



ВІСНИК

КИЇВСЬКОГО
УНІВЕРСИТЕТУ

Серія: ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНІ
НАУКИ
ВИПУСК №2



Київ - 2005

**КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА**

ВІСНИК

Серія: ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНІ НАУКИ

Наукова бібліотека
ім. М. Максимовича
КНУ
ім. ТАРАСА ШЕВЧЕНКА



14515JB

— книгозбище період видань Ц. 10.00



ВИПУСК № 2 2005

Редакційна колегія:

- **Головний редактор** – **Булавін Леонід Анатолійович**, доктор фізико-математичних наук, професор;
- **Відповідальний секретар** – **Анісімова Тетяна Харитонівна**, старший науковий співробітник.

Члени редколегії:

- **Адаменко Ірина Іванівна**, доктор фізико-математичних наук, професор (фізичний факультет);
- **Акименко Віталій Володимирович**, доктор технічних наук, професор (факультет кібернетики);
- **Анісімов Анатолій Васильович**, доктор фізико-математичних наук, професор (факультет кібернетики);
- **Гарашенко Федір Григорович**, доктор технічних наук, професор (факультет кібернетики);
- **Кириченко Володимир Васильович**, доктор фізико-математичних наук, професор (механіко-математичний факультет);
- **Козаченко Юрій Васильович**, доктор фізико-математичних наук, професор (механіко-математичний факультет);
- **Левитський Сергій Михайлович**, доктор фізико-математичних наук, професор (радіофізичний факультет);
- **Єжов Святослав Михайлович**, доктор фізико-математичних наук, професор (фізичний факультет);
- **Попов Юрій Дмитрович**, доктор технічних наук, професор (факультет кібернетики);
- **П'ятецький Василь Олександрович**, кандидат фізико-математичних наук, доцент (механіко-математичний факультет);
- **Родіонова Тетяна Василівна**, кандидат фізико-математичних наук, старший науковий співробітник (радіофізичний факультет).

Друкується за рекомендаціями Вчених Рад фізичного, радіофізичного, механіко-математичного факультетів та факультету кібернетики.

Адреса редакційної колегії:

03022, вул. Глушкова, 2, корп. 6.

Київський національний університет імені Тараса Шевченка,
факультет кібернетики,

тел. (044) 259-01-49

ISBN 966-76-52-00-9

ЗМІСТ

АЛГЕБРА, ГЕОМЕТРІЯ ТА ТЕОРІЯ ІМОВІРНОСТЕЙ

Димарський Я.М. Квазідодатна крайова задача	11
Дудченко І.В. О полудистрибутивных квазифробениусовых кольцах	16
Журавльов В.М. Про горенштейнові порядки, квазіфробеніусові кільця та підстановки.	21
Кулаковская І.В. Полупрimaryные полудистрибутивные кольца конечного типа.	24
Литвиненко І.М. Фінітарні напівгрупи часткових перетворень.	38
Мішура Ю.С., Ільченко С.А. Побудова вінерівських інтегралів відносно дробових броунівських полів.	46
Пірус Є.М. Слабопервинні кільця та кускові напівдистрибутивні області.	53
Посашков С.В. Дослідження (B, S)-ринку цінних паперів зі стохастичною волатильністю, керованою дробовим броунівським рухом.	56
Циганівська І.М. Індокси частково впорядкованих множин з 5-ти елементів.	62
Ямненко Р. Про ймовірність виходу суми ϕ -субгауссових випадкових процесів за криву	74

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ, МАТЕМАТИЧНА ФІЗИКА ТА МЕХАНІКА

Андрушко Н.Ф., Сенченков І.К., Січко В.М., Бойчук О.В., Кепич Т.Ю. Оцінка залишкового напружено-деформованого стану в фізично нелінійному диску при імпульсному стисканні	85
Бігун Я.Й. Усереднення крайових задач для багаточастотних систем із сталим запізненням	90
Завражина Т.В., Завражина Н.М. Динаміка робота-маніпулятора з обертальними та поступальними з'єднаннями ланок	97
Келеберденко О.С. Точний розв'язок однієї плоскої контактної задачі для полоси на жорсткій основі	107
Лебедєва І.В. Рівновага пружного двопорожнинного гіперболоїда обертання	113
Легеза В.П. Узагальнений метод визначення амплітудно-частотних характеристик віброзахисних систем із котковими гасниками	119

Мейш В.Ф., Латанська Л.О. До розрахунку динамічної поведінки тришарових сферичних оболонок з кусково-однорідним заповнювачем при нестационарних навантаженнях	127
Шовкопляс Т.В. Властивості розв'язків рівняння, що описує фінансову модель Кокса-Інгерсолла-Росса зі змінними параметрами	133
Юрченко М.Є. Резонансний метод визначення неоднорідної густини струни	139

КОМП'ЮТЕРНІ НАУКИ ТА ІНФОРМАТИКА

Бодачівська Л.Ю., Бейко І.В., Поп Г.С. Екологічна та техніко-економічна ефективність глушіння свердловин інвертними системами на рослинній основі	151
Буй Д.Б., Шишацька О.В. Комп'ютерні засоби навчання: проблеми термінології, систематизації, створення програмного забезпечення	157
Войцеховський С.О., Сажениук В.С., Сущенко П.О. Оцінка швидкості збіжності методу сіток для варіаційних еліптичних нерівностей другого порядку з обмеженням усередині області	171
Григоров А.В., Ділковська Б.В. Мінімаксні методи оцінювання та прогнозування в моделі експорту України до Європи	176
Власюк А.П., Мартинкж П.М. Застосування комплексного методу граничних елементів до розв'язання крайових задач для лінійних рівнянь параболічного типу.	181
Власюк А.П., Остапчук О.П., Степанченко О.М. Монотонна різницева схема для нелінійного одновимірного рівняння параболічного типу, що містить першу похідну	188
Дьякова О.В. Використання теорії нечітких множин в задачі інвестиційного аналізу	198
Загородній Ю.В., Гезь О.І. Системне моделювання та імітація динаміки погодних умов	203
Зінько Л.П., Загородній Ю.В. Про об'єктний метод комп'ютерного моделювання впливу фітовірусів на ріст рослин	208
Зубенко А.В. Про логіку делегувань повноважень в динамічних коаліційних системах	213
Капустян В.О., Капустян О.А., Подлипенко Ю.К. Мінімаксні оцінки функціоналів від періодичних за часом розв'язків крайових задач Неймана для параболічних рівнянь	220
Кахута Н.Д., Буй Д.Б. Властивості теоретико-множинних конструкцій повного образу та обмеження	232

Клюшин Д.А., Петуній Ю.І. Точні довірчі межі для невідомої ймовірності в класичній та узагальненій моделях Бернуллі	241
Колянова Т.В. Вплив економічних та психологічних факторів на імунну систему організму	248
Козій Ю.В. Оцінка параметрів нечітких множин для слабо залежних спостережень	255
Кузьмич О.І., Хусаїнов Д.Я. Оцінки динаміки гібридних систем, що описуються дискретними рівняннями	260
Лебедев Є.О., Усар І.Я. Про матричне подання стаціонарних ймовірностей для двовимірної міграції	268
Левощич О.Л., Редька А.В. Дослідження формування полів домішок в атмосфері при викиді з стаціонарних джерел	276
Мекуш О.Г. Групова верифікація цифрових підписів	281
Нікітченко М.С., Мілько С.І. Алгебра багатозначних еквітонних предикатів	286
Омардибірова В.Н. Моделювання процесів ціноутворення: оцінювання параметрів та прогноз	296
Подлипенко Ю.К., Левощич О.Л. Мінімаксне оцінювання невідомих правих частин граничних умов в еліптичних крайових задачах	302
Семесенко М.П., Тимашов О.О. Задача вибору моделі вимірів в інформаційно-керуючих системах	306
Терещенко В.М., Чернишов Є.О. Автоматичний аналіз властивостей програмного коду на прикладі розв'язання задач обчислювальної геометрії	311
Хлобистов В.В., Каптур О.Ф. Операторний інтерполянт типу Ерміта в гільбертовому просторі, що є асимптотичне точним на поліномах	316
Хлобистов В.В., Поповічева Т.М. Інтерполяційне наближення полінома Тейлора для диференційованих операторів у гільбертовому просторі	324
Шевченко К.В. Слабкий розв'язок параболічних систем з сингулярними правими частинами	331
Яремчук С.І., Рудюк Л.В. Алгоритми розв'язання задачі розміщення прямокутників в прямокутній області	339

РАДІОФІЗИКА

Баужа О., Воскобойніков О., Третяк О.В. Вплив спин-орбітальної взаємодії на намагніченість квантових точок	347
Кирилук В.В., Коваленко А.В. Статистично оптимальне відновлення сигналу з гаусівською кореляційною функцією	354

за його скінченовимірною проекцією	
Находкін М.Г., Куліш М.П., Литвин П.М., Новохацька Н.О., Родіонова Т.В. Вплив легування фосфором на структурні характеристики дендритних полікремнієвих плівок	359
Сидоренко В.С., Гайдай Ю.О., Жила С.В. Особливості ближнього поля диполя Герца	365
Шкавро А.Г., Товпеко О.В. Шумова спектроскопія глибоких рівнів сульфіду кадмію.	373

СУЧАСНА ФІЗИКА

Альохін О.Д. Величини критичних показників теплостійкості і кореляційної функції	381
Безшийко О.А., Голінка-Безшийко Л.О., Каденко І.М., Плюйко В.А., Шашко О.С. Використання фотоядерних реакцій для вивчення структури ядра та механізмів ядерних реакцій	384
Булавін Л.А., Храпатий С.В. Дослідження скейлінгових властивостей шерохватості поверхні осадів в моделі направленого росту випадкової послідовної адсорбції	389
Гречко Л.Г., Лерман Л.Б., Лесьо А.І., Шостак С.В., Склярів Ю.П. Діелектрична проникність пористих середовищ	399
Караман Д.Ю., Рево С.Л. Механічні властивості композиційних матеріалів терморозширений графіт – полімер	408
Копань В.С., Хуторянська Н.В., Копань Ю.В. Наведена деформацією термо-е.р.с. мікрофольг	415
Копань В.С., Хуторянська Н.В., Копань Ю.В. П'єзотермо-е.р.с. міді та алюмінію	421
Кошеленко В.П., Охріменко Б.А., Макаренко О.В. Комбінаційні частоти та ефект Доплера при розсіянні хвилі шорсткою поверхнею, що рухається	427
Макара В.А., Стебленко Л.П., Кольченко Ю.Л., Науменко С.М., Патран О.А., Руденко О.В. Розподіл величини мікротвердості та магнітомеханічного ефекту по глибині зразків кремнію	434
Наришкін Р.О. Про можливий механізм стабілізації нестійких гідродинамічних вихорів у збуджених газах	440
Онанко А.П. Метод обробки амплітудної залежності внутрішнього тертя	444
Рапопорт Ю.Г. Відгук нестійкої біляекваторіальної плазми в області F іоносфери на просторовий пакет акусто- гравітаційних хвиль літосферного походження	448
Удалов Є.П., Хомич Ю.А. Визначення коефіцієнтів концентрації та інтенсивності напружень з використанням явища	459

рефракції світла	
Удалов Є.П., Хомич Ю.А. Експериментальне дослідження рефракції лазерного випромінювання у високоградієнтних полях фотопружних матеріалів	467
Шайкевич І.А., Мельниченко Л.Ю., Шибіко Я.А. Поляритонні властивості тонких металічних плівок	477
Чалий К.О. Класи універсальності для просторово-обмежених систем різної природи в контексті розвитку нанотехнологій та наномедицини	486

АЛГЕБРА, ГЕОМЕТРІЯ ТА ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ

УДК 517.956.22

Яків М. Димарський*

Yakov M. Dymarskii*

Квазіодатна крайова задача.
Серія: фізико-математичні науки

Quasi-positive boundary value problem. Series: Physics & Mathematics

Ми розглядаємо квазілінійну еліптичну крайову задачу, рішення якої можна інтерпретувати як рішення певної лінійної задачі.

We investigate a quasi-linear elliptic boundary problem and represent its solution as one of some linear problem.

Ключові слова: квазіодатна задача, зворотний оператор, нерухома точка

Key Words: quasi-positive problem, inverse operator, fixed point.

*E-mail: dymarsky@iep.lg.ua

1. Головний результат. Розглянемо квазілінійну проблему: знайти слабкий розв'язок $u(x)$ крайової задачі

$$-\Delta u + p(u, \nabla u, x)u = f(x), \quad u|_{\partial\Omega} = 0, \quad (1)$$

де $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ - обмежена область із краєм $\partial\Omega \in C^1$, $x \in \bar{\Omega}$, Δ - оператор Лапласа, $\nabla = \text{grad}$. Припустимо, що "потенціал" $p: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ задовольняє умовам Каратеодорі, тобто, неперервний по двом першим аргументам і вимірюємий - по третьому. Ми також припустимо, що функція p не є від'ємною:

$$p(u, y, x) \geq 0 \text{ для усіх } (u, y, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \times \Omega \quad (2)$$

і задовольняє нерівності

$$|p(u, y, x)| \leq C(|u|^\alpha + |y|^\beta + 1), \quad (3)$$

де постійні $C, \alpha > 0$ є довільними, $0 < \beta < 2$

Введемо позначення. Як звичайно, $L_r(\Omega)$ - простір функцій, що інтегруються із степенем r , $W_r^k(\Omega)$ - простір Соболева таких функцій, узагальнені похідні яких до порядку k інтегруються із степенем r , $\dot{W}_2^1(\Omega) \subset W_2^1(\Omega)$ - замикання підпростору C^∞ -функцій із компактним в Ω носієм. Норму $u \in \dot{W}_2^1(\Omega)$ візьмемо за формулою $\|u\|_{2,2}^2 = \left(\int_\Omega (\nabla u(x))^2 dx \right)^{1/2}$, яка є еквівалентною звичайній нормі в $W_2^1(\Omega)$ завдяки крайовим умовам. Більш того, простір $\dot{W}_2^1(\Omega)$ є гільбертовим із скалярним добутком $(u, v) = \int_\Omega \sum_{i,j=1}^2 (\partial u / \partial x_i)(\partial v / \partial x_j) dx$. Нагадаємо [1], що функцію $u \in \dot{W}_2^1(\Omega)$ називають слабким рішенням задачі (1), якщо для будь-якої функції $v \in \dot{W}_2^1(\Omega)$

виконується рівність

$$\int_{\Omega} \sum_{i=1}^2 (\partial u / \partial x_i) (\partial v / \partial x_i) dx + \int_{\Omega} p(u, \nabla u, x) u(x) v(x) dx = \int_{\Omega} f(x) v(x) dx. \quad (4)$$

Якщо u^* є слабким рішенням нелінійної задачі (1), то одночасно функція u^* є слабким рішенням лінійної задачі

$$-\Delta u + p(u^*, \nabla u^*, x) u = f(x), \quad u|_{\infty} = 0$$

із невід'ємним потенціалом $p(u^*, \nabla u^*, x) \geq 0$. Тому ми називаємо задачу (1) квазідодатньою. Використовуючи цю додатність, ми пропонуємо новий підхід у перетворенні задачі (1) на рівняння із нерухомою точкою. Відомо декілька варіантів таких перетворень (див. [1-3]). Наш варіант є близьким до методу Д.Гілбарга і Н.Трудінгера [2, § 11.3].

