КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

В І С Н И К

КИЇВСЬКОГО НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

СЕРІЯ ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНІ НАУКИ

ВИПУСК №1 2014

Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка,
випуск №1, 2014
Серія фізико-математичні науки

З 1991 року серії вісників Київського університету “Математика і механіка”, “Физика”, “Моделирование и оптимизация сложных систем” реорганізовано у “Вісник Київського університету. Серія: фізико-математичні науки”. У віснику містяться результати нових досліджень у різних галузях математики, інформатики, механіки, фізики та радіофізики для наукових працівників, викладачів, аспірантів, інженерів і студентів. Друкується за рекомендаціями Вчених Рад фізичного, радіофізичного, механіко-математичного факультетів та факультету кібернетики.

Журнал “Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія фізико-математичні науки” включено до переліку фахових видань ВАК України та реферується в Реферативному журналі та базах даних ВИНИТИ, Росія, Москва.

Редакційна колегія:

Анісімов Анатолій Васильович, чл.-кор. НАН України, д.ф.-м.н., проф., **головний редактор**;
Хусаінов Денис Яхьєвич, д.ф.-м.н., проф.,
заступник головного редактора, відповідальний за видання;
Акіменко Віталій Володимирович, д.т.н., проф.;
Анісімов Ігор Олексійович, д.ф.-м.н., проф.;
Буй Дмитро Борисович, д.ф.-м.н., проф.;
Булавін Леонід Анатолійович, акад. НАН України, д.ф.-м.н., проф.;
Волошин Олексій Федорович, д.т.н., проф.;
Гаращенко Федір Георгійович, д.т.н., проф.;
Данилов Вадим Васильович, д.ф.-м.н., проф.;
Єжов Станіслав Миколайович, д.ф.-м.н., проф.;
Заславський Володимир Анатолійович, д.т.н., доц.;
Кириченко Володимир Васильович, д.ф.-м.н., проф.;
Козаченко Юрій Васильович, д.ф.-м.н., проф.;
Кудін Володимир Іванович, д.т.н., с.н.с.;
Левитський Сергій Михайлович, д.ф.-м.н., проф.;
Макара Володимир Арсенійович, чл.-кор. НАН України, д.ф.-м.н., проф.;
Макарець Микола Володимирович, д.ф.-м.н., проф.;
Маципура Володимир Тимофійович, д.ф.-м.н., проф.;
Перестюк Микола Олексійович, акад. НАН України, д.ф.-м.н., проф.;
Погорілий Сергій Дем’янович, д.т.н., проф.;
Скришевський Валерій Антонович, д.ф.-м.н., проф.

Редакційний відділ:

Анісімова Тетяна Харитонівна, **відповідальний секретар**;
Безущак Оксана Омелянівна, bezusch@univ.kiev.ua;
Стукаленко Вікторія Віталіївна, stu@univ.kiev.ua;
Родіонова Тетяна Василівна, rodtv@univ.kiev.ua;
Хмелюк Надія Кузьмівна, khmeluk@univ.kiev.ua;
Сільвейструк Людмила Миколаївна, **технічний редактор**, slm-klm@ukr.net.

Адреса редакційної колегії:

Факультет кібернетики, Київський національний університет імені Тараса Шевченка,
пр. Глушкова, 4 д, 03680 Тел. (044) 259-01-49

ISBN 978-966-2142
ISSN 1812-5409

ЗМІСТ

АЛГЕБРА, ГЕОМЕТРІЯ ТА ТЕОРІЯ ІМОВІРНОСТЕЙ

Borysenko O.D., Borysenko O.V. Averaging method for non-autonomous third order random oscillating system in non-resonance case 7

Chuiko S.M., Chuiko E.V., Belushenko A.V. On the regularization of the linear matrix equation 12

Goy T.P., Zatorsky R.A. On a nonelementary function of the Dawson's integral type 15

Reznikova Yu.S. Multidimensional triangle-truncated simplexes 19

Sergiienko M.P. How to test the hypothesis concerning the form of covariance function of Gaussian stationary process when exist spectral density 23

Tymoshkevich L.M. On spectral theory of Coxeter graphs and its applications 27

Швиров В.В. Про кількість допустимих послідовностей нерозкладних напівланцюгових кілець з нетеровою діагоналлю 34

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ, МАТЕМАТИЧНА ФІЗИКА ТА МЕХАНІКА

Болілий В.О., Зеленська І.О. Система сингулярно збурених диференціальних рівнянь з диференціальною внутрішньою точкою звороту І-роду 41

Вакал Є.С., Вакал Ю.Є., Стеля О.Б. Дослідження процесів вологопереносу в неоднорідних середовищах із слабко проникними прошарками 49

Горошко О.О., Кикоть С.В. Дослідження коливань гнучкого трубопроводу з використанням канонічного вигляду рівнянь 53

Гречко В.І. Про оцінку похибки однієї модифікації методу Ньютона-Канторовича 57

Камінський А.О., Дудик М.В., Кіпніс Л.А. Маломасштабна контактна зона з тертям берегів біля вершини міжфазної тріщини 62

Курилко О.Б. Періодичні рухи в'язкої рідини всередині прямокутної порожнини 68

Мартиненко О.В. Неіснування глобальних розв'язків задачі Коші для рівняння неоднорідного пористого середовища з неоднорідним джерелом 72

Шакері Мобараке Пуйан, Зражевський Г.М. Алгоритм Гальоркіна в методі частинних областей розв'язання граничних задач 75

КОМП'ЮТЕРНІ НАУКИ ТА ІНФОРМАТИКА

Donchenko V.S., Skotarenko F.M. Development of pseudo inverse technique: cortege operators and applications in grouping information problem 85

Ivokhin E.V., Almodars Barrak Subhi Kaml An approach for solving of knapsack problem with fuzzy priorities 91

Mohammed Saad Ibrahim Review of type-2 fuzzy sets and logic systems theory 95

Shatyrko O.A., Khusainov D.Ya., Dzhalladova I.A. Modelling processes of population dynamics 101

Sirenko A.S. An algorithm for finding a common Lyapunov function of two linear difference systems 107

Skobelev V.V. On some relation between sets of mappings of a set in factor-rings 113

Бондарець І.М. Система розпізнавання облич за допомогою 2.5д камери 118

Вознюк Т.Г. Алгоритм побудови керуючого простору синтаксичних структур природномовних речень 122

Волошин О.Ф., Лавер В.О. Аксіоматична характеризація нечітких узагальнень методів розподілу витрат 128

Демченко І.Ю., Чечельницький О.А. Стаціонарні характеристики мережевої моделі послідовної структури 133

Івохін Є.В., Присяженко О.Є. Про один підхід до моделювання поведінкового скорингу 137

Катеринич Л.О. Мережеві алгоритми класифікації у задачах діагностики 141

Коцур Д. В., Терещенко В. М. Побудова діаграми Вороного для об'єктів довільної форми 145

Литвиненко І. О. Оптимізація системи обслуговування з багатьма виконавцями та з рекурентним потоком 149

Лялецький О.В., Афонін А.О. Про формальний математичний текст і логічну та онтологічну коректності 155

Лялецький О.О. Елементарне доведення теореми нормалізації для $\beta\eta$-редукції 158

Марченко О.О., Насіров Е.М., Паламарчук С.М. Паралелізація невід'ємної факторизації розріджених матриць надвеликої розмірності 161

Наконечний О.Г., Філіпенков А.О. Дискретне мінімаксне оцінювання при невизначеності з роздільними обмеженнями 165

Нікітченко М.С., Шкільняк С.С. Вироджені семантичні моделі першопорядкових логік 169

Омельчук Л.Л. Порівняльний аналіз українського стандарту освітньо-професійної підготовки з інформатики та державного освітнього стандарту Російської Федерації з інформатики та обчислювальної техніки 174
Присяжна М. В., Клюшин Д. А. Еліптична функція статистичної глибини даних 179
Рубльов Б.В., Шкуліпа О.В., Харченко А.В. Побудова інтелектуальної діагностичної системи для встановлення фази захворювання 185
Рутицька В.В. Про моделювання динаміки портфеля інвестицій в умовах параметричної невизначеності 189
Тарануха В.Ю. Модифікація n-грамної моделі засновані на класах для розпізнавання слов'янських мов 193
Халимон О.О. Розв'язання крайової задачі з періодичним джерелом для рівняння дифузії з дробовою похідною за простором 197
Хусаінов Д.Я., Баштинець Я., Демченко Г.А. Оптимальне керування процесом нагрівання без запізнення 203

РАДІОФІЗИКА

Віділ А.Ю. Параметричне збудження спінових хвиль в анізотропних (111) плівках паралельною накачкою 209
Гайдай Ю.О., Сидоренко В.С., Скрипка С.Л., Семенець Ю.Г., Сердега І. В. Ближньопольовий мікрохвильовий мікроскоп з активним зондом модуляційного типу 215
Гандзюк В.І., Оберемок О.С., Павлюк С.П. Інжекційні ефекти в кремнієвій симетричній n^+-n-n^+ структурі при живленні в режимі генератора напруги 221
Загороднюк С.П. Використання служби Windows Server Update Services в гетерогенних локальних обчислювальних мережах з відсутнім централізованим адмініструванням 225
Коваленко А.В. Вибір дифракційної гратки для сенсора хвильового фронту на ефекті Талбота 229
Мовчан М. М. Ефект невзаємності в об'ємних феритових резонаторах міліметрового діапазону 233
Находкін М.Г., Федорченко М.І. Взаємодія Gd і O з поверхнею Si(113) 239
Первак Ю.О. Структурні особливості дисперсійних дзеркал з максимально високою негативною дисперсією групової затримки 243
Соломенко О.В., Лендел В.В., Присяжневич І.В., Черняк В.Я. Вплив геометрії мікророзряду з порожнистим електродом на його електрофізичні характеристики 247

СУЧАСНА ФІЗИКА

Альохін О.Д., Білоус О.І., Репула А.М. Визначення критичних температур речовини за даними критичної опелесценції 253
Горбар Е.В.Електронні стани на найнижчому рівні Ландау у невпорядкованому дираківському напівметалі 257
Королович В.Ф., Гребньов О.А., Цивилева О.М., Мороз К.О. Розрахунок площі поверхні наночастинок астралену: Модель 261
Лисов В.І., Цареградська Т.Л., Саєнко Г.В., Турков О.В. Особливості процесів фазоутворення в аморфному бінарному сплаві $Fe_{80}B_{20}$ 263
Овсієнко І. В. Магнітоопір системи «вуглецеві нанотрубки – оксид заліза» 267
Павленко О.Л. Кристалічна структура плівок фулеритів C_{60} при високих дозах електронного опромінення 271
Попов О.Ю. Залежність механічних характеристик керамічних композиційних матеріалів від співвідношення між розмірами зерен різних фаз 275
Рапопорт Ю. Г. Загальний метод для виведення еволюційних рівнянь та моделювання нелінійних хвиль у шаруватих активних середовищах з об'ємними та поверхневими нелінійностями 281
Рево С.Л., Хуторянська Н.В., Іваненко К.О., Копань В.С., Бошко О.І. Термоелектрорушійна сила багатошарових композицій з алюмінію і вуглецевих нанотрубок 289
Розуван К.П., Розуван С.Г., Шайкевич І.А. Скануюча тунельна мікроскопія вуглецевих нанотрубок 293
Стащук В.С., Стукаленко В.В., Полянська О.П. Моделювання оптичних властивостей системи плівка діелектрика-метал 297
Танцюра І.В. Особливості формування структури поверхневих шарів сплаву АК12 після лазерного легування порошками міді та заліза 299
Чумаченко А.В. Структура надплинної компоненти та спектр елементарних збуджень 303
Ящук В.П., Комишан О.О. Використання вторинного випромінювання суміші барвників для визначення спектрів їх комбінаційного розсіяння 309

АЛГЕБРА, ГЕОМЕТРІЯ ТА ТЕОРІЯ ІМОВІРНОСТЕЙ

УДК 519.21

О.Д. Борисенко[1], *к.ф.-м.н., доцент*
О.В. Борисенко[2], *к.ф.-м.н., доцент*

Метод усереднення для неавтономної випадкової коливної системи третього порядку у нерезонансному випадку

У роботі вивчається асимптотична поведінка неавтономної коливної системи, яка описується диференціальним рівнянням третього порядку з малими періодичними нелінійними зовнішніми збуреннями типу багатовимірного "білого" та Пауссонівського шумів. Розглядається нерезонансний випадок.

Ключові слова: метод усереднення, неавтономна коливна система, стохастичне диференціальне рівняння, нерезонансний випадок.

[1]Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 01033, Київ, вул. Володимирська,64. [2] Національний технічний університет України "КПІ" 03056, г.Київ-56, проспект Перемоги, 37

O.D. Borysenko[1], *Ph.D.,Associate Professor*
O.V. Borysenko[2], *Ph.D., Associate Professor*

Averaging method for non-autonomous third order random oscillating system in non-resonance case

The asymptotic behavior of non-autonomous oscillating system describing by differential equation of third order with small periodical nonlinear external perturbations of multidimensional "white noise" and "Poisson noise" types is studied. The non-resonance case is considered.

Key Words: averaging method, non-autonomous oscillating system, stochastic differential equation, non-resonance case.

[1]National Taras Shevchenko University of Kyiv, 01033, Kyiv, 64 Volodymyrska st., [2]National Technical University of Ukraine "KPI", 37 Prospect Peremogy, Kyiv 03056

E-mails: [1]odb@univ.kiev.ua

Communicated by Prof. Kozachenko Yu.V.

1 Introduction

Limit behaviour of autonomous third order oscillating system under the action of external small nonlinear random disturbances such as multidimensional "white noise" and "Poisson noise" was studied in [1].

This paper deals with investigation of the behaviour, as $\varepsilon \to 0$, of the general type third order non-autonomous oscillating system driven by stochastic differential equation

$$\begin{aligned} &x'''(t) + ax''(t) + b^2x'(t) + ab^2x(t) = \\ &= \varepsilon^{k_0} f_0(\mu_0 t, x(t), x'(t), x''(t)) + \\ &+ f_\varepsilon(t, x(t), x'(t), x''(t)) \end{aligned} \tag{1}$$

with non-random initial conditions $x(0) = x_0, x'(0) = x_0', x''(0) = x_0''$, where $\varepsilon > 0$ is a small parameter, $f_\varepsilon(t, x, x', x'')$ is a random function such that

$$\begin{aligned} &\int_0^t f_\varepsilon(s, x(s), x'(s), x''(s))\, ds = \sum_{i=1}^m \varepsilon^{k_i} \times \\ &\times \int_0^t f_i(\mu_i s, x(s), x'(s), x''(s))\, dw_i(s) + \varepsilon^{k_{m+1}} \times \\ &\times \int_0^t \int_{\mathbb{R}} f_{m+1}(\mu_{m+1} s, x(s), x'(s), x''(s), z)\, \nu(ds, dz), \end{aligned}$$

$k_i > 0, i = \overline{0, m+1}$; f_i are non-random functions, periodic on $\mu_i t$, $i = \overline{0, m+1}$ with period 2π; $w_i(t), i = \overline{1, m}$ are independent one-dimensional Wiener processes; $\nu(dt, dy)$ is the Poisson measure independent on $w_i(t), i = \overline{1, m}$, $E\nu(dt, dy) = \Pi(dy)dt$, $\tilde{\nu}(dt, dy) = \nu(dt, dy) - \Pi(dy)dt$, $\Pi(A)$ is a finite measure on Borel sets $A \in \mathbb{R}$, $a > 0, b > 0$.

We will consider the equation (1) as the system of stochastic differential equations

$$\begin{aligned} &dx(t) = x'(t)dt, \\ &dx'(t) = x''(t)dt, \\ &dx''(t) = [-ax''(t) - b^2x'(t) - ab^2x(t) + \\ &+ \varepsilon^{k_0} f_0(\mu_0 t, x(t), x'(t), x''(t)) + \varepsilon^{k_{m+1}} \times \\ &\times \int_{\mathbb{R}} f_{m+1}(\mu_{m+1} t, x(t), x'(t), x''(t), z)\Pi(dz)]dt + \\ &+ \sum_{i=1}^m \varepsilon^{k_i} f_i(\mu_i t, x(t), x'(t), x''(t))dw_i(t) + \varepsilon^{k_{m+1}} \times \\ &\times \int_{\mathbb{R}} f_{m+1}(\mu_{m+1} t, x(t), x'(t), x''(t), z)\tilde{\nu}(dt, dz), \\ &x(0) = x_0,\ x'(0) = x_0',\ x''(0) = x_0''. \end{aligned} \tag{2}$$

© О.Д. Борисенко, О.В. Борисенко, 2014

In what follows we will use the constant $K > 0$ for the notation of different constants, which are not depend on ε.

2 Auxiliary result

From Borysenko O. and Malyshev I. [2], using the obvious modifications we obtain following results

Lemma 1. *Let for each $x \in \mathbb{R}^d$ there exists*

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_A^{T+A} f(t,x)\,dt = \bar{f}(x)$$

uniformly with respect to A, the function $\bar{f}(x)$ is bounded, continuous, function $f(t,x)$ is bounded and continuous in x uniformly with respect to (t,x) in any region $t \in [0,\infty), |x| \leqslant K$, and stochastic processes $\xi(t) \in \mathbb{R}^d$, $\eta(t) \in \mathbb{R}$ are continuous, then

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_0^t f\left(\frac{s}{\varepsilon} + \eta(s), \xi(s)\right) ds = \int_0^t \bar{f}(\xi(s))\,ds$$

almost surely for all arbitrary $t \in [0,T]$.

Remark 1. *Let $f(t,x,z)$ is bounded and uniformly continuous in x with respect to $t \in [0,\infty)$ and $z \in \mathbb{R}$ in every compact set $|x| \leqslant K, x \in \mathbb{R}^d$. Let $\Pi(\cdot)$ be a finite measure on the σ-algebra of Borel sets in $\mathbb{R}$ and let*

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_A^{T+A} f(t,x,z)\,dt = \bar{f}(x,z),$$

uniformly with respect to A for each $x \in \mathbb{R}^d, z \in \mathbb{R}$, where $\bar{f}(x,z)$ is bounded, uniformly continuous in x with respect to $z \in \mathbb{R}$ in every compact set $|x| \leqslant K$. Then for any continuous processes $\xi(t) \in \mathbb{R}^d$ and $\eta(t) \in \mathbb{R}$ we have

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_0^t \int_{\mathbb{R}} f\left(\tfrac{s}{\varepsilon} + \eta(s), \xi(s), z\right) \Pi(dz)ds = \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \bar{f}(\xi(s), z)\,\Pi(dz)ds.$$

3 Main result

We will study the non-resonance case: $\mu_i \neq \frac{p_i}{q_i} b, i = \overline{0, m+1}$, where p_i and q_i are any relatively prime integers. Let us consider the following representation of processes $x(t), x'(t), x''(t)$:

$$x(t) = C(t)e^{-at} + A_1(t)\cos(bt) + A_2(t)\sin(bt),$$

$$x'(t) = -aC(t)e^{-at} - bA_1(t)\sin(bt) + bA_2(t)\cos(bt),$$

$$x''(t) = a^2C(t)e^{-at} - b^2A_1(t)\cos(bt) - b^2A_2(t)\sin(bt),$$

$$N(t) = C(t)\exp\{-at\}.$$

Then

$$\begin{aligned}
N(t) &= \frac{b^2x(t) + x''(t)}{a^2+b^2},\\
A_1(t) &= \cos\alpha\cos(bt+\alpha)x(t) - \frac{\sin bt}{b}x'(t) - \\
&\quad - \frac{\sin\alpha\sin(bt+\alpha)}{b^2}x''(t),\\
A_2(t) &= \cos\alpha\sin(bt+\alpha)x(t) + \frac{\cos bt}{b}x'(t) + \\
&\quad + \frac{\sin\alpha\cos(bt+\alpha)}{b^2}x''(t),
\end{aligned}$$

where $\alpha = \operatorname{arctg}(b/a)$. We can apply Ito formula [3] to stochastic process $\xi(t) = (N(t), A_1(t), A_2(t))$ and obtain for the process $\xi(t)$ the system of stochastic differential equations

$$dN(t) = -aN(t)dt + \frac{1}{a^2+b^2}dH(t)$$

$$dA_1(t) = -\frac{\sin\alpha\sin(bt+\alpha)}{b^2}dH(t) \qquad (3),$$

$$dA_2(t) = \frac{\sin\alpha\cos(bt+\alpha)}{b^2}dH(t)$$

$$\begin{aligned}
N(0) &= \frac{b^2x_0 + x_0''}{a^2+b^2},\\
A_1(0) &= \frac{a^2x_0 - x_0''}{a^2+b^2},\\
A_2(0) &= \frac{ax_0'' + (a^2+b^2)x_0' + ab^2x_0}{b(a^2+b^2)},
\end{aligned}$$

where

$$\begin{aligned}
dH(t) &= [\varepsilon^{k_0}\tilde{f}_0(\mu_0 t, N(t), A_1(t), A_2(t), t) + \varepsilon^{k_{m+1}}\times\\
&\times \int_{\mathbb{R}} \tilde{f}_{m+1}(\mu_{m+1}t, N(t), A_1(t), A_2(t), t, z)\Pi(dz)]dt +\\
&+ \sum_{i=1}^{m} \varepsilon^{k_i}\tilde{f}_i(\mu_i t, N(t), A_1(t), A_2(t), t)dw_i(t) + \varepsilon^{k_m+1}\times\\
&\times \int_{\mathbb{R}} \tilde{f}_{m+1}(\mu_{m+1}t, N(t), A_1(t), A_2(t), t, z)\tilde{\nu}(dt, dz),
\end{aligned}$$

$\tilde{f}_i(\mu_i t, N, A_1, A_2, t) = f_i(\mu_i t, N + A_1\cos bt + A_2\sin bt, -aN - bA_1\sin bt + bA_2\cos bt, a^2N - b^2A_1\cos bt - b^2A_2\sin bt)$, $i = \overline{0,m}$, $\tilde{f}_{m+1}(\mu_{m+1}t, N, A_1, A_2, t, z) = f_{m+1}(\mu_{m+1}t, N + A_1\cos bt + A_2\sin bt, -aN - bA_1\sin bt + bA_2\cos bt, a^2N - b^2A_1\cos bt - b^2A_2\sin bt, z)$.

Theorem 3.1. *Let* $\Pi(\mathbb{R}) < \infty$, $t \in [0, t_0]$, $k = \min(k_0, 2k_1, \dots, 2k_m, k_{m+1})$. *Let us suppose, that functions* $f_i, i = \overline{0, m+1}$ *bounded and satisfy Lipschitz condition on* x, x', x''. *If given below matrix* $\bar{\sigma}^2(A_1, A_2)$ *is non-negative definite, then*

1. For $k_0 = 2k_i = k_{m+1}$, $i = \overline{1, m}$ *the stochastic process* $\xi_\varepsilon(t) = \xi(t/\varepsilon^k)$ *weakly converges, as* $\varepsilon \to 0$, *to the stochastic process* $\bar{\xi}(t) = (0, \bar{A}_1(t), \bar{A}_2(t))$, *where* $\bar{A}(t) = (\bar{A}_1(t), \bar{A}_2(t))$ *is the solution to the system of stochastic differential equations*

$$\begin{aligned} &d\bar{A}(t) = \bar{\alpha}(\bar{A}(t))dt + \bar{\sigma}(\bar{A}(t))d\bar{w}(t), \\ &\bar{A}(0) = (A_1(0), A_2(0)), \end{aligned} \tag{4}$$

where $\bar{\alpha}(\bar{A}) = (\bar{\alpha}^{(1)}(A_1, A_2), \bar{\alpha}^{(2)}(A_1, A_2))$,

$$\bar{\alpha}^{(1)}(A_1, A_2) = -\frac{1}{4\pi^2 b(a^2+b^2)} \times$$
$$\times \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \hat{f}_{(1)}(\psi, A_1, A_2, t)(a\sin\psi + b\cos\psi)\, dt\, d\psi,$$

$$\bar{\alpha}^{(2)}(A_1, A_2) = \frac{1}{4\pi^2 b(a^2+b^2)} \times$$
$$\times \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \hat{f}_{(1)}(\psi, A_1, A_2, t)(a\cos\psi - b\sin\psi)\, dt\, d\psi,$$

$$\bar{\sigma}(A_1, A_2) = \left\{\bar{B}(A_1, A_2)\right\}^{\frac{1}{2}} = \left\{ \frac{1}{4\pi^2 b^2 (a^2+b^2)^2} \times \right.$$
$$\left. \times \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \hat{f}_{(2)}(\psi, A_1, A_2, t) B(\psi)\, dt\, d\psi \right\}^{\frac{1}{2}},$$

$$B(\psi) = (B_{ij}(\psi), i, j = 1, 2),$$
$$B_{11}(\psi) = (a\sin\psi + b\cos\psi)^2,$$
$$B_{12}(\psi) = B_{21}(\psi) =$$
$$= -(a\sin\psi + b\cos\psi)(a\cos\psi - b\sin\psi),$$
$$B_{22}(\psi) = (a\cos\psi - b\sin\psi)^2,$$
$$\hat{f}_{(1)}(\psi, A_1, A_2, t) = \tilde{f}_0(\psi, 0, A_1, A_2, t) +$$
$$+ \int\limits_{\mathbb{R}} \tilde{f}_{m+1}(\psi, 0, A_1, A_2, t, z)\Pi(dz),$$

$$\hat{f}_{(2)}(\psi, A_1, A_2, t) = \sum_{i=1}^{m} \tilde{f}_i^2(\psi, 0, A_1, A_2, t),$$

$\bar{w}(t) = (\bar{w}_i(t), i = 1, 2)$, $\bar{w}_i(t), i = 1, 2$ *are independent one-dimensional Wiener processes.*

2. If $k < k_0$ *then in the averaging equation (4) we must put* $\tilde{f}_0 \equiv 0$; *if* $k < 2k_j$ *for some* $1 \leqslant j \leqslant m$, *then in the averaging equation (4) we must put* $\tilde{f}_j \equiv 0$ *for all such* j; *if* $k < k_{m+1}$ *then in the averaging equation (4) we must put* $\tilde{f}_{m+1} \equiv 0$.

Proof. Let us make a change of variable $t \to t/\varepsilon^k$ in equation (3) and obtain for the process $\xi_\varepsilon(t) = (N_\varepsilon(t), A_1^\varepsilon(t), A_2^\varepsilon(t)) = (N(t/\varepsilon^k), A_1(t/\varepsilon^k), A_2(t/\varepsilon^k))$ the system of stochastic differential equations

$$\begin{aligned} dN_\varepsilon(t) &= -\frac{a}{\varepsilon^k}N_\varepsilon(t)dt + \frac{1}{a^2+b^2}dH_\varepsilon(t) \\ dA_1^\varepsilon(t) &= -\frac{\sin\alpha\sin(bt/\varepsilon^k+\alpha)}{b^2}dH_\varepsilon(t) \\ dA_2^\varepsilon(t) &= \frac{\sin\alpha\cos(bt/\varepsilon^k+\alpha)}{b^2}dH_\varepsilon(t), \end{aligned} \tag{5}$$

where

$$dH_\varepsilon(t) = [\varepsilon^{k_0-k}\tilde{f}_0(\tfrac{\mu_0 t}{\varepsilon^k}, N_\varepsilon(t), A_1^\varepsilon(t), A_2^\varepsilon(t), \tfrac{t}{\varepsilon^k}) +$$
$$+\varepsilon^{k_{m+1}-k} \times$$
$$\times \int\limits_{\mathbb{R}} \tilde{f}_{m+1}(\tfrac{\mu_{m+1}t}{\varepsilon^k}, N_\varepsilon(t), A_1^\varepsilon(t), A_2^\varepsilon(t), \tfrac{t}{\varepsilon^k}, z)\Pi(dz)]dt +$$
$$+ \sum_{i=1}^{m} \varepsilon^{k_i-k/2}\tilde{f}_i(\tfrac{\mu_i t}{\varepsilon^k}, N_\varepsilon(t), A_1^\varepsilon(t), A_2^\varepsilon(t), \tfrac{t}{\varepsilon^k})dw_i^\varepsilon(t) +$$
$$+\varepsilon^{k_{m+1}} \times$$
$$\times \textstyle\int_{\mathbb{R}} \tilde{f}_{m+1}(\tfrac{\mu_{m+1}t}{\varepsilon^k}, N_\varepsilon(t), A_1^\varepsilon(t), A_2^\varepsilon(t), \tfrac{t}{\varepsilon^k}, z)\tilde{\nu}_\varepsilon(dt, dz),$$

$w_i^\varepsilon(t) = \varepsilon^{k/2}w_i(t/\varepsilon^k)$, $\tilde{\nu}_\varepsilon(t, A) = \nu(t/\varepsilon^k, A) - \Pi(A)t/\varepsilon^k$, here A is Borel set in $\mathbb{R}$. For any $\varepsilon > 0$ the processes $w_i^\varepsilon(t), i = \overline{1, m}$ are the independent Wiener processes and $\tilde{\nu}_\varepsilon(t, A)$ is the centered Poisson measure independent on $w_i^\varepsilon(t), i = \overline{1, m}$.

Since we have relationship $N_\varepsilon(t) = \exp\{-at/\varepsilon^k\}C(t/\varepsilon^k)$ and process $C_\varepsilon(t) = C(t/\varepsilon^k)$ satisfies the stochastic equation

$$C_\varepsilon(t) = C(0) + \int_0^t \frac{\exp\{as/\varepsilon^k\}}{a^2+b^2}dH_\varepsilon(s),$$

where $C(0) = \frac{b^2x_0 + x_0''}{a^2+b^2}$, we can obtain estimate

$$\mathsf{E}|N_\varepsilon(t)|^2 \leqslant K[e^{-2at/\varepsilon^k} + \varepsilon^k(1 - e^{-2at/\varepsilon^k}) \times$$
$$\times (t(\varepsilon^{2(k_0-k)} + \varepsilon^{2(k_{m+1}-k)}) + \sum_{i=1}^{m+1}\varepsilon^{2k_i-k})].$$

Therefore $\lim_{\varepsilon\to 0}\mathsf{E}|N_\varepsilon(t)|^2 = 0$ and it is sufficient to study the behaviour, as $\varepsilon \to 0$, of solution to the system of stochastic differential equations

$$\begin{aligned} dA_1^\varepsilon(t) &= -\frac{\sin\alpha\sin(bt/\varepsilon^k+\alpha)}{b^2}d\hat{H}_\varepsilon(t), \\ dA_2^\varepsilon(t) &= \frac{\sin\alpha\cos(bt/\varepsilon^k+\alpha)}{b^2}d\hat{H}_\varepsilon(t), \end{aligned} \tag{6}$$

with initial conditions $A_1^\varepsilon(0) = A_1(0)$, $A_2^\varepsilon(0) = A_2(0)$, where

$$d\hat{H}_\varepsilon(t) = [\varepsilon^{k_0-k}\hat{f}_0(\tfrac{\mu_0 t}{\varepsilon^k}, A_1^\varepsilon(t), A_2^\varepsilon(t), \tfrac{t}{\varepsilon^k}) +$$
$$+\varepsilon^{k_{m+1}-k}\int\limits_{\mathbb{R}} \hat{f}_{m+1}(\tfrac{\mu_{m+1}t}{\varepsilon^k}, A_1^\varepsilon(t), A_2^\varepsilon(t), \tfrac{t}{\varepsilon^k}, z)\Pi(dz)]dt +$$
$$+ \sum_{i=1}^{m} \varepsilon^{k_i-k/2}\hat{f}_i(\tfrac{\mu_i t}{\varepsilon^k}, A_1^\varepsilon(t), A_2^\varepsilon(t), \tfrac{t}{\varepsilon^k})dw_i^\varepsilon(t) +$$
$$+\varepsilon^{k_{m+1}}\int\limits_{\mathbb{R}} \hat{f}_{m+1}(\tfrac{\mu_{m+1}t}{\varepsilon^k}, A_1^\varepsilon(t), A_2^\varepsilon(t), \tfrac{t}{\varepsilon^k}, z)\tilde{\nu}_\varepsilon(dt, dz),$$

$\hat{f}_j(\psi, A_1, A_2, t) = \tilde{f}_j(\psi, 0, A_1, A_2, t)$, $j = \overline{0,m}$, $\hat{f}_{m+1}(\psi, A_1, A_2, t, z) = \tilde{f}_{m+1}(\psi, 0, A_1, A_2, t, z)$.

Let us denote $A_\varepsilon(t) = (A_1^\varepsilon(t), A_2^\varepsilon(t))$. Using conditions on coefficients of equation (6) and properties of stochastic integrals we obtain estimates

$$\mathsf{E}||A_\varepsilon(t)||^2 \leqslant K[1 + t^2(\varepsilon^{2(k_0-k)} + \varepsilon^{2(k_{m+1}-k)}) + t\sum_{i=1}^{m+1}\varepsilon^{2k_i-k}],$$

$$\mathsf{E}||A_\varepsilon(t) - A_\varepsilon(s)||^2 \leqslant K[|t-s|^2(\varepsilon^{2(k_0-k)} + \varepsilon^{2(k_{m+1}-k)}) + |t-s|\sum_{i=1}^{m+1}\varepsilon^{2k_i-k}].$$

Similarly for the process $\zeta_\varepsilon(t) = (\zeta_1^\varepsilon(t), \zeta_2^\varepsilon(t))$, where

$$\zeta_1^\varepsilon(t) = -\int_0^t \frac{\sin\alpha\sin(bs/\varepsilon^k+\alpha)}{b^2} dM_\varepsilon(s),$$
$$\zeta_2^\varepsilon(t) = \int_0^t \frac{\sin\alpha\cos(bs/\varepsilon^k+\alpha)}{b^2} dM_\varepsilon(s),$$

where

$$dM_\varepsilon(t) = \sum_{i=1}^m \varepsilon^{k_i-k/2}\hat{f}_i(\tfrac{\mu_i t}{\varepsilon^k}, A_1^\varepsilon(t), A_2^\varepsilon(t), \tfrac{t}{\varepsilon^k}) dw_i^\varepsilon(t) + \varepsilon^{k_{m+1}}\int_{\mathbb{R}} \hat{f}_{m+1}(\tfrac{\mu_{m+1}t}{\varepsilon^k}, A_1^\varepsilon(t), A_2^\varepsilon(t), \tfrac{t}{\varepsilon^k}, z)\tilde{\nu}_\varepsilon(dt, dz),$$

we derive estimates

$$\mathsf{E}||\zeta_\varepsilon(t)||^2 \leqslant Kt\sum_{i=1}^{m+1}\varepsilon^{2k_i-k},$$

$$\mathsf{E}||\zeta_\varepsilon(t) - \zeta_\varepsilon(s)||^2 \leqslant K|t-s|\sum_{i=1}^{m+1}\varepsilon^{2k_i-k}.$$

Therefore for stochastic process $\eta_\varepsilon(t) = (A_\varepsilon(t), \zeta_\varepsilon(t))$ conditions of weak compactness [4] are fulfilled

$$\lim_{h\downarrow 0}\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}}\sup_{|t-s|<h}\mathrm{P}\{|\eta_\varepsilon(t) - \eta_\varepsilon(s)| > \delta\} = 0$$

for any $\delta > 0$, $t, s \in [0, T]$,

$$\lim_{N\to\infty}\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}}\sup_{t\in[0,T]}\mathrm{P}\{|\eta_\varepsilon(t)| > N\} = 0,$$

and for any sequence $\varepsilon_n \to 0, n = 1, 2, \ldots$ there exists a subsequence $\varepsilon_m = \varepsilon_{n(m)} \to 0, m = 1, 2, \ldots$, probability space, stochastic processes $\bar{A}_{\varepsilon_m}(t) = (\bar{A}_1^{\varepsilon_m}(t), \bar{A}_2^{\varepsilon_m}(t))$, $\bar{\zeta}_{\varepsilon_m}(t)$, $\bar{A}(t) = (\bar{A}_1(t), \bar{A}_2(t))$, $\bar{\zeta}(t)$ defined on this space, such that $\bar{A}_{\varepsilon_m}(t) \to \bar{A}(t), \bar{\zeta}_{\varepsilon_m}(t) \to \bar{\zeta}(t)$ in probability, as $\varepsilon_m \to 0$, and finite-dimensional distributions of $\bar{A}_{\varepsilon_m}(t), \bar{\zeta}_{\varepsilon_m}(t)$ are coincide with finite-dimensional distributions of $A_{\varepsilon_m}(t), \zeta_{\varepsilon_m}(t)$. Since we interesting in limit behaviour of distributions, we can consider processes $A_{\varepsilon_m}(t)$, and $\zeta_{\varepsilon_m}(t)$ instead of $\bar{A}_{\varepsilon_m}(t), \bar{\zeta}_{\varepsilon_m}(t)$. From (6) we obtain equation

$$\begin{aligned} &A_{\varepsilon_m}(t) = A(0) + \int_0^t \alpha_{\varepsilon_m}(s, A_{\varepsilon_m}(s))\, ds + \zeta_{\varepsilon_m}(t),\\ &A_0 = (A_1(0), A_2(0)), \end{aligned} \tag{7}$$

where $\alpha_\varepsilon(t, A) = (\alpha_\varepsilon^{(1)}(t, A_1, A_2), \alpha_\varepsilon^{(2)}(t, A_1, A_2))$,

$$\alpha_\varepsilon^{(1)}(t, A_1, A_2) = -\frac{\sin\alpha\sin(bt/\varepsilon^k+\alpha)}{b^2}\hat{f}_{(1)}^\varepsilon(t/\varepsilon^k, A_1, A_2),$$
$$\alpha_\varepsilon^{(2)}(t, A_1, A_2) = \frac{\sin\alpha\cos(bt/\varepsilon^k+\alpha)}{b^2}\hat{f}_{(1)}^\varepsilon(t/\varepsilon^k, A_1, A_2),$$

where

$$\hat{f}_{(1)}^\varepsilon(t, A_1, A_2) = \varepsilon^{k_0-k}\hat{f}_0(\mu_0 t, A_1, A_2, t) + \varepsilon^{k_{m+1}-k}\int_{\mathbb{R}}\hat{f}_{m+1}(\mu_{m+1}t, A_1, A_2, t, z)\Pi(dz).$$

It should be noted that process $\zeta_\varepsilon(t)$ is the vector-valued square integrable martingale with matrix characteristic

$$\begin{aligned} \langle\zeta_\varepsilon^{(l)}, \zeta_\varepsilon^{(n)}\rangle(t) &= \sum_{j=1}^m\int_0^t \sigma_\varepsilon^{(l,j)}(s, A_1^\varepsilon(s), A_2^\varepsilon(s))\times\\ &\times\sigma_\varepsilon^{(n,j)}(s, A_1^\varepsilon(s), A_2^\varepsilon(s))\, ds +\\ &+\tfrac{1}{\varepsilon^k}\int_0^t\int_{\mathbb{R}}\gamma_\varepsilon^{(l)}(s, A_1^\varepsilon(s), A_2^\varepsilon(s), z)\times\\ &\times\gamma_\varepsilon^{(n)}(s, A_1^\varepsilon(s), A_2^\varepsilon(s), z)\,\Pi(dz)ds,\ l, n = 1, 2, \end{aligned}$$

where

$$\sigma_\varepsilon^{(1,j)}(s, A_1, A_2) = -\varepsilon^{k_j-k/2}\frac{\sin\alpha\sin(\frac{bs}{\varepsilon^k}+\alpha)}{b^2}\hat{f}_j(\tfrac{\mu_j s}{\varepsilon^k}, A_1, A_2, \tfrac{s}{\varepsilon^k}),$$
$$\sigma_\varepsilon^{(2,j)}(s, A_1, A_2) = \varepsilon^{k_j-k/2}\frac{\sin\alpha\cos(\frac{bs}{\varepsilon^k}+\alpha)}{b^2}\hat{f}_j(\tfrac{\mu_j s}{\varepsilon^k}, A_1, A_2, \tfrac{s}{\varepsilon^k}),$$
$$\gamma_\varepsilon^{(1)}(s, A_1, A_2, z) = -\varepsilon^{k_{m+1}}\frac{\sin\alpha\sin(\frac{bs}{\varepsilon^k}+\alpha)}{b^2}\hat{f}_{m+1}(\tfrac{\mu_{m+1}s}{\varepsilon^k}, A_1, A_2, \tfrac{s}{\varepsilon^k}, z),$$
$$\gamma_\varepsilon^{(2)}(s, A_1, A_2, z) = \varepsilon^{k_{m+1}}\frac{\sin\alpha\cos(\frac{bs}{\varepsilon^k}+\alpha)}{b^2}\hat{f}_{m+1}(\tfrac{\mu_{m+1}s}{\varepsilon^k}, A_1, A_2, \tfrac{s}{\varepsilon^k}, z).$$

For processes $A_\varepsilon(t)$ and $\zeta_\varepsilon(t)$ following estimates hold

$$\begin{aligned} &\mathsf{E}||A_\varepsilon(t) - A_\varepsilon(s)||^4 \leqslant\\ &\leqslant K[(\varepsilon^{4(k_0-k)} + \varepsilon^{4(k_{m+1}-k)})|t-s|^4 +\\ &+\mathsf{E}||\zeta_\varepsilon(t) - \zeta_\varepsilon(s)||^4], \end{aligned} \tag{8}$$

$$\mathsf{E}||\zeta_\varepsilon(t)-\zeta_\varepsilon(s)||^4 \leqslant$$
$$\leqslant K[\sum_{j=1}^{m+1}\varepsilon^{4k_j-2k}|t-s|^2+ \tag{9}$$
$$+\varepsilon^{4k_{m+1}-3k/2}|t-s|^{3/2}+\varepsilon^{4k_{m+1}-k}|t-s|],$$
$$\mathsf{E}||A_\varepsilon(t)-A_\varepsilon(s)||^8\leqslant K, \mathsf{E}||\zeta_\varepsilon(t)-\zeta_\varepsilon(s)||^8\leqslant K. \tag{10}$$

Since $A_{\varepsilon_m}(t)\to\bar{A}(t), \zeta_{\varepsilon_m}(t)\to\bar{\zeta}(t)$ in probability, as $\varepsilon_m\to 0$, then, using (10), from (8) and (9) we obtain estimates

$$\mathsf{E}||\bar{A}(t)-\bar{A}(s)||^4\leqslant K(|t-s|^4+|t-s|^2),$$
$$\mathsf{E}||\bar{\zeta}(t)-\bar{\zeta}(s)||^4\leqslant C|t-s|^2.$$

Therefore processes $\bar{A}(t)$ and $\bar{\zeta}(t)$ satisfy the Kolmogorov's continuity condition.

Let us consider the case $k_0=2k_j=k_{m+1},\ j=\overline{1,m}$. Under these conditions we have for $l,n=1,2$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{t}\int_0^t\alpha_\varepsilon^{(l)}(s,A_1,A_2)ds=\bar{\alpha}^{(l)}(A_1,A_2),$$
$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{t}\int_0^t[\sum_{j=1}^m\sigma_\varepsilon^{(l,j)}(s,A_1,A_2)\sigma_\varepsilon^{(n,j)}(s,A_1,A_2)+$$
$$+\frac{1}{\varepsilon^k}\int_R\gamma_\varepsilon^{(l)}(s,A_1,A_2,z)\times$$
$$\times\gamma_\varepsilon^{(n)}(s,A_1,A_2,z)\Pi(dz)]ds=\bar{B}_{ln}(A_1,A_2), \tag{11}$$

where functions $\bar{\alpha}^{(i)}(A_1,A_2)$ and $\bar{B}(A_1,A_2)=\{\bar{B}_{ij}(A_1,A_2),\ i,j=1,2\}$ are defined in the condition of theorem. Since processes $\bar{A}(t),\bar{\zeta}(t)$ are continuous, then from Lemma 1 and relationships (7), (11) it follows

$$\bar{A}(t)=A(0)+\int_0^t\bar{\alpha}(\bar{A}_1(s),\bar{A}_2(s))ds+\bar{\zeta}(t),$$
$$A(0)=(A_1(0),A_2(0)), \tag{12}$$

where $\bar{\zeta}(t)$ is continuous vector-valued martingale with matrix characteristic

$$\langle\bar{\zeta}^{(i)},\bar{\zeta}^{(j)}\rangle(t)=\int_0^t\bar{B}_{ij}(\bar{A}_1(s),\bar{A}_2(s))ds, i,j=1,2.$$

Hence [5] there exists Wiener process $\bar{w}(t)=(w_i(t),i=1,2)$, such that

$$\bar{\zeta}(t)=\int_0^t\bar{\sigma}(\bar{A}_1(s),\bar{A}_2(s))\,d\bar{w}(s),$$
$$\bar{\sigma}(A_1,A_2)=\left\{\bar{B}(A_1,A_2)\right\}^{1/2}. \tag{13}$$

Relationships (12), (13) mean that process $\bar{A}(t)$ satisfies equation (4). Under conditions of theorem the equation (4) has unique solution. Therefore process $\bar{A}(t)$ does not depend on choosing of sub-sequence $\varepsilon_m\to 0$, and finite-dimensional distributions of process $A_{\varepsilon_m}(t)$ converge to finite-dimensional distributions of process $\bar{A}(t)$. Since processes $A_{\varepsilon_m}(t)$ and $\bar{A}(t)$ are Markov processes then using the conditions for weak convergence of Markov processes we finish the proof of statement 1 of theorem.

Let us consider the case $k<k_0$ or $k<k_{m+1}$. Then the corresponding terms in the coefficients $\alpha_\varepsilon^{(i)}(t,A_1,A_2),\ i=1,2$ of equation (7) tend to zero, as $\varepsilon\to 0$.

In the case $k<2k_j,\ j=\overline{1,m}$ in (11) we have

$$\sigma_\varepsilon^{(l,j)}(t,A_1,A_2)\sigma_\varepsilon^{(n,j)}(t,A_1,A_2)=O(\varepsilon^{2k_j-k}),$$
$$l,n=1,2.$$

Repeating with obvious modifications the proof of statement 1) of theorem we obtain proof of the statement 2). □

References

1. Borysenko O.D., Borysenko O.V., Borysenko D.O. *Averaging method for autonomous third order random oscillating system*// Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series: Physics & Mathematics – 2013. – №4. – P. 10 – 14.

2. Borysenko O.D., Malyshev I.G., *The limit behaviour of integral functional of the solution of stochastic differential equation depending on small parameter*// Theory of Stoch. Proc. – 2001. – Vol.7(23). – №1-2. — P. 30 – 36.

3. Gikhman, I.I., Skorokhod, A.V., *Stochastic Differential Equations*// Springer-Verlag, Berlin. – 1972.

4. Skorokhod, A.V., *Studies in the Theory of Random Processes*// Addison-Wesley. – 1965.

5. Ikeda, N. and Watanabe, S., *Stochastic Differential Equations and Diffusion Processes,*// North Holland, Amsterdam and Kadansha, Tokyo. – 1981.

Received: 18.09.2013

УДК 517.2

С.М. Чуйко[1], д. ф.-м. н., професор,
О.В. Чуйко[2], к. ф.-м. н., доцент,
А.В. Білущенко[3], аспірант

Про регуляризацію лінійного матричного рівняння

Знайдено конструктивні достатні умови розв'язності, а також формулу, яка визначає розв'язки задачі про регуляризацію лінійного матричного рівняння.

Ключові слова: методи регуляризації, матричне рівняння, псевдообернена матриця за Муром – Пенроузом.

[1]Донбаський державний педагогічний університет, 84112, Україна, Донецька обл., м. Слов'янськ, вул. Г. Батюка, 19, e-mail: chujko-slav@inbox.ru.

[2]Донбаський державний педагогічний університет, 84112, Україна, Донецька обл., м. Слов'янськ, вул. Г. Батюка, 19.

[3]Донбаський державний педагогічний університет, 84112, Україна, Донецька обл., м. Слов'янськ, вул. Г. Батюка, 19.

S.M. Chuiko[1], PhD, Professor,
E.V. Chuiko[1], PhD, Associate Professor,
A.V. Belushenko[1], Postgraduate

On the regularization of the linear matrix equation

Constructive sufficient conditions for the solvability and the formula for solving the problem of regularization of the linear matrix equation.

Key Words: methods of regularization matrix equation pseudoinverse matrix by Moore – Penrose.

[1]Donbass State Pedagogical University, 84112, Ukraine, Donetsk region, Slovyansk, Batyk str, 19, e-mail: chujko-slav@inbox.ru

[2]Donbass State Pedagogical University, 84112, Ukraine, Donetsk region, Slovyansk, Batyk str, 19.

[3]Donbass State Pedagogical University, 84112, Ukraine, Donetsk region, Slovyansk, Batyk str, 19.

Communicated by Prof. V.V. Kirichenko

Introduction

Constructive sufficient conditions for the solvability and the formula for solving the problem of regularization of the linear matrix equation, which finds numerous applications, for instance, by regularization of various Noether and, in particularly, periodic boundary value problems for the systems ordinary differential equations.

1 Statement of the problem

As is well-known, the problem of constructing solution $c \in \mathbb{R}^n$ linear matrix equation

$$Qc = b \tag{1}$$

solvable if and only if [1]

$$P_{Q^*} b = 0. \tag{2}$$

Here $Q \in \mathbb{R}^{m\times n}$ — given $(m \times n)-$ matrix, $b \in \mathbb{R}^m$ — known column-vector,

$$P_Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{N}(Q), \quad P_{Q^*} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{N}(Q^*)$$

— orthoprojectors [1] of matrix Q and conjugate transpose matrix Q^*. If the condition (2) is satisfied, that solution of the system (1) takes the form

$$c = Q^+ b + P_Q \bar{c}, \quad \bar{c} \in \mathbb{R}^n,$$

where Q^+ — is Moore – Penrose pseudoinverse matrix [1, 2]. For finding the pseudoinverse, applicable in this case the formula [2]

$$Q^+ = S^+ R^+ = S^*(SS^*)^{-1}(R^*R)^{-1}R^*,$$

here $Q = RS$ — skeleton decomposition of matrix

$$Q : \text{ rank } Q := \text{rank } R := \text{rank } S := r.$$

By assuming that $P_{Q^*} \neq 0$, in such case system (1) solvable not for all right parts $b \in \mathbb{R}^m$, but only for those which satisfy the condition (2). Pose the problem of finding a small perturbation $\varepsilon\mathcal{R}$, that provides solvability of the system

$$\mathcal{Q}c = b, \quad \mathcal{Q} := Q + \varepsilon\mathcal{R}, \quad \mathcal{R} \in \mathbb{R}^{m\times n} \tag{3}$$

© С.М. Чуйко, О.В. Чуйко, А.В. Белущенко, 2014

for all right parts and $0 < \varepsilon \ll 1$. In such a way posed the problem of regularization [1, 4, 5] system (1), which finds numerous applications, for instance, by regularization of various Noether and, in particularly, periodic boundary value problems for the systems ordinary differential equations [6, 7]. As is well-known, [8], any $(m \times n)-$ matrix Q in certain basis can be represented as

$$Q = \Phi \cdot \check{U} \cdot \Psi, \quad \check{U} := \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}. \qquad (4)$$

Here $\Phi \in \mathbb{R}^{m\times m}$ и $\Psi \in \mathbb{R}^{n\times n}$ — nondegenerate matrices. Indeed, let $Q = R \cdot S$ — skeleton decomposition of matrix Q; here $(m \times r)-$ matrix R and $(r \times n)-$ matrix $S-$ have full rank:

$$\text{rank } Q = \text{rank } R = \text{rank } S = r.$$

represent the matrix $\check{U}$ in the form

$$\check{U} = V \cdot W, \quad V := \begin{pmatrix} I_r \\ O \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times r},$$

$$W := (\ I_r\ O\ ) \in \mathbb{R}^{r\times n}.$$

Equation $R = \Phi V$ relative to the matrix $\Phi \in \mathbb{R}^{m\times m}$ solvable, because solvable equivalent equation $V^* \cdot \Phi^* = R^*$. Solvability of the last equation defines obvious equality $P_V = 0$, At that

$$\Phi^* = (V^+)^* R^* + P_{V^*} C, \quad C \in \mathbb{R}^{m\times m},$$

consequently

$$\Phi = RV^+ + CP_{V^*}, \quad C \in \mathbb{R}^{m\times m},$$

in particularly $\Phi = RV^+ + P_{V^*}$. Let us remark here that first term belongs to the image of matrix V, and second term — orthogonal to it null space $\mathbb{N}(V^*)$. Just as

$$\text{rank } RV^+ = \text{rank } (R\ O) = r,$$

$$\text{rank } P_{V^*} = m - r,$$

so

$$\text{rank } \Phi = r + m - r = m.$$

In such a way found nondegenerate matrix

$$\Phi = RV^+ + P_{V^*},$$

determining decomposition (4). Likewise find nondegenerate matrix

$$\Psi = W^+ S + P_W.$$

decomposition (4) hereafter shall be designated as standard skeleton matrix decomposition Q. In such a way proved the following assertion.

Lemma 1. *Any $(m \times n)-$ matrix Q can be represented as (4); here $\Phi \in \mathbb{R}^{m\times m}$ and $\Psi \in \mathbb{R}^{n\times n}$ — nondegenerate matrices:*

$$\Phi = RV^+ + P_{V^*}, \quad \Psi = W^+ S + P_W.$$

2 Regularization of linear matrix equation

System (3) solvable for all right parts upon condition $P_{\mathcal{Q}^*} = 0$. Obviously, this condition is equivalent to the equation

$$\Big[Q + \varepsilon\mathcal{R}\Big] \cdot \Big[Q + \varepsilon\mathcal{R}\Big]^+ = I_m \qquad (5)$$

relative to $(m \times n)-$ matrix $\mathcal{R}$. note that in case of $(P_{Q^*} \neq 0)$ equation (5) solvable only for $(m = n)$, or $(m < n)$. Indeed if we set equation (5) superdefinite $(m > n)$, in this connection

$$\text{rank } \Big(Q + \varepsilon\mathcal{R}\Big)\Big(Q + \varepsilon\mathcal{R}\Big)^+ \leqslant$$

$$\leqslant \text{rank } \Big(Q + \varepsilon\mathcal{R}\Big) = \text{rank } \Big(Q + \varepsilon\mathcal{R}\Big)^+ \leqslant n < m,$$

which contradicts the equality of the left and right side of equation (5). Under condition $m \leqslant n$ equation (5) has a family of solutions

$$\mathcal{R} := \Phi \cdot \Pi \cdot \Psi \in \mathbb{R}^{m\times n}, \quad \Pi := \begin{pmatrix} O & O \\ O & C \end{pmatrix}$$

with an arbitrary matrix

$$C \in \mathbb{R}^{(m-r)\times(n-r)}, \ \ \text{rank } C := m - r.$$

by this means, set a problem on regularization of algebraic system (1) solvable under condition $m \leqslant n$ in the form

$$\mathcal{Q} := Q + \varepsilon\mathcal{R}, \quad \mathcal{R} := \Phi \cdot \Pi_J \cdot \Psi.$$

Indeed, by nondegeneracy of matrices $\Phi \in \mathbb{R}^{m\times m}$ и $\Psi \in \mathbb{R}^{n\times n}$ following equality holds [3, 4.48]

$$\text{rank } \mathcal{Q} = \text{rank } (\check{U} + \varepsilon\Pi_J) = m,$$

nevertheless $P_{\mathcal{Q}^*} = 0$, it follows that system (3) with matrix $\mathcal{Q}$ solvable for any right-hand side. In such a way proved the following assertion.

Theorem 1. *The problem on regularization of algebraic system (1) solvable under condition $m \leqslant n$ in the form (3), where*

$$\mathcal{Q} := Q + \varepsilon\mathcal{R}, \quad \mathcal{R} := \Phi \cdot \Pi_J \cdot \Psi.$$

Here $\Phi \in \mathbb{R}^{m\times m}$ and $\Psi \in \mathbb{R}^{n\times n}$ — nondegenerate matrices, $Q = \Phi \cdot \check{U} \cdot \Psi$ — standard skeleton decomposition of $(m \times n)-$ matrix Q.

Example 1. *Investigate the problem of algebraic system regularization (1) for matrix*

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 21 & 0 & 9 & 14 & 1 & 14 \\ 5 & 2 & 1 & 7 & 3 & 0 & 7 \\ 1 & 6 & 0 & 4 & 4 & 1 & 4 \\ 25 & 13 & 5 & 36 & 17 & 0 & 37 \\ 3 & 0 & 0 & 6 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Matrix Q can be represented in form of standard skeleton decomposition (4) by means of matrices

$$\check{U} := \begin{pmatrix} I_3 & O \\ O & O \end{pmatrix}, \quad \Phi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\Psi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & 1 & 7 & 3 & 0 & 7 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Herewith condition

$$5 = m \leqslant n = 7$$

is fulfilled, and the equation (5) has a family of solutions

$$\mathcal{R} := \Phi \cdot \Pi \cdot \Psi \in \mathbb{R}^{5\times 7}, \quad \Pi := \begin{pmatrix} O & O \\ O & C \end{pmatrix},$$

$$\operatorname{rank} \mathcal{R} = \operatorname{rank} C$$

with an arbitrary matrix $C \in \mathbb{R}^{2\times 4}$, $\operatorname{rank} C := 2$. Resulting in the regularization matrix $\mathcal{Q}$ — is full rank matrix, hence condition $P_{\mathcal{Q}^*} = 0$ is fulfilled, therefore system (3) with matrix $\mathcal{Q}$ solvable for any right-hand side.

References

1. *Boichuk A.A., Samoilenko A.M.* Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems. — Utrecht; Boston: VSP, 2004. — XIV + 317 pp.

2. *Gantmacher F.R.* The Theory of Matrices. — M.: Nauka. — 1988. — 552 p.

3. *Voevodin V.V., Kuznetsov Y.A.* "Matrices and Calculations,". — M.: Nauka. — 1984. — 318 p.

4. *Krein S.G.* Linear Differential Equations in Banach Space. M.: Nauka, 1971. — 104 p.

5. *Azbelev N.V., Maksimov V.P., Rakhmatullina L.F.* Introduction to the Theory of Functional Differential Equations. — M.: Nauka, 1991. — 277 p.

6. *Chuiko S.M.* Regularization of linear noether boundary value problem with degenerate impulse action // Nonlinear oscillations. — 2013. — **16**, № 1. — p. 133 — 145.

7. *Chuiko S.M., Chuiko E.V., Belushenko A.V* Regularization of periodic boundary value problem with impulse action // Kharkiv University Vestnik. Ser. Mathematics, Applied Mathematics and Mechanics. — № 1061. — 2013. P. 37 — 44.

8. *Arnold V.I., Varchenko A.N., Gusein-Zade S.M.* Singularities of Differentiable Maps. — M.: MCMNO. — 2009. — 672 p.

Received: 20.10.2013

УДК 517.589, 517.926.4

Т. П. Гой, к. ф.-м. наук,[1]
Р. А. Заторський, д. ф.-м. наук[2]

Про одну неелементарну функцію типу інтеграла Доусона

Досліджена нова неелементарна функція типу інтеграла Доусона, побудована у вигляді степеневого ряду при допомозі зростаючих факторіальних степенів. Встановлений її зв'язок з функцією помилок (функцією ймовірностей). Показано, що нова функція є розв'язком рівняння Ріккаті.

Ключові слова: зростаючий факторіальний степінь, інтеграл Доусона, функція помилок, рівняння Ріккаті.

Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника, 76018, Івано-Франківськ, вул. Шевченка, 57.

T. P. Goy, Ph. D.,
R. A. Zatorsky, D. Sc.

On a nonelementary function of the Dawson's integral type

A new nonelementary function of the Dawson's integral type is studied. It is constructed as a power series with the help of rising factorial powers. Its connection with the error function (probability function) is determined. It is proved that the new function is a solution of the Riccati equation.

Key Words: rising factorial power, Dawson's integral, error function, Riccati equation.

Precarpathian Vasyl Stefanyk National University, 76018, Ivano-Frankivsk, 57 Shevchenko Str.

E-mail: [1]tarasgoy@yahoo.com [2]romazz@rambler.ru

Communicated by Prof. Kirichenko V.V.

Introduction

Duality of rising and falling factorial powers is a common feature in the combinatorial analysis. In other words, if a problem leads to some combinatorial identity constructed with the help of falling factorial powers, then often there is a dual combinatorial problem, which leads to a dual combinatorial identity involving rising factorial powers. One can find some examples of these dual combinatorial identities in [1], [2].

The classic exponential e^x is given by the corresponding power series with factorials, which can be written as the falling factorial power $n^{\underline{n}}$. Replacing the falling factorial powers by the corresponding rising factorial powers $n^{\overline{n}}$, we get the function $\mathrm{Exp}(x)$ [3].

Now if in the Dawson's integral [4]

$$F(x) = e^{-x^2}\int_0^x e^{t^2}dt$$

we replace the exponentials by $\mathrm{Exp}(x)$, then we get a new nonelementary function

$$D(x) = \big(\mathrm{Exp}\,(x^2)\big)^{-1}\int_0^x \mathrm{Exp}(t^2)dt,$$

the basic properties of which are to be studied in this article.

The Dawson's integral and its generalization are widely applied in astrophysics, spectroscopy, theory of electric oscillation, processes of heat conduction, viscosity mechanics, finance, applied mathematics [5]–[12].

1 Preliminaries and Notations

Definition 1. [13] *For an arbitrary $x \in \mathbb{R}$ and $m \in \mathbb{N}$, **the factorial power** m with the step of $k \in \mathbb{R}$ is the expression*

$$x^{m\{k\}} = x(x+k)(x+2k)\cdot\ldots\cdot\big(x+(m-1)k\big).$$

By definition $x^{0\{k\}} := 1$.

If $k = 0$, then we have a simple power, i.e. $x^{m\{0\}} = x^m$.

Most often, there are rising factorial powers with the step of 1 and falling factorial powers with the step of -1, which we will denote respectively by $x^{\overline{m}} = x^{m\{1\}} = x(x+1)\cdot\ldots\cdot(x+m-1)$, $x^{\underline{m}} = x^{m\{-1\}} = x(x-1)\cdot\ldots\cdot(x-m+1)$.

Let us assume $x^{\overline{0}} = x^{\underline{0}} = 1$. It is obvious that $1^{\overline{m}} = m^{\underline{m}} = m!$.

In analogy to the known power series

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!},$$

© T. P. Goy, R. A. Zatorsky, 2014

which can be treated as the series constructed with the help of falling factorial powers ($n! = n^{\underline{n}}$). The "dual" function $\mathrm{Exp}(x)$, constructed with the help of rising factorial powers, it is studied in [3].

Definition 2. *By* $\mathrm{Exp}(x)$ *we will denote the function defined with the help of the power series*

$$\mathrm{Exp}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n^{\overline{n}}} =$$

$$= 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{x^n}{n\cdot(n+1)\cdot\ldots\cdot(2n-1)} + \ldots$$

It is obvious that

$$\mathrm{Exp}(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)!}{(2n-1)!}\, x^n \qquad (1)$$

and the series in (1) converges on the real axis.

The graph of the function $y = \mathrm{Exp}(x)$ is shown in Figure 1.

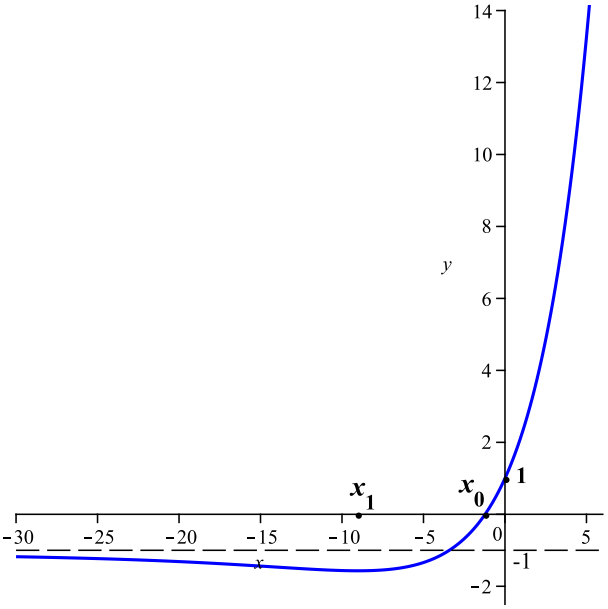


Fig. 1. *The graph of the function* $y = \mathrm{Exp}(x)$

The only zero of the function $\mathrm{Exp}(x)$ is

$$x_0 \approx -1,22041009,$$

and at $x_1 \approx -9,02371883$ it reaches its minimum.

In [3] it is proved that

$$\mathrm{Exp}(x) = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{4^n\, n!} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\, x^{n+1}}{(2n+1)\, 4^n\, n!} =$$

$$= 1 + \sqrt{\pi\, x}\, e^{\frac{x}{4}}\, \Phi\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right), \qquad (2)$$

where

$$\Phi(x) = \mathrm{erf}\, x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$$

is the probability function (error function). [4]

2 On operations with formal power series

Denote by $\left\langle \frac{b_{s-r+1}}{b_{s-r}} \right\rangle_{1\leqslant r\leqslant s\leqslant j}$ the paradeterminant of the triangular matrix of order j, assuming that $\left\langle \frac{b_{s-r+1}}{b_{s-r}} \right\rangle_{1\leqslant r\leqslant s\leqslant 0} = 1$. [2]

Let us formulate two theorems from [2], [14] to be used hereafter.

Theorem 1. *Let* $A(z)$, $B(z)$, $C(z)$ *be the notations of the following formal power series*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n, \quad \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n,$$

respective, where $a_0 = b_0 = c_0 = 1$ *and* $C(z) = \frac{A(z)}{B(z)}$. *Then for all* $n = 1, 2, \ldots$

$$c_n = \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j (a_{n-j} - b_{n-j}) \cdot \left\langle \frac{b_{s-r+1}}{b_{s-r}} \right\rangle_{1\leqslant r\leqslant s\leqslant j}.$$

Theorem 2. *If* $C(z) = \frac{1}{A(z)}$, *then*

$$c_n = (-1)^n \left\langle \begin{matrix} a_1 & & & \\ \frac{a_2}{a_1} & a_1 & & \\ \ldots & \ldots & \ddots & \\ \frac{a_n}{a_{n-1}} & \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} & \ldots & a_1 \end{matrix} \right\rangle_n,$$

for all $n = 1, 2, \ldots$

3 Function of the Dawson's integral type

Replacing in the Dawson's integral

$$F(x) = e^{-x^2} \int_0^x e^{t^2} dt$$

the exponential with the function $\mathrm{Exp}(x)$, we obtain a nonelementary function, which we will denote by $D(x)$, i.e. let

$$D(x) := \left(\mathrm{Exp}(x^2)\right)^{-1} \int_0^x \mathrm{Exp}(t^2)\, dt. \qquad (3)$$

It is easy to verify that

$$\int_0^x \mathrm{Exp}(t^2)\,dt = -x + 2\sqrt{\pi}\,e^{\frac{x^2}{4}}\,\Phi\Big(\frac{x}{2}\Big).$$

Thus from (2), (3) we obtain the formula

$$D(x) = \frac{2\sqrt{\pi}\,e^{\frac{x^2}{4}}\,\Phi\big(\frac{x}{2}\big) - x}{1 + \sqrt{\pi}\,x\,e^{\frac{x^2}{4}}\,\Phi\big(\frac{x}{2}\big)}.$$

The graphs of the function $y = D(x)$ (solid graph) and the Dawson's integral $y = F(x)$ (dotted graph) are shown in Figure 2.

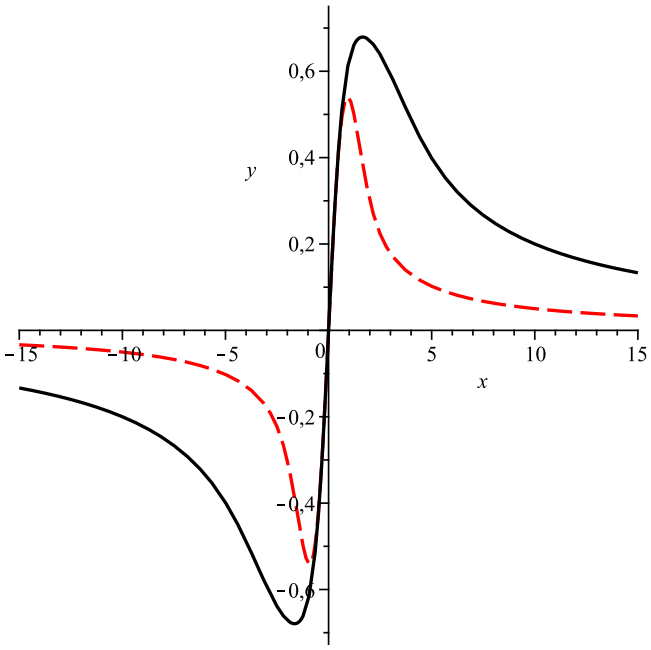


Fig. 2. *The graphs of the functions* $y = D(x)$ *and* $y = F(x)$

The function $D(x)$ can also be represented as the quotient of two power series

$$\int_0^x \mathrm{Exp}(t^2)dt =$$

$$= x + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(j-1)!}{(2j-1)!(2j+1)}\,x^{2j+1}$$

and

$$\mathrm{Exp}(x^2) = 1 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(j-1)!}{(2j-1)!}\,x^{2j}.$$

To prove this we apply Theorems 1 and 2. If we denote

$$A(x) = 1 + x + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(j-1)!}{(2j-1)!(2j+1)}\,x^{2j+1},$$

$$B(x) = 1 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(j-1)!}{(2j-1)!}\,x^{2j},$$

then $D(x) = R(x) - S(x)$, where

$$R(x) = \frac{A(x)}{B(x)}, \quad S(x) = \frac{1}{B(x)}.$$

We denote the coefficients of the above series by small Latin letters.

Using Theorems 1 and 2, it is easy to verify that $s_{2k-1} = 0$ and

$$r_{2k} = s_{2k} = (-1)^k B_k,$$

where

$$B_k = \left\langle \begin{matrix} b_2 & & & & \\ \frac{b_4}{b_2} & b_2 & & & \\ \frac{b_6}{b_4} & \frac{b_4}{b_2} & b_2 & & \\ \vdots & \dots & \dots & \ddots & \\ \frac{b_{2k-2}}{b_{2k-4}} & \frac{b_{2k-4}}{b_{2k-6}} & \frac{b_{2k-6}}{b_{2k-8}} & \dots & b_2 \\ \frac{b_{2k}}{b_{2k-2}} & \frac{b_{2k-2}}{b_{2k-4}} & \frac{b_{2k-4}}{b_{2k-6}} & \dots & \frac{b_4}{b_2} \end{matrix} \quad \begin{matrix} & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & b_2 \\ & & & & \end{matrix} \right\rangle_k,$$

for all $k = 1, 2, \dots$

Thus $d_{2k} = 0$ and for all $k = 1, 2, \dots$

$$d_{2k-1} = r_{2k-1} =$$

$$= a_{2k-1}r_0 + a_{2k-3}r_2 + \dots + a_1 r_{2k-2}.$$

Notice, that the parapermanent B_k can be calculated with the help of the linear recurrent equation

$$B_0 = 1, \quad B_k = b_2 B_{k-1} - b_4 B_{k-2} + \dots +$$

$$+ (-1)^{k-2} b_{2k-2} B_1 + (-1)^{k-1} b_{2k} B_0.$$

Hence, performing necessary calculations, the function $D(x)$ is represented as the power series

$$D(x) = x - \frac{2}{3}\,x^3 + \frac{8}{15}\,x^5 - \frac{55}{126}\,x^7 + \frac{338}{945}\,x^9 - \\ - \frac{121861}{415800}\,x^{11} + \frac{486781}{2027025}\,x^{13} - \dots \quad (4)$$

Let us note that the coefficients of the power series (4) can also be found using the recurrence formulas

$$d_1 = 1, \quad d_{2n-1} = \frac{(n-2)!}{(2n-3)!(2n-1)} -$$

$$- \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{j=1}^{n} \frac{(n-1-j)!}{(2n-2j-1)!}\,d_{2j-1}, \quad n = 2, 3, \dots$$

4 Differential equation of the function $D(x)$

The Dawson's integral is a solution of the linear nonhomogeneous equation $y' + 2xy = 1$ [4]. Let us prove that the function $D(x)$ is a solution of the Riccati equation.

Theorem 3. *The function $y = D(x)$ is a solution of the Cauchy problem*

$$\left.\begin{array}{l} y' = \frac{x^2-2}{2(x^2+2)}\, y^2 - \frac{x(x^2+6)}{2(x^2+2)} y + 1, \\ y(0) = 0. \end{array}\right\} \qquad (5)$$

Proof. It follows from the formula (3) that the integral curve $y = D(x)$ passes through the origin.

Let us prove that the function $y = D(x)$ is a solution of the Riccati equation (5). Indeed, since

$$y' = \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{\pi} x e^{\frac{x^2}{4}} \Phi\left(\frac{x}{2}\right)\right)^{-2} \times$$

$$\times \left(2\sqrt{\pi}\, x e^{\frac{x^2}{4}} \Phi\Big(\frac{x}{2}\Big) + e^{\frac{x^2}{4}} x^3 \Phi\Big(\frac{x}{2}\Big) + 2x^2 - \right.$$

$$\left. - 4\pi e^{\frac{x^2}{2}} \Phi^2\Big(\frac{x}{2}\Big) + 2\right),$$

excluding from this formula and from (3) the expression $\sqrt{\pi}\, e^{\frac{x^2}{4}} \Phi\big(\frac{x}{2}\big)$, we obtain the relation

$$y' = \frac{x^2-2}{2(x^2+2)}\, y^2 - \frac{x(x^2+6)}{2(x^2+2)}\, y + 1.$$

The Theorem 3 is proved.

References

1. *Graham R., Knuth D., Patashnik O.* Concrete Mathematics: a Foundation for Computer Science. Addison-Wesley, 1990.

2. *Zatorsky R.A.* Calculus of Triangular Matrices and Its Applications. Simyk, Ivano-Frankivsk, 2010. (in Ukrainian)

3. *Goy T.P., Zatorsky R.A.* New functions generated by rising factorials and their properties // Bukovyn. Math. J., **1**, № 1-2 (2013), 28-33. (in Ukrainian)

4. *Abramowitz M., Stegun I.A.* (*eds*). Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables. Dover Publications, New York, 1972.

5. *Cody W.J., Paciorek K.A., Thacher H.C.* Chebyshev approximations for Dawson's integral // Math. Comp., **24** (1970), 171-178.

6. *Dijkstra D.* A continued fraction expansion for a generalization of Dawson's integral // Math. Comp., **31** (1977), 503-510.

7. *Iscoe I., Kreinin A.* Recursive valuation of basket default swaps // J. Comp. Finance, **9**, 3 (2006), 95-116.

8. *Kaiser A., Rethfeld B., Vicanek M., Simon G.* Microscopic processes in dielectrics under irradiation by subpicosecond laser pulses // Phys. Rev. B, **61** (2000), 11437-11450.

9. *Lehle H., Kriegl J.M., Nienhaus K., Deng P., Fengler S., Ulrich N.G.* Probing electric fields in protein cavities by using the vibrational Stark effect of carbon monoxide // Biophys. J., **88**(2005), 1978-1990.

10. *McCabe J.H.* A continued fraction expansion, with a truncation error estimate, for Dawson's integral // Math. Comp., **28**, 127 (1974), 811-816.

11. *Messina R., Jivulescu M.A., Messina A., Napoli A.* Riccati equation-based generalization Dawson's integral function // Math. Meth. Appl. Sci., **30**, 16 (2007), 2055-2064.

12. *Sampoornaa M., Nagendraa K.N., Frischb H.* Generalized Voigt functions and their derivatives // J. Quant. Spectr. Rad. Transf., **104**, 1 (2007), 71–85.

13. *Gelfond A.O.* Calculus of Finite Differences. GIFML, Moscow, 1959. (in Russian)

14. *Zatorsky R.A. Operations with formal power series wich have nontrivial free numbers* // Bulletin of Kyiv University. Series: Physical and Mathematical Sciences. — 2008. — № 1. — P. 36–39. (in Ukrainian)

Received: 01.10.2013

УДК 514.114, 514.172.45

Ю.С. Резнікова[1], *аспірант*

Багатовимірні тріадно-усічені симплекси

Розглянуто тип опуклих многогранників, які названо тріадно-усіченими симплексами. З точки зору конструктивного об'єкту у векторних просторах розмірності чотири та вище зазначені многогранники є багатовимірними аналогами одного з класичних напівправильних многогранників, а саме усіченого тетраедру.

Представлено результати досліджень внутрішньої геометричної структури та комбінаторних характеристик повної сукупності граней тріадно-усічених симплексів у векторних просторах довільної розмірності.

Ключові слова: конструктивний геометричний об'єкт, багатовимірний аналог усіченого тетраедру, тріадно-усічений симплекс, комбінаторні характеристики.

[1] Інститут математики НАН України, 01601, м.Київ, вул. Терещенківська, 3
e-mail: yurss@mail.ru

Yu.S. Reznikova[1], *PhD Student*

Multidimensional triangle-truncated simplexes

The type of convex polytopes, called triangle-truncated simplexes, is considered. As a constructive object in four and higher dimension's vector space such polytopes are multidimensional analogues of one classical semi-regular polytopes namely truncated tetrahedron.

In paper we present the results of investigations underlying geometrical structure and combinatorial characteristics of the complete assemblage of faces of triangle-truncated simplexes in vector spaces of arbitrary dimensionality.

Key Words: constructive geometrical object, multidimensional analogue of truncated tetrahedron, triangle-truncated simplex, combinatorial characteristics.

[1] Institute of mathematics NAS of Ukraine, 01601, Kiev, Tereschenkivska st., 3
e-mail: yurss@mail.ru

Communicated by Prof. Kozachenko Yu.V.

1 Introduction

In the process of researches devoted to some types of constructive fractal simplex-sets [1] in four and higher dimension's vector spaces the direct involvement of the specified fractals with the truncated simplexes, representing multidimensional analogs of one of classical semiregular polytopes namely the truncated tetrahedron [2] as constructive object, was revealed.

On the whole, many types of multidimensional truncated polytopes are for today not only well-known, but also amply investigated [3, 4, 5, 6, 7]. At the same time, unlike three classical regular convex polytopes (multidimensional simplex, cube and cocube), for which combinatorial characteristics of the complete assemblage of $i-$faces, $i = \overline{0, n-1}$, are defined in an explicit form [3, 5, 7, 8, 9, 10, 11, 12], analogous expressions for the truncated polytopes, including the triangle-truncated simplexes, in vector spaces of arbitrary dimensionality to the author did not meet. Numerical characteristics of the complete assemblage of faces are known only for particular types of the truncated polytopes of small dimensions.

Since the multidimensional triangle-truncated simplexes turned out rather uncommon geometrical objects with the complex underlying structure, research of combinatorial characteristics of the last can claim for a role of an independent task.

2 The geometrical structure and combinatorial characteristics of multidimensional triangle-truncated simplexes

Let's enter the following definition of the multidimensional triangle-truncated simplex in vector space of arbitrary dimensionality.

Definition 2.1. The $n-$dimensional polytope, $n \geqslant 2$, being a convex hull of $2C^2_{n+1}$ points (vertices of the triangle-truncated simplex), partitioning $1-$faces of the arbitrary $n-$dimensional simplex in the $1:1:1$ proportion, is called an $n-$dimensional triangle-truncated simplex (${}_{tt}Simp^n$).

© Ю.С. Резнікова, 2014

At the same time, from the point of view of constructive object, this polytope can be considered as result of truncation of corresponding multidimensional simplex.

Theorem 2.1. *The $n-$dimensional triangle-truncated simplex is a convex polytope, which $(n-1)-$faces are presented by equal quantity of polytopes of two types, namely*

— simplexes;

— triangle-truncated simplexes.

Thus quantity of $i-$faces, $i = \overline{0,n-1}$, of $n-$dimensional triangle-truncated simplex is equally:

$$\begin{cases} N_i({}_{tt}Simp^n) = (n-i+1)\cdot C_{n+1}^{n-i}, \;\; i = \overline{1,n-1}, \\ N_0({}_{tt}Simp^n) = 2C_{n+1}^{n-1}. \end{cases} \tag{1}$$

This theorem gives complete description of underlying geometrical structure and the basic characteristics which unambiguously identify triangle-truncated simplexes in vector spaces of arbitrary dimensionality as independent geometrical objects.

Before to pass directly to proofs of Theorem (2.1) by the method of direct count and method of mathematical induction, will formulate a next lemma.

Lemma 1. а) *Each triangle-truncated simplex which is the $i-$face, $i = \overline{1,n-1}$, of $n-$dimensional triangle-truncated simplex, $n \geqslant 2$, belongs to the $(n-i)$ triangle-truncated simplexes being $(i+1)-$faces of specified geometrical object.*

б) *Each simplex which is the $i-$face, $i = \overline{0,n-2}$, of $n-$dimensional triangle-truncated simplex, $n \geqslant 2$, belongs to the $(n-i-1)$ triangle-truncated simplexes being $(i+2)-$faces of specified geometrical object.*

The proof of this lemma is carried out analogously to the proof of Lemma 1 [1] about internal belonging of $i-$faces, $i = \overline{0,n-1}$, of an $n-$dimensional middle-truncated simplex, $n \geqslant 2$.

Let's mark those statements of resulted lemma it is used in process of the proof of Theorem (2.1) by both a method of direct count and method of mathematical induction.

Proof of Theorem (2.1) *by a method of direct count.*

In case of $n = 2, 3$ this theorem is obviously true as the two-dimensional triangle-truncated simplex is a hexagon, three-dimensional — one of classical semiregular polytopes namely a triangle-truncated tetrahedron [2].

An underlying geometrical structure of $n-$dimensional triangle-truncated simplex, $n \geqslant 4$, on the whole is analogously to the underlying geometrical structure of $n-$dimensional middle-truncated simplex [1]. The single substantial difference consists that unlike the second polytope, which $2-$faces are triangles, $2-$faces of the first are hexagons. The last causes different quantities of $1-$ and $0-$faces.

I, II stages. The quantity of $i-$faces, $i = \overline{n-1,2}$, of a polytope ${}_{tt}Simp^n$ obviously coincides with the quantity of corresponding faces of a polytope ${}_{mt}Simp^n$ and is defined analogously (see I, II stages of the first proof of Theorem 1 [1] according to approaches of common methodology of definition combinatorial characteristics of $n-$dimensional, $n \geqslant 4$, middle/triangle-truncated simplex), i.e. $N_i({}_{tt}Simp^n) = (n-i+1)\cdot \cdot C_{n+1}^{n-i}, \;\; i = \overline{n-1,2}$. Let's mark that in the process of definition of $i-$faces, $i = \overline{n-2,2}$, dependence of item a) of Lemma (1) is used.

Unlike an $n-$dimensional middle-truncated simplex, representing the limiting case of truncation initial, that entails degeneration of its $1-$faces being middle-truncated simplexes in points (i.e. in fact in a $0-$faces), $1-$faces of $n-$dimensional triangle-truncated simplex are presented both simplexes and triangle-truncated simplexes as its $2-$sides are hexagons. Thus, the quantity of $1-$faces of a polytope ${}_{tt}Simp^n$ also is defined according to common methodological approaches of definition combinatorial characteristics:

$$N_1({}_{tt}Simp^n) = C_{n+1}^{n-2}\cdot\left[3+\frac{3}{n-1}\right] = n\cdot C_{n+1}^{n-1}.$$

III stage. The quantity of vertices ($0-$faces) of the triangle-truncated simplex ${}_{tt}Simp^n$ coincides with the doubled number of edges of an initial set of construction, in which it is inscribed entered, by definition: $N_0({}_{tt}Simp^n) = 2\cdot C_{n+1}^{n-1}$.

As a result, we will receive the statement (1).

IV stage: verification of authenticity of results. It is known that in case of convex polytopes of an arbitrary dimension $n \geqslant 2$ the formula of Euler-Poincare is true [3, 7, 9, 10, 12].

Proceeding from the got results in part of combinatorial characteristics of the multidimensional triangle-truncated simplex, it is simple to

make sure that in this case the formula of Euler-Poincare really is true. □

Corollary 1. *$i-$faces, $i = \overline{1, n-1}$, of the $n-$dimensional triangle-truncated simplex are presented by $(n-i)\cdot C_{n+1}^{n-i}$ simplexes and the C_{n+1}^{n-i} triangle-truncated simplexes.*

Also as well as in case of the middle-truncated simplex [1] this corollary naturally follows from the first proof of the Theorem (2.1).

Proof of Theorem (2.1) *by a method of mathematical induction.* In case of $n = 2, 3$ this theorem is obviously true as the two-dimensional triangle-truncated simplex is a hexagon, three-dimensional — one of classical semiregular polytopes namely a triangle-truncated tetrahedron [2].

Let's suppose that in a vector space $V^n(\Re)$, $n \geqslant 4$, an $n-$dimensional triangle-truncated simplex has the following combinatorial characteristics:

$$\begin{cases} N_i({}_{tt}Simp^n) = (n-i+1)\cdot C_{n+1}^{n-i}, \;\; i = \overline{1, n-1}, \\ N_0({}_{tt}Simp^n) = 2C_{n+1}^{n-1}. \end{cases}$$

Thus for $i-$faces, $i = \overline{0, n-1}$, conditions of the Lemma (1) are satisfied.

Let's consider an $(n+1)-$dimensional triangle-truncated simplex in a vector space $V^{n+1}(\Re)$, $n \geqslant 4$. We will prove that its combinatorial characteristics look like:

$$\begin{cases} N_i({}_{tt}Simp^{n+1}) = (n-i+2)\cdot C_{n+2}^{n-i+1}, \;\; i = \overline{1, n}, \\ N_0({}_{tt}Simp^{n+1}) = 2C_{n+2}^{n}. \end{cases} \tag{2}$$

$(n+1)-$dimensional triangle-truncated simplex is entered in the $(n+1)-$dimensional simplex. Therefore, its $n-$faces are presented by equal quantity of polytopes of two types: $(n+2)$ simplexes and $(n+2)$ triangle-truncated simplexes. From here, $N_n({}_{tt}Simp^{n+1}) = 2\cdot(n+2) = 2\cdot C_{n+2}^{1}$.

Analogously to a case of $(n+1)-$dimensional middle-truncated simplex [1]: *to define the quantity of $i-$faces, $i = \overline{0, n-1}$, of $(n+1)-$dimensional triangle-truncated simplex, it is necessary to define the corresponding quantity of $i-$faces of $(n+2)$ $n-$dimensional middle-truncated simplexes which agglutinate on $(n-1)-$dimensional middle-truncated simplexes.*

The quantity of $i-$faces, $i = \overline{1, n-1}$, each of the $(n+2)$ $n-$dimensional middle-truncated simplexes is equally: $N_i({}_{tt}Simp^n) = (n-i+1)\cdot C_{n+1}^{n-i}$.

Thus each assemblage of $i-$faces of the specified polytopes, $i = \overline{1, n-1}$, is presented by $(n-i)\cdot$ $\cdot\, C_{n+1}^{n-i}$ simplexes and C_{n+1}^{n-i} triangle-truncated simplexes (see. Corollary (1)).

After agglutinating of the $(n+2)$ $n-$dimensional triangle-truncated simplexes each such $i-$dimensional simplex belongs to the $(n-i)$ polytopes ${}_{tt}Simp^{i+2}$, each $i-$dimensional triangle-truncated simplex belongs to $(n-i+1)$ polytopes ${}_{tt}Simp^{i+1}$.

This statement can be proved analogously to a case of the middle-truncated simplex [1] with use of the corresponding dependences of Lemma (1).

Thus, as in the process of agglutinating of the $(n+2)$ $n-$dimensional triangle-truncated simplexes each $i-$face of such polytope being a simplex is initially considered $(n-i)$ times and each $i-$face being a triangle-truncated simplex is considered $(n-i+1)$ times, we will receive the following expression for definition of quantity of $i-$faces, $i = \overline{1, n-1}$, of the $(n+1)-$dimensional triangle-truncated simplex:

$$N_i\Big({}_{tt}Simp^{n+1}\Big) = \\ = (n+2)\cdot\left[\frac{(n-i)\cdot C_{n+1}^{n-i}}{n-i} + \frac{C_{n+1}^{n-i}}{n-i+1}\right] = \\ = (n-i+2)\cdot C_{n+2}^{n-i+1}, \; i = \overline{1, n-1}.$$

Thus specified $i-$faces, $i = \overline{1, n-1}$, are obviously presented by $(n-i+1)\cdot C_{n+2}^{n-i+1}$ simplexes and the C_{n+2}^{n-i+1} triangle-truncated simplexes.

At determining the quantity of $0-$faces of $(n+1)-$dimensional triangle-truncated simplex it is necessary to consider that its $2-$faces being triangle-truncated simplexes represent the hexagons, which $1-$faces are presented by six segments: three one-dimensional simplexes and three one-dimensional triangle-truncated simplexes.

As it is known that a common face of polytopes like a simplex and triangle-truncated simplex is the simplex (in this case zero-dimensional, i.e. a point) it is necessary to use dependence of the Lemma (1) for a zero-dimensional simplex.

Following the Lemma (1), for each of $(n+2)$ $n-$dimensional triangle-truncated simplexes it is executed: $Simp^0$ belongs to $(n-1)$ polytopes ${}_{tt}Simp^2$.

After agglutinating of $(n+2)$ $n-$dimensional triangle-truncated simplexes on the $(n-1)-$dimensional triangle-truncated simplexes we have the following dependence: zero-dimensional simplex $Simp^0$ belongs to n two-dimensional triangle-truncated simplexes ${}_{tt}Simp^2$.

Thus, $N_0({}_{tt}Simp^{n+1}) = 2 \cdot C^n_{n+2}$.

On the basis of foregoing, combinatorial characteristics of the $(n+1)-$dimensional triangle-truncated simplex in a vector space $V^{n+1}(\Re)$, $n \geqslant 4$, really look like (2). □

Validity of the Corollary (1) is confirmed by this proof also.

Corollary 2. *A degree of the arbitrary vertex of $n-$dimensional triangle-truncated simplex, $n \geqslant 2$, is equal to n.*

Corollary 3. *The polytope, dual to the $n-$dimensional triangle-truncated simplex, $n \geqslant 2$, has the following combinatorial characteristics:*

$$\begin{cases} N_{n-1} = 2 \cdot C^{n-1}_{n+1}, \\ N_i = (i+2) \cdot C^{i+1}_{n+1}, \quad i = \overline{n-2, 0}. \end{cases}$$

Thus the single case of self-duality of the triangle-truncated simplex is the two-dimensional triangle-truncated simplex.

3 Conclusion

The main result of presented matters is the theorem about combinatorial characteristics of multidimensional triangle-truncated simplexes, which unambiguously identifies the last as independent geometrical objects.

As the considered polytopes have a direct connection with specific types of constructive fractal simplex-sets, they can be of interest not only to experts in the field of multidimensional geometry, but also and the fractal analysis.

References

1. Reznikova Yu.S. *Middle-truncated simplexes in arbitrary dimension's affine spaces* // Proceeding of the International Geometry Center. — 2010. — Vol.3, No.2 — P. 13–24. (in Russian)
2. Lusternik L.A. *Convex figures and polytopes.* – Moscow: SPHTTL, 1956. — 212 p. (in Russian)
3. Coxeter H.S.M. *Regular Polytopes.* — London: Methuen and Co. Ltd., 1948. — 322 p. (New York: Dover Publications Inc, third edition 1973)
4. Deza M., Grishukxin V.P., Shtorgin M.I. *Isometric polyhedral subgraphs in hypercubes and cubic lattices.* — Moscow: MTNMO, 2007. — 192 p. (in Russian)
5. Gosset T. *On the regular and semiregular figures in spaces of n dimensions* // Messenger of Mathematics. — 1900. — Vol.29. — P. 43–48.
6. Kettler Paul C. *Vertex and Path Attributes of the Generalized Hypercube with Simplex Cuts* // Pure Mathematics e-Print Series, No. 7, January 2008. Department of Mathematics, University of Oslo (ISSN 0806-2439). — 2008. — 50 p.
7. Ziegler Gunter M. *Lectures on polytopes.* // Graduate Texts in Mathematics 152. — New York: Springer-Verlag, 1995. — 373 p.
8. Berger M. *Geometry: in 2 volumes.* — Moscow: Mir, 1984. — Vol.1. — 560 p. (in Russian)
9. Emelichev V.A., Kovalev M.M., Kravtzov M.K. *Polytopes, grafs,optimization.* — Moscow: PH «Nauka», 1981. — 172 p. (in Russian)
10. Rozenfeld B.A. *Multidimensional spaces.* — Moscow: PH «Nauka», 1966. — 668 p. (in Russian)
11. Smirnov E.Yu. *Groups of reflections and the regular polytopes.* — Moscow: MTNMO, 2009. — 48 p. (in Russian)
12. Stringham V.I. *Regular figures in n-dimensional space* // Uspekhi Mat. Nauk, SPHTTL. — 1944. — Vol.X. — P. 22–33. (in Russian)

Received: 19.09.2013

УДК 519.21

М.П. Сергієнко[1], аспірант

Критерій перевірки гіпотези про вигляд коваріаційної функції Гауссового стаціонарного процесу за умови існування спектральної щільності

Метод мажоруючих мір застосовується для побудови критерію перевірки гіпотези про вигляд коваріаційної функції Гауссового стохастичного процесу.

Ключові слова: метод мажоруючих мір, коваріаційна функція, корелограма.

[1]Київський національний університет імені Тараса Шевченка, механіко-математичний факультет, 01601, Київ, вул. Володимирська 64, e-mail: koljasergienko@gmail.com

M.P. Sergiienko[1], PhD Student

How to test the hypothesis concerning the form of covariance function of Gaussian stationary process when exist spectral density

Method of majorizing measures is applying for constructing the criterion for testing the hypothesis concerning the form of covariance function of Gaussian stochastic process.

Key Words: metod of majorizing measures, covariance function, correlogram.

[1]Taras Shevchenko National University of Kyiv, Department of Mechanics and Mathematics, 01601, Kyiv, Volodymyrska str., 64, e-mail: koljasergienko@gmail.com

Communicated by Prof. Kozachenko Yu.V.

Introduction

In this paper we propose some inequalities of the distribution for supremum of correlogram form of the stochastic processes. These estimates are applying for constructing the criterion of hypothesis testing on covariance functions of these processes.

Particular cases of problems considered in this paper were investigated by Kozachenko and Moklyachuk [2], Sergiienko [4].

1 Definitions and properties of some elements from the Orlicz space

Assume that $X = (X(t), t \in [0,T], T > 0)$ is a separable real-valued stationary Gaussian process defined on a probability space $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbf{P})$, with mean zero and a continuous correlation function

$$B(h) = \mathbf{E}X(t)X(t+h), \quad h \in \mathbf{R}.$$

The so-called correlogram

$$\widehat{B}_T(h) = \frac{1}{T}\int_0^T X(t)X(t+h)dt, \quad h \geqslant 0,$$

will be used as an estimate of $B(h)$.

Let consider process $Z_T(h) = \widehat{B}_T(h) - B(h), h \geqslant 0$. It is easy to see that $Z_T(h)$ is square Gaussian stochastic process [4, p.17], indeed, $\widehat{B}_T(h) = l.i.m._{\triangle t_i \to 0} \sum_{i=1}^{\infty} X(t_i+h)X(t_i)\frac{\triangle t_i}{T}$.

Let the process X have a square integrable spectral density $f = (f(\lambda), \lambda \in \mathbf{R})$, that is,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^2(\lambda)d\lambda < \infty.$$

By the definition of spectral density, the function f is Lebesgue integrable and by Bochner-Khintchine theorem, we have

$$B(h) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{i\lambda h\} f(\lambda)d\lambda$$

for all $h \in \mathbf{R}$.

Lemma 1. *For all $T > 0$ and all $h_1, h_2 \geqslant 0$, we have the following inequality:*

$$\mathbf{E}|Z_T(h_1) - Z_T(h_2)|^2 \leqslant$$

$$\leqslant \frac{8\pi}{T}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f^2(\lambda)\sin^2\frac{\lambda(h_1-h_2)}{2}d\lambda\right] +$$

$$+\frac{8\pi}{T}\|f\|_2\left[\int_{-\infty}^{\infty} f^2(\lambda)\sin^2\frac{\lambda(h_1-h_2)}{2}d\lambda\right]^{1/2},$$

where

$$\|f\|_2 = \left(\int_{-\infty}^{\infty} f^2(\lambda)d\lambda\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Proof. This inequality is corollary from the lemma 4.1 [1, p.179] if we put $Y_T(h) = \sqrt{T}Z_T(h)$. □

© М.П. Сергієнко, 2014

Lemma 2. *The next inequality holds true while* $0 < \alpha \leqslant 1$

$$\left|\sin\frac{u}{v}\right| \leqslant \left(\frac{\ln(1+|u|)}{\ln(1+|v|)}\right)^{\alpha}.$$

Proof of lemma 2. you can see for example in [5, p.167].

Theorem 1. *Let the next condition holds true for* $0 < \alpha \leqslant 1$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \ln^{2\alpha}\left(1+\frac{|\lambda|}{2}\right) f^2(\lambda)d\lambda < \infty.$$

Then the next equation holds true

$$\sup_{|h_1-h_2|<h} (\mathbf{E}|Z_T(h_1)-Z_T(h_2)|^2)^{\frac{1}{2}} \leqslant \frac{C_{\alpha,T}}{\ln^{\frac{\alpha}{2}}\left(1+\frac{1}{h}\right)},$$

where

$$C_{\alpha,T} = \frac{8\pi}{T}(B_\alpha^2 + B_\alpha\|f\|_2),$$

$$B_\alpha^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \ln^{2\alpha}\left(1+\frac{|\lambda|}{2}\right) f^2(\lambda)d\lambda.$$

Proof. Using lemma 1 and lemma 2 we can obtain

$$\mathbf{E}|Z_T(h_1)-Z_T(h_2)|^2 \leqslant \frac{8\pi B_\alpha^2}{T}\frac{1}{\ln^{2\alpha}\left(1+\frac{1}{|h1-h_2|}\right)}+$$

$$+\frac{8\pi B_\alpha\|f\|_2}{T}\frac{1}{\ln^{\alpha}\left(1+\frac{1}{|h_1-h_2|}\right)}.$$

Our statement holds true after condition $|h_1 - h_2| < e - 1$. □

Let $(\mathbf{T}, d)$ be a compact metric space and let $\mathcal{A}$ be a Borel $\sigma-$algebra on $(\mathbf{T}, d)$. Let $\mu(\cdot)$ be a finite measure on $(\mathbf{T}, \mathcal{A})$. Let $X = \{X(t), t \in \mathbf{T}\}$ be a separable stochastic process such that the sample path of X are measurable with respect to $\mathcal{A}$ and $X \in L_U(\Omega)$, where $U(x)$ is a $\mathbb{C}-$function. Let $d(u,v) = \|X(u) - X(v)\|_U$ and $\mathbf{S}$ be a set from $\mathcal{A}$ such that $(\mu\times\mu)\{(u,v) \in \mathbf{S}\times\mathbf{S}, d(u,v) \neq 0\} > 0$.

Theorem 2. *Let* $X = \{X(t), \mathbf{T}\}$ *be a separable stochastic process from the Orlicz space* $L_U(\Omega)$ *that is generated by* $\mathbb{C}-$*function* $U(x) = \exp\{x\} - 1$. *Let* $\rho(v)$ *be a not decreasing function. Then for all* $x \geqslant \hat{\rho} = \sup_{u,v\in\mathbf{S}} \rho(d(u,v))$ *the following inequality holds true*

$$\mathbf{P}\{\eta > x\} \leqslant 2\exp\left\{-\frac{x}{\sqrt{2}\hat{\rho}}\ln\left(1+\frac{1}{A(\mathbf{S})}\right)\right\}\times$$

$$\times\sqrt{1+\frac{\sqrt{2}x}{\hat{\rho}}\ln\left(1+\frac{1}{A(\mathbf{S})}\right)}, \qquad (1)$$

where

$$\eta = \left\|\frac{(X(u)-X(v))\gamma(d(u,v))}{d(u,v)}\right\|_{U,\mu\times\mu}^{\mathbf{S}\times\mathbf{S}},$$

and

$$A(\mathbf{S}) = \int_{\mathbf{S}}\int_{\mathbf{S}} \frac{\rho(l(u,v))}{\hat{\rho}} d(\mu(u)\times\mu(v)).$$

Proof. It is easy to obtain from [4, p.16] for $q > 1$ that

$$\mathbf{P}\{\eta > x\} \leqslant \left(\frac{A(\mathbf{S})}{1+A(\mathbf{S})}\right)^q \times$$

$$\int_{\mathbf{S}}\int_{\mathbf{S}} \frac{\rho(d(u,v))}{\hat{\rho}} \mathbf{E}\exp\left\{\frac{q|(X(u)-X(v))\hat{\rho}|}{d(u,v)x}\right\}\frac{d\hat{\mu}}{A(\mathbf{S})}$$

where $\hat{\mu} = \mu(u)\times\mu(v)$.

From [1, p.171] we will obtain that

$$\mathbf{E}\exp\left\{\frac{q|(X(u)-X(v))\hat{\rho}|}{d(u,v)x}\right\} \leqslant 2L_0\left(\frac{\sqrt{2}q\hat{\rho}}{x}\right),$$

where

$$L_0(s) = \frac{1}{\sqrt{1-|s|}}\exp\left\{-\frac{|s|}{2}\right\}.$$

That is why

$$\mathbf{P}\{\eta > x\} \leqslant \left(\frac{A(\mathbf{S})}{1+A(\mathbf{S})}\right)^q \times$$

$$\times\int_{\mathbf{S}}\int_{\mathbf{S}} \frac{\rho(d(u,v))}{\hat{\rho}} 2L_0\left(\frac{\sqrt{2}q\hat{\rho}}{x}\right)\frac{d\hat{\mu}}{A(\mathbf{S})} =$$

$$= \left(\frac{A(\mathbf{S})}{1+A(\mathbf{S})}\right)^q 2L_0\left(\frac{\sqrt{2}q\hat{\rho}}{x}\right) =$$

$$= \left(\frac{A(\mathbf{S})}{1+A(\mathbf{S})}\right)^q \frac{2}{\sqrt{1-\frac{\sqrt{2}q\hat{\rho}}{x}}}\exp\left\{-\frac{\frac{\sqrt{2}q\hat{\rho}}{x}}{2}\right\}. \qquad (2)$$

Let denote $K = \frac{A(S)}{1+A(S)}$, $a = \frac{x}{\sqrt{2}\hat{\rho}}$, $q = sa$, $R = K^a$. Then, this inequality changes to

$$\mathbf{P}\{\eta > x\} \leqslant 2R^s\frac{1}{\sqrt{1-s}}\exp\left\{-\frac{s}{2}\right\} = f(s).$$

The function $f(s)$ has minimum at $s = 1 - \frac{1}{1-2\ln R}$. Then,

$$\mathbf{P}\{\eta > x\} \leqslant 2R^{\left\{1-\frac{1}{1-2\ln R}\right\}}\sqrt{1-2\ln R}\times$$

$$\times \exp\left\{-\frac{1}{2}\right\}\exp\left\{\frac{1}{2(1-2\ln R)}\right\} =$$

$$= 2R\sqrt{1-2\ln R}\exp\left\{-\frac{1}{2}\right\}\times$$

$$\times \exp\left\{-\frac{\ln R}{1-2\ln R}\right\}\exp\left\{\frac{1}{2(1-2\ln R)}\right\} =$$

$$= 2R\sqrt{1-2\ln R} = 2K^{\frac{x}{\sqrt{2}\hat{\rho}}}\times$$

$$\times\sqrt{1-2\ln K^{\frac{x}{\sqrt{2}\hat{\rho}}}} =$$

$$= 2\exp\left\{\frac{x\ln K}{\sqrt{2}K^{\frac{x}{\sqrt{2}\hat{\rho}}}}\right\}\sqrt{1-2\frac{x}{\sqrt{2}\hat{\rho}}\ln K} =$$

$$= 2\exp\left\{-\frac{x}{\sqrt{2}\hat{\rho}}\ln\left(1+\frac{1}{A(\mathbf{S})}\right)\right\}\times$$

$$\times\sqrt{1+\frac{\sqrt{2}x}{\hat{\rho}}\ln\left(1+\frac{1}{A(\mathbf{S})}\right)}.$$

□

Corollary 1. *Let $Y = \{Y(t), t \in \mathbf{T}\}$ be the square Gaussian process and let $\rho(\cdot)$ be a not decreasing function. Then for all $x > 0$ and $0 < p < 1$ the following inequality holds true*

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{t\in S}\left|Y(t) - \int_S Y(u)\frac{d\mu(u)}{\mu(\mathbf{S})}\right| > x\right\} \leqslant$$

$$\leqslant 2\exp\left\{-\frac{x}{\sqrt{2}|a_p|\hat{\rho}}\ln\left(1+\frac{1}{A(\mathbf{S})}\right)\right\}\times$$

$$\times\sqrt{1+\frac{\sqrt{2}x}{\hat{\rho}|a_p|}\ln\left(1+\frac{1}{A(\mathbf{S})}\right)}, \qquad (3)$$

where

$$a_p = 2\sup_{t\in S}\frac{1}{p(1-p)}\int_0^{\delta_1(t)p}\frac{1}{\nu_t^2(t)}\frac{1}{V^{(-1)}\left(\frac{1}{\nu_t^2(t)}\right)}dt.$$

Here

$$V(y) = \begin{cases} y(\ln y - 1) + 1, & y > 1; \\ 0, & 0 < y \leqslant 1 \end{cases}$$

and

$$A(\mathbf{S}) = \int_{\mathbf{S}}\int_{\mathbf{S}}\frac{\rho(d(u,v))}{\hat{\rho}}d(\mu(u)\times\mu(v)),$$

$$\delta_1(t) = z\big(2\sigma_t(\sup_{t\in\mathbf{S}}\rho(t,s))\big),$$

$$\nu_t(u) = \mu\left(B\left(t, \sigma_t^{(-1)}\left(z^{(-1)}(u)/2\right)\right)\cap\mathbf{S}\right).$$

Theorem 3. *Let $\mathbf{S} = [0, S], S > 0$. The next inequality holds true for correlogram $\widehat{B}_T(\tau)$ of correlation function $B(\tau)$*

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{0\leqslant\tau\leqslant S}|B(\tau) - \widehat{B}_T(\tau) - \frac{1}{S}\int_0^S B(u)du +\right.$$

$$\left. + \frac{1}{S}\int_0^S \widehat{B}_T(u)du| > x\right\} \leqslant$$

$$\leqslant 2\exp\left\{-\frac{x}{\sqrt{2}|a_p|\hat{\rho}}\ln\left(1+\frac{1}{A(S)}\right)\right\}\times$$

$$\times\sqrt{1+\frac{\sqrt{2}x}{\hat{\rho}|a_p|}\ln\left(1+\frac{1}{A(S)}\right)},$$

where $x \geqslant 1$,

$$A(S) = \int_0^S\int_0^S\frac{\rho(d(u,v))}{\hat{\rho}}d(\mu(u)\times\mu(v))$$

$$a_p = \frac{2}{p(1-p)}\times$$

$$\times\int_0^{z\left(\frac{2C_{\alpha,T}}{\ln^{\frac{\alpha}{2}}(1+\frac{1}{S})}\right)p}\ln\left(1+\frac{1}{\left(\frac{C_{\alpha,T}}{z^{(-1)}(\frac{u}{2})}\right)^{\frac{2}{\alpha}}-1}\right)du$$

Proof. Here we have $\sigma_t(h) = \frac{C_{\alpha,T}}{\ln^{\frac{\alpha}{2}}\left(1+\frac{1}{h}\right)}$ and $\sigma_t^{(-1)}(h) = \frac{1}{\left(\frac{C_{\alpha,T}}{h}\right)^{\frac{2}{\alpha}}-1}$.

This theorem is a consequence of the theorem 2 for $Z_T(\tau) = \widehat{B}_T(\tau) - B(\tau)$, where $\mathbf{S} = [0, S]$. Here $Z_T(\tau)$ is square Gaussian stochastic process and $\|Z_T(\tau)\| \leqslant \sqrt{\frac{C_r}{\ln 2}}\left(\mathbf{E}Z_T(\tau)^2\right)^{1/2}$, where $C_r = r^{-2}|\ln(1-r)| - r^{-1}$. □

Let H be a hypothesis which for $0 \leqslant \tau \leqslant T$ lie down that correlation function of Gaussian stochastic process is equals to $B(\tau)$. We take $\widehat{B}_T(\tau)$ as an estimate of $B(\tau)$. Let consider next test.

Criterion 1. *Let find* x_γ *for fixed* $\gamma,\ 0 \leqslant \gamma \leqslant 1$ *that*

$$f(x_\gamma) = \gamma,$$

where

$$f(x) = 2\exp\left\{-\frac{x}{\sqrt{2}|a_p|\hat{\rho}}\ln\left(1+\frac{1}{A(S)}\right)\right\}\times$$

$$\times\sqrt{1+\frac{\sqrt{2}x}{\hat{\rho}|a_p|}\ln\left(1+\frac{1}{A(S)}\right)}.$$

Hypothesis that the covariance function of the process $Y(t)$ *is* $B(\tau)$ *for* $0 \leqslant \tau \leqslant T$ *is accepted if*

$$\sup_{0\leqslant\tau\leqslant S}\left|B(\tau) - \widehat{B}_T(\tau) - \frac{1}{S}\int_0^S B(u)du + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{S}\int_0^S \widehat{B}_T(u)du\right| < x_\gamma$$

and is rejected otherwise.

Example 1. *Let put* $z(x) = x, \rho = 1$ *and* $\alpha = 1$. *Then* $A(S) = S^2$ *and*

$$\check{a}_p = \frac{2}{p(1-p)}\times$$

$$\times\int_0^{\frac{2C_{1,T}}{\ln^{\frac{1}{2}}(1+\frac{1}{S})}p}\ln\left(1+\frac{1}{\left(\frac{2C_{1,T}}{u}\right)^2-1}\right)du =$$

$$= \frac{2}{p(1-p)}\left[\frac{2C_{1,T}p}{\ln^{\frac{1}{2}}(1+\frac{1}{S})}\ln\left|\frac{\ln(1+\frac{1}{S})}{\ln(1+\frac{1}{S})-p^2}\right| + \right.$$

$$\left. + \frac{4C_{1,T}p}{\ln^{\frac{1}{2}}(1+\frac{1}{S})} + 2C_{1,T}\ln\left|\frac{\ln^{\frac{1}{2}}(1+\frac{1}{S})+p}{\ln^{\frac{1}{2}}(1+\frac{1}{S})-p}\right|\right].$$

Criterion 2. *Let's find such* x_γ *for fixed* $\alpha,\ 0 \leqslant \gamma \leqslant 1$ *that*

$$f(x_\gamma) = \gamma,$$

where

$$f(x) = 2\exp\left\{-\frac{x}{\sqrt{2}|\check{a}_p|}\ln\left(1+\frac{1}{S^2}\right)\right\}\times$$

$$\times\sqrt{1+\frac{\sqrt{2}x}{|\check{a}_p|}\ln\left(1+\frac{1}{S^2}\right)}.$$

Hypothesis that the covariance function of the process $Y(t)$ *is* $B(\tau)$ *for* $0 \leqslant \tau \leqslant T$ *is accepted if*

$$\sup_{0\leqslant\tau\leqslant S}\left|B(\tau) - \widehat{B}_T(\tau) - \frac{1}{S}\int_0^S B(u)du + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{S}\int_0^S \widehat{B}_T(u)du\right| < x_\gamma$$

and is rejected otherwise.

Conclusions

In this paper we have obtained estimates for distribution of square Gaussian stochastic processes. We have constructed the criterion how to test the hypothesis concerning the form of covariance function of Gaussian stochastic process.

References

1. Buldygin V.V. Metric characterization of random variables and random processes / V.V. Buldygin, Yu.V. Kozachenko // American Mathematical Society, Providence, Rhode Island — Vol. 188.

2. Kozachenko Yu.V. Large deviation probabilities in terms of majorizing measures / Yu.V. Kozachenko, O. Moklyachuk // ROSE. — 2003. — Vol. 11, no. 1. — P. 1–20.

3. Fedoryanich T. Estimator of covariance function for Gaussian stationary stochastic process and Gaussian random field / T. Fedoryanich // Theory of Stochstic Processes. — 2003. — Vol. 9(25), no. 3–4. — P. 20–26.

4. Sergiienko, M.P. How to test hypothesis concerning the form of covariance function of Gaussian stochastic process / M.P. Sergiienko // Bullet of Taras Shevchenko National University of Kuiv. — 2013. — Vol. 3. — P. 15–18.

5. Vasylyk, O.I. φ-sub-Gaussian random processes / O.I. Vasylyk, Yu.V. Kozachenko, R.E. Yamnenko // Kyiv: Vydavnycho-Poligrafichnyi Tsentr, Kyivskyi Universytet. — 2008.

Received: 30.09.2013

УДК 519.17

Л. М. Тимошкевич[1]

Про спектральну теорію графів Кокстера та її застосування

Доведена узагальнена теорема Сміта про графи Кокстера з індексами менше або рівними 2 та її застосування до класифікації груп Кокстера. Також доведена теорема парності для графів Кокстера.

Ключові слова: граф Кокстера, спектр, індекс.

[1]Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 01033, Київ, вул. Володимирська, 64, e-mail: larysatymosh@gmail.com.

L. M. Tymoshkevich[1]

On spectral theory of Coxeter graphs and its applications

We generalize the Smith theorem on Coxeter graphs to the graphs that have the indices not exceeding 2, and use it to classify the Coxeter groups. We also prove a parity theorem for Coxeter graphs.

Key Words: Coxeter graph, spectrum, index

[1]Taras Shevchenko National University of Kyiv, 01033, Kyiv, vul.Volodymyrska, 64, e-mail: larysatymosh@gmail.com.

Communicated by Prof. V. V. Kirichenko

Introduction

The purpose of this work is to obtain certain results in spectral theory of Coxeter graphs. We completely describe Coxeter graphs with indexes not greater than two (see [5-6]). We also apply this theory to the classification of Coxeter groups (see also [8]). See [1-4] for theoretical background of spectral graph theory, e.g. notions of characteristic polynomial and graph index, the Smith's theorem, etc. The notion of the graph index is widely applied, in particular, in classification of semi-simple Lie algebras, in classification of the groups generated by reflections (see [7-8]) and in representation theory, where the existence of specifically constained subspaces of a Hilbert space is studied (see [9]).

1 On the spectral theory of Coxeter graphs

1.1 Coxeter graphs

We assume that the reader is familiar with terminology used in the graph theory. In particular, we assume known the following notions: a vertex and an edge of a graph, adjacent vertices, a vertex incident to an edge, the degree of a vertex, order of a graph, a path, a connected graph, connected components of a graph, a cycle, a tree., etc. In this paper, a graph is understood as an ordered pair, (V, R), where V is a nonempty set and R is a set of unordered pairs of elements of V.

In what follows, we consider special kinds of trees that are of the form $T_{p,q,r}$, $p, q, r \geqslant 2$, see Fig. 1.1. These connected graphs will be called T-graphs. A tree is a T-graph if and only if it has a unique vertex of degree 3 and the degrees of all other vertices are less than 3. Without loss of generality, we assume that $p \leqslant q \leqslant r$. The number of vertices on branches of the graph $T_{p,q,r}$ is equal to $p-1, q-1, r-1$, correspondingly, $|T_{p,q,r}| = p+q+r-2$.

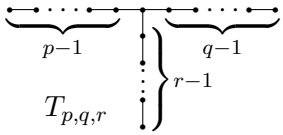


Fig. 1.1

A Coxeter graph $\mathbf{G}$ is a pair (G, f), where G is a graph and f is a mapping from the set of edges of the graph G to the set of naturals greater than 2 and the symbol ∞. We say that G is the underlying graph of the Coxeter graph $\mathbf{G} = (G, f)$.

For the sake of simplicity, a Coxeter graph is often represented as a scheme that shows the underlying graph with each edge e indexed with the number $f(e)$ that we will call the label on the edge. We do not use the label 3, and such edges will be called unlabeled. Edges indexed with a number greater or equal than 4 will be called labeled.

Remark 1.1: The usual graphs make a subset of the Coxeter graphs, with the function f taking

© L. M. Tymoshkevych, 2014

the value 3. A Coxeter graph will be merely called a graph, if no confusion can arise. We use bold face letters to denote a Coxeter graph.

Remark 1.2: A Coxeter graph will be called connected, a tree, a cycle, etc, if such is the underlying graph.

We assume that $\infty \geqslant x$, where x is an arbitrary natural number or the symbol ∞, and the equality takes place only if $x = \infty$.

Let $\mathbf{G} = (G, f)$ be a Coxeter graph. The graph $\mathbf{G}_1 = (G_1, f_1)$ is called a *subgraph* of the graph $\mathbf{G} = (G, f)$, if G_1 is a subgraph of G and, for any edge e of the graph G_1, we have $f_1(e) \leqslant f(e)$.

We use the notation $\mathbf{G}_1 \subset \mathbf{G}$ to indicate that $\mathbf{G}_1$ is a subgraph of $\mathbf{G}$.

By a *subgraph generated by a set U of vertices*, we call the subgraph $\mathbf{G}_1 = (V_1, R_1, f_1)$ such that $V_1 = U$ and R_1 consists of the edges of the graph $\mathbf{G}$ that join vertices in U, and f_1 coincides with f on the set R_1.

1.2 Three operations on Coxeter graphs

Let $\mathbf{G} = (G, f)$ be a Coxeter graph.

1. **The operation of removing a vertex.** Fix a vertex x of the graph G. Consider the graph $\mathbf{G}_1 = (V_1, R_1)$ that has the set $V_1 = V \setminus x$ of vertices and the set of edges is obtained from R by removing the edges that are incident to the vertex x. Also consider a function f_1 that is a restriction of the function f to the set of edges of the graph G_1. Then the Coxeter graph $\mathbf{G}_1$, denoted by $\mathbf{G} - x$, will be called the Coxeter graph obtained from the graph $\mathbf{G}$ by removing the vertex x.

2. **Operation of removing an edge.** Fix an edge e of the graph $G = (V, R)$. Consider the graph $G_1 = (V_1, R_1)$ with $V_1 = V$ as the set of vertices and $R_1 = R \setminus e$ as the set of edges. Consider a function f_1 that is a restriction of the function f to the set of edges of the graph G_1. Then the graph $\mathbf{G}_1 = (G_1, f_1)$, which we denote by $\mathbf{G} - e$, is called the Coxeter graph obtained from the graph $\mathbf{G}$ by removing the edge e.

3. **Operation of decreasing the label on an edge.** Fix an edge e of the graph $G = (V, R)$ and consider a function f_1 that is identical to f on the set $R \setminus e$ of edges and satisfies $f_1(e) < f(e)$ on the edge e. Then the graph $\mathbf{G}_1 = (G, f_1)$ is called a Coxeter graph obtained from the graph $\mathbf{G}$ by reducing the label on the edge e.

It is possible to define a subgraph in terms of the operations with graphs. A subgraph of a graph G is a graph that can be obtained from G by removing vertices and edges, or by reducing the label on an edge.

1.3 Adjacency matrix, spectrum of a graph, and the index of a Coxeter graph

Fix an indexing of the vertices of a Coxeter graph. There is an adjacency matrix, $A(\mathbf{G}) = (a_{ij})_{i,j=1}^{n}$, corresponding to every graph $\mathbf{G} = (G, f)$ and an indexing of the vertices, where $n = |\mathbf{G}|$ is the number of vertices in the graph, and the elements of the matrix are as follows: $a_{ij} = 2\cos\pi/k$ if $f(\{i, j\}) = k$, $a_{ij} = 2$ if $f(\{i, j\}) = \infty$, and $a_{ij} = 0$ if the vertices i and j are not connected with an edge. Thus, the matrix $A(\mathbf{G})$ is a symmetric matrix with zeros on the main diagonal. The adjacency matrix depends on the indexing of the vertices. However, the adjacency matrices of the same graph with different indexing of the vertices are similar. We leave the reader to check this.

Since the adjacency matrix $A(\mathbf{G})$ is symmetric ($a_{ij} = a_{ji}$), its spectrum is real. Denote points of the spectrum (eigen values of the matrix) by λ_i, $i = 1, \ldots, n$, and index them in a nonincreasing way, $\lambda_{\mathbf{G}} = \lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_n$. The maximal eigen value is called the index of the graph. The spectrum of the adjacency matrix will be denoted by $\sigma(\mathbf{G})$, and we call it spectrum of the graph. The spectrum of a graph does not depend on indexing of the vertices and make an invariant of the graph. We denote the characteristic polynomial of the adjacency matrix by $P_{\mathbf{G}}(\lambda) = |\lambda I - A(\mathbf{G})|$.

Remark 3.1: To describe the spectrum of a graph, we use braces for sets with distinct elements, and we use brackets to list the eigen values counting their multiplicities.

Proposition 3.1. Let $\mathbf{G}$ be a disconnected graph and $\mathbf{G}_i$, $i = 1, \ldots, k$, be connected components of the graph $\mathbf{G}$, that is, $\mathbf{G} = \coprod_{i=1}^{k} \mathbf{G}_i$. Then $P_{\mathbf{G}}(\lambda) = \prod_{i=1}^{k} P_{\mathbf{G}_i}(\lambda)$ and $\lambda_{\mathbf{G}} = \max_{i=1,\ldots,k} \lambda_{\mathbf{G}_i}$.

Proof. We construct the adjacency matrix of the graph $\mathbf{G} = \coprod_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{k}} \mathbf{G_i}$ by first indexing all the vertices of the first connected component $\mathbf{G}_1$, then we index all the vertices of the second connected component $\mathbf{G}_2$, and so on. At the end

we index all the vertices of the last connected component $\mathbf{G}_k$. The indexing order of vertices in each component is not important. The matrix $A(\mathbf{G})$ will have a block-diagonal form with matrices $A(\mathbf{G}_1)$, $A(\mathbf{G}_2)$,..., $A(\mathbf{G}_k)$ on the main diagonal. Then the matrix $\lambda I - A(\mathbf{G})$ also has the same block-diagonal form with the matrices $\lambda I - A(\mathbf{G}_1)$, $\lambda I - A(\mathbf{G}_2)$,..., $\lambda I - A(\mathbf{G}_k)$ being on the main diagonal. This shows that $|\lambda I - A(\mathbf{G})| = |\lambda I - A(\mathbf{G}_1)| \cdot |\lambda I - A(\mathbf{G}_2)| \cdot \ldots \cdot |\lambda I - A(\mathbf{G}_k)|$ and, hence, $P_{\mathbf{G}}(\lambda) = \prod_{i=1}^{k} P_{\mathbf{G}_i}(\lambda)$. Thus the spectrum of $\mathbf{G}$ is a union of spectrums of the connected components, and $\lambda_{\mathbf{G}} = \max_{i=1,\ldots,k} \lambda_{\mathbf{G}_i}$. □

1.4 Nonnegative, indecomposable matrices. The Frobenius theorem

A matrix is called *nonnegative* if all elements of the matrix are nonnegative numbers. A matrix is called *positive* if all its elements are positive numbers. Correspondingly, vectors with nonnegative (positive) coordinates are called nonnegative (positive). The adjacency matrix of an arbitrary graph, as follows from the previous section, is nonnegative. Hence, the adjacency matrix possesses all properties of a nonnegative matrix.

We write $A \geqslant 0$ if the matrix A is nonnegative, and $A > 0$ if the matrix A is positive. For vectors, $x \geqslant 0$ means that the vector x is nonnegative, and $x > 0$ means that the vector is positive.

A matrix is called *decomposable* if, by permuting the rows and then applying the same permutation to the columns, one can obtain a matrix in the block form, $\left(\begin{smallmatrix} A & B \\ 0 & D \end{smallmatrix}\right)$, where the diagonal contains square matrices. The matrix is called *indecomposable* otherwise.

Proposition 4.1. The adjacency matrix of a graph is indecomposable if and only if the graph is connected. The proof is left to the reader as an exercise (see also [1]).

Properties of eigen vectors and eigen values of nonnegative indecomposable matrices we are interested in are formulated in the following theorem.

Theorem 4.1. *(F. G. Frobenius)* An indecomposable nonnegative matrix A always has a positive eigen value r that has the following properties:

– r is a simple root of the characteristic equation;

– absolute values of all other eigen values do not exceed the number r;

– the eigen vector that corresponds to the eigen value r is a positive vector.

Also, if A has h eigen values with absolute values equal to r, then all these eigen values are distinct and are roots of the equation $\lambda^h - x^h = 0$ and, in general, if the spectrum of the matrix A is regarded as a system of points in the complex plane, then it is mapped into itself when rotated by the angle $2\pi/h$.

If $h > 1$ then, by permuting the rows and applying the same permutation to the columns, it is possible to reduce the matrix A to the following "cyclic" form:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & A_{12} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & A_{23} & \ldots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & A_{h-1,h} \\ A_{h1} & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}, \quad (1)$$

which has square blocks on the main diagonal.

If $h > 1$, the matrix A is called *imprimitive*; the number h is its *imprimitivity index*. Otherwise the matrix A is called *primitive*.

Recall that the adjacency matrix is nonnegative, hence the Frobenius theorem is applicable. It is also symmetric. Since all eigen values of a symmetric matrix are real, Theorem 1 gives spectral properties of a connected graph.

Theorem 4.2. Let Γ be a connected graph, and $\lambda_{\mathbf{G}} = \lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_n$ be its nonincreasingly indexed eigen values. Then

(1) the index of the graph is a positive number, $\lambda_{\mathbf{G}} > 0$;

(2) the absolute value of an arbitrary eigen value is not greater than the index of the graph, $|\lambda_i| \leqslant \lambda_{\mathbf{G}}$;

(3) the algebraic multiplicity of the eigen value $\lambda_{\mathbf{G}}$ equals 1, thus its geometric multiplicity also equals one;

(4) there is a positive vector corresponding to the eigen value $\lambda_{\mathbf{G}}$ (this positive vector will be called the Perron–Frobenius vector);

(5) if $-\lambda_{\mathbf{G}}$ is an eigen value, then its algebraic multiplicity equals 1, hence its geometric multiplicity is also one.

1.5 Dynkin–Coxeter graphs. Euclidean graphs

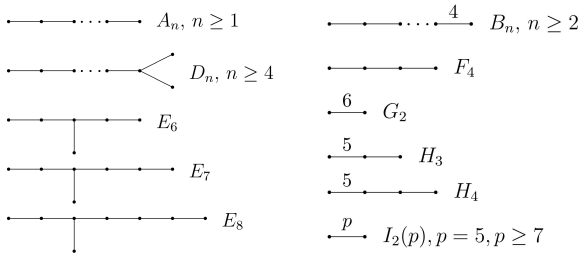


Fig. 5.1: Dynkin–Coxeter graphs A_n, D_n, E_6, E_7, E_8, B_n, F_4, G_2, H_3, H_4, $I_2(p)$.

The graphs $A_n (n \geqslant 1)$, $D_n (n \geqslant 4)$, E_6, E_7, E_8, $B_n (n \geqslant 2)$, F_4, G_2, H_3, H_4, $I_2(p)$, ($p = 5$ or $p \geqslant 7$), shown in Fig. 5.1, are called Dynkin–Coxeter graphs. For each of these graphs, the index in the notations equals the number of vertices in the graph.

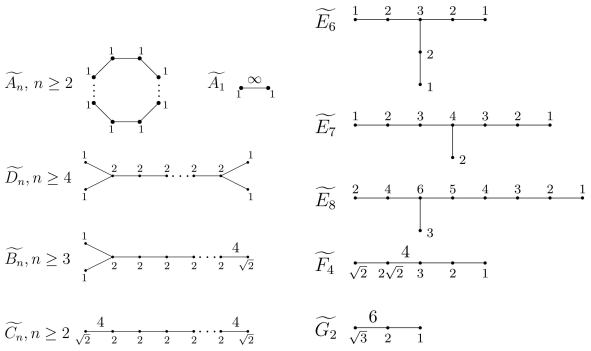


Fig. 5.2: Euclidean graphs, $\widetilde{A_n}$, $\widetilde{D_n}$, $\widetilde{E_6}$, $\widetilde{E_7}$, $\widetilde{E_8}$, $\widetilde{B_n}$, $\widetilde{C_n}$, $\widetilde{F_4}$, $\widetilde{G_2}$.

Fig. 5.2 shows the graphs called Euclidean, $\widetilde{A_n} (n \geqslant 1)$, $\widetilde{D_n} (n \geqslant 4)$, $\widetilde{E_6}$, $\widetilde{E_7}$, $\widetilde{E_8}$, $\widetilde{B_n} (n \geqslant 3)$, $\widetilde{C_n} (n \geqslant 2)$, $\widetilde{F_4}$, $\widetilde{G_2}$. The order of a Euclidean graph is the index in the notation plus one.

Proposition5.1. An arbitrary Dynkin–Coxeter graph, except for H_4 and $I_2(p)$, is a subgraph of some Euclidean graph.

Proof. The proof follows from the following inclusions: $A_n \subset \widetilde{A_n}, D_n \subset \widetilde{D_n}, E_k \subset \widetilde{E_k} (k = 6, 7, 8), B_n \subset \widetilde{B_n}, F_4 \subset \widetilde{F_4}, G_2 \subset \widetilde{G_2}, H_3 \subset \widetilde{G_2}$ □

Theorem 5.1. The index of a Euclidean graph equals 2.

Proof. The plan of the proof is as follows. First, we show that 2 is an eigen value of each Euclidean graph. Then we show that 2 is a maximal eigen value.

Let us show that 2 is an eigen value of every Euclidean graph by exhibiting a corresponding eigen vector. The numbers shown by each vertex of the graph in Fig. 5.2 give coordinates of the corresponding vectors.

Let us now show that 2 is the index of a Euclidean graph $\mathbf{G}$. If this is not true, then there are $\lambda > 2$, which is the index, and ν a positive Perron–Frobenius vector of $\mathbf{G}$. Since the eigen vectors that correspond to distinct eigen values of a symmetric matrix are orthogonal, we have $(\xi, \nu) = 0$. But $\xi > 0$ by construction and $\nu > 0$, since ν is a Perron–Frobenius vector. Their scalar product can not be zero, which proves that 2 is the index of each Euclidean graph. □

1.6 Generalized Smith theorem

The following theorem gives a relation between the structure and the index of a Coxeter graph (see also [5-6]).

Theorem (Generalized Smith theorem).

1. The inequality $\lambda_{\mathbf{G}} < 2$ holds if and only if $\mathbf{G}$ is a Dynkin–Coxeter graph.

2. The identity $\lambda_{\mathbf{G}} = 2$ holds if and only if $\mathbf{G}$ is a Euclidean graph.

3. For other graphs, $\lambda_{\mathbf{G}} > 2$.

To prove this theorem, we will need the following lemma.

Lemma 1. Let $\mathbf{G}$ be a connected Coxeter graph, and $\mathbf{G}_1 \subset \mathbf{G}$. Then $\lambda_{\mathbf{G}} > \lambda_{\mathbf{G}_1}$.

This lemma can be split into the following three lemmas.

Let $\mathbf{G}$ be a Coxeter graph, v and e be its vertex and edge, correspondingly.

Lemma 6.1. Let the subgraph $\mathbf{G} - v$ be connected. Then $\lambda_{\mathbf{G}} > \lambda_{\mathbf{G}-v}$.

Lemma 6.2. Let the subgraph $\mathbf{G} - e$ be connected. Then $\lambda_{\mathbf{G}} > \lambda_{\mathbf{G}-e}$.

Proofs of Lemmas 6.1 and 6.2 are similar to the corresponding proofs for the usual graphs.

Lemma 6.3. Let $\mathbf{G}_1$ be a graph obtained from $\mathbf{G}$ by reducing the label on the edge e, and let $\mathbf{G}_1$ be connected. Then $\lambda_{\mathbf{G}} > \lambda_{\mathbf{G}_1}$.

Proof. Without loss of generality, we can assume that $e = \{v_1, v_2\}$. Then the matrix $A_{\mathbf{G}}$ differs from the matrix $A_{\mathbf{G}_1}$ in two elements, the second element in the first row and the first element in the second row. Let ξ be an eigen vector of $A_{\mathbf{G}}$ corresponding to the index $\lambda_{\mathbf{G}}$, and ν be an eigen vector of $A_{\mathbf{G}_1}$ corresponding to the index $\lambda_{\mathbf{G}_1}$. Note that $A_{\mathbf{G}}\xi \geqslant A_{\mathbf{G}_1}\xi$, and the

following two strict inequalities hold: $(A_{\mathbf{G}}\xi)_1 > (A_{\mathbf{G}_1}\xi)_1$ and $(A_{\mathbf{G}}\xi)_2 > (A_{\mathbf{G}_1}\xi)_2$. Take a positive vector ν. The previous inequalities imply that $(A_{\mathbf{G}_1}\xi,\nu) < (A_{\mathbf{G}}\xi,\nu)$. Hence, $\lambda_{\mathbf{G}_1}(\xi,\nu) = (\xi,\lambda_{\mathbf{G}_1}\nu) = (\xi,A_{\mathbf{G}_1}\nu) = (A_{\mathbf{G}_1}\xi,\nu) < (A_{\mathbf{G}}\xi,\nu) = (\lambda_{\mathbf{G}}\xi,\nu) = \lambda_{\mathbf{G}}(\xi,\nu)$. Dividing both sides by a positive number (ξ,ν) we get $\lambda_{\mathbf{G}} > \lambda_{\mathbf{G}_1}$. □

Lemma 2. For an arbitrary connected graph $\mathbf{G}$, which is neither a Dynkin–Coxeter graph nor a Euclidean graph nor one of the graphs $H_n(n \geqslant 5), \widetilde{F_5}$, there is a Euclidean graph that is a proper subgraph of the graph $\mathbf{G}$.

Proof. Let us look at the structure of the graph $\mathbf{G}$ answering the following three questions.

1) Does $\mathbf{G}$ has a cycle ?

2) Is there a vertex v in $\mathbf{G}$ such that $\deg v \geqslant 4$?

3) Are there vertices $u \neq v$ in $\mathbf{G}$ such that $\deg u = \deg v = 3$?

If the answer to the first question is "yes", then $\exists n \geqslant 2$: $\widetilde{A_n} \subsetneq \mathbf{G}$.

If the answer to the second question is "yes", then $\widetilde{D_4} \subsetneq \mathbf{G}$.

If the answer to the third question is "yes", then $\exists n \geqslant 5$: $\widetilde{D_n} \subsetneq \mathbf{G}$.

Otherwise, if the answers to the above three questions is "no", then there are the following possibilities for the ordered graph:

1) $\exists n \geqslant 1$: $G = A_n$;

2) $\exists 2 \leqslant p \leqslant q \leqslant r$: $G = T_{p,q,r}$.

Consider the first case. Here, considering all possibilities, we get that either $\widetilde{F_4} \subsetneq \mathbf{G}$ or $\exists l \geqslant 2$: $\widetilde{C_l} \subsetneq \mathbf{G}$ or $\widetilde{G_2} \subsetneq \mathbf{G}$.

We split the second case of a T-graph into the following subcases:

a) $\exists r \geqslant 2$: $G = T_{2,2,r}$. If the underlying graph would not have labeled edges, then $\exists n \geqslant 4$ such that $\mathbf{G} = D_n$ and so there is at least one labeled edge and, hence, $\exists k \geqslant 3$ such that $B_3 \subsetneq \mathbf{G}$.

b) $\exists r \geqslant 3$: $G = T_{2,3,r}$. If $r \geqslant 6$, then $\widetilde{E_8} \subsetneq \mathbf{G}$. Thus it remains to consider the cases $r = 3, r = 4, r = 5$. If the underlying graph does not contain labeled edges, then $\mathbf{G} = E_6, \mathbf{G} = E_7, \mathbf{G} = E_8$, correspondingly, and thus there is at least one labeled edge and then either $\widetilde{B_3} \subsetneq \mathbf{G}$ or $\widetilde{B_4} \subsetneq \mathbf{G}$ or $\widetilde{B_5} \subset \mathbf{G}$.

c) $\exists q, r \geqslant 4$: $G = T_{2,q,r}$. In this case, $\widetilde{E_7} \subsetneq \mathbf{G}$.

d) $\exists p, q, r \geqslant 3$: $G = T_{p,q,r}$. Here, $\widetilde{E_6} \subsetneq \mathbf{G}$.

All possible cases have been considered, which proves Lemma 2. □

Proof of the generalized Smith theorem. Let $\mathbf{G}$ be a connected graph. If $\mathbf{G}$ is a Euclidean graph, then its index equals 2 by Theorem 5.1.

If $\mathbf{G}$ is a Dynkin–Coxeter graph then, by Proposition 5.1, it is a proper subgraph of a Euclidean graph and, by Lemma 1, its index is strictly less than the index of the corresponding Euclidean graph, hence it is less than two.

For a graph different from $H_n(n \geqslant 5), \widetilde{F_5}$, by Lemma 2 there is a Euclidean graph that is a proper subgraph, and hence the index is greater than two. For $H_5, \widetilde{F_5}$, using Example 3.1 and exercise 3.1 we see that the index is greater than 2. For $H_n(n \geqslant 6)$, the index is greater than 2, since $H_5 \subsetneq H_n(n \geqslant 6)$. □

1.7 A parity theorem for Coxeter graphs

In this section, we prove an analog of a known theorem from the spectral theory of graphs, namely, a parity theorem for Coxeter graphs.

Recall that a graph is called *bipartite*, if the set of all its vertices can be split into two parts such that the endpoints of each edge would belong to different parts.

Let us remind a known result in the theory of graphs.

Proposition 7.1. A graph is bipartite if and only if it contains no cycles of odd length.

A parity theorem for Coxeter graphs. A graph $\mathbf{G}$ is bipartite if and only if its spectrum is symmetric with respect to zero.

Proof. $\Rightarrow$ Let us prove that, if a graph is bipartite, then its spectrum is symmetric with respect to zero.

It is known from linear algebra that the product of $(-1)^i c_i$ equals the sum of principal minors of the adjacency matrix $A_{\mathbf{G}}$ of dimension $i \times i$. Each of the principal minors is the determinant of the adjacency matrix of a subgraph defined by the corresponding i vertices. Let us thus look at the determinant of the adjacency matrix $A_{\mathbf{F}}$ of an arbitrary graph $\mathbf{F}$.

By the definition, the determinant of the matrix $A(\mathbf{F}) = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ is the sum of $n!$ terms each of which is a product of the form $\operatorname{sign}(\pi) a_{1\pi(1)} a_{2\pi(2)} \dots a_{n\pi(n)}$, where π is a corresponding permutation of the indices. The factor $a_{i\pi(i)}$ is not zero if and only if the vertices i

and $\pi(i)$ are joined with an edge in the graph $\mathbf{F}$. Since the simple graphs under consideration do not have loops, the terms $\mathrm{sign}(\pi)a_{1\pi(1)}a_{2\pi(2)}\dots a_{n\pi(n)}$, where π has a fixed point, are equal to zero. Each nonzero term corresponds to an existing frame subgraph that has the same number of connected components as the number of independent cycles in the permutation π, and the underlying graph in each connected component is a complete graph on 2 vertices if the independent cycle has length 2 or a cycle of order l if the independent cycle in the permutation π has length l, $l \geqslant 3$.

Consider the value $(-1)^{2l+1}c_{2l+1}$ for the coefficient c_{2l+1} of the characteristic polynomial with an odd index. The expression $(-1)^{2l+1}c_{2l+1}$ is equal to the sum of determinants of the adjacency matrices of the subgraphs corresponding to the $2l+1$ vertices. In all the $(2l+1)!$ terms for each determinant, consider those that are nonzero. Since the bipartite graph and each of its subgraphs do not contain cycles of odd length, the nonzero terms will be $\mathrm{sign}(\pi)a_{1\pi(1)}a_{2\pi(2)}\dots a_{2l+1\pi(2l+1)}$, where π is a product of independent transpositions and cycles of even order. But such π do not exist. Hence, $(-1)^{2l+1}c_{2l+1} = 0$. Thus the characteristic polynomial of the graph $\mathbf{G}$ has the form $P_{\mathbf{G}}(\lambda) = \lambda^n + c_2\lambda^{n-2} + c_4\lambda^{n-4} + .. + c_{n-2}\lambda^2 + c_n$ if n is even, or $P_{\mathbf{G}}(\lambda) = \lambda(\lambda^{n-1} + c_2\lambda^{n-3} + c_4\lambda^{n-5} + .. + c_{n-3}\lambda^2 + c_{n-1})$ if n is odd. A pair of numbers $-\alpha, \alpha$ will (or will not) be at the same time a root of this polynomial. Hence the spectrum is symmetric with respect to zero.

$\Leftarrow$ Let us prove that, if the spectrum of a graph is symmetric with respect to zero, then the graph is bipartite. Denote by r the index of the graph. Then $-r$ is also in the spectrum, and the adjacency matrix $\mathbf{A}$ of the graph $\mathbf{G}$ is imprimitive. The Frobenius theorem implies that the index of imprimitivity, n, can only be even, and there exists a permutation matrix $\mathbf{P}$ such that $\mathbf{P^{-1}AP}$ has form (1). But since n is even, it is clear that $\mathbf{G}$ does not contain a cycle of odd length. □

Corollary 7.3 (Parity for a tree). Let $\mathbf{G}$ be a tree. Then its spectrum is symmetric with respect to zero.

Proof. A tree is a bipartite graph, hence this is a corollary of the preceding theorem. □

2 Classification of finite Coxeter groups

Coxeter groups

In this section, W denotes a group under multiplication with unit 1, and S is a set of generators of the group W such that $1 \notin S$ and all elements of S have order 2. Each element in W is a product of a finite number of elements of S.

Definition: A pair (W, S) is called a Coxeter group if the following condition is satisfied.

(K) For arbitrary two elements s and s' in S, denote by $m(s, s')$ the order of the element ss'. Let I be a set of pairs (s, s') such that $m(s, s')$ is finite. Then the system of generators, S, together with the relations $(ss')^{m(s,s')} = 1$ for $(s, s') \in I$, define the group W in terms of generators and determining relations.

In the case where (W, S) is a Coxeter system, by abuse of the language, we say that W is a Coxeter group.

Coxeter matrices and graphs

Definition: Let I be a set. *A Coxeter matrix of type* I is an arbitrary square symmetric matrix $M = (m_{ij})_{i,j\in I}$ the elements of which are integers or the symbol ∞, and such that

$m_{ii} = 1$ for all $i \in I$;

$m_{ij} \geqslant 2$ for $i, j \in I$ $i \neq j$.

To each Coxeter matrix of type I there is a corresponding Coxeter graph $\mathbf{G} = (G, f)$ constructed as follows:

the set of vertices of the graph coincides with I, and the edges are the pairs $\{i, j\}$ from I such that $m_{ij} \geqslant 3$. The mapping f takes the value m_{ij} from the matrix M on the edge $\{i, j\}$.

It is clear that this gives a bijective correspondence between the set of Coxeter matrices of type I and the set of Coxeter graphs of type I.

If (W, S) is a Coxeter system, then the matrix $M = (m(s, s'))_{s,s'\in S}$ is a Coxeter matrix of type S, and it is called the matrix of the system (W, S). Indeed, $m(s, s) = 1$, since $s^2 = 1$ for all $s \in S$, and $m(s, s') \geqslant 2$ in the case where $s \neq s'$, since $ss' \neq 1$. The Coxeter graph $\mathbf{G} = (G, f)$ associated with the matrix M is called a Coxeter graph of the system (W, S). Note that two vertices s and s' of the graph $\mathbf{G}$ are joined with an edge if and only if s and s' do not commute.

We say that a Coxeter system (W, S) is *irreducible*, if the graph G, which is subordinated to the Coxeter graph associated to (W, S), is connected and nonempty. This means that S is a nonempty set and S can not be partitioned into

two subsets S' and S'' that are distinct from S and such that each element of S' commutes with each element of S''.

More generally, let $(G_i)_{i\in I}$ be a family of connected components of a graph G, and S_i a set of vertices of the component G_i. Let W_i be a subgroup of W, which is generated by S_i. Then all (W_i, S_i) are *irreducible components of the system* (W, S). Moreover, W is a bounded direct product of the subgroups W_i for $i \in I$. This is implied by the following more general result.

Proposition. Let $(S_i)_{i\in I}$ be a partition of S such that each element of S_i commutes with each element of S_j for $i \neq j$. For arbitrary $i \in I$, let W_i be a subgroup generated by S_i. Then W is a bounded direct product of the family $(W_i)_{i\in I}$.

A form associated with a Coxeter matrix

Let S be a set, and $M = (m(s, s'))_{s,s'\in S}$ a Coxeter matrix of type S.

Let $E = \mathbb{R}^S$, $(e_s)_{s\in S}$, be a canonical basis in E and B_M a bilinear form on E such that

$$B_M(e_s, e_{s'}) = -\cos\frac{\pi}{m(s, s')}.$$

The form B_M is symmetric. We say that this form is *associated* with the matrix M. We have $B_M(e_s, e_s) = 1$ and $B_M(e_s, e_{s'}) \leqslant 0$ if $s \neq s'$.

Theorem. The following statements are equivalent:

(1) W is a finite group;

(2) the form B_M is positive definite.

Finite Coxeter groups

We will describe all finite Coxeter groups up to an isomorphism or, by the previous theorem, all Coxeter matrices of finite order such that the associated bilinear form is positive definite.

A classification theorem

If (W, S) is an irreducible finite Coxeter system, then its Coxeter graph $\mathbf{G}$ is isomorphic to one of the following graphs: $A_n (n \geqslant 1)$, $D_n (n \geqslant 4)$, E_6, E_7, E_8, $B_n (n \geqslant 2)$, F_4, G_2, H_3, H_4, $I_2(p)$, ($p = 5$, or $p \geqslant 7$).

Proof. It follows from the preceding theorem that $\mathbf{B}$ is positive definite. Let the system (W, S) associated to the Coxeter graph $\mathbf{G}$ be finite and irreducible. Then it is easy to see that $\mathbf{B} = I - A(\mathbf{G})/2$, where $A(\mathbf{G})$ is the adjacency matrix of the graph $\mathbf{G}$. The matrix $\mathbf{B}$ can be reduced to a diagonal matrix. Let $\lambda_{\mathbf{G}} = \lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_l$ be eigen values of the adjacency matrix $A(\mathbf{G})$. Then the numbers $1 - \lambda_l/2 \geqslant \ldots \geqslant 1 - \lambda_{\mathbf{G}}/2$ will be eigen values of the matrix $\mathbf{B}$. Hence, the matrix $\mathbf{B}$ is positive definite if and only if $\lambda_{\mathbf{G}} < 2$. The generalized Smith theorem describes all the Coxeter graphs whose index is less than 2. They are the ones that have edges labeled with 3, 4, or 6. These are the following graphs: $A_l (l \geqslant 1)$, $D_l (l \geqslant 4)$, E_6, E_7, E_8, $B_l (l \geqslant 2)$, F_4, G_2. □

References

1. *Moskaleva Y.P., Samoĭlenko Y.S.* Introduction to the spectral theory of graphs // Tsentr Uchebnoi Literatury (Kiev). — 2007. — P. 116.

2. *Samoĭlenko Y.S., Tymoshkevich L.M.* On the spectral theory of Coxeter graphs // In the world of Mathematics. — 2009. — Vol. 15. — No. 3 — P. 14-24.

3. *Cvetkovǐć D., Doob M., Sachs H* Spectra of graphs. Theory and Applications // VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften Berlin. — 1980. — P. 368.

4. *Brouwer A.E., Haemers W.H.* Spectra of Graphs // Springer New York Dordrecht Heidelberg London. — 2012. — P. 245.

5. *Goodman F.M., de la Harpe P., Jones V.F.R.* Coxeter Graphs and Towers of Algebras // Springer–Verlag New York Berlin Heidelberg London Paris Tokyo. — 1989. — P. 288.

6. *Smith. J.H.* Some properties of spectrum of a graph // Combinatorial structures and their application, Gordon and Breach. — 1970. — P. 403-406.

7. *Humphreys J.* Introduction to Lie algebras and Representation Theory // Springer-Verlag. — 1972. — P. 186.

8. *Bourbaki N.* Élément de Mathematique. Groupes et Algèbres de Lie. //Masson. — Chapitres 4, 5 et 6. — 1981 — P. 288

9. *Samoĭlenko Y.S., Strelets A.V.* About simple n-kas of subspaces in a Hilbert space // Ukrainian Mathematical Journal. — 2009 — Vol. 61. — No. 12 — P. 1668-1703.

Received: 16.11.2013

УДК 512.55

Швиров В.В.[1], канд. фіз.-мат. наук

Про кількість допустимих послідовностей нерозкладних напівланцюгових кілець з нетеровою діагоналлю.

У роботі вивчаються властивості допустимих послідовностей нерозкладних напівланцюгових кілець з нетеровою діагоналлю та нільпотентним первинним радікалом. Зокрема, отримано формули для знаходження кількості таких послідовностей для випадків $c_1 \in \{1, 2, 3\}$, де c_1 – перший елемент допустимої послідовності.

Ключові слова: напівланцюгове кільце, допустима послідовність, ряд Купіша, числа Каталана.

[1]Луганський національний університет імені Тараса Шевченка, 91011, м. Луганськ, вул. Оборонна,2, e-mail: slavik_asas@mail.ru

Shvyrov V.V.[1], Ph.D.

On the number of admissible sequences for indecomposable serial rings with Noetherian diagonal.

We explore the properties of admissible sequences for indecomposable serial rings with Noetherian diagonal and nilpotent prime radical. The formula for calculating the number such sequences for case $c_1 \in \{1, 2, 3\}$, where c_1 it first element of admissible sequence, are obtained.

Key Words: serial ring, admissible sequence, Kupisch series, Catalan numbers.

[1]Luhansk Taras Shevchenko National Univesity, 91011, Luhansk, Oboronna str. 2, e-mail: slavik_asas@mail.ru

Статтю представив д.ф.-м.н., професор В.В.Кириченко

1 Вступ.

У роботі вивчаються комбінаторні властивості допустимих послідовностей, знайдено звя'зки з числами Каталана, а також алгебраїчне застосування таких послідовностей. Крім того, отримано формули для обчислення кількості допустимих послідовностей у випадках $c_1 = 1$, $c_1 = 2$ або $c_1 = 3$.

Допустимі послідовності виникають при вивченні рядів Купіша напівланцюгових кілець див. [1]. Такі послідовності задовольняють деяким природнім обмеженням, які дозволяють обчислювати їх кількість. За допомогою допустимих послідовностей у роботі проводиться класифікація нерозкладних напівланцюгових кілець з нетеровою діагоналлю та нільпотентним первинним радікалом.

Відповідно до роботи [1] нагадаємо означення допустимої послідовності.

Нехай A напівланцюгове кільце, $e_1, \dots, e_n$ – множина базисних примітивних ідемпотентів, $J = J(A)$ – радікал Джекобсона кільця A. Перелік нерозкладних проективних модулів $Ae_1, \dots, Ae_n$ називається *рядом Купіша* кільця A. Якщо $Je_1 \neq 0$ та $c_i = c(Ae_i)$, де c_i – довжина відповідного модуля, тоді

$$Je_i \equiv Ae_{i-1}/J^{e_i-1}e_{i-1} \ (i = 2, \dots, n),$$

$$Je_1 \equiv Ae_n/J^{e_1-1}e_n.$$

Звідки, маємо

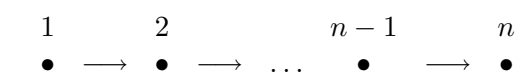
$$2 \leq c_i \leq c_{i-1} + 1, i = 2, \dots, n, \ c_1 \leq c_n + 1. \quad (1)$$

Будь-яка послідовність, яка задовольняє таким нерівностям називається *допустимою послідовністю.*

Хейнс та Вік у роботі [3] встановили, що кількість допустимих послідовностей для нерозкладного базисного напівланцюгового кільця з простим проективним модулем і n попарно неізоморфними нерозкладними проективними модулями ($n \geq 1$) є $(n-1)$-м числом Каталана.

Швиров В.В. у роботі [5] наводить подальші застосування чисел Каталана у теорії напівланцюгових кілець.

Твердження ([5]). *Число класів еквівалентних у розумінні Моріти нерозкладних напівланцюгових кілець із сагайдаком*



© В'ячеслав В. Швиров, 2014

та ізоморфними тілами ендоморфізмів простих A-модулів, дорівнює C_{n-1}.

Означення допустимої послідовності можна записати у еквівалентній формі наступним чином. Нехай $c_1, \dots, c_n$ – допустима послідовність. Запишемо її у зворотньому порядку $c_n, c_{n-1}, \dots, c_1$ та визначимо послідовність $p_1, \dots, p_n$, де $p_1 = c_n$, $p_2 = c_2, \dots, p_n = c_1$.

За цих позначень, нерівності (1) можуть бути записані у вигляді:

$$2 \le p_i \le p_{i+1} + 1, i = 1, \dots, n-1, \qquad p_n \le p_1 + 1. \quad (2)$$

Послідовності, які записані в такій формі будемо називати зворотними допустимими послідовністями.

Такі нерівності природнім чином з'являються у роботі Губарені Н.М., Кириченка В.В. [2]. Нагадаємо деякі означення з цієї роботи.

Означення 1.1. ([2]). Нехай A – напівланцюгове кільце з нетеровою діагоналлю та нільпотентним первинним радікалом. Первинним рядом A-модуля M є

$$M \supset M\mathcal{L} \supset \dots \supset M\mathcal{L}^{k-1} \supset M\mathcal{L}^k = 0,$$

де $\mathcal{L}$ – первинний радикал. Мінімальне число k, таке, що $M\mathcal{L}^k = 0$, називається довжиною первинного ряду, будемо позначати його через $pl(M)$.

Нехай $1 = f_1 + \dots + f_n$ розклад $1 \in A$ у суму ідемпотентів, що відповідають вершинам первинного сагайдаку $PQ(A)$. Будемо позначати $pl_i = pl(f_iA)$ для $i = 1, \dots, n$.

Теорема 1. *([2]) Нехай A – напівланцюгове нерозкладне кільце з нетеровою діагоналлю і нільпотентним первинним радикалом $\mathcal{L}$.*
(a) якщо первинний сагайдак A є ланцюгом:

$$\left\{ \begin{matrix} 1 & & 2 & & & & n-1 & & n \\ \bullet & \longrightarrow & \bullet & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & \bullet & \longrightarrow & \bullet \end{matrix} \right\},$$

тоді $2 \le pl_i \le pl_{i+1} + 1$ для $i = 1, \dots, n-1$ і $pl_n = 1$.
(b) якщо первинний сагайдак A є циклом:

$$\left\{ \begin{matrix} 1 & & 2 & & & & n-1 & & n & & 1 \\ \bullet & \to & \bullet & \to & \dots & \to & \bullet & \to & \bullet & \to & \bullet \end{matrix} \right\},$$

тоді $2 \le pl_i \le pl_{i+1} + 1$ для $i = 1, \dots, n-1$, і $2 \le pl_n \le pl_1 + 1$.

Така нумерація нерозкладних проективних A-модулів для напівланцюгових артінових кілець вперше розглядалася Купішем [4]. Послідовність $f_1A, \dots, f_nA$, впорядкована таким чином і для якої справедливі умови теореми, називається *узагальненим рядом Купіша* напівланцюгового кільця. У випадку (a) він є єдиним, у випадку (b), ряд є єдиним з точністю до циклічної перестановки.

Вважаючи два кільця еквівалентними, якщо вони мають однакові узагальнені ряди Купіша (див. [2]), у роботі [6] доведено наступний результат:

Твердження ([6]). *Кількість класів еквівалентності нерозкладних напівланцюгових кілець з нетеровою діагоналлю та нільпотентним первинним радикалом, первинний сагайдак яких є ланцюгом довжини n, є $(n-1)$-м числом Каталана.*

Цей результат відповідає випадку $c_1 = 1$ ($p_n = 1$, пункт a) теореми 1). Якщо первинний сагайдак кільця A є циклом, тобто $c_1 \ge 2$ ($p_n \ge 2$), то ситуація є більш складною. Проте, у випадках $c_1 = 2$ та $c_1 = 3$ (відповідно $p_n = 2$, $p_n = 3$), вдалося отримати формулу для обчислення кількості допустимих послідовностей.

2 Числа Каталана та допустимі послідовності.

Числа Каталана утворюють послідовність натуральних чисел, яка з'являється в різних комбінаторних задачах. n-те число Каталана C_n можна обчислити за формулою:

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}, \quad n \ge 0.$$

Перші числа Каталана для $n = 0, 1, 2, \dots$ це: 1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, 1430, 4862, ... У відомій монографії Р. Стенлея [8] наводиться біля 70 різних застосувань чисел Каталана.

При дослідженні числових послідовностей зручно використовувати "Онлайн енциклопедію цілих послідовностей" або OEIS (див. [7]). Цей ресурс містить велику кількість послідовностей, які нумеруються посиланнями виду *Annnnnn*. Наприклад, послідовність чисел Каталана має посилання виду A000108 у OEIS.

Позначимо через $T(n, k)$ – кількість допустимих послідовностей довжини n, для яких

$c_1 = k$. Нехай $k \in \{1, 2, 3\}$, за цих умов, якщо $a_i = x$, то наступний елемент a_{i+1}, може приймати значення з множини $\{2, \ldots, x, x+1\}$, $i = 2, \ldots, n$.

Кожному числу $T(n, k)$ поставимо у відповідність кореневе планарне дерево $T_{n,k}$ з коренем k, яке має n поколінь. За побудовою, кожен вузол $c_i = x$ цього дерева буде мати рівно $x + 1$ нащадків, які будуть приймати значення $2, \ldots, x + 1$ відповідно. На рис. 1,2 наведено приклади дерев $T_{4,1}$ та $T_{4,2}$, відповідно. Якщо $n < 10$ для скорочування можна записати допустимі послідовності як: $c_1 c_2 \ldots c_n$ замість $c_1, c_2, \ldots, c_n$. У таких позначеннях, дерево на рис. 1. визначає наступні допустимі послідовності:

1222, 1223, 1232, 1233, 1234.

Дерево $T_{4,2}$ визначає допустимі послідовності:

2222, 2223, 2232, 2233, 2234, 2322, 2323, 2332, 2333, 2334, 2342, 2343, 2344, 2345.

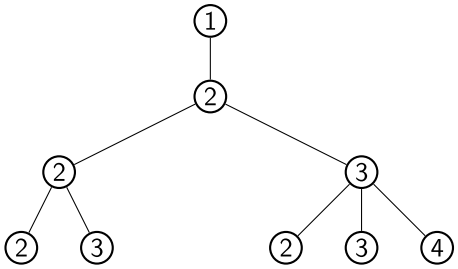


Рис. 1. Дерево $T_{4,1}$.

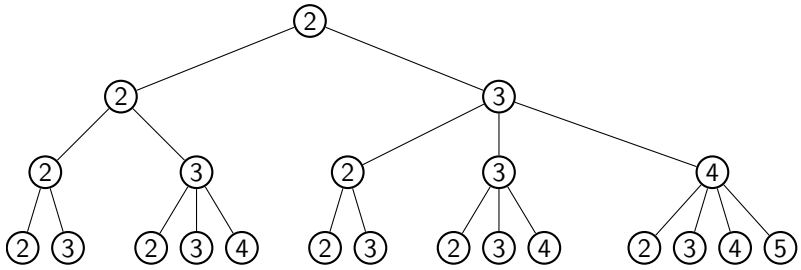


Рис. 2. Дерево $T_{4,2}$.

Якщо $c_1 > 3$, то, зважаючи на нерівність $c_1 \le c_n + 1$, маємо $c_n \ge c_1 - 1$, або $c_n \ge 3$

Наступне твердження доведено у роботі [6], твердження 2 та 3 встановлюють подальші властивості чисел $T_{n,k}$.

Твердження 1. *(див. [6])* $T(n, 1) = C_{n-1}$.

Твердження 2. $T(n, 2) = C_n$.

Доведення. Нехай $T_{n,1}, T_{n,2}$ – дерева побудовані за числами $T(n, 1), T(n, 2)$, відповідно. Легко бачити, що дерево $T_{n,2}$ може бути утворене із дерева $T_{n,1}$ сдвигом його вгору та добудовою ще одного покоління.

Дійсно, нехай $c_1, c_2, \ldots, c_{n+1}$ – довільна допустима послідовність довжини $n + 1$, для якої $c_1 = 1$. За визначенням допустимої послідовності, c_2 задовольняє нерівності:

$$2 \le c_2 \le c_1 + 1,$$

отже $c_2 = 2$. Це означає, що кожній допустимій послідовності довжини $n+1$ та $c_1 = 1$, відповідає допустима послідовність довжини n, для якої $c_1 = 2$. Звідси, за твердженням 1, $T(n, 2) = C_n$.

За визначенням допустимих послідовностей, маємо деякі властивості чисел $T(n, k)$. А саме, для будь-якого $k \in N$, $T(1, k) = 1$; для $k \ge 3$, $T(2, k) = 3$.

Твердження 3. $T(n, 3) = C_{n+1} - C_n$.

Доведення. Потрібно знайти кількість усіх допустимих послідовностей виду $c_1, c_2, \ldots, c_n$ довжини n, для яких $c_1 = 3$.

Нехай $d = c_1, c_2, \ldots, c_{n+1}$ – довільна допустима послідовність довжини $n + 1$, для якої $c_1 = 2$. За визначенням допустимої послідовності, c_2 задовольняє нерівності: $2 \le c_2 \le c_1 + 1$, отже, $c_2 = 2$ або $c_2 = 3$. За твердженням 2, загальна кількість таких послідовностей буде дорівнювати $T(n + 1, 2) = C_{n+1}$.

Кожній послідовності виду d довжини $n+1$ зіставимо послідовність $c_2, \ldots, c_{n+1}$ довжини n, яку отримано відкиданням першого члену c_1. Після цього, отримаємо набір послідовностей, у якому деякі мають перший член 2, а деякі перший член 3. Знову, за твердженням 2, кількість допустимих послідовностей $T(n, 2)$ дорівнює C_n. Отже, із числа C_{n+1} потрібно відняти кількість усіх послідовностей перший член яких дорівнює двом. Звідси,

$$T(n, 3) = C_{n+1} - C_n.$$

Означення 2.1. Запишемо числа $T(n,k)$ у вигляді нескінченної матриці T (див. таблиця 1.), яку будемо називати *матрицею Каталана*. Елементи цієї матриці $t_{ij} = T(n,k)$.

$T(1,1)$	$T(1,2)$	$T(1,3)$	$\dots$
$T(2,1)$	$T(2,2)$	$T(2,3)$	$\dots$
$T(3,1)$	$T(3,2)$	$T(3,3)$	$\dots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$T(n,1)$	$T(n,2)$	$T(n,3)$	$\dots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

Таблиця 1.

Перший стовпчик матриці Каталана містить послідовність чисел Каталана (див. табл. 2), якій відповідає послідовність A000108 у OEIS. Другий стовчик містить послідовнисть чисел Каталана, але зі зміщенням. Числа у третьому стовпці утворюють послідовність A000245 у OEIS, яка має багато застосувань у комбінаториці.

1	1	1	$\dots$
1	2	3	$\dots$
2	5	9	$\dots$
5	14	28	$\dots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
C_{n-1}	C_n	$C_{n+1} - C_n$	$\dots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

Таблиця 2.

Зауважимо, що перші три стовпця матриці Каталана збігаються з діагональними рядками у трикутнику Каталана, він може бути записаний у наступному вигляді (див. рис. 3).

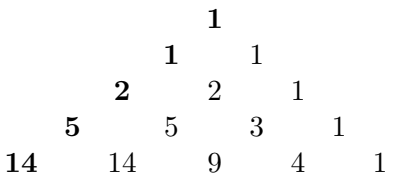


Рис. 3. Трикутник Каталана.

Взагалі, для чисел $T(n,k)$, де $k > 3$ ситуація є більш складною. За визначенням допустимої послідовності $c_n \geq c_1 + 1$, отже, потрібно вже розглядати декілька випадків.

3 Застосування допустимих послідовностей.

Зважаючи на теорему 1, введемо наступну класифікацію напівланцюгових кілець.

Означення 3.1. Нехай A, B – напівланцюгові нерозкладні кільця з нетеровою діагоналлю і нільпотентним первинним радикалом. $s_A = pl_1, \dots, pl_n$ та $s_B = pl_1, \dots, pl_m$ – відповідні допустимі послідовності кілець A і B. Будемо говорити, що кільце A еквівалентно за Купішем кільцю B, якщо $n = m$ та $s_A = s_B$, а саму еквівалентність називати еквівалентністю Купіша.

Наступна теорема встановлює кількість класів за еквівалентністю Купіша у випадках $p_n = 1$, $p_n = 2$ та $p_n = 3$. Цей результат дозволяє класифікувати згадані вище напівланцюгові кільця за їх допустимими послідовностями.

Теорема 2. *Кількість класів за еквівалентністю Купіша, нерозкладних напівланцюгових кілець з нетеровою діагоналлю, нільпотентним первинним радікалом, первинний сагайдак яких має n вершин дорівнює:*

a) C_{n-1}*, якщо* $p_n = 1$*;*

b) C_n*, якщо* $p_n = 2$*;*

c) $\frac{3n}{n+2}C_n$*, якщо* $p_n = 3$*,*

де $p_1, \dots, p_n$ *– допустима послідовність, що визначає еквівалентність.*

Доведення. Для доведення теореми достатньо скористатися твердженнями 1,2 та 3. Дійсно, за теоремою 1, для напівланцюгового кільця з нетеровою діагоналлю, нільпотентним первинним радікалом, первинний сагайдак якого є ланцюгом довжини n, мають місце нерівності:

$$2 \leq pl_i \leq pl_{i+1} + 1,$$

для $i = 1, \dots, n-1$ і $pl_n = 1$.

Кожній допустимій послідовності $p_1, \dots, p_n$ зіставимо зворотню допустиму послідовність $c_1, \dots, c_n$. За твердженням 1, кількість допустимих послідовностей для яких $c_1 = 1$ дорівнює C_{n-1}.

Якщо первинний сагайдак є циклом, тоді $2 \leq pl_i \leq pl_{i+1} + 1$ для $i = 1, \dots, n-1$, і $2 \leq pl_n \leq pl_1 + 1$. Розглянемо випадок, коли

$p_n = 2$. За твердженням 2, кількість допустимих послідовностей $T(n,2)$ дорівнює C_n.

У випадку $p_n = 3$, за твердженням 3, кількість допустимих послідовностей $T(n,3)$ дорівнює $C_{n+1} - C_n$. Звідси, маємо:

$$T(n,3) = C_{n+1} - C_n = \\ = \frac{(2(n+1))!}{(n+1)!(n+2)!} - \frac{(2n)!}{n!(n+1)!} = \\ = \frac{(2n+2))! - (2n)!(n+1)(n+2)}{(n+1)!(n+2)!} = \\ = \frac{(2n)!3n(n+1)}{(n+1)!(n+2)!} = \\ = \frac{(2n)!3n}{n!(n+1)!(n+2)} = \frac{3n}{n+2}C_n.$$

Приклад. Безпосередьо за визначенням допустимої послідовності застосовуючи VBA-макрос обчислено усі допустимі послідовності для значень $T(1,3),\ T(2,3), T(3,3), T(4,3)$.

Таблиця 3. Допустимі послідовності для $k = 3$.

$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$
3	34	345	3456
	33	344	3455
	32	343	3454
		342	3453
		334	3452
		333	3445
		332	3444
		323	3443
		322	3442
			3434
			3433
			3432
			3423
			3422
			3345
			3344
			3343
			3342
			3334
			3333
			3332
			3323
			3322
			3234
			3233
			3232
			3223
			3222
T(1,3)=1	T(2,3)=3	T(3,3)=9	T(4,3)=28

Література

1. F.W. Anderson, K. R. Fuller. *Rings and Categories of modules.* — Springer values, New York and Berlin, 2nd ed., 1992. — 385 p.

2. N. M. Gubareni, V. V. Kirichenko. Serial Rings with T-nilpotent Prime Radical // *Algebras and Representations Theory.* — 2006. — № 9. — P. 147—160.

3. J. O. Hanes, D. D. Wick. The number of admissible sequences for indecomposable serial rings with simple projective module // *Proc. of the Louisianna-Mississippi Section of Math.* Ass. of America, Spring 2000.

4. H. Kupisch. Beitgräde zur Theorie nichthalbeinfacher Ringe mit Minimalbedingung // *Crelles Journal.* — 1959. — V. 201. — P. 100—112.

5. V.V. Shvyrov. On the number of ideals of upper triangular ring // *Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Ser. Physics & Math.* 2007. №2. pp. 36–40.

6. V.V. Shvyrov. On the number of equevalence classes of indecomposable serial rings // *Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Ser. Physics & Math.* 2011. №4. pp. 56–60.

7. N.J.A. Sloane, The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences, Notices Amer. Math. Soc. 50 (2003), 912-915.

8. R.P. Stanley (1999): *Enumerative Combinatorics, Vol. 2.* Cambridge University Press. (pp. 212-229)

Надійшла до редколегії 03.09.2013

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ, МАТЕМАТИЧНА ФІЗИКА ТА МЕХАНІКА

УДК 517.92

БолілийВ.О.[1], к. ф.-м.н.,доц.
Зеленська І.О.[2], аспірант

Система сингулярно збурених диференціальних рівнянь здиференціальною внутрішньою точкою звороту І-го роду

Побудована рівномірна асимптотикарозв'язку системи сингулярно збурених диференціальних рівнянь з диференціальною точкою звороту. Розглядається випадок, коли точка звороту міститься всередині відрізка.
Ключові слова: система сингулярно збурених диференціальних рівнянь, малий параметр, точка звороту,простір без резонансних розв'язків.

