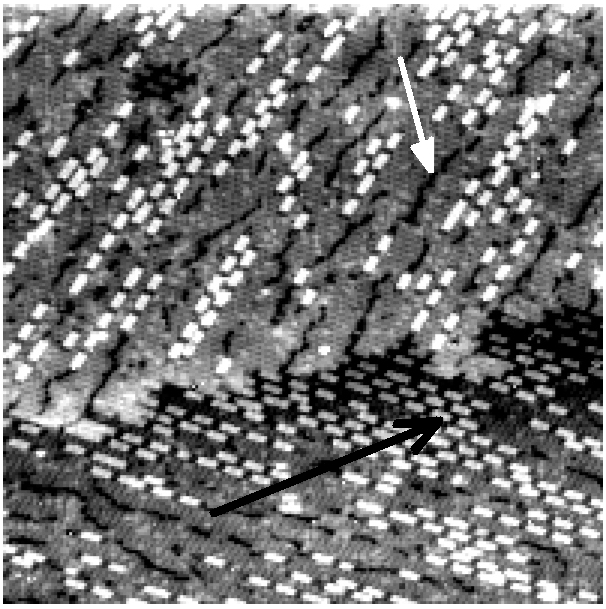


Рис. 1 СТМ зображення (65 нм × 65 нм) поверхні Si(001) частково покритої реконструкцією c(8×8) внаслідок забруднення домішкою Cu. Тунельна напруга на зразку U_T = +2 В, тунельний струм I_T = 0.3 нА.

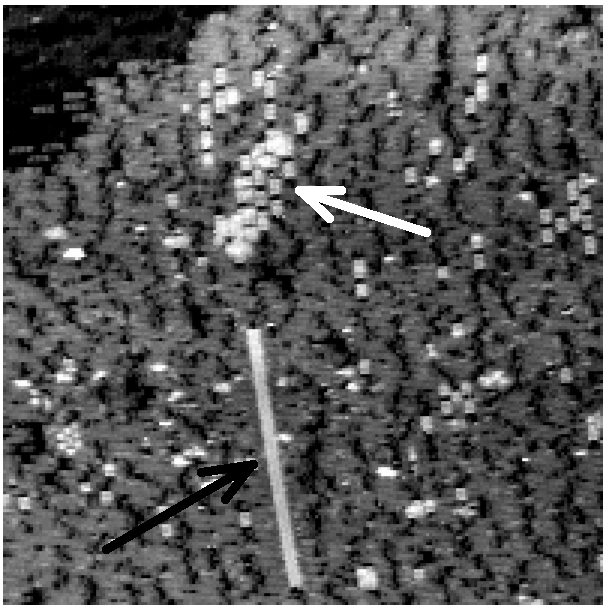


Рис. 2 СТМ зображення (65 нм × 65 нм) поверхні Si(001) частково покритої реконструкцією c(8×8) внаслідок адсорбції Bi. Тунельна напруга на зразку U_T = +2.5 В, тунельний струм I_T = 0.3 нА.

На рис. 1 наведено СТМ зображення поверхні Si(001) із частковим покриттям реконструкцією c(8×8) внаслідок наявності домішки Cu. Елементарні складові блоки цієї надструктури формують характерний візерунок типу "цегляної кладки". Як приклад, одна із таких ділянок позначена стрілкою чорного кольору. На решті поверхні присутня димерно-рядова реконструкція 2×1, проте її деталі не можуть бути розрізнені на даному масштабі. Також, на поверхні присутня велика кількість димерних вакансій, що групуються в суцільні лінії, одна з яких для прикладу відзначена стрілкою білого кольору.

Окрім домішок Cu, реконструкцію c(8×8) спричиняла також і наявність домішок Bi, що демонструє рис. 2. На присутність Bi чітко вказує ідеально рівна нанолінія (позначена стрілкою чорного кольору). В попередніх роботах інших авторів було безсумнівно встановлено, що в саме такі лінії групуються атоми Bi на поверхні Si(001) при глибоко субмоношарових ступенях покриття. Загалом же поверхня даного зразка є сильно дефектною, а також містить невелику кількість елементарних блоків надструктури c(8×8), останню позначено стрілкою білого кольору. Важливим спостереженням є те, що в наших експериментах, ступінь заповнення поверхні реконструкцією c(8×8) була значно нижчою у випадку домішок Bi ніж у випадку домішок Cu.

Для детального з'ясування природи поверхні Si(001)-c(8×8) були одержані зображення із атомною роздільною здатністю, зокрема наведене на рис. 3 СТМ зображення у вільних станах зразка. Видно, що наноструктурована поверхня складається із стандартних елементарних блоків подібних до виділеного прямокутником (біло-чорна точкова лінія). Кожен такий блок складається із шести максимумів яскравості, які відповідають шести атомам Si. Окремі блоки групуються в надструктуру c(8×8), елементарна комірка якої має форму квадрату окресленого біло-чорною точковою лінією. Також, на зображенні помітні заглиблення між сусідніми елементарними блоками (відзначено еліпсом, біло-чорною точковою лінією), які є глибшими за ділянки поверхні із димерно-рядовою реконструкцією 2×1 (позначено стрілкою білого кольору).

На основі детального аналізу СТМ даних із атомною роздільною здатністю було запропоновано атомарну модель ідеально періодичної надструктури Si(001)-c(8×8), представлену на рис. 4. Найвищий атомний шар зображений великими зафарбованими колами чорного кольору. Він складається з епітаксійних ад-димерів (маленький прямокутник).

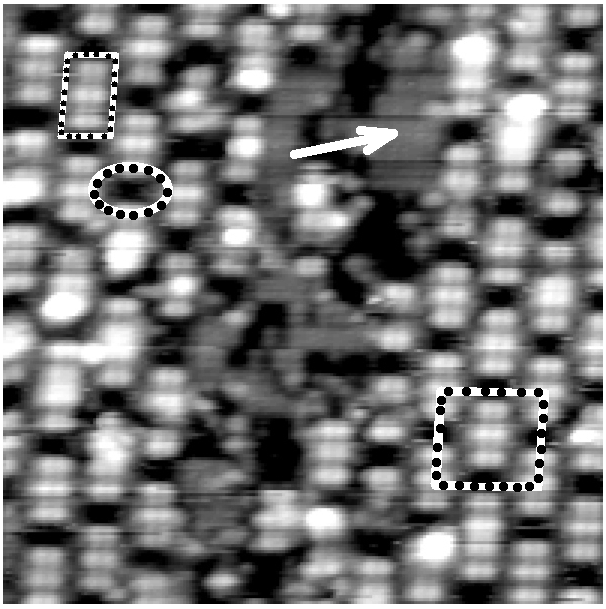


Рис. 3 СТМ зображення (19 нм × 19 нм) поверхні Si(001)-c(8×8). Тунельна напруга на зразку U_T = +1 В, тунельний струм I_T = 0.3 нА.

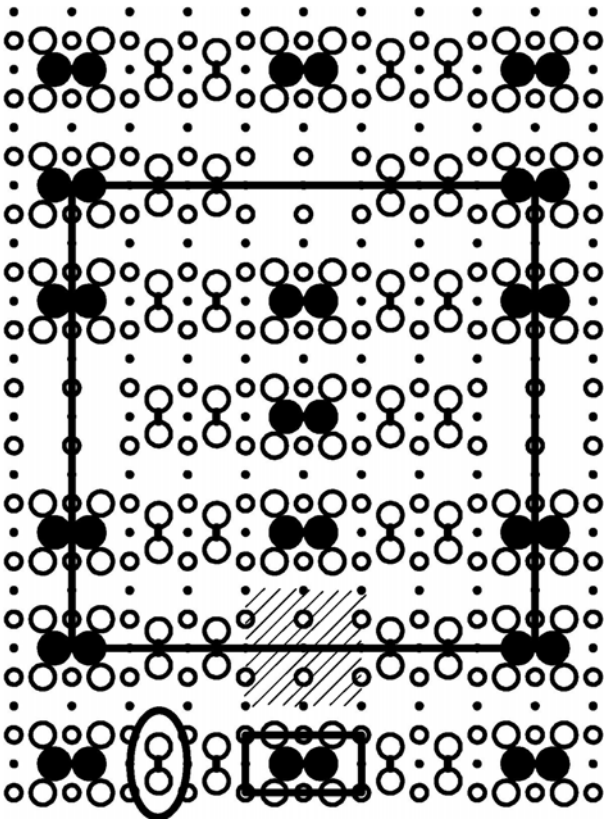


Рис. 4 Атомарна модель ідеальної надструктури Si(001)-c(8×8). Менший розмір атома означає більшу віддаленість від читача.

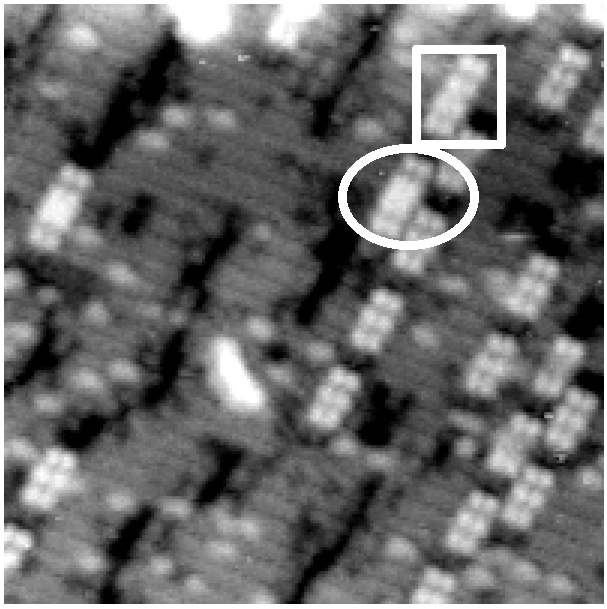


Рис. 5 СТМ зображення (19 нм × 19 нм) із нестандартними елементарними блоками наноструктурованої поверхні Si(001)-c(8×8). Тунельна напруга на зразку U_T = +1.5 В, тунельний струм I_T = 0.3 нА.

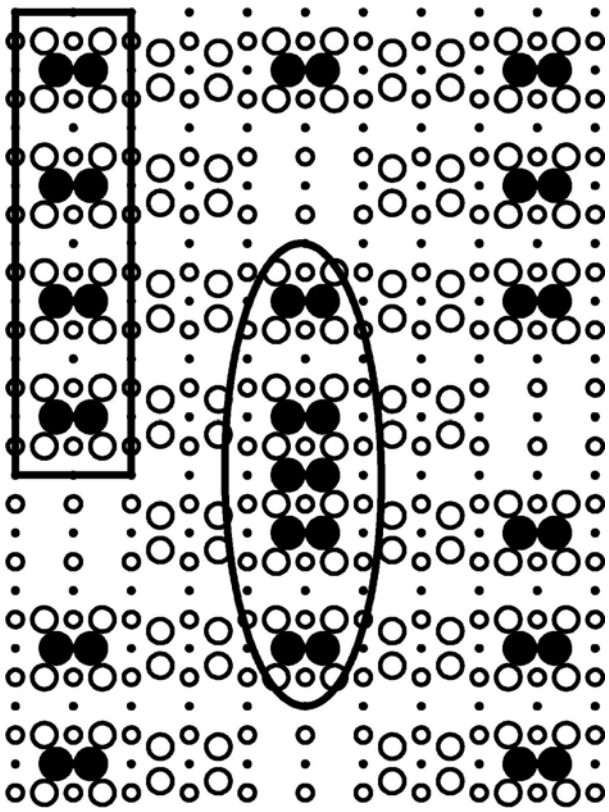


Рис. 6 Атомарна модель нестандартних елементарних блоків c(8×8) на поверхні Si(001).

Групи з трьох ад-димерів формують елементарні блоки, впорядковане розміщення яких в шаховому порядку формує елементарну комірку c(8×8) - окреслено великим квадратом, лінією чорного кольору. На частці поверхні незайнятій ад-димерами присутні залишкові димери реконструкції 2×1 (окреслено еліпсом, лінія чорного кольору) а там де відсутні і вони - заглиблення до наступного атомного шару (відзначено штриховкою).

Детальний аналіз ділянок поверхні, що мали суцільне покриття елементами c(8×8) показав, що дана структура не характеризується дальнім порядком. Порушення ідеальної періодичності відбуваються через наявність нестандартних елементарних блоків. Приклади останніх можна спостерігати на СТМ зображенні (рис. 5), де лінією білого кольору окреслено видовжений елементарний блок (прямокутник) та елементарний блок із фрагментом димерного ряду (еліпс). Відповідну атомарну модель наведено на рис.6, де лінією чорного кольору окреслено видовжений блок (прямокутник), що складається з чотирьох аддимерів Si замість лише трьох у стандартному випадку, та блок із фрагментом димерного ряду (еліпс). Останній складається вже із п’яти ад-димерів, причому три із них формують короткий димерний ряд (тобто наступний атомний шар із реконструкцією 2×1) внаслідок відповідної щільної упаковки. Запропонована на рис. 6 атомарна модель узгоджується із СТМ зображенням нестандартних елементів на рис. 5. Так, на зображеннях із атомною роздільною здатністю, видовжений блок містить вісім максимумів яскравості замість шести стандартних (кожен максимум відповідає окремому атому Si). В той же час, фрагмент димерного ряду у нестандартному блоці, проявляється на зображенні у вигляді центральної смужки проміж чотирьох максимумів на краях, які відповідають двом нещільно упакованим ад-димерам.

Моделі представлені на рис. 4 та рис.6 складаються виключно з атомів Si, хоча в наших експериментах, існування структури c(8×8) було спричинене наявністю Bi або Cu. В той же час кількість цих домішок була настільки низькою, що виключала наявність хоча б одного атома Bi або Cu в кожній елементарній комірці. Таким чином, було зроблено висновок, що домішки стабілізують надструктуру c(8×8), наприклад через дефектоутворення або поверхневі механічні напруження, проте самі по собі не є “будівельним матеріалом” реконструкції. Основна відмінність запропонованої моделі від тих, що були описані в літературі [1-3], полягає в асоціації кожного максимума яскравості із окремим атомом Si, а не димером, як у інших авторів. Слід зазначити, що реконструйована поверхня Si(001)-c(8×8) є явищем такого самого масштабу що і загальна відома реконструкція Si(111)-(7×7) - як за розміром елементарної комірки, так і за різномаїттям структурних елементів.

Таким чином, дана робота наочно демонструє будову поверхні Si(001)-c(8×8) із атомною роздільною здатністю та пропонує оригінальну атомарну модель цієї реконстркції, що якнайкраще узгоджується із наявними експериментальними даними.

Список використаних джерел

1. *Murray P.W.* Direct observation of the c(8x8) defect structure on Si(001) using scanning tunneling microscopy / P.W. Murray, R. Lindsay, F.M. Leibsle, et al // Physical Review B. - 1996. - **54**. - P. 13468-13471.
2. *Liu B.Z.* An STM study of Cu on Si(001) in the c(8x8) structure / B.Z. Liu, M.V. Katkov, J. Nogami // Surface Science. - 2000. - **453**. - P. 137-142.
3. *Zilani M.A.K.* Scanning tunneling microscopy study of higher-order Si(100)-c(8x8) surface reconstruction / M.A.K. Zilani, H. Xu, X.S. Wang, et al // Journal of Physics: Condensed Matter. - 2008. - **20**. - P. 395003(1)-395003(6).

References

1. MURRAY, P.W. et al. (1996) Direct observation of the c(8x8) defect structure on Si(001) using scanning tunneling microscopy. *Physical Review B.* 54. p. 13468-13471.
2. LIU, B.Z. et al. (2000) An STM study of Cu on Si(001) in the c(8x8) structure. *Surface Science.* 453. p. 137-142.
3. ZILANI, M.A.K. et al. (2008) Scanning tunneling microscopy study of higher-order Si(100)-c(8x8) surface reconstruction. Journal of Physics: Condensed Matter. 20. p. 395003(1)-395003(6).

Надійшла до редколегії 12.11.14

УДК 537.636+535.361.1:531.3

Григорук В. І.[1], д.ф.-м.н., проф
Коваленко В. Ф.[1], д.ф.-м.н., проф.,
Петричук М. В.[1], к.ф.-м.н., с.н.с.,
Танигін Б. М.[1], к.ф.-м.н.,
Шулима С. І.[1,*], аспірант.

Зміна оптичного пропускання тонких шарів магнітної рідини під дією імпульсного магнітного поля

[1] Київський національний університет імені Тараса Шевченка,03022, м. Київ, пр-т. Глушкова, 4г,
*e-mail: kiw_88@mail.ru

V. I. Grygoruk[1], Dr.Sci., Prof.,
V. F. Kovalenko[1], Dr.Sci., Prof.,
M. V. Petrychuk[1], Ph.D.,
B. M. Tanygin[1], Ph.D.,
S. I. Shulyma[1,*], post grad. student.

Changing of the optical transmission of thin ferrofluid layers under the influence of magnetic field pulses

[1] Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03022, Kyiv, Glushkova st., 4g,
*e-mail: kiw_88@mail.ru

Досліджено вплив імпульсного магнітного поля на оптичне пропускання тонких шарів магнітної рідини. Показано, що під впливом імпульсного магнітного поля, прикладеного нормально до поверхні досліджуваного зразка, відбувається зменшення оптичного пропускання з подальшим поверненням останнього у вихідний стан ще на протязі дії магнітного поля. Досліджено залежності спостереженого ефекту від величини імпульсу для зразків різної товщини.

Ключові слова: магнітна рідина, оптичне пропускання, імпульс магнітного поля.

The influence of the pulse magnetic field on the optical transmission of thin layers of ferrofluid is investigated. It is shown that under the influence of pulse of magnetic field, applied normal to the sample's surface, take place reduction of the optical transmission with further returning optical transmission to its original state even during the term of the magnetic field. The dependences of the observed effect from magnitude of the pulse for samples with different thickness are investigated. For characterize the dynamics of the optical transmission in the samples the time of decreasing of optical transmission to a minimum value and the time of further increasing its to a level 90% from the signal in the absence of the magnetic field pulse are presented. The time of the reduction and the time of subsequent increasing of the magnitude of the optical transmittance gradually decrease with increasing magnitude of the magnetic field pulse, taking some characteristic threshold value for each sample. The experimental results are explained by the dynamics of the structural rearrangement of magnetic clusters under the influence of magnetic fields and scattering of light on such magnetic clusters.

Key Words: ferrofluid, optical transmission, pulse magnetic field.

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Анісімов І.О.

Вступ

В останні роки значно зріс інтерес до нанорозмірних систем, одним із проявів яких є магнітні рідини (МР) – колоїдні суспензії магнітних наночастинок, що диспергровані в рідині-носієві. Ці унікальні розчини мають перспективу для прикладного застосування в різних галузях науки і техніки [3-5].

В МР, навіть при відсутності зовнішнього магнітного поля, можуть виникати кластери магнітних частинок [6, 7]. Розрізняються два основні типи агрегатів в МР: рідинно-крапельні кластери [8] і жорсткі кластери [9]. Поява таких агрегатів у МР призводить до зміни її фізичних властивостей [10, 11].

В [11] показано, що при освітленні тонких шарів (~200 мкм) МР оптичним випромінюванням видимого ($\lambda \sim 0.63$ мкм) діапазону, потужність якого (20 мкВт) недостатня для прояву його теплової дії, в ній відбувається поступове ізотропне формування магнітних кластерів, які складаються із великого числа $\sim 10^7$ колоїдних частинок. Вимкнення випромінювання призводить до релаксації

© В.І. Григорук, В.Ф. Коваленко, М.В. Петричук, Б.М. Танигін, С.І. Шулима, 2014

магнітної кластерної структури МР до початкового «неосвітленого» стану. Вплив слабкого магнітного поля (~ 10 Е), орієнтованого в площині тонких шарів МР, призводить до напрямленого росту магнітних кластерів, який спостерігається на протязі часу ~60 с, вздовж напрямку магнітного поля, що в свою чергу викликає зміни оптичного пропускання такої МР.

Для дослідження зміни оптичних властивостей МР використовується також метод розсіювання оптичного випромінювання. Так, в [12] показано, що під впливом коротких імпульсів (~ 5 с) магнітного поля, прикладених паралельно до поверхні товстих (~ 10 мм) шарів МР із жорсткими кластерами, відбувалося різке зростання величини інтенсивності розсіяного випромінювання відразу після включення імпульсу. Ця величина інтенсивності майже не змінювалась під час тривалості імпульсу, тоді як після вимкнення імпульсу відбувалося її повільне зменшення. Час наростання сигналу розсіяного світла складав величину майже на два порядки меншу ніж час його спадання. Така поведінка викликана орієнтацією агрегатів магнітних частинок, що мають несферичну форму, в магнітному полі.

Таким чином оптичне випромінювання може слугувати детектором появи і зміни орієнтації структур магнітних кластерів в МР. Такі результати є важливими для розуміння процесу формування кластерів у МР та їх властивостей.

Особливості формування магнітних структур у МР під дією магнітного поля розглядалися різними іншими методиками (наприклад, [10, 1]), проте нам не відомі дослідження впливу імпульсного магнітного поля, напрямленого нормально до площини тонких шарів МР, методом вимірювання оптичного пропускання цих шарів.

Метою даної роботи є дослідження впливу імпульсного магнітного поля, достатньо значної величини і тривалості, орієнтованого нормально до поверхні тонких шарів МР товщиною від декількох десятків до сотень мікрометрів, на пропускання оптичного випромінювання через ці шари.

Умови експерименту

Для дослідження використовувалась МР типу магнетит в керосині, стабілізована олеїновою кислотою. Досліджувана МР відзначалась високою стабільністю, ознакою якої є те, що вторинні магнітні кластери формувалися лише під дією зовнішнього магнітного поля, і які руйнувалися при вимкненні поля, утворюючи однорідну, «класичну» МР, яка складалась із наночастинок та їх первинних кластерів. Експериментальні зразки являли собою контейнери, утворені на поверхні предметного скла, в яких розміщувалася МР. Зверху контейнери були обмежені покрівельним склом. В роботі використовувалися контейнери з товщинами: 50; 120 та 250 мкм, площі поперечного перерізу для яких складали відповідно: 1.27; 0.73 та 0.89 см^2.

Для дослідження оптичного пропускання тонких шарів МР використовувалась установка, зображена на рис.1.

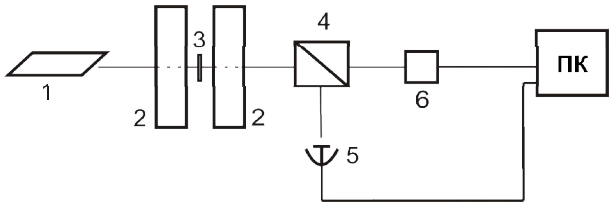


Рис.1. Схема експериментальної установки: 1 – лазер, 2 – електромагніт, 3 – досліджуваний зразок, 4 – напівпрозоре дзеркало, 5 – фотоприймач, 6 – CMOS камера

Як джерело оптичного випромінювання використовувався гелій-неоновий лазер ЛГН-208А. За допомогою електромагніта 2, в феромагнітних осердях якого було зроблено отвори, створювалося магнітне поле, напрямок якого співпадав з напрямком поширення оптичного випромінювання. Досліджувані зразки 3 розміщувалися посередині між полюсами електромагніту, нормально до ліній магнітного поля. Змінюючи величину струму в обмотці електромагніту можна було змінювати величину напруженості магнітного поля від 0 до 3000 Е. Величина напруженості магнітного поля вимірювалася за допомогою датчика магнітного поля SS490. Імпульс магнітного поля формувався за допомогою електромеханічного ключа. В роботі використовувалися імпульси магнітного поля тривалістю $\tau_{імп}$ ~ 40 с. Неоднорідність магнітного поля в області розміщення зразка не перевищувала 4 %. Лазерний промінь після виходу з електромагніту потрапляв на напівпрозоре дзеркало 4, де він розділявся на два променя, один з яких фокусувався на фотоприймачеві 5, а інший потрапляв на CMOS камеру 6. Електричний сигнал з фотоприймача записувався в пам'ять ПК за допомогою модуля реєстрації напруг Triton 3000 U, який дозволяв проводити виміри із кроком 150 мс. Візуальне

спостереження структури в тонких шарах МР здійснювалося за допомогою CMOS камери, приєднаної до ПК.

Форма імпульсу магнітного поля в області розміщення досліджуваних зразків представлена на вставці рис.2а. Час наростання магнітного поля складав ~ 0.4 с, а час спадання – менше 0.1с.

Результати експерименту

Проведені дослідження показали, що при ввімкненні імпульсу магнітного поля з деяким запізненням (~$0.1\tau_{імп}$) спостерігається суттєве зменшення сигналу оптичного пропускання для досліджуваних зразків МР. Таке зменшення спостерігається на протязі деякого періоду часу (τ_1), а потім самовільно ще під час дії імпульсу поля відбувається збільшення оптичного пропускання (рис. 2). Як видно, такий перехід відбувається достатньо швидко, а сам процес збільшення оптичного пропускання, який проходить більш повільно, ніж процес зменшення оптичного пропускання, будемо характеризувати величиною часу τ_2. Вимикання імпульсу призводить до повернення структури у початковий стан, при цьому спостерігається деякий перехідний процес (рис. 2).

Відносна зміна інтенсивності пропускання $\Delta I/I_0$, при величині імпульсу магнітного поля напруженістю 520 Е, для зразків товщиною 50 мкм складала величину ~82 %, а для зразків товщиною 250 мкм – ~ 90 %.

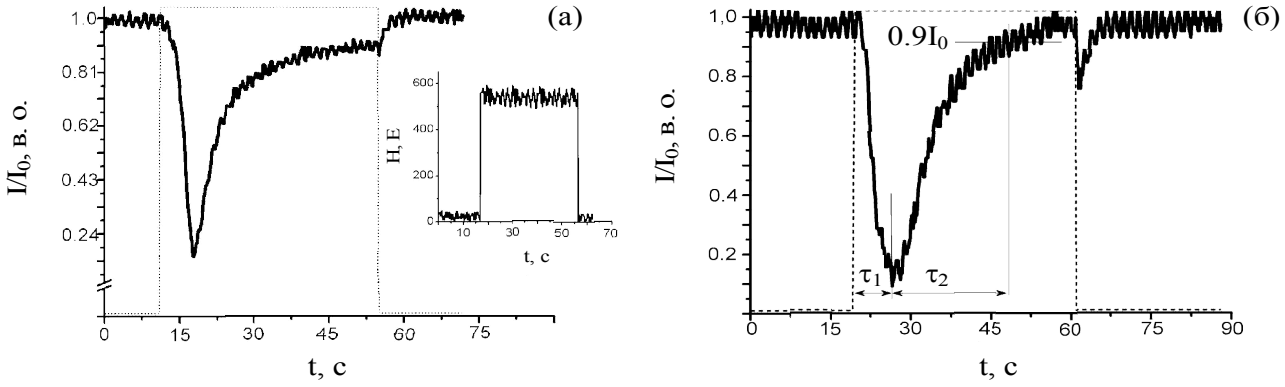


Рис.2. Відносна зміна інтенсивності оптичного пропускання шару МР під впливом імпульсу магнітного поля величиною 520 Е (вставка рис.2а.) для зразків товщиною: а) 50 мкм; б) 250 мкм. Пунктиром показано контур зміни електричного струму в котушках електромагніту; I_0 – інтенсивність світла, що проходить через зразок, при відсутності магнітного поля.

Результати дослідження впливу величини імпульсів магнітного поля на спостережений ефект магнітоіндукованої зміни оптичного пропускання тонких шарів МР наведено на рис.3.

Із ростом величини імпульсу магнітного поля відбувається збільшення глибини піку для кривої оптичного пропускання (рис.3). При цьому спостерігається, що при збільшенні величини імпульсу в момент максимального падіння величини сигналу оптичного пропускання, більша кількість магнітних частинок і первинних кластерів затягується в центральну область досліджуваного шару МР, утворюється більша кількість вторинних кластерів, що призводить до збільшення глибини піку кривої оптичного пропускання при рості величини імпульсу.

Для зразків товщиною 50 мкм зміна сигналу оптичного пропускання при величині імпульсу магнітного поля 150 Е була настільки малою, що її не вдалося зафіксувати на фоні шумів фотоприймача.