Теорема. Якщо функція $f \in L_q(\Omega)$ із деяким $q > 1$, то крайова задача (1)-(3) має принаймні одне слабе рішення, яке задовільняє нерівності

$$\|u\|_{1,2}^0 < \text{const}(\Omega, f), \quad (5)$$

де постійна залежить тільки від області Ω і функції f .

Зауваження. Відмітемо, що оцінка (5) не залежить від функції p ; це є наслідком невід'ємності (2).

2. Операторне рівняння. Ми намагаємось перетворити тотожність (4) таким чином, щоб перейти від неї до певного операторного рівняння у просторі $\dot{W}_2^1(\Omega)$.

Без обмеження загальності можна вважати, що в умовах теореми $q = 1 + \varepsilon/2$, в нерівності (3) показник $\beta = 2 - \varepsilon$, а $0 < \varepsilon < 1/2$. Нехай $\dot{\Delta} : W_q^2(\Omega) \cap \dot{W}_2^1(\Omega) \rightarrow L_q(\Omega)$, де, $\dot{\Delta}(u) = -\Delta(u)$. Як відомо [1], відображення $\dot{\Delta}$ є неперервним лінійним ізоморфізмом. Тому існує обернене відображення $\dot{\Delta}^{-1} : L_q(\Omega) \rightarrow W_q^2(\Omega) \cap \dot{W}_2^1(\Omega)$.

Лема 1. Якщо функції $u, v \in \dot{W}_2^1(\Omega)$, то функція $p(u, \nabla u, x)v \in L_q(\Omega)$.

Доведення. По-перше, із теореми Соболева [1] має місце вкладення $\dot{W}_2^1(\Omega) \subset L_r(\Omega)$ із будь-яким $1 < r < \infty$. Тому з оцінки (3), опуклості функції $y = t^q$ та нерівності Гельдера ми маємо:

$$\int_{\Omega} |p(u, \nabla u, x) v|^q dx \leq C_1 + C_2 \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^{(2-\varepsilon)q\mu} \right)^{1/\mu} \left(\int_{\Omega} |v|^{q\nu} \right)^{1/\nu},$$

де $C_1, C_2 > 0$ - деякі постійні, $\mu = 1 + \varepsilon^2 / (4 - \varepsilon^2)$, $\nu = 4 / \varepsilon^2$. Отже

$$\int_{\Omega} |p(u, \nabla u, x) v|^q dx \leq C_1 + C_2 C_3 \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 \right)^{1/\mu} < \infty. \bullet$$

Таким чином, ми маємо право змінити тотожність (4) на рівносильну

$$\int_{\Omega} \sum_{i=1}^2 (\partial u / \partial x_i) (\partial v / \partial x_i) dx + \int_{\Omega} \dot{\Delta}[\dot{\Delta}^{-1}(p(u, \nabla u, x)u(x))]v(x) dx = \int_{\Omega} \dot{\Delta}[\dot{\Delta}^{-1}(f(x))]v(x) dx.$$

Після інтегрування частинами ми остаточно маємо

$$\int_{\Omega} \sum_{i=1}^2 (\partial u / \partial x_i) (\partial v / \partial x_i) dx + \int_{\Omega} \sum_{i=1}^2 (\partial [\dot{\Delta}^{-1}(p(u, \nabla u, x)u(x))] / \partial x_i) (\partial v / \partial x_i) dx = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^2 (\partial [\dot{\Delta}^{-1}(f(x))] / \partial x_i) (\partial v / \partial x_i) dx. \quad (6)$$

Тотожність (6) є рівносильною тотожності $(u, v) + (P(u), v) = (F, v)$, де

$$P : \dot{W}_2^1(\Omega) \rightarrow \dot{W}_2^1(\Omega), \quad P(u) = \dot{\Delta}^{-1}(p(u, \nabla u, x)u) \quad (7)$$

і $F \in \dot{W}_2^1(\Omega)$ - фіксована функція: $F = \dot{\Delta}^{-1}(f)$. Завдяки тому, що $v \in \dot{W}_2^1(\Omega)$ є довільним, ми отримуємо операторне рівняння

$$u + P(u) = F. \quad (8)$$

Дослідимо більш докладно відображення P . Позначимо через $L(\dot{W}_2^1(\Omega))$ банахів простір неперервних лінійних операторів із звичайною нормою, діючих у просторі $\dot{W}_2^1(\Omega)$. Спираючись на лему 1 і означення оператора $\dot{\Delta}^{-1}$, розглянемо відображення

$$A : \dot{W}_2^1(\Omega) \rightarrow L(\dot{W}_2^1(\Omega)), \quad A(u) = \mathbf{A}, \quad \text{що } \forall v \in \dot{W}_2^1(\Omega) \\ \mathbf{A}(v) = \dot{\Delta}^{-1}(p(u, \nabla u, x)v). \quad (9)$$

Очевидно, що $P(u) = A(u)u$. Ми назвемо відображення (9) квазілінійним зображенням відображення (7). (Теорію квазілінійних зображень і власних векторів квазілінійних операторів розглянуто нами у [4, 5, 6]). Тепер рівняння (8) має вигляд

$$(E + A(u))u = F, \quad (10)$$

де E - одиничний оператор. Властивості відображення A наведено у наступній лемі.

Лема 2. 1) Для кожної функції $u \in \dot{W}_2^1(\Omega)$ лінійний оператор $A(u) \in L(\dot{W}_2^1(\Omega))$ є компактним.

2) Для кожної функції $u \in \dot{W}_2^1(\Omega)$ лінійний оператор $A(u) \in L(\dot{W}_2^1(\Omega))$ є невід'ємним, тобто для $\forall v \in \dot{W}_2^1(\Omega)$ виконується нерівність $(A(u)v, v) \geq 0$.

3) Для кожної функції $u \in \dot{W}_2^1(\Omega)$ лінійний оператор $E + A(u) \in L(\dot{W}_2^1(\Omega))$ має зворотний $(E + A(u))^{-1}$ і $\|(E + A(u))^{-1}\| \leq 1$.

4) Відображення A є цілком неперервним.

5) Відображення

$$B : \dot{W}_2^1(\Omega) \rightarrow L(\dot{W}_2^1(\Omega)), \quad B(u) = (E + A(u))^{-1}$$

є цілком неперервним.

Доведення. 1) За означенням, оператор $\dot{\Delta}^{-1} : L_q(\Omega) \rightarrow W_q^2(\Omega) \cap \dot{W}_2^1(\Omega)$ діє в простір $W_q^2(\Omega)$, де $q = 1 + \varepsilon/2 > 1$. За теоремою Соболева, $W_q^2(\Omega) \subset \dot{W}_2^1(\Omega)$ причому вкладення є компактним.

2) Маємо $\forall v \in \dot{W}_2^1(\Omega)$, що (завдяки (2))

$$(A(u)v, v) = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^2 (\partial[\dot{\Delta}^{-1}(p(u, \nabla u, x)v(x))]/\partial x_i)(\partial v/\partial x_i) dx = \\ \int_{\Omega} \dot{\Delta}[\dot{\Delta}^{-1}(p(u, \nabla u, x)v(x))]v(x) dx = \int_{\Omega} p(u, \nabla u, x)v(x)v(x) dx \geq 0.$$

3) Твердження є безпосереднім наслідком попереднього.

4) Ми дамо відображення A у вигляді добутка чотирьох відображень: $A = \delta \cdot \gamma \cdot \psi \cdot \varphi$, де

$$\dot{W}_2^1(\Omega) \xrightarrow{\varphi} L_{1,\xi}(\Omega) \xrightarrow{\psi} L_{1,\zeta}(\Omega) \xrightarrow{\gamma} L(\dot{W}_2^1(\Omega), L_q(\Omega)) \xrightarrow{\delta} L(\dot{W}_2^1(\Omega)), \\ \xi = \varepsilon/(2 - \varepsilon), \quad \zeta = \varepsilon/(2 - 0,5\varepsilon) \text{ і}$$

$$\varphi(u) = w := p(u, \nabla u, x), \quad \psi(w) := w, \quad \gamma(w) = W : Wv := wv, \quad \delta(W) := \dot{\Delta}^{-1} \cdot W.$$

Покажемо, що перше відображення є неперервним. Для цього достатньо довести, що функція $p(u(x), \nabla u(x), x) \in L_{1,\xi}(\Omega)$ [1]. Ми маємо

$$\int_{\Omega} |p(u, \nabla u, x)|^{1-\xi} dx \leq D_1 + D_2 \int_{\Omega} |\nabla u|^{(2-\varepsilon)(1+\xi)} dx \leq D_1 + D_2 \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx < \infty$$

(де $D_1, D_2 > 0$ - деякі постійні). Вкладення ψ є цілком неперервним за теоремою Соболева [1] ($\xi > \zeta$). Відображення γ є неперервним, оскільки насправді $w \cdot v \in L_q(\Omega)$:

$$\int_{\Omega} |w(x)v(x)|^q dx \leq \left(\int_{\Omega} |w|^{\mu} dx \right)^{1/\mu} \left(\int_{\Omega} |v|^{\nu} dx \right)^{1/\nu} \leq D_3 \left(\int_{\Omega} |w|^{1-\xi} dx \right)^{1/\nu} < \infty,$$

де $D_3 > 0$ - деяка постійна, $\mu = 1 + 0,5\varepsilon^2/(4 + \varepsilon - 0,5\varepsilon^2)$, $\nu = 2(4 + \varepsilon)/\varepsilon^2$.

Останнє відображення є очевидно неперервним. Отже, відображення A є скінченним добутком неперервних відображень, причому один співмножник є цілком неперервним. Тому увесь добуток є цілком неперервним [7].

5) Твердження є безпосереднім наслідком попереднього. •

3. Доведення теореми. Наступним кроком є перехід від неоднорідного рівняння (10) до рівняння із нерухомою точкою.

Лема 3. 1) Рівняння (10) є еквівалентним рівнянню

$$u = (E + A(u))^{-1} F. \quad (11)$$

2) Рішення рівняння (11) задовільняє нерівності

$$\|u\|_{1,2}^0 \leq \|\dot{\Delta}^{-1}(f)\|_{1,2}^0. \quad (12)$$

3) Відображення

$$\hat{B} : \dot{W}_2^1(\Omega) \rightarrow \dot{W}_2^1(\Omega), \quad \hat{B}(u) := B(u)(F) = (E + A(u))^{-1}(F) \quad (13)$$

є цілком неперервним.

Доведення. 1) Твердження випливає з рівняння (10) та п. 3 леми 2.

2) Твердження випливає з рівняння (11), п. 3 леми 2 та означення функції F .

3) Твердження випливає з п. 5 леми 2. •

Доведення теореми. Застосуємо спупінь Лере-Шаудера [7] для цілком неперервного векторного поля $u - \hat{B}(u)$ (п.3 леми 3). Позначимо

через $T_R := \{u \in \dot{W}_2^1(\Omega) : \|u\|_{1,2}^0 < R\}$ кулю з радіусом R у банаховому просторі. Нехай $S_R := \{u \in \dot{W}_2^1(\Omega) : \|u\|_{1,2}^0 = R\}$ - відповідна сфера. Візьмемо довільний радіус $R > \|F\|_{1,2}^0$. Завдяки рівнянню (11), означенню (13) та нерівності п. 3 леми 2, ми маємо на сфері S_R нерівність: $\|u\|_{1,2}^0 > \|\hat{B}(u)\|_{1,2}^0$. Тому на S_R ступінь Лере-Шаудера поля $u - \hat{B}(u)$ дорівнює один [7]. Отже у кулі T_R існує рішення рівняння (11).

Нерівність (5) випливає з нерівності (12).

Теорему цілком доведено. •

Література

1. Куфнер А., Фучик С. Нелинейные дифференциальные уравнения. – Москва: Мир, 1988.
2. Гилбарг В., Трудингер Н.С. Дифференциальные уравнения второго порядка. – Москва: Мир, 1989.
3. Скрыпник И.В. Методы исследования нелинейных эллиптических краевых задач. – Москва: Наука, 1990.
4. Димарський Я.М. Про квазілінійне зображення скінченновимірних нелінійних операторів // Вісник Київського університету. Серія: фіз.-мат. науки. – 2002. – 2. – с. 27-32.
5. Дымарский Я.М. О многообразиях собственных векторов. I // Український математичний журнал. – 2001. – 2. – с. 156-167.
6. Дымарский Я.М. О многообразиях собственных векторов. II // Український математичний журнал. – 2001. – 3. – с. 296-301.
7. Красносельский М.А. Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений. – Москва: ГИТТЛ, 1956.

Надійшла до редакції 1.12.2004

УДК 512.552.1

Ирина В. Дудченко

Irina V. Dudchenko

**О полудистрибутивных
квазифробениусовых кольцах.**

**On semidistributive quasi-Frobenius
rings.**

**Серія: фізико-математичні
науки**

Ми будемо злічену множину
Фробеніусових кілець з матрицею
суміжності їх сагайдака $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

We construct a countable set
Frobenius rings with the quiver whose
adjacency matrix is $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Ключові слова: квазіфробеніус
кілець, сагайдак артінова
кілець.

Key Words: quasi-Frobenius ring,
quiver of Artinian ring.

1. Введение.

Определение полудистрибутивного артинова кольца смотри в [1].
Определение и свойства квазифробениусовых колец рассмотрены в 13
главе книги [2].

