

**КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА**

ВІСНИК

**КИЇВСЬКОГО НАЦІОНАЛЬНОГО
УНІВЕРСИТЕТУ
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА**

СЕРІЯ ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНІ НАУКИ

ВИПУСК №2 2014



**Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка,
выпуск №2, 2014,
Серія фізико-математичні науки**

З 1991 року серії вісників Київського університету “Математика і механіка”, “Фізика”, “Моделирование и оптимизация сложных систем” реорганізовано у “Вісник Київського університету. Серія: фізико-математичні науки”. У віснику містяться результати нових досліджень у різних галузях математики, інформатики, механіки, фізики та радіофізики для наукових працівників, викладачів, аспірантів, інженерів і студентів. Друкується за рекомендаціями Вчених Рад фізичного, радіофізичного, механіко-математичного факультетів та факультету кібернетики.

Журнал “Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія фізико-математичні науки” включено до переліку фахових видань ВАК України та реферується в Реферативному журналі та базах даних ВИНІТИ, Росія, Москва.

Редакційна колегія:

Анісімов Анатолій Васильович, чл.-кор. НАН України, д.ф.-м.н., проф., **головний редактор**;
Хусаїнов Денис Яхьєвич, д.ф.-м.н., проф., **заступник головного редактора, відповідальний за видання**;
Arturs Medvids, Dr. habil. Phys., prof., Riga Technical University, Riga, Latvia;
Miklós Rontó, prof., Doctor of Science, Full Professor at the University of Miskolc, Faculty of Mechanical Engineering and Information Science, Department of Analysis;
Milada Bartlova, Ph.D., Brno University of Technology, Department of Physics, Brno, Czech Republic;
Nickolai Kukhtarev, Research professor, Department of Physics, Alabama A&M University;
Sergei Gorlatch, Dr. habil., prof., professor of Computing Science, University of Muenster, Germany;
Sergey Trofimchuk, prof., Universidad de Talca, Instituto de Matematica y Fisica, Talca, Chile;
Stefan Hudak, DSc, prof., professor of Technical University of Kosice, Slovak Republic;
Toru Aoki, Ph.D., prof., Research Institute of Electronics, Shizuoka University, Japan;
Акіменко Віталій Володимирович, д.т.н., проф.;
Анісімов Ігор Олексійович, д.ф.-м.н., проф.;
Буй Дмитро Борисович, д.ф.-м.н., проф.;
Булавін Леонід Анатолійович, акад. НАН України, д.ф.-м.н., проф.;
Волошин Олексій Федорович, д.т.н., проф.;
Гаращенко Федір Георгійович, д.т.н., проф.;
Єжов Станіслав Миколайович, д.ф.-м.н., проф.;
Жук Ярослав Олександрович, д.ф.-м.н., проф.;
Заславський Володимир Анатолійович, д.т.н., доц.;
Кириченко Володимир Васильович, д.ф.-м.н., проф.;
Козаченко Юрій Васильович, д.ф.-м.н., проф.;
Кудін Володимир Іванович, д.т.н., с.н.с.;
Львов Віктор Анатолійович, д.ф.-м.н., проф.;
Макара Володимир Арсенійович, чл.-кор. НАН України, д.ф.-м.н., проф.;
Макарець Микола Володимирович, д.ф.-м.н., проф.;
Перестюк Микола Олексійович, акад. НАН України, д.ф.-м.н., проф.;
Погорілий Сергій Дем'янович, д.т.н., проф.;
Савенко Сергій Миколайович, д.ф.-м.н., доц.;
Скришевський Валерій Антонович, д.ф.-м.н., проф.

Редакційний відділ:

Анісімова Тетяна Харитонівна, **відповідальний секретар**;
Безущак Оксана Омелянівна, bezusch@univ.kiev.ua;
Стукаленко Вікторія Віталіївна, stu@univ.kiev.ua;
Родіонова Тетяна Василівна, rodtv@univ.kiev.ua;
Хмелюк Надія Кузьмівна, khameluk@univ.kiev.ua;
Сільвейструк Людмила Миколаївна, **технічний редактор**, slm-klm@ukr.net.

Адреса редакційної колегії:

Факультет кібернетики, Київський національний університет імені Тараса Шевченка,
пр. Глушкова, 4 д, 03680 Тел. (044) 259-01-49

ISBN 978-966-2142

ISSN 1812-5409

ЗМІСТ

АЛГЕБРА, ГЕОМЕТРІЯ ТА ТЕОРІЯ ІМОВІРНОСТЕЙ

Безущак О.О. Орбіти залишково періодично визначених матричних груп над полями	9
Борисенко О.Д., Борисенко О.В. Вплив випадкових періодичних збурень на поведінку неавтономної коливної системи третього порядку у резонансному випадку	14
Іваненко Д.О. Друга похідна логарифмічної функції вірогідності для моделі заданої СДР керованим процесом Леві	18
Косенкова Т.І. Один метод побудови процесів типу Леві	23
Лукова-Чуйко Н.В. Подвійна еквівалентність функцій Морса та градієнтно-подібних векторних полів на тривимірних многовидах	29
Томашик В.В., Шевченко Г.М. Збіжність моментів досягнення меж смуги в дифузійних моделях зі стрибками та неліпшицевою дифузією	32
Трошкі В.Б. Ідеальне шумопоглинання для сигналів із -субгауссовими шумами	39
Турка Т.В. Підгрупи напівгрупи відповідностей	47

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ, МАТЕМАТИЧНА ФІЗИКА ТА МЕХАНІКА

Зражевський Г.М., Сальнікова А.М. Чисельно-аналітичне дослідження детермінованих і хаотичних фазових траєкторій подвійного маятника	53
Капустян О.В., Капустян О.А., Русіна А.В. Наближений синтез в імпульсній розподіленій задачі оптимального керування зі швидкоосцилюючими коефіцієнтами	61
Краснопольська Т.С., Приходько Д.В., Гуржій О.А. Сталі режими коливань консольно закріпленого стрижня малої жорсткості на згин	67
Ластівка І.О., Лаврова О.Є. Метод динамічного програмування для системи диференціальних рівнянь на часових шкалах	71
Спектор В.М., Печук Є.Д., Краснопольська Т.С. Хаотичні та регулярні хрестоподібні хвилі на вільній поверхні рідини	77
Трунов О.О. Хвильове поле у хвилеводі з вигином	83
Трунова Л.А. Точкове джерело в околі кутикового відбивача	87

КОМП'ЮТЕРНІ НАУКИ ТА ІНФОРМАТИКА

Азізбеков Е.І., Хусаїнов Д.Я. Про один ітераційний метод знаходження розв'язків рівнянь другого порядку з запізнюванням.	93
Вознюк Т.Г. Застосування керуючого простору синтаксичних структур природномовних текстів для вирішення проблеми анафори	100
Гаркуша Н.І. Про стійкість ненульового стану рівноваги однієї моделі взаємодії соціальних прошарків суспільства	104
Гончар С.А. Використання "bitcoin" - схеми для безпарольної авторизації на сервері.	108
Гордійчук О.В. Алгоритм контролю перевантажень для ширококомовної передачі відео в однорангових мережах	112
Дегтяр О.С. Оцінювання концентрацій хлорофілу за допомогою розв'язання задачі регуляризації Тихонова двоїстим методом	118
Дерев'янченко О.В. Системи паралельних обчислень у комп'ютерній мережі на базі технології ПАРКС	124
Донченко В.С., Тарасова О.В. Псевдообернення у матричному методі найменших квадратів: приклад прогнозування медійних показників	128
Жмихова Т.В. Інвестиційна стратегія управління капіталом страхової компанії на фінансовому (B,S) – ринку.	135
Завадський І. О. Метод стискання нижнього (2,3)-коду	139
Івохін Є.В., Кучерявий М.Г. Про один приклад реалізації нечітких баз даних	143
Івохін Є.В. Про багатоіндексні транспортні задачі та способи їх фазифікації	147
Компан С.В. Побудова інформаційної системи "Облік робочого часу працівників вишого навчального закладу"	151
Мазур Р.Ф. Широкомовна передача повідомлень на базі топології гіперкуба у мобільних ad hoc мережах на прикладі моделі натовпу	156

Маляр М.М. Моделювання обмеженого раціонального вибору з використанням нечітких множин	161
Нікітченко М.С., Шкільняк О.С., Шкільняк С.С. V-сингулярні семантичні моделі першопорядкових логік	166
Омельчук Л.Л. Застосування компетентнісно орієнтованого підходу до модернізації змісту дисциплін циклу професійної та практичної підготовки фахівців з інформатики на прикладі розробки робочої навчальної програми дисципліни «Програмування»	172
Пашко А.О. Статистичне моделювання узагальненого вінерівського процесу	180
Потапенко Л.І, Стещенко Г.М. Чисельне моделювання динамічних процесів в морських водоймах	184
Рутицька В.В. Алгоритм оптимальної диверсифікації портфеля акцій	190
Скобелев В.Г. Аналіз скінченних 1-кубітових квантових автоматів унітарні оператори яких є оберненнями.	194
Тарануха В.Ю. Згладжена n-грамна модель, заснована на класах, для розпізнавання слов'янських мов	202
Терещенко В.М. Побудова триангуляції Делоне для планарних графів	206
Фісуненко А. Л. Діаграма еквівалентності зіркових розбиттів та генерація простих многокутників	210
Шабелюк О.В. Використання технології доповненої реальності в дистанційному освітньому процесі	214
Шарапов М.М. Пошук оптимальної стратегії встановлення відповідності між елементами дискретних множин	219

РАДІОФІЗИКА

Афанас'єва Т.В., Гнатюк Д.І., Коваль І.П., Находкін М.Г. Оптичні спектри поглинання поверхонь Si(001) та Me/Si(001), (де Me=As, Sb, Bi)	225
Загороднюк С.П., Мар'яновський В.А., Олейніков А.Ю., Циба А.В. Моніторинг фактів перебування серверів електронної пошти підприємства у чорних списках	231
Коломоєць Д.І., Прокопенко О.В. Детектування мікрохвильових сигналів пороговим спінтронним магнітним нанодетектором в умовах сильного гістерезису	237
Лебідь А.В., Веклич А.М., Борецький В.Ф., Колесник О.Г., Савенок С.П., Андреев О.В. Плазмове джерело для формування кристалів MoO ₃	243
Павлов Д.І., Прокопенко О.В., Цвірко Ю.А., Павлов І.Л. Розробка підсилювача НВЧ діапазону на основі нітрид-галієвих напівпровідникових структур	247
Первак Ю.О. Широкозмугове дисперсійне дзеркало з негативною дисперсією групової затримки	251

СУЧАСНА ФІЗИКА

Булавін Л.А., Забашта Ю.Ф., Вергун Л.Ю., Загородня О.А., Шапар Е.О. Конформаційні зміни ДНК при гіпертермії	257
Євтушенко Є.В., Полянчук О.В., Мороз К.О., Королович В.Ф. Про підвищення точності ізотермічних PVT вимірювань	261
Лисов В.І., Цареградська Т.Л., Сасенко Г.В., Турков О.В. Аналіз можливостей практичного використання висновків теорії високотемпературної стабільності аморфних сплавів	263
Могильчак К.Ю., Кравченко В.М., Ящук В.М. Розрахунок електронних спектрів ароматичних амінокислот та пептидів на їх основі	267
Оглобля В.І., Оглобля О.В., Стефанишина Г.О. Дифузія та в'язкість розплавів Ga-In і Se-In	271
Савенко В.С. Старіння водних суспензій лапоніту в присутності катіонної поверхнево-активної речовини	277
Яковенко О. С., Мацуй Л. Ю., Журавков О. В., Вовченко Л. Л. Вплив в'язкості середовища на характер формування анізотропних структур з вуглецевими нанотрубками під дією електричного поля	283
Ящук В.П., Смалюк А.П., Ольховик Л.А. Вимушене комбінаційне розсіяння лазерного барвника НІС в багатократно розсіювальних середовищах	291

CONTENTS

ALGEBRA, GEOMETRY AND PROBABILITY THEORY

Bezushchak O.O. Orbits of residual periodically defined matrix groups over fields	9
Borysenko O.D., Borysenko O.V. Influence of random periodical disturbances on the behavior of non-autonomous third order oscillating system in the resonance case	14
Ivanenko D.O. Second derivative of the log-likelihood in the model given by a Lévy driven SDE'S	18
Kosenkova T.I. On a method of the Lévy-type processes construction	23
Lukova-Chuiko N.V. Double equivalence of Morse functions and gradient-like vector fields on 3-manifolds	29
Tomashyk V.V., Shevchenko G.M. Convergence of hitting times in diffusion models with jumps and non-Lipschitz diffusion	32
Troshki V.B. Ideal de-noising for signals in ϕ -sub-Gaussian noise	39
Turka T.V. Subgroups of correspondences semigroup	47

DIFFERENTIAL EQUATIONS, MATHEMATICAL PHYSICS AND MECHANICS

Zrazhevsky G.M., Salnikova A.M. Numerical and analytical research of deterministic and chaotic phase trajectories of double pendulum	53
Kapustyan O.V., Kapustyan O.A., Rusina A.V. Approximate synthesis in distributed impulsive optimal control problem with quickly-oscillating coefficients	61
Krasnopolskaya T.S., Prikhodko D.F., Gourjii O.A. Steady-state regime oscillations of cantilever bar with low bending rigidity	67
Lastivka I.O., Lavrova O.E. Method of the dynamic programming for the system of differential equations on time scales	71
Spektor V.M., Pechuk E.D., Krasnopolskaya T.S. Chaotic and regular cross-waves in fluid free surface	77
Trunov O.O. A wave field in a waveguide with a bend	83
Trunova L.A. Point source in the vicinity of the corner reflector	87

COMPUTER SCIENCES AND INFORMATICS

Azizbayov E.I., Khusainov D.Ya. An iterative method of finding solutions of the second order equation with delay	93
Vozniuk T.G. An application of the control space of syntactic structures of natural language sentences for the anaphora resolution	100
Garkusha N.I. About the stability of the non-zero equilibrium of a model of interaction between social strata	104
Gonchar S.A. Using "bitcoin" - scheme for server authorization without password	108
Hordiichuk O.V. A congestion control algorithm for video multicasting in peer-to-peer networks	112
Degtiar O.S. Method of chlorophyll concentration estimation using dual solution for ridge regression optimization	118
Derevianchenko O.V. Systems of parallel computing in the computer network based on the PARCS-technology	124
Donchenko V.S., Tarasova O.V. Pseudoinverse in matrixes least squares method: example of media indicators' prediction	128
Zhmykhova T.V. Investment management strategy of insurance company capital on financial (B,S)-market	135
Zavadskyi I.O. The method for archiving of low (2,3)-code	139
Ivokhin E.V., Kucheryavyy M.G. About one example of fuzzy databases realization	143
Ivokhin E.V. The multi-index transportation problems and approaches to their fuzzification	147
Kompan S.V. Information system construction "Working time accounting of higher educational establishments personnel"	151
Mazur R.F. Broadcasting in mobile ad hoc networks on the basis of hypercube topology: case of a crowd	156
Malyar N.N. Modeling bounded rational choice using fuzzy sets	161
Nikitchenko M.S., Shkilniak O.S., Shkilniak S.S. V-singular semantic models of first-order logics	166

Omelchuk L.L. The use of a competency-based approach to modernization subjects of professional and practical training in computer science as an example syllabus for the subject "Programming"	172
Pashko A.A. Statistical simulation of the generalized Wiener process	180
Potapenko L.I., Steshenko G.M. Numerical simulation of dynamic processes in marine water bodies	184
Rutytska V.V. Algorithm of optimal portfolio diversification	190
Skobelev V.G. Analysis of finite 1-qubit quantum automata unitary operators of which are rotations	194
Taranukha V.Yu. Smoothed class-based n-gram model for recognition of the Slavic languages	202
Tereshchenko V. M. Constructing Delaunay triangulation for planar graphs	206
Fisunencko A.L. An Equivalence Diagram of Star Partitioning and Simple Polygons Generation	210
Shabeliuk O.V. Use of Augmented Reality technology in E-learning process	214
Sharapov M.M. Optimal strategy of establishing correspondence between the elements of discrete sets	219

RADIOPHYSICS

Afanasieva T.V., Gnatyuk D.I., Koval I.P., Nakhodkin M.G. Optical absorbtion spectra of Si(001) and Me/Si(001) surfaces, (where Me=As, Sb, Bi)	225
Zagorodniuk S.P., Marianovskyi V.A., Oleynikov O.Y., Tsyba O.V. Monitoring the facts of finding enterprise E-mail servers in the DNS blacklist servers	231
Kolomoiets D.I., Prokopenko O.V. Detection of microwave signals by a threshold spin-torque microwave detector operating in the regime of a strong hysteresis	237
Lebid A.V., Veklich A.N., Boretskij V.F., Kolesnyk O.G., Savenok S.P., Andreev O.V. Plasma source for MoO ₃ crystals fabrication	243
Pervak Yu.O. Wide band dispersive mirror with negative group delay dispersion	247
Pavlov D.I., Prokopenko O.V., Cvirko Yu.A., Pavlov I.L. Development of microwave amplifier based on gallium nitride semiconductor structures	251

MODERN PHYSICS

Bulavin L.A., Zabashta Yu.F., Vergun L.Yu., Zagorodnia O.A., Shapar Y.O. DNA Conformational Transformations under Hyperthermia	257
Evtushenko Ye.V., Polyanchuk O.V., Moroz K.O., Korolovych V.F. On the accuracy improvement of isothermal PVT measurements	261
Lysov V.I., Tsaregradskaya T.L., Saenko G.V., Turkov O.V. The analysis possibilities practical using of conclusions high temperature stability amorphous alloys theory	263
Mogylchak K.Yu., Kravchenko V.M., Yashchuk V.M. Calculation of electronic spectra of aromatic amino acids and peptides based on them	267
Ogloblya V.I., Ogloblya O.V., Stephanyshyna G.O. Diffusion and viscosity of Ga-In and Se-In melts	271
Savenko V.S. Aging of Laponite aqueous suspensions in presence of anionic surfactant	277
Yakovenko O.S., Matzui L.Yu., Zhuravkov O.V., Vovchenko L.L. Influence of viscosity of the medium on the disposition of carbon nanotubes anisotropic structures formation induced by electric field	283
Yashchuk V.P., Smaliuk A.P., Olkhovik L.A. Stimulated Raman scattering of HIC laser dye in multiple scattering media	291

АЛГЕБРА, ГЕОМЕТРИЯ ТА ТЕОРИЯ ІМОВІРНОСТЕЙ

УДК 512.54

О.О.Безущак¹, к. ф.-м. н., доц.

**Орбіти залишково періодично
визначених матричних груп над полями**

¹Київський національний університет імені Тараса Шевченка, механіко-математичний факультет, 01601, Київ, вул. Володимирська, 64,
e-mail: bezusch@univ.kiev.ua

O.O.Bezushchak¹, Ph.D., Associate Prof.

**Orbits of residual periodically defined
matrix groups over fields**

¹Taras Shevchenko National University of Kyiv, Department of Mechanics and Mathematics, 01601, Kyiv, Volodymyrska str., 64,
e-mail: bezusch@univ.kiev.ua

Розглядаються групи невідроджених нескінченно вимірних блоково-діагональних матриць, у кожному блоці яких (можливо за винятком першого) повторюється одна й та ж невідроджена матриця, а розміри блоків є дільниками деякого супернатурального числа. Охарактеризовано орбіти таких груп при їх дії множенням справа на векторному просторі всіх нескінченних послідовностей над полем K .

Ключові слова: супернатуральне число, орбіта групової дії, невідроджене лінійне перетворення, невідроджена нескінченно вимірна матриця, фінітарне лінійне перетворення, (залишково) періодично визначене лінійне перетворення.

Groups of non-degenerate infinite dimensional block-diagonal matrices, each block of which (possibly except the first one) has the same non-degenerate matrix, and sizes of blocks are divisors of a super integer number are considered. Also are mentioned groups, generated by such groups and by the group of all non-degenerate infinitely dimensional block-diagonal matrices with not more than one (first) nonidentity block. Orbits of such groups with their actions by multiplication on the right on the vector space of all infinite sequences over field K are characterized.

Keywords: super integer number, orbit of group action, non-degenerate linear transformation, non-degenerate infinite dimensional matrix, finitary linear transformation, (residual) periodically defined linear transformation.

Статтю представив доктор фізико-математичних наук, професор В.В.Кириченко

**1 Групи періодично визначених та
залишково періодично визначених
перетворень і їх матрична реалізація**

Нехай K — фіксоване поле, V — зліченно вимірний лінійний простір над K , $B = (e_i)_{i \in \mathbb{N}}$ — деяка його база. Кожна послідовність натуральних чисел $\chi = (n_i)_{i \in \mathbb{N}}$ завдає χ -розбиття бази B на скінченні частини

$$e_1, \dots, e_{n_1} \mid e_{n_1+1}, \dots, e_{n_1+n_2} \mid e_{n_1+n_2+1}, \dots, \quad (1)$$

які складаються з $n_1, n_2, \dots$ векторів відповідно. Нехай $V(l)$ — підпростір простору V , натягнутий на вектори l -го фрагменту розбиття (1), $l \in \mathbb{N}$, а

$$V = \bigoplus_{l=1}^{\infty} V(l) \quad (2)$$

— розклад V на пряму суму підпросторів $V(l)$, який назовемо χ -розкладом V .

Лінійне перетворення $f : V \rightarrow V$ назовемо узгодженим з χ -розкладом (2) (або χ -розбиттям (1)), якщо для довільного $l \in \mathbb{N}$ справедливе включення $f(V(l)) \subseteq V(l)$. Кожне лінійне перетворення f , узгоджене з χ -розкладом (2), може бути задане в базі B своєю матрицею, яка є нескінченно вимірною блоково-діагональною з розмірами діагональних блоків, що визначаються послідовністю χ .

Означення 1. Лінійне перетворення $f : V \rightarrow V$ називається:

- (i) *періодично визначеним щодо бази B , якщо існує таке натуральне число n , що f узгоджене з розбиттям виду (1) бази B на фрагменти довжини n , причому на кожному з цих фрагментів f діє однаково, тобто мають місце рівності*

$$f(e_{kn+i}) = f(e_i) \quad (3)$$

для всіх $i = 1, 2, \dots, n$ та $k = 1, 2, \dots$, при цьому число n називається періодом визначеності перетворення f , а мінімально можливе таке натуральне n називається мінімальним періодом визначеності f ;

(ii) залишково періодично визначеним щодо бази B , якщо існує таке натуральне число m , що підпростір, натягнутий на вектори $e_1, \dots, e_m$, є інваріантним відносно перетворення f , а на підпросторі, натягнутому на вектори $e_{m+1}, e_{m+2}, \dots$, це перетворення є періодично визначеним з деяким періодом n , тобто діє на ці вектори згідно з рівностями (3), при цьому число m називається передперіодом визначеності f , а число n — його періодом визначеності (якщо передперіод m і період n узгоджено вибрано мінімально можливими, то говоритимемо про мінімальний передперіод і мінімальний період перетворення f);

(iii) строго залишково періодично визначеним, якщо воно залишково періодично визначене, причому його мінімальний передперіод визначеності ділиться на відповідний мінімальний період визначеності без остачі.

Лема 1. 1) Усі невиводжені періодично визначені щодо бази B лінійні перетворення простору V утворюють підгрупу в групі $GL(V)$.

2) Усі невиводжені строго залишково періодично визначені щодо бази B лінійні перетворення простору V утворюють підгрупу в групі $GL(V)$.

Зазначимо, що невиводжені залишково періодично визначені лінійні перетворення групи не утворюють, бо добуток двох таких перетворень може й не бути періодично визначеним. Групу всіх невиводжених строго залишково періодично визначених щодо бази B лінійних перетворень із $GL(V)$ позначатимемо символом $GL_{up}(V, B)$, а групу всіх невиводжених періодично визначених щодо бази B лінійних перетворень — символом $GL_{per}(V, B)$.

За визначенням періодично визначене щодо бази B лінійне перетворення з періодом визначеності $n \in \mathbb{N}$ узгодженим з розбиттям бази B , яке

завдається послідовністю $(n, n, \dots)$, а залишково періодично визначене щодо бази B лінійне перетворення з передперіодом m і періодом n — з розбиттям B , що визначається послідовністю $(m, n, n, \dots)$. А тому такі перетворення в базі B задаються нескінченно вимірними (вправо і вниз) блоково-діагональними матрицями, які для періодично визначених перетворень мають вигляд

$$a \oplus a \oplus a \oplus \dots = a^{\oplus \omega}, \quad (4)$$

а для залишково періодично визначених перетворень — вигляд

$$b \oplus a \oplus a \oplus \dots = b \oplus a^{\oplus \omega}, \quad (5)$$

де $\oplus$ — знак кронекерівської суми матриць, a, b — деякі матриці над полем K порядків n та m відповідно ($m, n \in \mathbb{N}$). При цьому, якщо перетворення (5) є строго залишково періодично визначеним, то порядок матриці b ділиться на порядок матриці a без остачі. Для симетричної групи $S(N)$ поняття (залишкової) періодично визначеної підстановки було введено в [1]–[2].

Лінійне перетворення $f : V \rightarrow V$ називається d -обмеженим щодо бази B [3], якщо при будь-якому $i \in \mathbb{N}$ образ вектора e_i бази B є лінійною комбінацією векторів $e_{i-d}, \dots, e_i, \dots, e_{i+d}$. Лінійне перетворення f обмежене щодо бази B , якщо воно є d -обмеженим при деякому $d \in \{0, 1, 2, \dots\}$. Невиводжені обмежені щодо бази B лінійні перетворення утворюють підгрупу в $GL(V)$, яку позначатимемо символом $GL_{bd}(V, B)$. Кожне d -обмежене щодо бази B лінійне перетворення може бути задане нескінченною обмеженою матрицею, тобто такою, що всі її ненульові елементи містяться в полосі шириною $2d$ навколо головної діагоналі. Усі матриці такої структури, для яких існують обернені, причому також обмежені, утворюють групу, яку позначатимемо $GL_{bd}(K)$. Незалежно від бази B групи $GL_{bd}(V, B)$ та $GL_{bd}(K)$ є ізоморфними, а тому можна розглядати лише одну з них.

Усі залишково періодично визначені щодо бази B перетворення очевидним чином є обмеженими щодо цієї бази, тобто група $GL_{bd}(V, B)$ (відповідно $GL_{bd}(K)$) містить різноманітні підгрупи, які можна утворювати з таких перетворень. До них належать не лише введені вище підгрупи $GL_{per}(V, B)$ і $GL_{up}(V, B)$, а й група

$GL_{stab}(V, B)$ всіх невідроджених лінійних перетворень простору V , які майже стабілізують базу B , тобто таких $g \in GL(V)$, що $g \cdot v = v$ для майже всіх елементів v бази B . Усі такі підгрупи мають матричні аналоги, які не залежать від вибору бази. Безпосередньо з визначення цих підгруп випливає

Лема 2. Для будь-якої бази B простору V група $GL_{up}(V, B)$ породжується своїми підгрупами $GL_{stab}(V, B)$ та $GL_{per}(V, B)$. Більш того, має місце рівність

$$GL_{up}(V, B) = GL_{stab}(V, B) \cdot GL_{per}(V, B).$$

З цієї леми, зокрема, дістаємо, що для відповідних матричних груп також виконуватиметься рівність $GL_{up}(K) = GL_{stab}(K) \cdot GL_{per}(K)$.

2 Ґратки родин підгруп $GL_{up}^{(u)}(V, B)$ та $GL_{per}^{(u)}(V, B)$, параметризованих супернатуральними числами

При фіксованій базі B в групі $GL_{per}(V, B)$ виділяється континуальна родина підгруп, які природним чином параметризуються супернатуральними числами.

Нагадаємо, що супернатуральним числом (інакше, — числом Стейніца [5]) називається формальний добуток вигляду

$$\prod_{p \in P} p^{\alpha_p},$$

де P — множина простих чисел, $\alpha_p \in N \cup \{0, \infty\}$. На множині супернатуральних чисел SN вводиться відношення подільності:

$$\text{число } u = \prod_{p \in P} p^{\alpha_p} \text{ є дільником числа } v = \prod_{p \in P} p^{\beta_p},$$

якщо для всіх $p \in P$ маємо $\alpha_p \leq \beta_p$ (при цьому вважаємо, що ∞ є більшим від усіх натуральних чисел і нуля). Частково впорядкована множина $(SN, |)$ є повною ґраткою з найбільшим і найменшим елементами, які, відповідно, дорівнюють

$$I = \prod_{p \in P} p^{\infty} \quad \text{та} \quad 1 = \prod_{p \in P} p^0.$$

Для кожного супернатурального числа u визначимо підгрупу $GL_{per}^{(u)}(V, B)$ в групі

$GL_{per}(V, B)$ як таку, що складається з тих і лише тих лінійних перетворень з розкладами вигляду (4), для яких мінімальні періоди є дільниками числа u .

Підгрупу групи $GL_{up}(V, B)$, яка породжується $GL_{stab}(V, B)$ і $GL_{per}^{(u)}(V, B)$, позначатимемо $GL_{up}^{(u)}(V, B)$.

Лема 3. При фіксованій базі B кожна з родин підгруп

$$\{GL_{up}^{(u)}(V, B) \mid u \in SN\} \quad (6)$$

та

$$\{GL_{per}^{(u)}(V, B) \mid u \in SN\} \quad (7)$$

утворює ґратку щодо включення, яка ізоморфна ґратці супернатуральних чисел.

Доведення легко випливає з того, що різним супернатуральним числам u кожній з родин відповідають різні підгрупи, а відношення $u \mid v$ для супернатуральних чисел u, v виконується тоді й лише тоді, коли

$$GL_{up}^{(u)}(V, B) \leq GL_{up}^{(v)}(V, B),$$

а

$$GL_{per}^{(u)}(V, B) \leq GL_{per}^{(v)}(V, B).$$

□

Елементи ґраток (6) та (7), яким відповідають супернатуральні числа з $SN \setminus N$, утворюють верхні напівґратки. Мінімальними елементами в так визначених напівґратках є, відповідно, підгрупи вигляду

$$GL_{up}^{(p^{\infty})}(V, B), \quad GL_{per}^{(p^{\infty})}(V, B), \quad p \in P.$$

Матричні аналоги підгруп $GL_{up}^{(u)}(V, B)$ і $GL_{per}^{(u)}(V, B)$ позначатимемо символами $GL_{up}^{(u)}(K)$ та $GL_{per}^{(u)}(K)$ відповідно.

3 Орбіти груп $GL_{up}^{(u)}(K)$ та $GL_{per}^{(u)}(K)$ на просторі K^{ω}

Нехай K^{ω} — множина всіх нескінченних послідовностей над полем K . На цій множині природно визначено дії додавання послідовностей і множення послідовності на скаляр, тобто вона має структуру лінійного простору над полем K континуальної розмірності. Група лінійних перетворень цього простору діє на ньому (за винятком нульового вектора) транзитивно. Групи

$GL_{up}^{(u)}(K)$ і $GL_{per}^{(u)}(K)$, $u \in SN$, діють на K^ω множенням матриць (справа) на вектор, оскільки у виразі $\bar{x} \cdot a$, $\bar{x} \in K^\omega$, $a \in GL_{bd}(K)$, добуток рядка $\bar{x}$ на кожен стовпчик матриці a має сенс, бо в стовпчику лише скінченна кількість елементів, відмінних від нуля. Відображення $\bar{x} \rightarrow \bar{x} \cdot a$, $\bar{x} \in K^\omega$, є лінійним для довільного $a \in GL_{bd}(K)$, а тому $GL_{up}^{(u)}(K)$ і $GL_{per}^{(u)}(K)$ можна розглядати як підгрупи групи лінійних перетворень простору K^ω ($u \in SN$). Кожна з цих груп діє на просторі K^ω інтранзитивно, тобто виникає задача характеристики їх орбіт на K^ω . Охарактеризуємо спочатку орбіти групи $GL_{stab}(K)$ на K^ω .

Означення 2. Послідовності $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots)$, $\bar{y} = (y_1, y_2, \dots) \in K^\omega$ назовемо *конфінальними*, якщо при деякому $t \in N$ для всіх $i \geq t$ виконуються рівності $x_i = y_i$.

Твердження 1. Послідовності $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots)$, $\bar{y} = (y_1, y_2, \dots) \in K^\omega$ містяться в одній орбіті групи $GL_{stab}(K)$ при її дії множенням справа на елементи K^ω тоді й лише тоді, коли ці послідовності є конфінальними.

Доведення. Нехай $\bar{x}, \bar{y}$ належать до однієї орбіти групи $GL_{stab}(K)$ на K^ω . Тоді існує така матриця $a \in GL_{stab}(K)$, що $\bar{x} \cdot a = \bar{y}$. Матриця a є фінітарною, тобто має вигляд

$$a = \begin{pmatrix} a' & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & 1 \\ & & & \ddots \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Припустимо, що a' — матриця порядку m . Тоді дію a на послідовність $\bar{x}$ можна зобразити у вигляді

$$\bar{x} \cdot a = ((x_1, \dots, x_m) \cdot a', x_{m+1}, x_{m+2}, \dots),$$

тобто послідовності $\bar{x}$ та $\bar{y} = \bar{x} \cdot a$ — конфінальні.

З іншого боку, припустимо, що послідовності $\bar{x}$ та $\bar{y}$ — конфінальні, тобто при деякому натуральному m маємо $\bar{x} = (x_1, \dots, x_m, x_{m+1}, \dots)$, $\bar{y} = (y_1, \dots, y_m, x_{m+1}, \dots)$. Група $GL_m(K)$ діє на K^m множенням справа, причому ця дія транзитивна на множині ненульових векторів. А тому існує матриця $a' \in GL_m(K)$ така, що $(x_1, \dots, x_m) \cdot a' = (y_1, \dots, y_m)$. Тоді фінітарна матриця a , визначена рівністю (8) для так вибраної матриці a' , переводить послідовність $\bar{x}$ у послідовність $\bar{y}$. $\square$

Символом σ позначимо оператор зсуву на елементах послідовностей $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots) \in K^\omega$, тобто $\sigma(x_i) = x_{i+1}$. Тоді

$$\sigma^k(x_i) = x_{i+k}, \quad \sigma^k(\sigma^l(x_i)) = \sigma^{k+l}(x_i)$$

для довільних $i, k, l \in N$. Окремо покладемо $\sigma^0(x_i) = x_i$, $i \in N$.

Означення 3. Нехай u — фіксоване супернатуральне число. Послідовності $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots)$, $\bar{y} = (y_1, y_2, \dots) \in K^\omega$ назовемо *u -подібними*, якщо існують натуральне число n , $n|u$, та невиврождена матриця $a \in GL_n(K)$ такі, що при будь-якому $k = 0, 1, \dots$ має місце рівність

$$(\sigma^{kn}(y_1), \dots, \sigma^{kn}(y_n)) = (\sigma^{kn}(x_1), \dots, \sigma^{kn}(x_n)) \cdot a. \quad (9)$$

Лема 4. Відношення u -подібності є еквівалентністю на K^ω .

Доведення. Рефлексивність і симетричність відношення u -подібності випливають безпосередньо з його визначення. Залишається пересвідчитися, що це відношення є транзитивним. Нехай $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z} \in K^\omega$ — такі послідовності, що $\bar{x}$ і $\bar{y}$ та $\bar{y}$ і $\bar{z}$ є u -подібними. Покажемо, що $\bar{x}$ і $\bar{z}$ також u -подібні. u -подібність $\bar{x}$ і $\bar{y}$ означає, що для деякого натурального числа n , $n|u$, і матриці $a \in GL_n(K)$ мають місце рівності (9), а u -подібність $\bar{y}$ і $\bar{z}$ означає, що для деякого натурального числа m , $m|u$, і матриці $b \in GL_m(K)$ мають місце аналогічні рівності

$$(\sigma^{km}(z_1), \dots, \sigma^{km}(z_m)) = (\sigma^{km}(y_1), \dots, \sigma^{km}(y_m)) \cdot b,$$

$k = 0, 1, 2, \dots$. З того, що $n|u$ і $m|u$ випливає, що $s = \text{НСК}(n, m)$ також є дільником u . Нехай $r_1 = s/n$, $r_2 = s/m$. Розглянемо матриці порядку s :

$$\bar{a} = \underbrace{a \oplus \dots \oplus a}_{r_1}, \quad \bar{b} = \underbrace{b \oplus \dots \oplus b}_{r_2}.$$

Для них маємо:

$$(\sigma^{ks}(y_1), \dots, \sigma^{ks}(y_s)) = (\sigma^{ks}(x_1), \dots, \sigma^{ks}(x_s)) \cdot \bar{a}$$

та

$$(\sigma^{ks}(z_1), \dots, \sigma^{ks}(z_s)) = (\sigma^{ks}(y_1), \dots, \sigma^{ks}(y_s)) \cdot \bar{b}.$$

З цих рівностей дістаємо

$$(\sigma^{ks}(z_1), \dots, \sigma^{ks}(z_s)) = (\sigma^{ks}(x_1), \dots, \sigma^{ks}(x_s)) \cdot \bar{a} \cdot \bar{b},$$

тобто $\bar{x}$ і $\bar{z}$ є u -подібними. $\square$

Теорема 1. Нехай $u \in SN$ — фіксоване нескінченне супернатуральне число. Послідовності $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots)$, $\bar{y} = (y_1, y_2, \dots) \in K^\omega$ містяться в одній орбіті групи $GL_{per}^{(u)}(K)$ при її дії множенням справа на послідовності із K^ω тоді й лише тоді, коли $\bar{x}$ та $\bar{y}$ є u -подібними.

Доведення. 1) Нехай $\bar{x}$ та $\bar{y}$ містяться в одній орбіті групи $GL_{per}^{(u)}(K)$ на K^ω . Тоді існує матриця $a \in GL_{per}^{(u)}(K)$ така, що $\bar{y} = \bar{x} \cdot a$. Оскільки $a \in GL_{per}^{(u)}(K)$, то при певному натуральному n , $n|u$, її можна записати у вигляді

$$a = c^{\oplus \omega} \quad (10)$$

для деякої матриці $c \in GL_n(K)$. Діючи множенням справа на послідовність $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots)$ матрицею (10) дістаємо послідовність

$$\bar{z} = ((x_1, \dots, x_n) \cdot c, (x_{n+1}, \dots, x_{2n}) \cdot c, \dots, (x_{2n+1}, \dots, x_{3n}) \cdot c, \dots). \quad (11)$$

Згідно з визначенням 3 остання рівність означає, що послідовності $\bar{x}$ та $\bar{y}$ є u -подібними з матрицею подібності c .

2) Нехай $\bar{x}$ та $\bar{y}$ є u -подібними. Тоді при деякому n , $n|u$, існує невідроджена матриця $c \in$

$GL_n(K)$ така, що для кожного $k = 0, 1, 2, \dots$ виконується рівність (9). Ця нескінченна система рівностей рівносильна рівності (11). А тому взявши матрицю $a \in GL_{per}^{(u)}(K)$ як у рівності (10) дістаємо, що $\bar{y} = \bar{x} \cdot a$. Отже, $\bar{x}$, $\bar{y}$ містяться в одній орбіті групи $GL_{per}^{(u)}(K)$ і теорему доведено. $\square$

Означення 4. Послідовності $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots)$, $\bar{y} = (y_1, y_2, \dots) \in K^\omega$ назовемо залишково u -подібними, якщо існують натуральні числа n та m , $n|u$, $n|m$, і невідроджені матриці $a \in GL_n(K)$, $b \in GL_m(K)$ такі, що виконуються рівності:

- 1) $(y_1, y_2, \dots, y_m) = (x_1, x_2, \dots, x_m) \cdot b$;
- 2) $(\sigma^{kn}(y_1), \dots, \sigma^{kn}(y_n)) = (\sigma^{kn}(x_1), \dots, \sigma^{kn}(x_n)) \cdot a$, для $k = m/n, m/n + 1, \dots$.

Теорема 2. Послідовності $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots)$, $\bar{y} = (y_1, y_2, \dots) \in K^\omega$ містяться в одній орбіті групи $GL_{up}^{(u)}(K)$ при її дії множенням справа на елементи із K^ω тоді й лише тоді, коли $\bar{x}$ та $\bar{y}$ є залишково u -подібними.

Доведення. Досить скористатися лемою 2, твердженням 1 та теоремою 1. $\square$

Список використаних джерел

1. Назарук В. Групи періодично визначених підстановок / В. Назарук, В. Суцанський // Доповіді НАН України. – 2003. – № 3. – С. 26-30.
2. Назарук В. Группы периодически определенных подстановок счетной степени / В. Назарук, В. Суцанський // Матем. Студії. – 2003. – **19**. – № 2. – С. 115-126.
3. Holubowski W. Groups of infinite matrices / W. Holubowski // Groups St. Andrews 2005, vol.2, Cambridge, Cambr. Univ. Press. – 2007. – P. 491-496.
4. Phillips R.E. The structure of groups of finitary transformations / R.E. Phillips // J. Algebra 119 (1988). – P. 400-448.
5. Steinitz E. Algebraische Theorie der Körper / E. Steinitz. – New York: Chelsea Publ. – 1950 – 176 p.

References

1. NAZARUK V., SUSHCHANSKY V. (2003) *Grupy periodychno vyznachenih pidstanovok*. Dopovidi NAN Ukraina. – No.3. – P. 26–30.
2. NAZARUK V., SUSHCHANSKY V. (2003) *Grupy periodycheski opredelennih podstanovok schetnoi stepeni*. Matem. Studii. – **19**. – No.2. – P. 115-126.
3. HOLUBOWSKI W. (2007) *Groups of infinite matrices*. Groups St. Andrews 2005, Cambridge, Cambr. Univ. Press 2007. – Vol.2 – P. 491-496.
4. PHILLIPS R.E. (1988) *The structure of groups of finitary transformations*. J. Algebra. – Vol.119. – P. 400-448.
5. Steinitz E. (1950) *Algebraische Theorie der Körper*. New York: Chelsea Publ. – 176 p.

Надійшла до редколегії 25.11.2013

УДК 519.21

О.Д. Борисенко¹, к.ф.-м.н., доцент
О.В. Борисенко², к.ф.-м.н., доцент

**Вплив випадкових періодичних збурень
на поведінку неавтономної коливної
системи третього порядку у
резонансному випадку**

¹Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 01033, Київ, вул. Володимирська, 64.

² Національний технічний університет України "КПІ" 03056, г.Київ-56, проспект Перемоги, 37

e-mail: ¹odb@univ.kiev.ua

O.D. Borysenko¹, Ph.D., Associate Professor
O.V. Borysenko², Ph.D., Associate Professor

**Influence of random periodical
disturbances on the behavior of
non-autonomous third order oscillating
system in the resonance case**

¹Taras Shevchenko National University of Kyiv, 01033, Kyiv, 64 Volodymyrska st.,

²National Technical University of Ukraine "KPI", 37 Prospect Peremogy, Kyiv 03056

e-mail: ¹odb@univ.kiev.ua

У роботі вивчається асимптотична поведінка неавтономної коливної системи, яка описується диференціальним рівнянням третього порядку з малими періодичними нелінійними зовнішніми збуреннями типу багатовимірного "білого" та Пуассонівського шумів. Розглядається резонансний випадок.

Ключові слова: метод усереднення, неавтономна коливна система, стохастичне диференціальне рівняння, резонансний випадок.

The asymptotic behavior of non-autonomous oscillating system describing by differential equation of third order with small periodical non-linear external perturbations of multidimensional "white noise" and "Poisson noise" types is studied. Every term of external perturbations has own order of small parameter ε . If small parameter is equal to zero, then general solution of obtained non-stochastic third order differential equation has an oscillating part. We consider given differential equation with external stochastic periodic perturbations as the system of stochastic differential equations and study the limit behavior of its solution at the time moment t/ε^k , as $\varepsilon \rightarrow 0$. The system of averaging stochastic differential equations is derived and its dependence on the order of small parameter in every term of external perturbations is studied. The resonance case is considered.

Key Words: averaging method, non-autonomous oscillating system, stochastic differential equation, resonance case.

Communicated by Prof. Kozachenko Yu.V.

1 Introduction

The averaging method proposed by N.M.Krylov, N.N.Bogolyubov and Yu.A.Mytropolskij ([1], [2]) is one of the main tool in studying of the deterministic oscillating systems under the action of small non-linear perturbations. The case of small random "white noise" type disturbances in oscillating systems of second order is considered in papers of Yu.A.Mytropolskij, V.G.Kolomiets ([3]). The autonomous and non-autonomous oscillating systems of second order under the action of "white noise" and Poisson type noise perturbations are studied in the papers of O.V.Borysenko ([4], [5]). Particular case of the third order oscillating systems are investigated in

articles of O.D.Borysenko, O.V.Borysenko ([6]), O.D.Borysenko, O.V.Borysenko and I.G.Malyshev ([7], [8]). Limit behavior of autonomous and non-autonomous (non-resonance case) third order oscillating system under the action of external small nonlinear random disturbances such as multidimensional "white noise" and "Poisson noise" was studied in ([9], [10]).

This paper deals with investigation of the behavior, as $\varepsilon \rightarrow 0$, of the general type third order non-autonomous oscillating system driven by stochastic differential equation

$$\begin{aligned} x'''(t) + ax''(t) + b^2x'(t) + ab^2x(t) = \\ = \varepsilon^{k_0} f_0(\mu_0 t, x(t), x'(t), x''(t)) + \\ + f_\varepsilon(t, x(t), x'(t), x''(t)) \end{aligned} \quad (1)$$

with non-random initial conditions $x(0) = x_0, x'(0) = x'_0, x''(0) = x''_0$, where $\varepsilon > 0$ is a small parameter, $f_\varepsilon(t, x, x', x'')$ is a random function such that

$$\begin{aligned} & \int_0^t f_\varepsilon(s, x(s), x'(s), x''(s)) ds = \sum_{i=1}^m \varepsilon^{k_i} \times \\ & \times \int_0^t f_i(\mu_i s, x(s), x'(s), x''(s)) dw_i(s) + \varepsilon^{k_{m+1}} \times \\ & \times \int_0^t \int_{\mathbb{R}} f_{m+1}(\mu_{m+1} s, x(s), x'(s), x''(s), z) \nu(ds, dz), \\ & k_i > 0, i = \overline{0, m+1}; f_i \text{ are non-random functions, periodic on } \mu_i t, i = \overline{0, m+1} \text{ with period } 2\pi; \\ & w_i(t), i = \overline{1, m} \text{ are independent one-dimensional Wiener processes; } \nu(dt, dy) \text{ is the Poisson measure independent on } w_i(t), i = \overline{1, m}, E\nu(dt, dy) = \Pi(dy)dt, \\ & \tilde{\nu}(dt, dy) = \nu(dt, dy) - \Pi(dy)dt, \Pi(A) \text{ is a finite measure on Borel sets } A \in \mathbb{R}, a > 0, b > 0. \\ & \text{We will consider the equation (1) as the system of stochastic differential equations} \\ & \begin{aligned} dx(t) &= x'(t)dt, \\ dx'(t) &= x''(t)dt, \\ dx''(t) &= [-ax''(t) - b^2x'(t) - ab^2x(t) + \\ & + \varepsilon^{k_0} f_0(\mu_0 t, x(t), x'(t), x''(t)) + \varepsilon^{k_{m+1}} \times \\ & \times \int_{\mathbb{R}} f_{m+1}(\mu_{m+1} t, x(t), x'(t), x''(t), z) \Pi(dz)]dt + \\ & + \sum_{i=1}^m \varepsilon^{k_i} f_i(\mu_i t, x(t), x'(t), x''(t))dw_i(t) + \varepsilon^{k_{m+1}} \times \\ & \times \int_{\mathbb{R}} f_{m+1}(\mu_{m+1} t, x(t), x'(t), x''(t), z) \tilde{\nu}(dt, dz), \\ x(0) &= x_0, x'(0) = x'_0, x''(0) = x''_0. \end{aligned} \end{aligned} \quad (2)$$

In what follows we will use the constant $K > 0$ for the notation of different constants, which are not depend on ε .

2 Main result

We will study the possible resonance case: $\mu_j = \frac{p_j}{q_j} b$ for some $j = \overline{0, m+1}$, where p_j and q_j are relatively prime integers. Let us consider the following representation of processes $x(t), x'(t), x''(t)$:

$$\begin{aligned} x(t) &= C(t)e^{-at} + A_1(t) \cos(bt) + A_2(t) \sin(bt), \\ x'(t) &= -aC(t)e^{-at} - bA_1(t) \sin(bt) + bA_2(t) \cos(bt), \\ x''(t) &= a^2C(t)e^{-at} - b^2A_1(t) \cos(bt) - b^2A_2(t) \sin(bt), \\ N(t) &= C(t) \exp\{-at\}. \end{aligned}$$

Then

$$\begin{aligned} N(t) &= \frac{b^2x(t) + x''(t)}{a^2 + b^2}, \\ A_1(t) &= \cos \alpha \cos(bt + \alpha)x(t) - \frac{\sin bt}{b}x'(t) - \\ & - \frac{\sin \alpha \sin(bt + \alpha)}{b^2}x''(t), \\ A_2(t) &= \cos \alpha \sin(bt + \alpha)x(t) + \frac{\cos bt}{b}x'(t) + \\ & + \frac{\sin \alpha \cos(bt + \alpha)}{b^2}x''(t), \end{aligned}$$

where $\alpha = \arctg(b/a)$. We can apply Ito formula [11] to stochastic process $\xi(t) = (N(t), A_1(t), A_2(t))$ and obtain for the process $\xi(t)$ the system of stochastic differential equations

$$\begin{aligned} dN(t) &= -aN(t)dt + \frac{1}{a^2 + b^2}dH(t) \\ dA_1(t) &= -\frac{\sin \alpha \sin(bt + \alpha)}{b^2}dH(t) \\ dA_2(t) &= \frac{\sin \alpha \cos(bt + \alpha)}{b^2}dH(t) \end{aligned} \quad (3),$$

$$\begin{aligned} N(0) &= \frac{b^2x_0 + x''_0}{a^2 + b^2}, \\ A_1(0) &= \frac{a^2x_0 - x''_0}{a^2 + b^2}, \\ A_2(0) &= \frac{ax'_0 + (a^2 + b^2)x'_0 + ab^2x_0}{b(a^2 + b^2)}, \end{aligned}$$

where

$$\begin{aligned} dH(t) &= [\varepsilon^{k_0} \tilde{f}_0(\mu_0 t, N(t), A_1(t), A_2(t), t) + \varepsilon^{k_{m+1}} \times \\ & \times \int_{\mathbb{R}} \tilde{f}_{m+1}(\mu_{m+1} t, N(t), A_1(t), A_2(t), t, z) \Pi(dz)]dt + \\ & + \sum_{i=1}^m \varepsilon^{k_i} \tilde{f}_i(\mu_i t, N(t), A_1(t), A_2(t), t)dw_i(t) + \varepsilon^{k_{m+1}} \times \\ & \times \int_{\mathbb{R}} \tilde{f}_{m+1}(\mu_{m+1} t, N(t), A_1(t), A_2(t), t, z) \tilde{\nu}(dt, dz), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{f}_i(\mu_i t, N, A_1, A_2, t) &= f_i(\mu_i t, N + A_1 \cos bt + A_2 \sin bt, -aN - bA_1 \sin bt + bA_2 \cos bt, a^2N - b^2A_1 \cos bt - b^2A_2 \sin bt), \\ i &= \overline{0, m}, \\ \tilde{f}_{m+1}(\mu_{m+1} t, N, A_1, A_2, t, z) &= f_{m+1}(\mu_{m+1} t, N + A_1 \cos bt + A_2 \sin bt, -aN - bA_1 \sin bt + bA_2 \cos bt, a^2N - b^2A_1 \cos bt - b^2A_2 \sin bt, z). \end{aligned}$$

Theorem 2.1. Let $\Pi(\mathbb{R}) < \infty, t \in [0, t_0], k = \min(k_0, 2k_1, \dots, 2k_m, k_{m+1})$. Let us suppose, that functions $f_j, j = \overline{0, m+1}$ bounded and satisfy Lipschitz condition on x, x', x'' . If given below matrix $\bar{\sigma}^2(A_1, A_2)$ is non-negative definite, then

1. Let $\mu_j = \frac{p_j}{q_j} b$ for all $j = \overline{0, m+1}$, where p_j and q_j are some relatively prime integers. If $k_0 = 2k_i = k_{m+1}, i = \overline{1, m}$ then the stochastic

process $\xi_\varepsilon(t) = \xi(t/\varepsilon^k)$ weakly converges, as $\varepsilon \rightarrow 0$, to the stochastic process $\bar{\xi}(t) = (0, \bar{A}_1(t), \bar{A}_2(t))$, where $\bar{A}(t) = (\bar{A}_1(t), \bar{A}_2(t))$ is the solution to the system of stochastic differential equations

$$\begin{aligned} d\bar{A}(t) &= \bar{\alpha}(\bar{A}(t))dt + \bar{\sigma}(\bar{A}(t))d\bar{w}(t), \\ \bar{A}(0) &= (A_1(0), A_2(0)), \end{aligned} \quad (4)$$

where $\bar{\alpha}(\bar{A}) = (\bar{\alpha}^{(1)}(A_1, A_2), \bar{\alpha}^{(2)}(A_1, A_2))$,

$$\begin{aligned} \bar{\alpha}^{(1)}(A_1, A_2) &= \\ &= -\frac{1}{4\pi^2 b(a^2 + b^2)} \left[\sum_{p_0 n + q_0 l = 0} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \hat{f}_0(\psi, A_1, A_2, \phi) \times \right. \\ &\times (a \sin \psi + b \cos \psi) e^{-i(n\psi + l\phi)} d\phi d\psi + \\ &+ \sum_{p_{m+1} n + q_{m+1} l = 0} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}_{m+1}(\psi, A_1, A_2, \phi, z) \times \\ &\times (a \sin \psi + b \cos \psi) e^{-i(n\psi + l\phi)} \Pi(dz) d\phi d\psi \left. \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{\alpha}^{(2)}(A_1, A_2) &= \\ &= \frac{1}{4\pi^2 b(a^2 + b^2)} \left[\sum_{p_0 n + q_0 l = 0} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \hat{f}_0(\psi, A_1, A_2, \phi) \times \right. \\ &\times (a \cos \psi - b \sin \psi) e^{-i(n\psi + l\phi)} d\phi d\psi + \\ &+ \sum_{p_{m+1} n + q_{m+1} l = 0} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}_{m+1}(\psi, A_1, A_2, \phi, z) \times \\ &\times (a \cos \psi - b \sin \psi) e^{-i(n\psi + l\phi)} \Pi(dz) d\phi d\psi \left. \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}(A_1, A_2) &= \left\{ \bar{B}(A_1, A_2) \right\}^{\frac{1}{2}} = \left\{ \frac{1}{4\pi^2 b^2(a^2 + b^2)^2} \times \right. \\ &\times \sum_{j=1}^m \sum_{p_j n + q_j l = 0} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \hat{f}_j^2(\psi, A_1, A_2, \phi) \times \\ &\times e^{-i(n\psi + l\phi)} B(\psi) d\phi d\psi \left. \right\}^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B(\psi) &= (B_{ij}(\psi), i, j = 1, 2), \\ B_{11}(\psi) &= (a \sin \psi + b \cos \psi)^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_{12}(\psi) &= B_{21}(\psi) = \\ &= -(a \sin \psi + b \cos \psi)(a \cos \psi - b \sin \psi), \end{aligned}$$

$$B_{22}(\psi) = (a \cos \psi - b \sin \psi)^2,$$

$$\hat{f}_j(\psi, A_1, A_2, \phi) = \tilde{f}_j(\psi, 0, A_1, A_2, \phi), \quad j = \overline{0, m}$$

$$\hat{f}_{m+1}(\psi, A_1, A_2, \phi, z) = \tilde{f}_{m+1}(\psi, 0, A_1, A_2, \phi, z),$$

$\bar{w}(t) = (\bar{w}_i(t), i = 1, 2)$, $\bar{w}_i(t), i = 1, 2$ are independent one-dimensional Wiener processes.

2. If $k < k_0$ then in the averaging equation (4) we must put $\hat{f}_0 \equiv 0$; if $k < 2k_j$ for some $1 \leq j \leq m$, then in the averaging equation (4) we

must put $\hat{f}_j \equiv 0$ for all such j ; if $k < k_{m+1}$ then in the averaging equation (4) we must put $\hat{f}_{m+1} \equiv 0$.

3. If $\mu_j \neq \frac{p_j}{q_j} b$ for some $j = \overline{0, m+1}$ and any relatively prime integers p_j and q_j , then in averaging coefficients in (4) we must put $l = n = 0$ in corresponding sums containing $\hat{f}_j$.

Proof is the similar to the proof of the Theorem 3.1 in [10].

Список використаних джерел

1. Крылов Н.М. Введение в нелинейную механику / Н.М. Крылов, Н.Н. Боголюбов. – Киев: Изд-во АН УССР. – 1937. – 363 с.
2. Боголюбов Н.Н. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний / Н.Н. Боголюбов, Ю.А. Митропольский. – М.: Наука. – 1974. – 501 с.
3. Митропольский Ю.А. О воздействии случайных сил на нелинейные колебательные системы / Ю.А. Митропольский, В.Г. Коломиец // Мат. физика и нелинейная механика. – 1986. – **5(39)**. – С.23–34.
4. Борисенко О.В. Малые случайные возмущения в колебательных системах второго порядка / О.В. Борисенко // Украинский математический журнал. – 1992. – **44**. – №1. – С. 11–17.
5. Борисенко О.В. Поведение неавтономной колебательной системы под воздействием малых случайных возмущений в резонансном случае / О.В. Борисенко // Украинский математический журнал. – 1992. – **44**. – №12. – С. 1645–1651.
6. Борисенко О.Д. Асимптотическое поведение стохастической динамической системы / О.Д. Борисенко, О.В. Борисенко // Теория оптимальных решений. – Киев: Ин-т кибернетики НАН Украины. – 1999. – С. 38–44.
7. Борисенко О.Д. Предельное поведение динамической системы под воздействием малых случайных возмущений в нерезонансном случае / О.Д. Борисенко, О.В. Борисенко, И.Г. Малышев // Теорія опти-

мальних рішень. Київ, Інститут кібернетики НАН України. — 2002. — №1. — С. 70 — 78.

8. *Borysenko O.D.* Asymptotic behavior of third order random oscillation system in the resonance case / O.D. Borysenko, O.V. Borysenko, I.G. Malyshev // *Theory of Stoch. Proc.* — 2003. — **9(25)**. — №3-4. — P. 1 — 11.
9. *Borysenko O.D.* Averaging method for autonomous third order random oscillating system / O.D. Borysenko, O.V. Borysenko, D.O. Borysenko // *Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series: Physics & Mathematics.* — 2013. — №4. — P. 7 — 11.
10. *Borysenko O.D.* Averaging method for non-autonomous third order random oscillating system in non-resonance case / O.D. Borysenko, O.V. Borysenko // *Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series: Physics & Mathematics.* — 2014. — №1. — P. 7 — 11.
11. *Gikhman, I.I.* Stochastic Differential Equations / I.I. Gikhman, A.V. Skorokhod // Springer-Verlag, Berlin. — 1972. — 354 p.

References

1. KRYLOV, N.M. and BOGOLYUBOV, N.N. (1937), *Vvedenie v nelinejnyu mehaniku*, Kiev: Izd-vo AN USSR.
2. BOGOLYUBOV, N.N. and MITROPOLSKIJ, Yu.A. (1974), *Asymptoticheskie metody v teorii nelinejnyh kolebanij*, M.: Nauka.
3. MITROPOLSKIJ, Yu.A. and KOLOMIETS, V.G. (1986), "O vozdeistvii sluchajnyh sil na nelinejnye kolebatelnye sistemy", *Mat. fizika i nelinejnaya mehanika*, **v.5(39)**, pp.23 — 34.
4. BORYSENKO, O.V. (1992), "Malje sluchajnye vozmushcheniya v kolebatelnyh sistemah vtorogo porjadka", *Ukrainskii*

Matematicheskij Zhurnal, **v.44**, №1, pp.11 — 17.

5. BORYSENKO, O.V. (1992), "Povedenie neavtonomnoi kolebatelnoj sistemy pod vozdejstviem malyh sluchajnyh vozmushchenij v rezonansnom sluchae", *Ukrainskii Matematicheskij Zhurnal*, **v.44**, №12, pp. 1645 — 1651.
6. BORYSENKO, O.D. and BORYSENKO, O.V. (1999), "Asymptoticheskoe povedenie stohasticheskoy dinamicheskoy sistemy", *Teoriya optimalnyh reshenij*, Kiev, Inst.Kibernetiki NANU, pp. 38 — 44.
7. BORYSENKO, O.D., BORYSENKO, O.V. and MALYSHEV, I.G. (2002) "Predelnoe povedenie dinamicheskoy sbentvs pod vozdejstviem vslyh sluchajnyh vozmushchenij v nerezonansnom sluchae", *Teoriya optymalnyh rishen*, Kyiv, Inst.Cibernetics NANU, №1, pp. 70 — 78.
8. BORYSENKO, O.D., BORYSENKO, O.V. and MALYSHEV, I.G. (2003), "Asymptotic behavior of third order random oscillation system in the resonance case", *Theory of Stoch. Proc.*, **v.9(25)**, №3-4, pp. 1 — 11.
9. BORYSENKO, O.D., BORYSENKO, O.V. and BORYSENKO, D.O. (2013), "Averaging method for autonomous third order random oscillating system", *Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series: Physics & Mathematics*, №4, pp. 7 — 11.
10. BORYSENKO, O.D. and BORYSENKO, O.V. (2014), "Averaging method for non-autonomous third order random oscillating system in non-resonance case", *Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series: Physics & Mathematics*, №1.
11. GIKHMAN, I.I. and SKOROKHOD, A.V. (1972), *Stochastic Differential Equations*, Springer-Verlag, Berlin, 354 p.

Received: 10.11.2013

УДК 519.21

Іваненко Д.О.¹

**Друга похідна логарифмічної функції
вірогідності для моделі заданої СДР
керуванім процесом Леві**

¹Київський національний університет
імені Тараса Шевченка, факультет радіо-
фізики, електроніки та комп'ютерних си-
стем, 01601, Київ, вул. Володимирська 64,
e-mail: ida@univ.net.ua

D.O. Ivanenko¹

**Second derivative of the log-likelihood in
the model given by a Lévy driven SDE'S**

¹Taras Shevchenko National Univer-
sity of Kyiv, Department of Radio
physics, electronics and computer sys-
tems, 01601, Kyiv, Volodymyrska str., 64,
e-mail: ida@univ.net.ua

Методами числення Мальявена отримано представлення для другої похідної по параметру логарифмічної функції вірогідності побудованої на дискретних спостереженнях процесу заданого лінійним стохастичним диференціальним рівнянням, керуванім процесом Леві.

Ключові слова: ММВ, функція вірогідності, СДР, регулярний статистичний експеримент, ЛАН.

By means of the Malliavin calculus, integral representation for the second derivative of the loglikelihood function are given for a model based on discrete time observations of the solution to equation $dX_t = a_\theta(X_t)dt + dZ_t$ with a Lévy process Z .

If we have a logarithm of transition kernel for Markov chain and can calculate two its derivatives w.r.t. parameter, we can find the maximum likelihood estimate (MLE) and its asymptotic normal distribution. But in our case the support of transition probability density depend on parameter and we can't, in principle, to obtain a precise formula for the logarithm of joint density and its derivatives.

The likelihood function in our model is highly implicit. In this paper, we develop an approach which makes it possible to control the properties of the likelihood and log-likelihood functions only in the terms of the objects involved in the model: the function $a_\theta(x)$, its derivatives, and the Lévy measure of the Lévy process Z .

Key Words: MLE, Likelihood function, Lévy driven SDE, Regular statistical experiment, LAN.

Статтю представив д.ф.-м.н. Козаченко Ю.В.

Introduction

Let Z be a Lévy process without a diffusion component; that is,

$$Z_t = ct + \int_0^t \int_{|u|>1} u\nu(ds, du) + \int_0^t \int_{|u|\leq 1} u\tilde{\nu}(ds, du),$$

where ν is a Poisson point measure with the intensity measure $ds\mu(du)$, and $\tilde{\nu}(ds, du) = \nu(ds, du) - ds\mu(du)$ is respective compensated Poisson measure. In the sequel, we assume the Lévy measure μ to satisfy the following:

H. (i) for some $\kappa > 0$,

$$\int_{|u|\geq 1} u^{2+\kappa}\mu(du) < \infty;$$

(ii) for some $u_0 > 0$, the restriction of μ on $[-u_0, u_0]$ has a positive density

$$\sigma \in C^2([-u_0, 0] \cup (0, u_0]);$$

(iii) there exists C_0 such that

$$|\sigma'(u)| \leq C_0|u|^{-1}\sigma(u), \\ |\sigma''(u)| \leq C_0u^{-2}\sigma(u), \quad |u| \in (0, u_0];$$

(iv) $(\log \frac{1}{\varepsilon})^{-1} \mu(\{u : |u| \geq \varepsilon\}) \rightarrow \infty, \quad \varepsilon \rightarrow 0.$

Consider stochastic equation of the form

$$dX_t^\theta = a_\theta(X_t^\theta)dt + dZ_t, \quad (1)$$

where $a : \Theta \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ is a measurable function, $\Theta \subset \mathbb{R}$ is a parametric set.

In [1] it was proved that under conditions of smoothness and growth of a_θ the Markov

process X given by (1) has a transition probability density p_t^θ w.r.t. the Lebesgue measure. Besides, according to [1] this density has a derivative $\partial_\theta p_t^\theta(x, y)$. The extension of the asymptotic methods of mathematical statistics is used as a key tool the second derivative of the log-likelihood ratio w.r.t. parameter. The purpose of this paper is to give a Malliavin-type integral representation of this derivative.

1 Main results

We denote by $\mathbf{P}_x^\theta$ the distribution of this process in $\mathbb{D}([0, \infty))$ with $X_0 = x$, and by $\mathbf{E}_x^\theta$ the expectation w.r.t. this distribution. Respective finite-dimensional distribution for given time moments $t_1 < \dots < t_n$ is denoted by $\mathbf{P}_{x, \{t_k\}_{k=1}^n}^\theta$. On the other hand, solution X to Eq. (1) is a random function defined on the same probability space $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ with the process Z , which depends additionally on the parameter θ and the initial value $x = X(0)$. We do not indicate this dependence in the notation, i.e. write X_t instead of e.g. $X_{x,t}^\theta$, but it will be important in the sequel that, under certain conditions, X_t is L_2 -differentiable w.r.t. θ and is L_2 -continuous w.r.t. (t, x, θ) .

In the sequel we will show that, under appropriate conditions, Markov process X admits a transition probability density $p_t^\theta(x, y)$ w.r.t. Lebesgue measure, which is continuous w.r.t. $(t, x, y) \in (0, \infty) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Then (see [2]), for every $t > 0, x, y \in \mathbb{R}$ such that

$$p_t^\theta(x, y) > 0, \quad (2)$$

there exists a weak limit in $\mathbb{D}([0, t])$

$$\mathbf{P}_{x,y}^{t,\theta} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{P}_x^\theta \left(\cdot \mid |X_t - y| \leq \varepsilon \right),$$

which can be interpreted naturally as a *bridge* of the process X started at x and conditioned to arrive to y at time t . We denote by $\mathbf{E}_{x,y}^{t,\theta}$ the expectation w.r.t. $\mathbf{P}_{x,y}^{t,\theta}$.

In what follows, C denotes a constant which is not specified explicitly and may vary from place to place. By $C^{k,m}(\mathbb{R} \times \Theta)$, $k, m \geq 0$ we denote the class of functions $f : \mathbb{R} \times \Theta \rightarrow \mathbb{R}$ which has continuous derivatives

$$\frac{\partial^i}{\partial x^i} \frac{\partial^j}{\partial \theta^j} f, \quad i \leq k, \quad j \leq m.$$

In [1] it was proved that under the conditions of following Theorem $\partial_\theta p_t^\theta(x, y)$ has a Malliavin-type integral representation

$$\partial_\theta p_t^\theta(x, y) = g_t^\theta(x, y) p_t^\theta(x, y) \quad (3)$$

with

$$g_t^\theta(x, y) = \begin{cases} \partial_\theta \log p_t^\theta(x, y) = \mathbf{E}_{x,y}^{t,\theta} \Xi_t^1, & p_t^\theta(x, y) > 0, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (4)$$

The goal of this section is to obtain the same representation for second derivative, i.e.

$$\partial_{\theta\theta}^2 p_t^\theta(x, y) = G_t^\theta(x, y) p_t^\theta(x, y) \quad (5)$$

with

$$G_t^\theta(x, y) = \begin{cases} \partial_{\theta\theta}^2 \log p_t^\theta(x, y) + g_t^\theta(x, y)^2 = \\ = \mathbf{E}_{x,y}^{t,\theta} \Xi_t^2, & p_t^\theta(x, y) > 0, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (6)$$

The functionals Ξ_t^1 and Ξ_t^2 , involved in expressions for g and G , will be introduced explicitly in the proof below; see formulas (19) and (21).

Theorem 1. *Let $a \in C^{3,2}(\mathbb{R} \times \Theta)$ have bounded derivatives $\partial_x a$, $\partial_{xx}^2 a$, $\partial_{x\theta}^2 a$, $\partial_{xxx}^3 a$, $\partial_{x\theta\theta}^3 a$, $\partial_{xx\theta}^3 a$, $\partial_{xxx\theta}^4 a$ and for all $\theta \in \Theta$, $x \in \mathbb{R}$*

$$|a_\theta(x)| + |\partial_\theta a_\theta(x)| + |\partial_{\theta\theta}^2 a_\theta(x)| \leq C(1 + |x|). \quad (7)$$

Then the transition probability density has a second derivative $\partial_{\theta\theta}^2 p_t^\theta(x, y)$, which is continuous w.r.t. $(t, x, y, \theta) \in (0, \infty) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \Theta$, and (5) holds true.

Remark 1. *By statement of Theorem, the logarithm of the transition probability density has a second continuous derivative w.r.t. θ on the open subset of $(0, \infty) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \Theta$ defined by inequality $p_t^\theta(x, y) > 0$ and, on this subset, admits the integral representation*

$$\partial_{\theta\theta}^2 \log p_t^\theta(x, y) = \mathbf{E}_{x,y}^{t,\theta} \Xi_t^2 - \left(\mathbf{E}_{x,y}^{t,\theta} \Xi_t^1 \right)^2. \quad (8)$$

Remark 2. *For every $\gamma < 1 + \kappa/2$ there exists constant C which depends on t and γ only, such that*

$$\mathbf{E}_x^\theta \left| \partial_\theta g_t^\theta(x, X_t^\theta) \right|^\gamma \leq C(1 + |x|)^\gamma. \quad (9)$$

2 Proof of Theorem 1

We need to repeat some notations and statements defined in Section 3 [1]. Fix $u_1 \in (0, u_0)$, where u_0 comes from **H** (ii), and introduce a C^2 -function $\varrho: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ with bounded derivative, such that

$$\varrho(u) = \begin{cases} u^2, & |u| \leq u_1; \\ 0, & |u| \geq u_0. \end{cases}$$

Denote by $Q_c(x)$, $c \in \mathbb{R}$ the value at the time moment $s = c$ of the solution to Cauchy problem

$$q'(s) = \varrho(q(s)), \quad q(0) = x.$$

Then $\{Q_c, c \in \mathbb{R}\}$ is a group of transformations of $\mathbb{R}$, and $\partial_c Q_c(x)|_{c=0} = \varrho(x)$.

Definition 1. A functional $F \in L_2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ is called stochastically differentiable, if there exists an $L_2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ -limit

$$\hat{D}F = \lim_{c \rightarrow 0} \frac{1}{c} (\mathcal{Q}_c F - F). \quad (10)$$

The closure D of the operator $\hat{D}$ defined by (10) is called the stochastic derivative. The adjoint operator $\delta = D^*$ is called the divergence operator or the extended stochastic integral.

Remark 3. $\text{dom}(D)$ is dense in $L_2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, hence δ is well defined. In addition, $\text{dom}(\delta)$ is dense in $L_2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, hence $\hat{D}$ is closable. The operator δ itself is closed as an adjoint one; e.g. Theorem VIII.1 in [3].

Denote $\chi(u) = -\frac{(\sigma(u)\varrho(u))'}{\sigma(u)}$, $u \neq 0$.

Proposition 1. 1. Let $\varphi \in C^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ have bounded derivatives and $F_k \in \text{dom}(D)$, $k = \overline{1, d}$. Then $\varphi(F_1, \dots, F_d) \in \text{dom}(D)$ and

$$D[\varphi(F_1, \dots, F_d)] = \sum_{k=1}^d [\partial_{x_k} \varphi](F_1, \dots, F_d) D F_k. \quad (11)$$

2. The constant function 1 belongs to $\text{dom}(\delta)$ and

$$\delta(1) = \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \chi(u) \tilde{\nu}(ds, du). \quad (12)$$

3. Let $G \in \text{dom}(D)$ and

$$\mathbb{E}(\delta(1)G)^2 < \infty. \quad (13)$$

Then $G \in \text{dom}(\delta)$ and $\delta(G) = \delta(1)G - DG$.

The proofs of this Proposition and Remark 3 can be found in [1].

Lemma 1. Under the conditions of Theorem 1 X_t^θ is thrice stochastically differentiable and

$$D^j X_t^\theta = \sum_{i=0}^{j-1} \frac{(i+1)^{j-i+1}}{i!} \int_0^t D^{j-i-1} (\mathcal{E}_t \mathcal{E}_s^{-1}) \int_{\mathbb{R}} \varrho(u) (\varrho(u)^i)^{(i)} \nu(ds, du), \quad j = \overline{1, 3}; \quad (14)$$

where $\mathcal{E}_t := \exp \left\{ \int_0^t \partial_x a_\theta(X_\tau^\theta) d\tau \right\}$,

$$D^n \mathcal{E}_t = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-k-1} C_{n-1}^k C_{n-k-1}^j D^k \mathcal{E}_t \times \int_0^t D^j \left(\partial_{xx}^2 a_\theta(X_\tau^\theta) \right) D^{n-k-j} X_\tau^\theta d\tau, \quad n = 1, 2. \quad (15)$$

Remark 4. The expressions for $D^n (\partial_{xx}^2 a_\theta(X_t^\theta))$ and $D^n (\mathcal{E}_t \mathcal{E}_s^{-1})$ can be found by the first statement of Proposition 1 (and formula (15) respectively).

Remark 5. Under additional conditions about smoothness and growth of a_θ the formulas (14) and (15) are equitable if j is more than 3 and n is more than 2.

The case $j = 1, 2$ and $n = 1$ was considered in [1]. The proof of (14) as $j \geq 3$ provides by induction using the argument of proof of relation (27) [1], and based on Theorem II.2.8.5 [4]. The same arguments that in Section 3.2 [1] give (see details in proof of relations (27), (31) and (32) [1]):

$$\begin{aligned} D^2 \partial_{\theta\theta} X_t^\theta &= \int_0^t D^2 (\mathcal{E}_t \mathcal{E}_s^{-1}) \partial_{\theta\theta} a_\theta(X_s^\theta) ds + \\ &+ 2 \int_0^t D (\mathcal{E}_t \mathcal{E}_s^{-1}) \partial_{x\theta}^2 a_\theta(X_s^\theta) D X_s^\theta ds + \\ &+ \mathcal{E}_t \int_0^t \mathcal{E}_s^{-1} \left(\partial_{xx\theta}^3 a_\theta(X_s^\theta) (D X_s^\theta)^2 + \right. \\ &\quad \left. \partial_{x\theta}^2 a_\theta(X_s^\theta) D^2 X_s^\theta \right) ds, \quad (16) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \partial_{\theta\theta}^2 X_t^\theta &= \mathcal{E}_t \int_0^t \mathcal{E}_s^{-1} \left([\partial_{\theta\theta}^2 a_\theta](X_s^\theta) + \right. \\ &\quad \left. 2[\partial_{x\theta}^2 a_\theta](X_s^\theta) \partial_\theta X_s^\theta + [\partial_{xx}^2 a_\theta](X_s^\theta) (\partial_\theta X_s^\theta)^2 \right) ds, \quad (17) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D\partial_{\theta\theta}^2 X_t^\theta &= 2\mathcal{E}_t \int_0^t \mathcal{E}_s^{-1} \left(\partial_{xx}^2 a_\theta(X_s^\theta) \partial_\theta X_s^\theta + \right. \\ &\quad \left. [\partial_{x\theta}^2 a_\theta](X_s^\theta) \right) D\partial_\theta X_s^\theta ds + \\ &\quad \mathcal{E}_t \int_0^t \mathcal{E}_s^{-1} \left(2\partial_{xx\theta}^3 [a_\theta](X_s^\theta) \partial_\theta X_s^\theta + \right. \\ &\quad \left. \partial_{xxx}^3 a_\theta(X_s^\theta) (\partial_\theta X_s^\theta)^2 + [\partial_{x\theta\theta}^3 a_\theta](X_s^\theta) \right) DX_s^\theta ds. \end{aligned} \quad (18)$$

Similarly to proof the moment bounds for $\partial_\theta X_t^\theta$, $D(\partial_\theta X_t^\theta)$, DX_t^θ , $D^2 X_t^\theta$, proved in Section 3.3 [1], we get the same one for $\partial_{\theta\theta}^2 X_t^\theta$, $D(\partial_{\theta\theta}^2 X_t^\theta)$, $D^2(\partial_\theta X_t^\theta)$ and $D^3 X_t^\theta$. Note that the assumption on the derivatives $\partial_x a$, $\partial_{xx}^2 a$, $\partial_{xxx}^3 a$ is used in Section 3.2 [1] to get the existence of the derivatives DX_t , $D^2 X_t$, $D^3 X_t$. The addition assumption on $\partial_{x\theta}^2 a_\theta$ similarly gives the existence of derivative $D(\partial_\theta X_t^\theta)$.

Proof of Theorem 1. In the theorem 1 [1] it was proved that the transition probability density has a derivative $\partial_\theta p_t^\theta(x, y)$, which is continuous w.r.t. $(t, x, y, \theta) \in (0, \infty) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \Theta$, and functional Ξ_t^1 , from its representation given by the formula

$$\Xi_t^1 = \frac{(\partial_\theta X_t^\theta) \delta(1)}{DX_t^\theta} + \frac{(\partial_\theta X_t^\theta) D^2 X_t^\theta}{(DX_t^\theta)^2} - \frac{D(\partial_\theta X_t^\theta)}{DX_t^\theta}. \quad (19)$$

Note that X_t is twice L_2 -differentiable w.r.t. parameter θ , see (17) for its derivative. In addition, DX_t^θ , $D^2 X_t^\theta$, and $D\partial_\theta X_t^\theta$, are L_2 -differentiable w.r.t. θ , and all these derivatives satisfy moment bounds similar to (35) [1] (moment bounds for DX_t^θ). Now it is easy to prove that Ξ_t^1 is L_2 -differentiable w.r.t. θ (the explicit formula of the derivative is omitted). One can just replace DX_t in the denominator in the formula (19) by $DX_t + \varepsilon$, prove that this new functional is L_2 -differentiable w.r.t. θ using the chain rule, and then show using (36) [1] (negative order moment bounds for DX_t^θ) that both this functional and its derivative w.r.t. θ converge (locally uniformly) in L_2 as $\varepsilon \rightarrow 0$, respectively, to Ξ_t^1 and to the functional $\partial_\theta \Xi_t^1$ which comes from the formal differentiation of (19). This argument also shows that Ξ_t^1 and $\partial_\theta \Xi_t^1$ depend continuously (in L_2) on x, t, θ . Therefore, we can take a derivative at the right hand side in (3), which gives

$$\partial_{\theta\theta}^2 p_t^\theta(x, y) = p_t^\theta(x, y) \mathbf{E}_{x, y}^{\theta, \theta} \partial_\theta \Xi_t^1 + p_t^\theta(x, y) g_t^\theta(x, y)^2.$$

This function is continuous w.r.t. (t, x, y, θ) because p_t^θ , g_t^θ , and $\partial_\theta \Xi_t^1$ depend continuously (in L_2) on x, t, θ , and relation

$$\mathbf{P}_x^\theta(X_t = y) = 0, \quad x, y \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \quad \theta \in \Theta \quad (20)$$

holds true (by representation (3)).

To prove (5), we use moment bounds for $\partial_\theta X_t^\theta$, $\partial_{\theta\theta}^2 X_t^\theta$, $D(\partial_\theta X_t^\theta)$, $D(\partial_{\theta\theta}^2 X_t^\theta)$, $D^2(\partial_\theta X_t^\theta)$, DX_t^θ , $D^2 X_t^\theta$ and $D^3 X_t^\theta$ to get, similarly to the proof of (37) [1] (integral representation for p_t^θ), that

$$\frac{(\partial_\theta X_t^\theta)^2}{DX_t^\theta}, \quad \frac{1}{DX_t^\theta} \left(\delta \left(\frac{(\partial_\theta X_t^\theta)^2}{DX_t^\theta} \right) + \partial_{\theta\theta}^2 X_t^\theta \right)$$

belong to $\text{dom}(\delta)$ and

$$\begin{aligned} \Xi_t^2 &:= \delta \left(\frac{1}{DX_t^\theta} \left(\delta \left(\frac{(\partial_\theta X_t^\theta)^2}{DX_t^\theta} \right) + \partial_{\theta\theta}^2 X_t^\theta \right) \right) = \\ &\quad - \frac{1}{DX_t^\theta} D\delta \left(\frac{(\partial_\theta X_t^\theta)^2}{DX_t^\theta} \right) + \frac{D\partial_{\theta\theta}^2 X_t^\theta}{DX_t^\theta} + \\ &\quad \left(\frac{\delta(1)}{DX_t^\theta} + \frac{D^2 X_t^\theta}{(DX_t^\theta)^2} \right) \left(\delta \left(\frac{(\partial_\theta X_t^\theta)^2}{DX_t^\theta} \right) + \partial_{\theta\theta}^2 X_t^\theta \right), \end{aligned} \quad (21)$$

with

$$\begin{aligned} \delta \left(\frac{(\partial_\theta X_t^\theta)^2}{DX_t^\theta} \right) &= \\ \frac{(\partial_\theta X_t^\theta)^2 \delta(1)}{DX_t^\theta} &+ \frac{(\partial_\theta X_t^\theta)^2 D^2 X_t^\theta}{(DX_t^\theta)^2} - \frac{2(\partial_\theta X_t^\theta) D(\partial_\theta X_t^\theta)}{DX_t^\theta}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D\delta \left(\frac{(\partial_\theta X_t^\theta)^2}{DX_t^\theta} \right) &= \\ \frac{2\partial_\theta X_t^\theta}{DX_t^\theta} \left(\delta(1) D(\partial_\theta X_t^\theta) - D^2(\partial_\theta X_t^\theta) \right) &+ \frac{(\partial_\theta X_t^\theta)^2 D\delta(1)}{DX_t^\theta} \\ - \frac{2(D(\partial_\theta X_t^\theta))^2}{DX_t^\theta} &+ \left(\frac{\partial_\theta X_t^\theta}{DX_t^\theta} \right)^2 \left(D^3 X_t^\theta - \delta(1) D^2 X_t^\theta \right) \\ + \frac{4\partial_\theta X_t^\theta D(\partial_\theta X_t^\theta) D^2 X_t^\theta}{(DX_t^\theta)^2} &- \frac{2(\partial_\theta X_t^\theta D^2 X_t^\theta)^2}{(DX_t^\theta)^3}. \end{aligned}$$

The expressions for $\partial_\theta X_t^\theta$, $D\partial_\theta X_t^\theta$ and $D\delta(1)$ can be found in [1], the other one given by the formulas (14) – (18). Therefore, for any test function $f \in$

$C^2(\mathbb{R})$ with bounded derivatives we have

$$\begin{aligned} \partial_{\theta\theta}^2 \mathbb{E}_x^\theta f(X_t^\theta) &= \\ \mathbb{E}_x^\theta \left(f''(X_t^\theta) (\partial_\theta X_t^\theta)^2 + f'(X_t^\theta) \partial_{\theta\theta}^2 X_t^\theta \right) &= \\ \mathbb{E}_x^\theta \left(Df'(X_t^\theta) \frac{(\partial_\theta X_t^\theta)^2}{DX_t^\theta} + f'(X_t^\theta) \partial_{\theta\theta}^2 X_t^\theta \right) &= \\ \mathbb{E}_x^\theta \left(f'(X_t^\theta) \left(\delta \left(\frac{(\partial_\theta X_t^\theta)^2}{DX_t^\theta} \right) + \partial_{\theta\theta}^2 X_t^\theta \right) \right) &= \\ \mathbb{E}_x^\theta \left(\frac{Df(X_t^\theta)}{DX_t^\theta} \left(\delta \left(\frac{(\partial_\theta X_t^\theta)^2}{DX_t^\theta} \right) + \partial_{\theta\theta}^2 X_t^\theta \right) \right) &= \\ \mathbb{E}_x^\theta f(X_t^\theta) \Xi_t^2 = \mathbb{E}_x^\theta f(X_t^\theta) G_t^\theta(x, X_t^\theta); \end{aligned} \quad (22)$$

see (6) for the definition of $G_t^\theta(x, y)$. Because the test function f is arbitrary, the integral identity (22) proves (5). $\square$

Remark 6. From (22) with $f \equiv 1$ it follows that

for every $x \in \mathbb{R}, \theta \in \Theta, t > 0$

$$\mathbb{E}_x^\theta G_t^\theta(x, X_t^\theta) = 0.$$

Proof of Remark 2. By the moment bounds and formula (21), we have

$$\mathbb{E}_x^\theta |\Xi_t^2|^p \leq C(1 + |x|^p) \quad (23)$$

for every $p \in [1, 2 + \kappa)$, with the constants C depending on t, p only.

Combining relations (3) – (6) we get

$$\partial_\theta g_t^\theta(x, X_t) = \mathbb{E}_x^\theta \left[\Xi_t^2 \middle| X_t \right] - g_t^\theta(x, X_t)^2,$$

Moreover, inequality (9) follows directly from (23), (45) [1] (moment bounds for g_t^θ) and Jensen's inequality. $\square$

Список використаних джерел

1. Іваненко Д.О. Застосування числення Малаєвено до статистичного аналізу СДР керованих процесом Леві [Електронний ресурс] / Д.О. Іваненко, О.М. Кулік // *arXiv:1301.5141*.
2. Шамон Л. Марківські мости: слабка неперервність і потраєкторна конструкція / Л. Шамон, Дж. Уріб Браво // *Ann. Probab.* – 2011 – №39(2). – С. 609-647.
3. Саймон Б. Методи сучасної математичної фізики / Б. Саймон, М. Рід // *Functional Analysis*, Academic Press. – San Diego. – 1972.
4. Гіхман І.І. Стохастичні диференціальні рівняння і їх додатки / І.І. Гіхман, А.В. Скороход. – New York. Springer-Verlag. – 1972.

References

1. IVANENKO, D. and KULIK, A. (2014) Malliavin calculus approach to statistical inference for Levy driven SDE's. [Online] – Available from *arXiv:1301.5141*.
2. CHAUMONT, L., URIBE BRAVO, G. (2011) Markovian bridges: Weak continuity and pathwise constructions, *Ann. Probab.*, 39(2). p. 609-647.
3. SIMON, B. READ, M. (1972) *Methods of Modern Mathematical Physics*. San Diego. Functional Analysis, Academic Press.
4. GIHMAN, I. and SKOROHOD, A. (1972) *Stochastic differential equations and their applications..* New York, Springer-Verlag.

Received: 23.12.2013

УДК 519.21

Т.І. Косенкова¹, аспірант

Один метод побудови процесів типу Леві

¹Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 83000, м. Київ, пр-т. Глушкова 4д,
e-mail: tanya.kosenkova@gmail.com

T.I. Kosenkova¹, PhD Student

On a method of the Lévy-type processes construction

¹Taras Shevchenko National University of Kyiv, 83000, Kyiv, Glushkova st., 4d,
e-mail: tanya.kosenkova@gmail.com

Опис процесів типу Леві як розв'язків СДР є класичною задачею та бере свій початок від робіт А.В. Скорохода початку 60-тих років. Ідея, що легла в основу його метода полягає у представленні довільної міри Леві як образу фіксованої міри за допомогою спеціально побудованих відображень. Умови теореми про існування та єдиність розв'язку накладаються на відображення, задані неявно. Метод, запропонований в цій роботі дозволяє значно спростити побудову таких відображень за допомогою правильного вибору фіксованої міри. Ця конструкція дозволяє будувати процеси типу Леві у випадках коли ядро Леві процесу розпадається у суму ядер спеціального типу та ядер обмеженої інтенсивності. Наведено побудову процесів типу χ^2 , гамма та α -стійкого типів.

Ключові слова: процес типу Леві, процес типу χ^2 , процес α -стійкого типу та процес типу Гамма.

The construction of a Lévy-type processes as a solutions to an SDEs is a classical problem which comes back to the works of Skorokhod in 1960s. His method was based on the representation of any Lévy measure as an image under some transform of a fixed measure. Our method is based on the same idea but due to the choice of reference measure leads to transparent set of conditions for the uniqueness and existence of the strong solution to a correspondent SDE. This method appeared to be applicable in the case where the Lévy kernel can be represented as a sum of the kernels of proper form and kernels of bounded intensity. As examples, we construct χ^2 -type process, Gamma type process and α -stable like process as a strong solutions to an SDEs.

Key Words: Lévy-type process, χ^2 -type process, Gamma type process, α -stable like process.

Communicated by Prof. Kozachenko Yu.V.

Introduction

Consider $(a(x), \sigma^2(x), \Pi(x, \cdot))$ where $a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\sigma^2 : \mathbb{R} \rightarrow [0; \infty)$ and $\Pi(x, dy)$ is a Lévy kernel, which is a measurable function w.r.t. x and a Lévy measure for any $x \in \mathbb{R}$.

The Lévy-type process is such a Markov process that it's generator on the functions of the class $C_\infty^2 = \{f : f \in C^2, f(x) \rightarrow 0, f'(x) \rightarrow 0, \text{ as } |x| \rightarrow \infty\}$ takes the form

$$\begin{aligned} Af(x) = & a(x)f'(x) + \sigma^2(x)f''(x) \\ & + \int_{\mathbb{R}} (f(x+y) - f(x) \\ & - f'(x)y\mathbf{1}_{|y| \leq 1}) \Pi(x, dy), \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (1)$$

It was observed that many physical, biological, chemical and econometrical models are well

characterised by Lévy-type processes (see [2] and list of references therein). A classical way of a Lévy-type process construction comes back to works of Skorokhod [7] and Strook [8]. In these works Lévy kernels are represented as images of a fixed measure under some mappings, and respective existence and uniqueness theorem is formulated in the terms of the latter mappings. This leads to a highly implicate set of conditions on the symbols under the consideration. By means of the choice of the reference measure we are able to obtain a straightforward procedure of the mappings construction, which leads to the transparent set of conditions in terms of symbols itself.

As an application of this result we consider the case where a Lévy kernel is represented as a sum of kernels. Our research is motivated by the recent work of Kolokoltsov [6]. He considered the

generator represented as a sum of multiplicative operators multiplied on Lévy generators. For such object he proved the existence of the unique solution to a martingale problem. Our approach can be used in the case of non-multiplicative operators and approves to be useful in construction of χ^2 -type process, Gamma type process and α -stable like process.

1 Method description

The main idea of the construction is based on the fact that any Lévy measure Π can be represented as a transformation of the fixed Lévy measure $\Pi_0 = du/u^2$ by the function $c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. In addition, this function is uniquely determined by the requirement $\Pi = \Pi_0 \circ c^{-1}$ and the following list of properties: c maps $\mathbb{R}^-$ on $\mathbb{R}^-$, and $\mathbb{R}^+$ on $\mathbb{R}^+$; c is monotone; c is left continuous on $\mathbb{R}^-$ and right continuous on $\mathbb{R}^+$. Here we denote $\mathbb{R}^- := (-\infty; 0]$ and $\mathbb{R}^+ := [0; +\infty)$. For any Lévy measure Π we denote by c_Π the corresponding function c . Now we represent a Lévy kernel $\Pi(x, A)$ in the form $\Pi(x, A) = \Pi_0(\{v : c_\Pi(x, v) \in A\})$, $A \in \mathfrak{B}$, and consider an SDE

$$\begin{aligned} dX(t) = & a(X(t))dt + \sigma^2(X(t))dW(t) \\ & + \int_{\mathbb{R}} c_\Pi(X(t-), v) \mathbf{1}_{|c_\Pi(X(t-), v)| \leq 1} \tilde{\nu}_0(ds, dv) \\ & + \int_{\mathbb{R}} c_\Pi(X(t-), v) \mathbf{1}_{|c_\Pi(X(t-), v)| > 1} \nu_0(ds, dv). \end{aligned} \quad (2)$$

Here ν_0 is a Poisson point measure with the intensity measure Π_0 , $\tilde{\nu}_0$ is the compensated Poisson point measure, and W is an independent of ν_0 Wiener process. For any $x, y \in \mathbb{R}$ we denote $\rho(x, y) = |x - y| \wedge 1$.

Theorem 1. Assume that the following conditions hold true.

1) The functions a and σ^2 satisfy the Lipschitz condition w.r.t. ρ , there exists a constant $L_1 > 0$ such that $|a(x_1) - a(x_2)| + |\sigma(x_1) - \sigma(x_2)| \leq L_1 \rho(x_1, x_2)$.

2) There exists a constant $L_2 > 0$ such that $\left(\int_{\mathbb{R}} \rho^2(c_\Pi(x_1, v), c_\Pi(x_2, v)) \Pi_0(dv) \right)^{1/2} \leq L_2 \rho(x_1, x_2)$, $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$.

3) There exists a constant $L_3 > 0$ such that $|\Pi(x, \{u : |u| > 1\}) - \Pi(x, \{u : |u| > 1\})| < L_3 \rho(x, y)$, $x, y \in \mathbb{R}$.

Then there exists a unique strong solution to equation (2).

The proof is analogous to those of Theorems 2 and 5 Chapter 4 [4]. $\square$

This theorem shows that under the classical Lipschitz continuity condition on the coefficients and square integral Lipschitz continuity of the function c_Π we can construct a Lévy-type process as a strong solution to the SDE (2). If for the Lévy kernel $\Pi(x, \cdot)$ the function $c_\Pi(x, \cdot)$ does not satisfy the condition 2 one can extend the range of applications of the method using the following corollary.

Corollary 1. Let us assume that for the functions a and σ^2 condition 1 of Theorem 1 holds. Let $\Pi(x, \cdot) = \sum_{k=1}^l \Pi_k(x, \cdot) + \sum_{k=l+1}^n \Pi_k(x, \cdot)$. Assume that the representation is such that for $\Pi_k(x, \cdot)$, $k = 1, \dots, l$ conditions 2 and 3 of Theorem 1 hold and $\sup_{x \in \mathbb{R}} \Pi_k(x, \mathbb{R}) < \infty$, $k = l+1, \dots, n$. Then the corresponding process can be constructed as a unique strong solution to an SDE

$$\begin{aligned} dX(t) = & a(X(t))dt + \sigma^2(X(t))dW(t) \\ & + \sum_{k=1}^n \left[\int_{\mathbb{R}} c_{\Pi_k}(X(t-), v) \right. \\ & \times \mathbf{1}_{|c_{\Pi_k}(X(t-), v)| \leq 1} \tilde{\nu}_0(dv, dt) \\ & + \int_{\mathbb{R}} c_{\Pi_k}(X(t-), v) \\ & \times \mathbf{1}_{|c_{\Pi_k}(X(t-), v)| > 1} \nu_0(ds, dv) \Big]. \end{aligned} \quad (3)$$

2 Examples

2.1 The Gamma-type process

Let us consider Gamma process with the intensity measure $\Pi(du) = \frac{\gamma e^{-\lambda u}}{u} du$, $y > 0$, $\gamma, \lambda > 0$. Here parameter γ can be interpreted as a rate of jump arrivals and λ as a size of jump. The Proposition below gives the estimates for $\int_{\mathbb{R}} \rho^2(c_{\Pi_1}(v), c_{\Pi_2}(v)) \Pi_0(dv)$ between two Gamma measures, with one of the above parameters being fixed and other one varying.

Proposition 1

1) Let Π_j , $j = 1, 2$ be two Gamma measures with the same parameter λ and different parameters $0 < \gamma_1 < \gamma_2$. Then there exist

a constant $D > 0$ such that the following bound hold true

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}} \rho^2(c_{\Pi_1}(v), c_{\Pi_2}(v)) \Pi_0(dv) \\ & \leq \frac{D}{\lambda^2} (\gamma_2 - \gamma_1) (\log \gamma_2 - \log \gamma_1). \end{aligned} \quad (4)$$

2) Let $\Pi_j, j = 1, 2$ be two Gamma measures with the same parameter γ and different parameters $0 < \lambda_1 < \lambda_2$. Then there exist a constant $\tilde{D} > 0$ such that the following bound hold true

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}} \rho^2(c_{\Pi_1}(v), c_{\Pi_2}(v)) \Pi_0(dv) \\ & \leq \gamma \tilde{D} (\lambda_2 - \lambda_1)^2 \left(\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} + 1 \right). \end{aligned} \quad (5)$$

The proof of the first statement

First let us denote the function $\psi_\gamma(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\gamma e^{-u}}{u} du$. Note that function $\psi_1(x) = -\mathbf{Ei}(-x)$, $x > 0$, where $\mathbf{Ei}(x)$ is the well-known exponential integral (see for instance Ch.VI [5]). Also by $\varphi_\gamma(y)$, $y > 0$ let us denote the inverse to $\psi_\gamma(x)$. It can be easily seen that $c_{\Pi_j}(y) = \frac{1}{\lambda} \varphi_{\gamma_j}(\frac{1}{y})$, $y > 0$, $j = 1, 2$. Using the fact that $|x - y| \geq \rho(x, y)$ we get the following $\int_{\mathbb{R}} \rho^2(c_{\Pi_1}(v), c_{\Pi_2}(v)) \Pi_0(dv) \leq \int_0^{+\infty} (c_{\Pi_1}(y) - c_{\Pi_2}(y))^2 \frac{dy}{y^2}$. Making a change of variables in the integral in the r.h.s. of the last inequality we get $\int_0^{+\infty} (c_{\gamma_1}(y) - c_{\gamma_2}(y))^2 \frac{dy}{y^2} = \frac{1}{\lambda^2} \int_0^\infty (\varphi_{\gamma_1}(v) - \varphi_{\gamma_2}(v))^2 dv$. Consequently

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}} \rho^2(c_{\Pi_1}(v), c_{\Pi_2}(v)) \Pi_0(dv) \\ & \leq \frac{1}{\lambda^2} \int_0^\infty (\varphi_{\gamma_1}(v) - \varphi_{\gamma_2}(v))^2 dv. \end{aligned} \quad (6)$$

To bound the expression in the r.h.s. of (6) we need some properties of the function ψ_γ . First note that $\psi_\gamma(x) = \gamma \psi_1(x)$ for any $\gamma > 0$ and $x > 0$. Consequently $\varphi_\gamma(v) = \varphi_1(v/\gamma)$. We have that $\partial_\gamma \psi_\gamma(x) = \psi_1(x)$ and $\psi_\gamma(\varphi_\gamma(u)) = u$. Differentiating both sides of the latter equation we immediately obtain $\partial_\gamma \varphi_\gamma(u) = \frac{1}{\gamma^2} \varphi_\gamma(u) e^{\varphi_\gamma(u)} u$. Now the integral in the r.h.s. of (6) equals $\int_0^\infty \left(\int_{\gamma_1}^{\gamma_2} \partial_\gamma \varphi_\gamma(v) d\gamma \right)^2 dv$. By the Cauchy-Schwarz inequality we get that the r.h.s. of the last equation is not greater than $(\gamma_1 - \gamma_2) \times \int_0^\infty \int_{\gamma_1}^{\gamma_2} \frac{1}{\gamma^4} \varphi_\gamma^2(v) e^{2\varphi_\gamma(v)} v^2 d\gamma dv$. Changing the order of integration we have $(\gamma_1 - \gamma_2) \int_{\gamma_1}^{\gamma_2} \frac{1}{\gamma^4} \times$

$\int_0^\infty \varphi_\gamma^2(v) e^{2\varphi_\gamma(v)} v^2 dv d\gamma$. Using that $\varphi_1(v/\gamma) = \varphi_\gamma(v)$ and changing variables in the inner integral we obtain

$$\begin{aligned} & (\gamma_1 - \gamma_2) \\ & \times \int_{\gamma_1}^{\gamma_2} \frac{1}{\gamma} \int_0^\infty \varphi_1^2(u) e^{2\varphi_1(u)} u^2 du d\gamma. \end{aligned} \quad (7)$$

Using the well known asymptotics of the function ψ_1 (see Ch.VI [5]) we get the asymptotical behaviour for the function φ_1 : there exist constants $B_1, B_2 > 0$ and $0 < a < 1, b \gg 1$ such that $\varphi_1(u) \leq B_1 \log \frac{1}{Cu}$, $u \in (0; a)$ and $\varphi_1(u) \leq B_2 e^{-u}$, $u \in [b; +\infty)$, here C is the Euler-Mascheroni constant. Using this we obtain $\int_0^\infty \varphi_1^2(u) e^{2\varphi_1(u)} u^2 du \leq \frac{B_1^2}{C^2} \int_0^a (\log u)^2 du + \int_a^b \varphi_1^2(u) e^{2\varphi_1(u)} u^2 du + B_2 \int_b^\infty e^{-2u} e^{2e^{-u}} u^2 du$. Every integral in the r.h.s. of the last expression is finite, thus there exists a constant $D > 0$ such that the integral at (7) is bounded from above by $(\gamma_1 - \gamma_2) \int_{\gamma_1}^{\gamma_2} \frac{D}{\gamma} d\gamma$. Thus we obtain (4). $\square$

The proof of the second statement

Now we consider the function $\psi^\lambda(x) = \int_x^{+\infty} \frac{e^{-\lambda u}}{u} du = \int_{\lambda x}^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} du$. Note that $\psi^\lambda(x) = \psi_1(\lambda x)$, where $\psi_1(x) = -\mathbf{Ei}(-x)$, $x > 0$. Thus the inverse function $\varphi^\lambda(y) = \varphi_1(y)/\lambda$, where φ_1 is the inverse to ψ_1 . In this case $c_{\Pi_j}(y) = \varphi^{\lambda_j}(\frac{1}{y})$, $0 \leq y \leq 1$, $j = 1, 2$. As in the previous part we reduce the calculations to the estimation of the integral $\int_0^{+\infty} (c_{\Pi_1}(y) - c_{\Pi_2}(y))^2 \frac{dy}{y^2}$. Analogously to (6) we obtain

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}} \rho^2(c_{\Pi_1}(v), c_{\Pi_2}(v)) \Pi_0(dv) \\ & \leq \gamma \int_0^\infty \left(\varphi^{\lambda_1}(v) - \varphi^{\lambda_2}(v) \right)^2 dv. \end{aligned} \quad (8)$$

Using the same argument as for the $\partial_\gamma \varphi_\gamma$ we get that $\partial_\lambda \varphi^\lambda(u) = -\frac{\varphi^\lambda(u)}{\lambda}$. Making the same steps as for (7) we obtain

$$(\lambda_2 - \lambda_1) \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \frac{1}{\lambda^4} \int_0^\infty \varphi_1^2(u) du d\lambda. \quad (9)$$

Using the asymptotics of φ_1 we conclude that there exists a constant $\tilde{D} > 0$ such that the integral in (9) is not greater than

$$\tilde{D} (\lambda_2 - \lambda_1) \left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2} \right). \quad (10)$$

Using this we immediately get (5). $\square$

The *Gamma-type process* has a Lévy kernel of

the type $\Pi(x, du) = \frac{\gamma(x)e^{-\lambda(x)u}}{u} du$, $u > 0$. If we assume that only the size of jumps varies, i.e. the parameter $\lambda = \lambda(x)$ and the parameter γ is fixed, then one can get the correspondent SDE directly:

$$dX_t = \frac{1}{\lambda(X_{t-})} dX_t^1,$$

here X^1 denotes the Gamma process with the same parameter γ and $\lambda(x) = 1$. Meanwhile the case where the intensity of jumps $\gamma = \gamma(x)$ is variable is not so easy to treat because one should provide the change of time in the Lévy-Ito formula. Nevertheless using Theorem 1 this case is also manageable. If $\lambda(x)$ is Lipschitz continuous, then all the conditions of Theorem 1 are verified. For condition 2 this follows from (5), the condition 3 is easy to verify straightforwardly. Thus Gamma-type process in this case can be written as a solution to equation (2) with $c(x, v) = \varphi\left(\frac{1}{v\gamma(x)}\right)$.

2.2 Noncentral χ^2 -type process

The noncentral χ^2 distribution with $k > 0$ degrees of freedom and noncentrality parameter $\lambda = \sum_{i=1}^k (\mu_i/\sigma_i)^2$ corresponds to a sum of independent random Gaussian variables $\sum_{i=1}^k \xi_i/\sigma_i$, $\xi_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$, $i = 1, \dots, k$. Its distribution function is

$$F(x; k; \lambda) = e^{-\lambda/2} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\lambda/2)^j}{j!} \frac{\gamma(\frac{k}{2}, \frac{x}{2})}{\Gamma(\frac{k}{2})}, \quad x \in \mathbb{R},$$

where $\lambda > 0$ and $\gamma(k, x) = \int_0^x z^{k-1} e^{-z} dz$. If the noncentrality parameter $\lambda = 0$, then the distribution function is

$$F(x; k; 0) = \frac{\gamma(\frac{k}{2}, \frac{x}{2})}{\Gamma(\frac{k}{2})}, \quad x \in \mathbb{R}$$

and the corresponding Lévy measure is

$$\Pi(du) = \frac{k}{2} \frac{e^{-u/2}}{u}, \quad u > 0, \quad k > 0.$$

This is the Gamma measure with parameters $\lambda = k/2$ and $\gamma = 1/2$, consequently we can obtain χ^2 -type process with $\lambda = 0$ as a Gamma-type process. If $\lambda > 0$ then the distribution function $F(x; k; \lambda)$ is infinite divisible (see Chapter 9.2 [1]). Its Lévy measure is

$$\Pi(du) = \frac{k}{2} \frac{e^{-u/2}}{u} du + \frac{\lambda}{2} e^{-u/2} du, \quad u > 0.$$

If we consider a correspondent Lévy-type process with the Lévy kernel

$$\Pi(x, du) = \frac{k(x)}{2} \frac{e^{-u/2}}{u} du + \frac{\lambda(x)}{2} e^{-u/2} du,$$

$u > 0$, $x \in \mathbb{R}$ and assume that the function $\lambda(x)$ is bounded then we can use the Corollary and obtain noncentral χ^2 -type process as a solution to equation of the type (3) with

$$c_1(x, v) = \frac{2\varphi_1(\frac{2}{v})}{k(x)}$$

and $c_2(x, v) = 2 \log(\lambda(xv))$.

2.3 α -stable like process

Recall that for a *symmetric α -stable process*, its Lévy measure has the form

$$\Pi(du) = (\alpha\lambda^- |u|^{-\alpha-1} \mathbf{1}_{(-\infty; 0)}(u) + \alpha\lambda^+ |u|^{-\alpha-1} \mathbf{1}_{(0, \infty)}(u)) du, \quad (11)$$

where $\alpha \in (0, 2)$ and $\lambda^-, \lambda^+ \geq 0$. Analogously to Proposition 2 in [3] one can obtain

Proposition 1. *Let $\Pi_j, j = 1, 2$ be two symmetric α -stable measures with the same shape parameter α and different scale parameters $\lambda_{1,2}^\pm \in [a, b]$, $a, b > 0$. In this case*

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}} \rho^2(c_{\Pi_1}(v), c_{\Pi_2}(v)) \Pi_0(dv) \\ & \leq \left(\frac{2}{2-\alpha} \right) \left(|(\lambda_1^-)^{1/\alpha} - (\lambda_2^-)^{1/\alpha}|^\alpha \right. \\ & \quad \left. + |(\lambda_1^+)^{1/\alpha} - (\lambda_2^+)^{1/\alpha}|^\alpha \right). \end{aligned} \quad (12)$$

2. *Let $\Pi_j, j = 1, 2$ be two symmetric α -stable measures with the same scale parameters λ^+, λ^- , but different shape parameters $\alpha_{1,2} \in [c, d]$, $c, d > 0$, say. In this case there exists a constant $D > 0$ such that the estimate is as follows*

$$\int_{\mathbb{R}} \rho^2(c_{\Pi_1}(v), c_{\Pi_2}(v)) \Pi_0(dv) \leq D |\alpha_2 - \alpha_1|^{\alpha_2}. \quad (13)$$

Note that these estimates do not provide condition 2 of Theorem 1 for the kernels but one can still get the α -stable like processes as a solutions to SDE's. Consider damped α -stable processes with the Lévy measure

$$\begin{aligned} \Pi(du) = & \alpha\lambda^- |u|^{-\alpha-1} \mathbf{1}_{(-1, 0)}(u) \\ & + \alpha\lambda^+ |u|^{-\alpha-1} \mathbf{1}_{(0, 1)}(u) du. \end{aligned} \quad (14)$$

Proposition 2. 1. Let $\Pi_j, j = 1, 2$ be two symmetric, damped α -stable measures with the same shape parameter α and different scale parameters $\lambda_{1,2}^\pm \in [a, b]$, $a, b > 0$. In this case there exists some constant $D_1 > 0$ such that

$$\int_{\mathbb{R}} \rho^2(c_{\Pi_1}(v), c_{\Pi_2}(v)) \Pi_0(dv) \leq D_1 \left((\lambda_1^- - \lambda_2^-)^2 + (\lambda_1^+ - \lambda_2^+)^2 \right). \quad (15)$$

2. Let $\Pi_j, j = 1, 2$ be two symmetric, damped α -stable measures with the same scale parameter λ^+ , but different shape parameters $\alpha_{1,2} \in [c, d]$, $c, d > 0$, say. In this case there exists some constant $D_2 > 0$ such that

$$\int_{\mathbb{R}} \rho^2(c_{\Pi_1}(v), c_{\Pi_2}(v)) \Pi_0(dv) \leq D_2 (\alpha_1 - \alpha_2)^2. \quad (16)$$

The proof of the first statement

It can be straightforwardly verified that

$$c_{\Pi_j}(y) = - \left(1 - \frac{1}{\lambda_j^- y} \right)^{-1/\alpha} \mathbf{1}_{y < 0} + \left(1 + \frac{1}{\lambda_j^+ y} \right)^{-1/\alpha} \mathbf{1}_{y > 0}, \quad j = 1, 2. \quad (17)$$

Using obvious estimate $\rho(x, y) \leq |x - y|$ we get

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \rho^2(c_{\Pi_1}(v), c_{\Pi_2}(v)) \Pi_0(dv) &\leq \int_{-\infty}^0 \left(\left(1 - \frac{1}{\lambda_1^- y} \right)^{-1/\alpha} - \left(1 - \frac{1}{\lambda_2^- y} \right)^{-1/\alpha} \right)^2 \frac{dy}{y^2} \\ &+ \int_0^{+\infty} \left(\left(1 + \frac{1}{\lambda_1^+ y} \right)^{-1/\alpha} - \left(1 + \frac{1}{\lambda_2^+ y} \right)^{-1/\alpha} \right)^2 \frac{dy}{y^2}. \end{aligned} \quad (18)$$

Making a change of variables in the first integral we get that the r.h.s. of the last expression is not

greater than

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}} \rho^2(c_{\Pi_1}(v), c_{\Pi_2}(v)) \Pi_0(dv) \\ &\leq \int_0^{+\infty} \left(\left(1 + \frac{1}{\lambda_1^+ y} \right)^{-1/\alpha} - \left(1 + \frac{1}{\lambda_2^+ y} \right)^{-1/\alpha} \right)^2 \frac{dy}{y^2} \\ &+ \int_0^{+\infty} \left(\left(1 + \frac{1}{\lambda_1^+ y} \right)^{-1/\alpha} - \left(1 + \frac{1}{\lambda_2^+ y} \right)^{-1/\alpha} \right)^2 \frac{dy}{y^2}. \end{aligned} \quad (19)$$

Note that we can estimate only one of these integrals. To do this we consider

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial \lambda^+} \left(1 + \frac{1}{\lambda^+ y} \right)^{-1/\alpha} \\ &= -\frac{1}{y(\lambda^+)^2} (-1/\alpha) \left(1 + \frac{1}{\lambda^+ y} \right)^{-1/\alpha-1}. \end{aligned} \quad (20)$$

Rewriting the r.h.s. of the last inequality we get

$$\frac{1}{\lambda^+} \frac{\frac{1}{\alpha \lambda^+ y}}{1 + \frac{1}{\lambda^+ y}} \left(1 + \frac{1}{\lambda^+ y} \right)^{-1/\alpha} \leq \frac{1}{\alpha \lambda^+}, \quad y > 0. \quad (21)$$

Using this and Cauchy-Schwarz inequality we obtain

$$\begin{aligned} &\int_0^{+\infty} \left(\left(1 + \frac{1}{\lambda_1^+ y} \right)^{-1/\alpha} - \left(1 + \frac{1}{\lambda_2^+ y} \right)^{-1/\alpha} \right)^2 \frac{dy}{y^2} \\ &\leq (\lambda_1^+ - \lambda_2^+) \int_0^{+\infty} \int_{\lambda_1^+}^{\lambda_2^+} \frac{1}{(\alpha \lambda^+ y)^2} d\lambda^+ dy. \end{aligned} \quad (22)$$

Thus we get estimate (16).

The proof of the second statement

It is now clear that estimate (15) can be obtained after estimation of the following integral

$$\begin{aligned} &\int_0^{+\infty} \left(\left(1 + \frac{1}{\lambda^+ y} \right)^{-1/\alpha_1} - \left(1 + \frac{1}{\lambda^+ y} \right)^{-1/\alpha_2} \right)^2 \frac{dy}{y^2} \end{aligned} \quad (23)$$

Or after a change of variables

$$\lambda^+ \int_1^\infty \left(v^{-1/\alpha_1} - v^{-1/\alpha_2} \right)^2 dv. \quad (24)$$

The r.h.s. of the last equation equals $\lambda^+ \int_1^\infty \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} (\partial/\partial \alpha v^{-1/\alpha})^2 d\alpha dv$. By Cauchy-Schwarz inequality we get that this is not greater than

$$\lambda^+(\alpha_1 - \alpha_2) \int_1^\infty \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{1}{\alpha^4} v^{-2/\alpha} (\log v)^2 dv d\alpha.$$

As the integrand in the inner integral is integrable we get estimate (16). Let us now consider the Lévy kernel

$$\begin{aligned} \Pi(x, du) &= \alpha(x) \lambda^-(x) |u|^{-\alpha(x)-1} \mathbf{1}_{u < 0} du \\ &\quad + \alpha(x) \lambda^+(x) u^{-\alpha(x)-1} \mathbf{1}_{u > 0} du \\ &= \alpha(x) \lambda^-(x) |u|^{-\alpha(x)-1} \mathbf{1}_{u \in (-1, 0)} du \\ &\quad + \alpha(x) \lambda^+(x) u^{-\alpha(x)-1} \mathbf{1}_{(u)_{(0,1)}} du \\ &\quad + \alpha(x) \lambda^-(x) |u|^{-\alpha(x)-1} \mathbf{1}_{u \in (-\infty, -1)} du \\ &\quad + \alpha(x) \lambda^+(x) u^{-\alpha(x)-1} \mathbf{1}_{(u)_{(1,+\infty)}} du \\ &= \sum_{k=1}^2 \Lambda_k(x, du) + \sum_{k=3}^4 \Lambda_k(x, du). \end{aligned} \quad (25)$$

If the functions $\lambda^-(x)$ and $\lambda^+(x)$ are bounded the kernel satisfies the Corollary and thus also can be obtained as a solution to an SDE of type (3).

Список використаних джерел

- [1] Bondesson, L. Generalized Gamma convolutions and related classes of distributions and densities /L. Bondesson // New York: Springer-Verlag. — 1992. — P. 176.
- [2] Bouchaud J. Anomalous diffusion in disordered media: statistical mechanisms, models and physical applications /J. Bouchaud, A. Georges// Physics reports.— 1990.— Vol. 195, no. 4 and 5. — P. 127–203.
- [3] Gairing J. Coupling distances between Lévy measures and applications to noise sensitivity of SDE /J. Gairing, M. Högele, T. Kosenkova, A. Kulik// Stochastics and Dynamics.— (Accepted).
- [4] Gikhman, I.I. Stochastic differential equations and their applications /I. I. Gikhman, A. V. Skorokhod // Kyiv:Naukova dumka. — 1982. — P. 612.
- [5] Janke, E. Tafeln Hoeherer Funktionen /E. Janke, F. Emde, F. Loesch // Stuttgart: Verlagsgesellschaft. — 1960. — P. 344.
- [6] Kolokoltsov, V. N. On Markov processes with decomposable pseudo-differential generators /V. N. Kolokoltsov// Stochastics and Stochastic reports.— 2004.— Vol. 76, Is. 1. — P. 1–44.
- [7] Skorokhod, A.V. Studies in the theory of random processes /A.V. Skorokhod // Reading: Addison-Wesley. — 1965. — P. viii+199.
- [8] Strook, D. Markov processes from K. Itô's perspective /D.W. Strook // Princeton University Press. — 2003. — P. 288.

References

1. BONDESSON, L. (1992) *Generalized Gamma convolutions and related classes of distributions and densities*. New York: Springer-Verlag.
2. BOUCHAUD, J. and GEORGES, A. (1990) Anomalous diffusion in disordered media: statistical mechanisms, models and physical applications. *Physics reports*. 195(4 and 5). p. 127–203.
3. GAIRING, J., HÖGELE, M., KOSENKOVA, T. and KULIK, A. (2014) Coupling distances between Lévy measures and applications to noise sensitivity of SDE. *Stochastics and Dynamics*. (Accepted).
4. GIKHMAN, I.I. and SKOROKHOD, A.V.(1982) *Stochastic differential equations and their applications*. Kyiv:Naukova dumka
5. JANKE, E. EMDE, F. and LOESH, F. (1960) *Tafeln Hoeherer Funktionen*. Stuttgart: Verlagsgesellschaft.
6. KOLOKOLTSOV, V. N. (2004). On Markov processes with decomposable pseudo-differential generators. *Stochastics and Stochastic reports*. 76(1). p. 1–44.
7. SKOROKHOD, A.V. (1960) *Studies in the theory of random processes*. Reading: Addison-Wesley.
8. STROOK, D. (2003) *Markov processes from K. Itô's perspective*. Princeton University Press.

Received: 20.11.2013

УДК 517.91

Лукова-Чуйко Н. В.¹ к.ф.-м.н.

**Подвійна еквівалентність функцій
Морса та градієнтно-подібних
векторних полів на тривимірних
многовидах**

¹ Державний університет телекомунікацій, м. Київ, вул. Солом'янська, 7, e-mail: lukova@ukr.net

N. V. Lukova-Chuiko¹, Ph. D.

**Double equivalence of Morse functions
and gradient-like vector fields on
3-manifolds**

¹ State University of Telecommunications, Kyiv, Solomenska st., 7, e-mail: lukova@ukr.net

Даються необхідні та достатні умови подвійної еквівалентності пари, що складається з функції Морса та градієнтно-подібного поля на тривимірному многовиді, тобто існування гомеоморфізму, що є одночасно топологічною еквівалентністю функцій і еквівалентністю полів. Будується повний топологічний інваріант пари.

Ключові слова: функція Морса, топологічна еквівалентність, градієнтно-подібне поле, діаграма Хегора.

Necessary and sufficient conditions for the double equivalence of pair consisting of a Morse function and a gradient-like field on the 3-manifold, i.e. existence of a homeomorphism, which is also the topological equivalence of functions and equivalence of fields are given in this article. A complete topological invariant of the pair is constructed using generalized ordered Heegaard diagram. The existence of a Morse function with given generalized ordered Heegaard diagram was investigated. Topological classification of MS-pairs, which consist of a Morse function and gradient-like vector field for it, on closed oriented 3-manifolds was obtained. It was demonstrated on some examples.

Key words: Morse function, topological equivalence, gradient-like field, Heegaard diagram.

Статтю представив д. ф.-м. н., проф. Кириченко В.В.

Let M be a smooth manifold, $f : M \rightarrow R$ is smooth function. A vector field X is gradient-like if the set of singular points of X coincide with the set of critical point of f . In this case we call pair (f, X) as gradient-like pair.

Two vector fields X, Y are called topologically equivalent if there is a homeomorphism $h : M \rightarrow M$, which maps the trajectory of X in the trajectory of Y , keeping their orientation.

In different ways topological classification of Morse - Smale vector fields on surfaces was obtained by E.A.Leontovych and A.H.Mayer, M.Paiksoto, V.V.Sharko, H.Vonh, H.Flaitas, E.Hiryk and others.

Topological classification of Morse-Smale vector fields on 3-manifolds without closed orbits was built by H.Fleytas [1], Ya.L.Umansky [2] and O.O.Pryshlyak [3].

The functions $f, g : M \rightarrow R$ are called topologically equivalent if there are homeomorphisms $h : M \rightarrow M$, $h' : R \rightarrow R$, for which

$f \circ h = h' \circ g$ and homeomorphism h' preserves orientation of the line.

Global topological classification of Morse functions on surfaces and 1-connected manifolds of dimension greater than 5 was obtained by V.V.Sharko and A.T.Fomenko. Topological classification of Morse functions on closed three-dimensional manifolds constructed in [3].

Definition 1. A pair (f, X) is called *MS-pair* if f is a Morse function and X is gradient-like vector field for f .

MS-pairs (f, X) (g, Y) are called *double equivalent* if there exist a homeomorphism $h : M \rightarrow M$, $h' : R \rightarrow R$ for which $f \circ h = h' \circ g$ and in addition homeomorphism h maps the trajectory of X on the trajectory of Y .

The main aim of this paper is to obtain the classification of MS-pair on closed 3-manifolds with respect to double equivalence.

To solve this problem we apply the method of

Heegaard diagrams.

The author are grateful A. Prishlyak, V.Sharko, S.Maksimenko, I.Vlasenko for providing advice on the topic of this work.

1 MS-invariant

Let $H \cup H' = M$ be a Heegaard decomposition of 3-manifold M , $F = \partial H = \partial H'$ be the Heegaard surface.

Definition 2. A set $u = u_1, u_2, \dots, u_n$ of closed curves on the surface F which do not intersect each other called a generalized system of meridians of H , if they restrict disks $D_i \subset H$, after cutting which from H we obtain union of three-dimensional disks.

Let $v = v_1, v_2, \dots, v_n$ other generalized system of meridians pretzel H' .

Generalized Heegaard diagram (GHD) of the manifold M is a triple (F, u, v) , consisting of closed surface and two generalized system of meridians

Diagrams (F, u, v) and (F', u', v') called homeomorphic if there exists a homeomorphism $h : F \rightarrow F'$, that $h(u) = u'$, $h(v) = v'$.

Let $U_1, U_2, \dots, U_k$ are the areas on which the meridians $u_1, u_2, \dots, u_k$ break surface F , and through $V_1, V_2, \dots, V_l$ — those areas for meridians $v_1, v_2, \dots, v_l$.

Definition 3. An ordering of the diagram is a map $\sigma : \{U_1, \dots, U_k, u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_m, V_1, \dots, V_l\} \rightarrow \{1, 2, \dots, N\}$. The diagram with ordering is called ordered diagram.

For MS-function we construct generalized ordered Heegaard diagram (GOHD). Heegaard surface F is the boundary of the union of handles index 0 and 1.

Meridians are the intersections of the surface F with unstable manifolds of critical points of index 1 and the intersections of the surface F with stable manifolds of critical points of index 2. Let $y_1, \dots, y_N$ are the critical values of functions that are organized by increase ($y_1 < y_2 < \dots < y_N$). We set $\sigma(y_i) = i$. Each critical point of index 0 corresponds to the area U_i , the point of index 1 corresponds to meridian u_i , point of index 2 corresponds to meridian v_i and the point of index 3 corresponds to region V_i . Thus, the performance mapping σ the set $\{U_1, U_2, \dots, U_k, u_1, u_2, \dots, u_n, v_1, v_2, \dots, v_m, V_1, V_2, \dots, V_l\}$ into the set $\{1,$

$2, \dots, N\}$. Thus, each MC function GOHD sets. This GOHD we call GOHD that generated this MS function.

Two GOHD are called equivalent if there is a homeomorphism of GHD that keeps ordering.

Theorem 1. Gradient-like pairs $(f, X), (g, Y)$ are double equivalent if and only if their GOHD are equivalent.

Proof. Necessity follows from the construction.

Sufficiency. Due to the fact that we can change the function by homeomorphisms of the line, without limiting the generality, we assume that the critical value functions coincide with the function σ . Homeomorphism of the chart defines a bijection between the trajectories of field gradients. Equality of values of functions at each homeomorphism between the sets of trajectories trajectories that collectively define the desired 3-manifold homeomorphism.

2 The implementation of invariant by MS-pair

Let M is a n -manifold with boundary ∂M .

Definition 4. n -disk H is called handle of index λ (or λ -handle) if there is a homeomorphism $\varphi : D^\lambda \times D^{n-\lambda} \rightarrow H$ such that $\varphi(\partial D^\lambda \times D^{n-\lambda}) = H \cap M \subset \partial M$. φ is called characteristic map and restriction $\psi = \varphi|_{\partial D^\lambda \times D^{n-\lambda}}$ attaching map. We say that the manifold $M' = M \cup H = M \cup_\psi D^\lambda \times D^{n-\lambda}$ obtained from M attaching λ -handles and write $M' = M \cup_\psi H^{(\lambda)}$. The set $\varphi(D^\lambda \times 0)$ is called core, $\varphi(0 \times D^{n-\lambda})$ is cocore. $\varphi(\partial D^\lambda \times 0)$ is a -sphere, $\varphi(0 \times \partial D^{n-\lambda})$ is b -sphere.

Handle decomposition of manifold M is decomposition $M = H_0 \cup H_1 \cup \dots \cup H_m$, where H_0 is n -disk and H_i is handle on $M_{i-1} = \bigcup_{j < i} H_j$. Two handle decompositions of manifolds M and M' are called isomorphic if there is a homeomorphism $M \rightarrow M'$, which maps handles to handles, cores and cocores in cores and cocores, respectively.

For MS-pair uniquely up to homeomorphism can be build a handle decomposition: 0-handle is a regular neighborhood of critical points of index 0. Then by induction k -handle is regular neighborhood of stable manifold of the critical point of index n in the complement to handles of smaller

indexes. Heegaard surface is the boundary union of handles of index 0 and 1. Meridians u is b-spheres of 1-handles and meridians v is a-spheres of 2-handles.

We describe some properties of the function σ . If $u_i \subset \partial U_j$ then attaching area of H_i^1 intersects the cocore of H_j^0 . This means that the handle is H_i^1 is attached after H_j^0 . Hence, $\sigma(u_i) > \sigma(U_j)$. Similarly,

- 1) if $u_i \subset \partial U_j$, then $\sigma(u_i) > \sigma(U_j)$;
- 2) if $v_i \subset \partial V_j$, then $\sigma(v_i) < \sigma(V_j)$;
- 3) if $u_i \cap v_j \neq \emptyset$, then $\sigma(u_i) < \sigma(v_j)$;
- 4) if $U_i \cap v_j \neq \emptyset$, then $\sigma(U_i) < \sigma(v_j)$;
- 5) if $u_i \cap V_j \neq \emptyset$, then $\sigma(u_i) < \sigma(V_j)$;
- 6) if $U_i \cap V_j \neq \emptyset$, then $\sigma(U_i) < \sigma(V_j)$.

Definition 5. A function σ , which satisfies properties 1) - 6) will be called *admissible*.

The order of each meridian of the first type less order of any meridian the second type.

Theorem 2. For each admissible GOHD there is a MS-pair that generates this GOHD.

Proof. GHD sets the handle decomposition of the manifolds as in [3]. Function σ defines the procedure for gluing handles. After gluing each handle will stick collar. As a result, we get handle decomposition with the collars. Compressing each handle in the (critical) point, we obtain a manifolds and a function on it that is defined by the projections collar to segment in sum with constants such that these functions were agreed at the edges of collars. Any MC-function, which is topologically equivalent to the constructed function is search, because the inverse construction leads to the desired GOHD.

References

1. Fleitas G. Classification of Gradient like flows on dimensions two and three / G. Fleitas // Bol. Soc. Brasil. Mat. – 1975. – Vol.6. – P. 155–183.
2. Umansky Ya.L. Shame of 3-dimensional Morse-Smale dynamical system without closed orbit/ Ya.L. Umansky // DAN USSR – 1976. V.230, N.6. P.1286–1302.(in Russian)
3. Prishlyak A.O. Topological classification of flows and functions on low-dimensional manifolds / A.O. Prishlyak. // Preprint. Inst. of Math. NANU, 2004.- 58p

3 Examples

A) Suppose there is a meridian of the first type and a meridian of second type on Heegaard surface of genus one.

1) Suppose there is a point of intersection between the meridians. Then $\sigma(U) = 1$, $\sigma(u) = 2$, $\sigma(v) = 3$, $\sigma(V) = 4$.

Thus, there is only one (up to double equivalence) MS -pair with Heegaard surface of genus one and one point of intersection between.

2) Similar to 1, there is one MS-pair with Heegaard surface of genus one and with three points of intersection between the meridians.

B) Suppose there are two meridians u_1, u_2 first type and one meridian v of the second type on the Heegaard surface of genus one. We consider the case of two intersection points between the meridians (ie v intersect each meridian u_1, u_2), then the function σ is one of:

- 1) $\sigma(U_2) = 2, \sigma(u_1) = 3, \sigma(u_2) = 3, \sigma(v) = 4$,
- 2) $\sigma(U_2) = 2, \sigma(u_1) = 3, \sigma(u_2) = 4, \sigma(v) = 5$,
- 3) $\sigma(U_2) = 2, \sigma(u_1) = 4, \sigma(u_2) = 3, \sigma(v) = 5$,
- 4) $\sigma(U_2) = 1, \sigma(u_1) = 2, \sigma(u_2) = 3, \sigma(v) = 4$,
- 5) $\sigma(U_2) = 1, \sigma(u_1) = 2, \sigma(u_2) = 2, \sigma(v) = 3$.

$\sigma(U_1) = 1, \sigma(V) = \sigma(v) + 1$.

Thus, the number of double non-equivalent MS-pair with genus 1 and two points of intersection between the meridians is 5.

Summary

Topological classification of MS-pairs on closed oriented 3-manifolds was obtained. It was demonstrated on some examples. The author hopes that this result will be generalized to functions and vector fields with isolated critical points.

References

1. FLEITAS G. (1975) Classification of Gradient like flows on dimensions two and three ,*Bol. Soc. Brasil. Mat.*, vol.6, pp. 155–183.
2. UMANSKIY Ya. (1976) Shame of 3-dimensional Morse-Smale dynamical system without closed orbit, *Doklady Akademii Nauk USSR*, vol. 230, no.6, pp. 1286–1302.
3. PRISHLYAK A. (2004) *Topological classification of flows and functions on low-dimensional manifolds*, Kiev: Inst. of Math. NANU.

Надійшла до редколегії 21.11.2013

УДК 519.21

В.В.Томашик¹, аспірант
Г.М. Шевченко¹, к. ф.-м. н., доцент

**Збіжність моментів досягнення меж
смуги в дифузійних моделях зі
стрибками та неліпшицевою дифузією**

¹Київський національний університет імені Тараса Шевченка, механіко-математичний факультет, 01601, Київ, вул. Володимирська 64, e-mail: vladdislav@gmail.com

V.V.Tomashyk¹, Ph.D. student
G.M. Shevchenko¹, Ph.D., Associate Prof.

**Convergence of hitting times in diffusion
models with jumps and non-Lipschitz
diffusion**

¹Taras Shevchenko National University of Kyiv, Department of Mechanics and Mathematics, 01601, Kyiv, Volodymyrska str., 64, e-mail: vladdislav@gmail.com

Для процесів, породжених стохастичними диференціальними рівняннями зі стрибками та неліпшицевою дифузією, за умови збіжності коефіцієнтів встановлено збіжність моментів досягнення процесами меж смуги.

Ключові слова: дифузійний процес зі стрибками, стохастичне диференціальне рівняння, момент досягнення, пуассонівська міра.

For the processes modeled by stochastic differential equations with non-Lipschitz diffusion and jumps generated by Poisson measure in the case of convergence of the coefficients we study limit behavior of hitting times. The Yamada condition on diffusion coefficients together with condition of continuity of the distribution for jumps of the process are assumed. We have established the convergence in probability of hitting times for the pre-limit processes to the hitting time for the limit process on both finite and infinite time intervals. As auxiliary result we have shown the robustness of the hitting times with respect to the bounds of the interval. The example which shows the necessity of the condition of continuity of the distribution of jumps is given.

Key Words: diffusion process with jumps, stochastic differential equation, hitting time, Poisson measure.

Статтю представив д.ф.-м.н., проф.Козаченко Ю.В.

1 Вступ

В роботі для процесів, породжених СДР зі стрибками та неліпшицевою дифузією, за умови збіжності коефіцієнтів та початкових умов досліджується збіжність моментів досягнення процесами меж деякої смуги. В якості допоміжних результатів встановлено стійкість відносно меж смуги моментів досягнення процесами меж смуги. Дослідження роботи доповнюють та продовжують дослідження, проведені в [1, 2]

2 Основні означення та умови

Нехай $(\Omega, F, \{F_t, t \geq 0\}, P)$ – повний ймовірнісний простір з фільтрацією, що задовольняє стандартні умови. Розглянемо послідовність СДР

$$X_n(t) = X_n(0) + \int_0^t b_n(X_n(s))ds +$$

$$+ \int_0^t \sigma_n(X_n(s))dW(s) + \quad (1)$$

$$+ \int_0^t \int f_n(X_n(s), \theta) \mu(d\theta, ds),$$

де $n \geq 0, t \geq 0$, початкові умови $X_n(0) \in F_0$ -вимірними, коефіцієнти $b_n, \sigma_n : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ – вимірні, $\{W(t), t \geq 0\}$ – вінерів процес відносно фільтрації $\{F_t, t \geq 0\}$, міра $\mu(d\theta, dt)$ є пуассоновою мірою, для якої $E\mu(d\theta, dt) = \nu(d\theta)dt$, причому $\nu(\mathbf{R}) < \infty$.

Припустимо, що виконуються наступні умови на коефіцієнти та початкові умови рівнянь (1)

(Y1_n) для всіх $\gamma > 0 \sup_{n \geq 0} E[|X_n(0)|^\gamma] < \infty$;

(Y2_n) умова лінійного зростання:

$$|b_n(x)| + |\sigma_n(x)| \leq L(1 + |x|), \quad x \in \mathbf{R};$$

(Y3_n) умова Ліпшиця на коефіцієнт b_n :

$$|b_n(x) - b_n(y)| \leq L|x - y|, \quad x, y \in \mathbf{R};$$

(Y4_n) умова Ямада: існує така строго зростаюча функція $\rho_n : \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}^+$, що $\int_{0+} \rho_n^{-2}(u) du = \infty$ та виконується нерівність

$$|\sigma_n(x) - \sigma_n(y)| \leq \rho_n(|x - y|), \quad x, y \in \mathbf{R}.$$

(Y5_n) коефіцієнт $f_n(x, \theta)$ обмежений, неперервний за x для майже всіх θ за мірою $\nu(d\theta)$ та виконується

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{R}} |f_n(x, \theta) - f_n(y, \theta)|^2 \nu(d\theta) &\leq \\ &\leq L|x - y|^2, \quad x, y \in \mathbf{R}. \end{aligned}$$

Також сформулюємо наступні умови щодо збіжності коефіцієнтів та початкових умов.

(U1_n) Для всіх $\gamma > 0$ має місце збіжність початкових умов $E[X_n(0) - X_0(0)]^\gamma \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$;

(U2_n) для всіх $x \in \mathbf{R}, \theta \in \mathbf{R}$ має місце збіжність коефіцієнтів $b_n(x) \rightarrow b_0(x), \sigma_n(x) \rightarrow \sigma_0(x), f_n(x, \theta) \rightarrow f_0(x, \theta), n \rightarrow \infty$.

3 Допоміжні результати

Наступні результати щодо процесів X_n з (1) встановлено в [2].

Теорема 1. Нехай коефіцієнти стохастичного диференціального рівняння (1) задовольняють умови (Y1_n)–(Y5_n). Тоді для всіх $t \geq 0$ та $\gamma > 0$ існує така стала C_γ , незалежна від n , що $E|X_n(t)|^\gamma < [E|X_n(0)|^\gamma + C_\gamma \cdot t] \cdot \exp[C_\gamma \cdot t]$.

Теорема 2. Нехай для послідовності стохастичних диференціальних рівнянь (1) виконуються умови (Y1_n)–(Y5_n) та (U1_n)–(U2_n). Тоді для $T > 0, \varepsilon > 0$ має місце збіжність

$$P \left(\sup_{t \in [0, T]} |X_n(t) - X_0(t)| > \varepsilon \right) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Позначимо через L_t – процес Леві, що відповідає мірі $\mu(d\theta, dt)$. Оскільки $\nu(\mathbf{R}) < \infty$, то L_t є складним процесом Пуассона вигляду

$$L_t = \int_0^t \int_{\mathbf{R}} \theta \mu(d\theta, dt) = \sum_{k=1}^{N_t} \xi_k,$$

де $N_t = \mu([0, t] \times \mathbf{R})$ є процесом Пуассона з інтенсивністю $\nu(\mathbf{R})$. Прирости ξ_k є незалежними однаково розподіленими випадковими величинами з функцією розподілу

$$F_\xi(t) = \frac{\nu((-\infty, t))}{\nu(\mathbf{R})}.$$

Позначимо через $\tau_i, i > 0$ – i -тий момент стрибків процесу L_t .

Для $t \geq 0, s \geq 0, x \in \mathbf{R}$ позначимо через $\phi_n(t, s, x)$ значення процесу X_n з (1) в момент часу t за виконання умов

(1) для $x \in \mathbf{R}, \theta \in \mathbf{R}$ коефіцієнт $f_n(x, \theta) = 0$;

(2) в момент s має місце $X_n(s) = x$.

Процес X_n має вигляд

$$X_n(t) = \phi_n(t, 0, X_n(0)), t \in [0, \tau_1);$$

$$X_n(\tau_1) = X_n(\tau_1-) + f_n(X_n(\tau_1-), \xi_1);$$

...

$$X_n(t) = \phi_n(t, \tau_{k-1}, X_n(\tau_{k-1})), t \in (\tau_{k-1}, \tau_k), k \geq 2,$$

$$X_n(\tau_k) = X_n(\tau_k-) + f_n(X_n(\tau_k-), \xi_k).$$

4 Збіжність моментів досягнення меж смуги процесом X_n на обмежених інтервалах

Введемо наступні моменти зупинки. Оберемо деякі $l, r \in \mathbf{R}$ такі, що $l < X_n(0) < r$ для всіх $n \geq 0$ майже напевно.

Під моментами досягнення меж смуги $[l, r] : l, r \in \mathbf{R}, l < r$ за скінченний проміжок часу $[0, T], T > 0$ процесами X_n будемо розуміти наступні моменти виходу

$$\tau_{n,T}^{(l,r)} = \inf\{t \geq 0 : X_n(t) \notin (l, r)\} \wedge T, n \geq 0.$$

Під моментами досягнення меж смуги $[l, r] : l, r \in \mathbf{R}, l < r$ на всьому часовому проміжку процесами X_n будемо розуміти моменти виходу

$$\tau_n^{(l,r)} = \inf\{t \geq 0 : X_n(t) \notin (l, r)\}, n \geq 0.$$

Доведення основного твердження роботи базується на результаті щодо стійкості моментів зупинки $\tau_{n,T}^{(l,r)}$ та $\tau_n^{(l,r)}$ відносно меж смуги $[l, r]$.

Має місце наступна лема з [3].

Лема 1. Нехай для процесів X_n виконуються властивості $(Y1_n)-(Y5_n)$ та для всіх $x \in \mathbf{R}, \theta \in \mathbf{R}$ має місце $f_n(x, \theta) = 0$.

(а) Якщо $\int_{-\infty}^0 \exp\left(-\int_0^y \frac{2b_n(z)}{\sigma_n^2(z)} dz\right) dy = \infty$, то

$$P(\sup_{t>0} X_n(t) = +\infty) = 1, n \geq 0. \quad (2)$$

(б) Якщо $\int_0^{\infty} \exp\left(-\int_0^y \frac{2b_n(z)}{\sigma_n^2(z)} dz\right) dy = \infty$, то

$$P(\inf_{t>0} X_n(t) = -\infty) = 1, n \geq 0. \quad (3)$$

Тобто, за виконання однієї з умов попередньої леми у випадку відсутності стрибків $\tau_n^{(l,r)} < \infty$ майже напевне для кожного $n \geq 0$ [4].

Наступний результат стосується стійкості моментів досягнення для процесів без стрибків.

Теорема 3. Нехай для процесу X_n з (1) виконуються умови $(Y1_n) - (Y5_n)$ та одна з умов леми 1. Тоді має місце збіжність за ймовірністю

$$\begin{aligned} \tau_0^{(l-\delta, r+\delta)} &\xrightarrow{P} \tau_0^{(l,r)}, \quad \delta \rightarrow 0+, \\ \tau_0^{(l+\delta, r-\delta)} &\xrightarrow{P} \tau_0^{(l,r)}, \quad \delta \rightarrow 0+. \end{aligned}$$

Доведення. Не обмежуючи загальності, доведення проведемо лише для першої збіжності. Другу збіжність можна довести аналогічним чином.

Очевидно, що $\tau_0^{(l-\delta, r+\delta)} \geq \tau_0^{(l,r)}$. Далі, для довільного $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned} &P\left(\tau_0^{(l-\delta, r+\delta)} - \tau_0^{(l,r)} > \varepsilon\right) \leq \\ &\leq P\left(\tau_0^{(l-\delta, r+\delta)} - \tau_0^{(l,r)} > \varepsilon, X_0(\tau_0^{(l,r)}) = l\right) + \\ &+ P\left(\tau_0^{(l-\delta, r+\delta)} - \tau_0^{(l,r)} > \varepsilon, X_0(\tau_0^{(l,r)}) = r\right). \end{aligned}$$

Розглянемо першу ймовірність, друга оцінюється аналогічно.

$$\begin{aligned} &P\left(\tau_0^{(l-\delta, r+\delta)} - \tau_0^{(l,r)} > \varepsilon, X_0(\tau_0^{(l,r)}) = l\right) = \\ &= P\left(\tau_0^{(l-\delta, r+\delta)} > \tau_0^{(l,r)} + \varepsilon, X_0(\tau_0^{(l,r)}) = l\right) \leq \\ &\leq P\left(\min_{t \in [\tau_0^{(l,r)}, \tau_0^{(l,r)} + \varepsilon]} X_0(t) \geq l - \delta, \right. \end{aligned}$$

$$\left. X_0(\tau_0^{(l,r)}) = l\right) =$$

$$= P\left(\min_{t \in [0, \varepsilon]} X_0(t) \geq l - \delta, X_0(0) = l\right),$$

де використано строго марковську властивість.

За монотонністю ймовірності можна записати, що

$$\begin{aligned} &\lim_{\delta \rightarrow 0+} P\left(\min_{t \in [0, \varepsilon]} X_0(t) \geq l - \delta, X_0(0) = l\right) = \\ &= P\left(\min_{t \in [0, \varepsilon]} X_0(t) \geq l, X_0(0) = l\right). \end{aligned}$$

Оскільки коефіцієнт дифузії в точці l є додатним, то за властивостями дифузійних процесів [4] має місце $P(\min_{t \in [0, \varepsilon]} X_0(t) \geq l, X_0(0) = l) = 0$. Теорему доведено. $\square$

Введемо наступний клас випадкових процесів.

Означення 1. Будемо говорити, що для процесу X_n виконується умова неперервності розподілу стрибків, якщо для всіх $t > 0, s < t, x \in \mathbf{R}, z \in \mathbf{R}$ має місце

$$\int_{\mathbf{R}} P(\phi_n(t, s, x) + f(\phi_n(t, s, x), y) = z) F_{\xi}(dy) = 0.$$

Наступний результат стосується стійкості моментів досягнення відносно меж смуги для процесів зі стрибками.

Теорема 4. Нехай для процесу X_n з (1) виконуються умови $(Y1_n) - (Y5_n)$ та умова неперервності розподілу стрибків процесу X_0 . Тоді справедливі збіжності

$$\begin{aligned} \tau_{0,T}^{(l-\delta, r+\delta)} &\xrightarrow{P} \tau_{0,T}^{(l,r)}, \quad \delta \rightarrow 0+, \\ \tau_{0,T}^{(l+\delta, r-\delta)} &\xrightarrow{P} \tau_{0,T}^{(l,r)}, \quad \delta \rightarrow 0+. \end{aligned}$$

Доведення. Встановимо першу збіжність. Покажемо, що

$$P(\exists k \geq 1 : \tau_k \leq T),$$

$$X_0(\tau_k) \in (l - \delta, l] \cup [r, r + \delta) \rightarrow 0, \delta \rightarrow 0.$$

Введемо наступну подію

$$\begin{aligned} A_{k,\delta} &= \{X_0(\tau_k) \in (l - \delta, l] \cup [r, r + \delta)\} = \\ &= \{X_0(\tau_k -) + f(X_0(\tau_k -), \xi_k) \in (l - \delta, l] \cup [r, r + \delta)\}. \end{aligned}$$

Слід зазначити, що ξ_k не залежить від сигма-алгебри

$$F_{\tau_k-} = \sigma\{\{X_t \in B\} \cap \{\tau_k < t\}, B \in B(\mathbf{R}), t \geq 0\},$$

а $X_0(\tau_k-)$ та τ_k вимірні відносно F_{τ_k-} , де $B(\mathbf{R})$ є борелівською сигма-алгеброю на $\mathbf{R}$. Тому можна записати

$$\begin{aligned} P(A_{k,\delta}) &= E[E[\mathbf{1}_{A_{k,\delta}} | F_{\tau_k-}]] = \\ &= E\left[\int_R \mathbf{1}\{X_0(\tau_k-) + f(X_0(\tau_k-), y) \in\right. \\ &\quad \left. \in (l - \delta, l] \cup [r, r + \delta)\} F_\xi(dy)\right]. \end{aligned}$$

Легко бачити, що

$$\begin{aligned} \{X_0(\tau_k-) + f(X_0(\tau_k-), y) \in (l - \delta, l] \cup [r, r + \delta)\} \downarrow \\ \downarrow \{X_0(\tau_k-) + f(X_0(\tau_k-), y) \in \{l, r\}\}, \delta \rightarrow 0+. \end{aligned}$$

З умови неперервності розподілу стрибків процесу X_0 , а також теореми Лебега про мажорановану збіжність отримаємо збіжність

$$P(A_{k,\delta}) \rightarrow 0, \delta \rightarrow 0+.$$

Для будь-якого $m \geq 1$ можна записати оцінку

$$\begin{aligned} P(\exists k \geq 1 : \tau_k \leq T, X_0(\tau_k) \in (l - \delta, l] \cup [r, r + \delta)) \leq \\ \leq P(\exists k = 1, 2, \dots, m : X_0(\tau_k) \in (l - \delta, l] \cup [r, r + \delta)) + \\ + P(\tau_m \leq T) \leq \sum_{k=1}^m P(A_{k,\delta}) + P(\tau_m \leq T). \end{aligned}$$

Таким чином,

$$\begin{aligned} \overline{\lim}_{\delta \rightarrow 0+} P(\exists k \geq 1 : \tau_k \leq T, X_0(\tau_k) \in \\ \in (l - \delta, l] \cup [r, r + \delta)) \leq P(\tau_m \leq T), \end{aligned}$$

звідки, спрямувавши $m \rightarrow \infty$, одержимо потрібну збіжність.

Тепер введемо подію

$$\begin{aligned} A_\delta = \{\exists k \geq 1 : \tau_k \leq T, X_0(\tau_k) \in \\ \in (l - \delta, l] \cup [r, r + \delta)\} = \bigcup_{k \geq 1} A_{k,\delta}. \end{aligned}$$

Застосувавши математичну індукцію за індексом k встановимо, що

$$\begin{aligned} P(|\tau_{0,T}^{(l-\delta, r+\delta)} - \tau_{0,T}^{(l,r)}| > \varepsilon, \\ \bar{A}_\delta, \tau_{0,T}^{(l,r)} < \tau_k) \rightarrow 0, \delta \rightarrow 0+. \end{aligned} \quad (4)$$

(а) *База індукції.* Для $k = 1$ з теореми 3 маємо потрібну збіжність.

(б) *Припущення індукції.* Припустимо, що для $k - 1$ має місце

$$P(|\tau_{0,T}^{(l-\delta, r+\delta)} - \tau_{0,T}^{(l,r)}| > \varepsilon,$$

$$\bar{A}_\delta, \tau_{0,T}^{(l,r)} < \tau_{k-1}) \rightarrow 0, \delta \rightarrow 0+.$$

(в) *Індуктивний крок.* Покажемо, що

$$P(|\tau_{0,T}^{(l-\delta, r+\delta)} - \tau_{0,T}^{(l,r)}| > \varepsilon,$$

$$\bar{A}_\delta, \tau_{0,T}^{(l,r)} \in [\tau_{k-1}, \tau_k)) \rightarrow 0, \delta \rightarrow 0+.$$

На події $\bar{A}_\delta \cap \{\tau_{0,T}^{(l,r)} \in [\tau_{k-1}, \tau_k)\}$ виконується одне з двох тверджень

$$\tau_{0,T}^{(l,r)} = \tau_{0,T}^{(l-\delta, r+\delta)} = \tau_{k-1},$$

$$\tau_{k-1} < \tau_{0,T}^{(l,r)} \leq \tau_{0,T}^{(l-\delta, r+\delta)}.$$

Звідси маємо оцінку

$$\begin{aligned} P(|\tau_{0,T}^{(l-\delta, r+\delta)} - \tau_{0,T}^{(l,r)}| > \varepsilon, \bar{A}_\delta, \tau_{0,T}^{(l,r)} \in [\tau_{k-1}, \tau_k)) \leq \\ \leq P(|\tau_{0,T}^{(l-\delta, r+\delta)} - \tau_{0,T}^{(l,r)}| > \varepsilon, \tau_{0,T}^{(l,r)} = \tau_{0,T}^{(l-\delta, r+\delta)}) + \\ + P(|\tau_{0,T}^{(l-\delta, r+\delta)} - \tau_{0,T}^{(l,r)}| > \varepsilon, \tau_{0,T}^{(l,r)} \in (\tau_{k-1}, \tau_k)). \end{aligned}$$

Очевидно, що перший доданок в правій частині останньої нерівності дорівнює нулю. Для другого доданку з теореми 3 маємо

$$P(|\tau_{0,T}^{(l-\delta, r+\delta)} - \tau_{0,T}^{(l,r)}| > \varepsilon,$$

$$\tau_{0,T}^{(l,r)} \in (\tau_{k-1}, \tau_k)) \rightarrow 0, \delta \rightarrow 0+.$$

Таким чином, індуктивний крок встановлено.

Тепер запишемо для довільного $k > 1$:

$$\begin{aligned} P(|\tau_{0,T}^{(l-\delta, r+\delta)} - \tau_{0,T}^{(l,r)}| > \varepsilon) \leq \\ \leq P(|\tau_{0,T}^{(l-\delta, r+\delta)} - \tau_{0,T}^{(l,r)}| > \varepsilon, \bar{A}_\delta, \tau_{0,T}^{(l,r)} < \tau_k) + \\ + P(A_\delta) + P(\tau_k \leq T). \end{aligned}$$

Перейшовши до границі

$$\overline{\lim}_{\delta \rightarrow 0+} P(|\tau_{0,T}^{(l-\delta, r+\delta)} - \tau_{0,T}^{(l,r)}| > \varepsilon) \leq P(\tau_k \leq T).$$

Спрямувавши $k \rightarrow \infty$ одержимо твердження першого пункту теореми.

Другий пункт теореми доводиться аналогічними міркуваннями. □

Сформулюємо основний результат даної роботи.

Теорема 5. Нехай для процесу X_n з (1) виконуються умови $(Y1_n)-(Y5_n)$ та $(U1_n)-(U2_n)$, умова неперервності розподілу стрибків процесу X_0 .

Тоді мають місце наступні твердження:

(а) для всіх $T > 0, \varepsilon > 0$

$$P\left(\left|\tau_{n,T}^{(l,r)} - \tau_{0,T}^{(l,r)}\right| > \varepsilon\right) \longrightarrow 0, n \rightarrow \infty.$$

(б) для всіх $T > 0, \varepsilon > 0$

$$P\left(\left|\tau_{n,T}^{(-\infty,r)} - \tau_{0,T}^{(-\infty,r)}\right| > \varepsilon\right) \longrightarrow 0, n \rightarrow \infty.$$

(в) для всіх $T > 0, \varepsilon > 0$

$$P\left(\left|\tau_{n,T}^{(l,\infty)} - \tau_{0,T}^{(l,\infty)}\right| > \varepsilon\right) \longrightarrow 0, n \rightarrow \infty.$$

Доведення. Встановимо перший пункт твердження. Нехай $\delta \in (0, \frac{r-l}{2})$. Введемо наступні події

$$A_{\varepsilon,\delta} = \{|\tau_{0,T}^{(l-\delta,r+\delta)} - \tau_{0,T}^{(l,r)}| \leq \varepsilon\} \cap \\ \cap \{|\tau_{0,T}^{(l+\delta,r-\delta)} - \tau_{0,T}^{(l,r)}| \leq \varepsilon\},$$

$$B_{n,\delta} = \left\{ \sup_{t \in [0,T]} |X_n(t) - X_0(t)| \leq \delta \right\}.$$

На події $B_{n,\delta}$ виконуються нерівності

$$\tau_{0,T}^{(l+\delta,r-\delta)} \leq \tau_{n,T}^{(l,r)} \leq \tau_{0,T}^{(l-\delta,r+\delta)}.$$

Тоді, очевидно

$$B_{n,\delta} \cap A_{\varepsilon,\delta} \subset \{|\tau_{n,T}^{(l,r)} - \tau_{0,T}^{(l,r)}| \leq \varepsilon\}.$$

Отже,

$$P(|\tau_{n,T}^{(l,r)} - \tau_{0,T}^{(l,r)}| > \varepsilon) \leq P(\bar{B}_{n,\delta}) + P(\bar{A}_{\varepsilon,\delta}).$$

За теоремою 2 маємо $P(\bar{B}_{n,\delta}) \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$. Тоді

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|\tau_{n,T}^{(l,r)} - \tau_{0,T}^{(l,r)}| > \varepsilon) \leq P(\bar{A}_{\varepsilon,\delta}).$$

Перейшовши до границі $\delta \rightarrow 0+$ та використавши теорему 4 одержимо перше твердження теореми.

Пункти (б) та (в) доводяться аналогічно. $\square$

5 Збіжність моментів досягнення меж смуги процесом X_n на всій числовій осі

Досі всі процеси та моменти досягнення розглядалися на скінченних проміжках часу $[0, T], 0 < T < \infty$. Поширимо результат теореми 5 на випадок нескінченного проміжку часу $[0, \infty)$.

Позначимо через X_0^* – розв’язок рівняння (1), в якому для всіх $x \in \mathbf{R}, \theta \in \mathbf{R}$ має місце $f_0(x, \theta) = 0$ та виконуються умови $(Y1_n) - (Y5_n)$.

Теорема 6. Нехай для процесів $X_n, n \geq 0$ виконуються умови $(Y1_n) - (Y5_n)$, $(U1_n) - (U2_n)$ та умова неперервності розподілу стрибків. Тоді мають місце наступні твердження:

(а) за виконання для процесу X_0^* однієї з умов леми 1 для всіх $\varepsilon > 0$ має місце збіжність

$$P\left(|\tau_n^{(l,r)} - \tau_0^{(l,r)}| > \varepsilon\right) \longrightarrow 0, n \rightarrow \infty. \quad (5)$$

(б) за виконання для процесу X_0^* умови (а) леми 1 для всіх $\varepsilon > 0$ має місце збіжність

$$P\left(|\tau_n^{(-\infty,r)} - \tau_0^{(-\infty,r)}| > \varepsilon\right) \longrightarrow 0, n \rightarrow \infty. \quad (6)$$

(в) за виконання для процесу X_0^* умови (б) леми 1 для всіх $\varepsilon > 0$ має місце збіжність

$$P\left(|\tau_n^{(l,\infty)} - \tau_0^{(l,\infty)}| > \varepsilon\right) \longrightarrow 0, n \rightarrow \infty. \quad (7)$$

Доведення. Оскільки процес доведення пунктів (а), (б) та (в) аналогічний, доведення наведемо лише для пункту (а). Для визначеності припускаємо виконання пункту (а) леми 1.

Оберемо сталі $\varepsilon \in (0, 1), \delta > 0$. Встановимо, що $\tau_0^{(l,r)} < \infty$ Р-майже напевне.

Для цього запишемо оцінки

$$P(\tau_0^{(l,r)} = \infty) = P(\forall k > 1, \forall t \in [\tau_{k-1}, \tau_k) :$$

$$\phi_0(t, \tau_{k-1}, X_0(\tau_{k-1})) \in (l, r)) \leq$$

$$\leq \lim_{M \rightarrow \infty} P(\forall k = 1, \dots, M \exists z \in (l, r)$$

$$\forall t \in [\tau_{k-1}, \tau_k) : \phi_0(t, \tau_{k-1}, z) \in (l, r)).$$

Ймовірності під знаком границі можна записати наступним чином, врахувавши незалежність відповідних подій для кожного k

$$A_M = P(\forall k = 1, \dots, M \exists z \in (l, r)$$

$$\begin{aligned} \forall t \in [\tau_{k-1}, \tau_k) : \phi_0(t, \tau_{k-1}, z) \in (l, r) &= \\ = \prod_{k=1}^M P(\exists z \in (l, r) \forall t \in [\tau_{k-1}, \tau_k) : & \\ \phi_0(t, \tau_{k-1}, z) \in (l, r) | F_{\tau_{k-1}}). & \end{aligned}$$

Подія під знаком ймовірності в останньому виразі залежить лише від приростів вінерового процесу W на $[\tau_{k-1}, \tau_k)$, які в свою чергу не залежать від $F_{\tau_{k-1}}$ та не залежать від τ_k . Отже

$$A_M = \prod_{k=1}^M \int_a^\infty P(\exists z \in (l, r) \forall t \in [a, b) :$$

$$\phi_0(t, a, z) \in (l, r)) \cdot \lambda \exp\{-\lambda(b-a)\} db|_{a=\tau_{k-1}},$$

де $\lambda = \nu(\mathbf{R})$.

Також з однорідності коефіцієнтів за часом можна записати

$$\begin{aligned} P(\exists z \in (l, r) \forall t \in [a, b) : \phi_0(t, a, z) \in (l, r)) &= \\ = P(\exists z \in (l, r) \forall t \in [0, b-a) : \phi_0(t, 0, z) \in (l, r)). & \end{aligned}$$

Тому

$$\begin{aligned} P(\tau_0^{(l,r)} = \infty) &\leq \lim_{M \rightarrow \infty} A_M = \\ = \lim_{M \rightarrow \infty} \left(\int_0^\infty \lambda P(\exists z \in (l, r) \forall t \in [0, T) : & \\ \phi_0(t, 0, z) \in (l, r)) \exp\{-\lambda T\} dT \right)^M &:= B_M. \end{aligned}$$

Для доведення того, що $P(\tau_0^{(l,r)} < \infty)$ м.н. потрібно показати, що $B_M < 1$. Для цього інтеграл під знаком степеня M повинен бути менший за 1. Зазначений інтеграл може бути рівний 1 лише тоді, коли

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow \infty} P(\exists z \in (l, r) \forall t \in [0, T) : \phi_0(t, 0, z) \in (l, r)) &= \\ = P(\exists z \in (l, r) \forall t \in [0, \infty) : \phi_0(t, 0, z) \in (l, r)) &= 1. \end{aligned}$$

За теоремою порівняння для стохастичних диференціальних рівнянь процес $\phi_0(t, 0, z)$ зростає за змінною z . Можна записати оцінки

$$\begin{aligned} P(\exists z \in (l, r) \forall t \in [0, \infty) : \phi_0(t, 0, z) \in (l, r)) &\leq \\ \leq P(\exists z \in (l, r) : \sup_{t \in [0, \infty)} \phi_0(t, 0, z) \leq r) &= \\ = P(\exists z \in (l, r) \forall y \in (l, z] : \sup_{t \in [0, \infty)} \phi_0(t, 0, y) \leq r) &\leq \\ \leq P(\exists y \in (l, r) \bigcap \mathbf{Q} : \sup_{t \in [0, \infty)} \phi_0(t, 0, y) \leq r) &\leq \end{aligned}$$

$$\leq \sum_{y \in (l, r) \cap \mathbf{Q}} P(\sup_{t \in [0, \infty)} \phi_0(t, 0, y) \leq r) = 0,$$

де з пункту (а) леми 1 для процесу без стрибків ϕ_0 кожен елемент останньої суми дорівнює нулю. Таким чином, встановлено, що $\tau_0^{(l,r)} < \infty$ Р-майже напевне.