[1]Кіровоградський державний педагогічний університет імені Володимира Винниченка, 25006, 1, м. Кіровоград, вул. Шевченка, 1, e-mail: basilb@mail.ru
[2]Кіровоградський державний педагогічний університет імені Володимира Винниченка, 25006, 1, м. Кіровоград, вул. Шевченка, 1, e-mail: Kopchuk@gmail.com

V. O. Boliliy[1], Ph:D (Physics & Mathematics)
I. O.Zelenska[2], Postgraduate student

System of singularly differential equations with differential internal turning point of the I-st kind

Uniform asymptotic of solution is constructed for a system of singularly perturbed differential equations with a turning point. The paper investigates the case when the turning point is inside of segment.
Key Words: system of singular perturbed differential equations, small parameter,turning pointspace of the nonresonance solutions.

[1]KirovohradVolodymyrVynnychenko State Pedagogical University,25006, Kirovohrad,Shevchenkastr, 1, e-mail: basilb@mail.ru

[2]KirovohradVolodymyrVynnychenko State Pedagogical University,25006, Kirovohrad,Shevchenkastr, 1, e-mail: Kopchuk@gmail.com

Статтю представив д.ф.-м.н., проф.,академік НАН України М.О. Перестюк

Вступ

Сучасні задачі математичного моделювання все частіше потребують асимптотичного аналізу досліджуваних моделей і одержання так званої «асимптотичної моделі»[8]. Окремим класом таких моделей, є системи з малим параметром при старшій похідній, спектр граничного оператора яких містить кратні і тотожно рівня нулю елементи. Дослідження такого типу задач і побудова асимптотичного розв'язку на заданому відрізку, що включає точку звороту, вносить певні труднощі і проблеми у процес побудови асимптотики[2].

В роботі [4] для неоднорідного рівняння Ліувілля була побудована рівномірна асимптотика розв'язку (РАР), що придатна на всьому відрізку $[-l;l]$. Автор зауважує, що найбільш вдалою істотно особливою функцією для побудови РАР в даному випадку є ІОФ $\nu(t)$. В [5] для класу скалярних рівнянь третього порядку з псевдодиференціальною точкою звороту одержано загальний розв'язок на відрізку $[-l;l]$,детально описані властивості регуляризуючої функції на кожному компакті відрізку.

В даній роботі узагальнимо розроблений метод навипадок внутрішньої точки звороту і побудуємо РАР ССЗДР з диференціальною точкою звороту І-го роду[3].

Постановка задачі

Розглянемо ССЗДР:

$$\varepsilon Y'(x,\varepsilon) - A(x,\varepsilon)Y(x,\varepsilon) = h(x), \qquad (1)$$

$\varepsilon \to 0$,
$Y(x,\varepsilon) = colon\left(y_1(x,\varepsilon), y_2(x,\varepsilon), y_3(x,\varepsilon)\right)$ - шукана вектор-функція,
$h(x) = colon\left(0, 0, h(x)\right)$ - задана вектор-функція,

$$A(x,\varepsilon) = A_0(x) + \varepsilon A_1,$$

- відома матриця, де

© В.О. Болілий, І.О. Зеленська, 2014

$$A_0(x)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -b(x) & -\tilde{x}a(x) & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_1(x)=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Векторне рівняння (1) будемо досліджувати за умови, що

$$\begin{aligned} &a(x)=x\tilde{a}(x),\ \tilde{a}(x)<0,\quad b(x)<0, \\ &x\in C^{\infty}[-l;l]. \end{aligned} \tag{2}$$

Виходячи із вище заданих умов, стосовно розташування точки звороту на заданому відрізку, таку точку звороту прийнято називати *внутрішньою точкою звороту*.

За умови $\varepsilon=0$ одержимо вироджену систему:

$$-A(x,0)Y(x,0)=h(x). \tag{3}$$

Характеристичне рівняння, що відповідає ССЗДР (1) має вигляд:

$$\begin{aligned} &\left|A(x)-\lambda E\right|=\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ -b(x) & -a(x) & -\lambda \end{vmatrix}= \\ &=\lambda\left(-\lambda^2-x\tilde{a}(x)\right)=0. \end{aligned} \tag{4}$$

Корені рівняння (4) мають вигляд

$$\lambda_1=0,\qquad \lambda_{2,3}=\pm\sqrt{x\tilde{a}(x)}\ .$$

РегуляризаціяССЗДР

Згідно розробленого методу з метою виявлення і збереження всіх ІОФ введемо нову змінну $t=\varepsilon^{-2/3}\cdot\varphi(x)\equiv\mu^{-2}\cdot\varphi(x)$, де регуляризуюча функція $\varphi(x)$ підлягає визначенню.

Після введення нової змінної, шукана вектор-функція прийме вигляд $\tilde{Y}(x,t,\varepsilon)$, а розширення ССЗДР буде відбуватися за умови

$$\tilde{Y}(x,t,\varepsilon)\Big|_{t=\mu^{-2}\cdot\phi(x)}\equiv Y(x,t,\varepsilon).$$

Тоді одержимо розширене векторне рівняння:

$$\begin{aligned} &\tilde{L}_{\varepsilon}\,\tilde{y}(x,t,\varepsilon)\equiv\mu\varphi'(x)\frac{\partial\tilde{Y}(x,t,\varepsilon)}{\partial t}+ \\ &+\mu^3\frac{\partial\tilde{Y}(x,t,\varepsilon)}{\partial x}-A(x,\varepsilon)\tilde{y}(x,t,\varepsilon)=h(x). \end{aligned} \tag{1.1}$$

Простір безрезонансних розв'язків. Для того щоб (1.1) була однозначно вирішена, необхідно виділити клас функцій, засобами яких можливо це здійснити. Побудуємо новий простір

$$\begin{aligned} D_k(x,t,\varepsilon)=&\begin{pmatrix} \alpha_{k1}(x,\varepsilon) \\ \alpha_{k2}(x,\varepsilon) \\ \alpha_{k3}(x,\varepsilon) \end{pmatrix}U_k(t)+ \\ &+\mu\begin{pmatrix} \beta_{k1}(x,\varepsilon) \\ \beta_{k2}(x,\varepsilon) \\ \beta_{k3}(x,\varepsilon) \end{pmatrix}U_k'(t), \end{aligned}$$

дефункції $U_1(t)=Ai(t)$ та $U_2(t)=Bi(t)$ - функції Ейрі-Лангера.

Для побудови розв'язків однорідної системи будемо використовувати другу форму рівняння Ейрі

$$U''(t)-tU(t)=0,$$

яке прийнято називати рівнянням Ейрі-Лангера[1,2,7].

При побудові формальних частинних розв'язків неоднорідної системи використаємо функцію Скорера, тобто ІОФ $\nu(t)$ та її похідну. Розглянемо підпростір $B_j(x)$, елементами якого є $f_j\nu(t)$ та $g_j\nu'(t)$, $j=\overline{1;3}$.

$$B(x,t,\varepsilon)=\begin{pmatrix} f_1(x,\varepsilon) \\ f_2(x,\varepsilon) \\ f_3(x,\varepsilon) \end{pmatrix}\nu(t)+\mu\begin{pmatrix} g_1(x,\varepsilon) \\ g_2(x,\varepsilon) \\ g_3(x,\varepsilon) \end{pmatrix}\nu'(t)\cdot$$

Елемент множини функцій $\Omega(x)=colon\,(\omega_1(x),\omega_2(x),\omega_3(x))$, які є розв'язками виродженого рівняння, має вигляд $\omega_{01}\cdot\exp^{\left\{\int\frac{b(x)}{a(x)}dx\right\}}$.

З цих підпросторів побудуємо новий простір як пряму суму:

$$Y(x)=\bigoplus_{k=1,2;\,j=1}^{3} D_{ij}(x)\bigoplus_{j=1}^{3}B_j(x)\bigoplus_{j=1}^{3}\Omega_j(x). \qquad (1.2)$$

Запишемо довільний елемент цього простору і будемо шукати асимптотику розв'язку розширеного векторного рівняння (1.1) у вигляді

$$\tilde{y}(x,t,\varepsilon)=\sum_{k=1}^{2}D_k(x,t,\varepsilon)+B(x,t,\varepsilon)+\Omega(x)=$$

$$=\begin{pmatrix}\alpha_{k1}(x,\varepsilon)\\ \alpha_{k2}(x,\varepsilon)\\ \alpha_{k3}(x,\varepsilon)\end{pmatrix}U_k(t)+\mu\begin{pmatrix}\beta_{k1}(x,\varepsilon)\\ \beta_{k2}(x,\varepsilon)\\ \beta_{k3}(x,\varepsilon)\end{pmatrix}U_k'(t)+$$

$$+\begin{pmatrix}f_1(x,\varepsilon)\\ f_2(x,\varepsilon)\\ f_3(x,\varepsilon)\end{pmatrix}v(t)+\mu\begin{pmatrix}g_1(x,\varepsilon)\\ g_2(x,\varepsilon)\\ g_3(x,\varepsilon)\end{pmatrix}v'(t)+\begin{pmatrix}\omega_1(x)\\ \omega_2(x)\\ \omega_3(x)\end{pmatrix}.$$

Тут $\alpha_{ks}(x,\varepsilon)$, $\beta_{ks}(x,\varepsilon)$, $f_s(x,\varepsilon)$, $g_s(x,\varepsilon)$, $\omega_s(x,\varepsilon)$, $s-$ аналітичні функції відносно малого параметра $\varepsilon>0$ і нескінченно диференційовані за змінною $x\in[-l;l]$, що підлягають визначенню. $v(t)$ - функція Скорера.

Вивчимо дію розширеного оператора $\tilde{L}_\varepsilon$ на вектор-функцію $D_k(x,t,\varepsilon)$ і підставимо результат цієї дії в однорідне розширене рівняння (1.1). Отримаємо рівність

$$\begin{aligned}&\tilde{L}_\varepsilon\left(\alpha_k(x,\varepsilon)U_k(t)+\mu\beta_k(x,\varepsilon)U_k'(t)\right)=\\&=\mu\alpha_k(x,\varepsilon)\varphi'(x)U_k'(t)-\\&-\beta_k(x,\varepsilon)\varphi'(x)\varphi(x)U_k(t)-\\&-A(x,\varepsilon)\alpha_k(x,\varepsilon)U_k(t)-\\&-\mu A(x,\varepsilon)\beta_k(x,\varepsilon)U_k'(t)+\\&+\mu^3\alpha_k'(x)U_k(t)+\mu^4\beta_k'(x)U_k'(t)=0.\end{aligned}$$

Зрівнявши коефіцієнти біля ІОФ $U_k(t),k=1,2$ та їх похідних, отримаємо наступні векторні рівняння:

$$U_k'(t):\alpha_k(x,\varepsilon)\varphi'(x)-[A_0(x)+\mu^3A_1]\times \qquad (1.4)$$
$$\times\beta_k(x,\varepsilon)=-\mu^3\beta_k'(x,\varepsilon),$$

$$U_k(t):\beta_k(x,\varepsilon)\phi(x)\phi'(x)-[A_0(x)+$$
$$+\mu^3A_1]\alpha_k(x,\varepsilon)=-\mu^3\alpha_k'(x,\varepsilon).$$

Зауважимо, що для того, щоб одержані алгебраїчні системи рівнянь були регулярно збуреними відносно малого параметра $\mu^3>0$, запишемо їх у вигляді наступної системи алгебраїчних рівнянь ($k=1,2$)

$$\begin{cases}\alpha_{k1}(x,\varepsilon)\varphi'(x)=\mu^3\left[\beta_{k2}(x,\varepsilon)-\right.\\ \left.-\beta_{k1}'(x,\varepsilon)\right],\\ \alpha_{k2}(x,\varepsilon)\varphi'(x)-\beta_{k3}(x,\varepsilon)=\\ =-\mu^3\beta_{k2}'(x,\varepsilon),\\ \varphi'(x)\alpha_{k3}(x,\varepsilon)+b(x)\beta_{k1}(x,\varepsilon)+\\ +a(x)\beta_{k2}(x,\varepsilon)=-\mu^3\beta_{k3}'(x,\varepsilon),\\ \beta_{k1}(x,\varepsilon)\varphi(x)\varphi'(x)=-\mu^3\left[\alpha_{k1}'(x,\varepsilon)-\right.\\ \left.-\alpha_{k2}(x,\varepsilon)\right],\\ \beta_{k2}(x,\varepsilon)\varphi(x)\varphi'(x)-\alpha_{k3}(x,\varepsilon)=\\ =-\mu^3\alpha_{k2}'(x,\varepsilon),\\ \beta_{k3}(x,\varepsilon)\varphi(x)\varphi'(x)+b(x)\alpha_{k1}(x,\varepsilon)+\\ +a(x)\alpha_{k2}(x,\varepsilon)=-\mu^3\alpha_{k3}'(x,\varepsilon).\end{cases} \qquad (1.5)$$

Формалізм побудови однорідної розширеної системи

Оскільки система (1.5) регулярно збурена, то її розв'язок шукаємо у вигляді наступних рядів вектор-функцій ($k=1,2$):

$$\begin{aligned}\alpha_k(x,\varepsilon)&=\sum_{r=0}^{+\infty}\alpha_{kr}(x),\\ \beta_k(x,\varepsilon)&=\sum_{r=0}^{+\infty}\beta_{kr}(x)\end{aligned} \qquad (2.1)$$

Для визначення компонент вектор-функцій $\alpha_{kr}(x)=colon\left(\alpha_{1kr}(x),\alpha_{2kr}(x),\alpha_{3kr}(x)\right)$ та $\beta_{kr}(x)=colon\left(\beta_{1kr}(x),\beta_{2kr}(x),\beta_{3kr}(x)\right)$ отримаємо наступні рекурентні системи рівнянь:

$$\begin{aligned}&\Phi(x)Z_{k0}(x)=0,\\ &\Phi(x)Z_{kr}(x)=-FZ_{k(r-3)}(x),\quad r\ge 3\end{aligned} \qquad (2.2)$$

Тут

$$Z_{kr}(x)=colon\left(\alpha_{1kr},\alpha_{2kr},\alpha_{3kr},\beta_{1kr},\beta_{2kr},\beta_{3kr}\right)$$

$$\Phi(x)=\begin{pmatrix} m & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & m & b(x) & x\tilde{a}(x) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -n & 0 \\ b(x) & x\tilde{a}(x) & 0 & 0 & 0 & -n \end{pmatrix}$$

- де $m=\varphi'(x)$, а $n=-\varphi(x)\varphi'(x)$.

Обчисливши визначник $\Phi(x)$, визначимо функцію $\varphi(x)$ як розв'язок задачі

$$\left[\varphi'(x)\right]^2\varphi(x)=-a(x)\equiv -x\tilde{a}(x), \quad \varphi(0)\neq 0. \tag{2.3}$$

Розв'язком задачі (2.3) буде

$$\text{функція } \varphi(x)=\begin{cases} -\left(\frac{3}{2}\int_0^x\sqrt{-x\tilde{a}(x)}dx\right)^{2/3}, & x\geq 0, \\ \left(\frac{3}{2}\int_0^x\sqrt{x\tilde{a}(x)}dx\right)^{2/3}, & x<0. \end{cases}$$

Функція $\varphi(x)$ має такі властивості:

- $\varphi(x)\in C^{\infty}[-l;l]$, регуляризуюча функція є нескінченно диференційованою на заданому відрізку;
- $\varphi(0)=0$ - початкова умова для функції $\varphi(x)$;
- $\varphi(x)$ монотонно спадає на заданому відрізку;
- $\varphi(x)>0$; *коли* $x\in[-l;0]$ і $\varphi(x)<0$; *коли* $x\in[0;l]$.

Оскільки $\det\Phi(x)\equiv 0$, то існує нетривіальний розв'язок однорідної системи (1.4) вигляду

$$Z_{0k}(x)=\begin{pmatrix} 0, \\ \frac{1}{\varphi'(x)}\beta_{k30}(x), \\ -\frac{a(x)}{\varphi'(x)}\beta_{k20}(x), \\ 0, \\ \beta_{k20}(x), \\ \beta_{k30}(x) \end{pmatrix} \tag{2.4}$$

де $\beta_{k0i}(x)$, $i=\overline{1;3}$, $k=1,2$ – до певного часу довільні, досить гладкі функції коли $x\in[-l;l]$.

Займемось розв'язуванням неоднорідних систем (2.2). Спочатку розглянемо ці системи, коли $r=3$. Врахувавши одержаний розв'язок (2.4), будемо мати

$$\begin{cases} \varphi'(x)\alpha_{k13}(x)=\beta_{k20}(x)-\beta'_{k10}(x)\equiv \\ \equiv\beta_{k20}(x), \\ \varphi'(x)\alpha_{k23}(x)-\beta_{k33}(x)= \\ =-\beta'_{k20}(x), \\ \varphi'(x)\alpha_{k33}(x)+b(x)\beta_{k13}(x)+ \\ +a(x)\beta_{k23}(x)=-\beta'_{k30}(x), \end{cases} \tag{2.5}$$

та

$$\begin{cases} \varphi(x)\varphi'(x)\beta_{k13}(x)=-\alpha'_{k10}(x)+ \\ +\alpha_{k20}(x)\equiv-\alpha_{k20}(x)\equiv \\ \equiv-\left[\varphi'(x)\right]^{-1}\beta_{k30}(x), \\ \varphi(x)\varphi'(x)\beta_{k23}(x)-\alpha_{k33}(x)= \\ =-\alpha'_{k20}(x)\equiv\frac{d}{dx}\left(\left[\varphi'(x)\right]^{-1}\beta_{k30}(x)\right), \\ \varphi(x)\varphi'(x)\beta_{k33}(x)+b(x)\alpha_{k13}(x)+ \\ +a(x)\alpha_{k23}(x)=-\alpha'_{k30}(x). \end{cases} \tag{2.6}$$

З перших рівнянь систем (2.5) і (2.6) визначимо функції $\alpha_{k13}(x)$ та $\beta_{k13}(x)$. Тоді системи (2.5) і (2.6) набудутьвигляду

$$\begin{cases} \varphi'(x)\alpha_{k23}(x)-\beta_{k33}(x)=-\beta'_{k20}(x), \\ a(x)\alpha_{k23}(x)+\varphi(x)\varphi'(x)\beta_{k33}(x)= \\ =-\alpha'_{k30}(x)-b(x)\alpha_{k13}(x), \end{cases} \tag{2.7}$$

та

$$\begin{cases} -\alpha_{k33}(x)+\varphi(x)\varphi'(x)\beta_{k23}(x) = \\ = -\alpha'_{k20}(x) \equiv -\dfrac{d}{dx}\left(\left[\varphi'(x)\right]^{-1}\beta_{k30}(x)\right), \\ \varphi'(x)\alpha_{k33}(x)+a(x)\beta_{k23}(x) = \\ = -\beta'_{k30}(x)-b(x)\beta_{k13}(x). \end{cases} \quad (2.8)$$

Для відшукання всіх лінійно незалежних розв'язків системи (1.4) скористаємось довільністю функцій $\beta_{ks0}(x)=\beta^0_{k30}\cdot\beta_{k30}(x)=0,$ де $\beta^0_{ks0}(x)$ - довільні сталі, $\tilde{\beta}_{ks0}(x)$ - частинні, досить гладкі для всіх $x\in[-l,l]$, розв'язки однорідних рівнянь (2.7) і (2.8). При такому визначенні вектор-функцій $Z_{k0}(x)$ існують розв'язки неоднорідних систем алгебраїчних рівнянь вигляду

$$Z_{k3}(x)=\begin{bmatrix} z_{k13}(\varphi'(x),\beta_{k20}(x)) \\ z_{k23}(\varphi'(x),\beta_{k20}(x),\beta_{k33}(x)) \\ z_{k33}(\varphi(x),\varphi'(x),\beta_{k23}(x),\beta_{k30}(x)) \\ z_{k43}(\varphi(x),\varphi'(x),\beta_{k20}(x)) \\ \mathrm{z}_{k53=}\beta_{k21}(x) \\ \mathrm{z}_{k63}=\beta_{k31}(x) \end{bmatrix},$$

при чому $\beta_{k21}(x)$ та $\beta_{k31}(x)$, як і в (2.5), до певного часу довільні, достатньо гладкі функції для всіх $x\in[-l,l]$.

Продовжуючи далі розв'язувати системи алгебраїчних рівнянь (2.7) і (2.8) при $r>3$, методом математичної індукції можна показати, що ці системи рівнянь асимптотично коректні в такому розумінні. Якщо вимагати існування розв'язків систем рівнянь (2.7) і (2.8) при $r=\overline{0;q}$, то кожна з цих систем при $r=\overline{0;q-3}$, визначається з точністю до двох довільних сталих $\beta_{k21}(x)$ та $\beta_{k31}(x)$, які утворюють довільний вектор $\beta^0_{ks0}(x)=colon(0,\beta^0_{k2r}(x),\beta^0_{k3r}(x))$.

Висновок 1. Таким чином, продовжуючи далі розв'язувати ітераційні системи рівнянь (2.6) і (2.7), одержимо два лінійно незалежних розв'язки системи (1) вид

$$D_k(x,\mathrm{t},\varepsilon)=\sum_{r=0}^{\infty}\varepsilon^r\alpha_{kr}(x,\varepsilon)+ \\ +\varepsilon^{\frac{1}{3}}\beta_k(x,\varepsilon)\,\mathrm{U}'_k(\mathrm{t})],\quad k=1,2 \quad (2.9)$$

де $\alpha_{kr}(x)=\mathrm{colon}\left(\alpha_{k1r}(x),\alpha_{k2r}(x),\alpha_{k3r}(x)\right)$ і $\beta_{kr}(x)=\mathrm{colon}\left(\beta_{k1r}(x),\beta_{k2r}(x),\beta_{k3r}(x)\right)$ - відомі вектор-функції.

Проведемо звуження даного розв'язку при $t=\varepsilon^{-\frac{2}{3}}\cdot\varphi(x)$ і $k=1;2,$ тоді одержимо розв'язки

$$D_k(x,\varepsilon^{-\frac{2}{3}}\varphi(x),\varepsilon)=\sum_{r=0}^{\infty}\varepsilon^r[\alpha_{kr}(x)\times \\ \times\mathrm{U}_k(\varepsilon^{-\frac{2}{3}}\varphi(x))+\varepsilon^{\frac{1}{3}}\beta_k(x,\varepsilon)\,\mathrm{U}'_k(\varepsilon^{-\frac{2}{3}}\varphi(x))], \quad (2.10)$$

ретій формальний розв'язок однорідного векторного рівняння (1.1) будуємо у вигляді ряду

$$\omega(x,\varepsilon)\equiv\sum_{r=0}^{\infty}\varepsilon^r\omega_r(x)\equiv\begin{pmatrix}\sum_{r=0}^{\infty}\varepsilon^r\omega_{1r}(x), \\ \sum_{r=0}^{\infty}\varepsilon^r\omega_{2r}(x), \\ \sum_{r=0}^{\infty}\varepsilon^r\omega_{3r}(x),\end{pmatrix}. \quad (2.11)$$

Підставивши (2.11) в розширений оператор $\tilde{L}_\varepsilon=0$, отримаємо наступну рекурентну систему векторних рівнянь:

$$A_0(x)\omega_0(x)=0, \quad (2.12)$$
$$A_r(x)\omega_r(x)=-A_1(x)\omega_{(\mathrm{r}-1)}(x)+ \\ +\omega'_{(\mathrm{r}-1)}(x),\quad \mathrm{r}\geq 1.$$

Дослідимо розв'язок однорідного векторного рівняння $A_0(x)\omega_0(x)=0$. Отримаємо $\omega_{03}(x)\equiv 0$ і систему двох рівнянь

$$\begin{cases}\omega'_{01}(x)-\omega_{02}(x)=0, \\ -x\tilde{a}(x)\omega_{02}(x)+\mathrm{b}(x)\omega_{01}(x)=0.\end{cases}$$

З цієї системи отримаємо наступне скалярне диференціальне рівняння:

$$-x\tilde{a}(x)\omega'_{01}(x)+\mathrm{b}(x)\omega_{01}(x)=0. \quad (2.13)$$

Розв'язок однорідного рівняння (2.13) має вигляд

$$\omega_{01}(x)=\omega^0_{01}\cdot\exp\left\{\int\frac{b(x)}{x\tilde{a}(x)}dx\right\}, \quad (2.14)$$

де ω^0_{01} - довільна стала.

До цього часу ми не використовували умову на коефіцієнт $b(x)$. З урахуванням того, що $b(x)<0$, розв'язок (2.14) не є гладкою функцією, але його можна використовувати для побудови третього формального розв'язку. Оскільки $\omega_{02}(x)=\omega'_{01}(x)$, то третій формальний розв'язок однорідної системи (1.1) запишемо у вигляді:

$$\omega_0(x)=\begin{pmatrix}\omega_{01}^0\cdot\exp\left\{\int\frac{b(x)}{x\tilde{a}(x)}dx\right\},\\ \omega_{01}^0\cdot\frac{b(x)}{x\tilde{a}(x)}\cdot\exp\left\{\int\frac{b(x)}{x\tilde{a}(x)}dx\right\},\\ 0\end{pmatrix}.$$

Висновок 2. Продовжуючи далі розв'язувати системи рівнянь (2.12) поступово визначимо всі розв'язки $\omega_r(x)$.

Побудова формальних частинних розв'язків неоднорідної розширеної системи

На наступному кроці вивчимо дію розширеного оператора $\tilde{L}_\varepsilon$ на вектор-функцію $B(x,\mathrm{t},\varepsilon)$. Отримаємо

$$\begin{aligned}&\tilde{L}_\varepsilon(f(x,\varepsilon)v(t)+\mu\,\mathrm{g}(x,\varepsilon)v'(t)+\omega(x,\varepsilon))=\\&=\mu f(x,\varepsilon)\varphi'(x)v(t)+\mathrm{g}(x,\varepsilon)\varphi'(x)\varphi(x)v(t)-\\&-\mathrm{A}(x,\varepsilon)\,\mathrm{f}(x,\varepsilon)v(t)-\mu\,\mathrm{A}(x,\varepsilon)\,\mathrm{g}(x,\varepsilon)v'(t)+\\&+\mu^3f'(x)v(t)+\mu^4g'(x)v'(t)+\mu^2\varphi'(x)\,\mathrm{g}(x)\pi^{-1}\\&+\mu^3\omega'(x)-\mathrm{A}(x,\varepsilon)\omega(x)=\mathrm{h}(x).\end{aligned}$$

Зрівняємо коефіцієнти біля істотно особливої функції $v(\mathrm{t})$ та її похідної, як в (1.3), й будемо вимагати, щоб одержані системи рівнянь були регулярно збуреними відносно малого параметра μ. Тоді будемо мати

$$\begin{aligned}&v'(\mathrm{t}):f(x,\varepsilon)\varphi'(x)-\left[A_0(x)+\mu^3A_1\right]g(x,\varepsilon)=\\&=-\mu^3g'(x,\varepsilon),\\&v(\mathrm{t}):g(x,\varepsilon)\varphi(x)\varphi'(x)-\left[A_0(x)+\mu^3A_1\right]\times\\&\times f(x,\varepsilon)=-\mu^3f'(x,\varepsilon),\end{aligned}\quad(3.1)$$

$$\begin{aligned}&\mu^3\omega'(x)-\mathrm{A}(\mathrm{x},\varepsilon)\omega(x)=h(x)-\\&-\mu^2\varphi'(x)\,\mathrm{g}(x)\pi^{-1}.\end{aligned}\quad(3.2)$$

За аналогією з попереднім пунктом можна показати, що система векторних рівнянь (3.1) регулярно збурена. Тому її розв'язок шукаємо у вигляді рядів вектор-функцій

$$\begin{aligned}f(x,\varepsilon)&=\sum_{r=0}^{+\infty}\mu^r f_r(x),\\ g(x,\varepsilon)&=\sum_{r=0}^{+\infty}\mu^r g_r(x),\\ \omega(x,\varepsilon)&=\sum_{r=0}^{+\infty}\mu^r\omega_r(x).\end{aligned}\quad(3.3)$$

Для визначення компонент вектор-функцій $f_r(\mathrm{x})=colon(\mathrm{f}_{1r}(x),\mathrm{f}_{2r}(x),\mathrm{f}_{3r}(x))$ та $g_r(\mathrm{x})=colon(g_{1r}(x),g_{2r}(x),g_{3r}(x))$ отримаємо наступні рекурентні системи рівнянь:

$$\begin{aligned}&\Phi(x)Z_0^{част.}(x)=0,\\&\Phi(x)Z_r^{част.}(x)=-Z_{r-3}^{част.}(x),\quad \mathrm{r}\ge 3,\end{aligned}\quad(3.4)$$

$$\text{де } Z_0^{част.}(\mathrm{x})=\begin{pmatrix}f_{1r}(x)\\f_{2r}(x)\\f_{3r}(x)\\g_{1r}(x)\\g_{2r}(x)\\g_{3r}(x)\end{pmatrix}.$$

Оскільки $\det\Phi(x)\equiv 0,$ то отримаємо нетривіальний розв'язок однорідної системи (3.4) вигляд

$$Z_0^{част.}(x)=\begin{pmatrix}0\\\frac{1}{\varphi'(x)}\mathrm{g}_{30}(x)\\-\frac{a(x)}{\varphi'(x)}\mathrm{g}_{20}(x)\\0\\\mathrm{g}_{20}(x)\\\mathrm{g}_{30}(x)\end{pmatrix},\quad(3.5)$$

$g_{i0}, i=1;2$ - до певного часу довільні, досить гладкі функції при $x\in[-l,l]$.

Так як і в (2.7)-(2.8), отримаємо дві системи рівнянь. Тому, щоб не повторюватись, зробимо наступний висновок: на першому кроці праві частини одержаних систем прості, тому за рахунок довільності функцій $g_{2r}^0(x)$ та $g_{3r}^0(x)$ існують розв'язки систем вигляду (3.5). На наступних ітераційних кроках праві частини будуть ускладнюватись, проте ми завжди зможемо добитись існування гладких розв'язків цих систем за рахунок довільності вище вказаних функцій.

Продовжуючи далі розв'язувати ітераційні системи алгебраїчних рівнянь при $r>1$, можна показати, що ці системи рівнянь асимптотично коректні. Якщо вимагати існування розв'язків систем рівнянь при $r=\overline{0;q},$ то кожна з цих систем при $r=\overline{0;q-3}$, визначається з точністю до двох довільних сталих $g_{2r}^0(x)$ та $g_{3r}^0(x)$, які утворюють

довільний вектор $g_r^0(x) = colon(0, g_{2r}^0(x), g_{3r}^0(x))$.

Третій формальний розв'язок для векторного рівняння (1.1) отримаємо з (3.2) у вигляді:

$$\overline{\omega}(x,\varepsilon) = \sum_{r=0}^{+\infty} \varepsilon^r \overline{\omega}_r(x) \equiv \begin{pmatrix} \sum_{r=0}^{+\infty} \varepsilon^r \overline{\omega}_{1r}(x) \\ \sum_{r=0}^{+\infty} \varepsilon^r \overline{\omega}_{2r}(x) \\ \sum_{r=0}^{+\infty} \varepsilon^r \overline{\omega}_{3r}(x) \end{pmatrix}. \qquad (3.6)$$

Для визначення вектор-функцій $\overline{\omega}(x)$ одержимо рекурентні системи рівнянь

$$-A_0(x)\overline{\omega}_r(x) = 0 = h(x),\ r = 0;1,$$

$$-A_0(x)\overline{\omega}_r(\mathrm{x}) = h(x) - \pi^{-1}\varphi'(x)\,\mathrm{g}_{(\mathrm{r}-2)}(x),\ r = 2,$$

$$\overline{\omega}'_{(\mathrm{r}-3)}(x) - \mathrm{A}_0(x)\overline{\omega}_r(x) = h(x) -$$

$$-\pi^{-1}\varphi'(x)\,\mathrm{g}_{(\mathrm{r}-2)}(x) - A_1\overline{\omega}_{(\mathrm{r}-3)}(x),\ r \geq 3.$$

Тут $\overline{\omega}_r(x) = colon(\overline{\omega}_{1r}(x), \overline{\omega}_{2r}(x), \overline{\omega}_{3r}(x))$ - невідома вектор-функція.

Висновок 3. Побудовано частинний розв'язок розширеного рівняння (1.1) у вигляді формальних рядів (3.3)

$$\overline{\mathrm{y}}(x,t,\varepsilon) = \sum_{r=0}^{\infty} \varepsilon^r \left[f_r(x)\nu(t) + \right.$$

$$\left. + \varepsilon^{\frac{1}{3}} g_r(x)\nu'(t) + \overline{\omega}_r(x) \right].$$

Звуження цього розв'язку при $t = \varepsilon^{-\frac{2}{3}} \cdot \varphi(x)$, тобто ряд

$$\overline{y}(x,t,\varepsilon) = \sum_{r=0}^{\infty} \varepsilon^r \left[f_r(x)\nu(\varepsilon^{-\frac{2}{3}} \cdot \varphi(x)) + \right.$$

$$\left. + \varepsilon^{\frac{1}{3}} g_r(x)\nu'(\varepsilon^{-\frac{2}{3}} \cdot \varphi(x)) \right] + \sum_{r=0}^{\infty} \varepsilon^r \overline{\omega}_r(x)$$

є формальним частинним розв'язком ССЗДР(1).

Оцінка залишкових членів асимптотики розв'язку

Для того, щоб стверджувати про асимптотичний характер побудованого розв'язку (3.9) необхідно дати оцінку залишкових членів цих розв'язків. Оскільки ІОФ входять в цей розв'язок як множники, тому з метою одержання відповідних оцінок розв'язків достатньо оцінити залишкові члени формальних рядів (2.1), (3.3), (3.6).

Формальні розв'язки розширеної задачі представимо у вигляді тотожностей:

$$\alpha_{kq}(x,\varepsilon) \equiv \tilde{\alpha}_{kq}(x,\varepsilon) + \varepsilon^{q+1}\tilde{\xi}_{\alpha(\mathrm{q}+1)}(x,\varepsilon),$$

$$\beta_{kq}(x,\varepsilon) \equiv \tilde{\beta}_{kq}(x,\varepsilon) + \varepsilon^{q+1}\tilde{\xi}_{\beta(\mathrm{q}+1)}(x,\varepsilon),$$

$$\tilde{\alpha}_{kq}(x,\varepsilon) = \sum_{r=0}^{q} \varepsilon^r \alpha_{kr}(x,\varepsilon),$$

$$\tilde{\beta}_{kq}(x,\varepsilon) = \sum_{r=0}^{q} \varepsilon^r \beta_{kr}(x,\varepsilon)$$

де - часткові q - суми рядів, а $\varepsilon^{q+1}\tilde{\xi}_{\alpha(\mathrm{q}+1)}(x,\varepsilon)$ та $\varepsilon^{q+1}\tilde{\xi}_{\beta(\mathrm{q}+1)}(x,\varepsilon)$ - залишкові члени рядів.

Підставимо ці ряди у векторні рівняння (1.4). Зауважимо, що коефіцієнти $\tilde{\alpha}_{kq}(x,\varepsilon)$ і $\tilde{\beta}_{kq}(x,\varepsilon)$ є розв'язками систем (2.6) та (2.7), тобто з цих функцій при $r = \overline{0; q-3}$, визначається з точністю до двох довільних скалярних множників $\beta_{ikr}^0(x)$, які утворюють довільний вектор $\beta_{kr}^0(x) = \mathrm{colon}(\beta_{1kr}^0(x), \beta_{2kr}^0(x))$.

Оскільки одержані системи є регулярно збуреними відносно $\varepsilon > 0$ у просторі (1.3), то розв'язки цих рівнянь можна будувати у вигляді степеневих рядів по малому параметру $\varepsilon > 0$. Отже, можемо застосувати класичну теорію для оцінки залишкових членів цих систем [2]. Спочатку зробимо це для формальних рядів (2.1)

$$\left\| \xi_{\alpha k(\mathrm{q}+1)}(x,\varepsilon) \right\| \leq K_{(\mathrm{q}+1)},$$

$$\left\| \xi_{\beta k(\mathrm{q}+1)}(x,\varepsilon) \right\| \leq K_{(\mathrm{q}+1)}\varepsilon^{\frac{1}{3}},\quad q > 0, \qquad (4.1)$$

де стала K_{q+1} не залежить від $x \in [-l;l]$ і малого параметра $\varepsilon > 0$.

Аналогічно для формальних рядів (3.3) і (3.8) одержимо наступні оцінки. Зауважимо, що розв'язок розширеного рівняння будується з використанням функції $Bi(t)$, це означає, що отримані оцінки носять асимптотичний характер. Враховуючи властивості істотно особливих функцій $\nu(\mathrm{t})$ на відрізку $x \in [-l;l]$

$$\left\| \xi_{f(\mathrm{q}+1)}(x,\varepsilon) \right\| \leq K_{(\mathrm{q}+1)},$$

$$\left\| \xi_{g(\mathrm{q}+1)}(x,\varepsilon) \right\| \leq K_{(\mathrm{q}+1)}\varepsilon^{\frac{1}{3}}, \qquad (4.1)$$

$$\left\| \xi_{\omega(\mathrm{q}+1)}(x,\varepsilon) \right\| \leq K_{(\mathrm{q}+1)} > 0.$$

Врахувавши одержані оцінки (4.1) і (4.2), асимптотику загального розв'язку системи (1) можемо записати у вигляді ряду:

$$\tilde{y}(x,t,\varepsilon) =$$

$$= \sum_{k=1}^{2}\left\{\left[\sum_{r=0}^{q}\varepsilon^{r}\alpha_{kr}(x)+O\left(\varepsilon^{q+1}\right)\right]U_k\left(\varepsilon^{-\frac{2}{3}}\cdot\varphi(x)\right)+\right.$$

$$\left.+\varepsilon^{\frac{1}{3}}\left[\sum_{r=0}^{q}\varepsilon^{r}\beta_{kr}(x)+O\left(\varepsilon^{q+1}\right)\right]\frac{dU_k\left(\varepsilon^{-\frac{2}{3}}\cdot\varphi(x)\right)}{d\left(\varepsilon^{-\frac{2}{3}}\cdot\varphi(x)\right)}\right\}+$$

$$+\left[\sum_{r=0}^{+\infty}\varepsilon^{r}f_r(x)+O\left(\varepsilon^{q+1}\right)\right]v\left(\varepsilon^{-\frac{2}{3}}\cdot\varphi(x)\right)+$$

$$+\varepsilon^{\frac{1}{3}}\left[\sum_{r=0}^{q}\varepsilon^{r}g_r(x)+O\left(\varepsilon^{q+1}\right)\right]\frac{dv\left(\varepsilon^{-\frac{2}{3}}\cdot\varphi(x)\right)}{d\left(\varepsilon^{-\frac{2}{3}}\cdot\varphi(x)\right)}+$$

$$+\sum_{r=0}^{+\infty}\varepsilon^{r}\omega_r(x)+O\left(\varepsilon^{q+1}\right).$$

Одержане сформулюємо у вигляді теореми.

Теорема. Нехай для задачі (1) виконуються умови:

1. $a(x), b(x), h(x) \in C^{\infty}\left[-l,l\right]$;
2. $a(x) \equiv x\tilde{a}(x), \tilde{a}(x) < 0, b(x) < 0, x \in \left[-l,l\right]$.

Тоді на відрізку $\left[-l,l\right]$ в просторі без резонансних розв'язків (1.2), можна побудувати загальний розв'язок ССЗДР (1) у вигляді асимптотичного ряду (1.3), коефіцієнти якого є досить гладкі функції на заданому відрізку.

Список використаних джерел

1.*Abramovic M.*, *Stigan P.*The directory on special functions with formulas, graphics and mathematical tables. – M.: Nauka. 1979. – 832 p. (in Russian).

2.*Bobochko V.M.*,*Perestuk N.A*. Asymptotic integration of the Liouville equation with turning points. – Kyiv: Naukova dumka.2002. – 310 p.(in Ukrainian).

3.*Bobochko V.N*. Differential turning point in singular perturbed theory. II//Izvestiyavuzov. Mathematika. – 2002-№. P. 3-14.(in Russian).

4.*Bobochko V.M.* Internal turning point in the singular perturbed theory.// Ukrainian Mathematical Journal. – 1996. V. 48 - № 7.P.876-890.(in Ukrainian).

5. *Boliliy V.O.* Internal turning point in the differential equation of the third order.// Mathematical methods and Physics and mathematics fields. – 2000. V. 43 - № 3. - P. 44-50.(in Ukrainian).

6.*Dorodnicin A.A.* Asymptotic distributions of eigenvalues for some second order differential equations. // UspekhiMatematicheskikhNauk. – 1952. V.27 - №6. - P. 3-96.(in Russian).

7. *Olver F.*Asymptotics and special functions.// Transactions of The American Mathematical Society. – 1977. V. 226. – P. 227—241.(inRussian).

8. *Fridrichs K.O.* Asymptotic phenomena in mathematical physics.// Bull.Amer.Math.Soc. – 1955. V. 61 – P.485-504. (inEnglish).

Надійшладоредколегії

УДК 517.95:519.63

Вакал Є.С.[1], к.ф.-м.н., доц.,
Вакал Ю.Є.[1], к.ф.-м.н.,
Стеля О.Б.[1], к.ф.-м.н., доц.

Дослідження процесів вологопереносу в неоднорідних середовищах із слабко проникними прошарками

Розглянуто профільну модель вологопереносу для неоднорідно-шаруватих середовищ з тонкими слабко проникними прошарками. Математичну модель сформульовано як крайову задачу для нелінійного рівняння параболічного типу зі спеціальними умовами спряження в області прямокутної форми. Досліджено вплив прошарків на конфігурацію вільної поверхні підземних вод та розподіл напорів у ґрунті.

Ключові слова: слабко проникні прошарки, умови спряження, метод Ньютона – ПВР.

[1] Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, пр-т. Глушкова 4д, e-mail: jvakal@gmail.com

E. S. Vakal[1], Associate Professor,
Yu. E. Vakal[1], Ph.D.,
O. B. Stelya[1], Associate Professor.

The study of moisture transfer in heterogeneous environments with weakly permeable layers

The profile moisture transfer model for heterogeneously-layered environments with thin weakly permeable layers is considered. The mathematical model is formulated as a boundary value problem for a nonlinear parabolic equation with special coupling conditions in the areas of rectangular shape. The effect of layers on the configuration of the free surface of groundwater and distribution of soil water pressures is investigated.

Key words: weakly permeable layers, coupling conditions, Newton – SOR method.

[1] Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03680, Kyiv, Glushkova st., 4d,
e-mail: jvakal@gmail.com

Статтю представив академік НАН України, д.ф.-м.н. Перестюк М.О.

1. Вступ

Крайові задачі для рівнянь в частинних похідних зі спеціальними умовами спряження описують різноманітні фізичні процеси, що протікають в неоднорідних середовищах. Так, в моделі неідеального контакту вважається, що потоки речовини при переході через границю поділу середовищ залишаються неперервними, проте шуканий розв'язок стає розривним. В роботах [1–3] наведена математична постановка задачі про кристалізацію металів з неідеальним тепловим контактом. Еліптичні крайові задачі з зазначеними умовами спряження вивчаються в [4–6]. Ґрунтуючись на класичному формулюванні задачі, в [10–13] отримані і досліджені варіаційно-різницеві схеми для задач теплопровідності з розривним розв'язком. В [14–16] побудовані однорідні різницеві схеми для рівняння теплопровідності в багатошаровому середовищі з неідеальним тепловим контактом. В [7–8] наведені узагальнені формулювання лінійної задачі тепломасопереносу зі спеціальними умовами спряження.

В роботах [17–20] використана модель з умовами неідеального контакту для розв'язання задач підземного вологопереносу в областях з тонкими слабко проникними прошарками, що описуються нелінійними параболічними рівняннями. Дана стаття присвячена подальшому дослідженню процесів вологопереносу з метою виявлення впливу на них подібних включень.

2. Постановка задачі

Процеси вологопереносу відбуваються найчастіше в режимі неповного насичення або взаємодії насиченої та ненасиченої зон і можуть бути описані у двовимірній постановці рівнянням

$$\frac{\partial\theta(x,u)}{\partial t}=\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(k(x,u)\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)+f(x,u), \quad (1)$$
$$(x,t)\in Q_T=Q\times(0,T],$$

де $v_i=-k(x,u)\dfrac{\partial u}{\partial x_i}$ – компоненти вектора швидкості вологопереносу, $u(x, t)$ – напір рідини, $\theta(x,u)$ – об'ємна вологість ґрунту (пористість у

©Є.С. Вакал, Ю.Є. Вакал, О.Б. Стеля, 2014

зоні повного насичення), $k(x,u)$ – коефіцієнт вологопровідності (коефіцієнт фільтрації в зоні повного насичення), $f(x,u)$ – функція внутрішніх джерел в області Ω, $x=(x_1, x_2)$ – точка області Ω, x_i, $i=1,2$ – горизонтальна і вертикальна координата, t – час.

В залежності від конкретних фізичних умов на межі розглядуваної області задаються крайові умови першого, другого або третього роду.

Крайові умови передбачають можливість подачі води на поверхню ґрунту, випаровування і інфільтрацію, відтік води у нижчі горизонти, підпір ґрунтовими водами, наявність водоупору.

Рівняння (1) інтегрується при початкових умовах

$$u(x,0)=u_0(x), \quad x \in \overline{\Omega}. \qquad (2)$$

На межах поділу шарів з різними гідродинамічними характеристиками задаються умови спряження, що виражають неперервність напорів і потоків вологи. Надалі будемо розглядати ситуацію, коли в ґрунті містяться слабко проникні прошарки малої товщини. У цьому випадку при побудові різницевої задачі виникає необхідність використання сіток з малими відстанями між вузлами, розміщеними в зоні розташування прошарків. Щоб уникнути невиправданого подрібнення різницевої сітки, використовуємо підхід, згідно якому прошарки виключаються з розгляду, а на отриманих границях поділу шарів задаються умови спряження типу неідеального контакту

$$\alpha\left(u\big|_{\gamma+0} - u\big|_{\gamma-0}\right) = k\frac{\partial u}{\partial n}\bigg|_{\gamma-0}, \quad k\frac{\partial u}{\partial n}\bigg|_{\gamma-0} = k\frac{\partial u}{\partial n}\bigg|_{\gamma+0}, \qquad (3)$$

де γ – лінія, що моделює прошарок, α – коефіцієнт вологопередачі через прошарок, $\vec{n}$ – нормаль до γ.

3. Метод розв'язання задачі

Крайові задачі для рівняння (1) з початковими умовами (2), умовами спряження (3) і відповідними крайовими умовами розв'язуються за допомогою методу скінченних різниць. Область $\overline{Q_T}$ покривається різницевою сіткою $\overline{\omega}_{h_1 h_2 \tau}$. Інтегро-інтерполяційним методом побудована різницева схема для рівняння (1)

$$Q_{\bar{t}}(y) = \sum_{\alpha=1}^{2}\left(a_\alpha(y)y_{\bar{x}_\alpha}\right)_{x_\alpha} + \varphi. \qquad (4)$$

В (4) Q, y, a_i, φ – різницеві аналоги функцій θ, u, k, f.

Похибка апроксимації схеми (4) дорівнює $O\left(\tau + h_1^2 + h_2^2\right)$. Крайові умови і умови спряження апроксимуються з другим порядком по просторових змінних аналогічно [19].

Приєднуючи до рівняння (4) різницеві апроксимації умов спряження, крайових і початкових умов, отримуємо нелінійну систему різницевих рівнянь, яку розв'язуємо за допомогою блочного методу Ньютона – послідовної верхньої релаксації [9].

4. Результати чисельних розрахунків

Розроблені чисельні алгоритми застосовано до розв'язання двовимірних задач вологопереносу при зрошенні посушливих, промиванні засолених, осушенні перезволожених земель з використанням систематичного горизонтального дренажу. Для прикладу розглянемо промивки повністю насиченого ґрунту глибини M, що лежить на непроникній основі. Припускаємо, що горизонтальні закриті дренажні труби діаметром $d_д$ заглиблені на величину $b_д$ і знаходяться одна від одної на відстані L.

Розв'яжемо задачу для однорідного ґрунту потужності $M = 10$ м з коефіцієнтом фільтрації $k(x) = 0.2$ м/доба, що містить прошарок з $k(x) = 0.01$ м/доба товщини $\delta = 0.15$ м на глибині від 2 до 2.15 м. Дрени повністю заповнені вологою, $b_д = 2.75$ м, $d_д = 0.15$ м, L = 20 м. На поверхні ґрунту задана величина напору, рівна 0.15 м, джерела відсутні. Отримані результати показують, що при переході через прошарок лінії рівного напору заломлюються. У верхніх шарах ґрунту вони паралельні еквіпотенціальній лінії від міждрення в напрямку до дрени для $x_1 \le 6$ м. Витрати речовини в дрену склали $0.567\,м^3/доба$.

Далі вивчався вплив прошарку на величину витрат в дрену. Розглядалася задача для однорідного ґрунту, а також ґрунту, що містить прошарок на глибині від 5 до 5.15 м. У випадку розташування прошарку нижче дрени витрати рідини в дрену склали $0.819\,м^3/доба$, що більше аналогічних витрат у випадку однорідного ґрунту, рівних $0.807\,м^3/доба$, лише на 0.5 %. Зі зменшенням коефіцієнта фільтрації прошарку витрати рідини в дрену незначно спадають.

Якщо прошарок розташований на глибині 2–2.15 м, то витрати рідини в дрену менші аналогічних витрат у випадку однорідного ґрунту на 30 %.

Таким чином, аналіз роботи дренажу в

шаруватих середовищах свідчить про те, що слабко проникний тонкий прошарок в залежності від розташування може істотно впливати на роботу дренажу. При достатньо глибокому заляганні вплив такого прошарку стає незначним, і його можна вважати непроникним.

Наведемо результати розрахунків вологопереносу при осушенні повністю насиченого ґрунту. В початковий момент часу рівень ґрунтових вод лежить на поверхні. Для його зниження використовується горизонтальний дренаж. Діаметр дрени, глибина залягання, міждренна відстань, потужність ґрунту вибираються тими ж самими, що і в описаній вище задачі напірної фільтрації. На поверхні задається випаровування інтенсивності $0.0005\,\text{м/доба}$. Об'ємна вологість ґрунту і коефіцієнт вологопровідності задавались за формулами $\theta(x,u)=0.25+0.23\exp((u+x_2)/1.5)$ і $k(x,u)=k(x)\exp(3.5(u+x_2)/1.5)$ відповідно, де коефіцієнт фільтрації ґрунту $k(x)=0.2\,\text{м/доба}$.

Початковий розподіл напору визначався з відповідної напірної фільтраційної задачі, коли на поверхні ґрунту задавався нульовий напір.

Розглядалися три варіанти будови ґрунту. Для першого з них припускалося, що ґрунт містить прошарок на глибині $2-2.15$ м. У цьому випадку ізолінії напору спрямовані від поверхні ґрунту в глибину, зазнаючи заломлення при переході через лінію $x_2=2$ м, що моделює прошарок.

Дана задача розв'язувалася також для однорідного ґрунту (2 варіант) і ґрунту з прошарком на глибині від 5 до 5.15 м (3 варіант). На рис. 1 зображено зниження з часом точки виходу вільної поверхні на міждренні для різних варіантів будови ґрунту.

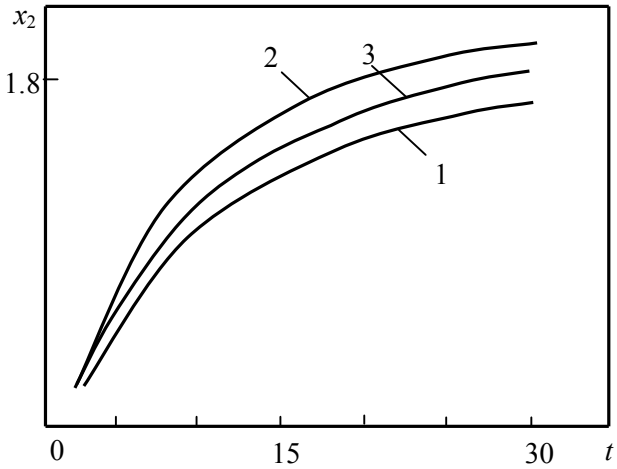


Рис. 1. Зниження точки виходу вільної поверхні.

Вказані точки в першому і третьому випадках розташовані відповідно на 11 % і 5 % нижче, ніж у другому. Отже, якщо прошарок лежить вище дрени, то за заданий час осушення вільна поверхня опуститься на найменшу глибину. В цій ситуації може виникнути підтоплення кореневого шару, що створить несприятливі умови для розвитку рослин. Для запобігання підтоплення необхідно змінити глибину закладення дренажу або зменшити міждренну відстань.

Розглядалася також задача фільтрації і вологопереносу в пористій дамбі прямокутної форми $\{0\le x_1\le 10,\,0\le x_2\le 6\}$ на непроникній основі з протифільтраційною завісою для запобігання появи проміжків височування. При наявності забрудненої води у верхньому б'єфі завіса дозволяє знизити її вихід у прісноводний канал або водозабір. Припускалося, що в початковий момент часу напір у дамбі дорівнює -5 м. На межі області задаються умови:

$$k(x,u)\frac{\partial u}{\partial x_2}=0,\ x_2=0, x_1\in(0,10],\ x_2=6, x_1\in(0,10),$$

$$k(x,u)\frac{\partial u}{\partial x_1}=0,\ x_1=10, x_2\in[0,5),$$

$$u(x,t)=0,\ x_1=0, x_2\in[0,10],$$

$$u(x,t)=-5,\ x_1=10, x_2\in[5,6].$$

Коефіцієнти фільтрації ґрунту і завіси дорівнюють відповідно $0.2\,\text{м/доба}$ і $0.005\,\text{м/доба}$. Розрахунки проводилися для завіси товщини 0.2 м, розташованій при $\{x_1=5, x_2\in[0,4]\}$ до практичного встановлення вільної поверхні. Результати розрахунків наведено на рис. 2.

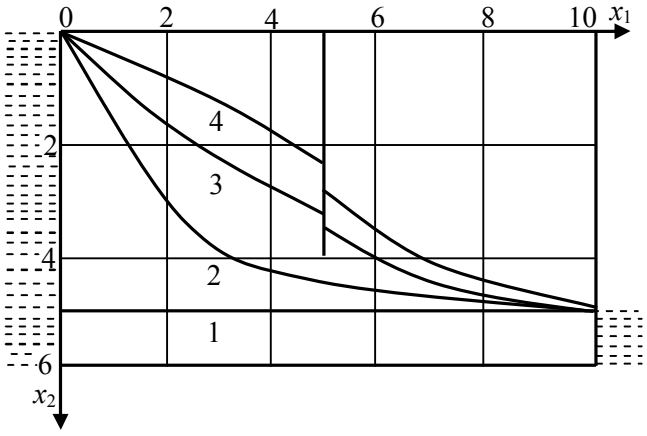


Рис. 1. Динаміка просування вільної поверхні в дамбі ($1-t=0$, $2-t=0.1$, $3-t=0.5$, $4-t=2.8$).

5. Висновок

Результати розрахунків свідчать, що описаний підхід дає змогу обґрунтувати ефективність протифільтраційних і захисних

заходів, спрямованих на зниження впливу техногенних і природних факторів на навколишнє середовище.

Список використаних джерел

1. *Essman R.I.* Calculations of casting / R.I. Essman, N.P. Zhmakin, L.I. Shub. – Minsk : Vysheyshaya shkola, 1977. – 263. (in Russian).
2. Mathematical methods in the study of the processes of special electrical metallurgy / ed. B.E. Paton. – Kiev : Naukova Dumka, 1976. – 187 p. (in Russian).
3. Mathematical methods in the study of the processes of special electrometallurgy / ed. B.E. Paton. – Kiev : Znanie, 1974. – 24 p. (in Russian).
4. *Carslaw G.* Thermal conductivity of solids / G. Carslaw, J. Jaeger. – Moscow : Nauka, 1964. – 487 p. (in Russian).
5. *Bindeman N.I.* Determination of the filtration coefficient of rocks by infiltration pits / N.I. Bindeman. – Leningrad : Gosenergoizdat, 1947. – 32 p. (in Russian).
6. *Samarskiy A.A.* Difference methods for elliptic equations / A.A. Samarskiy, V.B. Andreev. – Moscow : Nauka, 1976. – 592 p.
7. *Ljashko I.I.* Numerical modeling of heat and mass transfer / I.I. Ljashko, V.F. Demchenko, L.I. Demchenko. – Kyiv : Kyiv State Univ., 1988. – 164 p. (in Russian).
8. *Ljashko I.I.* Generic formulations of the heat and mass transfer in layered media / I.I. Ljashko, V.F. Demchenko. – Kyiv, 1987. – 27 p. – (Preprint / Ukrainian Academy of Sciences, Institute of Cybernetics, 87.14). (in Russian).
9. *Ortega J.* Iterative solution of nonlinear equations in several variables / J. Ortega, W. Rheinboldt. – M. : Mir, 1975. – 558 p. (in Russian).
10. *Dejneka V.S.* The numerical solution of the boundary value problem, allowing a gap in the solution / V.S. Dejneka // Reports of the Ukrainian Academy of Sciences. Ser. A. – 1982. – № 11. – P. 29–32. (in Russian).
11. *Ljashko I.I.* The numerical discretization of the boundary value problem for a quasilinear equation with discontinuous solution / I.I. Ljashko, V.V. Skopetsky, V.S. Dejneka // Reports of the Ukrainian Academy of Sciences. Ser. A. – 1986. – № 9. – P. 14–18. (in Russian).
12. *Ljashko I.I.* The numerical discretization of a nonlinear parabolic equation with a discontinuous solution / I.I. Ljashko, V.V. Skopetsky, V.S. Dejneka // Reports of the Ukrainian Academy of Sciences. Ser. A. – 1987. – № 5. – P. 20–24. (in Russian).
13. *Molchanov I.N.* Variational method in some problems with discontinuous solutions / I.N. Molchanov, L.D. Nicolenko // Numerical Analysis. – Kyiv, 1975. – P. 71–83. (in Russian).
14. *Demchenko V.F.* Difference scheme through account for the stationary equation of heat conduction in multi-layer media with imperfect thermal contact / V.F. Demchenko, L.I. Demchenko, A.T. Zelnichenko // Computational and Applied Mathematics. – 1980. – Iss. 40. – P. 122–130. (in Russian).
15. *Zelnichenko A.T.* Difference scheme through account for the unsteady heat equation in a multilayer medium with a non-ideal thermal contact / A.T. Zelnichenko, V.F. Demchenko // Optimization algorithms and numerical analysis. – Kyiv, 1980. – P. 65–70. (in Russian).
16. *Kamynin L.I.* A problem in biophysics / L.I. Kamynin // Reports of the USSR Academy of Sciences. – 1966. – **169**. – № 4. – P. 761–764. (in Russian).
17. *Vakal E.S.* A method for solving nonlinear equations of parabolic type / E.S. Vakal, S.L. Kivva, G.E. Mistetsky, O.B. Stelya // Computational and Applied Mathematics. – 1985. – Iss. 56. – P. 36–43. (in Russian).
18. *Vakal E.S.* An approach to the numerical solution of problems of mass transport in heterogeneously-layered media / E.S. Vakal. – Kiev, 1985. – 16 p. – Dep. in UkrNIINTI 20.04.85, № 781–85. (in Russian).
19. *Vakal E.S.* Solution to a problem of protection of watercourses and water withdrawals from contamination / E.S. Vakal, G.E. Mistetsky, O.B. Stelya // The theory of hydrodynamic models of technical problems. – Sverdlovsk, 1988. – P. 90–95. (in Russian).
20. *Ljashko I.I.* The solution of the system of parabolic equations in multi-media in the presence of non-ideal conditions of contact at interfaces / I.I. Ljashko, L.I. Demchenko, E.S. Vakal // III National Symposium on Differential and Integral Equations, 1-3 June 1982, Odessa: proceedings of the symposium. – Odessa, 1982. – P. 247–248. (in Russian).

Надійшла до редколегії 19.12.13

УДК 539.3

Горошко О. О.[1], д.ф.-м.н. проф.,
Кикоть С. В.[2], к.ф.-м.н. доц.

Дослідження коливань гнучкого трубопроводу з використанням канонічного вигляду рівнянь

У статті досліджуються коливання гнучкого трубопроводу з рухомою рідиною. Диференціальне рівняння другого порядку з гіроскопічними членами, що описує коливання, зведено до канонічного вигляду рівняння гіперболічного типу. Приводиться точний розв'язок задачі для вимушених коливань. Встановлено резонансні стани вимушених коливань.

Ключові слова: гнучкий трубопровід, рухоме навантаження, канонічні рівняння, двохвильовий коливний процес, вимушені коливання, частота коливань, ексцес, критична швидкість, резонанс.

[1] Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, пр-т. Глушкова 4д.
[2] Національний транспортний університет, 01010, м. Київ, вул. Суворова, 1,
e-mail: s.v.kykot@gmail.com

Oleg O. Goroshko[1], Dr.Sci. (Phys.-Math.), Professor,
Sergiy V. Kykot'[2], Ph.D., (Phys.-Math.), Associate Professor.

Investigations of a flexible conduit using equations in canonical form

The paper investigates oscillations of a flexible conduit with moving fluid. The differential equation of the second order with gyroscopic members that describes the oscillations is reduced to canonical form hyperbolic equation. Exact solution of the problem for forced oscillations is given. Specific properties of resonance states are determined.

Key Words: flexible conduit, moving loading, canonical equations, double wave oscillation process, forced oscillations, oscillation frequency, excesses, critical velocity, resonance.

[1] Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03680, Kyiv, Glushkova st., 4d,
[2] National Transport University, 01010, Kiev, Suvorova 1,
e-mail: s.v.kykot@gmail.com

Статтю представив член редколегії д.ф.-м.н., проф. Маципура В. Т.

Вступ. Наявність гіроскопічних сил, які представлені членами зі змішаними похідними в рівняннях динаміки трубопроводів з рухомою рідиною, не дають змоги застосувати метод розділення змінних та прямі методи до дослідження коливального руху.

У роботах [1,3] приведено точний розв'язок задачі, отриманий без переходу до канонічної форми рівнянь, яким представлено двохвильову форму руху пружного об'єкта з рухомим навантаженням [1], а саме: поперечні коливання на кожній частоті представляються у вигляді суми двох груп стоячих хвиль, які мають різні форми і зміщені за фазою на $\pi/2$.

Метою даної роботи є приведення до канонічної форми рівнянь руху гнучкої труби з рухомою рідиною і побудова розв'язків задачі про власні і вимушені коливання, що може бути використано для подальшого розвитку прямих методів при побудові наближених розв'язків в ускладнених постановках задач.

Зведення до канонічного вигляду диференціального рівняння другого порядку з гіроскопічними членами

Поперечні коливання гнучкої труби з рухомою рідиною описуються рівнянням [1,3,4]

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+2\rho_2 v\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}-\left(T-\rho_2 v^2\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f(x,t), \quad (1)$$

де $u(x,t)$ – поперечні відхилення труби, T – початковий натяг трубопроводу, $\rho=\rho_1+\rho_2$ – сума розподілених мас труби і рухомої рідини, v – швидкість руху потоку рідини.

При швидкості руху рідини $v=0$, рівняння (1) перетвориться в класичне рівняння гіперболічного типу, яке описує коливання струни.

© О.О. Горошко, С.В. Кикоть, 2014

Для приведення рівняння (1) до канонічної форми [1] (за загальноприйнятою термінологією в математичній фізиці [2]) від змінних (x,t) перейдемо до нових змінних (x_1,t_1), за формулами

$$x = x_1, \quad t = t_1 + \alpha x_1. \tag{2}$$

Фізичний зміст константи переходу α буде розглянуто при аналізі результатів.

В нових змінних похідні функції $u(x,t)$ визначаємо за формулами

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial t_1}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t_1^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\partial u}{\partial t_1}\alpha,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial t_1}\alpha + \frac{\partial^2 u}{\partial t_1^2}\alpha^2, \tag{3}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial t_1} + \alpha\frac{\partial^2 u}{\partial t_1^2}.$$

Підставивши знайдені похідні (3) в рівняння (1) і звівши подібні члени, одержимо

$$\left(\rho + 2\rho_2 v\alpha - (T - \rho_2 v^2)\alpha^2\right)\frac{\partial^2 u}{\partial t_1^2} + \\ + 2\left(\rho_2 v - \alpha(T - \rho_2 v^2)\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial t_1} - \left(T - \rho_2 v^2\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} = f(x_1,t_1). \tag{4}$$

Визначаючи константу α з умови рівності нулю коефіцієнта при змішаній похідній

$$\alpha = \frac{\rho_2 v}{T - \rho_2 v^2}, \tag{5}$$

зведемо рівняння (4) до канонічного вигляду рівняння гіперболічного типу

$$\frac{\partial^2 u(x_1,t_1)}{\partial t_1^2} - c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} = b(v) f(x_1,t_1), \tag{6}$$

де

$$c^2 = \left(T - \rho_2 v^2\right)b(v), \\ b(v) = \frac{T - \rho_2 v^2}{T(\rho_1 + \rho_2) - \rho_1\rho_2 v^2}. \tag{7}$$

Співвідношеннями (7) представлено складні залежності швидкості поперечної хвилі c гнучкого трубопроводу з рухомою рідиною та функції збурення $b(v)f(x_1,t_1)$ в канонічних змінних (x_1,t_1).

При нульових граничних умовах $u(0,t_1) = 0$, $u(l,t_1) = 0$ однорідне рівняння (6), яким описуються власні коливання, має такі розв'язки

$$u_n(x_1,t_1) = a_n \sin\lambda_n x_1 \cos(\omega_n t_1 + \varphi_n), \ n = 1,2,3,\ldots, \tag{8}$$

де $\lambda_n = \frac{n\pi}{l}$, $\omega_n = \lambda_n c$.

Розв'язки (8) однорідного рівняння (6) в змінних (x,t) набувають вигляду

$$u_n(x,t) = a_n \sin\frac{n\pi x}{l}\cos(\omega_n t - \gamma_n x + \varphi_n), \tag{9}$$

де власні частоти ω_n та перекоси форм γ_n визначаються за формулами

$$\omega_n = \frac{n\pi}{l}\sqrt{\frac{\left(T - \rho_2 v^2\right)^2}{T(\rho_1 + \rho_2) - \rho_1\rho_2 v^2}}, \\ \gamma_n = \alpha\omega_n = \frac{n\pi}{l}\frac{\rho_2 v}{\sqrt{T(\rho_1 + \rho_2) - \rho_1\rho_2 v^2}}; \tag{10} \\ n = 1,2,3,\ldots.$$

Коефіцієнт $\alpha = \frac{\gamma_n}{\omega_n}$ – визначає єдину для всіх тонів коливань константу відношення ексцесів до частот.

Таким чином, власні коливання гнучкого трубопроводу з рухомою рідиною (9) характеризуються біжучою хвилею.

У роботах [1,3] розв'язки (9) подані в двохвильовій формі

$$u_n(x,t) = A_n\left[X_n(x)\cos(\omega_n t + \varphi_n) - Y_n(x)\sin(\omega_n t + \varphi_n)\right], \tag{11}$$

де

$$X_n(x) = \sin\frac{n\pi x}{l}\cos\gamma_n x, \quad Y_n(x) = \sin\frac{n\pi x}{l}\sin\gamma_n x;$$

A_n та φ_n – сталі інтегрування, які визначаються початковими умовами.

Функції $X_n(x)$ та $Y_n(x)$ описують дві стоячі хвилі на кожній з частот ω_n, моделюючи коливний процес як двохвильвий.

Таким чином, коливання гнучкого трубопроводу з рухомою рідиною залежать від швидкості руху потоку рідини v, частот $\omega_n(v)$ та перекосів форм коливань $\gamma_n(v)$. З формул (10) випливає наявність двох значень критичних швидкостей руху рідини.

При першій критичній швидкості руху рідини $v_{kp1}=\sqrt{\frac{T}{\rho_2}}$ труба втрачає прямолінійну форму, набуває статичного прогину під дією відцентрових сил рухомої рідини, а при подальшому збільшенні швидкості коливний рух стабілізується.

При наближенні до другої критичної швидкості руху рідини $v_{kp2}=\sqrt{\frac{T(\rho_1+\rho_2)}{\rho_1\rho_2}}$ відбувається різке зростання значень власних частот за рахунок стабілізації руху гіроскопічними силами.

При перевищенні другого критичного значення швидкості руху рідини $v>v_{kp2}$ канонічне рівняння гіперболічного типу (6) трансформується в канонічне рівняння еліптичного типу

$$\frac{\partial^2 u(x_1,t_1)}{\partial t_1^{\,2}}+c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^{\,2}}=b(v)f(x_1,t_1).$$

У даній роботі випадок руху рідини при швидкостях $v>v_{kp2}$ не розглядається.

Вимушені коливання гнучкого трубопроводу

Вимушені коливання гнучкого трубопроводу в канонічній формі описуються рівнянням (6).

Частинний розв'язок $u_0(x_1,t_1)$ рівняння (6), яким описується вимушений рух, будується у формі розкладу за власними функціями

$$u_0(x_1,t_1)=\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n\pi x_1}{l}P_n(t_1), \qquad (12)$$

де $P_n(t_1)$ – фазові функції.

Підставляючи (12) в рівняння (6) отримаємо

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n\pi x_1}{l}\left(\ddot{P}_n(t_1)+\omega_n{}^2P_n(t_1)\right)=b(v)f_1(x_1,t_1), \qquad (13)$$

де частоти ω_n визначаються формулами (10).

Домножуючи (13) на функції $\sin\frac{n\pi x_1}{l}$ та враховуючи їх ортогональність, отримаємо рівняння для знаходження функцій $P_n(t_1)$

$$\ddot{P}_n(t_1)+\omega_n{}^2P_n(t_1)=\frac{2}{l}b(v)h_n(t_1),\ n=1,2,3,\ldots. \qquad (14)$$

Узагальнені сили $h_n(t_1)$ обчислюються за формулами

$$h_n(t_1)=\int_0^l f_1(x_1,t_1)\sin\frac{n\pi x_1}{l}dx_1. \qquad (15)$$

Частинні розв'язки рівняння (14) в формі Коші мають вигляд

$$P_n(t_1)=\frac{2b(v)}{\omega_n l}\int_0^{t_1}h_n(\tau)\sin\omega_n(t_1-\tau)d\tau,\ n=1,2,3,\ldots \qquad (16)$$

Частинний розв'язок (12) неоднорідного рівняння (6) з урахуванням (16) набуває вигляду

$$u_0(x_1,t_1)=\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n\pi x_1}{l}\frac{2b(v)}{\omega_n l}\int_0^{t_1}h_n(\tau)\sin\omega_n(t_1-\tau)d\tau. \qquad (17)$$

Повертаючись до старих незалежних змінних (x,t), згідно з (2), матимемо

$$u_0(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n\pi x}{l}P_n(t-\alpha x). \qquad (18)$$

Таким чином, вимушені коливання (18) представлено біжучими хвилями.

Приклад. Розглянемо коливання трубопроводу під дією одночастотного рівномірно-розподіленому збудженні

$$f(x_1,t_1)=h\sin pt_1,$$

де h та p – амплітуда та частота збудження.

У відповідності із загально прийнятою схемою побудови вимушених коливань узагальнені сили $h_n(t_1)$ в рівняннях (14) визначаються за формулою (15) та мають вигляд:

$$h_n(t_1)=\frac{hl\left[1-(-1)^n\right]}{n\pi}\sin pt_1,\quad n=1,2,3,\ldots.$$

або

$$h_n(t_1)=\frac{2hl}{n\pi}\sin pt_1,\quad n=1,3,5,\ldots. \qquad (19)$$

Функції $P_n(t_1)$, що визначаються формулами (16) з врахуванням (19), мають вигляд:

$$P_n(t_1)=\frac{4hb(v)}{\pi n\left(\omega_n{}^2-p^2\right)}\left[\sin pt_1-\frac{p}{\omega_n}\sin\omega_n t_1\right], \qquad (20)$$

n=1,3,5,….

Вимушені коливання гнучкого трубопроводу, які будуються в формі розкладу за власними функціями (12) з врахуванням формул (20) набувають вигляду

$$u_0(x_1,t_1)=\frac{4hb(v)}{\pi}\sum_{n=1,3,5}^{\infty}\frac{1}{n\left(\omega_n{}^2-p^2\right)}\sin\frac{n\pi x_1}{l}\times \times\left[\sin pt_1-\frac{p}{\omega_n}\sin\omega_n t_1\right]. \quad (21)$$

Розв'язок $u_0(x_1,t_1)$ задовольняє нульовим початковим умовам: $u_0(x_1,0)=0$, $\frac{\partial u_0(x_1,0)}{\partial t_1}=0$.

Перша складова розв'язку (21) визначає форму «чистих» вимушених коливань з частотою p. Друга складова (21) представлена нескінченою сумою коливань на власних частотах ω_n, члени якої пропорційні множникам $\frac{1}{n\omega_n{}^3}$. В класичній математичній фізиці це «вільні коливання» збуджені зовнішньою збурюючою силою [2].

Повертаючись до старих незалежних змінних (x,t), згідно з (2), форма розв'язку набуває вигляду

$$u_0(x,t)=\frac{4hb(v)}{\pi}\sum_{n=1,3,5}^{\infty}\frac{1}{n\left(\omega_n{}^2-p^2\right)}\sin\frac{n\pi x}{l}\times \times\left[\sin p(t-\alpha x)-\frac{p}{\omega_n}\sin(\omega_n t-\gamma_n x)\right]. \quad (22)$$

Таким чином, як і у випадку власних коливань (9), фазові функції вимушених коливань в точних розв'язках побудованих з використанням канонічної форми рівнянь представлено біжучими хвилями.

Розглянутий приклад ілюструє застосування канонічної форми рівнянь до аналізу ускладнених задач динаміки трубопроводів.

Висновки. Результати дослідження можуть бути сформульовані у вигляді таких висновків:

1. Рівняння коливань гнучкого трубопроводу приведено до канонічного рівняння гіперболічного типу та побудовані точні розв'язки для власних та вимушених коливань, в яких фазові функції представлені біжучими хвилями.
2. Підтверджена інтерпретація коливань трубопроводу як двохвильового процесу.
3. Резонансні стани вимушених коливань мають місце на власних частотах коливань трубопроводу.
4. Форми отриманих розв'язків для власних і вимушених коливань гнучкого трубопроводу з рухомою рідиною визначають структуру і форму наближених розв'язків прямими методами для ускладнених задач динаміки пружних конструкцій з рухомим навантаженням.

Список використаних джерел

1. *Goroshko O. O.* Two-waves processes in mechanical systems / *Goroshko O. O., Kiba S. P., Dem'yanenko A. G.* – Kyiv: Lybid, 1991. – 188 p. (in Ukrainian).
2. *Koshlyakov N. S.* Partial differential equations of mathematical physics / *Koshlyakov N. S., Gliner E. B., Smirnov M. M.* – Moscow.: Vyshaya shkola, 1970. – 712 p. (in Russian).
3. *Goroshko O. O.* An investigation of the one-frequency regimes in two-waves systems (in the systems with a moving loading) / *O. O. Goroshko* // Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kiev. Series: Physics & Mathematics. – 2002. – № 2. – P. 93–98. (in Ukrainian).
4. *Païdoussis M. P.* The canonical problem of the fluid-conveying pipe and radiation of the knowledge gained to other dynamics problems across Applied Mechanics / *M. P. Païdoussis* // Journal of Sound and Vibration, 2008 – 310. – P. 462–492.

Надійшла до редколегії 18.11.2013

УДК 517.9

Валентина І. Гречко[1], канд. фіз-мат. наук, доцент

Про оцінку похибки однієї модифікації методу Ньютона-Канторовича.

В даній роботі розглядається метод знаходження розв'язку нелінійного операторного рівняння в гільбертовому просторі, який узагальнює метод Канторовича.

Ключові слова: проективно-ітеративний метод, нелінійне операторне рівняння.

[1] Національний Технічний Університет України «КПІ», проспект Победы, 37, м. Київ, 03056, e-mail: *and.grechko@gmail.com*

V.I. Grechko, Associate Professor

About error estimate of a modification of Newton-Kantorovich's method.

In this paper the method of finding the solution of a nonlinear operator equation in Hilbert space, which generalizes the method of Kantorovich.

Keywords:projective-iterative method, nonlinear operator equation.

[1] National Technical University of Ukraine "KPI", 37, Prospect Peremohy, 03056, Kyiv-56, Ukraine, e-mail: *and.grechko@gmail.com*

Статтю представив член редколегії академік НАН України, д.ф.-м.н. професор М.О. Перестюк

1. Вступ

В роботі [1] був розглянутий метод розв'язання рівняння

$$x = T(x) \qquad (1)$$

з неперервним нелінійним оператором T, який переводить банахів простір E в себе, згідно з яким послідовні наближення x_{n+1} до розв'язку рівняння (1) знаходяться із рівнянь

$$x_{n+1} = T(x_n) - PT'(x_n)x_n + PT'(x_n)x_{n+1} \qquad (2)$$

де $n = 0,1,2,..$, P - лінійний проекційний оператор $(P^2 = P)$, який проектує простір E в підпростір $E_p\,(PE \to E_p \subseteq E)$, $PT'(x)$ – похідна Фреше оператора $PT(x)$, x_0 – початкове наближення. При $P = I$ (I – тотожній оператор) отримаємо алгоритм методу Ньютона-Канторовича [2]. Алгоритм (2) був запропонований також в роботі [3]. Дослідження ітеративних, проективно-ітеративних методів в застосуванні до різних класів рівнянь відображено в роботах [3]-[7].

2. Постановка і розв'язок задачі

В даній роботі розглядається рівняння (1), коли простір E - гільбертів, в якому P - оператор ортогонального проектування. Як відомо, для того, щоб лінійний оператор P в гільбертовому просторі E був проектором, необхідно і достатньо, щоб для $\forall x, y \in E$: $(Px, Py) = (x, Py)$ і $P(Px) = Px$. Використовуючи властивість проектора отримаємо: для $x, y \in E$ маємо

$$\| Px + Qy \|^2 = \| Px \|^2 + \| Qy \|^2, \qquad (3)$$

де $Q = I - P$, I – тотожній оператор, можна отримати більш точну оцінку похибки.

Доведемо наступну теорему.

© В.І. Гречко , 2014

Теорема. Нехай виконуються наступні умови:

1. Існує обернений оператор Γ_0 та

$$\| \Gamma_0 \| = \| (I - PT'(x_0))^{-1} \| \le B_0 \tag{4}$$

2. Елемент $x_0 \in S'(x_0, R)$ задовільняє рівнянню (1) та виконується

$$\| \Gamma_0 (I - T) x_0 \| \le \eta_0 \tag{5}$$

3. В кулі $S(x_0, R)$ існує похідна $PT'(x)$, причому

$$\begin{aligned} &\| PT'(x) - PT'(y) \| \le M \| x - y \|, \\ &\| QT(x) - QT(y) \| \le q \| x - y \|, (Q = I - P), \end{aligned} \tag{6}$$

4. Справджуються нерівності

$$h_0 = B_0 M \eta_0 \le \tfrac{1}{2}(1 - p_0)^2, \tag{7}$$

$$0 \le p_0 = B_0 q < 1, \tag{8}$$

та нехай

$$R \ge r_0 = \frac{1 - p_0 - \sqrt{(1 - p_0)^2 - 2h_0}}{h_0} \eta_0 . \tag{9}$$

Тоді рівняння (1) має розв'язок $x^* \in S(x_0, r_0)$ до якого збігаються послідовні наближення x_n, причому

$$\| x_n - x^* \| \le r_n' \ , \quad n = 0, 1, ..$$

де

$$r_n' = \frac{1 - p_n' - \sqrt{(1 - p_n')^2 - 2h_n'}}{h_n'} \eta_n' \ , \tag{10}$$

$$\eta_n' = \eta_{n-1}' \left(\frac{\sqrt{\frac{h_{n-1}'^2}{4} + p_{n+1}'^2}}{1 - h_{n-1}'} + p_n \right), \tag{11}$$

$$h_n' = \frac{h_{n-1}'}{(1 - h_{n-1}')^2} \sqrt{\frac{h_{n-1}'^2}{4} + p_{n-1}'^2}, \tag{12}$$

$$p_n' = \frac{p_{n-1}'}{1 - h_{n-1}'}, \quad n = 1, 2, .. \tag{13}$$

$$\eta_0 = \eta_0', \ h_0 = h_0', \ p_0 = p_0', \ r_0 = r_0' ,$$

$$h_n' = B_n' M \eta_n', \ B_n' = \frac{B_{n-1}'}{1 - h_{n-1}'}, \ p_n' = B_n' q .$$

Доведення Із (2) , використовуючи (4), (6), (3), (10) отримаємо

$$\begin{aligned} \| \delta_{n+1} \| &\le \| \Gamma_n \| \cdot \| PT(x_n) - PT(x_{n-1}) - PT'(x_{n-1}) \delta_n + \\ &+ QT(x_n) - QT(x_{n-1}) \| \le \\ &\le B_n (\| PT(x_n) - PT(x_{n+1}) - PT'(x_{n-1})(x_n - x_{n-1}) \|^2 + \\ &+ \| QT(x_n) - QT(x_{n-1}) \|^2)^{\frac{1}{2}} \le \\ &\le \sqrt{\frac{B_1^2 M^2}{4} \| \delta_n \|^2 + p_n^2} \cdot \| \delta_n \| . \end{aligned}$$

Звідси, враховуючи співвідношення (11)-(13), послідовно знаходимо

$$\| \delta_2 \| \le \frac{\sqrt{\frac{h_0^2}{4} + p_0^2}}{1 - h_0} \eta_0 = \eta_1' ,$$

$$\| \delta_3 \| \le \frac{\sqrt{\frac{h_1'^2}{4} + p_1'^2}}{1 - h_1'} \eta_1' = \eta_2' .$$

За індукцією маємо

$$\| \delta_{n+1} \| \le \eta_n' . \tag{14}$$

Таким чином встановлена рекурентна формула (11). Доведемо формулу (12). За означенням h_n' маємо

$$\begin{aligned} h_n' = B_n M \eta_n' &= \frac{B_{n-1} M \sqrt{\frac{h_{n-1}'^2}{4} + p_{n-1}'^2}}{(1 - h_{n-1}')^2} \eta_{n-1}' = \\ &= \frac{h_{n-1}'}{(1 - h_{n-1}')^2} \sqrt{\frac{h_{n-1}'^2}{4} + p_{n-1}'^2} . \end{aligned}$$

Доведемо нерівність

$$r_{n+1}' \le r_n' - \eta_n' , \quad n = 0, 1, 2, .. \tag{15}$$

Використовуючи співвідношення (10)-(13), маємо

$$r'_{n+1} = 1 - h'_n - p'_n - ((1 - h'_n - p'_n)^2 - 2h'_n \times$$
$$\times \sqrt{\frac{h'^2_n}{4} + p'^2_n})^{\frac{1}{2}} \cdot \eta'_n \le$$
$$\le \frac{1 - p'_n - \sqrt{(1 - h'_n - p'_n)^2 - 2h'_n\left(\frac{h'_n}{2} + p'_n\right)}}{h'_n}\eta'_n - \eta'_n =$$
$$= \frac{1 - p'_n - \sqrt{(1 - p'_n)^2 - 2h'_n}}{h'_n}\eta'_n - \eta'_n = r'_n - \eta'_n \,, n \ge 1.$$

Далі оцінка похибки в теоремі має місце, якщо використати нерівності (14), (15).

Зауважемо, що при $h_0 < \frac{1}{2}(1 - p_0)^2$ швидкість збіжності послідовних наближень (2) до розв'язку x^* рівняння (1) характерезується геометричною прогресією із знаменником, як завгодно близьким до числа b', де

$$b' = \lim_{n\to\infty} p'_n = \frac{p_0}{\prod_{i=0}^{\infty}(1 - h'_i)} < 1,$$

причому

$$b' < b = \lim_{n\to\infty} p_n = \frac{p_0}{\prod_{i=0}^{\infty}(1 - h'_i)},$$

де b – знаменник прогресії, яка характерезує швидкість збіжності послідовних наближень (2) у впадку, коли рівняння (1) розглядалось в банаховому просторі E.

Застосуємо метод (2) для розв'язання задачі про вимушені коливання маятника. При застосуванні методу послідовних наближень фактична реалізація ускладнюється в зв'язку з тим, що інтеграли обчислюються наближенно.

Відомо, що вимушені коливання скінченної амплітуди маятника при відсутності дисипативних сил описуються нелінійним диференціальним рівнянням

$$v'' + \alpha^2 \sin v = F(t), \qquad (16)$$

де $\alpha \in R$, $F(t)$ – ω-періодична функція. Якщо

$$F(t) = \beta \sin\frac{\pi t}{\omega}, \qquad (17)$$

тоді для рівняння (16) ставиться задача: чи має рівняння розв'язок такого самого вигляду, тобто функція є непарною, 2ω-періодичною. Ця задача еквівалентна задачі розв'язання рівняння (16) при крайових умовах

$$v(0) = v(1) = 0, \qquad (18)$$

при $\omega = 1$.

Функцією Гріна для задачі

$$x''(t) + \lambda r(t) = 0, \quad x(0) = x(1) = 0$$

є функція

$$G(t,s) = \begin{cases} s(1-t), & 0 \le s \le t \\ t(1-s), & t \le s \le 1 \end{cases},$$

тоді задача (16), (18) еквівалентна інтегральному рівнянню

$$v(t) = -\int_0^1 G(t,s)(F(s) - \alpha^2 \sin v(s))ds.$$

Зробимо заміну

$$\int_0^1 G(t,s)F(s)ds = g(t), \quad v(t) + g(t) = x(t), \qquad (19)$$

Отримаємо рівняння Гамерштейна

$$x(t) = \alpha^2 \int_0^1 G(t,s)\sin(x(s) - g(s))ds. \quad (20)$$

Позначимо

$$Tx = \alpha^2 \int_0^1 G(t,s)\sin(x(s) - g(s))ds.$$

Будемо розглядати рівняння (20) в просторі L_2 інтегрованих с квадратом функцій. Для розв'язання рівняння (20) застосуємо алгоритм (2). За оператор P візьмемо оператор проектування на підпростір, утворений першими

m ортонормованими власними функціями ядра $G(t,s)$.

$$G(t,s)=2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin k\pi t\sin k\pi s}{(k\pi)^2}. \qquad (21)$$

Позначимо

$$\bar{G}(t,s)=2\sum_{k=1}^{m}\frac{\sin k\pi t\sin k\pi s}{(k\pi)^2}.$$

Оскільки

$$PT'(x)y=\alpha^2\int_0^1\bar{G}(t,s)\cos(x(s)-g(s))g(s)ds,$$

$$QTx=\alpha^2\int_0^1(G(t,s)-\bar{G}(t,s))\sin(x(s)-g(s))ds,$$

$$g(t)=\frac{\beta\sin\pi t}{\pi^2}.$$

Тоді алгоритм (2) набуває вигляду

$$x_{n+1}(t)=\alpha^2\int_0^1 G(t,s)\sin(x_n(s)-\frac{\beta\sin\pi s}{\pi^2})ds-$$
$$-\alpha^2\int_0^1\bar{G}(t,s)\cos(x_n(s)-\frac{\beta\sin\pi s}{\pi^2})x_n(s)ds+ \qquad (22)$$
$$+\alpha^2\int_0^1\bar{G}(t,s)\cos(x_n(s)-\frac{\beta\sin\pi s}{\pi^2})x_{n+1}(s)ds.$$

Введемо позначення

$$\alpha^2\int_0^1 G(t,s)\sin(x_n(s)-\frac{\beta\sin\pi s}{\pi^2})ds-$$
$$-\alpha^2\int_0^1\bar{G}(t,s)\cos(x_n(s)-\frac{\beta\sin\pi s}{\pi^2})x_n(s)ds=f_n(t),$$

$$A_k(t)=\sin k\pi t,$$

$$B_k'(t,x_n(t))=\frac{2\alpha^2\sin k\pi t\cos(x_n(t)-\frac{\beta\sin\pi t}{\pi^2})}{k^2\pi^2},$$

$$d_{kj}^{(n)}=\int_0^1 B_k'(s,x_n(s))A_j(s)ds,$$

$$D^{(n)}=\begin{vmatrix}1-d_{11}^{(n)} & \cdots & d_{1m}^{(n)}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ d_{m1}^{(n)} & \cdots & 1-d_{mm}^{(n)}\end{vmatrix}\neq 0$$

$D_{ij}^{(n)}$ – алгебраїчне доповнення елемента $D^{(k)}$, який знаходиться на перетині k-го рядка та j-го стовпчика.

$$L(s,t,x)=\sum_{k,j=1}^{m}\frac{A_k(t)D_{kj}^{(n)}B_j'(s,x)}{D^{(n)}}.$$

Тоді рівняння (22) можно привести до вигляду

$$x_{n+1}(t)=f(t)+\int_0^1\sum_{k,j=1}^{m}\frac{A_k(t)D_{ij}^{(n)}B_j'(s,x_n(s))}{D^{(n)}}f_n(s)ds.$$

Оберемо $x_0(t)=\frac{2\alpha^2\sin k\pi t}{k^2\pi^2}$, тоді

$$B_k'(t,x_0(t))=\frac{2\alpha^2\sin k\pi t}{k^2\pi^2},$$

$$f_0(t)=-\frac{\alpha^2\beta\sin\pi t}{\pi^2},$$

$$\frac{D_{kj}^{(0)}}{D^{(0)}}=\frac{\delta_{kj}}{1-\frac{\alpha^2}{k^2\pi^2}},$$

$$d_{kj}^{(0)}=\frac{\alpha^2}{k^2\pi^2}\delta_{kj},$$

де δ_{kj} – символ Кронекера.

$$L(t,s,x_0(t))=2\alpha^2\sum_{k=1}^{m}\frac{\sin k\pi t\sin k\pi s}{k^2\pi^2-\alpha^2}. \qquad (23)$$
$$(\alpha\neq k\pi)$$

Далі отримаємо при $n=0$

$$x_1(t)=-\frac{\beta\alpha^2\sin\pi t}{\pi^2(\pi^2-\alpha^2)}. \qquad (24)$$

Для застосування теореми треба обчислити оцінки величин, ядро $G(t,s)$ симетричне, його

власні значення $-\frac{1}{k^2\pi^2}$, $(k=1,2,..)$, а норма лінійного симетричного оператора дорівнює найбільшому власному значенню, отже

$$\varphi(t,x)=\alpha^2\cos(x-g),$$
$$\max\left|\frac{\partial\varphi(t,x)}{\partial x}\right|=\max\left|\alpha^2\cos(x-g)\right|=\alpha^2.$$

Із (22) отримаємо

$$M\le\frac{\alpha^2}{\pi^2},\qquad q\le\frac{\alpha^2}{(k+1)^2\pi^2},$$

Тобто із (23) отримаємо

$$|L(t,s,x_0)(t)|\le 2\alpha^2\sum_{k=1}^{m}\frac{|\sin k\pi t||\sin k\pi s|}{k^2\pi^2-\alpha^2}\le$$
$$\le\frac{2\alpha^2}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2-\frac{\alpha^2}{\pi^2}}=1-\alpha\cdot ctg\alpha.$$

Звідси маємо

$$B_0\le 1+\left(\int_0^1\int_0^1(1-\alpha\cdot ctg\alpha)dsdt\right)^{\frac{1}{2}}=2-\alpha\cdot ctg\alpha.$$

Із (24) отримаємо

$$\eta_0\le\frac{\beta}{\pi^2-\alpha^2}.$$

Зокрема, при

$$\alpha=\frac{\pi}{2},\quad k=1,\quad \beta=\frac{3\pi^2}{20}\qquad(25)$$

виконуються умови теореми, тому рівняння (20) має розв'язок $x^*(t)$, до якого збігаються послідовні наближення (24). Враховуючи (25) із (28) отримаємо

$$\overline{x}_1(t)=\frac{\sin\pi t}{20},\quad \text{причому}$$

$$|\overline{x}_1(t)-x^*(t)|\le 0,03.$$

3. Висновки

В даній роботі метод знаходження розв'язку нелінійного операторного рівняння в гільбертовому просторі розглядається за умови Л.В. Канторовича: існування та обмеженність оберненого оператора лише в одній точці, яка є початковим значенням. При $P=I$ теорема про збіжність методу (2) переходить в теорему про збіжність основного методу Ньютона-Канторовича. Зручність методу в порівнянні з методом Ньютона-Канторовича з обчислювальної точки зору полягає в тому, що знаходження послідовних наближень зводиться до розв'язання системи лінійних рівнянь.

Список використаних джерел

1. *Grechko V.I.* About estimate of error of a generalization's method of Newton-Kantorovich // Dokl. AN.USSR, Ser. A. – 1972. – № 8. – P. 679-682. (in Russian).
2. *Kantorovich L.V., Akilov G.P.* Functional analisys in normed spases. – Moscow: Fizmatgiz, 1959. – 685 p. (in Russian).
3. *Krasnoselskii M.A., Vainikko G.M., Zabreiko P.P., Rutickii Y.B., Stecenko V.Y.,* Approximate solutions of operator equations. – Moscow: Nauka, 1969. – 442 p. (in Russian).
4. Luchka *A.Y.* A projective iterative methods. – Kiev: Naukova Dumka, 1993. – 288 p. (in Russian).
5. Samoilenko *A.M., Ronto M.M.,* An approximate analytic methods of investigation of periodic solution. – Kiev: Naukova Dumka, 1976. – 180 p. (in Russian).
6. *Brezinski C.* Projective methods for systems of equtions – Amsterdam: Elsevier, 1997. – P. 409.

Надійшла до редколегії 19.12.2013

УДК 539.375

Камінський А.О.[1], д. ф.-м. н., проф.,
Дудик М.В.[2], к. ф.-м. н., доц.,
Кіпніс Л.А.[2], д. ф.-м. н., проф.

Маломасштабна контактна зона з тертям берегів біля вершини міжфазної тріщини

В умовах плоскої деформації методом Вінера-Хопфа виконано розрахунок маломасштабної контактної зони біля вершини міжфазної тріщини, береги якої взаємодіють за законом сухого тертя. Досліджено вплив тертя і конфігурації навантаження на розміри зони та напружено-деформований стан в околі вершини тріщини.

Ключові слова: міжфазна тріщина, контактна зона, тертя.

[1] Інститут механіки ім. С.П.Тимошенко НАН України, 03057, м. Київ, вул. Нестерова, 3,
e-mail: fract@inmech.kiev.ua

[2] Уманський державний педагогічний університет, 20300, м. Умань, вул. Садова, 2,
e-mail: dudik_m@hotmail.com

A. O. Kaminsky[1], Full Professor, Doctor of Sciences (Physics and Mathematics)
M. V. Dudyk[2], Associate Professor, Ph.D.
L. A. Kipnis[2], Full Professor, Doctor of Sciences (Physics and Mathematics)

Small scale contact zone with the friction of the lips near the interfacial crack tip

The calculation of the small contact zone near the interface crack tip is executed by the Wiener – Hopf method for the plain strain conditions. The crack lips are in contact with friction. The influence of friction and loading configuration on the zone size and on the stress-strained state near the crack tip is investigated.

Key Words: interface crack, contact zone, friction.

[1] S.P. Timoshenko Institute of mechanics, 03057, Kyiv, Nesterov str., 3,
e-mail: fract@inmech.kiev.ua

[2] Uman State Pedagogical University, 20300, Uman, Sadova str., 2,
e-mail: dudik_m@hotmail.com

Статтю представив д. ф.-м. н., проф. Маципура В.Т.

У теорії міжфазних тріщин однією з найбільш поширених є модель Комніноу [13], що припускає наявність поблизу вершини тріщини контакту берегів. Введення області контакту обумовлене необхідністю усунення фізично некоректних просторових осциляцій переміщень біля вершини, які передбачає класична модель міжфазної тріщини, розвинена в роботах Вільямса, Ердогана, Райса, Сі і інших авторів. Дослідженням контактної зони за різних умов присвячені численні публікації [5, 8-12, 14-16, 18, 20]. Зокрема, Аткінсон методом Вінера-Хопфа знайшов аналітичний розв'язок задачі про контактну зону малих розмірів для міжфазної тріщини у кусково-однорідній площині, навантаженій на нескінченності однорідними зсувними і розтягувальними зусиллями без урахування тертя між берегами [10-11]. У даній роботі аналогічний підхід використовується для розрахунку маломасштабної контактної зони за наявності тертя берегів і навантаження загального виду, заданого коефіцієнтом інтенсивності напружень.

Постановка задачі. В умовах плоскої деформації розглянемо задачу про розрахунок контактної зони біля вершини міжфазної тріщини, яка лежить на межі поділу двох однорідних ізотропних середовищ з модулями зсуву G_1, G_2 і коефіцієнтами Пуассона ν_1, ν_2. Контактну зону моделюватимемо розрізом, береги якого взаємодіють за законом сухого тертя Кулона. На розрізі передбачається стискувальне нормальне напруження і допускається стрибок лише дотичної складової переміщення. Довжина контактної зони і контактне напруження визначаються в ході розв'язання задачі.

У даній роботі обмежимося випадком, коли довжина контактної зони s значно менше довжини тріщини, яку для зручності покладемо рівною одиниці, та всіх інших суттєвих розмірів тіла. Це дозволяє розглядати тіло як кусково-однорідну

© А.О. Камінський, М.В. Дудик, Л.А. Кіпніс, 2014

площину з півнескінченним розрізом на межі поділу, частина берегів якого, прилегла до вершини, перебуває у контакті (Рис.1).

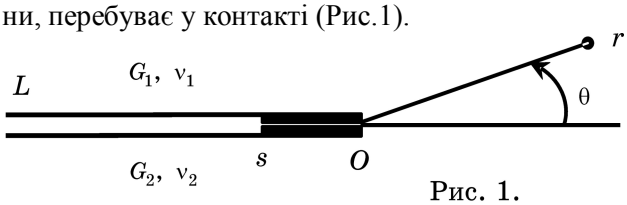


Рис. 1.

На нескінченності реалізується асимптотика, яка є розв'язком аналогічної задачі без контактної зони. Цей розв'язок має осцилюючу поведінку при наближенні до вершини тріщини, що відповідає двом комплексно спряженим кореням $\lambda_0 = -0{,}5 \pm i\omega$ рівняння $D_0(-1-x)=0$ [17, 21, 22], де

$$D_0(p) = (e+\kappa_1)^2 + (1+e\kappa_2)^2 + 2(e+\kappa_1)(1+e\kappa_2)\cos 2p\pi,$$

$$e = G_1/G_2,\ \kappa_{1(2)} = 3 - 4\nu_{1(2)},\ \omega = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1-\beta}{1+\beta},$$

$$\beta = \frac{(1+e\kappa_2)-(e+\kappa_1)}{(1+e\kappa_2)+(e+\kappa_1)}$$ - параметр Дундурса.

Вважаючи, що поза контактною зоною береги тріщини вільні від навантаження, з урахуванням контакту берегів у зоні за законом сухого тертя приходимо до статичної задачі теорії пружності з крайовими умовами:

$$\theta = 0:\ \langle\sigma_\theta\rangle = \langle\tau_{r\theta}\rangle = 0,\ \langle u_r\rangle = \langle u_\theta\rangle = 0;$$

$$\theta = \pm\pi:\ \langle\sigma_\theta\rangle = \langle\tau_{r\theta}\rangle = 0,\ \tau_{r\theta} = -\mu\sigma_\theta; \qquad (1)$$

$$\theta = \pm\pi,\ r < s:\ \langle u_\theta\rangle = 0;$$

$$\theta = \pm\pi,\ r > s:\ \sigma_\theta = 0; \qquad (2)$$

$$\theta = \pm\pi,\ r \to \infty:\ \left\langle\frac{\partial u_\theta}{\partial r}\right\rangle = \frac{4(1-\nu_1)}{G_1}\operatorname{Re}\left(Ar^{-0{,}5+i\omega}\right) + o(1/r), \qquad (3)$$

де $\langle f\rangle$ - стрибок величини f, μ - коефіцієнт тертя,

$$A = -\frac{a}{4(1+\kappa_1)}\frac{K}{\sqrt{2\pi}},\ a = e+\kappa_1+1+e\kappa_2,$$

$K = K_1 + iK_2$ - комплексний коефіцієнт інтенсивності напружень, що характеризує величину і конфігурацію зовнішнього навантаження. Надалі K вважатимемо заданим за умовою задачі і таким, що забезпечує стискувальні напруження на берегах контактної зони ($\sigma_0(r,\pm\pi) < 0$ при $r<s$).

Розв'язок сформульованої крайової задачі шукаємо у вигляді суми розв'язків наступних двох задач. Перша задача відрізняється від початкової тим, що замість першої з умов (2) використовуємо умову

$$\theta = \pm\pi,\ r < s:\ \left\langle\frac{\partial u_\theta}{\partial r}\right\rangle = -\frac{4(1-\nu_1)}{G_1}\operatorname{Re}\left(Ar^{-0{,}5+i\omega}\right), \qquad (4)$$

а на нескінченності $\left\langle\frac{\partial u_\theta}{\partial r}\right\rangle \sim o(1/r)$. Друга задача – аналогічна задача без контактної зони, розв'язок якої відомий [17, 21, 22], тому достатньо знайти розв'язок першої задачі.

Розв'язання рівняння Вінера – Хопфа. Застосувавши до рівнянь рівноваги, умови сумісності деформацій, закону Гука і граничних умов (1) інтегральне перетворення Мелліна [7] і використовуючи умови (2) і (4), приходимо до функціонального рівняння Вінера – Хопфа першої задачі у смузі $-\varepsilon_1 < \operatorname{Re} p < \varepsilon_2$ (ε_1, ε_2 – достатньо малі позитивні числа):

$$\Phi^+(p) - \frac{As^{-0{,}5+i\omega}}{p+0{,}5+i\omega} - \frac{\overline{A}s^{-0{,}5-i\omega}}{p+0{,}5-i\omega} = -\frac{2a(e+\kappa_1)(1+e\kappa_2)\sin p\pi D(p)}{(1+\kappa_1)D_0(p)}\Phi^-(p), \qquad (5)$$

де $\overline{A}$ - величина, комплексно спряжена A;

$$\Phi^+(p) = \frac{G_1}{2(1-\nu_1)}\int_1^\infty \left\langle\frac{\partial u_\theta}{\partial r}\right\rangle\Big|_{\substack{r=\rho s\\ \theta=\pm\pi}} \rho^p\, d\rho,$$

$$\Phi^-(p) = \int_0^1 \sigma_\theta(\rho s,\pi)\rho^p\, d\rho,$$

$$D(p) = \cos p\pi - \mu\beta\sin p\pi.$$

Використовуючи подання

$$\cos p\pi - \mu\beta\sin p\pi = \frac{D_1(p)}{2\sqrt{1+\mu^2\beta^2}\sin(p-\lambda)\pi},$$

$$D_1(p) = (1-\mu^2\beta^2) + (1+\mu^2\beta^2)\cos 2p\pi,$$

де λ – єдиний на інтервалі (–1,0) корінь рівняння $D(-1-x)=0$, приведемо рівняння (5) до вигляду:

$$\Phi^+(p) - \frac{As^{-0{,}5+i\omega}}{p+0{,}5+i\omega} - \frac{\overline{A}s^{-0{,}5-i\omega}}{p+0{,}5-i\omega} = -B\frac{\sin p\pi}{\sin(p-\lambda)\pi}G(p)\Phi^-(p), \qquad (6)$$

$$B = \frac{a\sqrt{1+\mu^2\beta^2}}{2(1+\kappa_1)},$$

$$G(p) = \frac{2(e+\kappa_1)(1+e\kappa_2)D_1(p)}{(1+\mu^2\beta^2)D_0(p)}.$$

Функція $G(it)$ є дійсною додатною парною функцією, яка прямує до 1 при $t\to\pm\infty$, тому можлива факторизації $G(p)$ за формулою [3]:

$$G(p)=\frac{G^+(p)}{G^-(p)},\ \ \mathrm{Re}\,p=0,$$

$$\exp\left[\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-i\infty}^{+i\infty}\frac{\ln G(z)}{z-p}dz\right]=\begin{cases}G^+(p),\ \mathrm{Re}\,p<0,\\ G^-(p),\ \mathrm{Re}\,p>0.\end{cases}$$

За допомогою формул симетрії гамма-функцій [1] отримаємо подання

$$Q^{\pm}(p)=\frac{\Gamma(1\pm\lambda\mp p)}{\Gamma(1\mp p)}.$$

При цьому функція $Q^+(p)$ аналітична і не має нулів у півплощині $\mathrm{Re}\,p<1+\lambda$, а $Q^-(p)$ – у півплощині $\mathrm{Re}\,p>-1$. В результаті нескладних перетворень рівняння (6) приведемо до вигляду:

$$\frac{\sin p\pi}{\sin(p-\lambda)\pi}=\frac{p}{p-\lambda}Q^+(p)Q^-(p),$$

$$\frac{\Phi^+(p)}{pQ^+(p)G^+(p)}-\frac{As^{-0,5+i\omega}}{p+0,5+i\omega}\left[\frac{1}{pQ^+(p)G^+(p)}+\frac{1}{(0,5+i\omega)Q^+(-0,5-i\omega)G^+(0,5-i\omega)}\right]-$$

$$-\frac{\overline{A}s^{-0,5-i\omega}}{p+0,5-i\omega}\left[\frac{1}{pQ^+(p)G^+(p)}+\frac{1}{(0,5-i\omega)Q^+(-0,5+i\omega)G^+(-0,5+i\omega)}\right]=$$

$$=-\frac{BQ^-(p)\Phi^-(p)}{(p-\lambda)G^-(p)}-\frac{As^{-0,5+i\omega}}{(p+0,5+i\omega)(0,5+i\omega)Q^+(-0,5-i\omega)G^+(-0,5-i\omega)}-$$

$$-\frac{\overline{A}s^{-0,5-i\omega}}{(p+0,5-i\omega)(0,5-i\omega)Q^+(-0,5+i\omega)G^+(-0,5+i\omega)},\ \ \mathrm{Re}\,p=0. \qquad (7)$$

У такому поданні ліва частина рівняння (7) є аналітичною функцією у півплощині $\mathrm{Re}\,p<0$, а права – у півплощині $\mathrm{Re}\,p>0$. Тоді відповідно до принципу аналітичного продовження повинна існувати єдина функція, яка є аналітичною у всій комплексній площині і дорівнює лівій і правій частинам цього рівняння у відповідних півплощинах. Для її знаходження дослідимо асимптотичну поведінку функцій, що входять в рівняння (7), в околі нескінченно віддаленої точки.

Згідно з загальними положеннями про поведінку напружень і переміщень біля концентраторів [2, 6] в кінці контактної зони мають місце сингулярності виду

$$\sigma_\theta(r,\pm\pi)\sim M_1(s-r)^{-1-\lambda}\ \ (r\to s-0), \qquad (8)$$

$$\frac{G_1}{2(1-\nu_1)}\left\langle\frac{\partial u_\theta}{\partial r}\right\rangle\Big|_{\theta=\pm\pi}\sim M_2(r-s)^{-1-\lambda}\ (r\to s+0),$$

де M_1, M_2 - деякі сталі. Тоді за теоремою абелева типу [4] знаходимо, що

$$\Phi^-(p)\sim M_1\Gamma(-\lambda)s^{-1-\lambda}p^\lambda,$$

$$\Phi^+(p)\sim M_2\Gamma(-\lambda)s^{-1-\lambda}(-p)^\lambda\ \ (p\to\infty). \qquad (9)$$

Формула Стірлінга [1] приводить до асимптотик $Q^{\pm}(p)\sim(\mp p)^{\pm\lambda}$ $(p\to\infty)$. З визначення $G^{\pm}(p)$ також випливає, що $G^{\pm}(\infty)=1$. Підставляючи знайдені вище асимптотики в (7), отримаємо, що ліва і права частини рівняння (7) на нескінченності обертаються в нуль. Отже, за теоремою Ліувіля єдина аналітична функція тотожно дорівнює нулю у всій комплексній площині. Прирівнюючи обидві частини рівняння (7) до нуля, отримаємо його точний розв'язок:

$$\Phi^+(p)=pQ^+(p)G^+(p)\left\{\frac{As^{-0,5+i\omega}}{p+0,5+i\omega}\left[\frac{1}{pQ^+(p)G^+(p)}+\frac{1}{(0,5+i\omega)Q^+(-0,5-i\omega)G^+(-0,5-i\omega)}\right]+\right.$$

$$\left.+\frac{\overline{A}s^{-0,5-i\omega}}{p+0,5-i\omega}\left[\frac{1}{pQ^+(p)G^+(p)}+\frac{1}{(0,5-i\omega)Q^+(-0,5+i\omega)G^+(-0,5+i\omega)}\right]\right\},\ \ \mathrm{Re}\,p<0;$$

$$\Phi^-(p)=-\frac{(p-\lambda)G^-(p)}{BQ^-(p)}\left\{\frac{As^{-0,5+i\omega}}{(p+0,5+i\omega)(0,5+i\omega)Q^+(-0,5-i\omega)G^+(-0,5-i\omega)}+\right.$$

$$\left.+\frac{\overline{A}s^{-0,5-i\omega}}{(p+0,5-i\omega)(0,5-i\omega)Q^+(-0,5+i\omega)G^+(-0,5+i\omega)}\right\},\ \ \mathrm{Re}\,p>0. \qquad (10)$$

Розрахунок параметрів контактної зони. З (10) при $p\to\infty$ випливає асимптотика

$$\Phi^-(p)\sim\frac{p^\lambda}{B}\operatorname{Re}\left[\frac{A(1+2i\omega)^{-1}s^{-0,5+i\omega}}{Q^+(-0,5-i\omega)G^+(-0,5-i\omega)}\right].$$

Порівнюючи цей вираз з (9), отримаємо

$$M_1=\frac{s^{\lambda+1}}{B\Gamma(-\lambda)}\operatorname{Re}\left[\frac{A(1+2i\omega)^{-1}s^{-0,5+i\omega}}{Q^+(-0,5-i\omega)G^+(-0,5-i\omega)}\right].$$

Оскільки в кінці контактної зони нормальне напруження обертається в нуль ($\sigma_\theta(s,\pm\pi)=0$) і концентрація напружень відсутня, це приводить до умови M_1=0, з якої випливає вираз для довжини зони:

$$s=\exp\left[-\frac{1}{\omega}\left(\frac{\pi}{2}+\psi-\gamma-\delta-\xi\right)\right], \qquad (11)$$

де $\psi=\operatorname{arctg}\dfrac{K_{II}}{K_I}$, $\gamma=\arg J\left(-\dfrac{1}{2}+i\omega\right)$,

$\delta=\arg Q^+\left(-\dfrac{1}{2}-i\omega\right)$, $\xi=\operatorname{arctg}2\omega$,

$$J(x)\equiv G^+(-1-x)=\exp\left[\frac{1+x}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\ln G(it)}{t^2+(1+x)^2}dt\right].$$

Застосовуючи до трансформанти нормального напруження зворотне перетворення Мелліна і використовуючи знайдений розв'язок (10), теорему про лишки, явний вигляд функцій $D(p)$ і $D_0(p)$, подання множника A через коефіцієнт інтенсивності напружень, знайдемо розвинення контактного напруження по степеням r:

$$\sigma_\theta(r,\pi)=\frac{-|K|}{\sqrt{2\pi s}B_1}\sum_{k=0}^{\infty}\left\{C_{1k}\cos(\omega\ln s+\delta_{1k})\left(\frac{r}{s}\right)^{\lambda_k}-\right.$$

$$\left.-C_{2k}\cos(\omega\ln s+\delta_{2k})\left(\frac{r}{s}\right)^{k-1}\right\}\quad(0\le r\le s),\qquad(12)$$

$$B_1=4\pi(e+\kappa_1)(1+e\kappa_2)\times$$
$$\times\left|Q^+(-0,5-i\omega)\right|\cdot\left|J(-0,5+i\omega)\right|,$$

$$C_{1k}=\frac{a_1(1+\lambda_k)Q^+(-1-\lambda_k)J(\lambda_k)}{|c_k|},$$

$$C_{2k}=\frac{ka^2Q^+(-k)J(k-1)}{|b_k|},$$

$$a_1=a^2-\frac{4(e+\kappa_1)(1+e\kappa_2)}{1+\mu^2\beta^2},$$

$$b_k=(k-0,5-i\omega)(0,5+i\omega),$$

$$c_k=(0,5+\lambda_k-i\omega)(0,5+i\omega),$$

$$\delta_{1k}=\psi-\gamma-\delta-\varepsilon_k,\quad\delta_{2k}=\psi-\gamma-\delta-\zeta_k,$$

$$\zeta_k=\arg b_k,\quad\varepsilon_k=\arg c_k,$$

$$\lambda_k=-\frac{1}{\pi}\operatorname{arcctg}\mu\beta+k\quad(k=0,1,2,...)$$

(λ_k – сукупність коренів рівняння $D(-1-x)=0$, що задовольняють умову $\lambda_k>-1$; $\lambda_0=\lambda$).

Аналогічно визначенню $\sigma_\theta(r,\pm\pi)$, обмежуючись лише сингулярним доданком, знайдемо дотичне напруження на межі поділу середовищ біля вершини тріщини:

$$\tau_{r\theta}(r,0)=-\frac{(1+\kappa_1)a\beta(1+\mu^2)}{\pi\sqrt{s}(e+\kappa_1)(1+e\kappa_2)\sqrt{1+\mu^2\beta^2}}\frac{4D_0(-1)Q^+(-1)J(0)}{D_0(-1-\lambda)(1+4\omega^2)}\operatorname{Re}\left[\frac{As^{i\omega}}{Q^+(-0,5-i\omega)J(-0,5+i\omega)}\right]\left(\frac{r}{s}\right)^\lambda.$$

(13)

Порівнюючи цей вираз з відомою асимптотичною поведінкою дотичного напруження на продовженні міжфазної контактної зони [19]

$$\tau_{r\theta}(r,0)=\frac{k_{II}}{(2\pi)^\lambda}r^\lambda\quad(r\to0),$$

знаходимо коефіцієнт інтенсивності напружень у вершині тріщини:

$$k_{II}=\frac{|K|}{\sqrt{2\pi s}}\frac{2a^4\beta(1+\mu^2)s^{-\lambda}}{(2\pi)^{1-\lambda}(e+\kappa_1)(1+e\kappa_2)(1+4\omega^2)\sqrt{1+\mu^2\beta^2}}\frac{\Gamma(2+\lambda)J(0)\cos(\omega\ln s+\psi-\delta-\gamma)}{D_0(-1-\lambda)\left|Q^+(-0,5-i\omega)\right|\cdot\left|J(-0,5+i\omega)\right|}.$$

Аналіз результатів і висновки. Згідно (11), довжина контактної зони не залежить від величини зовнішнього навантаження, заданого модулем КІН, проте суттєво залежить від його конфігурації (співвідношення розтягувальних і зсувних зусиль), пов'язаної з фазовим кутом навантаження ψ. На рис. 2 суцільними лініями представлена залежність відносної довжини зони s/L від фазового кута ψ при коефіцієнті тертя $\mu=-0,5$ і відношеннях модулів зсуву з'єднаних матеріалів: 1) $G_1/G_2=0,1$; 2) $G_1/G_2=0,3$; 3) $G_1/G_2=0,5$ (тут і нижче $\nu_1=\nu_2=0,3$). Тут же пунктирними лініями показана оцінка розмірів контактної зони за умовою обернення в нуль стрибка переміщення берегів тріщини $\langle u_\theta(r,\theta)\rangle_{\theta=\pm\pi}$ з використанням

осцилюючого розв'язку в рамках класичної моделі відкритої тріщини [17, 21, 22]. Як видно з рисунку, у використовуваному інтервалі параметрів довжина зони експоненціально спадає зі збільшенням фазового кута, причому тим швидше, чим ближче відношення модулів зсуву до одиниці. Значення довжини зони близькі до оціночних.

При переважанні розтягувальних навантажень розміри зони виявляються екстремально малими (менше міжатомних відстаней), так що модель контактної зони в рамках континуальної теорії пружності стає фізично некоректною. Навпаки, зусилля, що призводять до зсуву берега тріщини в менш жорсткому матеріалі відносно протилежного берега в напрямку від вершини, зумовлюють розміри зони, зрівнянні за порядком величини з довжиною тріщини, проте в цьому випадку порушується прийнята в даній роботі умова маломасштабності зони, і для великих її розмірів отриманий розв'язок стає необґрунтованим.

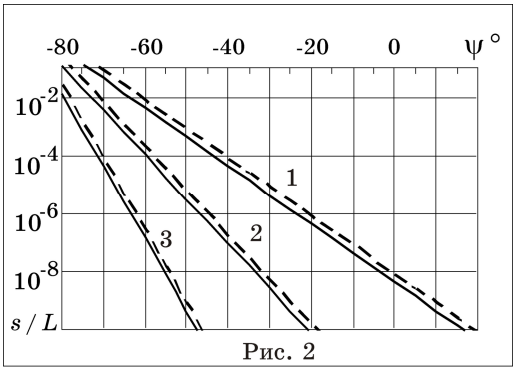


Рис. 2

Залежність розміру контактної зони від тертя виявляється менш вираженою. Представлені в табл. 1 розрахунки при фазовому куті навантаження ψ=–60° показують, що її довжина повільно зростає зі збільшенням тертя, що узгоджується з висновками [5, 9, 20]. При μ=0 довжина зони точно співпадає зі значеннями, знайденими згідно [11].

Таблиця 1

Залежність розмірів контактної зони від коефіцієнта тертя

$\frac{G_1}{G_2}$	μ				
	0	-0,1	-0,2	-0,3	-0,4
0,1	$4{,}005\cdot10^{-3}$	$4{,}054\cdot10^{-3}$	$4{,}130\cdot10^{-3}$	$4{,}183\cdot10^{-3}$	$4{,}237\cdot10^{-3}$
0,3	$9{,}895\cdot10^{-5}$	$9{,}975\cdot10^{-5}$	$1{,}006\cdot10^{-4}$	$1{,}014\cdot10^{-4}$	$1{,}022\cdot10^{-4}$
0,5	$1{,}330\cdot10^{-7}$	$1{,}336\cdot10^{-7}$	$1{,}343\cdot10^{-7}$	$1{,}350\cdot10^{-7}$	$1{,}357\cdot10^{-7}$

Розміри зони істотно залежать від співвідношення пружних параметрів з'єднаних матеріалів, причому чим ці параметри ближчі, тим менші розміри зони (див. рис. 3: ψ=–60°, 1) μ=0; 2) μ=–0,2; 3) μ=–0,4).

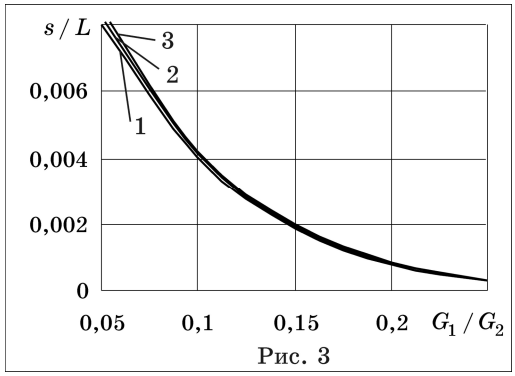


Рис. 3

Згідно (12) і (13), напруження біля вершини тріщини мають степеневу особливість з дійсним показником сингулярності $-1<\lambda<0$, що задовольняє рівняння $D(-1-x)=0$. Таким чином, контактна зона усуває просторові осциляції, характерні для класичної моделі міжфазної тріщини. Цей висновок також ілюструє мал. 4, на якому представлена залежність контактного напруження від відстані до вершини тріщини, розташованої на плоскій межі поділу матеріалів кусково-однорідної площини, навантаженої на нескінченності розтягувальним напруженням $p_\infty = 1{,}0G_1$ і зсувним напруженням $q_\infty = -4{,}0G_1$ при відношеннях модулів зсуву $G_1/G_2 = 0{,}1$ (криві 1), $G_1/G_2 = 0{,}3$ (криві 2). Пунктирним лініям відповідає μ=0, суцільним - μ=–0,5. Коефіцієнт інтенсивності при даній конфігурації тіла і навантаження $K = \frac{\sqrt{\pi L/2}}{\operatorname{ch}\pi\omega}(q_\infty + ip_\infty)(1+2i\omega)$ [21, 22]. Виявляється, тертя берегів дещо зменшує контактне напруження біля вершини і збільшує його біля кінця контактної зони.

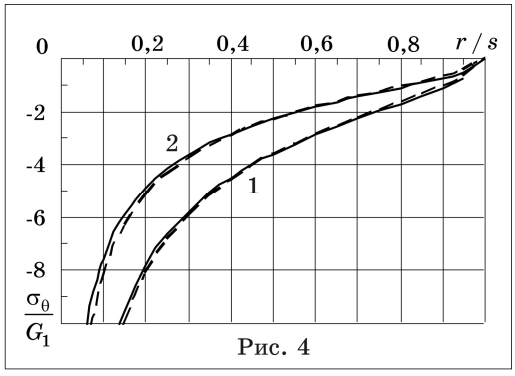


Рис. 4

За аналогічних умов ($G_1/G_2 = 0{,}3$; $p_\infty = 1{,}0G_1$) виконано також розрахунок коефіцієнта інтенсивності напружень біля вершини тріщини. Значення k_{II}/G_1 для різних коефіцієнтів тертя і дотичних напружень наведені в табл. 2.

Таблиця 2

Залежність коефіцієнта інтенсивності напружень від зсувного навантаження та тертя

q_∞ / G_1	μ			
	0	-0,2	-0,4	-0,6
0	-0,12863	-0,18104	-0,25484	-0,35849
-1	-0,18190	-0,21910	-0,26399	-0,31808
-2	-0,28762	-0,32501	-0,36744	-0,41550
-3	-0,40675	-0,44688	-0,49122	-0,54014
-4	-0,53034	-0,57385	-0,62128	-0,67288
-5	-0,65587	-0,70302	-0,75398	-0,80897

З табл. 2 випливає, що тертя між берегами міжфазної тріщини істотніше впливає на коефіцієнт інтенсивності напружень, ніж на розміри контактної зони, збільшуючи його у порівнянні з безфрикційним контактом. Коефіцієнт інтенсивності також зростає зі збільшенням зовнішнього дотичного напруження.

Список використаних джерел

1. *Abramovitz M., Stegun I. A.* Handbook of Mathematical Function. – New York: Dover Publications, 1965. – 1046 p.
2. *Cherepanov G. P.* Mechanics of Brittle Fracture. – New York: McGraw-Hill, 1979. – 939 p.
3. *Gakhov F. D.* Boundary Value Problems. – Oxford: Pergamon Press, 1966. – 564 p.
4. *Noble B.* Methods Based on the Wiener-Hopf Technique, 2nd ed. – New York: Chelsea, 1988. – 246 p.
5. *Ostrik V. I., Ulitko A. F.* Wiener–Hopf Method in Contact Problems of the Theory of Elasticity. – Kiev: Naukova Dumka, 2006. – 328 p. (in Russian).
6. *Parton V. Z., Perlin P. I.* Mathematical Methods of the Theory of Elasticity. – Moscow: Nauka, 1981. – 688 p. (in Russian).
7. *Uflyand Ya. S.* Survey of Articles on the Application of Integral Transforms in the Theory of Elasticity. – North Carolina State University, 1965. – 402 p.
8. *Anderson P.* Small Scale Contact Conditions for the Linear-Elastic Interface Crack // J. Appl. Mech., Trans. ASME, Ser. E. – 1988. – **55**. – P. 814-817.
9. *Antipov Y. A.* An interface crack between elastic materials when there is dry friction // J. Appl. Math. Mech. (PMM). – 1995. – **59**, P. 273-287.
10. *Atkinson C.* The interface crack with a contact zone (an analytical treatment) // Int. Journ. of Fracture. – 1982. – **18**. – P. 161-177.
11. *Atkinson C.* The interface crack with a contact zone (the crack of finite length) // Int. Journ. of Fracture. – 1982. – **19**. – P. 131-138.
12. *Comninou M.* Interface crack with friction in the contact zone // J. Appl. Mech., Trans. ASME, Ser. E. – 1977. – **44**. – P. 780-781.
13. *Comninou M.* The Interface crack // J. Appl. Mech., Trans. ASME, Ser. E. – 1977. – **44**. – P. 631-636.
14. *Comninou M., Dundurs J.* Effect of friction on the interface crack loaded in shear // J. of Elasticity. – 1980. – **10**, No.2. – P. 203-212.
15. *Comninou M., Schmueser D.* The Interface Crack in a Combined Tension-Compression and Shear Field // J. Appl. Mech., Trans. ASME, Ser. E. – 1979. – **46**. – P. 780-781.
16. *Dundurs J., Comninou M.* A review and prospects of the investigation of an interface crack // Mechanics of Composite Materials. – 1979. – No.3. – P. 378–396 [in Russian].
17. *Erdogan F.* Stress Distribution in Bonded Dissimilar Materials with Cracks // J. Appl. Mech., Trans. ASME, Ser. E. – 1965. – **32**. – P. 403-410.
18. *Gautesen A.K., Dundurs J.* The Interface Crack Under Combined Loading // J. Appl. Mech., Trans. ASME, Ser. E. – 1988. – **55**. – P. 580-586.
19. *Leblond J. B., Frelat J.* Crack kinking from an initially closed, ordinary on interface crack, in the presence of friction // Eng. Fract. Mech. – 2004. – **71**. – P. 289–307.
20. *Ostryk V. I.* Friction Contact of the Edges of an Interface Crack under the Conditions of Tension and Shear // Materials Science. – 2003. – **39**, No. 2. – P. 214-224.
21. *Rice J., Sih G. C.* Plane Problems of Crack in Dissimilar Media // J. Appl. Mech., Trans. ASME, Ser. E. – 1965. – **32**. – P. 418-423.
22. *Rice J.R.* Elastic Fracture Mechanics Concepts for Interfacial Cracks // J. Appl. Mech., Trans. ASME, Ser. E. – 1988. – **55**. – P. 98-103.

Надійшла до редколегії 06.11.2013

УДК 532.5

Курилко О.Б.[1], к.ф.-м.н.

Періодичні рухи в'язкої рідини всередині прямокутної порожнини

Досліджена двовимірна періодична течія в'язкої нестисливої рідини в наближенні Стокса всередині прямокутної порожнини при нерівномірному розподілі заданої швидкості на верхній та нижній границі відповідно. Запропонований алгоритм для відшукання періодичних точок течії другого та третього порядків при складному розподілі швидкості руху границь. Проведено порівняння отриманих чисельних результатів з відомими експериментальними даними.

Ключові слова: прямокутна порожнина, періодична точка, відображення Пуанкаре

[1] Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, просп. Глушкова, 4е, e-mail: alexandr.kurylko@gmail.com

O.B. Kurylko[1], PhD (Phys.-Math.)

Periodic motions of viscous fluid inside a rectangular cavity

The two-dimensional periodic flow of viscid incompressible fluid in the Stokes approximation in a rectangular cavity with non-uniform velocity distribution on the top and bottom boundaries is considered. An algorithm for finding periodic points of second and third order with non-uniform velocity distribution is proposed. The obtained numerical results agree with well-known experimental data.

Key Words: rectangular cavity, periodic point, Poincare mapping

[1] Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03680, Kyiv, Glushkova st., 4e,
e-mail: alexandr.kurylko@gmail.com

Статтю представив член редколегії д. ф.-м. н., професор Маципура В. Т.

Вступ

В останнє десятиліття можна відзначити підвищену увагу багатьох фахівців до проблеми перемішування рідин ламінарними течіями. Аналіз масштабів різних течій дозволяє зробити висновок про те, що на початкових етапах течій з різними геометричними масштабами переважаючими є конвективні механізми перемішування, і завдання перемішування зводяться до аналізу процесів деформації виділеної рідини в розглядуваному полі швидкості. Фактично ця задача пов'язана з лагранжевим описом руху в гідродинаміці і зводиться до аналізу руху системи лагранжевих рідких частинок в ейлеровому полі швидкості. В літературі [1,6] ця задача отримала назву *задача про адвекцію рідини*, яка в двовимірному випадку описується системою звичайних диференціальних рівнянь першого порядку

$$\frac{dX}{dt}=\frac{\partial\Psi}{\partial Y},\qquad \frac{dY}{dt}=-\frac{\partial\Psi}{\partial X}. \tag{1}$$

де Ψ - функція течії, з початковими умовами $X=X_0$, $Y=Y_0$ при $t=t_0$.

Важливим при вивченні адвекції рідини є знання періодичних точок течії порядку p, тобто таких початкових умов в рівняннях (1), коли точка за p періодів точно повернеться в своє початкове положення.

Дана робота присвячена побудові алгоритму відшукання періодичних точок течії різних порядків при нерівномірному розподілі заданої швидкості на границях прямокутної порожнини, який розглядається в експериментальній роботі Оттіно [5].

1. Постановка задачі та побудова аналітичного розв'язку

Розглянемо двовимірну течію в'язкої нестисливої рідини в прямокутній порожнині з рухомими границями. В наближенні Стокса впливом інерційних членів на течію можна знехтувати в порівнянні з впливом сил в'язкості. Тоді, для функції течії $\Psi(X,Y,t)$, за допомогою якої компоненти вектора швидкості визначаються згідно співвідношень

$$u=\frac{\partial\Psi}{\partial Y},\qquad v=-\frac{\partial\Psi}{\partial X}, \tag{2}$$

розв'язок стаціонарної задачі зводиться до розв'язання бігармонічного рівняння

© О. Б. Курилко, 2014

$$\Delta\Delta\Psi = 0, \qquad (3)$$

з відповідними граничними умовами на твердих стінках.

Нехай течія в прямокутній порожнині $|X| \le a$, $|Y| \le b$, викликається заданими дотичними швидкостями $U_{top}(t) = U\cos^2\frac{\pi t}{T}$ та $U_{bot}(t) = -U\sin^2\frac{\pi t}{T}$ на верхній ($Y = b$) та нижній ($Y = -b$) стінках відповідно, а бокові стінки ($X = \pm a$) – нерухомі (рис.1).

В цьому випадку граничні умови для рівняння (3) мають вигляд

$$\psi = 0, \ \frac{\partial\psi}{\partial X} = 0 \ \text{ при } \ X = \pm a, \ |Y| \le b,$$
$$\psi = 0, \ \frac{\partial\psi}{\partial Y} = U_{top}(t) \ \text{ при } \ Y = b, \ |X| \le a,$$
$$\psi = 0, \ \frac{\partial\psi}{\partial Y} = U_{bot}(t) \ \text{ при } \ Y = -b, \ |X| \le a. \qquad (4)$$

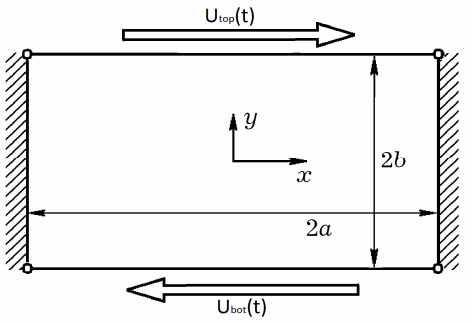


Рис.1. Геометрія задачі

В подальшому введемо безрозмірні координати та безрозмірний час: $x = X/b$, $y = Y/b$, $h = a/b$, $\tau = 2t/T$, де T - період руху стінок рідини.

Враховуючи лінійність задачі (3), (4), її розв'язок можна представити в наступному вигляді

$$\psi(x,y,\tau) = U_1(\tau)\psi_1(x,y) + U_2(\tau)\psi_2(x,y), \qquad (5)$$

де

$$U_1(\tau) = \frac{1}{2}\left(U_{top}(\tau) - U_{bot}(\tau)\right) = U/2,$$
$$U_2(\tau) = \frac{1}{2}\left(U_{top}(\tau) + U_{bot}(\tau)\right) = \frac{1}{2}U\cos\pi\tau. \qquad (6)$$

Бігармонічні функції $\psi_k(x,y)$ ($k = 1,2$) є розв'язками наступних граничних задач

$$\Delta\Delta\psi_k = 0,$$
$$\psi_k = 0, \ \frac{\partial\psi_k}{\partial x} = 0, \text{ при } |x| = h, \ |y| \le 1,$$
$$\psi_k = 0, \ \frac{\partial\psi_k}{\partial y} = (-1)^k, \text{ при } |y| = 1, \ |x| \le h. \qquad (7)$$

Аналітичні розв'язки цих задач можуть бути отримані за допомогою методу суперпозиції, добре відомим в теорії пружності [7]. Задачі (7) представляють собою симетричну ($k = 1$) та антисиметричну ($k = 2$) бігармонічні задачі з постійною швидкістю на границях, методика побудови аналітичних розв'язків яких детально розглянута в роботах [2,4].

З використанням (5) система (1) може бути записана в наступному вигляді

$$\frac{dx}{d\tau} = \bar{D}\left[v_1(x,y) + u(\tau)v_2(x,y)\right],$$
$$\frac{dy}{d\tau} = \bar{D}\left[u_1(x,y) + u(\tau)u_2(x,y)\right], \qquad (8)$$

де $u_k(x,y)$, $v_k(x,y)$ ($k = 1,2$) компоненти поля швидкості, що відповідають розв'язкам задач (7), а $\bar{D} = UT/4b$ - безрозмірна величина, що характеризує переміщення кожної стінки протягом періоду. Періодична функція $u(\tau)$ на інтервалі $[0,2]$ має вигляд

$$u(\tau) = \cos\pi\tau. \qquad (9)$$

2. Алгоритм відшукання періодичних точок течії

Для визначення положення рідких пасивних частинок після фіксованого періоду течії необхідно інтегрувати рівняння руху кожної рідкої частинки на протязі певного інтервалу часу. Після проходження частинки через фіксований переріз необхідно проводити процедуру уточнення їх координат. В даному випадку траєкторія пасивної частинки залежить від періодичної функції $u(\tau)$.

Запропонований алгоритм знаходження періодичних точок пов'язаний із симетрією функцій $u(\tau)$, $u_k(x,y)$, $v_k(x,y)$ ($k = 1,2$) по часу та координатам.

Для заданого розподілу швидкості на границі наступні твердження є вірними:

(1) Якщо в момент часу $\tau = q$ ($q \in \mathrm{N}$) пасивна рідка частинка лежить на осі ординат, тобто $x(q) = 0$, $y(q) = \hat{y}$, тоді для довільного $\tilde{\tau}$ виконуються співвідношення:

$$x(q+\tilde{\tau}) = -x(q-\tilde{\tau}),$$
$$y(q+\tilde{\tau}) = y(q-\tilde{\tau}). \qquad (10)$$

(2) Якщо в момент часу $\tau = q - 0.5$ ($q \in \mathrm{N}$) пасивна рідка частинка лежить на осі абсцис,

тобто $x(q-0.5)=\hat{x}$, $y(q-0.5)=0$, то для довільного $\tilde{\tau}$ справедливі співвідношення:

$$x(q-0.5+\tilde{\tau})=-x(q-0.5-\tilde{\tau}),$$
$$y(q-0.5+\tilde{\tau})=y(q-0.5-\tilde{\tau}). \quad (11)$$

Ідея доведення сформульованих тверджень та алгоритм відшукання періодичних точок першого порядку детально розглянуто в роботі [3]. Опишемо алгоритм для відшукання періодичних точок другого порядку.

Позначимо через $f_{0,\tilde{T}}$ та $g_{0,\tilde{T}}$ - розв'язки рівнянь адвекції (8) на інтервалі $(0,\tilde{T})$. Покладемо $q=\tilde{\tau}=2$ та $q=2$, $\tilde{\tau}=1$ в (10), і $q=2$, $\tilde{\tau}=1$ та $q=3$, $\tilde{\tau}=1$ в (11) отримаємо наступний алгоритм для відшукання періодичних точок другого порядку:

(i) [0-2] на y – вибираємо при $\tau=0$ довільну точку $(0,\hat{y})$ на осі ординат, інтегруємо систему (8) на інтервалі $(0,2)$ і визначаємо положення на осі ординат точки $(x(2.0), y(2.0))$ в момент часу $\tau=2$. Іншими словами, якщо $\hat{y}$ є коренем рівняння $f_{0,2}(0,\hat{y})=0$, то точка $(0,\hat{y})$ є періодичною;

(ii) [0.5-2.5] на x - вибираємо при $\tau=0.5$ довільну точку $(\hat{x},0)$ на осі абсцис, інтегруємо систему (8) на інтервалі $(0.5,2.5)$ і визначаємо положення на осі абсцис точки $(x(2.5), y(2.5))$ в момент часу $\tau=2.5$. Якщо $\hat{x}$ є коренем рівняння $g_{0.5,2.5}(\hat{x},0)=0$, то точка (x^*,y^*), де $x^*=f_{0.5,2}(\hat{x},0)$, $y^*=g_{0.5,2}(\hat{x},0)$, є періодичною;

(iii) [1-3] на y – вибираємо при $\tau=1$ довільну точку $(0,\hat{y})$ на осі ординат, інтегруємо систему (8) на інтервалі $(1,3)$ і визначаємо положення на осі ординат точки $(x(3.0), y(3.0))$ в момент часу $\tau=3$. Іншими словами, якщо $\hat{y}$ є коренем рівняння $f_{1,3}(0,\hat{y})=0$, то точка $(0,\hat{y})$ є періодичною;

(iiii) [1.5-3.5] на x - вибираємо при $\tau=1.5$ довільну точку $(\hat{x},0)$ на осі абсцис, інтегруємо систему (8) на інтервалі $(1.5,3.5)$ і визначаємо положення на осі абсцис точки $(x(3.5), y(3.5))$ в момент часу $\tau=3.5$. Якщо $\hat{x}$ є коренем рівняння $g_{1.5,3.5}(\hat{x},0)=0$, то точка (x^*,y^*), де $x^*=f_{1.5,3}(\hat{x},0)$, $y^*=g_{1.5,3}(\hat{x},0)$, є періодичною.

Алгоритм для відшукання періодичних точок третього порядку без детального опису має наступний вигляд: [0-3] на y, [1-4] на y, [2-5] на y, [0.5-3.5] на x, [1.5-4.5] на x, [2.5-5.5] на x.

Класифікувати тип періодичної точки будемо аналітично, визначаючи власні значення λ_1 та λ_2 Якобіана лінеаризованої системи (8) в околі періодичної точки, яка розглядається. Якщо λ_1 та λ_2 є комплексно спряженими, то періодична точка має еліптичний тип. Якщо λ_1 та $\lambda_2=1/\lambda_1$ є дійсними числами, то періодична точка гіперболічного типу. Коли $\lambda_1=\lambda_2=\pm1$, що відповідає випадку виродження, періодична точка є параболічного типу: при цьому мала зміна протоколу перемішування призводить до зміни типу періодичної точки на еліптичний або гіперболічний.

Елементи Якобіана матриці M можуть бути обраховані, розв'язуючи систему (8) для 4 початкових умов: $(x^*+\varepsilon,y^*)$, $(x^*-\varepsilon,y^*)$, $(x^*,y^*+\varepsilon)$, $(x^*,y^*-\varepsilon)$, де (x^*,y^*) - координати періодичної точки, а ε - мала величина

$$M_{xx}=\frac{x_{(0,pT)}(x^*+\varepsilon,y^*)-x_{(0,pT)}(x^*-\varepsilon,y^*)}{2\varepsilon},$$
$$M_{xy}=\frac{x_{(0,pT)}(x^*,y^*+\varepsilon)-x_{(0,pT)}(x^*,y^*-\varepsilon)}{2\varepsilon},$$
$$M_{yx}=\frac{y_{(0,pT)}(x^*+\varepsilon,y^*)-y_{(0,pT)}(x^*-\varepsilon,y^*)}{2\varepsilon},$$
$$M_{yy}=\frac{y_{(0,pT)}(x^*,y^*+\varepsilon)-y_{(0,pT)}(x^*,y^*-\varepsilon)}{2\varepsilon}, \quad (12)$$

де p – порядок періодичної точки.

3. Результати обчислень

В якості прикладу розглянуто періодичну течію Стокса в'язкої нестисливої рідини всередині прямокутної порожнини при синусоїдальному розподілі заданої швидкості на верхній та нижній границях. Розміри порожнини та швидкість руху верхньої та нижньої границь відповідають даним з роботи [5], а саме: $2a=10.35$ см, $2b=6.2$ см, $a/b=1.67$, $U=2.69$ см/с, $T=15.4$ с. Переходячи до безрозмірних величин, маємо $h=1.67$, $T=2$, $n=40$ - кількість періодів, $D=4.42$, $\overline{D}=\frac{h}{2}D=3.69$, де D - безрозмірна величина, яка

характеризує переміщення рухомих стінок порожнини за один період.

Визначення положень періодичних точок першого, другого та третього порядків згідно алгоритму, який описаний вище, розглянемо на прикладі адвекції виділеної плями, геометричний центр якої взятий в початку координат та має форму круга (рис.2). Положення та геометричні розміри плями відповідають даним експерименту, розглянутого в роботі Оттіно [5].

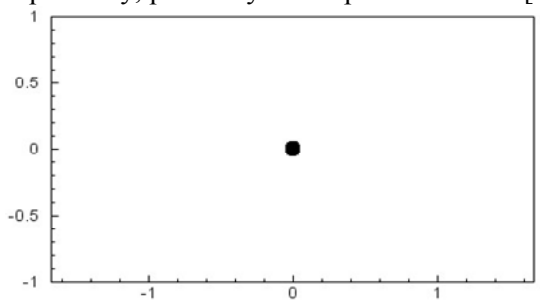


Рис.2. Початкове положення плями в прямокутній порожнині

Адвекція виділеного об'єму рідини у вигляді кругової плями розглядається на протязі 40 безрозмірних періодів руху стінок. На рис.3а показано результат адвекції виділеного об'єму рідини в момент часу $\tau = 40T = 80$ (результат експерименту).



Рис.3. Адвекція плями в експерименті [5]

На рис.4 показано чисельне моделювання процесу адвекції виділеної кругової області (переріз Пуанкаре) через $\tau = 40T = 80$, початкове положення якої зображене на рис.2.

В хаотичному морі мають місце 4 періодичні острови третього порядку, так звані «очі», «ніс» та «рот». А це означає, що всередині цих островів є періодичні точки еліптичного типу третього порядку (*A,B,C,D*). Згідно описаного алгоритму, періодичні точки мають наступні координати: *A(-0.301, -0.163)*, *B(0.312, -0.161), C(0.004, -0.627), D(0.081, -0.406).*

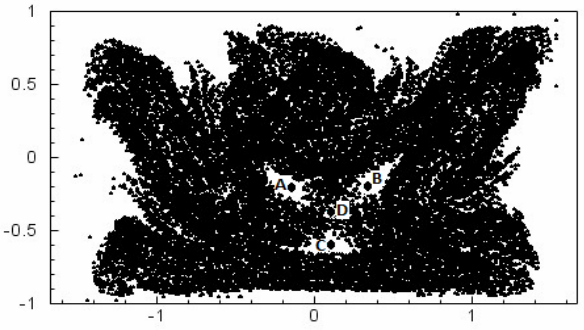


Рис.4. Чисельне моделювання процесу адвекції

Висновки

В даній роботі розглянуто задачу про двовимірну течію Стокса в'язкої рідини в прямокутній порожнині при нерівномірному розподілі швидкості руху границь. Запропоновано алгоритм відшукання періодичних точок течії другого та третього порядку. Встановлено відповідність експериментальних результатів, отриманих Оттіно в 1989 році, та чисельних розрахунків.

Список використаних джерел

1. *Aref H.* Stirring by chaotic advection / H. Aref // Journal of Fluid Mchanics. – 1984. – **Vol.143.** – P.1-23.
2. *Meleshko V.V.* Steady Stokes flow in a rectangular cavity // Proceedings of the Royal Society of London. – 1996. – **Vol.A452.** – P.1999–2022.
3. *Meleshko V.V., Peters G.W.M.* Periodic points for two-dimensional Stokes flow in a rectangular cavity // Physics Letters A. – 1996. – Vol.216. – P.87-96.
4. *Meleshko V.V.* Biharmonic problem in a rectangle / V.V.Meleshko // Applied Scientific Research. – 1998. – **Vol.58.** – P.217-249.
5. *Ottino J. M.* Experiments on mixing due to chaotic advection in a cavity / J.M.Ottino // Journal of Fluid Mechanics – 1989. – **Vol.209.** – P.463-499.
6. *Ottino J.M.* The Kinematics of Mixing: Stretching, Chaos and Transport // Cambridge: Cambridge University Press. - 1989. - 683p.
7. *Timoshenko S.P., Goodier J.N.* Theory of elasticity // New York: McGraw-Hill. – 1970. – 567p.

Надійшла до редколегії 27.12.13

УДК 517.956.4

Олександр В. Мартиненко[1], к.ф.-м.н.

Неіснування глобальних розв'язків задачі Коші для рівняння неоднорідного пористого середовища з неоднорідним джерелом

У роботі розглядається задача Коші для рівняння неоднорідного пористого середовища з неоднорідним джерелом. Знайдено умови на параметри рівняння за яких будь-який нетривіальний розв'язок задачі Коші стає необмеженим за скінчений час.

Ключові слова: задача Коші, рівняння пористого середовища, неоднорідне середовище, неоднорідне джерело.

[1]Луганський національний університет імені Тараса Шевченка, 91011, м.Луганськ, вул.Оборонна,2, e-mail: amartynenko@rambler.ru

Alexander V. Martynenko[1], Ph.D.

Nonexistence of global solutions to the Cauchy problem for the inhomogeneous porous medium equation with an inhomogeneous source

The Cauchy problem for the inhomogeneous porous medium equation with an inhomogeneous source is considered in the work. Conditions on the parameters of the equation are found under which any nontrivial solution to the Cauchy problem blows up in a finite time.

Key words: the Cauchy problem, the inhomogeneous porous medium equation, inhomogeneous medium, inhomogeneous source.

[1]Luhansk Taras Shevchenko National University, 91011, Luhansk, Oboronna st.,2, e-mail: amartynenko@rambler.ru

Статтю представив акад. НАН України, д.ф.-м.н., проф. Перестюк М.О.

1. Вступ. Розглянемо наступну задачу Коші

$$\rho(x)u_t = \Delta u^m + \mu(x)u^p, \qquad (1)$$

$$(x,t) \in Q_T = R^N \times (0,T),\ N \geq 3,$$

$$u(x,0) = u_0(x),\ x \in R^N, \qquad (2)$$

де $\rho(x) = (1+|x|)^{-l}$, $\mu(x) = (1+|x|)^{-k}$. Усюди далі будемо вважати, що $m > 1$ (повільна дифузія), $l, k \geq 0$, $k < 2$, $p > m$ і $u_0(x)$ - невід'ємна вимірна функція з простору

$$L^1_\rho(R^N) = \left\{ f : \int\limits_{R^N} \rho(x) f(x)dx < \infty \right\}.$$

Добре відомо, що параболічне рівняння з джерелом можуть мати розв'язки, які стають необмеженими за скінчений час. Про такі розв'язки кажуть, що вони «вибухають». Подібний результат для лінійного рівняння з нелінійним джерелом (напівлінійне рівняння) вперше було отримано в роботі [1]. Було встановлено, що існує таке критичне значення p^*, що при $1 < p < p^*$ «вибухає» будь-який нетривіальний розв'язок задачі Коші, а для $p > p^*$ і достатньо малої початкової функції існує глобальний розв'язок. У подальшому подібні результати було отримано для різних класів нелінійних рівнянь, зокрема для рівняння (1) у випадку $\rho(x) \equiv \mu(x) \equiv 1$. Детальну інформацію з цього приводу можна знайти в монографії [2] або в оглядових роботах [3], [4].

Задача (1), (2) у випадках $l \geq 0$, $k = 0$ і $k = l \geq 0$ була розглянута в роботах [5] і [6] відповідно. Було встановлено, що будь-який нетривіальний розв'язок «вибухає», якщо $m < p < p^*(l)$, де

$$p_1^*(l) = \begin{cases} m + 2/(N-l), & l < l^*, \\ mN/(N-2), & l \geq l^* \end{cases}$$

у випадку $l \geq 0$, $k = 0$ і

$$p_2^*(l) = m + (2-l)/(N-l),$$

у випадку $k = l \geq 0$, якщо $l < 2$. Тут й усюди далі $l^* = (N(m-1)+2)/m$. Зауважимо, що в роботі [6] показано, що у випадку $k = l \geq 0$, $l > 2$ існує глобальний за часом розв'язок для всіх $p > m$, тому обмеження $k < 2$ є цілком природнім для задачі (1), (2).

У роботах [7], [8] була розглянута задача (1), (2) для випадку $l = 0$, $k \geq 0$.Було встановлено, що

© О.В. Мартиненко, 2014

будь-який нетривіальний розв'язок задачі Коші вибухає, якщо

$$m < p < p_3^*(k) = m + (2-k)/N .$$

Основна мета даної роботи – узагальнити результати, що були отримані в [5]-[8].

Основний результат. Перейдемо до точних формулювань, для чого введемо поняття розв'язку задачі (1), (2).

Означення. Будемо казати, що невід'ємна функція $u \in C\left([0,T): L^1_\rho\left(R^N\right)\right)$ є розв'язком задачі (1), (2), якщо

(i) $u^m \in L^1_{loc}\left([0,T): L^1_\rho\left(R^N\right)\right)$,

$\rho u_t,\ \Delta u^m \in L^1_{loc}(Q_T)$ і $\mu u^p \in L^1_{loc}(Q_T)$;

(ii) $\rho(x)u_t = \Delta u^m + \mu(x)u^p$ м.в. у Q_T;

(iii) $u(x,t) \to u_0(x)$ при $t \to 0$ у просторі $L^1_\rho(R^N)$.

Такий розв'язок зазвичай називають сильним L^1 розв'язком (strong L^1 solution). Детальна інформація щодо існування локального за часом розв'язку в сенсі цього визначення та його основних властивостей може бути знайдена в [9].

Роль критичного показника нелінійності джерела для задачі (1), (2) буде відігравати величина

$$p^*(l,k) = \begin{cases} m + (2-k)/(N-l), & l < l^*, \\ m(N-k)/(N-2), & l \ge l^*. \end{cases}$$

Наступна теорема містить основний результат роботи.

Теорема 1. *Нехай $p < p^*(k,l)$, тоді будь-який нетривіальний розв'язок задачі (1), (2) стає необмеженим за скінчений час, тобто існують $\theta \in (0,1)$ і $r \in (0,\infty)$ такі, що*

$$\int_{B_r} \rho u^{1-\theta} dx \to \infty \ \text{ при } \ t \to T < \infty ,$$

де $B_r = \{x \in R^N : |x| < r\}$.

Доведення. Нехай $\xi = \xi(x)$ - гладка функція, що задовольняє умовам: $0 \le \xi(x) \le 1$, $\xi = 1$ для $x \in B_r$, $\xi = 0$ для $x \notin B_{2r}$ і $|\nabla \xi| \le \gamma / r$. Тут й усюди далі $\gamma, \gamma_1, \gamma_2, \ldots$ — додатні сталі, що залежать від параметрів рівняння, але не залежать від початкової функції.

Нехай також $\theta \in (0,1)$ і $\varepsilon, s > 0$. Помножимо обидві частини рівняння (1) на $(u+\varepsilon)^{-\theta}\xi^s$ і проінтегруємо по B_{2r}:

$$\frac{d}{dt}\int_{B_{2r}} \rho(u+\varepsilon)^{1-\theta}\xi^s dx \ge$$

$$\ge \gamma_1 \int_{B_{2r}} u^{m-1} |\nabla u|^2 (u+\varepsilon)^{-1-\theta}\xi^s dx -$$

$$-\gamma_2 \int_{B_{2r}} u^{m-1} |\nabla u| (u+\varepsilon)^{-\theta}\xi^{s-1} |\nabla \xi| dx +$$

$$+\gamma_3 \int_{B_{2r}} \mu u^p (u+\varepsilon)^{-\theta}\xi^s dx .$$

Застосуємо до другого члена правої частини нерівність Юнга з достатньо малим $\delta > 0$

$$\int_{B_{2r}} u^{m-1} |\nabla u| (u+\varepsilon)^{-\theta}\xi^{s-1} |\nabla \xi| dx \le$$

$$\le \delta \int_{B_{2r}} u^{m-1} |\nabla u|^2 (u+\varepsilon)^{-1-\theta}\xi^s dx +$$

$$+\frac{1}{\delta}\int_{B_{2r}} u^{m-1} |\nabla u|^2 (u+\varepsilon)^{1-\theta}\xi^{s-2} |\nabla \xi|^2 dx$$

і спрямуємо ε до нуля:

$$\frac{d}{dt}E \ge \gamma_1(\delta)\int_{B_{2r}} u^{m-\theta-2} |\nabla u|^2 \xi^s dx -$$

$$-\frac{\gamma_2(\delta)}{r^2}\int_{B_{2r}} u^{m-\theta}\xi^{s-2} dx + \gamma_3 \int_{B_{2r}} \mu u^{p-\theta}\xi^s dx =$$

$$= I_1 - I_2 + I_3 , \qquad (3)$$

де $E = E(t) = \int_{B_{2r}} \rho u^{1-\theta}\xi^s dx$.

Знову використаємо нерівність Юнга з досить малим $\delta_1 > 0$ для того, щоб оцінити I_2 через I_3:

$$I_2 \le \delta_1 I_3 + \gamma(\delta_1) r^{-2(p-\theta)/(p-m)} \int_{B_{2r}} \mu^{-(m-\theta)/(p-m)} dx =$$

$$= \delta_1 I_3 + \gamma(\delta_1) M(r) . \qquad (4)$$

З другого боку, за допомогою нерівності Гельдера з показниками $(p-\theta)/(1-\theta)$ і $(p-\theta)/(p-1)$ можна оцінити E через I_3:

$$E \le I_3^{\frac{1-\theta}{p-\theta}} \left(\int_{B_{2r}} \mu^{-(1-\theta)/(p-1)} \rho^{(p-\theta)/(p-1)} dx \right)^{\frac{p-1}{p-\theta}},$$

тоді

$$I_3 \le E^{\frac{p-\theta}{1-\theta}} \left(\int_{B_{2r}} \mu^{-(1-\theta)/(p-1)} \rho^{(p-\theta)/(p-1)} dx \right)^{\frac{-(p-1)}{1-\theta}} =$$

$$= E^{\frac{p-\theta}{1-\theta}} L(r) . \qquad (5)$$

Таким чином, з нерівностей (3)-(5) випливає, що

$$\frac{dE}{dt} \geq \gamma_1 L(r) E^{\frac{p-\theta}{1-\theta}} - \gamma_2 M(r). \qquad (6)$$

Якщо

$$\frac{M(r)}{L(r)} \to 0 \text{ при } r \to \infty, \qquad (7)$$

то існує таке $r^* > 0$, що

$$\gamma_1 L(r) E^{\frac{p-\theta}{1-\theta}}(0) - \gamma_2 M(r) \geq 0, \qquad (8)$$

як тільки $r \geq r^*$. З цього та з диференціальної нерівності (6) слідує, що $E(t)$ зростає при $t \geq 0$. Значить, (8) виконується при всіх $t \geq 0$ і $r \geq r^*$.

З нерівностей (6) і (8) витікає, що для всіх $t \geq 0$ і $r \geq r^*$

$$\frac{dE}{dt} \geq \gamma L(r) E^{\frac{p-\theta}{1-\theta}}.$$

Інтегрування цієї нерівності на інтервалі $(0,t)$ дає

$$E(t) \geq \frac{E(0)}{\left(1-\gamma L(r) t\right)^{(1-\theta)/(m-1)}}.$$

Тобто $E(t) \to \infty$ при $t \to \left(\gamma L(r)\right)^{-1}$, якщо виконана умова (7). Елементарні обчислення показують, що для будь-якого $p < p^*(k,l)$ знайдеться таке $\theta \in (0,1)$, що (7) буде виконана.

□

Зауваження 1. Доведення теореми базується на підходах, які було запропоновано в роботах [5], [6].

Зауваження 2. Неважко бачити, що $p^*(l,0) = p_1^*(l)$, $p^*(l,l) = p_2^*(l)$ і $p^*(0,k) = p_3^*(k)$. Тобто, теорема 1 узагальнює результати робіт [5]-[8].

Наслідок. *Якщо* $p < p^*(k,l)$ *і* $u(x,t)$ *- розв'язок задачі (1), (2), то*

$$\int_{R^N} \rho u^q dx \to \infty \text{ при } t \to T < \infty \quad \forall q \geq 1, \qquad (9)$$

$$\max_{x \in R^N} u(x,t) \to \infty \text{ при } t \to T < \infty. \qquad (10)$$

Доведення. Використовуючи нерівність Гельдера з показниками $q/(1-\theta)$ і $q/(q-1+\theta)$, отримаємо

$$\int_{B_r} \rho u^{1-\theta} dx \leq \left(\int_{R^N} \rho u^q dx \right)^{\frac{1-\theta}{q}} \left(\int_{B_r} \rho dx \right)^{\frac{q-1-\theta}{q}}.$$

Звідси і з теореми 1 випливає (9).

Властивість (10) доводиться аналогічно.

□

Список використаних джерел

1. *Fujita H.* On the blowing up of solutions to the Cauchy problem for $u_t = \Delta u + u^{1+\alpha}$ / H. Fujita// J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA, Math. - 1966. - V.13. - P. 109-124.
2. Blow-up regimes in problems for quasi-linear parabolic equations / [Samarsky A.A., Galaktionov V.A., Kurdyumov P.M., Myhailov A.P.]. - M.: Nauka, 1987.- 397 p.
3. *Levine H.A.* The role of critical exponents in blow up theorems / H.A. Levine // SIAMRev. - 1990. - V. 32. - P. 262-288.
4. *Deng K.* The role of critical exponents in blow up theorems: The sequel / K. Deng, H.A. Levine // J. Math. Anal. Appl. - 2000. - V. 243. - P. 85-126.
5. *Martynenko A.V.* Cauchy problem for a quasilinear parabolic equation with a source term and an inhomogeneous density / A.V. Martynenko, A.F. Tedeev // Computational Mathematics and Mathematical Physics - 2007. - V. 47, № 2. – P. 238-248.
6. *Martynenko A.V.* On the behavior of solutions to the Cauchy problem for a degenerate parabolic equation with inhomogeneous density and a source / A.V. Martynenko, A.F. Tedeev // Computational Mathematics and Mathematical Physics - 2008. - V. 48, № 7. - P. 1214-1229.
7. *Levine H.A.* The value of the critical exponent for reaction-diffusion equations in cones / H.A. Levine, P. Meier // Arch. Rational Mech. Anal. - 1989. - V. 109. - P. 73-80.
8. *Qi Y.-W.* The critical exponents of parabolic equations and blow-up in R^n / Y.-W. Qi // Proc. Roy. Soc. of Edinburg. - 1998. - V. 128A. - P. 123-136.
9. *Vazquez J. L.* The porous medium equation. Mathematical theory / J. L. Vazquez // Oxford MathematicalMonographs. The Clarendon Press, Oxford University Press, Oxford, 2007. – 647 p.

Надійшла до редколегії 18.10.2013

УДК 539.3

Шакері Мобараке Пуйан[1], аспірант
Зражевський Г. М.[1] , к. ф.-м. н., доц.

Алгоритм Гальоркіна в методі частинних областей розв'язання граничних задач

У даній роботі розглядається проста задача математичної фізики – задача потенціалу у прямокутній області. Простота і прозорість процедури побудови точного розв'язку цієї задачі дозволяє досить наочно проілюструвати деякі особливості сучасних чисельних підходів до розв'язування задач математичної фізики і отримати оцінку точності кількісних оцінок польових характеристик при використанні різних способів задоволення граничних умов.

Для багатьох типів областей, включаючи широке коло неканонічних областей, використання поняття про загальний розв'язок граничної задачі дає можливість побудувати аналітичний розв'язок задачі. При цьому використовуються добре відомі набори частинних розв'язків основних рівнянь математичної фізики.

Головне питання полягає в тому, щоб вказати ефективні способи визначення довільних коефіцієнтів і функцій, які входять у загальний розв'язок.

Використання традиційного підходу для аналітичних розв'язків, що базується на мінімізації середньоквадратичного відхилення, у випадку неканонічних областей часто веде до занадто складних викладок. Тому для спрощення розв'язування доцільно оцінити можливості використання методу колокацій. Порівнянню цих двох підходів присвячена дана робота.

Ключові слова: теорія потенціалу, задача Діріхле, метод редукцій, метод колокації.

[1] Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, вул.Глушкова, 4 Е.
e–mail: pouyan.shakeri@gmail.com
e–mail:zgrig@univ.kiev.ua

Pouyan Shakeri Mobarakeh[1], PhD student
G.M. Zrazhevsky[1], PhD (Phys.-Math.), Ass. Prof.

Galerkin algorithm in the method of partial domains solution of boundary value problems

This paper describes a simple problem of mathematical physics - potential problem in a rectangular area. The simplicity and transparency of the procedure of construction of the exact solution of this problem allows one to visually illustrate some of the features of modern numerical approaches to solving problems of mathematical physics and obtain an estimate of the accuracy of quantitative estimates of field characteristics using different ways to meet the boundary conditions.

For many types of area, including a wide range of non-canonical areas, using the concept of the general solution of the boundary value problem makes it possible to construct an analytical solution to the problem. It uses well-known sets of particular solutions of the basic equations of mathematical physics.

The main issue is to provide efficient ways to determine the arbitrary coefficients and functions that are included in the general solution.

Using the traditional approach to analytical solutions based on the minimization of standard deviation in the case of non-canonical areas often leads to overly complicated calculations. Therefore, to simplify the solution should evaluate the possibility of using the method of collocation. Comparison of these two approaches devoted to this work.

Keywords: potential theory, Dirihle problem, reductions method, the method of collocation.

[1] Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03680, Kyiv, Glushkova str., 4 E.
e–mail: pouyan.shakeri@gmail.com
e–mail:zgrig@univ.kiev.ua

Статтю представив докт. ф.-м. наук, проф. Маципура В.Т.

Вступление

Точное описание звуковых полей, излучаемых или рассеиваемых объектами сложной формы, представляет собой довольно сложную задачу. Возникающие при этом трудности стимулировали создание многих аналитических и численных методов решения соответствующих граничных задач. Иногда процесс разработки новых методов решения акустических проблем воспринимается как независимое создание аналитических и численных методов. В течение многих лет можно наблюдать процесс накопления количества решенных акустических задач. Анализ всей совокупности полученных результатов

© Пуйан Шакері Мобараке, Г.М. Зражевський, 2014.

показывает, что прогресс обеспечивался параллельным развитием аналитических и численных подходов. Среди большого числа различных методов решения граничных задач математической физики, пожалуй , лишь метод конечных разностей может трактоваться как чисто численный. Здесь дифференциальная формулировка проблемы используется лишь на этапе записи основных уравнений. В дальнейшем частные производные заменяются конечными разностями , а исходный континуум – системой с конечным числом степеней свободы. Другие методы в той или иной форме используют некоторые аналитические решения для построения общей процедуры метода. Общая идея при этом довольно проста. Использование некоторых аналитических решений, как правило, позволяет получить формулировку проблемы в виде соотношений, имеющих меньшую по сравнению с исходной размерность. В большинстве случаев исходная граничная задача приводится к некоторой системе соотношений, формулируемой на границе области. Целесообразно указать на тесную связь метода конечных разностей с методами частичных областей, сочленений, методом задачи Римана-Гильберта, методом Неймана-Шварца. Использование наборов частных решений волновых и других типов уравнений в канонических координатных системах для построения аналитических решений в неканонических областях наиболее последовательно проводится в рамках метода частичных областей.

В большинстве практических случаев нас интересуют численные оценки явления, описываемого уравнением Лапласа в некоторой области Ω, следовательно, нам необходимо найти решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа. Для канонических областей эта задача имеет точное аналитическое решение, для неканонических областей построить точное аналитическое решение довольно сложно, поэтому используется метод частичных областей. Во многих практических случаях удается представить неканоническую область в виде объединения нескольких частичных канонических областей, например, прямоугольников, в которых решение известно.

Постановка задачи

Рассмотрим краевую задачу для двумерного уравнения Лапласа в прямоугольнике

$$\Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi(x,y)}{\partial y^2} = 0, \qquad (1)$$

$$\Omega: |x| \le a, |y| \le b,$$

со следующими граничными условиями:

$$\varphi\big|_{x=\pm a} = \varphi_b = \cos\frac{\pi}{b}y, \quad |y| \le b;$$

$$\varphi\big|_{y=\pm b} = \varphi_a = \frac{-\operatorname{ch}\frac{\pi}{a}x}{\operatorname{ch}\pi}, \quad |x| \le a. \qquad (2)$$

Заметим сразу, что в силу линейности уравнения Лапласа любая линейная комбинация гармонических функций с действительными постоянными коэффициентами снова является гармонической функцией. Очевидно, что искомое решение четно по обоим аргументам.

Таким образом, мы приходим к первой краевой задаче, или задаче Дирихле.

К задаче Дирихле приводится, например, отыскание температуры теплового поля или потенциала электростатического поля в некоторой области при заданной температуре или потенциале на границе области.

Решение разыскивается в виде суммы двух гармонических функций

$$\varphi(x,y) = \varphi_1(x,y) + \varphi_2(x,y), \qquad (3)$$

где $\varphi_1(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(A_n(y)\cos\frac{\pi n}{a}x + B_n(y)\sin\frac{\pi n}{a}x\right), \quad (4)$

$$\varphi_2(x,y) = \sum_{m=0}^{\infty}\left(A_m(x)\cos\frac{\pi m}{b}y + B_m(x)\sin\frac{\pi m}{b}y\right), \quad (5)$$

причем будем требовать от этих функций четности по обеим аргументам.

Из условия четности $\varphi_b(x) = \varphi_b(-x)$ следует, что $B_n(y) = 0$. Поэтому решение (4) принимает вид

$$\varphi_1(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(y)\cos\frac{\pi n}{a}x. \qquad (6)$$

Находя производные функции $\varphi_1(x,y)$ и подставляя их в уравнение (1), получаем следующую систему уравнений для определения функций $A_n(y)$:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{d^2A_n(y)}{dy^2} - \left(\frac{\pi n}{a}\right)^2 A_n(y)\right)\cos\frac{\pi n}{a}x = 0.$$

Поскольку $\cos\frac{\pi n}{a}x \neq 0$, то получаем такую систему обыкновенных однородных дифференциальных уравнений для определения $A_n(y)$:

$$\frac{d^2A_n(y)}{dy^2}-\left(\frac{\pi n}{a}\right)^2 A_n(y)=0,\ n=0,1,\ldots,\infty. \qquad (7)$$

Решение этой системы имеет вид:

$$A_n(y)=A_n \operatorname{ch}\frac{\pi n}{a}y+B_n \operatorname{sh}\frac{\pi n}{a}y. \qquad (8)$$

Из условия четности $\varphi_a(y)=\varphi_a(-y)$ следует, что $B_n=0$, а

$$A_n(y)=A_n \operatorname{ch}\frac{\pi n}{a}y. \qquad (9)$$

Тогда решение (6) принимает вид

$$\varphi_1(x,y)=\sum_{n=0}^{\infty}A_n \operatorname{ch}\frac{\pi n}{a}y\cos\frac{\pi n}{a}x. \qquad (10)$$

Аналогичным образом находим $\varphi_2(x,y)$:

$$\varphi_2(x,y)=\sum_{m=0}^{\infty}B_m \operatorname{ch}\frac{\pi m}{b}x\cos\frac{\pi m}{b}y. \qquad (11)$$

С учетом (10) и (11) решение (3) принимает вид

$$\varphi(x,y)=\sum_{n=0}^{\infty}A_n \operatorname{ch}\frac{\pi n}{a}y\ \cos\frac{\pi n}{a}x+\sum_{m=0}^{\infty}B_m \operatorname{ch}\frac{\pi m}{b}x\cos\frac{\pi m}{b}y. \qquad (12)$$

В выражении (12) присутствует 2 константы ($n=m=0$). Поэтому решение целесообразно записать в виде:

$$\varphi(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\ \operatorname{ch}\frac{\pi n}{a}y\cos\frac{\pi n}{a}x+$$
$$+\sum_{m=1}^{\infty}B_m\ \operatorname{ch}\frac{\pi m}{b}x\cos\ \frac{\pi m}{b}y+C_0 \qquad (13)$$

Используя граничные условия, получаем систему функциональных уравнений относительно N+M+1 неизвестных

$$C_0+\sum_{n=1}^{N}A_n \operatorname{ch}\frac{\pi n}{a}y\cos\pi n+$$
$$+\sum_{m=1}^{M}B_m \operatorname{ch}\frac{\pi m}{b}a\cos\frac{\pi m}{b}y=\cos\frac{\pi}{b}y, \qquad (14)$$
$$C_0+\sum_{n=1}^{N}A_n \operatorname{ch}\frac{\pi n}{a}b\cos\frac{\pi n}{a}x+$$
$$+\sum_{m=1}^{M}B_m \operatorname{ch}\frac{\pi m}{b}x\cos\pi m=\frac{-\operatorname{ch}\frac{\pi x}{a}}{\operatorname{ch}\pi} \qquad (15)$$

Интегрируя уравнение (14) по y в интервале $0<y<b$, а (15) по x в интервале $0<x<a$ получим соотношения:

$$b\,C_0+\sum_{n=1}^{N}(-1)^n\frac{a}{\pi}\operatorname{sh}\frac{\pi nb}{a}A_n=0,$$
$$a\,C_0+\sum_{m=1}^{M}(-1)^m\frac{b}{\pi}\operatorname{sh}\frac{\pi ma}{b}B_m=\frac{a}{\pi}\operatorname{sh}\pi\ , \qquad (16)$$

одно из которых является проверочным и может быть использовано для контроля точности численных решений при редукции системы уравнений.