Пусть A -ассоциативное кольцо с $1 \neq 0$ и R – его радикал
Джекобсона.

Теорема 1.1.[2, Теорема 13.2.1] Пусть модуль A_A нётеров, тогда
следующие условия равносильны:

- (1) A_A – инъективен;
- (2) ${}_A A$ – инъективен.

Если выполнены условия (1) и (2) и модуль A_A – нётеров, то кольцо A
артиново с двух сторон.

Определение 1.2. Артиново кольцо называется
квазифробениусовым, если регулярный модуль A_A инъективен.

Пусть A – двустороннее артиново кольцо и R – его радикал
Джекобсона. Для правого A -модуля M обозначим через M^n прямую
сумму n экземпляров M и $M^0 = 0$. Тогда A_A можно представить в виде
прямой суммы правых идеалов: $A = P_1^{n_1} \oplus \dots \oplus P_s^{n_s}$, где $P_1, \dots, P_s$
попарно неизоморфные неразложимые правые A -модули, которые
называются главными правыми A -модулями, $U_i = P_i / P_i R$, $i = 1, \dots, s$.
Известно, что модулями $P_1, \dots, P_s$ исчерпываются, с точностью до
изоморфизма все неразложимые проективные A -модули, в то время как
модулями $U_1, \dots, U_s$ исчерпываются с точностью до изоморфизма

Так как кольца эквивалентные в смысле Мориты, квазифробениусовы одновременно, можно считать, что кольцо A является приведённым факторкольцом, то есть $A=A/R$ является прямым произведением тел.

В нашем случае можно считать, что

$$A_A = P_1 \oplus P_2 \quad (4)$$

, где P_1 и P_2 неизоморфные неразложимые проективные A -модули, причём $P_1 = e_1 A$ и $P_2 = e_2 A$, где $e_1 + e_2$ – соответствующее разложение $1 \in A$ в сумму идемпотентов.

Обозначим $X = e_1 A e_2$ и $Y = e_2 A e_1$, $R_i = \text{rad } e_i A e_i$ ($i = 1, 2$).

Выпишем соответствующее двустороннее разложение R :

$$R = \begin{pmatrix} R_1 & X \\ Y & R_2 \end{pmatrix}.$$

Мы имеем $XY = R_1$ и $YX \subseteq R_2^2$. Из полудистрибутивности кольца A следует, что $XR_2 = R_1 X$ и $YR_1 = R_2 Y$. Рассмотрим XYX . Очевидно, $R_1 X = XYX = XR_2$, но XYX содержится в XR_2^2 . Поэтому по лемме Накаямы $XR_2 = 0$, $XYX = 0$ и $R_1^2 = 0$.

Рассмотрим YXY . Как и выше, $YR_1 = R_2 Y = YXY$. Поэтому $R_2 Y$ содержится в $R_2^2 Y$, откуда $R_2 Y = YR_1 = 0$. Пусть $YX = 0$. Тогда $YX = R_2^m$ ($m \geq 2$). С другой стороны $YXYX = YR_1 X = R_2 YX = R_2^{m+1}$, откуда $R_2^{2m} = R_2^{m+1}$. Поэтому $R_2^{m+1} R_2^{m-1} = R_2^{m+1}$, откуда $R_2^{m+1} = 0$.

Пусть $YX = 0$. Из сказанного выше, следует, что возможны два случая:

- (i) $R_1 = 0$;
- (ii) $R_1 \neq 0$, $R_1^2 = 0$.

В случае (i) имеем: $R_1 = 0$, A_{11} является телом. Факторкольцо A_{22}/R_2 изоморфно телу A_{11} . Предположим, что $m \geq 2$. Пусть $A = P_1 \oplus P_2$, где $P_1 = (A_{11}, X)$ и $P_2 = (Y, A_{22})$. Легко видеть, что модуль P_1 является цепным и $\text{soc } P_1 = U_2$. Кроме того, $P_2 R^2 = (0, R_2^2)$. Если $R_2^2 = 0$, то $\text{soc } P_2 R = U_1 \oplus U_2$. В этом случае кольцо A не является квазифробениусовым. Если $R_2^2 \neq 0$, то $\text{soc } P_2 = U_2$. Поэтому $\text{soc } A_A = U_2 \oplus U_2$. В этом случае идеал $\text{soc } A_A$ не является мономиальным [4]. Следовательно, кольцо A не является квазифробениусовым.

Итак, случай $R_1 = 0$ и $YX = 0$, быть не может.

Случай (ii). $R_1 \neq 0$, $R_1^2 = 0$ и $YX = 0$. В этом случае

$$P_1 = (A_{11}, X) \supset P_1 R = (R_1, X) \supset P_1 R^2 = (R_1, 0) \supset P_1 R^3 = (0, 0).$$

Очевидно $\text{soc } P_1 = U_1$. Для модуля $P_2 = (Y, A_{22})$ имеем следующую цепочку включений:

$P_2 \supset P_2 R = (Y, R_2) \supset P_2 R^2 = (0, R_2^2)$. Если $R_2^2 = 0$, то $\text{soc } P_2 = U_1 \oplus U_2$ и кольцо A не является квазифробениусовым. Следовательно, $R_2^2 \neq 0$. Тогда, очевидно, $\text{soc } P_2 = U_2$. Итак, в случае (ii) $R_1 \neq 0$ и $R_1^2 = 0$, $YX = 0$, $R_2^2 = 0$ следовательно существует счетная последовательность фробениусовых колец с тождественной подстановкой. В этом случае модуль P_1 имеет длину 3, а длина модуля P_2 равна $m+1$. Напомним, что $R_2^m = 0$, $R_2^{m-1} \neq 0$ и $m \geq 3$.

Поэтому осталось рассмотреть два случая:

- (j) $R_1 = 0$ и $YX \neq 0$;
- (jj) $R_1 \neq 0$ и $R_1^2 = 0$, $YX \neq 0$.

Случай (j). Пусть $YX = R_2^m$ ($m \geq 2$) и $R_2^{m+1} = 0$. Очевидно, $\text{soc } P_1 = U_2$ и $\text{soc } P_2 = U_2$. Поэтому в случае (j) не существует квазифробениусовых полудистрибутивных колец.

Случай (jj). $R_1 \neq 0$ и $R_1^2 = 0$, $YX = R_2^m \neq 0$ и $R_2^{m+1} = 0$. Имеем такую последовательность подмодулей модуля P_1 : $P_1 = (A_{11}, X) \supset P_1 R = (R_1, X) \supset P_1 R^2 = (R_1, 0) \supset P_1 R^3 = 0$. Модуль P_1 является цепным длины 3 и $\text{soc } P_1 = U_1$.

Для модуля P_2 имеем: $P_2 = (Y, A_2) \supset P_2 R = (Y, R_2) \supset P_2 R^2 = (0, R_2^2)$. Очевидно, $\text{soc } P_2 = U_2$. Поэтому в случае (jj) существует счётная последовательность фробениусовых колец с тождественной подстановкой Накаямы. В этом случае длина ряда Леви P_2 может быть сколько угодно большой.

Пример. Пусть k – поле. $\mathcal{O} = k[[x]]$ – кольцо формальных степенных рядов над k , и $\pi = x$.

Воспользуемся результатами [5] для построения квазифробениусовых алгебр с колчаном Q , матрица смежности которого равна $[Q(A)] = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Мы следуем принятым там обозначениям.

Пусть

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \pi^\alpha & 0 \end{pmatrix}$$

где $\alpha \geq 2$. Очевидно,

$$E(A) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \alpha & 0 \end{pmatrix}$$

и

$$[Q(A)] = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

В этом случае

$$E(\Delta) = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ где } \Delta = A_A^*.$$

Мы имеем

$$E(R^2) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ \alpha + 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, $t = \alpha + 1$ и

$$E(\pi^{\alpha+1} \Delta) = \begin{pmatrix} \alpha + 1 & 1 \\ \alpha + 1 & \alpha + 1 \end{pmatrix}$$

Факторкольцо $F_m(A) = A/\pi^{m+1} \Delta$ является Фробениусой k -алгеброй кольцом с тождественной подстановкой Накаямы.

Заметим, что

$$E(\pi^{m+1} \Delta) = \begin{bmatrix} m + \alpha + 1 & m + 1 \\ m + \alpha + 1 & m + \alpha + 1 \end{bmatrix};$$

Если k – конечное поле, то алгебра $F_m(A)$ является конечной.

Литература.

1. Кулаковская И.В. Полупрimaryные полудистрибутивные кольца конечного типа. // Вісник Київського університету, Серія: фіз.-мат науки. - 2005.-2.
2. Каш Ф. Модули и кольца, М.Мир, 1981.
3. T. Nakayama On Frobenius algebras I. Ann. Math. 40, (2) (1939), 611-633.
4. Dokuchaev, M.A. and Kirichenko, V.V., Quasi-Frobenius rings and Nakayama permutations of semi-perfect rings, Ukr. Math. J., v.54, N7, 2002, pp. 919-930.
5. Докучаев М.А., Кириченко В.В., Черноусова Ж.Т. Черепичные порядки и Фробениусовы кольца., Математические заметки, т.72, №3, 2002, с.428-432.

Поступила в редакцию 30.03.2005.

УДК 512.552

Віктор М. Журавльов*

**Про горенштейнові порядки,
квазіфробеніусові кільця та під-
становки.**

В статті для довільного зведеного горенштейнового черепичного порядку встановлено зв'язок між трьома підстановками — підстановкою Кириченка горенштейнового порядку, підстановкою, яка задає такий ідеал цього порядку, що факторкільце за ним є квазіфробеніусовим та підстановкою Накаями квазіфробеніусового факторкільця.

Ключові слова: горенштейновий черепичний порядок, ідеал, квазіфробеніусове кільце, матриця показників, підстановка Кириченка, підстановка Накаями.

*E-mail: vshur@univ.kiev.ua

Черепичні порядки (первинні напівмаксимальні кільця в термінології [1]) виникли в 70-их роках минулого століття. Ідеали горенштейнових черепичних порядків, факторкільця за якими є квазіфробеніусовими, вперше розглянуто в роботі [2]. В роботі [3] встановлено, що кожний такий ідеал J задається підстановкою τ . З горенштейновим черепичним порядком Λ пов'язана підстановка Кириченка σ . З квазіфробеніусовим кільцем теж пов'язана підстановка π — підстановка Накаями. В.В. Кириченко поставив задачу з'ясувати, чи існує між цими трьома підстановками якийсь зв'язок. В роботі [7] започатковано розв'язання цього питання. В роботах [7], [8], [9] встановлено рівність $\pi = \sigma\tau$ для конкретних горенштейнових черепичних порядків.

Мета цієї роботи — встановити співвідношення між підстановками σ , τ , π у випадку, коли Λ є довільним горенштейновим черепичним порядком.

Ми дотримуємося термінології та позначень, прийнятих в [7].

Ідеал J порядку Λ будемо називати допустимим, якщо $R^2 \supset J \supset R'$, де $R = \text{rad } \Lambda$ — радикал Джекобсона порядку Λ .

Теорема. Нехай Λ — зведений горенштейновий черепичний порядок з підстановкою Кириченка σ , J — допустимий ідеал цього порядку, який задається підстановкою τ , і такий, що факторкільце Λ/J є квазіфробеніусовим, π — підстановка Накаями квазіфробеніусового факторкільця Λ/J . Тоді $\pi = \sigma\tau$.

Viktor N. Zhuravlev*

On Gorenstein orders, quasi-Frobenius rings and permutations.

In this article, for a reduced Gorenstein tiled order, we find the connection between three permutations — Kirichenko's permutation of the Gorenstein order, a permutation defining the ideal of this order such that the factor ring modulo this ideal is quasi-Frobenius, and the Nakayama permutation of the quasi-Frobenius factor ring.

Key Words: Gorenstein tiled order, ideal, quasi-Frobenius ring, exponent matrix, Kirichenko's permutation, Nakayama permutation.

Доведення. Нехай $\mathcal{E}(\Lambda) = (\alpha_{ij})$, $\mathcal{E}(R) = (\beta_{ij})$, $\mathcal{E}(J) = (\kappa_{ij})$ — матриці показників порядку Λ , його радикалу Джекобсона R та ідеалу J відповідно, $1 = e_1 + \dots + e_n$ — розклад одиниці кільця Λ в суму локальних взаємно ортогональних ідемпотентів. Для кожного $i \leq n$ існує число $m(i)$ таке, що $e_i R^{m(i)} \subseteq e_i J$, але $e_i R^{m(i)-1} \not\subseteq e_i J$. Тобто для довільних $i_1, i_2, \dots, i_{m+1}$ виконується нерівність

$$\beta_{i_1 i_2} + \beta_{i_2 i_3} + \dots + \beta_{i_m i_{m+1}} \geq \kappa_{i_1 i_{m+1}} \quad (1)$$

та існують $j_1, j_2, \dots, j_m$ такі, що

$$\beta_{j_1 j_2} + \beta_{j_2 j_3} + \dots + \beta_{j_{m-1} j_m} < \kappa_{j_1 j_m} \quad (2)$$

де $m = m(i)$, $i_1 = j_1 = i$.