Отже

$$\exists T > 0 : P(\tau_0^{(l,r)} > T - 1) < \frac{\delta}{2}.$$

Теорема 5 гарантує, що існує таке n_0 , що для всіх $n \geq n_0$ має місце

$$P(|\tau_{n,T}^{(l,r)} - \tau_{0,T}^{(l,r)}| < \varepsilon) > 1 - \frac{\delta}{2}.$$

Таким чином, справджується оцінка

$$P(|\tau_{n,T}^{(l,r)} - \tau_{0,T}^{(l,r)}| < \varepsilon,$$

$$\tau_0^{(l,r)} < T - 1) > 1 - \delta. \quad (8)$$

Оцінимо згори імовірність в правій частині нерівності (8). На $[0, T - 1)$ момент виходу $\tau_{0,T}^{(l,r)}$ збігається з моментом виходу $\tau_0^{(l,r)}$ майже напевне. Тому можна записати

$$\begin{aligned} P(|\tau_{n,T}^{(l,r)} - \tau_{0,T}^{(l,r)}| < \varepsilon, \tau_0^{(l,r)} < T - 1) &= \\ = P(|\tau_{n,T}^{(l,r)} - \tau_0^{(l,r)}| < \varepsilon, \tau_0^{(l,r)} < T - 1). & \end{aligned}$$

Також момент виходу $\tau_{n,T}^{(l,r)}$ збігається з моментом виходу $\tau_n^{(l,r)}$ майже напевне на $[0, T - 1 + \varepsilon)$. Отже має місце рівність

$$\begin{aligned} P(|\tau_{n,T}^{(l,r)} - \tau_0^{(l,r)}| < \varepsilon, \tau_0^{(l,r)} < T - 1) &= \\ = P(|\tau_n^{(l,r)} - \tau_0^{(l,r)}| < \varepsilon, \tau_0^{(l,r)} < T - 1). & \end{aligned}$$

Таким чином, з (8) отримаємо оцінку для всіх $n \geq n_0$

$$\begin{aligned} 1 - \delta < P(|\tau_n^{(l,r)} - \tau_0^{(l,r)}| < \varepsilon, \tau_0^{(l,r)} < T - 1) &\leq \\ \leq P(|\tau_n^{(l,r)} - \tau_0^{(l,r)}| < \varepsilon), & \end{aligned}$$

що завершує доведення теореми. $\square$

6 Приклад необхідності умови неперервності розподілу стрибків

Наведемо приклад, що ілюструє необхідність умови неперервності розподілу стрибків (означення 1).

Приклад 1. Нехай для всіх $n \geq 0$ має місце $b_n = \sigma_n = 0, f_n = 1$. Припустимо, що $\nu(d\theta) = \delta_1(d\theta)$ та $\mu(d\theta, dt) = \delta_1(d\theta)dt$, де δ_1 – точкова міра, зосереджена в точці $\{1\}$. Тоді процес Леві L , що відповідає мірі μ , є процесом Пуассона. Тобто

$$L(t) = \int_0^t \int_{\mathbf{R}} \theta \mu(d\theta, ds) = N(t).$$

Легко бачити, що за поставлених умов процес X_n має вигляд

$$X_n(t) = X_n(0) + L(t), n \geq 0.$$

Покладемо $X_n(0) = -\frac{1}{n}$. Очевидно, що за збіжності $(U1_n)$ має місце $X_0(0) = 0$.

Нехай $l = -1, r = 1$ та дослідимо моменти досягнення $\tau_n^{(l,r)}$. Процеси X_n мають не випадкові початкові умови і перша зміна значення процесу відбувається в момент τ_1 стрибка

процесу Пуассона N з приростом 1. Оскільки $X_n(0) = -\frac{1}{n}$, то $X_n(\tau_1) = 1 - \frac{1}{n} < 1$, проте $X_n(\tau_2) = 2 - \frac{1}{n} > 1$. Тому $\tau_n^{(l,r)} = \tau_2$.

Що стосується граничного процесу X_0 , для нього $X_0(0) = 0$, тому $X_0(\tau_1) = 1$ і $\tau_0^{(l,r)} = \tau_1$. Таким чином, немає збіжності за ймовірністю $\tau_n^{(l,r)}$ до $\tau_0^{(l,r)}$.

Для побудованого процесу X_n умова неперервності розподілу стрибків не виконується, оскільки міра стрибків процесу X_n зосереджена в точці $\{1\}$.

7 Висновки

Для процесу, породженого СДР зі стрибками та неліпшицевою дифузиею встановлено:

- 1) стійкість відносно меж смуги моментів досягнення процесом меж смуги;
- 2) збіжність за ймовірністю моментів досягнення процесом меж смуги;
- 3) наведено приклади.

Література

1. Томашик В.В. Збіжність моментів виходу дифузійних процесів зі смуги. / Мішура Ю.С., Томашик В.В. // Теорія ймовірностей та мат. статистика. — 2013. — Т. 88. — С.95–105.
2. Мороз А.Г. Сходимость решений и моментов выхода решений из полосы в диффузионных моделях со скачками / А.Г.Мороз, В.В.Томашик // Кибернетика и системный анализ. — 2014. — Т.50,№2. — С.144-152.
3. Гихман И.И. Стохастические дифференциальные уравнения / И.И.Гихман, А.В.Скороход. — К.:Наукова думка, 1968. — 354с.
4. Ito K. Diffusion Processes and Their Sample Paths / K. Ito, H.P.McKean. — Berlin:Springer, 1965. — 321p.

References

1. TOMASHYK, V.V. and MISHURA, Yu.S. (2013) Zbizhnist momentiv vyhodu dyfuziinyh procesiv zi smuhy. *Teoriya imovirnostei ta mat. statistika*. 88. p.95-105.
2. MOROZ, A.G. and TOMASHYK, V.V. (2014) Skhodimost reshenii i momentov vyhoda reshenii iz polosy v diffuzionnyh modeliah so skachkami. *Kibernetika i sistemnyi analiz*. 50(2). p.144-152.
3. GIKHMAN, I.I. and SKOROKHOD, A.V. (1965) *Stokhasticheskie differentsialnyie uravnenia*. Kyiv:Naukova Dumka.
4. ITO, K. and McKEAN, H.P. (1965) *Diffusion Processes and Their Sample Paths*, Berlin:Springer.

Received: 15.11.2013

УДК 519.21

В.Б. Трошкі¹, аспірант

**Ідеальне шумопоглинання для сигналів
із φ -субгауссовими шумами**

¹Ужгородський національний університет, математичний факультет, 88016, Ужгород, вул. Університетська 14, e-mail: btroshki@ukr.net

V.B. Troshki¹, postgraduate

**Ideal de-noising for signals in
 φ -sub-Gaussian noise**

¹ Uzhhorod National University, Faculty of Mathematics, 88016, Uzhhorod, University str., 14, e-mail: btroshki@ukr.net

Донаго та Джонстоун розглядали ідеальне шумопоглинання для сигналів із гауссовими шумами, а Себастьян Феррандо та Рандал Пайк отримали результати для сигналів з строго субгауссовими перешкодами. Основною метою даної статті є – розширити класи векторів перешкод. Тут в якості шумів розглянуті випадкові величини з простору $Sub_\varphi(\Omega)$. Отримані оцінки для сигналів із шумами хвосту розподілів яких є "важчими" або "легшими" за гауссові.

Ключові слова: шумопоглинання, простір φ -субгауссових випадкових величин, розподіл Вейбула.

Donoho and Johnstone introduced an algorithm and supporting inequality that allows the selection of an orthonormal basis for optimal denoising. They considered ideal de-noising for signals in Gaussian noise and Sebastian E. Ferrando with Randall Pyke obtained the results for signals in strictly sub-Gaussian noise. The present paper concentrates in extending and improving this result, the main contribution is to incorporate a wider class of noise vectors. We consider signals with φ -sub-Gaussian noise. In particular, we show that the random variables which have centered Weibull distribution belongs to $Sub_\varphi(\Omega)$. Estimates for the signals in which the tails of the distribution of noise is "lighter" or "heavier" than Gaussian are established.

Keywords: Signal de-noising, φ -sub-Gaussian space, Weibull distribution.

Communicated by Prof. Kozachenko Yu.V.

Introduction

The subject of this paper is oracle based de-noising. Let s be a signal embedded in noise, we are interested in estimators $\hat{s}$, for the signal s , obtained by thresholding coefficients in an orthonormal basis $\mathcal{B}$ of $\mathbb{R}^n$. We consider the problem of optimal basis selection when there is available a library $\mathcal{L}$ of such bases from which to choose from. We will look for estimators which satisfy the following oracle-type inequality with high probability

$$\|\hat{s} - s\|_2^2 \leq c \min_{\mathcal{B} \in \mathcal{L}} \mathcal{R}(s, \mathcal{B}). \quad (1)$$

$\mathcal{R}(s, \mathcal{B})$ is the oracle risk for the basis $\mathcal{B}$, this last quantity is the average quadratic error incurred by an oracle estimator. This last estimator makes use of knowledge of s and is of excellent quality but unavailable in practice. After proper re-scaling, it can be argued that an inequality of the above type is asymptotically optimal as the oracle risk decays in a best possible manner. Therefore, this

type of inequality gives an apriori measure for the quality of the algorithm associated to estimators satisfying (1).

Ideal de-noising for signals with Gaussian noise is considered in [3]. The results for strictly sub-Gaussian noise are obtained in the paper [4].

Ideal de-noising for signals with φ -sub-Gaussian noise is considered in this paper. The notion of the $Sub_\varphi(\Omega)$ space is introduced in the paper [6]. The definition and properties of random variables are studied in [5] (see also the book [1]).

The main point of the present article is to extend the results obtained in [3] and [4] to a wider class of noise vectors. Our results have been thus obtained that the algorithmic content of the original results have been preserved, in particular the thresholding parameters used are the ones used in [4]. We generalize Gaussian and sub-Gaussian hypothesis and we require that the noise vector satisfies a φ -sub-Gaussian hypothesis. Esti-

mates of the risk of signal detection that occurred in the case of Gaussian noise and sub-Gaussian noise holds for φ -sub-Gaussian random variables are studied. That is why the results, which are obtained in this paper, can be used for wider class of noise. In particular the random variables which have centered Weibull distribution belongs to $Sub_\varphi(\Omega)$.

1 Basic definitions and some preliminary results from the theory of $Sub_\varphi(\Omega)$

The definition and properties of random variables are studied in [5] (see also the book [1]). We now provide a number of results that we will use extensively in this paper.

Definition 1. ([2]) Let $\varphi = \{\varphi(x), x \in \mathbb{R}\}$ be a continuous even convex function. φ is called an Orlicz N -function if $\varphi(0) = 0$, $\varphi(x) > 0$ as $x \neq 0$ and the following conditions hold

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varphi(x)}{x} = 0, \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\varphi(x)}{x} = \infty. \quad (3)$$

Lemma 1. ([6], [2]) For any N -function φ the following statements hold:

a) $\varphi(|x| + |y|) \geq \varphi(x) + \varphi(y)$ as $x \in \mathbb{R}, 0 \leq \alpha \leq 1$;

b) $\varphi(x) = \int_0^{|x|} p(t)dt$, where the density $p = \{p(t), t \geq 0\}$ is right continuous non-decreasing $p(0) = 0$ and $p(t) \rightarrow \infty$ as $t \rightarrow \infty$.

Definition 2. ([2], [5]) Let $\varphi = \{\varphi(x), x \in \mathbb{R}\}$ be an N -function. The function φ^* defined by

$$\varphi^* = \sup_{y \in \mathbb{R}} (xy - \varphi(y)),$$

is called the Young-Fenchel transform of φ

Remark 1. ([5]) The Young-Fenchel transform of an N -function is an N -function as well.

Example 1. ([5]) If

$$\varphi(x) = \frac{x^p}{p}, 1 < p \leq 2, \quad (4)$$

then

$$\varphi^*(x) = \frac{x^q}{q},$$

where q is such that $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Example 2. Let

$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{p}, & |x| \leq 1, \\ \frac{x^p}{p}, & |x| > 1 \end{cases} \quad \text{when } p > 2, \quad (5)$$

Find $\varphi^*(x)$. From Lemma 1 it follows that for all $x > 0$ $\varphi(x) = \int_0^x p(u)du$, where

$$p(u) = \begin{cases} \frac{2u}{p}, & 0 \leq u \leq 1, \\ u^{p-1}, & u > 1. \end{cases}$$

Then

$$p^{(-1)}(u) = \begin{cases} \frac{p}{2}u, & 0 \leq x < 2/p, \\ 1, & 2/p \leq x \leq 1. \\ u^{1/(p-1)}, & u > 1. \end{cases}$$

From Lemma 1 and remark 1 follows that $\varphi^*(x) = \int_0^x p^{(-1)}(u)du$.

Therefore

$$\varphi^*(x) = \begin{cases} \frac{p}{4}x^2, & 0 < x \leq \frac{2}{p}, \\ x - 1/p, & \frac{2}{p} \leq x \leq 1, \\ \frac{p-1}{p}x^{p/(p-1)}, & x > 1. \end{cases}$$

Lemma 2. Let $\varphi_1(x)$ and $\varphi_2(x)$ be two N -function, where $\varphi_1(x) < \varphi_2(x)$. Then $\varphi_2^*(x) \leq \varphi_1^*(x)$.

Proof. From the Young-Fenchel inequality it follows

$$\begin{aligned} \varphi_1^*(x) &= \sup_{y>0} (xy - \varphi_1(y)) \geq \\ &\geq \sup_{y>0} (xy - \varphi_2(y)) = \varphi_2^*(x). \end{aligned}$$

Thus $\varphi_2^*(x) \leq \varphi_1^*(x)$. □

Condition Q ([5]): An N -function φ satisfies Q if

$$\liminf_{x \rightarrow 0} \frac{\varphi(x)}{x^2} = c > 0.$$

Let $\{\Omega, \mathbf{B}, \mathcal{P}\}$ be a standard probability space.

Definition 3. ([5]) Let φ be an N -function satisfying condition Q . The random variable ξ belongs to the space $Sub_\varphi(\Omega)$ if $E\xi = 0$, $E\exp\{\lambda\xi\}$ exists for all $\lambda \in \mathbb{R}$ and there exists a constant $a > 0$ such that the following inequality holds for all $\lambda \in \mathbb{R}$

$$E\exp\{\lambda\xi\} \leq \exp\{\varphi(\lambda a)\}.$$

Consider now the following functional, defined on the space $Sub_\varphi(\Omega)$:

$$\tau_\varphi(\xi) = \inf(a \geq 0 : E \exp\{\lambda \xi\} \leq \exp\{\varphi(\lambda a)\}, \lambda \in \mathbb{R}).$$

Theorem 1. ([5]) *The space $Sub_\varphi(\Omega)$ is a Banach space with respect to the norm $\tau_\varphi(\cdot)$.*

Lemma 3. ([5]) *Let $\xi \in Sub_\varphi(\Omega)$, $\tau_\varphi(\xi) > 0$, $\varepsilon > 0$. The following inequality holds*

$$P\{|\xi| > \varepsilon\} \leq 2 \exp\left\{-\varphi^*\left(\frac{\varepsilon}{\tau_\varphi(\xi)}\right)\right\}.$$

Theorem 2. ([5]) *The random variable $\xi \in Sub_\varphi(\Omega)$ if and only if $E\xi = 0$ and there exist two constants $C > 0$ and $D > 0$ such that*

$$P\{|\xi| > x\} \leq C \exp\left\{-\varphi^*\left(\frac{x}{D}\right)\right\} \quad (6)$$

for any $x > 0$. If (6) holds then $\tau_\varphi(\xi) \leq (1 + C)DS_\varphi e^{\frac{49}{48}}$, where $S_\varphi = \max_{i=1,3} \gamma_i^{-1}$, γ_1 the root of the equation $\gamma = \lambda_0 \sqrt{c_0(1-\gamma)}$; γ_2 the root of the equation $\gamma^3 - 2(1-\gamma) = 0$; γ_3 the root of the equation $\gamma = \varphi^{(-1)}(2)\sqrt{c_0(1-\gamma)}$, where $\lambda_0 > 0$ be any number and $c_0 = \inf_{0 < |\lambda| \leq \lambda_0} \frac{\varphi(\lambda)}{\lambda^2}$.

2 Main results

Lemma 4. *Let $I(t) = \int_0^\infty \exp\left\{tu - \frac{u^{q/2}}{q}\right\} du$, $q > 2$. Then*

$$I(t) \leq 2^{2/q} C_q \exp\left\{t^{\frac{q}{q-2}} C_{1/2,q}\right\},$$

where $C_q = \int_0^\infty \exp\left\{-\frac{s^{q/2}}{q}\right\} ds$ and $C_{1/2,q} = 4^{2/(q-2)}(q-2)/q$.

Proof. From the Young-Fenchel inequality follows that for any $s > 0$, $v > 0$ holds

$$sv \leq \varphi(s) + \varphi^*(v). \quad (7)$$

Consider

$$tu - \frac{u^{q/2}}{q} = tu - \frac{u^{q/2}}{2q} - \frac{u^{q/2}}{2q};$$

$$tu - \frac{u^{q/2}}{2q} = \frac{1}{4} \left(tu - \frac{u^{q/2}}{q/2}\right).$$

Let $\varphi(s) = \frac{s^{q/2}}{q/2}$, then $\varphi^*(s) = \frac{s^r}{r}$, where $\frac{1}{r} + \frac{1}{q/2} = 1$. It follows that $r = \frac{q}{q-2}$. Therefore $\varphi^*(s) = \frac{q-2}{q} s^{q/(q-2)}$. Then from (7) obtain

$$tu - \frac{1}{2} \frac{u^{q/2}}{q/2} \leq \frac{1}{4} (4t)^{\frac{q}{q-2}} \frac{q-2}{q} = t^{\frac{q}{q-2}} C_{\frac{1}{2},q}.$$

Hence,

$$I(t) \leq \exp\left\{t^{\frac{q}{q-2}} C_{\frac{1}{2},q}\right\} \int_0^\infty \exp\left\{-\frac{u^{q/2}}{2q}\right\} du = 2^{2/q} C_q \exp\left\{t^{\frac{q}{q-2}} C_{\frac{1}{2},q}\right\}.$$

□

Remark 2. If $q = 2$ then $Sub_\varphi(\Omega) = Sub(\Omega)$, thus this occasion does not regarded.

Lemma 5. *Let $\xi \in Sub_\varphi(\Omega)$ and $\varphi(x)$ be determined in (4), that is $\varphi^*(x) = \frac{x^q}{q}$ where q is such that $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Then for any t the following inequality holds*

$$E \exp\left\{\frac{t\xi^2}{\tau^2}\right\} \leq 1 + t 2^{\frac{q+2}{q}} C_q \exp\left\{t^{\frac{q}{q-2}} C_{\frac{1}{2},q}\right\}. \quad (8)$$

Proof. Let $\varphi^*(x)$ be the Young-Fenchel transform of function $\varphi(x)$. Denote $\eta = \xi^2$, then $\eta \geq 0$. Let $F_\eta(x)$ be distribution function of random variable η . From Lemma 6 it follows that

$$1 - F_\eta(x) = P\{\eta > x\} = P\{\xi^2 > x\} = P\{|\xi| > \sqrt{x}\} \leq 2 \exp\left\{-\varphi^*\left(\frac{\sqrt{x}}{\tau}\right)\right\}. \quad (9)$$

Consider

$$E \exp\left\{\frac{t\xi^2}{\tau^2}\right\} = E \exp\left\{\frac{t\eta}{\tau^2}\right\} = \int_0^\infty \exp\left\{\frac{tu}{\tau^2}\right\} dF_\eta(u) = - \int_0^\infty \exp\left\{\frac{tu}{\tau^2}\right\} d(1 - F_\eta(u)).$$

Calculate this integral by parts, then

$$E \exp\left\{\frac{t\xi^2}{\tau^2}\right\} = - \exp\left\{\frac{tu}{\tau^2}\right\} (1 - F_\eta(u)) \Big|_0^\infty + \int_0^\infty \frac{t}{\tau^2} (1 - F_\eta(u)) \exp\left\{\frac{tu}{\tau^2}\right\} du.$$

The first summand in upper bound converting in origin if $u \rightarrow \infty$, since

$$(1 - F_\eta(u)) \exp\left\{\frac{tu}{\tau^2}\right\} \leq 2 \exp\left\{-\frac{u^{q/2}}{q\tau^q}\right\} \exp\left\{\frac{tu}{\tau^2}\right\} = \exp\left\{\frac{tu}{\tau^2} - \frac{u^{q/2}}{q\tau^q}\right\} \rightarrow 0,$$

and in lower bound converting in one, therefore
that $1 - F_\eta(0) = 1$. Then from inequality (9) and
Lemma 3 it follows that

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \exp \left\{ \frac{t\xi^2}{\tau^2} \right\} &\leq 1 + \frac{2t}{\tau^2} \int_0^\infty \exp \left\{ \frac{tu}{\tau^2} \right\} \times \\ &\times \exp \left\{ -\frac{u^{\frac{q}{2}}}{q\tau^q} \right\} du = 1 + \\ &\frac{2t}{\tau^2} \int_0^\infty \exp \left\{ \frac{tu}{\tau^2} - \frac{u^{\frac{q}{2}}}{q\tau^q} \right\} du = \\ &1 + 2t \int_0^\infty \exp \left\{ tu - \frac{u^{\frac{q}{2}}}{q} \right\} du \leq \\ &1 + t2^{(q+1)/q} C_q \exp \left\{ t^{q/(q-2)} C_{1/2,q} \right\}. \end{aligned}$$

□

Lemma 6. Let $\xi \in \text{Sub}_\varphi(\Omega)$ and $\varphi(x)$ be determined in (5), namely for $p > 2$ (see Example 1.2)

$$\varphi^*(x) = \begin{cases} \frac{p}{4}x^2, & 0 < x \leq 2/p, \\ x - 1/p, & 2/p \leq x \leq 1, \\ \frac{p-1}{p}x^{\frac{p}{p-1}}, & x > 1. \end{cases}$$

Then if $t < 1$ the following inequality holds

$$\mathbb{E} \exp \left\{ \varphi^* \left(\frac{t\xi}{\tau} \right) \right\} \leq \frac{2}{1 - t^q}. \quad (10)$$

Proof. Let $F_\xi(x)$ be distribution function of random variable ξ and $\varphi^*(x)$ be the Young-Fenchel transform of function $\varphi(x)$. Since $\varphi^*(x)$ is even (it follows from remark 1) then

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \exp \left\{ \varphi^* \left(\frac{t|\xi|}{\tau} \right) \right\} &= \mathbb{E} \exp \left\{ \varphi^* \left(\frac{t\xi}{\tau} \right) \right\} = \\ &\int_0^\infty \exp \left\{ \varphi^* \left(\frac{tu}{\tau} \right) \right\} d(F(u)). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \exp \left\{ \varphi^* \left(\frac{t\xi}{\tau} \right) \right\} &= \\ &= - \int_0^\infty \exp \left\{ \varphi^* \left(\frac{tu}{\tau} \right) \right\} d(1 - F(u)) = \\ &= - \int_0^{2\tau/tp} \exp \left\{ \varphi^* \left(\frac{tu}{\tau} \right) \right\} d(1 - F(u)) - \\ &\quad - \int_{2\tau/tp}^{\tau/t} \exp \left\{ \varphi^* \left(\frac{tu}{\tau} \right) \right\} d(1 - F(u)) - \\ &\quad - \int_{\tau/t}^\infty \exp \left\{ \varphi^* \left(\frac{tu}{\tau} \right) \right\} d(1 - F(u)) = \\ &= - (1 - F(u)) \exp \left\{ \varphi^* \left(\frac{tu}{\tau} \right) \right\} \Big|_0^{2\tau/tp} + \\ &\quad + \int_0^{2\tau/tp} (1 - F(u)) \exp \left\{ \varphi^* \left(\frac{tu}{\tau} \right) \right\} d\varphi^* \left(\frac{tu}{\tau} \right) - \\ &\quad - (1 - F(u)) \exp \left\{ \varphi^* \left(\frac{tu}{\tau} \right) \right\} \Big|_{2\tau/tp}^{\tau/t} + \\ &\quad + \int_{2\tau/tp}^{\tau/t} (1 - F(u)) \exp \left\{ \varphi^* \left(\frac{tu}{\tau} \right) \right\} d\varphi^* \left(\frac{tu}{\tau} \right) - \\ &\quad - (1 - F(u)) \exp \left\{ \varphi^* \left(\frac{tu}{\tau} \right) \right\} \Big|_{\tau/t}^\infty + \\ &\quad + \int_{\tau/t}^\infty (1 - F(u)) \exp \left\{ \varphi^* \left(\frac{tu}{\tau} \right) \right\} d\varphi^* \left(\frac{tu}{\tau} \right) = \\ &= - (1 - F(2\tau/tp)) \exp \left\{ \varphi^* (2/p) \right\} + \\ &\quad + 1 - (1 - F(\tau/t)) \exp \left\{ \varphi^* (1) \right\} + \\ &\quad + (1 - F(2\tau/tp)) \exp \left\{ \varphi^* (2/p) \right\} + \\ &\quad + (1 - F(\tau/t)) \exp \left\{ \varphi^* (1) \right\} + \\ &\quad + \int_0^{2\tau/tp} (1 - F(u)) \exp \left\{ \varphi^* \left(\frac{tu}{\tau} \right) \right\} d\varphi^* \left(\frac{tu}{\tau} \right) + \\ &\quad + \int_{2\tau/tp}^{\tau/t} (1 - F(u)) \exp \left\{ \varphi^* \left(\frac{tu}{\tau} \right) \right\} d\varphi^* \left(\frac{tu}{\tau} \right) + \\ &\quad + \int_{\tau/t}^\infty (1 - F(u)) \exp \left\{ \varphi^* \left(\frac{tu}{\tau} \right) \right\} d\varphi^* \left(\frac{tu}{\tau} \right). \end{aligned}$$

From Lemma 3 it follows that

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \exp \left\{ \varphi^* \left(\frac{t\xi}{\tau} \right) \right\} &\leq 2 + 2 \int_0^{\frac{2\tau}{tp}} \exp \left\{ -\frac{pu^2}{4\tau^2} \right\} \times \\ &\quad \times \exp \left\{ \frac{p(tu)^2}{4\tau^2} \right\} d \left(\frac{p(tu)^2}{4\tau^2} \right) + \\ &\quad + 2 \int_{2\tau/tp}^{\tau/t} \exp \left\{ -\left(\frac{u}{\tau} - \frac{1}{p} \right) \right\} \exp \left\{ \frac{tu}{\tau} - \frac{1}{p} \right\} d \left(\frac{tu}{\tau} \right) \\ &\quad + 4 \int_{\tau/t}^\infty \exp \left\{ -\frac{1}{q} \left(\frac{u}{\tau} \right)^q \right\} \exp \left\{ \frac{1}{q} \left(\frac{tu}{\tau} \right)^q \right\} d \left(\frac{1}{q} \left(\frac{tu}{\tau} \right)^q \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{2t^2}{t^2-1} \int_0^{2\tau/tp} \exp \left\{ \frac{pu^2}{4\tau^2} (t^2-1) \right\} d \left(\frac{pu^2}{4\tau^2} (t^2-1) \right) \\
 &+ 2 + \frac{2t}{t-1} \int_{\frac{2\tau}{tp}}^{\frac{\tau}{t}} \exp \left\{ \frac{u}{\tau} (t-1) \right\} d \left(\frac{u}{\tau} (t-1) \right) + \\
 &\frac{2t^q}{t^q-1} \int_{\frac{\tau}{t}}^{\infty} \exp \left\{ \frac{1}{q} \left(\frac{u}{\tau} \right)^q (t^q-1) \right\} \times \\
 &\quad \times d \left(\frac{1}{q} \left(\frac{u}{\tau} \right)^q (t^q-1) \right) = \\
 &= 2 + \frac{2t^2}{t^2-1} \exp \left\{ \frac{pu^2}{4\tau^2} (t^2-1) \right\} \Big|_0^{\frac{2\tau}{tp}} + \\
 &\frac{2t}{t-1} \exp \left\{ \frac{u}{\tau} (t-1) \right\} \Big|_{\frac{2\tau}{tp}}^{\frac{\tau}{t}} + \frac{2t^q}{t^q-1} \times \\
 &\quad \times \exp \left\{ \frac{1}{q} \left(\frac{u}{\tau} \right)^q (t^q-1) \right\} \Big|_{\frac{\tau}{t}}^{\infty} = \\
 &= 2 + \frac{2t^2}{t^2-1} \left(\exp \left\{ \frac{t^2-1}{t^2} \right\} - 1 \right) + \\
 &\frac{2t}{t-1} \left(\exp \left\{ \frac{t-1}{t} \right\} \exp \left\{ \frac{2(t-1)}{pt} \right\} \right) - \\
 &\quad - \frac{2t^q}{t^q-1} \exp \left\{ \frac{t^q-1}{qt^q} \right\}.
 \end{aligned}$$

Since $p > 2$ and $0 \leq t < 1$ thus

$$\begin{aligned}
 \exp \left\{ \frac{t-1}{t} \right\} &\leq \exp \left\{ \frac{2(t-1)}{pt} \right\}; \\
 \exp \left\{ 1 - \frac{1}{t^2} \right\} &\leq \exp \left\{ \frac{1}{q} \left(1 - \frac{1}{t^q} \right) \right\}; \\
 \exp \left\{ 1 - \frac{1}{t^2} \right\} &< 1; \\
 \frac{t^q}{t^q-1} &\leq \frac{t^2}{t^2-1}.
 \end{aligned}$$

From these inequalities it follows that

$$\begin{aligned}
 E \exp \left\{ \varphi^* \left(\frac{t\xi}{\tau} \right) \right\} &\leq 2 + \frac{2t^q}{t^q-1} \left(\exp \left\{ 1 - \frac{1}{t^2} \right\} - 1 \right) \\
 &- \frac{2t^q}{t^q-1} \exp \left\{ \frac{1}{q} \left(1 - \frac{1}{t^q} \right) \right\} \leq 2 - \frac{2t^q}{t^q-1} + \\
 &+ \frac{2t^q}{t^q-1} \left(\exp \left\{ 1 - \frac{1}{t^2} \right\} - \exp \left\{ \frac{1}{q} \left(1 - \frac{1}{t^q} \right) \right\} \right) \\
 &\leq 2 \left(1 - \frac{t^q}{t^q-1} \right) = \frac{-2}{t^q-1} = \frac{2}{1-t^q}.
 \end{aligned}$$

□

Let $\mathcal{L}$ be a library of orthonormal bases of $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{M}_n$ the set of distinct vectors in $\mathcal{L}$. M_n will denote the cardinality of $\mathcal{M}_n$. If $\mathcal{B}$ is orthonormal bases of $\mathbb{R}^n$ then by $s_k[\mathcal{B}]$ denote the k^{th} coordinate of s in the basis $\mathcal{B}$.

Put

$$\delta_n(\lambda) = 4\lambda(1 + 2\log M_n)) \quad (11)$$

and

$$\Lambda_n = \Lambda_n(\lambda) = \tau^2 \delta_n(\lambda), \lambda > 2$$

The data is given in the form

$$y = s + z$$

where s is the deterministic signal and z is a noise vector whose coordinates are assumed to be i.i.d. φ -sub-gaussian random variables.

Introduce the empirical entropy for defined best orthogonal basis as in [3]

$$\varepsilon_\lambda(y, \mathcal{B}) = \sum_i \min(y_i^2[\mathcal{B}], \Lambda_n)$$

Let $\hat{\mathcal{B}}$ be the best orthogonal basis according to this entropy

$$\hat{\mathcal{B}} = \arg \min_{\mathcal{B} \in \mathcal{L}} \varepsilon_\lambda(y, \mathcal{B})$$

For determined thresholding z consider function what defined for all real c as follows

$$\eta_z(c) = c \mathcal{I}_{\{|c| > z\}},$$

where $\mathcal{I}_{\{|c| > z\}}$ is the characteristic function of the set $(-\infty; -z) \cup (z; \infty)$. Apply hard thresholding to obtain the empirical best estimate for signal s in the basis $\hat{\mathcal{B}}$

$$\hat{s}_i^*[\hat{\mathcal{B}}] = \eta_{\sqrt{\Lambda_n}}(y_i[\hat{\mathcal{B}}])$$

Consider the complexity functional as well as it was done in [4]

$$\begin{aligned}
 K(s, \tilde{s}) &= \| \tilde{s} - s \|_2^2 + \Lambda_n \min_{\mathcal{B} \in \mathcal{L}} \sum_{\{i, \tilde{s}_i[\mathcal{B}] \neq 0\}} 1 = \\
 &= \| \tilde{s} - s \|_2^2 + \Lambda_n N_{\mathcal{L}}(\tilde{s})
 \end{aligned}$$

where

$$N_{\mathcal{L}}(\tilde{s}) = \min_{\mathcal{B}} \# \{e_i \in \mathcal{B} : \tilde{s}_i[\mathcal{B}] \neq 0\}.$$

Let s^0 denote a signal of minimum theoretical complexity i.e.

$$K(s^0, s) = \min_{\tilde{s}} K(\tilde{s}, s)$$

$$\text{Let } j_0 \equiv \max(N_{\mathcal{L}}(s^0), 1).$$

Using the result obtained above it can be shown that the estimate from [4]

$$\| s^* - s \|_2^2 \leq \frac{2\lambda\delta_n(\lambda)}{\lambda-2} \mathcal{R}^*(s, \mathcal{L}),$$

where

$$\mathcal{R}^*(s, \mathcal{L}) = \min_{\mathcal{B}} \sum_i \min(s_i^2[\mathcal{B}], \tau^2) \quad (13)$$

with a certain probability holds for φ -sub-gaussian random variables.

Theorem 3. Let $\varphi(x)$ be defined as in (4) namely $\varphi^*(x) = \frac{x^q}{q}$, where q is such that equality $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ holds. If the data is presented as $y = s + z$, where $z \in \text{Sub}_\varphi(\Omega)$ (see (12)) then when $t = 1$

$$P \left\{ \|\hat{s}^* - s\|_2^2 \geq \frac{2\lambda\delta_n(\lambda)}{\lambda-2} \mathcal{R}^*(s, \mathcal{L}) \right\} \leq \frac{\exp\{C-j_0\}}{M_n^{j_0}} \quad (14)$$

where $\delta_n(\lambda) = 4\lambda(1 + 2\log M_n)$, $\mathcal{R}^*(s, \mathcal{L}) = \min_B \sum_i \min(s_i^2[\mathcal{B}], \tau^2)$, $C = 1 + 2^{\frac{q+2}{q}} C_q \exp\{C_{\frac{1}{2},q}\}$, constants C_q and $C_{\frac{1}{2},q}$ are defined in Lemma 4.

Proof. Let $C(j, M_n)$ denotes the collection of all subsets consisting of j vectors chosen from the M_n vectors of $\mathcal{M}_n$. Let $\hat{S} \in C(j, M_n)$ be subspace generated by the element of $C(j, M_n)$. Let P_S be an orthogonal projection on S .

Consider the set

$$A = \left\{ \omega : \|P_S z(\omega)\|_2 \geq \frac{\sqrt{\Lambda_n} \sqrt{N_{\mathcal{L}}(s^0) + N_{\mathcal{L}}(\hat{s}^*)}}{2\sqrt{\lambda}} \right\}$$

and

$$B_j \equiv \left\{ \omega : \sup_{\hat{S} \in C(j, M_n)} \|P_{\hat{S}} z(\omega)\|_2 \geq \frac{\sqrt{\Lambda_n} \sqrt{j}}{2\sqrt{\lambda}} \right\}$$

Then $A \subseteq \bigcup_{j=j_0}^{M_n} B_j$. Let $a = \frac{\sqrt{\Lambda_n} \sqrt{j}}{2\sqrt{\lambda}}$ and fixed subspace $\hat{S}_1 \in C(j, M_n)$ be of dimension d , $d \leq j$.

Consider the set

$$D_j = \{\omega : \|P_{\hat{S}_1} z(\omega)\|_2 \geq a\}$$

Let $\{e_1, e_2, \dots, e_d\}$ be an orthonormal basis of $\hat{S}_1$. Extend $\{e_1, e_2, \dots, e_d\}$ to an orthonormal basis $\mathbb{R}^n$

$$\varepsilon = \{e_1, e_2, \dots, e_d, e_{d+1}, \dots, e_n\}.$$

Then

$$z = \sum_{k=1}^n \langle z, e_k \rangle e_k$$

and

$$\xi = P_{\hat{S}_1} z = \sum_{k=1}^d \langle z, e_k \rangle e_k.$$

Evidently, $\xi_k[\varepsilon] = z_k[\varepsilon]$ when $k = \overline{1, d}$ and $\xi_k[\varepsilon] = 0$ when $k = \overline{d+1, n}$

From Chebyshev inequality and (10) and the fact that the random variables are independent we obtain

$$\begin{aligned} P(D_j) &= P\{\|\xi\|_2 > a\} = \\ &= P\left\{\exp\left\{\frac{t\|\xi\|_2^2}{\tau^2}\right\} > \exp\left\{\frac{ta^2}{\tau^2}\right\}\right\} \leq \\ &\leq \frac{E \exp\left\{\frac{t}{\tau^2} \sum_{k=1}^d \xi_k^2\right\}}{\exp\left\{\frac{ta^2}{\tau^2}\right\}} = \frac{E \prod_{k=1}^d \exp\left\{\frac{t}{\tau^2} \xi_k^2\right\}}{\exp\left\{\frac{ta^2}{\tau^2}\right\}} \leq \\ &= \frac{E \prod_{k=1}^j \exp\left\{\frac{t}{\tau^2} \xi_k^2\right\}}{\exp\left\{\frac{ta^2}{\tau^2}\right\}} = \frac{\prod_{k=1}^j E \exp\left\{\frac{t}{\tau^2} \xi_k^2\right\}}{\exp\left\{\frac{ta^2}{\tau^2}\right\}} \leq \\ &\leq \left(1 + t 2^{\frac{q+2}{q}} C_q \exp\left\{t^{\frac{q}{q-2}} C_{\frac{1}{2},q}\right\}\right)^j \exp\left\{-\frac{ta^2}{\tau^2}\right\} \end{aligned}$$

Denote $C(t) = 1 + t 2^{\frac{q+2}{q}} C_q \exp\left\{t^{\frac{q}{q-2}} C_{\frac{1}{2},q}\right\}$. Then

$$\begin{aligned} P(D_j) &\leq C^j(t) \exp\left\{-\frac{ta^2}{\tau^2}\right\} = \\ &= C^j(t) \exp\left\{-\frac{\tau^2 t j (1+2\log M_n)}{\tau^2}\right\} = \\ &= C^j(t) e^{-jt} M_n^{-2jt} \end{aligned}$$

With this common bound, i.e. independent of the particular $\hat{S}_1$, we have

$$\begin{aligned} P(B_j) &\leq \#C(j, M_n) C^j(t) M_n^{-2jt} e^{-jt} = \\ &= \binom{M_n}{j} C^j(t) M_n^{-2jt} e^{-jt} \end{aligned}$$

Therefore,

$$\begin{aligned} P(A) &\leq \sum_{j=j_0}^{M_n} \frac{M_n^j}{j!} C^j(t) e^{-jt} M_n^{-2jt} \leq \\ &\leq \sum_{j=1}^{M_n} \frac{C^j(t)}{j!} e^{-jt} M_n^{(1-2t)j} \leq \\ &\leq M_n^{(1-2t)j_0} e^{-tj_0} \sum_{j=1}^{M_n} \frac{C^j(t)}{j!} \leq \frac{\exp\{C(t)-tj_0\}}{M_n^{(2t-1)j_0}}. \end{aligned}$$

Choosing $t = 1$ we obtain required inequality. $\square$

Theorem 4. Let $\varphi(x)$ be defined as in (5) namely

$$\varphi^*(x) = \begin{cases} \frac{p}{4} x^2, & 0 < x \leq \frac{2}{p}, \\ x - \frac{1}{p}, & \frac{2}{p} \leq x \leq 1, \\ \frac{p-1}{p} x^{\frac{p}{p-1}}, & x > 1. \end{cases}$$

data is presented as $y = s + z$ where $z \in \text{Sub}_\varphi(\Omega)$ (see (12)) and let $\delta_n(\lambda) = 4\lambda(q(1 + (2 + \beta)\log M_n))^{\frac{2}{q}} j_0^{1-\frac{2}{q}}$ then for any $\beta > 0$

$$P \left\{ \|\hat{s}^* - s\|_2^2 \geq \frac{2\lambda\delta_n(\lambda)}{\lambda-2} \mathcal{R}^*(s, \mathcal{L}) \right\} \leq \frac{e^2}{M_n^{j_0}}, \quad (15)$$

where $\mathcal{R}^*(s, \mathcal{L}) = \min_B \sum_i \min(s_i^2[\mathcal{B}], \tau^2)$.

Proof. In the proof we will use the same notation and set as in the proof of Theorem 3.

Let $T(\lambda) = 4\lambda(q(1 + (2 + \beta)\log M_n))^{2/q}$ and $\delta_n(\lambda) = T(\lambda)j^{1-2/q}$, where $1 \leq j_0 \leq j \leq M_n$. It follows from Chebyshev inequality that

$$\begin{aligned} P(D_j) &= P\{\|\xi\|_2 > a\} = \\ &= P\left\{\exp\left\{\frac{1}{q}\left(\frac{t}{\tau}\sqrt{\sum_{k=1}^d \xi_k^2}\right)^q\right\} > \exp\left\{\frac{1}{q}\left(\frac{at}{\tau}\right)^q\right\}\right\} \\ &\leq E \exp\left\{\frac{1}{q}\left(\frac{t}{\tau}\sqrt{\sum_{k=1}^d \xi_k^2}\right)^q\right\} \exp\left\{-\frac{1}{q}\left(\frac{at}{\tau}\right)^q\right\} \end{aligned}$$

Since $\varphi^*(x)$ is even and $\varphi^*(\sqrt{x})$ in this case is concave then

$$\begin{aligned} P(D_j) &\leq \frac{E \exp\left\{\frac{1}{q}\left(\frac{t}{\tau}\right)^q \sum_{k=1}^d |\xi_k|^q\right\}}{\exp\left\{\frac{1}{q}\left(\frac{at}{\tau}\right)^q\right\}} = \\ &= \frac{E \exp\left\{\frac{1}{q}\left(\frac{t}{\tau}\right)^q \sum_{k=1}^d \xi_k^q\right\}}{\exp\left\{\frac{1}{q}\left(\frac{at}{\tau}\right)^q\right\}} = \frac{E \prod_{k=1}^d \exp\left\{\frac{1}{q}\left(\frac{t}{\tau}\right)\xi_k^q\right\}}{\exp\left\{\frac{1}{q}\left(\frac{at}{\tau}\right)^q\right\}} \\ &\leq \frac{E \prod_{k=1}^j \exp\left\{\frac{1}{q}\left(\frac{t}{\tau}\right)\xi_k^q\right\}}{\exp\left\{\frac{1}{q}\left(\frac{at}{\tau}\right)^q\right\}} = \frac{\prod_{k=1}^j E \exp\left\{\frac{1}{q}\left(\frac{t}{\tau}\right)\xi_k^q\right\}}{\exp\left\{\frac{1}{q}\left(\frac{at}{\tau}\right)^q\right\}} \end{aligned}$$

From (10) it follows that

$$\begin{aligned} P(D_j) &\leq \frac{\prod_{k=1}^j \frac{2}{1-t^q}}{\exp\left\{\frac{1}{q}\left(\frac{at}{\tau}\right)^q\right\}} = \\ &= \left(\frac{2}{1-t^q}\right)^j \exp\left\{-\frac{1}{q}\left(\frac{at}{\tau}\right)^q\right\} \end{aligned}$$

Function $V(t) = \left(\frac{2}{1-t^q}\right)^j \exp\left\{-\frac{1}{q}\left(\frac{at}{\tau}\right)^q\right\}$ reaches its minimum at the point $t = \left(1 - \frac{q\tau^q j}{a^q}\right)$.

Taking into account the inequality $1 + (2 + \beta)\log M_n \leq M_n^\beta$ we obtain

$$\begin{aligned} P(D_j) &\leq V(t) = \left(\frac{2a^q}{qj\tau^q}\right)^j \exp\left\{-\frac{a^q}{qj\tau^q} + j\right\} = \\ &= 2^j (1 + (2 + \beta)\log M_n)^j \times \\ &\quad \times \exp\left\{-(2 + \beta)j\log M_n\right\} \\ &\leq 2^j M_n^{\beta j} M_n^{-(2+\beta)j} = 2^j M_n^{-2j} \end{aligned}$$

Then for the common bound the following inequality holds

$$P(B_j) \leq \#C(j, M_n) 2^j M_n^{-2j} = \binom{M_n}{j} 2^j M_n^{-2j}$$

$$\begin{aligned} P(A) &\leq \sum_{j=j_0}^{M_n} \frac{M_n^j}{j!} M_n^{-2j} \leq \sum_{j=1}^{M_n} \frac{2^j}{j!} M_n^{-j} \leq \\ &\leq \frac{1}{M_n^{j_0}} \sum_{j=1}^{M_n} \frac{2^j}{j!} \leq \frac{e^2}{M_n^{j_0}} \end{aligned}$$

Since $j_0 \leq j$ and $q < 2$ then $T(\lambda)j^{1-2/q} \leq T(\lambda)j_0^{1-2/q}$.

Therefore

$$\begin{aligned} \frac{e^2}{M_n^{j_0}} &\geq P\left\{\|\hat{s}^* - s\|_2^2 \geq \frac{2\lambda T(\lambda)j^{1-2/q}}{\lambda-2} \mathcal{R}^*(s, \mathcal{L})\right\} \\ &\geq P\left\{\|\hat{s}^* - s\|_2^2 \geq \frac{2\lambda T(\lambda)j_0^{1-2/q}}{\lambda-2} \mathcal{R}^*(s, \mathcal{L})\right\} = \\ &= P\left\{\|\hat{s}^* - s\|_2^2 \geq \frac{2\lambda \delta_n(\lambda)}{\lambda-2} \mathcal{R}^*(s, \mathcal{L})\right\}. \end{aligned}$$

□

Example 3. ([5]) The random variable ξ has centered Weibull distribution, namely

$$P\{\xi > x\} = \frac{1}{2} \exp\{-cx^\alpha\} \quad x > 0$$

$$P\{\xi < x\} = \frac{1}{2} \exp\{-c|x|^\alpha\} \quad x < 0$$

when $\alpha > 2$ belongs to the space $Sub_\varphi(\Omega)$ and $\tau_\varphi(\xi) \leq 2S_\varphi e^{\frac{49}{48}}$, where S_φ is defined in Theorem 2.

Example 4. Let $\alpha < 2$. For simplicity, consider the particular case of Weibull distribution and put $c = 1/\alpha$ then

$$P\{|\xi| > x\} = \exp\left\{-\frac{1}{\alpha}x^\alpha\right\}$$

Consider $Sub_\varphi(\Omega)$ where

$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{p}, & |x| \leq 1, \\ \frac{x^p}{p}, & |x| > 1 \end{cases} \quad \text{when } p > 2, \quad (16)$$

Then

$$\varphi^*(x) = \begin{cases} \frac{p}{4}x^2, & 0 < x \leq \frac{2}{p}, \\ x - \frac{1}{p}, & \frac{2}{p} \leq x \leq 1, \\ \frac{p-1}{p}x^{\frac{p}{p-1}}, & x > 1, \end{cases}$$

Put $\frac{p}{p-1} = \alpha$ where $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{p} = 1$. Then $p = \frac{\alpha}{\alpha-1}$. Namely

$$\varphi^*(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{4} \frac{\alpha}{\alpha-1}, & 0 < x \leq \frac{2}{\alpha}(\alpha-1), \\ x - \frac{\alpha-1}{\alpha}, & \frac{2}{\alpha}(\alpha-1) \leq x \leq 1, \\ \frac{1}{\alpha}x^\alpha, & x > 1, \end{cases}$$

From Lemma 2 it follows that $x^\alpha \frac{1}{\alpha} \geq \varphi^*(x)$. Then

$$P\{|\xi| > x\} = \exp\left\{-\frac{1}{\alpha}x^\alpha\right\} \leq \exp\{-\varphi^*(x)\}.$$

Consequently, $\xi \in Sub_\varphi(\Omega)$ and $\tau_\varphi(\xi) \leq 2S_\varphi e^{\frac{49}{48}}$, where S_φ is defined in Theorem 2.

3 Conclusions

Regardless the fact that in Theorem 3 due to complexity of calculations the smallest value of the probability could not be found exactly. However, the result for $j_0 \geq C$ is much better than the result obtained for Gaussian and strictly sub-Gaussian noise. This is natural, since the random variables that belong to the space $Sub_\varphi(\Omega)$ with the function $\varphi(x)$ which is defined in (4) have "lighter tails" of distribution than the ran-

dom variables from the space $SSub(\Omega)$. Note also that the result of Theorem 4 is worse than the results obtained in Theorem 3 and for Gaussian and strictly sub-Gaussian noise. This is because the random variables from the space $Sub_\varphi(\Omega)$ where $\varphi(x)$ is defined in (5) have "heavier tails" of distributions. The importance of Theorem 4 is that either the results of Theorem 3, or the results from the paper [4] for these random variables cannot be used.

Список використаних джерел

1. Buldygin V.V. Metric characterization of random variables and random processes/Buldygin V.V., Kozachenko Yu.V. Amer. Math. Soc.— 2000.
2. Krasnoselsky M. A. Convex functions and Orlicz spaces./ Krasnoselsky M. A., Rutitsky Y. B. Noordhof, Groningen. — 1961.
3. D.L. Donoho Ideal denoising in an orthonormal basis chosen from a library of bases./Donoho D.L. , Johnstone I.M. C.R. Acad. Sci. Paris A,— 1994. — P. 1317-1322.
4. Ferrando Sebastian E. Ideal denoising for signals in sub-gaussian noise./ Ferrando Sebastian E., Pyke Randall Applied and Computational Harmonic Analysis 2008. — V. 24. no. 1— P. 1-13.
5. Guiliano Antonini R. Spaces of φ subgaussian random variables./Guiliano Antonini R., Kozachenko Yu, and Nikitina T. Memorie di Matematica e Applicazioni XXVII. — 2003. — no. 5. — P. 95-124.
6. Kozachenko Yu. Banach space of random variables of sub-Gaussian type./ Kozachenko Yu. and Ostrovskij I. E. Theory. Probab. Math. Statist — 1985. — V. 32.— P. 45–56.
7. Krim H., On denoising and best signal representation./Krim, H., Tucker, D., Mallat, S., Donoho, D. IEEE Trans. Inform. Theory — V. 45. no. 7— PP. 2225-2238. 1999.

References

1. BULDYGIN, V., KOZACHENKO, YU. (2000) *Metric characterization of random variables and random processes* Amer. Math. Soc.
2. KRASNOSELSKY, M., RUTITSKY, Y. *Convex functions and Orlicz spaces*. Noordhof, Groningen. — 1961.
3. DONOHO, D. , JONSTONE, I.(1994) *Ideal denoising in an orthonormal basis chosen from a library of bases*. C.R. Acad. Sci. Paris A,— P. 1317-1322.
4. FERRANDO, S, PYKE, R (2008) *Ideal denoising for signals in sub-gaussian noise*, Applied and Computational Harmonic Analysis V. 24. no. 1— P. 1-13.
5. GUILIANO ANTONINI, R., KOZACHENKO, YU. and NIKITINA, T. (2003) *Spaces of φ subgaussian random variables*. Memorie di Matematica e Applicazioni XXVII. — no. 5. — P. 95-124.
6. KOZACHENKO, YU. and OSTROVSKIJ, I.(1985) *Banach space of random variables of sub-Gaussian type*. Theory. Probab. Math. Statist — V. 32.— P. 45–56.
7. KRIM, H., TUCKER, D., MALLAT, S., DONOHO, D.(1999) *On denoising and best signal representation*. IEEE Trans. Inform. Theory — V. 45. no. 7— PP. 2225-2238.

Received: 18.12.2013

УДК 512.53

Тетяна В. Турка, к. ф.-м. наук¹
Підгрупи напівгрупи відповідностей

¹Донбаський державний педагогічний
університет, 84116, Україна, Донецька обл.,
м. Слов'янськ, вул. Г. Батюка, 19,
e-mail: tvturka@mail.ru

Tetiana V. Turka, Ph. D.¹
Subgroups of correspondences semigroup

¹Donbass State Pedagogical University,
84116, Ukraine, Donetsk region, Slovyansk,
Batyk str, 19.
e-mail: tvturka@mail.ru

Описано максимальні підгрупи напівгрупи відповідностей. Одержано необхідні і достатні умови, коли напівгрупа відповідностей буде об'єднанням груп.

Ключові слова: максимальна підгрупа, об'єднання груп.

There are described the maximal subgroups of semigroups of correspondences. Necessary conditions for an element of semigroup of correspondences to be an idempotent are declared. There are received necessary and efficient conditions for the semigroup of correspondences to be an union of groups. Also it is discussed then the semigroup of correspondences will be the sheaf.

Key words: maximal subgroup, union of groups.

Communicated by Prof. V.V. Kirichenko

Introduction

Let G be an universal algebra. As the subalgebra of $G \times G$ is viewed as a binary relation on G , so the set $S(G)$ of all subalgebras of $G \times G$ is a semigroup related to De Morgan's product of relations. The subgroup $S(G)$ is called *the semigroup of correspondences* of the algebra G . The problem of learning the semigroups of correspondences was set by Kurosh [2].

In the work [3] there is shown that when G is the group than the elements of the semigroup $S(G)$ can be identified by the fifths of the form $(H_1, G_1, H_2, G_2, \varphi)$, where

$$H_1 \triangleleft G_1 < G, \quad H_2 \triangleleft G_2 < G,$$

and φ is the isomorphism of the factorgroup G_1/H_1 onto the factorgroup G_2/H_2 . Herewith the related element of the semigroup $S(G)$ – as the subset out of $G \times G$ – has the form:

$$(H_1, G_1, H_2, G_2, \varphi) = \bigcup_{a \in G_1} (aH_1 \times \varphi(aH_1)).$$

Sets of the form $aH_1 \times bH_2$, where $bH_2 = \varphi(aH_1)$, we shall call the blocks of elements $A = (H_1, G_1, H_2, G_2, \varphi)$.

1 Maximal Subgroups of Correspondences Semigroup

In [4] there are given the necessary and efficient conditions for the element $(H_1, G_1, H_2, G_2, \varphi)$ of the semigroup of correspondences to be idempotent. But they are too huge. There are far the simplest conditions but only necessary are given by the following theorem.

Theorem 1. *Let G be a group. If the element $(H_1, G_1, H_2, G_2, \varphi)$ of the semigroup of correspondences $S(G)$ is idempotent, so there are fulfilled the following conditions:*

- 1) $H_1(G_1 \cap G_2) = G_1, \quad H_2(G_1 \cap G_2) = G_2;$
- 2) *for any $g \in G_1 \cap G_2$ $\varphi(gH_1) = gH_2$.*

Proof. Let the element

$$A = (H_1, G_1, H_2, G_2, \varphi)$$

be idempotent. Then for any block $aH_1 \times bH_2$ from A we have:

$$(aH_1 \times bH_2) \circ (aH_1 \times bH_2) = (aH_1 \times bH_2).$$

Hence

$$bH_2 \cap aH_1 = \emptyset.$$

Thus, for every adjacency class aH_1 of group G_1 to subgroup H_1 will be found such an element

$$c \in aH_1 \cap bH_2 \subseteq G_1 \cap G_2,$$

that $aH_1 = cH$. But then

$$H_1(G_1 \cap G_2) \subseteq H_1G_1 = G_1.$$

It can be similarly proved, that $H_2(G_1 \cap G_2) = G_2$. This proves Condition 1).

For any $g \in G_1 \cap G_2$ the element A has the blocks of the form $aH_1 \times gH_2$ i $gH_1 \times bH_2$. While $g \in gH_1 \times gH_2$, then $gH_1 \cap gH_2 \neq \emptyset$, so

$$(aH_1 \times gH_2) \circ (gH_1 \times bH_2) = (aH_1 \times bH_2).$$

On the other hand, from the idempotentness of the element A we have:

$$(aH_1 \times gH_2) \circ (aH_1 \times gH_2) = aH_1 \times gH_2.$$

So, A has the blocks $aH_1 \times bH_2$ and $aH_1 \times gH_2$. The first components of blocks are similar, so $bH_2 = gH_2$. There is similarly proved that $aH_1 = gH_1$. But then

$$\varphi(gH_1) = \varphi(aH_1) = bH_2 = gH_2,$$

that proves Condition 2). $\square$

For any idempotent $e \in S$ let us define by G_e the maximal subgroup of S , for which e is the unit.

Theorem 2. *Let G be the finite group, and the element $e = (H_1, G_1, H_2, G_2, \varphi)$ of the semigroup of correspondences $S(G)$ is the idempotent. Then*

$$\begin{aligned} G_e &= \{(H_1, G_1, H_2, G_2, \psi\varphi) | \psi \in \text{Aut}(G_1/H_1)\} = \\ &= \{(H_1, G_1, H_2, G_2, \varphi\psi) | \psi \in \text{Aut}(G_2/H_2)\}. \end{aligned}$$

In particular, if $G_1 = G_2 = G$, $H_1 = H_2 = H$, $\varphi = \varepsilon$ is the identity automorphism, so

$$G_e = \{(G, H, G, H, \psi) | \psi \in \text{Aut}(G/H)\}.$$

Proof. It is easy to check that the element $f = (H_1, G_1, H_1, G_1, \varepsilon)$, where ε is the identity automorphism of the factor group G_1/H_1 , will be the idempotent.

In [5] it was shown that the elements

$$A' = (H'_1, G'_1, H'_2, G'_2, \varphi')$$

and

$$A'' = (H''_1, G''_1, H''_2, G''_2, \varphi'')$$

belong to one class $\mathcal{D}$ of the semigroup $S(G)$ then and only then when

$$G'_1/H'_1 \simeq G'_2/H'_2 \simeq G''_1/H''_1 \simeq G''_2/H''_2.$$

If $G'_1/H'_1 \simeq F$, we shall say that the correspondent $\mathcal{D}$ class is defined by the factor F .

That's why the idempotents e and f will be $\mathcal{D}$ equivalent. According to the theorem by Green (see [1], theorem 4.7.5) the maximal subgroups G_e and G_f are isomorphic. That's why there is some sense at first to analyze the final part of the theorem.

Therefore, let $e = (G, H, G, H, \varepsilon)$, where ε is identity automorphism of the factor group G/H . In accordance with upshot 1 out of theorem 1 from [5] $\mathcal{H}$ is the class $\mathcal{H}(e)$, which coincides with G_e , contains $|\text{Aut}(G/H)|$ elements. That's why to prove the final part of the theorem it is enough to show that every element of the look $A = (G, H, G, H, \varphi)$, where $\varphi \in \text{Aut}(G/H)$, belongs to G_e . We have:

$$(gH, \varphi(gH)) \circ (\varphi(gH), gH) = (gH, gH). \quad (1)$$

On the other hand, if $gH \neq g'H$, to $gH \cap g'H = \emptyset$, where $\varphi(gH) \cap \varphi(g'H) = \emptyset$ and

$$(gH, \varphi(gH)) \circ (\varphi(g'H), g'H) = \emptyset. \quad (2)$$

Out of the equalities (1) and (2) it follows that for the element

$$A^{-1} = (G, H, G, H, \varphi^{-1})$$

there will be $A \circ A^{-1} = e$. That's why $A \in G_e$.

Now let $e = (G_1, H_1, G_2, H_2, \varphi)$ be the arbitrary idempotent. Out of the proved above it follows that

$$|G_e| = |\{(G_1, H_1, G_2, H_2, \varphi\psi) | \psi \in \text{Aut}(G_2/H_2)\}|. \quad (3)$$

On the other hand, as for the element

$$A = (G_1, H_1, G_2, H_2, \varphi\psi)$$

and the idempotent $e = (G_1, H_1, G_2, H_2, \varphi)$ four (G_1, H_1, G_2, H_2) is one and the same, so in accordance with upshot 1 out of theorem 1 with [5] $A \in \mathcal{H}(e)$. As $\mathcal{H}(e) = G_e$, so altogether with the equality (3) this finishes the proof of the theorem. $\square$

2 Association of Maximal Subgroups

Lemma 1. *Let R be the cyclic group of the order free of squares, $N \leq R$ is the subgroup. Then there exists such a subgroup $M \leq R$, that $R = N \times M$.*

Proof. As R is cyclic, so R contains the subgroup M of the order $|R|/|N|$. Except that, the numbers $|N|$ і $|R|/|N|$ are mutually simple. That's why $N \cap M = E$. On the other hand, $|N| \cdot |M| = |R|$. That's why $R = N \times M$. $\square$

Let us note that if R , N and M are the same as in the lemma, then elements of the subgroup M can be taken as the representatives of the classes of the adjacency of the group R by the subgroup N .

Theorem 3. *Let G be the finite group. The semi-group of correspondences $S(G)$ will be the union of the groups only and only then when G is the cyclic group of the order free of squares.*

Proof. Adequacy. Let G be the cyclic group of the order free of squares. Let us show that every element $A = (H_1, G_1, H_2, G_2, \varphi)$ of $S(G)$ is an element of the group.

All the factors of the cyclic group are cyclic, that's why

$$G_1/H_1 \simeq G_2/H_2 \simeq C_k$$

for some k . It follows from lemma 1 that the representatives of the class of the adjacency of the group G_i by the semigroup H_i can be taken the elements of some subgroup $B_i \leq G_i$ of the order k . In particular, $B_1, B_2 \leq G$. But the group G contains only one subgroup of the order k . That's why $B_1 = B_2$. Let $B_1 = B_2 = \langle a \rangle$. Let the block of the group A with the first projection $H_1 a$ have the form $H_1 a \times H_2 a^r$. As the class $H_2 a^r$ is to be the forming element of the factorgroup G_2/H_2 , so r is mutually simple with k . Besides, we have:

$$A = \bigcup_{j=0}^{k-1} (H_1 a^j \times H_2 a^{jr}).$$

That's why the isomorphism

$$\varphi : G_1/H_1 \rightarrow G_2/H_2$$

acts as follows:

$$\varphi(H_1 a^j) = H_2 a^{jr}.$$

Let us analyze now the element $A^2 = A \circ A$:

$$A^2 = \bigcup_{j=0}^{k-1} (H_1 a^j \times H_2 a^{jr}) \circ \bigcup_{j=0}^{k-1} (H_1 a^j \times H_2 a^{jr}).$$

It is easy to check that

$$(H_1 a^j \times H_2 a^{jr}) \circ (H_1 a^t \times H_2 a^{tr}) = \begin{cases} \emptyset, & \text{if } jr \neq t; \\ H_1 a^j \times H_2 a^{jr^2}, & \text{if } jr = t. \end{cases}$$

Really, let

$$H_2 a^{jr} \cap H_1 a^t \neq \emptyset,$$

then

$$h_2 a^{jr} = h_1 a^t \text{ for some } h_i \in H_i, i = 1, 2.$$

Then $a^{jr-t} = h_2^{-1} h_1$, so that a^{jr-t} belongs to the subgroup $H_2 \cdot H_1$. But the order of the subgroup $\langle a \rangle$ is mutually simple with the order of each of the group H_1 і H_2 , and that's why with the order of the subgroup $|H_2 \cdot H_1|$. That's why

$$\langle a \rangle \cap (H_1 \cdot H_2) = E, a^{jr-t} = e$$

and $a^{jr} = a^t$.

Besides, out of the mutual simplicity і k it outcomes that the congruence $xr \equiv t \pmod{k}$ has the only solution for the arbitrary t . That's why

$$A^2 = \bigcup_{j=0}^{k-1} (H_1 a^j \times H_2 a^{jr^2}).$$

The isomorphism $\varphi : H_1 a^j \mapsto H_2 a^{jr}$ can be identified with automorphism $\varphi : a^j \mapsto a^{jr}$ of the group $\langle a \rangle$. As $a^{jr^2} = \varphi^2(a^j)$, so $A^2 = (H_1, G_1, H_2, G_2, \varphi^2)$.

By the induction on m it is analogically proved that

$$A^m = (H_1, G_1, H_2, G_2, \varphi^m).$$

But φ , as the automorphism of the finite group has the finite order q . That's why $\varphi^{q+1} = \varphi$ and $A^{q+1} = A$. So, it is generated by the element A the cyclic subsemigroup is the cyclic group of the order q , and the element A is a group. That is why $S(G)$ is the union of groups.

Necessity. It is enough to show that for every group G , that satisfies one of the conditions:

a) G is not cyclic;

b) G is cyclic and its order $|G|$ is divided into square p^2 of a simple number p , semigroup of correspondences $S(G)$ is not the union of the groups.

For this it is enough to show that in each of these two cases the semigroup $S(G)$ contains the nongroup element.

a) Let the group G be not the cyclic one. Then there exists such a number k , that the group G contains 2 different cyclic subgroups of the order k . Let it be G_1 and G_2 and let $H = G_1 \cap G_2$. There is the isomorphism: $G_1 \rightarrow G_2$, which on the subgroup H acts identically. Let us view the element $A = (E, G_1, E, G_2, \varphi)$. Then $A^2 = (E, H, E, H, \varepsilon)$, where ε is the identified automorphism of the group H . While transferring from A to A^2 both of the projections have lessened so there does not exist such q that $A^q = A$. So, the element A is not of the group one.

b) Let $\langle a \rangle$ be a cyclic subgroup of the order p^2 in G . Let us take $G_1 = \langle a^p \rangle$, $G = \langle a \rangle$, $H_1 = E$, $H_2 = \langle a \rangle$. Then

$A = \{(a^{pk}, a^k) \mid 0 \leq k \leq p^2\}$ is the element out of $S(G)$. Besides, $A^2 = \{(e, p^k) \mid 0 \leq k < p^2\}$.

But for the arbitrary $m > 1$ the first projection of the element A^m will be equal to $\{e\}$. So, A is not the group element. $\square$

Corollary 1. If G is the group, so the semigroup of correspondences $S(G)$ will be the sheaf then and only then when $|G| \leq 2$.

Proof. The each element is a group, so according to theorem 2 the group G should be cyclic. If $|G| > 2$, so the group G should have a nontrivial automorphism φ .

Let us choose such an element $g \in G$, that $\varphi(g) \neq g$. Let us view in $S(G)$ the element $A = \{(g, \varphi(g)) \mid g \in G\}$.

For this element $H_1 = H_2 = E$, $G_1 = G_2 = G$. Since $\varphi(gH_1) = \varphi(g) \neq g = gH_2$, so for A there is not fulfilled condition 2 of theorem 1. That's why A is not the idempotent and in $S(G)$ is not the link.

If $|G| \leq 2$, it is easy to check that $S(G)$ is the link. $\square$

Список використаних джерел

1. Ganyushkin O. Classical Finite Transformation Semigroups / O. Ganyushkin, V. Mazorchuk. – An Introduction – Springer-Verlag. – 2009. – 314 p.
2. Курош А.Г. Общая алгебра (лекции 1969–70 учебного года) / А.Г. Курош. — Москва: Наука, 1974. — 160 с.
3. Ганюшкін О.Г. Порядок напівгрупи відповідностей скінченної групи // О.Г. Ганюшкін, Т.В. Турка // Вісник Київського університету. Серія: фіз.-мат. науки. — 2009. — №3. — С. 9-13.
4. Ганюшкін О. Про ідемпотенти напівгрупи відповідностей / О. Ганюшкін, Т. Турка // Труды института прикладной математики и механики НАН Украины. — Донецк — 2012. — Т.24. — С. 68-77.
5. Турка Т. Відношення Гріна на напівгрупі відповідностей скінченної групи / Т. Турка // Вісник Київського університету. Серія: фіз.-мат. науки. — 2010. — №4. — С. 38-42.

References

1. GANYUSHKIN, O., MAZORCHUK, V. (2009) *Classical Finite Transformation Semigroups*. An Introduction – Springer-Verlag.
2. KUROSH, A.G. (1974) *Obshchaya algebra (lekzii 1969-70 uchebnogo goda)*. Moskva: Nauka.
3. GANYUSHKIN, O., TURKA, T. (2009) *Poryadok napivgrupy vidpovidnostei skinchennoi grupy*. Visnyk Kyivs'kogo universytetu. Seriya: fiz.-mat. nauky. № 3. pp. 9–13.
4. GANYUSHKIN, O., TURKA, T. (2012) *Pro idempotenty napivgrupy vidpovidnostei*. Trudy instituta prikladnoi matematiki i mehaniki NAN Ukrainy. V 24. — pp. 68-77.
5. TURKA, T. (2010) *Vidnoshennya Grina na napivgrupi vidpovidnostei skinchennoi grupy*. Visnyk Kyivs'kogo universytetu. Seriya: fiz.-mat. nauky. № 4. — pp. 38–42.

Received: 12.12.2013

**ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ
РІВНЯННЯ,
МАТЕМАТИЧНА ФІЗИКА
ТА МЕХАНІКА**

УДК 519.9

Зражевський Г.М.¹, к. ф.-м. н., доц.,
Сальнікова А.М.², студент

**Чисельно-аналітичне дослідження
детермінованих і хаотичних фазових
траєкторій подвійного маятника.**

¹ Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, пр-т. Глушкова
4д,

e-mail: zgrig@univ.kiev.ua

² Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, пр-т. Глушкова
4д,

e-mail: salnikova1@ukr.net

G.M. Zrazhevsky¹, PhD, associate professor,
A. M. Salnikova², student

**Numerical and analytical research of
deterministic and chaotic phase trajectories
of double pendulum**

¹ Taras Shevchenko National University of Kyiv,
03680, Kyiv, Glushkova st., 4d,
e-mail: zgrig@univ.kiev.ua

² Taras Shevchenko National University of Kyiv,
03680, Kyiv, Glushkova st., 4d,
e-mail: salnikova1@ukr.net

У роботі проводяться чисельно-аналітичні дослідження детермінованих і хаотичних рухів нелінійної гамільтонової системи з двома ступенями вільності, що описує скінченні відхилення подвійного фізичного маятника. В результаті чисельних експериментів, підтверджений феномен існування при значних відхиленнях як хаотичних, так і детермінованих ізоенергетичних фазових траєкторій. Це явище пояснено шляхом застосування теореми КАМ.

Особливість роботи полягає в розробці та застосуванні нового підходу послідовного редукування гамільтоніана до сепарабельної форми шляхом розвинення в степеневий тригонометричний ряд. Вказаний метод повністю підтверджує результати класичних досліджень і призводить до формулювання необхідної умови інтегрованості системи, котра для даної задачі має простий фізичний сенс.

Ключові слова: гамільтонова система, динамічний хаос, канонічна теорія збурень, подвійний маятник.

In this paper considered a numerical and analytical study of deterministic and chaotic motions of nonlinear Hamiltonian system with two degrees of freedom which describes finite deviations of a double physical pendulum. As a result of numerical experiments was confirmed the phenomenon of existence the random and deterministic constant-energy phase trajectories. This fact is explained by the applying of the KAM theorem.

Feature of the work is development and applying of a new approach of a sequential reduction of the Hamiltonian to separable form by expansion in a power series in trigonometric functions. This method completely confirms the results of classical studies and leads to the formulation of the necessary conditions for the integrability of the system, which for this problem has a simple physical meaning.

Key Words: Hamiltonian system, dynamical chaos, canonical perturbation theory, the double pendulum.

Статтю представив д.ф.-м.н. Жук Я. О.

Вступ.

В даній статті досліджуються деякі особливості динамічної поведінки подвійного фізичного маятника (ПФМ). ПФМ – одна із найпростіших гамільтонових систем з двома ступенями вільності, в якій, водночас із

детермінованою, спостерігається також хаотична поведінка [4, 6]. Дослідженню нелінійних гамільтонових систем, що допускають хаотичні режими збурення, присвячена широка література [6-10]. Предметом досліджень, як правило, є визначення параметрів локальної та глобальної

хаотизації, визначення їх меж. Системи із двома ступенями вільності, у зв'язку з відносною простотою описання і аналізу, застосовуються як моделі при дослідженні систем із багатьма ступенями вільності. Хоча, в деяких випадках, вони мають самостійне практичне застосування. Так, наприклад, дослідження збудження і керування ПФМ [8, 9] застосовуються при конструюванні маніпуляторів [4]. Варто зауважити, що більшість досліджень, так чи інакше, базуються на чисельних експериментах [6, 10], хоча теорія інтегровності динамічних систем [1, 2], в деяких випадках, дозволяє провести якісний аналіз переходу гамільтонової системи в хаотичний режим руху. Запропоноване дослідження також використовує в якості верифікації та підтвердження результатів чисельні розрахунки, однак основні зусилля докладені до спроби аналітичного і напіваналітичного аналізу, ґрунтованого на теорії інтегровності гамільтонових систем. У роботі також запропоновано новий підхід до застосування канонічної теорії збурень, оснований не на частковій лінеаризації системи відносно малого параметра, а на розвиненні гамільтоніана в ряд за природною системою функцій. При цьому застосовуються класичні методи теорії канонічних перетворень, аналізу перетинів Пуанкаре і показників Ляпунова, теореми КАМ [1, 2].

Постановка задачі.

Розглянемо подвійний фізичний маятник (Рис. 1), що перебуває під дією сили тяжіння. Тертям в шарнірах O_1 , O_2 і опором середовища нехтуємо.

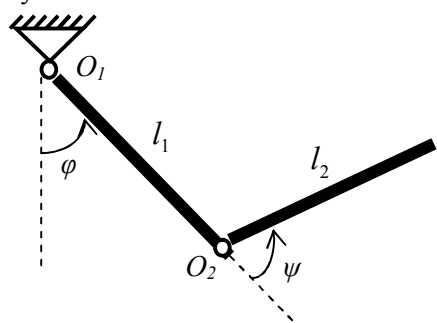


Рис.1. Подвійний фізичний маятник

Система має дві ступені вільності (φ, ψ - узагальнені координати Рис.1) і є консервативною. Функція Лагранжа:

$$L(\varphi, \psi, \dot{\varphi}, \dot{\psi}) = T - \Pi = g \cos \varphi \left(\frac{1}{2} l_1 m_1 + l_1 m_2 \right) + \frac{1}{2} g l_2 m_2 \cos(\psi + \varphi) + \frac{1}{6} (l_1^2 (m_1 + 3m_2) \dot{\varphi}^2 + l_2^2 m_2 (\dot{\varphi} + \dot{\psi})^2 + 3 l_1 l_2 m_1 m_2 \cos \psi (\dot{\varphi} + \dot{\psi}) \dot{\varphi} + l_2^2 m_2 \dot{\psi}^2) \quad (1)$$

Після введення позначень $m_{21} = m_2 / m_1, l_{21} = l_2 / l_1$ визначає рівняння Лагранжа 2-го роду:

$$\begin{cases} l_{21} m_{21} (2l_{21} + \cos \psi) \ddot{\varphi} + (2 + 6m_{21} + 2l_{21}^2 m_{21} + 6l_{21} m_{21} \cos \psi) \ddot{\psi} = 3l_{21} m_{21} \sin \psi (\dot{\varphi}^2 + 2\dot{\varphi} \dot{\psi}) - \\ - (3 - 6m_{21}) g \sin \varphi - 3g l_{21} m_{21} \sin(\psi + \varphi), \\ 2l_{21} \ddot{\psi} + (2l_{21} + 3 \cos \psi) \ddot{\varphi} = -3(\sin \psi \cdot \dot{\varphi}^2 + g \sin(\psi + \varphi)). \end{cases} \quad (2)$$

Очевидно, існує перший інтеграл – повна механічна енергія:

$$E = T + \Pi = \frac{1}{6} (l_1^2 (m_1 + 3m_2) \dot{\varphi}^2 + l_2^2 m_2 (\dot{\varphi} + \dot{\psi})^2 + 3 l_1 l_2 m_1 m_2 \cos \psi (\dot{\varphi} + \dot{\psi}) \dot{\varphi} + l_2^2 m_2 \dot{\psi}^2) - g \cos \varphi \left(\frac{1}{2} l_1 m_1 + l_1 m_2 \right) - \frac{1}{2} g l_2 m_2 \cos(\psi + \varphi) = \text{const} \quad (3)$$

Існування другого інтеграла, згідно з теоремою Ліувілля [1], повинно забезпечити інтегровність (2). Проте він існує не для всіх початкових умов. Умови його існування є предметом дослідження.

Попередні чисельні результати

Чисельні дослідження демонструють, що для різних значень енергії поведінка системи може бути як детермінованою, наприклад, при малих відхиленнях в околі положення стійкої рівноваги (тобто описується лінійною моделлю) Рис. 2, так і хаотичною Рис. 3 для скінченних відхилень.

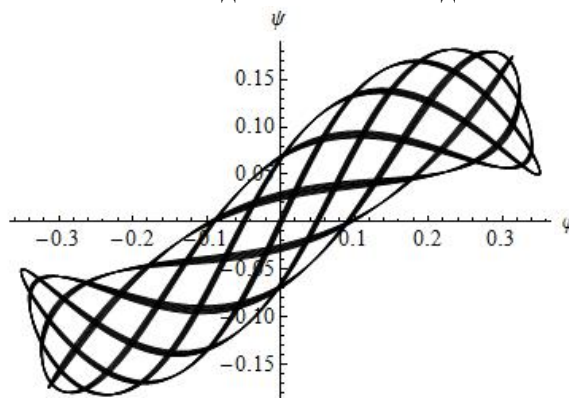


Рис.2. Детермінована траєкторія
 $\varphi_0 = \pi / 10, \psi_0 = \pi / 18, \dot{\varphi}_0 = 0, \dot{\psi}_0 = 0$

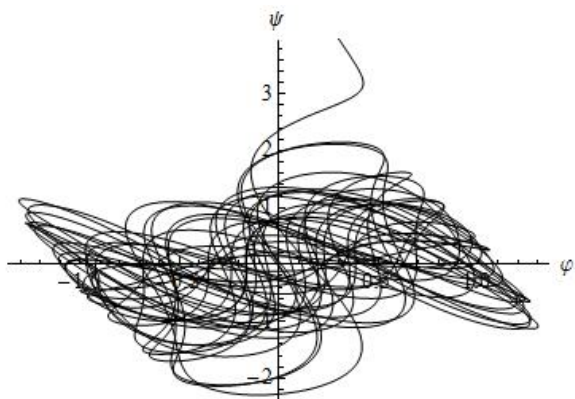


Рис.3. Хаотичні коливання
 $\varphi_0 = \pi/6, \psi_0 = \pi/6, \dot{\varphi}_0 = 2, \dot{\psi}_0 = 1$

Конфігураційні траєкторії не можуть використовуватись в якості доказу хаотичної поведінки у фазовому просторі, однак на Рис.3 і Рис. 4 приведені відповідні перетини Пуанкаре [1].

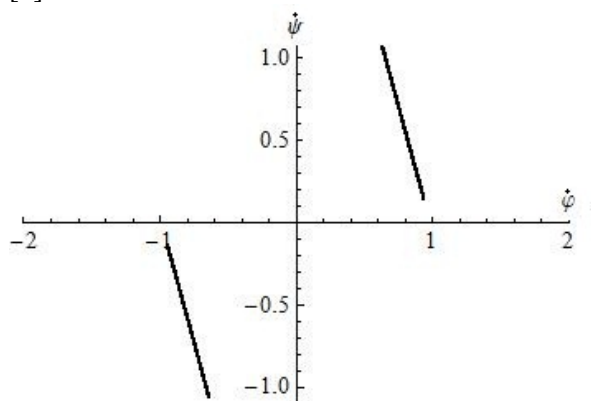


Рис. 4. Регулярний перетин Пуанкаре
 $\varphi_0 = \pi/10, \psi_0 = \pi/18, \dot{\varphi}_0 = 0, \dot{\psi}_0 = 0$

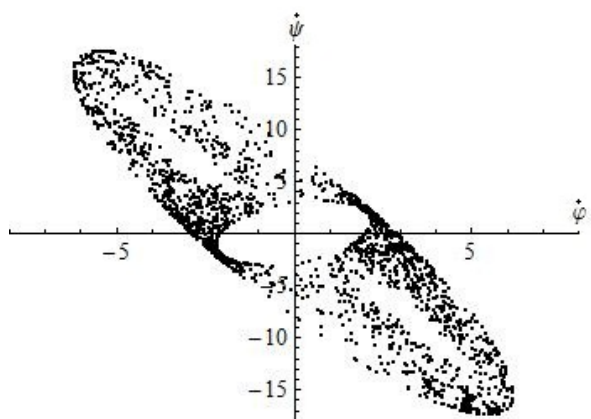


Рис. 5. Нерегулярний перетин Пуанкаре.
 $\varphi_0 = \pi/6, \psi_0 = \pi/6, \dot{\varphi}_0 = 2, \dot{\psi}_0 = 1$

Детермінованість чи хаотичність поведінки візуально можна також спостерігати на діаграмах експоненційної розбіжності близьких (початкові

відхилення порядку 10^{-4}) траєкторій у фазовому просторі. Так, на Рис.6 наведені точки перетину (з постійним часовим кроком) для двох близьких у початковий момент часу фазових траєкторій у випадку детермінованої поведінки. Як бачимо, відхилення малі, а отже, слід очікувати степеневий характер розбіжності траєкторій. На Рис. 7 точки перетину для хаотичної поведінки системи. У цьому випадку відхилення скінченні, отже, траєкторії розбігаються експоненційно.

Така чутливість до початкових умов є однією із основних властивостей хаотичної поведінки [2]. При цьому виникає питання: чи існують детерміновані рухи системи для скінченних відхилень маятника (а отже, і при відносно великих значеннях енергії)? Чисельні дослідження, проведені в [10], дають позитивну відповідь на це питання. Надалі зосередимося на аналізі саме цього випадку.

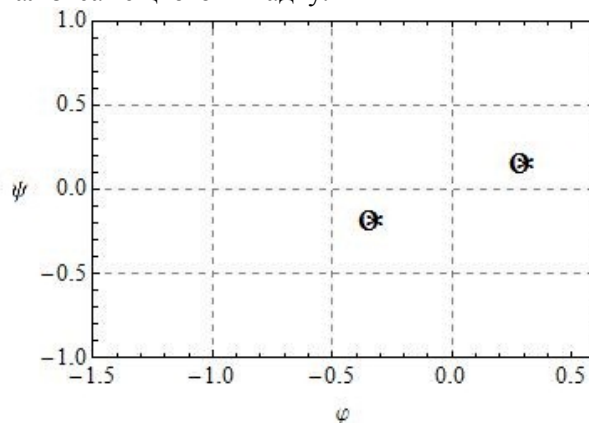


Рис. 6. Детермінована поведінка

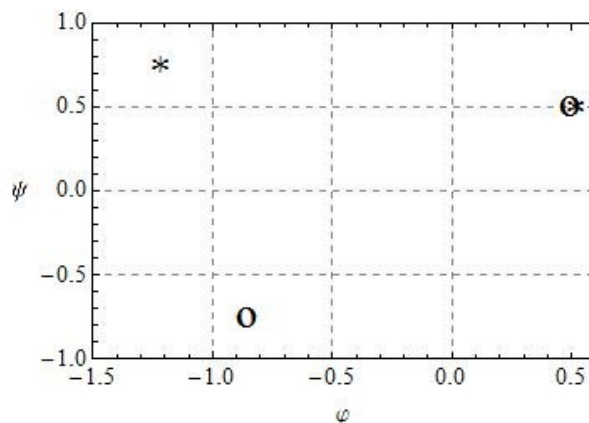


Рис. 7. Хаотична поведінка

Локальні та глобальні критерії хаотизації.

Одним із кількісних характеристик хаотизації процесу є показник Ляпунова, який визначає середню швидкість експоненційної розбіжності двох початково близьких траєкторій [2] і може використовуватись в якості критерію локального хаосу (оскільки обчислюється вздовж

конкретного розв'язку [5]). Величина енергії в даному випадку є глобальним параметром хаотизації.

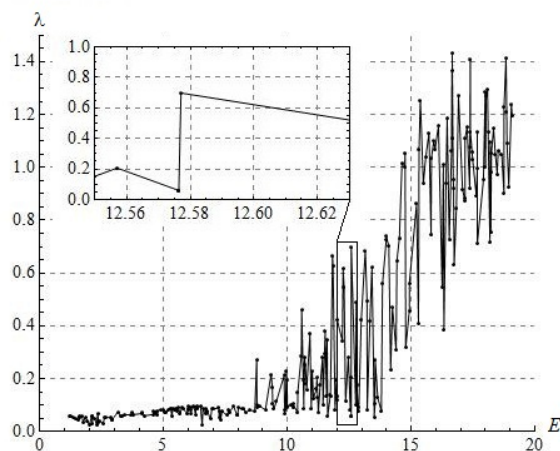


Рис. 8. Графік залежності показника Ляпунова від енергії

В багатьох нелінійних динамічних системах із ростом енергії з'являються хаотичні розв'язки [4, 6]. На Рис. 8 наведений графік залежності показника Ляпунова від величини енергії. Показник Ляпунова обраховується за допомогою алгоритму Бенеттин [2].

Як видно з Рис.8, показник Ляпунова в середньому починає зростати при перевищенні енергією певного критичного значення (ця межа залежить від параметрів системи). Отже, повна механічна енергія справді є параметром хаотизації, після досягнення якої критичного значення, система демонструє хаотичну поведінку. Однак легко також помітити, що варіативність кривої на Рис. 8 досить значна. Це свідчить про те, що при закритичних значеннях енергії, окрім хаотичної поведінки, існує також і детермінована. Характерним випадком є, наприклад, значення енергії $E = 12.577$, при якому при різних початкових умовах та за умови ізоенергетичності можлива як детермінована поведінка Рис. 9 (показник Ляпунова дорівнює 0.06), так і неінтегровна поведінка Рис. 10 (показний Ляпунова дорівнює 0.7).

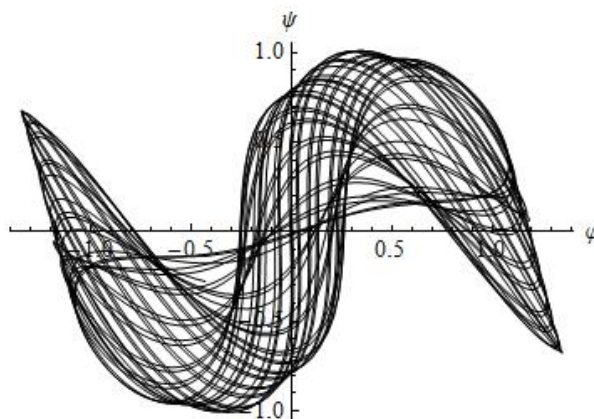


Рис. 9. Детермінована траєкторія ($E = 12.577$)
 $\varphi_0 = \pi/9, \psi_0 = 11\pi/180, \dot{\varphi}_0 = 2.5, \dot{\psi}_0 = 1.2$

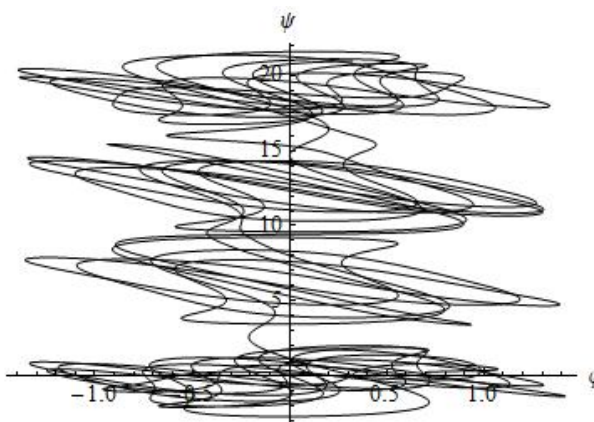


Рис. 10 Хаотична траєкторія ($E = 12.577$)
 $\varphi_0 = 2\pi/9, \psi_0 = 4\pi/45, \dot{\varphi}_0 = 2, \dot{\psi}_0 = 0.96$

Надалі спробуємо пояснити цей феномен аналітично.

Аналітичні дослідження. Сепарабельне наближення.

Гамільтоніан системи має вигляд:

$$H(\varphi, \psi, p_\varphi, p_\psi) = ((-24p_\psi^2 - m_{21}(72p_\psi^2 + l_{21}^2(g(8 + 15m_{21})(1 + (2 + l_{21})m_{21}) + 24(p_\psi - p_\varphi)^2)) + l_{21}m_{21}(72p_\psi(p_\varphi - p_\psi)\cos\psi + 9gl_{21}m_{21}(1 + (2 + l_{21})m_{21})\cos 2\psi)/2l_{21}^2m_{21} \times (9m_{21}\cos 2\psi - 15m_{21} - 8) - gl_{21}m_{21}(\cos\varphi(1 + 2m_{21}) + \cos(\psi + \varphi))/2 = \text{const} \quad (4)$$

Розвинемо гамільтоніан в ряд за степенями $\sin\psi$. Перший член ряду має вигляд:

$$H_0 = \frac{6}{4 + 3m_{21}}p_\varphi^2 - \frac{6(2 + 2l_{21})}{l_{21}(4 + 3m_{21})}p_\psi p_\varphi + \frac{6(1 + (3 + 3l_{21} + l_{21}^2)m_{21})}{l_{21}^2m_{21}(4 + 3m_{21})}p_\psi^2 + g(1 + (2 + l_{21})m_{21})\sin^2(\varphi/2) = \beta_1 = \text{const} \quad (5)$$

Він, очевидно, описує нелінійну систему Гамільтона, в якій ψ – циклічна координата, а отже, така система є інтегровною (на додаток до інтеграла β_1 існує додатковий інтеграл імпульсу $p_\psi = \beta_\psi = \text{const}$). Помітимо, що розклад з точністю до другого порядку має вигляд:

$$H = H_0 + H_1 + \overline{o}(\sin^2 \psi), \text{ де} \quad (6)$$

$$H_1 = \frac{1}{2} g l_{21} m_{21} \sin \varphi \sin \psi$$

Оскільки (5) сепарабельна, перейдемо до змінних дія – кут [2]. Змінні дії визначаються за формулою:

$$J_k = \frac{1}{2\pi} \oint p dk = \text{const}, k = \varphi, \psi, \quad (7)$$

де γ_k – незалежні інваріантні криві.

Опускаючи викладки, для J_φ маємо:

$$J_\varphi = \frac{\sqrt{4g(4+3m_{21})(b-a)}}{\sqrt{3m_{21}l_{21}}} \times \quad (8)$$

$$\times E\left[\frac{1}{2} \arccos\left(\frac{a}{b}\right), \sqrt{\frac{2b}{b-a}}\right], \text{ де}$$

$$a = 3p_\psi^2 + l_{21}^2 m_{21} (g + 2gm_{21} + gm_{21}l_{21} - 2\beta_1), \quad (9)$$

$$b = l_{21}^2 m_{21} (g + 2gm_{21} + gm_{21}l_{21}),$$

а $E(k, \varphi)$ – еліптичний інтеграл другого роду.

Функція обмеженої дії такого канонічного перетворення з урахуванням циклічності ψ має вигляд:

$$W(\varphi, \psi, \beta_\psi, \beta_1) = \beta_\psi \psi + \frac{1}{6l_{21}m_{21}} (3\beta_\psi (3+2l_{21}) \times \quad (10)$$

$$\times m_{21}\varphi - 2\sqrt{3gm_{21}(4+3m_{21})(3\beta_\psi^2 + 2\beta_1 l_{21}^2 m_{21})} \times$$

$$\times E\left[\frac{\varphi}{2}, \frac{2l_{21}^2 m_{21} (g + 2gm_{21} + gm_{21}l_{21})}{3\beta_\psi^2 + 2\beta_1 l_{21}^2 m_{21}}\right])$$

Також очевидно, що в даному випадку, $J_\psi = \beta_\psi$.

Змінні кути, що визначаються як:

$$\begin{cases} \theta_1 = \frac{\partial W(\varphi, \psi, J_\psi, \beta_1(J_\varphi, J_\psi))}{\partial J_\varphi} \\ \theta_2 = \frac{\partial W(\varphi, \psi, J_\psi, \beta_1(J_\varphi, J_\psi))}{\partial J_\psi} \end{cases} \quad (11)$$

зручно представити через вихідні інтеграли (які мають фізичний сенс, що суттєво спрощують подальший аналіз). Оскільки

$$\begin{cases} 1 = \frac{\partial J_\varphi}{\partial \beta_1} \frac{\partial \beta_1}{\partial J_\varphi}, \\ \frac{\partial \beta_1}{\partial \beta_\psi} = - \frac{\partial J_\varphi}{\partial \beta_\psi} / \frac{\partial J_\varphi}{\partial \beta_1} \end{cases} \quad (12)$$

і отже:

$$\begin{cases} \theta_1 = \frac{\partial W}{\partial \beta_1} / \frac{\partial J_\varphi}{\partial \beta_1} \\ \theta_2 = - \frac{\partial W}{\partial \beta_1} \frac{\partial J_\varphi}{\partial \beta_\psi} / \frac{\partial J_\varphi}{\partial \beta_1} + \frac{\partial W}{\partial \beta_\psi} \end{cases} \quad (13)$$

легко отримати у позначеннях (9):

$$\begin{cases} \theta_1 = \frac{\pi}{2} F\left[\frac{\varphi}{2}, \frac{2b}{3\beta_\psi^2 + 2\beta_1 l_{21}^2 m_{21}}\right] / \\ / F\left[\frac{1}{2} \arccos\left(\frac{a}{b}\right), \frac{2b}{3\beta_\psi^2 + 2\beta_1 l_{21}^2 m_{21}}\right] \\ \theta_2 = \psi + \varphi(1 + 3/2l_{21}) \end{cases} \quad (14)$$

де $F(\varphi, k)$ – еліптичний інтеграл першого роду.

Легко переконатися, що $\theta_1(-\varphi) = -\theta_1(\varphi)$, крім того, при зміні φ від $-\varphi_{\max}$ до $\varphi_{\max}$, θ_1 змінюється від $-\pi/2$ до $\pi/2$.

При цьому $\omega_1 = \frac{\partial H_0(J_\varphi, J_\psi)}{\partial J_\varphi}$, $\omega_2 = \frac{\partial H_0(J_\varphi, J_\psi)}{\partial J_\psi}$,

чи, з урахуванням (11):

$$\begin{cases} \omega_1 = \left(\frac{\partial J_\varphi(\beta_1, \beta_\psi)}{\partial \beta_1} \right)^{-1} \\ \omega_2 = \frac{\partial J_\varphi(\beta_1, \beta_\psi)}{\partial \beta_\psi} \left(\frac{\partial J_\varphi(\beta_1, \beta_\psi)}{\partial \beta_1} \right)^{-1} \end{cases} \quad (15)$$

Остаточні вирази, придатні для розрахунків, у позначеннях (9) мають вигляд:

$$\begin{cases} \omega_1 = \pi \sqrt{\frac{6\beta_1 l_{21}^2 m_{21} - 9J_\psi^2}{4l_{21}^2 m_{21} (4+3m_{21})}} / \\ / E\left[\frac{1}{2} \operatorname{arccos}\left(\frac{b}{a}\right), \frac{2b}{3\beta_\psi^2 + 2\beta_1 l_{21}^2 m_{21}}\right] \\ \omega_2 = 3\beta_\psi / l_{21}^2 m_{21} \end{cases} \quad (16)$$

Проаналізуємо отриманий чисельним шляхом в попередньому розділі феномен для двох ізоенергетичних рухів (Рис. 9, Рис. 10):

1) $E = 12.577$,

$\varphi_0 = \pi/9, \psi_0 = 11\pi/180, \dot{\varphi}_0 = 2.5, \dot{\psi}_0 = 1.2$;

2) $E = 12.577$,

$\varphi_0 = 2\pi/9, \psi_0 = 4\pi/45, \dot{\varphi}_0 = 2, \dot{\psi}_0 = 0.96$.

Для першого випадку 1) $\omega_1/\omega_2 = 0.33601$. Показник Ляпунова 0.06. Рух детермінований. Відповідний перетин Пуанкаре поданий на Рис. 12.

Для другого випадку $\omega_1/\omega_2 \approx 0.38469$, показник Ляпунова дорівнює 0.7 і рух хаотичний, як впливає із перетину Пуанкаре Рис. 13.

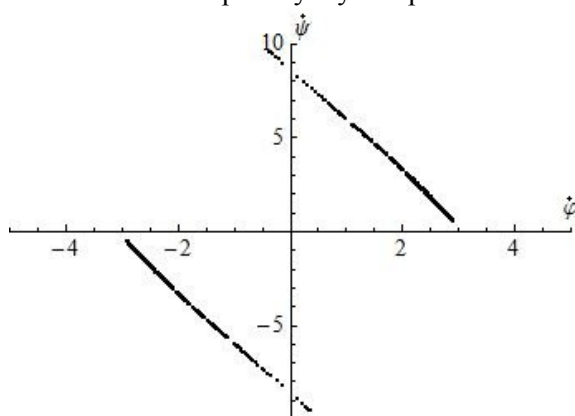


Рис. 12. Перетин Пуанкаре регулярного руху 1)

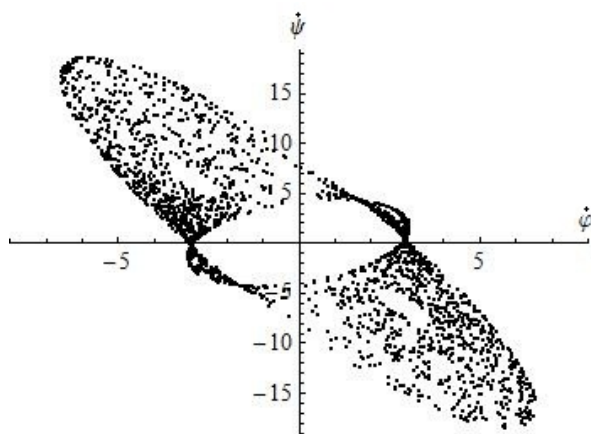


Рис. 13. Перетин Пуанкаре хаотичного руху 2)

Для аналізу рухів, відповідно до теореми КАМ [1], оцінимо резонансність відношення частот. Такий аналіз легко провести на основі Рис. 14, Рис. 15, на яких зображені фігури Ліссажу, що відповідають змінам $\sin \omega_1 t$ (вісь x) та $\sin \omega_2 t$ (вісь y).

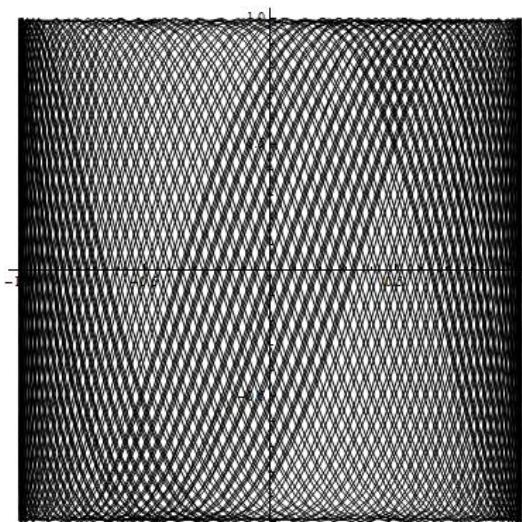


Рис. 14. Фігура Ліссажу для 1)

Повне покриття області траєкторіями на Рис. 14 свідчить про ірраціональність відношення ω_1/ω_2 .

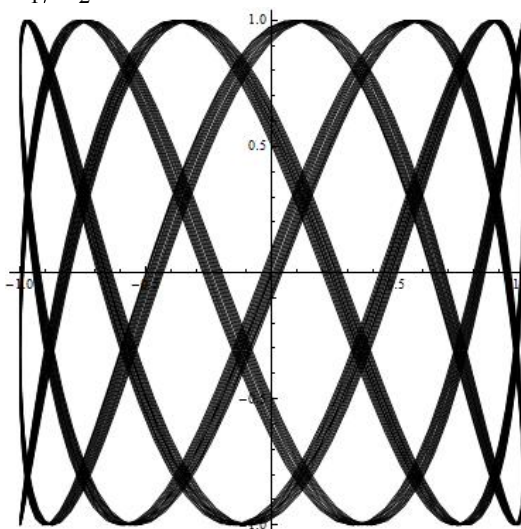


Рис. 15. Фігура Ліссажу для 2)

Із заповненості траєкторіями області змін (відсутності чи присутності періодичності кривої) видно, що у випадку 1) відношення частот ірраціональне, для 2) – раціональне. Відтак, відповідно до теореми КАМ, для початкових умов 1) існує область змін гамільтоніана, в якій система залишається інтегрованою, а тор в редукованому фазовому просторі, на якому лежить траєкторія, деформується, але не руйнується.

Проте цей феномен може бути також пояснений із використанням іншої необхідної умови детермінованості руху.

Канонічні збурення сепарабельного наближення.

Застосуємо канонічну теорію збурень для врахування наступного члена ряду (6):

$$H(\vec{\theta}, \vec{J}) = H_0(\vec{J}) + H_1(\vec{\theta}, \vec{J}), \quad (17)$$

де $H_1 = 1/2 g l_{21} m_{21} \sin \psi(\theta_1, \theta_2) \sin \varphi(\theta_1)$ – наступний член розкладу H за степенями $\sin \psi$.

Нехай нові змінні дія – кут $\vec{K}, \vec{\Phi}$. Тоді, очевидно:

$$H_0(\vec{J}) = \hat{H}_0(\vec{K}), \quad (18)$$

$$\vec{\omega}^0(\vec{K}) \nabla_{\vec{\theta}} \hat{W}_1 + H_1(\vec{\theta}) = \hat{H}_1(\vec{K}), \quad (19)$$

де $\hat{W}_0 = \vec{\theta} \cdot \vec{K}$, $\hat{W}_1$ – наступний член розкладу $\hat{W}$ за степенями $\sin \psi(\vec{\theta})$. Усереднюючи (19) за $\vec{\theta}$ на $[-\pi, \pi]$, з урахуванням мультиперіодичності за $\vec{\theta}$, а також відсутності постійної складової в $\nabla_{\vec{\theta}} \hat{W}_1$, отримаємо:

$$\hat{H}_1(\vec{K}) = \bar{H}_1(\vec{K}) \quad (20)$$

При підрахунку

$$\bar{H}_1(\vec{K}) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} d\theta_1 \int_{-\pi}^{\pi} 1/2 g l_{21} m_{21} \sin \psi(\theta_{\varphi}, \theta_{\psi}) \sin \varphi(\theta_{\varphi}) d\theta_2$$

врахуємо, що $\theta_2 = \psi + \varphi(1 + 3/2 l_{21})$, а отже:

$$\bar{H}_1(\vec{K}) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\varphi_{\min}}^{\varphi_{\max}} \frac{d\theta_1}{d\varphi} d\varphi \int_{-\pi - \varphi(1+3/2 l_{21})}^{\pi - \varphi(1+3/2 l_{21})} 1/2 g l_{21} m_{21} \sin \psi \sin \varphi d\psi = 0$$

Таким чином, з точністю до $\sin^2 \psi$ $\hat{H}(\vec{K}) = H_0(\vec{J})$, і гамільтонова система, як і раніше, інтегровна.

Однак необхідною умовою застосування канонічної теорії збурень у даному варіанті є $|\sin \psi| < 1$ (необхідна умова збіжності степеневого розкладу). Ця умова не буде виконуватись у випадку прогресивної зміни ψ . У цьому випадку розв'язок буде хаотичним. Легко бачити (Рис. 9, Рис. 10), що у випадку 1) зміни ψ мають коливальний характер, а у випадку 2) – прогресивний. Таким чином, у даному випадку, введена необхідна умова підтверджена і може використовуватись поряд із класичною умовою нерезонансності відношення частот.

Висновки

У роботі проведений чисельно-аналітичний аналіз детермінованої і хаотичної поведінки гамільтонової динамічної системи, що описує скінченні відхилення подвійного фізичного маятника.

Шляхом аналізу перетинів Пуанкаре показано, що детерміновані режими коливальні можливі як у випадку малих, так і великих амплітуд коливальних.

Побудована залежність першого показника Ляпунова від повної енергії. Показано, що хаотизація фазового потоку пропорційна величині повної енергії. Підмічена велика варіативність показника Ляпунова для різноманітних траєкторій з однаковими значеннями повної енергії.

Запропонований новий підхід до аналізу хаотизації системи, оснований на розвиненні гамільтоніана в степеневий ряд за природним набором функцій. На основі цього підходу застосований класичний метод канонічних збурень. Виведена необхідна умова локальної інтегровності динамічної системи.

Наведений чисельний приклад, що ілюструє коректність введеної умови інтегровності. Шляхом аналізу резонансності кругових частот змінних «кут» для нульового наближення і застосування теореми КАМ у цьому випадку, проілюстрований збіг класичного і запропонованого підходів до аналізу хаотизації поведінки даної системи.

На основі застосування модифікованого методу канонічних збурень показано, що врахування першого наближення не змінює кругові частоти змінних «кут» а також не впливає на умови хаотизації системи.

Список використаних джерел

1. Гаральд Іро. Класична механіка: переклад з німецької — Львів: ЛНУ, 1999. — 464 с.
2. М. Табор Хаос и интегрируемость в нелинейной динамике: перевод с английского — Москва: Эдиториал УРСС, 2001. — 320 с.
3. Гантмахер Ф. Р. Лекции по аналитической механике. — Москва: Наука, 1966. — 300 с.
4. Russ Tedrake, Massachusetts Institute of Technology, Underactuated Robotics: Learning, Planning, and Control for Efficient and Agile Machines, Course Notes for MIT 6.832, 2009, 129 p.
5. Benettin G., Galgani L., Strelcyn JM. Kolmogorov entropy and numerical experiments. Phys Rev A, 1976, Vol. 14, No. 6, P. 2338–2345.
6. T. Stachowiak, T. Okada, A numerical analysis of chaos in the double pendulum,

- Journal of Chaos, Solitons and Fractals, 2006, Vol. 29, P. 417–422.
7. O.I. Olusola, U.E.Vincent, A.N.Njah, Synchronization, multistability and basin crisis in coupled pendula, Journal of Sound and Vibration, 2010, Vol. 329, P. 443–456.
 8. J. J. Thomsen, Chaotic dynamics of the partially follower-loaded elastic double pendulum, Journal of Sound and Vibration, 1995, Vol. 884, Is. 3, P. 385 – 405.
 9. Ruiqi Wang, Zhujun Jing, Chaos control of chaotic pendulum system, Journal of Chaos, Solitons and Fractals, 2004, Vol. 21, P. 201 – 207.
 10. A. Ohlhoff, P. H. Richter, Forces in the Double Pendulum, ZAMM Z. Angew. Math. Mech. 00, 2006, P. 1 – 22.
 11. Troy Shinbrot, Celso Grebogi, Jack Wisdom, James A. Yorke, Chaos in a double pendulum, American Journal of Physics, 1992, Vol. 60, Is. 6, P. 491 – 499.
- References**
1. IRO, H. (1999) *Classical mechanics: translation from German*. Lviv: LNU.
 2. TABOR, M. (2001) *Chaos and Integrability in Nonlinear Dynamics. Translation from English*. Moscow: Editorial URSS.
 3. GANTMACHER, F. (1966) *Lectures in analytical mechanics*. Moscow: Nauka.
 4. TEDRAKE, R. (2009) *Underactuated Robotics: Learning, Planning, and Control for Efficient and Agile Machines*, Massachusetts Institute of Technology, Course Notes for MIT 6.832.
 5. BENETTIN, G., GALGANI, L. and STRELCYN, J. (1976) Kolmogorov entropy and numerical experiments. Phys Review A 14 (6), p. 2338–2345.
 6. STACHOWIAK, T., OKADA, T. (2006) A numerical analysis of chaos in the double pendulum, Journal of Chaos, Solitons and Fractals 29, p. 417–422. Available from: www.sciencedirect.com.
 7. OLUSOLA, O., VINCENT, U. and NJAH, A. (2010) Synchronization, multistability and basin crisis in coupled pendula, Journal of Sound and Vibration 329, p. 443–456.
 8. THOMSEN, J. (1995) Chaotic dynamics of the partially follower-loaded elastic double pendulum, Journal of Sound and Vibration 884 (3), p. 385 – 405.
 9. WANG, R., JING, Z. (2004) Chaos control of chaotic pendulum system, Journal of Chaos, Solitons and Fractals 21, p. 201 – 207.
 10. OHLHOFF, A., RICHTER, P. (2006) Forces in the Double Pendulum, ZAMM Z. Angew. Math. Mech. 00, p. 1 – 22.
 11. SHINBROT, T. et al. (1992) Chaos in a double pendulum, American Journal of Physics 60 (6), p. 491 – 499.

Надійшла до редколегії 17.04.14

К 517.9

Капустян О.В.¹, д.ф.-м.н., проф.,
Капустян О.А.², к.ф.-м.н., зав.сект.,
Русіна А.В.³, аспірант.

**Наближений синтез в імпульсній
розподіленій задачі
оптимального керування зі
швидкоосцилюючими
коефіцієнтами.**

¹ Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 83000, м. Київ, пр-т.
Глушкова 4е,
e-mail: kapustyanav@gmail.com

² Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 83000, м. Київ, пр-т.
Глушкова 4д,
e-mail: olena_kap@gmail.com

³ Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 83000, м. Київ, пр-т.
Глушкова 4е,
e-mail: rusina.alina@gmail.com

O.V. Kapustyan¹, Sc.D, professor
O.A. Kapustyan², PhD,
A.V. Rusina³, graduate student

**Approximate synthesis in distributed
impulsive optimal control problem with
quickly-oscillating coefficients.**

¹ Taras Shevchenko National University of Kyiv,
83000, Kyiv, Glushkova st., 4e,
e-mail: kapustyanav@gmail.com

² Taras Shevchenko National University of Kyiv,
83000, Kyiv, Glushkova st., 4d,
e-mail: olena_kap@gmail.com

³ Taras Shevchenko National University of Kyiv,
83000, Kyiv, Glushkova st., 4e,
e-mail: rusina.alina@gmail.com

В роботі обґрунтовано формулу наближеного оптимального керування в формі оберненого зв'язку (синтезу) в задачі оптимального керування розв'язками параболічного рівняння зі швидкоосцилюючими коефіцієнтами, що зазнають імпульсного керованого збурення в фіксований момент часу.

Ключові слова: оптимальне керування, наближений синтез, імпульсне збурення.

One of the most important problem optimal control theory of distributed parameter systems is to obtain synthesis - optimal control in a feedback form. Wide class of both distributed and lumped control systems without constraints was explored in the earliest works. In the case when operator have quickly-oscillating coefficients is necessary to justify approximate formula for average synthesis, In this paper, optimal control function which has been expressed in a feedback form is found for the parabolic equations with quickly-oscillating coefficients and controlled impulsive perturbation at a fixed time. The exact formula for the synthesis was found and its approximate form that lies in substitution of quickly-oscillating parameters with averaged and infinite sum with finite was justified. We use Pontryagin's maximum principle, average theory.

Key Words: optimal control, approximate synthesis, impulsive perturbation.

Статтю представив академік НАН України Перестюк М.О.

Вступ.

Однією з важливих задач теорії оптимального керування розподіленими системами є побудова синтезу, тобто оптимального керування в формі оберненого зв'язку [1], [2]. Для широкого класу задач як з розподіленим [2], так і з зосередженим керуванням [3] без обмежень вдається одержати замкнену форму оптимального синтезу, параметри якої виражаються через власні функції та числа відповідного диференціального оператора. У випадку наявності у цьому операторі швидкоосцилюючих коефіцієнтів

актуальною є задача обґрунтування формули наближеного усередненого синтезу [4], [5]. В даній роботі з цієї точки зору розглянута параболічна задача з розподіленим керуванням в правій частині та з імпульсною керованою дією [6]. На основі знайденої формули точного синтезу запропоновано та обґрунтовано процедуру побудови наближеного усередненого синтезу, яка полягає в заміні в формулі точного розв'язку всіх швидкоосцилюючих параметрів на усереднені, а всіх нескінчених сум на скінчені.

Постановка задачі.

Нехай $\Omega \subset R^n$ - обмежена область, $\varepsilon \in (0,1)$ - малий параметр, $Q = (0,T) \times \Omega$, $\theta \in (0,T)$ - фіксований момент імпульсного збурення, $a \neq -1$, $b \in R$, $c > 0$, $d > 0$ - фіксовані. Керований процес $\{y, u, w\}$ описується задачею

$$\begin{cases} \frac{\partial y}{\partial t} = A^\varepsilon y + u(t, x), (t, x) \in Q \\ y|_{\partial\Omega} = 0, \\ y|_{t=0} = y_0^\varepsilon, \end{cases} \quad (1)$$

$$y(\theta + 0, x) - y(\theta, x) = ay(\theta, x) + bw(x) \text{ - для м.в. } x \in \Omega, \quad (2)$$

$$J(y, u, w) = \int_{\Omega} y^2(T, x) dx + c \int_Q u^2(t, x) dt dx + d \int_{\Omega} w^2(x) dx \rightarrow \inf, \quad (3)$$

де $A^\varepsilon = \text{div}(a^\varepsilon \nabla)$, $a^\varepsilon(x) = a\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$, a - вимірний

періодична матриця, що задовольняє умови рівномірної еліптичності та обмеженості:

$$\exists v_1 > 0, v_2 > 0 \forall \eta \in R^n$$

$$v_1 \sum_{i=1}^n \eta_i^2 \leq \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \eta_i \eta_j \leq v_2 \sum_{i=1}^n \eta_i^2. \quad (4)$$

Нехай $\{X_i^\varepsilon\}, \{\lambda_i^\varepsilon\}$ - розв'язки спектральної задачі

$$\begin{cases} A^\varepsilon X_i^\varepsilon = -\lambda_i^\varepsilon X_i^\varepsilon, \\ X_i^\varepsilon|_{\partial\Omega} = 0, \end{cases} \quad (5)$$

$\{X_i^\varepsilon\} \subset H_0^1(\Omega)$ - ортонормований базис в $L_2(\Omega)$, $0 < \lambda_1^\varepsilon \leq \lambda_2^\varepsilon \leq \dots, \lambda_i^\varepsilon \rightarrow \infty, i \rightarrow \infty$.

В роботі доводиться, що задача (1)-(3) має єдиний розв'язок $\{y^\varepsilon, u^\varepsilon, w^\varepsilon\}$ в класі $W_\theta(0, T) \times L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$, де $W_\theta(0, T)$ - це клас функцій $y \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$, таких що їх звуження на $(0, \theta)$ та (θ, T) мають узагальнені похідні по t з класів $L^2(0, \theta; H^{-1}(\Omega))$ та $L^2(\theta, T; H^{-1}(\Omega))$ відповідно. Зокрема, кожна функція з класу $W_\theta(0, T)$ є неперервною на $(0, T) \setminus \{\theta\}$ в нормі простору $L_2(\Omega)$ і будемо вважати, що в точці $t = \theta$ вона є неперервною зліва.

За допомогою принципу максимуму Понтрягіна [6] встановлюється програмний

вигляд $u^\varepsilon, w^\varepsilon$, що при відсутності обмежень на керування дозволяє визначити формулу синтезу

$$u^\varepsilon[t, x, y^\varepsilon(t, x)] = \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i^\varepsilon(t) (y^\varepsilon(t, X_i^\varepsilon) X_i^\varepsilon(x)), \quad (6)$$

$$w^\varepsilon[x, y^\varepsilon(\theta, x)] = \sum_{i=1}^{\infty} \gamma_i^\varepsilon (y^\varepsilon(\theta, X_i^\varepsilon) X_i^\varepsilon(x)), \quad (7)$$

де $\{\beta_i^\varepsilon(t)\}, \{\gamma_i^\varepsilon\}$ - відомі параметри, що залежать від $\{\lambda_i^\varepsilon\}$.

Основною метою роботи є обґрунтування того факту, що формули

$$u_N^0[t, x, y_N^\varepsilon(t, x)] = \sum_{i=1}^N \beta_i^0(t) (y_N^\varepsilon(t, X_i^0) X_i^0(x)), \quad (8)$$

$$w_N^0[x, y_N^\varepsilon(\theta, x)] = \sum_{i=1}^N \gamma_i^0 (y_N^\varepsilon(\theta, X_i^0) X_i^0(x)), \quad (9)$$

де всі параметри замінені на усереднені, реалізують наближений синтез в задачі (1)-(3), тобто $\forall \eta > 0$

$$|J(y^\varepsilon, u^\varepsilon, w^\varepsilon) - J(y_N^\varepsilon, u_N^0[y_N^\varepsilon], w_N^0[y_N^\varepsilon])| < \eta$$

для достатньо великих $N \geq 1$ і достатньо малих $\varepsilon > 0$, де y_N^ε - розв'язок задачі (1)-(2) з керуванням u_N^0, w_N^0 .

Основні результати.

Шукаємо розв'язок (1)-(3) у вигляді

$$y^\varepsilon(t, x) = \sum_{i=1}^{\infty} y_i^\varepsilon(t) X_i^\varepsilon(x), \quad u^\varepsilon(t, x) = \sum_{i=1}^{\infty} u_i^\varepsilon(t) X_i^\varepsilon(x),$$

$$w^\varepsilon(x) = \sum_{i=1}^{\infty} w_i^\varepsilon X_i^\varepsilon(x)$$

Тоді маємо злічену систему одномірних імпульсних задач оптимального керування:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} y_i^\varepsilon(t) = -\lambda_i^\varepsilon y_i^\varepsilon + u_i^\varepsilon(t), \\ y_i^\varepsilon(0) = y_i^{0\varepsilon}, \\ y_i^\varepsilon(\theta + 0) - y_i^\varepsilon(\theta) = ay_i^\varepsilon(\theta) + bw_i^\varepsilon, \\ (y_i^\varepsilon(T))^2 + c \int_0^T (u_i^\varepsilon(t))^2 dt + d(w_i^\varepsilon)^2 \rightarrow \inf, \end{cases} \quad (10)$$

де $y_i^{0\varepsilon} = (y_i^\varepsilon, X_i^\varepsilon)$. Використовуючи принцип максимуму Понтрягіна [6], одержуємо, що задача (10) має єдиний розв'язок, програмна форма якого визначається формулами

$$\forall t \in [0, T] \quad u_i^\varepsilon = - \frac{(a+1) dy_i^{0\varepsilon} e^{-\lambda_i^\varepsilon T} K_i^\varepsilon(t)}{cd + cb^2 e^{-2\lambda_i^\varepsilon(T-\theta)} + \int_0^T (K_i^\varepsilon(t))^2 dt}, \quad (11)$$

$$\forall t \in [0, T] \quad w_i^\varepsilon = -\frac{bc e^{-\lambda_i^\varepsilon (T-\theta)}}{dK_i^\varepsilon(t)} u_i^\varepsilon(t), \quad (12)$$

$$K_i^\varepsilon(t) = \begin{cases} (a+1)e^{-\lambda_i^\varepsilon T} e^{\lambda_i^\varepsilon t}, & t \in [0, \theta], \\ e^{-\lambda_i^\varepsilon T} e^{\lambda_i^\varepsilon t}, & t \in (\theta, T]. \end{cases}$$

Позначимо

$$\alpha_i^\varepsilon(t) = \frac{(a+1)de^{-\lambda_i^\varepsilon T} K_i^\varepsilon(t)}{cd + cb^2 e^{-2\lambda_i^\varepsilon (T-\theta)} + \int_0^T (K_i^\varepsilon(t))^2 dt}.$$

Тоді підставляючи (11), (12) в (10) і вилучаючи $y_i^{0\varepsilon}$, одержуємо керування в формі оберненого зв'язку

$$u_i^\varepsilon[t, y_i^\varepsilon(t)] = \beta_i^\varepsilon(t) y_i^\varepsilon(t), \quad (13)$$

$$w_i^\varepsilon[y_i^\varepsilon(\theta)] = \frac{bc}{d(a+1)} \beta_i^\varepsilon(\theta) y_i^\varepsilon(\theta), \quad (14)$$

$$\beta_i^\varepsilon(t) = e^{\lambda_i^\varepsilon t} \alpha_i^\varepsilon(t) \left(1 + \int_0^t e^{\lambda_i^\varepsilon s} \alpha_i^\varepsilon(s) ds \right)^{-1}, \quad t \in [0, \theta],$$

$$\beta_i^\varepsilon(t) = e^{\lambda_i^\varepsilon t} \alpha_i^\varepsilon(t) \left(a+1 + (a+1) \int_0^\theta e^{\lambda_i^\varepsilon s} \alpha_i^\varepsilon(s) ds + \frac{b^2 c \alpha_i^\varepsilon(\theta)}{(a+1)d} e^{\lambda_i^\varepsilon \theta} + \int_0^t e^{\lambda_i^\varepsilon s} \alpha_i^\varepsilon(s) ds \right)^{-1}, \quad t \in (\theta, T]. \quad (15)$$

Зауважимо, що з останньої формули функції β_i^ε рівномірно обмежені в сукупності на $[0, T]$:

$$\exists \beta > 0 \forall i \geq 1 \forall \varepsilon \in (0, 1) \sup_{t \in [0, T]} |\beta_i^\varepsilon(t)| \leq \beta. \quad (16)$$

Таким чином, синтез в задачі (1)-(3) визначається формулами (6), (7), де β_i^ε визначається з (15),

$$\gamma_i^\varepsilon = \frac{bc}{d(a+1)} \beta_i^\varepsilon(\theta).$$

Переходимо до побудови наближеного усередненого синтезу. Нехай постійна матриця a^0 є усередненою для $a\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$, $A^0 = \text{div}(a^0 \nabla)$,

$\{X_i^0\}, \{\lambda_i^0\}$ - розв'язки відповідної спектральної задачі, причому спектр A^0 є простим, тобто

$$0 < \lambda_1^0 < \lambda_2^0 < \dots < \lambda_k^0 < \dots, \lambda_i^0 \rightarrow \infty, i \rightarrow \infty. \quad (17)$$

Тоді для довільних $i \geq 1$ справедливі граничні рівності [7]

$$\lambda_i^\varepsilon \rightarrow \lambda_i^0, X_i^\varepsilon \rightarrow X_i^0 \text{ в } L_2(\Omega) \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0. \quad (18)$$

Будемо вважати, що

$$y_0^\varepsilon \rightarrow y_0 \text{ слабо в } L_2(\Omega) \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0. \quad (19)$$

Виходячи з формули (15) одержуємо, що для всіх $t \in [0, T]$, та всіх $i \geq 1$ при $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\beta_i^\varepsilon(t) \rightarrow \beta_i^0(t), \gamma_i^\varepsilon \rightarrow \gamma_i^0 = \frac{bc}{d(a+1)} \beta_i^0(\theta), \quad (20)$$

де $\beta_i^0(t)$ задається формулою (15) з заміною λ_i^ε на λ_i^0 .

Тепер розглянемо задачу

$$\begin{cases} \frac{\partial y}{\partial t} = A^\varepsilon y + u_N^0[t, x, y], (t, x) \in Q \\ y|_{\partial\Omega} = 0, \\ y|_{t=0} = y_0^\varepsilon, \end{cases} \quad (21)$$

$$y(\theta + 0, x) - y(\theta, x) = ay(\theta, x) + bw_N^0[x, y(\theta)] \text{ для м.в. } x \in \Omega, \quad (22)$$

де для $y \in L^2(\Omega)$, $z \in L^2(\Omega)$

$$u_N^0[t, x, y] = \sum_{i=1}^N \beta_i^0(t) (y(t), X_i^0) X_i^0(x),$$

$$w_N^0[x, z] = \sum_{i=1}^N \gamma_i^0(z, X_i^0) X_i^0(x),$$

Оскільки в силу (16)

$$\forall t \in [0, T] \|u_N^0[t, x, y]\| \leq \beta \|y\|, \quad (23)$$

то задача (21) має єдиний розв'язок в класі $W(0, \theta) \in C([0, \theta], L^2(\Omega))$ і справедлива нерівність

$$\|w_N^0[x, z]\| \leq \frac{bc}{d(a+1)} \beta \|z\|, \quad (24)$$

то імпульсна задача (21), (22) має єдиний розв'язок $y = y_N^\varepsilon(t, x)$ в класі $W_\theta(0, T)$.

Основним результатом роботи є теорема

Теорема. Для довільного $\eta > 0$ існує $\bar{N} \geq 1$, $\bar{\varepsilon} \in (0, 1)$ такі що $\forall N \geq \bar{N}$, $\forall \varepsilon \in (0, \bar{\varepsilon})$

$$|J(y^\varepsilon, u^\varepsilon, w^\varepsilon) - J(y_N^\varepsilon, u_N^0[t, x, y_N^\varepsilon(t, x)], w_N^0[x, y_N^\varepsilon(\theta, x)])| < \eta, \quad (25)$$

де $\{y^\varepsilon, u^\varepsilon, w^\varepsilon\}$ - оптимальний процес в задачі (1)-(3), y_N^ε - розв'язок задачі (21), (22).

Доведення. Розглянемо допоміжну задачу

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial t} = A^\varepsilon z + u^0[t, x, z], (t, x) \in Q \\ z|_{\partial\Omega} = 0, \\ z|_{t=0} = y_0^\varepsilon, \end{cases} \quad (26)$$

$$z(\theta + 0, x) - z(\theta, x) = az(\theta, x) + bw^0[x, z(\theta)], \quad (27)$$

Імпульсна задача (26), (27) в класі $W_\theta(0, T)$ має єдиний розв'язок $z^\varepsilon(t, x)$, причому для м.в. $t \in (0, T) \setminus \{\theta\}$ справедлива оцінка

$$\frac{d}{dt} \|z^\varepsilon(t)\|^2 + 2\nu_1 \|z^\varepsilon(t)\|_{H_0^1}^2 \leq 2\beta \|z^\varepsilon(t)\|^2 \quad (28)$$

і з нерівності Гронуола одержуємо:

$$\forall t \in [0, \theta] \quad \|z^\varepsilon(t)\|^2 \leq \|y_0^\varepsilon\|^2 e^{2\beta\theta}, \quad (29)$$

$$\int_0^\theta \|z^\varepsilon(t)\|_{H_0^1}^2 dt \leq \frac{1}{2\nu_1} \|y_0^\varepsilon\|^2 (2\beta\theta e^{2\beta\theta} + 1). \quad (30)$$

Тоді послідовність $\{z^\varepsilon\}$ обмежена в $W(0, \theta) \subset C([0, \theta]; L^2(\Omega))$ і лема про компактність [8] гарантує, що існує функція $z \in W(0, \theta)$ така, що по підпослідовності

$$\begin{aligned} z^\varepsilon &\rightarrow z \text{ в } L^2((0, \theta) \times \Omega) \text{ і м.с. в } (0, \theta) \times \Omega, \\ z^\varepsilon(t) &\rightarrow z(t) \text{ в } L^2(\Omega) \text{ м.с. і слабо } \forall t \in [0, \theta], \\ z^\varepsilon &\rightarrow z \text{ слабо в } L^2(0, \theta; H_0^1(\Omega)). \end{aligned} \quad (31)$$

Легко перевірити, що

$$u^0[t, x, z^\varepsilon] \rightarrow u^0[t, x, z] \text{ в } L^2((0, \theta) \times \Omega). \quad (32)$$

Тоді в силу $A^\varepsilon \xrightarrow{G} A^0$ з [9] одержуємо, що z - розв'язок задачі (26) з оператором A^0 та початковими даними y^0 , причому при $\varepsilon \rightarrow 0$

$$z^\varepsilon \rightarrow z \text{ в } C([\delta, \theta]; L^2(\Omega)) \quad \forall \delta > 0. \quad (33)$$

Оскільки для будь-яких $z_1, z_2 \in L^2(\Omega)$

$$\|w^0[x, z_1] - w^0[x, z_2]\| \leq \frac{bc}{d(a+1)} \beta \|z_1 - z_2\|, \quad (34)$$

$$w^0[x, z^\varepsilon(\theta)] \rightarrow w^0[x, z(\theta)] \text{ в } L^2(\Omega). \quad (35)$$

Тоді в $L^2(\Omega)$

$$z^\varepsilon(\theta + 0) \rightarrow z(\theta) + az(\theta) + bw^0[x, z(\theta)] \quad (36)$$

Розглядаючи задачу (26) на інтервалі (θ, T) з

$$z^\varepsilon(\theta + 0) = z^\varepsilon(\theta) + az^\varepsilon(\theta) + bw^0[x, z^\varepsilon(\theta)],$$

і використовуючи (28) на (θ, T) , одержуємо

$$\forall t \in (\theta, T] \quad \|z^\varepsilon(t)\|^2 \leq \|z^\varepsilon(\theta + 0)\|^2 e^{2\beta(T-\theta)}, \quad (37)$$

$$\int_\theta^T \|z^\varepsilon(t)\|_{H_0^1}^2 dt \leq \frac{1}{2\nu_1} \|z^\varepsilon(\theta + 0)\|^2 (2\beta(T-\theta)e^{2\beta(T-\theta)} + 1). \quad (38)$$

Враховуючи оцінку (29) одержуємо остаточно $\forall t \in [0, T]$

$$\|z^\varepsilon(t)\| \leq \left(a + 1 + \frac{bc}{d(a+1)} \beta \right) \|y_0^\varepsilon\| e^{\beta T}. \quad (39)$$

Звідси маємо, що послідовність $\{z^\varepsilon\}$ обмежена в $W(\theta, T)$. Тоді аналогічно попереднім міркуванням по підпослідовності z^ε збігається до деякої функції $z \in W(\theta, T)$ на (θ, T) в сенсі (31), причому z - розв'язок задачі (26) на (θ, T) при $\varepsilon = 0$, причому при $\varepsilon \rightarrow 0$ в силу (36) $z^\varepsilon \rightarrow z$ в $C([\theta, T]; L^2(\Omega))$.

Отже, $z \in W_\theta(0, T)$ - розв'язок задачі (26), (27) при $\varepsilon = 0$, мають місце збіжності

$$\begin{aligned} z^\varepsilon &\rightarrow z \text{ в } L^2(Q) \text{ і м.с. в } Q, \\ z^\varepsilon &\rightarrow z \text{ слабо в } L^2(0, T; H_0^1(\Omega)), \end{aligned} \quad (40)$$

$$\forall \delta > 0 \quad z^\varepsilon \rightarrow z \text{ в } C([\delta, \theta]; L^2(\Omega)) \cap C([\theta + \delta, T]; L^2(\Omega))$$

і оскільки задача (26), (27) має єдиний розв'язок, то збіжність в (40) іде по всій послідовності. Тоді маємо, що $\forall \eta > 0 \quad \exists \varepsilon_1 \in (0, 1)$ таке, що $\forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_1)$

$$|J(z^\varepsilon, u^0[t, x, z^\varepsilon], w^0[x, z^\varepsilon(\theta)]) - J(z, u^0[t, x, z], w^0[x, z(\theta)])| < \frac{\eta}{3}. \quad (41)$$

Тепер покажемо, що $\forall \eta > 0 \quad \exists N_2 \geq 1 \quad \exists \varepsilon_2 \in (0, 1)$ такі, що $\forall N \geq N_2 \quad \forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_2)$

$$\begin{aligned} |J(y_N^\varepsilon, u_N^0[t, x, y_N^\varepsilon], w_N^0[x, y_N^\varepsilon(\theta)]) - \\ - J(z^\varepsilon, u^0[t, x, z^\varepsilon], w^0[x, z^\varepsilon(\theta)])| < \frac{\eta}{3}. \end{aligned} \quad (42)$$

Оскільки y_N^ε (аналогічно до z^ε) задовольняє (39), $u_N^0[t, x, y_N^\varepsilon]$ задовольняє (23), w_N^0 задовольняє (24), то існує константа $C_1 > 0$:

$$\begin{aligned} |J(y_N^\varepsilon, u_N^0[t, x, y_N^\varepsilon], w_N^0[x, y_N^\varepsilon(\theta)]) - \\ - J(z^\varepsilon, u^0[t, x, z^\varepsilon], w^0[x, z^\varepsilon(\theta)])| \leq \\ \leq C_1 \left(\|y_N^\varepsilon(T) - z^\varepsilon(T)\| + \left(\int_0^T \|u_N^0[t, y_N^\varepsilon] - u^0[t, z^\varepsilon]\|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} + \right. \\ \left. + \|w_N^0[t, y_N^\varepsilon(\theta)] - w^0[t, z^\varepsilon(\theta)]\| \right) \end{aligned} \quad (43)$$

Для різниці $w_N^\varepsilon = y_N^\varepsilon - z^\varepsilon$ маємо задачу

$$\begin{cases} \frac{\partial w_N^\varepsilon}{\partial t} = A^\varepsilon w_N^\varepsilon + \sum_{i=1}^N \beta_i^0(t) (w_N^\varepsilon(t), X_i^0) X_i^0(x) + f_N^\varepsilon(t, x), \\ w_N^\varepsilon|_{\partial\Omega} = 0, \\ w_N^\varepsilon|_{t=0} = 0, \end{cases} \quad (44)$$

$$\begin{aligned} w_N^\varepsilon(\theta + 0, x) - w_N^\varepsilon(\theta, x) = a w_N^\varepsilon(\theta, x) + \\ + b \sum_{i=1}^N \gamma_i^0(w_N^\varepsilon(\theta), X_i^0) X_i^0(x) + g_N^\varepsilon(x), \end{aligned} \quad (45)$$

$$f_N^\varepsilon(t, x) = - \sum_{i=N+1}^{\infty} \beta_i^0(t) (z^\varepsilon, X_i^0) X_i^0(x),$$

$$g_N^\varepsilon(x) = - \sum_{i=N+1}^{\infty} \gamma_i^0(z^\varepsilon(\theta), X_i^0) X_i^0(x).$$

З рівності Парсеваля, одержимо

$$\begin{aligned} \|f_N^\varepsilon(t)\|^2 &\leq \beta^2 \sum_{i=N+1}^{\infty} (z^\varepsilon(t), X_i^0)^2 \leq \\ &\leq 2\beta^2 \sum_{i=N+1}^{\infty} (z(t), X_i^0)^2 + 2\beta^2 \|z^\varepsilon(t) - z(t)\|^2, \end{aligned} \quad (46)$$

$$\begin{aligned} \|g_N^\varepsilon\|^2 &\leq 2 \frac{b^2 c^2}{d^2 (a+1)^2} \beta^2 \sum_{i=N+1}^{\infty} (z(\theta), X_i^0)^2 + \\ &+ 2 \frac{b^2 c^2}{d^2 (a+1)^2} \beta^2 \|z^\varepsilon(\theta) - z(\theta)\|^2, \end{aligned} \quad (47)$$

де z - розв'язок задачі (26), (27) при $\varepsilon = 0$.

З (44) маємо оцінки для м.в. $t \in (0, T) \setminus \{\theta\}$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|w_N^\varepsilon(t)\|^2 + v_1 \|w_N^\varepsilon(t)\|_{H_0}^2 &\leq \beta^2 \|w_N^\varepsilon(t)\|^2 + (f_N^\varepsilon(t), w_N^\varepsilon(t)) \\ \frac{d}{dt} \|w_N^\varepsilon(t)\|^2 &\leq (2\beta^2 + 1) \|w_N^\varepsilon(t)\|^2 + \|f_N^\varepsilon(t)\|^2. \end{aligned} \quad (48)$$

Тоді з леми Гронуола

$$\forall t \in [0, \theta] \|w_N^\varepsilon(t)\|^2 \leq e^{(2\beta^2+1)\theta} \int_0^\theta \|f_N^\varepsilon(t)\|^2 dt, \quad (49)$$

$$\begin{aligned} \forall t \in (\theta, T] \|w_N^\varepsilon(t)\|^2 &\leq \|w_N^\varepsilon(\theta+0)\|^2 e^{(2\beta^2+1)(T-\theta)} + \\ &+ e^{(2\beta^2+1)T} \int_\theta^T \|f_N^\varepsilon(t)\|^2 dt, \end{aligned} \quad (50)$$

Таким чином, з (45)-(50) виводимо існування такої константи, $C_2 > 0$ що для всіх $t \in [0, T]$

$$\begin{aligned} \|w_N^\varepsilon(t)\|^2 &\leq C_2 \left(\int_0^T \sum_{i=N+1}^{\infty} (z(t), X_i^0)^2 dt + \int_0^T \|z^\varepsilon(t) - z(t)\|^2 dt + \right. \\ &\left. + \|z^\varepsilon(\theta) - z(\theta)\|^2 + \sum_{i=N+1}^{\infty} (z(\theta), X_i^0)^2 \right). \end{aligned} \quad (51)$$

Зі збіжностей (40) маємо, що другий і третій доданок в (51) не залежать від N і прямують до нуля при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Для всіх $t \in [0, T]$ в силу нерівності Бесселя

$$\sum_{i=N+1}^{\infty} (z(t), X_i^0)^2 \rightarrow 0, N \rightarrow \infty.$$

В силу оцінки (39), застосованої до функції $z(t)$,

$$\left| \sum_{i=N+1}^{\infty} (z(t), X_i^0)^2 \right| \leq \left(a + 1 + \frac{b}{a+1} \beta \right)^2 \|y_0\|^2 e^{2\beta T}.$$

Отже, за теоремою Лебега перший доданок в (51) прямує до 0 при $N \rightarrow \infty$. Звідси одержуємо (42).

Залишилось показати, що $\forall \eta > 0$ існує $\varepsilon_3 \in (0, 1)$ таке, що $\forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_3)$

$$|J(y^\varepsilon, u^\varepsilon, w^\varepsilon) - J(z, u^0[t, x, z], w^0[x, z(\theta)])| < \frac{\eta}{3}, \quad (52)$$

де z - розв'язок задачі (26), (27) при $\varepsilon = 0$.

Зауважимо, що y^ε задовольняє ті самі апіорні оцінки, що і z^ε .

Покажемо, що при $\varepsilon \rightarrow 0$ в $L^2((0, \theta) \times \Omega)$

$$u^\varepsilon(t, x) = u^\varepsilon[t, x, y^\varepsilon(t, x)] \rightarrow u^0[t, x, y(t, x)]. \quad (53)$$

В силу (18), (20) для м.в. $(t, x) \in (0, \theta) \times \Omega$, для всіх $i \geq 1$ при $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\beta_i^\varepsilon(t) (y^\varepsilon(t), X_i^\varepsilon) X_i^\varepsilon(x) \rightarrow \beta_i^0(t) (y(t), X_i^0) X_i^0(x). \quad (54)$$

Тоді з оцінки (39), застосованої до $y^\varepsilon(t)$, за теоремою Лебега для всіх $M > 1$ в $L^2((0, \theta) \times \Omega)$

$$\sum_{i=1}^M \beta_i^\varepsilon(t) (y^\varepsilon(t), X_i^\varepsilon) X_i^\varepsilon \rightarrow \sum_{i=1}^M \beta_i^0(t) (y(t), X_i^0) X_i^0. \quad (55)$$

При цьому аналогічно до попередніх міркувань з теореми Лебега в $L^2((0, \theta) \times \Omega)$

$$\sum_{i=M+1}^{\infty} \beta_i^0(t) (y(t), X_i^0) X_i^0 \rightarrow 0 \text{ при } M \rightarrow \infty. \quad (56)$$

Тоді, скориставшись оптимальністю,

$$\forall t \in [0, \theta] \forall i \geq 1 |u_i^\varepsilon(t)| \leq \frac{(|a|+1)^2}{c} |y_i^{0\varepsilon} e^{-\lambda_i^\varepsilon T}|. \quad (57)$$

Оскільки $y_0^\varepsilon \rightarrow y_0$ слабо в $L^2(\Omega)$, $A^\varepsilon \xrightarrow{G} A^0$, то з [9] одержуємо в $L^2(\Omega)$

$$\sum_{i=1}^{\infty} y_i^{0\varepsilon} e^{-\lambda_i^\varepsilon T} X_i^\varepsilon(x) \rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} y_i^0 e^{-\lambda_i^0 T} X_i^0(x). \quad (58)$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left(y_i^{0\varepsilon} e^{-\lambda_i^\varepsilon T} \right)^2 \rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} \left(y_i^0 e^{-\lambda_i^0 T} \right)^2, \varepsilon \rightarrow 0. \quad (59)$$

В силу (18) $y_i^{0\varepsilon} = (y_0^\varepsilon, X_i^\varepsilon) \rightarrow y_i^0 = (y_0, X_i^0)$ для всіх $i \geq 1$, отже

$$\forall i \geq 1 y_i^{0\varepsilon} e^{-\lambda_i^\varepsilon T} \rightarrow y_i^0 e^{-\lambda_i^0 T}, \varepsilon \rightarrow 0. \quad (60)$$

Тоді оскільки $\forall t \in [0, \theta]$

$$\left\| \sum_{i=M+1}^{\infty} \beta_i^\varepsilon(t) (y^\varepsilon(t), X_i^\varepsilon) X_i^\varepsilon \right\|^2 \leq \frac{(|a|+1)^4}{c^2} (y_i^{0\varepsilon} e^{-\lambda_i^\varepsilon T})^2, \quad (61)$$

то остання нерівність разом з (55) означає виконання (53). Тоді в силу $A^\varepsilon \xrightarrow{G} A^0$ з [9] одержуємо, що $y \equiv z$ - розв'язок задачі (26) на $(0, \theta)$ при $\varepsilon = 0$, збіжність y^ε до z на $(0, \theta)$ в сенсі (31) іде по всій послідовності і

$$y^\varepsilon \rightarrow z \text{ в } C([\delta, \theta]; L^2(\Omega)) \quad \forall \delta > 0. \quad (62)$$

З (62) зокрема одержуємо, що

$$y^\varepsilon(\theta) \rightarrow z(\theta) \text{ в } L^2(\Omega). \quad (63)$$

Покажемо, що

$$w^\varepsilon(x) = w^\varepsilon[x, y^\varepsilon(\theta)] \rightarrow w^0[x, z(\theta)] \text{ в } L^2(\Omega). \quad (64)$$

Враховуючи (63), для всіх $M \geq 1$ маємо в $L^2(\Omega)$

$$\sum_{i=1}^M \beta_i^\varepsilon(\theta) (y^\varepsilon(\theta), X_i^\varepsilon) X_i^\varepsilon \rightarrow \sum_{i=1}^M \beta_i^0(\theta) (z(\theta), X_i^0) X_i^0. \quad (65)$$

Тоді з (61) при $t = \theta$ одержуємо збіжність (64).

Далі, розглядаючи задачу (26) на (θ, T) з сильно збіжними початковими даними $(a+1)y^\varepsilon(\theta) + bw^\varepsilon(x)$, можемо застосувати попередні міркування і одержати, що для всіх $\delta > 0$

$$y^\varepsilon \rightarrow z \text{ в } C([\theta + \delta, T]; L^2(\Omega)), \quad \varepsilon \rightarrow 0$$

Тоді має місце (52) і теорема доведена.

Список використаних джерел

1. Лионс Ж.-Л. Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными / Ж.-Л. Лионс. – Москва: Мир, 1972. – 396 с.
2. Егоров А. И. Оптимальное управление линейными системами / А.И. Егоров. – Київ: Вища школа, 1988. – 278 с.
3. Белозеров В. Е. Геометрические методы модального управления / В. Е. Белозеров, В. Е. Капустян. – Київ: Наукова думка, 1999. – 257 с.
4. Сукретна А. В. Наближений усереднений синтез задачі оптимального керування для параболічного рівняння / А. В. Сукретна, О. А. Капустян. // Укр. мат. журн. – 2004. – Т. 53, №10. – С. 1363 – 1374.
5. Капустян О. В. Усереднений синтез оптимального керування для хвильового рівняння / О. В. Капустян, А. В. Сукретна. // Укр. мат. журн. – 2003. – Т. 53, №5. – С. 582 – 590.
6. Самойленко А. М. Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием / А. М. Самойленко, Н. А. Перестюк. – Київ: Вища школа, 1987. – 289 с.
7. Жиков В. В. Усреднение дифференциальных операторов / В. В. Жиков, С. М. Козлов, О. А. Олейник. – Москва: ФизМатЛит, 1993. – 442 с.
8. SELL, G. R., YOU, Y. (2002) *Dynamics of Evolutionary Equations*. Vol 141, Applied Mathematical Sciences, Springer Verlag, New York.
9. DENKOWSKI, Z., MORTOLA, S. (1993) *Asymptotic behavior of optimal solutions to control problems for systems described by differential inclusions corresponding to partial differential equations*. JOTA, vol.78, pp. 342-371.

References

1. LIONS, ZH.-L. (1972) *Optimalnoe upravlenie sistemami, opisuyvaemyi uravneniyami s chastnymi proizvodnymi*. Moskva: Mir.
2. EGOROV, A. I. (1988) *Optimalnoe upravlenie linejnymi sistemami*. Kiiv: Vishha shkola.
3. BELOZEROV, V. E., KAPUSTYAN, V. E. (1999) *Geometricheskie metody modalnogo upravleniya*. Kiiv: Naukova dumka.
4. SUKRETNA, A. V., KAPUSTYAN, O. A. (2004) *Nablizhenij userednenij sintez zadachi optimalnogo keruvannya dlya parabolichnogo rivnyannya*. Ukr. mat. zhurn. 53(10), p. 1363 – 1374.
5. KAPUSTYAN, O. V., SUKRETNA, A. V. (2003) *Userednenij sintez optimalnogo keruvannya dlya xvilovogo rivnyannya*. Ukr. mat. zhurn. 53(5), p. 582 – 590.
6. SAMOJLENKO, A. M., PERESTYUK, N. A. (1987) *Differencialnye uravneniya s impulsnym vozdejstviem*. Kiiv: Vishha shkola.
7. ZHIKOV, V. V., KOZLOV, S. M. and OLEJNIK, O. A. (1993) *Usrednenie differencialnyx operatorov*. Moskva: FizMatLit.
8. SELL, G. R., YOU, Y. (2002) *Dynamics of Evolutionary Equations* New York: Springer Verlag.
9. DENKOWSKI, Z., MORTOLA, S. (1993) *Asymptotic behavior of optimal solutions to control problems for systems described by differential inclusions corresponding to partial differential equations*. JOTA, 78, p. 342-371.

Надійшла до редколегії 15.04.2014

УДК 539.3

Краснопольська Т.С.¹, д.ф.-м.н., с.н.с.
Приходько Д.Ф.², аспірант
Гуржій О.А.³, д.ф.-м.н., с.н.с.

Сталі режими коливань консольно закріпленого стрижня малої жорсткості на згин

¹ Інститут гідромеханіки Національної
Академії Наук України, 03057, м. Київ, вул.
Желябова, 8/4, e-mail: t.krasnopskaya@tue.nl

² Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, пр-т.
Глушкова 4д,
e-mail: dmitry.prykhodko@gmail.com

³ Національний технічний університет України
"КПІ", 03056, м. Київ, пр-т. Перемоги, 37,
e-mail: a.gourjii@gmail.com

T. S. Krsnopolskaya¹, Dr. Sc. (Phys.- Math.)
D.F. Prykhodko², graduate student
A.A.Gourjii³, Dr. Sc. (Phys.- Math.)

Steady-state regime oscillations of cantilever bar with low bending rigidity

¹ Institute of Hydromechanics National Academy of
Sciences of Ukraine, 03057, Kyiv, Zhelyabov st., 8/4,
e-mail: t.krasnopskaya@tue.nl

² Taras Shevchenko National University of Kyiv,
03680, Kyiv, Glushkova st., 4d,
e-mail: dmitry.prykhodko@gmail.com

³ National Technical university of Ukraine
"KPI", 03056, Kyiv, Peremoga av., 37, e-mail:
a.gourjii@gmail.com

Розглядаються параметричні періодичні та квазіперіодичні коливання консольно закріпленого стрижня малої жорсткості на згин. Побудованні власні моди та знайденні експериментально власні частоти консольно закріпленого стрижня малої жорсткості на згин свідчать про наявність внутрішнього резонансу між другою та третьою власними частотами, а саме: друга частота майже в тричі менша за третю. Запропонована модель розглядаємої динамічної системи, в якій цей внутрішній резонанс реалізується при параметричних коливаннях, коли резонансний прогин стрижня апроксимується двома власними домінуючими (другою та третьою) резонансними модами. Після осереднення моделі по швидкому часу отримана динамічна система четвертого порядку. Побудовані фазові портрети динамічної системи та спектри потужності параметричних коливань. Показано, що система має тільки регулярні сталі режими.

Ключові слова: параметричні коливання, консольне закріплення, власні моди.

Parametric periodic and quasi-periodic oscillations of a cantilevered bar with low bending stiffness are considered. Constructed eigenmodes and experimentally found eigenfrequencies for the cantilevered bar with low bending stiffness reveal existence of the internal resonance between the second and the third eigenfrequencies: the third is in three times bigger than the second. A model of oscillations of a considered dynamical system under such the internal resonance of parametric oscillations approximated by two dominant (second and third) eigenmodes is proposed. After averaging of this model by fast time the dynamical system of the fourth order is constructed. The phase portraits of the dynamical system and the power spectra of parametric oscillations are built. It is shown that such system has only regular regimes.

Keywords: parametric oscillations, cantilever bar, eigenmodes.

Статтю представив д.ф.-м.н., професор Жук Я.О.

Останнім часом можна відмітити підвищену увагу багатьох дослідників до вивчення різноманітних коливань складних динамічних систем з розподіленими параметрами. Нелінійна взаємодія різних мод може призводити до незвичайних коливань, природу яких складно визначити з експериментальних досліджень. До таких задач відносяться параметричні коливання у вертикальній площині консольно закріпленого

стрижня малої жорсткості на згин. В сучасній науковій літературі таку механічну систему часто називають "Indian rope trick"[1]: коли у спокої стрижень (чи канат) згинається (лежить у горизонтальній площині) донизу, а при прикладанні малих вертикальних вібрацій точки закріплення, підіймається вертикально догори. Тобто, експериментальні дослідження показують, що гнучкий стрижень з малою жорсткістю на

згин можна стабілізувати за допомогою гармонічних коливань опори в вертикальній площині.

Нелінійне рівняння для малих прогинів $\eta(x, t)$ гнучкого консольно закріпленого стрижня має наступний вигляд при коливаннях закріпленого кінця стрижня, [3]:

$$EJ_0 \frac{\partial^4 \eta}{\partial x^4} + \rho F g \frac{\partial}{\partial x} \left[\left((l-x) + (l-x) \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{a}{g} \cos \omega t \right) \right) \frac{\partial \eta}{\partial x} \right] -$$

$$-3\alpha_3 E^3 J_2 \left[\frac{\partial^4 \eta}{\partial x^4} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + 2 \left(\frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} \right)^2 \right] \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \rho F \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = 0. \quad (1)$$

де EJ_0 - жорсткість на згин, ρ - густина, F - площа поперечного перерізу стрижня, a - амплітуда коливань закріпленого кінця стрижня, ω - кругова частота коливань, l - довжина стрижня, $\alpha_3 E^3 J_2$ - постійний коефіцієнт.

Наші експерименти [2] показали, що вібрації стрижня можна апроксимувати двома власними модами коливань, які відповідають другій та третій власним модам, коли друга власна частота близька до половини ω і втри рази менша за третю власну частоту. У цьому випадку реалізується внутрішній резонанс між формами коливань і параметричні коливання стрижня можна апроксимувати цими двома власними модами, у котрих власні частоти близькі до $\omega/2$ та $3\omega/2$, відповідно. В цьому випадку справедливо записати прогин у вигляді:

$$\eta = \varepsilon \left[A_2(\tau) \cos \frac{\omega t}{2} + B_2(\tau) \sin \frac{\omega t}{2} \right] \varphi_2(x) +$$

$$\varepsilon \left[A_3 \cos \frac{3\omega t}{2} + B_3 \sin \frac{3\omega t}{2} \right] \varphi_3(x) \quad (2)$$

де ε - малий параметр, $\varphi_2(x)$ і $\varphi_3(x)$ - друга і третя власні моди, відповідно.

В подальшому задачу можна пронормувати на характерні фізичні параметри коливань системи

$$w = \frac{\eta}{l}; \quad t^* = t\omega; \quad x^* = \frac{x}{l}; \quad \varepsilon^* = \frac{A\omega^2}{g};$$

$$B^* = \frac{EJ_0}{\rho F g l^3}; \quad I^* = \frac{l\omega^2}{g}; \quad I_3^* = \frac{3\alpha_3 E^3 J_2}{\rho F g l^3}.$$

Тоді рівняння (1) та (2) можуть бути представлені у наступному безрозмірному вигляді (зірочки в рівняннях опущені)

$$B \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \{ (1 - \varepsilon \cos t) \} \frac{\partial}{\partial x} \left[(1-x) \frac{\partial w}{\partial x} \right] +$$

$$+ I \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - I_3 \left[\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2 \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \right)^2 \right] \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad (3)$$

$$w = \varepsilon_0 \phi_2(x) \left[A_2(\tau) \cos \frac{t}{2} + B_2(\tau) \sin \frac{t}{2} \right] +$$

$$+ \varepsilon_0 \phi_3(x) \left[A_3(\tau) \cos \frac{3t}{2} + B_3(\tau) \sin \frac{3t}{2} \right]. \quad (4)$$

Підстановка (4) в рівняння (3) та наступне усереднення по швидкому часу $t^* = t\omega$ дозволяє записати рівняння коливань у вигляді звичайних диференціальних рівнянь відносно амплітуд коливань другої та третьої мод:

$$\frac{dA_2}{d\tau} = -\frac{\xi_2}{2\omega} A_2 + \frac{1}{\omega^2} \left\{ \frac{\gamma_1}{2} B_2 - \frac{\gamma_2}{2} B_3 - \xi(\omega) B_2 - \right.$$

$$- 2I_3 \gamma_0 \left[\frac{3}{8} \alpha_5 B_2 (A_2^2 + B_2^2) + \frac{\alpha_6}{8} (A_2^2 B_3 - B_2^2 B_3 + \right.$$

$$+ 2A_2 B_2 A_3) + \frac{\alpha_7}{4} B_2 (A_3^2 + B_3^2) \left. \right\}$$

$$\frac{dB_2}{d\tau} = -\frac{\xi_2}{2\omega} B_2 + \frac{1}{\omega^2} \left\{ \frac{\gamma_1}{2} A_2 + \frac{\gamma_2}{2} A_3 + \xi(\omega) A_2 + \right.$$

$$+ 2I_3 \gamma_0 \left[\frac{3}{8} \alpha_5 A_2 (A_2^2 + B_2^2) + \frac{\alpha_6}{8} (A_2^2 A_3 - B_2^2 A_3 + 2A_2 B_2 B_3) + \frac{\alpha_7}{4} A_2 (A_3^2 + B_3^2) \right. \left. \right\}$$

$$\frac{dA_3}{d\tau} = -\frac{\xi_2}{2\omega} A_3 + \frac{1}{\omega^2} \left\{ -\frac{\gamma_3}{6} B_2 - \xi_3(\omega) B_3 - \right.$$

$$\frac{2}{3} I_3 \gamma_0 \left[\frac{\alpha_9}{8} (3A_2^2 B_2 - B_2^3) + \right.$$

$$+ \frac{\alpha_{10}}{8} B_3 (A_2^2 + B_2^2) + \frac{3\alpha_{12}}{8} B_3 (A_3^2 + B_3^2) \left. \right\}$$

$$\frac{dB_3}{d\tau} = -\frac{\xi_2}{2\omega} B_3 + \frac{1}{\omega^2} \left\{ \frac{\gamma_3}{6} A_2 + \xi_3(\omega) A_3 + \right.$$

$$+ \frac{2}{3} I_3 \gamma_0 \left[\frac{\alpha_9}{8} A_2 (A_2^2 - 3B_2^2) + \right.$$

$$+ \frac{\alpha_{10}}{8} A_3 (A_2^2 + B_2^2) + \frac{3\alpha_{12}}{8} A_3 (A_3^2 + B_3^2) \left. \right\}$$

з відповідними початковими умовами.

В подальшому задача розв'язувалась чисельним методом Рунге-Кутта-Фельдберга четвертого порядку з автоматичним вибором кроку інтегрування. Спектр потужності коливань обраховувався за допомогою процедури швидкого перетворення Фур'є.

При проведенні обрахунків використовувались наступні параметри [4]: $\rho = 1.7 \cdot 10^{-3} \text{ kg/cm}^3$; $g = 980 \text{ cm/sec}^2$; $a = 0.9 \text{ cm}$; $B = 0.055$; $l = 26.7 \text{ cm}$; $r = 15 \text{ cm}$; $G = 0.1398 \cdot 10^9 \text{ kg/(cm} \cdot \text{sec}^2)$; $g_2 = 0.0547 \cdot 10^6$; $\lambda_2 = 18.031$; $\lambda_3 = 184.32$; $E = 1.422 \cdot 10^5 \text{ kg/(cm} \cdot \text{sec}^2)$. Данні параметри обраховані експериментально для проволоки яка використовувалась в експерименті [2], надалі будемо називати цю проволоку «модельний стрижень».

Тут прийняті такі позначення:

$$\gamma_0 = \frac{g}{l}, \quad \alpha_3^* = \frac{2}{27} \frac{E g_2}{G^3},$$

$$I_3 = 5 B \alpha_3^* E^2 \cdot 10^{-5}, \quad \xi_2 = \frac{8.0 \cdot 10^{-5}}{\rho F l} = 0.17 \text{ sec}^{-1},$$

$$\xi(\omega) = \frac{g}{2A} - \frac{g}{A\omega} \sqrt{\frac{g\lambda_2}{l}}, \quad \xi_3(\omega) = \frac{3g}{2A} - \frac{g}{A\omega} \sqrt{\frac{g\lambda_3}{l}}.$$

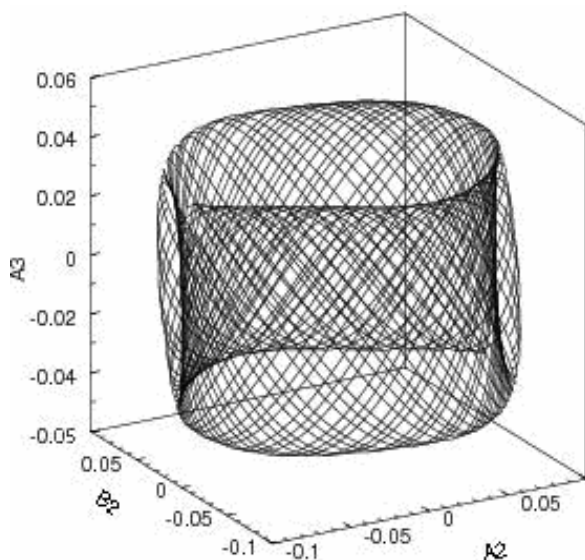


Рис. 1. Фазова траєкторія квазіперіодичних коливань «модельного стрижня»

На рис.. 1 представлена фазова траєкторія модельного стрижня при наступних початкових умовах $A_2(0) = 0,06$, $B_2(0) = 0,06$, $A_3(0) = 0,03$, $B_2(0) = 0,03$ та $\omega = 2\pi f = 70 \text{ rad/sec}$.

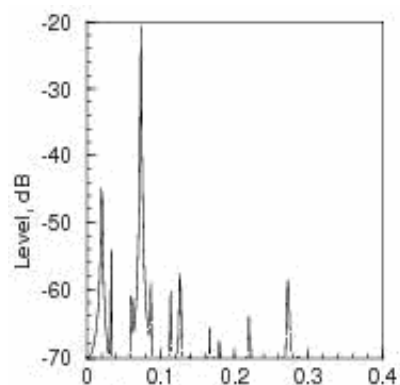


Рис. 2. Спектри потужності проекції на безрозмірні частоти для «модельного стрижня»

Видно, що динамічна система виконує квазіперіодичні коливання з безрозмірними частотами, показаними на спектрі потужності рис. 2. Процес коливань розвивається на частотах з явним переважанням другої частотної компоненти над іншими частотними компонентами.

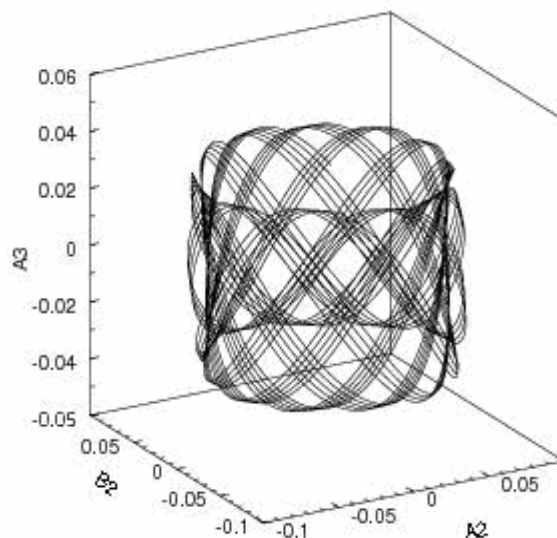


Рис. 3. Фазова траєкторія періодичних коливань сталевго стрижня

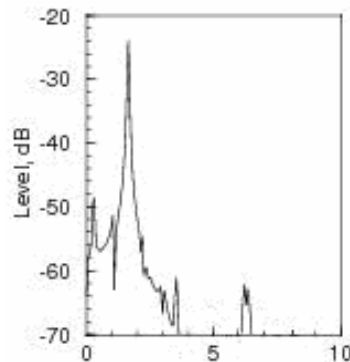


Рис. 4. Спектри потужності проекції на безрозмірні частоти для сталевго стрижня

Збільшення згинної жорсткості стрижня суттєво спрощує фазовий портрет коливань системи. На рис. 3 показана фазова траєкторія для сталевго стрижня ($\rho = 7.8 \cdot 10^{-3} \text{ kg/cm}^3$; $G = 0.46 \cdot 10^9 \text{ kg/(cm} \cdot \text{sec}^2)$; $E = 124 \cdot 10^7 \text{ kg/(cm} \cdot \text{sec}^2)$ $g_2 = 0.18 \cdot 10^6$;) при його аналогічній геометрії.