Для решения системы уравнений (14) – (15), умножим уравнение (14) на $\cos\frac{\pi m_1}{b}y$, $m_1=\overline{1,M_1}$, и проинтегрируем по y в интервале $0<y<b$. Уравнение (15) умножаем на $\cos\frac{\pi n_1}{a}x$, $n_1=\overline{1,N_1}$, и проинтегрируем по x в интервале $0<x<a$. В случае, когда $M_1+N_1=M+N$, получим систему линейных алгебраических уранений относительно $M+N$ неизвестных:

$$\sum_{n=1}^{N}(-1)^n\int_0^b \operatorname{ch}\frac{\pi ny}{a}\cos\frac{\pi m_1y}{b}dy\,A_n+$$
$$+\sum_{m=1}^{M}\operatorname{ch}\frac{\pi ma}{b}\frac{b}{2}\delta_{m,m_1}B_m=\frac{b}{2}\delta_{1,m_1}, \qquad (17)$$

$$\sum_{n=1}^{N}\operatorname{ch}\frac{\pi nb}{a}\frac{a}{2}\delta_{n,n_1}A_n+\sum_{m=1}^{M}(-1)^m\int_0^a \operatorname{ch}\frac{\pi mx}{b}\cos\ \frac{\pi n_1x}{a}dx\ B_m=$$
$$=-\frac{1}{\operatorname{ch}\pi}\int_0^a \operatorname{ch}\frac{\pi x}{a}\cos\frac{\pi n_1x}{a}dx. \qquad (18)$$

Если $m=m_1$, то уравнения (17) и (18) принимают вид:

$$\sum_{n=1}^{N}(-1)^n\int_0^b \operatorname{ch}\frac{\pi n\,y}{a}\cos\frac{\pi m_1y}{b}dy\ A_n+$$
$$+B_{m_1}\frac{b}{2}\operatorname{ch}\frac{\pi m_1a}{b}=\frac{b}{2}\delta_{1,m_1},\quad m_1=\overline{1,M_1}, \qquad (19)$$

$$\frac{a}{2}\operatorname{ch}\frac{\pi n_1 b}{a}A_{n_1}+\sum_{m=1}^{M}(-1)^m\int_0^a \operatorname{ch}\frac{\pi m x}{b}\cos\frac{\pi n_1 x}{a}dx\,B_m=$$

$$=-\frac{1}{\operatorname{ch}\pi}\int_0^a \operatorname{ch}\frac{\pi x}{a}\cos\frac{\pi n_1 x}{a}d x,\quad n_1=\overline{1,N_1}\,. \qquad (20)$$

Положив $N_1=N$, $M_1=M$ и принимая во внимание ортогональность тригонометрических функций легко получить выражения для B_m.

Если $N_1=N$, $M_1=M$, то систему можно редуцировать. Найдем B_m из (19) и подставим в (20):

$$B_m=\frac{2}{b}\cdot\frac{1}{\operatorname{ch}\dfrac{\pi m a}{b}}\left\{\frac{b}{2}\delta_{1,m}-\right.$$

$$\left.-\sum_{n=1}^{N}(-1)^n\int_0^b \operatorname{ch}\frac{\pi n y}{a}\cos\frac{\pi m y}{b}dy\,A_n\right\},$$

где A_n определяются из решения системы уравнений:

$$\frac{a}{2}\operatorname{ch}\frac{\pi n_1 b}{a}A_{n_1}-\frac{2}{b}\sum_{n=1}^{N}\left\{(-1)^n\sum_{m=1}^{M}(-1)^m\frac{1}{\operatorname{ch}\dfrac{\pi m a}{b}}\times\right.$$

$$\left.\times\int_0^a \operatorname{ch}\frac{\pi m x}{b}\cos\frac{\pi n_1 x}{a}dx\int_0^b \operatorname{ch}\frac{\pi n y}{a}\cos\frac{\pi m y}{b}dy\right\}A_n=$$

$$=-\frac{1}{\operatorname{ch}\pi}\int_0^a \operatorname{ch}\frac{\pi x}{a}\cos\frac{\pi n_1 x}{a}d x-\sum_{m=1}^{M}(-1)^m\frac{\delta_{1,m}}{\operatorname{ch}\dfrac{\pi m a}{b}}\times$$

$$\times\int_0^a \operatorname{ch}\frac{\pi m x}{b}\cos\frac{\pi n_1 x}{a}dx\ ,\ n_1=\overline{1,N_1}\,. \qquad (21)$$

Таким образом, получено решение первой основной граничной задачи для прямоугольной области.

При этом основную трудность представляет собой не построение общего решения дифференциальных уравнений, а оценка коэффициентов рядов, которые, в частности, могут быть выражены через решение бесконечной системы линейных алгебраических уравнений. Заметим, что при решении бесконечных систем зачастую используется метод простой редукции, предложенный впервые Фурье еще в 1807 году.

Суть данного метода состоит в том, что решение бесконечной системы приближают решением конечной системы.

Однако на практике использование такого подхода во многих случаях приводит к появлению существенной погрешности в решении.

В частности, данный факт имеет место, если неизвестные в бесконечной системе стремятся к ненулевому пределу. В монографии В.Т. Гринченко [2] на основе асимптотических выражений Б.М. Кояловича [5] исследуется этот случай. Использование известного асимптотического поведения неизвестных в бесконечной системе позволяет существенно улучшить сходимость решения и как следствие – повысить точность решения при использовании метода редукции. В то же время, для вполне регулярных бесконечных систем из ограниченности свободных членов следует единственность решения, которое может быть найдено методом редукции либо методом последовательных приближений.

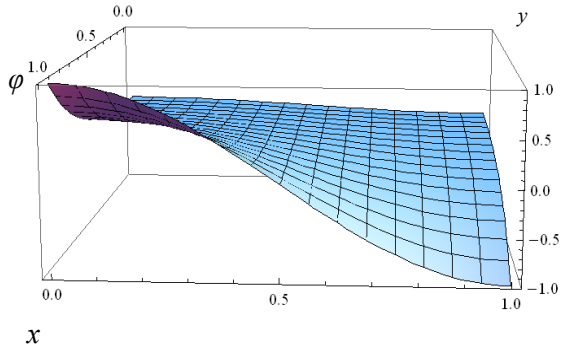


Рис.1 Решение в области, полученное методом Галеркина.

Описанный метод решения задачи, по классификации методов взвешенных невязок [13, 14], является методом Галеркина, поскольку решение системы функциональных уравнений (14) – (15) получено путем минимизации функционала среднеквадратичной ошибки (либо, следуя [13] легко заметить, что весовые функции и базисные - совпадают). На Рис. 1 представлено решение в области, на Рис. , Рис. 3 иллюстрируется удовлетворение граничных условий. При этом, для $M+N=40$, точность удовлетворения заданных граничних условий располагается в пределах точности численного решения системы (21).

Точное решение

Рассмотрим аналитическое решение задачи Дирихле (1) – (2):

$\Delta\varphi=0$,

$\Omega: |x| \le a, |y| \le b$,

с граничными условиями (2).

Решение будем искать в виде суммы

$$\varphi(x,y)=\varphi_1(x,y)+\varphi_2(x,y),$$

в которой функции $\varphi_1(x,y)$ и $\varphi_2(x,y)$ с учетом четности представим в виде разложения в частичные ряды Фурье:

$$\varphi_1(x,y)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(y)\cos\frac{2n+1}{2a}\pi x, \qquad (22)$$

$$\varphi_2(x,y)=\sum_{m=0}^{\infty} b_m(x)\cos\frac{2m+1}{2b}\pi y. \qquad (23)$$

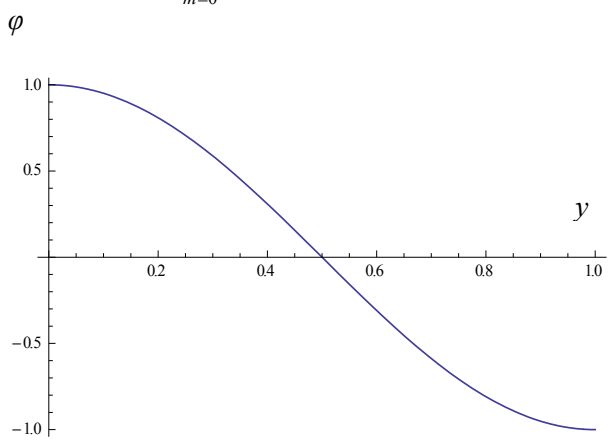


Рис.2 Граничное значение решения на границе $x=a$, $0\le y\le b$, полученное методом Галеркина

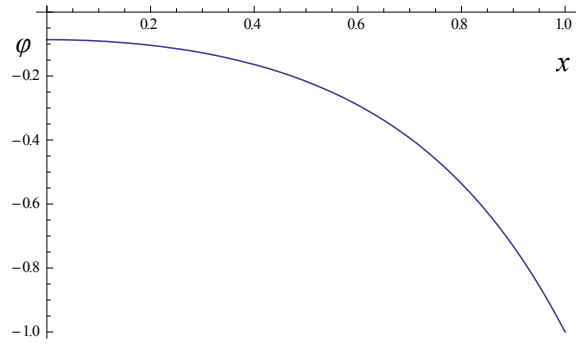


Рис.3 Граничное значение решения на границе $0\le x\le a, y=b$, полученное методом Галеркина

Очевидно, что на границах выполняются следующие равенства:

$$\cos\pi\frac{2n+1}{2a}x\Big|_{x=\pm a}=0,$$

$$\cos\pi\frac{2m+1}{2b}y\Big|_{y=\pm b}=0,$$

откуда следует, что

$\varphi_1(\pm a,y)=0$, $\varphi_2(x,\pm b)=0$. Поэтому

$\varphi(\pm a,y)=\varphi_2(\pm a,y)$, $\varphi(x,\pm b)=\varphi_1(x,\pm b)$.

Функции $a_n(y)$ и $b_m(x)$ ищем в виде:

$$a_n(y)=A_n\,\mathrm{ch}\,\frac{2n+1}{2a}\pi y,$$

$$b_m(x)=B_m\,\mathrm{ch}\,\frac{2m+1}{2b}\pi x.$$

Тогда (22) – (23) будут точными решениями уравнения Лапласа для произвольных коэффициентов A_n, B_m и имеют вид:

$$\varphi_1(x,y)=\sum_{n=0}^{\infty} A_n\,\mathrm{ch}\,\frac{2n+1}{2a}\pi y\cos\frac{2n+1}{2a}\pi x, \quad (24)$$

$$\varphi_2(x,y)=\sum_{m=0}^{\infty} B_m\,\mathrm{ch}\,\frac{2m+1}{2b}\pi x\cos\frac{2m+1}{2b}\pi y. \quad (25)$$

Удовлетворяя граничным условиям, получим для $y\in[0,b]$:

$$\sum_{m=0}^{\infty} B_m\,\mathrm{ch}\,\pi\frac{2m+1}{2b}a\cos\pi\frac{2m+1}{2b}y=\cos\frac{\pi y}{b}, \quad (26)$$

а для $x\in[0,a]$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n\,\mathrm{ch}\,\pi\frac{2n+1}{2a}b\cos\pi\frac{2n+1}{2a}x=-\frac{\mathrm{ch}\,\frac{\pi x}{a}}{\mathrm{ch}\,\pi}, \quad (27)$$

Умножаем (26) на $\cos\pi\frac{2k+1}{2b}y$ и интегрируем по y на отрезке $[0,b]$ при k=0,1,2,...

В результате несложных преобразований получаем выражение для определения B_k :

$$B_k=\frac{2}{b}\left(\mathrm{ch}\,\frac{2k+1}{2b}\pi a\right)^{-1}\times$$

$$\times\int_0^b\cos\frac{\pi y}{b}\cdot\cos\frac{2k+1}{2b}\pi y\,dy. \qquad (28)$$

Аналогично, умножая уравнение (27) на $\cos\frac{2k+1}{2a}\pi x$, интегрируя по x на отрезке $[0,a]$,

и разрешая полученное выражение относительно A_n, находим

$$A_k = -\frac{2}{a}\frac{1}{\operatorname{ch}\dfrac{2k+1}{2a}\pi b}\times\cdot$$

$$\times\int_0^a \cos\frac{2k+1}{2a}\pi x\,\frac{\operatorname{ch}\dfrac{\pi x}{a}}{\operatorname{ch}\pi}\,dx \qquad (29)$$

Следовательно, точное решение имеет вид:

$$\varphi(x,y)=\sum_{n=0}^{\infty}A_n\operatorname{ch}\frac{2n+1}{2a}\pi y\ \cos\frac{2n+1}{2a}\pi x+$$

$$+\sum_{m=0}^{\infty}B_m\operatorname{ch}\frac{2m+1}{2b}\pi x\ \cos\frac{2m+1}{2b}\pi y, \qquad (30)$$

где A_n и B_m определяются формулами (28) и (29).

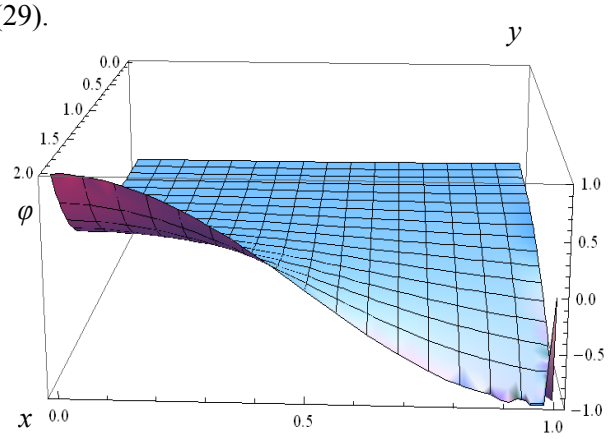


Рис.4 Точное решение в области, для $N=20$.

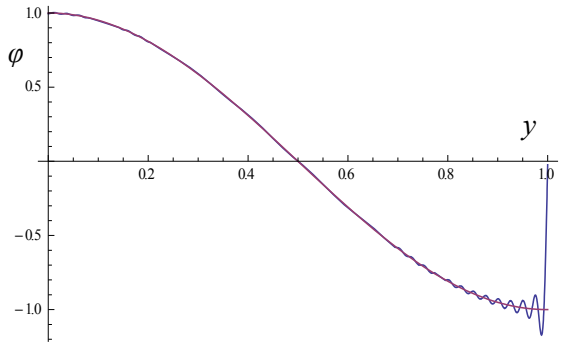


Рис.5. Граничное значение точного решения на границе $x=a$, $0\le y\le b$ для $N=20$.

Реализация (28) – (30) представлена на рис.4, рис. 5. Около угловых точек области проявляется четко выраженная осцилляция решения, что является характерным для метода Фурье и известная под названием явление Гиббса.

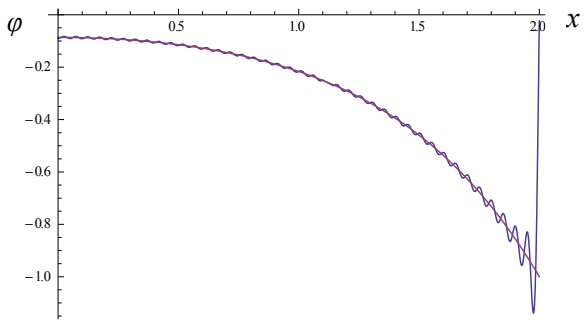


Рис.6. Граничное значение точного решения на границе $0\le x\le a$, $y=b$ для $N=20$.

Осцилляция проявляется при использовании отрезка ряда Фурье и независимо от числа членов частичной суммы всегда имеет изолированный выброс. При увеличении числа членов этот ложный пик не уменьшается, а смещается к точке разрыва. Этот эффект отсутствует при решении задачи методом Галеркина (Рис. 1, Рис. 2), что объясняется тем, что (3) – (6) не является отрезком ряда Фурье решения задачи, а реализацией метода граничного решения (или метода совмещенных областей) с применением метода Галеркина.

Метод поточечной коллокации

Метод поточечной коллокации решения системы функциональных уравнений (14) – (15) предполагает их точное удовлетворение в заданном наборе точек (x_i,y_i), $i=\overline{1,N+M+1}$ (узлов коллокации). В этом случае весовыми функциями являются дельта-функции Дирака с особенностями в узлах коллокации.

При этом получим систему линейных алгебраических уравнений вида :

$$C_0+\sum_{n=1}^{N}A_n\operatorname{ch}\frac{\pi n}{a}y_i\cos\pi n+$$

$$+\sum_{m=1}^{M}B_m\operatorname{ch}\frac{\pi m}{b}a\cos\frac{\pi m}{b}y_i=\cos\frac{\pi}{b}y_i,$$

$$C_0+\sum_{n=1}^{N}A_n\operatorname{ch}\frac{\pi n}{a}b\cos\frac{\pi n}{a}x_j+$$

$$+\sum_{m=1}^{M}B_m\operatorname{ch}\frac{\pi m}{b}x_j\cos\pi m=\frac{-\operatorname{ch}\dfrac{\pi x_j}{a}}{\operatorname{ch}\pi}; \qquad (31)$$

$$i=\overline{1,K},\quad j=\overline{K+1,N+M+1}.$$

Параметр K, как и в методе Галеркина, может быть использован для управления отношением норм невязок удовлетворения граничным условиям на различных участках границы.

В качестве примере использовалась равномерная сетка узлов коллокации :

$$\Omega=\left\{(a,y_i)\cup(x_j,b)\right\},$$

$$y_i=h_y(i-1),\quad h_y=\frac{b}{(K-1)},\quad i=\overline{1,K},$$

$$x_j=h_x(j-1),\ h_x=\frac{a}{(M+N-K)},\ j=\overline{1,N+M-K-1},$$

такая, что один из коллокационных узлов совпадает с угловой точкой (a,b).

На Рис. 7, Рис. 8. проиллюстрировано удовлетворение граничных условий для $M+N+1=140$, $K=70$.

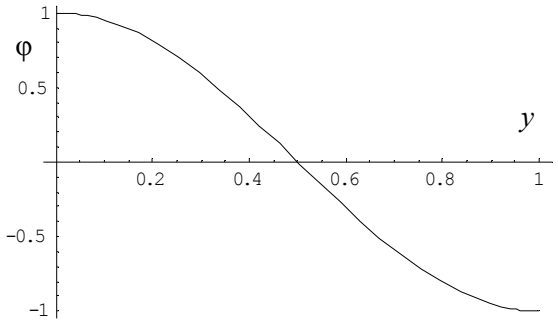


Рис. 7. Граничное значение решения задачи на границе $x=a$, $0\le y\le b$, полученное методом коллокаций.

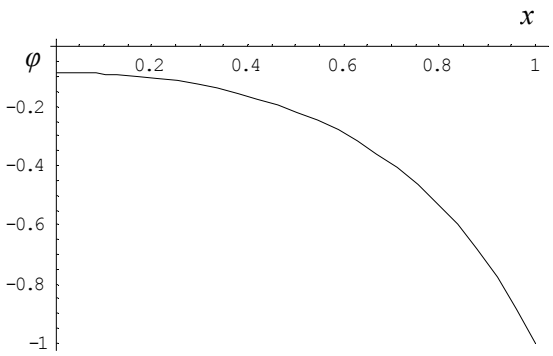


Рис.8. Граничное значение решения задачи на границе $0\le x\le a$, $y=b$, полученное методом коллокаций.

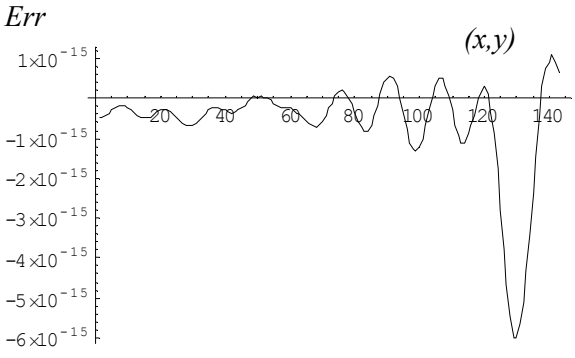


Рис.9. Ошибка при удовлетворении граничных условий.

На Рис. 9 приведен график ошибок. Как видим, при использовании метода Галеркина точность удовлетворения граничних условий хуже. Кроме того, порядок редуцированной системы в 2 раза превышал порядок системы, использовавшейся при рещении задачи методом Галеркина.

Выводы

В работе сравниваются различные методы решения задачи Дирихле для прямоугольной области.

Метод точного решения позволяет отыскать в аналитическом виде коэффициенты ряда Фурье, определяющего точное решение (30).

Два другие метода являются полуаналитическими. По классификации методов взвешенных невязок [13] они являются методами граничного решения. При этом первый из них является методом Галёркина, в котором минимизируется средневкадратичная ошибка удовлетворения граничных условий. Второй – метод поточечной коллокации – является интерполяционным методом, в котором уравнение взвешенных граничных невязок строится из условия зануления граничной невязки в узлах коллокаций. Избранный пример имеет простое решение, что позволяет проанализировать особенности применения различных методов.

Метод Галёркина имеет существенные преимущества в сравнении с методом коллокаций в силу того, что для линейных задач уравнение взвешенных невязок имеет симметричную либо блочно-диагональную матрицу с преобладающей диагональю. Кроме

того, он основывается на минимизации среднеквадратичной интегральной невязки.

Однако, метод поточечной коллокации имеет преимущества, состоящие в простоте реализации и гибкости его применения, основывающейся на возможности подбора коллокационной сетки.

В рассмотренном примере среднеквадратичная ошибка удовлетворения граничных условий в методе Галёркина на порядок меньше в сравнении с ошибкой, получаемой в методе коллокаций. Однако это объясняется прежде всего тем, что интегрирование в данном случае удалось выполнить аналитически и ошибка, по сути, определялась погрешностью решения системы линейных уравнений. В случае применения квадратурных формул метод Галёркина и метод коллокаций будут демонстрировать сравнимую точность.

Результаты работы могут быть применены при реализации метода совмещенных областей для решения линейных граничных задач математической физики в сложных областях.

При рассмотрении достаточно гладких полей оба метода должны обеспечивать достаточно точные оценки искомых характеристик. Однако при практической их реализации может возникать различие в объеме аналитической работы, в объеме вычислительных процедур и.т.д.

Список використаних джерел

1. *Grinchenko V. T.* , *Meleshko V. V.* Harmonic oscillations and waves in elastic bodies. – Kiev: Naukova Dumka, 1981. – 284 p. (in Russian).
2. *Grinchenko V. T.* Equilibrium and steady oscillations of elastic bodies of finite size. – Kiev: Naukova Dumka, 1978. – 264p. (in Russian).
3. *Grinchenko V. T.* The development of methods for solving problems of radiation and scattering of sound in the non-canonical areas // Hydromechanics. – 1996. – 70. – P.27–40. (in Russian)
4. *Grinchenko V. T., Vovk I. V. Matsypura V. T.* The Bases of acoustics. – Kyiv: Naukova Dumka. – 2007. – 640 p. (in Ukrainian)
5. *Koyalovych B. M.* Studies of infinite systems linear algebraic equations // Izvestiya Phys.-math. institut im. V.A. Steklova. – 1930. №3. – C.41-167 (in Russian).
6. *Meleshko V. V.* Biharmonic problem in a rectangle // Appl. Sci. Res. – 1998. – 58. – P.217-249 (in English).
7. *Papkov S. O.* Infinite systems of linear equations in the case of the first boundary value problem for the basic rectangular prism // Dynamic systems. – 2010. – V.28. – C. 89–98 (in Russian).
8. *Lavrentiev M. A., Shabat B. V.* Methods of theory of functions of complex variables. – Moscow: Lan', 2002. – 688 p. (in Russian)
9. *Tikhonov A. N., Samarskiy A. A.* Equations of mathematical physics. – Moscow: Publisher University of Moscow. – 1999. – 799 p. (in Russian)
10. *Timoshenko S. P., Goodier J. N.* Theory of elasticity. – Moscow: Nauka. – 1979.—560 p. (in Russian)
11. *Timoshenko S. P.* Vibration problems in engineering. – Moscow: Nauka, 1967. – 444 p. (in Russian)
12. *Martha L. Abell, James P. Braselton.,* Mathematica by example. – London: Academic Press, 2004. – 572 p. (in English)
13. *Zienkiewicz O. C., Morgan K.* Finite elements and approximation. – Moscow: Mir, 1986. – 318 p. (in Russian)
14. *Brebbia C. A., Telles J. C. F., Worbel L. C.* Boundary element techniques. – Moscow: Mir, 1987. – 524 p. (in Russian)

Надійшла до редколегії 02.12.2013

КОМП’ЮТЕРНІ НАУКИ ТА ІНФОРМАТИКА

УДК 004.93

V.S. Donchenko[1], Ph.D, Associate Professor,
F.M. Skotarenko[2], postgraduate student

Development of pseudo inverse technique: cortege operators and applications in grouping information problem

This paper focuses on model resolving problem of patterns recognition is one the manifestation of grouping information problem. To solve this problem, Euclidean space is considered as the one that has the most extensive arsenal of describing relations between elements. R^n. This technique includes, particularly, spectrum of linear operator (SVD), Moore-Penrose inversion, orthogonal projectors operators, Grouping operators and so on

Key Words: Feature vectors, matrix corteges operators, Single Valued Decomposition for cortege linear operators, linear discrimination

[1-2] *Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03680, Kyiv, Glushkova av., 4d,*
e-mail: voldon@bigmir.net
e-mail: fred.unicyb@gmail.com

Донченко В.С.[1], д.ф.м.-н., професор,
Скотаренко Ф.М.[2], аспірант

Розвиток апарату псевдо обернення: кортежні оператори і застосування в проблемі групування інформації

У даній роботі наведено модель вирішення проблеми відновлення функції, яка є одною із проблем групування інформації. Для розв'язання даної проблеми розглядається Евклідів простір, як той, що має найбільш багатий арсенал засобів опису зв'язків між елементами. Зокрема, спектр лінійного оператора (СВД), інверсія за Муром-Пенроузом, ортогональні проектори, оператори групування та інші

Ключові слова: вектор функція, кортежні оператори, сингулярний розклад для кортежу лінійних операторів, лінійна дискримінація

[1-2] Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, пр.-т Глушкова 4д,
e-mail: voldon@bigmir.net
e-mail: fred.unicyb@gmail.com

Paper submitted by Ph. D., Prof. Garashchenko F.G.

1 Introduction

Grouping information problem (GIP) is fundamental problem in applied investigations. There are two main form of it, namely: the problem of recovering the function, represented by their observations, and the problem of clustering, classification and pattern recognition. Examples of approaches in the field is represented perfectly in [Kohonen,2001], [Vapnik, 1998], [Haykin, 2001], [Friedman, Kandel,2000], [Berry,2004] . It is opportune to notice, that math modeling is the representation of an object structure by the means of mathematical structuring. A math structure after Georg Cantoris is a set plus "ties" between its elements. Only four fundamental types of "ties" (with its combination as fifth one) exist: relations, operations, functions and collections of subsets. Thus, the mathematical description of the object (mathematical modeling) cannot be anything other than representing the object structure by the means of mathematical structuring. It refers fully to

©В.С Донченко, Ф.М Скотаренко, 2014

so call "complex system". A "complex system" should be understanding and, correspondingly, determined, as an objects with complex structure (complex "ties"). Namely, when reading attentively manuals by the theme (see, for example, [Yeates, Wakefield, 2004], [Forster , Hölzl, 2004]) one could find correspondent allusions. "Structure" understanding is reasonable determining of a "complex systems" instead of defining them as the "objects, consisting of numerous parts, functioning as an organic whole".

In the essence, math modeling is representing by math "parts plus ties" "parts plus ties" of the object in applied field.

As to technique designing for the Euclidean space $R^{m\times n}$ as "environmental" math structure first steps have been made for example, by [Donchenko, 2011], [Donchenko, Zinko, Skotarenko, 2012]. Speech recognition with the spectrograms as the representative and the images in the problem of image processing and recognition are the natural application areas for the correspond technique.

It is commonly used approach for designing objects - representative to construct them as an finite ordered collection of characteristics: quantitative (numerical) or qualitative (non numerical). Such ordered collection of characteristics is determined by term cortege in math. Cortege is called vector when its components are numerical. In the function recovering problem objects - representatives are vectors and functions are used as a rule to design correspond mathematical "ties". In clustering and classification problem the collection may be both qualitative and quantitative. In last case correspond collection is called feature vector. It is reasonable to note that term "vector" means more, than simply ordered numerical collection. It means that curtain standard math "ties" are applicable to them. These "ties" are adjectives of the math structure called Euclidean space denoted be R^n. Namely these are: linear operations (addition and scalar multiplying), scalar product and correspond norm.

Just the belonging to the base math structure (Euclidean space) determines advantages of the "vectors" against "corteges". It is noteworthy to say, that this variant of Euclidean space is not unique: the space $R^{m\times n}$ of all matrixes of a fixed dimension $m\times n$ may represent alternative example. The choice of the R^n space as "environmental" structure is determined by perfect technique developed for manipulation with vectors. These include classical matrix methods and classical linear algebra methods. SVD-technique and methods of Generalized or Pseudo Inverse according Moore – Penrose are comparatively new elements of linear matrix algebra technique [Nashed, 1978](see, also, [Albert,1972] , [Ben-Israel, Greville ,2002]). Outstanding impacts and achievements in this area are due to N.F Kirichenko (especially, [Kirichenko, 1997] [Kirichenko, 1997], see also [Kirichenko, Lepeha, 2002]). Greville's formulas: forward and inverse - for pseudo inverse matrixes, formulas of analytical representation for disturbances of pseudo inverse, - are among them. Additional results in the theme as to further development of the technique and correspondent applications one can find in [Kirichenko, Lepeha, 2001], [Donchenko , Kirichenko, Serbaev, 2004], [Kirichenko, Crak, Polishuk,2004] [Kirichenko, Donchenko , Serbaev,2005], [Kirichenko, Donchenko,2005] [Donchenko, Kirichenko , Krivonos, 2007], [Kirichenko, Donchenko,2007] ,[Kirichenko, Krivonos, Lepeha 2007], [Kirichenko, Donchenko, Krivonos, Crak, Kulyas, 2009].

As to technique designing for the Euclidean space $R^{m\times n}$ as "environmental" one see, for example [Donchenko, 2011]. Speech recognition with the spectrograms as the representative and the images in the problem of image recognition are the natural application area for the correspond technique.

As to the choice of the collection (design of cortege or vector) it is necessary to note, that good "feature" selection (components for feature vector or cortege or an arguments for correspond functions) determines largely the efficiency of the problem solution.

As noted above, the efficiency of problem solving group, the choice of representatives of right: space arguments or values of functions and suitable

families past or range of convenient features vectors. This phase in solving the grouping information problem must be a special step of the correspondent algorithm. Experience showed the effectiveness of recurrent procedures in passing through selection features step. For correspond examples see, [*Ivachnenko*,1969] with Ivachnenko's GMDH (Group Method Data Handling), [*Vapnik*, 1998] with Vapnik's Support Vector Machine. Further development of the recurrent technique one may find in *Donchenko , Kirichenko,Serbaev*, 2004], [*Kirichenko, Crak, Polischuk*,2004] [*Kirichenko, Donchenko, Serbaev*,2005], [*Kirichenko, Donchenko*,2005] [*Donchenko, Kirichenko , Krivonos*, 2007], [*Kirichenko, Donchenko*,2007] ,[*Kirichenko, Krivonos, Lepeha* 2007]. The idea of nonlinear recursive regressive transformations (generalized neuron nets or neurofunctional transformations) due to Professor *N.F Kirichenko* is represented in the works referred earlier in its development. Correspondent technique has been designed in this works separately for each of two its basic form f the grouping information problem. The united form of the grouping problem solution is represented here in further consideration. The fundamental basis of the recursive neurofunctional technique include the development of pseudo inverse theory in the publications mentioned earlier first of all due to Professor *N.F. Kirichenko* and his disciples.

The essence of the idea mentioned above is thorough choice of the primary collection and changing it if necessary by standard recursive procedure. Each step of the procedure include detecting of insignificant components, excluding or purposeful its changing, control of efficiency of changes has been made. Correspondingly, the means for implementing the correspondent operations of the step must be designed. Methods of neurofunctional transformation (NfT) (generalized neural nets, nonlinear recursive regressive transformation: [*Donchenko , Kirichenko,Serbaev*, 2004] [*Kirichenko, Crak, Polischuk*, 2004], *[Kirichenko, Donchenko, Serbaev*, 2005]).

1.1. Matrixes spaces and cortege operators

Theorem 1. For an arbitrary linear operator between a pair of Euclidean spaces $(E_i,(,)_i), i=1,2 : \wp_E : E_1 \to E_2$, the collection of singularities $(v_i,\lambda_1^2),\ (u_i,\lambda_1^2) i=\overline{1,r},\ r=rank\wp_E$

exists for the operators $\wp_E^*\wp : E_1 \to E_1,\ \wp\,\wp_E^* : E_2 \to E_2$

correspondingly, with a common for both operators $\wp_E^*\wp, \wp\,\wp_E^*$ set of Eigen values $\lambda_1^2, i=\overline{1,r} :\ \lambda_{i-1} \geq \lambda_i > 0,\ \overline{i=2,r}$

such

$$\wp_E x = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i u_i (v_i, x)_1, \qquad \wp_E^* y = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i v_i (u_i, y)_2$$

that

Besides, the following relations take place: $u_i = \lambda_1^{-1} \wp v_i, i=\overline{1,r}$,

$v_i = \lambda_1^{-1} \wp_E^* u_i, i=\overline{1,r}$.

1.2. SVD – technique for matrixes spaces

We denote by $R^{(m\times n),K}$ - Euclidean space of all matrixes K-corteges from $m\times n$ matrixes: $\alpha = (A_1 \vdots ... \vdots A_K) \in R^{(m\times n),K}$ with a "natural" component wise trace inner product: $(\alpha,\beta)_{cort} = \sum_{k=1}^{K} (A_k, B_k)_{tr} = \sum_{k=1}^{K} trA_k^T B_k$,

$\alpha = (A_1 \vdots ... \vdots A_K), \beta = (B_1 \vdots ... \vdots B_K) \in R^{(m\times n),K}$.

1. We also denote by $\wp_\alpha : R^K \to R^{m\times n}$ a linear operator between the Euclidean space, determined by the relation :

$$\wp_\alpha y = \sum_{k=1}^{K} y_k A_k, \alpha = (A_1 \vdots ... \vdots A_K) \in R^{(m\times n),K}, y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \cdots \\ y_K \end{pmatrix} \in R^K. \quad (1)$$

2. Theorem 2. Range $\Re(\wp_\alpha) = L_{\wp_\alpha}$, which is linear subspace of R^{m*n}, is the subspace spanned on the components of cortege $\alpha = (A_1 \vdots ... \vdots A_K) \in R^{(m\times n),K}$, that determines $\wp_\alpha$:

$$\Re(\wp_\alpha) = L_{\wp_\alpha} = L(A_1, \ldots, A_K).$$

3. Theorem 3. Conjugate for the operator, determined by (1) is a linear operator, which, obviously, acts in the opposite direction: $\wp_\alpha^* : R^{m\times n} \to R^K$, and defined as:

$$\wp_\alpha^* X = \begin{pmatrix} trA_1^T X \\ \cdots \\ trA_K^T X \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} trX^T A_1 \\ \cdots \\ trX^T A_K \end{pmatrix}.$$

4. Theorem 4. A product of two operators $\wp_\alpha^* \wp_\alpha : R^K \to R^K$ is a linear operator, defined by the matrix from the next equation:

$$\wp_\alpha^* \wp = \begin{pmatrix} trA_1^T A_1, ..., trA_1^T A_K \\ \cdots \\ trA_K^T A_1, ..., trA_K^T A_K \end{pmatrix}. \qquad (2)$$

Remark. Matrix defined by (2) is the Gram' matrix for the elements of the cortege $\alpha = (A_1 \vdots ... \vdots A_K) \in R^{(m\times n),K}$, which determines the operator.

5. Singular value decomposition for a matrix (2) is obvious, as it is the classical matrix: symmetric and positive semi-definite, on vector Euclidean R^K. It is defined by a collection of singularities $(v_i, \lambda_i^2), i, j = \overline{1,r}$:

$$\| v_i \| = 1, v_i \perp v_j, i \neq j; i, j = \overline{1,r}; \lambda_1 > \lambda_2 > ... > \lambda_r > 0,$$

$$\wp_\alpha^* \wp_\alpha v_i = \lambda_i^2 v_i, i = \overline{1,r}.$$

The operator $\wp_\alpha^* \wp_\alpha$ by itself and is determined by the relation

$$\wp_\alpha^* \wp_\alpha = \sum_{i=1}^r \lambda_i^2 v_i v_i^T = \sum_{i=1}^r \lambda_i^2 v_i (v_i, \cdot).$$

Each of the row - vectors $v_i^T, i = \overline{1,r}$ will be written by their components: $v_i^T = (v_{i1}, ..., v_{iK}), i = \overline{1,r}$,

i.e. $v_{ik}, i = \overline{1,r}, k = \overline{1,K}$ is the component with the number *k* of a vector *v* with a number *I*.

6. Theorem 5.

Matrices $U_i \in R^{m\times n} : U_i = \frac{1}{\lambda_i} \wp_\alpha v_i = \frac{1}{\lambda_i} \sum_{k=1}^K A_k v_{ik}, i = \overline{1,r}$,

defined by the singularities $(v_i, \lambda_i^2), i = \overline{1,r}$ of the operator $\wp_\alpha^* \wp_\alpha$ are elements of a complete collection of singularities $(U_i, \lambda_i^2), i = \overline{1,r}$ of the operator. $\wp_\alpha^* : R^K \to R^{m\times n}$

Proof. This follows from Theorem 1, and the standard relations between singularities of the $\wp_\alpha^* \wp_\alpha$, $\wp_\alpha \wp_\alpha^*$ operators.

7. Theorem 6 (Singular Value Decomposition (SVD) for cortege operator). Singularity of two operators $\wp_\alpha^* \wp_\alpha, \wp_\alpha \wp_\alpha^*$, obviously determine the singular value decomposition of operators $\wp_\alpha$, $\wp_\alpha^*$:

$$\wp_\alpha y = \sum_{i=1}^r \lambda_i U_i v_i^T y, y \in R^K,$$

$$\wp_\alpha^* X = \sum_{i=1}^r \lambda_i v_i (U_i, X)_{tr}, X \in R^{m\times n}.$$

8. Corollary. A variant is a SVD for the operator $\wp_\alpha$ is represented by the next relation:

$$\wp_\alpha = \sum_{k=1}^r \lambda_k U_k v_k^T = \sum_{k=1}^r (\wp_\alpha v_k) v_k^T.$$

1.3. Pseudo Inverse Technique for matrixes Euclidean spaces

Basic operators PdI theory for a cortege operators: pseudo inverse by SVD-representation.

1.Theorem 7. The PdI operators for $\wp_\alpha$, $\wp_\alpha^*$ are determined, correspondingly, by the relations

$$\wp_\alpha^+ X = \sum_{k=1}^r \lambda^{-1} v_k (U_k, X)_{tr} = \sum_{k=1}^r \lambda^{-2} v_k (\wp_\alpha v_k, X)_{tr}, \forall X \in R^{m\times n},$$

$$(\wp_\alpha^*)^+ y = \sum_{i=1}^r \lambda^{-1} U_i v_i^T y, \forall y \in R^K.$$

2. Basic operators PdI theory for a cortege operators:: basic orthogonal projectors.

The basic orthogonal projectors PdI-theory are two pairs of orthogonal projectors. The first one is the pair of orthogonal projectors on the pair principal subspaces of $\wp_\alpha, \wp_\alpha^* : \Re(\wp_\alpha) = L_{\wp_\alpha}, \Re(\wp_\alpha^*) = L_{\wp_\alpha^*}$ - their ranges. These orthogonal projections will be designated in one of two equivalent ways: $P(\wp_\alpha^*) \equiv P_{L_{\wp_\alpha}} = P_{(A_1,\ldots,A_K)}, L_{L_{\wp_\alpha}} \subseteq R^{m\times n}, P(\wp_\alpha) \equiv P_{L_{\wp_\alpha^*}}, L_{\wp_\alpha^*} \subseteq R^K$.

The second pair is a pair of orthogonal projectors onto the orthogonal complement $L_{\wp_\alpha}^{\perp} \subseteq R^{m\times n}, L_{\wp_\alpha^*}^{\perp} \subseteq R^K$ of the first pair of the subspaces. The complements, namely, are the Kernels of the correspondent operators. Each of these projectors will be denoted in one of two equivalent ways:

$$Z(\wp_\alpha) \equiv P_{L_{\wp_\alpha^*}^{\perp}}, Z(\wp_\alpha^*) \equiv P_{L_{\wp_\alpha}^{\perp}},$$

Obviously:

$$Z(\wp_\alpha) \equiv E_K - P(\wp_\alpha), Z(\wp_\alpha^*) \equiv E_{m\times n} - P(\wp_\alpha^*) \quad (3)$$

In accordance with the general properties of PdI, the next properties are valid:

$$P(\wp_\alpha) = \wp_\alpha^+ \cdot \wp_\alpha, P(\wp_\alpha^*) = \left(\wp_\alpha^*\right)^+ \cdot \wp_\alpha^* = \wp_\alpha \cdot \wp_\alpha^+.$$

Correspondingly:

$$Z(\wp_\alpha) \equiv E_K - \wp_\alpha^+ \cdot \wp_\alpha, \quad Z(\wp_\alpha^*) \equiv E_{m\times n} - \wp_\alpha \cdot \wp_\alpha^+.$$

3. Basic operators PdI theory for a cortege operators:: basic orthogonal projectors. Grouping operators, denoted below as $R(\wp_\alpha)$, $R(\wp_\alpha^*)$, are also "paired" operators, and are determined by the relations: $R(\wp_\alpha) = \wp_\alpha^+\left(\wp_\alpha^+\right)^* = \wp_\alpha^+\left(\wp_\alpha^*\right)^+$, $R(\wp_\alpha^*) = \left(\wp_\alpha^*\right)^+\left(\left(\wp_\alpha^*\right)^+\right)^* = \left(\wp_\alpha^+\right)^*\wp_\alpha^+$.

4. Theorem 8. Grouping operators for the cortege operators $\wp_\alpha$, $\wp_\alpha^*$ can be represented by the next expression:

$$R(\wp_\alpha^*)X = \sum_{k=1}^{r} \lambda_k^{-2} U_k (U_k, X)_{tr} = \sum_{k=1}^{r} \lambda_k^{-2} U_k trU_k^T X = \sum_{k=1}^{r} \lambda_k^{-2} U_k trX^T U_k$$

,

and the quadratic form $(X, R(\wp_\alpha^*)X)_{tr}$ is determined by the relation:

$$(X, R(\wp_\alpha^*)X)_{tr} = \sum_{k=1}^{r} \lambda_k^{-2} (U_k, X)_{tr}^2,$$

where

$$\wp_\alpha^+ X = \sum_{k=1}^{r} \lambda^{-1} v_k \left(U_k, X\right)_{tr} = \sum_{k=1}^{r} \lambda^{-2} v_k \left(\wp_\alpha v_k, X\right)_{tr},$$

$$\left(\wp_\alpha^*\right)^+ y = \sum_{i=1}^{r} \lambda^{-1} U_i v_i^T y.$$

5. Theorem 9. Quadratic form $(X, R(\wp_\alpha^*)X)_{tr}$ may be written as:

$$(X, R(\wp_\alpha^*)X)_{tr} = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i^{-4} v_i^T \begin{pmatrix} trA_1^T X trA_1^T X & trA_2^T X trA_2^T X & \cdots & trA_1^T X trA_K^T X \\ trA_2^T X trA_1^T X & trA_2^T X trA_2^T X & \cdots & trA_2^T X trA_K^T X \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ trA_K^T X trA_1^T X & trA_K^T X trA_1^T X & \cdots & trA_K^T X trA_1^T X \end{pmatrix} v_i$$

=

$$= \sum_{i=1}^{r} \lambda_i^{-4} \left\{ v_i^T \begin{pmatrix} trA_1^T X \\ \cdots \\ trA_K^T X \end{pmatrix} \right\}^2 = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i^{-4} \left\{ v_i^T \wp_\alpha^* X \right\}^2.$$

Importance of grouping operators is determined by their properties, represented by the next two theorems.

6. Theorem 10. For any $A_i, i = \overline{1,K}$ of $\alpha = (A_1 \vdots \ldots \vdots A_K) \in R^{(m\times n),K}$ the next inequalities are fulfilled:

$$(A_i, R(\wp_\alpha^*)A_i)_{tr} \le r, i = \overline{1,K}, r = rank\wp_\alpha.$$

7. Theorem 11. For any $A_i, i = \overline{1,K}$ of $\alpha = (A_1 \vdots \ldots \vdots A_K) \in R^{(m\times n),K}$ the next inequalities are fulfilled:

$$(A_i, R(\wp_\alpha^*)A_i)_{tr} \le r_{\min} \le r, i = \overline{1,K}, r = rank\wp_\alpha,$$

$$r_{\min} = \min_{i=\overline{1,n}} (A_i, R(\wp_\alpha^*)A_i)_{tr} \le r_{\min} \le r, i = \overline{1,K}, r = rank\wp_\alpha$$

.

Comment to the theorems 10, 11. These theorems give the minimal grouping ellipsoids for the

matrixes $A_i, i = \overline{1,K}$. In order to build it one only has to construct cortege operator $\wp_\alpha$ by the cortege $\alpha = (A_1 \vdots ... \vdots A_K) \in R^{(m\times n),K}$

List of used sources

1. *Albert A.E.* Regression and the Moore-Penrose pseudoinverse.-Academic Press.- 1972. - 180 p.
2. *Adi Ben-Israel, Thomas N.E.* Greville Generalized Inverses. Theory and Applications.- Second Edition.- Springer-Verlag New York, Inc. -2003. - 420 p.
3. *Michael W. Berry* Editor Survey of Text Mining: Clustering, Classification, and Retrieval Springer - Verlag New York, Inc. - 2004. -244 p.
4. *Donchenko V.S. Kirichenko M.F., Serbaev D.P.* Recursive regression transformation and dynamical systems// Proceedings: of the Seventh International Conference "Computer Data analysis and Modeling: robustness and computer intensive methods". – V.1. – September 6-10, 2004. – Minsk. – pp. 147-151
5. *Donchenko V. Kirichenko M., Krivonos Yu.* Generalizing of neural nets: Functional nets of special type// International Journal Information Models and Analysis. – N 3. – V.14. – 2007. Kyiv, Ukraine -Sofia, Bulgaria. – pp. 259-266.
6. *Donchenko V. Krak Ju.., Krivonos Yu.* Recurrent procedure in solving the Grouping Information Problem in Applied Mathematics//ITHEA: International Journal Information Theories and Applications. – V.1.– N 1. Kyiv, Ukraine -Sofia, Bulgaria. – 2012. – pp. 62 -77.
7. *Donchenko V, Zinko T, Skotarenko F.* "Feature Vectors" in Grouping Information Problem in Applied Mathematics: Vectors and Matrixes. - *Vitalii Velichko, Alexey Voloshin, Krassimir Markov*(ed.)- Problems of Computer Intellectualization.- Institute of Cybernetics NASU, ITHEA.-Kyiv, Ukraine -Sofia, Bulgaria.- 2012.- pp. 111-124.
8. *Ivakhnenko A.G* and *Muller J.- A.* Present state and new problems of further GMDH development.-SAMS,1995. - pp. 3-16.
9. *Menahem Friedman Abraham Kandel* Introduction to pattern recognition statistical, structural, neural and Fuzzy logic approaches.- World scientific publishing co. Pte. Ltd. - reprinted - London,2000. -329 p.
10. *Forster J. , Hölzl V*. Applied Evolutionary economics and complex systems.-2004. Edward Elgar, UK - 293 p.

Received 27.11.2013

УДК 519.87

Ivokhin E.V., Ph.D., associate professor,
Almodars Barrak Subhi Kaml, post-graduate

An approach for solving of knapsack problem with fuzzy priorities

In this paper knapsack problem with fuzzy priorities of objects to be placed in a knapsack was discussed and solved. The values are give as the fuzzy numbers with linear membership function. The method of solution based on the use of the dual optimization problem was request. The real example of fuzzy knapsack problem solving was given.

Key words: knapsack problem, fuzzy number, dual linear programming problem, method of solving of linear programming problem with fuzzy constraints

Taras Shevchenko National University of Kyiv,
03680, Kyiv, Glushkova av., 4D
e-mail: ivohin@univ.kiev.ua, barraq_1978@ukr.net

Ивохин Е.В., д.ф.-м.н, доцент,
Алмодарс Баррак Субхи Камл, аспирант

Об одном подходе к решению задачи про рюкзак с нечеткими приоритетами

В статье рассмотрена и решена задача про рюкзак с нечетко заданными приоритетами объектов, размещаемых в рюкзаке. Величины задаются в виде нечетких чисел с линейной функцией принадлежности. Предложен метод решения на основе использования двойственной задачи оптимизации, приведен пример решения реальной задачи.

Ключевые слова: задача про рюкзак, нечеткое число, двойственная задача линейного программирования, метод решения ЗЛП с нечеткими ограничениями

Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко, 03680, г.Киев, пр.Глушкова, 4д

Статью представил доктор т.т.н., проф. Волошин А.Ф.

1. INTRODUCTION

The knapsack problem, also known as the capital budgeting or cargo loading problem, is a famous integer programming formulation [1]. The knapsack context refers to a hiker selecting the most valuable items to carry, subject to a weight or capacity limit. Partial items are not allowed, thus choices are depicted by zero-one variables. The capital budgeting context involves selection of the most valuable investments from a set of available, but indivisible, investments subject to limited capital availability. The cargo loading context involves maximization of cargo value subject to hold capacity and indivisibility restrictions.

A traditional knapsack problem is attempts to maximize utility while adhering to a major weight or cost constraint. In more mathematical terms, there are *n* items, with each item *j* having a cost (weight), and a value,. The goal is to maximize the sum of the values while staying within the cost constraint. There are many variations on knapsack problems. Binary constraints may be placed on each item prohibiting dividing up items. Also, multiple other constraints can be added beyond one major cost constraint. The knapsack problem has seen a number of variations over the years. In its basic form, the problem is to maximize the value of items placed in a knapsack without going over a weight limit. This is the 0/1 Knapsack Problem, defined more formally as [2]

$$\sum_{j=1}^{n} v_i x_i \rightarrow Max \quad (1)$$

subject to

$$\sum_{j=1}^{n} w_j x_j \leq W,\ x_j \in \{0,1\},\ j = \overline{1,n}, \quad (2)$$

where v_j is the value of item's priority, w_j is item's weight and W is the maximum weight allowed in the knapsack, $j = \overline{1,n}$.

The knapsack problem is a simple example of a type of integer programming problem which frequently in the field of mathematics known as operations research, and among intensively studies knapsack problem hard combinatorial optimization problem, the application of these problems span a wide canvas from industrial applications and financial management to electronic commerce and personal health care. The common flavor in most of these problems is resource allocation. The allocation of specific amount of a single resource among competitive alternatives is often modeled as knapsack problem or its variants with, in addition, the unknown or fuzzy coefficients of objective

©Е.В.Ивохин, Субхи Камл Алмодарс Баррак, 2014

function. Usually we may to know only some approximation of these coefficients. In this case the values of coefficients may be considered as the fuzzy numbers, for example in triangle form. We obtain the knapsack problem with fuzzy coefficients $\tilde{v}_j$, $j=\overline{1,n}$, of objective function as next:

$$\sum_{j=1}^{n}\tilde{v}_j x_j \to Max \quad (3)$$

subject to

$$\sum_{j=1}^{n} w_j^i x_j \le W^i, \quad i=\overline{1,m}, \quad (4)$$

$$x_j \in \{0,1\},\ j=\overline{1,n},$$

where $\tilde{v}_j,\ j=\overline{1,n}$, - the fuzzy numbers which describe the unknown priority values of items j, $j=\overline{1,n}$. The item's weights and the maximum weight of the knapsack are define by vectors $w_j = (w_j^1,\dots,w_j^m)^T$ and $W=(W^1,\dots,W^m)^T$ respectively, $j=\overline{1,n}$.

The task above is linear optimizing problem with fuzzy objective function and integer variables. The method of linear programming problem solving with fuzzy right-hand side (resources) was considered in [3]. We apply this method to our task (3), (4).

2. GENERAL INFORMATION

The General fuzzy single-objective Linear Programming Problem when constrain goals are triangular fuzzy number (TFN) may be written as follows:

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to Max \quad (5)$$

subject to

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \ge \tilde{b_i}, \quad 1\le i\le m_1,$$
$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le \tilde{b_i}, \quad m_1{+}1\le i\le m_2,$$
$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = \tilde{b_i}, \quad m_2{+}1\le i\le m,$$
$$x_j \ge 0,\ 1\le j\le n.$$

The problem (5) becomes with the extreme tolerance as :

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to Max \quad (6)$$

subject to

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \ge b_i - b_i^0, \quad 1\le i\le m_1,$$
$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i + b_i^0, \quad m_1{+}1\le i\le m_2,$$
$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \ge b_i - b_i^l, \quad m_2{+}1\le i\le m_3,$$
$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i - b_i^r, \quad m_3{+}1\le i\le m,$$
$$x_j \ge 0,\ 1\le j\le n.$$

Fuzzy values $\tilde{b_i}$, $i=\overline{1,m}$, are considering as [4]

· Left Triangular Fuzzy Number (LTFN):

$\tilde{b_i}=(b_i-b_i^0, b_i, b_i)$ or $\tilde{b_i}= b_i-b_i^0+\lambda b_i^0$, $1\le i\le m_1$, with tolerance $b_i^0(<b_i)$ for $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \ge \tilde{b_i}$, $1\le i\le m_1$;

· Right Triangular Fuzzy Number (RTFN):

$\tilde{b_i}=(b_i, b_i, b_i+b_i^0)$ or $\tilde{b_i}= b_i+b_i^0-\lambda b_i^0$, $m_1{+}1\le i\le m_2$, with tolerance $b_i^0(>0)$ for $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le \tilde{b_i}$, $m_1+1\le i\le m_2$;

· Triangular Fuzzy Number (TFN):

$\tilde{b_i}=(b_i-b_i^l, b_i, b_i+b_i^r)$ or $\tilde{b_i}=b_i-b_i^l+\lambda b_i^l$, $\tilde{b_i}=b_i+b_i^r-\lambda b_i^r$, $m_2{+}1\le i\le m$, with tolerances $b_i^l(<b_i)$, $b_i^r(>0)$ for $\sum a_{ij}x_j=\tilde{b_i}$, $m_2{+}1\le i\le m$.

Let L and U be the lower and upper bound for objective function:

$$L=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j^{*1},\ U=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j^{*0},$$

where x_j^{*0}, x_j^{*1}, $j=\overline{1,n}$ - optimal solutions of task optimization (5) with Triangular Fuzzy values $\tilde{b_i}$, $1\le i\le m$ for $\lambda=0$ and $\lambda=1$ respectively.

When the aspiration levels have been obtained, we form a fuzzy model which is as follows:

find x_j , $1\le j\le n$, so as to satisfy

$$Z\ge\tilde{s}, \quad (7)$$
$$\tilde{s}=(L,U,U),\ \tilde{s}=L+\lambda(U-L),$$

or

$$Z\le\tilde{s}, \quad (8)$$
$$\tilde{s}=(L,L,U),\ \tilde{s}=U-\lambda(U-L),$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \ge b_i - b_i^0+\lambda b_i^0, \quad 1\le i\le m_1,$$
$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i + b_i^0-\lambda b_i^0, \quad m_1{+}1\le i\le m_2,$$
$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \ge b_i - b_i^l+\lambda b_i^l,$$
$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i + b_i^r-\lambda b_i^r, \quad m_2{+}1\le i\le m,$$
$$x_{ij}\ge 0,\ 1\le j\le n.$$

The membership functions for fuzzy constraints (7), (8) are defined as:

$$\mu_G(x)=\begin{cases} 0, & \text{if } \sum_{j=1}^{n} c_j x_j < L,\\ \dfrac{\sum_{j=1}^{n} c_j x_j - L}{U-L}, & \text{if } L\le \sum_{j=1}^{n} c_j x_j < U,\\ 1, & \text{if } \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \ge U, \end{cases}$$

or

$$\mu_G(x)=\begin{cases} 1, & \text{if } \sum_{j=1}^{n} c_j x_j < L,\\ \dfrac{U-\sum_{j=1}^{n} c_j x_j}{U-L}, & \text{if } L\le \sum_{j=1}^{n} c_j x_j < U,\\ 0, & \text{if } \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \ge U, \end{cases}$$

for the *i*-th constrain $\tilde{F}_i$, $1 \le i \le m_1$,

$$\mu_{\tilde{F}_i}(x) = \begin{cases} 0, \quad \text{if } \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j < b_i - b_i^0, \\ \dfrac{\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - b_i + b_i^0}{b_i^0}, \\ \quad \text{if } b_i - b_i^0 \le \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j < b_i, \\ 1, \quad \text{if } \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \ge b_i ; \end{cases}$$

for the *i*-th constrain $\tilde{F}_i$, $m_1 + 1 \le i \le m_2$,

$$\mu_{\tilde{F}_i}(x) = \begin{cases} 1, \quad \text{if } \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j < b_i , \\ \dfrac{b_i + b_i^0 - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j}{b_i^0}, \\ \quad \text{if } b_i \le \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j < b_i + b_i^0, \\ 0, \quad \text{if } \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \ge b_i + b_i^0 ; \end{cases}$$

for the *i*-th constrain $\tilde{F}_i$, $m_2 + 1 \le i \le m$,

$$\mu_{\tilde{F}_i}(x) = \begin{cases} 0, \quad \text{if } \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j < b_i - b_i^l , \\ \dfrac{\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - b_i + b_i^l}{b_i^l}, \\ \quad \text{if } b_i - b_i^l \le \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j < b_i, \\ \dfrac{b_i + b_i^r - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j}{b_i^r}, \\ \quad \text{if } b_i \le \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j < b_i + b_i^r, \\ 0, \quad \text{if } \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \ge b_i + b_i^r. \end{cases}$$

Using the *max-min* operator (as [4]) crisp linear programming problems for (6) is formulated as follows:

$$\lambda \to Max \tag{9}$$

subject to (for example)

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j + \lambda(U - L) \le U ,$$

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j - \lambda b_i^0 \ge b_i - b_i^0 , 1 \le i \le m_1 ,$$
$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j + \lambda b_i^0 \le b_i + b_i^0 , \ m_1 + 1 \le i \le m_2 \tag{10}$$
$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j - \lambda b_i^l \ge b_i - b_i^l ,$$
$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j + \lambda b_i^r \le b_i + b_i^r , \ m_2 + 1 \le i \le m,$$
$$0 \le \lambda \le 1 , x_j \ge 0 , 1 \le j \le n.$$

Suppose that the tolerance of constraints on resources are independent and can be formalized in the form of inequalities with different parameters $\lambda_i \in [0,1]$, $1 \le i \le m$,

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j + \lambda(U - L) \le U ,$$
$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \ge b_i - b_i^0 + \lambda_i b_i^0, \text{ for } 1 \le i \le m_1,$$
$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i + b_i^0 - \lambda_i b_i^0 \text{ for } m_1 + 1 \le i \le m_2,$$
$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \ge b_i - b_i^l + \lambda_i b_i^l, \tag{11}$$
$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i + b_i^r - \lambda_i b_i^r, \text{ for } m_2 + 1 \le i \le m,$$
$$0 \le \lambda_i \le 1, 1 \le i \le m, x_j \ge 0 , 1 \le j \le n.$$

In this case we must add m inequalities

$$\lambda \le \lambda_i, \ 1 \le i \le m. \tag{12}$$

Finally the optimization problem with Triangular Fuzzy Numbers and different λ_i (see [5]) may be written in form (9), (11), (12).

3. DUAL APPROACH

By using dual linear programming problem [6] for initial task in form (3),(4) we rewrite a new optimization model with fuzzy right-hand side

$$\sum_{i=1}^{m} W^i y_i \to Min \tag{13}$$

subject to

$$\sum_{i=1}^{m} w_j^i y_i = \tilde{v}_j, \ j = \overline{1,n}, \tag{14}$$
$$y_i \ge 0, i = \overline{1,m},$$

where $\tilde{v}_j, \ j = \overline{1,n}$, $w_j = \left(w_j^1, \dots, w_j^m\right)^T$, $j = \overline{1,n}$, $W = (W^1, \dots, W^m)^T$ are the values which were define in initial task (3),(4).

For this model we apply method described in part 2 and find the optimal solution.

4. THE RESULTS

Let we consider the fuzzy knapsack problem in the following form [6]:

$$f(x) = \widetilde{170}\, x_1 + \widetilde{1300} x_2 \to Max \tag{15}$$

subject to

$$5.04\, x_1 + 96\, x_2 \le 248.4$$
$$24.48\, x_1 + 350\, x_2 \le 753.1 \tag{16}$$
$$2.16\, x_1 + 16\, x_2 \le 48.1$$
$$150\, x_1 + 944\, x_2 \le 2896.9, x_j \in \{0,1\}, j = \overline{1,2}.$$

By using dual we obtain the following model

$$f(y) \to Min, \tag{17}$$
$$f(y) = 248.4y_1 + 753.1y_2 + 48.1y_3 + 2896.9y_4 ,$$

subject to

$$5.04\,y_1 + 24.48\,y_2 + 2.16\,y_3 + 150\,y_4 = \widetilde{170},$$
$$96\,y_1 + 350\,y_2 + 16\,y_3 + 944\,y_4 = \widetilde{1300}, \quad (18)$$
$$y_j \geq 0\,,\ j = \overline{1,4},$$

where fuzzy values $\widetilde{170}, \widetilde{1300}$ are the triangle fuzzy numbers which define as $\widetilde{170} = 170 \pm 10\lambda_1$ with $b_1^l = b_1^r = 10$, $\widetilde{1300} = 1300 \pm 100\lambda_2$ with $b_2^l = b_2^r = 100$, $0 \leq \lambda_i \leq 1$, $i = \overline{1,2}$.

The lower and upper bounds for objective function are L=3366.24 and U=3858.56. According to (11) the model become:

$$\lambda \to Max \quad (19)$$

subject to

$$248.4y_1 + 753.1y_2 + 48.4y_3 + 2896.9y_4 - (3858.56 - 3366.24)\lambda \geq 3366.24,$$
$$5.04\,y_1 + 24.48\,y_2 + 2.16\,y_3 + 150\,y_4 \leq 180 - 10\,\lambda_1\,,$$
$$5.04\,y_1 + 24.48\,y_2 + 2.16\,y_3 + 150\,y_4 \geq 160 + 10\,\lambda_1\,, \quad (20)$$
$$96\,y_1 + 350\,y_2 + 16\,y_3 + 944\,y_4 \leq 1400 - 100\,\lambda_2\,,$$
$$96\,y_1 + 350\,y_2 + 16\,y_3 + 944\,y_4 \geq 1200 + 100\,\lambda_2\,,$$
$$\lambda_i \geq \lambda,\ 0 \leq \lambda_i \leq 1,\ i = \overline{1,2}\,,\ y_j \geq 0\,, j = \overline{1,4}.$$

The optimal solution of this task is $y_1 = 0\,, y_2 = 1.112\,, y_3 = 0, y_4 = 0.929\,, \lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = 0.667$ and $f(y) = 3530.4$.

Check all constraints (20) for this solution. We obtained five corresponding unequalities

$$3694{,}617 \geq 3366.24,$$
$$166{,}67 \leq 173.33,$$
$$166{,}67 \geq 166.67,$$
$$1266{,}7 \leq 1333.3,$$
$$1266{,}7 \geq 1266.7,$$

which are correct. By dual theorem $f(y) > f(x)$ and value 3530.4 is the maximal level of objective function (15).

The task (17), (18) with crisp constraints

$$5.04\,y_1 + 24.48\,y_2 + 2.16\,y_3 + 150\,y_4 \geq 170,$$
$$96\,y_1 + 350\,y_2 + 16\,y_3 + 944\,y_4 \geq 1300,$$

was solved in [7] using the unfuzzy method. The optimal solution was $y_1 = 1,\ y_2 = 0.958\,, y_3 = 0, y_4 = 0.999$ and the objective function value $f(y) = 3864.98$. This result is comparing with solution which was obtained by approach based on traditional fuzzy optimization model (9),(10) with one parameter λ. In this case optimal solution was $y_1 = 2.902,\ y_2 = 0\,,\ y_3 = 0, y_4 = 1.128$ and value of objective function was $f(y) = 3988.25$. As can be seen from the solution leeway has been provided with respect to all constraints and at additional cost of 3.2 percent.

Using our method we obtained the upper bound for optimal value of knapsack objective function with fuzzy priorities by using dual approach and modified the solving scheme for fuzzy linear optimization problem which can give better solution than the traditional fuzzy solution.

Список використаних джерел

1. *Karmanov V.G.* Mathematical programming. – M.: Nauka, 1986. - 288 p. (in Russian)
2. *Gilmore P.C. , Gomory R.E.* The theory and computation of Knapsack functions// Operations Research, 1966. - V.14. - P. 1045–1074.
3. *Ivokhin E.V., Almodars Barraq Subhi Kaml.* Single-Objective Linear Programming Problems With Fuzzy Coefficients and Resources// Computational and Applied Math. – 2013. – №1. – P. 117-125.
4. *Bablu Jana, Tapan Kumar Roy.* Multi-Objective Fuzzy Linear Programming and Its Application in Transportation Model// Tamsui Oxford Journal of Mathematical Sciences, 2005. - 21(2). - P. 243-268.
5. *Ivokhin E.V., Almodars Barraq Subhi Kaml.* On approach for the solving of the linear programming problem with fuzzy constraints //Abstracts II Intern. conf. "Computational Intelligence". - Cherkasy, 2013. – P.41-42. (in Russian).
6. *Yudin D.B., Golshtein E.G.* Linear programming. - M.: Nauka, 1969. – 424p. (in Russian)
7. *Zimmermann H.J.* Fuzzy set theory and its application. - Kluwer Academic Publisher, 1992. - 399p.

Надійшла до редколегії 29.10.2013

УДК 519.8

Mohammed Saad Ibrahim[1], Postgrad. Stud.

Review of type-2 fuzzy sets and logic systems theory

Decision making is one of the most complex management processes in field of Operations Research. In circumstances when the decision maker is uncertain in determining the decision making criteria, fuzzy theory provides a proper tool to encounter with such uncertainties. The process of using fuzzy logic of type-1 as a general model in the real problems of worlds is scientifically incorrect. This paper supplies an introduction to type-2 fuzzy logic and an overview of type-2 fuzzy sets and systems theory.

Keywords: type-2 fuzzy set, membership function, type-2 fuzzy logic systems, decision making.

[1] Taras Shevchenko Natoinal University of Kyiv, 03680, Kyiv, Glushkova st., 4d,

e-mail: blackhawk_is@yahoo.com

Мохаммед Саад Ібрахим[1], аспірант

Огляд з теорії нечітких множин та систем логіки типу-2

Прийняття рішень є одним з самих складних управлінських процесів в області дослідження операцій. В умовах, коли особа, що приймає рішення, сумнівається у визначенні критеріїв прийняття рішень, теорія нечітких множин забезпечує відповідний інструмент, щоб стикатися з такою невпевненістю. Використання нечіткої логіки типу-1 як загальної моделі у реальних умовах є науково некоректною. Ця стаття представляє собою введення в нечітку логіку типу-2 і короткий огляд теорії нечітких множин і систем типу-2.

Ключові слова: нечітка множина типу-2, функція належності, системи нечіткої логіки типу-2, прийняття рішень.

[1] Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, пр-т Глушкова 4д,

e-mail: blackhawk_is@yahoo.com

Paper submitted by Ph. D., Prof. Garashchenko F.G.

Introduction. Recently there has been significant growth in scientific interest in type-2 fuzzy logic. The type-2 fuzzy logic concept is introduced firstly by L. Zadeh as an extension of fuzzy type-1 (regular) fuzzy logic where the member ship grade in a fuzzy set is itself measured as a fuzzy number. The fuzzy set whose membership values are type-1 fuzzy sets on the interval [0,1] is an type-2 fuzzy set, in other words type-2 fuzzy sets are {fuzzy-fuzzy} sets and are more expressive as we shall see that in this paper.

A short time ago J. Mendel and R. John presented a new representation theorem for type-2 fuzzy sets and showed that it can be used to derive formulas for the union, intersection, and complement of type-2 fuzzy sets without having to use the addition concept. The likeness concept is very important, for it provides the degree of likeness between two fuzzy concepts, the likeness or similarity measures between fuzzy sets have been widely studied and applied in various areas such as, rule matching in fuzzy control and neural networks, a similarity measure between the fuzzy sets is always used to determine whether a rule should be fired and used in a multimedia database query, etc.

The use of type-1 fuzzy set to model a word is scientifically incorrect, because a word is uncertain whereas a type-1 fuzzy set is certain. First example to use a fuzzy set model a word is suggested by L. Zadeh just about every textbook does the same, and this is also true about computing with words [1]. It can be said that most of the applications of fuzzy sets type-1 only use the mathematics of such sets and do not focus on them as actual models for words, e.g. rule-based fuzzy systems, in which antecedents and consequents are words, are often used only in the context of some sort of universal function approximation which is mathematics and not linguistics.

G. Klir and T. Folger [3] uses the word conflict or paradoxical, the correctness for any

© Mohammed Saad Ibrahim, 2014

membership function is necessarily restricted and more than, this may be a problem if not conflict, that a characterization of fuzziness is made by using membership grades that are themselves exact a real number. Even though, this does not present the important problem for many applications and it is nevertheless possible to extend the concept of a fuzzy set to allow for the distinction between grades of membership to become vague.

One of the finest sources for general discussions about fuzzy environment is G. Klir and M. Wierman [4]. Three types of uncertainty are now identifed as follows:

a) fuzziness, which results from the imprecise boundaries of fuzzy sets;

b) non-specificity or information-based imprecision which is connected with sizes of relevant sets of alternatives;

c) discord, which expresses conflicts among the different sets of alternatives.

It can be observed that, type-2 fuzzy sets are described by membership functions that are characterized by more parameters than are membership functions for type-1 fuzzy sets. Therefore, type-2 fuzzy sets provide us with more design degrees of freedom; so using type-2 fuzzy sets has the potential to outperform using type-1 fuzzy sets, especially when we are in uncertain environments.

Type-2 fuzzy logic systems. Most real world applications face high levels of uncertainties that can affect the operations of such applications. Hence, there is a need to develop different approaches that can handle the available uncertainties and reduce their effects on the given application. To date, Type-1 Fuzzy logic controllers have been applied with great success to many different real world applications.

The concept of a type-2 fuzzy set was introduced by L. Zadeh as an extension of the concept of a typically fuzzy set, which are called a “type-1 fuzzy set”.

A type-2 fuzzy set is characterized by a fuzzy membership function, and the membership grade for each element of this set is a fuzzy set in the interval [0,1], not similar a type-1 set where the membership grade is a crisp number in [0,1]. Such sets can be used in situations where there is uncertainty about the membership grades themselves, e.g., an uncertainty in the shape of the membership function or in some of its parameters.

Consider the transition (move) from traditional sets to fuzzy sets. If cannot determine the membership of an element in a set as 0 or 1, then it possible to use fuzzy sets of type-1. Correspondingly, when the situation is so fuzzy that we have problem determining the membership grade even as a crisp number (non-fuzzy) in [0,1], can be used fuzzy sets of type. There are many real-world problems where we cannot determine the exact form of the membership functions, e.g., in time series prediction because of noise in the data.

Another way of viewing this is to consider type-1 fuzzy sets as a first order approximation to the uncertainty in the real-world. Then type-2 fuzzy sets can be considered as a second order approximation.

In this paper we will consider a new area in fuzzy logic, which is called type-2 fuzzy logic. Fundamentally, a type-2 fuzzy set is a set in which we also have uncertainty about the membership function. Certainly, type-2 fuzzy systems are composed of fuzzy If-Then rules, which contain type-2 fuzzy sets and accordingly, the type-2 fuzzy logic is a generalization of ordinary fuzzy logic type-1 in the sense that uncertainty is not only limited to the linguistic variables but also is present in the definition of the membership functions.

Fuzzy logic systems consist of rules, and in most cases the knowledge that is used to construct these rules is uncertain. Such uncertainty leads to rules whose predecessors or results are fuzzy, which translates into fuzzy predecessor or result membership functions.

The fuzzy systems type-1, whose membership functions are type-1 fuzzy sets, aren't able to directly treat such uncertainties type-2 fuzzy systems, in which the antecedent or consequent membership functions are type-2 fuzzy sets. Where the sets are fuzzy sets whose membership grades themselves are type-1 fuzzy sets and they are very useful in situations where it is very hard to determine an exact membership function for a fuzzy set. Type-2 fuzzy logic is characterized by ability to treatment uncertainties because it can model and minimize their effects [14].

Some properties of fuzzy sets of type-2. The basic idea of type-2 fuzzy sets is to generalize the notion of ordinary fuzzy sets type-1, affording wider applicability.

This paper gives a general overview of some of the mathematical aspects of type-2 fuzzy set theory, emphasizing precisely how type-2 generalizes type-1 and interval-valued fuzzy set theory. We will summarize the theory, at least what we know of it, and make some general

comments on the mathematical setting and significance of various theorems. One purpose of these comments is to point out that type-2 fuzzy sets are, in a strict mathematical sense, an appropriate generalization of type-1 and of interval-valued fuzzy sets. The fundamental object for a "fuzzy set theory" is an algebra of truth values.

A fuzzy set of type-2 is defined by a fuzzy membership function, the grade (that is, fuzzy grade) of which is a fuzzy set in the unit interval [0,1] rather than a point in [0,1]. In the definition of ordinary fuzzy sets, the range of membership function is [0,1] and the operations to the grades of fuzzy sets are "max" and "min"

As is well known, the interval [0,1] forms a linear ordered set or a distributive lattice under max and min. Thus, ordinary fuzzy sets form a distributive lattice [16]. In this paper we investigate the algebraic structures of fuzzy grades (in other words, fuzzy sets of type-2) under the operations of join $\vee$, meet $\wedge$, and negation $\neg$ for fuzzy grades.

Main results are: convex fuzzy grades form a commutative semiring; normal convex fuzzy grades form a distributive lattice. Furthermore, the algebraic properties of fuzzy grades under the operations of join $\bigcup$ and meet $\bigcap$, which are defined differently than $\vee$ and $\wedge$, are briefly discussed.

We shall briefly review some of the basic definitions relating to ordinary fuzzy sets for the purpose of fuzzy sets of type 2, which are discussed later [17].

A fuzzy set A in a set X is characterized by a membership function μ_A which takes the values in the interval [0,1], i.e.,

$$\mu_A : X \to [0,1],$$

the value of μ_A at *x*, $\mu_A(x)$, represents the grade of membership (grade, for short) of *x* in A and is a point in [0,1]. The value of μ_A at *x*, $\mu_A(x)$, represents the grade of membership (grade, for short) of *x* in A and is a point in [0,1]. A fuzzy set A is represented as follows:

$$A = \mu_A(x_1)/x_1 + \ldots + \mu_A(x_n)/x_n = \sum_i \mu_A(x_i)/x_i,\ x_i \in X,$$

where the operation "+" stands for logical sum (or). The operations of fuzzy sets are defined as follows:

- containment

$$A \subseteq B \Leftrightarrow \mu_A(x) \le \mu_B(x),\ \forall x \in X;$$

- union

$$A \cup B \Leftrightarrow \mu_{A\cup B}(x) = \mu_A(x) \vee \mu_B(x);$$

- intersection

$$A \cap B \Leftrightarrow \mu_{A\cap B}(x) = \mu_A(x) \wedge \mu_B(x);$$

- complement

$$\bar{A} \Leftrightarrow \mu_{\bar{A}}(x) = 1 - \mu_A(x),$$

where "$\vee$" stands for max and "$\wedge$" stands for min.

The grades for ordinary fuzzy sets are easily proved to satisfy the following properties:

- reflexive law

$$\mu_A \le \mu_A;$$

- antisymmetric law

$$\mu_A \le \mu_B,\ \mu_B \le \mu_A \Rightarrow \mu_A = \mu_B;$$

- transitive law

$$\mu_A \le \mu_B,\ \mu_B \le \mu_C \Rightarrow \mu_A = \mu_C;$$

- idempotent laws

$$\left.\begin{aligned}\mu_A \vee \mu_A &= \mu_A\\ \mu_A \wedge \mu_A &= \mu_A\end{aligned}\right\};$$

- commutative laws

$$\left.\begin{aligned}\mu_A \vee \mu_B &= \mu_B \vee \mu_A\\ \mu_A \wedge \mu_B &= \mu_B \wedge \mu_A\end{aligned}\right\};$$

- associative laws

$$\left.\begin{aligned}(\mu_A \vee \mu_B) \vee \mu_C &= \mu_A \vee (\mu_B \vee \mu_C)\\ (\mu_A \wedge \mu_B) \wedge \mu_C &= \mu_A \wedge (\mu_B \wedge \mu_C)\end{aligned}\right\};$$

- absorption laws

$$\left.\begin{aligned}\mu_A \wedge (\mu_A \vee \mu_B) &= \mu_A\\ \mu_A \vee (\mu_A \wedge \mu_B) &= \mu_A\end{aligned}\right\};$$

- distributive laws

$$\left.\begin{aligned}\mu_A \wedge (\mu_B \vee \mu_C) &= (\mu_A \wedge \mu_B) \vee (\mu_B \wedge \mu_C)\\ \mu_A \vee (\mu_B \wedge \mu_C) &= (\mu_A \vee \mu_B) \wedge (\mu_B \vee \mu_C)\end{aligned}\right\};$$

- involution law

$$\mu_{\bar{\bar{A}}} = \mu_A;$$

- de Morgan's laws

$$\left.\begin{aligned}\overline{\mu_A \vee \mu_B} &= \mu_{\bar{A}} \wedge \mu_{\bar{B}} \\ \overline{\mu_A \wedge \mu_B} &= \mu_{\bar{A}} \vee \mu_{\bar{B}}\end{aligned}\right\};$$

- identity laws

$$\mu_A \vee 1 = 1,\ \mu_A \wedge 0 = 0$$

-failure of complement laws

$$\left.\begin{aligned}\mu_A \vee \mu_{\bar{A}} &\neq 1 \\ \mu_A \wedge \mu_{\bar{A}} &\neq 0\end{aligned}\right\}.$$

From the above properties of grades for fuzzy sets, grades constitute a distributive lattice under $\vee, \wedge, \neg$, but do not form a Boolean lattice because of the failure of complement laws.

The same holds for ordinary fuzzy sets, in the above definition of ordinary fuzzy sets, the grades take the values in the unit interval [0,1].

In reality, however, we often encounter the situation that the grade itself is frequently ill-defined, as in the statement that the grade is "high," "low," "about 0.8," "middle," "not high," or "very low." To explain this fact L. Zadeh (1973-1974) [18] formulated a fuzzy set of type-2 whose grade is a fuzzy set in the interval [0,1] rather than a point in [0,1].

Type-2 fuzzy sets. Not long ago J. Mendel and R. John [5] presented a new definition of type-2 fuzzy sets so that it makes us simply to use and effectively communicate about type-2 fuzzy sets.

A fuzzy set of type-2 A in a set X is the fuzzy set which is characterized by a fuzzy membership function μ_A as follows**:**

$$\mu_A : X \to [0,1]^W, \qquad (1)$$

with the value $\mu_A(x)$ being called a fuzzy grade and being a fuzzy set in [0,1] (or in the subset W of the interval [0,1]).

Suppose that W is a finite set and continuous. Since the grade of fuzzy set of type-2 is a fuzzy set in $W \subseteq [0,1]$, the ordinary fuzzy set is renamed as a fuzzy set of type-1. Now we can define a fuzzy set of type n (n = 1, 2, ...) by the following formula:

$$\mu_A : X \to [0,1]^{W_1}, \ldots^{W_{n-1}}$$

such that $W_1, W_2, ..., W_{n-1}$ are the subsets of the interval [0,1].

Now we will be starting by definitions type-2 fuzzy sets and their corresponding membership functions as follows:

Definition 1. A type-2 fuzzy set, denoted by $\tilde{A}$, is characterized by a type-2 membership function $\mu_{\tilde{A}}(x, v)$ where $x \in X$ and $v \in W_x \subseteq [0,1]$ i.e.,

$$\tilde{A} = \left\{((x, v), \mu_{\tilde{A}}(x, v)) \middle| \forall x \in X, \forall v \in W_x \subseteq [0,1]\right\}, \quad (2)$$

where $0 \le \mu_{\tilde{A}}(x, v) \le 1$ and $\tilde{A}$ can be also expressed as follows:

$$\tilde{A} = \int_{x \in X} \int_{v \in W_x} \mu_{\tilde{A}}(x, v) / (x, v),\ W_x \subseteq [0,1],$$

where $\int\int$ denotes union over all admissible x and v. For discrete universes of discourse $\int$ is replaced by $\sum$.

Definition 2. At each value of x (say $x = x'$), the two dimension plane whose axes are v and $\mu_{\tilde{A}}(x', v)$ is called a vertical segment of $\mu_{\tilde{A}}(x, v)$. A secondary membership function is a vertical segment of $\mu_{\tilde{A}}(x, v)$, it is $\mu_{\tilde{A}}(x = x', v)$ for $x \in X$ and $\forall v \in W_{x'} \subseteq [0,1]$ i.e.,

$$\mu_{\tilde{A}}(x = x', v) \equiv \mu_{\tilde{A}}(x') = \int_{v \in W_{x'}} f_{x'}(v) / v, W_{x'} \subseteq [0,1], \quad (3)$$

such that $0 \le f_{x'}(v) \le 1$.

For the reason that $\forall x' \in X$, by drop the prime notation on $\mu_{\tilde{A}}(x')$, and refer to $\mu_{\tilde{A}}(x)$ as a secondary membership function; it is a type-1 fuzzy set, which we also refer to as a secondary set. In accordance with the concept of secondary sets, a type-2 fuzzy set can be re-interpreted as the union of all secondary sets, i.e., $\tilde{A}$, using (2), can be re-expressed in a vertical-segment approach, as follows:

$$\tilde{A} = \left\{\left(x, \mu_{\tilde{A}}(x)\right) \middle| \forall x \in X\right\}$$

or, as follows:

$$\tilde{A} = \int_{x \in X} \mu_{\tilde{A}}(x) / x = \int_{x \in X} \left[\int_{Wx} f_x(v) / v\right] / x, W_x \subseteq [0,1].$$

Definition 3. The dominion of a secondary membership function is called the primary membership of x. In (3), W_x is the primary membership of x, where $W_x \subseteq [0,1]$ for $\forall x \in X$.

Definition 4. The amplitude of a secondary membership function is called a secondary grade. In (3), $f_x(v)$ is a secondary grade; in (1), $\mu_{\tilde{A}}(x',v')(x' \in X, v' \in W_{x'})$ is a secondary grade.

Suppose that each of the secondary membership functions of a type-2 fuzzy set has only one secondary grade that equals one. A principal membership function is the union of all such points at which this happen; i.e.,

$$\mu_{principal}(x) = \int_{x \in X} v / x ,$$

where $f_x(v) = 1$, and is related with a type-1 fuzzy set.

Definition 5. A type-1 fuzzy set can also be expressed as a type-2 fuzzy set, its type-2 representation is $(1/\mu_{F(x)})/x$ or $1/\mu_{F(x)}, \forall x \in X$, briefly.

The notation $1/\mu_{F(x)}$ means that the secondary membership function has only one value in its domain, namely the primary membership $\mu_{F(x)}$ at which the secondary grade equals 1. If the secondary membership functions of a type-2 fuzzy set are type-1 Gaussian membership functions, then type-2 fuzzy set is Gaussian type-2 set, and if the secondary membership functions are type-1 interval sets, then type-2 fuzzy set is an interval type-2 set.

Assume that for the membership function of type-1, as illustrated in fig. 1. We blur it to the left and to the right, as illustrated in fig. 2, and then is created a membership function of type-2.

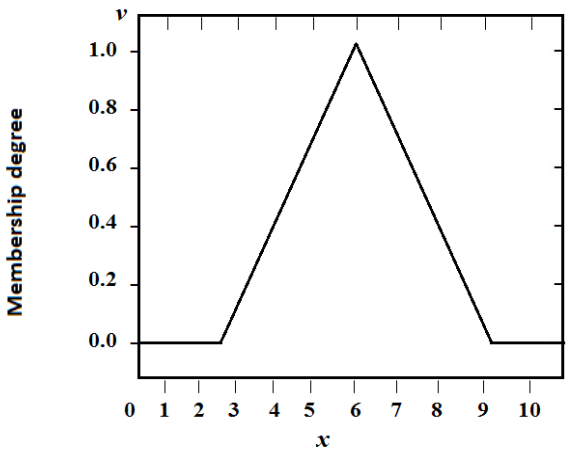


Fig. 1 An example of a type-1 membership function.

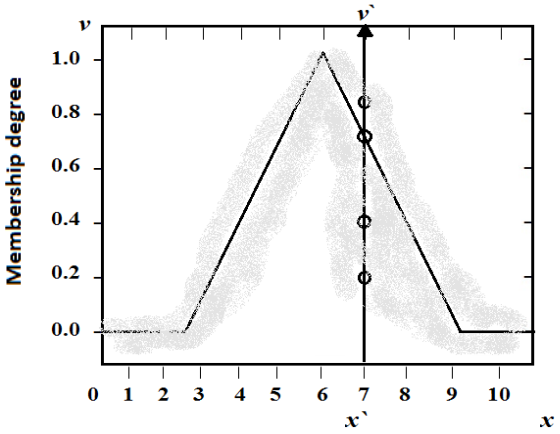


Fig. 2 Blurred type-1 membership function.

In this instance, for a specification the value of x' and the membership function v', we take different values, which are the different weighted and we can assign membership grades to all of those points. Uncertainty is represented by a region, which is called the footprint of uncertainty (FOU), when $\mu_{\tilde{A}}(x,v) = 1, \forall v \in W_x \subseteq [0,1]$ then we have an interval type-2 membership function, as shown in fig. 3. The shaded parts for the footprint of uncertainty in fig. 3 represent an upper membership function (UMF) $\overline{\mu}_{\tilde{A}}(x)$ and a lower membership function (LMF) $\underline{\mu}_{\tilde{A}}(x)$ [13].

A fuzzy logic system described by using at least one of type-2 fuzzy set and type-1 fuzzy logic systems are unable of dealing directly with the rule uncertainties for the reason that they use fuzzy sets of type-1 that are certain in other words, fully described by single numeric values.

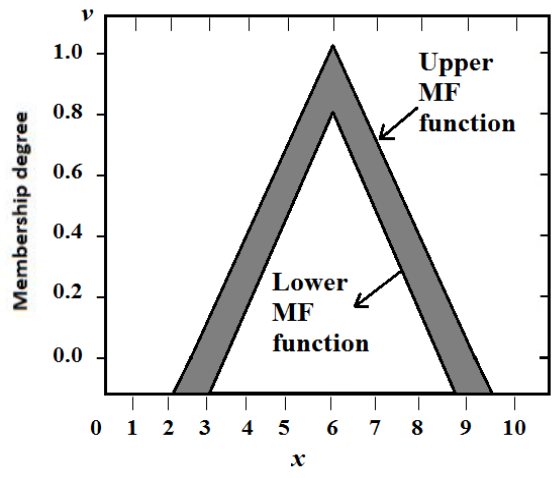


Fig. 3 Interval type-2 membership function

Type-2 fuzzy logic systems are helpful in circumstances where it is difficult to determine an exact numeric membership function, and there are

measurement uncertainties. A type-2 fuzzy logic system is characterized by the IF–THEN rules, where their antecedent or consequent sets are now of type-2. Type-2 fuzzy logic systems can be used when the circumstances are too uncertain to determine exact membership grades such as when the training data is affected by noise.

Conclusions. We have in this paper a brief presentation about the environment of fuzzy type-2, it seems that science moves in progressive ways where one theory is eventually replaced or supplemented by another, and then another. So, from this point of view it was very natural for fuzziness to develop type-1 fuzzy sets as far as possible. First conception of fuzzy sets type 2 was offered by L. Zadeh [2] after it was explored by the group of scientists such as M. Mizumoto and K. Tanaka [6], [7], J. Nieminen [8], D. Dubois and H. Prade [9],[10], M. Gorzalczany [11] and M. Wagenknecht and K. Hartmann [12]. Bypassing those experiences would have been unnatural. Once it was clear what could be done with type-1 fuzzy sets, it was only natural for people to then look at more challenging problems.

The notion of type-2 fuzzy sets leads to many interesting theoretical results. Many of these same results are also found in some form in applications of type-2 fuzzy sets. But some of these results are difficult to ferret out, and we have endeavored to give a precise mathematical treatment of them, using standard mathematical notation. We hope this will be of benefit to both theoreticians and those applying fuzzy set theory. In the mean-time, we will continue our effort to understand the mathematical underpinnings of the various applications.

List of used sources

1. *Zadeh L. A.* Fuzzy logic – computing with words // IEEE Trans. Fuzzy Systems. – 1996. – **4**. – P. 103- 111.

2. *Zadeh L. A.* The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning -1 // Information Sciences. – 1975. – **8**. – P. 199 – 249.

3. *Klir G. J., Folger T. A.* Fuzzy Sets, Uncertainty and Information. – Prentice-Hall: Englewood Cliffs, 1988. – P. 54 – 246.

4. *Klir G. J., Wierman M. J.* Uncertainty-Based Information. – Heidelberg, Germany, Physica-Verlag, 1998. – 169 p.

5. *Mendel J. M., John R. I.* (). Type-2 Fuzzy Sets Made Simple // IEEE Trans. on Fuzzy Systems. – 2002. – **10**.– P. 117 – 127.

6. *Mizumoto M., Tanaka K.* Some properties of fuzzy sets of type-2 // Information and Control. –1976. – **31**. – P. 312 – 340.

7. *Mizumoto M., Tanaka K.* Fuzzy sets of type-2 under algebraic product and algebraic sum // Fuzzy Sets and Systems. – 1981. – **5**. – P. 277 – 290.

8. *Nieminen J.* On the algebraic structure of fuzzy sets of type-2 // Kybernetica. – 1977. – **13**, N 4. – P. 261 – 273.

9. *Dubois D., Prade H.* Operations on fuzzy numbers // Int. J. Systems Science. – 1978. – **9** . – P. 613 – 626.

10. *Dubois D., Prade H.* Operations in a fuzzy-valued logic // Information and Control. – 1979. – **43**. – P. 224 – 240.

11. *Gorzalczany M. B.* A method of inference in approximate reasoning based on interval-valued fuzzy sets // Fuzzy Sets and Systems. – 1987. – **21**, P. 1 – 17.

12. *Wagenknecht M., Hartmann K.* Application of fuzzy sets of type-2 to the solution of fuzzy equation systems // Fuzzy Sets and Systems. – 1988. – **25**. – P. 183 – 190.

13. *Castillo O., Melin P.* Recent Advances in Interval Type-2 Fuzzy Systems // SpringerBriefs in Computational Intelligence. – 2012. –**2**. – P. 7 – 9.

14. *Castillo O., MelinP.* Type-2 Fuzzy Logic: Theory and Applications // Studies in Fuzziness and Soft Computing.– Berlin: Springer-Verlag Heidelberg, 2008. – P. 1-4.

15. *Elamvazuthi I., Vasant P., Webb J.* The Application of Mamdani Fuzzy Model for Auto Zoom Function of a Digital Camera // International Journal of Computer Science and Information Security. – 2009. – **6**, N 3. – P. 1 – 6.

16. *Zadeh L. A.* Fuzzy sets // Information and Control. – 1965. –**8**. – P. 338 – 353.

17. *Mizumoto M., Tanaka K.* Some Properties of Fuzzy Sets of Type 2 // Information and Control. – 1976. – **31**. – P. 312 – 340.

18. *Zadeh L. A.* Fuzzy logic and its application to approximate reasoning // Information Processing. – 1974. –**74**. – P. 591 – 594.

Received 27.11.2013

УДК 517.9

O.A.Shatyrko[1], Stud.,
D.Ya. Khusainov[2], Dr.Sc., Prof.
I.A.Dzhalladova[3] , Dr.Sc., Prof.

Modelling processes of population dynamics

By employing the direct Lyapunov method qualitative analysis of population dynamics models is carry out. Models described in terms of differential equations with quadratic nonlinear and time-delay argument

Key Words: Lyapunov's function, stability, time-delay

[1-2] Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03680, Kyiv, Glushkova av., 4d
E-mail: leksa91@mail.ru, dkh@unicyb.kiev.ua
[3] Kyiv National Economic University, 03680, Kyiv, Peremogy av., 54/1. E-mail: irada-o5@mail.ru

Шатирко О.А[1]., студ.,
Хусаінов Д.Я [2]., д. ф.-м.н., проф.,
Джалладова І.А[3]., д. ф.-м.н., проф.

Моделювання процесів динаміки популяцій

З використанням прямого методу Ляпунова проведено якісний аналіз моделей динаміки популяцій, що описані у вигляді диференціальних рівнянь з квадратичною не лінійністю та запізнюванням

Ключові слова: функція Ляпунова, стійкість, запізнювання

[1-2] Київський національний університет імені Тараса Шевченка,03680, Київ, пр-т Глушкова 4д
E-mail: leksa91@mail.ru, dkh@unicyb.kiev.ua
[3] Київський національний економічний університет,03680, Київ, пр-т Перемоги 54/1
E-mail: irada-05@mail.ru

Статтю представив д.т.н., проф. Гаращенко Ф.Г.

Introduction

The considerable part of mathematical models are described by systems of the ordinary differential equations of the form

$$\dot{x}(t) = K[x(t)]x(t)$$

Here $K[x(t)]$ square matrix, indicating the dependence of the rate of increase from the phase coordinates. If the matrix $K[x(t)]$is linear, then the system can be written in vector-matrix form

$$\dot{x}(t) = [A - X^T(t)B]x(t)$$

In this paper the non-zero equilibrium position of the system, located in the first quadrant are investigated. In the case of asymptotic stability of the matrix representing the linear part of a non-zero equilibrium position is computed guaranteed region of stability of a singular point. As a rule, in models of economy and ecology the factor of delay defined by «puberty time» or «decision-making time» is inherent. Therefore the mathematical models described by systems of the functional-differential equations with delay are more appropriate.

$$\dot{x}(t) = [A - X^T(t-\tau)B]x(t)$$

Research of stability of non-zero equilibrium position is carried out. Apparatus of investigation is chosen the Lyapunov function method with the additional condition of B.S.Razumikhin.

1. Stability by the linear approximation

Let's consider nonlinear system of the differential equations with the allocated linear part

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + f(x(t)),\ t \ge 0,\ x(t) \in R^n. \quad (1.1)$$

nonlinear function $f(x)$ satisfies the condition

$$|f(x)| \le M|x|^{1+\alpha},\ \alpha > 0,\ |x| = \left\{\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right\}^{1/2} \quad (1.2)$$

We assume that the matrix A is asymptotically stable, i.e. all its eigenvalues have negative real parts, $\mathrm{Re}\,\lambda_i(A) < 0$, $i = \overline{1,n}$.

© О.А. Шатирко, Д.Я. Хусаінов, І.А.Джалладова ,2014

Then at any positively certain matrix C Lyapunov's matrix equation

$$A^T H + HA = -C \qquad (1.3)$$

has a unique solution - a positive definite matrix H. We choose as a Lyapunov function for the initial system (1.1) the quadratic form $V(x) = x^T Hx$. Its full derivative owing to system (1.1) has the form

$$\frac{d}{dt}V(x(t)) = [Ax(t) + f(x(t))]^T Hx(t) + x^T(t)H[Ax(t) + f(x(t))] = x^T(t)[A^T H + HA]x(t) + 2x^T(t)Hf(x(t)).$$

Or

$$\frac{d}{dt}V(x(t)) = -x^T(t)Cx(t) + 2x^T(t)Hf(x(t))$$

Considering an inequality (1.2), we obtain

$$\frac{d}{dt}V(x(t)) \le -\lambda_{\min}(C)|x(t)|^2 + 2|H|M|x(t)|^{2+\alpha} = -[\lambda_{\min}(C) - 2|H|M|x(t)|^{\alpha}]x(t)|^2$$

Thus, in area

$$G_0 = \left\{ x \in R^n : |x| < \left[\frac{\lambda_{\min}(C)}{2|H|M} \right]^{1/\alpha} \right\} \qquad (1.4)$$

Total derivative of a quadratic Lyapunov function is negative definite.
We denote

$$G_r = \{x \in R^n : x^T Hx < r^2\}. \qquad (1.5)$$

Then the "guaranteed" region of asymptotic stability of zero solutions of the nonlinear system (1.1) will be

$$G_{r_0} = \max_{r>0}\{G_r : G_r \subset G_0\}. \qquad (1.6)$$

2. Systems with quadratic right-hand side

Consider systems with the nonlinearity of the particular (concrete) type, namely a system with a quadratic right-hand side, written in vector-matrix form [1-3]

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + X^T(t)Bx(t). \qquad (2.1)$$

Here $B = \{B_1, B_2, ..., B_n\}^T$ rectangular $n^2 \times n-$ matrix, consisting of the symmetric square $n \times n-$ matrices B_i, $i = \overline{1,n}$,

$$B_i = \begin{bmatrix} b_{11}^i & b_{12}^i & \dots & b_{1n}^i \\ b_{12}^i & b_{22}^i & \dots & b_{2n}^i \\ . & . & \dots & . \\ b_{1n}^i & b_{2n}^i & \dots & b_{nn}^i \end{bmatrix}, \; i = \overline{1,n},$$

$X^T(t) = \{X_1(t), X_2(t), ..., X_n(t)\}$ rectangular $n \times n^2 -$ matrix consisting of the square $n \times n-$ matrices $X_i(t)$ in which on i-rows stands vectors $x(t)$, other elements are zero, i.e.

$$X_1(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) & x_2(t) & \dots & x_n(t) \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ . & . & \dots & . \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

$$X_2(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ x_1(t) & x_2(t) & \dots & x_n(t) \\ . & . & \dots & . \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \dots,$$

$$X_n(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ . & . & \dots & . \\ x_1(t) & x_2(t) & \dots & x_n(t) \end{bmatrix}$$

Suppose, as before, the matrix A of the linear part is asymptotically stable. Then it follows from the theory of stability by linear approximation, the zero solution of a nonlinear system is also asymptotically stable. If we take as a Lyapunov function quadratic form $V(x) = x^T Hx$, then its total derivative owing the system (2.1) has the form

$$\frac{d}{dt}V(x(t)) = [Ax(t) + X^T(t)Bx(t)]^T Hx(t) + x^T(t)H[Ax(t) + X^T(t)Bx(t)] = x^T(t)[(A^T H + HA) + (B^T X(t)H + HX^T(t)B)]x(t).$$

Or considering that H is the solution of the Lyapunov equation, we obtain

$$\frac{d}{dt}V(x(t)) = -x^T(t)\left[C - \left(B^T X(t)H + HX^T(t)B\right)\right]x(t) \quad . \qquad (2.2)$$

Region of stability is the interior of a surface of level of function of Lyapunov $V(x) = r > 0$ lying inside the area

$$G_0 = \left\{x \in R^n : C - B^T XH - HX^T B > \Theta\right\}$$

where, under the symbol

$$C - B^T XH - HX^T B > \Theta \qquad (2.3)$$

means the positive definiteness of the matrix. We replace the condition (2.3) by more "rough". Because owing to the chosen matrix and vector norms will be implemented

$$|X(t)| = |x(t)|$$

then for the total derivative of the Lyapunov function (2.2) is satisfying

$$\frac{d}{dt}V(x(t)) \le -\left[\lambda_{\min}(C) - 2|H||B||x(t)|\right]x(t)|^2$$

Therefore, the dependence (1.4) takes the form

$$G_0 = \left\{x \in R^n : |x| < \frac{\lambda_{\min}(C)}{2|H||B|}\right\}, \qquad (2.4)$$

And the area of "guaranteed" stability has the form (1.6) $G_{r_0} = \max\limits_{r>0}\{G_r : G_r \subset G_0\}$,

$$G_r = \left\{x \in R^n : x^T Hx < r^2\right\}$$

To determine the area of asymptotic stability, as follows from (2.4) should be placed ellipsoid $x^T Hx = r^2$ inside a sphere of radius $R = \dfrac{\lambda_{\min}(C)}{2\lambda_{\max}(H)|B|}$ and "stretching" $r \to \infty$ up until the ellipse touches the sphere.

The algorithm of calculation of the stability area. Consider the following algorithm to compute a guaranteed area of asymptotic stability of the system (2.1), i.e. determine the value r_0. The algorithm is based on a rotation of the system to a position in which the principal axes of the ellipsoid surface level of Lyapunov function coincide with the coordinate axes. After that calculated the point of tangency of the transformed surface level of Lyapunov function and the sphere inside which the full derivative is negative definite.

Let the matrix C_0 is selected and fixed, and H_0 is solution of the matrix equation of Lyapunov (1.3). Since H_0 is the symmetric positive definite matrix, then there is always improper orthogonal converting U (rotation matrix), which reduces H_0 to the principal axes, i.e. there exists a matrix $U : U^T U = I$, $I -$ identity matrix, such that

$$U^T H_0 U = \Lambda,\ U = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \ldots & u_{1n} \\ u_{21} & u_{22} & \ldots & u_{2n} \\ . & . & \ldots & . \\ u_{n1} & u_{n2} & \ldots & u_{nn} \end{bmatrix},$$

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ . & . & \ldots & . \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{bmatrix},$$

$0 < \lambda_1 \le \lambda_2 \le \ldots \le \lambda_n$ eigenvalues of the matrix H_0. After converting $x = Uy$ matrix $X(t)$ takes form

$$X^T(t) = Y^T(t)U_0,\ \ Y^T(t) = \{Y_1(t), Y_2(t), \ldots, Y_n(t)\},$$

$$U_0 = \begin{bmatrix} U^T & \Theta & \ldots & \Theta \\ \Theta & U^T & \ldots & \Theta \\ . & . & \ldots & . \\ \Theta & \Theta & \ldots & U \end{bmatrix}.$$

And the initial system (2.1) takes the form

$$U\dot{y}(t) = AUy(t) + Y^T(t)U_0 BUy(t). \qquad (2.5)$$

Let introduce the next $n^2 \times n^2$ matrix

$$\overline{U} = \begin{bmatrix} \overline{U}_{11} & \overline{U}_{12} & \ldots & \overline{U}_{1n} \\ \overline{U}_{21} & \overline{U}_{22} & \ldots & \overline{U}_{2n} \\ . & . & \ldots & . \\ \overline{U}_{n1} & \overline{U}_{n2} & \ldots & \overline{U}_{nn} \end{bmatrix}$$

Where

$$\overline{U}_{11}=\begin{bmatrix} u_{11} & 0 & ... & 0 \\ 0 & u_{11} & ... & 0 \\ . & . & ... & . \\ 0 & 0 & ... & u_{11} \end{bmatrix},$$

$$\overline{U}_{12}=\begin{bmatrix} u_{12} & 0 & ... & 0 \\ 0 & u_{12} & ... & 0 \\ . & . & ... & . \\ 0 & 0 & ... & u_{12} \end{bmatrix},$$

$$\overline{U}_{nn}=\begin{bmatrix} u_{nn} & 0 & ... & 0 \\ 0 & u_{nn} & ... & 0 \\ . & . & ... & . \\ 0 & 0 & ... & u_{nn} \end{bmatrix}$$

Then the system (2.5) can be rewritten as

$$\dot{y}(t)=U^T AUy(t)+U^T Y^T(t)U_0\overline{U}By(t)$$

Or, after converting

$$\dot{y}(t)=A_1y(t)+Y^T(t)B_1y(t),\quad A_1=U^T AU,$$

$$B_1=\overline{U}U_0BU. \qquad (2.6)$$

As a result of converting the Lyapunov's matrix equation takes the form

$$A_1^T\Lambda+\Lambda A_1=C_1,\ C_1=U^TC_0U, \qquad (2.7)$$

and the Lyapunov function is a quadratic form set out to the principal axes

$$V(y)=y^T\Lambda y=\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+...+\lambda_ny_n^2$$

After rotations the circle which is the boundary of the area G_0 (2.4) does not change and the point of tangency of the ellipsoid, given to the principal axes, to a circle of radius $R=\dfrac{\lambda_{\min}(C)}{\lambda_{\max}(H)|B|}$ determined by

$$y_1=\pm\frac{\lambda_{\min}(C)}{\lambda_{\max}(H)|B|},\ y_2=0,\ldots,\ y_n=0.$$

Therefore, the ellipsoid that defines the area of stability has the form

$$\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+...+\lambda_ny_n^2=\lambda_1\left(\frac{\lambda_{\min}(C)}{\lambda_{\max}(H)|B|}\right)^2, \qquad (2.8)$$

i.e. $$r_0^2=\lambda_1\left(\frac{\lambda_{\min}(C)}{\lambda_{\max}(H)|B|}\right)^2$$

3. System with time-delay

As a rule in models of economy and ecology is inherent delay factor, determined by "the time of puberty," or "time of decision making." Therefore, the more appropriate mathematical models are described by systems of functional differential equations with delay [4-6]. One of the first mathematical models described by differential equations with constant delay, were the equation of Hutchison and Voltaire [5].

3.1. Verhulst equation with delay. Verhulst equation shows the dynamics of the population increase $x(t)$ with saturation. The limited increase is caused by "internal rivalry." We note the following factor specifying the model of Verhulst. Rivalry generally occurs between the new population $x(t)$ and population $x(t-\tau)$, born with a delay τ. In this case, the dynamics of the population is determined the equation of Hutchison (1948), having the form of a differential equation with delay

$$\frac{dx(t)}{dt}=ax(t)\left(1-\frac{x(t-\tau)}{k}\right). \qquad (3.1)$$

The delay is due to the finite time required to achieve the "time of puberty."

The dynamic system described by equation (3.1) has two the equilibrium position $x(t)\equiv 0$ and $x(t)\equiv k$. It is easy to see that the linear approximation at $x(t)\equiv 0$ gives the equation

$$\dot{x}(t)=ax(t)$$

and indicates the instability of the zero equilibrium position. Let us consider the second point of rest $x(t)\equiv k$

Let linearized the equation

$$\frac{dx(t)}{dt}=f(x(t),x(t-\tau))$$

At the vicinity of the point $x(t)\equiv k$, we will write

$$\frac{dx(t)}{dt} = \left.\frac{\partial f\left(x(t), x(t-\tau)\right)}{\partial x(t)}\right|_{x(t)=x(t-\tau)=k} \times .$$

$$\times\left[x(t)-k\right] + \left.\frac{\partial f\left(x(t), x(t-\tau)\right)}{\partial x(t-\tau)}\right|_{x(t)=x(t-\tau)=k} \left[x(t-\tau)-k\right]$$

After substituting the appropriate values we obtain

$$\frac{dx(t)}{dt} = -a\left[x(t-\tau)-k\right]$$

And in a vicinity of a special point $x(t)\equiv k$ the equation of the linear approximation has the form

$$\frac{dy(t)}{dt} = -ay(t-\tau),\ y(t) = x(t)-k\ . \quad (3.2)$$

The characteristic equation has the form

$$\lambda + ae^{\lambda\tau} = 0$$

And, as from consequence ,

$$0 < a\tau < \frac{\pi}{2}$$

The equilibrium position $x(t)\equiv k$ will be locally asymptotic steady.

Estimate the stability area in phase space of the equilibrium position $x(t)\equiv k$ of initial nonlinear equation (3.1). Carry over the conversion

$$y(t) + k = x(t)$$

point $x(t)\equiv k$ to the beginning of coordinates. We obtain the equation

$$\frac{dy(t)}{dt} = -\frac{a}{k}\left[y(t)+k\right]y(t-\tau). \quad (3.3)$$

Investigation of the stability and assessment of the stability area in phase space will be carried out using a quadratic Lyapunov function $V(y) = \frac{1}{2}y^2$. Geometrically, the second Lyapunov method is to find a positive definite function, the full derivative owing the equation is negative definite function. As we consider the equation with delay, the the full derivative is a functional, containing a phase variable in the previous time moment. In its calculation will be used B.S.Razumikhin condition [8]. This condition means geometrically that the full derivative is calculated by solving approach inside of the surface level of Lyapunov function. Regard to the function $V(y) = \frac{1}{2}y^2$ has the form

$$\frac{1}{2}y^2(t-\tau) = V\left(y(t-\tau)\right) < V\left(y(t)\right) = \frac{1}{2}y^2(t)$$

And the derivative is calculated under the condition

$$|y(t-\tau)| < |y(t)|. \quad (3.4)$$

We calculate the full derivative of Lyapunov function by equation (3.3)

$$\frac{d}{dt}V\left(y(t)\right) = -\frac{a}{k}y(t)\left[y(t)+k\right]y(t-\tau) =$$

$$-\frac{a}{k}y(t)\left[y(t)+k\right]y(t) -$$

$$\frac{a}{k}y(t)\left[y(t)+k\right]\left[y(t-\tau)-y(t)\right].$$

It follows that

$$\frac{d}{dt}V\left(y(t)\right) \le -a\left[1-\frac{1}{k}|y(t)|\right]|y(t)|^2 +$$

$$+\frac{a}{k}|y(t)|\left[|y(t)|+k\right]|y(t)-y(t-\tau)|$$

We estimate the difference of the phase coordinates with delay and without it. We rewrite (3.3) in the form

$$y(t) = y(t-\tau) - \frac{a}{k}\int_{t-\tau}^{t}\left[y(s)+k\right]y(s-\tau)ds$$

Using (3.4), we obtain

$$|y(t)-y(t-\tau)| < \frac{a}{k}\int_{t-\tau}^{t}\left[|y(s)|+k\right]|y(s-\tau)|ds \le$$

$$\le \frac{a}{k}\left[|y(t)|+k\right]|y(t)|\tau\ .$$

And for full derivative of Lyapunov function will take place

$$\frac{d}{dt}V\left(y(t)\right) < -a\left[1-\frac{1}{k}|y(t)|\right]|y(t)|^2 +$$

$$+\left(\frac{a}{k}\right)^2\left[\left|y(t)\right|+k\right]^2\left|y(t)\right|^2\tau \qquad (3.5)$$

Consider the sphere $U_\delta(0)$, which radius is $\Delta = k\xi$, $0<\xi<1$. For full derivative (3.5) with solutions $y(t)$ that are in this sphere will take place the following

$$\frac{d}{dt}V(y(t)) < -a(1-\xi)\left|y(t)\right|^2 +$$

$$+\left(\frac{a}{k}\right)^2 k^2(1+\xi)^2\left|y(t)\right|^2\tau \qquad (3.6)$$

And when $\tau<\tau_0$, where

$$\tau_0 = \frac{1-\xi}{a(1+\xi)^2}, \qquad (3.7)$$

the full derivative of Lyapunov function has the form

$$\frac{d}{dt}V(y(t)) < \frac{\tau_0-\tau}{a^2(1+\xi)^2}\left|y(t)\right|^2. \qquad (3.8)$$

And it will be negative definite function. Therefore the zero solution will be asymptotic stable.

It should be noted that under the integral is a function $y(s-\tau)$ and the integral is taken on $s\in[t-\tau,t]$. Therefore, the function $y(s-\tau)$ defined on the interval $t-2\tau\le s-\tau\le t-\tau$ and the full derivative of Lyapunov function should be taken for the time moment $t>\tau$. We estimate the maximum value $y(t)$, $-\tau\le t\le\tau$ and we choose the initial conditions such way that at $-\tau\le t\le\tau$ solution would not came out of sphere $U_\delta(0)$ of the radius $\Delta = k\xi$, $0<\xi<1$.

We will write (3.3) such as

$$y(t) = y(0) - \int_0^t \frac{a}{k}\left[y(s)+k\right]y(s-\tau)ds$$

Let is $\left|y(t)\right|<\delta$, $-\tau\le t\le 0$. Then

$$\left|y(t)\right| \le (1+a)\delta + \frac{a\delta}{k}\int_0^t \left|y(s)\right|ds$$

And based on the Bellman lemma, we obtain

$$\left|y(t)\right| \le (1+a)\delta e^{\frac{a\delta}{k}t}$$

Thus, if the $\left|y(t)\right|<\delta$ at $-\tau\le t\le 0$, then at $-\tau\le t\le\tau$ will be $\left|y(t)\right|\le(1+a)\delta e^{\frac{a\delta}{k}\tau}$ .And for at $-\tau\le t\le\tau$ the solution $y(t)$ does not came out from the sphere of radius k enough to put

$$(1+a)\delta e^{\frac{a\delta}{k}t} \le k, \qquad (3.9)$$

i.e. $$\delta e^{\frac{a\delta}{k}t} \le \frac{k}{1+a}$$

Thus, the "guaranteed" area of asymptotic stability of zero solution is a sphere

$$U_\delta(0) = \{y : |y|<\delta\},\ \delta e^{\frac{a\delta}{k}t} \le \frac{k}{1+a}. \qquad (3.10)$$

References

1. *Volterra V.,* The mathematical theory of the struggle for existence. – M., 1976.–288 p. (in Russian)

2. *Smith J.,* Models in Ecology. – M., 1976. – 180 p. (in Russian)

3. *Shatyrko O.A., Dzhalladova I.A., Khusainov D.Ya.,* Estimation of the stability area of the system with a quadratic differential right side // Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series: Physics and mathematics, 2011. - p.227-232 (in Ukrainian)

4. *Gopalsamy K,.* Stability and Oscillations in Delay Differential Equations of Population Dynamics - Kluwer Academic Publishers. – Dordrecht/Boston/London. – 1992. – 514 p.

5. *Hale J.* Theory of functional differential equations. – M., 1984. – 448 p. (in Russian)

6. *El'sgol'ts L.E., Norkin S.B.,* Introduction to the theory of differential equations with deviating argument. – M.: Science, 1970. – 240 p. (in Russian)

7. *Khusainov D.Ya., Shatyrko A.V.,* Lyapunov function method in investigation of stability of functional-differential systems. - Kiev, Kiev University Publishing, 1997. - 236 p. (in Russian)

8. *Demidovich B.P.,* Lectures of the mathematical theory of stability motion. – M.: Science, 1967. – 472 p. (in Russian)

Надійшла до редколегії 16.12.2013

УДК 517.929

A.S. Sirenko[1], P.G.

An algorithm for finding a common Lyapunov function of two linear difference systems

In the present paper offers sufficient conditions and an algorithm for finding a common Lyapunov function for linear time-invariant differential systems. Imposed by a few examples

Key Words: linear difference systems, the hybrid system, the function of demand Lyapunov quadratic Lyapunov function, the difference matrix Lyapunov equation

[1]Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03680, Kyiv, Glushkova av., 4d, e-mail: sandrew@online.ua

Сіренко[1] А.С., асп.

Про один алгоритм знаходження єдиної функції Ляпунова двох лінійних різницевих систем

У роботі пропонуються достатні умови і алгоритм знаходження єдиної функції Ляпунова для лінійних стаціонарних різницевих систем. Наведено кілька прикладів

Ключові слова: лінійні різницеві системи, гібридна система, функція Ляпунова, квадратична функція Ляпунова, різницеві матричні рівняння Ляпунова

[1]Київський національний університет імені Тараса Шевченка,03680, м. Київ, пр-т Глушкова 4д, e-mail: sandrew@online.ua

Статтю представив д.ф.-м.н, проф. Хусаїнов Денис Як'євич

Introduction

The study of dynamical systems described by equations of various kinds, stability problems often depend on the switching point. Switches can be specified as time intervals, and also like algebraic conditions toiletries phase coordinate certain areas. Quite versatile method for researching the stability of systems of various kinds is the second Lyapunov method [1,2]. If the dynamical system defined by a set of various subsystems, then by the choice of law to switch from two unstable systems can make one asymptotically stable system and vice versa, two asymptotically stable one unstable [3].Problems of investigating the stability of hybrid systems was researched by many authors [4-6]. One of the central problems of researching the stability of hybrid systems is the problem of the existence of a common Lyapunov function [7,8]. In work [8] we obtain necessary and sufficient conditions for the existence of a common Lyapunov function for linear differential systems in the plane.

1.Linear difference systems of general form

Let the hybrid system consists of two asymptotically stable linear difference systems

$$x(k+1)=A_1x(k),\ x(k+1)=A_2x(k),$$

$$k=0,1,2,... \qquad (1.1)$$

As the matrix A_1, A_2 asymptotically stable, i.e. $\|A_1\|<1$, $\|A_2\|<1$, where $\|A\|$ is understood like the sign of the spectral norm, i.e. $\|A\|=\sqrt{\lambda_{\max}(A^TA)}$, $\lambda_{\max}(\bullet)$, $\lambda_{\min}(\bullet)$ extreme eigenvalues of symmetric matrices, then for arbitrary positive definite matrix C_1 and C_2 difference matrix Lyapunov equation

$$A_1^THA_1 - H = -C_1,\ A_2^THA_2 - H = -C_2 \qquad (1.2)$$

have unique solutions - positive definite matrices H_1 and H_2 [1,9]. And for each of the systems (1.1) has its own quadratic Lyapunov function $V_1(x)=x^TH_1x$ и $V_2(x)=x^TH_2x$. Let's give sufficient conditions for the existence and an algorithm for finding the "unified" for both of the systems (1.1) quadratic Lyapunov function.

In work [10] was shown that the space of symmetric positive definite matrices forms a convex cone K_0 with center at the origin. The set of positive definite matrices, which are solutions of the Lyapunov equation is a convex cone K_1, being inside the cone K_0, i.e. $K_1\subset K_0\subset R^N$, $N=\frac{1}{2}n(n+1)$. Thus, the Lyapunov functions $V_1(x)=x^TH_1x$ and $V_2(x)=x^TH_2x$ systems (1.1) correspond to the

© A. S. Sirenko, 2014

cones K_1 and K_2. And the existence of a common Lyapunov function implies the existence of a non-empty intersection and cones K_1 and K_2.

Take in cone K_1 point (matrix) H_1 and in cone K_2 w take point (matrix) H_2, and join them by a line segment $H_\alpha = \alpha H_1 + (1-\alpha)H_2$, $0 \le \alpha \le 1$. Find the parameter α and the conditions under which the matrix will be at the intersection of cones K_1 and K_2 i.e. Lyapunov function is common to both systems.

Theorem 1. Let A_1, A_2 two asymptotically stable matrix, i.e. $\|A_1\| < 1$, $\|A_2\| < 1$, C_1, C_2 fixed, positive definite matrix, H_1 and H_2 solutions of the corresponding matrix Lyapunov equations (1.2).

1. If matrices $C_{12} = H_2 - A_1^T H_2 A_1$ and $C_{21} = H_1 - A_2^T H_1 A_2$ are positive definite, then for an arbitrary $0 < \alpha < 1$ quadratic function $V_\alpha(x) = x^T H_\alpha x$, $H_\alpha = \alpha H_1 + (1-\alpha)H_2$ will be a Lyapunov function for both systems (1.1).

2. Let $C_{12} = H_2 - A_1^T H_2 A_1$ is a positive definite matrix, and the matrix $C_{21} = H_1 - A_2^T H_1 A_2$ is not positive definite. Then for

$$0 \le \alpha < \frac{\lambda_{\min}(C_2)}{\lambda_{\min}(C_2) + \|C_{21}\|} \qquad (1.5)$$

quadratic function $V_\alpha(x) = x^T H_\alpha x$, $H_\alpha = \alpha H_1 + (1-\alpha)H_2$ will be a Lyapunov function for both systems (1.1).

3.Let $C_{12} = H_2 - A_1^T H_2 A_1$ is not positive definite matrix, and matrix $C_{21} = H_1 - A_2^T H_1 A_2$ is positive definite. Then for

$$\frac{|C_{12}|}{\lambda_{\min}(C_1) + \|C_{12}\|} < \alpha \le 1 \qquad (1.6)$$

quadratic function $V_\alpha(x) = x^T H_\alpha x$, $H_\alpha = \alpha H_1 + (1-\alpha)H_2$ will be a Lyapunov function for both systems (1.1) and (1.2).

4. If none of the matrices $C_{12} = H_2 - A_1^T H_2 A_1$, $C_{21} = H_1 - A_2^T H_2 A_2$ are not positive definite matrices, but condition is satisfied

$$\frac{|C_{12}|}{\lambda_{\min}(C_1) + \|C_{12}\|} < \frac{\lambda_{\min}(C_2)}{\lambda_{\min}(C_2) + \|C_{21}\|}$$

then for an arbitrary

$$\frac{|C_{12}|}{\lambda_{\min}(C_1) + \|C_{12}\|} < \alpha < \frac{\lambda_{\min}(C_2)}{\lambda_{\min}(C_2) + \|C_{21}\|} \qquad (1.7)$$

quadratic function $V_\alpha(x) = x^T H_\alpha x$, $H_\alpha = \alpha H_1 + (1-\alpha)H_2$ will be a Lyapunov function for both systems (1.1) and (1.2).

Proof. As matrices H_1 and H_2 positive definite, then for any $0 < \alpha < 1$ matrix $H_\alpha = \alpha H_1 + (1-\alpha)H_2$ also will be positive definite. That's why $V_\alpha(x) = x^T H_\alpha x$ will be positive definite quadratic form. Let's compute the first difference of a function $V_\alpha(x) = x^T H_\alpha x$ along solutions of each of the systems (1.1).

$$\Delta V_\alpha(x(k))\big|_{(1)} = V_\alpha(x(k+1)) - V_\alpha(x(k)) =$$

$$= \alpha x^T(k)\left[A_1^T H_1 A_1 - H_1\right]x(k) +$$

$$+ (1-\alpha)x^T(k)\left[A_1 H_2 A_1 - H_2\right]x(k) =$$

$$= -\alpha x^T(k) C_1 x(k) - (1-\alpha)x^T(k) C_{12} x(k).$$

$$\Delta V_\alpha(x(k))\big|_{(2)} = V_\alpha(x(k+1)) - V_\alpha(x(k)) =$$

$$= \alpha x^T(k)\left[A_2^T H_1 A_2 - H_1\right]x(k) +$$

$$+ (1-\alpha)x^T(k)\left[A_2^T H_2 A_2 - H_2\right]x(k) =$$

$$= -\alpha x^T(k) C_{21} x(k) - (1-\alpha)x^T(k) C_2 x(k).$$

1. Let's suppose that the first condition is satisfied, i.e. matrices $C_{12} = H_2 - A_1^T H_2 A_1$, $C_{21} = H_1 - A_2^T H_2 A_2$ and we have H_1 and H_2 are positive definite matrices. Then for any $0 \le \alpha \le 1$ sum of matrices $\alpha_1 C_1 + (1-\alpha)C_{12}$ and $\alpha C_{21} + (1-\alpha)C_2$ are also positive definite, and the first difference for each of the systems will be negatively defined. Thus, an arbitrary value $0 \le \alpha \le 1$ function $V_\alpha(x)$ will be a common Lyapunov function for the two systems.

2. Let's suppose that the second condition is satisfied. Then for the first differences of each of the systems (1.1) is satisfied

$$\Delta V_\alpha(x(k))\big|_{(1)} = -\alpha x^T(k)C_1x(k) - (1-\alpha)x^T(k)C_{12}x(k) = \\ = x^T(k)\left[\alpha C_1 + (1-\alpha)C_{12}\right]x(k),$$

$$\Delta V_\alpha(x(k))\big|_{(2)} \le \alpha\|C_{21}\|\|x(k)\|^2 - (1-\alpha)\lambda_{\min}(C_2)\|x(k)\|^2$$

And if the inequality will be performed

$$\alpha\|C_{21}\| - (1-\alpha)\lambda_{\min}(C_2) < 0,$$

e.i.

$$0 \le \alpha < \frac{\lambda_{\min}(C_2)}{\lambda_{\min}(C_2) + \|C_{21}\|},$$

then complete the first difference function $V_\alpha(x)$ for both systems will be negative definite.

3.Let's suppose that the third condition is satisfied. Then for the first differences of each of the systems (1.1) is satisfied

$$\frac{d}{dt}V_\alpha(x(k))\Big|_{(1)} \le -\alpha\lambda_{\min}(C_1)\|x(k)\|^2 + (1-\alpha)\|C_{12}\|\|x(k)\|^2,$$

$$\frac{d}{dt}V_\alpha(x(k))\Big|_{(2)} = -\alpha x^T(k)C_{21}x(k) - (1-\alpha)x^T(k)C_2x(k) = \\ = -x^T(k)\left[\alpha C_{21} + (1-\alpha)C_2\right]x(k)$$

And if the inequality will be performed

$$\alpha\lambda_{\min}(C_1) + (1-\alpha)\left|A_1^TH_2 + H_2A_1\right| < 0,$$

e.i.

$$\frac{\|C_{12}\|}{\lambda_{\min}(C_1) + \|C_{12}\|} < \alpha \le 1,$$

then the first difference of the function $V_\alpha(x)$ for both systems will be negative definite.

4.Let's suppose that the fours condition is satisfied. Then for the total derivatives of each of the systems (1.1) will be satisfied

$$\frac{d}{dt}V_\alpha(x(k))\Big|_{(1)} \le -\alpha\lambda_{\min}(C_1)\|x(k)\|^2 + (1-\alpha)\|C_{12}\|\|x(k)\|^2,$$

$$\frac{d}{dt}V_\alpha(x)\Big|_{(2)} \le \alpha\|C_{21}\|\|x(k)\|^2 - (1-\alpha)\lambda_{\min}(C_2)\|x(k)\|^2.$$

And if both inequality will be performed

$$\alpha\lambda_{\min}(C_1) + (1-\alpha)\|C_{12}\| < 0,\ \alpha\|C_{21}\| - (1-\alpha)\lambda_{\min}(C_2) < 0,$$

e.i.

$$\frac{\|C_{12}\|}{\lambda_{\min}(C_1) + \|C_{12}\|} < \alpha < \frac{\lambda_{\min}(C_2)}{\lambda_{\min}(C_2) + \|C_{21}\|},$$

then the first difference of the function $V_\alpha(x)$ for both systems will be negative definite.

Example 1.1.

Let's consider a system with matrix $A_1 = \begin{bmatrix} 1/7 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{bmatrix}$. We put $C_1 = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$ and when we solve the Lyapunov matrix equation, we obtain $H_1 = \begin{bmatrix} 3{,}1 & 0 \\ 0 & 5{,}6 \end{bmatrix}$.

2.Let's consider a system with matrix $A_2 = \begin{bmatrix} 1/4 & 1 \\ 0 & 1/5 \end{bmatrix}$. We put $C_2 = \begin{bmatrix} 11 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$ and when we solve the Lyapunov matrix equation, we obtain $H_2 = \begin{bmatrix} 22{,}8 & 1{,}9 \\ 1{,}9 & 9{,}4 \end{bmatrix}$.

Let's take a quadratic form as

$$V_\alpha(x,y) = \alpha x^TH_1x + (1-\alpha)x^TH_2x = \\ = x^T(\alpha H_1 + (1-\alpha)H_2)x,$$

e.i.

$$H_\alpha = \alpha\begin{bmatrix} 3{,}1 & 0 \\ 0 & 5{,}6 \end{bmatrix} + (1-\alpha)\begin{bmatrix} 22{,}8 & 1{,}9 \\ 1{,}9 & 9{,}4 \end{bmatrix}.$$

Then the Lyapunov matrix equation with matrix A_1 has the form

$$H_\alpha - A_1^TH_\alpha A_1 = \alpha\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} + (1-\alpha)\begin{bmatrix} 22{,}3 & 1{,}9 \\ 1{,}9 & 8{,}3 \end{bmatrix}$$

It is easy to see that the matrix $C_{12} = \begin{bmatrix} 22{,}3 & 1{,}9 \\ 1{,}9 & 8{,}3 \end{bmatrix}$ is positive definite. Let's consider the Lyapunov matrix equation with matrix A_2. It has the form

$$H_\alpha - A_2^TH_\alpha A_2 = \alpha\begin{bmatrix} 2{,}9 & -0{,}8 \\ -0{,}8 & 2{,}3 \end{bmatrix} + (1-\alpha)\begin{bmatrix} 11 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}.$$

Matrix $C_{21}=\begin{bmatrix} 2,9 & -0,8 \\ -0,8 & 2,3 \end{bmatrix}$ is positive definite. And, as the first condition of Theorem 1, the quadratic form $V_\alpha(x,y)$ is a single Lyapunov function for systems with matrices A_1 and A_2 while $0<\alpha<1$.

Example 1.2.

1.Let's consider a system with matrix $A_1=\begin{bmatrix} 0,5 & 0 \\ 1 & 0,5 \end{bmatrix}$. We put $C_1=\begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$ and when we solve the Lyapunov matrix equation, we obtain $H_1=\begin{bmatrix} 9 & 6 \\ 6 & 31 \end{bmatrix}$.

2.Let's consider a system with matrix $A_2=\begin{bmatrix} 0,5 & 1 \\ 0 & 0,5 \end{bmatrix}$ .We put $C_2=\begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}$ and when we solve the Lyapunov matrix equation, we obtain $H_2=\begin{bmatrix} 43 & 9 \\ 9 & 13 \end{bmatrix}$.

Let's take a quadratic form as

$$V_\alpha(x,y)=\alpha x^T H_1 x+(1-\alpha)x^T H_2 x=$$
$$=x^T(\alpha H_1+(1-\alpha)H_2)x,$$

e.i.

$$H_\alpha=\alpha\begin{bmatrix} 9 & 6 \\ 6 & 31 \end{bmatrix}+(1-\alpha)\begin{bmatrix} 43 & 9 \\ 9 & 13 \end{bmatrix}.$$

Then the Lyapunov matrix equation with matrix A_1 has the form

$$H_\alpha-A_1^T H_\alpha A_1=\alpha\begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}+(1-\alpha)\begin{bmatrix} 32 & -15 \\ -15 & -42 \end{bmatrix}$$

It is easy to see that the matrix $C_{12}=\begin{bmatrix} 32 & -15 \\ -15 & -42 \end{bmatrix}$ is not positive definite.

Let's consider the Lyapunov matrix equation with matrix A_2. It has the form

$$H_\alpha-A_2^T H_\alpha A_2=\alpha\begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}+(1-\alpha)\begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}.$$

Matrix $C_{21}=\begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$ is positive definite. And, as the third condition of Theorem 1, the quadratic form $V_\alpha(x,y)$ is a single Lyapunov function for systems with matrices A_1 and A_2 while

$$\frac{\|C_{12}\|}{\lambda_{\min}(C_1)+\|C_{12}\|}<\alpha<1.$$

where $\|C_{12}\|=\sqrt{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|^2}=57$ and $\lambda_{\min}(C_1)=7$ e.i.: $0,89<\alpha<1$.

Example 1.3.

1. Let's consider a system with matrix $A_1=\begin{bmatrix} 1/7 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{bmatrix}$. We put $C_1=\begin{bmatrix} 0,5 & 0 \\ 0 & 0,5 \end{bmatrix}$ and when we solve the Lyapunov matrix equation, we obtain $H_1=\begin{bmatrix} 0,5 & 0 \\ 0 & 0,6 \end{bmatrix}$.

2.Let's consider a system with matrix $A_2=\begin{bmatrix} 1/4 & 1 \\ 0 & 1/5 \end{bmatrix}$ .We put $C_2=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ and when we solve the Lyapunov matrix equation, we obtain $H_2=\begin{bmatrix} 2,3 & 0,2 \\ 0,2 & 1,04 \end{bmatrix}$.

Let's take a quadratic form as

$$V_\alpha(x,y)=\alpha x^T H_1 x+(1-\alpha)x^T H_2 x=$$
$$=x^T(\alpha H_1+(1-\alpha)H_2)x,$$

e.i.

$$H_\alpha=\alpha\begin{bmatrix} 0,5 & 0 \\ 0 & 0,6 \end{bmatrix}+(1-\alpha)\begin{bmatrix} 2,3 & 0,2 \\ 0,2 & 1,04 \end{bmatrix}.$$

Then the Lyapunov matrix equation with matrix A_1 has the form

$$H_\alpha-A_1^T H_\alpha A_1=\alpha\begin{bmatrix} 0,5 & 0 \\ 0 & 0,5 \end{bmatrix}+(1-\alpha)\begin{bmatrix} 2,3 & 0,2 \\ 0,2 & 0,9 \end{bmatrix}$$

It is easy to see that the matrix $C_{12}=\begin{bmatrix} 2,3 & 0,2 \\ 0,2 & 0,9 \end{bmatrix}$ positive definite.

Let's consider the Lyapunov matrix equation with matrix A_2. It has the form

$$H_\alpha - A_2^T H_\alpha A_2 = \alpha \begin{bmatrix} 0,5 & -0,13 \\ -0,13 & 0,03 \end{bmatrix} + (1-\alpha)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

.

Matrix $C_{21} = \begin{bmatrix} 0,5 & -0,13 \\ -0,13 & 0,03 \end{bmatrix}$ is not positive definite. And, as the second condition of Theorem 1, the quadratic form $V_\alpha(x,y)$ is a single Lyapunov function for systems with matrices A_1 and A_2 while

$$0 < \alpha < \frac{\lambda_{\min}(C_2)}{\lambda_{\min}(C_2) + \|C_{21}\|}.$$

where $\|C_{21}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|^2} = 0,51$ and $\lambda_{\min}(C_2) = 1$ e.i.: $0 < \alpha < 0,66$.

2. Diagonal form system

Let's consider a diagonal form system

$$x_i(k+1) = \lambda_i x_i(k),\ |\lambda_i| < 1,\ i = \overline{1,n}. \quad (2.1)$$

2.1. It is obvious that any quadratic function of the form

$$V(x) = \sum_{i=1}^{n} h_{ii} x_i^2,\ h_{ii} > 0,\ i = \overline{1,n}$$

will be a Lyapunov function for systems of this kind. Indeed, its first difference in strength of the system has a form

$$\Delta V(x(k)) = \sum_{i=1}^{n} h_{ii} x_i^2(k+1) - \sum_{i=1}^{n} h_{ii} x_i^2(k) = -\sum_{i=1}^{n} h_{ii}(1-\lambda_i^2) x_i^2(k).$$

And, given the conditions (2.1), is negative definite quadratic form.

2.2. Let's show that the general form of a quadratic function

$$V(x) = \sum_{i,j=1}^{n} h_{ij} x_i x_j \quad (2.2)$$

in the presence of non-zero elements non-diagonal elements cannot be always a single function systems (2.1).

Indeed, as follows from the Hurwitz criterion [9], the conditions for positive definiteness of the function (2.2) has the form

$$h_{ii} > 0,\ \Delta_i(H) = \begin{vmatrix} h_{11} & h_{12} & \dots & h_{1i} \\ h_{12} & h_{22} & \dots & h_{2i} \\ . & . & \dots & . \\ h_{1i} & h_{2i} & \dots & h_{ii} \end{vmatrix} > 0,\ i = \overline{1,n}, \quad (2.3)$$

The first difference of the function (2.2) by virtue of the diagonal system (2.1) has the form

$$\Delta V(x(k)) = \sum_{i,j=1}^{n} h_{ij} x_i(k+1) x_j(k+1) - \sum_{i,j=1}^{n} h_{ij} x_i(k) x_j(k) =$$

$$= -\sum_{i,j=1}^{n} h_{ij}(1-\lambda_i\lambda_j) x_i(k) x_j(k) = -x^T(k) C x(k),$$

$$C = \begin{bmatrix} (1-\lambda_1^2)h_{11} & (1-\lambda_1\lambda_2)h_{12} & \dots & (1-\lambda_1\lambda_n)h_{1n} \\ (1-\lambda_2\lambda_1)h_{12} & (1-\lambda_2^2)h_{22} & \dots & (1-\lambda_2\lambda_n)h_{2n} \\ . & . & \dots & . \\ (1-\lambda_n\lambda_1)h_{1n} & (1-\lambda_n\lambda_2)h_{2n} & \dots & (1-\lambda_n^2)h_{nn} \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

As follows from the Sylvester criterion, the conditions of positive definiteness of the matrix C are

1) $(1-\lambda_i^2)h_{ii} > 0,\ i = \overline{1,n}$,

2) $\Delta_i(C) = \begin{vmatrix} (1-\lambda_1^2)h_{11} & (1-\lambda_1\lambda_2)h_{12} & \dots & (1-\lambda_1\lambda_n)h_{1i} \\ (1-\lambda_2\lambda_1)h_{12} & (1-\lambda_2^2)h_{22} & \dots & (1-\lambda_2\lambda_n)h_{2i} \\ . & . & \dots & . \\ (1-\lambda_n\lambda_1)h_{1i} & (1-\lambda_n\lambda_2)h_{2i} & \dots & (1-\lambda_i^2)h_{ii} \end{vmatrix} > 0,$

$i = \overline{2,n}$.

The first condition is always satisfied. Let's consider the second condition. Let λ_1 set point. Define how may differ from the value of λ_1 is expected to systems (2.1) there was a single Lyapunov function. Define how may differ λ_1 from value of λ_2 to systems (2.1) there was a single Lyapunov function. The second condition has the form

$$\Delta_2 = (1-\lambda_1^2)(1-\lambda_2^2)h_{11}h_{22} - (1-\lambda_1\lambda_2)^2 h_{12}^2 > 0.$$

Rewrite it in the form of a quadratic inequality

$$\left[(1-\lambda_1^2)h_{11}h_{22} + \lambda_1^2 h_{12}^2\right]\lambda_2^2 + 2\lambda_1 h_{12}^2 \lambda_2 + \left[(1-\lambda_1^2)h_{11}h_{22} - h_{12}^2\right] > 0 \quad (2.5)$$

The roots of the quadratic equation (2.5) have the form

$$\lambda_2^{1,2} = \frac{1}{\lambda_1^2\left(h_{11}h_{22}-h_{12}^2\right)-h_{11}h_{22}}\left\{-\lambda_1 h_{12}^2 \pm \right.$$
$$\left. \pm\sqrt{\left(\lambda_1 h_{12}^2\right)^2-\left[\left(1-\lambda_1^2\right)h_{11}h_{22}+\lambda_1^2 h_{12}^2\right]\left[\left(1-\lambda_1^2\right)h_{11}h_{22}-h_{12}^2\right]}\right\}$$

Therefore, the quadratic equation has real positive roots. And inequality (2.5) holds for

$$\lambda_2^2 < \lambda_2 < \lambda_2^1,$$

$$\lambda_2^1 = \lambda_0\left\{\frac{2h_{11}h_{22}-h_{12}^2}{h_{12}^2}+\sqrt{\left(\frac{2h_{11}h_{22}-h_{12}^2}{h_{12}^2}\right)^2-1}\right\},$$

$$\lambda_2^1 = \lambda_0\left\{\frac{2h_{11}h_{22}-h_{12}^2}{h_{12}^2}-\sqrt{\left(\frac{2h_{11}h_{22}-h_{12}^2}{h_{12}^2}\right)^2-1}\right\}.$$

And because

$$\frac{2h_{11}h_{22}-h_{12}^2}{h_{12}^2} > 1,$$

then the existence of a common Lyapunov function of the form (2.2), the ratio of "the admissibility of the first two eigenvalues" for the existence of a common Lyapunov function has the form

$$\lambda_0\left\{\frac{2h_{11}h_{22}-h_{12}^2}{h_{12}^2}-\sqrt{\left(\frac{2h_{11}h_{22}-h_{12}^2}{h_{12}^2}\right)^2-1}\right\} < \lambda_2 <$$
$$< \lambda_0\left\{\frac{2h_{11}h_{22}-h_{12}^2}{h_{12}^2}+\sqrt{\left(\frac{2h_{11}h_{22}-h_{12}^2}{h_{12}^2}\right)^2-1}\right\}.$$

The rest of ratio can be calculated in the same way. However, due to computational constraints (solution of equations of higher degrees) is not possible.

References:

1. *Barbashin E.A.* Lyapunov function. – Moscow: Nauka, 1970. – 240 p. (in Russian).

2. *Demidovich B. P.* Lectures on the mathematical theory of stability. - Moscow: Nauka, 1967. - 472 p. (in Russian).

3. *Emelyanov S.V., Utkin V.I., Taran V.A. etc.* The theory of variable structure systems. - Moscow: Nauka, 1970. - 592 p. (in Russian).

4. *Vasilyev S.N.* Comparison method in mathematical systems theory - Novosibirsk: Nauka, 1980. – 480 p. (in Russian).

5. *Bychkov A.S., Mercury M.G., Pavlyuchenko O.H.* Numerical method for investigation of stability of linear hybrid automaton / / Journal of Computational and Applied Mathematics, № 2 (108), 2012. - P.66-74.(in Ukrainian).

6. *Bychkov A. S., Mercury M.G.* Sufficient conditions for stability of linear hybrid statsionarnogo state automata / / Control systems and machines, № 2 (208), 2007. - P.18-23.(in Russian).

7. *Bobilev N.A., Ilyin, A.N., Korovin S.K., Fomichev V.V.* On the stability of families of dynamical systems / / Differential equations, T.38, № 4, P.447-452. (in Russian).

8. *Pakshin P.V., Pozdyaev V.V.* Criterion for the existence of a common quadratic Lyapunov function of the set of linear second-order systems / / Successes of modern alternating science. - 2005. - № 2 - P. 23-24 (in Russian).

9. *Gantmakher F.R.* Theory of Matrices. - Moscow: Nauka, 1967. – 576p. (in Russian).

10. *Sarybekov R. A.* Extreme quadratic Lyapunov function systems of equations of the second order. Sibirskij matematiceskij zurnal T.18 № 5, 1977 - P. 1159-1167. (in Russian).

11. *Khousainov D.Y., Kozhametov A.T.,* Utebaev D. Optimizing performance ratings in the dynamics of systems solutions. - Nukus, Uzbekistan MViSSO, 1992. - 139 p. (in Russian).

Надійшла до редколегії 23.12.13

УДК 512.552.37+519.115

V.V. Skobelev, Cand. Phys.-Math. Sci.

On some relation between sets of mappings of a set in factor-rings

In the given paper some relations between sets of mappings of an abstract set in factor-rings of an associative-commutative ring are investigated. There are found conditions to be met by a given set of ideals, that made it possible to prove identities which form the base for elaboration of combinatorial schemes intended to compute the number of objects determined over associative-commutative rings.
Key Words: associative-commutative rings, mappings in factor-rings, combinatorial schemes.

Institute of Applied Mathematics and Mechanics of NAS of Ukraine, 83114, Rose Luxemburg str., 74,

e-mail: vv_skobelev@iamm.ac.donetsk.ua

Скобелєв В.В., к.ф.-м.н.

Про одне співвідношення між множинами відображень множини у фактор-кільця

У статті досліджено деякі співвідношення між множинами відображень абстрактної множини у фактор-кільця асоціативно-комутативного кільця. Встановлено умови яким повинна задовольняти задана множина ідеалів що дають можливість встановити рівності які є основою для побудови комбінаторних схем що призначені для підрахунку об'єктів які визначено над асоціативно-комутативним кільцем.
Ключові слова: асоціативно-комутативні кільця, відображення у фактор-кільця, комбінаторні схеми.

Інститут прикладної математики і механіки НАН України, 83114, м. Донецьк, вул. Рози Люксембург, 74,
e-mail: vv_skobelev@iamm.ac.donetsk.ua

Статтю представив проф., д.ф.-м.н Буй Д.Б.

Introduction

Applications of algebraic models for information transformation settle down that elaboration of combinatorial schemes intended to compute the number of objects determined over rings is actual problem. Due to the approach generally accepted in Modern Combinatorics [1] it is naturally to present these combinatorial schemes via mappings of some abstract set in factor-rings of considered ring.

In [2,3] it was investigated some relation between sets of mappings of an abstract set S in complete residue systems determined by pair-wise coprime elements $a_1,\dots,a_m$ $(m\in\mathbf{N})$ of a Dedekind ring $K=(K,+,\cdot)$ and sets of mappings of the set S in complete residue system determined by the element $\prod_{i=1}^{m}a_i$. Proposed scheme was determined as follows.

Selecting any single element in each coset of the quotient set $K/_{(a)}$ $(a\in K)$ (where (a) is principal ideal of the ring K generated by the element a), we get complete residue system $\mathrm{MOD}(a)$.

By $b<\mathrm{mod}\,a>$ $(a,b\in K)$ it is denoted the element $c\in\mathrm{MOD}(a)$, such that b и c are elements of the same coset of the quotient set $K/_{(a)}$.

Let

$$F_{a_i}(S)=\{f\mid f:S\to\mathrm{MOD}(a_i)\}\quad (i=1,\dots,m)$$

and

$$F(S)=\{f\mid f:S\to\mathrm{MOD}(\prod_{i=1}^{m}a_i)\}.$$

For any fixed subsets $\hat{F}_{a_i}(S)\subseteq F_{a_i}(S)$ $(i=1,\dots,m)$ we set

$$\tilde{F}_{a_i}(S)=\{f\in F(S)\mid f_{\mathrm{mod}a_i}\in\hat{F}_{a_i}(S)\},$$

where mapping $f_{\mathrm{mod}a_i}$ $(f\in F(S))$ is determined by identity

$$f_{\mathrm{mod}a_i}(s)=f(s)<\mathrm{mod}\ a_i>\quad (s\in S).$$

The following theorem holds.

Theorem [2,3]**.** For any set S and pair-wise coprime elements $a_1,\dots,a_m$ $(m\in\mathbf{N})$ of a Dedekind ring K there holds the identity

$$|\underset{i=1}{\overset{m}{\times}}\hat{F}_{a_i}(S)|=|\bigcap_{i=1}^{m}\tilde{F}_{a_i}(S)|. \qquad (1)$$

© V. V. Skobelev, 2014

If all sets $\hat{F}_{a_i}(S)$ $(i=1,\ldots,m)$ are finite then identity (1) can be rewritten in the form

$$\prod_{i=1}^{m}|\hat{F}_{a_i}(S)|=|\bigcap_{i=1}^{m}\tilde{F}_{a_i}(S)|. \qquad (2)$$

It was established in [2,3] that identity (2) can be applied to combinatorial analysis of mathematical structures determined in terms of commutative-associative rings with unity or in terms of number-theoretic structures, used in applied problems of information transformation.

In the given paper it is investigated some general combinatorial scheme elaborated for associative-commutative ring (not necessary with unity), such that above described scheme is its special case. All algebraic notions that are not determined are the same as in [4-6].

The rest of the paper is organized in the following way. In chapter 1 necessary basic notions are determined and investigated. Main result is presented in chapter 2. The last chapter consists of some conclusion remarks.

1. Preliminary results

Let $K=(K,+,\cdot)$ be any associative-commutative ring and I_K be the set of all ideals of the ring K. The ideal $I_1\cap I_2$ is the least common multiple of ideals I_1 and I_2. It is well known that inclusion

$$I_1I_2\subseteq I_1\cap I_2 \qquad (1)$$

holds for all $I_1,I_2\in I_K$.

Proposition 1. In any associative-commutative ring K inclusion

$$I_1(I_2\cap I_3)\subseteq I_1I_2\cap I_1I_3 \qquad (2)$$

holds for all $I_1,I_2,I_3\in I_K$.

Proof. Let K be any associative-commutative ring and $I_1,I_2,I_3\in I_K$.

Inclusion $I_2\cap I_3\subseteq I_2$ implies that inclusion $I_1(I_2\cap I_3)\subseteq I_1I_2$ holds, and inclusion $I_2\cap I_3\subseteq I_3$ implies that inclusion $I_1(I_2\cap I_3)\subseteq I_1I_3$ also holds. Inclusions $I_1(I_2\cap I_3)\subseteq I_1I_2$ and $I_1(I_2\cap I_3)\subseteq I_1I_3$ imply that inclusion (2) holds.

Q.E.D.

Proposition 2. In any associative-commutative ring K for any integer $m\in\mathbf{N}$ $(m\geq 3)$ inclusion

$$\prod_{i=1}^{m}I_i\subseteq\bigcap_{i=1}^{m}I_i \qquad (3)$$

holds for all $I_1,\ldots,I_m\in I_K$.

Proof. Let K be any associative-commutative ring, $m\in\mathbf{N}$ $(m\geq 3)$ and $I_1,\ldots,I_m\in I_K$.

We prove inclusion (3) by induction.

Let $m=3$. Inclusions (1) and (2) imply that

$$I_1I_2I_3\subseteq I_1(I_2\cap I_3)\subseteq I_1I_2\cap I_1I_3\subseteq$$
$$\subseteq(I_1\cap I_2)\cap(I_1\cap I_3)=I_1\cap I_2\cap I_3.$$

Suppose that inclusion (3) holds for all integers $m=3,\ldots,n$. Then

$$\prod_{i=1}^{m}I_i\subseteq\bigcap_{i=1}^{m}I_i \quad (m=3,\ldots,n) \qquad (4)$$

Let $m=n+1$. Inclusions (1) and (4) imply that

$$\prod_{i=1}^{m}I_i=\prod_{i=1}^{n+1}I_i=(\prod_{i=1}^{n}I_i)I_{n+1}\subseteq(\bigcap_{i=1}^{n}I_i)I_{n+1}\subseteq$$
$$\subseteq(\bigcap_{i=1}^{n}I_i)\cap I_{n+1}=\bigcap_{i=1}^{n+1}I_i=\bigcap_{i=1}^{m}I_i.$$

Q.E.D.

Corollary 1. In any associative-commutative ring K for any integer $m\in\mathbf{N}$ $(m\geq 3)$ inclusion

$$\prod_{i=1}^{m}I_i\subseteq\bigcap_{i=1}^{m}I_i \quad (m\in\mathbf{N},m\geq 2) \qquad (5)$$

holds for all $I_1,\ldots,I_m\in I_K$.

Proof. If $m=2$ then (5) is turned to (1). If $m\geq 3$ then (5) is turned to (3).

Q.E.D.

Quotient set $K/_I$ $(I\in I_K)$ treated as a partition of the set K would be denoted by $\pi(K,I)$, i.e. $x\equiv y(\pi(K,I))$ if and only if $x\equiv y\,(\mathrm{mod}\,I)$.

Remark 1. Thus we get $\pi(K,I)=\{I+a\,|\,a\in K\}$ $(I\in I_K)$. It is worth to note that $\pi(K,I_1)\leq\pi(K,I_2)$ if and only if $I_1\subseteq I_2$.

We set

$$P_K=\{\pi(K,I)\,|\,I\in I_K\}.$$

The set P_K can be characterized in the following way.

Lemma 1. In any associative-commutative ring K for all $m\in\mathbf{N}$ inequality

$$\pi(K,\prod_{i=1}^{m}I_i)\leq\prod_{i=1}^{m}\pi(K,I_i) \qquad (6)$$

holds for all $I_1,\ldots,I_m\in I_K$.

Proof. Let K be any associative-commutative ring, $m\in\mathbf{N}$ and $I_1,\ldots,I_m\in I_K$.

If $m=1$ then inequality (6) is turned to inequality $\pi(K,I_1)\leq\pi(K,I_1)$ and it holds for all $I_1\in I_K$

Let $m\geq 2$. For any $x,y\in K$ we get

$$x\equiv y(\pi(K,\prod_{i=1}^{m}I_i))\Leftrightarrow x\equiv y\,(\mathrm{mod}\prod_{i=1}^{m}I_i). \qquad (7)$$

Since $\prod_{i=1}^{m}I_i\subseteq\bigcap_{i=1}^{m}I_i$ then

$$x \equiv y \,(\mathrm{mod} \prod_{i=1}^{m} I_i) \Rightarrow x \equiv y \,(\mathrm{mod} \bigcap_{i=1}^{m} I_i) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x - y \in \bigcap_{i=1}^{m} I_i \Leftrightarrow (\forall i = 1,\ldots,m)(x - y \in I_i) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\forall i = 1,\ldots,m)(x \equiv y \,(\mathrm{mod}\, I_i)) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\forall i = 1,\ldots,m)(x \equiv y \,(\pi(K, I_i))) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \equiv y(\prod_{i=1}^{m} \pi(K, I)). \qquad (8)$$

Formulae (7) and (8) imply that inequality (6) holds.

Q.E.D.

Corollary 2. In any associative-commutative ring K for all $m \in \mathbf{N}$ identity

$$\pi(K, \prod_{i=1}^{m} I_i) = \prod_{i=1}^{m} \pi(K, I_i) \qquad (9)$$

holds for all $I_1,\ldots,I_m \in I_K$, such that $\prod_{i=1}^{m} I_i = \bigcap_{i=1}^{m} I_i$.

Proof. Let K be any associative-commutative ring, $m \in \mathbf{N}$, $I_1,\ldots,I_m \in I_K$, and $\prod_{i=1}^{m} I_i = \bigcap_{i=1}^{m} I_i$.

If $m = 1$ then identity (9) is turned to identity $\pi(K, I_1) = \pi(K, I_1)$ and it holds for all $I_1 \in I_K$.

Let $m \geq 2$. Identity $\prod_{i=1}^{m} I_i = \bigcap_{i=1}^{m} I_i$ implies that

$$x \equiv y \,(\mathrm{mod} \prod_{i=1}^{m} I_i) \Leftrightarrow x \equiv y \,(\mathrm{mod} \bigcap_{i=1}^{m} I_i). \qquad (10)$$

Substituting in (8) formula (10) instead of formula

$$x \equiv y \,(\mathrm{mod} \prod_{i=1}^{m} I_i) \Rightarrow x \equiv y \,(\mathrm{mod} \bigcap_{i=1}^{m} I_i),$$

we get that

$$x \equiv y \,(\mathrm{mod} \prod_{i=1}^{m} I_i) \Leftrightarrow x \equiv y \,(\prod_{i=1}^{m} \pi(K, I_i)). \qquad (11)$$

Formulae (7) and (11) imply that identity (9) holds.

Q.E.D.

Theorem 1. In any associative-commutative ring K for any integer $m \in \mathbf{N}$ $(m \geq 2)$ identity

$$\pi(K, \prod_{i=1}^{m} I_i) = \{\bigcap_{i=1}^{m} B_i \,|B_i \in \pi(K, I_i)\,(i = 1,\ldots,m\} \qquad (12)$$

holds for all $I_1,\ldots,I_m \in I_K$, such that $\prod_{i=1}^{r} I_i + I_{r+1} = K$ $(r = 1,\ldots,m-1)$ and $\prod_{i=1}^{h} I_i = \bigcap_{i=1}^{h} I_i$ $(h = 2,\ldots,m)$.

Proof. Let K be any associative-commutative ring, $m \in \mathbf{N}$ $(m \geq 2)$, $I_1,\ldots,I_m \in I_K$, $\prod_{i=1}^{r} I_i + I_{r+1} = K$ $(r = 1,\ldots,m-1)$ and $\prod_{i=1}^{h} I_i = \bigcap_{i=1}^{h} I_i$ $(h = 2,\ldots,m)$.

Identity (12) is equivalent to proposition that

$$\bigcap_{i=1}^{m} B_i \neq \varnothing \,(m \in \mathbf{N}, m \geq 2) \qquad (13)$$

for all $B_i \in \pi(K, I_i)$ $(i = 1,\ldots,m)$.

We prove this proposition by induction.

Let $m = 2$. Since $I_1 I_2 = I_1 \cap I_2$, we get (see Corollary 2) that $\pi(K, I_1 I_2) = \pi(K, I_1)\pi(K, I_2)$.

Let $B_i \in \pi(K, I_i)$ $(i = 1,2)$, i.e. $B_i = I_i + a_i$ for some fixed elements $a_i \in K$. Identity $I_1 + I_2 = K$ implies that there exist elements $\alpha_i \in I_i$ $(i = 1,2)$, such that $a_1 - a_2 = \alpha_2 - \alpha_1$. Thus $a_1 + \alpha_1 = a_2 + \alpha_2$. Since $\alpha_i \in I_i$ $(i = 1,2)$ we get $a_i + \alpha_i \in B_i$.

Formulae $a_i + \alpha_i \in B_i$ $(i = 1,2)$ and $a + \alpha_1 = b + \alpha_2$ imply that $B_1 \cap B_2 \neq \varnothing$.

Suppose that considered proposition holds for all integers $m = 2,\ldots,n$.

Let $m = n+1$. Since $\prod_{i=1}^{m} I_i = \bigcap_{i=1}^{m} I_i$ we get (see Corollary 2) that

$$\pi(K, \prod_{i=1}^{m} I_i) = \pi(K, \prod_{i=1}^{n+1} I_i) = (\prod_{i=1}^{n} \pi(K, I_i))\pi(K, I_{n+1}).$$

Let $B \in \pi(K, \prod_{i=1}^{n} I_i)$ and $B_{n+1} \in \pi(K, I_{n+1})$, i.e. $B = \prod_{i=1}^{m} I_i + a_1$ and $B_{n+1} = I_{n+1} + a_2$ for some fixed elements $a_i \in K$ $(i = 1,2)$. Identity $\prod_{i=1}^{n} I_i + I_{n+1} = K$ implies that there exist elements $\alpha_1 \in \prod_{i=1}^{n} I_i$ and $\alpha_2 \in I_{n+1}$, such that $a_1 - a_2 = \alpha_2 - \alpha_1$. Thus $a_1 + \alpha_1 = a_2 + \alpha_2$. Since $\alpha_1 \in \prod_{i=1}^{n} I_i$ and $\alpha_2 \in I_{n+1}$ we get that $a_1 + \alpha_1 \in B$ and $a_2 + \alpha_2 \in B_{n+1}$.

Formulae $a_1 + \alpha_1 \in B$, $a_2 + \alpha_2 \in B_{n+1}$ and $a_1 + \alpha_1 = a_2 + \alpha_2$ imply that $B \cap B_{n+1} \neq \varnothing$.

Q.E.D.

2. Main result.

Let S be any non-empty set, K be an associative-commutative ring and $I_1,\ldots,I_m \in I_K$ $(m \in \mathbf{N}, m \geq 2)$ be such ideals that

$$\prod_{i=1}^{r} I_i + I_{r+1} = K \quad (r = 1,\ldots,m-1)$$

and

$$\prod_{i=1}^{h} I_i = \bigcap_{i=1}^{h} I_i \quad (h = 2,\ldots,m).$$

We set

$$F_{I_i}(S) = \{ f \mid f : S \to \pi(K, I_i) \} \quad (i = 1,\ldots,m)$$

and

$$F(S) = \{ f \mid f : S \to \pi(K, \prod_{i=1}^{m} I_i) \}.$$

Remark 2. Identity $\prod_{i=1}^{m} I_i = \bigcap_{i=1}^{m} I_i$ implies (see Corollary 2) that $\pi(K, \prod_{i=1}^{m} I_i) = \prod_{i=1}^{m} \pi(K, I_i)$. Thus we get

$$F(S) = \{ f \mid f : S \to \prod_{i=1}^{m} \pi(K, I_i) \}.$$

For any subsets $\hat{F}_{I_i}(S) \subseteq F_{I_i}(S) \quad (i = 1,\ldots,m)$ we set

$$\tilde{F}_{I_i}(S) = \{ f \in F(S) \mid f_{I_i} \in \hat{F}_{I_i}(S) \} \quad (i = 1,\ldots,m),$$

where mapping f_{I_i} $(f \in F(S))$ is determined as follows: if $f(s) = B$ $(s \in S)$ (where $B \in \prod_{i=1}^{m} \pi(K, I_i)$) then $f_{I_i}(s) = B'$, where B' is such single block of the partition $\pi(K, I_{I_i})$ that $B \subseteq B'$.

Theorem 2. In any associative-commutative ring K for any non-empty set S and any integer $m \in \mathbf{N}$ $(m \geq 2)$ identity

$$|\underset{i=1}{\overset{m}{\times}} \hat{F}_{I_i}(S)| = |\bigcap_{i=1}^{m} \tilde{F}_{I_i}(S)| \qquad (14)$$

holds for all $I_1,\ldots,I_m \in I_K$, such that $\prod_{i=1}^{r} I_i + I_{r+1} = K$ $(r = 1,\ldots,m-1)$ and $\prod_{i=1}^{h} I_i = \bigcap_{i=1}^{h} I_i \quad (h = 2,\ldots,m)$.

Proof. Let K be any associative-commutative ring, $m \in \mathbf{N}$ $(m \geq 2)$, $I_1,\ldots,I_m \in I_K$, $\prod_{i=1}^{r} I_i + I_{r+1} = K$ $(r = 1,\ldots,m-1)$ and $\prod_{i=1}^{h} I_i = \bigcap_{i=1}^{h} I_i \quad (h = 2,\ldots,m)$.

To prove identity (14) it is sufficient to construct injections

$$\varphi : \hat{F}_{I_1}(S) \times \ldots \times \hat{F}_{I_m}(S) \to \bigcap_{i=1}^{m} \tilde{F}_{I_i}(S) \qquad (15)$$

and

$$\psi : \bigcap_{i=1}^{m} \tilde{F}_{I_i}(S) \to \hat{F}_{I_1}(S) \times \ldots \times \hat{F}_{I_m}(S). \qquad (16)$$

Injection φ can be constructed as follows.

For any $\mathbf{f} = (f_1,\ldots,f_m) \in \hat{F}_{I_1}(S) \times \ldots \times \hat{F}_{I_m}(S)$ we set $\varphi(\mathbf{f}) = f$, where mapping f is determined by identity

$$f(s) = \bigcap_{i=1}^{m} f_i(s) \quad (s \in S). \qquad (17)$$

Theorem 1 implies that $f \in F(S)$.

Firstly we prove that mapping (17) is some mapping of the form (15).

Indeed, identity (17) implies that $f_{I_i}(s) = f_i(s)$ $(i = 1,\ldots,m)$ for all $s \in S$, i.e. $f_{I_i} = f_i \in \hat{F}_{I_i}(S)$ for all $i = 1,\ldots,m$. Since $f_{I_i} \in \hat{F}_{I_i}(S)$ for all $i = 1,\ldots,m$ we get that $f \in \tilde{F}_{I_i}(S)$ for all $i = 1,\ldots,m$, i.e. $f \in \bigcap_{i=1}^{m} \tilde{F}_{I_i}(S)$.

Now we prove that mapping (17) is injection, i.e. if $\mathbf{f}_r = (f_1^{(r)},\ldots,f_m^{(r)}) \in \hat{F}_{I_1}(S) \times \ldots \times \hat{F}_{I_m}(S)$ $(r = 1,2)$ and $\mathbf{f}_1 \neq \mathbf{f}_2$ then $\varphi(\mathbf{f}_1) \neq \varphi(\mathbf{f}_2)$.

Since $\mathbf{f}_1 \neq \mathbf{f}_2$ then there exists $j \in \mathbf{N}_m$ such that $f_j^{(1)} \neq f_j^{(2)}$. This implies that there exists an element $s \in S$ such that $f_j^{(1)}(s) \neq f_j^{(2)}(s)$, i.e. $f_j^{(1)}(s)$ and $f_j^{(2)}(s)$ are different blocks of partition $\pi(K, I_j)$. Thus $\prod_{i=1}^{m} f_i^{(1)}(s)$ and $\prod_{i=1}^{m} f_i^{(2)}(s)$ are different blocks of partition $\prod_{i=1}^{m} \pi(K, I_i)$. Since

$$\varphi(\mathbf{f}_1)(s) = \prod_{i=1}^{m} f_i^{(1)}(s) \neq \prod_{i=1}^{m} f_i^{(2)}(s) = \varphi(\mathbf{f}_2)(s)$$

we get that $\varphi(\mathbf{f}_1) \neq \varphi(\mathbf{f}_2)$.

Injection ψ can be constructed as follows.

For any $f \in \bigcap_{i=1}^{m} \tilde{F}_{I_i}(S)$ we set

$$\psi(f) = (f_{I_1},\ldots,f_{I_m}). \qquad (18)$$

Identity (18) implies that for any mapping $f \in \bigcap_{i=1}^{m} \tilde{F}_{I_i}(S)$ identity $f(s) \in \bigcap_{i=1}^{m} f_{I_i}(s)$ holds for any element $s \in S$.

Firstly we prove that mapping (18) is some mapping of the form (16).

Since $f \in \bigcap_{i=1}^{m} \tilde{F}_{I_i}(S)$ we get that $f \in \tilde{F}_{I_i}(S)$ for all $i = 1,\ldots,m$. This implies that $f_{I_i} \in \hat{F}_{I_i}(S)$ for all $i = 1,\ldots,m$, i.e.

$$\psi(f) = (f_{I_1},\ldots,f_{I_m}) \in \hat{F}_{I_1}(S) \times \ldots \times \hat{F}_{I_m}(S).$$

Now we prove that mapping (18) is injection, i.e. if $f^{(1)}, f^{(2)} \in \bigcap_{i=1}^{m} F$ and $f^{(1)} \neq f^{(2)}$ then

$$\psi(f^{(1)}) = (f^{(1)}_{I_1},\ldots, f^{(1)}_{I_m}) \neq (f^{(2)}_{I_1},\ldots, f^{(2)}_{I_m}) = \psi(f^{(2)}).$$

Since $f^{(1)} \neq f^{(2)}$ $(f^{(1)}, f^{(2)} \in \bigcap_{i=1}^{m} F)$ then there exists an element $s \in S$ such that $f^{(1)}(s) \neq f^{(2)}(s)$, i.e. $f^{(1)}(s)$ and $f^{(2)}(s)$ are elements of different blocks of partition $\prod_{i=1}^{m} \pi(K, I_i)$. Thus we get

$$\bigcap_{i=1}^{m} f^{(1)}_{I_1}(s) = f^{(1)}(s) \neq f^{(2)}(s) = \bigcap_{i=1}^{m} f^{(2)}_{I_1}(s).$$

This means that there exists $j \in \mathbf{N}_m$ such that $f^{(1)}_{I_j}(s) \neq f^{(2)}_{I_j}(s)$, i.e. $f^{(1)}_{I_j} \neq f^{(2)}_{I_j}$. Since $f^{(1)}_{I_j} \neq f^{(2)}_{I_j}$ then we get $\psi(f^{(1)}) \neq \psi(f^{(2)})$.

Q.E.D.

If all sets $\hat{F}_{I_i}(S)$ $(i = 1,\ldots,m)$ are finite then identity (14) can be rewritten in the form

$$\prod_{i=1}^{m} |\hat{F}_{I_i}(S)| = |\bigcap_{i=1}^{m} \tilde{F}_{I_i}(S)|. \qquad (19)$$

From proof of Theorem 2 it follows immediately that the following corollary holds.

Corollary 3. If all sets $\hat{F}_{I_i}(S)$ $(i = 1,\ldots,m)$ are finite then the mappings φ and ψ constructed in proof of Theorem 2 are bijections such that $\varphi^{-1} = \psi$ and $\psi^{-1} = \varphi$.

It is worth to note that just the identity (19) forms the base for elaboration of combinatorial schemes intended to compute the number of objects determined over associative-commutative rings. The following example confirms this factor.

Example. 1. Let K be any finite associative-commutative ring with unity. Proper ideals $I_1, I_2 \in I_K$ are comaximal if $I_1 + I_2 = K$. Proper ideals $I_1,\ldots,I_m \in I_K$ are pair-wise comaximal if I_i and I_j are comaximal for all $i, j = 1,\ldots,m$ $(i \neq j)$. It is known that if ideals $I_1,\ldots,I_m \in I_K$ are pair-wise comaximal then identity $\prod_{i=1}^{m} I_i = \bigcap_{i=1}^{m} I_i$ holds. Thus identity (19) also holds. If $|S| = 1$ then identity (19) establishes that factor-rings $K/_{\prod_{i=1}^{m} I_i}$ and $\prod_{i=1}^{m} K/_{I_i}$ have the same cardinality. Moreover, bijections φ and ψ constructed in proof of Theorem 2 establish isomorphism of these factor-rings.

2. If K is a Dedekind ring and $a_1,\ldots,a_m$ $(m \in \mathbf{N})$ are pair-wise coprime elements then principal ideals $(a_1),\ldots,(a_m)$ are pair-wise comaximal. Thus all results established ad hoc in [2,3] can be treated as special case of identities (14) and (19).

Conclusions

In the given paper mappings of an abstract set in factor-rings of an associative-commutative ring were investigated. Found in the paper conditions to be met by a given set of ideals, made it possible to prove identities (14) and (19) which form the base for elaboration of combinatorial schemes intended to compute the number of objects determined over associative-commutative rings. In particular, all results established ad hoc in [2,3] can be treated as special case of these identities.

Analysis of possible applications of identities (14) and (19) for computing the number of objects determined over associative-commutative rings of this or the other type (in particular, over rings of principal ideals) forms some trend for future research. Analysis of identities (14) and (19) under these or the others additional conditions form another trend for future research.