Залежності величин τ_1 і τ_2 від амплітуди імпульсу магнітного поля наведені на рис. 4 а,б.

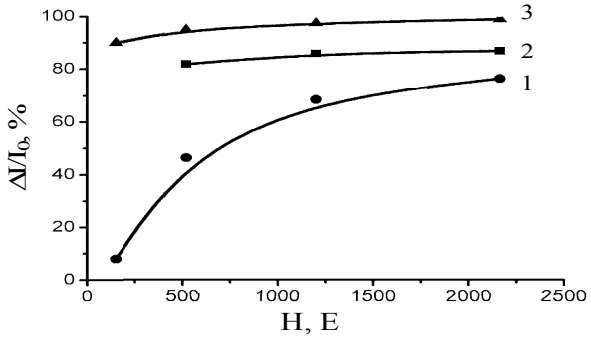


Рис.3. Залежність максимальної зміни величини оптичного пропускання під впливом імпульсу магнітного поля від його величини для зразків МР різної товщини, мкм: 1- 120; 2- 50; 3- 250.

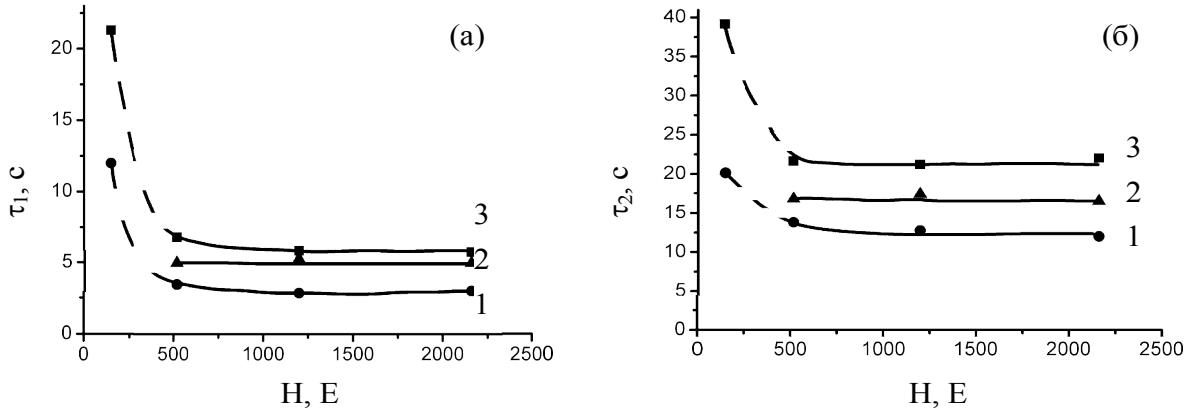


Рис.4. Залежності (а) – часу зменшення (τ_1) і (б) – часу подальшого збільшення (τ_2) оптичного пропускання шарів МР від величини імпульсу магнітного поля для зразків різної товщини, мкм: 1- 120; 2- 50; 3- 250.

Ці залежності мають, в цілому, подібний характер: із ростом величини імпульсу (для зразків товщиною 120 і 250 мкм) зменшується як τ_1, так і τ_2, поступово приймаючи певне характерне граничне для кожного зразка значення (τ^{∞}). Для зразків товщиною 120 мкм: τ_1^{∞}~3с, τ_2^{∞}~12с, а для зразків товщиною 250 мкм: τ_1^{∞}~5.7с, τ_2^{∞}~21.5с. Для шарів МР товщиною 50 мкм граничне значення часу зменшення і часу подальшого збільшення величини оптичного пропускання складають, відповідно: τ_1^{∞}~5с і τ_2^{∞}~17 с.

Обговорення результатів.

Для пояснення того факту, що під дією імпульсу магнітного поля змінюється оптичне пропускання тонких шарів МР, пропонуємо наступну модель. До включення магнітного поля досліджувані зразки представляють собою однорідну МР із окремими наночастинками (~ 10 нм) та поодинокими первинними кластерами.

В момент включення імпульсу магнітного поля, збільшується енергія дипольного-дипольної взаємодії між наночастинками [13], у вільній енергії ентропійна складова [14] вже не домінує і в шарі МР починають формуватися вторинні кластери, розміри яких стають набагато більшими за розміри окремих наночастинок. Поява і ріст таких агрегатів призводить до збільшення розміру їх поперечного перерізу та довжини в напрямку, паралельному до напрямку магнітного поля на протязі часу τ_1 (рис. 2), що призводить до збільшення величини розсіювання та поглинання в шарі МР. Таке початкове збільшення товщини вторинних кластерів призводить до зменшення оптичного пропускання.

Коли товщина вторинних кластерів стає рівною довжині хвилі лазера, величина розсіювання оптичного випромінювання набуває максимального значення [2] і величина оптичного випромінювання, що проходить через шар МР, набуває мінімального значення (рис.2). Подальший ріст геометричного перерізу вторинних кластерів призводить до зменшення величини розсіяного випромінювання. У звязку з наявністю неоднорідності магнітного поля відбувається об'єднання сусідніх (близько розташованих) вторинних кластерів, що також призводить до збільшення величини їх геометричного перерізу і зменшенню кількості центрів розсіювання і поглинання. Все це, у свою чергу, призводить до збільшення інтенсивності випромінювання, що проходить через досліджувані зразки (рис.2).

В момент вимкнення магнітного поля ентропійна складова знову починає домінувати у вільній енергії і для утворених структур магнітних частинок енергетично вигідно розділитись на початкові первинні кластери та окремі наночастинки, що призводить до відновлення початкового значення оптичного пропускання шару МР.

Зменшення τ_1 та τ_2 при відносно малих полях (до ~500 Е) із ростом величини імпульсу, ми пов'язуємо із впливом броунівського руху, який намагається перешкодити формуванню кластерної структури. При великих полях енергія

магнітної взаємодії наночастинок і первинних кластерів набагато перевищую енергію броунівського руху, і тому на формування структури впливає лише енергія магнітної взаємодії і вязкість рідини-носія. Із рис. 4 видно, що для зразків товщиною 50 мкм відсутні дані про величини τ_1 і τ_2 для відносно малих (~ 150 Е) значень величини імпульсу магнітного поля. Це пов'язано із малістю ефекту зміни оптичного пропускання під дією імпульсів магнітного поля малих величин для зразків таких товщин.

Той факт, що значення τ_1 і τ_2 відрізняються для різних досліджуваних зразків пов'язано, на нашу думку, з тим, що швидкість формування вторинних кластерів залежить не тільки від величини імпульсу магнітного поля, а і від геометричних розмірів (товщини і площі) досліджуваних зразків МР. Наявність граничного значення для τ_1 і τ_2 пов'язана із тим, що при досягненні певного критичного значення ($H_{кр}$) величини імпульсу магнітного поля ($H_{кр}$ > ~ 1000 Е) швидкість утворення вторинних кластерів не зростає через вплив в'язкості середовища, що оточує магнітні наночастинки.

Висновки

В даній роботі було досліджено вплив імпульсів магнітного поля, прикладених нормально до поверхні тонких шарів магнітної рідини, на їх оптичне пропускання, яке безумовно, пов'язане з внутрішньою структурою цих шарів. З отриманих результатів можна зробити наступні висновки:

1. Вперше спостережений ефект, який полягає у достатньо різкому зменшенні величини оптичного пропускання тонких шарів магнітної рідини при включенні імпульсу магнітного поля, прикладеного нормально до поверхні шару, і подальшому його збільшенні ще під час дії імпульсу. Цей ефект є наслідком збільшення розсіювання і поглинання в досліджуваних зразках, через формуванням і ріст вторинних кластерів в МР.
2. Збільшення амплітуди імпульсу поля призводить до збільшення пікової величини магнітоіндукованої зміни оптичного пропускання. Така поведінка пов'язана із збільшенням кількості вторинних кластерів у центральній області досліджуваного зразка шару МР при зростанні величини імпульсу, що призводить до збільшення поглинання і розсіювання.
3. Наявність граничного значення для часу зменшення (τ_1) і часу подальшого збільшення (τ_2) оптичного пропускання шарів МР заданої товщини вище певного критичного значення імпульсу магнітного поля ($H_{кр}$> ~ 1000 Е) пов'язане з обмеженістю швидкості утворення вторинних кластерів через вплив в'язкості середовища, що оточує магнітні наночастинки.

Список використаних джерел

1. *Блум Э.Я.* Магнитные жидкости / Э.Я. Блум, М.М. Майоров, А.О. Цеберс.– Рига: Зинатне, 1986. – 386 с.
2. *Bohrem C.F.* Absorption and Scattering of light by small particles / *C.F. Bohrem, D.R. Huffman.* – New York: John Wiley & Sons, 1998. – 544 p.
3. *Timonen J.V.I.* Switchable static and dynamic self-assembly of magnetic droplets on superhydrophobic surfaces / *J.V.I. Timonen, M. Latikka,, L. Leibler, R.H.A. Ras, O. Ikkala* // Science. – 2013 – **341**, №6143, – P. 253-257.
4. *Lübbe A.S.* Preclinical experiences with magnetic drug targeting: tolerance and efficacy / *A.S. Lübbe, C. Bergemann, W. Hunt, T. Fricke, H. Reiss, J.W. Brock, D. Huhn* // Cancer Res. – 1996. – **56**. – P. 4694-4701.
5. *Yellen B.B.* Programmable self-aligning ferrofluid mask for lithographic applications / *B.B.Yellen, G. Friedman, K.A. Barbee* // IEEE Trans. on Magn. – 2004. – **40**, №4. – P. 2994-2996.

References

1. BLUM, YE., MAYOROV, M., TSEBERS, A. (1986) *Magnitnyye zhidkosti.* Riga:Zinatne.
2. BOHREM, C., HUFFMAN D. (1998) *Absorption and Scattering of light by small particles*. New York: John Wiley & Sons.
3. TINONEN, J., LATIKKA, M., LEIBLER, L., RAS, R., IKKALA, O. (2013) Switchable static and dynamic self-assembly of magnetic droplets on superhydrophobic surfaces. *Science.* 341(6143). p. 253-257.
4. LÜBBE, A., BERGEMANN, C., HUNT, W., FRICKE, T., REISS, H., BROCK, J., HUHN, D. (1996) Preclinical experiences with magnetic drug targeting: tolerance and efficacy. *Cancer Res*. 56. p. 4694-4701.
5. YELLEN, B., FRIEDMAN, G., BERBEE, K. (2004) Programmable self-aligning ferrofluid mask for lithographic applications. *IEEE Trans. on Magn.* 40(4). p. 2994-2996.

6. *Zubarev A.Yu.* Condensation phase transitions in ferrofluids / A.Yu. Zubarev, L.Yu. Iskakova // Physica A. – 2004. – **335**, №3. – P. 325-338.
7. *Tanygin B.M.* Molecular dynamics study of the primary ferrofluid aggregate formation / B.M. Tanygin, V.F. Kovalenko, M.V. Petrychuk, S.A. Dzyan // JMMM. – 2012. – **324**, №23. – P. 4006-4010.
8. *Bacri J.C.* Study of the deformation of ferrofluid droplets in a magnetic field / J.C. Bacri, D. Salin, R. Massart // J. Physique-Lett. – 1982. – **43**, №6. – P. 179-184.
9. *Moldovan B.N.* Periodic structure of spicular magnetic clusters in a magnetic liquid / B.N. Moldovan, O.A. Antonyuk, M.V. Petrychuk, V.F. Kovalenko // J. Coll. and Int. Sci. – 2005. – **75**, №6, – P. 93-97.
10. *Chikazumi S.* Physics of magnetic fluid / S. Chikazumi, S. Taketomi, M. Ukita, M. Mizukami, H. Miyajima, M. Setogawa, Y. Kurihara // JMMM. – 1987. –**65**, №2-3. – P. 245-251.
11. *Hoffmann B.* Reversible light-induced cluster formation of magnetic colloids / B. Hoffmann, W. Köhler // JMMM. – 2003. – **262**, №2 – P. 289-293.
12. *Erin K.V.* Light scattering by aggregates of magnetite nanoparticles in a magnetic field / K.V. Erin, S.A. Kunikin // Tech. Phys. – 2007. – **52**, №10. – P. 1332-1335.
13. *Chan D.Y.C.* The orientation-averaged interaction of a pair of magnetic dipolar spheres in an external magnetic field / D.Y.C. Chan, D. Henderson // J. Coll. and Int. Sci. – 1984. – **101**, №2, – P. 419-423.
14. *Scholten P.C.* How magnetic can a magnetic fluid be? / P.C. Scholten // JMMM. – 1983. – **39**, №1-2, P. 99–106.

6. ZUBAREV, A., ISKAKOVA, L. (2004) Condensation phase transitions in ferrofluids. *Physica A.* 335(3). p. 325-338.
7. TANYGIN, B., KOVALENKO, V., PETRYCHUK, M., DZYAN, S. (2012) Molecular dynamics study of the primary ferrofluid aggregate formation. *JMMM.* 324(23). p. 4006-4010.
8. BACRI, J., SALIN, D., MASSART, R. (1982) Study of the deformation of ferrofluid droplets in a magnetic field. *J. Physique-Lett.* 43(6). p. 179-184.
9. MOLDOVAN, B., ANTONYUK, O., PETRYCHUK, M., KOVALENKO, V. (2005) Periodic structure of spicular magnetic clusters in a magnetic liquid. *J. Coll. and Int. Sci.* 75(6). p. 93-97.
10. CHIKAZUMI, S., TAKETOMI,S., UKITA, M., MIZUKAMI, M., MIYAJIMA, H., SETOGAWA, M., KURIHARA, Y. (1987) Physics of magnetic fluid. *JMMM.* 65(2-3). p. 245-251.
11. HOFFMANN, B., KÖHLER, W. (2003) Reversible light-induced cluster formation of magnetic colloids. *JMMM.* 262(2). p. 289-293.
12. ERIN, K., KUNIKIN, S. (2007) Light scattering by aggregates of magnetite nanoparticles in a magnetic field. *Tech. Phys.* 52(10). p. 1332-1335.
13. CHAN, D., HENDERSON, D. (1984) The orientation-averaged interaction of a pair of magnetic dipolar spheres in an external magnetic field. *J. Coll. and Int. Sci.* 101(2). p. 419-423.
14. SCHOLTEN, P. (1983) How magnetic can a magnetic fluid be? *JMMM.* 39(1-2). p. 99–106.

Надійшла до редакції 5.11.14

УДК 535.373, 538.958

Карлаш А.Ю., к.ф.-м.н.

Еволюція кінетики фотолюмінесценції в композитних зразках $arSiO_x$/ nc-Si в процесі старіння

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 83000, м. Київ, пр-т. Глушкова 4 д,
e-mail: anna_karlash@ukr.net

A.Yu.Karlash, Ph.D.

The evolution of PL relaxation processes under aging of $arSiO_x$/ nc-Si nanocomposites

Taras Shevchenko National University of Kyiv, 83000, Kyiv, Glushkova st., 4d,
e-mail: anna_karlash@ukr.net

В роботі проведено дослідження кінетики фотолюмінесценції пресованих композитних зразків на основі нанокремнію в матриці аерогелю кремнезему nc-Si/arSiO$_x$. Проведено розрахунок харакерних часів згасання ФЛ та дисперсійного фоктору для свіжовиготовлених зразків та після зберігання в атмосферних умовах.Показано,що еволюція кінетики ФЛ в зразках nc-Si/arSiO$_x$ обумовлюєтьсяя формуванням інтерфейсних пасткових станів на межі нанокристаліт-оксидна матриця.

Ключові слова: нанокомпозити, релаксація, фотолюмінесценція

In this work the evolution of PL decay kinetic has been investigated using PL lifetime spectroscopy for nc-Si/arSiO$_x$ nanocomposites as prepared and after aging at ambient conditions. It was observed that for freshly prepared composites the PL kinetics was described by the single exponential low, whereas for aged samples PL kinetics transforms by adding the stretched exponential term to the single exponential low: $I(t)= A_1 exp(-t/\tau_1)^{\beta}+A_2 exp(-t/\tau_2)$.The characteristic PL lifetimes as well as dispersion factor β were calculated for nc-Si/arSiO$_x$ samples formed at different pressures (10.7, 13.3 and 16.6 MPa). It was observed that the prolongation of storage time results in increasing of the lifetime τ_1 and τ_2 and decreasing of dispersion factor β. The decreasing of dispersion factor as well as increasing of PL lifetimes during aging at ambient conditions is caused by the formation of interfacial nc-Si/arSiO$_x$ retrapping states that are responsible for radiative recombination processes, as a result, the integrated PL intensity essentially increases.

Key Words: nanocomposites, relaxation, photoluminescence.

Статтю представив д.ф.-м.н. Скришевський В.А.

Вступ

Ефективним методом стабілізації світловипромінюючих властивостей нанокремнію є створення композитних матеріалів nc-Si/SiO$_x$. [1,2]. В таких матеріалах кремнієві наночастинки є інкорпорованими в діелектричне оточення, яке перешкоджає процесам деградації їх люмінесцентних властивостей, сприяючи пасивації поверхні кристаліту та виключаючи з рекомбінаційного процесу канали безвипромінювальної рекомбінації, такі як обірвані зв'язки та дефектні центри. При цьому суттєво зростає квантовий вихід ФЛ. Так, в роботі [2] для пресованих композитних зразків на основі нанокремнію в матриці аерогелю кремнезему (nc-Si/arSiO$_x$) нами було отримане зростання інтегральної інтенсивності ФЛ більше, ніж на порядок, після витримки зразків в атмосферних умовах протягом тривалого часу.

Така поведінка зразків обумовлена, в основному, пригніченням центрів безвипромінювальної рекомбінації внаслідок формування інтерфейсних nc-Si/SiO$_x$ станів на межі нанокристаліт-оксидна матриця.

Створення поруватих композитів на основі нанокремнію в кремній-оксидній матриці дозволяє отримати люмінесцентний матеріал з високим ступенем поруватості та великою питомою площею поверхні, що відкриває широкі можливості практичного застосування, наприклад, в якості трансдьюсерів при створенні хімічних сенсорів з оптичною або електричною адресацією [3]. В даній роботі представлено результати експериментальних досліджень кінетики ФЛ для пресованих композитних матеріалів nc-Si/arSiO$_x$. Проаналізовано еволюцію релаксаційних процесів під час витримки зразків в атмосферних умовах, запропоновано можливі механізми, що

© А.Ю. Карлаш, 2014

Таблиця 1

Динаміка згасання ФЛ нанокомпозиту nc-Si/arSiO_x в процесі окиснення.

Час після збудження ФЛ t, μs	Пік 1 λ, nm/Δλ, nm			Пік 2 λ, nm/Δλ, nm		
	свіжий	окиснений 1 міс	окиснений 2 міс	свіжий	окиснений 1 міс	окиснений 2 міс
30	599 / 77	583 / 63	603 / 91	666 / 61	621 / 106	677 / 61
75	596 / 71	585 / 74	603 / 89	660 / 71	640 / 95	679 / 68
100	595 / 69	585 / 74	603/ 88	659 /71	642 / 93	679 / 70
150	597 / 71	598 / 80	603 / 88	657 / 77	667 / 76	679 / 72

пояснюють зміни в рекомбінаційних процесах під час окиснення зразків.

Матеріали і методи

В роботі досліджувались пресовані композитні зразки на основі прошкоподібного аерогелю кремнезему (ar-SiO_x) та нанокристалічного кремнію (nc-Si). Спосіб виготовлення зразків детально описано в роботах [1-3].

Для дослідження фотолюмінесценції (ФЛ) було використано техніку аналогової реєстрації кінетики ФЛ при кімнатній температурі в діапазоні довжин хвиль 350 – 750 нм [1,2,4]. Збудження ФЛ здійснювалось за допомогою азотного лазера (λ=337 нм, f=100 Гц, τ=8 нс, p=20 мВт). Для реєстрації емісійних спектрів використано монохроматор MS2004 SOLAR TII, фотопомножувач HAMAMATSU C6270 та аналогово-цифровий перетворювач (робочий режим до 1 ГГц). Для відновлення сигналу затухання ФЛ проводилась деконволюція сигналу на виході з підсилювача. Для успішного здійснення операції деконволюції в схемі використано підсилювач з широкою смугою пропускання та АЦП з частотою вибірки 1МГц і вище.

Проведено дослідження кінетики ФЛ для зразків nc-Si/arSiO_x свіжовиготовлених та після зберігання в атмосферних умовах протягом визначеного часу.

Результати та їх обговорення.

Аналіз кінетики ФЛ дозволяє робити більш точні висновки як щодо процесів утворення дефектних станів в забороненій зоні внаслідок окиснення досліджуваного матеріалу, так і щодо динаміки випромінювальних та безвипромінювальних переходів у досліджуваних матеріалах. Характерна кінетика ФЛ приведена на рис. 1 для свіжо виготовленого та витриманого в атмосферних умовах протягом 2 місяців нанокомпозиту nc-Si/arSiO_x.

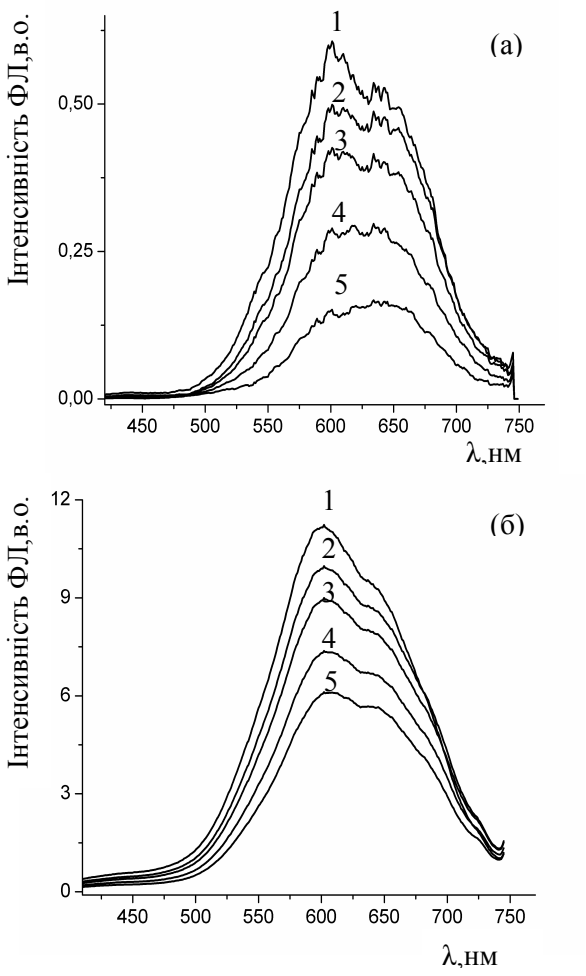


Рис. 1 Кінетика ФЛ композиту nc-Si/arSiO_x, пресованого під тиском 6 т, щойно виготовленого **(а)** та окисненого в атмосферних умовах протягом 60 діб **(б)**; сигнал ФЛ записано через: **1** – 30 μs, **2** - 75 μs, **3** – 100 μs, **4** – 150 μs, **5** – 200 μs після збудження лазерним імпульсом.

Для свіжо виготовленого зразка кінетика затухання ФЛ характеризується асиметрією з перерозподілом відносної інтенсивності основних максимумів (рис. 1,а), тоді як після тривалої витримки в атмосферних умовах зразок демонструє симетричне затухання в усьому діапазоні довжин хвиль (рис. 1,б). Для аналізу

Таблиця 2

Розраховані значення часу згасання ФЛ та дисперсійного фактору β для композитів nc-Si/SiO_x свіжо виготовлених та витриманих при атмосферних умовах

Формуючий тиск:	Час згасання ФЛ, τ_1/τ_2 μs			Дисперсійний фактор β		
	свіжий	окиснений 1 міс	окиснений 2 міс	свіжий	окиснений 1 міс	окиснений 2 міс
10.7 МПа	-/ 100	209 / 223	268 / 312	1	0,92	0,82
13.3 МПа	-/ 117	158 / 173	287 / 327	1	0,92	0,78
16.6 МПа	- / 106	175 / 182	356 / 302	1	0,9	0,8

кінетики ФЛ було проведено розклад спектрів на гаусові компоненти та проаналізовано еволюцію положення максимумів ФЛ та їх півширини в для різних зразків. У таблиці 1 приведено розраховані значення положення та напівширини гаусових компонент спектрів ФЛ, в залежності від часу окиснення зразків.

Аналізуючи отримані дані, можна зробити висновок, що у випадку свіжих зразків кінетика затухання ФЛ характеризується асиметрією зі зсувом положення обох максимумів в область менших довжин хвиль, при цьому відбувається перерозподіл відносного вкладу піків на користь довгохвильової компоненти спектра. Отже, для свіжих зразків час життя ФЛ збільшується при збільшенні довжини хвилі. Натомість для витриманих протягом 2 міс в атмосферних умовах зразків темп затухання ФЛ стає однаковим в усьому діапазоні довжин хвиль.

Таким чином, в процесі окиснення відбуваються суттєві зміни у кінетиці релаксаційних процесів досліджуваних матеріалів. На рис. 2 приведено криві згасання ФЛ, записані на довжині хвилі 660 нм (1.88 еВ) для зразка nc-Si/arSiO$_x$ свіжо виготовленого та після витримки в атмосферних умовах протягом 30 та 60 діб. Для спрощення порівняння даних криві пронормовано на максимальне значення.

Кінетика згасання для свіжовиготовлених зразків (рис. 2, крива 1) підпорядковується закону простої експоненти з характерним часом згасання τ. В процесі окиснення зразків кінетика ФЛ суттєво змінюється: для окиснених зразків залежність I(t) описується сумою двох доданків, перший з яких являє собою просту експоненту, а другий – так звану «затягнуту» експоненту: $I(t)= A_1 exp(-t/\tau_1)^{\beta}+A_2 exp(-t/\tau_2)$, де β – дисперсійний фактор [4], τ_1 та τ_2 – характерні часи згасання ФЛ.

В таблиці 2 наведено розраховані значення часів згасання та дисперсійного фактору для досліджуваних зразків nc-Si/arSiO$_x$, сформованих при різних тисках (10.7, 13.3 та 16 МПа). Дані отримані на основі кривих згасання ФЛ,

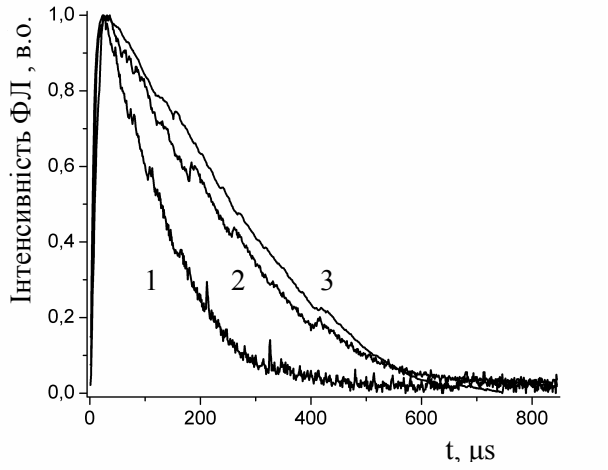


Рис. 2 Нормовані криві згасання ФЛ, записані на довжині хвилі 660 нм для зразка nc-Si/arSiO$_x$, спресованого під тиском 13,3 МПа: **1** - свіжо виготовлений зразок та після зберігання протягом **2** – 30 діб та **3** – 60 діб.

записаних на довжині хвилі 660 нм. Відмічено, що пролонгація часу витримки зразків при атмосферних умовах викликає зростання характерних часів τ_1 та τ_2 від 100 μs до 300 μs, одночасно з цим дисперсійний фактор зменшується від 1.0 до 0.78 – 0.82.

Закон Кольрауша-Вільямса-Ваттса, або «затягнута» експонента характеризує кінетику релаксаційних процесів у невпорядкованих та/або низькорозмірних системах [4,5]. Невпорядкованість матеріалу, яка впливає на вигляд кінетики згасання ФЛ, може бути обумовлена: (а) великим розкидом розмірів кремнієвих нанокристалітів; (б) випадковим просторовим оточенням нанокристалітів та (в) структурою їх поверхні [5].