Спектри потужності проекції на безрозмірні частоти показаний на рис. 4. Видно, що в цій коливальній системі домінують при потужності $\geq -60 \text{ dB}$ тільки дві частотні складові, причому друга компонента в проекції на безрозмірну частоту домінує першою компонентою.

Дослідження при інших початкових параметрах в достатньо широких діапазонах показують, що двоходова модель параметричних коливань консольно закріпленого стрижня малої жорсткості на згин проявляє лише періодичні та квазіперіодичні коливання.

Визначення найбільшого показника Ляпунова та спектральних складових проекцій фазової траєкторії динамічної системи з розподіленими параметрами показав, що

непорядкованих, хаотичних коливань двоходова модель не має.

Висновки

Розглянута задача про параметричні періодичні та квазіперіодичні коливання консольно закріпленого пружного стрижня в наближенні малої жорсткості на згин. Запропонована математична модель коливань системи, яка враховує дві власні домінуючі моди з різними власними частотами, які задовольняють умові внутрішнього резонансу, бо мають співвідношення 1/3. Побудовані фазові траєкторії коливань системи та спектри потужності окремих проекцій фазової траєкторії. Показано, що динамічна система має періодичні та квазіперіодичні режими руху. В цій системі хаотичні режими не знайдені.

Список використаних джерел

1. *Champneys A.* The 'Indian rope trick' for a parametrically excited flexible rod: linearized analysis. / A. Champneys, B. Fraser // Proc. R. Soc. London, – 2000. – **456** – P. 553-570.
2. *Краснопольська Т.С.* Динамічні характеристики консольного закріпленого стрижня з малою жорсткістю на згин. / Т. С. Краснопольська, Д.Ф. Приходько, О. А. Гуржій // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка Серія фізико-математичні науки – 2012. - №4. – С. 52-55.
3. *Краснопольська Т.С.* Нелінійні моделі коливань консольно закріпленого стрижня з малою жорсткістю на згин. / Т. С. Краснопольська, Д.Ф. Приходько, О. А. Гуржій // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка Серія фізико-математичні науки – 2012. - №4. – С. 52-55.
4. *Krasnopolskaya T.S.* Chaos in parametrically excited continuous systems. / T.S. Krasnopolskaya, A.A. Gourjii, V.M. Spektor, D.F. Prykhodko // Chaotic Modeling and Simulation (CMSIM) – 2013. - №3. – P. 413-422.

References

1. *CHAMPNEYS A. and FRAZER B.* (2000) *The 'Indian rope trick' for a parametrically excited flexible rod: linearized analysis.* Proc. R. Soc. London. **456**. p. 553-570.
2. *KRASNOPOLSKAYA T.S., PRYKHODKO D.F. and GOURJII A.A.* (2012) *Dynamic characteristics of a cantilever bar with low bending rigidity.* Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kiev, Series Physics & Mathematics, № 4, p. 52-55.
3. *KRASNOPOLSKAYA T.S., PRYKHODKO D.F. and GOURJII A.A.* (2013) *Nonlinear models of vibrations of cantilever bar with low bending rigidity.* Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kiev, Series Physics & Mathematics, № 2, p. 158-161.
4. *KRASNOPOLSKAYA T.S., GOURJII A.A., SPEKTOR V.M. and PRYKHODKO D.F.* (2013) *Chaos in parametrically excited continuous systems.* Chaotic Modeling and Simulation (CMSIM), № 3, p. 413-422.

Надійшла до редколегії 29.03.2014

УДК 519.9

Ластівка І. О.¹, д.т.н., доц.
Лаврова О. Є.², студент.

Метод динамічного програмування для систем диференціальних рівнянь на часових шкалах.

¹ Національний авіаційний університет, 03058, м. Київ, пр-т. Космонавта Комарова 1, e-mail: iola@nau.edu.ua

² Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 83000, м. Київ, пр-т. Глушкова 4д, e-mail: lavrova_olia@mail.ru

I. O. Lastivka¹, doctor of engineering
O. E. Lavrova², student.

Method of the dynamic programming for systems of differential equations on time scales.

¹ National Aviation University, 03058, Kyiv, Komarova st., 1, e-mail: iola@nau.edu.ua

² Taras Shevchenko National University of Kyiv, 83000, Kyiv, Glushkova st., 4d, e-mail: lavrova_olia@mail.ru

В роботі розглянуто задачі оптимального керування на часових шкалах. Описано основні принципи теорії часових шкал. Встановлено властивості функції Беллмана на часових шкалах. Отримано загальне рівняння Беллмана. Метод динамічного програмування поширено на випадок, коли модель представлена системою диференціальних рівнянь на часових шкалах. Розв'язано задачу аналітичного конструювання лінійно-квадратичного регулятора.

Ключові слова: Часова шкала, динамічне програмування, оптимальне керування, функція зернистості, рівняння Беллмана.

An analysis of existing scientific and methodological literature shows the variety of approaches, methods and tools, based on Bellman optimality principle. However, dynamic programming problem is solved only for the continuous case. In this paper we consider problem of optimal control on time scales. Initially we describe the basics of the time scales's theory, then we represent properties of the Bellman function and general Bellman equation on the time scales. The method of dynamic programming extended to the case, when the model represented by a system of differential equations on time scales. This paper proposes analytical method for designing the linear-quadratic regulator on time scales.

Key Words: Time scale, dynamic programming, optimal control, graininess function, Bellman equation.

Статтю представив академік НАН України, д. ф.-м. н., проф. Перестюк М. О.

Вступ. Вивчення диференціальних рівнянь на часових шкалах останнім часом викликає великий інтерес серед дослідників. Це пов'язано з тим, що в 1988 році Stefan Hilger в роботі [1] ввів поняття Δ - похідної, що дозволило об'єднати з єдиної точки зору дискретний і неперервний аналіз.

Основи такого аналізу та нові результати викладено в монографіях [2],[4]. В подальшому диференціальні рівняння на часових шкалах в різних напрямках вивчалися в роботах багатьох

авторів. В роботі [8] розглянуто рівняння на часових шкалах в частинних похідних.

В роботі [6] побудовано стохастичний інтеграл на абстрактній шкалі та розглянуто стохастичні диференціальні рівняння на цих шкалах.

Теорія оптимального керування на часових шкалах ще досить мало вивчена. В цьому напрямку відзначимо роботи [5], [7], де зроблені перші спроби застосування методу динамічного програмування до рівнянь на часових шкалах.

Однак в загальному випадку метод динамічного програмування Беллмана для

рівнянь на абстрактних часових шкалах ще не розвинутий. Вивченню цих питань і присвячена дана робота.

Сама робота складається зі вступу і трьох частин. В першій частині приведено основні поняття та твердження, що стосуються часових шкал і використовуються в подальшому. У другій частині отримано загальне рівняння Беллмана методу динамічного програмування, за допомогою якого в третій частині розв'язана лінійно-квадратична задача на часових шкалах.

1. Основні поняття, пов'язані з часовими шкалами.

Приведемо необхідні в подальшому поняття, пов'язані з часовими шкалами.

Означення 1. [1]. Часовою шкалою T називається довільна, непорожня, замкнена підмножина дійсних чисел. Покладемо $T^k = T \setminus \{\max T\}$, якщо $\max T$ існує.

Найбільш відомими прикладами часових шкал є $T = \mathbb{R}$, $T = \mathbb{Z}$, $T = h\mathbb{Z}$ для $h > 0$, $T = \mathbb{N}$, $T = q^{\mathbb{N}_0}$ для $q > 1$.

Введемо наступні поняття, пов'язані з характеристикою часових шкал. Нехай T – часова шкала.

Означення 2. Оператором стрибка $\sigma: T \rightarrow T$ називається функція $\sigma(t) = \inf\{s \in T: s > t\}$, а функцією зернистості $\mu: T \rightarrow [0, +\infty)$ називається функція $\mu(t) = \sigma(t) - t$.

Для функції $f: T \rightarrow \mathbb{R}$ визначимо функцію $f^\sigma: T \rightarrow \mathbb{R}$ як $f^\sigma = f \circ \sigma$.

Визначимо поняття Δ - похідної.

Означення 3. [1] Δ - похідною функції f в точці $t \in T^k$ називається таке число $f^\Delta(t)$ (якщо воно існує), що для довільного $\varepsilon > 0$ існує окіл U точки t такий, що для всіх $s \in U \cap T$, що виконується нерівність:

$$|f(\sigma(t)) - f(s) - f^\Delta(t)[\sigma(t) - t]| \leq \varepsilon |\sigma(t) - s|.$$

Для визначення відповідних властивостей Δ - похідної справедлива наступна теорема.

Теорема 1. [2]. Нехай $f: T \rightarrow \mathbb{R}$, $t \in T^k$. Тоді

1) Якщо f – диференційована в точці t , тоді f – неперервна в точці t .

2) Якщо f – неперервна в точці t , $t < \sigma(t)$, тоді функція f – диференційована в точці t і Δ - похідна має наступний вигляд:

$$f^\Delta(t) = \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\mu(t)}.$$

3) Якщо $t = \sigma(t)$ і f – диференційована в точці t , тоді

$$f^\Delta(t) = \lim_{t \rightarrow s} \frac{f(t) - f(s)}{t - s},$$

якщо така границя існує.

4) Якщо функція f – диференційована в точці t , тоді $f(\sigma(t)) = f(t) + \mu(t)f^\Delta(t)$.

Розглядаючи конкретні часові шкали можна отримувати більш конкретний вигляд Δ - похідної. Так, наприклад,

1) при $T = \mathbb{R}$, $f^\Delta(t) = \lim_{t \rightarrow s} \frac{f(t) - f(s)}{t - s} = f'(t)$,

2) при $T = \mathbb{Z}$, $f^\Delta(t) = f(t+1) - f(t) = \Delta f(t)$.

Таким чином Δ - похідна об'єднує дискретний і неперервний аналіз. Наступна теорема є аналогом похідної складної функції.

Теорема 2. [7]. Нехай $V: T \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $V \in C^1(T \times \mathbb{R})$ і функція $x: T \rightarrow \mathbb{R}$ є Δ - диференційованою. Припустимо, що $z: T \rightarrow \mathbb{R}$, $z(\cdot) = V(\cdot, x(\cdot))$. Тоді для $t_0 \in T^k$ і $x_0 = x(t_0)$ функція z є Δ - диференційованою і має місце формула:

$$z^\Delta(t_0) = \int_0^1 \frac{\partial V}{\partial x}(\sigma(t_0), x_0 + h\mu(t_0)x^\Delta(t_0)) dh x^\Delta(t_0) + \frac{\partial V}{\partial t}(t_0, x_0).$$

Маючи поняття Δ - похідної можна розглядати диференціальні рівняння на часових шкалах. Отже, розглянемо рівняння

$$x^\Delta = f(t, x) \quad (1)$$

де функція $f: T \times D \rightarrow \mathbb{R}^n$, D – область в $\mathbb{R}^n$.

Означення 4. [2]. Функція $x: T \rightarrow \mathbb{R}^n$, $x = x(t)$ називається розв'язком рівняння (1) на T , якщо $x(t)$ має в кожній точці Δ - похідну і для всіх $t \in T$ має місце рівність

$$x^\Delta(t) = f(t, x(t)).$$

Означення 5. [2]. Функція $f(t, x)$ називається регресивною в точці $t \in T^k$, якщо відображення $I + \mu(t)f(t, \cdot): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ є оборотним.

2. Постановка задачі. Рівняння Беллмана.

На часовій шкалі T розглянемо наступну задачу оптимального керування.

$$\varphi(T_1, x(T_1)) \rightarrow \inf \quad (2)$$

за умов

$$\begin{aligned} x^\Delta &= f(t, x(t), u(t)), T_0 \leq t \leq T_1 \\ x(t_0) &= x_0, (T_1, x(T_1)) \in M \subseteq T \times \mathbb{R}^n \end{aligned} \quad (3)$$

Тут $x \in \mathbb{R}^n$ – фазовий вектор, $u \in U \subset \mathbb{R}^m$ – вектор керувань, функція $f: T \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $T_0 \in T$ – фіксований момент часу, а $T_1 \in T$ – нефіксований, визначається моментом першого попадання точки $(T_1, x(T_1))$ в замкнену множину M .

Допустимими керуваннями задачі (2)-(3) будемо вважати кусково-неперервні функції $u(t)$, визначені на $[T_0, T_1]$ і такі, що $u(t) \in U$ при всіх $t \in [T_0, T_1]$. Для визначеності ці функції будемо вважати неперервними справа. Позначимо через $\mathfrak{Z}_{t,x}$ множину допустимих керувань $u(t)$, що переводять фазову траєкторію $x(s)$ із положення (t, x) в множину M , а через Q_0 – множину досяжності, тобто всі точок (t, x) , з яких можна потрапити в множину M по деякій траєкторії, яка відповідає кусково-неперервному керуванню.

Задача оптимізації полягає в тому, щоб в множині допустимих керувань знайти таке керування, яке мінімізує функціонал (2).

Для розв'язання цієї задачі застосуємо метод динамічного програмування Беллмана. Визначимо функцію Беллмана для (2)-(3).

Означення 6. Функція $B(t, x) = \inf_{\mathfrak{Z}_{t,x}} \varphi(T_1, x(T_1))$

називається функцією Беллмана.

Виявляється, що знайти явний вигляд функції Беллмана досить складно, але вона має ряд властивостей, які дозволяють при певних умовах записати рівняння для її визначення. Справедлива наступна теорема.

Теорема 3. (властивості функції Беллмана).

1) Якщо $u(t) \in \mathfrak{Z}_{T_0, x_0}$, а $x(t)$ – відповідна інтегральна крива, що відповідає даному керуванню, тоді функція Беллмана вздовж неї є неспадною на $[T_0, T_1]$.

2) Функція Беллмана, обчислена вздовж оптимальної траєкторії є сталою.

Доведення. Нехай керування $u(t)$, визначене на $[T_0, T_1]$ є допустимим для x_0 , а $x(t)$ – відповідна допустима траєкторія. Для доведення властивості 1) потрібно показати, що для довільних точок τ_1 і τ_2 таких, що $T_0 \leq \tau_1 < \tau_2 \leq T_1$ виконується нерівність

$$B(\tau_1, x(\tau_1)) \leq B(\tau_2, x(\tau_2)).$$

Зауважимо спочатку, що для довільного $t \in [T_0, T_1]$ множина $\mathfrak{Z}_{t,x}$ є непорожньою. Дійсно, звуження керування u на $[t, T_1]$ є допустимим керуванням для $x(t)$.

Нехай $\bar{u}$ – довільне керування з $\mathfrak{Z}_{\tau_2, x(\tau_2)}$.

Визначимо керування $\tilde{u}$ на $[\tau_1, T_1]$ наступним чином

$$\tilde{u}(t) = \begin{cases} u(t), & \tau_1 \leq t < \tau_2 \\ \bar{u}(t), & \tau_2 \leq t \leq T_1 \end{cases}, \text{ де } \tilde{u}(t) \in \mathfrak{Z}_{\tau_1, x(\tau_1)}.$$

Це означає, що $B(\tau_1, x(\tau_1)) \leq \varphi(T_1, x(T_1))$ в силу означення функції Беллмана. Оскільки $\bar{u} \in \mathfrak{Z}_{\tau_2, x(\tau_2)}$, тоді, взявши інфімум відносно керування з $\mathfrak{Z}_{\tau_2, x(\tau_2)}$, отримаємо нерівність

$B(\tau_1, x(\tau_1)) \leq B(\tau_2, x(\tau_2))$, яка і доводить властивість 1).

Нехай тепер $u^*(t)$ – керування, визначене на $[T_0, T_1]$, є оптимальним для задачі (2)-(3). За властивістю 1) маємо, що $B(t, x^*(t))$ є неспадною функцією. Оскільки звуження керування u^* на $[t, T_1]$ є допустимим для стану $x^*(t)$, тоді $B(t, x^*(t)) \leq \varphi(T_1, x^*(T_1))$.

Із оптимальності керування u^* маємо, що $B(T_0, x_0) = \varphi(T_1, x^*(T_1))$. Оскільки $B(t, x^*(t))$ є неспадною функцією, тоді виконується $B(T_0, x_0) \leq B(t, x^*(t)) \leq B(T_1, x(T_1)) = \varphi(T_1, x^*(T_1))$.

Отже, $B(t, x^*(t)) \equiv \text{const}$, що і доводить теорему.

Таким чином функція Беллмана дозволяє виділяти оптимальні траєкторії з множини допустимих. Використовуючи встановлені властивості, отримаємо рівняння для визначення функції Беллмана.

Має місце наступна теорема.

Теорема 4. Нехай точка (t, x) – довільна внутрішня точка множини досяжності Q_0 , в якій функція Беллмана $B(t, x)$ є Δ -диференційованою. Тоді для всіх $v \in U$ функція $B(t, x)$ задовольняє нерівність:

$$B_t^\Delta(t, x) + \int_0^1 B'_x(\sigma(t), x + \mu(t)f(t, x, u)) dhf(t, x, u) \geq 0. \quad (4)$$

Якщо в $\mathfrak{I}_{t,x}$ існує оптимальне керування u^* , тоді функція $B(t, x)$ задовольняє нелінійне інтегро-диференціальне рівняння в частинних похідних

$$\min_{v \in U} \left\{ B_t^\Delta(t, x) + \int_0^1 B'_x(\sigma(t), x + \mu(t)f(t, x, u)) dhf(t, x, u) \right\} = 0. \quad (5)$$

Мінімум в (5) досягається на правосторонній границі $u^*(t)^+$.

Доведення: Розглянемо керування $v \in U$ на інтервалі $[t, t+k]$. Оскільки (t, x) – внутрішня точка множини Q_0 , то для досить малого k відповідна траєкторія $x(s)$ буде лежати в Q_0 при $t \leq s \leq t+k$. Якщо $\tilde{u}$ – допустиме для $x(t+s)$ керування, визначене на $[t+k, T_1]$, то керування u_k , визначене на $[t, T_1]$ має наступний вигляд

$$u_k(s) = \begin{cases} v, & t \leq s < t+k \\ \tilde{u}(t), & t+k \leq s \leq T_1 \end{cases}, \text{ де } u_k(s) \in \mathfrak{I}_{t,x}.$$

Нехай $x_k(t)$ – розв'язок рівняння (3), що відповідає керуванню u_k . Позначимо через $D^+f(t)$ правосторонню Δ -похідну функції $f(t)$. Оскільки u_k – кусково-неперервна функція, тоді $D^+x_k(t) = f(t, x_k(t), u_k(t)^+)$, де $u_k(t)^+$ – границя справа в точці t . Згідно з властивістю 1) теореми 3 функція $B(t, x_k(t))$ є неспадною функцією, отже $D^+B(t, x_k(t)) \geq 0$ [4, зауваження 1.16; стр.5] в довільний момент часу, для якого існує Δ -похідна. Використовуючи правило диференціювання складної функції (теорема 2), отримаємо (4).

Якщо в $\mathfrak{I}_{t,x}$ існує оптимальне керування u^* і x^* – відповідна траєкторія, то за властивістю 2) теореми 3 маємо, що $B(t, x^*(t)) = \varphi(T_1, x(T_1))$ при $s \leq t \leq T_1$. Тоді в силу Δ -диференційованості функції $B(t, x)$ в точці (t, x) , отримаємо

$$D^+B(t, x^*(t)) = B_t^\Delta(t, x^*(t)) + \int_0^1 B'_x(\sigma(t), x^*(t) + \mu(t)f(t, x, u^*(t)^+)) dhf(t, x, u^*(t)^+) = 0 \quad (6)$$

З (4) і (6) маємо (5), причому інфімум в (5) досягається на правосторонній границі оптимального керування $u^*(t)^+$, що і доводить теорему.

Співвідношення (5) називається рівнянням Беллмана на часових шкалах. Відносно даного рівняння зробимо наступні зауваження.

Зауваження 1. У випадку, коли $T = \mathbb{R}$ рівняння Беллмана (5) співпадає з класичним рівнянням.

Зауваження 2. В роботі [9] методом динамічного програмування розв'язана задача типу (2)-(3) для різницевих рівнянь. Отриманий там основний результат – дискретне рівняння Беллмана, є частинним випадком нашого результату, коли часова шкала $T = \mathbb{N}$.

3. Лінійний регулятор.

Як приклад застосування методу динамічного програмування Беллмана на часових шкалах розглянемо лінійно-квадратичну задачу.

$$J = (Dx(T_1), x(T_1)) + \int_{T_0}^{T_1} [(F(t)x, x) + (E(t)u, u)] \Delta t \rightarrow \inf \quad (7)$$

$$x^\Delta = A(t)x + B(t)u \quad (8)$$

Тут кінці відрізка $T_0 \in T, T_1 \in T$ – фіксовані, лівий кінець закріплений $x(T_0) = x_0$, а правий кінець вільний $x(T_1) \in \mathbb{R}^n$, обмежень на керування немає – $u \in \mathbb{R}^m$.

Матриці D і $F(t)$ – $n \times n$ -мірні, симетричні, невід'ємно визначені, $E(t)$ – $m \times m$ -мірна, симетрична, додатно визначена матриця, $A(t)$ – $n \times n$ -мірна матриця, $B(t)$ – $n \times m$ -мірна матриця. Будемо вважати, що компоненти цих матриць – неперервні на $[T_0, T_1]$ функції.

Зауважимо, що задача (7)-(8) характерна тим, що рівняння Беллмана для неї зводиться до матричного рівняння Ріккати.

Для розв'язання задачі (7)-(8) функціонал Больца (7) зведемо до функціоналу Майєра. Для цього введемо нову фазову змінну x_0 наступним чином

$$x_0 = x_0(t) = \int_{T_0}^t [(F(\tau)x(\tau), x(\tau)) + (E(\tau)u(\tau), u(\tau))] \Delta \tau \quad (9)$$

$$x_0(T_0) = 0.$$

Тоді розширений фазовий вектор

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} x_0 \\ x \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1}, \text{ а функціонал набуває вигляд}$$

$$J = (Dx(T_1), x(T_1)) + x_0(T_1) = \varphi(\bar{x}(T_1)). \quad (10)$$

Для розв'язання задачі (7)-(8) функцію Беллмана шукаємо у вигляді

$$B(t, \bar{x}) = x_0 - (S(t)x, x), \quad (11)$$

де $S(t)$ – Δ -диференційована на $[T_0, T_1]$, $n \times n$ -мірна, симетрична матриця і така, що $S(T_1) = -D$.

Для функції (11) складемо рівняння Беллмана. Для цього шукаємо $B^\Delta(t, \bar{x})$, використовуючи формулу знаходження Δ -похідної складної функції.

Отримаємо:

$$\begin{aligned} B^\Delta(t, \bar{x}) &= (F(t)x, x) + (E(t)u, u) - (S^\Delta(t)x, x) - \\ &- \int_0^1 2S^\sigma(t)(x + \mu(t)hx^\Delta)dhx^\Delta = (F(t)x, x) + (E(t)u, u) \\ &- (S^\sigma(t)(2x + \mu(t)(A(t)x + B(t)u)), A(t)x + B(t)u) - \\ &- (S^\Delta(t)x, x). \end{aligned}$$

Тоді рівняння Беллмана для (11) буде мати наступний вигляд

$$\min_{u \in U} \{ (F(t)x, x) + (E(t)u, u) - (S^\Delta(t)x, x) - (S^\sigma(t)(2x + \mu(t)(A(t)x + B(t)u)), A(t)x + B(t)u) \} = 0. \quad (12)$$

Для знаходження мінімуму виразу у фігурних дужках обчислимо похідну Фреше по змінній u . Маємо, що ця похідна рівна

$$2E(t)u - 2\mu(t)B^T(t)S^\sigma(t)A(t) - 2B^T(t)S^\sigma(t)x - 2\mu(t)B^T(t)S^\sigma(t)B(t)u = 0 \quad (13)$$

Отже, мінімум в (12) досягається при

$$u = \frac{B^T(t)S^\sigma(t)(I + \mu(t)A(t))}{E(t) - \mu(t)B^T(t)S^\sigma(t)B(t)} x =: K(t)x, \quad (14)$$

де $S(t)$ є розв'язком рівняння Рікатті

$$\begin{aligned} S^\Delta(t) + (A(t) + B(t)K(t))^T S^\sigma(t) - K^T(t)E(t)K(t) - F(t) \\ + (I + \mu(t)(A(t) + B(t)K(t)))^T S^\sigma(t)(A(t) + B(t)K(t)) = 0 \end{aligned} \quad (15)$$

Має місце наступна теорема.

Теорема 5. Якщо існує розв'язок (15), визначений на $[T_0, T_1]$ і такий, що

$$2E(t) - 2\mu(t)B^T(t)S^\sigma(t)B(t) - \text{додатно}$$

визначена матриця, тоді лінійно-квадратична задача (7)-(8) має розв'язок.

Відносно рівняння (15) зробимо наступне зауваження.

З а у в а ж е н н я 3. В роботі [5] методом варіацій розв'язана задача типу (7)-(8). Рівняння (15) співпадає з результатом роботи [5]. В цій роботі не досліджувались умови існування розв'язку задачі (7)-(8). Нам вдалося встановити умови існування розв'язку рівняння Рікатті, а отже і умови існування розв'язку лінійно-квадратичної задачі.

Справедлива наступна теорема.

Теорема 6. Для задачі (7)-(8) існує достатньо мале $\varepsilon > 0$, що для всіх часових шкал з функцією зернистості $\mu(t)$ такою, що $|\mu(t)| < \varepsilon$ рівняння Рікатті (15) має розв'язок, визначений на $[T_0, T_1] \cap T$, він задовольняє умову $S(T_1) = -D$. Отже, лінійно-квадратична задача (7)-(8) має розв'язок.

Доведення: Згідно з [2, заув.8.22, с.325] рівняння (15) з умовою $S(T_1) = -D$ буде мати розв'язок на $[\tau, T_1]$, де τ – момент виходу $S(t)$ в нескінченність, якщо виконується умова регресивності означення 5.

Введемо наступне позначення

$$\begin{aligned} f(t, s) &= F(t) - (A(t) + B(t)K(t))^T S^\sigma(t) - \\ &- (I + \mu(t)(A(t) + B(t)K(t)))^T S^\sigma(t)(A(t) + B(t)K(t)) + \\ &+ K^T(t)E(t)K(t). \end{aligned}$$

В силу неперервності матриці $F(t), E(t), A(t), B(t)$ – обмежені на $[T_0, T_1]$. Покажемо обмеженість $S(t)$ на $[T_0, T_1]$.

Функція $B(t, \bar{x})$ з (11) є мінімальним значенням функціоналу для лінійно-квадратичної задачі з початковою умовою $\bar{x}$ на довільному інтервалі $[T_0, T_1]$, де $S(t)$ існує.

Якщо $x_0 = 0$, тоді $B(t, \bar{x}) = (-S(t)x, x)$. (16)

Ця функція дає інфімум в (7)-(8). Оскільки $D, F(t), E(t)$ – невід'ємно визначені, тоді нижня границя для (16) рівна нулю.

При $u \equiv 0$ значення критерію для (7)-(8) дає верхню границю функціоналу, а значить і верхню границю квадратичної форми (16).

Із обмеженості квадратичної форми (16) зверху і знизу виплаває, що $S(t)$ є обмеженою на кожному скінченному інтервалі часової

шкали. Тоді функція $f(t,s)$ також є обмеженою. Отже, існує $\varepsilon > 0$ таке, що якщо $|\mu(t)| < \varepsilon$ при $t \in [T_0, T_1]$, то функція $f(t,s)$ є регресивною. Отже, розв'язок рівняння (15) існує на $[T_0, T_1] \cap T$. Теорема доведена.

Висновки. В роботі поширено метод динамічного програмування Беллмана на рівняння на часових шкалах. Це дає змогу одночасного розв'язування задач оптимального керування неперервними та дискретними системами. Останнє дозволяє обґрунтувати застосування до задач оптимального керування чисельних методів.

Список використаних джерел

1. Hilger S. Analysis on measure chains – a unified approach to continuous and discrete calculus. Results Math., Volume 18, 1990. – pp.18 – 56.
2. Bohner M., Peterson A. Dynamic equations on time scales. – Boston: Birkhäuser, 2001. – 369p.
3. Флеминг У., Рішел Р. Оптимальное управление детерминированными и стохастическими системами. – Москва: Мир, 1978. – с. 316.
4. Bohner M. and Peterson A., editors. Advances in dynamic equations on time scales. – Boston: Birkhäuser, 2003. – 361p.
5. Bohner M., Wintz N. The Linear Quadratic Regulator on Time Scales. – International Journal of Difference Equations, Volume 5, Number 2, 2010. – pp. 149 – 174.
6. Bohner M., Stanzhytskyi A., Bratochkina A. Stochastic dynamic equations on general time scales. – Electronic Journal of Differential Equations, 2013. – pp.1-15.
7. Zaidon Z., Wei W., Honglei X. Hamilton–Jacobi–Bellman equations on time scales. – Mathematical and Computer Modelling, 2009. – pp. 2019 – 2028.
8. Jackson B. Partial dynamic equations on time scales. – Journal of Computational and Mathematics, 2006. – pp. 391 – 415.
9. Страхов Є. Метод динамічного програмування в задачі структурно-параметричної оптимізації дискретної системи керувань. – Вісник Одеського національного університету вип.2(18), 2013 – С. 44 – 50.

References

1. HILGER, S. (1990) *Analysis on measure chains – a unified approach to continuous and discrete calculus*. . Results Math., Volume 18, pp.18 – 56.
2. BOHNER, M., PETERSON, A. (2001) *Dynamic equations on time scales*. Boston: Birkhäuser.
3. FLEMING, U., RISHEL, R. (1978) *Optimal'noe upravlenie determinirovannymi i stohasticheskimi sistemami*. Moskva: Mir.
4. BOHNER, M., PETERSON, A. And EDITORS (2003) *Advances in dynamic equations on time scales*. Boston: Birkhäuser.
5. BOHNER, M., WINTZ, N. (2010) *The Linear Quadratic Regulator on Time Scales*. International Journal of Difference Equations, Volume 5, Number 2, pp. 149–174.
6. BOHNER, M., STANZHYTSKYI, A., BRATOCHKINA, A. (2013) *Stochastic dynamic equations on general time scales*. Electronic Journal of Differential Equations.
7. ZAIDON, Z., WEI, W., HONGLEI, X. (2009) *Hamilton–Jacobi–Bellman equations on time scales*. Mathematical and Computer Modelling. pp. 2019–2028.
8. JACKSON, B. (2006) *Partial dynamic equations on time scales*. Journal of Computational and Mathematics. pp. 391-415.
9. STRAKHOV, E. (2013) *Metod dynamichnogo programuvannja v zadachi strukturno-parametrychnoi optymizacii dyskretnoi systemy keruvan*. Visnyk Odes'kogo nacional'nogo universytetu vyp.2(18), 2013– S. 44-50.

Надійшла до редколегії 14.04.14.

УДК 532.5

Спектор В. М.¹, пров. інженер,
Печук Є. Д.¹, к. ф.-м. н., м.н.с.
Краснопольська Т. С.¹, д. ф.-м. н., с.н.с.

Хаотичні та регулярні хрестоподібні хвилі на вільній поверхні рідини

¹ Інститут гідромеханіки НАНУ, м. Київ,
03680, вул. Желябова 8/4,
e-mail: v.m.spektor@gmail.com, uzuzun@i.ua
t.krasnopol'skaya@tue.nl

Spektor V. M.¹, engineer,
Pechuk E. D.¹, PhD (Phys.-Math.), junior researcher
Krasnopol'skaya T. S.¹, Dr. Sc. (Phys.- Math.)

Chaotic and regular cross-waves in fluid free surface

¹ Institute of Hydromechanics NAS of Ukraine, Kyiv,
03680, Zhelyabov str. 8/4,
e-mail: v.m.spektor@gmail.com, uzuzun@i.ua
t.krasnopol'skaya@tue.nl

Явище збудження хрестоподібних хвиль на вільній поверхні рідини розглянуто у двох скінчених розмірів контейнерах. Хвилі можуть бути збуджені гармонійними вісесиметричними деформаціями внутрішньої оболонки у об'ємі між двома циліндрами, а також у прямокутному басейні, коли один торець його є махаючим хвильпродуктором. Експериментальні спостереження виявили, що хвилі збуджуються у двох різних резонансних режимах. Перший вид хвиль відповідає вимушеному резонансу, коли реалізуються хвилі у напрямку вібрацій хвильпродуктора з власними частотами рівними частоті збудження. Другий тип хвиль є параметричні резонансні хвилі, їх вузли і максимуми розташовуються перпендикулярно до віброуючих поверхонь. Ці хрестоподібні хвилі мають частоти рівні половині частоти хвильпродуктора. Існування хаотичних аттракторів встановлено у динамічній системі, яка описує взаємодію хрестоподібних та вимушених хвиль на поверхні рідини між двома циліндрами скінченої довжини. На основі аналізу старших показників Ляпунова були встановлені два види усталених режимів: періодичні та хаотичні. Побудовані та вивчені фазові портрети та спектральні щільності розв'язків. У системі, яка описує резонансні хрестоподібні хвилі у прямокутному басейні, хаотичних режимів не виявлено, бо коефіцієнти зв'язку цих хвиль з вимушеними є на порядок меншими, ніж розглядаються. Тому немає факторів, які дестабілізують цю систему.

Ключові слова: хрестоподібні хвилі, хвильпродуктор, параметричний резонанс, хаотична динаміка.

The phenomenon of cross-waves generation in fluid free surface in two finite size containers is studied. The waves could be excited by harmonic axisymmetric deformations of the inner shell in the volume between two cylinders and in a rectangular tank when one wall is a flap wavemaker. Experimental observations have revealed that waves are excited in two different resonance regimes. The first type of waves corresponds to forced resonance, in which axisymmetric patterns are realized with eigenfrequencies equal to the frequency of excitation. The second kind of waves is parametric resonance waves with their crests and troughs aligned perpendicular to the vibrating wall. These so-called cross-waves have frequencies equal to half of that of the wavemaker. The existence of chaotic attractors was established for the dynamical system presenting cross-waves and forced waves interaction at fluid free-surface in a volume between two cylinders of finite length. On the basis of analysis of the largest Lyapunov exponents for a complex system two types of steady-state regimes are found: periodic and chaotic regimes. Phase portraits and power spectra are constructed and studied. Attention is concentrated mainly on the properties of chaotic attractors. For the system describing resonant cross-waves in the rectangular tank no chaotic regimes were found because the connection coefficients of cross-waves with the axisymmetric waves under the forced resonance are values on much smaller order than considered here. So that there are less factors to destabilize the system.

Key Words: Cross-waves, Wavemaker, Parametric resonance, Chaotic dynamics.

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Жук Я.О.

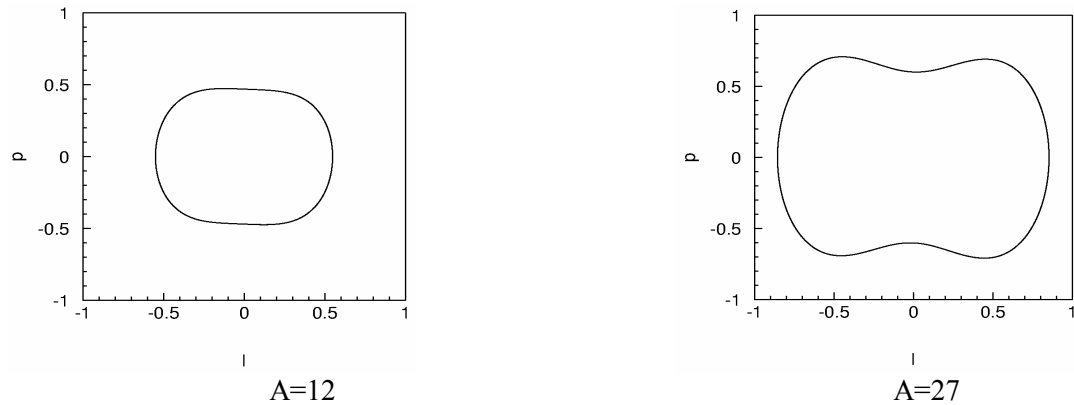


Fig. 1 Phase portraits for different values of wavemaker amplitude A

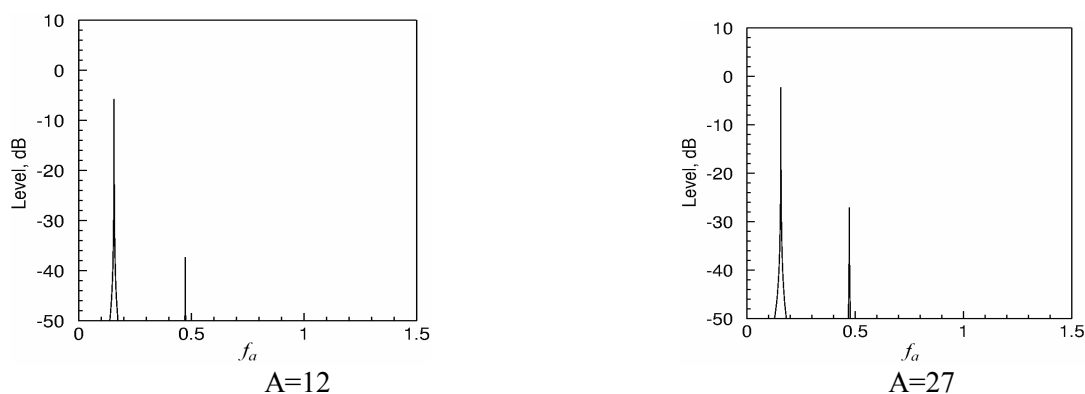


Fig. 2 Power spectra computed for l time realization for different values of A

Introduction

The phenomenon of cross-waves generation in free-surface waves in fluid confined in a rectangular tank with a finite depth and one wall as a flap wavemaker is rather known [2, 3]. The waves may be excited by harmonic oscillations of wavemaker and depending on the vibration frequency both axisymmetric and non-symmetric wave patterns may arise. Experimental observations have revealed that waves are excited in two different resonance regimes. The first type of waves corresponds to forced resonance, in which axisymmetric patterns are realized with eigenfrequencies equal to the frequency of excitation. The second kind of waves is parametric resonance waves and in this case the waves are "transverse", with their crests and troughs aligned perpendicular to the vibrating wall. These so-called cross-waves have frequencies equal to half of that of the wavemaker [2]. To obtain a lucid picture of energy transmission from the wavemaker motion to the fluid free-surface motion the method of superposition Lamé [1] has been used. This method allows to construct a simple mathematical model, which shows how the cross-waves can be generated directly by the wavemaker. All previous theories

have considered cross-waves problem applying the Havelock's solution [2, 3] of the wavemaker problem for a semi-infinite tank with an infinite depth and a radiation condition instead of zero velocity condition at the finite bottom.

As the second task the phenomenon of deterioration of fluid free-surface waves between two cylindrical shells when the inner wall (a wavemaker in this case) vibrates radially is considered in the present paper.

Approximation of cross-waves in rectangular container

Let us theoretically consider the nonlinear problems of fluid free-surface waves which are excited by a flap wavemaker at one wall of rectangular tank of a finite length and depth. From the experimental observations [3], we may conclude that the pattern formation has a resonance character, every pattern having its "own" frequency. Assuming that the fluid is inviscid and incompressible, and that the induced motion is irrotational, the velocity field can be written as $\mathbf{v} = \nabla \varphi$. Let us consider that patterns can be described in terms of normal modes with characteristic eigenfrequencies, we approximate free surface displacement waves, when the excitation frequency ω is twice as large as one of the

eigenfrequencies, i.e. $\omega \approx 2\omega_{nm}$, and also is close to other eigenfrequency $\omega \approx \omega_{l0}$, as a function written in the form

$$\xi \approx \xi_{nm}(t) \cos \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{m\pi y}{b} + \xi_{lo}(t) \cos \frac{l\pi x}{L} + \xi_{00}. \quad (2.1)$$

When $\xi_{nm}(t) = O(\varepsilon_1^{3/2})$, $\xi_{lo} = O(\varepsilon_1)$, $\xi_{00} = O(\varepsilon_1)$,

$\varepsilon_1 = \frac{a\omega_{nm}^2}{g}$ is a small parameter, a is an amplitude of

wavemaker oscillations, L is the length, b is the width and h is the depth of the fluid container. Then a potential of fluid velocity $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_0$

as the solution of the harmonic equation [1] and according to [3] has following components

$$\varphi_1 = \varphi_{nm}(t) \cos \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{m\pi y}{b} \frac{\text{ch}[k_{nm}(z+h)]}{\text{ch}(k_{nm}h)} + \varphi_{lo} \cos \frac{l\pi x}{L} \frac{\text{ch}[k_{lo}(z+h)]}{\text{ch}(k_{lo}h)}.$$

$$\varphi_2 = -\varepsilon_1 \cos \omega t \sum_{j=1}^{\infty} \frac{4g h [1 - (-1)^j]}{\omega_{nm} \alpha_{0j} (\text{th} \alpha_{0j} L) (j\pi)^2} *$$

$$\cos \frac{j\pi z}{h} \frac{\text{ch} \alpha_{0j} (x-L)}{\text{ch} \alpha_{0j}} -$$

$$-\varepsilon_1 \dot{\xi}_{nm} \sin \omega t \frac{g \left[\frac{3}{2} \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 + \frac{k_{nm} \text{th} k_{nm} h}{h} \right]}{\omega_{nm}^2 h \alpha_{0j} \alpha_{m0} \text{th} \alpha_{m0} L (k_{nm} \text{th} k_{nm} h)} *$$

$$\cos \frac{m\pi y}{b} \frac{\text{ch} \alpha_{m0} (x-L)}{\text{ch} \alpha_{m0}} -$$

$$-\varepsilon_1 \dot{\xi}_{nm}(t) \sin \omega t \sum_{j=1}^{\infty} \frac{g \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 [1 - (-1)^j]}{\omega_{nm}^2 \alpha_{mj} (j\pi)^2 \text{th} \alpha_{mj} L (k_{nm} \text{th} k_{nm} h)} *$$

$$\cos \frac{m\pi y}{b} \cos \frac{j\pi z}{h} \frac{\text{ch} \alpha_{mj} (x-L)}{\text{ch} \alpha_{mj}}.$$

Where $\varphi_{nm}(t) = O(\varepsilon_1^{1/2})$ and $\varphi_{lo} = O(\varepsilon_1)$

Using kinematical free-surface boundary conditions, [3], we may find that the amplitude of the resonant cross-wave mode is

$$\xi_{nm}(t) = \frac{\dot{\xi}_{nm}}{k_{nm} \text{th} k_{nm} h} - \varepsilon_1 \xi_{nm} D \cos \omega t; \quad (2.2)$$

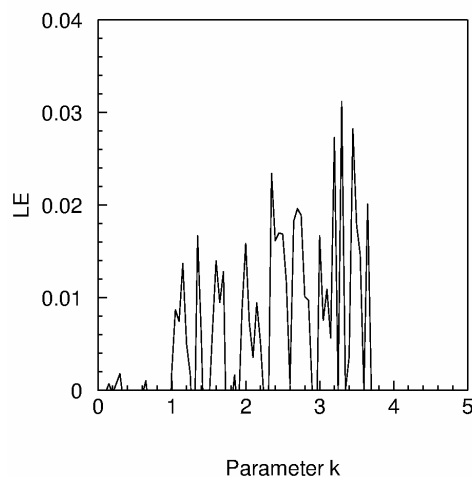


Fig. 3 The dependence of the maximum Lyapunov exponent on value k

when

$$D = \frac{1}{k_{nm} \text{th} k_{nm} h} \left[\sum_j \frac{8g [1 - (-1)^j]}{\omega_{nm} h^2 \alpha_{0j} (\text{th} \alpha_{0j} L)} \right] * \int_0^L \cos^2 \frac{n\pi x}{L} \frac{\text{ch} \alpha_{0j} (x-L)}{\text{ch} \alpha_{0j} L} dx + \frac{g}{\omega_{nm} L} - \frac{g}{\omega_{nm} L} \int_0^L \left(\frac{n\pi}{L} \right) (x-L) \sin 2 \frac{n\pi x}{L} dx.$$

Applying the dynamical boundary condition we can get for the resonant amplitude an equation of parametric oscillations and write it for the rectangular tank with $L = 50$ m, $h = 2.5$ m, $b = 6.8$ m and for the wave numbers $n = 40$, $m = 10$ in the form

$$\ddot{\xi}_{nm} + \omega_{nm}^2 \xi_{nm} - \frac{9}{16} \omega_{nm}^2 k_{nm}^2 \xi_{nm}^3 + \frac{3}{4} k_{nm}^2 \xi_{nm} \dot{\xi}_{nm}^2 + 0.0478 \omega_{nm}^2 \xi_{nm} \sin \omega t - 0.0299 \omega_{nm} \dot{\xi}_{nm} \cos \omega t = 0. \quad (2.3)$$

Where $k_{nm}^2 = \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b} \right)^2$, the frequency is

$\omega_{nm} = 2\pi 1.143$ Hz. We may use the transformation to the dimensionless variables $l = \xi_{nm} / \mu$, p , $\tau = \omega_{nm} t$, and finally get a dynamical system (when $\omega = 2\pi 2.27$ Hz and $\mu = 0.26$ m) in the following form

$$\begin{aligned} \dot{l} &= p \\ \dot{p} &= -l - \alpha p + 1.0504 l^3 - 1.4003 p^2 \\ &\quad - 0.0478 A l \sin(2\tau - \beta\tau) + 0.0299 A p \cos(2\tau - \beta\tau) \end{aligned}$$

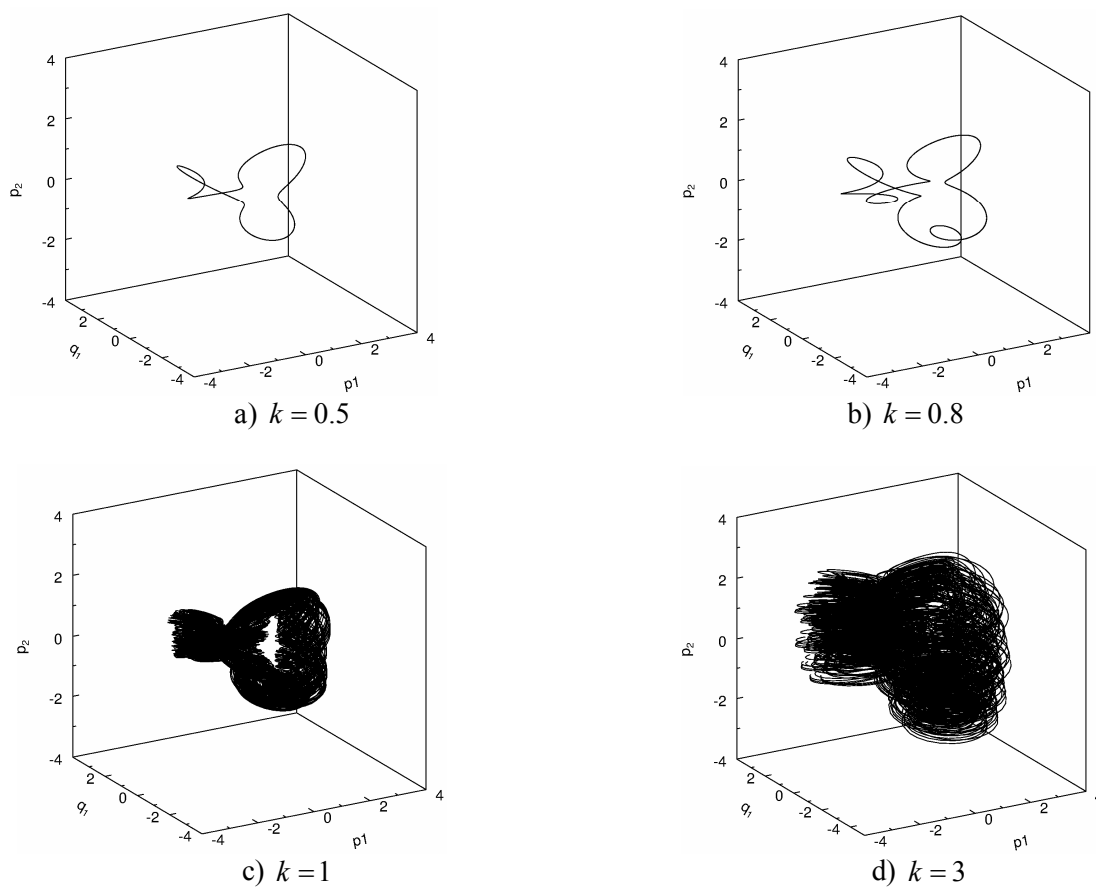


Fig. 4 Phase portraits for regular (cases a, b) and chaotic regimes (cases c, d)

This system (at $\beta = 2 - \frac{\omega}{\omega_{nm}} = 0.014$ and additional damping forces with $\alpha = 0.01$) has for any initial conditions only regular solutions. As an example in the fig.1 the phase portraits for different values of parameter A (which is proportional to the amplitude of wavemaker oscillations) are shown. Power spectra are presented in fig.2. They are discrete for different values of A .

Two mode model of cross-waves in a cylindrical tank

Now we theoretically consider the nonlinear problems of fluid free-surface waves which are excited by inner shell vibrations in a volume between two cylinders of finite length. It is useful to relate the fluid motion to the cylindrical coordinate system (r, θ, x) . The fluid has an average depth d ; the average position of the free surface is taken as $x = 0$, so that the solid tank bottom is at $x = -d$. The fluid is confined between a solid outer cylinder at $r = R_2$ and a deformable inner cylinder (which acts as the wavemaker) at average radius

$R_1 = r_1 + a_0(d)^{-1} \int_{-d}^0 \cos(\eta x) dx = r_1 + 2a_0 / \pi$. This inner cylinder vibrates harmonically in such a way that the position of the wall of the inner cylinder is $r = R_1 + \chi_1(x, t) = R_1 - (a_0 + a_1 \cos \omega t) \cos \eta x - 2a_0 / \pi$, where $\eta = \pi / (2d)$. The potential ϕ can be written as the sum of three harmonic functions $\phi = \phi_0 + \phi_1 + \phi_2$ [1]. The solution of the linear problem for ϕ_1 can be written in the form [2]:

$$\phi_1 = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \phi_{ij}^{c,s}(t) \frac{\cosh k_{ij}(x+d)}{N_{ij} \cosh k_{ij}d} \psi_{ij}^{c,s}(r, \theta), \quad (3.1)$$

on the complete systems of azimuthal $(\cos i\theta, \sin i\theta)$, and radial eigenfunctions

$$\chi_{ij}(k_{ij}r) = J_i(k_{ij}r) - \frac{J_i(k_{ij}R_1)}{Y_i(k_{ij}R_1)} Y_i(k_{ij}r), \quad \text{with}$$

some arbitrary amplitudes $\phi_{ij}^{c,s}(t)$. In the solution (3.1) the notations

$\psi_{ij}^{c,s}(r, \theta) = \chi_{ij}(k_{ij}r)(\cos i\theta, \sin i\theta)$ are used, where J_i and Y_i are the i -th order Bessel functions of the first and the second kind, respectively, and N_{ij} is a normalization constant, where the index c (or s) indicates that the eigenfunction $\cos i\theta$ (or $\sin i\theta$) is chosen as the circumferential component; k_{ij} represents eigen wave numbers.

Under a parametric resonance, when the excitation frequency is twice as large as one of the eigenfrequencies, i.e. $\omega \approx 2\omega_{nm}$, and according the experimental observations we may assume that the free-surface displacement can be approximated by two resonant modes. So that we may write [2, 4]

$$\zeta \approx \frac{1}{N_{nm}} \zeta_{nm} \psi_{nm}^c(r, \theta) + \frac{1}{N_{0l}} \zeta_{0l} \psi_{0l}(r) + \zeta_0 \quad (3.3)$$

where ψ_{0l} is the axisymmetric mode which has the eigenfrequency by a value very close to ω , i.e. $\omega_{0l} \approx \omega$. From the experimental observations follows that cross-waves has amplitudes much bigger than the amplitudes of the forced waves with the frequency ω of the wavemaker vibrations. So that we can seek the unknown functions in the form

$$\begin{aligned} \zeta_{nm}(t) &= \varepsilon_1^{1/2} \lambda_1 \left[p_1(\tau_1) \cos \frac{\omega t}{2} + q_1(\tau_1) \sin \frac{\omega t}{2} \right]; \\ \zeta_{0l}(t) &= \varepsilon_1 \lambda_0 [p_2(\tau_1) \cos \omega t + q_2(\tau_1) \sin \omega t], \end{aligned} \quad (3.4)$$

where $\lambda_1 = k_{nm}^{-1} \text{th}(k_{nm}h)$, $\varepsilon_1 = \frac{a\omega_{nm}^2}{g}$ is a small

parameter, $\tau_1 = \frac{1}{4} \varepsilon_1 \omega t$ is a dimensionless slow

time, $\lambda_0 = k_{0l}^{-1} \text{th}(k_{0l}h)$. By substitution of the expressions (3.4) into boundary conditions [2] and averaging over the fast time ωt we finally obtain the dynamical system in the form [4]:

$$\begin{aligned} \frac{dp_1}{d\tau_1} &= -\alpha p_1 - \vartheta q_1 + \beta_3 q_1 + \beta(q_1 p_2 - p_1 q_2); \\ \frac{dq_1}{d\tau_1} &= -\alpha q_1 + \vartheta p_1 + \beta_3 p_1 + \beta(p_1 p_2 + q_1 q_2); \\ \frac{dp_2}{d\tau_1} &= -\alpha p_2 - \beta_2 q_2 - 2\beta_4 p_1 q_1; \\ \frac{dq_2}{d\tau_1} &= -\alpha q_2 + \beta_2 p_2 + \beta_4(p_1^2 - q_1^2) + \beta_5, \end{aligned} \quad (3.5)$$

where $\vartheta = \left[\beta_1 + \frac{\beta_6}{2}(p_1^2 + q_1^2) \right]$, $\alpha = \frac{\delta}{\omega_{nm}}$, δ is the ratio of actual to critical damping of the mode, β_i ($i=1, 2, \dots, 6$) are constant coefficients. The dynamical system (3.5) is nonlinear, so numerical solutions were obtained. We used the following coefficients and data [2, 4]:

$$\begin{aligned} \alpha &= 0.01; \quad \beta_1 = 0, \quad \beta_2 = 0.2 \quad \beta_3 = 1.3k; \quad \beta_4 = 0.25; \\ \beta_5 &= 0.235k; \quad \beta_6 = 1.12; \quad \beta = -1.531; \\ p_1(0) &= q_1(0) = p_2(0) = q_2(0) = 0.5. \end{aligned}$$

For these parameters and for different values of k (which is dimensionless amplitude of the wavemaker vibrations) extensive numerical calculations were carried out in order to find all steady state regimes. In Figure 3 dependence of the maximum Lyapunov exponent on value k is shown. So that we may conclude that the dynamical system has chaotic regimes in some area of the parameter k changing, where the Lyapunov exponent is positive.

To demonstrate this we show in Figure 4 the phase portraits of solutions. In Figure 4 c) and d) we have the chaotic attractors. Power spectra are shown in Figures 5. As we may conclude from numerical data and graphs in Figures 3-5 the dynamical system (3.5) has both regular and chaotic regimes. The chaotic regimes could be realized when $k \geq 1$. For such values of corresponding amplitudes of wavemaker oscillations the largest Lyapunov exponents are positive, phase portraits have complicated structures of trajectory sets and power spectra are continuous ones.

Conclusions

Two new models expressing interaction of two eigenmodes at the condition of parametric resonances for the cross-waves of fluid free surface oscillations are developed. The existence of chaotic attractors was established for the dynamical system presenting cross-waves and forced waves interaction at fluid free-surface in a volume between two cylinders of finite length. For the system describing

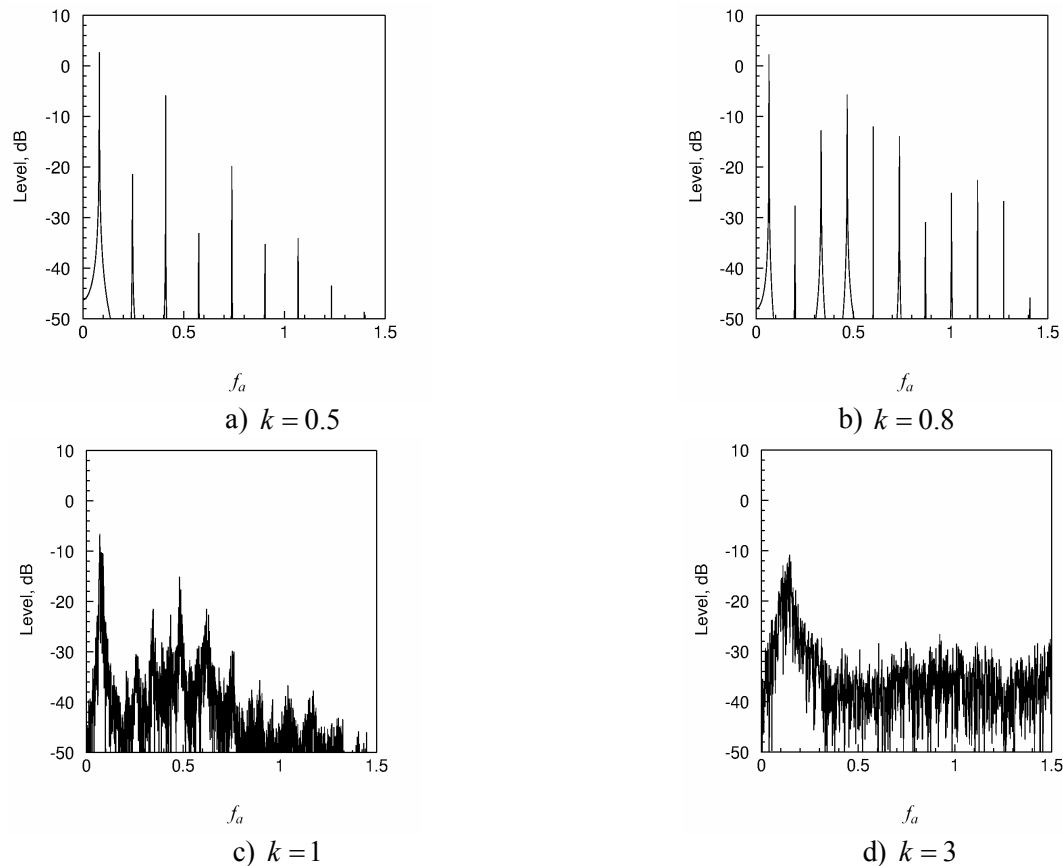


Fig. 5 Power spectra computed for p_1 data (cases a, b, c and d)

resonant cross-waves in the rectangular tank no chaotic regimes were found because the connection coefficients of cross-waves with the axisymmetric

waves under the forced resonance are values on much smaller order then considered here. So that there are less factors to destabilize the system.

References

Список використаних джерел

1. *Lame, G. Leçons sur la Théorie Mathématique de l'Elasticité des Corps Solids* / G. Lamé. –Paris: Bachelier, C., 1852.
2. *Krasnopolskaya T. S. Wave pattern formation in a fluid annulus with a vibrating inner shell.* / T.S. Krasnopolskaya, G.J.F. van Heijst // *Journal of Fluid Mechanics* – 1996. –328. P. 229-252.
3. *Краснопольська, Т. С. Хрестоподібні хвилі у прямокутному каналі скінченних розмірів* / Т. С. Краснопольська, В.М. Спектор // *Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка Серія фізико-математичні науки* –2012. –№ 1. С. 93 – 100.
4. *Krasnopolskaya T.S. Chaos in parametrically excited continuous systems.* / T.S. Krasnopolskaya, A.A. Gourjii, V.M. Spector, D.F. Prykhodko // *Chaotic Modeling and Simulation (CMSIM)* – 2013. - №3. – P. 413-422.
5. *LAME, G. (1852) Leçons sur la Théorie Mathématique de l'Elasticité des Corps Solids.* Paris: Bachelier, C.
6. *KRASNOPOLSKAYA, T. S. & VAN HEIJST, G.J.F. (1996) Wave pattern formation in a fluid annulus with a vibrating inner shell. Journal of Fluid Mechanics. 328. p. 229-252.*
7. *KRASNOPOLSKAYA, T. S. & SPEKTOR, V. M. (2012) Cross-waves in a rectangular channel of finite dimensions. Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kiev, Series Physics & Mathematic. (1). p. 93-100.*
8. *KRASNOPOLSKAYA, T. S., GOURJII, A. A., SPEKTOR, V. M. and PRYKHODKO, D. F. (2013) Chaos in parametrically excited continuous systems. Chaotic Modeling and Simulation. (3). p. 413-422.*

Надійшла до редколегії 27.03.14

УДК 519.9

Трунов О.О., аспірант

Хвильове поле у хвилеводі з вигином

Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, просп.
Глушкова, 4е,
e-mail: trunov.olexandr@gmail.com

O.O. Trunov, graduate student

A wave field in a waveguide with a bend

Taras Shevchenko National University of Kyiv,
03680, Kyiv, Glushkova st., 4e,
e-mail: trunov.olexandr@gmail.com

Розглянута плоска задача поширення нормальної хвилі у хвилеводі з вигином. Проведені розрахунки енергетичного коефіцієнту проходження хвилі крізь вигин та енергетичних коефіцієнтів збудження мод в області хвилеводу за вигином в залежності від геометричних параметрів хвилеводу. Характерні розміри хвилеводу порівняні з довжиною хвилі.

Ключові слова: хвилевід, нормальна хвиля, граничні умови.

In present article the plane problem of wave propagation in a waveguide with a bend was considered. The problem using the method of boundary regions was solved. The pressure field in the waveguide with hard boundaries was determined. Calculation of energy transmission coefficient through the bend and coefficients of excitation of the modes beyond the bend in the waveguide depending on geometrical parameters of the waveguide was done. Dimensions of the waveguide are proportional to the wave length. The mode structure beyond the bend depends strongly on inner radius, outer radius and angle of the bend. At certain combinations of these parameters is the dominance of one of the waveguide modes. Two representations of wave mode structure in the bend were used in current article. Calculated fields in the waveguide using both representations are equal.

Key words: a waveguide with a bend, normal wave, boundary conditions.

Статтю представив д. ф.-м. н., проф. Жук Я.О.

Вступ

Нерегулярні хвилеводи знаходять широке застосування в акустичних та радіоелектронних пристроях [1]. Тому і в теперішній час інтерес до дослідження хвильового поля в них не слабшає [2, 3]. Серед великого класу нерегулярностей, які мають місце у хвилеводах, виділимо клас неоднорідностей, пов'язаних зі зміною геометрії хвилеводу. В нашому випадку це наявність області вигину у хвилеводі. При цьому, параметри середовища, що наповнює хвилевід, залишаються незмінними.

Теорія таких нерегулярних хвилеводів, за умови, що вони є одномодовими, добре розвинена [4]. Якщо відношення характерного розміру хвилеводу до довжини хвилі досить велике (скажімо більше п'яти), то при дослідженні взаємодії хвилі з неоднорідністю хвилеводу можна використовувати методи геометричної теорії дифракції. Теорія хвилеводів з неоднорідностями, для яких характерний розмір порівняний з довжиною хвилі, розвинена слабше. Причиною цього є об'єктивні труднощі, що

виникають при побудові строгого розв'язку відповідних граничних задач.

У даній роботі розглядається акустичний хвилевід, геометричні розміри котрого порівняні з довжиною хвилі.

Постановка та побудова розв'язку задачі

Розглянемо плоский хвилевід, поверхні якого на деякій ділянці являють собою дуги кола, рис. 1. До криволінійної ділянки примикають плоскопаралельні хвилеводи. Для опису геометрії хвилеводу і подальшої побудови розв'язку задачі про поширення гармонічної хвилі в хвилеводі, введемо три системи координат: дві декартові (x, y) , (x', y') і полярну (r, φ) із загальним центром у точці O . Радіуси поверхонь криволінійної ділянки хвилеводу позначені r_1 і r_2 . Ширина хвилеводу на всій його довжині залишається сталою й дорівнює $h = r_2 - r_1$. Кут розкриття криволінійної частини хвилеводу позначений φ_0 . Усі поверхні хвилеводу будемо вважати акустично жорсткими. Хвилевід

наповнений ідеальною рідиною із щільністю ρ й швидкістю звуку c . Побудований розв'язок, з необхідною зміною параметрів, що визначають хвильове поле, повністю відповідає твердому хвилеводу з поширенням у ньому SH хвиль.

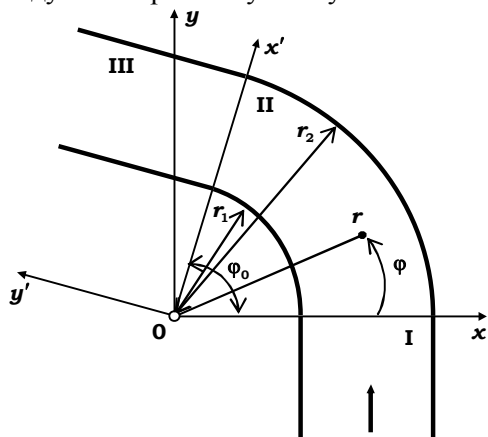


Рис. 1. Геометрія хвилеводу

Згідно методу часткових областей [5] вся область існування звукового поля розбивається на три області: області I і III – плоскопаралельні хвилеводи, область II – ділянка хвилеводу із криволінійними поверхнями. Нехай в області I у додатному напрямку осі Oy поширюється s -та мода плоскопаралельного хвилеводу. Тоді поле в областях I і III запишемо у вигляді суперпозиції відповідних мод хвилеводу. Для хвилеводу з акустично жорсткими поверхнями поле тиску має вигляд

$$p_I = \cos(\alpha_s(x - r_1)) \exp(i\gamma_s y) + \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos(\alpha_n(x - r_1)) \exp(-i\gamma_n y), \quad (1)$$

$$p_{III} = \sum_{n=0}^{\infty} D_n \cos(\alpha_n(x' - r_1)) \exp(i\gamma_n y'), \quad (2)$$

де $\alpha_n = n\pi/h$, $\gamma_n = \sqrt{k^2 - \alpha_n^2}$, $k = \omega/c$, ω – частота. Часовий множник $\exp(-i\omega t)$ не пишемо.

Можливі два варіанти представлення поля у криволінійній області II. У першому варіанті поле в області II запишемо у вигляді суперпозиції нормальних хвиль [2, 6]

$$p_{II} = \sum_{n=0}^{\infty} R_n(kr) \cdot (B_n \exp(i\gamma_n \varphi) + C_n \exp(i\gamma_n(\varphi - \varphi_0))), \quad (3)$$

де власні форми мод для хвилеводу з акустично жорсткими межами мають вигляд

$$R_n(kr) = J_{\gamma_n}(kr) - \frac{J'_{\gamma_n}(kr_2)}{Y'_{\gamma_n}(kr_2)} Y_{\gamma_n}(kr), \quad (4)$$

тут $J_{\gamma}(kr)$ й $Y_{\gamma}(kr)$ – функції Бесселя першого і другого роду. Дисперсійне рівняння, яке встановлює зв'язок між частотою $\omega = kc$ й сталою поширення γ має вигляд

$$J'_{\gamma}(kr_2) Y'_{\gamma}(kr_1) - J'_{\gamma}(kr_1) Y'_{\gamma}(kr_2) = 0. \quad (5)$$

У другому варіанті запису поля в області II, згідно методу часткових областей [5], можна записати набори розв'язків рівняння Гельмгольца в різних системах координат, композиція яких дозволить задовольнити умовам на границях області II. Отже, другий варіант представлення поля в області II матиме вигляд

$$p_{II} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \cos(\alpha_n(x - r_1)) \exp(i\gamma_n y) + \sum_{n=0}^{\infty} C_n \cos(\alpha_n(x' - r_1)) \exp(-i\gamma_n y') + \sum_{n=0}^{\infty} E_n \cos(\beta_n \varphi) \frac{J_{\beta_n}(kr)}{J'_{\beta_n}(kr_2)} + \sum_{n=0}^{\infty} F_n \cos(\beta_n \varphi) \frac{Y_{\beta_n}(kr)}{Y'_{\beta_n}(kr_1)}, \quad (6)$$

тут $\beta_n = n\pi/\varphi_0$. Перші дві суми у формулі (6) дозволять задовольнити умовам спряження полів на межах часткових областей I, II і II, III, а виконання граничних умов на криволінійних поверхнях області II забезпечать третя й четверта суми у формулі (6).

Для розв'язку задачі поширення хвилі у хвилеводі слід розписати умови спряження звукових полів на межах часткових областей I, II і II, III (рис. 1), які являють собою рівності тисків і нормальних швидкостей на цих межах. Далі проводимо стандартну процедуру переходу від функціональної до алгебраїчної системи рівнянь, використовуючи властивості повноти і ортогональності відповідного набору функцій косинусів у виразах (1), (2), (3) або (1), (2), (6). Ця процедура детально описана у монографії [5]. В результаті одержимо нескінченну систему лінійних алгебраїчних рівнянь другого роду відносно шуканих коефіцієнтів A_n , B_n , C_n , D_n . Нескінченна система рівнянь розв'язувалася методом редукції. Вірність отриманого розв'язку гарантується виконанням умов спряження полів на межах часткових областей I, II і II, III, а також контролем закону збереження енергії [5]. В усіх проведених розрахунках криві, які визначають

спряження полів на межах часткових областей з графічною точністю співпадають. Така ситуація є типовою. При цьому закон збереження енергії виконується з точністю до четвертого знаку після коми.

Важливе значення мають енергетичні характеристики проходження хвилі крізь вигин. Коефіцієнт проходження $W^{(s)}$ визначається як відношення середнього потоку потужності хвилі в області III до середнього потоку потужності s -ої нормальної хвилі, що набігає на область II з області I (рис. 1). Енергетичний коефіцієнт проходження можна записати у вигляді [5]

$$W^{(s)} = \sum_{n=0}^{N_3} W_n^{(s)}, \text{ де } W_n^{(s)} = |D_n|^2 \cdot \frac{\varepsilon_n \operatorname{Re}(\gamma_n)}{\varepsilon_s \operatorname{Re}(\gamma_s)}, \quad (7)$$

$\varepsilon_0 = 1$, $\varepsilon_n = 0,5$ при $n > 0$. Як бачимо, величина $W^{(s)}$ представляється у вигляді суми енергетичних коефіцієнтів збурення $W_n^{(s)}$ нормальних хвиль в області III, або, інакше, про вираз (7) можна говорити як про суму коефіцієнтів трансформації s -ої нормальної хвилі області I у нормальну хвилю області III. Число доданків N_3 у формулі (7) дорівнює кількості хвиль, що поширюються в області III.

Аналогічно, енергетичний коефіцієнт відбиття $V^{(s)}$ матиме вигляд

$$V^{(s)} = \sum_{n=0}^{N_1} V_n^{(s)}, \text{ де } V_n^{(s)} = |A_n|^2 \cdot \frac{\varepsilon_n \operatorname{Re}(\gamma_n)}{\varepsilon_s \operatorname{Re}(\gamma_s)}. \quad (8)$$

Аналіз чисельних результатів

Відразу зазначимо, що згідно розрахунків, хвильовід із вигином у всьому частотному діапазоні, який досліджувався, виявився практично звукопрозорим. Однак при цьому структура мод поля в області III суттєво залежить від геометрії хвильоводу.

Як приклад, на рис. 2 показані залежності енергетичних коефіцієнтів збурення $W_n^{(0)}$ нормальних хвиль в області III в залежності від хвильової ширини h/λ при деякій величині відношення r_1/h . Нульова мода хвильоводу із жорсткими межами поширюється при будь-якому хвильовому розмірі хвильоводу. Для області III мода з номером $n > 0$ є однорідною при виконанні умови $h > n\lambda/2$. У цьому випадку середній потік потужності в даній нормальній хвилі не дорівнює нулю. Графіки на рис. 2 а показують, що коли хвильовий розмір $h/\lambda < 0,5$, то в області III, поширюється тільки

нульова нормальна хвиля (крива 0) і вона визначає проходження нульової моди області I крізь вигин хвильоводу. Ситуація змінюється, якщо $h/\lambda > 0,5$, тут збуджується перша нормальна хвиля (крива 1), яка по величині значно перевершує нульову, а при $h/\lambda > 1$ домінує друга нормальна хвиля (крива 2) і далі більш високі моди. Порівнюючи графіки на рис. 2 а і б бачимо, що домінування окремої моди на певному частотному інтервалі проявляється тим сильніше, чим менше відношення r_1/h . З ростом радіусу округлення r_1/h вплив нульової та першої мод стає більш вагомим.

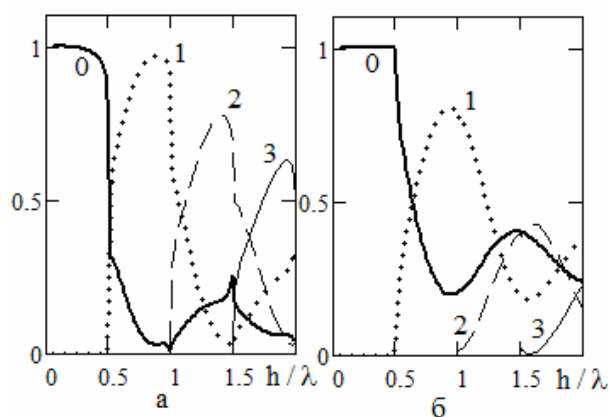


Рис. 2. Залежності енергетичних коефіцієнтів збурення мод $W_n^{(0)}$ в області III від хвильової ширини h/λ , $\varphi_0 = 60^\circ$: а – $r_1/h = 0,1$, б – $r_1/h = 1$

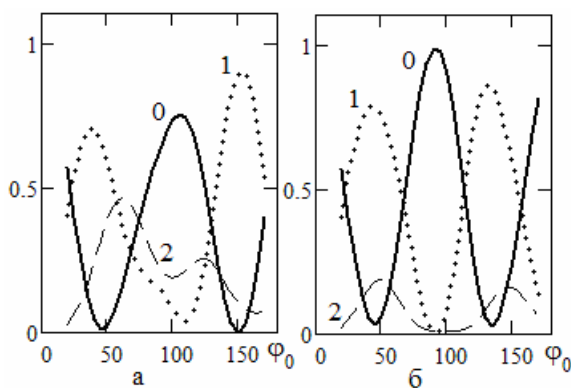


Рис. 3. Залежності енергетичних коефіцієнтів збурення мод $W_n^{(0)}$ в області III від кута φ_0 , $h/\lambda = 1,15$: а – $r_1/h = 0,3$, б – $r_1/h = 1$

На рис. 3 показані залежності коефіцієнтів збурення мод в області III від кута розкриття області вигину φ_0 . Як бачимо, тут також можна виділити інтервали зміни кута вигину де домінує нульова або перша мода. При цьому вплив другої

моди на поле у хвилеводі стає більш вагомим при зменшенні величини r_1/h .

Як приклад, на рис. 4 показано поле амплітуди тиску в околі вигину і в перерізі на вході (крива 1) і виході (крива 2) області II при таких параметрах хвилеводу: $\varphi_0 = 60^\circ$, $h/\lambda = 0,8$, $r_1/h = 0,1$. Це ситуація коли домінує перша мода в області II (див. рис. 2 а). Оскільки коефіцієнт проходження дорівнює одиниці, то поле в області I являє собою нульову моду, що набігає на зону вигину. Поле в області III, подалі від вигину, практично визначається першою модою (крива 3). В перерізі області II поле тиску є суттєво неоднорідним. Так, на виході області II амплітуда тиску у зовнішньої поверхні у два рази більша ніж біля внутрішньої.

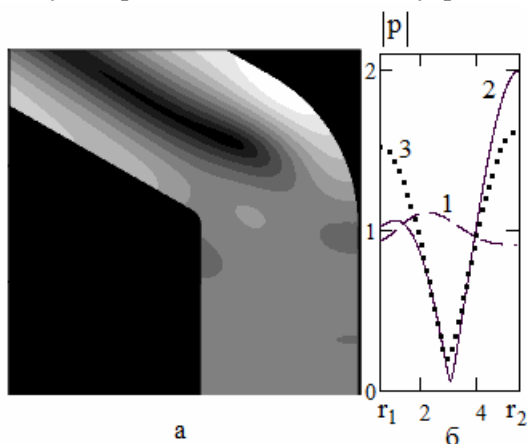


Рис. 4. Поле амплітуди тиску (а) і в перерізі на вході (крива 1), виході (крива 2) області II і подалі від вигину в області III (крива 3):

$$\varphi_0 = 60^\circ, h/\lambda = 0,8, r_1/h = 0,1$$

Висновки

1. Побудовано розв'язок задачі поширення хвилі у плоскому хвилеводі із вигином. Показано, що можна запропонувати два варіанти представлення поля у криволінійній області, а саме, у вигляді суперпозиції нормальних хвиль області II, або у вигляді суми часткових розв'язків рівняння Гельмгольца у різних системах координат. Показано, що розрахунки поля у хвилеводі при використанні обох варіантів запису поля в області II з високою точністю співпадають (графічно відповідні криві не відрізняються).

2. Показано, що область вигину, для дослідженого діапазону частот, виявилася практично звукопрозорою. При цьому структура поля за вигином суттєво залежить від геометричних параметрів хвилеводу, тобто від радіуса заокруглення, кута розкриття φ_0 й

хвильової ширини хвилеводу h/λ . При певній комбінації зазначених параметрів спостерігається домінування однієї з мод хвилеводу.

Список використаних джерел

1. Шестопалов В.П. Резонансное рассеяние волн. Т. 2. Волноводные неоднородности / В.П. Шестопалов, А.А. Кириленко, Л.А. Рудь. – Киев: Наукова думка, 1986. – 214 с.
2. Horvat M. The bends on quantum waveguide and cross-products of Bessel functions / M. Horvat, T. Prosen // J. Phys. A.: Math. Gen. – 2007. – Vol. 24.
3. Chapman C.J. The asymptotic theory of dispersion relations containing Bessel functions of imaginary order / C.J. Chapman // Proceedings of the Royal Society A. – 2012. – October 22.
4. Ржевкин С.Н. Курс лекций по теории звука / С.Н. Ржевкин. – М.: МГУ, 1960. – 336 с.
5. Гринченко В.Т. Волновые задачи акустики / В.Т. Гринченко, И.В. Вовк, В.Т. Маципура. – Киев: Интерсервис, 2013. – 572 с.
6. Маципура В.Т. Поширення хвиль в криволінійному хвилеводі / В.Т. Маципура, І.В. Вовк, О.О. Трунов // Вісник КНУ ім. Т. Шевченка. Фіз.-мат. науки. – 2013. – №3. – с. 192-195.

References

1. SHESTOPALOV, V.P., KIRILENKO, A.A. and RUD, L.A. (1986) *Resonansnoe rasseyaniye voln. Vol.2. Volnovodnyie neodnorodnosti*. Kiev: Naukova dumka.
2. HORVAT, M. and PROSEN, T. (2007) The bends on quantum waveguide and cross-products of Bessel functions. *J. Phys. A. Math. Gen.* Vol. 24.
3. CHAPMAN, C.J. (2012) The asymptotic theory of dispersion relations containing Bessel functions of imaginary order. *Proceedings of the Royal Society A*. October 22.
4. RZHEVKIN S.N. (1960) *Kurs leksij po teorii zvuka* – M.: MGU.
5. GRINCHENKO, V.T., VOVK, I.V. and MATSIPURA, V.T. (2013) *Volnovyie zadachi ackustyki*. Kiev: Interservis.
6. MATSIPURA V.T., VOVK, I.V. and TRUNOV O.O. (2013) Wave propagation in the bent waveguide. *Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kiev, series Physics & Mathematics*. №3. pp. 192-195.

Надійшла до редколегії 15.04.14

УДК 519.9

Трунова Л.А., аспірантка

**Точкове джерело в околі
кутикового відбивача**

Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, просп.
Глушкова, 4е, e-mail: elvie89@ukr.net

L.A. Trunova, graduate student

**Point source in the vicinity
of the corner reflector**

Taras Shevchenko National University of Kyiv,
03680, Kyiv, Glushkova st., 4e, e-mail:
elvie89@ukr.net

Розглянута плоска задача взаємодії точкового джерела з кутиковим відбивачем скінчених розмірів. Розміри кутикового відбивача порівнянні з довжиною хвилі. Проведено дослідження характеристик поля випромінювання кутикової антени в залежності від її параметрів, а саме геометрії куточка та місця розташування джерела.

Ключові слова: характеристика направленості, кутиковий відбивач, точкове джерело.

The plane problem of interaction between a point source and corner reflector of finite size was considered. The pressure field near corner reflector with hard boundaries was determined. The problem using the method of boundary regions was solved. Dimensions of corner reflector are proportional to the wavelength. The research of the characteristics of the radiation field of corner antenna depending on its parameters, namely geometry of corner and location of the source was conducted. There are two areas where the location of the source characteristics of the far field can be identified. At one of which is adjacent to the top corner, characteristics of the far field are stable. In another section of the source location these characteristics are unstable and unsatisfactory, and the radiation power is much lower. The range of variation of the angle of corners, for which is saved optimal directivity diagram can be specified.

Key words: directivity characteristic, the corner reflector, a point source.

Статтю представив д. ф.-м. н., проф. Жук Я.О.

Вступ

Конструкцію, котра являє собою групу джерел, розташованих в околиці кутикового відбивача, прийнято розглядати як кутикову антену [1]. Кутикові антени знаходять застосування в приймально-випромінюючих пристроях, що працюють на звукових і електромагнітних хвилях. Однак, якщо в електромагнітних приладах такі антени працюють зазвичай в діапазоні ультракоротких хвиль, то в акустичних системах інтерес представляють конструкції, у котрих розміри кутикового відбивача порівнянні з довжиною хвилі. Останнім часом кутикові антени знаходять широке застосування при акустичному зондуванні атмосферного прикордонного шару [2, 3, 4].

Дана стаття присвячена дослідженню характеристик поля випромінювання джерела, котре розташоване в околі кутикового відбивача. При цьому геометричні розміри куточка порівнянні з довжиною хвилі. Досліджується поле кутикової антени в залежності від її

параметрів, а саме геометрії куточка та місця розташування джерела.

Постановка та побудова розв'язку задачі

Розглянемо плоску задачу випромінювання точкового джерела, котре розташоване в околиці кутикового відбивача скінчених розмірів з кутом розкриття $2\theta_1$, рис. 1. Джерело розташоване на осі симетрії куточка на відстані R від початку координат O . Джерело створює гармонічну циліндричну хвилю із частотою ω . Будемо вважати, що поверхні куточка акустично жорсткі, а сам куточок занурений в ідеальне рідке середовище із густиною ρ і швидкістю звуку c . Для побудови розв'язку задачі, введемо полярну систему координат $rO\theta$. Згідно з методом часткових областей [5] увесь простір існування звукового поля природно ділиться на три області: I – зовнішність кола радіуса a , тобто $r \geq a$, $|\theta| \leq \pi$; II – сектор $0 \leq r \leq a$, $|\theta| \leq \theta_1$; III – сектор $0 \leq r \leq a$, $|\theta| \geq \pi - \theta_1$.

Поле в області I, з урахуванням симетрії відносно осі $\theta = 0$, запишемо у вигляді

суперпозиції біжучих циліндричних хвиль із кутовою залежністю у вигляді функцій $\cos(n\theta)$, $n = 0, 1, 2, \dots$

$$p_I = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \frac{H_n^{(1)}(kr)}{H_n^{(1)'}(ka)} \cos(n\theta), \quad (1)$$

де $H_n^{(1)}(kr)$ – функція Ханкеля. Часовий множник $\exp(-i\omega t)$ не пишемо.

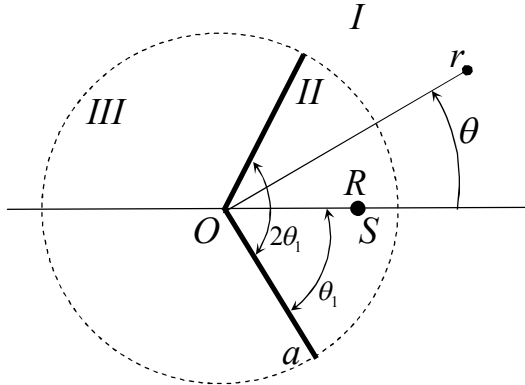


Рис. 1. Геометрія кутикової антени

Поле в області II представимо у вигляді суми двох доданків, одне з них є поле джерела p_0 у клиноподібній області, а друге – суперпозиція, підібраних відповідно до граничних умов на сторонах куточка, стоячих хвиль. Поле в області III – також у вигляді суперпозиції стоячих хвиль:

$$p_{II} = p_0 + \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{J_{\alpha_n}(kr)}{J_{\alpha_n}'(ka)} \cos(\alpha_n \theta), \quad (2)$$

$$p_{III} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \frac{J_{\beta_n}(kr)}{J_{\beta_n}'(ka)} \cos(\beta_n (\theta - \theta_1)), \quad (3)$$

де $J_{\alpha}(kr)$ – функція Бесселя. Штрих біля функцій Бесселя у виразах (3) і (4) означає похідну за повним аргументом. Значення α_n й β_n визначаються із граничних умов на жорстких поверхнях куточка, тому

$$\alpha_n = \frac{\pi n}{\theta_1}, \quad \beta_n = \frac{\pi n}{(\pi - \theta_1)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Для запису поля джерела, що розташоване в області II, слід скористатися відомим виразом для поля джерела в клиноподібній області [6]:

$$p_0(r, \theta; R, \theta_0) = \frac{\pi i}{2\theta_1} \cdot$$

$$\begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n T_n \cos(\alpha_n \theta_0) \cos(\alpha_n \theta), & r < R, \\ \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n E_n \cos(\alpha_n \theta_0) \cos(\alpha_n \theta), & R < r < a, \end{cases} \quad (4)$$

де $T_n = J_{\alpha_n}(kr) H_{\alpha_n}^{(1)}(kR)$, $E_n = J_{\alpha_n}(kR) H_{\alpha_n}^{(1)}(kr)$, r, θ – координати точки спостереження, R, θ_0 – координати джерела; у нашому випадку кут $\theta_0 = 0$, оскільки джерело розташовано на осі симетрії куточка, $\varepsilon_0 = 1$, $\varepsilon_n = 2$ при $n > 0$.

Умови спряження полів на межі часткових областей I і II, III (рис. 1) мають вигляд

$$\frac{\partial p_I}{\partial r} = \begin{cases} \frac{\partial p_{II}}{\partial r}, & r = a, \quad |\theta| \leq \theta_1, \\ \frac{\partial p_{III}}{\partial r}, & r = a, \quad |\theta| \geq \pi - \theta_1, \end{cases} \quad (5)$$

$$p_I = p_{II}, \quad r = a, \quad |\theta| \leq \theta_1, \quad (6)$$

$$p_I = p_{III}, \quad r = a, \quad |\theta| \geq \pi - \theta_1. \quad (7)$$

Підставивши вирази (1)-(4) в умови (5)-(7), одержимо функціональну систему рівнянь. Далі проводимо стандартну процедуру переходу від функціональної до алгебраїчної системи рівнянь, використовуючи властивості повноти і ортогональності відповідного набору функцій косинусів у виразах (1)-(4). Ця процедура детально описана у монографії [5]. У результаті одержимо нескінченну систему лінійних алгебраїчних рівнянь другого роду щодо невідомих коефіцієнтів A_n , B_n , C_n . Нескінченна система рівнянь розв'язувалася методом редукції.

Насамперед, слід перевірити виконання умов спряження полів на межі часткових областей I, II, III та збереження потоку потужності крізь коло, що оточує джерело, при зміні радіусу кола. Нехай параметри кутикової антени такі: $2\theta_1 = 90^\circ$, $a/\lambda = 0,5$ (λ – довжина хвилі), координата джерела $R = a/2$. Кількість мод (число доданків у сумах (1)-(3)) рівно 80, 20, 60 відповідно. При такій кількості маємо рівність: $\alpha_{20} = \beta_{60} = 80$.

На мал. 2 а, б показані, відповідно, дійсна і уявна частини комплексних амплітуд тиску на колі радіуса a . Аналогічні криві для комплексних амплітуд радіальної швидкості представлені на мал. 2 в, г. Як бачимо, характеристики поля тиску із графічною

точністю збігаються. Для коливальної швидкості, в околі кута 45° , збіжність кривих менша. Однак, такий результат є прогнозованим, внаслідок наявності кутових точок у кутикового відбивача скінченних розмірів. Але, як відомо [5], особливість швидкості біля кутових точок має локальний характер і на енергетичні характеристики та дальнє поле впливу не має.

Для перевірки енергетичних співвідношень були обчислені середні потоки потужності через концентричні кола різних радіусів із загальним центром в початку координат O , а саме $0,7a$, a і $3a$. Результати розрахунків збігаються з точністю до четвертого знаку після коми.

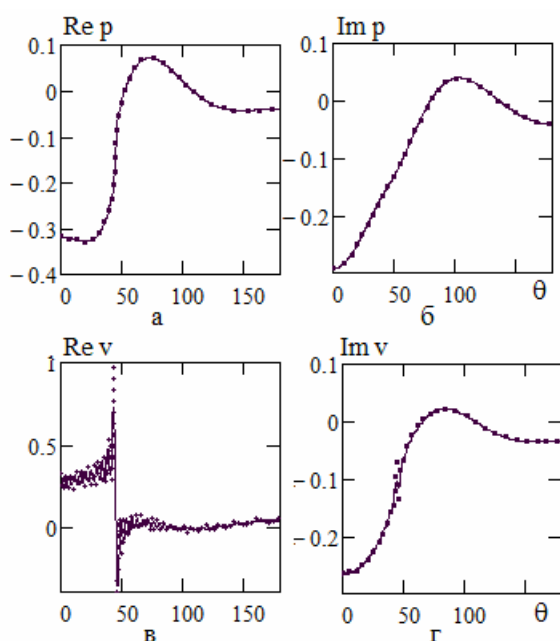


Рис. 2. Поля тиску (а, б) і радіальної швидкості (в, г) на межі часткових областей I і II, III :
лінії – поле з боку області I,
крапки – поле з боку областей II, III;
 $2\theta_1 = 90^\circ$, $a/\lambda = 0,5$, $R = a/2$

Аналіз чисельних результатів

Розглянемо, як змінюється тиск у дальньому полі при $\theta = 0$ та потужність випромінювання залежно від положення джерела S відносно початку координат O , (рис. 3, $2\theta_1 = 90^\circ$, $a/\lambda = 0,5$). Із графіків рис. 3 а (криві 1 і 3) випливає, що, з погляду енергетичної ефективності антени, найбільш доцільно розмішувати джерело звуку в глибині розкриття кутикової антени, тобто ближче до точки O . При цьому рівень тильного випромінювання ($\theta = 180^\circ$, крива 2) змінюється в невеликих межах. Слід зазначити, що розміщення джерела в

околі точки $R = 0,75a$ призводить до значного зменшення потужності випромінювання. Цікаво відзначити, що в широкому діапазоні зміни положення джерела ($R \leq 0,6a$) коефіцієнт концентрації (рис. 3 б, крива 1) залишається сталою величиною. При цьому, в зазначеному діапазоні положення джерела, діаграма спрямованості також залишається практично незмінною, а ширина її головної пелюстки на рівні 0,7 дорівнює $\Delta\theta_{0,7} \approx 74^\circ$.

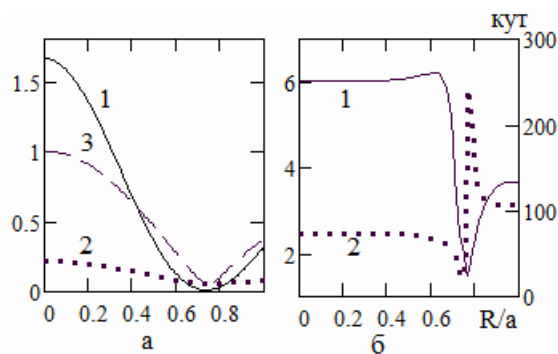


Рис. 3. Характеристики поля в дальній зоні залежно від величини R/a , $2\theta_1 = 90^\circ$, $a/\lambda = 0,5$:

a – нормована амплітуда тиску при $\theta = 0$ (крива 1) і $\theta = 180^\circ$ (крива 2), 3 – потужність випромінювання;
б : 1 – коефіцієнт концентрації Ω , 2 – ширина головної пелюстки $\Delta\theta_{0,7}$

На рис. 4 (крива 1) наведено характерний вигляд діаграми спрямованості при розміщенні джерела на осі куточка з координатою $R \leq 0,6a$. Як бачимо, формується основна пелюстка із шириною $\Delta\theta_{0,7} \approx 74^\circ$ й тильна пелюстка з рівнем 0,24. При розміщенні джерела в околі точки $R = 0,75a$ вигляд діаграми спрямованості (крива 2) різко спотворюється. Тут максимум випромінювання відповідає куту $\theta = 180^\circ$, крім цього виникають ще три великі пелюстки з рівнем порядку 0,8 і 0,9. При цьому максимальна величина амплітуди тиску для характеристики 1 ($\theta = 0$) на рис. 4 приблизно у вісім разів більша ніж для характеристики 2 ($\theta = 180^\circ$).

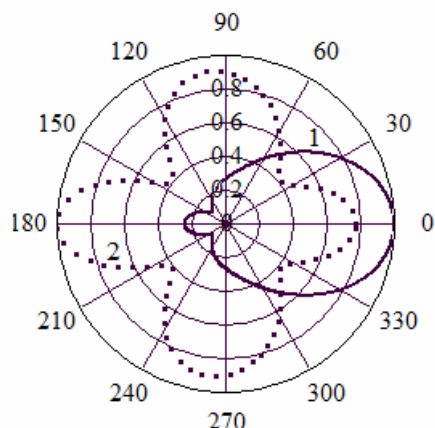


Рис. 4. Діаграми спрямованості кутикової антени, $2\theta_1 = 90^\circ$, $a/\lambda = 0,5$:
1 – $R = 0,5a$, 2 – $R = 0,75a$

На рис. 5 представлені приклади діаграм спрямованості для різних кутів розкриття $2\theta_1$ куточка. Дивлячись на рис. 4 і рис. 5 можна відзначити, що кутикова антена при кутах розкриття $2\theta_1 = 90^\circ, 100^\circ$ має найліпші діаграми спрямованості. Більш детальні розрахунки характеристик спрямованості підтверджують висновок про те, що найбільш оптимальні кути розкриття лежать у зоні $80^\circ \leq 2\theta_1 \leq 100^\circ$.

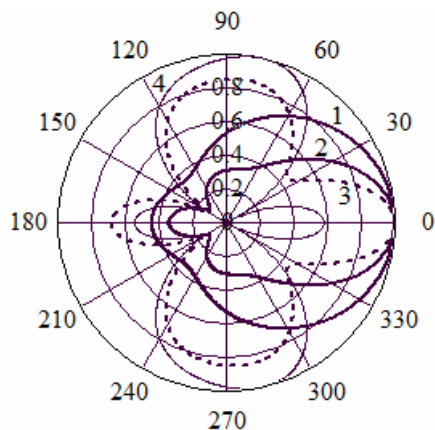


Рис. 5. Діаграми спрямованості кутикової антени для різних кутів розкриття $2\theta_1$, $a/\lambda = 0,5$ і $R/a = 0,5$:
1–4 відповідають $2\theta_1 = 40^\circ, 100^\circ, 140^\circ, 180^\circ$

Висновки

1. Побудовано розв'язок задачі визначення поля точкового гармонічного джерела, розташованого на осі кутикового відбивача, розміри якого порівнянні з довжиною хвилі.

2. Дослідження характеристик дальнього поля випромінювання показало, що при фіксованій геометрії куточка та переміщенні джерела уздовж його осі можна виділити дві ділянки місця розташування джерела. На одній,

котра примикає до вершини куточка, характеристики дальнього поля (коефіцієнт концентрації, ширина основної пелюстки діаграми спрямованості та інші) залишаються стабільними. Для куточка зі стороною $a = 0,5\lambda$ ця ділянка становить $0 < R \leq 0,6a$. На іншій ділянці розташування джерела ці характеристики нестабільні і незадовільні, а потужність випромінювання значно менша.

3. Показано, що при заданій довжині сторони куточка й положенні джерела можна вказати діапазон зміни кута розкриття куточка, для якого зберігається, у певних межах, оптимальна діаграма спрямованості. Для ситуації, коли $a = 0,5\lambda$ та $R = 0,5a$, цей діапазон кутів становить $80^\circ \leq 2\theta_1 \leq 100^\circ$.

Список використаних джерел

1. Кюн Р. Микроволновые антенны / Р. Кюн. – Л.: Судостроение, 1967. – 517 с.
2. Красненко Н.П. Акустическое зондирование атмосферного пограничного слоя / Н.П. Красненко. – Томск, 2001. – 280 с.
3. Каллистратова М.А. Радиоакустическое зондирование атмосферы / М.А. Каллистратова, А.И. Кон. – Москва: Наука, 1985. – 198 с.
4. Acoustic remote sensing application. Lecture notes in earth Science / Edited by S.P. Singal. – "Springer", 1999. – 580 p.
5. Гринченко В.Т. Волновые задачи акустики / В.Т. Гринченко, И.В. Вовк, В.Т. Мацыпура. – Киев: Интерсервис, 2013. – 572 с.
6. Шендеров Е.Л. Излучение и рассеяние звука / Е.Л. Шендеров. – Л.: Судостроение, 1989. – 304 с.

References

1. KUN, P. (1967) *Mikrovolnovyye anteny*. L.: Sudostroenie.
2. KRASNENKO, N.P. (2001) *Akusticheskoe zondirovanie atmosfernogo pogrannichnogo sloya*. Tomsk.
3. KALLISTRATOVA, M.A. and KON, A.I. (1985) *Radioachusticheskoe zondirovanie atmosfery*. Moskva: Nauka.
4. *Acoustic remote sensing application. Lecture notes in earth Science* (1999). Edited by S.P. Singal. "Springer".
5. GRINCHENKO, V.T., VOVK, I.V., MATSIPURA, V.T. (2013) *Volnovyye zadachi akustyki*. Kiev: Interservis.
6. SHENDEROV, E. L. (1989) *Izluchenie i rasseyaniye zvyka*. L.: Sudostroenie.

КОМП'ЮТЕРНІ НАУКИ ТА ІНФОРМАТИКА

УДК 517.929

Е. І. Азізбеков¹, к.ф.-м. н., доц.,
Д. Я. Хусайнов², д.ф.-м. н., проф.

**Про один ітераційний метод знаходження
розв'язків рівняння другого порядку з
запізнюванням**

Бакинський державний університет, AZ 1148,
Баку, вул. Академіка Сахід-Халілова, 23,
Азербайджан,
e-mail: azel_azerbaijan@mail.ru

Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 01601, Україна, Київ,
в.Володимирська, 64,
e-mail: khusainov@unicyb.kiev.ua

E.I.Azizbayov¹, PhD in Math.,
D.Ya. Khusainov², full prof., Dr.Sc.

**An iterative method of finding solutions of
the second order equation with delay**

¹Baku State University, AZ 1148, Baku, Academic
Zahid Khalilov street, 23, Azerbaijan,
e-mail: azel_azerbaijan@mail.ru

²Taras Shevchenko National University of Kyiv,
03680, Kyiv, Glushkova av., 4d,
e-mail: khusainov@unicyb.kiev.ua

Розглядається лінійне стаціонарне диференціальне рівняння другого порядку. За допомогою методу кроків і створення ітераційної процедури записано розв'язок задачі Коші.

Ключові слова: рівняння із запізнюванням аргументу, задача Коші, ітераційна процедура.

Differential equations with delay is a powerful instrument for modeling many natural, technical and social processes. In particular, a lot of the dynamic processes in ecology, economics, medicine, population dynamics can not adequately describe the real state without aftereffect. Differential equations with aftereffect (in particular with delay) can be defined as differential equations in Banach space. And its studying encounters significant difficulties. In particular, linear vibration equation is frequently used in describing many mechanical (linear oscillator). Representation of its solutions is not difficult. But even if you enter one constant delay in the phase coordinate, the analytical representation of the solution become difficult.

In this paper, using an iterative procedure, made an attempt to write the solution of the Cauchy problem for a linear oscillator with a constant delay. Preformed form of the solution of the Cauchy problem for a second-order linear equation. Uses two special functions that define "fundamental system of solutions". For obtaining these functions uses iterative procedure. At each step of the iteration, the equation is an ordinary differential equation with known right-hand side depending on the prehistory. Records its solution.

Key Words: differential equations with delay, problem of Cauchy, iteration procedure.

The article presented Dr.Tech.Sci, Prof. Garashchenko F.G.

Introduction

In this paper we consider the linear second-order equation with one constant delay. Second order differential equations are widely used in various applied sciences [1,2]. Aftereffects influence on the systems dynamics caused the investigation of functional differential systems [3-6]. However, obtain the solution of these equations in explicit form possible only to systems with pure delay [7]. The paper proposes an iterative method for finding

solutions of second order equation with one constant delay.

1. General solution.

In this paper we consider a linear homogeneous equation with one constant delay.

$$x''(t) + a_1 x'(t) + a_2 x'(t - \tau) + b_1 x(t) + b_2 x(t - \tau) = f(t), \\ t \geq 0, \tau > 0, \quad (1.1)$$

with the initial condition

$$x(t) \equiv \phi(t), \quad x'(t) = \phi'(t), \quad -\tau \leq t \leq 0. \quad (1.2)$$

Here a_1, a_2, b_1, b_2 constants, $f(t)$ - continuous function, $\phi(t)$ - random, twice continuously differentiable on the initial interval $-\tau \leq t \leq 0$. function determining the initial conditions. By a solution of the Cauchy problem (1.2) the equation (1.1) we mean defined at $t \geq 0$, twice continuously differentiable function $x(t)$, identically satisfying the equation (1.1) and the initial conditions (1.2). As is known, the solution of the Cauchy problem (1.2) for the inhomogeneous equation (1.1) can be represented as a sum of

$$x(t) = x^0(t) + \bar{x}(t),$$

where $x^0(t)$ - the solution of homogeneous equation

$$x''(t) + a_1 x'(t) + a_2 x'(t - \tau) + b_1 x(t) + b_2 x(t - \tau) = 0, \\ t > 0, \quad \tau > 0, \quad (1.3)$$

with initial conditions (1.2), and $\bar{x}(t)$ - the solution of inhomogeneous equation (1.1) with zero initial conditions $\bar{x}(t) \equiv 0, \quad \bar{x}'(t) \equiv 0, \quad -\tau \leq t \leq 0$.

Denote $x_1(t)$ - the solution of the homogeneous differential equation with initial conditions

$$x_1(t) \equiv 1, \quad x_1'(t) \equiv 0, \quad -\tau \leq t \leq 0, \quad (1.4)$$

and $x_2(t)$ - solution of the homogeneous differential equation (1.3) with initial conditions

$$x_2(t) \equiv t + \tau, \quad x_2'(t) \equiv 1, \quad -\tau \leq t \leq 0. \quad (1.5)$$

We give an affirmation of representation of solution of the Cauchy problem (1.2) for the homogeneous equation (1.3), using functions $x_1(t), x_2(t)$, satisfying the initial conditions (1.4), (1.5). The resulting dependence is similar to given in the work [4, p.69].

Theorem 1.1. Solution of Cauchy problem for the homogeneous equation (1.3) with initial conditions (1.2) can be written as

$$x(t) = \phi(-\tau)x_1(t) + \phi'(-\tau)x_2(t) + \int_{-\tau}^0 x_2(t - \tau - s)\phi''(s)ds, \quad (1.6)$$

where $x_1(t)$ the solution of equation (1.3), satisfying the conditions (1.4), $x_2(t)$ the solution of equation (1.3), satisfying conditions (1.5).

Proof. The solution of equation (1.3) we will find in the form

$$x(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) + \int_{-\tau}^0 x_2(t - \tau - s)c''(s)ds, \quad (1.7)$$

where c_1, c_2 - constants, and $c(t)$ - twice continuously differentiable function. Substituting (1.7) into equation (1.3), we obtain

$$\begin{aligned} & \frac{d^2}{dt^2} \left[c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) + \int_{-\tau}^0 x_2(t - \tau - s)c(s)ds \right] + \\ & + a_1 \frac{d}{dt} \left[c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) + \int_{-\tau}^0 x_2(t - \tau - s)c(s)ds \right] + \\ & + a_2 \frac{d}{dt} \left[c_1 x_1(t - \tau) + c_2 x_2(t - \tau) + \int_{-\tau}^0 x_2(t - 2\tau - s)c(s)ds \right] + \\ & + b_1 \left[c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) + \int_{-\tau}^0 x_2(t - \tau - s)c(s)ds \right] + \\ & + b_2 \frac{d}{dt} \left[c_1 x_1(t - \tau) + c_2 x_2(t - \tau) + \int_{-\tau}^0 x_2(t - 2\tau - s)c(s)ds \right] = 0 \end{aligned}$$

Rewrite the resulting equation in the form

$$\begin{aligned} & c_1 [x_1''(t) + a_1 x_1'(t) + a_2 x_1'(t - \tau) + b_1 x_1(t) + b_2 x_1(t - \tau)] + \\ & + c_2 [x_2''(t) + a_1 x_2'(t) + a_2 x_2'(t - \tau) + b_1 x_2(t) + b_2 x_2(t - \tau)] + \\ & + \int_{-\tau}^0 [x_2''(t - \tau - s) + a_1 x_2'(t - \tau - s) + a_2 x_2'(t - 2\tau - s) + \\ & + b_1 x_2(t - \tau - s) + b_2 x_2(t - 2\tau - s)]c''(s)ds \equiv 0. \end{aligned}$$

Since, $x_1(t)$ and solutions of the homogeneous equation, then for random constants c_1 and c_2 equation in square brackets identically equal to zero. And obtained identity shows that (1.6) is a solution of equation (1.3) for arbitrary constants c_1, c_2 and arbitrary function $c(t)$.

We show that if we put $c_1 = \phi(-\tau), c_2 = \phi'(-\tau), c(t) = \phi(t)$, that will satisfy the initial conditions

$$x(t) = \phi(t), \quad x'(t) = \phi'(t), \quad -\tau \leq t \leq 0,$$

So the Cauchy problem (1.2) for the homogeneous equation (1.3) has the form (1.6).

Substituting the relation (1.6) the initial conditions (1.2), we obtain

$$\phi(t) = \phi(-\tau)x_1(t) + \phi'(-\tau)x_2(t) + \int_{-\tau}^0 x_2(t-\tau-s)\phi''(s)ds, \\ -\tau \leq t \leq 0.$$

We change the variables in the integral: $t - \tau - s = \xi$. Then we obtain

$$\phi(t) = \phi(-\tau)x_1(t) + \phi'(-\tau)x_2(t) + \int_{t-\tau}^t x_2(\xi)\phi''(t-\tau-\xi)d\xi, \\ -\tau \leq t \leq 0.$$

We split the integral into two

$$\phi(t) = \phi(-\tau)x_1(t) + \phi'(-\tau)x_2(t) + \int_{t-\tau}^{-\tau} x_2(\xi)\phi''(t-\tau-\xi)d\xi + \\ + \int_{-\tau}^t x_2(\xi)\phi''(t-\tau-\xi)d\xi.$$

Since for $t - \tau \leq \xi \leq -\tau$ will be $x_1(t) \equiv 0$, first integral disappears and remains

$$\phi(t) = \phi(-\tau)x_1(t) + \phi'(-\tau)x_2(t) + \int_{-\tau}^t x_2(\xi)\phi''(t-\tau-\xi)d\xi, \\ -\tau \leq t \leq 0.$$

Take the integral by parts

$$\phi(t) = \phi(-\tau)x_1(t) + \phi'(-\tau)x_2(t) - \\ - x_2(\xi)\phi'(t-\tau-\xi)\Big|_{\xi=-\tau}^t + \int_{-\tau}^t x_2'(\xi)\phi'(t-\tau-\xi)d\xi = \\ = \phi(-\tau)x_1(t) + x_2(-\tau)\phi'(t) + \\ + \int_{-\tau}^t x_2'(\xi)\phi'(t-\tau-\xi)d\xi.$$

Since on the interval $-\tau \leq t \leq 0$ will be $x_1(t) \equiv 1$, $x_2(-\tau) = 0$, $x_2'(t) \equiv 1$, it remains

$$\phi(t) = \phi(-\tau) + \int_{-\tau}^t \phi'(t-\tau-\xi)d\xi = \\ = \phi(-\tau) - \phi(t-\tau-\xi)\Big|_{\xi=-\tau}^t = \phi(t).$$

Therefore first initial condition is satisfied. We shall show that the second initial condition is satisfied. Differentiating (1.6), we obtain

$$x'(t) = \phi(-\tau)x_1'(t) + \phi'(-\tau)x_2'(t) + \int_{-\tau}^0 x_2'(t-\tau-s)\phi''(s)ds.$$

After the change of variables in the integral, we have

$$x'(t) = \phi(-\tau)x_1'(t) + \phi'(-\tau)x_2'(t) + \int_{t-\tau}^t x_2'(\xi)\phi''(t-\tau-\xi)d\xi.$$

Considering, that on the initial interval $x_1'(t) \equiv 0$, $x_2'(t) \equiv 1$, we obtain

$$x'(t) = \phi'(-\tau) + \int_{-\tau}^t \phi''(t-\tau-\xi)d\xi = \\ = \phi'(-\tau) - \phi'(t-\tau-\xi)\Big|_{\xi=-\tau}^t = \phi'(t).$$

Therefore it is shown that the second initial condition is satisfied.

The theorem is proved.

2. Construction iterative procedure.

Thus, to obtain the solution of the Cauchy problem (1.2) the equation (1.1) should have two functions $x_1(t)$, $x_2(t)$, are solutions of the homogeneous equation with special initial conditions.

Theorem 2.1. The solution $x_1(t)$, $x_2(t)$ homogeneous equation with delay (1.3) with initial conditions (1.4), (1.5) can be written as

$$x_1(t) = \begin{cases} x_{1,0}(t), & -\tau \leq t < 0, \\ x_{1,1}(t), & 0 \leq t < \tau, \\ \dots & \dots \\ x_{1,n}(t) & (n-1)\tau \leq t < n\tau \end{cases}, \\ x_2(t) = \begin{cases} x_{2,0}(t), & -\tau \leq t < 0, \\ x_{2,1}(t), & 0 \leq t < \tau, \\ \dots & \dots \\ x_{2,n}(t) & (n-1)\tau \leq t < n\tau \end{cases} \quad (2.1)$$

where: $x_{1,0}(t) \equiv 1$, $x_{1,0}'(t) \equiv 0$, $x_{2,0}(t) \equiv t + \tau$, $x_{2,0}'(t) \equiv 1$, $-\tau \leq t \leq 1$;

$$x_{i,n}(t) = x_{i,n-1}((n-1)\tau)x_1^0(t) + \frac{d}{dt}x_{i,n-1}(t)\Big|_{t=(n-1)\tau}x_2^0(t) + \\ + \int_0^t K(t,s)F_{i,n}(s)ds, \quad (2.2)$$

$$F_{i,n}(t) = -a_2 \frac{d}{dt}x_{i,n-1}(t-\tau) - b_2 x_{i,n-1}(t-\tau), \\ i = \overline{1,2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.3)$$

$$K(t, s) = \frac{x_1^0(s)x_2^0(t) - x_1^0(t)x_2^0(s)}{W[x_1^0(s), x_2^0(s)]},$$

$$W[x_1^0(s), x_2^0(s)] = \begin{vmatrix} x_1^0(s) & x_2^0(s) \\ \frac{d}{ds}x_1^0(s) & \frac{d}{ds}x_2^0(s) \end{vmatrix}. \quad (2.4)$$

$x_1^0(t)$, $x_2^0(t)$ solutions of the homogeneous equation without delay

$$x''(t) + a_1x'(t) + b_1x(t) = 0,$$

satisfying the conditions $x_1^0(0) = 1$,

$$\frac{d}{dt}x_1^0(0) = 0, \quad x_2^0(0) = 0, \quad \frac{d}{dt}x_2^0(0) = 1.$$

Proof. To find solutions $x_1(t)$, $x_2(t)$ of homogeneous equation with delay (1.3) satisfying the single initial conditions (1.4), (1.5), we use the method of steps [4].

It is known that the solution of the linear nonhomogeneous equation with constant coefficients of the second order without delay

$$x''(t) + a_1x'(t) + b_1x(t) = F(t), \quad (2.5)$$

satisfying the zero initial conditions, has the form

$$x(t) = \int_t^t K(t, s)F(s)ds,$$

where $K(t, s)$ – the solution of homogeneous equation satisfying the initial conditions

$$K(t, s)|_{t=s} = 0, \quad K'_x(t, s)|_{t=s} = 1.$$

Since equation (2.5) with constant coefficients, then, depending on the eigenvalues of the characteristic equation, the corresponding homogeneous equation

$$x''(t) + a_1x'(t) + b_1x(t) = 0$$

has two linearly independent solutions that are represented as exponent, the exponent with trigonometric functions or exponent with multiplier t . Let the solution of the homogeneous equation satisfying the initial conditions $x(t_0) = 1$, $x'(t_0) = 0$ is $x_1^0(t)$, and the solution that satisfies the initial conditions $x(t_0) = 0$, $x'(t_0) = 1$ is $x_2^0(t)$. Then the solution of

the nonhomogeneous equation (2.5) satisfying the nonzero initial conditions $x(t_0) = x_0$, $x'(t_0) = x'_0$ has the form

$$x(t) = x_0x_1^0(t) + x'_0x_2^0(t) + \int_t^t K(t, s)F(s)ds,$$

$$K(t, s) = \frac{x_1^0(s)x_2^0(t) - x_1^0(t)x_2^0(s)}{W[x_1^0(s), x_2^0(s)]},$$

$$W[x_1^0(s), x_2^0(s)] = \begin{vmatrix} x_1^0(s) & x_2^0(s) \\ \left(x_1^0(s)\right)' & \left(x_2^0(s)\right)' \end{vmatrix}. \quad (2.6)$$

Go back to finding solutions $x_1(t)$, $x_2(t)$ equation with delay (1.3) with initial values. We obtain pre-form solutions of the homogeneous second order differential equation with a constant delay (1.3) corresponding to the initial conditions $x(t) \equiv \phi(t)$, $x'(t) = \phi'(t)$, $-\tau \leq t \leq 0$, where $\phi(t)$ random continuously differentiable function.

1. Consider the first interval $T_1: 0 \leq t < \tau$. On this interval the equation (1.3) is a linear nonhomogeneous differential equation without delay and has the form

$$x''(t) + a_1x'(t) + b_1x(t) = F_1(t),$$

$$F_1(t) = -a_2x'(t - \tau) - b_2x(t - \tau), \quad T_1: 0 \leq t < \tau. \quad (2.7)$$

Suppose that the initial conditions take the form $x(0) = \phi(0)$, $x'(0) = \phi'(0)$. (2.8)

Then it follows from (2.6), the solution of the equation (2.7) satisfying conditions (2.8), is

$$x_{1,\phi}(t) = x_{0,\phi}(0)x_1^0(t) + \frac{d}{dt}x_{0,\phi}(t)\bigg|_{t=0}x_2^0(t) + \int_0^t K(t, s)F_1(s)ds$$

$$x_{0,\phi}(0) = \phi(0), \quad \frac{d}{dt}x_{0,\phi}(t)\bigg|_{t=0} = \phi'(0),$$

$$F_1(t) = -a_2\phi'(t - \tau) - b_2\phi(t - \tau). \quad (2.9)$$

2. Consider the second interval $T_2: \tau \leq t < 2\tau$. On this interval the equation (1.3) is also a linear nonhomogeneous differential equation without delay and has the form that is different from previous one only by the right part

$$x''(t) + a_1x'(t) + b_1x(t) = F_2(t),$$

$$F_2(t) = -a_2\frac{d}{dt}x_{1,\phi}(t - \tau) - b_2x_{1,\phi}(t - \tau),$$

$$T_2: \tau \leq t < 2\tau. \quad (2.10)$$

The initial conditions have the form

$$x(\tau) = x_{1,\phi}(\tau), \quad x'(\tau) = \frac{d}{dt} x_{1,\phi}(t) \Big|_{t=\tau}. \quad (2.11)$$

As follows from (2.6), a solution of the equation (2.10), satisfying the conditions (2.11) is

$$x_{2,\phi}(t) = x_{1,\phi}(\tau) x_1^0(t) + \frac{d}{dt} x_{1,\phi}(t) \Big|_{t=\tau} x_2^0(t) + \int_{\tau}^t K(t,s) F_2(s) ds$$

$$F_2(t) = -a_2 \frac{d}{dt} x_{1,\phi}(t - \tau) - b_2 x_{1,\phi}(t - \tau). \quad (2.12)$$

Continuing this process further, we find that on the interval $T_n : (n-1)\tau \leq t < n\tau$. The equation (1.3) has the form

$$x''(t) + a_1 x'(t) + b_1 x(t) = F_n(t),$$

$$F_n(t) = -a_2 \frac{d}{dt} x_{n-1,\phi}(t - \tau) - b_2 x_{n-1,\phi}(t - \tau),$$

$$T_n : (n-1)\tau \leq t < n\tau. \quad (2.13)$$

The initial conditions for the solutions of this equation have the form

$$x(\tau) = x_{n-1,\phi}((n-1)\tau),$$

$$x'(\tau) = \frac{d}{dt} x_{n-1,\phi}(t) \Big|_{t=(n-1)\tau}, \quad (2.14)$$

and solution of the equation on the interval $T_n : (n-1)\tau \leq t < n\tau$, satisfying the conditions of continuity is

$$x_{n,\phi}(t) = x_{n-1,\phi}((n-1)\tau) x_1^0(t) +$$

$$+ \frac{d}{dt} x_{n-1,\phi}(t) \Big|_{t=(n-1)\tau} x_2^0(t) + \int_{(n-1)\tau}^t K(t,s) F_n(s) ds,$$

$$F_n(t) = -a_2 \frac{d}{dt} x_{n-1,\phi}(t - \tau) - b_2 x_{n-1,\phi}(t - \tau). \quad (2.15)$$

To obtain linearly independent solutions $x_1(t)$ и $x_2(t)$, satisfying the initial conditions (1.4), (1.5) we put initial values for $x_1(t)$:

$$x_{1,0}(t) \equiv 1, \quad \frac{d}{dt} x_{1,0}(t) \equiv 0, \quad -\tau \leq t \leq 0, \quad (2.16)$$

And for $x_2(t)$:

$$x_{2,0}(t) \equiv t + \tau, \quad \frac{d}{dt} x_{2,0}(t) \equiv 1, \quad -\tau \leq t \leq 0. \quad (2.17)$$

From (2.15), we obtain Theorem 1.2.

If equation (1.3) has special form

$$x''(t) + \omega_1^2 x(t) + \omega_2^2 x(t - \tau) = 0, \quad t \geq 0, \quad \tau > 0, \quad (2.18)$$

so $a_1 = a_2 = 0$, $b_1 = \omega_1^2$, $b_2 = \omega_2^2$, then linearly independent solutions $x_1(t)$, $x_2(t)$, satisfying the initial conditions (1.4) and (1.5) have more concrete form [8].

Theorem 2.2. The solution $x_1(t)$, $x_2(t)$ of the equation (2.18) with initial conditions (1.4), (1.5) can be written in the form

$$x_1(t) = \begin{cases} x_{10}(t), & -\tau \leq t < 0, \\ x_{11}(t), & 0 \leq t < \tau, \\ \dots & \dots \\ x_{1n}(t), & (n-1)\tau \leq t < n\tau \end{cases},$$

$$x_2(t) = \begin{cases} x_{20}(t), & -\tau \leq t < 0, \\ x_{21}(t), & 0 \leq t < \tau, \\ \dots & \dots \\ x_{2n}(t), & (n-1)\tau \leq t < n\tau, \end{cases} \quad (2.19)$$

where

$$x_{1,n}(t) = x_{1,n-1}((n-1)\tau) \cos \omega_1(t - (n-1)\tau) +$$

$$+ \frac{x'_{1,n-1}((n-1)\tau)}{\omega_1} \sin \omega_1(t - (n-1)\tau) -$$

$$- \omega_2^2 \int_{(n-1)\tau}^t \sin \omega_1(t-s) x_{1,n-1}(s) ds,$$

$$(n-1)\tau \leq t < n\tau, \quad x_{10}(t) = 1, \quad x'_{10}(t) = 0,$$

$$x_{2,n}(t) = x_{2,n-1}((n-1)\tau) \cos \omega_1(t - (n-1)\tau) +$$

$$+ \frac{x'_{2,n-1}((n-1)\tau)}{\omega_1} \sin \omega_1(t - (n-1)\tau) -$$

$$- \omega_2^2 \int_{(n-1)\tau}^t \sin \omega_1(t-s) x_{2,n-1}(s) ds,$$

$$(n-1)\tau \leq t < n\tau, \quad x_{2,0}(t) = t + \tau, \quad x'_{2,0}(t) = 1.$$

Proof. To find solutions $x_1(t)$, $x_2(t)$ the equation (2.18) we use the results of the previous theorem. Solution of the homogeneous equation

$$x''(t) + \omega_1^2 x(t) = 0, \quad (2.21)$$

satisfying the initial conditions $x(0) = 1$,

$x'(0) = 0$ is $x_1^0(t) = \cos \omega_1 t$, and solution satisfying

the conditions $x(0)=0$, $x'(0)=1$, will

be $x_2^0(t)=\frac{1}{\omega_1}\sin\omega_1 t$. Those

$$W[x_1^0(s), x_2^0(s)] \equiv 1, \quad K(t, s) = \frac{1}{\omega_1} \sin \omega_1(t-s).$$

Consider the first interval $T_1: 0 \leq t < \tau$. On this interval equation (1.5) is a linear nonhomogeneous differential equation without delay and has the form

$$x''(t) + \omega_1^2 x(t) = -\omega_2^2 x_{10}(t - \tau) \quad (2.22)$$

the right part is a known function $x_{10}(t)=1$. As follows from (2.9), the solution of (1.12) on the interval $T_1: 0 \leq t < \tau$ will be

$$\begin{aligned} x_{11}(t) &= x_{10}(0)x_1^0(t) + x_{10}'(0)x_2^0(t) - \\ & - \omega_2^2 \int_0^t K(t, s)x_{10}(s - \tau)ds = \cos \omega_1 t - \\ & - \omega_2^2 \int_0^t \frac{1}{\omega_1} \sin \omega_1(t-s)ds = \cos \omega_1 t + \frac{\omega_2^2}{\omega_1^2} (1 - \cos \omega_1 t) = \\ & = \frac{\omega_2^2}{\omega_1^2} + \left(1 - \frac{\omega_2^2}{\omega_1^2}\right) \cos \omega_1 t \quad (2.23) \end{aligned}$$

Consider the second interval $T_2: \tau \leq t < 2\tau$. On this interval equation (1.5) has the form

$$x''(t) + \omega_1^2 x(t) = -\omega_2^2 x_{11}(t - \tau). \quad (2.24)$$

Solution of equation (2.24) on the interval $T_2: \tau \leq t < 2\tau$ will be

$$\begin{aligned} x_{12}(t) &= x_{11}(\tau) \cos \omega_1(t - \tau) + \frac{x_{11}'(\tau)}{\omega_1} \sin \omega_1(t - \tau) - \\ & - \omega_2^2 \int_\tau^t \frac{1}{\omega_1} \sin \omega_1(t-s)x_{11}(s - \tau)ds = \\ & = \left[\frac{\omega_2^2}{\omega_1^2} + \left(1 - \frac{\omega_2^2}{\omega_1^2}\right) \cos \omega_1 \tau \right] \cos \omega_1(t - \tau) - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & - \left(1 - \frac{\omega_2^2}{\omega_1^2}\right) \sin \omega_1 \tau \sin \omega_1(t - \tau) - \\ & - \omega_2^2 \int_\tau^t \frac{1}{\omega_1} \sin \omega_1(t-s) \left[\frac{\omega_2^2}{\omega_1^2} + \left(1 - \frac{\omega_2^2}{\omega_1^2}\right) \cos \omega_1(s - \tau) \right] ds \end{aligned}$$

Continuing this process further, we find that on the interval $T_n: (n-1)\tau \leq t < n\tau$ solution of the homogeneous equation (2.21) is

$$\begin{aligned} x_{1,n}(t) &= x_{1,n-1}((n-1)\tau) \cos \omega_1(t - (n-1)\tau) + \\ & + \frac{x_{1,n-1}'((n-1)\tau)}{\omega_1} \sin \omega_1(t - (n-1)\tau) - \\ & - \omega_2^2 \int_{(n-1)\tau}^t \sin \omega_1(t-s)x_{1,n-1}(s - \tau)ds. \end{aligned}$$

Those, $x_1(t)$ has the form

$$x_1(t) = \begin{cases} x_{1,0}(t), & -\tau \leq t < 0, \\ x_{1,1}(t), & 0 \leq t < \tau, \\ \dots & \dots \\ x_{1,n}(t) & (n-1)\tau \leq t < n\tau. \end{cases}$$

Solution $x_2(t)$ of the equation (1.5) with initial conditions $x_2(t) \equiv t + \tau$, $x_2'(t) \equiv 1$, $-\tau \leq t \leq 0$ can be written in a similar form

$$\begin{aligned} x_{2,n}(t) &= x_{2,n-1}((n-1)\tau) \cos \omega_1(t - (n-1)\tau) + \\ & + \frac{x_{2,n-1}'((n-1)\tau)}{\omega_1} \sin \omega_1(t - (n-1)\tau) - \\ & - \omega_2^2 \int_{(n-1)\tau}^t \sin \omega_1(t-s)x_{2,n-1}(s)ds, \\ x_{2,0}(t) &= t + \tau, \quad x_{2,0}'(t) = 1. \end{aligned}$$

$$x_2(t) = \begin{cases} x_{2,0}(t), & -\tau \leq t < 0, \\ x_{2,1}(t), & 0 \leq t < \tau, \\ \dots & \dots \\ x_{2,n}(t) & (n-1)\tau \leq t < n\tau, \end{cases}$$

Список використаних джерел

1. Бабаков А.В. Теория колебаний. – М., Наука, 1968. – 559 с..
2. Митропольский Ю.А., Мартынюк Д.И.. Периодические и квазипериодические колебательные системы с запаздыванием - К.: Высшая школа, 1979. – 247 р.
3. Хейл Дж. Теория функционально дифференциальных уравнений.- М., Мир, 1984. – 421 р.
4. Эльсгольц Л.Э., Норкин С.Б., Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. – М., Наука, 1971. – 296 с.
5. Мышкис А.Д. Линейные дифференциальные уравнения с отклоняющимся аргументом. - М: Наука, 1972. – 352 с.
6. Р.Беллман, К Кук. Дифференциально-разностные уравнения, М., Мир, 1967. - 548 с.
7. Хусаинов Д.Я., Диблик Й., Ружичкова М., Лукачева Я. Представление решения задачи Коши для уравнения колебания систем с чистым запаздыванием // Нелинейные колебания, Т.11, № 2, 2008. –С. 261-270.
8. Кухаренко О. Розв'язок задачі Коші для рівнянь коливання з запізнюванням // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія: Кібернетика,. 11, 2011. - С.26-30.

References

1. Babakov A.B. Oscillation theory. - Moscow: Nauka, 1968. - 559 p.
2. Mitropol'skii Y.A, Martynuk D.I. Periodic and quasi-periodic oscillations systems with delay. - K.: Vischa School, 1979. - 247 p.
3. J. Hale, Theory of functional differential equations., 1984. - 421 p.
4. Èl'sgol'ts L.E, Norkin S.B., Introduction to the theory of differential equations with deviating argument. - Moscow: Nauka, 1971. – 296 p.
5. Myshkis A.S., Linear differential equations with delayed argument. - Moscow: Nauka, 1972. – 352 p.
6. R. Bellman, K.L Cooke, Difference-differential equations, 1967. - 548 p.
7. Khusainov D.Y., Diblik J., M. Ruzhichkova, Lukachova J., Representation of the solution of the Cauchy problem for the oscillatory system with pure delay // Nonlinear Oscillations, T.11, № 2, 2008. - 261-270p.
8. Khukharenko O. Solution of the Cauchy Problem for Oscillatory Equation with Delay // Bulletin of Kyiv National Taras Shevchenko University. Series: Cybernetics, 11, 2011. - P.26-30.

Надійшла до редколегії

12.01.14

УДК 681.3.062

Вознюк Т.Г.¹, аспірант.

**Застосування керуючого простору
синтаксичних структур
природномовних текстів для вирішення
проблеми анафори**

¹ Київський національний університет
імені Тараса Шевченка, 83000, м. Київ, пр-т.
Глушкова 4д,
e-mail: taarraas@gmail.com

T.G. Vozniuk¹, Postgraduate Student.

**An application of the control space of
syntactic structures of natural language
sentences for the anaphora resolution**

¹ Taras Shevchenko National University of Kyiv,
83000, Kyiv, Glushkova st., 4d,
e-mail: taarraas@gmail.com

В роботі обґрунтовано можливість застосування керуючого простору синтаксичних структур природномовних текстів для вирішення проблеми анафори. Наведено короткий опис проблеми та відомих методів її вирішення. Розглянуто модель керуючих просторів та проілюстровано використання латентних семантичних зв'язків, виділених з частотних словників складових керуючих просторів.

Ключові слова: штучний інтелект, комп'ютерна лінгвістика, керуючий простір, проблема анафори.

This work justifies the possibility of using the control space of syntactic structures of natural language texts for the anaphora resolution. The anaphora resolution approaches by Hobbs, Mitkov, Lappin and Leass were briefly described. The model of the control space was considered. This model consists of alpha- and beta-connections between words and word combinations on the few levels of hierarchy. There was formulated a task as an assessing the likelihood that a pronoun anaphora refers to a word or phrase on the basis of their use in the context of control spaces using The Tensor Model of language. The algorithm describes the transformation of the control spaces of analyzed sentences and requests to The Tensor Model. Overall score is defined as the weighted sum of indicators of simple criteria. There was formulated optimization task for training of weights. An example of using semantic relations extracted from the frequency vocabulary of components of control spaces latent was given. For a simple example score of the correct pair antecedent-anaphora in the meaning of semantic was significantly higher than the incorrect pair. This shows an ability of the proposed model to solve semantic anaphora ambiguities.

Keywords: artificial intelligence, computational linguistics, control space, anaphora resolution

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Анісімов А.В.

Аналіз природномовних текстів є невід'ємною складовою задач автоматичного перекладу текстів, інтелектуального пошуку, реферування та реалізації природномовних інтерфейсів. Для більш повного аналізу природномовних текстів визначають семантичні зв'язки між словами та словосполученнями. Одним з таких зв'язків є зв'язок між анафоричним займенником та антецедентом.

Анафоричні займенники – це займенники, що відсилають до деякого іншого слова чи словосполучення (антецедент) цього тексту, семантичне значення якого вони відображають. Вирішення проблеми анафори полягає в

встановленні відповідностей між анафоричними займенниками та антецедентами.

Наприклад:

“Дівчинка побачила хлопчика. Він збирав ягоди.”

В данному випадку «Він» - анафоричний займенник. «Дівчинка» і «хлопчика» - антецеденти. Вирішивши проблему анафори для даного речення ми зв'яжемо займенник «Він» з антецедентом «хлопчика», використовуючи морфологічні ознаки роду.

Для вирішення анафори за допомогою алгоритму Лапіна і Ліса[1] використовують оцінки близькості речень анафори і антецедента,

підметниковий наголос, наголос існування, пряме та не пряме доповнення. Остаточна оцінка схожості визначається як зважена сума визначених вище оцінок.

В алгоритмі Хоббса[2] використовується синтаксична структура дерева виведення, яка вважається наперед визначеною. Ідеєю метода є оригінальний алгоритм обходу дерева виводу, в процесі якого визначаються пари анафора-антецедент.

Алгоритм Міткова[3] розвиває ідею Лапіна і Ліса, проте вводяться нові критерії оцінки: синтаксичний паралелізм, повторюваність кандидата, схоже положення, підмет, доповнення, часте згадування. Також з'являються штрафні критерії, наприклад у випадку не визначеної граматичної ролі слова.

Кожний з цих методів пропонує свої засоби оцінки та варіанти їх інтеграції. В даній роботі буде запропонована одна з можливих оцінок, що ґрунтується на латентних семантичних зв'язках керуючого простору синтаксичних структур. Вона дасть змогу скористатися високими результатами моделі керуючих просторів для розв'язання проблеми анафори.

Синтаксична та семантична модель природньої мови, що заснована на статистичній інформації про керуючі простори синтаксичних структур природньомовних текстів

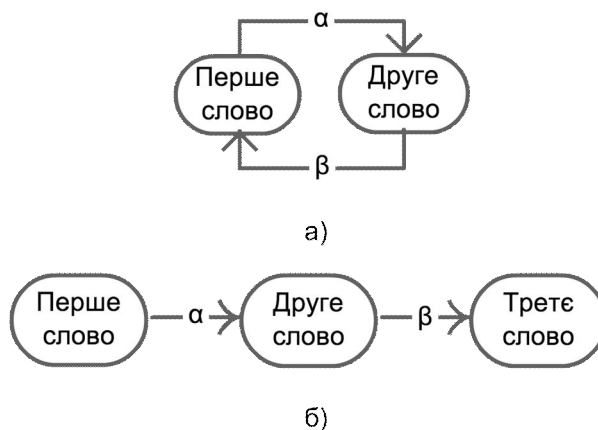
В основі ідеї моделі лежить симбіоз апарату керуючих просторів (КП), латентного семантичного аналізу, методу невід'ємної факторизації матриць та тензорів високих порядків.

Керуючий простір представляє собою комбінацію деяких зв'язків між елементами. В якості елементів КП синтаксичних структур виступають слова та групи слів. Зв'язки визначаються наступним чином: якщо два об'єкти А і В вступають у відношення С, то ми виділяємо об'єкт (припустимо А), що викликає (ініціює, породжує) це відношення, і об'єкт на який перекладається це відношення. Таким чином виділяємо два види мовних зв'язків: від об'єкта-генератора ставлення до відношення і від ставлення до підлеглого об'єкту. Перший вид зв'язку називаємо альфа-зв'язком (зв'язок генерування), другий - бета-зв'язок (зв'язок поширення)[4].

В [5] запропоновано алгоритм автоматичної побудови керуючого простору для довільного

природньомовного речення. В [6] описано процес побудови моделі синтаксичних і семантичних зв'язків на основі статистичної інформації виділеної з керуючих просторів великих текстових корпусів. Ця модель лежить в основі запропонованого в статті методу.

Моделі була навчена на великих текстових корпусах об'ємом порядку 100 Гб, а тому містить відомості вживання слів в різних значеннях різноманітних тематик.



Мал. 1. а) Графічне зображення двійки слів моделі – кільцевого альфа-бета зв'язку б) Графічне зображення трійки слів моделі

В КП природньомовних текстів можна виділити двійки та трійки слів. Двійка в розумінні моделі – це пара слів, з'єднаних кільцевим альфа-бета зв'язком. Трійка – це трійка слів, зв'язаних напрямленими альфа- та бета- зв'язками. Порядок з'єднання вказаний на Мал. 1. Так як в цій моделі речення представлені комбінацією альфа- та бета-зв'язків, то кожне з них можна розкласти в двійки та трійки, при цьому кожне слово вихідного речення ввійде у принаймні одну двійку чи трійку.

Латентний семантичний аналіз представлений двома простими запитами до моделі: взяти оцінку вірогідності вживання двійки та трійки в природньомовному тексті. Комбінуючи види запитів та повторюючи ієрархічну структуру керуючого простору, ми отримуємо можливість оцінювати більш складні структури природньомовних речень.

Алгоритм критерію оцінювання пари антецедент-анафора

Нехай дано слово чи словосполучення антецеденту w_1 та речення в яке воно входить s_1 . Також маємо анафоричний займенник w' та речення в яке він входить s' .

Задача: дати оцінку ймовірності того, що анафоричний займенник w' посилається на слово чи словосполучення w_i виходячи з їх вживань в контексті речень s_i та s' відповідно.

Алгоритм:

Побудувати керуючі простори cs_i та cs' для речень s_i та s' за допомогою алгоритму запропонованого в [2].

Визначити двійку two_i та трійку $three_i$, якщо вони існують, такі що :

- two_i in cs_i , $three_i$ in cs_i
- w_i входить як компонент в two_i і $three_i$

Визначити двійку two' та трійку $three'$, якщо вони існують, такі що :

- two' in cs' , $three'$ in cs'
- w' входить як компонент в two' і $three'$

Визначити оцінки схожості контекстів в термінах керуючих просторів :

$$score_{two} = c_1 * \{two_i.first = two'.first\} + c_2 * \{two_i.second = two'.second\} + c_3 * \{two_i.type = two'.type\}$$

$$score_{three} = c_4 * \{three_i.first = three'.first\} + c_5 * \{three_i.second = three'.second\} + c_6 * \{three_i.third = three'.third\}$$

Визначити оцінку вживаності фрази за допомогою описаної вище моделі природної мови. Для цього необхідно сформулювати нову двійку two'' та трійку $three''$ замінивши в них входження анафоричного займенника w' на слово w_i , та визначити оцінки $score_{two}^*$ та $score_{three}^*$ по розробленій моделі.

Знайти інтегральну оцінку як лінійну комбінацію наведених вище оцінок:

$$score = c_7 * score_{two} + c_8 * score_{three} + c_9 * score_{two}^* + c_{10} * score_{three}^*$$

Коефіцієнти c_i , $i = 1, 10$ можна знайти поставивши задачу оптимізації покриття (recall) при обмеженому показнику точності (precision) деяким мінімальним значенням $precision_{min}$:

$$\bar{c} = \arg \min_{precision(korpus, \bar{c}) > precision_{min}} recall(korpus, \bar{c})$$

Таку задачу можна вирішити за допомогою алгоритму імітації відпалу[7].

Описаний метод оцінки може застосовуватися як єдина метрика, чи в комбінації з іншими евристичними запропонованими в роботах Міткова, Лаппіна та Ліса, тощо. Комбінація запропонованого алгоритму з іншими евристичними, при умові

тренування вагових коефіцієнтів кожної з оцінок на великих текстових корпусах, повинні дати кращі результати вирішення проблеми анафори.

Розглянемо принцип роботи запропонованого алгоритму на наступному прикладі:

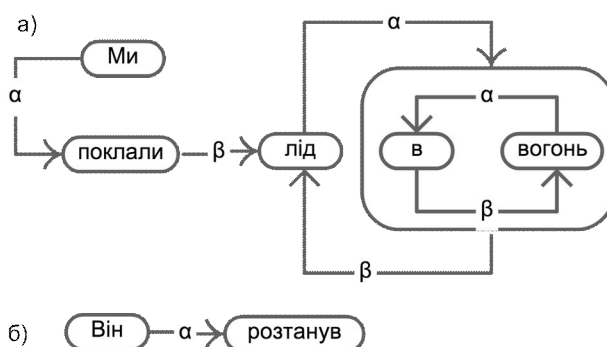
Ми поклали лід в вогонь. Він розтанув.

Знайдемо оцінку пари вогонь-розтанув.

Вхідні дані :

w_1 = "вогонь". s_1 = "Ми поклали лід в вогонь."

w' = "він". s' = "Він розтанув."



Мал. 2. а) КП речення «Ми поклали лід в вогонь» б) КП речення «Він розтанув»

Керуючі простори для речень s_1 та s' представлені на Мал. 2.

В реченні s_1 слово «вогонь» входить тільки в двійку $two_1 = (в, вогонь)$

В реченні s' «він» входить в трійку $three' = (він, розтанув, -)$.

Так як в двійку слово входить тільки в першому реченні, то $score_{two} = 0$.

Аналогічно $score_{three} = 0$.

Так як двійка в другому реченні відсутня, то $score_{two}^* = 0$.

Оцінимо значення $score_{three}^*$. Для цього необхідно слово «він» замінити на слово «вогонь» в трійці $three' = (він, розтанув, -)$. В результаті отримаємо трійку $three'' = (вогонь, розтанув, -)$. Оцінка цієї трійки згідно моделі керуючих просторів буде близькою до нуля, оскільки «вогонь» не може входити в зв'язок генерування з словом «розтанув»

Отже, сумарна оцінка пари вогонь-розтанув буде досить малою, що й очікувалося.

Аналогічно розглянемо пару лід-розтанув. Метрики $score_{two}$, $score_{three}$, $score_{two}^*$ будуть дорівнювати нулю, оскільки тип підпросторів в які входять слова не змінився, а тому їм так само не буде відповідників. Ситуація з $score_{three}^*$, буде інакшою, оскільки оцінка по моделі трійки (лід,

розтанув, -) має суттєво відрізнитися від нуля, а тому й інтегральна оцінка буде значно вищою ніж для пари вогонь-розтанув. Система в такому випадку зробить правильне рішення про посилення анафоричного займенника «він» на антецедент «лід».

Висновки

У роботі був запропонований алгоритм вирішення проблеми анафори за допомогою статистичної інформації, виділеної з побудованих керуючих просторів великих

корпусів природньомовних текстів. Коротко описано відомі підходи до вирішення проблеми анафори та запропоновано підхід до синтезу алгоритму Міткова з запропонованим алгоритмом з метою покращення якості їх роботи. Продemonстровано принцип роботи алгоритму на простому прикладі, що вказує на можливості алгоритму вирішувати неоднозначності семантичного характеру. Подальша робота полягає в реалізації алгоритму, тренуванні коефіцієнтів та отриманні показників якості в термінах покриття та точності (recall/precision).

Список використаних джерел

1. Shalom Lappin, Herbert J. Leass An Algorithm for Pronominal Anaphora Resolution// Computational Linguistics.– Volume 20.– Issue 4.– December 1994.– pp. 535-561.
2. J. Hobbs Resolving Pronoun References// Lingua.– Vol. 44.– pp. 311-338.
3. Mitkov R., Anaphora resolution, London:Longman, 2002, 240 pages.
4. Анисимов А.В. Управляющее пространство синтаксических структур естественного языка// Кибернетика.– 1990.– №3.– С. 11-17.
5. Вознюк Т.Г. Алгоритм побудови керуючого простору синтаксичних структур природньомовних текстів// Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка Серія фізико-математичні науки.– 2014.– №1.– С.122-127.
6. Anisimov A.V., Marchenko O.O., Taranukha V.Yu., Vozniuk T.G. Development of a semantic and syntactic model of natural language by means of non-negative matrix and tensor factorization// Lecture Notes in Computer Science.– 2014.– preprint.
7. Kirkpatrick S., Gelatt Jr C. D., Vecchi M. P., Optimization by Simulated Annealing// Science.–220 (4598): 1983.– pp. 671–680.

References

1. S. LAPPIN, H. J. LEASS (1994), *An Algorithm for Pronominal Anaphora Resolution*, Computational Linguistics:20(4), pp. 535-561.
2. J. HOBBS (1978), *Resolving Pronoun References*, Lingua, Vol. 44, pp. 311-338
3. MITKOV R. (2002), *Anaphora resolution*, London:Longman, 240 pages.
4. ANYSYMOV A.V (1990), *Upravliaiushchee prostranstvo syntaksycheskykh struktur estestvennoho yazika*, Kibernetika 3, pp. 11-17.
5. VOZNIUK T.G.(2014), *An algorithm for constructing the control space of syntactic structures of natural language sentences*, Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv, Series Physics & Mathematics, #1, pp. 122-127.
6. ANISIMOV A.V., MARCHENKO O.O, TARANUKHA V.Y, VOZNIUK T.G. (2014), *Development of a semantic and syntactic model of natural language by means of non-negative matrix and tensor factorization*, Lecture Notes in Computer Science, preprint.
7. KIRKPATRICK S., GELATT JR C.D., VECCHI M.P. (1983), *Optimization by Simulated Annealing*, Science 220 (4598): pp. 671–680.

Надійшла до редколегії 17.04.14

УДК 517.929.4

Гаркуша Н. І., к.е.н., с.н.с.

**Про стійкість ненульового стану
рівноваги однієї моделі взаємодії
соціальних прошарків суспільства**

Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, пр.-т.
Глушкова, 4д,
e-mail: ngarkusha@gmail.com

N. I. Garkusha, PhD, senior researcher

**About the stability of the non-zero
equilibrium of a model of interaction
between social strata**

Taras Shevchenko National University of Kyiv,
03680, Kyiv, Glushkova av., 4d,
e-mail: ngarkusha@gmail.com

Розглядається математична модель Гудвіна, що описує динаміку взаємодії прошарків суспільства. Математична модель має вигляд системи двох диференціальних рівнянь з одним сталим запізнюванням. Отримані умови стійкості стану рівноваги системи, тобто умови «сталого» стану суспільства.

Ключові слова: математична модель, динамічна система, запізнювання, стійкість.

Actual problems of modern relationships are different social strata. A longtime relationship "economically distinct" social strata can be relatively stable. But with an increase in certain "disturbing" factors peaceful life is disturbed and there are "revolutions" It is important to build mathematical models of the relationship of various social strata. The simplest mathematical model can be built based on the model of interaction "predator-prey" proposed by V. Volterra .

In this paper we continue the investigation of the qualitative behavior model that describes the behavior of the two "opposing" strata of society. The model has the form of two differential equations. A system with deviating argument lagged type, taking into account the "maturation" of dissent. The parameters of the system and the allowable delay time at which the equilibrium of the system due to the bifurcation of the state loses stability are calculated.

Key Words: mathematical model, dynamical system, delay, stability.

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Хусаїнов Д.Я.

Вступ

Ця робота є продовженням досліджень, які були опубліковані в [1,2]. Власне побудова математичної моделі була проведена в роботі [3], де описувалося взаємовідношення соціальних верств у суспільстві. У роботах [1,2] в модель було введено запізнювання і досліджено його вплив на динаміку системи. У даній роботі продовжено дослідження стійкості ненульового положення рівноваги системи.

**1. Рівняння динаміки взаємин
суспільних верств**

Як було показано в роботі [1], динаміку взаємин службовців і підприємців з

урахуванням часу прийняття рішень [3] можна описати системою

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \left[\frac{1}{k} - (g+n) - \frac{y(t-\tau)}{k} \right] x(t), \\ \dot{y}(t) &= [-(g+r) + bx(t-\tau)] y(t).\end{aligned}\quad (1.1)$$

Нехай виконується умова

$$1 - k(g+n) > 0. \quad (1.2)$$

Тоді в першій координатній чверті існує особлива точка $M_1^*(x_1^*, y_1^*)$ з координатами $x_1^* = (g+r)/b$, $y_1^* = 1 - k(g+n)$. Вона визначає рівновагу системи. Було показано [4], що це положення рівноваги є нестійким. Вводилися

«коефіцієнти взаємного впливу», і система набувала вигляду [3]

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \left[\frac{1}{k} - (g+n) + R_1 x(t-\tau) - \frac{y(t-\tau)}{k} \right] x(t), \\ \dot{y}(t) &= [-(g+r) + b x(t-\tau) + R_2 y(t-\tau)] y(t). \quad (1.3)\end{aligned}$$

Інтерес представляє визначення умов стійкого співіснування шарів в суспільстві. Особливою точкою системи (1.3) буде: $O_1^*(x_1^*, y_1^*)$,

$$\begin{aligned}x_1^* &= \frac{R_2 \left[\frac{1}{k} - (g+n) \right] + \frac{1}{k} (g+r)}{R_1 R_2 + \frac{b}{k}}, \\ y_1^* &= \frac{R_1 (g+r) - b \left[\frac{1}{k} - (g+n) \right]}{R_1 R_2 + \frac{b}{k}}. \quad (1.4)\end{aligned}$$

При виконанні умов

$$\begin{aligned}R_2 \left[\frac{1}{k} - (g+n) \right] + \frac{1}{k} (g+r) &> 0, \\ R_1 (g+r) - b \left[\frac{1}{k} - (g+n) \right] &> 0 \quad (1.5)\end{aligned}$$

вона знаходиться у першому квадранті..

2. Дослідження стійкості.

В роботі [2] умови стійкості отримані на підставі лінеаризації системи в околі особливої

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= -a_{11} x_1(t) + b_{11} x_1(t-\tau) + b_{12} y_1(t-\tau), \\ \dot{y}_1(t) &= -a_{22} y_1(t) + b_{21} x_1(t-\tau) + b_{22} y_1(t-\tau), \quad (2.1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}a_{11} &= \left[-\frac{1}{k} + (g+n) - R_1 x_4 + \frac{1}{k} y_4 \right], \\ a_{22} &= [(g+r) - b x_4 - R_2 y_4] \quad b_{11} = R_1 x_4, \\ b_{12} &= -\frac{1}{k} x_4, \quad b_{21} = y_4, \quad b_{22} = R_2 y_4, \quad (2.2)\end{aligned}$$

У цій роботі проведена оцінка залежності коефіцієнтів і запізнювання на стійкість.

Лема 2.1. Нехай при $t-\tau \leq s \leq t$ рішення $(x_1(t), y_1(t))$ системи (2.1) знаходиться всередині поверхні рівня функції Ляпунова $V(x_1, y_1) = h_{11} x_1^2 + 2h_{12} x_1 y_1 + h_{22} y_1^2$, а в момент t виходить на її кордон. Тоді мають місце нерівності

$$\begin{aligned}|x_1(t) - x_1(t-\tau)| &\leq N_1 [x_1^2(t) + y_1^2(t)]^{1/2} \tau, \\ |y_1(t) - y_1(t-\tau)| &\leq N_2 [x_1^2(t) + y_1^2(t)]^{1/2} \tau, \quad (2.3)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}N_1 &= (|a_{11}| + |b_{11}| + |b_{12}|) \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(H)}{\lambda_{\min}(H)}}, \\ N_2 &= (|a_{22}| + |b_{21}| + |b_{22}|) \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(H)}{\lambda_{\min}(H)}}, \quad (2.4)\end{aligned}$$

$$\lambda_{\min}(H) = \frac{1}{2} \left[(h_{11} + h_{22}) - \sqrt{(h_{11} - h_{22})^2 + 4h_{12}^2} \right],$$

$$\lambda_{\max}(H) = \frac{1}{2} \left[(h_{11} + h_{22}) + \sqrt{(h_{11} - h_{22})^2 + 4h_{12}^2} \right].$$

Доведення. Перепишемо систему (2.1) в інтегральному вигляді $x_1(t) = x_1(t-\tau) +$

$$+ \int_{t-\tau}^t [-a_{11} x_1(s) + b_{11} x_1(s-\tau) + b_{12} y_1(s-\tau)] ds,$$

$$y_1(t) = y_1(t-\tau) +$$

$$+ \int_{t-\tau}^t [-a_{22} y_1(s) + b_{21} x_1(s-\tau) + b_{22} y_1(s-\tau)] ds.$$

Звідси випливає, що

$$|x_1(t) - x_1(t-\tau)| \leq \quad (2.5)$$

$$\leq \int_{t-\tau}^t [|a_{11}| |x_1(s)| + |b_{11}| |x_1(s-\tau)| + |b_{12}| |y_1(s-\tau)|] ds,$$

$$|y_1(t) - y_1(t-\tau)| \leq \quad (2.6)$$

$$\leq \int_{t-\tau}^t [|a_{22}| |y_1(s)| + |b_{21}| |x_1(s-\tau)| + |b_{22}| |y_1(s-\tau)|] ds.$$

Скориставшись умовою, що момент є першим моментом виходу рішення на поверхню рівня функції Ляпунова, отримуємо, що

$$\begin{aligned}h_{11} x_1^2(s) + 2h_{12} x_1(s) y_1(s) + h_{22} y_1^2(s) &= \\ = V(x_1(s), y_1(s)) &\leq V(x_1(t), y_1(t)) = \\ = h_{11} x_1^2(t) + 2h_{12} x_1(t) y_1(t) + h_{22} y_1^2(t), & -\tau \leq s < t.\end{aligned}$$

Звідси випливає, що

$$\begin{aligned}\lambda_{\min}(H) x_1^2(s) &\leq \lambda_{\min}(H) [x_1^2(s) + y_1^2(s)] \leq \\ &\leq \lambda_{\max}(H) [x_1^2(t) + y_1^2(t)] \leq,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lambda_{\min}(H) y_1^2(s) &\leq \lambda_{\min}(H) [x_1^2(s) + y_1^2(s)] \leq \\ &\leq \lambda_{\max}(H) [x_1^2(t) + y_1^2(t)],\end{aligned}$$

де $\lambda_{\min}(H)$, $\lambda_{\max}(H)$ - екстремальні власні числа матриці H . И

$$\begin{aligned} |x_1(s)| &\leq \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(H)}{\lambda_{\min}(H)}} [x_1^2(t) + y_1^2(t)]^{1/2}, \\ |y_1(s)| &\leq \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(H)}{\lambda_{\min}(H)}} [x_1^2(t) + y_1^2(t)]^{1/2}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Підставивши (2.7) в (2.5), (2.6), отримаємо

$$\begin{aligned} |x_1(t) - x_1(t - \tau)| &\leq \\ &\leq (|a_{11}| + |b_{11}| + |b_{12}|) \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(H)}{\lambda_{\min}(H)}} [x_1^2(t) + y_1^2(t)]^{1/2} \tau, \\ |y_1(t) - y_1(t - \tau)| &\leq \\ &\leq (|a_{22}| + |b_{21}| + |b_{22}|) \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(H)}{\lambda_{\min}(H)}} [x_1^2(t) + y_1^2(t)]^{1/2} \tau, \end{aligned}$$

що й потрібно було довести.

Теорема 2.1. Нехай коефіцієнти системи (2.1) такі, що

$$\begin{aligned} (a_{11} + a_{22} + b_{11} + b_{22}) &< 0, \\ (a_{11} + b_{11})(a_{22} + b_{22}) - b_{12}b_{21} &> 0 \end{aligned} \quad (2.8)$$

$\tau < \tau_0$, де

$$\tau_0 = \frac{\lambda_{\min}(C)}{2\sqrt{M_1^2 + M_2^2}} \quad (2.9)$$

$$\lambda_{\min}(C) = \frac{1}{2} \left[(c_{11} + c_{22}) - \sqrt{(c_{11} - c_{22})^2 + 4c_{12}^2} \right],$$

$$\begin{aligned} M_1 &= (h_{11}b_{11} + h_{21}b_{21})N_1 + (h_{11}b_{12} + h_{21}b_{22})N_2, \\ M_2 &= (h_{12}b_{11} + h_{22}b_{21})N_1 + (h_{12}b_{12} + h_{22}b_{22})N_2. \end{aligned}$$

Тоді положення рівноваги $O_1^*(x_1^*, y_1^*)$ системи (2.1) буде асимптотично стійким.

Доведення. Розглянемо систему (2.1), (2.2) при $\tau = 0$. Вона має вигляд

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= (a_{11} + b_{11})x_1(t) + b_{12}y_1(t), \\ \dot{y}_1(t) &= b_{21}x_1(t) + (a_{22} + b_{22})y_1(t). \end{aligned}$$

Її характеристичне рівняння має вигляд

$$\begin{aligned} \lambda^2 - (a_{11} + a_{22} + b_{11} + b_{22})\lambda + \\ + (a_{11} + b_{11})(a_{22} + b_{22}) - b_{12}b_{21} &= 0. \end{aligned}$$

Як впливає з критерію Гурвіца, умовою асимптотичної стійкості є додатність коефіцієнтів рівняння. Тому система (2.1) без запізнювання є асимптотично стійкою. І, як впливає з роботи [4], при довільній позитивно визначеній матриці матричне рівняння Ляпунова

$$(A + B)^T H + H(A + B) = -C \quad (2.10)$$

має єдине рішення - позитивно визначену матрицю.

$$\begin{aligned} \text{Тут} \quad A + B &= \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & b_{12} \\ b_{12} & a_{22} + b_{22} \end{bmatrix}, \\ H &= \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{12} & h_{22} \end{bmatrix}, \\ C &= \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{12} & c_{22} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Обчислимо повну похідну функції $V(x_1, y_1) = h_{11}x_1^2 + 2h_{12}x_1y_1 + h_{22}y_1^2$ в силу системи (2.1). Маємо

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} V(x_1(t), y_1(t)) &= 2(h_{11}x_1(t) + h_{12}y_1(t)) \times \\ &\times (-a_{11}x_1(t) + b_{11}x_1(t - \tau) + b_{12}y_1(t - \tau)) + \\ &+ 2(h_{12}x_1(t) + h_{22}y_1(t)) \times \\ &\times (-a_{22}x_2(t) + b_{21}x_1(t - \tau) + b_{22}y_1(t - \tau)). \end{aligned}$$

Звідси отримуємо

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} V(x_1(t), y_1(t)) &= 2(h_{11}x_1(t) + h_{12}y_1(t)) \times \\ &\times [(-a_{11} + b_{11})x_1(t) + b_{21}y_1(t)] + \\ &+ 2(h_{12}x_1(t) + h_{22}y_1(t)) \times \\ &\times [b_{21}x_1(t) + (-a_{22} + b_{22})y_1(t)] + \\ &+ 2(h_{11}x_1(t) + h_{12}y_1(t)) \times \\ &\times (b_{11}[x_1(t - \tau) - x_1(t)] + b_{12}[y_1(t - \tau) - y_1(t)]) + \\ &+ 2(h_{12}x_1(t) + h_{22}y_1(t)) \times \\ &\times (b_{21}[x_1(t - \tau) - x_1(t)] + b_{22}[y_1(t - \tau) - y_1(t)]). \end{aligned}$$

Або, як впливає з (2.10),

$$\frac{d}{dt} V(x_1(t), y_1(t)) =$$

$$= -c_{11}x_1^2(t) - 2c_{12}x_1(t)y_1(t) - c_{22}y_1^2(t) + \\ + 2(h_{11}x_1(t) + h_{12}y_1(t)) \times \\ \times (b_{11}[x_1(t-\tau) - x_1(t)] + b_{12}[y_1(t-\tau) - y_1(t)]) + \\ + 2(h_{12}x_1(t) + h_{22}y_1(t)) \times \\ \times (b_{21}[x_1(t-\tau) - x_1(t)] + b_{22}[y_1(t-\tau) - y_1(t)]).$$

Звідси

$$\frac{d}{dt}V(x_1(t), y_1(t)) = -c_{11}x_1^2(t) - 2c_{12}x_1(t)y_1(t) - c_{22}y_1^2(t) + \\ + 2[(h_{11}b_{11} + h_{21}b_{21})x_1(t) + (h_{12}b_{11} + h_{22}b_{21})y_1(t)] \times \\ \times |x_1(t) - x_1(t-\tau)| + \\ + 2[(h_{11}b_{12} + h_{21}b_{22})x_1(t) + (h_{12}b_{12} + h_{22}b_{22})y_1(t)] \times \\ \times |y_1(t) - y_1(t-\tau)|.$$

Скориставшись нерівностями (2.3), (2.4) леми 2.1, отримуємо

$$\frac{d}{dt}V(x_1(t), y_1(t)) = -c_{11}x_1^2(t) - 2c_{12}x_1(t)y_1(t) - c_{22}y_1^2(t) + \\ + 2[(h_{11}b_{11} + h_{21}b_{21})x_1(t) + (h_{12}b_{11} + h_{22}b_{21})y_1(t)] \times$$

$$N_1[x_1^2(t) + y_1^2(t)]^{\frac{1}{2}}\tau + \\ + 2[(h_{11}b_{12} + h_{21}b_{22})x_1(t) + (h_{12}b_{12} + h_{22}b_{22})y_1(t)] \times \\ N_2[x_1^2(t) + y_1^2(t)]^{\frac{1}{2}}\tau.$$

Звідси випливає, що

$$\frac{d}{dt}V(x_1(t), y_1(t)) \leq -\lambda_{\min}(C)[x_1^2(t) + y_1^2(t)] + \\ + 2[M_1x_1(t) + M_2y_1(t)][x_1^2(t) + y_1^2(t)]^{\frac{1}{2}}\tau,$$

де $\lambda_{\min}(C)$ - мінімальне власне число матриці, використовуючи співвідношення

$$ax + by \leq \sqrt{a^2 + b^2} \sqrt{x^2 + y^2},$$

отримуємо

$$\frac{d}{dt}V(x_1(t), y_1(t)) \leq -\lambda_{\min}(C)[x_1^2(t) + y_1^2(t)] + \\ + 2\sqrt{M_1^2 + M_2^2}[x_1^2(t) + y_1^2(t)]^{\frac{1}{2}}\tau.$$

І при $\tau < \tau_0$, де $\tau_0 = \frac{\lambda_{\min}(C)}{2\sqrt{M_1^2 + M_2^2}}$, повна

похідна функції Ляпунова буде негативно визначена, і точка спокою асимптотично стійка.