Для довільного j_{m+1} маємо

$$\beta_{j_1 j_2} + \beta_{j_2 j_3} + \dots + \beta_{j_{m-1} j_m} + \beta_{j_m j_{m+1}} \geq \kappa_{j_1 j_{m+1}} \quad (3)$$

Зокрема, при $j_{m+1} = j_m$ маємо

$$\beta_{j_1 j_2} + \beta_{j_2 j_3} + \dots + \beta_{j_{m-1} j_m} + 1 \geq \kappa_{j_1 j_m} \quad (4)$$

Тоді з (2) та (4) отримуємо

$$\beta_{j_1 j_2} + \beta_{j_2 j_3} + \dots + \beta_{j_{m-1} j_m} = \kappa_{j_1 j_m} - 1.$$

З іншого боку з (3) при $j_{m+1} = \sigma\tau(j_1)$ маємо

$$\beta_{j_1 j_2} + \beta_{j_2 j_3} + \dots + \beta_{j_{m-1} j_m} + \beta_{j_m \sigma\tau(j_1)} = \kappa_{j_1 j_m} - 1 + \beta_{j_m \sigma\tau(j_1)} \geq \kappa_{j_1 \sigma\tau(j_1)}$$

Так як $\kappa_{uv} = \alpha_{\tau(u)v} + a_u$, то

$$\alpha_{\tau(j_1)j_m} + a_{j_1} - 1 + \beta_{j_m \sigma\tau(j_1)} \geq \alpha_{\tau(j_1)\sigma\tau(j_1)} + a_{j_1} \quad (5)$$

Оскільки $\alpha_{\tau(j_1)\sigma\tau(j_1)} = \alpha_{\tau(j_1)j_m} + \alpha_{j_m \sigma\tau(j_1)}$ та $\beta_{j_m \sigma\tau(j_1)} = \alpha_{j_m \sigma\tau(j_1)}$ при $j_m \neq \sigma\tau(j_1)$, то нерівність (5) можлива лише при $j_m = \sigma\tau(j_1)$. Отже, для кожного $i = j_1$ існує єдине значення $j_{m(i)} = \sigma\tau(i)$ таке що

$$\beta_{j_1 j_2} + \beta_{j_2 j_3} + \dots + \beta_{j_{m-1} j_m} = \kappa_{j_1 j_m} - 1$$

Це означає, що модуль $e_i R^{m(i)} + e_i J$ є єдиним мінімальним надмодулем модуля $e_i J$. Тому

$$(e_i R^{m(i)} + e_i J) / e_i J = U_{j_m} = e_{j_m} \Lambda / e_{j_m} R \quad (6)$$

і фактормодуль $(e_i R^{m(i)} + e_i J) / e_i J$ є простим.

Нехай $\bar{\Lambda} = \Lambda / J$, $\bar{e}_i = e_i + J$. Кільце $\bar{\Lambda}$ квазіфробеніусове, тому кожен нерозкладний проективний $\bar{\Lambda}$ -модуль є простим. З (6) отримуємо

$$\text{soc } \bar{e}_i \bar{\Lambda} \simeq U_{j_m}$$

Тому для підстановки Накаями π квазіфробеніусового кільця $\bar{\Lambda}$ маємо рівність $\pi(i) = j_{m(i)} = \sigma\tau(i)$.

Висновок: задача про існування зв'язку між підстановкою Кириченка σ зведеного горенштейнового черепичного порядку Λ , підстановкою τ , яка задає допустимий ідеал J порядку i такий, що факторкільце Λ/J є квазіфробеніусовим, і підстановкою Накаями π квазіфробеніусового факторкільця Λ/J розв'язана. Підстановка Накаями π квазіфробеніусового факторкільця Λ/J дорівнює добутку підстановок σ та τ .

Література

1. Завадский А.Г., Кириченко В.В. Модули без кручения над первичными кольцами // Зап. Науч. семинаров Ленингр. Отд. Мат. ин-та АН СССР.— 1976.— т. 57.— с. 100-116.
2. Кириченко В.В. О квазифробениусовых кольцах и горенштейновых порядках // Тр. Мат. ин-та АН СССР.— 1978.— т. 148.— с. 168-174.
3. Журавльов В.М. Підстановки, що задають ідеали горенштейнового порядку // Вісник Київського університету. Серія: фіз.-мат. науки. — 2002. — 3. — с. 23-27.
4. Завадский А.Г. Строение порядков, все представления которых вполне разложимы // Мат. заметки.— 1973.— №2.— с.325-335.
5. Журавльов В.М. Горенштейнові напівмаксимальні кільця, сагайдаки яких містять не більше, ніж 7 вершин // Вісник Київського університету. Серія: фіз.-мат. науки. — 2000. — №3. — с. 32-41.
6. Журавльов В.М. Підстановки, що задають ідеали циклічного горенштейнового порядку // Вісник Київського університету. Серія: фіз.-мат. науки. — 2002. — №4. — с. 9-12.
7. Журавльов В.М. Про підстановки Кириченка та Накаями // Вісник Київського університету. Серія: фіз.-мат. науки. — 2003. — №1. — с. 21-23.
8. Журавльов В.М. Квазіфробеніусові факторкільця горенштейнового $(0, 1)$ - порядку // Вісник Київського університету. Серія: фіз.-мат. науки. — 2003. — №3. — с. 39-43.
9. Черноусова Ж.Т. Про підстановки горенштейнового черепичного порядку // Вісник Київського університету. Серія: фіз.-мат. науки. — 2004. — №4. — с. 79-86.

Надійшла до редакції 16.02.2005.

УДК 512.552.1

Кулаковская И.В.*

Полупримарные полудистрибутивные кольца конечного типа.

Ми доводимо аналог теорем Габріеля для артинових напідистрибутивних кілець, квадрат радикала яких дорівнює нулю.

Ключові слова: напідистрибутивне кільце, сагайдак, кільце скінченного типу.

Kulakovska I. V.*

Semiprimary semidistributive rings of finite type.

We prove analogue of the Gabriel's theorem for Artinian semidistributive rings with zero square radical.

Key Words: semidistributive ring, quiver, ring of finite type.

1. Введение. Как обычно, все кольца ассоциативны с $1 \neq 0$ и все модули правые и унитарные. Через R мы обозначаем радикал Джекобсона кольца A .

Напомним основные свойства колец, указанных в названии статьи. Кольцо A называется полупримарным, если факторкольцо A/R артиново и его радикал Джекобсона R нильпотентен.

Модуль над кольцом A называется дистрибутивным, если для любых его подмодулей K, L, N имеет место равенство

$$K \cap (L + N) = K \cap L + K \cap N.$$

Прямая сумма дистрибутивных модулей называется полудистрибутивным справа (слева), если регулярный модуль A_A (${}_A A$) является полудистрибутивным.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1.1. [1, теорема 14.1.6] *Полупримарное полудистрибутивное справа кольцо A артиново справа.*

Мы будем рассматривать полупримарные полудистрибутивные кольца, квадрат радикала Джекобсона которых равен нулю. По теореме 1.1. такие кольца артиновы с двух сторон.

Теорема 1.2. [1, теорема 14.3.3] *Для артинова кольца A с $R^2 = 0$ следующие условия равносильны:*

(а) *кольцо A полудистрибутивно;*

(б) *колчан $Q(A)$ кольца A не имеет кратных стрелок и кратных петель, и левый колчан $Q'(A)$ кольца A получается из $Q(A)$ переворотом всех стрелок.*

Теорема 1.3. [2, теорема 2.5] *Тела эндоморфизмов всех простых модулей над нетеровым полусовершенным полудистрибутивным кольцом изоморфны между собой.*

Напомним, что модуль M над кольцом A называется цепным, если множество его подмодулей линейно упорядочено по включению.

Теорема 1.4. [1, теорема 14.2.1] Полусовершенное кольцо A полудистрибутивно справа (слева) тогда и только тогда, когда для любых примитивных идемпотентов e и f кольца A множество eAf является цепным правым fAf -модулем (цепным левым eAe -модулем).

2. Вычисление модулей.

Напомним, что модуль M называется конечно представимым, если он конечно порожден и существует эпиморфизм ψ конечно порожденного проективного модуля P на модуль M такой, что $\text{Ker } \psi$ является конечно порожденным модулем.

Если кольцо A нетерово, то все конечнопорожденные модули над ним являются конечнопредставимыми.

В [1, § 13.1] излагается метод вычисления конечно представимых модулей над полусовершенным кольцом, который в нашем случае сводится к следующему. Пусть A артиново с двух сторон кольцо, квадрат радикала Джекобсона которого равен нулю. Естественно предполагать кольцо A неразложимым, т.е. таким, которое нельзя представить в виде прямого произведения колец, и приведенным. Напомним, что полусовершенное кольцо A называется приведенным, если факторкольцо A/R является прямым произведением тел. Мы будем считать кольцо A приведенным и $R^2=0$.

Пусть $A_A = P_1 \oplus \dots \oplus P_s$ - разложение правого регулярного модуля A_A в прямую сумму попарно неизоморфных неразложимых проективных A -модулей и $1 = e_1 + \dots + e_s$ - соответствующее разложение $1 \in A$ в сумму попарно ортогональных примитивных идемпотентов, т.е. $P_1 = e_1 A, \dots, P_s = e_s A$.

Выпишем двустороннее пирсовское разложение радикала Джекобсона R кольца A . По формуле [1, предложение 11.1.1] имеем:

$$R = \begin{pmatrix} R_{11} & A_{12} & \dots & A_{1s} \\ A_{21} & R_{22} & \dots & A_{2s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{s1} & A_{s2} & \dots & R_{ss} \end{pmatrix}, \quad (2.1)$$

где $R_{ii} = \text{rad } e_i A e_i$, $A_{ij} = e_i A e_j$ $i, j = 1, \dots, s$.

Предположим, что $A_{rm} \neq 0$ ($r \neq m$). В этом случае $A_r m e_m = e_r A_{rm} = A_{rm}$ и $A A_{rm} = A_{rm} A = A_{rm}$. Кроме того, $R A_{rm} = A_{rm} R = 0$. По Q-лемме [1, с.266] отсюда следует, что $A_{rm} = U_m^{t_r m}$ и $A_{rm} = V_r^{t'_m r}$, где U_m - простой правый A -модуль, а V_r - простой левый A -модуль.

Из определения колчана $Q(A)$ кольца A следует, что в этом случае из вершины r в вершину m идет t_{rm} стрелок, а в левом колчане $Q'(A)$ кольца A из вершины m , в вершину r идет t'_{mr} стрелок. Точно так же, если $R_{ii} \neq 0$, то $R_{ii} = U_i^{t_{ii}}$ как правый A -модуль и $R_{ii} = V_i^{t'_{ii}}$ как левый A -модуль. В колчане $Q(A)$ в вершине i есть t_{ii} петель, а в левом колчане $Q'(A)$ петель. Таким образом, двустороннее пирсовское разложение (2.1) радикала R полностью определяет правый $Q(A)$ и левый $Q'(A)$ колчаны A . Особенно простой си-

туация становится в полудистрибутивном случае.

Пусть $\bar{A} = A/R = D_1 \times \dots \times D_s$ - разложение полупростого кольца $\bar{A}$ в прямое произведение тел. Всякий простой A -модуль $U_i = P_i/P_iR$ имеет вид: $U_i = A_{ii}/R_{ii} = D_i$ где D_i - тело ($i=1, \dots, s$). По лемме Шура тело эндоморфизмов U_i изоморфно D_i . Поскольку $R^2=0$, то $A_{ij}R_{jj}=R_{ii}A_{ij}$ при $i \neq j$. Следовательно, для ненулевого A_{ij} по теореме 1.4. справедливы равенства: $A_{ij} = D_i x_{ij} = x_{ij} D_j$. По той же теореме для ненулевых R_{ii} имеем: $R_{ii} = D_i x_{ii} = x_{ii} D_i$.

Всякий конечно представимый A -модуль M представляется как ядро некоторого гомоморфизма $\psi: Q \rightarrow P$ конечно порожденных проективных A -модулей. Представляя модули Q и P виде: $Q = P_1^n \oplus \dots \oplus P_s^n$ и $P = P_1^m \oplus \dots \oplus P_s^m$, гомоморфизм $[\psi]$ можно записать в виде блочной матрицы Y , блоки которых состоят из элементов, лежащих в A_{ij} . Очевидно, что Q - проективное накрытие $Im \psi$. Поэтому, можно предполагать, что элементы диагональных блоков матрицы Y лежат в R_{ii} .

Как следует из ([1], §13.1) задача описания конечно представимых A -модулей сводится к приведению матрицы

(1) внутри i -ой горизонтальной полосы можно производить произвольные преобразования строк. При этом строки i -ой горизонтальной полосы умножаются на элементы из тела D_i слева;

(2) внутри j -ой вертикальной полосы можно производить произвольные преобразования столбцов. При этом столбцы j -ой вертикальной полосы умножаются на элементы из тела D_j справа.

3. Формулировка основной теоремы.

Конечный ориентированный граф (возможно с кратными стрелками и кратными петлями) называется колчаном.

Пусть $Q=(VQ, AQ, s, e)$ - колчан, который задается двумя множествами VQ, AQ и двумя отображениями $s, e: AQ \rightarrow VQ$. Элементы VQ называются вершинами, а элементы AQ стрелками. Вершины колчана Q будем обозначать числами $1, \dots, s$. Если стрелка $\sigma \in AQ$ соединяет вершину $i \in VQ$ с вершиной $j \in VQ$, тогда $i=s(\sigma)$ называется начальной вершиной и $j=e(\sigma)$ конечной вершиной стрелки σ .

По каждому колчану $Q=(VQ, AQ, s, e)$ построим двудольный колчан $Q^b=(VQ^b, AQ^b, s_b, e_b)$ следующим образом. Пусть $VQ=\{1, \dots, s\}$, $AQ=\{\sigma_1, \dots, \sigma_r\}$. Тогда $VQ^b=\{1, \dots, s, b(1), \dots, b(s)\}$ и $AQ^b=\{\tau_1, \dots, \tau_r\}$, причем для любой $\sigma_j \in AQ$ выполняются равенства: $s_b(\tau_j)=s(\sigma_j)$ и $e_b(\tau_j)=b(e(\sigma_j))$.