Значення $\beta<1$ в законі «затягнутої» експоненти відповідає присутності великої кількості елементарних релаксаційних процесів (випромінювальних або безвипромінювальних), що відповідають за емісію на даній довжині хвилі.

Таким чином, «затягнута» експонента може бути представлена як суперпозиція великої кількості одно експонентних функцій. З іншого боку, наявність перехоплюючих станів (retrapping states) всередині забороненої зони також обумовлює кінетику спаду ФЛ за законом «затягнутої» експоненти, при цьому наявність невпорядкованості середовища не є необхідним фактором [6]. Враховуючи, що дисперсійний фактор β пов'язаний з густиною пасткових станів, зменшення його значення в процесі окиснення зразків може бути результатом збільшення кількості міжфазних nc-Si/arSiO$_x$ перехоплюючих станів, що відповідають за випромінювальну рекомбінацію. Збільшення кількості таких станів в процесі окиснення одночасно викликатиме зростання характерного часу релаксації.

Висновки

В роботі представлено результати експериментальних досліджень кінетики ФЛ для пресованих композитних матеріалів nc-Si/arSiO$_x$. Проаналізовано еволюцію кінетики ФЛ під час витримки зразків в атмосферних умовах. Показано, що окиснення зразків призводить до зміни закону згасання ФЛ: для окиснених зразків залежність I(t) описується сумою двох доданків, перший з яких являє собою просту експоненту, а другий – так звану «затягнуту» експоненту: $I(t)= A_1 exp(-t/\tau_1)^{\beta}+A_2 exp(-t/\tau_2)$. Збільшення часу витримки викликає зменшення значення дисперсійного фактору β та зростання характерного часу релаксації τ. Така поведінка кінетики ФЛ може бути обумовлена збільшенням кількості міжфазних nc-Si/arSiO$_x$ перехоплюючих станів, що відповідають за випромінювальну рекомбінацію.

Список використаних джерел

1 *A.Yu.Karlash*. Photoluminescence properties of silica aerogel/porous silicon nanocomposites / A.Yu.Karlash,Yu.E.Zakharko,V.A.Skryshevsky, A.I. Tsiganova, G.V. Kuznetsov // J.Phys.D: Appl. Phys. – 2010. – №48 – P.335405

2 *Anna Yu. Karlash.* Evolution of visible photoluminescence of Si quantum dots embedded in silicon oxide matrix/ Anna Yu. Karlash, Valeriy A. Skryshevsky Gennady V. Kuznetsov, Vasyl P. Kladko //`J. of Alloys and Compaunds. – 2013. – №.577. – P.283-287

3 *A. Yu. Karlash*. Impedance spectroscopy of composites based on porous silicon and silica aerogel for sensor applications/ A. Yu. Karlash, G. V. Kuznetsov, Yu.S. Milovanov, V. A. Skryshevsky// Functional Materials. – 2013. – № 20 (1). – P.110-117.

4 *Q. Guillois.* Photoluminescence decay dynamics of noninteracting silicon nanocrystals/ Q. Guillois, N. Herlin-Boime, C. Reynaud, G.Ledoux, F. Huisken// J. of Appl. Phys. – 2004. – №97. – P.3677-3682

5 *L. Pavesi.* Stretched-exponential decay of the luminescence in porous silicon/ L. Pavesi, M. Ceschini// Phys. Rev. B – 1993 – №48 – P.17625

6 *R. Chen.* Apparent stretched-exponential luminescence decay in crystalline solids/ R. Chen// J. of Lumin. – 2003. – №102-103 – P.510-518

References

1. KARLASH, A., ZAKHARKO, YU., SKRYSHEVSKY, V., TSIGANOVA, A., KUZNETSOV,G.(2010) Photoluminescence properties of silica aerogel/porous silicon nanocomposites, *J.Phys.D: Appl. Phys.,* 48, p.335405

2. KARLASH, A., SKRYSHEVSKY, V., TSIGANOVA, A., KUZNETSOV,G., KLADKO, P.,(2013) Evolution of visible photoluminescence of Si quantum dots embedded in silicon oxide matrix*, J. of Alloys and Compaunds,* 577, p.283-287

3. KARLASH, A., KUZNETSOV,G., MILOVANOV, YU., SKRYSHEVSKY, V., (2013*)* Impedance spectroscopy of composites based on porous silicon and silica aerogel for sensor applications, *Functional Materials*, 20(1), p.110-117

4. GULLOIS, Q., HERLIN-BOIME, N., REYNALD, C., (2004) Photoluminescence decay dynamics of noninteracting silicon nanocrystals, *J. of Appl. Phys.,* 97, p.3677-3682

5. PAVEZI, L., CESSINI, M., (1993) Stretched-exponential decay of the luminescence in porous silicon, *Phys. Rev. B.,* 48, p.17625

6. CHEN, R., (2003) Apparent stretched-exponential luminescence decay in crystalline solids, *J. of Lumin.,* 102-103, p. 510-518

Надійшла до редколегії 5.09.14

УДК 537.311.33

Кузьмич Р.Ю., студ.,
Павлюк С.П.[1], к.ф.-м.н., с.н.с.
Ковток В.Г., ас.

Вплив конструкції напівпровідникового діода на його розігрів імпульсом ударного струму

[1] Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 03022, м. Київ, просп. Глушкова 4г,
e-mail: pps@univ.kiev.ua

R. YU. Kuzmych, stud.,
S. P. Pavljuk[1], Ph.D.
V. H. Kovtok, as.

Influence of design of semiconductor diode of the heating by the impact current

[1] Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03022, Kyiv, Glushkova ave., 4g,
e-mail: pps@univ.kiev.ua

В роботі розглянуто вплив різних конструкцій виводів напівпровідникових діодів на тепловідвід. Запропоновано, який вид виводів краще за все використовувати для ефективного відводу тепла і відповідно меншого розігріву кристала напівпровідникового діода. Досліджувалися промислові кремнієві напівпровідникові діоди з однаковими характеристиками, але з різними типами конструкцій. Показано, що виводи діодів типу «цвях» краще виконують функцію тепловідводу ніж виводи інших типів.

Ключові слова: напівпровідниковий діод, розігрів, виводи діодів

During the semiconductor diode's life there are many times of creating powerful current. It can be a short circuit or network congestion etc. When the powerful shock pulse passing through a semiconductor diode current is significant heating of the crystal diode, leading to irreversible changes of characteristics. In industry using various types of terminals for different diodes. The paper considers the influence of different designs terminals to diode heat sink. In conducting research through the crystal semiconductor diode missed several half-sine series of current pulses with duration of reheating I_h 10 ms and a frequency of 100 Hz with adjustable amplitude. Proposed kind of outputs is the better used for efficient heat dissipation and consequently lower warm-crystal semiconductor diode. Investigated industrial silicon semiconductor diodes with the same characteristics, but with different type of designs. It was shown that the diodes outputs of the "nail" function better heat dissipation than other types of outputs.

Key Words: semiconductor diode, heating, designs terminals

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Скришевський В.А.

Introduction

When passing through a semiconductor diode powerful shock pulse current is significant heating of the crystal diode, leading to irreversible changes of characteristics [1]. In industry using various types of terminals for different diodes. The aim of this work was to study the impact of design leads to heating of semiconductor diodes.

In [2] have investigated the temperature dependence of the crystal pads on the amplitude and duration of the current pulse and calculated the temperature of heating of the crystal. The value of a warming area p-n junction diode of the crystal during the passage of the pulse was not experimentally determined.

Research methodology

In conducting research through the crystal semiconductor diode missed several half-sine series of current pulses with duration of reheating I_h 10 ms and a frequency of 100 Hz with adjustable amplitude. The number of pulses in the series could change. Along with the current warm I_h diode passed through the crystal constant direct current I_d, value of 10 mA.

There was oscillograms voltage drop across the crystal of the two currents (Fig. 2). For the time when the current warm- Ip was built maximum current-voltage characteristics (CVC) was calculated and its resistance R p. At a time when $I_h = 0$, the voltage drop measured directly from U_d current I_d

© R. Kuzmych, S. Pavliuk, V. Kovtok, 2014

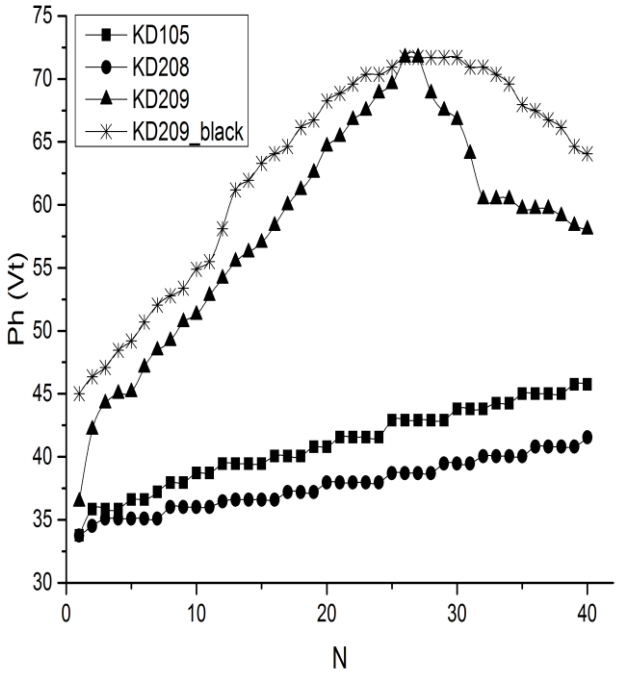


Fig.1 Dependence of diode power allocated to the number of half-waves.

and calculated dependence of resistance of the crystal diode R_d on the temperature and the number of pulses of shock current. The dependence of the voltage U_d direct or R_d on diode temperature T at low forward current I_d, $U_d = f(T)$, the temperature coefficient of the voltage [3] will determine the temperature of the p-n junction.

Experimental samples

To obtain the dependence U_d (R_d) = f (T), the temperature and time used a warm-up tool. A special incubator under an inert atmosphere of nitrogen determined depending U_d (Rd)), the temperature T. By experimentally removed such dependencies defined temperature values at different times of the process of heating.

U_d dependence on temperature is almost linear in the range studied up to 300 ˚C temperature and is applicable for all cases examined.

It should be noted that the exact value of T can be determined only on the graduated crystals. Crystal, more or less heated unevenly, depending on the time of its heating and so any way to determine some average temperature.

On non-graduated crystals can't accurately determine the temperature. It is determined with an accuracy matches the estimated or average depending U_d, with the actual temperature. The maximum error in this case can reach 27%.

Since the research used many crystal diodes are

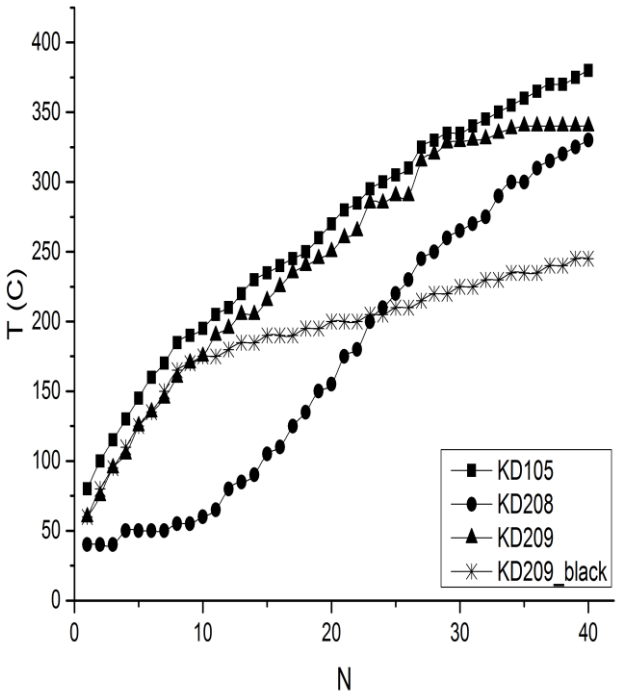


Fig.2 Dependence of the temperature of heating of the diode on the number of half-waves

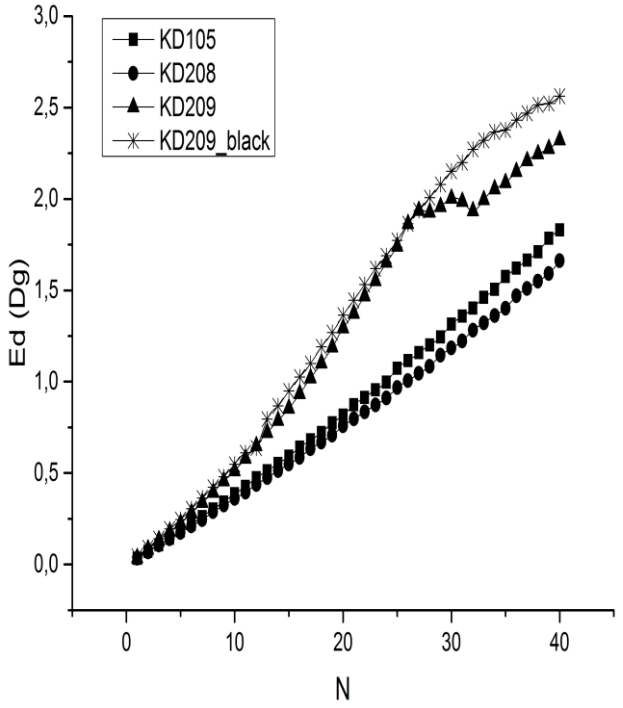


Fig.3 Dependence of the direct energy of diode allocated to the number of half-waves.

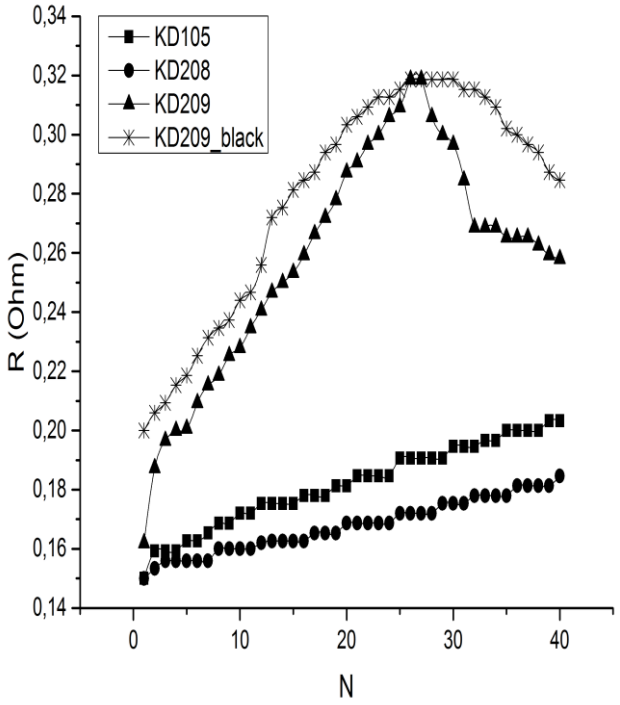


Fig.4 Dependence of the resist of diode allocated to the number of half-waves.

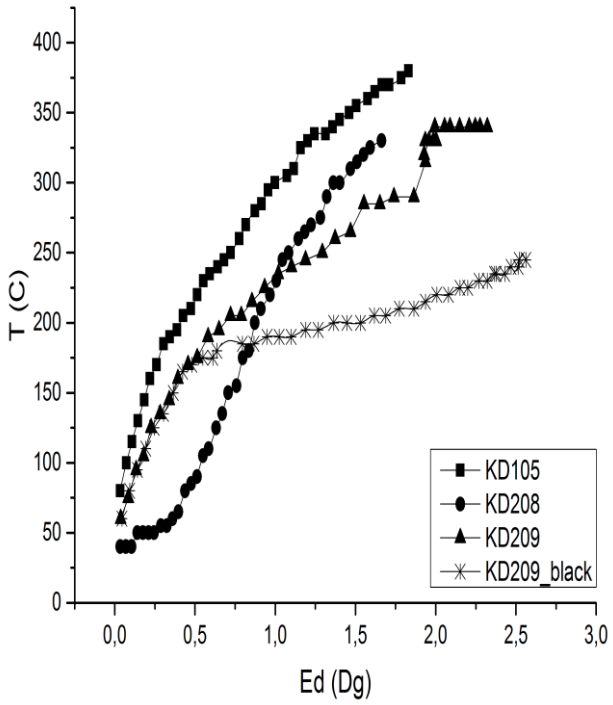


Fig.5 Dependence of the temperature of diode allocated to the direct energy.

shown in the graphs are the most typical averaged results.

The experimental results. In conducting of research results obtained are shown in Figures.

On the figure 1 we can see dependence of diode power allocated to the number of half-waves. We can see that the power allocated on the diodes KD 209 and KD 209 black are largest that power allocated on diodes KD 105 and KD 208.

On the figure 2 shown dependence of the temperature of heating of the diode on the number of half-waves. We can see that all diodes are heating very fast. KD 208 heating more slowly that another. Diode KD209black have temperature maximum of 250 degree of Celsius. So we can say that diode KD 209black is better that another.

On the figure 3 we can see dependence of the direct energy of diode allocated to number of half-waves. We can see that the direct energy on different diodes are growing up different. The largest growing are in diodes KD 209 and KD 209black. And the smaller are in diodes KD 105 and KD 208.

On the figure 4 we can see dependence of the resist of the diode allocated to number of half-waves. We can see that resists on the diodes KD 209 and KD 209black are changing more quick and different. Resists on the diodes Kd105 and KD 208 are changing more slowly.

On the figure 5 we can see the dependence of the temperature of diodes allocated to the direct energy. It is the main figure. On this figure we can see that if we change the direct energy, temperature on different types of diodes changes different we can see that the highest temperature we have on diode KD 105 and the smaller temperature on the diode KD 209black. So we can say that diode KD 209 have more effective construction that another types of diodes.

To obtain the dependence U_d (R_d) = f (T), the temperature and time used a warm-up tool. A special incubator under an inert atmosphere of nitrogen determined depending U_d (Rd)), the temperature T. Since the research used many crystal diodes are shown in the graphs are the most typical averaged results.

Discussion of the results

Crystals with specially filmed dependencies U_d, the temperature called graded.

It should be noted that the determination of the temperature dependence on U_d = f (T) has a limit of measurement accuracy in land temperatures over 400˚C.

The slope of the linear part of this dependence is approximately 2mV/degree. Variations in U_d

graduated crystals did not exceed 15% of the reference data.

Conclusions

Apparently the largest capacity allocated diode KD209 KD209black at the same time as warming KD209 black is much smaller than the KD 209. Possible to conclude that the findings are used in diode KD209 black exercise is more effective than a heat sink diode KD209.

Список використаних джерел

1. *Зи С.* Физика полупроводниковых приборов : пер. с англ. / С. Зи. - Москва: Мир, 1984. - 95с.
2. *Викулин И.М.* Физика полупроводниковых приборов / И.М. Викулин, В.И. Стафеев. − Москва: Радио и связь, 1990. - 264с.
3. *Григорьев О.П* Диоды: Справочник. / О.П. Григорьев, В.Н. Замятин, Б.В. Кондратьев, С.Л. Пожидаев; − Москва: Радио и связь, 1990. - 336с.
4. *Павлюк С.* Вплив температури на модифікацію параметрів діодів потужним імпульсом струму. / С. Павлюк, Р. Кузьмич // Вісник Київського університету. − Сер.: Радіофізика та електроніка". - 2011. − №14. - С. 34-37.
5. *Павлюк С.* Визначення температури діодного кристала під час проходження крізь нього імпульсу ударного струму: / С. Павлюк, Г. Кутлін, С. Савицький, Р. Солтис, І. Тищенко // Вісник Київського університету. − Сер.: Радіофізика та електроніка". - 2008. − №11. - С. 29-32.
6. *Павлюк С.* Саморегуляція виділеної потужності напівпровідникового діодного кристала / С.П. Павлюк, Л.В. Іщук, В.М. Кисліцин // Вісник Київського університету. −Сер.: Фізико-математичні науки, 2002. – №1. - С. 344-347.
7. Диоды полупроводниковые. Термины, определения и буквенные обозначения параметров: ГОСТ 25529–82. − [Чинний від 1984-01-01]. −М.: Изд-во стандартов, 1987. С. 27.

References

1. SZE S. (1986) *Physic of semiconductor devises*. Moskva: Mir.
2. VAKULIN I., STAFEEV V. (1990) *Physic of semiconductor devises*. Moskva: Radio i svyaz'.
3. GRIGOR'EV O. et al. (1990) *Dioes: manual*. Moskva: Radio i svyaz'.
4. PAVLIUK S., KUZMYCH R. (2011). Impact of temperature to modification of diode's parameters of powerful current pulse *Bulletin Taras Shevchenko National University of Kyiv. Radiophusics and electronics* 14. p. 34-37.
5. PAVLIUK S., KUTLIN G., SAVITSKY S., SOLYUS R., TISCHENKO A. (2008) Determination of the crystal diode temperature during the passage through it of shock pulse current *Bulletin Taras Shevchenko National University of Kyiv. Radiophusics and electronics* 11. p. 29-32.
6. PAVLIUK S., ISCHUK L., KYSLITSYN V. (2002) Self-selected power semiconductor diode crystal. *Bulletin Taras Shevchenko National University of Kyiv. Physical and Mathematical Sciences* 1. p. 344-347.
7. GOST 25529-82 (1987) Semiconductor diodes. Terms, definition and letter options of parameters. p. 27.

Надійшла до редколегії 13.10.14

УДК 537.311.33

Павлюк С.П.[1], к.ф.-м.н., с.н.с.
Оберемок О.С.[1], к.ф.н., м.н.с.
Телега В.М. к.ф.-м.н., с.н.с.
Гандзюк В.І.[1], студ

S. P. Pavljuk[1], Ph.D
O. S. Oberemok[1], Ph.D.
V.M.Telega, Ph.D.
V. I. Handziuk[1], stud.

Ефект пам'яті в КСДІ структурах

[1] Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, пр-т. Глушкова 4г, e-mail: gandziuk2009@gmail.com

Memory effect in SDI structures

[1] Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03680, Kyiv, Glushkova st., 4g, e-mail: gandziuk2009@gmail.com

В роботі розглянуто ефект пам'яті, який виникає в напівпровідникових структурах, виготовлених за технологією «кремнієві структури з діелектричною ізоляцією» (КСДІ) при живленні їх двома послідовними імпульсами в режимі генератора напруги. Показано, що в цьому випадку на осцилограмах струму першого імпульсу виникає пік, вольт-амперна характеристика (ВАХ) набуває N-подібного вигляду, формується високопольова область, яка являє собою термічний градієнтно–дрейфовий (ТГД) домен. Ця область розташована перпендикулярно лініям протікання струму ,визначає його величину і неоднорідний джоулів розігрів структури. Другий імпульс напруги «пам'ятає» тепловий профіль, параметри першого імпульсу і зразу формує N-подібну характеристику без піка струму. Дано пояснення отриманих результатів.

Ключові слова: інжекційні ефекти, неоднорідний джоулів розігрів, пам'ять, вольт-амперна характеристика

The memory effect, which appears in semiconductor structures, made by "silicon structures with dielectric isolation" (SDI) technology in two pulse power generator mode is investigated. It is shown that in this case the peak of current appears on the oscillogram of the first pulse of current and current-voltage characteristic (IV-curve) becomes N-shaped, high-field region, which is thermal gradient-drift (THD) domain is formed. This region is placed perpendicularly to the direction of current flow and determines its behavior. Also it causes non-uniform Joule heating. The second voltage pulse "remembers" the temperature shape and parameters of the first pulse and from its very beginning forms N-shape IV-curve without current peak formation. The explanation of obtained results is given.

Key Words: injection effects, non-uniform Joule heating, memory, IV-curve

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Скришевський В.А.

Вступ

При протіканні струмів великої густини крізь напівпровідникову КСДІ структуру відбувається її неоднорідний джоулів розігрів. Це призводить до виникнення термічного градієнтно-дрейфового домену [1]. Характерною ознакою цього є те, що на осцилограмі струму з'являється пік. ТГД домен – це вузька високопольова область, розташована перпендикулярно до напрямку протікання струму, з розмірами порядку одиниць мікрон [2]. Оскільки після виникнення домену майже вся прокладена потужність виділяється у вузькій частині структури, то різкий неоднорідний розігрів призводить до змін характеристик структури або її руйнації.

Дослідження закономірностей виникнення та існування ТГД домену в КСДІ структурах є актуальними і можуть бути корисними для спеціалістів-фізиків та конструкторів напівпровідникових приладів.

Домен обмежує величину струму, що проходить крізь структуру, і формує N-подібну вольт-амперну характеристику. Докладно такі дослідження описано в роботах [1-3]. Виникненням або зникненням домену можна було керувати, створюючи градієнт температури певного знаку.

© С.П. Павлюк, О.С. Оберемок, В.М. Телега, В.І. Гандзюк 2014

На експериментальних зразках, описаних в роботі [4], це легко було зробити, притискаючи до одного з контактів нагрівач. На КСДІ структурах це зробити неможливо.

Проте коли до структури прикласти два імпульси напруги з невеликою затримкою, то перший імпульс створить неоднорідний розігрів необхідного профілю, а другий імпульс відчує його вплив. Тобто реалізується «ефект пам'яті».

Метою даної роботи є дослідження ефекту пам'яті та впливу на нього різних режимів живлення структури.

Методика дослідження

Дослідження проводились за наступною методикою. До КСДІ структури прикладався перший імпульс напруги, і спостерігався імпульс струму. Коли на осцилограмі струму з'являвся пік, то це означало, що утворився ТГД домен. ВАХ набуває N-подібного вигляду.

Відповідно до [1], всередині структури виникає область підвищеної температури, яка має дзвоноподібну форму. В центрі структури температура максимальна, а в напрямку контактів вона зменшується. Якщо в цей момент вимкнути імпульс напруги, то в структурі фіксуються градієнти температури з різними знаками. І якщо після цього до структури прикласти другий імпульс напруги, подібний першому, то він буде діяти за умов, коли в структурі існує початковий градієнт температури.

Таким чином, проявляється ефект пам'яті, який призводить до того, що в другому імпульсі пік струму не формується, ВАХ стає N-подібною зразу, і формується ТГД домен.

Ефект пам'яті проявляється в тому випадку, коли затримка між першим та другим імпульсами є не більше, ніж час розповсюдження тепла від структури до підкладки, тобто не більше часу остигання структури.

Експериментальні результати

Експериментальні КСДІ структури докладно описано в роботі [2]. Це кремнієві дифузійні резистори, виготовлені за технологією КСДІ, симетричні $n^+ - n - n^+$ структури з електричними контактами з алюмінію (Al) до n^+-областей. Вони розташовані в «кишенях», що відокремлені шаром SiO_2 завтовшки ≈ 2мкм від підкладки з полікремнію товщиною 300 мкм. «Кишені» мають різну глибину h_1 (від 2.8 мкм до 10.5 мкм). Довжина структур 2.4 мкм, ширина 9.8 мкм.

Осцилограми струму зображено на рис.1. Дослідження проводились в режимі генератора напруги, тобто V=const. На структуру подавали імпульс напруги з регульованою тривалістю та амплітудою і спостерігали імпульси струму. При напрузі V=5.3В на осцилограмі струму формувався пік (осц.1,рис.1).

Після першого імпульсу через час затримки $t_{затр}1$=3,2мкс подавався другий імпульс напруги з амплітудою першого імпульсу. На осцилограмі струму другого імпульсу пік струму відсутній (осц.2-1, рис.1).

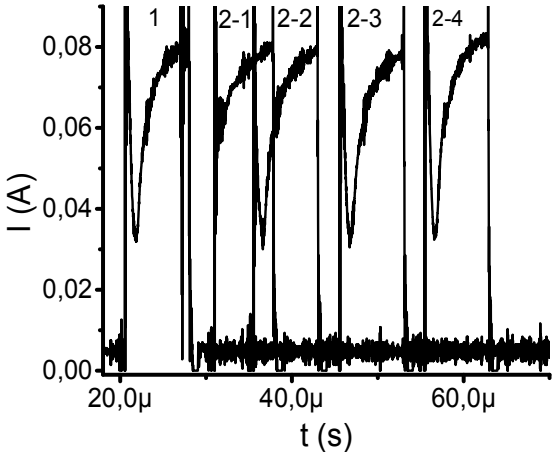


Рис.1 Осцилограми струму

При збільшенні часу затримки до 7 мкс на осцилограмі 2-2,рис.1 з'являється невеликий пік струму. При збільшенні $t_{затр}$ до 17мкс і 27 мкс (осц.2-3,2-4, рис.1) другий імпульс не відчуває впливу першого імпульсу і повністю повторює його осцилограму. Ефект пам'яті відсутній.