Список використаних джерел

1. Гаркуша Н.І. Про близькість моделей динаміки Вольтерра та Гудвіна / Н.І. Гаркуша // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія фізико-математичні науки. – 2013. - №2. – С. 131-134.
2. Гаркуша Н.І. Динаміка моделі Гудвіна з післядією / Н.І.Гаркуша // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія фізико-математичні науки. – 2013. - №4. – С. 96-99.
3. Занг В.-Б. Синергетическая экономика. Время и перемены в нелинейной экономической теории / В.-Б. Занг. - Москва: Мир, 1999. – 335 с.
4. Эльсгольц Л.Э. Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом / Л.Э. Эльсгольц, С.Б. Норкин. – Москва: Наука, 1970. – 240 с.

References

1. GARKUSHA, N. (2013) The proximity of Models of the Dynamics of Voltaire and Goodwin *Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series Physcs&Mathematics*. №2.– p.131-134.
2. GARKUSHA N. (2013) The dynamics of model Goodwin with delay *Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series Physics&Mathematics*. №4.– p. 96-99.
3. ZHANG, W.-B. (1991) *Synergetic Economics. Time and changes in the nonlinear economic theory*. Heidelberg: Springer-Verlag.
4. ELSGOLTZ, L., NORKIN, S. (1970) *Introduction to the Theory of Differential Equations with Deviating Argument*. Moskva: Nauka.

Надійшла до редколегії 21.04.14

УДК 004.056.5

Гончар С.А.¹, аспірант

Використання "bitcoin" - схеми для безпарольної авторизації на сервері.

¹ Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, пр-т Глушкова 4д, e-mail: sg.gonchar@gmail.com

S. A. Gonchar ¹, postgraduate

Using "bitcoin" - scheme for server authorization without password.

¹ Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03680, Kyiv, Glushkova av., 4d, e-mail: sg.gonchar@gmail.com

У даній статті представлено новий підхід для безпарольного доступу на сервер, використовуючи "bitcoin" - схему. Проаналізовано переваги та недоліки запропонованого підходу в порівнянні з іншими підходами.

Ключові слова: криптографія, bitcoin, клієнт-сервер.

This paper presents new approach for client-server systems authentication without password using "bitcoin"- scheme. Presents list of major contemporary approaches used for client-server systems authentication, given their description and some principles of using them in practice. Shown their advantages and disadvantages in specific systems. Described basic rules of the proposed approach, based on using "bitcoin" - scheme for server authorization without password, and differences in comparison with the classic "bitcoin"- scheme. Shown main schemes of using this approach when we create transactions for both classical (in time when client transfer money) and modified (in time when client authentication on the server) approaches. Presented modified scheme for constructing blocks and transactions in current chain in accordance with the client-server structure. Analyzed advantages and disadvantages of the proposed approach. Held comparison with other approaches, which are widely used in modern client-server systems to authenticate clients in some resource.

Key Words: cryptography, bitcoin, client-server.

Статтю представив чл.-кор. НАНУ, д.ф.-м.н., проф. Анісімов А.В.

Вступ

У даний час клієнт-серверна архітектура набуває все більш широкого розповсюдження, оскільки в більшості випадків користувачі намагаються отримати певну інформацію централізовано, використовуючи сервер, на якому вона зберігається.

Більшість таких ресурсів є захищеними, оскільки велика кількість інформації на них є конфіденційною і вона повинна оборонятись від зломисників. В основному доступ до цієї інформації на серверах відбувається за допомогою авторизації користувачів.

Зараз на практиці використовують безліч підходів, які дозволяють користувачам проходити авторизацію на сервері і отримувати доступ до певної інформації у відповідності до свого аккаунта. Самим простим засобом авторизації на даний момент є використання логіна та пароля, створених в процесі реєстрації на певному ресурсі. Саме логін та пароль дозволяє ідентифікувати користувача і надати йому доступ до інформації.

Окрім логіна та пароля можуть використовуватись також інші підходи, які

передбачають використання ресурсів комп'ютера користувача та його унікальні адреси в мережі.

Усі ці підходи є ефективними, але не дуже захищеними. Кожен із цих параметрів авторизації може бути підібраним зломисником і він може отримати доступ до конфіденційної інформації. Саме тому проблема авторизації на клієнт-серверних архітектурах є актуальною і потребує нових підходів, які дадуть змогу максимально знизити імовірність підбору параметрів авторизації, тим самим захистивши цю інформацію від зломисників.

Існуючі підходи

У сучасних клієнт-серверних архітектурах найбільш поширеними є наступні засоби авторизації на серверах [1]:

1. *Проста авторизація* – можлива тільки після реєстрації на ресурсі, а для здійснення самої авторизації потрібна пара логін-пароль, які надаються користувачеві після реєстрації. Перевагою даного підходу є його простота, а от недоліком є те, що для різних ресурсів можуть бути різні облікові дані, які потрібно запам'ятовувати, але не завжди це вдається.

2. *Авторизація по OpenID* – метод

авторизації, для використання якого потрібна реєстрація у так званого «провайдера ідентифікації» і «залежна сторона» - кінцевий ресурс, який намагається ідентифікувати користувача. Особливістю цього підходу є те, що реєстрація на самому ресурсі не є обов'язковою, а провайдер ідентифікації може бути для різних ресурсів. Перевагою в підході є використання однієї пари логін-пароль для багатьох ресурсів, а недоліком – цей підхід ще мало розповсюджений і дуже мало ресурсів його використовують.

3. *Еніт-авторизація* – прив'язка «аккаунта» до мобільного телефону, номеру. При використанні даного підходу на телефон відправляється смс-повідомлення з унікальним кодом, який потім використовується для авторизації на ресурсі. Перевагою даного підходу є те, що дана авторизація в порівнянні з іншими є найбільш захищеною, оскільки номери телефонів є унікальними і отримати код зможе лише користувач, якому належить цей номер, а недоліком в даному підході є те, що він мало розповсюджений. Також він може обмежувати доступ, якщо телефона немає поряд, або ж телефон може бути украденим, в такому випадку доступ до ресурсу може получить зломисник.

4. *Авторизація з використанням унікальних параметрів комп'ютера* [2] – даний підхід дає можливість авторизувати користувача, використовуючи його IP-адрес, MAC-адрес, Windows Login і т.п., або їх комбінації. Використовуючи даний підхід, користувач має змогу получить доступ до ресурсу, не використовуючи пари логін-пароль або іншої подібної авторизації. Перевагою даного підходу є те, що він дозволяє користувачу не приймати безпосередню участь в процесі авторизації, оскільки використовуючи дані комп'ютера вона пройде автоматично, а недоліком в даному підході є те, що кожна зміна комп'ютера, або інших ресурсів, призведе до неможливості авторизуватись на ресурсі.

Усі описані вище засоби авторизації, які зараз широко використовуються, мають ті чи інші проблеми. Для кінцевого користувача не буде дуже ефективним використання пари логін-пароль кожен раз, коли він захоче відвідати певний ресурс. Прив'язка до телефону також заставлятиме користувача виконувати певні дії, щоб авторизуватись. І не варто забувати про те, що на практиці кожен із цих засобів авторизації може бути взломаним підбором зломисником.

Основні принципи роботи “bitcoin”-схеми.

Розглянемо основні принципи роботи

“bitcoin”-схеми.

Bitcoin – це система електронних грошей, яка працює за принципом peer-to-peer [3]. У bitcoin немає центру управління, система працює автономно і підпорядковується відомим алгоритмам, а інформація про транзакції зберігається у всіх учасників системи.

В bitcoin вся інформація про транзакції зберігається в ланцюгу блоків [4]. Блоки передаються в форматі JSON. Кожен блок містить заголовки і список транзакцій. Заголовок складається з декількох властивостей, серед яких є також хеш попереднього блоку. Таким чином, весь ланцюг блоків зберігає всі транзакції за весь час роботи bitcoin.

В останніх версіях системи весь ланцюг блоків зберігається повністю кожним клієнтом, що робить цю систему децентралізованою.

На малюнку 1 показано принцип роботи “bitcoin”-схеми в момент створення нової транзакції.

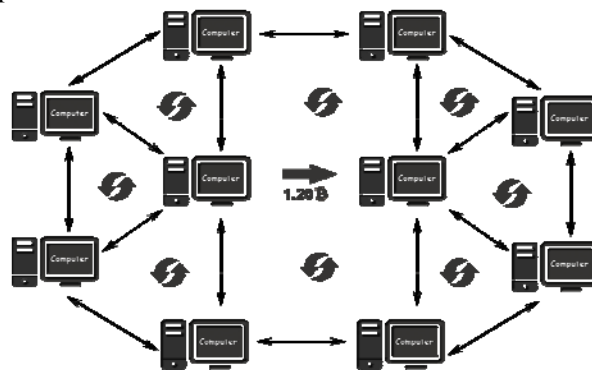


Рис. 1 Принцип роботи “bitcoin”-схеми в момент транзакції.

Учасники діляться на 2 групи: на тих, хто працює над новим блоком і тих які не працюють. Один із клієнтів створює нову транзакцію і виконує її розсилку іншим клієнтам, які займаються генерацією блоку. Вони додають цю транзакцію до свого блоку і продовжують генерацію. Коли хтось згенерує такий блок, він запечатується і розсилається по мережі. Дальше клієнти перевіряють блок і дані всередині нього на валідність. Якщо ніяких проблем немає, то транзакції вважаються виконаними і цей блок зберігається у кожного з клієнтів.

Використання “bitcoin”-схеми для безпарольної авторизації на сервері.

Пропонується використовувати “bitcoin”-схему для безпарольного доступу до певного ресурсу (серверу). Оскільки дана схема працює лише з клієнтами, а ми хочемо використати її для клієнт-серверної системи, модифікуємо її відповідним чином. В даному випадку в якості

певних клієнтів виступатимуть сервера. Розглянемо, як зміниться сама схема при авторизації клієнта на сервері:

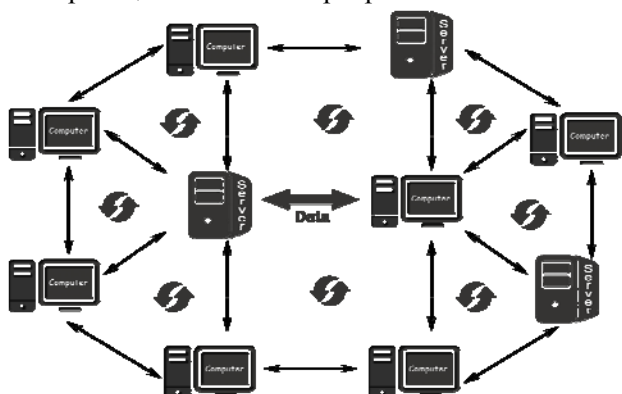


Рис. 2 Принцип роботи "bitcoin"-схеми в момент авторизації клієнта на сервері.

Як видно на малюнку 2, в даній модифікованій схемі у нас в транзакції буде передаватись певна інформація, розшифрувати яку зможе лише клієнт або сервер.

Як відомо, "bitcoin"-схеми дають змогу коректно ідентифікувати вірні транзакції, основуючись на певному ланцюгу зв'язків. Це відбувається, коли іде обмін даними між певними учасниками і створюється транзакція. Інші учасники, маючи коректну інформацію про учасників які створили транзакцію, перевіряють їх валідність в системі, і якщо валідність підтверджується, транзакція підтверджується. Даний ланцюг зв'язків можна використати саме для безпарольної авторизації клієнтів на серверах, які знаходяться в цьому ланцюгу. Сервер, авторизуючи клієнта, перевірить, чи дійсно клієнт має з ним зв'язок, використавши інших учасників у цьому ланцюжку, у яких буде достовірною інформація про те, чи дійсно цей клієнт має зв'язок з цим сервером. Якщо валідність учасника буде підтверджена, йому буде наданий доступ до ресурсу.

Розглянемо з яких елементів буде складатись сам блок більш детально. Усі наступні викладення базуються на стандартних параметрах "bitcoin"-схеми з модифікацією певних параметрів у відповідності до клієнт-серверного підходу.

- *hash* – SHA-256 хеш заголовка блоку. Такий хеш являється досить випадковим, а тому час його обрахування є визначеним.

- *ver* – версія схеми блоку.

- *prev_block* – хеш попереднього блоку в ланцюзі. Саме завдяки цій властивості ланцюг неможливо підробити, замінивши в ній один із блоків, оскільки хеш блоку завжди залежить від

хеша попереднього блоку в ланцюзі. Якщо змінити один із блоків, прийдеться наново створювати всі наступні.

- *mrkl_root* – список хешів транзакцій. Хеш блоку повинен обов'язково залежати від транзакцій, щоб їх неможливо було підробити. Але обраховувати його напругу буде дуже довго, якщо кількість транзакцій велика. Тому спочатку хешуються самі транзакції, а потім їх хеші використовуються для обрахування хешу всього блоку.

- *time* – відображає час створення блоку.

- *bits* – одна із самих важливих властивостей. Являється скороченою формою цільового значення хеша. Блок вважається згенерований, коли його хеш менший цього цільового значення.

- *nonce* – число, яке, починаючи з нуля, інкрементується після кожної ітерації обрахування хеша. Так і проходить перебір, поки хеш не буде меншим цільового значення.

- *n_tx* – кількість транзакцій в списку.

- *size* – розмір блоку в байтах.

Розглянемо більш детально з чого складаються самі транзакції. Транзакції містяться в блоках у вигляді списку. Вони, так само як і блоки, вистроюються в ланцюги. Кожна транзакція повинна указувати, звідки вона братиме певні дані. Для задання адресата використовуватиметься його публічний ключ. Щоб адресат міг використовувати отримані дані, він повинен створити нову транзакцію, яка буде брати ці дані з попередньої і перенаправляти їх на інший адрес. Для того щоб перевіряти що користувач використовує для авторизації саме свої особисті дані, а не чужі, він повинен залишити в своїй транзакції свій цифровий підпис. Тоді в будь який момент часу можна впевнитись, що всі транзакції являються валідними. На практиці це може бути реалізовано за допомогою наступних властивостей:

- *hash* – хеш всієї транзакції. Транзакції хешуються 2 рази. Перший раз під час обрахування хеша транзакції. Другий раз – під час обрахування хеша блоку. Окрім того, кожний блок посилається на хеш попереднього блоку, а кожна транзакція – на хеш попередньої транзакції. Тому якщо поміняти транзакцію і якимсь чином її хеш не ламається, то ламаються всі інші хеші і змінений ланцюжок блоків буде відхилений іншими користувачами.

- *ver* – версія схеми транзакції.

- *vin_sz* – кількість попередніх транзакцій, із яких дані переводяться на нові адреси.

- *vout_sz* – кількість адрес, на які

відправляються дані.

- *size* – розмір транзакції в байтах.

- *in* – містить список входів транзакції. В якості входів використовуються попередні транзакції (*prev_out*).

У кожного виходу в свою чергу є наступні властивості:

- *hash* – хеш попередньої транзакції.

- *n* – так як у транзакції може бути декілька виходів, потрібно указувати з якого саме беруться дані. Для цього випадку якраз і існує ця властивість. В ньому міститься порядковий номер виходу попередньої транзакції, починаючи з 0.

- *scriptSig* – у цій властивості відправник повинен доказати, що він переводить дійсно свої дані, а не чужі. Для цього він указує публічний ключ отримувача попередньої транзакції, тобто свій ключ, так як він повинен бути отримувачем. Окрім того від додає ECDSA підпис цієї ж транзакції, яка створена його приватним ключем. Це доказує, що він розпоряджається своїми даними, а не чужими.

- *data* – містить дані, які будуть передані на новий адрес.

- *scriptPubKey* – ця властивість, разом із *scriptSig* складають ключ, за допомогою якого іде перевірка на валідність. Сценарій перевіряє транзакцію на валідність. Використання подібного сценарію дає великі можливості для опису умов отримання даних адресатом. А тому в якості верифікації можуть служити різні паролі або перевірки, які будуть доступні лише певним користувачам.

Переваги та недоліки даного підходу

Основною перевагою запропонованого

підходу є те, що він дасть нам змогу авторизуватись на певних ресурсах не використовуючи облікових даних. Усе що буде потрібно для авторизації, це буде лише список усіх блоків і транзакцій, за допомогою яких працює “bitcoin”-схема. У порівнянні з існуючими підходами, даний підхід дасть змогу мінімізувати можливість взлому ресурсів противником, використовуючи облікові дані клієнта, оскільки в “bitcoin”-схемі авторизація буде проходити лише в тому випадку, коли інші користувачі будуть підтверджувати валідність.

Основним недоліком даного підходу є те, що нам прийдеться зберігати весь час ланцюг блоків на комп'ютерах або інших ресурсах, звідки буде вестись комунікація з сервером. Також можуть бути невеликі затримки при перевірці валідності іншими учасниками, але дану проблему можна вирішити, зменшивши довжину хеша блоку, оскільки в клієнт-серверній структурі немає смислу використовувати великі хеші через те що тут не відбуватимуться маніпуляції з грошима, а буде відбуватись лише обмін інформацією.

Висновки

Даний підхід дасть змогу розширити “bitcoin”-схему на клієнт-серверні структури, при цьому сервер не потребуватиме у клієнта обов'язкової авторизації і сама авторизація в цьому випадку проходитиме автоматично. Це дасть змогу значно розширити клієнт-серверний обмін даними. При цьому весь цей обмін інформації буде захищеним і його неможливо буде підробити, оскільки робота в мережі bitcoin основана на принципі, результату роботи, якого тяжко добитись, але легко перевірити.

Список використаних джерел

1. Ломалкин О. Авторизация в веб: какой она может быть? [Електронний ресурс] / 2008 – Режим доступу до ресурсу : <http://habrahabr.ru/post/28443>
2. Типы авторизации пользователей [Електронний ресурс] / 2007 – Режим доступу до ресурсу : https://usergate.ru/support/axel/authorization_types.html
3. Bitcoin [Електронний ресурс] / 2010 – Режим доступу до ресурсу : <http://bitcoinme.ru>
4. Сигов А. Bitcoin. Как это работает [Електронний ресурс] / 2011 – Режим доступу до ресурсу : <http://habrahabr.ru/post/114642>

References

1. LOMALKIN, O., (2008) *Avtorizatsiya v web: kakoy ona mozhет byit?* [Online] Available from: <http://habrahabr.ru/post/28443> [Accessed: 20th April 2014].
2. Usergate. (2007) *Tipy avtorizatsii polzovateley* [Online] Available from: https://usergate.ru/support/axel/authorization_types.html [Accessed: 20th April 2014].
3. Bitcoinme. (2010) *Bitcoin* [Online] Available from <http://bitcoinme.ru> [Accessed: 20th April 2014].
4. SIGOV, A., (2011) *Bitcoin. Kak eto rabotaet* [Online] Available from <http://habrahabr.ru/post/114642> [Accessed: 20th April 2014].

Надійшла до редколегії 22.04.14

УДК 004.75

О. V. Hordiichuk¹, postgraduate

A congestion control algorithm for video multicasting in peer-to-peer networks

¹ Taras Shevchenko National University of Kyiv,
83000, Kyiv, Glushkova st., 4d,

e-mail: oleg.gordiychuck@gmail.com

Гордійчук О. В.¹, аспірант

Алгоритм контролю перевантажень для широкомовної передачі відео в однорангових мережах

¹ Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 83000, м. Київ, пр-т. Глушкова
4д,

e-mail: oleg.gordiychuck@gmail.com

Перевантаження комп'ютерних мереж виникає внаслідок відправки пакетів, кількість яких перевищує пропускну здатність напрямку передачі. Через це певна кількість пакетів не доходить до одержувача або надходить із значною затримкою. Для вирішення цих проблем використовуються алгоритми контролю та уникнення перевантажень в мережах, які застосовуються у протоколах прикладного рівня.

В даній статті пропонується новий алгоритм контролю перевантажень, який передає дані якомога більшій кількості отримувачів і в той же час мінімізує кількість втрачених пакетів та затримку передачі, що є принциповим моментом для відеотрансляцій. На відміну від існуючих розробок даній алгоритм використовує інформацію про перевантаження одразу від усіх отримувачих вузлів, що надає змогу більш ефективно використовувати мережу за рахунок об'єктивної оцінки навантажень. Також запропонований підхід не потребує додаткової затримки перед відправкою кожного пакету, що покращує якість сервісу для кінцевих користувачів та надає змогу використовувати його в однорангових мережах деревоподібного типу для відео трансляцій.

Ключові слова: контроль перевантажень, уникнення перевантажень, однорангові мережі, широкомова передача.

A network congestion occurs due to transmitting amount of packets that is bigger than link's bandwidth. That's why some of packets are lost or arrived with significant delay. Congestion control and avoidance algorithms are used for solving these problems and implemented as application layer protocols.

In this paper proposed a new congestion control algorithm that sends data to as much as possible receivers and at the same time an amount of lost packets and transmission delay are minimized that is very important for video streaming. Such approach provides more efficient bandwidth utilization by using impartial assessment of the network load unlike existing solutions and also it doesn't need additional delay before sending every packet that improves the QoE (quality of experience) for end users and this enables its usage in a tree-like peer-to-peer networks for video streaming.

Key Words: congestion control, congestion avoidance, peer-to-peer networks, multicasting.

Статтю представив д.т.н., проф. Погорілий С.Д.

Introduction

The network congestion is an old problem that appeared at the same time as the Internet. It's happened due to limited capabilities of the routing hardware that transmits data with abnormal sending rate. If transmission rate exceeds hardware limits then each new packet is pushed to a waiting queue and when it's full then packet is dropped. That's why there is a need for an algorithm that provides efficient and fast data transmission.

There are different schemes for solving this problem that implemented in network protocols. The most widespread is a congestion control in TCP/IP. It has been improving during developing of the Internet and that's why there are lot of implementations like Tahoe and Reno, Vegas, CUBIC, Westwood+ and others [1]. The main idea of this congestion control algorithm is to provide fast data transmission with fair network bandwidth usage among all applications. All implementations of TCP/IP congestion avoidance mechanism use only

the packet loss as an indicator of the network overloading. But this approach is not good for all network types. For example, LTE, 3G and ADSL routers have big waiting queues and in this case congestion detection happens much later (depending on the queue size) than a real event occurs. The algorithm that proposed in this paper also uses the packet loss event as the indicator of the network congestion, but on the other hand it reacts more smoothly.

A solution of the big queue problem was proposed in LEDBAT [2] scheme that is used in uTP. In this approach each time a sender transmits new packet it stores current machine time t_1 in microseconds in the special field. After packet arrives the receiver calculates difference $d = t_1 - t_2$, where t_2 is a current time and sends this value back to the sender. Although clocks of the sender and the receiver are not synchronized and this task is not even solvable with microseconds accuracy, the minimum value of d (d_{min}) represents a situation when the waiting queue is empty. That's why if compare each new value d with d_{min} it's possible to estimate router's queue size. The LEDBAT uses this heuristic for the congestion control and tries not to exceed the queue size for more than 100ms. The solution described here also uses such approach for detecting the network congestion.

There is also a hybrid solution that is called TCP friendly rate control (TFRC) [3]. It uses a throughput equation that is based on different parameters like a round-trip time, a loss event rate, a retransmission timeout and others. This protocol is much smoother than classical TCP congestion control.

Besides protocols described above there are different other congestion avoidance solutions like DCCP [4] that can use different algorithms and Sprout [5] that uses stochastic forecasts for achieving high throughput and low delay, but only for cellular networks, where big waiting queue are used. In this paper considered the algorithm that rely on receiving speed rather on forecasts because it has more accurate information about network congestion due to receiving information from different sources.

Although there were different attempts to solve this problem, all of them are not well suitable for live streaming in peer-to-peer networks because of their delivery time constraints. This paper proposes a new congestion control algorithm that has a goal to transmit as much as possible data for the shortest period of time. It doesn't provide fairness for other streams and tries to capture all available bandwidth, however at the same time it doesn't overload router and keeps the waiting queue free.

Congestion detection and virtual network queue

As it was mentioned before the network congestion occurs when routers traffic exceeds its bandwidth capabilities. The main indicator of network congestion is a packet loss. Each router maintains its queue using some algorithm such as random early detection [6], weighted random early detection (an improved type of previous algorithm), Blue [7] or tail-drop [8] that are called in general as active queue management. The tail-drop approach drops all packets that couldn't be pushed into the queue. Random early detection drops random packets instead of those that come last. It helps to make data transmission fairer as congestion will be detected earlier than the waiting queue becomes full.

A variety of the queue management mechanisms is a main problem for any congestion avoidance algorithm as it's impossible to detect what kind of algorithm is used in current situation. An only possible way to detect network congestion is to collect data about lost packets and transmission delay. But not all lost packets indicate the congestion as in all types of wireless networks (wi-fi, bluetooth, EDGE, 3G and LTE) this event may occur due to physical characteristics of an environment. That's why classical TCP/IP implementations as well as other algorithms have poor performance in networks where errors are possible. The same problem concerns the network delay estimation. Not all routers have so big waiting queue that congestion algorithm could detect it and at the same time doesn't garble it with a network noise. Again the wireless networks may not have stable environment and measurement of delay may be inaccurate. For example, node with EDGE modem may have difference between upper and lower bound of the round trip time up to several seconds. In consequence to these facts there is no detection scheme that works excellent in all possible cases of the network congestion.

A possible solution is to use another indicator of the congestion that doesn't affect the packet loss problem. It's known that congestion occurs when sending rate is bigger than receiving rate and usage of this fact is enough for a correct guess. But in fact we can't estimate sending and receiving rate and make correct assumption because this information holds on opposite side. Information about receiving rate should be sent back to the sender. Due to the fact that round trip time could reach hundreds of

milliseconds this information couldn't be used in such way.

The congestion algorithm may use a virtual queue instead. The sender puts every packet into its virtual queue and it holds there until the acknowledgement packet (ACK) is received. In case when the acknowledgement hasn't received in time (the packet's age reached a retransmission timeout, RT), the sender erases the packet from the queue and resends it again. This process is described in figure 1 and 2. This is very similar to a sending window in TCP/IP congestion control mechanism, but unlike "window" approach the virtual queue doesn't have limits in size and sender doesn't increase or decrease it. Instead it just simulates a real situation at the queue of router that is a bottleneck of the transmission.

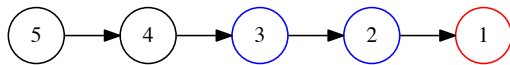


Figure 1. The virtual queue, where blue colored packets represent situation when sender has received an acknowledgement for them and red-colored is a lost packet.

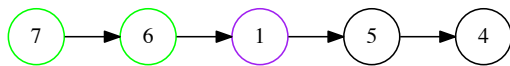


Figure 2. The virtual queue after previous state. Here the lost packet (marked as purple) is erased from the head and pushed to the tail and green-colored packets are new coming.

Local congestion control

While the virtual queue can't evaluate exact size of the router's queue, it is very useful for the congestion control. If the virtual queue grows during constant data transmission it means that link is overloaded and speed should decrease, because more and more packets are not delivered. Besides this fact if the virtual queue becomes smaller in size it means that additional bandwidth is available. But if sending rate is not constant the situation becomes more complicated. In this case if rate increases the queue's size may also increase in two cases – just as normal reaction on a rate change and if the congestion occurs. That's why the size of virtual network queue couldn't be used as a good congestion indicator. As it was mentioned in previous chapter the network overloading could be detected when packet is lost or

sending delay is more than a threshold, but at the same time these approaches have major disadvantages that aren't acceptable for video multicasting due to their inaccuracy.

A possible solution is to use a mixed approach – properties of the virtual queue and congestion indicators such as the delay and the packet loss. Let's look at the so known bandwidth-delay product formula:

$$b = \frac{q}{r} \quad (1)$$

Here b is a maximum possible bandwidth or a sending rate on the link in bytes per second, q is a queue size in bytes and r is a round-trip time in seconds. It's not hard to notice that the bigger size has queue – the more data could be delivered to the destination and that from some moment increasing this value will not affect on the actual amount of delivered data. On the other hand it's possible to predict the queue size if the sending rate increases or decreases. Let b_1 and b_2 are different sending rates of the same link, then size of the second queue could be represented by the following transformations:

$$\frac{b_1}{b_2} = \frac{q_1 r_2}{r_1 q_2}$$

$$q_2 = \frac{q_1 r_2 b_2}{r_1 b_1} = q_1 c \quad (2)$$

Using this formula the congestion control could be applied as following: every time the sending rate increased $\frac{b_2}{b_1}$ times then the resulting queue should increase no more then by $c = \frac{r_2 b_2}{r_1 b_1}$ times. At each step the congestion control algorithm sets the value:

$$b_{k+1} = 2b_k, b_1 = 1 \quad (3)$$

This continues until formula 2 is true. Such approach guarantees that congestion will be found by not more than $\lceil \log_2 b_j \rceil$ steps, where b_j is the maximum possible sending rate. Otherwise if the congestion occurred, it could be eliminated if reduce bandwidth to a next value:

$$b_{k+1} = \frac{q_{k+1} r_k}{r_{k+1} q_k b_k} \quad (4)$$

For every next step this algorithm schedules at r_k seconds after, which guarantees that it can adequately notice changings in the network.

But it should be mentioned that formula 1 is not correct for cases where packet loss is a normal behavior of the current link and doesn't related to the network congestion. Also some noise could appear

due to CPU load or other factors while measuring value r . That's why the following statement should replace formula 2:

$$1 - \Delta \leq \frac{q_2}{q_1 c} \leq 1 + \Delta \quad (5)$$

The value of Δ represents a possible error. As for multicasting even small probability of packet loss is considerable and at the same time the noise could be very noticeable, the Δ should be compromise. For example, $\Delta = 0.15$ could be such value for the wi-fi link with moderate signal. More accurate value could be achieved by a direct measuring of packet loss probability that could be done by using multicast congestion control described in the next section.

Also it's possible to use a LEDBAT delay measurement congestion control [2] together with the proposed algorithm. Such approach increases efficiency of bandwidth utilization. Reducing sending delay is not described here, because it's beyond the scope of this article.

The main difference between proposed algorithm and the TCP/IP congestion control is that on the one hand it rapidly increases the bandwidth and on the other hand it smoothly decreases it if the network is overloaded. Besides these properties it's also designed for multicasting, as each new packet shouldn't wait, until it will be sent. Instead it transmits immediately, which guarantees low delivery delay.

Multicasting congestion control

While the local congestion control algorithm is quite efficient, it could be improved by using information from multiple sources. A video stream has a property that is called a bitrate w – it's a speed of link in bytes per second. It could be constant or variable. Nevertheless it has some average value during all streaming that is known before actual start. Some multicasting peer-to-peer solutions like ChunkySpread [9] and Tailcast [10] uses a tree topology for data delivery. It's very useful to divide stream into j substreams, because it means that sender can transmit data to several receivers with different speed. For example, packets with identifiers $1, 1 + j, 1 + 2j, \dots$ belong to the substream #1, packets with identifiers $2, 2 + j, 2 + 2j, \dots$ belong to the substream #2 and so on. In this case each substream has bitrate equal to $\frac{w}{j}$.

In peer-to-peer video streaming networks one of the most important task is to use as much as possible of available bandwidth of each participant, because in any type of the swarm (mesh or tree) the main

index is an end-user receiving delay. It means the difference between a time when packet produced and delivered to the destination. If a video data divided into many substreams it's possible to use nearly all available bandwidth of the peer. But it's also important to transmit data to the same peers during living in the swarm, because effect of "changing hands" needs additional time that impacts on the QoE (Quality of Experience) for the end-user. In congestion control algorithms, that are proposed in existing works, it's nearly impossible, but using the algorithm proposed here it's an easy task for any peer-to-peer tree topology.

For this the virtual queue idea and controlling algorithm is extended. Instead of local congestion control the peer can choose its sending rate according to information received from several destinations at the same time. In such systems the bottleneck is at the sending side, because peers that haven't enough receiving capabilities leave the network soon due to inability to watch the video stream. That's why a global approach that combines ideas described in previous chapter and retrieving information from different sources may be used that could be described as an algorithm that could be set by the next methods:

function GetOldestFreeNeighbor(N, s)

begin

for $i := 1$ **to** $|N|$ **do**

for $j := 1$ **to** s **do**

begin

if $N[i].substreams[j]$ **then**

return pair(i, j);

end

return null;

end

function GetYoungestBusyNeighbor(N, s)

begin

for $i := |N|$ **to** 1 **do**

for $j := s$ **to** 1 **do**

begin

if $N[i].substreams[j]$ **then**

return pair(i, j);

end

return null;

end

event OnBandwidthIncreased(N, b, s)

begin

for $i := 1$ **to** b **do**

begin

$p := \text{GetOldestFreeNeighbor}(N, s)$;

```

if p != null then
    N[p.first].substreams[p.second] = true;
end
end

event OnBandwidthDecreased(N,b,s)
begin
    for i:=1 to b do
        begin
            p:=GetYoungestBusyNeighbor(N,s);
            if p != null then
                begin
                    N[p.first].substreams[p.second] = false;
                end
            end
        end
    end

event OnPacketReceived(N,stream_index,packet)
begin
    for i:=1 to |N| do
        if N[i].substreams[stream_index] then
            begin
                Send(N[i],packet);
            end
        end
    end

```

Here N is a set of neighbors; N also contains a field “substreams” – a boolean array, where each value indicates if this neighbor should receive packets of provided substream or no; b – number of substreams count that could be increased or decreased during current congestion control. OnBandwidthIncrease is called each time when the additional bandwidth is available that's determined by (5) and the value b is calculated using (3); OnBandwidthDecrease is called each time when the congestion occurs that's also determined by (5) and value b is calculated using (4); OnPacketReceived is called each time when a new packet is generated by a video source or received from another peer.

Combining the local congestion control algorithm from the previous chapter and the multicasting peer-to-peer algorithm provides an efficient solution. It eliminates necessity of using TCP/IP and at the same time it could be implemented over the UDP protocol. But it also could be implemented as a transport level protocol and embed into operational system.

This algorithm solves the problem of delayed delivery as the sending rate is always chosen according to an available bandwidth and also solves the problem of frequent changings of destination

peers that leads to a better quality of experience for end users.

Conclusion

In this paper presented a new congestion control algorithm and its implementation for a tree-based peer-to-peer network. Separately existing algorithms were examined with their benefits and drawbacks. It has shown that on the one hand most of them have problems in slow detecting and reacting on the network congestion that make them impossible to use in peer-to-peer video streaming. And at the same time some useful ideas such as the detection of sending delay could be reused in the algorithm proposed here.

The virtual network queue is a kind of “sending window” that represents a delayed situation on the real router queue and doesn't have limits in size. This approach results to a better congestion detection, because it doesn't depend on the packet loss that happened due to the network environment. It is used for constructing the congestion control algorithm that is based on the idea of comparing current queue size within expectable value. Achieving optimal sending rate and congestion avoidance that is done by the binary search algorithm and the exact overloading estimation leads to a smooth control of the sending rate. Special attention paid to the possible packet loss and noise during estimation - the proposed algorithm is extended with additional error check for considering such behavior.

All in all the multicasting congestion control algorithm is proposed. This solution extends the idea of the local congestion control to a global level, where several sources (neighbors) of congestion are used for the management. Diversity of sources provides more accurate estimation of the network overloading that leads to a better link utilization.

The results could be used in a tree-base peer-to-peer networks and moreover it guarantees that every packet will be delivered in a shortest period of time. It leads to a better quality of experience for end users and makes possible to significantly reduce a delivery delay in such systems. It was specially designed for a Tailcast topology that has been implemented by the author before. However, exact performance evaluation should be additionally done and it's a target for the future researches.

Список використаних джерел

1. Grieco L. A., Mascolo S. Performance evaluation and comparison of Westwood+, New Reno, and Vegas TCP congestion control //ACM SIGCOMM Computer Communication Review. – 2004. – Т. 34. – №. 2. – С. 25-38.
2. Rossi D. et al. LEDBAT: the new BitTorrent congestion control protocol //Computer Communications and Networks (ICCCN), 2010 Proceedings of 19th International Conference on. – IEEE, 2010. – С. 1-6.
3. Padhye J., Widmer J. TCP friendly rate control (TFRC): Protocol specification. – 2003.
4. Kohler E., Handley M., Floyd S. Designing DCCP: Congestion control without reliability //ACM SIGCOMM Computer Communication Review. – ACM, 2006. – Т. 36. – №. 4. – С. 27-38.
5. Winstein K. et al. Stochastic forecasts achieve high throughput and low delay over cellular networks //Proc. USENIX NSDI. – 2013. – Т. 13.
6. Floyd S., Jacobson V. Random early detection gateways for congestion avoidance //Networking, IEEE/ACM Transactions on. – 1993. – Т. 1. – №. 4. – С. 397-413.
7. Feng W. et al. BLUE: A new class of active queue management algorithms //Ann Arbor. – 1999. – Т. 1001. – С. 48105.
8. Brandauer C. et al. Comparison of tail drop and active queue management performance for bulk-data and web-like internet traffic //Computers and Communications, 2001. Proceedings. Sixth IEEE Symposium on. – IEEE, 2001. – С. 122-129.
9. Venkataraman V., Yoshida K., Francis P. Chunkyspread: Heterogeneous unstructured tree-based peer-to-peer multicast //Network Protocols, 2006. ICNP'06. Proceedings of the 2006 14th IEEE International Conference on. – IEEE, 2006. – С. 2-11.
10. Hordiichuk O. Tailcast–A Distributed Multicast System with Low End-User Delays. // Theoretical and Applied Aspects of Cybernetics. Proceedings of the 3rd International Scientific Conference of Students and Young Scientists, 2013, C. 279-286.

References

1. GRIECO, L. A., MASCOLO, S., (2004) Performance evaluation and comparison of Westwood+, New Reno, and Vegas TCP congestion control. In *ACM SIGCOMM Computer Communication Review*. T. 34. – №. 2. – pp. 25-38.
2. ROSSI, D. et al. (2010) LEDBAT: the new BitTorrent congestion control protocol. In *Computer Communications and Networks (ICCCN)*, Proceedings of 19th International Conference on. – IEEE, 2010. – pp. 1-6.
3. PADHYE, J., WIDMER, J. (2003) *TCP friendly rate control (TFRC): Protocol specification*.
4. KOHLER, E., HANDLEY, M., FLOYD S. (2006) Designing DCCP: Congestion control without reliability. In *ACM SIGCOMM Computer Communication Review*. – ACM, T. 36. – №. 4. – pp. 27-38.
5. WINSTEIN, K. et al. (2013) Stochastic forecasts achieve high throughput and low delay over cellular networks. In *Proc. USENIX NSDI*. – p. 13.
6. FLOYD, S., JACOBSON, V. (1993) Random early detection gateways for congestion avoidance. In *Networking, IEEE/ACM Transactions on*. T. 1. – №. 4. – pp. 397-413.
7. FENG, W. et al. (1999) *BLUE: A new class of active queue management algorithms*. Ann Arbor.
8. BRANDAUER, C. et al. (2001) Comparison of tail drop and active queue management performance for bulk-data and web-like internet traffic. In *Computers and Communications*. Proceedings. – pp. 122-129.
9. VENKATARAMAN, V., YOSHIDA, K., FRANCIS, P. (2006) Chunkyspread: Heterogeneous unstructured tree-based peer-to-peer multicast. In *Network Protocols*, ICNP'06. Proceedings of the 2006. – pp. 2-11.
10. HORDIICHUK O. (2013), Tailcast–A Distributed Multicast System with Low End-User Delays. In *Theoretical and Applied Aspects of Cybernetics*. Proceedings of the 3rd International Scientific Conference of Students and Young Scientists, pp. 279-286.

Надійшла до редколегії 22.04.14

УДК 621.391:519.24

Дегтяр О.С., аспірант

**Оцінювання концентрацій хлорофілу за
допомогою розв'язання задачі
регуляризації Тихонова двоїстим
методом**

Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, пр-т.
Глушкова 4д,
e-mail: olga.degtiar@gmail.com

O. Degtiar, postgraduate (PhD)

**Method of chlorophyll concentration
estimation using dual solution for ridge
regression optimization**

Taras Shevchenko National University of Kyiv,
03680, Kyiv, Glushkova st., 4d,
e-mail: olga.degtiar@gmail.com

Розроблено метод оцінки концентрацій хлорофілу на основі спектру відображення, використовуючи ретроспективні виміри концентрацій та відповідні їм спектри. Невідомі параметри знаходяться шляхом розв'язання задачі регуляризації Тихонова двоїстим методом. Наведено порівняння результатів обчислювального експерименту для прямого та двоїстого методів.

Ключові слова: структурно-параметрична оптимізація, псевдообернення, регуляризація, двоїстий метод.

The method for chlorophyll concentration estimation based on spectrum reflection develop. Mathematical model is built using retrospective concentration measurements and corresponding chlorophyll spectrum reflections taken in different moments of time. Relation between spectrum reflection and concentration value suggested being linear, so the task is to find unknown parameters' vector for linear combination of spectrum components that best interpolates given concentrations. The problem is ill-posed, till the matrix is underdetermined. Pseudoinverse methods with Tikhonov regularization are used for solving the problem. Dual solution for ridge regression optimization is used for estimating unknown values. The main benefit is decreasing unknown parameters' vector dimension. Computative experiment results deviation measurement for dual and primal methods shows quite the same results, while computative complexity of dual solution is much less costly, which is a big advantage for the given data. Afterwards the model is used for concentration prediction.

Key Words: structural and parametric optimization, pseudoinversion, regularization, dual solution.

Статтю представив д. т. н., проф. Гаращенко Ф.Г.

Вступ

Велика кількість задач апроксимації та прогнозування фізичних процесів і явищ зводяться до представлення експериментальних даних у вигляді комбінацій функцій з деякого структурно заданого класу таким чином, щоб найкраще, в певному сенсі, описати отримані дані. При цьому найкращим представленням вважатимемо нульове середньоквадратичне відхилення між вихідним сигналом та його знайденим наближенням.

При прогнозуванні задача ускладнюється неможливістю дослідити структуру даних, що прогнозуються, і порівняти її з структурою вихідних даних, на основі яких будується математична модель.

Одним із способів вирішення цієї проблеми є розбиття вихідної вибірки на декілька підвбірок довільним чином з подальшою побудовою моделі лише для однієї з них та інтерполяцією результатів на інші підвбірки. Це дає можливість ввести деякі апіорні оцінки на невідомі параметри моделі і покращити результати прогнозованих значень.

В статті розглядається задача оцінювання концентрацій хлорофілу в рослинності на основі спектру відображення. Виконано ряд експериментів з метою запису відображених спектрів для озимої пшениці з різними значеннями концентрацій хлорофілу.

Постановка задачі

Нехай маємо відомі N q -вимірних сигналів спектрального розподілу для N різних концентрацій хлорофілу, де $c = (c_1, c_2, \dots, c_N)^T$ - вектор значень концентрацій,

$$X = \begin{pmatrix} x_1^1 & x_2^1 & \dots & x_q^1 \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_q^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^N & x_2^N & \dots & x_q^N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_N \end{pmatrix}$$

- матриця відповідних значень спектрального розподілу.

Для зручності позначимо $x = (x_1, x_2, \dots, x_N)$ - вектор-рядок, елементами якого є q -вимірні вектор-стовпчики спектральних даних для відповідних концентрацій.

Ставиться задача визначення невідомих концентрацій $(c_{N+1}, c_{N+2}, \dots, c_{N+M})^T$ на підставі отриманих спектральних даних $(x_{N+1}, x_{N+2}, \dots, x_{N+M})^T$ [3], а саме визначення невідомих параметрів $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_q)^T$ лінійної моделі

$$c = X\alpha. \quad (1)$$

З огляду на те, що матриця X не є квадратною ($N < q$), розв'язок задачі шукатиметься у вигляді $\alpha = X^+c$, де X^+ - псевдообернена матриця [1]. Тоді, використавши метод регуляризації Тихонова, де λ - параметр регуляризації, остаточно отримаємо вираз для α :

$$\alpha = (X^T X + \lambda I_q)^{-1} X^T c. \quad (2)$$

Для знаходження q -вимірного вектору невідомих параметрів α доведеться

розв'язувати систему з q лінійних рівнянь з q невідомими. Складність такої задачі - $O(q^3)$.

В результаті отримаємо функцію апроксимації у вигляді

$$f(x) = \langle x, \alpha \rangle = X(X^T X + \lambda I_q)^{-1} X^T c. \quad (3)$$

Вище розглянуто пряму задачу знаходження апроксимації за допомогою введення параметру регуляризації [4].

З іншого боку, (2) можна переписати у вигляді [2]

$$X^T X \alpha + \lambda I_q \alpha = X^T c, \quad (4)$$

$$\alpha = \lambda^{-1} X^T (c - X \alpha) = X^T w, \quad (5)$$

$$\alpha(w) = \sum_{i=1}^N w_i x_i, w = \lambda^{-1} (c - X \alpha). \quad (6)$$

Підставивши (5) в (6) отримаємо

$$\lambda w = (c - X X^T w) \quad (7)$$

або, перегрупувавши,

$$(X X^T + \lambda I_N) w = c. \quad (8)$$

А отже, остаточний вираз для вектору невідомих параметрів буде мати вигляд

$$w = (G + \lambda I_N)^{-1} c, \quad (9)$$

де $G = X X^T$ (матриця Грама).

Знаходження w зводиться до розв'язання N лінійних рівнянь з N невідомими. Складність такої задачі - $O(N^3)$. Результуюча апроксимація матиме вигляд

$$\begin{aligned} g(x, \alpha(w)) &= \langle x, \alpha(w) \rangle = \left\langle x, \sum_{i=1}^N w_i x_i \right\rangle = \\ &= \sum_{i=1}^N w_i \langle x, x_i \rangle = c^T (G + \lambda I_N)^{-1} k, \end{aligned} \quad (10)$$

де $k = \langle x_i, x_i^j \rangle, i = \overline{1, N}, j = \overline{1, q}$.

Отже, для задач, в яких спостереження представлені у вигляді прямокутних матриць, використання двоїстої до задачі регуляризації Тихонова суттєво зменшує кількість операцій та прискорює обчислення, що особливо важливо при роботі з даними, що надходять в режимі реального часу.

Алгоритм знаходження параметрів моделі

Одним з методів відшукування параметру регуляризації для вихідної задачі є розбиття вихідної N -вимірної вибірки на n -вимірну тренуючу та m -вимірну валідаційну ($m + n = N$).

Нехай $c_{train} = (c_{train1}, c_{train2}, \dots, c_{trainn})^T$,

$$X_{train} = \begin{pmatrix} x_{1train}^1 & x_{2train}^1 & \dots & x_{qtrain}^1 \\ x_{1train}^2 & x_{2train}^2 & \dots & x_{qtrain}^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{1train}^n & x_{2train}^n & \dots & x_{qtrain}^n \end{pmatrix},$$

$$x_{train} = (x_{train1}, x_{train2}, \dots, x_{trainn}),$$

$$c_{valid} = (c_{valid1}, c_{valid2}, \dots, c_{validm})^T,$$

$$X_{valid} = \begin{pmatrix} x_{1valid}^1 & x_{2valid}^1 & \dots & x_{qvalid}^1 \\ x_{1valid}^2 & x_{2valid}^2 & \dots & x_{qvalid}^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{1valid}^m & x_{2valid}^m & \dots & x_{qvalid}^m \end{pmatrix},$$

$x_{valid} = (x_{valid1}, x_{valid2}, \dots, x_{validm})$ - відомі значення концентрацій та відповідних їм спектральних розподілів.

З лінійної моделі $c_{train} = X_{train}\alpha$ з (10) знаходиться апроксимація концентрацій для тренувальної вибірки

$$g(x_{train}, \alpha(w_{train})) = \langle x_{train}, \alpha(w_{train}) \rangle = c_{train}^T (G_{train} + \lambda I_n)^{-1} k_{train},$$

де $G_{train} = X_{train} X_{train}^T$, $k_{train} = \langle x_i, x_i^j \rangle$, $i = \overline{1, N}$,

$j = \overline{1, q}$, $\lambda \in (0, \lambda_1]$, λ_1 обирається емпірично.

Для валідаційної вибірки використовується знайдений раніше q -вимірний вектор w_{train} . Тоді апроксимація концентрацій для валідаційної вибірки знаходиться з (10) і має вигляд $g(x_{valid}, \alpha(w_{train})) = \langle x_{valid}, \alpha(w_{train}) \rangle$.

Нижче наведено графіки середньоквадратичного відхилення фактичних значень концентрацій від відновлених за спектрами значень $\|c_{train} - g(x_{train}, \alpha(w_{train}))\|^2$ та $\|c_{valid} - g(x_{valid}, \alpha(w_{train}))\|^2$ для тренуючої та валідаційної вибірки для різних значень параметру регуляризації $\lambda \in (0, \lambda_1]$.

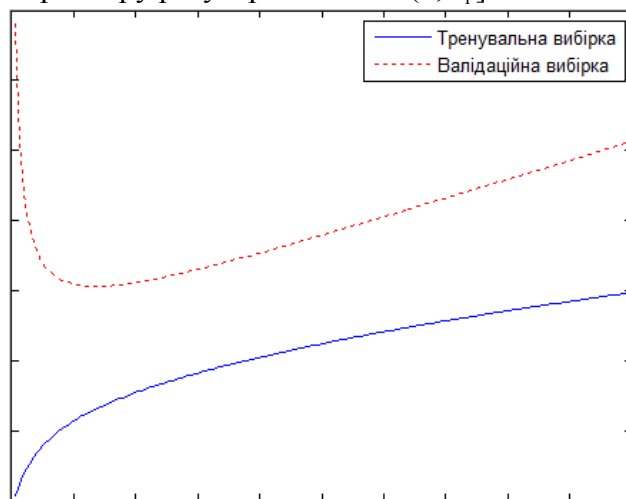


Рис. 1 Графік середньоквадратичного відхилення змодельованого розв'язку від реальних значень концентрацій

Для знаходження остаточного розв'язку вихідної задачі необхідно обрати значення параметру регуляризації λ_{opt} . Для задачі, що розглядається, пропонується обрати компромісне значення параметру для тренуючої та валідаційної вибірок, що є мінімумом відхилення валідаційної вибірки, який береться на розв'язках, знайдених для тренувальної вибірки

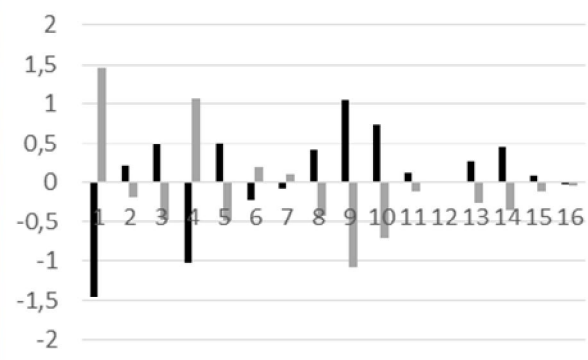
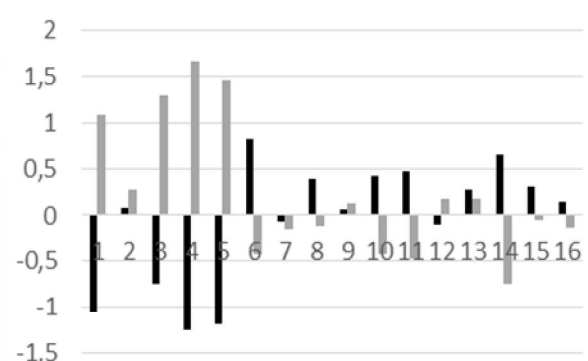
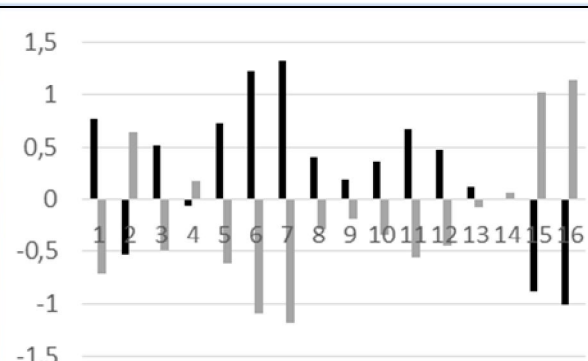
$$\lambda_{opt} = \arg \min_{\lambda \in (0, \lambda_1]} \|c_{valid} - g(x_{valid}, \alpha(w_{train}))\|^2. \quad (4)$$

Результати обчислювального експерименту

Нижче наведено результати обчислювального експерименту для 7 різних комбінацій даних 40 352-вимірних ($q = 352$) спектральних розподілів та відповідних їм концентрацій: вибірки розбивалися на тренувальну ($n = 10$), валідаційну ($m = 14$) та тестову ($M = 16$) довільним чином.

Зокрема для кожної комбінації в таблиці наводяться знайдені за наведеним вище алгоритмом середньоквадратичні відхилення фактичних значень концентрацій від відновлених за спектрами значень для прямої ($\|c_{test} - f(x_{test})\|^2$) та двоїстої ($\|c_{test} - g(x_{test}, \alpha(w_{train}))\|^2$) задач та графіки цих відхилень.

Результати обчислювального експерименту для прямої та двоїстої задач

№	Пряма задача $\ c_{test} - f(x_{test})\ ^2$	Двоїста задача $\ c_{test} - g(x_{test}, \alpha(w_{train}))\ ^2$	■ пряма задача ■ двоїста задача
1	0,3702	0,3681	
2	0,4067	0,5718	
3	0,4899	0,4558	

4	0,2886	0,2595	
5	0,4317	0,4015	
6	0,5239	0,5147	
7	0,4179	0,3023	

За результатами експерименту можна зробити висновок, що прогнозовані значення концентрацій для тестової вибірки за допомогою двоїстої задачі здебільшого є більш точними ніж аналогічні результати з

використанням прямої задачі (за винятком однієї вибірки). При цьому двоїста задача є суттєво кращою за часовою обчислювальною

складністю ($O(n^3)$ та $O(q^3)$) відповідно, де $n = 10$, $q = 352$).

Висновки

В роботі запропоновано алгоритм знаходження апроксимації відомих концентрацій хлорофілу на основі даних спектральних розподілів та оцінка невідомих концентрацій за допомогою двоїстої задачі до задачі регуляризації Тихонова.

Проведено обчислювальний експеримент для оцінки розв'язку з використанням двоїстої та прямої задачі, що показав ефективність використання двоїстої задачі для некоректно визначених, а саме недовизначених задач. Розглянутий алгоритм суттєво кращий за швидкістю, що вкрай важливо для задач, в яких дані надходять в режимі реального часу.

Список використаних джерел

1. *Albert A. Regression, And The Moor-Penrose Pseudoinverse* / A. Albert. – New York: Academic Press, 1972. – 224 с.
2. *Shave-Taylor J. Kernel Methods for Pattern Analysis* / J. Shave-Taylor, N. Cristiani. – New York: Cambridge University Press, 2004. – 478 p.
3. *Гаращенко Ф.Г. Адаптивные модели аппроксимации сигналов в структурно-параметрических классах функций* / Ф.Г.

Гаращенко, О.Ф. Швець, О.С. Дегтяр // Проблемы управления и информатики. – 2011. – №2. – С. 69-77.

4. *Дегтяр О.С. Алгоритм розв'язання задачі оцінювання концентрації хлорофілу за допомогою введення параметру регуляризації* / О.С. Дегтяр // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка: Серія фізико-математичні науки. – 2013. – №4. – С. 104-107.

References

1. ALBERT, A. (1972) *Regression, And The Moor-Penrose Pseudoinverse*. New York: Academic Press.
2. SHAVE-TAYLOR, J. and CRISTIANI, N. (2004) *Kernel Methods for Pattern Analysis*. New York: Cambridge University Press.
3. GARASHCHENKO, F.G., SHVETS, O.F. and DEGTIAR, O.S. (2011) Adaptive models of approximation of signals in structural and parametric classes of functions *Problemy informatiki i upravleniya*. 2. p. 69-77.
4. DEGTIAR, O.S. (2013) Algorithm for solution of chlorophyll concentration estimation problem using regularization parameter *Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv: Series Physics & Mathematics*. 4. p. 104-107.

Надійшла до редколегії 22.05.14

УДК 681.3.06

Дерев'янченко О.В.¹, к.ф.-м.н., доцент.

Системи паралельних обчислень на комп'ютерній мережі на базі технології ПАРКС

¹ Київський національний університет
імені Тараса Шевченка, 83000, м. Київ, пр-т.
Глушкова 4д,
e-mail: alexanderder@mail.ru

O.V. Derevianchenko¹, PhD.

Systems of parallel computing in the computer network based on the PARCS- technology

¹ Taras Shevchenko National University of Kyiv,
83000, Kyiv, Glushkova st., 4d,
e-mail: alexanderder@mail.ru

В роботі порівнюються дві системи паралельного програмування для комп'ютерних мереж із застосуванням технології ПАРКС (Паралельні Асинхронні Рекурсивні Керуючі Системи): ПАРКС-JAVA та ПАРКС-C#. Надано опис роботи цих систем. Наведено результати тестування систем для вирішення класичної задачі множення матриць. Розглянуто можливості цих систем при вирішенні практичних задач паралельного програмування.

Ключові слова: паралельні обчислення, комп'ютерна мережа, ПАРКС-технологія програмування, JAVA, C#.

This paper compares two parallel programming systems PARCS-JAVA and PARCS-C # for computer networks using the technology PARCS (Parallel Asynchronous Recursive Control System). The basic terms of the PARCS-technology are point, programming channel and algorithmic module. Pattern of control space is a graph. Top is a point of control space and edge is programming channels. The points are connected per programming channels. Each point of control space is assigned with the algorithmic module. The algorithmic module is a procedure PARCS and extension of the basic programming languages. Algorithmic modules are executed in parallel. In practice this means that in a computer network one major computer (Server) is selected. This computer is accessible to all others (Clients). It generates a queue of all tasks. Tasks from the queue are sent for computing. Each computer obtains a task from the queue and executes it. After finishing computing the active task it sends the results to the server and selects the new task. The model is designed for local area networks. Description of these systems is provided. The results of testing systems for solving the classical problem of matrix multiplication are presented. Capabilities of these systems in solving practical problems of parallel programming were considered.

Keywords: parallel computing, computer network, PARCS-technology of programming, JAVA, C#.

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Анісімов А.В.

Вступ

Метою даної роботи було дослідження, аналіз і реалізація методів прискорення обчислень паралельних систем програмування базованих на технології ПАРКС (Паралельні Асинхронні Рекурсивні Керуючі Системи). ПАРКС-технологія програмування [2] – сукупність програмних засобів, що забезпечують процес розробки і реалізації алгоритмів паралельної обробки інформації. Ця система може використовуватися при створенні програмного забезпечення паралельних ЕОМ, а також логічної структури паралельних і спеціалізованих ЕОМ, що забезпечують найбільш ефективну реалізацію

розробленого програмного забезпечення. В роботі порівнюються дві системи для паралельних обчислень на комп'ютерній мережі із застосуванням технологій ПАРКС, а саме та ПАРКС-JAVA та ПАРКС-C#.

Технологія ПАРКС

ПАРКС-технологія програмування, що являє собою деяку сукупність програмних засобів, які забезпечують процес розробки і реалізації алгоритмів паралельної обробки інформації. Вона базується на концепції керуючого простору (КП)[1] – динамічний граф, який використовується для опису логічної та комунікаційної структури досліджуваної задачі.

Основні терміни ПАРКС-технології:

- точка;
- програмний канал (ПК);
- алгоритмічний модуль (АМ).

Структура КП - граф, вершини якого - точки КП, ребра - ПК. До кожної точки КП приписаний АМ, який є процедурою ПАРКС - розширення базової алгоритмічної мови. В нашому випадку ми застосовуємо базові мови програмування JAVA та C#.

Програмні засоби розширення базових алгоритмічних мов:

1. Програмні засоби, що забезпечують побудову і модифікацію КП.
2. Програмні засоби, що забезпечують зберігання та передачу інформації за допомогою КП.
3. Програмні засоби, що забезпечують роботу з АМ.
4. Програмні засоби, що забезпечують процедурно - об'єктно-орієнтоване програмування.

Таким чином, програма на деякій умовній мові алгоритмічних модулів складається з наступних частин:

1. Опис структури чи типу керуючого простору.
2. Програма налаштування керуючого простору. При виконанні цієї програми відбувається розподілення алгоритмічних модулів по точкам простору.
3. Опис локальних алгоритмічних модулів та опис функціонування всього керуючого простору.

Технологія .NET

Microsoft .NET – сучасна технологія, що дозволяє створювати сучасні програми із застосуванням комп'ютерних мереж та паралельних обчислень. Застосування технології .NET [5] надає можливість переносу програм між різними апаратними платформами, на яких встановлене середовище виконання .NET 4.0 (фактично віртуальна машина). Однією з переваг .NET є сумісність бібліотек, написаних різними мовами. Система ПАРКС-C# написана на мові C#, але її можна використовувати і для інших мов .NET, наприклад Visual Basic або C++.

До позитивних якостей технології .NET, що вплинули на її вибір для проектування системи ПАРКС- C#, також належать:

- наявність мови C#, яка набуває все більшої популярності завдяки простій об'єктній моделі та постійному розвитку;
- відповідність сучасним вимогам: бібліотека TPL (Task Parallel Library), яка

використовується в системі ПАРКС-C# і надає широкий набір можливостей для розробки паралельних програм, підтримка засобів мережевого програмування, системи забезпечення пересилання даних по комп'ютерній мережі, потоковий ввід/вивід, рефлексія – процес виявлення типів під час виконання та інші.

Опис системи ПАРКС-C#

Архітектура системи складається з декількох частин:

1. *Parcs* – основна бібліотека класів системи. Містить всі основні класи, що будуть використовуватись усіма іншими частинами, в тому числі і алгоритмічними модулями.
2. *Daemon* – демон (клієнт). Являє собою програму, на якій будуть проводитись обчислення.
3. *HostServer* – сервер. Має список доступних клієнтів, а також інформацію про поточні задачі та точки. При запуску модуля починає роздавати завдання клієнтам в залежності від кількості процесорів клієнтів та їх завантаженості.
4. *Алгоритмічний модуль* – окремих проект, що має в собі посилання на *Parcs* та реалізує інтерфейс *IModule*.

Опис системи ПАРКС-JAVA

Застосування мови програмування JAVA надає можливість переносу програм між різними апаратними платформами, на яких встановлена JavaVM – віртуальна машина.

До позитивних якостей мови програмування JAVA, належать:

- проста об'єктна модель, що дозволяє легко проводити зміни в коді програми, доповнювати її та документувати;
- детермінованість коду – властивість мови, що не дає програмісту робити помилки, наприклад, пов'язані з несанкціонованими діями, такими, як різні виклики;
- система програмування JAVA відповідає сучасним вимогам: підтримка засобів мережевого програмування (сокетів), потоковий ввід/вивід, графічний інтерфейс користувача, системи забезпечення пересилки даних по комп'ютерній мережі, технології, що дозволяють уніфікувати клієнт-серверний (RMI) та інші.

Архітектура системи складається з наступних частин [3]:

- 1) *Parcs* – основна бібліотека класів системи, що використовуються всіма компонентами системи, в тому числі і алгоритмічними модулями;
- 2) *Daemon* – програма запускається в фоновому режимі на машинах, які підключаються до обчислюваної мережі (хости). Вона виконує запуск алгоритмічних модулів обчислювальних задач, а також тестування продуктивності машин.
- 3) *HostServer* – сервер, що є централізованою службою для управління та обліку задач та точок. Сервер зберігає інформацію про підключені машини, продуктивність та кількість точок на кожному хості, і згідно цієї інформації виділяє машини для створення нових точок, а також відмічає видалення точок, початок та завершення задач.
- 4) Обчислювальна задача, що поставляється у вигляді одного чи декількох jar-файлів, або окремих класів алгоритмічних модулів. На обчислення запускається початковий алгоритмічний модуль задачі. В процесі виконання початкового АМ він завантажує з фізичного диску програмний код інших алгоритмічних модулів.
- 5) RMI-сервер *ParcsLauncher* використовується для віддаленого запуску програми на виконання. RMI-клієнт для запуску програми повинен передати код обчислювальної задачі, запакований в jar-архів, та може вказати чи потрібно чекати кінець обчислення перш, ніж повернути управління клієнту.

Робота систем ПАРКС

Робота обох систем ПАРКС-С# та ПАРКС-JAVA схожа в цілому, але відрізняється деякими властивостями реалізації відповідних мов програмування С# та JAVA.

На всіх машинах, що призначені для обчислень, запускається програма *Daemon*, а початковий АМ та *HostServer* можуть запускатися або на тих же, або на інших машинах. В окремому випадку навіть всі три елементи системи можуть

бути запущені в одному місці. Файл *server.txt* (ПАРКС-С#) використовується початковим АМ для знаходження комп'ютеру, на якому запущений *HostServer* (IP-адреса).

Сімейство протоколів TCP/IP було обрано за основу для передачі інформації та служить для об'єднання комп'ютерів у локальні мережі та мережі Internet.

У створеній реалізації клієнта та сервера зв'язок проходить у такій послідовності:

1. При запуску модуля сервер перевіряє всі зазначені у файлі *hosts.txt* (ПАРКС-С#) і видаляє ті, з якими не вдалося з'єднатися. Після цього сервер запитує у кожного з клієнтів кількість ядер процесора і зберігає собі ці результати.
2. Сервер розподіляє точки, що створюються в алгоритмічному модулі, по комп'ютерах на яких виконується програма *Daemon*.
3. Після цього на комп'ютері, де буде створена нова точка, початковий АМ передає exe-файл (ПАРКС-С#) або jar-файл (ПАРКС-JAVA), в якому міститься інформація про всі АМ, що будуть запущені під час виконання поточної задачі. За допомогою рефлексії *Daemon* (ПАРКС-С#) створює екземпляр класу АМ і викликає метод *Run()*. Таким чином запускаються необхідні обчислення.
4. У файлі даних (одному або декількох) знаходяться вхідні дані для виконання обчислень, результати записуються в файл(и) результату. При створенні нової точки алгоритмічні модулі звертаються до сервера, щоб отримати адресу машини (найменш завантаженої) для запуску нового АМ. Список доступних машин зберігається в файлі *hosts.list* (ПАРКС-JAVA) та *hosts.txt* (ПАРКС-С#).
5. Після завершення обчислень *Daemon* відсилає результат назад на початковий АМ. Після того, як завершилися обчислення на всіх машинах, початковий АМ оброблює всі результати, виводить загальний результат на екран та зберігає його в файл.

Таблиця 1

Час множення матриць для різної кількості потоків для систем ПАРКС-JAVA та ПАРКС-С#.

Матриці Комп./поток	1000x1000		2000x2000		4000x4000	
	ПАРКС-С#	ПАРКС-JAVA	ПАРКС-С#	ПАРКС-JAVA	ПАРКС-С#	ПАРКС-JAVA
1/1	17.9	18.2	140.3	129.3	1095.1	1210.4
1/2	10.1	11.4	74.6	62.6	569.8	624.2
2/4	6.1	7.4	41.1	39.7	308.1	317.7
4/8	3.8	4.5	26.3	24.5	173.2	185.1

Тестування систем ПАРКС

Для тестування роботи системи був реалізований паралельний алгоритм множення матриць, описаний за допомогою керуючого простору [4]. Обчислення проводились на комп'ютерній мережі із застосуванням 4-х двоядерних процесорів (Intel Core2 Duo CPU 2.53GHz). Результати тестування систем ПАРКС-JAVA та ПАРКС-C# наведені в Таблиці 1. Час тестування заданий в с.

Висновки

В даній роботі було порівняно створені на факультеті кібернетики Київського національного університету системи для паралельних обчислень на комп'ютерній мережі ПАРКС-JAVA та ПАРКС-C#. Було проведено тестування систем на класичній задачі паралельного множення матриць. При виконанні обчислень на комп'ютерній мережі із застосуванням 4-х двоядерних процесорів було досягнуто покращення в часі більше ніж в 5 разів, для обох систем, що є досить непоганим результатом.

З результатів тестування видно, що системи ПАРКС-JAVA та ПАРКС-C# мають для тестової задачі множення матриць приблизно однакову ефективність розпаралелювання, але час виконання обчислень при збільшенні розмірності матриць для системи ПАРКС-JAVA зростає, що пов'язано з використанням пам'яті для JavaVM. Таким чином використання системи ПАРКС-C# може бути більш доцільним при застосуванні паралельних обчислень для задач з великими об'ємами даних.

Результати роботи можуть бути використаними при створенні різноманітних мережевих обчислювальних комплексів. Реалізація даної системи може застосовуватися для розв'язування широкого класу задач, що потребують паралельної обробки.

На цьому роботі над вдосконаленням систем не завершується. Планується робота над розробкою підсистеми диспетчеризації та захисту від збоїв.

Список використаних джерел

1. Глушков В.М., Анисимов А.В. Управляющие пространства в асинхронных параллельных вычислениях. // Кибернетика. – 1980. – №5. – С. 1-9.
2. Анисимов А.В., Кулябко П.П. Особенности ПАРУС-технологии. – 1993. – №3. – С.128-137.
3. Анисимов А.В., Деревянченко А.В. Система ПАРУС-JAVA для параллельных вычислений на компьютерных сетях // Кибернетика и системный анализ. – 2005. – №1. – С.25-36
4. Деревянченко О.В. Моделирование параллельных программ за допомогою системи ПАРКС-JAVA // Наукові записки НаУКМА, Комп'ютерні науки. – 2005. – С.47-58.
5. Рихтер Дж. CLR via C#. Программирование на платформе Microsoft .NET Framework 4.0 на языке C#. 3-е изд. // СПб.:Питер, 2012. –928 с.

References

1. GLUSHKOV V.M., ANISIMOV A.V. (1980), Controlling spaces in asynchronous parallel computations, Kibernetika #5, pp. 1-9.
2. ANISIMOV A.V., KULYABKO P.P. (1993), Features PARCS-technology, Cybernetics and Systems Analysis # 3, pp. 128-137.
3. ANISIMOV A.V., DEREVIANCHENKO A.V. (2005), The System PARCS-JAVA for Parallel Computations on Computer Networks, Cybernetics and Systems Analysis # 1, pp. 25-36.
4. DEREVIANCHENKO O.V. (2005) Simulation of parallel programs using the system PARCS-JAVA, Scientific notes Kyiv-Mohyla Academy, Computer Science, pp.47 -58.
5. RICHTER J. (2010), CLR via C#, Third Edition , Microsoft Press, 896 p.

Надійшла до редколегії 17.04.14

УДК 51-77+519.854

Донченко В.С.¹, д.ф.-м.н., проф.,
Тарасова О.В.², аспірант

**Псевдообернення у матричному методі
найменших квадратів: приклад
прогнозування медійних показників**

¹ Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 83000, м. Київ, пр-т.
Глушкова 4д,
e-mail: voldon@univ.kiev.ua

² Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 83000, м. Київ, пр-т.
Глушкова 4д,
e-mail: olga_ta@bigmir.net

V. S. Donchenko¹, Doctor of Sciences (Physics &
Mathematics), Full Professor,
O. V. Tarasova², Postgraduate Student.

**Pseudoinverse in matrixes least squares
method: example of media indicators'
prediction**

¹ Taras Shevchenko National University of Kyiv,
83000, Kyiv, Glushkova st., 4d,
e-mail: voldon@univ.kiev.ua

² Taras Shevchenko National University of Kyiv,
83000, Kyiv, Glushkova st., 4d,
e-mail: olga_ta@bigmir.net

У статті запропоновано матричний варіант методу найменших квадратів (МНК) на прикладі використання апарату псевдоінверсії для прогнозування медійних показників різного рівня дискретизації даних. Задачу прогнозування п'яти медійних показників реалізовано з використанням трьох моделей. Припущення про характер вхідних та вихідних даних для кожної з моделей пропонуються у двох модифікаціях. Запропоновано чотири-кроковий алгоритм прогнозування медійних показників з використанням матричного МНК, узагальнений для всіх трьох моделей з модифікаціями. Основна та модифікована моделі у кожному з трьох запропонованих у статті варіантів дозволяють моделювати різні типи зв'язку між вхідними та вихідними даними за умов однакового ступеню дискретизації даних. Отримані результати демонструють ефективність використання запропонованого підходу при розв'язанні задачі прогнозування в мультимедійній предметній області. Зокрема, такий підхід пропонується для розв'язання задач медіапланування та задач прогнозування структурних змін медійного ринку.

Ключові слова: псевдоінверсія Мура-Пенроуза, метод найменших квадратів, медійні показники, прогноз.

In article the matrixes least squares method (MLS) is proposed with example of pseudo inverse theory usage for prediction of media indexes with different level of data discretization. The problem of five media indicators prediction is realized with using of three models. The assumptions about the nature of input and output data for each of the models are offered in two versions. The four-stepper media performance prediction algorithm with using of least squares matrix method is proposed and generalized for all three models with their modifications. The basic and modified models in each of three versions that proposed in the paper allow modeling different types of connection between input and output data for the conditions of the same degree of data discretization. The obtained results in the article demonstrate the effectiveness of the proposed approach for solving the problem of prediction in multimedia subject area. In particular, this approach is proposed for solving the problems of media planning and the problems of prediction of structural changes in the media market.

Key Words: Moore-Penrose pseudo inverse, least squares method, media indicators, prediction.

Статтю представив д.т.н., с.н.с. Кудін В.І.

Вступ

Обсяги телевізійної аудиторії є ринковою «валютою». Уміння прогнозувати її динаміку із

певною дискретизацією у межах прийнятної точності дозволяє ефективніше медіапланувати, про що детальніше див. у роботі [1].

Прогностичне дослідження починається зі структурування досліджуваного об'єкту. Під об'єктом як структурою будемо розуміти його подання у вигляді сукупності складових та зв'язків між ними [2]. Прогноз поведінки об'єкту здійснюється через його математичне моделювання: передачі структури об'єкту засобами математичного структурування. Об'єкт як структура переданий математичними засобами і називається математичною моделлю.

Пропонована стаття присвячена математичній моделі для прогнозування поведінки телемедійних об'єктів з використанням структур евклідових просторів та псевдообернення за Муром-Пенроузом [2-4].

МНК для матричних спостережень

Базою розв'язання задачі прогнозу є показники характеристик телевізійної аудиторії в Україні. Вони зберігаються у спеціальних базах даних та мають вигляд таблиць з посекундною дискретизацією для відповідної доби [5]. Подобові дані можуть бути згруповані за тим чи іншим періодом у днях, наприклад, потижнево. У цьому випадку відповідні дані природним чином представляються матрицею. Оскільки телевізійне дивлення має природню тижневу циклічність, то матриця даних за тиждень є природними вихідними даними для аналізу та прогнозу для аналізу та прогнозу для показників телевізійної аудиторії. Таким чином задача використання матричних даних у задачах прогнозу телевізійної аудиторії є природньою і нагальною. У такій задачі прогноз, зокрема, на тиждень може розглядатися як функція від матриці даних, що описує поведінку телевізійної аудиторії за попередній тиждень. Це означає, що встановленню підлягає залежність між матрицею поведінки показників за попередній і наступний тиждень. Наявний математичний апарат дозволяє поставити і розглянути таку задачу за лінійного зв'язку між відповідними матричними об'єктами. Це означає, що визначенню підлягає матриця лінійного оператора, що зв'язує дві матриці, що характеризують поведінку телевізійної аудиторії для суміжних тижнів.

У статті [6-8] авторами детально розглядається питання конструктивних методів опису лінійних структур евклідових просторів двох типів: числових векторів R^n та матриці фіксованої розмірності $R^{m \times n}$. Наступне твердження цієї роботи є базою для розв'язання задач прогнозування в медіапросторі за тижневими показниками характеристик телевізійної аудиторії.

Теорема 1. Для того щоб матричне рівняння $AX = Y, A \in R^{m \times n}, X \in R^{n \times K}, Y \in R^{m \times K}$ мало корені необхідно і достатньо, щоб $\text{tr} Y^T Z(A^T) Y = 0$, де оператор $Z(A^T) = E_m - A^T A^+ A^T = E_m - AA^+$, A^+ - псевдообернення за Муром-Пенроузом (див., наприклад, [8]).

Множина Ω_Y всіх розв'язків за виконання згаданої умови, визначається таким співвідношенням:

$$\Omega_Y = \{X : X = A^+ Y + Z(A) V, V \in R^{n \times K}\} \quad (1)$$

У випадку невиконання необхідної та достатньої умови розв'язності та сама множина (1) визначає множину псевдорозв'язків.

Та сама теорема стає у пригоді і у випадку матричних спостережень $(x_i, y_i), i = \overline{1, N}$, де x_i, y_i – елемент $R^{p \times q}$, та необхідності встановлення за МНК матриці лінійного оператора A , що зв'язує дві компоненти спостережень.

Наслідок 1. За позначень і в умовах попередньої теореми, розв'язок матричного рівняння $AX = Y, A \in R^{m \times n}, X \in R^{n \times K}, Y \in R^{m \times K}$ відносно A має вигляд:

$$A = YX^+ + VZ(X^T), V \in R^{K \times n} \quad (2)$$

Теорема 2. Множина МНК – оцінок матриці A , що зв'язує матричні спостереження, отримана як розв'язок оптимізаційної задачі

$$\Omega_A = \text{Arg min}_{A \in R^{m \times n}} \|AX - Y\|_{tr}^2 \quad (3)$$

може бути записана у вигляді

$$\Omega_A = \{YX^+ + VZ(X^T), V \in R^{K \times n}\}$$

в якій матриці X та Y – це блочні матриці, складені, відповідно, із перших та других компонент матричних спостережень:

$$\begin{aligned} X &= (x_1 \dots x_n) \\ Y &= (y_1 \dots y_n) \\ X, Y &\in R^{p \times (qn)} \end{aligned}$$

Теорема 2 впливає безпосередньо з наслідку 1.

Зауваження. Матриця

$$\hat{A} = YX^+ \quad (4)$$

належить множині розв'язків задачі МНК оцінювання і є найменшим за слудовою нормою таким розв'язком. В подальшому саме ця матриця використовуватиметься як розв'язок задачі МНК оцінювання лінійної залежності між двома матричними об'єктами.

Прогнозування показників телевізійної аудиторії: вихідні дані

Для задач медіапланування використовують такі показники: рейтинг загального теледивлення

Таблиця 1

Дані спостережень п'яти телемедійних показників для двотижневих періодів 2013 року

Період	Тижні	Часовий інтервал	T	S	R	Ra	K
1	5-6	I_1	10,93	8,10	0,88	0,71	0,80
1	5-6	I_2	17,47	8,48	1,48	1,09	0,74
1	5-6	I_3	27,46	8,83	2,42	1,78	0,73
2	7-8	I_1	11,04	7,18	0,79	0,66	0,83
2	7-8	I_2	17,18	7,48	1,28	0,91	0,71
2	7-8	I_3	27,89	8,22	2,29	1,63	0,71
3	9-10	I_1	11,47	6,89	0,79	0,62	0,78
3	9-10	I_2	17,72	7,55	1,34	0,93	0,70
3	9-10	I_3	27,59	8,71	2,40	1,58	0,66
4	11-12	I_1	11,39	8,41	0,96	0,76	0,80
4	11-12	I_2	17,18	8,61	1,48	1,07	0,72
4	11-12	I_3	27,81	8,54	2,38	1,81	0,76
5	13-14	I_1	10,49	8,06	0,85	0,67	0,80
5	13-14	I_2	15,68	9,84	1,54	1,12	0,73
5	13-14	I_3	26,68	10,42	2,78	2,05	0,74
6	15-16	I_1	9,35	7,58	0,71	0,57	0,81
6	15-16	I_2	13,34	9,67	1,29	1,00	0,77
6	15-16	I_3	24,79	9,77	2,42	1,82	0,75
7	17-18	I_1	9,53	9,03	0,86	0,67	0,78
7	17-18	I_2	13,11	10,07	1,32	0,99	0,75
7	17-18	I_3	22,46	9,63	2,16	1,62	0,75
8	19-20	I_1	9,41	8,91	0,84	0,65	0,78
8	19-20	I_2	13,51	11,09	1,50	1,12	0,75
8	19-20	I_3	22,95	9,72	2,23	1,62	0,73
9	21-22	I_1	8,33	7,81	0,65	0,49	0,76
9	21-22	I_2	12,52	9,29	1,16	0,87	0,74
9	21-22	I_3	22,69	9,77	2,22	1,60	0,72
10	23-24	I_1	8,43	7,66	0,65	0,49	0,76
10	23-24	I_2	12,11	8,90	1,08	0,77	0,71
10	23-24	I_3	22,25	10,12	2,25	1,67	0,74
11	25-26	I_1	8,00	7,74	0,62	0,50	0,81
11	25-26	I_2	12,15	9,12	1,11	0,83	0,75
11	25-26	I_3	20,58	8,73	1,80	1,22	0,68
12	27-28	I_1	8,13	7,31	0,59	0,48	0,81
12	27-28	I_2	12,07	8,37	1,01	0,73	0,73
12	27-28	I_3	20,89	9,30	1,94	1,42	0,73
13	29-30	I_1	8,35	7,13	0,60	0,47	0,79
13	29-30	I_2	11,94	7,31	0,87	0,60	0,68
13	29-30	I_3	20,34	8,76	1,78	1,23	0,69

Спостереженнями вважаються пари
«попередній-наступний» тижневий чи

(T – показник, що характеризує загальний обсяг телевізійної аудиторії у певний період часу); частка аудиторії телеканалу (S – частка глядачів від загальної аудиторії телеглядачів, що дивляться певний канал у певному часовому інтервалі); рейтинг аудиторії телеканалу (R – показник телевізійної аудиторії телеканалу, що враховує кількість телеглядачів та тривалість їх телеперегляду); рейтинг реклами телеканалу (Ra – показник телеаудиторії реклами певного каналу, що враховує тривалість індивідуального перегляду глядачів); коефіцієнт усадки рекламних блоків (K – показник, що характеризує відносне зменшення аудиторії на рекламних блоках по відношенню до загальної аудиторії каналу).

Ці показники є первинними в аналізі, і, як зазначалося вище, є доступними у добовому варіанті з посекундною дискретизацією з 2003 року. У задачі прогнозу, що розглядалася нижче, подібні показники «інтегруються» за часом за подібними даними та за часовими інтервалами в межах доби. Це означає, що відповідні показники всередині доби представлені тривимірним вектором за трьома часовими інтервалами, а спостереженнями є сумарні значення цих показників (тривимірних векторів) за тижневий чи двотижневий період.

Нижче розглядається задача прогнозування показників на тижневий та двотижневий період з використанням ретроспективних даних на основі вище згаданих даних 2013 року, починаючи з 5 тижня, які попередньо «інтегруються» за часовими інтервалами. Для прогнозування використаємо апарат псевдоінверсії та методу найменших квадратів. Згадане інтегрування здійснюється з додатковим усереднення всередині часових інтервалів та за двотижневими «інтегрованими» показниками.

Загалом інтегрування за днями здійснюється за двотижневими інтервалами (модель 1 нижче) та однотижневими інтервалами (моделі 2 та 3 нижче). Таке «інтегрування» п'яти медійних показників T , S , R , Ra та K в середині доби здійснюється за часовими інтервалами: $I_1 = [7:00 - 13:00]$, $I_2 = [13:00 - 19:00]$, $I_3 = [19:00 - 25:00]$. Загалом інтегрування за днями здійснюється за двотижневими інтервалами (модель 1 нижче) та однотижневими інтервалами (моделі 2 та 3 нижче). Для прикладу в таблиці 1 наведені «інтегровані» вихідні дані для першої моделі. Зважаючи на громіздкість дані для другої та третьої моделі не наводяться.

«попередній-наступний» двотижневий інтервал. Природним чином компоненти спостережень представляють собою матриці, що відповідають стовпчикам T , S , R , Ra , K та рядкам, що відповідають одному і тому самому періоду: мають один і той самий номер стовпчику періоду.

Використання МНК для матричних спостережень в прогнозі медійних показників

Перераховані вище показники представлені в таблиці 1 з тими самими позначеннями для «інтегрованих» характеристик, що і для вихідних (з посекундною та подобовою реєстрацією). Задача прогнозу в описаних вище термінах здійснювалася в рамках трьох моделей прогнозування п'ять медійних показників для двотижневого періоду у трьох часових інтервалах. У моделі 1 прогнозування здійснювалося за ретроспективними даними двотижневих періодів у трьох часових інтервалах. У моделі 2 – за потижневими даними у трьох часових інтервалах. У моделі 3 для прогнозування використано потижневі дані, що дискретизовані до поденних погодинних інтервалів. Припущення про характер вхідних та вихідних даних для кожної з моделей використовується в двох модифікаціях.

Загальний алгоритм

Крок 1. Побудова спостережень. Спостереженнями (x_i, y_i) є пара матриць значень основних характеристик, що відповідають сусіднім періодам: (1,2), (2,3), (3,4), ..., (11,12).

Крок 2. Побудова блочних матриць X, Y з, відповідно, перших та других компонент матричних спостережень

Крок 3. Обчислення матриці $\hat{A}$ за формулою (4).

Крок 4. Підрахунок прогнозу $\hat{y}$ за формулою $\hat{y} = \hat{A}x$. У досліджуваному випадку аргумент прогнозу відповідає матриці дванадцятого періоду. Це означає, що прогноз здійснюється для тринадцятого періоду. Такий вибір спостережень та прогнозного періоду визначається можливістю порівняння прогнозу та наявного істинного значення. Оцінка якості прогнозу здійснюється за критерієм точності

$$APE = \left| \frac{y - \hat{y}}{y} \right|.$$

Зауваження. Кроки 1-4 є характерними для всіх трьох моделей.

Модель 1.1 Прогнозування п'яти медіа показників для двотижневого періоду в трьох

часових інтервалах за історичними даними п'ятьох показників двотижневого періоду в трьох часових інтервалах.

Застосуємо вище наведений алгоритм до двотижневих даних спостережень. матриця оцінки параметрів моделі матиме розмірність 3×3 :

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} 0.93 & 0.06 & -0.02 \\ 0.34 & 0.64 & 0.06 \\ -0.20 & 0.34 & 0.85 \end{bmatrix}$$

А отже матриця прогнозу $\hat{y} = \hat{A}x$ матиме вигляд:

$$\hat{y} = \begin{bmatrix} 7.93 & 7.16 & 0.58 & 0.47 & 0.79 \\ 11.72 & 8.38 & 0.96 & 0.72 & 0.78 \\ 20.25 & 9.31 & 1.88 & 1.36 & 0.71 \end{bmatrix}$$

Середню точність та дисперсію похибки для п'ятьох прогнозованих показників за Моделлю 1.1 наведено у таблиці 2.

Таблиця 2

Середня точність та дисперсія похибки п'яти телемедійних показників за Моделлю 1.1.

	T	S	R	Ra	K
APE	2,43%	7,10%	6,10%	10,45%	5,81%
D	0,06%	0,51%	0,15%	0,98%	0,59%

Модель 1.2 Є модифікацією Моделі 1: аналогічно прогнозуються п'ять медіапоказників для двотижневого періоду в трьох часових інтервалах за історичними даними п'ятьох показників двотижневого періоду у трьох часових інтервалах. Відмінність у встановленні зв'язків між даними: матриці вхідних та вихідних даних формуються з транспонованих матриць даних спостережень. Матриця оцінки параметрів моделі, що розраховується на третьому кроці, матиме розмірність 5×5 .

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} 1.11 & -0.08 & 1.55 & -4.21 & 0.85 \\ 0.30 & 1.06 & -4.57 & 2.18 & -1.51 \\ 0.10 & 0.06 & -0.62 & 0.74 & -0.87 \\ 0.04 & -0.00 & 0.24 & 0.06 & -0.02 \\ -0.01 & -0.02 & 0.65 & -0.70 & 1.26 \end{bmatrix}$$

Таблиця 3

Середня точність та дисперсія похибки п'яти телемедійних показників за Моделлю 1.2

	T	S	R	Ra	K
APE	25,3%	27,4%	44,4%	48,2%	16,2%
D	7,0%	18,3%	29,4%	30,7%	3,0%

Після застосування алгоритму до даних моделі 1.2 отримаємо середню точність прогнозу та дисперсію похибки для п'яти показників, як наведено у таблиці 3.

Модель 2.1. Прогнозування п'яти медійних показників у трьох часових інтервалах відбувається на основі потижневих даних. Це означає, що дані спостережень дискретизовані до тижневих. Через громіздкість даних повна таблиця не наводиться. Матриці вхідних і вихідних даних також дискретизовані до тижневих. Отримані потижневі матриці прогнозних значень «інтегруються» для порівняння з фактичними даними двотижневого періоду та розрахунку точності прогнозу.

Для моделі 2.1 матриця оцінки параметрів моделі $\hat{A}$ має розмірність 3×3 .

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} 0.68 & 0.47 & -0.17 \\ 0.02 & 1.17 & -0.15 \\ -0.29 & 0.58 & 0.73 \end{bmatrix}$$

У таблиці 4 наведемо середню похибку прогнозу та дисперсію похибки.

Таблиця 4
Середня точність та дисперсія похибки п'яти телемедійних показників за Моделлю 2.1

	T	S	R	Ra	K
APE	5,50%	9,81%	5,40%	9,26%	6,25%
D	0,12%	0,58%	0,08%	0,02%	0,19%

Модель 2.2 Це модифікація моделі 2.1: п'ять медійних показників прогноуються потижнево для трьох часових інтервалів, отримані дані «інтегруються» у двотижневий період. Відповідні матриці вхідних та вихідних даних, на відміну від моделі 2.1, є транспонованими матрицями даних спостережень.

Розмірність матриці оцінки параметрів моделі $\hat{A}$ 5×5 .

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} 1.08 & -0.08 & 2.75 & -5.39 & 1.17 \\ 0.31 & 0.98 & -3.63 & 0.86 & -0.58 \\ 0.11 & 0.06 & -0.46 & 0.42 & -0.85 \\ 0.06 & 0.02 & -0.06 & 0.13 & -0.30 \\ -0.00 & -0.01 & 0.48 & -0.61 & 1.10 \end{bmatrix}$$

Таблиця 5
Середня точність та дисперсія похибки п'яти телемедійних показників за Моделлю 2.2

	T	S	R	Ra	K
APE	1,19%	7,87%	9,77%	13,74%	5,67%
D	0,02%	0,36%	0,47%	1,98%	0,08%

Модель 3.3 П'ять медіа показників прогноуються потижнево на основі ретроспективних потижневих даних, що відповідають даним Таблиці 1. Особливість моделі у дискретизації часових інтервалів даних спостережень до поденних погодинних відтинків для кожного з тижнів. Матриця оцінки параметрів $\hat{A}$ має розмірність 133×133 . Через великий розмір матриця оцінки параметрів у статті не наводиться. Дані матриці потижневих прогнозів з поденною погодинною дискретизацією «інтегруються» до трьох вище описаних інтервалів двотижневого періоду. Оцінку точності отриманого прогнозу наведено у Таблиці 6.

Таблиця 6
Середня точність та дисперсія похибки п'яти телемедійних показників за Моделлю 3.1

	T	S	R	Ra	K
APE	33,16%	182,60%	115,36%	162,74%	34,32%
D	7,72%	45,44%	18,54%	44,17%	3,57%

Модель 3.2. Це модифікація моделі 3.1. Відповідні матриці вхідних та вихідних даних, що мають поденну погодинну дискретизацію для кожного з тижнів періоду, є транспонованими.

Матриця оцінки параметрів $\hat{A}$ має розмірність 5×5 .

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} 0.95 & -0.02 & 0.78 & -1.11 & 0.88 \\ 0.17 & 0.56 & 0.66 & -2.76 & 4.04 \\ 0.06 & -0.00 & 0.33 & -0.04 & -0.01 \\ 0.04 & -0.01 & 0.24 & 0.04 & 0.10 \\ 0.01 & 0.03 & 0.12 & -0.34 & 0.70 \end{bmatrix}$$

Тижневі дані поденних погодинних відтинків «інтегруються» до трьох інтервалів двотижневого періоду. Оцінку точності прогнозу для моделі 3.2 наведено у Таблиці 7.

Таблиця 7
Середня точність та дисперсія похибки п'яти телемедійних показників за Моделлю 3.2

	T	S	R	Ra	K
APE	1,06%	9,15%	9,90%	15,10%	6,65%
D	0,01%	0,28%	0,42%	1,14%	0,03%

Результати.

Порівняємо отримані прогнози за всіма побудованими моделями для кожного з п'яти показників окремо. Критерій оптимальності прогнозу – мінімальна точність за критерієм точності APE та мінімальна дисперсія похибки. Рейтинг загального теледивлення (Т).

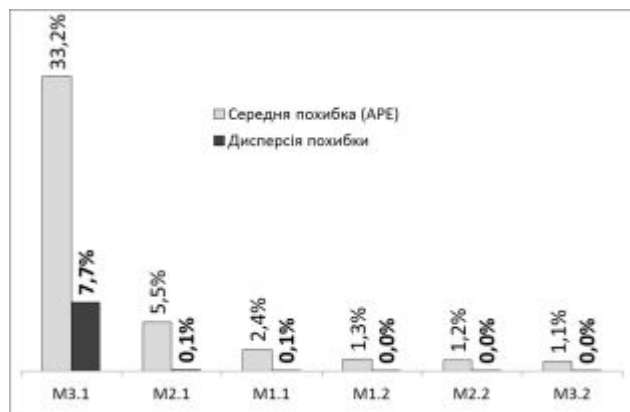


Рис. 1 Порівняння середньої точності моделей та дисперсії похибки для рейтингу загального теледивлення

Результати прогнозування показника для шістьох моделей наведено на Рис. 1. Оптимальна середня точність прогнозування медійних показників задається 10%-порогом. Як бачимо, найкращу точність має модель 3.2. Ця ж модель дає і найменшу дисперсію похибки. За винятком Моделі 3.1, решта надають прийнятний прогноз для показника загального теледивлення T .

Частка телеканалу (S).

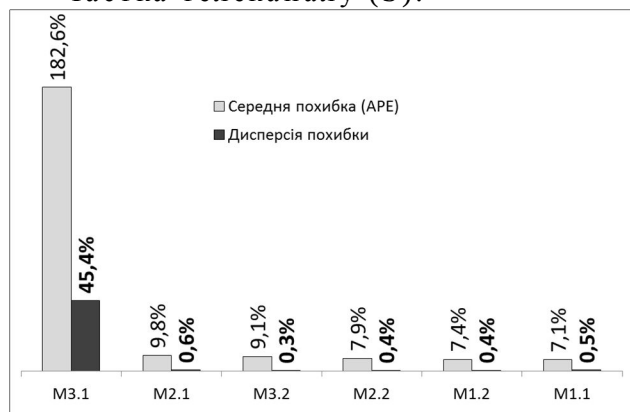


Рис. 2 Порівняння середньої точності моделей та дисперсії похибки для частки каналу

Результати прогнозування показника для шістьох моделей наведено на Рис. 2. Всі шість моделей мають середню точність понад 10%. Модель 1.1 дозволяє прогнозувати частку каналу з мінімальною точністю в 7,1% та найнижчою дисперсією похибки 0,5%.

Рейтинг телеканалу (R). П'ять моделей мають середню точність нижче 10%. Модель 2.1 дозволяє прогнозувати рейтинг каналу з мінімальною точністю у 5,4%.

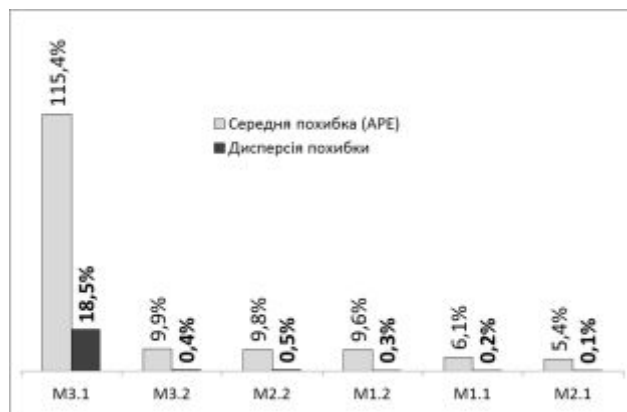


Рис. 3 Порівняння середньої точності моделей та дисперсії похибки для рейтингу каналу

Рейтинг реклами телеканалу (R_a). Значення критеріїв оцінки прогнозних моделей наведено на Рис. 4.

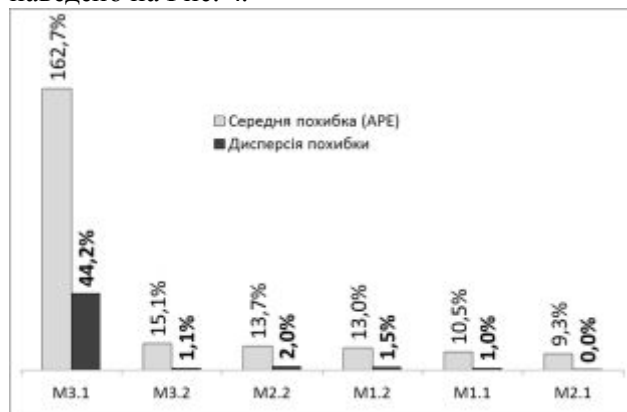


Рис. 4 Порівняння середньої точності моделей та дисперсії похибки для рейтингу реклами каналу

Для показника рейтинг реклами середня точність п'яти моделей випадає з 10%-інтервалу. Лише Модель 2.1 дозволяє прогнозувати рейтинг реклами каналу з прийнятною точністю у 9,3%.

Коефіцієнт усадки рекламних блоків (K).

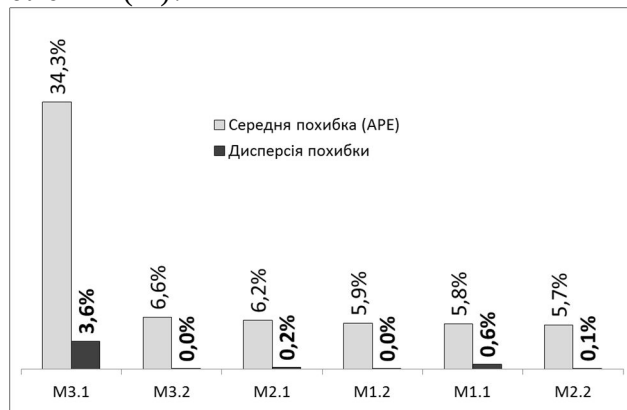


Рис. 5 Порівняння середньої точності моделей та дисперсії похибки для коефіцієнту усадки рекламних блоків.

Як показано на Рис. 5, одразу три моделі дозволяють отримати середню точність у 10%-інтервалі. Для коефіцієнту усадки рекламних блоків Модель 3.1 дозволяє прогнозувати коефіцієнт усадки рекламних блоків з мінімальною точністю у 4,5%.

Висновки

У статті розглянуто задачу прогнозу медійних показників аудиторії. Запропоновано та реалізовано розв'язання задачі на основі матричних спостережень за методом найменших квадратів. Можливість реалізації МНК для

матричних спостережень визначається застосуванням апарату псевдообернення за Муром-Пенроузом. Задача прогнозу реалізована в рамках трьох моделей прогнозування зі слухними модифікаціями. Якість оцінювання здійснюється за підрахунком характеристики АРЕ в кожній з моделей прогнозу. Відповідні підрахунки продемонстрували ефективність запропонованого підходу до розв'язання задачі прогнозування в мультимедійній предметній області.

Список використаних джерел

1. Тарасова О.В. Про моделювання телемедійних показників/ О.В.Тарасова// Вісник ДУІКТ. – 2012. – Т.10, №1. – С. 120-127.
2. Moore E.H. On the reciprocal of the general algebraic matrix // Bulletin of the American Mathematical Society. – 1920. – N 26. – P. 394 -395.
3. Penrose R. A generalized inverse for matrices // Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. – 1955. – N 51. – P. 406-413.
4. Кириченко Н.Ф. Аналитическое представление возмущений вседообратных матриц/ Н.Ф. Кириченко // Кибернетика и системный анализ. – К. – 1997. – №2 – С. 98-107.
5. Official site GfK Ukraine Media [Electronic resource] – Daily doctypy: <http://www.gfk.ua>. – The name from the screen. (31.12.2013)
6. Кириченко Н.Ф. Линейные структуры в прикладных задачах и конструктивные методы их описания/ Н.Ф. Кириченко, В.С. Донченко// International Book Series "Information Science and Computing". – Kyiv. – 2009. – P. 69-78.
7. Донченко В.С. Неопределённость и математические структуры в прикладных исследованиях/Human aspects of Artificial Intelligence International Book Series Information science & Computing.– Number 12. – Supplement to International Journal "Information technologies and Knowledge". –Volume 3.–2009.– P. 9-18.
8. Donchenko V.S., Nazaraga I.M., Tarasova O.V. Vectors and matrixes least square method: foundation and application examples // International Journal "Information Theories & Applications". – 2013. – Vol.20, N 4. – P. 311-322.

References

1. TARASOVA, O. (2012) About TV-rating modelling. *Visnyk DUKT*. 10(1). p.120-127.
2. MOORE, E. (1920) On the reciprocal of the general algebraic matrix. *Bulletin of the American Mathematical Society*. 26. p.394-395.
3. PENROSE, R. A generalized inverse for matrices. *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*. 51. p.406-413.
4. KIRICHENKO, N. Analiticheskoe predstavlenije vozmuschenij psevdoobratnyih matritys. *Kibernetika i sistemnyi analiz*. 2. p.98-107.
5. Official site GfK Ukraine Media [Electronic resource] (2013) Media & entertainment market research at GfK. <http://www.gfk.ua>. st m. [31th Desember 2013].
6. KIRICHENKO, N. AND DONCHENKO, V. (2009) Linejnyije strukturyi v prikladnyih zadachah I konstruktivnyije metodyi ih opisanija. *International Book Series "Information Science and Computing"*. p.69-78.
7. DONCHENKO, V. (2009) Neopredelennost i matematicheskije strukturyi v prikladnyih issledovanijah. *Human aspects of Artificial Intelligence International Book Series Information science & Computing*. *Human aspects of Artificial Intelligence International Book Series Information science & Computing*. 12(3). p.9-18.
8. DONCHENKO, V., NAZARAGA, I. and TARASOVA, O. (2013) Vectors and matrixes least square method: foundation and application examples. *International Journal "Information Theories & Applications"*. 20(4). p.311-322.

Надійшла до редколегії 15.04.14

УДК 519.925.51

Жмихова Т.В., к.ф.-м.н.

Інвестиційна стратегія управління капіталом страхової компанії на фінансовому (B,S) – ринку.

Донбаська національна академія будівництва та архітектури, 86123, Донецька область, м. Макіївка, вул.Державіна, 2,
e-mail: zhmykhovatanya@mail.ru

T. V. Zhmykhova, Ph.D. (Physics & Mathematics).

Investment management strategy of insurance company capital on financial (B,S)- market.

Donbas National Academy of Civil Engineering and Architecture, 86123, Ukraine, Donetsk region, Makeyevka, Derzhavin str., 2,
e-mail: zhmykhovatanya@mail.ru

В даній статті узагальнюються результати статті [1], де досліджена модель страхової компанії, що працює на (B, S) - ринку, ціна ризикового активу побудована на основі стрибкоподібного процесу Орнштейна-Уленбека, стрибки якого описуються випадковими величинами з нормальним розподілом на випадок, коли сумарні премії, що отримує страхова компанія, є також випадковими та описуються складним процесом Пуассона. Знайдено оптимальний портфель, що забезпечує найкращу оцінку знизу для ймовірності банкрутства страхової компанії.

Ключові слова: страхова компанія, (B, S) - ринок, оптимальний портфель.

The Cramer-Lundberg model with stochastic premiums which is natural generalization of classical dynamic risk model is considered, an assumption was made that the premiums are also random variable and described by compound Poisson process. Insurance company invests on the (B, S) - market, which consists of risk and riskless asset: the risk asset price was built on the basis of the Ornstein-Uhlenbeck's transition process whose jumps are described by normally distributed random variables and riskless asset is bank account with fixed rate of interest, moreover the part of the capital insurance company invested in risk asset, respectively, the part of capital that remain the company places on bank account. We assume that insurance company works only with its own capital, funds from outside is not considered. The optimal portfolio that provides the best lower bound for the probability non-ruin of the insurance company was found.

Key words: insurance company, (B, S) -market, optimal portfolio

Статтю представив д.ф.-м.н., професор Наконечний О. Г.

Постановка задачі. Нехай задано фінансовий (B, S) - ринок, що складається з безризикового B та ризикового S активів. Ціна безризикового активу (банківського рахунку) описується рівнянням:

$$dB(t) = rB(t)dt, B(0) > 0, \quad (1)$$

де r ($r > 0$) - відсоткова ставка банку, $B(0)$ - сума на депозиті в початковий момент часу. Ціна ризикового активу (акції) описується моделлю, запропонованою в [1], а саме:

$$S_N(t) = S(0) \exp \left\{ \int_0^t \left(\mu - \lambda [\sqrt{e} - 1] - \gamma \xi_N(s) \right) ds + \int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha \tilde{v}(d\alpha, ds) \right\}, \quad (2)$$

тут $\xi_N(t)$ - урізаний процес $\xi(t)$ за рівнями $-N, N$, що має вигляд:

$$\xi(t) = e^{-\gamma t} \int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha e^{\gamma s} \tilde{v}(d\alpha, ds), \quad (3)$$

$$\tilde{v}(d\alpha, ds) = v(d\alpha, ds) - \lambda \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\alpha^2/2} d\alpha ds,$$

де $v(d\alpha, ds)$ - міра Пуассона з параметром $\lambda / \sqrt{2\pi} e^{-\alpha^2/2} d\alpha ds$.

Нехай на момент часу t капітал страхової компанії (СК) складатиме $X_x^N(t)$ ($X(0) = x$). Будемо вважати, що сумарні премії, що надходять до СК за час $[t; t + \Delta t]$ описуються величиною $\sum_{i=N_1(t)+1}^{N_1(t+\Delta t)} \rho_i$, де $N_1(t)$ - процес Пуассона з параметром λ_1 ($\lambda_1 > 0$), ($MN_1(t) = \lambda_1 t, N_1(0) = 0$), ρ_i - незалежні від $N_1(t)$, невід'ємні однаково

розподілені випадкові величини, що інтерпретуються, як величини, що надходять до СК такі, що $P\{\rho_i < z\} = F_1(z)$, а сумарні виплати

за час $[t; t + \Delta t]$ описуються величиною $\sum_{i=N_2(t)+1}^{N_2(t+\Delta t)} \eta_i$,

де $N_2(t)$ - процес Пуассона з параметром $\lambda_2 (\lambda_2 > 0)$, $(MN_2(t) = \lambda_2 t, N_2(0) = 0)$, η_i - незалежні від $N_2(t)$, невід'ємні однаково розподілені випадкові величини, що інтерпретуються як величини позовів, що надходять до СК такі, що $P\{\eta_i < v\} = F_2(v)$.

Нехай СК обирає для себе інвестиційну стратегію, що полягає в інвестуванні на фінансовий (B, S) - ринок, ціни якого описуються рівняннями (1) - (2), причому $uX_x^N(t)$, $0 < u < 1$ частина капіталу, що інвестується в акції, відповідно $(1-u)X_x^N(t)$ - частина капіталу, що компанія розміщує на банківському депозиті. Вважатимемо, що СК працює тільки з власним капіталом, надходження коштів ззовні не розглядається.

Враховуючи прибуток за рахунок інвестиційної діяльності, а також подання складного процесу Пуассона у вигляді стохастичного інтегралу за мірою Пуассона [2], а саме:

$$\sum_{i=0}^{N_1(t)} \rho_i = \int_0^t \int_{B_1} \delta v_1(d\delta, ds), \quad \sum_{i=0}^{N_2(t)} \eta_i = \int_0^t \int_{B_2} \delta v_2(d\delta, ds),$$

отримуємо балансове рівняння, що описує еволюцію капіталу СК:

$$\begin{aligned} dX_x^N(t) &= X_x^N(t)(u\mu + (1-u)r - u\gamma\xi_N(t) + \\ &+ u \int_{-\infty}^{+\infty} (e^\alpha - 1) \frac{\lambda}{\sqrt{2\pi}} e^{-\alpha^2/2} d\alpha) dt + \\ &+ uX_x^N(t) \int_{-\infty}^{+\infty} (e^\alpha - 1) \nu(d\alpha, dt) + \int_0^{+\infty} \delta v_1(d\delta, dt) - \\ &- \int_0^{+\infty} \delta v_2(d\delta, dt). \end{aligned} \quad (4)$$

Задача полягає в знаходженні такого управління $u(0 < u < 1)$, щоб ймовірність банкрутства СК за нескінченний час була оцінена величиною, що прямує до нуля при прямуванні початкового капіталу $x = X(0)$ до нескінченності і ця оцінка має бути найменшою за u .

Основний результат. Будемо шукати розв'язок рівняння (4), аналогічно пошуку розв'язку в [1]. Нехай

$$\theta_t = \xi_t^0(N) X_x^N(t), \quad (5)$$

де

$$\begin{aligned} d\xi_t^0(N) &= \xi_t^0(N) \left[-(u\mu + (1-u)r - u\gamma\xi_N(t) - \right. \\ &- u\lambda(\sqrt{e} - 1) - \int_{-\infty}^{+\infty} (e^\alpha - 1) \frac{\lambda}{\sqrt{2\pi}} e^{-\alpha^2/2} d\alpha Y(\alpha, t)) dt - \\ &- \left. \int_{-\infty}^{+\infty} Y(\alpha, t) \nu(du, dt) \right], \quad \xi_0^0 = 1, \end{aligned} \quad (6)$$

тут $Y(\alpha, t)$ буде відповідним чином підібрана. Скориставшись формулою диференціювання добутку з [3], отримаємо

$$d\theta_t = \xi_t^0(N) \left[\int_{B_1} \delta v_1(d\delta, dt) - \int_{B_2} \delta v_2(d\delta, dt) \right],$$

якщо $Y(\alpha, t) = u[e^\alpha - 1] / [1 + u[e^\alpha - 1]]$.

Підставивши $Y(\alpha, t)$ в (6), отримаємо

$$\begin{aligned} d\xi_t^0(N) &= -\xi_t^0(N) \left[u\mu + (1-u)r - u\lambda(\sqrt{e} - 1) - \right. \\ &- u\gamma\xi_N(t) + \int_{-\infty}^{+\infty} (e^\alpha - 1) \frac{\lambda}{\sqrt{2\pi}} e^{-\alpha^2/2} d\alpha \Big] dt - \\ &- \xi_t^0(N) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u[e^\alpha - 1]}{1 + u[e^\alpha - 1]} \nu(d\alpha, dt), \quad \xi_0^0(N) = 1, \end{aligned} \quad (7)$$

$$d\theta_t = \xi_t^0(N) \left[\int_{B_1} \delta v_1(d\delta, dt) - \int_{B_2} \delta v_2(d\delta, dt) \right]. \quad (8)$$

Таким чином,

$$\begin{aligned} X_x^N(t) &= \frac{\theta_t}{\xi_t^0(N)} = [\xi_t^0(N)]^{-1} \times \\ &\times \left[x + \int_0^t \xi_s^0(N) \left(\int_{B_1} \delta v_1(d\delta, dt) - \int_{B_2} \delta v_2(d\delta, dt) \right) \right] \end{aligned} \quad (9)$$

Оскільки

$$\mathbf{M}v_1(B_1, t) = \lambda_1 t \int_B dF_1(z), \quad \mathbf{M}v_2(B_2, t) = \lambda_2 t \int_{B_2} dF_2(v),$$

то, впроваджуючи центровану мартингальну міру

$$\begin{aligned} \tilde{v}_1(B_1, t) &= v_1(B_1, t) - \mathbf{M}v_1(B_1, t), \\ \tilde{v}_2(B_2, t) &= v_2(B_2, t) - \mathbf{M}v_2(B_2, t), \end{aligned}$$

(9) набуде вигляду:

$$X_x^N(t) = [\xi_t^0(N)]^{-1} \left[x + \int_0^t \xi_s^0(N) ((\lambda_1 a - \lambda_2 b) ds + \right.$$

$$\left. + \int_{B_1} \delta \tilde{v}_1(d\delta, ds) - \int_{B_2} \delta \tilde{v}_2(d\delta, ds) \right) \quad (10)$$

$$\text{де } a = \int_{B_1} \delta F_1(d\delta), b = \int_{B_2} \delta F_2(d\delta).$$

$$\text{Нехай } X_x^N(t) = \int_{-\infty}^{t+\infty} \delta \xi_s^0(N) \tilde{v}(d\delta, ds), \quad \text{де}$$

$$\tilde{v}(C, t) = v(C, t) - (\lambda_1 + \lambda_2)t \int_C dF(y), \quad v(C, t) - \text{міра}$$

Пуассона з середнім $(\lambda_1 + \lambda_2)t \int_C dF(y)$, процес

$\xi_t^0(N)$ визначається з (7).

Теорема 1. [4], [5]. Нехай $\mu > r > 0$, якщо для будь-якого цілого $m > 0$, $\int x^{2m} dF(x) < +\infty$, то має місце нерівність

$$\sup_{0 \leq \tau < +\infty} M \left| \int_0^\tau \xi_s^0(N) \delta v(d\delta, ds) \right|^{2m} \leq \quad (11)$$

$$p^{2m} \left(\frac{(\lambda_1 + \lambda_2) C_{2m}^2}{2d_m} \right)^m \left[1 + \sqrt{\frac{2d_m}{(\lambda_1 + \lambda_2) C_{2m}^2}} \right]^{2m(m-1)},$$

тут

$$p = \left[\int x^{2m} dF(x) \right]^{1/2m},$$

$$M[\xi_t^0(N)]^{2m} \leq \exp\{-2md_m t\},$$

$$d_m = \max_{0 < u < 1} \left([u\mu + (1-u)r] - \frac{\lambda}{2m} + \frac{\lambda}{t2m} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_e^1 \frac{e^{-2mu\alpha(1+s)}}{\gamma s} ds \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\alpha^2}{2}} \frac{d\alpha}{(1+u[e^\alpha - 1])^{2m}} d\alpha \right).$$

Далі, нехай $0 < u^* \leq 1$ доставляє максимум функції $\varphi(u)$, де

$$\varphi(u) = \left([u\mu + (1-u)r] - \frac{\lambda}{2m} + \frac{\lambda}{t2m} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{e^{-\gamma t}}^1 \frac{e^{-2mu\alpha(1+s)}}{\gamma s} ds \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\alpha^2}{2}} \frac{d\alpha}{(1+u[e^\alpha - 1])^{2m}} d\alpha \right), \quad (12)$$

тобто $\max_{0 < u \leq 1} \varphi(u) = \varphi(u^*)$, та при $a\lambda_1 \geq b\lambda_2$ в силу додатності процесу $\xi_t^0(N)$, скориставшись нерівністю (11), матимемо:

$$P \left\{ \inf_{0 \leq t \leq T} X_x^N(t) \leq 0 \right\} \leq \frac{p^{2m} \left(\frac{(\lambda_1 + \lambda_2) C_{2m}^2}{2d_m} \right)^m \left[1 + \sqrt{\frac{2d_m}{(\lambda_1 + \lambda_2) C_{2m}^2}} \right]^{2m(m-1)}}{x^{2m}}. \quad (13)$$

В силу того, що має місце вкладення

$$\left\{ \inf_{0 \leq t \leq \alpha} X_x^N(t) \leq 0 \right\} \subseteq \left\{ \inf_{0 \leq t \leq \beta} X_x^N(t) \leq 0 \right\}, \quad \alpha \leq \beta.$$

маємо послідовність множин, що поширюються. Тоді

$$\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} P \left\{ \inf_{0 \leq t \leq \alpha} X_x^N(t) \leq 0 \right\} = P \left\{ \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \left\{ \inf_{0 \leq t \leq \alpha} X_x^N(t) \leq 0 \right\} \right\} = P \left\{ \inf_{0 \leq t < +\infty} X_x^N(t) \leq 0 \right\}.$$

Переходячи до границі при $T \rightarrow +\infty$, з (13) матимемо:

$$P \left\{ \inf_{0 \leq t < +\infty} X(t) \leq 0 \right\} \leq \frac{p^{2m} \left(\frac{(\lambda_1 + \lambda_2) C_{2m}^2}{2d_m} \right)^m \left[1 + \sqrt{\frac{2d_m}{(\lambda_1 + \lambda_2) C_{2m}^2}} \right]^{2m(m-1)}}{x^{2m}}. \quad (14)$$

Отриманий результат сформулюємо у вигляді теореми.

Теорема 2. Нехай x - капітал СК в початковий момент часу, що функціонує на (B, S) -ринку, ціни активів на якому описуються рівняннями (1) та (2). Нехай $0 < r < \mu$, r - діюча відсоткова ставка, сумарні премії до СК описуються складним процесом Пуассона, причому $\lambda_1 > 0$ - інтенсивність стандартного процесу Пуассона $N_1(t)$, що описує кількість премій, що надійшли до СК за час $[0, t]$, $0 < \rho_k$ - незалежні між собою та від $N_1(t)$, однаково розподілені величини премій, що мають скінчені моменти $M\rho_k = a$ та $F_1(x) = P\{\rho_k < x\}$; сумарні позови до СК описуються складним процесом Пуассона, причому $\lambda_2 > 0$ - інтенсивність стандартного процесу Пуассона $N_2(t)$, що описує кількість позовів, що надійшли до СК за час $[0, t]$, $0 < \eta_k$ - незалежні між собою та від $N_2(t)$, однаково розподілені величини позовів, що мають скінчені

моменти $M\eta_k = b$ та $F_2(x) = P\{\eta_k < x\}$, тоді якщо:

1) $0 < u^* < 1$, то $u^* 100\%$ коштів інвестується в акції, а залишок на банківський рахунок та для ймовірності банкрутства СК справедлива оцінка

$$P\left\{\inf_{0 \leq t < +\infty} X_x^N(t) \leq 0\right\} \leq \frac{p^{2m} \left(\frac{(\lambda_1 + \lambda_2)C_{2m}^2}{2d_m}\right)^m \left[1 + \sqrt{\frac{2d_m}{(\lambda_1 + \lambda_2)C_{2m}^2}}\right]^{2m(m-1)}}{x^{2m}}, \quad (15)$$

де

$$d_m = \max_{0 < u < 1} \left(\left[u\mu + (1-u)r \right] - \frac{\lambda}{2m} + \frac{\lambda}{t2m} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_e^1 \frac{e^{-2mu\alpha(1+s)}}{\gamma s} ds \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\alpha^2}{2}} \frac{d\alpha}{\left(1 + u[e^\alpha - 1]\right)^{2m}} \right)$$

2) якщо $u^* = 1$, то 100% коштів інвестують в акції, для ймовірності СК справедлива оцінка

(15), але $0 < u^* \leq 1$ доставляє максимум функції $\varphi(u)$, тобто $\varphi(u^*) = \max_{0 < u \leq 1} \varphi(u)$, де $\varphi(u)$ визначається в (12).

Висновок. Знайдено оптимальний розподіл вкладів між ризиковими та безризиковими активами, що забезпечать найкращу оцінку знизу для ймовірності банкрутства СК серед запропонованого класу оцінок для узагальненої моделі Крамера-Лундберга, що описує еволюцію капіталу СК, причому вважалось, що СК працює на фінансовому ринку, ціна ризикового активу була побудована на основі стрибкоподібного процесу Орнштейна-Уленбека, стрибки якого описуються випадковими величинами з нормальним розподілом.

Список використаних джерел

1. Баев А.В. Об управлении капиталом одной страховой компании, работающей на (B, S) - рынке. / Б.В.Бондарев, А.В. Баев, Т.В. Жмыхова, И.Л. Шурко // Прикладна статистика. Актуарна та фінансова математика. - 2013. - №1-2. - С. 11-26.
2. Бондарев Б.В. Математические модели в страховании/ Бондарев Б.В. - Донецк.: АПЕКС, 2002.- 116 с.
3. Анулова С.В. Стохастическое исчисление. / С.В. Анулова, А.Ю. Веретенников, Н.В. Крилов, Р.Ш. Липцер, А.Н. Ширяев // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики.- М.:ВИНИТИ.- Т.45.,1989- С.5-257.
4. Баев А.В. Об оценке вероятности разорения страховой компании в модели со стохастическими премиями и исками и возможностью инвестиций в финансовый (B, S) рынок / Б.В.Бондарев, А.В. Баев, Т.В. Жмыхова // Проблемы управления и информатики. — 2010. — № 5. — С. 111–123.
5. Бондарев Б.В. Функционирование страховой компании на BS рынке/ Б.В.Бондарев, А.В. Баев // Прикладна

статистика. Актуарна та фінансова математика. - 2003. - №1-2. - С. 11-26.

References

1. BONDAREV, B.V. et al. (2013) About insurance company capital managing on the (B, S) market, *Journal Applied statistics. Actuarial and financial mathematics*. 1-2, p. 11-26.
2. BONDAREV, B. (2002) *Mathematical models in insurance*. Donetsk: Apeks.
3. ANULOVA, S. et al. (1989) *Stochastic calculus*. Moskva: Viniti.
4. BAEV, A., BONDAREV, B. and ZHMYKHOVA, T. (2010) On the probability estimate of the insurance company bankruptcy in the model with stochastic premiums and claims and the opportunity to invest in financial (B, S) - market, *Journal of Automation and Information Sciences*.5, p. 111-123.
5. BAEV, A. and BONDAREV, B. (2003) The insurance company functioning on the BS market, *Journal Applied statistics. Actuarial and financial mathematics*.1-2, p. 11-26.

Надійшла до редколегії 25.02.2014

УДК 519.72

І.О. Завадський, к. ф.-м. н., доцент

Нижнє (2,3)-кодування з підтримкою виявлення помилок у кодових словах

Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, пр-т.
Глушкова 4д, e-mail: zava@ukr.net

Igor O. Zavadskyi, Associate Professor, Ph. D.

The low (2,3)-encoding with error-detecting properties

Taras Shevchenko National University of Kyiv,
03680, Kyiv, Glushkova av., 4d

У роботі запропоновано метод зменшення довжини нижнього (2,3)-коду натуральних чисел зі збереженням усіх його властивостей, що базується на використанні для подання коду скінченного автомату.

Ключові слова: кодування, автомат, стискання, (2,3)-код.

This paper continues the investigation of number representation in two-base numeral system, started by A.V. Anisimov. Namely, this approach is applied to build the error-correcting code. The input bit sequence is considered as the sequence of the whole numbers in binary form and then special algorithm is applied to transform these numbers to (2,3)-code, i.e. to represent them in two-base numeral system with the main basis 2 and additional basis 3. This is the code of variable length and its codewords are separated by special separator sequences. The length of (2,3)-codeword is longer than the length of binary number representation in average and such redundancy can be utilized to provide some robustness. Two special kinds of (2,3)-encoding are introduced and discussed in this paper. Codewords are constructed by finite automaton shown on figures 1 and 2. The code rates are very high, namely 0,95 and 0,87, but even small redundancy provided by these codes implies some robustness properties, basically the error-detecting capability.

Key words: encoding, automaton, archiving, (2,3)-code.

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Анісімов А.В.

Метод (2,3)-кодування натуральних чисел було запропоновано А.В. Анісімовим [1]. Йдеться про префіксні коди змінної довжини, що базуються на поданні чисел у мішаній двійково-трійковій системі. Цей метод має переваги порівняно з іншими методами префіксного кодування, зокрема довжина (2,3)-коду буде меншою, ніж у кодах Фібоначі (обчислювальний експеримент показує, що в середньому вона перевищує довжину двійкового подання числа в 1,13 разів). З іншого боку, надлишковість, яку має (2,3)-код у середньому, дає можливість використовувати його з метою виправлення помилок, що виникають у каналах зв'язку та пристроях збереження даних. Для підвищення завадостійкості (2,3)-код можна модифікувати. Модифікований варіант цього коду назовемо *нижнім (2,3)-кодом*; він перевищує довжину двійкового подання вхідного числа в 1,16 разів у

середньому. У цій статті досліджується метод стискання нижнього (2,3)-коду, який дає змогу, зберігаючи всі властивості цього коду, отримувати кодові слова, довжина яких перевищує довжину двійкового подання відповідних чисел менш ніж в 1,05 разів у середньому.

Нижній (2,3)-код

Основна ідея методу кодування така. Нехай $N_{2,3}$ – множина натуральних чисел, які є взаємно простими із 2 і 3, $x \in N_{2,3}$, $x > 1$, $n = \lfloor \log_2 x \rfloor$. Тоді x можна подати у формі $2^{n-1} + 3^k x_1$ або $2^{n-2} + 3^k x_1$, де $k \in N_{2,3}$, $x_1 \in N_{2,3}$, $x_1 < x$ і тільки в одній із цих форм. Застосовуючи аналогічний розклад до x_1 , отримаємо x_2 і далі будемо обчислювати x_{i+1} з рівняння $x_i = 2^{n_i} + 3^{k_i} x_{i+1}$, поки на певній ітерації не отримаємо $x_i = 1$ або $x_i = 2$. Для

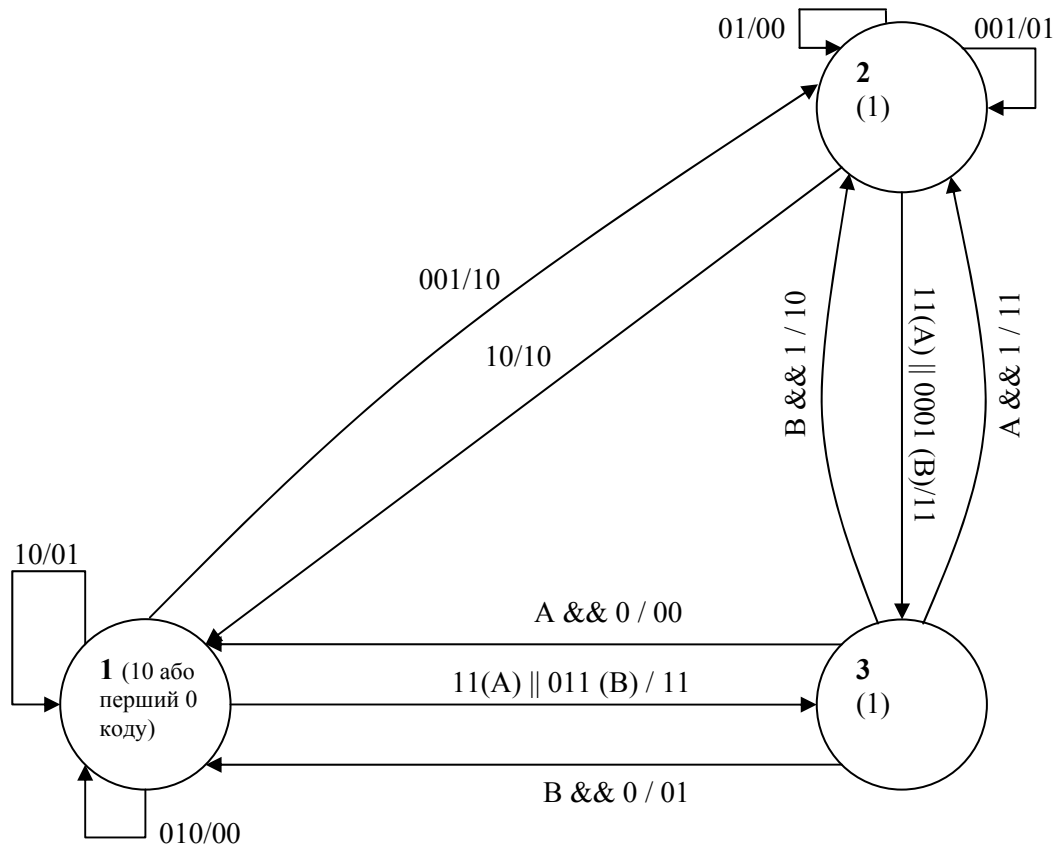


Рис. 1. Скінченний автомат для стискання нижнього (2,3)-коду

однозначного декодування чисел достатньо зберігати величини $\Delta_i = \lfloor \log_2 3^k x_i \rfloor - n_i$ і k_i , які отримуємо на кожній ітерації.

Нехай $2^b + 3^k x_1$ – нижній розклад числа x , $\Delta = \lfloor \log_2 3^k x_1 \rfloor - b$. Можна показати, що Δ може набувати лише значень 0, 1 або 2, якщо $2^m < 3^k x_1 \leq 7/8 \cdot 2^{m+1}$ і значень 0 або 1, якщо $7/8 \cdot 2^{m+1} < 3^k x_1 < 2^{m+1}$. Якщо припустити, що x є рівномірно розподіленою на відріжку $[2^n; 2^{n+1}]$ випадковою величиною, то різні значення Δ траплятимуться з такими частотами: у випадку $2^m < 3^k x_1 \leq 7/8 \cdot 2^{m+1}$ $P(\Delta=0)=3/14$, $P(\Delta=1)=5/14$ і $P(\Delta=2)=3/7$, а у випадку $7/8 \cdot 2^{m+1} < 3^k x_1 < 2^{m+1}$ $P(\Delta=0)=P(\Delta=1)=1/2$. Серед значень k з ймовірністю $2/3$ траплятиметься 1, а ймовірність кожного наступного значення k буде втричі меншою за ймовірність попереднього.

Нижній (2,3)-код числа x – це послідовність блоків бітів вигляду $0\dots 01\dots 1$, перший з яких кодує розклад числа x , а наступні – розклади x_i на

подальших ітераціях. Кількість одиниць у блоці дорівнює k_i , а кількість нулів визначається величиною Δ_i . Якщо $2^m < 3^k x_i \leq 7/8 \cdot 2^{m+1}$, то значення $\Delta_i = 0$ кодується трьома нулями, $\Delta_i = 1$ – двома, а $\Delta_i = 2$ – одним. Якщо ж $7/8 \cdot 2^{m+1} < 3^k x_i < 2^{m+1}$, то $\Delta_i = 0$ кодується двома нулями, а $\Delta_i = 1$ – одним нулем. Такий спосіб кодування обраний з огляду на вищезазначені частоти k_i та Δ_i з метою скоротити середню довжину коду. Також з метою скорочення змінюється кодування числа 5: замість 0001 записуємо 001 (це не призводить до двозначності, адже за стандартного кодування кінцівка коду 001 ніколи не трапляється).

Скінченний автомат для стискання нижнього (2,3)-коду

Автомат має головку, яка зчитує символи нижнього (2,3)-коду зліва направо. У автомата є 3 стани. Коли головка зчитує символи, стан автомату змінюється відповідно до зображеної на рис. 1 діаграми і у код на виході записуються символи, що відповідають виконаному переходу.

Стани позначено кружками. Перша цифра у кружку – це номер стану, а після неї в дужках записано символи, що розташовані перед головкою автомату, коли він перебуває в цьому стані. Автомат розпочинає роботу у стані 1 із головкою, встановленою після першого символу нижнього (2,3)-коду (який завжди є нулем).

Автомат переходить у той чи інший стан залежно від символів, зчитаних головкою; вони записані над стрілками переходів перед скісною рискою. Символи, які записує автомат у код на виході, вказано після скісної риски. Вони мають ідентифікувати перехід, щоб під час декодування можна було відновити поведінку автомату. Оскільки з кожного стану є 4 переходи, для ідентифікації переходу в код на виході достатньо записувати 2 біти. Який перехід якою саме парою бітів позначатиметься – неважливо.

Стан 3 – особливий. Кожен із двох переходів у цей стан може виконуватися у разі зчитування не однієї певної групи символів, а двох різних груп, позначених на рис. 1 як А і В. Щоб розрізняти випадки А і В під час декодування, спосіб виходу зі стану (3) залежить від того, за якою групою символів було здійснено перехід у цей стан: А чи В. Наприклад, якщо автомат перейшов у стан 3 зі стану 2, зчитавши символи 11 (випадок А), а потім головка прочитала 0, автомат перейде зі стану 3 до стану 1 за стрілкою А & 0 і запише 00.

Коли автомат досягає кінця кодового слова нижнього (2,3)-коду, можливі такі випадки.

1) Кодове слово закінчується символами 101, головку розміщено після символу 0 і автомат перебуває у стані 1. Для останнього біту 1 переходу зі стану 1 немає і цей біт просто не враховуємо.

2) Кодове слово закінчується символами 1001, головку розміщено після символів 10 і автомат перебуває у стані 1. Для останніх символів 01 переходу зі стану 1 немає і в цьому випадку до стиснутого коду додається символ 0.

3) Кодове слово закінчується символами 11, головку розміщено перед останнім символом 1 і автомат перебуває у стані 2. Для останнього біта 1 переходу зі стану 2 немає і ця одиниця додається до стиснутого коду.

4) Автомат зупиняється у стані 3. Щоб визначити, який перехід було здійснено в цей стан: А чи В, до кодового слова дописується один біт: 0, якщо відбувся перехід А, і 1, якщо В.

Легко помітити, що 1) і 2) – єдині випадки, коли автомат зупиняється у стані 1, і тому можна сформулювати такий принцип додавання бітів після декодування: якщо автомат зупиняється у стані 1 і довжина стиснутого кодового слова парна, до декодованого слова слід дописати біт 1 справа; якщо автомат зупиняється у стані 1 і в стиснутому коді залишається біт 0, до декодованого слова додаються справа символи 01.

Якщо під час декодування автомат зупиняється у стані 2 і в кодовому слові залишається необроблений біт 1, до декодованого слова справа має бути додано символ «1».

Якщо під час декодування автомат зупиняється у стані 3, у кодовому слові має залишатися один біт. Якщо цей біт дорівнює нулю, в останній стан було виконано перехід А і до декодованого слова слід додати символи 11. Інакше відбувся перехід В і символи, що додаються до декодованого слова, залежать від попереднього стану: якщо це був стан 1, додаються символи 011, інакше – символи 0001.

Приклад. Стиснемо нижній (2,3)-код числа 43, що становить 000111.

1) Автомат перебуває у стані 1, а його головку розміщено після першого символу 0. Автомат зчитує символи 001 і переходить у стан 2, записуючи в код на виході символи 10.

2) Автомат перебуває у стані 2, а його головку розміщено після четвертого символу коду. Автомат зчитує символи 11 і здійснює перехід А у стан 3, записуючи в код на виході символи 11.

3) Автомат зупинився у стані 3. Оскільки у цей стан відбувся перехід А, дописуємо до кодового слова 0 і отримуємо загальний стиснутий код 10110.

Завадостійкість стиснутого нижнього (2,3)-коду

Якщо в каналі зв'язку, яким передається стиснутий нижній (2,3)-код, виникли перешкоди, що призвели до інвертування одного чи кількох бітів цього коду, наявність помилок у деяких випадках можна виявити за такими ознаками.

1) У випадку $7/8 \cdot 2^{m+1} < 3^k x_i < 2^{m+1}$ значення Δ кодується трьома нулями.

2) Величина $m - \Delta$ від'ємна.

3) Виникла одна з таких аномалій в кінці кодового слова:

- автомат зупинився у стані 1, довжина стиснутого коду непарна і останній символ – 1;

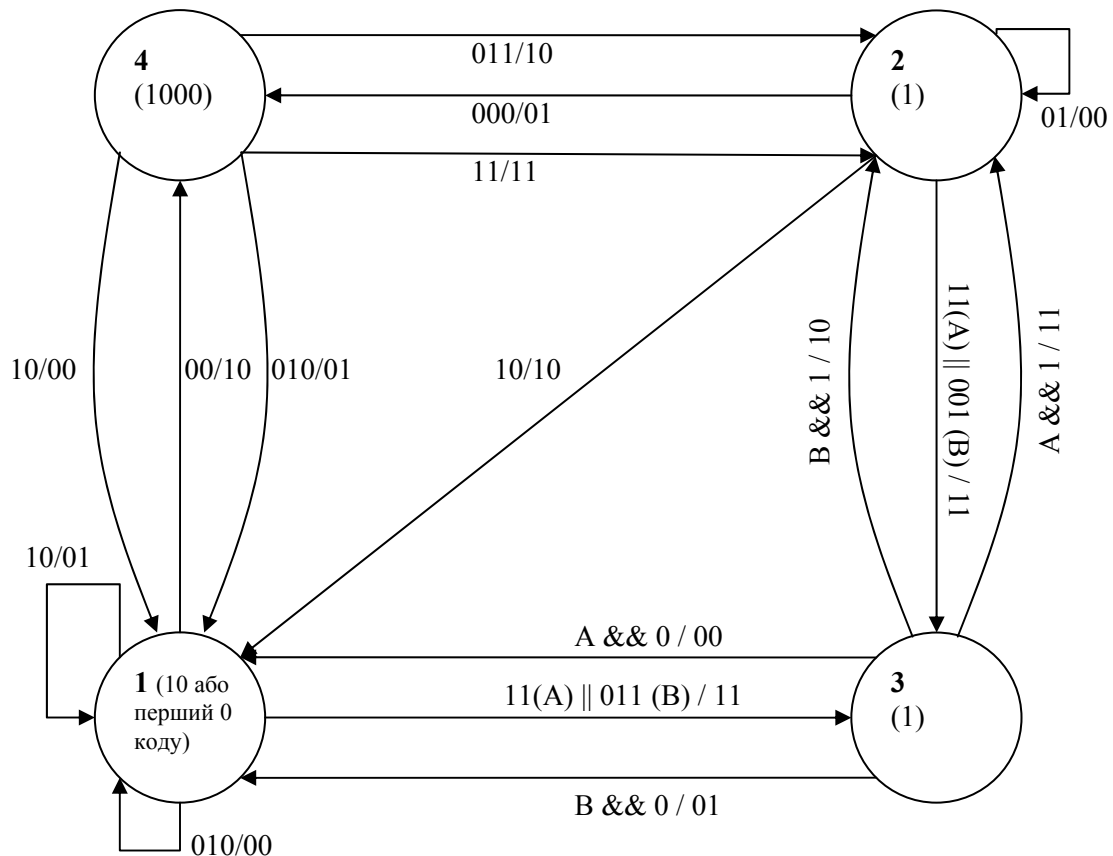


Рис. 2. Скінченний автомат для стиснення модифікованого нижнього (2,3)-коду

- автомат зупинився у стані 2, довжина стиснутого коду непарна і останній символ – 0;
- автомат зупинився у стані 3 і довжина стиснутого коду парна.

Чим довшим є кодове слово, тим вищою є ймовірність, що факт наявності помилок буде виявлено. Також ймовірність виявлення помилок зростатиме зі зростанням їхньої кількості.

Для підвищення завадостійкості можна модифікувати алгоритм нижнього (2,3)-кодування, що вимагатиме й модифікації призначеного для стиснення автомату. Наприклад, у випадку $2^m < 3^k x_i \leq 7/8 \cdot 2^{m+1}$ значення $\Delta_i=0$ можна кодувати по-різному

залежно від значення величини $x_i \bmod 20$: якщо цей залишок становить 1, 3, 5, 7 або 11, то $\Delta_i=0$ кодується послідовністю 000, інакше – послідовністю 0000. Автомат для обробки модифікованого у такий спосіб нижнього (2,3)-коду зображено на рис. 2. Наявність помилок у модифікованому стиснутому (2,3)-коді визначатиметься не лише за наведеними вище трьома ознаками, а й у тих випадках, коли Δ_i кодується як 0000, хоча $x_i \bmod 20 \in \{1,3,5,7,11\}$ або навпаки. Такий підхід суттєво підвищує ймовірність виявлення помилок у стиснутому коді під час декодування, але й збільшує довжину коду, яка тепер у середньому в 1,15 разів перевищуватиме довжину двійкового подання.

Список використаних джерел

1. Anisimov A.V. Prefix Encoding by Means of the 2,3-Representation of Numbers / A.V. Anisimov // IEEE Transactions on Information Theory. – 2013. – No 4. – P. 2359-2374.

References

1. ANISIMOV, A.V. (2013), Prefix Encoding by Means of the 2,3-Representation of Numbers, *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 59, no 4, pp. 2359-2374.

Надійшла до редколегії 26.12.2013

УДК 517.9

Івохін Є.В.¹, д.ф.-м.н, доцент,
Кучерявий М.Г.², студент

Про один приклад реалізації нечітких баз даних

^{1,2} Київський національний університет
імені Тараса Шевченка, м.Київ, пр-т Глушкова,
4д, e-mail: ivohin@univ.kiev.ua

Ivohin E. V.¹, D.Sci.,
Kucheryavyy M. G.², student

About one example of fuzzy databases realization

^{1,2} Taras Shevchenko National University of Kyiv,
Kyiv, Glushkova st., 4d,
e-mail: ivohin@univ.kiev.ua

Для обробки неточно заданої та нечітко формалізованої інформації запропоновано підхід до формалізації нечітких баз даних. Рівень нечіткості атрибутів таблиць визначається на основі чітких даних у вигляді спеціального представлення, яке створюється за допомогою операції розширення. Наведено приклад створення нечіткої бази даних.

Ключові слова: реляційні бази даних, нечіткі множини, мова запитів.

The relational databases and basic operations with them are considered. For treatment unexactly set and the unexpressly formalized information offered approach to the fuzzy databases formalization. It is introduced the concept of fuzzy database based on the composite fuzzy sets and fuzzification crisp data. The definition of the fuzzy database is given. The tool for the creation and updating of the fuzzy relational database is a query language SQL. The level of tables attributes fuzzyness accounts on the basis of clear information as the special presentation which is created by the expansion operation. The evaluation of belonging measure is performed by using the trapezoidal membership function. An example of creating a fuzzy database, resources for the manipulation (updating) tables and scheme of user interface are considered. For the example implementation was used MS Access application. This approach demonstrates a constructive tool for creating fuzzy data base on the operative formation of membership parameters for the data of corresponding fuzzy sets.

Key words: relational databases, fuzzy datasets, query language.

Статтю представив д.т.н., проф. Волошин О.Ф.

Сучасну інформаційну систем важко уявити без використання баз або сховищ даних. Під цими поняттями, як правило, розуміють «набір структурованих даних, що підтримуються системою управління баз даних (СУБД), яка забезпечує різним додаткам потрібні дані у заданому вигляді» [1].

Однак, дане визначення є недостатньо конструктивним і слабо формалізованим. З іншого боку зауважимо, що кожна програмна система, яка призначається для накопичення та обробки (актуалізації) даних, використовує інформаційну модель предметної області. В загальному випадку характерними категоріями, що формують таку модель, є об'єкти та відношення між ними [2].

Найбільш популярною серед моделей баз даних (БД) є реляційна модель предметної області. У цій моделі вважається, що всі дані БД інформаційної системи представлені у вигляді таблиць [3]. Рядок кожної таблиці являє собою кортеж неструктурованих одиниць даних або атрибутів. Набір кортежів, що складає таблицю,

задає відношення: таким чином, модель даних визначається множиною таблиць-відношень (R -таблиць) або «реляцій».

Значення атрибутів кортежів і таблиць-відношень визначаються заданими разом з таблицями областями визначення (доменами). В рамках реляційної теорії визначений список операцій, які можна здійснювати над R -таблицями, отримуючи результат у вигляді R -таблиці. Це означає, що при виконанні операцій на реляційною базою даних отримуємо нову реляційну БД. До таких операцій над базою даних відносять:

1) базові операції: обмеження (виключення з таблиць деяких кортежів); проекція (виключення з таблиці деяких стовбців); декартовий добуток двох таблиць (за правилом декартового добутку двох множин рядків R -таблиць); об'єднання (об'єднання множин рядків двох таблиць); різниця (різниця множин рядків); присвоювання (іменованій таблиці присвоюється значення виразу над R -таблицями).

2) похідні операції: з'єднання таблиць за деяким правилом; перетин таблиць; розширення таблиць новими стовбцями; підсумовування (зменшення рядків в таблиці за рахунок агрегування вихідних даних).

Операції над R -таблицями дозволяють отримувати таблиці-представлення для формування динамічних наборів кортежів з додатково заданими правилами відбору.

Таким чином, можна констатувати, що будь-яка прикладна проблемна область описується в термінах таблиць достатньо просто, що дозволяє суттєво спростити розробку інформаційних систем. Крім цього, реляційна концепція баз даних може бути легко формалізованою, базуючись на математичній моделі відношень. Припустимо, що задано n множин $D_1, D_2, \dots, D_n$. Тоді реляція R є відношення над цими множинами, якщо R є множина впорядкованих наборів виду $\langle d_1, d_2, \dots, d_n \rangle$, де d_1 - елемент з D_1 , d_2 - елемент з D_2 , ..., d_n - елемент з D_n . При цьому набори вигляду $\langle d_1, d_2, \dots, d_n \rangle$ визначають кортежі, а множини $D_1, D_2, \dots, D_n$ - домени.

Універсальним засобом актуалізації сховищ даних є мова запитів SQL [4], яка дозволяє зручно обробляти інформацію в різних реалізаціях моделей БД. Зрозуміло, що коли з бази даних необхідно вибрати дані, що мають неточний або нечітко визначений характер, стандартними засобами SQL це виконати неможливо.

Традиційно мова SQL використовується для опису запитів до БД в спеціальних термінах. Останнім часом багато уваги приділяється різним способам формалізації нечітких запитів. Звичайні сховища чітких даних з підтримкою чітких запитів називають чіткими базами даних (Crisp DataBases), а в реляційних базах даних з обробкою слабо формалізованих запитів все частіше вживаються терміни «нечіткі бази даних» (Fuzzy DataBases), «нечіткі запити» (Fuzzy Queries for DataBases). В БД з підтримкою механізмів нечітких запитів використовується підхід, що базується на використанні нечітких множин Заде [5] і нечітких відношень з підтримкою формул нечіткої логіки. Підхід, який було запропоновано у 1984 році, надалі отримав розвиток в роботах Ягера Р. [6], Дюбуа Д. та Прада Г. [7].

Означення 1. [5] Нечіткою множиною $\tilde{A}$ в універсальній множині X називається сукупність пар виду

$$\tilde{A} = \{(x, \mu_{\tilde{A}}(x))\}, \quad (1)$$

де $x \in X$, а $\mu_{\tilde{A}} : X \rightarrow [0,1]$ - функція належності нечіткої множини $\tilde{A}$.

Означення 2. Нечітким відношенням $\bar{F}$ на універсальному просторі $X \times Y$ називається нечітка множина декартового добутку $X \times Y$, що характеризується функцією належності $\mu_{\bar{F}} : X \times Y \rightarrow [0,1]$.

Виходячи з традиційних понять, представлень та операцій з нечіткими множинами, в існуючих варіантах нечітких баз даних реалізується підтримка виконання нечітких запитів до чітких даних сховища. Продукційні правила нечіткої бази знань формулюються на основі реалізації відомих формул нечіткої логіки, а база даних про проблемну область подається у вигляді типового чіткого сховища інформації.

Покажемо, що поняття нечітких баз даних може бути розширено та узагальнено. В багатьох сучасних інформаційних системах, окрім нечітких запитів, приходить мати справу з неточною, нечіткою інформацією. Це можуть бути дані про результати експериментальних досліджень на основі вимірювань; такими є дані для систем підтримки прийняття рішень, в яких зберігається і ведеться інформація, наприклад, про рівні компетентності експертів, важливість критеріїв тощо. Нарешті, це можуть бути дані з чітких таблиць БД, що оформлюються у вигляді представлення, яке доповнюється полями величин відповідності значень кожного поля усіх кортежів деяким динамічним критеріям.

Іншими словами, для довільної чіткої бази даних може бути побудоване нечітке представлення, в якому інформація про характеристики (поля) об'єктів проблемної області подаються парою стовбців: у першому – конкретні значення показника з таблиці чіткої бази даних (вік, показання вимірювального приладу, номер зайнятого місця, значення критерія якості і т.і.), у другому – значення відповідності даних першого стовця деякому правилу (нечіткому поняттю). Ця процедура має назву фазифікації чітко визначених даних [8].

Зрозуміло, що результат процесу фазифікації чіткого відношення $R = \{\langle d_1, d_2, \dots, d_n \rangle\}$, можна виразити у вигляді R -таблиці. Це нове нечітке відношення

$$\bar{R} = \{\langle d_1, d_2, \dots, d_i | \mu_{\tilde{A}_i}(d_i), \dots, d_n \rangle\}, \quad (2)$$

що формується як множина кортежів з $n+1$ елемента, в яких величини $\mu_{\tilde{A}_i}(d_i)$ задають ступінь належності значень елементів d_i деякій нечіткій множині $\tilde{A}_i = \{(d, \mu_{\tilde{A}_i}(d)), d \in D_i\}$.

Таким чином, список базових та похідних

операцій над R -таблицями може бути розширений операцією фазифікації як різновидом операції розширення.

Потрібно зауважити, що відношення $\bar{R}$, сформоване за i -тим атрибутом, $i = \overline{1, n}$, буде представлятися у вигляді таблиці з p додатковими стовбцями, якщо на i -ий атрибут накладено p нечітких понять. Таким чином, відношення $\bar{R}$ за i -им атрибутом можна представити у вигляді таблиці з $n+p$ стовбцями

$$\bar{R} = \{ \langle d_1, d_2, \dots, d_i | \mu_{\tilde{A}_i^1}(d_i) | \mu_{\tilde{A}_i^2}(d_i) | \dots | \mu_{\tilde{A}_i^p}(d_i), \dots, d_n \rangle \}.$$

Остаточно, якщо частина доменів (крім i -ого) не потребує фазифікації, то відношення $\bar{R}$ формально можна записати у вигляді

$$\bar{R} = \{ \langle d_1 | 1, d_2 | 1, \dots, d_i | \mu_{\tilde{A}_i^1}(d_i) | \mu_{\tilde{A}_i^2}(d_i) | \dots | \mu_{\tilde{A}_i^p}(d_i), \dots, d_n | 1 \rangle \}.$$

Означення 3 [9]. Нечітку множину $\bar{R}$, яка визначає нечітке табличне відношення

$$\begin{aligned} \bar{R} = \{ \langle d_1 | \mu_{\tilde{A}_1^1}(d_1) | \dots | \mu_{\tilde{A}_1^{p_1}}(d_1), \\ d_2 | \mu_{\tilde{A}_2^1}(d_2) | \dots | \mu_{\tilde{A}_2^{p_2}}(d_2), \dots, \\ d_i | \mu_{\tilde{A}_i^1}(d_i) | \dots | \mu_{\tilde{A}_i^{p_i}}(d_i), \dots, \\ d_n | \mu_{\tilde{A}_n^1}(d_n) | \dots | \mu_{\tilde{A}_n^{p_n}}(d_n) \rangle \}, \end{aligned} \quad (3)$$

назвемо складеною нечіткою множиною в універсальному просторі $D_1 \cup \dots \cup D_i \cup \dots \cup D_n$.

Означення 4. Базу даних інформаційної системи будемо називати нечіткою (НБД), якщо для представлення даних предметної області використовується хоча б одне нечітке відношення $\bar{R}$ (3) у вигляді R -таблиці або R -представлення.

Розглянемо приклад НБД інформаційної системи. Розглянемо базу даних про нафтові родовища, інформація про які містить слабо-формалізовані поняття «відносна потужність» та «перспективність розробки». Ці поняття дають можливість оцінити інвестору привабливість проекту розробки кожного родовища з точки зору очікуваного прибутку від інвестування. Процедура фазифікації базується на результатах обробки експертних даних про характеристики запасів родовищ. Експерти на основі наданої їм інформації проводять оцінку об'ємів нафти, що знаходиться у надрах родовищ. Відносна потужність вимірюється у відсотках відносно потужності найбільших діючих родовищ України

(наприклад, Лесяківського [10]) на початок їх розробки. Цей підхід дає можливість оцінити величину покладів нафти у відсотковому еквіваленті, а також спрогнозувати, як довго дане нафтове родовище зможе функціонувати у режимі виробничого добутку. Перспективність розробки – інший якісний параметр, що враховує декілька позицій, які впливають на позитивність оцінки вкладання інвестицій у розвиток добутку нафти на заданій території. Серед них, наприклад, зручність розташування родовища відносно основних шляхів транспортування нафти, сприятливість природних умов для будівництва (рельєф, кліматичні умови, глибина залягання покладів, загроза несприятливих природних явищ), інвестиційна привабливість регіону в економічному сенсі та інші. Для числового оцінювання згаданих параметрів використовується шкала від 0 до 1.

Не обмежуючи загальності визначення НБД, будемо вважати, що довільна інформаційна система базується на нечітких відношеннях $\bar{R}$, які подаються у вигляді сукупності кортежів

$$\begin{aligned} \bar{R} = \{ \langle d_1 | \mu_{\tilde{A}_1}(d_1) | \dots | \mu_{\tilde{A}_n}(d_2), \\ \dots, d_i | \mu_{\tilde{A}_i}(d_i) | \dots | \mu_{\tilde{A}_n}(d_i), \\ \dots, d_m | \mu_{\tilde{A}_1}(d_m) | \dots | \mu_{\tilde{A}_n}(d_m) \rangle \}, \end{aligned} \quad (4)$$

де $d_i \in D_i \subset R_+^1$, $i = \overline{1, m}$, m - кількість родовищ, належність кожної величини $\mu_{\tilde{A}_j}(d_i)$, $j = \overline{1, n}$,

$i = \overline{1, m}$, до відповідної нечіткої множини обчислюється за допомогою трапецієподібних функцій, які мають вигляд

$$\mu_{\tilde{A}_j}(d_i) = \begin{cases} 1 - (b_j - d_i)/(b_j - a_j), & a_j \leq d_i < b_j, \\ 1, & b_j \leq d_i \leq c_j, \\ 1 - (d_i - c_j)/(e_j - c_j), & c_j < d_i \leq e_j, \\ 0, & \text{інакше,} \end{cases}$$

$$j = \overline{1, n}, \quad i = \overline{1, m}, \quad (5)$$

з заданими параметрами a_j, b_j, c_j, e_j , $j = \overline{1, n}$, що визначаються експертами та користувачами.

В якості середовища розробки використано СУБД Access, одну з середньопотужних СУБД, представлених сьогодні на ринку. Система Access – це набір потужних інструментів кінцевого користувача для керування базами даних. До її складу входять конструктори таблиць, форм, запитів і звітів. Цю систему досить зручно розглядати і як середовище розробки додатків. Використовуючи макроси або модулі для автоматизації розв'язання завдань,

можна створювати орієнтовані на користувача додатки, що є такими ж потужними, як і додатки, написані безпосередньо мовами програмування.

При цьому, слід зауважити про відносно складні дії з реструктуризації таблиць даних для отримання фазифікованих даних. Однак, незважаючи на окремі незручності розробки, створено засоби маніпуляції (актуалізації) таблиць та інтерфейс користувача, що забезпечив наповнення, модифікацію бази даних та пошук необхідних даних з урахуванням визначених параметрів функцій належності. Усі розроблені засоби оформлено у вигляді сукупності макросів та запитів до таблиць БД з вхідними параметрами.

Наведений приклад нечіткої БД демонструє конструктивність використання підходу для отримання нечітко визначених даних на основі оперативного формування показників належності даних відповідним нечітким множинам. Запропонований підхід забезпечує можливість створення та обробки слабоформалізованої інформації, дозволяє розробити спосіб отримання кортежів нечіткого відношення нечіткої бази даних на основі формування SQL-запитів до нечітких даних і процедур їх реалізації. Для їх виконання використовуються різні засоби, що дозволяють записати необхідний запит у вигляді спеціальної послідовності операторів, яка потім транслюється у відповідну послідовність SQL-запитів [9].

Список використаних джерел

1. *Pascal, F. Understanding Relational Data-bases with Examples in SQL-92* / F. Pascal. – John Wiley & Sons, 1993.
2. *Won K. On Object-Oriented Database Technology* / K.Won // Open systems. – 1994. – №4 (8). – P. 14.
3. *Codd, E. F. An Evaluation Scheme for Database Management Systems that are Claimed to be Relational* / E.F.Codd // Proc. IEEE CS International Conference on Data Eng., LA, USA, February, 1986.
4. *Dudly, K. SQL compliance* / K.Dudly // World of Oracle. – 1996. – №1(39). – P. 7-16.
5. Орловский С.А. Проблемы принятия решения при нечеткой исходной информации/ С.А.Орловский. – М.: Наука, 1981. – 206с.
6. *Yager, R.R. Fuzzy sets, probabilities and decision* / R.R.Yager // J.of Cybern. – 1980. – №10. – P.1-18.
7. Дюбуа Д. Теория возможностей. Приложения к представлению знаний в информатике/ Д. Дюбуа, А.Прад. – М.: Радио и связь, 1990. – 287с.
8. *Осовский С. Нейронные сети для обработки информации* / С.Осовский – М.: Финансы и статистика, 2002. – 344с.
9. *Івохін Є.В. Про підхід до реалізації нечітких баз даних* / Є.В. Івохін, К.О.Косинський // Вісник Київського університету. Серія: фіз.-мат. науки. – 2008. – Вип.2. – С. 83 – 87.
10. *Ладийчук Д.О., Пічура В.І. Геоінформаційні бази даних.* – Херсон: Вид-во ХДУ, 2007. – 103 с.

References

1. *PASCAL, F. (1993) Understanding Relatio-nal Data-bases with Examples in SQL-92.* John Wiley & Sons.
2. *WON K. (1994) On Object-Oriented Database Technology// Open systems. №4 (8). p. 14.*
3. *CODD, E. F. (1986) An Evaluation Scheme for Database Management Systems that are Claimed to be Relational //Proc. IEEE CS International Conference on Data Eng., LA, February, 1986.*
4. *DUDLY, K. (1996) SQL compliance// World of Oracle. № 1 (39). p. 7-16.*
5. *ORLOVSKIY, S. (1981) Problemy prinyatiya resheniya pri nechetkoy ishodnoy informaciyi.* Moskva: Nauka.
6. *YAGER, R. (1980) Fuzzy sets, probabilities and decision // J.of Cybern. №10. p.1-18.*
7. *DUBOIS, D. and PRADE, H. (1988) Theorie des possibilites. Applications a la representation des connaissances en informatique.* Paris: MASSON.
8. *OSOVSKIY, S. (2002) Neyronnyye seti dlya obrabotki informaciyi.* Moskva: Finansy i statistika.
9. *IVOHIN, E. and KOSINSKIY, K. (2008) About realization of fuzzy databases // Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series: Physics&Mathematics. – 2. – pp. 83 – 87.*
10. *LADYCHUK, D. and PICHURA, V. (2007) Geoinformaciyni bazy danykh.* Kherson: Kherson State Univ.

Надійшла до редколегії 28.02.2014

Івохін Є.В.¹, д.ф.-м.н, доцент

Ivohin E.V.¹, Dr.Sci.

Про багатоіндексні транспортні задачі та способи їх фазифікації

The multi-index transportation problems and approaches to their fuzzification

¹Київський національний університет
імені Тараса Шевченка, м.Київ, пр-т Глушкова,
4д, e-mail: ivohin@univ.kiev.ua

¹Taras Shevchenko National University of Kyiv,
Kyiv, Glushkova st., 4d,
e-mail: ivohin@univ.kiev.ua

В роботі розглянуто класифікацію багатоіндексних задач лінійного програмування. Наведено твердження щодо існування розв'язків багатоіндексної транспортної задачі. Запропоновано два принципові підходи для визначення нечітких багатоіндексних задач, зазначається можливість розв'язання нечіткої транспортної задачі з ресурсами, заданими нечіткими трикутними числами.

Ключові слова: транспортна задача, багатоіндексна модель, нечітка множина.

This paper considers the approaches to the classification multi-index linear programming problems. It were considered the concepts of indexes. The different types of transport problems were described. The necessary and sufficient conditions for the existence of solutions of multi-indexed transportation problem are given. The two basic approaches to define fuzzy multi-index tasks are offered. The possibility of solving the fuzzy transportation problem with the resources given by triangular fuzzy numbers is proposed. Formulated model of problems that is most close to the real transportation problems. Proposed scheme in which the values of needs of consumers or carrying capacities of intermediate points are defined as the fuzzy variables. Then it is being done the transform the problem to a parametric optimization problem of a special kind. It was noted about the importance of the multi-index transportation problems solving.

Key words: transportation problem, multi-index model, fuzzy sets.

Статтю представив д.т.н., проф. Волошин О.Ф.

Вступ. Класична двоіндексна транспортна задача [1] виникає в разі перевезення однорідного продукту між пунктами виробництва та споживання. Проте в реальних умовах доводиться здійснювати перевезення, для яких загальна вартість транспортування (або значення якого-небудь іншого критерію) залежить не лише від відстані між пунктами, але і від інших, іноді суб'єктивних, чинників. Це вимагає збільшення індексності задачі. Розглянемо основні теоретичні аспекти багатоіндексних задач лінійного програмування (ЗЛП), яким останнім часом приділяється багато уваги [1-3].

Формулювання і класифікація багатоіндексних задач лінійного програмування

Нехай $f = \{1, 2, \dots, s\}$ — множина з s послідовних натуральних чисел. Кожному числу $l, l \in f$, поставимо у відповідність параметр j_l , $l \in f$, який будемо називати надалі індексом, що може приймати одне значення з множини $J_l = \{1, 2, \dots, n_l\}$. Набір значень індексів $(j_1, j_2, \dots, j_s)$ назвемо s -індексом і позначимо через F :

$$F = (j_1, j_2, \dots, j_s), \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \text{де } j_1 &\in J_1 = \{1, 2, \dots, n_1\}; \\ j_2 &\in J_2 = \{1, 2, \dots, n_2\}; \dots \dots \dots; \\ j_s &\in J_s = \{1, 2, \dots, n_s\}. \end{aligned}$$

Очевидно, що існує $N = \prod_{l=1}^s n_l$ різних

наборів значень індексів $(j_1, j_2, \dots, j_s)$. Ці набори в сукупності утворюють множину E s -індексів F , яка є прямим добутком множин $J_1, J_2, \dots, J_s$: $E = J_1 \times J_2 \times \dots \times J_s$.