List of references

1. *Sachkov V.N.* Introduction to combinatorial methods of discrete mathematics. – Moscow: Nauka, 1982. – 384 p. (in Russian).
2. *Skobelev V.V.* Analysis of some mappings of sets in a Dedekind ring // Dopovidi NAS of Ukraine. – 2011. – № 3 – P. 45-49. (in Russian).
3. *Skobelev V.V.* On two sequences of sets of mappings of abstract sets in a Dedekind ring // Cybernetics and system analysis. – 2012. – № 2. – P. 105-112.
4. Zariski O., Samuel P. Commutative algebra. Vol. 1. – Moscow: Inostrannaja literatura, 1963. – 374 p. (in Russian).
5. Kurosh A.G. Lectures in general algebra. – Moscow: Nauka, 1973. – 400 p. (in Russian).
6. Van der Varden B.L. Algebra. – Moscow: Nauka, 1979. – 624 p. (in Russian).

Надійшла до редколегії 19.09.13

УДК 519.168

Бондарець І. М., студент

Система розпізнавання облич за допомогою 2.5д камери

У роботі описано розроблену систему розпізнавання облич, що базується на 2.5д зображенні. Представлено використання активних моделей зовнішнього виду для покращення продуктивності системи

Ключові слова: розпізнавання облич, 2.5д камера, активні моделі зовнішнього вигляду

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, пр-т Глушкова 4д,
e-mail: ibondarets@unicyb.kiev.ua

I. N. Bondarets, student

Face recognition system used 2.5d camera

This paper considers a face recognition system based on 2.5d images. Discribed the using of active apperance models to improve performance

Key Words: face recognition, 2.5d camera, active appearance models

Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03680, Kyiv, Glushkova av., 4d,

e-mail: ibondarets@unicyb.kiev.ua

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Анісімов А.В.

1. Вступ

На даний час біометричні системи ідентифікації людини набувають все більшого поширення. Їх головні переваги перед традиційними засобами ідентифікації заключаються в тому, що вони грунтуються на унікальних біологічних ознаках, отже, їх надзвичайно складно підробити. Також, очевидна зручність їх використання — вони не вимагають від людини володіння будь-якими спеціальними картками, ключами і т.д.

Існує кілька способів ідентифікації за біометричними ознаками. На даний час лідерами є ідентифікація за відбитками пальців та сітківкою ока. Інші види ідентифікації (по обличчю або голосу) менш розвинені. Вони не настільки надійні за своєю природою (простіші для фальсифікації), а тому їх використовують лише в деяких областях. [1]

Актуальність задачі розпізнавання людини по обличчю полягає в тому, що немає необхідності безпосереднього контакту системи і людини.

На даний момент проблемі розпізнавання людини по зображенню обличчя присвячено безліч робіт, проте в цілому вона ще далека від вирішення. Головні труднощі, які необхідно подолати при ідентифікації людини по обличчю — це забезпечення незалежності роботи системи від таких факторів, як освітленість, ракурс, а також вікові зміни. [2,3]

Системи, що використовують 2д зображення облич для ідентифікації, не дають правильної відповіді, якщо людина відхилиться принаймні на 15 градусів. [2] Наступним кроком стало використання технології стерео реконструкції, коли відтворюється псевдо 2.5д маска обличчя. Така система потребує складних обчислень та точність реконструйованої маски недостатня. [5]

Іншим способом отримати 2.5д реконструкцію обличчя є використання стуктурованої підсвітки: на обличчя людини проектується сітка, яка деформується в залежності від вигинів променів структурованого світла, що потрапляє на нього. При цьому по деформаціям відтворюється 2.5д модель. [6] Такий підхід має суттєвий недолік - розпізнавання не працює при сонячному світлі.

Проте використання камери, що посилає сигнал вищої частоти ніж сонячне світло, дозволить вирішити цю проблему. Такі камери були розроблені та вже використовуються (наприклад, камери Kinect, Asus XtionPRO). Перевагою системи, що заснована на роботі із данними з таких камер є те, що такі системи працюють при освітленні, починаючи від повної темряви до надзвичайно сильного світла без зміни точності. Вона зможе ідентифікувати людину незалежно від макіяжу чи кольору шкіри. Інші характеристики, такі як колір шкіри, текстура губ, брів, очей можна використати як допоміжні характеристики для покращення якості роботи.

© І. М. Бондарець, 2014

Подібну систему можна застосувати, наприклад, в магазині для ідентифікації клієнтів чи в «розумному» будинку. Така система «пам'ятає» вподобання різних людей та автоматично налаштовує певні параметри середовища. Вона не нав'язлива, не обмежує людину в свободі переміщення, використовує мало енергії та порівняно недорога. Але саме головне те, що люди зазвичай впізнають один одного по обличчю та голосу, а значить, не будуть відчувати незручностей з системою, що заснована на аналогічних способах розпізнавання.

Новим стимулом до розробки систем розпізнавання людини стало загострення ситуації з міжнародним тероризмом. Встановлення таких систем в місцях масового скупчення людей (аеропортах, великих торгових центрах) повинна сприяти ранньому виявленню осіб, які знаходяться в розшуку. Тут надзвичайно особлива стійкість системи до наявності гриму на обличчі. Таку систему можна встановити і на стадіонах, щоб з її допомогою легше знаходити найбільш «буйних» футбольних вболівальників, за якими служба безпеки буде більш особливо слідкувати під час матчів.

2. Загальний алгоритм

Використання 2.5д данних для розпізнавання облич на порядок ефективніше, ніж використання 2д даних. Використовуючи ці дані, вдається легко локалізувати обличчя, значно покращити ефективність методу порівняння еталонів.

В запропонованому алгоритмі для локалізації обличчя використовуються саме 2.5д дані. Оскільки, еталонний метод вимагає досить багато обчислень для порівняння масок облич, то було вирішено використати активну модель зовнішнього виду обличчя для виділення ключових точок. (Рис. 2.1)

Активні моделі зовнішнього вигляду (*Active Appearance Models, AAM*) - це статистичні моделі зображень, які шляхом різного роду деформацій можуть бути підігнані під реальне зображення. Даний тип моделей в двовимірному варіанті був запропонований Тімом Кутесом та Крісом Тейлором у 1998 році [7]. На даний час запропоновано багато модифікацій даного методу [8-10].

В активних моделях зовнішнього вигляду моделюються два типи параметрів: параметри, пов'язані з формою (параметри форми), і параметри, пов'язані зі статистичною моделлю зображення або текстурою (параметри зовнішнього вигляду).



Рис. 2.1. Активна модель обличчя

Завдяки використанню активної моделі наявність таких перешкод, як, наприклад, вуса, система в частині випадків зможе дати відповідь, оскільки, відхилення значень на окремих точках може не впливати на загальну відповідь системи.

Загальний принцип роботи такої системи показано на рис. 2.2 [2].

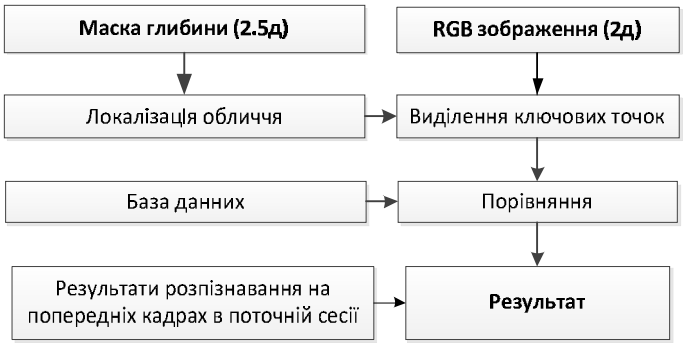


Рис. 2.2. Структура системи розпізнавання облич із використанням 2.5д даних

Спочатку за допомогою маски глибини здійснюється локалізація обличчя. Далі, використовуючи знайдену позицію та розмір обличчя, здійснюється трекінг обличчя за допомогою активного контуру моделі та відповідно із цієї моделі отримуються ключові точки.

3. Опис практичної реалізації

Для практичної системи 2.5д розпізнавання облич було вирішено використовувати камеру Kinect через її доступність та низьку ціну.

Дана камера використовує сигнал вищої частоти ніж світло, тому вона може працювати навіть при сильному освітленні та в повній темряві. Та враховуючи, що активний контур моделі обличчя також може працювати при

поганому освітленні, така система зможе конкурувати із системою, що будує маску глибини із використанням проектованої сітки, яка не може працювати при денному світлі. Дані, що отримуються з такої камери, зображено на рисунку 3.1.

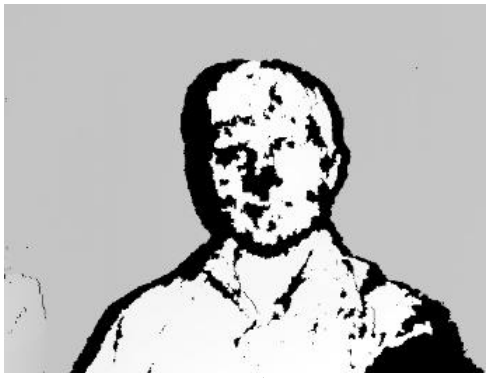


Рис. 3.1. Маска глибини з камери Kinect. (Світліше зображено ближчі частини зображення, темнішим – дальші, чорні ділянки – це нерозпізнані частини)

Проте дана камера має ряд недоліків:

1. Камера не розпізнає об'єкти на відстані менше 1.2 метра.
2. Точність камери сильно зменшується при віддаленні об'єкта.
3. На відстані 4 метра від камери якості 2.5д зображення обличчя недостатньо для розпізнавання.
4. Під час роботи бувають нерозпізнані частини (чорні області на рис. 3.1).

Для програмної реалізації було вирішено використовувати Microsoft Kinect SDK та WinAPI для найбільшої ефективності роботи програми.

Після локалізації обличчя та ключових точок за допомогою активної моделі виділяється 121 точка обличчя в XYZ координатах. Проте при порівнянні використовується лише глибина, тобто значення по координаті Z.

Далі отримана маска обличчя повертається для приведення масок до єдиного положення за допомогою матриці повороту.

Оскільки камера має високу зашумленість даних для однієї особи, зберігається 150 масок, що зроблені з певною невеликою затримкою в часі. Проте число масок для зберігання можна обрати значно меншим.

Вхідна маска порівнюється із масками, що зберігаються в базі даних, та з тою, що найбільш схожа, з ідентифікуємою людиною (формули 3.1, 3.2). Якщо жодна з масок із бази даних не схожа на вхідну, то дається відповідь, що людина не ідентифікована.

$$E(K,K') = \sum_{i \in K,K'} |k(i) - k'(i)|^d \tag{3.1}$$

$$I = \begin{cases} \arg\min\limits_{K'} E(K,K'), & \min\limits_{K''} E(K,K'') < T \\ 0 & \min\limits_{K''} E(K,K'') \geq T \end{cases} \tag{3.2}$$

Де, I – ім'я людини із бази даних, яку розпізнає система, якщо $I=0$, то це означає, що такої людини в базі немає, K – це маска обличчя, що розпізнається, K'– маска облич із бази даних, $E(K,K')$ - коефіцієнт невідповідності масок, $k(i)$ – значення відстані точки на масці k точки i із активної моделі. Якщо точка не належить масці, то $k(i)=0$, $d = const >= 1$, $T = const$.

Складність роботи системи $O(150*N*121+C)$, де N – кількість осіб, де C – кількість додаткових операцій.

Складність роботи аналогічної системи, яка використовує просте порівняння еталонів має складність $O(150*N*H*W+C)$, де H та W – висота та ширина маски. Таким чином, даний алгоритм працює на асимтоті в $\frac{H*W}{121}$ раз швидше, ніж метод порівняння еталонів. А враховуючи, що для даної камери при еталонному методі найбільш ефективним був розмір маски 150*200 пікселів, то маємо покращення швидкості в 248 разів.

Для зменшення помилки системи рішення приймається на основі ряду послідовно отриманих масок обличчя. Таким чином, модифіковано формулу 3.2:

$$I = \begin{cases} \arg\min\limits_{K} \sum\limits_{K'} E(K,K'), & \min\limits_{K} \sum\limits_{K'} E(K,K') < T \\ 0 & \min\limits_{K} \sum\limits_{K'} E(K,K') \geq T \end{cases}$$

4. Аналіз отриманих результатів

Програма тестувалась на 6 особах. На даній вибірці помилок системи не було виявлено. Система з великим відхиленням розрізняє людей, див. табл. 4.1 та рис. 4.1.

Таблиця 4.1. Рівень невідповідності масок облич та маски обличчя особи 1 при використанні AAM

Особа	I	I / I(1)
1	8063	1
2	45311	5,620
3	50095	6,213

4	51515	6,389
5	52255	6,481
6	55925	6,936

Систему було порівняно із аналогічною, що заснована на методі порівняння еталонів. В ній використовуються наступні формули [4]:

$$E(K,K') = \sum_{(i,j)\in K,K'} |k(i,j) - k'(i,j)|^d$$

$$I = \begin{cases} \arg\min_{K} \min_{K'} E(K,K'), & \min_{K} \min_{K'} E(K,K') < T \\ 0 & \min_{K} \min_{K'} E(K,K') \geq T \end{cases}$$

Де, *I* – ім'я людини із бази даних, яку розпізнає система, якщо *I=0*, то це означає, що такої людини в базі немає, *K* – це маска обличчя, що розпізнається, *K'*– маска облич із бази даних, *E(K,K')* - коефіцієнт невідповідності масок, *k(i,j)* - значення відстані точки на масці *k* із координатами *(i,j)*. Якщо точка не належить масці, то *k(i,j)=0*.

Така система дала гірші результати при розпізнаванні див. табл. 4.1 та рис. 4.1.

Таблиця 4.2. Рівень невідповідності масок облич та маски обличчя особи 1при використанні простого порівняння еталонів

Особа	**I**	**I / I(1)**
1	55241	1
2	98237	1,778
3	102245	1,851
4	130745	2,367
5	156879	2,840
6	247854	4,487

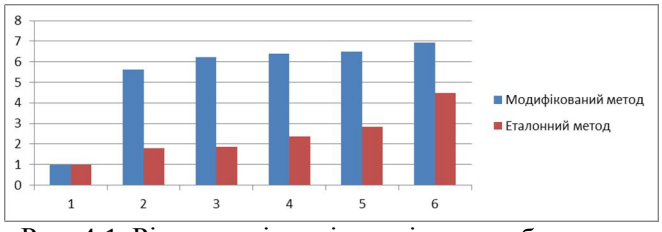


Рис. 4.1. Рівень невідповідності масок облич та маски обличчя особи 1

4. Висновки

Задача розпізнавання облич є надзвичайно актуальною, оскільки в порівнянні з іншими засобами ідентифікації особи немає необхідності безпосереднього контакту системи і людини.

Більшість алгоритмів, які працюють на 2д даних можна значно ефективніше реалізувати, використовуючи 2.5д дані.

Отримана система може працювати при дуже сильному чи дуже слабкому, чи неоднорідному освітленні.

В порівнянні із методом порівняння еталонів використання активної моделі обличчя дозволило пришвидшити розпізнавання в ~248 раз та покращити якість розпізнавання в ~3 рази.

Список використаних джерел

1. *AA Gladkih, VE Dement'ev*. Basic principles of information security of computer networks. Ulyanovsk: UlSTU 2009. – pp. 54-62. (in Russian).
2. *Daijain Kim, Jaewon Sung*. Automated face analysis: emerging technologies and research. Hershey, New York, 2009
3. K. C. Lee, J. Ho, and D. Kriegman, "Acquiring linear subspaces for face recognition under variable lighting," IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell., vol. 27, no. 5, pp. 684–698, May 2005.
4. *Claudio Perez, Vanel Lazcano, Pablo Estevez, Claudio Held*. Real-time template based face recognition. International journal of Optomechatronics, 2009, Volume 3, Issue 1, 2009, pages 54-67
5. P. Tan, S. Lin, and L. Quan, "Subpixel photometric stereo," IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell., vol. 30, no. 8, pp. 1460–1471, Aug.2008.
6. P. Tan, S. Lin, and L. Quan, "Subpixel photometric stereo," IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell., vol. 30, no. 8, pp. 1460–1471, Aug. 2008.
7. *T. F. Cootes, G. J. Edwards, and C. J. Taylor*. Active appearance models. IEEE Trans. on Pattern Recognition and Machine Intelligence, 23(6):681–685, 2001.
8. *T. F. Cootes and C. J. Taylor*. Statistical models of appearance for medical image analysis and computer vision. In Proc. SPIE Medical Imaging 2001, volume 1, pages 236–248. SPIE, 2001.
9. *T.F. Cootes and C.J. Taylor*. Constrained active appearance models. Computer Vision, 2001. ICCV 2001. Proceedings. Eighth IEEE International Conference on, 1:748–754 vol.1, 2001.
10. *Iain Matthews and Simon Baker*. Active Appearance Models Revisited. International Journal of Computer Vision, Vol. 60, No. 2, November, 2004, pp. 135 — 164.

Надійшла до редколегії 11.12.13

УДК 681.3.062

Тарас Г. Вознюк, аспірант

Алгоритм побудови керуючого простору синтаксичних структур природномовних речень

У роботі запропоновано метод автоматичної побудови керуючого простору для природномовних речень. Розроблено протокол перевірки якості роботи алгоритму. Реалізацію алгоритму було перевірено на текстах з он-лайн енциклопедії Wikipedia.

Ключові слова: штучний інтелект, комп'ютерна лінгвістика, керуючий простір

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, пр-т.Глушкова 4д,
e-mail: taarraas@gmail.com

Taras G. Vozniuk, Postgraduate Student

An algorithm for constructing the control space of syntactic structures of natural language sentences

This paper proposes a method of automatic construction of the control space for natural language sentences. A quality control protocol algorithm was defined. The implementation of the algorithm was tested on texts of online encyclopedia Wikipedia.

Keywords: artificial intelligence, computational linguistics, control space

Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03680, Kyiv, Glushkova ave., 4d,
e-mail: taarraas@gmail.com

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Анісімов А.В.

В галузі комп'ютерної лінгвістики при аналізі природномовних текстів виникає проблема формалізації моделей представлення синтаксичних структур. В наш час існує декілька таких формальних моделей. Кожна з них має свої переваги та недоліки в сенсі гнучкості, потужності виразних засобів, простоти представлення тощо. Крім проблеми формалізації моделей, є ще проблема розробки алгоритмів, що б могли автоматично будувати ці структури цих моделей для природномовних текстів. В статті буде розглянуто алгоритм побудови структур для одного з можливих формалізмів - модель представлення керуючого простору синтаксичних структур речень природної мови. Вперше цей підхід було запропоновано в [1]. В основі цього способу лежить апарат керуючих просторів. Особливістю цієї моделі є те, що вона орієнтована на ПАРКС-системи.

В КП можна виділити базові елементи точки та зв'язки між ними. Зв'язків існує 2 види - предикативні та синтагматичні[2]. Предикативне представлення виражає залежність між синтаксичними об'єктами через поняття, що означає дію і зазвичай виражається за допомогою присудка. Синтагма - це поєднання двох синтаксичних об'єктів, з яких один є визначенням іншого, тому в моделі, що розробляється повинні повністю виражатися саме ці два види відношень. Якщо два об'єкти А і В вступають у відношення С, то ми виділяємо об'єкт (припустимо А), що викликає (ініціює, породжує) це відношення С, і об'єкт В, на який передається це відношення. Таким чином, виділяємо два види лінгвістичних зв'язків: від об'єкта-генератора відношення до саме цього відношенню і від відношення до підлеглого об'єкту. Перший вид зв'язку називаємо альфа-зв'язком (зв'язок генерації), другий - бета-зв'язок (зв'язок поширення)[1]

Важливим етапом побудови керуючого простору синтаксичних структур є попередній синтаксичний аналіз. Це досить складна задача, і їй присвячено досить багато наукових робіт, тому для реалізації запропонованого алгоритму було використано вже існуючу систему попереднього аналізу. При виборі було досліджено декілька існуючих систем синтаксичного аналізу(Stanford Parser[3], SVMTool[4], YamCha[5] та деякі інші). Проаналізувавши оцінки точності роботи даних

© Т. Г. Вознюк, 2014

вільнорозповсюджованих алгоритмів, а також зручність в інтеграції модулів між собою, була обрана розробка Стенфордського університету. Його точність для генерації дерев виведення речень 77%, для дерев підпорядкування 84.2%.

Результати роботи алгоритму були оцінені на текстах з вільної енциклопедії Вікіпедія[6]. Цей корпус природномовних текстів містить більше ніж 100гб текстів тільки англійською мовою. Тексти представлені 275 мовами, включаючи штучні мови накшталт есперанто. Також перевагою її використання є розмітка xml-тегами, що дає можливість виділяти в текстах перехресні посилання, певні типові шаблони опису тощо.

1. Опис розмітки Стенфордського парсеру

Стенфордський парсер може виконувати різні етапи лінгвістичного аналізу, в тому числі морфологічна розмітка, побудова дерев виведення, дерев підпорядкування, та інших структур. Наявність всіх цих модулів в одному пакеті спрощує їх інтеграцію та використання, оскільки всі вони використовують спільні структури даних. В пакет входять словники для обробки текстів англійською, китайською, німецькою та арабською мовами.

Так як цей парсер був використаний для реалізації алгоритму побудови керуючих просторів, нижче буде поданий короткий опис розмітки Стенфордського парсера.

Почнемо з модулю морфологічної розмітки. В ньому визначаються частини мови і граматичні характеристики слів у тексті, та присвоюється відповідний тег зі словника. Частовживані теги розміщені в таблиці 1. Повний список тегів можна знайти в [7].

Розглянемо результат роботи морфологічного парсера на прикладі:

He wrote a letter to his brother.

Результат:

He/PRP wrote/VBD a/DT letter/NN to/TO his/PRP$ brother/NN ./.

Тег	Опис
PRP	Особовий займенник (Personal pronoun)
PRP$	Присвійний займенник (Possessive pronoun)
VB	Дієслово, початкова форма (Verb, base form)
VBD	Дієслово, минулий час (Verb, past tense)
DT	Артикль (Determiner)
NN	Іменник, однина(Noun, singular or mass)

Таблиця 1. Розшифрування тегів модуля морфологічної розмітки.

Тобто тут слово wrote має тег VBD, а тому є дієсловом в минулому часі. Аналогічно слово brother має тег NN, тому є іменником, і ці результати співпадають з очікуваними.

Тепер розглянемо модуль побудови дерева виведення. В ньому генерується класичне дерево виведення[8]. Для запропонованого раніше прикладу алгоритм повертає наступний текст:

```
(ROOT
  (S
    (NP (PRP He))
    (VP (VBD wrote)
      (NP (DT a) (NN letter))
      (PP (TO to)
        (NP (PRP$ his) (NN brother))))
    (. .)))
```

Тут з’являється ряд нетерміналів, що відповідають певним граматичним сполученням слів (S - речення, NP - іменникова група тощо), однак надалі ці типи використовуватись не будуть, важливі лише рівні ієархії. В одному рівні ієархії знаходяться слова та словосполучення, що напряму виводяться з одного нетерміналу. В наведеному прикладі слова his і brother утворюють іменникову групу (NP), а тому знаходяться на одному рівні. Також словосполучення “a letter” та “to his brother” також утворюють одну групу, тому є на одному рівні.

Нарешті розглянемо модуль знаходження граматичних відношень Стенфордського

парсеру[9]. Результатом його роботи є трійки - імя залежності, головне та залежне слово.

Для того ж самого прикладу маємо:

nsubj(wrote-2, He-1)
root(ROOT-0, wrote-2)
det(letter-4, a-3)
dobj(wrote-2, letter-4)
prep(wrote-2, to-5)
poss(brother-7, his-6)
pobj(to-5, brother-7)

Розлянемо перший рядок. Ім'я залежності - nsubj. Воно відповідає за зв'язок підмета і присудка в простому реченні. Головне слово - wrote з порядковим номером токена в реченні 2. Слід пам'ятати, що це не порядковий номер слова, оскільки крім слів токенами є також розділові знаки. Детальний опис розмітки, включаючи розшифровку всіх імен відношень, знаходиться в [10].

2. Побудова керуючого простору

Важливим етапом побудови будь-якого алгоритму є визначення структури даних, з якими він буде працювати. Правильно обрані структури даних підвищують зручність використання, наочність, ефективність роботи по швидкодії та пам'яті. Тому спочатку будуть розглянуті структури даних з якими оперує алгоритм, а потім сам алгоритм.

2.1 Структури даних

Довільний керуючий простір сам по собі гарно формалізований, тому побудова структур даних для нього була б тривіальною. Проте ми працюємо з КП синтаксичних структур природної мови, що розширює наші знання про нього. Тому скориставшись цією інформацією можна спроектувати більш ефективні структури даних. Спроектовані структури даних КП повинні відображати його зміст. Тому проведемо декомпозицію КП і формалізуємо його.



Мал. 1 UML діаграма структури даних керуючого простору

Керуючий простір складається з елементів та зв'язків між ними.

Спочатку розглянемо представлення *зв'язків*. Як було вказано вище, зв'язки бувають 2 типів - альфа та бета. Окрім цього типовим для КП синтаксичних структур є ще один складений звязок - кільцевий альфа-бета зв'язок. Тому для зручності представлення даних виділимо його в окремий тип зв'язку. Інших атрибутів в керуючому просторі зв'язок не має.

Зв'язок об'єднує 2 елементи утворюючи новий елемент керуючого простору. Елементи утворені таким чином будемо називати *складеними.* Інформація про тип зв'язку, а також посилання на елементи, що звязуються, будуть зберігатися в таких елементах. Крім цього є елементи КП, що вказують на одне слово вхідного речення. Такі елементи будемо називати *базовими.*

Кожен елемент керуючого простору має деяке синтаксичне та семантичне значення. Синтаксичне значення базових елементів визначається частиною мови слова, якому воно відповідає. Синтаксичне значення складених елементів визначається типом цього словосполучення - іменникова група, просте речення тощо. Частину мови і тип словосполучення можна задати деяким тегом. Набір можливих тегів скінченний, оскільки для кожної мови набір частин мови та типових

Мітка Stanford Parser	Тип зв'язку КП	Напрямок
attr	альфа	зворотній
csubj	альфа	прямий
acomp	бета	прямий
agent	бета	прямий
amod	кільцевий альфа-бета	зворотній
poss	кільцевий альфа-бета	прямий

Таблиця 2. Фрагмент таблиці співвідношення типів граматичного зв'язку Stanford Parser до зв'язків КП

синтаксичних структур, які його утворюють, є скінченним.

Семантичне значення елементу визначимо деяким головним словом.

UML діаграма для цієї структури даних зображена на мал.1.

2.2 Алгоритм побудови керуючого простору

Будемо вважати що входом алгоритму є одне речення природномовного тексту. Задача побудови КП для довільного тексту зводиться до розбиття тексту на речення і побудови КП для них окремо.

Для даного речення спочатку виконується попередній синтаксичний аналіз з метою отримання морфологічної розмітки, дерева виведення та дерева підпорядкування.

Головна функція алгоритму проходиться рекурсивно по дереву виведення починаючи з кореня. Її псевдокод можна записати так:

```
Базовий_елемент побудуватиКП(Дерево р)
    якщо р - листок
        повернути новий Базовий_елемент з синтаксичним тегом отриманим з морфологічної розмітки та словом-терміналом для цього листку
    інакше
        сини := список синів вершини р
        для_кожного син з сини
            керуючіПростори+=побудуватиКП(син)
        повернути об'єднатиДекількаКПВОдин(керуючіПростори)
```

За допомогою цієї фукції задача побудови керуючого простору довільного речення зводиться до задачі об'єднання вже створених керуючих просторів частин речення функцією об'єднатиДекількаКПВОдин. Для цього необхідно визначити зв'язки між вже створеними частинами керуючого простору, та встановити рівні ієархії:

```
об'єднатиДекількаКПВОдин(Базовий_елемент кп[])
    доки кількість елементів в кп>1
        для і від n до 2, де n - кількість елементів в кп
            якщо існує звязок в граматичних відносинах між словами кп[i] і кп[i-1]
                замінити кп[i] та кп[i-1] простором об'єднати2КП(кп[i], кп[i-1], тип граматичного звязку)
```

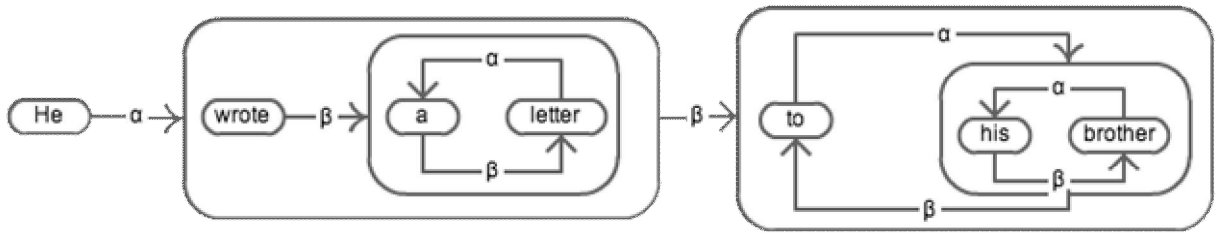
Ця функція намагається об'єднати справа наліво 2 керуючих простори, що стоять поряд і між якими є граматичний зв'язок до тих пір, поки не будуть об'єднані всі простори в один.

Таким чином задача об'єднання довільного набору керуючих просторів зводиться до задачі об'єднання двух керуючих просторів з відомим граматичним звязком.

Цей новий керуючий простір буде представлений Складеним елементом, і він буде включати в себе ці 2 КП. Тому залишилося встановити лише тип зв'язку, головне слово та синтаксичну мітку новоутворего КП.

Так як кожному граматичному зв'язку відповідає певний зв'язок керуючого простору(таблиця 2), то визначення типу зв'язку між цими двума елементами робиться тривіально.

Також граматичний зв'язок вказує на головне і залежне слова. Тому головним словом нового елементу КП буде головне слово головного КП за граматичним зв'язком.



Мал. 2. Діаграма для КП згенерованого програмою

Нарешті синтаксичну мітку визначаємо як синтаксичну мітку вершини дерева виведення на якій ці КП утворюються.

3. Оцінка результатів роботи алгоритму

Розлянемо результат роботи реалізованого алгоритму на прикладі:

He wrote a letter to his brother.

Результатом роботи є:

A:wrote:ROOT(He:NP, AB:wrote:VP(B:wrote:VP(wrote:VBD, AB:letter:NP(a:DT, letter:NN)), AB:brother:PP(to:TO, AB:brother:NP(brother:NN, his:PRP$))))

Опишемо процедуру тестування, за допомогою якої можна отримати якісні показники роботи алогоритму на великих корпусах текстів. Керуючий простір складається з елементів та зв'язків між ними, тому нехай елементарною структурою, правильність якої ми будемо визначати, буде тип зв'язку та 2 компоненти, які він зв'язує. Окремо зберемо статистику правильних(true positive, tp), неправильних(false positive, fp), а також не знайдених залежностей(false negative, fn) по кожному з типів звязків керуючого простору. В окремий тип звязку внесемо кільцевий альфа-бета зв'язок, оскільки в керуючому просторі він несе деяку додаткову семантику. Також отримаємо загальну статистику по всім типам зв'язків.

Знайшовши кількість цих зв'язків можна визначити міру точності(precision), повноту, та F1-міру за наступними формулами:

$$\text{Precision} = \frac{tp}{tp + fp}$$

$$\text{Recall} = \frac{tp}{tp + fn}$$

$$F - 2 \cdot \frac{\text{precision} \cdot \text{recall}}{\text{precision} \quad \text{recall}}$$

Результати тестування на деякій підмножині документів енциклопедії Wikipedia представлені в таблиці 3.

	Міра точності (Precision)	Покриття (Recall)	F1-міра
Кільцеві альфа-бета звязки	77.0	91.9	83.8
Альфа звязки	85.7	82.3	84.0
Бета звязки	96.3	71.2	81.9
Разом	78.8	89.3	83.2

Таблиця 3. Результати тестування якості роботи алгоритму побудови керуючого простору

Висновки

В роботі описаний метод автоматичної побудови керуючого простору синтаксичних структур природної мови. В результаті тестування алгоритму було отримано високі показники якості роботи алгоритму. Проте алгоритм не можна порівнювати з іншими, оскільки це перший алгоритм, що дозволяє автоматично отримувати структури формальної синтаксичної моделі такого типу.

Подальша робота полягає в аналізі типових помилок в результатах роботи алгоритму та

знаходженні шляхів їх уникнення. Також необхідно встановити оцінки складності роботи алгоритму по швидкодії та пам'яті, та проаналізувати можливості їх покращення.

Список використаних джерел

1. Anisimov A. V. Control space of natural-language syntactic structures// Cybernetics, May–June, 1990, Volume 26, Issue 3, p.p. 319-328

2. Reformatorskiy A. A. Introduction in linguistics. — Moscow. : Prosveshchenie, 1937.— 542 c. (in Russian)

3. Richard Socher, John Bauer, Christopher D. Manning and Andrew Y. Ng. 2013. Parsing With Compositional Vector Grammars. Proceedings of ACL 2013

4. Jesús Giménez and Lluís Márquez. SVMTool: A general POS tagger generator based on Support Vector Machines. // Proceedings of the 4th International Conference on Language Resources and Evaluation (LREC'04). Lisbon, Portugal. 2004.

5. Taku Kudo, Yuji Matsumoto, Fast Methods for Kernel-Based Text Analysis, ACL 2003

6. Wikipedia Project: http://www.wikipedia.org/

7. Alphabetical list of part-of-speech tags used in the Penn Treebank Project// http://www.ling.upenn.edu/courses/Fall_2003/ling001/penn_treebank_pos.html

8. Chomsky N. Syntactic Structures. — The Hague: Mouton, 1957. (Chomsky N. Syntactic Structures. — De Gruyter Mouton, 2002. — ISBN 3-11-017279-8.)

9. Marie-Catherine de Marneffe, Bill MacCartney and Christopher D. Manning. 2006. Generating Typed Dependency Parses from Phrase Structure Parses. In LREC 2006.

10. Marie-Catherine de Marne'e and Christopher D. Manning, Stanford typed dependencies manual, September 2008, Revised for Stanford Parser v. 2.0.4 in November 2012

Надійшла до редколегії 16.12.13

УДК 519.816 (075.8)

Волошин О.Ф.[1], д.т.н., проф.,
Лавер В.О.[2], аспірант

Аксіоматична характеризація нечітких узагальнень методів розподілу витрат

Розглядається застосування теорії нечітких множин до класичної задачі розподілу витрат. Пропонуються нечіткі узагальнення класичних методів розподілу та дається їхня аксіоматична характеризація.

Ключові слова: задачі розподілу, методи розподілу, нечіткі моделі та методи.

[1]Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, пр-т. Глушкова, 4д,
e-mail: olvoloshyn@ukr.net
[2]Ужгородський національний університет, 88000, м. Ужгород, вул. Університетська, 14
e-mail: v.laver@gmail.com

Статтю представив д.т.н. Кудін В.І.

O.F.Voloshyn[1], Dr.Sci., Prof.,
V.O. Laver[2], PhD student

Axiomatic characterization of the fuzzy rationing methods

The application of the fuzzy sets theory to the classical rationing problem is being considered. Characterization of the fuzzy generalizations of the classical rules is given.

Key Words: rationing, rationing method,. fuzzy sets.

[1]Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03680, Kyiv, Glushkova av., 4d,
e-mail: olvoloshyn@ukr.net

[2]Uzhgorod National University, 88000, Uzhgorod, Universitetska str., 14,
e-mail: v.laver@gmail.com

Вступ

Проблеми розподілу (ресурсів, витрат, доходів, прибутків) в сучасному глобалізованому світі виходять на одне із чільних місць в системі пріоритетів цивілізації. Сучасний етап вивчення проблем розподілу починається в 70-х роках минулого сторіччя у зв'язку з відомими соціально-економічними потрясіннями у багатьох країнах світу. Однією з перших робіт, присвячених цій темі, була стаття Б. О'Ніла [1], в якій досліджувались проблеми наслідування спадку на основі матеріалів із Талмуда. Аналізу проблем банкрутства через призму теорії кооперативних ігор була присвячена і ключова стаття Р. Аумана (лауреата премії ім. А.Нобеля Академії наук Швеції з економіки за 2005р.) та М. Машлера «Теоретико-ігровий аналіз проблеми банкрутства із Талмуда» [2]. Серед інших робіт варто згадати також статтю П. Янга [3], в якій проблема розподілу досліджується через призму оподаткування. Методи розподілу та їхня аксіоматична характеризація досліджується і розробляється такими вченими як Е. Мулен, К. Герреро, В. Томпсон та ін. [1-9]. Сучасні результати в моделюванні розподілу витрат (прибутку) викладено в огляді В.Томпсона [4].

Постановка задачі

Задачу розподілу будемо визначати трійкою (N,c,b) [5], де N – скінченна множина агентів, невід'ємне дійсне число c визначає кількість ресурсів (величину витрат або прибутку), яку необхідно розподілити, вектор $b=(b_i)_{i\in N}$ визначає для кожного агента i його заявку b_i (наявну суму грошей), причому $\sum_{i=1}^{n} b_i > 0$ та

$$0 \le b_i, \forall i \in N : 0 \le c \le \sum_{i=1}^{n} b_i. \qquad (1)$$

Розв'язком задачі розподілу є вектор $x=(x_i)_{i\in N}$, який ставить у відповідність кожному агенту i його частку x_i, причому

$$0 \le x_i \le b_i, \qquad (2)$$

$$\forall i \in N : \sum_{i\in N} x_i = c. \qquad (3)$$

Метод розподілу визначається відображенням r, яке кожній трійці (N,c,b) ставить у відповідність вектор витрат $x=(x_i)_{i\in N}$, $x=r(N,c,b)$.

©О.Ф.Волошин, В.О.Лавер, 2014

Існують такі чотири основні методи розподілу [5,6]:

- Пропорційний податок:

$$x_i \equiv pr_i(N,c,b) = \frac{c}{\sum_{i=1}^{n} b_i} \cdot b_i, \forall i = \overline{1,n};$$

- Подушний податок (як узагальнення методу рівних витрат):

$x_i \equiv ul_i(N,c,b) = \min\{\lambda, b_i\}, \forall i = \overline{1,n},$, де λ - розв'язок $\sum_{i=1}^{n} \min\{\lambda, b_i\} = c$;

- Рівневий податок (узагальнення методу рівних прибутків):

$x_i \equiv ug_i(N,c,b) = b_i - \min\{\lambda, b_i\}, \forall i = \overline{1,n},$, де λ - розв'язок $\sum_{i=1}^{n} \min\{\lambda, b_i\} = \sum_{i=1}^{n} b_i - c$;

- Талмудичний метод (відповідає N-ядру кооперативної гри [5]): $x_i \equiv tal_i(N,c,b) =$

$$= ug_i\left(N, \min\left\{c, \sum_{i=1}^{n} b_i/2\right\}, b_i/2\right) -$$

$$- ul_i\left(N, \max\left\{c - \sum_{i=1}^{n} b_i/2, 0\right\}, b_i/2\right), \forall i = \overline{1,n}.$$

Вище застосовано наступні позначення: ul від англ. "uniform losses", ug - "uniform gains", pr – "proportional", tal – Talmudic method. Наведені методи (будемо називати їх «чіткими», на противагу «нечітким»[5,7]) не позбавлені певних недоліків [5,8]. Так, при розподілі за подушним податком може виникнути ситуація, при якій частка витрат деякого агента буде рівною його запасу грошей і він може відмовитись від кооперації. З іншого боку, при розподілі витрат згідно рівневого податку може виникнути ситуація, в якій деякий агент буде звільнений від оподаткування і максимальна коаліція розпадеться.

При нечіткому узагальненні методу розподілу витрат $r(N,c,b)$ приходимо до розв'язання такої параметричної (відносно параметру λ, $0 \le \lambda \le 1$) задачі [9]:

$$\lambda \to \max, \quad (4)$$

$$\mu_k(x_k) \ge \lambda, \forall k \in N; \quad (5)$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = c; \quad (6)$$

$$x_k \ge 0, k \in N. \quad (7)$$

Тут N_1, N_2 ($N_1 \cup N_2 = N$) – розбиття множини агентів, відповідні частки витрат яких є правосторонніми нечіткими числами трапецевидного типу, $x_i = (\underline{x}_i, \hat{x}_i), \forall i \in N_1$, і $x_j = (\hat{x}_j, \overline{x}_j), \forall j \in N_2$, з функціями належності $\mu_k, \forall k \in N$, де $\hat{x}_k = r(N,c,b)$ для всіх $k \in N$, $\sum_{i=1}^{n} \hat{x}_i = c$. Відмітимо, що трапецевидний тип функцій належності більш адекватно описує економічні пріоритети агентів у порівнянні з трикутними. Без зменшення загальності вважаємо, що агенти впорядковані за зростанням їхніх запасів грошей.

Нехай вектор $(x_1, x_2, ..., x_n; \lambda)$ є розв'язком задачі (4)-(7). Тоді вектор $(x_1, x_2, ..., x_n)$ називається розподілом витрат при нечіткому узагальненні методу $r(N,c,b)$, а параметр λ вказує міру узгодженості максимальної коаліції.

В загальному випадку рішення про віднесення конкретного агента до підгрупи N_1 чи N_2 залишається на розсуд особи, що приймає рішення (ОПР). Зокрема, в якості критеріїв можуть бути розглянуті такі правила:

- У випадку пропорційного податку до групи N_1 відносимо всіх агентів, для яких $b_i / \sum_{i=1}^{n} b_i < R$, де R – деяке порогове значення, що встановлюється ОПР. Агенти, для яких дана нерівність не виконується, включаються у групу N_2;

- У випадку подушного податку до групи N_1 відносимо всіх агентів, для яких подушний податок рівний їхньому запасу грошей ($\hat{x}_i = b_i$), всіх інших агентів включаємо у групу N_2;

- У випадку талмудичного методу до групи N_1 віднесемо агентів, для яких рівневий податок для половинних початкових запасів грошей менший за подушний. Всіх інших агентів відносимо до групи N_2.

Для рівневого податку алгоритм дещо буде іншим. Так, в групу N_1 включаємо всіх агентів, частки витрат яких рівні нулю, і встановлюємо для них субсидії. Витрати і субсидії діляться серед агентів, що залишились – тобто тих, що належать групі N_2.

Пропонується такий алгоритм для пошуку часток витрат агентів для нечіткого узагальнення методу розподілу r:

1. Знаходяться частки витрат агентів $\hat{x}_i = r(N,c,b)$ за методом розподілу *r;*

2. Множина агентів за певним правилом поділяється на дві групи: N_1 і N_2;

3. Встановлюються величини поступок для агентів першої α_i $(i \in N_1)$ і другої β_j $(j \in N_2 = N \setminus N_1)$ груп – на скільки відсотків від величини $\hat{x}_i$ агенти першої групи згідні заплатити менше, а агенти другої – більше за величину, що приписує їм метод розподілу *r*. Знаходимо $\underline{x}_i = (1-\alpha_i)\hat{x}_i, i \in N_1,$ і $\bar{x}_j = (1+\beta_j)\hat{x}_j, j \in N_2$;

4. Величини витрат агентів розглядаються як правосторонні нечіткі числа трапецевидної форми, відповідно $x_i = (\underline{x}_i, \hat{x}_i)$ з функцією належності $\mu_i(x_i)$ $(i \in N_1)$ та $x_i = (\hat{x}_i, \bar{x}_i)$ $(j \in N_2)$ з функцією належності $\mu_j(x_j)$;

5. Формується задача лінійного програмування виду (4)-(7), з якої знаходиться оптимальний розподіл $(x_1, x_2, ..., x_n)$ і ступінь задоволеності агентів цим розподілом – λ $(0 \le \lambda \le 1)$. Якщо дана величина не задовольняє ОПР, переходимо до п.3. Якщо ж задовольняє, то роботу алгоритму завершено.

Оскільки на кожному кроці алгоритму потрібно розв'язувати задачу виду (4)-(7), то виникає питання про існування її розв'язку. Відповідь на це питання дає таке твердження.

Твердження 1. Розв'язок $(x_1, x_2, ..., x_n; \lambda)$ задачі (4)-(7) завжди існує, причому рівень узгодженості максимальної коаліції $\lambda \in (0,1)$.

Доведення. Для доведення існування розв'язку задачі (4)-(7) необхідно показати, що множина допустимих розв'язків цієї задачі не порожня і цільова функція обмежена зверху.

Розглянемо вектор $(x_1, x_2, ..., x_n; \lambda)$. Покладемо $x_k = \hat{x}_k$ для всіх $k \in N, \lambda = 0$. Оскільки $\sum_{i=1}^{n} \hat{x}_i = c$, а функції належності агентів невід'ємні за означенням, даний розв'язок буде допустимим. Отже, множина допустимих розв'язків не є порожньою. А оскільки $(0 \le \lambda \le 1)$ за означенням, то цільова функція задачі (4)-(7) буде обмеженою (як зверху, так і знизу). Отже, розв'язок задачі (4)-(7) існує завжди.

Покажемо, що $(0 < \lambda < 1)$. Припустимо, що $\lambda = 1$. Це означає, що всі функції належностей агентів також рівні 1. Це можливо тільки, якщо $x_i = \underline{x}_i$ для всіх $i \in N_1$ і $x_j = \hat{x}_j$ для всіх $j \in N_2$. Але в цьому випадку не виконується рівність $\sum_{i=1}^{n} x_i = c$, так як $\underline{x}_i < \hat{x}_i$ для всіх $i \in N_1$. Отже, такий розв'язок не є допустимим, тому $\lambda < 1$.

Доведемо, що $\lambda > 0$. Припустимо, що вектор $(x_1, x_2, ..., x_n; \lambda)$ є розв'язком задачі (4)-(7) і $\lambda = 0$. Це означає, що не існує допустимого розподілу, для якого би виконувалась нерівність $\lambda > 0$.

Нехай ε_1 - довільне число з інтервалу $(0, x_{N_1})$, де $x_{N_1} = \min_{i \in N_1}(\hat{x}_i - \underline{x}_i)$, а ε_2 - довільне число з інтервалу $(0, x_{N_2})$, де $x_{N_2} = \min_{i \in N_2}(\bar{x}_i - \hat{x}_i)$. Покладемо $x_i = \hat{x}_i - \varepsilon_1$ для всіх $i \in N_1$ і $x_j = \hat{x}_j + \varepsilon_2$ для всіх $j \in N_2$. Оскільки $\underline{x}_i < x_i < \hat{x}_i$, $\hat{x}_j < x_j < \bar{x}_j$, то в даних точках функції належностей агентів не рівні нулю. Залишилось перевірити виконання умови $\sum_{i=1}^{n} x_i = c$.

Маємо:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i \in N_1}(\hat{x}_i - \varepsilon_1) + \sum_{j \in N_2}(\hat{x}_j + \varepsilon_2) = \sum_{i=1}^{n} \hat{x}_i - n_1\varepsilon_1 + n_2\varepsilon_2,$$

де $n_1 = |N_1|$- потужність першої підмножини, $n_2 = |N_2|$ - другої. Оскільки ε_1 та ε_2 довільні, виберемо їх так, щоб виконувалась рівність: $-n_1\varepsilon_1 + n_2\varepsilon_2 = 0$. Отримуємо $\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} = \frac{n_1}{n_2}$. При даних значеннях відхилень рівність $\sum_{i=1}^{n} x_i = c$ виконується.

Це означає, що вектор $(x_1, x_2, ..., x_n; \lambda)$ є допустимим розв'язком, причому для нього $\lambda > 0$. Отримуємо протиріччя, отже, остаточно маємо $\lambda > 0$. Твердження доведено.

Дослідження розв'язку задачі (4)-(7)

Оскільки функції належності агентів є правосторонніми нечіткими числами трапецевидного типу, то позначимо через x_k^L лівий кінець інтервалу нечіткості відповідного нечіткого числа, а через x_k^R - правий кінець. Тоді бажана частка витрат агента *k* представляється нечітким числом $(x_k^L, x_k^R), \forall k \in N$. Сума бажаних часток витрат агентів також буде нечітким числом: $\left(\sum_{k=1}^{n} x_k^L, \sum_{k=1}^{n} x_k^R\right)$. Функція належності цього нечіткого числа визначається за формулою:

$$\mu_\Sigma(z)=\begin{cases}1, z\le\sum_{k=1}^n x_k^L;\\ \dfrac{\sum_{k=1}^n x_k^R - z}{\sum_{k=1}^n x_k^R-\sum_{k=1}^n x_k^L}, \sum_{k=1}^n x_k^L\le z\le\sum_{k=1}^n x_k^R;.\\ 0, z\ge\sum_{k=1}^n x_k^R.\end{cases}$$

Позначимо $\lambda_0=\mu_\Sigma(c)=\dfrac{\sum_{k=1}^n x_k^R-c}{\sum_{k=1}^n x_k^R-\sum_{k=1}^n x_k^L}$.

Твердження 2. $\lambda=\lambda_0$ є розв'язком задачі (4)-(7). При цьому чіткі частки витрат агентів визначаються за формулою: $x_k=x_k^R-\lambda_0\left(x_k^R-x_k^L\right),\ \forall k\in N$. (8).

Доведення. Покажемо, що обмеження задачі (4)-(7) задовольняються. З огляду на вигляд функцій належності агентів, обмеження (5) може бути записане у вигляді $\dfrac{x_k^R-x_k}{x_k^R-x_k^L}\ge\lambda,\ \forall k\in N$.

Підставимо $x_k=x_k^R-\lambda_0\left(x_k^R-x_k^L\right)$:

$$\frac{x_k^R-x_k^R+\lambda_0\left(x_k^R-x_k^L\right)}{x_k^R-x_k^L}=\lambda_0.$$

Отже, обмеження (5) виконуються для $\forall k\in N$ як обмеження-рівності.

Підставимо (8) у обмеження (6). Маємо:

$$\sum_{k=1}^n\left[x_k^R-\lambda_0\left(x_k^R-x_k^L\right)\right]=\sum_{k=1}^n x_k^R-\lambda_0\sum_{k=1}^n\left(x_k^R-x_k^L\right)=$$

$$=\sum_{k=1}^n x_k^R-\frac{\sum_{k=1}^n x_k^R-c}{\sum_{k=1}^n x_k^R-\sum_{k=1}^n x_k^L}\left(\sum_{k=1}^n x_k^R-\sum_{k=1}^n x_k^L\right)=$$

$$=\sum_{k=1}^n x_k^R-\sum_{k=1}^n x_k^R+c=c.$$

Отже, обмеження (6) також виконуються.

Оскільки $\lambda_0=\dfrac{\sum_{k=1}^n x_k^R-c}{\sum_{k=1}^n x_k^R-\sum_{k=1}^n x_k^L}$, то очевидним є виконання обмеження $0<\lambda_0<1$. Покажемо, що обмеження (7) також виконуються.

Розглянемо деякого агента k, для якого $x_k=x_k^R-\lambda_0\left(x_k^R-x_k^L\right)$. Можливі два випадки: $k\in N_1$ і $k\in N_2$. Для $k\in N_1$ маємо: $x_k=\hat{x}_k-\lambda_0\left(\hat{x}_k-(1-\alpha)\hat{x}_k\right)=\hat{x}_k-\alpha\lambda_0\hat{x}_k=$ $=\hat{x}_k(1-\alpha\lambda_0)>0$, оскільки $\alpha<1, \lambda_0<1$.

Для $k\in N_2$ маємо: $x_k=(1+\beta)\hat{x}_k-\lambda_0\left((1+\beta)\hat{x}_k-\hat{x}_k\right)=(1+\beta)\hat{x}_k-\beta\lambda_0\hat{x}_k=$ $=\hat{x}_k(1+\beta-\beta\lambda_0)>0$.

Тобто, обмеження (7) виконуються для $\forall k\in N$. Це означає, що запропонований розв'язок є допустимим. Покажемо його оптимальність.

Припустимо, що існує деяке $\lambda>\lambda_0$, яке є розв'язком задачі (4)-(7). Це означає, що всі обмеження (5) виконуються строго відносно λ_0:

$$\frac{x_k^R-x_k}{x_k^R-x_k^L}\ge\lambda>\lambda_0,\ \forall k\in N. \qquad (9)$$

З (9) випливає, що для $\forall k\in N$ виконується нерівність $x_k<x_k^R-\lambda_0\left(x_k^R-x_k^L\right)$. Підсумовуючи ці нерівності по $k=\overline{1,n}$ і враховуючи (6), отримуємо, що $c<c$. Маємо протиріччя.

Отже, $\lambda=\lambda_0$ є розв'язком задачі (4)-(7). Твердження доведено.

Дослідження властивостей розв'язків

Для чітких методів розподілу є добре розроблена система аксіом, які їх характеризують [7]. Однією з таких аксіом є аксіома «рівного ставлення до рівних».

Говорять, що метод r задовольняє аксіомі Рівного Ставлення до Рівних, якщо для будь-яких двох агентів i та j з рівності їх початкових запасів випливає рівність їх часток витрат ($b_i=b_j\Rightarrow x_i=x_j, \forall i,j\in N$).

Твердження 3. Якщо деякий чіткий метод розподілу витрат задовольняє аксіомі Рівного Ставлення до Рівних, то його нечітке узагальнення також задовольняє цій аксіомі.

Доведення. Розглянемо деяких двох агентів $i,j\in N$, для яких $b_i=b_j$. Оскільки чіткий метод розподілу витрат задовольняє аксіомі Рівного Ставлення до Рівних, то для цих агентів виконується рівність $\hat{x}_i=\hat{x}_j$. З останньої рівності випливає, що $x_i^L=x_j^L$ і $x_i^R=x_j^R$. А отже, враховуючи формулу (8), виконується рівність $x_i=x_j$. Тобто нечітке узагальнення початкового методу розподілу витрат також

задовольняє аксіомі Рівного Ставлення до Рівних. Твердження доведено.

Говорять, що метод r задовольняє аксіомі Узгодженості з Нулем (УзН), якщо агент з нульовим запасом грошей не впливає на розподіл витрат серед інших агентів:

$$b_i = 0 \Rightarrow r(N,c,b)_{[N\setminus i]} = r\left(N\setminus i, c, b_{[N\setminus i]}\right) \forall c, N, b, i.$$

Очевидно, що нечіткі узагальнення методів розподілу витрат, що задовольняють аксіомі (УзН), також задовольняють цій аксіомі.

Говорять, що метод r задовільняє аксіомі Незалежності від Шкали, якщо виконується умова: $r(N,kc,kb) = kr(N,c,b), k > 0$. Дійсно, частка витрат кожного агента не повинна залежати від того, в якій валюті виражені витрати.

Твердження 3. Якщо деякий чіткий метод розподілу витрат задовольняє аксіомі Незалежності від Шкали, то його нечітке узагальнення також задовольняє цій аксіомі.

Доведення. Нехай для чіткого методу виконуються співвідношення: $\hat{x}_i' = k\hat{x}_i, \forall i \in N$, де $k > 0$. Маємо:

$$\hat{x}_i'^{L} = (1-\alpha)\hat{x}'_i = k(1-\alpha)\hat{x}_i = k\hat{x}_i^{\,L}, \forall i \in N_1;$$
$$\hat{x}_i'^{L} = \hat{x}'_i = k\hat{x}_i = k\hat{x}_i^{\,L}, \forall i \in N_2;$$
$$\hat{x}_i'^{R} = \hat{x}'_i = k\hat{x}_i = k\hat{x}_i^{\,R}, \forall i \in N_1;$$
$$\hat{x}_i'^{R} = (1+\beta)\hat{x}'_i = k(1+\beta)\hat{x}_i = k\hat{x}_i^{\,R}, \forall i \in N_2.$$

Отже, $\hat{x}_i'^{R} = k\hat{x}_i^{\,R}, \hat{x}_i'^{L} = k\hat{x}_i^{\,L}, \forall i \in N$. Для λ_0 маємо:

$$\lambda_0' = \frac{\sum_{k=1}^{n} x_k'^{R} - c'}{\sum_{k=1}^{n} x_k'^{R} - \sum_{k=1}^{n} x_k'^{L}} = \frac{k\sum_{k=1}^{n} x_k^{R} - kc}{k\sum_{k=1}^{n} x_k^{R} - k\sum_{k=1}^{n} x_k^{L}} = \frac{\sum_{k=1}^{n} x_k^{R} - c}{\sum_{k=1}^{n} x_k^{R} - \sum_{k=1}^{n} x_k^{L}} = \lambda_0.$$

Отже, для довільного агента i отримуємо: $x_i' = x_i'^{R} - \lambda_0'\left(x_i'^{R} - x_i'^{L}\right) = kx_i^{R} - k\lambda_0\left(x_i^{R} - x_i^{L}\right) = kx_i$. Твердження доведено.

Метод r задовольняє аксіомі Впорядкування, якщо виконується умова: $b_i \le b_j \Rightarrow x_i \le x_j$ для $i, j \in N$.

Твердження 4. Якщо деякий чіткий метод розподілу витрат задовольняє аксіомі Впорядкування, то його нечітке узагальнення також задовольняє цій аксіомі.

Доведення. Маємо, що $b_i \le b_j \Rightarrow \hat{x}_i \le \hat{x}_j$ для $i, j \in N$. Тоді для цих агентів $x_i^{L} \le x_j^{L}$, $x_i^{R} \le x_j^{R}$. Розглянемо різницю $x_j - x_i = x_j^{R} - \lambda_0\left(x_j^{R} - x_j^{L}\right) -$ $- x_i^{R} + \lambda_0\left(x_i^{R} - x_i^{L}\right) = \left(x_j^{R} - x_i^{R}\right)(1-\lambda_0) + \lambda_0\left(x_j^{L} - x_i^{L}\right) \ge 0$.

А отже $x_i \le x_j$. Твердження доведено.

Висновки

Основною ідеєю нечітких узагальнень методів розподілу, що пропонуються, є поділ множини агентів на дві підмножини, де агенти із першої підмножини платять менше своєї частки витрат, а агенти із другої - покривають утворений дефіцит. Дана ідея фактично використовується у прогресивному оподаткуванні. Оскільки розв'язок нечіткої задачі розподілу витрат завжди існує і може бути описаний аналітично, то такі узагальнення є придатними для застосування на практиці. Більше того, вони дозволяють враховувати не тільки нечіткість реальних даних, але й нерівність між агентами.

Список використаних джерел

1. *O'Neill B.* A problem of rights arbitration from the Talmud. - Mathematical Social Sciences, 2, 1982. - pp. 345-371.
2. *Aumann R. and Mashler M.* Game theoretic analysis of a bankruptcy problem from the Talmud. - Journal of Economic Theory, 36, 1985, - pp. 195-213.
3. *Young, H.P.* Distributive justice in taxation. - Journ. of Econ.Theory, 1988, - pp. 321-335.
4. *William Thomson.* Axiomatic and game-theoretic analysis of bankruptcy and taxation problems: an update, Working Papers 578, University of Rochester, 2013. – pp.157-182.
5. *Voloshyn O., Mashchenko S.* Decision making models and methods.. - К.: «Taras Shevchenko National University of Kyiv», 2010. – 336 с. (in Ukr.).
6. *Herrero, C. and Villar A.* The Three Musketeers: four classical solutions to bankruptcy problems. - Mathematical Social Sciences, vol.42(3), 2001. - pp. 307-328.
7. *Moulin, H.* Axiomatic Cost and Surplus-Sharing // Working Papers 2001-06, Rice University, Department of Economics, 2001. – 152p.
8. *Moulin, H.* Axioms of cooperative decision making.- M: Mir, 1991. – 464p. (in Rus.).
9. *Voloshyn O., Laver V.* Generalization of Distributing Methods for Fuzzy Problems // "Information Theories & Applications", Vol. 20, Number 4, 2013. – P. 303-310.

Надійшла до редколегії 15.10.2013

УДК 519.21

Демченко І.Ю., асп.
Чечельницький О.А., к. ф.-м. н., доц.,

Стаціонарні характеристики мережевої моделі послідовної структури

Досліджено стаціонарний режим мережевої моделі послідовної структури. Отриманий ергодичний розподіл процесу обслуговування.

Ключові слова: мережева модель, двовимірний пуассонівський вхідний потік, ергодичний розподіл.

[1-2] Київський національний університет імені Тараса Шевченка,03680, Київ, пр-т Глушкова 4д
E-mail: irinka_8891@mail.ru, alex_che@voliacable.com

Demchenko I.Y., a Ph.D student
Chechelnitsky O.A., Ph.D, Ass.Prof.

Stationary characteristics of the network model of a consistent structure

The stationary regime of the network model of a consistent structure is investigated here .An ergodic distribution was obtained for the service proces .

Key Words: network model, bivariate Poisson input flow, ergodic distribution.

[1-2] Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03680, Kyiv, Glushkova av., 4d
E-mail: irinka_8891@mail.ru, alex_che@voliacable.com

Статтю представив д.т.н., професор Акіменко В.В.

1.Опис моделі.

Розглянемо модель мережі Джексона з послідовно паралельною структурою, елементи (вузли) якої функціонують як багатоканальні системи обслуговування. Будемо передбачати, що мережа складається з трьох вузлів E_1, E_2, E_3, двоє з яких E_1 та E_2 мають можливість обміну вимог між собою, після чого вимоги надходять на третій вузол E_3 , який можна вважати виконує функції контролю роботи перших двох вузлів. Вхідний потік є двовимірним пуассонівським вхідним потоком вимог $(\nu_1(t),\nu_2(t))$ з параметрами $\lambda_1>0$, $\lambda_2>0$, $b>0$. Вимоги з потоку $\nu_1(t)$ прибувають на перший вузол обслуговування E_1, а вимоги з потоку $\nu_2(t)$ прибувають на другий E_2. Третій вузол E_3 приймає вимоги, які закінчили обслуговування на перших двох вузлах E_1 та E_2. Нехай $\mu_i>0, i=1,2,3$ параметри показникових розподілів часу обслуговування відповідно в першій, другій та третій системі. Позначимо через $X_1(t)$, $X_2(t)$, $X_3(t)$ число вимог, які обслуговуються відповідно в першій, другій і третій системі в момент часу t.

Як вже зазначалось, перші два вузли E_1 та E_2 можуть обмінюватися вимогами. Після обслуговування в першому вузлі E_1 вимога з ймовірністю p_{12} надходить на обслуговування до другого вузла E_2 або з ймовірністю p_{13} надходить на контрольний вузол E_3. Аналогічно, після обслуговування в другому вузлі E_2 вимога з ймовірністю p_{21} переходить на обслуговування до першого вузла E_1 або з ймовірністю p_{23} надходить на контрольний вузол E_3. Після вузла E_3 вимоги залишають мережу.

Теорема. Процес обслуговування $(X_1(t),X_2(t),X_3(t))$ у відкритій мережі (E_1,E_2,E_3) з двовимірним пуассонівським вхідним потоком вимог $\nu(t)$ має ергодичний розподіл з генератрисою наступного вигляду:

$$\phi(z_1,z_2,z_3)=Mz_1^{X_1}z_2^{X_2}z_3^{X_3}=$$
$$=\exp\{-(a_1+c_1)(1-z_1)-(a_2+c_2)(1-z_2)-$$
$$c_3(1-z_3)-c_4(1-z_1z_2)-c_5(1-z_1z_3)-c_6(1-z_2z_3)-$$
$$-c_7(1-z_1^2)-c_8(1-z_2^2)-c_9(1-z_3^2)\}$$

Константи a_1 і a_2 мають вигляд: $a_1=\theta_1/\mu_1$, $a_2=\theta_2/\mu_2$, вектор $\theta=(\theta_1,\theta_2)$ є розв'язком

© О.А. Чечельницький, І.Ю. Демченко, 2014

рівняння $\theta = \lambda + \theta P$, де $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$ і P є матрицею переходів по вузлах E_1 та E_2.

Константи c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 визначаються як:

$$c_1 = \frac{\eta_1}{\mu_1} - b\frac{\mu_1 + \mu_2 p_{21}}{\mu_1(\mu_1+\mu_2)(1-p_{12}p_{21})},$$

$$c_2 = \frac{\eta_2}{\mu_2} - b\frac{\mu_2 + \mu_1 p_{12}}{\mu_2(\mu_1+\mu_2)(1-p_{12}p_{21})},$$

$$c_3 = \frac{1}{\mu_3}(\mu_1 p_{13}c_1 + \mu_2 p_{23}c_2 + 2\mu_3 c_9)$$

$$c_4 = \frac{b}{(\mu_1+\mu_2)(1-p_{12}p_{21})},$$

$$c_5 = -\frac{\mu_1\mu_2 p_{21} + \mu_2(\mu_2+\mu_3)}{(\mu_1+\mu_2)(\mu_1\mu_2 p_{12}p_{21} - (\mu_1+\mu_3)(\mu_2+\mu_3))}$$

$$c_6 = -\frac{\mu_1\mu_2 p_{12} + \mu_1(\mu_1+\mu_3)}{(\mu_1+\mu_2)(\mu_1\mu_2 p_{12}p_{21} - (\mu_1+\mu_3)(\mu_2+\mu_3))}$$

$$c_7 = \frac{\mu_2 p_{21} b}{2\mu_1(\mu_1+\mu_2)(1-p_{12}p_{21})}$$

$$c_8 = \frac{\mu_1 p_{12} b}{2\mu_2(\mu_1+\mu_2)(1-p_{12}p_{21})}$$

$$c_9 = \frac{1}{2\mu_3}\{\mu_1 p_{13}c_5 + \mu_2 p_{23}c_6\}$$

Де вектор $\eta = (\eta_1, \eta_2)$ є розв'язком системи рівнянь $\eta(I-P) = b$, $b = (b,b)$.

Доведення теореми.

Нехай $\xi(t)$, $t \ge 0$ - ланцюг Маркова з інфінітезімальною матрицею $Q = \|q_{ij}\|_{i,j=1}^4$, елементи якої мають наступний вигляд:

$$q_{ij} = \begin{cases} -\mu_i, \ i = 1,2,3 \\ \mu_i p_{ij}, \ i \ne j, \ i = 1,2,3; \ j = 1,2,3,4. \\ 0, \ i = 4, \ j = 1,2,3,4. \end{cases}$$

Через $p_{ij}(t) = P\{\xi(t) = j / \xi(0) = i\}$ будемо позначати ймовірності переходів ланцюга $\xi(t)$.

Введемо до розгляду два сімейства незалежних трьохвимірних випадкових величин з наступними розподілами. Трьохвимірна випадкова величина $\chi_k^1(t)$ нехай приймає значення $(1,0,0)$ з ймовірністю $p_{11}(t)$, значення $(0,1,0)$ з ймовірністю $p_{12}(t)$, значення $(0,0,1)$ з ймовірністю $p_{13}(t)$ та значення $(0,0,0)$ з ймовірністю $p_{14}(t)$. Випадкова величина $\chi_k^2(t)$ приймає значення $(1,0,0)$ з ймовірністю $p_{21}(t)$, значення $(0,1,0)$ з ймовірністю $p_{22}(t)$, значення $(0,0,1)$ з ймовірністю $p_{23}(t)$ та значення $(0,0,0)$ з ймовірністю $p_{24}(t)$.

Тоді з ймовірністю 1 для процесу обслуговування має місце наступне представлення:

$$(X_1(t), X_2(t), X_3(t)) = \sum_{k=1}^{y_1(t)} \chi_k^1(t - t_k^1) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{y_2(t)} \chi_k^2(t - t_k^2) + \sum_{k=1}^{y_3(t)} \{\chi_k^1(t - t_k^3) + \chi_k^2(t - t_k^3)\},$$ де

$y_1(t)$, $y_2(t)$ та $y_3(t)$ - пуассоніські процеси з параметрами λ_1, λ_2 і b відповідно, $t_k^i, k = 1,2,\ldots$, $i = 1,3$ є моментами приходу вимог відповідно з потоку $y_i(t)$, $i = 1,3$. Введемо до розгляду трьохвимірну генератрису вектора $(X_1(t), X_2(t), X_3(t))$:

$$\varphi(z_1, z_2, z_3, t) = M z_1^{X_1(t)} z_2^{X_2(t)} z_3^{X_3(t)}.$$

Використовуючи властивості умовного математичного сподівання, можемо записати: $\varphi(z_1, z_2, z_3, t) =$

$$= M\left\{M\left\{z_1^{X_1(t)} z_2^{X_2(t)} z_3^{X_3(t)} / t_1, \ldots, t_{\nu(t)}\right\}\right\} =$$

$$= M\prod_{k=1}^{y_1(t)} A_1(z_1, z_2, z_3, t - t_k^1) M\prod_{k=1}^{y_2(t)} A_2(z_1, z_2, z_3, t - t_k^2) \times$$

$$\times M\prod_{k=1}^{y_3(t)} A_1(z_1, z_2, z_3, t - t_k^3) A_2(z_1, z_2, z_3, t - t_k^3),$$

де при $i = 1,2$

$$A_i(z_1, z_2, z_3, t) = p_{i4}(t) + z_1 p_{i1}(t) + z_2 p_{i2}(t) + z_3 p_{i3}(t)$$

Для знаходження генератрис з останнього виразу знову скористаємося умовними математичними сподіваннями, але стосовно величини $y_i(t)$, $i = 1,3$. Тоді можемо записати:

$$\varphi(z_1, z_2, z_3, t) =$$

$$= \varphi_1(z_1, z_2, z_3, t)\varphi_2(z_1, z_2, z_3, t)\varphi_3(z_1, z_2, z_3, t),$$

де $\varphi_1(z_1,z_2,z_3,t)=$

$$=M\left\{M\left\{\prod_{k=1}^{y_1(t)}A_1\left(z_1,z_2,z_3,t-t_k^1\right)/\,y_1(t)\right\}\right\}$$

$$\varphi_2(z_1,z_2,z_3,t)=$$

$$=M\left\{M\left\{\prod_{k=1}^{y_2(t)}A_2\left(z_1,z_2,z_3,t-t_k^2\right)/\,y_2(t)\right\}\right\}$$

$$\varphi_3(z_1,z_2,z_3,t)=M\left\{M\left\{\prod_{k=1}^{y_3(t)}A_1\left(z_1,z_2,z_3,t-t_k^3\right)\times\right.\right.$$

$$\left.\left.\times A_2\left(z_1,z_2,z_3,t-t_k^3\right)/\,y_3(t)\right\}\right\}$$

При фіксації числа стрибків пуассонівських процесів $y_i(t)$, $i=1,3$ на довільному інтервалі часу $[0,t]$, моменти стрибків ведуть себе як незалежні випадкові величини, які мають рівномірний на $[0,t]$ розподіл. Тоді ми отримаємо:

$$\varphi_1(z_1,z_2,z_3,t)=M\left\{\frac{1}{t}\int_0^t A_1(z_1,z_2,z_3,u)\,du\right\}^{y_1(t)},$$

$$\varphi_2(z_1,z_2,z_3,t)=M\left\{\frac{1}{t}\int_0^t A_2(z_1,z_2,z_3,u)\,du\right\}^{y_2(t)},$$

$$\varphi_3(z_1,z_2,z_3,t)=$$

$$=M\left\{\frac{1}{t}\int_0^t A_1(z_1,z_2,z_3,u)\,A_2(z_1,z_2,z_3,u)\,du\right\}^{y_3(t)}$$

В останніх виразах коефіцієнт $\frac{1}{t}$ є щільністю рівномірного на проміжку $[0,1]$ розподілу.

Після відповідних перетворень з генератрисами $A_1(z_1,z_2,u)$ та $A_2(z_1,z_2,u)$ функція $\varphi(z_1,z_2,t)$ матиме наступний вигляд:

$$\varphi(z_1,z_2,t)=\exp\left\{-\left(a_1(t)+c_1(t)\right)(1-z_1)-\right.$$
$$-\left(a_2(t)+c_2(t)\right)(1-z_2)-c_3(t)(1-z_3)-$$
$$-c_4(t)(1-z_1z_2)-c_5(t)(1-z_1z_3)-c_6(t)(1-z_2z_3)-$$
$$\left.-c_7(t)\left(1-z_1^2\right)-c_8(t)\left(1-z_2^2\right)-c_9(t)\left(1-z_3^2\right)\right\},$$ де

$$a_1(t)=\left(\lambda_1\int_0^t p_{11}(u)\,du+\lambda_2\int_0^t p_{21}(u)\,du\right);$$

$$a_2(t)=\left(\lambda_1\int_0^t p_{12}(u)\,du+\lambda_2\int_0^t p_{22}(u)\,du\right);$$

$$c_1(t)=b\int_0^t\left(p_{14}(u)\,p_{21}(u)+p_{11}(u)\,p_{24}(u)\right)du;$$

$$c_2(t)=b\int_0^t\left(p_{14}(u)\,p_{22}(u)+p_{12}(u)\,p_{24}(u)\right)du;$$

$$c_3(t)=b\int_0^t\left(p_{13}(u)\,p_{24}(u)+p_{23}(u)\,p_{14}(u)\right)du;$$

$$c_4(t)=b\int_0^t\left(p_{11}(u)\,p_{22}(u)+p_{12}(u)\,p_{21}(u)\right)du;$$

$$c_5(t)=b\int_0^t\left(p_{11}(u)\,p_{23}(u)+p_{13}(u)\,p_{21}(u)\right)du;$$

$$c_6(t)=b\int_0^t\left(p_{13}(u)\,p_{22}(u)+p_{12}(u)\,p_{23}(u)\right)du$$

$$c_7(t)=b\int_0^t p_{11}(u)\,p_{21}(u)\,du;$$

$$c_8(t)=b\int_0^t p_{12}(u)\,p_{22}(u)\,du;$$

$$c_9(t)=b\int_0^t p_{13}(u)\,p_{23}(u)\,du.$$

Для знаходження границі при $t\to+\infty$ функції $\varphi(z_1,z_2,z_3,t)$ треба відповідні границі останніх інтегралів.

Запишемо систему диференційних рівнянь:

$$\begin{cases}p_{11}'(t)=-\mu_1p_{11}(t)+\mu_2p_{21}p_{12}(t)\\ p_{12}'(t)=\mu_1p_{12}p_{11}(t)-\mu_2p_{12}(t)\\ p_{21}'(t)=\mu_2p_{21}p_{22}(t)-\mu_1p_{21}(t)\\ p_{22}'(t)=-\mu_2p_{22}(t)+\mu_1p_{12}p_{21}(t)\end{cases}$$

Взявши інтеграл від 0 до $+\infty$, отримаємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases}-1=-\mu_1p_{11}^*+\mu_2p_{21}p_{12}^*\\ 0=\mu_1p_{12}p_{11}^*-\mu_2p_{12}^*\\ 0=\mu_2p_{21}p_{22}^*-\mu_1p_{21}^*\\ -1=-\mu_2p_{22}^*+\mu_1p_{12}p_{21}^*\end{cases},$$

де $p_{ij}^*=\int_0^{+\infty}p_{ij}(t)\,dt$. Позначимо через P^* матрицю з елементами p_{ij}^* : $P^*=\left\|p_{ij}^*\right\|_{i,j=1}^2$. З останньої системи лінійних алгебраїчних рівнянь

знаходимо: $P^* = (I-P)^{-1}\Delta^{-1}(\mu)$, де $I = \|\delta_{ij}\|_{i,j=1}^2$ - одинична матриця, $\Delta(\mu) = \|\delta_{ij}\mu_i\|_{i,j=1}^2$ - діагональна матриця, δ_{ij} - символ Кронекера. Тоді

$$a = (a_1, a_2) = \lambda P^* = \lambda (I-P)^{-1}\Delta^{-1}(\mu) = \left(\frac{\theta_1}{\mu_1}, \frac{\theta_2}{\mu_2}\right).$$

Позначимо через x_i, $i = \overline{1,4}$:

$$x_1 = \int_0^{+\infty} p_{11}(u)\, p_{22}(u)\, du\,, x_2 = \int_0^{+\infty} p_{12}(u)\, p_{21}(u)\, du$$

$$x_3 = \int_0^{+\infty} p_{11}(u)\, p_{21}(u)\, du\,,\ x_4 = \int_0^{+\infty} p_{12}(u)\, p_{22}(u)\, du\,.$$

З системи Колмогорова знайдемо перехідні ймовірності $p_{11}(t)$, $p_{12}(t)$, $p_{22}(t)$ і $p_{21}(t)$:

$$p_{11}(t) = e^{s_1 t}\frac{s_1+\mu_2}{s_1-s_2} - e^{s_2 t}\frac{s_2+\mu_2}{s_1-s_2}$$

$$p_{12}(s) = e^{s_1 t}\frac{\mu_1 p_{12}}{s_1-s_2} - e^{s_2 t}\frac{\mu_1 p_{12}}{s_1-s_2}$$

$$p_{22}(s) = e^{s_1 t}\frac{s_1+\mu_1}{s_1-s_2} - e^{s_2 t}\frac{s_2+\mu_1}{s_1-s_2}$$

$$p_{21}(s) = e^{s_1 t}\frac{\mu_2 p_{21}}{s_1-s_2} - e^{s_2 t}\frac{\mu_2 p_{21}}{s_1-s_2}, \quad \text{де}$$

$$s_{1,2} = \frac{-(\mu_1+\mu_2) \pm \sqrt{(\mu_1-\mu_2)^2 + 4\mu_1\mu_2 p_{12} p_{21}}}{2}$$

Підрахувавши відповідні інтеграли, знайдемо значення констант x_1, x_2, x_3 та x_4. Це дає можливість записати:

$$c_4 = \left((\mu_1+\mu_2)(1-p_{12}p_{21})\right)^{-1},$$

$$x_3 = c_4\mu_2 p_{21}(2\mu_1)^{-1}, x_4 = c_4\mu_1 p_{12}(2\mu_2)^{-1}.$$

Константи розподілу c_7, c_8 матимуть вигляд:

$$c_7 = \frac{\mu_2 p_{21} b}{2\mu_1(\mu_1+\mu_2)(1-p_{12}p_{21})},$$

$$c_8 = \frac{\mu_1 p_{12} b}{2\mu_2(\mu_1+\mu_2)(1-p_{12}p_{21})}$$

В свою чергу для констант c_1, c_2 граничного розподілу можемо записати наступний вираз:

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = (b,b)P^* - \begin{pmatrix} c_4 \\ c_4 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} c_7 \\ c_8 \end{pmatrix}, \text{ або}$$

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = (b,b)(I-P)^{-1}\Delta^{-1}(\mu) - \begin{pmatrix} c_4 \\ c_4 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} c_7 \\ c_8 \end{pmatrix}$$

Нехай вектор $\eta = (\eta_1, \eta_2)$ є розв'язком системи рівнянь $\eta(I-P) = b$, де $b = (b,b)$. Тоді

$$c_1 = \frac{\eta_1}{\mu_1} - b\frac{\mu_1+\mu_2 p_{21}}{\mu_1(\mu_1+\mu_2)(1-p_{12}p_{21})},$$

$$c_2 = \frac{\eta_2}{\mu_2} - b\frac{\mu_2+\mu_1 p_{12}}{\mu_2(\mu_1+\mu_2)(1-p_{12}p_{21})}$$

Далі, скориставшись аналогічним підходом, знайдемо значення констант c_5, c_6, c_9:

$$c_5 = -\frac{\mu_1\mu_2 p_{21} + \mu_2(\mu_2+\mu_3)}{(\mu_1+\mu_2)\left(\mu_1\mu_2 p_{12}p_{21} - (\mu_1+\mu_3)(\mu_2+\mu_3)\right)}$$

$$c_6 = -\frac{\mu_1\mu_2 p_{12} + \mu_1(\mu_1+\mu_3)}{(\mu_1+\mu_2)\left(\mu_1\mu_2 p_{12}p_{21} - (\mu_1+\mu_3)(\mu_2+\mu_3)\right)}$$

$$c_9 = \frac{1}{2\mu_3}\left\{\mu_1 p_{13} c_5 + \mu_2 p_{23} c_6\right\}.$$

Теорема доведена.

Зробимо ряд висновків. Структура процесу обслуговування в стаціонарному режимі налічує дев'ять незалежних компонент. Це означає, що в стаціонарному режимі компоненти процесу обслуговування мають наступну будову: $X_1 = x_1 + x_4 + x_5 + 2x_7$, $X_2 = x_2 + x_4 + x_6 + 2x_8$, $X_3 = x_3 + x_5 + x_6 + 2x_9$, де $x_i, i = \overline{1,9}$ незалежні випадкові величини, розподілені за законами Пуассона з параметрами: $a_1 + c_1$ для x_1, $a_2 + c_2$ для x_2 та c_i для x_i, $i = \overline{3,9}$. А тому наша модель в процесі свого функціонування послаблює залежність між компонентами потоків вимог.

Список використаних джерел

1. Grifiths R.S., Milne R.K. A class of bivariate Poisson process //Multivar Anul. Issue 8. - 1978. - №3. - P.380-396.

2. Anisimov V.V., Lebedev E.A. Stochastic service network. - K.: Lybyd, 1992. - 205p. (in Russian)

3. Chechelnitsky A.A. Kucherenko O.V. Diffusion properties of two-dimensional systems with Erlang Poisson flow requirements //Computational and Applied Mathematics. - 2010. - №2(101). - P.150-155 (in Russian)

Надійшла до редакції 02.12.2013

УДК 519.87

Івохін Є.В., д.ф.-м.н, доцент,
Присяженко О.Є., студент

Про один підхід до моделювання поведінкового скорингу

У статті розглянуто новий підхід до моделювання поведінки клієнта з використанням спеціальних множин простих чисел. Оцінки характеристик клієнтів задаються за допомогою пар простих чисел, банківські оцінки клієнтів визначаються цілими числами. Запропоновано метод розв'язання задачі побудови оцінки характеристик клієнта в будь-який момент часу на основі його попередньої поведінки, наведено приклад розв'язання задачі.

Ключові слова: поведінковий скоринг, скорингові моделі, спеціальні множини простих чисел.

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 03680, м.Київ, пр.Глушкова,4д
e-mail: ivohin@univ.kiev.ua, ollyajoke@gmail.com

Ivokhin E.V., Ph.D., associate professor,
Prysiazhenko O. I., student

On approach for modeling of behavioral scoring

In this paper a new approach to modeling a customer`s behavior on basis of special sets of prime numbers was discussed. The estimations of customers characteristics are given as pairs of prime numbers, bank estimations of customers is given as integers. The method of solution of the problem of customer`s assessment building in any subsequent moment on the basis of his previous behavior was suggested, an example of solving was given.

Key words: behavioral scoring, scoring models, special sets of prime numbers.

Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03680, Kyiv, Gluskkva av., 4D

Статтю представив д.т.н., проф. Волошин О.Ф.

Аплікаційний скоринг [1], який на сьогоднішній день активно використовується для оцінки ризиків споживчих кредитів, являє собою поєднання двох основних характеристик стану клієнта: перша – це характеристика клієнта на основі даних заявки, друга – його кредитоспроможність в деякий наступний момент часу. Таким чином, цей феномен можна назвати статичним. Поведінковий скоринг, в свою чергу, є методом корекції оцінки ризиків споживчих кредитів з огляду на найостаннішу діяльність клієнта. Він замінює першу основну характеристику клієнта описом динаміки найостаннішої діяльності клієнта, але незмінною залишається друга характеристика.

Розглядаючи прибутковість клієнта для кредитора, потрібно використати інформацію про останню діяльність клієнта з метою оцінити його загальну подальшу поведінку, а не лише в деякий наступний момент часу. Для розробки оцінки прибутковості клієнтів необхідно оцінити майбутню діяльність споживача. Також потрібно спрогнозувати динаміку поведінки цієї оцінки або статусу заборгованості споживача, що також може бути способом оцінки загальної суми несплачених платежів даного портфелю клієнтів у кожний наступний період часу. Відповідні підрахунки необхідні для прогнозування резервів кредитора – суму коштів, яку кредитор повинен відкласти для покриття цих очікуваних грошових втрат. Така задача називається задачею формування резервів (забезпечення боргу). Найчастіше, для отримання цієї оцінки застосовуються ймовірнісні моделі Маркова. Підхід на основі ланцюгів Маркова не набув дуже широкої популярності у моделюванні динаміки поведінки клієнтів, але знайшов використання у знаходженні ймовірності дефолту, необхідної для розв’язання задачі формування резервів. З іншої сторони, для прогнозування неплатоспроможності (дефолту) клієнтів, можна використовувати моделі на базі ідей аналізу виживання (Survival analysis). Такі моделі також дозволяють оцінити прибутковість клієнтів в розрізі продукту, оскільки вони взаємодіють не лише з ризиком несплати платежів, а й з деякими іншими подіями, що впливають на прибуток, такими як дострокове погашення боргу. Дані підходи пов`язують останню динаміку змін поведінки клієнтів з динамікою зміни ймовірності несплати платежів протягом всього майбутнього періоду часу.

©Є.В.Івохін, О.Є.Присяженко, 2014

Таким чином, обидві статичні характеристики аплікаційного скорингу можуть бути трансформовані у динамічне представлення поведінки клієнта.

Динаміку змін оцінки поведінки клієнта можна формалізувати за допомогою спеціальних множин простих чисел [2], які можна використовувати при вирішенні багатьох прикладних задач в якості ефективних обчислювальних схем. Введемо деякі основні поняття та операції.

Означення 1. Множини невід'ємних простих чисел $P_j(a) \ge 0$, $j \in Z$, що належать інтервалу $[a,\infty)$ при $j \ge 0$ або інтервалу $[0,a)$ при $j < 0$ для заданого, необов'язково простого, цілого числа $a \ge 0$, будемо називати послідовностями простих чисел відносно числа a.

Розглянемо довільні прості числа $P_j(a) \ge 0$ з порядковими номерами $j \in Z$ з послідовності простих чисел відносно числа $a \ge 0$. Нескладно перевірити, що справедливі співвідношення:

1) $P_0(0) = 0$, $P_0(1) = 1$, $P_1(0) = 1$;

2) $P_0(a) = a$, якщо число $a \ge 0$ - просте, $P_0(a)$ - не існує, якщо $a \ge 0$ - непросте;

3) $P_j(a) \le P_k(a)$, якщо $j \le k$, $P_j(a) < P_k(a)$ при $j < k$, $j \in Z$, $k \in Z$;

4) $P_j(a) = P_j(a+1) = ... = P_j(a+l)$ для всіх $1 \le l < P_{j+1}(a) - P_j(a)$, $j = 0,1,2,...$, $a \ge 0$;

5) $P_j(a) = P_1(P_{j-1}(a)) =$

$= P_1(P_1(P_{j-2}(a))) = P_2(P_{j-2}(a)) = ... = P_{j-1}(P_1(a))$,

якщо число $a \ge 0$ - просте, $j \in Z$;

6) $P_j(a) \ge a$ для усіх $j = 0,1,2,...$, якщо число $a \ge 0$ - просте, $P_j(a) > a$ для усіх $j = 1,2,...$, якщо $a \ge 0$ - непросте;

7) $P_j(a) < a$ для $j = -1,-2,..., j_0$, де номер $j_0 < 0$ визначається як найменший індекс простого числа з послідовності, для якого $0 \le P_{j_0}(a) < a$.

Надалі будемо розглядати випадки, коли $a > 0$ - просте число або $a = 0$. У даному випадку існує число $P_0(a)$. Крім цього, виходячи з наведених вище властивостей, справедливі співвідношення $P_j(a)/P_k(a) \le 1$, і $P_j(a)/P_k(a) =$

$= P_j(a)/P_1(P_{k-1}(a)) = ... = P_j(a)/P_j(P_{k-j}(a)) =$

$= P_j(a)/P_{k-j}(P_j(a))$ для будь-яких $j,k \in Z$, $j \le k$.

Крім традиційних арифметичних операцій додавання, віднімання, множення та ділення, на послідовності простих чисел для довільного $P_j(a)$, $a \ge 0$, $j = 0,1,2,...$, введемо операцію зсуву на m, $m \in Z$, $j + m \ge j_0$, простих чисел у вигляді

$$P_j(a) \oplus m = P_{j+m}(a) = P_m(P_j(a)), \qquad (1)$$

яка не повинна виводити за межі заданої послідовності ($j + m \ge j_0$), та операцію n-кратної композиції ($n \in Z$) відношення двох чисел $P_j(a)$ та $P_k(a)$, $j,k \in Z$, $j \le k$, у вигляді

$$P_j(a) \Big/ P_k(a) \circ n = P_j(a) \oplus n \Big/ P_k(a) \oplus n =$$

$$= P_{j+n}(a) \Big/ P_{k+n}(a) = P_n(P_j(a)) \Big/ P_n(P_k(a)). \qquad (2)$$

Лема 1. Довільне раціональне число $r = p/q$, $p \in Z$, $q \in N$, може бути представлене у вигляді

$$r = \prod_{i=1}^{s_p} P_{k_i}(a_{k_i}) \Big/ \prod_{j=1}^{s_q} P_{n_j}(a_{n_j}), \qquad (3)$$

де s_p, s_q - кількості множників у представленні чисел $|p|$ та q у вигляді відповідних добутків елементарних дільників, $a_{k_i} \ge 0$, $a_{n_j} \ge 0$ - деякі цілі числа, $k_i, n_j \in Z$, $i = \overline{1,s_p}$, $j = \overline{1,s_q}$.

Доведення. Відомо, що будь-яке раціональне число r представляється у вигляді звичайного дробу $r = p/q$, $p \in Z$, $q \in N$.

Припустимо, що число r невід'ємне, $r \ge 0$. Якщо при цьому обидва числа p та q є простими числами, то маємо твердження леми. У даному випадку $s_p = 1, s_q = 1$, $P_{k_1}(a_{k_1}) = p$, $P_{n_1}(a_{n_1}) = q$ для деяких $k_1 \in Z$, $n_1 \in Z$ та $a_{k_1} \ge 0$, $a_{n_1} \ge 0$.

Якщо чисельник або знаменник або обидва числа p та q не є простими, то їх можна представити у вигляді добутків елементарних дільників, які є простими числами. При цьому, елементарні дільники записуються у добутках стільки разів, яка їх кратність.

Нехай s_p, s_q - кількості множників у представленні чисел p та q у вигляді добутків, де кожен з множників є простим числом з відповідних послідовностей простих чисел відносно чисел a_{k_i}, a_{n_j}, $k_i, n_j \in Z$, $i = \overline{1,s_p}$, $j = \overline{1,s_q}$. Представлення (3) для довільного раціонального числа r доведено.

У випадку, якщо число r від'ємне, то можна покласти $r = -r$ і усі викладки повторюються.

Наслідок 1. Довільне раціональне число $r = p/q$, $p \in Z$, $q \in N$, може бути представлене у вигляді

$$r = \prod_{i=1}^{s_p} P_{k_i}(a) \Big/ \prod_{j=1}^{s_q} P_{n_j}(a), \quad (4)$$

де s_p, s_q - кількості множників у представленні чисел $|p|$ та q у вигляді відповідних добутків елементарних дільників, $a \geq 0$ - деяке ціле число, $k_i \in Z$, $n_j \in Z$, $i = \overline{1, s_p}$, $j = \overline{1, s_q}$.

Наслідок 2. Довільне раціональне число $r = p/q$, $p \in Z$, $q \in N$, може бути представлене у вигляді

$$r = \prod_{i=1}^{s} P_{k_i}(1) \Big/ \prod_{j=1}^{s} P_{n_j}(1), \quad (4')$$

де s - максимальне значення з кількостей множників у представленні чисел $|p|$ та q у вигляді відповідних добутків елементарних дільників, $k_i, n_j \in N \cup \{0\}$, $i = \overline{1, s_p}$, $j = \overline{1, s_q}$.

Лема 2. Для будь-яких двох простих чисел $P_k(a)$, $P_n(a)$, $k \leq n$, $k, n \in Z$, з послідовності простих чисел відносно числа a та довільного числа $T \geq 0$ справедливе співвідношення:

$$(P_k(a)+T)/(P_n(a)+T) \geq P_k(a)/P_n(a). \quad (5)$$

Доведення. Нескладно перевірити, що для будь-яких $k \leq n$, $k, n \in Z$, маємо

$$(P_k(a)+T)/(P_n(a)+T) - P_k(a)/P_n(a) =$$
$$= T(P_n(a) - P_k(a))/((P_n(a)+T) * P_n(a)).$$

Враховуючи властивість 3), отримуємо, що

$$(P_k(a)+T)/(P_n(a)+T) - P_k(a)/P_n(a) \geq 0,$$

звідки слідує нерівність (5). Лему доведено.

Розглянемо множину невід'ємних раціональних чисел $r(k,n)$, $k, n \in Z$, $0 \leq r(k,n) \leq 1$, які подаються у вигляді відношення двох простих чисел з послідовності відносно числа $a \geq 0$:

$$r(k,n) = P_k(a)/P_n(a), \; k \leq n, \; k, n \in Z. \quad (6)$$

Без обмежень загальності покладемо $a = 0$. При цьому, раціональні числа $r(k,n)$ будуть представлятися у вигляді

$$r(k,n) = P_k(0)/P_n(0), \; k \leq n, \; k, n \in N \cup \{0\}. \quad (7)$$

З урахуванням операції зсуву на m простих чисел у послідовності $P_j(0)$, $j \in Z$, маємо співвідношення

$$r(k+m, n+m) = r(k,n) \circ m, \; m \in N \cup \{0\}. \quad (8)$$

Введемо до розгляду інші сукупності.

Означення 2. Множину раціональних чисел $r_T(k,n)$, $T \geq 0$, $k \leq n$, $k, n \in N \cup \{0\}$, вигляду

$$r_T(k,n) = (P_k(0)+T)/(P_n(0)+T), \; k \leq n, \quad (9)$$
$$k, n \in N \cup \{0\},$$

назвемо T - послідовністю для множини чисел $r(k,n)$ і заданого $T \geq 0$.

Означення 3. Для заданої множини чисел $r(k,n)$, $k \leq n$, $k, n \in N \cup \{0\}$ множину чисел

$$r_*(k+m, n+m) = \frac{P_k(0) \oplus m_*}{P_n(0) \oplus m}, k \leq n, \; m \in Z, \quad (10)$$
$$k, n \in N \cup \{0\},$$

де m_*: $0 \leq m_* \leq m$ при $m \in N \cup \{0\}$, і $m_* \leq m$ при $m < 0$ - найбільше ціле число таке, що:

$$P_k(0) \oplus m \Big/ P_n(0) \oplus m \geq P_k(0) \oplus m_* \Big/ P_n(0) \oplus m,$$

будемо називати нижньою спряженою множиною, а множину чисел

$$r^*(k+m, n+m) = \frac{P_k(0) \oplus m^*}{P_n(0) \oplus m}, \; k \leq n, \; m \in Z, \quad (11)$$
$$k, n \in N \cup \{0\},$$

де m_*: $m^* \geq m$ при $m \in N \cup \{0\}$ і $m \leq m^* \leq 0$ при $m < 0$ - найменше ціле число таке, що:

$$P_k(0) \oplus m \Big/ P_n(0) \oplus m \leq P_k(0) \oplus m^* \Big/ P_n(0) \oplus m,$$

- верхньою спряженою множиною.

Лема 3. Справедливі співвідношення

$$r(k,n) \leq r_T(k,n), \quad (12)$$
$$r_*(k+m, n+m) \leq r(k+m, n+m), \quad (13)$$
$$r(k+m, n+m) \leq r^*(k+m, n+m), \quad (14)$$
$$r_*(k+m, n+m) \leq r_T(k+m, n+m), \quad (15)$$

для довільних $T \geq 0$, $k, n \in N \cup \{0\}$, $k \leq n$, $m \in Z$.

Доведення. Відповідно до леми 2, для довільного числа $T \geq 0$ справедлива нерівність $r_T(k,n) = (P_k(0)+T)/(P_n(0)+T) \geq P_k(0)/P_n(0) = r(k,n)$, і виконуються співвідношення: $r(k+m, n+m) =$

$$= \frac{P_k(0) \oplus m}{P_n(0) \oplus m} \geq \frac{P_k(0) \oplus m_*}{P_n(0) \oplus m} = r_*(k+m, n+m)$$

та $r(k+m, n+m) =$

$$= \frac{P_k(0) \oplus m}{P_n(0) \oplus m} \leq \frac{P_k(0) \oplus m}{P_n(0) \oplus m^*} = r^*(k+m, n+m),$$

для довільних $k, n \in N \cup \{0\}$, $k \leq n$, та будь-якого $m \in Z$. Таким чином, нерівності (12), (13), (14) доведено.

Нерівність (12) виконується для усіх

$k,n \in N \cup \{0\}$, $k \le n$. Тоді для будь-якого $m \in Z$ маємо $k+m \le n+m$, звідки для $\forall T \ge 0$ є справедливим співвідношення $r(k+m,n+m) \le$ $\le r_T(k+m,n+m)$. З урахуванням нерівності (13) остаточно отримуємо $r_*(k+m,n+m) \le$ $\le r_T(k+m,n+m)$, що відповідає нерівності (15).

Базуючись на наведених твердженнях, розглянемо модель функціонування поведінкового скорингу з застосуванням спеціальних множин простих чисел. Принцип оцінювання аналогічний до використання ланцюгів Маркова: маємо початковий стан клієнта $x^0 = (x_1^0,...,x_N^0)^T$, де x_i^0, $i = \overline{1,N}$, – початкові значення характеристик, що є аплікаційними оцінками даних, отриманих із заявки на кредит. Кожен елемент вектора характеристик клієнта приймає значення з поля дійсних чисел і може бути представлений у вигляді відношення двох простих чисел $P_j^i(a)/P_k^i(a)$, $j,k \in Z$, $j \le k$, $i = \overline{1,N}$. Маємо деякі критерії f_i, $i = \overline{1,N}$, які визначаються банком для оцінювання клієнта і за допомогою яких формується вектор оцінки в деякий конкретний момент часу $f(t) = (f_1^t,..., f_N^t)^T$, $t = 1,2,...$, елементи якого цілими числами. Для визначення характеристик клієнта в наступний момент часу, необхідно використати операцію n-кратної композиції відношення двох простих чисел з $n_i = f_i^t$, $i = \overline{1,N}$, $t = 1,2,...$. В результаті застосування даної операції отримуємо вектор $x^t = (x_1^t,..., x_N^t)^T$, $t = 1,2,...$, кожен елемент якого визначається наступним чином:

$$x_i^t = x_i^{t-1} \circ f_i^t = P_j^i(a)/P_k^i(a) \circ f_i^t,\ i = \overline{1,N}.$$

При застосуванні даної операції важливо, щоб зберігалася тенденція до збільшення (зменшення) оцінок характеристик клієнта, якщо відповідна оцінка банку додатна (від'ємна). Отже, якщо $f_i^t \ge 0$, $t = 1,2,...$, $i = \overline{1,N}$, то в якості наступного значення доцільно обрати елемент з верхньої спряженої множини чисел, а якщо ж $f_i^t < 0$ – з нижньої спряженої множини чисел.

Розглянемо приклад. Оберемо 5 критеріїв:
1) оцінка показника кредитної історії клієнта;
2) оцінка показника матеріального стану клієнта;
3) оцінка терміну співпраці з банком;
4) оцінка статусу проживання клієнта;
5) оцінка рівня відповідності банківського продукту кредитній історії клієнта.

Оцінка стану клієнта залежить від показників по цим критеріям в кожний деякий момент часу та змінюється під впливом своїх складових. Наприклад, якщо клієнт не виконав свої зобов'язання по кредиту у визначений термін та пропустив платіж, то, відповідно, загальна кількість прострочених платежів зросте, що негативно вплине на його оцінку. Також ступінь довіри банка до клієнта, з яким він давно співпрацює, буде вищим, ніж до людини, що звернулася вперше, за умови рівності решти критеріїв.

Припустимо, що

$x^0 = (3/23{,}7/13{,}5/7{,}11/13{,}3/5)^T$,

$f(1) = (5{,}4{,}-3{,}2{,}-1)^T$.

Тоді

$$x^1 = (3/23{,}7/13{,}5/7{,}11/13{,}3/5)^T \circ (5{,}4{,}-3{,}2{,}-1)^T =$$
$$= (P_5(3)/P_5(23), P_4(7)/P_4(13), P_{-3}(5)/P_{-3}(7),$$
$$P_2(11)/P_2(13), P_{-1}(3)/P_{-1}(5))^T =$$
$$= (17/43{,}19/29{,}1/2{,}17/19{,}2/3)^T,$$

а з урахуванням вищенаведеного зауваження

$$x_5^1 = P_0(3) \oplus (-1)_* \Big/ P_0(5) \oplus (-1) = P_{-2}(3) \Big/ P_{-1}(5) = 1/3.$$

Остаточно отримуємо

$$x^1 = (17/43{,}19/29{,}1/2{,}17/19{,}1/3)^T.$$

Продовжуючи цей процес далі, можна ефективно оцінювати стан характеристик клієнта в будь-який момент часу, що дозволяє мінімізувати ризики при наданні споживчих кредитів. З урахуванням *Леми 3* за сприятливої співпраці клієнта з банком, позитивній кредитній історії та особистих матеріальних показниках ймовірність того, що надання кредиту буде вигідним для банку, зростає, а негативні фактори поведінки клієнта зменшують цю ймовірністю, Використання цілих чисел у розрахунках може спростити процес оцінювання та інтерпретацію вихідних даних на практиці, а вихідна інформація забезпечує підтримку прийняття остаточного рішення щодо надання кредиту певній особі на базі скорингової моделі.

Список використаних джерел

1. *Thomas L. C., Ho J., Scherer W. T.* Time will tell: Behavioural scoring and the dynamics of consumer credit assessment, 2012. – 33p.
2. *Ivokhin E.V., Vadniov D.O.* Use of special sets of prime numbers in knapsack method encryption// Proc. VI International Liashko conf. "Comput. and Appl. Math." – Kyiv, 2013. – P.126-127.

Надійшла до редколегії 25.11.2013

УДК 004.512

Л.О. Катеринич[1], к.ф.-м.н.

Мережеві алгоритми класифікації у задачах діагностики

Розглянуто деякі підходи щодо можливості застосування алгоритмів класифікації у розробці систем на нейронних мережах

Ключові слова: нейронні мережі; штучний інтелект; алгоритми класифікації;класифікація

[1] Київський національний університет імені Тараса Шевченка,03680, м. Київ, пр-т. Глушкова 4д,
e-mail: katerinich@rambler.ru

L. Katerynych[1], PhD.

Network classification algorithms for the problems of diagnosis

Consider some approaches regarding the applicability of classification algorithms in the development of systems to neural networks

Key words: neural networks; artificial intelligence; classification algorithms;classification

[1] Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03680, Kyiv, Glushkova av., 4d,
e-mail: katerinich@rambler.ru

Статтю представив д. т. н., проф. Заславський В.А.

Вступ. Відомо, що автоматизація окремих технологічних процесів розробки програм в операційних середовищах, інтегрованих середовищах програмування і спеціалізованих інтегрованих середовищах, значно підвищує продуктивність, якість і надійність відповідного програмного забезпечення. Цим в значній мірі пояснюється науково-практична зацікавленість фахівців у розробці уніфікованих механізмів, моделей, мов і методологій створення інтегрованих інструментальних засобів підтримки технологічних процесів на всіх етапах життєвого циклу програм – від проектування, відладки, документування і реалізації до впровадження і удосконалення.

Зрозуміло, що задача автоматизації в такій класичній постановці зберігає свою актуальність і при створенні прикладних програмних систем нового покоління, зокрема інтелектуальних інформаційних систем з нейромережевими і нечіткими моделями представлення і обробки даних [1,2].

Класифікація. Першим і найбільш поширеним прикладом задач діагностики є класифікація без учителя, загальна постановка якої полягає в наступному.

Якщо число класів m заздалегідь визначене, то формально завдання класифікації без вчителя в загальному випадку ставиться таким чином. Нехай $\{x^p\}$ – вектори значень ознак для даних об'єктів і в просторі таких векторів визначена міра їх близькості $\rho\{x, y\}$. Для визначеності вважаємо, що чим ближче об'єкти, тим менше ρ. З кожним класом зв'язуємо його типовий об'єкт. Далі називаємо його ядром класу. Потрібно визначити набір з m ядер y^1, y^2, ..., y^m і розбиття $\{x^p\}$ на класи:

$$\{x^p\} = Y_1 \cup Y_2 \cup \ldots \cup Y_m, \qquad (1)$$

що мінімізує наступний критерій

$$Q = \sum_{i=1}^{m} D_i \to \min, \qquad (2)$$

де для кожного (і-го) класу D_i – сума відстаней від точок вибірки, що належать йому, до ядра класу:

$$D_i = \sum_{x^p \in Y_i} \rho(x^p, y^i). \qquad (3)$$

Мінімум Q береться по всіх можливих положеннях ядер y^i і всьому розбитті $\{x^p\}$ на m класів Y_i.

Якщо число класів заздалегідь не визначене, то тоді корисний критерій злиття класів: класи Y_i і Y_j зливаються, якщо їх ядра

© Л.О. Катеринич, 2014

ближчі, ніж середня відстань від елементу класу до ядра в одному з них.

Використовувати критерій злиття класів можна так: спочатку приймаємо гіпотезу про достатнє число класів, будуємо їх, мінімізуючи Q, потім деякі Y_i об'єднуємо, повторюємо мінімізацію Q з новим числом класів і так далі.

Мережеві алгоритми класифікації без вчителя будуються на основі ітераційного методу динамічних ядер, що полягає в наступному:

1. Задається вибірка наперед оброблених векторів даних $\{x^p\}$ (простір векторів даних позначається через E; кожному класу векторів відповідає деяке ядро a; простір ядер позначається через A).

2. Для кожних $x \in E$ і $a \in A$ визначається міра близькості $d(x, a)$.

3. Для кожного набору з k ядер $a_1, ..., a_k$ і будь-якого розбиття $\{x^p\}$ на k класів $\{x^p\} = P_1 \cup P_2 \cup ... \cup P_k$ визначається критерій якості

$$D = D(a_1, a_2, ..., a_k, P_1, P_2, ... P_k) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{x \in P_i} d(x, a_i) \quad (4)$$

Потрібно знайти набір $a_1, ..., a_k$ і розбиття $\{x^p\} = P_1 \cup P_2 \cup ... \cup P_k$, що мінімізують D.

Останній крок алгоритму розбивається на два:

3.1. Для фіксованого набору ядер $a_1, ..., a_k$ шукається критерій якості, що мінімізує D розбиття $\{x^p\} = P_1 \cup P_2 \cup ... \cup P_k$; воно визначається вирішальним правилом: $x \in P_i$, якщо $d(x, a_i) < d(x, a_j$ при $i \neq j$, у тому випадку, коли для x мінімум $d(x, a)$ досягається при декількох значеннях i, вибір між ними може бути зроблений довільно.

3.2. Для кожного P_i ($i = 1, ..., k$), отриманого на кроці 3.1), шукається $a_i \in A$, що мінімізує критерій якості (тобто доданок в D для даного i –го

$$D_i = \sum_{x \in P_i} d(x, a_i)). \quad (5)$$

Початкові значення $a_1, ..., a_k$, $\{x^p\} = P_1 \cup P_2 \cup ... \cup P_k$ вибираються довільно, або за яким-небудь евристичним правилом. На кожному кроці алгоритму зменшується критерій якості D, звідси випливає збіжність алгоритму – після кінцевого числа кроків розбиття $\{x^p\} = P_1 \cup P_2 \cup ... \cup P_k$ вже не змінюється.

Якщо ядру a_i зіставляється елемент мережі, що обчислює по вхідному сигналу x функцію $d(x, a_i)$, то вирішальне правило для класифікації полягає в наступному: елемент x належить класу P_i, якщо вихідний сигнал i-го елементу $d(x, a_i)$ менше всіх останніх.

Єдина обчислювальна складність в алгоритмі може полягати в пошуку ядра по класу, тобто в пошуку $a \in A$, що мінімізує

$$D_i = \sum_{x \in P_i} d(x, a). \quad (6)$$

У зв'язку з цим, в більшості конкретних реалізацій методу міра близькості d вибирається такою, щоб легко можна було знайти a, що мінімізує D для даного P.

У найпростішому випадку простір ядер A збігається з простором векторів x, а міра близькості $d(x, a)$ – квадратична форма від $x - a$, наприклад, квадрат евклідової відстані або інша квадратична форма. Тоді ядро a_i, мінімізуюче D_i, є центр тяжіння класу P_i:

$$a_i = \frac{1}{|P_i|} \sum_{x \in P_i} x, \quad (7)$$

де $|P_i|$ – число елементів у P_i.

В цьому випадку також спрощується і вирішальне правило, що розділяє класи. Нехай $d(x, a) = (x–a, x–a)$ – білінійна форма (якщо d – квадрат евклідової відстані між x і a, то білінійна форма – звичайний скалярний добуток). В силу білінійності $d(x, a) = (x - a, x - a) = (x, x) - 2(x, a) + (a, a)$.

Щоб порівняти $d(x, a_i)$ для різних i і знайти серед них мінімальне, досить обчислити лінійну неоднорідну функцію від x: $d_1(x, a_i) = (a_i, a_i) - 2(x, a_i)$.

Мінімальне значення $d(x, a_i)$ досягається при тому ж i, що і мінімум $d_1(x, a_i)$, тому вирішальне правило реалізується за допомогою k суматорів, обчислюючих $d(x, a)$ і інтерпретатора, що вибирає суматор з мінімальним вихідним сигналом. Номер цього суматора і є номер класу, до якого належить x.

У розглянутих простих випадках, коли ядро класу точно визначається як середнє арифметичне елементів класу, а вирішальне

правило ґрунтується на порівнянні вихідних сигналів лінійних адаптивних суматорів, нейронну мережу, що реалізовує метод динамічних ядер, називають мережею Кохонена. У визначенні ядер *a* для мереж Кохонена входять суми $\sum_{x\in P} x$. Це дозволяє накопичувати нові динамічні ядра, обробляючи по одному прикладу і перераховуючи a_i після появи в P_i нового прикладу. Збіжність при такій модифікації, проте, погіршується: $d_1(x, a_i) = (a_i, a_i) - 2(x, a_i)$.

Розглянемо два способи використання отриманих класифікаторів.

1. *Базовий спосіб*: для вектора даних x^i і кожного ядра a_i обчислюється $y_i = d(x, a_i)$ (будемо вважати, що правильному ядру відповідає максимум *d*, змінюючи, якщо треба, знак *d*); рядок відповідей y_i перетвориться в рядок, де лише один елемент, що відповідає максимальному y_i, дорівнює 1, інші – нулі. Цей рядок і є результатом функціонування мережі. По ній може бути визначений номер класу (номер місця, на якому стоїть 1) і інші покажчики.

2. *Нечітка класифікація*. Хай вектор даних *x* оброблений шаром елементів, що обчислюють $y_i = d(x, a_i)$. Ідея подальшої обробки полягає в тому, щоб вибрати з цього набору $\{y_i\}$ декілька найбільших чисел і після нормування оголосити їх значеннями функцій належності до відповідних класів. Передбачається, що до інших класів об'єкт напевно не належить. Для вибору сімейства *G* найбільших y_i визначимо наступні числа:

$$y_{\max} = \max\{y_i\},$$
$$M_y = \frac{1}{k}\sum_i y_i,\ s = (1-\alpha)M_y + \alpha y_{\max} \qquad (8)$$

де число α характеризує відхилення "рівня зрізу" *s* від середнього значення M_y $\alpha\in$[-1, 1], за замовчуванням приймається $\alpha = 0$.

Множина $J = \{i|\ y_i\in G\}$ інтерпретується як сукупність номерів тих класів, до яких може належати об'єкт, а нормовані на одиничну суму невід'ємні величини $f_i = \frac{y_i - s}{\sum_{j\in J}(y_i - s)}$ при $i\in J$ і $f_i = 0$ в протилежному випадку інтерпретуються як значення функцій належності цим класам.

Вибір одного з описаних варіантів використання мережі (або якого-небудь іншого) визначається потребами користувача.

Існує надійніший спосіб оцінки мінімального числа нейронів – використання процедури контрастування. Крім того, процедура контрастування дозволяє відповісти і на друге питання: якою має бути структура мережі.

Контрастування на основі оцінки. Розглянемо процедуру контрастування, що ґрунтується на оцінці показників чутливості. Приведемо найбільш поширених способи обчислення показників чутливості.

Розглянемо мережу, що правильно розв'язує всі приклади навчаючої множини. Позначимо через w_p, $p = 1,\ldots,n$ ваги всіх зв'язків. При зворотному функціонуванні мережі за принципом подвійності або методом зворотного поширення помилки мережа обчислює вектор градієнта функції оцінки *H* по вагах зв'язків

$$\mathrm{Grad}(H) = \{\partial H/\partial w_p\}_{p=1,\ldots,n}. \qquad (9)$$

Нехай w^0 – поточний набір вагів зв'язків, а оцінка поточного прикладу рівна H^0. Тоді в лінійному наближенні можна записати функцію оцінки в точці *w* як

$$H(w) = H^0 + \sum_{p=1}^{n}\frac{\partial H}{\partial w_p}(w_p - w_p^0). \qquad (10)$$

Використовуючи це наближення можна оцінити зміну оцінки при заміні w_p^0 на w_p^* як

$$\chi(p,q) = \left|\frac{\partial H}{\partial w_p}\right| \cdot \left|w_p^* - w_p^0\right|, \qquad (11)$$

де *q* – номер прикладу навчаючої множини, для якої були обчислені оцінка і градієнт. Величину $\chi(p,q)$ називають показником чутливості до заміни w_p на w_p^* для прикладу *q*. Далі обчислюється показник чутливості, не залежний від номера

прикладу. Для цього можна скористатися будь-якою нормою. Як правило, використовується рівномірна норма (максимум модуля):

$$\chi(p) = \max_q \chi(p,q). \qquad (12)$$

Уміючи обчислювати показники чутливості, можна приступати до процедури контрастування. Приведемо простий варіант цієї процедури:

1. Обчислюємо показники чутливості.
2. Знаходимо мінімальний серед показників чутливості – χ_{p^*}.
3. Замінюємо відповідну цьому показнику чутливості вагу $w^0_{p^*}$ на $w^*_{p^*}$, і виключаємо її з процедури навчання.
4. Пред'являємо мережі всі приклади навчаючої множини. Якщо мережа не допустила жодної помилки, то переходимо до другого кроку процедури.
5. Намагаємося навчити відконтрастовану мережу. Якщо мережа навчилася безпомилковому розв'язанню задачі, то переходимо до першого кроку процедури, інакше переходимо до шостого кроку.
6. Відновлюємо мережу в стан до останнього виконання третього кроку. Якщо в ході виконання кроків з другого по п'ятий був відконтрастован хоч би одна вага, то переходимо до першого кроку. Якщо жодна вага не була відконтрастована, то отримана мінімальна мережа.

Можливе використання різних узагальнень цієї процедури. Наприклад, контрастувати за один крок процедури не одну вагу, а задане користувачем число ваг. Найбільш радикальна процедура полягає в контрастуванні половини ваг зв'язків. Якщо половину ваг відконтрастувати не вдається, то намагаємося відконтрастувати четверть і так далі.

Контрастування без погіршення. Нехай нам дана лише навчена нейронна мережа і навчаюча множина. Допустимо, що вигляд функції оцінки і процедура навчання нейронної мережі невідомі. В цьому випадку так само можливе контрастування мережі. Припустимо, що дана мережа ідеально вирішує задачу. Тоді нам необхідно так відконтрастувати ваги зв'язків, щоб вихідні сигнали мережі при вирішенні всіх задач змінилися не більше ніж на задану величину. В цьому випадку контрастування вагів виконується понейронно. На вході кожного нейрона стоїть адаптивний суматор, який підсумовує вхідні сигнали нейрона, помножені на відповідні ваги зв'язків. Для нейрона найменш чутливою буде та вага, яка при розв'язанні прикладу дасть найменший вклад в суму. Позначивши через x^q_p вхідні сигнали даного нейрона при розв'язанні q-го прикладу, отримуємо формулу для показника чутливості вагів: $\chi(p,q) = \left|\left(w_p - w^*_p\right)\cdot x^q_p\right|$. Аналогічно отримуємо $\chi(p) = \left|\left(w_p - w^*_p\right)\right| \cdot \max_q \left|x^q_p\right|$. У самій процедурі контрастування є лише одне відмінність – замість перевірки на наявність помилок при пред'явленні всіх прикладів перевіряється, що нові вихідні сигнали мережі відрізняються від початкових не більше ніж на задану величину.

Список використаних джерел

1. *Rutkovskaya D. Pylynskyy M., Rutkovskyy L.* Neural networks, algorithms and henetycheskye nechetkye system. - M: Hotline - Telecom, 2006. – P. 452. (in Russian).
2. *Katerynych L., Provotar A.*. Dyahnostyrovanye on neural setyah in the system Homeopath / / XIII-th International Conference: Knowledge Dialogue Solution. - Sofia, 2007. - V1. - P.64-68. (in Russian).
3. *Katerynych L., Provotar A.*. Synthesis of neural networks on the basis ynformatsyonnh granules / / International Book Series "Information Science and Computing: Advanced Research in Artificial Intelligence". - Sofia, 2008. - V1. - P.179-182. (in Russian).
4. *Katerynych L.* Control synthesis of neural networks / / Problems of programming. 2009. Issue 1. P.53-59. (in Russian).

Надійшла до редколегії 23.12.13

УДК 519.9

Коцур Д. В.[1], студент
Терещенко В. М.[2], д.ф.-м.н., проф.

Побудова діаграми Вороного для об'єктів довільної форми

У роботі запропоновано підхід до побудови апроксимації діаграми Вороного для об'єктів довільної форми, які представлені параметрично заданими кривими, що не перетинаються. Будується діаграма Вороного для точок кривих. Після цього здійснюється її перетворення, а результат апроксимуються кривими Безьє або дугами кола. У роботі також пропонується уточнення та оптимізація апроксимації

Ключові слова: апроксимація, крива Безьє, діаграма Вороного, многокутник Вороного, параметрично задана крива

[1-2] Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, пр-т Глушкова 4д,
e-mail: dkotsur@gmail.com, vtereshch@gmail.com

D. V. Kotsur[1], student
V. M. Tereshchenko[2], Dr.Sci.(Phis.-Math.), Assoc. Prof.

Construction of the Voronoi diagram for objects of arbitrary shape

In this paper, we propose an approach for constructing the approximation of Voronoi diagram for objects of an arbitrary shape. These objects are represented by parametric curves, which do not intersect. We build Voronoi diagram for points of curves. After the transformations in the Voronoi diagram, Bezier curves or arcs approximate the result. In this paper, we also propose the perfecting and optimization of the approximation

Key Words: approximation, Voronoi diagram, voronoi cell, Bezier curve, parametric curve

[1-2] Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03680, Kyiv, Glushkova av., 4d,
e-mail: dkotsur@gmail.com, vtereshch@gmail.com

Статтю представив д.ф.-м.н., член-кор. НАНУ, проф. Анісімов А.В.

Вступ

Постановка проблеми. На сьогодні існує велика різноманітність алгоритмів для розв'язання задач обчислювальної геометрії. Проте зазвичай область застосування таких алгоритмів є дуже вузькою. Наприклад, відомі алгоритми побудови діаграми Вороного ("розділяй та володарюй" [1], алгоритм Форчуна [2]) ефективно можуть бути застосовані лише для точок або відрізків. Але при розв'язанні практичних задач зазвичай доводиться мати справу з більш складними геометричними об'єктами, що можуть задаватися як точками та відрізками, так і кривими довільної форми. Побудова діаграми Вороного для таких геометричних об'єктів не є тривіальною задачею, і тому дослідження діаграм Вороного зводять до дослідження їх апроксимацій. Проте задача побудови апроксимації діаграми Вороного все ще залишається складною і потребує подальшого дослідження.

Аналіз останніх досліджень та публікацій. Більшість робіт присвячених апроксимації діаграми Вороного використовують розбиття площини на клітинки за допомогою деякої сітки з фіксованим кроком [3], [4]. Здійснюється дискретизація простору, після чого до отриманого дискретного зображення застосовується певне перетворення, яке дозволяє одержати діаграму Вороного. Суттєвим недоліком таких методів є те, що точність побудови залежить від розміру клітинки сітки, а оскільки зменшення розміру клітинки призводить до значного збільшення кількості клітинок (квадратична залежність), то для досягнення прийнятних результатів час виконання такого алгоритму може бути значним.

Іншим підходом є апроксимація за допомогою побудови діаграми Вороного для простіших геометричних об'єктів, наприклад для точок.

© Д.В. Коцур, В.М. Терещенко, 2014

Зокрема, в роботі [5] здійснюється спроба апроксимувати діаграму Вороного для довільних геометричних об'єктів за допомогою кривих Безьє, при цьому використовується точкова діаграма Вороного. Проте, дана апроксимація здійснюється лише для частини діаграми Вороного (розв'язується задача пошуку мінімального шляху). Апроксимація, яка використовує діаграму Вороного для точок, має значні перспективи, так як дає можливість оперувати з меншою кількістю простих об'єктів. Точки на кривих можуть вибиратися з довільним кроком, який може бути як фіксованим, так і змінюватися в залежності від характеристик самої кривої. Це в свою чергу дає можливість пришвидшити побудову апроксимації, при цьому зберігаючи потрібну точність в критичних областях. Оскільки в основі методу лежить побудова діаграми Вороного для найпростіших геометричних об'єктів (точок), то критичні ділянки такої апроксимації можуть з легкістю уточнюватися, шляхом підтримки динамічної діаграми Вороного для точок. Також існують і інші спроби апроксимації діаграми Вороного [6], [7].

Метою даної статті є розробка принципів та підходів побудови швидкої апроксимації діаграми Вороного, методів її уточнення та оптимізації.

Основні означення та поняття

Означення 1. Нехай $P=\{p_1,p_2,...,p_n\}\subset R^n$ - деяка множина об'єктів, яку будемо називати множиною генераторів ($2\le n<\infty$). I_n - множина індексів генераторів. Позначимо $\rho(x,y)$ – відстань між об'єктами x та y. Множину точок, що визначається наступним чином:

$$V(p_i)=\{x\,|\,\rho(x,p_i)\le\rho(x,p_j)\} \qquad (1)$$

де $(j\ne i), i,j\in I_n, x\in R^2$, будемо називати *многокутником*, або *«клітинкою» Вороного*.

Означення 2. *Діаграмою Вороного* називатиметься наступна множина:

$$Vor(P)=\{V(p_1),V(p_2),...,V(p_n)\} \qquad (2)$$

Для довільних двох об'єктів p_i та p_j визначимо наступну множину:

$$H(p_i,p_j)=\{x\,|\,\rho(x,p_i)\le\rho(x,p_j), x\in R^2\} \qquad (3)$$

де $i,j\in I_n$

Тоді многокутник Вороного можна визначити таким чином:

$$V(p_i)=\bigcap_{j\in I_n\setminus\{i\}} H(p_i,p_j) \qquad (4)$$

Позначимо $b(p_i,p_j)$ - границю, що розділяє множини $H(p_i,p_j)$ та $H(p_j,p_i)$:

$$b(p_i,p_j)=H(p_i,p_j)\cap H(p_j,p_i) \qquad (5)$$

або

$$b(p_i,p_j)=\{x\,|\,\rho(x,p_i)=\rho(x,p_j), x\in R^2\} \qquad (6)$$

Надалі для заданої множини P, з множиною індексів I_n границю $b(p_i,p_j)$ позначатимемо $b_{i,j}$.

Принципи апроксимації діаграми Вороного для довільних об'єктів

Нехай $c(t)=(x_c(t),y_c(t))$ – деяка крива на площині, задана параметрично $t\in[a_c,b_c]$. Виберемо значення Δt – параметр точності апроксимації.

Визначимо криву:

$$\tilde{c}(t)=\begin{cases}c(a_c), t<a_c,\\ c(t), t\in[a_c,b_c],\\ c(b_c), t>b_c.\end{cases} \qquad (7)$$

Множину точок $P_c=\{p_i\,|\,p_i=\tilde{c}(t+i\Delta t), i=\overline{0,n}\}$ будемо називати розбиттям кривої c, де

$$n=\left\lceil\frac{b_c-a_c}{\Delta t}\right\rceil \qquad (8)$$

Нехай $C=\{c_1(t),c_2(t),...,c_n(t)\}$ – множина неперервних кривих, що не перетинаються, заданих параметрично. $P_{c_1},P_{c_2},...,P_{c_n}$ – розбиття кривих множини C. $P=P_{c_1}\cup P_{c_2}\cup...\cup P_{c_n}$ – об'єднання розбиттів. Побудуємо апроксимацію діаграми Вороного $Vor(C)$ для множини кривих C. Для початку побудуємо діаграму Вороного для точок розбиття кривих P:

$$Vor(P)=\{V(p)\,|\,p\in P\} \qquad (9)$$

Введемо функцію $l:P\to N_+$, визначену наступним чином: $l(p)=i\overset{def}{\Leftrightarrow}p\in P_{c_i}$. Тоді діаграму Вороного для C можна апроксимувати наступним чином:

$$Vor(C)\cong\left\{\bigcup_{l(p)=i}V(p)\,\middle|\,i=\overline{1,n}\right\} \qquad (10)$$

Таким чином, спочатку вибирається деяка множина точок кривих, для якої будується діаграма Вороного, при цьому для збереження

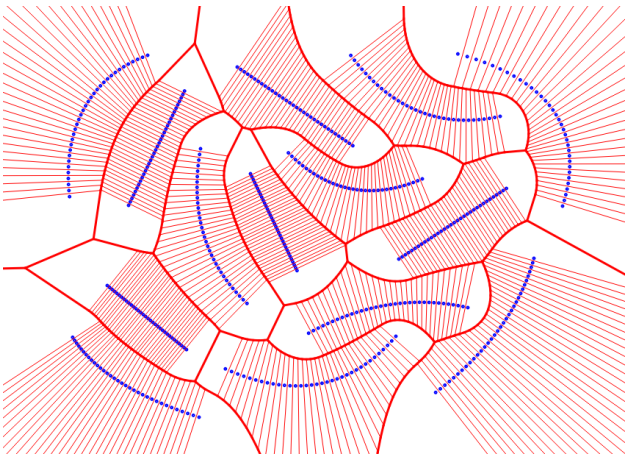


Рис. 1 Діаграма Вороного для точок кривих

відповідності, визначається відображення того, якій кривій належить кожна точка. Многокутники Вороного, такі що їх центри належать одній кривій, об'єднуються, а суміжні ребра видаляються.

На Рис.1-2. проілюстровано побудову діаграми Вороного для множини кривих Безьє та відрізків.

Апроксимація діаграми Вороного кривими

Після побудови діаграми Вороного для точок кривих та об'єднання многокутників (вилучення ребер) отримуємо апроксимацію ломаними лініями. В подальшому отримані ломані можна апроксимувати кривими.

Тип апроксимуючої кривої (її канонічний вид) залежить від типу та характеристик кривих, що є генераторами для точкової діаграми Вороного. Наприклад, для відрізків діаграма Вороного може бути представлена у вигляді набору прямих, променів, відрізків та параболічних дуг. В загальному випадку будемо апроксимувати кривими Безьє другого та третього порядку. При цьому може бути використаний метод найменших квадратів, який в даному випадку зводиться до розв'язання системи двох лінійних рівнянь. Також достатньо ефективно себе проявив метод [9].

Особливі точки апроксимації. Слід зазначити, що в деяких випадках можливі неточності в певних локальних областях. Зокрема до таких областей можна віднести кінці кривих (особливо випадки, коли криві дотикаються). Для досягнення більшої точності пропонується вибрати параметр апроксимації Δt змінним. Наприклад, Δt можна залишити фіксованим, а лише на кінцях кривої збільшувати точність шляхом ділення Δt на 2:

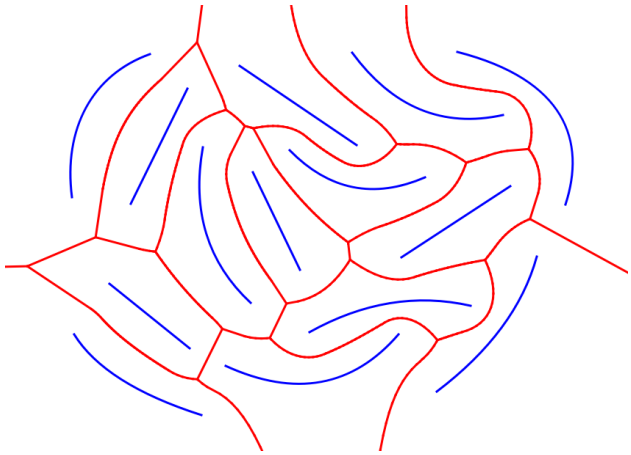


Рис. 2 Діаграма Вороного для кривих

$$\Delta t, \frac{\Delta t}{2}, \frac{\Delta t}{4}, \ldots, \frac{\Delta t}{2^L} \qquad (11)$$

На Рис. 4. ілюструється приклад апроксимованої діаграми Вороного для дуг еліпсів.

Обґрунтування складності

Оцінку складності даного алгоритму можна представити у вигляді наступного твердження:

Теорема. Нехай на площині задано m об'єктів довільної форми, які представлені параметрично заданими кривими. Нехай N – загальна кількість точок цих об'єктів. Тоді апроксимацію діаграми Вороного для множини m об'єктів довільної форми на площині, які представлені параметрично заданими кривими, що не перетинаються, можна виконати за час $O(N \log N)$.

Доведення. □ З результатів [1,2] випливає, що діаграму Вороного для множини з N точок можна побудувати за час $O(N \log N)$. Діаграму Вороного можна представити у вигляді РСПЗ. Тоді мають місце наступні твердження.

Лема 1. Злиття сусідніх многокутників Вороного представлених у вигляді РСПЗ можна здійснити з оптимальним часом $O(1)$.

Лема 2. Апроксимацію діаграми Вороного для об'єктів довільної форми на площині можна отримати з діаграми Вороного для точок за час пропорційний $O(N)$.

Доведення. □ Апроксимація діаграми Вороного здійснюється шляхом об'єднання многокутників Вороного. Оскільки кількість таких многокутників – N, а об'єднання пари многокутників можна здійснити за $O(1)$, то апроксимацію діаграми Вороного можна побудувати з оптимальним часом $O(N)$.

Апроксимацію отриманих ломаних ліній з N точок кубічними та квадратичними кривими Безьє можна здійснити за час $O(N)$. Таким чином, результуюча оцінка $O(N)$.■

Враховуючи леми 1, 2 отримаємо остаточну

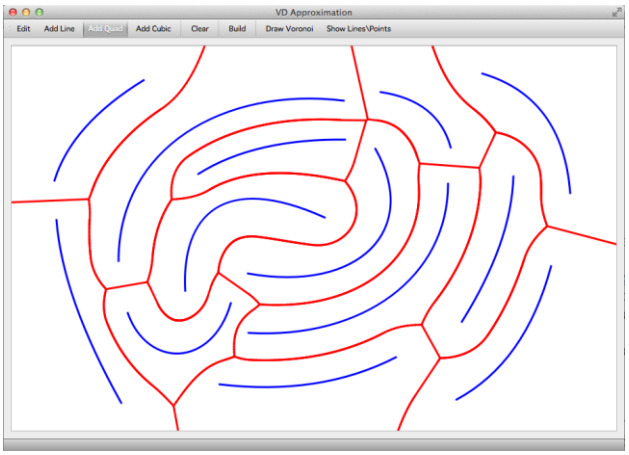


Рис. 3 Діаграма Вороного для кривих

оцінку складності $O(N \log N)$.■

Реалізація

Практична реалізація запропонованого алгоритму здійснювалась на мові C++, з використанням бібліотеки Qt для візуалізації. Вхідні дані вводяться користувачем вручну або шляхом завантаження svg-файлу. Результат роботи програми проілюстровано на Рис. 3.

Висновки

В роботі представлений підхід до побудови діаграми Вороного для об'єктів довільної форми на площині, які представлені параметрично заданими кривими, що не перетинаються. Для заданих кривих розглядається розбиття, для якого будується діаграма Вороного. В результаті здійснюється перетворення отриманого розбиття шляхом злиття сусідніх многокутників Вороного. Таким чином, отримується апроксимація діаграми Вороного ломаними лініями. В даній роботі запропонована подальша апроксимація ломаних кривими. Проаналізовано випадки для квадратичних та кубічних кривих Безьє.

Було отримано евристичні правила для покращення апроксимації завдяки вибору змінного параметра точності апроксимації. Значною перевагою даного підходу є можливість уточнення апроксимації для критичних ділянок, що визначаються конкретними практичними задачами. Даний підхід дає можливість уточнювати критичні локальні ділянки діаграми Вороного шляхом підтримки динамічних структур типу зв'язних черг [1].

Результати поточних досліджень ілюструються на рис. 1-3.

Список використаних джерел

1. *Preparata, F.* Computational Geometry: An introduction / F. Preparata, Shamos M. – Berlin: Springer, 1985. – 475 p.
2. *Fortune, S.* A sweepline algorithm for Voronoi diagrams / S. Fortune // Algorithmica. – 1987. – № 2. – P. 153-174.
3. *Sud, A.* Interactive computation of discrete generalized voronoi diagrams using range culling / A. Sud, N. Govindaraju, D. Manocha // International Symposium on Voronoi Diagrams in Science and Engineering: proceedings, 2005.
4. *Hoff, K. E.* Fast computation of generalized Voronoi diagrams using graphics hardware / K. E. Hoff, T. Culver, J. Keyser, M. Lin, D. Manocha // ACM SIGGRAPH Annual Conference on Computer Graphics. – 1999 – P. 277-286.
5. *Ho, Y. J.* Collision-free curvature-bounded smooth path planning using composite bezier curve based on Voronoi diagram / Y. J. Ho, J. S. Liu // IEEE International Symposium on Computational Intelligence in Robotics and Automation, Korea: proceedings. – 2009. – P. 463-468.
6. *Arya, S.* Linear-size approximate Voronoi diagrams / S. Arya, T. Malamatos // 13th ACM-SIAM Symposium Discrete Algorithms, January 7-9, 2007, USA: proceedings. – 2007. – P. 147-155.
7. *Arya, S.* Space-efficient approximate Voronoi diagrams / S. Arya, T. Malamatos, D. M. Mount // The 34th ACM Symposium on Theory of Computing: proceedings. – 2002. – P. 721-730.
8. *Har-Peled, S.* A replacement for Voronoi diagrams of near linear size / S. Har-Peled // The 42nd Annual Symposium on Foundations of Computer Science: 2001: proceedings. – P. 94-103.
9. *Schneider, P. J.* An Algorithm for Automatically Fitting Digitized Curves / P. J. Schneider // Graphics Gems – Cambridge: Academic Press, 1990. – P. 612-626.

Надійшла до редколегії 10.12.2014

УДК 519.21

І. О. Литвиненко[1], аспірант

Оптимізація системи обслуговування з багатьма виконавцями та з рекурентним потоком

В статті досліджується система обслуговування з рекурентним потоком заявок, які обробляються декількома виконавцями. Кожна заявка потребує експоненціального часу виконання з параметром, що залежить від типу заявки.

В результаті, було описано спосіб знаходження стаціонарних ймовірностей системи обслуговування та наведено приклад оптимізації параметрів вхідних потоків процесу з метою ефективного завантаження наявних виконавців.

Ключові слова: система обслуговування, рекурентний потік, стаціонарні ймовірності.

[1]Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, пр-т Глушкова 4д
e-mail: igor@ert.org.ua

I. O. Lytvynenko[1], PhD student

Optimization of the queuing system with many servers and with recurrent flow

This paper considers a queuing system with recurrent flow of job and several servers. Every job requires exponential serving time with parameter depending on the type of the job.

As a result it was described a way to find the stationary probabilities of the service process. Finally, it was provided an example of input flow optimization problem in order to make servers to be loaded effectively.

Key Words: queuing system, recurrent flow, stationary probabilities.

[1]Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03680, Kyiv, Glushkova av., 4d
e-mail: igor@ert.org.ua

Статтю представив д. т. н. Гаращенко Ф. Г.

Розглянемо систему обслуговування з M виконавцями та одним потоком заявок, який є потоком відновлення, де інтервали часу між заявками мають функцію розподілу $F(x)$. Кожна заявка з ймовірністю p_i $(i = 1, 2, \ldots, N)$ потребує для обробки одного виконавця на експоненціально розподілений час з параметром μ_i. Якщо всі M виконавців зайняті, заявка отримує відмову в обслуговуванні та губиться.

Випадок з одним типом заявок розглянуто в роботі [1]. Робота [2] описує випадок з різними заявками але з пуассонівським потоком на вході. Випадок з двома типами заявок розглянуто в роботі [3]. В даній роботі узагальнюється результат роботи [3] на випадок декількох типів заявок, що потребують різний середній час для обслуговування. Опишемо роботу цієї системи випадковим процесом

$$X(t) \in \left\{(x_1, \ldots, x_N) : \sum_{i=1}^{N} x_i \le M,\ x_i \ge 0,\ x_i \in N\right\},$$

де $X_i(t)$ – кількість виконавців, зайнятих заявками i-го типу в момент часу $t \ge 0$.

Позначимо τ_n — час надходження n-ї заявки. Тоді $(\tau_{n+1} - \tau_n)$ має функцію розподілу $F(x)$.

Позначимо $\zeta_n = X(\tau_n - 0)$. Тобто $\zeta_n = (\zeta_n^1, \ldots, \zeta_n^N)$ — це стан системи безпосередньо перед надходженням n-ї заявки.

Розглянемо

$$A^n_{r_1,\ldots,r_N}(s) = \mathrm{E}\left\{e^{-s\tau_n} \prod_{i=1}^{N} \binom{\zeta_n^i}{r_i}\right\}.$$

Для подальшого аналізу нам потрібні декілька допоміжних тверджень.

Лема 1 ([1])**.** Якщо $\xi(M, p)$ – випадкова величина розподілена біноміально з параметрами M та $p \in (0, 1)$, матимемо

$$\mathrm{E}\left\{\binom{M - \xi(M,p)}{r}\right\} = \mathrm{E}\left\{\binom{\xi(M, 1-p)}{r}\right\} = (1-p)^r \binom{M}{r}.$$

Лема 2. Нехай $p_{k_1,\ldots,k_N}$ – деякий розподіл ймовірностей:

$$p_{k_1,\ldots,k_N} \ge 0, k_1, \ldots, k_N = \overline{0, M},$$
$$\sum_{i=1}^{N} k_i \le M, \sum_{k_i : \sum_{i=1}^{N} k_i \le M} p_{k_1,\ldots,k_N} = 1.$$

Якщо

$$b_{r_1,\ldots,r_N} = \sum_{k_i : k_i \ge r_i \wedge \sum_{i=1}^{N} k_i \le M} \prod_{i=1}^{N} \binom{k_i}{r_i} p_{k_1,\ldots,k_n}$$

© І. О. Литвиненко, 2014

$(r_1,\dots,r_N)$-й біноміальний момент цього розподілу, тоді

$$p_{k_1,\dots,k_n} = \sum_{r_i:r_i\ge k_i\wedge\sum_{i=1}^N r_i\le M}\prod_{i=1}^N(-1)^{r_i-k_i}\binom{r_i}{k_i}b_{r_1,\dots,r_n}.$$

Доведення. Спочатку покажемо, що для довільних d_k та $0\le r\le m$ з

$$c_r = \sum_{k=r}^m\binom{k}{r}d_k \tag{1}$$

випливає

$$d_k = \sum_{r=k}^m(-1)^{r-k}\binom{r}{k}c_r. \tag{2}$$

Підставивши вираз для c_r в формулу для d_k, отримаємо

$$d_k = \sum_{r=k}^m(-1)^{r-k}\binom{r}{k}\sum_{i=r}^m\binom{i}{r}d_i = \sum_{i=k}^m d_i\sum_{r=k}^i(-1)^{r-k}\binom{r}{k}\binom{i}{r}.$$

Для доведення (1)-(2) достатньо показати, що

$$\sum_{r=k}^i(-1)^{r-k}\binom{r}{k}\binom{i}{r} = \begin{cases}1, & i=k,\\ 0, & i>k.\end{cases}$$

Випадок $i=k$ є очевидним. Розглянемо випадок $i>k$.

$$\sum_{r=k}^i(-1)^{r-k}\binom{i}{r}\binom{r}{k} = \sum_{r=k}^i(-1)^{r-k}\binom{i}{k}\binom{i-k}{r-k} =$$
$$= \binom{i}{k}\sum_{r=0}^{i-k}(-1)^r\binom{i-k}{r} = \binom{i}{k}(1-1)^{i-k} = 0.$$

Отже маємо (1)-(2) доведеним. Тепер до

$$b_{r_1,\dots,r_N} = \sum_{k_i:k_i\ge r_i\wedge\sum_{i=1}^N k_i\le M}\prod_{i=1}^N\binom{k_i}{r_i}p_{k_1,\dots,k_n} =$$
$$= \sum_{k_1=r_1}^{M-r_2-\dots-r_N}\binom{k_1}{r_1}\sum_{k_2=r_2}^{M-k_1-r_3-\dots-r_N}\binom{k_2}{r_2}\cdots$$
$$\cdots\sum_{k_{N-1}=r_{N-1}}^{M-k_1-\dots-k_{N-2}-r_N}\binom{k_{N-1}}{r_{N-1}}\sum_{k_N=r_N}^{M-k_1-\dots-k_{N-1}}\binom{k_N}{r_N}p_{k_1,k_2}$$

застосуємо N разів перетворення (1)-(2), з чого й отримаємо твердження леми. ∎

Лема 3 ([4, с. 212])**.** Якщо для деякої послідовності x_n існує $\lim_{n\to\infty}x_n = x$, тоді

$$\lim_{w\to1}(1-w)\sum_{i=0}^\infty x_i w^i = x.$$

Теорема 1. $A^{n+1}_{r_1,\dots,r_N}(s)$ задовольняють наступним співвідношенням

$$A^n_{0,\dots,0}(s) = \left(\int_0^\infty e^{-sx}\,dF(x)\right)^n = \phi(s)^n,$$

$$A^{n+1}_{r_1,\dots,r_N}(s) = \phi\left(s+\sum_{i=1}^N\mu_i r_i\right)\cdot$$
$$\cdot\sum_{k=1}^N p_k\left(A^n_{r_1,\dots,r_N}(s) + A^n_{r_1,\dots,r_k-1,\dots,r_N}(s) -\right.$$
$$\left. - \sum_{a_i:\sum_{i=1}^N a_i=M}\binom{a_k}{r_k-1}\frac{\prod_{j=1}^N\binom{a_j}{r_j}}{\binom{a_k}{r_k}}A^n_{a_1,\dots,a_N}(s)\right).$$

Доведення. Розглянемо

$$\mathrm{E}\left\{e^{-s\tau_{n+1}}\prod_{i=1}^N\binom{\zeta^i_{n+1}}{r_i}|\zeta_n=(a_1,\dots,a_N),\tau_{n+1}-\tau_n=x\right\} =$$
$$= e^{-sx}\mathrm{E}\left\{e^{-s\tau_n}|\zeta_n=(a_1,\dots,a_N)\right\}\cdot$$
$$\cdot\mathrm{E}\left\{\prod_{i=1}^N\binom{\zeta^i_{n+1}}{r_i}|\zeta_n=(a_1,\dots,a_N),\tau_{n+1}-\tau_n=x\right\} =$$
$$= e^{-sx}\mathrm{E}\left\{e^{-s\tau_n}|\zeta_n=(a_1,\dots,a_N)\right\}\cdot$$
$$\cdot\sum_{k=1}^N p_k\mathrm{E}\left\{\binom{\zeta^k_{n+1}}{r_k}\frac{\prod_{i=1}^N\binom{a_i-\xi(a_i,1-e^{-\mu_i x})}{r_i}}{\binom{a_k-\xi(a_k,1-e^{-\mu_k x})}{r_k}}\right.$$
$$\left.|\zeta_n=(a_1,\dots,a_N),\tau_{n+1}-\tau_n=x,n\text{-а заявка має тип }k\right\},$$

де $\xi(k,p)$ – випадкова величина розподілена біноміально з параметрами k та $p\in(0,1)$.

Перетворимо останній вираз, використовуючи лему 1. Отримаємо

$$\mathrm{E}\left\{e^{-s\tau_{n+1}}\prod_{i=1}^N\binom{\zeta^i_{n+1}}{r_i}|\zeta_n=(a_1,\dots,a_N),\tau_{n+1}-\tau_n=x\right\} =$$
$$= e^{-sx}\mathrm{E}\left\{e^{-s\tau_n}|\zeta_n=(a_1,\dots,a_N)\right\}\cdot$$
$$\cdot\sum_{k=1}^N p_k\frac{\prod_{i=1}^N e^{-\mu_i x r_i}\binom{a_i}{r_i}}{e^{-\mu_k x r_k}\binom{a_k}{r_k}}e^{-\mu_k x r_k}d(a_k,r_k) =$$

$$= e^{-\left(s+\sum_{k=1}^N \mu_k r_k\right)} \mathrm{E}\left\{e^{-s\tau_n}|\zeta_n = (a_1,\dots,a_N)\right\}\cdot$$
$$\cdot \sum_{k=1}^N p_k \frac{\prod_{i=1}^N \binom{a_i}{r_i}}{\binom{a_k}{r_k}} d(a_k, r_k),$$

де

$$d(a_k, r_k) = \begin{cases} \binom{a_k+1}{r_k}, & \sum_{i=1}^N a_i < M, \\ \binom{a_k}{r_k}, & \sum_{i=1}^N a_i = M. \end{cases}$$

Якщо час очікування заявки має функцію розподілу $F(x)$ та $\phi(s) = \int_0^\infty e^{-sx}\, dF(x)$, тоді

$$\mathrm{E}\left\{e^{-s\tau_{n+1}} \prod_{i=1}^N \binom{\zeta_{n+1}^i}{r_i} |\zeta_n = (a_1,\dots,a_N)\right\} =$$
$$= \phi\left(s + \sum_{i=1}^N \mu_i r_i\right) \mathrm{E}\left\{e^{-s\tau_n}|\zeta_n = (a_1,\dots,a_N)\right\}\cdot$$
$$\cdot \sum_{k=1}^N p_k \frac{\prod_{i=1}^N \binom{a_i}{r_i}}{\binom{a_k}{r_k}} d(a_k, r_k).$$

Домножимо рівність на $\mathrm{P}\{\zeta_n = (a_1,\dots,a_N)\}$ та просумуємо по $(a_1,\dots,a_N)$: $\sum_{i=1}^N a_i \le M$. Матимемо

$$A^{n+1}_{r_1,\dots,r_N}(s) = \phi\left(s + \sum_{i=1}^N \mu_i r_i\right) \sum_{k=1}^N p_k \cdot$$
$$\cdot \left(\sum_{a_i : 1+\sum_{i=1}^N a_i \le M} \frac{\prod_{j=1}^N \binom{a_j}{r_j}}{\binom{a_k}{r_k}} \left(\binom{a_k}{r_k} + \binom{a_k}{r_k - 1} \right) \right) \cdot$$
$$\cdot \mathrm{E}\left\{e^{-s\tau_n}|\zeta_n = (a_1,\dots,a_N)\right\} \mathrm{P}\{\zeta_n = (a_1,\dots,a_N)\} +$$
$$+ \sum_{a_i : 1+\sum_{i=1}^N a_i > M} \prod_{j=1}^N \binom{a_j}{r_j} \mathrm{E}\left\{e^{-s\tau_n}|\zeta_n = (a_1,\dots,a_N)\right\} \cdot$$
$$\cdot \mathrm{P}\{\zeta_n = (a_1,\dots,a_N)\} \Bigg).$$

Враховуючи, що

$$A^n_{r_1,\dots,r_N}(s) = \sum_{a_i : \sum_{i=1}^N a_i \le M} \prod_{i=1}^N \binom{a_i}{r_i} \cdot$$
$$\cdot \mathrm{E}\left\{e^{-s\tau_n}|\zeta_n = (a_1,\dots,a_N)\right\} \mathrm{P}\{\zeta_n = (a_1,\dots,a_N)\}$$

та використавши лему 2, отримаємо твердження теореми. ∎

Наслідок 1. Генератрису для $A^n_{r_1,\dots,r_N}(s)$

$$\Phi_{r_1,\dots,r_N}(s,w) = \sum_{n=1}^\infty A^n_{r_1,\dots,r_N}(s) w^n \qquad (3)$$

можна визначити наступними співвідношеннями

$$\Phi_{0,\dots,0}(s,w) = \frac{w\phi(s)}{1 - w\phi(s)},$$

$$\Phi_{r_1,\dots,r_N}(s,w) = \frac{w\phi\left(s + \sum_{i=1}^N \mu_i r_i\right)}{1 - w\phi\left(s + \sum_{i=1}^N \mu_i r_i\right)} \cdot$$
$$\cdot \left(\prod_{i=1}^N \binom{j_0^i}{r_i} + \sum_{k=1}^N p_k \left[\Phi_{r_1,\dots,r_k-1,\dots,r_N}(s,w) - \right.\right.$$
$$\left.\left. - \sum_{a_i : \sum_{i=1}^N a_i = M} \Phi_{a_1,\dots,a_N}(s,w) \binom{a_k}{r_k - 1} \frac{\prod_{j=1}^N \binom{a_j}{r_j}}{\binom{a_k}{r_k}} \right] \right),$$

де j_0^i – кількість зайнятих виконавців в момент часу $t = 0$ заявками i-го типу.

Доведення.

$$\Phi_{0,\dots,0}(s,w) = \sum_{n=1}^\infty A^n_{0,\dots,0}(s) w^n =$$
$$= \sum_{n=1}^\infty \phi(s)^n w^n = \frac{w\phi(s)}{1 - w\phi(s)}.$$

Рекурентне співвідношення для $\Phi_{r_1,\dots,r_N}(s,w)$ отримується перетворенням відповідного рекурентного співвідношення для $A^n_{r_1,\dots,r_N}(s)$, отриманого в теоремі 1.

Враховуючи, що

$$A^1_{r_1,\dots,r_N}(s) = \int_0^\infty \mathrm{E}\left\{e^{-s\tau_1} \prod_{i=1}^N \binom{\zeta_1^i}{r_i} |\tau_1 = x\right\} dx =$$
$$= \int_0^\infty e^{-sx} \mathrm{E}\left\{\prod_{i=1}^N e^{-\mu_i x r} \binom{\zeta_0^i}{r_i} |\tau_1 = x\right\} dx =$$
$$= \phi\left(s + \sum_{i=1}^N \mu_i r_i\right) \prod_{i=1}^N \binom{j_0^i}{r_i}$$

матимемо

$$\Phi_{r_1,\dots,r_N}(s,w) - w\phi\left(s + \sum_{i=1}^N \mu_i r_i\right) \prod_{i=1}^N \binom{j_0^i}{r_i} =$$
$$= w\phi\left(s + \sum_{i=1}^N \mu_i r_i\right) \sum_{k=1}^N p_k \left(\Phi_{r_1,\dots,r_N}(s,w) + \right.$$
$$+ \Phi_{r_1,\dots,r_k-1,\dots,r_N}(s,w) -$$
$$\left. - \sum_{a_i : \sum_{i=1}^N a_i = M} \binom{a_k}{r_k - 1} \frac{\prod_{j=1}^N \binom{a_j}{r_j}}{\binom{a_k}{r_k}} \Phi_{a_1,\dots,a_N}(s,w) \right),$$

$$\Phi_{r_1,\ldots,r_N}(s,w)=\frac{w\phi\left(s+\sum_{i=1}^N\mu_i r_i\right)}{1-w\phi\left(s+\sum_{i=1}^N\mu_i r_i\right)}\cdot$$
$$\cdot\left(\prod_{i=1}^N\binom{j_0^i}{r_i}+\sum_{k=1}^N p_k\left[\Phi_{r_1,\ldots,r_k-1,\ldots,r_N}(s,w)-\right.\right.$$
$$\left.\left.-\sum_{a_i:n_k+\sum_{i=1}^N a_i>M}\binom{a_k}{r_k-1}\frac{\prod_{j=1}^N\binom{a_j}{r_j}}{\binom{a_k}{r_k}}\Phi_{a_1,\ldots,a_N}(s,w)\right]\right),$$

$$\Phi_{r_1,\ldots,r_N}(s,w)=\frac{w\phi\left(s+\sum_{i=1}^N\mu_i r_i\right)}{1-w\phi\left(s+\sum_{i=1}^N\mu_i r_i\right)}\cdot$$
$$\cdot\left(\prod_{i=1}^N\binom{j_0^i}{r_i}+\sum_{k=1}^N p_k\left[\Phi_{r_1,\ldots,r_k-1,\ldots,r_N}(s,w)-\right.\right.$$
$$\left.\left.-\sum_{a_j:\sum_{j=1}^N a_j=M}\Phi_{a_1,\ldots,a_N}(s,w)\binom{a_k}{r_k-1}\frac{\prod_{j=1}^N\binom{a_j}{r_j}}{\binom{a_k}{r_k}}\right]\right).$$

Що і треба було довести. ■

Теорема 2. Біноміальні моменти

$$B_{r_1,\ldots,r_N}=\sum_{a_i:\sum_{i=1}^N a_i\le M}\prod_{i=1}^N\binom{a_i}{r_i}P_{a_1,\ldots,a_N}$$

стаціонарного розподілу

$$P_{a_1,\ldots,a_N}=\lim_{n\to\infty}\mathrm{P}\{\zeta_n=(a_1,\ldots,a_N)\}$$

процесу $\zeta_n=(\zeta_n^1,\ldots,\zeta_n^N)$ задовольняють наступним співвідношенням:

$$B_{0,\ldots,0}=1,$$

$$B_{r_1,\ldots,r_N}=\frac{\phi\left(\sum_{i=1}^N\mu_i r_i\right)}{1-\phi\left(\sum_{i=1}^N\mu_i r_i\right)}\cdot$$
$$\cdot\left(\sum_{k=1}^N p_k\left[B_{r_1,\ldots,r_k-1,\ldots,r_N}-\right.\right.$$
$$\left.\left.-\sum_{a_j:\sum_{j=1}^N a_j=M}B_{a_1,\ldots,a_N}\binom{a_k}{r_k-1}\frac{\prod_{j=1}^N\binom{a_j}{r_j}}{\binom{a_k}{r_k}}\right]\right).$$

Доведення. Використовуючи лему 3, маємо

$$B_{r_1,\ldots,r_N}=\lim_{n\to\infty}B^n_{r_1,\ldots,r_N}=$$
$$=\lim_{w\to1}(1-w)\sum_{i=1}^\infty B^i_{r_1,\ldots,r_N}w^i=\lim_{w\to1}(1-w)\Phi_{r_1,\ldots,r_N}(0,w).$$

Використовуючи рекурентне співвідношення для $\Phi_{r_1,\ldots,r_N}(0,w)$ з наслідку 1, маємо

$$\lim_{w\to1}(1-w)\Phi_{r_1,\ldots,r_N}(w)=\frac{\phi\left(\sum_{i=1}^N\mu_i r_i\right)}{1-\phi\left(\sum_{i=1}^N\mu_i r_i\right)}\cdot$$
$$\cdot\left(\sum_{k=1}^N p_k\left[\lim_{w\to1}(1-w)\Phi_{r_1,\ldots,r_k-1,\ldots,r_N}(w)-\right.\right.$$
$$-\sum_{a_j:\sum_{j=1}^N a_j=M}\lim_{w\to1}(1-w)\Phi_{a_1,\ldots,a_N}(w)\cdot$$
$$\left.\left.\cdot\binom{a_k}{r_k-1}\frac{\prod_{j=1}^N\binom{a_j}{r_j}}{\binom{a_k}{r_k}}\right]\right),$$

звідки отримуємо рекурентне співвідношення для $B_{r_1,\ldots,r_N}$.

Розглянемо випадок $B_{0,0}$ окремо.

$$\lim_{w\to1}(1-w)\Phi_{0,\ldots,0}(w)=\lim_{w\to1}\frac{(1-w)w\phi(0)}{1-w\phi(0)}=$$
$$=\lim_{w\to1}\frac{(1-w)w\int_0^\infty e^{-0x}\,dF(x)}{1-w\int_0^\infty e^{-0x}\,dF(x)}=\lim_{w\to1}\frac{(1-w)w}{1-w}=$$
$$=\lim_{w\to1}w=1.$$

Теорему доведено. ■

Лема 4. Якщо $f(0,\ldots,0)=0$, то розв'язок рекурентного співвідношення

$$b_{r_1,\ldots,r_N}=c(r_1,\ldots,r_N)\cdot$$
$$\cdot\sum_{i=1}^N c_i b_{r_1,\ldots,r_i-1,\ldots,r_N}+f(r_1,\ldots,r_N)$$

можна подати у вигляді

$$b_{r_1,\ldots,r_N}=d_{0,\ldots,0,r_1,\ldots,r_N}c_1^{r_1}\cdots c_N^{r_N}b_{0,\ldots,0}\cdot$$
$$\cdot\sum_{a_1=0}^{r_1}\cdots\sum_{a_N=0}^{r_N}d_{a_1,\ldots,a_N,r_1,\ldots,r_N}f(a_1,\ldots,a_N)\cdot$$
$$\cdot c_1^{r_1-a_1}\cdots c_N^{r_N-a_N},\quad(4)$$

де

$$d_{a_1,\dots,a_N,r_1,\dots,r_N} = \begin{cases} c(r_1,\dots,r_N)\cdot \\ \cdot \sum_{i=1}^{N} d_{a_1,\dots,a_N,r_1,\dots,r_i-1,\dots,r_N}, & a_i, r_i \geq 0, i = \overline{1,N}, \\ 1, & a_i = r_i, i = \overline{1,N}, \\ 0, & , \end{cases}$$

тобто

$$d_{a_1,\dots,a_N,r_1,\dots,r_N} = \sum_{\substack{\text{по всім шляхам } \pi \\ \text{з } (a_1,\dots,a_N) \text{ в } (r_1,\dots,r_N)}} \prod_{\substack{\text{по всіх клітинках } (b_1,\dots,b_N) \\ \text{шляху } \pi \text{ крім } (a_1,\dots,a_N)}} c(b_1,\dots,b_N).$$

Доведення.

Доведення леми можна отримати підстановкою (4) у рекурентне співвідношення для $b_{r_1,\dots,r_N}$.

$$d_{0,\dots,0,r_1,\dots,r_N} c_1^{r_1}\cdots c_N^{r_N} b_{0,\dots,0} + \sum_{a_1=0}^{r_1}\cdots\sum_{a_N=0}^{r_N} d_{a_1,\dots,a_N,r_1,\dots,r_N} f(a_1,\dots,a_N)\cdot \cdot c_1^{r_1-a_1}\cdots c_N^{r_N-a_N} =$$

$$= f(r_1,\dots,r_N) + \Big(c_1^{r_1}\cdots c_N^{r_N} b_{0,\dots,0} c(r_1,\dots,r_N)\cdot \cdot \sum_{i=1}^{N} d_{0,\dots,0,r_1,\dots,r_i-1,\dots,r_N} + \sum_{i=1}^{N}\sum_{a_1=0}^{r_1}\cdots\sum_{a_i=0}^{r_i-1}\cdots\sum_{a_N=0}^{r_N} c(r_1,\dots,r_N)\cdot \cdot d_{a_1,\dots,a_N,r_1,\dots,r_i-1,\dots,r_N} f(a_1,\dots,a_N) c_1^{r_1-a_1}\cdots c_N^{r_N-a_N}\Big).$$

Залишається довести тотожність

$$\sum_{a_1=0}^{r_1}\cdots\sum_{a_N=0}^{r_N} d_{a_1,\dots,a_N,r_1,\dots,r_N} f(a_1,\dots,a_N)\cdot \cdot c_1^{r_1-a_1}\cdots c_N^{r_N-a_N} =$$

$$= f(r_1,\dots,r_N) + \sum_{i=1}^{N}\sum_{a_1=0}^{r_1}\cdots\sum_{a_i=0}^{r_i-1}\cdots\sum_{a_N=0}^{r_N} c(r_1,\dots,r_N)\cdot \cdot d_{a_1,\dots,a_N,r_1,\dots,r_i-1,\dots,r_N} f(a_1,\dots,a_N) c_1^{r_1-a_1}\cdots c_N^{r_N-a_N}.$$

Зауважимо, що з означення можна показати

$$d_{a_1,\dots,a_N,r_1,\dots,r_N} = 0, \text{ якщо існує } i : a_i > r_i.$$

Тому, додаючи необхідні нульові доданки та знаючи, що $d_{r_1,\dots,r_N,r_1,\dots,r_N} = 1$, матимемо

$$f(r_1,\dots,r_N) + \sum_{i=1}^{N}\sum_{a_1=0}^{r_1}\cdots\sum_{a_i=0}^{r_i-1}\cdots\sum_{a_N=0}^{r_N} c(r_1,\dots,r_N)\cdot \cdot d_{a_1,\dots,a_N,r_1,\dots,r_i-1,\dots,r_N}\cdot \cdot f(a_1,\dots,a_N) c_1^{r_1-a_1}\cdots c_N^{r_N-a_N} =$$

$$= \sum_{a_1=0}^{r_1}\cdots\sum_{a_N=0}^{r_N}\sum_{i=1}^{N} c(r_1,\dots,r_N)\cdot \cdot d_{a_1,\dots,a_N,r_1,\dots,r_i-1,\dots,r_N}\cdot \cdot f(a_1,\dots,a_N) c_1^{r_1-a_1}\cdots c_N^{r_N-a_N} =$$

$$= \sum_{a_1=0}^{r_1}\cdots\sum_{a_N=0}^{r_N} d_{a_1,\dots,a_N,r_1,\dots,r_N} f(a_1,\dots,a_N)\cdot \cdot c_1^{r_1-a_1}\cdots c_N^{r_N-a_N}.$$

Що і треба було довести.

■

Наслідок 2. Біноміальні моменти

$$B_{r_1,\dots,r_N} = \sum_{a_i:\sum_{i=1}^{N} a_i \leq M} \prod_{i=1}^{N} \binom{a_i}{r_i} P_{a_1,\dots,a_N}$$

стаціонарного розподілу

$$P_{a_1,\dots,a_N} = \lim_{n\to\infty} \mathrm{P}\{\zeta_n = (a_1,\dots,a_N)\}$$

процесу $\zeta_n = (\zeta_n^1,\dots,\zeta_n^N)$ можна подати у вигляді:

$$B_{r_1,\dots,r_N} = d_{0,\dots,0,r_1,\dots,r_N} p_1^{r_1}\cdots p_N^{r_N} - \sum_{b_1=0}^{r_1}\cdots\sum_{b_N=0}^{r_N} d_{b_1,\dots,b_N,r_1,\dots,r_N} p_1^{r_1-a_1}\cdots p_N^{r_N-a_N}\cdot \cdot c(b_1,\dots,b_N) \sum_{a_j:\sum_{j=1}^{N} a_j = M}\sum_{k=1}^{N} p_k B_{a_1,\dots,a_N}\cdot \cdot \binom{a_k}{r_k-1} \frac{\prod_{j=1}^{N}\binom{a_j}{r_j}}{\binom{a_k}{r_k}},$$

де d_{b_1,b_2,r_1,r_2} визначені як в лемі 4 при

$$c(r_1,\dots,r_N) = \frac{\phi\left(\sum_{i=1}^{N}\mu_i r_i\right)}{1-\phi\left(\sum_{i=1}^{N}\mu_i r_i\right)}$$

та $B_{a_1,\dots,a_N}$ для $a_j : \sum_{j=1}^{N} a_j = M$ визначені системою відповідних рівнянь (2) (якщо її розв'язок існує).

Доведення. Застосовуємо лему 4 до результату теореми 2. ∎

Лема 5. Якщо $P_{r_1,\dots,r_N}$ стаціонарні ймовірності для процесу ζ_n. Тоді стаціонарні ймовірності $\overline{P}_{r_1,\dots,r_N}$ процесу $X(\tau_n)$, $n = 0,1,\dots$ дорівнюють

$$\overline{P}_{r_1,\dots,r_N} = \\ = \begin{cases} \sum_{i=1}^N P_{r_1,\dots,r_i-1,\dots,r_2} p_i, & \sum_{i=1}^N r_i < M, \\ \sum_{i=1}^N P_{r_1,\dots,r_i-1,\dots,r_2} p_i + P_{r_1,\dots,r_N}, & \sum_{i=1}^N r_i = M. \end{cases} \tag{5}$$

Розглянемо задачу оптимізації параметрів $p_1,\dots,p_N$ вхідного потоку

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^N c_i \mathrm{E}\{X^i\} \to max, \\ \sum_{i=1}^N p_i = 1, \end{cases}$$

де розподіл вектора $(X^1,\dots,X^N)$ співпадає з (5).

$$\mathrm{E}\{X^i\} = \sum_{a:a_1+\dots+a_n\le M} \overline{P}_{a_1,\dots,a_N}(p_1,\dots,p_n) a_i.$$

Матимемо

$$\begin{cases} \sum_{a:a_1+\dots+a_n\le M} \overline{P}_{a_1,\dots,a_N}(p_1,\dots,p_n) \sum_{i=1}^N c_i a_i \to max, \\ \sum_{i=1}^N p_i = 1. \end{cases}$$

Дану задачу оптимізації можна розв'язати чисельно. Розглянемо, для прикладу, випадок системи з параметрами $\mu = (0.34, 0.68, 0.136)$ та $c = (260, 311, 400)$, якщо час між надходженнями заявок розподілений згідно гамма розподілу з параметрами 2 та $1/3$.

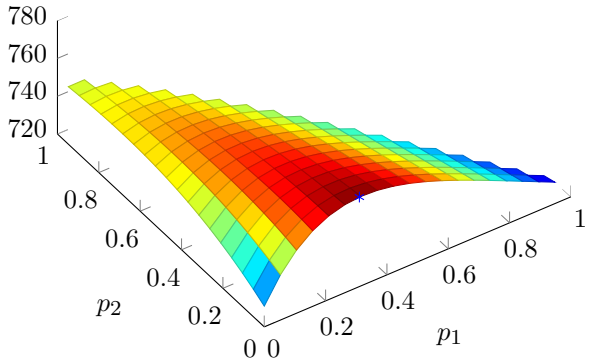


Рис. 1. Функція $\sum_{i=1}^N c_i \mathrm{E}\{X^i\}$ в залежності від p.

Таким чином оптимальними значеннями керуючих ймовірностей розглянутої стохастичної системи для обраних параметрів будуть $p = (0.3101, 0, 0.6898)$.

Список використаних джерел

[1] Takács Lajos. Introduction to the Theory of Queues. — Oxford University Press, 1962. — P. 268.

[2] Lebedev Eugene, Ponomarchuk Oleg. On queuing systems with failures and several types of input flows // Top. — 1999. — Vol. 7, no. 2. — P. 323–332.

[3] Lytvynenko I. O., Lebedev E. O. Optimization of the queuing system with many servers and with recurrent flow of jobs of different types // Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. — 2013. — no. 4. — P. 126–129.

[4] Klimov G. P. Stochastic service system. — Nauka, 1966. — P. 243. — (in Russian).

Надійшла до редколегії 09.01.14

УДК 004.82

Лялецький О.В.[1], к.ф.-м.н., с.н.с.
Афонін А.О.[2], к.ф.-м.н.

Про формальний математичний текст і логічну та онтологічну коректності

Стаття присвячена поняттям логічної та онтологічної коректностей та їх використанню при виконанні верифікації різноманітних математичних текстів, поданих формальною природною мовою ForTheL.

Ключові слова: логічна коректність, онтологічна коректність, формальний математичний текст, мова ForTheL .

[1]Київський національний університет імені Тараса Шевченка,03680, м. Київ, пр-т Глушкова 4д, e-mail: *lav@unicyb.kiev.ua*
[2]Національний університет «Києво-Могилянська академія» , 04655, м. Київ, вул. Сковороди 2, e-mails: *andrew.afomin@gmail.com*

A.V.Lyaletski[1], PhD (Physics&Mathematics)
A.A.Afonin[2], PhD (Physics&Mathematics)

On formal mathematical text and logical and ontological correctness's

The paper is devoted to the notions of logical and ontological correctness's as well as to their usage in verifying various mathematical texts presented in the formal natural language ForTheL.

Key Words: logical correctness, ontological correctness, formal mathematical text, ForThel language.

[1]Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03680, Kyiv, Glushkova av., 4d, e-mail: *lav@unicyb.kiev.ua*
[2] National University of Kyiv-Mohyla Academy, 04655, Kyiv, Skovorody vul., 2, e-mails: *andrew.afomin@gmail.com*

Статтю представив д.т.н., проф. Кудин В.І.

Сьогодні активно розвиваються застосування систем керування математичними знаннями, які орієнтовані на розв'язання як задач синтезу та верифікації програмного забезпечення та апаратних засобів, так і задач перевірки коректності протоколів (криптографічних, комунікаційних і т.д.). Сучасна індустрія високих технологій надзвичайно зацікавлена у методах ефективно вирішення цих задач. Тому на сучасному етапі стає необхідним застосування систем автоматизації міркувань [1], які орієнтовані на розв'язання завдань керування математичними знаннями, які потребують потужної комп'ютерної підтримки, здатної до накопичення, організації та застосовування (напів-)формалізованого математичного знання. Одним з можливих підходів, що ведуть до досягнення цієї мети, є розвиток комп'ютерних логік у напрямку можливості застосування онтологій у процесі дедуктивних побудов, а також проведення досліджень з логічної та онтологічної коректностей тексту та їх застосування в системах автоматизації обробки математичних знань. Саме направленість досліджень на використання конкретних властивостей предметної області за допомогою логічних і онтологічних зв'язків веде до вивчення засобів збільшення виразних (мовних) можливостей логік (включаючи логіки першого порядку), що дає новий поштовх до вивчення різних формалізмів для завдання логічних систем, наприклад, появи дескриптивної логіки. Поява ж нових формалізмів ініціює вивчення семантик логік, що з'являються, а також побудову нових моделей для вже добре відомих формальних систем, наприклад, для лямбда-числення.