Вольт-амперні характеристики показано на рис. 2. Вони побудовані за осцилограмами для моментів часу, коли струм досягає максимального значення $I_{макс}$ (крива 1, перший імпульс) та мінімального значення $I_{мін}$ (крива2, перший імпульс).

ВАХ для другого імпульсу (момент $I_{макс}$) для різного часу затримки між першим та другим імпульсами показано відповідно кривими 3,4 і 5. Як видно з графіків, у першому імпульсі після піку струму в момент $I_{мін}$ ВАХ має N-подібний вигляд (крива2, рис.2). ТГД домен сформовано. КСДІ структура розігріта неоднорідно.

ВАХ другого імпульсу для моменту $I_{макс}$ при затримці 3,2 мкс зразу має N-подібну форму (крива3, рис.2). Тобто за час досягання $I_{макс}$

домен вже сформовано, тому що структура «пам'ятає» неоднорідний розігрів від першого імпульсу.

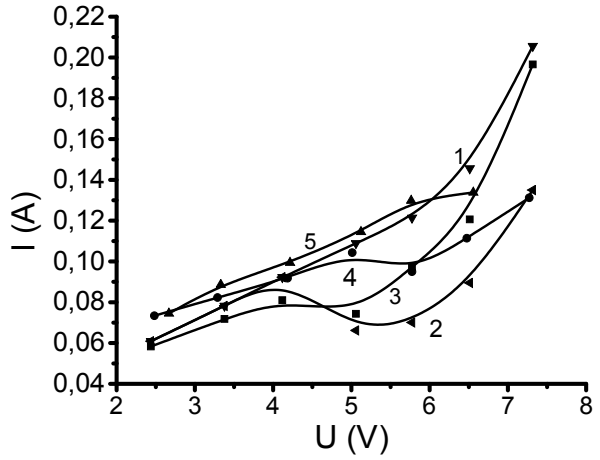


Рис.2 ВАХ, режим V - const

Збільшення затримки між першим та другим імпульсами призводить до того, що ВАХ для $I_{макс}$ другого імпульсу наближається до ВАХ $I_{макс}$ першого імпульсу. Вплив першого імпульсу на другий зменшується(крива 4, рис.2), а потім і зовсім зникає (крива5, рис. 2).

Аналогічні дослідження проведено при живленні структури в режимі постійного струму. В експериментах дотримувалась вимога I=const. Також змінювали амплітуду імпульсів струму, фіксували падіння напруги на структурі. Осцилограми падіння напруги показано на рис.3.

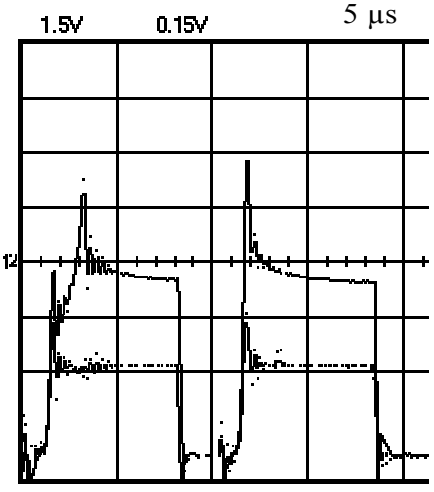


Рис. 3. Осцилограми падіння напруги

Як видно з осцилограм, при мінімальній затримці між імпульсами 3,2мкс ефекту пам'яті не спостерігається.

Другий імпульс падіння напруги практично повторює перший імпульс. ВАХ показано на рис. 4.

Як видно з графіків, ВАХ для $V_{поч}$ другого імпульсу (крива2, рис.4) повторює ВАХ $V_{поч}$ першого імпульсу (крива1, рис.4). Ефекту пам'яті також немає.

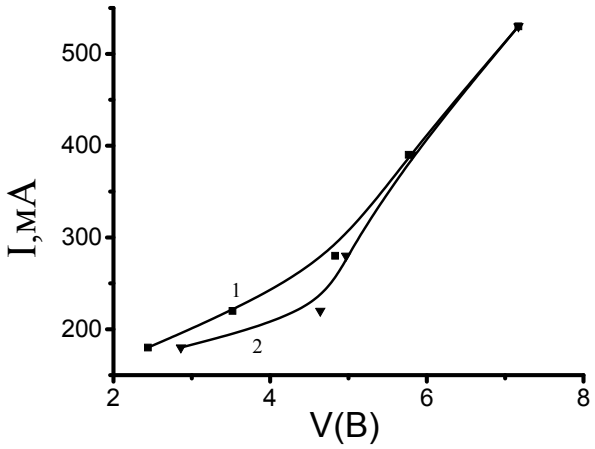


Рис.4 ВАХ, режим I - const

Аналіз отриманих результатів

Аналіз отриманих результатів показує, що ефект пам'яті існує в певному часовому інтервалі, який пов'язаний з часом остигання структури.

Час проходження тепла крізь товщину структури до підкладки можна оцінити за формулою

$$t_{ост}=\lambda c\backslash\rho l^2 , \qquad (1)$$

де λ - теплопровідність, с – теплоємність, ρ– густина.

Розрахунок $t_{ост}$ для КСДІ структури з товщиною 9.8 мкм складає 12 мкс та співпадає з експериментальними даними.

За час затримки між імпульсами в 3,2 мкс другий імпульс відчуває сильний вплив першого, пік струму відсутній, ефект пам'яті максимальний. При затримці другого імпульсу в 7 мкс вплив першого на другий імпульс вже менший, а при затримці в 17 мкс та 27 мкс зовсім відсутній. Такий результат пов'язаний з тим, що структура остигла зовсім.

Ефект пам'яті існує тільки при живленні структури в режимі генератора напруги. В

такому режимі утворюється ТГД домен, що являє собою високопольову область, яка розташована перпендикулярно до напрямку протікання струму і ефективно впливає на цей процес.

При живленні структури в режимі генератора струму ефекту пам'яті не спостерігається.

В структурі спочатку виникає високопольова область, яка стимулює виникнення шнура струму, який розташований вдовж напрямку його протікання. Така конфігурація не призводить до виникнення градієнтів температури вздовж напрямку протікання струму та виникнення ефекту пам'яті.

Висновки

Ефект пам'яті спостерігається в структурах, коли градієнт температури формується вздовж напрямку протікання струму.

Він виникає тільки при живленні структур в режимі генератора напруги. В цьому випадку виникає ТГД домен та неоднорідний поперечний джоулів розігрів зразка.

В режимі живлення генератором струму в структурі спочатку виникає високопольова область. У ній виникає шнур струму, який розташований вдовж напрямку його протікання. Така конфігурація не призводить до виникнення градієнтів температури вздовж напрямку протікання струму та виникнення ефекту пам'яті.

Список використаних джерел

1.Добровольский В.Н. Термический градиентно-дрейфовый домен в электронно-дырочной плазме германия / В.Н. Добровольский, С.П. Павлюк // Физика и техника полупроводников, **15** – 1981. – № 1. – с. 120-129.

2. Гандзюк В.І. Інжекційні ефекти в кремнієвій симетричній n^+-n-n^+ структурі при живленні в режимі генератора напруги / В.І. Гандзюк, С.П. Павлюк, О.С. Оберемок // Вісник Київського університету – Сер. Фіз.-мат. Науки. – 2014. – № 1. – с. 221-224.

3. Добровольский В.Н. Инжекционные эффекты в неоднородно разогретом кремнии / В.Н. Добровольский, С.П. Павлюк, А.В. Романов // Физика и техника полупроводников, **15** – 1981. – № 2. – с. 411-414.

4. Добровольский В.Н. Дрейф электронно-дырочной плазмы вызванный градиентами подвижностей носителей заряда / В.Н. Добровольский, С.П. Павлюк // Физика и техника полупроводников, **11** – 1977. – № 7. – с. 1377-1380.

References

1. DOBROVOLSKY, V. & PAVLIUK, S (1981) Termicheskiy gradiyentno-dreyfovyy domen v elektronno-dyrochnoy plazme germaniya *Fizika i Tehnika Polyprovodnikov*. 15 (1). P.120-129.

2. GANDZIUK, V. & PAVLIUK, S. (2014) Inzhektsiyni efekty v kremniyeviy symetrychniy n^+-n-n^+ strukturi pry zhyvlenni v rezhymi heneratora napruhy *Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series Physics & Mathematics*. 1. p.221-224.

3. DOBROVOLSKY, V., PAVLIUK, S. & ROMANOV, A. (1981) Inzhektsionnyye effekty v neodnorodno razogretom kremnii *Fizika i Tehnika Polyprovodnikov*. 15 (2). P.411-414.

4. DOBROVOLSKY, V. & PAVLIUK, S. (1977) Dreyf electronno-dyrochnoy plasmy vyzvannyy gradiyentami podvizhnostey nositeley zaryada *Fizika i Tehnika Polyprovodnikov*. 11 (7). p.1377-1380.

Надійшла до редколегії 1.10.2014

СУЧАСНА ФІЗИКА

УДК 539.199, 539.21

Вергун Л.Ю.[1] к.ф.-м.н., н.с.

Кінетика денатурації овальбуміну в умовах гіперпереексії: експериментальна методика

[1]Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 01601, м. Київ, вул. Володимирська 64/13,
e-mail: vergunliena@rambler.ru

L.Yu. Vergun[1], PhD, Sci. Res.

The kinetics of ovalbumin denaturation at the temperature of hyperpyrexia: the experimental procedure

[1]Taras Shevchenko National University of Kyiv, 01601, Kyiv, Volodymyrska st. 64/13,
e-mail: vergunliena@rambler.ru

Пропонується експериментальний метод дослідження кінетики денатурації глобулярних білків. При застосуванні такого методу визначається період, що характеризується здатністю молекулярної системи до оберненої денатурації. Характерним параметром, який визначає період оберненої денатурації є модуль зсуву. Для апробації методики досліджувалась кінетика овальбуміну в умовах гіперпереексії, що характеризується перевищенням температури 42ºС - граничної межі життєдіяльності живих організмів. В результаті роботи визначений час оберненої денатурації. Зазначений час складає 27 хвилин.

Ключові слова: глобулярні білки, овальбумін, гіперпереексія, модуль зсуву

The new method of studying the denaturation of globular proteins is proposed. Such process the forming of gel is accompanied. The method describes the mechanism of hardeness during gel growing. The torsion pendulum in the proposed method is used. The experimental value in the given method is the shear modulus. The period of the reversible denaturation of globular proteins makes possible to determine in this method. On the example of ovalbumin as the models of globular proteins is established that the period of the reversible denaturation at the temperature of hyperpyrexia (42ºC) composes 27 minutes. The state of the hyperpyrexia is limit of the human viable.

Key Words: globular proteins, ovalbumin, hyperpyrexia, shear modulus

Статтю представив академік НАН України, д.ф.-м.н., проф. Булавін Л.А.

Introduction

As is known one of the dangerous physiological states for the human organism is the state, which is characterized by the high temperature of body (more 37,5ºC) [1]. In accordance with the conventional classification of the state of elevated temperature they divide into four groups. For the first group the characteristic value of temperature is within the limits 38–39ºC (low grade), for the second group in the limits 39–40 ºC (moderate), for the third group in the limits 40–41.1 ºC for the fourth group in the limits 41,1 and more degree Celsiuss. Last group is the most dangerous state for the human organism since it approaches the upper limit, compatible with the human life [2].

The danger of this physiological state lies in the fact that in the human organism occur the qualitative disturbances of biological processes [3]. One of the examples of such disturbances is denaturing Human Serum Albumin (HSA) [4]. It begins at a temperature of 42ºC [5]. During this process HSA loses globular native form and converts to the state of coil [6]. The globular protein in the state of the coil cannot fulfill its physiological functions. This form of protein molecule is not compatible with the life. The coil indicated form grid. In the grid the spaces between the chains are filled up with small molecules - water and others: appears structure named gel [7].

As is known for investigating the properties of complex protein molecules (in vitro) are used model systems are proteins with the simpler structure [8]. As a rule during the study mechanical properties of HSA simulate, using small globular proteins (for example ovalbumin). In this case they are based on the similarity of primary structure of three main blast furnaces of these two molecules and on the similarity of their globular structure [9]

It is known that under specific conditions the denaturation can be reversible: the destroyed globular structure can be restored, restoring disturbance in the physiological processes. It is important to determine these conditions, in particular, which period of the reversible denaturatiom is the time interval, with which remains the possibility of the reversible denaturation.

Our purpose is the determination of period of the reversible denaturing of ovalbumin. Solve this

© Л.Ю.Вергун , 2014

task can, studying the kinetics of the process of denaturation. However, as this follows from the given references, the experimental investigation of kinetics of proteins denaturation in the regime of hyperpyrexia practically were not conducted. The absence of the experimental method, which makes it possible to study this process, is the reason for this. In this article this method is proposed.

Method and materials

As is known in the process of the denaturation of globular proteins is accompanied with the forming of gel. In connection with the fact that stiffness of gel is more than the hardness of protein in the native state, we will name a gel is "rigid phase", leaving after the native protein term is "soft phase". Thus the process of denaturing we will consider as a change in the relationship between the rigid and soft time phase. An increasing of the quantity of rigid phase corresponds to an increasing of the shear modulus of entire system. This circumstance is assumed into the basis of the method proposed: we will study the process of denaturation, controlling an increase in the shear modulus. With the measurements of the shear modulus of globular proteins is necessary to preserve their form in the process of denaturation. The authors propose to solve this problem, after concluding the investigated substance into the tube from another rigid material.

As the experimental apparatus we will use the torsion pendulum. The view of torsion pendulum is represented in Fig.1.

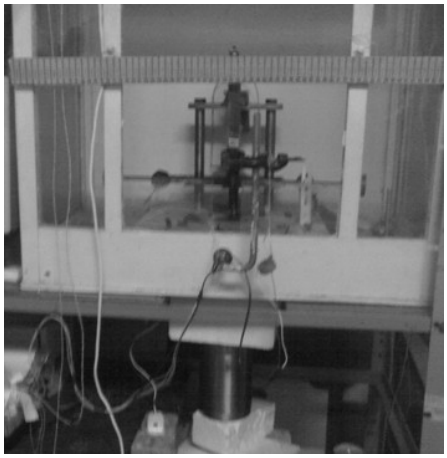


Fig.1. The view of torsion pendulum

The main elements of using device are rod, yoke, metallic thread, clamps with cylindrical cuvette, thermocamera. During measurements the cuvette together investigated subctance is oscillate.

The circuit of the torsion pendulum is represented in Fig.2.

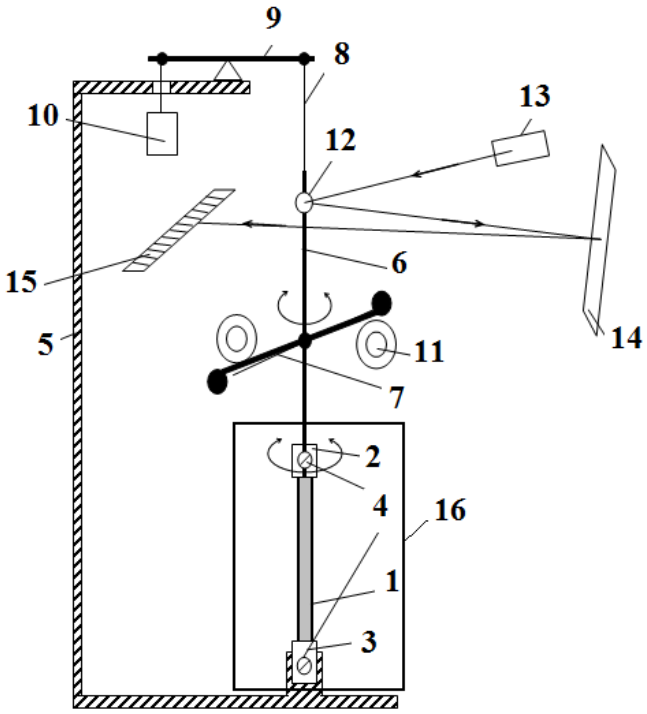
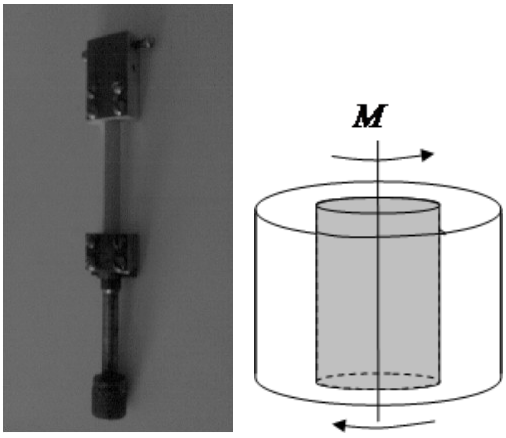


Fig.2.The circuit of the torsion pendulum

In this plan is marked by 1-sample, 2,3- clamps, 4- screws, 5-support, 6-rod, 7-moving yoke, 8-metallic thread, 9- beam, 10- counterbalance, 11-electromagnets, 12- mirror , 13- source of light ray, 14- mirror, 15 – scale, 16 - heat chamber.

The measuring methods is detailed in [10]. The experimental methods provides to obtain the shear modulus *G* during forming of gel.

The view of clamps with cuvette is represented in Fig.3



a b

Fig.3. The cuvette between clamps: a) view of cuvett bettwem clamps, b) the diagram of sample loading

The cuvette with the substance being investigated undergoes the action of the twisting moment M

(Fig.2b). Heating is produced with the aid of the thermostat into the walls of heat chamber.

In experiment the object of research is the water solution of natively of al'bumenu (native albumen) with the concentration of al'bumenu 12 %. Native al'bumen is the mixture of globular proteins. The basic component of such mixture is oval'bumin . His part in al'bumeni is considerable and is 69% [11].

Experimental results and discussion

The experimental dependence for ovalbumin during denaturation $G(t)$ is represented in Fig.4.

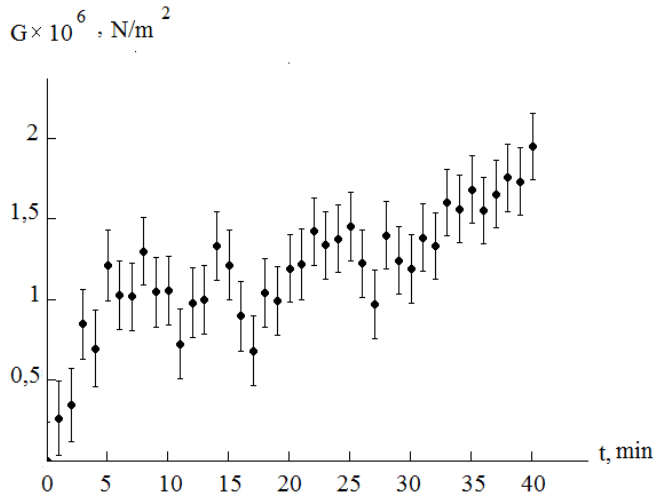


Fig.4. The experimental time dependence $G(t)$ for native albumen during ovalbumin denaturation at the temperature of hyperpyrexia 42ºC.

As can be seen from this figure the process of ovalbumin denaturation constists of two stages: during the first stage is observed an alternation in the module in the course of time, on the second - monotonic growth of module in the course of time. The duration of the first stage is 27 minutes. An alternation in shear modulus is during the first stage irregular phenomenon. With which is connected the periodicity indicated?

As is known, in the initial stage of denaturation [12] remains the possibility of reverse process is renaturation. This point of view the observed periodicity can explain by the fact that at the some moments of time first the denaturation predominates on the renaturation , then renaturation predominates above the denaturation. This possibility appears, apparently in connection with the fact that the equation, which describes denaturation and renaturation contain the nonlinear terms, which connect these equations. Therefore the observed periodicity appears: it is conventionally designated as temporary dissipative structure. Its appearance is the manifestation of self-organizing protein [12].

This treatment of the observed periodicity makes it possible to assert that with the presence of periodicity is connected from the reversible denaturation of protein. Since in the second stage of denaturation the periodicity is absent to logical assert that the reversible denaturation is impossible in this stage. So that the duration of the first stage is the period of time, in which are still possible reversed denaturation. So the period of the reversible denaturation of ovalbumin is equal to 27 minutes.

For comparison the light-scattering in the native albumen during ovalbumin denaturation was investigational using traditional nephelometric method [13]. The results are represented in Fig.5. The value ξ_g is the rationed intensity which equals the relation of the intensity of light –scattering in arbitrary moment of time $I(t)$ to intensity of light-scattering in initial moment of time I_0.

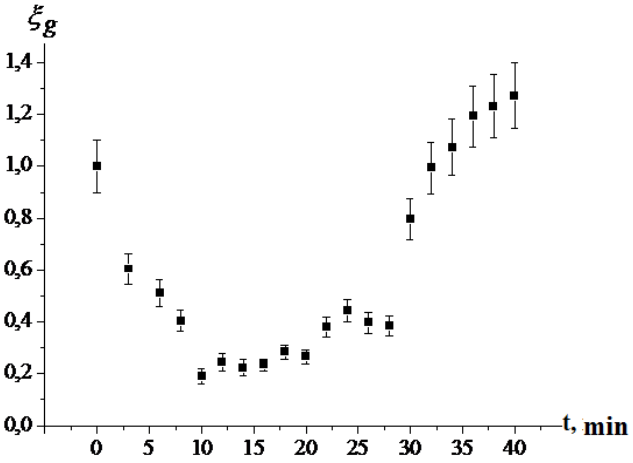


Fig. 5. Light-scattering in solution of native albumen during ovalbumin denaturation at the temperature of hyperpyrexia (42ºC).

Comparison of dependences on Fig.4 and Fig.5 specifies to the coinciding of the time interval of renaturation stage.

Conclusions

The new method of studying the denaturing of globular proteins is proposed. The period of the reversible denaturation of globular proteins makes possible to determine this method. On the example of ovalbumin as the models of globular proteins is established that the period of the reversible denaturation at temperature of hyperpyrexia (42ºC) composes 27 minutes.

Список використаних джерел

1. *Bouchama A.* Heat stroke/ A. Bouchama, JP. Knochel // The New England Journal of Medicine.- 2002.-346(25).-P.1978-1988.

2. *Soszynski D.* The pathogenesis and the adaptive value of fever/ D.Soszynski// Postepy Hig. Med.Dosw.-2003.-57.-P.531-554.

3. *Doweiko JP.* Role of albumin in human physiology and pathophysiology/ JP.Doweiko, DJ.Nompleggi// J.Parent Enteral Nutr.-1991.-15/-P.207-211.

4. *Wetzal R.* Temperature Behaviour of Human Serum Albumin/ R.Wetzel, M.Becker, J.Behlke// Eur.J.Biochem.-1980.-140.-P.469-478.

5. *Mott Peter D.* The Association of Fever and Antibody Response in Rabbits Immunized with Human Serum Albumin/ Peter D. Mott, Sheldon M. Wolff// Journal of Clinical Investigation.-1996.-45(3).-P.372-379.

6. *Lumry R.* Conformation changes of proteins/ R.Lumry, H.Eyring// J.Phys.Chem.-1954.-58.-P.110-120.

7. *Weijers M.* Light scattering study of heat-induced aggregation and gelation of ovalbumin/ M.Weijers, R.W.Visschers// Macromolecules.-2002.-35.-P.4753-4762.

8. *Shitamori Shinjii*. Changes in the Heat-induced Gelling Properties of Ovalbumin/ Shinjii Shitamori, Eiji Kojima, Ryu Nakamura// Agric.Biol. Chem.-1984.-48(6).-P.1539-1544.

9. *Hu H.Y.* α- to β- Structural Transformation of Ovalbumin: Heat and ph-Effect/ H.Y. Hu, H.N.Du// Journal of Protein Chemistry.-2000.-19(3).-P.177-183.

10.*Cherrniak V.Ya.* Influence of the structure of n-paraffins on the detonation properties of plastic/ V.Ya.Cherniak, L.Yu.Vergun, O.A. Nedibalyuk// Proceedings of Saratov University.- 2012.-12(3).-P.100-103.

11. Akashi N. Acoustic properties of egg yolk and albumen in the frequency range 20–400 MHz / N. Akashi, J. Kushibiki // J. Acoust. Soc. Am.- 1997.- 102(6)- P.3774-3778.

12. *Kharakoz Dmitri P.* Protein Compressibility, Dynamics, and Pressure/ Dmitri P. Kharakoz // Biophysical Journal.-2000.- 79.-P.511–525.

13. *Vergun L.Yu.* Molecular Mechanism of Disordering the Epidermis Structure Under the Effect of Static Magnetic Field/ L.Yu.Vergun, O.A.Zagorodnia, K.O. Teliman// Journal of Physical Science and Application.- 2013.-3(2).-P.312-315.

References

1. BOUCHAMA, A & KNOCHEL, JP. (2002) Heat stroke. *The New England Journal of Medicine*.346(25).p.1978-1988.

2. SOSZYNSKI, D. (2003) The pathogenesis and the adaptive value of fever. *Postepy Hig. Med.Dosw*.57.p.531-554.

3. DOWEIKO,JP. & NOMPLEGI, DJ. (1991) Role of albumin in human physiology and pathophysiology. *J.Parent Enteral Nutr.*15.p.207-211.

4. WETZAL, R. & BECKER, M. & BEHLKE ,J (1980) Temperature Behaviour of Human Serum Albumin. *Eur.J.Biochem*.140.p.469-478.

5. MOTT, PETER D. & WOLFF, SHELDON M. (1996) The Association of Fever and Antibody Response in Rabbits Immunized with Human Serum Albumin. *Journal of Clinical Investigation*.45(3). p.372-379.

6. LUMRY, R.& EYRING, H.(1954) Conformation changes of proteins. *J.Phys.Chem.*58.p.110-120.

7. WEIJERS, M. & VISSCHERS, R.W.(2002) Light scattering study of heat-induced aggregation and gelation of ovalbumin. *Macromolecules*.35.p.4753-4762.

8. SHIMATORY, SHINJIII & KOJIMA, EIJI & NAKAMURA, RYU(1984) Changes in the Heat-induced Gelling Properties of Ovalbumin. Agric.Biol. Chem. 48(6).p.1539-1544.

9. HU, H.Y. & DU , H.N. (2000) α- to β- Structural Transformation of Ovalbumin: Heat and ph-Effect. *Journal of Protein Chemistry*. 19(3).p.177-183.

10. CHERNIAK, V.Ya & VERGUN, L.Yu. & NEDIBALYUK, O.A. (2012) Influence of the structure of n-paraffins on the detonation properties of plastic. *Proceedings of Saratov University*. 12(3). p.100-103.

11. AKASHI, N. & KUSHIBIKI, J. (1997) Acoustic properties of egg yolk and albumen in the frequency range 20–400 MHz. *J. Acoust. Soc. Am*.102(6). p.3774-3778.

12. KHARAKOZ, DMITRI. P.(2000) Protein Compressibility, Dynamics, and Pressure. *Biophysical Journal*.79.p.511–525.

13. VERGUN, L.Yu. & ZAGORODNIA, O.A. & TELIMAN, K.O. (2013) Molecular Mechanism of Disordering the Epidermis Structure Under the Effect of Static Magnetic Field. *Journal of Physical Science and Application*.3(2).p.312-315.

Надійшла до редколегії 25.11.14

УДК 546.212

Вергун Л.Ю. к.ф.-м.н, снс.,
Теліман К.О., асп.,
Войтович І.С., студ.,
Мягченко Ю.О., к. ф.-м. н., доц.

Вплив електрохімічної активації води на її в'язкість

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 01601, м. Київ, вул. Володимирська 64/13,
e-mail: myagchy@ukr.net

Vergun L.Yu., PhD., Sen. Sci. Res.,
Teliman K.O., PhD stud.,
Voytovich I.S., stud.,
Myagchenko Yu.O., PhD., Ass.Prof.