Кожному s -індексу елементу F , $F \in E$, поставимо у відповідність дійсне число $x_F = x_{j_1 j_2 \dots j_s}$. Сукупність таких чисел для усіх можливих значень індексів $j_1, j_2, \dots, j_s$ назвемо s -індексною матрицею і позначимо $\{x_F\} = \{x_{j_1 j_2 \dots j_s}\}$, яка містить N елементів.

Нехай $f_i = \{k_1^i, k_2^i, \dots, k_{t_i}^i\} \subset f$ деяка непорожня довільна власна підмножина множини f , $i = 1, 2, \dots$. Будемо вважати, що порядок елементів в f_i довільний. Тоді існує

$$M = \sum_{l=1}^{s-1} C_s^l = 2^s - 2$$

варіантів формування підмножини f_i . Кожній підмножині f_i , $i=1,2,\dots$, відповідає множина індексів $\{j_{k_1^i}, j_{k_2^i}, \dots, j_{k_{t_i}^i}\} \subset F$, $i=1,2,\dots$.

Набір значень індексів $\{j_{k_1^i}, j_{k_2^i}, \dots, j_{k_{t_i}^i}\}$,

що є t_i -індексом, позначимо F_i , $i=1,2,\dots$. Таким чином,

$$F_i = (j_{k_1^i}, j_{k_2^i}, \dots, j_{k_{t_i}^i}) \subset F, \quad (2)$$

де $j_{k_1^i} \in (1, 2, \dots, n_{k_1^i}) = J_{k_1^i}$;

$$j_{k_2^i} \in (1, 2, \dots, n_{k_2^i}) = J_{k_2^i}; \quad \dots; \quad (3)$$

$$j_{k_{t_i}^i} \in (1, 2, \dots, n_{k_{t_i}^i}) = J_{k_{t_i}^i}.$$

Сукупність t_i -індексів F_i для усіх можливих значень індексів $j_{k_1^i}, j_{k_2^i}, \dots, j_{k_{t_i}^i}$ утворює

множину $E_i = J_{k_1^i} \times J_{k_2^i} \times \dots \times J_{k_{t_i}^i}$, яка містить

$$N_i = \prod_{l \in f_i} n_l \text{ елементів, } i=1,2,\dots.$$

Доповненням $\bar{f}_i = f \setminus f_i$ підмножини f_i до множини f є множина елементів, що не входять в f_i , $i=1,2,\dots$. Доповненням $\bar{f}_i$ відповідають множини $\bar{F}_i = F \setminus F_i$ і $\bar{E}_i = \prod_{l \in \bar{f}_i} J_l$, $i=1,2,\dots$.

Зауважимо, що множини E_i і $\bar{E}_i$ пов'язані між собою: прямий добуток цих множин дає множину $E = E_i \times \bar{E}_i$, а для заданих множин F_i і $\bar{F}_i$ справедлива рівність $\{x_{j_1, j_2, \dots, j_s}\} = \{x_F\} = \{x_{F_i \bar{F}_i}\}$ для довільного f_i , $i=1,2,\dots$.

Сукупність усіх компонентів s -індексної матриці $\{x_F\}$ з фіксованими індексами $F_i = (j_{k_1^i}, j_{k_2^i}, \dots, j_{k_{t_i}^i}) \in (s - t_i)$ -мірним перерізом орієнтації $\bar{F}_i$, який позначають $X_{\bar{F}_i}^{F_i}$ [1]. Переріз $X_{\bar{F}_i}^{F_i}$ утворює $(s - t_i)$ -індексну підматрицю $\{x_{\bar{F}_i}\}$ матриці $\{x_F\}$. Число перерізів орієнтації F_i дорівнює $N_i = \prod_{l \in f_i} n_l$ - потужності множини E_i , $i=1,2,\dots$.

З метою скорочення і спрощення записів введемо такі позначення:

$$\sum_{j_1 \in J_1} \sum_{j_2 \in J_2} \dots \sum_{j_s \in J_s} x_{j_1 j_2 \dots j_s} = \sum_{J_1 \times J_2 \times \dots \times J_s} x_{j_1 j_2 \dots j_s} = \sum_E x_F. \quad (4)$$

Суму (4) назвемо повною сумою. Частковими сумами на множинах E_i будемо називати суми

$$\sum_{j_{k_1^i} \in J_{k_1^i}} \sum_{j_{k_2^i} \in J_{k_2^i}} \dots \sum_{j_{k_{t_i}^i} \in J_{k_{t_i}^i}} x_{j_1 j_2 \dots j_s} = \sum_{J_{k_1^i} \times J_{k_2^i} \times \dots \times J_{k_{t_i}^i}} x_{j_1 j_2 \dots j_s} = \sum_{E_i} x_F.$$

Якщо для значень часткової суми змінних $x_{j_1 j_2 \dots j_s}$ задано обмеження, тоді відповідна

рівність (або нерівність) має вигляд:

$$\sum_{E_i} x_F = \sum_{E_i} x_{F_i \bar{F}_i} = (\leq) b_{\bar{F}_i}^{(i)}, \bar{F}_i \in \bar{E}_i. \quad (5)$$

Введемо s -індексні матриці $\{c_F\}$, $\{a_F^{(l)}\}$, $\{a_F^{(2)}\}, \dots, \{a_F^{(m)}\}$, а також m підмножин f_i , $i \in I = \{1, 2, \dots, m\}$. Використовуючи введені позначення, сформулюємо багатоіндексну ЗЛП у найбільш загальному вигляді:

визначити набір елементів $X = \{x_F\}$, що мінімізує лінійну функцію

$$L(X) = \sum_E c_F x_F \quad (6)$$

і задовольняє обмеженням

$$\sum_{E_1} a_F^{(1)} x_F = b_{\bar{F}_1}^{(1)}, \bar{F}_1 \in \bar{E}_1; \sum_{E_2} a_F^{(2)} x_F = b_{\bar{F}_2}^{(2)}, \bar{F}_2 \in \bar{E}_2;$$

$$\dots; \sum_{E_m} a_F^{(m)} x_F = b_{\bar{F}_m}^{(m)}, \bar{F}_m \in \bar{E}_m; \quad (7)$$

$$x_F \geq 0, F \in E. \quad (8)$$

Сформульована задача (6)-(8) є s -індексною задачею розподілення ресурсів і позначається R_s [1]. Загальна модель (6), (7) припускає ряд часткових формулювань. Наприклад, при $a_F^{(i)} = 1$, $F \in E$, $i \in \{1, 2, \dots, m\}$, отримуємо s -індексну транспортну задачу: знайти набір елементів $X = \{x_F\}$, що мінімізує лінійну функцію

$$L(X) = \sum_E c_F x_F \quad (9)$$

і задовольняє обмеженням

$$\sum_{E_1} x_F = b_{\bar{F}_1}^{(1)}, \bar{F}_1 \in \bar{E}_1; \sum_{E_2} x_F = b_{\bar{F}_2}^{(2)}, \bar{F}_2 \in \bar{E}_2;$$

$$\dots; \sum_{E_m} x_F = b_{\bar{F}_m}^{(m)}, \bar{F}_m \in \bar{E}_m; \quad (10)$$

$$x_F \geq 0, F \in E. \quad (11)$$

Транспортну задачу (9)-(11) позначимо символом T_s .

Нехай підмножини F_i , $i \in \{1, 2, \dots, m\}$, - це усі можливі сполучення по d елементів із s елементів

множини F . При цьому, $t_1 = t_2 = \dots = t_m = d$, де $m = C_s^d$.

Модель (9)-(11) є симетричною s -індексною задачею з d -гіперпланарними сумами. Для визначення кількості груп обмежень, що накладаються на змінні задачі, модель (9)-(11) ще називають (m, d) -гіперпланарною s -індексною транспортною задачею і позначають $T_s - mP_d$. Якщо $d=1$, то отримуємо симетричну s -індексну s -аксіальну транспортну задачу [1]: визначити набір елементів $X = \{x_{j_1 j_2 \dots j_s}\}$, що мінімізує функцію

$$L(X) = \sum_{j_1=1}^{n_1} \sum_{j_2=1}^{n_2} \dots \sum_{j_s=1}^{n_s} c_{j_1 j_2 \dots j_s} x_{j_1 j_2 \dots j_s} \quad (12)$$

і задовольняє обмеженням

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n_1} x_{j_1 j_2 \dots j_s} &= b_{j_2 j_3 \dots j_s}^{(1)}, \quad j_k \in J_k, \\ k \in \overline{f_1} &= \{2, 3, 4, \dots, s\}; \\ \sum_{i=1}^{n_2} x_{j_1 j_2 \dots j_s} &= b_{j_1 j_3 \dots j_s}^{(2)}, \quad j_k \in J_k, \\ k \in \overline{f_2} &= \{1, 3, \dots, s\}; \quad \dots; \\ \sum_{i=1}^{n_s} x_{j_1 j_2 \dots j_s} &= b_{j_1 j_2 \dots j_{s-1}}^{(s)}, \quad j_k \in J_k, \\ k \in \overline{f_s} &= \{1, 2, 3, \dots, s-1\}; \\ x_{j_1 j_2 \dots j_s} &\geq 0, \quad j_k \in J_k, \\ k \in \overline{f_s} &= \{1, 2, 3, \dots, s\}. \end{aligned} \quad (13)$$

Тут $f_1 = \{1\}$, $f_2 = \{2\}$, ..., $f_s = \{s\}$, $m=s$.

У випадку $m=s$, $d=s-1$ отримуємо симетричну модель, що називається s -індексною $(s, s-1)$ -гіперпланарною транспортною задачею, яка позначається $T_s - sP_{s-1}$ [2]. Ця задача формулюється таким чином: знайти набір елементів $X = \{x_{j_1 j_2 \dots j_s}\}$, що мінімізує функцію $L(X)$ виду (12) і задовольняє обмеженням

$$\begin{aligned} \sum_{j_2=1}^{n_2} \sum_{j_3=1}^{n_3} \dots \sum_{j_s=1}^{n_s} x_{j_1 j_2 \dots j_s} &= b_{j_1}^{(1)}, \quad j_1 \in J_1; \\ \sum_{j_1=1}^{n_1} \sum_{j_3=1}^{n_3} \dots \sum_{j_s=1}^{n_s} c_{j_1 j_2 \dots j_s} x_{j_1 j_2 \dots j_s} &= b_{j_2}^{(2)}, \quad j_2 \in J_2; \\ \dots; \sum_{j_1=1}^{n_1} \sum_{j_2=1}^{n_2} \dots \sum_{j_{s-1}=1}^{n_{s-1}} c_{j_1 j_2 \dots j_s} x_{j_1 j_2 \dots j_s} &= b_{j_s}^{(s)}, \quad j_s \in J_s; \\ x_{j_1 j_2 \dots j_s} &\geq 0, \quad j_1 \in J_1, j_2 \in J_2, \dots, j_s \in J_s. \end{aligned} \quad (14)$$

У даному випадку маємо

$$f_i = \{1, 2, \dots, i-1, i+1, \dots, s\}, \quad \overline{f_i} = \{i\}.$$

Таким чином, модель s -індексної транспортної задачі однозначно задається набором множин

$f_1, f_2, \dots, f_m$, що визначають структуру системи обмежень, і набором чисел $(n_1, n_2, \dots, n_s)$, що встановлює розмірність задачі, яка дорівнює $n_1 \times n_2 \times \dots \times n_s$.

Існування розв'язків багатоіндексної транспортної задачі.

Сформулюємо ряд необхідних та достатніх умов існування розв'язків різних типів s -індексних транспортних задач.

Розглянемо s -індексну транспортну задачу T_s у вигляді (9)-(11). Для довільних $(i, k) \in I \times I$, $I = \{1, 2, \dots, m\}$ введемо позначення

$$f_{ik} = f_i \cup f_k, \quad f'_k = f_{ik} \setminus f_i, \quad f'_i = f_{ik} \setminus f_k.$$

Підмножини $f_{ik}, f'_k, f'_i, i, k \in I$, породжують відповідні індексні елементи:

$$\begin{aligned} F_{ik} &\in E_{ik}, \quad \overline{F_{ik}} \in \overline{E_{ik}}, \quad F'_i \in E'_i, \\ \overline{F'_i} &\in \overline{E'_i}, \quad F'_k \in E'_k, \quad \overline{F'_k} \in \overline{E'_k}. \end{aligned}$$

Теорема 1 (умова балансу)[1]. Для існування розв'язку s -індексної транспортної задачі (9)-(11) необхідно, щоб для $\forall i, k \in I$ виконувались умови

$$\sum_{E'_k} b_{\overline{F'_i}}^{(i)} = \sum_{E'_i} b_{\overline{F'_k}}^{(k)} = S_{\overline{F_{ik}}}, \quad \overline{F_{ik}} \in \overline{E_{ik}}. \quad (17)$$

Наслідок. Для існування розв'язку s -аксіальної транспортної задачі (12)-(14) необхідно, щоб для $\forall i, k \in I$ виконувалися умови

$$\sum_{j_k=1}^{n_k} b_{j_1 j_2 \dots j_{i-1} j_{i+1} \dots j_s}^{(i)} = \sum_{j_i=1}^{n_i} b_{j_1 j_2 \dots j_{k-1} j_{k+1} \dots j_s}^{(k)}. \quad (18)$$

Теорема 2 [1]. Нехай для усіх пар $(i, k) \in I \times I$ справедливо $\overline{f_i} \cap \overline{f_k} = \emptyset$. Тоді для існування розв'язку s -індексної транспортної задачі (9)-(11) необхідно і достатньо, щоб виконувалася умова

$$\sum_{\overline{E_k}} b_{\overline{F'_i}}^{(i)} = \sum_{\overline{E_i}} b_{\overline{F'_k}}^{(k)} = S_0, \quad (i, k) \in I \times I. \quad (19)$$

Остаточно, існує принаймні один план $\hat{X} = \{\hat{x}_F\}$ багатоіндексної транспортної задачі, цільова функція $L(X)$ обмежена знизу на множині її планів. Отже, задача (9)-(11) має розв'язок.

Формулювання нечітких багатоіндексних транспортних задач

Формулювання нечітких транспортних задач може розглядатися з урахуванням двох різних принципів підходів, для яких є характерною неможливість чіткої формалізації тих чи інших параметрів задачі. Для першого випадку

транспортна задача (наприклад, (12), (15), (16)) може мати нечіткий набір індексів проміжних пунктів $j_1 \in J_1, \dots, j_s \in J_s$. Для цього у роботі [4] запропонований підхід, що дозволяє формалізувати довільну задачу оптимізації і отримати деякий розв'язок, який враховує нечіткий вибір індексів обмежень.

Більш наближеним до реальних транспортних проблем є інший спосіб формулювання нечіткої багатоіндексної задачі [5]. Він полягає у заданні величин потреб споживачів або пропускних спроможностей проміжних пунктів у вигляді нечітких величин і перетворенні отриманої задачі до параметричної задачі оптимізації спеціального вигляду. Для транспортної задачі (12), (15), (17) нечітка задача може бути сформульована у вигляді пошуку оптимуму цільової функції (12), що задовольняє обмеженням

$$\sum_{j_1=1}^{n_2} \sum_{j_2=1}^{n_3} \dots \sum_{j_s=1}^{n_s} x_{j_1 j_2 \dots j_s} = \tilde{b}_{j_1}^{(1)}, j_1 \in J_1;$$

$$\sum_{j_1=1}^{n_1} \sum_{j_2=1}^{n_3} \dots \sum_{j_s=1}^{n_s} c_{j_1 j_2 \dots j_s} x_{j_1 j_2 \dots j_s} = \tilde{b}_{j_2}^{(2)}, j_2 \in J_2;$$

$$\dots;$$

$$\sum_{j_1=1}^{n_1} \sum_{j_2=1}^{n_2} \dots \sum_{j_{s-1}=1}^{n_{s-1}} c_{j_1 j_2 \dots j_s} x_{j_1 j_2 \dots j_s} = \tilde{b}_{j_s}^{(s)}, j_s \in J_s;$$

$$x_{j_1 j_2 \dots j_s} \geq 0, j_1 \in J_1, j_2 \in J_2, \dots, j_s \in J_s, \text{ де}$$

величини потреб $\tilde{b}_{j_1}^{(1)}, \dots, \tilde{b}_{j_s}^{(s)}$ визначаються нечіткими трикутними числами [5].

На завершення варто зазначити, що ідея використання багатоіндексних транспортних задач є важливим прикладним інструментом у наукових дослідженнях у різних галузях економіки та транспорту [6].

Список використаних джерел

1. Раскин Л.Г. Многоиндексные задачи линейного программирования/ Л.Г. Раскин, И.О.Кириченко. – Москва: Радио и связь, 1982. – 240 с.
2. Junginger W. (1993) On representatives of multi-index transportation problems // Eur. J. Oper. Res. 66(3). p. 353-371.
3. Spieksma, F.C.R. (2000) Multi-index assignment problems: complexity, approximation, applications. In Pardalos, P.M. and Pitsoulis, L.S. (eds). Nonlinear Assignment Problems: Algorithms and Applications. – Dordrecht: Kluwer Acad. Publ. – P.1-11.
4. Мащенко С.О. Принятие решений при нечетком множестве состояний природы/ С.О.Мащенко. – Saarbrücken: LAP Lambert AP, 2013. – 109 с.
5. Ivohin E.V. Single-objective linear programming problems with fuzzy coefficients and resources/ E.V.Ivohin, Almodars B.S. Kaml. //Journ.Comp.& Appl.Math. – 2013. –1. – P.28-34.
6. Серая О.В. Многоиндексные нелинейные транспортные задачи / О.В.Серая, О.И. Дунаевская//Информационные и управляющие системы на железнодорожном транспорте. – Харьков: ХГИЖТ, 2009. – №5. – С.25-30.

References

1. RASKIN L. and KIRICHENKO I. (1982) *Multiindex linear programming problems* – Moskva: Radio and communication.
2. JUNGINGER W. (1993) *On representatives of multi-index transportation problems*. Eur.J.Oper.Res. 66(3). p.353-371.
3. SPIEKSMASMA, F.C.R. (2000) *Multi-index assignment problems: complexity, approximation, applications*. In Pardalos, P.M. and Pitsoulis, L.S. (eds). Nonlinear Assignment Problems: Algorithms and Applications. – Dordrecht: Kluwer Acad. Publ. – P.1-11.
4. MASCHENKO, S. (2013) *Decision support on fuzzy set of nature state*. – Saarbrücken: LAP Lambert AP.
5. IVOHIN E. and ALMODARS B. (2013) *Single-objective linear programming problems with fuzzy coefficients and resources*. Journ.Comp.&Appl.Math. 1. p.28-34.
6. SERAYA O. and DUNAEVSKAYA O. (2009) *Multi-index nonlinear transportation problems*. Informatic and control systems on railway transport. Kharkiv: KSIZT. 5. p.25-30.

Надійшла до редколегії 27.02.2014

УДК 004.23

Компан С.В.¹, аспірант

**Побудова інформаційної системи “Облік
робочого часу працівників вищого
навчального закладу”**

¹ Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 83000, м. Київ, пр-т.
Глушкова 4д,
e-mail: robin_2005@mail.ru

S.V. Kompan¹, postgraduate

**Information system construction “Working
time accounting of higher educational
establishments personnel”**

¹ Taras Shevchenko National University of Kyiv,
83000, Kyiv, Glushkova st., 4d,
e-mail: robin_2005@mail.ru

В статті проводиться аналіз предметної області для побудови інформаційної системи «Облік робочого часу працівників вищого навчального закладу». Визначені та документовані основні сутності предметної області та зв'язки між ними. Визначені обмеження, які накладаються на сутності. Визначені вимоги до інтерфейсу користувача, а також його практична реалізація. Показана доцільність використання типу даних ltree у базі даних та застосування отриманого раніше теоретичного результату побудови батьківського класу за двома класами, розповсюдивши результат на таблиці бази даних.

Ключові слова: організаційно-штатна структура, облік робочого часу, інформаційна система, проектування інформаційної системи, успадкування таблиць.

One of the factors of enterprise expenditure minimization and optimization of proprietorship in accordance with current market situation is information systems. The successful functioning of the latter is defined by the quality of its design and practical realization. The paper presents analysis of the subject area for information system construction “Working Time Accounting of Higher Educational Establishments Personnel”. The essence of the subject area under research is singled out and documented and the relationship between its basic notions is described. The restrictions that are superimposed on the essence are singled out. The user interface demands, as well as the interface practical realization, are outlined. The expedience of database use of the type ltree and the application of the earlier obtained research result of parent class construction for two classes by spreading the result on database tables is presented.

Key Words: organizational personnel structure, personnel inventory, employee, working time, working time accounting, information system, information system design, table inheritance.

Статтю представив д.ф.-м.н., професор Буй Д.Б.

Нагадаймо загальне змістовне означення: інформаційна система (ІС) – програмно-апаратний комплекс, який призначений для збереження та обробки інформації предметної області [1]. Стаття присвячена побудові ІС для предметної області, що характеризується такими основними поняттями (онтологіями):

Постановка задачі. Необхідно розробити ІС для ведення обліку робочого часу працівників ВНЗ. Для реалізації поставленої задачі потрібно створити відповідну ІС, в основі якої лежить база даних (БД). ІС «Облік робочого часу працівників ВНЗ» призначена для автоматизації обліку робочого часу працівників ВНЗ. Ця ІС повинна мати наступні функціональні можливості.

Ведення організаційно-штатної структури ВНЗ. Структуру організаційних одиниць (ОО)

ВНЗ (за іншою термінологією структурних підрозділів ВНЗ) можна представити у вигляді кореневого дерева, яке обмежене чотирма рівнями. А саме, на першому рівні знаходиться сутність “ВНЗ”, на другому рівні – “факультет (інститут)”, “ректорат”, на третьому рівні – “кафедра”, “деканат” і структурні підрозділи ректорату, на четвертому – “науково-дослідна лабораторія” (НДЛ) або науково-дослідний сектор (НДС). Задача ІС полягає у веденні цієї організаційно-штатної структури, тобто треба передбачити можливості редагування атрибутів ОО, знищення та додавання ОО.

Ведення штатних розписів структурних підрозділів (“деканат”, “кафедри”, тощо). ІС повинна містити інформацію про штатний розпис ВНЗ, що може представлятися у вигляді таблиці.

Також штатний розпис повинен містити найменування посад, чисельність персоналу, надбавки та доплати, посадові оклади. В таблиці код за класифікатором професій визначається згідно національного класифікатора професій ДК 003:2010 [2].

Ведення кадрового складу. ІС повинна містити інформацію про співробітників (штатних та сумісників), які прикріплені до ОО, та можливість виведення такої інформації в звітах. Такою інформацією є: П.І.Б, ОО, до якої прикріплений співробітник, посада (згідно штатного розпису), ставка, науковий ступінь, вчене звання, тощо.

Ведення графіків відпусток. ІС повинна містити графік відпусток кожного працівника ВНЗ, який може бути використаний для генерації звітів.

Облік робочого часу. ІС повинна мати можливість надавати працівнику фіксувати час початку та закінчення робочого дня, з вказанням причин невиходу на роботу. Також ІС повинна містити інформацію про обідню перерву працівника.

Генерація табелів обліку робочого часу та різних звітів. На основі інформації, яка міститься в ІС, повинна надаватися можливість генерації звітів про робочий час працівників за різноманітними критеріями.

Ведення історії змін сутності. ІС повинна надавати можливість вести історію змін атрибутів сутностей. Наприклад, історію зміни прізвища працівника, назв ОО, тощо.

Етап концептуального проектування – це створення концептуальної моделі даних, виходячи з представлення користувачів про предметну область. Для виконання цього етапу потрібно виконати ряд послідовних кроків.

Визначення сутностей та їх документування

Розглянемо основні сутності нашої предметної області:

- структурні підрозділи: ВНЗ, факультет (інститут), кафедра (деканат), НДІ (НДС);
- науково-дослідні теми – визначаються переліком тем, які виконуються в ВНЗ;
- штатний розпис, містить інформацію про посади структурного підрозділу;
- наукові ступені; наявний перелік (класифікатор) наукових ступенів, які можуть мати працівники ВНЗ: кандидат наук, доктор наук;
- вчені звання; наявний перелік (класифікатор) вчених звань, які можуть мати працівники ВНЗ;

старший науковий співробітник, доцент, професор;

- співробітник; задається інформація про співробітника: П.І.Б, дані для аутентифікації на сайті (логін та пароль), поштова адреса, вчене звання, науковий ступінь, фактичний і плановий графіки роботи, наявність адміністративних прав;

- посади; наявний перелік (класифікатор) посад штатних розписів: наприклад, інженер певної категорії, молодший науковий співробітник, науковий співробітник, асистент, доцент, професор, декан;

- облік робочого часу; визначається інформація про час початку і закінчення робочого дня працівника;

- причини відсутності на робочому місці; є перелік (класифікатор) причин, за яких працівник може бути відсутнім на робочому місці (лікарняний, відпустка, тощо);

- плановий графік роботи; визначається графік роботи, затверджений адміністрацією;

- робочий день; маються на увазі часові інтервали, під час яких працівник знаходився на робочому місці;

- відпустка; графік відпустки працівника на основному місці роботи;

- час життя сутності; ведення інформації про історію змін характеристик сутності.

Визначення зв'язків між сутностями та їх документування

Зв'язки між структурними підрозділами.

Структурний підрозділ підпорядковується одному структурному підрозділу (СП) вищого рівня, за винятком міжкафедральних факультетських лабораторій та міжфакультетських лабораторій. Кожна “наступна” сутність зв'язується з “попередньою” у відношенні “один до багатьох”.

Таблиці, що відповідають СП, мають однакові атрибути. Тоді можна скористатися результатом [3], який розповсюджується на таблиці, що задають сутності в БД. А саме, скористаємося механізмом успадкування таблиць, яке надає система управління базами даних (СУБД) PostgreSQL [4] та винесемо спільні атрибути в нову таблицю, яка буде батьківською; тоді таблиці, які описують СП, будуть похідними. Також потрібно враховувати той факт, що в батьківській таблиці будуть міститися всі записи похідних таблиць, які будуть мати атрибути схеми батьківської таблиці. Це дає можливість при вибірці записів з декількох таблиць замість використання в SQL-запиті конструкції UNION [ALL] (призначеної для об'єднання рядків таблиць), використовувати тільки батьківську таблицю. Виходячи з

наведених міркувань, побудуємо схему наступним чином

Зв'язок між сутностями факультет (інститут) – деканат. На кожному факультеті (інституті) є один деканат, тому такі сутності знаходяться у зв'язку один до одного (1:1).

Зв'язок між сутностями працівник – вчене звання (науковий ступінь). У випадку, коли працівник має декілька вчених звань (наукових ступенів), під час табелювання береться найвище звання (науковий ступінь). Тому ці сутності пов'язані між собою у відношенні 1:1.

Зв'язок між сутностями працівник – плановий графік роботи. Кожен працівник має графік роботи, затверджений адміністрацією, а також має фактичний графік роботи, який визначається з сутності робочий день.

Зв'язок між сутностями працівник, теми та штатний розпис. Кожен працівник на штатних засадах може працювати лише в одному СП. В той же час, він може працювати за сумісництвом в декількох інших СП. Працівник зараховується на тему (на одну на штатних засадах, на декілька тем за сумісництвом). Кожна тема виконується лише в одному СП. В СП можуть виконуватися декілька тем. Таким чином, сутності працівник і тема знаходяться в зв'язку багато до багатьох (M:N), а сутності тема і СП – у зв'язку багато до одного (M:1).

Зв'язок між сутностями причина та робочий день. В один робочий день працівник може мати одну причину невиходу на роботу. Тому вказані сутності знаходяться у відношенні 1:1. Розглянемо призначення атрибутів в таблицях. Зробимо припущення: якщо в двох таблицях присутні атрибути з однаковим іменем, то вони несуть однакове семантичне значення.

1) Таблиці Корінь СО, ВНЗ, Ректорат, Кафедра, Сектор (НДЛ) мають такі атрибути: id, depts_name, pidrozdil, unit. В таблицях атрибут id – первинний ключ таблиці, depts_name – ім'я підрозділу, pidrozdil – визначає місце даного підрозділу в організаційній структурі, яка представляється у вигляді деревоподібної структури та задається у вигляді чисел, розділених точкою; кожне число визначає приналежність до відповідного СП, unit – приймає одне з наступних значень: ВНЗ, ректорат, факультет, кафедра, сектор. Сутність факультет (інститут) має ще два додаткових атрибути iddecanat та idaspirantura, які слугують для зв'язку з таблицями Деканат і Відділ аспірантури.

2) В таблицях Деканат і Відділ аспірантури містяться атрибути, значення яких ми розглянули вище.

3) Таблиця Штатний розпис містить такі атрибути: id, posada – назва посади працівника згідно з класифікатором посад, pidrozdil, kodklasifikator – код посади згідно класифікатора посад, nadbavka – визначає для працівника значення надбавки за науковий стаж.

4) Таблиця РоботаПрацівник призначена для реалізації зв'язку M:N між таблицями Робота, Працівник, Штатний розпис; вона містить атрибути, в яких містяться ідентифікатори записів вищеназаних таблиць.

5) Таблиці Працівник та Робота (теми) містять такі атрибути: id, pidrozdil, chief та secretary – визначають відповідно керівника та секретаря (табельника) з таблиці Працівник, name – назва теми, startdata, enddata – відповідно дата початку і закінчення теми. Для назви робіт, які не є науковими темами, будемо використовувати атрибут pidrozdil.

Обмеження, які накладаються на атрибути таблиць в БД

Розглянемо обмеження на значення атрибутів таблиці.

- id – первинний ключ сутності “підрозділ”;
- path – має унікальне значення та останнє число повинно співпадати з id;
- Працівник, який працює в одному СП (на темі) має одну посаду, тому введемо обмеження на таблицю РоботаПрацівник: атрибути workid, userid – композитний первинний ключ.

Реалізація збереження історії змін сутності

Сутність протягом часу свого існування може зазнавати зміни. Так наприклад, у сутності факультет з часом може змінитися назва. Актуальна назва факультету необхідна при побудові звітів. Тому постає задача збереження історії змін сутності за часом. Цю задачу будемо вирішувати наступним чином: створимо додаткову таблицю (в ім'я додамо TTL – time to live), яка є копією таблиці, по якій потрібно відстежувати історію, додавши до нової таблиці два атрибута start і end. В цих атрибутах буде зберігатися дата початку та закінчення існування запису. Для поточного стану запису атрибут end буде рівний особливому значенню NULL.

Таблиця, по якій відстежується історія змін, буде зв'язана з таблицею, в якій ці зміни зберігаються, у відношенні 1:N.

Історія зміни сутності буде заноситися в таблицю за допомогою тригера, який буде спрацьовувати на додавання нового рядка (Insert),

оновлення атрибутів рядка (Update) та знищення рядка (Delete).

Уточнимо постановку задачі. ІС повинна надати користувачу можливість працювати в двох режимах: режим користувача та адміністративний режим (при наявності відповідного права). В режимі користувача працівник заходить шляхом вводу логіна та пароля на свою сторінку, на якій присутня інформація: поточний час, який береться з серверу БД, посада працівника згідно з штатним розписом відповідного СП, П.І.Б. працівника, системний час, обідня перерва. Кожен працівник повинен мати затверджений керівництвом графік роботи (будемо називати його плановим) та фактичний – це той час, який витрачає співробітник на робочий процес і який буде зберігатися в БД ІС. У випадку, коли працівник відсутній на робочому місці, ІС повинна надати можливість вказати причину відсутності. На сторінці користувача повинна відображатися інформація про плановий і фактичний графіки роботи.

Також передбачається, що ІС повинна зберігати історію змін назв СП ВНЗ, П.І.Б. працівників, планових графіків робочого часу, розміру ставки, тощо.

Вимоги до інтерфейсу користувача

На сторінці користувача повинні бути присутні дві кнопки: «початок роботи», «закінчення роботи». При натисненні на них в БД записується час відповідно початку і закінчення роботи працівника. При проектуванні ІС слід передбачити, що працівник може працювати як за основним місцем роботи, так і за сумісництвом на відповідну частину ставки.

В режимі користувача повинна бути присутня кнопка для переключення на режим адміністрування (при умові, що даному користувачеві надані адміністративні права). Адміністративний режим надає можливість: 1) змінювати інформацію про ВНЗ, СП, П.І.Б, посади працівників, їх планові графіки роботи, розміри ставки; 2) додавати нових користувачів, надавати їм логін, пароль, встановлювати право входити в адміністративний режим; 3) додавати працівника до СП. Також в цьому режимі повинна надаватися можливість введення планового графіку роботи працівника.

Практична реалізація задачі

Програмну реалізацію ІС проведемо за технологією клієнт-сервер. При розробці ІС слід її розділити на дві складові: інтерфейс користувача, який будемо називати фронтенд (front-end), та серверна частина, куди будуть входити в якості

компонент веб-сервер та БД. Доступ до ІС повинен бути з будь-якого комп'ютера локальної мережі ВНЗ. Тоді доцільно логіку роботи ІС перенести на сторону серверної частини, що полегшить здійснення супроводження ІС.

При розробці ІС в першу чергу потрібно визначитися з СУБД. При цьому виборі треба визначитися з моделлю даних (сукупністю структур даних та операцій над ними). Як відомо, поширеними моделями даних є: реляційна, об'єктна та об'єктно-реляційна. Також при виборі СУБД доцільно враховувати, чи надає конкретна СУБД можливість здійснювати успадкування таблиць. Це надасть більш гнучкі можливості побудови таблиць сутностей. Можливість успадковувати таблиці дає нам об'єктно-реляційна СУБД. В якості реалізації фронтенду та його взаємодії з БД доцільно обрати об'єктно-орієнтовану мову програмування (framework), яка надасть завдяки відомим концепціям об'єктно-орієнтованого програмування (інкапсуляція, успадкування, поліморфізм) широкі можливості та гнучкість при написанні коду програми.

В якості web сервера будемо використовувати Apache [5]. Реалізовувати інтерфейс користувача будемо на мові програмування Python [6], з використанням фреймворку для веб-додатків Django [7], який дозволить здійснювати зв'язок інтерфейсу користувача з БД. В якості СУБД візьмемо об'єктно-реляційну СУБД Postgresql [4, 8]. Дана СУБД має переваги над іншими завдяки тому, що вона є об'єктно-реляційною, з можливістю успадкування таблиць, дозволяє працювати з складними типами даних, підтримує можливість створювати типи даних користувача. В даній СУБД підтримується можливість використання тригерів та збережених процедур. Вона також надає можливість встановлювати обмеження цілісності на атрибути таблиці, а саме: not null – не NULL; unique – унікальність; primary key – первинний ключ; foreign key/references – зовнішні ключи, посилання; check – перевірка; exclude – перевірка унікальності по складній умові.

В БД передбачається використовувати нестандартні типи даних. Як зазначалося вище, такі сутності предметної області як СП можна описати за допомогою деревоподібної структури. Тоді доцільно використати тип даних Itree, який дозволяє зберігати деревоподібні структури в вигляді міток, а також надає широкі можливості пошуку по них.

Дамо обґрунтування переваги використання саме такого типу даних. Предметна область, як

було сказано вище, має такі сутності: ВНЗ, факультет (інститут), кафедра, НДЛ (НДС). Кожному СП відповідає рядок відповідної таблиці БД. Елемент однієї сутності може мати декілька елементів іншої (підпорядкованої) сутності. Наприклад, в ВНЗ є факультети (інститути), кожен факультет містить принаймні три кафедри (які в свою чергу можуть містити декілька лабораторій та секторів).

Для реалізації цієї можливості в БД таблиці, які відповідають вказаним сутностям, повинні бути з'єднані за допомогою зовнішніх ключів. При такому підході в SQL-запиті для визначення, наприклад, всіх лабораторій (секторів) деякої кафедри, яка знаходиться на вказаному факультеті, певного ВНЗ треба застосувати з'єднання чотирьох таблиць.

Як відомо, використання з'єднання суттєво впливає на швидкість виконання запитів; саме тому був обраний тип даних *ltree*.

В результаті замість чотирьох таблиць буде використовуватися тільки одна, в якій в одному з атрибутів буде знаходитися мітка у точковій нотації, що буде визначати приналежність даної структурної одиниці до інших.

Список використаних джерел

1. А.С. Грошев Базы данных. Учебное пособие / Грошев А.С. – Архангельск, 2005. – 111 с.
2. Класифікатор професій України ДК 003:2010 [Електронний ресурс] <http://www.dk003.com/>
3. Буй Д.Б. Диаграммы классов ООП: формализация и анализ / Д.Б. Буй, С.В. Компан // Труды ИПММ НАН Украины. – 2013. – Т. 27. – С. 51-65.
4. Документация по PostgreSQL 9.1.1. Наследование / [Електронний ресурс] <http://postgresql.ru.net/manual/ddl-inherit.html>
5. Apache HTTP Server Project [Електронний ресурс] <http://httpd.apache.org>
6. Мова програмування Python [Електронний ресурс] <https://www.python.org/>
7. Фреймворк Django [Електронний ресурс] <https://www.djangoproject.com/>
8. СУБД PostgreSQL [Електронний ресурс] <http://www.postgresql.org/>

Покажемо це на прикладі. Нехай Київський національний університет імені Тараса Шевченка має ключовий ідентифікатор *id=1*, факультет кібернетики має відповідно *id=3*, а кафедра теорії та технології програмування *id=2*. Тоді для того, щоб показати однозначну приналежність кафедри відповідному факультету та університету, будується мітка вигляду 1.3.2.

Висновки

В статті наведені функціональні можливості ІС “Облік робочого часу працівників ВНЗ”. Проведено визначення сутностей, їх документування, зв'язки між ними. Визначено обмеження, які накладаються на атрибути таблиць в БД. Запропоновані шляхи практичної реалізації цієї системи. Запропонована реалізація збереження історії змін сутності. Показано практичне застосування результату щодо винесення спільних атрибутів в батьківський клас, викладеного в [3]. Наступним кроком реалізації ІС планується її практична реалізація.

References

1. GROSHEV, A.C (2005) *Bazy dannyh. Uchebnoe posobie*. Archngelsk.
2. *Klassifikator profesiy Ukrainy DK 003:2010* [Online] Available from: <http://www.dk003.com/> [Accessed: 19th May 2014].
3. Buy D.B. (2013) *Diagrammy klassov OOP: formalisatsia i analis*. Trudy IPMM NAN Ukrainy, tom 27, pp. 51-65
4. *Postgresql 9.1. Inheritance* [Online] Available from: <http://www.postgresql.org/docs/9.1/static/tutorial-inheritance.html> [Accessed: 19th May 2014].
5. *Apache HTTP Server Project* [Online] Available from: <http://httpd.apache.org> [Accessed: 19th May 2014].
6. *Python* [Online] Available from: <https://www.python.org/> [Accessed: 19th May 2014].
7. *Python Web framework Django* [Online] Available from: <https://www.djangoproject.com/> [Accessed: 19th May 2014].
8. *DBMS PostgreSQL* [Online] Available from: <http://www.postgresql.org/> [Accessed: 19th May 2014].

Надійшла до редколегії 22.05.14

УДК 004.72;681.5

Роман Ф. Мазур¹, аспірант

Roman F. Mazur¹, Postgraduate Student

Широкомовна передача повідомлень на базі топології гіперкуба у мобільних ad hoc мережах на прикладі моделі натовпу

Broadcasting in mobile ad hoc networks on the basis of hypercube topology: case of a crowd

¹ Національний університет “Києво-Могилянська академія”, 04655, м. Київ, вул. Г. Сковороди, 2,
e-mail: mazur.roman@gmail.com

¹ National University of “Kyiv-Mohyla Academy”, 04655, Kyiv, Skovorody str., 2,
e-mail: mazur.roman@gmail.com

Ad hoc мережі можуть служити потужним інструментом вирішення задач комунікації між мобільними пристроями, які переносяться людьми у натовпі. У таких умовах стандартні засоби зв'язку часто відмовляють через високе навантаження на централізовані елементи мереж. У даній роботі пропонується підхід до організації широкомовної передачі повідомлень в мобільних ad hoc мережах, який базується на ідеї побудови гіперкубічної топології зв'язків між вузлами. Описується процес моделювання широкомовної передачі повідомлень у натовпі людей на базі симулятора ONE та порівнюється робота запропонованого методу з лавиноподібним алгоритмом.

Ключові слова: широкомовна маршрутизація, ad hoc мережі, гіперкуб.

Bluetooth and Wi-Fi technologies used by modern mobile devices can transform principles of networks organization on the base of self-organization ideas. Ad hoc networks can be a powerful instrument for solving task of communication between mobile devices that are carried by people in a crowd. In such conditions standard communication means often fail due to high load on centralized nodes. The article describes an approach to messages broadcasting organization in mobile ad hoc networks. The method is based on an idea of building a hypercube topology of links between nodes. As a result mobile nodes connections are self-organized reducing number of links used by each node. It is described how broadcast transmissions in people crowd are modeled with use of simulator ONE. Also performance of the suggested method is compared to epidemic algorithm, which shows that the proposed approach reduces overhead in data transmitted between nodes maintaining the same level of delivery probability.

Keywords: broadcasting, ad hoc networks, hypercube.

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Анісімов А. В.

Вступ

У наш час мобільний телефон став практично неодмінним атрибутом кожної людини, ефективно задовольняючи нашу потребу у зв'язку. В останні роки можливості цих пристроїв вийшли далеко за рамки створення з'єднання з оператором, надаючи нам можливості користуватися такими технологіями, як Bluetooth, Wi-Fi та NFC. Це, у свою чергу, зумовлює утворення мобільних ad hoc мереж, де комунікація між вузлами здійснюється через тимчасові з'єднання між пристроями, які опиняються в зоні досяжності один одного. Рух людей, які переносять свої мобільні телефони, створює високу динаміку зміни стану з'єднання вузлів у таких мережах.

Завдяки тому, що мобільні ad hoc мережі не потребують заздалегіть створеної інфраструктури, вони можуть дуже швидко розгортатися у реальному середовищі. Це робить їх привабливими для застосування у військовій сфері або в системах оповіщення про небезпеку [1]. У даній роботі розглядається близька до зазначених вище сфера застосування: вирішення проблем комунікації людей у натовпі, де звичайні засоби стільникового зв'язку перестають працювати через велике навантаження на вишки операторів [2]. А саме, розглядається задача широкомовної передачі повідомлень у натовпі.

На відкритому просторі телефони, які підтримують технологію Wi-Fi, можуть взаємодіяти один з одним на відстані

до 150 м [3]. При такому радіусі дії в умовах натовпу кожен з вузлів має дуже велику кількість потенційних зв'язків. При цьому, внаслідок відсутності фіксованої інформації про структуру мережі, для кожного вузла виникає проблема відбору тих з'єднань, які повинні бути використаними для успішної доставки повідомлення усім пристроям. Одним з перших рішень поставленої задачі є лавиноподібна маршрутизація, яка зумовлює використання всіх потенційних з'єднань для передачі повідомлення. На відміну від попереднього, запропонований у роботі підхід має мету зменшити кількість використаних зв'язків за рахунок внесення певної організації між вузлами.

Використання топології гіперкуба

Зменшити кількість з'єднань, які використовуються для ширококомовної передачі повідомлень, можна використавши побудований підграф із графа ad hoc мережі. При цьому в умовах великої кількості потенційних зв'язків між вузлами важливо, щоб між ними формувалася топологія, яка забезпечить рівномірне навантаження на кожен з пристроїв. Тобто варіація значень степеня вершин утвореного підграфа має бути невисокою, а в ідеалі повинен формуватися однорідний граф. Однією з таких топологій є гіперкуб.

Запропонований підхід передбачає присвоєння кожній з вершин графа мережі $G = \langle V, E \rangle$ номера вершини гіперкуба з подальшою активацією тих ребер у графі, які є частиною побудованого гіперкуба $G' = \langle V', E' \rangle$. Активовані ребра вказують на з'єднання між вузлами, які необхідно задіяти при ширококомовній передачі повідомлень (рис. 1).

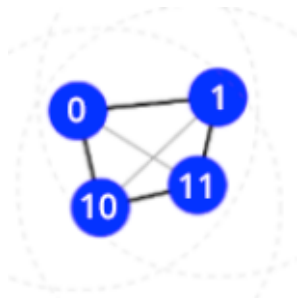


Рис. 1 Активація ребер, які належать утвореному гіперкубу. Тоншими лініями показано ті зв'язки, які не будуть використовуватися для передачі повідомлень.

Усі потенційні з'єднання вершини $v_i \in V$ можна описати як

$$L^i = \{(v_i, v_j) \in E \mid i \neq j, v_j \in V\}. \quad (1)$$

Тоді функція f , яка повертає з'єднання, які використовуються при передачі повідомлень, приймаючи на вході всі потенційні з'єднання, є функцією тотожності для лавиноподібного алгоритму:

$$f_e(L^i) = L^i. \quad (2)$$

Тоді як при застосуванні підходу на базі топології гіперкуба вказана функція може зменшувати об'єм множини ребер, відфільтровуючи ті з них, які не належать графу гіперкуба:

$$f_h(L^i) = L^i \cap E'. \quad (3)$$

Для побудови гіперкуба G' потрібно визначитися, як формується код кожної з вершин. Для цього розглянемо ситуацію, коли в зоні досяжності вузла v_i опиняється набір вузлів $X^i = \{v_j \in V \mid (v_i, v_j) \in L^i\}$, кожен з яких вже має визначений код a_j вершини в гіперкубі G' . При цьому вважатимемо, що кожен з вузлів множини X^i має інформацію про коди усіх вершин зі своєї зони досяжності. Тобто, для вершини v_i окрім множини кодів $A^i = \{a_j \mid v_j \in X^i\}$ ми також маємо набір кодів вершин, які належать найближчому оточенню вузлів множини X^i : $B^i = \bigcup_{v_k \in X^i} A^k$.

Маючи на вході множини A^i та B^i , необхідно знайти код вершини a_i .

Лема. Гіперкуб з кодами вершин A та однією невідомою вершиною має розмірність d , таку що

$$d \leq \rho(A) = \lceil \log_2 \max(A) \rceil + 1 \quad (4)$$

Оскільки ця вершина повинна належати гіперкубові, то шуканий код має бути одним із сусідніх кодів для множини A^i . Використавши функцію ρ з формули (4), можемо визначити набір сусідніх кодів, який нас цікавитиме:

$$\eta(A) = \bigcup_{a_k \in A} \{a_k \oplus 2^m \mid m = 0.. \rho(A)\} \quad (5)$$

та накласти першу умову на шуканий код a_i :

$$a_i \in \eta(A^i). \quad (6)$$

Друга умова, яку повинен задовольняти код a_i , також очевидна: він не повинен повторити жоден з кодів множин A^i та B^i :

$$a_i \notin A^i \cup B^i. \quad (7)$$

Отже, задача визначення наступного коду вершини зводиться до задачі пошуку елемента в множині (5) з обмеженнями (6) та (7). Це дозволяє нам будувати підграф гіперкуба G' та використовувати правило (3) для відбору зв'язків з множини (1)

Варто відзначити, що оскільки множини A^i та B^i не несуть інформації про всю ad-hoc мережу, у загальному графі G коди вершин можуть дублюватися (рис. 2).



Рис. 2 Ситуація дублювання кодів вершин гіперкуба у мережі через відсутність інформації про весь граф у кожного з вузлів

Однак на роботу запропонованої схеми дублювання кодів вершин не впливає.

Моделювання широкомовної передачі

Задачу широкомовної передачі повідомлень було розглянуто на моделі натовпу людей кількістю 200 чоловік, який знаходиться на площі міста розміром 200 м x 200 м. За модель переміщення було обрано Random Waypoint: кожен вузол починає з того, що чекає на одному місці випадковий проміжок часу, а далі рухається з рівномірною швидкістю до певної точки. Усі параметри використаної моделі наведено у таблиці 1.

Таблиця 1

Параметри моделі переміщення Random Waypoint

Параметр моделі	Діапазон можливих значень
Кількість вузлів	200
Розмір території	200 м x 200 м
Час очікування в одній точці	0 - 2 хв
Швидкість руху	0,5 - 1,5 м/с

Для моделювання маршрутизації з визначеним інтервалом генеруються широкомовні повідомлення певного об'єму, випадково обираючи вузол-відправник. Далі, використовуючи з'єднання, які диктуються алгоритмом маршрутизації, та враховуючи їхню швидкість, відбувалася передача згенерованих повідомлень на інші вузли. Параметри моделі маршрутизації зведено у таблиці 2.

Таблиця 2

Параметри моделі маршрутизації

Параметр моделі	Діапазон можливих значень
Загальний час моделювання	200
Інтервал генерації нового повідомлення	200 м x 200 м
Розмір повідомлень	0 - 2 хв
Швидкість з'єднання	0,5 - 1,5 м/с
Розмір буферу маршрутизаторів	5 МБ
Радіус покриття кожного з вузлів	10 м, 30 м, 50 м, 90 м

Моделювання здійснювалося на базі симулятора опортуністичних мереж ONE, який було розширено з метою реалізації моделі широкомовної передачі повідомлень. Зокрема, було додано підтримку генерації широкомовних повідомлень та їх обробку на рівні маршрутизаторів у вузлах.

Приклад топології, утвореної під час моделювання зображено на рис. 3.

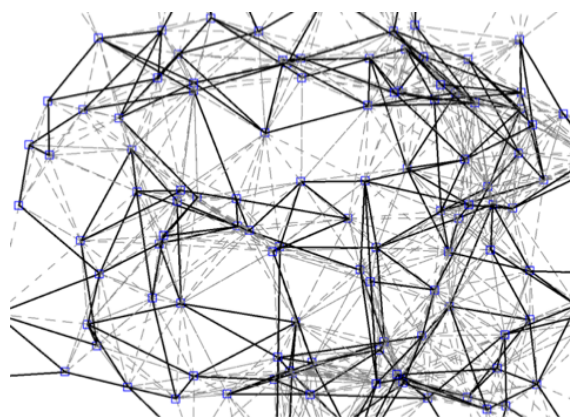


Рис. 3 Фрагмент ad hoc мережі під час моделювання з використанням алгоритма маршрутизації на основі топології гіперкуба. Суцільними лініями показано зв'язки, які входять у гіперкуб, пунктиром - можливі з'єднання між вузлами, які не входять у гіперкуб.

Результати моделювання

Результати моделювання включають дані для двох алгоритмів маршрутизації: лавиноподібного та на основі топології гіперкуба. Перший з них зумовлює передачу повідомлень, використовуючи всі можливі з'єднання вузла, тоді як другий використовує лише ті, що є частиною зв'язків побудованого гіперкуба (рис. 3).

Для порівняння роботи алгоритмів використовуються коефіцієнт витрат O та імовірність успішної доставки повідомлень P , які обчислюються за формулою (8).

$$O = \frac{(N_r - N_c)}{N_c}, P = \frac{\sum_{i=1}^{N_c} N_d^i}{N_c}, \quad (8)$$

де

N_r - сумарна кількість виконаних передач повідомлень між парами вузлів;

N_c - загальна кількість створених повідомлень у мережі протягом всього часу моделювання;

N_d^i - кількість вузлів, у які було доставлено повідомлення i ;

N - загальна кількість вузлів.

Порівняльні діаграми цих показників для двох алгоритмів, задіяних в моделюванні, наведено на рисунках 4 та 5.

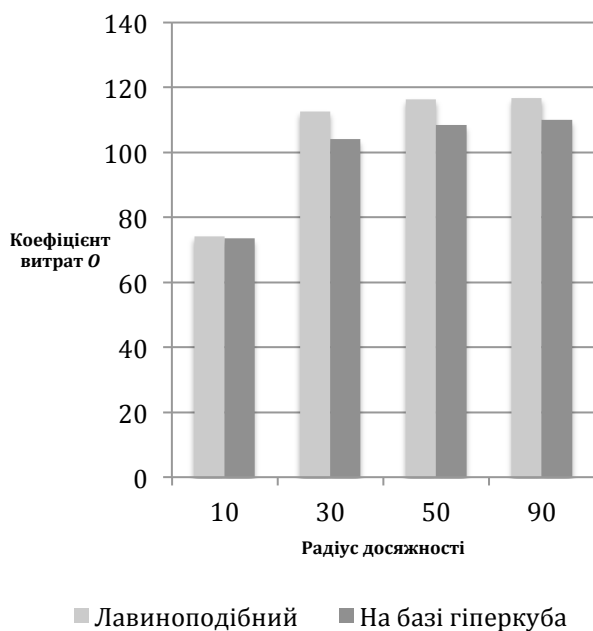


Рис. 4 Значення коефіцієнта витрат при різних радіусах досяжності.

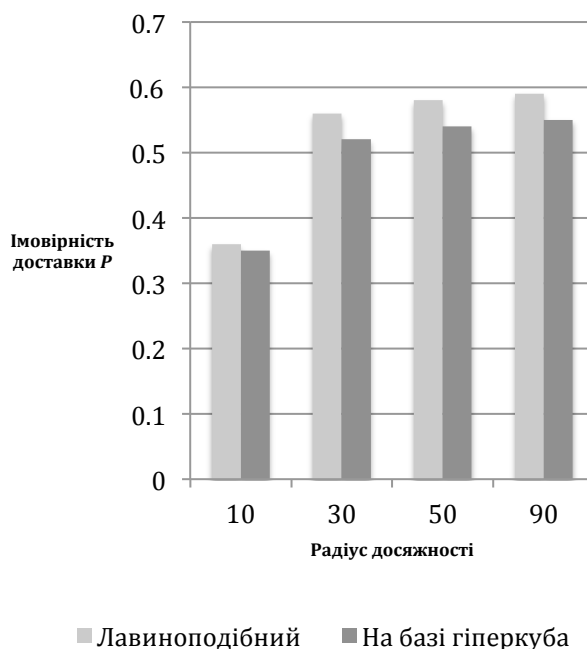


Рис. 5 Значення імовірності успішної доставки при різних радіусах досяжності.

З діаграм, зображених на рисунках 4 та 5, можливо зробити висновок, що запропонований підхід до широкомовної передачі повідомлень дозволяє зменшити надлишок даних, які передаються в мережі підтримуючи імовірність успішної доставки повідомлень на рівні близькому до того, що можна отримати з лавиноподібним алгоритмом.

Висновки

Результати моделювання запропонованого алгоритму вказують на перспективність розвитку підходів, орієнтованих на саморганізацію визначеної топології у мобільних ad hoc мережах, оскільки вони зменшують надлишковість даних, які передаються в мобільних ad hoc мережах.

У статті докладно описано параметри використаних моделей, а сам код, використаний для емуляції опубліковано на ресурсі github.com [4] для максимальної простоти відтворюваності проведених експериментів, що є дуже важливим для подібних праць [5].

Список використаних джерел

1. *Andel T.* On the credibility of manet simulations / T. Andel, A. Yasinsac. // *Computer*. – 2006. – №37. – С. 48–54.
2. Cellular traffic offloading through opportunistic communications: a case study / [B. Han, P. Hui, A. Kumar та ін.]. // In *Proceedings of the 5th ACM workshop on Challenged networks*. – 2010. – С. 31–38.
3. Feasibility study of mobile phone WiFi detection in aerial search and rescue operations / [W. Wang, R. Joshi, A. Kulkarni та ін.]. // In *Proceedings of the 4th Asia-Pacific Workshop on Systems*. ACM.. – 2013. – С. 7.
4. *Mazur R.* Hypercube based routing for MANETs [Електронний ресурс] / Roman Mazur. – 2014. – Режим доступу до ресурсу: <https://github.com/roman-mazur/hadress>.
5. *Kurkowski S.* MANET simulation studies: the incredibles / S. Kurkowski, T. Camp, M. Colagrosso. // *ACM SIGMOBILE Mobile Computing and Communications Review*. – 2005. – №9. – С. 50–61.

References

1. ANDEL T.R., YASINSAC A. (2006) On the credibility of manet simulations. *Computer*. 37 (7). p. 48-54.
2. HAN B., HUI P., KUMAR V. S., MARATHE M. V., PE, G., SRINIVASAN, A. (2010) Cellular traffic offloading through opportunistic communications: a case study. *In Proceedings of the 5th ACM workshop on Challenged networks*. September. p. 31-38.
3. WANG W., JOSHI R., KULKARNI A., LEONG, W. K., LEONG B. (2013) Feasibility study of mobile phone WiFi detection in aerial search and rescue operations. *In Proceedings of the 4th Asia-Pacific Workshop on Systems*. ACM. July. p. 7.
4. MAZUR R. (2014) *Hypercube based routing for MANETs*. [Online] Available from: <https://github.com/roman-mazur/hadress> [Accessed: 14th April 2014]
5. KURKOWSKI S., CAMP T., COLAGROSSO M. (2005) MANET simulation studies: the incredibles. *ACM SIGMOBILE Mobile Computing and Communications Review*. 9 (4). p. 50-61.

Надійшла до редколегії 17.04.2014

УДК 519.8

Маляр М.М.¹, к.т.н., доц., докторант

N. N. Malyar¹, PhD

Моделювання обмеженого раціонального вибору з використанням нечітких множин

Modeling bounded rational choice using fuzzy sets

¹ Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, пр-т Глушкова 4д, e-mail: malyarmm@gmail.com

¹ Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03680, Kyiv, Glushkova av., 4d, e-mail: malyarmm@gmail.com

Розглядається підхід для вирішення задач багатокритеріального вибору. Запропоновано модель вибору, яка базується на ідеї обмеженої раціональності з використанням апарату нечітких множин.

Ключові слова: багатокритеріальність, задоволення вимог, нечіткі множини, обмежена раціональність

This paper addresses the problem of rational decision on a finite set of alternatives. Typically, these problems are described by means of multicriteria choice model types which are provided. The approach of constructing a model selection problem from the point of view of the theory of bounded rationality by H. Simon, with the use of fuzzy sets is described. The concept point "meet the requirements" is introduced. A model for constructing membership functions of fuzzy sets using the terms "meet the requirements" and convolution models that characterize pessimistic, cautious, moderate, optimistic estimates based on piecewise linear, exponential and Gaussian functions are proposed. We displayed wording of some fuzzy sets. We describe a general scheme for solving the problem of choice, based on this approach. The proposed approach allows us to build a model of multi-task selection in a finite set of alternatives. The result is the construction of fuzzy sets in terms of "best alternative" with the appropriate membership function. List of the advantages of this approach are given.

Key Words: multi-criteria, meet the requirements, fuzzy sets, bounded rationality

Статтю представив д.т.н., проф. Волошин О.Ф.

Вступ. Вирішення проблем, які виникають в сучасному суспільстві, пов'язано з прийняттям рішень у надзвичайно складних умовах. Складність умов обумовлюється необхідністю врахування величезних об'ємів різномірної інформації, яка, до того ж, характеризується невизначеністю або неточністю. Проблема прийняття рішень найбільш адекватно відображається за допомогою моделей багатокритеріального вибору [1,2]. Розглянемо класичну задачу багатокритеріального вибору. Нехай задано множину рішень (альтернатив), реалізація кожної з яких приводить до настання деякого наслідку, який оцінюється за деякою множиною критеріїв. Оцінка наслідків за вибраними критеріями ефективності визначає ступінь переваги відповідних альтернатив. Потрібно побудувати модель вибору найкращої альтернативи

відповідно до заданих критеріїв ефективності.

Побудова математичної моделі такої задачі супроводжується врахуванням деяких реальних умов, які можна виразити наступним чином. По-перше, критерії за якими проводиться оцінка множини альтернатив мають різні розмірності, визначені у різних шкалах, покращенням результату вважається по деяких показниках їх зростання, по інших – спадання. По-друге, не завжди найкращим результатом вважається екстремальне значення того чи іншого показника.

Як показав Г.Саймон [3], у багатьох випадках раціональним вибором вважається деякий задовольняючий результат.

Постановка задачі багатокритеріального вибору. Вимоги, які ставляться до процедури вибору, визначають вид задачі прийняття рішень. Найбільш поширеними

вважаються наступні задачі вибору [2]:

1. Класифікація простору альтернатив. Задачі розбиття альтернатив на класи зустрічаються у повсякденному житті. Наприклад, групи товарів розрізняються за якістю, вузи класифікуються по рівнях акредитації, тестові завдання по рівню складності.

2. Упорядкування альтернатив. Існує багато задач, які потребують визначення порядку на множині альтернатив. Це в основному моделювання проблеми рейтингування. Наприклад, упорядкування покупок по ступеню необхідності, визначення порядку виконання замовлень, надання пріоритетів напрямам розвитку країни.

3. Вибір найкращої альтернативи. Дана задача вважається основною в прийнятті рішень. Наприклад, вибір вузу, спеціальності, професії, місця роботи, вибір найкращого варіанту бюджету.

Системна модель задачі вибору може бути представлена наступним чином:

$$\{V, K, O, A, P_V \mid R_V\}.$$

Відомими являються:

- V – вид задачі вибору,
- K – множина критеріїв,
- O – шкали оцінок,
- A – множина альтернатив,
- P_V – правило вибору.

Невідомим R_V – результат вибору.

Результат вибору може бути:

- альтернативи розбиті на класи
 $R_v = \{(a, q) \mid a \in A, q - \text{клас (назва)}\},$
- визначений порядок альтернатив
 $R_v = \{(a, p) \mid a \in A, p - \text{ранг (номер)}\},$
- вибрано одну або декілька альтернатив

$$R_v = \left\{ a^* = \arg \operatorname{opt}_{a \in A} P_v(K(a)) \right\}.$$

Розглянемо клас задач коли множина альтернатив $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ є скінченною, а множина критеріїв – це множина критеріальних оцінок $K = \{K_1, K_2, \dots, K_m\}$, значення яких або обчислюється за допомогою моделей, або отримано в результаті вимірювання, або за допомогою експертних оцінок. Позначимо оцінки альтернатив через $x^j (j = \overline{1, n})$, таким чином, кожен альтернативу буде представлено у вигляді вектора $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ з простору R^m .

Множина X буде складатись із n оцінок альтернатив: $X = (x^1, x^2, \dots, x^n)$. В подальшому, під альтернативою будемо розуміти її оцінку, тобто будь-яка альтернатива $a \in A$ буде асоціюватися з відповідною оцінкою $x \in X$.

Зпівставивши кожній альтернативі a_j вектор $x^j \in R^m (j = \overline{1, n})$, задачу вибору на скінченній множині можна представити у вигляді таблиці 1.

Таблиця 1

	x^1	x^2	...	x^n
K_1	x_1^1	x_1^2	...	x_1^n
K_2	x_2^1	x_2^2	...	x_2^n
...	...	...	...	...
K_m	x_m^1	x_m^2	...	x_m^n

Математичну модель задачі вибору запишемо наступним чином: поставимо у відповідність кожній альтернативі x^j m -вимірний вектор оцінок по сформульованих критеріях,

тобто $x_i^j = O_{ij} = K_i(x^j), i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n}$, тоді

модель задачі вибору запишеться у вигляді матриці рішень:

$$O = \begin{pmatrix} O_{11} & O_{12} & \dots & O_{1n} \\ O_{21} & O_{22} & \dots & O_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ O_{k1} & O_{k2} & \dots & O_{kn} \end{pmatrix}, \quad (1)$$

де кожен стовпець матриці (1) є m -вимірний вектор оцінок відповідної альтернативи на всій множині критеріїв, а кожен рядок є n -вимірним вектором оцінок за відповідним критерієм всієї множини альтернатив X , O_{ij} – це оцінка j -альтернативи за i -критерієм.

Як видно з вище наведеного, задача вибору описана на критеріальній мові, але для її розв'язання ми запропонуємо використати і мову «нечітких множин».

Модель задачі обмеженої раціональності. Опишемо задачу вибору з точки зору теорії обмеженої раціональності[3]. Припустимо, що ОПР при виборі раціонального рішення прагне вибрати той варіант, який за всіма оцінками приймає екстремальні значення. Такий вибір, як правило, є неможливим. Це пов'язано з непорівнянністю альтернатив. Тому ОПР на практиці переслідують цілі «задоволеності», а

не «екстремальності» (максимізації або мінімізації). Задоволеність трактується як результат, який є досить хорошим і потребує мінімум зусиль. Такий результат в літературі називається варіантом обмеженої раціональності.

Проблемою оцінки задоволеності є те, що сама задоволеність за змістом є поняття розмитим. Тому доцільно для його описання застосувати апарат нечітких множин. Як показує практика на сучасному етапі розрізняють два типи нечітких множин:

- нечіткі множини, які визначені на деякій числовій шкалі і задаються у вигляді нечітких чисел або нечітких інтервалів;

- нечіткі множини визначені на нечисловій множині у вигляді множин «нечітких об'єктів».

Запропонуємо підхід, який дозволяє побудувати математичну модель задачі багатокритеріального вибору задовольняючого результату на скінченній множині альтернатив [4].

Введемо у розгляд m -вимірний вектор $T = (t_1, \dots, t_m)$ з простору R_{++}^m , компоненти якого будуть оцінки, які могли б задовольняти особу, що приймає рішення (ОПР) на відповідній множині критеріїв.

Означення. Точкою «задоволення вимог» (в подальшому просто точкою «задоволення») називається уявна альтернатива, в якій оцінки за всіма критеріями могли б задовольняти ОПР.

Назвемо вектор T точкою «задоволення вимог» ОПР. Точка «задоволення» може бути як досяжною (реальною), так і недосяжною (ідеальною).

Побудова нечітких критеріальних множин. Як відомо[5], нечітка множина описується множиною самих елементів і ступенем належності їх цій множині. Виходячи із постановки задачі, візьмемо за множину елементів множину оцінок альтернатив X , а функцію належності позначимо через $\mu_A(x)$, тоді нечітка множина A_T запишеться наступним чином:

$$A_T = \{x, \mu_A(x)\}, x \in X. \quad (2)$$

Оскільки, кожна альтернатива $x \in X$ представляє собою точку m -вимірного евклідового простору R^m , тоді на множині альтернатив X можемо визначити деяку нечітку множину A_T , наприклад, «альтернатив

близьких до точки задоволення». Функція належності $\mu_A(x)$ характеризує «ступінь належності» альтернативи $x \in X$ нечіткій множині A_T , таким чином це буде функція належності твердження «точка x близька до точки T ».

Питання побудови функції належності є одним із найважливіших питань у теорії розмитих множин. Опишемо підхід побудови функції належності $\mu_A(x)$ з врахуванням особливостей задач вибору, що розглядаються.

Моделі функції належності. За своєю суттю функція належності визначає порядок елементів для нечіткої множини. Для простих категорій інформації оцінка функції належності є задачею з теорії психологічного вимірювання. Для більш складних категорій інформації, які визначаються на декартовому добутку лінійних шкал, функція належності може бути визначена як згортка оцінок інформації простих категорій.

Нехай нам відома матриця рішень (1) і задана точка «задоволення» $T = (t_1, \dots, t_m)$. Припустимо, що переваги ОПР можна представити за допомогою нечітких чисел, функція належності яких задається за певним видом моделі. Оцінка j -ї альтернативи за i -м критерієм визначається величиною нечіткого числа z_{ij} .

Визначимо множину величин $z_{ij}, i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n}$, використовуючи одну з наступних моделей:

1. Кусково-лінійна

$$z_{ij} = 1 - \frac{|t_i - O_{ij}|}{\max\left\{t_i - \min_j O_{ij}; \max_j O_{ij} - t_i\right\}}, \quad (3)$$

2. Показникова (Пуассонівська)

$$z_{ij} = 1 - e^{-|t_i - O_{ij}| / \max\left\{t_i - \min_j O_{ij}; \max_j O_{ij} - t_i\right\}}, \quad (4)$$

3. Гаусівська

$$z_{ij} = 1 - e^{-\frac{(t_i - O_{ij})^2}{\max\left\{t_i - \min_j O_{ij}; \max_j O_{ij} - t_i\right\}}}. \quad (5)$$

Кожна така величина є відносною оцінкою близькості елемента матриці (1) до відповідного елемента точки «задоволення». Оскільки кожна альтернатива $x \in X$ є точкою

простору R_{++}^m , то визначена таким чином матриця $Z = (z_{ij})$ характеризує по стовпцях відносні оцінки близькості альтернативи x^j до точки «задоволення» T для кожного конкретного критерію і знімає питання різних шкал оцінювання.

Наступним кроком є побудова функції належності, як функції згортки даних числових величин. Нехай ОПР може задати вагові коефіцієнти кожному критерію ефективності $\{p_1, p_2, \dots, p_m\}$. Тоді визначимо нормовані вагові коефіцієнти для кожного критерію ефективності:

$$\alpha_i = \frac{p_i}{\sum_{i=1}^m p_i}, \quad i = \overline{1, m},$$

які відповідають умові $\sum_{i=1}^m \alpha_i = 1$.

Далі будемо функцію належності, як одну із запропонованих згорток, з урахуванням психосоматичного типу ОПР[6]:

$$\mu_A^2(x^j) = \frac{1}{\sum_{i=1}^m \frac{\alpha_i}{z_{ij}}}, \quad (6)$$

$$\mu_A^3(x^j) = \prod_{i=1}^m (z_{ij})^{\alpha_i}, \quad (7)$$

$$\mu_A^4(x^j) = \sum_{i=1}^m \alpha_i z_{ij}, \quad (8)$$

$$\mu_A^5(x^j) = \sqrt{\sum_{i=1}^m \alpha_i (z_{ij})^2}, \quad (9)$$

Згортки (6)-(9) характеризують відповідно як песимістичну, обережну, середню, оптимістичну. З математичної точки зору це є відповідно з вагами середнє гармонійне, середнє геометричне, середнє арифметичне, середнє квадратичне і між ними, як відомо, існує наступна субординація:

$$\mu_A^2(x) \leq \mu_A^3(x) \leq \mu_A^4(x) \leq \mu_A^5(x), \quad \forall x \in X.$$

Приклади нечітких множин. При моделюванні задачі вибору за допомогою розмитих множин, кожна ОПР може визначати свою нечітку множину. Наприклад, «не гірші за точку задоволення», «набагато кращі за точку задоволення» та ін.

Опишемо деякі нечіткі множини використовуючи для знаходження величин $z_{ij}, i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n}$, кусково-лінійну модель.

Нечітка множина $A_1 = \{\text{близько відносно точки «задоволення»}\}$:

$$z_{ij} = 1 - \frac{|t_i - O_{ij}|}{\max\{t_i - \min_j O_{ij}; \max_j O_{ij} - t_i\}}.$$

Нечітка множина $A_2 = \{\text{краще відносно точки «задоволення»}\}$:

$$z_{ij} = \begin{cases} \frac{|t_i - O_{ij}|}{\max_j O_{ij} - t_i}, & O_{ij} > t_i; \\ 0, & O_{ij} \leq t_i. \end{cases} \quad i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n}.$$

Нечітка множина $A_3 = \{\text{гірше відносно точки «задоволення»}\}$:

$$z_{ij} = \begin{cases} \frac{|t_i - O_{ij}|}{t_i - \min_j O_{ij}}, & O_{ij} < t_i; \\ 0, & O_{ij} \geq t_i. \end{cases} \quad i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n}.$$

Використовуючи операції заперечення, концентрації и розтягування можна побудувати нові нечіткі множини:

$A'_1 = \{\text{не близько відносно до точки «задоволення»}\};$

$A''_1 = \{\text{дуже близько відносно до точки «задоволення»}\};$

$A'''_1 = \{\text{більш-менш близько відносно до точки «задоволення»}\};$

$A'_2 = \{\text{не краще відносно до точки «задоволення»}\};$

$A''_2 = \{\text{набагато краще відносно до точки «задоволення»}\};$

$A'''_2 = \{\text{більш-менш краще відносно до точки «задоволення»}\};$

$A'_3 = \{\text{не гірше відносно до точки «задоволення»}\};$

$A''_3 = \{\text{набагато гірше відносно до точки «задоволення»}\};$

$A'''_3 = \{\text{більш-менш гірше відносно до точки «задоволення»}\}$ і т.д.

Схема розв'язування задачі вибору. Виходячи з вищевикладеного, опишемо підхід розв'язання задачі вибору у вигляді наступної схеми.

Нехай нам задані множина альтернатив, множина критеріїв і матриця оцінок (1). Припустимо, що всі альтернативи належать множині Парето, тобто є недомінованими і непорівнянними, і найкращою оцінкою вважається максимальна.

Крок 1. ОПР повинна визначитись з точкою «задоволення» T і сформулювати нечітку критеріальну множину A відносно даної точки.

Крок 2. Вибір моделі обчислення величин z_{ij} матриці Z за однією з моделей (3) – (5).

Крок 3. Визначення функції належності нечіткої множини. Необхідно задати вагові коефіцієнти для критеріїв ефективності $\{p_1, p_2, \dots, p_m\}$ та вибрати модель згортки величин z_{ij} за однією з (6) – (9).

Таблиця 2

	x^1	x^2	...	x^n
K_1	z_{11}	z_{12}	...	z_{1n}
K_2	z_{21}	z_{22}	...	z_{2n}
...	...	...	...	...
K_m	z_{m1}	z_{m2}	...	z_{mn}
	$\mu(x^1)$	$\mu(x^2)$		$\mu(x^n)$

Список використаних джерел

1. Волошин О.Ф. Моделі та методи прийняття рішень/ О.Ф.Волошин, С.О.Мащенко. – Київ: Видавничо-поліграфічний центр «Київський університет», 2010. – 336 с.
2. Лотов А.В. Многокритериальные задачи принятия решений / А.В.Лотов, И.И. Пospelova. – Москва: МАКСПресс, 2008. – 197 с.
3. Simon H.A. Rationality as Process and as Product of Thought // American Economic Review. – 1978. – V.68. – №.2. – p.1–16.
4. Маляр М.М. Описання задач вибору на мові розмитих множин/ М.М.Маляр // Вісник Київського університету: серія фіз.-мат. науки. – Київ, 2005. – Вип.4. – С.197-201.
5. Орловский С.А. Проблемы принятия решений при нечеткой исходной информации. – М.: Наука, 1981. – 208 с.
6. Маляр Н.Н. Нечеткая модель удовлетворительного решения задачи выбора/ М.М.Маляр // Information Models of Knowledge. – ITHEA – Kiev, Ukraine – Sofia, Bulgaria, 2010. – С. 220-225.

Крок 4. Проранжуємо множину альтернатив за значеннями зважених величин оцінок функції належності нечіткої множини «краща альтернатива» у порядку спадання їх значень.

Висновок. Запропонований підхід дозволяє побудувати модель задачі багатокритеріального вибору на скінченій множині альтернатив у вигляді задачі обмеженої раціональності в термінах розмитих множин. Результатом є побудова нечіткої множини в термінах «найкраща альтернатива» з відповідною функцією належності.

Даний підхід має наступні переваги.

1. Він не потребує нормалізації критеріальних оцінок.
2. В ньому не проводяться парні порівняння між всіма альтернативами. Порівнюється кожна альтернатива лише з точкою «задоволення».

References

1. VOLOSHIN, O.F., MASHENKO S.O. (2010) *Modeli ta metody pryjnyatya rishen.* Kyiv: Vydavnycho-polihrafichnyj centr Kyivskij universytet.
2. LOTOV A.V., POSPELOVA I.I. (2008) *Mnogokriterialnyie zadachi prinyatiya reshenijj.* Moskva: MAKSPress.
3. SIMON H.A. (1978) *Rationality as Process and as Product of Thought.* American Economic Review. 68(2). pp.1–16.
4. MALYAR M.M. (2005) *The choosing problem by fuzzy sets.* Bulletin of the University of Kiev Series: Physics& Mathematics. 4. pp.197-201.
5. ORLOVSKYJ S.A. (1981) *Problemyi prinyatiya reshenijj pri nechetkoyj ishodnoy informacii.* Moskva: Nauka.
6. MALYAR N.N. (2010) *Nechetkaya model udovletvoritelnogo resheniya zadachi vyibora.* Information Models of Knowledge. p. 220-225.

Надійшла до редколегії 09.04.2014

УДК 004.42:510.69

Нікітченко М. С.¹, д. ф.-м. н., проф.,
Шкільняк С. С.¹, д. ф.-м. н., проф.,
Шкільняк О. С.¹, к. ф.-м. н.

V-сингулярні семантичні моделі першопорядкових логік

¹ Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 83000, м. Київ, пр-т
Глушкова, 4д,
e-mail: ttp@unicyb.kiev.ua

M.S. Nikitchenko¹, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof.,
S.S. Shkilniak¹, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof.,
O.S. Shkilniak¹, PhD (Phys.-Math.).

V-singular semantic models of first-order logics

¹ Taras Shevchenko National University of Kyiv,
83000, Kyiv, Glushkova st., 4d,
e-mail: ttp@unicyb.kiev.ua

Досліджено семантичні моделі першопорядкових логік V-квазіарних предикатів із 1-елементними предметними областями – V-сингулярні семантичні моделі. Описано квазіарні функції та предикати, задані на V-сингулярних іменних множинах, такі функції та предикати названі V-сингулярними. Розглянуто композиції V-сингулярних функцій та предикатів. Досліджено підкласи монотонних V-сингулярних функцій та предикатів, наведено особливості однозначних монотонних V-сингулярних предикатів.

Ключові слова: логіка, предикат, семантична модель.

Semantic models of first-order logics of V-quasiary predicates with 1-element subject domains – V-singular semantic models – are investigated. Quasiary functions and predicates defined on V-singular nominal sets are described. Such functions and predicates are called V-singular. Compositions of V-singular functions and predicates are considered. V-singular total predicates of classical logic are constant predicates. At the same time, each V-singular quasiary predicate is defined by its truth and falsehood sets, which are subsets of V. So, composition systems of V-singular quasiary predicates are much richer compared with the corresponding system of classical logic. Subclasses of monotone V-singular functions and predicates are studied. The cardinality of sets of quasiary and finite-ary monotone V-singular functions and predicates are estimated with respect to the cardinality of the set of subject names. Properties of single-valued monotone V-singular predicates are considered.

Key Words: logic, predicate, semantic model.

Статтю представив д. ф.-м. н., проф. Буй Д.Б.

Розвиток інформаційних технологій та програмування зумовлює розширення сфери застосування математичної логіки. Водночас принципові обмеження класичної логіки предикатів [1] роблять актуальною проблему побудови та дослідження нових, програмно-орієнтованих логічних формалізмів. Такими є композиційно-номінативні логіки (КНЛ), які будуються на основі спільного для логіки й програмування композиційно-номінативного підходу. Вивченню першопорядкових КНЛ квазіарних предикатів присвячена дана робота. Її метою є дослідження спеціальних семантичних моделей КНЛ квазіарних предикатів із 1-елементною предметною областю. Такі семантичні моделі названо сингулярними.

Поняття, які тут не визначаються, тлумачимо в сенсі робіт [2, 3].

Для полегшення читання наведемо основні визначення необхідні для подальшого викладу.

V-іменна множина (V-IM) над A – це однозначна функція вигляду $\delta: V \rightarrow A$. Тут V – множина предметних імен (нескінченна, взагалі кажучи), A – множина предметних значень (базових даних). Клас всіх V-IM над A позначимо ${}^V A$.

V-квазіарна функція на множині A – це функція вигляду $P: {}^V A \rightarrow A$. V-квазіарний предикат на множині A – це функція вигляду $P: {}^V A \rightarrow \{T, F\}$, де T та F – істиннісні значення.

Ми розглядаємо як однозначні, так і неоднозначні, як тотальні, так і часткові предикати.

Часткові неоднозначні квазіарні предикати на множині A ми трактуємо [3] як відповідності (відношення) між ${}^V A$ та множиною істиннісних значень $\{T, F\}$. Називаємо їх предикатами реляцій-

ного типу. При цьому трактуємо $P(d)$ як множину значень, які предикат P може прийняти на $d \in {}^V A$.

Для V -квазіарного предиката P задаємо області істинності та хибності:

$$T(P) = \{d \in {}^V A \mid T \in P(d)\};$$

$$F(P) = \{d \in {}^V A \mid F \in P(d)\}.$$

V -квазіарний предикат P однозначний, якщо $T(P) \cap F(P) = \emptyset$.

V -квазіарний предикат P тотальний, якщо $T(P) \cup F(P) = {}^V A$.

1. Сингулярні функції та предикати

V -ІМ над 1-елементною множиною базових даних назвемо V -сингулярною. Якщо множина імен V зрозуміла із контексту, то V не пишемо і називаємо V -сингулярну ІМ просто сингулярною.

Кожна V -сингулярна ІМ $d \in {}^V \{a\}$ однозначно задається множиною $asn(d) = \{v \in V \mid v \mapsto a \in d\}$ її імен. Тому V -сингулярні ІМ вигляду $d \in {}^V \{a\}$ можна трактувати як множини імен, по суті отождествлюючи d та $asn(d)$.

Таким чином, логіка предикатів над сингулярними ІМ фактично є логікою предикатів над даними типу множина.

Теоретико-множинні операції $/$, $\cap$, $\cup$ визначені для всіх пар сингулярних ІМ. Зокрема, це вірно і для $\cup$, на відміну від загального випадку ІМ. При цьому маємо:

$$asn(d_1 / d_2) = asn(d_1) / asn(d_2);$$

$$asn(d_1 \cap d_2) = asn(d_1) \cap asn(d_2);$$

$$asn(d_1 \cup d_2) = asn(d_1) \cup asn(d_2).$$

Для сингулярних ІМ операція накладки ∇ стає операцією $\cup$.

Операції реномінації $r_{\bar{x}}^{\bar{v}}$ та розширеної реномінації $r_{\bar{x}, \perp}^{\bar{v}, \bar{u}}$ задаються традиційним чином:

$$r_{\bar{x}}^{\bar{v}}(d) = d \parallel_{-\bar{v}} \cup \{v_i \mapsto a \mid x_i \in asn(d)\};$$

$$r_{\bar{x}, \perp}^{\bar{v}, \bar{u}}(d) = d \parallel_{-\bar{v}, \bar{u}} \cup \{v_i \mapsto a \mid x_i \in asn(d)\}.$$

Сингулярна ІМ d однозначно задається множиною $asn(d)$, тому ці визначення можна переписати, трактуючи сингулярні ІМ як множини імен:

$$r_{\bar{x}}^{\bar{v}}(X) = (X \setminus \{\bar{v}\}) \cup \{v_i \mid x_i \in X\};$$

$$r_{\bar{x}, \perp}^{\bar{v}, \bar{u}}(X) = (X \setminus \{\bar{v}, \bar{u}\}) \cup \{v_i \mid x_i \in X\}.$$

Множину всіх скінченних V -сингулярних ІМ над $\{a\}$ позначаємо ${}^V \{a\}_F$.

V -квазіарна функція на 1-елементній множині $\{a\}$ – це відображення (часткове, взагалі кажучи) вигляду ${}^V \{a\} \rightarrow \{a\}$.

При трактуванні цих функцій як відношень між ${}^V \{a\}$ та $\{a\}$ усі такі функції однозначні.

V -квазіарну функцію задану на 1-елементній множині, назвемо V -сингулярною.

V -квазіарний предикат на 1-елементній множині $\{a\}$ – це відображення (часткове неоднозначне, взагалі кажучи) вигляду ${}^V \{a\} \rightarrow \{T, F\}$.

V -квазіарний предикат, заданий на 1-елементній множині, назвемо V -сингулярним.

Якщо V зрозуміла із контексту, то V -сингулярні функції чи предикати будемо називати просто сингулярними.

V -сингулярна квазіарна функція скінченно-арна, якщо вона має вигляд ${}^V \{a\}_F \rightarrow \{a\}$.

V -сингулярний квазіарний предикат скінченно-арний, якщо він має вигляд ${}^V \{a\}_F \rightarrow \{T, F\}$.

Для скінченно-арних функцій та предикатів кожне вхідне дане є скінченною ІМ, водночас, на відміну від функцій та предикатів класичної логіки, потужність такої ІМ наперед не обмежена.

Семантичними моделями першопорядкових КНЛ є композиційні системи квазіарних функцій та предикатів вигляду $({}^V A, Fn^A \cup Pr^A, C)$, де C задається множиною базових композицій відповідного рівня. Кожна така композиційна система задає дві алгебри: алгебру даних $(A, Fn^A \cup Pr^A)$ та композиційну предикатну алгебру $(Fn^A \cup Pr^A, C)$.

Терми композиційної алгебри трактуємо як формули мови КНЛ відповідного рівня.

Для чистих першопорядкових КНЛ (ЧКНЛ), або КНЛ кванторного рівня, маємо $Fn^A = \emptyset$.

Множини базових композицій першопорядкових КНЛ відповідного рівня:

$$- \{\neg, \vee, R_{\bar{x}}^{\bar{v}}, \exists x\} \text{ для ЧКНЛ};$$

$$- \{\neg, \vee, R_{\bar{x}}^{\bar{v}}, \exists x, =_{xy}\} \text{ для ЧКНЛ з рівністю};$$

$$- \{\neg, \vee, R_{\bar{x}}^{\bar{v}}, \exists x, \equiv_{xy}\} \text{ для ЧКНЛ із строгою рівністю};$$

$$- \{\neg, \vee, S^{\bar{v}}, 'x, \exists x\} \text{ для КНЛ функціонального рівня};$$

$$- \{\neg, \vee, S^{\bar{v}}, 'x, \exists x, =\} \text{ для КНЛ функціонального рівня з рівністю, або функціонально-екваційного рівня};$$

$$- \{\neg, \vee, S^{\bar{v}}, 'x, \exists x, \equiv\} \text{ для КНЛ функціонального рівня із строгою рівністю}.$$

Для ЧКНЛ додатково виділено (див. [4, 5]) наступні підрівні:

– ε -ЧКНЛ (ЧКНЛ із предикатами-індикаторами εz наявності значення для змінних);

– ЧКНЛРР (ЧКНЛ із розширеними реномінаціями);

– ε -ЧКНЛРР (поєднують можливості ЧКНЛРР та ε -ЧКНЛ).

Алгебри даних із 1-елементним носієм будемо називати сингулярними.

Алгебра даних $(A, Fn^A \cup Pr^A)$ сингулярна, якщо $A = \{a\}$. Такі алгебри позначаємо $(\{a\}, Fn^a \cup Pr^a)$.

Для чистих першопорядкових логік сингулярні алгебри даних позначаємо $(\{a\}, Pr^a)$.

Композиційні системи V -сингулярних квазіарних функцій та предикатів назвемо V -сингулярними. Такі системи для КНЛ функціональних рівнів мають вигляд $(^V\{a\}, Fn^a \cup Pr^a, C)$. Для КНЛ кванторного рівня V -сингулярні композиційні системи мають вигляд $(^V\{a\}, Pr^a, C)$.

2. Сингулярні алгебри класичної логіки

У випадку класичної логіки базові функції та предикати тотальні n -арні.

Базова n -арна сингулярна функція f застосовна лише до n -ки $(a, \dots, a)$, де вона може приймати лише єдине значення a , тому така функція є константною. Отже, існує єдина сингулярна n -арна функція: константа a^n .

Базовий n -арний сингулярний предикат P застосовний лише до n -ки $(a, \dots, a)$, де він може приймати одне з двох значень T чи F , тому такий предикат є константним.

Таким чином, існує два n -арні сингулярні предикати: константний T^n та константний F^n .

Константними є також тотальні сингулярні функції та предикати від змінних:

Твердження 1. Тотальні сингулярні X -арні функції та предикати є константними.

Доведення. Єдиним можливим входним даним для сингулярної $\{v_1, \dots, v_n\}$ -арної функції чи сингулярного $\{v_1, \dots, v_n\}$ -арного предиката є $[v_1 \mapsto a, \dots, v_n \mapsto a]$. На цьому даному $\{v_1, \dots, v_n\}$ -арна тотальна сингулярна функція мусить прийняти єдине значення a , тотальний сингулярний $\{v_1, \dots, v_n\}$ -арний предикат – одне з двох значень T чи F . Отже, кожна тотальна сингулярна $\{v_1, \dots, v_n\}$ -арна функція і кожний тотальний сингулярний $\{v_1, \dots, v_n\}$ -арний предикат є константними.

При суперпозиціях (підстановках) сингулярних Y -арних функцій у сингулярну X -арну (n -арну) функцію чи предикат арність результуючої функції чи предиката визначаємо традиційним чином. Арність функції (предиката) g позначаємо $ar(g)$.

Нехай маємо суперпозицію сингулярних функцій $f_1, \dots, f_n$ у сингулярну функцію (предикат) g за іменами $v_1, \dots, v_n$, де $\{v_1, \dots, v_n\} \subseteq ar(g)$. Арність результуючої функції (предиката) h задається так:

$$ar(h) = (ar(g) \setminus \{v_1, \dots, v_n\}) \cup ar(f_1) \cup \dots \cup ar(f_n).$$

Якщо $f_1, \dots, f_n, g$ – тотальні, то h теж тотальна, тому така h – константна функція чи предикат.

Пропозиційні зв'язки для константних сингулярних предикатів задаємо традиційним чином. Якщо P – X -арний, то $\neg P$ – X -арний; якщо P – X -арний та Q – Y -арний, то $P \vee Q$ – $X \cup Y$ -арний.

Квантори $\exists x$ та $\forall x$ діють на сингулярні предикати таким чином.

$$\begin{aligned} \exists x P(x, v_1, \dots, v_n) = \forall x P(x, v_1, \dots, v_n) = T &\Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow P(x, v_1, \dots, v_n) = T; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \exists x P(x, v_1, \dots, v_n) = \forall x P(x, v_1, \dots, v_n) = F &\Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow P(x, v_1, \dots, v_n) = F; \end{aligned}$$

$$\exists x P(v_1, \dots, v_n) = \forall x P(v_1, \dots, v_n) = P(v_1, \dots, v_n).$$

Таким чином, квантори $\exists x$ та $\forall x$ діють на сингулярні предикати як тотожні відображення із можливим звуженням арності.

Це означає, що для сингулярних предикатів класичної першопорядкової логіки квантори неістотні, тому фактично діють лише закони пропозиційної логіки.

3. Сингулярні композиційні системи логік квазіарних предикатів

Для кожного $d \in ^V A$ значення V -сингулярної квазіарної функції чи предиката на d однозначно визначається множиною $asn(d)$.

Кожна V -сингулярна квазіарна функція має вигляд $^V\{a\} \rightarrow \{a\}$, тому вона є майже константною, адже на кожному входному даному може прийняти єдине значення a або бути невизначеною. На відміну від сингулярних функцій класичної логіки, які є константними, сингулярні квазіарні функції вельми різноманітні. Наприклад, можна задати $f(\emptyset) \uparrow$, $f(\{x\}) = a$, $f(\{x, y\}) \uparrow$ тощо.

Кожна V -сингулярна квазіарна функція f однозначно задається множиною визначеності

$$D_f = \{X \subseteq V \mid f(X) \downarrow = a\}.$$

Оцінимо потужності множин квазіарних та скінченно-арних сингулярних функцій.

Потужність множини всіх V -квазіарних сингулярних функцій рівна потужності булеана множини предметних імен V .

У випадку зліченної множини V отримуємо континуальну множину всіх V -квазіарних сингулярних функцій.

Розглянемо множину скінченно-арних сингулярних функцій. Нагадаємо, що для таких функцій всі входні дані є скінченними ІМ, проте їх потужності наперед не обмежені.

У випадку нескінченної множини V потужність множини скінченно-арних сингулярних функцій рівна потужності множини V .

Зокрема, якщо множина V зліченна, то множина всіх скінченно-арних V -сингулярних функцій теж зліченна.

Для кожного часткового однозначного предиката можливими результатами його застосування можуть бути T , F , невизначеність; для тотально-неоднозначного – T , F , T та F ; для часткового неоднозначного – усі зазначені вище 4 можливості. Тому клас сингулярних предикатів істотно багатший за клас сингулярних функцій.

Кожний V -сингулярний квазіарний предикат P однозначно задається парою множин $T(P)$ та $F(P)$ – областями його істинності та хибності:

$$T(P) = \{X \subseteq V \mid T \in P(X)\};$$

$$F(P) = \{X \subseteq V \mid F \in P(X)\}.$$

Оцінимо потужності множин квазіарних та скінченно-арних сингулярних предикатів.

У загальному випадку потужність множини областей істинності всіх V -сингулярних квазіарних предикатів та потужність множини областей хибності всіх V -сингулярних квазіарних предикатів рівні потужності булеана множини V . Якщо V зліченна, отримуємо континуальну множину областей істинності та континуальну множину областей хибності V -сингулярних квазіарних предикатів. Звідси маємо континуальну множину всіх V -сингулярних квазіарних предикатів.

Розглянемо множину скінченно-арних V -сингулярних предикатів. У випадку нескінченної множини V потужність множини таких предикатів рівна потужності множини V . Зокрема: якщо множина V зліченна, то множина всіх скінченно-арних V -сингулярних предикатів теж зліченна.

Дослідимо особливості композицій сингулярних композиційних систем КНЛ.

Базові пропозиційні композиції $\neg, \vee$ діють традиційно.

Композиції реномінації $R_{\bar{x}}^{\bar{v}}$ та роширеної реномінації $R_{\bar{x}, \perp}^{\bar{v}, \bar{u}}$ визначаються через відповідні операції $r_{\bar{x}}^{\bar{v}}$ та $r_{\bar{x}, \perp}^{\bar{v}, \bar{u}}$:

$$R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(P)(X) = P(r_{\bar{x}}^{\bar{v}}(X));$$

$$R_{\bar{x}, \perp}^{\bar{v}, \bar{u}}(P)(X) = P(r_{\bar{x}, \perp}^{\bar{v}, \bar{u}}(X)).$$

Зауважимо, що для різних $X \subseteq V$ можуть бути різноманітні співвідношення між X та $r_{\bar{x}}^{\bar{v}}(X)$ – незрівнянність X та $r_{\bar{x}}^{\bar{v}}(X)$ щодо включення, $r_{\bar{x}}^{\bar{v}}(X) \subset X$, $r_{\bar{x}}^{\bar{v}}(X) \supset X$, $r_{\bar{x}}^{\bar{v}}(X) = X$. Тому сингулярні предикати P та $R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(P)$ можуть бути істотно різними. Те саме стосується P та $R_{\bar{x}, \perp}^{\bar{v}, \bar{u}}(P)$.

Для підрівнів ε -ЧКНЛ та ε -ЧКНЛР спеціальні предикати-індикатори εz наявності значення для змінних задаються так:

$$\varepsilon z(X) = \begin{cases} T, & \text{якщо } z \notin X, \\ F, & \text{якщо } z \in X. \end{cases}$$

Функції деномінації $'z$ задаються так:

$$'z(X) = \begin{cases} a, & \text{якщо } z \in X, \\ \text{невизначене}, & \text{якщо } z \notin X. \end{cases}$$

Композиції суперпозиції $S^{\bar{v}}$ діють спрощено, вони задаються так:

$$S^{v_1, \dots, v_n}(h, f_1, \dots, f_n)(X) =$$

$$= h((X \setminus \{v_1, \dots, v_n\}) \cup \{v_i \mid f_i(X) \downarrow\}).$$

Тут $h \in Fn^a \cup Pr^a$, $f_i \in Fn^a$, $X \subseteq V$.

Спеціальні предикати рівності $=_{xy}$ та строгої рівності $\equiv_{xy}$ діють так:

$$=_{zy}(X) = \begin{cases} T, & \text{якщо } z \in X \text{ та } y \in X, \\ \text{невизначене}, & \text{в інших випадках;} \end{cases}$$

$$\equiv_{zy}(X) =$$

$$= \begin{cases} T, & \text{якщо } z \in X, y \in X \text{ або } z \notin X, y \notin X, \\ F, & \text{в усіх інших випадках.} \end{cases}$$

Спеціальні композиції слабкої рівності $=$ та строгої рівності $\equiv$ діють подібним чином:

$$=(f, g)(X) = \begin{cases} T, & \text{якщо } f(X) \downarrow \text{ та } g(X) \downarrow, \\ \text{невизначене}, & \text{в інших випадках;} \end{cases}$$

$$\equiv(f, g)(X) =$$

$$= \begin{cases} T, & \text{якщо } f(X) \downarrow, g(X) \downarrow \text{ або } f(X) \uparrow, g(X) \uparrow, \\ F, & \text{в усіх інших випадках.} \end{cases}$$

Для сингулярних предикатів композиції квантифікації діють спрощено. Маємо:

$$Y \in T(\exists x P) \Leftrightarrow Y \cup \{x\} \in T(P);$$

$$Y \in F(\exists x P) \Leftrightarrow Y \cup \{x\} \in F(P);$$

$$Y \in T(\forall x P) \Leftrightarrow Y \cup \{x\} \in T(P);$$

$$Y \in F(\forall x P) \Leftrightarrow Y \cup \{x\} \in F(P).$$

Таким чином, отримуємо

Твердження 2. Для для кожних $Y \subseteq V$ та $x \in V$ маємо $\exists x P(Y) = \forall x P(Y) = P(Y \cup \{x\})$.

Наслідок 1. $\exists x P = \forall x P = \neg \exists x \neg P = \neg \forall x \neg P$.

Усі властивості квазіарних предикатів першопорядкових КНЛ справджуються для предикатів сингулярних композиційних систем відповідних рівнів, адже ці системи утворюють підклас класу семантичних моделей першопорядкових КНЛ.

4. Монотонні сингулярні функції та предикати

Розглянемо особливості монотонних (еквітонних) сингулярних функцій та предикатів.

Монотонні функції. Якщо функція f монотонна, то із $X \subseteq Y$ та $f(X) \downarrow$ випливає $f(Y) \downarrow$. Сингулярна квазіарна функція може приймати єдине значення a , тому всі монотонні сингулярні функції є однозначними.

Оцінимо потужності множин скінченно-арних та квазіарних монотонних сингулярних функцій.

Твердження 3. Потужність множини V -сингулярних квазіарних монотонних функцій рівна потужності булеана множини V .

Доведення. Потужність множини усіх V -сингулярних квазіарних функцій рівна потужності булеана V . Водночас можна задати множину монотонних V -сингулярних квазіарних функцій, потужність якої теж рівна потужності булеана V . Для цього для довільної $X \subseteq V$ визначимо функцію f_X таку, що $f_X(Z) \uparrow$ для кожного Z такого, що $Z \setminus X = \emptyset$ (тобто $Z \subseteq X$), та $f_X(Z) \downarrow$ для кожного Z такого, що $Z \setminus X \neq \emptyset$. Зрозуміло, що кожна така функція f_X монотонна, причому $f_X \neq f_Y$ при $X \neq Y$.

Наслідок 2. У випадку зліченної V потужність множини всіх монотонних V -сингулярних квазіарних функцій має потужність континууму.

Множину $X \in D_f$ назвемо мінімальним елементом визначеності сингулярної функції f , якщо $f(X) \downarrow$ та $f(Z) \uparrow$ для кожного $Z \subset X$.

Не кожна монотонна сингулярна функція має мінімальні елементи визначеності. Справді, розглянемо функцію f , визначену якраз на всіх нескінченних підмножинах V . Для такої f маємо $D_f = \{X \subseteq V \mid X \text{ нескінченна}\}$. Але для кожної нескінченної множини X існує нескінченна $Z \subset X$.

Для скінченно-арних сингулярних функцій ситуація краща. Область визначення D_f скінченно-арної монотонної сингулярної f однозначно задається множиною всіх мінімальних елементів $md(f) = \{X \subseteq V \mid f(X) \downarrow \text{ та } f(Z) \uparrow \text{ для кожного } Z \subset X\}$. Отже, кожна скінченно-арна монотонна сингулярна f однозначно задається множиною $md(f)$.

Нехай $X \in md(f)$, $Y \in md(f)$ та $X \neq Y$, тоді неможливо $X \subset Y$ та неможливо $Y \subset X$. Таким чином, елементи $md(f)$ утворюють антиланцюг на булеані множини V , впорядкованому за відношенням включення $\subset$. Елементи такого антиланцюга зліченні, тому потужність множини таких антиланцюгів рівна потужності V . Отже:

Твердження 4. У випадку нескінченної V потужність множини скінченно-арних монотонних V -сингулярних функцій рівна потужності V .

Наслідок 3. У випадку зліченної V потужність множини скінченно-арних монотонних V -сингулярних функцій теж зліченна.

Монотонні предикати. У загальному випадку монотонних квазіарних сингулярних предикатів мають виконуватися такі умови:

із $X \subseteq Y$ та $T \in P(X)$ випливає $T \in P(Y)$;

із $X \subseteq Y$ та $F \in P(X)$ випливає $F \in P(Y)$.

Таким чином, для монотонних квазіарних сингулярних предикатів маємо $P(Y) \subseteq P(Y \cup \{x\})$.

Враховуючи твердження 4, звідси отримуємо

Твердження 5. У випадку монотонних V -сингулярних квазіарних предикатів для кожних $Y \subseteq V$ та $x \in V$ маємо $P(Y) \subseteq \exists x P(Y) = \forall x P(Y)$.

Оцінимо тепер потужності множин скінченно-арних та квазіарних монотонних сингулярних предикатів.

Твердження 6. У випадку нескінченної V потужність множини монотонних V -сингулярних квазіарних предикатів рівна потужності булеана множини V .

Доведення. Потужність множини усіх V -сингулярних квазіарних предикатів рівна потужності булеана множини V . Водночас можна задати таку множину монотонних V -сингулярних квазіарних предикатів, потужність якої теж рівна потужності булеана множини V . Це доводимо так, як для випадку монотонних V -сингулярних квазіарних функцій, розглядаючи окремо області істинності та хибності цих предикатів і враховуючи те, що кожний квазіарний предикат P однозначно задається парою $T(P)$ та $F(P)$.

Наслідок 4. У випадку зліченної V потужність множини монотонних V -сингулярних квазіарних предикатів має потужність континууму.

Для скінченно-арних монотонних неоднозначних предикатів множини $T(P)$ та $F(P)$ однозначно задаються множинами їх мінімальних елементів $mT(P) = \{X \subseteq V \mid T \in P(X) \text{ та } T \notin P(Z) \text{ для кожного } Z \subset X\}$ та $mF(P) = \{X \subseteq V \mid F \in P(X) \text{ та } F \notin P(Z) \text{ для кожного } Z \subset X\}$. Подібно випадку $md(f)$, елементи $mT(P)$ та елементи $mF(P)$ утворюють антиланцюги на булеані множини V , впорядкованому за відношенням включення $\subset$.

Таким чином, кожний неоднозначний скінченно-арний монотонний сингулярний предикат P однозначно задається парою множин $mT(P)$ та $mF(P)$. Звідси:

Твердження 7. У випадку нескінченної V потужність множини всіх скінченно-арних монотонних V -сингулярних предикатів рівна потужності множини V .

Наслідок 5. У випадку зліченної V потужність множини всіх скінченно-арних монотонних V -сингулярних предикатів теж зліченна.

Розглянемо особливості однозначних монотонних (еквітонних) сингулярних предикатів.

Твердження 8. У випадку однозначних монотонних V -сингулярних квазіарних предикатів для кожних $Y \subseteq V$ та $x \in V$ маємо:

$$P(Y) \downarrow \Rightarrow P(Y) = \exists x P(Y) = \forall x P(Y) = P(Y \cup \{x\}).$$

Твердження 8 є деталізацією твердження 5 на випадок однозначних монотонних предикатів.

Однозначні монотонні сингулярні предикати мусять бути майже константними.

Справді, якщо для деяких $X \subseteq V$ та $Y \subseteq V$ маємо $P(X) = T$ та $P(Y) = F$, то, згідно монотонності, мусить бути $P(X \cup Y) = T$ та $P(X \cap Y) = F$ – суперечність однозначності.

Звідси клас однозначних монотонних сингулярних квазіарних предикатів розпадається на:

- підклас монотонних T -предикатів;
- підклас монотонних F -предикатів;
- всюди невизначений предикат.

При цьому кожній квазіарній монотонній сингулярній функції f із $D_f \neq \emptyset$ зіставляються:

- монотонний сингулярний T -предикат P із $T(P) = D_f$ та $F(P) = \emptyset$;
- монотонний сингулярний F -предикат Q із $F(P) = D_f$ та $T(P) = \emptyset$.

Таким чином, сингулярні композиційні системи квазіарних предикатів істотно багатші за системи сингулярних предикатів класичної логіки.

Висновки

В роботі досліджено семантичні моделі першопорядкових композиційно-номінативних логік V -квазіарних предикатів із 1-елементними предметними областями – V -сингулярні композиційні системи. Описано квазіарні функції та предикати, задані на V -іменних множинах над 1-елементною множиною базових даних – V -сингулярних іменних множинах. Такі функції та предикати названо V -сингулярними. Розглянуто композиції V -сингулярних функцій та предикатів. Сингулярні предикати класичної логіки є константними, тому сингулярні композиційні системи квазіарних предикатів істотно багатші за системи сингулярних предикатів класичної логіки. Досліджено підкласи монотонних V -сингулярних функцій та монотонних V -сингулярних предикатів. Зроблено оцінки потужності множин квазіарних та скінченно-арних монотонних V -сингулярних функцій та монотонних V -сингулярних предикатів залежно від потужності множини V . Наведено особливості однозначних монотонних V -сингулярних предикатів.

Список використаних джерел

1. Kleene S. C. *Mathematical Logic* / S. C. Kleene. – New York: John Wiley & Sons. – 1967. – 398 p.
2. Нікітченко М.С. Математична логіка та теорія алгоритмів / М.С. Нікітченко, С.С. Шкільняк. – Київ: ВПЦ Київський університет, 2008. – 528 с.
3. Нікітченко М.С. Композиційно-номінативні логіки квазіарних предикатів: семантичні аспекти / М.С. Нікітченко, С.С. Шкільняк // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія фізико-математичні науки. – 2012. – Вип. 4. – С. 165–172.
4. Нікітченко М.С. Логіки часткових предикатів з розширеними реномінаціями та кванторами / М.С. Нікітченко, О.С. Шкільняк, С.С. Шкільняк // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія фізико-математичні науки. – 2013. – Вип. 2. – С. 210–215.
5. Нікітченко М.С. Композиційно-номінативні логіки із спеціальними предикатами наявності значення для змінних / М.С. Нікітченко, С.С. Шкільняк // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія фізико-математичні науки. – 2013. – Спецвипуск. – С. 128–133.

References

1. Kleene, S. (1967). *Mathematical Logic*. New York: John Wiley & Sons.
2. NIKITCHENKO, M. and SHKILNIAK, S. (2008). *Matematyczna logika ta teoria alhorytmiv*. Kyiv: VPC Kyivskiy Universytet.
3. NIKITCHENKO, M. and SHKILNIAK, S. (2012). Composition-nominative logics of quasiary predicates: semantic aspects. In *Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series Physics & Mathematics*. № 4, p. 165–172.
4. NIKITCHENKO, M., SHKILNIAK, O. and SHKILNIAK, S. (2013). Logics of partial predicates with extended renominations and quantifiers. In *Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series Physics & Mathematics*. № 2, p. 210–215.
5. NIKITCHENKO, M. and SHKILNIAK, S. (2013). Composition-nominative logics with special variable definedness predicates. In *Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series Physics & Mathematics*. Spetsvypusk, p. 128–133.

Надійшла до редколегії 27.03.14

УДК 006.44:378.1

Омельчук Л.Л.¹, к.ф.-м.н., асистент

**Застосування компетентнісно
орієнтованого підходу до модернізації
змісту дисциплін циклу професійної та
практичної підготовки фахівців з
інформатики на прикладі розробки
робочої навчальної програми дисципліни
«Програмування»**

¹ Київський національний університет імені Тараса
Шевченка, 03680, м. Київ, пр.-т. Глушкова 4д,
e-mail: l.omelchuk@gmail.com

L.L. Omelchuk¹, Ph.D.

**The use of a competency-based approach
to modernization subjects
of professional and
practical training in computer science
as an example syllabus for the
subject "Programming"**

¹ Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03680,
Glushkova st., 4d,
e-mail: l.omelchuk@gmail.com

Розробка програмного забезпечення в Україні є індустрією, що динамічно розвивається. Проблема підвищення якості професійної підготовки ІТ-спеціалістів, кваліфікація та рівень компетенцій яких відповідали б сучасним потребам ІТ-ринку та світовим вимогам є актуальною.

Одним з ключових елементів професійної підготовки ІТ-фахівців є дисципліни циклу професійної та практичної підготовки фахівців з інформатики. Однією з ключових дисциплін циклу професійної та практичної підготовки фахівців з інформатики є дисципліна «Програмування». В статті переглядається перелік дисциплін циклу професійної та практичної підготовки. Надаються рекомендації з оновлення змісту дисциплін професійної і практичної підготовки фахівців з інформатики з урахуванням розробки компетентнісно орієнтованого стандарту з інформатики.

На прикладі розробки робочої навчальної програми дисципліни «Програмування», яка є складовою освітньо-професійної програми підготовки фахівців за освітньо-кваліфікаційним рівнем «бакалавр» галузі знань «Інформатика» з напрямку підготовки 6.040302 „Інформатика” та читається студентам другого курсу.

Показано, що на основі Європейської рамки ІКТ-компетенцій 2.0 можна розробити компетентнісно орієнтований стандарт вищої освіти, в якому будуть сформовані компетенції, що відповідають вимогам ІТ-галузі та світовим вимогам. Такі заходи сприятимуть підвищенню якості підготовки кваліфікованих фахівців з інформатики з метою досягнення відповідності рівня компетенцій вимогам сучасного ІТ-ринку та світовим стандартам.

Ключові слова: інформатика, освітній стандарт, Європейська рамка е-компетенцій.

Software programming in Ukraine is a dynamically developing industry. Urgent problematic issue is regarding the improvement of training of IT specialist, whose qualification and level of competency would meet current needs of IT market and international standards. To solve this problem the national IT education system shall be reformed focusing on the achievement of high international standards.

Professional and practical training disciplines in computer science are one of the key elements in training IT specialists. Discipline "Programming" is one of the key disciplines in training IT specialists. The list of professional and practical training disciplines is provided in the article. It contains as well recommendations on upgrading the content of professional and practical training disciplines in computer science bearing in mind the development of competency-based computer science standard.

For example syllabus for the subject "Programming", which is part of the educational and vocational training program for the qualification of "Bachelor" area of expertise science of specialty 6.040302 "Information."

It is shown that competency-based computer science standard of the higher education involving competencies which meet the requirements of IT-industry and international standards may be developed due to the European e-Competency Framework 2.0. These measures will improve training of qualified specialists in computer science with a view to achieving a compliance of competency level with requirements of today's IT market and international standards.

Key Words: informatics, educational standard, European e-Competence Framework.

Статтю представив проф., д.ф.-м.н. Буй Д.Б.

Вступ

Розробка програмного забезпечення в Україні є індустрією, що динамічно розвивається. За даними, оприлюдненими головою Державного агентства з питань науки, інновацій та інформатизації В.П. Семиноженком, дефіцит фахівців у галузі інформаційних технологій в Україні сьогодні становить 30 %. При цьому він зазначив, що, попри такий дефіцит, знайти роботу в ІТ-компаніях можуть лише 25 % випускників, інші не відповідають рівню своєї кваліфікації [1]. Отже, актуальною є проблема підвищення якості професійної підготовки ІТ-спеціалістів, кваліфікація та рівень компетенцій яких відповідали б сучасним потребам ІТ-ринку та світовим вимогам.

Для вирішення цього завдання потрібно модернізувати національну систему ІТ-освіти, орієнтуючись на досягнення високих рівнів світових стандартів. З огляду на це особливої ваги набуває забезпечення відповідності українського стандарту освітньо-професійної підготовки фахівців в ІТ-галузі вимогам ІТ-індустрії та визнаним світовим зразкам освітньо-професійної підготовки фахівців у галузі. Одним з ключових елементів професійної підготовки ІТ-фахівців є дисципліни циклу професійної та практичної підготовки фахівців з інформатики. Робочі навчальні програми дисциплін зазначеного циклу слід модернізувати з врахуванням розробки компетентнісно орієнтованого стандарту з інформатики.

1. Підходи до розробки компетентнісно орієнтованого стандарту освітньо-професійної підготовки з інформатики

В [2] розглянуто деякі підходи до розробки компетентнісно орієнтованого стандарту освітньо-професійної підготовки з інформатики. Згадані пропозиції розроблялися з урахуванням вимог ІТ-галузі та порівняльного аналізу [3, 4] українського стандарту освітньо-професійної програми підготовки бакалаврів з “Інформатики” [5] з широко визнаним у світі міжнародними стандартами Computer Science’2013 [6] та державним освітнім стандартом Російської Федерації за напрямом підготовки 230100 “Інформатика та обчислювальна техніка” [7].

В [2] запропоновано деякі кроки до розробки компетентнісно орієнтованого стандарту вищої освіти, в якому будуть сформовані компетентності, що відповідають вимогам ІТ-галузі, на основі Європейської рамки ІКТ-компетенцій 2.0. При цьому зазначається, що здобуття зазначених компетентностей

передбачене у межах засвоєння дисциплін, перелік яких узгоджений з переліками дисциплін провідних світових зразків стандартів освітньо-професійної підготовки ІТ-фахівців. Такі заходи сприятимуть підвищенню якості підготовки кваліфікованих фахівців з інформатики з метою досягнення відповідності рівня компетенцій вимогам сучасного ІТ-ринку та світовим стандартам, а також міжнародному визнанню українського диплому в світі.

Для формування необхідних компетенцій слід переглянути зміст умінь та навичок, формуванню яких сприятимуть дисципліни, визначені стандартом освітньо-професійної підготовки фахівців у галузі інформатики. При формуванні компетенцій надзвичайно важливим фактором є тісна взаємодія з ІТ-галуззю. Важливою передумовою вироблення затребуваних компетенцій є набуття студентами досвіду роботи, якого у межах освітньої програми можна досягти під час лабораторних робіт та групових проектів на початкових курсах та за рахунок підвищення ролі виробничої практики в ІТ-компаніях та сприяння фаховій сертифікації на старших курсах.

Актуальним є завдання формування опису компетенцій, необхідних для ІТ-професій та формування співвідношень дисциплін та компетенцій відповідно до ІТ-професій, що здобуваються. З метою вирішення проблеми удосконалення та універсалізації компетенцій у галузі інформаційно-телекомунікаційних технологій (ІКТ) за ініціативою ЄС започатковано розробку еталонної метарамики компетенцій у цій галузі — European e-Competence Framework (e-CF) [8]. З описом загальної структури європейської рамки е-компетенцій можна ознайомитися в [9]. З метою підвищення освітньо-кваліфікаційного рівня випускників та досягнення адекватності змісту профільних освітньо-професійних програм вимогам ринку праці в галузі інформаційних технологій та міжнародного визнання кваліфікацій з ІТ-спеціальностей, пропонується ВНЗ України, вважаємо за доцільне запровадження європейських стандартів та принципів забезпечення якості освіти з урахуванням вимог ринку праці до компетентності фахівців.

У 2011 році Кабінет Міністрів України затвердив Національну рамку кваліфікацій (далі НРК) [10], яка є системним і структурованим описом кваліфікаційних рівнів за компетентностями. З урахуванням European e-Competence Framework (e-CF) та Національної

рамки кваліфікацій можна запропонувати представлену в таблиці 1 модель співвідношення рівнів e-CF рівням НРК та освітньо-професійних ступенів.

Таблиця 1 Співвідношення рівнів e-CF з рівнями НРК та освітньо-професійними ступенями

Рівні e-CF	Відповідні рівні НРК	Освітньо-професійний ступінь
e-5	8	Магістр
e-4	7	Бакалавр
e-3	6	Молодший спеціаліст
e-e-2	4 і 5	Кваліфікований робітник
e-1	3	Повна середня освіта
	2	Базова середня освіта
	1	Ппочаткова освіта
	0	Дошкільна освіта

Як зазначається в Європейській рамці ІКТ-компетенцій European e-Competence Framework, до такого співвідношення між рівнями e-CF, НРК та освітньо-професійних ступенів слід прагнути, але при цьому не слід забувати про надзвичайну важливість професійного досвіду для набуття компетенцій згідно з рівнями e-CF.

Відповідно до переліку напрямів, за якими здійснюється підготовка фахівців за освітньо-кваліфікаційним рівнем бакалавра та підготовка спеціалістів та магістрів за спеціальністю “Інформатика” відбуваються в галузі знань 0403 “Системні науки та кібернетика”. Згідно з Національним класифікатором професій [11], професійні види робіт, які передбачають здобуття кваліфікації бакалавра, належать до розділу “фахівці”, а роботи, які потребують кваліфікації спеціаліста або магістра, належать до розділу “професіонали”. Зокрема, до фахівців кваліфікаційного угруповання техніки-програмісти (код 3121) належать: технік-програміст, фахівець з інформаційних технологій, фахівець з комп’ютерної графіки (дизайну), фахівець з розробки та тестування програмного забезпечення, фахівець з розроблення комп’ютерних програм. До професіоналів кваліфікаційного угруповання “професіонали” в галузі програмування (код

2132) належать: молодший науковий співробітник (програмування), науковий співробітник (програмування), науковий співробітник-консультант (програмування), інженер-програміст, програміст (база даних), програміст прикладний та програміст системний.

Представлені кваліфікаційні характеристики працівників згаданих професій не є порівнянними з НРК та e-CF. Таким чином, актуальним є завдання сформувати професійні стандарти на основі системи компетентностей НРК та зіставити рівні професійних кваліфікацій з НРК. За основу професійних стандартів, на думку автора, доцільно взяти Європейську рамку ІКТ-компетенцій [8].

Наведені вище ІТ-професії нескладно співвіднести з ІКТ-профілями, репрезентованими European e-Competence Framework 2.0: розробник (Developer), спеціаліст з тестування (Test Specialist), спеціаліст з медіа (Digital Media Specialist). Співвідношення e-компетенцій та професій, представлених Національним класифікатором наведено в таблиці 2.

Відповідно до наведених ІКТ-профілів можна визначити перелік професійних рівнів ІКТ-компетенцій Європейської рамки ІКТ-компетенцій 2.0. Ці рівні мають набуватися на різних рівнях НРК, а на їх здобуття має бути спрямована освітньо-професійна програма підготовки фахівців відповідного рівня. У таблиці 3 наведена «скелетна» структура рівнів компетенцій, запропонована Європейською рамкою ІКТ-компетенцій 2.0, необхідних для певних ІКТ-профілів і, відповідно, для ІТ-професій, зіставимих з ними.

Обсяг статті не дозволяє детально проаналізувати наведені компетенції. Уточнення за рівнями, знаннями та навичками можна знайти в Європейській рамці ІКТ-компетенцій 2.0 [2, 8].

Наведемо короткий опис наведених у табл. 3 e-компетенцій.

А6. Розробка. Суть компетенції: визначає ІТ-рішення, найбільш узгоджені з ІТ-політикою і потребами користувача/споживача; точно оцінює витрати на розробку, встановлення і техобслуговування пропонованих рішень; вибирає адекватні технічні параметри для проектування рішення, з урахуванням співвідношення “ціна — якість”.

В1. Проектування та розробка. Суть компетенції: проектує і конструює компоненти програмного забезпечення та/або апаратних платформ, що відповідають вимогам специфікації; застосовує системну методологію

для аналізу та створення необхідних компонент та інтерфейсів; тестує компоненти й системи на предмет відповідності вимогам.

В2. Інтеграція систем. Суть компетенції: встановлює додаткові апаратні/програмні компоненти в існуючі чи пропоновані системи; вміє поєднувати їх з наявними процесами та/або процедурами на основі врахування специфікацій, продуктивності та сумісності; перевіряє продуктивність системи, офіційно завершує й реєструє успішну інтеграцію.

В3. Тестування. Суть компетенції: розробляє і реалізує регулярні процедури тестування ІТ-систем або перевірки на дотримання вимог до експлуатаційної придатності з боку замовника; забезпечує роботу нових або модернізованих компонентів і систем відповідно до прогнозованих очікувань; гарантує дотримання стандартів; складає документи та звіти, що підтверджують відповідність сертифікаційним вимогам.

В4. Розгортання рішень. Суть компетенції: згідно з наперед визначеними загальними стандартами діяльності виконує заплановані необхідні втручання в роботу рішень; конфігурує апаратні засоби, програмне забезпечення або мережі для забезпечення операційної сумісності компонентів системи; усуває помилки і невідповідності, що виникають у зв'язку з цим; офіційно передає користувачеві готове до експлуатації рішення і веде документальний облік всієї необхідної інформації.

В5. Розробка документації. Суть компетенції: складає документи, що описують товари, послуги, компоненти або додатки з урахуванням поточних вимог до оформлення документації; створює шаблони систем документального обліку; гарантує законність і адекватність наявних документів.

С4. Керування проблемами. Суть компетенції: ідентифікує й усуває основні причини інцидентів; застосовує профілактичний підхід при виявленні основних причин проблем ІС; розгортає бази знань, що засновані на повторюваних типових помилках.

Отже, на основі Європейської рамки ІКТ-компетенцій 2.0 можна розробити компетентісно орієнтований стандарт вищої освіти, в якому будуть сформовані компетентності, що відповідають вимогам ІТ-галузі. Здобуття зазначених компетентностей передбачене у межах засвоєння дисциплін, перелік яких узгоджений з переліками дисциплін

провідних світових зразків стандартів освітньо-професійної підготовки ІТ-фахівців.

2. Досвід розробки робочої навчальної програми з дисципліни «Програмування» на основі компетентісно орієнтованого підходу

Важливою задачею є забезпечення набуття описаних в таблиці 3 компетентностей в межах дисциплін програми освітньо-професійної підготовки фахівців з інформатики.

Відповідно до [3, 4] дисципліна програмування відіграє важливу роль в переліку дисциплін, який узгоджений з міжнародними стандартами.

На основі компетентісно орієнтованого підходу автором розроблено робочу навчальну програму з дисципліни «Програмування», яка є складовою освітньо-професійної програми підготовки фахівців за освітньо-кваліфікаційним рівнем «бакалавр» галузі знань «Інформатика» з *напрямку підготовки 6.040302 „Інформатика”, спеціальності - 6.040302 „Інформатика”* та викладається автором у 3-4 семестрах 2 курсу в обсязі 288 годин. Далі наведено фрагменти цієї робочої навчальної програми з коментарями автора.

Дана дисципліна базова нормативна за *спеціальністю “Інформатика”*. Викладається у 3-4 семестрах 2 курсу в обсязі – 288 год.

(8 кредитів ECTS) зокрема: *лекції – 68 год., лабораторні – 68 год., самостійна робота – 152 год.* 3 них у 3 семестрі: *лекції – 34 год., лабораторні – 34 год., самостійна робота – 76 год.* У 4 семестрі: *лекції – 34 год., лабораторні – 34 год., самостійна робота – 76 год.* У курсі передбачено **6 змістових модулів** та **6 модульних контрольних роботи**. Завершується дисципліна – іспитами в 3 та 4 семестрах.

Мета дисципліни – засвоєння базових знань з основ програмування, включаючи об'єктно-орієнтований стиль, набуття навичок процедурного та об'єктно-орієнтованого програмування та оволодіння мовою програмування C#.

Завдання – набуття компетенцій, знань, умінь та навиків на рівні новітніх досягнень у програмуванні, відповідно до кваліфікації фахівця з інформаційних технологій.

Структура курсу

В результаті вивчення навчальної дисципліни студент повинен

знати: засоби проектування систем; стандарти моделювання, методи аналізу потреб; методи розробки програмного забезпечення; принципи проектування користувацьких інтерфейсів; інструментальні засоби для формалізації функціональних специфікацій; застосовне програмне забезпечення, СУБД і мови програмування; передові технології; мови програмування; **вміти:** розробляти шаблони і моделі проектування; збирати, формалізовувати і оцінювати функціональні та інші вимоги; розробляти специфікації з урахуванням встановлених вимог; роз'яснювати і представляти проекти / розробки замовникам; використовувати моделі даних; розробляти ПЗ на основі моделі; розробляти ПЗ з використанням сучасних технологій розробки; складати план тестування і контролювати його виконання.

Місце дисципліни. Нормативна навчальна дисципліна „Програмування” є складовою циклу професійної підготовки фахівців освітньо-кваліфікаційного рівня „бакалавр”.

Зв'язок з іншими дисциплінами Дисципліна “Програмування” є базовою для засвоєння всіх інших курсів та спецкурсів програмиського спрямування, окремих розділів теорії алгоритмів та математичної логіки.

Зокрема, на спеціальності інформатика факультету кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка дисципліні другого курсу «Програмування» передуює «Програмування» (1 курс) (читає доцент кафедри ТК Ставровський А.Б.), де вивчається мова C++ та основи ООП. Крім того, приділяється увага таким питанням, як основи програмування алгоритмічною мовою, основні концепції алгоритмічних мов, процедурне програмування та основам об'єктно-орієнтованого програмування.

Одночасно з дисципліною «Програмування» в четвертому семестрі читається дисципліна «Алгоритміка» (читає доцент кафедри МІ Медведєв М.Г.), де розглядаються базові алгоритми та їх подальше застосування для вирішенні різних задач з програмування.

На третьому курсі студенти напряму підготовки 6.040302 „Інформатика” слухають «Системне програмування» (доцент кафедри ТТП Волохов В.М.), яке включає оглядові лекції з мови програмування Java. Крім того, на третьому курсі читається дисципліна «Бази даних та інформаційні системи» (читає доцент кафедри

МІ Кулябко П.П.), де студенти мають можливість детально ознайомитися з принципами побудови баз даних, СКБД, SQL.

Таким чином, на думку автора, на другому курсі в межах дисципліни «Програмування» слід зробити акцент на основах та принципах ООП, основах програмної інженерії та на застосуванні сучасних інформаційних технологій. При цьому, дисципліна «Програмування» може сприяти набуттю компетенцій, представлених в таблиці 4.

Таким чином, дисципліна «Програмування» є важливою складовою програми освітньо-професійної підготовки фахівців з інформатики для набуття необхідних ІТ-компетенцій.

Обсяг статті не дозволяє детально проаналізувати та представити повний опис запропонованої автором робочої навчальної програми з дисципліни «Програмування» для студентів денної форми навчання напряму підготовки «Інформатика» спеціальності 6.040302 з якою можна ознайомитися [12]. Згідно з цією програмою структура навчальної дисципліни розподіляється на 2 семестри в кожному по три модулі.

Зокрема, в третьому семестрі в програмі представлено наступні модулі:

Змістовний модуль 1. Об'єктно-орієнтована методологія. Основні принципи моделювання програмних систем. Шаблони проектування.

Змістовний модуль 2. Огляд технології .NET Framework. Алгоритми та структури даних.

Змістовний модуль 3. Функціональні можливості C#. Робота з файлами та директоріями. Робота з XML-документами.

В четвертому семестрі в програмі представлено наступні модулі:

Змістовний модуль 4. Огляд та застосування ORM (Object-relational mapping, Об'єктно-реляційне відображення)-технологій.

Змістовний модуль 5. Розробка web-застосунків.

Змістовний модуль 6. Елементи інженерії програмних систем.

Як зазначалося вище, важливою передумовою вироблення затребуваних ІТ-галуззю компетенцій є набуття студентами досвіду роботи, якого у межах освітньої програми можна досягти під час лабораторних робіт та групових проектів на початкових курсах та за рахунок підвищення ролі виробничої практики в ІТ-компаніях та сприяння фаховій сертифікації на старших курсах. Таким чином,

робоча навчальна програма з дисципліни «Програмування» повинна включати лабораторні роботи (проекти), задачею яких повинно бути надання студентам досвіду практичної роботи з сучасними ІТ-технологіями. Ще однією важливою задачею нормативної дисципліни «Програмування» є підготовка студентів до іспитів для отримання міжнародних професійних сертифікацій (наприклад, розроблена автором робоча програма є корисною для сертифікацій Microsoft MTA (базовий рівень спеціаліста початківця), а саме до здачі наступних іспитів: Exam 98-361: Software Development Fundamentals; Exam 98-362: Windows Development Fundamentals; Exam 98-363: Web Development Fundamentals; Exam 98-372: .NET Fundamentals; Exam 98-375: HTML5 App Development Fundamentals. А також до сертифікаційних іспитів основної групи Microsoft MCSD (Microsoft Certified Solution Developer) та MCTS: .NET Framework 4, Data Access: Exam 70-516: .NET Framework 4, Data Access (MCTS); Exam 70-480: Programming in HTML5 with JavaScript and CSS3 (MCSD); Exam 70-483: Programming in C# (MCSD). Exam 70-486: Developing ASP.NET MVC 4 Web Applications (MCSD)). Сертифікація

важлива для перевірки і підтвердження компетентностей, отриманих студентами з кваліфікації «Фахівець з інформаційних технологій», після прослуховування нормативної дисципліни «Програмування».

Висновки

Таким чином, на основі Європейської рамки ІКТ-компетенцій 2.0 в межах розробки компетентнісно орієнтований стандарт вищої освіти, в якому будуть сформовані відповідні вимогам ІТ-галузі компетентності, можна розробляти робочі навчальні програми дисциплін, перелік яких узгоджений з переліками дисциплін провідних світових зразків стандартів освітньо-професійної підготовки ІТ-фахівців. Це показано на прикладі розробки робочої навчальної програми з дисципліни «Програмування», яка є складовою освітньо-професійної програми підготовки фахівців за освітньо-кваліфікаційним рівнем «бакалавр» галузі знань «Інформатика» з напряму підготовки 6.040302 „Інформатика”.

Таблиця 2. Співвідношення е-компетенцій та професій, представлених Національним класифікатором

Європейський ІКТ профіль	Українські назви професій	
	ОКР “бакалавр”	ОКР “магістр”
Розробник	Технік-програміст, фахівець з розробки комп’ютерних програм	Інженер-програміст, програміст (база даних), програміст прикладний, програміст системний
Спеціаліст з медіа	Фахівець з комп’ютерної графіки (дизайну)	Програміст прикладний
Спеціаліст з тестування	Фахівець з розробки та тестування програмного забезпечення	

Таблиця 3. Розподіл е-компетенцій відповідно до ІКТ-профілів за напрямом підготовки “Інформатика”

Дескриптор 1, е-компетенції	Дескриптор 2, е-компетенції	Дескриптор 3, рівні застосування компетенцій			
		Розробник	Спеціаліст з тестування	Спеціаліст з медіа	Усього
Планування	А.6. Розробка			е-2	е-1, е-2
Побудова	В.1. Проектування та розробка	е-3	е-3, е-4	е-3	е-3, е-4
	В.2. Інтеграція систем	е-2	е-2, е-3		е-2, е-3
	В.3. Тестування	е-2	е-2, е-3	е-2	е-2, е-3
	В.4. Розгортання рішень		е-3	е-3	е-3
	В.5. Розробка документації	е-3		е-3	е-3
Запуск	С.4. Керування проблемами	е-3	е-2, е-3		е-2, е-3

Таблиця 4. Розподіл е-компетенцій, представлених в курсі «Програмування», відповідно до ІКТ-профілів за напрямом підготовки “Інформатика”

Дескриптор 1, е-компетенції	Дескриптор 2, е-компетенції	Курс «Програмування»	Дескриптор 3, рівні застосування компетенцій			
			Розробник	Спеціаліст з тестування	Спеціаліст з медіа	Усього
Планування	А.6. Розробка	е-1			е-2	е-1, е-2
Побудова	В.1. Проектування та розробка	е-2, е-3	е-3	е-3, е-4	е-3	е-3, е-4
	В.2. Інтеграція систем	е-2, е-3	е-2	е-2, е-3		е-2, е-3
	В.3. Тестування	е-1	е-2	е-2, е-3	е-2	е-2, е-3
	В.4. Розгортання рішень			е-3	е-3	е-3
	В.5. Розробка документації	е-1	е-3		е-3	е-3
Запуск	С.4. Керування проблемами		е-3	е-2, е-3		е-2, е-3

Список використаних джерел

- Дефіцит ІТ-фахівців в Україні — 30 % [Електронний ресурс] / Інформаційне агентство УНІАН. — Режим доступу: <http://education.unian.net/ukr/detail/190597>.
- Омельчук Л.Л. До питання розробки компетентнісно орієнтованого стандарту освітньо-професійної підготовки з інформатики / Л. Омельчук // Вища школа. — 2013. — № 11. — С. 43—49.
- Омельчук Л.Л. Порівняльний аналіз українського стандарту освітньо-професійної підготовки з інформатики та Computer Science'2013 / Л.Л. Омельчук // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія фізико-математичні науки. — 2013. — Вип. 2. — С. 216—227.
- Омельчук Л.Л. Порівняльний аналіз українського стандарту освітньо-професійної підготовки з інформатики та державного освітнього стандарту Російської Федерації з інформатики та обчислювальної техніки / Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія

фізико-математичні науки — 2014. — Вип. 1. — С. 174—178.

5. Галузевий стандарт вищої освіти підготовки бакалаврів за напрямом 040302 «Інформатика». — К., 2010.
6. Computer Science Curriculum 2013 : Strawman Draft. The Joint Task Force on Computing Curricula, Association for Computing Machinery, IEEE-Computer Society [El. resource]. — URL: <http://ai.stanford.edu/users/sahami/CS2013/strawman-draft/cs2013-strawman.pdf>.
7. Федеральный государственный образовательный стандарт высшего профессионального образования по направлению подготовки 230100 «Информатика и вычислительная техника». — М., 2009.
8. European e-Competence Framework, e-CF [El. resource]. — URL: www.ecompetences.eu.
9. Морозова Т.В. До проблеми взаємодії професійних і освітніх стандартів в ІТ-галузі / Т. Морозова, І. Мендзєбровський // Вища школа. — 2012. — № 12. — С. 45—53.
10. Про затвердження Національної рамки кваліфікацій. Постанова Кабінету Міністрів України від 23.11.2011 № 1341 [Електронний ресурс]:. — Режим доступу: <http://zakon4.rada.gov.ua/laws/show/1341-2011-%D0%BF>.
11. Класифікатор професій ДК 003:2010. — К. : Соцінформ, 2010. — 746 с.
12. Омельчук Л.Л. Програмування. 1 семестр. [Електронний ресурс] / Омельчук Л.Л. КНУ ім. Тараса Шевченка – Moodle. – Режим доступу: <http://195.68.210.50/moodle/course/view.php?id=55>

References

1. UNIAN (2011) *Defitsit IT-fahivtsiv v Ukrayini-30%* [Online] Available from: <http://education.unian.net/ukr/detail/190597> [Accessed: 22th January 2014].
2. OMELCHUK, L. (2013) Regarding to the Problem of Development of Competency-Based Standard of Educational-Professional Training in Informatics, *Vyshcha shkola*, no. 11, pp. 43-49.
3. OMELCHUK, L. (2013) A comparative analysis of Ukrainian educational standard in Informatics and international standard Computer Science'2013, *Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv Series Physics & Mathematics*, no. 2, pp. 216-227.
4. OMELCHUK, L. (2014) A comparative analysis of Ukrainian educational standard in Informatics and educational standard of Russian Federation in the direction of 230100 "Computer Science and Engineering", *Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv Series Physics & Mathematics*, no. 1, pp. 174-178.
5. MINISTRY OF EDUCATION AND SCIENCE OF UKRAINE (2010) *The industry standard of the higher education of preparation of bachelors behind the direction 040302 «Informatics»*. Kyiv.
6. ASSOCIATION FOR COMPUTING MACHINERY and IEEE-COMPUTER SOCIETY (2013) *Computer Science Curriculum 2013: Strawman Draft. The Joint Task Force on Computing Curricula*, [Online] Available from: <http://ai.stanford.edu/users/sahami/CS2013/strawman-draft/cs2013-strawman.pdf> [Accessed: 22th January 2014].
7. MINISTRY OF EDUCATION AND SCIENCE (RUSSIA) (2009) *Federal state educational standard of higher education in the field of training 230100 «Computer Science»*, Moscow.
8. European e-Competence Framework, e-CF. [Online] Available from: www.ecompetences.eu. [Accessed: 22th January 2014].
9. MOROZOVA, T. and MENDZEBROVS'KYY, I. (2012) On the Problem of Interaction of Professional and Educational Standards in the Information-Technological Branch of Learning, *Vyshcha shkola*, no. 12, pp. 45-53.
10. GOVERNMENT OF UKRAINE. (2011) *Pro zatverdzhennya Natsional'noyi ramky kvalifikatsiy*. Postanova Kabinetu Ministriv Ukrayiny vid 23.11.2011 № 1341 [Online] Available from: <http://zakon4.rada.gov.ua/laws/show/1341-2011-%D0%BF> [Accessed: 22th January 2014].
11. DERZHSPZHIVSTANDARD (2010) *Klasyfikator profesiy DK 003:2010*, Sotsinform, Kyiv, 746 pp. (in Ukrainian)
12. OMELCHUK, L. (2013) *First semester of Programming*. [Online] Available from: <http://195.68.210.50/moodle/course/view.php?id=55> [Accessed: 22th January 2014].

Надійшла до редколегії 23.01.2014

УДК 519.2:519.6

Пашко А.О.¹, к.ф.-м.н., доц.

Статистичне моделювання узагальненого вінерівського процесу

¹ Київський національний університет
імені Тараса Шевченка, 83000, м. Київ, пр-т.
Глушкова 4д,
e-mail: pashkoua@mail.ru

A. A. Pashko¹, Ph.D., Ass. Prof.

Statistical simulation of the generalized Wiener process

¹ Taras Shevchenko National University of
Kyiv, 83000, Kyiv, Glushkova st., 4d,
e-mail: pashkoua@mail.ru

В роботі досліджуються оцінки точності і надійності моделювання узагальненого вінерівського випадкового процесу в нормі простору $L_2([0,1])$, отримані моделі використовуються в прикладних задачах. В якості моделі розглядається розклад процесу у вигляді стохастичного субгауссівського ряду.

Ключові слова: субгауссівська модель, надійність моделі, точність моделі, узагальнений вінерівський процес, статистичне моделювання.

This paper investigates algorithms for simulation of the trajectories of a fractional Brownian motion with given accuracy and reliability. Spectral representation of fractional Brownian motion as random series examines as a model. Estimates of the accuracy and reliability investigated in in functional spaces - $L_2([0,1])$. Given the accuracy of the numbers and simulation algorithms error of Gaussian random variables in the model are used strictly sub-Gaussian random variables. Examples of simulation are represented below. Statistical models of Wiener processes are used in many applications, for example, when calculating the integrals over Wiener process, for the numerical solution of stochastic differential equations, in problems of actuarial mathematics. In problems of statistical modeling to assess the accuracy of the simulation is usually used or evaluation points, or evaluation of weak convergence of distributions. The paper describes the calculations for different values for the accuracy and reliability and simulation results are generalized Wiener process.

Key Words: simulation, generalized Wiener process, sub-Gaussian random model, accuracy and reliability of model.

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Хусаїнов Д.Я.

Статистичні моделі вінерівських процесів використовуються в багатьох прикладних задачах, наприклад, при обчисленні інтегралів за вінерівськими процесами, при чисельному розв'язанні стохастичних диференціальних рівнянь, в задачах актуарної математики. В задачах статистичного моделювання для оцінювання точності моделювання, як правило, використовуються або оцінки моментів, або оцінки слабкої збіжності розподілів [1-2].

В роботах [3-4] досліджувались оцінки точності і надійності моделювання субгауссових випадкових процесів в різних функціональних просторах, що базуються на оцінках швидкості збіжності за ймовірністю. В якості моделі розглядаються спектральні зображення випадкових процесів у вигляді випадкових рядів або інтегралів. В даній роботі

досліджується точність і надійність моделювання вінерівського процесу та узагальненого строго субгауссівського вінерівського процесу в нормі простору $L_2([0,1])$.

Означення 1. Узагальненим вінерівським процесом (дробовим броунівським рухом) з індексом Хюрста $\alpha \in (0,1)$ називається гауссівський процес $W_\alpha(t), t \in [0,1]$ такий що $W_\alpha(0) = 0$, $EW_\alpha(t) = 0$ та кореляційною функцією $R_\alpha(t, s) = \frac{1}{2}(|t|^{2\alpha} + |s|^{2\alpha} - |t-s|^{2\alpha})$.

При $\alpha = \frac{1}{2}$ маємо стандартний вінерівський процес. Для моделювання випадкових процесів використаємо представлення процесу у вигляді

стохастичного ряду $\xi(t) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t) X_k$, де $\{X_k\}$ –

послідовність незалежних випадкових величин з нульовим середнім та $EX_k^2 = \sigma_k^2$. Модель

будуємо у вигляді $S_M(t) = \sum_{k=1}^M f_k(t) X_k$.

Нехай T – деяка параметрична множина, всі $S_M(t)$ та $\xi(t)$ належать деякому функціональному простору $A(T)$.

Означення 2. Модель $S_M(t)$ наближає процес $\xi(t)$ з заданими точністю $\delta > 0$ і надійністю $0 < \varepsilon < 1$ в нормі функціонального простору $A(T)$, якщо $P\{\|\xi(t) - S_M(t)\|_A > \delta\} \leq 1 - \varepsilon$.

При реальному моделюванні послідовності $\{X_k\}$ отримуємо, як правило, строго субгауссові випадкові величини.

Клас субгауссових випадкових величин є банаховим. Властивості субгауссових величин досліджувались в роботі [5].

Враховуючи властивості вінерівського процесу [6], будемо розглядати вінерівський процес на відрізку $T = [0, 1]$. Вінерівський процес можна представити у вигляді випадкового ряду, так, розклад за власними функціями кореляційного оператора броунівського мосту

має вигляд $\xi_1(t) = t\eta_0 + \sqrt{2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\sin(i\pi t)}{i\pi} \eta_i$, де

$\{\eta_0, \eta_1, \eta_2, \dots\}$ – незалежні стандартні гауссові випадкові величини, $\lambda_i = i\pi$ – власні числа кореляційного оператора. Розклад у ряд Фур'є на $t \in [0, 1]$ має вигляд [6]

$$\xi_2(t) = t\eta_0 + \sqrt{2} \sum_{i=1}^{\infty} \left(\eta_{1i} \frac{\sin(2\pi i t)}{2\pi i} + \eta_{2i} \frac{1 - \cos(2\pi i t)}{2\pi i} \right),$$

де $\{\eta_{1i}, \eta_{2i}\}$ – незалежні стандартні гауссові випадкові величини.

Оскільки $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(i\pi)^2} < \infty$, то якщо в

представленнях $\xi_1(t)$ та $\xi_2(t)$ використати строго субгауссові випадкові величини, то отримаємо, що $\xi_1(t)$ та $\xi_2(t)$ є строго субгауссовими випадковими процесами. При моделюванні вінерівського процесів в якості моделі, в залежності від представлення, можна використовувати або модель

$$S_1(t, M) = t\eta_0 + \sqrt{2} \sum_{i=1}^M \frac{\sin(i\pi t)}{i\pi} \eta_i, \quad \text{або} \quad \text{модель}$$

$$S_2(t, M) = t\eta_0 + \sqrt{2} \sum_{i=1}^M \left(\eta_{1i} \frac{\sin(2\pi i t)}{2\pi i} + \eta_{2i} \frac{1 - \cos(2\pi i t)}{2\pi i} \right).$$

На основі результатів робіт [3-4] має місце наступна теорема.

Теорема 1. Модель $S_1(t, M)$ наближає процес $\xi_1(t)$ з точністю $\delta > 0$ та надійністю $1 - \varepsilon$, $0 < \varepsilon < 1$ в $L_2([0, 1])$, якщо виконуються нерівності $\delta^2 > J_{1_{M+1}}$

$$\exp\left\{\frac{1}{2}\right\} \frac{\delta}{\sqrt{J_{1_{M+1}}}} \exp\left\{-\frac{\delta^2}{2J_{1_{M+1}}}\right\} \leq \varepsilon$$

або

$$\delta^2 > J_{1_{M+1}}$$

$$\left(\frac{\delta^2 - J_{1_{M+1}}}{J_{2_{M+1}}} + 1\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left\{-\frac{\delta^2 - J_{1_{M+1}}}{2J_{2_{M+1}}}\right\} \leq \varepsilon$$

$$\text{де } J_{1_{M+1}} = \sum_{i=M+1}^{\infty} \lambda_i^{-2} \text{ і } J_{2_{M+1}} = \left(\sum_{i=M+1}^{\infty} \lambda_i^{-4}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Вінерівський процес з довільним індексом Хюрста можна представити у вигляді ряду [7]

$$W_{\alpha}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \sin(x_k t) X_k + b_k (1 - \cos(y_k t)) Y_k), \quad (1)$$

де $\{X_k, Y_k\}$ – незалежні стандартні гауссівські випадкові величини, $\{x_k\}$ – дійсні нулі функції Бесселя $J_{-\alpha}(x)$, $\{y_k\}$ – дійсні нулі функції Бесселя $J_{1-\alpha}(x)$,

$$a_k = \frac{\pi^{\alpha} \sqrt{2C}}{x_k^{\alpha+1} J_{1-\alpha}(x_k)}, \quad b_k = \frac{\pi^{\alpha} \sqrt{2C}}{y_k^{\alpha+1} J_{-\alpha}(y_k)},$$

$$C = \frac{\Gamma(2\alpha+1) \sin(\pi\alpha)}{\pi^{2\alpha+1}}.$$

Нехай випадкові величини $\{X_k, Y_k\}$ – незалежні строго субгауссові випадкові величини. Розглянемо

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k^2 (\sin(x_k t))^2 + b_k^2 (1 - \cos(y_k t))^2 \right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + 4b_k^2)$$

На основі роботи [8] маємо

$$x_n = \left(n + \frac{3}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)\pi - \frac{4\alpha^2 - 1}{2\pi(4n + 3 - 2\alpha)} + \dots$$

$$y_n = \left(n + \frac{5}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)\pi - \frac{4(1-\alpha)^2 - 1}{2\pi(4n + 1 + 2\alpha)} + \dots, \text{ а саме,}$$

$$x_n \approx y_n \approx \pi n \quad \text{при } n \rightarrow \infty. \text{ Для функцій}$$

Бесселя $J_{\alpha}(x)$, $\alpha > -1$ має місце асимптотичне

$$\text{співвідношення } J_{-\alpha}^2(x) + J_{1-\alpha}^2(x) \approx \frac{2}{\pi x} \quad \text{для}$$

великих x . Тоді для x_n та y_n справедливо
 $J_{1-\alpha}^2(x_n) \approx \frac{2}{\pi x_n}$ та $J_{-\alpha}^2(y_n) \approx \frac{2}{\pi y_n}$ при $n \rightarrow \infty$.

$$\text{Тому } \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + 4b_k^2) \approx \\ \approx (\Gamma(2\alpha+1)\sin(\pi\alpha)) \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{x_n^{2\alpha+1}} + \frac{4}{y_n^{2\alpha+1}} \right) < \infty.$$

Отже, випадковий процес $W_\alpha(t)$ в представленні (1), коли $\{X_k, Y_k\}$ - незалежні строго субгауссові випадкові величини буде строго субгауссівським випадковим процесом. В якості моделі можна розглядати ряд

$$S_\alpha(t, M) = \sum_{k=1}^M (a_k \sin(x_k t) X_k + b_k (1 - \cos(y_k t)) Y_k),$$

де $\{X_k, Y_k\}$ - незалежні строго субгауссові випадкові величини. Оскільки нулі функції Бесселя точно знайти не можемо, то будемо знаходити їх з деякою точністю, це ж відноситься і до коефіцієнтів розкладу. Позначимо наближені значення a_k, b_k, x_k, y_k відповідно $\tilde{a}_k, \tilde{b}_k, \tilde{x}_k, \tilde{y}_k$.

$$\text{Нехай } |a_k - \tilde{a}_k| \leq h_k^a, \quad |b_k - \tilde{b}_k| \leq h_k^b,$$

$$|x_k - \tilde{x}_k| \leq h_k^x, \quad |y_k - \tilde{y}_k| \leq h_k^y.$$

Де $h_k^a, h_k^b, h_k^x, h_k^y$ точність обчислення. Похибки будемо вважати відомими.

Тоді модель процесу має вигляд

$$\tilde{S}_\alpha(t, M) = \sum_{k=1}^M (\tilde{a}_k \sin(\tilde{x}_k t) X_k + \tilde{b}_k (1 - \cos(\tilde{y}_k t)) Y_k).$$

А похибка моделювання $\Delta(t)$ буде рівною $\Delta(t) = W_\alpha(t) - \tilde{S}_\alpha(t, M)$.

Теорема 2. Модель $\tilde{S}_\alpha(t, M)$ наближає процес $W_\alpha(t)$ з точністю $\delta > 0$ та надійністю $1 - \varepsilon$, $0 < \varepsilon < 1$ в нормі простору $L_2([0, 1])$, якщо виконуються нерівності

$$\delta^2 > B_M \quad (2)$$

та

$$\exp\left\{\frac{1}{2}\right\} \frac{\delta}{\sqrt{B_M}} \exp\left\{-\frac{\delta^2}{2B_M}\right\} \leq \varepsilon, \quad (3)$$

$$\text{де } B_M = \sum_{k=M+1}^{\infty} (a_k^2 + 4b_k^2) + \\ + \sum_{k=1}^M \left((a_k h_k^x + h_k^a)^2 + (b_k h_k^y + 2h_k^b)^2 \right).$$

Доведення. На основі леми 2.5 при $N = 1$ роботи [3] маємо для $\delta > Z_M$

$$P\left\{\|W_\alpha(t) - \tilde{S}_\alpha(t, M)\|_{L_2} > \delta\right\} \leq \\ \leq \exp\left\{\frac{1}{2}\right\} \left(\frac{\delta}{Z_M}\right) \exp\left\{-\frac{\delta^2}{2Z_M^2}\right\},$$

$$\text{де } Z_M^2 = \int_0^1 E(W_\alpha(t) - \tilde{S}_\alpha(t, M))^2 dt.$$

Оцінимо Z_M .

$$E(W_\alpha(t) - \tilde{S}_\alpha(t, M))^2 = \\ = E(W_\alpha(t) - S_\alpha(t, M) + S_\alpha(t, M) - \tilde{S}_\alpha(t, M))^2 = \\ \leq E\left(\sum_{k=M+1}^{\infty} (a_k \sin(x_k t) X_k + b_k (1 - \cos(y_k t)) Y_k)\right)^2 + \\ + E\left(\sum_{k=1}^M (a_k \sin(x_k t) - \tilde{a}_k \sin(\tilde{x}_k t)) X_k + \right. \\ \left. + (b_k (1 - \cos(y_k t)) - \tilde{b}_k (1 - \cos(\tilde{y}_k t))) Y_k\right)^2 \leq \\ \leq E(B_1)^2 + E(B_2)^2.$$

Оцінимо кожен доданок. Для першого маємо $E(B_1)^2 \leq \sum_{k=M+1}^{\infty} (a_k^2 + 4b_k^2)$ Для $E(B_2)^2$

$$\text{отримаємо } E(B_2)^2 \leq \sum_{k=1}^M (a_k \sin(x_k t) - \tilde{a}_k \sin(\tilde{x}_k t))^2 + \\ + \sum_{k=1}^M (b_k (1 - \cos(y_k t)) - \tilde{b}_k (1 - \cos(\tilde{y}_k t)))^2 \leq \\ \leq \sum_{k=1}^M (a_k h_k^x t + h_k^a)^2 + \sum_{k=1}^M (b_k h_k^y t + 2h_k^b)^2.$$

Проінтегруємо праву частину. Отримаємо необхідну оцінку для Z_M .

При побудові моделей необхідно для заданих точності і надійності та точності обчислення коренів Бесселевих функцій оцінити кількість доданків в моделі.

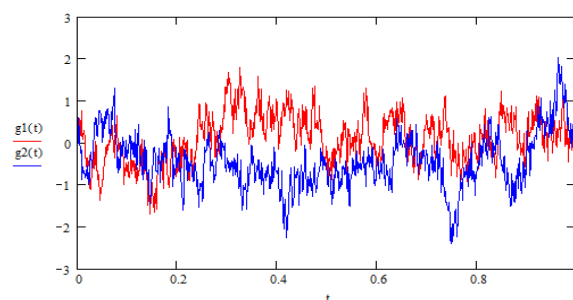


Рис. 1. Реалізація узагальненого субгауссівського вінерівського процесу для $\alpha = 0.2$.

Таблиця 1

Оцінки M для різних точності і надійності				
δ	ε	M	h	α
0.1	0.05	150000	0.00002	0.3
0.1	0.05	550	0.0002	0.5
0.05	0.05	2400	0.00007	
0.01	0.05	100000	0.000004	
0.1	0.05	22	0.001	0.8
0.05	0.05	80	0.0006	
0.01	0.05	500	0.00004	
0.01	0.01	700	0.00003	

Нехай $h_k^a = h_k^b = h_k^x = h_k^y = h$.

Значення M необхідно вибирати за формулою $M = \max\{M_1, M_2\}$, де M_1 задовольняє нерівності (2), а M_2 задовольняє нерівності (3).

В таблиці 1 наведені розрахунки для M при різних значеннях точності і надійності.

На рис. 1 представлені результати моделювання для узагальненого субгауссівського вінерівського процесу ($\alpha = 0.2$).

При зростанні α значення M помітно зменшується. Теоретично, при $\alpha \rightarrow 1$ процес вироджується в пряму лінію, а реалізації стають більш гладкими.

Список використаних джерел

1. Ермаков С.М. Статистическое моделирование / С. М. Ермаков, Г. А. Михайлов. - Москва: Наука, 1982. - 296с.
2. Пригарин С.М. Методы численного моделирования случайных процессов и полей / С. М. Пригарин. - Новосибирск, 2005. - 259с.
3. Козаченко Ю.В. Точність моделювання випадкових процесів в нормах просторів Орліча. I / Ю.В. Козаченко, А.О. Пашко // Теорія ймовірностей та математична статистика. – 1998, 58. - С.75-90.
4. Козаченко Ю.В. Точність моделювання випадкових процесів в нормах просторів Орліча. II / Ю.В. Козаченко, А.О. Пашко // Теорія ймовірностей та математична статистика. – 1998, 59. - С.45-60.
5. Булдыгин В.В. Метрические характеристики случайных величин и процессов / В. В. Булдыгин, Ю. В. Козаченко. - Киев: ТВиМС, 1998. - 289с.
6. Гихман И.И. Введение в теорию случайных процессов / И.И. Гихман, А.В. Скороход. – Москва: Наука, 1977. – 570 с.

7. Dzharidze K.O. A series expansion of fractional Brownian motion / K.O. Dzharidze, J.H. Zanten // CWI. Probability, Networks and Algorithms, R0216.

8. Вигдорович И.И. Асимптотические разложения корней алгебраических уравнений / И.И. Вигдорович, В.А. Алексин. – М.: МГИУ, 2007. – 38 с.

References

1. ERMAKOV, S. and MIKHAILOV, G. (1982). *Statistical simulations*. Moscow: Nauka, p.296.
2. PRIGARIN, S. (2005). *Methods for numerical simulation of random processes and fields*. Novosibirsk, p.259.
3. KOZACHENKO, Y. and PASHKO, A. (1998). The accuracy of simulation of random processes in Orlicz norms. *Probability theory and mathematical statistics*, 58, pp.75-90.
4. KOZACHENKO, Y. and PASHKO, A. (1999). The accuracy of simulation of random processes in Orlicz norms II. *Probability theory and mathematical statistics*, 59, pp.45-60.
5. BULDYGIN, V. and KOZACHENKO, Y. (1998). *Metric characteristics of random variables and processes*. Kyiv: TViMS, p.289.
6. GIHMAN, I. and SKOROHOD, A. (1977). *Introduction to the theory of stochastic processes*. Moscow: Nauka, p.570.
7. DZHAPARIDZE, K. & ZANTEN, J. (2010) A series expansion of fractional Brownian motion. CWI. *Probability, Networks and Algorithms*.R0216.
8. VIGDOROVICH, I. and ALEK SIN, V. (2007) *Asymptotic expansions of the roots of algebraic equations*. Moscow.MGIU, p.38.

Надійшла до редколегії 28.03.14.

УДК 532.59

Потапенко Л.І., к.т.н.,
Стешенко Г.М., к.ф.-м.н.

Чисельне моделювання динамічних процесів в морських водоймах

Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, пр-т Глушкова
4д,
e-mail: lpotapenko@ukr.net, grtt@mail.ru.

L.I. Potapenko, k.t.n.,
G.M. Steshenko, k.f.-m.n.

Numerical simulation of dynamic processes in marine water bodies

Taras Shevchenko National University of Kyiv,
03680, Kyiv, Glushkova av., 4d,
e-mail: lpotapenko@ukr.net, grtt@mail.ru.

В роботі побудована тривимірна нелінійна математична модель гідродинаміки закритих водойм. Ця модель заснована на рівняннях гідродинаміки мілководних водойм. Для запису рівнянь використовувалась σ -система координат. Для розв'язання системи рівнянь побудована неявна різницева схема, для реалізації якої застосовано ітераційний процес, що базується на методах Ньютона та послідовної верхньої релаксації.

Ключові слова: рівняння Нав'є – Стокса, коефіцієнт турбулентного обміну, неявна різницева схема, метод поправки до тиску.

The three-dimensional nonlinear mathematical model of the hydrodynamics of closed water bodies is built in this paper. The model is intended to estimate and forecast of the water environment taking into account effects of wind. This model is based on the equations of hydrodynamics of shallow waters. The governing equations are solved in the sigma coordinate system. To solve the problem using the method of hydrodynamic corrections to the pressure. This method is an additive scheme of splitting on physical processes and ensures the implementation of the mass balance. The Poisson equation used for calculation of pressure distribution. Pressure is calculated so that to enforce continuity equation. The implicit difference scheme is constructed for solving the equations. The iterative process based on Newton's method and successive upper relaxation method is applied to implement this scheme. Considering model is part of computer-modeling complex to prediction of the behavior of interior waters depending on impact of various factors. The architecture of complex allows to configure complex for different objects, particularly reservoirs and interior seas.

Keywords: Navier - Stokes equations, the coefficient of turbulent exchange, implicit difference scheme, the corrections of the pressure method.

Статтю представив д.т.н. Кудін В.І.

Вступ

Метою даної роботи є побудова тривимірної нелінійної математичної моделі гідродинаміки закритих водойм. Модель призначається для оцінки та прогнозування стану водного середовища з урахуванням впливу вітру.

В роботах, які присвячені математичному моделюванню гідродинаміки морських водойм, використовувались як двовимірні так і тривимірні моделі. Двовимірні моделі були застосовані в роботах [1, 2, 3]. Але для більш повного дослідження руху водного середовища бажано використовувати тривимірні моделі. Так, в роботах Сухінова і Чистякова [4, 5] розроблена

тривимірна нелінійна математична модель для розрахунку поля швидкостей водного середовища стосовно мілководних водойм. Для чисельного розв'язання гідродинамічної задачі використовувався метод поправки до тиску. В роботі [6] побудована 3D-цифрова модель руху рідини з вільною поверхнею. Модель розроблена за умови присутності гідродинамічного тиску, яку треба враховувати, якщо вертикальне прискорення є значним.

Значна кількість робіт по моделюванню морських водойм присвячена моделюванню динамічних процесів в Азовському морі. Так, в роботах [7, 8] побудована тривимірна нелінійна

математична модель, яка дозволяє досліджувати динамічні процеси, що виникають під дією змінного в часі вітру за наявності стаціонарних течій. В роботі [9] побудована 3D-математична модель гідродинаміки Азовського моря. При моделюванні течія подається у вигляді руху двох шарів рідини: верхнього і нижнього. Рух верхнього шару описується рівняннями мілкої води. Рух нижнього шару описується рівняннями гідродинаміки: рівняння кількості руху, рівняння нерозривності, до яких додається рівняння гідростатичного тиску. Вплив вітру враховується в рівняннях верхнього шару.

Побудова математичної моделі

Тривимірний математичний модель заснована на нелінійних рівняннях гідродинаміки мілководних водойм [10], які включають в себе рівняння Нав'є – Стокса:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \alpha v, \quad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu \frac{\partial v}{\partial z} \right) - \alpha u, \quad (2)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu \frac{\partial w}{\partial z} \right) - g, \quad (3)$$

рівняння нерозривності:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \quad (4)$$

Повний гідродинамічний тиск пов'язаний з глибиною співвідношенням

$$P = \rho g(\eta - z) + q, \quad (5)$$

де u, v, w – компоненти вектора швидкості $\vec{V}$, P – повний тиск, q – гідродинамічний тиск, ρ – щільність, α – кутова швидкість обертання Землі, μ та ν – горизонтальна і вертикальна

складові коефіцієнта турбулентного обміну, η – обурення рівня поверхні.

Область розв'язку задачі $\Omega = \{x, y \in D, -H(x, y) \leq z \leq \eta(x, y)\}$,

де D – область поверхні водойми, H – глибина.

Через переважання горизонтального масштабу над вертикальним можна вважати несуттєвою роль горизонтальної турбулентної в'язкості в порівнянні з вертикальною. Тому вважаємо коефіцієнт горизонтального турбулентного обміну μ постійним і приймаємо

його значення порядку $10^2 - 10^3 \frac{m^2}{c}$. Коефіцієнт

вертикального турбулентного обміну ν обчислюється виходячи з моделі Смагоринського [4]:

$$\nu = C_s^2 \Delta^2 \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2}. \quad (6)$$

Значення константи C_s змінюється від 0,1 до 0,2, Δ – характерний масштаб сітки по вертикалі.