1. *Математичний текст* - це непросто послідовність речень або лямбда-терм, який кодує деяке доведення. Він представляє собою складний об'єкт, який містить аксіоми, визначення, теореми, допоміжні твердження (леми) і доведення різних видів (суперечністю, індукцією, аналізом випадків і т.д). Що ж може буту його "коректністю"? Не аналізуючи всі можливі підходи до цього поняття, ми нижче розвиваємо свій підхід, який базується на можливостях системи САД (http://nevidal.org), що була створена у рамках робіт по Алгоритму Очевидності [2-4] та орієнтована на пошук доведень і верифікацію математичних текстів [5] .

Можна виділяти чотири головних підходу до формального представлення математичного тексту (вважаться, що читач знайом з ними хоче б в загальних рисах) [6]: (1) інтерактивний, (2) оснований на лямбда-нотації, (3) генеруючий

© О.В.Лялецький, А.О.Афонін, 2014

доведення на базі вибору той або іншій техніки виведення і (4) декларативний, який активно використовується в системі САД в вигляді сукупності речень, поданих формальною природною мовою ForTheL [7].

Подібно звичайному математичному тексту, ForTheL-текст складається з визначень, тверджень, припущень, теорем, доведень и т.п. Він є послідовністю розділів верхнього рівня. Ці розділи - аксіоми, визначення, теореми та леми - відіграють в ForTheL ту ж саму роль, що й в звичайних математичних текстах. Будь-який розділ верхнього рівня складається з послідовності припущень, можливо порожньої, за якою йде твердження. Спеціальним розділом верхнього рівня є розділ "сигнатура", де вказується область визначеності нового синтаксичного примітива - перелічуються поняття до об'єму яких мають належати його аргументи. В онтологічні коректному тексті (дивись нижче), кожен синтаксичний примітив має вперше з'явитися або в розділі "визначення", або в розділі "сигнатура".

Твердження в розділі "теорема" може супроводжуватись доведенням. Доведення в ForTheL - це послідовність припущень, селекцій та тверджень (які можуть мати власні доведення), а також розділів нижнього рівня: випадків та простих блоків. Послідовність розділів типу "випадок" має завершувати доведення за розглядом випадків. Прості блоки використовуються лише для структуризації доведення: для обмеження області дії припущень та декларацій змінних. Мова ForTheL підтримує декілька схем доведень: від суперечного, за розглядом випадків, за загальною індукцією. Речення ForTheL також вважаються розділами нижнього рівня, зокрема, твердження, що супроводжується доведенням, є одним складним розділом.

Щодо семантики ForTheL-тексту, то вона залежить від завдання, що поставлено системі: наприклад, перевірка коректності або пошук релевантних фактів стосовно заданого твердження.

2. Перейдемо тепер к поняттям, що розглядаються у статті.

Для означення логічної коректності нам потребуються деякі поняття.

У тому, що слідує нижче, ForTheL-розділ A розглядується як трійка $(T,|A|[\Lambda])$, де T означає тип розділу, $|A|$ - формульне зображення розділу A, і Λ - послідовність підрозділів розділу A, якщо ці підрозділи існують [8].

Типи A можуть бути наступними: toplevel для будь-якого розділу (аксіома, визначення, розширення сигнатури, теорема, лема) верхнього рівня, case для розділу "випадок", assume для розділу "припущення", select для розділу "селекція", affirm для розділу "твердження", posit для розділу "постулат".

Вважається, що речення з забезпечуваним доведенням має той же тип, як така ж пропозиція без доведення. (Вони відрізняються тільки в третьому компоненті трійки, - списку підрозділів, - які порожні для речення без доведення.) Згадайте, що, так само, зображення формули речення не залежить від присутності доведення. У розділі "випадок", гіпотеза випадку належить до розділу зображення формули і не з'являється серед його підрозділів. Постулат - твердження в кінці аксіоми, визначення або розширення сигнатури; тобто, іншими словами, твердження, яке потрібні довести.

Формула F є *логічно коректною* відносно послідовності розділів Γ (логічний контекст формули F), тоді, тільки тоді, коли F може бути виведеною в класичному численні предикатів 1-го порядку з зображень формул розділив з Γ.

3. Підхід до означення онтологічної коректності ґрунтується на понятті "локального образа".

Ми використовуємо скінчені послідовності натуральних чисел для позначення позицій підформул та термів всередині формули.

Локальний образ формули U в позиції π в формулі F (позначається ${}^{F}\langle U\rangle_{\pi}$) - це формула першого порядку, що є формальним еквівалентом твердження U є локально істинною в позиції π в F. Формула ${}^{F}\langle U\rangle_{\pi}$ визначається рекурсією по структурі формули F.

Адекватність цього поняття підтверджується його наступними властивостями (знак $\models$ використовується для означення істинності, $\equiv$ - логічної еквівалентності, $\supset$ - імплікації):

- $\forall U \models {}^{F}\langle U\rangle_{\pi}$, тобто істинна формула є локально істинною в будь-якому оточенні ($\forall U$ тут означає універсальне замикання формули U);

- Якщо $\models {}^{F}\langle U\rangle_{\pi}$ і $\models {}^{F}\langle U\supset V\rangle_{\pi}$, то $\models {}^{F}\langle V\rangle_{\pi}$ ("локальний" modus ponens);

- Якщо $\models {}^{F}\langle U\equiv V\rangle_{\pi}$, то $\models (F[U]_{\pi} \equiv F[V]_{\pi})$, тобто: якщо два твердження є локально еквівалентними в деякій позиції формули, вони є взаємно замінюваними в цій позиції ($F[U]_{\pi}$ означає формулу, де U підставлено в позицію π формули F);

- Якщо $\vDash {}^{F}\langle s = t\rangle_{\pi}$, то $\vDash (F[s]_{\pi} \equiv F[t]_{\pi})$, тобто, аналогічно до попереднього, але тут π є позицією терму.

Ці властивості легко перетворюються у відповідні перетворення. Як результат, ми отримуємо так званий апарат локальних трансформацій, за допомогою якого ми можемо перевірити будь-якого логічного попередника розділу *A* на предмет його участі в локальних трансформаціях формального представлення |*A*| [9]. Це веде до наступного означення онтологічної коректності розділу.

Розділ *A* є *онтологічно коректнім відносно Г* тоді, і тільки тоді, коли кожне входження нелогічного символу в |*A*| або має відповідне означення, або має відповідне розширення сигнатури, або являється головним входженням в деяке означення чи в розширення сигнатури *A*.

ForTheL-текст *T* є *онтологічне коректнім* тоді, і тільки тоді, коли кожен розділ з *T* є онтологічне коректнім відносно його логічних попередників.

4. Введені поняття логічної і онтологічної коректностей були застосовані в системі САД. Так, були проведені експерименти по верифікації різноманітних реальних математичних текстів.

До найбільш цікавих експериментів належать:

- верифікація доведення скінченого і нескінченного варіантів теореми Рамсея, а також принципу компактності в формулюванні;
- верифікація доведення стабільності відношення потоншення (refinement) над класом специфікацій програм щодо деяких операцій над специфікаціями;
- верифікація доведення деяких властивостей кінцевих груп;
- верифікація доведення теореми Тарського про нерухому точку;
- верифікація доведення збіжності ряду із знакозмінними членами, який монотонно убуває по абсолютному значенню;
- верифікація доведення ірраціональності квадратного кореня з простого числа;
- верифікація доведення нерівності Коши-Буняковського для векторів над R.

Додатково відмітимо, що розроблений підхід до створення ефективних методів логіко-онтологічної верифікації формальних текстів може бути застосованим для перевірки властивостей протоколів, ефективного витягання та управління математичними знаннями, впорядкованого накопичення математичної інформації.

Список використаних джерел

1. Handbook of Automated Reasoning / *Eds.: Robinson A. and Voronkov A.* – Elsevier Science Publishers B.V., 2001. – Vol. 1, 2. – 2184 pp.
2. Glushkov *V.M.* Some problems of automata theory and artificial intelligence // Kibernetika. – 1970. – No. 2. – P. 3-13. (In Russian)
3. *Verchinine K., Lyaletski A., Paskevich A.* System for Automated Deduction (SAD): a tool for proof verification. // Lecture Notes in Computer Science. – 2007. – Vol. 4603. – P. 398-403.
4. *Lyaletski A., Paskevich A., Verchinine K.* SAD as a mathematical assistant — how should we go from here to there? // Journal of Applied Logic. – 2006. – 4(4) . – P. 560-591.
5. *Lyaletski A., Paskevich A., Verchinine K.* Theorem proving and proof verification in the system SAD // Lecture Notes in Computer Science. – 2004. – Vol. 3119. – P. 236-250.
6. *Anisimov A.V., Vershinin K P., Paskevich A. Yu., Lyaletski A.* On automated deduction in the environment of an natural formal language // Proceedings of the 3rd International conference "New information technologies in Education for All: E-Education". – Kyiv. – 2008. – P. 383-391. (In Russian)
7. *Vershinin K., Paskevich A.* ForTheL - the language of formal theories // Journal of Information Theories and Applications. – 2000. – 7, № 3. – P. 120-126.
8. *Anisimov A., Verchinine K., Lyaletski A., Paskevich A.* On Correctness of Mathematical Texts from a Logical and Practical Point of View // Lecture Notes in Computer Science (Intelligent Computer Mathematics: AISC/MKM/Calculemus 2008). – 2008. – Vol. 5144. – P. 583-598.
9. *Paskevich A., Verchinine K., Lyaletski A., Anisimov A.* Reasoning inside a formula and ontological correctness of a formal mathematical text // Calculemus/MKM 2007 — Work in Progress. – RISC-Linz Report Series. Number 07-06. – 2007. – P. 77-91.

Надійшла до редколегії 13.12.2013

УДК 510.584

Олександр О. Лялецький , к.ф.-м.н.

Елементарне доведення теореми нормалізації для $\beta\eta$-редукції

В статті будується нове доведення теореми нормалізації для βη-редукції. Це доведення є більш прозорим та коротким, ніж оригінальне доведення, проведене Я.Клопом.

Ключові слова: безтипове λ-числення, βη-редукція, стратегія лівої редукції, теорема нормалізації, теорема про βη-нормальну форму.

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, пр-т. Глушкова 4д, e-mail: *aal@unicyb.kiev.ua*

Alexandre A. Lyaletsky, PhD (Physics and Mathematics)

An elementary proof of the Normalization theorem for $\beta\eta$-reduction

The paper contains a new proof of the Normalization theorem for βη-reduction. The new proof is much more transparent and shorter, in comparison with J.W.Klop's original proof.

Key Words: untyped λ-calculus, βη-reduction, leftmost strategy, Normalization theorem, βη-normal form theorem.

Kiev National Taras Shevchenko university, 03680, Kyiv, Glushkov st., 4d, e-mail: *aal@unicyb.kiev.ua*

Статтю представив д.т.н., проф. Кудин В.І.

Розглядається безтиповий варіант λ-числення. Всі базові визначення, результати та стандартні позначення, які використовуються в цій роботі, можуть бути знайдені в монографії [1].

Нагадаємо, що *стратегією лівої βη-редукції* називається однокрокова $\beta\eta$-стратегія $f_{\beta\eta}^{left}$, яка в кожному λ-термі t згортає найбільш зовнішнє з найлівіших входжень $\beta\eta$-редексів в t (якщо t містить хоча б одне таке входження). Аналогічно, *стратегія* f_{β}^{left} *лівої β-редукції* визначається як така β-стратегія, яка в кожному λ-термі t згортає найлівіше входження β-редекса в t (зауважимо, що в останньому визначені умова про найбільшу зовнішність β-редекса може бути опущена, оскільки кожний β-редекса однозначно визначається розташуванням свого першого символу в λ-термі t).

Також нагадаємо, що довільна R-стратегія f називається *нормалізуючою*, якщо з того, що λ-терм t має R-нормальну форму, випливає, що терм $f^n(t)$ є R-нормальною формою для деякого достатньо великого натурального числа $n > 0$.

В 1980 р. Я.Клоп отримав наступний відомий результат.

Теорема нормалізації для $\beta\eta$-редукції. $f_{\beta\eta}^{left}$ *є нормалізуючою βη-стратегією*.

Оригінальне доведення цієї теореми (див. [2, стор. 279-290]), проведене Я.Клопом, є громіздким та технічно дуже складним. Ми побудуємо інше, більш коротке та прозоре доведення на основі наступних відомих результатів:

Теорема нормалізації для β-редукції. f_{β}^{left} *є нормалізуючою* β-*стратегією* (див. [1, стор. 329-329] або [3]).

Теорема про $\beta\eta$-нормальну форму. *Довільний λ-терм має βη-нормальну форму тоді і тільки тоді, коли він має β-нормальну форму* (див. [1, стор. 384-386] або [4]).

Основна ідея нашого доведення полягає в наступному. Оскільки поняття η-редукції є сильно нормалізуємим, природно припустити, що теорему нормалізації для $\beta\eta$-редукції можна якимось чином отримати як наслідок теореми нормалізації для β-редукції. Більш конкретно, припускаючи, що теорема нормалізації для $\beta\eta$-редукції є хибною, за допомогою теореми про $\beta\eta$-нормальну форму ми побудуємо такий λ-терм, який має β-нормальну форму, але f_{β}^{left}-редукційний ланцюг якого не містить жодної β-нормальної форми – це, очевидно, суперечить теоремі нормалізації для β-редукції.

Для того, щоб провести цю побудову, нам знадобляться деякі допоміжні технічні резуль-

© О.О. Лялецький, 2014

тати. Для їх зручного формулювання введемо наступні позначення.

a) Якщо Δ_0 та Δ_1 є входженнями $\beta\eta$-редексів в деякий λ-терм t, то запис $\Delta_0 < \Delta_1$ означає, що Δ_0 розташований в t строго лівіше, ніж Δ_1.

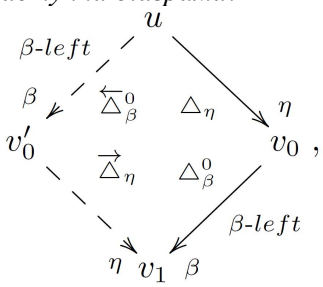
b) Нехай t та t' – довільні λ-терми. Замість $f_{\beta\eta}^{left}(t) = t'$ та $f_{\beta}^{left}(t) = t'$ ми будемо писати, відповідно, $t \xrightarrow[\beta\eta\text{-}left]{} t'$ та $t \xrightarrow[\beta\text{-}left]{} t'$. Запис $t \xrightarrow[\beta\eta\text{-}left]{}_{\beta} t'$ означає, що виконуються обидва співвідношення $t \xrightarrow[\beta\eta\text{-}left]{} t'$ та $t \to_{\beta} t'$.

c) Зафіксуємо деякий однокроковий $\beta\eta$-редукційний ланцюг $p \xrightarrow{\triangle}_{\beta\eta} q$. Якщо w є входженням $\beta\eta$-редекса в p і якщо він має єдиний залишок в q, то цей залишок буде позначатися через $\overrightarrow{w}$. Аналогічно, якщо w є входженням $\beta\eta$-редекса в q й існує таке єдине входження $\beta\eta$-редекса в p, єдиним залишком якого є w, то це входження буде позначатися через $\overleftarrow{w}$ (іншими словами, $\overleftarrow{w}$ – це єдиний "ко-залишок" входження w).

Лема 1. *Нехай задано якийсь двокроковий $\beta\eta$-редукційний ланцюг вигляду*

$$u \xrightarrow{\triangle_\eta}_{\eta} v_0 \xrightarrow[\beta\text{-}left]{\triangle_\beta^0} v_1 \ ,$$

причому $\triangle_\eta < \overleftarrow{\triangle}_\beta^0$. Тоді, для деякого терму v_0', має місце наступна діаграма:



де $\overleftarrow{\triangle}_\beta^0$ та $\overrightarrow{\triangle}_\eta$ є входженнями β- та η-редексів у відповідні λ-терми. Більш того, якщо терм v_1 має найлівіше входження β-редекса, то $\overrightarrow{\triangle}_\eta < \overleftarrow{\triangle}_\beta^1$ в термі v_0'.

Доведення. Оскільки $\triangle_\eta < \overleftarrow{\triangle}_\beta^0$, можливі тільки два наступні випадки: $\triangle_\eta \cap \overleftarrow{\triangle}_\beta^0 = \varnothing$ або $\triangle_\eta \supset \overleftarrow{\triangle}_\beta^0$. Але в обох випадках можна просто змінити порядок згортання редексів, що розглядаються: спочатку в u згорнути $\overleftarrow{\triangle}_\beta^0$ і таким чином отримати v_0', а потім в v_0' згорнути $\overrightarrow{\triangle}_\eta$. Зрозуміло, що результуючим λ-термом знову є v_1. Друге твердження очевидне. □□

Будемо писати $t \xrightarrow[<,\ \neq\varnothing]{}\!\!\!\!\!\rightarrow_{\eta} t'$, якщо існує багатокроковий η-редукційний ланцюг вигляду

$$t \equiv t_0 \xrightarrow{\triangle_0}_{\eta} t_1 \xrightarrow{\triangle_1}_{\eta} \ldots \xrightarrow{\triangle_{n-1}}_{\eta} t_n \equiv t' \ ,$$

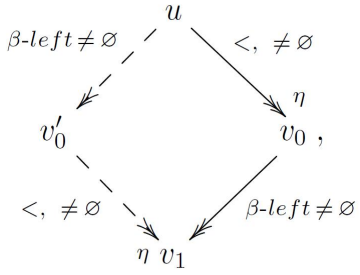
в якому згортається хоча б один η-редекс і в якому $\triangle_i < \overleftarrow{\triangle}_{i+1}$ для будь-якого i. Зауважимо, що якщо для якихось λ-термів t та t' має місце $t \xrightarrow[<,\ \neq\varnothing]{}\!\!\!\!\!\rightarrow_{\eta} t'$, то, очевидно, існує рівно один η-редукційний ланцюг зазначеного вигляду.

Через $\xrightarrow[\beta\text{-}left\neq\varnothing]{}\!\!\!\!\!\rightarrow$ позначимо транзитивне замикання відношення $\xrightarrow[\beta\text{-}left\neq\varnothing]{}$. Отже, для будь-яких λ-термів t та t' співвідношення $t \xrightarrow[\beta\text{-}left\neq\varnothing]{}\!\!\!\!\!\rightarrow t'$ означає, що $(f_\beta^{left})^n(t) = t'$ для деякого натурального числа $n > 0$, причому число n визначається за термами t та t' однозначно.

Лема 2. *Нехай задано двокроковий $\beta\eta$-редукційний ланцюг вигляду*

$$u \xrightarrow[<,\ \neq\varnothing]{}\!\!\!\!\!\rightarrow_{\eta} v_0 \xrightarrow[\beta\text{-}left\neq\varnothing]{}\!\!\!\!\!\rightarrow_{\beta} v_1 \ ,$$

причому $\triangle_{n-1} < \overleftarrow{\triangle}_\beta$, де $\triangle_\beta$ позначає найлівіше входження β-редекса в v_0, а $\triangle_{n-1}$ – останній згортаємий η-редекс в η-редукційному ланцюгу, який відповідає співвідношенню $u \xrightarrow[<,\ \neq\varnothing]{}\!\!\!\!\!\rightarrow_{\eta} v_0$. Тоді має місце наступна діаграма:



для деякого λ-терму v_0', причому якщо $\triangle$ – таке входження βη-редекса в терм v_1, що останній β-редекс, який згортається в редукційному ланцюгу $v_0 \xrightarrow[\beta\text{-}left\neq\varnothing]{}\!\!\!\!\!\rightarrow v_1$, розташований строго лівіше, ніж $\overleftarrow{\triangle}$, має найлівіше, то останній η-редекс, який згортається в редукційному ланцюгу $v_0' \xrightarrow[<,\ \neq\varnothing]{}\!\!\!\!\!\rightarrow_{\eta} v_1$, розташований строго лівіше, ніж $\overleftarrow{\triangle}$.

Доведення. Перше твердження є наслідком ітеративного застосування леми 1. Друге твердження очевидне. □□

Нове доведення теореми нормалізації для $\beta\eta$-редукції. Припустимо супротивне. Тоді існує такий λ-терм t, який має $\beta\eta$-нормальну форму, але $f_{\beta\eta}^{left}$-редукційний ланцюг

$$t \equiv t_0 \xrightarrow[\beta\eta\text{-}left]{} t_1 \xrightarrow[\beta\eta\text{-}left]{} t_2 \xrightarrow[\beta\eta\text{-}left]{} \dots \quad (1)$$

якого не містить жодного терма, який є $\beta\eta$-нормальною формою. Зауважимо, що з теореми про $\beta\eta$-нормальну форму випливає, що t, а отже й кожний терм t_i мають якісь β-нормальні форми.

Оскільки стратегія $f_{\beta\eta}^{left}$ є однокроковою, в цьому ланцюгу кожний терм t_{i+1} утворюється з терма t_i згортанням або β-, або η-редекса. Оскільки поняття η-редукції є сильно нормалізованим, в ланцюгу (1) згортається нескінчена кількість β-редексів. Отже, можливі тільки два наступні випадки, для кожного з яких ми знайдемо в (1) терм t_i, який не має β-нормальної форми, і таким чином отримаємо суперечність.

1. В ланцюгу (1), починаючи з деякого терма t_j, згортаються тільки β-редекси. В цьому випадку хвіст ланцюга (1), який починається з терма t_j, можна переписати в наступному вигляді:

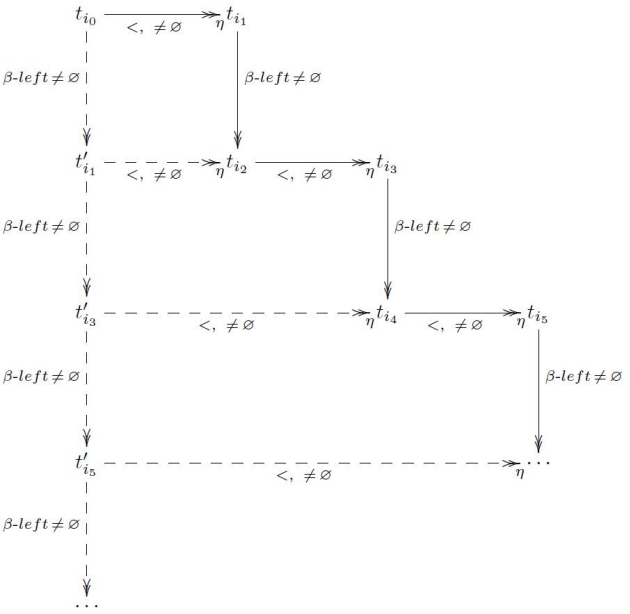
$$t_j \xrightarrow[\beta\text{-}left]{} t_{j+1} \xrightarrow[\beta\text{-}left]{} t_{j+2} \xrightarrow[\beta\text{-}left]{} \dots ,$$

оскільки кожний $f_{\beta\eta}^{left}$-ланцюг, в якому згортаються тільки β-редекси, одночасно є й f_{β}^{left}- ланцюгом. За теоремою нормалізації для β-редукції терм t_j не має β-нормальної форми.

2. В ланцюгу (1) згортається нескінчена кількість η-редексів. Знову приймаючи до уваги, що кожний $f_{\beta\eta}^{left}$- ланцюг, в якому згортаються тільки β-редекси, також є й f_{β}^{left}- ланцюгом, (1) можна переписати у вигляді:

$$t \equiv t_0 \xrightarrow[\beta]{} t_{i_0} \xrightarrow[<,\ \neq\varnothing]{} {}_{\eta}t_{i_1} \xrightarrow[\beta\text{-}left\neq\varnothing]{} t_{i_2} \xrightarrow[<,\ \neq\varnothing]{} {}_{\eta}t_{i_3} \xrightarrow[\beta\text{-}left\neq\varnothing]{} t_{i_4} \xrightarrow[<,\ \neq\varnothing]{} {}_{\eta}\dots$$

За допомогою леми 2 ми можемо з хвоста цього ланцюга, що починається термом t_{i_0}, побудувати наступну діаграму:



Ліва сторона цієї фігури є нескінченим f_{β}^{left}-ланцюгом, звідки з теореми нормалізації для β-редукції випливає, що t_{i_0} не має β-нормальної форми.

Теорема доведена повністю. □□

Висновки. В роботі побудовано нове доведення теореми нормалізації для $\beta\eta$-редукції. Це доведення використовує тільки елементарні методи й є значно більш коротким та прозорим у порівнянні з оригінальним доведенням Я.Клопа.

Список використаних джерел

1. *Barendregt H.P.* The Lambda Calculus: Its Syntax and Semantics. – Moscow: Mir., 1985.– 606 p. (in Russion)
2. *Klop J.W.* Combinatory reduction systems (PhD Thesis). – Utrecht university, 1980. – 323 p.
3. *Curry H.B., Feys R., Craig W.* Combinatory logic (Vol.1). – Amsterdam: North-Holland, 1958. – 417 p.
4. *Curry H.B., Hindley J., Seldin J.P.* Combinatory logic (Vol. 2). – Amsterdam: North-Holland, 1972. – 520 p.

Надійшла до редколегії 09.12.2013

УДК 681.3

Олександр О. Марченко, к.ф.- м.н., доц.
Еміл М. Насіров, аспірант
Степан М. Паламарчук, студент

Паралелізація невід'ємної факторизації розріджених матриць надвеликої розмірності

У роботі описано побудову моделі паралелізації обчислення невід'ємної факторизації розріджених матриць надвеликої розмірності. Реалізації запропонованих моделей були порівняні в обробці надвеликої матриці.

Ключові слова: штучний інтелект, комп'ютерна лінгвістика, паралельні обчислення

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, пр-т. Глушкова 4д, e-mail: enasirov@gmail.com

Oleksandr O. Marchenko, Ph.D. (Physics & Mathematics), Associate Professor
Emil M. Nasirov, Postgraduate Student
Stepan M. Palamarchuk, Student

Parallel non-negative huge sparse matrix factorization

The paper proposes parallel methods of non-negative huge sparse matrix factorization. Implementations of proposed methods were tested and compared on huge matrix processing.

Keywords: artificial intelligence, computational linguistics, parallel computations

Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03680, Kyiv, Glushkova ave., 4d, e-mail: enasirov@gmail.com

Статтю представив чл.-кор. НАН України, д.ф.- м.н., проф. Анісімов А. В.

Сьогодні невід'ємна факторизація матриць та тензорів є дуже популярною технологією в штучному інтелекті взагалі, та в комп'ютерній лінгвістиці зокрема. Використовуючи невід'ємну факторизацію в рамках парадигми латентно-семантичного аналізу, комп'ютерні лінгвісти застосовують даний підхід для розв'язання таких прикладних задач, як класифікація, кластеризація текстів та термінів[1, 2], побудова мір семантичної близькості[3], автоматичне виділення лінгвістичних структур та відношень (*Selectional Preferences* [4] та *Verb Sub-Categorization Frames* [5]) і багато інших.

Дана робота описує побудову моделі паралелізації обчислення невід'ємної факторизації розріджених матриць надвеликої розмірності, що представляє особливий інтерес та актуальність з точки зору її застосування у великих NLP системах загального тематичного призначення, не обмежених використанням лише для вузьких предметних областей.

Задача невід'ємної факторизації розріджених матриць надвеликої розмірності постала в процесі розробки системи визначення міри семантичної близькості-зв'язності за технологією Латентного Семантичного Аналізу[6]. Для побудови системи був оброблений великий текстовий корпус статей англомовної Вікіпедії. Обробка корпусу полягала у лексичному аналізі та лематизації лексем речень статей та в обчисленні частот вживання множини слів та словосполучень англійської мови в складі різних статей англомовної Вікіпедії. В результаті була побудована велика матриця Слова×Статті яка містила частотну оцінку вживання слів в текстах статей Вікіпедії. Розмірність матриці дорівнює 2,437,234 слів-словосполучень на 4,475,180 статей англомовної Вікіпедії. Після цього для усунення з матриці випадкових даних був встановлений пороговий рівень T=3, частотні оцінки в матриці, які менші за пороговий рівень T, були обнулені). В результаті була побудована розріджена матриця надвеликого розміру - 156,236,043 ненульових елементів при розмірі 2,437,234×4,475,180. Для невідємної факторизації розрідженої матриці такого розміру знадобилася розробка спеціальної моделі паралелізації матричних обчислень, яка була реалізована із

© О. О. Марченко, Е. М. Насіров, С. М. Паламарчук, 2014

застосуванням паралельних розподілених обчислень та обчислень на GPU.

Алгоритм невід'ємної матричної факторизації

Алгоритм невід'ємної матричної факторизації виконує декомпозицію невід'ємної матриці V на невід'ємні матриці W та H таким чином, щоб $V \approx WH$

В якості функції оцінки може бути використана функція виміру відстані між двома невід'ємними матрицями. Однією з таких мір є квадрат Евклідової метрики:

$$\mu = \|A - B\|^2 = \sum_{ij} (A_{ij} - B_{ij})^2$$

Така цільова функція обмежена знизу. Нижня границя 0 досягається тоді і тільки тоді коли $A = B$.

Отже, при використанні Евклідової метрики, факторизація матриці полягає в мінімізації $\|V - WH\|^2$ при умові невід'ємності *W* та *H*.

Така цільова функція не зростаюча при наступних правилах:

$$H_{ij} \leftarrow H_{ij} \frac{(W^T V)_{ij}}{(W^T WH)_{ij}} \quad (1)$$

$$W_{ij} \leftarrow W_{ij} \frac{(VH^T)_{ij}}{(WHH^T)_{ij}} \quad (2)$$

Виконання ітерацій алгоритму продовжується дот тих пір, поки не буде досягнута стаціонарна точка, або не буде виконана максимальна кількість ітерацій[7].

Аналіз моделі

В Таблиці 1 представлено необхідні об'єми пам'яті для зберігання матриць W та H при різних k при використанні типу даних float (32bit).

K	*100*	*200*	*300*
W	0.98Gb	1.95Gb	2.92Gb
H	1.79Gb	3.58Gb	5.37Gb
Всього	2.76Gb	5.53Gb	8.29Gb

Таблиця 1. Необхідні об'єми пам'яті для зберігання матриць W та H при різних k

Описаний алгоритм на кожній ітерації потребує в 2 рази більше пам'яті для збережень матриць (не враховуючи потреби на збереження початкової матриці V). Враховуючи такі потреби в пам'яті, для виконання алгоритму на одному комп'ютері необхідно проводити збереження даних на жорсткий диск. Далі буде розглянуто та порівняно 2 підходи до паралелізації алгоритму: локальний та розподілений.

Паралелізація алгоритму з використанням GPU

Для спрощення, зробимо заміну в (1) та (2): $H' = H^T$. Отримаємо

$$(H'_t)_{ij} = (H'_{t-1})_{ij} \frac{(V^T W_{t-1})_{ij}}{(H'_{t-1} W_{t-1}^T W_{t-1})_{ij}} \quad (4)$$

$$(W_t)_{ij} = (W_{t-1})_{ij} \frac{(VH'_t)_{ij}}{(W_{t-1} H_t'^T H'_t)_{ij}} \quad (5)$$

Таким чином, обидві формули (4) та (5) ми можемо представити в одному вигляді, завдяки заміні H', *W* та V^T, або *W*, H' та V на A, B та S відповідно:

$$A_{ij} = A_{ij} \frac{(SB)_{ij}}{(AB^T B)_{ij}} \quad (6)$$

Формула (6) може бути представлена як послідовність чотирьох кроків(7):

$$C = SB \quad (7a)$$

$$K = B^T B \quad (7b)$$

$$D = AK \quad (7c)$$

$$A_{ij} = Aij \frac{C_{ij}}{D_{ij}} \quad (7d)$$

Такий порядок обчислень є оптимальним для виразу (6). Ці кроки маюсь обчислювальну складність $O(k * (nnz(S) + n))$, $O(k^2 m)$, $O(k^2 n)$ та $O(kn)$ відповідно, де $nnz(S)$ – кількість ненульових елементів матриці S. Перші три кроки(7a-7c) підтримуються бібліотеками CUDA cuSPARSE та cuBLAS. Четвертий крок (7d) для виконання потребує реалізації власного ядра GPU, але в той же час, це відносно швидка операція і тому може бути виконана на CPU.

Так як матриці занадто великі для збереження в пам'яті GPU, ці операції(7a-7d) повинні виконуватись над частинами, з врахуванням

необхідності зменшення об'ємів обміну даними з графічним адаптером.

Для виразу (7a) повинні розкласти матриці $S = (S_1'|S_2'|\dots|S_t')^T$ та $B = (B_1|B_2|\dots|B_r)$ та підрахувати C:

$$C=\begin{pmatrix} S_1'B_1 & \dots & S_1'B_r \\ \dots & \dots & \dots \\ S_t'B_1 & \dots & S_t'B_r \end{pmatrix} \quad (8)$$

Для виразу (7b) варто розглядати $B = (B'_1|B'_2|\dots|B'_t)$, а отже $K = B'^T_1 B'_1 \dots B`^T_t B`_t$. Підрахунок цього виразу не потребує додаткового завантаження будь-яких матриць в пам'ять графічного адаптера після виконання (7a).

Для підрахунку (7c) ми можемо залишити в пам'яті GPU матрицю K і помножити матрицю A як стовпчик блоків.

Також можна зменшити використання пам'яті завдяки комбінуванню (7d) та (7c), так як (7d) – по елементне правило і єдине інше правило, в якому використовується матриця A – (7c). Не буде потреби зберігати в пам'яті матрицю D, якщо виконувати (7d) на блоці з матриці A, який необхідний для обчислення певного блоку матриці D.

Складність підрахунку Евклідової метрики μ між початковою та факторизовано моделлю складає $O(nm)$. Такий підрахунок просто реалізовується з використанням графічних адаптерів.

Розподілений алгоритм

Наступним кроком для покращення швидкодії є використання мережі ПК для проведення паралельних розподілених обчислень. Розглянемо можливі розподіленні моделі. Припустимо, що мережа складається з двох вузлів. Можливі наступні моделі розподілення обчислень:

1. *Підраховувати* W *та* H' *окремо на різних вузлах.* Таким чином обидва вузли будуть перебувати в одному з двох альтернативних режимів. Або будуть вузлом підтримки іншого вузла (передача даних на інший вузол) або будуть проводити підрахунки (обчислювати матрицю за яку відповідають, за допомогою даних, отриманих з вузла підтримки). В такій моделі розподілення на кожній ітерації ми повинні будемо передати по мережі дві матриці такого ж розміру, як і W та H. Також вузол розрахунків буде в основному простоювати, тому що (7a) є найбільш витратним кроком з усіх чотирьох.
2. *Розділити матриці* W *та* H' *на блоки та розподілити їх між вузлами.* $H' = (H'_1|H'_2)$ та $W = (W_1|W_2)$. Робимо перший вузол відповідальним за H'_1, W_1, другий за H'_2, W_2. При такому підході кожен вузол виступає як у ролі вузла підтримки, так і у ролі вузла розрахунків одночасно. В такій моделі вузли повинні передавати по мережі об'єм даних рівний $1.5 \cdot (sizeof(W) + sizeof(H))$, де $sizeof(X)$ – об'єм пам'яті, необхідний для зберігання матриці X.
3. *Розділити матриці* W *та* H' *на блоки та розділити їх між вузлами.* $H' = (H_1|H_2)^T$ та $W = (W_1'|W_2')^T$. Робимо перший вузол відповідальним за H_1, W_1', другий за H_2, W_2'. В цій моделі, аналогічно до попередньої, кожен вузол мережі виступає одночасно як у ролі вузла підтримки, так і у ролі вузла розрахунків. Об'єм передачі даних вузлом рівний $sizeof(W) + sizeof(H)$

В кожній з представлених моделей також є необхідність передачі одної або більш ніж одної матриці [k;k], але їх розміром можна знехтувати в порівнянні з матрицями *W* та *H*.

Очевидно, що третя модель найкраще підходить з точки зору мережевого обміну даними та використання GPU. Тому саме ця модель була використана в нашому дослідженні.

Варто також зазначити, що ріст мережі призведе до експоненціального росту сумарного об'єму переданих даних, хоча об'єм передачі даних одного вузла буде не більш ніж $2 \cdot (sizeof(W) + sizeof(H))$.

Для кращого розподілення розрахунків між вузлами мережі, враховуючи розрідженість початкової матриці V, необхідно виконати перестановки рядків та стовпчиків для нормалізації кількості ненульових елементів в кожному блоці.

Результати аналізу

Був реалізований розподілений алгоритм з використанням GPU, який був описаний вище, та проведена факторзація розрідженої матриці оцінок части вживання слів англійської мови в різних статтях Вікіпедії. Для порівняння швидкодії була також реалізована локальна модель з використанням GPU та жорсткого диску для запису даних.

Обидві моделі працювали з однаковими вхідними даними. Локальна версія була запущена на одному з вузлів з тими ж обмеженнями пам'яті. Для проведення тестів були використані наступні апаратні засоби: Intel Core i7 CPU, NVIDIA GeForce GTX560 1Gb, 8Gb RAM, 1Gbit LAN, SATA III HD.

В таблиці 2 порівняно час та ресурси необхідні для виконання однієї ітерації в локальній та розподіленій версії. В таблиці 3 порівняно час та ресурси, необхідні для підрахунку функції оцінки μ. Данні таблиць отриманні при k=300.

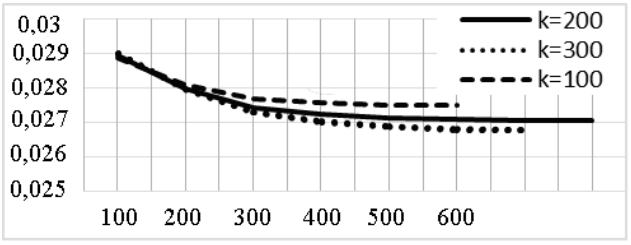
	Local	Distributed
Прочитано	34.44Gb	6.22Gb
Записано	16.58Gb	6.22Gb
Час ітерації (розрахунки)	58s	62s
Час ітерації (I/O)	729s	287s

Таблиця 2. Результати порівняння виконання ітерації локальної та розподіленої версії

	Local	Distributed
Прочитано	13.66Gb	6.22Gb
Записано	0	6.22Gb
Час (розрахунки)	45865s	11371s
Час (I/O)	192s	280s

Таблиця 3. Результати порівняння обчислення функції оцінки μ

На графіку 1 показано отриману залежність якості результатів факторизації від k та кількості ітерацій.



Графік 1

Висновки

В роботі описано локальний та розподілений підходи до невід'ємної факторизації надвеликих матиць. В результаті роботи було отримано високі показники швидкодії роботи розподіленого алгоритму в порівнянні з локальним. Подальша робота полягає в аналізі та зменшенні об'ємів передачі даних між вузлами, а отже, і необхідного для цього часу.

Список використаних джерел

1. *Xu W., Liu X., Gong Y.* Document-clustering based on 4n-negative matrix factorization// In Proceedings of SIGIR'2003, July 28–August 1, Toronto, CA, pp. 267–273.
2. *Farial Shahnaz, Michael W. Berry, V. Paul Pauca, Robert J. Plemmons* Document clustering using nonnegative matrix factorization// Information Processing and Management: Volume 42 Issue 2, March 2006, p.p. 373 – 386
3. *Anatoly Anisimov, Oleksandr Marchenko, Andrey Nikonenko, Elena Porkhun, Volodymyr Taranukha* Ukrainian WordNet: Creation and Filling// FQAS-2013, p.p. 649-660
4. *Tim Van de Cruys* A Non-negative Tensor Factorization Model for Selectional Preference Induction. Journal of Natural Language Engineering, 2010, 16(4), p.p. 417–437.
5. *Tim Van de Cruys, Laura Rimell, Thierry Poibeau, and Anna Korhonen* Multi-way Tensor Factorization for Unsupervised Lexical Acquisition// Proceedings of COLING-2012, p.p. 2703–2720.
6. *Scott Deerwester, Susan T. Dumais, George W. Furnas, Thomas K. Landauer, Richard Harshman* Indexing by Latent Semantic Analysis. Journal of the American Society for Information Science: – 1990: – 41 (6): – pp. 391–407.
7. *Daniel D. Lee and H. Sebastian Seung* Algorithms for non-negative matrix factorization// In In NIPS, MIT Press, 2000, p.p. 556-562.

Надійшла до редколегії 16.12.13

УДК 519.8

Наконечний О.Г.[1], д. ф.-м. н., професор
Філіпенков А.О.[2], аспірант

Дискретне мінімаксне оцінювання при невизначеності з роздільними обмеженнями

В даній роботі розглянуто лінійну дискретну динамічну систему, невизначеність якої описується роздільними обмеженнями на похибки системи та спостережень. Запропоновано алгоритм для покращення мінімаксної похибки та фільтру, які знаходяться із невизначеності, заданої сумісними обмеженнями.

Ключові слова: лінійне оцінювання, мінімаксний фільтр, роздільні обмеження, покоординатний спуск.

[1] Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, пр-т Глушкова 4д, e-mail: a.nakonechniy@gmail.com
[2] Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, пр-т Глушкова 4д, e-mail: decapitator@ukr.net

O.G. Nakonechniy[1], Ph.D., professor
A.O. Filipenkov[2], postgraduate student

Discrete-time minimax estimation under uncertainty with separate constraints

This paper focuses on linear discrete-time dynamical system under uncertainty described by separate constraints for system and observation errors. An algorithm for minimax error and filter improvement is introduced based on uncertainty with joint contraints.

Key Words: linear estimation, minimax filter, separate constraints, coordinate descent.

[1] Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03680, Kyiv, Glushkova av., 4d, e-mail: a.nakonechniy@gmail.com
[2] Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03680, Kyiv, Glushkova av., 4d, e-mail: decapitator@ukr.net

Статтю представив д.т.н., проф. Гаращенко Ф.Г.

Вступ

Лінійні дискретні системи дуже широко застосовуються в моделюванні різноманітних процесів. Часто такі системи піддаються похибкам вимірювання, природа яких точно невідома, але відомі обмеження на них. Лінійні дискретні системи з квадратичними сумісними обмеженнями вивчені досить добре, але похибка оцінювання при такому підході виявляється більшою за реальну. Роздільні обмеження дають змогу обчислити похибку біль точно, що дасть змогу побудувати більш точний фільтр.

1 Постановка задачі

Нехай маємо лінійну дискретну систему

$$w_{h+1} = Aw_h + Be_h, \quad h = \overline{0, T-1}, \tag{1}$$

$$w_0 = \bar{w} + e, \tag{2}$$

де $w_h \in \mathbb{R}^n$, $h = \overline{0,T}$ – стан системи, $e_h \in \mathbb{R}^n$, $h = \overline{0,T-1}$ – похибка стану, $\bar{w} \in \mathbb{R}^n$ – відомий початковий стан, $e \in \mathbb{R}^n$ – похибка початкового стану, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ – матриця переходу системи, $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

Спостереження системи мають вигляд

$$y_h = H_h w_h + \eta_h, \quad h = \overline{0,T}, \tag{3}$$

© О.Г. Наконечний, А.О. Філіпенков, 2013

де $y_h \in \mathbb{R}^m$ – спостереження, $H_h \in \mathbb{R}^{m\times n}$ – матриця, що відображає простір станів у простір спостережень, η_h – похибка спостережень.

Задача полягає в тому, щоб знайти оцінку вектору стану $\hat{w}_T$ в момент часу T. В наступних підрозділах будуть наведені розв'язки для різних типів обмежень на похибки.

2 Розв'язок

Спочатку будемо оцінювати скалярний добуток:

$$(a, w_T) = -\sum_{h=0}^{T} (u_h, y_h) + \mathrm{c}, \tag{4}$$

де $a \in \mathbb{R}^n$ – довільний вектор (наприклад орт, для оцінювання окремої компоненти вектору стану), $u_h \in \mathbb{R}^m$, $h = \overline{0,T}$ і c – деякі вектори та деяка константа, які можна обирати.

Введемо гарантовану похибку оцінювання:

$$\sigma(u,c) = \max_{e,e_0,\ldots,e_{T-1},\eta_0\ldots,\eta_T} \left|(a, w_T) - (a, w_T)\right|, \tag{5}$$

та мінімаксну похибку:

$$\begin{aligned} &\sigma(\hat{u},\hat{c}) = \min_{u_0,\ldots,u_T,c} \sigma(u,c) = \\ &= \min_{u_0,\ldots,u_T,c} \max_{e,e_0,\ldots,e_{T-1},\eta_0\ldots,\eta_T} \left|(a, w_T) - (a, w_T)\right|. \end{aligned} \tag{6}$$

Тоді оптимальна оцінка має вигляд:

$$(a, w_T) = -\sum_{h=0}^{T} (\hat{u}_h, y_h) + \hat{\mathrm{c}}.$$

Далі буде показано, що $(a, w_T) \equiv (a, \hat{w}_T)$.

Нехай невизначеність описується наступними роздільними обмеженнями:

$$\begin{cases} \left(Q^{-1}e, e\right) \le q_0^2, \\ \sum\limits_{h=0}^{T-1} \left(Q_h^{-1}e_h, e_h\right) \le q_1^2, \\ \sum\limits_{h=0}^{T} \left(R_h^{-1}\eta_h, \eta_h\right) \le q_2^2. \end{cases} \tag{7}$$

де Q, Q_h, R_h – додатно означені матриці відповідних розмірностей.

Введемо вектори $z_0, \ldots, z_T$ як розв'язки рекурентного рівняння

$$z_h = A^T\left(z_{h+1} + H_{h+1}^T u_{h+1}\right), \quad h = \overline{T-1, 0}, \tag{8}$$

$$z_T = a. \tag{9}$$

Тоді

$$\begin{aligned} &\left|(a, w_T) - (a, w_T)\right| = \left|\left(z_0 + H_0^T u_0, w_0\right) - c + \right. \\ &\left. + \sum_{h=0}^{T-1} \left(B^T\left(z_{h+1} + H_{h+1}^T u_{h+1}\right), e_h\right) + \sum_{h=0}^{T} (u_h, \eta_h)\right|. \end{aligned}$$

Обчислимо гарантовану похибку (5), застосовуючи (2) та узагальнену нерівність Коші-Буняковського:

$$\begin{aligned} &\sigma(u,c) = \left|\left(z_0 + H_0^T u_0, \bar{w}\right) - c\right| + \\ &+ \max_{e,e_0,\ldots,e_{T-1},\eta_0\ldots,\eta_T} \left|\left(z_0 + H_0^T u_0, e\right) + \sum_{h=0}^{T} (u_h, \eta_h) + \right. \\ &\left. + \sum_{h=0}^{T-1} \left(B^T\left(z_{h+1} + H_{h+1}^T u_{h+1}\right), e_h\right)\right| \le \\ &\le \left|\left(z_0 + H_0^T u_0, \bar{w}\right) - c\right| + \left(\sum_{i=0}^{2} q_i^2 \cdot \sum_{h=0}^{T} \left[\left(R_h u_h, u_h\right) + \right.\right. \\ &\left.\left. + \left(\tilde{Q}_{h-1}\left(z_h + H_h^T u_h\right), z_h + H_h^T u_h\right)\right]\right)^{\frac{1}{2}}, \\ &\tilde{Q}_h = BQ_hB^T, \quad h = \overline{0, T-1}, \\ &\tilde{Q}_{-1} = Q. \end{aligned}$$

Тепер знайдемо мінімаксну похибку (6):

$$\begin{aligned} &\sigma(\hat{u},\hat{c}) = \min_{u_0,\ldots,u_T,c} \sigma(u,c) \le \left(\sum_{i=0}^{2} q_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \times \\ &\times \left(\min_{u_0,\ldots,u_T} \sum_{h=0}^{T} \left[\left(\tilde{Q}_{h-1}\left(z_h + H_h^T u_h\right), z_h + H_h^T u_h\right) + \right.\right. \\ &\left.\left. + \left(R_h u_h, u_h\right)\right]\right)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

де $\hat{c} = \left(\hat{z}_0 + H_0^T \hat{u}_0, \bar{w}\right)$, а $\hat{z}_0$ визначається з (8)-(9) при $\hat{u}_1, \ldots, \hat{u}_T$.

Отримали задачу оптимального керування: знайти мінімум по всіх $u_0, \ldots, u_T$ функціоналу

$$\sum_{h=0}^{T}\Big[\left(\tilde{Q}_{h-1}\left(z_h + H_h^T u_h\right), z_h + H_h^T u_h\right) + \left(R_h u_h, u_h\right)\Big] \quad (10)$$

при обмеженнях (8)-(9).

Відомо [1], що функціонал (10) може бути представлений у вигляді $\left(P_T a, a\right)$, де матриця P_h, $h = \overline{0,T}$ задовольняє дискретному рівнянню Ріккаті з початковою умовою $P_{-1} = \Theta$. Розв'язок задачі оптимального керування (8)-(10) для всіх $s = \overline{0,T}$ має вигляд [2-4]:

$$\hat{u}_h = -L_h z_h,$$
$$L_h = \left(R_h + H_h \tilde{P}_{h-1} H_h^T\right)^{-1} H_h \tilde{P}_{h-1},$$
$$\tilde{P}_{h-1} = \tilde{Q}_{h-1} + A P_{h-1} A^T,$$

а відповідні рівняння фільтру:

початковий стан:

$$\hat{w}_0 = \hat{G}_0^{-1} Q^{-1} \bar{w} + L_0^T y_0, \quad (11)$$

$$\hat{G}_0 = Q^{-1} + H_0^T R_0^{-1} H_0, \quad (12)$$

наступні стани $h = \overline{1,T}$:

$$\hat{w}_h = A\hat{w}_{h-1} + L_h^T\left(y_h - H_h A \hat{w}_{h-1}\right), \quad (13)$$

$$\hat{G}_h = \left(\tilde{Q}_{h-1} + A\hat{G}_{h-1}^{-1} A^T\right)^{-1} + H_h^T R_h^{-1} H_h, \quad (14)$$

при чому для всіх $h = \overline{0,T}$ виконується:

$$L_h^T \equiv \hat{G}_h^{-1} H_h^T R_h^{-1}, \quad (15)$$

$$w_h = \hat{w}_h + b, \quad \left(\hat{G}_h^{-1} b, b\right) \le 1, \quad P_h \equiv \hat{G}_h^{-1}.$$

2.1 Покращення похибки

Введемо скалярні параметри α_h в розв'язки $\hat{u}_h$ задачі оптимального керування (8)-(10):

$$\hat{u}_h^{\alpha} = -\alpha_h L_h z_h = -\tilde{L}_h z_h, \quad h = \overline{0,T}. \quad (16)$$

Якщо всі $\alpha_h = 1$, то отримаємо фільтр для задачі (1)-(3) при сумісних обмеженнях типу (7):

$$\left(Q^{-1}e, e\right) + \sum_{h=0}^{T-1}\left(Q_h^{-1} e_h, e_h\right) + \sum_{h=0}^{T}\left(R_h^{-1}\eta_h, \eta_h\right) \le \sum_{i=0}^{2} q_i^2. \quad (17)$$

Але в такому випадку похибка переоцінюється, тому можна скористатися параметрами α_h для її мінімізації.

Обчислимо остаточне значення похибки (10) як функцію від параметрів α_h при $\hat{u}_h^{\alpha}$:

$$\sum_{h=0}^{T}\Big[\left(\tilde{Q}_{h-1}\left(E - \alpha_h H_h^T L_h\right) z_h, \left(E - \alpha_h H_h^T L_h\right) z_h\right) + \alpha_h^2\left(L_h^T R_h L_h z, z_h\right)\Big] =$$
$$= \sum_{h=0}^{T}\Big[\left(\tilde{Q}_{h-1} z_h, z_h\right) + 2\alpha_h\left(L_h^T H_h \tilde{Q}_{h-1} z_h, z_h\right) + \alpha_h^2\left(L_h^T\left(R_h + H_h \tilde{Q}_{h-1} H_h^T\right) L_h z_h, z_h\right)\Big]$$

та скористаємося алгоритмом покоординатного спуску по всіх α_h для знаходження мінімуму похибки.

З (16) легко бачити, що параметри α_h призводять до зміни фільтру (11), (13) через зміну L_h^T на $\tilde{L}_h^T$, отже покращений фільтр задається рівняннями:

$$\hat{w}_0^{\alpha} = \hat{G}_0^{-1} Q^{-1} \bar{w} + \alpha_0 L_0^T y_0, \quad (18)$$

$$\hat{w}_h^{\alpha} = A\hat{w}_{h-1} + \alpha_h L_h^T\left(y_h - H_h A \hat{w}_{h-1}\right). \quad (19)$$

3 Чисельне моделювання

Було проведено моделювання системи (1)-(3) та невизначеності (7) в математичному пакеті MATLAB R2012b з наступними параметрами:

$T = 31;$

$A = 0.8, \quad B = -0.5, \quad H_h = 0.75, h = \overline{0,T};$

$Q = 1, \quad Q_h = 1, h = \overline{1,T-1}, \quad R_h = 1, h = \overline{0,T};$

$q_i^2 = 1, i = \overline{1,3};$

$\bar{w} = 0, \quad e \sim N(0,Q);$

$e_h \sim N(0,Q_h), h = \overline{1,T-1};$

$\eta_h \sim N(0,\mathrm{R}_h), h = \overline{1,T}.$

Отримано динаміку стану системи:

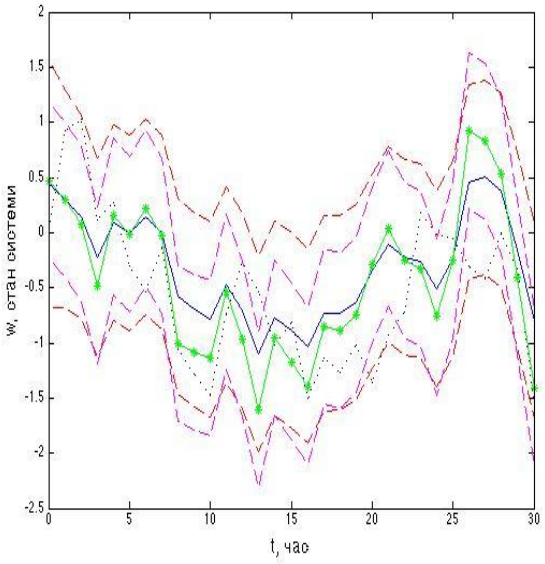


Рис. 1 Динаміка станів системи та оцінок

Тут чорна лінія з крапок задає істинну траєкторію станів системи, синя – класичну оцінку (11), (13), зелена – покращену оцінку (18), (19). Червоні та пурпурні переривчасті лінії відображають «коридор» класичної та покращеної оцінки відповідно.

Похибка оцінювання класичного фільтру в останній момент часу $T = 30$ становить 0.8832, а покращеного фільтру – 0.7062.

4 Висновки

В даній роботі було розглянуто лінійну дискретну систему (1)-(3), невизначеність якої описується роздільними обмеженнями (7). Було розроблено алгоритм для покращення похибки оцінювання (10), яка описує невизначеність при сумісних обмеженнях (17), і проведено чисельне моделювання в математичному пакеті MATLAB для підтвердження працездатності алгоритму.

Отримана оцінка стану системи дійсно виявилась кращою за класичну, а похибка оцінювання – меншою.

Список використаних джерел

1. *Astrom K.J.* Introduction to Stochastic Control – New York and London: Academic Press, 1970. – 299 p.
2. *Mallet V., Zhuk S.* Reduced minimax state estimation – Technical Report RR-7500, INRIA, 2010. – 26 p.
3. *Zhuk S.M.* Minimax state estimation for linear discrete-time differential-algebraic equations // Automatica J. – 2010. Vol. 46. – P. 1785-1789.
4. *Kurzhanski A.B.* Control and observation under uncertainties – Moscow: Nauka, 1977. – 392 p. (in Russian)

Надійшла до редколегії 26.12.13

УДК 004.42:510.69

Нікітченко М.С., д. ф.-м. н., проф.,
Шкільняк С.С., д. ф.-м. н.

Вироджені семантичні моделі першопорядкових логік

Досліджено семантичні моделі першопорядкових логік квазіарних предикатів із порожньою предметною областю. Описано вироджені алгебри та вироджені композиційні системи. Розглянуто композиції функцій та предикатів, заданих на порожній множині, досліджено особливості композицій квантифікації.

Ключові слова: логіка, предикат, семантична модель, квантор.

Київський національний університет імені Тараса Шевченка,03680, м. Київ, пр. Глушкова 4д
e-mail: ttp@unicyb.kiev.ua

M.S. Nikitchenko, Doctor of Sciences (Phys.-Math.), Professor,
S.S. Shkilniak, Doctor of Sciences (Phys.-Math.).

Degenerate semantic models of first-order logics

We study semantic models of first-order logics of quasiary predicates with the empty universe. Degenerate algebras and degenerate composition systems are described. Compositions of functions and predicates over the empty set are considered, properties of quantifiers are studied.

Key words: logic, predicate, semantic model, quantifier.

Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03680, Kyiv, Glushkova st., 4d
e-mail: ttp@unicyb.kiev.ua

Статтю представив д. ф.-м. н., проф. Буй Д.Б.

Семантичні моделі класичної логіки предикатів передбачають наявність непорожніх предметних областей, тобто область інтерпретації (множина базових даних) має бути непорожньою. Як зазначено в [1], допущення порожніх предметних областей (див., напр., [2]) в цілому не дає особливих переваг. На підтвердження цього можна зауважити, що при формальному, теоретико-множинному трактуванні функцій, розгляд довільних функцій на $\varnothing$, зокрема, предикатів на $\varnothing$, дає єдину функцію $f_\varnothing$ із порожнім графіком. Тому модель мови із порожнім носієм $\varnothing$ виявляється тривіальною, вона взагалі не містить тотальних предикатів. Це пояснює, чому в класичній логіці однозначних тотальних предикатів моделі мови із порожнім носієм зазвичай не розглядаються.

Справа дещо змінюється при переході до логік квазіарних предикатів. Такі предикати – це часткові функції із нетривіальною множиною істиннісних значень $\{T, F\}$. Тому доцільно постулювати розширене трактування предикатів на $\varnothing$. Застосування (аплікацію) довільного предиката, заданого на $A = \varnothing$, будемо трактувати як імпульс (спонукання) до вироблення значення. Усі такі імпульси однакові (це $\varnothing$), тому для однозначного предиката можливими результатами його застосування до $\varnothing$ можуть бути T, F або невизначеність (відсутність результату); для неоднозначного предиката додається можливість одночасного T та F. Водночас такий розгляд власне функцій на A, тобто функцій вигляду ${}^VA \to A$, при $A = \varnothing$ дає єдину всюди невизначену функцію $f_\varnothing$.

Метою пропонованої роботи є дослідження семантичних моделей першопорядкових логік із порожньою предметною областю при розширеному трактуванні предикатів.

Поняття, які тут не визначаються, тлумачимо в сенсі робіт [3–5]. Будемо дотримуємось позначень цих робіт.

1. Вироджені алгебри та композиційні системи

V-іменною множиною (V-ІМ) над A називають довільну часткову однозначну функцію $\delta : V \to A$ із множини V предметних імен у множину A предметних значень.

Множину всіх V-ІМ над A позначають ${}^VA$.

V-квазіарним предикатом на A називають довільну (часткову неоднозначну, взагалі кажучи) функцію вигляду $P : {}^VA \to \{T, F\}$, де $\{T, F\}$ – множина істиннісних значень.

Функції вигляду $P : {}^VA \to A$ називають V-квазіарними функціями на A.

Клас V-квазіарних предикатів на A позначимо як Pr^A, клас V-квазіарних функцій на A – як Fn^A.

Областю істинності та областю хибності предиката $P : {}^VA \to \{T, F\}$ називають множини

$$T(P) = \{d \in {}^VA \mid T \in P(d)\},$$
$$F(P) = \{d \in {}^VA \mid F \in P(d)\}.$$

© М.С. Нікітченко, С.С. Шкільняк, 2014

V-квазіарний предикат *P* на *A*:

– тотожно істинний, якщо $T(P) = {}^{V}A$ і $F(P) = \varnothing$;

– тотожно хибний, якщо $T(P) = \varnothing$ і $F(P) = {}^{V}A$;

– всюди невизначений, якщо $T(P) = F(P) = \varnothing$;

– тотально насичений, якщо $T(P) = F(P) = {}^{V}A$.

Тотожно істинний предикат будемо позначати як T, тотожно хибний – як F, всюди невизначений – як ⊥, тотально насичений – як TF.

Семантичними моделями першопорядкових композиційно-номінативних логік (КНЛ) є [3] композиційні системи квазіарних предикатів вигляду $({}^{V}A, Fn^{A}\cup Pr^{A}, C)$, де *C* задається множиною базових композицій відповідного рівня. Кожна така композиційна система задає дві алгебри: алгебру даних $(A, Fn^{A}\cup Pr^{A})$ та композиційну предикатну алгебру $(Fn^{A}\cup Pr^{A}, C)$. Терми композиційної алгебри можуть трактуватися як формули мови КНЛ відповідного рівня.

Для КНЛ кванторного рівня, або чистих першопорядкових КНЛ (ЧКНЛ), маємо $Fn^{A} = \varnothing$.

Наведемо множини базових композицій першопорядкових КНЛ відповідного рівня:

– $\{\neg, \vee, \mathrm{R}^{\bar{v}}_{\bar{x}}, \exists x\}$ для ЧКНЛ;

– $\{\neg, \vee, \mathrm{R}^{\bar{v}}_{\bar{x}}, \exists x, =_{xy}\}$ для ЧКНЛ з рівністю;

– $\{\neg, \vee, \mathrm{R}^{\bar{v}}_{\bar{x}}, \exists x, \equiv_{xy}\}$ для ЧКНЛ із строгою рівністю;

– $\{\neg, \vee, \mathrm{S}^{\bar{v}}, 'x, \exists x\}$ для КНЛ функціонального рівня;

– $\{\neg, \vee, \mathrm{S}^{\bar{v}}, 'x, \exists x, =\}$ для КНЛ функціонально-еквaційного рівня;

– $\{\neg, \vee, \mathrm{S}^{\bar{v}}, 'x, \exists x, \equiv\}$ для КНЛ функціонально-еквaційного рівня із строгою рівністю.

Для ЧКНЛ також виділяють підрівні: ε-ЧКНЛ (ЧКНЛ із предикатами-індикаторами εz наявності значення для змінних); ЧКНЛРР (ЧКНЛ із розширеними реномінаціями); ε-ЧКНЛРР (поєднують можливості ЧКНЛРР та ε-ЧКНЛ).

Алгебру даних $(A, Fn^{A}\cup Pr^{A})$ назвемо виродженою, якщо її носій $A = \varnothing$.

У випадку, коли $A = \varnothing$, існує єдина ІМ – порожнє дане ∅.

Зрозуміло, що за умови $A = \varnothing$ маємо ${}^{V}A = \{\varnothing\}$.

Відомі операції над *V*-ІМ (див. [3, 5]) природним чином поширюються на порожнє дане ∅. Результатом їх застосування теж буде ∅. Звідси отримуємо (тут $X \subseteq V$): $\varnothing\cap\varnothing = \varnothing$, $\varnothing\cup\varnothing = \varnothing$, $\varnothing\setminus\varnothing = \varnothing$, $\varnothing\|_{X} = \varnothing$, $\varnothing\|_{-X} = \varnothing$, $\varnothing\nabla\varnothing = \varnothing$, $r^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\varnothing) = \varnothing$, $r^{\bar{v},\bar{u}}_{\bar{x},\perp}(\varnothing) = \varnothing$.

Для кожного часткового однозначного предиката можливими результатами його застосування до ∅ можуть бути *T*, *F*, невизначеність; для тотального неоднозначного – *T*, *F*, *T* та *F*; для часткового неоднозначного – усі зазначені вище чотири можливості. Таким чином, на виродженій алгебрі даних існує:

1) два тотальних однозначних предикати:
– тотожно істинний предикат T,
– тотожно хибний предикат F;
1) три часткових однозначних предикати:
– тотожно істинний предикат T,
– тотожно хибний предикат F,
– всюди невизначений предикат ⊥;
2) три тотальних неоднозначних предикати:
– тотожно істинний предикат T,
– тотожно хибний предикат F,
– тотально насичений предикат TF;
3) чотири часткових неоднозначних предикати:
– тотожно істинний предикат T,
– тотожно хибний предикат F,
– тотально насичений предикат TF,
– всюди невизначений предикат ⊥.

Для цих предикатів маємо:

$T(\mathrm{T}) = \{\varnothing\}$, $F(\mathrm{T}) = \varnothing$; $T(\mathrm{F}) = \varnothing$, $F(\mathrm{F}) = \{\varnothing\}$;

$T(\perp) = F(\perp) = \varnothing$; $T(\perp) = F(\perp) = \varnothing$;

$T(\mathrm{TF}) = F(\mathrm{TF}) = \{\varnothing\}$.

На виродженій алгебрі множина предикатів $Pr^{\varnothing}$ задається так: $Pr^{\varnothing} = \{\mathrm{T}, \mathrm{F}\}$ для випадку класичної семантики, $Pr^{\varnothing} = \{\mathrm{T}, \mathrm{F}, \perp\}$ для випадку неокласичної семантики, $Pr^{\varnothing} = \{\mathrm{T}, \mathrm{F}, \mathrm{TF}\}$ для випадку пересиченої семантики, $Pr^{\varnothing} = \{\mathrm{T}, \mathrm{F}, \perp, \mathrm{TF}\}$ для випадку загальної семантики.

Множина $Fn^{\varnothing}$ функцій вигляду $\{\varnothing\}\to\varnothing$ складається з єдиного елемента $f_{\varnothing}$: $Fn^{\varnothing} = \{f_{\varnothing}\}$.

Вироджені композиційні системи квазіарних предикатів кванторного рівня мають вигляд $(\{\varnothing\}, Pr^{\varnothing}, C)$, де *C* задається базовими композиціями $\neg, \vee, \mathrm{R}^{\bar{v}}_{\bar{x}}, \exists x$.

Дія базових пропозиційних композицій ¬ та ∨ традиційна. Для однозначних предикатів маємо:

$\neg\mathrm{T} = \mathrm{F}$, $\neg\mathrm{F} = \mathrm{T}$, $\neg\perp = \perp$;

$\mathrm{T}\vee\mathrm{T} = \mathrm{T}\vee\mathrm{F} = \mathrm{F}\vee\mathrm{T} = \mathrm{T}\vee\perp = \perp\vee\mathrm{T} = \mathrm{T}$,

$\perp\vee\mathrm{F} = \mathrm{F}\vee\perp = \perp\vee\perp = \perp$, $\mathrm{F}\vee\mathrm{F} = \mathrm{F}$;

Для неоднозначних предикатів маємо:

$\neg\mathrm{T} = \mathrm{F}$, $\neg\mathrm{F} = \mathrm{T}$, $\neg\perp = \perp$; $\neg\mathrm{TF} = \mathrm{TF}$;

$\mathrm{T}\vee\mathrm{T} = \mathrm{T}\vee\mathrm{F} = \mathrm{F}\vee\mathrm{T} = \mathrm{T}\vee\perp = \perp\vee\mathrm{T} = \mathrm{T}$,

$\mathrm{T}\vee\mathrm{TF} = \mathrm{FT}\vee\mathrm{T} = \mathrm{TF}\vee\perp = \perp\vee\mathrm{TF} = \mathrm{T}$,

$\mathrm{TF}\vee\mathrm{TF} = \mathrm{F}\vee\mathrm{TF} = \mathrm{TF}\vee\mathrm{F} = \mathrm{TF}$,

$\perp\vee\mathrm{F} = \mathrm{F}\vee\perp = \perp\vee\perp = \perp$, $\mathrm{F}\vee\mathrm{F} = \mathrm{F}$.

Звідси – дія ¬ та ∨ на тотальні предикати.

Композиція ∨ асоціативна й комутативна.

Зрозуміло, що дія похідних пропозиційних композицій &, →, ↔ теж традиційна.

Композиції реномінації $R^{\bar{v}}_{\bar{x}}$ діють як тотожне відображення: $R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(P) = P$, де $P \in Pr^{\varnothing}$.

Справді, $R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(P)(\varnothing) = P(r^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\varnothing)) = P(\varnothing)$.

Композиції розширеної реномінації $R^{\bar{v},\bar{u}}_{\bar{x},\perp}$ діють аналогічно: $R^{\bar{v},\bar{u}}_{\bar{x},\perp}(P) = P$, де $P \in Pr^{\varnothing}$.

Справді, $R^{\bar{v},\bar{u}}_{\bar{x},\perp}(P)(\varnothing) = P(r^{\bar{v},\bar{u}}_{\bar{x},\perp}(\varnothing)) = P(\varnothing)$.

Спеціальні предикати-індикатори εz наявності значення для предметних змінних [6] вводити немає сенсу, адже вони діють як T: $\varepsilon z(\varnothing) = \mathrm{T}$.

Кванторно-екваційний рівень фактично зливається із кванторним:

– спеціальні предикати рівності $=_{xy}$ діють як $\perp$: $=_{xy}(\varnothing) = \perp$;

– спеціальні предикати строгої рівності $\equiv_{xy}$ діють як T: $\equiv_{xy}(\varnothing) = \mathrm{T}$.

Розглянемо особливості логік функціональних рівнів. Вироджені композиційні системи квазіарних предикатів функціональних рівнів мають вигляд $(\{\varnothing\}, Fn^{\varnothing} \cup Pr^{\varnothing}, C)$, де C задається множиною базових композицій відповідного рівня, такі множини наведено вище.

Як зазначено вище, існує єдина функція на $\varnothing$, тобто функція вигляду $\{\varnothing\} \to \varnothing$ – це $f_{\varnothing}$.

Спеціальна 0-арна композиція – функція деномінації $'x$ – діє так: $'x(\varnothing) = \varnothing$.

Композиція суперпозиції $S^{\bar{v}}$ діє як тотожне відображення: $S^{\bar{v}}(f_{\varnothing}, \overline{f_{\varnothing}}) = f_{\varnothing}$, $S^{\bar{v}}(P, \overline{f_{\varnothing}}) = P$.

Спеціальні композиції слабкої рівності = та строгої рівності $\equiv$ діють наступним чином:

$=(f_{\varnothing}, f_{\varnothing}) = \perp$; $\equiv(f_{\varnothing}, f_{\varnothing}) = \mathrm{T}$.

Таким чином, пов'язані із функціями та рівністю можливості не можуть сповна проявитись для семантичних моделей з порожніми предметними областями. Тому при дослідженні вироджених моделей першопорядкових КНЛ можна обмежитись розглядом логік кванторного рівня – ЧКНЛ.

На вироджених моделях ЧКНЛ композиції реномінації та розширеної реномінації діють як тотожне відображення. Ситуація із композиціями квантифікації вже не настільки тривіальна.

Справді, визначення предикатів $\exists xP$ та $\forall xP$ можна подати так:

$d \in T(\exists xP) \Leftrightarrow$ існує a ($a \in A$ та $d\nabla x \mapsto a \in T(P)$);

$d \in F(\exists xP) \Leftrightarrow$ для всіх a ($a \in A \Rightarrow d\nabla x \mapsto a \in F(P)$);

$d \in T(\forall xP) \Leftrightarrow$ для всіх a ($a \in A \Rightarrow d\nabla x \mapsto a \in T(P)$);

$d \in F(\forall xP) \Leftrightarrow$ існує a ($a \in A$ та $d\nabla x \mapsto a \in F(P)$).

Проте "$a \in A$" хибне при $A = \varnothing$, звідки маємо:

– твердження "$a \in A$ та $d\nabla x \mapsto a \in T(P)$" та "$a \in A$ та $d\nabla x \mapsto a \in F(P)$" хибні;

– твердження "якщо $a \in A$, то $d\nabla x \mapsto a \in T(P)$" та "якщо $a \in A$, то $d\nabla x \mapsto a \in F(P)$" істинні.

Звідси твердження "$d \in T(\exists xP)$" та твердження "$d \in F(\forall xP)$" – хибні; твердження "$d \in F(\exists xP)$" та твердження "$d \in T(\forall xP)$" – істинні.

Таким чином, при $A = \varnothing$, отримуємо:

$T(\exists xP) = \varnothing$; $T(\forall xP) = {}^{V}A = \{\varnothing\}$;

$F(\exists xP) = {}^{V}A = \{\varnothing\}$; $F(\forall xP) = \varnothing$.

Отже, для $P \in Pr^{\varnothing}$ маємо: $\exists xP = \mathrm{F}$, $\forall xP = \mathrm{T}$.

Зауважимо, що подібні міркування для класичної логіки проведено в [2].

Для традиційно продовжених композицій квантифікації на предикати над $A = \varnothing$ закони де Моргана залишаються вірними: із $\exists xP = \mathrm{F}$ та $\forall xP = \mathrm{T}$ випливає $\neg\exists xP = \forall x\neg P$ та $\neg\forall xP = \exists x\neg P$. Водночас таке традиційне продовження композицій квантифікації веде до порушення фундаментального закону логіки: із $\forall xP$ не випливає $\exists xP$.

Мова ЧКНЛ та відображення I інтерпретації формул на семантичних моделях описано в [4]. Інтегрованими семантичними моделями, які пов'язують мову ЧКНЛ із алгеброю даних (A, Pr^A), є алгебраїчні системи з доданою сигнатурою – об'єкти вигляду $\boldsymbol{A} = ((A, Pr^A), I)$, які позначаємо (A, I) та називаємо моделями мови.

Предикат $I(\Phi)$ – значення формули Φ при інтерпретації на моделі мови $\boldsymbol{A}$, – позначаємо Φ_A.

Модель мови (A, I) вироджена, якщо $A = \varnothing$.

Вироджені моделі мови $(\varnothing, I)$ позначаємо $\boldsymbol{\varepsilon}$.

На виродженій алгебрі даних існує лише три часткових однозначних предикати (це T, F, $\perp$), три тотальних неоднозначних предикати (це T, F, TF) та лише чотири часткових неоднозначних предикати (це T, F, $\perp$, TF). Тому на вироджених моделях мови у відповідній семантиці кожний ПС та кожна формула можуть інтерпретуватися як один із зазначених предикатів.

При традиційному продовженні композицій квантифікації тоді маємо:

$\exists x(\Phi \to \exists x\Phi)_{\varepsilon} = \exists x(\forall x\Phi \to \Phi)_{\varepsilon} = \exists x(\neg\Phi \vee \Phi)_{\varepsilon} = \mathrm{F}$;

$\forall x(\neg\Phi \& \Phi)_{\varepsilon} = \mathrm{T}$.

Це зовсім не узгоджується із законами як традиційної логіки, так і логіки квазіарних предикатів, адже в цих логіках маємо: $\models \exists x(\Phi \to \exists x\Phi)$, $\models \exists x(\forall x\Phi \to \Phi)$, $\models \exists x(\neg\Phi \vee \Phi)$, $\models \neg\forall x(\neg\Phi \& \Phi)$.

Водночас для вироджених моделей маємо $\forall x(\Phi \to \exists x\Phi)_{\varepsilon} = \forall x(\forall x\Phi \to \Phi)_{\varepsilon} = \forall x(\neg\Phi \vee \Phi)_{\varepsilon} = \mathrm{T}$ та $\exists x(\neg\Phi \& \Phi)_{\varepsilon} = \mathrm{F}$. Це вже узгоджується із природними логічними властивостями $\models \forall x(\Phi \to \exists x\Phi)$, $\models \forall x(\forall x\Phi \to \Phi)$, $\models \forall x(\neg\Phi \vee \Phi)$, $\models \neg\exists x(\neg\Phi \& \Phi)$.

Наведемо ще декілька співвідношень для вироджених моделей мови:

$\forall x(\exists x\Phi\to\Phi)_\varepsilon = \forall x(\Phi\to\forall x\Phi)_\varepsilon = \mathrm{T}$;

$\exists x(\exists x\Phi\to\Phi)_\varepsilon = \exists x(\Phi\to\forall x\Phi)_\varepsilon = \mathrm{F}$;

$(\exists x\Phi\to\Phi)_\varepsilon = (\Phi\to\forall x\Phi)_\varepsilon = \mathrm{T}$.

2. Квантифікація тотальних однозначних предикатів вироджених алгебр

Постає природне питання, як можна коректно (не порушуючи фундаментальних законів логіки) визначити композиції квантифікації для вироджених алгебр із порожнім носієм у випадку логіки тотальних однозначних предикатів (фактично класичної логіки). Для вироджених алгебр тоді існує лише два предикати – T та F.

.Таблиця 1. Квантифікація предикатів

	P	$\exists xP$	$\forall xP$	Зауваження
1	T F	T F	T F	M; $\exists x$, $\forall x$ –тотожно
2	T F	T F	F T	$\exists x$ – тотожно; $\forall x$ як $\neg$
3	T F	T F	T T	асиметрія
4	T F	T F	F F	асиметрія
5	T F	F T	T F	$\exists x$ як $\neg$; $\forall x$ – тотожно
6	T F	F T	F T	M; $\exists x$ та $\forall x$ – як $\neg$;
7	T F	F T	T T	асиметрія
8	T F	F T	F F	асиметрія
9	T F	T T	T F	асиметрія
10	T F	T T	F T	асиметрія
11	T F	T T	T T	$\exists x$, $\forall x$ дають T
12	T F	T T	F F	M; $\exists x$ дає T, $\forall x$ дає F;
13	T F	F F	T F	асиметрія
14	T F	F F	F T	асиметрія
15	T F	F F	T T	M; $\exists x$ дає F, $\forall x$ дає T
16	T F	F F	F F	$\exists x$, $\forall x$ дають F

Розглянемо (табл. 1) всі випадки, які можуть приймати $\exists xP$ та $\forall xP$, якщо $P\in\{\mathrm{T}, \mathrm{F}\}$. При цьому відмітимо випадки (позначаємо як M), коли виконуються закони де Моргана.

Відкидаючи випадки, коли невірні закони де Моргана, далі розглядаємо випадки 1, 6, 12, 15.

Випадок 15 – це традиційне продовження композицій квантифікації, для нього маємо наведені вище порушення фундаментальних законів логіки.

Для випадку 12 теж порушуються закони логіки, адже маємо $\exists x(\neg\Phi\&\Phi)_\varepsilon = \mathrm{T}$, $\forall x(\neg\Phi\vee\Phi)_\varepsilon = \mathrm{F}$.

Для випадку 6 $\forall x(\neg\Phi\vee\Phi)_\varepsilon = \exists x(\neg\Phi\vee\Phi)_\varepsilon = \mathrm{F}$, $\forall x(\neg\Phi\&\Phi)_\varepsilon = \mathrm{T}$; теж порушуються закони логіки.

Залишається випадок 1, коли $\exists x$ та $\forall x$ діють як тотожне відображення. Формально він не відрізняється від випадку предикатів традиційної алгебри з 1-елементним носієм. Для предикатів такої алгебри діють лише закони пропозиційної логіки.

Таким чином, випадок 1 залишається єдиним коректним для класичної логіки варіантом визначення композицій квантифікації предикатів вироджених алгебр із порожнім носієм, проте він не є формальним продовженням цих композицій із традиційного випадку алгебр із непорожнім носієм (таким є випадок 15).

3. Особливості квантифікації квазіарних предикатів

При традиційному продовжених композицій квантифікації на предикати над $A = \varnothing$ закони де Моргана вірні, проте порушуються важливі закони логіки, зокрема, із $\forall xP$ не випливає $\exists xP$

Коректним варіантом визначення композицій $\exists x$ та $\forall x$ над предикатами виродженої алгебри є їх задання як тотожних відображень на $Pr^{\varnothing}$. Тоді $\exists xP = \forall xP = P$. У цьому випадку для композицій $\exists x$ та $\forall x$ теж виконуються закони де Моргана.

Отже, для таких вироджених композиційних систем нетривіальними є лише пропозиційні композиції, які діють традиційно.

Дамо тепер визначення композицій квантифікації, що підходить як для предикатів алгебр із непорожнім носієм, так і для предикатів вироджених алгебр із порожнім носієм.

Для предикатів $\exists xP$ та $\forall xP$ визначаємо:

$d\in T(\exists xP) \Leftrightarrow A\neq\varnothing$ та

існує a ($a\in A$ та $d\nabla x\mapsto a\in T(P)$);

$d\in F(\exists xP) \Leftrightarrow A\neq\varnothing$ та

для всіх a ($a\in A \Rightarrow d\nabla x\mapsto a\in F(P)$);

$d\in T(\forall xP) \Leftrightarrow A\neq\varnothing$ та

для всіх a ($a\in A \Rightarrow d\nabla x\mapsto a\in T(P)$);

$d\in F(\forall xP) \Leftrightarrow A\neq\varnothing$ та

існує a ($a\in A$ та $d\nabla x\mapsto a\in F(P)$).

При умові $A\neq\varnothing$ отримуємо традиційне визначення $\exists xP$ та $\forall xP$.

При умові $A=\varnothing$ маємо $T(\exists xP)=F(\exists xP)=\varnothing$ та $T(\forall xP)=F(\forall xP)=\varnothing$.

Отже, $\exists xP=\forall xP=\perp$ для кожного $P\in Pr^{\varnothing}$.

Тому $\exists x\Phi_{\varepsilon}=\forall x\Phi_{\varepsilon}=\perp$ для кожної формули Ф.

Зрозуміло, що для так визначених композицій $\exists x$ та $\forall x$ над предикатами вироджених алгебр виконуються закони де Моргана.

Таким чином, для вироджених композиційних систем часткових предикатів із умовою $\exists xP=\forall xP=\perp$ теж фактично діють лише закони пропозиційної логіки.

Опишемо композиції розширеної квантифікації [5] над предикатами виродженої алгебри.

Розглянемо варіант визначення композицій $\exists x$ та $\forall x$ над предикатами виродженої алгебри як тотожних відображень на множині $Pr^{\varnothing}$. Тоді композиції розширеної квантифікації $\exists_{\perp}x$ та $\forall_{\perp}x$ теж діють як тотожні відображення. Справді, у всіх семантиках для кожного $P\in Pr^{\varnothing}$ маємо:

$$\exists_{\perp}xP=\exists xP\vee \mathrm{R}^{x}_{\perp}(P)=P\vee P=P;$$

$$\forall_{\perp}xP=\forall xP\,\&\,\mathrm{R}^{x}_{\perp}(P)=P\,\&\,P=P.$$

Розглянемо тепер варіант визначення $\exists x$ та $\forall x$ над предикатами виродженої алгебри, коли $\exists xP=\forall xP=\perp$ для кожного $P\in Pr^{\varnothing}$. Тоді можна розглядати лише випадки загальної семантики та неокласичної семантики.

У випадку загальної семантики маємо:

$$\exists_{\perp}xP=\exists xP\vee \mathrm{R}^{x}_{\perp}(P)=$$

$$=\perp\vee P=\begin{cases}\perp, & \text{якщо } P=\mathrm{T} \text{ або } P=\perp,\\ \mathrm{T}, & \text{якщо } P=\mathrm{T} \text{ або } P=\mathrm{TF};\end{cases}$$

$$\forall_{\perp}xP=\forall xP\,\&\,\mathrm{R}^{x}_{\perp}(P)=$$

$$=\perp\,\&P=\begin{cases}\perp, & \text{якщо } P=\mathrm{T} \text{ або } P=\perp,\\ \mathrm{F}, & \text{якщо } P=\mathrm{F} \text{ або } P=\mathrm{TF}.\end{cases}$$

Звідси отримуємо:

$$\exists_{\perp}x\neg P=\begin{cases}\perp, & \text{якщо } P=\mathrm{T} \text{ або } P=\perp,\\ \mathrm{T}, & \text{якщо } P=\mathrm{F} \text{ або } P=\mathrm{TF};\end{cases}$$

$$\forall_{\perp}x\neg P=\begin{cases}\perp, & \text{якщо } P=\mathrm{F} \text{ або } P=\perp,\\ \mathrm{F}, & \text{якщо } P=\mathrm{T} \text{ або } P=\mathrm{TF}.\end{cases}$$

У випадку неокласичної семантики маємо:

$$\exists_{\perp}xP=\exists xP\vee \mathrm{R}^{x}_{\perp}(P)=$$

$$=\perp\vee P=\begin{cases}\perp, & \text{якщо } P=\mathrm{F} \text{ або } P=\perp,\\ \mathrm{T}, & \text{якщо } P=\mathrm{T};\end{cases}$$

$$\forall_{\perp}xP=\forall xP\,\&\,\mathrm{R}^{x}_{\perp}(P)=$$

$$=\perp\,\&P=\begin{cases}\perp, & \text{якщо } P=\mathrm{T} \text{ або } P=\perp,\\ \mathrm{F}, & \text{якщо } P=\mathrm{F};\end{cases}$$

$$\exists_{\perp}x\neg P=\begin{cases}\perp, & \text{якщо } P=\mathrm{T} \text{ або } P=\perp,\\ \mathrm{T}, & \text{якщо } P=\mathrm{F};\end{cases}$$

$$\forall_{\perp}x\neg P=\begin{cases}\perp, & \text{якщо } P=\mathrm{F} \text{ або } P=\perp,\\ \mathrm{F}, & \text{якщо } P=\mathrm{T}.\end{cases}$$

Висновки

В роботі досліджено вироджені семантичні моделі першопорядкових композиційно-номінативних логік квазіарних предикатів. Характерна їх особливість – порожність предметної області. Описано вироджені алгебри та вироджені композиційні системи. Розглянуто композиції функцій та предикатів, заданих на порожній множині. Значну увагу приділено композиціям квантифікації, досліджено різні варіанти визначення цих композицій над предикатами виродженої алгебри.

Список використаних джерел

1. *S. C. Kleene.* Mathematical Logic. – New York: John Wiley & Sons. – 1967. – 398 p.
2. *A. Mostowski.* On the Rules of Proof in the Pure Functional Calculus of the First Order // The Jounal of Symbolic Logic. – 1951. – Vol. 16. – № 2. – p. 107–111.
3. *Nikitchenko M.S., Shkilniak S.S.* Mathematical Logic and Theory of Algorithms. – Kyiv: VPC Kyivskyi Universytet, 2008. – 528 p. (in Ukrainian).
4. *Nikitchenko M.S., Shkilniak S.S.* Composition-nominative logics of quasiary predicates: semantic aspects // Visnyk, Ser. Fiz.-Mat. Nauky, Kyiv Univ. im. Tarasa Shevchenka. – 2012. – № 4. – P. 165–172 (in Ukrainian).
5. *Nikitchenko M.S., Shkilniak O.S., Shkilniak S.S.* Logics of partial predicates with extended renominations and quantifier // Visnyk, Ser. Fiz.-Mat. Nauky, Kyiv Univ. im. Tarasa Shevchenka. – 2013. – № 2. – P. 210–215 (in Ukrainian).
6. *Nikitchenko M.S., Shkilniak S.S.* Composition-nominative logics with special variable definedness predicates // Visnyk, Ser. Fiz.-Mat. Nauky, Kyiv Univ. im. Tarasa Shevchenka. – 2013. – Special edition. – P. 128–133 (in Ukrainian).

Надійшла до редколегії 29.12.2013

УДК 378.016

Омельчук Л.Л., к.ф.-м.н.

Порівняльний аналіз українського стандарту освітньо-професійної підготовки з інформатики та державного освітнього стандарту Російської Федерації з інформатики та обчислювальної техніки[1]

Наведено порівняльний аналіз українського стандарту освітньо-професійної підготовки та державного освітнього стандарту Російської Федерації за напрямом підготовки 230100 "Інформатика та обчислювальна техніка". Наведено пропозиції для покращення українського освітнього стандарту.

Ключові слова: інформатика, освітній стандарт.

[1] Частково підтримано Tempus Project INARM

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, пр-т Глушкова 4д, e-mail: l.omelchuk@gmail.com

L.L. Omelchuk, Ph.D.

A comparative analysis of Ukrainian educational standard in Informatics and educational standard of the Russian Federation in the direction of 230100 "Computer Science and Engineering"[1]

A comparative analysis of Ukrainian educational standard in Informatics and educational standard of the Russian Federation in the direction of 230100 "Computer Science and Engineering" is made. Proposals for further enhancement of Ukrainian standards are formulated.

Key Words: informatics, educational standard.

[1] Partially supported by Tempus Project INARM

Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03680, Kyiv, Glushkova av., 4d, e-mail: l.omelchuk@gmail.com

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Буй Д.Б.

У вересні 2010 року Міністерством освіти і науки України затверджено стандарт освітньо-професійної програми підготовки бакалаврів за напрямом підготовки 040302 "Інформатика" на здобуття кваліфікації 3121 "фахівець з інформаційних технологій" (надалі ОПП'2010) [1].

Для визнання українського диплома з інформатики, а також підвищення мобільності студентів, потрібно щоб український стандарт узгоджувався із стандартами інших країн.

Згідно з дослідженнями [2] основними географічними напрямами міжнародної співпраці тридцяти університетів України є Німеччина, Польща та Росія. Також, в [2, 3] зазначено, що основними країнами-реципієнтами для студентів та молодих учених, що бажають здобути вищу освіту наукові ступені, проходити стажування, навчальну та виробничу практики є Німеччина, США, Росія, Польща та Угорщина. Згідно з цими дослідженнями можна визначити основні напрямки для порівняння українського освітнього стандарту. В [4] наведено порівняльний аналіз українського стандарту освітньо-професійної програми підготовки бакалаврів з "Інформатики" з широко визнаним у світі міжнародним стандартом Computer Science'2013. Проведемо порівняльний аналіз затвердженого стандарту з державним освітнім стандартом Російської Федерації за напрямом підготовки 230100 "Інформатика та обчислювальна техніка" [5].

В Загальноросійському класифікаторі спеціальностей з освіти відсутня спеціальність "Інформатика". Проте, в галузі знань 230000 "Інформатика та обчислювальна техніка" ("Информатика и вычислительная техника") є напрямок підготовки 230100 "Інформатика та обчислювальна техніка" ("Информатика и вычислительная техника") на здобуття кваліфікації бакалавра. Порівняємо ОПП'2010 з відповідним освітнім стандартом, затвердженим

© Л.Л. Омельчук, 2014

міністерством освіти і науки Російської Федерації в листопаді 2009 року (надалі ІВТ'2009) [5].

Автором встановлено відповідність між базовими темами з інформатики та дисциплінами, які пропонуються ОПП'2010. Це співвідношення наведено нижче в табл. 1. Співставляючи курси ІВТ'2009 з дисциплінами в ОПП'2010 можна дійти наступних висновків.

Деяким питанням в ІВТ'2009 приділено дещо більше уваги, ніж в ОПП'2010: двом дисциплінам з професійного циклу Б.3 ("Електротехніка, електроніка і схемотехніка" ("Электротехника, электроника и схемотехника") та "ЕОМ і периферійні пристрої" ("ЭВМ и периферийные устройства")) можна співставити єдину дисципліну з ОПП'2010 "Архітектура обчислювальних систем" (ПП 3.02).

Також, слід звернути увагу на дисципліни, присутні в ІВТ'2009 в той час, як в ОПП'2010 вони представлені вибірковими дисциплінами. Так, дисципліна ІВТ'2009 "Екологія" ("Экология") (Б.2) в ОПП'2010 представлена дисципліною за вибором "Екологія" (СВ.5.02), дисципліна ІВТ'2009 "Метрологія, стандартизація та сертифікація" ("Метрология, стандартизация и сертификация") (Б.3) в ОПП'2010 представлена дисципліною за вибором " Стандартизація та сертифікація програмного забезпечення ЕОМ " ("Стандартизація та сертифікація програмного забезпечення ЕОМ") (СВ.2.15), дисципліна ІВТ'2009 "Економіка" ("Экономика") (Б.1) в ОПП'2010 представлена дисциплінами за вибором "Економічна теорія" (СВ.5.04) та "Макро- та мікроекономіка" (СВ.5.08).

З іншого боку, слід виділити низку дисциплін, представлених в ОПП'2010 базовими дисциплінами, які не знайшли свого аналогу в ІВТ'2009: "Історія української культури" (ГСЕ 1.03), "Інтелектуальні інформаційні системи" (ПП 3.06), "Методи оптимізації та дослідження операцій" (ПП 3.08), "Методика викладання математики та інформатики" (ПП 3.09), "Організація та обробка електронної інформації" (ПП 3.12), "Платформи корпоративних інформаційних систем" (ПП 3.15), "Програмування та підтримка веб-застосувань" (ПП 3.16), "Проектування програмних систем" (ПП 3.17), "Розподілені інформаційно-аналітичні системи" (ПП 3.18), "Системний аналіз та теорія прийняття рішень" (ПП 3.19), "Теорія програмування" (ПП 3.20).

Однак, слід зазначити, що деякі з умінь, які передбачені змістовними модулями зазначених вище дисциплін передбачаються переліком професійних задач у відповідності з видами професійної діяльності до яких готуються бакалаври за напрямом підготовки 230100. Зокрема:

- дисципліні "Методика викладання математики та інформатики" (ПП 3.09) ОПП'2010 відповідає науково-педагогічна діяльність передбачена в ІВТ'2009;
- змістовному модулю ОПП'2010 "Сучасні платформи та засоби підтримки розподіленого програмування" дисципліни "Платформи корпоративних інформаційних систем" (ПП 3.15) відповідає професійна задача застосування сучасних інструментальних засобів при розробці програмного забезпечення проектно-технологічного виду діяльності передбаченого в ІВТ'2009;
- змістовному модулю ОПП'2010 "Програмні засоби підтримки клієнт-серверних застосувань" дисципліни "Програмування та підтримка веб-застосувань" (ПП 3.16) відповідає професійна задача застосування Web-технологій при реалізації віддаленого доступу в системах клієнт/сервер та розподілених обчислень проектно-технологічного виду діяльності передбаченого в ІВТ'2009;
- модулям дисципліни "Проектування програмних систем" (ПП 3.17) ОПП'2010 відповідають задачі проектно-конструкторського виду діяльності передбаченого в ІВТ'2009.

Дисциплінами, яким на відміну від ОПП'2010 в ІВТ'2009 приділено значно менше уваги є наступні дисципліни: "Алгебра та геометрія" (МПН 2.01), "Дискретна математика" (МПН 2.02), "Диференціальні рівняння" (МПН 2.03), "Математична логіка та теорія алгоритмів" (МПН 2.04), "Математичний аналіз" (МПН 2.05), "Теорія ймовірностей та математична статистика" (МПН 2.06) в ІВТ'2009 відповідає одна дисципліна "Математика" ("Математика") (Б.2).

Таблиця 1. Порівняння ІВТ'2009 та ООП'2010

Цикл	**Перелік дисциплін**		**Перелік дисциплін ІВТ'2009**
(1)	**(2)**	**(3)**	**(4)**
ГСЕ 1.01	Українська мова (за професійним спрямуванням)		
ГСЕ 1.02	Історія України	Б.1	Історія Росії (История России)
ГСЕ 1.03	Історія української культури		
ГСЕ 1.04	Іноземна мова		Іноземна мова (Иностранный язик)
ГСЕ 1.05	Філософія		Філософія (Философия)
ГСЕ 1.06	Фізичне виховання (за рахунок вільного часу студента)	Б.4	Фізичне виховання (Физическая культура)
МПН 2.01	Алгебра та геометрія	Б.2	Математика (Математика)
МПН 2.02	Дискретна математика		
МПН 2.03	Диференціальні рівняння		
МПН 2.04	Математична логіка та теорія алгоритмів		
МПН 2.05	Математичний аналіз		
МПН 2.06	Теорія ймовірностей та математична статистика		
ПП 3.01	Алгоритми і структури даних	Б.2	Інформатика (Информатика)
ПП 3.02	Архітектура обчислювальних систем	Б.3	Електротехніка, електроніка і схемотехніка (Электротехника, электроника и схемотехника) ЕОМ і периферійні пристрої (ЭВМ и периферийные устройства)
ПП 3.03	Бази даних та інформаційні системи	Б.3	Бази даних (Базы данных)
ПП 3.04	Безпека життєдіяльності	Б.3	Безпека життєдіяльності (Безопасность жизнедеятельности)
ПП 3.05	Захист інформації	Б.3	Захист інформації (Защита информации)
ПП 3.06	Інтелектуальні інформаційні системи		
ПП 3.07	Інформаційні мережі		
ПП 3.08	Методи оптимізації та дослідження операцій		
ПП 3.09	Методика викладання математики та інформатики		

Продовження табл. 1

(1)	(2)	(3)	(4)
ПП 3.10	Обробка зображень та мультимедіа	Б.3	Інженерна та комп'ютерна графіка (Инженерная и компьютерная графика)
ПП 3.11	Операційні системи та системне програмування	Б.3	Операційні системи (Операционные системы)
ПП 3.12	Організація та обробка електронної інформації		
ПП 3.13	Програмування	Б.3	Програмування (Программирование)
ПП 3.14	Паралельні та розподілені обчислення	Б.3	Мережі та телекомунікації (Сети и телекоммуникации)
ПП 3.15	Платформи корпоративних інформаційних систем		
ПП 3.16	Програмування та підтримка веб-застосувань		
ПП 3.17	Проектування програмних систем		
ПП 3.18	Розподілені інформаційно-аналітичні системи		
ПП 3.19	Системний аналіз та теорія прийняття рішень		
ПП 3.20	Теорія програмування		
СВ.2.15	Стандартизація та сертифікація програмного забезпечення ЕОМ	Б.3	Метрологія, стандартизація та сертифікація (Метрология, стандартизация и сертификация)
СВ.5.04	Економічна теорія	Б.1	Економіка (Экономика)
СВ.5.08	Макро- та мікроекономіка		
СВ.1.29	Фізика	Б.2	Фізика (Физика)

Висновки

ОПП'2010 та ІВТ'2009 не є еквівалентними. Проте, серйозних неузгодженостей програм при мобільності студентів з українських ВУЗів в російські не виявлено. За умови, що читатимуться дисципліни за вибором "Екологія" (СВ.5.02), "Стандартизація та сертифікація програмного забезпечення ЕОМ" (СВ.2.15) та принаймні одна з двох дисциплін "Економічна теорія" (СВ.5.04) чи "Макро- та мікроекономіка" (СВ.5.08).

Список скорочень:

У даній статті застосовуються наступні скорочення:
ПЗ – програмне забезпечення;
ОПП'2010 – галузевий стандарт вищої освіти підготовки бакалаврів за напрямом 040302 "Інформатика" 2010;
ГСЕ – гуманітарної та соціально-економічної підготовки;
МПН – математичної, природничо-наукової підготовки;
ПП – професійної та практичної підготовки;
СВ – самостійного вибору
ІВТ'2009 – Федеральный государственный образовательный стандарт высшего профессионального образования по направлению подготовки 230100 "Информатика и вычислительная техника";
НЦ ООП – навчальний цикл основної освітньої програми;
Б – базової підготовки.

Список використаних джерел

1. The industry standard of the higher education of preparation of bachelors. Areas of Knowledge 0403 System Science and Cybernetics. Direction prepare 040302 «Computer Science». – Kyiv: The Ministry of education and science of Ukraine, 2010. – 94 p. (in Ukrainian).
2. Shava A. Migration processes in education - development dynamics, causes and current state [Electronic resource]. - Mode of access: http://www.ippo.if.ua/images/stories/Obr_2012/Obrii_1_12/Shava.pdf (in Ukrainian).
3. Kutsenko V. Education Migration: Socio-economic and professional aspects / V. Kutsenko N. Rudenko // Regional Economy. - 2010. - № 1. - P. 123-130. (in Ukrainian).
4. Omelchuk L.L. A comparative analysis of Ukrainian educational standard in Informatics and Computer Science'2013 // Visn., Ser. Fiz/-Mat/ Nauky, Kyiv Univ. im. Tarasa Shevchenka. – 2013. – N 2. – P. 216 – 227. (in Ukrainian).
5. Federal State Educational Standard of Higher Professional Education. The field of training 230100 «Computer Science». – Moscow: The Ministry of education and science of the Russian Federation, 2009. – 31 p. (in Russian).

Надійшла до редколегії 10.09.2013

УДК 519.9

Присяжна М. В. асп.,
Клюшин Д. А. д. ф.-м. н., проф.

Еліптична функція статистичної глибини даних

Запропоновано новий спосіб ранжування багатовимірних вибірок, нова статистична функція глибини, побудована на основі концентричних довірчих еліпсів Петуніна із точними рівнями значущості, а також новий спосіб побудови глибинно-упорядкованих регіонів.

Ключові слова: статистична глибина даних, багатовимірне упорядкування, довірчі еліпси

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, пр-т Глушкова 4д, e-mail: dokmed5@gmail.com

Prysiazhna M. V., post-graduate,
Klyushin D. A., Dr.Sc.

Elliptical statistical data depth function

New method of ordering of multivariate random samples and statistical data depth function based on Petunin concentric ellipsoids are proposed. The statistical depth allows to estimate a median of multivariate distribution, to discover outliers and to decrease of uncertainty of quadratic discriminant analysis.

Key Words: statistical data depth, multivariate ordering, confidence ellipses

Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03680, Kyiv, Glushkova av., 4d,
e-mail: dokmed5@gmail.com

Статтю представив д. т. н., проф. Кудін В.І.

Вступ

Поняття статистичної функції глибини набуло широкого застосування в задачах класифікації. Зокрема, досить широкий і детальний огляд цього питання викладений в роботі Т.Ланге і П.Ф.Можаровського [1]. У даній роботі розроблено нове імовірнісне розуміння поняття статистичної глибини даних. Це дає можливість ранжувати елементи багатовимірної вибірки із урахуванням ймовірності того, що нова точка із тої ж генеральної сукупності потрапить у задану область рішення.

Статистичні функції глибини

Дамо загальне означення функції глибини.

Означення 1. Нехай дано деякий розподіл P у d-вимірному просторі R^d. Довільна функція $D(x;P)$ для кожної $x \in P$, яка буде впорядковувати точки розподілу за спаданням відносно його центру, називається функцією глибини. Значення функції глибини $D(x;P)$ у конкретних точках x розподілу P називається глибиною відповідних точок [9].

Зауваження 1. Центр розподілу визначається в залежності від конкретної функції глибини, яка розглядається (це може бути медіана, центроїд, геометричний центр розподілу тощо).

Фактично функція глибини забезпечує представлення вихідних даних з d-вимірного евклідового простору у вигляді одновимірних. Завдяки цьому можна виділити ряд переваг у використанні функції глибини. Нижче зазначимо найсуттєвіші з них:

1. Єдиність ознаки, за якою проводиться ранжування.
2. Відносна простота ранжування.
3. Незалежність від афінних перетворень і вибору системи координат.

Нижче наведемо класичні властивості функції глибини, введені Y.Zuo і R.Serfling [9], за умови виконання яких, функція глибини називається статистичною функцією глибини у класичному розумінні.

B1. Афінна інваріантність. Глибина точки не залежить від обраної системи координат, а також не змінюється при дії афінного перетворення на вихідні дані.

B2. Максимальність у центрі. Глибина точки, яка є центром розподілу, який розглядається, є найбільшою з-поміж усіх точок розподілу.

© М.В. Присяжна, Д.А. Клюшин, 2014

B3. Монотонність відносно найглибшої точки. Глибина точок розподілу монотонно спадає відносно направленої уявної прямої, яка проходить через центр розподілу – найглибшу точку розподілу.

B4. Поведінка функції на нескінченності. Якщо $\|x - x_c\| \to \infty$ ($x \in P$ – довільна точка розподілу P, x_c – центр розподілу, $\|\cdot\|$ – звичайна евклідова норма заданого d-вимірного простору R^d), то $D(x;P) \to 0$.

Зауваження 2. Для кращого розуміння практичного застосування конкретних прикладів статистичних функцій глибини надалі будемо розглядати не розподіли в загальному, а вибірки, як скінченні набори даних певного розподілу. Статистичну глибину у даному випадку позначимо, як $D_n(x;M_n)$, де M_n – вибірка, яка розглядається.

Глибина Тьюкі. Щоб розкрити поняття глибини Тьюкі [8] необхідно додатково ввести означення центру вибірки у розумінні Тьюкі.

Означення 2. Нехай дано вибірку M_n деякого розподілу P у d-вимірному просторі R^d. Центром вибірки M_n називається така точка x_c, для якої будь-яка гіперплощина, яка проходить через неї, ділить точки вибірки на дві приблизно рівні підмножини (менша частина повинна мати принаймні $\frac{1}{d+1}$ точок вибірки). Як і медіана, центральна точка не обов'язково повинна бути однією з точок набору даних. Кожний не порожній набір точок (без повторень точок) має принаймні одну центральну точку.

Зауваження 3. У галузі статистики та обчислювальної геометрії, поняття центру (або ще кажуть, центральної точки) є одним з узагальнень поняття медіани в багатовимірному евклідовому просторі.

Означення 3. Нехай дано вибірку M_n деякого розподілу P у d-вимірному просторі R^d. Глибиною Тьюкі точки $x \in M_n$ будемо називати мінімальну кількість точок вибірки, які лежать по один бік від довільної гіперплощини, проведеної через дану точку. Тобто,

$$TD(x_0;P) = \inf\{C(H) \mid C(H), x_0 \in H\},$$

де $C(H)$ – кількість точок, які лежать по один бік від довільної гіперплощини, проведеної через дану точку x_0.

Лема 1 [8]. Глибина Тьюкі задовільняє умови B1–B4.

Симплексна глибина. Симплексна глибина введена у статті R.J.Liu [6].

Означення 4. Нехай дано вибірку M_n деякого розподілу P у d-вимірному просторі R^d. Симплексною глибиною точки $x \in M_n$ будемо називати кількість симплексів, які побудовані на довільних точках вибірки і які містять точку x.

$$SD_n(x) = \frac{1}{C_n^{d+1}} \sum_{1 \le i_1 \le i_2 \le \ldots \le i_{d+1}} I(x \in S(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_{d+1}})),$$

де $S(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_{d+1}})$ - це симплекс, побудований на $d+1$ точці вибірки M_n, I — індикаторна функція.

Лема 2 [6]. Якщо розподіл, який розглядається, неперервний, то симплексна глибина для нього задовільняє умови B1–B4.

Лема 3 [6]. Якщо розподіл, який розглядається, дискретний, то симплексна глибина для нього може не задовільняти умови B2 та B3.

Глибина Ойя [7] є результатом узагальнення теорії симплексної глибини.

Означення 5. Нехай дано вибірку M_n деякого розподілу P у d-вимірному просторі R^d. Глибиною Ойя точки $x \in M_n$ будемо називати середній об'єм симплексів, які побудовані на довільних d точках вибірки і точці x. Тобто,

$$D_n(x) = \frac{1}{C_n^d} \sum_{1 \le i_1 \le i_2 \le \ldots \le i_d} \nu(x, x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_d})),$$

де $\nu(x, x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_d})$ — d-вимірний об'єм симплексу у просторі R^d.

Глибина Махаланобіса. Відстань Махалонобіса між точками $x, y \in R^d$ відносно позитивно визначеної матриці M розмірності $d \times d$ обчислюється як

$$d_M^2(x,y) = (x-y)^T M^{-1} (x-y)$$

На основі даної відстані у роботі Y.Zuo і R.Serfling [9] введено поняття глибини Махаланобіса як

$$MHD(x;F) = (1 + \mathrm{d}^2_{\Sigma(F)}(x, \mu(F)))^{-1},$$

де $\mu(F)$ — математичне сподівання розподілу F F; $\Sigma(F)$ — коваріаційна матриця.

Зоноїдальна глибина введена в роботі німецьких математиків G.Koshevoy і G.Mosler [5].

Означення 6. Зоноїдом деякого розподілу P у d-вимірному просторі R^d називається набір точок у просторі R^{d+1}

$$Z=\left\{z(\mu,h)\,|\,h:R^d\to[0,1]-\textit{вимірна}\right\},\ \text{де}$$

$$z(\mu,h)=(z_0(\mu,h),\zeta(\mu,h))\in R^{d+1},$$

$$z_0(\mu,h)=\int\limits_{R^d}h(x)d\mu(x),$$

$$\zeta(\mu,h)=\int\limits_{R^d}xh(x)d\mu(x)$$

Означення 7. Нехай дано вибірку $M_n=\{x_1,...,x_n\}$ деякого розподілу P у d-вимірному просторі R^d. Зоноїдальною глибиною точки y відносно вибірки M_n називається число $d_z(y\,|\,x_1,...,x_n)=\sup\{\alpha: y\in D_\alpha(x_1,...,x_n)\}$, де

$$D_\alpha(x_1,...,x_n)=\left\{\sum_{i=1}^n\lambda_i x_i:\sum_{i=1}^n\lambda_i=1,0\le\lambda_i,\forall i:\alpha\lambda_i\le\frac{1}{n}\right\}$$

Статистична глибина на основі пілінгу опуклими оболонками. Опукла оболонка для набору точок — це мінімальна опукла фігура, що містить задані точки. Іншими словами, це набір точок, які формують "периметр" багатокутника, що утворюється при їх з'єднанні. Пілінг (відсіювання) методом опуклих оболонок досягається систематичним визначенням і видаленням набору точок, які утворюють опуклу оболонку для точок [3].

Нова статистична глибина даних на основі еліпсоїдів Петуніна

У даній роботі ми пропонуємо нове ймовірносне розуміння поняття статистичної функції глибини. Воно у своїй основі має новий метод ранжування, а також ймовірнісну характеристику. Таким чином, крім безпосереднього ранжування елементів вибірки, ми можемо вирахувати з якою ймовірністю розглядувана точка потрапить у задану вибірку і додатково визначити ранг цієї точки відносно даної вибірки.

Еліпс Петуніна. Для наочності докладно опишемо побудову довірчого еліпса Петуніна в просторі R^2, а потім сформулюємо загальний алгоритм побудови довірчого еліпсоїда в просторі R^m при $m>2$ відповідно до роботи С.І.Ляшка, Д.А. Клюшина та В.В.Алєксєєнко [2]. Вихідними даними для алгоритму є множина точок $M_n=\{\vec{x}_1,...,\vec{x}_n\}$.

Випадок $m=2$. Побудуємо опуклу оболонку точок $M_n=\{(x_1,y_1),...,(x_n,y_n)\}$ на площині R^2. Знайдемо дві вершини опуклої оболонки (x_k,y_k) і (x_l,y_l), відстань між якими є найбільшим, тобто точки, що лежать на діаметрі опуклої оболонки. Проведемо через точки (x_k,y_k) і (x_l,y_l) пряму L. Знайдемо вершини опуклої оболонки (x_r,y_r) і (x_q,y_q), відстань яких від прямої L є найбільшим. Проведемо через точки (x_r,y_r) і (x_q,y_q) прямі L_1 і L_2, паралельні до прямої L. Проведемо через точки (x_k,y_k) і (x_l,y_l) дві прямі L_3 і L_4, перпендикулярні до прямої L. Перетин прямих L_1, L_2, L_3 і L_4 утворять прямокутник Π, сторони якого мають довжини a і b (нехай, для визначеності, $a\le b$). Здійснимо поворот і перенос системи координат, так щоб лівий нижній кут прямокутника був розташований на початку нової системи координат з осями Ox' і Oy', а точки (x_1,y_1), (x_2,y_2), ..., (x_n,y_n) перейшли в точки (x_1',y_1'), (x_2',y_2'), ..., (x_n',y_n'). Виконаємо стискання абсцис усіх точок (x_1',y_1'), (x_2',y_2'), ..., (x_n',y_n') з коефіцієнтом $\alpha=\frac{a}{b}$ і одержимо сукупність точок $(\alpha x_1',y_1')$, $(\alpha x_2',y_2')$, ..., $(\alpha x_n',y_n')$, що лежать у квадраті S. Знайдемо центр (x_0',y_0') квадрата S й обчислимо відстані від нього до кожної точки $r_1,r_2,...,r_n$. Знайдемо найбільше число $R=\max(r_1,r_2,...,r_n)$. Побудуємо коло з центром у точці (x_0',y_0') і радіусом R. (Усі точки $(\alpha x_1',y_1')$, $(\alpha x_2',y_2')$, ..., $(\alpha x_n',y_n')$ тепер лежать усередині цього кола.) Застосовуємо до цього кола операцію розтягування уздовж осі Ox' з коефіцієнтом $\beta=\frac{1}{\alpha}$ і зворотні перетворення повороту і переносу, одержуючи шуканий довірчий еліпс. Легко бачити, что середня складність цього алгоритму визначається складністю побудови опуклої оболонки і дорівнює $O(n\lg n)$.

Випадок $m>2$. Побудуємо опуклу оболонку точок $M_n=\{\vec{x}_1,...,\vec{x}_n\}$ у m-вимірному просторі. Знайдемо дві вершини опуклої оболонки $\vec{x}_k$ і $\vec{x}_l$,

що лежать на діаметрі опуклої оболонки. Проведемо через точки $\vec{x}_k$ і $\vec{x}_l$ пряму L. Здійснимо поворот і перенос системи координат, так щоб діаметр опуклої оболонки лежав на осі Ox_1'. Побудуємо найменший прямокутний паралелепіпед, що містить точки $\vec{x}_1',...,\vec{x}_n'$. Стиснемо простір, перетворюючи прямокутний паралелепіпед у гіперкуб. Знайдемо центр $\vec{x}_0$ гіперкуба й обчислимо відстані $r_1, r_2, ..., r_n$ від нього до кожної точки. Знайдемо найбільше число $R = \max(r_1, r_2, ..., r_n)$. Побудуємо гіперкулю з центром у точці $\vec{x}_0$ і радіусом R. Застосуємо до цієї гіперкулі зворотні операції розтягування, повороту і переносу, одержуючи необхідний еліпсоїд у вихідному просторі. Легко бачити, що середня складність цього алгоритму дорівнює $O(n \lg n)$.

З демонстраційною метою розглянемо тепер функцію статистичної глибини на площині. Побудуємо довірчі еліпсоїди E_n, на межах яких лежать точки множини $M_n = \{\vec{x}_1, ..., \vec{x}_n\}$. Відповідно до алгоритму Петуніна ці еліпси будуть концентричними, оскільки вони отримані шляхом розтягування концентричних кіл (рис. 1). Ймовірність, що на межі еліпсу Петуніна лежить дві або більше точок, дорівнює нулю. Точки, що лежать на еліпсах E_n, утворюють варіаційний ряд $\vec{x}_{(1)} \prec \vec{x}_{(2)} \prec ... \prec \vec{x}_{(n)}$, де відношення порядку $x \prec y$ означає, що з того, що $x \in E$, $y \in G$ і $x \prec y$ випливає, що $E \supset G$. Інакше кажучи, "найбільша" точка лежить в найбільш "глибокому" еліпсі.

Еліптична статистична глибина (PD). Довірчі еліпси Петуніна дозволяють побудувати нову еліптичну функцію статистичної глибини. Оскільки еліпси Петуніна утворюють лінії рівня цієї функції, тобто точки, що лежать на межах еліпсоїдів E_n мають однакову статистичну глибину, яка дорівнює довірчому рівню еліпса $\frac{n-1}{n+1}$ [2], монотонну і неперервну еліптичну функцію глибини можна побудувати, наприклад, як лінійний сплайн за цими точками. Зрозуміло, що неперервність функції статистичної глибини можна забезпечити не лише лінійними сплайнами.

Лема 5. Еліптична статистична глибина задовільняє умови B1-B4.

Доведення.

B1) Метод побудови еліпсів Петуніна є інваріантним відносно зміни системи координат і афінних перетворень (за рахунок відповідної інваріантності еліпсів і прямокутників).

B2) Якщо багатовимірна випадкова величина має еліптичний розподіл (зокрема, нормальний) то центри еліпсів Петуніна збігається до медіани вибірки, таким чином найбільшого свого значення статистична функція глибини Петуніна набуває саме у цій точці. Для інших розподілів ця функція дає наближення медіани, точність якого залежить від того, наскільки розподіл відрізняється від еліптичного.

B3) $P(x \in E_n) = \frac{n-1}{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$, тобто при наближенні до центру розподілу, яким у даному випадку є його медіана, ймовірність, а, отже, і значення глибини точки (порядковий номер еліпсу), яка розглядається, монотонно зростає.

B4) Що далі точка x, яку ми розглядаємо, знаходиться від центру даного розподілу, то більшою є ймовірність її потрапляння у еліпс з меншим порядковим номером. Якщо ж $x \to \infty$, то за припущенням компактності генеральної сукупності, яка розглядається, збільшується ймовірність того, що дана точка не потрапить в жодний з еліпсів і таким чином значення її глибини прямує до 0. Доведення закінчено.

Зауваження 5. Легко бачити, що концентричні довірчі еліпси Петуніна із довірчими рівнямии $\frac{n-1}{n+1}$, визначають новий спосіб упорядкування багатовимірних вибірок.

Глибинно-упорядковані регіони

В роботі I.Cascos [4] наведено означення і основні властивості, які повинні задовольняти глибинно-упорядковані регіони, утворені функцією статистичної глибини.

Означення 8. Глибинно-упорядкованим регіоном (центральним) називається множина точок, статистична глибина яких не меньше наперед заданого значення, тобто

$$D_\alpha(P_X) = \left\{x \in R^d : D(x; P_X) \geq \alpha\right\},$$

де $D(x; P_X)$ — статистична глибина точки x, взятої із багатовимірної генеральної сукупності із розподілом P_X.

У роботі I.Cascos [4] були введені *бажані* властивості, яким повинні задовільняти глибинно-упорядковані регіони.

1) *Афінна еквіваріантність*: для будь-якого випадкового вектору $x \in R^d$ $D_\alpha(Ax+b) = AD_\alpha(x)+b$ для будь-якої невиродженої матриці A розмірності $d \times d$ і $b \in R^d$.

2) *Вкладеність*: якщо $\alpha \geq \beta$, то $D_\alpha(P_X) \subset D_\beta(P_X)$.

3) *Монотонність*: якщо $x \prec y$ покомпонентно, то $D_\alpha(P_X)+a \subset D_\beta(P_X)+a$, де $a \in R^d$ — довільний додатний вектор.

4) *Компактність*: $D_\alpha(P_X)$ — компактна область.

5) *Опуклість*: $D_\alpha(P_X)$ — опукла область.

6) *Субаддитивність*:

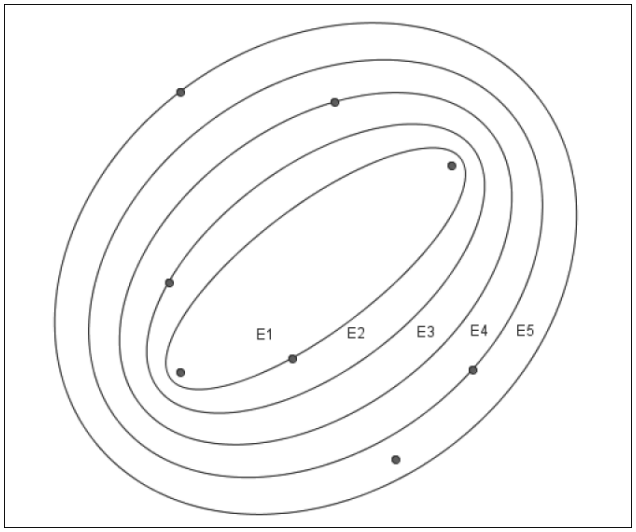


Рис. 1. Еліпси Петуніна

$$D_\alpha(P_{X+Y}) \subset D_\alpha(P_X)+D_\alpha(P_Y)$$

Теорема. Глибинно-упорядковані еліпси Петуніна задовольняють умови 1)–5).

Доведення. Аналіз алгоритму побудови еліпсів Петуніна показує, що властивості 1)–5) (афінна еквіваріантність, вкладеність, монотонність, компактність і опуклість) виконуються очевидним чином.

Cascos [4] зазначив, що субаддитивність — лише *бажана* а не необхідна властивість у дослідженнях фінансових ризиків. Оскільки основним застосуванням еліпсів Петуніна є класифікація багатовимірних даних, а не оцінка фінансових ризиків невиконання властивості субаддитивності глибинно-упорядкованих регіонів не можна вважати її недоліком.

Практичне застосування зазначених вище статистичних функцій глибини

Для порівняння якості і доцільності практичного застосування було проведено розрахунки для всіх зазначених вище статистичних функцій глибини. Параметри: 100 випадків (100 нормально розподілених точок з параметрами (0;1)) та 100 випадків (100 нормально розподілених точок з параметрам (1;1)).

Головним критерієм порівняння доцільності практичного застосування на даному етапі було обрано швидкодію роботи всіх методів.

Основні результати наведені нижче у Таблиці 1.

Функція глибини / Оцінка швидкодії, сек	TD	SD	D	MHD	CHD	PD
(0;1)	5,25	5,05	6,35	6,73	1,36	2,89
(1;1)	5,23	5,20	6,38	6,85	1,38	2,9

Таблиця 1. Порівняння статистичних функцій глибини на основі оцінки швидкодії.

З табл. 1 випливає, що запропонована у даній роботі нова статистична функція глибини (PD) має значні переваги над класичними методами (серед методів точного упорядкування вона забезпечує найвищу швидкодію). Більш висока швидкодія пілінгу опуклими оболонками пояснюється специфікою методу (ранжуються не кожна з точок вибірки окремо, а групи точок).

Висновки

У роботі запропоновано нову функцію статистичної глибини, показано, що вкладені еліпси Петуніна задовольняють основні властивості глибинно-упорядкованих регіонів, та проведено порівняння швидкодії різних алгоритмів упорядкування. Основними результатами роботи є новий спосіб ранжування багатовимірних вибірок, нова статистична функція глибини, побудована на основі концентричних довірчих еліпсів Петуніна із точними рівнями значущості, а також новий спосіб побудови глибинно-упорядкованих регіонів.

Список використаних джерел

[1] T.I. Lange, P.F. Mozharovsky Determination of the depth for multivariate data sets // Inductive modelling of complex systems. — 2010. — № 2. — pp. 101–119.(in Russian)

[2] S.I. Lyashko, D.A. Klyushin, V.V. Alexeyenko Mulrivariate ranking using elliptical peeling // Cybernetic and Systems Analysis. — 2013. — № 4. — pp. 29–36.(in Russian)

[3] Barnett V. The ordering of multivariate data // Journal of the Royal Statistical Society. Series A (General).— Vol. 139. — 1976. — No. 3. — pp. 318-355.

[4] Cascos I. Depth function as based of a number of observation of a random vector // Working Paper 07-29. — Statistic and Econometric Series 07. — September 2009, v2. — 28 p.

[5] Koshevoy, G. and Mosler, K. Zonoid trimming for multivariate distributions // Annals of Statistics. — 1997. — 25. — P. 1998-2017.

[6] Liu R.J. On a notion of data depth based on random simplices //Annals of Statictics. — 1990. — 18. —P. 405–414.

[7] Oja H. Descriptive statistics for multivariate distributions // Statistics and Probability Letters. — 1983. — 1. — P. 327–332.

[8] Tukey J. W. Tukey, J.W. Mathematics and the picturing of data // Proceedings of the International Congress of Mathematician, Montreal, Canada. — 1975. — P. 523–531.

[9] Zuo, Y., Serfling, R. General notions of statistical depth function // Ann. Statist. — 2000. — 28. — P. 461-482.

Надійшла до ред. 12.12.2013

УДК 519.9

Рубльов Б.В., д.ф.-м. н., проф
Шкуліпа О.В., аспірант
Харченко А.В., студент

Побудова інтелектуальної діагностичної системи для встановлення фази захворювання

В даній статті описаний підхід використання нейронної мережі зворотнього поширення помилки для вирішення задач в медицині. Приведено використання нейронних мереж для визначення стадії захворювання у хворих. Представлений макет програмної системи. Наведено результати роботи системи на тестових, реальних даних.

Ключові слова: багатошарова штучна нейронна мережа, математична модель.

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, пр-т Глушкова 4д
e-mail: rublyovbv@gmail.com, elena.andruschak@gmail.com, aliona.kharchenko@gmail.com

B.V. Rublyov, D.Sci.(Phys.-Math.),professor
O.V. Shkulipa, a PhD student
A.V. Kharchenko, a BSc student

Constructing Intelligent Diagnostic System for Phase of Disease Determination

In this paper mathematical model of phase of disease determination using artificial neural network is described. The estimation of an opportunity of its use for phase identification and existing lacks is lead.

Key Words: multilayer artificial neural network, toxemia, mathematical model

Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03680, Kyiv, Glushkova av., 4d
e-mail:rublyovbv@gmail.com, elena.andruschak@gmail.com, aliona.kharchenko@gmail.com

Статтю представив д. т. н., с.н.с. Кудін В.І.

Відомо, що перебіг більшості з відомих на сучасному етапі захворювань супроводжується розвитком токсемії (накопичення у кров'яному руслі речовин – токсинів - ендо- або екзогенного походження, характерною ознакою яких є наявність в них пошкоджуючої активності у відношенні до біологічних мішеней організму). Токсемія обумовлює формування процесу токсикозу, клінічною маніфестацією якого є інтоксикаційний синдром. Про негативний вплив токсикозу на перебіг та вихід захворювання в медичній літературі існує багато повідомлень. Саме тому, лікувальні заходи, що скеровані на протидію пошкоджуючій активності токсинів, увійшли в різні лікувальні протоколи багатьох хвороб, та отримали назву "детоксикаційної терапії", а розробка нових ефективних технологій детоксикації (знешкодження токсинів) є актуальним завданням сучасної медицини. За допомогою методу комплексної токсикометрії у всіх хвори х провели дослідження параметрів ендотоксемії з визначенням токсикометричних характеристик ендотоксинів: розміри їх часток та молекул, розподіл їх в кров'яному руслі на токсиннесучих фракціях, місця переважного накопичення в кров'яному руслі, міцність зв'язку з токсиннесучою фракцією. В статті розглядається побудова діагностичної інтелектуальної системи для визначення стадії токсемії (загострення або ремісія) для заданого хворого на основі 29 токсикометричних характеристик, отриманих вищевказаним чином.

Штучна нейронна мережа представляє собою сукупність елементів - нейронів, які зв'язані між собою та з навколишнім середовищем за допомогою зв'язків з ваговими коефіцієнтами. У ході роботи нейронної мережі встановлюється залежність між вхідними та відповідними їм вихідними даними навчальної вибірки. Спосіб перетворення даних та кінцевий результат залежать від архітектури мережі та алгоритму навчання, що використовується.

Матеріали та методи дослідження

Для побудови математичної моделі будуть використані набір ознак, які супроводжували перебіг різних захворювань 1246 пацієнтів, для

© Б.В. Рубльов, О.В. Шкуліпа, А.В. Харченко, 2014

кожного з яких відомо 29 параметрів накопичення токсинів в крові. Для всіх хворих за допомогою традиційних загальновизнаних методів дослідження було встановлено фазу хвороби – загострення (840 пацієнтів) або ремісія (406 пацієнтів).

Нейронні мережі

Для розв'язання задач класифікації та прогнозування використовуються різні математичні методи: математична статистика, кластерний та реграсійний аналіз, факторний аналіз та інші. Проте коли справа стосується реальних даних деякі методи не можуть гарантувати успіху та показати гарний результат. При роботі з медичними даними та реальними хворими нейронні мережі дають ряд переваг. По-перше, вони дозволяють легко «довчати» початкову модель при появі нових данних, або ж перевчати модель на початкових даних, відповідно до змін зовнішніх умов, наприклад, регіону.. По-друге, при роботі з медичними даними важливо мати інструмент для роботи з малими вибірками. Також нейронні мережі можуть дати можливість за допомогою однієї мережі розв'язати кілька задач розпізнавання даних. При дослідженні складних нелінійних систем, що оперують влеикими масивами інформації, нейронні мережі дозволяють не базуватись на апріорних припущеннях та виявляти нелінійні зв'язки між різними факторами краще стандартних статистичних методів (наприклад, логістична регресія). Нейронні мережі, в свою чергу, здатні працювати з великим набором параметрів, вплив яких на постановку діагнозу людині неможливо оцінити без даного аналізу, вони так само здатні приймати рішення, покладаючись на приховані закономірності у багатовимірних вхідних даних.

Математична постановка задачі:

Для заданого хворого $x = (x_1, \dots, x_{29})$, набір ознак фази захворювання якого описується вектором, де кожна координата відповідає ендотоксичному параметру (наприклад, автоімунна активність цитомембранних ендотоксинів, цитолітична активність глобулін-асоційованих ендотоксинів тощо), визначити фазу захворювання (загострення або ремісія).

Підзадача:

Підібрати кількість нейронів в прихованих шарах, яка забезпечує найкращий результат навчання.

Модель нейронної мережі

На рис. 1 показано архітектуру обраної мережі. Для першого та останнього шару

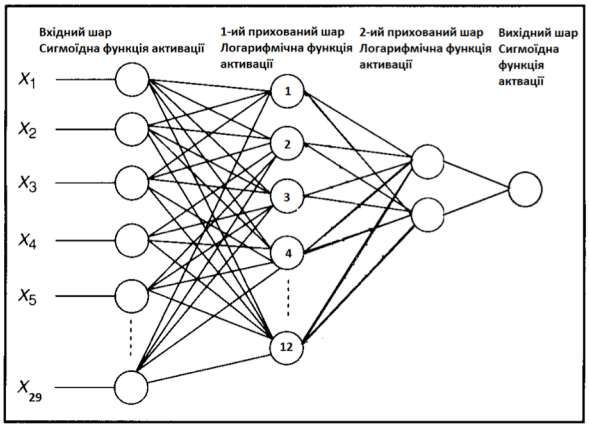


Рис. 1 Архітектура нейронної мережі

використано функцію активації сигмоїдального типу, для третього та четвертого – логарифмічну. Для навчання даної мережі було використано модифікацію алгоритму зворотного розповсюдження помилки.

Алгоритм зворотного розповсюдження помилки припускає для кожного тренувального набору модифікацію синаптичних зв'язків усіх шарів нейронної мережі. При цьому зміна вагових коефіцієнтів одного шару нейронної мережі відбувається без урахування зміни інших шарів. Це може призвести до нестабільності процесу навчання, який характеризується відсутністю тенденції до зниження середньоквадратичної похибки мережі. Тому у гетерогенних мережах може виникнути розсинхронізація процесу навчання між різними шарами мережі. Запропонована модифікація даного алгоритму, як багаторазове розповсюдження помилки, припускає на кожній ітерації переобчислення синаптичних зв'язків тільки одного шару нейронної мережі. Відповідно до цього кожен образ буде послідовно подаватися на нейронну мережу стільки разів, скільки шарів має мережа.

Нехай p - число шарів нейронної мережі, які налаштовуються. Тоді алгоритм багаторазового розповсюдження помилки складається з наступних кроків:

(1) Здається бажана середньоквадратична похибка $E_m = 0{,}03$ та швидкість навчання $(0 < \alpha < 1)$, $\alpha = 0{,}01$.

(2) Синаптичні зв'язки ініціалізуються методом Нгуена-Уідроу: обчислюємо $\beta = 0.7h^{\frac{1}{i}}$ ($h -$ кількість прихованих нейронів, $i -$ кількість вхідних нейронів); обчислюється Евклідова

норма вектора ваг в результаті отримуємо вагові коефіцієнти за формулою $w_{t+1} = \frac{\beta w_{t+1}}{n}$

(3) Число нейронів в i-му шарі мережі позначимо як $p_i, i = \overline{1,3}$, таким чином маємо: $p_1 = 29, p_2 = 12, p_3 = 2$.

(4) Подається перший навчальний приклад на вхід нейронної мережі. Реалізується фаза прямого і зворотного поширення сигналу. В результаті здійснюється модифікація вагових коефіцієнтів і порогів нейронів для кожного i-го шару нейронної мережі окремо:

$$w_{ij}(t+1) = w_{ij}(t) - \frac{\alpha\, \partial E}{\partial w_{ij}(t)}$$

$$T_j(t+1) = T_j(t) - \frac{\alpha\, \partial E}{\partial T_j(t)}$$

де $E = \frac{1}{2}\sum_j (y_j - t_j)^2$ - середньоквадратична похибка нейронної мережі для одного образу.

(5) Повторюється процес навчання (крок 4) для всіх прикладів навчальної вибірки.

(6) Обчислюється сумарна середньоквадратична похибка E, і якщо $E > E_m$, відбувається перехід до кроку 5, інакше процес навчання завершується.

Як вказано вище, в нейронній мережі було використано сигмоїдну та логарифмічну функції активації. Тобто, вихідні значення $j-$го елемента обох функцій визначаються за формулами:

$$y_j = \frac{1}{1+e^{-s_j}},$$

$$y_i = \ln\left(S_i + \sqrt{(S_i^2 + 1)}\right),$$

де $S_j = \sum_j w_{ij} - T_j, w_{ij} -$ вагові коефіцієнти, $T_j -$ поріг.

Система

Штучна нейронна мережа була реалізована за допомогою Microsoft Visual Studio 2012 мовою C#. Для виконання поставленої задачі було створено нейронну мережу для виявлення стадії хвороби пацієнта, що містить 29 нейронів у вхідному шарі та 1 нейрон у вихідному шарі, при чому приховані шари містять по 12 та 2 нейрони відповідно. Розміри прихованих шарів було визначено методом динамічного підбору кількості елементів в прихованому шарі. Число шарів в багатошаровій нейронній мережі визначає, яким чином вхідний простір образів може бути розбитий на підпростори меншої розмірності [1].

Практичні результати

В загальному було використано 1246 зразків даних досліджень, при чому 997 з них увійшли до навчальної вибірки, а решта – 249 – до тестової. На навчальній вибірці більше ніж у 96% випадках стадія хвороби визначається вірно, а на тестовій – отримали майже 70% стадій, які збігаються з даними медичних досліджень.

У таблиці 1 наведені значення специфічності (С) та чутливості (Ч) методу, які обчислюються наступним чином:

$$\text{Ч} = \frac{\text{дійснопозитивні результати}}{\text{дійснопозитивні} + \text{хибнонегативні}}$$

$$\text{С} = \frac{\text{дійснонегативні результати}}{\text{дійснонегативні} + \text{хибнопозитивні}}$$

Всього огляд пройшли 145 пацієнтів із фазою загострення та 104 пацієнта з фазою ремісія. Створена нейронна мережа вірно виявила 96 хворих із загостренням та 79 з ремісією. Таким чином, маємо наступні результати: специфічність складає 75,91%, а чутливість – 66,21%.

Чутливий тест часто виявляє загострення, але він є особливо інформативним, коли визначає ремісію.

Специфічний тест рідко вказує на загострення при ремісії. Тому особливо корисний при загостреннях, оскільки підтверджується

Таблиця 1

Специфічність та чутливість

		Фаза хвороби		
		Загострення	Ремісія	
Тест	Позитивний (1)	96	25	121
	Негативний (0)	49	79	128
		145	104	

діагноз.

Варто відмітити, що специфічність та чутливість – пропорції, тому до них можна застосовувати поняття довірчого інтервалу. Підвищуючи чутливість тесту, відразу нехтується його специфічність, і навпаки.

Проаналізуємо загальний результат розпізнавання. Для тестової вибірки, що складається з 249 пацієнтів було правильно визначено фазу хвороби для 175 пацієнтів, неправильно - для 74. Тобто, коректно розпізнано стадію захворювання у 70,02% пацієнтів.

Висновок

Мережа була побудована таким чином, що користувач може зупинити навчання в будь-який момент часу, спостерігаючи за похибкою та кількістю ітерацій. Для збільшення точності розпізнавання даних застосований динамічний пошук кількості нейронів в прихованих шарах. Як результат, алгоритм працює з достатньо високою точністю, що є важливим кроком в розпізнаванні ураженої системи органів, на яку направлена хвороба.

Розглядається побудова алгоритму визначення фази хвороби з використанням чотирьохшарової нейронної мережі та динамічним пошуком кількості нейронів у прихованому шарі, що дають найкращий результат на навчальній та тестовій вибірках, тобто досягається найкраща точність при визначенні стадії хвороби.

Для вирішення поставленої задачі було проведено комплексне дослідження фази хвороби у пацієнтів з різними захворюваннями

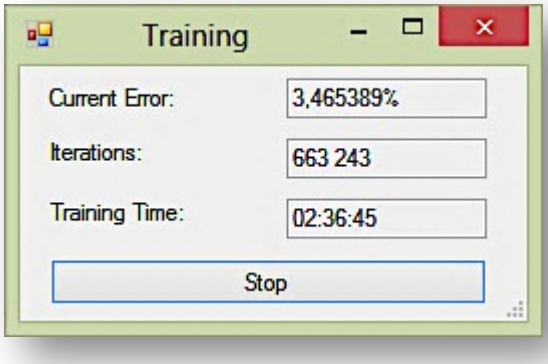


РИС. 2

(верифікація відбувалась з використанням традиційних методів дослідження в медицині).

Отже, 1246 пацієнтів було розділено на навчальну (997) та тестову (249) вибірку. Кожному хворому відповідали 29 параметрів – результати аналізів вмісту певних речовин у крові, які впливають на фазу прогресування хвороби. Для вирішення даного задачі була створена штучна нейронна мережа, яка тренується за час 2 год. 36 хв. 45 сек. до похибки 0,034653 (рис. 2). На навчальній вибірці програма вірно визначила фазу хвороби у 979 пацієнтів, а на тестовій – у 175 пацієнтів. В результаті було отримано метод, що має високу специфічність (75,91%), а отже, більш ретельно добирає хворих, які знаходяться у фазі «загострення», що є достатньо важливо.

Список використаних джерел

1. *Haykin S.* Neural Networks. A Comprehensive Foundation. Second Edition. – Pearson Education, Inc., 1999. – 823 p. (in Russian).
2. *Kruglov V.V., Borisov V.V.* Artificial neural networks. Theory and practice. – Telecom, 2002. – 382 p. (in Russian).
3. *Jeff Heaton.* Getting Started with Encog3 in C# - Heaton Research, Inc, 2011. – 73 p.
4. Lections in artificial neural networks. http://www.victoria.lviv.ua/html/neural_nets/zmist.htm. (in Ukrainian).
5. *Robert Callan.* The Essence of Neural Networks First Edition. – Williams, 2001. – 288 p.

Надійшла до редколегії 19.11.2013

УДК 519.925.51

Рутицька В.В.[1], к.т.н.

Про моделювання динаміки портфеля інвестицій в умовах параметричної невизначеності

Розглядаються задачі ідентифікації параметрів математичної моделі та про оптимальну диверсифікацію інвестиційного портфеля.

Ключові слова: математична модель, ідентифікація параметрів, диверсифікація інвестиційного портфеля

[1] Київський національний університет імені Тараса Шевченка,03680, м. Київ, пр-т Глушкова, 4д

e-mail: vlarut@gmail.com

V.V.Rutytska[1], Ph.D.

On modeling the dynamics of portfolio investments under parametric uncertainty

We consider the problem of identifying the parameters of mathematical models and optimal portfolio diversification.

Key Words: mathematical model, identification of parameters, portfolio diversification

[1] Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03068, Kyiv, Glushkova ave., 4d

e-mail: vlarut@gmail.com

Статтю представив д.т.н., проф. Гаращенко Ф.Г.

Сучасні методи прикладного математичного моделювання дозволяють розв'язувати складні задачі побудови та аналізу траєкторій руху динамічних систем. Загальна схема застосування таких методів включає:

- визначення класу рівнянь та структури моделі;
- визначення параметрів моделі;
- ідентифікацію початкового стану системи при відомих значеннях параметрів;
- ідентифікацію параметрів моделі при відомому стані системи;
- задачі управління динамікою системи.

Перелік задач можна продовжити, але зупинимось на деяких, що пов'язані із ідентифікацією параметрів моделі та початкового положення системи .

Розглянемо «ринкову модель Шарпа» [1] з метою перейти від задачі статичної до динамічної

$$r = \alpha + \beta SM_{ind} + \varepsilon . \quad (1)$$

Рівняння (1) описує лише загальну структуру формування ринкової вартості акції. Аргументи правої частини детально описані в [1]. Із наведеного вище співвідношення видно, що зміна ринкової вартості акції формується за рахунок інтегрального впливу індексу фондового ринку та випадкової складової ε. Коефіцієнт β можна розглядати як характеристику впливу індексу ринку на формування ринкової вартості однієї акції. Зважаючи на те, що такі процеси відбуваються у часі, можемо записати

$$r(t) = \alpha(t) + \beta SM_{ind}(t) + \varepsilon .$$

Тоді

$$r(t + \delta t) = r(t) + \beta SM_{ind}(t) .$$

Було б значним спрощенням при моделюванні такого складного процесу розглядати функцію SM_{ind} як основну і єдину, що формує значення $r(t + \delta t)$. Аналіз факторів, що впливають на динаміку процесу дає підстави стверджувати, що до таких суттєвих факторів можна віднести також кореляційні залежності

© В.В.Рутицька, 2014

між цінними перами, а також інфляцію [2]. Тому (1) запишемо у вигляді

$$r_i(t+\delta t) = r_i(t) + \beta(SM_{ind}(t), I(t), \rho_{ij}, r_i(t)), \quad (2)$$

$i, j = \overline{1,n}$.

Враховуючи сказане, праву частину (2) запишемо так

$$r_i(t+\delta t) - r_i(t) = ((\alpha_1 SM_{ind}(t) + \alpha_2 I(t))r_i(t) + \sum_{j=1}^{n} \rho_{ij} r_j)\delta t.$$

Тоді

$$\frac{r_i(t+\delta t) - r_i(t)}{\delta t} = ((\alpha_1 SM_{ind}(t) + \alpha_2 I(t))r_i(t) + \sum_{j=1}^{n} \rho_{ij} r_j)\delta t.$$

Здійснивши граничний перехід за умови, що $\delta t \to 0$, отримаємо

$$\frac{dr_i}{dt} = (\alpha_1 SM_{ind}(t) + \alpha_2 I(t))r_i(t) + \sum_{j=1}^{n} \rho_{ij} r_i, \quad i = \overline{1,n},$$

де α_1, α_2 - параметри моделі.

Динамічне рівняння формування ринкової вартості акції можна розглядати також у такому запису

$$\frac{dr_i}{dt} = (\alpha_1 SM_{ind}(t) + \alpha_2 I(t))r_i(t) + \sum_{j=1}^{n} \rho_{ij} r_j,$$

$i = \overline{1,n}$.

У цьому випадку $\rho_{ij}, \quad i = \overline{1,n}$ є вектором параметрів моделі, що враховує кореляційні залежності між акціями. Тут n – кількість акцій, з якими корелює i – а акція. Перейдемо до задачі ідентифікації параметрів побудованої математичної моделі. До найбільш відомих методів ідентифікації параметрів дискретних та неперервних динамічних моделей відносять:

- кореляційно – дисперсійний аналіз;
- підходи, що ґрунтуються на принципах теорії стійкості;
- підходи, що ґрунтуються на методах аналізу чутливості розв'язків.

Для зручності здійснення математичних перетворень параметрично задані моделі формування ринкової вартості акції та портфеля акцій [2] запишемо у загальному вигляді

$$\dot{r}_i = \frac{dr_i}{dt} = f(r_i, t, \alpha), \quad (3)$$

$r_i(t_0) = r_0, \quad t \in (t_0, T), \quad i = \overline{1,n}.$

і

$$\dot{r}_p = f^p(r_p, x_i, \dot{x}_i, r_i, \dot{r}_i, t). \quad (4)$$

відповідно. Тут r_i – очікувана ринкова вартість акції; r_p – очікувана ринкова вартість інвестиційного портфеля; x_i – частка акцій i – того виду у портфелі; t – час; α – вектор параметрів моделі.

Скористаємось відомою статистичною інформацією про динаміку ринкової вартості відповідних інвестиційних напрямків $\overline{r_i}(t)$.

На її основі розіб'ємо інтервал інтегрування на підінтервали $t_0 < t_1 < t_2 < ... < t_T$. Будемо шукати оптимальні на підінтервалах значення координат вектора параметрів α. Для цього на початковому підінтервалі для i – того напрямку інвестування і для вибраного значення параметра α_0 розв'яжемо задачу Коші

$\dot{r}_i(t) = f(r_i, t, \alpha_0), \quad r_i(t_0) = r_{i0}, \quad t \in (t_0, t_1).$

Нехай розв'язком цієї задачі буде траєкторія

$r_1(t), \quad t \in (t_0, t_1).$

Далі сформулюємо оптимізаційну задачу з метою отримання оптимального значення параметра α_1^*

$$\alpha_1^* = arg \min_{\alpha} (r_i^0(r(t_0), t, \alpha) - \overline{r_i}(t))^2 \quad (5)$$

або

$$\alpha_1^* = arg \min_{\alpha} \max_{t} (r^0(r(t_0), t, \alpha) - \overline{r_i}(t))^2. \quad (6)$$

Тут через $r^0(r(t_0), t, \alpha)$ позначено розв'язок задачі Коші на першому інтервалі.

Наведена процедура дозволяє визначити оптимальні з точки зору критеріїв (5) або (6) параметри моделі.

Аналогічні задачі розв'язуємо на інших інтервалах розбиття. На k – тому кроці алгоритму процедура визначення оптимальних значень параметрів динамічної моделі може бути такою:

1. Розв'язуємо задачу Коші

$\dot{r}_i(t) = f(r_i, t, \alpha_{k-1}), \quad r_i(t_{k-1}) = r_{k-1}, \quad t \in (t_{k-1}, t_k), \quad i = \overline{1,n}.$

2. Будуємо траєкторію руху системи із точки t_{k-1} до точки t_k при значенні параметра α_{k-1}^*. При цьому значенням функції у момент часу t_k буде r_k.

3. Оптимізуємо параметр α системи на цьому інтервалі. Для цього сформулюємо та розв'яжемо оптимізаційну задачу

$$\alpha^*_{k-1} = arg \min_{\alpha}(r^0(r(t_{k-1}), t, \alpha^*_{k-2}) - \overline{r}_{k-1}(t))^2$$

або

$$\alpha^*_{k-1} = arg \min_{\alpha} \max_{t}(r^0(r(t_{k-1}), t, \alpha^*_{k-2}) - \overline{r}_{k-1}(t))^2 .$$

Розв'язком кожної з них буде значення параметра α^*_{k-1}, що переводить систему із точки r_{k-1} у точку r_k.

Наведена вище процедура дає можливість будувати послідовність значень параметрів α математичної моделі, яка дозволяє моделювати поведінку та прогнозувати очікувану прибутковість інвестиційного напрямку r_i у вибрані моменти заданого інвестором інтервалу часу. Варто відмітити, що при розбитті інтервалу інтегрування на підінтервали необхідно враховувати також значення складових вектора станів системи для коректного застосування визначених параметрів при розв'язанні відповідних траєкторних задач.

Розглянемо детально задачу про побудову "гарантованої" множинної оцінки параметрів математичної моделі.

Вектор параметрів моделі розглянемо у вигляді

$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$,

за умови $x(t_0) = x_0$ при $t \in [t_0, t_1]$.

Розглянемо точку α_0 у просторі параметрів

$\alpha_0 = (\alpha_{0_1}, \alpha_{0_2})$.

І нехай це значення параметрів будуть розв'язком задачі параметричної ідентифікації моделі (1). Навколо точки α_0 опишемо коло одиничного радіуса

$$(\alpha_1 - \alpha_{0_1})^2 + (\alpha_2 - \alpha_{0_2})^2 = 1$$

з центром у т. $(\alpha_{0_1}, \alpha_{0_2})$. Довжина кола при цьому буде $l = 2\pi$. Поділимо цю лінію на n рівних частин, причому значення n вибирається у залежності від точності отриманого розв'язку задачі з побудови гарантованої множинної оцінки параметрів. Розглянемо довільну точку $\alpha_k = (\alpha_{k_1}, \alpha_{k_2})$.

Проведемо дотичну до кола у цій точці. Рівнянням її буде

$$F'_{\alpha_1}(\alpha_{k_1}, \alpha_{k_2})(\alpha_1 - \alpha_{k_1}) = F'_{\alpha_2}(\alpha_{k_1}, \alpha_{k_2})(\alpha_2 - \alpha_{k_2}).$$

Рівняння нормалі до дотичної у цій точці матиме вигляд

$$F'_{\alpha_1}(\alpha_{k_1}, \alpha_{k_2})(\alpha_2 - \alpha_{k_2}) = F'_{\alpha_2}(\alpha_{k_1}, \alpha_{k_2})(\alpha_1 - \alpha_{k_1}).$$

Нові значення параметрів α, які задовольняють умовам програмного функціонування системи, будемо шукати на нормалі. Із рівняння нормалі визначимо α_2

$$\alpha_2 = \frac{F'_{\alpha_2}(\alpha_{k_1}, \alpha_{k_2})(\alpha_1 - \alpha_{k_1})}{F'_{\alpha_1}(\alpha_{k_1}, \alpha_{k_2})} + \alpha_{k_2}.$$

Нове положення координати α_2 визначимо, змінивши положення координати α_1

$$\alpha_{N_1} = \alpha_1 + \delta\alpha_1, \quad \delta > 0.$$

$$\alpha_{N_2} = \frac{F'_{\alpha_2}(\alpha_{k_1}, \alpha_{k_2})(\alpha_1 + \delta\alpha_1 - \alpha_{k_1})}{F'_{\alpha_1}(\alpha_{k_1}, \alpha_{k_2})} + \alpha_{k_2}.$$

Таким чином, отримано нове значення параметра $\alpha_N \in A$, де A – обмежена замкнута множина параметрів математичної моделі

$\alpha_N = (\alpha_{N_1}, \alpha_{N_2})$.

Критерії якості для перевірки належності параметра допустимій множині можуть бути такими

$$\sum_i (x^0(x_0, t_i, \alpha_\delta) - x_{\exp}(t_i))^2 < \varepsilon, \qquad (5)$$

$$\max_t (x^0(x_0, t, \alpha_\delta) - x_{\exp}(t\ )) < \varepsilon, \quad t \in [t_0, t_1], \qquad (6)$$

Наведена вище процедура реалізує рух параметра α вздовж нормалі в один або інший бік до тих пір, доки виконується один із вибраних критеріїв.

Інший метод визначення «гарантованих» значень полягає у побудові оптимальної за об'ємом еліпсоїдальної множини параметрів математичної моделі.

Такий еліпсоїд будемо називати гарантованою еліпсоїдальною оцінкою параметрів моделі (1) при застосуванні критеріїв (5) або (6).

Оцінка будується на основі розв'язків задачі параметричної ідентифікації математичної моделі (1) та відомих спостережень у вигляді:

$$Q(B, d) : \{(B(\alpha - d), \alpha - d) \le 1\}, \qquad (7)$$

де B - симетрична додатньо–визначена матриця, що задає геометрію множинної оцінки у просторі параметрів α, $\alpha \in R^n$; d – геометричний центр

еліпсоїда, $d \in R^n$. Разом з тим, множину (7) будемо називати гарантованою множинною оцінкою, якщо кожне значення параметра α, отримане для довільних спостережень, належить $Q(B,d)$.

Ітераційна процедура методу побудови гарантованої множинної оцінки реалізує уточнення елементів матриці B та вектора d на кожному кроці і детально описана у [3].

Побудована на основі першого або другого підходу допустима множина параметрів може бути використана для визначення ефективної (за Г. Марковицем) множини оптимальних інвестиційних портфелів ризикованих цінних паперів.

Одна із наведених на початку статті задач полягає у визначенні початкового стану системи при відомих параметрах моделі. На прикладі математичних моделей (1) та (2) можна показати, що початкова ринкова вартість акції при заданому кінцевому її значенні може бути розрахована за формулою

$$r_i(t_0) = r_i(t_1) - \int_{t_0}^{t_1} f(r_i, t, \alpha^*)dt, \quad i = \overline{1,n}.$$

Тут α^* – елемент оптимальної множини параметрів, побудованої одним із наведених вище способів.

У цьому зв'язку актуальною є задача про побудову оптимального стартового інвестиційного портфеля при заданому інтервалі інвестування та очікуваній прибутковості у кінцевий момент часу. Аналогічно попередньому випадку

$$r_p(t_0) = r_p(t_1) - \int_{t_0}^{t_1} f^{\,p}(r_p, x_i, \dot{x}_i, r_i, \dot{r}_i, t)dt.$$

Тут $\dot{r}_i$ – визначається за формулою (1), а права частина рівняння детально описана в [1].

Така задача має практичне значення, оскільки інвестор отримує можливість визначати «стартовий» портфель для заданого рівня очікуваної прибутковості у визначений момент часу у майбутньому як для портфеля, що складаються із однієї акції, так і набору акцій.

Наведена вище постановка задачі про оптимальне інвестування може бути уточнена за рахунок розбиття інтервалу інвестування на підінтервали, що можуть відповідати змінам, які відбуваються на ринку. У такому разі для оперативного їх урахування при побудові оптимального диверсифікованого інвестиційного портфеля можна застосувати множини досяжності, які, на основі застосування методів теорії оптимального керування, дозволяють оперативно та ефективно реагувати на зміни, що відбуваються на ринку.

Запропонована в даній роботі математична процедура дає можливість для динамічних математичних моделей однієї акції та портфеля акцій розв'язати задачу параметричної та гарантованої множинної ідентифікації параметрів і на основі розроблених алгоритмів визначення допустимої множини параметрів математичної моделі знайти розв'язок задач побудови траєкторії ринкової вартості для математичних моделей (1) та (2) та оптимальної диверсифікації інвестиційного портфеля ризикованих цінних паперів.

Список використаних джерел

1. William F. Sharpe, Gordon J. Alexander, Jeffrey W. Bailey Investments. – Prentice Hall, 1999. – 992p.
2. Garashchenko F.G., Kulyan V.R., Rutitskaya V.V. Quality analysis of mathematical models of investment management. –Kyiv, //Cybernetics and computing engineering. – 2005. – N 148. – p.3-10. (in Russian).
3. Bublik B.N.,Garashchenko F.G., Kirichenko N.F. Structural and self-reactance optimization and stability of dynamics of bunches. -Kyiv, Naukova dumka, 1985. –304p. (in Russian).
4. Krylov I.A., Chernousko F.L. Algorithm of method of progressive approximations for the decision of optimal control problems. – Moskow, Nauka, 1971. –247p. (in Russian).

Надійшла до редколегії 28.11.2013р.

УДК 004.93

Тарануха В.Ю., асистент

Модифікація n-грамної моделі засновані на класах для розпізнавання слов'янських мов

Стаття присвячена дослідженню можливої модифікації n-грамної моделі заснованої на класах для слов'янських мов в задачі розпізнавання мовлення

Ключові слова: n-грамна модель мови, модель на класах

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, пр-т. Глушкова 4д, e-mail: *taranukha@mail.ru*

V.Y. Taranukha, assistant

Modification of class-based n-gram model for slavic language

The article investigates class-based n-gram language model for slavic language recognition

Key words: n-gram language model, class-based model

Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03680, Kyiv, Glushkova av., 4d, e-mail:*taranukha@mail.ru*

Статтю представив чл.-кор. НАН України, д.ф.-м.н., проф. Анісімов А.В.

Завдяки розвитку ЕОМ та мережі Інтернет об'єм даних доступних у вигляді цифрових аудіо записів весь час зростає, і це викликає потребу в нових засобах обробки даних, включаючи переведення аудіо записів у текст. Широко вживається модель, на основі n-грам[1], за допомогою якої зручно оцінювати ймовірність появи ланцюжка з *n* слів у деякому тексті. Проте при застосуванні такої моделі до слов'янських мов, зокрема до української, проявляється ряд недоліків, для боротьби з якими пропонується внести зміни в метод побудови моделі.

Традиційний підхід до побудови моделей

Передбачається, що мова може бути описана за допомогою марківського ланцюжка, де станами будуть слова мови. Послідовність слів мови $w_1 \ldots w_n$ називається n-грамою довжини n. Для зручності її позначають w_1^n.

Тоді, послідовність слів можна представити як послідовність n-грам, а імовірність оцінити за формулою:

$$p(w_1^j) = p(w_i \mid w_1^{i-1})\, p(w_{i-1} \mid w_1^{i-2}) \ldots p(w_1) \qquad (1)$$

Відповідні імовірності обчислюються за оцінкою максимальної правдоподібності на базі частот n-грам у корпусі текстів.

Позначимо $C()$ - частота відповідної n-грами(яка може бути рівна 0).

$$\hat{p}(w_i \mid w_{i-n+1}^{i-1}) = \frac{C(w_{i-n+1}^{i})}{C(w_{i-n+1}^{i-1})} \qquad (2)$$

При цьому виконується рівність:

$$C(w_{i-n+1}^{i-1}) = \sum_{j=0}^{|V|} C(w_{i-n+1}^{i-1} w_j), \qquad (3)$$

Оцінка (2) будується на припущенні, що в корпусі переставлені всі необхідні n-грами, а спостережувані в корпусі частоти являються хорошими наближеннями істинних частот n-грам у мові. Насправді, це не завжди так, і для розв'язання цієї проблеми використовуються методи для згладжування частот та імовірностей[1] відповідних n-грам.

Необхідно зазначити, що в слов'янських мовах характерною рисою є вільній порядок слів у реченнях. Для забезпечення цього в словоформі відповідного слова часто зберігається інформація, що вказує на потенційні синтаксичні зв'язки словоформи. Що в свою чергу призводить до збільшення числа словоформ відносно романо-германських мов.

На одне слово англійської мови припадає приблизно 1,7 словоформи, в той час, як на одне слово української мови може припасти від 5,5 до 19,9 залежно від вибраного словника, на одному і тому самому корпусі. Таким чином, при побудові таблиці n-грам, при *n*=2, розмір зростає

© В.Ю. Тарануха, 2014

принаймні в 10,47 рази , а при n=3 – в понад 33 рази. Крім всього іншого це призводить до того, що значна кількість n-грам набуває малих значень частот, отже відповідно, оцінка імовірностей по формулі (2) стає значно чутливішою до викидів та шумів.

Зручним способом зменшити розмірність словника системи є застосування n-грам заснованих на класах[2]. Словоформи розбиваються на класи відповідно до того, в яких контекстах вони стоять.

Вводиться функція розбиття, що ставить у відповідність кожному слову w_i з словника V клас c_i. При цьому виконується:

$$P(w_i \mid w_1^{i-1}) = P(w_i \mid c_i)P(c_i \mid c_1^{i-1}), \forall i, 1 \le i \le n \quad (4)$$

Цей підхід суттєво зменшує розмірність словника системи, розмір таблиць і певною мірою мав би покращувати розпізнавання. Проте оцінка (3) виконується досить наближено, і таким чином при економії на обчислювальних видатках загальна якість розпізнавання не підвищується.

Альтернативний підхід до побудови частот n-грам для слов'янських мов

Пропонується попередньо побудувати дві окремі моделі n-грам, окремо на основі канонічних форм слів, окремо на основі граматичних класів слів. Тобто, одна словоформа дає інформацію в дві різні часткові моделі. Аналогічний підхід розглядався[3,4], проте пропонується розглянути суттєво відмінний метод оцінювання рядка на основі отриманих моделей порівнювано з [3], оскільки він передбачає побудову об'єднаної моделі, та не вживається фільтрація як у [4].

Для забезпечення достовірності об'єднаної моделі необхідно щоб сума частот канонічних форм та сума частот граматичних класів після перерозподілу лишалася незмінною.

Позначимо: $L(w_1^k)$ – сукупність послідовностей канонічних форм для послідовності слів w_1^k. $G(w_1^k)$ – сукупність послідовностей граматичних класів для послідовності слів w_1^k.

Позначимо $El(w_1^k)$ – сукупність послідовностей слів, що після приведення до канонічних форм мають однаковий запис, тобто сукупність $w_{i_1}^{i_k}$, таких що, $L(w_{i_1}^{i_k}) = L(w_1^k), \forall i$.

Позначимо $G(El(w_1^k))$ – сукупність $G(w_{i_1}^{i_k})$, таких що є послідовностями граматичних класів відповідних $w_{i_1}^{i_k} \in El(w_1^k)$

Тоді оцінка частоти w_1^k визначається:

$$C(w_1^k) = \frac{\mathrm{C}(L(w_1^k))\mathrm{C}(G(w_1^k))}{\sum\limits_{G_F \in G(El(w_1^k))} G_F} \quad (5)$$

На її основі за формулою (2) можна будувати імовірності, а отже і оцінювати імовірність тієї чи іншої послідовності слів звичайним чином. Це робіть формулу (5) формулою згладжування на основі зарані визначених граматичних класів.

При цьому виконання формули (3) є умовою коректності формули для реалізації моделі мови.

Розглянемо редуковану мову отриману з початкової шляхом злиття словоформ. Редукована мова має два граматичні класи та два класи канонічних форм.

Таблиця 1.

Повністю сумісні класи

	g_1	g_2
l_1	w_1	w_2
l_2	w_3	w_4

Лема 1. Для повністю сумісних класів після перерозподілу через формулу (5) виконується залежність (3)

Доведення. Розглянемо для $C(w_1)$

$$C(w_1) = \frac{C(L(w_1))C(G(w_1))}{\sum\limits_{G_F \in G(El(w_1))} C(G_F)} = \frac{C(l_1)C(g_1)}{C(g_1)+C(g_2)},$$

з іншого боку

$$C(w_1) = \sum_j C(w_1 w_j) = \frac{C(L(w_1 w_1))C(G(w_1 w_1))}{\sum\limits_{G_F \in G(El(w_1 w_1))} C(G_F)} +$$

$$\frac{C(L(w_1 w_2))C(G(w_1 w_2))}{\sum\limits_{G_F \in G(El(w_1 w_2))} C(G_F)} +$$

$$\frac{C(L(w_1 w_3))C(G(w_1 w_3))}{\sum\limits_{G_F \in G(El(w_1 w_3))} C(G_F)} +$$

$$\frac{C(L(w_1 w_4))C(G(w_1 w_{14}))}{\sum\limits_{G_F \in G(El(w_1 w_4))} C(G_F)};$$ врахуємо, що (3) тут і надалі виконується для граматичних класів та канонічних форм за замовчуванням

$$\sum_{G_F \in G(El(w_1 w_1))} C(G_F) = C(g_1) + C(g_2) =$$

$= \sum_{G_F \in G(El(w_1w4))} C(G_F) = \sum_{G_F \in G(El(w_1w_3))} C(G_F) = \sum_{G_F \in G(El(w_1w_2))} C(G_F)$;

тому

$$\sum_j C(w_1w_j) = \frac{C(g_1g_1)C(l_1l_1) + C(g_1g_2)C(l_1l_1)}{C(g_1)+C(g_2)} +$$

$$\frac{C(g_1g_1)C(l_1l_2) + C(g_1g_2)C(l_1l_2)}{C(g_1)+C(g_2)} = \frac{C(l_1)C(g_1)}{C(g_1)+C(g_2)},$$

що і треба було довести.

Для $C(w_4)$ аналогічно, бо в таблиці можна поміняти елементи w_1 і w_4 місцями, перепозначити g_1 як g_2 і навпаки, також l_1 як l_2 і навпаки, при цьому вигляд таблиці не зміниться.

Розглянемо для $C(w_2)$

$$C(w_2) = \frac{C(L(w_2))C(G(w_2))}{\sum_{G_F \in G(El(w_2))} C(G_F)} = \frac{C(l_1)C(g_2)}{C(g_1)+C(g_2)},$$

з іншого боку

$$C(w_2) = \sum_j C(w_2w_j) = \frac{C(L(w_2w_1))C(G(w_2w_1))}{\sum_{G_F \in G(El(w_2w_1))} C(G_F)} +$$

$$\frac{C(L(w_2w_2))C(G(w_2w_2))}{\sum_{G_F \in G(El(w_2w_2))} C(G_F)} + \frac{C(L(w_2w_3))C(G(w_2w_3))}{\sum_{G_F \in G(El(w_2w_3))} C(G_F)} +$$

$$\frac{C(L(w_2w_4))C(G(w_2w_4))}{\sum_{G_F \in G(El(w_2w_4))} C(G_F)}$$; аналогічно як для $C(w_1)$

$$\sum_{G_F \in G(El(w_1w_2))} C(G_F) = C(g_1)+C(g_2) =$$

$= \sum_{G_F \in G(El(w_4w_2))} C(G_F) = \sum_{G_F \in G(El(w_3w_2))} C(G_F) = \sum_{G_F \in G(El(w_2w_2))} C(G_F)$;

тому

$$\sum_j C(w_2w_j) = \frac{C(g_2g_1)C(l_1l_1) + C(g_2g_2)C(l_1l_1)}{C(g_1)+C(g_2)} +$$

$$\frac{C(g_2g_1)C(l_1l_2) + C(g_2g_2)C(l_1l_2)}{C(g_1)+C(g_2)} = \frac{C(l_1)C(g_2)}{C(g_1)+C(g_2)},$$

що і треба було довести.

Для $C(w_3)$ аналогічно, бо в таблиці можна поміняти елементи w_1 і w_4 місцями, перепозначити g_1 як g_2 і навпаки, також l_1 як l_2 і навпаки, при цьому вигляд таблиці не зміниться.

Таким чином, показано, що залежність (3) виконується для всіх елементів таблиці, при використанні перерозподілу (5).

Таблиця 2.

Повністю не сумісні класи

	g_1	g_2
l_1	w_1	
l_2		w_4

Лема 2. Для повністю не сумісних класів після перерозподілу через формулу (5) виконується залежність (3).

Доведення. Розглянемо для $C(w_1)$,

$$C(w_1) = \frac{C(L(w_1))C(G(w_1))}{\sum_{G_F \in G(El(w_1))} C(G_F)} = \frac{C(l_1)C(g_1)}{C(g_1)} = C(l_1),$$

з іншого боку

$$C(w_1) = \sum_j C(w_1w_j) = \frac{C(L(w_1w_1))C(G(w_1w_1))}{\sum_{G_F \in G(El(w_1w_1))} C(G_F)} +$$

$$\frac{C(L(w_1w_4))C(G(w_1w_4))}{\sum_{G_F \in G(El(w_1w_4))} C(G_F)}$$; враховуючи, що

$$\sum_{G_F \in G(El(w_1w_1))} C(G_F) = C(g_1g_1), \quad \sum_{G_F \in G(El(w_1w_4))} C(G_F) = C(g_1g_2)$$

$\sum_j C(w_jw_1) = C(l_1)$, що і треба було довести.

Для $C(w_4)$ аналогічно, бо в таблиці можна поміняти відповідні елементи місцями і вигляд таблиці не зміниться.

Таким чином, показано, що залежність (3) виконується для всіх елементів таблиці, при використанні перерозподілу (5).

Теорема 1. При виконанні умов або повної сумісності, або повної несумісності множин словоформ за граматичними класами та канонічними формами залежність (3) виконується при використанні перерозподілу (5), для як завгодно великого словника.

Доведення. При побудові редукованої мови в одну умовну словоформу w_i можна внести як завгодно велику множину слів. При виконанні вимог лем 1 або 2 маємо, що виконання залежності (3) не залежить від істинної кількості та властивостей словоформ конвертованих в умовну словоформу w_i.

Вплив на можливі чисельні моделі

Таким чином, в задачах з реальними даними можна отримати оцінки навіть для тих елементів, що не спостерігалися у корпусі з якого збиралися дані, якщо доповнити словник словоформами для яких є канонічні форми та граматичні класи. Не обмежуючи загальності розглянемо приклад для української мови, для російської та інших все аналогічно.

Приклад. Для слів „корабель”, „корабля” „літак”, „літаком” „зелений”, „зеленого” „червоний”, „червоним” спостерігалися біграми „зелений корабель”, „зеленого корабля”, „червоний літак”, „червоним літаком”.

1) Поетапну згортку за канонічними формами („корабель” ,літак”) і („зелений” та „червоний”),

2) Поетапну згортку за граматичними класами „одн., чол. рід, наз. відм”, „одн., чол. рід, род. відм.”, „одн., чол. рід, орудн. відм.”

3) Після розгортки (застосування формули (5)) біграми „зеленим кораблем” та „червоного літака” отримають ненульові значення частот.

Для визначення того, наскільки насправді можна згортати словоформи треба робити чисельний експеримент для кожного нового корпуса.

Межі придатності моделі

Розглянемо випадок часткової сумісності. Так, наприклад, слово „небеса” має лише форми множини і не має форм однини. Виникає питання про допустимість використання спільних граматичних класів для таких іменників та іменників, що мають всі форми, як однини так і множини.

Таблиця 3.

Частково сумісні класи

	g_1	g_2
l_1	w_1	w_2
l_2		w_4

Теорема 2. Для частково сумісних класів після перерозподілу частоти канонічних форм та частоти граматичних класів залежність (3) не виконується.

Доведення. Розглянемо для $C(w_1)$

$$C(w_1)=\frac{C(L(w_1))C(G(w_1))}{\sum_{G_F\in G(El(w_1))}C(G_F)}=\frac{C(l_1)C(g_1)}{C(g_1)+C(g_2)},$$

з іншого боку

$$C(w_1)=\sum_j C(w_1w_j)=\frac{C(L(w_1w_1))C(G(w_1w_1))}{\sum_{G_F\in G(El(w_1w_1))}C(G_F)}+$$

$$\frac{C(L(w_1w_2))C(G(w_1w_2))}{\sum_{G_F\in G(El(w_1w_2))}C(G_F)}+\frac{C(L(w_1w_4))C(G(w_1w_4))}{\sum_{G_F\in G(El(w_1w_4))}C(G_F)};$$

враховуючи що:

$$\sum_{G_F\in G(El(w_1w_1))}C(G_F)=C(g_1)+C(g_2),$$

$$\sum_{G_F\in G(El(w_1w_2))}C(G_F)=C(g_1)+C(g_2),$$

$$\sum_{G_F\in G(El(w_1w_4))}C(G_F)=C(g_1g_2)+C(g_2g_2)$$

$$\sum_j C(w_1w_j)=\frac{C(l_1l_1)C(g_1)}{C(g_1)+C(g_2)}+\frac{C(l_1l_2)C(g_1g_2)}{C(g_1g_2)+C(g_2g_2)}$$

після зведення до спільного знаменника виникає вираз нетотожній $\frac{C(l_1)C(g_1)}{C(g_1)+C(g_2)}$, що і є демонстрацією суперечності.