Influence electrochemical activation of water on its viscosity

Taras Shevchenko National University of Kyiv, 01601, Kyiv, Volodymyrska st. 64/13,
e-mail: myagchy@ukr.net

Для детектування впливу електричного поля на властивості води обрано процес електрохімічної активації води за допомогою електролізера власної оригінальної конструкції. В'язкість води обрано як сенсор впливу електричного чи магнітного поля. Виготовлений нами віскозиметр дозволяє також вимірювати зміни малокутового лазерного розсіяння у воді. В результаті встановлено зростання в'язкості католіта на на 8,7 ± 0,07%

Ключові слова: електролізер, в'язкість, католіт

In this work we investigated the changes of viscidity of such component blood as water that is in the non-equilibrium state. For this purpose we made the electrolyzer of original construction, that allows prepare a katholyte and anolyte with the different values of pH and Redox, and also with unchanging pH, but different Redox. In our experiments we used water with Redox, that is approached to Redox of biological liquids in the organism of man.
The viscidity of the water was selected as sensor of the influence of electric or magnetic field on the water. Viscometer developed by us allows to measure also changes of laser small angle scattering in water. For the poorly mineralized water with pH = 6,65 and Redox = 289 mV after her activating got pH = 8,86 and Redox = 52 mV. The increasing viscosity of catholyte at 8,7 ± 0,07% was detected. The got results demonstrate perspective of application of methods of research of changes of viscidity of components of blood as a result of action of external factors.

Key Words: electrolyze, viscidity, katholyte

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Макарець М. В.

Вступ

Однією із найбільш чутливих до електричних та магнітних полів систем організму людини є система крові [1]: реологічні властивості крові [2,3], гіпокоагуляція еритроцитів, швидкість осідання еритроцитів (ШОЕ) [4,5] змінюються як під впливом електромагнітних полів так і після вживання води, активованої фізичними полями. Найбільш ефективно діє на організм вода та її розчини, що знаходяться у нерівноважному стані. Змінне магнітне поле впливає на організм більше ефективно, ніж постійне [6].

Обговорення результатів

В даній роботі ми дослідили зміни в'язкості такої складової крові як вода, що перебуває у нерівноважному стані. Для цього ми виготовили електролізер оригінальної конструкції, який дозволяє приготовляти католіт та аноліт із різними значеннями pH та окисно-відновлювальним потенціалом (ОВП), а також із незмінним pH, але різними ОВП. Електроди виготовлено із пластин титану розміром 55 мм на 25 мм, відстань між якими 35 мм. Посудини із

© Л.Ю. Вергун, К.О. Теліман,
І.С. Войтович, Ю.О.Мягченко, 2014

водою, у які занурено електроди, розділені діафрагмою. Величину ОВП вимірювали за допомогою приладу Ezodo 6041, діапазон вимірювань якого становить ± 1000 мВ, роздільна здатність 1 мВ. Рівень pH визначали приладом Ezodo PH5011, діапазон вимірювань якого від 0 до 14,00, роздільна здатність 0,1. Для наших експериментах ми готували воду із ОВП, що наближається до ОВП біологічних рідин в організмі людини. Кров людини, материнське молоко, навколоплідна рідина мають ОВП "-70 " мВ. На жаль, водопровідна, пляшкована й навіть фільтрована вода мають плюсовий потенціал (+200 мВ…+400 мВ), а отже, не відповідають потребам людського організму. Показник ОВП води є настільки важливим, що в провідних країнах світу протягом десятків років ведуться дослідження щодо можливостей досягнення його мінусового значення. Одним із найцінніших постачальників антиоксидантів є природна (джерельна) вода. Вона може мати мінусовий окисно-відновний потенціал (ОВП), тобто, містити багато негативно заряджених молекул, які готові віддати свій вільний електрон і захистити цілісність клітин. Всесвітньо відома вода "Нафтуся" із Трускавця, взята безпосередньо із бювету має ОВП "-220 мВ ", а після доби зберігання у пластиковій пляшці має +200 мВ. Якщо людина п'є достатню кількість якісної води, в її організмі працюють механізми саморегуляції, постійно відбуваються відновні процеси. Тому одним із найважливіших параметрів рідини для людини з точки зору сучасної медицини є її «заряд» - окисно-відновлюваний потенціал.

Вимірювання в'язкості ми проводили за допомогою віскозиметра власної розробки. Метою наших досліджень було виявлення відносних змін в'язкості рідин після дії на зразок зовнішніх електричних чи магнітних полів. При цьому повинні бути враховані ті обставини, що по-перше, об'єм досліджуваної рідини повинен мати певні обмеження, щоб задовольнити вимогам досягнення необхідних величин напруженості магнітного поля, що діє зовні на зразок, по-друге, бажано, щоб задовольнялась можливість вимірювань зміни розсіювання світла у зразку внаслідок дії магнітного поля на нього. Задовольнити обидві ці вимоги ми вирішили шляхом застосування методу Стокса для вимірювання зміни в'язкості, а для реалізації другої вимоги ми обрали таку конструкцію соленоїда, яка складається із двох коаксіально розміщених котушок соленоїда довжина кожної з яких становить 4 см, а проміжок між ними - 1 см. Кюветою для зразка слугувала стандартна пробірка із внутрішнім діаметром 1 см. Зміну в'язкості рідини ми визначали за зміною часу прольоту кульки у проміжку між котушками соленоїду. Щоб виключити вплив магнітного поля на матеріал кульок ми обрали кульки із скла. Вимірювання часу падіння кульки ми здійснювали за допомогою електронної схеми, яка складалась із стабілізованого генератора імпульсів, лічильника імпульсів та оптоелектронної схеми старт-стоп, яка забезпечувала проходження імпульсів від генератора до лічильника. Відтворюваність результатів тестування пристрою становила порядку 0,1%. Пристрій тестували шляхом вимірювання залежності в'язкості водних розчинів цукру від концентрації, та залежності в'язкості води від температури. Результати іспитів показали дуже добре узгодження із табличними даними.

Особливу увагу ми приділили контролю температури під час проведення вимірювань для виключення впливу цього фактору на результати експериментів. Як датчик температури зразку ми використовували попередньо калібровану термопару, приєднану через інтерфейс до комп'ютера. Алгоритм обробки даних забезпечував точність вимірювань температури порядку $0{,}01^0$C.

Механізм впливу магнітного поля на організм людини ще не до кінця з'ясований. Вважають, що основна реакція відбувається на рівні біологічних мембран. Саме зміна їх проникності та транспорту іонів K та Na тягне за собою зміни у швидкості біохімічних реакцій. Зрозуміло, що реакція на магнітне поле існує на усіх ієрархічних рівнях організму. Але найбільш глибинна реакція знаходиться на молекулярному рівні. Оскільки молекула гемоглобіна містить атом заліза, що має великий магнітний момент, відповідно й молекула гемоглобіна має власний

магнітний момент. Магнітна сприйнятливість еритроцита становить $\chi = -4\pi \cdot 0.736 \cdot 10^{-6}$. Конструкція соленоїду дозволяє діяти на зразок як постійним магнітним полем величиною 500 Е, що набагато більше магнітного поля Землі (0,5 Е) , так і змінним магнітним полем (амплітудою 80 Е) із постійною складовою. Амплітуда змінного магнітного поля та рівень постійної складової можуть регулюватися незалежно. Останнім часом у наукових публікаціях зустрічаються повідомлення про існування у воді та слабких розчинах деяких динамічних структур із розмірами >200 нм. Дослідження проводили за допомогою скануючих зондових мікроскопів. Виявлено, що розміри цих утворень змінюються під впливом магнітних полів. Крім того для дослідження молекулярної структури води залучали квантово-силовий (або як ще його називають тунельний) мікроскоп. Суть цього експерименту полягала у тому, щоби зареєструвати енергію зіткнень зв'язаних агрегатів води із спеціальним датчиком-щупом, який за допомогою спеціального пристрою переміщується під водою. За величиною виділеної енергії за допомогою комп'ютера визначали розмір та структуру частинок, з якими зіткнувся датчик-щуп (Рис.1). Виявлено, що при нормальних температурних умовах біля стінок посудини, у якій знаходиться вода, утворюються лінійні молекулярні ланцюжки молекул води, які розміщуються перпендикулярно до стінок посудини та містять у собі до тридцяти молекул. Наявність таких довгих молекулярних ланцюгів пов'язують із тим, що при звичайних умовах на стінках утворюються статичні електричні заряди, які і примушують молекули води утворювати такі довгі молекулярні ланцюжки. При цьому, чим більший статичний заряд, тим довший утворюється ланцюжок. Відсутність таких довгих молекулярних ланцюжків у самій товщі води пояснюється тим, що у ній присутній руйнуючий такі ланцюжки фактор як броунівські флуктуації. Цікавим експериментальним методом є також дослідження структури води біля твердої поверхні за допомогою растрового мікроскопа. Так у плівці води на твердій поверхні виявлені структурні утворення із розмірами порядку 20 нм. Більш детальні дослідження структури води в об'ємі та біля поверхні надають можливість робити правильні інтерпретації результатів експериментів із виявлення впливів електричних та магнітних полів на воду та слабкі водні розчини. Саме тому у конструкції нашого віскозиметра передбачена можливість спостереження малокутового (у діапазоні $\pm 6^0$) розсіяння лазерного випромінювання у досліджуваному зразку. Ми провели успішні тестові випробовування запропонованої методики цифрової реєстрації розподілу інтенсивності у поперечному перерізі зондуючого випромінювання та алгоритму обробки одержаних результатів. Це дозволить в майбутньому досліджувати зв'язок між зміною в'язкості води та її структурою під впливом зовнішніх електричних та магнітних полів.

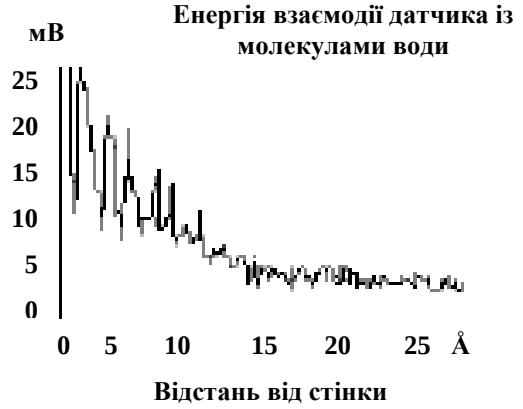


Рис. 1 Залежність енергії взаємодії датчика із молекулами води від відстані до стінки посудини

Для води із артезіанської свердловини із pH = 6,65, загальною лужністю 6,2 моль/дм, загальною жорсткістю 5,3 моль/дм, кальцію 86,17 мг/дм, магнію 12,16 мг/дм, амонію 0,32 мг/дм, натрію <0,5 мг/дм, хлоридів 4 мг/дм, сульфатів 7мг/дм, загального заліза 0,12 мг/дм, марганцю 0,17 мг/дм, фторидів 0,3 мг/дм, нітридів <0,004 мг/дм, сухим залишком 386 мг/дм, та ОВП = 289 мВ після її активації у мембранному електролізері при напрузі між електродами 28,8 В, струмі 0,04А протягом 40 хвилин одержали pH = 8,86 та ОВП = 52 мВ (для католіту). Відносна в'язкість змінилась від 1 до 1,0877 ± 0,0007, тобто в'язкість зросла на 8,77%.

Висновки

Одержані результати демонструють перспективність застосування методів дослідження змін в'язкості компонент крові внаслідок дії зовнішніх факторів та нададуть додаткові науково обґрунтовані методи діагностики, профілактики та лікування захворювань.

Список використаних джерел

1. *Бондарь Г.В.//* Влияние магнитного поля на показатели крови [Електронний ресурс] Г.В. Бондарь., В.В. Шевченко., П.И. Поляков., Т.А. Рюмшин // Труды IX Международной крымской конференции "Космос и биосфера 2011" – Режим доступу до журн.: www.biophys.ru/archive/crimea2011/abstr-p.168.pdf

2. Influence of a Variable Magnetic Field on the Rheological Properties of Blood in Treatment of Rheumatoid Arthritis / V.Kirkovskii, V. Mansurov, N. Mitkovska, Yu. Mukharskaya. // Journal of Engineering Physics and Thermophysics. – 2003. – №3. – p. 708–714.

3. *Демецкий А. М.* Биологическое и лечебное действие магнитных полей / А. М. Демецкий, Г. Я. Хулуп, А. І. Цецохо. // Материалы научно-практической конференции Витебск. – 1999. – С. 21–25.

4. *Tanimoto Y.* Influence of strong magnetic field on the sedimentation of red blood cells / Y. Tanimoto, A. Kakuda. // Journal of Physics: Conference Series Workshop. – 2009. – p. 156..

5. *Sanjay J.* Influence of an inhomogeneous magnetic field on erythrocyte aggregation mechanism / J. Sanjay, S. Megha. // Journal of Magnetism and Magnetic Materials. – 2002. – p. 412.

6. *Sheppard A.* Biological effects of electric and magnetic fields of extremely low frequency / A. Sheppard, M. Eisenbud. – New York, 1977. – (N. Y. Univ.Press).

References

1. BONDAR,G., SHEVCHENKO,V., POLJAKOV.P., RYUMSHYNA,T.. (2008) Influence of magnetic field to the indices of the blood *Proceedings of IX of the International Crimean conference "Space and biosphere 2011"* available at: www.biophys.ru/archive/crimea2011/abstr-p.168.pdf

2. KIRKOVSKII,V., MANSUROV,V., MITKOVSKA,N. & MUKHARSKAYA,Yu. (2003) Influence of a Variable Magnetic Field on the Rheological Properties of Blood in Treatment of Rheumatoid Arthritis *Journal of Engineering Physics and Thermophysics.* 76 (3). p.708-714

3. DEMETSKY, A. KHULUP, G. TSETSOKHO, A. (1999) Biological and therapeutic effects of magnetic fields. *Proceedings of the Scientific and Practical conference.* Vitebsk.-. 1999. p.21-25.

4. TANIMOTO,Y. and KAKUDA,Y (2009) Influence of strong magnetic field on the sedimentation of red blood cells . *Journal of Physics: Conference Series Workshop* p.156

5. SANJAY, J. and MEGHA, S. (2002) Influence of an inhomogeneous magnetic field on erythrocyte aggregation mechanism *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*. 252. p.412

6. SHEPPARD, A. and EISENBUD, M. (1977) *Biological effects of electric and magnetic fields of extremely low frequency* N. Y. Univ. Press.

Надійшла до редколегії 09.12.14

УДК 519.9

Войтешенко А.В.[1], асп.

Вплив додавання наночастинок лапоніту на в'язкість розчину поблизу критичної температури розшарування

[1]Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, пр-т. Глушкова 4д, e-mail: ueen091@gmail.com

A. V. Voiteshenko[1], PhD stud.,

Effect of addition of laponite nanoparticles on viscosity of solution near the critical consolute temperature

[1]Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03680, Kyiv, Glushkova st., 4d,
e-mail: ueen091@gmail.com

Проведено експериментальні дослідження температурної залежності в'язкості розчину ізомасляной кислота-вода + KCl *з додаванням наночастинок лапонітів поблизу критичної температури розшарування.*

Виявлено, що додавання лапонітів в розчин поблизу критичної температури розшарування призводить до збільшення його в'язкості і радіуса кореляції системи. Також додавання лапонітів призводить до збільшення температури фазового переходу і збільшення сил міжмолекулярної взаємодії в розчині.

Ключові слова: лапоніт, критична температура розшарування, в'язкість.

The investigation of various factors impact on state of matter near the critical point is the topical task of condensed matter physics. The analysis of such state of the matter is important to research of new directions of energetics, ecology and medicine. The industrial use of nanocomposite membrane materials containing such nanosized components as nanoclay covers a wide range of tasks of rational use of natural resources, development of ecologically clean energy-preserving technologies (desalination of sea and salted water, biotechnology, food industry). The objective of this research work was to determine the nature of the impact of laponite nanoparticles adding to isobutyric acid solution - water + KCl *near the critical temperature stratification. The analysis of the results of nanoparticles impact on the behavior of solution viscosity near the critical temperature stratification led to the following conclusions: 1. It is shown that adding of nanoparticles to the solution near the critical temperature stratification leads to an increase of its viscosity. 2. The adding of laponite leads to an increase of the phase transition temperature and forces of intermolecular interaction in the solution. 3. The results are consistent with experimental research of viscosity of isobutyric acid solution – the water and with adding of* KCl *ions to it near the critical temperature stratification.*

Key Words: laponite, critical point, isobutyric acid

Статтю представив академік НАН України, д.ф.-м.н., проф. Булавін Л.А.

Дослідження впливу різних факторів на стан речовини поблизу критичної точки - актуальне завдання фізики конденсованого стану речовини. Тому інтенсивно розвиваються нові напрямки досліджень в галузі енергетики, машинобудування, екології та медицини, що пов’язано із унікальними властивостями систем з додаванням заряджених частинок, наночастинок, до яких відносяться системи з лапонітами.

Промислове використання нанокомпозитних мембранних матеріалів, що містять як нанорозмірні компоненти наноглини, охоплює широке коло завдань раціонального природокористування, розвитку екологічно чистих, ресурсо- та енергозберігаючих технологій, таких як опріснення морських і солоних вод, отримання надкритичної води, переробка промислових відходів, біотехнології, харчова промисловість, поділ газових сумішей.

Введення від 2,1 % до 5,4 % нанокомпонентів при формуванні нанокомпозитного матеріалу сприяє підвищенню транспортних властивостей мембран.

Актуальність експериментальних досліджень рівноважних та кінетичних властивостей конденсованих систем в околі критичної точки

© А.В. Войтешенко, 2014

пов'язана з їх аномально високою сприйнятливістю до впливу різних зовнішніх факторів та полів.

Таким чином у даній роботі досліджено вплив додавання наночастинок лапонітів на в'язкість поблизу критичної температури розшарування розчину ізомасляна кислота - вода + KCl [1].

Теоретично вперше про кінцеве значення критичної в'язкості згадується в роботі М. Фіксмана [2], в якій автор враховує просторову дисперсію системи поблизу критичної точки (КТ) ($qR_c \neq 0$). Для аналізу результатів даної роботи використано рівняння критичної в'язкості, що бере до уваги скінченність в'язкості в критичній точці.

На основі такого підходу в роботі [3] запропоновано рівняння критичної в'язкості, в якому також врахована просторова дисперсія системи. Флуктуаційна частина виходячи з цього рівняння має вигляд:

$$\eta_f(T) = \frac{AR_c(T,c)}{\left[1+(q\cdot R_c(T,c))^2\right]^{1/2}} = \frac{\Delta\eta_0 t^{-\nu}(T,c)}{\left[1+(q\cdot r_0 t^{-\nu}(T,c))^2\right]^{1/2}} \quad (1)$$

тут $\Delta\eta_0 = Ar_0$ – амплітуда сингулярної частини в'язкості. Формула (1), забезпечує кінцеве значення в'язкості в критичній точці.

Тоді, виходячи з цього, рівняння в'язкості має вигляд:

$$\eta(T) = \eta_r(T) + \eta_f(T) = A\exp\frac{B}{T} + \frac{\Delta\eta_0 t^{-\nu}(T,c)}{\left[1+(q\cdot r_0 t^{-\nu}(T,c))^2\right]^{1/2}} \quad (2)$$

Це рівняння раніше апробовано в роботах [1, 4] при аналізі подвійних розчинів поблизу критичної температури розшарування

Дослідження проводились методом капілярного віскозиметра і отримана температурна залежність в'язкості $\eta(T)$ розчину ізомасляна кислота - вода (критична масова концентрація становить $x_{vk} = 0,38$, критична температура $T_к = 300,45\ K$) і розчину ізомасляна кислота - вода + KCl для трьох концентрацій іонів ($x = 0,07$ %; $x = 0,14$ %; $x = 0,3$ %) в околі критичної температури.

У роботі [1] було зроблено висновок, що при збільшенні концентрації іонів флуктуаційна частина в'язкості зростає. Це призводить до збільшення температурної області ($\Delta T_f = T_k - T_f\ (\eta_f = 0)$) прояву флуктуаційної частини в'язкості.

Метою даної роботи є встановлення характеру впливу додавання наночастинок лапонітів в розчин ізомасляної кислота – вода + KCl поблизу критичної температури розшарування. Для цього у досліджений розчин були по черзі додані наночастинки лапоніту з масовою концентрацією 0,025 % і 0,15 %.

Проведені експериментальні дослідження температурної залежності в'язкості розчину з додаванням наночастинок лапонітів поблизу критичної температури розшарування. Результати експерименту показані на рис. 1. Як видно з рис. 1 при додаванні лапоніту температура фазового переходу збільшується, як збільшується і в'язкість.

Для обробки даних використане рівняння (1), спочатку розрахована регулярна частина

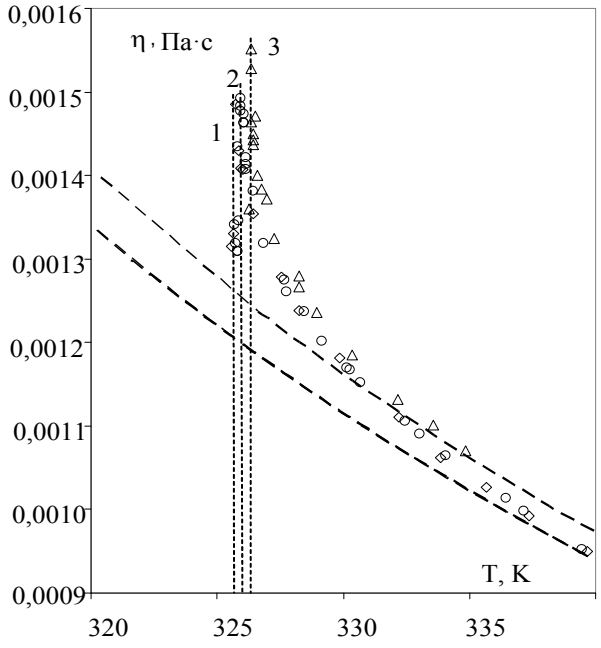


Рис. 1. Температурні залежності в'язкості розчину ізомасляна кислота-вода + KCl (1), і розчину ізомасляна кислота-вода + KCl з додаванням лапонітів з масовою концентрацією 0,025 % (2) і 0,15 % (3). Похилими пунктирними лініями показані регулярні частини в'язкості. Вертикальними пунктирними лініями показано збільшення температури фазового переходу при додаванні лапонітів.

в'язкості $\eta_r = A\exp B/T$ при $\Delta T \geq 10K$, рис. 2. В цій області знайдені параметри A і B.

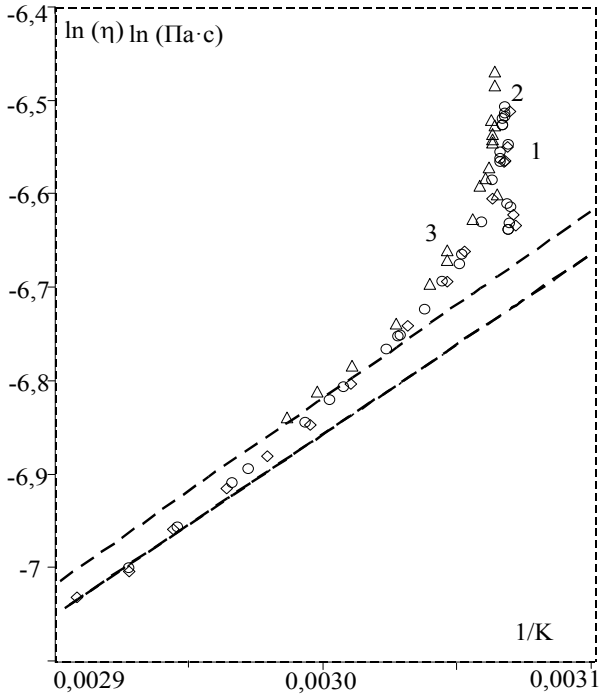


Рис. 2. Залежність логарифма в'язкості розчину ізомасляна кислота-вода + KCl (1), і розчину ізомасляна кислота-вода + KCl з додаванням лапонітів з масовою концентрацією 0,025 % (2) і 0,15 % (3) від оберненого значення температури. Пунктирною прямою лінією показані регулярні частини в'язкості.

Використовуючи ці значення регулярної частини в'язкості, згідно з формулою (2) розрахована флуктуаційна частина в'язкості: $\eta_f = \eta - \eta_r$. Отримані результати наведені на рис. 3.

Аналіз отриманих температурних і концентраційних залежностей флуктуаційної частини в'язкості дозволив припустити, що при збільшенні концентрації лапонітів флуктуаційна частина в'язкості η_f зростає.

Виходячи з взаємозв'язку флуктуаційної частини зсувної в'язкості і радіуса кореляції системи можна зробити висновок, що додавання лапонітів в розчин приводить до збільшення радіусу кореляції розчину.

Іншим проявом впливу додавання наночастинок є незначне (0,5 K і 1 K при концентраціях 0,025 % і 0,15 % відповідно) зміщення екстремумів флуктуаційної частини в'язкості в бік високих температур (значення зазначені в межах похибки 0,01%). Цей факт вказує на збільшення температури фазового переходу, а отже, на збільшення сил міжмолекулярної взаємодії в результаті додавання наночастинок лапонітів.

Проведені в даній роботі дослідження (рис. 1 – рис. 3) розчину з додаванням лапоніту узгоджуються з проведеними раніше дослідженнями температурної залежності

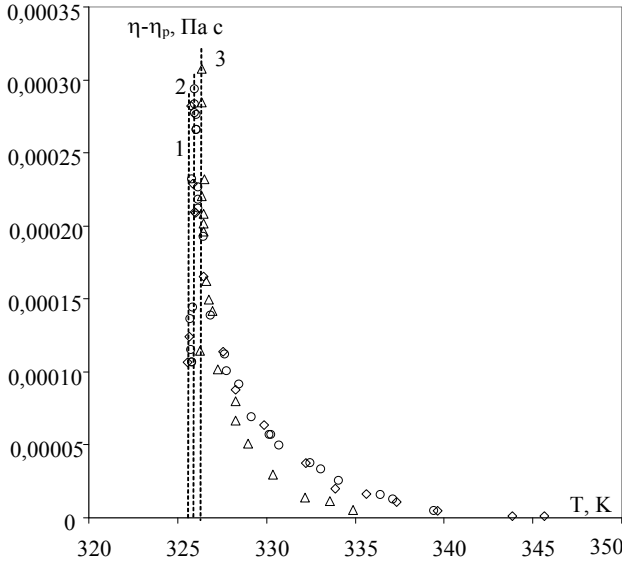


Рис. 3. Температурні залежності флуктуаційної частини в'язкості розчину ізомасляна кислота-вода + KCl (1), і розчину ізомасляна кислота-вода + KCl з додаванням наночастинок лапонітів з масовою концентрацією 0,025 % (2) і 0,15 % (3). Вертикальними пунктирними лініями показано збільшення температури фазового переходу при додаванні лапонітів.

в'язкості розчинів ізомасляна кислота-вода, ізомасляна кислота-вода + KCl [1, 4, 5]. З цих даних також випливає, що додавання іонів KCl в розчини ізомасляна кислота-вода призводить до збільшення флуктуаційної частини в'язкості розчину і температури фазового переходу.

Аналіз отриманих нами результатів впливу наночастинок на поведінку в'язкості розчину поблизу критичної температури розшарування дозволяє зробити ряд висновків:

1. Показано, що додавання наночастинок лапоніту в розчин ізомасляна кислота-вода + KCl поблизу критичної температури розшарування призводить до збільшення в'язкості.

2. Додавання лапонітів призводить до збільшення температури фазового переходу і збільшення сил міжмолекулярної взаємодії в досліджуваному розчині.

3. Виходячи з прямої залежності в'язкості та радіуса кореляції системи, отримали, що додавання наночастинок лапоніту призводить до збільшення радіуса кореляції системи.