Граничні умови на вільній поверхні мають вигляд:

$$w|_{z=\eta} = \frac{\partial \eta}{\partial t} + u \frac{\partial \eta}{\partial x} + v \frac{\partial \eta}{\partial y}, \quad (7)$$

$$\nu \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=\eta} = \tau_{0x},$$

$$\nu \frac{\partial v}{\partial z} \Big|_{z=\eta} = \tau_{0y}, \quad (8)$$

де $\tau_{0x} = C_a (|\vec{W}|) W_x |\vec{W}|$, $\tau_{0y} = C_a (|\vec{W}|) W_y |\vec{W}|$ – проекції дотичних напружень вектора швидкості вітру $\vec{W}$ на висоті 10 м над рівнем моря, C_a – коефіцієнт поверхневого тертя:

$$C_a(x) = \begin{cases} 0,0088, & x < 6,6 \frac{m}{c} \\ 0,0026, & x \geq 6,6 \frac{m}{c} \end{cases} - \text{безрозмірний}$$

коефіцієнт.

На бічних границях виконується умови прилипання.

На дні $z = -H(x, y)$ виконуються умови:

$$\left(w + u \frac{\partial H}{\partial x} + v \frac{\partial H}{\partial y} \right) \Big|_{z=-H} = 0,$$

$$\nu \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=-H} = \tau_{1x}, \quad (9)$$

$$v \frac{\partial v}{\partial z} \Big|_{z=-H} = \tau_{1y},$$

де $\tau_{1x} = C_b u \sqrt{u^2 + v^2}$, $\tau_{1y} = C_b v \sqrt{u^2 + v^2}$,

C_b – коефіцієнт донного тертя, який обчислюється за формулою

$$C_b = k^2 \ln^{-2} \left(\frac{z_2}{z_0} \right),$$

z_2 – крок по вертикалі в придонному шарі,
 $z_0 = 0,003 \text{ м}$ – параметр шорсткості, що характеризує властивості підстилаючої донної поверхні.

У початковий момент часу ($t = 0$) рух рідини відсутній, а вільна поверхня горизонтальна:

$$\begin{aligned} u(x, y, z, t) = 0, v(x, y, z, t) = 0, \\ w(x, y, z, t) = 0, \eta(x, y, z, t) = 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Система рівнянь, крайових і початкових умов (1)–(10) розв'язується в області з вільною поверхнею. Щоб враховувати зміну поверхні в часі для запису рівнянь математичної моделі використовуємо σ -систему координат. Перейдемо від координати z до координати σ за формулою:

$$\sigma = (z - \eta) / (H + \eta). \quad (11)$$

Тоді система рівнянь (1)–(4) запишеться так:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{w}{H + \eta} \frac{\partial u}{\partial \sigma} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial q}{\partial x} - g \frac{\partial \eta}{\partial x} + \\ + \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \\ + \frac{1}{(H + \eta)^2} \frac{\partial}{\partial \sigma} \left(v \frac{\partial u}{\partial \sigma} \right) + \alpha v, \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{w}{H + \eta} \frac{\partial v}{\partial \sigma} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial q}{\partial y} - g \frac{\partial \eta}{\partial y} + \\ + \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \\ + \frac{1}{(H + \eta)^2} \frac{\partial}{\partial \sigma} \left(v \frac{\partial v}{\partial \sigma} \right) - \alpha u, \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{w}{H + \eta} \frac{\partial w}{\partial \sigma} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial q}{\partial z} + \\ + \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \\ + \frac{1}{(H + \eta)^2} \frac{\partial}{\partial \sigma} \left(v \frac{\partial w}{\partial \sigma} \right), \end{aligned} \quad (14)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{H + \eta} \frac{\partial w}{\partial \sigma} = 0. \quad (15)$$

Скінченнорізницева модель

Для чисельної реалізації дискретної математичної моделі вводиться сітка $\bar{\omega}_h$, де τ – крок за часом, h_1, h_2, h_3 – кроки за просторовими змінними, $\Delta\sigma$ – крок за координатою σ .

Для розв'язання задачі гідродинаміки використовується метод поправки до тиску. Даний метод являє собою адитивну схему розщеплення по фізичним процесам і гарантує виконання балансу маси (рівняння нерозривності). Згідно методу вихідна модель розбивається на три підзадачі.

В першій підзадачі обчислюються проміжні значення вектора швидкості. Друга підзадача полягає в розрахунку розподілу тиску на основі рівняння Пуассона. Тиск обчислюється таким чином, щоб виконувалось рівняння нерозривності. Третя підзадача коригує значення компонент вектора швидкості на поточному часовому шарі по явним формулам з урахуванням градієнту тиску.

Для обчислення проміжних значень вектора швидкості побудована неявна різницева схема:

$$\begin{aligned} \frac{u_{i+\frac{1}{2}jk} - u_{i+\frac{1}{2}jk}}{\tau} + u_{i+\frac{1}{2}jk} \frac{u_{i+\frac{3}{2}jk} - u_{i-\frac{1}{2}jk}}{2h_1} + \\ + v_{i+\frac{1}{2}jk} \frac{u_{i+\frac{1}{2}j+1k} - u_{i+\frac{1}{2}j-1k}}{2h_2} + \frac{w_{i+\frac{1}{2}jk}}{(H_{i+\frac{1}{2}j} + \eta_{i+\frac{1}{2}j})} \times \\ \times \frac{u_{i+\frac{1}{2}jk+1} - u_{i+\frac{1}{2}jk-1}}{2\Delta\sigma} = \Omega v_{i+\frac{1}{2}jk} - g \frac{\eta_{i+1j} - \eta_{ij}}{h_1} + \\ + \mu \left(\frac{u_{i+\frac{3}{2}jk} - 2u_{i+\frac{1}{2}jk} + u_{i-\frac{1}{2}jk}}{h_1^2} + \right. \\ \left. + \frac{u_{i+\frac{1}{2}j+1k} - 2u_{i+\frac{1}{2}jk} + u_{i+\frac{1}{2}j-1k}}{h_2^2} \right) + \end{aligned}$$

$$+ \frac{1}{(H_{i+\frac{1}{2}j} + \eta_{i+\frac{1}{2}j})^2} (v_{i+\frac{1}{2}jk+\frac{1}{2}} \frac{\overline{u_{i+\frac{1}{2}jk+1}} - \overline{u_{i+\frac{1}{2}jk}}}{\Delta\sigma^2} -$$

$$- v_{i+\frac{1}{2}jk-\frac{1}{2}} \frac{\overline{u_{i+\frac{1}{2}jk}} - \overline{u_{i+\frac{1}{2}jk-1}}}{\Delta\sigma^2}), \quad (16)$$

$$\frac{\overline{v_{ij+\frac{1}{2}k}} - \overline{v_{ij+\frac{1}{2}k}}}{\tau} + u_{ij+\frac{1}{2}k} \frac{\overline{v_{i+1j+\frac{1}{2}k}} - \overline{v_{i-1j+\frac{1}{2}k}}}{2h_1} +$$

$$v_{ij+\frac{1}{2}k} \frac{\overline{v_{ij+\frac{3}{2}k}} - \overline{v_{ij-\frac{1}{2}k}}}{2h_2} + \frac{\overline{w_{ij+\frac{1}{2}k}}}{(H_{ij+\frac{1}{2}} + \eta_{ij+\frac{1}{2}})} \times$$

$$\times \frac{\overline{v_{ij+\frac{1}{2}k+1}} - \overline{v_{ij+\frac{1}{2}k-1}}}{2\Delta\sigma} = -\Omega u_{ij+\frac{1}{2}k} - g \frac{\eta_{ij+1} - \eta_{ij}}{h_2} +$$

$$+ \mu \left(\frac{\overline{v_{i+1j+\frac{1}{2}k}} - 2\overline{v_{ij+\frac{1}{2}k}} + \overline{v_{i-1j+\frac{1}{2}k}}}{h_1^2} + \right.$$

$$+ \frac{\overline{v_{ij+\frac{3}{2}k}} - 2\overline{v_{ij+\frac{1}{2}k}} + \overline{v_{ij-\frac{1}{2}k}}}{h_2^2} \left. \right) + \frac{1}{(H_{ij+\frac{1}{2}} + \eta_{ij+\frac{1}{2}})^2} \times$$

$$\times (v_{ij+\frac{1}{2}k+\frac{1}{2}} \frac{\overline{v_{ij+\frac{1}{2}k+1}} - \overline{v_{ij+\frac{1}{2}k}}}{\Delta\sigma^2} -$$

$$- v_{ij+\frac{1}{2}k-\frac{1}{2}} \frac{\overline{v_{ij+\frac{1}{2}k}} - \overline{v_{ij+\frac{1}{2}k-1}}}{\Delta\sigma^2}), \quad (17)$$

$$\frac{\overline{w_{ijk+\frac{1}{2}}} - \overline{w_{ijk+\frac{1}{2}}}}{\tau} + u_{ijk+\frac{1}{2}} \frac{\overline{w_{i+1jk+\frac{1}{2}}} - \overline{w_{i-1jk+\frac{1}{2}}}}{2h_1} +$$

$$+ v_{ijk+\frac{1}{2}} \frac{\overline{w_{ij+1k+\frac{1}{2}}} - \overline{w_{ij-1k+\frac{1}{2}}}}{2h_2} + \frac{\overline{w_{ijk+\frac{1}{2}}}}{(H_{i+\frac{1}{2}j} + \eta_{i+\frac{1}{2}j})} \times$$

$$\times \frac{\overline{w_{ijk+\frac{3}{2}}} - \overline{w_{ijk-\frac{1}{2}}}}{2\Delta\sigma} =$$

$$= \mu \left(\frac{\overline{w_{i+1jk+\frac{1}{2}}} - 2\overline{w_{ijk+\frac{1}{2}}} + \overline{w_{i-1jk+\frac{1}{2}}}}{h_1^2} + \right.$$

$$+ \frac{\overline{w_{ij+1k+\frac{1}{2}}} - 2\overline{w_{ijk+\frac{1}{2}}} + \overline{w_{ij-1k+\frac{1}{2}}}}{h_2^2} \left. \right) + \frac{1}{(H_{ij} + \eta_{ij})^2} \times$$

$$\times (v_{ijk+1} \frac{\overline{w_{ijk+\frac{3}{2}}} - \overline{w_{ijk+\frac{1}{2}}}}{\Delta\sigma^2} - v_{ijk} \frac{\overline{w_{ijk+\frac{1}{2}}} - \overline{w_{ijk-\frac{1}{2}}}}{\Delta\sigma^2}), \quad (18)$$

де u, v, w – компоненти вектора швидкості на попередньому часому шарі, $\overline{u}, \overline{v}, \overline{w}$ – проміжні значення компонент вектора швидкості.

Апроксимація рівняння нерозривності:

$$\frac{\overline{u_{i+\frac{1}{2}jk}} - \overline{u_{i-\frac{1}{2}jk}}}{h_1} + \frac{\overline{v_{ij+\frac{1}{2}k}} - \overline{v_{ij-\frac{1}{2}k}}}{h_2} +$$

$$+ \frac{1}{(H_{ij} + \eta_{ij})} \frac{\overline{w_{ijk+\frac{1}{2}}} - \overline{w_{ijk-\frac{1}{2}}}}{\Delta\sigma} = 0. \quad (19)$$

Значення компонент швидкості на $(n+1)$ -му шарі по часу знаходимо за формулами:

$$u_{i+\frac{1}{2}jk}^{n+1} = \overline{u_{i+\frac{1}{2}jk}} - \frac{\tau}{\rho h_1} (q_{i+1jk} - q_{ijk}), \quad (20)$$

$$v_{ij+\frac{1}{2}k}^{n+1} = \overline{v_{ij+\frac{1}{2}k}} - \frac{\tau}{\rho h_1} (q_{ij+1k} - q_{ijk}), \quad (21)$$

$$w_{ijk+\frac{1}{2}}^{n+1} = \overline{w_{ijk+\frac{1}{2}}} - \frac{\tau}{\rho h_1} (q_{ijk+1} - q_{ijk}). \quad (22)$$

Підставляючи (20)–(22) в (19), одержуємо скінченно-різницеве рівняння Пуассона для тиску:

$$\tau \frac{q_{i+1jk} - 2q_{ijk} + q_{i-1jk}}{h_1^2} + \tau \frac{q_{ij+1k} - 2q_{ijk} + q_{ij-1k}}{h_2^2} +$$

$$+ \frac{\tau}{(H_{ij} + \eta_{ij})^2} \frac{q_{ijk+1} - 2q_{ijk} + q_{ijk-1}}{\Delta\sigma^2} = \rho \left(\frac{\overline{u_{i+\frac{1}{2}jk}} - \overline{u_{i-\frac{1}{2}jk}}}{h_1} + \right.$$

$$+ \frac{\overline{v_{ij+\frac{1}{2}k}} - \overline{v_{ij-\frac{1}{2}k}}}{h_2} + \frac{1}{(H_{ij} + \eta_{ij})} \frac{\overline{w_{ijk+\frac{1}{2}}} - \overline{w_{ijk-\frac{1}{2}}}}{\Delta\sigma} \left. \right), \quad (23)$$

Для обчислення сіткових значень коефіцієнта вертикального турбулентного обміну $\nu_{ijk+\frac{1}{2}}$ та $\nu_{ijk-\frac{1}{2}}$ використовуємо різницевої аналог апроксимації Смагоринського (6):

$$\nu_{ijk+\frac{1}{2}} = (C_s h_3)^2 \sqrt{\left(\frac{\overline{u_{ijk+1}} - \overline{u_{ijk-1}}}{h_3} \right)^2 + \left(\frac{\overline{v_{ijk+1}} - \overline{v_{ijk-1}}}{h_3} \right)^2}.$$

Для чисельної реалізації різницевої схеми (16)–(18) використовується ітераційний процес.

Чисельна реалізація різницевої схеми

Різницева схема (11)–(14) є неявною. Вона представляє собою систему нелінійних різницевих рівнянь. Для її розв'язання використовується ітераційний процес, який базується на методах Ньютона та послідовної верхньої релаксації [11].

Для побудови ітераційного процесу запишемо різницеві рівняння (11)–(13) у вигляді:

$$\begin{aligned} F_1(u_{i+\frac{1}{2}jk}, u_{i-\frac{1}{2}jk}, u_{i+\frac{3}{2}jk}, u_{i+\frac{1}{2}j-k}, u_{i+\frac{1}{2}j+k}, \\ u_{i+\frac{1}{2}jk-1}, u_{i+\frac{1}{2}jk+1}) &= 0, \\ F_2(v_{ij+\frac{1}{2}k}, v_{i-1j+\frac{1}{2}k}, v_{i+1j+\frac{1}{2}k}, v_{ij-\frac{1}{2}k}, v_{ij+\frac{3}{2}k}, \\ v_{ij+\frac{1}{2}k-1}, v_{ij+\frac{1}{2}k+1}) &= 0, \\ F_3(w_{ijk+\frac{1}{2}}, w_{i-1jk+\frac{1}{2}}, w_{i+1jk+\frac{1}{2}}, w_{ij-k+\frac{1}{2}}, w_{ij+k+\frac{1}{2}}, \\ w_{ijk-\frac{1}{2}}, w_{ijk+\frac{3}{2}}) &= 0. \end{aligned}$$

Тоді ітераційний процес для розв'язання рівнянь (16)–(18) запишеться у вигляді:

$$\begin{aligned} u_{i+\frac{1}{2}jk}^{s+1} &= u_{i+\frac{1}{2}jk}^s - \varpi \frac{F_1}{F_{11}}, \\ v_{ij+\frac{1}{2}k}^{s+1} &= v_{ij+\frac{1}{2}k}^s - \varpi \frac{F_2}{F_{21}}, \\ w_{ijk+\frac{1}{2}}^{s+1} &= w_{ijk+\frac{1}{2}}^s - \varpi \frac{F_3}{F_{31}}, \end{aligned}$$

де $F_{11} = 1 + 2\tau\mu(\frac{1}{h_1^2} + \frac{1}{h_2^2}) +$

$$+ \frac{\tau}{(H_{i+\frac{1}{2}j} + \eta_{i+\frac{1}{2}j})^2} \frac{v_{i+\frac{1}{2}jk+\frac{1}{2}} + v_{i+\frac{1}{2}jk-\frac{1}{2}}}{\Delta\sigma^2},$$

Список використаних джерел

1. Еремеев В.Н. Моделирование длинных волн в Азовском море, вызываемых прохождением циклонов / В.Н. Еремеев, А.В. Коновалов, Ю.В. Манилюк, Л.В. Черкесов // Океанология. – 2000. – 40. – №5 – С. 658-665.
2. Крукиер Л.А. Математическое моделирование гидродинамических

$$\begin{aligned} F_{21} &= 1 + 2\tau\mu(\frac{1}{h_1^2} + \frac{1}{h_2^2}) + \\ &+ \frac{\tau}{(H_{ij+\frac{1}{2}} + \eta_{ij+\frac{1}{2}})^2} \frac{v_{ij+\frac{1}{2}k+\frac{1}{2}} + v_{ij+\frac{1}{2}k-\frac{1}{2}}}{\Delta\sigma^2}, \\ F_{31} &= 1 + 2\tau\mu(\frac{1}{h_1^2} + \frac{1}{h_2^2}) + \\ &+ \frac{\tau}{(H_{ij} + \eta_{ij})^2} \frac{v_{ijk+1} + v_{ijk}}{\Delta\sigma^2}, \end{aligned}$$

$0 < \varpi < 1$, s – номер ітерації.

Для побудови ітераційного процесу розв'язування різницевої схеми для тиску запишемо рівняння (23) у вигляді

$$F_4(q_{ijk}, q_{i-1jk}, q_{i+1jk}, q_{ij-k}, q_{ij+k}, q_{ijk-1}, q_{ijk+1}) = 0,$$

де $F_4(q_{ijk}, q_{i-1jk}, q_{i+1jk}, q_{ij-k}, q_{ij+k}, q_{ijk-1}, q_{ijk+1}) =$

$$\begin{aligned} &\frac{q_{i+1jk} - 2q_{ijk} + q_{i-1jk}}{h_1^2} + \frac{q_{ij+k} - 2q_{ijk} + q_{ij-k}}{h_2^2} + \\ &+ \frac{1}{(H_{ij} + \eta_{ij})^2} \frac{q_{ijk+1} - 2q_{ijk} + q_{ijk-1}}{\Delta\sigma^2} - \frac{\rho}{\tau} (\frac{u_{i+\frac{1}{2}jk} - u_{i-\frac{1}{2}jk}}{h_1} + \\ &+ \frac{v_{ij+\frac{1}{2}k} - v_{ij-\frac{1}{2}k}}{h_2} + \frac{1}{(H_{ij} + \eta_{ij})} \frac{w_{ijk+\frac{1}{2}} - w_{ijk-\frac{1}{2}}}{\Delta\sigma}). \end{aligned}$$

Розглянута модель є складовою частиною комп'ютерно-моделюючого комплексу для передбачення поведінки внутрішніх водойм в залежності від впливу різноманітних факторів. Архітектура комплексу дозволяє налаштовувати його на різні об'єкти, зокрема водосховища та внутрішні моря. Зараз здійснюється налаштування програмного забезпечення для умов Азовського моря.

References

1. YEREMEIEV, V., KONOVALOV, A. and MANILIUK, YU. (2000) Modelirovanie dlinnykh voln v Azovskom more, vyzyivaemykh prokhozheniem tsiklonov. In *Okeanologia*. 40(5). pp. 658-665.
2. KRUKIER, L. (2000) Matematicheskoe modelirovanie hidrodinamicheskikh protsessov v Azovskom more.

- гидродинамических процессов в Азовском море / Л.А. Крукиер // Закономерности океанографических и биологических процессов в Азовском море – Апатиты: Изд-во КНУ РАН. – 2000. – С.129-163.
3. Chang Y.S. Suspended sediment hydrodynamics above mildly sloped long wave ripples / Y.S. Chang, D.M. Hanes // *Journal of Geophysical Research* – 2004, vol.109, C07022, doi 10.029/2003, JC001900.
 4. Сухинов А.И. Численная реализация трехмерной модели гидродинамики для мелководных водоемов на супервычислительной системе / А.И. Сухинов, А.Е. Чистяков, Е.В. Алексеенко // *Математическое моделирование*. – 2011. – 23, №3. – С. 3-21.
 5. Сухинов А.И. Параллельная реализация трехмерной модели гидродинамики для мелководных водоемов на супервычислительной системе / А.И. Сухинов, А.Е. Чистяков // *Вычислительные методы и программирование*. – 2012. – 13. – С. 290-297.
 6. Kocyigit M.B. Three-dimensional Numerical Modelling of Free Surface Flows With Non-hydrostatic Pressure / M.B. Kocyigit // *Teknik Dergi*, vol.16, No. 1, 2005, pp. 3405-3424.
 7. Иванов В.А. Исследование влияния циклических возмущений на динамические процессы и эволюции примеси в Азовском море / В.А. Иванов, В.В. Фомин, Л.В. Черкесов, Т.Я. Шульга // *Морской геофизический журнал*. – 2009. – №2. – С. 12-25.
 8. Иванов В.А. Исследование влияния ветрового воздействия на течение и распространения примеси в Азовском море / В.А. Иванов, В.В. Фомин, Л.В. Черкесов, Т.Я. Шульга // *Морской геофизический журнал*. – 2010. – №3. – С. 15-28.
 9. Чикин А.Л. Построение и численное исследование 3D-модели гидродинамики Азовского моря / А.Л. Чикин // *Труды Международной конференции RDAMM-2001*. – 2001. – 6. Ч.2. спец. выпуск. С. 686-690.
 10. Ландау Л.Д. Гидродинамика / Л.Д. Ландау, Е.М. Лившиц – М.: Наука. – 1986. – 736 с. *neizvestnyimi*. Moskva: Mir.
 11. Дж. Ортега Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными / Дж. Ортега., В. Рейнболдт – М.: Мир. – 1975. – 560 с.
 - In *Zakonomernosti okeanograficheskikh i biologicheskikh protsessov v Azovskom more*. Apatity: Izdatelstvo KNU RAN. pp. 129-163
 3. CHANG, Y. and HANES, D. (2004) Suspended sediment hydrodynamics above mildly sloped long wave ripples In *Journal of Geophysical Research*, vol.109, C07022, doi 10.029/2003, JC001900.
 4. SUKHINOV, A., CHISTIYAKOV, A. and ALEKSEIENKO, E. (2011) Chislennaya realizatsia trekhmernoy modeli hidrodinamiki dlia melkovodnykh vodoemov na supervyichislitelnoy sisteme. In *Matematicheskoe modelirovanie*. 12(3). pp. 3-21.
 5. SUKHINOV, A. and CHISTIYAKOV, A. (2012) Parallelnaya realizatsia trekhmernoy modeli hidrodinamiki dlia melkovodnykh vodoemov na supervyichislitelnoy sisteme. In *Vychislitelnye metody i programmirovaniye*. 13. pp. 290-297.
 6. KOCYIGIT, M. (2005) Three-dimensional Numerical Modelling of Free Surface Flows With Non-hydrostatic Pressure In *Teknik Dergi*. 16(1). pp. 3405-3424.
 7. IVANOV, V., FOMIN, L., CHERKESOV, L. and SHULGA, T. (2009) Issledovanie vliyaniya tsiklicheskh vozmushcheniy na dinamicheskie protsessy i evoliutsii primesi v Azovskom more. In *Morskoy geofizicheskiy zhurnal*. 2. pp. 12-25.
 8. IVANOV, V., FOMIN, L., CHERKESOV, L. and SHULGA, T. (2010) Issledovanie vliyaniya vetrovogo vozdeystviya na techenie i rasprostraneniya primesi v Azovskom more. In *Morskoy geofizicheskiy zhurnal*. 3. pp. 15-28.
 9. CHIKIN, A. (2001) Postroenie i chislennoe issledovanie 3D-modeli hidrodinamiki Azovskoho moria. In *Trudy Mezhdunarodnoy konferentsii RDAMM-2001*. 6(2). Spets. vyipusk. pp. 686-690.
 10. LANDAU, L. and LIVSHITS, E. (1986). *Hidrodinamika*. Moskva: Nauka.
 11. ORTEGA, D. and REYNBOLDT, V. (1975). *Iteratsionnyie metodyi resheniya nelineynykh system uravneniy so mnohimy neizvestnyimi*. Moskva: Mir.
- Надійшла до редколегії 17.04.14

УДК 519.925.51

Рутицька В.В.¹, к.т.н.

Алгоритм оптимальної диверсифікації портфеля акцій

¹ Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, пр-т Глушкова, 4д
e-mail: vlarut@gmail.com

V.V. Rutytska¹, Ph.D.

Algorithm of optimal portfolio diversification

¹ Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03068, Kyiv, Glushkova ave., 4d
e-mail: vlarut@gmail.com

Розглядається задача про побудову оптимального початкового інвестиційного портфеля акцій. Ключові слова: математична модель, оптимальне інвестування, портфель акцій.

The problem of optimal portfolio diversification is investigated. In a class of ordinary differential equations constructed mathematical models of the dynamics of the formation of the market value per share and stock portfolio. Such models are needed to build the trajectories of the market price of shares and the optimal portfolio diversification. Initially, based on the method of variation of arbitrary constants is based procedure that enables an analytical solution of the corresponding equation. Based on the mathematical model of the market value per share the model of the dynamics of the portfolio is constructed. This model is used to its maximum diversification and building the initial values of the optimal vector of shares of different types in the portfolio. At that applies mathematical set theory and methods of optimal control theory. The problem of partitioning of investment interval on subintervals. On each of them solves the problem of constructing an optimal investment portfolio taking into account constraints on the control.

We also consider the problem of identification of parameters of the mathematical model of the dynamics of formation of the market value per share. For this purpose built procedure that allows you to build a guaranteed set, you always get the desired financial performance of investment operations.

Key Words: mathematical model, control parameters of portfolio, diversification of the investment portfolio

Статтю представив д.т.н., проф. Гарашенко Ф.Г.

При розв'язанні математичних задач фондового ринку значний інтерес може являти задача про побудову оптимального початкового портфеля цінних паперів при визначеному рівні його очікуваної прибутковості для заданого моменту часу у майбутньому.

Побудуємо алгоритм, який дозволить визначити структуру оптимального інвестиційного портфеля шляхом конструювання послідовності оптимальних на інтервалах керувань, починаючи з останнього, де значення цільової функції у кінцевий момент часу відоме. Математично формулювання такої задачі може бути записано так

$$\frac{dr_p(t)}{dt} = f(r_p(t), u(t), t), \quad (1)$$

$r_p(t_k) = r_p^k, \quad t_{k-1} \leq t \leq t_k, \quad u(t_i) \in U(t),$ де $U(t)$ – множина допустимих керувань, $i = \overline{1, k}$.

$$I(u(t_{k-1}), t_{k-1}) = \min_{u_{k-1}} \left(\int_{t_{k-1}}^{t_k} f_0(r_p(t), u(t), t) dt + \right. \quad (2)$$

$\left. \Phi(r(t_k)) \right)$.

Вважаємо, що функція $\Phi(r(t_k))$ – відома. Тут момент часу t_k – заданий; $u = (u_1, \dots, u_r)$; керування $u = u(t)$ є кусково - неперервною на заданому відрізку; $f(r_p, u, p, t)$ - задана неперервна та обмежена функція.

Для розв'язання задачі оптимального інвестування у цінні папери (1) – (2) застосовують такі методи:

- підхід Г. Марковиця, що використовує допустиму та ефективну множини, криві байдужості інвестора;

- розбиття загальної двокритеріальної задачі оптимізації інвестиційного портфеля на дві однокритеріальні;
- методи технічного аналізу;
- методи фундаментального аналізу.

Постановка задачі (1) – (2) є доволі загальною і серед невідомих додатково містить t_{k-1} та $r_p(t_{k-1})$, що, відповідно, є моментом часу переключення керування та очікуваною прибутковістю інвестиційного портфеля у цей момент часу. У такій постановці задача є надзвичайно складною, тому спробуємо спростити її. За моменти диверсифікації можемо розглянути відомі $t_0, t_1, \dots, t_k$. Необхідно визначити $r_p(t_i)$, $i = \overline{1, k}$.

Розглянемо математичну модель формування ринкової вартості інвестиційного портфеля і побудуємо аналітично відповідну траєкторію.

На інтервалі часу $t \in [t_0, T]$ рівняння, що описує прибутковість портфеля акцій r_p , має вигляд

$$r_p(t) = \sum_i x_i(t) r_i(t), \quad (3)$$

де x_i – частка акцій i -того виду у портфелі; r_i – очікувана прибутковість акцій i -того виду. Продиференціювавши обидві частини (1) за t , отримаємо

$$\frac{dr_p(t)}{dt} = \sum_i (r_i(t) \frac{dx_i(t)}{dt} + x_i(t) \frac{dr_i(t)}{dt}). \quad (4)$$

Уведемо нормуючі вирази, які за змістом є оберненим часом реакції системи на зміну динаміки очікуваної прибутковості та структури портфеля

$$\sum_i \frac{\dot{r}_i(t)}{r_i(t)} = 1, \quad \sum_i \frac{\dot{x}_i(t)}{x_i(t)} = 1, \quad t \in [t_0, t_1].$$

Для $i \neq j$ мають місце співвідношення

$$\sum_i x_i(t) r_i(t) \frac{f_i}{r_i(t)} = \sum_i x_i(t) r_i(t) - \sum_i \sum_j x_i(t) \times r_i(t) \frac{f_j}{r_j(t)},$$

$$\sum_i \frac{x_i(t) r_i(t)}{x_i(t)} \frac{dx_i(t)}{dt} = \sum_i x_i(t) r_i(t) - \sum_i \sum_j x_i(t) \times r_i(t) \frac{dx_j(t)}{dt} \frac{1}{x_j(t)}.$$

Динамічна модель формування ринкової вартості портфеля акцій матиме вигляд

$$\frac{dr_p(t)}{dt} = 2r_p(t) - \sum_i \sum_j x_i(t) r_i(t) \left(\frac{f_j}{r_j(t)} \times \frac{dx_j(t)}{dt} \frac{1}{x_j(t)} \right). \quad (4)$$

Це лінійне рівняння першого порядку і застосуємо метод варіації довільної сталої для побудови його загального розв'язку.

$$\frac{dr_p(t)}{dt} - 2r_p(t) = 0.$$

$$r_p(t) = c_1 e^{2t}, \quad (5)$$

де c_1 – довільна стала. Згідно методу варіації довільної сталої, вважатимемо

$$c_1 = c_1(t). \quad (6)$$

Підставимо розв'язок (5) у диференціальне рівняння (4), беручи до уваги (6). Отримаємо

$$c_1(t) = - \int e^{-2t} \sum_i \sum_j x_i(t) r_i(t) \left(\frac{f_j}{r_j(t)} \times \frac{dx_j(t)}{dt} \frac{1}{x_j(t)} \right) dt,$$

Тоді

$$r_p(t) = -e^{2t} \int e^{-2t} \sum_i \sum_j x_i(t) r_i(t) \left(\frac{f_j}{r_j(t)} \times \frac{dx_j(t)}{dt} \frac{1}{x_j(t)} \right) dt. \quad (7)$$

Останнє співвідношення, при припущеннях, зроблених вище, описує динаміку формування ринкової вартості портфеля ризикованих цінних паперів. Більш детальний його аналіз вказує на дві важливі властивості, які характеризують ринкову вартість портфеля і полягають в тому, що ця динаміка залежить від динаміки як очікуваної прибутковості акцій, так і зміни структури портфеля. У співвідношенні (7) f_j є правою частиною диференціального рівняння, яке описує динаміку формування ринкової

вартості акції [2] і за своєю структурою та змістом відповідає ринковій моделі Шарпа [1].

Отримали можливість побудувати послідовність траєкторій на вибраних інтервалах часу, що дозволяє сформувати структуру початкового інвестиційного портфеля.

Разом з тим, такий підхід не дозволяє ефективно впливати на структуру інвестицій і не в повній мірі використовує властивості математичного опису, що наведений у математичній моделі (4).

Окрім іншого, вона містить множник $\frac{dx_j(t)}{dt} * \frac{1}{x_j(t)}$, який описує можливі зміни структури інвестицій.

Скористаємось цією можливістю для побудови оптимальних на інтервалах керувань, маючи на меті сформувати оптимальний початковий портфель. Для останнього інтервалу задача матиме такий вигляд

$$t \in [t_{k-1}, t_k], \quad (8)$$

$$r_p(t_k) = r_p^k, \quad (9)$$

$$r_p(t_{k-1}) = r_p^{k-1} = \sum_{j=1}^l x_j(t_{k-1}) r_j(t_{k-1}), \quad (10)$$

динаміка формування ринкової вартості однієї акції $\frac{dr_j}{dt}$, ($j = \overline{1, l}$) при цьому описується відповідною моделлю, яка наведена і детально описана в [2], має вигляд

$$\frac{dr_j(t)}{dt} = (\alpha_1 SM_{ind}(t) + \alpha_2 I(t)) r_j(t) + \sum_{i=1}^N \beta_{ij} r_i(t),$$

$$j = \overline{1, n}.$$

Задача полягає у побудові функції керування $x_j(t)$, яка дозволить здійснити оптимальний перехід від точки r_p^k до точки r_p^{k-1} .

Для спрощення подальших викладок математичну модель (4) наведемо в більш загальній формі

$$\dot{r}_p = f^p(r_p, x_i, \dot{x}_i, r_i, \dot{r}_i), i = \overline{1, l} \quad (11)$$

Критерій якості, що дає можливість визначити оптимальний за ринковою вартістю портфель інвестицій для моменту часу t_{k-1} , запишемо у вигляді

$$\sum_{j=1}^l x_j(t_{k-1}) r_j(t_{k-1}) \rightarrow \max_x \quad (12)$$

При розв'язанні задачі оптимального керування (9), (11), (12) скористаємось методом послідовних наближень.

Як змінна фазового стану розглядається ринкова вартість портфеля акцій r_p . За керуючі параметри, згідно з моделлю, - вектор

$$u(t) = (x_i(t), r_i(t), \frac{dx_i(t)}{dt}, \frac{dr_i(t)}{dt}). \quad (13)$$

Обчислювальна процедура методу послідовних наближень полягає у конструюванні послідовності допустимих керувань $\{u^k(t)\}$ такої, що на кожному наступному кроці

$$u^{k+1}(t) = Ru^k(t), k = 0, 1, 2, \dots,$$

де u^0 - деяке початкове наближення вектора керувань; $Ru(t)$ - довільна допустима функція, що надає максимуму функції Гамільтона за керуванням. Особливістю постановки та застосування методу послідовних наближень є той факт, що на функцію керувань $u(t)$, $t \in [t_1, t_{k-1}]$ у кожен момент часу накладаються досить жорсткі обмеження

$$u(t_i) \in U(t_i), \quad (14)$$

де $U(t_i)$ - множина допустимих керувань, яка характеризує наявність на ринку необхідної кількості відповідного виду цінних паперів.

Наведена вище процедура дає можливість побудувати послідовність керувань, що дозволяє здійснити оптимальний перехід від точки $r_p(t_k)$ до точки $r_p(t_{k-1})$. Застосувавши послідовно кроки цього алгоритму отримаємо структуру оптимального початкового портфеля інвестицій.

Застосуємо апарат множин досяжності [3], щоб отримати можливість застосувати розроблені алгоритми для практичного застосування.

Згідно означення, множиною досяжності $D(t, s, M)$ системи керування (4) з умовою на кінці траєкторії (9) при $t \leq s$ є сукупність кінців траєкторій $r(\cdot)$ цієї системи, що починаються у момент s в точках множини початкових станів M .

Виходячи із положень класичної теорії Г. Марковиця, приходимо до висновку, що у кожен момент часу володіння портфелем цінних паперів інвестор аналізує множину альтернатив, з якої обирає єдину оптимальну для нього у даний

момент часу. Застосуємо формальний математичний алгоритм, побудований вище і який використовує множинні оцінки станів системи у вибрані моменти часу. Розв'язок задачі Коші для системи (4) при умові (9) позначимо

$$r_p = r_p(t, s, r_{k-1}^p).$$

Сформулюємо питання, які необхідно вирішити при побудові оптимального початкового портфеля інвестицій для відомої його бажаної прибутковості у кінцевий момент часу.

1. Знаючи множину досяжності $D(t, s, M)$ системи керування (9), можна оцінити можливості керування. Так, є змога дати відповідь на питання, чи можливо перевести систему керування (9) у заданий фазовий стан $r_p^*(t)$ у деякий фіксований момент часу $t < s$. Для цього достатньо перевірити приналежність вектора $r_p^*(t)$ множині $D(t, s, M)$.
2. Перевести систему (9) у заданий момент часу t нам задану множину N у фазовому просторі. Ця задача, очевидно, має розв'язок у тому і тільки у тому випадку, коли

$$N \cap D(t, s, M) \neq \emptyset.$$

3. Знайти таке керування $u(t)$ і такий вектор $r(s) \in M$, що для системи (9) при виконанні обмежень (14) досягається оптимальне значення функціонала

$$J = F(r_p(t)), \quad t < s. \quad (15)$$

Задача п. 3 з критерієм (15) може бути сформульована як задача про пошук мінімуму функціонала на множині досяжності

$$F^* = \min_{r_p \in D(t, s, M)} F(r_p). \quad (16)$$

Сформульована вище задача вже не є задачею оптимального керування, а являється задачею мінімізації функції n змінних на заданій множині. Таким чином, задачі (15) або (16) дозволяють послідовно отримувати множини траєкторій, що дають можливість інвестору приймати практичні рішення про оптимальний склад інвестиційного портфеля. Така постановка задачі і побудований алгоритм її розв'язання значно розширюють можливості при інвестуванні, адже у кожен момент диверсифікації є можливість отримати множину альтернатив, еквівалентних з точки зору обраних критеріїв якості. Інвестор, як і в класичному підході Г. Марковиця, має можливість врахувати при прийнятті рішення додаткові фактори, що можуть виникати в процесі практичного інвестування і пов'язані з особливостями процесу моделювання динаміки системи.

Запропонована математична процедура диверсифікації портфеля інвестицій дає можливість для динамічних математичних моделей однієї акції та портфеля акцій розв'язати задачу вибору початкового портфеля інвестицій при відомому значенні його очікуваної прибутковості на обраний у майбутньому момент часу.

Список використаних джерел

1. Шарп У. Инвестиции / Уильям Ф. Шарп, Гордон Дж. Александер, Джеффри В. Бэйли. – Москва: Инфра-М, 1999. – с.1027.
2. Гаращенко Ф.Г. / Качественный анализ математических моделей инвестиционного менеджмента / Гаращенко Ф.Г., Кулян В.Р., Рутицкая В. В. // Кибернетика и вычислительная техника. – 2005. – №148. – с. 3-10.
3. Крылов И.А. Алгоритм метода последовательных приближений для решения задач оптимального управления / Крылов И.А., Черноусько Ф.Л. – Москва: Наука, 1971. – с. 247.

References

1. SHARPE, W., ALEXANDER, G. and BAILEY, J. (1995) *Investments*. New Jersey: Prentice Hall.
2. GARASHCHENKO, F., KULYAN, V. and RUTITSKAYA, V. (2005) Quality analysis of mathematical models of investment management: *Cybernetics and computing engineering*. 148. p.3-10.
3. KRYLOV, I. and CHERNOUSKO, F. (1971) *Algorithm of method of progressive approximations for the decision of optimal control problems*. Moskva: Nauka.

Надійшла до редколегії 28.01.2014 р.

УДК 519.713+530.145

Скобелев В.Г., д.ф.-м.н., д.т.н., професор

Аналіз скінченних 1-кубітових квантових автоматів унітарні оператори яких є оберненнями.

Інститут прикладної математики і механіки
НАН України, 83114, м. Донецьк, вул. Рози
Люксембург, 74,
e-mail: skbv@iamm.ac.donetsk.ua

V. G. Skobelev, Dr. (Phys.-Math., Tech.) Sci, Prof.

Analysis of finite 1-qubit quantum automata unitary operators of which are rotations.

Institute of Applied Mathematics and Mechanics of
NAS of Ukraine, 83114, Rose Luxemburg str., 74,
e-mail: skbv@iamm.ac.donetsk.ua

У статті досліджено моделі скінченних 1-кубітових квантових автоматів у припущенні, що асоційовані унітарні оператори визначають обернення сфери Блоха навколо осі ординат, а вимірювання стану здійснюється лише в останній момент часу. Об'єктом дослідження є моделі MO-1QFA та k QFA ($k \geq 2$), які здійснюють перетворення чистого початкового стану автомата, а також їх узагальнення L-QFA та L- k QFA ($k \geq 2$), які здійснюють перетворення змішаного початкового стану автомата (тобто скінченної множини можливих початкових станів, кожний з котрих може мати місце з заданою ймовірністю). Предметом дослідження є мови, які вказані моделі розпізнають або з заданою ймовірністю, або з заданою похибкою. Структуру цих мов охарактеризовано у термінах фактор-множин, які визначено на основі вказаної властивості унітарних операторів. Встановлено критерії, при котрих вказані мови є скінченними множинами.

Ключові слова: скінченні 1-кубітові квантові автомати, обернення сфери Блоха навколо осі координат.

In the given paper there are investigated models of finite 1-qubit quantum automata under assumption that associated unitary operators are rotations of the Bloch sphere around the y -axis, and measurement of a state is produced at final instant only. The objects of investigation are models MO-1QFA and k QFA ($k \geq 2$) intended for transformation of pure initial state of an automaton, and their generalizations L-QFA and L- k QFA ($k \geq 2$), intended for transformation of initial mixed state of an automaton (i.e. for some finite set of admissible initial states, each of which can take the place with given probability). The subjects of investigation are languages accepted by investigated models either with given probability, or with given error. The structure of these languages is characterized in terms of the factor-sets that are determined by considered assumptions on unitary operators. Criteria under which characterized languages are finite ones are established.

Key Words: finite 1-qubit quantum automata, rotations of the Bloch sphere around some coordinate axis.

Статтю представив професор Буй Д.Б.

Introduction.

There were proposed a variety of finite quantum automata (QA) models (in what follows the word "finite" is omitted) intended to recognize languages in the given input alphabet [1-6]. Main efforts of researchers in QA theory are directed to determine the class of languages accepted by this or the other model of QA, to compare recognizing capacities of different models of QA each with the others, as well as with classic deterministic or probability automata, or to establish criteria of states equivalency for QA.

In [7] some QA models were characterized under assumption that unitary operators commute each

with the others. Languages accepted by these models of QA either with given probability, or with given mistake were characterized in terms of the input factor-set determined via the above pointed property of unitary operators.

In the given paper we investigate some simple QA models, such that unitary operators are rotations of the Bloch sphere [8] around fixed coordinate axis, i.e. they commute each with the others.

It what follows it is supposed that for any number $\alpha \in \mathbf{R}_+$ unitary operator U_α is defined via identity

$$U_{\alpha} = \begin{pmatrix} \cos 0.5 \alpha & -\sin 0.5 \alpha \\ \sin 0.5 \alpha & \cos 0.5 \alpha \end{pmatrix}, \quad (1)$$

i.e. unitary operator U_{α} ($\alpha \in \mathbf{R}_+$) maps any unit vector $|\varphi\rangle \in \mathbf{C}^2$ to the unit vector $U_{\alpha}(|\varphi\rangle)$ represented by the point obtained by rotating of the radius vector from the center of the Bloch sphere to the point $|\varphi\rangle$ through the angle 0.5α around the y -axe.

It is worth to note that for any numbers $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbf{R}_+$ there hold identities

$$U_{\alpha_1} U_{\alpha_2} = U_{\alpha_2} U_{\alpha_1} = U_{\alpha_1 + \alpha_2} = U_{(\alpha_1 + \alpha_2) \pmod{4\pi}}.$$

In the given paper some models of QA are investigated under the following three assumptions:

1. The set of basic states is $Q = B_2 = \{|0\rangle, |1\rangle\}$

(where $|0\rangle = (1, 0)^T$ and $|1\rangle = (0, 1)^T$), and the set of accepting states Q_{acc} is some one-element subset of the set Q , i.e. either $Q_{acc} = \{|0\rangle\}$, or $Q_{acc} = \{|1\rangle\}$.

2. Measurement of a state of QA is produced at final instant only.

3. For considered finite alphabet A some injection $\nu: A \rightarrow (0; 4\pi)$ is fixed, and with each letter $a \in A$ it is associated unitary operator $U_{\nu(a)}$ defined by formula (1).

The rest of the paper is organized as follows. Chapter 1 consists of technical results. In chapter 2 investigated models of QA are defined. In chapter 3 languages accepted by investigated models of QA either with given probability, or with given mistake are characterized. The last chapter consists of some conclusion remarks.

1. Technical results.

Let A be any finite alphabet, $k \in \mathbf{N}$ be some fixed integer, and $P: A \rightarrow \{0, 1\}$ be some fixed predicate. We set

$$A_0 = \{a \in A \mid P(a) = 0\},$$

$$A_1 = \{a \in A \mid P(a) = 1\},$$

$$A^{(k)} = \bigcup_{i=1}^{k-1} A_1^i A_0^{k-i} \cup A_1^k$$

and

$$\begin{aligned} S_{A,P,k} = \{a_1 \dots a_l \in A^+ \mid l \in \mathbf{N} \text{ \& } l \geq k \text{ \& } \\ \text{\& } (\forall i = 1, \dots, l-k+1)(a_i \in A_1) \text{ \& } \\ \text{\& } (\forall i = l-k+2, \dots, l)(a_i \in A_0)\}. \end{aligned} \quad (2)$$

It is worth to note that there hold the following two statements:

1. For any integer $k \in \mathbf{N}$ it holds inclusion $A_1 A_0^{k-1} \subset S_{A,P,k}$ (if $k=1$ we get that $A^{(1)} = A_1$ and $S_{A,P,1} = A_1^+$, and thus inclusion $A_1 \subset S_{A,P,k}$ holds).

2. For any integer $k \geq 2$ there hold identities

$$\bigcup_{i=2}^{k-1} A_1^i A_0^{k-i} \cap S_{A,P,k} = \emptyset \text{ and } A_1^k \cap S_{A,P,k} = \emptyset.$$

Let $\nu: A^{(k)} \rightarrow (0; 4\pi)$ be some fixed injection.

For any string $a_1 \dots a_l \in S_{A,P,k}$ we set

$$\tilde{\nu}(a_1 \dots a_l) = \sum_{i=1}^{l-k+1} \nu(a_i \dots a_{i+k-1}). \quad (3)$$

Equivalence $\varepsilon_{A,P,k}$ on the set $S_{A,P,k}$ defined by formula

$$(w_1, w_2) \in \varepsilon_{A,P,k} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \tilde{\nu}(w_1) \equiv \tilde{\nu}(w_2) \pmod{4\pi} \quad (w_1, w_2 \in S_{A,P,k}) \quad (4)$$

determines the factor-set $S_{A,P,k} / \varepsilon_{A,P,k}$, such that for each element $B \in S_{A,P,k} / \varepsilon_{A,P,k}$ there exists unique number $\gamma_B \in [0; 4\pi)$ such that

$$B = \{w \in S_{A,P,k} \mid (\exists k \in \mathbf{Z}_+)(\tilde{\nu}(w) = \gamma_B + 4\pi k)\}. \quad (5)$$

Let $U_{A^{(k)}} = \{U_{\nu(a)} \mid a \in A^{(k)}\}$ be the set of unitary operators, where $U_{\nu(a)}$ ($a \in A^{(k)}$) is defined by formula (1). For any string $a_1 \dots a_l \in S_{A,P,k}$ we set

$$U_{\tilde{\nu}(a_1 \dots a_l)} = \prod_{i=1}^{l-k+1} U_{\nu(a_i \dots a_{i+k-1})}. \quad (6)$$

Thus, the set of unitary operators $U_{A^{(k)}}$ generates the set of unitary operators

$$\tilde{U}_{A^{(k)}} = \{U_{\tilde{\nu}(a_1 \dots a_l)} \mid a_1 \dots a_l \in S_{A,P,k}\}.$$

Since for any string $a_1 \dots a_l \in S_{A,P,k}$ it holds identity

$$U_{\tilde{\nu}(a_1 \dots a_l)} = U_{\tilde{\nu}(a_1 \dots a_l) \pmod{4\pi}}, \quad (7)$$

we get that

$$\tilde{U}_{A^{(k)}} = \{U_{\tilde{\nu}(a_1 \dots a_l) \pmod{4\pi}} \mid a_1 \dots a_l \in S_{A,P,k}\}, \quad (8)$$

and formulae (4), (5) and (8) imply that

$$\tilde{U}_{A^{(k)}} = \{U_{\gamma_B} \mid B \in S_{A,P,k} / \varepsilon_{A,P,k}\}. \quad (9)$$

Now we consider in detail the case, when $k=1$.

We get that $A^{(1)} = A_1$, $S_{A,P,1} = A_1^+$ and

$$U_{A^{(1)}} \subseteq \tilde{U}_{A^{(1)}}. \quad (10)$$

Formulae (3) and (6) imply that for any string $a_1 \dots a_l \in S_{A,P,1}$ there hold identities

$$\tilde{\nu}(a_1 \dots a_l) = \sum_{i=1}^l \nu(a_i) \quad (11)$$

and

$$U_{\tilde{\nu}(a_1 \dots a_l)} = \prod_{i=1}^l U_{\nu(a_i)}. \quad (12)$$

Since $S_{A,P,1} = A_1^+$, then $w_1 w_2 \in S_{A,P,1}$ for any strings $w_1, w_2 \in S_{A,P,1}$, and formulae (11) and (12) imply that

$$U_{\tilde{\nu}(w_1 w_2)} = U_{\nu(w_1)} \cdot U_{\tilde{\nu}(w_2)} = U_{\tilde{\nu}(w_2)} \cdot U_{\tilde{\nu}(w_1)}. \quad (13)$$

Thus, $(\tilde{U}_{A^{(1)}}, \cdot)$ is commutative semigroup and formulae (7), (11) and (12) imply that the following theorem holds.

Theorem 1. For any finite alphabet A and any predicate $P : A \rightarrow \{0,1\}$ the semigroup $(\tilde{U}_{A^{(1)}}, \cdot)$ is isomorphic to the semigroup $(G, \oplus)$, where

$$G = \{(\sum_{a \in A_1} m_a \nu(a)) \pmod{4\pi} \mid (\forall a \in A_1)(m_a \in \mathbf{Z}_+) \& \\ \& (\exists a \in A^{(1)})(m_a \neq 0)\} \quad (14)$$

and

$$g_1 \oplus g_2 = (g_1 + g_2) \pmod{4\pi} \quad (g_1, g_2 \in G). \quad (15)$$

Corollary 1. For any finite alphabet A and any predicate $P : A \rightarrow \{0,1\}$ the semigroup $(\tilde{U}_{A^{(1)}}, \cdot)$ is a finite group if and only if all numbers $\frac{\nu(a)}{\pi}$ ($a \in A^{(1)}$) are rational ones.

Proof. Since $A^{(1)} = A_1$, then we get that $0 < \nu(a) < 4\pi$ ($a \in A_1$), and

$$0 < \frac{\nu(a)}{\pi} < 4 \quad (a \in A_1).$$

It is evident that formula (14) can be reduced to formula

$$G = \{(\sum_{a \in A_1} m_a \frac{\nu(a)}{\pi}) \pmod{4} \mid (\forall a \in A_1)(m_a \in \mathbf{Z}_+) \& \\ \& (\exists a \in A^{(1)})(m_a \neq 0)\} \quad (16)$$

Let all numbers $\frac{\nu(a)}{\pi}$ ($a \in A_1$) be rational ones.

Then we get that $\frac{\nu(a)}{\pi} = \frac{k_a^{(1)}}{k_a^{(2)}} \quad (a \in A_1)$, where

$$k_a^{(1)}, k_a^{(2)} \in \mathbf{N}, k_a^{(1)} < 4k_a^{(2)} \text{ and } \text{GCD}\{k_a^{(1)}, k_a^{(2)}\} = 1.$$

Thus, formula (16) implies that

$$G = \{(\sum_{a \in A_1} m_a \frac{k_a^{(1)}}{k_a^{(2)}}) \pmod{4} \mid (\forall a \in A_1)(m_a \in \mathbf{Z}_+) \& \\ \& (\forall a \in A_1)(m_a \leq 4k_a^{(2)}) \& (\exists a \in A_1)(m_a \neq 0)\}. \quad (17)$$

Formula (17) in its turn implies that the following three conditions hold:

1. The set G is a finite one.

2. $0 \in G$ (since we get that it holds identity

$$(\sum_{a \in A_1} 4k_a^{(2)} \frac{k_a^{(1)}}{k_a^{(2)}}) \pmod{4} = 0).$$

3. For any element $b = (\sum_{a \in A_1} m_a \frac{k_a^{(1)}}{k_a^{(2)}}) \pmod{4} \in G$

there exists the inverse element $-b \in G$. This element is defined by identity

$$-b = (\sum_{a \in A_1} (4k_a^{(2)} - m_a) \frac{k_a^{(1)}}{k_a^{(2)}}) \pmod{4}.$$

Thus, the semigroup $(G, \oplus)$ is a finite group.

Let there exists some $a \in A_1$, such that $\frac{\nu(a)}{\pi}$ is an irrational number.

Let us consider the sequence

$$\{(m \nu(a)) \pmod{4\pi}\}_{m \in \mathbf{N}} \quad (18)$$

of elements of the set G .

Let us suppose that the sequence (18) is finite one. Then there exist integers $m_1, m_2 \in \mathbf{N}$ ($m_1 > m_2$), such that

$$\begin{aligned} m_1 \nu(a) \pmod{4\pi} &= m_2 \nu(a) \pmod{4\pi} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow ((m_1 - m_2) \nu(a)) \pmod{4\pi} &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (\exists k \in \mathbf{N})(m_1 - m_2) \nu(a) &= 4\pi k \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (\exists k \in \mathbf{N})(\frac{\nu(a)}{\pi} &= \frac{4k}{m_1 - m_2}), \end{aligned}$$

i.e. $\frac{\nu(a)}{\pi}$ is rational number. We get a contradiction.

Thus, the sequence (18) of elements of the set G is infinite. This factor implies that the semigroup $(G, \oplus)$ is infinite.

Q.E.D.

Now we consider factor-set $S_{A,P,1} / \varepsilon_{A,P,1}$.

Let $B_1, B_2 \in S_{A,P,1} / \varepsilon_{A,P,1}$. Then for any strings $w_1 \in B_1$ and $w_2 \in B_2$ we get

$$\begin{aligned} \tilde{\nu}(w_1 w_2) \pmod{4\pi} &= (\tilde{\nu}(w_1) + \tilde{\nu}(w_2)) \pmod{4\pi} = \\ &= (\tilde{\nu}(w_1) \pmod{4\pi} + \tilde{\nu}(w_2) \pmod{4\pi}) \pmod{4\pi} = \\ &= (\gamma_{B_1} + \gamma_{B_2}) \pmod{4\pi}. \end{aligned} \quad (19)$$

Since $w_1 w_2 \in S_{A,P,1}$, then formula (19) implies that for any elements $B_1, B_2 \in S_{A,P,1} / \varepsilon_{A,P,1}$ there exists single element $B \in S_{A,P,1} / \varepsilon_{A,P,1}$ such that inclusions $B_1 B_2 \subseteq B$ and $B_2 B_1 \subseteq B$ hold.

This factor implies that we get some commutative semigroup $(S_{A,P,1} / \varepsilon_{A,P,1}, \circ)$, where operation $\circ$ is defined as follows

$$\begin{aligned} (\forall B_1, B_2, B \in S_{A,P,1} / \varepsilon_{A,P,1})(B_1 \circ B_2 &= B \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow B_1 B_2 &\subseteq B). \end{aligned}$$

Formula (19) implies that for any elements $B_1, B_2 \in S_{A,P,1} / \varepsilon_{A,P,1}$ it holds identity

$$\gamma_{B_1 \circ B_2} = (\gamma_{B_1} + \gamma_{B_2}) \pmod{4\pi}, \quad (20)$$

i.e. for any elements $B_1, B_2 \in S_{A,P,1} / \varepsilon_{A,P,1}$

$$U_{\gamma_{B_1 \circ B_2}} = U_{(\gamma_{B_1} + \gamma_{B_2}) \pmod{4\pi}}. \quad (21)$$

Theorem 2. For any finite alphabet A and any predicate $P : A \rightarrow \{0,1\}$ the semigroups $(\tilde{U}_{A^{(1)}}, \cdot)$ and $(S_{A,P,1} / \varepsilon_{A,P,1}, \circ)$ are isomorphic.

Proof. Formula (7)-(9) imply that we can define some mapping

$$f : S_{A,P,1} / \varepsilon_{A,P,1} \rightarrow \tilde{U}_{A^{(1)}}$$

by identity

$$f(B) = U_{\gamma_B} \quad (B \in S_{A,P,1} / \varepsilon_{A,P,1}). \quad (22)$$

Formula (5) implies that for any elements $B_1, B_2 \in S_{A,P,1} / \varepsilon_{A,P,1}$ such that $B_1 \neq B_2$ we get

$$f(B_1) = U_{\gamma_{B_1}} \neq U_{\gamma_{B_2}} = f(B_2),$$

i.e. the mapping f is some injection. Formula (9) implies that the mapping f is some surjection. Thus, the mapping f is some bijection.

Formula (21) and (22) imply that for any elements $B_1, B_2 \in S_{A,P,1} / \varepsilon_{A,P,1}$ we get

$$\begin{aligned} f(B_1 \circ B_2) &= U_{\gamma_{B_1 \circ B_2}} = U_{(\gamma_{B_1} + \gamma_{B_2}) \pmod{4\pi}} = \\ &= U_{\gamma_{B_1} + \gamma_{B_2}} = U_{\gamma_{B_1}} U_{\gamma_{B_2}} = f(B_1) f(B_2). \end{aligned}$$

We get that the mapping f is some bijection, such that identity $f(B_1 \circ B_2) = f(B_1) f(B_2)$ holds for any elements $B_1, B_2 \in S_{A,P,1} / \varepsilon_{A,P,1}$. This factor implies that the mapping f determines some isomorphism of the semigroup $(S_{A,P,1} / \varepsilon_{A,P,1}, \circ)$ on the semigroup $(\tilde{U}_{A^{(1)}}, \cdot)$. Thus, $(S_{A,P,1} / \varepsilon_{A,P,1}, \circ)$ and $(\tilde{U}_{A^{(1)}}, \cdot)$ are isomorphic semigroups.

Q.E.D.

2. Investigated models of QA.

We would deal with the following models of QA.

MO-1QFA is any 1-way 1-head quantum Turing machine (QTM) $M = (Q, X, |\varphi_0\rangle, |h\rangle, \nu)$, such that $Q = B_2$ is the set of basic states, X is finite input alphabet, some unit vector $|\varphi_0\rangle \in \mathbb{C}^2$ is pure initial state, some vector $|h\rangle \in B_2$ is accepting state, and $\nu : X \rightarrow (0; 4\pi)$ is some injection. It is supposed that $U = \{U_{\nu(x)} | x \in X\}$ is the set of unitary operators, such that $U_{\nu(x)} (x \in X)$ is defined by formula (1).

Let a string $w \in X^+$ be written in the input tape of MO-1QFA M . At initial instant QTM M exists in the state $|\varphi_0\rangle$ and its head observes the first symbol of the string w .

If QTM M exists in the state $|\varphi\rangle$ and observed symbol is $x \in X$ then the state $|\varphi\rangle$ is transformed in the state $U_{\nu(x)}(|\varphi\rangle)$ and the head moves by one

cell to the right. If QTM M exists in the state $|\varphi\rangle$ and observed symbol is Λ then the state $|\varphi\rangle$ is measured in the basis B_2 and M halts.

If in the result of this measurement we get accepting state $|h\rangle$ then a string w is accepted, otherwise it is rejected.

For any input string $w = x_1 \dots x_l \in X^+$ we set

$$\tilde{v}(w) = \sum_{i=1}^l \nu(x_i).$$

Formulae (1) implies that for any input string $w = x_1 \dots x_l \in X^+$ holds identity

$$U_{\tilde{v}(w)} = U_{\nu(x_1)} \cdot \dots \cdot U_{\nu(x_l)} \quad (23)$$

Thus, probability that MO-1QFA M accepts a string $w = x_1 \dots x_l \in X^+$ equals to

$$P_M(|\varphi_0\rangle, w) = \|P_{acc} U_{\tilde{v}(w)} |\varphi_0\rangle\|^2, \quad (24)$$

where $P_{acc} = |h\rangle\langle h|$ ($\langle h| = |h\rangle^\dagger$ and $\dagger$ is the Hermitian conjugation), and $\| |\varphi\rangle \| = \sqrt{\langle \varphi | \varphi \rangle}$.

L-QFA differs from MO-1QFA so much that it deals with some initial mixed state $\{(|\varphi_i\rangle, \alpha_i)\}_{i \in \mathbb{N}_n}$, such that $|\varphi_i\rangle \in \mathbb{C}^2$ ($i \in \mathbb{N}_n$) are pair-wise different unit vectors, $\alpha_i > 0$ ($i \in \mathbb{N}_n$), and $\sum_{i \in \mathbb{N}_n} \alpha_i = 1$. The number α_i ($i \in \mathbb{N}_n$) is referred as probability that at initial instant QTM M exists in the state $|\varphi_i\rangle$.

Measurement of the state in the basis B_2 is when the head observes the symbol Λ .

If in the result of this measurement we get accepting state $|h\rangle$ then a string $w \in X^+$ is accepted, otherwise it is rejected.

Thus, probability that L-QFA M accepts a string $w \in X^+$ equals to

$$P_M(\{(|\varphi_i\rangle, \alpha_i)\}_{i \in \mathbb{N}_n}, w) = \sum_{i \in \mathbb{N}_n} \alpha_i P_M(|\varphi_i\rangle, w). \quad (25)$$

k QFA ($k \in \mathbb{N}$) is any 1-way k -head QTM $M = (Q, X, |\varphi_0\rangle, |h\rangle, \nu)$, such that $Q = B_2$ is the set of basic states, X is finite input alphabet, some unit vector $|\varphi_0\rangle \in \mathbb{C}^2$ is pure initial state, some vector $|h\rangle \in B_2$ is accepting state, $\nu : X \rightarrow (0; 4\pi)$ is some injection, where

$$X = \bigcup_{i=1}^{k-1} X^i \Lambda^{k-i} \cup X^k,$$

and Λ^j ($j \in \mathbb{N}$) is the string $\underbrace{\Lambda \dots \Lambda}_{j \text{ times}}$.

It is supposed that $U = \{U_{\nu(u)} | u \in X\}$ is the set of unitary operators, such that $U_{\nu(u)} (u \in X)$ is defined by formula (1).

Let a string $w \in X^+$ be written in the input tape of k QFA ($k \in \mathbb{N}$) M . At initial instant QTM M exists in the state $|\varphi_0\rangle$ and its k heads observe first k symbols of the string $w\Lambda^{k-1}$.

If QTM M exists in the state $|\varphi\rangle$ and observed fragment is $u \in X$ then the state $|\varphi\rangle$ is transformed in the state $U_{v(u)}(|\varphi\rangle)$ and all heads move simultaneously by one cell to the right. If QTM M exists in the state $|\varphi\rangle$ and observed fragment is Λ^k then the state $|\varphi\rangle$ is measured in the basis B_2 and M halts.

If in the result of this measurement we get accepting state $|h\rangle$ then a string w is accepted, otherwise it is rejected.

For any input string $w = x_1 \dots x_l \in X^+$ we set

$$\tilde{v}(w\Lambda^{k-1}) = \begin{cases} \sum_{i=1}^l v(x_i \dots x_l \Lambda^{k-l+i-1}), & \text{if } 1 \leq l < k \\ v(x_1 \dots x_l) + \sum_{i=2}^l v(x_i \dots x_l \Lambda^{k-l+i-1}), & \text{if } l = k \\ \sum_{i=1}^{l-k+1} v(x_i \dots x_{i+k-1}) + \sum_{i=l-k+2}^l v(x_i \dots x_l \Lambda^{k-l+i-1}), & \text{if } l > k \end{cases}.$$

Formulae (1) implies that for any input string $w = x_1 \dots x_l \in X^+$ holds identity

$$U_{\tilde{v}(w\Lambda^{k-1})} = \begin{cases} \prod_{i=1}^l U_{v(x_i \dots x_l \Lambda^{k-l+i-1})}, & \text{if } 1 \leq l < k \\ U_{v(x_1 \dots x_l)} \cdot \prod_{i=2}^l U_{v(x_i \dots x_l \Lambda^{k-l+i-1})}, & \text{if } l = k \\ \prod_{i=1}^{l-k+1} U_{v(x_i \dots x_{i+k-1})} \cdot \prod_{i=l-k+2}^l U_{v(x_i \dots x_l \Lambda^{k-l+i-1})}, & \text{if } l > k \end{cases}. \quad (26)$$

Thus, probability that k QFA ($k \in \mathbb{N}$) M accepts a string $w \in X^+$ equals to

$$P_M(|\varphi_0\rangle, w) = \|P_{acc} U_{\tilde{v}(w\Lambda^{k-1})} |\varphi_0\rangle\|^2. \quad (27)$$

It is evident that if $k = 1$ then the model k QFA is just the model MO-1QFA. Thus in what follows the model k QFA ($k \in \mathbb{N}$) would be considered under supposition that $k \geq 2$.

Similarly to the case when the model L-QFA was defined as some generalization of the model MO-1QFA we can define the model L- k QFA ($k \geq 2$) in the following way. L- k QFA ($k \geq 2$) differs from k QFA so much that it deals with some initial mixed state $\{(|\varphi_i\rangle, \alpha_i)\}_{i \in \mathbb{N}_n}$, such that $|\varphi_i\rangle \in C^2$ ($i \in \mathbb{N}_n$) are pair-wise different unit vectors, $\alpha_i > 0$ ($i \in \mathbb{N}_n$),

and $\sum_{i \in \mathbb{N}_n} \alpha_i = 1$. Thus, probability that L- k QFA

($k \geq 2$) M accepts a string $w \in X^+$ is defined by formula (25) under supposition that $P_M(|\varphi_0\rangle, w)$ is defined by formula (27).

Any model of QA can be interpreted either as acceptor of a language with given probability, or as acceptor of a language with given mistake. Formally, the language $L \subseteq X^+$ is accepted:

1) with probability p ($0.5 < p \leq 1$), if any string $w \in L$ is accepted with probability not less than p , while any string $w \notin L$ is accepted with probability not exceeding $1 - p$;

2) with mistake $(p_1; p_2)$ ($0 \leq p_1 < p_2 < 1$), if any string $w \in L$ is accepted with probability not less than p_2 , while any string $w \notin L$ is accepted with probability not exceeding p_1 .

Formula (2) implies that for any integer $k \geq 2$ only some partial semigroup can be determined by the factor-set $S_{A,P,k} / \varepsilon_{A,P,k}$ as well as by the set of unitary operators $\tilde{U}_{A^{(k)}}$. Moreover, formula (6) implies that these partial semigroups are not isomorphic. Besides, partial semigroup determined by the factor-set $\tilde{U}_{A^{(k)}}$ is not isomorphic to the semigroup $(G, \oplus)$.

These factors characterize essential inherent difference between models MO-1QFA and k QFA ($k \geq 2$) from algebraic point of view.

It is worth to note that if all numbers $\frac{v(a)}{\pi}$ ($a \in X$) are rational ones then the factor-set $S_{A,P,k} / \varepsilon_{A,P,k}$ as well as the set of unitary operators $\tilde{U}_{A^{(k)}}$ are finite ones.

3. Main results.

In accordance with [9] for any set s which elements are subsets we would use denotation $\cup s$ instead of $\bigcup s$, where it is convenient.

Firstly, we characterize the sets of languages accepted by models MO-1QFA and L-QFA defined in Section 2.

In terms of Section 1 in this case we get that $A = X \cup \{\Lambda\}$, and the predicate $P: A \rightarrow \{0,1\}$ is defined in the following way: $P(x) = 1$ ($x \in X$) and $P(\Lambda) = 1$.

Thus, we get that $A^{(1)} = X$ and $S_{A,P,1} = X^+$.

Equivalence $\varepsilon_{A,p,1}$ on the set X^+ would be denoted by $\sim_1$, and we get that

$$\tilde{U}_X = \{U_{\gamma_B} \mid B \in X^+ / \sim_1\}. \quad (28)$$

For any element $B \in X^+ \setminus \sim_1$ we set

$$P_M(\|\varphi_0\| >, B) = \|P_{acc} U_{\gamma_B} \|\varphi_0\| >\|^2. \quad (29)$$

Theorem 3. MO-1QFA M accepts a language L with probability p ($0.5 < p \leq 1$) if and only if the following two identities hold

$$L = \cup \{B \in X^+ / \sim_1 \mid P_M(\|\varphi_0\| >, B) \geq p\}$$

and

$$X^+ \setminus L = \cup \{B \in X^+ / \sim_1 \mid P_M(\|\varphi_0\| >, B) \leq 1 - p\}.$$

Proof. Formulae (7), (11), (12) and (23) imply that for any element $B \in S_{A,p,1} / \sim_1$ and any string $w \in B$ there hold identities

$$U_{\tilde{v}(w)} = U_{\tilde{v}(w) \pmod{4\pi}} = U_{\gamma_B}. \quad (30)$$

Formulae (24), (29) and (30) in its turn imply that for any element $B \in S_{A,p,1} / \sim_1$ and any string $w \in B$ it holds identity

$$P_M(\|\varphi_0\| >, B) = P_M(\|\varphi_0\| >, w). \quad (31)$$

Formula (31) and definition of a language accepted with given probability by MO-1QFA imply that theorem 3 holds.

Q.E.D.

Corollary 1 and theorem 3 imply that the following corollary holds.

Corollary 2. If all numbers $\frac{v(a)}{\pi}$ ($a \in X$) are rational ones then a language accepted with any given probability by MO-1QFA M is union of some elements of finite factor-set $X^+ \setminus \sim_1$.

Theorem 4. MO-1QFA M accepts a language L with mistake $(p_1; p_2)$ ($0 \leq p_1 < p_2 < 1$) if and only if the following two identities hold

$$L = \cup \{B \in X^+ / \sim_1 \mid P_M(\|\varphi_0\| >, B) \geq p_2\}$$

and

$$X^+ \setminus L = \cup \{B \in X^+ / \sim_1 \mid P_M(\|\varphi_0\| >, B) \leq p_1\}.$$

Proof. Formula (31) and definition of a language accepted with given mistake by MO-1QFA imply that theorem 4 holds.

Q.E.D.

Corollary 1 and theorem 4 imply that the following corollary holds.

Corollary 3. If all numbers $\frac{v(a)}{\pi}$ ($a \in X$) are rational ones then a language accepted with any given mistake by MO-1QFA M is union of some elements of finite factor-set $X^+ \setminus \sim_1$.

Theorem 5. L-QFA M accepts a language L with probability p ($0.5 < p \leq 1$) if and only if the following two identities hold

$$L = \cup \{B \in X^+ / \sim_1 \mid \sum_{i \in \mathbb{N}_n} \alpha_i P_M(\|\varphi_i\| >, B) \geq p_2\}$$

and

$$X^+ \setminus L = \cup \{B \in X^+ / \sim_1 \mid \sum_{i \in \mathbb{N}_n} \alpha_i P_M(\|\varphi_i\| >, B) \leq p_1\}.$$

Proof. By definition of L-QFA M formula (31) can be applied for this model.

Formulae (25), (27) and (31), and definition of a language accepted with given probability by L-QFA imply that theorem 5 holds.

Q.E.D.

Corollary 1 and theorem 5 imply that the following corollary holds.

Corollary 4. If all numbers $\frac{v(a)}{\pi}$ ($a \in X$) are rational ones then a language accepted with any given probability by L-QFA M is union of some elements of finite factor-set $X^+ \setminus \sim_1$.

Theorem 6. A language L is accepted with mistake (p_1, p_2) ($0 \leq p_1 < p_2 < 1$) by L-QFA M if and only if the following two identities hold

$$L = \cup \{B \in X^+ / \sim_1 \mid \sum_{i \in \mathbb{N}_n} \alpha_i P_M(\|\varphi_i\| >, B) \geq p_2\}$$

and

$$X^+ \setminus L = \cup \{B \in X^+ / \sim_1 \mid \sum_{i \in \mathbb{N}_n} \alpha_i P_M(\|\varphi_i\| >, B) \leq p_1\}.$$

Proof. Formulae (25) and (31), and definition of a language accepted with given mistake by L-QFA imply that theorem 6 holds.

Q.E.D.

Corollary 1 and theorem 6 imply that the following corollary holds.

Corollary 5. If all numbers $\frac{v(a)}{\pi}$ ($a \in X$) are rational ones then a language accepted with any given mistake by L-QFA M is union of some elements of finite factor-set $X^+ \setminus \sim_1$.

Now we characterize the sets of languages accepted by models k QFA ($k \geq 2$) and L- k QFA ($k \geq 2$) defined in Section 2.

In terms of Section 1 in this case we get that $A = X \cup \{\Lambda\}$ and the predicate $P: A \rightarrow \{0,1\}$ is defined in the following way: $P(x) = 1$ ($x \in X$) and $P(\Lambda) = 1$.

Thus, we get that $A^{(k)} = X$, i.e.
 $A^{(k)} = \bigcup_{i=1}^{k-1} X^i \Lambda^{k-i} \cup X^k$, where Λ^j ($j \in \mathbb{N}$) is the
string $\underbrace{\Lambda \dots \Lambda}_{j \text{ times}}$, and $S_{A,P,k} = X^+ \Lambda^{k-1}$.

Equivalence $\varepsilon_{A,P,k}$ on the set $X^+ \Lambda^{k-1}$ would be
denoted by $\sim_k$, and we get that

$$\tilde{U}_X = \{U_{\gamma_B} \mid B \in X^+ \Lambda^{k-1} / \sim_k\}. \quad (32)$$

For any element $B \in X^+ \Lambda^{k-1} \setminus \sim_k$ we set

$$P_M(|\varphi_0 >, B) = \|P_{acc} U_{\gamma_B} |\varphi_0 >\|^2. \quad (33)$$

Theorem 7. k QFA ($k \geq 2$) M accepts a
language L with probability p ($0.5 < p \leq 1$) if and
only if the following two identities hold

$$L = \bigcup \{B \in X^+ \Lambda^{k-1} / \sim_k \mid P_M(|\varphi_0 >, B) \geq p\}$$

and

$$X^+ \setminus L = \bigcup \{B \in X^+ \Lambda^{k-1} / \sim_k \mid P_M(|\varphi_0 >, B) \leq 1 - p\}.$$

Proof. Formulae (7), (11), (12) and (23) imply
that for any element $B \in X^+ \Lambda^{k-1} / \sim_k$ and any string
 $w \in B$ there hold identities

$$U_{\tilde{v}(w)} = U_{\tilde{v}(w) \pmod{4\pi}} = U_{\gamma_B}. \quad (34)$$

Formulae (24), (33) and (34) in its turn imply that
for any element $B \in X^+ \Lambda^{k-1} / \sim_k$ and any string
 $w \in B$ it holds identity

$$P_M(|\varphi_0 >, B) = P_M(|\varphi_0 >, w). \quad (35)$$

Formula (35) and definition of a language
accepted with given probability by k QFA ($k \geq 2$)
imply that theorem 7 holds.

Q.E.D.

Theorem 7 implies that the following corollary
holds.

Corollary 6. If all numbers $\frac{\nu(a)}{\pi}$ ($a \in X$) are
rational ones then a language accepted with any
given probability by k QFA ($k \geq 2$) M is union of
some elements of finite factor-set $X^+ \Lambda^{k-1} \setminus \sim_k$.

Theorem 8. k QFA ($k \geq 2$) M accepts a
language L with mistake (p_1, p_2) ($0 \leq p_1 < p_2 < 1$)
if and only if the following two identities hold

$$L = \bigcup \{B \in X^+ \Lambda^{k-1} / \sim_k \mid P_M(|\varphi_0 >, B) \geq p_2\}$$

and

$$X^+ \setminus L = \bigcup \{B \in X^+ \Lambda^{k-1} / \sim_k \mid P_M(|\varphi_0 >, B) \leq p_1\}.$$

Proof. Formula (35) and definition of a language
accepted with given mistake by k QFA ($k \geq 2$)
imply that theorem 7 holds.

Q.E.D.

Theorem 8 implies that the following corollary
holds.

Corollary 7. If all numbers $\frac{\nu(a)}{\pi}$ ($a \in X$) are
rational ones then a language accepted with any
given mistake by k QFA ($k \geq 2$) M is union of
some elements of finite factor-set $X^+ \Lambda^{k-1} \setminus \sim_k$.

Theorem 9. L - k QFA ($k \geq 2$) M accepts a
language L with probability p ($0.5 < p \leq 1$) if and
only if the following two identities hold

$$L = \bigcup \{B \in X^+ \Lambda^{k-1} / \sim_k \mid \sum_{i \in \mathbb{N}_n} \alpha_i P_M(|\varphi_i >, B) \geq p\}$$

and

$$X^+ \setminus L = \bigcup \{B \in X^+ \Lambda^{k-1} / \sim_k \mid \sum_{i \in \mathbb{N}_n} \alpha_i P_M(|\varphi_i >, B) \leq 1 - p\}.$$

Proof. By definition of L - k QFA ($k \geq 2$) formula
(35) can be applied for this model.

Formulae (25), (27) and (35), and definition of a
language accepted by L - k QFA ($k \geq 2$) with given
probability imply that theorem 9 holds.

Q.E.D.

Theorem 9 implies that the following corollary
holds.

Corollary 8. If all numbers $\frac{\nu(a)}{\pi}$ ($a \in X$) are
rational ones then a language accepted with any
given probability by L - k QFA ($k \geq 2$) M is union
of some elements of finite factor-set $X^+ \Lambda^{k-1} \setminus \sim_k$.

Theorem 10. L - k QFA ($k \geq 2$) M accepts a
language L with mistake (p_1, p_2) ($0 \leq p_1 < p_2 < 1$)
if and only if the following two identities hold

$$L = \bigcup \{B \in X^+ \Lambda^{k-1} / \sim_k \mid \sum_{i \in \mathbb{N}_n} \alpha_i P_M(|\varphi_i >, B) \geq p_2\}$$

and

$$X^+ \setminus L = \bigcup \{B \in X^+ \Lambda^{k-1} / \sim_k \mid \sum_{i \in \mathbb{N}_n} \alpha_i P_M(|\varphi_i >, B) \leq p_1\}.$$

Proof. Formulae (25), (27) and (35), and
definition of a language accepted by L - k QFA
($k \geq 2$) with given mistake imply that theorem 10
holds.

Q.E.D.

Theorem 10 implies that the following corollary
holds.

Corollary 9. If all numbers $\frac{\nu(a)}{\pi}$ ($a \in X$) are
rational ones then a language accepted with any

given mistake by L- k QFA ($k \geq 2$) M is union of some elements of finite factor-set $X^+ \setminus \Lambda^{k-1} \setminus \sim_k$.

Conclusions.

In this paper the simplest models of 1-qubit QA are investigated. These models of QA are determined by assumptions that measurement of a state is produced at final instant only, and associated unitary operators are rotations of the Bloch sphere around the y -axis (and thus, associated unitary operators commute each with the others). Investigated models of 1-qubit QA are MO-1QFA, L-QFA, k QFA ($k \geq 2$) and L- k QFA ($k \geq 2$) (we think that the last model was not considered earlier at all, and is firstly determined in the given paper).

The structure of languages accepted either with given probability, or with given mistake is characterized for investigated 1-qubit models of QA in terms of the factor-set determined by considered assumptions on unitary operators. Criteria under which characterized languages are finite ones are established.

Список використаних джерел

1. Moore C., Crutchfield J. Quantum automata and quantum grammars // Theor. Comput. Sci. – 2000. – Vol. 237. – P. 257-306.
2. Bertoni A., Mereghetti C., Palano B. Quantum computing: 1-way quantum automata // LNCS. – 2003. – Vol. 2710. – P. 1-20.
3. Ambainis A., Beaudry M., Golovkins M., et al. Algebraic results on quantum automata // LNCS. – 2004. – Vol. 2996. – P. 93-104.
4. Belovs A., Rosmanis A., Smotrovs J. Multi-letter reversible and quantum finite automata // LNCS. – 2007. – Vol. 4588. – P. 60-71.
5. Qiu D., Li L., Zou H. et al. Multi-letter quantum finite automata decidability of the equivalence and minimization of states // Acta Informatica. – 2011. – Vol. 48. – P. 271-290.
6. Skobelev V.G. Theory of finite quantum automata (a survey) // Tr. Inst. Prikl. Math. Mech. of NAS of Ukraine – 2012. – Vol. 25. – P. 196-209.
7. Skobelev V.G. Quantum automata with operators that commutes // Visn., Ser. Fiz.-Mat. Nayky, Kyiv Univ. im. Tarasa Shevchenka. – 2013. – N 2. – P. 234-238.
8. Williams C.P. Explorations in quantum computing. – London: Springer Verlag, 2011. – 717 p.
9. Cohn P.M. Universal algebra. – Moscow: Mir, 1968. – 352 p.

It is evident that we get similar results if instead of rotations of the Bloch sphere around the y -axis we consider rotations of this sphere either around the x -axis, or around the z -axis. Indeed, rotations of the Bloch sphere around the x -axis are unitary operators of the form

$$V_\beta = \begin{pmatrix} \cos 0.5 \beta & -i \sin 0.5 \beta \\ i \sin 0.5 \beta & \cos 0.5 \beta \end{pmatrix}, \quad (36)$$

and rotations of the Bloch sphere around the z -axis are unitary operators of the form

$$W_\gamma = \begin{pmatrix} e^{-i0.5 \gamma} & 0 \\ 0 & e^{i0.5 \gamma} \end{pmatrix}. \quad (37)$$

Thus, if we substitute instead of formula (1) either formula (36), or formula (37), we get the same results as the ones established in the given paper.

More complicated cases take the place if the set of associated unitary operators consists of rotations of the Bloch sphere around different coordinate axes. Investigation of these cases in detail determines some trend for future investigation.

References

1. MOORE C., CRUTCHFIELD J. (2000) *Quantum automata and quantum grammars*. Theor. Comput. Sci. (237). p. 257-306.
2. BERTONI A., MEREGHETTI C., PALANO B. (2003) *Quantum computing: 1-way quantum automata*. LNCS. (2710). p. 1-20.
3. AMBAINIS A., BEAUDRY M., GOLOVKINS M., AT ALL. (2004) *Algebraic results on quantum automata*. LNCS. (2996). p. 93-104.
4. BELOVS A., ROSMANIS A., SMOTROVS J. (2007) *Multi-letter reversible and quantum finite automata*. LNCS. (4588). p. 60-71.
5. QIU D., LI L., ZOU H. AT ALL. (2011) *Multi-letter quantum finite automata decidability of the equivalence and minimization of states*. Acta Informatica. (48), p. 271-290.
6. SKOBELEV V.G. (2012) *Theory of finite quantum automata (a survey)* Tr. Inst. Prikl. Math. Mech. of NAS of Ukraine (25). p. 196-209.
7. SKOBELEV V.G. (2013) *Quantum automata with operators that commutes*. Bulletin of Taras Shevchenko. National University of Kyiv. Series Physics & Mathematics. (2). p. 234-238.
8. WILLIAMS, C.P. (2011) *Explorations in quantum computing*. London: Springer Verlag.
9. COHN, P.M. (1968) *Universal algebra*. Moscow: Mir.

Надійшла до редколегії 29.01.14

УДК 004.93

Тарануха В. Ю.¹, асистент.

**Згладжена n-грамна модель, заснована
на класах, для розпізнавання
слов'янських мов**

¹ Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 83000, м. Київ, пр-т.
Глушкова 4д,
e-mail: taranukha@ukr.net

V. Y. Taranukha¹, assistant.

**Smoothed class-based n-gram model for
recognition of the Slavic languages**

¹ Taras Shevchenko National University of Kyiv,
83000, Kyiv, Glushkova st., 4d,
e-mail: taranukha@ukr.net

Стаття присвячена дослідженню n-грамної моделі для розпізнавання слов'янських мов та методу згладжування, призначеному для зменшення розміру моделі та підвищення якості розпізнавання.

Ключові слова: n-грамна модель мови, редукція моделі, модель на класах, згладжування.

The article investigates n-gram language model for Slavic language recognition. Syntactic links in Slavic languages are built mostly with changing forms of words and less with word order. It leads to creation of vast vocabularies with many wordforms matching single word (or lemma). Subsequently it increases transition matrix size and reduces frequencies of most elements in the matrixes. This makes models designed on Markov chains and n-grams less reliable for Slavic language comparing to Germanic and Romance languages. Method of smoothing aimed both for reduction of the model and decrease of recognition rate loss is developed. It is based on decomposition of word form n-grams into n-grams based on grammatical classes and lemma classes. Partial filtering is used for trigrams to reduce the model size. Trigrams composed of codes only are filtered. New smoothed pseudocounts are calculated based on decomposed model. Numerical tests have shown possible improvements in entropy of the model thus implying improvements in recognition rate.

Key Words: n-gram language model, model reduction, class-based model, smoothing.

Статтю представив чл.-кор. НАН України, д.ф.-м.н., проф. Анісімов А.В.

Завдяки розвитку мережі Інтернет значно зріс об'єм даних формально доступних у електронній формі. Частина даних представлена у вигляді зображень документів та аудіо записів і це певною мірою ускладнює їх обробку. Відповідно виникає потреба у створенні засобів, що дозволять перетворити зображення та аудіо записи в текст. Розповсюдженою є модель, що спирається на харківські ланцюги, а відповідно і на n-грами[1]. За її допомогою можна зручно оцінювати ймовірність появи ланцюжка з n слів у деякому тексті. При застосуванні такої моделі до української мови і до слов'янських мов взагалі, проявляються проблеми, що роблять використання цієї моделі менш зручним, порівняно з романо-германськими мовами.

Пропонується розробити модифіковану модель, щоби оцінювати імовірності кращим чином.

Звичайна модель

Послідовність слів мови $w_1...w_n$ називається n-грамою довжини n, позначимо її w_1^n . Тоді імовірність w_1^n можна оцінити за формулою:

$$p(w_1^n) = p(w_1 | w_1^{i-1})p(w_{i-1} | w_1^{i-2})...p(w_1) \quad (1)$$

Умовні імовірності визначаються як

$$\hat{p}(w_i | w_{i-n+1}^{i-1}) = \frac{C(w_{i-n+1}^i)}{C(w_{i-n+1}^{i-1})}, \quad (2)$$

де $C(w_{i-n+1}^i)$ - частота відповідної n-грами.

В слов'янських мовах є відчутно вища

кількість словоформ з розрахунку на одну лему[2]. Це призводить до необхідності збільшувати словник. Через це значна кількість n -грам набуває малих значень частот, і оцінка імовірностей по формулі (2) стає значно чутливішою до збурень.

Для оцінювання якості моделі пропонується застосовувати оцінку на основі кросентропії:

$$H(p, m) = \lim_{n \rightarrow \infty} -\frac{1}{n} \log m(w_1 w_2 \dots w_n) \quad (3)$$

де $m(w_1 w_2 \dots w_n)$ - модель для мовірності $p(w_1 w_2 \dots w_n)$. При цьому відомо, що

$$H(p) \leq H(p, m) \quad (4)$$

В якості методу вирішення вищезгаданої проблеми пропонувалося розділення моделі на дві: модель на лемах та модель на граматичних класах[1,2]. Також пропонувалася фільтрація на основі різних евристик[3]. Експерименти показали, що ці методи, взяті окремо або об'єднані в одній моделі практично не розв'язують поставлену задачу. Безпосередня фільтрація вимагає додаткових засобів та погіршує модель, розділення та оцінювання компонентних моделей незалежно, щоби потім додати оцінки, одразу підвищує ентропію.

Згладжена модель

В якості нового методу пропонується модифікувати модель засновану на класах.

Для розбиття на класи вводиться функція розбиття, що ставить у відповідність кожному слову w_i з словника системи V клас c_i . При цьому виконується:

$$P(w_i | w_1^{i-1}) = P(w_i | c_i) P(c_i | c_1^{i-1}), \forall i, 1 \leq i \leq n \quad (5)$$

Висунуто припущення, що для слів, про які відомо, що вони мають однакову синтаксичну поведінку можна стверджувати, що у схожих контекстах вони повинні мати схожі імовірності зустрінання.

Нехай для слів „стілець”, „стільця”, „молоток”, „молотком”, „синій”, „синього”, „жовтий”, „жовтим” в корпусі спостерігалися біграми „синій стілець”, „синього стільця”, „жовтий молоток”, „жовтим молотком”.

На базі знань про те, що ці іменники та прикметники мають схожу граматичну поведінку, а саме: мають однакові множини граматичних класів, можна побудувати припущення про імовірності появи їх в формах, що не спостерігалися в корпусі.

Враховуючи, омонімію в українській мові модель будується таким чином.

$$L(w_1^k) - \text{сукупність послідовностей}$$

канонічних форм для послідовності слів w_1^k .

$G(w_1^k)$ – сукупність послідовностей граматичних класів для послідовності слів w_1^k . $El(w_1^k)$ – сукупність послідовностей слів, що після приведення до канонічних форм мають однаковий запис, тобто сукупність $w_{i_1}^{i_k}$, таких що, $L(w_{i_1}^{i_k}) = L(w_1^k), \forall i$.

Тоді оцінка частоти w_1^k визначається:

$$C(w_1^k) = \frac{C(L(w_1^k))C(G(w_1^k))}{\sum_{G_F \in G(El(w_1^k))} G_F} \quad (6)$$

При цьому в ході експериментів встановлено, що вимога не виконується, щоби обчислені наново псевдо частоти були коректними:

$$C(w_{i-n+2}^i) = \sum_{j=0}^{|V|} C(w_j w_{i-n+2}^i) \quad (7)$$

де $|V|$ - розмір словника.

Для забезпечення коректності моделі висувається вимоги: необхідно щоб сума частот канонічних форм та сума частот граматичних класів після перерозподілу лишалася незмінною[4].

$$G(C(w_1^{k-1})) = \sum_{m=1}^{|V|} G(C(w_1^{k_m})) \quad (8)$$

$$L(C(w_1^{k-1})) = \sum_{m=1}^{|V|} L(C(w_1^{k_m})) \quad (9)$$

Якщо (8) та (9) виконується, то це дозволить суттєво оптимізувати обчислення (6), та забезпечити його коректність.

Чисельний експеримент показав, що попри покриття всіх існуючих в навчальній вибірці комбінацій лем та комбінацій граматичних класів, повне покриття всіх потенційно існуючих мовних явищ не відбувається. Тому виникає потреба у додатковій формулі згладжування, що дозволить обчислити оцінки псевдо частот для тих елементів, що мають значення частоти рівним 0 навіть після застосування (6). В якості тестової моделі згладжування було вибрано модель Віттена-Бела[5] в варіанті з поверненнями. Моделі на основі евристики Гуда[6] є непридатними, тому що неможливо коректно побудувати їх форму для нецілих значень псевдо частот.

Модель визначається так:

$$\hat{p}(w_i | w_{i-n+1} \dots w_{i-1}) = \begin{cases} d(w_{i-n+1} \dots w_i), C(w_{i-n+1} \dots w_i) > 0 \\ \alpha_{w_{i-n+1} \dots w_{i-1}} \hat{p}(w_i | w_{i-n+2} \dots w_{i-1}) \text{ інакше} \end{cases} \quad (10)$$

де $d(w_{i-n+1} \dots w_i)$ - відповідним чином згладжене значення, $C(w_{i-n+1}^i)$, $\alpha_{w_{i-n+1} \dots w_{i-1}}$ - відповідний коефіцієнт, що визначає імовірнісну масу, перерозподілену для побудови імовірностей на п-грамах моделі меншого порядку.

$$\alpha_{w_{i-n+1} \dots w_{i-1}} = \frac{\beta_{w_{i-n+1} \dots w_{i-1}}}{\sum_{\{w_i: C(w_{i-n+1}^i)=0\}} \hat{p}(w_i | w_{i-n+2}^i)} \quad (11)$$

$$\beta_{w_{i-n+1} \dots w_{i-1}} = 1 - \sum_{\{w_i: C(w_{i-n+1}^i)>0\}} d(w_{i-n+1}^i) \quad (12)$$

Для методу Віттена-Бела параметр d оцінюється так:

$$d_{WB}(w_i | w_{i-n+1}^{i-1}) = \frac{C(w_{i-n+1}^i)}{C(w_{i-n+1}^i) + T(w_{i-n+1}^i)} \quad (13)$$

де $T(w_{i-n+1}^i)$ - кількість типів п-грам, що передують слову w_i . При цьому, за замовчуванням, п-грами найвищого порядку з частотою 1 видаляються з моделі після побудови всіх таблиць.

Чисельний експеримент

Для чисельного експерименту використано модель на п-грамах розмірності ≤ 3 , зібраних зі стенограм Верховної Ради України. Було сформовано корпус обсягом 112,5 МБ. Для цього відповідні стенограми було зібрано з сайту <http://rada.gov.ua/meeting/stenogr>. На корпусі було виділено словник системи з 10.000 словоформ, всі інші слова були замінені на стоп-слово “#”. Словник було пропущено через систему морфолексичного аналізу, і сформовано словники канонічних форм та словники граматичних класів. При цьому множина граматичних класів однозначно визначає словник канонічних форм. За замовчуванням деякі слова не замінювалися на леми та граматичні класи, наприклад: іменники родового відмінку, займенники, тощо.

Ентропію було обчислено для трьох різних варіантів реалізації згладжування. В Базовому варіанті застосовується лише формула(1). „Згладжування 1” передбачає використання у формулі (6) лише граматичних класів отриманих із морфологічного словника. Варіант

„Згладжування 2” передбачає використання строгих граматичних підкласів класів, щоби забезпечити виконання умов (8),(9) як описано в вимогах[4]. Як виявилось, з наявною навчальною вибіркою неможливо забезпечити строге виконання (8) та (9) без внесення у словник великої кількості слів, для яких немає п-грам в навчальній частині корпусу. Експеримент показав, що за таких обставин варіант „Згладжування 2” показує поганий результат. Тому було вирішено комбінувати підходи, щоби отримати найкраще наближення без зайвої втрати якості. Було зроблено декілька ітерацій, словник обновлювався методом заміни словоформ (як на наявні у комплекті п-грам зібраних з навчальної частини корпусу та і ні), при збереженні загальної кількості елементів. Застосовувалася фільтрація: відфільтровувалися п-грами частоти 1 з комплектів граматичних та лематичних п-грам при обчисленні формули (6). Результати наведено в Таблиці 1.

Таблиця 1

Результат експерименту

Метод	Ентропія
Базовий	$7,272 \pm 0,036$
Згладжування 1	$7,281 \pm 0,034$
Згладжування 2	$7,283 \pm 0,043$

На різних ітераціях значення ентропії мінялося, при чому на деяких ітераціях результат „Згладжування 2” був кращий за Базовий для отриманого словника.

Висновки

Показано, що формула згладжування на основі тематичної та граматичної інформації дозволяє ефективно згладжувати п-грамну модель мови. Застосування апріорної інформації про морфолексичні та граматичні характеристики слів дозволяє визначати структуру класів, для оптимізації моделей мови з метою покращення розпізнавання. Чисельні експерименти показали, що про безпосереднє застосування формули (6) не гарантує хорошого результату навіть з фільтрацією та використанням більш строгих класів. Відповідно, необхідно виконувати підбір елементів словника. При цьому крім прямої перевірки значення ентропії немає способу гарантувати підвищення якості.

Також, метод Віттена-Бела хоч і є показовим, проте в реальних задачах треба використовувати метод на зразок Кнесера-Нея[7], що в свою чергу ускладнює процес побудови остаточного комплексу таблиць та коефіцієнтів у формулах.

Подальші дослідження повинні бути

спрямовані на пошук можливості гарантувати зростання якості моделі для випадків, коли навчальний тестовий корпус має порівняно малий об'єм і не дає можливості гарантувати

виконання вимог (8),(9) про сумісність та несумісність класів без втрати якості моделі.

Список використаних джерел

1. Тарануха В.Ю. Застосування класів основаних на канонічних формах слів та на граматичних класах в задачі редукції n-грамної моделі мови для розпізнавання української мови. /Тарануха В.Ю // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка Серія: фізико-математичні науки. –2013, – Спецвипуск. – С. 176-179
2. Бабин Д.Н. О перспективах создания системы автоматического распознавания слитной устной русской речи. /Бабин Д.Н, Мазуренко И.Л. , Холоденко А.Б.// Интеллектуальные системы. –2004. – Т.8, –Вып. 1-4,– С.45-70.
3. S. Ostrogonac Language model reduction for practical implementation in LVCSR systems / S. Ostrogonac, B. Popović, M. Sečujski, et al. // Infoteh-Jahorina – 2013: proceedings of 12th International Scientific–Professional Symposium INFOTEN - JAHORINA, At Jahorina 20-22 march. –Vol. 12, March 2013. –PP. 391-394.
4. Тарануха В.Ю. Модифікація n-грамної моделі, заснованої на класах, для розпізнавання слов'янських мов / Тарануха В.Ю.// Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка Серія: фізико-математичні науки. – 2014. – Вип 1. – С. 193-196
5. I. H. Witten The Zero-Frequency Problem: Estimating the Probabilities of Novel Events in Adaptive Text Compression/ I. H. Witten and T. C. Bell // IEEE Transactions on Information Theory, – 1991. Vol. 37(4), –P. 1085–1094.
6. I.J. Good, The population frequencies of species and the estimation of population parameters //Biometrika, –1953. Vol. 40 (3–4),–P. 237–264.
7. R. Kneser Improved backing-off for m-gram language modeling / R. Kneser and H. Ney// Proceedings of the IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing, –1995. Vol. 1, –P. 181–184.

References

1. TARANUKHA, V. (2013) Applying classes based on canonical forms of words and the grammar classes in the problem of reduction of n-gram language model for recognition of the Ukrainian language, *Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv Series Physics & Mathematics*, (Special issue), pp. 176-179.
2. BABIN, D., MAZURENKO, I., HOLODENKO, A. (2004) O perspektivah sozdanija sistemy avtomaticheskogo raspoznavanija slitnoj ustnoj russkoj rechi, *Intelligent systems*, 8(1-4), pp. 45-70.
3. OSTROGONAC, S., POPOVIĆ, B., SEČUJSKI, M., et al. (2013) *Language model reduction for practical implementation in LVCSR systems: 12th International Scientific–Professional Symposium Infoteh-Jahorina-2013*, (12) Jahorina 20-22 March 2013, pp. 391-394.
4. TARANUKHA, V. (2014) Modification of class-based n-gram model for slavic speech recognition, *Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv Series Physics & Mathematics*, (1), pp. 193-196.
5. WITTEN, I. and BELL, T. (1991) The Zero-Frequency Problem: Estimating the Probabilities of Novel Events in Adaptive Text Compression, *IEEE Transactions on Information Theory*, 37(4), pp. 1085-1094.
6. GOOD, I. (1953) The population frequencies of species and the estimation of population parameters, *Biometrika*, 40(3–4), pp. 237–264.
7. KNESER, R. and NEY, H. (1995) Improved backing-off for m-gram language modeling, *Proceedings of the IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, 1, pp. 181–184.

Надійшла до редколегії 22.04.14

УДК 681.3

Терещенко В.М.¹, д. ф.-м.н., доц.

Побудова триангуляції Делоне для планарних графів

¹Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 83000, м. Київ, пр-т.
Глушкова 4д,
e-mail: v_ter@ukr.net

V.M. Tereshchenko¹, Dr. Sci.(Ph.-M.), Assoc. Prof.

Constructing Delaunay triangulation for planar graphs

¹Taras Shevchenko National University of Kyiv,
83000, Kyiv, Glushkovast., 4d,
e-mail: v_ter@ukr.net

У роботі розглядається метод перевірки можливості побудови триангуляції Делоне планарного графа зі складністю не гіршою за $O(N^2)$. Під час аналізу задачі розглядалися дві головні задачі. Перша задача полягає у можливості додавання нових точок у триангуляцію, що фактично зводиться до побудови триангуляції, в якій на окремі трикутники можуть накладатися певні обмеження при дослідженні. Друга задача полягає у побудові триангуляції Делоне для області з дірками так, щоб жодне з ребер триангуляції не перетинало границь області. При вирішенні першої задачі запропоновано контр-приклад, який вказує на те, що не для кожного планарного графа існує триангуляція Делоне. Для розв'язання другої задачі запропоновано метод, який базується на інкрементальному алгоритмі побудови триангуляції Делоне і дозволяє одержати алгоритм із загальною оцінкою складності $O(N^2)$.

Ключові слова: триангуляція Делоне, інкрементальний алгоритм, планарний граф.

We consider the method to check the possibility of construction of Delaunay triangulation of flat planar graph with complexity not worse than $O(N^2)$. During the analysis we considered the problem of two main sub-tasks. The first sub-task is the ability of adding new points in the triangulation. It is actually reduce to the construction of triangulation in which to individual triangles may be imposed certain limitations at research. The second sub-task is the construction Delaunay triangulation for a domain with holes so that the triangulation edges not crossed its boundary. To solve the first subtask, we proposed a counter-example which shows that not for every planar graph Delaunay triangulation exists. To solve the second subtask, we proposed a method based on incremental algorithm for constructing Delaunay triangulation and which allows to obtain algorithm with a general assessment of the complexity $O(N^2)$.

KeyWords: Delaunay triangulation, Incremental algorithm, planar graph.

Статтю представив д.ф.-м.н. Анісімов А.В.

1. Вступ

Постановка проблеми. В роботі розглядається алгоритм перевірки можливості побудови триангуляції Делоне (ТД) плоского планарного графа, що базується на інкрементальному алгоритмі побудови триангуляції, а точніше є його модифікацією. Головною перевагою триангуляції є те, що від об'єкта, який є потенційно дуже складний, ми можемо перейти до більш простих полігонів (трикутників), для їх подальшого дослідження.

На сьогоднішній день, для розв'язання задачі триангуляції Делоне існує велика кількість алгоритмів [1]. Взагалі задача побудови триангуляції розбивається на такі основні підзадачі: побудова структури даних, перевірка умови Делоне, побудова алгоритму. Для кожної із підзадач шукається найкращий розв'язок. Проведемо короткий аналіз цих підзадач.

1.1 Структури даних.

Найбільш вживаними структурами даних для триангуляції є: “вузли з сусідами”, “подвійні ребра”, “вузли і трикутники”, “вузли, ребра і трикутники” та інші.

У структурі даних «Вузли з сусідами» для кожного вузла триангуляції зберігаються його координати на площині і список вказівників на сусідні вузли (список номерів вузлів), з якими є спільні ребра [2]. Вадюю цієї структури даних є неявне завдання трикутників та те, що розмір структури є динамічним. Це, зазвичай, призводить до неефективного використання пам'яті при побудові триангуляції.

У структурі «Подвійні ребра» для підтримки триангуляції задається список орієнтованих ребер так, що кожне ребро входить до структури триангуляції двічі, але направлене в протилежні сторони [3]. Недоліком цієї структури даних є так, як і у попередній, неявне завдання трикутників, що також, як і у попередньому випадку призводить до неефективного використання пам'яті.

У структурі «Вузли та трикутники» для кожного трикутника зберігаються три вказівники на утворюючі його вузли і три вказівники на суміжні трикутники. Хоча ребра в даній триангуляції в явному вигляді не зберігаються, вони указують трикутник і номер ребра усередині нього і, тим самим, роблять цю структуру відносно простою і зручною для реалізації.

З точки зору використання “вузли, ребра і трикутники” є найбільш оптимальною структурою даних [4]. Хоча вона й потребує значних об'ємів пам'яті (так як і структура «Подвійні ребра»), але дозволяє зручно оперувати з побудованою триангуляцією, оскільки всі її об'єкти задаються в явному вигляді.

1.3 Аналіз існуючих алгоритмів

На сьогоднішній день відомо більше 30 підходів до побудови ТД [1, 5]. Найкращі досягнення по часу можна отримати за допомогою алгоритму “розділяй і володарюй” $O(N \log N)$ у гіршому і середньому випадках.

Розрізняють такі групи алгоритмів побудови триангуляції: ітеративні алгоритми (найменш ефективні і досить складні в реалізації), алгоритми злиття (найшвидші і відносно прості в реалізації), алгоритми прямої

побудови (дають непогану (навіть лінійну) швидкість побудови в середньому, прості в реалізації), двопрхідні алгоритми (найбільш складні в реалізації, не дуже ефективні).

У роботі [1] детально розглядається стратегія “розділяй та пануй” на основі трьох способів злиття - “видаляй і будуй”, “будуй і перебудовуй” і “будуй перебудовуючи”, які спираються на опуклість побудованих триангуляцій і забезпечують швидкість злиття від $O(N)$ до $O(N \log N)$ в залежності від методу. Робота [5] присвячена новим способам побудови ТД за час $O(N \log N)$, з використанням додаткової інформації і, зокрема, запропоновано метод швидкого злиття ТД.

Під час аналізу можливості побудови ТД для планарного графа, розглядають дві головні задачі. *Перша задача* полягає у можливості додавання нових точок у триангуляцію, що фактично трансформує задачу таку, що триангуляція будується завжди, але граф задається не жорстко [6], фактично, це дає змогу перейти до такої задачі, що триангуляція будується, але на певні трикутники може накладатися певна умова при дослідженні. *Друга задача* є класичною в деякому розумінні. Задається область з дірками і задача полягає в побудові ТД так, щоб жодне з ребер триангуляції не перетинало границь області. Фактично задається набір точок, який апроксимує границі дірок і задача зводиться до попередньої.

В загальному випадку задача перевірки можливості побудови ТД в чистому виді є відкритою проблемою.

Мета статті. Розробити метод побудови алгоритму перевірки можливості побудови ТД для плоского планарного графа.

Новизна та ідея. В роботі запропоновано новий підхід до розв'язання задачі перевірки можливості побудови триангуляції Делоне.

2. Постановка задачі та алгоритм

2.1 Постановка задачі.

Нехай задана множина S із N точок на площині і деякі відрізки, що не перетинаються і сполучають деякі з цих точок, які разом утворюють граф G . Необхідно визначити чи можливо побудувати ТД графа G , не додаючи нових точок.

2.2 Побудова розв'язку задачі

Нехай задана множина S із N точок на площині і деякі відрізки, що не перетинаються і сполучають деякі з цих точок, які разом утворюють граф G . Нехай мають місце такі факти:

- 1) триангуляція існує, якщо задано не менше $3x$ не колінеарних точок;
- 2) триангуляція є єдиною, якщо в S не існує $4x$ точок, що лежать на одному колі.

Відповідно, якщо розглядати задачу перевірки можливості побудови ТД графа, який задовольняє умові (2), достатньо побудувати ТД множини S за $O(N \log N)$ у гіршому випадку, наприклад алгоритмом “розділяй та пануй”, а потім за лінійний час перевірити, чи належать задані ребра побудованій триангуляції. Зупинимось детальніше на алгоритмах, що не будують триангуляцію повністю. Розглянемо інкрементальний алгоритм побудови ТД, який базується на таких властивостях:

1. Ребра опуклої оболонки будуть частиною триангуляції.
2. Якщо трикутник входить до триангуляції, то коло, описане навколо нього є мінімального діаметру.
3. Алгоритм додає по одній вершині до триангуляції за одну ітерацію.
4. На кожній ітерації алгоритму, побудована частина триангуляції не перебудовується.

Цей алгоритм є надзвичайно привабливий для розв'язання поставленої задачі, оскільки, триангуляція в процесі побудови не перебудовується і критерій вибору вершин, що додаються є простим. Швидкість роботи алгоритму в найгіршому випадку квадратична.

В процесі розробки алгоритму постало питання актуальності задачі, тобто: чи в принципі можлива ситуація, за якої не існує ТД для певного графу? Для демонстрації наведемо приклад, рис.2:

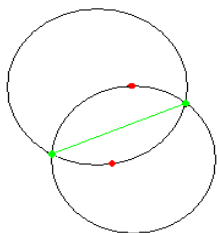


Рис. 2. . Випадок невиконання умови Делоне.

Якщо у вхідних даних задано чотири точки, і задано ребро, яке вказане на малюнку, то не можливо побудувати триангуляцію, оскільки не виконується умова Делоне для жодного з

можливих трикутників. З малюнку легко бачити, що з усіх можливих триангуляцій жодна не задовольняє умові Делоне. Зрозуміло, що така ситуація може бути створена штучно за рахунок завдання специфічного положення ребер і точок графу. На одне питання ми відповіли — дійсно існують графи, для яких неможливо задати триангуляцію Делоне.

Залишається ще одне питання — як алгоритмічно і за прийнятний час перевірити, чи допускає граф побудову триангуляції? Для вирішення цього питання пропонується наступний алгоритм.

2.3 Алгоритм перевірки можливості побудови триангуляції для графа

Розіб'ємо проблему на менші частини:

1. Виділення початкових даних для інкрементального алгоритму.
2. Визначення на кожному кроці нової точки, яку буде додано до триангуляції.
3. Перевірка, чи може вибрана точка бути доданою до триангуляції.
4. Додання нових ребер до триангуляції

Розпишемо більш детально алгоритм додання нових ребер пункту 4.

Алгоритм

Усі ребра триангуляції діляться на класи:

- "сплячі" ребра — ті, які ще не знайшов алгоритм;
- "живі" ребра — ті, що знайшов алгоритм, але відома лише одна із областей, які розділяє ребро;
- "мертві" ребра — ті, що алгоритм знайшов і відомі обидві області.

На початку роботи алгоритму, живими є лише відомі ребра графа, що є наперед задані, або ребра випуклої оболонки. Формується множина “фронт”, яка містить живі ребра. Для кожного ребра приписується індекс — кількість відомих областей. На кожному кроці алгоритму, при додаванні нової вершини, з фронту видаляється одне ребро і можуть додаватись нові. На кожному кроці роботи алгоритму частина ребер змінює свій індекс, на більший. Алгоритм зупиняється, якщо не може бути додана нова точка, або через те, що триангуляції не існує, або тому що вона побудована. Конкретизуємо кроки алгоритму:

1. Початкові дані: масив точок, масив ребер, ребро опуклої оболонки.

2. Визначення нової точки відбувається за принципом найменшого радіуса описаного кола.

3. Перевірка полягає в тому, що перевіряється умова Делоне, і чи заважають ребра, що задані триангуляції. Перевірка умови Делоне може бути реалізовано досить просто, наприклад за допомогою рівняння описаного кола, який описано у [1].

4. Додавання і вилучення ребер з фронту, для зменшення пришивдшення пошуку.

3. Обґрунтування складності

Твердження. Запропонований алгоритм має квадратичну складність у найгіршому випадку.

Доведення. На кожній ітерації з границі триангуляції - фронту вилучається одне ребро, видалені ребра вже не додаються. Оскільки в будь-якій триангуляції міститься не більше $O(N)$ ребер, то відповідно буде не більше $O(N)$ ітерацій алгоритму, на кожній з яких буде витрачено не більше $O(N)$ операцій для перевірок і знаходження нової точки, то сумарна складність буде квадратичною в найгіршому випадку.

4. Висновки

У роботі запропоновано алгоритм перевірки можливості побудови триангуляції Делоне плоского планарного графа. Алгоритм працює зі складністю $O(N^2)$ від кількості вхідних вершин. За основу взято ідею з інкрементального алгоритму побудови триангуляції плоского прямолінійного графа, який має властивості, що можуть бути зручно використані при перевірці умови Делоне і пошуку нової точки.

Список використаних джерел

1. Сковорцов А.В. Триангуляция Делоне и её применение / А. В. Сковорцов. -Томск:Том. Ун-т, 2002. - 128 с.
2. McCullagh M.J., Ross C.G. Delaunay triangulation of a random data set for isarithmic mapping / M.J.McCullagh, C.G.Ross// The Cartographic Journal. – 1980, Vol. 17. – № 2. – P. 93–99.
3. Heller M. Triangulation algorithms for adaptive terrain modeling / M. Heller // Proc. of the 4th Int. Symp. On Spatial Data Handling, July 1990.– P. 163–174.
4. BJORKE J.T. Quadrees Photogrammetry and Remote Sensing / J. T. BJORKE // 16th Intern.

Congr. Of ISPRS, Com. IV. –Part B4, Vol. 27.–1988. – P. 38–44.

5. Chazelle B., Devillers O., Hurtado F., Mora M., Sacrista V., Teillaud M. Splitting a Delaunay Triangulation in Linear Time / B. Chazelle, O. Devillers, F. Hurtado, M. Mora, V. Sacrista M. Teillaud //Algorithmica. – 2002. – № 34(1).– P. 39–46.
6. Hudson B., Miller G.L., Phillips T. Sparse parallel Delaunay mesh refinement / B. Hudson, G.L. Miller, T. Phillips // Proc. of the 19-th an. ACM symp. on Parallel algorithms and architectures, 2007, San Diego, California, USA: proceedings. – New York, NY, USA. –2007. –P. 339 - 347.

References

1. SKVORCOV A.B.(2002) Trianguliacia Delone i eyio primeneniye. Tomsk: Tom. Un-t. 128 p.
2. MCCULLAGH, M. J.,ROSS C.G.(1980) Delaunay triangulation of a random data set for isarithmic mapping. *The Cartographic Journal*. 17(2). p. 93–99.
3. HELLER M.(1990) Triangulation algorithms for adaptive terrain modeling. *Proc. of the 4th Intern. Symp. On Spatial Data Handling*, July 1990. p. 163–174.
4. BJORKE J.T. (1988) Quadrees Photogrammetry and Remote Sensing . *16th Intern. Congress of ISPRS, Commission IV. , part B4*, Vol. 27., p. 38–44.
5. CHAZELE B., DEVILLERS O., HURTADO F., MORA M., SACRISTA V.and TEILLAUD M. (2002) Splitting a Delaunay Triangulation in Linear Time. *Algorithmica*. № 34(1)., p. 39–46.
6. HUDSON B., MILLER G.L. and PHILLIPS T. (2007) Sparse parallel Delaunay mesh refinement . *Proc. of the 19-th an. ACM sympos. Parallel algorithms and architectures*, 2007, San Diego, California, USA: p. 339 - 347.

Надійшла до редколегії 17.04.14

УДК 004.021 + 004.023 + 515.125

Фісуненко А. Л.¹, аспірант

A. L. Fisunenکو¹, PhD student

Діаграма еквівалентності зіркових розбиттів та генерація простих багатокутників

An Equivalence Diagram of Star Partitioning and Simple Polygons Generation

¹ Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 83000, м. Київ, пр-т. Глушкова 4д,
e-mail: alf.via @ gmail.com

¹ Taras Shevchenko National University of Kyiv, 83000, Kyiv, Glushkova st., 4d,
e-mail: alf.via @ gmail.com

В статті розглядається спосіб побудови множини опорних точок для евристичного алгоритму генерації простих багатокутників на заданій скінченій множині точок на площині.

Ключові слова: простий багатокутник, зіркове розбиття, діаграма еквівалентності.

In this paper we consider a way of constructing the set of reference points for the heuristic algorithm of simple polygons generation for a given point set in the plane. It is shown that the introduced equivalence diagram of star partitioning of the point set answers the previously set and left open question regarding finite set of reference points for the simple polygon generation algorithm of cutting out and attaching convex hulls. In combination with mentioned generation algorithm the presented construction allows to introduce an approximation method of searching polygon constrained by the certain criterion. The proposed diagram allows to eliminate asymmetry of polygons generated by the algorithm of cutting out and attaching convex hulls by applying it to the separate triangular segments built on edges of the convex hull of the point set. Since the introduced equivalence diagram contains information on intersections of segments between points of given set it can be used for speeding up computations for many algorithms utilizing this construction in particular for different methods of generating simple polygons.

Key Words: simple polygon, generation, star partitioning, equivalence diagram.

Статтю представив член-кор. НАН України, д.ф.-м.н., проф. Анісімов А. В.

Вступ

Постановка проблеми.

Дано $S = \{p_1, p_2, \dots, p_N\}$ – множина точок на площині, $N > 3$ та усі точки у загальній позиції, тобто будь-які три точки з S не належать одній прямій. Задача полягає в побудові ефективного алгоритму для а) підрахунку усіх можливих простих багатокутників; б) генерації простих багатокутників з певними властивостями на заданій множині точок S . Усі точки множини S повинні бути вершинами отриманих багатокутників.

Аналіз досліджень. В [1] запропоновано евристичний наближений алгоритм генерації багатокутників вирізанням та нарощуванням опуклих оболонок. Але в [1] у якості відкритого питання залишено спосіб побудови множини опорних точок, на основі яких працює алгоритм.

Представлена стаття надає відповідь на поставлене питання, пропонуючи таке розбиття заданої множини точок, яке дає однозначно визначену скінчену множину областей еквівалентності для вибору опорних точок.

Актуальність. Задача генерації багатокутників на заданій множині точок має як суто теоретичне значення (є одною з відкритих проблем обчислювальної геометрії), так і практичне застосування - насамперед, перевірка коректності алгоритмів, що оперують багатокутниками.

Новизна роботи полягає в застосуванні діаграми еквівалентності зіркових розбиттів для однозначного вибору множини опорних точок, на яких ґрунтується генерація простих багатокутників та пошук серед них тих, що відповідають певним властивостям.

Зіркове розбиття та діаграма еквівалентності

В розділі детально розглядається конструкція, яка є окремим випадком розбиття, що оглядово описане в [2] та застосовано для розв'язання задачі переліку усіх зіркових многокутників для заданої множини точок ("Star Universe").

Для будь-якої пари точок обираються промені, що утворюються прямою, яка проходить через ці дві точки, виключаючи відрізок між ними. Перетин променів з опуклою оболонкою $CH(S)$ утворює множину відрізків. Розбиття, що породжується всіма обмежувачими відрізками, визначає усі ядра зіркових многокутників. Окрім випадку зіркових многокутників, ця конструкція має корисні властивості для генерації інших конфігурацій многокутників.

Розглянемо окремий випадок вказаного розбиття, відкидаючи відрізки, які визначені прямими між внутрішніми точками множини і надаючи наступні формальні означення.

Означення 2.1. Нехай p_0 - внутрішня точка $CH(S)$ та $T_i(p_0)$ - трикутник, що визначається внутрішньою точкою p_0 та вершинами i -го ребра

$CH(S)$; $p_0 \notin CH(S) \wedge p_0 \notin S$; **зірковим розбиттям**

$\Pi(S, p_0)$ множини точок на площині S є

$\Pi(S, p_0) = \{S_i(p_0) : \forall i=1..h \ S_i(p_0) \in T_i(p_0) \wedge S_i(p_0) \subset S\}$,

де h - кількість вершин опуклої оболонки $CH(S)$.

Так, наприклад,

Рис. 1 показує множину точок на площині $S = \{p_1, p_2, \dots, p_6\}$ та її зіркове розбиття $\Pi(S, p_0) = \{S_1, S_2, S_3\}$, де $S_1 = \{p_5\}$, $S_2 = \{p_6\}$, $S_3 = \{p_4\}$. Трикутники, що утворюються на ребрах E_1, E_2, E_3 : $T_1(p_0) = \Delta p_1 p_2 p_0$, $T_2(p_0) = \Delta p_2 p_3 p_0$, $T_3(p_0) = \Delta p_1 p_0 p_3$.

Означення 2.2. Припустимо $p_0^1 \neq p_0^2$; будемо казати, що два зіркові розбиття

$\Pi_1(S, p_0^1)$ та $\Pi_2(S, p_0^2)$ еквівалентні тоді, та тільки

тоді, коли $S_i(p_0^1) = S_i(p_0^2)$, $\forall i=1..h$.

Означення 2.3. Геометричне місце точок на площині $R_k(S)$ називається областю еквівалентності зіркового розбиття, якщо:

$\forall p_0^1, p_0^2$: $p_0^1 \in R_k(S)$ та $p_0^2 \in R_k(S)$ відповідні

зіркові розбиття $\Pi_1(S, p_0^1)$ та $\Pi_2(S, p_0^2)$ є еквівалентними.

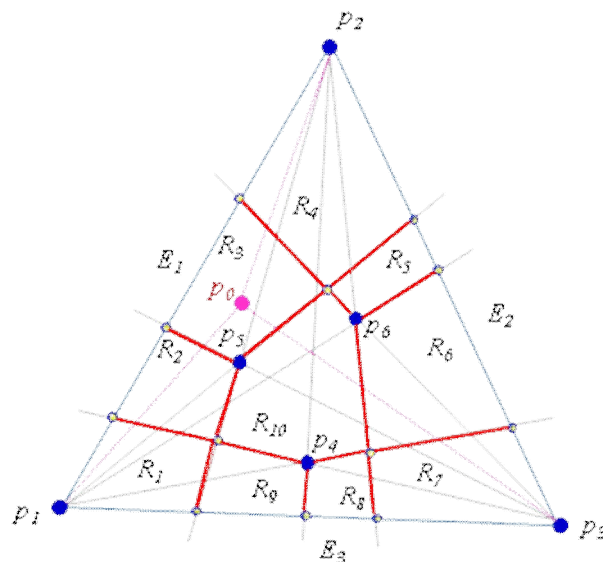


Рис. 1. Приклад зіркового розбиття з 10 областями еквівалентності для множини з 6 точок.

Зробимо наступні позначення та припущення.

1. $\{p_{CH(1)}, \dots, p_{CH(h)}\} \subset S$ - множина усіх

вершин опуклої оболонки $CH(S)$;

2. $S \setminus CH(S) = \{p_{I(1)}, \dots, p_{I(N-h)}\} \subset S$ – множина усіх

внутрішніх точок; розглядаємо тільки не вироджені випадки: $N-h > 0$;

3. $r(S, i, j)$ – промінь на прямій $p_{I(i)}p_{H(j)}$, що випущений з внутрішньої точки $p_{I(i)}$ у напрямку, який протилежний вершині $p_{H(j)}$;

4. $A(S, i, j)$ – кут, що утворюється променями $r(S, i, j)$ та $r(S, i, j+1)$ або $r(S, i, 0)$, якщо $j=h$.

Лема 2.1. Області, що утворені перетином опуклої оболонки множини точок S та множиною усіх променів $r(S, i, j)$ ($i=1, \dots, N-h, j=1, \dots, h; h > 2; N-h > 1$) є опуклими многокутниками.

Доведення: Усі кути $A(S, i, j)$ є опуклими множинами. Перетин опуклих множин – опукла множина.

Застосовуємо по чергово для всіх внутрішніх точок та усіх можливих кутів наступне. Обираємо $A(S, i, j)$ та робимо перетин по парах: $A(S, i, j) \cap A(S, m, n)$, where $m \neq i, n=1, \dots, h$. Кінцевий результат – непорожня опукла область, оскільки за умовами Лема 2.1 $h > 2; N-h > 1$ та існує принаймні один промінь кута $A(S, m, n)$, що перетинає один з променів $A(S, i, j)$. Останнє витікає з того, що кожен з h променів, що виходить з кожної внутрішньої точки лежить на прямій, яка визначена цією точкою та вершиною опуклої оболонки $CH(S)$.

Перетинаючи отримані області по парах з опуклою оболонкою $CH(S)$, отримаємо обмежені опуклі області $R_k(S)$. Тобто $R_k(S)$ опуклі многокутники ■.

Зазначимо, що k попарних перетинів n відрізків на площині можуть бути обчислені за час $O(n \log n + k)$; час виконання є оптимальним, вимоги по пам'яті $O(n+k)$. Ця теорема була доведена Chazelle and Edelsbrunner ([3], Theorem 5). Очевидно, що у випадку розбиття, що розглядається, $n=h(N-h)$.

Означення 2.4. Припустимо наступне: $R(S) = \{R_1(S), \dots, R_k(S)\}$ – множина опуклих многокутників, яка отримана процедурою, що використана в доведенні Лема 2.1. Множину $R(S)$ будемо називати **діаграмою еквівалентності** множини точок S .

Теорема 2.1. Кожен опуклий многокутник $R_k(S)$ є областю еквівалентності зіркового

розбиття $\Pi(S, p_0)$ для будь-якої точки $p_0 \in R_k(S)$.

Доведення: Беремо опуклу область $R_k(S)$ та

довільні дві точки $p^1_0 \in R_k(S), p^2_0 \in R_k(S), p^1_0 \neq p^2_0$ та

припустимо протилежне. Тоді $\Pi_1(p^1_0)$ та $\Pi_2(p^2_0)$ не є еквівалентними: $\exists i: S_i(p^1_0) \neq S_i(p^2_0)$.

Трикутники $T_i(p^1_0) \neq T_i(p^2_0)$ мають спільне i -е ребро опуклої оболонки $CH(S)$. Оскільки p^1_0 та p^2_0 – внутрішні точки, перетин $T_i(p^1_0) \cap T_i(p^2_0)$ є не порожньою множиною (трикутником). Множини $T_i(p^1_0) \setminus T_i(p^2_0)$ та $T_i(p^2_0) \setminus T_i(p^1_0)$ є, також, трикутниками.

Єдиний спосіб задовольнити наше припущення $S_i(p^1_0) \neq S_i(p^2_0)$ – це прийняти, що

$\exists p_j \in S: p_j \in T_i(p^1_0) \setminus T_i(p^2_0)$ або $p_j \in T_i(p^2_0) \setminus T_i(p^1_0)$.

Випускаємо промені із загальних вершин трикутників $T_i(p^1_0)$ і $T_i(p^2_0)$ через точку p_j .

Точки p^1_0 та p^2_0 лежать на протилежних сторонах одного з цих променів. Цей поділяючий промінь виходить з вершини опуклої оболонки $CH(S)$ через внутрішню точку p_j (див.

Рис. 2). З Лема 2.1 витікає, що цей промінь визначає границю однієї з опуклих областей.

Це означає, що відрізок між p^1_0 та p^2_0 перетинає границю опуклої області. Але це суперечить опуклості $R_k(S)$, що доводить теорему ■.

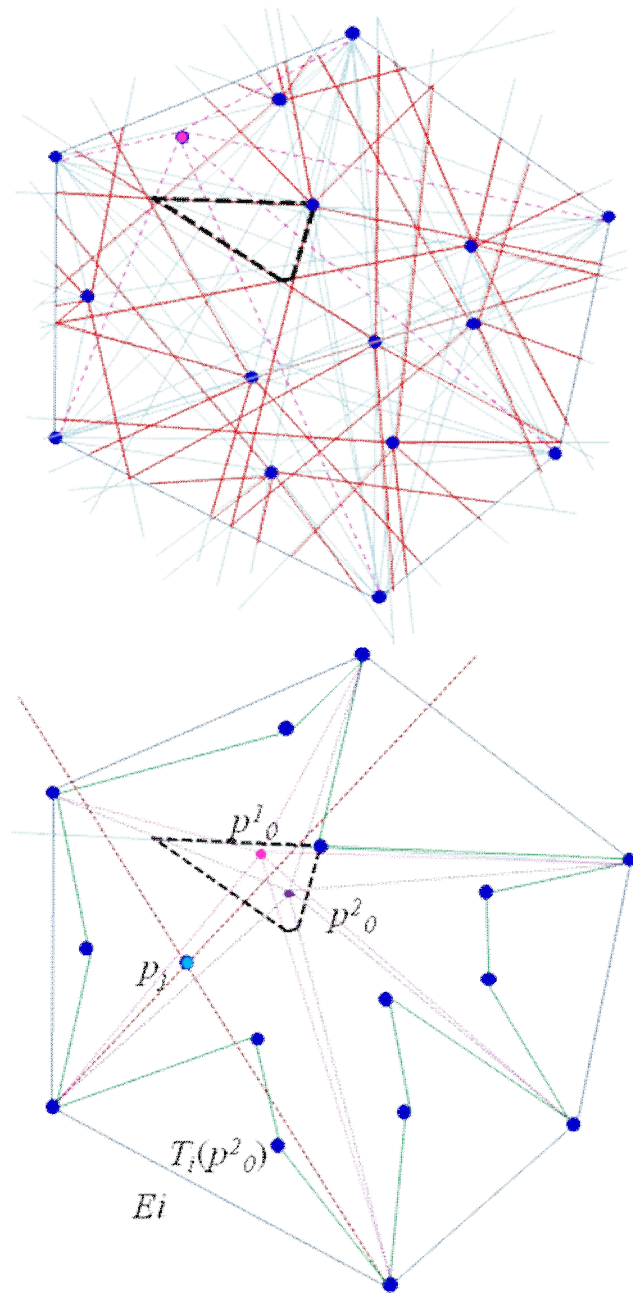


Рис. 2. Ілюстрація для доведення Теорема 2.1 та її Наслідку 2.1.

Припустимо, що обрана будь-яка внутрішня точка p_0 області еквівалентності $R_k(S)$. Оберемо будь-який трикутник $T_i(p_0)$ зіркового розбиття $\Pi(S, p_0)$. Легко бачити, якщо підмножина S_i не є порожньою (тобто, існує принаймні одна точка) тоді усі можливі прості ланцюги (тобто ті, що не мають само-перетинів), які починаються та закінчуються на кінцях ребра i , що є основою трикутника, не залежить від точки p_0 доки вона залишається всередині області еквівалентності $R_k(S)$ (

Рис. 2). Ця властивість напряду витікає з означення областей еквівалентності та Теорема 2.1. Таким чином, ми можемо сформулювати наступний наслідок.

Наслідок 2.1. Припустимо, що E_i – ребро опуклої оболонки $CH(S)$; $\Pi(S, p_0)$ – зіркове розбиття множини точок S ; $R_k(S)$ – області

еквівалентності: $R_k(S) \subset R(S)$; тоді множина усіх

простих ланцюгів, що побудована на кінцях E_i та внутрішніх точках, та, відповідно множина усіх простих многокутників, які є об'єднанням усіх

цих ланцюгів $i=1..h$, є однаковими $\forall p_0 \in R_k(S)$.

Комбінація з алгоритмом вирізання та нарощування опуклих оболонок

Основна процедура, що описана в [1] дає «асиметричні» конфігурації многокутників. Для вирішення цієї проблеми можливо застосування діаграми еквівалентності та алгоритму [1] наступним чином.

На першому кроці будується діаграма еквівалентності для заданої множини точок S . Потім обирається точка p^k_0 всередині кожної з областей $R_k(S)$ діаграми еквівалентності $R(S)$. Нагадаємо, що згідно доведеної Теорема 2.1 та її Наслідку 2.1 ця точка може обиратися довільно. Наприклад, це може бути центр мас будь-яких трьох вершин області $R_k(S)$; оскільки $R_k(S)$ – опуклий многокутник, то така точка завжди всередині $R_k(S)$.

Точка p^k_0 визначає зіркове розбиття $\Pi(S, p^k_0)$. Для кожного з трикутників $T_i(p_0)$ $i=1, \dots, h$ розбиття $\Pi(S, p^k_0)$ повторюємо наступні кроки. Перевіряємо, чи містить трикутник $T_i(p_0)$ внутрішні точки. Беремо грань E_i опуклої оболонки $CH(S)$, що є одночасно основою трикутника $T_i(p_0)$ та застосовуємо процедуру вирізання та нарощування оболонок [1]. Об'єднання ланцюгів, що побудовані на гранях E_i – простий многокутник.

Для вирішення оптимізаційних задач наближеним методом, таких як пошук многокутника мінімальної площини, виконуємо описані вище кроки для кожного з областей $R_k(S)$

діаграми еквівалентності $R(S)$, застосовуючи відповідний критерій відбору.

Висновки

В роботі надано відповідь на відкрите питання щодо способу побудови опорних точок для евристичного оптимізаційного алгоритму вирізанням та нарощуванням опуклих оболонки. Показано, що у якості основного способу

отримання множини опорних точок може використовуватися діаграма еквівалентності зіркових розбиттів, побудова якої базується на одному із алгоритмів перетину відрізків. Інформація про перетини відрізків може додатково використовуватися на подальших кроках генерації простих багатокутників для перевірки самоперетинів, що підвищує загальну ефективність алгоритму.

Список використаних джерел

1. *Фісуненко А. Л.* Генерація простих багатокутників вирізанням та нарощуванням опуклих оболонки / *А. Л. Фісуненко* // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка, серія фізико-математичні науки. – 2013. -спецвипуск. – С. 190-193.
2. *Auer T.* Heuristics for the generation of random polygons / *T. Auer, M. Held* // In Proceedings of the 8th Canadian Conference on Computational Geometry, Ottawa, Ontario. – 1996. – P. 38-43.
3. *Chazelle B.* An Optimal Algorithm for Intersecting Line Segments in the Plane. / *B. Chazelle, H. Edelsbrunner* // Journal of the Association for Computing Machinery. Vol. 39. No. 1, – 1992. – P.1-54.

References

1. *FISUNENKO A. L.* (2013) Generation of simple polygons by cutting up and building up convex hulls. Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv Series Physics & Mathematics, Spetsvypusk, pp. 190-193.
2. *AUER T., HELD, M.* (1996) Heuristics for the generation of random polygons. In Proceedings of the 8th Canadian Conference on Computational Geometry, Monday August 12, 1996. Ottawa, Ontario. pp.38-43.
3. *CHAZELLE, B., EDELSBRUNNER, H.* (1992) An Optimal Algorithm for Intersecting Line Segments in the Plane. Journal of the Association for Computing Machinery. Vol. 39. No. 1, pp.1-54.

Надійшла до редколегії 29.05.2014

УДК 004.5; УДК 004.9;

Шабелюк О. В.¹, аспірант.

Використання технології доповненої реальності в дистанційному освітньому процесі

¹ Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 83000, м. Київ, пр-т.
Глушкова 4д,
e-mail: Shabeliuk@gmail.com

O. V. Shabeliuk¹, graduate student.

Use of Augmented Reality technology in E-learning process

¹ Taras Shevchenko National University of Kyiv,
83000, Kyiv, Glushkova st., 4d,
e-mail: Shabeliuk@gmail.com

В статті розглянуто поняття доповненої реальності, а також механізми та алгоритми її реалізації. Описані сучасні тенденції використання цієї технології в мобільному дистанційному навчанні. Класифіковані три основні групи мобільних освітніх додатків на основі технології доповненої реальності за методологією їх роботи та розробки. Перша група використовує технологію доповненої реальності для візуалізації навчального матеріалу. Друга група використовує технологію доповненої реальності для розпізнавання та маркування реальних об'єктів. Третя група використовує технологію доповненої реальності для взаємодії людини з побудованими віртуальними об'єктами. Наведені існуючі приклади в різних галузях наук та спеціальностей. Наводиться опис характеристик мобільних телефонів, що дозволяють використовувати їх для роботи дистанційних навчальних систем на основі доповненої реальності. Проаналізовано актуальність та переваги використання даної технології в освітньому процесі. Запропоновано створення мобільної навчальної дистанційної системи на основі технології доповненої реальності для студентів технічних спеціальностей.

Ключові слова: доповнена реальність, дистанційне навчання, AR-додаток.

The article deals with the concept of augmented reality, mechanisms and the algorithms of its implementation. Described the modern trend of using this technology in the mobile distance learning. Classified into three main groups of mobile educational applications based on augmented reality technology by the methodology of their work and development. The first group uses augmented reality technology for visualize of learning material. The second group uses augmented reality technology for recognition and labeling of real objects. The third group uses augmented reality technology for human interaction with builtd virtual objects. Reviewed existing examples in differerent fields of science and specialties. Describes the characteristics of mobile phones that can use them for distance learning system based on augmented reality. Analyzed of the relevance and benefits of using this technology in the educational process. Proposed a creation of mobile learning application based on augmented reality technology for students of technical specialties.

Key Words: augmented reality, distance learning, AR-application.

Статтю представив д.ф.-м.н. проф. Анісімов А.В.

Доповнена реальність – поняття, яке описує процес доповнення існуючої реальності віртуальним об'єктами. Комунікація з віртуальною реальністю виконується в режимі on-line, а для забезпечення необхідного ефекту необхідна лише вебкамера – зображення з якої буде доповнюватись віртуальним об'єктами. За словами дослідника Рональда Азума [1]

доповнену реальність можна визначити як систему, яка:

1. Поеднує віртуальне та реальне;
2. Взаємодіє в реальному часі;
3. Працює в 3d.

На сьогодні можна легко назвати кілька відомих прикладів використання технології доповненої реальності. Зокрема телевізійний



Рис. 1 Схема доповненої реальності

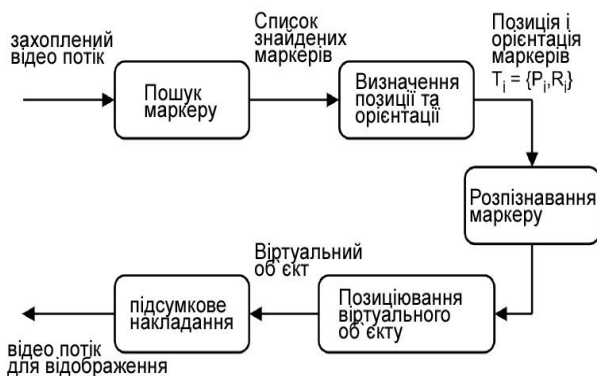


Рис. 2 Схема алгоритму роботи системи доповненої реальності

прогноз погоди, в якому відео потік ведучого накладається на комп'ютерне зображення мапи з погодою. Рахунок матчу, відстань від точки виконання штрафного удару чи лінія офсайду в футбольних телетрансляціях.

Актуальність впровадження технології доповненої реальності в освітній процес полягає в тому, що використання такої новітньої системи безсумнівно збільшить мотивацію студентів, а також підвищить рівень засвоєння інформації за рахунок різноманітності і інтерактивності її візуального представлення.

На сьогоднішній день існує багато підходів до використання технології доповненої реальності в освіті. Такі мобільні навчальні системи можна умовно розділити на три основні групи:

1 група візуалізує 3d зображення для наочного представлення навчального матеріалу.

Яскравим прикладом є робота Танга і Оу [2] яка дозволяє студентам біологам вирощувати віртуальних метеликів на реальних рослинах, вивчаючи при цьому їхній повний життєвий цикл.

В роботі [3] описана інтерактивна навчальна система, що дозволяє студентам медичного спрямування зрозуміти будову людського черепа

візуалізуючи його в 3d, з можливістю виділення його окремих частин. Кожну таку частину можна масштабувати і розглядати в просторі, також є можливість представлення текстової наукової інформації про неї.

В роботі [4] описана мобільна навчальна система візуалізації астрономічних об'єктів сонячної системи, що дозволяє візуалізувати декілька 3d моделей одночасно.

В роботі [5] описана навчальна система для студентів що вивчають хімію, вона дозволяє візуалізувати атоми і зв'язки між ними в різних хімічних сполуках, а також описана схема навчального класу для максимальної зручності використання системи.

2 група використовує технологію доповненої реальності для розпізнавання і маркування реальних об'єктів. Такі можливості дозволяють реалізовувати мобільні навчальні системи, що орієнтовані в просторі, зокрема Елізабет Фіджеральд у своїй роботі [6] наводить приклади використання технології доповненої реальності для побудови мобільної системи навчання студентів спеціальності туризм (географія).

Також автор наводить приклад використання цієї технології в мобільній системі навчання істориків та екскурсів за допомогою візуальних аудіо екскурсій та історичних аудіо довідок, що прив'язані до маркованих історичних пам'яток.

На сьогоднішній день існує багато навчальних мобільних систем розпізнавання зоряного неба для вивчення розташування зірок та визначення до якого сузір'я вони належать.

3 група побудована на основі взаємодії віртуального об'єкту побудованого комп'ютером (смартфоном) з людиною в режимі реального часу.

У своїй роботі [7] автори демонструють прототип навчальної системи, що дозволяє будувати геометричні фігури (стереометричні об'єкти), а також взаємодіяти з ними в режимі реального часу.

Для побудови стереометричних об'єктів використовується спеціальний пристрій введення, що має 6 ступенів свободи, за допомогою якого можна доповнювати в реальність прості геометричні об'єкти, такі як: крапка, лінія, площина, куб, сфера, циліндр та конус.

Також реалізовано підтримка додавання нового об'єкту, видалення, повернення на крок назад, а також перемикання відображення чи приховування конкретної поверхні об'єкту за

допомогою планшету вводу. Ця система також підтримує роботу багатьох користувачів одночасно, що дозволяє виконувати групові роботи, або взаємодіяти викладачу зі студентами.



Рис. 3 Студенти працюють з геометричними об'єктами

У роботі [8] описано початкову систему класичної механіки, що використовує схожі інструменти вводу даних. Ця система використовує побудовані геометричні фігури з заданими для них не тільки геометричними розмірами, а й фізичними параметрами маси, та розташування центру мас.

В процесі взаємодії є можливість змінювати швидкість об'єктів, а також їхнє прискорення. Відповідно є можливість досліджувати фізичні процеси та явища пов'язані з цими параметрами в режимі реального часу, наприклад сила та кінетична енергія, проводити симуляції різних фізичних взаємодій віртуальних об'єктів.

Використання такої навчальної системи безумовно спрощує сприйняття теоретичного матеріалу, а також дозволяє закріпити отриманні знання на практиці – змодельовавши віртуальні об'єкти в режимі реального часу.

Однак варто зазначити, що вартість обладнання такої системи не дозволяє говорити про масовість її використання, і як наслідок – про мобільність.

Соціологічні опитування фокус групи студентів, яким пропонувалось використовувати технологію доповненої реальності як додаткову в процесі вивчення класичного навчального матеріалу, показали велику зацікавленість і

позитивне сприйняття візуального навчального матеріалу через мобільний додаток, а також високі показники по критерію «запропонувати друзям, що вивчають цей предмет, теж використовувати цей додаток» (більш детальні соціологічні дані описані в роботі [9]).

На нашу думку саме використання мобільного пристрою, смартфона або планшету, як базового елемента для роботи дистанційної навчальної системи є обґрунтованою з точки зору достатньої потужності мобільних процесорів, великої роздільної здатності сучасних дисплеїв та вбудованих в пристрій камер.

Крім того він дозволяє системі отримати доступ до додаткових можливостей, що на сьогоднішній день присутні у більшості з них, зокрема: технології передачі даних 3G та Wi-Fi, гіроскоп, акселерометр, технології визначення локації типу GPS та інші.

Такі пристрої не надто дорогі, і є у переважній більшості студентів, що дозволяє використовувати таку систему для дистанційного навчання студентів в позакласний час.

Використання таких навчальних систем безумовно спрощує сприйняття теоретичного матеріалу, а також дозволяє закріпити отриманні знання на практиці – змодельовавши віртуальні об'єкти в режимі реального часу.

Висновки:

В показано роботі обґрунтовано актуальність технології доповненої реальності та розглянуті різні напрямки використання даної технології в процесі мобільного дистанційного навчання.

Описані три основні групи мобільних додатків, що використовують технологію доповненої реальності. Розглянуто конкретні приклади діючих навчальних систем вивчення технічних дисциплін на основі даної технології.

Впровадження в систему дистанційної освіти сучасних віртуальних засобів навчання є найважливішою умовою посилення навчального ефекту, який полягає в інтерактивності 3d моделювання і використання ефекту доповненої реальності, що зокрема важливо для студентів технічних спеціальностей при вивченні фізичних дисциплін.

Обґрунтована необхідність у розробці мобільної навчальної системи на основі технології доповненої реальності, що дозволить перенести частину лабораторних робіт студентів технічних спеціальностей у площину дистанційного навчання.

Список використаних джерел

1. Azuma R. A Survey of Augmented Reality / R. Azuma // *Teleoperators and Virtual Environments*, August 1997. - P. 355–385.
2. Tarng W. A Study of Campus Butterfly Ecology Learning System Based on Augmented Reality and Mobile Learning / W. Tarng, K.-L. Ou. // 2012 IEEE Seventh International Conference on Wireless, Mobile and Ubiquitous Technology in Education. - P. 62-66.
3. Chien C.-Huan. An interactive augmented reality system for learning anatomy structure / C.- Huan Chien, C.- Hsu Chen, T.- Sheng Jeng. // *Proceedings of the International MultiConference of Engineers and Computer Scientists 2010 Vol. I, IMECS 2010*, March 17 - 19, 2010, Hong Kong.
4. Fleck S. An Augmented Reality Environment for Astronomy Learning in Elementary Grades: An Exploratory Study / S. Fleck, G. Simon // *25ème conférence francophone sur l'Interaction Homme-Machine, IHM'13 2013*. - P. 1-9.
5. Núñez M. Collaborative Augmented Reality for Inorganic Chemistry Education / M. Núñez, R. Quirós, I. Núñez, J.B. Carda, E. Camahort // *IASME International Conference on engineering education (EE'08)*, Heraklion, Greece, July 22-24, 2008.
6. FitzGerald E. Using augmented reality for mobile learning: opportunities and challenges / E. FitzGerald // *Workshop Proceedings: Mobile Augmented Reality for Education*, 16-18 October 2012, Helsinki, Finland. - P. 2–5.
7. Kaufmann H., Schmalstieg D. Mathematics And Geometry Education With Collaborative Augmented Reality, 2003. - P. 1-8.
8. Kaufmann H., Meyer B. Simulating Educational Physical Experiments in Augmented Reality, 2008. - P. 1-8.
9. Shirazi A. Technology-enhanced learning in construction education using mobile context-aware augmented reality visual simulation / A. Shirazi, A.H. Behzadan // *Proceedings of the 2013 Winter Simulation Conference*. - P. 3074-3085.

References

1. AZUMA, R. (1997) A Survey of Augmented Reality. *Presence: Teleoperators and Virtual Environments*. pp. 355 –385.
2. TARNG, W., and OU, K.-L. (2012) A Study of Campus Butterfly Ecology Learning System Based on Augmented Reality and Mobile Learning. *2012 IEEE Seventh International Conference on Wireless, Mobile and Ubiquitous Technology in Education*. pp. 62-66.
3. CHIEN, C. -HUAN, CHEN, C.- HSU, and JENG, T.- SHENG. (2010) An interactive augmented reality system for learning anatomy structure. *Proceedings of the International MultiConference of Engineers and Computer Scientists*, Vol. I, Hong Kong.
4. FLECK, S. and SIMON, G. (2013) An Augmented Reality Environment for Astronomy Learning in Elementary Grades: An Exploratory Study. *25ème conférence francophone sur l'Interaction Homme-Machine, IHM'13*. pp. 1-9.
5. NÚÑEZ, M., QUIRÓS, R., NÚÑEZ, I., CARDA, J.B. and CAMAHORT, E. (2008) Collaborative Augmented Reality for Inorganic Chemistry Education. *5th WSEAS / IASME International Conference on engineering education (EE'08)*, Greece.
6. FITZGERALD E. (2012) Using augmented reality for mobile learning: opportunities and challenges. *Workshop Proceedings: Mobile Augmented Reality for Education*. pp. 2–5.
7. KAUFMANN, H. and SCHMALSTIEG, D. (2003) *Mathematics And Geometry Education With Collaborative Augmented Reality*. pp. 1-8.
8. KAUFMANN, H. and MEYER, B. (2008) *Simulating Educational Physical Experiments in Augmented Reality*. pp. 1-8.
9. SHIRAZI, A. and BEHZADAN A.H. (2013) Technology-enhanced learning in construction education using mobile context-aware augmented reality visual simulation. *Proceedings of the 2013 Winter Simulation Conference*. pp. 3074-3085.

Надійшла до редколегії 30.04.14

УДК 519.21

Шарапов¹ М.М., к.ф.-м. н., доц.

M.M. Sharapov¹, Ass. Prof.

**Пошук оптимальної стратегії
встановлення відповідності між
елементами дискретних множин**

**Optimal strategy of establishing
correspondence between elements of discrete
sets**

¹ Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 03680, М. Київ, пр-т.
Глушкова 4д, e-mail: sharapov@unicyb.kiev.ua

¹ Taras Shevchenko National University of Kyiv,
03680, Kyiv, Glushkova av., 4d.
e-mail: sharapov@unicyb.kiev.ua

Стаття присвячена пошуку оптимальної стратегії встановлення відповідностей між об'єктами дискретних множин. Здійснено ймовірнісну постановку проблеми, запропоновано рекурентну формулу обчислення ймовірності для стратегії простого перебору, створена програмна реалізація та сформульована гіпотеза про оптимальну стратегію пошуку. Під стратегією простого перебору мається на увазі будь-яка зі стратегій, які еквівалентні до тривіальної стратегії простого перебору, тобто, стратегії, які мають такий же граф на класах еквівалентних станів, що і тривіальна стратегія простого перебору. Показано, що крім стратегії простого перебору існують і інші стратегії, які мають таку ж ймовірність успіху. Створений програмний продукт дозволить знаходити оптимальні стратегії при різних початкових умовах.

Ключові слова: оптимальна стратегія, рекурсія, максимізація ймовірності, перевірка гіпотез.

This article is devoted to finding the optimal strategy of mapping between two discrete sets, based on the classical problem of locks and keys. We gave the probabilistic formulation of the problem and found a recursive formula for calculating the probability of brute force strategy. The hypothesis of optimal search strategy has been considered. It is shown how to deal with classes of states instead of states in order to simplify the graphical representation of the problem and to make it possible to find optimal strategies for different initial numbers of tries. The brute force strategy is not the unique one but is one of those strategies that are equivalent to so-called trivial brute force strategy, in other words all strategies from this class have the same graph over the classes of equivalent states. However there exist radically different strategies that have the same probability of success as the brute force strategy has. The developed software will make it possible to obtain the optimal strategies under different initial conditions.

Key Words: optimal strategy, recursion, maximization of probability, testing of hypotheses.

Статтю представив д. т. н., професор Гаращенко Ф.Г.

Проблема, про яку піде мова, у різних варіантах виникає при відновленні таблиць зв'язку MyISAM (які зберігаються у трьох файлах) баз даних; при встановленні зв'язків в маркетингових дослідженнях; в інших задачах, суть яких зводиться до відновлення унікальних зв'язків між елементами двох дискретних множин. Дослідження, результати яких викладені в цій роботі, проводились за замовленням та при співпраці з Міжнародною Маркетинговою Групою Україна.

Розглянемо спочатку таку задачу: маємо $n > 1$ замків та n ключів і відомо, що кожний ключ підходить лише до одного зі замків. Потрібно встановити відповідність між ключами та замками. За яку мінімальну кількість спроб

можна гарантовано це зробити? Очевидно, що така мінімальна кількість спроб становить $K = n(n - 1) / 2$.

Тепер уявімо, що нам надається (для встановлення шуканої відповідності) деяка кількість спроб k ($0 \leq k < K$). За $0 \leq k < K$ спроб неможливо гарантувати, що шукану відповідність можна точно встановити, але ми врешті можемо просто відгадати, який із варіантів, що залишилися, відповідає дійсності (ймовірність відгадати за v нерозглянутих варіантів, очевидно, складе $1/v$). Отже, метою є максимізація ймовірності «відгадування», а для цього потрібно знайти (окремо для кожного фіксованого $0 \leq k < K$) стратегію підбору ключів для n замків.

Деякі із цих стратегій є тривіальними. Наприклад, при $k=0$ правильний варіант можна відгадати з ймовірністю $1/n!$. При $k=1$ (є лише одна спроба) алгоритм теж є тривіальним – використати цю спробу на довільній парі «ключ/замок». При довільному результаті залишиться вгадати (якщо $n > 2$) решту співвідношень або (при $n=2$) дати точну відповідь. В загальному ж випадку потрібно підібрати таку стратегію, яка максимізує ймовірність відгадати (або отримати протягом випробувань) правильну відповідність ключів та замків. По суті така стратегія має відхилити протягом виділених кроків якомога більшу кількість варіантів співвідношень і, таким чином, залишити якомога меншу кількість варіантів (це гарантує і одночасну максимізацію ймовірності наштовхнутись на шукане співвідношення протягом виділених кроків, і максимізацію ймовірності відгадування у протилежному випадку). Розглянемо деякі фіксовані значення $n > 2$ та $k > 1$. Станом в нашому пошуку логічно вважати значення невдалих та вдалих перевірок ключів відносно набору замків. Кожна стратегія фактично є правилом, за яким потрібно, знаходячись в одному із вказаних станів робити деяку конкретну наступну перевірку, яка тягне перехід в один з двох (в залежності від того, підійде ключ при цій перевірці чи ні) наступних станів. Перебір всіх можливих стратегій буде досить громіздким, тому оптимізуємо цей процес, розглядаючи групи станів, елементи яких є еквівалентними в тому розумінні, що кожен з них можна отримати з іншого еквівалентного стану або перенумерацією ключів/замків, або перейменуванням замків у ключі та навпаки. Таких груп станів вже буде значно менше. Розглянемо наступний приклад.

Нехай маємо $n=3$ замки (і 3 ключі) та $k=2$ спроби. Можливі стани будемо позначати маленькими буквами s_i , а групи еквівалентних станів – великими буквами S_i . Кожен стан задаватимемо матрицею, елементи якої набуватимуть таких трьох «значень»: $a_{ij}=1$, якщо вже відомо, що i -ий ключ відповідає j -ому замку; $a_{ij}=0$, якщо вже відомо, що i -ий ключ не відповідає j -ому замку; $a_{ij}=?$, якщо не відомо, чи підходить i -ий ключ до j -го замка, чи ні. Початковий стан один-єдиний, і утворює початковий клас $S_0 = \begin{pmatrix} ? & ? & ? \\ ? & ? & ? \\ ? & ? & ? \end{pmatrix}$. На першому кроці

можливі 9 варіантів (один із трьох ключів перевіряємо для одного з трьох замків). Якщо, наприклад, застосуємо 2-ий ключ до 3-го замка (позначимо: $m_1 = k_2 l_3$), то отримаємо один з таких результатів (в залежності від того, чи підійде

ключ): або $s_1 = \begin{pmatrix} ? & ? & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ ? & ? & 0 \end{pmatrix}$, або $s_2 = \begin{pmatrix} ? & ? & ? \\ ? & ? & 0 \\ ? & ? & ? \end{pmatrix}$. Якщо ж

зробимо крок ($m'_1 = k_1 l_1$), то отримаємо

результати: або $s'_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & ? & ? \\ 0 & ? & ? \end{pmatrix}$, або $s'_2 = \begin{pmatrix} 0 & ? & ? \\ ? & ? & ? \\ ? & ? & ? \end{pmatrix}$. Таким

чином можна перебрати всі 9 варіантів першої спроби, але цікавим є те, що ці варіанти еквівалентні і утворюють насправді один клас. Дійсно, якщо перенумерувати ключі 2,3,1, а замки перенумерувати 3,2,1, то крок $m_1 = k_2 l_3$ перетвориться на $m'_1 = k_1 l_1$, стан s_1 перетвориться в стан s'_1 , а стан s_2 – в стан s'_2 . Таким чином, всі можливі перші кроки є еквівалентними. Результируючі пари станів утворюють два класи, які можна задати довільними їхніми представниками: за умови кроку $m_1 = k_1 l_1$ станами

будуть $S_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & ? & ? \\ 0 & ? & ? \end{pmatrix}$ та $S_2 = \begin{pmatrix} 0 & ? & ? \\ ? & ? & ? \\ ? & ? & ? \end{pmatrix}$. Зі стану S_1

(точніше, з довільного стану цього класу) можливим (за один наступний крок) є перехід

лише в клас $S_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (коли відповідність між

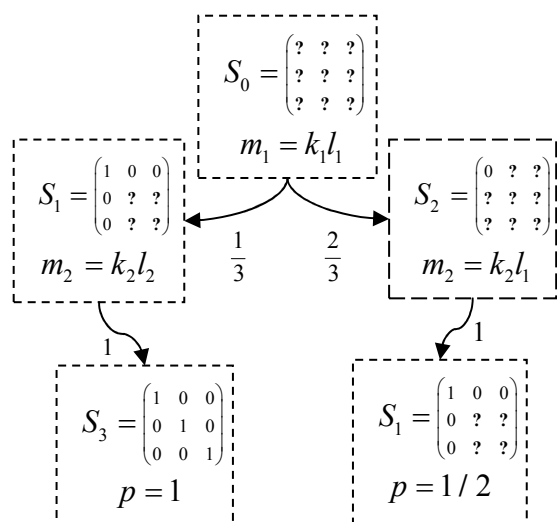
замками і ключами вже встановлена). Зауважимо, що оскільки стан S_3 відповідає досягненню мети, то фактично вже перебування в стані S_1 гарантує досягнення бажаної мети з ймовірністю 1. Припустимо, що, перебуваючи в

класі $S_2 = \begin{pmatrix} 0 & ? & ? \\ ? & ? & ? \\ ? & ? & ? \end{pmatrix}$, ми робитимемо саме крок

$m_2 = k_2 l_1$, а за такого кроку із класу S_2 можливий лише перехід (незалежно від результату самого

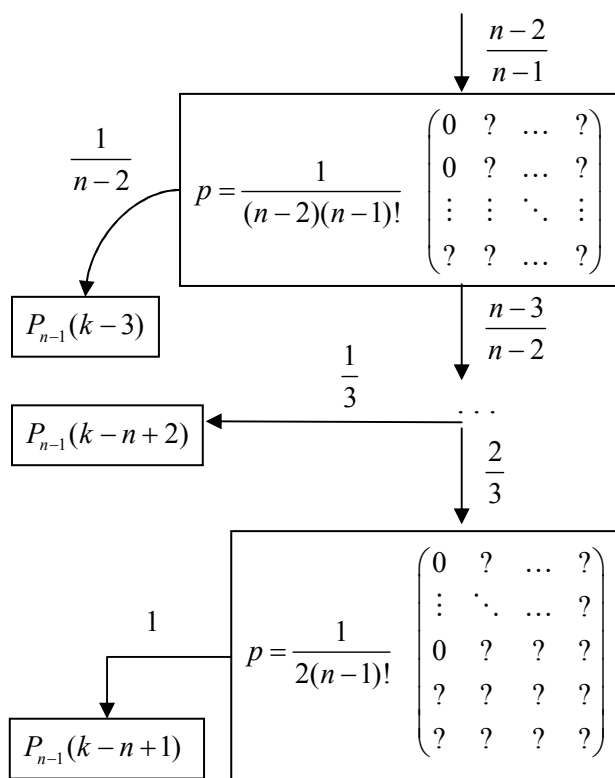
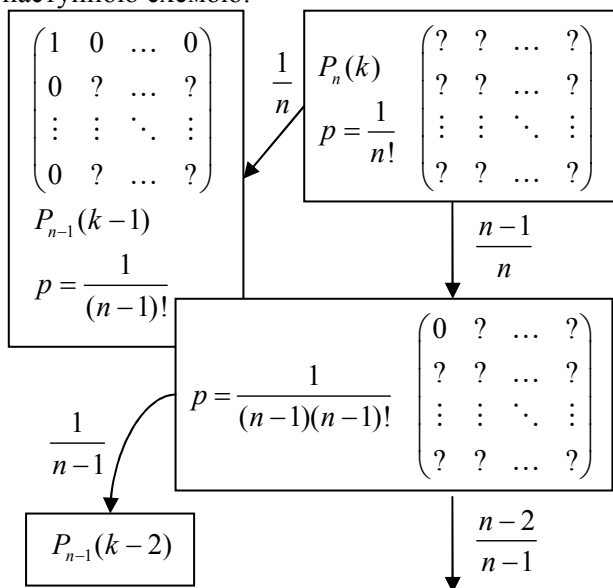
кроку) лише в клас $S_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & ? & ? \\ 0 & ? & ? \end{pmatrix}$ (за перебування в

якому відгадати точне співвідношення можна, очевидно, з ймовірністю $1/2$). При цьому неважко зрозуміти, що перехід $S_0 \rightarrow S_1$ відбувається з ймовірністю $1/3$, а перехід $S_0 \rightarrow S_2$ – з ймовірністю $2/3$. Отже, стратегія у випадку описаного перебору визначається однозначно і набуває такої схеми:



При таких переходах поточні положення відрізняються не лише номером класу станів, але і кількістю кроків, які залишаються в запасі, тому клас S_1 зображений на схемі двічі. Цю стратегію можна назвати *стратегією простого перебору* (СПП) і визначити вербально наступним чином: до кожного замка (починаючи з довільного, – наприклад, першого) підбираємо неперевірені ключі, поки не знайдемо ключ, що відповідає цьому замку або не закінчатся спроби.

У наведеному прикладі СПП дає (за формулою повної ймовірності) таку ймовірність досягнення мети: $P(X) = \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{3}$. Для довільної кількості спроб k ($0 \leq k < K$) та довільної розмірності задачі $n > 1$ стратегію простого перебору можна представити наступною схемою:



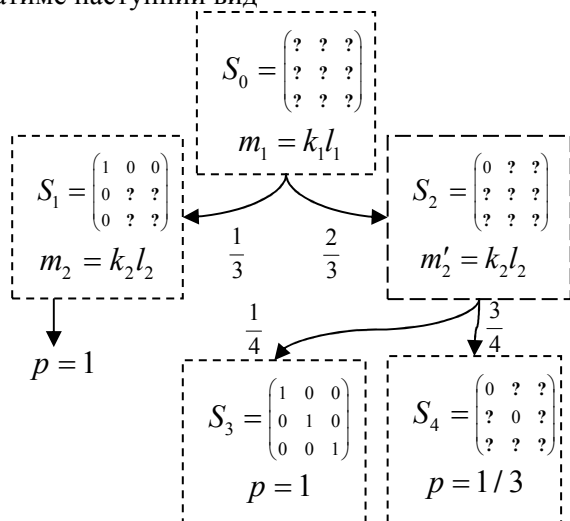
Відповідну ймовірність $P_n(k)$ можна обрахувати за наступною рекурентною формулою:

- при $k = 0$ $P_n(k) = 1/n!$;
- при $0 < k < n-1$ $P_n(k) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k P_{n-1}(k-i) + \frac{1}{n!}$;
- при $n-1 \leq k < \frac{n(n-1)}{2}$ $P_n(k) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-1} P_{n-1}(k-i) + \frac{1}{n} P_{n-1}(k-n+1)$;
- при $k \geq \frac{n(n-1)}{2}$ $P_n(k) = 1$.