Таким чином, щоб можна було застосовувати формулу перерозподілу (5) необхідно рознести слова з частково суміжними граматичними класами по групах, де після перевизначення граматичні класи будуть повністю несумісні. Це еквівалентно введенню додаткових ознак до множини граматичних. Наприклад, „множинний іменник”, щоб не використовувати комплекти роду, числа та відмінку від звичайних іменників для множинних.

Висновок

Запропоновано новий метод згладжування на основі граматичних класів, досліджено межі його застосування.

Подальше дослідження повинно бути спрямоване на визначення придатності для вживання в реальних задачах, особливо аспекти оптимального розбиття на граматичні класи та оцінка складності обчислення частот за формулою (5), оскільки при n-грамах довжини 3 та більше, що є сучасним стандартом, знаменник може виявитися незручним для обчислення.

Список використаних джерел

1. *S. F. Chen* An empirical study of smoothing techniques for language modeling. /*S. F. Chen, J. T. Goodman* // Computer Speech and Language 1999, 13, –PP. 448-453.

2. *Peter F. Brown* Class-based *n*-gram models of natural language / Peter F. Brown, Peter V. de Souza, Robert L. Mercer, et al. // Journal of Computational Linguistics –vol. 18, issue 4, – 1992. –PP. 467-479.

3. Babyn D.N. On the prospects of creating a system of automatic continuous speech recognition for spoken Russian. / D.N. Babyn, I.L. Mazurenko, A.B. Holodenko // Intelligent systems, – vol.8 , issue 1-4, –2004. –PP. 45-70 (in Russian).

4.*S. Ostrogonac* Language model reduction for practical implementation in LVCSR systems / *S. Ostrogonac, B. Popović, M.. Sečujski, et al.* // Infoteh-Jahorina Vol. 12, March 2013. – PP. 391-394.

Надійшла до редколегії 16.12.2013

УДК 517.9

Халимон* О.О., аспірант

Розв'язання крайової задачі з періодичним джерелом для рівняння дифузії з дробовою похідною за простором

У роботі досліджується рівняння дифузії із похідною дробового порядку $\alpha \in (1,2)$ за простором. Отримано розв'язок крайової задачі без початкових умов із періодичним джерелом. Побудовано інтегральне перетворення, що пов'язує цей розв'язок із розв'язком класичної задачі для рівняння параболічного типу.

Ключові слова: дробова дифузія, дробова похідна, похідна Рімана-Ліувілля, похідна Капуто.

*Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 03680, м.Київ, пр-т Глушкова 4д,

e-mail: holyman.login@gmail.com

O. O. Khalymon*, PhD student

Solution of boundary value problem for the space-fractional diffusion equation

We've been considered α-order space-fractional diffusion equation with $\alpha \in (1,2)$ and got a solution of it's boundary value problem for periodic sourse without initial conditions. An integral transformation associating that solution with a classical one, also had been constructed.

Key Words: fractional diffusion, fractional derivative, Riemann-Liouville derivative, Caputo derivative.

*Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03680, Kyiv, Glushkova pr-t., 4d,

e-mail: holyman.login@gmail.com

Статтю представив Кудін В.І., д.т.н., с.н.с.

Вступ

Процеси дифузії аномальної природи, що відхиляються від класичної гауссівської дифузії, зустрічаються у багатьох фізичних системах [1, 2, 3]. У роботі [2] розглядаються приклади систем із різних областей (геології, фізики, хімії, економіки), в яких були виявлені процеси аномальної дифузії. Зокрема, сюди можна віднести явища тепло-, масопереносу, розповсюдження забруднення у пористих середовищах [4]. Аномальна дифузія виникає у середовищах із самоподібною структурою. Навіть матеріали, котрі не мають фрактальної «архітектури» на мікрорівні, а володіють лише масштабною інваріантністю кількох порядків (мезорівень), мають унікальні фізичні властивості, що є наслідком їх самоподібної структури [5]. У зв'язку з цим постає проблема побудови адекватних математичних моделей таких середовищ.

Одним із найбільш плідних підходів є опис цих процесів за допомогою узагальнених рівнянь дифузії. Як правило, узагальнюють часову

© О.О. Халимон, 2014

похідну [6, 7, 8, 9], замінюючи її на похідну деякого дробового порядку β у розумінні Рімана-Ліувілля або ж Капуто.

$$\frac{\partial}{\partial t}U(x,t) = K(x,t)\frac{\partial^2}{\partial x^2}U(x,t) + F(x,t); \quad (1)$$

$$\frac{\partial^\beta}{\partial t^\beta}U(x,t) = K(x,t)\frac{\partial^2}{\partial x^2}U(x,t) + F(x,t); \quad (2)$$

Якщо покласти $\beta = 1$, матимемо класичне рівняння дифузії (1). При $\beta \in (0,1)$ відповідні процеси дістали назву повільної дифузії чи субдифузії, при $\beta \in (1,2)$ — супердифузії; при $\beta = 2$ — хвильове рівняння. Тому інколи рівняння дробової дифузії називають також дифузійно-хильовими рівняннями (diffusion-wave equations). Ці узагальнення є досить добре вивченими: для систем типу (2) отримано апріорні оцінки для крайових задач першого та третього роду [10], знайдено фундаментальні розв'язки [11, 12], розв'язано задачі ідентифікації джерела [13], розроблено чисельні методи [14, 15] тощо.

Зазначимо, що узагальнення можна проводити й в інший спосіб. А саме, вести його не за часовою змінною, а за просторовими.

$$\frac{\partial}{\partial t}U(x,t) = K(x,t)\frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha}U(x,t) + F(x,t); \quad (3)$$

при цьому зазвичай розглядають $\alpha \in (1,2)$ (такі процеси теж називають супердифузією). При $\alpha = 2$ отримуємо рівняння (1), при $\alpha = 1$ класичне гіперболічне рівняння.

Дослідженню систем із дробовими похідними за простором присвячено кілька праць [15, 16, 17, 18]. Зокрема, у [18] в якості дробової похідної розглядався оператор Рісса-Вейля та було прослідковано зв'язок із блуканнями Леві.

Загалом, рівняння фрактальної дифузії з дробовою похідною за простором лишаються маловивченими, що говорить про актуальність теми.

Дробові похідні

Позначимо $\Omega = [a,b], -\infty \le a \le b \le \infty$, тобто Ω може бути відрізком, променем або всією віссю.

Через $AC(\Omega)$ позначатимемо клас функцій $f(x)$ абсолютно неперервних на Ω. Зауважимо, що клас $AC(\Omega)$ збігається із класом первісних від інтегровних за Лебегом функцій.

Позначимо через I_a оператор інтегрування з фіксованою нижньою межею

$$(I_a f)(t) = \int_a^t f(s)\,ds,$$

а через I_a^n — його n-ий степінь.

Застосовуючи індукцію, легко отримати представлення I_a^n через I_a.

Лема 1. [10] *Нехай* $f:[a,+\infty] \to \mathbb{R}$ — *локально інтегровна функція. Тоді* $\forall t \ge a$ *має місце формула Коші-Діріхле*

$$(I_a^n f)(t) = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^t (t-s)^{n-1} f(s)ds.$$

За допомогою цієї рівності можна ввести означення інтегралу довільного додатнього порядку α:

Означення 1. Нехай $t \ge a$. *Інтегралом Рімана-Ліувілля* функції f називають вираз

$$(I_a^\alpha f)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t (t-s)^{\alpha-1}\,ds,$$

де $\Gamma(\cdot)$ — гама-функція Ейлера:

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty e^{-\tau}\tau^{\alpha-1}\,d\tau.$$

Побудований інтегральний оператор називають *лівостороннім інтегралом* [19] та інколи позначають I_{a+}^α. Розглядають також *правосторонні інтеграли*

$$(I_b^\alpha f)(t) = -\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_t^b |t-s|^{\alpha-1} f(s)\,ds,$$

де $t \le b$. Відповідно, позначають через I_{b-}^α.

Звісно, що і лівосторонній, і правосторонній інтеграли можна записати за допомогою єдиної формули

$$(I_a^\alpha f)(t) = \frac{\operatorname{sgn}(t-a)}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t |t-s|^{\alpha-1} f(s)\, ds.$$

Покладемо для повноти $I_b^\alpha f = f$.

Означення 2. Нехай $f: [a,b] \to \mathbb{R}$, $t \in [a,b]$, $0 < \alpha \leq 1$. Тоді оператори

$$D_a^\alpha f = \frac{d}{dt} I_a^{1-\alpha} f, \qquad D_b^\alpha f = \frac{d}{dt} I_b^{1-\alpha} f$$

називаються відповідно лівосторонньою та правосторонньою *похідною Рімана-Ліувілля*.

Отже, $D_a^\alpha f = D^1 \circ I_a^{1-\alpha}$. Аналогічно означуються похідні довільних додатніх порядків: для $\alpha \in [n, n+1)$ покладемо

$$D_a^\alpha f = \frac{d^n}{dt^n} I_a^{n-\alpha} f.$$

Утворювати суперпозицію дробового інтегрування та диференціювання цілого порядку можна й інакше.

Означення 3. *Похідною Капуто* називатимемо оператор

$${}^C D_a^\alpha f = I_a^{n-\alpha}\left(\frac{d^n}{dt^n} f\right),$$

де $n = \lceil \alpha \rceil$ — найменше ціле число, таке що $n \geq \alpha$.

Таким чином, ${}^C D_a^\alpha f = I_a^{n-\alpha} \circ D_t^n$.

Лема 2. Для *довільного s має місце наступна рівність*

$$\int_0^\infty \frac{e^{-st}}{t^{\alpha+1}} dt = \Gamma(-\alpha) s^\alpha, \qquad (4)$$

де $\alpha \neq 0, 1, 2, \ldots$.

Доведення. Здійснивши заміну $\tau = st$, $dt = \frac{1}{s} d\tau$, одержимо

$$\int_0^\infty \frac{e^{-st}}{t^{\alpha+1}} dt = s^\alpha \int_0^\infty e^{-\tau} \tau^{-(\alpha+1)}\, d\tau = \Gamma(-\alpha) s^\alpha.$$

■

Для подальших доведень на буде потрібна із [15] наступна

Лема 3. *Нехай a та b — деякі числа, $a \in (0,1)$. Тоді ряд*

$$\sum_{k=0}^\infty \left|\frac{\Gamma(1-ak-b)}{k!}\right| |z^k| \qquad (5)$$

збігається при довільному z.

Доведення. Вирахуємо радіус збіжності ряду (5):

$$R = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{\Gamma(1-ak-b)}{k!} \frac{(k+1)!}{\Gamma(1-ak-a-b)}\right| =$$

$$= \frac{k+1}{|a|^a k^{-a}} = \infty.$$

Отже, ряд вигляду (5) є збіжним при довільному z.

■

Рівняння дифузії з дробовою похідною за простором

В області $\Omega_+^2 = \{(x,t): x \geq 0, -\infty < t < +\infty\}$ розглядається крайова задача без початкових умов для рівняння гіперболічного типу:

$$\frac{\partial}{\partial t} v = \lambda^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} v, \qquad (6)$$

$$v(0,t) = A e^{i\omega t}. \qquad (7)$$

Тут $v = v(x,t)$ та $v \in AC(\Omega_+^2)$.

Розв'язок задачі (6)-(7) має наступний вигляд $v(x,t) =$

$$= A \exp\left[-\sqrt{\frac{\omega}{2\lambda^2}} + i\left(-\sqrt{\frac{\omega}{2\lambda^2}} x + \omega t\right)\right]. \qquad (8)$$

Дійсна частина цього розв'язку $\tilde{v} = \mathrm{Re}(v)$ задовольняє рівняння (6), граничну умову

$$v(0,t) = A\cos\omega t \qquad (9)$$

та умови обмеженості $|v(x,t)| < M$, де M — додатня стала, має вигляд $\tilde{v}(x,t) =$

$$= A\exp\left(-\sqrt{\frac{\omega}{2\lambda^2}}x\right)\cos\left(\omega t - \sqrt{\frac{\omega}{2\lambda^2}}x\right). \qquad (10)$$

Якщо узагальнити просторову похідну у правій частині рівняння (6), отримаємо наступну задачу дробової дифузії:

$$\frac{\partial}{\partial t}u = \lambda^2\ {}_xD_+^\alpha u, \qquad (11)$$

$$u(0,t) = Ae^{i\omega t}. \qquad (12)$$

Тут $1 < \alpha < 2$, $u = u(x,t)$, $u \in AC(\Omega_+^2)$, ${}_xD_+^\alpha$ — правостороння дробова похідна у розуміння Рімана-Ліувілля. Помітимо, що ${}_xD_+^\alpha e^{qx} =$

$$= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dx}\int\limits_{-\infty}^{x}\frac{e^{q\zeta}}{(x-\zeta)^\alpha}d\zeta =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dx}\int\limits_{0}^{\infty}\frac{e^{q(x-\eta)}}{\eta^\alpha}d\eta =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dx}\left[e^{qx}\int\limits_{0}^{\infty}e^{-q\eta}\eta^{-\alpha}\,d\eta\right] =$$

$$= \frac{q^{\alpha-1}}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dx}[e^{qx}\Gamma(1-\alpha)] = q^\alpha e^{qx}. \qquad (13)$$

Розв'язок задачі будемо шукати у вигляді

$$u(x,t) = Ae^{ax+bt}, \qquad (14)$$

де a та b — деякі сталі. Підставивши вираз (14) у рівняння (11) та у граничну умову (12), враховуючи (13), отримуємо

$$b = i\omega;$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(Ae^{ax+bt}\right) = Abe^{ax+bt},$$

$$\lambda^2\ {}_xD_+^\alpha\left(Ae^{ax+bt}\right) = \lambda^2 Ae^{bt}\left({}_xD_+^\alpha e^{ax}\right) =$$

$$= \lambda^2 Ae^{bt}a^\alpha e^{ax};$$

звідки

$$a = \pm\left(\frac{i\omega}{\lambda^2}\right)^{1/\alpha}.$$

З умов обмеженості $|u(x,t)| < M$, як і в «класичному» випадку, обираємо

$$a = -\left(\frac{i\omega}{\lambda^2}\right)^{1/\alpha}.$$

Отже, маємо

$$u(x,t) = A\exp\left(i\omega t - x\left(\frac{i\omega}{\lambda^2}\right)^{1/\alpha}\right).$$

$i^{1/\alpha}$ не є аналітичною функцією змінної α, її можна розглядати як сім'ю функцій виду

$$i^{1/\alpha} = \exp\left[i\left(\frac{\pi}{2\alpha}+\frac{2k\pi}{\alpha}\right)\right].$$

Для того, аби розв'язок мав сенс для всіх $\alpha \in (1,2)$, слід обрати функцію, котра відповідає значенню $k = 0$, тобто головне значення:

$$i^{1/\alpha} = \exp\left(\frac{\pi i}{2\alpha}\right).$$

Отже,

$$u(x,t) = A\exp\left(i\omega t - x\,\frac{\omega^{1/\alpha}}{\lambda^{2/\alpha}}\exp\left(\frac{\pi i}{2\alpha}\right)\right) =$$

$$= A\exp\left(x\,\frac{\omega^{1/\alpha}}{\lambda^{2/\alpha}}\cos\left(\frac{\pi}{2\alpha}\right)\right)\times$$

$$\times\left[\cos\left(\omega t - x\,\frac{\omega^{1/\alpha}}{\lambda^{2/\alpha}}\sin\left(\frac{\pi}{2\alpha}\right)\right)+\right.$$

$$\left.+i\sin\left(\omega t - x\,\frac{\omega^{1/\alpha}}{\lambda^{2/\alpha}}\sin\left(\frac{\pi}{2\alpha}\right)\right)\right]. \qquad (15)$$

Дійсна частина розв'язку $\tilde{u} = \mathrm{Re}(u)$ задовольняє рівнянню (11) та граничній умові

$$u(0,t) = A\cos\omega t, \qquad (16)$$

має наступний вигляд

$$\tilde{u}(x,t) = A\exp\left(x\,\frac{\omega^{1/\alpha}}{\lambda^{2/\alpha}}\cos\left(\frac{\pi}{2\alpha}\right)\right)\times$$

$$\times\cos\left(\omega t - x\,\frac{\omega^{1/\alpha}}{\lambda^{2/\alpha}}\sin\left(\frac{\pi}{2\alpha}\right)\right).$$

Важливим є наступне

Зауваження 1. $\tilde{u}(x,t) \to \tilde{v}(x,t)$ при $\alpha \to 2$.

Сформулюємо тепер основний результат роботи.

Теорема 1. *Розв'язки (15) та (8) пов'язані співвідношенням:*

$$u(x,t) = \int_0^\infty \mathcal{K}(x,\tau)v(\tau,t)\,d\tau, \qquad (17)$$

де

$$\mathcal{K}(x,\tau) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!\,\Gamma\left(-\frac{n}{\alpha}\right)}\frac{x^n}{\tau^{\frac{n}{\alpha}+1}}.$$

Доведення. Використання формул доповнення (добуток гама-функції та синуса) дозволяє оцінити збіжність ряду $\mathcal{K}(x,\tau)$, увівши допоміжний ряд наступним чином:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!\,\Gamma\left(-\frac{n}{\alpha}\right)}\frac{x^n}{\tau^{\frac{n}{\alpha}+1}} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\frac{x^n}{\tau^{\frac{n}{\alpha}+1}}\frac{\sin\left(-\frac{n}{\alpha}\right)}{\pi}\Gamma\left(1+\frac{n}{\alpha}\right) \le$$

$$\le \frac{1}{\tau}\sum_{n=0}^{\infty}\left|\frac{\Gamma\left(1+\frac{n}{\alpha}\right)}{\pi n!}\right|\left|\frac{x^n}{\tau^{n/\alpha}}\right|. \qquad (18)$$

Помітимо, що ряд (18) має вигляд (5), коли покласти $a = \alpha^{-1}$, $b = 0$ та $z = \frac{x}{\tau^{1/\alpha}}$, а отже, за лемою 3, збігається для довільного z. Тоді, використовуючи (4), маємо

$$\int_0^\infty \mathcal{K}(x,\tau)v(\tau,t)\,d\tau = \int_0^\infty\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!\,\Gamma\left(-\frac{n}{\alpha}\right)}\frac{x^n}{\tau^{\frac{n}{\alpha}+1}}\times$$

$$\times\exp\left(i\omega t + x\left(\frac{i\omega}{\lambda^2}\right)^{1/\alpha}\right)d\tau =$$

$$= e^{i\omega t}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!\,\Gamma\left(-\frac{n}{\alpha}\right)}\int_0^\infty\exp\left(\tau\left(\frac{i\omega}{\lambda^2}\right)^{1/\alpha}\right)\tau^{-\left(\frac{n}{\alpha}+1\right)}d\tau =$$

$$= e^{i\omega t}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!\,\Gamma\left(-\frac{n}{\alpha}\right)}\Gamma\left(-\frac{n}{\alpha}\right)\left(\frac{i\omega}{\lambda^2}\right)^{n/\alpha} =$$

$$= e^{i\omega t}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\frac{(i\omega)^{n/\alpha}}{\lambda^{\frac{2n}{\alpha}}} =$$

$$= e^{i\omega t}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n\lambda^{-\frac{2n}{\alpha}}(i\omega)^{\frac{n}{\alpha}}}{n!} =$$

$$= e^{i\omega t}\exp\left(\left(\frac{i\omega}{\lambda^2}\right)^{1/\alpha}x\right) =$$

$$= \exp\left(i\omega t + x\left(\frac{i\omega}{\lambda^2}\right)^{1/\alpha}\right).$$

■

Висновки

Дробові похідні за простором використовуються для моделювання процесів аномальної дифузії, за якої частинки розповсюджуються швидше, аніж це передбачає класична модель.

Для розв'язання задачі дробової дифузії типу (11)-(12) достатньо розв'язати відповідну «класичну задачу» (6)-(7) та застосувати інтеральне перетворення (17).

Список використаних джерел

1. *Metzler R., Klafter J.* The random walk's guide to anomalous diffusion: a fractional dynamics approach. // Phys. Rep. – 2000. – vol.339. – P.1-77.

2. *Metzler R., Klafter J.* The restaurant at the end of the random walk: recent developments in the description of anomalous transport by fractional dynamics. // J. Phys. A.: Math. – 2004. – vol.37.

3. *Vasiliev V.V., Simak L.A.* Fractional calculus and approximation methods in dynamic systems modeling. // Ukrainian NAS – 2008. (in Russian).

4. *Nakhushev A.M.* Fractional calculus and it's applications. // Fizmat-lit – 2003. (in Russian).

5. *Zeleny L.M., Milovanov A.V.* Fractal topology and strange kinetics: from percolation theory to problems in cosmic electrodynamics. // Progress of Phisical Sciences. – 2004. – vol.174, №8. – P.809-852. (in Russian).

6. *Oldham K., Spanier J.* The fractional calculus. // Academic Press. – London, New York. – 1973.

7. *Podlubny I.* Fractional differential equations. // Academic Press. – San Diego. – 1999.

8. *Schneider W. R., Wyss W.* Fractional diffusion and wave equations. // J. Math.Phys. – 1989. – vol.30. – P.134-144.

9. *Wyss W.* Fractional diffusion equation. // J. Math. Phys. – 1986. – vol.27. – P.2782-2785.

10. *Alikhanov A.A.* A priori estimates for solutions of boundary value problems for fractional-order eqations. // Differential equations. – 2010. – vol.46., №5. – P.660-666.

11. *Eidelman S.D., Kochubei A.N.* Cauchy problem for fractional diffusion equatoins. // Differential equations. – 2004. – vol.199, №2. – P.211-255.

12. *Mainardi F.* The fundamental solutions for the fractional duffusion-wave equation. // Appl. Math. Lett. – 1996. – vol.9, №6. – P.23-28.

13. *Sakamoto K., Yamamoto M.* Inverse sourse problem with a final overdeterminatoin for a fractional diffusion equation. // Mathematical control and related fields. – 2011. – vol.1, №4.

14. *Lin Y., Xu C.* Finite difference-spectral approximations for the time-fractional diffusion equation. // Journal of Computational Physics. – 2007. – vol.225. – P.1533-1552.

15. *Ivashchenko D.S.* Numerical analysis of direct and inverse problems for time-fractional diffusion equation. // PhD theses. – Tomsk. – 2008. (in Russian).

16. *Huang J., Nie N., Tang Y.* A second order finite difference-spectral method for space fractional diffusion equation. // CAF. – 2008.

17. *Prehl J.* Diffusion on fractals and space-fractional diffusion equations. // Chemnitz University of Technology – 2004.

18. *Meerschaert M.M., Tadjeran C.* Finite difference approximations for two-sided space-fractional partial differential equations. // Applied Numerical Mathematics. – 2006. – vol.56, №1. – P.80-90.

19. *Samko S.G., Kilbas A.A., Marichev O.I.* Fractional order integrals and derivatives and their applications. // Science and technology. – 1987. (in Russian).

Надійшла до редколегії 19.09.13

УДК 519.9

Хусаінов Д.Я.[1], д. ф.-м. н., проф.,
Баштинець Я.[2], к. ф.-м. н., доц.,
Демченко Г.А.[3], студ.

Оптимальне керування процесом нагрівання без запізнення

Розглядається задача оптимального керування процесом нагрівання на прикладі одновимірного рівняння теплопровідності без запізнення при керуванні правою частиною. Отримано розв'язок у вигляді ряду за власними функціями задачі Штурма-Ліувіля.
Ключові слова: оптимальне керування, функція Гамільтона-Понтрягіна, рівняння теплопровідності без запізнення.

[1] Київський національний університет імені Тараса Шевченка,03680, м. Київ, пр-т Глушкова 4д, e-mail: d.y.khusainov@gmail.com
[2] Брненський технічний університет, 61600, м.Брно, Чеська республіка, вул. Технічна 8, e-mail: bastinec@feec.vutbr.cz
[3] Київський національний університет імені Тараса Шевченка,03680, м. Київ, пр-т Глушкова 4д, e-mail: ann.demchenko@mail.ru

D.Ya. Khusainov[1], Prof. Dr.Sc.,
Ja. Bastinec[2], Doc., Ph.D.,
H. Demchenko[3], student.

Optimal control of the heating process without delay

We consider the problem of optimal control of the heating process on the example of the one-dimensional heat equation without delay and with right-hand side control. We obtain a solution in the form of series in eigenfunctions of the Sturm-Liouville problem.
Key Words: optimal control, Hamilton-Pontryagin function, heat equation without delay.

[1] Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03680, Kyiv, Glushkova av., 4d, e-mail: d.y.khusainov@gmail.com
[2] Brno University of Technology, 61600, Brno, Czech Republic, Technical str., 8, e-mail: bastinec@feec.vutbr.cz
[3] Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03680, Kyiv, Glushkova av., 4d, e-mail: ann.demchenko@mail.ru

Статтю представив д.т.н., проф. Гаращенко Ф.Г.

Вступ

В роботі розглядається задача оптимального керування процесом, що описується одновимірним рівнянням теплопровідності. Задачі оптимізації в системах з розподіленими параметрами розглядалися багатьма авторами. Можна, наприклад, вказати роботи [1-4]. В даній роботі розглядається рівняння теплопровідності без запізнення. Керування проводиться правою частиною. Для простоти, крайові умови вибрані нульовими. Розв'язок представлено у вигляді ряду за власними функціями задачі Штурма-Ліувіля.

Оптимізація в рівнянні теплопровідності

Розглянемо задачу оптимального керування одновимірним рівнянням теплопровідності без запізнення

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + U(x,t). \qquad (1.1)$$

Рівняння визначене при $t > 0$ на проміжку $0 < x < l$. Початкова умова має вигляд

$$u(x,0) = \varphi(x),\ 0 \le x \le l, \qquad (1.2)$$

а крайові умови нульові

$$u(0,t) \equiv 0,\ u(l,t) \equiv 0,\ t \ge 0, \qquad (1.3)$$

причому виконується умова «узгодження крайових і початкових умов»

$$\varphi(0) = 0,\ \varphi(l) = 0,$$

тобто функція $u(x,t)$ в крайових точках неперервна.

Під розв'язком (класичним) будемо розуміти функцію $u(x,t)$, двічі неперервно-диференційовану по аргументу $x \in (0,l)$ і один раз по аргументу $t \in (0,t_1)$. Необхідно знайти функцію керування $U(x,t)$, при якій в кінцевий момент $t = t_1$ часу виконується

$$u(x,t_1) \equiv \Psi(x),\ \Psi(0) = \Psi(l) = 0,\ 0 \le x \le l, \qquad (1.4)$$

а інтеграл від суми квадратів функції і

© Д.Я. Хусаїнов, Я. Баштинець, Г.А.Демченко, 2014

керування досягає мінімального значення

$$I[U]=\int_0^{t_1}\int_0^{l}\left[U^2(x,t)+u^2(x,t)\right]dxdt\to\min\ .(1.5)$$

Отримання розв'язку

Як випливає з принципу суперпозиції, розв'язок лінійного неоднорідного рівняння будемо шукати у вигляді суми розв'язків $u_0(x,t)$ однорідного рівняння з нульовими крайовими умовами (1.3) і заданими початковими умовами (1.2) та розв'язку $\bar{u}(x,t)$ неоднорідного рівняння з нульовими крайовими і початковими умовами та функцією керування $U(x,t)$, що забезпечує кінцеву умову (1.4) і оптимізацію даного критерію якості (1.5).

1. Для однорідного рівняння

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \qquad (2.1)$$

з умовами (1.2) і (1.3) розв'язок $u_0(x,t)$ шукається методом Фур'є (методом розділення змінних) у вигляді добутку двох функцій

$$u_0(x,t)=X(x)T(t).$$

Після підстановки в рівняння (2.1) і розділення змінних рівняння (2.1) розщеплюється на два звичайних рівняння

$$X''(x)+\lambda X(x)=0,\ X(0)=0,\ X(l)=0,$$

$$T'(t)+\lambda a^2 T(t)=0.$$

Ненульові розв'язки першого рівняння (задача Штурма-Ліувіля) мають вигляд

$$X_n(x)=\sin\frac{\pi n}{l}x,\ \lambda=\lambda_n=\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2,\ n=1,2,3,...$$

Розв'язки другого рівняння мають вигляд

$$T_n(t)=C_n e^{-\left(\frac{\pi n}{l}a\right)^2 t},\ n=1,2,3,...$$

І розв'язок однородного рівняння (2.1) має вигляд розкладу за власними функціями задачі Штурма-Ліувіля

$$u_0(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n e^{-\left(\frac{\pi n}{l}a\right)^2 t}\sin\frac{\pi n}{l}x,$$

$$\varphi_n=\frac{2}{l}\int_0^{l}\varphi(s)\sin\frac{\pi n}{l}sds.$$

Таким чином, отримали

$$u_0(x,t)=\frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\int_0^{l}\varphi(s)\sin\frac{\pi n}{l}sds\right]e^{-\left(\frac{\pi n}{l}a\right)^2 t}\sin\frac{\pi n}{l}x \qquad (2.2)$$

розв'язок однорідного рівняння, яке задовольняє нульовим граничным і ненульовим початковим умовам.

2. Розв'язок $\bar{u}(x,t)$ неоднорідного рівняння (1.1) також шукається у вигляді ряду

$$\bar{u}(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)\sin\frac{\pi n}{l}x$$

за власними функціями задачі Штурма-Ліувіля. Праву частину неоднорідного рівняння (1.1) можна розкласти в ряд за власними функціями

$$U(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}U_n(t)\sin\frac{\pi n}{l}x,$$

$$U_n(t)=\frac{2}{l}\int_0^{l}U(s,t)\sin\frac{\pi n}{l}sds,\ n=1,2,3,....$$

Підставивши в неоднорідне рівняння і прирівнявши коефіцієнти при власних функціях, отримаємо систему рівнянь

$$T_n'(t)+\left(\frac{\pi n}{l}a\right)^2 T_n(t)=U_n(t),\ n=1,2,3,... \qquad (2.3)$$

з нульовими початковими умовами $T_n(0)=0$. Згідно формулі Коші, розв'язок лінійного неоднорідного рівняння з довільною правою частиною $U_n(t)$, який задовольняє нульовим початковим умовам, має вигляд

$$T_n(t)=\int_0^{t}e^{-\left(\frac{\pi n}{l}a\right)^2(t-s)}U_n(s)ds. \qquad (2.4)$$

Для визначення кінцевих умов функція $\Psi(x)$ розкладається в ряд за власними функціями

$$\Psi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\Psi_n\sin\frac{\pi n}{l}x,$$

$$\Psi_n=\frac{2}{l}\int_0^{l}\Psi(s)\sin\frac{\pi n}{l}sds. \qquad (2.5)$$

І крайові умови мають вигляд $T_n(t_1)=\Psi_n$. Керуючі функції $U_n(t)$ шукаються таким чином, щоб виконувались кінцеві умови.

Оптимальне керування.

Перетворимо критерій якості наступним чином. Враховуючи, що функцію $U(x,t)$ розклали в ряд за власними функціями, перепишемо цільову функцію (1.5) у вигляді

$$I[U]==\int_0^{t_1}\int_0^{l}\left\{\left[\sum_{i=1}^{\infty}U_n(t)\sin\frac{\pi n}{l}x\right]^2+\right.$$

$$\left.+\left[\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)\sin\frac{\pi n}{l}x\right]^2\right\}dxdt.$$

Перетворимо перший інтеграл наступним чином

$$\int_0^l \left[\sum_{n=1}^{\infty} U_n(t)\sin\frac{\pi n}{l}x\right]^2 dx =$$

$$= \int_0^l \sum_{n=1}^{\infty} U_n^2(t)\sin^2\frac{\pi n}{l}x dx +$$

$$+ \int_0^l \sum_{m,n=1,n\neq m}^{\infty} U_n(t)U_m(t)\sin\frac{\pi n}{l}x\sin\frac{\pi m}{l}x =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} U_n^2(t)\int_0^l \sin^2\frac{\pi n}{l}x dx = \frac{1}{2}l\sum_{n=1}^{\infty} U_n^2(t).$$

Аналогічно, для другого інтеграла отримаємо

$$\int_0^l \left[\sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)\sin\frac{\pi n}{l}x\right]^2 dx = \frac{1}{2}l\sum_{n=1}^{\infty} T_n^2(t).$$

І цільова функція має вигляд

$$I[U] = \frac{l}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{t_1}\left[U_n^2(t)+T_n^2(t)\right]dt \to \min .$$

Таким чином, вихідну задачу (1.1) з оптимізацією квадратичного критерію якості (1.5) звели до розв'язання задачі оптимального керування зліченною системою рівнянь (2.3)

$$T_n'(t)+\left(\frac{\pi n}{l}a\right)^2 T_n(t) = U_n(t),\ n = 1,2,3,...$$

що задовольняють крайовим умовам

$$T_n(0) = 0,\ T_n(t_1) = \Psi_n,$$

$$\Psi_n = \frac{2}{l}\int_0^l \Psi(s)\sin\frac{\pi n}{l}s ds,$$

і мінімізації інтегральних критеріїв якості

$$I_n[U] = \int_0^{t_1}\left[U_n^2(t)+T_n^2(t)\right]dt \to \min, n = 1,2,3,... \quad (3.1)$$

Для мінімізації даного функціоналу використаємо принцип максимуму Гамільтона-Понтрягіна, який стверджує, що якщо процес $T_n^0(t)$ є оптимальним, то в будь-який момент часу $0 < t < t_1$ оптимальне керування $U_n^0(t)$ максимізує функцію Гамільтона-Понтрягіна $H_n(\psi_n(t),T_n(t))$, яка має вигляд

$$H_n(\psi_n(t),T_n(t)) = \psi_{0,n}(U_n^2(t)+T_n^2(t)) +$$

$$+\psi_n(t)\left(U_n(t)-\left(\frac{\pi n}{l}a\right)^2 T_n(t)\right).$$

Покладемо параметр $\psi_{0,n} = -1$. Тоді функція Гамільтона-Понтрягіна набуває вигляду

$$H_n(\psi_n(t),T_n(t)) = -U_n^2(t) - T_n^2(t) +$$

$$+\psi_n(t)\left(U_n(t)-\left(\frac{\pi n}{l}a\right)^2 T_n(t)\right).$$

Умова оптимальності має вигляд

$$\frac{\partial}{\partial U_n(t)}H_n(\psi_n(t),T_n(t)) = -2U_n(t)+\psi_n(t) = 0.$$

Звідси

$$U_n(t) = \frac{1}{2}\psi_n(t). \quad (3.2)$$

Для знаходження величин $\psi_n(t)$ діємо наступним чином. Диференціальні рівняння, що відповідають спряженим змінним, мають вигляд

$$\frac{d\psi_n(t)}{dt} = -\frac{\partial H_n(\psi_n(t),T_n(t))}{\partial T_n(t)} =$$

$$= 2T_n(t)+\left(\frac{\pi n}{l}a\right)^2\psi_n(t). \quad (3.3)$$

Як випливає з (2.3),

$$T_n'(t) = U_n(t)-\left(\frac{\pi n}{l}a\right)^2 T_n(t).$$

І, підставивши замість $U_n(t)$ його значення з (3.2), отримаємо систему

$$\begin{cases} T_n'(t) = \frac{1}{2}\psi(t)-\left(\frac{\pi n}{l}a\right)^2 T_n(t), \\ \psi_n'(t) = 2T_n(t)+\left(\frac{\pi n}{l}a\right)^2\psi_n(t). \end{cases} \quad (3.4)$$

Систему розв'язуємо методом Ейлера. Характеристичне рівняння має вигляд

$$\begin{vmatrix} -\left(\frac{\pi n}{l}a\right)^2-\lambda & \frac{1}{2} \\ 2 & \left(\frac{\pi n}{l}a\right)^2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

або

$$\lambda^2 - \left(\frac{\pi n}{l}a\right)^4 - 1 = 0.$$

Власні числа дійсні, різного знаку і дорівнюють

$$\lambda_{1,n} = \sqrt{\left(\frac{\pi n}{l}a\right)^4+1},\ \lambda_{2,n} = -\sqrt{\left(\frac{\pi n}{l}a\right)^4+1} \quad (3.5)$$

Знаходимо перший власний вектор.

1. Підставимо $\lambda_{1,n} = \sqrt{\left(\frac{\pi n}{l}a\right)^4+1}$ і отримаємо

$$\left[-\left(\frac{\pi n}{l}a\right)^2 - \sqrt{\left(\frac{\pi n}{l}a\right)^4+1}\right]\alpha_{1,n}+\frac{1}{2}\beta_{1,n} = 0,$$

$$2\alpha_{1,n}-\left[\left(\frac{\pi n}{l}a\right)^2-\sqrt{\left(\frac{\pi n}{l}a\right)^4+1}\right]\beta_{1,n}=0.$$

Звідси перший власний вектор має вигляд

$$\alpha_{1,n}=\frac{1}{2},\ \beta_{1,n}=\left(\frac{\pi n}{l}a\right)^2+\sqrt{\left(\frac{\pi n}{l}a\right)^4+1}. \quad (3.6)$$

2. Підставимо $\lambda_{2,n}=-\sqrt{\left(\frac{\pi n}{l}a\right)^4+1}$ і отримаємо

$$\left[-\left(\frac{\pi n}{l}a\right)^2+\sqrt{\left(\frac{\pi n}{l}a\right)^4+1}\right]\alpha_{2,n}+\frac{1}{2}\beta_{2,n}=0,$$

$$2\alpha_{2,n}-\left[\left(\frac{\pi n}{l}a\right)^2+\sqrt{\left(\frac{\pi n}{l}a\right)^4+1}\right]\beta_{2,n}=0.$$

Звідси другий власний вектор має вигляд

$$\alpha_{2,n}=-\frac{1}{2},\ \beta_{2,n}=-\left(\frac{\pi n}{l}a\right)^2+\sqrt{\left(\frac{\pi n}{l}a\right)^4+1}. \quad (3.7)$$

Таким чином, розв'язок має вигляд

$$\begin{pmatrix}T_n(t)\\ \psi_n(t)\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha_{1,n}e^{\lambda_{1,n}t} & \alpha_{2,n}e^{\lambda_{2,n}t}\\ \beta_{1,n}e^{\lambda_{1,n}t} & \beta_{2,n}e^{\lambda_{2,n}t}\end{bmatrix}\begin{pmatrix}c_{1,n}\\ c_{2,n}\end{pmatrix},$$

або

$$T_n(t)=c_{1,n}\alpha_{1,n}e^{\lambda_{1,n}t}+c_{2,n}\alpha_{2,n}e^{\lambda_{2,n}t},$$

$$\psi_n(t)=c_{1,n}\beta_{1,n}e^{\lambda_{1,n}t}+c_{2,n}\beta_{2,n}e^{\lambda_{2,n}t}.$$

Для визначення сталих c_1, c_2 використаємо початкові умови

$$T_n(0)=0,\ T_n(t_1)=\Psi_n.$$

Підставивши їх в отримані розв'язки, маємо

$$c_{1,n}\alpha_{1,n}+c_{2,n}\alpha_{2,n}=0,$$

$$c_{1,n}\alpha_{1,n}e^{\lambda_{1,n}t_1}+c_{2,n}\alpha_{2,n}e^{\lambda_{2,n}t_1}=\Psi_n.$$

Розв'язавши записану систему лінійних алгебраїчних рівнянь, отримаємо

$$T_n(t)=\frac{\Psi_n}{\alpha_{1,n}\left(e^{\lambda_{1,n}t_1}-e^{\lambda_{2,n}t_1}\right)}\alpha_{1,n}e^{\lambda_{1,n}t}-$$

$$-\frac{\Psi_n}{\alpha_{2,n}\left(e^{\lambda_{1,n}t_1}-e^{\lambda_{2,n}t_1}\right)}\alpha_{2,n}e^{\lambda_{2,n}t},$$

$$\psi_n(t)=\frac{\Psi_n}{\alpha_{1,n}\left(e^{\lambda_{1,n}t_1}-e^{\lambda_{2,n}t_1}\right)}\beta_{1,n}e^{\lambda_{1,n}t}-$$

$$-\frac{\Psi_n}{\alpha_{2,n}\left(e^{\lambda_{1,n}t_1}-e^{\lambda_{2,n}t_1}\right)}\beta_{2,n}e^{\lambda_{2,n}t}.$$

І оптимальне керування кожним з рівнянь (2.3) має вигляд

$$U_n(t)=\frac{1}{2}\psi_n(t)=$$

$$=\frac{\Psi_n}{2\left(e^{\lambda_{1,n}t_1}-e^{\lambda_{2,n}t_1}\right)}\left(\frac{\beta_{1,n}}{\alpha_{1,n}}e^{\lambda_{1,n}t}-\frac{\beta_{2,n}}{\alpha_{2,n}}e^{\lambda_{2,n}t}\right). \quad (3.8)$$

Остаточно, оптимальне керування має вигляд

$$U(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Psi_n}{2\left(e^{\lambda_{1,n}t_1}-e^{\lambda_{2,n}t_1}\right)}\times$$

$$\times\left(\frac{\beta_{1,n}}{\alpha_{1,n}}e^{\lambda_{1,n}t}-\frac{\beta_{2,n}}{\alpha_{2,n}}e^{\lambda_{2,n}t}\right)\sin\frac{\pi n}{l}x.$$

Використавши залежності (2.2), (2.4), отримаємо, що розв'язок, який відповідає оптимальному керуванню (3.8), має вигляд

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{2}{l}\left[\int_0^l\varphi(s)\sin\frac{\pi n}{l}sds\right]e^{-\left(\frac{\pi n}{l}a\right)^2t}\right\}\sin\frac{\pi n}{l}x+$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Psi_n}{2\left(e^{\lambda_{1,n}t_1}-e^{\lambda_{2,n}t_1}\right)}\left[\int_0^t e^{-\left(\frac{\pi n}{l}a\right)^2(t-s)}\times\right.$$

$$\left.\times\left(\frac{\beta_{1,n}}{\alpha_{1,n}}e^{\lambda_{1,n}s}-\frac{\beta_{2,n}}{\alpha_{2,n}}e^{\lambda_{2,n}s}\right)ds\right]\sin\frac{\pi n}{l}x,$$

де величини $\lambda_{1,n}$, $\lambda_{2,n}$, $\alpha_{1,n}$, $\alpha_{2,n}$, $\beta_{1,n}$, $\beta_{2,n}$ визначені в (3.5) - (3.7), а величини Ψ_n в (2.4).

Список використаних джерел

1. *Butkovskiy A.G.* The optimal control theory of systems with distributed parameters. – Moscow: Nauka, 1965. – 474 p. (in Russian).

2. *Butkovskiy A.G.* Control methods for systems with distributed parameters. – Moscow: Nauka, 1975. – 568 p. (in Russian).

3. *Egorov A.I.* Optimal control of thermal and diffusion processes. – Moscow: Nauka, 1978. – 464 p. (in Russian).

4. *Ionkin N.I.* Solution of a boundary value problem with a nonclassical boundary condition in the theory of heat conduction // Differential equations. – 1977. – **T 13**, N 2. – P.294-304. (in Russian).

5. *Kapustyan V.O., Kapustyan O.A., Mazur O.K.* Optimal control problem for the Poisson equation with nonlocal boundary conditions // Nonlinear Oscillations. – 2013. – **T 16**, N 3. – P.350-358. (in Ukrainian).

Надійшла до редколегії 20.12.2013

РАДІОФІЗИКА

УДК 537.635

Віділ А.Ю. [1], аспірант

Параметричне збудження спінових хвиль в анізотропних (111) плівках паралельною накачкою

Вивчені пороги параметричного збудження спінових хвиль і однорідної прецесії паралельною накачкою у феромагнітному еліпсоїді із врахуванням полів кубічної та одновісної анізотропії. Показано залежність порогового поля в дотично намагнічених в площині (111) плівках на основі залізо-ітрієвого гранату (ЗІГ) від орієнтації підмагнічуючого поля, а також від намагніченості насичення матеріалу і температури.
Ключові слова: магнітна кристалографічна анізотропія, еліпсоїд обертання, поріг параметричного збудження.

[1] Київський національний університет імені Тараса Шевченка,03680, м. Київ, пр-т. Глушкова 4г, e-mail: vidil@univ.net.ua

A. Yu. Vidil[1], Postgraduate student

Parametric spin wave excitation for parallel pumping in anisotropic (111) films

The results of theoretical investigation of parametric excitation of spin waves and uniform precession with parallel pumping in ferromagnetic ellipsoid with regard to the fields of cubic and uniaxial anisotropy have been presented. The dependencies of the threshold field in tangentially magnetized in the plane (111) of Yttrium-Iron-Garnet (YIG) based films on the bias field orientation, sample magnetization and temperature are shown.
Key Words: magnetic crystallographic anisotropy, ferromagnetic ellipsoid, the threshold of parametric excitation.

[1] Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03680, Kyiv, Glushkova st., 4g, vidil@univ.net.ua

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Анісімов І.О.

Вступ

Нелінійність в рівнянні Ландау-Ліфшиця призводить до зв'язку різних типів коливань намагніченості між собою. Одним з проявів такого зв'язку є можливість параметричного збудження коливань намагніченості.

В роботі [3] спостерігалось параметричне збудження спінових хвиль (ПЗСХ) у вигляді порогового поглинання електромагнітної енергії феритом, що знаходився у змінному магнітному полі, паралельному до підмагнічуючого поля. Ефект дістав назву параметричного збудження при паралельному накачуванні. Авторами в [3] була представлена теорія без врахування кристалографічної анізотропії, а останні дослідження в цьому напрямі були зосереджені на вивченні залежності коефіцієнта релаксації спінових хвиль від хвильового вектора в розрахунках порогових полів [1,4] та впливу анізотропії на переважні напрямки розповсюдження спінових хвиль [5]. Узагальнення нелінійної теорії спін-хвильових резонансів в рамках Гамільтонового формалізму проводилося в статті [6].

Відомо, що спектр спінових хвиль в плівках при дотичному підмагнічуванні сильно залежить від товщини зразка [7,8]. Так, починаючи з деякої критичної товщини зразка у спектрі виявляються забороненими вироджені з однорідною прецесією спінові хвилі. Останні дослідження в області вирощування плівок ЗІГ нанометрової товщини [9] створюють передумови для параметричного збудження з усього спектру спінових хвиль тільки однорідної прецесії. Тому є актуальною задача визначення впливу анізотропії на пороги параметричного збудження як спінових хвиль, так і однорідної прецесії.

Метою даної роботи є дослідження порогів збудження однорідної прецесії та спінових хвиль в еліпсоїдальному зразку з урахуванням полів кубічної анізотропії і одновісної анізотропії першого порядку.

Теорія

Для аналізу параметричних процесів скористаємося рівнянням Ландау-Ліфшиця в кругових змінних $a = m_x + im_y$, прийнявши $m_z \approx 1 - aa^* / 2$:

© А.Ю. Віділ, 2014

$$-i\dot{a} = a\gamma H_z - \left(1 - \frac{1}{2}aa^*\right)\gamma H^+. \qquad (1)$$

Введені позначення H_z, $H^+ = H_x + iH_y$ відповідають компонентам ефективного магнітного поля, γ – гіромагнітне відношення, $\mathbf{m} = \mathbf{M}/M_0$ – нормована намагніченість.

В ефективному магнітному полі врахуємо зовнішнє підмагнічуюче поле $\mathbf{H}$, НВЧ поле накачки $\mathbf{h}$, розмагнічуюче поле $\mathbf{H}_d$, обмінне поле $\mathbf{H}_{ex}$, а також поля кубічної $\mathbf{H}_c$ та одновісної $\mathbf{H}_u$ анізотропії.

В розглянутій задачі рівноважна намагніченість $\mathbf{M}_0$ і НВЧ поле накачки паралельні й лежать в площині (111). Необхідна для цього орієнтація підмагнічуючого поля $\mathbf{H}$ визначається з рівняння

$$\left.\frac{\partial U}{\partial \theta_M}\right|_{\theta_M=\frac{\pi}{2}} = 0, \quad \left.\frac{\partial U}{\partial \varphi_M}\right|_{\theta_M=\frac{\pi}{2}} = 0,$$

$$U = 4\pi M_0^2 \mathbf{m}\hat{N}\mathbf{m} - \frac{K_1}{2}\left(m_{x'}^4 + m_{y'}^4 + m_{z'}^4\right) - \qquad (2)$$
$$- K_{u1} m_y^2 - \mathbf{MH},$$

де K_1, K_{u1} – константи кубічної і одновісної анізотропії відповідно, $\hat{N}$ – тензор розмагнічуючих коефіцієнтів, (x', y', z') – система координат, осі якої співпадають з кристалографічними осями кубічної гратки. Вектори $\mathbf{H}$ і $\mathbf{M}$ параметризуються кутами θ_H, θ_M та φ_H, φ_M сферичної системи координат, які відраховуються від осей $\langle 111\rangle$ і $\langle 110\rangle$ відповідно (Рис. 1).

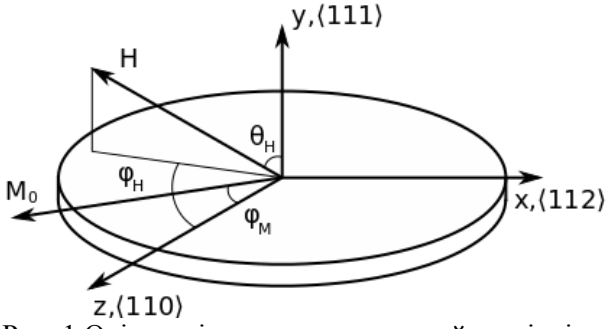


Рис. 1 Орієнтація координатних осей у плівці.

Розглянемо детально послідовність перетворень системи координат та компонент ефективного магнітного поля [10]. Розв'язок рівняння (2) для обраного зрізу підкладинки зручно проводити в системі координат (x, y, z), де осі орієнтовані вздовж кристалографічних напрямків $\langle 112\rangle \| x$, $\langle 111\rangle \| y$, $\langle 110\rangle \| z$. В такому випадку зв'язок між проекціями намагніченості в двох системах координат буде визначатися матрицею послідовних поворотів на кут $\varphi = \pi/4$ відносно осі y і на кут $\theta = \arccos\left(1/\sqrt{3}\right)$ відносно осі z: $\mathbf{m}' = A_1 \cdot \mathbf{m}$, де

$$A_1 = \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\varphi & \sin\theta\cos\varphi & -\sin\varphi \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ \cos\theta\sin\varphi & \sin\theta\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Рівняння Ландау-Ліфшиця для прецесійних коливань намагніченості зручно розв'язувати для заданої орієнтації вісі z вздовж напряму рівноважної намагніченості. Для підмагнічування в площині (111) $\varphi_M \approx \varphi_H$, такому перетворенню відповідає матриця повороту навколо осі y

$$A_2 = \begin{pmatrix} \cos\varphi_H & 0 & -\sin\varphi_H \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\varphi_H & 0 & \cos\varphi_H \end{pmatrix}.$$

Скориставшись представленням плоских однорідних спінових хвиль

$$\mathbf{m}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mathbf{k}} \mathbf{m}_{\mathbf{k}}(t) e^{i\mathbf{kr}},$$
$$a(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}}(t) e^{i\mathbf{kr}},$$

остаточно отримаємо вирази компонент ефективного магнітного поля в вигляді

$$\mathbf{H}_{ex} = -D\sum_{\mathbf{k}} \mathbf{k}^2 \mathbf{m}_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{kr}},$$

$$\mathbf{H}_d = -4\pi M_0 \hat{N}\mathbf{m}_{\mathbf{0}} - 4\pi M_0 \sum_{\mathbf{k}\neq\mathbf{0}} \frac{\mathbf{k}(\mathbf{m}_{\mathbf{k}}\mathbf{k})}{\mathbf{k}^2} e^{i\mathbf{kr}},$$

$$\mathbf{H} = H_0 \cdot (0, \cos\theta_H, \sin\theta_H),$$

$$\mathbf{h} = h_0 \cdot (0, 0, \cos\omega_p t),$$

$$\mathbf{H}_c = \frac{K_1}{2M_0}\frac{\partial}{\partial \mathbf{m}}\left(m_{x'}^4 + m_{y'}^4 + m_{z'}^4\right),$$

$$\mathbf{H}_u = \frac{K_{u1}}{M_0}\frac{\partial}{\partial \mathbf{m}} m_y^2$$

де D – константа неоднорідної обмінної взаємодії, ω_p – частота накачки, $\mathbf{m}' = A_1 \cdot A_2 \cdot \mathbf{m}$. Підставляючи вирази для полів в (1), отримаємо рівняння руху спінової хвилі $a_{\mathbf{k}}$

$$-i\dot{a}_{\mathbf{k}} = A_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}} + B_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}}^* + \frac{\gamma h_0}{2}\left(e^{i\omega_p t} + e^{-i\omega_p t}\right)a_{\mathbf{k}}, \quad (3)$$

де коефіцієнти $A_{\mathbf{k}}$, $B_{\mathbf{k}}$ для зразка у формі диску (Рис. 1) із розмагнічуючими коефіцієнтами $N_{xx} = N_{zz} = \left(1 - N_{yy}\right)/2$ матимуть вигляд

$$A_{\mathbf{k}} = \omega_H - \omega_M N_{zz} + \frac{\omega_M}{2}\sin^2\theta_{\mathbf{k}} + Dk^2 + \frac{\gamma K_1}{2M_0} - \frac{\gamma K_{u1}}{M_0},$$

$$B_{\mathbf{k}} = \frac{\omega_M}{2}\sin^2\theta_{\mathbf{k}} e^{i\varphi_{\mathbf{k}}} + \frac{\gamma K_1}{2M_0} - i\sqrt{2}\frac{\gamma K_1}{M_0}\cos 3\varphi_H + \frac{\gamma K_{u1}}{M_0},$$

де $\omega_H = \gamma H_z$, $\omega_M = \gamma 4\pi M_0$, кути розповсюдження спінових хвиль $\theta_{\mathbf{k}}$, $\varphi_{\mathbf{k}}$ – полярний і азимутальний відповідно. Рівняння для однорідної прецесії ($\mathbf{k} = 0$) відрізняється коефіцієнтами

$$A_0 = \omega_H - \frac{\omega_M}{4}\left(1 - 3N_{yy}\right) + \frac{\gamma K_1}{2M_0} - \frac{\gamma K_{u1}}{M_0},$$

$$B_0 = \frac{\omega_M}{4}\left(1 - 3N_{yy}\right) + \frac{\gamma K_1}{2M_0} - i\sqrt{2}\frac{\gamma K_1}{M_0}\cos 3\varphi_H + \frac{\gamma K_{u1}}{M_0}.$$

Скориставшись перетворенням Хольштейна-Примакова, перейдемо в рівнянні (3) до еліптичних змінних

$$a_{\mathbf{k}} = \lambda_{\mathbf{k}} b_{\mathbf{k}} - \mu_{\mathbf{k}} b_{-k}^*,\ a_{-\mathbf{k}}^* = \lambda_{\mathbf{k}} b_{\mathbf{k}} - \mu_{\mathbf{k}} b_{-k}^*,$$

$$\lambda_{\mathbf{k}} = \sqrt{\frac{A_{\mathbf{k}} + \omega_{\mathbf{k}}}{2\omega_{\mathbf{k}}}},\ \mu_{\mathbf{k}} = \frac{B_{\mathbf{k}}}{|B_{\mathbf{k}}|}\sqrt{\frac{A_{\mathbf{k}} - \omega_{\mathbf{k}}}{2\omega_{\mathbf{k}}}}.$$

Розглянемо першу зону, де умова параметричного резонансу має вигляд $\omega_0 = \omega_{\mathbf{k}} = \omega_p/2$, та залишимо в рівнянні лише резонансні члени

$$-i\dot{b}_{\mathbf{k}} = \omega_{\mathbf{k}} b_{\mathbf{k}} - \gamma h_0 \frac{B_k}{2\omega_{\mathbf{k}}} e^{i\omega_p t} b_{-\mathbf{k}}^*, \quad (4)$$

де $\omega_{\mathbf{k}} = \sqrt{A_{\mathbf{k}}^2 - |B_{\mathbf{k}}|^2}$.

Увівши в (4) релаксацію заміною $\omega_{\mathbf{k}} \to \omega_{\mathbf{k}} + i\omega_{r\mathbf{k}}$, отримаємо порогову умову збудження спінових хвиль

$$\frac{|B_{\mathbf{k}}|}{2\omega_{\mathbf{k}}} h_0 = \omega_{r\mathbf{k}},$$

звідки вирази порогових полів для збудження спінової хвилі або однорідної прецесії паралельною накачкою матимуть вигляд

$$h_{0th} = \min\left\{\frac{\omega_p \gamma \Delta H_{\mathbf{k}}}{2|B_{\mathbf{k}}|}\right\}_{|\mathbf{k}|,\theta_{\mathbf{k}},\varphi_{\mathbf{k}}},$$

$$h_{0th}^{(0)} = \frac{\omega_p \gamma \Delta H_0}{2|B_0|}, \quad (5)$$

де $\Delta H_{\mathbf{k}}$, ΔH_0 – ширина резонансної лінії.

Результати

Аналіз результатів проведено для (111) плівок чистого ЗІГ та заміщеного Ga-ЗІГ у формі диску діаметром 1.6 мм і товщиною 23.3 мкм. Магнітні параметри матеріалів взяті з [11,12]. Порогові залежності для Ga-ЗІГ представлені при різних температурах: $T = 300$ К ($K_1 = -3.5\cdot10^3$ ерг, $K_1 = -1.7\cdot10^3$ ерг, $4\pi M_0 = 670$ Гс, $4\pi M_0^2/|K_1| \approx 13.5$), $T = 220$ К ($K_1 = -7.5\cdot10^3$ ерг, $4\pi M_0 = 765$ Гс, $4\pi M_0^2/|K_1| \approx 6$), $T = 77$ К ($K_1 = -20\cdot10^3$ ерг, $4\pi M_0 = 930$ Гс, $4\pi M_0^2/|K_1| \approx 3.5$). Для чистого ЗІГ із $4\pi M_0 = 1750$ Гс константи кубічної та одновісної анізотропії становлять $K_1 = -7\cdot10^3$ ерг, $K_{u1} = -3.5\cdot10^3$ ерг. Значення константи неоднорідного обміну D для ЗІГ взято рівним $5.17\cdot10^{-9}$ Е$\cdot$см^2, ширина резонансних ліній $\Delta H_{\mathbf{k}} = 0.2$ Е, $\Delta H_0 = 0.5$ Е.

Розв'язок рівняння (2) дає кутові залежності $\theta_H(\varphi_H)$, при яких вектор рівноважної намагніченості буде орієнтуватись в площині (111) (Рис. 2). До зазначеної кутової залежності

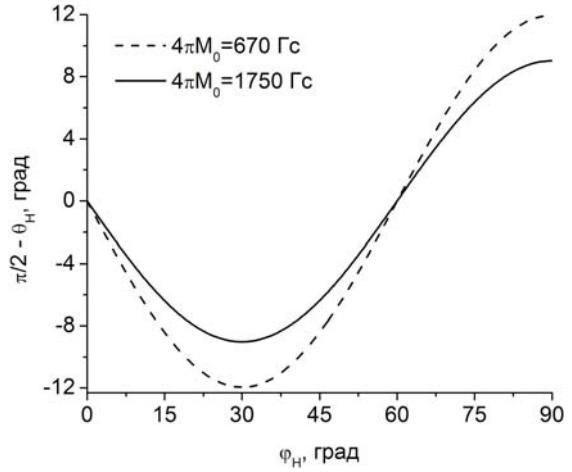


Рис. 2 Залежності кута виходу зовнішнього поля з площини (111) від кута повороту φ_H, $H_0 = 150$ Е.

призводить наявність кубічної анізотропії в кристалі, а амплітуда коливань кута θ_H обумовлена відношенням намагніченості насичення і поля кубічної анізотропії.

Розглянемо спочатку пороги параметричного збудження спінових хвиль. Це зручно зробити на прикладі польових залежностей, в літературі відомих як «butterfly» [2]. Наступна залежність (Рис. 3), побудована для підмагнічування вздовж осі $\langle 110 \rangle$, демонструє необхідність врахування

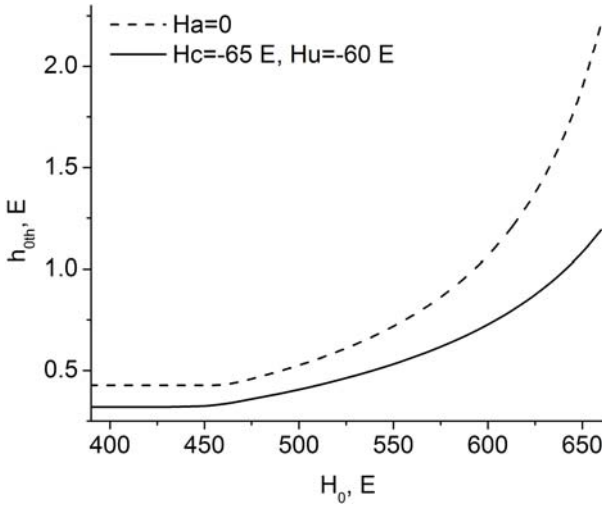


Рис. 3 Залежності амплітуди порогового НВЧ поля від підмагнічуючого поля для Ga-ЗІГ: $4\pi M_0 = 670$ Гс, $\omega_p = 4$ ГГц.

полів анізотропії в розрахунках порогів параметричного збудження паралельною накачкою, оскільки при типових для експерименту магнітних параметрах матеріалу в безобмінній ділянці спектру спінових хвиль порогові поля можуть відрізнятися в кілька разів для випадків з врахуванням полів анізотропії та без їх врахування.

Із загального вигляду коефіцієнта еліптичності

$$B_{\mathbf{k}} = \frac{\omega_M}{2} \sin^2 \theta_{\mathbf{k}} e^{i\varphi_{\mathbf{k}}} + F(\varphi_H), \qquad (6)$$

де $F(\varphi_H)$ – вклад полів анізотропії, можна зробити деякі висновки відносно впливу намагніченості насичення матеріалу та власне полів анізотропії на порогові поля. Як видно, обертання вектора рівноважної намагніченості $\mathbf{M_0}$ в площині (111) призводить до зміни уявної частини коефіцієнта $B_{\mathbf{k}}$ в рівнянні (3). Така поведінка коефіцієнта еліптичності проявляється в залежності порогових полів збудження спінових хвиль від кута повороту магнітного поля φ_H. На графіку (Рис. 4) представлено порогові залежності, для яких різниця амплітуди порогів максимальна: $\varphi_H = n\pi/3$, $\varphi_H = \pi/6 + n\pi/3$. Збудження спінових хвиль в

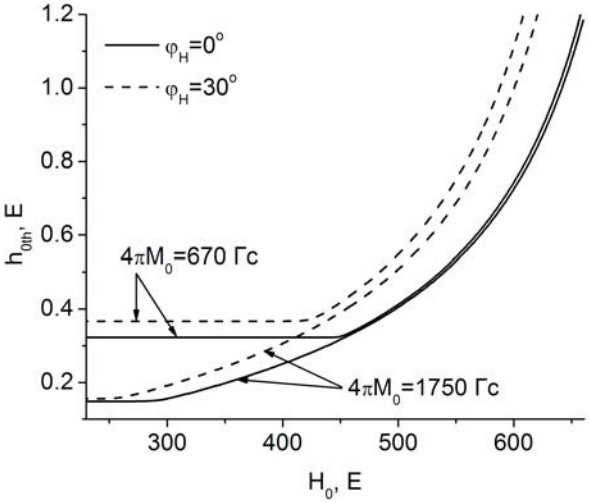


Рис. 4 Порогові поля для дисків ЗІГ $4\pi M_0 = 1750$ й $4\pi M_0 = 670$ Гс при частоті накачки $\omega_p = 4$ ГГц.

короткохвильовій частині спектру (область малих полів підмагнічування) відбувається при $\theta_{\mathbf{k}} = \pi/2$, тоді поля анізотропії в функції $F(\varphi_H)$ дають більший внесок в порогові поля в порівнянні із першим членом в (6) при зменшенні намагніченості насичення матеріалу. В безобмінній частині спектру (великі поля підмагнічування) збудження спінових хвиль буде супроводжуватись зменшенням кута $\theta_{\mathbf{k}}$, а отже й першого доданку в (6), що спричиняє суттєву залежність порогів від полів анізотропії (і кута φ_H) незалежно від намагніченості насичення матеріалу. Варіації амплітуди порогів при повороті $\mathbf{M_0}$ в площині (111) складають менше 1% для чистого ЗІГ при збудженні спінових хвиль в короткохвильовій частині спектру (прямі ділянки кривих на графіках Рис. 4) і порядку 16% при збудженні у безобмінній частині. Використання заміщеного Ga-ЗІГ із намагніченістю насичення 670 Гс збільшує варіації полів відповідно до 3% і 25%.

Теоретичні дослідження впливу температури зразка на пороги при підмагнічуванні вздовж осі $\langle 110 \rangle$ показані на Рис. 5. Зміна температури суттєво впливає на співвідношення між полем кубічної анізотропії і намагніченістю насичення, що виражається коефіцієнтом $4\pi M_0^2/|K_1|$. При низьких температурах вплив кубічної анізотропії

проявляється найбільше.

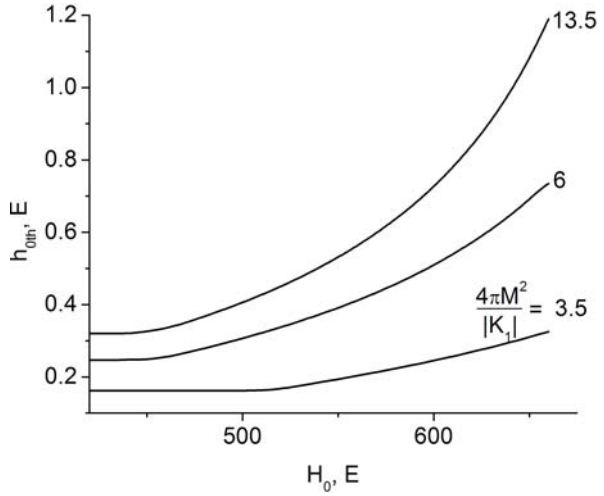


Рис. 5 Залежність порогу ПЗСХ від підмагнічуючого поля для Ga-ЗІГ при різних значеннях $4\pi M_0^2/|K_1|$ (T=300, 220, 77 K) на частоті накачки $\omega_p = 4$ ГГц.

Тепер розглянемо вплив анізотропії на порогові поля однорідної прецесії. В першу чергу слід відзначити якісну відмінність порогів параметричного збудження однорідної прецесії для зразка сферичної форми ($N_x = N_y = N_z = 1/3$). Без врахування полів анізотропії коефіцієнт $B_0 = 0$, а поріг параметричної нестійкості прямує до нескінченності. Врахування ж полів кубічної й одновісної анізотропії дає скінченне значення порогового поля

$$h_{0th}^0 = \frac{\omega_p \gamma \Delta H_0}{2\left|\frac{\gamma K_1}{2M_0} - i\sqrt{2}\,\frac{\gamma K_1}{M_0}\cos 3\varphi_H + \frac{\gamma K_{u1}}{M_0}\right|}.$$

Для параметричного збудження однорідної прецесії, як і в випадку спінових хвиль, присутня анізотропія порогів в площині (111). Величини варіації порогових полів параметричного збудження однорідної прецесії при повороті поля на кут φ_H співрозмірні з результатами для збудження спінових хвиль в області малих підмагнічуючих полів ($\theta_{\mathbf{k}} = \pi/2$) і не перевищують 1% для зразків із чистого ЗІГ. В обох випадках при збільшенні частоти накачки відбувається зменшення відносної амплітуди ефекту.

Вплив температури на порогові залежності показано на Рис. 6. Видно, що при зниженні температури зразка зростає глибина модуляції порогів.

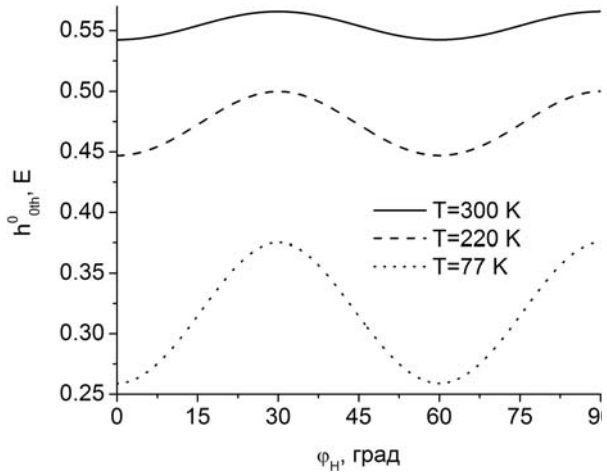


Рис. 6 Залежності порогів однорідної прецесії від кута повороту φ_H для зразка Ga-ЗІГ для різних температур ($H_0 = 200$ Е, $\Delta H_0 = 0.5$ Е).

Висновки

Досліджено вплив полів кубічної й одновісної анізотропії у плівках ЗІГ та Ga-ЗІГ на пороги параметричного збудження спінових хвиль і однорідної прецесії паралельною накачкою в першій зоні. Важливо відмітити, що причиною обговорення однорідної прецесії стала принципова можливість її параметричного збудження окремо від спінових хвиль. Отримані дані вказують на необхідність врахування анізотропії в розрахунках порогових полів.

Параметричне збудження спінових хвиль має два принципових режима: області малих і великих підмагнічуючих полів. Перша область відповідає збудженню спінових хвиль із $\theta_{\mathbf{k}} = \pi/2$, при цьому анізотропія порогових полів в площині (111) менше 1% для зразків із чистого ЗІГ і зростає в межах 2-3% у Ga-заміщених гранатах. В другій області збуджуються спінові хвилі в безобмінні області спектру, де $k \approx 0$, а варіація порогових полів сягає 25% для Ga-ЗІГ із $4\pi M_0 = 670$ Гс. Порогові залежності сильно обумовлені величиною $4\pi M_0$ і температурою зразка.

Анізотропію порогів в площині (111) виявлено також для параметричного збудження однорідної прецесії, величина ефекту аналогічна випадку збудження спінових хвиль в області малих підмагнічуючих полів.

На основі проведених досліджень можна зробити рекомендації щодо умов проведення експерименту для найкращого спостереження зазначеного ефекту. При спостереженні анізотропії порогових полів в площині (111) для

спінових хвиль параметричне збудження необхідно проводити у безобмінній ділянці спектру в матеріалах з меншими намагніченостями насичення при малих частотах накачки і температурах.

Для спостереження анізотропії порогів параметричного збудження однорідної прецесії необхідно проводити експерименти на тонких плівках, оскільки це є умовою можливості збудження тільки однорідної прецесії без вироджених по частоті спінових хвиль. Більша глибина модуляції порогів спостерігається при зменшенні підмагнічуючого поля, а також температури і намагніченості насичення матеріалу.

Список використаних джерел

1. *Patton C. E., Chen M.* Nonlinear phenomena and chaos in magnetic materials. – Singapore: World Scientific, 1994. – 300 p.
2. *Gurevich A., Melkov G.* Magnetic oscillations and waves. – Moscow: Nauka, 1994. – 464 p.
3. *Schlomann E., Green J., Milano U.* Recent developments in ferromagnetic resonance at high power levels // J. Appl. Phys. – 1960. – **31**, N 5. – P. 386S-395S.
4. *Patton C. E., Jantz W.* Influence of the spin-wave linewidth on the spin-wave propagation direction for parallel pumping in single crystal YIG // IEEE Trans. on Magn. – 1978. – **14**, N 5. – P. 698-700.
5. *Bady I., Schlomann E.* Spin Wave excitation in planar ferrites // J. Appl. Phys. – 1962. – **33**, N 3. – P. 1377-1378.
6. *Krivosik P., Patton C. E.* Hamiltonian formulation of nonlinear spin-wave dynamics: theory and applications // Phys. Rev. B – 2010. – **82**. – P. 184428.
7. *Patton C. E., Wilts C. H., Humphrey F. B. F* Relaxation processes for ferromagnetic resonance in thin films // J. Appl. Phys. – 1967. – **38,** N 3. – P. 1358-1359.
8. *McMichael R. D., Stiles M. D., Chen P. J., Egelhoff W. F.* Ferromagnetic resonance linewidth in thin films coupled to NiO // J. Appl. Phys. – 1998. – **83**, N 11. – P. 7037-7039.
9. *Sun Y., Song Y., Chang H., Kabatek M., Jantz M., Schneider W., Wu M., Schultheiss H., Hoffman A.* Growth and ferromagnetic resonance properties of nanometer-thick yttrium iron garnet films // Appl. Phys. Lett. – 2012. – **101.** – P. 152405.
10. *Popov M.A., Zavislyak I.V.* Parametric excitation of spin waves in a nonlinear magnetostatic // J. Tech. Phys. – 2008. – **53**, N 4. – P.472-478.
11. *Pugh P.R.T., Booth J.G., Boyle J.W., Cowen J.A., Boardman A.D., Zavislyak I.V., Bobkov V., Romanyuk V.* Investigations of annealed epitaxial Ga:YIG (lll) films by Brillouin light scattering and microwave spectroscopy // J. Magn. Magn. Mat. – 1999. – **196**. – P. 458-500.
12. *Hansen P.* Anisotropy and magnetostriction of gallium-substituted yttrium iron garnet // J. Appl. Phys. – 1974. – **45**, N 8. – P. 3638.

Надійшла до редколегії 25.11.13

УДК 537.86

Гайдай Ю.О., к.ф.-м.н., доц.,
Сидоренко В.С., к.ф.-м.н., с.н.с.,
Скрипка С.Л., к.ф.-м.н., м.н.с.,
Семенець Ю.Г.[1], інженер,
Сердега І. В., пров. інженер.

Ближньопольовий мікрохвильовий мікроскоп з активним зондом модуляційного типу

Запропоновано нову схему ближньопольового мікрохвильового мікроскопа в якій використовується цифровий НВЧ синтезатор і активний зонд модуляційного типу. Запропонований спосіб реєстрації малих відхилень діелектричної проникності об'єкту, що досліджується, забезпечує високу чутливість та точність вимірювальної системи. На основі теоретичних розрахунків та розроблених схем побудовано експериментальний макет ближньопольового мікрохвильового мікроскопа з активним зондом модуляційного типу.

Ключові слова: ближньопольовий НВЧ мікроскоп, активний зонд, модуляційний зонд, НВЧ синтезатор, варактор.

[1] Київський національний університет імені Тараса Шевченка,03680, м. Київ, пр-т. Глушкова 4г, e-mail: semenetsyuriy1305@gmail.com

Gayday Yu.O., Ph.D., associate professor,
Sidorenko V.S., Ph.D., senior researcher,
Skrypka S.L., Ph.D., junior researcher,
Semenets Yu.G.[1], engineer.
Serdega I.V., lead engineer.

Near-field microwave microscope with active probe of modulation type

A new scheme of microwave near-field microscope that uses a digital synthesizer and an active probe of modulation type is proposed. The proposed registration method of the small permittivity deviations of examined objects provides high sensitivity and accuracy of the measuring system. On the base of theoretical calculations and developed schemes of probe an experimental model of near-field microwave microscope with active probe of modulation type has been designed.

Key Words: near-field microwave microscopy, modulation probe, microwave synthesizer, varactor.

[1] Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03680, Kyiv, Glushkova st., 4g,
e-mail: semenetsyuriy1305@gmail.com

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Скришевський В.А.

Вступ

Розвиток нанотехнологій та поява нанорозмірних пристроїв вимагають наявності відповідних приладів для контролю якості їх виробництва. Такі прилади повинні з високою роздільною здатністю і точністю в робочому діапазоні частот вимірювати такі параметри матеріалів і виробів як діелектрична проникність, тангенс кута діелектричних втрат, магнітна проникність, електропровідність тощо.

На мікророзмірному рівні, вимірювання діелектричних параметрів матеріалів та їх дефектоскопія у НВЧ діапазоні, задля контролю якості їх виготовлення, проводяться за допомогою методів ближньопольової мікрохвильової скануючої мікроскопії (МСМ).

Очевидно, що вирішення поставленої задачі потребує створення чутливих ближньопольових зондів з великою роздільною здатністю. Такі зонди повинні характеризуватись не тільки великою просторовою роздільною здатністю, але і здатністю розрізняти малі відхилення фундаментальних параметрів матеріалів.

Точність таких вимірювань обмежується стабільністю аналогових НВЧ генераторів. В існуючих конструкціях ближньопольових мікроскопів неможливе використання високостабільних цифрових НВЧ синтезаторів.

Відомі способи для вимірювань малих $\Delta\varepsilon$ ґрунтується на тому, що при зсуві резонансної частоти зонда під дією $\Delta\varepsilon$ зразка, частоту НВЧ генератора перестроюють на величину зсуву. Прикладом, є мікроскоп розроблений Ксіангом

© Ю.О. Гайдай, В.С. Сидоренко, Скрипка С.Л., Ю.Г. Семенець, І.В. Сердега, 2014

(X.D. Xiang) і Гао (C. Gao) [3]. Застосування такого мікроскопа можливе лише на частотах нижче 2-3 ГГц. Це обмеження пов'язане з тим, що в даній схемі фазовий обертач і фазовий детектор є елементами електроніки, а транзисторні фазові детектори ефективно працюють на частотах менших ніж 3 ГГц. Так, наприклад, фазовий детектор AD8302 [5] може працювати на частотах до 2,7 ГГц, а ФК2-29 вітчизняного виробництва до 1 ГГц. Таким чином, даний мікроскоп дає можливість отримати відносно точні дані щодо діелектричних параметрів речовини лише в області частот нижче ніж 2,7 ГГц. Окрім цього, недоліком є те, що точність транзисторного НВЧ фазового детектора недостатня для вимірювання малих неоднорідностей діелектричної проникності $\Delta\varepsilon$.

Частково вирішити проблему розширення робочої частоти мікроскопа, вдалося в модуляційній схемі мікроскопа [4]. Головною особливістю і перевагою мікроскопа модуляційного типу над мікроскопом компенсаційного типу, виготовленим Ксіангом і Гао [3], є те, що компенсація відбувається на частоті модуляції 3кГц, а не на НВЧ. Відповідно, всі пристрої (крім резонатора та генератора) є звичайними пристроями електроніки, які працюють на частоті 3кГц, що знімає обмеження застосування даного мікроскопа по діапазону НВЧ. Проте ніяких принципових змін в систему вимірюваннь це не вносить. Для високої чутливості даного мікроскопа до малих змін $\Delta\varepsilon$ необхідно, щоб в схемі Стейнхауера [4] використовувався високостабільний генератор, який можна було б перестроювати та модулювати по частоті, що є дуже складною і коштовною технічною проблемою.

Тому, нами була поставлена задача винайдення нових схем ближньопольової мікроскопії, в яких немає таких обмежень.

Опис способу та пристрою

Спільною рисою для всіх вище розглянутих мікрохвильових ближньопольових мікроскопів є наявність генератора, що перестроюється по частоті. Нестабільність аналогових генераторів вносить додаткові похибки в вимірювання малих зміщень максимуму резонансної характеристики схеми, що, в свою чергу, негативно впливає на точність вимірювань $\Delta\varepsilon$. Неточність фіксації зміщення максимуму резонансної характеристики резонатора призводить, відповідно, до похибки у визначенні $\Delta\varepsilon$.

З іншого боку, існують цифрові НВЧ генератори – синтезатори частоти на основі високодобротних, високостабільних кварцових резонаторів, які забезпечують належну стабільність. Але вони мають сітку фіксованих частот і не можуть плавно перестроюватись системою автоматичного регулювання відомого модуляційного способу [4].

Нами розроблено новий спосіб вимірювання малих неоднорідностей діелектричної проникності $\Delta\varepsilon$ [1,2], який забезпечує

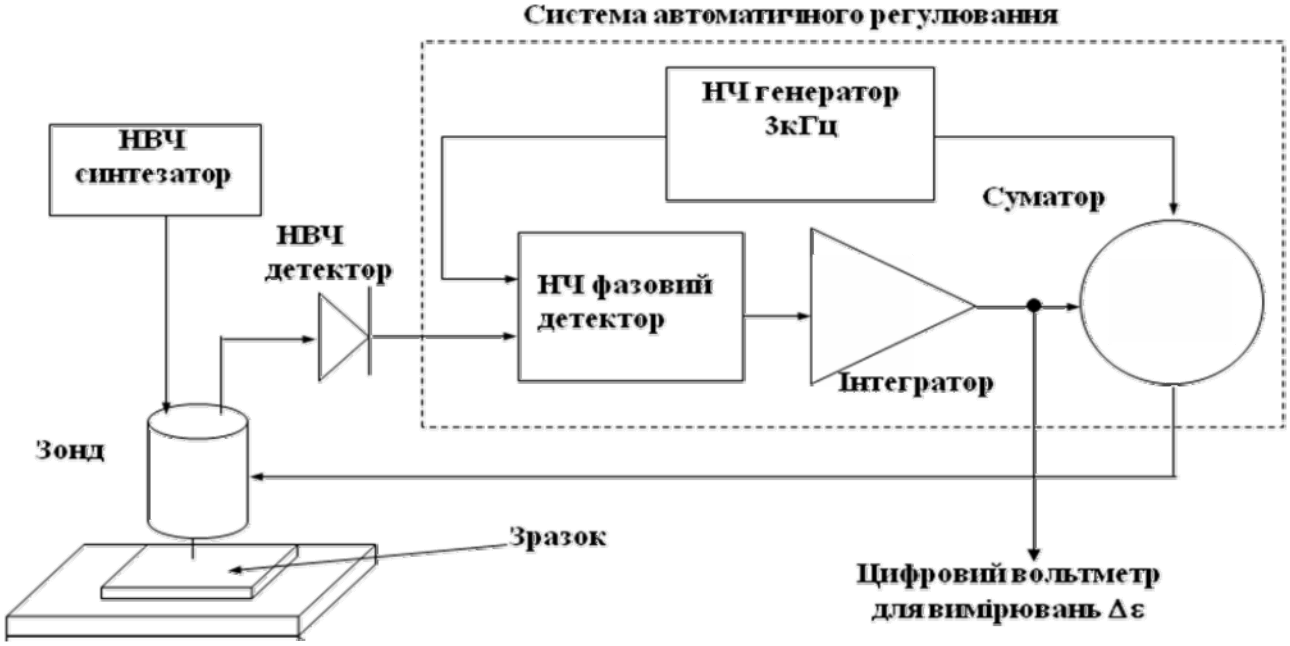


Рис. 1 Принципова схема ближньопольового мікрохвильового мікроскопа з активним зондом модуляційного типу

покращення точності вимірювань шляхом використання найбільш стабільних НВЧ генераторів – НВЧ синтезаторів із високостабільними фіксованими частотами і одночасно забезпечує апаратне спрощення та здешевлення ближньопольового мікрохвильового мікроскопа.

Принципова відмінність даного типу мікроскопа полягає в тому, що впродовж роботи схеми, генератор не змінює свою частоту, а лінійна і модуляційна (за гармонічним законом) зміна резонансної частоти резонатора відбувається за рахунок поміщеного в резонатор феритового зразка [1,2]. Тобто, ми змінюємо не частоту генератора, як в [3,4], а зсуваємо та модулюємо резонансну частоту зонда, повертаючи її на фіксовану частоту НВЧ синтезатора.

Схема працює наступним чином (рис.1). Сигнал з НВЧ синтезатора подається на резонатор, з нього на діодний детектор, далі вже НЧ сигнал підсилюється, після чого подається на НЧ фазовий детектор де порівнюється з опорним сигналом НЧ модуляції. Сигнал модуляції одночасно додається до постійної складової вихідного сигналу інтегратора та подається на систему керування зондом.

Сигнали зсуву та НЧ модуляції подаються на систему керування резонансною частотою зонда, таким чином він з пасивного некерованого стає активним керованим, а НВЧ генератор навпаки – з керованого стає некерованим з фіксованою частотою, що дозволяє застосувати високостабільні цифрові НВЧ синтезатори і покращити точність вимірювань малих $\Delta\varepsilon$.

Керування зондом, тобто модуляція та зсув його резонансної частоти може здійснюватись будь-яким способом – електричним (варікап, варактор), магнітним (ферит), чи механічним (п'єзоелемент, електромагніт). Це впливає тільки на технічну реалізацію того чи іншого варіанта пристрою, а сам спосіб залишається незмінним – для вимірювання малих неоднорідностей здійснюється зсув та НЧ модуляція резонансної частоти керованого зонда відносно фіксованої частоти НВЧ синтезатора.

Згідно з рис. 1 у вихідному стані, без зразка, система автоматичного регулювання подає з суматора на резонатор зонда НЧ сигнал модуляції від НЧ генератора. Таким чином, НВЧ резонансна частота зонда модулюється відносно фіксованої частоти НВЧ синтезатора, тому відбитий від резонатора зонда НВЧ сигнал стає модульованим, тобто у нього з'являється НЧ спектр модуляції з непарними та парними гармоніками, які виділяються НВЧ детектором і подаються на вхід НЧ фазового детектора системи автоматичного регулювання. На другий вхід фазового детектора подається опорний

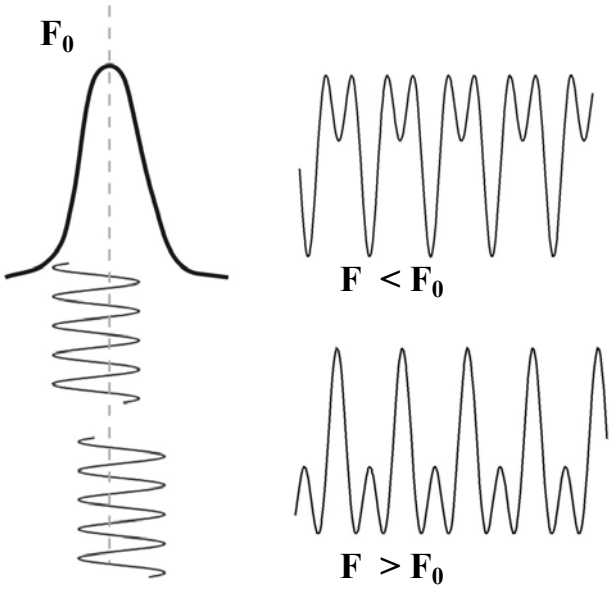


Рис. 2 Сигнал на виході фазового детектора при розстройці смуги частотної модуляції відносно резонансної частоти моди.

сигнал з НЧ генератора сигналу модуляції. Якщо НВЧ смуга модуляції зонда симетрична відносно фіксованої частоти НВЧ синтезатора, то непарні гармоніки на виході НВЧ детектора дорівнюють нулю і таким чином НЧ фазовий детектор видає в систему автоматичного регулювання нульовий сигнал похибки. Графіки роботи модуляційної системи показані на рис. 2.

При піднесенні зразка до голки зонда, центральна частота резонатора зонда разом зі смугою модуляції зміщується відносно фіксованої частоти НВЧ синтезатора, тобто смуга частотної модуляції зонда стає несиметричною відносно фіксованої частоти синтезатора, на виході НВЧ детектора з'являється перша гармоніка модуляційного сигналу НЧ, і тому в системі автоматичного регулювання після НЧ фазового детектора та інтегратора з'являється постійна складова напруги регулювання, величина якої пов'язана з величиною зсуву резонансної частоти зонда відносно фіксованої частоти НВЧ синтезатора, а таким чином і з величинами ε або $\Delta\varepsilon$ зразка, а знак залежить від знаку розстройки Δf резонатора зонда відносно фіксованої частоти НВЧ синтезатора. Постійна напруга регулювання додається до сигналу модуляції зонда і зміщує його резонансну частоту разом з полосою модуляції до

відновлення симетричного стану останньої відносно фіксованої частоти НВЧ синтезатора, коли перша гармоніка на виході НВЧ детектора знову дорівнюватиме нулю, тобто зникає постійна складова на виході фазового детектора і таким чином перестає змінюватись постійна напруга на виході інтегратора та суматора. Вимірюючи цифровим вольтметром постійну напругу інтегратора, яка необхідна для компенсації частотного зсуву резонатора зонда під дією Δε зразка, можна з великою точністю фіксувати значення цих діелектричних величин. При кожній зміні Δε в процесі сканування поверхні зразка буде змінюватись постійна напруга компенсації зсуву смуги модуляції зонда, та фіксуватись комп'ютером. Таким чином відбувається відслідковування найменших змін Δε.

Запропонована методика за рахунок керованого активного зонду модуляційного типу забезпечує збільшення точності реєстрації малих зміщень резонансної частоти зонда, цифровий НВЧ синтезатор підвищує стабільність тракту, тобто зменшується похибка виміру малих величин Δε і, таким чином, значно підвищується роздільна здатність вимірювання малих неоднорідностей величини діелектричної проникності зразків Δε та одночасно забезпечується апаратне спрощення і здешевлення ближньопольового мікрохвильового мікроскопа.

Експериментальний макет приладу

Для технічної реалізації зондуючої системи, було розроблено схему з активним модуляційним ближньопольовим зондом [1] та цифровим високостабільним синтезатором НВЧ сигналу. Блок-схема прототипу даного пристрою та його фотографія показані на рис.3 та рис.5 відповідно.

Зондуючу систему можна умовно поділити на три основні блоки:

- НВЧ система, що включає сам зонд, резонатор із системою перестройки по частоті, секцію збудження резонатору та детекторну секцію (рис. 4.).
- НЧ систему, що включає активні фільтри, синтезатор НЧ сигналу та фазовий детектор.
- Систему стабілізації напруги живлення з інтегрованою у неї схемою стабілізації температури НВЧ резонатора.

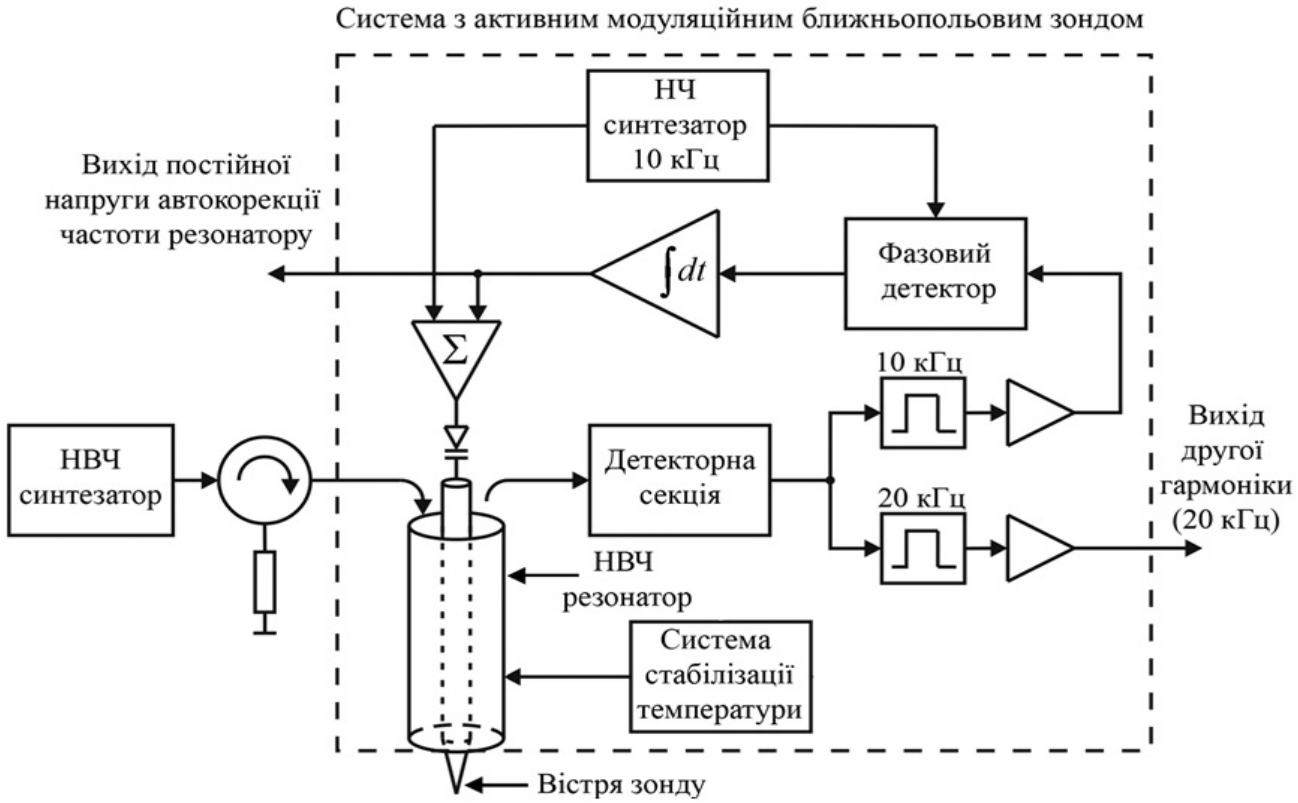


Рис. 3 Схема діючого експериментального макета ближньопольового мікрохвильового мікроскопа з активним зондом модуляційного типу.

Геометричні параметри резонатору обрано таким чином, щоб його резонансна частота потрапляла в діапазон 6-12 ГГц, оскільки саме в такому діапазоні існують смуги, що широко використовуються при створенні НВЧ радіоапаратури.

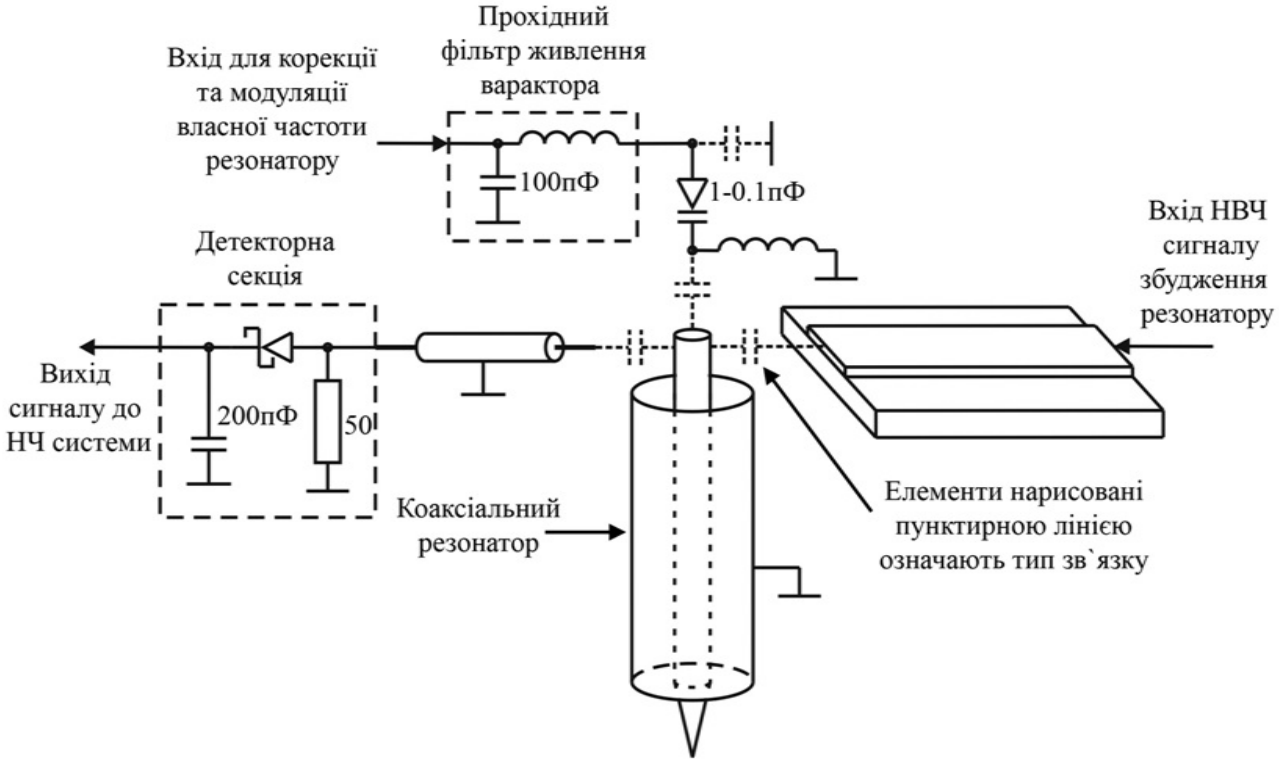


Рис. 4 Принципова схема НВЧ системи.

Збудження НВЧ системи здійснюється за допомогою фазо-стабілізованого НВЧ синтезатора через допоміжну мікросмужкову лінію (рис.4), що має слабкий ємнісний зв'язок з резонатором на одному з його кінців, тобто в області максимуму електричного поля. В тому ж самому місці встановлено НВЧ варактор. Керування варактором здійснюється через LC-фільтр реактивний опір якого було підібрано таким чином, щоб він був мінімальним в досліджуваному діапазоні частот.

Для усунення умови формування стоячих хвиль між синтезатором та резонатором встановлено феритовий невзаємний елемент.

Принцип роботи НВЧ системи полягає в наступному. За допомогою синтезатора в резонатор подається НВЧ сигнал та збуджується його перша мода TEM. В свою чергу, на варактор подається змінна компонента НЧ сигналу частотою 10 кГц, що призводить до циклічного зсуву власної частоти резонатора відносно частоти синтезатора. Це, в свою чергу, призводить до виникнення амплітудної модуляції та відповідної зміни спектру НВЧ сигналу в самому резонаторі. Далі сигнал відгалужується та потрапляє в детекторну секцію де виділяються його НЧ спектральні компоненти. Результуючий низькочастотний сигнал подається на подальшу обробку в НЧ систему автоматичного регулювання.

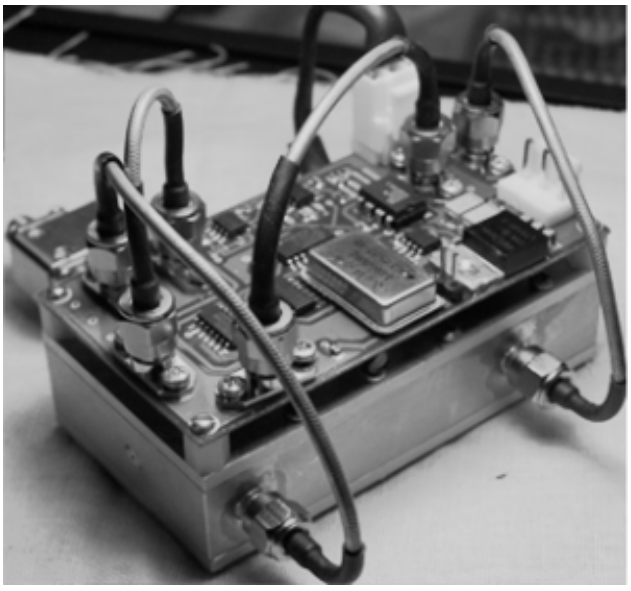


Рис. 5 Фотографія діючого експериментального макета ближньопольового мікрохвильового мікроскопа з активним зондом модуляційного типу.

Основний принцип роботи НЧ системи полягає в наступному. Як було зазначено в

попередньому розділі, спектральні компоненти з виходу детекторної секції подаються на вхід НЧ системи. Оскільки з усього спектру нас цікавлять лише перші дві гармоніки на частотах 10 кГц та 20 кГц, то в першому каскаді НЧ системи відбувається розділення, фільтрація та підсилення окремо кожної з них. Далі сигнал першої гармоніки подається на один з входів НЧ помножувача гармонічних сигналів AD633, який за рахунок послідовного з'єднання з пасивним фільтром низьких частот та інтегратором, утворює фазовий детектор. На другий вхід AD633 подається фазостабільний сигнал опорного НЧ синтезатора. Отримана на виході інтегратора постійна напруга за допомогою операційного підсилювача додається до змінної напруги НЧ синтезатора, та подається в НВЧ систему безпосередньо на варактор. Таким чином, одночасно здійснюється, як частотна корекція за рахунок постійної компоненти напруги, так і гармонічна модуляція – за рахунок змінної компоненти, власної частоти першої моди НВЧ резонатора.

Очевидно, що за такої схеми, зміна величини постійної амплітуди на варакторі та амплітуди другої гармоніки, буде залежати від зміни фундаментальних параметрів НВЧ резонатора тобто, частоти його першої моди та його добротності, які в свою чергу залежать від параметрів матеріалу, що вноситься в область ближнього поля вістря зонду. Таким чином, вимірюючи зміну амплітуди постійної напруги на варакторі та зміну амплітуди другої гармоніки, можна визначити величину зміни комплексної діелектричної проникності $\Delta\varepsilon$ досліджуваного зразка.

Висновки

Розроблені новий модуляційний метод ближньопольової мікрохвильової діагностики діелектричних матеріалів та схема ближньопольового мікроскопа. З'явилася можливість застосування замість дорогих стабільних аналогових генераторів порівняно дешеві і високостабільні цифрові НВЧ синтезатори, чим додатково підвищується роздільна здатність вимірювань малих значень неоднорідностей діелектричної проникності зразків. Теоретичні розрахунки та апробація експериментального макету, показали високу ефективність ближньопольового мікрохвильового мікроскопа з активним зондом модуляційного типу.

Робота виконана в рамках бюджетної теми №12БП052-01.

Список використаних джерел

1. *Sidorenko V.S.* Active probe of modulation tipe in microwave microscopy / V.S. Sidorenko, Yu.O. Gayday, P.D. Apalkovski, O.V. Sinkevich // Radiophysics and Electronics. Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. – 2011. – №15, – P. 53-56.
2. *Grygoruk V.I.* Near-field microscopy with active probe of modulation type / V.I. Grygoruk, V.S. Sidorenko, P.D. Apalkovsky // Proc. of the XII International young scientists' conference on applied physics, chapter Physics and Electronics of Semiconductors and Dielectrics. – Kyiv, Ukraine. – 23-26 may 2012. – P. 128-129.
3. Patent № US 6,532,806 B1 США, МПК7 G 01 B 7/34, H 01 J 37/20. Scanning evanescent electro-magnetic microscope / X.D. Xiang, C. Gao, P.G. Schultz, T. Wei; applicant and patentee The Regents of the University of California, Oakland, CA (US). — № 09/695,508; stated 23.10.2000; posted 18.03.2003.
4. Patent № US 6,376,836 B1 США, МПК7 H 01 J 3/14. Disentangling sample topography and physical properties in scanning near-field microwave microscopy / S.M. Anlage, B.J. Feenstra, D.E. Steinhauer; applicant and patentee University of Maryland, College Park, MD (US). — № 09/473,961; stated 29.12.1999; posted 23.04.2002.
5. http://www.analog.com/ru/rfif-components/logampsdetectors/ad8302/ products/ product.html

Надійшла до редколегії 13.11.2013

УДК 537.311.33

Гандзюк В.І.[1], студ.,
Оберемок О.С., к.ф.н., м.н.с.
Павлюк С.П.[2], к.ф.-м.н, с.н.с

Інжекційні ефекти в кремнієвій симетричній n^+-n-n^+ структурі при живленні в режимі генератора напруги

Показано, що неоднорідний розігрів кремнієвої симетричної n^+-n-n^+ мікроструктури при живленні в режимі генератора напруги призводить до формування в ній високоомної області. Проведено розрахунки поля, температури та концентрації у високоомній області структури, показано, що вона являє собою термічний градієнтно-дрейфовий домен з концентрацією носіїв заряду менше за термічно рівноважну. Досліджена динаміка формування та руйнування домену.
Ключові слова: інжекція, ТГД-домен, b-дрейф

[1] Київський національний університет імені Тараса Шевченка,03680, м. Київ, пр-т. Глушкова 4г, e-mail: gandziuk2009@gmail.com,

[2] Київський національний університет імені Тараса Шевченка,03680, м. Київ, пр-т. Глушкова 4г, e-mail: pps@univ.kiev.ua

V. I. Gandziuk[1], stud.,
O.S.Oberemok Ph.D
S. P. Pavliuk[2], Ph.D.

Injection effects in silicon symmetric n^+-n-n^+ structure in power generator mode

It was shown that non-uniform heating of silicon symmetric n^+-n-n^+ microstructure in power generator mode leads to formation of high-resistance region in it. The calculations of field, temperature and concentration in high resistance region were conducted. It was shown that region was formed by thermal gradient-drift domain with concentration of charged carriers lower than equilibrium once. The dynamics of formation and destruction of domain was investigated.

Key Words: injection, THD-domain, b-drift

[1] Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03680, Kyiv, Glushkova st., 4g,
e-mail: gandziuk2009@gmail.com

[2] Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03680, Kyiv, Glushkova st., 4g,
e-mail: pps@univ.kiev.ua

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Скришевський В.А.

Неоднорідний джоулів розігрів зразка з інжектованою через контакти електронно-дірковою плазмою призводить до утворення термічного градієнтно-дрейфового (ТГД) домену [6,7]. Виникаюча ситуація характеризується тим, що при сильній контактній інжекції електронів і дірок у зразку виникає область - ТГД домен, де концентрація носіїв заряду нижче за рівноважну. В цей же час поза доменом концентрація електронів і дірок на порядок і більше перевищує рівноважну. Факт утворення домену й такий розподіл концентрації носіїв заряду були встановлені з розподілів вздовж зразка питомого опору, знятих у різні моменти дії на зразок імпульсу напруги й після його закінчення, а також з розрахунків температури різних точок зразка [6]. Можливий більш безпосередній спосіб фіксації домену. Якщо скрізь у зразку, крім області домену, концентрація носіїв заряду значно перевищує рівноважну, то із усього зразка, за винятком цієї області, повинно виходити рекомбінаційне випромінювання, яке можна спостерігати в ІЧ діапазоні. З іншого боку після виникнення, домен є найбільш високоомною частиною зразка і тому найбільше розігрівається. При сильному розігріві домену швидкість термічної генерації в ньому електронно-діркових пар перевищує швидкість їхнього виносу, і домен руйнується. Виходячи зі сказаного, варто очікувати, що в режимах, близьких до граничного для існування домену, тобто перед його руйнуванням, з домену й прилягаючої до нього частини зразка повинно виходити інтенсивне випромінювання [8], пов'язане із електролюмінесценцією.

Експериментальні дослідження [6-8] повністю підтвердили теоретичні передбачення. Дослідження проводились на зразках германію та кремнію, з розмірами до 1 см, виготовлених з інжектуючими контактами і зі структурою

© В.І.Гандзюк, С.П.Павлюк, 2014

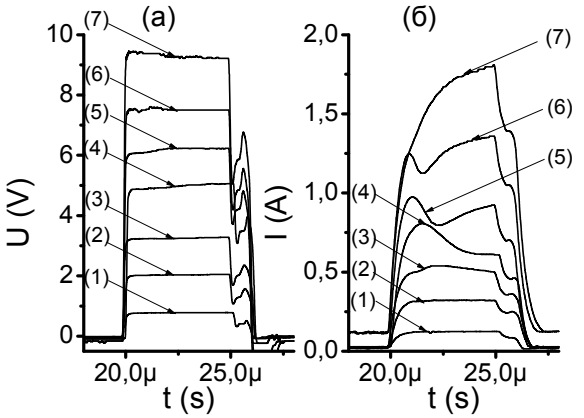


Рис.1 Осцилограми імпульсів напруги та струму

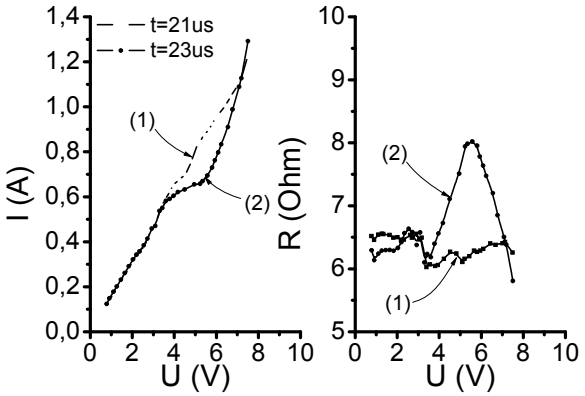


Рис.2 Вольт-амперні характеристики та залежність опору структури від амплітуди імпульсу напруги

$p^+ - n - n^+$. В роботі [9] наведено експериментальні результати дослідження кремнієвих польових транзисторів, виготовлених за технологією «кремній на ізоляторі» (КНІ транзистори), які мали структуру $p^+ - i - n^+$, товщину плівки кремнію до 400 нм. На таких структурах в режимі живлення генератором струму спостерігалось виникнення високопольової області.

У зв'язку з мікромініатюризацією всіх компонентів інтегральних мікросхем (ІМС) суттєво зменшується їх розмір. Значення протікаючих струмів при цьому зберігається, що призводить до зростання їх густини. Тому дослідження симетричних структур типу $n^+ - n - n^+$, які є найпоширенішим типом резисторів напівпровідникових ІМС, за великої густини протікаючих струмів є актуальними і можуть бути цікавими для розробників елементів ІМС. Експериментальні результати таких досліджень при живленні структур в режимі генератора струму описано в роботі [5].

Метою даної роботи було дослідження симетричних структур типу $n^+ - n - n^+$ резисторів із різними геометричними розмірами при живленні в режимі генератора напруги.

Залежності рухливості електронів μ_n і дірок μ_p від температури T часто мають різний вигляд. Наприклад, у випадку, що нас далі буде цікавити, при розсіюванні носіїв заряду на теплових коливаннях ґратки в германії, кремнії й ряді інших напівпровідників $\mu_n \sim T^{\alpha}$, $\mu_p \sim T^{\beta}$, $\alpha \neq \beta$ [6]. При неоднорідному розігріві таких напівпровідників у них виникає градієнт $b = \mu_n / \mu_p$

$$\frac{db}{dx} = (\alpha - \beta)\frac{b}{T}\frac{dT}{dx} \qquad (1)$$

x — координата вздовж зразка.

Неоднорідний розігрів може виникнути через джоулів розігрів зразка струмом, що протікає через нього, або може бути створений зовнішніми джерелами тепла. Якщо в зразку є електронно-діркова плазма, то градієнт b призводить до зміни концентрації електронів n і дірок, p зі швидкістю

$$B = \frac{np}{q(bn+p)^2} j \frac{db}{dx} \qquad (2)$$

q — заряд електрона, j — густина струму, n, p - концентрації електронів та дірок відповідно.

Механізм цього процесу, названого b-*дрейфом* [6], пояснений у роботі [8]. Він є причиною різних сильних ефектів. Однак фізичні механізми, що лежать в основі цих ефектів, мають досить загальний характер, і тому можуть реалізуватися в електронно-дірковій плазмі й інших напівпровідниках. У цей час, щодо виявлення й дослідження цих ефектів, одним з найцікавіших матеріалів є кремній. Це зв'язано з наступною обставиною. У германії $\alpha - \beta = 0.67$, а в кремнії $\alpha - \beta = -0.3$, тому в співвідношенні (1) у них різні знаки. Це, відповідно до наведених у [6, 7] теоретичних представлень, повинно призводити до принципових відмінностей ефектів в германії та кремнії, що легко спостерігаються. Так ТГД-домен в германії утворюється при додатному градієнті

температури, а у кремнії – відповідно, при від'ємному.

Експериментальні зразки.

Експериментальні зразки – кремнієві дифузійні резистори, виготовлені за технологією КСДІ. Це симетричні $n^+ - n - n^+$ структури з електричними контактами із алюмінію (Al) до n^+-областей. Вони розташовані в «кишенях», що відокремлені шаром SiO_2 завтовшки ≈ 2мкм від підкладинки із полікремнію товщиною 300 мкм. «Кишені» мають різну глибину h_1 (від 2.8 мкм до 10.5 мкм). Довжина структур 2.4 мкм, ширина 9.8 мкм. Докладно експериментальні зразки описано в роботі [5].

Методика досліджень.

Досліджувалися осцилограми імпульсів струму та будувалися імпульсні вольт-амперні характеристики в режимі живлення генератором напруги для різних моментів імпульсу. З ВАХ структур розраховувалися залежності їх опору від амплітуди імпульсу напруги.

Осцилограми імпульсів струму.

Осцилограми імпульсів напруги були прямокутні (рис. 1 ,а), і їх форма не змінювалась при зміні величини протікаючого струму (рис. 1, б). За невеликих амплітуд імпульсу напруги імпульс струму теж мав прямокутну форму (криві 1-3, рис. 1, а, б). За достатньо великих амплітуд напруги спостерігалося після досягнення струмом величини $I_{\max}$ його падіння до $I_{\min}$ (крива 5, рис. 1,б).

При подальшому збільшенні амплітуди імпульсу пік струму зміщується до початку імпульсу (крива 6, рис. 1, б). Падіння струму в кінці імпульсу змінюється на збільшення струму і руйнування зразка (крива 7, рис. 1, б).

Вольт-амперні характеристики

Для моментів часу, коли імпульс струму досягав максимального $I_{\max}$ та мінімального $I_{\min}$ значень, будувалися вольт-амперні характеристики (рис.2, а) і залежності опору структури від напруги (рис. 2, б).

ВАХ моменту $I_{\max}$ має лінійний вигляд (рис. 2.а, крива 1), і опір майже не змінюється в досліджуваному діапазоні напруг.

ВАХ для моменту $I_{\min}$ має нелінійну форму (рис. 2.а, крива2). На ній є 3 ділянки: 1 – лінійна – постійне поле та опір (рис. 3). 2 ділянка – область насичення струму – поле збільшується, виникає високо польова область ТГД домену. 3 область – зникнення ТГД домену, зменшення поля та опору.

Оцінка поля E

Зразок при лінійній частині ВАХ можна розділити на три частини – дві інжекційні області і середину зразка. Оцінити Е можна розділивши довжину без дифузійних областей на напругу. Поле буде приблизно лінійне і до моменту виникнення ТГД домену воно досягає величини $E = 1.27 \times 10^4 \ \ B/см$.

Після організації ТГД домену картина змінюється. Відповідно до результатів, описаних в [5], основне падіння напруги відбувається на області виникнення домену, і з цієї області спостерігається інтенсивне випромінювання, яке пов'язане з електролюмінісценцією. Розмір області випромінювання складає в середньому $1.5 \ мкм$. Після виникнення домену поле збільшилося до $E = 2.16 \times 10^4 \ \ B/см$. Перед зникненням домену поле досягло $E = 3.55 \times 10^4 \ \ B/см$. Після руйнування домену поле зменшилось до величини $E = 2.33 \times 10^4 \ \ B/см$.

Оцінка температури

Поле в домені досягає величини, за якої відбувається насичення дрейфової швидкості носіїв заряду [3]. Відповідно до методики, яка описана в роботі [4,] можна оцінити температуру в області домену. В різні моменти існування ТГД домену вона досягає значень $T = 1390 \div 1490 \ K$

Оцінка концентрації

Знання Е і Т дозволило за допомогою формул

$$n = \frac{j}{q\left(\mu_n + \mu_p\right)E} = \frac{j}{q\left(\nu_{dn} + \nu_{dp}\right)}$$

$$n_i = 7.54 \times 10^{15} T^{\frac{3}{2}} \exp\left[\frac{-6493}{T}\right],$$

де v_{dn} та v_{dp} - дрейфові швидкості електронів та дірок відповідно, оцінити в певних точках зразка концентрацію n та термодинамічну рівноважну концентрацію n_i. В точці максимуму поля, в області середини зразка, поле досягає $E = 3.55 \times 10^4 \ B/см$. Температура оцінена за методикою [3] і в моменти $I_{\max}$ досягає $T \approx 1440 \ K$. Значення концентрації носіїв $n = 1.45 \times 10^{17} \ см^{-3}$, а $n_i = 4.53 \times 10^{18} \ см^{-3}$

Обговорення отриманих результатів

Відомо. що при протіканні струму крізь зразок з контактами, які інжектують електрони та дірки, в ньому завжди встановлюється розподіл електричного поля E(x) з максимумом [3]. Саморозігрів зразка також неоднорідний. Відповідно до [4], градієнт температури може досягати $5 \times 10^6 \ K/см$. Відповідно виникає градієнт b і його величина, оцінена за формулою (1), досягає величини $-5000 \ см^{-1}$. Домен, який виникає, є найбільш високоомною областю, і область максимальної температури знаходиться в ньому. Концентрація носіїв заряду в максимумі поля менше термодинамічно-рівноважної концентрації, і в області домену носії заряду не рекомбінують, а генеруються. Зазначимо, що розігрів зразка, зменшення концентрації зарядів в максимумі поля та падіння струму відбуваються одночасно. Тому домен, що виникає в симетричній $n^+ - n - n^+$ структурі, – ТГД домен.

Висновки

1. Термічний розігрів КСДІ структури протікаючим струмом призводить до виникнення термічного градієнтно-дрейфового домену.
2. Термічний розігрів структури протікаючим струмом, формування домену та падіння струму відбуваються одночасно.

3. Концентрація носіїв в домені може досягати значень менших за термодинамічно-рівноважні.

Список використаних джерел

1. *Smith R.* Semiconductors – Moscow: Mir, 1982 – 560 p. (in Russian).
2. *Zi S.* Physics of semiconductor devices – Moscow: Mir, **1** – 1984 – 454 p (in Russian)
3. *Dobrovolsky V.N., Ishchuk L.V., Ninidze G.K., Balucani M., Ferrari A., Lamedica G.* High-amplitude high-frequency oscillations of temperature, electron-hole concentration, and current in silicon-on-insulator structures // J.Appl.Phys. – 2000. – **88**, N 11. – P.6554-6559.
4. *Lampert M., Mark P.* Injection currents in solids – Moscow: Mir, 1973 (in Russian)
5. *Pavliuk S.P.,Kushnirenko V.V., Ninidze G.K., Konovalenko L.D.* Investigation of silicon diffusion resistors in the flow of current pulse of high density // Technology and designing of microchips, **5** – 2005 – N 59 – P. 23-26. (in Russian)
6. *Dobrovolsky V.N., Pavliuk S.P.* Thermal gradient-drift domain in electron-hole plasma of germanium // FTS, **15** – 1981 – N 1. (in Russian)
7. *Dobrovolsky V.N., Pavliuk S.P., Romanov A.V.* Injection effects in non-uniform heated silicon // FTS, **15** – 1981 (in Russian)
8. *Dobrovolsky V.N., Pavliuk S.P., Paltsev I.E., Romanov A.V.* Light emission of electron-hole plasma, which contains thermal gradient-drift domain // FTS, **19** – 1985 – N 8. (in Russian)
9. *Dobrovolsky V.N., Ischuk L.V., Ninidze G.K., Pavljuk S.P., Plichko Y.O.* Self-organization in SOI FET // Microelectronic engineering, **72** – 2004 – P. 383-387.

Надійшла до редколегії 18.11.13

УДК 004.45

Загороднюк С.П.[1], к.ф.-м.н.

Використання служби Windows Server Update Services в гетерогенних локальних обчислювальних мережах з відсутнім централізованим адмініструванням

В статті пропонується метод прозорої переадресації трафіку, що генерує служба автоматичного оновлення операційних систем Microsoft Windows, на службу Windows Software Update Services за допомогою апаратно-програмного комплекса на основі маршрутизатора Cisco ASA з підтримкою протоколу WCCP, а також програми проксі-сервера Squid з додатковим програмним модулем-переадресатором. Представлено результати тестування і впровадження апаратно-програмного комплекса в мережі Київського університету імені Тараса Шевченка.

Ключові слова: оновлення програмного забезпечення Microsoft, служба Windows Update, проксі-сервер, модуль-переадресатор.

[1] Київський національний університет імені Тараса Шевченка,03680, м. Київ, пр-т. Глушкова 4г, e-mail: kola@univ.net.ua

S. P. Zagorodniuk[1], PhD.

Using a Windows Server Update Services in heterogeneous local area networks with decentralized administration

The article presents the method of transparent redirection of traffic generated by Automatic Updates service in operating systems Microsoft Windows to the service Windows Software Update Services using hardware-software system based on Cisco ASA router with WCCP protocol support, as well as proxy server Squid with additional software redirection module. The results of the testing and implementation of hardware-software system in a network of Kyiv Taras Shevchenko National University are also present in the article.

Key Words: Microsoft software update,Windows Update service, proxy server, redirection module.

[1] Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03680, Kyiv, Glushkova st., 4g, e-mail: kola@univ.net.ua

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Погорілий С.Д.

Своєчасне оновлення операційних систем (ОС) та програмних продуктів є важливим підгруттям стабільності [4] і безпеки [5] програмного забезпечення (ПЗ). Для комерційного пропрієтарного ПЗ це означає, в першу чергу, комерційний успіх від поширення ПЗ, а також зміцнення репутації його виробника. Для безкоштовного вільного ПЗ це означає довготривалість існування проекту по його розробці та підтримці, інтегрованість та сумісність його функціоналу з іншими існуючими апаратно-програмними комплексами.

Користувачі ПЗ доволі часто задають просте і очевидне, на їх погляд, запитання: чому одразу не можна розробити стабільне і безпечне ПЗ, що не потребує подальшого оновлення? На практиці виявляється, що не можна за багатьма причинами Безкоштовне ПЗ, як правило, поширюється на умовах "As Is". Розробники комерційного ПЗ мають чітко визначений обмежений час на відлагоджування ПЗ з наперед заданою функціональністю. Цей час визначається як золота середина між двома крайніми негативними випадками. Якщо час відлагоджування надто малий, то рівень стабільності і безпеки цього ПЗ буде низький, що не буде відповідати його ринковій вартості. Якщо час відлагоджування, навпаки, надто великий, то ПЗ буде представлено на ринку з великою затримкою і програє конкурентну боротьбу з ПЗ від іншого виробника. Для користувачів обох видів ПЗ - безкоштовного і комерційного, як правило, організовано зворотній зв'язок для централізованого накопичення зауважень і побажань щодо експлуатації ПЗ. З наведених тверджень випливає очевидний висновок: ПЗ повинно бути вчасно представлено і доступно для користувачів, а процес його відлагоджування повинен продовжуватись і тривати ще деякий період часу.

© С.П. Загороднюк, 2014

Всесвітньо відомі корпорації-виробники ПЗ (Microsoft, Adobe і т.п.), що мають вже сформовану стійку репутацію, дозволяють собі представляти на ринку не повністю відлагоджене ПЗ і фактично використовувати користувачів цього ПЗ як велетенську армію бета-тестерів, не сумніваючись у тому, що в результаті звернень користувачів до служби підтримки завершальний етап відлагодження ПЗ буде протікати набагато швидше і ефективніше, ніж в результатів випробовування ПЗ кадровими розробниками корпорацій.

Процес оновлення ПЗ являє собою автоматичне завантаження та встановлення пакетів оновлень. Для цього в ОС Microsoft Windows зареєстрована і постійно працює служба Automatic Updates (Windows 2000, XP, 2003) або Windows Update (Windows Vista, 7, 8, 2008, 2012). Ця служба щодоби з'єднується з загальносвітовим глобальним центром оновлень корпорації Microsoft і перевіряє наявність нових пакетів оновлень. Однак очевидно, що коли підприємство або установа має багато комп'ютерів з однотипною ОС, то важко назвати раціональним факт з'єднання кожного індивідуального комп'ютера з глобальною загальносвітовою службою оновлення і багатократне завантаження з неї однакових файлів. Саме з метою раціонального використання Інтернет-каналу підприємства корпорація Microsoft надає можливість кожному підприємству додатково налаштувати в своїй локальній мережі спеціалізовану службу - Windows Server Update Services (WSUS) [4-6]. Ця служба дозволяє багатократно скоротити зовнішній мережевий трафік, що є вкрай важливим для регіональних підрозділів і відділень підприємства. Крім того, коли WSUS тримує новий пакет оновлень, він може бути попередньо проаналізований і перевірений адміністратором на сумісність з існуючим ПЗ, що використовується на підприємстві і тільки при позитивному результаті тестування дозволені ним для встановлення на робочі станції та сервери підприємства.

Однак розгортання і налаштування лише самої служби WSUS є недостатнім для того, щоб всі комп'ютери підприємства з операційною системою Windows стали нею активно користуватись. Клієнтська частина служби WSUS операційної системи Windows, роль якої виконує вбудована в операційну систему Windows служба Windows Update / Automatic Update (WU/AU), також повинна бути додатково сконфігурована у такий спосіб, щоб запити на завантаження нових оновлень були адресовані не глобальному центру оновлень, а до розгорнутої і функціонуючої в локальній мережі підприємства службі WSUS.

Налаштування служби WU/AU на одному комп'ютері як клієнта до служби WSUS не є складним [7]. Воно полягає в явному присвоюванні URL-посилання на службу WSUS конкретному параметру локальної політики ОС Windows (рис. 1). Для англомовної ОС Windows цей параметр називається «Specify intranet Microsoft update service location» (SIMUSL).

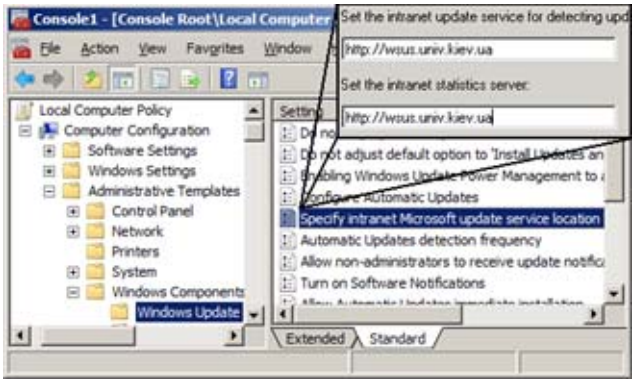


Рис. 1. Ручне налаштування служби WU/AU як клієнта до служби WSUS.

Наявність стандартного параметра SIMUSL породжує проблему централізованого масового застосування цього параметра на всіх комп'ютерах підприємства. В багатьох випадках ця проблема ефективно вирішується шляхом впровадження мережевих служб централізованої аутентифікації та застосування стандартних політик підприємства. Найбільш популярними службами серед такого ПЗ є служби каталогу Microsoft Active Directory та Novell eDirectory. Вони передбачає об'єднання всіх комп'ютерів підприємства в один каталог і примусове застосування до всіх комп'ютерів каталогу довільної кількості параметрів локальної політики, в тому числі параметра SIMUSL [4-7]. Доки комп'ютер користувача входить до каталогу, користувач не може скасувати або перевизначити параметр SIMUSL та інші параметри, налаштовані адміністратором каталогу.

Проте практика показує, що служби Microsoft Active Directory, Novell eDirectory та інші популярні служби каталогу, не зважаючи на їх очевидні переваги, дуже важко впроваджуються в наукових і академічних установах, державних

підприємствах, силових структурах тощо. По-перше, само існування служби каталогу вимагає її регулярного обслуговування і налаштування. По-друге, істотна кількість працівників в вищевказаних установах працюють на власних портативних комп'ютерах і мобільних пристроях, які неможливо в примусовому порядку ввести в каталог і застосувати на них доменні політики. В більшості випадків ситуація заходить в глухий кут: адміністратор локальної мережі налаштовує службу WSUS, а примусити учасників мережі користуватись цією службою не може. Дана стаття описує апробований і перевірений на практиці метод вирішення цієї проблеми.

Основою програмного комплекса є служба веб-проксі під керуванням популярного відкритого ПЗ «Squid» [1]. Дана програма існує понад 30 років, добре відлагоджена, стабільна і працює на всіх популярних операційних системах, в тому числі Linux та Windows. Класичний режим роботи проксі-сервера Squid передбачає ручне введення його параметрів на кожному комп'ютері підприємства. Але примусити всіх користувачів підприємства налаштувати параметри проксі-сервера є ще більш складною задачею для адміністратора служби WSUS, ніж встановити параметр локальної політики SIMUSL.

Проте проксі-сервер Squid може працювати не тільки у класичному режимі. У поєднанні з файрволами і маршрутизаторами він може працювати в режимі «прозорого» проксі [1,2]. В цьому режимі маршрутизатор не відправляє HTTP-запити користувача до HTTP-сервера в Інтернеті, а переадресовує їх проксі-серверу Squid, який може працювати або на окремому хості, або на самому маршрутизаторі.

Характерною особливістю проксі-сервера Squid є можливість розширення його функціональності за допомогою додаткових модулів-переадресаторів, які можно розробляти довільною мовою програмування. Такі модулі

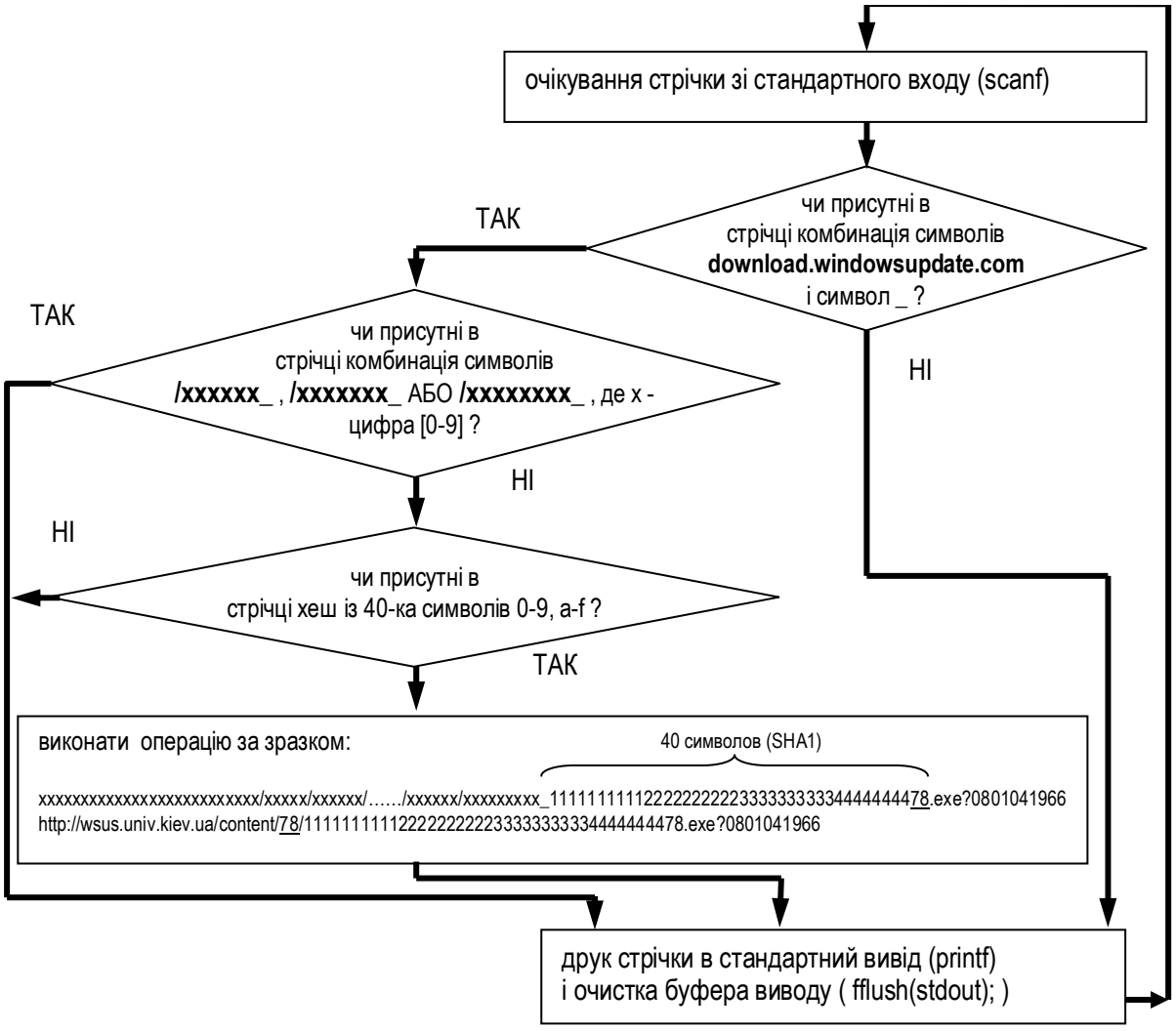


Рис. 2. Логіка роботи програми-переадресатора проксі-сервера Squid.

дозволяють проксі-серверу перед обробкою HTTP-запита клієнта попередньо модифікувати його URL-адресу і таким чином переадресувати запит на інший неоригінальний сервер, відповідь якого клієнт сприймає як «відповідь» оригінального сервера. Аналіз мережевих запитів, що генерує служба WU/AU, дозволив спроектувати та реалізувати переадресатор за блок-схемою, наведеною на рис. 2:

З метою перевірки стабільності даного модуля-переадресатора він реалізований і впроваджений в локальній мережі Київського університета імені Тараса Шевченка у складі програмного комплексу на базі популярного маршрутизатора Cisco ASA з підтримкою протокола WCCP [3]. Результат роботи модуля-переадресатора зручно продемонструвати на прикладі завантаження одного оновлення для російської версії Windows XP. Оригінальна URL-адреса цього оновлення

http://au.download.windowsupdate.com
/msdownload/update/v3-19990518/cabpool
/windowsxp-kb842773-v2-x86-
rus_56c63b12ecca0686a25385bf39f8ebc2e426d52b.exe

модифікується модулем-переадресатором і перетворюється на URL-адресу

http://wsus.univ.kiev.ua/content/2b/56c63b12ecca0686a25
385bf39f8ebc2e426d52b.exe

Модифікована URL-адреса успішно обробляється проксі-сервером, про що свідчить відповідний запис в його журналі:

10.17.1.2 TCP_MISS/200 375 GET
http://au.download.windowsupdate.com
/msdownload/update/v3-19990518/cabpool
/windowsxp-kb842773-v2-x86-
rus_56c63b12ecca0686a25385bf39f8ebc2e426d52b.exe -
DIRECT/10.25.25.200 application/octet-stream

Цей запис тлумачиться наступним чином: Компьютер з адресою 10.17.1.2 успішно (код помилки 200 означає «OK») виконав команду HTTP-GET на завантаження вказаного файла з вузла 10.25.25.200 (IP-адреса WSUS-сервера wsus.univ.kiev.ua), час виконання запиту 375 мс. В результаті роботи програмного комплексу весь трафік, що генерують служби WU/AU, не виходить за межі локальної приватної мережі університету і не навантажує його закордонний Інтернет-канал.

Висновки

1.Служба автоматичних оновлень операційних систем Microsoft Windows генерує значний закордонний Інтернет-трафік і може бути причиною повільної роботи мережі Інтернет усього підприємства або установи.

2.Служба оновлень не налаштована на явне використання проксі-серверів, а отже підтримує лише «прозорий режим» проксі-сервера.

3.Створюючи модулі-переадресатори популярного проксі-сервера Squid, можна змінювати маршрут завантаження великих файлів і таким чином суттєво знизити завантаження зовнішнього Інтернет-каналу підприємства.

Список використаних джерел

1. *Kulbir Saini.* Squid Proxy Server 3.1: Beginner's Guide. – Packt Publishing, 2011. – 332 p.
2. *Duane Wessels.* Squid: The Definitive Guide. – O'Reilly Media, 2004. – 472 p.
3. *Zach Seils, Joel Christner.* Deploying Cisco Wide Area Application Services. – Cisco Press, 2008. – 400 p.
4. *Susan Norwood.* Microsoft Windows Server Update Services 3.0 Operations Guide.– Microsoft, 2007. – 167 p. (http://www.microsoft.com/en-us/download/details.aspx?id=4813)
5. *Jeff Centimano.* Windows Server Update Services 3.0 Usability Improvements. – Microsoft, 2007.– 14 p. (http://download.microsoft.com/download/e/5/7/e578cebc-0533-4baa-bbef-f9e3f36e1976/wsus3%20usability%20improvements.doc)
6. *Susan Norwood.* Deploying Microsoft Windows Server Update Services. – Microsoft, 2007. – 154 p. (http://www.microsoft.com/en-us/download/details.aspx?id=21543)
7. Readme for Microsoft Windows Server Update Services 3.0. – Microsoft, 2007. – 28 p. (http://www.microsoft.com/en-us/download/details.aspx?id=7226)

Надійшла до редколегії 22.11.13

УДК 535.42

Коваленко А.В.[1], к.ф.-м.н.

Вибір дифракційної гратки для сенсора хвильового фронту на ефекті Талбота

Проаналізовано визначення локальних нахилів оптичного хвильового фронту за самовідтвореним зображенням дифракційної гратки з декількома типами функції амплітудного пропускання (бінарні з різним фактором заповнення, косинусна). Обговорюються шляхи оптимального вибору дифракційної гратки для застосувань у сенсорі хвильового фронту. Теоретично та шляхом комп'ютерного моделювання показано, що при такому виборі слід брати до уваги кутовий спектр функції пропускання гратки.

Ключові слова: сенсор хвильового фронту, ефект Талбота, дифракційна гратка.

[1]Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, пр-т Глушкова 4г. e-mail: Andrey_Kovalenko@univ.kiev.ua

A. V. Kovalenko[1], PhD.

Choice of diffraction grating for the wavefront sensor using Talbot effect

Limitations of estimation of the local slope of the optical wavefront from the self-reproduced image of the gratings with various amplitude transparency functions (binary with various fill factors, cosine) are analyzed. The best choice of the grating profile for the wavefront sensing applications is discussed. It is demonstrated theoretically and by computer simulation, that this choice should be done with consideration of the angular spectrum of the grating.

Key Words: wavefront sensor, Talbot effect, diffraction grating.

[1]Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03680, Kyiv, Glushkova st., 4g
e-mail: Andrey_Kovalenko@univ.kiev.ua

Статтю представив д. ф.-м. н., проф. Анісімов І.О.

Вступ

Задача відновлення оптичного хвильового фронту виникає у багатьох розділах когерентної оптики. Звичайно з цією метою використовують сенсор Шека-Хартмана, який дозволяє визначити локальний нахил хвильового фронту у фрагментах вхідної апертури оптичної системи [1]. Альтернативний підхід до задачі аналізу фази заснований на явищі самовідтворення зображення дифракційної гратки, відомому як ефект Талбота [2-4]. Ідея полягає у тому, що самовідтворене зображення гратки при її освітленні когерентною хвилею із плавними аберраціями описується полем локальних зміщень, що залежать від градієнту фази оптичної хвилі. Тоді вибіркові значення цих зміщень дозволяють визначити локальні нахили хвильового фронту і відновити його форму так, як це робиться при застосуванні сенсора Шека-Хартмана [1]. Для реалізації цієї ідеї важливо, щоб самовідтворене зображення зберігало свою початкову топологічну структуру, тобто складалось із зображень окремих елементів гратки. Природно допустити, що стійкість ефекту Талбота до аберації освітлюючого пучка залежить від профілю дифракційної гратки. Мета цієї роботи полягає у тому, щоб теоретично та шляхом комп'ютерного моделювання дослідити вплив форми елемента двовимірної гратки на структуру самовідтвореного зображення та визначити шляхи оптимізації параметрів граток для застосування у сенсорі хвильового фронту.

Принцип роботи та особливості сенсора хвильового фронту на ефекті Талбота

Нехай гратка, що являє собою двовимірний періодичний амплітудний екран з функцією пропускання $\tau(x, y)$ та періодом d, освітлюється когерентним точковим джерелом світла, розташованим у точці $x = 0,\ y = 0,\ z_0 = -R$. Якщо знехтувати впливом апертури, то функція пропускання може бути представлена рядом Фур'є, а амплітуда світла, пропущеного екраном у площині $z = 0$ виражається як:

$$u(x, y, 0) = \tau(x, y) u_{sph}(x, y, 0) = \\ = \sum_{n,m} a_{n,m} \exp\left(j \frac{2\pi(nx + my)}{d} \right) \cdot u_{sph}(x, y, 0) \qquad (1)$$

© А.В.Коваленко, 2014

де $u_{sph}(x,y,z)$ - параболічна апроксимація комплексної амплітуди сферичної хвилі:

$$u_{sph}(x,y,z)=\frac{1}{4\pi(z+R)}\exp\left(jk\left(z+R+\frac{x^2+y^2}{2(z+R)}\right)\right) \quad (2)$$

Відповідно, амплітуда у площині зображення визначається інтегралом Френеля:

$$u(x,y,z)=\frac{1}{j\lambda z}\times \\ \times\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}u(\xi,\eta,0)\exp\left(jk\left(z+\frac{x^2+y^2}{2z}\right)\right)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta \quad (3)$$

Підставляючи (1), (2), у (3), після елементарних перетворень отримаємо:

$$u(x,y,z)=u_{sph}(x,y,z)\times \\ \times\sum_{n,m}a_{n,m}\exp\left(j2\pi\frac{R}{z+R}\left(\frac{nx+my}{d}-\frac{2\lambda z\left(n^2+m^2\right)}{d^2}\right)\right) \quad (4)$$

Тепер розглянемо площину $z=Z_l$, де

$$Z_l=z_T\left(1-l\frac{z_T}{R}\right)^{-1}\cdot l,\quad l=1,2,...;\quad z_T=\frac{2d^2}{\lambda} \quad (5)$$

У цій площині останній доданок у аргументі експоненти (4) стає кратним 2π. Тоді:

$$u(x,y,Z_l)=u_{sph}(x,y,Z_l)\cdot\tau\left(\frac{R}{Z_l+R}x,\frac{R}{Z_l+R}y\right) \quad (6)$$

Інтенсивність зображення, що реєструється у цій площині, виражається як:

$$I(x,y,Z_l)=\frac{1}{2}\left|u(x,y,Z_l)\right|^2=\frac{\left|u_{sph}\right|^2}{2}\cdot\left|\tau\left(\frac{x}{s},\frac{y}{s}\right)\right|^2 \quad (7)$$

Легко помітити, що розподіл інтенсивності (7) утворює зображення дифракційної гратки, масштабоване з параметром $s=\left(Z_l+R\right)R^{-1}$. Параметр масштабування залежить від кривизни падаючого хвильового фронту: якщо $R\to\infty$, то $s\to 1$, тобто спостерігається класичний ефект Талбота. Будемо називати величину z_T (5) відстанню Талбота, а площину $z=Z_l$ - l-тою площиною Талбота .

Тепер нехай точка (x_p,y_p) є центром елементарної комірки гратки. Ми приймаємо, що комірка має максимальне пропускання у центральній області. Тоді зображення комірки у площині Талбота утворює яскраву пляму з координатами (sx_p,sy_p). Зсув зображення відносно позиції, що відповідає освітленню плоскою хвилею, складе:

$$\Delta x_p=sx_p-x_p=R^{-1}Z_1x_p,\\ \Delta y_p=sy_p-y_p=R^{-1}Z_1y_p \quad (8)$$

Локальні нахили α_x,α_y хвильового фронту сферичної хвилі (2) у точці (x_p,y_p) площини об'єкту виражаються через зсуви відповідних зображень як:

$$\alpha_x(x_p,y_p)=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{x^2+y^2}{2R}\bigg|_{x=x_p}=-\frac{\Delta x_p}{Z_1},\\ \alpha_y(x_p,y_p)=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\frac{x^2+y^2}{2R}\bigg|_{x=x_p}=-\frac{\Delta y_p}{Z_1} \quad (9)$$

Відповідно до (5) відстань між об'єктною площиною та самовідтвореним зображенням залежить від кривизни падаючої хвилі. Зсув «істинної» площини Талбота відносно площини $z=z_T$ буде малим, якщо радіус кривизни хвилі набагато перевищує відстань Талбота:

$$\left|Z_1-z_T\right|\approx\frac{z_T}{\left|R\right|}z_T<<z_T,\quad \text{якщо } z_T<<\left|R\right| \quad (10)$$

При детектуванні хвильового фронту його форма, очевидно, не відома, а зображення реєструється у незміщеній площині Талбота $z=z_T$. Будь-яка аберація хвильового фронту порушує умову фазового синхронізму компонент кутового спектру зображення. Зокрема, у випадку сферичної хвилі отримаємо замість (7) наступний розподіл комплексної амплітуди зображення:

$$u(x,y,z_T)\approx u_{sph}(x,y,z_T)\sum_{n,m}a_{n,m}\exp\left(j2\pi\frac{R}{z_T+R}\cdot\frac{nx+my}{d}\right)\exp\left(j2\pi\frac{z_T\left(n^2+m^2\right)}{R}\right) \quad (11)$$

Для збереження ефекту самовідтворення необхідно, щоб фаза $2\pi z_T\left(n^2+m^2\right)R^{-1}$ приймала значення у межах інтервалу $(-\pi/4;\pi/4)$ для всіх значущих членів ряду (11). Це означає, що коефіцієнти ряду Фур'є, що визначає пропускання гратки, $a_{n,m}$ мають бути малими у порівнянні з $a_{1,1}$ для всіх $n,m>1$. Тут ми приймаємо, що радіус кривизни хвильового фронту R є величиною порядку $10z_T$, або більше.

Комп'ютерне моделювання

Вплив профілю функції амплітудного пропускання гратки на роботу сенсора хвильового фронту досліджувався у комп'ютерному експерименті. Експеримент складався із таких послідовних кроків: (I) ініціалізація хвильового фронту; (II) розрахунок інтенсивності зображення у площині $z=z_T$; (III) визначення нахилів хвильового фронту за зображенням; (IV) відновлення хвильового фронту за локальними нахилами; (V) порівняння відновленого хвильового фронту із початково ініціалізованим.

Амплітудне пропускання гратки вибиралось у вигляді:

$$\tau(x,y)=\sum_{p,q=-(M-1)/2}^{(M-1)/2} t(x-pd,y-qd) \qquad (12)$$

де $t(x,y)$ - пропускання елементарної комірки гратки, M - кількість рядків і стовпчиків, що утворюють гратку. Розглядалось три типи елементарних комірок з такими функціями пропускання:

$$t_1(x,y)=\begin{cases}1, & |x|,|y|\le\dfrac{d}{10}\\ 0, & \text{інакше}\end{cases};\quad t_2(x,y)=\begin{cases}1, & |x|,|y|\le\dfrac{d}{4}\\ 0, & \text{інакше}\end{cases};\quad t_3(x,y)=\begin{cases}\cos^2\left(\dfrac{\pi x}{d}\right)\cos^2\left(\dfrac{\pi y}{d}\right), & |x|,|y|\le\dfrac{d}{2}\\ 0, & \text{інакше}\end{cases}; \qquad (13)$$

Перші дві утворюють бінарні екрани із квадратними отворами, що мають довжину сторони $b=d/2$ та $b=d/5$ відповідно, третя є гладкою і являє собою добуток піднятих косинусів. Моделювання проводилось для таких значень параметрів гратки: $M=21$, $d=200$ мкм. Довжина хвилі світла λ приймалась рівною 0.63 мкм. Таким параметрам відповідає відстань Талбота: $z_T=12.7$ см.

Кривизна хвильового фронту є характеристикою, критичною для роботи сенсора. Тому у цій роботі ми обмежились дослідженням детектування сферичних хвильових фронтів.

Відповідно до (9), зміщення елементарних зображень $\Delta x_p, \Delta y_p$ містять початкові дані для відновлення хвильового фронту. Чисельні значення зміщень обчислювались як центроїди зображень елементарних комірок:

$$\begin{aligned}\Delta x_p &= \int_{-d/2}^{d/2}\int_{-d/2}^{d/2} xi(x+x_p,y+y_p)\,dxdy,\\ \Delta y_p &= \int_{-d/2}^{d/2}\int_{-d/2}^{d/2} yi(x+x_p,y+y_p)\,dxdy\end{aligned} \qquad (14)$$

де $i(x,y)$ - нормована інтенсивність у площині зображення:

$$i(x,y)=\frac{I(x,y,z_T)}{\int_{-d/2}^{d/2}\int_{-d/2}^{d/2} I(x+x_p,y+y_p,z_T)\,dxdy} \qquad (15)$$

Відновлення хвильового фронту здійснювалось за методом найменших квадратів. Помилка відновлення визначалась як:

$$\sigma^2_{\Delta\varphi}=\left\langle\left|\Delta\varphi-\Delta\tilde{\varphi}\right|^2\right\rangle, \qquad (16)$$

$$\begin{aligned}\Delta\varphi(x,y)&=\varphi(x,y)-\langle\varphi\rangle,\\ \Delta\tilde{\varphi}(x,y)&=\tilde{\varphi}(x,y)-\langle\tilde{\varphi}\rangle\end{aligned} \qquad (17)$$

де $\tilde{\varphi}(x,y)$ - відновлений хвильовий фронт, кутові дужки позначають усереднення по апертурі.

Залежність помилки відновлення $\sigma^2_{\Delta\varphi}$ від нормованої кривизни вхідного хвильового фронту z_TR^{-1} наведено на Рис. 1. Як і слід було очікувати, застосування бінарної гратки з довжиною сторони отвору $b=d/2$ забезпечує краще відновлення, ніж гратки, утвореної малими отворами. Сенсор із "косинусною" граткою переважає за точністю сенсор із

бінарною граткою. Це пояснюється різницею у відносних значеннях Фур'є-коефіцієнтів цих граток. Косинусна гратка має найвужчий кутовий спектр, можливий для даного періоду d : $a_{n,m} = 0$ для всіх $n,m > 1$. У випадку бінарної маски відношення $a_{1,1}$ до наступного за величиною коефіцієнта складає $\left|a_{1,1}/a_{1,3}\right| = 3$ для гратки з $b = d/2$, і $\left|a_{1,1}/a_{1,2}\right| \approx 1.24$ для гратки з $b = d/5$. Таким чином, умова згасання коефіцієнтів виконується набагато краще, а зображення окремої комірки зазнає менших спотворень у випадку $b = d/2$ (Рис.2). Точність відновлення хвильового фронту залежить від взаємоузгодженості співвідношень (9) та (14). Щоб помилка $\sigma^2_{\Delta\varphi}$ була малою, нахили хвильового фронту мають виражатись через центроїди зображень елементарних комірок (14) за допомогою співвідношення (9). Це виконується, якщо зміщене зображення елементарної комірки зберігає свою форму відносно незмінною.

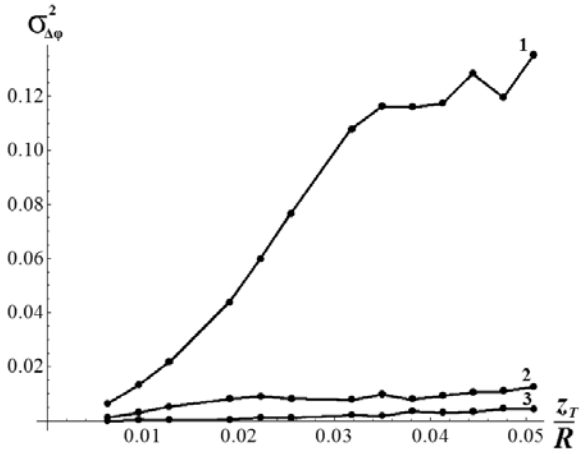
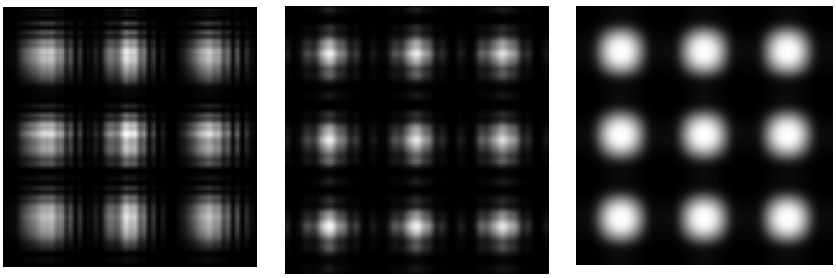


Рис.1. Залежність помилки відновлення хвильового фронту від його нормованої кривизни для різних типів граток у сенсорі. Криві 1, 2 відповідають граткам із квадратними отворами з довжиною сторони, рівною 1/5 та 1/2 періоду гратки, відповідно; крива 3 - пропускання, що описується піднятим косинусом.



а) б) в)

Рис.2. Фрагменти зображень, отриманих у площині $z = z_T$, при освітленні гратки сферичною хвилею з радіусом кривизни $R = 0.04 z_T$. (а, б) - гратки із квадратними отворами, довжина сторони отвору - 1/5 та 1/2 періоду, відповідно; (в) - косинусна гратка.

Висновки

Теоретично та шляхом комп'ютерного моделювання показано, що кутовий спектр дифракційної гратки має критичне значення для її використання у сенсорі хвильового фронту на ефекті Талбота. Для цього типу застосувань оптимальними є гратки із плавною зміною амплітудного пропускання, що добре апроксимується функцією піднятого косинусу.

Список використаних джерел

1. *Tyson R.* Principles of Adaptive Optics. - CRC Press, 2010. - 314 p.
2. *Salama N., Patrignani D., De Pasquale L., Sicre E.* Wavefront sensor using the Talbot effect // Opt. Laser Technol. - 1999. - **31** - P. 269–272.
3. *Siegel C., Loewenthal F., Balmer J. E.* A wavefront sensor based on the fractional Talbot effect // Opt. Commun. - 2001. - **194** - P. 265–275.
4. *Podanchuk D., Kurashov V., Goloborodko A., Dan'ko V., Kotov M., Goloborodko N.* Wavefront sensor based on the Talbot effect with the precorrected holographic grating // Applied Optics. - 2012. - **51** – P. C125–C132.

Надійшла до редколегії 20.12.2013

УДК 537.86

Мовчан М. М., аспірант

Ефект невзаємності в об'ємних феритових резонаторах міліметрового діапазону

Експериментально досліджено ефект невзаємності магнітодіелектричних коливань $HE_{2\delta1}$ та $HE_{2\delta2}$ феритового резонатора міліметрового діапазону. Представлено теоретичну модель матриці передачі вимірювальної комірки з феритовим резонатором, в якій враховано два різних коефіцієнта зв'язку резонатора з хвилеводом. Показано, що ефект невзаємності викликаний різницею між коефіцієнтами зв'язку феритового резонатора з відбитою та перевипроміненою хвилями.

Ключові слова: залізо-ітрієвий гранат, магнітодіелектричні коливання, невзаємність, добротність, коефіцієнт зв'язку.

Київський національний університет імені Тараса Шевченка,03680, м. Київ, пр-т. Глушкова 4г, e-mail: nicolja3m@gmail.com

M. M. Movchan, Postgraduate Student

Noreciprocity effect in bulk ferrite resonators for millimeter waveband

The nonreciprocity effect of magnetodielectric $HE_{2\delta1}$ and $HE_{2\delta2}$ modes has been investigated experimentally in the millimeter waveband ferrite resonator. Theoretical model of the S-matrix of the measurement cell with a ferrite resonator taking in account two different coupling factors of the resonator with the waveguide is presented. It was shown that the nonreciprosity effect has been caused by the difference between the coupling factors of the ferrite resonator with reflected and transmitted waves.

Key words: yttrium-iron garnet, magnetodielectric modes, nonreciprocity, quality factor, coupling factor.

Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03680, Kyiv, Glushkova st., 4g,
e-mail: nicolja3m@gmail.com

Статтю представив д. ф.-м. н., проф. Скришевський В. А.

Вступ

4-мм діапазон є цікавим з практичної точки зору для безпровідних локальних мереж, радіоастрономії, супутникового зв'язку [2] та автомобільних радарів [6]. Розв'язка окремих НВЧ модулів між собою здійснюється за допомогою пасивних невзаємних пристроїв на основі намагніченого фериту − циркуляторів або вентилів. Однак в міліметровому діапазоні класичні конструкції вентилів вимагають значних магнітних полів ($H_0 > 10$ кЕ) або використання гексаферитів з великим полем кристалографічної анізотропії.

Альтернативним способом отримання вентильного ефекту в міліметровому діапазоні є використання невзаємності, що виникає при збудженні магнітодіелектричних коливань в слабкогіротропних об'ємних феритових резонаторах.

Явище невзаємності ($|S_{21}| \neq |S_{12}|$), що виникає при несиметричному розташуванні феритового резонатора в поперечному перерізі прямокутного хвилеводу було досліджено в [3]. В роботі [7] показано, що невзаємність можлива також при симетричному розташуванні феритового зразка в поперечному перерізі хвилеводу. Для виключення невзаємності, що виникає через несиметричність НВЧ конструкції в [8-9] було досліджено феритові та композитні ферит-діелектричні резонатори, що повністю перекривають поперечний переріз прямокутного хвилеводу вздовж широкої стінки. Невзаємний ефект в [7-9] не вдається пояснити шляхом розрахунків в сучасних САПР [8].

Теоретичні моделі взаємодії твердотільних резонаторів з лінією передачі розроблені в роботі [1]. Однак раніш вони не застосовувались для опису магнітодіелектричних коливань в феритових резонаторах. Також не існує методики визначення параметрів об'ємних феритових резонаторів, наприклад, коефіцієнтів зв'язку з лінією передачі, а також власної та навантаженої добротності.

Ціллю даної публікації є експериментальне дослідження ефекту невзаємності в феритових

© М.М. Мовчан, 2014

резонаторах міліметрового діапазону та розвинення теоретичних методів їх опису.

Теоретична модель

Згідно [1] матриця розсіяння відрізка узгодженої лінії передачі з неоднорідністю в вигляді намагніченого феритового резонатора в випадку невзаємного зв'язку резонатора з лінією передачі має вигляд

$$\mathbf{S}=\frac{1}{1+K_1+K_2+i\xi}\begin{pmatrix}2\sqrt{K_1K_2} & 1-K_1+K_2+i\xi\\ 1+K_1-K_2+i\xi & 2\sqrt{K_1K_2}\end{pmatrix} \quad (1)$$

тут $\xi=Q_0\left(\frac{f_0}{f}-\frac{f}{f_0}\right)$ − узагальнена розстройка, f_0 - резонансна частота, Q_0 − власна добротність резонатора, K_1 та K_2 − коефіцієнти зв'язку з хвилями, що поширюються до навантаження та до генератора відповідно. В (1) зроблено припущення, що резонансна лінія резонатора має лоренцевий профіль.

З (1) знайдені вирази для коефіцієнтів відбиття та передачі відрізка хвилеводу з феритовим резонатором:

$$\begin{aligned}|S_{11}|&=|S_{22}|=2\sqrt{\frac{K_1K_2}{(1+K_1+K_2)^2+\xi^2}},\\ |S_{21}|&=\frac{\sqrt{\left((1+K_1)^2-K_2^2+\xi^2\right)^2+4\xi^2K_2^2}}{(1+K_1+K_2)^2+\xi^2},\\ |S_{21}|&=\frac{\sqrt{\left((1+K_2)^2-K_1^2+\xi^2\right)^2+4\xi^2K_1^2}}{(1+K_1+K_2)^2+\xi^2}.\end{aligned} \quad (2)$$

Коефіцієнти зв'язку резонатора з лінією передачі K_1 та K_2 можуть бути обчислені за відомими з експерименту коефіцієнтами передачі $|S_{21}|_0$ та $|S_{12}|_0$ на резонансній частоті ($\xi=0$) використовуючи формули (3).

$$K_1=\frac{1-10^{\frac{|S_{12}|_0}{20}}}{10^{\frac{|S_{12}|_0}{20}}+10^{\frac{|S_{21}|_0}{20}}},\quad K_2=\frac{1-10^{\frac{|S_{21}|_0}{20}}}{10^{\frac{|S_{12}|_0}{20}}+10^{\frac{|S_{21}|_0}{20}}}. \quad (3)$$

В (3) $|S_{21}|_0$ та $|S_{12}|_0$ вимірюються в децибелах.

Власна добротність феритового резонатора визначається за формулою (4).

$$Q_0=\frac{f_0}{\Delta f_{Q_0}}. \quad (4)$$

де Δf_{Q_0} − ширина резонансної кривої на рівні ослаблення, що відповідає розстройці $\xi=1$.

При підстановці $\xi=1$ в (2) отримано значення коефіцієнтів передачі (5) при яких вимірюються ширина резонансної кривої Δf_{Q_0}.

$$\begin{aligned}|x_{21}|_{Q_0}[\partial Б]&=10\lg\frac{\left((1+K_1)^2-K_2^2+1\right)^2+4K_2^2}{\left((1+K_1+K_2)^2+1\right)^2},\\ |x_{12}|_{Q_0}[\partial Б]&=10\lg\frac{\left((1+K_2)^2-K_1^2+1\right)^2+4K_1^2}{\left((1+K_1+K_2)^2+1\right)^2}.\end{aligned} \quad (5)$$

У випадку невзаємного зв'язку феритового резонатора з лінією передачі $|x_{21}|_{Q_0}\neq|x_{12}|_{Q_0}$.

Навантажена добротність феритового резонатора в випадку невзаємного зв'язку з лінією передачі визначається як

$$Q_l=\frac{Q_0}{1+K_1+K_2}=\frac{f_0}{\Delta f_{Q_l}}. \quad (6)$$

де Δf_{Q_l} − ширина резонансної кривої на рівні ослаблення, що відповідає розстройці $\xi=1+K_1+K_2$.

При підстановці $\xi=1+K_1+K_2$ в (2) отримано значення коефіцієнтів передачі (7) на яких вимірюється Δf_{Q_l}.

$$\begin{aligned}|x_{21}|_{Q_l}&=10\lg\frac{\left((1+K_1)^2-K_2^2+(1+K_1+K_2)^2\right)^2+4(1+K_1+K_2)^2K_2^2}{4(1+K_1+K_2)^4},\\ |x_{12}|_{Q_l}&=10\lg\frac{\left((1+K_2)^2-K_1^2+(1+K_1+K_2)^2\right)^2+4(1+K_1+K_2)^2K_1^2}{4(1+K_1+K_2)^4}.\end{aligned} \quad (7)$$

$|x_{21}|_{Q_l}\neq|x_{12}|_{Q_l}$ в випадку $K_1\neq K_2$ та відрізняються від прийнятого в радіотехніці рівня ослаблення -3 дБ на якому вимірюють ширину резонансної лінії, що відповідає навантаженій добротності для сильного зв'язку резонатора з лінією передачі.

Методику визначення власної та навантаженої добротності феритових резонаторів з резонансної кривої $|S_{21}|(f)$ проілюстровано на рис. 1. На ньому зображено частотні залежності $|S_{12}|$ та $|S_{21}|$, а також всі величини, що необхідні для вимірювання параметрів феритового резонатора.

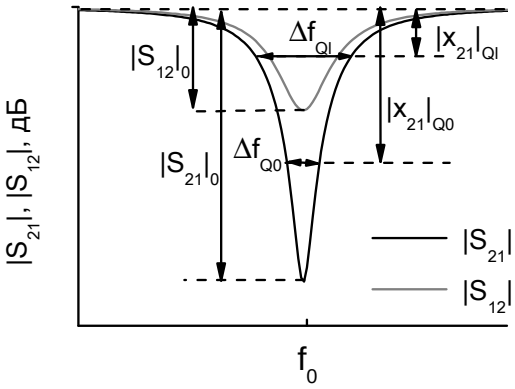


Рис. 1 Ілюстрація вимірювання власної та навантаженої добротності феритового резонатора в випадку невзаємного зв'язку з лінією передачі.

Варто зазначити, що запропонований в [5] метод визначення власної добротності діелектричних резонаторів незастосовний до об'ємних феритових резонаторів, що демонструють ефект невзаємності.

Методика експерименту

Для експериментального дослідження ефекту невзаємності був виготовлений резонатор з полікристалічного ЗІГ марки 30СЧЗБ в формі паралелепіпеда з розмірами $a = 3.55$ мм, $h = 0.3$ мм, $L = 1.8$ мм (див. рис. 2). Розміри резонатора підібрані таким чином, щоб спектр резонансних частот його власних коливань лежав в Е діапазоні (50-75 ГГц).

Резонатор було розміщено в вимірювальній комірці, що мала вигляд відрізка прямокутного хвилеводу з перерізом 3.6×1.8 мм^2. Резонатор повністю перекривав широку стінку хвилеводу та знаходився в безпосередньому контакті з металом. Підмагнічуюче поле створювалося за допомогою електромагніту та було спрямовано вздовж нормалі до розвиненої поверхні феритового резонатора. Розміри та розташування резонатора в вимірювальній секції показано на рис. 2.

Варто зазначити, що при запропонованій геометрії експерименту ефект невзаємності пов'язаний з несиметричним розташуванням резонатора в поперечному перерізі хвилеводу виключається.

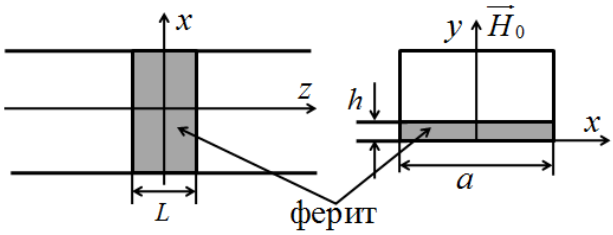


Рис. 2 Розташування феритового зразка в поперечному перерізі хвилеводу.

За допомогою панорамного вимірювача КСХН та ослаблень Р2-69 було досліджено частотні залежності коефіцієнтів передачі $|S_{21}|$ та $|S_{12}|$ вимірювальної комірки з феритовим зразком в залежності від величини зовнішнього магнітного поля H_0.

Експериментально встановлено, що вимірювання частотної залежності коефіцієнта передачі $|S_{21}|$ при зміні напрямку зовнішнього магнітного поля на 180^0 повністю еквівалентне до вимірювання частотної залежності коефіцієнта передачі $|S_{12}|$.

Порівняння теорії та результатів експерименту

Для теоретичної інтерпретації експериментальних результатів було використано чисельний розв'язок рівнянь Максвелла методом кінцевого інтегрування (finite integration technique - FIT), який реалізований для випадку пасивних НВЧ вузлів, що містять намагнічений ферит, в пакеті програм CST Microwave Studio.

При моделюванні в Microwave Studio відтворено геометрію експерименту, та використано властивості полікристалічного ЗІГ: тангенс кута діелектричних втрат $tg\delta_\varepsilon = 2\times10^{-4}$, намагніченість насичення $4\pi M_s = 1200$ Гс та ширина лінії ФМР $\Delta H = 45$ Е. Найкраще узгодження теоретичних та експериментальних частотних залежностей коефіцієнтів передачі досягнуто при значенні діелектричної проникності ЗІГ $\varepsilon = 13.7$.

На рис. 3 зроблено порівняння експериментальних та розрахованих в Microwave Studio частотних залежностей коефіцієнтів передачі $|S_{21}|$ та $|S_{12}|$ вимірювальної комірки з досліджуваним феритовим резонатором.

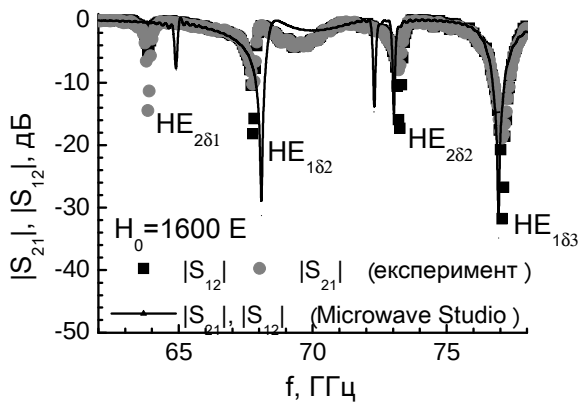


Рис. 3 Порівняння експериментальних та розрахованих в Microwave Studio АЧХ вимірювальної комірки з феритовим резонатором.

Класифікацію типів коливань на рис. 3 проведено відповідно до розподілів магнітного та електричного поля всередині резонатора. При розсіянні моди H_{10} на феритовому резонаторі збуджуються коливання типу HE_{mnl}, де m відповідає кількості варіацій поля вздовж вісі x, n - вздовж вісі y, l - вздовж вісі z (напрямки осей координат показано на рис. 2). Оскільки феритовий резонатор розміщувався на металевій стінці хвилеводу і частково заповнював його поперечний переріз по висоті, то в експерименті спостерігалися лише найнижчі коливання з $n = \delta \approx 0.5$.

На рис. 3 має місце задовільне узгодження теоретичних и експериментальних АЧХ коливань в широкому частотному діапазоні, однак розрахунки в Microwave Studio не пояснюють появу невзаємності.

Невзаємний ефект спостерігається на всіх резонансних частотах феритового резонатора. Найбільшу невзаємність демонструють коливання з парною кількістю варіацій поля вздовж вісі x, наприклад, $HE_{2\delta1}$ та $HE_{2\delta2}$. Варто зазначити, що ці коливання слабко зв'язані з модою H_{10} прямокутного хвилеводу при відсутності зовнішнього магнітного поля.

При намагнічуванні феритового резонатора резонансні частоти його коливань змінюються внаслідок появи недіагональних компонент тензора магнітної проникності та слабкого зв'язку коливань між собою. Перебудова резонансних частот коливань $HE_{2\delta1}$ та $HE_{2\delta2}$ магнітним полем показана на рис. 4.

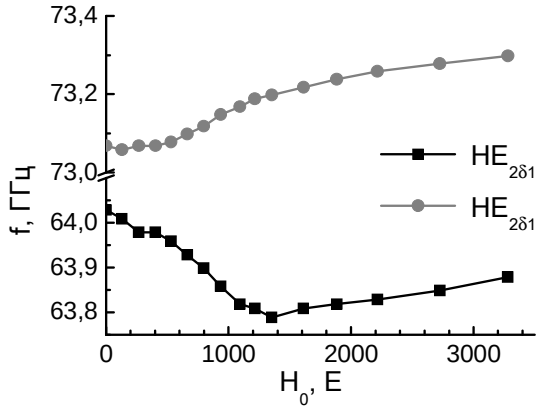


Рис. 4 Залежність резонансних частот коливань $HE_{2\delta1}$ та $HE_{2\delta2}$ від магнітного поля.