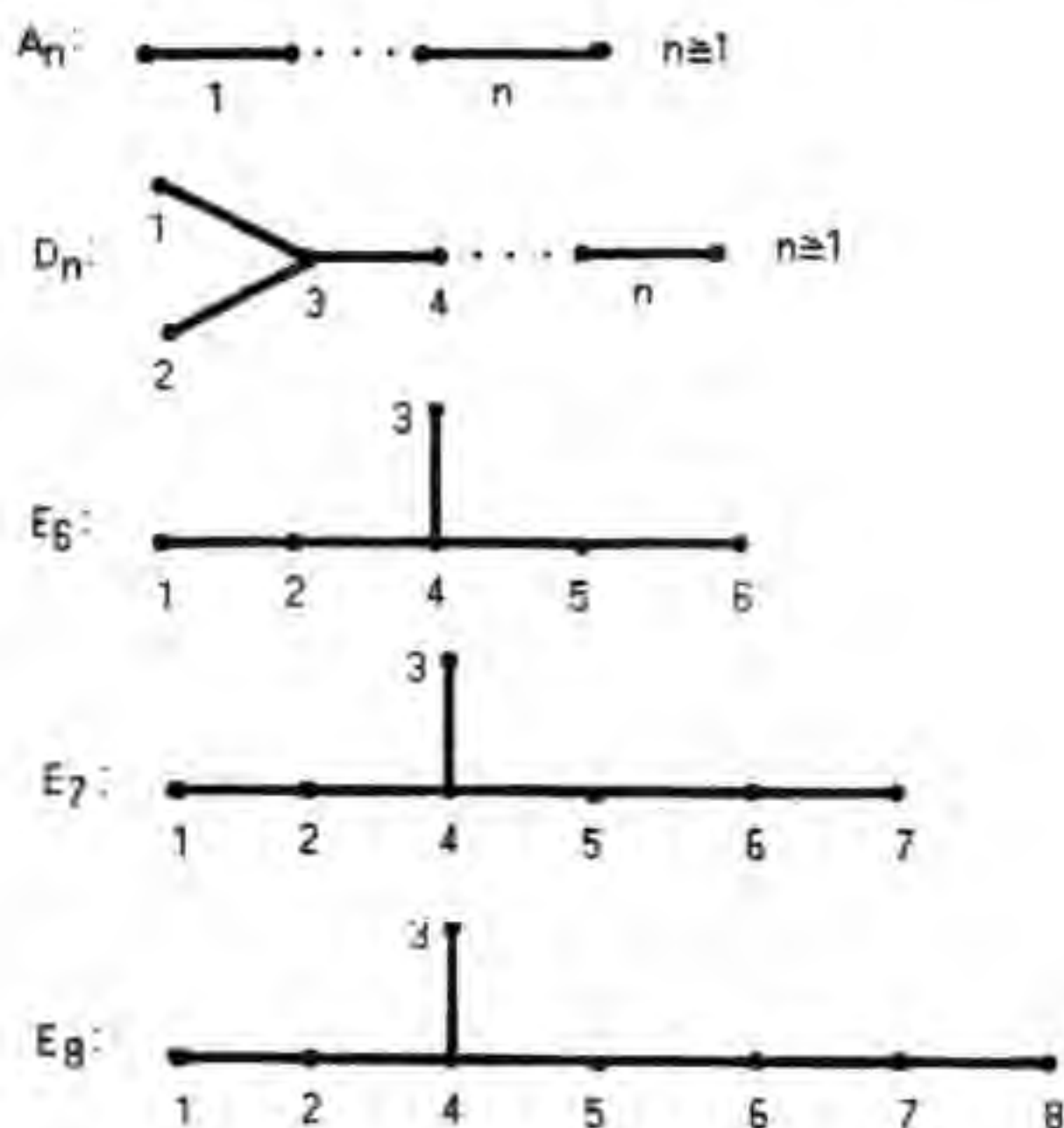
Другими словами, в колчане Q^b из вершины i в вершину $b(j)$ идет t_{ij} стрелок тогда и только тогда, когда в колчане Q из вершины i в вершину j идет t_{ij} стрелок.

Через $\bar{Q}$ обозначается неориентированный граф, полученный из Q

снятием ориентации.

Основная теорема 3.1. Пусть A – полудистрибутивное артиново кольцо, $Q(A)$ – его колчан и $R^2=0$.

Для того, чтобы кольцо A имело конечное кольцо неразложимых модулей необходимо и достаточно, чтобы неориентированный граф $\overline{Q^b}$ являлся конечным несвязным объединением диаграмм Дынкина вида A_n , D_n , E_6 , E_7 , E_8 :



Следующие определения можно найти в [3].

Пусть Q – колчан без кратных стрелок и кратных петель.

Произвольный колчан Q , удовлетворяющий этим условиям, называется бирядным, если из каждой его вершины выходит не более двух стрелок и в каждую его вершину входит не более двух стрелок.

Теорема 3.2. [3, теорема 5.13]. Следующие условия равносильны для конечного ориентированного графа Q без кратных стрелок и кратных петель: (1) граф Q – биряден;

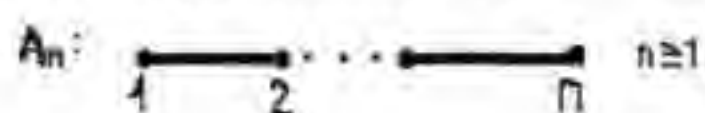
(2) неориентированный граф $\overline{Q^b}$ является несвязным объединением циклов и цепей.

Нетрудно видеть, что задача описания левых конечно представимых модулей над кольцом A сводится к задаче приведения матриц, которые получаются из матриц, задающих правые конечно представимые модули с помощью транспонирования.

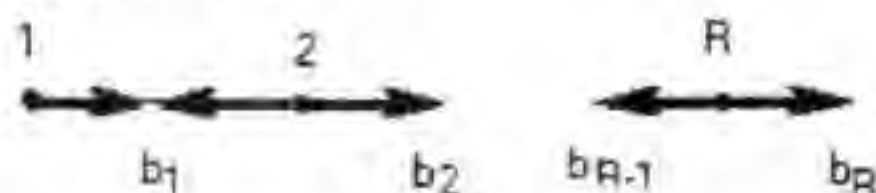
Ясно, что кольцо A одновременно имеет конечное число правых неразложимых конечно представимых A -модулей и конечное число левых неразложимых конечно представимых A -модулей. Такие кольца называются кольцами конечного типа.

В дальнейшем, мы будем рассматривать "матричные задачи", сформулированные выше, с точностью до транспонирования. Это означает, что в колчане Q^b мы можем одновременно менять все стрелки. Рассмотрим теперь колчан Q^b , который соответствует схемам Дынкина: A_n, D_n, E_6, E_7, E_8 .

Схема Дынкина A_n :



Можно считать, что в колчане Q^b из вершины l в вершину b_l всегда идет стрелка. Если число $n=2R$ — четное, то очевидно, колчан Q^b записывается в виде:

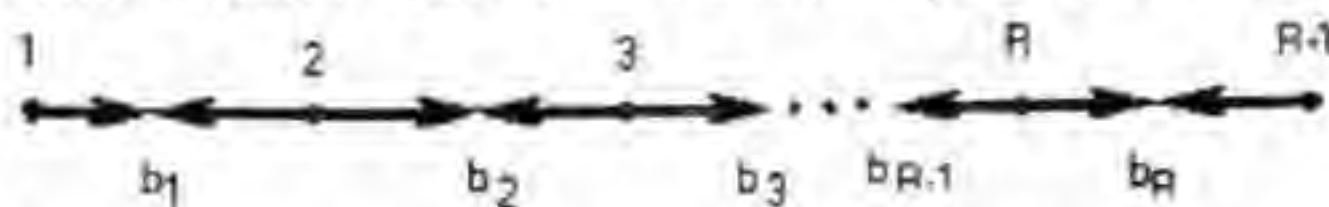


В этом случае получаем задачу о приведении такой матрицы Y :

$$Y = \begin{array}{c|ccccccc} & 1 & 2 & 3 & \dots & & & \\ \hline 1 & \text{////} & & & \dots & & & \\ 2 & \text{////} & \text{////} & & \dots & & & \\ 3 & & \text{////} & \text{////} & \dots & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ R-2 & & & & \dots & \text{////} & & \\ R-1 & & & & \dots & \text{////} & \text{////} & \\ R & & & & \dots & & \text{////} & \text{////} \\ \hline & b_1 & b_2 & b_3 & & b_{R-2} & b_{R-1} & b_R \end{array}$$

Ненулевыми являются только заштрихованные блоки. Все остальные блоки равны нулю.

Если число $n=2R+1$ — нечетное, то колчан записывается в виде:

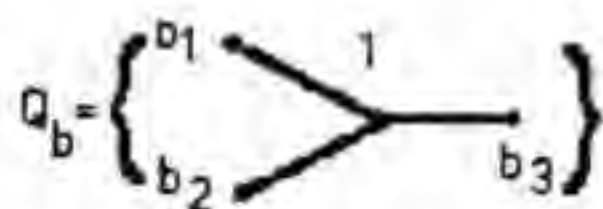


Получаем задачу о приведении следующей матрицы Y :

$$Y = \begin{array}{c|ccccccc} & 1 & 2 & 3 & \dots & & & \\ \hline 1 & \text{////} & & & \dots & & & \\ 2 & \text{////} & \text{////} & & \dots & & & \\ 3 & & \text{////} & \text{////} & \dots & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ R-1 & & & & \dots & \text{////} & & \\ R & & & & \dots & \text{////} & \text{////} & \\ R+1 & & & & \dots & & \text{////} & \text{////} \\ \hline & b_1 & b_2 & b_3 & & b_{R-2} & b_{R-1} & b_R \end{array}$$

Как и выше, ненулевыми являются, только заштрихованные блоки. Все остальные блоки равны нулю.

Случай D_n . Рассмотрим сначала случай $n=4$ и все стрелки выходят из вершины 3. Можно считать, что

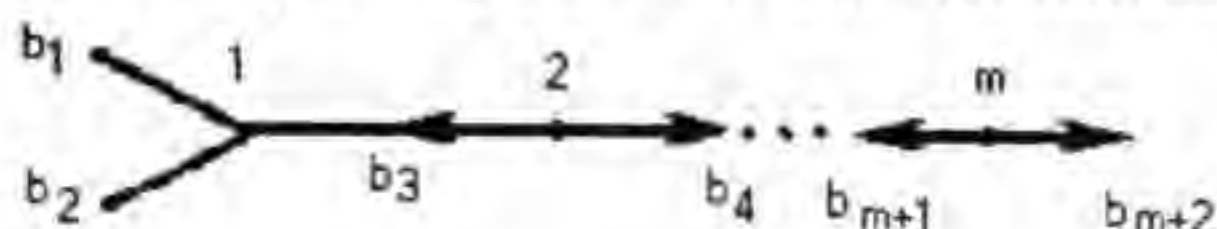


Это дает такую матрицу Y :

$$Y = \begin{matrix} & \begin{matrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} & \begin{pmatrix} \text{||||} & \text{||||} & \text{||||} \\ \text{||||} & \text{||||} & \text{||||} \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Это, в точности, задача об описании представлений частично упорядоченного множества $\{\bullet \bullet \bullet\}$.

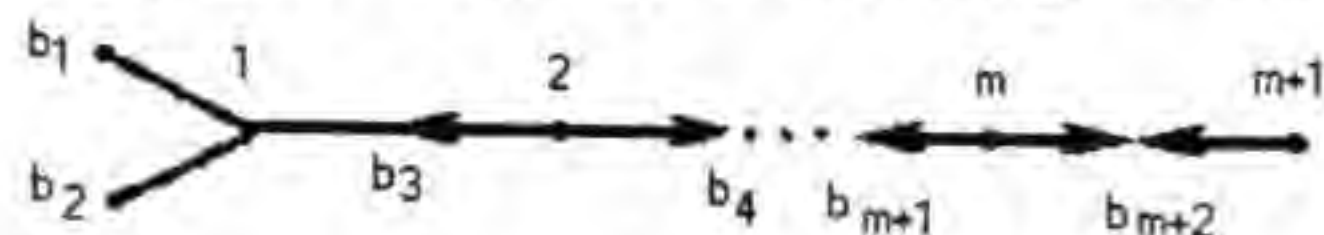
Рассмотрим случай $n=4+2(m-1)$. Колчан Q^b имеет вид:



Получаем матрицу Y следующего вида:

$$Y = \begin{matrix} & \begin{matrix} b_1 & b_2 & b_3 & \dots & b_m & b_{m+1} & b_{m+2} \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ m-1 \\ m \end{matrix} & \begin{pmatrix} \text{||||} & \text{||||} & \text{||||} & \dots & & & \\ & & \text{||||} & \dots & & & \\ & & & \dots & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ & & & \dots & & & \\ & & & \dots & \text{||||} & \text{||||} & \\ & & & \dots & & \text{||||} & \text{||||} \end{pmatrix} \end{matrix}$$

В случае $n=4+2(m-1)+1$. Колчан Q^b имеет вид:



Получаем следующую матрицу Y :

$$Y = \begin{matrix} & \begin{matrix} b_1 & b_2 & b_3 & \dots & b_{m+1} & b_{m+2} \end{matrix} \\ \begin{matrix} c \\ 1 \\ 2 \\ \vdots \\ m \\ m+1 \end{matrix} & \begin{pmatrix} \text{||||} & \text{||||} & \text{||||} & \dots & & \\ & & \text{||||} & \dots & & \\ & & & \dots & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & & \dots & & \\ & & & \dots & \text{||||} & \text{||||} \\ & & & \dots & & \text{||||} \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Как и выше, заштрихованные блоки отличны от нуля, а остальные блоки равны нулю. Все эти задачи конечного типа.

Необходимые для нас сведения о представлениях конечных частично упорядоченных множеств можно найти в [4, 5].

Пусть P произвольное частично упорядоченное множество. Подмножество множества P называется цепью если любые два его элемента сравнимы. Подмножество множества P называется антицепью никакие два элемента из этого подмножества не сравнимы.

Определение. Максимальное число $\omega(P)$ элементов в антицепи множества P называется шириной множества P .

Предложение 3.3. Пусть $(1, P)$ кардинальная сумма одного элемента и частично упорядоченного множества P ширины 2. Тогда множество P определяет на матрицах которые соответствуют 1 «вертикальное» представление следующего частично упорядоченного множества

$$S(P) = \{\bar{p}_1, \dots, \bar{p}_n, (\bar{p}_r, \bar{p}_s) \mid p_r, p_s - \text{произвольная антицепь в } P\}.$$

Порядок в $S(P)$ следующий:

- (1) $\bar{p}_i \leq \bar{p}_j$ тогда и только тогда $p_i \leq p_j$ в P ;
- (2) $\bar{p}_i \leq (\bar{p}_r, \bar{p}_s)$ тогда и только тогда если один из $p_r, p_s \leq p_i$;
- (3) $(\bar{p}_r, \bar{p}_s) \leq \bar{p}_i$ тогда и только тогда если $p_i \leq p_r$ и $p_i \leq p_s$;
- (4) $(\bar{p}_r, \bar{p}_s) \leq (\bar{p}_i, \bar{p}_j)$ тогда и только тогда если для каждого $p_x \in \{p_r, p_s\}$

есть $p_y \in \{p_i, p_j\}$ такой что $p_y \leq p_x$ в P .

Алгоритм дифференцирования Л.А.Назаровой и А.В.Ройтера [4].