Цікавим відкритим питанням залишається перевірка гіпотези про те, чи є стратегії, кращі за стратегію простого перебору. Програмно таку гіпотезу можна перевірити лише для фіксованих n та k , але складність аналізу задачі зростає за експоненціальним законом зі збільшенням висоти дерева стратегій і збільшенням розмірності задачі. Таким чином, постає необхідність пошуку формального доведення або спростування наступної гіпотези:

Гіпотеза про оптимальність стратегії простого перебору: нехай для задачі пошуку відповідності між замками та ключами розмірності n надано k спроб для відгадування, $0 \leq k \leq \frac{n(n-1)}{2}$. Тоді не існує стратегії, кращої за стратегію простого перебору.

Для подальших висновків розглянемо ще один приклад. Знову нехай $n=3$ та $k=2$, але тепер розглянемо стратегію, відмінну від СПП. Єдина можлива стратегія, відмінна від СПП, матиме наступний вид



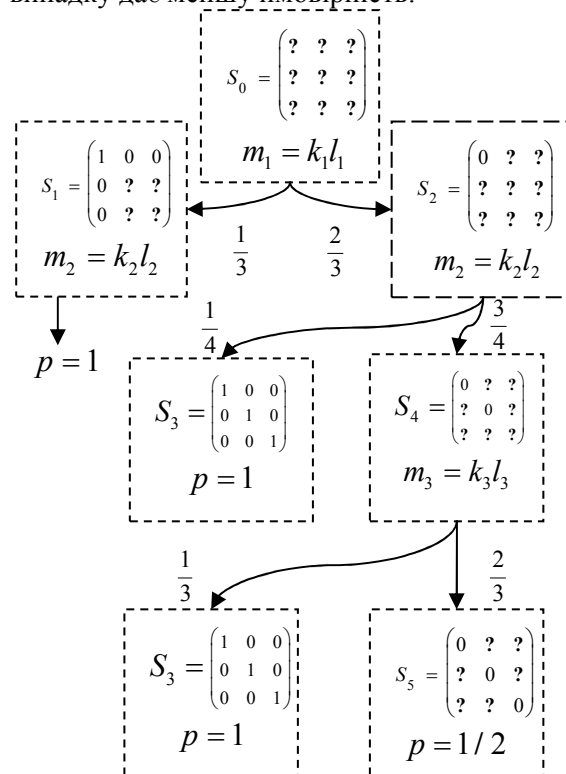
і відрізнятиметься від СПП кроком $m'_2 = k_2 l_2$. При цьому на цій схемі варіант розвитку подій при $m_2 = k_2 l_2$ вже наведено у спрощеному вигляді з урахуванням коментарів до схеми із попереднього прикладу. Ця стратегія дає наступну ймовірність досягнення мети:

$$P(X) = \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{4} \cdot 1 + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} \right) = \frac{2}{3}.$$

Досить

несподіваним виявився факт, що знайдена ймовірність не менша за ймовірність, отриману в СПП (це не було б дивним, якби ми розглядали не класи станів, а лише вихідні стани, бо тоді існування рівносильних стратегій можна було б пояснити простим перейменуванням ключів та замків або зміною нумерації ключів/замків, іншими словами, розглянута щойно стратегія не є еквівалентною до СПП). Виникає логічне запитання: чи існують неоптимальні стратегії взагалі? Так, існують, навіть якщо відкинути

безглузді стратегії (коли повторно перевіряються вже відомі пари значень), то серед інших залишаться стратегії, що дають меншу ймовірність ніж СПП. Так, СПП у випадку $n=3$ та $k=3$ дає ймовірність успіху 1, а ми розглянемо схему стратегії, яка в цьому ж випадку дає меншу ймовірність:



Ймовірність успіху за такої стратегії складе $5/6$.

У подальших дослідженнях крім пошуку аналітичного доведення гіпотези про оптимальність СПП доцільно розглянути автоматизацію процесу побудови схем та аналогічну задачу без спроби відгадування за закінчення спроб.

Список використаних джерел

1. Кузьмин И. В. Основы теории информации и кодирования / И. В. Кузьмин, В. А. Кедру. – К. : Вища школа, 2003. – 220 с.
2. Боровков А.А. Теория вероятностей / А. А. Боровков. – М.: Libro-ком, 2009. – 656 с.
3. Richard P. Stanley, Enumerative Combinatorics / Cambridge University Press, vol. 2, 2001, 600 pages.

References

1. KUZMIN I. V. (2003) Osnovy teorii informacii i kodirovaniya. Kiev: Vyscha shkola, 220 pp.
2. BOROVKOV A.A. (2009) Teoriya Veroyatnostei. Moskva: Libro-kom, 656 pp.
3. RICHARD P. STANLEY (2001) Enumerative Combinatorics. Cambridge University Press, vol. 2, 600 pp.

Надійшла до редколегії 14.01.2013

РАДІОФІЗИКА

УДК 621.385.833

Афанас'єва Т.В., к.ф.-м.н., пров. інж.,
Гнатюк Д.І., студент,
Коваль І.П., к.ф.-м.н., доц.,
Находкін М.Г., д.ф.-м.н., проф., академік НАН
України.

Оптические спектры поглощения поверхностей Si(001) та Me/Si(001), (де Me=As, Sb, Bi)

Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 83000, м. Київ, пр-т.
Глушкова 4д,
e-mail: afanasieva@univ.kiev.ua

T.V. Afanasieva, PhD, leading engineer,
D.I. Gnatyuk, student,
I.P. Koval, PhD, Asc. Prof.,
M.G. Nakhodkin, Dr. Sci., Professor, Academician
of NAS of Ukraine.

Optical absorbtion spectra of Si(001) and Me/Si(001) surfaces, (where Me=As, Sb, Bi)

Taras Shevchenko National University of Kyiv,
83000, Kyiv, Glushkova st., 4d,
e-mail: afanasieva@univ.kiev.ua

Обраховано оптичні спектри поглинання поверхонь Me/Si(001)–0,5 МЛ та Me/Si(001)–1 МЛ (де Me=As, Sb, Bi) методом TDDFT (B3LYP). Визначені головні електронні переходи, перехідні дипольні моменти та інтенсивності переходів. Положення максимумів поглинання становлять ~3,9, ~3,8 та ~3,7 еВ для систем As/Si(001), Sb/Si(001) та Bi/Si(001), відповідно.

Ключові слова: Оптичний спектр, TDDFT, кремній, сурфактанти.

The optical absorbtion spectra of the surfaces Me/Si(001)–0,5 ML and Me/Si(001)–1 ML (where Me=As, Sb, Bi) were calculated by using time-dependent density functional theory (TDDFT) with the hybrid nonlocal exchange and correlation functional of Becke and Lee, Yang and Parr (B3LYP). The major transitions of the spectra, the transition dipole moments and intensity have been described. The shift of the absorption edge of 1 ML compared to 0,5 ML is associated with the removal of the reconstruction (2x1) of Si (001) surface. The absorption maxima positions are ~3.9, ~3.8 and ~3.7 eV for the systems of As/Si(001), Sb/Si(001) and Bi/Si(001), respectively.

Keywords: Optical spectrum, TDDFT, silicon, surfactants.

Статтю представив д.ф.-м.н. Анісімов І.О.

Електронні збудження грають важливу роль в фізиці поверхні, оскільки вони можуть бути промоторами хімічних або фотохімічних реакцій. Їх дослідження дають ще й важливу інформацію про характеристики адсорбованих поверхневих шарів.

Інтерес до вивчення структур поверхні Si(001) вкритої субмоношаровими плівками елементів V групи (As, Sb, Bi) виникає в зв'язку з їх використанням в якості сурфактантів для покращення гетероепітаксії Si/Ge. Ці сурфактанти насичують обірвані зв'язки та пасивують поверхню Si(001). За допомогою сурфактантів можна керувати хімічною активністю поверхні кремнію [1,2].

Структури чистих та вкритих субмоношаровими плівками As [3] та Sb [4] поверхонь Si(001) досліджувались за допомогою методу RDS (RDS/RAS – reflectance anisotropy/difference spectroscopy) – спектроскопії анізотропного відбиття. Інтерпретація RDS

спектрів потребує встановлення відповідностей між спектральними характеристиками та електронними переходами. Користуючись лише експериментом, важко судити про природу всіх ліній спектра, тим більше, коли вони мають малу інтенсивність. Особливості RDS спектра в області 0,4–2 еВ для чистої поверхні Si(001) асоціюють з переходами між електронними рівнями (π орбіталями поверхневих димерів Si—Si) [5]. Адсорбція As, Sb зсуває максимуми поглинання в область енергій ~3,7–4 еВ [3,4]. Автори роботи [4] пов'язують максимум поглинання ~3,7 еВ для системи Sb/Si(001)–1 МЛ (МЛ – моношар) із електронними переходами між молекулярними орбіталями (МО), що відповідають зв'язкам Sb—Si та Si—Si на поверхні та в об'ємі кремнію, відповідно. Для системи As/Si(001), за даними експерименту [3], максимуму поглинання ~3,7 еВ інтерпретації ще не надано. Автори роботи [6] пов'язують максимум поглинання ~3,7 еВ для системи

As/Si(001) з переходами між МО, які відповідають зайнятим та вільним станам димерів As—As. В роботі [7] було досліджено поверхню системи Si(001)—Bi(2x1) методом спектроскопії інверсної фотоемісії (IPES), де спостерігалось два піки із енергіями 3,4 еВ та 4,6 еВ, які пояснюються переходами в об'ємі кремнію.

Досить цікавий приклад застосування RAS був нещодавно опублікований для досліджень інтерфейсів в напружених фасетках Ge/Si(105) [8]. Отже RAS починає застосовуватись і в нанoeлектроніці. Однак інтерпретація результатів оптичних методів потребує моделювання.

Отже, метою роботи було проаналізувати зміни, що відбуваються в оптичних спектрах поглинання при адсорбції субмоноварових плівок металів V групи (As, Sb, Bi) на поверхню Si(001).

Методика моделювання

В роботі представлені розрахунки з перших принципів електронних спектрів поверхонь Si(001) чистих та з субмоноваровими плівками металів V групи з двома ступенями покриття $\Theta_{Me} = 0,5$ і 1 МШ. Спектри розраховувалися за допомогою методу TDDFT (залежна від часу теорія функціоналу густини – Time Dependent Density Functional Theory), вид обмінного функціоналу – B3LYP (Becke, 3-parameter, Lee-Yang-Parr). Обірвані зв'язки на границях кластеру насичувалися воднем, для вирішення проблеми вільних валентностей. Оптимізація геометрії кластеру здійснювалася методом теорії функціоналу густини (DFT).

Для моделювання поверхні кремнію чистих та вкритих шаром сурфактанту, використовувалися кластери $Si_{32}H_{28}$, $Me_2Si_{32}H_{28}$ і $Me_6Si_{32}H_{28}$ (де Me=As, Sb, Bi), наведені на рис.1. Для всіх атомів Si, H, As, Sb, Bi використовувався набір базисних функцій SBK (Stevens, Basch, Krauss) для валентних електронів з ефективним SBK потенціалом для остовних електронів та ще й всеелектронний набір базисних функцій N31-6 для атомів Si, H, As. Для підвищення точності враховувалися поляризаційні функції (d – для атомів Si, As, Sb, Bi та p – для атомів H) та дифузні функції. Всі розрахунки здійснювалися за допомогою програми GAMESS [9].

Результати та обговорення

Розраховано енергії (E) та сили осциляторів – (I) інтенсивності електронних переходів, що відповідають максимумам поглинання спектрів

електронних збуджених станів. В роботі розглядалися синглетні-синглетні $S_0 \rightarrow S_n$ та синглет-триплетні $S_0 \rightarrow T_n$ вертикальні переходи, при яких геометрія структур залишалася незмінною, змінювався лише розподіл електронної густини.

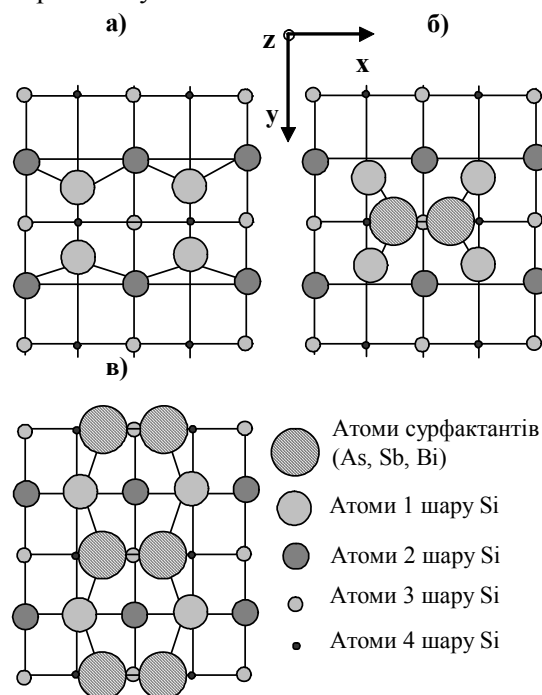


Рис 1. а) кластер $Si_{32}H_{28}$ моделює фрагмент чистої поверхні Si(001); б) кластер $Me_2Si_{32}H_{28}$ моделює фрагмент поверхні Me/Si(001)—0,5 МШ; в) кластер $Me_6Si_{32}H_{28}$ моделює фрагмент поверхні Me/Si(001)—1 МШ. Атоми водню не показано.

Край поглинання. Спочатку аналізувався край поглинання (оптична ширина забороненої зони) для двох реконструкцій (4x2) та (2x1) чистої поверхні Si(001). Краю поглинання відповідає перехід HOMO-LUMO. Цей перехід має відносно малу інтенсивність, тому він може розглядатись як найнижча межа реального (експериментального) піку поглинання.

Результати розрахунків наведено в таблиці 1 (тут E – енергія переходу, μ – дипольний момент переходу, I – інтенсивність переходу; буква в дужках вказує напрямок дипольного моменту переходу) та рис.2. Синглет-триплетні переходи $S_0 \rightarrow T_n$ є забороненими, тому відповідні інтенсивності переходів є нульовими. Для чистої поверхні Si(001) низькоенергетичні електронні збудження біля краю поглинання є $\pi \rightarrow \pi^*$ переходами. Ці переходи знаходяться в діапазоні 0,4-2 еВ (див. табл. 1 та рис.2). Цим переходам відповідають переходи між π орбіталями поверхневих димерів Si(001).

Таблиця 1

Загальні характеристики краю поглинання Si(001).

Структура	перехід	Триплетні стани E, eV	Синглетні стани		
			E, eV	μ , Д	I, відн.од.
4x2 букльовані димери	$\pi_0 \rightarrow \pi_0^*$	0,84	1,43	-0,08 (z)	0
	$\pi_{-1} \rightarrow \pi_0^*$	0,88	1,68	-0,33(x)	0,005
	$\pi_0 \rightarrow \pi_{+1}^*$	1,58	1,84	-0,33 (x)	0,18
	$\pi_{-1} \rightarrow \pi_{+1}^*$	1,62			
2x1 симетричні димери	$\pi_0 \rightarrow \pi_0^*$	0,42	1,15		
	$\pi_{-1} \rightarrow \pi_0^*$	0,53	1,25		
	$\pi_0 \rightarrow \pi_{+1}^*$	1,35	1,45		
	$\pi_{-1} \rightarrow \pi_{+1}^*$	1,48	1,81		

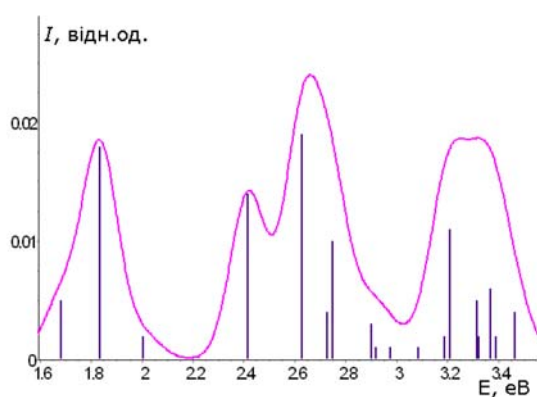


Рис.2 Спектр електронних збуджених станів поверхні Si(001)--(4x2), розрахований з перших 60 синглетних збуджених станів. Обвідні спектральних ліній побудовано за формулою Доплерівського уширення з напівшириною лінії 0.165 eV.

Як видно з таблиці 1 та рис.2 деякі з цих $\pi \rightarrow \pi^*$ переходів мають суттєву інтенсивність. Енергії цих $\pi \rightarrow \pi^*$ переходів узгоджуються зі значенням енергії піку біля 1,4 eV на RDS спектрі чистої поверхні Si(001), який автори [5] асоціюють з обірваними зв'язками на поверхні.

Далі аналізувалися оптичні спектри поглинання для двох систем Me/Si(001)–0,5 МШ та Me/Si(001)–1 МШ. Енергії синглет-синглетних переходів $\text{HOMO} \rightarrow \text{LUMO}$ ($S_0 \rightarrow S_1$) та енергії синглет-триплетних переходів $\text{HOMO} \rightarrow \text{LUMO}$ ($S_0 \rightarrow T_0$) для систем Me/Si(001), (де M=As, Sb, Bi), з двома ступенями покриття $\theta_{\text{Me}}=0,5$ та 1 МШ наведені в таблиці 2. Край поглинання в системі з $\theta_{\text{Me}}=0,5$ МШ формується переходом із зв'язуючих орбіталей поверхневого димера Si—Si на антизв'язуючі орбіталі, що відповідають зв'язкам Me—Me в аддимері металу. Край поглинання в системі з $\theta_{\text{Me}}=1$ МШ формується

переходом $\sigma(\text{Me—Si}) \rightarrow \sigma^*(\text{Me—Me})$ із σ зв'язуючої орбіталі між атомом металу та поверхневим атомом кремнію на σ^* антизв'язуючу орбіталь між атомами металу (Me—Me). З таблиці 2 видно, що в усіх системах Me/Si(001) для синглет-синглетних та синглет-триплетних переходів спостерігається збільшення оптичної ширини забороненої зони при збільшенні ступеня покриття θ_{Me} атомами металів з 0,5 до 1 МШ. Таке збільшення краю поглинання у бік більших енергій при збільшенні θ_{Me} з 0,5 МШ до 1 МШ, виникає внаслідок переходу від структури 2x1 до 1x1, що супроводжується розривом поверхневих димерів (рис.1). При збільшенні покриття θ_{Me} поверхні Si(001) до 1 МШ край поглинання зсувається у бік більших енергій за рахунок зникнення орбіталі $\sigma(\text{Si—Si})$, що відповідає зв'язку між атомами поверхневого димеру Si—Si.

Дипольні моменти переходів ($S_0 \rightarrow S_1$) направлені нормально до поверхні в напрямку осі Z (рис.1) для систем As/Si(001), Sb/Si(001) та Bi/Si(001). Отже якщо виникне різниця потенціалів у напрямку осі Z, то спектральна лінія зсунеться. Але напруга в інших напрямках X, Y не змінить положення спектральної лінії.

Дипольні моменти переходів ($S_0 \rightarrow S_1$) змінюють напрямки при збільшенні покриття θ_{Me} від 0,5 до 1 МШ для поверхонь As/Si(001), Sb/Si(001). В системі As/Si(001)–0,5 МШ при переході $S_0 \rightarrow S_1$ відбувається перенесення електронної густини з об'єму на поверхню (додатня величина дипольного моменту переходу μ в таблиці 2). А для As/Si(001)–1 МШ – навпаки (від'ємна величина μ в таблиці 2), електронна густина переноситься з поверхні до об'єму.

Таблиця 2

Загальні характеристики краю поглинання Me/Si(001).

Структура	0,5 МШ			1 МШ		
	E, eV	μ , Д	I, відн.од.	E, eV	μ , Д	I, відн.од.
As/Si(001)	2,42	-0,20 (z)	0,002	3,18	0,12 (z)	0,001
Sb/Si(001)	2,61	0,17 (z)	0,002	3,22	-0,12(z)	0,001
Bi/Si(001)	2,53	-0,38 (x)	0,009	3,08	0,282(y)	0,006
	2,57	-0,22 (z)	0,003			

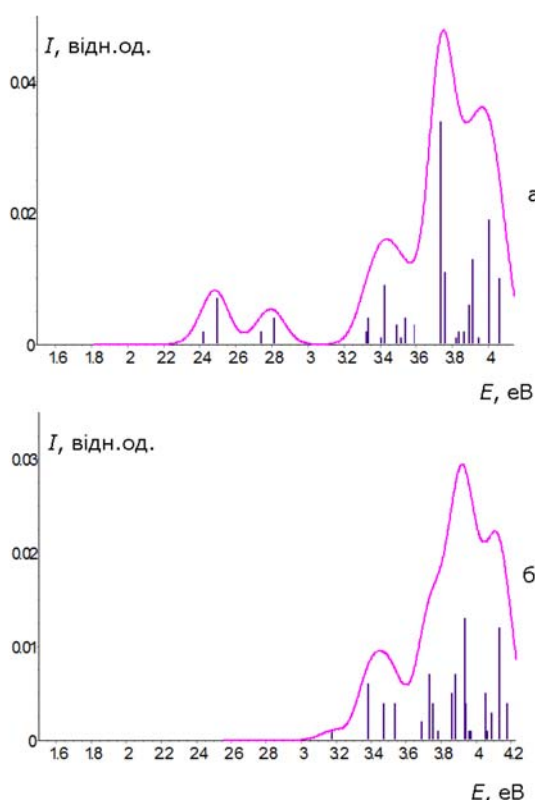


Рис.3 Спектри електронних збуджених станів поверхонь As/Si(001)–0,5 МШ (а) та As/Si(001)–1 МШ (б), розраховані з перших 40 синглетних збуджених станів. Обвідні спектральних ліній побудовано за формулою Доплерівського уширення з напівшириною лінії 0.165 eV.

Для поверхні Sb/Si(001) ситуація протилежна. В системі Sb/Si(001)–0,5 МШ при переході ($S_0 \rightarrow S_1$) електронна густина переноситься з поверхні до об'єму, а в Sb/Si(001)–1 МШ – навпаки, з об'єму на поверхню.

Ця зміна може бути пояснена тим, що адсорбція елементів V групи на поверхню Si(001) по різному перерозподіляє електронний заряд [1]. Внаслідок різного перерозподілу електронного заряду в системах Me/Si(001) (де Me=As, Sb, Bi) виникає різна активність систем Me/Si(001) по відношенню до активних газів, зокрема кисню [1,2].

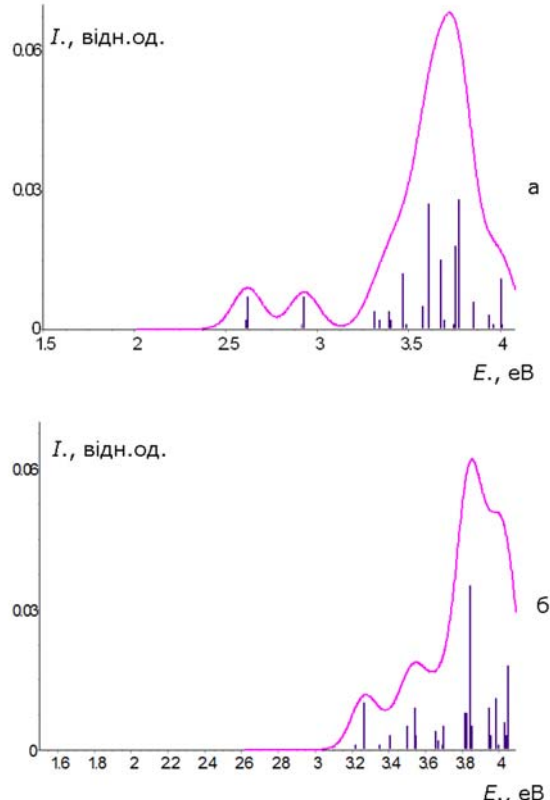


Рис.4 Спектри електронних збуджених станів поверхонь Sb/Si(001)–0,5 МШ (а) та Sb/Si(001)–1 МШ (б), розраховані з перших 40 синглетних збуджених станів. Обвідні спектральних ліній побудовано за формулою Доплерівського уширення з напівшириною лінії 0.165 eV.

Проведення додаткових експериментальних досліджень по зміщенню краю поглинання в електричному полі можуть надати додаткові дані про різний перерозподіл електронного заряду в системах Me/Si(001) (де Me=As, Sb, Bi), на що вказували попередні експериментальні та теоретичні дослідження [1,2].

Максимуми поглинання. Максимуми поглинання на УФ спектрах поверхонь Me/Si(001) (де Me=As, Sb, Bi) утворюються переходами $\sigma(\text{Me}-\text{Si}) \rightarrow \sigma^*(\text{Me}-\text{Me})$ між σ зв'язуючими орбіталями, що відповідають зв'язку

Таблиця 3

Загальні характеристики максимумів поглинання Me/Si(001).

Структура	0,5 МШ				1 МШ			
	Перехід	E, eV	μ , Д	I, відн.од.	Перехід	E, eV	μ , Д	I відн.од.
As/Si(001)	$S_0 \rightarrow S_{23}$	3,73	-0,61(x)	0,034	$S_0 \rightarrow S_{19}$	3,94	0,36(z)	0,013
					$S_0 \rightarrow S_{31}$	4,14	0,35(y)	0,012
Sb/Si(001)	$S_0 \rightarrow S_{18}$	3,61	-0,55(x)	0,027	$S_0 \rightarrow S_{24}$	3,84	0,61(y)	0,035
	$S_0 \rightarrow S_{27}$	3,78	-0,55(z)	0,028				
Bi/Si(001)	$S_0 \rightarrow S_{19}$	3,56	-0,59(y)	0,031	$S_0 \rightarrow S_8$	3,43	0,54(z)	0,025
					$S_0 \rightarrow S_{23}$	3,73	0,81(y)	0,059

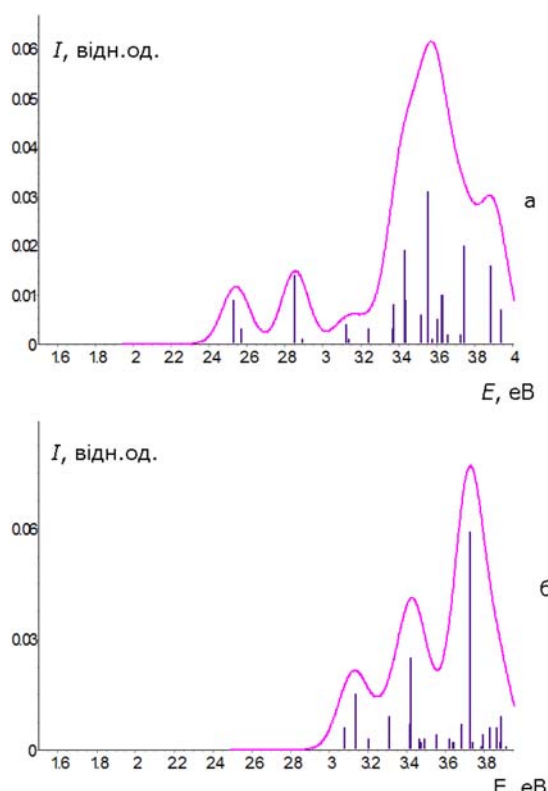


Рис.5 Спектри електронних збуджених станів поверхонь Bi/Si(001)–0.5 МШ (а) та Bi/Si(001)–1 МШ (б), розраховані з перших 40 синглетних збуджених станів. Обвідні спектральних ліній побудовано за формулою Доплерівського уширення з навівшириною лінії 0.165 eV.

Me—Si між атомом металу та поверхневим атомом кремнію та σ^* антизв'язуючими орбіталями, що відповідають зв'язку Si—Si між атомами кремнію в третьому поверхневому шарі (тобто між атомами кремнію в об'ємі). Результати моделювання наведені в таблиці 3.

Для поверхні As/Si(001) максимуми поглинання спостерігаються за енергії 3,73 eV (перехід $S_0 \rightarrow S_{19}$) для 0,5 МШ та 3,94 eV для покриття 1МШ (перехід $S_0 \rightarrow S_{23}$). Максимум

поглинання утворюється переходом із зв'язуючої орбіталі Si—As на антизв'язуючу між димером As—As. Для покриття 1 МШ має значну інтенсивність лінія 4,14 eV, яка відповідає переходам (перехід $S_0 \rightarrow S_{31}$) між зв'язуючою та антизв'язуючою орбіталями димерів As—As (рис.3).

Для поверхні Sb/Si(001) максимум поглинання спостерігається за енергії 3,78 eV (перехід $S_0 \rightarrow S_{27}$) для 0,5 МШ та 3,84 eV (перехід $S_0 \rightarrow S_{24}$) для 1 МШ (рис.4). Максимум поглинання ~3,78 eV для поверхні Sb/Si(001)–0,5 МШ утворюється переходом між зв'язуючими орбіталями зв'язків Si—Si в об'ємі кремнію та антизв'язуючими орбіталями Si—Sb. Максимум поглинання 3,84 eV для поверхні Sb/Si(001)–1 МШ утворюється переходом між зв'язуючими орбіталями димерів Sb-Sb та антизв'язуючими орбіталями Si-Sb.

Для поверхні Bi/Si(001) максимум поглинання спостерігається за енергії ~3,56 eV для 0,5 МШ та ~3,43, ~3,73 eV для 1 МШ (рис.5). Максимум поглинання ~3,56 eV (перехід $S_0 \rightarrow S_{19}$) для поверхні Bi/Si(001)–0,5 МШ утворюється переходами між зв'язуючими орбіталями зв'язку Bi—Si і антизв'язуючими орбіталями Si—Si в об'ємі кремнію та зв'язуючими та антизв'язуючим орбіталями зв'язків Bi—Bi. Максимум поглинання 3,73 eV (перехід $S_0 \rightarrow S_{23}$) для поверхні Bi/Si(001)–1 МШ утворюється переходом між зв'язуючими орбіталями Si—Si в об'ємі кремнію та антизв'язуючими орбіталями Bi—Si.

Висновки

Методом TDDFT розраховано електронні спектри для систем Me/Si(001)–0.5 МШ та Me/Si(001)–1 МШ, (де Me=As, Sb, Bi). Визначено дипольні моменти переходів та інтенсивності переходів.

Теоретично визначено положення максимумів поглинання на TDDFT спектрах поверхонь Me/Si(001)–0.5 МШ та Me/Si(001)–1 МШ, (де Me=As, Sb, Bi). Максимуми поглинання відповідають переходам із зв'язуючих орбіталей Si—Me на антизв'язуючі Me—Me. Положення максимумів поглинання становлять ~3.9, ~3.8 та ~3.7 еВ для систем As/Si(001), Sb/Si(001), Bi/Si(001), відповідно.

Результати розрахунків вказують на те, що зміщення краю поглинання у бік більших енергій при збільшенні ступеня покриття атомами

металів (As, Sb, Bi) поверхні Si(001) з 0.5 МШ до 1 МШ відбувається внаслідок зміни структури поверхні кремнію. Край поглинання зсувається у бік більших енергій через зникнення рівня $\sigma(\text{Si—Si})$, що відповідає зв'язку між атомами поверхневого димеру Si—Si.

Показано, що край поглинання та максимуми поглинання мають однакову природу для всіх металів V групи (As, Sb, Bi).

Список використаних джерел

1. Afanasieva T.V. Adsorption of V – group elements and oxygen on Si(001)2x1 surface / T.V. Afanasieva, I.F. Koval, N.G. Nakhodkin // *Surf.Sci.* –2002. – **507-510**. – P.788-795.
2. Коваль І.П. Адсорбція молекулярного кисню на поверхні Sb/Si(001)/ І.П. Коваль, В.В. Лапоша, Ю.А. Лен, М.Г. Находкін //Вісник Київського університету. Серія: фіз.-мат.науки, - 2002. –Вип.4 - С. 307-313.
3. Kipp L. Reflectance Difference Spectroscopy: Experiment and Theory for the Model System Si(001):As and Application to Si(001)/ Kipp L., Biegelsen D.K., Northrup J., et al. // *Rhys. Rev. Lett.* –1996. –P. 2810-2813.
4. Rower J.R. The influence of monolayer coverages of Sb on the optical anisotropy of vicinal Si(001)/ Rower J.R. et al // *Surf. Sci.* – 1997. – №372. - P.83-90
5. Besley N.A. Electronic Exited States of Si(100) and Organic Molecules Adsorbed on Si (100) / N.A. Besley, A.J. Blundy // *J. Phys. Chem.* – 2006. – **110**. – P.1701-1710.
6. Bork T. Surface science studies including low-temperature RDS on MOCVD-prepared, As-terminated Si(001) surfaces/ Bork T. et al.// *Journal of Crystal Growth* -2007. – **298**. –P. 54-58
7. Mark. A.G. The electronic properties of Si(001)-Bi(2xn)/ A.G. Mark, J.A. Lipton-Duffin, J.M. Macleod, et al.// *J. Phys.* – 2005. – **17**. –P. 571-580.
- 8 Fazi.L. Intermixing and buried interfacial structure in strained Ge/Si(105) facets/L.Fazi, C.Morgan, L.Persichetti, C.Goletti, M.Palumbo, A.Sgarlatz and A.Balzarotti, // *Phys. Rev. B.* – 2013. – **88**. – P. 1953(1-6).
9. Schmidt M.W. GAMESS, The General Atomic and Molecular Electronic Structure System / Schmidt M. W., Baldrige K. K., Boatz J. A., et al.// *J. Comput. Chem.* – 1993. – **14**. – P.1347-1358.

References

1. AFANASIEVA T.V., KOVAL I.F., NAKHODKIN N.G. (2002) Adsorption of V – group elements and oxygen on Si(001)2x1 surface *Surf.Sci.* (507-510). p.788-795.
2. KOVAL I.F., LAPOSHA V.V., LEN Yu.A., NAKHODKIN N.G. (2002) Adsorption of themolecular oxygen on the Sb/Si(001) surface *Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv Series Physics & Mathematics*, (4). p.307-313.
3. KIPP L. BIEGELSEN D.K., NORTHROP J., et al. (1996) Reflectance Difference Spectroscopy: Experiment and Theory for the Model System Si(001):As and Application to Si(001) *Rhys. Rev. Lett.* p. 2810-2813.
4. ROWER J.R. et al. (1997) The influence of monolayer coverages of Sb on the optical anisotropy of vicinal Si(001) *Surf. Sci.* (372). p.83-90
5. BESLEY N.A. BLUNDY A.J. (2006) Electronic Exited States of Si(100) and Organic Molecules Adsorbed on Si (100) *J. Phys. Chem*, (110). p. 1701-1710.
6. BORK T. et al. (2007) Surface science studies including low-temperature RDS on MOCVD-prepared, As-terminated Si(001) surfaces *Journal of Crystal Growth* (298) p.54-58
7. MARK. A.G. et al. (2005) The electronic properties of Si(001)-Bi(2xn) *J.Phys*, (17). P.571-580.
- 8 FAZI L., et al. (2013) Intermixing and buried interfacial structure in strained Ge/Si(105) facets *Phys. Rev. B.* (88). p.1953(1-6).
9. SCHMIDT M.W. et al. (1993) GAMESS, The General Atomic and Molecular Electronic Structure System *J. Comput. Chem.* (14). p.1347-1358.

Надійшла до редколегії 10.04.14

УДК 004.773.3

Загороднюк С.П.¹, к.ф.-м.н
Мар'яновський В.А.¹, к.т.н
Олейніков А.Ю.¹,
Циба А.В.¹

S.P. Zagorodniuk¹, PhD
V.A. Marianovskyi¹, PhD
O.Y. Oleynikov¹,
O.V. Tsyba¹

Моніторинг фактів перебування серверів електронної пошти підприємства у чорних списках

Monitoring the facts of finding enterprise E-mail servers in the DNS blacklist servers

¹ Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 03680, м. Київ,
пр-т. Глушкова 4г, e-mail: kola@univ.net.ua

¹ Taras Shevchenko National University of Kyiv,
03680, Kyiv, Glushkova st., 4g,
e-mail: kola@univ.net.ua

В статті розглядається програмна реалізація моніторингу фактів перебування поштових серверів підприємства в централізованих всесвітньо доступних сховищах негативної інформації про джерела поширення небажаних повідомлень і своєчасного сповіщення адміністратора. Крім того, стаття пропонує алгоритм пошуку джерел розсилки повідомлень, які своєю поведінкою демонструють бажання відгадати або підібрати адресу електронної пошти користувача і направити йому потік небажаних повідомлень. Представлено результати тестування і впровадження програмної служби в мережі Київського університету імені Тараса Шевченка.

Ключові слова: електронна пошта, служба SMTP, RBL-сервер, DNSBL-сервер, небажані повідомлення.

The article discusses the software implementation to monitor the facts of finding E-mail servers in the centralized global storage of negative information about the sources of the unwanted messages spread. The comparative characteristics of the most popular and relevant world-wide DNSLB servers are given and the procedure of urgent admin notification via short message services is described in detail. In addition, the article offers algorithm to search the sources whose behavior demonstrated a willingness to guess or pick up E-mail address of the user and send him a stream of unwanted messages. The results of the testing and deployment of software service in a network of Kyiv Taras Shevchenko National University are also present in the article.

Key Words: E-mail, SMTP service, RBL server, DNSBL server, unwanted messages.

Статтю представив д.т.н., проф. Погорілий С.Д.

Поширення небажаних повідомлень рекламного або непристойного змісту є глобальною загальносвітовою проблемою використання електронної пошти та систем миттєвих повідомлень. Незважаючи на серйозний прогрес [1] у подоланні цієї проблеми, вона залишається далекою від її остаточного вирішення [2]. Головною причиною цього явища є комерційний інтерес системних адміністраторів, які володіють потужними обчислювальними кластерами поштових серверів і пропонують послуги такого агресивного рекламного бізнесу.

Головними споживачами таких послуг, як це не парадоксально, є підприємства, що ведуть цілком законну діяльність і легальний бізнес, але

при цьому не хтують дешевою рекламою своїх товарів або послуг, яка поширюється на велике коло потенційних клієнтів. При цьому небажані повідомлення можуть насторожити і відвернути певну частину потенціальних клієнтів, але на практиці на це не звертають увагу рекламодавці. Інший прошарок споживачів - це компанії та фізичні особи, які пропонують нелегальні товари або послуги, адже пропонувати ці товари і послуги у більш відкритий спосіб неетично або небезпечно [3].

Очевидно, що адміністратор системи електронної пошти повинен захищати користувачів своєї поштової системи від повені небажаних повідомлень. Для цього він може використовувати стандартні загальноприйняті

фільтри небажаних повідомлень [4], або, крім того, розробити і впровадити свої власні фільтри. Але для адміністратора не менш важливою задачею також є постійний контроль за тим, щоб повідомлення електронної пошти, сформовані користувачами його власної поштової системи були успішно доставлені до користувачів інших поштових систем і не були при цьому розпізнані фільтрами цих віддалених поштових систем як небажані. Для досягнення цієї мети адміністратору потрібно знати принципи роботи основних стандартних фільтрів і постійно виконувати умови, які він нього вимагають ці фільтри.

Вищезгаданий глобальний характер проблеми змушує фахівців з різних країн світу об'єднатись і спільно її вирішувати. Коли адміністратор поштової системи фіксує систематичну розсилку небажаних повідомлень з конкретного вузла або мережі, у нього виникає природне і свідоме бажання попередити про цю небезпеку не тільки своїх знайомих колег, але й адміністраторів інших країн, які потенційно також можуть стати об'єктом зловмисників.

Очевидно, що найкращим способом організації такої співпраці є створення центрального загальнодоступного глобального сховища для накопичення негативної інформації про вузли і мережі як джерела поширення небажаних повідомлень. Дійсно, такі інформаційні сховища створені і називаються «чорними списками», RBL серверами (англ. Realtime Black List - чорний список, що змінюється в реальному часі) або DNSBL-серверами (англ. DNS Black List - DNS-сервер в ролі чорного списку) [2-4].

Остання назва пов'язана з тим, що для перевірки факту перебування того чи іншого вузла в чорному списку поштовий адміністратор або його фільтруюче програмне забезпечення повинні надіслати до служби DNS (англ. Domain Name System - система доменних імен [1,2]) спеціалізований DNS-запит і дочекатись на нього відповідь. Період часу між DNS-запитом і DNS-відповіддю складає, як правило від 0 до 3 секунд. Коли сервер поштової системи відправника встановлює сеанс зв'язку з приймаючим сервером поштової системи отримувача, саме в цей час приймаючому серверу слід виконати цей DNS-запит до DNSBL-сервера і перевірити факт перебування сервера-відправника в чорному списку. Якщо в результаті DNS-запита з'ясовується, що сервер-відправник перебуває в чорному списку, приймаючий сервер може

зробити вигляд, що нічого особливого не відбулось, або може негайно розірвати сеанс зв'язку, пояснивши серверу-відправникові істинні мотиви свого рішення або, нарешті, навмисно нічого не пояснюючи.

Таблиця 1

Порівняльна характеристика ефективності серверів чорних списків [5].

	Заблоковано небажаних листів	Пропущено небажаних листів	Ефектив- ність, %
bl.spamcop.net	2855	4150	40,76
cbl.abuseat.org	4994	2011	71,29
dnsbl.sorbs.net	2601	4404	37,13
dul.nsbl.sorbs.net	1845	5160	26,34
dul.ru	39	6966	0,56
sbl-xbl.spamhaus.org	5007	1998	71,48
zen.spamhaus.org	6657	348	95,03

Сервери чорних списків розташовані в різних країнах, але користуватись ними можуть будь-які поштові системи світу, яким варто обрати для себе приблизно від трьох до десяти серверів чорних списків [6].

Якщо таких серверів буде менше - результат фільтрації може виявитись неточним; якщо більше зазначеного діапазона, то виконання DNS-запитів може зайняти надто багато часу і мережевого трафіку. Найбільш популярні в світі сервери чорних списків та статистика їх роботи наведена в таблиці 1.

Нажаль, доволі часто до чорних списків потрапляють не тільки поштові системи зловмисників, але і поштові системи порядних користувачів [6]. Причин для цього більш ніж достатньо [3,4].

Серед великої кількості користувачів поштової системи з високою репутацією може виявитись один зловмисник з палаючими очима та невинним бажанням покращити своє матеріальне становище. Такими зловмисниками доволі часто стають працівники комерційних структур, що проходять процедуру свого примусового звільнення. Чимало недбалих користувачів стають жертвами вірусів або шпигунського програмного забезпечення, що періодично потрошить адресну книгу поштової клієнтської програми користувача, такої як Microsoft Outlook, та виконує розсилку за знайденими адресами від імені цього користувача.

Нарешті, молодий адміністратор поштової системи за браком досвіду може ненавмисно налаштувати надмірні права доступу до поштового сервера, перетворивши його на

відкритий ретранслятор [6,7]. Так називають поштовий сервер, що дозволяє анонімно надсилати листи не тільки своїм власним користувачам, але і користувачам усього світу.

Коли трапляється така, щойно описана, неприємність, то вкрай важливо, щоб адміністратор поштової системи дізнався про неї першим і негайно приступив до процедури вилучення поштового сервера з чорного списку. Ця процедура є різною для різних серверів чорних списків [3,6,7], її суть виходить за межі даної статті. Потрапляння серверів до чорного списку не є ганебною подією для адміністратора поштової системи і йому не варто це приховувати від користувачів. Наприклад, популярна поштова система від корпорації Google під назвою GMAIL.COM регулярно потрапляє до чорних списків, але не стає від

цього менш популярною. Навпаки, адміністратору буде соромно, коли він почує про цю подію від своїх користувачів і не зможе точно визначити як давно ця подія відбулась. Дана стаття пропонує алгоритм постійно працюючої моніторингової служби, впровадженій в Київському університеті імені Тараса Шевченка, яка фіксує факти перебування поштових серверів в чорних списках і своєчасно інформує про це адміністраторів.

Блок-схему циклічного алгоритму моніторингової служби показано на рис. 1. Після запуску служби виконується наступна послідовність дій:

1. Перевіряється існування розділу і параметрів реєстру, в якому зберігаються початкові параметри налаштування для коректної роботи служби. Якщо такий розділ або параметри

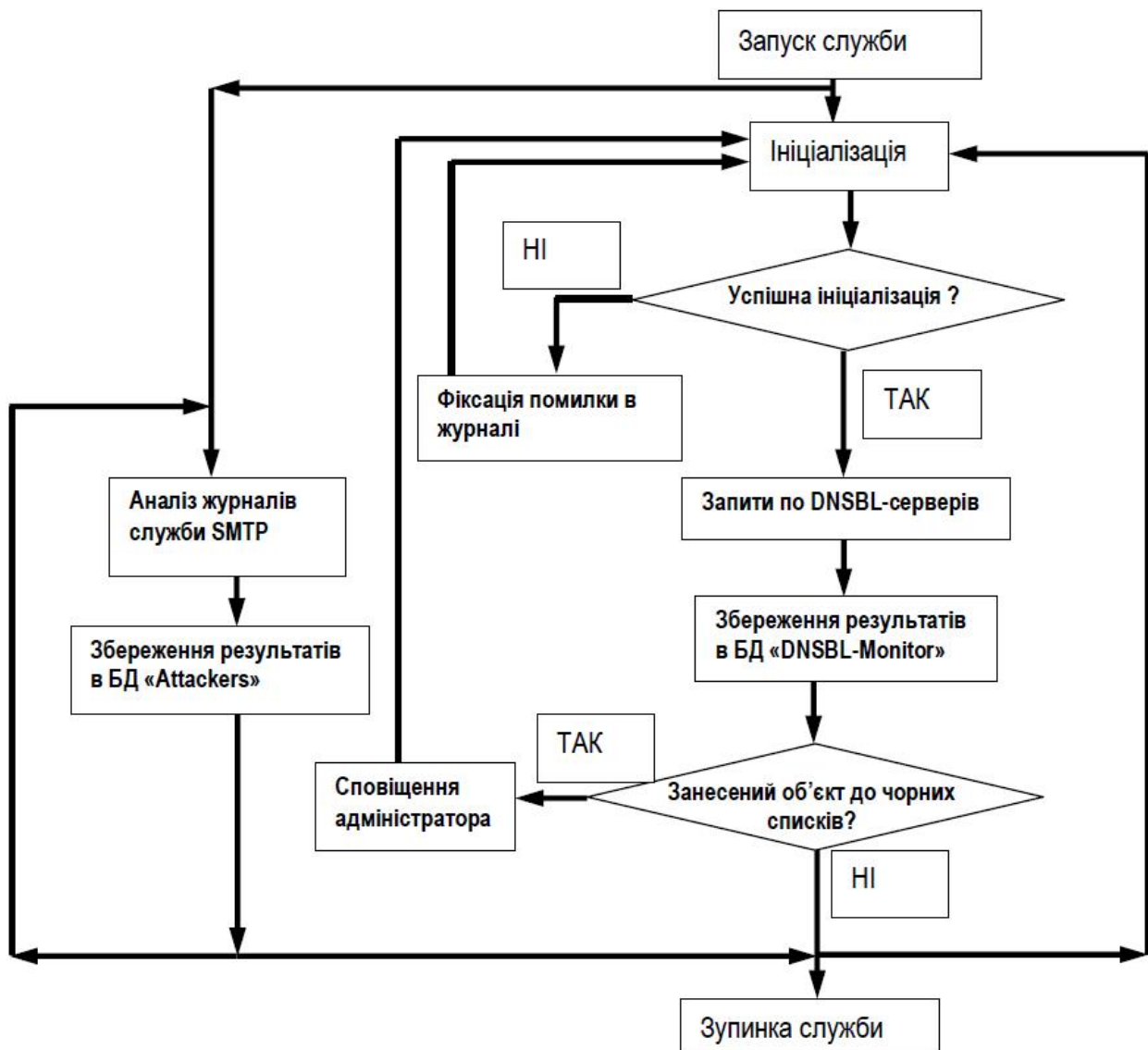


Рис. 1. Блок-схема функціонування моніторингової служби.

відсутні – вони створюються.

2. Перевіряється наявність робочого каталогу, в якому буде зберігатися база даних та текстовий журнал подій роботи служби. Якщо такий каталог відсутній – він створюється.

3. Перевіряється наявність створеної бази даних “DNSBL-Monitor” з усіма необхідними таблицями (таблиця IP-адрес (англ. Internet Protocol, протокол адресації і маршрутизації мережі Інтернет [1]), DNSBL-серверів та таблиця з результатами роботи служби). Якщо така база даних відсутня або має не всі таблиці – створюється нова база або нові таблиці відповідно.

4. Виконується запит до DNSBL-серверів: по кожній IP-адресі з таблиці IP-адрес як по об’єкту моніторингу формується запит до кожного DNSBL-сервера з таблиці DNSBL-серверів. Якщо, наприклад, підприємство має два сервера з IP-адресами 20.30.40.1 і 20.30.40.2, що тільки відправляють повідомлення в інші поштові системи і три сервера з адресами 20.30.40.3, 20.30.40.4 і 20.30.40.5, що тільки приймають повідомлення від інших поштових систем, то в таблицю IP-адрес слід занести лише IP-адреси 20.30.40.1 і 20.30.40.2. Якщо, в свою чергу, таблиця DNSBL-серверів містить чотири адреси, то за кожен цикл буде виконуватись вісім DNS-запитів. Зокрема, для того, щоб перевірити чи входить IP-адреса 20.30.40.1 до чорного списку dnsbl.sorbs.net, потрібно запросити ресурсні записи будь-якого типу (тип ANY) для вузла:

1.20.30.40.dnsbl.sorbs.net

Якщо у відповідь від служби DNS прийде повідомлення, що жодного ресурсного запису не знайдено, це означатиме, що IP-адреса 20.30.40.1 не перебуває в чорному списку dnsbl.sorbs.net. Навпаки, якщо служба DNS у відповідь повертає ресурсний запис будь-якого типу, як правило, типу TXT - це означає, що IP-адреса перебуває в чорному списку.

5. Всі відповіді від DNSBL-серверів зберігаються в таблиці результатів бази даних.

6. Відбувається аналіз результатів, отриманих під час останнього запиту до DNSBL-серверів. Якщо серед результатів зустрічається позитивна відповідь, що означає перебування IP-адреси поштового сервера в чорному списку) виконується повідомлення відповідальної особи за допомогою SMS (англ. Short Message Service - служба коротких повідомлень). Зокрема, для направлення SMS-повідомлення абоненту з

номером 067-1234567 українського оператора стільникового зв'язку «Київстар» абонент повинен заздалегідь перевірити увімкнення послуги Email2SMS, після чого він може вручну або програмно надсилати Email-повідомлення за адресою 380671234567@sms.kyivstar.net, які від отримає як SMS-повідомлення на свій мобільний засіб зв'язку.

7. З бази даних вилучаються застарілі записи, для запобігання значного збільшення об'єму бази даних і зберігання вже неактуальних записів. Через певний період часу весь цикл повторюється з початку.

Окрім своєї основної функції контролю і інформування адміністратора, дана стаття також пропонує алгоритм аналізу журналу служби SMTP (англ. Simple Mail Transfer Protocol - простий протокол передачі пошти), яка є частиною будь-якої самодостатньої повнофункціональної поштової системи, з метою пошуку і виявлення в цьому журналі таких джерел відправлення повідомлень, які за своєю поведінкою демонструють явне і невпинне бажання відгадати адресу електронної пошти існуючого користувача і одразу надіслати йому шквал небажаних листів. Фрагмент такого журналу, проаналізований за тримісячний період роботи служби SMTP, наведено на рис. 2. Строка, в якій міститься символ «<» є SMTP-командою клієнта-зловмисника, а строка з символом «>» є відповіддю приймаючого поштового сервера.

```
.....  
88.198.39.130:4307,<,MAIL FROM:<dell@timose.com.ua>,  
88.198.39.130:4307,<,RCPT TO:<ambulance@univ.net.ua>  
88.198.39.130:4307,>,250 2.1.0 Sender OK,  
88.198.39.130:4307,>,550 5.1.1 User unknown,  
88.198.39.130:4307,<,DATA,  
88.198.39.130:4307,*,Tarpit for '0.00:00:05',  
.....
```

Рис. 2. Фрагмент журналу служби SMTP з зафіксованою помилкою “550 User unknown”.

Порушником слід вважати таку IP-адресу, яка за короткий час багато разів намагається надіслати повідомлення і отримує помилку “550 User unknown”. Алгоритм виявлення таких порушників також реалізований в моніторинговій службі у вигляді окремої циклічної фонові програми, яка паралельно працює з основною програмним циклом. При цьому IP-адреси порушників та статистика їх роботи накопичується в окремій таблиці, або навіть в

окремій базі даних “Attackers”, оскільки її об’єм може суттєво відрізнятись в більшу сторону від об’єму бази даних “DNSBL Monitor” основного алгоритму служби. Ця інформація будь-коли може бути використаною для оформлення скагової заявки на блокування відповідного вузла або усієї IP-підмережі, до якої цей вузол належить.

Блок-схему алгоритму виявлення порушників показано на рис. 2. Він складається з наступних кроків:

1. Перевіряється існування бази даних “Attackers” і відповідних таблиць в ній. Якщо база або таблиці відсутні - вони створюються.

2. Сканується останній журнал подій з метою знаходження SMTP-сеансів, в яких зафіксовані спроби відгадування адрес скриньок, тобто відправка пошти на неіснуючі поштові скриньки.

3. Виділити з сеансу корисні дані: IP-адресу відправника та фрагмент SMTP-сеансу, що підтверджує факт відправки пошти на неіснуючі поштові адреси.

4. Зберегти IP-адресу в базі даних “Attackers”, звірити її на подібність з кожною IP-адресою, яка вже занесена в базу даних “Attackers”, нарахувати цій адресі, а також усім подібним адресам «штрафні» бали. Оскільки IP-адреса являє собою послідовність тридцяти двох бітів, то для двох подібних IP-адрес, розкладених побітно, ліва частина бітів є однаковою і спільною, а права частина бітів є різною. Наприклад, якщо дві IP-адреси 91.202.128.21 і 91.202.131.21 розкласти побітно і порівняти (рис.), то видно, що перші 22 біти у них однакові, а інші 10 бітів є різними.

```
01011011.11001010.10000000.00010101
01011011.11001010.10000011.00010101
|                               ||          |
<=====22=====><====10====>
```

Рис. 2. Фрагмент журналу служби SMTP з зафіксованою помилкою “550 User unknown”.

Згідно синтаксису CIDR (англ. Classless InterDomain Routing - безкласова міждомenna маршрутизація [1]), ці дві IP-адреси належать одній спільній IP-підмережі з маскою /22. В статті пропонується визначати рівень подібності IP-адрес саме за довжиною маски підмережі, до якої ці IP-адреси належать і нараховувати штрафні бали відповідно до таблиці 2.

5. Зберегти фрагмент SMTP-сеансу, що підтверджує факт відправки пошти на неіснуючу

поштову адресу. Вилучити з бази даних “Attackers” всі IP-адреси, що мають 100 і більше штрафних балів і занести ці адреси до власного приватного чорного списку IP-адрес поштової системи. Дані цього списку можуть бути вручну оформлені і надіслані у вигляді скагового звернення до публічних DNSBL-серверів, кожен з яких передбачає власний формат такого звернення і процедуру його розгляду.

Таблиця 2

Нарахування штрафних балів для IP-адрес, що перебувають в базі даних “Attackers”

Рівень подібності IP-адрес	Кількість нарахованих штрафних балів
/22 /23 /24 /25	2
/26	3
/27	4
/28 /29 /30 /31	5
/32	10

6. Вилучити з бази даних записи старші за певний тривалий період, наприклад, 2 роки.

На фрагменті журналу порушників, що інтенсивно вгадували адресу отримувачів, добре видно (рис. 3), що в одному випадку для поширення небажаних повідомлень зловмисник використовує один поштовий сервер (72.29.73.123), в іншому випадку кластер поштових серверів (31.41.219.211-31.41.219.213), для які належать IP-підмережі /29.

```
.....
72.29.73.123 2014-02-21 <D2600123@univ.net.ua>
72.29.73.123 2014-02-21 <D2600107@univ.net.ua>
72.29.73.123 2014-02-21 <2600121@univ.net.ua>
199.59.150.88 2014-02-21 <victor@univ.net.ua>
31.41.219.212 2014-02-25 <ambulance@univ.net.ua>
31.41.219.211 2014-02-25 <ambulance@univ.net.ua>
31.41.219.213 2014-02-25 <ambulance@univ.net.ua>
.....
```

Рис. 3. Характерна зміна IP-адреси порушника, що підбирає поштову адресу існуючого користувача.

Висновки

1. Тривале перебування поштових серверів сучасних підприємств у чорних списках може негативно вплинути на репутацію поштової системи цього підприємства, користувачі якого не зможуть вчасно і без перешкод відправити необхідну кореспонденцію користувачам іншої

поштової системи, яка під час отримання листів виконує перевірку тих самих чорних списків.

2. Запропонований в статті підхід, впроваджений в поштовій системі КНУ імені Тараса Шевченка, дозволяє вчасно інформувати поштових адміністраторів про факти потрапляння вузлів поштової системи до чорних списків за допомогою електронної пошти або служби коротких повідомлень (SMS).

3. Аналіз журналу служби SMTP, що приймає повідомлення від інших поштових систем, дозволяє отримати статистику IP-адрес порушників, які займаються підбором поштових

адрес існуючих користувачів та автоматично помістити IP-адреси цих порушників до приватного чорного списку поштової системи з можливим оприлюдненням інформації цього списку, наприклад, у вигляді скаргового звернення до глобального DNSBL-сервера з проханням заблокувати ці IP-адреси.

Список використаних джерел

1. Олифер В. Г. Компьютерные сети. Принципы, технологии, протоколы 4-е издание: учебник для ВУЗОВ / В.Г. Олифер, Н.А. Олифер – С.Петербург. Питер, – 2010. – 505 С.
2. Бохан К.А. Сетевые информационные технологии: Часть 1: Протоколы обмена электронной почтой. Учебное пособие / К.А. Бохан, А.В. Волковой, Г.А. Кучук, А.А. Сиора; МНО Украины; Национальный аэрокосмический университет им. М.Е. Жуковского "Харьковский авиационный институт". – Харьков: НАУ "ХАИ". – 2008. – 172 С.
3. Блам Р. Система электронной почты на основе Linux: Учебное пособие / Блам Р., – Киев: Вильямс., – 2001. – 448 С.
4. Зайцев О. Технологии рассылки спама и методы защиты от него [электронный ресурс] / О. Зайцев. – КомпьютерПресс, – 2007. – 6 С. (<http://compress.ru/article.aspx?id=17269>)
5. Независимое тестирование различных АнтиСпам решений (коммерческие и свободные продукты) [электронный ресурс]. - HabraHabr.Ru, – 2009. – 14 р. (<http://habrahabr.ru/post/56779>)
6. RBL: вред или польза? [электронный ресурс]. - Лаборатория Касперского. - 2003.: (http://www.securelist.com/ru/analysis/22/RBL_vred_ili_polza)
7. Борьба со спамом [электронный ресурс]. - Проект Центров учебных ресурсов (ЦУР), - 2005.: (<http://tools.ietf.org/pdf/rfc2505.pdf>)

References

1. OLIFER V.G. (2010) *Kompyuterniye seti. Principy, Tekhnologii, protokoly* 4 Ed.: Uchebnik dlya VUZOV. Sankt-Peterburg: Piter.
2. BOKHAN K.A. et al. (2008) *Setevye informatsionniye tekhnologii, Part 1: Protokoli obmena pochtoy*. Uchebnoye posobiye. MNO Ukrainy; Natsionalniy aerokosmicheskii universitet imeni M.E.Zhukovskogo "Kharkovskiy aviatsionniy institute". Kharkov: NAU "KAI".
3. BLAM P. (2001) *Systema elektronnoy pochti na osnove Linux*: Uchebnoye posobiye. Kyiv: Williams.
4. ZAYTSEV O. (2007) *Tekhnologii rassylki spama i metody zashchity ot nego*. KompyuterPress. [Online] Available from: <http://compress.ru/article.aspx?id=17269>
5. *Nezavisimoye testirovaniye razlichnikh AntiSpam resheniy (kommercheskie i svobodniye produkty)* (2009) HabraHabr.Ru. [Online] Available from: <http://habrahabr.ru/post/56779>
6. *RBL: vred ili zashchita?* (2003) Laboratoriya Kasperskogo. [Online] Available from: http://www.securelist.com/ru/analysis/22/RBL_vred_ili_polza
7. *Borba so spamom* (2005) Proekt Tsentrov uchebnykh resursov (TUR). [Online] Available from: <http://tools.ietf.org/pdf/rfc2505.pdf>

Надійшла до редколегії 10.04.14

УДК 537.6/8

Коломоєць Д.І.¹, студ.
Прокопенко О.В.², к.ф.-м.н.

D.I. Kolomoiets¹, stud.,
O.V. Prokopenko², Ph.D.

Детектування мікрохвильових сигналів пороговим спітронним магнітним нанодефектором в умовах сильного гістерезису

Detection of microwave signals by a threshold spin-torque microwave detector operating in the regime of a strong hysteresis

¹ Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 01601, м.Київ, пр-т. Глушкова
4г. E-mail: amerlyq@gmail.com

¹ Taras Shevchenko National University of Kyiv,
01601, Kyiv, Glushkova av., 4g.
E-mail: amerlyq@gmail.com

² Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 01601, м.Київ, пр-т. Глушкова
4г, E-mail: Oleksandr.Prokopenko@gmail.com

² Taras Shevchenko National University of Kyiv,
01601, Kyiv, Glushkova av., 4g.
E-mail: Oleksandr.Prokopenko@gmail.com

Числовими методами досліджено ефективність роботи порогового спітронного магнітного нанодефектора в області амплітуд вхідних НВЧ струмів, що відповідають сильному гістерезису на залежності вихідної постійної напруги детектора від вхідного НВЧ струму. Показано, що в даному режимі роботи ширина гістерезису несуттєво збільшується із збільшенням частоти зовнішнього сигналу та нелінійно залежить від амплітуди поля підмагнічування. Отримані результати можуть бути корисними для розробки мікрохвильових систем обробки даних на основі спітронних магнітних наноструктур.

Ключові слова: спітронний магнітний нанодефектор, пороговий детектор, сильний гістерезис, ширина гістерезису.

Performance of a threshold spin-torque microwave detector (STMD) operating in a strong hysteresis regime with applied dc magnetic field is investigated numerically. The analysis is done in the case when amplitude of input microwave current corresponds to the hysteresis area on the dependence of output dc voltage of the detector on input microwave current. The hysteresis width is slightly increasing with frequency of an input signal and nonlinearly depends on the amplitude of an external bias dc magnetic field with different scale for high and low hysteresis threshold. Obtained results are important for development of STMD-based microwave systems for signal processing purposes.

Key Words: spin-torque microwave detector, threshold detector, strong hysteresis, hysteresis width.

Статтю представив д.ф.-м.н., доц. Савенков С.М.

Вступ

Після передбачення Слончевським та Берже [1–2] ефекту переносу спінового магнітного моменту (the spin transfer torque effect, STT ефект) у шаруватих (т.зв. спітронних) магнітних наноструктурах (МНС), цей ефект привернув до себе увагу дослідників усього світу. Сьогодні існує значна кількість як експериментальних [3–14], так і теоретичних робіт [15–19], в яких запропоновані різні способи використання цього ефекту на практиці: зокрема, створення систем динамічної та статичної магнітної пам'яті [3, 20], розробка наногенераторів НВЧ [4–10, 17, 18] та детекторів НВЧ [11–14, 19] тощо.

Принцип дії запропонованих детекторів НВЧ

на основі шаруватих спітронних МНС (далі – просто МНС) базується на ефекті STT та т.зв. діодному ефекті [11]. Останній полягає у тому, що під дією зовнішнього НВЧ струму $I(t) = I_{RF} \sin(\omega t)$ у вільному магнітному шарі (free magnetic layer, FL) структури виникають коливання намагніченості на частоті зовнішнього НВЧ сигналу ω . Відповідно, магнітоопір МНС $R(t) = R_{DC} + R_{RF} \sin(\omega t + \varphi)$ також змінюється з частотою ω . Отже, на детекторі виникає постійна напруга $U_{DC} = \langle I(t)R(t) \rangle = 0.5 I_{RF} R_{RF} \cos \varphi$, де $\langle \dots \rangle$ означає операцію усереднення по часу за період коливань НВЧ сигналу $2\pi/\omega$, φ – початкова фаза коливань магнітоопору (рис. 1).

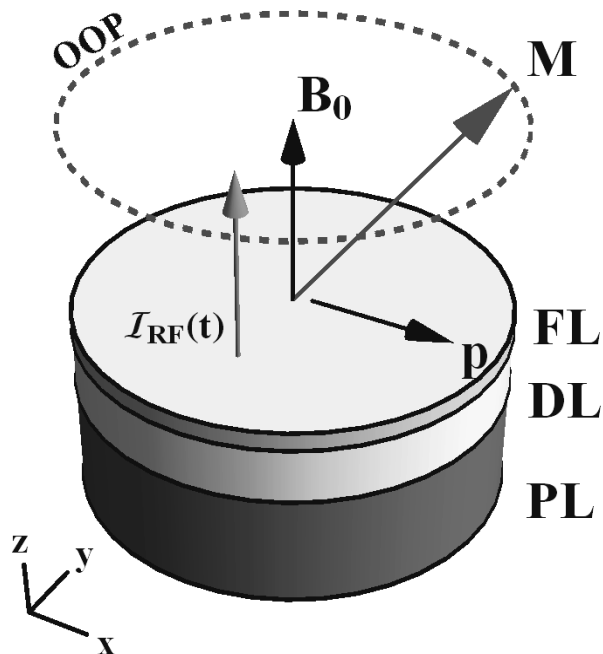


Рис. 1 Модель трьохшарової циліндричної МНС радіуса R : FL – «вільний» магнітний шар, DL – немагнітний прошарок – металевий (Cu) або діелектричний (MgO), PL – «закріплений» магнітний шар. Під дією електричного струму $I(t) = I_{DC} + I_{RF}(t)$ у FL збуджується прецесія вектора намагніченості $\mathbf{M}$. Тут $\mathbf{p}$ – одиничний вектор, що визначає напрямок намагніченості у PL; $\mathbf{B}_0$ – зовнішнє постійне магнітне поле підмагнічування

Відомі два суттєво різних режими роботи спітронних магнітних нанодетекторів (СМНД): резонансний квадратичний режим [11, 12, 16, 19, 21] та нерезонансний пороговий режим роботи детектора [22]. Перший режим роботи реалізується за умов збудження слабким зовнішнім НВЧ сигналом малих коливань намагніченості у FL і характеризується квадратичною залежністю U_{DC} від I_{RF} . Другий режим роботи детектора, який розглядається нижче, відповідає випадку збудження зовнішнім НВЧ сигналом позаплощинної (out-of-plane, OOP) прецесії намагніченості з великим кутом прецесії у FL. Цей режим роботи СМНД був вперше відкритим для МНС, поміщених у слабке перпендикулярне постійне магнітне поле ($B_0 < \mu_0 M_0$, μ_0 – магнітна стала, M_0 – намагніченість насичення FL) (див. рис. 1). Як було показано в [21, 22] у цьому режимі роботи детектор працює як нерезонансний пороговий детектор низькочастотних мікрохвильових сигналів.

Метою даної роботи є дослідження впливу частоти зовнішнього НВЧ сигналу та амплітуди постійного поля підмагнічування на ширину гістерезису $\Delta I_{RF} = I_{th}^{high} - I_{th}^{low}$ у згаданому нерезонансному пороговому режимі роботи СМНД. Тут I_{th}^{high} – верхній поріг гістерезису, а I_{th}^{low} – нижній поріг гістерезису на типовій залежності вихідної напруги детектора U_{DC} від амплітуди вхідного НВЧ струму I_{RF} (рис. 2).

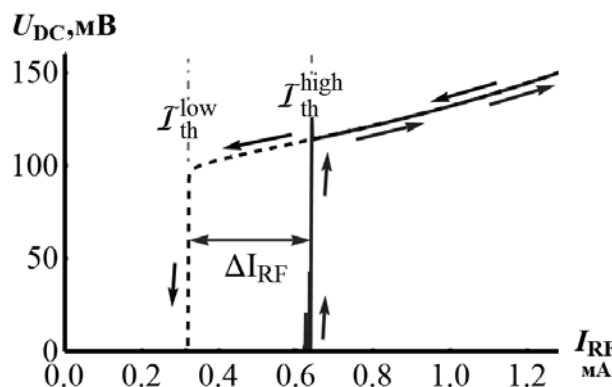


Рис. 2 Типова залежність вихідної напруги детектора U_{DC} від амплітуди вхідного НВЧ струму I_{RF} , яка ілюструє наявність гістерезису з шириною $\Delta I_{RF} = I_{th}^{high} - I_{th}^{low}$

Числова модель

У роботі розглядався СМНД на основі циліндричного наностовпчика з поперечним перерізом круглої форми (див. рис. 1). Постійне магнітне поле підмагнічування було направлено перпендикулярно до площини магнітних шарів структури, а його амплітуда B_0 могла змінюватись у межах від 100 мТл до 800 мТл. Геометричні та магнітні параметри структури були обрані виходячи з типових експериментальних значень [11, 13]: радіус FL $R = 50$ нм, товщина FL $L = 1$ нм, намагніченість насичення FL $\mu_0 M_0 = 800$ мТл, стала згасання Гільберта для матеріалу FL $\alpha = 0.01$. Ефективність спінової поляризації носіїв заряду $P = 0.7$.

Припускалось, що намагніченість закріпленого магнітного шару структури (pinned magnetic layer, PL) є нерухомою, а рух намагніченості у FL може бути описаним у наближенні «макроспіну». Вплив температури та шумів на динаміку намагніченості у FL не враховувався.

Динаміка намагніченості FL $\mathbf{M} = m\mathbf{M}_0$ описувалась рівнянням Ландау–Ліфшиця–Гільберта–Слончевського [1, 2, 15]:

$$\frac{d\mathbf{m}}{dt} = \gamma \mathbf{B}_{\text{eff}} \times \mathbf{m} + \alpha \mathbf{m} \times \frac{d\mathbf{m}}{dt} + \sigma I(t) \mathbf{m} \times \mathbf{m} \times \mathbf{p}, \quad (1)$$

де $\gamma \approx 2\pi \cdot 28 \text{ ГГц/Тл}$, $\mathbf{B}_{\text{eff}}$ – ефективне магнітне поле, яке є суперпозицією зовнішнього постійного магнітного поля $\mathbf{z}B_0$ та поля розмагнічування $-\mathbf{z}\mu_0 M_0$ (наближення тонкої плівки). Коефіцієнт σ задавався як

$$\sigma = \frac{\sigma_{\perp}}{1 + P^2 \cos \beta}, \quad \sigma_{\perp} = \frac{\gamma \hbar}{2e} \frac{P}{M_0 \pi R^2 L}, \quad (2)$$

де $\beta = \mathbf{m} \cdot \mathbf{p}$, $\hbar = h / 2\pi$, h – стала Планка, e – елементарний електричний заряд, $\mathbf{p}$ – одиничний вектор у напрямку намагніченості закріпленого шару – вважалось, що $\mathbf{p} = \mathbf{x}$. $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ – орти картезіанської системи координат x, y, z .

Рівняння (1) розв'язувалось числовими методами в пакеті Mathematica. Як результат було визначено залежність $\mathbf{m} \equiv \mathbf{m}(t)$. Далі, використовуючи вираз для мікрохвильового магнітоопору наноструктури (при $R_{DC} = 0$),

$$R(t) = \frac{R_{\perp}}{1 + P^2 \cos \beta}, \quad (3)$$

числовими методами було розраховано постійну напругу на виході детектора:

$$U_{DC} = \frac{1}{T} \int_0^T I_{RF} \sin(\omega t) R(t) dt. \quad (4)$$

У формулах (3)–(4): $R_{\perp}$ – характерний опір структури при $\beta = \pi / 2$, $T = 2\pi / \omega$.

Результати та їх аналіз

На рис. 2 показана типова залежність вихідної напруги детектора від вхідного НВЧ струму $U_{DC}(I_{RF})$, розрахована для випадку $R_{\perp} = 1 \text{ кОм}$, $B_0 = 200 \text{ мТл}$, $\omega / 2\pi = f = 3 \text{ ГГц}$. Видно, що на залежності $U_{DC}(I_{RF})$ спостерігається сильний гістерезис. При повільному зростанні амплітуди НВЧ струму I_{RF} ненульова вихідна напруга на детекторі з'являється лише при $I_{RF} > I_{th}^{\text{high}}$, де I_{th}^{high} – верхній поріг гістерезису. В той же час, якщо в режимі стабільної динаміки (тобто при $I_{RF} > I_{th}^{\text{high}}$) почати зменшувати амплітуду зовнішнього сигналу, ненульова вихідна напруга на детекторі буде існувати поки амплітуда струму I_{RF} буде більшою за нижній поріг гістерезису I_{th}^{low} ($I_{RF} > I_{th}^{\text{low}}$). Характерним

параметром такого гістерезису є його ширина $\Delta I_{RF} = I_{th}^{\text{high}} - I_{th}^{\text{low}}$.

У пороговому режимі роботи детектора зовнішній сигнал збуджує позаплощинну прецесію намагніченості навколо напрямку ефективного поля $\mathbf{B}_{\text{eff}} = \mathbf{z}B_{\text{eff}} = \mathbf{z}(B_0 - \mu_0 M_0)$. Відповідно, величини порогів I_{th}^{high} та I_{th}^{low} виявляються залежними від амплітуди поля підмагнічування B_0 . Крім того, враховуючи, що пороговий режим роботи детектора можливий лише в області частот $f^{\text{low}} < f < f^{\text{high}}$, де $f^{\text{low}} \approx 1 \text{ ГГц}$, $f^{\text{high}} \approx \gamma B_0 / 2\pi$, ширина гістерезису має залежати від частоти НВЧ сигналу f та амплітуди поля підмагнічування B_0 .

Характерні залежності $I_{th}^{\text{high}}(B_0)$, $I_{th}^{\text{low}}(B_0)$ показані на рис. 3. Видно, що із збільшенням амплітуди поля підмагнічування B_0 величини верхнього та нижнього порогів гістерезису зменшуються за різним законом. Відповідно, ширина гістерезису $\Delta I_{RF} = I_{th}^{\text{high}} - I_{th}^{\text{low}}$ зростає із збільшенням амплітуди поля в області малих полів ($B_0 < 200 \text{ мТл}$), але при полях $B_0 > 200 \text{ мТл}$ ширина гістерезису ΔI_{RF} фактично перестає залежати від B_0 . Це свідчить про те, що вже при амплітудах поля $B_0 \approx \mu_0 M_0 / 4$ створюються належні сприятливі умови для збудження ООР прецесії намагніченості. Відповідно, подальше збільшення амплітуди поля не призводить до зміни умов збудження коливань намагніченості при $I_{RF} \geq I_{th}^{\text{high}}$ порівняно з умовами зникнення таких коливань при $I_{RF} \leq I_{th}^{\text{low}}$.

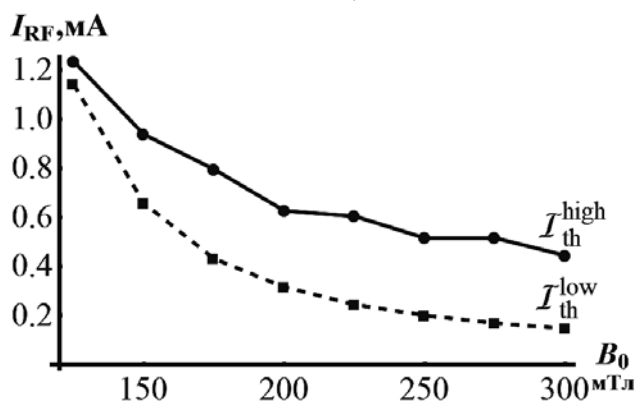


Рис. 3 Залежність порогових струмів детектора від амплітуди зовнішнього поля підмагнічування

З рис. 3 також випливає, що абсолютні значення порогів гістерезису I_{th}^{high} , I_{th}^{low}

зменшуються із збільшенням амплітуди поля підмагнічування B_0 , оскільки велике поле підмагнічування сприяє збудженню саме ООР прецесії намагніченості. При малих амплітудах поля B_0 величини порогів є доволі великими, а ширина гістерезису досить малою, оскільки умови збудження ООР прецесії намагніченості при $B_0 < 150$ мТл суттєво погіршуються. Отже, величиною порогів збудження I_{th}^{high} , I_{th}^{low} , як і шириною гістерезису $\Delta I_{RF} = I_{th}^{high} - I_{th}^{low}$ можна керувати шляхом зміни амплітуди постійного поля підмагнічування B_0 .

На рис. 4 показано залежності порогів $I_{th}^{high}(f)$, $I_{th}^{low}(f)$ від частоти НВЧ струму f . Видно, що величини цих порогів монотонно зростають із збільшенням частоти f , оскільки більшій частоті прецесії f відповідає більший кут прецесії, що означає необхідність збудження такої прецесії більшим НВЧ струмом. Видно також, що ширина гістерезису $\Delta I_{RF} = I_{th}^{high} - I_{th}^{low}$ майже не залежить від частоти сигналу в зазначеному діапазоні частот. З іншого боку, виходячи з того факту, що режим ООР прецесії є стабільним лише за умови $f < \gamma B_0 / 2\pi$ [21, 22], можна припустити, що в околі $f \sim \gamma B_0 / 2\pi \sim 5.6$ ГГц величини порогів та ширина гістерезису можуть зазнати суттєвих змін.

Таким чином, залежності представлені на рис. 3, 4 дозволяють оцінити величини порогів I_{th}^{high} , I_{th}^{low} та ширини гістерезису $\Delta I_{RF} = I_{th}^{high} - I_{th}^{low}$ для заданих частоти НВЧ сигналу та амплітуди поля підмагнічування. Величинами цих порогів та шириною гістерезису можна керувати шляхом зміни величини постійного поля підмагнічування.

Список використаних джерел

1. Slonczewski J.C. Current-driven excitation of magnetic multilayers / J.C. Slonczewski // J. Magn. Magn. Mater. – 1996. – **159**. – P. L1–L7.
2. Berger L. Emission of spin waves by a magnetic multilayer traversed by a current / L. Berger // Phys. Rev. – 1996. – **B54**. – P. 9353–9358.
3. Katine J.A. Current-driven magnetization reversal and spin-wave excitations in Co/Cu/Co pillars / J.A. Katine, F.J. Albert, R.A. Buhrman, E.B. Mayers, D.C. Ralph // Phys. Rev. Lett. – 2000. – **84**. – P. 3149–3152.

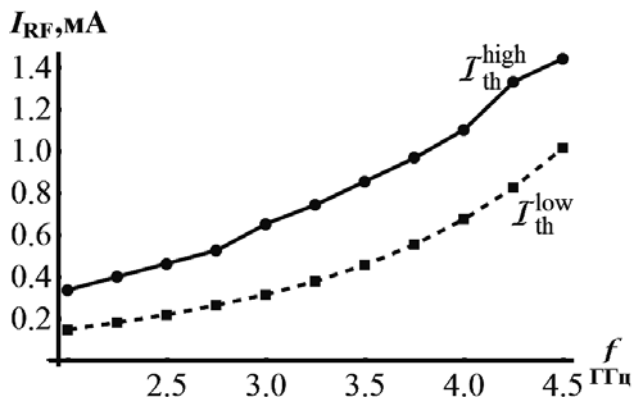


Рис. 4 Поведінка порогових струмів детектора при збільшенні частоти НВЧ струму f

Висновки

В роботі показано, що верхній та нижній порогові гістерезису нерезонансного порогового СМНД, I_{th}^{high} та I_{th}^{low} відповідно, нелінійним чином залежать від частоти НВЧ сигналу, що детектується, та амплітуди поля підмагнічування B_0 . В свою чергу, ширина гістерезису $\Delta I_{RF} = I_{th}^{high} - I_{th}^{low}$ помітно зростає із збільшенням амплітуди поля в області малих полів ($B_0 < 200$ мТл), але при полях $B_0 > 200$ мТл фактично перестає залежати від B_0 . Це передбачає можливість керування величинами порогів I_{th}^{high} та I_{th}^{low} , а також величиною ΔI_{RF} за рахунок зміни амплітуди постійного поля підмагнічування B_0 , що може бути корисним при розробці та оптимізації мікрохвильових систем обробки даних на основі спінтронних МНС.

Робота була підтримана грантом UU34/008 Державного фонду фундаментальних досліджень України.

References

1. SLONCZEWSKI, J.C. (1996) Current-driven excitation of magnetic multilayers. *Journal of Magn. and Magn. Materials*. 159 (1-2). p.L1–L7.
2. BERGER, L. (1996) Emission of spin waves by a magnetic multilayer traversed by a current. *Physical Review B*. 54 (13). p. 9353-9358.
3. KATINE, J.A., ALBERT, F.J., BUHRMAN, R.A., MAYERS, E.B. and RALPH, D.C. (2000) Current-driven magnetization reversal and spin-wave excitations in Co/Cu/Co pillars. *Physical Review Letters*. 84 (14). p. 3149-3152.

4. Urazhdin S. Current-Driven Magnetic Excitations in Permalloy-Based Multilayer Nanopillars / S. Urazhdin, N.O. Birge, W.P. Pratt, Jr., J. Bass // *Phys. Rev. Lett.* – 2003. – **91**. – P. 146803-1 – 146803-3.
5. Kiselev S.I. Microwave oscillations of a nanomagnet driven by a spin-polarized current / S.I. Kiselev, J.C. Sankey, I.N. Krivorotov, N.C. Emley, R.J. Schoelkopf, R.A. Buhrman, D.C. Ralph // *Nature*. – 2003. – **425**. – P. 380–383.
6. Lee K.J. Excitations of incoherent spin waves due to spin-transfer torque / K.J. Lee, A. Deac, O. Redon, J.-P. Nozieres, B. Dieny // *Nature Mater.* – 2004. – **3**. – P. 877–881.
7. Krivorotov I.N. Time-domain measurements of nanomagnet dynamics driven by spin-transfer torques / I.N. Krivorotov, N.C. Emley, J.C. Sankey, S.I. Kiselev, D.C. Ralph, R.A. Buhrman // *Science*. – 2005. – **307**. – P. 228–231.
8. Kaka S. Mutual phase-locking of microwave spin torque nano-oscillators / S. Kaka, M.R. Pufall, W.H. Rippard, T.J. Silva, S.E. Russek, J.A. Katine // *Nature*. – 2005. – **437**. – P. 389–392.
9. Mancoff F.B. Phase-locking in double-point-contact spin-transfer devices / F.B. Mancoff, N.D. Rizzo, B.N. Engel, S. Tehrani // *Nature*. – 2005. – **437**. – P. 393–395.
10. Ruotolo A. Phase-locking of magnetic vortices mediated by antivortices / A. Ruotolo, V. Cros, B. Georges, A. Dussaux, J. Grollier, C. Deranlot, R. Guillemet, K. Bouzehouane, S. Fusil, A. Fert // *Nature Nanotech.* – 2009. – **4**. – P. 528–532.
11. Tulapurkar A.A. Spin torque diode effect in magnetic tunnel junctions / A.A. Tulapurkar, Y. Suzuki, A. Fukushima, H. Kubota, H. Maehara, K. Djayaprawira, N. Watanabe, S. Yuasa // *Nature*. – 2005. – **438**. – P. 339–342.
12. Ishibashi S. Large diode sensitivity of CoFeB/MgO/CoFeB magnetic tunnel junctions / S. Ishibashi, T. Seki, T. Nozaki, H. Kubota, S. Yakata, A. Fukushima, S. Yuasa, H. Maehara, K. Tsunekawa, D.D. Djayaprawira, // *Appl. Phys. Express*. – 2010. – **3**. – P. 073001-1 – 073001-3.
13. Cheng X. Nonadiabatic stochastic resonance of a nanomagnet excited by spin torque / X. Cheng, C.T. Boone, J. Zhu, I.N. Krivorotov // *Phys. Rev. Lett.* – 2010. – **105**. – P. 047202.
14. Cheng X. Spin Torque Diode Detectors with Sensitivity Exceeding that of Schottky Diodes / X. Cheng, C.T. Boone, J. Zhu, I.N. Krivorotov // *Abstracts of the 55th Annual Conference on Magnetism and Magnetic Materials*, EC-3, Atlanta, Georgia, USA, November 2010.
4. URAZH DIN, S., BIRGE, N.O., and BASS, J. (2003) Current-Driven Magnetic Excitations in Permalloy-Based Multilayer Nanopillars. *Phys. Rev. Lett.* 91 (14). p. 146803-1 – 146803-3.
5. KISELEV, S.I., SANKEY, J.C., KRIVOROTOV, I.N., EMLEY, N.C., and RALPH, D.C. (2003) Microwave oscillations of a nanomagnet driven by a spin-polarized current. *Nature*. 425 (September). p. 380-383.
6. LEE, K.J., DEAC, A., REDON, O., NOZIERES, J.-P. and DIENY, B. (2004) Excitations of incoherent spin waves due to spin-transfer torque. *Nature Materials*. 3 (12). p. 877-881.
7. KRIVOROTOV, I.N., EMLEY, N.C., SANKEY, J.C., RALPH, D.C. and BUHRMAN, R.A. (2005) Time-domain measurements of nanomagnet dynamics driven by spin-transfer torques. *Science*. 307 (5707). p. 228-231.
8. KAKA, S., PUFALL, M.R., RIPPARD, W.H., SILVA, T.J., and KATINE, J.A. (2005) Mutual phase-locking of microwave spin torque nano-oscillators. *Nature*. 437 (7057). p. 389-392.
9. MANCOFF, F.B., RIZZO, N.D., ENGEL, B.N. and TEHRANI, S. (2005) Phase-locking in double-point-contact spin-transfer devices. *Nature*. 437 (7057). p.393-395.
10. RUOTOLO, A., CROS, V., GEORGES, B., DUSSAUX, A., GROLLIER, J., DERANLOT, C., GUILLEMET, R., BOUZEHOUE, K., FUSIL, S. and FERT, A. (2009) Phase-locking of magnetic vortices mediated by antivortices. *Nature nanotechnology*. 4 (8). p. 528-532.
11. TULAPURKAR, A.A., SUZUKI, Y., FUKUSHIMA, A., KUBOTA, H., MAEHARA, H., TSUNEKAWA, K., DJAYAPRAWIRA, D.D., WATANABE, N. and YUASA, S. (2005) Spin torque diode effect in magnetic tunnel junctions. *Nature*. 438 (7066). p. 339-342.
12. ISHIBASHI, S., SEKI, T., NOZAKI, T., KUBOTA, H., YAKATA, S., FUKUSHIMA, A., YUASA, S., MAEHARA, H. and SUZUKI, Y. (2010) Large diode sensitivity of CoFeB/MgO/CoFeB magnetic tunnel junctions. *Applied Physics Express*. 3 (7). p. 073001-(1-3).
13. CHENG, X., BOONE, C.T., ZHU, J. and KRIVOROTOV, I.N. (2010) Nonadiabatic stochastic resonance of a nanomagnet excited by spin torque. *Phys. Rev. Lett.* 105 (4). p. 047202.
14. CHENG, X., BOONE, C.T., ZHU, J. and KRIVOROTOV, I.N. (2010) Spin Torque Diode Detectors with Sensitivity Exceeding that of Schottky Diodes. In *Abstracts of the 55th Annual Conference on Magnetism and Magnetic Materials*. Atlanta, Georgia, November 2010.

15. *Ralph D.C.* Spin transfer torques / D.C. Ralph, M.D. Stiles // *J. Magn. Magn. Mater.* – 2008. – **320**. – P. 1190–1216.
16. *Wang C.* Sensitivity of spin-torque diodes for frequency tunable resonant microwave detection / C. Wang, Y.-T. Cui, J.Z. Sun, J.A. Katine, R.A. Buhrman, D.C. Ralph // *J. Appl. Phys.* – 2009. – **106**. – P. 053905-1 – 053905-7.
17. *Slavin A.* Nonlinear auto-oscillator theory of microwave generation by spin-polarized current / A. Slavin, V. Tiberkevich // *IEEE Trans. on Magn.* – 2009. – **45**, № 4. – P. 1875–1918.
18. *Prokopenko O.* Spin-torque nano-oscillator as a microwave signal source / O. Prokopenko, E. Bankowski, T. Meitzler, V. Tiberkevich, A. Slavin // *IEEE Magnetics Letters*. – 2011. – № 2. – P. 3000104-1 – 3000104-3.
19. *Prokopenko O.* Noise properties of a resonance-type spin-torque microwave detector / O. Prokopenko, G. Melkov, E. Bankowski, T. Meitzler, V. Tiberkevich, A. Slavin // *Appl. Phys. Lett.* – 2011. – **99**. – P. 032507-(1-3).
20. *Tang D.D.* Magnetic Memory. Fundamentals and Technology. / D.D. Tang, Y.-J. Lee. – N.-Y.: Cambridge University Press, 2010. – 208 p.
21. *Prokopenko O.V.* Spin-Torque Microwave Detectors / O.V. Prokopenko, I.N. Krivorotov, T.J. Meitzler, E. Bankowski, V.S. Tiberkevich, A.N. Slavin // In book: *Magnonics: From Fundamentals to Applications. Topics in Applied Physics (Vol. 125)* / Ed. S.O. Demokritov and A.N. Slavin. – Berlin: Springer-Verlag, 2013. – P. 143-161.
22. *Prokopenko O.V.* Spin-torque microwave detectors with out-of-plane precessing magnetic moment / O.V. Prokopenko, I.N. Krivorotov, E. Bankowski, T. Meitzler, S. Jaroach, V.S. Tiberkevich, A.N. Slavin // *Journal of Applied Physics*. – 2012. – Vol. 111. – P. 123904-(1-6).
15. RALPH, D.C. & STILES, M.D. (2008) Spin transfer torques. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*. 320 (7). p. 1190-1216.
16. WANG, C., CUI, Y.-T., SUN, J.Z., KATINE, J.A., BUHRMAN, R.A. and RALPH, D.C. (2009) Sensitivity of spin-torque diodes for frequency tunable resonant microwave detection. *Journal of App. Phys.*. 106 (5). p. 053905-(1-7).
17. SLAVIN, A. & TIBERKEVICH, V. (2009) Nonlinear auto-oscillator theory of microwave generation by spin-polarized current. *IEEE Transactions on Magnetics*. 45 (4). p.1875-1918.
18. PROKOPENKO, O., BANKOWSKI, E., MEITZLER, T., TIBERKEVICH, V. and SLAVIN, A. (2011) Spin-torque nano-oscillator as a microwave signal source. *IEEE Magnetics Letters*. 2 (January). p. 3000104-1 – 3000104-3.
19. PROKOPENKO, O., MELKOV, G., BANKOWSKI, E., MEITZLER, T., TIBERKEVICH, V. (2011) Noise properties of a resonance-type spin-torque microwave detector. *Applied Physics Letters*. 99 (3). p. 032507-(1-3).
20. TANG, D.D. & LEE, Y.-J. (2010) *Magnetic Memory. Fundamentals and Technology*. New York: Cambridge University Press.
21. PROKOPENKO, O.V., KRIVOROTOV, I.N., MEITZLER, T.J., BANKOWSKI, E., TIBERKEVICH, V.S. and SLAVIN, A.N. (2013) Spin-Torque Microwave Detectors. In: Demokritov, S.O. & Slavin, A.N. (eds.). *Magnonics: From Fundamentals to Applications. Topics in Applied Physics*. 125. Berlin: Springer-Verlag.
22. PROKOPENKO, O.V., KRIVOROTOV, I.N., BANKOWSKI, E., MEITZLER, T., JAROCH, S., TIBERKEVICH, V.S. and SLAVIN, A.N. (2012) Spin-torque microwave detectors with out-of-plane precessing magnetic moment. *Journal of Appl. Phys.* 111 (12). p. 123904-(1-6).

Надійшла до редколегії 10.04.2014

УДК 537.52:533.9.07:538.911

Лебідь А.В., стажист-дослідник,
Веклич А.М., д.ф.-м.н., доц.,
Борецький В.Ф., к.ф.-м.н., асист.,
Колесник О.Г., пров. інж.,
Савенок С.П. к.геол.н., доц.
Андреев О.В. к.геол.-мін.н., с.н.с.

Плазмове джерело для формування кристалів MoO_3

Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 03022, просп. Глушкова 4Г,
Київ, Україна
e-mail: tgctg@yandex.ru, van@univ.kiev.ua

Lebid A.V., Probationer-contributor,
Veklich A.N., D.Sci., Associate Professor,
Boretskij V.F., Ph.D., Assistant Professor,
Kolesnyk O.G., Lead engineer,
Savenok S.P., Ph.D., Associate Professor,
Andreev O.V. Ph.D., Senior researcher.

Plasma source for MoO_3 crystals fabrication

Bulletin of Taras Shevchenko National University
of Kyiv, 03022, Glushkova Av., 4G, Kyiv, Ukraine
e-mail: tgctg@yandex.ru, van@univ.kiev.ua

В даній роботі запропоновано оригінальну методику виготовлення кристалів MoO_3 безпосередньо з металічного молибдену за допомогою електродугового розряду. Кристали формувались на боковій поверхні молибденового електрода під час горіння вільноіснуючої електричної дуги силою струму 3,5 А. Для визначення основних етапів формування, хімічного складу та структури кристалів застосовувались спостереження зони росту кристалів, рентгеноструктурний аналіз, часо-пролітна лазерна мас-спектрометрія та мікроскопічні дослідження. Кристали являли собою прозорі блискучі призми та пластинки, які складались, головним чином із орторомбічної фази MoO_3 .

Ключові слова: кристали триоксиду молибдену, $\alpha\text{-MoO}_3$, процес осадження випаровувань, плазма електродугового розряду.

Simple original technique for fabrication of molybdenum trioxide crystals during electric arc discharge directly from metallic molybdenum was proposed. The vertically oriented free-burning arc was ignited between the end surfaces of metallic molybdenum non-cooled electrodes. Molybdenum oxide crystals were deposited on side surface of anode. Observation of crystals formation zone was used for determination of main formations stages. The resulting products were studied by X-rays diffraction, time-of-flight laser mass-spectrometry and optical microscopy methods. Investigations indicate, that self-organizing vapor-deposition process of MoO_3 crystals formation has place. The resulting product is colorless sparkling prisms and platelets, which are mainly consist of orthorhombic $\alpha\text{-MoO}_3$ phase. Optical microscopy indicates formation of closely packed feather-like pins structures by vapor-solid process.

Key words: molybdenum trioxide crystals, orthorhombic $\alpha\text{-MoO}_3$, vapor-deposition process, electric arc discharge.

Статтю представив д.ф.-м.н. Анісімов І.О.

Вступ

Триоксид молибдену MoO_3 привертає увагу дослідників через численні промислові застосування: як матеріал для катодів літій-іонних батарей [1,2], як матеріал з високими емісійними властивостями для коронуючих електродів [3], як матеріал для газових сенсорів [4] та каталізатор реакцій перетворення вуглеводнів [5].

Для виготовлення MoO_3 застосовують як суто хімічні, так і фізичні методи. Останні

базуються, головним чином, на процесі осадження матеріалу із випаровувань. Це спричинено окисненням металічного молибдену при температурах більше 200°C та високим тиском насичених парів оксидів MoO_2 та MoO_3 над такою поверхнею. Так для виготовлення триоксиду молибдену використовувалось нагрівання молибденової пудри у печі [1, 6] або за допомогою інфрачервоного нагрівання молибденової фольги [3] з подальшим осадженням MoO_3 на підкладках. Також

існують методики виготовлення структурованого MoO_3 у мікроплазмових процесах на основі високочастотного розряду при атмосферному тиску [2].

В даній роботі пропонується альтернативна методика отримання кристалів за допомогою електродугового плазмового джерела атмосферного тиску. Перевагами такого джерела є простота виготовлення, висока швидкість процесу вирощування кристалів та повторюваність результатів.

Для визначення основних етапів формування кристалів застосовувались спостереження зони росту на поверхні анода. Хімічний склад та структура кристалів визначались методами рентгеноструктурного аналізу. Особливості структур росту кристалів досліджувались засобами оптичної мікроскопії.

Експеримент

У запропонованому плазмовому джерелі електрична дуга запалювалась між торцевими поверхнями неохолоджуваних молібденових електродів (рис. 1, а). Сила струму становила 3,5 А, діаметр електродів та розрядний проміжок складали 6 та 8 мм, відповідно. Кристали оксиду молібдену (рис. 1, б) осаджувались на бічній поверхні нижнього електрода (анода). Кристали накопичувались у вигляді крихкого шару довільно орієнтованих прозорих призм та пластинок. Слід зауважити, що зона росту кристалів розташовувалась на 3-5 мм нижче верхньої торцевої поверхні електрода (див. рис.1).

З метою визначення основних етапів росту кристалів застосовувалась відеореєстрація процесів у зоні росту кристалів.

Хімічний склад та структуру отриманих кристалів визначали рентген-дифрактометричним методом аналізу на установці ДРОН-УМ1,

додатково використовували часо-пролітну лазерну мас-спектрометрію.

Для визначення особливостей формування кристалів застосовувався оптичний мікроскоп МБИ-1.

Процес росту кристалів

Процес росту кристалів може бути поділений на характерні стадії. Безпосередньо після запалювання дуги продукти випаровування відсутні (рис. 2, а). Через 20 с навколо електрода з'являється білий дим, який, на думку авторів, є продуктом випаровування оксидної плівки на поверхні електрода (рис. 2, б). Дійсно, автори [1, 6] звертали увагу на окислення металічного молібдену та випаровування оксидів з його поверхні при нагріванні.

Дане припущення дозволяє пояснити відсутність кристалів у зоні поблизу торця електрода (див. рис.1), де температура бічної поверхні є найвищою. Так, в роботі [6] зазначається, що при температурі вище 1150°C на поверхні молібдену повністю відсутня оксидна плівка, що зумовлено повним випаровуванням утворених оксидів з поверхні.

На наступній стадії (через час ≈ 5 с) на поверхні вже спостерігаються пластинки кристалів (рис. 2, в). Імовірно, зростання кристалів починається на дефектах поверхні. В подальшому конвективні потоки переносять продукти випаровування до зони росту кристалів.

Повторне випаровування кристалів MoO_3 в зоні формування кристалів обмежується двома факторами. По перше, кристали формують ажурний крихкий шар, який має мінімальний тепловий контакт з поверхнею металічного електрода. По друге, конвективні потоки не тільки переносять будівельний матеріал для кристалів, але додатково охолоджують вже сформовані кристали.

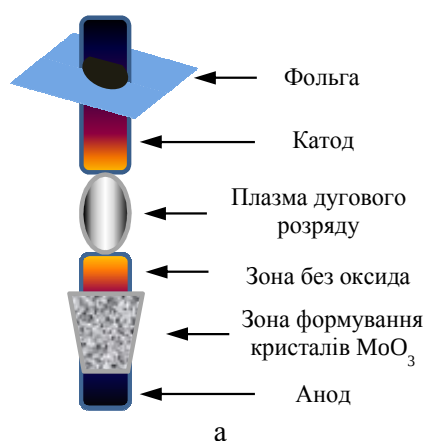
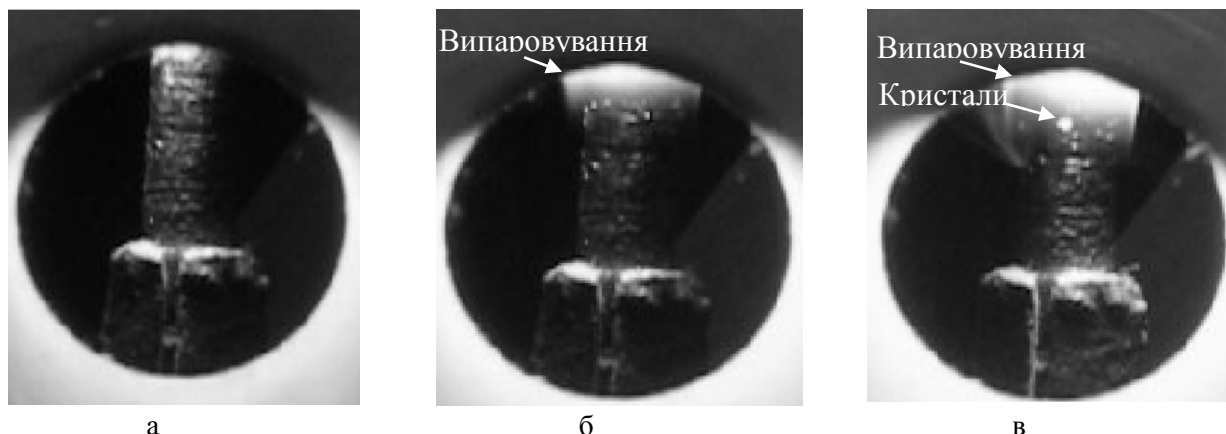


Рис.1 Схема плазмового джерела (а) та зовнішній вигляд кристалів на поверхні анода (б)



а

б

в

Рис.2 Зона формування кристалів на різних етапах процесу: початковий стан бокової поверхні (а), поява випаровувань (б), формування кристалів (в)

Таким чином, у запропонованому джерелі має місце узгоджений послідовний процес утворення кристалів: окислення поверхні, випаровування оксидного шару, перенесення парів матеріалу та росту кристалів MoO_3 .

Можна висловити припущення, що пригнічення процесу формування кристалів, яке спостерігається через 2 хв, відбувається внаслідок перекриття металічної поверхні шаром кристалів, що утруднює випаровування та перенесення будівельного матеріалу кристалів.

Хімічний склад та структура отриманих кристалів

Для визначення хімічного складу отримані кристали вилучали з поверхні електрода, розмелювали та досліджували методами рентгеноструктурного аналізу. Положення піків інтенсивності на дифракційній картині (рис.3) однозначно вказує, що основним компонентом отриманого матеріалу є триоксид молибдену з орторомбічною кристалічною ґраткою - так звана фаза $\alpha\text{-MoO}_3$. Також на дифрактограмі

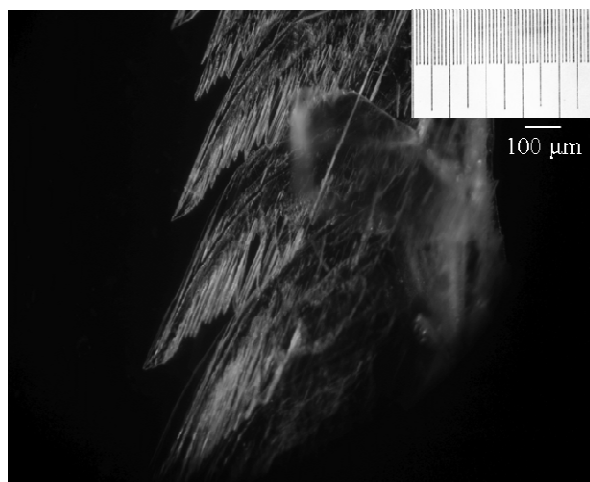
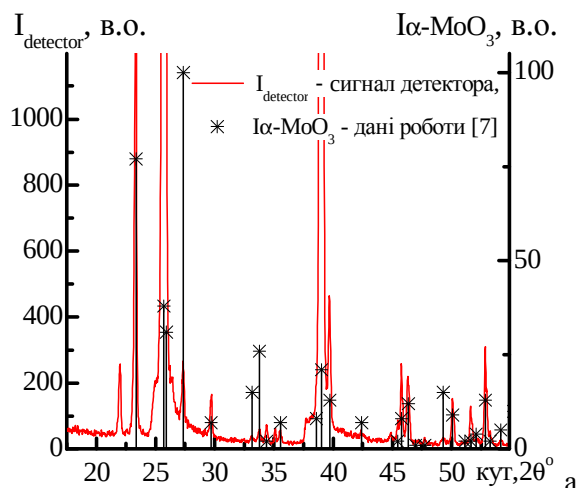
спостерігаються сліди фази $\beta\text{-MoO}_3$ з моноклінною кристалічною структурою.

Рентгеноструктурний аналіз отриманих кристалів ускладнюється орієнтаційними ефектами, які обумовлюється досконалою спаяністю фази $\alpha\text{-MoO}_3$ по (010). Так навіть після розмелювання в матеріалі зберігаються виділені напрямки, через що відносна інтенсивність дифракційних піків (а саме їх зростання) (hkl)-020, 040, 060 відрізняється від даних роботи [7].

Оптична мікроскопія отриманих кристалів

Осаджені на бічній поверхні кристали формують крихкий ажурний шар навколо бічної поверхні нижнього електрода (анода), який складається з довільно орієнтованих, блискучих, прозорих призм або пластинок (рис.3, б) розміром до 3 мм.

Мікроскопія даних кристалів вказує на наявність характерних, подібних до пташиного пір'я, структур (рис.4). Імовірно, це структури направленого росту кристалів із газової фази.



б

Рис.3 Рентгеноструктурний аналіз (а) та структури спрямованого росту кристалів під мікроскопом (б)

Кожне "перо" складається із щільно упакованих паралельних голок (рис.3, б). Імовірно, саме на вістрях таких голок відбувається захоплення та приєднання часток будівельного матеріалу із парової фази.

Такі голки подібні до мікрострижнів, описаних в роботі [1], але на відміну від них, орієнтовані в одному напрямку – напрямку росту кристалу.

Висновки

Запропоновано електродугове плазмове джерело для формування кристалів MoO_3 безпосередньо з металічного молібдену при атмосферному тиску.

Список використаних джерел

1. Li W. Vapor-Transportation Preparation and Reversible Lithium Intercalation/ Deintercalation of $\alpha\text{-MoO}_3$ Microrods / W. Li, F. Cheng, Z.Tao, J. Chen // *J. Phys. Chem. B.* – 2006. – **110** – P.119-124.
2. Mariotti D. Monoclinic $\beta\text{-MoO}_3$ nanosheets produced by atmospheric microplasma: application to lithium-ion batteries // D. Mariotti, H. Lindstrom, A. Chandra Bose, K. Ostrikov // *Nanotechnology.* – 2008. – **19**. – P.5976-5982.
3. Li Y.B. Field emission from MoO_3 nanobelts / Y.B. Li, Y. Bando, D. Golberg, K. Kurashima// *Appl. Phys. Lett.* – 2002. – **81**. – №26. P.5048-5050.
4. Comini E. Carbon monoxide response of molybdenum oxide thin films deposited by different techniques / E. Comini, G Faglia, G. Sberveglieri, C. Cantlini, M Passacantando, S Santucci, Y. Li, W Wlodarski, W. Qu // *Sensors and Actuators B.* – 2000. – **68**. – P.168-174.
5. Queeney K.T. Site-Selective Surface Reactions:□ Hydrocarbon Oxidation Processes on Oxidized $\text{Mo}(110)$ / K.T. Queeney, C.M. Friend // *J. Phys. Chem. B.* – 2000. – **104**. – №26. –P.409-415.
6. Vahldiek F.W. Growth and microstructure of molybdenum oxide / F.W. Vahldiek // *Journal of the Less-Common Metals.* – 1968. – **16**. – P.351-359.
7. Powder diffraction files. PDF-2 Release 2013. JCPDS-ICDD [База даних] // The International Centre for Diffraction Data. – accessed 9.05.2014.
<http://www.icdd.com/products/pdf2.htm>.

Рентгеноструктурний аналіз вказує, що переважно формуються кристали $\alpha\text{-MoO}_3$ з орторомбічною структурою, але спостерігаються також сліди моноклінної структури $\beta\text{-MoO}_3$.

Кристали являють собою прозорі блискучі призми та пластинки розміром до 3 x 3 мм. По краях пластинок спостерігаються характерні структури росту кристалів у вигляді щільно упакованих голок, подібних до пташиного пір'я.

Має місце самоузгоджений процес окислення металічного молібдену, випаровування шару оксидів та перенесення продуктів випаровування в зону росту кристалів за рахунок конвективних потоків та росту кристалів з парової фази.

References

1. LI W., CHENG F., TAO Z. & CHEN J. (2006) Vapor-transportation preparation and reversible lithium intercalation/deintercalation of $\alpha\text{-MoO}_3$ microrods *J. Phys. Chem. B.* 110. P.119-124.
2. MARIOTTI D., LINDSTROM H., CHANDRA BOSE A. & OSTRIKOV K. (2008) Monoclinic $\beta\text{-MoO}_3$ nanosheets produced by atmospheric microplasma: application to lithium-ion batteries. *Nanotechnology.* 19. P.5976-82.
3. LI Y.B., BANDO Y., GOLBERG D. & KURASHIMA K. (2002) Field emission from MoO_3 nanobelts. *Appl. Phys. Lett.* 81 (26). P.5048-5050.
4. COMINI E., FAGLIA G., SBERVEGLIERI G., CANTLINI C., PASSACANTANDO M., SANTUCCI S., LI Y., WLODARSKI W. & QU W. (2000) Carbon monoxide response of molybdenum oxide thin films deposited by different techniques. *Sensors and Actuators B.* 68. P.168-174.
5. QUEENEY K.T. & FRIEND C.M. (2000) Site-Selective Surface Reactions:□ Hydrocarbon Oxidation Processes on Oxidized $\text{Mo}(110)$. *J. Phys. Chem. B.* 104. P.409-415.
6. VAHLDIEK F.W. (1968) Growth and microstructure of molybdenum oxide. *Journal of the Less-Common Metals.* 16. P. 351-359.
7. THE INTERNATIONAL CENTRE FOR DIFFRACTION DATA. (2013) *Powder diffraction files. Pdf-2* [Online] Available from: <http://www.icdd.com/products/pdf2.htm>. [Accessed: 9th May 2014].

Надійшла до редколегії 13.05.14

УДК 621.37, 004.02, 004.94.

Павлов Д.І.¹, студ.,
Прокопенко О.В.¹, канд. фіз.-мат. наук,
Цвірко Ю.А.², канд. фіз.-мат. наук,
Павлов І.Л.², начальник сектора.

Розробка підсилювача НВЧ діапазону на основі нітрид-галієвих напівпровідникових структур

¹ Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 03127, м. Київ, пр-т. Глушкова 4Г,
e-mail: pavlov.d10@gmail.com
² Науково-дослідний інститут «Оріон», 03075, м. Київ, вул. Ежена Пот'є 8А,
e-mail: pavlov10252@yahoo.com

Pavlov D.I.¹, stud.,
Prokopenko O.V.¹, Ph.D.,
Cvirko Yu.A.², Ph.D.,
Pavlov I.L.², chief of sector.

Development of microwave amplifier based on gallium nitride semiconductor structures

¹ Taras Shevchenko National University of Kyiv, 4G, Acad. Glushkov Ave., 03127, Kyiv, Ukraine
e-mail: pavlov.d10@gmail.com
² Scientific and research institute «Orion», 03075, Kyiv, Ezhena Pot'je st., 8A,
e-mail: pavlov10252@yahoo.com

Методами числового аналізу проведено моделювання мікрохвильових характеристик підсилювача НВЧ діапазону на основі нітрид-галієвих (НГ) напівпровідникових структур. Показано, що при побудові пристрою на основі НГ НЕМТ-транзисторів, можна досягти коефіцієнта підсилення близько 50 дБ при розмірах підсилювача $27 \times 18 \times 5.5$ мм³.

Ключові слова: підсилювач НВЧ діапазону, нітрид-галієва напівпровідникова структура, НЕМТ-транзистор, коефіцієнт підсилення.

Microwave properties of microwave amplifier based on gallium nitride (GN) semiconductor structures has been calculated numerically. We proposed the method of numerical calculation of device. This method is accurately sets the value of its characteristics depending on the elements that are used in design of amplifier. It is shown that the device based on GN HEMT-transistors could have amplification factor about 50 dB, while its sizes are $27 \times 18 \times 5.5$ mm³. Also was provided the absolute stability an amplifier in the whole operating frequency range. It is quite important when using this type of amplifiers in different conditions of exploitation and various fields of use the radioelectronic equipment.

Keywords: microwave amplifier, gallium nitride semiconductor structure, HEMT-transistor, amplification factor.

Статтю представив к.ф.-м.н. Савенков С.М.

Вступ

Транзисторний НВЧ підсилювач є одним з найважливіших і самих розповсюджених базових елементів сучасних радіоелектронних систем (РЕС) мікрохвильового діапазону. Не зважаючи на те, що на сьогодні запропоновано значну кількість схем транзисторних НВЧ підсилювачів [1], а також методик їх розрахунку [2], проблема проектування цього класу пристроїв залишається вельми актуальною. Це пов'язано з:

- великою різноманітністю вимог, які висуваються до характеристик сучасних РЕС і відповідно, до параметрів підсилювальних пристроїв, які входять до їхнього складу;
- з освоєнням нових сфер використання

радіоелектронної апаратури (наприклад, оптоволоконні системи зв'язку, мобільний зв'язок, тощо);

- розширенням робочого частотного діапазону НВЧ підсилювачів;

- появою нових типів підсилювальних елементів, тощо.

При цьому в процесі проектування РЕС часто виникає ситуація, коли існуючі серійні зразки і типові схеми НВЧ підсилювачів не задовольняють поставленим вимогам, чи не є оптимальними для певної конкретної системи.

В якості підсилювальних елементів у діапазоні НВЧ частіш за все використовують польові транзистори (ПТ) у схемі включення зі спільним витоком (СВ), серед яких широке

використання знаходять ПТ на основі технології High-electron-mobility transistor (HEMT) [3]. Цей тип транзисторів має кращі основні робочі параметри (діапазон робочих частот, коефіцієнт підсилення та нерівномірність амплітудно-частотної характеристики (АЧХ) у смузі робочих частот, коефіцієнт шуму, вихідна потужність, рівень нелінійних спотворень, рівні узгодження (коефіцієнти відбиття) на вході і виході, стійкість, тощо) у порівнянні з традиційними напівпровідниковими транзисторами [3-5].

Особливість використання HEMT-транзисторів у НВЧ підсилювачах викликає необхідність врахування сильної частотної залежності їх основних параметрів, тому, для забезпечення бажаних характеристик, у підсилювальних каскадах використовують додаткові пасивні узгоджувальні кола (УК). За допомогою УК відбувається узгодження транзисторів зі стандартним трактом передачі сигналу чи між собою, вирівнювання АЧХ у смузі робочих частот, забезпечення оптимального режиму роботи транзистора, а також забезпечення стійкості підсилювача в усьому робочому діапазоні частот.

Метою даної роботи є розробка НВЧ підсилювача на основі GaN-транзисторів [3], що має коефіцієнт підсилення не менше ніж 45 дБ у діапазоні частот 2.7–3.5 ГГц, вихідну потужність не менше 70 Вт, нерівномірність підсилення не гірше 3 дБ. З технологічних міркувань розміри підсилювача не повинні перевищувати $27 \times 18 \times 5.5 \text{ мм}^3$.

Блок-схема НВЧ підсилювача

Враховуючи вимоги щодо достатньо високого коефіцієнту підсилення підсилювача (більше 45 дБ), його зручно розробляти за багатокаскадною схемою. В даній роботі підсилювач побудовано за трьохкаскадною схемою. У першому каскаді підсилення використано транзистор з максимальною вихідною потужністю 38 дБм (6 Вт). Другий каскад реалізований на транзисторі з вихідною потужністю 44 дБм (25 Вт). Третій каскад реалізований на транзисторі з вихідною потужністю 49,3 дБм (88 Вт).

Базова блок-схема, яка відображає принцип реалізації кожного каскаду підсилювача, показана на рис. 1. На цій схемі узгоджувальне коло УК1 забезпечує узгодження вхідного імпедансу Z_0 з імпедансом транзистора, а коло

УК2 – узгодження транзистора з вихідним імпедансом Z_0 ($Z_0 = 50 \text{ Ом}$).

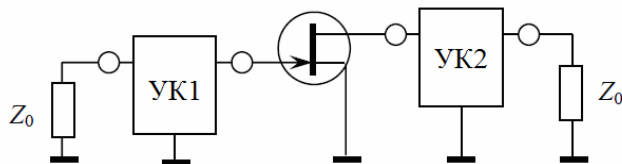


Рис.1. Базова схема окремого каскаду підсилювача потужності.

Так як важливим фактором є отримання максимальної вихідної потужності кожного каскаду, необхідно, по-перше, забезпечити узгодження за входом та виходом транзистора з метою отримання лінійної характеристики в заданому діапазоні частот і оптимального узгодження за виходом каскаду, по-друге, провести аналіз абсолютної стійкості окремого підсилювального каскаду та підсилювача в цілому [1].

Схема реалізується так, щоб на верхній робочій точці забезпечити комплексно-сполучне узгодження (по можливості) вхідного опору транзистора з виходом УК1. Це можна забезпечити за допомогою фільтру низьких частот (ФНЧ) n-порядку. Вибір порядку фільтру визначається відносною смугою узгодження. Вхідний імпеданс HEMT-транзистора має ємнісний характер, тому ФНЧ повинен бути комбінованого типу (з ємністю на вході та з індуктивністю на виході) – див. рис. 2.

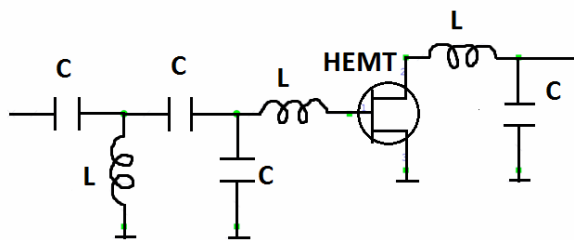


Рис. 2. Електрична схема узгоджувальних кіл для окремого каскаду підсилювача.

Щоб узгодити вхід наступного каскаду з виходом попереднього використовується Т-образний фільтр високої частоти (ФВЧ) 3-го порядку. При цьому розв'язуються три задачі:

- ◆ гальванічної розв'язки транзистора;
- ◆ забезпечення оптимального узгодження між каскадами;
- ◆ забезпечується абсолютна стійкість підсилювача загалом, на частотах нижче робочої аж до частоти 0 Гц. Це дуже важливо, так як транзистори на низьких частотах мають дуже великий коефіцієнт передачі і

потрібно використовувати ФВЧ, щоб не знижувати коефіцієнт підсилення.

Для аналізу стійкості прийнято використовувати формулу [1]

$$k = \frac{1 + |\Delta|^2 - |s_{11}|^2 - |s_{22}|^2}{2|s_{12}s_{21}|}, \quad (1)$$

де s_{11} – вхідний коефіцієнт відбиття; s_{22} – коефіцієнт відбиття на виході; де $\Delta = s_{11}s_{22} - s_{12}s_{21}$; s_{12} – коефіцієнт передачі з виходу на вхід; s_{21} – коефіцієнт передачі з входу на вихід.

Активний чотириполюсник є безумовно стійким на заданій частоті, якщо виконується наступна система нерівностей [2]

$$\begin{cases} k \geq 1 \\ |\Delta| \leq 1 \end{cases}, \quad (2)$$

Якщо хоча б одна з умов (2) порушується підсилювач буде умовно стійким (потенційно нестійким), і його підсилення при відповідних навантаженнях може бути нескінченно великим чи зовсім перевищити поріг генерації.

Методика числового моделювання мікрохвильових параметрів НВЧ підсилювача

На даний час не існує єдиного програмного комплексу розрахунку такого роду задач, як повний аналіз мікрохвильових властивостей підсилювача з урахуванням усіх його особливостей (у т.ч. топології схеми), зокрема, розрахунку коефіцієнту підсилення, синтезу кіл, дослідження впливу всіх елементів схеми на вихідні характеристики. Враховуючи цей факт, для реалізації даної задачі було використано два відомих пакети прикладних програм САІР, а саме MWO AWR та HFSS.

Процедуру моделювання можна умовно поділити на 3 етапи, які опишемо нижче.

1-й етап. За допомогою пакету прикладних програм MWO AWR синтезуємо узгоджувальні кола і підсилювач загалом в еквівалентних елементах. Проводимо розрахунок, замінюючи частину еквівалентних елементів (якщо можна використати такі) на s-параметри чіп-резисторів, -конденсаторів, -індуктивностей (усі елементи – ідеалізовані, безвивідні). Далі, виконуємо синтез, додаючи реальну топологію.

Зауважимо, що MWO AWR не дає можливість врахувати взаємний вплив елементів підсилювача виконаного в одному герм-об'ємі, а також виконати розрахунок об'ємних елементів.

2-й етап. Для коректного розрахунку

об'ємних елементів і впливу взаємних елементів підсилювача необхідно провести повний електродинамічний аналіз підсилювача за допомогою програми 3D моделювання HFSS. У цій програмі задається вся топологія схеми підсилювача з точною деталізацією виводів пасивних елементів і дротів, які з'єднують транзистори з топологією. Кожен пасивний елемент в HFSS задається двома портами. Транзистори, для яких наведені s-параметри, до площин відліку повністю характеризуються виходячи з можливостей пакету HFSS (тобто, задаються параметри підкладки, металізації, вихідних електродів), а площини відліку також задаються портами.

Таким чином, у HFSS розв'язується повна електродинамічна задача для n-портової матриці.

Слід відмітити, що HFSS дає можливість аналізувати тільки пасивну частину схеми без s-параметрів чіп-елементів.

3-й етап. Після аналізу в пакеті HFSS n-портова матриця експортується до MWO AWR, до виводів матриці віртуально підключаються відповідні елементи (які були задані) і проводиться повний аналіз схеми (рис. 3). За результатами аналізу вносяться корекції до топології схеми, параметрів чіп-елементів і параметрів об'ємних елементів. Після чого повторюється процедура розрахунку, що описана вище, поки не буде досягнутий бажаний оптимальний результат.

Результати та їх аналіз

Аналіз побудованого підсилювача показано на рис. 4. На цьому рисунку тонка лінія відповідає коефіцієнту s_{11} ; пунктирна лінія – коефіцієнт k ; точкова лінія – коефіцієнт s_{22} ; штрих-пунктирна лінія – B_1 – додатковий (узагальнений) коефіцієнт стійкості, що описується формулою

$B_1 = 1 + |s_{11}|^2 - |s_{22}|^2 - |\Delta|^2$, та повинен задовольняти умову загальної стійкості $B_1 > 0$; товста лінія – коефіцієнт підсилення.

З графіку видно, що загальне підсилення, яке можна отримати для даної схеми НВЧ підсилювача, порядку 50 дБ (товста суцільна крива). Також видно, що виконується умова (2), а отже підсилювач є абсолютно стійкий у заданому діапазоні частот. Одержаний результат, по-перше, задовольнив наші очікування, по-друге демонструє, що використаний метод моделювання є досить продуктивним для розрахунку складних НВЧ схем. Тому, надалі,

використовуючи елементи з кращими характеристиками та застосовуючи більшу кількість каскадів можна отримати ще більший коефіцієнт підсилення. Ця задача є актуальною, оскільки зараз висуваються все вищі вимоги до характеристик сучасних РЕС і, відповідно, підсилювальних пристроїв, які входять до їхнього складу.

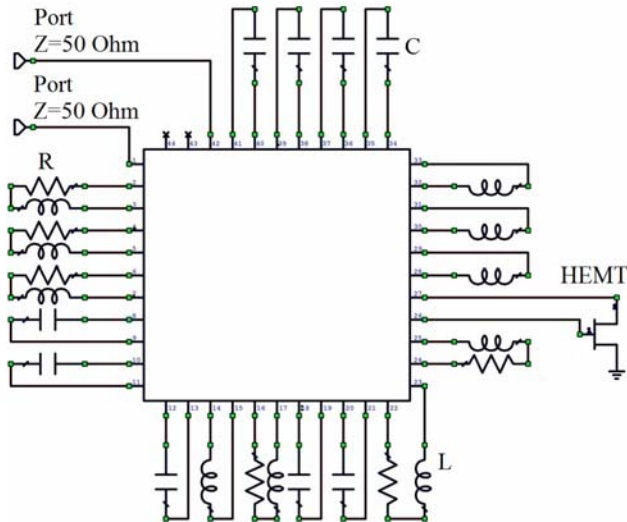


Рис.3. Схема представлення окремого каскаду підсилювача на кінцевому етапі моделювання.

Висновки

У результаті розробки та числового аналізу мікрохвильових властивостей підсилювача НВЧ

діапазону на основі GaN HEMT-транзисторів (які мають кращі частотні та температурні властивості ніж звичайні транзистори) показано, діапазону на основі GaN HEMT-транзисторів (які що можна одержати коефіцієнт підсилення порядку 50 дБ для випадку трьохкаскадної схеми підсилювача навіть за умови малих розмірів підсилювача ($27 \times 18 \times 5.5$ мм³). В роботі проілюстровано застосування оригінальної багатоетапної методики моделювання мікрохвильових властивостей підсилювача, яка дозволяє проводити аналіз та синтез топології підсилювача, а також оптимізацію його робочих характеристик. Отримані результати важливі для розробки високоефективних підсилювачів НВЧ діапазону.

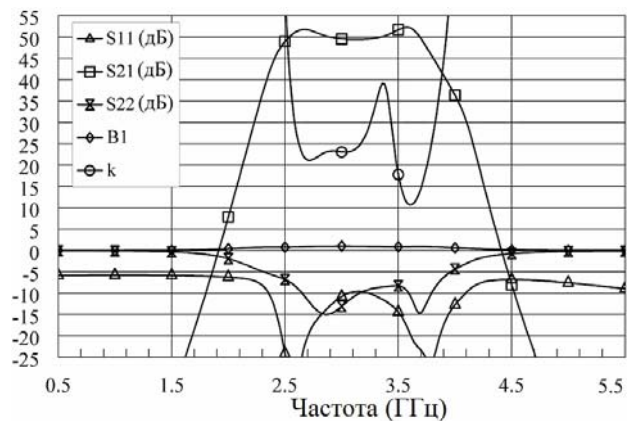


Рис. 4. Результати розрахунку основних параметрів підсилювача.

Список використаних джерел

1. Шварц Н. Усилители СВЧ на полевых транзисторах. – М.: Радио и связь. – 1987. – 200с.
2. Бабак Л.И. Автоматизированное проектирование и разработка транзисторных широкополосных СВЧ усилителей – Т.: Научно-производственная фирма «Микран» - 2011. – 384 с.
3. Васильев А.Г., Колковский Ю.В., Концевой Ю.А. СВЧ транзисторы на широкозонных полупроводниках. – М.: Техносфера – 2011. – 256 с.
4. Борисенко В.Е., Воробьева А.И., Уткина Е.А. Нанoeлектроника. – М.: БИНОМ – 2009. – 223 с.
5. Данилин В., Жукова Т., и др. Транзистор на GaN пока самый «крепкий орешек» // Электроника: Наука, Технология, Бизнес. – 2005. – 4. – С.20-29.

References

1. SCHWARTZ N. (1987). *Usiliteli SVCH na polevyih tranzistorah*. Moskva: Radio i svyaz'.
2. BABAK L. (2011). *Avtomatizirovannoe proektirovanie i razrabotka tranzistornyih shyiropolosnyih SVCH usiliteley*. Tomsk: Nauchno-proizvodstvennaya firma «Mikran».
3. VASIL'YEV A., KOLKOVSKIY YU., KONTSEVOY YU. (2011). *SVCH tranzistoryi na shyiropozonnyih poluprovodnikah*. Moskva: Tehnosfera.
4. BORISENKO V., VOROB'YEVA A., UTKINA E. (2009). *Nanoelektronika*. Moskva: BINOM.
5. DANILIN V., ZHUKOVA T. et al. (2005). *Tranzistor na GAN пока samyy «krepiy oreshkek»*. *Elektronika: Nauka, Tehnologiya, Biznes*. 4(5). p.20-29.

Надійшла до редколегії 18.03.14.

УДК 535.345.67

Первак Ю.О., д.ф.-м.н., проф.

Yu.O. Pervak, Dr. Sci.

Широкопasmовe дисперсійне дзеркало з негативною дисперсією групової затримки

Wide band dispersive mirror with negative group delay dispersion

Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, пр-т.
Глушкова 4г,
e-mail: yupervak@univ.kiev.ua

Taras Shevchenko National University of Kyiv,
03680, Kyiv, Glushkova st., 4g,
e-mail: yupervak@univ.kiev.ua

Досліджено особливості структури дисперсійного дзеркала з робочим діапазоном від 750 до 850 нм, в якому дзеркало має лінійну залежність групової затримки (GD) і негативну дисперсію групової затримки (GDD). Середній рівень GDD дорівнює -800 фс^2 . Дзеркало утворено нанесенням на скляну підкладку багатошарової структури (86 шарів) з оксидів танталу і кремнію, що чергуються. Повна фізична товщина багатошарової структури дорівнює 10053 нм. Аналіз просторово-спектрального розподілу електричного поля свідчить про наявність в структурі семи резонаторів, з яких три утворені окремими шарами з високим показником заломлення, а чотири - не менш як трьома сусідніми шарами, сумарна оптична товщина яких близька половині довжини хвилі середини робочого діапазону.

Ключові слова: дисперсійне дзеркало, негативна дисперсія групової затримки

The features of structure of dispersive mirror with the operating range from 750 to 850 nm were investigated. A mirror has linear dependence of group delay (GD) and negative group delay dispersion (GDD). The middle level of GDD equals -800 fs^2 . A mirror was formed by deposited multi-layer structure (86 layers) from the oxides of tantalum and silicon, that alternate on the glass substrate. The complete physical thickness of multi-layer structure equals 10053 nm. The analysis of spatially-spectral distribution of electric-field testifies to the presence in the structure of seven resonators, from which three is formed separate layers with the high index of refraction, and four - no less as by three nearby layers the total optical thickness of which is near the half of wave-length middle of working range.

Key words: dispersive mirror, negative group delay dispersion

Статтю представив д.техн.н., проф. Погорілий С.Д.

Прогрес в технології дисперсійних дзеркал (ДД) [1-5] дозволив подолати проблему компенсації дисперсії при генерації фемто- і аттосекундних імпульсів [6, 7]. Оптичні елементи на основі ДД забезпечують точний контроль GD і GDD у різних частотних діапазонах, що дуже важливо при створенні фемтосекундних лазерів. Однак, отримання необхідного для компенсації дисперсії високого рівня негативної GDD часто вимагає використовувати схеми компенсаторів, що налічують десятки ДД. Для генерації надкоротких світлових імпульсів потрібно суттєво розширювати спектральний діапазон точного контролю значень GD/GDD. Спектральний діапазон довжин хвиль в дві октави, дозволяє генерувати імпульси тривалістю менше 2 фс у видимому діапазоні [4]. Саме тому, проектування ДД з бажаними спектральними характеристиками (відбиття та

GDD), дуже важливе у фізиці надкоротких імпульсів.

Широкодіапазонна оптика на основі ДД з великими від'ємними значеннями GDD використовується для компенсації GDD, накопиченої імпульсом при проходженні через дисперсійні середовища, оптичні підсилювачі та ін. Чим ширший робочий спектральний діапазон, тим менше середнє значення GDD може бути отримано. Це обумовлено принципом невизначеності і тісно пов'язане з фазовими властивостями багатошарових структур [5]. Нещодавно отримані результати [8] дозволили оцінити максимально досяжні значення GDD, що відповідають одному відбиттю. Проте поза увагою залишилися особливості будови таких ДД.

Тому в даній роботі досліджено особливості структури ДД з максимально високою негатив-

вною GDD на прикладі ДД з робочим діапазоном від 750 до 850 нм, в якому ДД має лінійну залежність групової затримки (GD) і максимальну негативну дисперсію групової затримки (GDD). Дзеркало утворено нанесенням на скляну підкладку багат шарової структури (86 шарів) з оксидів

танталу (H) і кремнію (L), що чергуються. Повна фізична товщина структури дорівнює 10053 нм. Оптичні товщини на довжині хвилі середини робочого діапазону ($\lambda_0 = 800$ нм) усіх 86 шарів структури показано на рис.1.

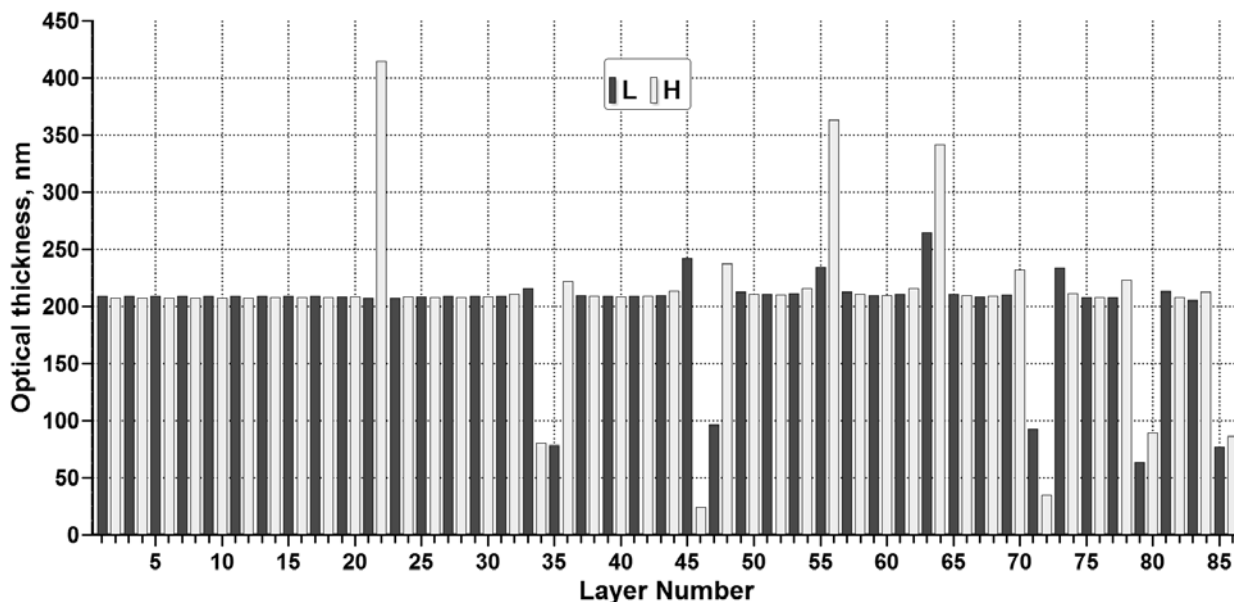


Рис.1. Оптичні товщини шарів (нумерація шарів починається від підкладки).

Процедура отримання конструкції ДД з використанням програмного пакету Optilayer [9, 10] детально описана раніше [11]. Критерії пошуку конструкції визначалися умовами отримання максимального негативного значення GDD і відбиван-

ня (середнє) не менше 99% для p -поляризованого світла при куті падіння 10° . Спектральна залежність відбивання R_p досліджуваного ДД показана на рис.2, а відповідні спектральні залежності GD і GDD на рис.3.

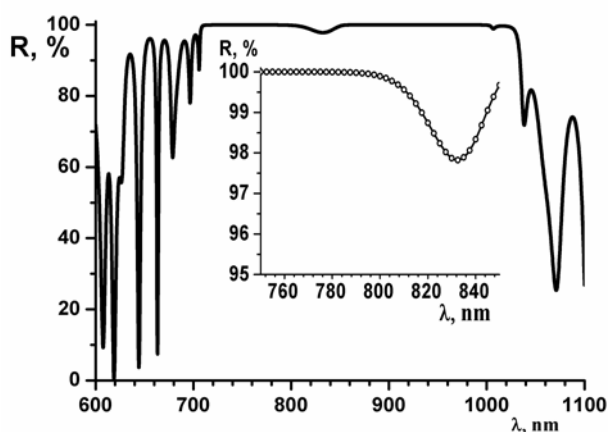


Рис.2. Спектральна залежність відбивання R_p при куті падіння 10° .

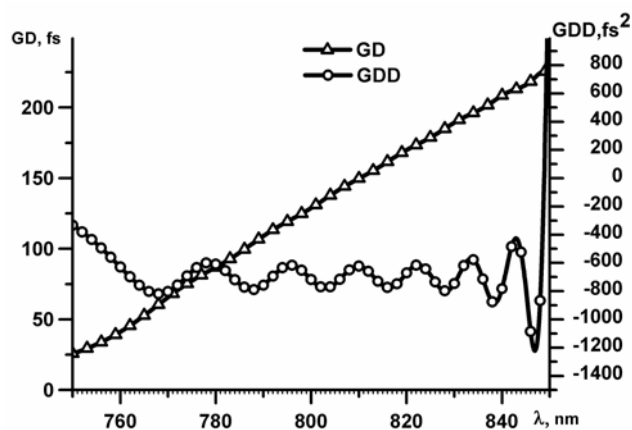


Рис.3. Спектральна залежність GD і GDD при куті падіння 10° .

Аналіз просторово-спектрального розподілу електричного поля всередині багат шарової структури (рис.4) свідчить про наявність в ній семи резонаторів, в яких поле концентрується.

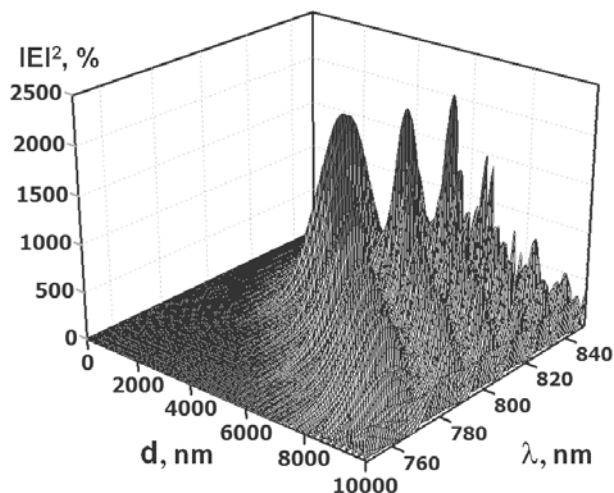


Рис.4. Просторово-спектральний розподіл електричного поля ДД (просторова координата d відраховується від підкладки)

Таблиця 1

Характеристики резонаторів

Номер резонатору	Номер шару	Матеріал	Оптична товщина шару, нм	Оптична товщина резонатору, нм
1	81	SiO ₂	213,470	366,478
	80	Ta ₂ O ₅	89,883	
	79	SiO ₂	63,125	
2	73	SiO ₂	233,757	361,602
	72	Ta ₂ O ₅	35,231	
	71	SiO ₂	92,614	
3	64	Ta ₂ O ₅	343,399	343,399
4	56	Ta ₂ O ₅	365,157	365,157
5	47	SiO ₂	96,728	363,676
	46	Ta ₂ O ₅	24,448	
	45	SiO ₂	242,5	
6	35	SiO ₂	78,118	374,653
	34	Ta ₂ O ₅	80,829	
	33	SiO ₂	215,706	
7	22	Ta ₂ O ₅	417,059	417,059

Перший резонатор (нумерація резонаторів починається від зовнішнього середовища), найближчий по поверхні ДД, утворений 79, 80 і 81 шарами. З рис.1 видно, що усі парні шари мають вищий показник заломлення (Ta₂O₅), ніж непарні (SiO₂). Отже центральний шар першого резонатору має високий показник заломлення. Оптична товщина 79, 80 і 81 шарів дорівнює 63,125; 89,883 і 213,470 нм, відповідно. Сумарна товщина цих трьох шарів дорівнює 366,478 нм, що трохи менше половини довжини хвилі середини ро-

бочої області ДД. Комбінацію 79, 80 і 81 шарів можна розглядати як деякий еквівалентний шар з відносно низьким показником заломлення. Це підтверджується характером просторово-спектрального розподілу електричного поля. Електричне поле концентрується в 81 шарі поблизу межі 80 і 81 шарів. Мінімальні значення поля досягаються на інтерфейсах 78 – 79 і 81- 82 шарів.

Другий резонатор утворений 71, 72 і 73 шарами. Тут центральний шар має високий показник заломлення, але він дуже тонкий. Комбінація 71, 72 і 73 шарів, як і в першому резонаторі, еквівалентна одному шару з низьким показником заломлення. Сумарна товщина цих трьох шарів дорівнює 361,602 нм, що теж трохи менше половини довжини хвилі середини робочої області ДД. Відповідні значення параметрів для усіх резонаторів зведено в таблиці.

Також утворені з трьох шарів п'ятий і шостий резонатори. Вони також можуть бути представлені еквівалентними шарами з низьким показником заломлення. П'ятий резонатор утворений 45, 46 і 47 шарами. Електричне поле концентрується в 45 шарі поблизу інтерфейсу 45 – 46 шарів. В шостому резонаторі поле концентрується на інтерфейсі 33 – 34 шарів.

Третій, четвертий і сьомий резонатор утворені 64, 56 і 22 шарами, відповідно. Ці шари мають високий показник заломлення (Ta₂O₅) і електричне поле концентрується на їх інтерфейсах та мінімальне всередині. Оптична товщина резонаторів збільшується в напрямку до підкладки.

Електричне поле довгохвильових компонентів випромінювання концентрується в усіх семи резонаторах, в той час як електричне поле короткохвильових компонентів випромінювання концентрується в резонаторах, найближчих до поверхні, що контактує з зовнішнім середовищем. Це забезпечує більшу групову затримку довгохвильових компонентів електромагнітного поля відносно короткохвильових і негативну дисперсію групової затримки (див. рис.3).

Потрібно відзначити, що принциповою відмінністю досліджуваного ДД є саме наявність в його конструкції пів хвильових резонаторів. І саме тому такі конструкції дзеркал називають дисперсійними дзеркалами, на відміну від традиційних чирпованих дзеркал [1], які вперше дозволили отримати негативну дисперсію групової затримки і вирішити проблему компенсації дисперсії надкоротких світлових імпульсів. В традиційних чирпованих дзеркалах не було півхвильових резонаторів, а збільшення GD з довжиною

хвилі і значно менша, ніж в ДД негативна GDD досягалися за рахунок поступового збільшення оптичної товщини шарів від зовнішнього середовища до підкладки.

Таким чином, півхвильові резонатори, введені в звичайну чверть хвильову стопу дозволяють, завдяки ефекту накопичення енергії в резонато-

рах, отримувати максимальну високу негативну дисперсію групової затримки. При цьому півхвильовий резонатор утворюється як одним шаром, так і комбінацією з трьох шарів. А сумарна оптична товщина комбінації трохи менша половини довжини хвилі середини робочого спектрального діапазону дисперсійного дзеркала.

Список використаних джерел

1. Szipocs R. Chirped multilayer coatings for broadband dispersion control in femtosecond lasers / R. Szipocs, K. Ferencz, C. Spielmann, F. Krausz // *Opt. Lett.* – 1994. – Vol.19. – N.3. – P. 201–203.
2. Pervak V. High-dispersive mirrors for femtosecond lasers / V. Pervak, C. Teisset, A. Sugita, et al. // *Opt. Express.* – 2008. – Vol.16. – N.14. – P.10220–10233.
3. Pervak V. High-dispersive mirrors for high power applications / V. Pervak, O. Pronin, O. Razskazovskaya, et al. // *Opt. Express.* – 2012. – Vol.20. – N.4. – P.4503–4508.
4. Pervak V. Recent development and new ideas in the field of dispersive multilayer optics / V. Pervak // *Appl. Opt.* – 2011. – Vol.50. – N.9. – P.C55–C61.
5. Nohadani O., Birge J.R., Kartner F.X., Bertsimas D.J. Robust chirped mirrors / O. Nohadani, J.R. Birge, F.X. Kartner, D.J. Bertsimas // *Appl. Opt.* – 2008. – Vol.47. – N.14. – P.2630–2636.
6. Pervak V. Robust synthesis of dispersive mirrors / V. Pervak, M.K. Trubetskov, A.V. Tikhonravov // *Opt. Express.* – 2011. – Vol.19. – N.3. – P.2371–2380.
7. Krausz F. Attosecond physics / F. Krausz // *Rev. Mod. Phys.* – 2009. – Vol.81. – N.1. – P.163–234.
8. Wirth A. Synthesized light transients / A. Wirth, M.T. Hassan, V. Pervak, et al. // *Science.* – 2011. – Vol.334. – P.195–200.
9. Tikhonravov A.V. Phase properties of multilayers / A.V. Tikhonravov, B.W. Baumeister, K.V. Popov // *Appl. Opt.* – 1997. – Vol.36. – N.19. – P.4382–4392.
10. Tikhonravov A.V. OptiLayer software / A.V. Tikhonravov., M.K. Trubetskov // <http://www.optilayer.com>.
11. Pervak V. Empirical study of the group delay dispersion achievable with multilayer mirrors / V. Pervak, V. Fedorov, Yu.A. Pervak, M.K. Trubetskov // *Opt. Express.* – 2013. – Vol.21. – N.15. – P.18311–18316.

References

1. SZIPOCS, R. et al.(1994) Chirped multilayer coatings for broadband dispersion control in femtosecond lasers. *Opt. Lett.* 19 (3). p. 201–203.
2. PERVAK, V. et al. (2008) High-dispersive mirrors for femtosecond lasers. *Opt. Express.* 16 (14). p.10220–10233.
3. PERVAK, V. et al.(2012) High-dispersive mirrors for high power applications. *Opt. Express.* 20 (4). p.4503–4508.
4. PERVAK, V. (2011) Recent development and new ideas in the field of dispersive multilayer optics. *Appl. Opt.* 50 (9). p. C55–C61.
5. NOHADANI, O. et al. (2008) Robust chirped mirrors. *Appl. Opt.* 47 (14). p.2630–2636.
6. PERVAK, V. & Trubetskov, M., Tikhonravov, A. (2011) Robust synthesis of dispersive mirrors. *Opt. Express.* 19. – N.3. – P.2371–2380.
7. KRAUSZ, F. (2009) Attosecond physics. *Rev. Mod. Phys.* 81 (1). p.163–234.
8. WIRTH, A. et al. (2011) Synthesized light transients. *Science.* 334. p.195–200.
9. TIKHONRAVOV, A.V. & BAUMEISTER, B.W. POPOV, K.V. Phase properties of multilayers. *Appl. Opt.* 36 (19). p.4382–4392.
10. TIKHONRAVOV A.V. & TRUBETSKOV M.K. OptiLayer software. <http://www.optilayer.com>.
11. PERVAK, V. et al.(2013) Empirical study of the group delay dispersion achievable with multilayer mirrors. *Opt. Express.* 21 (15). p.18311–18316.

Надійшла до редколегії 25.03.14

СУЧАСНА ФІЗИКА

УДК 539.199, 539.21

Булавін Л.А. д.ф.-м.н., проф.,
Забашта Ю.Ф. д.ф.-м.н., проф.,
Вергун Л.Ю. к.ф.-м.н., н.с.,
Загородня О.А. к.ф.-м.н., м.н.с.,
Шапар Е.О. студ.

Конформаційні зміни ДНК при гіпертермії

Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 01601, м. Київ, вул.
Володимирська 64/13,
e-mail: vergunliena@rambler.ru

L.A. Bulavin, Dr. Sci., Prof.,
Yu.F. Zabashta, Dr. Sci., Prof.,
L.Yu. Vergun, PhD, Sci. Res.,
O. A. Zagorodnia, PhD, Sci. Res.,
Y. O. Shapar, stud

DNA Conformational Transformations under Hyperthermia

Taras Shevchenko National University of Kyiv,
01601, Kyiv, Volodymyrska st. 64/13,
e-mail: vergunliena@rambler.ru

Пропонується молекулярний механізм перетворень подвійної спіралі ДНК в умовах гіпертермії. Експериментально досліджуються затверділі трьохкомпонентні рідинні системи «NaCl-дистильована вода-сухий препарат ДНК». Показано, що плівки, сформовані при температурах 20°C та 42°C, відрізняються за своєю структурою. Встановлено, що імовірною причиною такої різниці є утворення уступів в спіралі ДНК, що виникають в результаті розриву водневих зв'язків під час динамічного фазового переходу при температурі 42°C.

Ключові слова: гіпертермія, конформаційні зміни подвійної спіралі ДНК.

A molecular mechanism of DNA double helix transformations under hyperthermia has been proposed. Evaporation of NaCl – distilled water – DNA system has been experimentally studied. To obtain the textures the aqueous solution with DNA molecules and sodium ions has been used. The textures formed after evaporation are showed to have different structure for the experiments at different temperature (20°C and 42°C). The experimental result shows that evaporation of water does not depend on concentration of DNA. The DNA helix bending as a result of rupture of hydrogen bonds in the course of dynamic phase transition in water at temperature of 42°C is assumed to be a likely reason for this difference. The rupture of hydrogen bonds in water leads to a decrease in the degree of DNA dissociation, which in its turn changes the conformation of these molecules. At $T = 42^{\circ}\text{C}$ the number of bended areas on the helix axes is much larger than at $T = 20^{\circ}\text{C}$ is showed.

Key Words: hyperthermia, DNA double helix transformation .

Статтю представив академік НАН України, д.ф.-м.н., проф. Булавін Л.А.

Introduction

Hyperthermia is a condition when temperature of the body or its areas increases over that which is required for normal metabolism and body functions as a result of external influence. It should be noted that in accordance with the generally accepted classification the states of hyperthermia are divided into three groups. For the first group the temperature is within the range 38-39 °C, for the second group it ranges 39-40 °C, for the third group it exceeds 41.1 °C. The last group is the most dangerous condition as it is very close to the upper limit temperature which threatens the human life [1]. Currently, there is no accurate information about the statistical data on occurrence of pathological conditions in the human

body under the influence of high temperature. The danger of this physiological state is related to the fact that the qualitative disturbances of biological processes occur in the human organism [2, 3].

Hyperthermia is widely used in oncology. To create a hyperthermia state there is a lot of methods (laser, electromagnetic, etc.) [4]. However, as it is noted in [5], today, the application of them does not solve a number of problems associated with the preservation of the functional state of tissues under external influence. In [6], the hypothesis about the properties of cancer cells to apoptosis and about DNA damage has been forwarded. Understanding the molecular processes occurring during metastasis paves the way for developing effective approaches to

treatment and prevention of cancer tumors. This paper deals with attempts to identify possible transformations in DNA conformations under conditions of hyperthermia.

Materials and methods

The object of study is a two-layer system in which the first layer is a glass plate and the second layer is a dried film of aqueous system distilled water-NaCl-DNA. The samples have been selected in such a way as to study the interaction of hydrogen ions from the solution with the ions of the substrate. For such interaction the result of molecular rearrangements is textures formed on the surface after evaporation of liquid [7]. The ions on the glass surface play an important role in the formation of textures [8].

To obtain the textures the aqueous solution with DNA molecules and sodium ions has been used. The solution has been prepared by dissolving dry DNA powder in distilled water. For this experiment the DNA molecules extracted from salmon testis with molecular mass of one molecule being equal to 10^7 a. u. m. have been used. This study has been carried out for the DNA solutions with concentrations 0% - 0.2%.

The aqueous solution with different concentrations of DNA is dropped on a glass plates manufactured by PJSC *Steklopribor* (dimensions $25,4 \times 76,2$ mm and a thickness 1-1.2 mm). The drop mass has been determined through comparing the mass of the glass plate and the glass plate with solution, with the use of scales PS110/C/1. The drop is dried in the air tank at a constant temperature with connection to a digital thermostat TP2. The experiment has been carried out at temperatures of 20 °C and 42 °C. After formation of the texture on the glass substrate its mass has been measured by the scales PS110/C/1. With the help of an optical system comprising a microscope MBC-9 and a camera with photo eyepiece Canon PC1355 the texture images have been obtained.

Experiment results

Figure 1 shows the concentration dependences of change in mass of samples after drying (the difference between the mass of drop on glass m_1 and mass of texture m_2) at temperature 20°C and 42°C. These dependences are marked as Δm^{20} Δm^{42} , accordingly.

As one can see from Fig.1, at $T = 20^\circ\text{C}$, the mass of texture formed after evaporation for different concentrations of DNA remains practically the same. The random errors have been caused by the fact that in this experiment it is impossible to drop a liquid of precise mass on the glass surface.

The experimental result shows that evaporation of

water does not depend on concentration of DNA.

Fig. 2-3 show the textures formed at 20°C and 42°C.

The following experimental facts can be seen from Figure 2.3:

- 1) The salt aggregates obtained at $T = 20^\circ\text{C}$ and $T = 42^\circ\text{C}$ after evaporation of solutions without DNA appear as structures chaotically located on the surface of the substrate;
- 2) The salt aggregates obtained at $T = 20^\circ\text{C}$ and $T = 42^\circ\text{C}$ after evaporation of solutions containing DNA are structured as the textures characterized by cylindrical symmetry, the elements of which

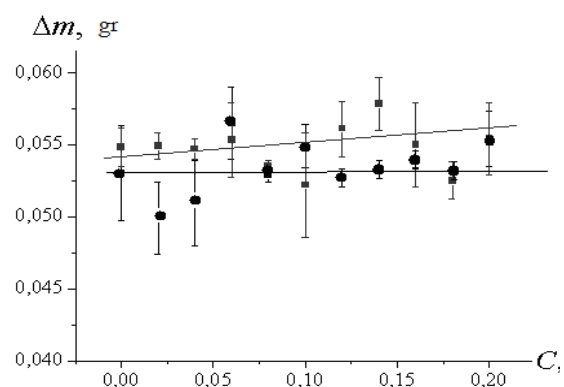


Fig. 1. Concentration dependence of change in mass of the samples at $\bullet 20^\circ\text{C}$, and $\blacksquare 42^\circ\text{C}$.

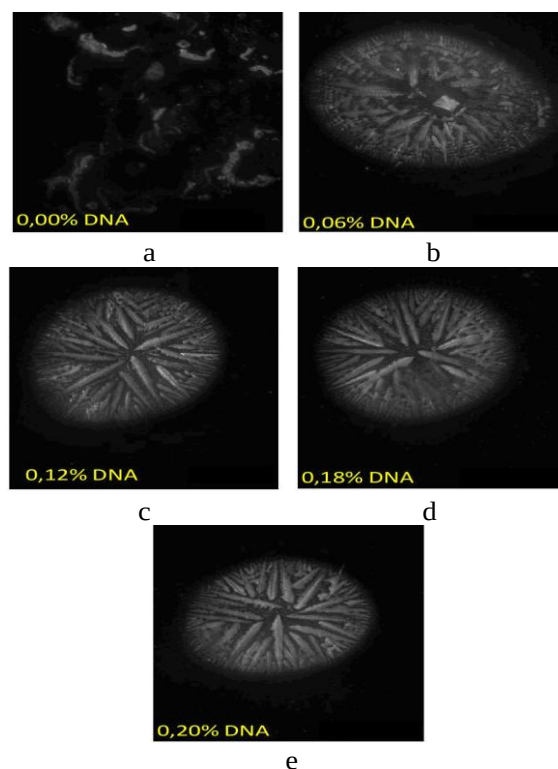


Fig. 2. Images of textures formed after evaporation of DNA water solution of different concentrations at $T=20^\circ\text{C}$ (enlarged 9 times).

resemble rectangles with radially directed long axis;
3) At $T = 20^\circ\text{C}$, the number of much smaller texture fragments is larger than in the case of $T = 42^\circ\text{C}$.

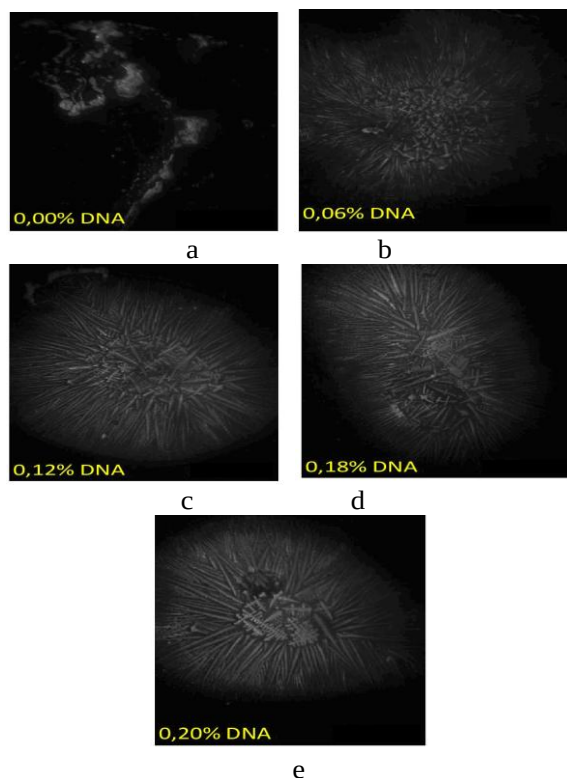


Fig. 3. Images of textures formed after evaporation of DNA water solution of different concentrations at $T = 42^\circ\text{C}$ (enlarged 9 times).

Discussion

First of all, we try to explain why after evaporation of solutions with and without DNA the textures have different structures (Fig. 1 and Fig. 2).

In fact, in our experiment, we study crystallization of NaCl solution. It is known [9] that crystallization proceeds in two stages: formation of crystalline nucleus and its subsequent growth. Let us analyze the possible mechanisms of nucleus formation. NaCl solution contacts with the glass substrate. It is known [10] that the glass surface can have local defects (e.g. microscopic cracks, etc.). Broken structure in the defect area provokes the formation of so-called silanol groups SiOH. The defect area is an area where the crystalline nucleus is the most likely to appear. For this it is necessary that the particles of crystallizing substance can join a SiOH group. In the absence of DNA neither Na^+ nor Cl^- ions can do this. So, we can conclude that in the absence of DNA the NaCl crystallites are formed in the solution. After evaporation these crystallites precipitate on the substrate forming a chaotic structure observed in the experiment (see Fig.2a and Fig.3).

A different picture is observed for DNA water solution. Having oxygen in the phosphate groups this macromolecule can form hydrogen bonds with the

silanol groups of substrate surface. Assuming the existence of a crystalline nucleus on the DNA molecules the growth of the nucleus occurs due to more and more ions joining Na^+ and Cl^- . The main difference of this mechanism is that proliferation of crystallites takes place along the surface. In other words, we deal with epitaxy [10]. The fact which confirms the epitaxial mechanism of crystallization is cylindrical symmetry of the structure. It is known [10] that the process of crystallization is governed by temperature and concentration gradients, so that the direction of the crystallite growth turns out to be parallel to the direction of these gradients. In our case, the above gradients have radial direction. The long axes of rectangular texture fragments of salt aggregates have the same direction (Fig. 2c-2e, 3c-3e).

What are the nuclei of crystallization on DNA molecules? It is known [11] that in aqueous DNA solutions the DNA molecule dissociates splitting into the double helix with the negative ions O from phosphate groups and the positive ions Na^+ surrounding the helix and forming its ionic atmosphere. On these double helices which are the decay products a certain number of Na atoms remains. The potential nuclei of crystallization arise when several sodium atoms are located close to each other. Clearly, such an arrangement can be achieved if: 1) the above mentioned atoms remaining on the double helix (Fig. 4) belong to the neighboring phosphate groups and 2) in this region the straightness of helix axis is broken to bring the sodium atoms closer to each other. More precisely, the second condition is not an independent requirement: it is automatically realized if the first condition is true.

It is well known [11] the DNA - molecule in the solutions has coil's configuration.

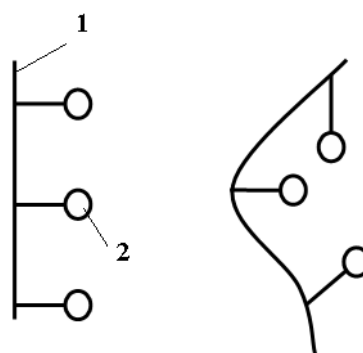


Fig. 4. Bending of the helix axis by residual sodium atoms (1 - helix axis, 2 - Na atoms)

This configuration consists of series-connected with each other segments. Each segment has the shape of a double helix, the axis of which is straightforward. The same is observed in solutions of DNA. This property is a result of the repulsive Coulomb forces acting between the oxygen ions of

phosphate groups. Neutralization of these ions by the positive sodium ions causes a decrease in these repulsive forces i.e. weakens the cause for the straightness of the helix axis. The residual Na atoms located one after the other (as shown on Fig. 4b) may weaken the force of repulsion in such a way as it can bend the helix axis at this point.

Each of the crystallites (rectangular texture fragment) on Fig. 2-3 grows from its nucleus. If so, in our experiment the amount of crystalline nuclei at $T = 42^{\circ}\text{C}$ is much larger as compared with that at $T = 20^{\circ}\text{C}$. According to the mechanism showed on Fig. 4 this means that in the first case the number of bended areas on the helix axes is much larger. Thus, at temperature $T = 42^{\circ}\text{C}$ conformation of DNA

molecules undergoes significant changes. What does cause these changes?

In [12, 13] it has been showed that in water at temperature $T = 42^{\circ}\text{C}$ there is a dynamic phase transition. This shift significantly changes the structure of water, particularly, at $T = 42^{\circ}\text{C}$ a lot of hydrogen bonds is broken. We guess that this is just that factor which causes conformational changes in DNA at the mentioned temperature. Indeed, the rupture of hydrogen bonds in water leads to a decrease in the degree of DNA dissociation, which in its turn changes the conformation of these molecules.