Список використаних джерел

1. Effect of electrolytes on the critical temperature of separation and physicochemical properties of binary liquid systems / A.D. Alekhin, Yu.L. Ostapchuk, E.G. Rudnikov, A.V. Voiteshenko. // Russian Journal of Physical Chemistry. – 2014. – №9. – P. 1519–1526.
2. Fixman M. Viscosity of critical mixtures / Fixman. // J. Chem. Phys.. – 1962. – №2. – P. 310–320.
3. Alekhin A.D. Equations of Critical Viscosity and Limits of their Application / Alekhin. // Ukr. J. Phys. – 2004. – №2. – P. 138–140.
4. В'язкість розчину ізомасляна кислота - вода поблизу критичної температури розшарування / О.Д.Альохін, А.В. Кулініч, Ю.Л. Остапчук, Е.Г. Рудніков. // Вісник КНУ імені Тараса Шевченко. Серія фіз. мат наук. – 2012. – №2. – С. 293–294.
5. Булавін Л. А. Вплив іонної домішки на криву співіснування бінарної суміші 3-метилперідин+важка вода поблизу нижньої критичної точки розшарування / Л. А. Булавін, А. В. Олейнікова, В. А. Піпич. // Вісник КНУ імені Тараса Шевченко. Серія фіз. мат наук. – 2001. – №1. – С. 411–420.

References

1. ALEKHIN A.D., OSTAPCHUK YU.L., RUDNIKOV E.G., VOITESHENKO A.V. (2014) Effect of electrolytes on the critical temperature of separation and physicochemical properties of binary liquid systems. *Russian Journal of Physical Chemistry.* 88 (9). p 1519-1526.
2. FIXMAN M. (1962) Viscosity of critical mixtures. *J. Chem. Phys.* 36 (2). p 310-320.
3. ALEKHIN A.D. (2004) Equations of Critical Viscosity and Limits of their Application. *Ukr. J. Phys.* 49 (2). p 138-140.
4. ALEKHIN A.D, KULINICH A.V., OSTAPCHUK YU.L, RUDNIKOV E.G. (2012) Viscosity of isobutyric asid-water solution near the critical consolute temperature. *Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv Series Physics & Mathematics.* (2). p 293-294.
5. BULAVIN L.A., OLEINIKOVA A.V., PIPYCH V.A. (2001) Influence of ionic impurities on the coexistence curve of a binary mixture of 3-metylperidyn + heavy water near the lower critical point of separation. *Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv Series Physics & Mathematics.* (1). p 411-420.

Надійшла до редколегії 01.12.14

УДК 535.331

Манько Д. Ю.[1], к.ф.-м.н.,
Лопатинська О. Г.[2],асист.
Поперенко Л. В.[3], д.ф.-м.н., проф.

Особливості розрахунку плазмової і релаксаційної частот в аморфних металевих сплавах на основі заліза

[1]Інститут проблем реєстрації інформації НАН України, 03113, м. Київ, вул. М. Шпака, 2,
e-mail: dmitriy.manko@gmail.com
[2,3]Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 01601, м. Київ, вул. Володимирська 64/13,
e-mail: [2]olga_lopatynska@ukr.net,
[3]plv@univ.kiev.ua

D. Yu. Manko[1], PhD,
O. G. Lopatynska[2],assist.
L. V. Poperenko[3], Dr. Sci, Prof.

Peculiarities of plasma and relaxation frequencies calculation in the iron-based amorphous metal alloys

[1]Institute for information recording, 03113, Kyiv, M. Shpaka str., 2,
e-mail: dmitriy.manko@gmail.com
[2,3]Taras Shevchenko National University of Kyiv, 01601, Kyiv, Volodymyrska st. 64/13,
e-mail: [2]olga_lopatynska@ukr.net,
[3]plv@univ.kiev.au

Удосконалено метод розрахунку параметрів електронної підсистеми на прикладі аморфних металевих сплавів $Fe_{80}ПМ_5B_{15}$ (ПМ-перехідний метал 3d-ряду). Отримані параметри вказують на більш високу концентрацію вільних носіїв заряду поблизу рівня Фермі у випадку з ПМ = Ti, Cr, ніж з ПМ = V і одночасно менші довжини їх вільного пробігу. Показано, що така поведінка пов'язана з різним внеском в оптичний відгук носіїв заряду, які відрізняються ефективними масами і рухливістю.

Ключові слова: аморфний металевий сплав, плазмова частота, релаксаційна частота.

Electron subsystem parameters such as plasma frequency and relaxation frequency are key ones for the process behavior understanding due to electron subsystem excitation. But there is a problem of adequate calculation of these values. The method of electron subsystem parameters calculation was improved for $Fe_{80}TM_5B_{15}$ (TM – transition 3d metal) amorphous metal alloys. It was shown that for the certain calculation of these values it is possible to limit oneself to characteristic function F_1, but it is necessary to consider the peculiarities of this function behaviour at the separate spectrum regions. But, values of obtained fitting parameters even for certain characteristic function (F_1) can vary in wide range. So, the most effective way of calculation of parameters of electronic subsystem is to make fitting of real part of dielectric function. The obtained parameters reveal higher concentration of the free charge carriers near Fermi level and shorter mean free path in the case of TM = Ti, Cr in comparison with TM = V. It was shown that such behavior was due to the different contribution of charge carriers that differ from each other by the effective mass and mobility into the optical response.

Key Words: amorphous metal alloy, plasma frequency, relaxation frequency

Статтю представив член-кор. НАН України, д.ф.-м.н., проф. Макара В.А.

Вступ

Багатокомпонентні металеві аморфні системи з феромагнітними властивостями є класом матеріалів спінтроніки і оптоелектроніки, яким притаманна унікальна комбінація магнітних, оптичних і електричних властивостей [1]. Застосування аморфних металевих сплавів (АМС) в сучасних нанотехнологіях дозволяє добитися таких фізичних характеристик, які майже неможливо отримати, застосовуючи матеріали із кристалічною структурою. Серед різних методів дослідження об'єктів з металевим типом провідності, оптичні методи займають стійкі позиції в силу їх значної інформативності і відносної простоти. Оптичні параметри розупорядкованих металевих систем в певній мірі характеризують особливості її атомної структури та електронного спектру поблизу рівня Фермі. Ефективним методом визначення оптичних характеристик аморфних металевих

© Д.Ю. Манько, О.Г. Лопатинська, Л. В. Поперенко, 2014

сплавів є спектральна еліпсометрія при відбиванні світла, оскільки вона чутлива до змін у ближньому порядку на фоні зруйнованого дальнього. З іншого боку, оптичні характеристики металів і металевих сплавів в далекій інфрачервоній області спектру описуються в рамках теорії Друде [2, 3]. Згідно з цією теорією метал складається із рухливих вільних електронів і важких іонів, які вважаються нерухомими. Оптичні властивості середовищ з різним типом провідності можна охарактеризувати за допомогою таких спектральних залежностей як дійсна $\varepsilon_1(\omega)$ і уявна $\varepsilon_2(\omega)$ частини комплексної діелектричної проникності $\tilde{\varepsilon}$, які в далекій інфрачервоній області набувають вигляду [2]:

$$\varepsilon_1(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + \gamma^2} \quad \varepsilon_2 = \frac{\omega_p^2 \gamma}{\omega(\omega^2 + \gamma^2)} \tag{1}$$

де ω_p і γ - плазмова і релаксаційна частоти електронів провідності відповідно.

Плазмова частота задається співвідношенням $\omega_p^2 = \frac{Ne^2}{m^* \varepsilon_0}$, і є функцією густини N електронів провідності і їх ефективної маси m^*. Релаксаційна частота, в свою чергу є функцією довжини вільного пробігу носія заряду. Отже, параметри ω_p і γ є ключовими для розуміння перебігу процесів при збудженні електронної підсистеми. Але існує проблема адекватного розрахунку цих параметрів, що і полягає у тому, що різні обчислювальні методи (детально описані в роботах [3, 7]) призводять до результатів, які відрізняються в залежності від обраного алгоритму у декілька разів. Дана робота покликана з'ясувати головну причину виникнення такої проблеми та запропонувати шляхи її подолання.

Методика експерименту

Після взаємодії з середовищем електромагнітна хвиля несе у собі інформацію про певні характеристики атомно-електронної будови його поверхні. Еліпсометричні методи є високочутливими і найперспективнішими для визначення оптичних характеристик поверхні АМС [4, 5]. Основне рівняння еліпсометрії має вигляд [5]:

$$\frac{\tilde{R}_p}{\tilde{R}_s} = tg\psi e^{i\Delta}, \tag{2}$$

де $\tilde{R}_s$ і $\tilde{R}_p$ - комплексні амплітудні коефіцієнти відбивання, що відповідають s- і p- компонентам поляризованого світла, відповідно; Δ - зсув фаз між ортогональними компонентами вектора поляризації, Ψ - азимут відновленої лінійної поляризації.

В основному рівнянні еліпсометрії відношення комплексних коефіцієнтів відбивання $\tilde{R}_p$ і $\tilde{R}_s$ визначається будовою відбивальної системи і залежить від параметрів цієї системи – оптичних сталих середовищ, що входять до її складу [4, 5]. Еліпсометричні параметри Δ і Ψ безпосередньо пов'язані з оптичними константами n та k у наближенні напівнескінченного провідного середовища за допомогою співвідношень [4]:

$$n = sin\varphi tg\varphi \frac{1 - tg^2\psi}{1 + tg^2\psi + 2tg\psi\, cos\Delta}, \tag{3}$$

$$k = sin\varphi tg\varphi \frac{2tg\psi\, sin\Delta}{1 + tg^2\psi + 2tg\psi\, cos\Delta} \tag{4}$$

Аналіз оптичних властивостей досліджуваної системи проводять розглядаючи експериментально отримані криві дійсної $\varepsilon_1(h\nu)$ і уявної частин $\varepsilon_2(h\nu)$ діелектричної проникності $\tilde{\varepsilon}(h\nu) = \varepsilon_1(h\nu) + i\varepsilon_2(h\nu)$, або оптичної провідності $\sigma(h\nu)$, які пов'язані із показниками заломлення n і поглинання k за допомогою співвідношень [4]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1(h\nu) &= n^2(h\nu) - k^2(h\nu), \\ \varepsilon_2(h\nu) &= 2n(h\nu)k(h\nu), \\ \sigma(h\nu) &= \frac{n(h\nu)\,k(h\nu)}{2\pi} \end{aligned} \tag{5}$$

Спектроеліпсометричний експеримент в даній роботі реалізувався методом Бітті–Кона [5]. Цей метод є фотометричним і будується за схемою PSA (поляризатор (P)-зразок (S)-аналізатор (A)).

У відповідності до цього методу проводилися оптичні вимірювання при встановленому поляризаторі під азимутальним

кутом $\alpha_p = 45^o$ і послідовній фіксації аналізатора під азимутальними кутами $\alpha_A = 0^0, 45^0, 90^0, -45^0$ (135^0) відносно площини відбивання світла. Цим азимутальним кутам відповідають частотні залежності інтенсивностей I_0, I_{45}, I_{90}, I_{-45} відбитого від зразка світла. Задача проведення такого експерименту зводиться до одержання величин еліпсометричних параметрів Δ та Ψ для певних енергій фотона $\hbar\omega$, при заданому куті φ падіння світла на зразок, який під час проведення експерименту встановлюється поблизу головного кута ($\Delta = 90^\circ$).

В якості джерел світла використовувалися ксенонові і дейтерієві лампи та лампа розжарювання. Спектральні залежності Δ і Ψ в далекій інфрачервоній області спектру (0,05–0,6 еВ) отримані за допомогою Фур'є-спектрометра IFS-55 (Bruker). Величина кута падіння світла на зразки складала 70-75° і варіювалася у відповідності до змін складу зразків і енергії зондувального фотону. Діаметр пучка світла складав 3,5 мм. Відповідно, експериментально були отримані частотні залежності інтенсивності відбитого від зразка світла [1].

Перед проведенням вимірювань оптичних характеристик поверхні зразків полірувались алмазними пастами, після чого очищувалися в ультразвуковій ванні. Така обробка дозволяла видалити шар оксиду з поверхні стрічок аморфних сплавів і придати їхній поверхні блиск, що можна було спостерігати візуально. Відносна похибка вимірювань оптичних сталих n і k складала~2-5%.

Результати та обговорення

Для отримання параметрів електронів провідності можна використати результати теоретичних досліджень, які встановлюють взаємозв'язок оптичних сталих та електронних параметрів, наприклад класичну теорію оптичних властивостей твердих тіл (теорію Друде) [3, 6].

На основі формул (1) оцінювались кінетичні характеристики електронів провідності середовища: релаксаційні γ і плазмові ω_p частоти. Для цього аналізу підлягали функції [3]:

$$F_1(\omega^2) = \frac{1}{1-\varepsilon_1(\omega)} = \frac{\omega^2}{\omega_p^2} + \frac{\gamma^2}{\omega_p^2}, \qquad (6)$$

$$F_2(\lambda) = \frac{\varepsilon_2(\lambda)}{1-\varepsilon_1(\lambda)} = \lambda\frac{\gamma}{2\pi c}, \qquad (7)$$

$$F_3(\lambda) = \sqrt{\frac{(1-\varepsilon_1(\lambda))^2 + \varepsilon_2^2(\lambda)}{1-\varepsilon_1(\lambda)}} = \lambda\frac{\omega_p^2}{2\pi c} \qquad (8)$$

Кожна з цих функцій є лінійною залежністю від λ (або ω^2) з відповідними коефіцієнтами, які пов'язані з величинами γ і ω_p. Розрахунки проводились за допомогою лінійної апроксимації з використанням програмного пакету QtiPlot.

На рис. 1 і рис. 2 представлені спектральні залежності дійсної $\varepsilon_1(h\nu)$ і уявної $\varepsilon_2(h\nu)$ частин діелектричної проникності поверхні стрічок АМС $Fe_{80}ПМ_5B_{15}$, ПМ = Ti, V, Cr .

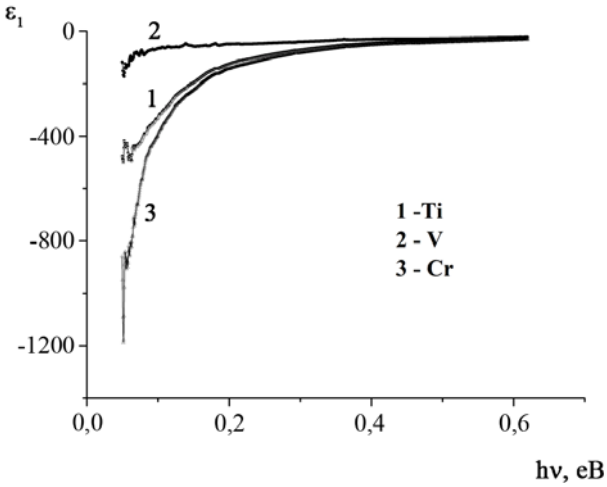


Рис. 1. Залежність $\varepsilon_1(h\nu)$ для сплавів $Fe_{80}ПМ_5B_{15}$, ПМ = Ti, V, Cr.

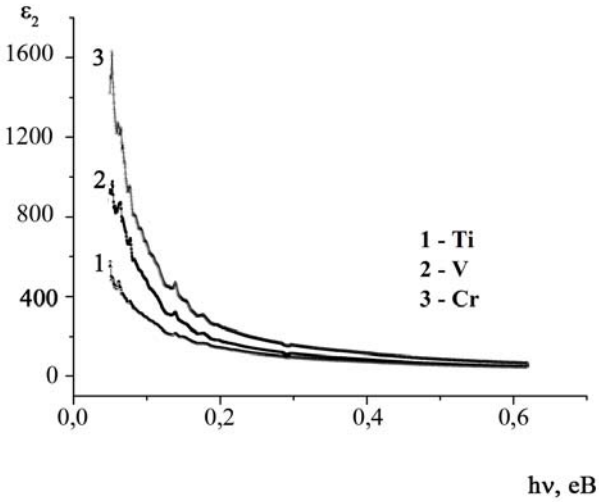


Рис. 2. Залежність $\varepsilon_2(h\nu)$ для сплавів $Fe_{80}ПМ_5B_{15}$, ПМ = Ti, V, Cr

Поведінка цих кривих добре пояснюються за допомогою теорії Друде і вони можуть бути апроксимовані співвідношенями (1). Користуючись цим фактом з використанням співвідношень (6-8), можна отримати дані стосовно параметрів електронної підсистеми: плазмової ω_p і релаксаційної γ частот. Ці дані представлені у табл. 1.

Таблиця 1

Параметри електронної підсистеми, обчислені за допомогою лінійної апроксимації функцій F1-F3.

ПМ	F_1		F_2, F_3	
	$\hbar\omega_p$, eB	$\hbar\gamma$, eB	$\hbar\omega_p$, eB	$\hbar\gamma$, eB
Ti	3.3	0.2	7.27	1.5
V	3.6	0.5	9.08	1.9
Cr	3.5	0.7	8.31	2.1

Ці дані свідчать про те, що не можна однозначно розрахувати величини ω_p і γ, аналізуючи функцію F_1, або функції F_2 і F_3, за розрахованими даними щодо ω_p і γ можна лише помітити тенденцію їх зміни при варіюванні типу перехідного металу (ПМ) в сплаві.

При детальному аналізі функції F_1 (рис. 3 – рис. 5) можна помітити певні закономірності, а саме, що існують 3 ділянки, які відповідають різним значенням ω_p і γ. Ділянка "2": 0.2-0.4 eB^2, ділянка "3": 0.02-0.15 eB^2, ділянка "4": 0.01-0.05 eB^2. Зазначимо, що розраховані величини ω_p і γ по усьому спектру (ділянка "1") є усередненими значеннями по усіх ділянках. Така поведінка розрахованих величин може мати місце лише у одному випадку: спостерігається перебіг цих трьох процесів транспорту електронів, що полягає у домінантному прояві тієї чи іншої групи носіїв зарядів, які відрізняються між собою концентраціями, рухливістю і ефективними масами.

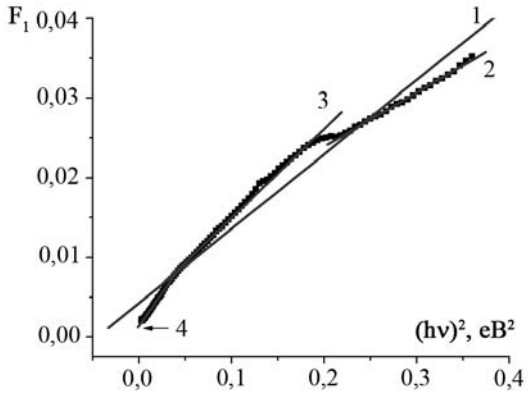


Рис. 3 Апроксимація функції F_1 для сплава $Fe_{80}ПМ_5B_{15}$ прямими 1, 2, 3 та 4 в залежності від обраної ділянки спектра (ПМ = Ti)

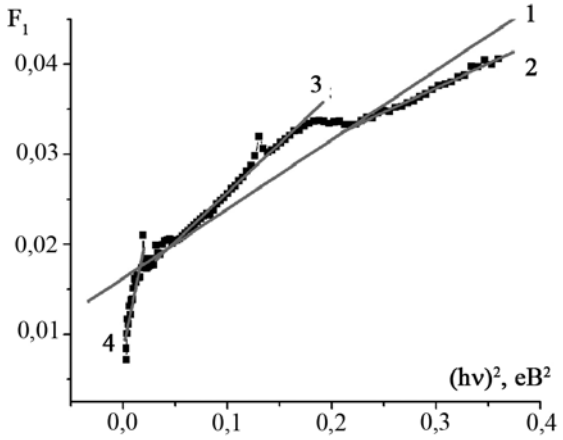


Рис. 4. Апроксимація функції F_1 для сплава $Fe_{80}ПМ_5B_{15}$ прямими 1, 2, 3 та 4 в залежності від обраної ділянки спектра (ПМ = V)

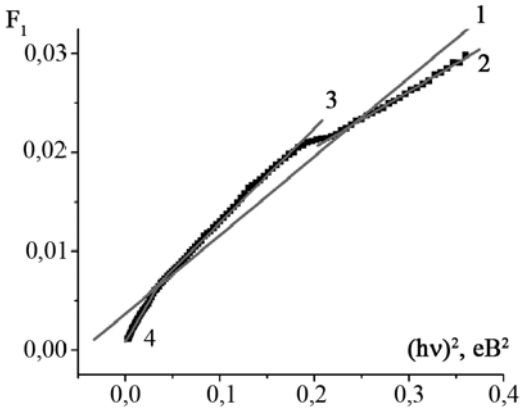


Рис. 5. Апроксимація функції F_1 для сплава $Fe_{80}ПМ_5B_{15}$ прямими 1, 2, 3 та 4 в залежності від обраної ділянки спектра (ПМ = Cr)

Таблиця 2

Параметри апроксимації (*A*), (*B*) і коефіцієнт кореляції (*R*) в залежності від обраного інтервалу для аналізу (№ див. рис. 3).

№	*A*	*B*	*R*	$\hbar\omega_p$, еВ	$\hbar\gamma$, еВ
1	0.00429	0.09335	0.98	3.3	0.2
2	0.00148	0.16282	0.99	2.5	0.1
3	0.00386	0.11139	0.99	3.0	0.2
4	0.01034	0.06789	0.99	3.8	0.4

Таблиця 3

Параметри апроксимації (*A*), (*B*) і коефіцієнт кореляції (*R*) в залежності від обраного інтервалу для аналізу (№ див. рис. 4).

№	*A*	*B*	*R*	$\hbar\omega_p$, еВ	$\hbar\gamma$, еВ
1	0.01625	0.07695	0.95	3.6	0.5
2	0.02113	0.05414	0.99	4.3	0.6
3	0.01486	0.1092	0.98	3.0	0.4
4	0.00847	0.55824	0.91	1.4	0.1

Таблиця 4

Параметри апроксимації (*A*), (*B*) і коефіцієнт кореляції (*R*) в залежності від обраного інтервалу для аналізу (№ див. рис. 5).

№	*A*	*B*	*R*	$\hbar\omega_p$, еВ	$\hbar\gamma$, еВ
1	0.00368	0.07965	0.98	3.5	0.7
2	0.00917	0.05677	0.99	4.2	0.4
3	0.00336	0.09554	0.99	3.2	0.2
4	0.00081	0.16434	0.99	2.5	0.1

З табл. 2 видно, що значення отриманих параметрів апроксимації навіть для визначеної характеристичної функції F_1 можуть змінюватись в широкому діапазоні значень, і можуть відрізнятись один від одного в декілька разів.

Тому, виникає питання який метод розрахунку краще використовувати? Який метод забезпечує найкращу точність? Ми стверджуємо, що найкращий шлях для розрахунку параметрів електронної підсистеми полягає у наближенні дійсної частини діелектричної проникності $\varepsilon_1(h\nu)$. Чому було обрано саме цю функцію? Ми пропонуємо наступний критерій: діелектричні функції $\varepsilon_1(\mathrm{h}\nu)$, $\varepsilon_2(\mathrm{h}\nu)$, аналогічно до оптичної провідності $\sigma(h\nu)$ мають два параметри: ω_p та γ. У випадку використання $\varepsilon_2(\mathrm{h}\nu)$ та $\sigma(h\nu)$ ці параметри "змішуються" один з одним, а у випадку використання $\varepsilon_1(\mathrm{h}\nu)$ – ні. Зрозуміло, що змішування параметрів призводить до накопичення загальної похибки. Результати, отримані за допомогою $\varepsilon_1(\mathrm{h}\nu)$ наведені у табл. 5.

Таблиця 5

Параметри електронної підсистеми, обчислені за допомогою апроксимації $\varepsilon_1(h\nu)$.

ПМ	$\hbar\omega_p$, еВ	$\hbar\gamma$, еВ
Ti	2.8	0.31
V	2.6	0.11
Cr	2.4	0.06

Отримані результати свідчать про утворення в стрічках АМС $Fe_{80}ПМ_5B_{15}$ домішкової зони вище рівня Фермі E_f, що пов'язана з $3d$ — станами атомів ПМ, аналогічно до результатів робіт [5, 8]. При цьому замість реальної щілини в енергетичному спектрі електронів АМС слід розглядати псевдощілину серед локалізованих станів поблизу E_f, як результат своєрідного переходу типу метал-неметал при певній пороговій концентрації атомів домішкового ПМ метала. Це і є причиною відмінностей значень ω_p і γ, розрахованих в різних спектральних ділянках.

Висновки

В роботі запропоновано вдосконалену методику розрахунку плазмової та релаксаційної частот в електронній підсистемі на прикладі АМС $Fe_{80}ПМ_5B_{15}$. Показано, що більш

ефективним методом розрахунку параметрів електронної підсистеми є апроксимація дійсної частини діелектричної функції. Результати апроксимації вказують на вклад у відгук цієї підсистеми кількох сортів носіїв заряду, що відрізняються рухливістю, концентрацією і ефективними масами.

Список використаних джерел

1. *Youssef H.A*. Manufacturing Technology: Materials, Processes, and Equipment / Youssef H.A., El-Hofy H.A., Ahmed M.H. – Boca Raton: Taylor and Francis Group, 2011. – 915 p.

2. *Drude P*. The theory of optics / Drude P. – New-York: Dover publications inc, 1903. – 546 p.

3. *Покропивний В.В.* Фізика наноструктур / Покропивний В.В., Поперенко Л.В. – Київ: Київський Університет, 2008 – 220 с.

4. *Träger F*. Handbook of Lasers and Optics / Träger F. – Norwich: Springer Science & Business, 2012. – 1694 p.

5. *Поперенко Л.В.* Діагностика поверхні поляризованим світлом / Поперенко Л.В., Стащук В.С., Шайкевич І.А., Одарич В.А. – Київ: ВПЦ"Київський Університет", 2007 – 336 с.

6. *Born M*. Principles of Optics: Electromagnetic Theory of Propagation, Interference and Diffraction / Born M., Wolf E., Bhatia A.B. – Cambridge: University Press, 2000 – 986 p.

7. *Поперенко Л.В*. Оптичні і електронні властивості аморфних металевих сплавів $Fe_{80}ПМ_5B_{15}$ (ПМ – перехідний метал) / Поперенко Л.В., Манько Д.Ю. // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Фізика. – 2010. – №10-11. – С. 71-73.

8. *Сингер В.В.* Физические свойства и электронные характеристики разбавленных бинарных растворов Cr, Mn, V в Fe, Co, Ni при высоких температурах / Сингер В.В., Сандрацкий Л.М., Радовский И.З., Гельд П.В. // Расплавы. – 1989. – № 4. – С. 21-27.

References

1. YOUSSEF, H., EL-HOFY, H., AHMED, M. (2011) *Manufacturing Technology: Materials, Processes, and Equipment.* Boca Raton: Taylor and Francis Group.

2. DRUDE, P. (1903) *The theory of optics*. New-York: Dover publications inc.

3. POKROPIVNYI, V., POPERENKO, L. (2008). *Physics of nanostructures.* Kyiv: Vydavnycho-polihrafichnyj centr "Kyivskyj universytet".

4. TRÄGER, F. (2012) *Handbook of Lasers and Optics.* Norwich: Springer Science & Business.

5. POPERENKO, L., STASHCHUK, V., SHAIKEVYCH, I., ODARYCH, V. (2007) *Surface diagnostic by polarized light*. Kyiv: Vydavnycho-polihrafichnyj centr "Kyivskyj universytet".

6. BORN, M. (2000) *Principles of Optics: Electromagnetic Theory of Propagation, Interference and Diffraction.* Cambridge: University Press.

7. POPERENKO, L., MANKO, D. (2010) Optical and electronic pr

8. operties of amorphous metal alloys $Fe_{80}TM_5B_{15}$ (TM – transition metal). *Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Physics.* 10-11. p. 71-73.

9. SINGER, V., SANDRACIY, L., RADOVSIY, I., GELD, P. (1989) Physical properties and electronic characteristics of diluted binary solutions Cr, Mn, V в Fe, Co, Ni under high temperatures. *Melts.* 4. p. 21-27.

Надійшла до редколегії 10.11.14

УДК 548:539.32, 539.375, 534.222.2

Онанко А.П.[1], к. ф.-м. н., с.н.с.,
Онанко Ю.А., асп.

Релаксаційні процеси дефектної наноструктури в сплавах, SiO_2 і автоматизована система візуалізації ультразвукової анізотропії

[1]Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 01601, м. Київ, вул. Володимирська 64/13,
e-mail: onanko@univ.kiev.ua

Onanko A. P.[1], PhD, Sen. Sci. Res.,
Onanko Y. A., PhD stud.