Пусть P конечное частично упорядоченное множество и пусть $a \in P$ максимальный элемент, такой что

$$\omega(P \setminus a^\nabla) \leq 2,$$

где

$$a^\nabla = \{k \in P \mid k \leq a\}.$$

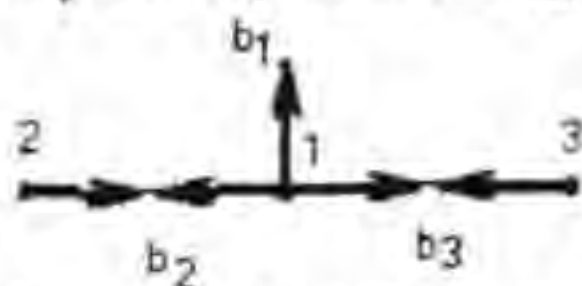
Мы определим новое частично упорядоченное множество

$$\partial_a P = (\{P \setminus a\}) \cup \{(p, q) \mid p, q, a \text{ антицепь в } P\}.$$

Отношение порядка $\leq$ в $\partial_a P$ определяется существующим отношением между элементами из P по следующим формулам:

- (1) $i \leq (p, q)$ тогда и только тогда $i \leq p$ или $i \leq q$;
- (2) $(p, q) \leq i$ тогда и только тогда $p \leq i$ и $q \leq i$;
- (3) $(p, q) \leq (p_1, q_1)$ тогда и только тогда если для любых $p_x \in \{p, q\}$ существует $p_y \in \{p_1, q_1\}$ такие что $p_x \leq p_y$.

Случай E_6 . Колчан Q^b имеет вид:



Матрица Y_6 имеет вид:

$Y_6 =$	1	$\begin{array}{ c } \hline \text{////} \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{ c } \hline \text{////} \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{ c } \hline \text{////} \\ \hline \end{array}$
	2	$\begin{array}{ c } \hline \text{////} \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{ c } \hline \text{////} \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{ c } \hline \text{////} \\ \hline \end{array}$
	3	$\begin{array}{ c } \hline \text{////} \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{ c } \hline \text{////} \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{ c } \hline \text{////} \\ \hline \end{array}$
		b_1	b_2	b_3

Рассмотрим следующие матрицы:

$\begin{array}{ c } \hline \text{////} \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{ c } \hline \text{////} \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{ c } \hline \text{////} \\ \hline \end{array}$
---	---	---

	E 0 0 0	
		E 0 E 0

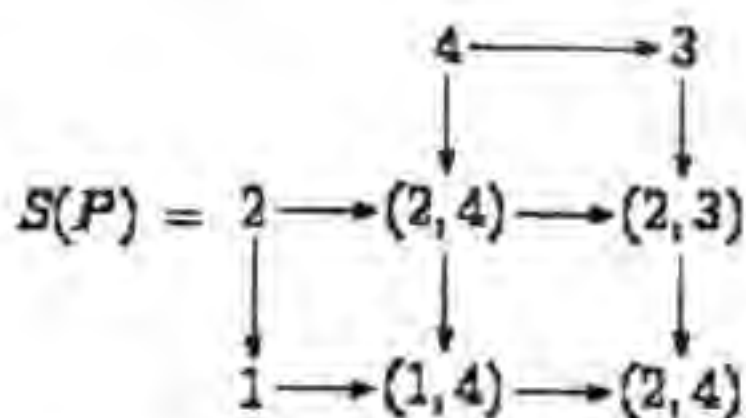
Мы получили матричное представление частично упорядоченного множества $(1, 2, 2)$.

$$P = (2, 2) = \begin{matrix} 2 & 4 \\ \bullet & \bullet \\ \vdots & \vdots \\ \bullet & \bullet \\ 1 & 3 \end{matrix}$$

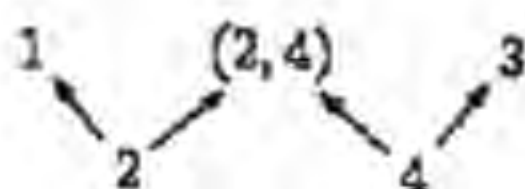
По предложению 3.3. частично упорядоченное множество $S(P)$ содержит следующие элементы:

$$S(P) = \{1, 2, 3, 4, (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4)\}$$

с такой диаграммой:



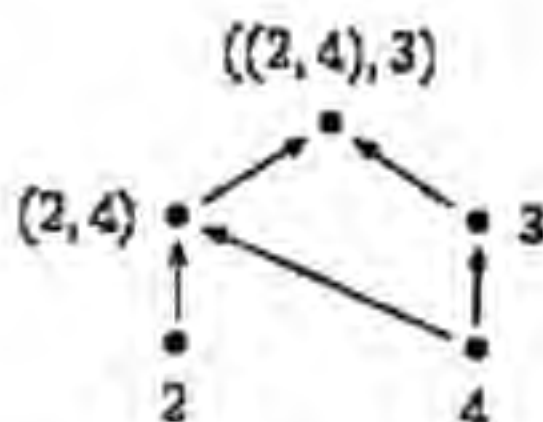
Мы будем применять алгоритм дифференцирования Назаровой-Ройтера к частично упорядоченным множествам. Мы можем убрать следующие вершины: $(1, 3)$, $(1, 4)$, и $(2, 3)$. Тогда мы получим такое частично упорядоченное множество P_5 :



Рассмотрим $\partial_1 P_5$. Очевидно, $\partial_1 P_5$ содержит следующие элементы:

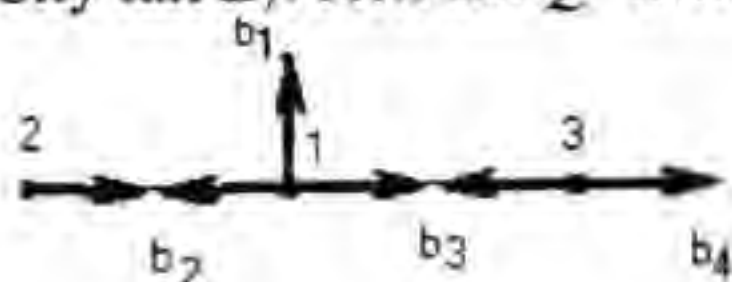
$$\partial_1 P_5 = \{((2, 4), 3), 2, 3, 4, (2, 4)\}$$

и диаграмму



Мы видим что $w(\partial_1 P_5) = 2$ и поэтому случай E_6 конечного типа. Поэтому, случай E_6 конечного типа.

Случай E_7 . Колчан Q^b имеет вид:



Матрица Y_7 имеет вид:

$Y_7 =$	1	////	////	////	
	2		////		
	3			////	////
		b_1	b_2	b_3	b_4

Мы можем считать, что 3-я горизонтальная полоса



имеет следующий вид:

3			E	0	0	E	0	0
			0	E	0	0	0	0
			0	0	0	0	0	E
			0	0	0	0	0	0
			b_1	b_2	b_3	b_4		

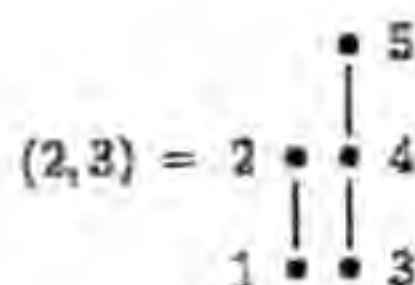
а вторую горизонтальную полосу приведем к виду:



2		E	0		
		0	0		
		b_1	b_2	b_3	b_4

В результате в первой горизонтальной полосе получим матричное представление частично упорядоченного множества $(1, 2, 3)$. Мы построим новое частично упорядоченное множество P_{11} как указано выше.

Пусть

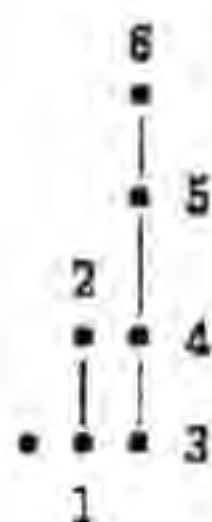


тогда

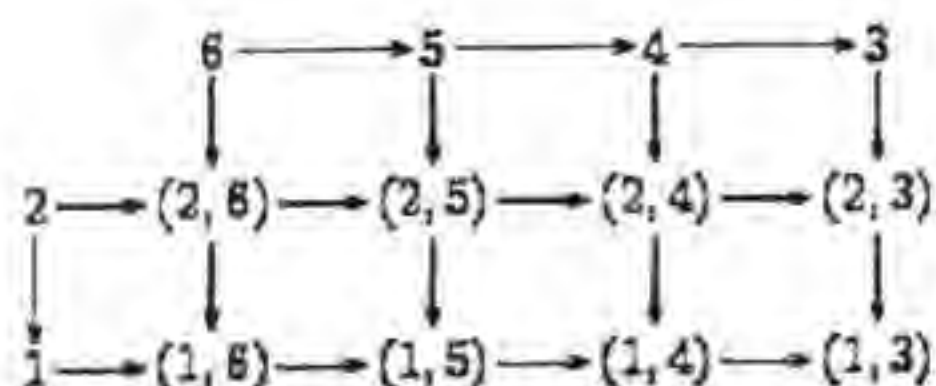
$$P_{11} = \{1, 2, 3, 4, 5, (1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 3), (2, 4), (2, 5)\}$$

частично упорядоченное множество с такой диаграммой:

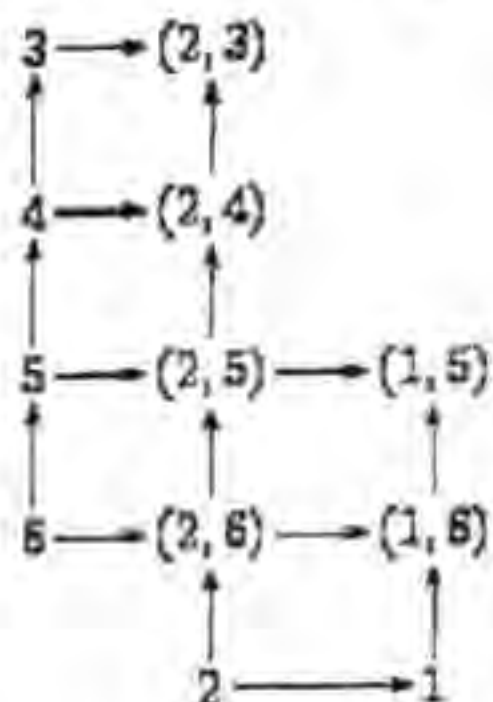
Как и выше, после приведения горизонтальных полос 2, 3, 4, мы получим матричное представление частично упорядоченного множества $(1, 2, 4)$ в первой полосе.



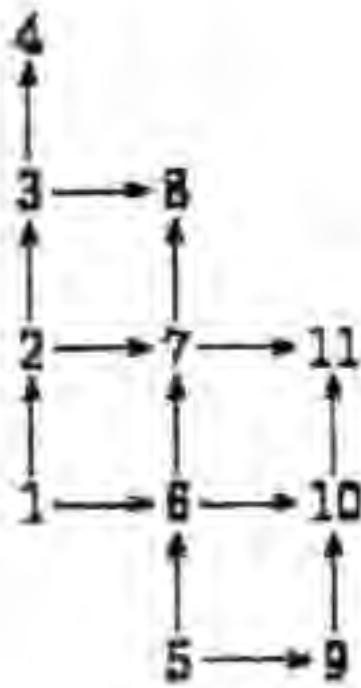
По предложению 2 мы получим частично упорядоченное множество P_{14} :



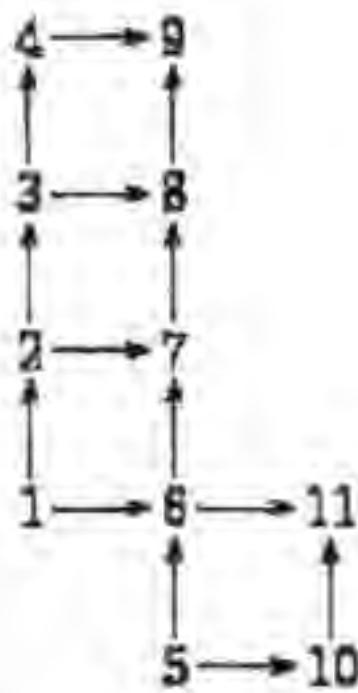
Уберем элемент $(1, 3)$ как максимальный. Частично упорядоченное множество не сравнимых с элементом $(1, 4)$ элементов следующее $3 \rightarrow (2, 3)$. Поэтому мы можем удалить $(1, 4)$



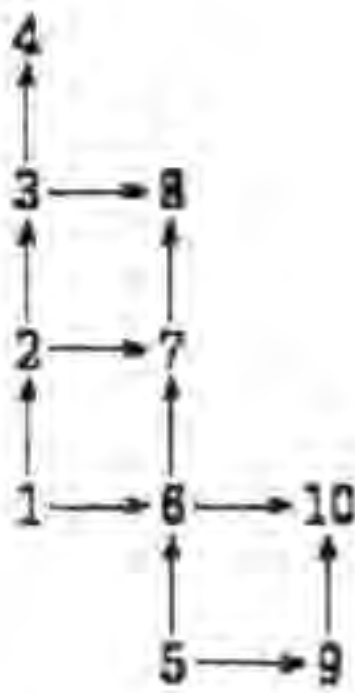
Состоит из цепи $1 \rightarrow (1, 6) \rightarrow (1, 5)$. Частично упорядоченное множество не сравнимых с $(2, 3)$ элементов. Тогда мы уберем элемент $(2, 4)$ и получим частично упорядоченное множество S_{11} :



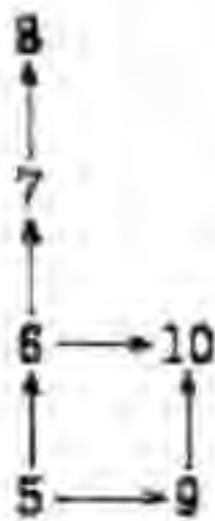
Рассмотрим $\partial_{11}S_{11}$:



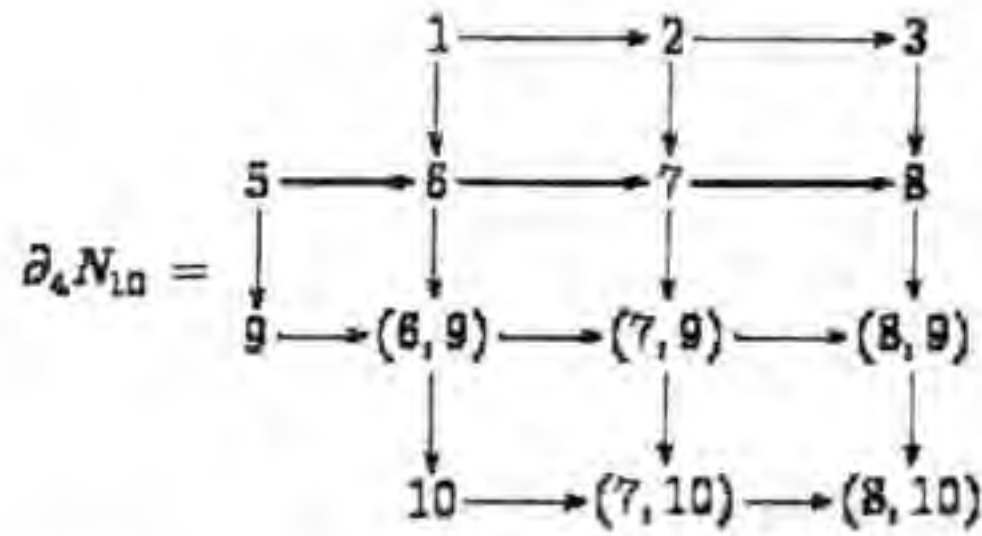
Как указано выше мы уберем элемент 9 и получим частично упорядоченное множество N_{10} :



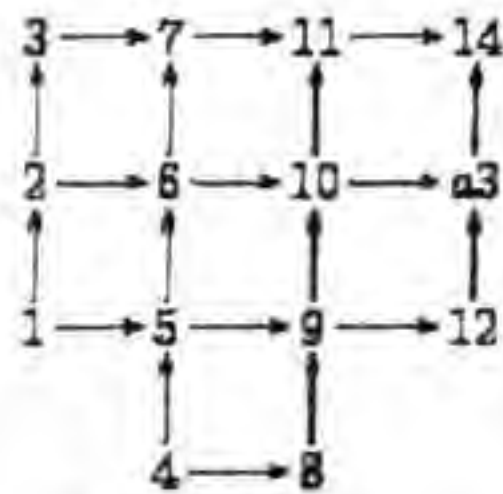
Частично упорядоченное множество несравнимых с 4 элементов следующее:



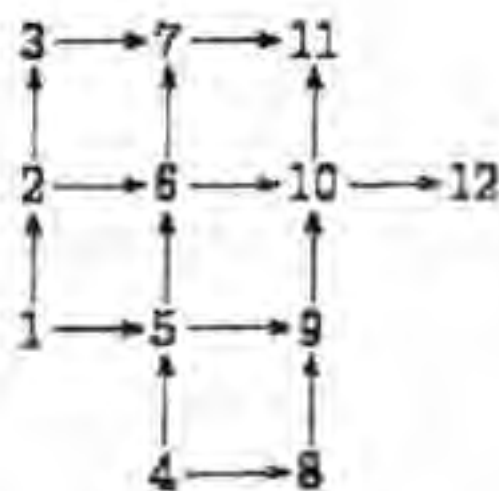
Следовательно, $\partial_4 N_{10}$ имеет такой вид:



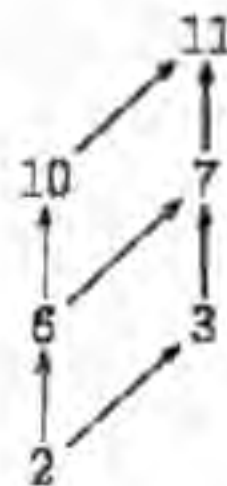
Перепишем эту диаграмму:



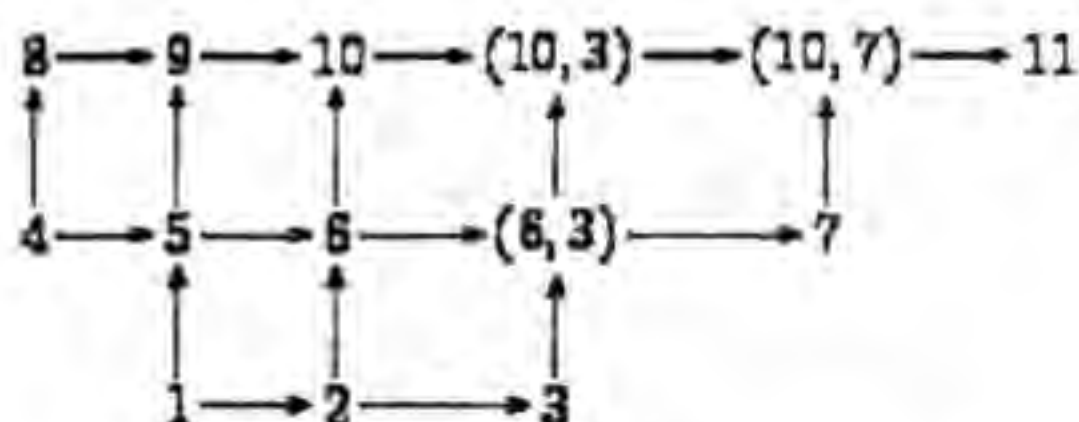
Мы убираем 14 как максимальный элемент и элемент 13 потому что множество несравнимых с 13 элементов является цепочкой: $3 \rightarrow 7 \rightarrow 11$. Получаем множество L_{12} :



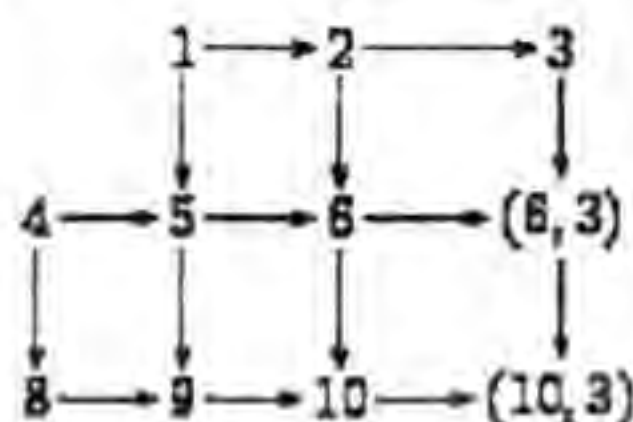
Множество несравнимых с 12 элементов:



Очевидно $\partial_{12} L_{12}$ имеет следующую диаграмму:



Снова можем убрать элементы 11, (10, 7), и 7. Получаем такое частично упорядоченное множество:



Это в точности случай E_7 . Поэтому E_8 конечного типа.

Используя алгоритм дифференцирования Назаровой-Ройтера и предложение 3.3., можно показать, что, если граф $\bar{Q}^b$ не является объединением указанных схем Дынкина A_n, D_n, E_6, E_7, E_8 то кольцо A является кольцом бесконечного типа.

Литература

1. Hazewinkel M. Gubareni N. and Kirichenko V.V., Algebras, Rings and Modules, vol.1, 575, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht/Boston/London, 2004, 380p.
2. Kirichenko V.V., Semiperfect semidistributive rings// Algebras and Representation theory, v.3, 2000, pp. 81-98.
3. Данлыев Х.М., Кириченко В.В., Халецкая З.П., Яременко Ю.В., Слабопервичные полусовершенные 2-кольца и модули над ними // Алгебраические исследования, Сборник статей, Ин-т математики НАН Украины, Киев, - 1995 – с. 5-32.
4. Назарова Л.А., Ройтер А.В., Представления частично упорядоченных множеств // Зап.научн.сем. ЛОМИ, т.28, 1972, с. 5-31
5. Клейнер М.М., Частично упорядоченные множества конечного типа // Зап.научн.сем. ЛОМИ, т.28, 1972, с. 32-41.

Надійшла до редакції 23.12.2004

УДК 512.534

Ірина М. Литвиненко*

Фінітарні напівгрупи часткових перетворень

В статті розглянуто дві природні модифікації поняття фінітарності груп підстановок для випадку (інверсних) напівгруп часткових перетворень. Охарактеризовано максимальні підгрупи, головні ідеали та відношення Гріна в (інверсних) напівгрупах частково визначених майже тотожних перетворень або майже скрізь невизначених перетворень натурального ряду.

Ключові слова: фінітарність, ідеал, відношення Гріна, максимальні підгрупи.

Iryna M. Lytvynenko*

Finitary semigroups of partial transformations

In the paper we regard two natural modifications of the notion finitariness of groups of permutations for the case of (inverse) semigroups of partial transformations. Maximal subgroups, main ideals and Grin's relations in the (inverse) semigroups of partial nearly everywhere identical transformations or nearly everywhere indefinite transformations of naturals are characterized.

Key Words: finitariness, ideal, Grin's relations, maximal subgroups.

*E-mail: lytvynenko_im@mail.univ.kiev.ua

Вступ. Перетворення φ множини M називається майже тотожним або фінітарним, якщо множина його нерухомих точок є коскінченною, тобто має скінченне доповнення в M . Групи всіх фінітарних перетворень над нескінченними множинами (так звані фінітарні симетричні групи) починаючи з 30-х років минулого століття є стандартними об'єктами теорії груп підстановок, дослідженню будови яких присвячено цілий ряд робіт різних авторів (див. [1]-[2]). При переході до напівгруп довільних перетворень або інверсних напівгруп частково визначених підстановок поняття фінітарності природним чином роздвоюється: можна розглядати напівгрупи майже тотожних або майже скрізь невизначених перетворень над M . До останнього часу ці варіанти практично не вивчалися. В даній роботі ми наводимо ряд тверджень про будову так визначених напівгруп часткових перетворень чи інверсних напівгруп часткових підстановок над множиною натуральних чисел. Охарактеризовано ідемпотенти, максимальні підгрупи в таких напівгрупах, їх праві, ліві і двосторонні головні ідеали та відношення Гріна на кожній з них.

Ми дотримуємось стандартних позначень теорії напівгруп перетворень; визначення часто уживаних понять можна знайти в [3], [4], [5]. Знак ■ означає кінець доведення.

1. Початкові відомості.

Нехай $PT(M)$ – симетрична напівгрупа частково визначених перетворень над (нескінченною) множиною M . Піднапівгрупу всіх майже тотожних перетворень із $PT(M)$ позначимо через $PT^f(M)$, а піднапівгрупу всіх майже скрізь невизначених перетворень із $PT(M)$ – $PT^F(M)$. Аналогічно, символами $IS^f(M)$ та $IS^F(M)$ позначимо піднапівгрупи фінітарних та майже невизначених перетворень симетричної інверсної напівгрупи $IS(M)$ напівгруп часткових підстановок над множиною M . На відміну від $PT(M)$ та $IS(M)$ потужність кожної з напівгруп $PT^f(M)$, $PT^F(M)$, $IS^f(M)$ та $IS^F(M)$ збігається з потужністю множини M .

Розбиття множини M на диз'юнктне об'єднання підмножин (блоків) назвемо поміченим, якщо в кожному блоці розбиття виділено певний елемент; це розбиття назвемо коскінченним, якщо всі блоки розбиття є скінченними і лише скінченна кількість блоків містить більше одного елемента.

Твердження 1. 1) Існує взаємно однозначна відповідність між ідемпотентами напівгрупи $PT^f(N)$ і поміченими коскінченними розбиттями N . Група оборотних елементів напівгрупи $PT^f(N)$ збігається з фінітарною групою підстановок $S^f(N)$ множини N . Усі максимальні підгрупи з $PT^f(N)$ ізоморфні $S^f(N)$.

2) Існує взаємно однозначна відповідність між ідемпотентами напівгрупи $PT^F(N)$ і поміченими розбиттями скінченних підмножин множини N . Кожна максимальна підгрупа напівгрупи $PT^F(N)$ ізоморфна скінченній симетричній групі S_n для певного $n \in N$, причому, для кожного $n \in N$ напівгрупа $PT^F(N)$ містить нескінченно багато максимальних підгруп, ізоморфних S_n .

Доведення проведемо лише для напівгрупи $PT^f(N)$.

1) Якщо елемент $e \in PT^f(N)$ є ідемпотентом і a належить образу елемента e , тобто існує $b \in N$ таке, що $e(b) = a$, то з рівності $e^2 = e$ маємо: $e(a) = e(e(b)) = e^2(b) = e(b) = a$. Зокрема, серед прообразів елемента a міститься сам елемент a . Побудуємо розбиття множини N на блоки наступним чином: числа a і b з N належать до одного блоку тоді і лише тоді, коли $e(a) = e(b)$. Це розбиття буде коскінченним і в кожному блоці розбиття міститься єдиний елемент, який переходить у себе. Таким чином,

кожному ідемпотенту e зіставляється помічене коскінченне розбиття ρ_e . Якщо e і f – два різні ідемпотенти, то існує число $a \in N$ таке, що $e(a) \neq f(a)$. Але тоді у блоках, що містять число a , у розбитті ρ_e буде помічено число $e(a)$, а в розбитті ρ_f – число $f(a)$. Отже, $\rho_e \neq \rho_f$ і відображення $e \mapsto \rho_e$ – ін'єктивне. Залишилось показати, що кожному поміченому коскінченному розбиттю ρ відповідає певний ідемпотент. Розглянемо відображення $e_\rho: N \mapsto N$, визначене правилом: елементу $a \in N$ ставимо у відповідність виділений елемент $e_\rho(a)$ блоку розбиття, який містить елемент a . Із поміченості розбиття ρ тепер випливає, що $e_\rho \cdot e_\rho = e_\rho$, а з коскінченності – що e_ρ буде елементом напівгрупи $PT^f(N)$ (бо точки, де e_ρ діє нетотожно, можуть належати лише не одноелементним блокам розбиття, а таких блоків лише скінченна кількість і кожен з них також скінченний).