Залежності резонансних частот коливань $HE_{2\delta1}$ та $HE_{2\delta2}$ від магнітного поля H_0 якісно відрізняються. В області малих магнітних полів $H_0 < 1$ кЕ резонансна частота коливання $HE_{2\delta1}$ монотонно спадає, а для коливання $HE_{2\delta2}$ зростає. Ця відмінність викликана зв'язком власних коливань феритового резонатора через намагніченість і аналогічна до ефекту розщеплення азимутально неоднорідних коливань в феритових резонаторах циліндричної форми [4].

Як раніш зазначалось, при намагнічуванні феритового зразка спостерігається невзаємність коефіцієнтів передачі вимірювальної комірки $|S_{21}| \neq |S_{12}|$ для обох мод $HE_{2\delta1}$ та $HE_{2\delta2}$. Експериментальні залежності коефіцієнтів передачі $|S_{21}|$ та $|S_{12}|$ на резонансній частоті від магнітного поля H_0 представлені на рис. 5.

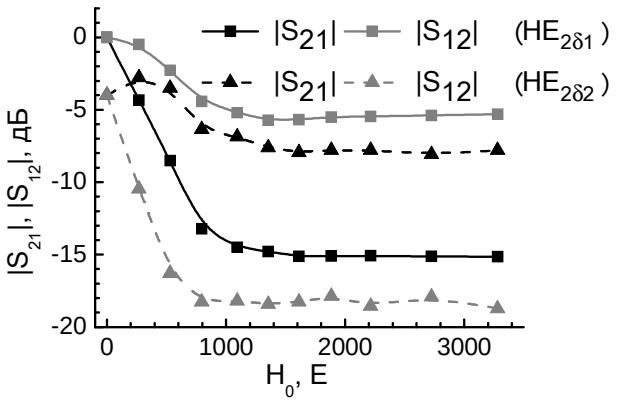


Рис. 5 Експериментальна залежність коефіцієнтів передачі $|S_{21}|$ та $|S_{12}|$ від магнітного поля.

З рис. 5 видно, що характер невзаємності для різних коливань феритового резонатора відрізняється. Для коливання $HE_{2\delta1}$ переважають прямі втрати $|S_{21}|<|S_{12}|$, а для коливання $HE_{2\delta2}$ зворотні втрати $|S_{21}|>|S_{12}|$. Залежності $|S_{21}|$ та $|S_{12}|$ від магнітного поля H_0 міняються місцями при зміні напрямку поля на 180^0.

Невзаємність коефіцієнтів передачі $|S_{21}|$ та $|S_{12}|$ становить близько 10 дБ для обох коливань $HE_{2\delta1}$ та $HE_{2\delta2}$ при внесених втратах 5 дБ для коливання $HE_{2\delta1}$ та 8 дБ для $HE_{2\delta2}$. Отримана величина внесених втрат не дозволяє говорити про практичне застосування ефекту, але проведені раніш дослідження композитних ферит-діелектричних резонаторів з епітаксійними плівками ЗІГ та резонаторів, що частково заповнюють поперечний переріз хвилеводу [7] показують, що внесені втрати можуть бути зменшені до <1 дБ при збереженні величини невзаємності. Слід відмітити, що для коливань $HE_{2\delta1}$ та $HE_{2\delta2}$ має місце рівність $|S_{11}|=|S_{22}|$, тобто відбиття хвилі від феритового резонатора носить взаємний характер.

Користуючись (3) та залежностями наведеними на рис. 5 обчислено коефіцієнти зв'язку K_1 та K_2 феритового резонатора з хвилеводом. Отримані залежності коефіцієнтів зв'язку досліджуваного резонатора від магнітного поля H_0 для коливань $HE_{2\delta1}$ та $HE_{2\delta2}$ представлені на рис. 6.

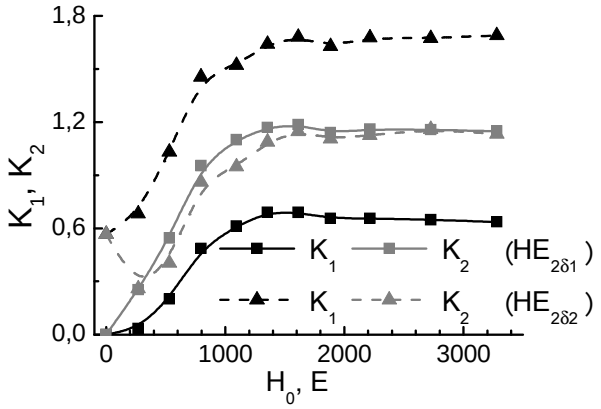


Рис. 6 Залежність коефіцієнтів зв'язку феритового резонатора з прямокутним хвилеводом від магнітного поля.

Однією з найважливіших характеристик резонатора є його власна добротність. Користуючись формулами (4-5) знайдено залежність власної добротності феритового резонатора від магнітного поля H_0 для коливань $HE_{2\delta1}$ та $HE_{2\delta2}$ (рис. 7).

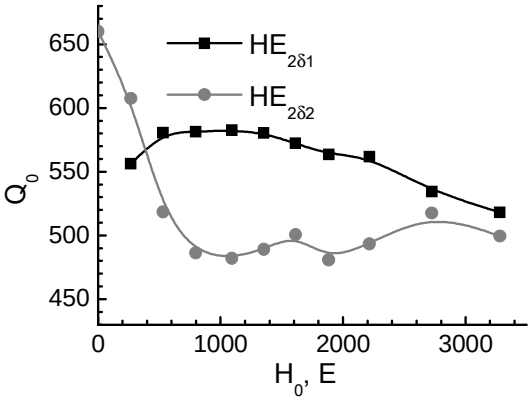


Рис. 7 Залежність власної добротності феритового резонатора від магнітного поля для коливань $HE_{2\delta1}$ та $HE_{2\delta2}$.

При полі підмагнічування $H_0>1$ кЕ (насичений стан фериту) власна добротність резонатора дуже слабко залежить від магнітного поля, тому головним фактором, що спричиняє ефект невзаємності для феритових резонаторів в міліметровому діапазоні є різниця в коефіцієнтах зв'язку резонатора з лінією передачі (рис. 6).

Для перевірки застосовності моделі твердотільного резонатора (1-2) до опису магнітодіелектричних коливань феритових резонаторів на рис. 8 наведено порівняння експериментальних та розрахованих за (2) залежностей $|S_{21}|(f)$ та $|S_{12}|(f)$ для значення магнітного поля $H_0=1600$ Е.

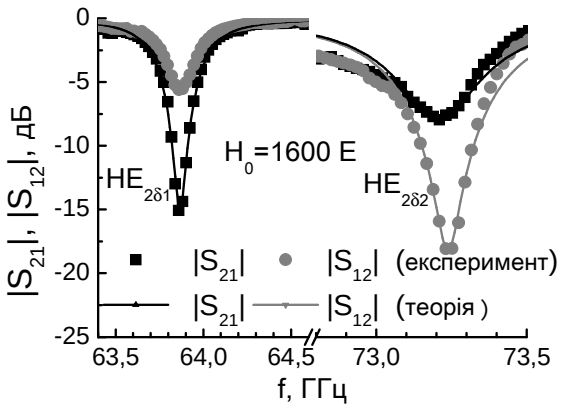


Рис. 8 Порівняння експериментальних АЧХ та теоретичного розрахунку за (2).

При теоретичних розрахунках представлених на рис. 8 були використані раніш визначені значення f_0, K_1, K_2 та Q_0 з рис. 4, 6 та 7 відповідно. Модель намагніченого феритового резонатора поміщеного як неоднорідність в лінію передачі [1] чудово апроксимує резонансну криву для коливання $HE_{2\delta 1}$. Дещо гірше ця модель описує резонансну криву коливання $HE_{2\delta 2}$ внаслідок її асиметричності, що спричинена впливом вищих типів коливань.

Висновки

Дослідження коливань $HE_{2\delta 1}$ та $HE_{2\delta 2}$ феритового резонатора показало, що модель взаємодії твердотільного резонатора з лінією передачі [1] добре описує ефект невзаємності зафіксований в експерименті. Розвинена методика вимірювання власної та навантаженої добротності, а також коефіцієнтів зв'язку резонатора з лінією передачі, дозволяє охарактеризувати феритовий резонатор скінченним набором величин f_0, K_1, K_2 та Q_0 та використовувати їх в задачах оптимізації та синтезу НВЧ пристроїв з намагніченими феритовими резонаторами.

Показано, що головною причиною ефекту невзаємності є різниця в коефіцієнтах зв'язку феритового резонатора з хвилею, що поширюється в бік навантаження та хвилею відбитою в бік генератора.

Власна добротність феритового резонатора для коливань $HE_{2\delta 1}$ та $HE_{2\delta 2}$ слабко залежить від магнітного поля та становить для резонаторів з ЗІГ, які лежать на металевому екрані $Q_0 \approx 500 - 600$.

Ефект невзаємності разом з можливістю магнітної перебудови резонансної частоти та порівняно високою власною добротністю коливань дозволяє створювати на основі слабкогіротропних феритових резонаторів вузькосмугові невзаємні елементи резонансного типу для міліметрового та субміліметрового діапазонів довжин хвиль.

Список використаних джерел

1. *Ilchenko M.E., Kudinov E.V.*, Ferrite and dielectric microwave resonators. – K: Kyiv University publishing house, 1973. – 176 p. (in Russian).
2. *Vizard D.R.* Millimeter wave applications: From satellite communications to security systems // Microwave Journal. – 2006. – **49**. – P. 22-36.
3. *Popov M.A., Zavislyak I.V., Srinivasan G.* Tunable magnetodielectric resonator for W-band isolators // Electronics letters. – 2009. – **45**, № 24. – P. 1216-1218.
4. *Movchan N.N., Zavislyak I.V., Popov M.A.* Splitting axially heterogeneous modes in microwave gyromagnetic and gyroelectric resonators // Radioel. and Comm. Syst. – 2012 – **55**, №12. – P. 549-558.
5. *Khana A.P.S.* Q measurement of microstrip-coupled dielectric resonators // Microwaves and R. F. – 1984. – **23.** – P. 81-86.
6. *Schneider M.* Automotive radar – status and trends // German Microwave Conference (GeMiC 2005), April 5-7, 2005, Ulm, German: proceedings. – 2005. – P.144-147.
7. *Popov M.A.* Magnetic field controlled nonreciprocal band-stop filter for the W-band using magnetic polariton modes in yttrium-iron garnet / M.A. Popov, I.V. Zavislyak, G. Srinivasan // Progress in Electromagnetics Research Symposium, August 12-15, 2013, Stockholm, Sweden: abstracts. – 2013. – P. 32.
8. *Movchan N.N.* Features of weakly gyrotropic ferrite resonators excitation in millimeter band / Movchan N.N. // Microwave & Telecommunications technology (CriMiCo 2012), September 10-14, 2012, Sevastopol, Ukraine: proceedings. – 2012. – P. 581-582.
9. *Movchan N.N.* Nonreciprocal excitation ferrite-dielectric composite resonator of millimeter range / Movchan N.N. // Modern Issues in Radio Engineering and Telecommunications (RT-2012), April 23-27, 2012, Sevastopol, Ukraine: proceedings. – 2012. – P. 417.

Надійшла до редколегії 11.12.13

УДК 621.385.833

Находкін М.Г., д.ф.-м.н., проф.,
Федорченко М.І., к.ф.-м.н., с.н.с.

Взаємодія Gd і O з поверхнею Si(113)

Методами електронної спектроскопії досліджено зміну електронних властивостей поверхні Si(113) при створенні на ній багатошарової структури окислених атомів Gd. Показано, що почергова адсорбція атомів Gd та атомарного кисню при кімнатній температурі призводить до зменшення роботи виходу від 4.75 еВ для Si(113)-3x2 до ≈ 1.9 еВ для *багатошарової структури окислених атомів Gd. При відпалі такої структури при 600℃ в умовах надвисокого вакууму робота виходу зменшується до ≈ 1.0 еВ. Отримані результати пояснюються створенням шару силікату Gd та утворенням на поверхні дипольного шару O–Gd.*

Ключові слова: адсорбція, *Gd, O, Si(113), робота виходу, загин зон.*

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, пр-т Глушкова, 4г, e-mail: mif@univ.kiev.ua

Nakhodkin M.G., D.Sc., prof.,
Fedorchenko* M.I., Ph.D.

Gd and O interaction with Si(113) surface

The electronic properties of the Si(113) surface were investigated by methods of electron spectroscopy while creating multi-layered structure of oxidized atoms Gd on Si (113). It is shown that step by step adsorption of Gd atoms and oxygen atoms at room temperature leads to a decrease in the work function from 4.75 eV for Si (113)-3x2 to ≈ 1.9 eV for the multilayer structure of oxidized Gd atoms.The annealing of this structure at 600° C *under ultrahigh vacuum reduces the work function to ≈ 1.0 eV. These results are explained by the creation of Gd silicate layer and the formation of the surface dipole layer O-Gd*

Keywords: adsorption, Gd, O, Si(113), work function, band bending

Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03680, Kyiv, Glushkova st., 4g,
e-mail: mif@univ.kiev.ua

Статтю представив д.ф.-м.н. Скришевський В.А.

Дослідження взаємодії рідкоземельних металів (Re) з поверхнями напівпровідників стимулюються можливістю їх застосування у наноелектроніці [1]. Значний інтерес має, наприклад, властивість Gd утворювати нанодроти з унікальними властивостями на поверхнях Si [2], які можна буде використовувати у розробках нових пристроїв. А нанодроти із GdB_6 виявили найнижчу роботу виходу φ ≈1.5 еВ у групі гексаборидів Re корисну для роботи електронних емітерів [3].

Re можуть бути промоутерами окислення поверхонь Si для утворення плівок SiO_2 [4, 5]. Останнім часом досліджують утворення силікату Gd як перспективного матеріалу з діелектричною проникністю набагато більшою ніж у SiO_2 [6].

Адсорбція атомів Gd на поверхні Si(113) [7] викликає зменшення роботи виходу до φ≈ 0.8 еВ в основному за рахунок зменшення електронної спорідненості (χ). Але це значення φ є нестабільними і збільшується з часом зберігання в надвисокому вакуумі та при прогріві до високих температур.

З досліджень ефективних електронних емітерів, наприклад Si/Cs/O [8], відомо, що їх стабільність досягається дією кисню на систему з низькою φ. Але нам не було відомо досліджень φ системи Si/Gd/O. Тому ми змінили умови взаємодії Gd з поверхнею Si(113) та ввели кисень для того, щоб впливати на ймовірність поверхневих реакцій й досягти стабільності системи Si/Gd/O з малим значенням φ.

Метою роботи було дослідження впливу адсорбції атомів Gd та O на поверхні Si(113) на електронні властивості системи Si/Gd/O та з'ясування можливості отримання поверхні з мінімальною φ стабільною під часу зберігання в вакуумі та після відпалу при помірних температурах. Для її досягнення ми поетапно виготовляли та досліджували на поверхні Si(113) багатошарові системи із шарів Gd експонованих в атмосфері атомарного кисню.

© М.Г. Находкін, М.І. Федорченко, 2014

Методика експерименту

Дослідження проводились, як і в наших попередніх роботах [6,9,10] у надвисоковакумній камері з базовим тиском ~ $2\cdot10^{-10}$ тор, яка була оснащена спеціальними пристроями для вимірювань дифракції повільних електронів, оже-електронної спектроскопії (ОЕС) та ультрафіолетової фотоелектронної спектроскопії з енергією квантів у діапазоні hν=7.7–10.2 еВ.

У вакуумній камері знаходились іонна гармата для очищення поверхні зразків іонами Ar та системи для нанесення шарів Gd потрібної товщини (d_{Gd}) й для обробки зразків атомарним киснем із заданою експозицією. В камеру напускався молекулярний кисень. Але під час експозиції (g=p·t), яка визначалась у ленгмюрах (L) (1L=10^{-6}торр·с), зразки Si розташовувались на відстані ≈1см від розігрітого до T≈ 1900°C дроту з W, на поверхні якого молекули O_2 дисоціювали на атоми. Фотоелектронні спектри (ФЕС) вимірювались за допомогою сферичного аналізатора гальмівного типу. Робота виходу (φ) визначалась із відомого співвідношення φ=hν-w, де w – енергетичний інтервал ФЕС (рис.1) від рівня Ферми до низькоенергетичного краю ФЕС [9]. Зразки Si(113) вирізались із кристалу, легованого атомами фосфору (ρ≈10 Ом·см), які після хімічної обробки стандартно очищались у вакуумній камері за допомогою декількох циклів бомбардування– відпал.

Результати експериментів та їх інтерпретація.

Зразки виготовлялись поетапним нанесенням in situ шарів Gd з d_{Gd}=4–6 Å на поверхню Si(113)-3x2 та експозицією у атомарному O. Вибір d_{Gd}=4–6 Å обумовлений тим, що згідно літературним даним [5] хімічна взаємодія стає ефективною при $\theta_{Gd}\geq$1МШ (моношару). На частково окисленій поверхні Si утворювалась шарувата структура з окислених прошарків Gd. Стабільний зразок мав сумарну товщину шарів Gd d_{Gd} ≈ 22 Å та був оброблений атомарним O із загальною експозицією g_O ≈ 90 L.

На рис.1 наведені типові ФЕС при енергії квантів hν= 10.2 еВ для чистої поверхні Si(113)-3x2 та для різних d_{Gd} та g_O, виміряні на певних етапах приготування шаруватої системи. Видно, що поверхня Si(113)-3x2 має досить вузький енергетичний інтервал w_a (крива а) тобто значну φ_{Si} ≈ 4.75 еВ. ФЕС (крива б) відповідає багатошаровій системі Si/Gd(16Å)/O(60L), яка отримувалась за 4-ри рази нанесення Gd та експозиції в атомарному O й мала загальну товщину Gd ≈4×4=16 Å та загальну експозицію g_O=4×15L. В порівнянні зі спектром чистої поверхні Si ФЕС цієї поверхні змінює свою форму.

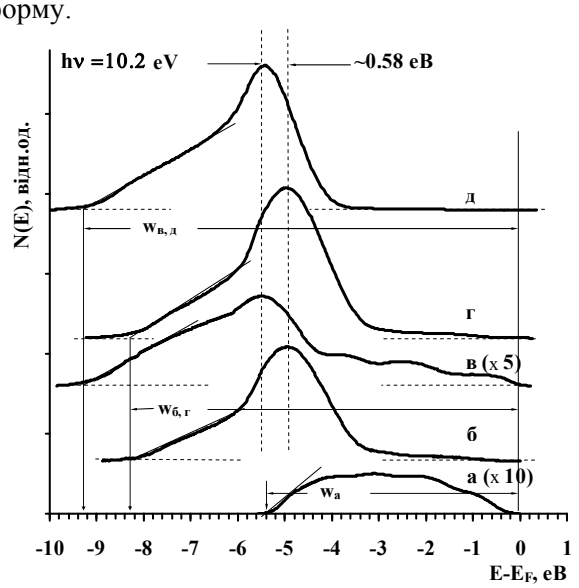


Рис.1 ФЕС (hν=10.2 еВ) поверхні Si(113) -3x2 при різних d_{Gd} шару атомів Gd та експозицій g_O в атомарному кисні: **а**– поверхня Si(113)-3x2; **б**– Si/Gd(16Å)/O(60L); **в**– Si/Gd(16Å)/O(60L) +Gd(6Å); **г**– багатошарова система + шар Gd(6Å)/O(15L); д– відпал багатошарової системи (d_{Gd}≈22 Å, 90LO) до 600°C.

На ньому з'являється максимум біля E-E_F≈5 еВ, збільшується енергетична ширина спектру ($w_б$>w_a) та збільшується квантовий вихід фотоелектронів. Збільшення $w_б$ свідчить, що φ цієї поверхні зменшується до значення φ≈1.9 еВ. Область ФЕС у діапазоні енергій 4–6 еВ нижче рівня Фермі з максимумом при ≈5еВ, яка відповідає в основному за збільшення квантового виходу, обумовлена O2*p* валентними електронами [3, 4].

Після нанесення на таку поверхню додатково ≈6 Å Gd (рис.1 **в**) в ФЕС з'являються електронні стани поблизу рівня Фермі (5*d*6*s* електрони), що характерно для металізованих поверхонь. Ширина ФЕС збільшується ($w_в$>$w_б$), тобто φ такої системи зменшується до $\varphi_в$ ≈ 1.0 еВ < $\varphi_б$. Незважаючи на зменшення φ, значно зменшується і квантовий вихід фотоелектронів. Зменшення φ на ≈0.9 еВ при напиленні чергового шару атомів Gd на поверхню з окисленими атомами Gd (характерне для кожного циклу

утворення багатошарової системи Si/Gd/O+ Gd) обумовлено як зміною загину зон (Δξ) поблизу поверхні, так і зміною електронної спорідненості Δχ (Δφ=Δχ+Δξ). Так пік O2*p* ФЕС зсувається від рівня Фермі на ≈ 0.58 еВ в той час як низькоенергетичний край ФЕС зміщується на ≈ 0.9 еВ. Це обумовлено тим, що при адсорбції атомів Gd на окислений шар атомів Gd відбувається як зміна загину зон на Δξ≈0.58 еВ так і зміна електронної спорідненості на Δχ≈ 0.32 еВ.

Чергове окислення напиленого шару атомів Gd в атомарному кисні (15L) значно змінює ФЕС (крива **г** на рис.1). Різко зменшується густина електронних станів поблизу рівня Фермі та збільшується інтенсивність піку O2*p* фотоелектронів, що може бути наслідком окислення металевої фази [4]. Пік O2*p* електронів зсувається в бік рівня Фермі на Δξ≈ 0.58 еВ, а φ зростає до φ≈ 1.9 еВ. Але для такої системи з часом зберігання в надвисокому вакуумі φ не була стабільною і поступово зростала.

Прогрів такої шаруватої системи окисленого Gd у надвисокому вакуумі до T≈600°C зсував низькоенергетичний край ФЕС (рис.1.**д**) у бік від рівня Фермі в порівнянні з кривою **г** ($\Delta w_{дг}=w_д-w_г$=-0.9 еВ), що обумовлено зменшенням φ до величини φ≈1еВ. При цьому електронний пік O2*p* зсувався на Δξ≈ 0.5 еВ від рівня Фермі внаслідок зміни загину зон поблизу поверхні. Отже можна зробити висновок, що зменшення φ окисленої системи при прогріві до T=600°C відбувається внаслідок змін загину зон на Δξ≈0.5еВ та електронної спорідненості на ≈ 0.4 еВ.

Було встановлено, що це досить низьке значення φ≈1 еВ для відпаленої системи виявилось стабільним при зберіганні в надвисокому вакуумі. Навіть якщо через деякий час φ такої поверхні збільшувалась на декілька десятих еВ, то короткочасний відпал системи в надвисокому вакуумі при 400-600°C знову зменшував її до φ ≈1еВ.

Низькоенергетичний край ФЕС завжди мав досить плавний затяжний хід, що ймовірно пов'язано з утворенням плямистої острівцевої структури з різним значенням φ, на ймовірність утворення якої для системи Si(111)/SiO_2/Gd є дані в літературі [6].

Одночасно з вимірами ФЕС проводились дослідження за допомогою Оже спектроскопії. На рис.2 наведені оже спектри поверхні Si(113) з шаром атомів Gd(4Å) (крива **а**), та після її окислення і утворення багатошарової системи.

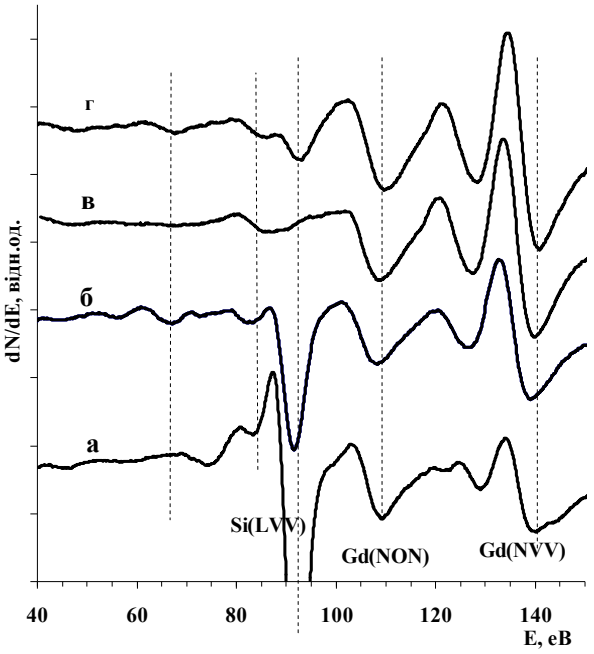


Рис.4 Оже спектри поверхні Si(113) з напиленими та окисленими атомами Gd: **а**– Si(113)/Gd(4Å); **б**– Si(113)/Gd(4Å)/O15L; **в**– Si(113)/ Gd(22Å)/O(90L); **г**– Si(113)/Gd(22Å)/O(90 L) +T=600°C.

Видно, що при окисленні тонкого шару Gd (рис.4.**б**) змінюється форма Gd(NVV) лінії в районі 120 еВ, зменшуються інтенсивності Si(LVV) лінії в районі 92 еВ та з'являються нові оже лінії окисленого Si в районі 64–68еВ. Це вказує на окислення плівки Gd та Si підкладинки. В ОЕС від багатошарової системи атомів окисленого Gd (рис.4.**в**) Si(LVV) лінії та лінії окисленого Si в районі 64–68 еВ практично не видно. Залишаються лише лінії окисленого Gd в районі 100 – 140 еВ та лінія в районі 85 еВ, які можуть належати окисленому кремнію або силіциду Gd [11]. Після прогріву багатошарової системи до T≈600°C в ОЕС знову з'являється лінія окисленого Si в районі 68 еВ та лінія неокисленого Si в районі 92 еВ (рис.4.**г**). По аналогії з [5,6] можна вважати, що багатошарова система є потрійною сполукою силікатом Si-Gd-O.

Експерименти дозволяють запропонувати робочу модель багатошарової системи на Si(113) з досить низькою та стабільною з часом і температурою роботою виходу. При експозиції в атмосфері атомарного кисню першого шару Gd (≈ 4 Å) на поверхні Si(113) відбувається окислення як Si підкладинки, так і атомів Gd. На це вказує поява в ОЕС (рис.2.**б**) окисних ліній Si

(68еВ та 84 еВ) та трансформація піку Gd(NVV) в діапазоні 120–140 еВ. Після декількох циклів нанесення атомів Gd та їх експозиції в атмосфері атомарного О утворюється багатошарова система Si(113)/Gd(≈22Å)/O(90 L) з φ≈1.9 еВ. ОЕС цієї системи практично не містить ліній окисленого та чистого Si (крива рис.2.**в**). Його особливість при ≈ 85 еВ може бути обумовлена силіцидом Gd. Після відпалу такої системи до T≈600° C в ОЕС (рис.4.**г**) знову з'являються лінії окисленого та чистого Si внаслідок утворення на поверхні Si силікату Gd. Цей силікат є стабільним з часом та температурою та має досить низьку стабільну φ≈1.0 еВ. Як нанесення на окислену багатошарову поверхню нового шару Gd, так і прогрів окисленої поверхні багатошарової системи зменшує φ через зменшення електронної спорідненості χ та зміну загину зон ξ біля поверхні. Можна припустити, що в кожному з цих випадків за зменшення роботи виходу відповідають атоми Gd, які створюють дипольний шар біля поверхні (O–Gd) та модифікують поверхневі стани, що й викликає зміни електронної спорідненості та загину зон поблизу поверхні.

Висновки

Поетапна адсорбція атомів Gd та атомів O на поверхні Si(113) дозволяє отримувати шаруваті системи із окислених атомів Gd. Відпал такої системи при T≈600°C утворює досить стабільний та мабуть острівцевий силікат Gd. Його поверхня має малу роботу виходу φ≈ 1.0 еВ, яка майже не змінюється при перебуванні зразка у надвисокому вакуумі, а при незначних змінах відновлюється відпалом при температурах до T≈600°C. За зменшення φ відповідають атоми Gd, які створюють дипольний шар біля поверхні (O–Gd)

Список використаних джерел

1. *A.M. Shikin, A.Yu. Grigoriev, G.V. Prudnikova, D. V. Vyalikh S.L. Molodtsov, V.K. Adamchuk* The interaction of thin layers of silicon surface (0001) of rare earth metals // Solid State Physics -2000.–42, №5.– P.942-949 (in Russian).
2. *J.L. McChesney, A. Kirakosian, R. Bennewitz, J.N. Crain, J.-L. Lin and F J Himpsel* Gd disilicide nanowires attached to Si(111) steps // Nanotechnology–2002–**13.**– P**.**545-550
3. *Zhanq H., Zhanq Q, Zhao G, Tang J., Zhou O., Qin L.C.* Single-Crystalline GdB_6 Nanowire Field Emitters // J. Am. Chem. Soc.–2005.–**127**.–P.13120-1.
4. W. A. Henle, M. G. Ramsey, and F. P. Netzer R. Cimino'W. Braun S. Witzel Reactions at the Gd-Si(111)7X7 interface: Promotion of Si oxidation // Phys. Rev. – 1990.–B42–P.11073-11078
5. R. Hofmann and W. A. Henle H. Ofner, M. Cx. Ramsey, and F. P. Netzer W. Braun K. Horn Physical and chemical effects at rare-earth-metal-Si02 —Si structures// Phys. Rev. –1993.–B47–P.10407-10414
6. H.D.B. Gottlob, A. Stefani, M. Schmidt Gd silicate: A High-k Dielectric Compatible with High Temperature Annealing // *J. Vac. Sci. Technol. B, 27(1), pp. 258-261, Jan./Feb. 2009*
7. *Nakhodkin M.G., Fedorchenko M.I.* Formation of the Gd/Si(113) interface // Visn., Ser. Fiz.-Mat. Nayky, Ky"iv Univ. im. Tarasa Shevchenka. – 2012. – N 4. – P.261-264. (in Ukrainian).
8. R.L.Bell. Negative Electron Affinity Devices. Oxford: Clarendon Press, 1973)
9. *Nakhodkin M.G., Fedorchenko M.I.* The work function dependence of Si(100)-2x1 surface on Bi coverage degree Visn., Ser. Fiz.-Mat. Nayky, Ky"iv Univ. im. Tarasa Shevchenka. – 2004. – N 4. – P. 373-378. (in Ukrainian).
10. *Nakhodkin M.G., Fedorchenko M.I.* Adsorption of Sb atoms on the Si (113) surface // Visn., Ser. Fiz.-Mat. Nayky, Ky"iv Univ. im. Tarasa Shevchenka. – 2012. – N 3. – P. 323-332. (in Ukrainian).
11. Massimo Sancrotti, A. Iandelli, G. L.Olcese, and A. Palenzona Si-derived states in Gd silicides via Si Lz 3 VV Auger line-shape spectroscopy //Phys. Rev.B–1991.–**44.**– P.3328-3321

Надійшла до редколегії 20.09.13

УДК 535.345.67

Первак Ю.О., д.ф.-м.н., проф.

Структурні особливості дисперсійних дзеркал з максимально високою негативною дисперсією групової затримки

Досліджено особливості структури дисперсійного дзеркала з робочим діапазоном від 780 до 820 нм, в якому дзеркало має лінійну залежність групової затримки (GD) і негативну дисперсію групової затримки (GDD). Середній рівень GDD дорівнює -2200 фс^2. Дзеркало утворено нанесенням на скляну підкладку багатошарової структури (89 шарів) з оксидів танталу і кремнію, що чергуються. Повна фізична товщина багатошарової структури дорівнює 10001,3 нм. Аналіз просторово-спектрального розподілу електричного поля свідчить про наявність в структурі шести резонаторів, з яких лише один утворений окремим шаром, оптична товщина якого близька половині довжини хвилі середини робочого діапазону. Інші п'ять резонаторів утворені не менш як трьома сусідніми шарами, сумарна оптична товщина яких близька половині довжини хвилі середини робочого діапазону.

Ключові слова: дисперсійне дзеркало, негативна дисперсія групової затримки

Київський національний університет імені Тараса Шевченка,03680, м. Київ, пр-т. Глушкова 4г, e-mail: yupervak@univ.kiev.ua

Yu.O. Pervak, Dr. Sci.

Structural features of dispersive mirrors with maximally high negative group delay dispersion

The features of structure of dispersive mirror with the operating range from 780 to 820 нм were investigated. A mirror has linear dependence of group delay(GD) and negative group delay dispersion (GDD). The middle level of GDD equals - 2200 fs^2. A mirror was formed by deposited multi-layer structure (89 layers) from the oxides of tantalum and silicon, that alternate. on the glass substrate. The complete physical thickness of multi-layer structure equals 10001,3 nm. The analysis of spatially-spectral distribution of electric-field testifies to the presence in the structure of six resonators, from that only one forms a separate layer the optical thickness of that is near to the half of wavelength of middle of operating range. Other five resonators are formed no less as by three nearby layers the total optical thickness of that is near to the half of wavelength of middle of operating range.

Key words: dispersive mirror, negative group delay dispersion

Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03680, Kyiv, Glushkova st., 4g, e-mail: yupervak@univ.kiev.ua

Статтю представив д.техн.н., проф. Погорілий С.Д.

Здатність багатошарових структур з пів хвильовими резонаторами накопичувати енергію електромагнітного поля в резонаторі [1-3] зробила їх найбільш ефективними структурами для виготовлення різноманітних систем керування параметрами надкоротких світлових імпульсів фемто- і аттосекундної тривалості.

Впродовж останніх 20 років технології дисперсійних дзеркал (ДД) [4-17] стали широко застосовуватися у фізиці фемто- і аттосекундних імпульсів [18, 19]. В наш час оптичні елементи на основі ДД забезпечують точний контроль GD і GDD у різних частотних діапазонах, що дуже важливо при створенні фемтосекундних лазерів. Наприклад, точний контроль значень GD/GDD в діапазоні довжин хвиль в дві октави, дозволяє генерувати імпульси тривалістю менше 2 фс у видимому діапазоні [19]. Саме тому, проектування ДД з бажаними спектральними характеристиками (відбиття та GDD), дуже важливе у фізиці надкоротких імпульсів.

Проектування складних надшвидких лазерних систем, вимагає знання властивостей ДД, щоб забезпечувати контроль GD/GDD у таких системах. Необхідно досконало визначати властивості ДД, що не завжди вдається внаслідок існуючих обмежень. Це досить ускладнює проектування надшвидких систем. Наприклад, розробка систем стиснення у часі надкоротких лазерних імпульсів за допомогою ДД, вимагає визначення необхідної кількості відбивань від ДД імпульсів, базою для визначення якої є тривалість вхідного імпульсу і

© Ю.О.Первак 2014

фазова модуляція. Нещодавно отримані результати [20] дозволили оцінити максимально досяжні значення GDD, що відповідають одному відбиттю. Необхідна кількість відбивань легко отримується діленням GDD вхідного імпульсу на отримане значення максимальної GDD для одного відбиття. Широкодіапазонна оптика на основі ДД з великими від'ємними значеннями GDD використовується для компенсації GDD, накопиченої імпульсом при проходженні через дисперсійні середовища, оптичні підсилювачі та ін. Чим ширший робочий спектральний діапазон, тим менше середнє значення GDD може бути отримано [9, 10, 14]. Це обумовлено принципом невизначеності і тісно пов'язане з фазовими властивостями багатошарових структур [21].

Мета даної роботи – дослідження особливості структури ДД з робочим діапазоном від 780 до 820 нм, в якому дзеркало має лінійну залежність групової затримки (GD) і максимальну негативну дисперсію групової затримки (GDD). Дзеркало утворено нанесенням на скляну підкладку багатошарової структури (89 шарів) з оксидів танталу (H) і кремнію (L), що чергуються. Повна фізична товщина структури дорівнює 10001,3 нм. Оптичні товщини на довжині хвилі середини робочого діапазону (λ_0 = 800 нм) усіх 89 шарів структури показано на рис.1.

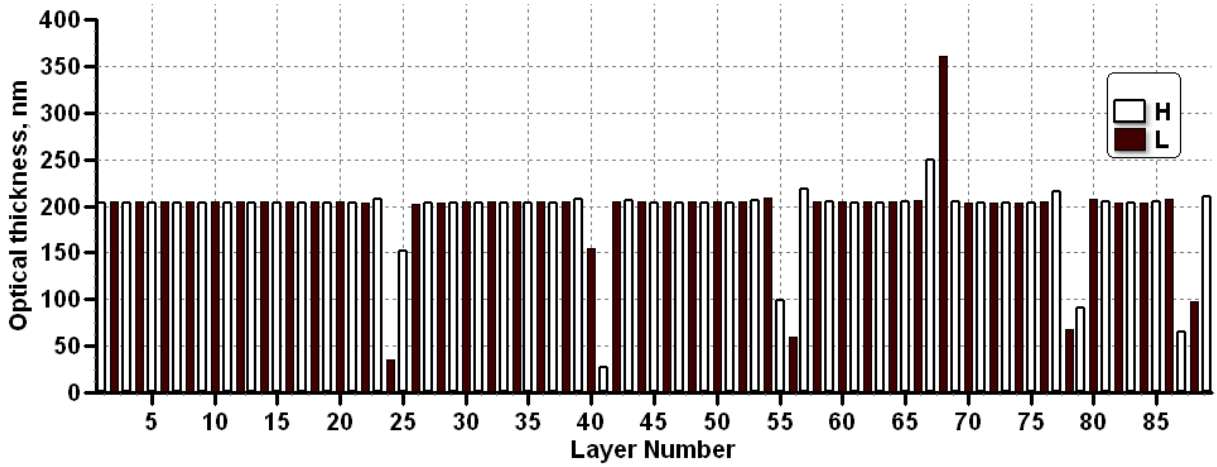


Рис.1. Оптичні товщини шарів (нумерація шарів починається від підкладки).

Процедура отримання конструкції ДД з використанням програмного пакету Optilayer [22] детально описана раніше [20]. Критерії пошуку конструкції визначалися умовами отримання максимального негативного значення GDD і відбивання не менше 99% для *p*-поляризованого світла при куті падіння 10°. Спектральна залежність відбивання R_p досліджуваного ДД показана на рис.2, а відповідні спектральні залежності GD і GDD на рис.3.

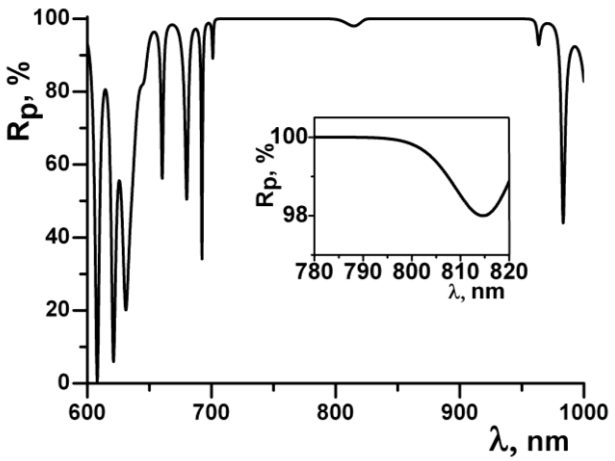


Рис.2. Спектральна залежність відбивання R_p при куті падіння 10°.

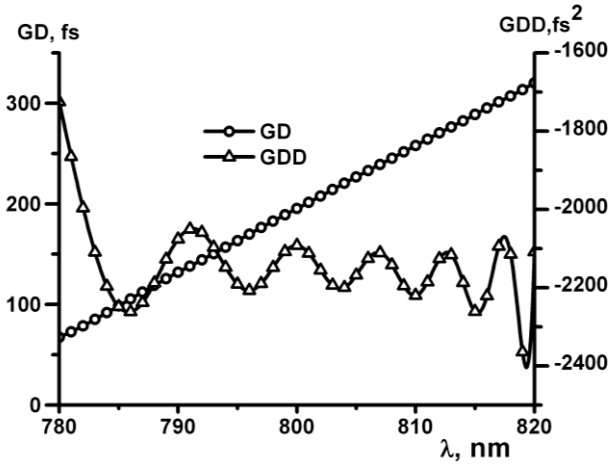


Рис.3. Спектральна залежність GD і GDD при куті падіння 10°.

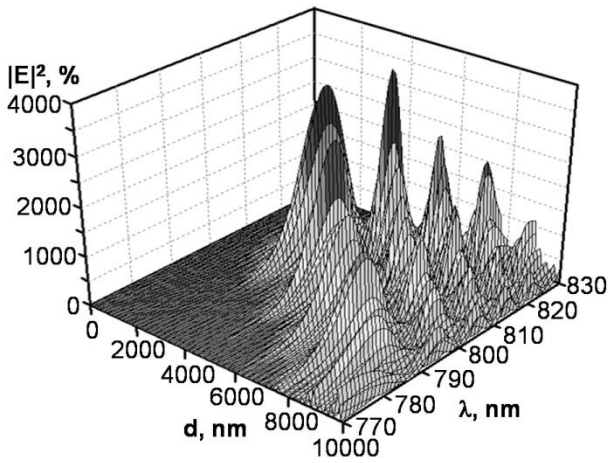


Рис.4. Просторово-спектральний розподіл ефектричного поля ДД (просторова координата *d* відраховується від підкладки).

Аналіз просторово-спектрального розподілу електричного поля всередині багатошарової структури (рис.4) свідчить про наявність в ній шести резонаторів, в яких поле концентрується.

Таблиця.

Номер резонатору	Номер шару	Матеріал	Оптична товщина шару, нм	Оптична товщина резонатору, нм
1	86	SiO_2	208,084	372,173
	87	Ta_2O_5	65,798	
	88	SiO_2	98,091	
2	77	Ta_2O_5	216,797	375,788
	78	SiO_2	67,292	
	79	Ta_2O_5	91,699	
3	68	SiO_2	361,719	361,719
4	55	Ta_2O_5	98,877	377,119
	56	SiO_2	59,250	
	57	Ta_2O_5	218,992	
5	40	SiO_2	155,449	387,765
	41	Ta_2O_5	27,834	
	42	SiO_2	204,482	
6	23	Ta_2O_5	208,208	397,157
	24	SiO_2	35,774	
	25	Ta_2O_5	153,175	

Перший резонатор (нумерація резонаторів починається від зовнішнього середовища), найближчий по поверхні ДД, утворений 86, 87 і 88 шарами. З рис.1 видно, що усі парні шари мають нижчий показник заломлення (SiO_2), ніж непарні (Ta_2O_5). Отже центральний шар першого резонатору має високий показник заломлення. Оптична товщина 86, 87 і 88 шарів дорівнює 208,084; 65,998 і 98,091 нм, відповідно. Сумарна товщина цих трьох шарів дорівнює 372,173 нм, що трохи менше половини довжини хвилі середини робочої області ДД.

Другий резонатор утворений 77, 78 і 79 шарами. Тут центральний шар має низький показник заломлення, а оптична товщина 77, 78 і 79 шарів дорівнює 216,797; 67,292 і 91,699 нм, відповідно. Сумарна товщина цих трьох шарів дорівнює 375,788 нм, що теж троохи менше половини довжини хвилі середини робочої області ДД. Відповідні значення параметрів для усіх резонаторів зведено в таблиці.

Оптична товщина резонаторів поступово збільшується від зовнішнього середовища до підкладки. В першому і п'ятому резонаторах центральний шар має високий показник заломлення, а в усіх інших центральний шар з низьким показником заломлення. Причому центральний шар завжди найтонший. З рис.4 видно, що електричне поле довгохвильових компонентів випромінювання концентрується в усіх шести резонаторах, в той час як електричне поле короткохвильових компонентів випромінювання концентрується в резонаторах, найближчих до поверхні, що контактує з зовнішнім середовищем. Це забезпечує більшу групову затримку довгохвильових компонентів електромагнітного поля відносно короткохвильових і негативну дисперсію групової затримки (див. рис.3).

Потрібно відзначити, що принциповою відмінністю досліджуваного ДД є саме наявність в його конструкції пів хвильових резонаторів. І саме тому такі конструкції дзеркал називають дисперсійними дзеркалами, на відміну від традиційних чирпованих дзеркал [4], які вперше дозволили отримати негативну дисперсію групової затримки і вирішити проблему компенсації дисперсії надкоротких світлових імпульсів. В традиційних чирпованих дзеркалах не було півхвильових резонаторів, а збільшення GD з довжиною хвилі і значно менша, ніж в ДД негативна GDD досягалися за рахунок поступового збільшення оптичної товщини шарів від зовнішнього середовища до підкладки.

Таким чином, півхвильові резонатори, введені в звичайну чверть хвильову стопу дозволяють, завдяки ефекту накопичення енергії в резонаторах, отримувати максимальну високу негативну дисперсію групової затримки. При цьому пів хвильовий резонатор найчастіше утворюється не одним шаром з пів хвильовою оптичною товщиною, а комбінацією з трьох шарів. Центральний шар в такій комбінації завжди є найтоншим і може мати як низький, так і високий показник за-

ломлення. А сумарна оптична товщина комбінації трохи менша половини довжини хвилі середини робочого спектрального діапазону дисперсійного дзеркала.

Список використаних джерел

1. *Pervak Yu.O., Fedorov V.V.* Features of spectral characteristies of multilayer structures with three half-wave resonators // Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ser.: Phys.&Mathematics.– 2011. – N.2. – P. 201-204.(in Ukrainian).
2. *Pervak Yu.O., Fedorov V.V.* Features of electric-fild distribution in 1-D photonic with three half-wave resonators of different nature // Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ser.: Phys.&Mathematics. – 2012. – N.2. – P. 287-290.(in Ukrainian).
3. *Pervak Yu.O., Fedorov V.V.* Features of electric-field distribution in 1 - D photonic crystals with three half-wave defects // Nanosystems, Nanomaterials, Nanotechnologies. – 2012. – Vol.10. – №3. – P.467-476.(in Ukrainian).
4. *Szipocs R., Ferencz K., Spielmann C., Krausz F.* Chirped multilayer coatings for broadband dispersion control in femtosecond lasers // Opt. Lett. – 1994. – Vol.19. – N.3. - P. 201–203.
5. *Pervak V., Ahmad I., Trushin S. A., Major Z., Apolonski A., Karsch S., Krausz F.* Chirped-pulse amplification of laser pulses with dispersive mirrors // Opt. Express. – 2009. – Vol. 17. – N.21. – P.19204–19212.
6. *Dombi P., Racz P., Lenner M., Pervak V., Krausz F.* Dispersion management in femtosecond laser oscillators with highly dispersive mirrors // Opt. Express. – 2009. – Vol.17. – N.22. – P.20598–20604.
7. *Golubovic B., Austin R.R., Steiner-Shepard M.K., Reed M.K,. Diddams C.A., Jones D.J., Van Engen A.G.* Double Gires-Tournois interferometer negative-dispersion mirrors for use in tunable mode-locked lasers // Opt. Lett. – 2000. – Vol.25. – N.4. – P.275–277.
8. *Pervak V., Ahmad I., Trubetskov M.K., Tikhonravov A.V., Krausz F.* Double-angle multilayer mirrors with smooth dispersion characteristics // Opt. Express. 2009. – Vol.1**7. –N.**10. – P.7943–7951.
9. *Pervak V., Teisset C., Sugita A., Naumov S., Krausz F., Apolonski A.* High-dispersive mirrors for femtosecond lasers // Opt. Express. – 2008.- Vol.16. – N.14. – P.10220–10233.
10. *Pervak V., Pronin O., Razskazovskaya O., Brons J., Angelov I., Trubetskov M.K., Tikhonravov A.V., Krausz F.* High-dispersive mirrors for high power applications // Opt. Express. – 2012. – Vol.20. – N.4. – P.4503–4508.
11. *Birge J.R., Kartner F.X., Nohadani O.* Improving thin-film manufacturing yield with robustoptimization // Appl. Opt. – 2011. – Vol.50. – N.9. – P. C36–C40.
12. *Steinmeyer G.* Femtosecond dispersion compensation with multilayer coatings: toward the optical octave // Appl. Opt. – 2006. – Vol.45. – N.7. – P.1484–1490.
13. *Dombi P., Yakovlev V.S., O'Keeffe K., Fuji T., Lezius M., Tempea G.* Pulse compression with timedomain optimized chirped mirrors // Opt. Express. – 2005, - Vol.13. – N.26. – P.10888–10894.
14. *Pervak V.* Recent development and new ideas in the field of dispersive multilayer optics // Appl. Opt. – 2011. – Vol.50. – N.9. – P.C55–C61.
15. *Nohadani O., Birge J.R., Kartner F.X., Bertsimas D.J.* Robust chirped mirrors // Appl. Opt. – 2008. – Vol.47. – N.14. – P.2630–2636.
16. *Pervak V., Trubetskov M.K., Tikhonravov A.V.* Robust synthesis of dispersive mirrors // Opt. Express.– 2011. – Vol.19. – N.3. – P.2371–2380.
17. *Kartner F.X., Morgner U., Ell R., Schibli T. Fujimoto J.G., Ippen E.P., Scheuer V., Angelow G., Tschudi T.* Ultrabroadband double-chirped mirror pairs for generation of octave spectra // J. Opt. Soc. Am. B. – 2001. – Vol.18, - N.6. – P.882–885.
18. *Krausz F.* Attosecond physics // Rev. Mod. Phys. – 2009. – Vol.81. – N.1. – P.163–234.
19. *Wirth A., Hassan M.T., Grguras J., Gagnon J., Moulet A., Luu T.T., Pabst S., Santra R., Alahmed Z.A., Azzeer A.M., Yakovlev V.S., Pervak V., Krausz F., Goulielmakis E.* Synthesized light transients // Science. – 2011. – Vol.334. – P.195–200.
20. *Pervak V.. Fedorov V., Pervak Yu.A., Trubetskov M.K.* Empirical study of the group delay dispersion achievable with multilayer mirrors // Opt. Express. –2013. – Vol.21. – N.15. – P.18311-18316.
21. *Tikhonravov A.V, Baumeister B.W., Popov K.V.* Phase properties of multilayers // Appl. Opt. – 1997. – Vol.36. – N.19. – P.4382–4392.
22. *Tikhonravov A.V., Trubetskov M.K.* OptiLayer software // http://www.optilayer.com.

Надійшла до редколегії 15.11.13

УДК 519.9

Соломенко О.В.[1], аспірант,
Лендєл В.В., пров. інж.
Присяжневич І.В.[2], к.ф.-м.н.,
Черняк В.Я., д.ф.-м.н., професор

Вплив геометрії мікророзряду з порожнистим електродом на його електрофізичні характеристики

Досліджено вольт-амперні характеристики мікророзряду з порожнистим електродом для різних діаметрів розрядних каналів і міжелектродних відстаней. Виявлено аналогію у поведінці диференційних опорів мікророзрядів з двома порожнистими електродами та з одним порожнистим анодом при діаметрі отвору d = 1 мм, що рівний міжелектродній відстані. Диференційний опір мікророзряду з порожнистим катодом має спадний характер у досліджуваному діапазоні тисків p ~ 3,6÷76 Торр. У той же час, при зменшенні діаметру отвору та міжелектродної відстані диференційний опор зростає для обох полярностей порожнистого електроду та всіх досліджених матеріалів електродів при тисках p ~ 340÷750 Торр. Методом оптичної емісійної спектроскопії досліджено параметри плазми мікророзрядної системи. Показано, що плазма дослідженого мікророзряду є нерівноважною.

Ключові слова: мікророзряд, диференційний опір розряду, нерівноважна плазма.

[1] Київський національний університет імені Тараса Шевченка,03022, м. Київ, пр-т. Глушкова 4г, e-mail: chernyak_v@ukr.net

Ok.V. Solomenko, Ph.D. student,
V.V. Lendiel, leading eng.
I.V. Prysiazhnevych, Ph.D.
V.Ya. Chernyak, Dr. Sci.

The influence of the geometry of microdischarge with hollow electrode on its electrophysical characteristics

Current-voltage characteristics of the micro-discharge with hollow electrode were studied for different interelectrode distances and diameters of holes. It was found the analogical behaviour of the differential resistance of the microdischarges with two hollow electrodes and with one hollow anode in the case, when diameter of the hole and the interelectrode distance are equal to 1 mm. The differential resistance of the microdischarge with hollow cathode was decreasing in all investigated pressure range p ~ 3.6÷76 Torr. At the same time with decreasing of the hole diameter and the interelecrode distance the differential resistance growth was found for the both polarities of hollow electrode and for the all investigated electrode materials at pressures p ~ 340÷750 Torr. Plasma parameters of the microdischarge system were investigated by using optical emission spectroscopy. It is shown that the plasma of the studied microdischarge is nonequilibrium.

Key words: microdischarge, the differential discharge resistance, non-equilibrium plasma.

[1] Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03022, Kyiv, Glushkova st., 4g,
e-mail: chernyak_v@ukr.net

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Анісімов І.О.

Вступ

Сьогодні велику увагу приділяють вивченню плазми мікророзрядів, що є різновидом утрудненого жевріючого розряду [1]. Природно, що мікроплазмою називають плазму мікророзрядів, але щодо визначення останніх у науковій спільноті існують деякі розбіжності. Так Беккер [2] мікророзрядами називає розряди, які мають малий геометричний розмір такий, що:

$$p \cdot d < 10 \text{ Торр} \cdot \text{см} \qquad (1)$$

де p – тиск газу, d – міжелектродна відстань (при тиску порядку атмосферного).

До цього класу він відносить бар'єрний розряд та розряд з порожнистим катодом (розмір порожнини менше 1 мм). Як відомо, умова (1) характерна також й для жевріючого розряду. При цьому залишаються відкритими ряд питань:

- У чому буде проявлятися відмінність між мікророзрядом високого тиску та звичайним розрядом низького тиску, який буде мати таке саме значення $p \cdot d$?

© Ок.В. Соломенко, В.В. Лендєл, І.В. Присяжневич, В.Я. Черняк, 2014

- За яких умов можна отримати мікроплазму за рівнем нерівноважності, подібну до плазми жевріючого розряду?

Фрідман [3] відмовився від строгого обмеження розмірів мікророзрядів, оскільки немає сенсу говорити про мікророзряди, якщо зменшення геометричний розмірів не спричиняє появу нових фізичних ефектів та явищ.

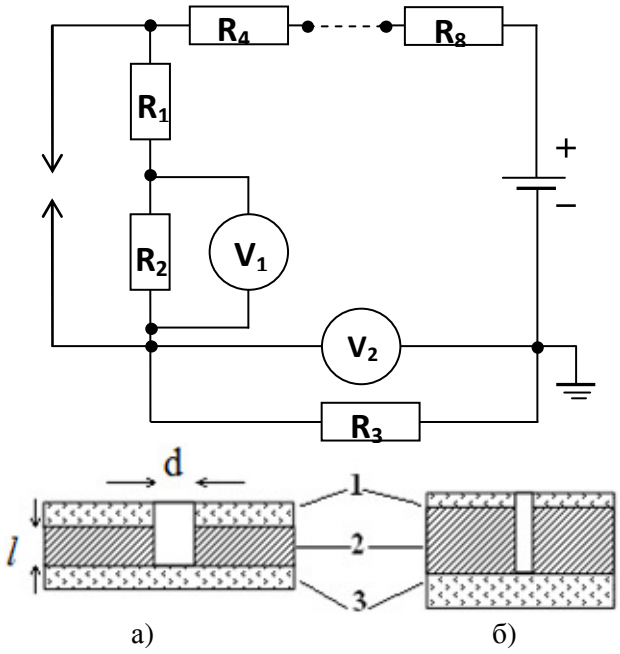


Рис. 1. Схема живлення мікророзряду з порожнистим електродом (1, 3 – електроди, 2 – діелектрична пластина): а – діаметр отвору d = 1 мм, товщина діелектрика (міжелектродна відстань) l = 1 мм; б – діаметр отвору d = 0.1÷0.2 мм, міжелектродна відстань l = 0.5 мм

При цьому вчені сходяться на тому, що для мікророзрядів ключовою є умова (1), з якої видно, що для організації сильно нерівноважної плазми, подібної до плазми жевріючого розряду, при атмосферному тиску потрібні характерні розміри субміліметрового діапазону.

Не дивлячись на те, що повного розуміння фізики мікророзрядів й досі немає, мікоплазма сьогодні має широкий спектр різноманітних застосувань: для захисту навколишнього середовища; у біології та біомедицині при стерилізації інструментів та обробці біологічних тканин; як інтенсивне джерело ультрафіолету та вакуумного ультрафіолету; для активації поверхонь, нанесення плівок, тощо.

Відомо, шо мікроплазма характеризується суттєвими змінами функцій розподілу за збудженими станами та енергій іонів та електронів за досить короткий час. Завдяки цим властивостям, стає можливим використання таких розрядів як джерел хімічно активних компонент.

У роботі проведені дослідження параметрів мікророзряду з порожнистим електродом у повітрі низького та атмосферного тиску за допомогою оптичної емісійної спектроскопії, мікроскопії та відеотехніки.

Опис експериментальних установок

Використовуючи експериментальну установку, зображену на рис. 1, проводили дослідження мікророзрядної системи з різними діаметрами отвору порожнистого електроду d та різними міжелектродними відстанями l.

Досліджувалися дві конфігурації мікророзряду. У першому випадку утруднений жевріючий розряд горів в отворі d = 1 мм між двома мідними плоскими електродами товщиною 0.1 мм, відокремленими один від одного пластиною ситалу товщиною l = 1 мм (рис. 1. а). У другому випадку діаметр отвору зменшено до d = 0.1÷0.2 мм, при цьому товщина діелектричної пластини складала 0.5 мм і використовувались різні матеріали (Al, Cu, Mo, Ti, Nb) суцільного електроду (рис. 1 б).

Дослідження мікророзряду з d = 1 мм проводили при тисках p ~ 7,6÷76 Торр, а з d = 0.1÷0.2 мм ~ 580 Торр. Вимірювали вольт-амперні характеристики (ВАХ) розробленої мікророзрядної системи, реєстрували спектри випромінювання генерованої мікроплазми за допомогою спектрометру Solar TII S 150-2-3648, на базі CCD лінійок, у діапазоні 200÷1100 нм зі спектральною роздільною здатністю ~ 0.2 нм. Оптичну діагностику плазми проводили вздовж осі отвору для різних полярностей порожнистого електроду (катоду (Нс) від англ. «hollow cathode» та аноду (На) від англ. «hollow anode»).

Результати досліджень

На рис. 2 представлено ВАХ для мікророзряду з порожнистим анодом.

Як видно з рис. 2 поведінка диференційного опору змінюється зі зміною тиску. Змінний характер диференційного опору (рис. 3) також спостерігався для системи з двома порожнистими електродами [4].

Слід відмітити, що у випадку двох порожнистих електродів диференційний опір має додатній характер у діапазоні тисків p = 3,8÷37,5 Торр та у випадку порожнистого

аноду при p = 7,6÷53,2 Торр. У системі з одним порожнистим електродом (у випадку порожнистого катоду) диференційних опір був завжди від'ємним.

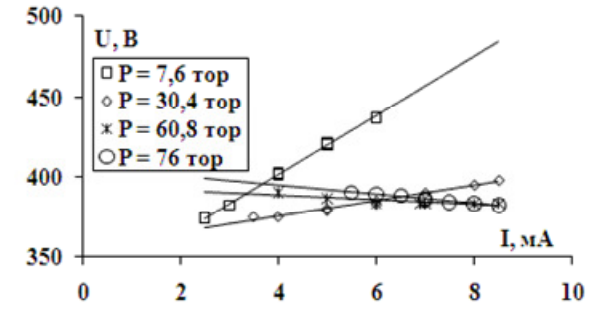


Рис. 2. ВАХ мікророзряду з порожнистим анодом

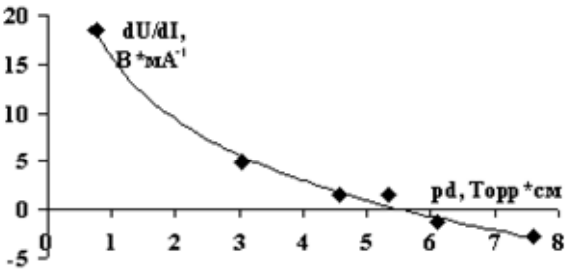


Рис. 3. Диференційний опір мікророзряду з порожнистим анодом

Типовий емісійний спектр плазми мікророзряду для системи, зображеної на рис. 1а, представлено на рис. 4. У спектрі повітряної мікоплазми присутні смуги другої позитивної системи азоту, а також інтенсивні смуги молекулярного іону азоту (переходу B-X). Слід відмітити відсутність у зареєстрованих спектрах емісії матеріалу електродів.

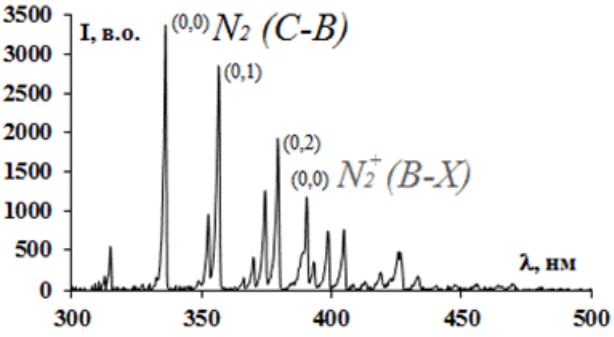


Рис. 4. Емісійний спектр плазми мікророзряду в повітрі у випадку порожнистого аноду (Ha)

Температури заселення коливальних (T_v) та обертальних (T_r) рівнів молекул у генерованій мікроплазмі визначалися шляхом співставлення експериментальних спектрів з результатом моделювання програмою Specair. Визначені відповідно коливальні та обертальні температури заселення для різних робочих тисків мікророзрядної системи представлено на рис. 5.

Як видно з рис. 5, плазма дослідженого мікророзряду є нерівноважною. Варто відзначити, що нерівноважність мікроплазми спостерігається для різних конструкцій мікророзрядних систем [5].

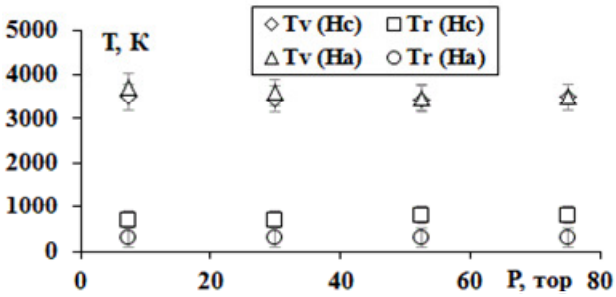


Рис. 5. Температури заселення коливальних T_v та обертальних T_r рівнів молекул у плазмі мікророзряду з порожнистим електродом різної полярності (порожнистого катоду - Hc та аноду – Ha) для різних робочих тисків системи

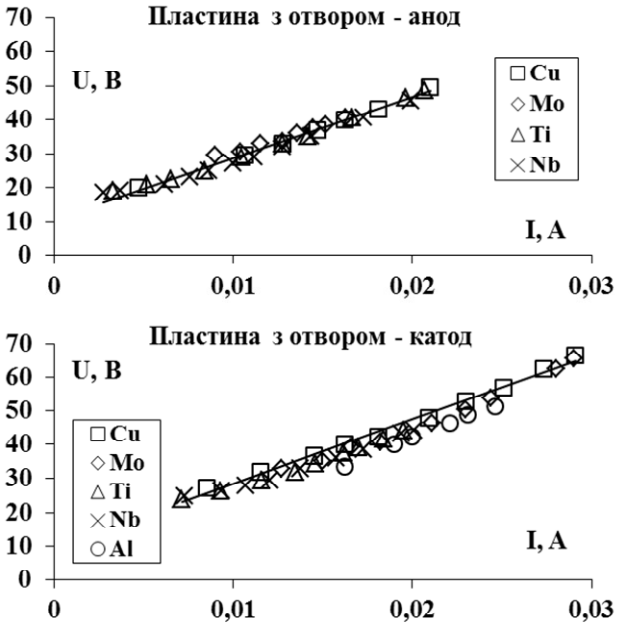


Рис. 6. ВАХ мікророзряду з порожнистим мідним електродом та одним суцільним електродом, виготовленим з різних матеріалів (Al, Cu, Mo, Ti, Nb) для різної полярності порожнистого електроду: а – позитивної; б – негативної

При вивченні системи з отворами d = 0.1÷0.2 мм використовувалися різні матеріали

суцільного електроду (мідь, молібден, тітан, ніобій, алюміній). При цьому порожнистий електрод завжди був мідним. ВАХ для різних полярностей порожнистого електроду при тисках $p \sim 340 \div 750$ Торр представлені на рис. 6.

Також було виявлено суттєве перевищення напруг пробою (U_{br}) над напругами горіння мікророзряду (U_d) для різних матеріалів суцільного електроду (Cu, Mo, Ti, Nb крім Al) при позитивній його полярності, а при негативній полярності розряд з алюмінієвим електродом горів нестабільно. Останнє характерно для "дифузного" жевріючого розряду, в якого катод вкритий тонким ізолюючим або напівпровідниковим шаром (шар Al_2O_3 на Al) і дуже швидко старіє [1].

Висновки

- Виявлено лінійний характер ВАХ одиничного мікророзряду з одним порожнистим електродом при міліамперних струмах (аналогічно до системи з двома порожнистими електродами). Незалежно від полярності і матеріалу суцільного електроду лінійність ВАХ і опір розряду практично зберігається.
- Виявлено суттєве перевищення напруг пробою над напругами горіння мікророзряду при струмах ~ мА для всіх матеріалів суцільного електроду за виключенням алюмінію (матеріалу з оксидною плівкою).
- Виявлено лінійну залежність опору від діаметру електроду та міжелектродного проміжку.
- Виявлена глибока аналогія між мікророзрядом з суцільним алюмінієвим електродом і "дифузним" жевріючим розрядом.
- Показано, що плазма мікророзряду є нерівноважною для обох полярностей порожнистого електроду та в усьому діапазоні досліджених тисків.

Список використаних джерел

1. *Engel A.* The ionized gases. Moscow. Physmathlit., 1959. – 224-247 p. (in Russian)
2. *Becker K.H., Kogelschatz U. Schoenbach K.H., Barker R.J.* Non-equilibrium air plasmas at atmospheric pressure. – Bristol and Philadelphia IOP (Institute of physics publishing), 2005. – 258-259 p.
3. *Fridman A*. Plasma Chemistry. Cambridge University Press, 2008. – 1022 p. www.cambridge.org/9780521847353.
4. *Solomenko Ok.V., Prysiazhnevych I.V., Chernyak V.Y., Zrazhevskij V.A.* Properties of electrical microdischarge in air // Visn., Ser. Fiz.-Mat. Nayky, Kyiv Univ. im. Tarasa Shevchenka. – 2011. – N 2. – P. 205-207. (in Ukrainian)
5. *Kim J. H., Cho S. C., Kim S. J., Lee W. M.* Atmospheric pressure air plasma jet from microdischarge in porous ceramics // International Symposium on Plasma Chemistry 19 (scientific program), Bochum, Germany, – 27 – 31 July 2009 – P1.5.46

Надійшла до редколегії 15.11.13

СУЧАСНА ФІЗИКА

УДК 532.536

Альохін О.Д., д.ф.-м. н., проф.
Білоус О.І., к.ф.-м. н., доц.
Репула А.М., студ.

Визначення критичних температур речовини за даними критичної опелесценції

В роботі запропоновано новий метод визначення величин критичної температури речовини за даними температурної залежності інтенсивності розсіяного світла вздовж термодинамічного напрямку критичної ізохори.

Для цього необхідно використати величини інтенсивності розсіяного світла при двох різних температури T_1 та T_2 і величину критичного показника ізотермічної стисливості речовини $\gamma = 1.231$ вздовж термодинамічного напрямку критичної ізохори.

Ключові слова: *фактор стисливості, рівняння стану, критична температура*

Київський національний університет імені Тараса Шевченка,03680, м. Київ, пр-т. Глушкова 4д, веб сайт: http://criticalfluid.com.ua/
e-mail: alekhin@univ.kiev.ua, o_bilous@ua.fm

Alekhin A.D., Sci.Dr., Pr.
Bilous O.I., Ph.D.
Repula A.M., stud.

Determination of critical temperatures of substance is from data of critical opalescence

The new method of determination of sizes of critical temperature of substance is in-process offered from data of temperature dependence of intensity of the dissipated light along thermodynamics direction of critical isochor.

For this purpose it is necessary to use the sizes of intensity of the dissipated light for two different temperatures of T_1 and T_2 and size of critical index of isothermal compressibility of substance $\gamma = 1.231$ along thermodynamics direction of critical isochor.

Key words: *factor of compressibility, equalization of the state, critical temperature*

Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03680, Kyiv, Glushkova st., 4d,
веб сайт: http://criticalfluid.com.ua/
e-mail: alekhin@univ.kiev.ua, o_bilous@ua.fm

Статтю представив академік НАН України, д.ф.-м.н., проф. Булавін Л.А.

На даний час, у зв'язку з широким практичним використанням унікальних властивостей речовини в критичному стані [1-3] все більше уваги приділяється дослідженню їх рівняння стану. Згідно флуктуаційної теорії фазових переходів (ФТФП) [4-6], вздовж граничних критичних напрямків – критичної ізохори, критичної ізотерми, границі поділу фаз ці рівняння стану, відповідно, мають вигляд:

$$\Delta\rho = \Gamma_0 \Delta\mu \cdot t^{-\gamma};\ \Delta\rho = D_0 \Delta\mu^{\frac{1}{\delta}};\ \Delta\rho = B_0 \Delta |t|^{\beta}. \quad (1)$$

Тут $\Delta\rho = (\rho - \rho_c)/\rho_c$, $\Delta\mu = (\mu - \mu_c)/\mu_c$ $\left[t = (T - T_c)/T_c\right]$., ρ_c, T_c, μ_c – критичні значення густини, температури, хімічного потенціалу; γ, β, δ - критичні показники ФТФП [4-6]. Величини цих критичних показників $\gamma = 1.233$, $\beta = 0.338$, $\delta = 4.63$ одержані в роботах [7, 8] методом введення малих параметрів в рівняння ФТФП. Як бачимо їх значення близькі до їх величин, одержаних сучасними методами ренурмгрупових перетворень [4-6, 9, 10].

Раніше в роботах [11-12] було показано, що амплітуди Γ_0, B_0, D_0 цих рівнянь стану лінійно пов'язані з фактором стисливості речовини $Z_c = P_c V_c / RT_c$.

Тобто, для визначення амплітуд Γ_0, B_0, D_0 необхідно знати значення величину фактора стисливості Z_c, а отже і критичних параметрів речовини P_c,V_c, T_c.

На першому етапі метою даної роботи є визначення критичної температури речовини, T_c, за даними інтенсивності розсіяного світла поблизу критичної точки.

Згідно ФТФП [4-6], температурна залежність стисливості речовини $\frac{d\rho}{d\mu} = \Gamma_0 \cdot t^{-\gamma}$, вздовж термодинамічного напрямку критичної ізохори, а отже, інтенсивності розсіяного світла представляється як $I(t) \sim \frac{d\rho}{d\mu}(t) \sim \left(\frac{T - T_c}{T_c}\right)^{-\gamma}$. На

© О.Д. Альохін, О.І.Білоус, А.М.Репула, 2014

основі цього співвідношення, використовуючи виміряні значення інтенсивності розсіяного світла при двох температурах T_1 і T_2 критична температура, T_c, може бути представлена у вигляді:

$$T_c = \frac{T_2 - T_1\left(I_1/I_2\right)^{1/\gamma}}{1-\left(I_1/I_2\right)^{1/\gamma}}, \qquad \gamma = 1.233 \qquad (2)$$

При проведення розрахунків критичної температури, за формулою (2), треба врахувати ряд вимог [13]:

1. Необхідно, щоб вимірювання інтенсивності розсіяного світла проводилось в речовині, густина якої була б критичною, $\rho = \rho_c$.

2. Дослідження I(t), повинні проводитися в області температур, ($\Delta T = T-T_c$,) для яких виконується Релеєвський закон розсіяння світла $I \sim (\lambda)^{-4}$.[14]/

3. Необхідно, щоб інтенсивність первинного розсіяння $I_п \sim (\lambda)^{-4}$, в цих експериментах, значно перевищувала інтенсивність вторинного розсіяння світла $I_в \sim (\lambda)^{-8}, \left(I_в/I_п << 10^{-2}\right)$ [13].

Для виконання цих умов в роботі були використані експериментальні дані інтенсивності розсіяного світла в неоднорідних системах: н-пентані, циклопентані, розчинах н-пентан-циклопентан в полі гравітації Землі поблизу критичної точки [13, 15]. Ці дані, I(t, z), показані на рис.1, 2.

Як видно з цих даних, рис.1, 2, поблизу критичної точки, під дією поля гравітації Землі, внаслідок необмеженого зростання стисливості речовини система стає просторово-неоднорідною по висоті, z. При критичному заповненні оптичної камери з речовиною [13], $\bar{\rho} = \rho_c$ і температур вище критичної $T>T_c$ в центрі камери $z = 0$, утворюється критична густина речовини $\rho(z = 0) = \rho_c$. Саме цій висоті відповідає максимальне значення інтенсивності розсіяного світла $I_{max}(z = 0, \rho = \rho_c)$. На висотах $z<0$ (низ камери) густина речовини $\rho(z) > \rho_c$; на висотах $z>0$ (верх камери), $\rho(z) < \rho_c$.

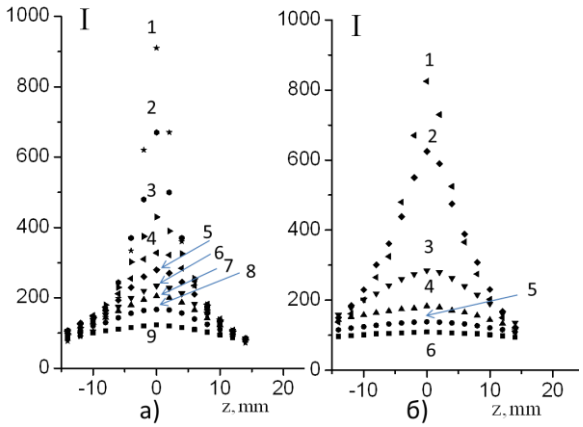


Рис.1. а) Висотні залежності інтенсивності розсіяного світла в н-пентані, при різних температурах: 1. T = 470.21 К, 2. T = 470,375 К, 3. T = 470.65 К, 4. T = 470.86 К, 5. T = 471.02 К, 6. T = 471.3 К, 7. T = 471.48 К, 8. T = 471.79 К, 9. T = 472.36 К,

b) Висотні залежності інтенсивності розсіяного світла в циклопентані, при різних температурах: 1. T = 512.04 К, 2. T = 512,22 К, 3. T = 512.9 К, 4. T = 513.54 К, 5. T = 514.39 К, 6.T = 514.88 К

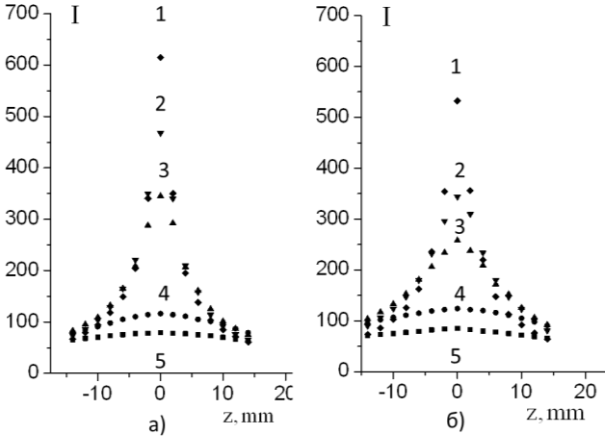


Рис.2. а) Висотні залежності інтенсивності розсіяного світла в суміші циклопентан-н-пентан (X = 38.6%), при різних температурах: 1. T = 484.19 К, 2. T = 484,36 К, 3. T = 484.57 К, 4. T = 485.92 К, 5. T = 486.8 К.

b) Висотні залежності інтенсивності розсіяного світла в суміші циклопентан-н-пентан (X = 56.7%), при різних температурах: 1. T = 491.9 К, 2. T = 492,19 К, 3. T = 492.45 К, 4. T = 493.39 К, 5. T = 494,13 К.

Отже, виходячи з цього, інтенсивність розсіяного світла неоднорідною речовиною в полі гравітації Землі в критичному стані змінюється за висотою. При наближенні до критичної

температури, інтенсивність розсіяного світла зростає. Як видно з рис.1, 2, найбільше зростання спостерігається на рівні $z = 0$ з критичною густиною. Саме ці дані $I(t, z = 0)$ необхідно використовувати для розрахунків критичної температури речовини за формулою (2).

Крім того, раніше, в роботах [13], при використанні різних довжин хвиль λ, було показано, що закон Релея-Енштейна $I(\lambda) \sim (\lambda)^{-4}$ виконується в області температур $\Delta T = (T\text{-}T_c) \geq 0{,}4$ К.

Саме тому, при розрахунках величин критичних температур досліджуваних об'єктів (рис.1, 2), за формулою (2) були використані дані $I(t, z = 0)$ температурної залежності інтенсивності розсіяного світла на висоті $z = 0$ з критичною густиною $\rho(0) = \rho_c$ в цій області температур. Ці дані показані на рис.3, 4

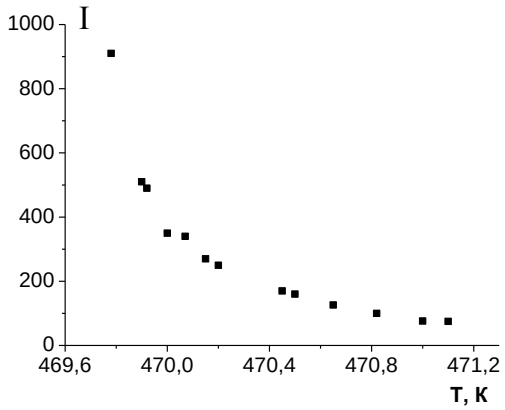


Рис. 3. Температурна залежність інтенсивності розсіяного світла в н-пентані на висоті $z = 0$, з критичною густиною ρ_c.

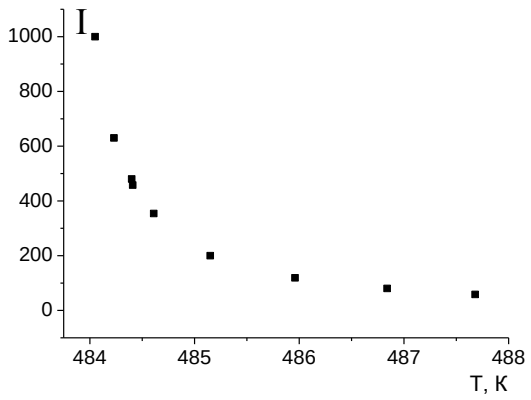


Рис. 4. Температурна залежність інтенсивності розсіяного світла в суміші циклопентан-н-пентан (X = 38,6%) на висоті $z = 0$, з критичною густиною ρ_c.

Залежності I(t) для інших досліджуваних об'єктів, має такий же вигляд.

На основі цих даних $I(t, z = 0)$, рис.1-4, за формулою (2), були розраховані величини їх критичних температур. Результати розрахунків критичних температур показані на рис. 5, рис. 6.

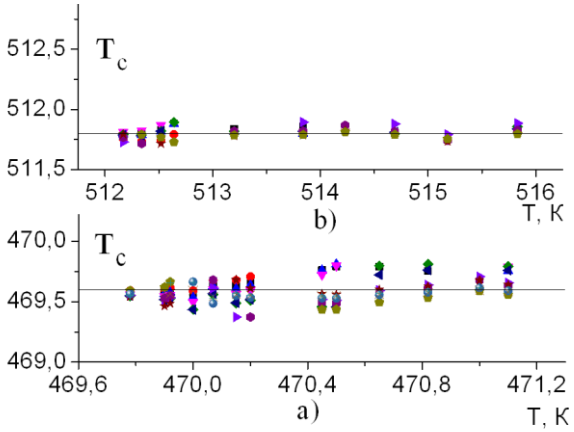


Рис. 5 Визначення критичної температури за розрахунковою формулою (2) в a) н-пентан, b) циклопентан.

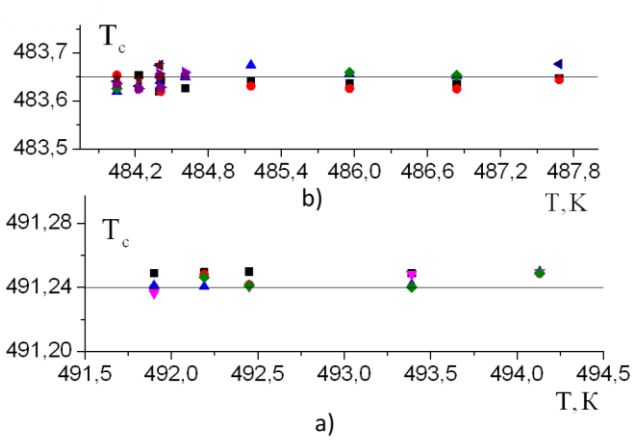


Рис. 6. Визначення критичної температури за розрахунковою формулою (2) в a) суміші циклопентан-н-пентан (X = 56,7%), b) суміші циклопентан-н-пентан (X = 38,6%).

Значення одержаних величин критичних температур представлені в табл. Для порівняння одержаних значень, у другій колонці представлені значення критичних температур цих об'єктів одержаних в [13, 15], за даними інтенсивності розсіяного світла поблизу критичної точки. В цих роботах, за критичну температуру приймалась температура, при якій інтенсивність розсіяного світла на висоті $z = 0$ (з критичною густиною) приймала максимальне значення.

Порівнюючи ці результати (табл) бачимо, що відмінність розрахованих значень T_c від експериментально визначених, становить 0,2 К.

Таблиця 1

Значення розрахованих та експериментальних критичних температур досліджуваних розчинів

Досліджувані Об'єкти	T_c, К розраховані	T_c, К експеримент
н-пентан	469.61±0.2	469.80±0.2
Циклопентан	511.80±0.2	511.50±0.2
Розчин Циклопентан-н-пентан (X = 38.6%)	483.65±0.2	483.76±0.2
Розчин Циклопентан-н-пентан (X = 56.7%)	491.24±0.2	491.36.±0.2

Тобто, відносна різниця визначення T_c складає величину $\varepsilon_T = \frac{\delta T_c}{T_c} = 4 \cdot 10^{-5}$, при T_c~500 К. Така відмінність розрахованих значень критичної температури речовини не суттєво впливає на величину абсолютних значень фактора стисливості $Z_c = P_c V_c / RT_c = (0.2 \div 0.3)$ і становить величину $\delta Z_c = 10^{-4}$.

Отже, запропонований в роботі метод визначення критичних температур речовини за даними інтенсивності розсіяного світла, може бути успішно застосований при розрахунках критичного фактору стисливості речовини $Z_c = P_c V_c / RT_c$.

Список використаних джерел

1. Supercritical fluids: Theory and practice. – Moscow, 2008, V.3, № 2. P.1 -101. (in Russian).
2. *Vostrikov A.A., Fadeeva O.N., Fadeeva И.И., Socol M.Ya.* Formation of nanoparticles Al_2O_3 at aluminum oxidation by water at sub- and supercritical parameters// Supercritical fluids: Theory and practice. – 2010, V.5, № 1. P. 12-25. (in Russian).
3. *Alekhin A.D.* Supercritical fluid in the field of gravitation of Earth // Monitoring. Science and technologies. – 2011. – 1(6). – P. 69-78. (in Russian).
4. *Patashinskiy A.Z., Pokrovskiy V.A.* Fluctuation theory of phase transitions. – Moscow, Science. – 1982. (in Russian).
5. *Stenli G.* Phase transitions and critical phenomena. M. – 1973. – 419 p. (in Russian).
6. *Ma Sh.* Modern theory of the critical phenomena. – M., 1980. – 298 p. (in Russian).
7. *Alekhin A.D.* Critical indices for systems of different space dimensionality // Journal of Molecular Liquids – 2005. – 120/1-3 – P. 43-45.
8. *Алехин А.Д., Билоус О.И.* Сопоставление величин критических показателей критического флюида в различных теоретических подходах // Мониторинг. Наука и технололии. - 2013. -№ 1(14). - С.58-65. (in Russian).
9. *Pelissetto A., Vicary E.,* Critical Phenomena and Renormalization-Group Theory // Phys.Rep., 2002. – V.368, P.549-699
10. *Pogorelov A.A. Suslov I.M.* Otsenka of critical indexes from teoretiko-field ренормгруппы: mathematical sense «standard values» // JETP. – 2008. – V. 133, P. 1277-1289. (in Russian).
11. *Alekhin A.D. Bilous O.I.* Communication of amplitudes of the parametrical equation of a state with a critical factor of compressibility of substance // Monitoring. Science and tekhnololiya.- 2012. -№ 1(10). - P.68-73. (in Russian).
12. *Alekhin A.D. Bilous O.I,. Rudnikov E.G.* Parametrical representation of gravitational effect in a critical fluid // Monitoring. Science and tekhnololiya. - 2012. - № 3(12). - P.82-88. (in Russian)
13. *Alekhin A.D., Dorosh A.K, Rudnikov E.G.* The critical state of matter in the Earth's gravity field. Kyiv. "Politehnica"– 2008. – 404 p. (in Ukraine)
14. *Wolkenstein M. W.* Molecular optics. M. – L., 1951. – 744 p. (in Russian)
15. *Alekhin A.D., Golik A.Z., Krypskiy N.P., Chaluy A.V., Shumansciy Ya.I.* Light dispersion itermodinamichesky properties of double solutions in critical area of steam formation // Physics of a liquid state. 1987 – P. 65-80. (in Russian).

Надійшла до редколегії 16.01.14

УДК 681.3.062

Горбар Е В [1], д.ф.-м.н., с.н.с.

Електронні стани на найнижчому рівні Ландау у невпорядкованому дираківському напівметалі

Розглянуто електронні стани на найнижчому рівні Ландау у невпорядкованому дираківському напівметалі в другому порядку теорії збурень по потенціалу домішок. Отриманий результат порівняно з точним розв'язком і обговорено необхідність врахування процесів розсіяння між різними вейлівськими точками для того, щоб провідність була скінченною.

Ключові слова: найнижчий рівень Ландау, невпорядкований дираківський напівметал

[1] Київський національний університет імені Тараса Шевченка,03680, м. Київ, пр. Глушкова 4д, e-mail: gorbar@bitp.kiev.ua

E. V. Gorbar[1], Dr. Sci., Sen. Sci. Res.

Electron states in the lowest Landau level in disordered Dirac semimetal

The electron states in the lowest Landau level in disordered Dirac semimetal are studied in the second order of perturbation theory in impurities potential. The results are compared with the exact solution and the necessity of impurity scattering between different Weyl nodes to produce a finite conductivity is discussed.

Key words: lowest Landau level, disordered Dirac semimetal

[1]Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03680, Kyiv, Glushkov st., 4d, e-mail: gorbar@bitp.kiev.ua

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Макарець М. В.

Recently there was a significant interest in condensed matter community to the role of quantum anomalies in transport and electromagnetic properties of Dirac and Weyl semimetals, whose low energy quasiparticles are described by the Dirac and Weyl equation, respectively. Historically, the first example of a metal whose low effective energy includes three dimensional Dirac fermions is yielded by bismuth Ref.[1]. Its band structure features pockets of holes near T point in the Brillouin zone and pockets of electrons near the three equivalent L points which are described by (3+1)-dimensional Dirac equation with non-zero mass.

It is interesting that the magnitude of this mass can be tuned by doping bismuth with antimony. As Sb concentration in $Bi_{(1-x)}Sb_x$ alloy increases, the mass decreases and closes at $x \approx 0.03 - 0.04$ realizing a truly massless point. As x is further increased, the gap reopens and for $x > 0.07$ the material becomes an inverted-band bulk insulator with topological surface states (see, e.g., Ref.[2]).

Recently, applying magnetic fields, a negative magnetoresistivity [3] was observed in $Bi_{0.97}Sb_{0.03}$. Negative magnetoresistivity connected with the chiral anomaly was long ago [4] argued to be a fingerprint of the existence of a Weyl semimetal phase, where the single Dirac point splits into two Weyl nodes with opposite chirality and the distance in momentum space between these points is proportional to the applied magnetic field. It is well known that only the fermion states on the lowest Landau level (LLL) produce the chiral anomaly (see, e.g., Ref.[5]). According to Ref.[4], one cannot neglect scattering processes involving two Weyl nodes. As shown in [4], if the internode scattering rate for the electron states in the LLL is small, this leads to a negative magnetoresistivity.

It is clear that in order to theoretically describe negative magnetoresistivity, it is necessary to calculate the width of the LLL states due to the scattering on random impurities. The standard method to perform such a calculation is the impurity (or "cross") diagram technique [6,7]. According to this technique, the interaction Hamiltonian of electrons with impurities is given by

$$H_{int} = \int d^3\boldsymbol{r}\, U(\boldsymbol{r})\psi^+(\boldsymbol{r})\psi(\boldsymbol{r}), \qquad (1)$$

where $U(\boldsymbol{r}) = \Sigma_j u(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_j)$ and summation is performed over impurities situated at random positions. The simplest interaction potential with an impurity is the short-range one

$$u(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_j) = u_0 \delta^3(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_j). \qquad (2)$$

© Е.В. Горбар, 2013

Further, the averaging over the positions of impurities proceeds according to the rule [6,7]

$$< f(\boldsymbol{r}_j) >= \frac{1}{V}\int f(\boldsymbol{r}_j) d^3\boldsymbol{r}_j, \quad (3)$$

where V is the volume of the system. Using Eq.(3), we easily find the following average of the impurity correlation function:

$$< u(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_j)u(\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}_j) > = u_0^2 n_c \delta^3(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'), \quad (4)$$

where $n_c = N/V$ is the concentration of impurities. Obviously, Eq.(4) can be interpreted as an effective impurity propagator in the impurity diagram technique for electrons in disordered material. In momentum space, it equals

$$D_U(\omega, \boldsymbol{k}) = 2\pi u_0^2 n_c \delta(\omega). \quad (5)$$

Two features of the effective propagator are worth noticing. At first, it is purely real in contrast to usual propagators due to the exchange of a particle in quantum field theories. This is a very important fact and its one immediate consequence as we will see below is that the scattering on impurities leads to an imaginary contribution in the electron self-energy producing a finite width for electron states. At second, the effective propagator (5) depends on frequency only through the Dirac δ-function, therefore, virtual particles in the impurity diagram technique have energies that are completely defined by the energies of external particles. Of course, this result is a trivial consequence of the fact that the electron scattering elastically on an impurity can change its momentum, however, it cannot change the energy. Using Eq.(5), we find the following second order contribution to the electron self-energy due to scattering on an impurity:

$$\Sigma(\Omega, \boldsymbol{p}) = -i\int \frac{d\omega d^3k}{(2\pi)^4} S(\omega, \boldsymbol{k}) D_U(\Omega-\omega, \boldsymbol{p}-\boldsymbol{k}) = -iu_0^2 n_c \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} S(\Omega, \boldsymbol{k}). \quad (6)$$

Let us consider how impurity scattering affects the electron states in a magnetic field. Since the effective propagator (4) is local in coordinate space, the Schwinger phase is irrelevant for the second order contribution to the electron self-energy. Then using the translation invariant part of the electron propagator in a magnetic field given, for example, by Eq.(A21) in Ref.[8], we find that Eq.(6) implies the following contribution:

$$\Sigma = -iu_0^2 n_c \Sigma_{n=0}^{\infty} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \overline{S_n}(\Omega, \boldsymbol{k}), \quad (7)$$

where the summation is performed over Landau levels n and $\overline{S_n}(\Omega, \boldsymbol{k})$ is the translation invariant part of the electron propagator on the nth Landau level. Since we are interested in the present paper in the electron states in the lowest Landau level, we retain in Eq.(7) only the LLL contribution. Using

$$\overline{S_0}(\Omega, \boldsymbol{k}) = ie^{-k^2 l^2} \frac{\Omega - k^3\gamma^3\gamma^0}{\Omega^2 - k_3^2} \times [1 - i\gamma^1\gamma^2 sgn(eB)]\gamma^0, \quad (8)$$

where $l = |eB|^{-1/2}$ is the magnetic length, we find that the electron self-energy in the LLL due to scattering on impurities equals

$$\Sigma_{LLL} = u_0^2 n_c \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{-k^2 l^2} \frac{\Omega - k^3\gamma^3\gamma^0}{\Omega^2 - k_3^2} \times [1 - i\gamma^1\gamma^2 sgn(eB)]\gamma^0. \quad (9)$$

Integrating over the transverse components of momentum and using the chiral representation of the Dirac matrices, it is not difficult to show that Eq.(9) can be rewritten as follows:

$$\Sigma_{LLL} = u_0^2 n_c |eB| \Sigma_{\chi=\pm} \int \frac{dk^3}{8\pi^2} \frac{1}{\Omega + \chi k^3 + i\delta sgn(\Omega)} \times [1 - i\gamma^1\gamma^2 sgn(eB)]\gamma^0, \quad \delta \to +0. \quad (10)$$

The structure of Eq.(10) reflects the well-known fact that LLL fermion propagator reduces to the propagator of two chiral edge states in an effective (1+1)-dimensional theory (see, e.g., Eq.(36) in Ref.[9]). Integrating in Eq.(10), we obtain

$$\Sigma_{LLL} = -i\frac{u_0^2 n_c |eB| sgn(\Omega)}{4\pi} \times [1 - i\gamma^1\gamma^2 sgn(eB)]\gamma^0. \quad (11)$$

Eq.(11) means that LLL states acquire due to scattering on impurities non-zero width $\Gamma = u_0^2 n_c |eB|/(4\pi)$. However, it is not clear how this result is consistent with the well-known result [10] that current-carrying chiral edge states are immune to scattering on impurities for a moderate amount of disorder (for a discussion of impurity scattering for helical edge states see, e.g., Ref.[11]).

In order to clarify the situation, we will calculate the exact Green`s function for chiral edge states. The Hamiltonian density of chiral edge electrons interacting with impurities is given by

$$H = \left(i\tau_3\partial_x + \Sigma_j u_0 \delta(x - x_j)\right)$$

$$= \Sigma_{\chi=\pm}(i\chi\partial_x + \Sigma_j u_0 \delta(x - x_j))(1 + \chi\tau_3)/2. \quad (12)$$

Since Hamiltonian (12) is a diagonal matrix, it suffices to find the Green`s function at fixed chirality. The corresponding Green`s function in mixed frequency and coordinate representation is determined by

$$G_\omega^\chi(x,y) = < x \left| \frac{1}{\omega - H_\chi} \right| y >, \quad (13)$$

where $H_\chi = i\chi\partial_x + \Sigma_j u_0 \delta(x - x_j)$ is the Hamiltonian for the chiral edge state at fixed chirality. Obviously, without loss of generality we can consider the state with chirality $\chi = +$. Since H_+ defines a completely integrable system, we easily find its complete set of eigenfunctions given by

$$\psi_p(x) = (2\pi)^{-1/2}$$

$$\times \exp\left[-ipx + i\Sigma_j u_0 \int_{-\infty}^{x} dz\, \delta(z - x_j)\right]. \quad (14)$$

Then the Green`s function equals

$$G_\omega^+(x,y) = \int \frac{dp}{(2\pi)(\omega - p)} \exp[-ip(x-y)$$

$$+ i\Sigma_j u_0 \left(\theta(x - x_j) - \theta(y - x_j)\right)]. \quad (15)$$

The exact Green`s function (15) immediately implies that the processes of scattering on impurities do not affect conductivity and current-carrying chiral edge states are indeed immune to such processes.

Further, it is interesting to find the averaged exact Green`s function. This is not difficult to do using Eq.(3). Averaging in Eq.(15), we obtain

$$< G_\omega^+(x,y) = \frac{1}{L^N} \int \frac{dp}{(2\pi)(\omega - p)} e^{-ip(x-y)}$$

$$\times [L - |x-y| + |x-y| e^{iu_0 sgn(y-x)}]^N, \quad (16)$$

where L is the spatial size of the system. As it goes to infinity, the Green`s function (16) tends to

$$< G_\omega^+(x,y) = \int \frac{dp}{(2\pi)(\omega - p)} e^{-ip(x-y)} \exp[-2n_c^{(1)}$$

$$\times |x-y| sin^2 \frac{u_0}{2} - in_c^{(1)}(x-y)\sin(u_0)], \quad (17)$$

where $n_c^{(1)} = N/L$ is the one-dimensional concentration of impurities.

Let us discuss the physical meaning of the averaged Green`s function (17). It is known [6,7] that the averaged Green`s function in the first order of perturbation theory in impurity potential produces only a correction to the chemical potential. Clearly, the averaged Green`s function (17) is in agreement with this conclusion. On the other hand, the second order contribution of perturbation theory in impurity potential should produce [6,7] nonzero width of the states which this function describes. Obviously, expanding the averaged Green`s function (17) in the second order in impurity potential we find that the corresponding contribution is real. Therefore, this second order contribution indeed generates a nonzero width for the states which this Green`s function describes.

It is instructive to calculate the second order contribution in impurity potential using the exact Green`s function (15) and compare it with the second order contribution of perturbation theory to the self-energy of the LLL states given by Eq.(11). Expanding the Green`s function (15) in the second order in impurity potential, we obtain

$$G_\omega^{(2)}(x,y) = -u_0^2 \int \frac{dp}{(4\pi)(\omega - p)} e^{-ip(x-y)}$$

$$\times [\Sigma_j \left(\theta(x-x_j)-\theta(y-x_j)\right)]^2. \qquad (18)$$

As usual in the impurity diagram technique [6,7], only scattering on the same impurity should be retained in the second order contribution. Then we find

$$G_\omega^{(2)}(x,y) = -u_0^2 N \int \frac{dp}{(4\pi)(\omega-p)} e^{-ip(x-y)}$$

$$\times [\left(\theta(x-x_j)-\theta(y-x_j)\right)]^2. \qquad (19)$$

Averaging over impurity position in Eq.(19), we obtain

$$< G_\omega^{(2)}(x-y) >= -u_0^2 n_c^{(1)}$$

$$\times \int \frac{dp}{(4\pi)(\omega-p)} e^{-ip(x-y)} |x-y|. \qquad (20)$$

Of course, this contribution completely agrees with Eq.(17) in the leading in $n_c^{(1)}$ contribution and is consistent with the self-energy of LLL states given by Eq.(11). Thus, we conclude that although there is a non-zero width of chiral edge states in the averaged Green`s function due to the impurity scatterings within the same Weyl node only scattering processes that involve impurity scatterings between different Weyl nodes can provide finite conductivity.

References

1. *Wolff P.A.* Matrix elements and selection rules for the two-band model of bismuth / P.A. Wolff // J. Phys. Chem. Solids. – 1964. – Vol.25. – P. 1057.
2. *Hasan M.Z.* Topological insulators / M.Z. Hasan and C.L. Kane // Rev. Mod. Phys.– 2010. – Vol. 82. –P. 3045.
3. *Kim H.-J.* Dirac vs. Weyl in topological insulators: Adler-Bell-Jackiw anomaly / H.-J. Kim et al. // preprint arXiv:1307.6990 [cond-mat.str-el].
4. *Nielsen H.B.* The Adler-Bell-Jackiw anomaly and Weyl fermions in a crystal / H.B. Nielsen and M. Ninomiya // Phys. Lett. B. – 1983. – Vol.130. – P. 389-396.
5. *Basar G.* The chiral magnetic effect and axial anomalies / G. Basar and G.V. Dunne // preprint arXiv:1207.4199 [hep-th].
6. *Abrikosov A.A., Gor`kov L.P., Dzyaloshinsky I.E.* Methods of quantum field theory in statistical physics. – Moscow: Fizmatgiz, 1962. – 444 p. (in Russian).
7. *Levitov L.S., Shytov A.V.* The Green`s functions. Problems with solutions. – Moscow: Fizmatlit, 2002. – 352 p. (in Russian).
8. *Gorbar E.V.* Normal ground state of dense relativistic matter in a magnetic field / E.V. Gorbar, V.A. Miranky, and I.A. Shovkovy // Phys. Rev. D. – 2011. – Vol. 83. – P. 085003.
9. *Semenoff G.* Universality and the magnetic catalysis of chiral symmetry breaking / G.W. Semenoff, I.A. Shovkovy, and L.C.R. Wijewardhana // Phys. Rev. D. – 1999. – Vol. 60. – P. 105024.
10. *Galperin B.I.* Quantized Hall conductance, current-carrying edge states, and the existence of extended states in a two-dimensional disordered potential / B.I. Halperin // Phys. Rev.B. – 1982. – Vol. 25. – P. 2185-2190.
11. *Cheianov V.* Mesoscopic fluctuations of conductance of a helical edge contaminated by magnetic impurities / V. Cheianov and L.I. Glazman // preprint arXiv:1301.1185 [cond-mat.mes.hall].

Надійшла до редколегії 17.01.14

УДК 539.2

Королович В.Ф.[1], к.ф.-м.н.
Гребньов О.А.[1], студ.
Цивилева О.М.[1], д.б.н.
Мороз К.О.[1], к.ф.-м.н., доц.

Розрахунок площі поверхні наночастинок астралену: Модель

Запропонована модель для оцінки площі поверхні вуглецевих наночастинок поверхня яких складається з структурних елементів різної симетрії. Адекватність моделі перевірено на прикладі розрахунку площі поверхні одностінних вуглецевих нанотрубок. Використовуючи запропоновану модель розраховано площу поверхні та питому площу поверхні наночастинок астралену.

Ключові слова: *площа поверхні, наночастинки, астралени, нанотрубки*

[1]Київський національний університет імені Тараса Шевченка,03680, м. Київ, пр-т. Глушкова 4д, e-mail: korolovich@gmail.com

V.F. Korolovych[1], PhD
O.A. Hrebnov[1], stud.
O.M. Tsivileva[1], Dr.Sci.
K.O. Moroz[1], Ph.D., Assoc. Prof.

Evaluation of the surface area of astralene nanoparticles : Model

The proposed model is for the evaluation of surface area of carbon nanoparticles, the surface of this nanoparticles consists of elements with different symmetry types. Adequacy of the model was checked by calculation of surface area of single-wall nanotubes. Surface area and specific surface area of astralene nanoparticles were calculated using this model.

Keywords: *surface area, nanoparticles, astralene, carbon nanotubes*

[1]Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03680, Kyiv, Glushkova st., 4d, e-mail:korolovich@gmail.com

Статтю представив академік НАН України, д.ф.-м.н., проф. Булавін Л.А.

The surface area of carbon nanoparticles (carbon nanotubes, fullerenes, actralene etc.) is one of their key properties, which a large extent determines application field of nanoparticles [1]. For example, due to the ultrahigh surface area (SA) carbon nanotubes can be used to produce new generation of electrodes in batteries, and it will reduce battery charging time and increase battery capacity [2]. Also, carbon nanoparticles with ultrahigh SA can be used to create more efficient catalysts that reduce the temperature and the energy required to start the reaction [3]. Examples of other applications of carbon nanoparticles with ultrahigh surface area described in Ref. [4, 5].

With the development of the methods of nanoparticle synthesis appear nanoparticles consisting of elements of different symmetry on significant part of surface, for example, astralene nanoparticles [6]. However, the standard model of calculation of carbon nanoparticles SA is based on calculation of the surface area of the hexagonal cell that make up surface of this nanoparticles [7]. Therefore, standard model can not be applied to calculate SA of carbon nanoparticles with various elements of symmetry on surface.

The aim of this work is the development of model which allows quickly evaluate the surface area of carbon nanoparticles with the surface consisting of elements with different symmetry types. Our model consists in describing of nanoparticle by geometrical figure with the corresponding type of symmetry. For example, carbon nanotubes can be described by a cylinder and astralene nanoparticles by torus (Fig. 1).

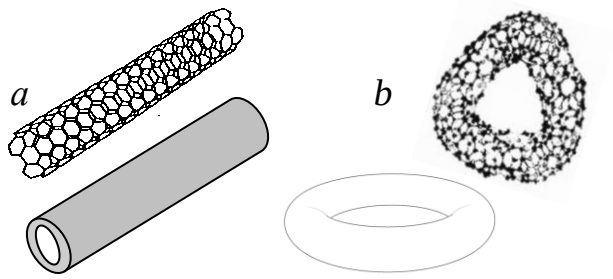


Fig. 1. Schematic representation of carbon nanotube (a), astralene (b) and their models.

© В.Ф. Королович, О.А. Гребньов, О.М. Цивилева, К.О. Мороз, 2014

Arises logical question: "What is the accuracy of describing the surface area of the carbon nanoparticles using our model?" To answer this question, we calculate the specific surface area of single-walled carbon nanotubes (SSA_{CNT}) using our model. The result of the calculation is comparable to the experimental value (SSA^{exp}_{CNT} = 948 m^2/g) and to the value of the standard model (SSA^{mod}_{CNT} = 1315 m^2/g) [7].

The calculation of SSA_{CNT} was carried out by commonly known formula:

$$SSA_{CNT} = 2\pi R \cdot (l + R) / m$$

where l = 4250 nm and R = 0,747 nm is the length and radius of the carbon nanotube where m = $1{,}5187 \cdot 10^{-17}$ g is the mass of carbon nanotubes with the stated length and radius, calculated using the program Nanotube Modeler. Comparing the calculated value SSA_{CNT} = 1313 m^2/g and SSA^{mod}_{CNT} we see that results of our calculations with the accuracy <0.2% are coinciding with the results of the standard model. However, obtained by us value of SSA_{CNT}, as SSA^{mod}_{CNT}, is slightly larger than SSA^{exp}_{CNT}. This is explained mainly by shortcomings of existing methods of synthesis and purification of carbon nanotubes.

Using the proposed model can calculate the SA and the SSA of astralene nanoparticles. Surface area of astralene SA_{astr} (according to our model astralene by its symmetry is corresponding to geometrical figure torus) was calculated using the formula:

$$SA_{astr} = \pi^2 / 4 \cdot (D^2 - d^2)$$

whetre D and d are the inner and outer diameter of astralene. Results of calculation of SA for modeling nanoparticles of astralene with D from 15 to 180 nm are presented in Fig 2.

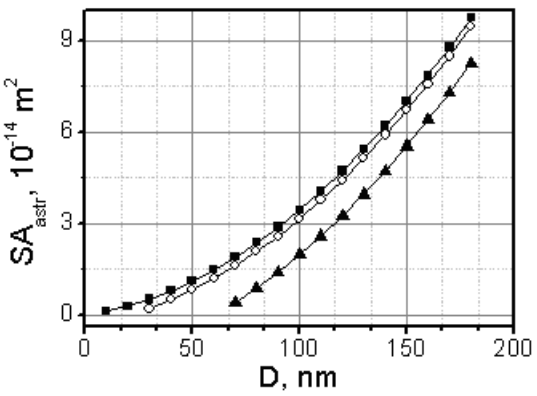


Fig. 2. The dependence of the surface area of astralene nanoparticles of its outer diameter (D). When an internal diameter of astralene: 20 nm (■), 40 nm (○), 80 nm (▲)

SSA_{astr} calculated using the formula:

$$SSA_{astr} = SA_{astr} \cdot (N / M)$$

where M i $N=M/m_{astr}$ – total mass and number of astralene in the sample respectively. m_{astr} – mass of astralene (using Nanotube Modeler). Results of calculation of SSA_{astr} shown in Fig. 3.

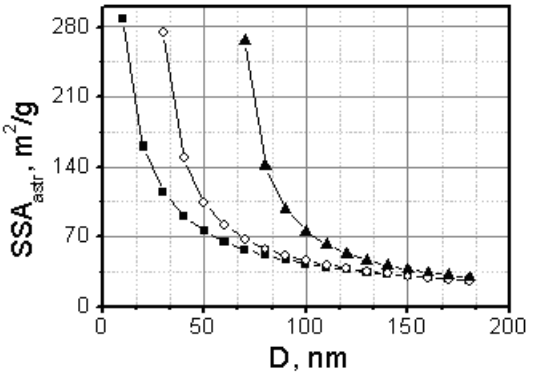


Fig. 3. Dependence of the specific surface area of astralene nanoparticles of their external diameter (D). When an internal diameter of astralene: 20 nm (■), 40 nm (○), 80 nm (▲)

From Fig.2 and Fig.3 we see that SA_{astr} and SSA_{astr} changes with increasing of D for non-linear law. Descending of SSA_{astr} with increasing of D can be explained by the fact that with increasing of D increases the m_{astr} and this dependance predominates over the first one.

Список використаних джерел

1. Surfaces of Nanoparticles and Porous Materials / James A. Schwarz; Cristian I. Contescu // CRC Press. – 1999. – 812 p.

2. Light-weight free-standing carbon nanotube-silicon films for anodes of lithium ion batteries / Cui LF, Hu L, Choi JW, Cui Y // ACS Nano. – 2010. – 4(7). – p.3671(8).

3. Promotion of oxygen reduction by a bio-inspired tethered iron phthalocyanine carbon nanotube-based catalyst / Ruiguo Cao, Ranjit Thapa, Hyejung Kim, etc. // Nature Communications. – 2013. – 4. – p. 2076.

4. Carbon Nanotubes: Present and Future Commercial Applications/ Michael F. L. De Volder, Sameh H. Tawfick, Ray H. Baughman, A. John Hart // Science. – 2013. – 339(6119). – p. 535-539.

5. Nanotube–Polymer Composites for Ultrafast Photonics / By Tawfique Hasan, Zhipei Sun, Fengqiu Wang, etc. // Adv. Mater. – 2009. – V.21. – p.3874–3899.

6. Structural and magnetic resonance study of astralen nanoparticles / A.I. Shames, E.A. Katz, A.M. Panicha [et. al] // Diamond & Related Materials. – 2009. – V.18. – p. 505(5).

7. Spesific surface area of carbon nanotubes and bundeles of carbon nanotubes / A. Peigney, Ch. Laurent, F. Flahaut, R.R. Bacsa, A. Rousset // Carbon. – 2001. –V.123. – p. 8638.

Надійшла до редколегії 23.01.14

УДК 539.213

Лисов В.І.[1], д.ф.м. н., проф.,
Цареградська Т.Л.[2], к.ф.м.н., доц.,
Саєнко Г.В.[3], інж.,
Турков О.В.[4], інж.

Особливості процесів фазоутворення в аморфному бінарному сплаві $Fe_{80}B_{20}$

В даній роботі за допомогою рівнянь теорії гомогенної нуклеації бінарних систем розраховано температурну залежність об'ємної частки кристалічної фази для сплаву $Fe_{80}B_{20}$. Показано, що процес кристалізації сплаву $Fe_{80}B_{20}$ є двостадійним у відповідності до діаграми стану бінарної системи Fe-B. Результати теоретичних розрахунків задовільно узгоджуються з експериментальними даними, отриманими за допомогою високочутливої дилатометрії та рентгенівської дифрактометрії.

Ключові слова: *аморфний бінарний сплав, кристалізація, об'ємна частка кристалічної фази.*

[1,2,3,4] Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 03187, м. Київ, проспект ак. Глушкова 4,
e-mail: [2]tsar_grd@ukr.net

V.I. Lysov[1], Dr.Sc., Prof.,
T.L. Tsaregradskaya[2], PhD.,
G.V. Saenko[3], eng.,
O.V. Turkov[4], eng.

The features phaseformation processes in amorphous binary alloy $Fe_{80}B_{20}$

This paper presents the results of calculations the temperature dependence volume part crystalline phase for the alloy $Fe_{80}B_{20,}$ wich obtained by equalizations of theory homogeneous nucleation for binary system. It is rotined that process of crystallization of alloy $Fe_{80}B_{20}$ it is two-stage in accordance with the diagram of the state of the binary system Fe-B. It is shown that the results of theoretical calculations satisfactorily conform to experimental data, got by highly sensitive dilatometry and X-ray diffractometry.

Key Words*: amorphous binary alloy, crystallisation, volume part of crystalline phase.*

[1,2,3,4] Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03187, Glushkova av.4,
e-mail: [2]tsar_grd@ukr.net

Статтю представив член-кор. НАН України, д.ф.-м.н., проф. Макара В.А.

Вступ

Аморфні сплави на основі заліза є одними з найбільш вживаних з точки зору практичного використання матеріалів, до того ж, вони можуть використовуватись в якості основи для отримання нових нанокристалічних матеріалів частковою кристалізацією з аморфного стану. Окрім цього, бінарні аморфні сплави є зручними модельними об'єктами для дослідження властивостей невпорядкованих систем в конденсованому стані. За об'єкт досліджень обрано бінарний сплав $Fe_{80}B_{20}$, оскільки система Fe-B є базовою для створення на її основі складнолегованих багатокомпонентних сплавів, які знаходять широке застосування в техніці. Для бінарного сплаву $Fe_{80}B_{20}$ досліджено процеси фазоутворення в процесі неперервного нагрівання методами високочутливої дилатометрії, рентгенівської дифрактометрії та проведено теоретичний розрахунок характеристик процесу кристалізації.

Теоретичний розрахунок характеристик процесу кристалізації бінарних аморфних сплавів системи Fe-B

Важливою характеристикою процесу кристалізації аморфних сплавів є об'ємна частка кристалічної фази в заданий момент часу. Для однокомпонентних систем часова залежність частки кристалічної фази описується рівняннями

$$dX(t) = \frac{dV_{cr}(t)}{V_0} = (1 - X(t)) J \frac{4}{3} \pi (Ut)^3 dt;$$

$$X(t) = 1 - \exp\left(-\frac{\pi}{3} JU^3 t^4 \right). \qquad (1)$$

Узагальнюючи диференційне рівняння на випадок бінарних сплавів, маємо [1-4]

$$\frac{dX(t)}{dt} = (1 - \sum_{i=1}^{k} X_i(t)) \frac{4}{3} \pi \left\langle J_{0i} U_i^3 \right\rangle (t - t_{0i})^3,$$

© В.І. Лисов, Т.Л. Цареградська, Г.В. Саєнко , О.В. Турков, 2014

$$\left\langle J_{0i}, U_i^3 \right\rangle = \int_0^1 J'_{0i}(c_2) U_i^3(c_2) dc_2, \qquad (2)$$

де k – кількість кристалічних фаз; U_i – лінійна швидкість росту кристалів i-ої фази; J_{0i} – початкова частота зародкоутворення, що відповідає $\sum_{i=1}^{k} X_i = 0$; t_{0i} – час початку кристалізації i-ой фази.

Частота зародкоутворення для бінарних систем $J_i^{'}$ має сенс функції розподілу кристалічних зародків, що виникають, за певними значеннями концентрації, тобто

$$J_i^{'}(c_2) = dJ_i / dc_2$$

$$= N \frac{D}{a^2} \exp\left[- \frac{16\pi\sigma^3 V^2}{3kT\left(\Delta G^{\alpha-i}(c_2) - 2\left|\Delta G^{\alpha-\alpha}(c_2)\right|\right)^2} \right],$$

$$\begin{aligned} \Delta G^{\alpha-i}(c_2) &= \Delta G^{\alpha}(c_2) - \Delta G^{i}(c_2), \\ \Delta G^{\alpha-\alpha}(c_2) &= \Delta G^{\alpha}(c_2) - \Delta G^{\alpha}(c_{20}), \end{aligned} \qquad (3)$$

де $\Delta G^{\alpha}(c_2)$ та $\Delta G^{i}(c_2)$ – концентраційні залежності відносної інтегральної вільної енергії в аморфній (α) та кристалічній (i) фазах; c_{20} – початкова концентрація другого компонента в α-фазі ; c_2 – довільна концентрація другого компонента в α- та i-фазах, σ – поверхневий натяг на межі двох фаз, V – молярний об'єм, N – число атомів в одиниці об'єму; a – атомний діаметр, D – коефіцієнт дифузії.

Лінійна швидкість росту кристалів у випадку бінарних сплавів описується рівнянням

$$U_i = \frac{D}{a}\left(1 - \exp\left(-\frac{\Delta G^{\alpha-i} - \left|\Delta G^{\alpha-\alpha}\right|}{RT}\right)\right). \qquad (4)$$

Зауважимо, що рівняння (2) розв'язується методами чисельного інтегрування, звідки визначаються усі значення $X_i(t)$ для системи. Очевидно, що $X(t) = \sum_{i=1}^{k} X_i$.

На рис. 1 представлено теоретично розраховані за рівняннями (1-4) температурні залежності об'ємної частки кристалічної фази $X_i(t)$ та загальна частка кристалічної фази $X(T)$ для сплаву $Fe_{80}B_{20}$.

Розрахунки кінетики низькотемпературної кристалізації показали, що процес кристалізації сплаву $Fe_{80}B_{20}$ проходить в декілька стадій у відповідності до діаграми стану бінарної системи Fe-B.

Спочатку кристалізується β-фаза (розчин бору в залізі) і при цьому зростає концентрація бору в аморфній матриці, через деякий час починається кристалізація γ-фази (Fe_3B).

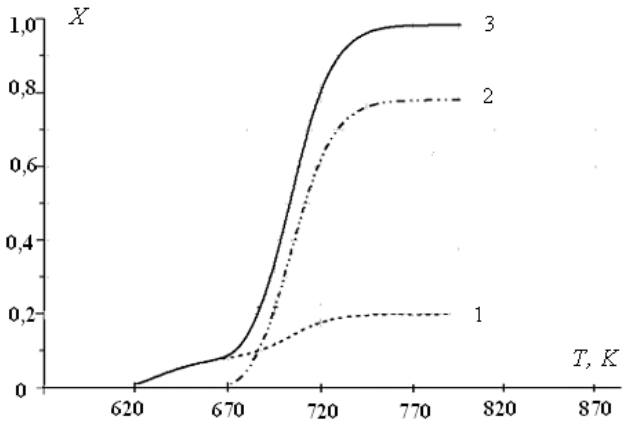


Рис. 1. Результати теоретичного розрахунку кінетики низькотемпературної кристалізації в сплаві $Fe_{80}B_{20}$: 1 - $X_{\beta}(T)$; 2 - $X_{\gamma}(T)$; 3 - $X(T)$.

Теоретичні криві температурної залежності об'ємної частки кристалічної фази $X(T)$ характеризуються наявністю "полички", яка свідчить про двостадійність процесу кристалізації.

Експериментальні результати та обговорення

Кількісний аналіз об'ємних ефектів фазових перетворень проводився за допомогою дилатометричного методу, суть якого полягає в наступному [5]. Молярний об'єм більшості сплавів в аморфному та кристалічному станах відрізняється на (1-3) %. Таким чином, можна дослідити процес кристалізації аморфного сплаву, фіксуючи зміну довжини зразка та перераховуючи її в об'ємні зміни. При нагріванні аморфного сплаву з постійною швидкістю його об'єм монотонно зростає, коли температура досягає певного значення (температури початку інтенсивної кристалізації) відбувається перехід аморфного сплаву в кристалічний стан. Цей процес супроводжується різким зменшенням об'єму. З отриманої температурної залежності відносної зміни об'єму $\Delta V/V(T)$ при нагріванні аморфного сплаву визначають температуру початку інтенсивної кристалізації.

На рис. 2 зображена ТЧП-діаграма (температура-час-перетворення) для бінарного сплаву $Fe_{80}B_{20}$. Наведена ТЧП-діаграма ілюстує незалежність температури початку інтенсивної кристалізації від швидкості нагрівання аморфного сплаву, про що свідчить наявність «полички» в певній області діаграми. З рис.2 видно, що при нагріванні як зі швидкістю dT/dt = 10 К/хв, так і зі швидкістю dT/dt = 2 К/хв. температура початку інтенсивної кристалізації не змінюється.

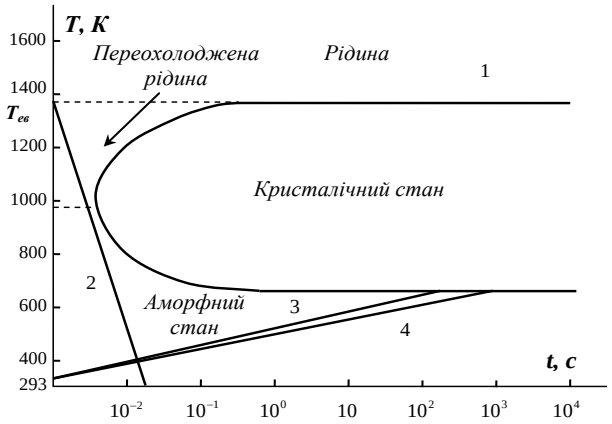


Рис. 2. ТЧП-діаграма для бінарного сплаву $Fe_{80}B_{20}$ (1); гартування зі швидкістю dT/dt =10^5К/с з отриманням аморфного стану (2); нагрівання зі швидкістю dT/dt =10 К/хв = 0,17 К/с (3); нагрівання зі швидкістю dT/dt = 2 К/хв = 0,03 К/с (4)

На рис. 3 наведено температурні залежності відносної зміни об'єму $\Delta V/V(T)$ при неперервному нагріванні та охолодженні аморфного сплаву $Fe_{80}B_{20}$, отримані при різних швидкостях нагрівання. З рис. 3 видно, що при нагріванні, незалежно від швидкості нагрівання, температура початку інтенсивної кристалізації складає 650 К. Температура повної кристалізації при цьому дорівнює 800 К.

Об'ємну частку кристалічної фази можна розрахувати за даними дилатометричних досліджень наступним чином

$$X(T) = \frac{(\Delta V/V)_k}{(\Delta V/V)_m},$$

де $(\Delta V/V)_k$ – відносна зміна об'єму аморфного сплаву при кристалізації в процесі безперервного нагріву при фіксованій температурі;

$(\Delta V/V)_m$ – відносна зміна об'єму аморфного сплаву при повній кристалізації сплаву при даній температурі.

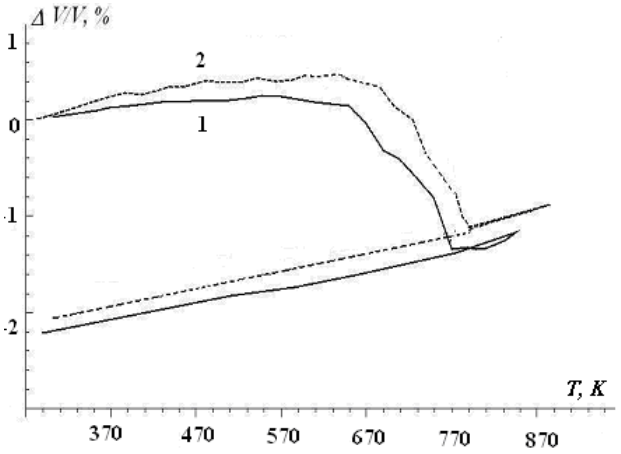


Рис. 3. Температурна залежність відносної зміни об'єму $\Delta V/V(T)$ аморфного сплаву $Fe_{80}B_{20}$ при неперервному нагріванні зі швидкістю dT/dt =10 К/хв=0,17 К/с (крива 1) та нагрівання зі швидкістю dT/dt = 2 К/хв = 0,03 К/с (крива 2)

На рис. 4. наведено результат розрахунку температурної залежності об'ємної частки кристалічної фази $X(T)$ за даними дилатометричних досліджень для сплаву $Fe_{80}B_{20}$.

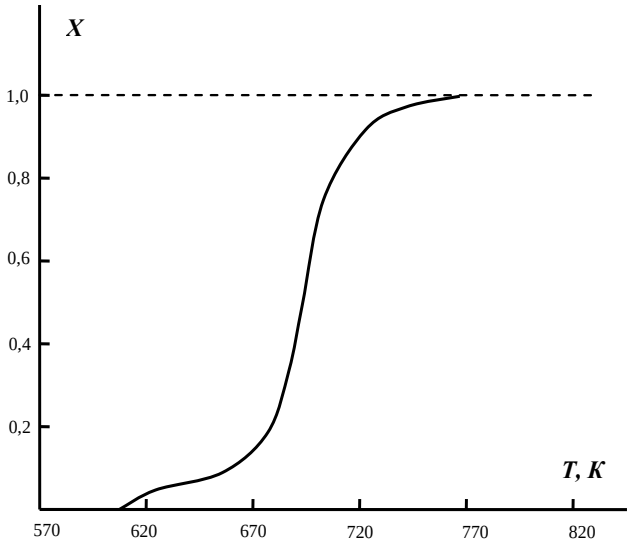


Рис. 4. Температурна залежність частки кристалічної фази $X(T)$ для сплаву $Fe_{80}B_{20}$ (експериментальні дані отримано з дилатометричних досліджень)

На експериментальній залежності $X(T)$ (рис. 4) спостерігається "поличка" аналогічна той, що є на розрахунковій кривій $X(T)$ (рис.1), яка свідчить про двостадійність процесу кристалізації. Порівняння рис. 4 та рис. 1 показує, що в цілому теорія задовільно описує

експериментально одержані температурні залежності об'ємної частки кристалічної фази $X(T)$, окрім того дозволяє відстежувати появу та ріст окремих фаз в залежності від зміни температури.

На рис. 5 наведено дифрактограми для сплаву $Fe_{80}B_{20}$ отримані при різних температурах попереднього ізотермічного відпалу (дифрактограми отримувались після охолодження зразків до кімнатної температури).

На початковій стадії кристалізації після відпалу при 640 К при дуже незначному вмісті кристалічної фази в аморфній матриці крива кутового розподілу інтенсивності розсіяного рентгенівського випромінювання (рис. 5.б) майже не має відмінностей від аналогічної кривої для вихідного аморфного стану (рис. 5.а).

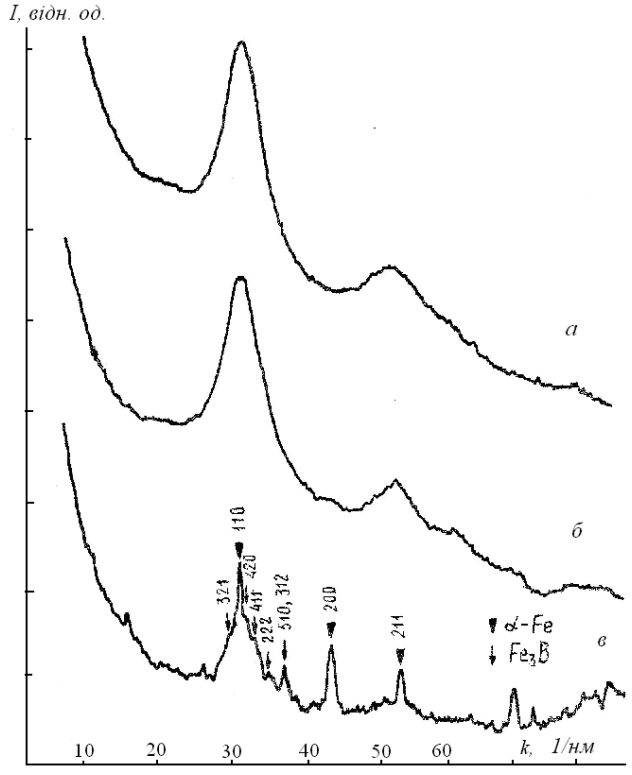


Рис. 5. Дифрактограми сплаву $Fe_{80}B_{20}$, отримані після ізотермічного відпалу при різних температурах: а – 300 К, б – 640 К, в – 700 К

Після ізотермічного відпалу при Т = 700 К на дифрактограмі (рис. 5. в) присутні лінії в основному двох фаз: інтенсивні відбиття від решітки α-заліза (β-фаза) і слабкі дифракційні рефлекси метастабільного борида Fe_3B (γ-фаза).

Отже, експериментальні дані отримані з рентгенівської дифрактометрії підтверджують висновки теоретичного аналізу процесу кристалізації в бінарному сплаві $Fe_{80}B_{20}$.

Висновки

- За допомогою рівнянь гомогенної нуклеації бінарних систем розраховано температурну залежність об'ємної частки кристалічної фази для сплаву $Fe_{80}B_{20}$; результати теоретичних розрахунків задовільно узгоджуються з експериментальними даними, отриманими за допомогою високочутливої дилатометрії та рентгенівської дифрактометрії.
- Показано, що процес кристалізації сплаву $Fe_{80}B_{20}$ є двостадійним у відповідності до діаграми стану бінарної системи Fe-B: спочатку кристалізується β-фаза (розчин бору в залізі), через деякий час починається кристалізація γ-фази (хімічна сполука Fe_3B).

Список використаних джерел

1. *Khar'kov E.I., Lysov V.I., Fedorov V.E., Tsaregradskaya T.L., Turkov O.V.* Evolution of theory and experimental investigation of homogeneous crystallization process for alloys // Rasplavy.–1997. **5,** p. 30-37 (in Russian).
2. *Khar'kov E.I., Lysov, V.I., Tsaregradskaya T.L., Turkov O.V.* The regularities of crystallisation of some amorphous alloys // Metallurgija, 2000, **39**, №.1, p. 29-33 (in Russian).
3. *Lysov V.I., Tsaregradskaya T.L., Turkov O.V., Khar'kov V.E.* Crystallisation kinetics of amorphous alloys of the Fe-B system // Met. Phys. Adv. Tech., 2001, **19,** p.1593-1598 (in Russian).
4. *Shpak A.P., Lysov V.I., Kunitsky Yu.A., Tsaregradskaya T.L.* Crystallisation and amorphysation of metallic systems.– Kyiv: Akadempriodika, 2002.–208 p. (in Ukrainian).
5. *Novikov V.N., Ryabchikov B.E.* The metod of dilatometrical researches of metallic glasses // Factory laboratory, 1989, v.55, **37**, c.49-53. (in Russian).

Надійшла до редколегії 09.01.14

УДК 539

Овсієнко І. В., к.ф.м.н.

Магнітоопір системи «вуглецеві нанотрубки – оксид заліза»

В роботі наведені експериментальні результати досліджень магнітоопору в багатостінних вуглецевих нанотрубках, модифікованих залізом та оксидом заліза Fe_3O_4. Показано, що для даних систем магнітоопір визначається накладанням, в основному, двох механізмів: локалізаційним механізмом, який проявляється в ВНТ, та гігантським магніторезистивним ефектом системи "ВНТ-Fe_3O_4".

Ключові слова: *багатостінні вуглецеві нантрубки, гігантський магнітоопір, анізотропний магнітоопір, слабка локалізація*

Київський національний університет імені Тараса Шевченка,03680, м. Київ, пр-т. Глушкова 4д,
e-mail: ovsienko@univ.kiev.ua

I. V. Ovsiienko, PhD

Magneto-resistance of system «carbon nanotubes -iron oxide"

The paper presents the results of experimental investigations of magnetic resistance for specimens of multiwall carbon nanotubes modified with Fe and Fe_3O_4. It is shown that for mentioned system magnetoresistance is determined by combination of two mechanisms: localization mechanism, which occurs in carbon nanotubes, and giant magnetoresistance effect of system "carbon nanotubes-Fe_3O_4"

Key Words*: multiwall carbon nanotubes, giant magneto-resistance, anisotropic magneto-resistance, weak localization*

Taras Shevchenko National University of Kyiv,
03680, Kyiv, Glushkova st., 4d,
e-mail: ovsienko@univ.kiev.ua

Статтю представив член-кор. НАН України, д.ф.-м.н., проф. Макара В.А.

Вступ

Одним з напрямків сучасних нанотехнологій є розробка методів отримання та дослідження властивостей магнітних наноструктур, що пов'язано, в першу чергу, з розвитком спінтроніки. Серед магнітних наноструктур особлива увага приділяється композитам на основі нановуглецевих структур, модифікованих магнітними металами. На основі нанографіту можуть бути створені шаруваті структури, в яких магнітні шари чергуються з немагнітними [1, 2]. Іншими перспективним з точки зору молекулярної електроніки та спінтроніки нановуглцевими структурами є вуглецеві нанотрубки (ВНТ). Модифікація поверхні ВНТ, введення у внутрішню порожнину та інтеркаляція в міжшаровий простір ВНТ магнітних металів та їх оксидів не тільки змінює електронну структуру ВНТ, але надає ВНТ нових магнітних властивостей, зокрема, в таких структурах спостерігаються явища гігантського та анізотропного магнітоопору [3,4].

Метою даної роботи було дослідження магнітоопору багатостінних ВНТ, модифікованих залізом та його оксидами.

Методика проведення експерименту та характеристика зразків

Для дослідження були обрані ВНТ, отримані методом низькотемпературного розпаду монооксиду вуглецю з використанням в якості каталізатору оксиду заліза Fe_3O_4.

На рис. 1 наведено електронно-мікроскопічне зображення ВНТ, отриманої вказаним методом.

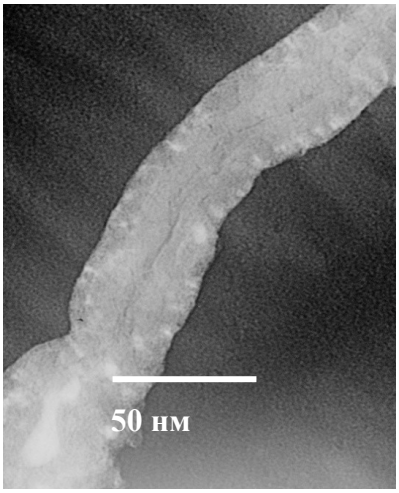


Рис. 1. Електронно-мікроскопічне зображення ВНТ, модифікованої залізом

© І.В. Овсієнко, 2014

Як видно з рисунку, середній діаметр ВНТ складає ~ 40нм, частинки заліза розміром 3-5 нм знаходяться на поверхні і частково в міжшаровому просторі ВНТ. За даними рентгенівської дифракції (рис. 2) в зразку ВНТ ідентифікуються лінії, що відповідають 002-рефлексам графіту (d_{002}=0,337 нм), залізу та оксиду заліза.

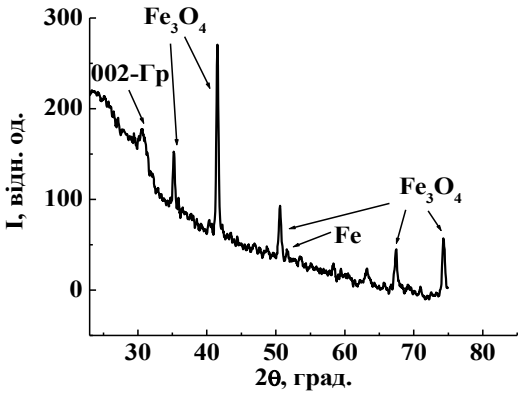


Рис. 2. Фрагмент дифрактограми зразка модифікованих ВНТ

Детально структура модифікованих ВНТ, що досліджувалися, описана в [5].

Для вимірювання магнітоопору з порошку модифікованих ВНТ були виготовлені методом холодного пресування об'ємні зразки з зв'язуючим ПВА (20% мас.). Як було показано з вимірювання електроопору вздовж вісі пресування та перпендикулярно вісі пресування, в отриманих об'ємних зразках модифікованих ВНТ спостерігається часткова орієнтація ВНТ таким чином, що вісі окремих ВНТ знаходяться переважно в площині, перпендикулярній вісі пресування, при цьому довільно орієнтовані в ній. Вимірювання електроопору в магнітному полі до 1,4 Т проводилося чотирьохзондовим методом на постійному струмі при температурах 293 К та 77 К при двох взаємних орієнтаціях магнітного поля B і струму через зразок I: B||I та B⊥I (рис 3).

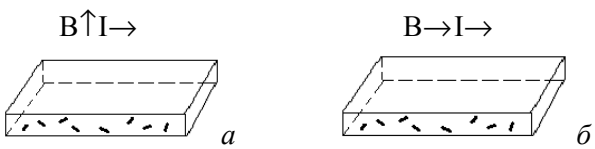
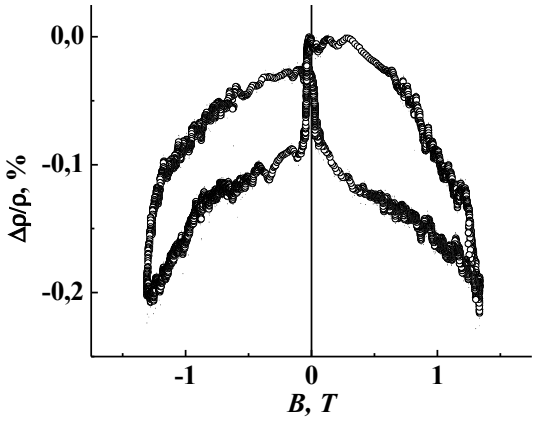


Рис. 3. Взаємна орієнтація магнітного поля та струму через зразок при дослідженні магнітоопору: а) магнітне поле перпендикулярно лініям струму, б) магнітне поле та лінії струму паралельні.

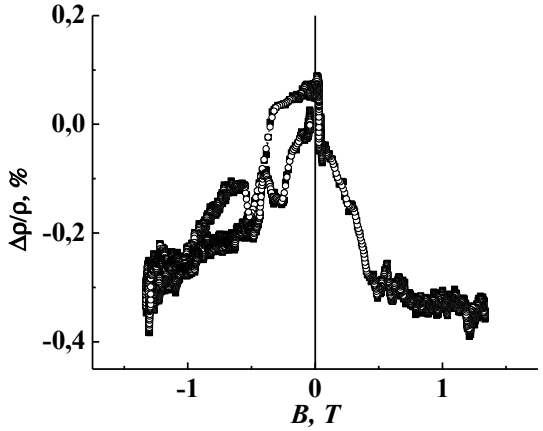
Магнітоопір визначався як: $\frac{\Delta R}{R} = \frac{R_B - R_0}{R_0}$, де R_B опір зразка в магнітному полі, R_0 – опір зразка без магнітного поля.

Експериментальні результати та їх обговорення

На рис. 4 наведені залежності магнітоопору зразка модифікованих ВНТ від величини магнітного поля при кімнатній температурі (а) та при Т=77 К (б) в конфігурації магнітне поле, перпендикулярне струму через зразок.



а



б

Рис. 4. Залежність Δρ/ρ(B) при кімнатній температурі ($а$) та при T = 77 К в поперечному магнітному полі ($б$)

Як випливає з наведених рисунків, для даного зразка спостерігається складний вигляд польової залежності магнітоопору. Як при кімнатній, так і при азотній температурі магнітоопір є від'ємним. При кімнатній температурі спостерігається яскраво виражений гістерезис в польовій залежності магнітоопору При значеннях магнітного поля до 0,3 Т

магнітоопір дуже слабо змінюється, при збільшенні магнітного поля опір зростає за абсолютною величиною, його значення при максимальному полі складає -0,20 %, при цьому насичення магнітоопору не досягається. При азотній температурі гістерезис в залежності магнітоопору слабо виражений, при значенні магнітного поля ~0,5 Т спостерігається насичення магнітоопору, значення магнітоопору в максимальному полі складає~ -0,4 %.

На рис. 5 наведені залежності магнітоопору від величини повздовжнього магнітного поля при кімнатній температурі (а) та Т=77 К (б).

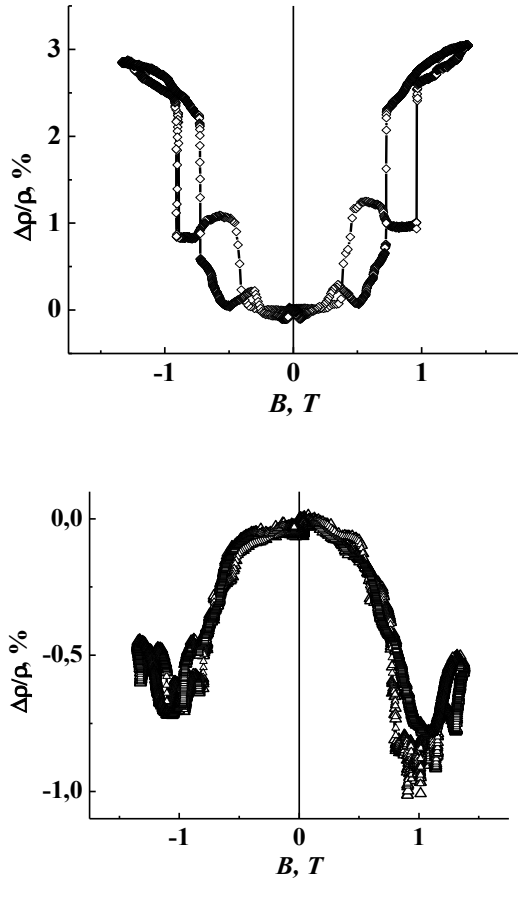


Рис. 5. Залежність Δρ/ρ(*B*) при кімнатній температурі (*а*) та Т=77 К (*б*) в поздовжньому магнітному полі

Як видно з наведених рисунків, характер польової залежності магнітоопору суттєво відрізняється від аналогічних залежностей для конфігурації «магнітне поле перпендикулярне до струму через зразок». Для паралельної конфігурації магнітного поля та струму магнітоопір при кімнатній температурі є додатним. Максимальний ефект магнітоопору складає ~ 3 % при кімнатній температурі та ~ (-0,75)% при азотній температурі. Гістерезис в залежності магнітоопору при кімнатній температурі спостерігається в діапазоні магнітних полів від 0,4 Т до 0,75 Т. При величині поля ~1 Т при кімнатній температурі магнітоопір досягає насичення, при азотній температурі при цьому же значенні поля спостерігається локальний мінімум в залежності магнітоопору.

Проаналізуємо можливі причини виникнення такої складної залежності магнітоопору від магнітного поля та температури для даного зразка модифікованих ВНТ.

Як відомо, в шаруватих або кластерних системах, в яких чергуються магнітні та немагнітні шари або магнітні кластери знаходяться в немагнітній матриці, спостерігається явище гігантського магнітоопору. Причиною цього є спін-орбітальна взаємодія носіїв заряду, що приводить до спін-залежного розсіювання електронів (коефіцієнти розсіювання для спінів, спрямованих в одному напрямку і в протилежних напрямках, будуть різними). У вихідному стані (при нульовому магнітному полі) магнітні моменти частинок магнітного металу орієнтовані хаотично. В цьому випадку опір системи є максимальним внаслідок розсіювання носіїв струму на спинах магнітних атомів частинок металу. Коли зовнішнє поле орієнтує магнітні моменти частинок магнітних металів паралельно, розсіювання носіїв заряду і, відповідно, електроопір зменшується. Для гігантського магнітоопору характерним є спостереження гістерезису в залежності магнітоопору від магнітного поля.

Іншим можливим механізмом магнітоопору в системах, що містять феромагнітні включення в немагнітній матриці, є анізотропний магнітоопір. Для феромагнітних матеріалів електричний опір в магнітному полі залежить від кута між напрямком намагнічування і зовнішнім магнітним полем.. Характерною рисою анізотропного магнітоопору є залежність знаку магнітоопору від взаємної орієнтації магнітного поля та струму [6]: $\rho(\theta_{M,I}) = \rho_0 + \rho_\Delta \cdot \cos^2(\theta_{M,I})$, де ρ_0 – опір в нульовому магнітному полі і $\rho_\Delta = \rho_\parallel - \rho_\perp$, $\rho_\parallel$ та $\rho_\perp$ - відповідно, опір зразка при паралельній та перпендикулярній конфігурації магнітного поля та струму через зразок. Якщо орієнтація вісі легкого намагнічування магнітної фази не співпадає з напрямком протікання струму через зразок, то спочатку відбувається намагнічування частинок магнітної фази вздовж вісі легкого намагнічування, яка орієнтована під деяким кутом до напрямку струму, а при досягненні

певного значення зовнішнього магнітного поля магнітні домішки починають намагнічуватися вздовж напрямку зовнішнього магнітного поля.

Ще одним механізмом, який приводить до появи від'ємного магнітоопору, є ефекти слабкої локалізації та взаємодії носіїв заряду. Теорія слабкої локалізації передбачає від'ємний магнітоопір. Зовнішнє магнітне поле, як і присутність в матеріалі магнітних домішок, приводять до зриву фазової когерентності електронних хвиль та, як наслідок, до ослаблення ефекту слабкої локалізації. Теорія взаємодії передбачає, що добавка до провідності не залежить від магнітного поля для слабких магнітних полів і є позитивною для сильних магнітних полів. Для сильних магнітних полів спостерігається перехід від від'ємного магнітоопору, зумовленого ефектом слабкої локалізації в малих магнітних полях, до додатного магнітоопору, пов'язаного із внеском від ефекту взаємодії носіїв заряду. Зміна опору в магнітному полі за рахунок квантових ефектів у двовимірному випадку пропорційна B^2 в слабких магнітних полях та ~ ln$B$ в сильних магнітних полях.

Як показали проведені в [7] детальні дослідження електроопору в широкому інтервалі температур для зразків даних модифікованих ВНТ дійсно має місце прояв квантових ефектів слабкої локалізації та взаємодії носіїв заряду. Очевидно, саме цій механізм приводить до появи від'ємного магнітоопору для зразків модифікованих ВНТ. Дані рентгенівської дифракції, а також результати термомагнітометричних досліджень [8] прямо вказують на наявність в ВНТ магнітних домішок (залізо та оксид заліза Fe_3O_4). Таким чином, модифіковані ВНТ, що досліджувалися, являють собою діамагнітний матеріал (ВНТ), в якому знаходяться магнітні включення. Саме для таких матеріалів, як сказано вище, спостерігається явище гігантського магнітоопору, для якого характерним є наявність гістерезису в польовій залежності магнітоопору, що і спостерігається експериментально. Що стосується анізотропного магнітоопору, то очевидно цей ефект також має місце для системи, яка досліджується, на що вказує різні знаки магнітоопору при паралельній та перпендикулярній конфігураціях магнітного поля і струму. Проте, при аналізі даних систем треба пам'ятати, що впорядкування окремих трубок в об'ємному зразку є частковим, тому виділити даний ефект досить складно.

Висновки

Таким чином, проведені експериментальні дослідження магнітоопору ВНТ, модифікованих залізом та оксидом заліза, дозволяють стверджувати, що для даних систем магнітоопір, визначається накладанням, в основному, двох механізмів: локалізаційним механізмом, який проявляється в ВНТ, та гігантським магніторезистивним ефектом системи "ВНТ- Fe -Fe_3O_4".

Список використаних джерел

1. *Matsui D.V., Prylutskyy Yu.I., Matzuy L.Yu., Le Normand F., Ritter U., Scharf P.* Transverse and longitudinal magnetoresistance in graphite intercalated by Co // Physica E. – 2008. - **40**, -N 7. - P. 2630-2634.
2. *Matsui D., Prylutskyy Yu., Matzui L., Zakharenko M., Le Normand F., Derory A.* Magnetic properties of cobalt-carbon nanocomposites // Phys.St.Sol. (c).- 2010.- **7**, - N 3-4. - P. 1264-1268.
3. *McIntosh G.C., Kim G.T, Park J.G., Kristic V., Burghard M., Jhang S.H, Lee S.W., Roth S.,* Orientation dependence of magneto-resistance behavior in the carbon nanotube rope // Thin Sol. Films. – 2002. – **417**, – N1-2. –P. 67-71.
4. *Cottet A., Kontos T., Sahoo S., Man H.T. Choi M.S., Belzig W., Bruder C., Morpurgo A.F., Schonenberger C.* Nanospintronics with carbon nanotubes // Semicond. Sci. Technol. -2006. - **21**, N11. – P. 78.
5. *Len T.A., Ovsiienko I.V., Matzui L.Yu., Brusilovets A.I., Katitanchuk L.M.* The influence of thermo-chemical treatment on the structural and phase transitions in the nanocarbon material // Physics and Chemistry of solid.–2005, № 6. - P.680-684. (in Ukrainian).
6. *Ovsienko I.V., Len T.A., Matzui L.Yu.. Golub O.A, Prylutskyy Yu.I., Eklund P.* The effect of thermal and chemical treatment on the structural and phase composition of nanocarbon materials // Mater. Sci. & Engineer C. – 2006. - **26**, N 5-7. - P. 1180-1184.
7. *Christidesa K C*. Strong interplay between giant and anisotropic magnetoresistance observed in face-centered-cubic-Co/Au multilayers between 5 and 280 K // J. Appl. Phys. – 2003. – **94**, -N 4. – P. 2516 - 2523.
8. *Ovsiyenko I.V., Matzuy L.Yu., Zakharenko M.I., Len T.A., Strzhemechny Y.M.,. Eklund P*. Magnetometric studies of catalyst refuses in nanocarbon materials. // Nanoscale Res Lett.- 2008.- **3**- P. 60–64.

Надійшла до редколегії 24.04.13

УДК 538.9

Павленко О.Л[1], к. ф.-м.н., асист.

Кристалічна структура плівок фулеритів C_{60} при високих дозах електронного опромінення

Досліджено поведінку плівок фулеритів C_{60} при різних дозах високоенергетичного електронного опромінення (E_e = 1,8 МеВ) Встановлено, що з'являються радіаційні пошкодження оболонок молекул із зміщенням атомів вуглецю в положення інтеркаляції. Радіаційно-стимульоване легування атомами вуглецю при зростанні дози опромінення від 1 до 20 МГр приводить до появи структурного максимума (200), початкового збільшення параметра гратки з подальшим його зменшенням. Це вказує, що зміщені атоми вуглецю сприяють створенню за рахунок переносу зарядів кулонівської міжмолекулярної взаємодії, роль якої змінюється при збільшенні дози опромінення.

Ключові слова: *фулерен C_{60}, рентгенівська дифракція, кристалічна струкутра*

[1] Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, пр-т Глушкова 4д, e-mail: pavlenkoelena@mail.univ.kiev.ua

O.L. Pavlenko[1], PhD, assistant

Crystal structure of C_{60} fullerites under high doses of electron irradiation

Behavior of C_{60} fullerite films under highenergetic electron irradiation (E_e = 1,8 MeV) in wide region of irradiation doses was studied. Radiation damages of the molecular core with shift of the carbon atoms into intercalation positions was determined. Irradiation-induced doping with carbon atoms at rise of the irradiation dose from 1 to 20 MGy leads to appearance of new structural reflection (200) and to increase of the lattice parameter with further decrease of it. That points on the following: knocked out carbon atoms cause addition interaction between the molecules due to charge transfer. The interaction changes at increase of the irradiaton dose.

Key Words: *fullerene C_{60}, X-ray's diffraction, crystal structure*

[1] Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03680, Kyiv, Glushkova st., 4d, e-mail: pavlenkoelena@mail.univ.kiev.ua

Статтю представив член-кор. НАН України, д.ф.-м.н., проф. Макара В.А .

Вступ

Фулерени C_{60} у конденсованому стані при кімнатній температурі формують типові молекулярні кристали, у яких молекули зв'язані між собою слабкими силами Ван-дер-Ваальса. Неодноразово доповідалося, що низькоенерегетичне (в області 30-300 кеВ) іонне опромінення (B, Xe, Bi, N^{++}) плівок фулеритів C_{60} приводить до часткової або повної деструкції молекул [1, 2]. Проте, у випадку опромінення іонами D_2^+ з енергією 5 кеВ при дозі $0{,}5\cdot10^{15}$ іон/см^2 у спектрі КРС спостерігалася додаткова смуга при 1459 см$^{-1}$, яка характерна для полімеризованого стану. При опроміненні твердих плівок фулеритів C_{60} іонами Xe з енергією E=320 кеВ відбувається руйнування молекул C_{60} і зростання провідності плівки на декілька порядків у порівнянні з вихідним станом внаслідок присутності між молекулами вибитих атомів вуглецю C.

При низькоенергетичному електронному бомбардуванні за рахунок збудження електронної підсистеми спостерігається полімеризація фулеренів C_{60}, при якій їх під'єднання один до одного відбувається як наслідок протікання реакції [2+2] циклопід'єднання. Опромінення фулеритів пучком електронів з більш високою енергією 10^2-10^3 еВ протягом кількох годин приводить до коалесценції молекул C_{60}. При цьому виникає більш складний характер хімічної взаємодії між

© Павленко О.Л. 2014

молекулами з формуванням горіхоподібної структури [3]. Полімеризовані фулеритові плівки перспективні для застосування у наноелектроніці, зокрема, як ефективні захисні покриття. Досліджень поведінки плівок C_{60} при бомбардуванні електронами з високими енергіями не проводилося, тому метою роботи було встановлення можливості полімеризації структури та її механізмів у плівках фулеритів C_{60} шляхом саме високоенергетичного електронного опромінення.

Методика експерименту

Фулеренові плівки товщиною 2000 нм вирощувалися на підкладинках шляхом вакуумної сублімації порошків C_{60} із вольфрамової ефузійної комірки. Підкладинками вибиралися кристали кремнію – (100).

Вивчення дифракції від плівок фулеренів проводилися на монохроматизованому випромінюванні при застосуванні плоских кристалів LiF (200). Джерелами рентгенівського проміння вибиралися трубки з кобальтовим анодами в режимі набору імпульсів. Зразки опромінювались електронами з енергією 1,8 МеВ на лінійному прискорювачі ИЛУ–6. Доза опромінення змінювалася в широкому діапазоні від 1 до 25 МГр.

Результати експерименту

Для утворення радіаційних пошкоджень плівок фулеритів, які представляють собою вакансії на каркасі молекул C_{60} і втілені в міжвузлові положення кристалічної гратки зміщені атоми вуглецю, можна застосовувати бомбардування прискореними електронами. Значні ядерні втрати такого іонізуючого випромінювання для великої кількості речовин, в тому числі фулеритів, для яких порогова енергія зміщення атомів вуглецю дорівнює E_d=15 еВ, виникають при енергії бомбардуючих електронів E_e>1 МеВ. Очевидно, що у випадку енергії E_e=1,8 МеВ у фулеритах відбувається ефективна генерація радіаційних пошкоджень по всій товщині розглянутих плівок C_{60}. Оскільки при кімнатній температурі осаджена плівка знаходиться в ГЦК фазі, то міжвузлові атоми вуглецю, в першу чергу втілюються в октаедричні та тетрагональні пори. Як показують теоретичні розрахунки [4], атомам вуглецю вигідно утворювати симетричні, несиметричні та полімерні комплекси з сусідніми молекулами C_{60}, що повинно сприяти виникненню в фулеритах полімеризованих структур, подібно до появи в них фазових перетворень за рахунок легування плівок твердих C_{60} атомами металів.

Дійсно, як видно з рис. 1, у випадку опромінення плівок фулеритів C_{60} електронами з енергією E_e=1,8 МеВ в результаті підвищення флюенсу спостерігаються зміни рентгенодифракційної картини, що вказує на перебудову структури плівок у порівнянні з кривою 1, яка відповідає вихідному стану плівки і характеризується присутністю трьох дифракційних відбиттів (111), (220), (311) при кутах 12.5, 20.5 та 24.1 градусів відповідно.

Основним фактором зміни картини дифракції рентгенівських променів є виникнення навіть при малій дозі поглинання D =1 МГр структурного піка (200) та його другого порядку (400), нехарактерних для фулериту C_{60} внаслідок швидкого обертання молекул у високотемпературній фазі [5, 6]. Ці інтерференційні максимуми відсутні для вихідного стану плівки. Їх інтенсивність немонотонно зростає при збільшенні дози і досягає максимального значення при 25 МГр. Поява цих максимумів обумовлена зупинкою обертального руху молекул C_{60}, що є наслідком виникнення комплексів з атомами вуглецю, які сприяють димеризації і полімеризації фулеренів, тобто виникнення хімічної взаємодії між молекулами. Параметр гратки кристалічної структури у вихідному стані становить 1,421 нм. При зростанні дози поглинання до 6 МГр він незначно збільшується до величини 1,425 нм, а при дозі 25 МГр зменшується до 1,422 нм [7-11].

Незважаючи на малі зміни параметра гратки, які можуть бути наслідком компенсації її

розширення за рахунок втілених атомів вуглецю та стиснення при утворенні комплексів, асиметрія дифракційних піків свідчить про спотворення комірки ГЦК фази. Воно з'являється як результат появи міжмолекулярної взаємодії, яка приводить до формування димерних, лінійних, і, ймовірно, більш складних полімеризованих структур. Варто звернути увагу на те, що при збереженні загального вигляду картини рентгенівської дифракції має місце значне зростання відносної інтенсивності інтерференційної лінії (200).

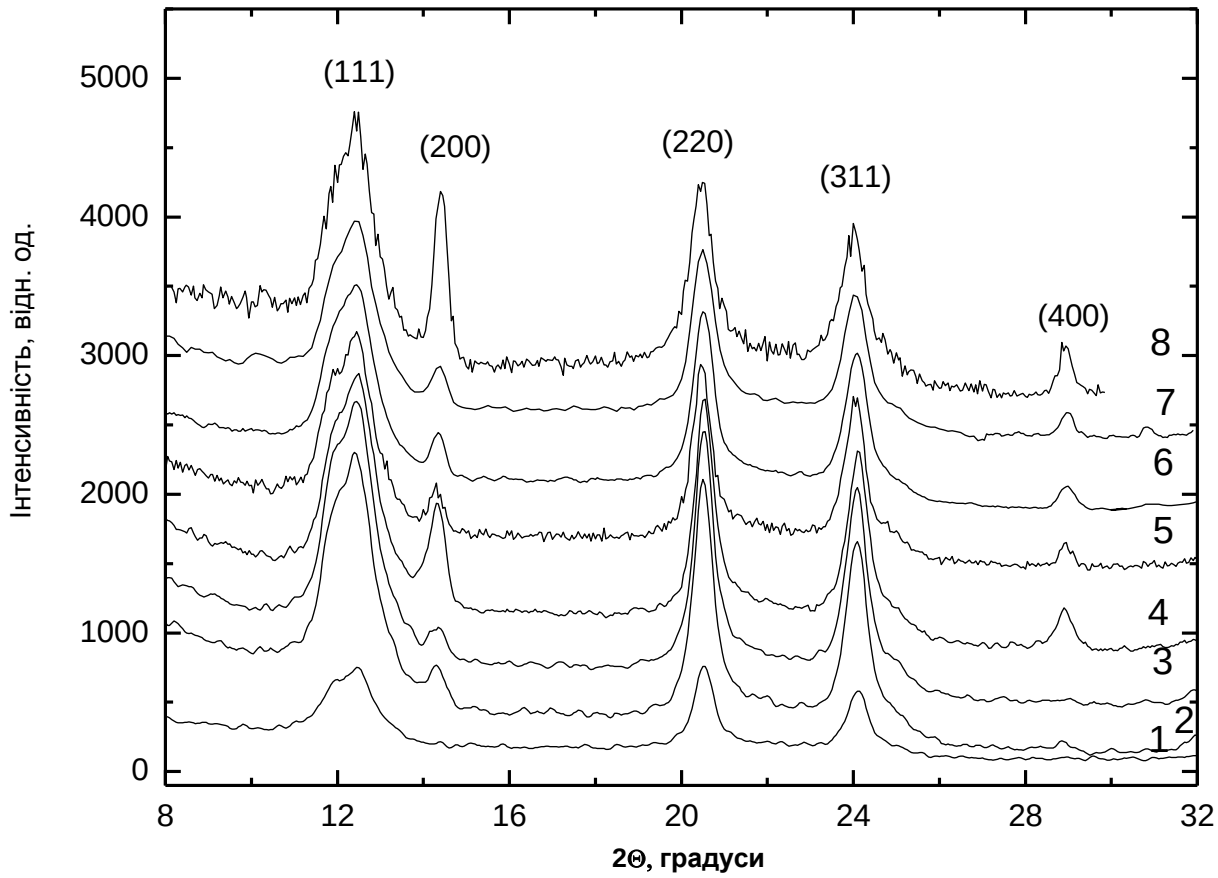


Рис. 1. Картина рентгенівської дифракції плівки фулериту C_{60} у вихідному стані (1) та після опромінення електронами з дозами поглинання: 1 (2), 3 (3), 6 (4), 10 (5), 13 (6), 20 (7), 25 МГр (8). (d=2 мкм, Si(100), E_e=1,8 МеВ λ_{CoK_α} = 0,17902 нм).

Падіння долі кристалічної фази може бути результатом аморфізації структури внаслідок руйнування фулеренів, яке стає помітним при великих флюенсах опромінення. Оскільки інтенсивність максимума (200) значна, то це свідчить про співіснування при вказаній дозі процесів полімеризації і аморфізації. Водночас, ефективність аморфізації стає переважаючою і можна припустити, що при більших дозах вона буде подавляючим проявом перетворення фулеренів в аморфну вуглецеву фазу (a-C).

Висновки

У випадку опромінення плівок фулеритів C_{60} високоенергетичними електронами (E_e=1,8 МеВ), які переважно зазнають ядерних втрат, в області доз поглинання від 1 до 25 МГр у дифракційній картині рентгенівських променів з'являються інтерференційні піки (200), (400), що не властиві ГЦК фазі фулеритів, а також асиметрія максимумів високотемпературної структури. Така трансформація дифракційної картини вказує на виникнення орторомбічної і тетрагональної полімеризованих фаз. При значній дозі поглинання 25 МГр інтенсивність піків ГЦК фази сильно зменшується при зростанні інтенсивності максимумів (200), (400), що пов'язано з аморфізацією структури, обумовленої руйнуванням молекули C_{60}, яка співіснує з полімеризованими фазами.

Список використаних джерел

1. *Makarova T.L.* Электрические и оптические свойства мономерных и полимеризованных фуллеренов // FTP – 2001. – V. 35. – P. 257–293. (in Russian).
2. *Kunert T.* Excitation and fragmentation mechanisms in ion –fullerene collisions / T. Kunert, R. Schmidt // Phys. Rev. Lett. – 2001. – V.86. – P. 5258-5261.
3. *Mizuno T., Majima T. , Nakai H. [et. all]* Electronic stopping and velocity effect on multiple ionization and fragmentation of C_{60} in swift heavy ion impacts // Nucl. Instr. and Meth. in Phys. Res. B – 2007. – V. 256. – P. 101-104.
4. *Onoe J., Takeuchi K.*How Many [2+2] Four-Membered Rings Are Formed on a C_{60} Molecule when Photopolymerization Is Saturated? / // Phys. Rev. Lett. – 1997. – V. 79. – P. 2987-2989.
5. *Onoe J. , Hara T., Takeuchi K.* //Kinetic study of an electron-beam irradiated C_{60} film using in-situ infrared spectroscopy Synth. Metals. / - 2001. – V. 121. – P. 1141-1142.
6. *Dmytrenko O.P., Belyi N.M., Dmytruk I.N. [et. all]* Structure and photoluminescence of single–emulsion C_{60} and Cu–C_{60} films / // Fullerens, nanotubes, carbon nanostruct. – 2004. – Vol. 12, No 1. – P. 317–323.
7. *Dmytrenko O.P., Kulish N., PPrylutskyy Yu.I.,* /Raman spectra and structure of thin Cu–C_{60} films / / Thin Sol. Films – 2004. – Vol. 459. – P. 254–257.
8. *Ookawa R., Takahiro K., Kawatsura K. [et. all]* Structure of amorphized C_{60} films studied by Raman spectroscopy and X-ray photoelectron spectroscopy / // Nucl. Instr. and Meth. in Phys. Res. B – 2003. – V. 206. – P. 175-178.
9. *Kastner J. , Kuzmany H., Palmetshofer*. Damage and Polymerization by ion bombardment of C_{60} / // Appl. Phys. Lett. – 1994. – V. 65(5). – P. 543-545.
10. *Tsukamoto Sh., Nakayama T.*First-principles electronic structure calculations for peanut-shaped C_{120} molecules / // Sci. and Tech. of Adv. Mat. – 2004. – V. 5. – P. 617-620.
11. *Nakaya M., Nakayama T., Aono M.* Fabrication and electron-beam-induced polymerization of C_{60} nanoribbon / // Thin. Sol. Films. – 2004. – V. 464-465. – P. 327-330.

Надійшла до редколегії 30.12.13.

УДК 621.762

Попов О.Ю., к.ф.-м.н., доц.

Залежність механічних характеристик керамічних композиційних матеріалів від співвідношення між розмірами зерен різних фаз

Представлено теоретичний та експериментальний аналіз тріщиностійкості та енергії руйнування керамічних композиційних матеріалів. Показано, що для підвищення механічних характеристик кераміки шляхом введення зерен другої фази, модуль Юнга включень повинен бути вищим за модуль Юнга матриці. Доведено, що співвідношення між розмірами зерен матриці та включень суттєво впливають на тріщиностійкість матеріалу.

Ключові слова: *кераміка, композиційні матеріали, тріщиностійкість*

Київський національний університет імені Тараса Шевченка,03680, м. Київ, пр-т. Глушкова 4д, alexey.popov1861@gmail.com

O.Yu. Popov, PhD.

Ceramic composite mechanical characteristic dependence on the ratio of different phase grain sizes

Theoretical and experimental analysis of ceramic composite material fracture toughness and distortion energy is represented. Ceramic mechanical characteristics are shown to be improved by the second phase introducing if inclusion's Young modulus is higher than that of matrix. Matrix/inclusion grain size ratio is sown to considerably influence on material fracture toughness.

Key words: *ceramics, composite materials, fracture toughness*

Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03187, Kyiv, Glushkovast., 4d, alexey.popov1861@gmail.com

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Єжов С.М.

Вступ

У теперішній час в Україні існує гостра необхідність у виробництві широкої гами надміцних тугоплавких матеріалів. Особливо цікавими є карбідо- та боридомісткі керамічні матеріали, унікальні фізико-хімічні характеристики яких вже зараз обумовлюють застосування їх в багатьох галузях машинобудування.

Проте, центральною проблемою при застосуванні керамічних матеріалів є низькі, порівняно з металами, значення тріщиностійкості та енергії руйнування (а, отже, і міцності), що пояснюється відсутністю в цих матеріалах пластичної деформації і, як наслідок, дуже малих (< 100 Å [1]) значень радіусу кривизни вершини тріщини руйнування.

Основний метод збільшення тріщиностійкості керамік полягає у створенні керамічних та металокерамічних композитів. В цьому випадку теоретичне дослідження механічних характеристик одержуваного матеріалу з метою цілеспрямованого пошуку оптимального складу композиту є актуальним завданням для науковців. Таким чином, метою представленої роботи було теоретичне та експериментальне дослідження взаємозв'язку між структурою та механічними характеристиками композиційних матеріалів із керамічною матрицею.

Виготовлення та дослідження зразків

Експериментальні зразки були отримані шляхом гарячого пресування порошків карбіду титану та бориду вольфраму в різних співвідношеннях на установці з резистивним нагріванням без захисної атмосфери при температурі 1800ºС і часі ізотермічної витримки 2 хвилини під тиском 30МПа.

Виготовлені зразки мали циліндричну форму діаметром 10 мм і висотою 5 мм. Після вилучення з пресформи, зразки шліфувались і

© О.Ю. Попов, 2014

полірувались за допомогою алмазних паст різної дисперсності.

Мікротвердість та тріщиностійкість матеріалів визначалися методом індентування. Теоретичні розрахунки тріщиностійкості та енергії руйнування були проведені за моделлю, описаною в [2].

Опис моделі

Нехай ми маємо матеріал із тріщиною під навантаженням, при чому коефіцієнт інтенсивності напружень у вершині тріщини – K_I. Інтегруючи вираз для густини пружної енергії з врахуванням співвідношень Ірвіна для розподілу напружень довкола вістря тріщини нормального відриву [3] в околиці D1 фронту тріщини отримаємо вираз для енергії пружної деформації матеріалу:

$$T = \frac{1}{2E}\int_0^{D_1}\left(\frac{K_I}{\sqrt{2\pi(r+r_0)}}\,f(\varphi)\right)^2 dV = \alpha\frac{K_I^2}{E}(D_1 - r_0), \quad (1)$$

де α = 9/16, r_0 – радіус заокруглення у вершині тріщини, E – модуль Юнга. З (1) можна бачити, що вираз для пружної енергії фронту тріщини лінійно залежить від параметра інтегрування D_1, який є ні чим іншим, як відстанню, на яку поширюються напруження від вістря тріщини. У класичній теорії пружності вважається, що ця відстань лімітується лише розмірами зразка і, в разі розгляду тріщини в необмеженому пружному середовищі, прагне до нескінченності.

З іншого боку, тверде тіло можна розглядати як систему взаємодіючих осциляторів. Енергія передається в ньому через коливання атомів. Тому, з точки зору квантових уявлень про природу речовини, повинна існувати мінімальна порція пружної енергії, яка може передаватися від одного атома до іншого. Вважатимемо, що напруження від вістря тріщини поширюватимуться в околиці фронту до тих пір, поки величини пружної енергії, зосередженої в сусідніх атомних об'ємах, відрізнятимуться одна від одної більш, ніж на постійну Планка, помножену на 1Гц. В цьому випадку параметр D_1 може бути знайдений із співвідношення:

$$W(D_1) - W(D_1 + a) = h, \quad (2)$$

де $W(x) = \frac{\sigma^2}{2E}V_{am} = \frac{K_I^2 a^3}{4E\pi x}$ – пружна енергія, накопичена в одному атомному об'ємі $V_{ат}$ на відстані x від вістря тріщини. Тут a – середня відстань між атомами, E – модуль Юнга, h – постійна Планка, K_I – коефіцієнт інтенсивності напружень.

Тоді за ситуації, коли коефіцієнт інтенсивності напружень досягне свого критичного значення можна записати :

$$D_1 = \frac{a}{2}\left(\sqrt{1+\frac{K_{IC}^2 a^2}{\pi E h}} - 1\right), \quad (3)$$

де K_{IC} – критичний коефіцієнт інтенсивності напружень (тріщиностійкість) матеріалу.