Defect nanostructure relaxation processes in alloys, SiO_2 and automated system of ultrasound anisotropy visualization

[1]Taras Shevchenko National University of Kyiv, 01601, Kyiv, Volodymyrska st. 64/13,
e-mail: onanko@univ.kiev.ua

Визначались модуль пружності E, модуль зсуву G, коефіцієнт Пуассона μ, температура Дебая θ_D SiO_2, CaO, які залежать від анізотропії, текстури. Розглянуто вплив релаксаційних процесів дефектної наноструктури на температурно-баричну залежність модуля пружності E (вказівну поверхню пружних властивостей) SiO_2.

Ключові слова: релаксаційні процеси, модуль пружності, ультразвукова швидкість.

The elastic module E, the shear module, Puasson coefficient μ, Debye temperature θ_D SiO_2, CaO were determined, which are dependent on anisotropy ,texture. The influence of defect nanostructure relaxation processes on temperature-pressure dependence of elastic module E (indicatory surface of elastic properties) SiO_2 was observed. The presentation of inelastic internal friction, elastic module and temperature interconnection in type "indicatory surface" gives the additional information about structure defects dynamics in alloys. Annealing of structure defects bends out of shape the type of internal friction temperature spectrum. At annealing admixtures, vacancies go out. The measuring of internal friction background $Q^{-1}{}_0$ after different heat treatments gives information about the changes of the fields of elastic strains σ_i in alloys, SiO_2. Outcomes of an evaluation of dynamic characteristics interstitial atoms, vacancy V and O-complexes can be applied for account of a condition of an annealing with the purpose of deriving specific structural defects in SiO_2. The developed automated system of numerical analysis and visualization of the ultrasonic measuring data of anisotropy parameters of the elastic waves velocities can be use for express-treatment of experimental values of phase velocities of longitudinal $V_\parallel$, "rapid" $V_{\perp 1}$ and "slow" $V_{\perp 2}$ of transversal waves in alloys, SiO_2.

Key Words: relaxation processes, elastic module, ultrasound velocity.

Статтю представив член-кор. НАН України, д.ф.-м.н., проф. Макара В.А.

Більшість елементів конструкцій та деталей машин працюють в умовах дії знакоперемінних інтенсивних навантажень, здатних збуджувати їх резонансні коливання. Такі коливання обумовлюють виникнення механічних напружень σ, при яких можливі руйнування механізмів та споруд [1-3]. В загальному випадку у квазіоднорідному анізотропному середовищі ні один із векторів пружних зміщень $\vec{U}$ не колінеарний вектору хвильової нормалі $\vec{n}$. Тому пружні хвилі називаються квазіхвилями.

Експеримент

Для вимірювання модуля пружності E та внутрішнього тертя (ВТ) Q^{-1} використовувалися ультразвуковий (УЗ) ехо-імпульсний метод на установці УЗВШ-КНУ на частоті $f \approx 1{,}67$; 5 МГц та методика чотирьохскладового п'єзоелектричного вібратора на частоті $f \approx 118$ кГц при знакозмінній механічній деформації $\varepsilon \approx 10^{-6}$ у вакуумі $P \approx 10^{-3}$ Па. Похибка вимірювань модуля пружності $\Delta E/E_0 \approx 0{,}5\%$ [4-6].

Результати

На рис. 1 зображені осцилограми імпульсів квазіповздовжньої поляризації $V_\parallel$ та "швидкої" $V_{\perp 1}$ і "повільної" квазіпоперечної поляризації $V_{\perp 2}$ в п'єзокераміці ЦТС-19 ($PbTiO_3$-$PbZrO_3$) – титанаті–цирконаті свинцю.

© А.П. Онанко, Ю.А. Онанко, 2014

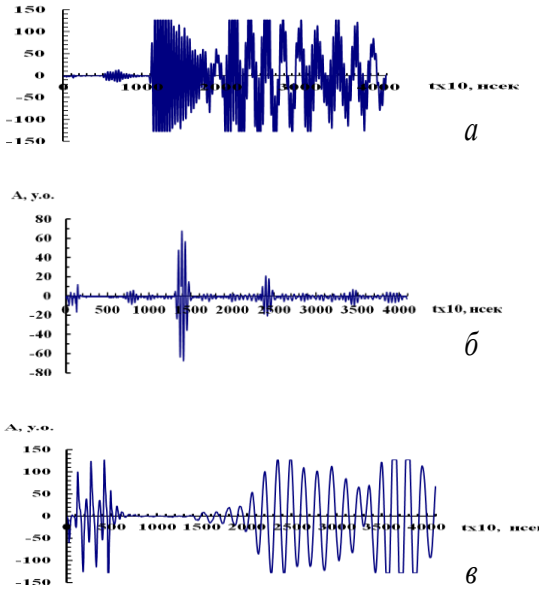


Рис. 1. Осцилограма імпульсів в п'єзокераміці ЦТС-19: *а* - квазіповздовжньої поляризації $V_{\parallel}$; *б* - "швидкої" квазіпоперечної поляризації $V_{\perp 1}$; *в* – "повільної" квазіпоперечної поляризації $V_{\perp 2}$.

З осцилограми на рис. 1 *а* визначалась повздовжня УЗ швидкість $V_{\parallel}$ = 4127 м/сек, модуль пружності $E = \rho V_{\Updownarrow}^2$ = 126,9 ГПа п'єзокераміці ЦТС-19. З осцилограми на рис. 1 *б* визначалась поперечна УЗ швидкість $V_{\perp 1}$ = 1745 м/сек, модуль зсуву $G = \rho V_{\Leftrightarrow}^2$ = 22,69 ГПа, потім коефіцієнт Пуассону μ = 0,3911, температураДебая θ_D = 111,9 К п'єзокераміці ЦТС-19, яка представлена у таблиці 1 наряду з функціональними матеріалами. Температура Дебая θ_D визначалась за формулою [1]:

$$\theta_D = \frac{h}{k_B}\cdot\left(\frac{9N_A\rho}{4\pi A}\right)^{1/3}\cdot\left(\frac{1}{V_{II}^{\ 3}}+\frac{2}{V_{\perp}^{\ 3}}\right)^{1/3}, \quad (1)$$

де $k_Б$ - число Авогадро, А – середня молярна маса, ρ – густина, $V_{\parallel}$ - квазіповздовжня УЗ швидкість, $V_{\perp}$ - квазіпоперечна УЗ швидкість, μ - коефіцієнт Пуассона [2]:

$$\mu = \frac{\varepsilon_{\perp}}{\varepsilon_{II}} = \frac{1}{2}\left[1+\frac{1}{1-(V_{II}/V_{\perp})^2}\right]. \quad (2)$$

Обговорення

На рис. 2 зображені осцилограми імпульсів квазіповздовжньої поляризації $V_{\parallel}$ та "швидкої" $V_{\perp 1}$ квазіпоперечної поляризації в TiO_2, $SiO_{2[100]}$, $CaO_{[100]}$.

З осцилограми на рис. 2 б визначалась повздовжня УЗ швидкість $V_{\parallel}$ = 5122 м/сек, модуль пружності $E = \rho V_{\Updownarrow}^2$ = 65,85 ГПа $SiO_{2[100]}$(Су-19). З осцилограми на рис. 2 *г* визначалась поперечна УЗ швидкість $V_{\perp 1}$ = 2740 м/сек, модуль зсуву $G = \rho V_{\Leftrightarrow}^2$ = 18,84 ГПа, потім коефіцієнт Пуассона μ = 0,2996, температура Дебая θ_D = 267,0 К $CaO_{[100]}$.

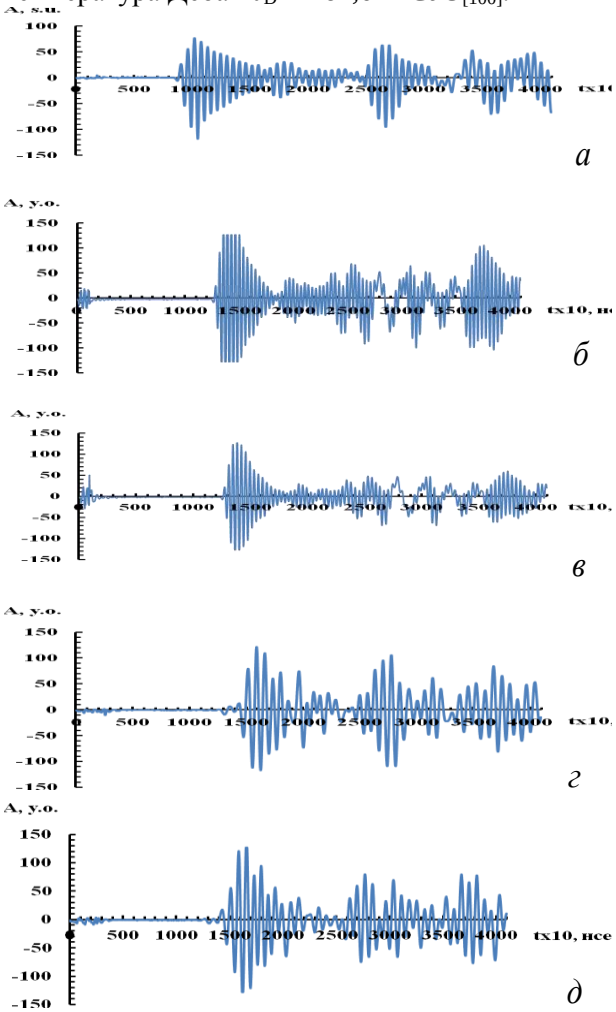


Рис. 2. Осцилограма імпульсів: *а* – квазіповздовжньої поляризації $V_{\parallel}$ в TiO_2; *б* – квазіповздовжньої поляризації $V_{\parallel}$ в $SiO_{2[100]}$(Су-19); *в* – квазіповздовжньої поляризації $V_{\parallel}$ в $SiO_{2[100]}$(Су-18); *г* – "швидкої" квазіпоперечної поляризації $V_{\perp 1}$ в $CaO_{[100]}$; *д* – "швидкої" квазіпоперечної поляризації $V_{\perp 1}$ в $SiO_{2[100]}$(Со-20).

Барична та температурна залежність модуля пружності

$$E_{001} = \rho\left(V_{\Updownarrow[001]}\right)^2 = \rho V_{\perp 001}^{\ 2}\left[3+\frac{1}{1-(V_{II}/V_{\perp})^2}\right]$$

SiO_2 до та після насичення ρ_{NaCl} = 180 кг/м^3 представлена на рис. 3 *а* та 3 *б*.

Температурно-барична залежність (вказівна поверхня пружних властивостей) акустичної повздовжньої хвилі *V*к, модуля пружності E_{001} до та після насичення ρ_{NaCl} = 180 кг/м^3 і пружної

постійної $C_{44} = \rho\left(V_{\Leftrightarrow 1[001]}\right)^2$ SiO_2 побудована за допомогою автоматизованої системи "KERN-DP", яка використовує програму Surfer 10 для чисельного та графічного аналізу і візуалізації в автоматичному режимі даних УЗ вимірювань параметрів анізотропії швидкостей пружних інваріантно-поляризаційним методом, та представлена на рис. 4.

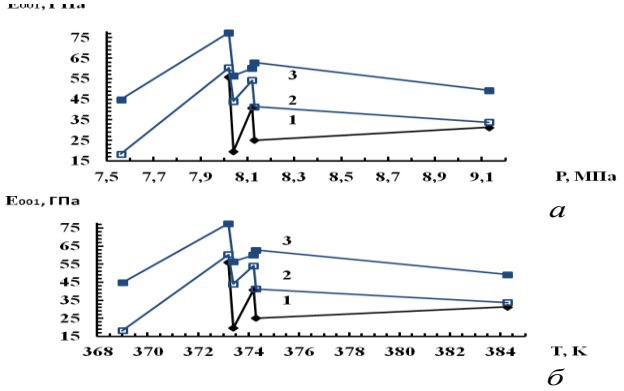


Рис. 3. Барична (*а*) та температурна (*б*) залежність модуля пружності E_{001} SiO_2: 1 – УЗВШ-КНУ, 2 – Керн-4, 3 – Керн-4 після насичення ρ_{NaCl} = 180 кг/м^3.

Таблиця 1. Температура Дебая θ_D матеріалів

Матеріал	$V_{\parallel}$, м/сек	$V_{\perp}$, м/сек	ρ, кг/м^3	A, г/моль	θ_D, K
Ti(ВТ1-0)	6210	3201	4420	0,0479	407,2
Д16	6290	3024	2700	0,026981	396,8
Al	6260	3080	2700	0,026981	403,6
Fe_{45}	5899	3275	7800	0,055847	475,8
Fe	6070	3230	7800	0,055847	470,7
Cu	4730	2298	8930	0,063546	337,5
латунь	4430	2120	8100	0,064102	300,8
Pb	2160	700	11400	0,2072	76,2
тефлон-4	1360	617	2190	0,012011	99,2
тефлон-3М	1824	893	2190	0,012011	142,9
п'єзокераміка ЦТС-19	4127	1745	7450	0,649498	111,9
кварц SiO_2	5600	3500	2650	0,0600843	462,7
$SiO_{2[100]}$ (Су-19)	5122	2740	2510	0,0600843	267,0

За допомогою 3D атомно-силової мікроскопії (АСМ) з візуальним розділенням Δh ≈ 40 нм отримано зображення мікроструктури плівки $SiO_2 + TiO_2 + ZrO_2$ товщиною h_{TiO2} = 800÷1000 нм розміром $2r_{TiO2}$ = 5÷25 нм на підкладці Fe (3D, 15x15 мкм), що показано на рис. 5.

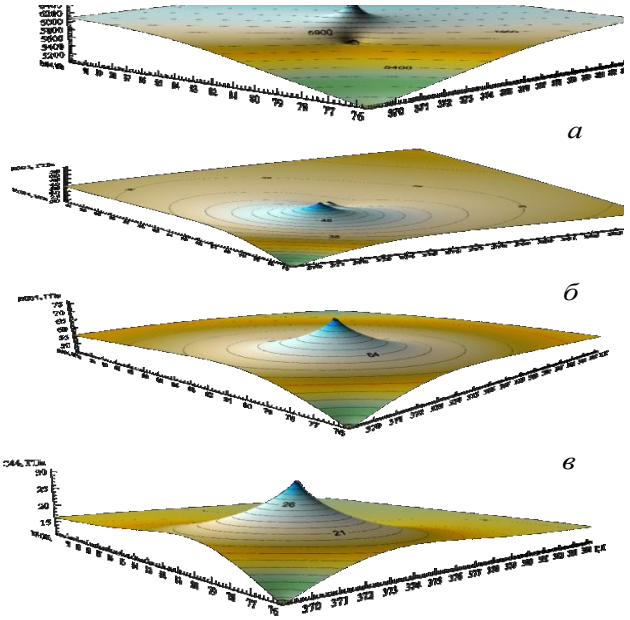


Рис. 4. Температурно-барична залежність (вказівної поверхні пружних властивостей) SiO_2 *а* – акустичної повздовжньої хвилі V_K; *б* – модуля пружності E_{001}; *в* – модуля пружності E_{001} після насичення; *г* – модуля пружності C_{44}.

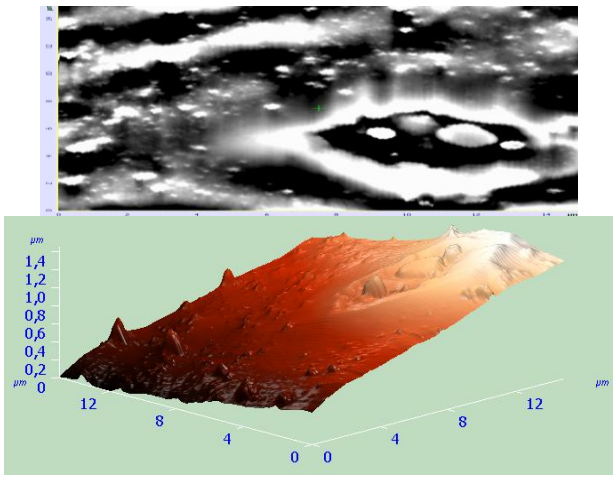


Рис. 5. 3D АСМ зображення мікроструктури плівки $SiO_2 + TiO_2 + ZrO_2$ товщиною h_{TiO2} = 800 ÷ 1000 нм розміром $2r_{TiO2}$ = 5 ÷ 25 нм на підкладці Fe (3D, 15x15 мкм).

Спостерігається мілко дисперсна гладка поверхня, зрощення малих островків, їх форма стає круглястою. Ділянки мають сильно фрагментарну структуру, яка складається з слабо разорієнтованих островків розміром H = 200 ± 75 нм.

Створена автоматизована система "KERN-DP", яка відповідає вимогам до сучасних програмних комплексів, систем керування базами даних і використовує всю потужність сучасних персональних комп'ютерів, включаючи багатоядерні й багатопроцесорні системи та 64-бітні системи [6]. Значною перевагою автоматизованої системи є незалежність точності розрахунків від напрямку хвильової нормалі $\vec{n}$.

Висновки

1. Модуль пружності E, коефіцієнт Пуассона μ, внутрішнє тертя Q^{-1} залежать від анізотропії, текстури, мікротріщиноутворення сплавів.
2. Інтегральний коефіцієнт пружної анізотропії $\overline{A}_{\mu}$ і кут поляризації - відхилення вектора пружних зміщень $\vec{U}$ від напрямку хвильової нормалі $\vec{n}$ $\varphi_{\vec{P}} = (\vec{U}, \vec{n})$ є найбільш чутливими характеристиками анізотропії сплавів і свідчать про неоднорідну деформацію.
3. Розроблена автоматизована система "KERN-DP" відповідає вимогам до сучасних програмних комплексів, систем керування базами даних і використовує всю потужність сучасних персональних комп'ютерів.

Список використаних джерел

1. *Блантер М.С.* Метод внутреннего трения в металловедческих исследованиях / М.С. Блантер, Ю.В. Пигузов, Г.М. Ашмарин и др. - Москва: Металлургия, 1991. - 248 с.
2. *Головин И.С.* Внутреннее трение и механическая спектроскопия металлических материалов / И.С. Головин – Москва: МИСиС, 2012. - 247 с.
3. *Селищев П.А.* Самоорганизация в радиационной физике / П.А. Селищев - Москва: СИК Институт компьютерных исследований, 2008. - 208 с.
4. *Онанко А.П.* Вплив водорода на вказівну поверхню непружно-пружного тіла стопу$Ti_{0.5}Al_{0.5}$ / А.П. Онанко // Металофізика і новітні технології. – 2011. – Т. 33, № 2. - С. 253-261.
5. *Онанко А.П.* Вплив температури, ультразвуку, електричного струму на непружно-пружні характеристики, релаксаційні процеси в Ge-Si та SiO_2 / А.П. Онанко, О.В. Ляшенко, С.А. Вижва та ін. // Сенсорна електроніка і мікросистемні технології. – 2011. – Т. 2(8), № 3. - С. 14-21.
6. *Онанко Ю.А.* Автоматизована система обробки вимірювань повздовжніх та поперечних швидкостей ультразвуку / Ю.А. Онанко, Г.Т. Продайвода, С.А. Вижва, А.П. Онанко, М.П. Куліш // Металофізика і новітні технології. – 2011. – Т. 33, № 13. - С. 529-533.

References

1. BLANTER, M.S., PIGUZOV, Y.V., ASHMARIN G.M. et al. (1991*) Method internal friction in metal researches*. – Moscow: Metallurgy.
2. GOLOVIN, I.S. (2012) *Internal friction and mechanical spectroscopy of metal materials*. – Moscow: MISiS.
3. SELYSHCHEV, P.A. (2008.) *Self-organization in radiation physics*. - Moscow : SIC Institute computer research.
4. ONANKO, A.P. (2011) Influence of hydrogen on directional surface of inelastic-elastic body $Ti_{0.5}Al_{0.5}$ alloy. *Metalphysics and new technology*. 33 (2). p. 253-261.
5. ONANKO, A.P., LYASHENKO, O.V., VYZHVA, S.A. et al. (2011) Influence of temperature, ultrasound, electrical current on inelastic-elastic characteristics, relaxation processes in Ge-Si and SiO_2. *Sensor electronics and microsystem technologies*. 2 (8), № 3. p. 14-21.
6. ONANKO, Y.A., PRODAYVODA, G.T., VYZHVA, S.A., ONANKO, A.P., KULISH, N.P. (2011) Automated system of treatment of longitudinal and transversal ultrasound velocities measurements. *Metalphysics and new technology.* 33 (13). p. 529-533.

Надійшла до редколегії 29.11.2014

УДК 536.4; 538.9; 544.3; 544.03

Шірінян А. С.[1], д.ф.-м.н., доц.
Комісаренко О. С.[2], асп.
Макара В. А.[3], д.ф.-м.н., проф., член-кор. НАНУ

Використання термоаналізу для побудови фазових діаграм багатокомпонентних матеріалів

[1] Навчально-науковий центр «Фізико-хімічне матеріалознавство» КНУ імені Тараса Шевченка і НАН України
вул. Володимирська, 64, Київ, 01601, Україна
e-mail: aramshirinyan@ukr.net

[2,3] Київський національний університет імені Тараса Шевченка
вул. Володимирська, 64, Київ, 01601, Україна
e-mail: [2]olenakomisarenko@ukr.net,
[3]v_a_makara@univ.kiev.ua

A. S. Shirinyan[1], Dr. Sci.
O. S. Komisarenko[2], PhD stud
V. A. Makara[3], Dr. Sci., Prof., Cor. Memb of NASU

The use of thermal analysis for the construction of phase diagrams of multicomponent materials

[1] Scientific and Training Center "Physical and Chemical Materials Science" of Taras Shevchenko National University of Kyiv and National Academy of Sciences of Ukraine
01601, Kyiv,Volodymyrska st. 64/13, Ukraine
e-mail: aramshirinyan@ukr.net

[2,3] Taras Shevchenko National University of Kyiv, 01601, Kyiv, Volodymyrska st. 64/13,
e-mail: [2]olenakomisarenko@ukr.net,
[3] v_a_makara@univ.kiev.ua

Публікація дає стислий огляд фізичних основ використання термоаналізу для експериментального одержання фазових діаграм багатокомпонентних матеріалів. Розкрито переваги і недоліки термоаналізу з позицій визначення розмірів і типів структур матеріалів, вимоги сучасних технологій.

Ключові слова: фізико-хімічні методи, термоаналіз, фазова діаграма.

The publication provides a brief review of the physical basis of thermal analysis using for experimental reconstruction of phase diagrams of multicomponent materials specifically targeting the direct thermal analysis and the differential thermal analysis. The experimental examples related to the first order phase transitions in bulk materials shown on temperature-time and temperature-composition diagrams are presented. The advantages and disadvantages of thermal analysis from the position of the determination of sizes and structure types of materials, modern technologies conditions are revealed. One of the fundamental limitation is the problem with a temperature. Usual thermal analysis gives a macroscopic description of a bulk material in thermal bath provided with good thermal contact with his bath, so that it will have a temperature of thermal bath. In a nanosystem the fluctuations of local temperature is high and that is why a temperature of thermal bath may be not equal to the temperature of a system, as in classical thermodynamics.

Key Words: physico-chemical methods, thermal analysis, phase diagram.

Статтю представив член-кор. НАН України, д.ф.-м.н., проф. Макара В.А.

Вступ

У науці про матеріали будь-яке дослідження спирається на дані про властивості і поведінку речовин в умовах різних зовнішніх термодинамічних параметрів. Для постійних зовнішніх умов проблема вирішується побудовою рівноважних діаграм стану, актуальність яких аналогічна необхідності використання карт у географії: спочатку потрібно навчитися читати такі діаграми, а потім досліджувати і робити висновки про фізико-хімічні властивості матеріалів.

Фазові діаграми або діаграми стану являють собою геометричне зображення фазової рівноваги при різних значеннях таких термодинамічних параметрів як температура,

© А.С. Шірінян, О. С. Комісаренко, В. А. Макара, 2014

тиск та концентрація атомів у середині фаз [1-3]. Такі діаграми стану одержують як експериментально [4-6], користуючись різними методами та їх порівнянням між собою, так і за допомогою теоретичного опису [7-10]. Аналіз сучасних експериментальні методів одержання і побудови діаграм стану багатокомпонентних матеріалів дає змогу систематизувати підходи авторів у вигляді такого переліку фізико-хімічних методів: термоаналіз (прямий термічний аналіз і диференціальний термічний аналіз); диференціальна сканувальна калориметрія та аналіз теплоємності; метод геометричної термодинаміки (випаровування компонента з джерел і подальшою конденсацією молекулярних пучків на підкладці); мікроскопічний аналіз, електронна й оптична мікроскопії; кількісний і фазовий рентгеноструктурний аналізи; метод зонної очистки (від компонента) або метод відставання (сегрегації); аналіз електропровідності й магнітної проникності; дилатометричний метод і аналіз твердості [11-12]. Детальний аналіз кожного з названих методів з позиції можливостей використання для побудови фазових діаграм є важливим науковим завданням. Огляд праць виявляє, що залишається актуальною проблема визначення переваг і недоліків експериментальних підходів, що визначають фазові діаграми матеріалів. Метою нашого подальшого наукового пошуку є критичний огляд застосування термоаналізу для одержання фазових діаграм багатокомпонентних систем.

Фундаментальні основи термоаналізу

Термічним аналізом або термоаналізом називають групу методів дослідження, в основі яких лежить спостереження за одним або декількома фізико-хімічними властивостями матеріалу залежно від часу при зміні температури дослідженого зразка матеріалу в заданій атмосфері [13-15]. Зміна температури може досягатись шляхом нагрівання або охолодження матеріалу за певним законом. В експериментальних лабораторіях в якості нагрівних приладів при проведенні термоаналізу використовують печі, які забезпечують рівномірну швидкість зміни температури та отримання заданого режиму нагріву і охолодження. Зазвичай фазові перетворення і термічні процеси типу хімічної реакції, зміни агрегатного стану або утворення нової фази, супроводжуються зміною теплоємності системи і тому такі перетворення можуть супроводжуватись поглинанням тепла (ендотермічне перетворення) або виділенням тепла (екзотермічне перетворення) і можуть бути знайдені методами термоаналізу. Нині розрізняють два види термоаналізу: прямий термічний аналіз (ТА) або метод температурних кривих та диференціальний термічний аналіз (ДТА).

Прямий термічний аналіз для матеріалів був вперше досліджений в 1886-1887 рр. А. Ле-Шательє (Henri Louis Le Chatelier, 1850-1936), який зареєстрував криві нагрівання для вапняків та глинястих мінералів [13-15]. Перші праці по вивченню залежності між температурою та концентрацією розчинів, рівноважних з кристалічною фазою, були виконані близько двохсот років тому І. Глаубером (Johann Rudolph Glauber, 1604-1607) [15]. Склад розчину, рівноважного з кристалами, зазвичай визначається окремо за допомогою хімічного аналізу. У останньому вимірюються фізичні величини, зміна яких зумовлена хімічними реакціями. Відтоді і дотепер існують дві основні методики термічного аналізу: 1) візуальний метод та 2) метод кривих «час-температура».

Перший метод зводиться до того, що дослідником відмічається температура, при якій з'являються або зникають помітні для ока кристали або фази (неточність сягає близько 0,2K). Зробивши ряд подібних дослідів з серією зразків матеріалу (приміром, розчинів) різних концентрацій, отримують дані для побудови кривої залежності температури початку або звершення перетворення від складу розчинів.

Метод кривих «час-температура» набув широкого застосування після праць Н. С. Курнакова (1860-1941), який розробив конструкцію реєструючого пірометра з автоматичним записом температури. Доки в системі не відбудеться ніяких перетворень, температура падає або зростає практично з постійною швидкістю згідно з рівнянням: $dT/dt=\upsilon$=const, де T – температура зразка матеріалу в кожний момент часу, величина υ – швидкість зміни температури, яку задають зовнішніми джерелами тепла і навколишнім середовищем. Перетворення, що супроводжується виділенням або поглинанням теплоти, приводить до того, що швидкість зміни температури υ сповільнюється або прискорюється. Злам (суттєва зміна кута нахилу) на кривій охолодження або нагрівання вказує на початок перетворення [16-17].