Список використаних джерел

1. Soszynski D. The pathogenesis and the adaptive value of fever// *Postepy Hig Med Dosw.*-2003.-№ 57.-P.531-554.
2. Bouchama A, Knochel JP. Heat stroke// *The New England Journal of Medicine.*-2002.-346(25).-P.1978-1988.
3. Doweiko J.P., Nompleggi D.J. Role of albumin in human physiology and pathophysiology// *J. Parent Enteral Nutr.*-1991.-№15.-P.207-211.
4. Bera J.W., Franken N.A., Haveman J., Geijsen E.D., Crezee J. Hyperthermia, cisplatin and radiation trimodality treatment: a promising cancer treatment?// *Int.J.of Hyperthermia.* -2007.- 23(4).-P.329-341
5. Nikiforov V.N., Brusenchoy N.A. Magnetic hyperthermia in oncology// *Medical Physics.*-2007.- 2(34).-P.51-59.
6. Clarke MF, Fuller M. Stem cells and cancer: two faces of Eve// *Cell.* -2006.-№124.-P. 1111-1115.
7. Obeida S., Baccaroa A., Welteb W., Diederichsb K., Marxa A. Structural basis for the synthesis of nucleobase modified DNA by *Thermus aquaticus* DNA polymerase// *PNAS.*-2010.-107(50).-P.21327-21331.
8. Aminov L.K., Kurkin I.N., Lukoyanov D.A., Chernov K.P. Temperature and frequency dependence of the spin-lattice relaxation centers in neutron irradiated quartz glass// *Fizika tverdogo tela.*-1997.- 39(8)-P.1335-1337.
9. Frenkel J. *Kinetic Theory of Liquids*/- Moscow: "Nauka", 1980.-592p.
10. Wunderlich B. *Macromolecular Physics*/- New York: Academic Press, 1973.-549p.
11. Grosberg A.Yu., Khokhlov A.R. *Statistical Physics of Macromolecules*/- Moscow: "Nauka", 1989.- 344p.
12. Bulavin L.A., Malomuzh N.P. Water as the most important component for the maintenance of the life for warm blooded organisms // *Physics of the Alive.* -2010.- 18(2).-P.16-22.
13. Bulavin L.A., Malomuzh N.P. Upper temperature limit for the existence of living matter// *Journal of Molecular Liquids, Letter to the Editor.*-2006.-124.-P.136-139.

References

1. SOSZYNSKIY,D.(2003) The pathogenesis and the adaptive value of fever. *Postepy Hig Med Dosw.* 57.p.531-54.
2. BOUCHAMA, A. KNOCHER, JP. (2002) Heat stroke. *The New England Journal of Medicine.* 346(25). p.1978-1988.
3. DOWEIKO, J.P.NOMPLEGGI, D.J. (1991) Role of albumin in human physiology and pathophysiology. *J. Parent Enteral Nutr.* 15.p. 207-211.
4. BERG, J.W., FRANKEN, N.A., HAVEMAN, J., GEIJSSEN, E.D., CREZEE, J. (2007) Hyperthermia, cisplatin and radiation trimodality treatment: a promising cancer treatment? *Int.J.of Hyperthermia.* 23(4). p. 329-341.
5. NIKIFOROV, V.N., BRUSENCHOV, N.A. (2007) Magnetic hyperthermia in oncology. *Medical Physics.* 2(34). p.51-59.
6. CLARKE, MF, FULLER, M. (2006) Stem cells and cancer: two faces of Eve. *Cell.* 124. p1111-1115.
7. OBEIDA, S., BACCAROA, A., WELTEB, W., DIEDERICHSB, K., MARXA, A. (2010) Structural basis for the synthesis of nucleobase modified DNA by *Thermus aquaticus* DNA polymerase. *PNAS* . 107(50). p. 21327-21331.
8. AMINOV, L.K., KURKIN, I.N., LUKOYANOV, D.A., CHERNOV, K.P. (1997) Temperature and frequency dependence of the spin-lattice relaxation centers in neutron irradiated quartz glass. *Fizika tverdogo tela.* 39(8). p. 1335-1337.
9. FRENKEL, J. (1980) *Kinetic Theory of Liquids*. Moscow: "Nauka".
10. WUNDERLICH, B. (1973) *Macromolecular Physics*. New York: Academic Press.
11. GROSBERG, A.Yu., KHOKHLOV, A.R. (1989) *Statistical Physics of Macromolecules*. Moscow: "Nauka".
12. BULAVIN, L.A., MALOMUZH, N.P. (2010) Water as the most important component for the maintenance of the life for warm blooded organisms. *Physics of the Alive.* 18(2). p.16-22.
13. BULAVIN, L.A. MALOMUZH, N.P. (2006) Upper temperature limit for the existence of living matter. *Journal of Molecular Liquids, Letter to the Editor.* 124.p.136-139.

Надійшла до редколегії 25.04.14

УДК 536

Євтушенко Є.В.¹, студ.,
Полянчук О.В.¹, студ.,
Мороз К.О.¹, к.ф.-м.н., доц.,
Королович В.Ф.¹, к.ф.-м.н.

Про підвищення точності ізотермічних PVT вимірювань

¹ Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 01601, м. Київ, вул.
Володимирська 64/13,
e-mail: morozko@univ.kiev.ua

Ye.V. Evtushenko¹, stud.,
O.V. Polyanchuk¹, stud.,
K.O. Moroz¹, PhD, Assoc. Prof.,
V.F. Korolovych¹, PhD, Sci. Res.

On the accuracy improvement of isothermal PVT measurements

¹ Taras Shevchenko National University of Kyiv,
01601, Kyiv, Volodymyrska Str. 64/13,
e-mail: morozko@univ.kiev.ua

Проаналізовані джерела виникнення похибки вимірювань густини для ізотермічної методики сільфонного п'єзометра з диференційним трансформаторним датчиком лінійних зміщень. Наведені поетапні оцінки похибки для експериментальних досліджень густини рідкого толуолу. Запропоновані методи оцінки точності пікнометричних вимірювань та прецезійних вимірювань під високим тиском, що дозволяють направлено здійснювати конструктивне вдосконалення методик вимірювання густини та зменшення похибки прямих вимірів. Всі оцінки виконані згідно рекомендацій міждержавного стандарту ГОСТ. Запропоновані шляхи подальшого підвищення точності вимірювань в ізотермічних PVT методиках. Знайдені оцінки похибок для модернізованої методики вимірювання густини пікнометричним методом складають 0.02%, похибка для вимірювання густини методом сільфонного п'єзометра під тиском складає 0.07% дійної вимірюваної величини, що були знайдені для толуолу.

Ключові слова: густина, похибка вимірювань, рівняння стану.

It is analyzed the sources of density measurements error for isothermal methods bellows piezometer with differential transformer sensor of linear displacement. Step-by-step procedure of error estimations for experimental studies of the density of liquid toluene is shown. It is proposed the method for experimental error evaluation that allows further directed improvement of precision methods of PVT measurements. All estimates are made according to the recommendations of interstate GOST standard. The ways of further improving the accuracy of measurements in isothermal PVT techniques by upgrading picnometer method and improving the design of linear displacement sensor are presented. The error estimation for picnometer measurements of density is 0.02%, and for the method of metallic bellows piezometer with differential inductive sensor of linear shifts is 0.07% of actual measured value. Error estimations were carried out by measuring liquid toluene in the whole range of pressures and temperatures accessible for PVT method.

Keywords: density, measurements error, equation of state.

Статтю представив: академік НАН України, д.ф.-м.н., проф. Булавін Л.А.

Задача про термодинамічні властивості рідин належить до кола актуальних питань сучасної молекулярної фізики. Експериментальний підхід до розв'язку цієї задачі включає PVT дослідження речовини в широких інтервалах зміни температури та тиску. Метод сільфонного п'єзометра належить до групи високоточних методів вимірювання PVT властивостей молекулярних рідин та рідинних систем [1]. Як відомо, сучасні сільфонометричні методи дозволяють досягати зменшення похибок визначення густини рідини в рівноважному стані

до 0.1% вимірюваного значення при зміні тиску в інтервалі від атмосферного до кількох тисяч атмосфер. Діапазон зміни можливих досліджуваних густин в методі сільфонного п'єзометра визначається конструктивними особливостями методики. Наступним після PVT вимірювань етапом в дослідженні термодинамічних властивостей є визначення значень пружних і калоричних термодинамічних властивостей рідин за експериментальними PVT даними, що потребує розрахунку похідних густини по температурі та тиску методами числового

Таблиця 1

Похибки вимірювання фізичних величин (ФВ) при визначенні густини толуолу

ФВ	ОВ	$\bar{x}$	σ_x	Δx	θ	θ / σ_x	Δ_x	$\Delta_{x\%}$
ρ_0	кг/м ³	848.2	0.2	0.7	0.1	0.27	0.7	0.10
$S_{\text{эф}}$	см ²	1.701	0.007	0.02	0.007	0.94	0.007	0.40
dU_2/dx	мВ/мм	-29.6	0.1	0.5	0.01	0.09	0.5	1.60
Δv	см ³	-0.193	0.001	0.004	0.001	0.69	0.00	1.90
v	см ³	3.746	0.002	0.005	0.001	0.52	0.01	0.10
ρ	кг/м ³	892.0	0.4	1.2	0.2	0.52	1.2	0.13

диференціювання. Відомі оцінки вказують на те, що застосування методів числового диференціювання на порядок зменшує точність визначення отриманих за його допомогою фізичних величин порівняно з експериментальною похибкою вимірювання густини. Таким чином, задача підвищення точності PVT вимірювань має як фундаментальне так і прикладне значення. В поданій роботі приведені результати аналізу джерел виникнення похибки вимірювання густини для ізотермічної PVT методики сільфонного п'єзометра з диференціальним трансформаторним датчиком лінійних зміщень, що була розроблена Адаменко І.І. [1] та модернізована в пізніших дослідженнях [2]. Об'єм робочої камери v в такій методиці визначається з наступних співвідношень:

$$v_0 = m_0 / \rho_0, \quad \Delta v = S_{\text{эф}} \Delta U_2 / (dU_2/dx),$$

$$v = v_0 + \Delta v, \quad (1)$$

де m_0 – маса рідини в камері, ρ_0 – густина рідини, що визначена пікнометричним методом, $S_{\text{эф}}$ – ефективна площа поперечного перерізу робочої камери, ΔU_2 – приріст напруги на вторинній обмотці датчика лінійних зміщень при зростанні тиску від атмосферного до заданого, (dU_2/dx) – кутовий коефіцієнт градування. У таблиці 1 наведені оцінки похибки визначення густини за співвідношеннями (1), де θ – систематична складова похибки, σ_x – її

випадкова складова, Δ_x – оцінка верхньої границі похибки фізичної величини. Як показує аналіз, застосування класичної пікнометричної методики при атмосферному тискові дозволяє знайти густину з похибкою 0.1%. Таку ж величину верхньої границі можна отримати для похибки густини під високим тиском. При цьому найбільший внесок у величину $\Delta_{x\%}$ приросту об'єму Δv за нашими оцінками дають розрахунки кутового коефіцієнта (dU_2/dx) . Нами апробований метод фотореєстрації для методики пікнометричних вимірювань, який при застосуванні варіації геометрії пікнометра (зміни співвідношення між діаметром капіляра та об'ємом вимірювальної камери) дозволяє знизити величину $\Delta_{x\%}$ для густини ρ_0 до 0.02%. Підвищення точності трансформаторного датчика, в силу конструктивних особливостей всієї вимірювальної частини установки, вдається досягти лише підбором параметрів трансформаторного датчика.

Таким чином, для підвищення точності визначення густини в ізотермічній методиці сільфонного п'єзометра є два конструктивні шляхи, а саме, виготовлення пікнометрів оптимізованої геометрії із застосуванням фотореєстрації та вдосконалення конструкції трансформаторного датчика лінійних зміщень, це дозволяє зменшити похибку визначення густини під високим тиском до 0.07%.

Список використаних джерел

- Адаменко І. І. Фізика рідин та рідинних систем / І.І. Адаменко, Л.А. Булавін. – Київ: АСМІ, 2006. – 650 с.
- Булавін Л.А. Рівняння стану магнітної рідинної системи на основі води та магнетиту, стабілізованої лауриноювою кислотою / Л. А. Булавін, К. О. Мороз, С. П. Недяк, В. І. Петренко // Укр. фіз. журн. – 2012. – Т. 57. – No. 3. – С. 350–354.

References

- ADAMENKO, I. I. AND BULAVIN, L. A. (2006) *Physics of liquids*. Kyiv: ASMI.
- BULAVIN, L. A., MOROZ, K. O., NEDYAK, S. P. AND PETRENKO, V. I. (2012) The equation of state for a water-based magnetic fluid stabilized by lauric acid. *Ukr. J. Phys.* 57(3). pp. 350–354.

Надійшла до редколегії 29.04.14

УДК 539.213

Лисов В.І.¹, д.ф.м. н., проф.,
Цареградська Т.Л.², к.ф.м.н., доц.,
Саєнко Г.В.³, інж.,
Турков О.В.⁴, інж

V.I. Lysov¹, Dr.Sc., Prof.,
T.L. Tsaregradskaya², PhD.,
G.V. Saenko³, eng.,
O.V. Turkov⁴, eng.

Аналіз можливостей практичного використання висновків теорії високотемпературної стабільності аморфних сплавів

The analysis possibilities practical using of conclusions high temperature stability amorphous alloys theory

^{1,2,3,4} Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 01601, м. Київ, вул.
Володимирська 64/13,
e-mail: ²tsar_grd@ukr.net

^{1,2,3,4} Taras Shevchenko National University of
Kyiv, 64/13, Volodymyrska st., City of Kyiv,
Ukraine, 01601.
e-mail: ²tsar_grd@ukr.net

На основі аналізу результатів розрахунків в рамках теорії високотемпературної стабільності аморфних сплавів запропоновано два напрямки її практичного використання. Перший напрямок – це підвищення термічної стабільності аморфних сплавів шляхом термообробки в певному інтервалі температур, де кристалічні зародки можуть переходити в аморфну фазу (розчиняються в аморфній фазі); другий – перетворення аморфного стану в нанокристалічний шляхом довготривалого низькотемпературного ізотермічного відпалу.

Ключові слова: аморфний бінарний сплав, кристалізація, нанокристалічний стан.

Calculations, which carried out within the framework of theory of high temperature stability of amorphous alloys showed, that account of additional pressure on interphase crystalline center – amorphous phase leads to considerable reduction size of difference chemical potentials of i component in amorphous matrix and freezed crystallisation center $\Delta\mu_i$ as compared to value $\Delta\mu_i$ in that area, where resilient tensions are absent. It is experimentally confirmed that external influences that result in reduction of difference of chemical potentials of i component in an amorphous matrix and freezed crystallization center (in area of temperatures, where $\Delta\mu_i < 0$) result in dissolution of the freezed crystallization centers, and as a result to the increase of thermal stability of amorphous alloy. By means of the low temperature isothermal annealing it is possible to create the nanostructural state and fix its subsequent cryogenic treatment.

Key Words: amorphous binary alloy, crystallisation, nanocrystalline state.

Статтю представив член-кор. НАН України, д.ф.-м.н., проф. Макара В.А.

Вступ

Актуальним напрямком досліджень металевих стекел є розробка методів керованого наноструктурування шляхом часткової кристалізації аморфних сплавів за рахунок зовнішніх впливів. В аморфному сплаві нанокристалічну структуру можна створити шляхом його часткової кристалізації. Велика увага до термічної та пластичної обробки сплавів з аморфною структурою пов'язана з можливістю набуття особливих властивостей в нанокристалічному стані. На сьогоднішній день відомо, що всі властивості аморфних сплавів

залежать від умов їх отримання і подальшої обробки. Зовнішні дії, такі як відпал при температурах значно нижчих за температуру кристалізації, інтенсивна пластична деформація, опромінення частками різної природи приводять до зміни їх фізичних властивостей. Постановка задачі впливає з термодинамічної теорії високотемпературної стабільності аморфних сплавів [1-2], відповідно до якої зовнішні впливи (ізотермічний відпал, тривала витримка при кімнатній температурі, механічна обробка) може приводити до істотного зсуву фазової рівноваги в гетерогенній системі аморфна матриця–вморожені центри кристалізації.

Основні рівняння термодинамічної теорії високотемпературної стабільності аморфних сплавів

Високотемпературну термічну стабільність аморфних сплавів часто пов'язують із повною відсутністю зародків кристалічної фази. Але чисельні електронномікроскопічні дослідження показують, що навіть при надшвидкому гартуванні з рідкої фази, при швидкостях гартування порядку $(10^4 \div 10^6)$ К/с, в аморфних сплавах існують центри кристалізації, які є в заморожених в аморфну матрицю. В роботах [1-2] розглянуто термодинамічні умови існування заморожених центрів кристалізації в аморфній матриці, які для i -го компонента в гетерогенній системі аморфна фаза–вморожені центри кристалізації описуються виразом

$$\Delta\mu_i(T) = -\frac{\chi_T^\alpha V_\beta + \chi_T^\beta V_\alpha}{\chi_\alpha + \chi_\beta} \frac{2\sigma}{r_{02}} - \frac{(V_\beta - V_\alpha)(\bar{V}_\beta^i - \bar{V}_\alpha^i)}{(\chi_\alpha + \chi_\beta)\bar{V}} \left[1 - \left[\frac{r_{01}}{r_{02}} \right]^3 \right] + \Delta\mu_{0i}(T) \quad (1)$$

де $\Delta\mu_i(T) = \mu_i^\alpha - \mu_i^\beta$ – різниця хімічних потенціалів i -го компонента в α - та β -фазах з урахуванням тиску, що виникає на поверхні розділу кристалічний зародок – аморфна фаза за рахунок поверхневого натягу (σ – питома поверхнева енергія) та пружних напружень; V_α , V_β , χ_T^α , χ_T^β – молярні об'єми та коефіцієнти ізотермічної стисливості α - та β -фаз відповідно; r_{01} , r_{02} – радіуси кристалічних зародків при існуванні та відсутності тиску на границі зародок – аморфна фаза, $\Delta\mu_i = \mu_{0i}^\alpha - \mu_{0i}^\beta$ – різниця хімічних потенціалів чистих компонентів, яка при виборі за стандартний стан хімічного потенціалу i -го компонента в чистому кристалічному металі i -го сорту може бути представлена наступним виразом

$$\Delta\mu_0 = \frac{\Delta H_0^{(i)}(T_{pi} - T)}{T_{pi}} + RT \ln a_i^\alpha(C_i^\alpha, T) - RT \ln a_i^\beta(C_i^\beta, T) \quad (2)$$

де $\Delta H_0^{(i)}$, T_{pi} – ентальпія та температура плавлення i -го компонента відповідно;

a_i^α , a_i^β – активності i -го компонента в α - та β -фазах.

На рис. 1 представлено графіки залежностей $\Delta\mu_i(T)$ розраховані за формулою (1) з урахуванням (2) за різних умов кристалізації розплаву.

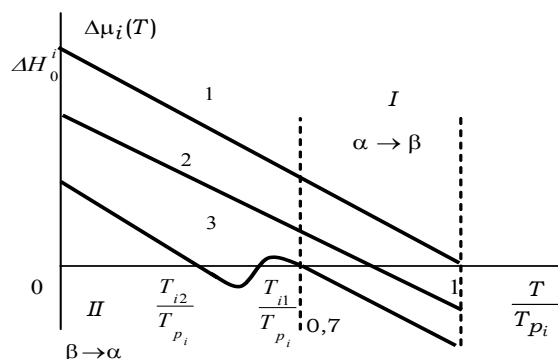


Рис. 1. Температурна залежність $\Delta\mu_i$ для сплавів: 1 – $\Delta\mu_i$ при повільному охолодженні розплаву $V_\alpha = V_\beta$, $a_i^\alpha = a_i^\beta$, $r_{02} \rightarrow \infty$; 2 – $\Delta\mu_i$ при швидкому охолодженні розплаву $V_\alpha \approx V_\beta$, $a_i^\alpha < a_i^\beta$, $r_{02} = const$; 3 – $\Delta\mu_i$ при надшвидкому охолодженні розплаву $V_\alpha \neq V_\beta$, $a_i^\alpha < a_i^\beta$, $r_{02} = const$; I – рідинно-в'язка область; II – пружна область, де враховується тиск, спричинений пружними напруженнями за рахунок $V_\alpha \neq V_\beta$.

Згідно теорії гомогенного зародкоутворення при швидкому гартуванні розплаву зародки кристалічної фази утворюються в районі температур $T \sim 0,7 T_p$, при цьому переохолоджена рідина переходить в тверду аморфну фазу. Таким чином, утворюється гетерогенна система вморожені центри кристалізації – аморфна матриця, в якій виникають пружні напруження. Проведені розрахунки показали, що врахування додаткового тиску на поверхні розділу кристалічний зародок – аморфна фаза призводять до значного зменшення величини $\Delta\mu_i$ в порівнянні зі значенням $\Delta\mu_i$ в тій області, де відсутні пружні напруження (рис. 1: криві 1 та 2 в порівнянні з кривою 3). Важливим наслідком цього процесу є те, що в інтервалі температур від T_{i1} до T_{i2} значення $\Delta\mu_i < 0$ і виникає можливість спостерігати перехід кристалічних зародків в аморфну фазу. Слід також зазначити, що нижче температури T_{i1} ймовірність появи нових

кристалічних зародків дорівнює нулю, оскільки в цій області температур частота зародкоутворення $J(T)$ згідно теорії гомогенної кристалізації прямує до нуля. В цій області температур можливий лише повільний ріст вже існуючих центрів кристалізації.

Аналіз результатів розрахунків згідно рівнянь приведеної вище теорії термодинамічної рівноваги в гетерогенній системі в заморожені центри кристалізації – аморфна матриця дають два напрямки її практичного використання. Перший напрямок – підвищення термічної стабільності аморфних сплавів шляхом термообробки в інтервалі температур $T_{i1} \div T_{i2}$, де кристалічні зародки переходять в аморфну фазу. Другий напрямок – переведення аморфного сплаву в нанокристалічний стан шляхом довготривалого ізотермічного відпалу при температурах $T_e < T_{i1}$, де буде відбуватися ріст існуючих кристалічних зародків. Для відтворення цих процесів необхідно дослідним шляхом визначити температури T_{i1} , T_{i2} , T_e .

Результати експериментальних досліджень та їх обговорення

Для аморфного сплаву $\text{Fe}_{80}\text{B}_{20}$ було проведено експерименти по термообробці з метою підвищення термічної стабільності сплавів та розробки шляхів отримання сплавів в наноструктурному стані. Визначення температури початку інтенсивної кристалізації проводилось за допомогою дилатометричного методу, суть якого полягає в наступному [3]. Молярний об'єм більшості сплавів в аморфному та кристалічному станах відрізняється на (1-3) %. Таким чином, можна дослідити процес кристалізації аморфного сплаву, фіксуючи зміну довжини зразка та перераховуючи її в об'ємні зміни. При нагріванні аморфного сплаву з постійною швидкістю його об'єм монотонно зростає, коли температура досягає певного значення (температури початку інтенсивної кристалізації) відбувається перехід аморфного сплаву в кристалічний стан. Цей процес супроводжується різким зменшенням об'єму. З отриманої температурної залежності відносної зміни об'єму визначають температуру початку інтенсивної кристалізації. За допомогою дилатометричної методики були визначені температури початку інтенсивної кристалізації для вихідного сплаву та після проведеної термічної обробки. Температура початку

інтенсивної кристалізації для сплаву $\text{Fe}_{80}\text{B}_{20}$ складає 650 К.

Було проведено 3 типи термообробки, а саме:

1) термоцикування (3 послідовних цикли нагрівання до 630 К з наступним охолодженням до кімнатної температури);

2) ізотермічний відпал (при 600 К протягом 1 години);

3) кріообробка (нагрівання до 600 К, витримка при цій температурі та різке охолодження до температури рідкого азоту 77 К з метою стабілізації отриманого наноструктурного стану).

Неізотермічний режим (термоцикування) при достатньо високій температурі (на 20 К нижчій за температуру початку інтенсивної кристалізації) застосовувався аби уникнути кристалізації зразка внаслідок можливого перегрівання.

На рис. 2 наведено температурну залежність відносної зміни об'єму $\Delta V/V(T)$ для аморфного сплаву $\text{Fe}_{80}\text{B}_{20}$ в початковому стані та після попереднього термоцикування (3 послідовних цикли нагрівання до 630 К з наступним охолодженням до кімнатної температури);

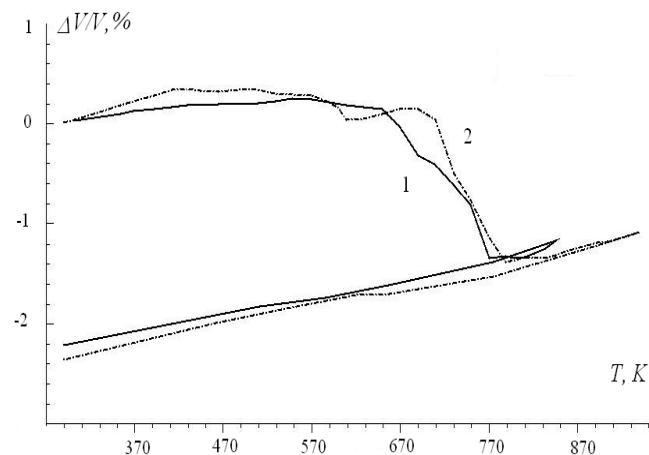


Рис. 2. Температурна залежність відносної зміни об'єму $\Delta V/V(T)$ аморфного сплаву $\text{Fe}_{80}\text{B}_{20}$ у вихідному стані (крива 1) та після термоцикування (крива 2).

З порівняння залежностей, наведених на рис. 2, видно, що температура початку інтенсивної кристалізації T_k для аморфного сплаву $\text{Fe}_{80}\text{B}_{20}$ після термоцикування збільшується на 80 К. Збільшення інтервалу термічної стабільності можна пояснити тим, що проведена термообробка аморфних сплавів призводить до розчинення існуючих в заморожених

центрів кристалізації. На рис. 3 наведено результати електронно-дифракційних та електронномікроскопічних досліджень для сплаву $\text{Fe}_{80}\text{B}_{20}$ до та після проведеної термічної обробки.

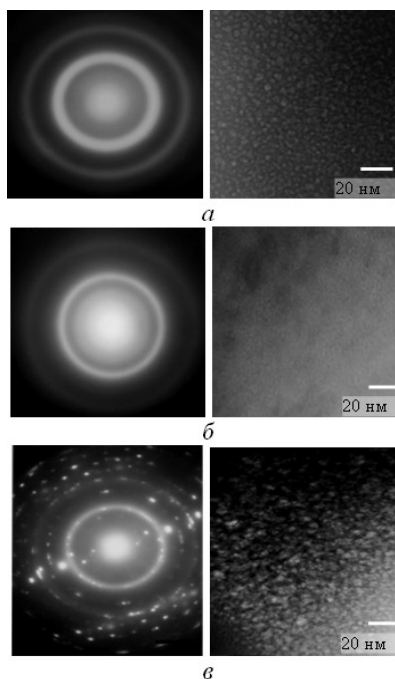


Рис. 3. Електронограми та темнопольні зображення для сплаву $\text{Fe}_{80}\text{B}_{20}$ в початковому стані (а), після термоцикування при $T = 630$ К (б) та після тривалого ізотермічного відпалу при 600 К (в).

З результатів електронномікроскопічних досліджень для сплаву $\text{Fe}_{80}\text{B}_{20}$ (рис. 3) видно, що вихідний аморфний стан характеризується наявністю вмерзених центрів кристалізації з середнім розміром порядку 20 нм (рис. 3.а). Після термоцикування при $T = 630$ К розмір кристалічних зародків зменшується до (5-10) нм (рис. 3.б). В цій області температур $\Delta\mu_i < 0$, отже

кристалічні зародки зменшуються та можуть розчинятись в аморфній фазі. Зразки після тривалого ізотермічного відпалу при 600 К характеризуються структурою із середнім розміром нанокристалів до 50 нм (рис.3 в.) , в цій області температур відбувається ріст існуючих кристалічних зародків.

Отже, експериментально підтверджено, що зовнішні дії, які призводять до зменшення різниці хімічного потенціалу i -го компонента в аморфній матриці та вмерзеному центрі кристалізації (в області температур де $\Delta\mu_i < 0$) призводять до розсмоктування вмерзених центрів, і як наслідок до підвищення термічної стійкості аморфного сплаву. За допомогою тривалого низькотемпературного ізотермічного відпалу можна створити нанокристалічний стан та зафіксувати його наступною кріообробкою.

Висновки

На основі аналізу результатів розрахунків в рамках теорії високотемпературної стабільності аморфних сплавів запропоновано два напрямки її практичного використання, а саме:

- 1) підвищення термічної стабільності аморфних сплавів шляхом термообробки в інтервалі температур, де кристалічні зародки можуть переходити в аморфну фазу;
 - 2) перетворення аморфного стану в нанокристалічний шляхом тривалого низькотемпературного ізотермічного відпалу.
- Запропоновано методи отримання наноструктурного стану з початкового аморфного; отримано сплави в нанокристалічному стані, що підтверджується результатами електронномікроскопічних досліджень.

References

1. Харьков Е.И., Лысов В.И. Термодинамическая теория высокотемпературной устойчивости аморфных сплавов.// Расплавы/ 1987. – т.1, №1. с. 30-37.
2. Шпак А.П. та ін. Кристалізація і аморфізація металевих систем. – Київ.: Академперіодика, 2002. – 208 с.
3. Новиков В.Н., Рябчиков Б.Е. Методика дилатометрических исследований металлических стекол. // Заводская лаборатория/ 1989. – т.55, 37, с.49-53.
1. KHAR'KOV, E.I., LYSOV, V.I. (1987) Thermodynamic theory of high-temperature stability of amorphous alloys.// *Rasplavy*. 1(1). p. 30-37.
2. SHPAK, A.P. et al. (2002) Crystallisation and amorphysation of metallic systems.– Kyiv: Akademperiodyka.
3. NOVIKOV, V.N., RYABCHIKOV, B.E. (1989) The metod of dilatometrical researches of metallic glasses. *Factory laboratory*. 55(37). p. 49-53.

Надійшла до редколегії 02.04.14

УДК 577.112; 539.194; 535.34

Могильчак К.Ю.¹, асп.,
Кравченко В.М.¹, к.ф.-м.н., доц.,
Ящук В.М.¹, д.ф.-м.н., проф.

Розрахунок електронних спектрів ароматичних амінокислот та пептидів на їх основі

¹Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 01601, м. Київ, вул.
Володимирська 64/13,
e-mail: k.mogylchak@gmail.com

K. Yu. Mogylchak¹, PhD stud.,
V. M. Kravchenko¹, PhD, Assoc. Prof.,
V. M. Yashchuk¹, Dr. Sci., Prof.

Calculation of electronic spectra of aromatic amino acids and peptides based on them

¹Taras Shevchenko National University of Kyiv,
01601, Kyiv, Volodymyrska st., 64/13,
e-mail: k.mogylchak@gmail.com

Наведені результати квантово-хімічних розрахунків електронних спектрів ароматичних амінокислот та пептидів на їх основі. Одержано якісне узгодження результатів розрахунків з експериментально вимірними спектрами поглинання білкових макромолекул з відомою амінокислотою послідовністю. Зроблено висновок про взаємодію π -електронних систем ароматичних амінокислот вздовж лінії пептидного зв'язку.

Ключові слова: пептиди, ароматичні амінокислоти, квантово-хімічні розрахунки, електронний спектр, спектр оптичного поглинання.

Quantum-chemical calculations of electronic spectra of aromatic amino acids (tryptophan, tyrosine and phenylalanine), which are centers of intense UV absorption and fluorescence ($\lambda > 200$ nm) in proteins, and peptides based on them are presented. It is shown that calculated spectra of peptides consisting of aromatic amino acids are not a linear combination of spectra of individual amino acids. Theoretical results qualitatively agree with experimentally measured absorption spectra of protein macromolecules with known amino acid sequence. It is concluded that there is interaction between the π -electron systems of aromatic amino acids along the line of peptide bond in peptides and proteins, which shows up in their optical absorption spectra.

Key Words: peptides, aromatic amino acids, quantum-chemical calculations, electronic spectrum, optical absorption spectrum.

Статтю представив академік НАН України, д.ф.-м.н., проф. Булавін Л.А.

Білки відіграють ключову роль у процесах життєдіяльності усіх без винятку організмів. Білкові макромолекули побудовані із залишків 20 амінокислот, серед яких є три ароматичні амінокислоти (триптофан (Trp), тирозин (Tyr) та фенілаланін (Phe)), які являють собою π -електронні системи і є центрами інтенсивного поглинання та флюоресценції в УФ області спектра ($\lambda > 200$ нм). Саме ароматичні амінокислоти й визначають спектральні властивості білків та пептидів (менших за розмірами сполук, що складаються із залишків амінокислот) у згаданому спектральному діапазоні [1-3].

Спектри поглинання та випромінювання пептидів та білків визначаються кількістю, розташуванням і взаємодією між ароматичними амінокислотами, отже є чутливими до конфірма-

ційних змін у таких макромолекулах [4-5].

Квантово-хімічні розрахунки з використанням сучасних програмних пакетів дозволяють передбачати певні закономірності у зміні спектрів при виникненні взаємодії між ароматичними амінокислотами у білкових молекулах як вздовж лінії пептидного зв'язку, так і між ароматичними амінокислотами, що належать до різних ділянок поліпептидного ланцюга згорнутої у глобулу білкової макромолекули.

Метою даної роботи було проведення квантово-хімічних розрахунків електронних спектрів (спектрів поглинання) пептидів, що склалися з різної кількості ароматичних та неароматичних амінокислот, та їх порівняння зі спектром поглинання головного капсидного білка іридовірусу комара *Aedes flavescens* (AfIV),

який був об'єктом наших експериментальних досліджень і для якого відома амінокислотна послідовність.

В наших розрахунках ми використовували програмний пакет Gaussian 03. Для побудови досліджуваних молекул були взяті бази даних для амінокислотних залишків з цього пакету. Конформації, в яких перебували амінокислоти в пептидах, враховувались за допомогою конформаційних параметрів, наведених в [2].

Електронні спектри молекул були розраховані за допомогою напівемперичного наближення ZINDO [6, 7]. Розрахунок проводився для 20

станів. За таких умов можна спостерігати перший та другий електронні переходи. Переходи, які знаходяться у короткохвильовій області (вакуумний УФ діапазон, $\lambda < 200$ нм), нас не цікавили, оскільки їх експериментальне спостереження пов'язане з суттєвими труднощами.

Квантово-хімічні розрахунки електронних спектрів проводились для усіх трьох ароматичних амінокислот – триптофану, тирозину та фенілаланіну. Їх хімічні формули зображені на рис. 1 [8].

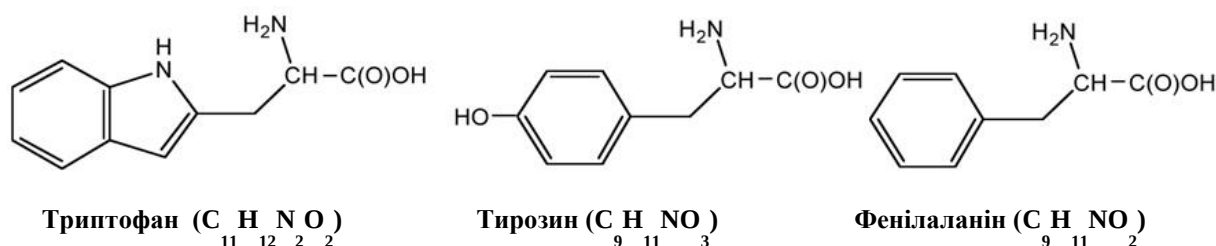


Рис. 1. Хімічна будова ароматичних амінокислот.

Оскільки білкова макромолекула являє собою послідовність з багатьох різних амінокислот, а у спектрах поглинання в ближньому УФ діапазоні виявляють себе лише ароматичні амінокислоти, ми зробили спробу розрахувати спектр поглинання послідовності з кількох амінокислот для того, щоб з'ясувати, як буде змінюватися спектр окремої амінокислоти при утворенні хімічних зв'язків між нею й іншими ароматичними амінокислотами в білковій молекулі. Іншими словами, ми зробили спробу промодельовати спектр поглинання пептиду – фрагмента білкової молекули.

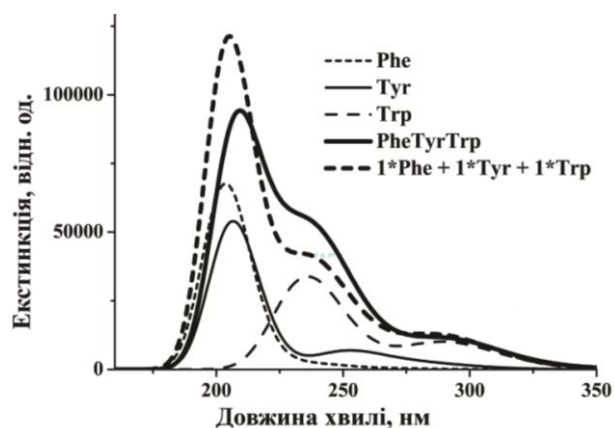


Рис. 2. Розраховані електронні спектри пептиду PheTyrTrp, окремо взятих амінокислот (Phe, Tyr, Trp) та адитивної суми екстинкцій цих амінокислот ($1 \cdot Phe + 1 \cdot Tyr + 1 \cdot Trp$).

На рис. 2 представлені розраховані спектри поглинання окремих ароматичних амінокислот (Phe, Tyr та Trp), пептиду PheTyrTrp, утвореного з цих амінокислот, та адитивної суми екстинкцій цих амінокислот $1 \cdot Phe + 1 \cdot Tyr + 1 \cdot Trp$.

З рисунка видно, що спектр пептиду не є лінійною комбінацією спектрів окремих амінокислот. Така відмінність між спектрами може бути пов'язана із взаємодією між π -електронними системами ароматичних амінокислот. Проте ця взаємодія не може бути стековою, оскільки бензольні групи амінокислот розташовані по різні боки від пептидного зв'язку і метод ZINDO не враховує такої взаємодії [6, 7].

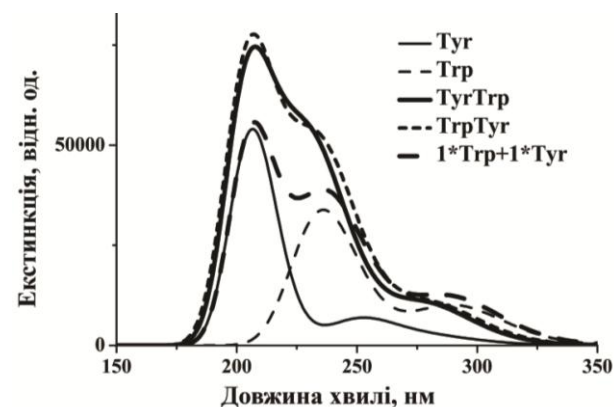


Рис. 3. Розраховані електронні спектри триптофану, тирозину, пептидів (TyrTrp, TrpTyr) та адитивної суми екстинкцій згаданих амінокислот ($1 \cdot Trp + 1 \cdot Tyr$).

Також були проведені розрахунки для пептидів з двох амінокислот - тирозин-триптофан (TyrTrp), фенілаланін-триптофан (PheTrp), фенілаланін-тирозин (PheTyr). Розраховані електронні спектри для вищезгаданих пептидів та адитивних сум екстинкцій відповідних ароматичних амінокислот наведені на рис. 3-5.

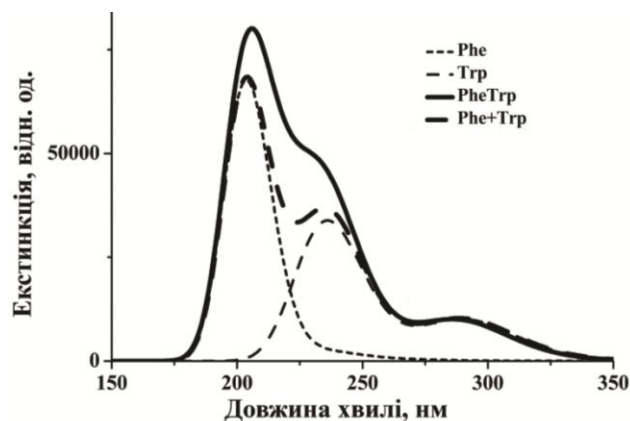


Рис. 4. Розраховані електронні спектри фенілаланіну, триптофану, пептиду PheTrp та адитивної суми екстинкцій цих амінокислот ($1 \cdot \text{Phe} + 1 \cdot \text{Trp}$).

На рис. 3 також представлені розрахунки для пептиду тирозин-триптофан (TyrTrp) та триптофан-тирозин (TrpTyr). Суттєвої відмінності в спектрах не спостерігається, а отже, порядок розташування амінокислот в пептиді не має значення.

З рисунків видно, що при утворенні таких послідовностей з двох амінокислот їх спектр є комбінацією спектрів окремих амінокислот. Проте ця комбінація є лінійною лише для пептиду фенілаланін-тирозин (PheTyr).

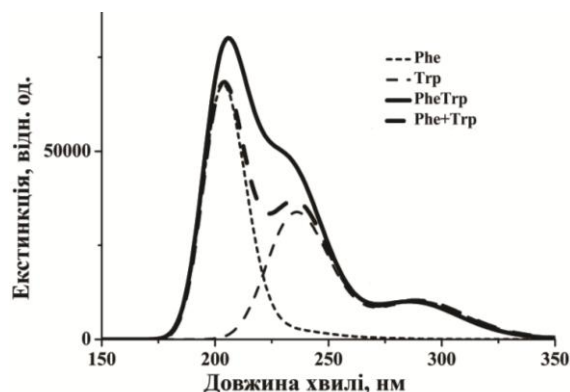
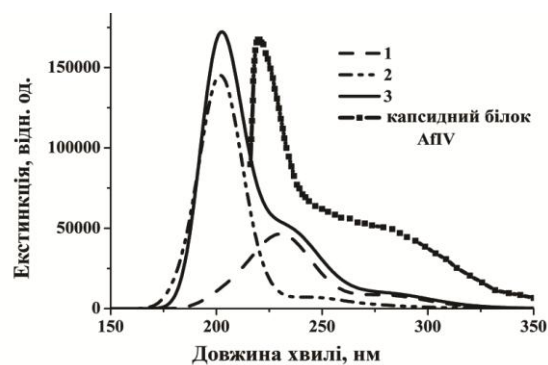
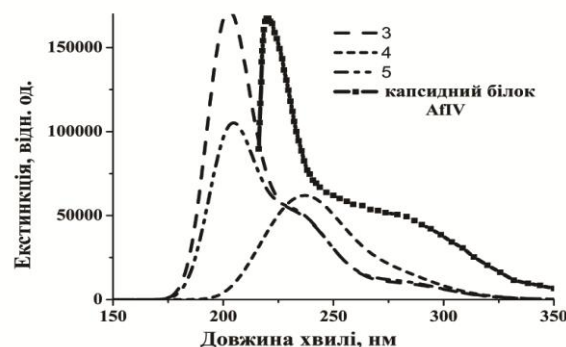


Рис. 5. Розраховані електронні спектри фенілаланіну, тирозину, пептиду PheTyr та адитивної суми екстинкцій цих амінокислот ($1 \cdot \text{Phe} + 1 \cdot \text{Tyr}$).



а



б

Рис. 6. Розраховані спектри пептидів:

а: 1 – Met**Trp**Ser, 2 – Asn**Tyr**PheLeu,

3 – Asn**Tyr**PheLeuAspMet**Trp**Ser

б: 3 – Asn**Tyr**PheLeuAspMet**Trp**Ser,

4 – Pro**Tyr**TyrSerLeuValSerPro**Trp**TyrHis,

5 – Val**Trp**AlaAsn**Tyr**Ala

та експериментально виміряний спектр поглинання капсидного білка іридовіруса комара AφV.

Також нами були проведені розрахунки для пептидів, які входять до складу головного капсидного білка іридовіруса комара AφV, який ми досліджували експериментально. Як показали результати наших досліджень [9], амінокислотна послідовність цього білка подібна до амінокислотної послідовності капсидного білка іридовірусу комара *Mosquito iridescent virus* (MIV), наведеної в [10].

Нами були вибрані наступні амінокислотні послідовності: 1) Met**Trp**Ser, 2) Asn**Tyr**PheLeu та послідовність, яка складається з цих двох пептидів 3) Asn**Tyr**PheLeuAspMet**Trp**Ser, а також 4) Pro**Tyr**TyrSerLeuValSerPro**Trp**TyrHis та 5) Val**Trp**AlaAsn**Tyr**Ala (тут ми використали загальноприйняті позначення амінокислот). Ці амінокислотні послідовності були вибрані тому, що в них присутні ароматичні амінокислоти, а також їх пари. На рис. 6 а, б представлені відповідні розраховані спектри.

Спектр поглинання капсидного білка іридовірусу комара AfIV в буфері Tris-HCl-NaCl-EDTA, наведений на рис. 6, було виміряно відносно буфера при кімнатній температурі $T = 290\text{ K}$ на спектрофотометрі Specord UV VIS.

Порівняння результатів наших розрахунків з нормованим спектром поглинання капсидного білка AfIV свідчить про якісне узгодження теорії з експериментом. Відмінність у положенні максимумів смуг поглинання розрахованого та виміряного спектрів може бути наслідком, з одного боку, відомої залежності положення максимумів смуг для амінокислот від властивостей їх оточення (розчинника) [3,4] та, з іншого боку, утворенням агрегатів [5] близькорозташованих ароматичних амінокислот у

згорнутій у глобулу білковій макромолекулі. У будь-якому випадку, для з'ясування цього питання потрібні подальші дослідження.

Отже, одержані результати дозволяють нам зробити висновок про те, що в пептидах та білках існує взаємодія між π -електронними системами ароматичних амінокислот вздовж лінії пептидного зв'язку, що проявляється у спектрах їх оптичного поглинання. Цю взаємодію можна уявити собі як взаємодію зв'язаних математичних маятників, підвішених на спільній нитці. Обґрунтованість такої аналогії зумовлена особливостями хімічної будови пептидів та білків [1, 2, 8].

Список використаних джерел

1. Ленинджер А. Основы биохимии / А. Ленинджер.- М.: Мир, 1985.- Т. 1.- 367 с.
2. Костюк П.Г. Биофизика / П. Г. Костюк, Д. М. Гродзинский, В. Л. Зима и др. - Киев: Вища школа, 1988.- 504 с.
3. Lakowicz J.R. Principles of fluorescence spectroscopy / J. R. Lakowicz.- New York: Springer Science + Business Media, 2006.
4. Alimova A. Virus particles monitored by fluorescence spectroscopy: a potential detection assay / A. Alimova, A. Katz, R. Podder et al. // Photochem. Photobiol.- 2004.- Vol. 80, No. 1.- P. 41-46.
5. Losytskyy M.Yu. Fluorescent J-aggregates and their biological applications / M. Yu. Losytskyy, V. M. Yashchuk // Advanced fluorescence reporters in chemistry and biology II. Springer series on fluorescence. 9.- 2010.- P.135-158.
6. Foresman J.B. Exploring chemistry with electronic structure method / J. B. Foresman, AE. Frisch.- 2nd Ed.- Wallingford: Gaussian, Inc., 1996.- 302 p.
7. Frisch AE. Gaussian 03 user's reference / AE. Frisch, M. J. Frisch, G. W. Trucks.- 2nd Ed.- Wallingford: Gaussian, Inc., 2003.- 337 p.
8. Кантор Ч. Биофизическая химия / Ч. Кантор, П. Шиммель. – Москва: Мир, 1984. –Т.1. – 336 с.
9. Рудь Ю.П. Спектральные свойства иридовірусу комара *Aedes flavescens* / Ю.П. Рудь, Л. П. Бучацкий, В. Н. Кравченко и др.// Биофизика.- 2014.- Т. 59, № 1.- С. 162–168.
10. Амінокислотна послідовність головного капсидного білка іридовірусу комара MIV [Електронний ресурс]. Режим доступу: <http://www.uniprot.org/uniprot/Q197E6>

References

1. LEHNINGER, A. L. (1982) *Principles of biochemistry*. Worth Publishers.
2. KOSTYUK, P.G. et al. (1988) *Biophysics*. Kiev: Vyshcha Shkola. (in Russian).
3. LAKOWICZ, J. R. (2006) *Principles of Fluorescence Spectroscopy*. 3rd Ed. New York: Springer Science + Business Media.
4. ALIMOVA, A. et al. (2004) Virus particles monitored by fluorescence spectroscopy: a potential detection assay for macromolecular assembly. *Photochem. Photobiol.* 80 (1). p. 41-46
5. LOSYTSKYI, M. YU. and YASHCHUK, V. M. (2010) Fluorescent J-aggregates and their biological applications. *Advanced Fluorescence Reporters in Chemistry and Biology II. Molecular Constructions, Polymers and Nanoparticles. Springer Series on Fluorescence*. 9. p.135-158.
6. FORESMAN, J. B. (1996) *Exploring chemistry with electronic structure methods*. 2nd Ed. Wallingford: Gaussian.
7. FRISCH, AE., FRISCH, M., TRUCKS, G. (2003) *Gaussian 03 User's Reference*. 2nd Ed. Wallingford: Gaussian
8. CANTOR, C., SCHIMMEL, P. (1984) *Biophysical chemistry*. Moskva: Mir. (in Russian).
9. RUD, YU. P. et al. (2014) Spectral properties of mosquito *Aedes flavescens* iridovirus. *Biophysics*. 59 (1). p. 129-134.
10. UNIPROT. (2014) *Major capsid protein of Mosquito iridescent virus*. [Online] Available from: <http://www.uniprot.org/uniprot/Q197E6>

Надійшла до редколегії 29.04.14

УДК 532.72;546.3-14

Оглобля В.І.¹, к.ф.-м.н., доц.,
Оглобля О.В.¹, к.ф.-м.н., доц.,
Стефанишина Г.О.¹, студ.

V.I. Ogloblya ¹, PhD,
O.V. Ogloblya ¹, PhD,
G.O. Stephanyshyna ¹, stud.

Дифузія та в'язкість розплавів Ga-In і Se-In

Diffusion and viscosity of Ga-In and Se-In melts

¹Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 01601, м. Київ, вул.
Володимирська 64/13
e-mail: alekson@kiev.ldc.net

¹Taras Shevchenko National University of Kyiv,
01601, Kyiv, Volodymyrska St., 64/13,
e-mail: alekson@kiev.ldc.net

Розраховані в моделі рідин твердих сфер атомарні коефіцієнти дифузії Ga, In та малої домішки ^{108m}Ag в розплавах Ga-In в широкому температурному і концентраційному інтервалах узгоджуються з експериментальними даними[1], що свідчить про безактиваційний моноатомний механізм дифузії. Розраховані по модифікованій формулі Стокса-Ейнштейна значення в'язкості η цих розплавів також узгоджуються з експериментальними даними. В системі Se-In отримані по формулі Стокса-Ейнштейна (з використанням, розрахованих в моделі рідин твердих сфер, атомарних коефіцієнтів дифузії Se, In) значення η не узгоджуються з експериментальними даними[2]. Це свідчить про дифузію Se, In не лише в атомарному вигляді а і у вигляді комплексів, що складаються з декількох атомів (найбільш імовірно це комплекси типу GaIn₂), які з підвищенням температури дисоціюють.

Ключові слова: розплави, дифузія, в'язкість, комплекси.

Calculated in the framework of rigid spheres liquid model atomic diffusion coefficients of Ga, In and small impurities ^{108m}Ag in Ga-In melts in broad temperature and concentration interval are in agreement with experimental results[1]. This let us conclude about unactivation monoatomic nature of diffusion in such systems. Viscosity η of this melts where calculated by utilizing improved formula of Stoks-Einstein. Acquired quantities are in good agreement with experimental results. Viscosity η of the system Se-In where also calculated by utilizing formula of Stoks-Einstein (using atomic diffusion coefficients of Se, In calculated in framework of rigid spheres model). But this quantities are not agreed with experimental results[2]. This let us conclude about diffusion of Se, In not only in atomic form but also in the form of complexes, which consists of several atoms (the most probable form is GaIn₂). With temperature increase this complexes dissociates.

Key words: melts, diffusion, viscosity, complexes.

Статтю представив член-кор. НАН України, д.ф.-м.н., проф. Макара В.А

Вступ

Процеси дифузії, в'язкості достатньо добре (експериментально та теоретично) досліджені в чистих рідких металах та в іонно-електронних бінарних розплавах з необмеженою розчинністю компонентів в рідкому стані (система Ga-In)[1]. Показано, що в таких системах температурна залежність експериментальних коефіцієнтів самодифузії та дифузії малих домішок близька до лінійної і добре описується в рамках моделі рідин твердих сфер. Це свідчить про безактиваційний, моноатомний механізм дифузії. Наявність в розплавах таких систем домішок кисню, азоту

може привести до утворення комплексів (наноугруповань) типу: метал-розчинник + домішка, що дифундує + кисень чи азот, які складаються з 3÷30 атомів і з підвищенням температури дисоціюють (розпадаються). При температурах нижчих, ніж температура дисоціації комплексів, в дифузійних процесах приймають участь як окремі атоми, так і наноугруповання, поведінка яких описується в рамках флуктуаційної моделі дисоціації комплексів [1]. На жаль в бінарних іонно-електронних розплавах з обмеженою розчинністю в рідкому стані (система Se-In) дифузійні процеси не досліджувались. Відсутні

як експериментальні, так і теоретичні дослідження дифузійних процесів в таких системах [2]. Але в літературі існують детальні експериментальні дослідження в'язкості таких систем як в межах так і за межами бінодалі [2]. Маючи експериментальні дані по дифузії компонентів в системі в широкому температурному інтервалі, можна, по модифікованій формулі Стокса-Ейнштейна, розрахувати в'язкість таких розплавів і, навпаки, маючи надійні експериментальні дані по в'язкості, можна із модифікованої формули Стокса-Ейнштейна отримати значення коефіцієнтів самодифузії компонентів і, потім, порівняти їх зі значеннями коефіцієнтів самодифузії, розрахованими в моделі рідин твердих сфер, для випадку моноатомної дифузії компонентів і, відповідно, робити висновок про атомарну дифузію компонентів чи дифузію компонентів у вигляді комплексів (наноугруповань).

Способи розрахунку коефіцієнтів дифузії компонентів, домішок та в'язкості у розплавах системи Ga-In та Se-In

При описанні явищ масопереносу в розплавах бінарних систем іноді застосовується модель активованих переміщень [3], частіше модель рідин твердих сфер [1,4,5].

У межах активаційної моделі не можна розрахувати ні температурну, ні концентраційну залежність коефіцієнтів дифузії компонентів у бінарних розплавах. Безактиваційна модель рідин твердих сфер, яка розглядає хаотичний рух частинок у рідині, дозволяє обчислювати як температурні, так і концентраційні залежності коефіцієнтів самодифузії, причому, у випадку дифузії в розплавах з необмеженою розчинністю в рідкому стані, теоретичні значення D добре узгоджуються з експериментальними результатами [1,5, 6].

Для обчислення коефіцієнтів самодифузії компонентів бінарної суміші рідин твердих сфер у [4] отримано формули які з урахуванням молекулярно-динамічного фактора $c(\eta_m)$ мають вигляд (1,2). Де D_1, D_2 – коефіцієнти самодифузії атомів першого та другого компонентів; V – молярний об'єм сплаву; x_1, x_2 – атомні частки компонентів; σ_{11}, σ_{22} – діаметри твердих сфер атомів відповідних компонентів; $\sigma_{12} = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2}$;

m_1, m_2 – маси твердих сфер першого та другого компонентів; g_{11}, g_{22}, g_{12} – функції розподілу взаємодіючих пар атомів першого виду, другого, першого та другого видів відповідно оцінені в точці контакту.

$$D_1 = kT \left[\frac{16\pi N}{3V} \left\{ x_1 \sigma_{11}^2 g_{11} \left(\frac{m_1 kT}{4\pi} \right)^{\frac{1}{2}} + x_2 \sigma_{12}^2 g_{12} \left(\frac{m_1 m_2 kT}{2\pi(m_1 + m_2)} \right)^{\frac{1}{2}} \right\} \right]^{-1} c(\eta_m), \quad (1)$$

$$D_2 = kT \left[\frac{16\pi N}{3V} \left\{ x_2 \sigma_{22}^2 g_{22} \left(\frac{m_2 kT}{4\pi} \right)^{\frac{1}{2}} + x_1 \sigma_{12}^2 g_{12} \left(\frac{m_1 m_2 kT}{2\pi(m_1 + m_2)} \right)^{\frac{1}{2}} \right\} \right]^{-1} c(\eta_m), \quad (2)$$

Функції розподілу визначаються через коефіцієнт пакування суміші η_m за формулами:

$$g_{11} = \frac{1 + 0.5\eta_m + \frac{\pi N}{4V} x_2 \sigma_{22}^2 (\sigma_{11} - \sigma_{22})}{(1 - \eta_m)^2},$$

$$g_{22} = \frac{1 + 0.5\eta_m + \frac{\pi N}{4V} x_1 \sigma_{11}^2 (\sigma_{22} - \sigma_{11})}{(1 - \eta_m)^2},$$

$$g_{12} = (g_{11}\sigma_{22} + g_{22}\sigma_{11}) / (\sigma_{11} + \sigma_{22}).$$

Коефіцієнт пакування однокомпонентної рідини визначається за мольним об'ємом і діаметром твердої сфери:

$$\eta = \frac{\pi \sigma^3 N}{6V},$$

а коефіцієнт пакування суміші визначається з виразу: $\eta_m = \frac{\pi N}{6V} (\sigma_{11}^3 x_1 + \sigma_{22}^3 x_2)$.

Для обчислення коефіцієнтів дифузії атомів малої домішки третього виду в бінарних розплавах можна запропонувати вираз, аналогічний (1), (2), а саме [6]:

$$D_3 = kT \left(\frac{16\pi N}{3V} \sigma_{13}^2 g_{13} \left(\frac{\bar{m} m_3 kT}{2\pi(\bar{m} + m_3)} \right)^{\frac{1}{2}} \right)^{-1} c(\eta_m), \quad (3)$$

де m_3 – маса атома домішки, σ_{33} – діаметр сфери атома домішки,

$$g_{33} = \frac{1 + 0.5\eta_m + \frac{\pi N}{4V} (\sigma_{11}x_1 + \sigma_{22}x_2)^2 (\sigma_{33} - \sigma_{11}x_{11} - \sigma_{22}x_2)}{(1 - \eta_m)^2}, \quad g_{13} = \frac{\bar{g}\sigma_{33} + g_{33}(\sigma_{11}x_1 + \sigma_{22}x_2)}{\sigma_{11}x_1 + \sigma_{22}x_2 + \sigma_{33}},$$

$$\text{де } \bar{g} = \frac{1 + 0.5\eta_m}{(1 - \eta_m)^2}.$$

Формули (1), (2) та (3) можна використовувати не лише для систем з необмеженою розчинністю компонентів в рідкому стані (система Ga-In) а і для розрахунку коефіцієнтів самодифузії, коефіцієнтів дифузії малих домішок у системах з розшаруванням в рідкому стані (система Se-In), якщо дифузія відбувається в атомарному вигляді. Але, так як, в області меж бінодалі (спінодалі) в таких системах існує нестабільний стан і є значні флуктуації густини, то можлива не лише атомарна дифузія компонентів та домішок, а і дифузія у вигляді комплексів розміри (діаметри) яких великі ($\sigma \sim 4-6\text{\AA}$) при температурах плавлення, а при підвищенні температури наногрупуювання розпадаються (дисоціюють) і дифузія відбувається в атомарному вигляді. Можна припустити, що в області меж бінодалі вклад в дифузійні процеси вносять як окремі атоми, так і наногрупуювання різного складу.

Відсутність надійних експериментальних даних по коефіцієнтах самодифузії в таких системах, нажалі, не дозволяє перевірити відповідність розрахованих в моделі рідин твердих сфер коефіцієнтів самодифузії окремих атомів компонентів їх експериментальним значенням. Для того, щоб розв'язати цю задачу нами був запропонований метод розрахунку коефіцієнтів дифузії з надійних експериментальних даних по в'язкості таких систем, з використанням модифікованого співвідношення Стокса-Ейнштейна

$$\eta = \frac{kT}{4\pi r D}, \quad (4)$$

де η - динамічна в'язкість (Па·с), k - константа Больцмана, T - термодинамічна температура системи, r - ефективний радіус:

$$r = x_1 r_1 + x_2 r_2,$$

$$\sigma_{13} = \frac{\sigma_{11}x_1 + \sigma_{22}x_2 + \sigma_{33}}{2}, \quad \bar{m} = m_1x_1 + m_2x_2.$$

Функції розподілу взаємодіючих атомів третього виду g_{33} , а також першого, другого та третього видів g_{13} , визначаються за формулами:

(x_1, x_2 - атомні долі першого та другого компонента, r_1, r_2 - радіуси дифундуючи частинок першого і другого виду), D – ефективний коефіцієнт дифузії при досліджуванні температури:

$$D = x_1 D_1 + x_2 D_2.$$

Тут D_1 та D_2 – відповідно коефіцієнти дифузії першого та другого компонента в досліджуваній системі.

Отримані результати та їх обговорення

В моделі рідин твердих сфер за формулами (1) та (2) нами були розраховані коефіцієнти самодифузії Ga та In в розплавах Ga-In в широкому концентраційному (від чистого Ga з кроком 5% ат. до чистого In) та температурному інтервалі (від температур плавлення до 1000K). По формулі (3) були розраховані коефіцієнти дифузії малої домішки ^{108m}Ag , а також по цій формулі були розраховані коефіцієнти дифузії малих домішок ^{70}Ga та ^{114m}In . Значення коефіцієнтів самодифузії Ga та In розрахованих по формулах (1) і (2) співпадають із значеннями коефіцієнтів дифузії малих домішок ^{70}Ga та ^{114m}In розрахованих за формулою (3) (розходження не перевищувало 3%). Як приклад на рис. 1.2 та в табл. 1 приведені розраховані в моделі рідин твердих сфер атомарні коефіцієнти дифузії Ga, In, Ag. В табл. 1 також приведені розраховані за формулою (4) значення динамічної в'язкості $\eta_{\text{ат}}$ (з використанням атомарних коефіцієнтів дифузії Ga, In). Коефіцієнти самодифузії Ga та In, коефіцієнти дифузії малої домішки Ag^{108m} розраховані для розплавів чистого Ga, In та розплавів системи Ga-In (в широкому концентраційному та температурному інтервалі) добре узгоджуються з літературними експериментальними даними [1]. Температурна залежність D близька до лінійної, це свідчить про

дифузію малих домішок In, Ga, Ag в даних розплавах лише в атомарному вигляді. Далі нами, з використанням формул (1), (2) та формули (3), були розраховані атомарні коефіцієнти самодифузії Se, In та атомарні коефіцієнти дифузії малої домішки ^{75}Se та $^{114\text{m}}\text{In}$ для системи з обмеженою розчинністю в рідкому стані Se-In (концентрацію Se зменшували в межах бінодалі від 25% ат. до 0% ат. з кроком 5% ат., в температурному інтервалі 800-1150K). Значення отримані з формул (1,2) для атомарних коефіцієнтів самодифузії Se, In та з формули (3) для атомарних коефіцієнтів дифузії малих домішок ^{75}Se та $^{114\text{m}}\text{In}$ добре узгоджуються. Нажаль, порівняти розрахункові значення атомарних коефіцієнтів дифузії з експериментальними не було можливості, оскільки такі дані в літературі відсутні.

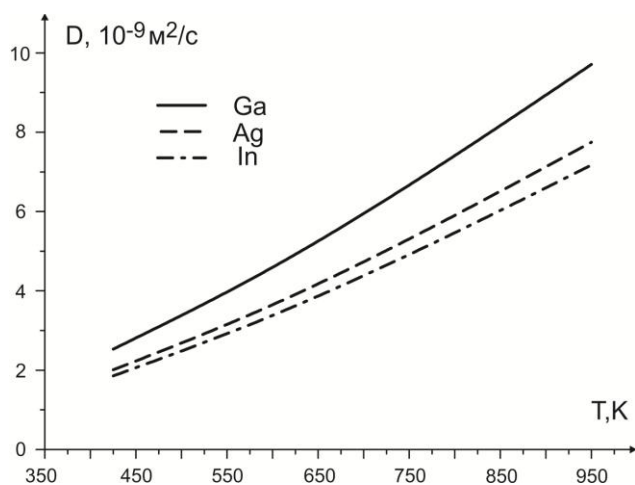


Рис. 1. Температурні залежності атомарних коефіцієнтів дифузії Ga, In та Ag в розплавах чистого In

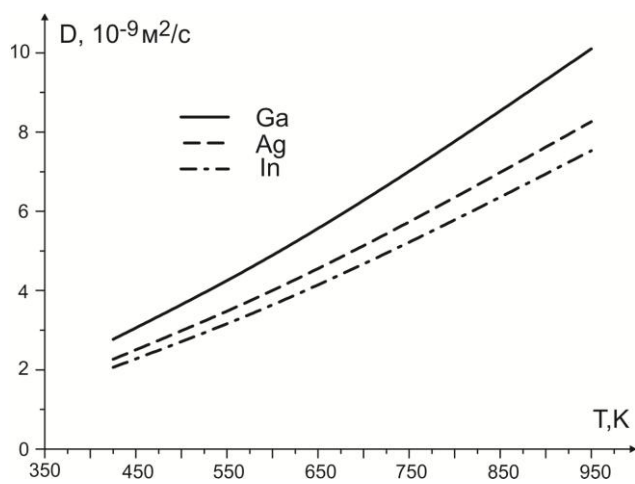


Рис. 2. Температурні залежності атомарних коефіцієнтів дифузії Ga, In та Ag в розплавах Ga(50% ат.)-In(50% ат.)

Використовуючи модифіковану формулу Стокса-Ейнштейна (4) розраховували в'язкість η розплавів In-Ga (як приклад див. табл. 1) в широкому температурному та концентраційному інтервалах. Отримані розрахункові значення в'язкості η в межах похибки експерименту узгоджуються з експериментальними даними [7]. Це свідчить про те, що модифіковану формулу (4) можна успішно використовувати для систем з необмеженою розчинністю компонентів в рідкому стані, коли компоненти системи дифундують в атомарному вигляді.

Розрахунок в'язкості за формулою (4) з використанням атомарних коефіцієнтів дифузії Se та In для розплавів системи Se-In (з обмеженою розчинністю у рідкому стані) дав значення які не узгоджуються в межах бінодалі з експериментальними даними [2]. Як приклад для системи Se (25% ат.) - In (75% ат.) на рис. 3 наведено температурну залежність атомарних коефіцієнтів дифузії ^{75}Se та $^{114\text{m}}\text{In}$ розрахованих за формулою (3), яка близька до лінійної. В таблиці 2 для системи Se (20% ат.) - In (80% ат.) наведені розраховані за формулою (3) атомарні коефіцієнти дифузії ^{75}Se та $^{114\text{m}}\text{In}$ та розраховані за модифікованою формулою Стокса-Ейнштейна (4) значення в'язкості $\eta_{\text{ат.}}$ (отримані з використанням атомарних коефіцієнтів дифузії Se, In). Бачимо, що $\eta_{\text{ат.}}$ не узгоджується з експериментальними значеннями $\eta_{\text{експ.}}$ [2]. Щоб узгодити $\eta_{\text{експ.}}$ [2] з розрахованими за формулою (4) значеннями в'язкості необхідно використовувати ефективний коефіцієнт дифузії ($D = D_{\text{еф}}$) приблизно в 1.5 рази менший атомарних коефіцієнтів Se, In (див. табл. 2). Для системи Se (25% ат.)-In (75% ат.) для узгодження в межах бінодалі експериментальної в'язкості з теоретичною необхідно взяти $D_{\text{еф}}$ приблизно в два рази менший атомарних значень коефіцієнтів дифузії Se, In. В системі Se (5% ат.)-In (95% ат.) $D_{\text{еф}}$ майже співпадає з атомарними коефіцієнтами дифузії Se, In. Зрозуміло, що при зменшенні в розплавах концентрації Se основний вклад в значення $D_{\text{еф}}$ вносить коефіцієнт дифузії In тому можна вважати, що в даному випадку In дифундує, в основному, в атомарному вигляді, а Se у вигляді

комплексів, що складаються з двох-трьох атомів. Експериментальні дані по дифузії Se, In в

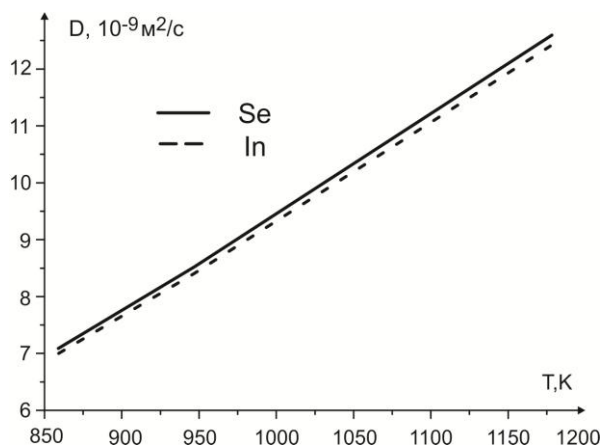


Рис. 3. Температурні залежності атомарних коефіцієнтів дифузії Se, In в розплавах Se (25% ат.)-In(75% ат.)

розплавах Se-In відсутні. Експериментальні ж дані по дифузії ^{114m}In в чистому In отримані в широкому температурному інтервалі[1] свідчать про без активаційний моно атомний механізм дифузії In.

Можна вважати, що в досліджених розплавах Se-In дифузія Se, In відбувається як в атомарному вигляді так і у вигляді комплексів, що складаються з декількох атомів з ефективним діаметром $\sigma \sim 3.5\text{\AA}$ (при $T=912\text{K}$). Найбільш імовірно це комплекси типу SeIn_2 які згідно з флуктуаційною теорією дисоціації комплексів [1] при температурах вищих за температури дисоціації повністю розпадаються. При $T=1120\text{K}$ значення в'язкості $\eta_{\text{ат.}}$ розраховані за формулою (4) в досліджених концентраційних інтервалах (з використанням атомарних коефіцієнтів дифузії Se, In) узгоджуються з експериментальними значеннями в'язкості[2].

Таблиця 1

Розраховані атомарні коефіцієнти Ga, In, Ag та в'язкість розплавів Ga(10% ат.)-In(90% ат.)

T, K	373	395	425	475	525	575	665	785	953
$\sigma_{11}, 10^{-10} \cdot \text{м (Ga)}$	2,56	2,55	2,54	2,53	2,52	2,50	2,49	2,47	2,44
$\sigma_{22}, 10^{-10} \cdot \text{м (In)}$	2,93	2,92	2,91	2,89	2,88	2,86	2,84	2,82	2,79
$\sigma_{33}, 10^{-10} \cdot \text{м (Ag)}$	2,75	2,74	2,73	2,72	2,70	2,69	2,67	2,65	2,62
η_m	0,48	0,48	0,47	0,46	0,45	0,44	0,43	0,41	0,39
$V_{\text{Ga}}, 10^{-5} \cdot \text{м}^3/\text{моль}$	1,16	1,17	1,17	1,18	1,19	1,19	1,21	1,22	1,25
$V_{\text{In}}, 10^{-5} \cdot \text{м}^3/\text{моль}$	1,63	1,63	1,64	1,65	1,66	1,67	1,68	1,71	1,74
$V_{\text{In-Ga}}, 10^{-5} \cdot \text{м}^3/\text{моль}$	1,58	1,58	1,59	1,60	1,61	1,62	1,64	1,66	1,69
$\bar{g}$	4,64	4,54	4,41	4,22	4,06	3,92	3,71	3,48	3,24
$C(\eta_m)$	0,64	0,67	0,71	0,76	0,82	0,87	0,95	1,04	1,15
$\sigma_{13}, 10^{-10} \cdot \text{м}$	2,82	2,81	2,8	2,79	2,77	2,76	2,74	2,72	2,69
$g_{33} \text{ (Ag)}$	4,51	4,54	4,41	4,22	4,06	3,92	3,71	3,48	3,24
g_{13}	4,58	4,54	4,41	4,22	4,06	3,92	3,71	3,48	3,24
$D_{\text{Ag}}, 10^{-9} \cdot \text{м}^2/\text{с}$	1,64	1,79	2,05	2,5	2,97	3,46	4,40	5,76	7,84
$\sigma_{13}, 10^{-10} \cdot \text{м}$	2,72	2,72	2,71	2,69	2,68	2,67	2,65	2,62	2,60
$g_{33} \text{ (Ga)}$	4,34	4,24	4,12	3,95	3,8	3,68	3,48	3,28	3,05
g_{13}	4,48	4,38	4,26	4,08	3,92	3,79	3,59	3,37	3,14
$D_{\text{Ga}}, 10^{-9} \cdot \text{м}^2/\text{с}$	2,02	2,25	2,57	3,12	3,71	4,33	5,50	7,18	9,77
$\sigma_{13}, 10^{-10} \cdot \text{м}$	2,91	2,90	2,89	2,87	2,86	2,85	2,82	2,80	2,77
$g_{33} \text{ (In)}$	4,68	4,57	4,44	4,25	4,09	3,95	3,73	3,50	3,26
g_{13}	4,66	4,56	4,42	4,23	4,07	3,93	3,72	3,49	3,25
$D_{\text{In}}, 10^{-9} \cdot \text{м}^2/\text{с}$	1,49	1,65	1,89	2,30	2,74	3,19	4,06	5,31	7,23
$\eta, 10^{-3} \cdot \text{Па} \cdot \text{с}$	1,84	1,76	1,66	1,53	1,43	1,35	1,24	1,13	1,02

Таблиця 2

Результати розрахунку в'язкості $\eta_{\text{ат.}}$ розплавів Se(20% ат.)- In(80% ат.), атомарних коефіцієнтів дифузії Se, In та ефективного коефіцієнта дифузії $D_{\text{еф}}$

T, K	912	920	936	964	1012	1062	1087
$\sigma_{11}, 10^{-10} \cdot \text{м (Se ат.)}$	3,00	3,0	2,99	2,99	2,98	2,97	2,97
$\sigma_{22}, 10^{-10} \cdot \text{м (In ат.)}$	2,80	2,80	2,79	2,79	2,78	2,78	2,77
$D_{\text{ат(Se)}}, 10^{-9} \cdot \text{м}^2/\text{с}$	7,75	7,87	8,12	8,55	9,32	10,15	10,58
$D_{\text{ат(In)}}, 10^{-9} \cdot \text{м}^2/\text{с}$	7,64	7,76	8,00	8,43	9,19	10,00	10,42
$\eta_{\text{ат}}, 10^{-3} \cdot \text{Па} \cdot \text{с}$	0,92	0,92	0,90	0,89	0,86	0,83	0,81
$\eta_{\text{експ}}, 10^{-3} \cdot \text{Па} \cdot \text{с}$	1,47	1,27	1,21	1,15	1,08	1,02	1,00
$\sigma_{11}, 10^{-10} \cdot \text{м (Se компл.)}$	3,44	3,32	3,29	3,27	3,24	3,22	3,21
$r, 10^{-10} \cdot \text{м}$	1,46	1,45	1,45	1,44	1,44	1,43	1,43
$D_{\text{еф}}, 10^{-9} \cdot \text{м}^2/\text{с}$	5,04	5,52	5,90	6,37	7,17	7,97	8,38

Отже $T \approx 1120 \text{ K}$ можна вважати температурою дисоціації цих комплексів. При температурах $T < 1120 \text{ K}$ в досліджених розплавах Se-In можлива дифузія Se, In як у вигляді комплексів так і у вигляді окремих атомів із

різним співвідношенням між потоками частинок, що дифундують. Тому можна говорити лише про певний ефективний коефіцієнт дифузії Se, In та про ефективний діаметр дифундуючої частинки.

Список використаних джерел

1. Булавін Л.А. Фізика іонно-електронних рідин: монографія / Л.А. Булавін, В.І. Лисов, С.Л. Рево, В.І. Оглобля, Т.Л. Цареградська.-К.: ВПЦ "Київський університет", 2008. –367с.
2. Булавін Л.А. Критичні явища розшарування в монотектичних та евтектичних розплавах металів / Л.А. Булавін, Ю.О. Плавачук, В.М. Склярчук, А.І. Момот. - Полтава: АСМІ, 2010. –336с.
3. Френкель Я.І. Кінетична теорія рідин / Я.І. Френкель. – Л.: Наука, 1975. – 598с.
4. Аль-Челабі Н.А. Взаєм та самодифузія в бінарних сумішах / Н.А. Аль-Челабі, Е. Мак Лангліні // Mol. Phys. – 1970. – Vol. 19, № 5. – P.703-715.
5. Харьков І.Е. Самодифузія в рідких металах та сплавах / І.Е. Харьков, С.Ю. Якушевський // УФЖ. – 1975. – т. 20, №4. –с. 551-557.
6. Лозовой В.І. Концентраційна залежність коефіцієнтів дифузії компонентів та домішок в розплавах Ag-In / В.І. Лозовой, В.І. Оглобля, Л.Е. Михайлова //Металофізика. – 1979. – т. 1, №2. – с. 122-127.
7. Кононенко В.І. Про структуру рідких сплавів в системі галій-індій / В.І. Кононенко, С.В. Голубев, А.В. Рябина, В.В. Торокін // Расплавы, 1998. — №6, с. 33-37.

References

1. BULAVIN, L.A. et al. (2008), *Physics of ion-electronic liquids: monograph*. Kyiv: Vydavnycho-polihrafichnyj centr Kyivskyj universytet.
2. BULAVIN, L.A. et al. (2010) *Critical phenomena of exfoliation in monotectic and eutectic metal melts*. Poltava: ACMI.
3. FRENKEL, Y.I. (1975) *Kinetic theory of liquids*. Leningrad: Science.
4. AL-CHALABI, N.A., MC LANGHLIN, E. (1970) *Mutual and self-diffusion in binary mixtures*. Mol. Phys. 19 (5). p.703-715.
5. HARKOV, I.E., YAKUSHEVSKYY, S.YU. (1975) *Selfdiffusion in liquid melts and alloys*. UPJ. 20 (4). p.551-557.
6. LOZOVY, V.I., OGLOBLYA, V.I., MIHALOVA, L.E. (1979) *Concentrational dependence of diffusion coefficients of components and impurities in Ag-In melts*. Metalphysics. 1 (2). p.122-127.
7. KONONENKO, V.I., GOLUBEV, S.V., RIABINA, A.V., TOROKIN, V.V. (1998) *About liquid alloys structure of Gallium-Indium system*. Melts. 6. p.33-37.

Надійшла до редколегії 25.04.14

УДК 519.9

Савенко В.С.¹, асп.

**Старіння водних суспензій лапоніту в
присутності аніонної поверхнево-активної
речовини**

¹Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, фізичний факультет, 64/13,
вул. Володимирська, Київ, 01601, Україна, e-mail:
savenkovolod@mail.ru

Savenko V.S.¹, PhD stud.

**Aging of Laponite aqueous suspensions in
presence of anionic surfactant**

¹Taras Shevchenko National University of Kyiv,
Department of Physics, 64/13, Volodymyrska str.,
Kyiv 01601, Ukraine, e-mail: savenkovolod@mail.ru

В цій роботі ми дослідили вплив аніонної поверхнево-активної речовини додецилсульфату натрію на процес старіння водних суспензій синтетичної глини лапоніту. Концентрація лапоніту була сталою та становила 2.5% процента від маси зразків, а вміст аніонної поверхнево-активної речовини варіювався в діапазоні (0.05÷2) мМоль/л. В роботі використовувались реологічні дослідження та експериментальна техніка малокутового рентгенівського розсіяння. Це дало змогу встановити вплив додецилсульфату натрію як на макроскопічні так і на мікроскопічні параметри системи вода-лапоніт під час старіння зразків.

Ключові слова: лапоніт, водні суспензії, додецилсульфонат натрію, аніонна поверхнево-активна речовина

In this study, we investigated the effect of anionic surfactant sodium dodecyl sulfate on the aging process of aqueous suspensions of synthetic clay Laponite. Concentration of Laponite was constant $C_L=2.5\%$ wt and the content of anionic surfactant varied in range $(0.05 \div 2)$ mM. In this investigation we have used rheological tests and small-angle X-ray scattering experimental technique. This allowed us to determine the effect of sodium dodecyl sulfate on both macroscopic and the microscopic parameters of the system water-Laponite during aging process. It was shown that adding of sodium dodecyl sulfate to aqueous suspension of Laponite accelerate viscosity growing during aging time and thus decrease ergodicity-breaking time. Moreover analysis of SAXS spectra of mentioned systems revealed that due to sodium dodecyl sulfate presence average distance between Laponite platelets grow from 55 nm to 70 nm.

Key words: Laponite, aqueous suspensions, SDS, anionic surfactant

Статтю представив академік НАН України, д.ф.-м.н., проф. Булавін Л.А.

Вступ

Лапоніт – синтетична глина, що привертає значний інтерес як з точки зору практичного використання, так і фундаментальної науки. Він широко використовується в різних сферах виробництва: фармакологія, медицина, будівництво, промисловість [1]. Більше того, водні суспензії лапоніту є цікавою модельною

системою, оскільки його частинки несуть як позитивний, так і негативний заряди у водному середовищі. Ця особливість є причиною складної фазової діаграми, що включає в себе золь, гель, скло та нематичну фазу в залежності від концентрації глини [2-7]. Інша особливість такої системи – ефект старіння: в суспензії лапоніту проходить еволюційний процес: система переходить зі стану золь до гелеподібного (гель,

скло, нематична фаза). Час такого переходу залежить від концентрації лапоніту [2].

Крім того, фазова діаграма водних суспензій лапоніту залежить від концентрації солі (іонної сили). На додаток до попередньо описаних фаз, сіль спричиняє флокуляції пластинок лапоніту та розділення фаз при достатньо високій концентрації ($C_s > 20$ ммоль). Цей ефект був детально досліджений [8, 9]. Основна дія солі полягає в зменшенні дебаївського радіусу і, як наслідок, часткове екранування позитивних і негативних зарядів на поверхні частинок лапоніту. На відміну від цього ефекту, ми вирішили дослідити вплив аніонної поверхнево-активної речовини на фазову діаграму водної суспензії лапоніту. Аніонні ПАР можуть адсорбуватись на позитивно зарядженій бічній поверхні лапоніту через наявність гідрофільного хвоста та негативно зарядженої основної частини. Як результат, фазова діаграма водної суспензії лапоніту може змінюватись в наслідок зміни співвідношення енергії притягання та відштовхування між частинками лапоніту. Ще одна причина інтересу до даної теми дослідження – практичне застосування. При виробництві побутової хімії лапоніт та аніонні ПАР можуть використовуватись в одному й тому ж продукті. Тому потрібно уявлення яким чином ці дві речовини будуть співіснувати в рамках одного середовища.

Матеріали і методи

В даній роботі ми використовували лапоніт типу “RD”, що був виготовлений компанією Rockwood Additives Ltd. Цей тип не модифікований, не містить домішок та є найбільш поширеним у використанні [9]. Він був отриманий у вигляді білого порошку та застосовувався без додаткової обробки.

Лапоніт належить до групи спектитів з групою симетрії 2:1. Він є синтетичним аналогом природної глини гекторит [10]. Окремі частинки лапоніту складаються з октаедричного шару оксиду магнію, що розташований між двома

тетраедричними шарами двоокису кремнію (рис. 1). Порошок лапоніту складається зі стеків пластинок. Вони скраплені електростатично за допомогою іонів Na^+ , що розтішовані між частинками (рис.1).

Під час диспергації у воді вказані стеки розчіплюються на окремі пластинки, які несуть негативний заряд на основній поверхні та позитивний на бічній (при рівні $\text{pH} < 11$) [3, 11, 12]. Діаметр пластинки лапоніту складає в середньому 25 нм, а товщина близько 1 нм. Емпірична формула кристалічної комірки лапоніту $\text{Na}^{+0.7}[\text{Si}_8\text{Mg}_{5.5}\text{Li}_{0.3}\text{O}_{20}(\text{OH})_4]^{-0.7}$ [10]. Таким чином, водна суспензія лапоніту є дуже складною колоїдною системою через наявність зарядів обох знаків на поверхні частинок глини та анізотропії їх форми.

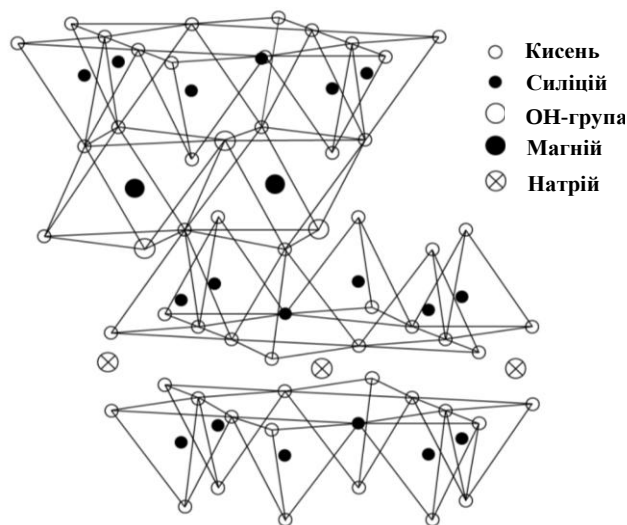


Рис. 1. Структура частинок лапоніту.

Додецилсульфат натрію (ДСН) – аніонна поверхнево-активна речовина з молекулярною масою 288.3 г/моль. Хімічна формула – $\text{C}_{12}\text{H}_{25}\text{SO}_4\text{Na}$. Він широко використовується у виробництві побутової хімії, як і лапоніт. В даній роботі використовувався ДСН виробництва Sigma-Aldrich без додаткової обробки.

Розчини ДСН та лапоніту було приготовано в наступний спосіб. Вказані речовини змішувались з деіонізованою водою MilliQ в необхідній

концентрації, а далі оброблялись за допомогою ультразвуку на диспергаторі UP 400S (Dr. Hielscher GmbH, Німеччина) при частоті 24 кГц та потужності 400 Вт протягом 15 хв. Концентрація лапоніту мала фіксоване значення, $C_L = 2.5\%$ ваг., а концентрація додецилсульфату натрію варіювався в межах $C_s = (0.05 \div 2)\%$ ваг. Після приготування та охолодження до кімнатної температури зразки ретельно перемішували протягом 5 хв, відразу після цього починалось проведення вимірів.

Малоамплітудний осциляційний реометр HAAKE MARS III (Haake, Karlsruhe, Німеччина) використовувався для визначення залежностей пружного та в'язкого модулів зсуву G' та G'' від часу в діапазоні 10^{-1} - 10^3 Па протягом 12 годин від моменту приготування зразків. В експериментах використовувались детектори з геометрією площин – конус, яким мав діаметр 35 мм та кут 2° . Під час вимірювань зразки були захищені від випаровування води за допомогою спеціального накриття. Перед початком реологічного експерименту кожен зразок піддавався осциляційному зсуву протягом 200 секунд для отримання гомогенної системи. Залежність реологічних модулів зсуву вимірювались при малому значенні осцилюючої частоти $\omega = 1$ Гц та швидкості деформації 0.01 с^{-1} , що належала до лінійного в'язко-еластичного режиму. Комплексна в'язкість, η^* , обраховувалась за формулою $\eta^* = \sqrt{G'^2 + G''^2} / \omega$.

Спектри малокутового розсіювання рентгенівського випромінювання отримувались за допомогою цифрового детектора Elexience, який дозволяв проводити вимірювання в діапазоні хвильового вектора $q = (0.08 \div 1.6) \text{ нм}^{-1}$. В експерименті використовувалось Cu-K α джерело з довжиною хвилі $\lambda = 0.154 \text{ нм}$. Виміряна залежність інтенсивності розсіювання від хвильового вектора використовувалась для розрахунку структурного фактору $S(q)$:

$$S(q) = I(q) / KC_L MP(q) \quad (1)$$

де константа має значення $K = 0.0445$, та враховує контраст між лапонітом та розчинником, а молярна маса частинок лапоніту $M = 930 \pm 190 \text{ кг/моль}$, а $P(q)$ – форм-фактор частинок глини.

Для частинок з формою дисків, які мають діаметр та висоту відповідно d та h форм-фактор розраховується за формулою Гіньє [13]:

$$P(q) = \int_0^{\pi/2} \frac{4J_1^2(0.5qd \sin x) \sin(qh \cos x)}{(qh \cos x)^2 (0.5qR \sin x)^2} \sin x dx \quad (2)$$

де J_1 – циліндрична функція Бесселя першого порядку.

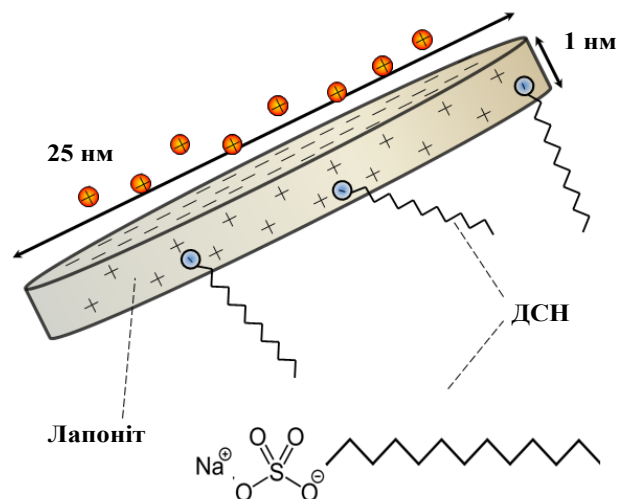


Рис. 2. Адсорбція іонів ДНС на частинках лапоніту

Ефект полі дисперсності діаметру частинок глини враховувався за допомогою згортки рівняння 2 та нормованого гаусівського розподілу [14]:

$$\Psi(d) = (\Delta \sqrt{\pi})^{-1} \exp\left\{-\left[(d - \langle d \rangle) / \Delta\right]^2\right\} \quad (3)$$

де $\langle d \rangle$ - середнє значення діаметру, а стандартне відхилення Δ – параметр полідисперсності. Середнє значення діаметру $\langle d \rangle = 25 \pm 0.5 \text{ нм}$ та $\Delta = 8 \pm 2 \text{ нм}$ використовувались як найбільш узгоджені з експериментом параметри [14].

У вказаному експерименті контраст між густиною когерентного розсіювання ДСН та води був практично рівний нулю, тому спектр розсіювання зразків відображав лише вклад частинок лапоніту та їх агрегатів.

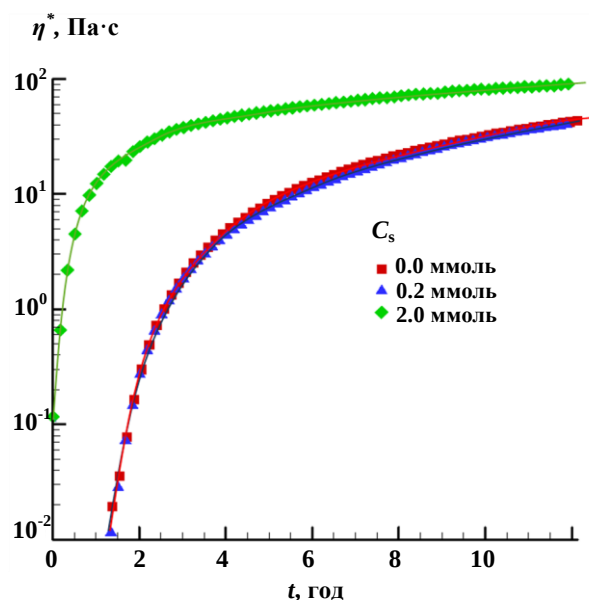


Рис. 3. Залежність комплексної в'язкості η^* від часу при різних концентраціях ДСН, C_s

Результати та обговорення

На початковому етапі дослідження зразків велось за допомогою візуального спостереження. На основі цих спостережень було зроблено висновок, що додавання ДСН прискорює перехід водної суспензії лапоніту у гелеподібний стан.

Для більш точного вивчення макроскопічних властивостей системи було використано реометр. Отримані результати показали, що додавання 2 ммоль ДСН змінює залежність η^* від часу старіння суттєвим чином, проте ефект додавання 0.2 ммоль був настільки незначним, що ним можна знехтувати (рис. 3).

Для дослідження структурних особливостей рідинних систем вода – лапоніт в присутності аніонного ПАР ми використовували малокутове розсіяння рентгенівського випромінювання. Спектри отримані відразу після приготування зразків представлено на рис. 4.

Як видно з графіків залежність інтенсивності розсіяння $I(q)$ від хвильового вектору q подібні для всіх зразків. Оцінка степеневі залежності $I(q) = I_0 q^{-\beta}$ дає значення коефіцієнту $\beta \approx 2$, що є характерним для хаотично орієнтованих дисків.

Отже додавання ДСН в досліджуваних межах не спричиняє утворення нематичної фази.

Для дослідження структури в зразках статичний структурний фактор було розраховано у відповідності до методу описаного вище в тексті. Еволюція $S(q)$ чистих суспензій лапоніту (рис. 5, а) та суспензій з додаванням ДСН (рис. 5, б) показала деякі відмінності у їх структурі.

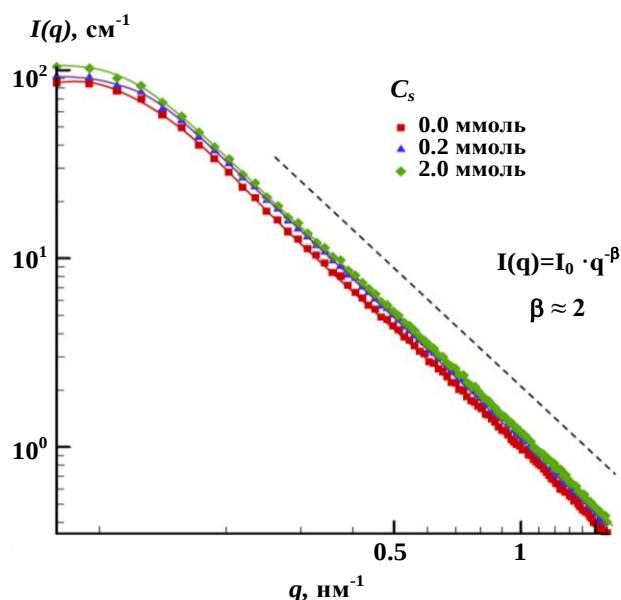


Рис. 4. Спектри МКРР для суспензій лапоніту при концентрації ДСН $C_s=0$; 0.2; 0.5 ммоль.

По-перше, слід зазначити, що в початковий момент часу $t=0$ с (відразу після приготування) структурні фактори зразків були подібними та мали пік в точці $q=0.11$ nm^{-1} , який в реальному просторі відповідає середній відстані між пластинами лапоніту 55 нм. Але через деякий час вказаний пік перемістився в область менших q для зразка, що містив 0.2 ммоль ДСН, та в область більших значень q у випадку чистої суспензії лапоніту. Для першого зразка пік структурного фактору відповідав значенню відстані між частинками 70 нм, а для другого зразка 55 нм. Отже додавання 0.2 ммоль ДСН спричиняє збільшення відстані між частинками лапоніту. Вказаний ефект може бути наслідком компенсації позитивного заряду на бічній поверхні частинок лапоніту і, як наслідок, зростання ролі електростатичного відштовхування між частинками.

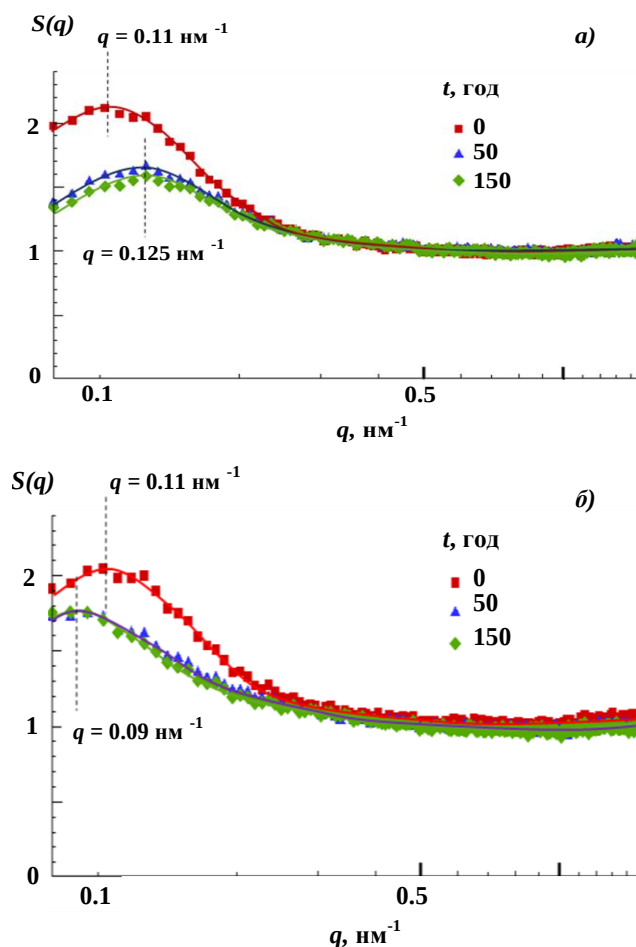


Рис. 5. Структурний фактор $S(q)$ обчислений з даних МКРР для суспензії лапоніту без домішок (а) та суспензії з додаванням 0.2 ммоль ДСН (б).

Висновки

Візуальне спостереження показало, що додавання ДСН в рідинні системи вода – лапоніт в діапазоні концентрацій ПАР (0.05 ÷ 2) ммоль не призводить до утворення будь-яких неоднорідностей, що можуть бути виявлені неозброєним оком. Реологічні тести виявили, що додавання ДСН до суспензій лапоніту спричиняє прискорення переходу системи в гелеподібний стан. Зокрема, зразок з концентрацією ДСН 2 ммоль перейшов в гелеподібний стан за 1 годину. Проте, додавання 0.2 ммоль ДСН не призвело до змін в еволюції комплексної в'язкості системи $\eta^*(t)$.

Додавання аніонного ПАР не стимулювало перехід рідинної системи вода – лапоніт в нематичну фазу, оскільки частинки глини, як і у випадку чистої суспензії, були хаотично орієнтованими. Також результати МКРР показали, що додавання ДСН не призвело до утворення неоднорідностей в діапазоні лінійних розмірів (25÷100) нм, що є характерними для фази гелю. Проте, слід відзначити, що у зразку, який містив 0.2 ммоль ДСН, середня відстань між частинками лапоніту збільшилась від початкових 55 нм до 70 нм. Вказаний ефект очевидно є наслідком часткової нейтралізації позитивних зарядів на бічній поверхні частинок лапоніту, що, в свою чергу, збільшує роль електростатичного відштовхування між ними.

Список використаних джерел

1. Cummins H. Z. Liquid, glass, gel: The phases of colloidal Laponite / H. Z. Cummins // *Journal of Non-Crystalline Solids*. – 2007. – № 353(41–43). – P. 3891–3905.
2. Ruzicka B. More on the phase diagram of laponite / B. Ruzicka, L. Zulian, G. Ruocco // *Langmuir*. – 2006. – №22(3). – P. 1106–1111.
3. Mongondry P. Revised state diagram of Laponite dispersions / P. Mongondry, J. F. Tassin, T. Nicolai // *Journal of Colloid and Interface Science*. – 2005. – № 283(2). – P. 397–405.

References

1. CUMMINS, H.Z. (2007) Liquid, glass, gel: The phases of colloidal Laponite *Journal of Non-Crystalline Solids*. 353(41–43), pp. 3891–3905.
2. RUZICKA, B., ZULIAN, L. and RUOCCO, G. (2006) More on the phase diagram of laponite *Langmuir*. 22(3). pp. 1106–1111.
3. MONGONDY, P., TASSIN, J.F. and NICOLAI, T. (2005) Revised state diagram of Laponite dispersions *Journal of Colloid and Interface Science*. 283(2). pp. 397–405.

4. Jabbari-Farouji S. Multiple nonergodic disordered states in Laponite suspensions: A phase diagram / [S. Jabbari-Farouji, H. Tanaka, G. H. Wegdam, D. Bonn] // *Phys. Rev. E.* – 2008. – № 78(6). – P. 61405(1-10).
5. Lemaire B. J. The measurement by SAXS of the nematic order parameter of laponite gels / [B. J. Lemaire, P. Panine, J. C. P. Gabriel, P. Davidson] // *Europhys. Lett.* – 2002. – № 59(1). – P. 55–61.
6. Bonn D. Laponite: Aging and shear rejuvenation of a colloidal glass / [D. Bonn, S. Tanasc, B. Abou, et al.] // *Phys Rev.* – 2002. – №89(1). – P. 157011–157014.
7. Bonn D. Laponite: What is the difference between a gel and a glass? / [D. Bonn, H. Kellay, H. Tanak et al.] // *Langmuir.* – 1999. – № 15(22). – P. 7534–7536.
8. Huang A. Y. High-salt stabilization of Laponite clay particles / A. Y. Huang, J. C. Berg // *Journal of Colloid and Interface Science.* – 2006. – № 296(1). – P. 159–164.
9. Ruzicka B. A fresh look at the Laponite phase diagram / B. Ruzicka, E. Zaccarelli // *Soft Matter.* – 2011. – № 7(4). – P. 1268–1286.
10. Van Olphen H., *An introduction to clay colloid chemistry: for clay technologists, geologists, and soil scientists*, 2d ed. / Van Olphen H. – New York: Wiley, 1977. – 318 p.
11. Tawari S. L. Electrical double-layer effects on the Brownian diffusivity and aggregation rate of Laponite clay particles / S. L. Tawari, D. L. Koch, C. Cohen J. // *Colloid Interface Sci.* – 2001. – № 240(1). – P. 54–66.
12. Martin C. Dissociation of thixotropic clay gels / [C. Martin, F. Pignon, J.-M. Piau et al.] // *Phys Rev.* – 2002. – № 66(2). – P. 021401/1–021401/11.
13. Guinier A. *Small-angle scattering of X-rays* / A. Guinier, G. Fournet // New York: Wiley. – 1955. – 268 p.
14. Kroon M. Structure and formation of a gel of colloidal disks / M. Kroon, W. L. Vos, G. H. Wegdam // *Phys. Rev. E.* – 1998. – № 57(2). – P. 1962–1970.
4. JABBARI-FAROUJI, S. et al. (2008) Multiple nonergodic disordered states in Laponite suspensions: A phase diagram *Soft Condensed Matter*. 78(6), pp. 61405(1-10).
5. LEMAIRE, B.J. et al. (2002) The measurement by SAXS of the nematic order parameter of laponite gels, *Europhysics Letters*. 59(1). pp. 55–61.
6. BONN, D. et al. (2002) Laponite: Aging and shear rejuvenation of a colloidal glass. *Physical Review Letters*. 89(1). pp. 157011–157014.
7. BONN, D. et al. (1999) Laponite: What is the difference between a gel and a glass? *Langmuir*. 15(22). pp. 7534–7536.
8. HUANG, A.Y. and BERG, J.C. (2006) High-salt stabilization of Laponite clay particles *Journal of Colloid and Interface Science*. 296(1). pp. 159–164.
9. RUZICKA, B. and ZACCARELLI, E. (2011) A fresh look at the Laponite phase diagram *Soft Matter*. 7(4). pp. 1268–1286.
10. VAN OLPHEN H. (1977) *An introduction to clay colloid chemistry: for clay technologists, geologists, and soil scientists*. 2d ed. New York: Wiley.
11. TAWARI, S.L., KOCH, D.L. and COHEN, C. (2001) Electrical double-layer effects on the Brownian diffusivity and aggregation rate of Laponite clay particles *Journal of Colloid and Interface Science*. 240(1), pp. 54–66.
12. MARTIN, C. et al. (2002) Dissociation of thixotropic clay gels *Physical Review E - Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics*. 66(2). pp. 021401/1–021401/11.
13. GUINIER, A. and FOURNET, G. (1955) *Small-angle scattering of X-rays*. New York: Wiley.
14. KROON, M., VOS, W.L. and WEGDAM, G.H. (1998) Structure and formation of a gel of colloidal disks *Phys. Rev. E*. 57(2). pp. 1962–1970

Надійшла до редколегії 20.02.2014

УДК 538.9

Яковенко О. С.¹, асп.
Мацуй Л. Ю.¹, д.ф.м.н., с. н. с.
Журавков О. В.¹, інж.
Вовченко Л. Л.¹, к.ф.м.н., с. н. с.

**Вплив в'язкості середовища на характер
формування анізотропних структур з
вуглецевими нанотрубками під дією
електричного поля**

¹ Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, пр-т.
Глушкова 4д, e-mail: alenska-ya@ukr.net

O. S. Yakovenko¹, PhD stud.
L. Yu. Matzui¹, Dr. Sci., Sen. Sci. Res.
O. V. Zhuravkov¹, Eng.
L. L. Vovchenko¹, PhD, Sen. Sci. Res.

**Influence of viscosity of the medium on the
disposition of carbon nanotubes anisotropic
structures formation induced by electric
field**

¹ Taras Shevchenko National University of Kyiv,
03680, Kyiv, Glushkova st., 4d,
e-mail: alenska-ya@ukr.net

У статті розглядається вплив амплітуди та типу електричного поля, а також часу обробки електричним полем на формування анізотропних структур з вуглецевих нанотрубок (ВНТ) в полімерних середовищах різної в'язкості (масло, епоксидні смоли). Метою даної роботи було дослідити процес структурування ВНТ в в'язких середовищах під впливом електричного поля та визначити найбільш оптимальні умови виготовлення полімер-вуглецевих композитних матеріалів (КМ) з заданим розподілом наповнювача шляхом впливу електричного поля. Спостереження за структуруванням полімер-вуглецевих КМ проводились методом оптичної мікроскопії. Було спостережено відмінності у формуванні сітки ВНТ в умовах однакової обробки електричним полем для різних полімерів.

Ключові слова: композити, вуглецеві нанотрубки, електричне поле, анізотропія, оптична мікроскопія.

To obtain carbon nanotubes (CNT)-polymer composites with anisotropic physical properties an electric field application can be used. This investigation considers factors of CNT anisotropic distribution formation induced by electric field and consideration is supported with experimental results where some factors were varied.

In the article an influence of magnitude and type of electric field and time of processing by electric field on CNT anisotropic structures formation in polymer mediums of different viscosities (oil, epoxy resins) is investigated. The aim of this work was to examine the CNT structuration process induced by electric field in viscous mediums and to find out the most optimal conditions of preparation of polymer/carbon composite materials (CM) with specified distribution of carbon filler induced by electric field. Scoping on polymer/carbon CM structuration was conducted by optical microscopy method.

It was found that the main factors during CNT network formation are the type and viscosity of polymer binder and applied electric field parameters. It was observed that for high viscous polymer CNT network formation is unfeasible even at high applied electric field strength. But also for low viscous medium at relatively low electric field strength the CNT network formation is complicated too. And it was seen from optical observation that a type of the polymer variation causes different response of network form under the same experimental conditions. These distinctions are considered in the article.

Key Words: composites, carbon nanotubes, electric field, anisotropy, optical microscopy.

Статтю представив член-кор. НАН України, д.ф.-м.н., проф. Макара В.А.

1. Вступ

Можливість створювати багатофункціональні матеріали із прогнозованими властивостями, що поєднують в собі унікальні фізичні властивості вуглецевих наноструктур [1] та полімерів [2], приваблює великий інтерес до полімерних композитів із вуглецевими наповнювачами. Вибір вуглецевого наповнювача певного типу зумовлює властивості отриманого композитного матеріалу (КМ). Зокрема, для КМ із наповнювачем з високим аспектним співвідношенням, якими є вуглецеві нанотрубки (ВНТ), значення перколяційного порогу нижчі, ніж для КМ з наповнювачем у вигляді сферичних частинок. Тому вуглецеві наноструктури із високим аспектним співвідношенням є більш перспективними наповнювачами для отримання КМ з анізотропними властивостями.

Незважаючи на значну увагу науковців до КМ із вуглецевими наповнювачами і велику кількість розробок в даному напрямі, все ще існують шляхи покращення властивостей полімер-вуглецевих композитів. Так, формування впорядкованого розподілу вуглецевого наповнювача всередині полімерної матриці дозволяє підвищити електропровідність [3], теплопровідність [4] та механічні властивості [5] КМ в заданому напрямі без підвищення концентрації наповнювача.

Досліджено такі методи впорядкування ВНТ в матриці, як структурування шляхом механічного впливу [6], впливу магнітним [7] та електричним [8] полями. Але механічна орієнтація ВНТ часто зумовлює подрібнення самих ВНТ [6], що є небажаним, так як викликає зсування значення перколяційного порогу в бік вищих концентрацій наповнювача внаслідок зниження аспектного співвідношення, а орієнтація магнітним полем потребує високих значень напруженості магнітного поля внаслідок невисокої магнітної сприйнятливості ВНТ ($\sim 10^{-6}$ е.м.о./г) [9]. Тому метод впорядкування ВНТ в рідких середовищах шляхом впливу електричним полем є багатообіцяючим для створення композитних структур із заданим розподілом вуглецевого наповнювача. Не дивлячись на достатню кількість робіт, присвячену дослідженню анізотропних властивостей полімер-вуглецевих композитів, отриманих шляхом впливу електричного поля на композитний розчин, сам процес формування впорядкованого структурного розподілу наповнювача в КМ, а

також визначальні чинники цього процесу досі викликають інтерес. Зокрема, нез'ясованим є вплив в'язкості оброблюваного середовища на формування заданого розподілу наповнювача шляхом піддавання розчину КМ дії електричного поля.

В роботі [11] автори зазначають, що при більш ретельному диспергуванні ВНТ в матриці і вищому відсотковому вмісту ВНТ збільшується в'язкість полімер-вуглецевого композиту, що зумовлено збільшенням питомої площі поверхні ВНТ. Багатостінні ВНТ мають нижчу питому площу поверхні в порівнянні із одностінними, але і дають менший вклад в підвищення механічних та електричних властивостей КМ [10]. Крім того, це збільшення питомої площі поверхні веде до полегшення ре-агломерації ВНТ. Тому постає питання знаходження компромісного співвідношення ступеня диспергованості ВНТ в композиті, в'язкості середовища, та можливого покращення фізичних властивостей КМ, а також питання вибору оптимального режиму дії електричного поля: його типу, амплітуди та часу обробки.

Метод впорядкування ВНТ в рідких середовищах шляхом впливу електричного поля може бути застосований при виготовленні твердих полімер-вуглецевих композитів із заданим розподілом наповнювача, що дозволяє сподіватися на отримання об'ємних зразків із анізотропними фізичними властивостями (механічні, теплові, електричні, оптичні).

Ціллю даної роботи було показати можливість формування полімер-вуглецевих нанокompозитів із заданим розподілом вуглецевого наповнювача шляхом дії електричного поля та встановити вплив амплітуди та типу електричного поля на формування ланцюгів з попередньо диспергованих ВНТ у рідких середовищах різної в'язкості.

2. Методика експерименту

В якості рідких полімерів різної в'язкості для формування заданого розподілу ВНТ під дією електричного поля було обрано: приборне масло марки МВП, низьков'язку епоксидну смолу марки Ларіт285, та високов'язку епоксидну смолу марки ЕД-20. Табличні значення в'язкостей цих рідин наведено в табл.1 нижче.

В якості вуглецевого наповнювача було використано вуглецеві нанотрубки фірми Chear Tubes Ins. з чистотою 90% та розмірами:

зовнішній діаметр $d=10\div 30$ нм, довжина $l=10\div 30$ мкм.

Таблиця 1

Динамічна в'язкість полімерів, використаних для формування композитів ВНТ-полімер.

Назва полімеру	Динамічна в'язкість (при 25°C), Па*с
МВП	$(5,8-7,2)*10^{-3}$
Ларіт285	0,6-0,9
ЕД-20	12-25

Концентрація наповнювача для всіх проведених дослідів була однаковою і складала 0,05 мас.%. Методика приготування зразків була наступною. На електронних вагах зважувалась потрібна кількість ВНТ та відповідної рідини-зв'язуючого певної в'язкості з точністю до 2 мг, після чого наповнювач та полімерна матриця були механічно змішані та піддані дії ультразвуку (УЗ) для кращого диспергування розчину. Ультразвукове диспергування проводилось в ультразвуковій ванні ВК-9050 з частотою УЗ 40 кГц і максимальною вихідною електричною потужністю 50 Вт. Суміш було піддано дії УЗ протягом 15 хв при потужності 50 Вт. Після цього диспергований розчин виливався в пластикову форму, на двох сторонах якої було закріплено мідні електроди товщиною 0,5 мм та розмірами 34,5*57,0 мм². Розміри дна форми склали 13,5*36,3 мм², висота пластикової форми складала 59,5 мм, а товщина стінок 1,0 мм. Розчину в форму наливалось висотою 3 мм.

В якості джерела електричного поля виступав високовольтний генератор електричної напруги із можливістю генерувати змінну напругу частотою 15 кГц та амплітудою в діапазоні до 1000 В, або постійну напругу із амплітудою в діапазоні до 1000 В. Значення амплітуди електричного поля контролювалося універсальним вольтметром В7-16А.

Дослідження характеру розподілу вуглецевого наповнювача в полімерній матриці було проведено за допомогою бінокулярного стереоскопічного оптичного мікроскопа МБС-1, оснащеного цифровою камерою Etrek DCM510, що забезпечило можливість спостереження за рідиною із диспергованими ВНТ під впливом електричного поля в режимі он-лайн.

Було проведено серію спостережень за сумішами ВНТ із рідинами різної в'язкості ($10^{-3}\div 10^1$ Па*с) в режимі реального часу, подаючи із генератора на електроди змінну

напругу різної амплітуди (300-1000 В) з частотою 15 кГц та постійну напругу різної амплітуди (300-1000 В). Напруженість електричного поля для амплітуд 300 В, 450 В, 600 В, 1000 В складала 24 кВ/м, 36 кВ/м, 48 кВ/м, 80 кВ/м для кожного значення амплітуди електричного поля відповідно. Після кожного експерименту по впливу електричного поля розчин було механічно перемішано для руйнування утворених структур з ВНТ, і знову піддано дії електричного поля іншого типу чи амплітуди.

3. Експериментальні результати та їх обговорення

Було досліджено вплив амплітуди та типу електричного поля (постійна, змінна напруга), а також в'язкості середовища на формування впорядкованих структур ВНТ в рідкому розчині шляхом аналізу даних оптичної спектроскопії, отриманих при спостереженні за формуванням структурного розподілу наповнювача. Розмір макроскопічних зображень 10,8*8,0 мм².

Для розчину ВНТ концентрацією 0,05 мас% в МВП (в'язкість 10^{-3} Па*с) результати спостереження за формуванням ланцюгів ВНТ під дією постійного електричного поля різної амплітуди приведені в табл. 2 в колонках 1, 2, 3, 4 для 1000 В, 600 В, 450 В та 300 В відповідно у вигляді макроскопічних фотографій розчину.

Як видно з рисунків 1. а, 1. б, 1. в, 1. г початковий розподіл ВНТ в МВП був однорідним, що забезпечувалось попереднім УЗ диспергуванням суміші. Ніяких анізотропних структур до початку дії електричного поля не спостерігається. Але вже через 20 с після подачі постійної електричної напруги амплітудою 1000 В (рис. 2 а табл. 2) на електроди, занурені в розчин ВНТ-МВП, помітно структурування наповнювача в матриці, що проявляється у вигляді формування ланцюгів ВНТ вздовж напрямку прикладання електричного поля. Через 7 хв після початку дії електричного поля на розчин ВНТ-МВП (рис. 3 а табл. 2) помітно формування потовщених ланцюгів ВНТ та просвітів між ними, ширина яких нерівномірно зростає по мірі збільшення часу спостереження за утвореними структурами.

Піддавання розчину ВНТ-МВП дії постійного електричного поля амплітуди 600 В та 450 В (колонки 2 та 3 табл. 2) показує якісно таку саму картину, як і під час впливу електричного поля амплітуди 1000 В, але менш яскраво

виражену. Таких широких просвітів між ланцюгами ВНТ, як у випадку впливу постійного електричного поля амплітуди 1000 В, не спостерігається. Через 59 хв дії на розчин ВНТ-МВП постійного електричного поля амплітуди 1000 В помітно два великі просвіти вздовж напрямку ліній напруженості поля товщиною 1,6 мм та 0,97 мм, а також менші просвіти товщинами від 0,25 мм, а при 57 хв впливу на цей самий розчин електричного поля амплітуди 600 В та 53 хв впливу електричного поля амплітуди 450 В помітно значно вужчі просвіти, товщиною

0,52 мм та 0,58 мм відповідно, і кількість їх теж менша. Для електричного поля амплітуди 300 В структурування розчину слабо виражене і проявляється у формуванні подовжених блоків ВНТ в розчині, що не пов'язані в суцільні смуги. Отже, з аналізу приведених в табл. 2 макрофотографій, ефект структурування суміші ВНТ-МВП та формування ланцюгів з ВНТ в напрямку ліній напруженості електричного поля проявляється найшвидше і найбільш яскраво при прикладанні постійної напруги 1000 В. При

Таблиця 2

Оптичні зображення розчину ВНТ-МВП, підданого впливу постійного електричного поля амплітуд 1000 В, 600 В, 450 В та 300 В залежно від часу початку прикладання поля. Розмір зображень 10,8*8,0 мм².

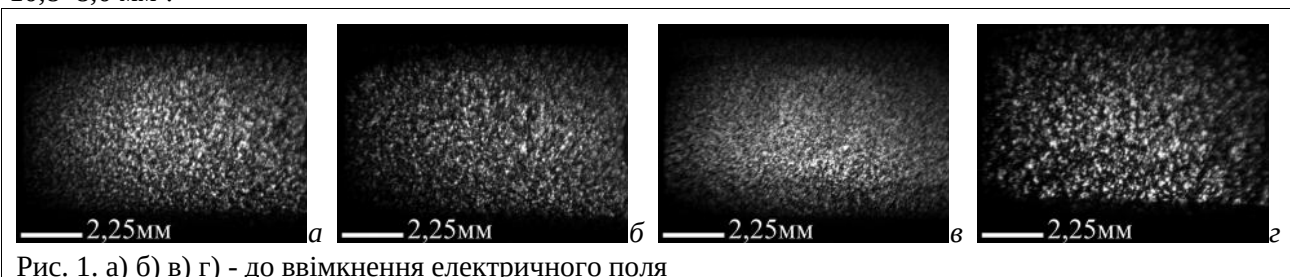


Рис. 1. а) б) в) г) - до ввімкнення електричного поля

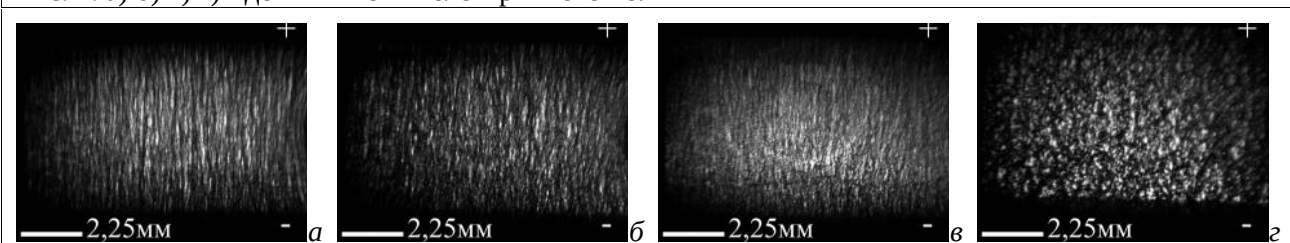


Рис. 2. Через $t=20$ с після ввімкнення постійного електричного поля амплітуди а) 1000 В, б) 600 В, в) 450 В, г) 300 В

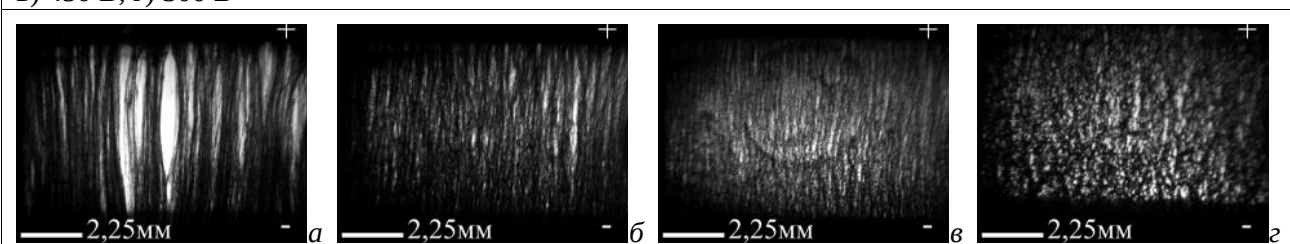


Рис. 3. Через $t=7$ хв після ввімкнення постійного електричного поля амплітуди а) 1000 В, б) 600 В, в) 450 В, г) 300 В

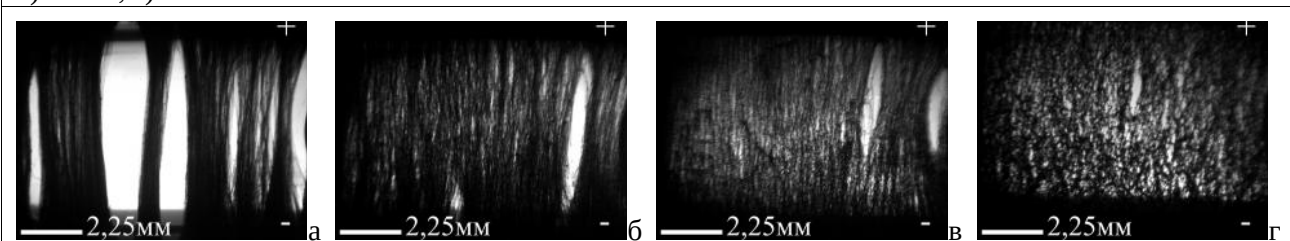


Рис. 4. Через $t=55$ хв після ввімкнення постійного електричного поля амплітуди а) 1000 В, б) 600 В, в) 450 В, г) 300 В

Таблиця 3

Оптичні зображення розчину ВНТ-Ларіт285, підданого впливу постійного та змінного (частота 15кГц) електричного поля амплітуд 1000 В та 600 В залежно від часу початку прикладання поля. Розмір зображень 10,8*8,0 мм².

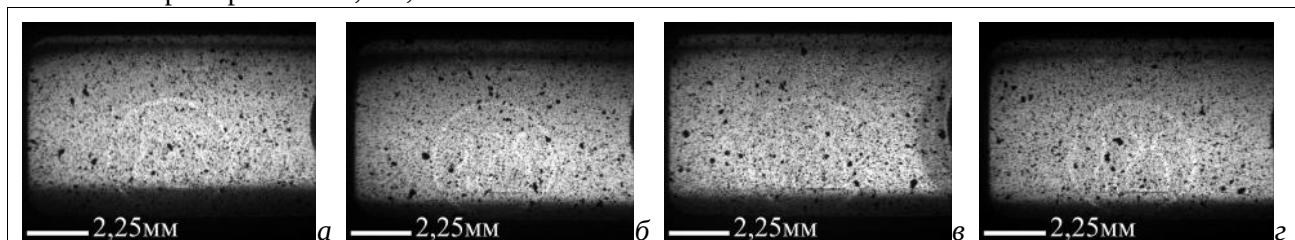


Рис. 5. а) б) в) г) - до ввімкнення електричного поля

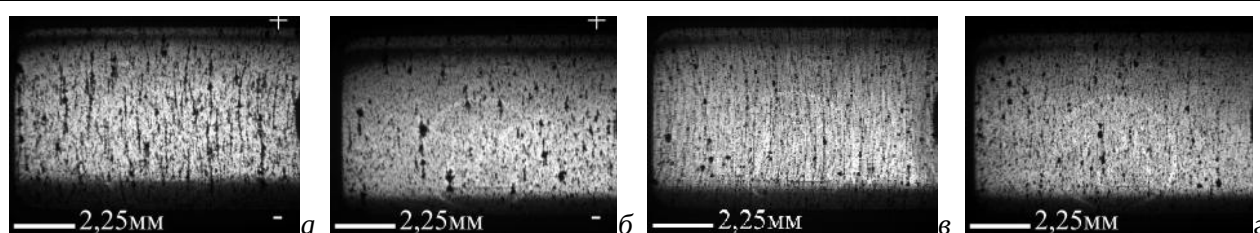


Рис. 6. Через $t=12$ хв після ввімкнення постійного електричного поля амплітуди а)1000 В, б) 600 В; змінного електричного поля (частота 15 кГц) амплітуди в) 1000 В, г) 600 В

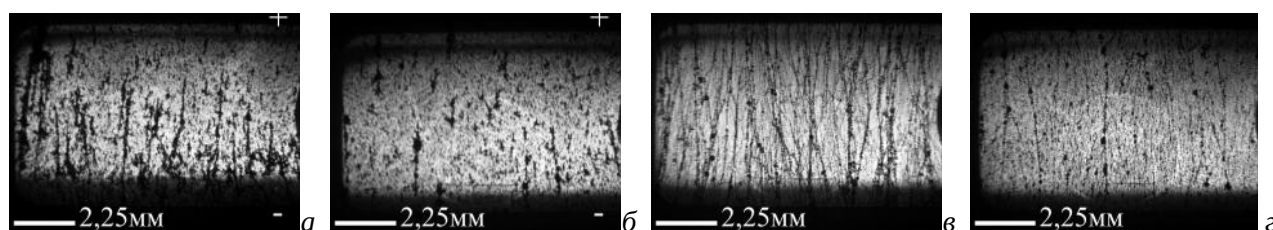


Рис. 7. Через $t=26$ хв після ввімкнення постійного електричного поля амплітуди а)1000 В, б) 600 В; змінного електричного поля (частота 15 кГц) амплітуди в) 1000 В, г) 600 В

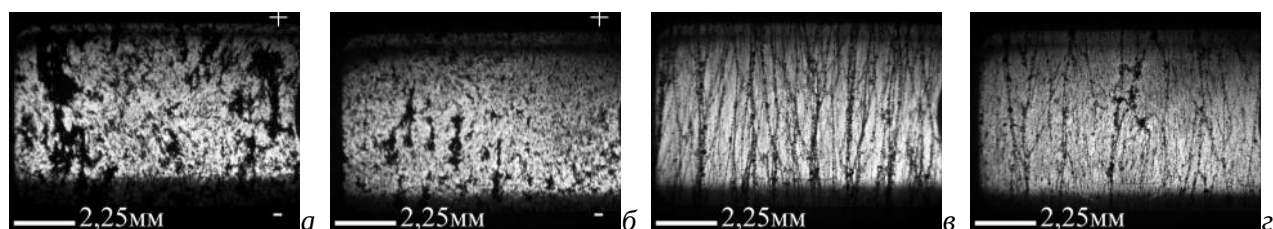


Рис. 8. Через $t=61$ хв після ввімкнення постійного електричного поля амплітуди а)1000 В, б) 600 В; змінного електричного поля (частота 15 кГц) амплітуди в) 1000 В, г) 600 В

прикладанні до розчину меншого значення напруги постійного електричного поля ланцюги ВНТ формуються повільніше, а у випадку постійної напруги амплітудою 300 В через 1 год після прикладання електричного поля до розчину суміш залишається практично однорідною. Для зразка ВНТ-Ларіт285 (в'язкість 1 Па*с) спостережувана картина була дещо іншою. Результати спостереження за формуванням ланцюгів ВНТ в Ларіт285 під дією постійного електричного поля амплітуди 1000 В та 600 В та змінного (15 кГц) електричного поля амплітуди 1000 В та 600 В

приведені в таблиці 3 в колонках 1, 2, 3, 4 для 1000 В постійного, 600 В постійного, 1000 В змінного та 600 В змінного електричного поля відповідно. Основна відмінність полягає в тому, що у цих зразках під дією постійного електричного поля відбувалося формування агломератів ВНТ, а у випадку дії змінного електричного поля формуються ланцюги ВНТ, що особливо помітно при більш тривалому спостереженні. Вплив на розчини ВНТ-масло та ВНТ-епоксидна смола електричного поля різних типів (постійне, змінне) є суттєво різним. Це може бути зумовлено різною

хімічною природою масла та епоксидної смоли і, як наслідок, різним дзета-потенціалом цих речовин, що є однією із основних характеристик відгуку рідкого середовища на вплив електричного поля.

Так, для випадку дії постійного електричного поля амплітуди 1000 В на розчин ВНТ-Ларіт285 через 12 хв після початку спостереження сформувались подовжені блоки об'єднаних ВНТ (рис. 5. а табл. 3), орієнтовані по напрямку прикладання електричного поля. Характерна довжина цих блоків складала 1,67 мм, а товщина 0,06 мм. Але вже через 26 хв після початку прикладання постійного електричного поля ці ланцюги перемістилися до «-»-електрода і стали більш потовщеними (порядка 0,16 мм). При спостереженні за розчином ВНТ-Ларіт285 на протязі години виявилось, що з часом під впливом постійного електричного поля амплітуди 1000 В ланцюги розпалися взагалі, і ВНТ сформували крупні агломерати неправильної форми, найбільші з яких досягали 1,28 мм та 2,7 мм в поперечному та поздовжньому напрямках, і були розподілені в розчині випадковим чином.

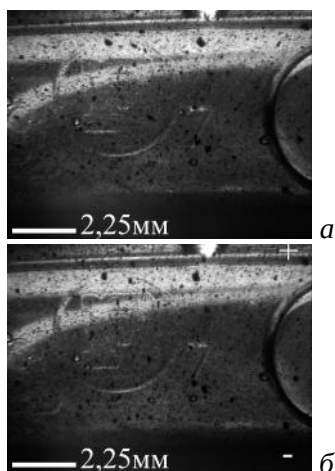


Рис. 9. Оптичні зображення розчину ВНТ-ЕД-20. Розмір зображень 10,8*8,0мм². а – до ввімкнення електричного поля; б – через $t=30$ хв після ввімкнення постійного електричного поля амплітуди 600 В

Спостереження за розчином ВНТ-Ларіт285 при дії на нього постійного електричного поля амплітуди 600 В також показує формування агломератів ВНТ в розчині, але за розмірами вони значно менші, ніж при дії постійного електричного поля амплітуди 1000 В і складають порядка 0,52 мм в поперечному напрямі та 1,8 мм

в поздовжньому напрямі при 61 хв впливу електричного поля.

Подальше зниження амплітуди постійного електричного поля, на відміну від випадку спостереження за розчином ВНТ-МВП, показового впливу на розчин ВНТ-Ларіт285 (в'язкість 1 Па*с) не виявило, що свідчить про затруднення руху ВНТ в розчині вищої в'язкості у випадку піддавання його дії аналогічного електричного поля. Окрім того, спостереження за структуруванням зразка ВНТ-ЕД-20 (в'язкість 15 Па*с) теж підтвердили ускладнення формування ланцюгів ВНТ під дією електричного поля у такому в'язкому середовищі. Було помічено тільки повороти дисперсних частинок ВНТ в розчині по напрямку електричного поля. Картина була аналогічною для змінного та постійного електричного поля амплітуди 1000 В та 600 В (рис. 9. а, б), а для менших значень амплітуд електричного поля не спостерігалось навіть поворотів частинок ВНТ.

Як показали мікроскопічні дослідження, при впливу змінного електричного поля на розчин ВНТ-МВП (в'язкість 10^{-3} Па*с), структурування розчину практично не спостережуване. Лише при впливу змінного електричного поля найвищої амплітуди (1000 В), можна побачити області з сформованими окремими подовженими блоками, що по своїй структурі порівнянно з картиною, отриманою при дії постійного електричного поля амплітуди 300 В на розчин ВНТ-МВП (рис. 4. г табл. 2).

У випадку ж дії змінного електричного поля на розчин ВНТ-Ларіт285, через 12 хв після ввімкнення поля спостерігається чітке формування вузьких ланцюгів ВНТ для 1000 В (рис. 6. в табл. 3), та подовжених скупчень ВНТ, не об'єднаних між собою у ланцюг, але орієнтованих по полю для випадку 600 В (рис. 6. г табл. 3). Подальше спостереження за структуруванням розчину ВНТ-Ларіт 285 під впливом змінного електричного поля показало, що через годину обробки розчину електричним полем амплітуди 1000 В формується велика кількість волокон ВНТ (рис. 8. в табл. 3), деякі з яких досягають поперечного розміру 0,2 мм і простягаються на всю довжину від одного до іншого електрода, в деяких випадках перехрещуючись між собою та пролягаючи не строго паралельно. Через годину обробки розчину ВНТ-Ларіт285 змінним електричним полем амплітуди 600 В формується вже менша кількість волокон ВНТ (мал. 8. г табл. 3), що

більше нагадують перервані нитки ВНТ, які також пролягають між електродами.

Отже, як показали оптичні спостереження за структуруванням наповнювача в матриці в режимі реального часу, для розчину ВНТ-Ларіт285 (в'язкість 1 Па*с) найбільш сприятливою для формування провідної сітки ВНТ є дія змінного електричного поля амплітуди 1000 В.

4. Висновки

Як показала оптична спектроскопія процесу структурування композитних розчинів вуглецевих нанотрубок концентрацією 0,05 мас.% в полімерних матрицях різної в'язкості під дією електричного поля, шляхом такої обробки можливо досягти утворення анізотропних структур ВНТ в полімерній матриці. Було виявлено, що визначаючими факторами при формуванні ланцюгів з ВНТ є: в'язкість та тип зв'язуючого середовища, величина та тип напруги електричного поля. Показано, що збільшення в'язкості рідкого середовища утруднює формування ланцюгів з ВНТ. Так, при в'язкості композитного середовища $\eta > 15$ Па*с (зразок ВНТ-ЕД-20) формування ланцюгів ВНТ досягти не вдалося. Було спостережено лише повороти окремих частинок ВНТ по напрямку електричного поля. Щодо інших факторів процесу структурування ВНТ в композитному розчині під дією електричного поля, показано, що при амплітудах прикладеного змінного або постійного електричного поля, менших 300 В, не вдається досягти структурування навіть низьков'язких композитних розчинів (зразок ВНТ-МВП). Крім того, вплив електричного поля на композитні розчини різних видів суттєво відрізняється. Для випадку прикладання до электродів, занурених в композитний розчин ВНТ-епоксидна смола, постійної напруги спостерігалися повороти частинок ВНТ по напрямку ліній напруженості електричного поля і формування ланцюгів, які з часом деградують, перетворюючись на агломерати ВНТ неправильної форми. На відміну від цього, при обробці композитного розчину ВНТ-епоксидна смола змінним електричним полем частоти 15 кГц спостерігається утворення ланцюгів ВНТ, які з часом лише потовщуються, але загальної форми не змінюють. Отже, визначено, що оптимальним для виготовлення композитів із впорядкованим розподілом ВНТ всередині епоксидної полімерної матриці є вплив

змінного електричного поля амплітуди 1000 В та частоти 15 кГц.

Список використаних джерел

1. Dresselhaus M. Carbon Nanotubes: Synthesis, Structure, Properties And Application / M. Dresselhaus, G. Dresselhaus, P. Avouris. – Berlin: Springer, 2001. – 448 p.
2. Paul D.R. Polymer nanotechnology: Nanocomposites [Електронний ресурс] / D.R. Paul, L.M. Robeson // Polymer – 2008. – Vol. 49 – P. 3187–3204. – Режим доступу до журн.: www.elsevier.com/locate/polymer.
3. Du, F. Effect of nanotube alignment on percolation conductivity in carbon nanotube/polymer composites [Електронний ресурс] / F. Du, J. E. Fischer, K. I. Winey // Phys. Rev. B – 2005. – Vol. 72. – P. 121404.1-4. – Режим доступу до журн.: <https://journals.aps.org/prb/>.
4. Marconnet A. M. Thermal Conduction in Aligned Carbon Nanotube Polymer Nanocomposites with High Packing Density [Електронний ресурс] / A. M. Marconnet, N. Yamamoto, A. M. Panzer and oth. // ACS Nano – 2011. – Vol. 5.6. – P. 4818–4825. – Режим доступу до журн.: <http://pubs.acs.org/doi/ipdf/10.1021/nn200847u>.
5. Wang X. Mechanical and electrical property improvement in CNT/Nylon composites through drawing and stretching [Електронний ресурс] / X. Wang, P. D. Bradford, W. Liu and oth. // Composites Science and Technology – 2011. – Vol. 71. – P. 1677–1683. – Режим доступу до журн.: www.elsevier.com/locate/compscitech.
6. Bychanok, D. S. Anisotropic electromagnetic properties of polymer composites containing oriented multiwall carbon nanotubes in respect to terahertz polarizer applications [Електронний ресурс] / D. S. Bychanok, M. V. Shuba, P. P. Kuzhir and oth. // Journal of Appl. Phys. – 2013. – Vol. 114. – P. 114304-1-7. – Режим доступу до журн.: <http://dx.doi.org/10.1063/1.4821773>.
7. Camponeschi E. Properties of carbon nanotube-polymer composites aligned in a magnetic field [Електронний ресурс] / E. Camponeschi, R. Vance, M. Al-Haik and oth. // Carbon. – 2007. – Vol. 45. – P. 2037–

2046. – Режим доступу до журн.: www.sciencedirect.com.
8. Oliva-Avil'es A. I. Dynamics of carbon nanotube alignment by electric fields [Електронний ресурс] / A. I. Oliva-Avil'es, F. Avil'es and oth. // *Nanotech.* – 2012. – Vol. 23. – P. 465710 (10pp). – Режим доступу до журн.: stacks.iop.org/Nano/23/465710.
 9. Malkina O. Magnetic alignment of SWCNTs decorated with Fe_3O_4 to enhance mechanical properties of SC-15 ероху [Електронний ресурс] / O. Malkina, H. Mahfuz, K. Sorge and oth. // *AIP Advances.* – 2013. – Vol. 3. – P. 042104-1-11. – Режим доступу до журн.: <http://aipadvances.aip.org>.
 10. Gojny F. Influence of nano-modification on the mechanical and electrical properties of conventional fibre-reinforced composites [Електронний ресурс] / F. Gojny, H. Malte, H.G. Wichmann and oth. // *Composites: Part A.* – 2005. – Vol.36. – P. 1525–1535. – Режим доступу до журн.: www.sciencedirect.com.
- ### References
1. DRESSELHAUS, M., DRESSELHAUS, G. and AVOURIS, P. (2001) *Carbon Nanotubes: Synthesis, Structure, Properties And Application*. Berlin: Springer.
 2. PAUL, D. and ROBESON, L. (2008) Polymer nanotechnology: Nanocomposites. *Polymer*. [Online] 49 (15). p. 3187–3204. Available from: www.elsevier.com/locate/polymer. [Accessed 13th April 2008].
 3. FANGMING, D., FISHER, J. and WINEY, K. (2005) Effect of nanotube alignment on percolation conductivity in carbon nanotube/polymer composites. *Physical Review B*. [Online] 72. p. 121404.1-4. Available from: <https://journals.aps.org/prb/>. [Accessed 19th September 2005].
 4. MARCONNET, A., YAMAMOTO, N., PANZER, M., WARDLE, B. and GOODSON, K. (2011) Thermal Conduction in Aligned Carbon Nanotube-Polymer Nanocomposites with High Packing Density. *ACS Nano*. [Online] 5 (6). p. 4818–4825. Available from: <http://pubs.acs.org/doi/ipdf/10.1021/nn200847u>. [Accessed 20th May 2011].
 5. WANG, X., BRADFORD, P., LIU, W., ZHAO, H., INOUE, Y., MARIA, J., Li, Q., YUAN, F. and ZHU Y. (2011) Mechanical and electrical property improvement in CNT/Nylon composites through drawing and stretching. *Composites Science and Technology*. [Online] 71. p. 1677–1683. Available from: www.elsevier.com/locate/compscitech. [Accessed 6th August 2011].
 6. BYCHANOK, D., SHUBA, M., KUZHIR, P., MAKSIMENKO, S., KUBAREV, V., KANYGIN, M., SEDELNIKOVA, O., BULSHEVA, L. and OKTORUB, A. (2013) Anisotropic electromagnetic properties of polymer composites containing oriented multiwall carbon nanotubes in respect to terahertz polarizer applications. *Journal of Applied Physics*. [Online] 114. p. 114304-1-7. Available from: <http://dx.doi.org/10.1063/1.4821773>. [Accessed 17th September 2013].
 7. CAMPONESCHI, E., VANCE, R., AL-HAIK, M., GARMESTANI, H. and TANNENBAUM, R. (2007) Properties of carbon nanotube–polymer composites aligned in a magnetic field. *Carbon*. [Online] 45. p. 2037–2046. Available from: www.sciencedirect.com. [Accessed 14th June 2007].
 8. OLIVA-AVIL'ES, A., AVIL'ES, F., SOSA, V., OLIVA, A. and GAMBOA F. (2012) Dynamics of carbon nanotube alignment by electric fields. *Nanotechnology*. [Online] 23. p. 465710 (10pp). Available from: stacks.iop.org/Nano/23/465710. [Accessed 24th October 2012].
 9. MALKINA, O., MAHFUZ, H., SORGE, K., RONDINONE, A., CHEN, J., MORE, K., REEVES, S. and RANDARI, V. (2013) Magnetic alignment of SWCNTs decorated with Fe_3O_4 to enhance mechanical properties of SC-15 epoxy. *AIP ADVANCES*. [Online] 3. p. 042104-1-11. Available from: <http://aipadvances.aip.org>. [Accessed 4th April 2013].
 10. GOJNY, F., WICHMANN, M., FIELDER, B., BAUHOFFER, W. and SCHULTE, K. (2005) Influence of nano-modification on the mechanical and electrical properties of conventional fibre-reinforced composites. *Composites: Part A*. [Online] 36. p. 1525–1535. Available from: www.sciencedirect.com. [Accessed 22th Februry 2005].

Надійшла до редколегії 10.02.14

УДК 535.375.5: 621.373.826

Ящук В.П.¹, к.ф.-м.н., доц.,
Смалюк А.П.¹, асп.,
Ольховик Л.А.¹, інж.

V.P. Yashchuk¹, PhD,
A.P. Smaliuk¹, PhD stud.,
L.A. Olkhovik¹, Eng.

Вимушене комбінаційне розсіяння лазерного барвника НІС в багатократно розсіювальних середовищах.

Stimulated Raman scattering of HIC laser dye in multiple scattering media.

¹Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 01601, м. Київ, вул.
Володимирська 64/13, e-mail: yavas@univ.kiev.ua

¹Taras Shevchenko National University of Kyiv,
01601, Kyiv, Volodymyrska st. 64/13,
e-mail: yavas@univ.kiev.ua

Досліджено вимушене комбінаційне розсіяння (ВКР) лазерного барвника НІС (1,3,3,1',3',3'-гексаметиліндокарбоціанін- BF_4^-) в багато розсіювальних середовищах – БРС (везикулярній полімерній плівці та концентрованій суспензії мікрочастинок корунду в поліуретанакрилаті) при гелієвих температурах. ВКР виникає після появи в плівці хаотичної генерації (ХГ) і відбувається разом з нею. Всі лінії ВКР спостерігаються в межах спектра ХГ на фоні його суцільного контура. Кількість і інтенсивність ліній ВКР залежить від інтенсивності накачування і БРС. Інтенсивність ліній обмежена зсувом спектра ХГ із області їх локалізації. Найбільш різкі і інтенсивні лінії (біля семи ліній) спостерігаються в суспензії. Закономірності ВКР відповідають біхроматичному механізму збудження ВКР випромінюваннями накачування та ХГ на стоксових частотах.

Ключові слова: Багатократне розсіяння світла, хаотична генерація, вимушене комбінаційне розсіяння, везикулярні плівки, органічні барвники.

Stimulated Raman scattering (SRS) of HIC (1,3,3,1',3',3'-hexamethylindocarbocyanine- BF_4^-) laser dye in multiple scattering media - MSM (vesicular polymeric film and concentrated suspension of corundum micro particles in polyurethane acrylate) is investigated under helium temperature. SRS arises after random lasing (RL) onset and occurs together with it. All the SRS lines are observed within the range of RL spectrum on its continuous background. Number and intensity of the SRS lines depends on pump intensity and MSM. The lines intensity is limited by RL spectrum shift from the lines localization range due to reabsorption and reemission effect of RL radiation. Most sharpness and intensive lines (about seven ones) are observed in the micro particle suspension. Experimental regularity of SRS corresponds to bichromatic mechanism of its excitation by radiation of pump and RL at Stokes frequencies.

Key Words: Multiple light scattering, random lasing, stimulated Raman scattering, vesicular films, dyes.

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Макарець М. В.

Вступ

В результаті проведених раніше досліджень [1, 2] було встановлено, що в багатократно розсіювальних середовищах (БРС – концентрованих суспензіях діелектричних мікрочастинок, везикулярних плівок) вимушене комбінаційне розсіяння (ВКР) лазерних барвників проявляє специфічні властивості. Специфіка обумовлена тим, що в цих середовищах ВКР виникає лише одночасно з хаотичною генерацією (ХГ) барвника, яка виникає внаслідок зворотного зв'язку обумовленого багатократним розсіянням, що діє подібно до оптичного резонатора. Із-за нерезонансного характеру цього зв'язку спектр випромінювання ХГ є суцільним [3, 4] і не

містить модової структури характерної для звичайних лазерів з резонатором.

Монохроматичне випромінювання накачування і випромінювання ХГ з суцільним спектром створюють біхроматичне поле що резонує із тими молекулярними коливаннями молекул барвника, яким відповідають стоксові лінії в межах спектра ХГ. Внаслідок цього на частотах цих ліній збуджується ВКР, що проявляється у виникненні відповідних ліній на фоні суцільного спектра ХГ. Це дає можливість по спектрах вторинного випромінювання лазерних барвників в БРС визначати спектр комбінаційного розсіяння їх молекул. Відповідна методика була розроблена і апробована в [5].

Як витікає із механізму явища [5-7] ВКР можливе в БРС лише для лазерних барвників, оскільки лише вони здатні утворювати ХГ. При цьому необхідною умовою збудження ВКР є співпадіння спектра ХГ барвника із областю локалізації можливих стоксових ліній комбінаційного розсіяння світла (КРС). Однак пряме отримання спектрів КРС барвників є складною проблемою із-за сильного люмінесцентного засвічування, інтенсивність якого набагато переважає інтенсивність розсіяного світла. Тому ці спектри як правило невідомі. Однак, область локалізації можливих стоксових ліній може бути визначена виходячи із частот молекулярних коливань барвника, які проявляються в спектрах інфрачервоного (ІЧ) поглинання. Для абсолютної більшості барвників ці частоти лежать в діапазоні $500 - 1600 \text{ см}^{-1}$, що при збудженні другою гармонікою неодимового лазера відповідає довжинам хвиль можливих стоксових ліній 546 - 582 нм. Тому перспективними для дослідження ВКР в БРС є барвники, спектри ХГ яких знаходяться в цьому діапазоні.

Серед відомих лазерних барвників до таких належать досліджені раніше родамін 6Ж [1, 2, 5], родамін 575 [7] а також барвник №920 [5]. Розширення досліджень на інші барвники дозволяє розширити інформацію про деталі механізму ВКР в БРС. В даній роботі наводяться результати досліджень ВКР лазерного барвника НІС (1,3,3,1',3',3'-гексаметиліндокарбоціанін-BF₄-), який задовольняє згаданим вище умовам (довжина хвилі максимуму спектра люмінесценції $\lambda_{\text{макс}} = 576 \text{ нм}$).

Зразки та методика експерименту

Багаторозсіювальними середовищами, в яких досліджувалось ВКР барвника НІС, були везикулярна полімерна плівка та концентрована суспензія мікрочастинок корунду ($\bar{d} = 2$) в поліуретанакрілаті (ПУА). Полімерна плівка була нанесена на лавсанову плівку методом поливу. Везикули з середнім діаметром $\bar{d} = 2$ утворені в ній фотохімічним розкладом азидомісткого компонента полімера. Суспензія отримана фотополімеризацією ПУА з розчином в ній барвником.

Збудження ВКР здійснювалось другою гармонікою ітрій-алюмінієвого Nd³⁺ лазера з модуляцією добротності резонатора. Її інтенсивність регулювалась з допомогою нейтрально-сірих скляних фільтрів. Вторинне випромінювання зразків реєструвалось дифракційним спектрографом з КМОН (CMOS) матрицею із спектральним розділенням 0.3 нм за

один імпульс. Вимірювання проводились при гелієвих температурах для кращого узгодження спектра ХГ барвника із зазначеною вище областю локалізації можливих стоксових ліній і зменшення спектрального розширення ліній КРС. Для встановлення КРС походження ліній у спектрі вторинного розсіяння барвника використовувався неодимовий лазер на фосфатному склі із змінною довжиною хвилі випромінювання.

Експериментальні результати та їх аналіз

Із двох використаних БРС випромінювання ВКР краще проявлялось в концентрованій суспензії. Це обумовлено тим, що в везикулярній плівці при інтенсивному накачуванні спектр ХГ сповзає з області локалізації можливих стоксових ліній в довгохвильову область, в результаті чого лінії ВКР слабо виражені і спостерігаються в вузькому діапазоні інтенсивності накачування [6]. Це сповзання спричинено перепоглинанням випромінювання ХГ незбудженими молекулами барвника з наступним перевипромінюванням в довгохвильову область. Цей ефект сильно залежить від ефективності світлорозсіяння в зразку. В концентрованій суспензії цей ефект ослаблений і ВКР добре проявляється. Тому найкращі результати були отримані в суспензії.

На рис.1 наведена залежність ширини спектра вторинного випромінювання НІС в концентрованій суспензії мікрочастинок корунду від інтенсивності накачування I_p . Видно, що при інтенсивності $I_p > 0.05 \text{ МВт/мм}^2$ в зразку виникає випромінювання з вузьким спектром ($\approx 5 \text{ нм}$), яке відповідає виникненню ХГ. При подальшому збільшенні інтенсивності накачування ширина спектра знову зростає.

На рис. 2 наведена еволюція спектра вторинного випромінювання в залежності від інтенсивності

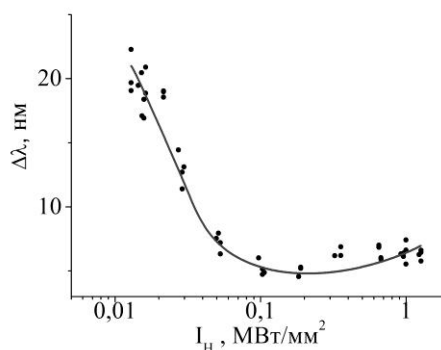


Рис. 1. Залежність ширини спектра випромінювання барвника НІС в концентрованій суспензії мікрочастинок корунду в ПУА від інтенсивності випромінювання накачування.

накачування в діапазоні існування ХГ. Як впливає із цих даних, одночасно з розширенням спектра ХГ на його фоні виникають вузькі (≈ 0.5 нм) спектральні лінії, інтенсивність яких нелінійно зростає при збільшенні I_n , що є характерною ознакою ВКР в БРС [1, 2]. Комбінаційна природа цих ліній підтверджується залежністю їх довжин хвиль від довжини хвилі випромінювання накачування.

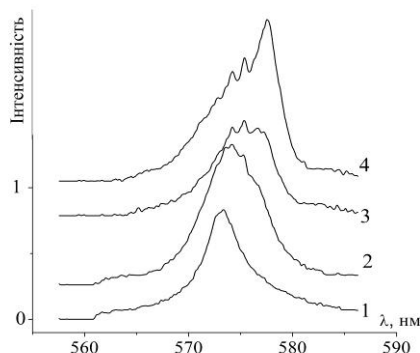


Рис. 2. Залежність контура спектра вторинного випромінювання лазерного барвника НІС в концентрованій суспензії мікрочастинок корунду в ПУА від інтенсивності накачування в області існування ХГ: $I_n = 0.1$ (1), 0.4 (2), 0.9 (3), 1.3 (4) МВт/мм².

Загалом в межах спектра ХГ при збудженні другою гармонікою неодимового лазера спостерігається сім ліній ВКР, які чітко проявляються в лінійчастій складовій спектра вторинного випромінювання зразка (рис.3). Чотири із них (570.8, 572.3, 573.9 і 575.1 нм) добре розділені, а решта три (576.7, 577.6, 578.7 нм) утворюють нерозділений триплет. Внаслідок накладання ліній триплет є найбільш інтенсивною смугою спектра ВКР барвника.

Іншою важливою ознакою ВКР-походження ліній є залежність їх інтенсивності від інтенсивності випромінювання ХГ (суцільної складової спектра вторинного випромінювання) на довжинах хвиль цих ліній, яке разом з випромінюванням накачування утворює біхроматичне збудження ВКР. Внаслідок цього лінії ВКР, які попадають на максимум спектра ХГ, мають значно вищу інтенсивність, ніж ті, що попадають на крила цього спектра (рис.3).

Кількість ліній ВКР, що спостерігається у вторинному випромінюванні НІС, зростає зі збільшенням I_n . Це обумовлено розширенням спектра ХГ в довгохвильову сторону, внаслідок чого охоплюється більш широкий діапазон локалізації стоксових ліній, що і призводить до їх появи у ВКР (рис.1). Відповідно до спектра ІЧ

поглинання НІС область локалізації можливих стоксових ліній знаходиться в діапазоні 560 – 582 нм. Спектр ХГ охоплює довгохвильову частину цієї області, якій відповідають коливання молекули барвника з найбільш інтенсивними лініями в ІЧ поглинанні. Ці коливання і проявляються у ВКР. Серед можливих стоксових ліній у ВКР не проявляється лише найбільш довгохвильова лінія 580.2 нм, якій відповідає коливання з інтенсивним ІЧ поглинанням. Причиною цього може бути те, що відповідна лінія припадає на край спектра ХГ, де інтенсивність випромінювання недостатня для збудження ВКР достатньої інтенсивності.

Внаслідок біхроматичного механізму збудження ВКР і розширення спектра ХГ в довгохвильову область спостерігається суттєва залежність відносної інтенсивності ліній ВКР від інтенсивності накачування (рис.4). Внаслідок розширення спектра ХГ при збільшенні I_n зростає переважно інтенсивність ХГ на довжині хвилі довгохвильових стоксових ліній, внаслідок чого зростає їхня відносна інтенсивність. Зміна відносної інтенсивності ліній дає можливість по чергову виділяти ці лінії на фоні суцільного контура ХГ, підбираючи для цього оптимальні інтенсивності накачування, при яких ці лінії найкраще проявляються. Зокрема для виділення довгохвильових ліній оптимальною є найбільша

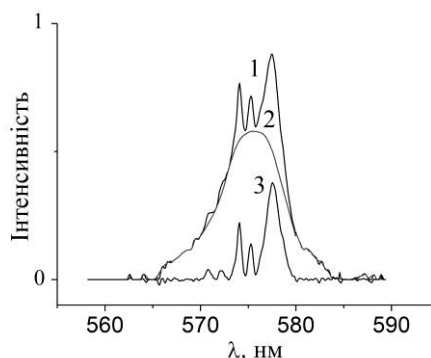


Рис. 3. Спектри вторинного випромінювання (1), ХГ (2) і ВКР (3) барвника НІС в концентрованій суспензії мікрочастинок корунду в ПУА при інтенсивності накачування 1.7 МВт/мм².

інтенсивність накачування, а короткохвильових – деяка проміжна величина, при якій ці лінії достатньо інтенсивні, але не «забиваються» зростаючою інтенсивністю сусідніх більш довгохвильових ліній.

Загалом поведінка спектральних ліній вторинного випромінювання НІС в БРС аналогічна поведінці ВКР ліній родаміна 6G (R6G), детально дослідженого в роботах [1, 2, 5].

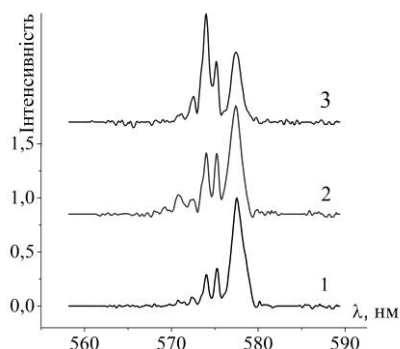


Рис. 4. Залежність лінійчастої складової спектра вторинного випромінювання барвника НІС в концентрованій суспензії мікрочастинок корунду від інтенсивності накачування: $I_n = 1.2$ (1), 1.6 (2), 2.2 (3) МВт/мм².

Враховуючи це, можна з упевненістю вважати, що лінії вторинного випромінювання НІС, обумовлені ВКР, яке ініціюється біхроматичним збудженням випромінювання накачування та ХГ.

ВКР в НІС однак відрізняється меншою інтенсивністю і різкістю спектральних ліній ніж в R6G і родаміна 575 (Rh575). Це спричинено згаданим вище сповзанням спектра ХГ із області локалізації стоксових ліній НІС в більш

довгохвильову область, в результаті чого компонента біхроматичного збудження ВКР, обумовлена ХГ, слабеє зі збільшенням накачування. Це не дозволяє використовувати для дослідження ВКР більш ефективні БРС, якими є везикулярні плівки.

Висновки

Досліджено вимушене комбінаційне розсіяння лазерного барвника НІС (1,3,3,1',3',3'-гексаметиліндокарбоціанін-BF₄-) в везикулярній полімерній плівці та концентрованій суспензії мікрочастинок корунду в поліуретанакрилаті. Спостерігається ВКР на семи стоксових лініях, які розташовані довгохвильовій частині можливої області локалізації стоксових ліній, що визначена по спектру його ІЧ поглинання.

Закономірності виникнення ліній відповідають біхроматичному механізму збудження ВКР випромінюванням накачування та хаотичної генерації на відповідних стоксових частотах.

Інтенсивність ліній ВКР обмежена сповзанням спектра хаотичної генерації з області локалізації стоксових ліній внаслідок перепоглинання її випромінювання незбудженими молекулами барвника.

Список використаних джерел

1. Ящук В.П., Тихонов Е.А., Пригодіук О.А. Влияние вынужденного комбинационного рассеяния на формирование спектра хаотической генерации органических красителей// Письма в ЖЭТФ. – 2010. – 91, № 4. – с.186 – 189.
2. Yashchuk Vasil P., Tikhonov E.A., Prygodiuk O.A. Stimulated Raman scattering of dyes under random lasing in polymeric vesicular films// Mol. Cryst. Liq. Cryst. – 2011. – 535. – с.156 – 166.
3. Lawandy N.M. et al. Laser action in strongly scattering media// Nature. – 1994. – 368 – с.436 – 438.
4. Tikhonov E., et al. The dye activated polymers with added fine scattering particles as new lasing media// Solid State Phenomena. – 2003. – 94. – с.295.
5. Ящук В.П. и др. Резонансное вынужденное комбинационное рассеяние органических красителей в многократно рассеивающей среде как возможный метод определения их колебательного спектра// Квант. электр. – 2011. – 41, № 10. – с.875 – 880.
6. Ящук В.П. и др. Влияние перепоглощения и переизлучения на ВКР в полиметиновых красителях в многократно рассеивающих средах// Квант. электр. – 2013. – 43, № 12. – с.1127-1131.
7. Yashchuk Vasil P. et al. Specific appearing of stimulated Raman scattering in dyed multiple scattering media (2013) IEEE Xplore Digital Library. DOI: 10.1109/NLP.2013. 6646387. –p.48-49.

References

1. YASHCHUK, V., TIKHONOV, E. and PRYGODIUK, O. (2010) Effect of stimulated Raman scattering on the formation of the random lasing spectrum of dyes *JETP Letters*. **91**(4), p.174 – 177.
2. YASHCHUK, V., TIKHONOV, E. and PRYGODIUK, O. (2011) Stimulated Raman scattering of dyes under random lasing in polymeric vesicular films. *Mol. Cryst. Liq. Cryst*, **535**, p.156 – 166.
3. LAWANDY, N. et al. (1994) Laser action in strongly scattering media *Nature*. **368**, p.436 – 438.
4. TIKHONOV, E. et al. (2003) The dye activated polymers with added fine scattering particles as new lasing media. *Solid State Phenomena*. **94**, p.295-298.
5. YASHCHUK, V. et al. (2011) Stimulated resonance Raman scattering from organic dyes in a multiple-scattering medium as a potential probe of their vibrational spectra. *Quantum electronics*. **41**(10), p.875-880.
6. YASHCHUK, V. et al. (2013) Influence of reabsorption and reemission on stimulated Raman scattering of polymethine dyes in multiple scattering media. *Quantum electronics*. **43**(12), p.1127-1131.
7. YASHCHUK, V. et al. (2013) Specific appearing of stimulated Raman scattering in dyed multiple scattering media. *IEEE Xplore Digital Library*. [Online] DOI: 10.1109/NLP.2013. 6646387. p.48 – 49.

Надійшла до редколегії 11.04.14

Підписано до друку _____. Формат _____. Друк. офс.
Папір офс. № _____. Друк. арк. _____. Тираж _____. Зам. _____.
Друкарня _____.