Крім того, формули Ірвіна були виведені для безперервного пружного середовища, тоді як реальне тверде тіло завжди містить ділянки з розірваними міжатомними зв'язками – дефекти. Безперервність середовища на даних ділянках порушена, що повинно впливати на розподіл напружень в матеріалі. Крім того, при розгляді пружно-деформованого стану гетерофазного матеріалу необхідно також враховувати спотворення поля напружень при переході з фази 1 у фазу 2. Таким чином, вираз для розподілу напружень біля вістря тріщини в двофазному матеріалі [3] може бути записаний в наступному вигляді:

$$\sigma(r) = \frac{K_1}{\sqrt{2\pi(r+r_0)}}\,f(\varphi)\times \nu^{r\sqrt[3]{c}}\left(1-\frac{E_2-E_1}{E_2}\eta^{2/3}\right)^{\frac{r}{R_2}\sqrt[3]{3\eta/4\pi}}, \quad (4)$$

де η – вміст включень другої фази,

E_1 і E_2 – модулі Юнга матриці і включень відповідно,

R_2 – радіус включень, c – концентрація точкових дефектів в матеріалі,

$\nu = 1 - (c/n)^{2/3}$, r_0 – радіус заокруглення у вершині тріщини.

Тут величина $3\eta/(4\pi R^3)$ фактично відповідає «концентрації» включень, $\eta^{2/3}$ – відносній площі, яку займають включення на будь якому перерізі матеріалу.

Критичне значення лінійної енергії, яке відповідає початку процесу руйнування, в роботі [2] записаний як:

$$T_c = \alpha \frac{K_{1C}^2}{E} I \,, \qquad (5)$$

або:

$$T_c = \alpha\, \gamma\, I \,. \qquad (6)$$

Тут K_{IC} і γ – тріщиностійкість і енергія руйнування матеріалу, $\alpha = \frac{5}{16}$,

$$I = \int_0^{D_1} \nu^{2r\sqrt[3]{c}} \left(1 - \frac{E_2 - E_1}{E_2} \eta^{2/3}\right)^{2\frac{r}{R_2}\sqrt[3]{3\eta/4\pi}} dr$$

Розглянемо тепер тріщину в матеріалі, який складається з матриці і включень. Якщо модуль Юнга включень більший модуля Юнга матриці, то, як показано в [2], включення можуть виконувати роль місць затримки (стопорів) на шляху поширення тріщини. Коли коефіцієнт інтенсивності напружень у вершині тріщини досягне критичного значення, фронт тріщини прогинатиметься між стопорами (рис. 1) до тих пір, поки вони не зруйнуються.

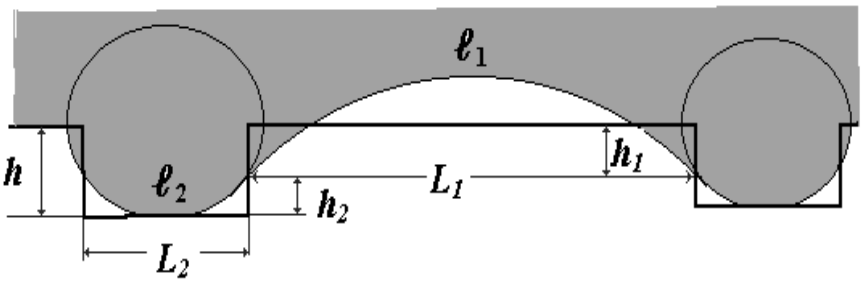


Рис.1. Фронт тріщини

Ефективну енергію руйнування композиту $\gamma_{эф}$ розрахуємо за формулою:

$$\gamma_{еф} = \eta_c \gamma_{2еф} + (1 - \eta_c)\gamma_{1еф}, \qquad (7)$$

$\gamma_{1еф}$, $\gamma_{2еф}$ - ефективні енергії руйнування "матриці" і "стопора", η_c - об'ємна доля "стопорів".

Ефективна енергія руйнування матриці з врахуванням прогину фронту тріщини між місцями затримки підвищується за рахунок появи додаткових енергетичних втрат на збільшення довжини фронту і, таким чином, його пружної енергії Т.

Якщо $d_{еф}$ – середній радіус зерна матеріалу, c_1 – середня концентрація дефектів в матеріалі, а c_2 – середня концентрація дефектів всередині зерен і якщо врахувати викривлення ділянки 1 фронту тріщини, то вираз для критичної лінійної енергії матриці матиме вигляд:

$$T_{1c} = \alpha \gamma_{1еф} I_1 . \qquad (8)$$

$$I_1 = \frac{1}{\theta R} \int_0^{d_{еф}} \nu_2^{2r\sqrt[3]{c_2}} \theta(r + R_2) dr + \frac{1}{\theta R} \times$$

$$\times \int_{d_{еф}}^{D_1} \nu_1^{2r\sqrt[3]{c_1}} \left(1 - \frac{E_2 - E_1}{E_2} \eta\right)^{2\frac{r}{R_2}\sqrt[3]{3\eta/4\pi}} \theta(r + R_2) dr$$

. (9)

Тут θ – кут, що характеризує прогин фронту, R – радіус кривизни ділянки 1 фронту, D_1 – відстань поширення напружень в композиті.

З попередніх формул можемо отримати :

$$\gamma_{1еф} = \gamma_1 + \alpha \gamma_{1еф} I_1 \frac{1}{R}$$

$$\Rightarrow$$

$$\gamma_{1еф} = \frac{\gamma_1}{1 - \frac{\alpha}{R} I_1} \qquad (10)$$

Вплив викривлення фронту тріщини на енергію руйнування включення можна оцінити аналогічно (7):

$$\gamma_{2еф} = \frac{\gamma_2}{1+\frac{\alpha}{D_2} I_2}\ , \qquad (11)$$

де $\gamma_{2еф}$ – ефективна енергія руйнування стопора, γ_1 та γ_2 – енергії руйнування низькомодульної (матриця) та високомодульної (стопори) фаз відповідно, D_2 – радіус кривизни фронту на ділянці стопора.

$$I_2 = \frac{1}{\theta D_2}\int_0^{d_2} \nu_2^{2r\sqrt[3]{c_2}}\,\theta(D_2 - r)dr + \\ + \frac{1}{\theta D_2}\int_{d_2}^{D_2} \nu_1^{2r\sqrt[3]{c_1}}\left(1-\frac{E_2-E_1}{E_2}\eta\right)^{2\frac{r}{R_2}\sqrt[3]{3\eta/4\pi}}\theta(D_2 - r)dr. \qquad (12)$$

Критерій зриву стопора (тобто, критерій початку катастрофічного руйнування) запишеться у вигляді [2]:

$$\frac{\gamma_{1еф} I_1\left(1+\frac{L_1}{L_2}e^{-\frac{\beta L_1}{h}}\right)}{\gamma_{2эф} I_2\left(1-\frac{\alpha}{R}I_1\right)\left(1-e^{-\frac{\beta L_1}{h}}\right)} = 1\ . \qquad (13)$$

Таким чином, розрахунок тріщиностійкості і енергії руйнування пропонується проводити таким чином: спочатку за рівнянням (13), виразивши відповідні величини через кут θ, потрібно знайти критичний кут прогину фронту тріщини $\theta_{кр}$, при якому починається процес катастрофічного руйнування матеріалу, далі, за (10) і (11) знаходять ефективні енергії руйнування матриці і стопорів і за (7) – ефективну енергію руйнування композиту в цілому. Ефективна тріщиностійкість композиту може бути знайдена відповідно до теорії Гріффітса за формулою:

$$K_{1C} = (E\gamma_{еф})^{1/2}, \qquad (14)$$

де E – ефективний модуль Юнга матеріалу.

Результати та їх обговорення

Обговорювану модель ми застосовували для перевірки експериментальних даних, отриманих в роботі [4], автори котрої досліджували коефіцієнт тріщиностійкості системи Al_2O_3-TiB_2. Середній розмір зерен як для Al_2O_3 так і TiB_2 складав 2 мкм [4].

З результатів даного експерименту ми можемо побачити максимум тріщиностійкості при 30% TiB_2.

На графіку (рис. 2) представлені експериментальні дані та теоретична крива розрахована за представленою моделлю. Видно що дана залежність дуже добре відображає як якісну так і кількісну картину експерименту.

Це говорить про те, що основний вклад в підвищення тріщиностійкості дають ефекти закладені в дану модель.

Автори [5] досліджували структуру та властивості спечених та гарячепресованих матеріалів систем SiC – TiB_2 з дисперсністю до 1 мкм.

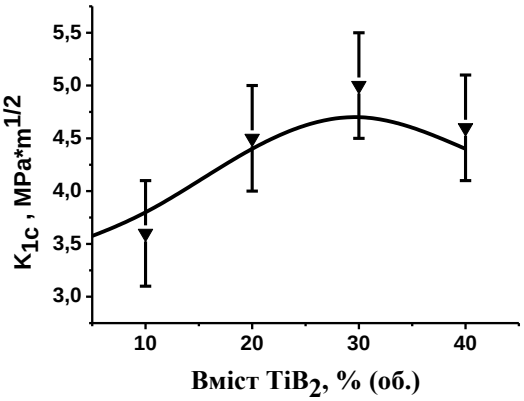


Рис. 2. Залежність коефіцієнта тріщиностійкості композитів системи Al_2O_3-TiB_2 від вмісту зерен TiB_2. Порівняння розрахункових кривих і експериментальних даних [4]

На рис. 3 наведено залежність тріщиностійкості досліджуваного композиту від об'ємного вмісту TiB_2 , яка має екстремальний характер з екстремумом при вмісті TiB_2 ~ 40% (об.), що на підставі [6], було пояснено з точки зору концепції про взаємне блокування зерен обох фаз, яке призводить до сповільнення процесів рекристалізації та одержання матеріалу із псевдоевтектичною структурою.

Як видно з рис. 3, розрахункова крива, побудована виходячи з характеристик складових фаз композиту [7, 5] (E (SiC) = 440 ГПа, K_{1C}(SiC) = 5МПа·м$^{1/2}$, E (TiB_2) = 540 ГПа, K_{1C}(TiB_2) = 5МПа·м$^{1/2}$, R_1 = R_2 = 0,5мкм), відповідає експериментальним даним [5].

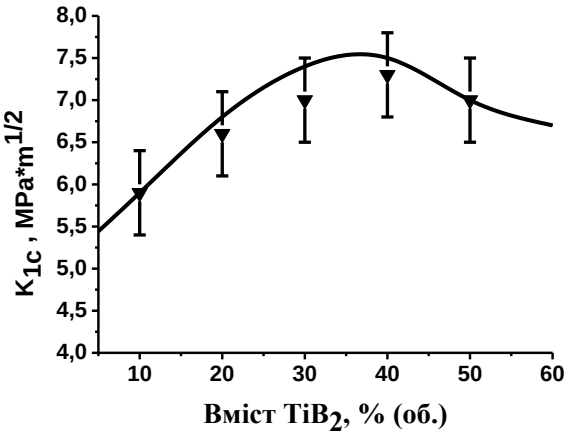


Рис. 3. Залежність коефіцієнта тріщиностійкості композитів системи SiC – TiB_2 від вмісту зерен TiB_2. Порівняння розрахункових кривих і експериментальних даних [5]

Однак, цікавим є те, що автори [8] також досліджували систему SiC-TiB_2 і отримали максимум тріщиностійкості при 15% (об.) TiB_2 (рис. 4) на відміну від 40% в [5].

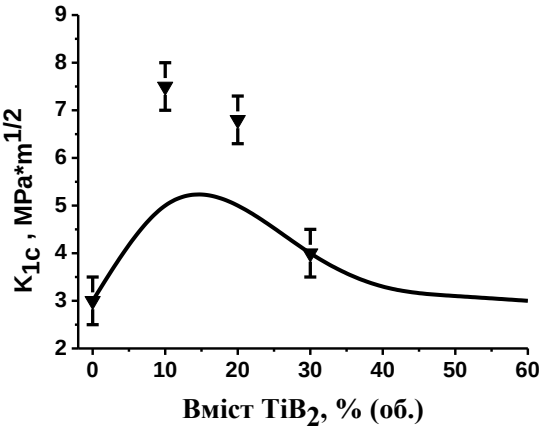


Рис. 4. Залежність коефіцієнта тріщиностійкості композитів системи SiC – TiB_2 від вмісту зерен TiB_2. Порівняння розрахункових кривих і експериментальних даних.[8]

Спад тріщиностійкості композиту при концентрації TiB_2 на рівні 40 – 50% (об.) пояснюється в [8] з точки зору можливості спонтанного саморозтріскування при цих концентраціях внаслідок дії термічних мікронапружень, пов'язаних із різницею коефіцієнтів термічного розширення TiB_2 та SiC.

Однак, таке пояснення не відповідає експериментальним даним [5]. За допомогою розробленої в [2] моделі ми проаналізували дані [8], залишаючи незмінними механічні характеристики складових композиту та вважаючи лише, що зерна дибориду титану вдвічі менші за зерна карбіду кремнію.

Експериментальна перевірка моделі

Виходячи з аналізу літературних даних можна було б вважати, що додавання до однофазної кераміки 2-ї фази у всіх випадках призводить до підвищення механічних характеристик матеріалу. Для спростування цього твердження було проведено аналіз модельної системи TiC-W_2B_5, причому розмір зерен відповідних фаз було обрано таким чином, щоб додавання бориду вольфраму до карбід титанової матриці, не зважаючи на вищий модуль Юнга, не призвело до покращення механічних характеристик. Отже, розміри зерен складали:

$d(W_2B_5)$ = 4 мкм і d(TiC) = 15 мкм, в той час як теоретичні розрахунки вказують, що підвищення механічних характеристик карбіду титану шляхом додавання до нього бориду вольфраму відбудеться лише за умови великих зерен W_2B_5 та малих – TiC. В той же час, обернена ситуація не призводитиме до зміни тріщиностійкості матеріалу.

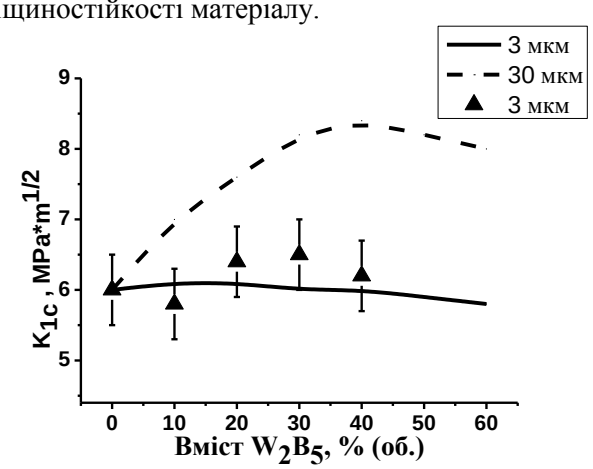


Рис. 5. Залежність коефіцієнта тріщиностійкості композитів системи TiC-W_2B_5 від вмісту зерен W_2B_5. Порівняння розрахункових кривих і експериментальних даних.

З графіка (рис. 5) залежності тріщиностійкості композиту системи TiC-W_2B_5, від вмісту зерен W_2B_5 ми можемо зробити висновок, що теоретична крива розрахована за використовуваною моделлю добре відображає якісну картину експерименту.

Якщо ж розглянемо криву отриману при розрахунку системи TiC-W_2B_5, з розмірами зерен матриці 3 мкм, а зерен включення 30 мкм, то отримаємо максимум, що відповідає приблизно 40% вмісту W_2B_5.

Висновки

1. Аналіз достовірності моделі для прогнозування тріщиностійкості двохфазних композиційних матеріалів вказує, що теоретичні криві як якісно, так, в більшості випадків, і кількісно відповідають експериментальним залежностям тріщиностійкості від фазового складу композитів Al_2O_3-TiB_2, SiC-TiB_2, взятим з літератури, дозволяючи з єдиних позицій пояснити суттєві розбіжності вказаних залежностей для системи SiC – TiB_2 у різних авторів.

2. Залежність тріщиностійкості композиційного матеріалу системи TiC-W_2B_5, синтезованого шляхом гарячого пресування відповідних порошків, не залежить від вмісту бориду вольфраму, що, з огляду на досліджувану модель, пояснюється малим розміром зерен високомодульної фази.

3. Теоретичний та експериментальний аналіз тріщиностійкості двофазних керамік різних систем підтверджує необхідність врахування співвідношення між розмірами зерен для оптимізації фазового складу щодо механічних характеристик композиційних матеріалів матричної структури.

Список використаних джерел

1. *Popov O.Yu., Kazo I.F., Makara V.A.* Two phase composite destruction energy estimating model // Functional Materials. – 2005. – Vol. 12, №3. – P. 432 – 436.
2. *Popov O. Yu., Chornobuk S. V., Makara V. A.* Two-phase matrix composite destruction energy estimating model. Deformation and Fracture of Materials. – 2009, №1. – P. 23 – 27. (in Russian)
3. *Cherepanov G.P.* Composite material fracture mechanics. – M: Science, 1983. – 296 p. (in Russian)
4. *Deng Jianxin, Cao Tongkun, Liu Lili.* Self-lubricating behaviors of Al2O3/TiB2 ceramic tools in dry high-speed machining of hardened steel // Journal of the European Ceramic Society. – 2005. - №25. – p. 1073-1079.
5. *Ordanjan S.S., Vihman S.V.* Structure and properties of SiC-TiB_2 materials // Powder metallurgy. - 2002 - №1/2. - P.48-52. (in Russian)
6. *Ordanjan S.S., Dmitriev A.I.* SiC – TiB_2 system – as a base of hard and wear resistent materials // Powder metallurgy. – 1987. - №5. – P. 32-37. (in Russian)
7. *Andrievsky N.A.* Refractory compoundes. – M: Science, 1988. – 460 p. (in Russian)
8. *Grigoriev O.N. , Gogotsi G.A., Gogotsi Ju.G.* Obtaining and properties of SiC – B_4C – MeB_2 ceramics // Powder metallurgy. – 2000. – №5/6. – P. 29 – 42. (in Russian)

Надійшла до редколегії 13.09.13

УДК 535.016:537.8

Рапопорт Ю. Г.[1], к. ф.-м. н., ст. н. с.

Загальний метод для виведення еволюційних рівнянь та моделювання нелінійних хвиль у шаруватих активних середовищах з об'ємними та поверхневими нелінійностями

Розвинутий загальний метод для виведення нелінійних хвильових еволюційних рівнянь для шаруватих структур зі слабкою нелінійністю. Цей метод є дуже ефективним та придатним для електромагнітних хвиль в середовищах з нелінійностями різної фізичної природи, поверхневими та об'ємними, та просторовою дисперсією: в біанізотропних (кіральних) метаматеріалах, гіротропних середовищах, плазмі, включаючи космічну, двовимірному електронному газі (наприклад графені) та ін. нелінійних та активних середовищах в різних частотних діапазонах, від мікрохвильового до оптичного.

Ключові слова: *нелінійні хвилі, метаматеріали, шаруваті середовища, поверхні розділу*

[1]Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ 03680, пр. Глушкова, 4д
e-mail: yuriy.rapoport@gmail.com

Yu.G.Rapoport [1], PhD., Sen. Sci. Res.

General method for the derivation of the evolution equations and modeling nonlinear waves in active layered structures with surface and volume nonlinearities

The general method for the derivation of the nonlinear evolution equations for the layered structures with weak nonlinearitie is developed. This method is very effective and applicable for electromagnetic waves in media with nonlinearitiers of different physical nature, both volume and surface and spatial dispersion: bi-anisotropic (chiral) metamaterials, gyrotropic media, plasma including space plasma, 2D electron gas (graphene etc.) and other nonlinear and active media at different frequency ranges, from GHz to optics.

Key Words: *nonlinear waves, metamaterials, layered media, interfaces*

[1]Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03680, Kyiv, Glushkova st., 4d
e-mail: yuriy.rapoport@gmail.com

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Макарець М. В.

Introduction

The general method for the derivation of the nonlinear evolution equations in layered structures (NEELS) with weak nonlinearities is very effective and applicable for waves in nonlineaer media of different physical nature. Surface nonlinearities and nonlinear boundary conditions are accounted for. Nonlinearity in the auxiliary boundary conditions (ABC), connected with the spatial dispersion, is implemented. In the present paper, the development and new results of the application of the method NEELS for different media are presented and compared to the results obtained earlier [1-4].

Nonlinear evolution equations for the waves in the layered bi-anisotropic structures with the volume and surface nonlinearities. Formulation of the problem

Let us describe the details of the method for quite general problem of nonlinear waves in the layered bi-anisotropic structures [6, 5]. Consider the system shown in Fig. 1. Suppose that a layered structure has waveguiding properties, and linear eigenmodes corresponding to wavenumber $\vec{k}_0$ and frequency ω_0 are determined. These modes are characterized by the functions $(\vec{f}_E, \vec{f}_H)$ describing the distributions of the electric and magnetic fields in the direction (Z), normal to the interface between layers; linear dispersion relation $D(\omega_0, k_{0y}, k_{0x}) = 0$ is known, where Y and X are the directions of the wave propagation in the layered structure and transverse direction, respectively (see Fig.1). Suppose that for the metamaterial layer, linear "homogenized" material equations are written in the form

$$\vec{D} = \hat{\varepsilon}_{eff}\vec{E} + \hat{\alpha}_{eff}\vec{H}\ ,\ \vec{B} = \hat{\beta}_{eff}\vec{E} + \hat{\mu}_{eff}\vec{H} \qquad (1)$$

where $\vec{E}, \vec{H}$ and $\vec{D}, \vec{B}$ are electric and magnetic fields and inductions, respectively,

© Yu.G. Rapoport, 2014

$\hat{\varepsilon}_{eff}, \hat{\mu}_{eff}, \hat{\alpha}_{eff}$ and $\hat{\beta}_{eff}$ are tensors of electric permittivity, magnetic permeability, magnetic to electric and electric to magnetic coupling, respectively. Denote linear fields (solution of linear problem for some eigenmode of the structure shown in Fig. 1) by index "l"; in the Fourier presentation,

$$\begin{pmatrix} \vec{E}_l \\ \vec{H}_l \end{pmatrix} = A_0 \begin{pmatrix} \vec{f}_e \\ \vec{f}_h \end{pmatrix} e^{i(\omega_0 t - \vec{k}_0 \vec{r})} \qquad (2)$$

where $\vec{r}$ is the coordinates in the XY plane, A_0 is "the amplitude of input wave" which is used for the proper normalization of the nonlinear coefficient.

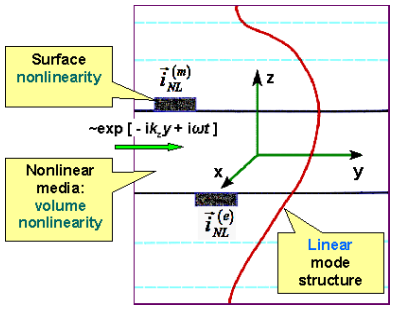


Fig. 1. Layered nonlinear metamaterial waveguiding structure. The same coordinate system is used also for nonlinear dielectric with the spatial dispersion. For the nonlinear gyrotropic (ferrite) layer rotated system of coordinate is used where the following replacement is done: $Y \to Z$, $Z \to X$, $X \to Y$ with respect to the system shown in Fig. 1, and bias magnetic field is directed along Z. The thickness of the layer is equal to L.

Functions $\vec{f}_{e,h}$ describe the dependences of the linear fields on Z coordinate; they are obtained using (linear) boundary conditions and taking into account linear dispersion. Therefore $\vec{f}_{e.h} = \vec{f}_{e.h}(\omega_0, \vec{k}_0, z)$ and $|\vec{f}_{e,h}| \to 0$, when $z \to \pm\infty$ (see Fig. 1). Suppose that the field of spectrally narrow wave packet is presented in the form

$$\begin{pmatrix} \vec{E}_1 \\ \vec{H}_1 \end{pmatrix} = A_1(t, \vec{r}) \begin{pmatrix} \vec{E}_{1l} \\ \vec{H}_{1l} \end{pmatrix} \qquad (3)$$

where A_1 is slowly varying amplitude. Therefore we neglect in the first approximation with the change of the field of the main harmonic in the transverse direction, what is valid in the case of small nonlinearity. Spectral narrowness of the wave packet is determined by the conditions $\Delta\omega << \omega_0$, $\Delta k << k_0$, where $\Delta\omega$, Δk are the widths of frequency and wavenumber spectrums, respectively. Suppose that dyadics included into (1) could be presented in the form $\hat{\varepsilon}_{eff} = \hat{\varepsilon} + \hat{\varepsilon}_{act}$, $\hat{\mu}_{eff} = \hat{\mu} + \hat{\mu}_{act}$, , $|\hat{\mu}| >> |\hat{\mu}_{act}|$, $\hat{\alpha}_{eff} = \hat{\alpha} + \hat{\alpha}_{act}$, $\hat{\beta}_{eff} = \hat{\beta} + \hat{\beta}_{act}$, where $|\hat{\varepsilon}| >> |\hat{\varepsilon}_{act}|$, , $|\hat{\mu}| >> |\hat{\mu}_{act}|$, , $|\hat{\alpha}| >> |\alpha_{act}|$, $|\hat{\beta}| >> |\hat{\beta}_{act}|$. Index "act" corresponds to the (small) part of the tensors responsible for dissipative losses or gain of electromagnetic waves. The parts $\hat{\varepsilon}, \hat{\mu}, \hat{\alpha}, \hat{\beta}$ of the corresponding tensors provide the energy conservation, in other words [6, 5], $\hat{\varepsilon}^+ = \hat{\varepsilon}, \hat{\mu}^+ = \hat{\mu}, \hat{\beta} = \hat{\alpha}^+$, where upper index"+" denotes Hermitian conjugation. Suppose we know also volume nonlinear electric and magnetic polarizations, $\vec{P}_{NL}$ and $\vec{M}_{NL}$ (14e).

Nonlinear evolution equations for an envelope amplitude accounting for spatial dispersion.

Using the procedure similar to that described in [2-4], we get finally the following evolution equation in the *integral* form:

$$c^{-1} w |A_{01}|^2 \frac{\partial A_1}{\partial t} + |A_{01}|^2 \, div(\vec{P} A_1) + [\text{Higher-Order Terms}] = -ik_0 q |A_0|^2 A_1 - \frac{4\pi}{c}(\vec{H}_{1l}^* \frac{\partial \vec{M}_{NL}}{\partial t} + \vec{E}_{1l}^* \frac{\partial \vec{P}_{NL}}{\partial t}) \qquad (4)$$

Here:

$$w = [\vec{f}_H^* \frac{\partial}{\partial \omega}(\omega\hat{\mu})\vec{f}_H + \vec{f}_E^* \frac{\partial}{\partial \omega}(\omega\hat{\varepsilon})\vec{f}_E + \vec{f}_H^* \frac{\partial}{\partial \omega}(\omega\hat{\alpha}^+)\vec{f}_E + \vec{f}_E^* \frac{\partial}{\partial \omega}(\omega\hat{\alpha})\vec{f}_H]$$

$$\vec{P} = \{[\vec{f}_E^* \times \vec{f}_H] + [\vec{f}_E \times \vec{f}_H^*]\} - k_0 \{[(\vec{f}_H^* \frac{\partial \hat{\mu}}{\partial \vec{k}} \vec{f}_H + \vec{f}_E^* \frac{\partial \hat{\varepsilon}}{\partial \vec{k}} \vec{f}_E) + (\vec{f}_H^* \frac{\partial \hat{\alpha}}{\partial \vec{k}} \vec{f}_E + \vec{f}_E^* \frac{\partial \hat{\alpha}}{\partial \vec{k}} \vec{f}_H)]\} \qquad (5)$$

$$q = (\vec{f}_H^* \hat{\mu}_{act} \vec{f}_H - \vec{f}_H \hat{\mu}_{act}^* \vec{f}_H^*) + (\vec{f}_E^* \hat{\varepsilon}_{act} \vec{f}_E - \vec{f}_E \hat{\varepsilon}_{act}^* \vec{f}_E^*) + (\vec{f}_E^* \hat{\alpha}_{act} \vec{f}_H - \vec{f}_H \hat{\beta}_{act}^* \vec{f}_E^*) + (\vec{f}_H^* \hat{\beta}_{act} \vec{f}_E - \vec{f}_E \hat{\alpha}_{act}^* \vec{f}_H^*)$$

$$\frac{\partial A_1}{\partial t}|A_{01}|^2+[|V_{gy}|\frac{\partial}{\partial y}+\frac{i}{2}D_y\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{i}{2}D_x\frac{\partial^2}{\partial x^2}]|A_{01}|^2\ A_1+i\omega\frac{Q}{W_0}|A_{01}|^2\ A_1=$$
$$-\frac{4\pi}{W_0}\int_{-\infty}^{\infty}(\vec{H}_{1l}^*\frac{\partial\vec{P}_{NL}}{\partial t}+\vec{E}_{1l}^*\frac{\partial\vec{M}_{NL}}{\partial t})dz-\frac{4\pi}{W_0}\sum_{n=1,2}[E_{1lx}^*i_x^{(e)}+E_{1ly}^*i_y^{(m)}+H_{1ly}^*i_y^{(m)}+H_{1lx}^*i_x^{(m)}]_{z=z_{0n}} \quad (6)$$

$i_{x,y}^{(e)}|_{z=\pm L/2}=\int_{\pm L/2-\delta}^{\pm L/2}\frac{\partial P_{SNLx,y}}{\partial t}dz$, $\vec{n}\times\Delta\vec{E}_1=-(4\pi/c)\vec{i}_{tg}^{(m)}$

$i_{x,y}^{(m)}|_{z=\pm L/2}=\int_{\pm L/2-\delta}^{\pm L/2}\frac{\partial M_{SNLx,y}}{\partial t}dz$, $\vec{n}\times\Delta\vec{H}_1=(4\pi/c)\vec{i}_{tg}^{(e)}$

$\vec{n},\Delta\vec{E}_1,\Delta\vec{H}_1$ are the normal to the corresponding interface and the "boundary jump" of the corresponding electric and magnetic fields, respectively, δ - thickness of the near-interface layer which includes "surface nonlinearity", $P_{SNLx,y}$ and $M_{SNLx,y}$ are corresponding (or equivalent) components of surface nonlinear electric and magnetic polarizations, $i_{x,y}^{(e.m)}|_{z=\pm L/2}$ are equivalent to $P_{SNLx,y}$ and $M_{SNLx,y}$, respectively, nonlinear electric and magnetic surface currents; $W_0=\int_{-\infty}^{\infty}wdz$, $Q=\int_{-\infty}^{\infty}qdz$, and we used the relation $\Pi_y=\int_{-\infty}^{\infty}P_ydz=V_{gy}W_0$; V_{gy} is the component of group velocity along the direction of propagation, and the energy is supposed to propagates in a positive Y direction; $D_{x,y}$ are the coefficients of linear dispersion and diffraction, respectively [7, 2].

$$\begin{pmatrix}\vec{E}_1\\ \vec{H}_1\end{pmatrix}=A_1(t,\vec{r})\begin{pmatrix}\vec{E}_{1l}\\ \vec{H}_{1l}\end{pmatrix} \quad (7)$$

In all nonlinear terms in Eq. (6), the values proportional to the $\exp[i(\omega_0t-\vec{k}_0\vec{r})]$ are revealed, because, among possible nonlinear effects, an effect of self-interaction is of interest here.

Magnetized gyrotropic and dielectric structures with the spatial dispersion and nonlinear auxiliary boundary conditions

We present two examples of the media with nonlinearities in ABC, connected with the presence of the spatial dispersion [9-11, 7]. WE outline here semi-phenomenological approach for the evaluation of a contribution of corresponding surface nonlinearity into the total nonlinearity of the layered structure. The general form of the evolution equation in the parabolic approximation has the form [2], where, in distinction to [7], the term corresponding to the volume and with surface nonlinearities $F_{NLV,NVS}$ are revealed.

$$\partial U_1/\partial t+V_{g1}\partial U_1/\partial z+(i/2)(\partial^2\omega/\partial k^2{}_z)(\partial^2U_1/\partial z^2)+(i/2)(\partial^2\omega/\partial k^2{}_y)(\partial^2U_1/\partial y^2)=F_{NLV}+F_{NLS} \quad (8)$$

Now the waves propagate along axis Z, which lies in the plane of a layer, while normal to the layer is directed along axis X (see also caption to the Fig. 1). Bias magnetic field is directed along axis Z therefore backward volume magnetostatic waves (BVMSW) propagate parallel to the bias field in ferrite films [8, 2]. U_1 is the amplitude of magnetostatic potential [2]. The following relation is obtained in [9]:

$$\vec{\Pi}_-\vec{n}_--\vec{\Pi}_+\vec{n}_+=[n_k(\frac{\partial F}{\partial\frac{\partial\vec{M}}{\partial x_k}})(\frac{\partial\vec{M}}{\partial t})_{LIN}^*]_{exch} \quad (9)$$

where $\vec{\Pi}_\pm$ are the energy flows from the both sides of the interface, index "LIN" means a value corresponding to the system shown in Fig. 1 in the absence of nonlinearity. In the presence of nonlinearity we can use phenomenologically Eq. (9) where we need to put

$$(\frac{\partial F}{\partial\frac{\partial\vec{M}}{\partial x_k}})=(\frac{\partial F}{\partial\frac{\partial\vec{M}}{\partial x_k}})_{LIN}+(\frac{\partial F}{\partial\frac{\partial\vec{M}}{\partial x_k}})_{NL} \quad (10)$$

Function F in Eqs. (9), (10) is the potential energy of a ferromagnetic [9], and in fact, its part describing exchange interaction is included into RHS of (10), which includes, generally speaking, linear and nonlinear part (with the indexes "LIN" and "NL", respectively). In the nonlinear part of (10), again, an effect of self-interaction and respectively, the field of the main harmonic is revealed in the nonlinear terms, as described in the previous section. Index "exch" in

the relation (9) is used to emphasize that Eq. (8) includes the exchange terms. Here F has the form [9, formula (3.3.2)]. Suppose that constant of surface anisotropy is β_S. Let us write the nonlinear exchange ABC in the form [8]

$$(\pm\alpha\ \partial m_{x1}/\partial x - \beta_0 m_{x1} + M_0^{-1} R_{1NL\pm})_{x=\pm L/2} = 0 \quad (11)$$

where $M_0^{-1} R_{1NL\pm}$ describes the contribution of the nonlinearity into boundary condition (11), and in the presence of only one (signal) wave, one can get [8]:

$$R_{1NL\pm} = -\beta_0 (m_{x1} m_{z1})^{(1)} \pm \alpha(-m_{x1}\frac{\partial m_{z1}}{\partial x} + m_{z1}\frac{\partial m_{x1}}{\partial x})^{(1)} \quad (12)$$

Accounting for (9), it is possible to note that the last (nonlinear) term in (11) corresponds to the second (nonlinear) term in the RHS from (10). As a result one becomes able to evaluate the nonlinear term in the RHS of (9). This phenomenological approach yields, with the accuracy up to a certain value of order unity, the nonlinear term F_{NLS} from the RHS in Eq. (8). The exact formula for this term [2] is written as

$$F_{NLS} = -(1/W_V)(4\pi\gamma/\omega_M) i\omega\ [(m_{1lx}^{*} R_{1NL\pm})_{x=+L/2} + (m_{1lx}^{*} R_{1NL\pm})_{x=-L/2}] \quad (13)$$

Let us now evaluate, using the outlined phenomenological approach, the surface nonlinear term for the waves in a layered nonlinear spatially dispersive dielectric. Polaritons in spatially dispersive dielectrics, such as exciton dielectrics [10] or ferroelectrics [11] are described by the 2nd order differential equation in time, such as

$$m\frac{\partial^2 P_i}{\partial t^2} = -m\omega_t^2 P_i + C[(\frac{\partial P_i}{\partial y})^2 + (\frac{\partial P_i}{\partial z})^2] + E_i - \gamma\frac{\partial P_i}{\partial t} \equiv -\frac{\delta F}{\delta P_i} - -\gamma\frac{\partial P_i}{\partial t} \quad (14)$$

Here $\vec{P}, m, \omega_t, C, \vec{E}, \gamma, F$ are polarization, effective mass, effective esxciton resonance frequency, proper constant, external electric field, coefficient of dissipative losses and effective potential energy of the unit mass, respectively, and a media is supposed to be lossless. Effective potential energy in (14) has the form

$$F = \frac{1}{2}\sum_i [m\omega_t^2 P_i^2 + C(\nabla P_i)^2] - \vec{E}\vec{P} \quad (15)$$

Note that in the RHS of the identity in (14), variational derivative of F is included: It is possible to derive the following conservation law corresponding to the Eqs. (14):

$$\frac{\partial}{\partial t}(w_0 + F) + \frac{\partial}{\partial x_k}\Pi_{SDk} = -\gamma(\frac{\partial \vec{P}}{\partial t})^2 \quad (16)$$

where effective kinetic energy w_0 and energy flux connected to spatial dispersion $\vec{\Pi}_{SD}$ are

$$w_0 = \frac{1}{2} m(\frac{\partial \vec{P}}{\partial t})^2,\ \Pi_{SDk} = -\frac{\partial P_i}{\partial t}\frac{\partial F}{\partial \frac{\partial P_i}{\partial x_k}} \quad (17)$$

Finally, using the relations (9), (10), where the electric polarization replaces magnetic one, yields

$$[\vec{\Pi}_{-}\vec{n}_{-} - \vec{\Pi}_{+}\vec{n}_{+}]_{NL} = [n_k(\frac{\partial F}{\partial \frac{\partial \vec{P}}{\partial x_k}})_{NL}(\frac{\partial \vec{P}}{\partial t})^{*}_{LIN}] = [NL_S(\frac{\partial \vec{P}}{\partial t})^{*}_{LIN}]_{z=L/2} \quad (18)$$

Corresponding to (18) contribution of the surface spatial dispersion dielectric (exciton/ferroelectric) nonlinear effect into the total nonlinearity in the relation describing NEELM is described by the term $W_0^{-1}[NL_S(\frac{\partial \vec{P}}{\partial t})^{*}_{LIN}]_{z=L/2}$, which should be added into RHS of the Eq. (6), altogether with corresponding term connected to interface $z = -L/2$.

The contribution of surface and volume nonlinearities in the formation of surface plasmon nonlinear structures and giant generation of resonant second harmonic

Let us introduce the variation of the plasma concentration, velocity, electric and magnetic fields, respectively, $\tilde{n}_1, \vec{v}_1, \vec{E}_1, \vec{H}_1$ and $\tilde{n}_2^{*}, \vec{v}_2^{*}, \vec{E}_2^{*}, \vec{H}_2^{*}$. Here values with indices "1" correspond to surface nonlinear plasmon and are proportional to the slowly varying nonlinear amplitude, and values with index "2" describes corresponding linear wave in the same

system, but without any nonlinearity. Upper index "*" means complex conjugation. Corresponding equations of motion in nonlinear plasma have the form

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \tilde{n}_1}{\partial t} + div\left(n\vec{v}_1\right) = -div\left(\tilde{n}\tilde{\vec{v}}\right)\\
&\frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} + \frac{e}{m}\vec{E}_1 = -\left(\vec{v}_1\vec{\nabla}\right)\vec{v}_1 - \frac{e}{m}\left[\vec{v}_{1^x}\vec{H}_1\right]\\
&curl\ \vec{H}_1 = \frac{1}{c}\frac{\partial E_1}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\left(-en_0\vec{v}_1 - e\tilde{n}\vec{v}\right)\\
&curl\ \vec{E}_1 = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{H}_1}{\partial t}
\end{aligned} \qquad (19)$$

The similar to (19) equations (but without nonlinear terms) should be written for the linear components with indices "2". Then the procedure [2-4] similar to the derivation of the energy conservation law [10, 9, 7], is applied to the nonlinear surface plasmons. To account for the surface nonlinearity, the nonlinear motion of surface charges (with surface concentration n_S) at $z = 0$ should be treated. The equation of continuity is modified due to the presence of surface charges as follows:

$$\frac{\partial v_1}{\partial t} + nv_{1z}\Big|_{z=-l+0} + \frac{\partial}{\partial x}\left(n_S v_{1x}\right)\Big|_{z=-l+0} = 0 \qquad (20)$$

We account for the boundary conditions at the interface ($z = 0$) "plasma-dielectric", the presence of free carriers, and, respectively, surface charge and surface current j_{surf}, namely

$$\begin{aligned}
&H_{1y}\Big|_{z=+0} - H_{1y}\Big|_{z=-0} = -\frac{4\pi}{c} j_{xsurf},\\
&j_{xsurf} = -en_S\vec{v}_x\Big|_{z=+0}
\end{aligned} \qquad (21)$$

Using (21), one can get

$$\begin{aligned}
&\left[\vec{E}_1^* \times \vec{H}_2\right]_{z;z=+0} - \left[\vec{E}_2^* \times \vec{H}_1\right]_{z;z=-0} =\\
&\frac{4\pi}{c} E_{2x}^*\, en_S v_x\Big|_{z=+0}
\end{aligned} \qquad (22)$$

In equation (22), denotations like $[...]_{z;z=\pm 0}$ mean Z-component of the vector […], taken at $z = \pm 0$. Finally, the integral NEELM for surface plasmons is obtained in the form:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\frac{1}{4\pi}\left(\vec{E}_1\vec{E}_2^* + \vec{H}_1\vec{H}_2^*\right) + mn_0\vec{v}_1\vec{v}_2^*\right\}dz + \frac{c}{4\pi}\frac{\partial}{\partial x}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\left[\vec{E}_1 \times \vec{H}_2^*\right]_x + \left[\vec{E}_2^* \times \vec{H}_1\right]_x\right\}dz =\\
&= eE_{2x}^* n_S v_x\Big|_{z=+0} - m\int_0^{\infty} n_0\vec{v}_2^*\left(\vec{v}\vec{\nabla}\right)\vec{v}dz - \frac{e}{c}\int_0^{\infty} n_0\vec{v}_2^*\left[\vec{v} \times \vec{H}\right]dz + e\int_0^{\infty} E_2^*\left(\tilde{n}\vec{v}\right)dz
\end{aligned} \qquad (23)$$

The first term in RHS in Eq. (23) appears due to surface nonlinearity, caused by nonlinear motion of surface free charge. The next three terms are the parts of volume nonlinearity and correspond to substantional nonlinearity, nonlinear Lorenz force and concentration nonlinearity, respectively. Detail calculations showing some very interesting nonlinear effects have been presented in [4]. It was shown in particular that the contribution of the surface nonlinearity into the giant generation of the resonant second harmonic appeared to be three times larger than the volume one.

Application of the method for the electromagnetic waves in the ionosphere and seismoionospheric phenomena

Consider, for the sake of simplicity, TM mode with the components H_y, E_z, E_x, where the electromagnetic wave propagates along the X axis, Z is directed vertically upward (as before) and we consider 2D problem, $\partial / \partial y = 0$. Using the method of NEELS, we come to the relation [12]:

$$\frac{\partial}{\partial t}\Phi = \int_{X_1}^{X_2}\Delta k_x(x)dx = -\frac{\omega}{16\pi V_g}\int_{X_1}^{X_2}\left[\frac{\int_{Z_1}^{Z_2}(\vec{F}_E^{\,*}\Delta\hat{\varepsilon}\vec{F}_E)dz}{\int_0^{Z_{\max}}(\vec{F}_E^{\,*}\frac{\partial}{\partial\omega}(\hat{\varepsilon}\omega)\vec{F}_E + \vec{F}_H^{\,*}\vec{F}_H^*)dz}\right]dx \qquad (24)$$

In (24), $\omega = 2\pi f$; f, V_g are frequency and group velocity of the electromagnetic wave, respectively; are the perturbations (due to the seismogenic processes) of the tensor of dielectric permittivity, X component of the wavenumber of the electromagnetic wave and integral complex change of the electromagnetic wave phase, respectively; X_1, X_2, Z_1, Z_2 are the coordinates of the region where the perturbation of the media parameters takes place, $\Delta X = X_2 - X_1$, $\Delta Z = Z_2 - Z_1$ are the characteristic dimensions of the region of perturbation in the X, Z directions, respectively; $Z_{\max}$ is the characteristic width of the equivalent waveguide for the electromagnetic waves; $\vec{F}_{E,H}$ are the functions which describe the polarization of the electric and magnetic field components of the electromagnetic wave, respectively. The relation (3) can be used for the estimation of the change of phase and amplitude of electromagnetic waves in the "Earth-Ionosphere" waveguide before strong earthquakes (see details concerning this physical phenomena, f.e. in [13]).

Application of the method NEELS for the modeling spatio-temporal solitons and nonlinear wave structures in the controllable and active nonlinear gyrotropic and metamaterial waveguides: from GHz to optics

The following dimensionless higher-order evolution equations for the electromagnetic controllable spatio-temporal wave structures can be obtained, using the method NEELS:

$$i\frac{\partial\psi}{\partial Z} - \frac{1}{2}sgn(\beta_2)\frac{\partial^2\psi}{\partial T^2} - i\delta_3\frac{\partial^3\psi}{\partial T^3} + \frac{1}{2}D\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \mathrm{K}\frac{\partial^2}{\partial y^2}(|\psi|^2\psi)$$
$$+sgn(\bar{\chi}^{(3)})\left(|\psi|^2\psi + iS\frac{\partial}{\partial T}\left(|\psi|^2\psi\right) - \tau_R\psi\frac{\partial}{\partial T}\left(|\psi|^2\right)\right) + i\gamma_0\psi - \nu\psi = 0 \qquad (25)$$

In (25), ψ is normalized amplitude of the corresponding component of electromagnetic waveguiding mode (in particular an amplitude of E_y component of the TM mode, $\beta_2, \delta_3, \bar{\chi}^{(3)}, S, \tau_R$ are the normalized coefficients of dispersion, third order linear dispersion, cubic nonlinearity, self-steepening (nonlinear dispersion) and the time characterizing nonlinear Raman effect, respectively; $D, \gamma_0, \nu, \mathrm{K}$ are the coefficients of linear diffraction, linear losses/gain(for an active media) , transverse magnetooptic effect and nonlinear diffraction, respectively. Using Eq. (25), the magnetooptic control of solitons in metamaterials was demonstrated in [14]. The set of important new effects for optical active nonlinear metamaterial [15] waveguiding structures including magnetooptic and diffraction-management stabilization of spatio-temporal (2+1) solitons/bullets [16] will be published elsewhere.

As it was shown in [1] (see also [2] concerning the details of the applications of the method NEELS to the magnetostatic waves in GLs/ferrite films), application of the method NEELS for the coupling of BVMSW in longitudinally-magnetized gyromagnetic layered structure/ferrite film leads to the system of the normalized equations for the parametric coupling of counterpropagating signal and idle pulses having equal carrier frequencies and equal by absolute values carrier wavenumbers:

$$\frac{\partial U_1}{\partial t} + V_g\frac{\partial U_1}{\partial z} + i\left(\frac{D}{2}\right)\frac{\partial^2 U_1}{\partial z^2} + iS\frac{\partial^2 U_1}{\partial y^2} + iN(|U_1|^2 + 2|U_2|^2)U_1 + \omega_r U_1 + Vh_{pmp}(z,t)U_2^* = 0,$$
$$\frac{\partial U_2}{\partial t} - V_g\frac{\partial U_2}{\partial z} + i\left(\frac{D}{2}\right)\frac{\partial^2 U_1}{\partial z^2} + iS\frac{\partial^2 U_1}{\partial y^2} + iN(|U_2|^2 + 2|U_1|^2)U_2 + \omega_r U_2 + Vh_{pmp}(z,t)U_1^* = 0. \qquad (26)$$

Here $U_{1,2}, D, S, N, Vh_{pmp}, \omega_r$ are normalized amplitudes of the signal and idle pulses, coefficient of diffraction and dispersion and cubic nonlinearity, and the amplitude of pumping wave having double frequency (respectively to the carrier pulse frequency). Application of the method NEELS yields all the coefficients in (26), in particular $V \approx i\gamma\sigma_0/(\omega_H/\omega_M)[\sigma_0^2 + (\mu-1)^2]$, where $\omega_{H,M}$ are characteristic frequencies and μ, σ_0 diagonal and non-diagonal elements of the tensor $\hat{\mu}$ [8, 9, 2, 1] of a magnetized (saturated) ferrite, respectively (see also [2] concerning the values of other coefficients in (26)). New types of structures, in particular "knife-shaped bullets" in narrow ferrite films are obtained.

The set of other new interesting effects of the structure formation in this active nonlinear system with parametric amplification will be reported in a separate paper. The system of equation similar to (4), (26) have been derived using the method NEELS but not presented explicitly in the conference paper [5] for the parametric pumping of counterpropagating electromagnetic signal and idle pulses in bianisotropic waveguide with active nonlinear bianisotropic metamolecules (in the form of planar Ω-particles). The method of corresponding nonlinear homogenization of the bi-anisotropic metamaterial had been proposed in [5]. Now we present such a system, first:

$$\frac{\partial U_{1,2}}{\partial t} \pm V_{g1,2}\frac{\partial U_{1,2}}{\partial t} + i\frac{V_{g1,2}}{2k_{1,2}}\frac{\partial^2 U_{1,2}}{\partial z^2} + \frac{i}{2}\frac{\partial^2\omega}{\partial k_y^2}\frac{\partial^2 U_{1,2}}{\partial y^2} + \omega_{r1,2}U_{1,2} -$$
$$\frac{i\omega}{W_{01,2}}\int_{-\infty}^{\infty}(\vec{f}^{*}_{E1,2}\vec{P}_{A1,2} + \vec{f}^{*}_{H1,2}\vec{M}_{A1,2})dx = i\omega Q_0 U_3 U^{*}_{2,1};\ W_0 = \frac{c}{4\pi V_{g1}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{Re}(\vec{f}_{E1}\times\vec{f}^{*}_{H1})_y\,dx \tag{27}$$

In (27), Q_0, U_3 are the parametric coupling coefficient and an amplitude of pumping field, respectively. Indexes "1, 2" correspond to the signal and incident pulses, respectively. A possibility of quasisoliton parametric amplification in the bianisotropic metamaterial waveguide had been shown using the system (27).

Nonlinear transmission of electromagnetic waves through multilayered dielectric-graphene-dielectric… metamaterials

Using the NEELS method, it is possible to derive nonlinear evolution equations for the electromagnetic waves propagating normally to the multilayered dielectric-graphene-dielectric… metamaterial structures, where the nonlinearity is associated with the graphene layers. In particular nonlinearity in the case is connected with the conducting surface current i_s in graphene [27]:

$$i_s = \frac{ev_F p_F}{\pi}(1+\Psi^2)^{-1/2}\Psi,\ \Psi = eA/(\hbar p_F);$$
$$p_F = (\pi n_{20})^{1/2};\ E = \partial A/\partial t \tag{28}$$

Here $v_F \approx 10^8\ cm/s$ is the characteristic Fermi velocity of electrons in the graphene, $\hbar p_F$ is the Fermi electron momentum; A is the vector-potential of electromagnetic wave. The analog of the effective mass is $m^* = \hbar p_F / v_F \sim (0.01-0.03)m_e$. Nonlinear conductive current (28) can be used for the derivation of the NEELS under the transverse wave propagation as was described above, yielding the evolution equation [17]

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{ic^2}{2\omega\varepsilon^{(1)}}\left(\frac{\partial^2 C}{\partial z^2} + \Delta_\perp C\right) + + \frac{i}{2\omega\varepsilon^{(1)}}\left(\omega^2\varepsilon - \sum_j {\omega_{pg}}^2 l_n \delta(z-z_j)(1+\frac{i\nu}{\omega})\right)C +$$
$$\frac{i{\omega_{pg}}^2 l_n\omega}{2\omega^2\varepsilon^{(1)}}\sum_j\left(1 - Q_g^{-1/2}\left(1 - \frac{1}{8}\frac{e^2|C|^2}{(m^* v_F\omega)^2}Q_g^{-1}\right)\right)\times\delta(z-z_j)C = 0;\ Q_g = 1 + \frac{e^2|C|^2}{2(m^* v_F\omega)^2}. \tag{29}$$

In (29), $\varepsilon^{(l)} = \varepsilon + (\omega/2)(d\varepsilon/d\omega)$ is the dielectric permittivity with the correction following from the temporal dispersion. The collision frequency ν of electrons in the grapheme layers is taken into account here. The value of ν is of about $((3\cdot10^{11} - 3\cdot10^{12})\ s^{-1}$. Eq. (29) describes the focusing of nonlinear electromagnetic THz pulses in the multilayered structure both in transverse and longitudinal directions. The new effect of the nonlinear transformation to the "predominantly transmission" regime was presented in [17].

Conclusions

We developed and presented the new method NEELM for the derivation of the nonlinear equations for envelope amplitudes of wave packets in layered systems included nonlinear gyrotropic layers and both volume and surface nonlinearities, media with spatial dispersion, from GHz to optic ranges. The proposed method is formulated in very general form. We believe that NEELM is the most effective contemporary methods for the derivation of the evolution equations for the waves in the multi-layered systems which include materials and nonlinearities of different physical nature, such as

metamaterials, plasma, ionosphere, gyrotropic nonlinear media, multilayered dielectric-graphene-dielectric and bianisotropic/chiral metamaterials etc. The qualitatively new features in the behavior of the nonlinear pulse propagation in the layered systems are revealed. Higher-order nonlinear effects, retardation and surface nonlinearities including an effect caused by higher nonlinear modes [2] are incorporated into the proposed method.

References

1. *Grimal'sky V., Rapoport Yu., Zaspel C., Slavin A.N.* Numerical Modeling of Wave Front Reversal for Two-Dimensional Spin Wave Packets in Magnetic Films // 8th European Magnetic Materials and Applications Conference, June 2000, Kiev, Ukraine: abstracts: - 2000. - P. 38-40.
2. *Rapoport Yu., Grimalsky V., Zaspel C.*, Method for the derivation of nonlineaer evolution equations in layered structures (NEELS): an example of nonlinear waves in gyrotropic layers, Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ser. Physics. – 2012. –N 14/15. - P. 72-76.
3. *Grimalsky V.V., Rapoport Yu.G.* Modulational instability of surface plasma waves in the second-harmonic resonance region // Plasma Phys. Reports. -1998. - Vol. 24. – P. 980-983.
4. *Rapoport Yu.G., Grimalsky V.V.* Nonlinear surface 2D plasmons and giant second harmonic generation // Days on Diffraction 2011, DD 2011: international conference, May 30 -June 3, 2011; St. Petersburg, Russia. - IEEE Conference Publications: proceedings. - 2011. - P. 168-173.
5. *Boardman A.D., Mitchell-Thomas R., Rapoport Yu.G.*, Weakly nonlinear waves in layered bi-anisotropic metamaterials, 3d International Congress on Advanced Electromagnetic Materials in Microwaves and Optics: Metamaterials- Aug. 30-Sept. 4, 2009, London, UK. -P. 495-497.
6. *Tretyakov S., Barois P., Scharf T., Kruglyak V. Bergmair I., Eds.* Nanostructured Metamaterials - Exchange between experts in electromagnertic and material science. Directorate-General for res.. - EUR 24409 EU, B-1050 Brussels. - 2010. – 137 p.
7. *Kadomcev B. B.* Collective phenomena in plasma. –Moscow: Nauka. – 1988. -303 p. (in Russian).
8. *Gurevich A.G., Melkov G.A.* Magnetization Oscillations and waves.- New York : CRS Press. - 1996. – 563 p.
9. *Ahiezer A. I., Baryakhtar V. G., Peletminskiy S. V.* Spin Waves. –Moscow: Nauka. – 1967. – 368 p. (in Russian).
10. *Agranovich V. M., Gunzburg V. L.* Cristal optics accounting for spatial dispersion and exciton theory. – Moscow: Nauka. - 1965. – 367 p. (in Russian).
11. *Jardin J.-P., Moch P., Dvorak V.* Polarization waves in dielectric films with spatial dispersion. // J. Phys.: Condens. Matter. – 2002. – V. 14. –P. 1745-1763.
12. *Rapoport Yu. G., Gotynyan O. E., Ivchenko V. N., Hayakawa M., Grimalsky V. V., Koshevaya S. V., D. Juares – R.* Modeling electrostatic-photochemisrry seismoionospheric coupling in the presence of external currents. – Phys. Chem. Earth. 2006. –V. 31. – No 4-9. – P. 437-446.
13. *Martinenko S.I., Fuks I.M., Shubova R.S.* Ionospheric electric-field influence on the parameters of VLF signals connected with nuclear accidents and earthquakes. // Journ. Atmos. Electricity..- 1996.- V. 16. – P. 259-269.
14. *Boardman, A.D., Hess O., Mitchell-Thomas, R.C., Rapoport, Y.G., Velasco, L.* Temporal solitons in magnetooptic and metamaterial waveguides, Photonics and Nanostructures - Fundamentals and Applications, V. 8. - N. 4. – 2010. - P. 228-243.
15. *Boardman A.D. , Grymalsky V. V, Kivshar Yu. S., Koshevaya S.V., Lapine M., Litchinitser N.M., Malnev V.N.,Noginov M. , Rapoport Yu. G., Shalaev V.M.*. Active and tunable metamaterials / // Lasers Photonics Rev. – 2010. – V. 5. – N 2. –P. 287-307.
16. *Buttner O., Bauer M., Demokritov S.O., Hillebrands B., Kivshar Yu.S., Grimalsky V.V., Rapoport Yu., Slavin A.N.* Linear and nonlinear diffraction of dipolar spin waves in yttrium iron garnet films observed by space- and time – resolved Brillouin light scattering // Phys. Rev. B. – 2000. – Vol. 61. - N 17: - P.11576-11587.
17. *Rapoport Yu., Grimalsky V., Iorsh I., Kalinich N., Koshevaya S., Castrejon-Martinez Ch., Kivshar Yu. S.* Nonlinear reshaping of THz pulses with graphene metamaterials, // Pis'ma v ZhETF, - 2013. -vol. 98, N. 8, pp. 561 – 564.

Надійшла до редколегії 13.01.14

УДК 538.22

Рево С.Л.[1], д.ф.м.н., проф.
Хуторянська Н.В. [1], інж.
Іваненко К.О. [1], к.ф.м.н., с.н.с.
Копань В.С. [1], д.ф.-м.н., проф.
Бошко О.І. [1], асп.

Термоелектрорушійна сила багатошарових композицій з алюмінію і вуглецевих нанотрубок

Зміна термо-е.р.с. одношарових і багатошарових алюмінієвих фольг, а також фольг багатошарових композицій з алюмінію і вуглецевих нанотрубок (ВНТ) здійснюється при деформаціях $\varepsilon < 60\%$ внаслідок розсіяння електронів провідності на дислокаціях, а при $\varepsilon = (70…96)$ % - за рахунок їх розсіяння на границях між шарами (термоелектричний розмірний ефект), коли довжина вільного пробігу електрона ($l \sim 30$ нм) є порівняною з товщиною шару $h \sim (40…60)$ нм

Енергія активації процесу релаксації термо-е.р.с. при відпалі зразків наростає по ряду: Al одношаровий, Al багатошаровий, Al-0,5 % мас. ВНТ, Al-1,5 % мас. ВНТ.

Ключові слова: *термоелектрорушійна сила, багатошаровий композиційний матеріал, розмірний ефект.*

[1]Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, пр-т Глушкова 4д, e-mail: hutor@univ.kiev.ua

S. L. Revo[1], Dr. Sci., Prof.,
N.V. Khutoryanska[1], eng,
K.O.Ivanenko[1], Ph.D., Sen.Sci.Res.
V.S. Kopan'[1], Dr. Sci., Prof.
O.I.Boshko[1], Ph.D. stud.

Thermoelectric power of multilayer compositions of aluminum and carbon nanotubes

Changing the thermoelectric power monolayer and multilayer aluminum foil and multilayer foils compositions of aluminum and carbon nanotubes (CNT) is the deformation $\varepsilon < 60$ % due to the scattering of conduction electrons at dislocations and at $\varepsilon = (70 ... 96)$ % - due to their scattering on the boundaries between the layers (thermoelectric size effect), when the electron mean free path ($l \sim 30$ nm) is comparable with the layer thickness $h \sim (40 ... 60)$ nm.

The activation energy of the relaxation process thermoelectric power during the annealing of samples increases for a number of: Al layered, Al multilayer, Al-0, 5 % by weight. CNT, Al-1,5 % by weight. CNT.

Key Words*: thermoelectric power, multilayered composite material, size effect.*

[1]Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03680, Kyiv, Glushkova st., 4d,
e-mail: hutor@univ.kiev.ua

Статтю представив член-кор. НАН України, д.ф.-м.н., проф. Макара В.А.

Вступ

В роботах [1, 2] досліджені фізичні властивості багатошарових композиційних матеріалів (БКМ), що складалися з різноманітних компонентів. Було показано, що коли товщина шарів цих компонентів досягає нанорозмірів, більшість фізичних параметрів (границя міцності, коерцитивна сила, термо-е.р.с., електроопір, розчинність у воді з виділенням водню тощо) БКМ значно відрізняються від параметрів композицій, що використовуються на практиці і мають товщини шарів $h = (10…100)$ мкм. В цій роботі наведено результати дослідження мало вивченої системи Al-багатостінні вуглецеві нанотрубки (ВНТ). Ці БКМ цікаві малою розчинністю вуглецю в Al у твердому стані, яка не перевершує (0,02…0,04) % [3].

Мета роботи – встановлення методом термо-е.р.с. закономірностей еволюції дефектів кристалічної будови в БКМ Al-ВНТ при наклепі та відпалах.

Експериментальні результати і їх обговорення

Зразки БКМ одержано методом глибокої деформації вальцюванням пакету з фольг алюмінію А999, розділених шарами з ВНТ, одержаних за способом, описаному у роботі [4]. Спочатку пакет відпалювали при 653 К протягом 3…5 хвилин, потім вальцювали так, що товщина

© Рево С.Л., Хуторянська Н.В., Іваненко К.О. Копань В.С., Бошко О.І., 2014

пакету за перше проходження між валками зменшувалась на (20…30) %. Подальше вальцювання багатошарової фольги здійснювали без відпалів, при кімнатній температурі.

Диференційну термо-е.р.с. (E_T) досліджували за методикою, викладеною у роботі [5]. Вимірювання проводили потенціометром з ціною поділки шкали 10^{-8} В і вхідним опором 20 Ом. Еталонною гілкою термопари слугувала відпалена алюмінієва фольга. Експериментальні результати наведені на рис. 1-4 та в таблиці 1.

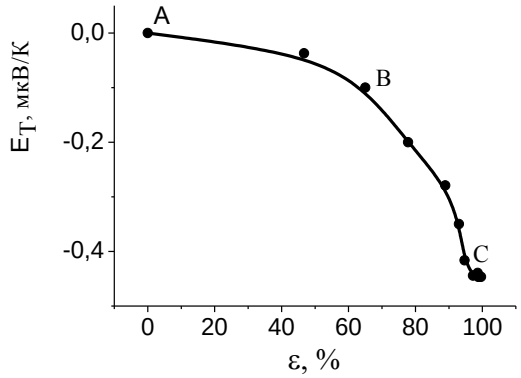


Рис. 1. Залежність АВС термо-е.р.с. E_T алюмінієвої фольги від деформації ε.

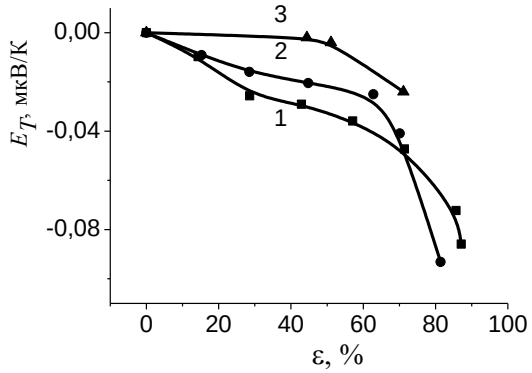


Рис. 2. Залежності величини наведеної деформацією ε термо-е.р.с. E_T від ступеню відносної деформації зразків Al-0,5 % мас. ВНТ (1), Al-1,5 % мас. ВНТ (2) та шаруватого алюмінію (3).

Розглянемо спочатку вплив відносної деформації (ε) на термо-е.р.с. суцільної (не шаруватої) високочистої алюмінієвої фольги (рис. 1). Ділянка АВ виникає внаслідок накопичення дефектів кристалічної будови [6] і виникнення текстури. В алюмінію вакансії, що утворюються при деформації, частково зникають у процесі самої деформації. Максимальна (~10^{13} см$^{-2}$) густина дислокацій утворюється в області ε=40…60% і не зростає при подальшій деформації [6]. При ε=50…70% величина E_T спадає внаслідок формування текстури. Характерно, що після відпалу таких зразків протягом (100…150) хвилин при 350К термо-е.р.с., що наведена деформацією зникає. Ділянка ВС обумовлена розсіянням електронів на поверхнях фольги (розмірний або «масштабний» ефект), товщина якої (h) при вальцюванні зменшується до ~10 мкм.

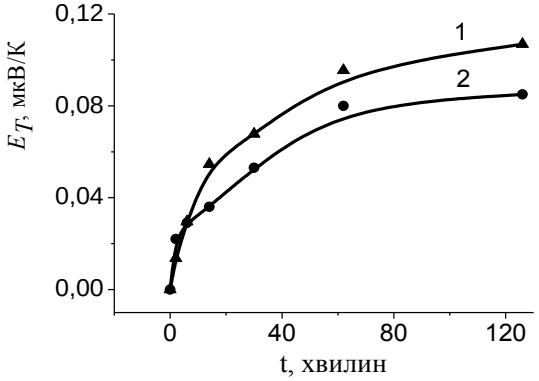


Рис. 3. Залежність термо-е.р.с. E_T зразків шаруватого алюмінію від часу t ізотермічного сходинкового відпалу при температурах 433 К (1), 348 К (2).

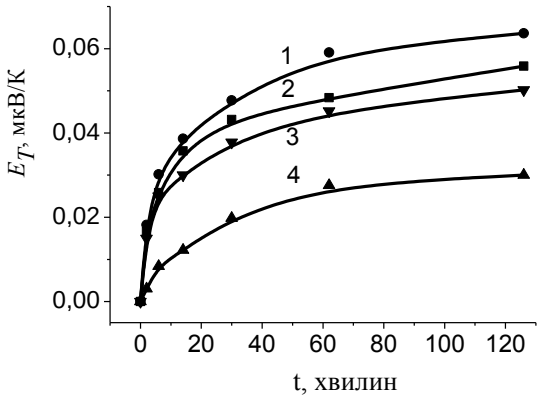


Рис. 4. Залежність термо-е.р.с. E_T зразків Al-0,5 % мас. ВНТ (1, 2) та Al-1,5 % мас. ВНТ (3, 4) від часу t ізотермічного сходинкового відпалу при температурах 348 К (2, 4), 433 К (1, 3).

В роботі [7] показано, що

$$E_T - E_0 = \frac{E_0}{(\rho_0/\Delta\rho)+1}\left(\frac{(\partial \ln \Delta\rho/\partial E)}{(\partial \ln \rho_0/\partial E)} - 1\right)_{E_F}, \quad (1)$$

$$\Delta\rho = (3l/8h)\rho_0, \qquad (2)$$

де E_0 - термо-е.р.с. товстої фольги, l і E – довжина вільного пробігу і енергія електронів провідності, ρ_0- питомий опір товстої фольги ($h >> l$), E_F – енергія Фермі.

Оскільки

$$\left(\frac{(\partial \ln \Delta\rho / \partial E)}{(\partial \ln \rho_0 / \partial E)}\right)_{E_F} << 1, \text{ а}$$

$$\varepsilon(\%) = \frac{h - h_0}{h_0} 100, \qquad (3)$$

де h_0 - початкова товщина фольги (при $\varepsilon = 0$), то з формул (1-3) одержуємо (4)

$$E_T = E_0 * \left(1 - \frac{3l}{8h_0(0{,}01\varepsilon + 1) + 3l}\right)_{E_F} \qquad (4)$$

- круту залежність $E_T = f(\varepsilon)$ на ділянці ВС кривої (рис. 1).

Аналогічно можна пояснити криві рис. 2. У зразках БКМ з малою товщиною шарів розсіяння електронів здійснюється переважно на границях між шарами. Тому ділянка розмірного ефекту ВС розпочинається при деформації $\varepsilon \sim 60$ % (рис. 2), яка менша за ε~(70…80) % (рис. 1).

Енергію активації Q явища структурної релаксації зразків при ізотермічних відпалах знаходили за кривими, поданими на рис. 3 та 4. Використовували відому формулу:

$$Q = \ln \frac{t_1}{t_1'} * \frac{R}{\left(\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1}\right)}, \qquad (5)$$

де R = 8,31 Дж/(моль*К), T_1 = 348 К, T_2 = 433 К.

Таблиця 1

Параметри для розрахунку енергії активації (Q [ккал/моль]) для шаруватого алюмінію, БКМ Al-0,5 % мас. ВНТ та БКМ Al-1,5 % мас. ВНТ.

Рівень перерізу ізотерм	Зразок		
	Al шаруватий	Al-0.5 % мас. ВНТ	Al-1.5 % мас. ВНТ
1	t_1 = 10 хв. t_1' = 18 хв. Q_1 = 9	t_1 = 10 хв. t_1' = 14 хв. Q_1 = 15	t_1 = 1 хв. t_1' = 10 хв. Q_1 = 34
2	t_2 = 20 хв. t_2' = 40 хв. Q_2 = 10	t_2 = 25 хв. t_2' = 40 хв. Q_2 = 17	t_2 = 4 хв. t_2' = 30 хв. Q_2 = 30
3	t_3 = 45 хв. t_3' = 80 хв. Q_3 = 9	t_1 = 50 хв. t_3' = 120 хв. Q_3 = 13	t_1 = 14 хв. t_3' = 120 хв. Q_3 = 32
$\overline{Q}$ *[ккал/моль]*	9 ± 1	15 ± 1	32 ± 1
$\overline{\Delta Q}$	1	1	1
$\left\|\frac{\overline{\Delta Q}}{\overline{Q}}\right\| * 100\%$	11	7	3

Значення часу t_1 і t_1', t_2 і t_2', t_3 і t_3' знаходили шляхом горизонтальних перерізів на трьох висотах двох ізотерм відпалу зразків одного складу. Результати обчислень наведені у таблиці 1.

Значення енергій активації процесів зміни термо-е.р.с. внаслідок відпалу продеформованих зразків шаруватого алюмінію і БКМ, перевищують енергію активації процесу релаксації нешаруватих («масивних») алюмінієвих зразків (6…8 ккал/моль). Це вказує на те, що анігіляція дефектів кристалічної будови в шаруватих алюмінієвих зразках та БКМ блокується границями між шарами і ВНТ. Блокування дислокацій в БКМ Al-1,5 % мас. ВНТ сильніше, ніж в зразках шаруватого алюмінію, бо воно здійснюється як границями між шарами, так ще й додатково вуглецевими нанотрубками.

Висновки

1. Зміна термо-е.р.с. одношарових і багатошарових алюмінієвих фольг, а також фольг багатошарових композицій Al-ВНТ з наростанням деформації ε здійснюється в два етапи. На першому етапі вона обумовлена розсіянням електронів на дислокаціях, густина яких наростає і виходить на насичення. На другому етапі швидкість приросту термо-е.р.с. круто наростає зі збільшенням ε за рахунок розсіяння електронів на границях між шарами (термоелектричний розмірний ефект), коли довжина вільного пробігу електрона ($l \sim 30$ нм) порівняна з товщиною шару $h \sim (40…60$ нм).

2. Енергія активації процесу релаксації термо-е.р.с. при відпалі зразків наростає по ряду: Al одношаровий, Al багатошаровий, Al-0,5 % мас. ВНТ, Al-1,5 % мас. ВНТ. Це пояснюється зростанням по ряду блокування дислокацій границями між шарами і вуглецевими нанотрубками.

Список використаних джерел

1. *Kopan' V.S.* Composite materials. – Tutorial.- Kiev: University Press of "Pulsar", 2004. - 196 p. (in Ukrainian).

2. *Shpak A.P.* Nanolayers composite materials and coatings: Monograph / A.P.Shpak, V.P.Mayboroda, Yu.A.Kunitsky, S.L.Revo. // K.: Academperiodika, 2004.-163 p. (in Ukrainian).

3. *Vol A.E.* Structure and properties of binary metallic systems. – Moscow: Fizmatgiz., 1959.-**T.1**.- 756 p. (in Russian).

4. *Yanchenko V.V*, Patent 69292A of Ukraine, МКИ C 01 B 311/00 / V.V.Yanchenko, Yu.I.Sementsov, O.V.Melezhik // partnership "TM Spetsmash». - № 20031212314; Stated 24.12.2003, Publ. 16.08. 2004 НКИ 311/00. -3 p. (in Ukrainian).

5. *Borisenko V.D.* Inventor's certificate number 750357 USSR. A thermoelectric device to control the heterogeneity of materials /V.D. Borisenko, V.S.Kopan, VB Bessonov.// Published in the bulletin of Inventions of the USSR, 1980.- № 27. (in Russian)

6. *Gertsriken S.D, Novikov M.M., Kopan V.S.*. The nature of thermoelectric power generated by the deformation of the metal. Ukrainian Journal of Physics.-1959.- № 3.- p.293-299. (in Ukrainian).

7. *Huebener R.P.* Theroelectric Size Effect in Pure Gold. The physical Review.- 1965.- **T.138**. - №3A.- P.A1740-1744.

Надійшла до редколегії 18.09.13.

.

УДК 539.194

Розуван К.П.[1], інж.,
Розуван С.Г.[1], к.ф.-м.н, н.с.,
Шайкевич І.А.[1], д.ф.-м.н, проф..

Скануюча тунельна мікроскопія вуглецевих нанотрубок.

Вуглецеві нанотрубки вивчалися за допомогою скануючої тунельної мікроскопії та спектральної еліпсометрії. Виміри з просторовою роздільною здатністю 0.15нм показали, що інтерфейсний шар вуглецева нанотрубка- мідна підкладка має складну просторову структуру. Отриманий просторовий розподіл електронної густини в зоні контакту нанотрубки з підкладкою та біля її країв проаналізовані з використанням зонної теорії. Також проведені квантово-механічні розрахунки вуглецевої нанотрубки із 40 атомів для ілюстрації отриманих результатів .

Ключові слова: вуглецеві нанотрубки, скануюча тунельна мікроскопія, електронна густина.

[1]Київський національний університет імені Тараса Шевченка,03680, м. Київ, пр-т. Глушкова 4, e-mail: sgr@univ.kiev.ua

K.P.Rozouvan[1], Eng,
S.G. Rozouvan[1], Ph.D., Sci. Res.
I.A. Shaykevich[1], Dr.Sc., Prof.

Scanning tunneling microscopy of carbon nanotubes.

Carbon nanotubes were studied by scanning tunneling microscopy and spectral ellipsometry. The measurements with spatial resolution 0.15nm revealed sophisticated structure of the interface nanotube- copper substrate. Obtained spatial electronic density distribution in both nanotube-substrate layer and near the nanotube edges were studied by applying electronic band structure theory. Also quantum mechanical numerical simulation of a carbon nanotube with 40 atoms illustrated the obtained results.

Key Words: carbon nanotubes, scanning tunneling microscopy, electron density.

[1]Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03680, Kyiv, Glushkova st., 4, e-mail: sgr@univ.kiev.ua

Статтю представив член-кор. НАН України, д.ф.-м.н., проф. Макара В.А.

Складні молекули на базі вуглецю – фулерени, нанотрубки, графен є базовими обєктами дослідження в рамках революційного розвитку нанотехнологій останніх десятиріч [1]. Серед різноманітних експериментальних досліджень таких молекул слід виділити методики атомно-силової мікроскопії (АСМ) та скануючої тунельної мікроскопії (СТМ). Вони відіграють важливу роль в таких експериментах, оскільки дозволяють характеризувати зразки з високою просторовою роздільною здатністю, часто досягаючою рівня атомарної роздільної здатності. Так, наприклад, в роботі [2] вивчались механічні властивості нанотрубок з використанням АСМ. Затухання електричної провідності вздовж одностінної нанотрубки було зареєстровано в [3] за допомогою методики контактної АСМ. Подібні експерименти, незважаючи на їх складність, є ключовими з точки зору побудови пристроїв нанорозмірної електроніки.

Задача даної роботи є вивчення структури вуглецевої нанотрубки з використанням методик спектральної еліпсометрії та скануючої тунельної мікроскопії з високою просторовою роздільною здатністю.

Для експериментів були взяті зразки нанотрубок вироблені в [4]. Спектральна еліпсометрія дозволила отримувати дисперсійні залежності оптичної провідності вуглецевих нанотрубок. Результати таких вимірів зі зразками вуглецевих нанотрубок в поліхлорвінілі представлені на рис.1. Вони є типовими для спектральних характеристик вуглецевих нанотрубок [5] і мають чітко виражені смуги поглинання в спектральних інтервалах 1.2 та 4еВ. Наявність широких смуг свідчить про неоднорідний характер нанотрубок зразка (різна хіральність, товщина стінок, довжина тощо). Експериментально просторова структура вуглецевих нанотрубок вивчалась за допомогою методики скануючої тунельної мікроскопії (СТМ). Методика реалізовувалися на атомно-силовому мікроскопі- зондовій нанолабораторії ІНТЕГРА виробництва NT-MDT. Вимірювання СТМ дозволяли аналізувати особливості

© К.П. Розуван, С.Г.Розуван, І.А.Шайкевич, 2014

кристалічної структури зразка аналогічно до вимірювань проведених в [5].

Результати скануючої тунельної мікроскопії вуглецевих нанотрубок на олов'яній підкладці представлені на рис.2. Зразки виготовлялись методом виливання розплавленого олова на дзеркально поліровану нержавіючу сталь з

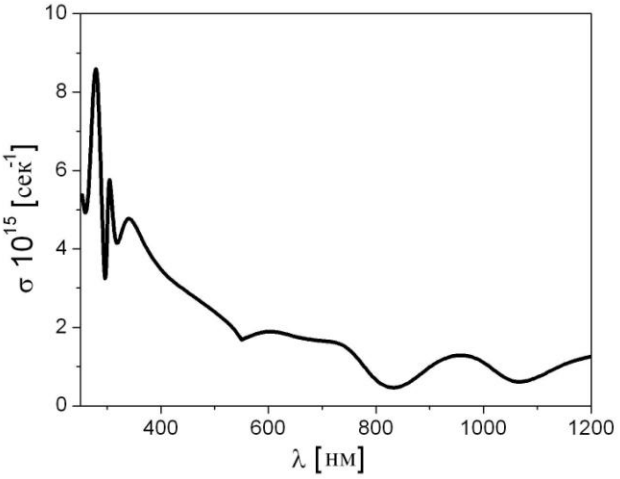


Рис. 1. Оптична провідність вуглецевих нанотрубок в полімерній матриці.

тонким шаром вуглецевих нанотрубок на її поверхні. Наявність масивної стальної основи при виливу забезпечувала швидкий відтік тепла від розплавленого олова і, як наслідок, мінімізувала небезпеку термічного пошкодження структури нанотрубок. З рисунка 2 видно, що поверхня зразка має величину нерівностей 30 нанометрів, що в 5 раз перевищує нерівність поверхні чистого олова після його виливу на таку ж поліровану металічну поверхню. Тобто, як і у випадку експериментів [6], при вимірах СТМ ми реєстрували профіль верхнього шару нанотрубок на олові, яке має низьку електропровідність, а не профіль інтерфейсного шару олово-нанотрубки.

На рис.3 представлені результати СТМ вимірів нанотрубок нанесених на поверхню полірованої до дзеркального блиску мідної підкладки. Нанесення шару нанотрубок на підкладку проводилось шляхом повільного випаровування при кімнатній температурі водної суміші нанотрубок. Як видно з рисунка, виміри, що проводились з міжатомною просторовою роздільною здатністю вказують на складну структуру. На рис.3 видно, що нанотрубка, яка судячи з поперечних розмірів представляє собою пучок нанотрубок або товстостінну нанотрубку, розташована вертикально і формує інтерфейсний шар (позначений з'єднаними стрілками) та дві крайові смуги (позначені нез'єднаними стрілками). Структура мідної підкладки спостерігається з правого боку контакту нанотрубки з підкладкою. Схематично процес СТМ вимірів представлений на рис.4. Переріз нанотрубки (пучка нанотрубок), який зображений на рисунку у вигляді овалу формує інтерфейсний шар підкладка-нанотрубка, який також позначений на рисунку з'єднаними стрілками.

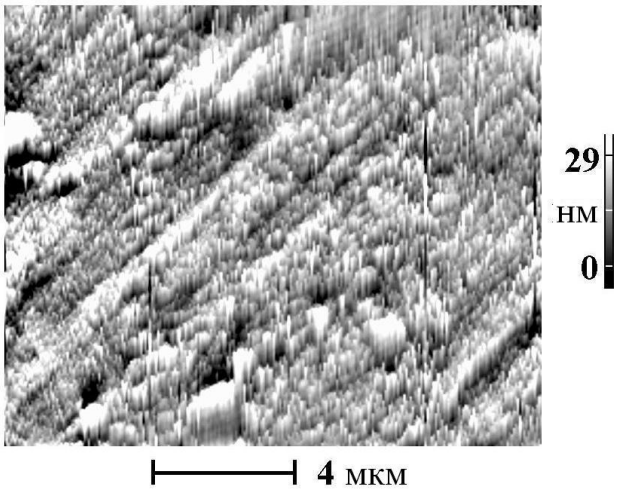


Рис. 2. Скануюча тунельна мікроскопія вуглецевих нанотрубок на олов'яній підложці. Роздільна просторова здатність вимірів – 6нм.

Інтерфейсний шар має характеризуватись змішаними квантово-механічними станами атомів вуглецю і міді, які знаходяться на невеликій відстані. Тому з чисто геометричних міркувань він може існувати тільки в околі точці дотику овалу до лінії підкладки. Для експериментів СТМ в схемі підкладка-нанотрубка важливим є співвідношення електричних провідностей підкладки та нанотрубки. Як відомо [7], в залежності від хіральності, нанотрубка може бути або металом або напівпровідником. У випадку напівпровідника (аналогічно нанотрубці з рис.3) концентрація електронів провідності на границі підкладка-нанотрубка перевищує концентрацію електронів провідності в самій нанотрубці, що робить більш ймовірну реєстрацію де-Бройлівських хвиль під час СТМ вимірів саме з області контакту нанотрубка-підкладка. Для СТМ експериментів суттєвим є відносна різниця в електропровідності підкладки та шару на підкладці. Тому у випадку рис.2 ми реєстрували верхній край нвнесених нанотрубок. Отримання високої просторової роздільної здатності в такій схемі пов'язана зі значним ускладненням експерименту.

З верхнього та нижнього рис.3 видно, що інтерфейсий шар **I,** позначений з'єднаними стрілками, має дві суттєві особливості.

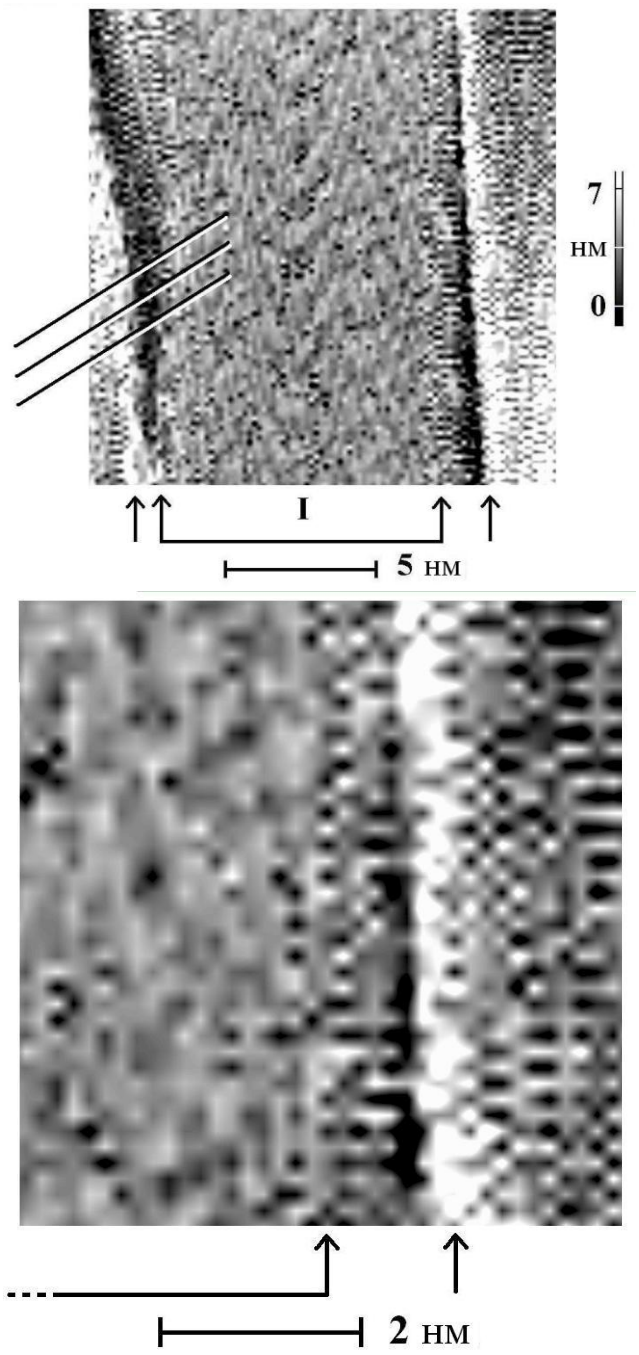


Рис. 3. Скануюча тунельна мікроскопія напівпровідникової вуглецевої нанотрубки на мідній підкладці. Роздільна просторова здатність вимірів – 0.15нм. Внизу збільшене зображення частини верхнього рисунку.

1. симетричну періодичну структуру деталі якої виділені на верхньому рисунку трьома паралельними прямими лініями. Періодичність структури відображає будову поверхневого шару нанотрубки (пучка нанотрубок).

2. Роздільна здатність зареєстрованого профілю інтерфейсного шару **I** є візуально меншою в порівнянні з оточуючими частинами поверхні мідної підкладки. Окремі атоми вуглецю та кристалічної гратки міді, видимі на підкладці, не розрізняються на області контакту нанотрубка-підкладка. Зменшення роздільної здатності пояснюється збільшенням де-Бройлівської довжини хвилі тунельованих електронів з проміжку інтерфейсного шару. Втрата енергії електронів є наслідком квановомеханічного переходу валентна зона – зона провідності нанотрубки, з якої і відбувається тунелювання електронів. У зоні провідності електрони розповсюджуються у вигляді деБройлівських хвиль і можуть створювати тунельний струм, який і реєструється під час експериментів..

Крайові смуги на рис. 3 у вигляді контрастної вертикальної лінії з перерозподілом інтенсивностей (більш світла смуга і більш темна смуга у вигляді своєрідної «тіні») є наслідком проходження де-Бройлівських хвиль в околі краю нанотрубки (рисунки 3, 4- нез'єднані стрілки). Фаза хвиль може зазнавати впливу крайових ефектів, що і приводить до появи смуги на зразок дифракційної структури при проходженні світла поблизу прямого краю напівпровідника чи металу.

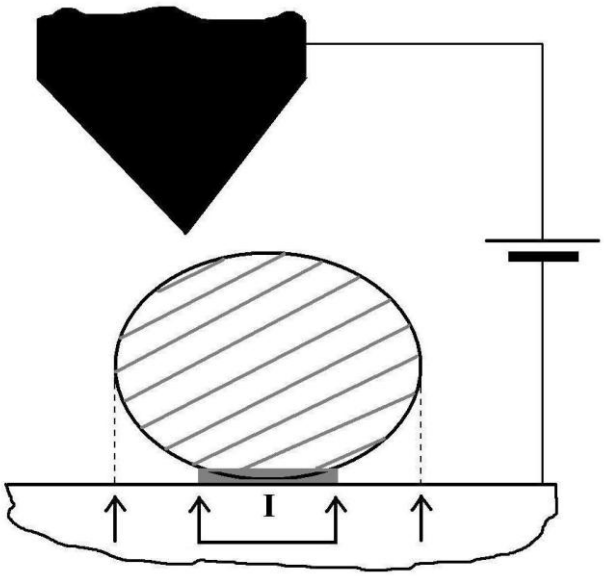


Рис. 4. Схематичне зображення скануючої тунельної мікроскопії вуглецевої нанотрубки. **I** інтерфейсний шар нанотрубка-мідь (позначений з'єднаними стрілками). Дві інші стрілки позначають положення крайової смуги.

Нами були проведені квантово-механічні чисельні розрахунки (5,0) вуглецевої нанотрубки з 40 атомами, аналогічно до розрахунків в роботі [8]. На рис.5 зображені просторові розподіли хвильових функцій верхнього заселеного та

нижнього незаселеного молекулярних рівнів даної нанотрубки Як видно з рисунка просторовий розподіл хвильової функції відображає симетрію нанотрубки (має дві площини симетрії).

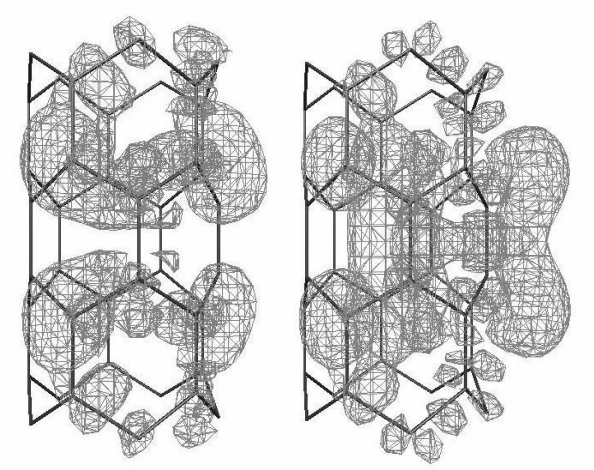


Рис. 5. Квантовомеханічні розрахунки хвильових функцій верхнього заселеного (зліва) та нижнього незаселеного молекулярних рівнів (5,0) вуглецевої нанотрубки з 40 атомів. Значення модуля хвильової функції на побудованих ізоповерхнях- 0.035.

В той же час хвильові функції не локалізовані біля атомів як у випадку кристалічної гратки з трансляційною симетрією. Це також може пояснювати деяку «розмитість» інтерфейсної зони **I** на рис.3

Скануюча тунельна мікроскопія напівпровідникових вуглецевих нанотрубок виявила суттєві особливості структури контакту нанотрубка- металева підкладка. По-перше, це наявність інтерфейсного шару нанотрубка-метал з хвильовими функціями змішаного квантового стану, які відображають симетрію нанотрубки. Дані спектральної еліпсометрії, які вказують на наявність електронних станів в спектральному діапазоні 1.2 та 4еВ добре корелюють з експериментальними результатами. Так, можливі міжзонні переходи в нанотрубці приводять до втрати енергії електрона провідності і, як наслідок, до зменшення просторової роздільної здатності вимірів, пов’язаної зі збільшенням довжини хвилі тунельованих електронів. Відсутність різкого зостання оптичної провідності в ближній інфрачервоній області спектру на рис.1 вказує [9] на переважно напівпровідниковий тип провідності в досліджуваних нанотрубках. Це також підтверджується проведеними вимірами СТМ. Наявність крайового артефакту, який пов'язаний з проходженням кінця голки при СТМ вимірах в області геометричної границі напівпровідникової вуглецевої нанотрубки, є наслідком хвильової природи електронів і можливим проявом дифракційних ефектів при цьому. Як висновок, дослідження СТМ та спектрально-еліпсометричні виміри дозволяють характеризувати не тільки просторову будову нанотрубки а також і її тип провідності.

Список використаних джерел.

1. *Peter J. F. Harris* Carbon Nanotubes and Related Structures: New Materials for the Twenty first Century.. –Cambridge: University Press, -2001.

2. *Barboza A. P. M., Chacham H., and Neves B. R. A.* Universal Response of Single-Wall Carbon Nanotubes to Radial Compression // Physical Review Letters. -2009. -102, -025501.

3. *Stadermann M., Papadakis S. J., Falvo M. R., Fu Q., Liu J., Fridman Y., Boland J. J., Superfine R., and Washburn S.* Exponential decay of local conductance in single-wall carbon nanotubes // Physical Review.. -2005. -B 72. -245406.

4. http://kemerovo.flagma.ru

5. *Hagen A. and Hertel T.* Quantitative Analysis of Optical Spectra from Individual Single-Wall Carbon Nanotubes // Nano Letters. -2003. -vol. 3. -No. 3. -P.383-388.

6. *Rozouvan K.P., Rozouvan S.G., Shaykevich I.A.* Scanning tunneling microscopy of dye thin films // Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series: Physics & Mathematics, -2012, -N1, P.359-364.

7. *Hartschuh A., Pedrosa H. N., Peterson J., Huang L., Anger P., Qian H., Meixner A. J., Steiner M., Novotny L., and Krauss T. D.* Single Carbon Nanotube Optical Spectroscopy // ChemPhysChem. -2005. -6, -P.1–6.

8. *Rozouvan K.P., Rozouvan S.G., Shaykevich I.A.* Calculation of laser dye optical transition energy // Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series: Physics & Mathematics, -2009, -N1, P.275 -280.

9. *Sokolov A.V.* Optical properties of metals. -Moscow: Physics & Mathematics Publishing. -1961. -464 p. (in Russian)

Надійшла до редколегії 16.01.14

УДК 535.3: 535.016

Стащук В.С.[1], д.ф.-м.н., проф.,
Стукаленко В.В.[2], к.ф.-м.н., м.н.с.
Полянська О.П.[3], інж.

Моделювання оптичних властивостей системи плівка діелектрика-метал

На основі розробленої двошарової моделі розраховано дисперсію коефіцієнта відбивання в широкій області спектру для системи діелектрик-перехідний шар-основа. Визначено оптичні і геометричні характеристики перехідного шару системи оксид алюмінію-мідь. Розраховані залежності задовільно узгоджуються з отриманими нами експериментальними даними.

Ключові слова: *двошарова модель, оксид алюмінію, оптичні сталі, коефіцієнт відбивання.*

[1,2,3]Київський національний університет імені Тараса Шевченка,03680, м. Київ, пр-т. Глушкова 4д,
e-mail: [2]stu@univ.kiev.ua

Stashchuk V.S.[1], Dr. Sci., Prof.,
Stukalenko V.V. [2], PhD., Sci. Res.
Polianska O.P. [3], Eng.,

Modeling of the optical properties of the dielectric's film-metal system

The reflection coefficient's dispersion in wide spectrum range was calculated for dielectric-transition layer-substrate system using two layer model. Optical and geometric characteristics of aluminum oxide-copper system's transition layer were determined. It was determined a good agreement between calculated and measured data.

Key Words: *two layer model, thin film, aluminum oxide, optical constants, reflection coefficient.*

[1,2,3]Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03680, Kyiv, Glushkova st., 4d,
e-mail: [2]stu@univ.kiev.ua

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Макарець М. В.

Вступ

На поверхню металевих дзеркал, які повинні мати високу променеву стійкість, високу механічну міцність та твердість, наносять плівку діелектрика [1]. Значний інтерес становить з'ясування впливу плівки на дисперсію коефіцієнта відбивання $R(\lambda)$ системи: плівка діелектрика-металева основа [2,3].

При моделюванні властивостей таких систем, зазвичай використовуються відомі залежності коефіцієнта відбивання від оптичних сталих плівки і металу. Як відомо [4], поширення світла через шаруваті системи можна представляти в матричній формі.

В загальному випадку амплітудний коефіцієнт відбивання шаруватого середовища, згідно [4], пов'язаний з елементами характеристичної матриці M_x, яка характеризує поширення світла через середовище, визначається співвідношенням:

$$r = \frac{(m_{11} + m_{12}p_{oc})p_c - (m_{21} + m_{22}p_{oc})}{(m_{11} + m_{12}p_{oc})p_c + (m_{21} + m_{22}p_{oc})}, \qquad (1)$$

де m_{ij} елементи матриці M_x, $p_s = n_s \cos\theta$, s – індекс, що характеризує, відповідно, *c* - середовище з якого падає світло, *ос* - основу, на яку нанесено покриття, n – показник заломлення, θ - кут, під яким падає світло.

Для *одношарової* системи діелектрик – масивний метал, елементи характеристичної матриці є дійсними величинами і розрахунок r не викликає труднощів [5].

Двошарова модель

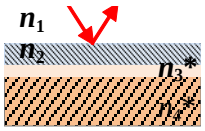


Рис. 1.

Задача ускладнюється, якщо врахувати, що між шарами діелектрика і металу утворюється перехідний шар, що складається частково із діелектрика, а частково із металу (рис. 1). Оптичні властивості цього шару є невідомими, показник заломлення є комплексною величиною.

Нами була створена програма для моделювання оптичних характеристик двошарової системи діелектрик-перехідний шар-основа. Вважалося, що система складається із плівки діелектрика з показником заломлення n_2 і тонкого перехідного шару з комплексним показником заломлення $n_3^* = n_3 + i\,k_3$. Характеристичні матриці цих плівок M_2 та M_3 (індекс 2 відноситься до плівки діелектрика, індекс 3 – до перехідного шару), в загальному випадку дорівнюють:

© Стащук В.С., Стукаленко В.В., Полянська О.П., 2014

$$M_2 = \begin{matrix} \cos(k_0 n_2 d_2 \cos\theta) & -(i/p_2)\sin(k_0 n_2 d_2 \cos\theta) \\ -ip_2 \sin(k_0 n_2 d_2 \cos\theta) & \cos(k_0 n_2 d_2 \cos\theta) \end{matrix}$$

$$M_3 = \begin{matrix} \cos(k_0 n_3^* d_3 \cos\theta) & -(i/p_3)\sin(k_0 n_3^* d_3 \cos\theta) \\ -ip_3 \sin(k_0 n_3^* d_3 \cos\theta) & \cos(k_0 n_3^* d_3 \cos\theta) \end{matrix}$$

де k_0 – хвильовий вектор, d – товщина плівки (шару), $p = n \cos\theta$, θ - кут, під яким падає світло.

Результуючу матрицю системи плівка-перехідний шар знаходимо як векторний добуток вказаних матриць $M_r = M_2 \times M_3$. Підставивши у формулу (1) відповідні елементи цієї матриці, можна розрахувати коефіцієнт відбивання такої системи. У нашому випадку підкладинкою служить метал, а це означає, що показник заломлення є комплексною величиною і відповідні елементи характеристичної матриці теж є комплексними величинами. Апробація моделі здійснювалася шляхом порівняння розрахованих нами даних і отриманих в літературі [4].

Постає питання: якими вибрати величини оптичних і геометричних характеристик перехідного шару (ПШ)? Товщина ПШ варіювалась в межах від кількох нм до 10 % від товщини нанесеної плівки оксиду. Окремо розглядалися випадки, коли сума товщин плівки оксиду і ПШ дорівнювала експериментально в іміряній товщині конкретного зразка. Показник заломлення n_3 і коефіцієнт поглинання k_3 ПШ визначаємо за формулами: $n_3 = Xn_2 + Yn_4$, $k_3 = Zk_4$, де коефіцієнти X, Y, Z змінюються в широких межах, виходячи з фізичної доцільності, індекс 4 стосується величин, які характеризують основу. Створена нами програма дозволяє змінювати характеристики кожного із шарів, а також основи (металу) в широких межах. Для порівняння розрахованих і експериментальних даних обчислювався енергетичний коефіцієнт відбивання за формулою: $R = |r|^2$.

Результати та їх обговорення

На рис. 2 показані криві дисперсії коефіцієнта відбивання при варіації товщини d_3 перехідного шару, показника заломлення n_3, коефіцієнта поглинання k_3. Як видно з рис. 2 *а*, збільшення товщини перехідного шару веде до "просідання кривої" як цілого, без зміни положення екстремумів в шкалі довжин хвиль (відповідні значення величин параметрів вказані на рис. 2). Складна поведінка ходу дисперсії R(λ) має місце при зміні n_3 в широких межах (X=0÷1, У = 1÷0). Якщо X + У > 1, то крива R(λ) опускається, особливо великою стає різниця в довгохвильовій (ДХ) області. В короткохвильовій (КХ) області при X + У < 1, екстремуми R(λ) зміщуються вгору порівняно із випадком без врахування ПШ (рис. 2.*б*). Зміна поглинання ПШ (параметра Z) веде до зміщення екстремумів в КХ-області і мало позначається на ході кривих R(λ) в ДХ-області. (рис. 2 *в*).

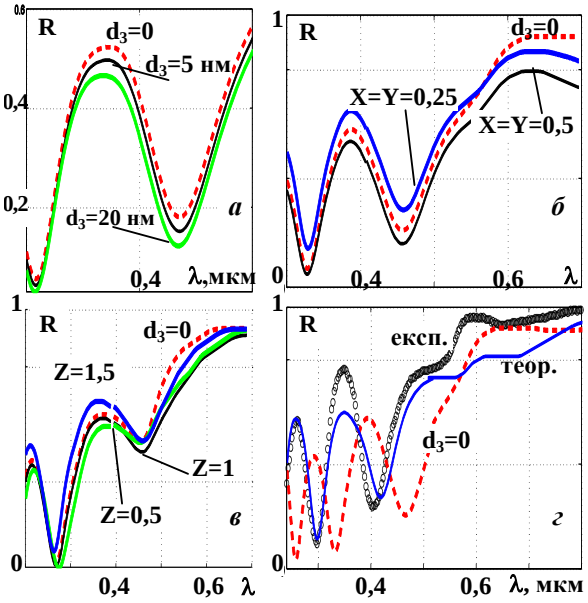


Рис. 2. Тенденції зміни ходу спектральної залежності коефіцієнта відбивання двошарової системи оксид алюмінію-мідь при варіаціях характеристик перехідного шару: d_3 (*а*), n_3 (*б*), k_3 (*в*), варіація всіх параметрів (*г*). Пунктирна кр. на всіх рис. – розрахунок без ПШ (d_3=0).

Таким чином, описаним способом при варіації характеристик перехідного шару та товщини плівки можна досягти задовільного узгодження розрахованих та експериментальних результатів ходу дисперсії R в широкій області спектру і отримати дані про характеристики як шару оксиду, так і перехідного шару.

Список використаних джерел

1. *Poperenlo L.V., Stashchuk V.S.* The basis of physics' optotechnique materials – K: VPC «Kyiv Univ», 2011 – 686 p. (in Ukrainian).
2. *Andreev S.V., Putilin E.S.* Determining the optical constants of thin metallic films while they are being deposited in vacuum//Journal of Optical Technology. –2008. – **75**, № 4. – C.78-81. (in Russian)
3. *Shamala K.S., Murthy L.C.S. and K Narasimha Rao* Studies on optical and dielectric properties of Al_2O_3 thin films prepared by electron beam evaporation and spray pyrolysis method//Materials Science and Engineering**.** – 2004**. – B106. –** P. 269-274.
4. *Born M., Wolf E.* Principles of Optics (4th.ed.).-Pergamon Press.-1970.-856 p.
5. *Stashchuk V.S., Stukalenko V.V., Filipov Ya.V., Statsenko A.O., Polianska O.P., Chernukha Ie.O.* Optical properties of the aluminium oxide film - copper system // Visn., Ser. Phys.-Mat. Nauky, Kyiv Univ. im. Tarasa Shevchenka. – 2012. – N 3. – P. 363-367. (in Ukrainian).

Надійшла до редколегії 16.01,2014

УДК 669.017:669.15-194:621.785.9:661.665

Танцюра І.В.[1], к.ф.-м.н.

Особливості формування структури поверхневих шарів сплаву АК12 після лазерного легування порошками міді та заліза

Досліджено структурно-фазовий стан поверхневих шарів евтектичного силуміну після лазерного легування сумішшю порошків міді та заліза в атомарному співвідношенні 2:1, відповідно. Встановлено формування дисперсної гетерогенної структури в зоні лазерного легування, однією із складових якої є квазікристалічна ψ-фаза, що призводе до значного зростання мікротвердості.

Ключові слова: *ікосаедрична фаза, лазерне легування, гетерогенна структура, силумін, мікротвердість.*

[1]Запорізький національний університет
69600, м. Запоріжжя, вул. Жуковського, 66,
e-mail: tivuk@yandex.ru

I.V.Tantsura[1], PhD.

The structure formation singularity of the surface layers of AK12 alloy after laser alloying by copper and iron powders.

Structurally-phase condition of surface layers of eutectic silumina after laser alloying process by mix of copper and iron powders in the atomic ratio of two to one has been investigated. The formation of dispersed heterogeneous structure in the zone of laser alloying was established, one of the structure components is quasi-crystalline ψ-phase, that resulting in a significant increase of microhardness.

Key words: *icosahedral phase, laser alloying, heterogeneous structure, silumin, microhardness.*

[1]Zaporizhzhya National University,
69600, Zaporizhzhya, Zhukovsky str., 66,
e-mail: tivuk@yandex.ru

Статтю представив член-кор. НАН України, д.ф.-м.н., проф. Макара В.А

Вступ

Поєднання в алюмінії та сплавах на його основі таких фізичних властивостей, як мала питома вага та відносно висока міцність, визначило їх широке використання в промисловості. Однак низька твердість та зносостійкість поверхні сплавів є суттєвим недоліком, який обмежує їх впровадження при виготовленні деталей, стійких до механічного зношування.

Для зміцнення легованих алюмінієвих сплавів використовують традиційний метод – термічну обробку. Проте, згідно з [1], властивості двокомпонентних силумінів практично не змінюються при такому виді обробки. Крім того, до недоліків означеного вище методу можна віднести трудомісткість процесу та підбір індивідуальних режимів для кожного типу сплаву.

Альтернативним видом підвищення фізико-механічних властивостей Al-Si сплавів є лазерне легування [2]. Необхідно відзначити, що механічні властивості поверхневих шарів, отриманих в результаті лазерного легування, залежать не лише від технічних характеристик та виду лазерного випромінювання (імпульсного або неперервного), а й від властивостей самих елементів, що входять до складу легуючої речовини. Тому перспективним може бути застосування таких елементів, які в поєднанні з алюмінієм можуть формувати в поверхневих шарах квазікристалічні фази з високими механічними властивостями.

Відомо, що квазікристалічні фази можуть формуватися в системах Al-Ni-Co, Al-Cu-Co, Al-Ni-Fe (декагональна симетрія) [3-5], Al-Cu-Fe (ікосаедрична симетрія) [6, 7], тощо.

Поверхневі шари, що вміщують у собі квазікристалічні фази, характеризуються високою міцністю, антикорозійною здатністю, високим питомим електроопором, низькою теплопровідністю [8], стабільністю фізико-механічних властивостей [9]. Висока твердість таких поверхонь у поєднанні з низьким коефіцієнтом тертя [10] надає можливість застосування їх у вузлах машин з високими вимогами до зносостійкості.

Існує ряд методів, у яких квазікристалічну фазу отримають за допомогою лазерного легування, і які умовно можна поділити на дві

© І. В. Танцюра, 2014

групи. До першої групи можна віднести метод, при якому на поверхню наносять усі елементи, що входять до складу квазікристалічної фази [11], а до другої – коли на поверхню матеріалу наносять лише декілька компонентів, при умові, що один з компонентів є матричним [12].

В [13] показана можливість створення покриттів, що вміщують у собі квазікристалічну фазу, при легуванні технічного алюмінію міддю та залізом. Проте такий алюміній, на відміну від силумінів, не знаходить широкого застосування. Тому метою роботи було встановлення особливостей структури поверхневих шарів евтектичного сплаву АК12 при лазерному легуванні його порошками міді та заліза.

Приготування зразків та методика експерименту

За об'єкт дослідження обирали сплав АК12 з вмістом кремнію 12,5 мас.%. На зразки у формі паралелепіпедів з розмірами $1{,}5\times1\times1\times10^{-2}$м наносили суміш порошків міді та заліза у атомарному співвідношенні 2:1. Розмір фракції в суміші для легування не перевищував 45 мкм. Легуючі елементи наносилися на поверхню зразків за допомогою клею БФ-6 у розчині ацетону.

Лазерну обробку виконували на промисловій установці КВАНТ-12 ($\lambda = 1{,}079$ мкм, $\tau = 4$ мс) з густиною потужності 800 МВт/м^2. Товщина легуючої суміші варіювалась в межах від 50 до 200 мкм.

Контроль структурно-фазового стану зразків після лазерного легування здійснювали за допомогою рентгенівського фазового аналізу (ДРОН-3, Cu-K_α – випромінювання), металографічного аналізу (ЕРІТІР-2) та растрової електронної мікроскопії (JSM 6360LA).

Хімічний аналіз виконували безеталонним методом з урахуванням коефіцієнтів відбивання електронів зонду, поглинання характеристичного рентгенівського випромінювання та флуоресценції. Точність визначення концентрації елементів складала 0,5 ат. %.

Вимірювання мікротвердості проводили за допомогою мікротвердоміру ПМТ-3 з робочим навантаженням 20 г.

Експериментальні результати та їх обговорення

Згідно з даними рентгенівського фазового аналізу при лазерному легуванні з різними товщинами обмазки фазовий склад зони лазерного легування був ідентичним. Структура була гетерофазною і являла собою суміш ікосаедричної ψ-фази, тетрагональної Al_2Cu з параметрами гратки a = 0,6015 нм та c = 0,4881 нм, ромбоедричної $Al_{13}Fe$ та α-фази (ГЦК-твердого розчину на основі алюмінію) (рис. 1). Особливістю дифракційних картини при лазерному легуванні з різною товщиною обмазки був перерозподіл інтенсивностей дифракційних максимумів від градок моноклинної та

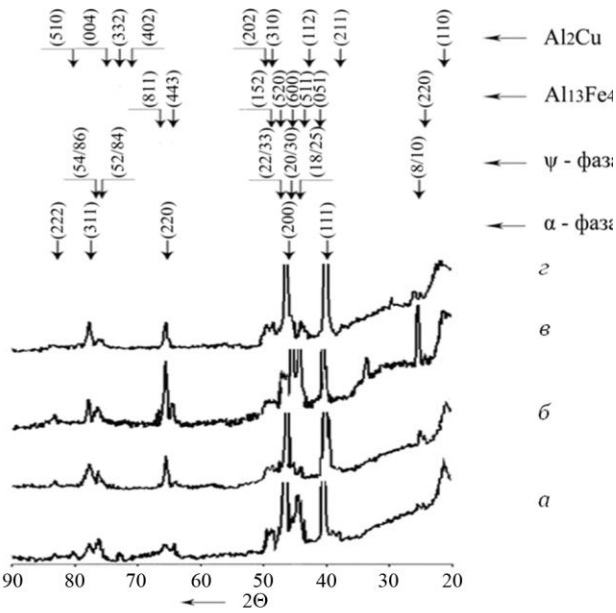


Рис. 1. Дифрактограми від поверхневих шарів сплаву АК12 після лазерного легування сумішшю порошків міді та залізі з товщиною обмазки 50 мкм (а), 100 мкм (б), 150 мкм (в), 200 мкм (г).

квазікристалічної фаз, що свідчило про зміну їх кількості в зоні лазерного легування при різній товщині обмазки.

Необхідно відзначити, що після лазерної обробки дифракційні максимуми від гратки кремнію не фіксували, що може буги пов'язано по-перше, з формуванням пересиченого твердого розчину на основі алюмінію [14], про що свідчило зменшення параметра гратки ГЦК фази, а по-друге – з можливістю розчинення кремнію у ψ – фазі [11].

Мікротвердість вихідного сплаву складала 0,2 ГПа. Лазерне легування внаслідок формування дисперсної гетерофазної структури викликало значне підвищення H_μ в зоні лазерного легування (1,1; 1,3; 1 ГПа при лазерному легуванні з товщиною обмазки 50, 100, 150 мкм, відповідно.) При цьому зростання значень мікротвердості корелювало зі зростанням інтенсивності дифракційних максимумів від ψ-фази.

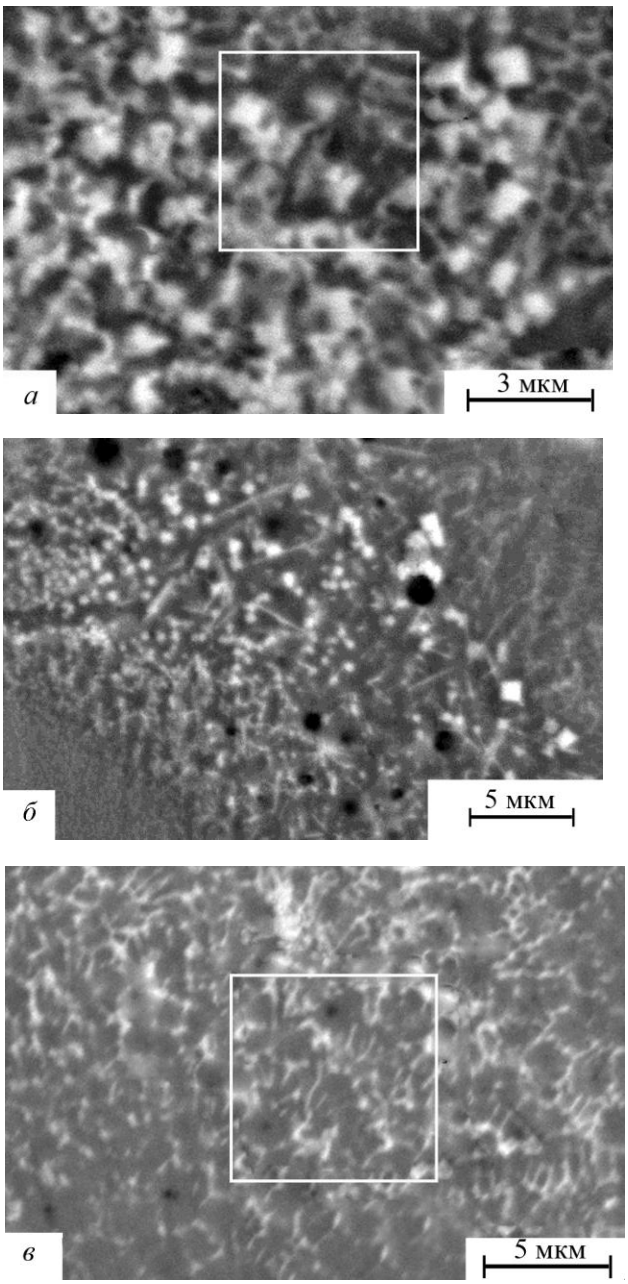


Рис. 2. Структура приповерхневих шарів зони лазерного легування з товщиною обмазки 50 мкм (*а*), 100 мкм (*б*), 150 мкм (*в*).

Згідно з даними растрової електронної мікроскопії в приповерхневих шарах зафіксовано нерівномірний розподіл фази з кубічною та голчастою формами росту (рис.2); в нижній частини зони лазерного легування структурні складові були більш рівновісними (рис. 3). Таке формування структури в зоні лазерного легування, може бути обумовленим нерівноважністю процесу кристалізації під час лазерного легування.

З метою якісного встановлення стехіометрії фаз в зоні лазерного легування було

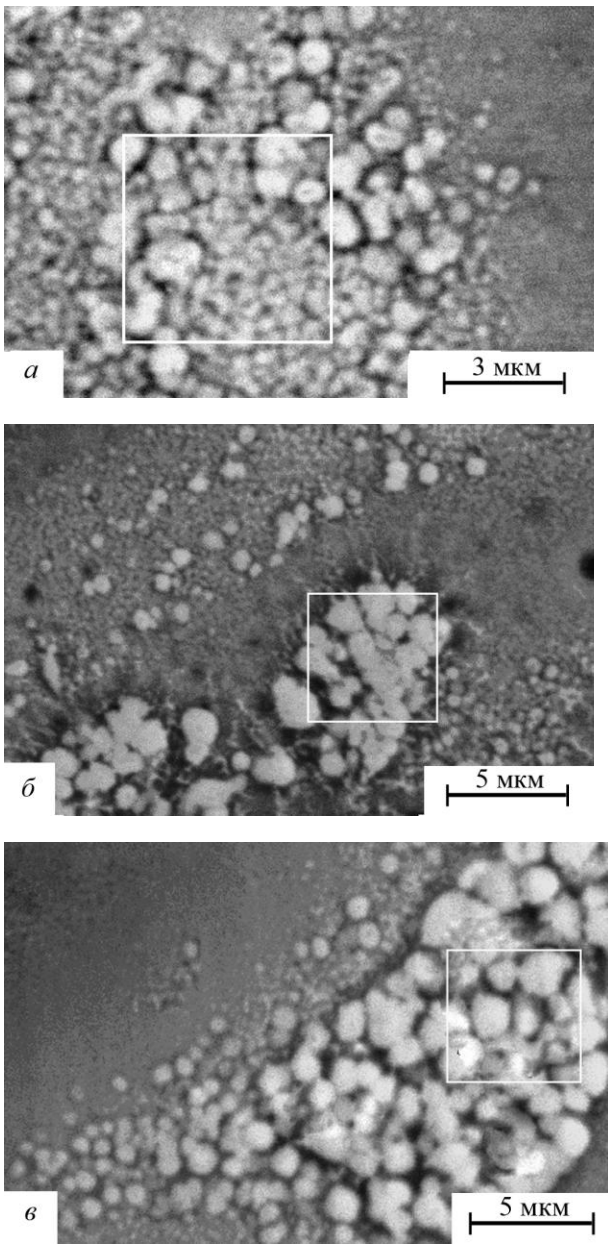


Рис. 3. Структура нижньої частини зони лазерного легування з товщиною обмазки 50 мкм (*а*), 100 мкм (*б*), 150 мкм (*в*).

проведено рентгеноспектральний мікроаналіз.

Проте отримані дані не дали можливості однозначної ідентифікації структурних складових, оскільки глибина прошарку, який аналізувався (~ 2,6 мкм), перевищувала розміри структурних складових.

Хімічний склад означених вище ділянок наведено в таблицях 1 та 2. Дані мікроаналізу лише дозволили констатувати, що нижня частина зони лазерного легування була збагаченою атомами заліза, що згідно з [12] може обумовлюватися значною різницею температур

Таблиця 1

Хімічний склад, виділених ділянок на рис. 2

Товщина легуючої речовини, мкм	Вміст елементів, ат.%			
	Al	Si	Fe	Cu
50	80,7	11,6	6,8	0,9
100	76,8	10,7	6,3	6,2
150	78,6	14	3,4	4

Таблиця 2

Хімічний склад, виділених ділянок на рис. 3

Товщина легуючої речовини, мкм	Вміст елементів, ат.%			
	Al	Si	Fe	Cu
50	73	11	13,7	2,3
100	78	12,2	6,5	3,3
150	71,4	10,2	14,6	3,8

плавлення міді та заліза.

Висновки

Лазерне легування евтектичного сплаву системи Al-Si сумішшю порошків міді та заліза внаслідок надвисоких швидкостей кристалізації розплаву призводить до формування гетерофазної структури, яка містить у собі квазікристалічну ψ – фазу. Формування означеної структури викликає 5-кратне зростання мікротвердості в зоні лазерного легування сплаву АК12.

Список використаних джерел

1. *Kolachev B. A., Gabidullin R. M., Piguz U. V.* The technology of heat treatment of non-ferrous metals and alloys. – Moscow: Metallurgy, 1992. – 480 p. (in Russian).
2. *Lahtin U. M., Kogan Y.D.* Surface alloying of metals and alloys by laser alloying. – Moscow: Mechanical Engineering, 1990. – 54 p. (in Russian).
3. *Gille P., Meisterernts G, Faber N.* Inclined net plane faceting observed at Czochralski growth of decagonal AlCoNi quasicrystals // Journal of Crystal Growth. –2005. –V. 275. – P. 224-231.
4. *Yokosawa T., Saitoh K., Tanaka M., Tsai A.* Structural variations in local areas of an Al Ni Fe decagonal quasicrystal and the interpretation by the 1-nm column-pair scheme // Journal of Alloys and Compounds.–2002. – V. 342. –P. 169-173.
5. *Murthy G. V. S., Ray A. K., Minz R. K., Mukhopadhyay N. K.* Microhardness and fracture toughness studies of decagonal quasicrystal in Al-Cu-Co system // Journal of materials science letters. – 1999. – V. 18. P. 255-258.
6. *Biswas K., Galun R., Mordike B. L., Chattopadhyay K.* Laser cladding of quasicrystal forming Al–Cu–Fe on aluminum // Journal of Non-Crystalline Solids. – 2004. – V. 334-335. – P. 517-523.
7. *Parshin P. P, Zemlyanov M. G [et al.]* Nuclear dynamics of the icosahedral quasicrystal $Al_{0,62}Cu_{0,255}Fe_{0,125}$ // Solid State Physics. – 2004. – V. 46. – Is. 3. –P. 510-514. (in Russian).
8. *Dubois J.–M.* New prospects from potential applications of quasicrystalline materials // Materials Science and Engineering. – 2000. – V. 249–296. – P. 4-9.
9. *Kaloshkin S. D., Tcherdyntsev V. V., Laptev A. I. [et al.]* Structure and mechanical properties of mechanically alloyed Al/Al-Cu-Fe composites // Journal of materials science. – 2004. – N 39.–P. 5399-5402.
10. *Borisov U. S., Borisova A. L. [et al.]* Gas-thermal coatings containing quasicrystall phase, properties and applications // Physics and Chemistry of Solids. – 2005. – V. 6. – N 1. – P. 124-136. (in Russian).
11. *Biswas K., Chattopadhyay K., Galun R. [et al.]* Laser cladding of quasi-crystal-forming Al-Cu-Fe-Bi on an Al-Si alloy substrate // Metallurgical and Materials Transactions A. – 2005.– V. 36, Is. 7. – P. 1947-1964.
12. *Girzhon V. V., Smolyakov A. V., Tantsyura I. V.* Structural State of Surface Layers of Aluminum after Laser Alloying Using a Mixture of Copper and Iron Powders // The Physics of Metals and Metallography. – 2008.– V. 106.– N 4, P. 384-388.
13. *Girzhon V.V., Smolyakov O.V., Tantsura I.V.* Formation quasicrystalline phase in surface layers of technical aluminium after laser alloying process // Bulletin of Kyiv University.– Series: Physics & Mathematics. – 2006. – N 4.– P. 398-405. (in Ukraine).
14. *Girzhon V.V., Tantsiura I. V.* Quasieutectic structure formation in AK9 and AK12 alloys after pulse laser treatment metal // Physics and advanced technologies. – 2006. – V. 28. – N 9. – P. 1249-1259.

Надійшла до редколегії 05.10.13

УДК 538.94

Чумаченко А.В., к.ф.-м.н., асист.

Температурна залежність надплинної компоненти та спектр елементарних збуджень

У рамках запропонованої самоузгодженої мікроскопічної моделі надплинної нерелятивістської Бозе-рідини ^{4}He з подавленим за рахунок багаточастинкових ефектів одночастинковим конденсатом та інтенсивним парним когерентним конденсатом наведено розрахунок спектру елементарних збуджень. Цей результат та розраховані в роботі температурні поправки до швидкостей першого та другого звуків використано для отримання температурної залежності густини конденсату.

Ключові слова: *надплинність, мікроскопічна теорія, квазічастинковий спектр*

[1]Київський національний університет імені Тараса Шевченка,03680, м. Київ, пр-т. Глушкова 4д, e-mail: chumachenko.a@gmail.com

A.V. Chumachenko[1], PhD

Temterature dependence of superfluid component and elementary excitation spectrum

In frame of proposed selfconsistent microscopical model of the superfluid non-relativistic Bose liquid ^{4}He with suppressed due to many-particle effects single-particle condensate and intensive pair coherent condensate the ab initio calculation of the quasiparticle spectrum was demonstrated. This result together with temperature corrections for the first and second speeds of sound calculated in this paper where used to obtain temperature dependence of the condensate density.

Key Words: *superfluidity, microscopical theory, quasiparticle spectrum.*

[1]Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03680, Kyiv, Glushkova st., 4d, e-mail: chumachenko.a@gmail.com

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Єжов С.М.

In series of papers renormalized perturbation theory was used, it was built on combined hydrodynamic variables with analytic normal and anomalous self-energy functions and a nonzero SF order parameter, proportional to the density of the SF component. On the base of this theory a closed system of nonlinear integral equations for the normal and anomalous self-energy parts were obtained. Unlike in the Bogoliubov theory of a quasi-ideal Bose gas, were small parameter is the ratio of the number of supracondensate excitations to the number of particles in an intensive BEC, the ratio of the BEC density to the total particle density of the Bose liquid was used as a small parameter of the model. Quasiparticle spectrum, obtained within this approach, is in a good agreement with experimental spectrum of elementary excitations in superfluid ^{4}He. And, as it was shown, the roton minimum in the spectrum is associated with negative minimum of the Fourier component of the pair interaction potential.

This article holds a brief discussion on current status in the microscopic theory of superfluidity of the non-relativistic Bose liquid. In the basis of the theory, which describes superfluidity and superconductivity phenomena, lays an appearance, as additional complex macroscopic order parameter, of the wave function of bosons or fermionic Cooper pairs, which stays in the same quantum state, in other words - appearance of the coherent condensate is the foundation of the superfluid and superconductivity phenomena. In Bose-systems such condensate appears because of direct accumulation of bosons in the ground state, but in the Fermi-systems due to the formation of the Cooper pairs of fermions.

Great amount of experimental and theoretical investigations performed over last 80 years allowed to achieve a high level of understanding of the properties of non-relativistic superfluid state in a Bose liquid ^{4}He. Most important achievements in the theory of superfluidity reached at a phenomenological level, in particular, for the description of the properties of superfluid ^{4}He (so-called Ne-II) on the basis of two-fluid Landau hydrodynamics, according to which the superfluid helium can be divided into two components – the superfluid component with density ρ_s and velocity v_s, that describes the non-dissipative motion of

© A.V. Chumachenko, 2014

quantum fluid and normal component with density ρ_n and velocity v_n, which describes dissipative flow of the gas of excitations (phonons and rotons). Numerical calculations of thermal conductivity and viscosity of superfluid helium, obtained according to this theory, are in good agreement with experiment. One of the greatest achievements of the phenomenological approach to the phenomenon of superfluidity is that Landau, basing on the temperature dependence of heat capacity of superfluid 4He on the basis of his superfluidity criteria for the quantum liquids predicted the form of the superfluid helium elementary excitation spectrum with a linear (phonon) dispersion law $E(p) \approx pc$ for the small momentum $p \to 0$ and so called "roton" minimum for $p \neq 0$. Later this form of the spectrum was brilliantly confirmed in the experiments for the scattering of the slow neutrons in the liquid helium.

But in the frame of phenomenological theory of superfluidity exact calculation (from first principles) of the elementary excitations spectrum in superfluid Bose liquid with strong interaction between particles may not be possible. This is the task for the microscopic theory of superfluidity of Bose liquids. Theoretical study of the properties of superfluid Bose liquid ^{4}He at the microscopic level hampered by a number of fundamental problems associated with the strong interaction between bosons and complex quantum structure of effective coherent condensate, which is the main part of the superfluid component, unlike of almost ideal Bose gas, where this role is played by single-particle Bose Einstein condensate (BEC).

The first microscopic theory of superfluidity, based on a model of weakly non-ideal Bose gas, was proposed by N.N. Bogoliubov [1] more than 50 years ago. Bogoliubov theory has been improved further and in the most of these improved models of superfluidity by the selection of variational parameters one can achieve a good agreement between theoretical and experimental spectrum of elementary excitations in superfluid ^{4}He for a certain range of the momentum. But such agreement is more coincidental and is not true, because, as it was shown in the later experimental studies, a part of single-particle BEC in the superfluid ^{4}He is small and ranges from 2 to 10 percent, which is the opposite to a condition of weak non-ideality of the Bose-gas in the Bogoliubov theory. Therefore in order to give an adequate microscopic description of the Bose-liquid superfluid properties the most promising is the Greens function method, which for the first time was used in the papers of S.T. Beliaev and widely developed in the future.

Analysis of the modern experimental and theoretical works testifies to the fact that the study of unique phenomena of superfluidity of helium ^{4}He is far from the end. There are number of contradictions between theory and experiment, which are related to both the hydrodynamics of superfluid Bose liquid ^{4}He, and the form of quasi-particle spectra, which have not yet satisfactory explanation in frame of the microscopic theory (for more details see [2]).

Firstly, experiments on inelastic scattering of slow neutrons in liquid helium, which confirmed the form of proposed by Landau curve for the spectrum of elementary excitations, indicated a weak temperature dependence of the spectrum, as the consequence the size of the "roton" gap $\Delta_r = 8.65K$ at minimum of $E(p)$, that determines the critical velocity of normal fluid, changes only to the value of $\Delta_r = 5.24K$ near the temperature of the phase transition from superfluid to normal state, i.e. the so-called λ-point $T_\lambda = 2.17K$. At the same time, for the spectrum of quasiparticles in the electronic Fermi liquid in superconductors superfluidity criterion holds for the phase below critical temperature T_c, when there is a finite energy gap in the spectrum, and fail in the normal state at $T > T_c$, when gap in the spectrum becomes zero.

Moreover, obtaining of the quasiparticle spectrum from the "first principles" also fails. Using the latest calculation methods such as Monte-Carlo it is possible to obtain a good agreement between calculated and experimental data almost for all range of momentum, but remains unclear the physical reason for the roton minimum in the quasiparticle spectrum of the Bose-liquid.

Secondly, in the superfluid Bose-liquid, unlike the Bose gas, single-particle Bose-condensate (SPC) due to strong interaction between bosons must be significantly impoverished by the particles of zero energy and momentum (i.e. "depleted" condensate) even at $T = 0$ temperature. Analysis of the experimental data from neutron scattering [3] and quantum evaporation of the helium atoms [4] shows that superfluid ^{4}He at low temperature in the Bose-condensate state contain less than 10% of the full density of liquid ^{4}He, whereas density of the superfluid component at the temperatures $T < 1K$, according to classical measurements of the viscosity of superfluid helium [5], almost equal to the liquid helium density. This means that against widespread conviction superfluidity of the Bose-liquid ^{4}He cannot be connected only with Bose-condensation

phenomena. Microscopical structure of the superfluid component, as it was for the first time shown in [6], should have more complicated quantum nature in the form of effective coherent condensate.

Our approach, based on the microscopic model of superfluidity of the Bose-liquid with depleted BEC and intensive pair coherent condensate (PCC), proposed by Pashitskij E.A. and Nepomnyashij Yu.A [6]. Such PCC may occur at sufficiently high "effective attraction" between bosons in some ranges of momentum due to the effects of the quantum diffraction of Bosons in the process of their interaction, and is similar to attraction between fermions near the Fermi surface. The ratio of BEC density to the full density of the liquid was taken as a small parameter (i.e. $\rho_0/\rho << 1$), in contrast to the Bogoliubov [1] theory were small parameter is taken as ratio of the number of supra-condensate excitations to the number of particles in the intensive BEC. Due to a small BEC density it is possible to derive a closed self-consistent system of integral equations for the normal and anomalous self-energy parts by cutting an infinite series of perturbation theory and keeping only a first order terms by small parameter ρ_0/ρ:

$$\Sigma_{11}(\varepsilon, p) = n_0\Lambda(\varepsilon, p)V(\varepsilon, p) + n_1V(0) + \psi_{11}(\varepsilon, p),$$
$$\Sigma_{12}(\varepsilon, p) = n_0\Lambda(\varepsilon, p)V(\varepsilon, p) + \psi_{12}(\varepsilon, p),$$

here *V(p)* – the Fourier component of the inoculating two-particle interaction potential of bosons, $V(\varepsilon, p) = V(p)[1 - V(p)\Pi(\varepsilon, p)]^{-1}$ – the renormalized ("shielded") due to many-particle collective effects Fourier component of non-local interaction, $\Pi(\varepsilon, p)$ – bosonic polarization operator, $n_1 = n - n_0$ – the number of "supra-condensate" particles. Functions $\psi_{11}(\varepsilon, p)$ and $\psi_{12}(\varepsilon, p)$, taking into account poles of single-particle Green functions, are defined by the following expressions:

$$\psi_{11}(\varepsilon, p) = -1/2\int d^3k(2\pi)^{-3}\Gamma(\varepsilon, p, k, E(k)) \times$$
$$\times V(p-k, \varepsilon - E(k))\left[A(k, E(k))E^{-1}(k) - 1\right],$$
$$\psi_{12}(\varepsilon, p) = -1/2\int d^3k(2\pi)^{-3}\Gamma(\varepsilon, p, k, E(k))E^{-1}(k) \times$$
$$\times V(p-k, \varepsilon - E(k)) \times$$
$$\times\left[n_0\Lambda(k, E(k))V(k, E(k)) + \psi_{12}(k, E(k))\right],$$

here $\Gamma(\varepsilon, p, k, \omega)$ and $\Lambda(\varepsilon, p) = \Gamma(\varepsilon, p, 0, 0)$ – the vortex functions, which describes many-particle correlations; function $A(p, E(p))$ defined as

$$A(p, E(p)) = n_0\Lambda(p, E(p))V(p, E(p)) + p^2/2m +$$
$$+ \psi_{11}(p, E(p)) - \psi_{12}(0,0) + \psi_{11}(0,0),$$

and $E(p)$ – quasiparticle spectrum, which in our approximation have the following form

$$E(p) = \left(\begin{array}{l} A^2(p, E(p)) - \\ \left[n_0\Lambda(p, E(p)V(p, E(p)) + \psi_{12}(p, E(p))\right]^2 \end{array}\right)^{-1/2}$$
$$+ 1/2\left(\psi_{11}(p, E(p)) - \psi_{12}(p, E(p))\right).$$

From the last expression, because of analiticity of the $\psi(\varepsilon, p)$ functions follows the fact that quasiparticle spectrum is acoustic at $p \to 0$ and its structure at $p \neq 0$ is strongly dependent from the properties of the renormalised two-particle interaction between bosons. In case when BEC is absent ($n_0 = 0$) integral equation for the $\psi_{12}(\varepsilon, p)$ function became homogeneous and degenerate over the phase of the function. Thus it is similar to the momentum space Bethe-Goldstone integral equation for a pair of particles with zero binding energy, which has a nontrivial solution $\psi \neq 0$ only in case of attraction $V(p) < 0$ in a sufficiently wide region of values of the transmitted momentum *p*. Follow this analogy, function $\psi_{12}(\varepsilon, p)$ can be considered as order parameter for bosonic PCC, which describe condensation of bosonic pairs in the momentum space (identically to the Cooper condensate of the fermion pairs).

In this connection, pair interaction between bosons was chosen in the form of regularized repulsion potentials in models of "hard" and "semitransparent spheres", which Fourier components, due to diffraction of particles of one another, are oscillating and alternating functions of transmitted momentum *p*, and can be determined by the spherical Bessel functions of zero and first orders.

Many-particle collective effects in Bose liquid lead to a significant renormalization of the pair interaction, which determines the normal and anomalous self-energy parts (Fig. 1). An important feature of the renormalized interaction is that, as was shown in [7], in those areas of the phase volume (ε, p), were the real part of the bosonic polarization operator $\mathrm{Re}\Pi(p, \omega)$ is negative, repulsion become weaker (when $V(p) > 0$) and attraction effectively increased (when $V(p) < 0$) (see Fig. 1). The key point in the behavior of the renormalized (screened) potential $V(p, E(p))$, as it was shown by the numerical calculations in [8], is that for all values of momentum $p > 0$ the real part of the bosonic polarization operator is negative ($\mathrm{Re}\Pi(p, \omega) < 0$, upper corner of Fig. 1) if quasiparticle spectrum is stable with respect to decay on a pairs of quasiparticles.

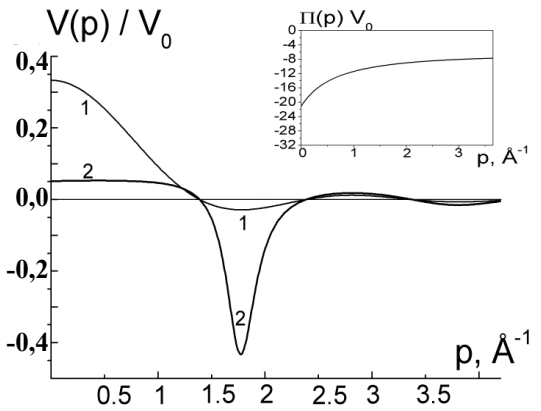


Fig. 1. Fourier components of the non-renormalized (curve 1) and renormalized (curve 2) interactions in the model of "semitransparent spheres". In the upper corner depicted the momentum dependence of the real part of the bosonic polarization operator.

In the numerical calculations [8], based on the Fourier-component of the "hard spheres" potential $V(p) = V_0 \sin(pa)/pa$, were used a simplified model of the renormalized potential in the form

$$V(p,\omega) = V_0 \sin(pa)/\big(pa + \alpha \sin(pa)\big),$$

here $\alpha = -V_0\Pi = const$, and Π – the value of the polarization operator on the mass surface $\omega = E(p)$ averaged over the momentum p, which was taken as negative constant value in case if quasiparticle spectrum not decay. Resulting spectrum qualitatively agrees with experimental spectrum E_{exp} in superfluid ^{4}He (Fig. 2), but numerical correspondence of the minimal and maximal values of quasiparticle energies are not satisfactory. In addition, calculated value of the speed of the first (hydrodynamical) sound c=2.08×10^4 cm/sec appeared to be lower than experimental value c=2.36×10^4 cm/sec, and total concentration of particles is higher – n=2.57×10^{22} cm^{-3}; the value of the BEC particle concentration is lower $n_0 = 3\%n$ then obtained from experiment.

Further calculations, carried in papers [9,10], show that oscillating pseudo-potential in the model of "semitransparent spheres"

$$V(p) = V_0\big(\sin(pa) - pa\cos(pa)\big)/(pa)^{-3}$$

is more appropriate than "hard sphere" potential both for the stability of the spectrum and its correspondence to the empirical spectrum in ^{4}He. In the "semitransparent spheres" model the explicit momentum dependence of the polarization operator $\Pi(p,\omega)$ is used.

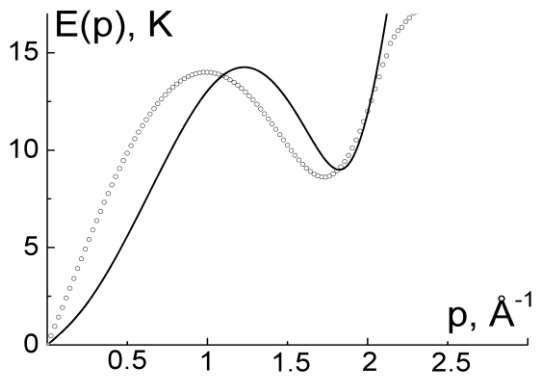


Fig. 2. Solid curve - spectrum obtained in the model of "hard spheres", dot curve - experimental data [11] - [14].

Iterative numerical calculations of the self-energy and bosonic polarization operator, the two-particle order parameter and the quasiparticle spectrum at $T = 0$ allowed to find conditions when theoretical spectrum $E(p)$ is in a good agreement with experimental spectrum of elementary excitations in ^{4}He. The roton minimum of the quasiparticle spectrum $E(p)$ in the Bose liquid, as it was shown in [10], clearly associated with the first negative minimum of the Fourier-component renormalized potential. The only fitting parameter in these calculations was the amplitude of the starting pseudo-potential with the parameter $a = 2.44A^{-1}$, which is equal to the twice of a quantum radius of the ^{4}He atom. For the calculations we take an experimental value of the BEC density $n_0 = 9\%n = 1.95\times10^{22}\,cm^{-3}$ [3, 4].

As a result, after numerical calculations it was possible to get a quite satisfactory agreement of the theoretical $E(p)$ and experimental $E_{exp}(p)$ spectrum under condition $p < 2.5A^{-1}$ (Fig. 3, curve 1). In calculations of $E(p)$ the only fitting parameter was taken in order to satisfy a condition that quasiparticle phase velocity $E(p)/p$ at $p \to 0$ coincide with hydrodynamical speed of sound $c_1 \cong 236\,m/\sec$ in the liquid ^{4}He, which corresponds to the value $U_0 = V_0/4\pi a^3 = 1552\,K$ for the amplitude of the "semitransparent spheres" potential at $a = 2.44A^{-1}$. In the range $p > 2.5A^{-1}$ theoretical spectrum $E(p)$ lies slightly above $E_{exp}(p)$. This is, most likely, due to the fact that vertex function $\Gamma(k,p)$, which decay with increasing of the momentum p, was taken as constant $\Gamma = 1.5$. This value was obtained from the exact asymptotic of the polarization operator

$\Pi(0,0) = -n/mc^2$. In this connection vertex function on the interval $2.1A^{-1} < p < 3.8A^{-1}$ was approximated by the linear function, which slowly changed from $\Gamma = 1.5$ to $\Gamma = 1.1$. Spectrum, obtained within this approximation (Fig. 3, curve 2), is in good agreement with experimental curve for all range of the momentum.

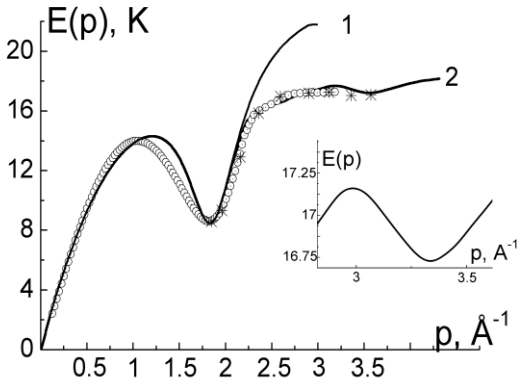


Fig. 3. Curve 1 – theoretical quasiparticle spectrum $E(p)$, obtained with model of the "semitransparent spheres" for the constant value of the vertex function $\Gamma = 1.5$. Curve 2 – theoretical quasiparticle spectrum $E(p)$, obtained with a model of the "semitransparent spheres" for the weakly decaying (from $\Gamma = 1.5$ to $\Gamma = 1.1$) vertex function, on the interval $2.1A^{-1} < p < 3.8A^{-1}$. In both cases the value of the fitting parameter is $U_0 = V_0/4\pi a^3 = 1552K$. Circles show experimental spectrum, obtained by inelastic neutron scattering in the liquid ^{4}He [11-14], stars – show the results of the experiment [15] beyond the roton minimum $2A^{-1} < p < 3.6A^{-1}$. Inserted box shows weak oscillations of the spectrum with maximum $E_{\max} = 17.2K$ at $p = 2.99A^{-1}$ and minimum $E_{\min} = 16.7K$ at $p = 3.39A^{-1}$.

Self-consistency of the given model is confirmed by the value of the total particle density $n_{teor} = 2.12 \times 10^{22} cm^{-3}$, which is close to the experimental value of the particle density $n = 2.17 \times 10^{22} cm^{-3}$ of the liquid ^{4}He (when $n_0 = 9\% n$). On the other hand, independent calculation of the over-condensate density of particles n_1 for the given parameters gives a value of about $93\% n$, which also agrees with experiment under condition that BEC density is determined with accuracy of $\pm 1\%$.

Thus, proposed in [6] model of superfluid Bose liquid with a suppressed BEC and intensive PCC, which is based on renormalized perturbation field theory with combined variables [16], allow to cut an infinite series by the low BEC density and obtain "truncated", closed system of nonlinear integral equations for the self-energy parts $\Sigma_{1j}(\varepsilon, p), (j = 1,2)$.

On the other hand, the oscillating character of the renormalized Fourier component of the potential leads to a non-monotonic behavior of the momentum dependencies of the mass operators $\Sigma_{1j}(\varepsilon, p), (j = 1,2)$ and, as a result, to the appearance of the roton minimum in the spectrum of quasiparticles $E(p)$, which definitely connected with first deepest negative minimum of the renormalized Fourier component of the potential. Thus, for sufficiently large values of the amplitude of the initial potential V_0 quasiparticles excitation spectrum become unstable in some domain of momenta $p \neq 0$, where $E^2(p) < 0$.

For the conclusion it is necessary to emphasize that mentioned property of the polarization operator $\Pi(p, E(p)) < 0$ is typical only for Bose-systems, where single-particle and many-particle spectrum are coincide and have a common zero energy reference point, unlike Fermi-systems, where single-particle excitation spectrum due to the Pauli principle is counted from the Fermi energy. Therefore, corresponding effective increasing of the negative values of the polarization operator cannot take place for the Fermi-liquid ^{3}He, so formation of the Cooper pairs is possible only for non-zero values of the orbital momentum and a real Van der Waals attraction between fermions. Probably, this is the reason for the three order difference between critical temperatures of superfluid transition in ^{4}He and ^{3}He.

Our calculation of the temperature dependence of superfluid component density is based on the model of the coherent structure of the condensate of the Bose liquid ^{4}He. Temperature dependence of the superfluid component density in this model is given by the following expression [10]

$$\frac{\rho_s(T)}{\rho} = \frac{\psi_0(T)}{\tilde{V}(0)n}\left[1 - \frac{\psi_s(T)}{\tilde{V}(0)n}\right]^{-1}, \rho \equiv mn,$$

here

$$\psi_0(T) = -\frac{1}{2}\int \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^3}\tilde{V}(\mathbf{q})\left[\frac{A_{12} - D_{12}}{c_1\mathbf{q}}\coth\left(\frac{c_1\mathbf{q}}{2T}\right) + \frac{B_{12}}{c_2\mathbf{q}}\coth\left(\frac{c_2\mathbf{q}}{2T}\right)\right],$$

$$\psi_S(T) = -\frac{1}{2}\int \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^3}\tilde{V}(\mathbf{q})\left[\frac{D_{12}}{c_1\mathbf{q}}\coth\left(\frac{c_1\mathbf{q}}{2T}\right) - \frac{B_{12}}{c_2\mathbf{q}}\coth\left(\frac{c_2\mathbf{q}}{2T}\right)\right].$$

In the last expression $\tilde{V}(\mathbf{q})$ – the Fourier component of the renormalized due to many-particle effects a pair interaction potential. For the calculation of the temperature dependences we use a model potentials ("hard sphere" and "semitransparent sphere" potential), Aziz potential and expressions for the velocity of the first and second sounds in liquid

^{4}He and they temperature corrections, obtained in [18] from the solutions of a kinetic type equations:

$$E_1^2(\mathbf{q}) = c_1^2\mathbf{q}^2 = c_0^2\left(1+\frac{29}{16}\frac{\rho_n}{\rho}\right)\mathbf{q}^2,$$

$$E_2^2(\mathbf{q}) = c_2^2\mathbf{q}^2 = \frac{c_0^2}{3}\left(1-\frac{33}{8}\frac{\rho_n}{\rho}\right)\mathbf{q}^2,$$

Temperature dependence of the superfluid component, calculated in this paper is given on Fig. 4.

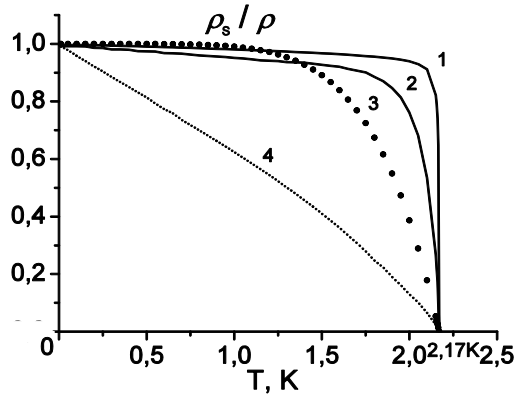


Fig. 4. Temperature dependencies of the Bose-liquid ^{4}He superfluid density obtained in [10] (curve 1); present calculations (curve 2); experimental data obtained by Andronikashvilli E.L. [20] (curve 3); result of Ginzburg V.L. [19] (curve 4).

Conclusions

In this paper using the elementary excitation spectum obtained in frame of proposed in [17] the selfconsistent microscopical model of the superfluid non-relativistic Bose liquid ^{4}He and temperature corrections to the first and second speeds of sound calculated within approach proposed in [18] we obtain the temperature dependence of the condensate density of strongly interacting Bose-system. Our calculations, shown on Fig.4 are in qualitative agreement with experiment.

References

1. *Bogoliubov N.N., Bogoliubov N.N.* (junior) Introduction to statistical quantum mechanics. M.-Nauka, 1984,.384 p.
2. *Pashitskij E.A.* Low Temperature Physics. 1999,.V.25, №2, p.115-140.
3. *Bogoyavlenskiy Y.V., Karnatsevych L.V., Kozlov Z.V., Puchkova A.V.*. Low Temperature Physics. 1998, V.16, №2, p.139-161.
4. *Wyatt A.F.G.*. Nature. 1998,V.391, p.56-59.
5. *Patterman S.,* Hydrodynamics of Superfluid Liquids [Russian translation] Moscow: Mir, 1978, p.520.
6. *Nepomnyashchii Y.A., Pashitskij E.A.* Journal of Experimental and Theoretical Physics. 1990, V.98, No. 1 (7), p.178-194.
7. *Pashitskiy E.A., Vilchynskyy S.I.*, Journal of Low Temperature Physics. 2001, V.27, N3, p.185-195.
8. *Pashitskiy E.A., Mashkevich S.V., Vilchynskyy S.I.*. Low Temperature Physics. 2002, V.28, №3, p.115–122.
9. *Pashitskiy E.A., Mashkevich S.V., Vilchynskyy S.I.*. Physical Review Letters. 2002, V.89, №7, p. 075301.
10. *Pashitskiy E.A., Vilchynskyy S.I.*. On the Structure of the Superfluid State and Quasiparticle Spectrum in a Bose Liquid with a Suppressed Bose–Einstein Condensate // Journal of Low Temperature Physics. 2004, V.134, № 3-4, p.851-879.
11. *Glyde H.R., Azuah R.T., Stirling W.G.*. Physical Review B. 2000, V.62, N21, p.14337-14349.
12. *Apaja V. and Saarela M.*. Physical Review *B.* 1998, V.57, N9, p.5358-5361.
13. *Andersen K.H., Stirling W.G., Scherm R., Stanault A., Faak B., Godfrin H., Dianoux A.J.*. Journal of Physics: Condensed Matter. 1994, V.6, p.*821*-834.
14. *Anderson C.R., Andersen K.H., Bossy J., Stirling W.G. et all*. Physical Review B. 1999, V.59, N21, p.13588-13591.
15. *Pearce J.V., Azuah R.T., Faak B., Sakhel A.R., Glyde H.R., Stirling W.G.*. Journal of Physics: Condenced Matter. 2001, V.13., N20, p.4421-4436.
16. *Popov V.N., Brusov P.N.* Superfluidity and collective properties of superfluid helium [russian]. Moscow:Nauka, 1978, p.215.
17. *Pashitskiy E.A., Vilchynskyy S.I.*. About the spectrum of the superfluid component in the spectrum of the elementary excitations in the Bose-liquid ^{4}He // *Low Temperature Physics*. 2001, V.27, №3, p.253-267.
18. *Chumachenko A., Vilchynskyy S. and Weyrauch M.*. Infrared behavior of the response of strongly interacting Bose systems. // Journal of Physical Studies. 2007, V.11, № 1, p.45-57.
19. *Ginzburg V.L., Sobyanin A.A.*. Superfluidity of helium II near λ-point // Uspehi Fizicheskih Nauk. 1976, V.120, p.153.
20. *Andronikashvilli E.L.* // Journal of Theoretical and Experimental Physics. 1946, V.16, p.780; 1948, V.18, p.424.

Надійшла до редколегії 25.12.13

УДК 535.375.5: 621.373.826

Ящук В.П.[1], к.ф.-м.н., доц.,
Комишан О.О.[1], асп.

Використання вторинного випромінювання суміші барвників для визначення спектрів їх комбінаційного розсіяння

В багатократно розсіювальних активних середовищах явища хаотичної генерації та вимушеного комбінаційного розсіяння пов'язані в єдиний нелінійний процес. Лінії комбінаційного розсіяння проявляються в межах спектра хаотичної генерації. В роботі показано, як за допомогою спектрів вторинного випромінювання суміші барвників можна отримати спектри комбінаційного розсіяння в більш широкій спектральній області.

Ключові слова: *багатократне розсіяння, хаотична генерація, вимушене комбінаційне розсіяння, везикулярні плівки, органічні барвники.*

[1]Київський національний університет імені Тараса Шевченка,03680, м. Київ, пр-т. Глушкова 4д, e-mail: yavasil@univ.kiev.ua

V.P. Yashchuk[1], PhD,
O.O. Komyshan, PhD stud.

The secondary radiation of dye mixture using to determine their Raman spectra

Random lasing and stimulated Raman scattering of laser dyes form a single non-linear process in multiple scattering active media. Raman lines occur within the range of random lasing spectrum. It is shown how to use dye mixture for obtaining dye Raman spectra in a wider spectral range.

Key words: *multiple scattering, random lasing, stimulated Raman scattering, vesicular films, dyes.*

[1]Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03680, Kyiv, Glushkova st., 4d,
e-mail: yavasil@univ.kiev.ua

Статтю представив член-кор. НАН України, д.ф.-м.н., проф. Макара В.А.

Вступ

У багатократно розсіювальних середовищах (БРС), забарвлених лазерними барвниками, існує так звана хаотична генерація (ХГ), яка розвивається вздовж випадкових ламаних траєкторій, обумовлених багатократним розсіянням світла. Спектр випромінювання ХГ, на відміну від звичайних лазерів на барвниках, є суцільним і не містить характерної модової структури, що обумовлено відсутністю будь-яких резонансних умов при формуванні ХГ [1,2].

В тих випадках, коли спектр ХГ співпадає з областю стоксових ліній комбінаційного розсіяння світла (КРС), випромінювання ХГ разом із випромінюванням лазерного накачування може ініціювати вимушене комбінаційне розсіяння (ВКР) на цих лініях [3,4]. Обидва ефекти тісно пов'язані між собою і фактично утворюють єдиний нелінійний процес, який умовно можна назвати ВКР-ХГ. Його можна інтерпретувати як особливий випадок АСКР (активної спектроскопії комбінаційного розсіювання), для якого характерне двокомпонентне збудження: одна компонента - випромінювання накачування є зовнішнім, як в звичайному АСКР, а друга - випромінювання ХГ з суцільним спектром, яке утворюється в самому зразку. Внаслідок суцільного спектру ХГ, ВКР проявляється на всіх стоксових частотах, що потрапляють в його межі [4 - 6]. Спектр ВКР-ХГ таким чином складається з суцільної (випромінювання ХГ) та лінійчатої (ВКР) спектральних складових. Це дозволяє визначати коливальний спектр молекул органічних барвників у відповідному спектральному діапазоні по спектрах вторинного випромінювання барвників в багатократно розсіювальних середовищах [5].

Прояв ліній ВКР у вторинному випромінюванні барвників в БРС залежить від наявності випромінювання ХГ на відповідних стоксових частотах. Як вказано в [6], це залежить від параметрів середовища і випромінювання накачування, які впливають на спектр ХГ. Підбором цих параметрів можна зсувати спектр ХГ відносно можливої області локалізації стоксових ліній. Однак таким чином важко охопити весь діапазон розташування стоксових ліній КРС. В цьому випадку виходом могло б бути використання додаткового барвника, підібраного таким чином, щоб його спектр ХГ

© В.П. Ящук, О.О. Комишан, 2014

попав у потрібну спектральну ділянку. Метою даної роботи є перевірка даної ідеї на прикладі дослідження вторинного випромінювання суміші двох лазерних барвників.

Зразки та методика реєстрації

Виходячи із механізму явища [4] слід керуватися наступними вимогами до барвників: необхідно забезпечити одночасне збудження обох барвників таким чином, щоб ХГ виникала лише в одному із них (генеруючий барвник *A*) із спектром, який попадає в область стоксових ліній іншого (розсіювального) барвника *B*. Збудження останнього потрібне для підвищення вірогідності його КРС. В такому випадку ХГ барвника *A* стимулюватиме ВКР молекул барвника *B*. Щоб задовольнити ці вимоги пара барвників повинна задовольняти такі критерії:

- Довжина хвилі випромінювання накачування повинна попадати в смуги поглинання обох барвників.
- Спектри люмінесценції, а, значить, і спектри ХГ повинні бути рознесені, щоб можна було з певністю встановити якого хаотична генерація якого барвника ХГ в області спостережуваних стоксових ліній.
- Для того, щоб ХГ барвника *B* була погашена необхідно, щоб із спектром його люмінесценції перетинався спектр поглинання барвника *A*. Тобто спектри поглинання $K_A(\lambda)$ і люмінесценції $L_A(\lambda)$ барвника *A* повинні бути зсунуті відносно аналогічних спектрів барвника *B* в довгохвильову сторону так, щоб $K_A(\lambda)$ сильно перекривався із $L_B(\lambda)$.
- Спектр ХГ барвника *A* повинен бути розташований в діапазоні можливих стоксових ліній барвника *B*.
- Оскільки в межах спектра ХГ генеруючого барвника *A* можуть проявлятись стоксові лінії ВКР обох барвників, то для полегшення віднесення стоксових ліній до певного барвника бажано, щоб спектри КРС барвників *A* і *B* в цій області максимально відрізнялись.
- Для розширення області спостереження ліній КРС барвника *B*, необхідно, щоб спектр ХГ барвника *A* повністю чи частково був розташований поза межами аналогічного спектра барвника *B* в однокомпонентному (без іншого барвника) зразку. Однак для перевірки самого принципу такого розширення ця вимога не є обов'язковою.

Виходячи із цих критеріїв придатною парою барвників є пірометен 605 (р605) і родамін 575 (Rh575). Як видно із рис.1 спектр поглинання р605 зсунутий відносно спектра поглинання Rh575 на 25 нм в довгохвильову сторону і сильно перекривається із спектром люмінесценції останнього, що повинно перешкоджати виникненню його ХГ. Отже, роль генеруючого барвника (*A*) повинен відігравати р605, а розсіювального (*B*) - родамін 575.

Остаточний висновок щодо придатності цієї

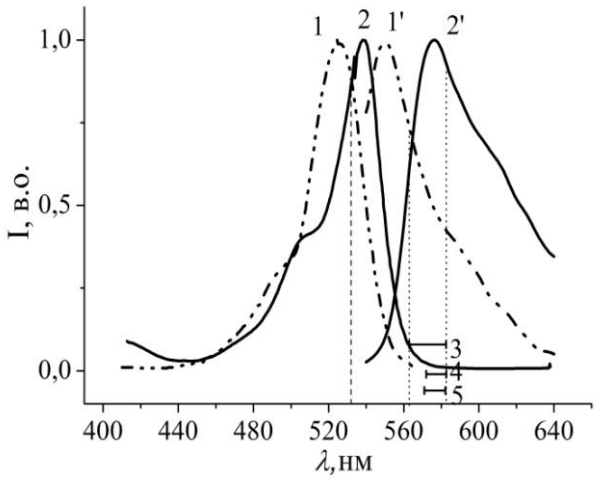


Рис. 1. Спектр поглинання і люмінесценції барвників: родаміну 575 (1, 1') і пірометену 605 (2, 2'). Області прояву ВКР-ХГ родаміну 575 (3), пірометену 605 (4) та їх суміші (5).

пари барвників для вирішення поставленого завдання можна зробити на підставі оцінки відмінності спектрів КРС цих барвників в межах спектру ХГ генеруючого барвника р605. Справа в тому, що в межах спектра ХГ випромінювання р605 може стимулювати ВКР обох барвників: не тільки Rh575 але і своє власне також. Тому для однозначності визначення приналежності стоксових ліній певному барвнику потрібно, щоб спектри КРС цих барвників достатньо відрізнялись в межах спектра ХГ р605.

Завдання підбору ускладнюється тим, що із-за складності реєстрації спектрів КРС лазерних барвників звичайним методом (внаслідок сильного люмінесцентного засвічення) вони можуть бути отримані лише за допомогою доволі складних методик SERRS та інверсного комбінаційного розсіяння і тому наразі відомі лише для поодиноких барвників, серед яких немає р605 і Rh575. Однак висновки, щодо відмінності спектрів КРС цих барвників можна зробити на основі так званих «псевдоспектрів КРС» [7], побудованих за допомогою коливальних частот ІЧ спектрів поглинання, які співставляються комбінаційному зсуву: $\nu_c = \nu_н - \nu$, де $\nu_н$ і ν – частоти накачування та ІЧ

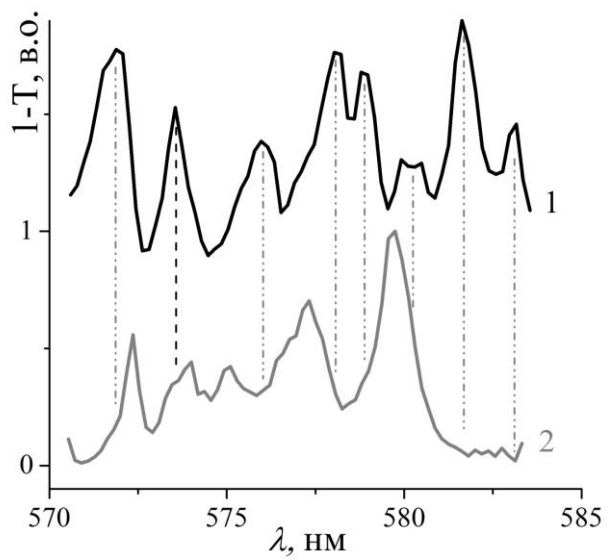


Рис. 2. «Псевдоспектри КРС» родаміна 575 і пірометена 605, отриманих із ІЧ спектрів поглинання цих барвників; 1-Т - коефіцієнт ослаблення, де Т – виміряний коефіцієнт пропускання.

поглинання. Побудовані таким чином спектри з точністю до правил відбору КРС і ІЧ поглинання визначають можливі частоти стоксових ліній барвників. Інтенсивність цих стоксових ліній можна умовно вважати пропорційною амплітуді ліній ІЧ поглинання, поданій через коефіцієнт ослаблення К=1-Т, де Т виміряне пропускання.

На рис. 2 наведені ділянки «псевдоспектрів КРС» Rh575 і р605 в області спектрів ХГ цих барвників, які побудовані по їх ІЧ спектрах, зареєстрованих Фур'є-спектрометром в таблетці KCl. Видно, що практично всі можливі стоксові лініЙ Rh575 і р605 не співпадають і тому їхні спектри ВКР повинні суттєво відрізнятись.

Враховуючи наведені вище особливості, вибрана пара барвників є придатною для перевірки зазначеної вище ідеї: розширення спектрального діапазону реєстрації спектра КРС барвників по їх вторинному випромінюванню в БРС шляхом використання додаткового барвника.

Вибрані барвники та їх суміш вводилися в везикулярні полімерні плівки, які були нанесені на лавсанову підкладку методом поливу; везикули в ній утворені фотохімічним розкладанням азідомісткого компоненту кополімеру. Концентрація везикул була близька до граничної величини, яка визначається щільною упаковкою, а їх середні діаметри були близькі ($\overline{d}$ =1.2 мкм).

Виміри проводилися при гелієвій температурі (≈7 - 8К), яка сприяє кращому прояву ВКР в спектрі ХГ. Накачування зразків здійснювалася другою гармонікою Nd^{3+} ІАГ з модуляцією добротності резонатора. Інтенсивність накачування змінювалася в межах $1 \div 100$ МВт/см^2 нейтрально-сірими фільтрами і фокусуванням. Спектри вторинного випромінювання реєструвалися за один імпульс дифракційним спектрографом з ПЗЗ-матрицею з спектральним розділенням 0,3 нм.

Експериментальні результати

Із наведених на рис.1 спектрів поглинання видно, що випромінювання другої гармоніки (532 нм) однаково ефективно збуджує обидва барвники. На цьому ж малюнку показане взаємне розташування спектральних областей ВКР-ХГ окремих барвників та їх суміші при максимальному збудженні відносно спектрів люмінесценції та поглинання. Порівнюючи, можна зробити висновок, що спектральні області ВКР-ХГ суміші барвників та чистого р605 практично співпадають. Ці області розташовані впритул до довгохвильового краю спектра поглинання р605 і, отже, їх розташування визначається цим спектром. Це свідчить на користь того, що в суміші барвників ХГ обумовлена випромінюванням саме цього барвника.

Слід, однак, переконатися, що ХГ іншого барвника (Rh575) в суміші не виникає. Це важливо, бо довгохвильове крило спектра ХГ чистого Rh575 співпадає з областю ХГ чистого р605. Висновок про відсутність ХГ Rh575 в плівках із сумішшю барвників можна зробити, аналізуючи закономірності формування спектра ВКР-ХГ чистого Rh575 при збільшенні накачування. Встановлено [7], що спектр ХГ чистого Rh575 в плівках знаходиться при малих накачках короткохвильовіше за спектри ХГ р605 і їх суміші. Лише при підвищенні накачування розширюється в довгохвильову сторону, досягаючи спектра ХГ р605. Як показано в [7], довгохвильове крило цього спектра обумовлено перепоглинанням і наступним перевипромінюванням ХГ основної (короткохвильової) смуги в довгохвильову область. Оскільки в плівках із сумішшю барвників короткохвильова смуга Rh575 погашена, то і виникнення довгохвильового крила в цьому випадку неможливе. Таким чином можна вважати, що в плівках із сумішшю барвників ХГ обумовлена

лише р605 і, отже він відіграє роль генеруючого барвника *А*.

На рис. 3 наведені спектри вторинного випромінювання везикулярних плівок з чистими барвниками Rh575 (1) та р605 (2) і їх сумішшю (3). У всіх трьох випадках чітко проявляються спектральні лінії, які виникають при утворенні ХГ і розташовані лише в межах її спектра, що є характерною ознакою випромінювання ВКР-ХГ [4-7]. Відповідно до механізму ВКР-ХГ ці лінії відповідають стоксовим компонентам активних в

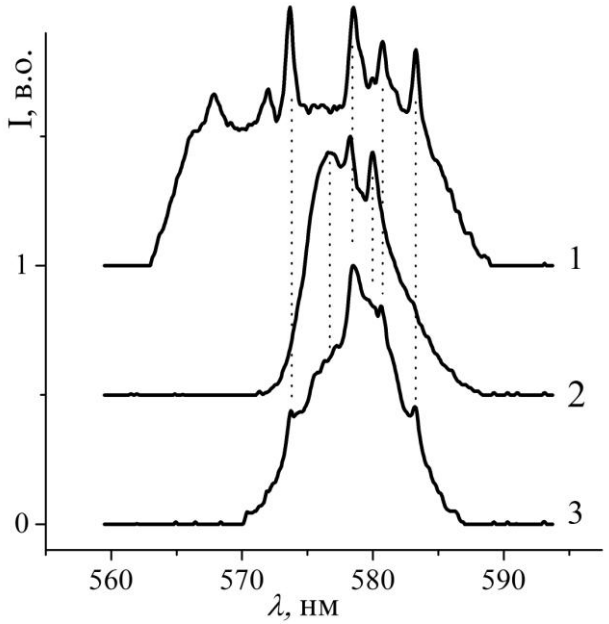


Рис. 3. Спектри вторинного випромінювання везикулярних плівок з барвниками Rh575 (концентрація 5мМ/л) -1, р605 (3мМ/л) -2 та їх суміші (5:2.5мМ/л) -3.

КРС молекулярних коливань. Добре видно, що в межах спектра вторинного випромінювання суміші проявляються стоксові лінії ВКР обох барвників. Тобто ХГ барвника р605, яка виникає в суміші, стимулює ВКР не тільки його власних молекулярних коливань, але й іншого барвника Rh575 (лінії 573.6, 578.5, 580.7 і 583.2 нм). Це доводить, що введення в БРС поряд із досліджуваним розсіювальним барвником *В* (Rh575) додаткового генеруючого барвника *А* (р605) дозволяє проявити всі стоксові лінії ВКР першого в межах його спектра ХГ. Якби спектр ХГ р605 був розташований поза межами спектра ХГ Rh575, це призвело б до реєстрації коливального спектра останнього барвника в недосяжному раніше діапазоні. У випадку цієї пари барвників така ситуація виникає при зворотному співвідношенні концентрацій барвників в суміші (2.5 : 5 мМ/л). В цьому випадку спектр ХГ Rh575 при будь-яких накачках розташований короткохвильовіше ніж спектр р605 і, отже, введення останнього дійсно дозволяє спостерігати лінії ВКР Rh575 в новій спектральній області.

Таким чином, отримані результати доводять принципову можливість використання вторинного випромінювання суміші барвників в багато розсіювальних середовищах для розширення області реєстрації коливального спектра досліджуваного барвника.

Висновки

В даній роботі показана можливість реєстрації коливальних спектрів молекул органічних лазерних барвників в більш широкій спектральній області завдяки використанню їх в суміші з додатковими барвниками в багаторозсіювальних середовищах. Сформульовані вимоги до комбінацій барвників, необхідні для вирішення цього завдання. Метод апробований на прикладі суміші родаміну 575 та піrометену 605.

Список використаних джерел

1. *Lawandy N.M., Balachandran R.M., Gomes A.S., Sauvain E.* Nature, 368, 6470 (1994).
2. *Tikhonov E., Yashchuk Vasil P., Prigodiuk O., Bezrodny V.* Solid State Phenomena, **94**, 295-298 (2003).
3. *Yashchuk V.P., Tikhonov E.A., Prygodiuk O.A.*. JETP Letters, **91**,№ 4,174 (2010).
4. *Yashchuk V.P., Tikhonov E.A., Prygodiuk O.A.*. Mol. Cryst. Liq. Cryst, 535, 156 (2011).
5. *Yashchuk V.P., Tikhonov E.A., Bukatar A.O., Prygodiuk O.A., Smaliuk A.P.*. Quantum Electronics, **41**, №10, 875 (2011).
6. *Yashchuk V.P., Komyshan O.O., Smaliuk A.P., Prygodiuk O.A., Ishchenko A.A., Olkhovyk L.A.*. Quant. Electronics, **43**, №12, 1127-1131 (2013).
7. *Yashchuk Vasil P., Komyshan O.O., Smaliuk A.P., Tikhonov E.A., Olkhovyk L.A.* IEEE Xplore Digital Library. Digital Object Identifier: 10.1109/NLP.2013, 6646387. p.48 – 49.

Надійшла до редколегії 21.01.14

Підписано до друку . Формат _____. Друк. офс.
Папір офс. №__. Друк. арк. ____. Тираж _____. Зам. ____.
Друкарня _____.