Диференціальний термічний аналіз є модифікацією методу ТА, в якому

використовують одночасно і в майже однакових умовах два матеріалу: зразок і еталон для якісного і кількісного порівняння. За таким підходом різниця температур еталону і зразка визначає диференціальну криву і дає змогу розрахувати кількість теплоти, що пішло на перетворення. Принциповий вид залежності термічних кривих (так звана термограма) від часу для певної ділянки аналізу наведено на рис. 1. Тут для графіку 2, що відповідає температурі зразка матеріалу, можна виділити наступні зони:

- нагрівання зразка зі сталою швидкістю (вся теплота, яка передається від печі до зразка, витрачається на його нагрівання);
- початок перетворення, коли частина підведеної теплоти витрачається на перетворення, швидкість нагрівання зразка зменшується, а різниця температур еталону та зразка збільшується;
- основне перетворення, коли різниця температур еталону та зразка збільшується до максимальної (температура зразка залишається майже сталою, що відповідає горизонтальній ділянці на кривій 2);
- завершення перетворення з інтервалом пришвидшеного нагрівання зразка;
- поступове сповільнення швидкості нагрівання з перегином кривої температури зразка;
- подальший нагрів з постійною швидкістю.

На рис. 1 різниця температур еталону і зразка

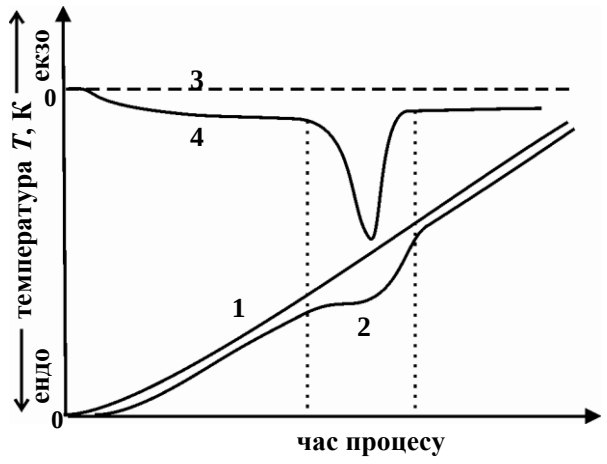


Рис. 1. Термограма при повільному нагріванні, яке перебігає з поглинанням теплоти: 1 – графік температури еталону, 2 – графік температури зразка матеріалу, що досліджується, 3 – нульова лінія відліку $\Delta T = 0$, 4 – графік диференціальної кривої ΔT (різниця температур еталону і зразка). Вертикальні пунктирні лінії обмежують зону перетворення.

визначається так званою диференціальною кривою ΔТ (кр. 4). Напрями зміни на вісі ординат (стрілки) показують тип перетворення (ендотермічний або екзотермічний).

На початку експерименту різниця температур еталону і зразка є нульовою: $\Delta T = 0$. Будь-яке наступне суттєве відхилення від нульової лінії $\Delta T = 0$ на диференціальній кривій буде відповідати певному перетворенню (зміні агрегатного стану матеріалу зразка або іншому фазовому перетворенню з поглинанням і виділенням тепла) (рис. 2).

Як приклад, наводимо результати праці [18] для пальмітинової кислоти $(C_{15}H_{31})COOH$, що добувається з пальмового масла для застосування у миловарній промисловості. В наведеному експерименті методом диференціального термічного аналізу досліджено вплив тривалого температурного циклування на параметри фазового переходу типу плавлення та кристалізації (рис. 3).

Використання ТА і ДТА для побудови діаграм стану. Оскільки поява зламів на кривих охолодження чи нагрівання матеріалу зразка в методах термоаналізу відповідає за початок або завершення перетворення, саме такі точки дають інформацію про стани і границі станів, що можна зобразити кривими в координатах «температура-склад», «температура-тиск» або «склад-тиск». Для методів ТА і ДТА матеріал зразка, що досліджується, є зазвичай твердим або рідиною, тому діаграма стану в координатах «температура-склад», що одержана такими методами, саме для твердого і рідинного стану є найбільш зручною. На основі кривих зміни температури (рис. 2, рис. 3) матеріалу зразка різної концентрації хімічних компонентів можна побудувати діаграми стану системи (рис. 2).

Діаграми стану двокомпонентних та багатокомпонентних систем умовно можна поділити на такі класи: неперервний ряд твердих і рідких розчинів, діаграми з відсутністю взаємної розчинності компонентів у твердих і рідких станах, евтектика (беруть участь тверда фаза та рідина) з обмеженою розчинністю, перитектика (беруть участь тверда фаза і рідина), монотектика (беруть участь тверда фаза і рідина), евтектоїда (беруть участь тільки тверді фази), перетектоїда (беруть участь тільки тверді фази), монотектоїда (беруть участь тільки тверді фази), каталектика або метатектика (беруть участь тверда фаза і рідина), синтетика (беруть участь тверда фаза і рідина), купол розпаду, діаграми з

утворенням хімічних з'єднань (проміжними фазами типу $A_{1-C}B_C$, де індекс C є концентрацією хімічного елемента), діаграми з поліморфними компонентами [1-3, 17]. Доцільно розглянути деякі з наведеного переліку класів діаграм з позицій методів ТА і ДТА.

Розглянемо процеси кристалізації та

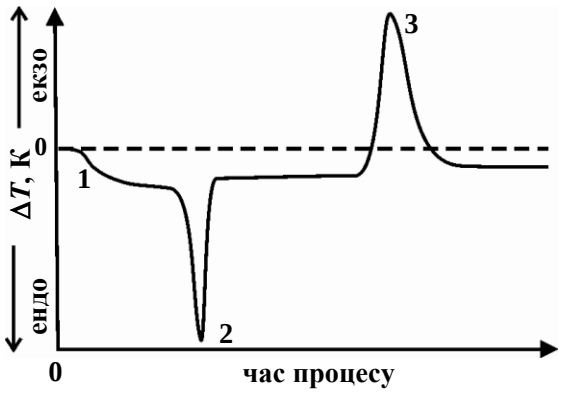


Рис. 2. Можливі фазові переходи, які спостерігаються на ДТА кривій: 1 – склування; 2 – топлення, фазове розділення матеріалу; 3 – кристалізація, поліморфне перетворення, хімічна реакція типу окислення тощо.

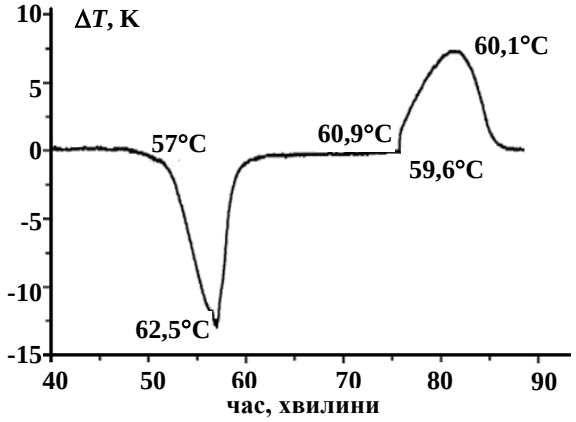


Рис. 3. Крива ДТА для плавлення та кристалізації пальмітинової кислоти $(C_{15}H_{31})COOH$ [18].

фазового розділення на прикладі діаграми типу евтектики для двохкомпонентного матеріалу з обмеженою розчинністю хімічних компонентів в твердому стані. Такі матеріали найчастіше мають місце у металевих сплавах. Дослідимо принцип побудови діаграми стану двокомпонентної системи по кривим охолодження за методом ТА (рис. 4).

Введемо позначення. Позначимо склад другого компонента (атомну частку другого компонента) символом X, символом L – рідинний стан, символом α – твердий розчин з обмеженою розчинністю на основі першого компоненту, а символом β – твердий розчин з обмеженою розчинністю на основі другого компоненту. На рис. 4. ліва спадна залежність температури характеризує криву охолодження двокомпонентного матеріалу складу X_1 з часом. Точка T_0 є температурою кристалізації чистого першого компонента: якщо взяти чистий матеріал, то крива охолодження має одну зупинку і злам температури на кривій.

Матеріал складу X_1 кристалізуватиметься в інтервалі температур від T_1 до T_2, що відповідає фазовому перетворенню L→α+L типу кристалізації з утворенням нової α фази. В інтервалі температур $T_1 > T > T_2$ матеріал буде у двохфазному стані (сумішшю двох фаз): твердого α розчину (фаза 1) і рідини L (фаза 2). Якщо провести хімічний аналіз окремо для твердого α розчину і рідини L, то в інтервалі температур $T_1 > T > T_2$ можна буде знайти, що хімічний склад твердого α розчину і рідини L не є рівними X_1 (на правий частині рис. 4 це показано зверху петлею зі стрілками): склад твердого α розчину є меншим за X_1, склад твердого β розчину є більшим за X_1. Після завершення перетворення α+L→α в точці T_2 кут нахилу лінії охолодження зміниться і матеріал буде в однофазному стані: стане твердим α розчином середнього складу X_1 в інтервалі температур $T_2>T>T_3$. У точці з температурою T_3 твердий α розчин зазнає фазове перетворення α→α+β типу

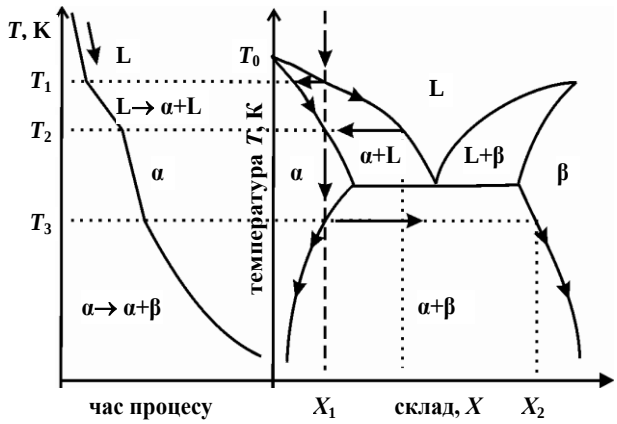


Рис. 4. Побудова діаграм стану двокомпонентної системи за кривими охолодження. Ліва спадна залежність температури характеризує криву охолодження двокомпонентного матеріалу складу X_1 з часом. Права частина є відповідною діаграмою стану в координатах «температура-склад», на який для початкового складу матеріалу X_1 наведено векторами напрям змін і концентрації під час фазових перетворень: кристалізації L→α + L, фазового розділення α→α + β .

розділення на дві тверді фази з різними складами хімічних компонентів: твердий α розчин складу X_1 і твердий β розчин складу X_2. Відповідну двохфазну зону показано на діаграмі стану (у правій частині рис. 4) для температур $T < T_3$. Заслуговує на увагу те, що під час зменшення температури в інтервалі $T < T_3$ склад твердого α розчину змінюється, концентрація другого компоненту в ньому поступово зменшується і є меншою за значення X_1, склад твердого β розчину теж змінюється, концентрація в ньому поступово збільшується і є більшою за значення X_2 (на діаграмі стану в правий частині рис. 4 це показано знизу стрілками). Отже, зменшення температури призводить до зменшення розчинності хімічних компонентів у твердому стані.

З наведених міркувань можна прийти до висновку, що для матеріалу складу X_1, що утворює діаграми типу евтектики з обмеженою розчинністю компонентів у твердому стані, крива температурного охолодження має три зупинки і злами. Одержані криві на діаграмі стану «температура-склад» ділять її площу на три однофазні зони (гомофазні стани L, α, β) без фазових перетворень і три двофазні зоні (гетерофазні стани L+α, α+β, L+β), де стан матеріалу є нестабільним і мають місце фазові перетворення із виділенням надлишкового хімічного компонента. Кількісні співвідношення для мас фаз гетерофазних станів визначаються за допомогою правила важеля [11]. Таким чином, методи ТА і ДТА дають змогу знаходити межі наведених зон шляхом визначення положень і побудови кривих фазових рівноваг, які є кривими розчинностей атомів.

Як приклад побудови фазової діаграми багатокомпонентної системи, знайденої за допомогою експериментального термічного аналізу ми наводимо трикомпонентну систему Ni-Cu-S, а саме її розріз для високих температур – поверхню ліквідуса [19] (рис. 5).

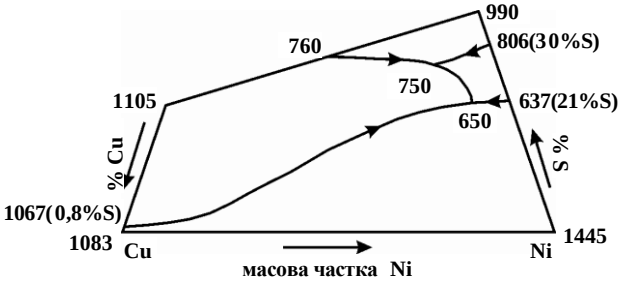


Рис. 5. Поверхня ліквідуса системи Ni-Cu-S, яку побудовано на основі результатів ДТА для інтервалів значень масових концентрацій хімічних компонентів у розчинах: 0 < Ni < 100%, 0 < Cu < 100%, 0 < S < 25% [19]. Цифри демонструють температуру плавлення у градусах Цельсія (і масову концентрацію).

Особливості та недоліки ТА і ДТА методів для побудови фазових діаграм

Не заперечуючи важливості методів термоаналізу, слід зазначити, що вони не дають змогу визначати тип структури фаз і хімічний склад фаз, мають слабкий зв'язок макровластивостей з мікроструктурою і краще підходять до ізоконцентраційних поліморфних фазових перетворень.

Багатокомпонентний матеріал зазвичай складається з однієї або декількох фаз різного складу, тому діаграми стану мають містити інформацію не лише про фазу, а й про фазовий склад: чисті компоненти, розчини чи хімічні сполуки. Для визначення фізико-хімічних властивостей матеріалу визначають також структурний склад матеріалу, тобто наявність у ньому окремих елементів мікроструктури, які відрізняються від інших. Структурний склад визначають іншими методами (перелік наведено у вступній частині, серед яких, приміром, кількісний і фазовий рентгеноструктурний аналізи). Кількість структурних складових багатокомпонентних матеріалів може переважати кількість фаз, тому на діаграмах «температура-склад» наводять як фазовий так й структурний склад для кожної зони.

Актуальним залишається питання розмірів зразка матеріалу, що досліджується у нагрівному пристрої. Це особливо актуально для матеріалів наномасштабного розміру і великих за розмірами матеріалів. З одного боку, чим меншою є маса зразка, тим більшої швидкості зміни температури можна досягти і швидше відбувається теплопередача від матеріалу зразка до середовища (і навпаки), що добре для встановлення однакової температури в середині зразка. З іншого боку, для наномасштабних матеріалів амплітуда змін температури матеріалу під час перетворення є малою, тому слабка чуттєвість приладів і вплив останніх на перебіг перетворення (приміром, великі розміри термопар порівняно з розміром наноматеріалу) не дають змоги будувати достовірні діаграми стану наноматеріалів за допомогою термоаналізу. Для досить великих зразків постає питання про рівномірність і швидкість теплопередачі. У разі поганого тепловідведення температура зразка у

різних просторових точках матеріалу є різною і не можна використовувати ізотермічне наближення для аналізу [20].

За допомогою термоаналізу визначають положення і форму кривих фазових рівноваг, які є лініями розчинностей атомів. Для макросистем це означає, що поняття діаграми фаз і діаграми розчинностей співпадають. У останніх працях авторів показано, що у наносистемах виникає розділення цих понять, що зумовлено несиметричними термодинамічними умовами утворення нових фаз, різницею температур перетворення під час нагрівання й охолодження, відмінністю найбільш імовірних механізмів фазового перетворення для прямого і оберненого перетворення [2, 21].

Недоліком методу щодо використання для побудови фазових діаграм можна вважати також вузький діапазон параметрів, які можна цілеспрямовано змінювати (температура). Зростаючий попит на матеріали із заданими властивостями вже не може бути задоволений за рахунок традиційного методу термоаналізу. Головна відмінність сучасних технологій полягає у можливостях створення просторово несиметричних матеріалів із заданим градієнтом властивостей. У багатьох практичних випадках матеріали знаходяться в умовах градієнтних полів температури, тиску, складу, що значно ускладнює застосування результатів термоаналізу, що базується на результатах рівномірного розподілу температури.

Крім того, останніми роками зросла актуальність проблеми високої собівартості нагрівного пристрою для термоаналізу і матеріально-технічного забезпечення у зв'язку з різким зростанням цін на матеріали та енергоносії.

Фазові перетворення у багатокомпонентних системах можуть супроводжуватися зміною об’єму, електропровідності матеріалу зразка тощо, тому поряд з термоаналізом використовують комплексно і одночасно декілька інших методів визначення фізико-хімічних властивостей (наведених з переліку із вступної частини). Приміром, дилатометричний метод дає змогу визначити зміну об’єму, аналіз електропровідності – зміну електропровідності речовин при нагріванні або охолодженні.

Нещодавно в науковій літератури почали пропонувати замість реального експериментального термоаналізу комп’ютерні симуляції термоаналізу (віртуальний експериментальний термоаналіз) з використанням бази даних властивостей матеріалів і моделей процесів. Це дає змогу, з одного боку, оптимізувати аналіз в темпі, який набагато швидший від стандартних методів експериментальної лабораторії, з іншого боку, максимально наблизити несиметричні умови віртуального експерименту до реальних умов експлуатації матеріалів.

Висновки

У роботі аргументовано як за допомогою термоаналізу можна визначити положення і форму кривих фазових рівноваг (криві розчинностей) для мікромасштабних і макроматеріалів. Показано, що традиційний термоаналіз є важливим, однак, не достатнім для детальної розшифровки діаграми стану із зазначенням мікроструктур і має недоліки підходу для аналізу наномаштабних матеріалів.

Традиційна концепція базується на тому, що система знаходиться в термічній ванні з добрим тепловідведенням. У реальних ситуаціях це не завжди так. Таким чином, для термоаналізу потрібен постійний контроль забезпечення високої швидкості теплопередачі, оскільки у разі поганого тепловідведення може виникнути проблема використання термоаналізу, проблема з температурою – температура об’єкту вже не буде температурою термальної ванни.

Термоаналіз не встигає за ростом вимог до несиметричних градієнтних умов експлуатації матеріалів і доповнюються спектром інших методів, серед яких особливо актуальними останнім часом стають комп’ютерні симуляції термоаналізу.

Список використаних джерел

1. *Zernike J.* Chemical Phase Theory: a comprehensive treatise on the deduction, the applications and the limitations of the phase rule / J. Zernike. – Deventer-Antwerp-Djakarta: N. V. Uitgevers – Maatschappij. A. E. E. Kluwer, 1955. – 493p.

2. *Ширінян А.С.* Зміна фізико-хімічних властивостей наноматеріалів у розмірно-залежних фазових перетвореннях першого роду / Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.04.07 – фізика твердого тіла // Київський національний університет імені Тараса Шевченка МОНмолодьспорту України. – Київ, 2012. – 368с.

3. *Солнцев Ю. П.* Материаловедение: Учебник для вузов / Ю. П. Солнцев, Е. И. Пряхи, Ф. Войткун. – Москва: МИСИС, 1999. – 600с.

4. *Jesser W.A.* Solid-liquid equilibria in nanoparticles of Pb-Bi alloys / W. A. Jesser, R. Z. Shneck, W. W. Gille // Physical Review B. – 2004. – Vol. 69**.** – P. 144121.

5. *Liang L. H.* Size-dependent continuous binary solution phase diagram / L. H. Liang, D. Liu, Q. Jiang // Nanotechnology. – 2003. – Vol.14. – P.438-442.

6. Поверхностные явления и фазовые превращения в конденсированных пленках / [Гладких Н. Т., Дукаров С. В., Крышталь А. П. и др.]; под редакцией профессора Н. Т. Гладких. – Харьков: ХНУ имени В. Н. Каразина, 2004. – 276 с.

7. Binary Alloy Phase Diagram, 2nd edition / [T. B. Massalski, J. L. Murray, L. H. Bennett та ін.]. – New York: ASM Internantional, 1992. – 1741p.

8. *Shirinyan A.* Phase diagrams of decomposing nanoalloys / A. Shirinyan, A. Gusak // Philosophical Magazine A. – 2004. – Vol. 84, № 6. – P. 579-593.

9. Methods for phase diagram determination. / [Edited by J.-C. Zhao]. – New York: Elsevier, 2007. – 517 p.

10. *Wautelet M.* Phase diagrams of small particles of binary systems: a theoretical approach / M. Wautelet // Nanotechnology. – 2000. – Vol. 11. – P. 6-9.

11. *Кан Р.* Физическое материаловедение. Выпуск 2: Фазовые превращения. Металлография. / Р. Кан. – Москва: Издательство «Мир», 1968. – 490с. – (Перевод с английского под редакцией доктора технических наук И. И. Новикова).

References

1. ZERNIKE, J. (1955) *Chemical Phase Theory: a comprehensive treatise on the deduction, the applications and the limitations of the phase rule*. Deventer-Antwerp-Djakarta: N. V. Uitgevers, Maatschappij. A. E. E. Kluwer.

2. SHIRINYAN, A. S. (2012) *The change of the physical and chemical properties of nanomaterials in size-dependent first order phase transformations*. Thesis for scientific degree of doctor of physical and mathematical sciences by speciality 01.04.07 – solid state physics, Taras Shevchenko National University, Kyiv.

3. SOLNTSEV, Y.P., PRIAHI E.U. and VOITKUN F. (1999) *Materialovedenie: uchebnik dlja Vuzov. (Materials science*: *textbook for Universities)*, Moskow: MISIS.

4. JESSER, W.A., SHNECK R. Z., and GILLE W. W. (2004) Solid-liquid equilibria in nanoparticles of Pb-Bi alloys. *Physical Review B*, 69, pp. 144-121.

5. LIANG, L. H., LIU, D., and JIANG, Q. (2003) Size-dependent continuous binary solution phase diagram. *Nanotechnology*, 14, pp. 438-442.

6. GLADKIH, M. T. et al. (2004) *Poverhnostnye javlenia i fazovye prevrashenia v kondensirivannyh plenkah (Surface phenomena and phase transitions in condenced films).* Harkiv: HNU named after Karazin.

7. MASSALSKI, T. B. et al. (1992) *Binary Alloy Phase Diagram*. New York: ASM Internantional.

8. SHIRINYAN, A., GUSAK, A. (2004) Phase diagrams of decomposing nanoalloys. *Phil. Mag. A*, 84, pp. 579-593.

9. ZHAO, J.-C. (ed) (2007) *Methods for phase diagram determination*. New York: Elsevier.

10. WAUTELET, M. (2000) Phase diagrams of small particles of binary systems: a theoretical approach. *Nanotechnology*, 11, pp. 6-9.

11. CAHN R. W. (1965) *Physical Metallurgy*, Amsterdam, North-Holland.

12. KASAP, S. O. (2002) *Principles of electronic materials and devices. Second edition*. New York: McGraw-Hill Higher Education. Inc.

13. BOIKO, N. V., EVSTJUHINA, I. A., and RUDAKOV, S.G. (2008) *Primenenie termoanaliza dlia issledovania kondinsurovannuh sistem: uchebnik (Use of thermoanalysis for the research of condensed systems: textbook).* Moskow: MIFI.

12. *Kasap S. O.* Principles of electronic materials and devices. Second edition. / S. O. Kasap. – New York: McGraw-Hill Higher Education. Inc., 2002. – 740p.

13. *Бойко Н. В.* Применение термоанализа для исследования конденсированных сред: Учеб. Пособие / Н. В. Бойко, И. А. Евстюхина, С. Г. Рудаков. – Москва: МИФИ, 2008. – 104с.

14. *Альмяшев В. И.* Термические методы анализа: Учебное пособие. / В. И. Альмяшев, В. В. Гусаров. – Санки-Перербург: СПбГЭТУ (ЛЭТИ), 1999. – 40с.

15. *Герасимов Я. И.* Курс физической химии, том I. / Герасимов Я. И., Древинг В. П., Еремин Е. Н., Киселев А. В., Лебедев В. П., Панченков Г. М., Шлігин А.И. – Москва: Издательство «Химия», 1964г. – 626с.

16. *Цуринов Г. Г.* Пирометр Курнакова. / Г. Г. Цуринов. – Москва: Изд-во Академии наук СССР, 1953. – 63с.

17. *Курнаков Н. С.* Введение в физико-химический анализ. / Н. С. Курнаков. – Москва: Издательство Академии наук СРСР, 1940. – 568с.

18. *Постников В. А.* Термоциклический анализ процесов сплавления и кристаллизации пальмитиновой и стеариновой кислот / В. А. Постников, Н. В. Щебетовская, С. В. Горбань // Наукові праці ДонНТУ. Серія: Хімія і хімічна технологія. – 2012. – Випуск 18 (198). – С. 60-65.

19. *Синёва С. И.* Исследование поверхностей ликвидус и солидус четырехкомпонентной системы Fe-Ni-Cu-S. I. Построение диаграммы плавкости трехкомпонентной системы Fe-Ni-Cu / С. И. Синёва, Р. В. Старых, М. В. Фроленкова, С. Б. Захряпин // Металлы. – 2009. – № 3. – С. 99-106.

20. *Шірінян А. С.* Актуальні проблеми наноматеріалів і нанотехнологій / А. С. Шірінян, В. А. Макара // Наносистемы, наноматериалы, нанотехнологии. – 2010. – Т. 8, №2. – С. 223-269.

21. *Shirinyan A. S.* Size-induced thermal thermodynamic hysteresis in nanopowder undergoing structural transitions – from particular case to general behaviour / A. S. Shirinyan, Y. S. Bilogorodskyy // Journal of Phase Transitions. – 2009. – Vol. 82, №7. – P. 551-565.

14. ALMIASHEV, V. I., GUSAROV, V.V. (1999) *Termicheskie metody analiza: uchebnoe posobie (Thermal methoeds of analysis: textbook)*, Sankt-Peterburg: St-PETU.

15. GERASIMOV, Y. I. et al. (1964) *Kurs fizicheskoi himiji, tom* 1. *(Phycal Chemistry course, Volume* 1*)*, Moskow: Chemistry.

16. TSURINOV, G.G. (1953) *Pirometr Kurnakova (Kurnakov pyrometer)*. Moskow: Academy of Sciences.

17. KURNAKOV, N. S. (1940) *Vvedenie v fiziko-himicheskij analiz (Introduction into physical-chemical analysis)*. Moskow: Academy of Sciences.

18. POSTNIKOV, V.A., SCHEBETOVSKA, N.V., GORBAN, S.V. (2012) Termotsyklicheskij analiz potsesov splavlenia i kristalizatsiji palmitinovoi i stearinovoi kislot (Thermocycling analysis of the processes of melting and crystallization of palmitic and stearin acids), *Naukovi Pratsi DonTU. Series: Chemistry and Chemical Technology*, 18 (198), pp. 60-65.

19. SINEVA, S. I. et al. (2009) Issledovanie poverhnostei likvidus i solidus cheturehcomponentnoi sistemy Fe-Ni-Cu-S. I. Postroenie diagramy plavkosti trehcomponentnoj sistemy Fe-Ni-Cu (Investigation of surfaces of liquidus and solidus of fourcomponent system Fe-Ni-Cu-S. I. Contruction of melting diagram of threecomponent system Fe-Ni-Cu). *Metals*, 3, pp. 99-106.

20. SHIRINYAN, A. S., MAKARA, V.A. (2010) Actualnye problemy nanomaterialov i nanotehnologij (Actual problems of nanomaterials and nanotechnologies). *Nanosystems, Nanomaterials, Nanotechnologies*, 8, pp. 223-269.

21. SHIRINYAN, A. S., BILOGORODSKYY, Y. S. (2009) Size-induced thermal thermodynamic hysteresis in nanopowder undergoing structural transitions – from particular case to general behaviour. *Journal of Phase Transitions*, 82, pp. 551-565.

Надійшла до редколегії 21.10.2014

Підписано до друку . Формат _____. Друк. офс.
Папір офс. №__. Друк. арк. ____. Тираж _____. Зам. ____.
Друкарня _____.