2) Нехай H^* – група оборотних елементів напівгрупи H . Оскільки $PT(\underline{n})^* = S(\underline{n})$, то

$$PT^f(N)^* = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} PT(\underline{n}) \right)^* = \bigcup_{n=1}^{\infty} PT(\underline{n})^* = \bigcup_{n=1}^{\infty} S(\underline{n}) = S^f(N).$$

3) Досить показати, що максимальна підгрупа, яка відповідає довільному ідемпотенту $e \in PT^f(N)$, ізоморфна $S^f(N)$. Справді, множина $A = \{x \in N : e(x) = x\}$ нескінченна, а тому існує бієкція $\pi: N \mapsto A$. Тепер легко перевіряється, що відображення $\varphi: S^f(N) = S^f(A)$ визначене рівністю

$$\varphi \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n & \dots \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n & \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi(1) & \pi(2) & \dots & \pi(n) & \dots \\ \pi(i_1) & \pi(i_2) & \dots & \pi(i_n) & \dots \end{pmatrix}$$

є ізоморфізмом. ■

Твердження 2. 1) Існує бієктивна відповідність між ідемпотентами напівгрупи $IS^f(N)$ і коскінченними підмножинами множини N . Якщо ε_A – ідемпотент, що відповідає множині A , то $\varepsilon_A \varepsilon_B = \varepsilon_B \varepsilon_A = \varepsilon_{A \cap B}$, тобто множина ідемпотентів $IS^f(N)$ утворює комутативну піднапівгрупу. Усі максимальні підгрупи з $IS^f(N)$ ізоморфні $S^f(N)$.

2) Ідемпотентами $IS^f(N)$ служать всі часткові тотожні підстановки ε_A для всіх скінченних підмножин N і тільки вони. При цьому для будь-яких $A, B \subseteq N$ має місце рівність, $\varepsilon_A \varepsilon_B = \varepsilon_{A \cap B} = \varepsilon_B \varepsilon_A$, тобто

напівгрупа ідемпотентів $IS^F(N)$ ізоморфна напівгрупі всіх скінченних підмножин множини N з операцією $\cap$.

Доведення цього твердження цілком аналогічне доведенню твердження 1 і ми його не наводимо.

З тверджень 1, 2 випливає, зокрема, що напівгрупи $PT^f(N)$, $IS^f(N)$, $PT^F(N)$ та $IS^F(N)$ є попарно не ізоморфними.

2. Головні ідеали

Нехай $\text{dom } \alpha$ – область визначення, а $\alpha(N) = N\alpha$ або $\text{ran } \alpha$ – область значень перетворення $\alpha \in PT^f(N)$, $\pi_\alpha = \alpha \circ \alpha^{-1}$ – розбиття множини $\text{dom } \alpha$, пов'язане з α , тобто відношення еквівалентності π_α на $\text{dom } \alpha$, визначене умовою: $x\pi_\alpha y$ тоді і лише тоді, коли $x\alpha = y\alpha$, $x, y \in \text{dom } \alpha$. Клас еквівалентності π_α , який містить елемент x , позначимо $\bar{x}$. Відображення множини $\text{dom } \alpha / \pi_\alpha$ на множину $\alpha(N)$, $\bar{x} \mapsto x\alpha$, є взаємно однозначним відображенням. Звідси $|\text{dom } \alpha / \pi_\alpha| = |N\alpha|$. Це кардинальне число називатимемо рангом перетворення α і позначатимемо $\text{rank } \alpha$. Дефектом перетворення α називається число $\text{def } \alpha = |\{x \in N : x \notin \text{dom } \alpha\}|$. Як це прийнято, символом $R(\alpha)$ (відповідно $L(\alpha)$, $J(\alpha)$) позначимо правий (відповідно лівий, двосторонній) ідеал породжений елементом α .

Нагадаємо, що на множині відношень еквівалентності над фіксованою множиною M існує природний частковий порядок $\leq$, визначений наступним чином: $\rho_1 \leq \rho_2$ тоді і тільки тоді, коли для довільних $x, y \in M$ з $x\rho_1 y$ випливає $x\rho_2 y$.

Лема 1. Кожний головний лівий (правий) ідеал напівгрупи $PT^f(N)$ породжується деяким ідемпотентом.

Теорема 1. 1) Перетворення $\beta \in PT^f(N)$ (відповідно $\beta \in PT^F(N)$) належить до $L(\alpha)$, $\alpha \in PT^f(N)$ (відповідно $\alpha \in PT^F(N)$), тоді й лише тоді, коли $N\beta \subseteq N\alpha$.

2) Перетворення $\beta \in PT^f(N)$ (відповідно $\beta \in PT^F(N)$) належить до $R(\alpha)$, $\alpha \in PT^f(N)$ (відповідно $PT^F(N)$), тоді і лише тоді, коли $\text{dom } \beta$ є об'єднанням певних блоків розбиття π_α , а кожний блок розбиття π_β також є об'єднанням якихось блоків розбиття π_α .

Доведення проведемо для напівгрупи $PT^f(N)$. 1) Нехай $\beta \in L(\alpha)$ і $x \in \text{dom } \beta$. Тоді існує такий елемент $\gamma \in PT^f(N)$, що $\beta = \gamma\alpha$. Але тоді $\beta(x) = (\gamma\alpha)(x) = \alpha(\gamma(x))$. Отже, $\beta(x) \in N\alpha$ і $N\beta \subseteq N\alpha$. З іншого боку, нехай $N\beta \subseteq N\alpha$. Для кожного $x \in N\alpha$ виберемо фіксований елемент y_x такий, що $\alpha(y_x) = x$. Розглянемо тепер елемент $\gamma \in PT^f(N)$, для якого $\text{dom } \gamma = \text{dom } \beta$ і $\gamma(z) = y_x$ тоді і тільки тоді, коли $\beta(z) = x$. Очевидно, що $\gamma\alpha = \beta$, тобто $\beta \in L(\alpha)$.

2) Якщо $\beta \in PT^f(N)$, то $\beta = \alpha\gamma$ для певного елемента $\gamma \in PT^f(N)$. Звідси випливає, що $\text{dom } \beta \subseteq \text{dom } \gamma$. Крім того, якщо $x \in \text{dom } \beta$, то $\alpha(x)$ належить множині $\text{dom } \gamma$. Але тоді для довільного y із рівності $\alpha(x) = \alpha(y)$ випливає $\beta(y) = (\alpha\gamma)(y) = \gamma(\alpha(y)) = \gamma(\alpha(x)) = (\alpha\gamma)(x) = \beta(x)$. Отже, якщо $x \in \text{dom } \beta$, то всі елементи того блоку розбиття π_α , який містить x , також належать множині $\text{dom } \beta$, причому попадають в один блок розбиття π_β . Це доводить необхідність умови.

Припустимо тепер, що елемент β задовольняє умови твердження. Розглянемо елемент $\gamma \in PT^f(N)$, визначений наступним чином: $\text{dom } \gamma = \alpha(\text{dom } \beta)$ і для кожного $x \in \text{dom } \gamma$ $\gamma(x) = \beta(y)$, де y такий елемент із $\text{dom } \beta$, що $\alpha(y) = x$. Тоді для довільного $y \in \text{dom } \beta$ $(\alpha\gamma)(y) = \gamma(\alpha(y)) = \beta(y)$. Крім того, $\text{dom } \beta = \text{dom } \alpha\gamma$. Отже, $\beta = \alpha\gamma$ і $\beta \in \alpha \cdot PT^f(N) = R(\alpha)$, що й треба було довести.

Для напівгрупи $PT^f(N)$ доведення аналогічне. ■

Теорема 2. Для довільного $\alpha \in IS^f(N)$ мають місце рівності:

- 1) $R(\alpha) = \{\beta \in IS^f(N) \mid \text{dom } \beta \subseteq \text{dom } \alpha\}$;
- 2) $L(\alpha) = \{\beta \in IS^f(N) \mid \text{ran } \beta \subseteq \text{ran } \alpha\}$;
- 3) $J(\alpha) = \{\beta \in IS^f(N) \mid \text{def } \beta \geq \text{def } \alpha\}$.

Доведення. 1) Оскільки $(\alpha\beta)(x) = \beta(\alpha(x))$, то для визначеності в точці x добутку $\alpha\beta$ необхідна визначеність у точці x перетворення α . Зокрема, звідси випливає включення $\text{dom}(\alpha\beta) \subseteq \text{dom } \alpha$ і необхідність умови твердження.

З іншого боку, нехай $\text{dom } \gamma \subseteq \text{dom } \alpha$. Розглянемо елемент $\beta \in IS^f(N)$, для якого $\text{dom } \beta = \{\alpha(x) : x \in \text{dom } \gamma\}$ і для будь-якого $\alpha(x) \in \text{dom } \beta$ $\beta(\alpha(x)) = \gamma(x)$. Позаяк кожний елемент $y \in \text{dom } \beta$ зображується у вигляді $y = \alpha(x)$ однозначно, то елемент β визначений коректно. Крім того, майже для всіх елементів $x \in N$ $\alpha(x) = x$ і $\gamma(x) = x$, а тому для цих же елементів з N маємо $\beta(x) = x$, тобто елемент β справді належить $IS^f(N)$. Із

означення елемента β одразу впливає рівність $\gamma = \alpha\beta$. Отже, $\gamma \in \alpha \cdot IS^f(N)$, що доводить достатність умови.

2) Нехай $\beta \in L(\alpha)$ і $x \in \text{ran } \beta$. Тоді існують такі $\gamma \in IS^f(N)$ і $y \in N$, що $\beta = \gamma\alpha$ і $x = \beta(y)$. Але тоді $x = \beta(y) = (\gamma\alpha)(y) = \alpha(\gamma(y))$. Отже, $x \in \text{ran } \alpha$ і $\text{ran } \beta \subseteq \text{ran } \alpha$. З іншого боку, нехай $\text{ran } \beta \subseteq \text{ran } \alpha$. Розглянемо елемент $\gamma = \beta\alpha^{-1}$. Очевидно, що $\gamma \in IS^f(N)$. Крім того, для довільного $x \in \text{dom } \beta$ виконується $(\gamma\alpha)(x) = (\beta\alpha^{-1}\alpha)(x) = \alpha(\alpha^{-1}(\beta(x))) = \beta(x)$, бо $\beta(x) \in \text{dom } \alpha^{-1}$. Звідси ж випливає, що $\text{dom}(\gamma\alpha) \supseteq \text{dom } \beta$. З іншого боку, з рівності $\gamma\alpha = \beta\alpha^{-1}\alpha$ випливає, що $\text{dom}(\gamma\alpha) \subseteq \text{dom } \beta$. Отже, $\text{dom}(\gamma\alpha) = \text{dom } \beta$ і $\gamma\alpha = \beta$, тобто $\beta \in L(\alpha)$.

3) Необхідність умови одразу випливає з того, що при множенні "область невизначення" може лише збільшуватись, точніше $\text{def}(\alpha\beta) \geq \max\{\text{def } \alpha, \text{def } \beta\}$. Нехай тепер $\text{def } \beta \geq \text{def } \alpha$. Позначимо $A = \{x \in \text{dom } \alpha : \alpha(x) = x\}$, $B = \{x \in \text{dom } \beta : \beta(x) = x\}$ і $C = A \cap B$. Множина $N \setminus C$ – скінченна, а тому скінченними будуть і множини $\text{dom } \alpha \setminus C$ і $\text{dom } \beta \setminus C$. Із нерівності $\text{def } \beta \geq \text{def } \alpha$ випливає нерівність $|\text{dom } \beta \setminus C| \leq |\text{dom } \alpha \setminus C|$, а тому в $\text{dom } \alpha \setminus C$ можна вибрати підмножину D , рівнопотужну множині $\text{dom } \beta \setminus C$. Нехай $g : \text{dom } \beta \setminus C \mapsto D$ – яка-небудь фіксована бієкція множини $\text{dom } \beta \setminus C$ на множину D . Визначимо відображення $\gamma_1 : \text{dom } \beta \mapsto \text{dom } \alpha$ правилом:

$$\gamma_1(x) = \begin{cases} x, & \text{якщо } x \in C, \\ g(x), & \text{якщо } x \in \text{dom } \beta \setminus C. \end{cases}$$

Очевидно, що $\gamma_1 : \text{dom } \beta \mapsto \text{dom } \alpha$ – ін'єкція. Крім того, зі скінченності $N \setminus C$ випливає, що γ_1 можна розглядати як елемент напівгрупи $IS^f(N)$. Розглянемо ще елемент γ_2 , який відображає множину $C \cup a(D)$ на множину $\text{ran } \beta$ за правилом:

$$\gamma_2(x) = \begin{cases} x, & \text{якщо } x \in C, \\ \beta(g^{-1}(\alpha^{-1}(x))), & \text{якщо } x \in a(D). \end{cases}$$

Відображення γ_2 лишає нерухомими всі точки з C , тобто майже всі елементи з N , а ін'єктивність γ_2 випливає з ін'єктивності β, g^{-1} і α^{-1} . Отже, $\gamma_2 \in IS^f(N)$. Із означень γ_1 і γ_2 тепер одразу випливає рівність $b = \gamma_1 a \gamma_2$. Отже, $\beta \in IS^f(N) \cdot \alpha \cdot IS^f(N)$ і достатність умови також доведена. ■

Цілком аналогічно теоремі 2 доводиться

Теорема 2'. Для довільного $\alpha \in IS^f(N)$ мають місце рівності:

- 1) $R(\alpha) = \{\beta \in IS^F(N) \mid \text{dom } \beta \subseteq \text{dom } \alpha\};$
- 2) $L(\alpha) = \{\beta \in IS^F(N) \mid \text{ran } \beta \subseteq \text{ran } \alpha\};$
- 3) $J(\alpha) = \{\beta \in IS^F(N) \mid \text{rank } \beta \leq \text{rank } \alpha\}.$

3. Відношення Гріна

Відношення Гріна $\mathcal{R}, \mathcal{L}, \mathcal{H}, \mathcal{D}, \mathcal{J}$ на кожній з напівгруп $PT^f(N)$, $PT^F(N)$, $IS^f(N)$ та $IS^F(N)$ характеризується подібним чином. Оскільки $\mathcal{H} = \mathcal{L} \wedge \mathcal{R}$ і для кожної з цих напівгруп справедлива рівність $\mathcal{D} = \mathcal{J}$, то досить охарактеризувати лише відношення $\mathcal{R}, \mathcal{L}, \mathcal{D}$ на них.

Теорема 3. Має місце така характеристика відношень Гріна $\mathcal{R}, \mathcal{L}, \mathcal{D}$ в напівгрупах $PT^f(N)$, $PT^F(N)$, $IS^f(N)$ та $IS^F(N)$:

	$PT^f(N)$	$PT^F(N)$	$IS^f(N)$	$IS^F(N)$
$\alpha \mathcal{R} \beta$	$\pi_\alpha = \pi_\beta$	$\pi_\alpha = \pi_\beta$	$\text{dom } \alpha = \text{dom } \beta$	$\text{dom } \alpha = \text{dom } \beta$
$\alpha \mathcal{L} \beta$	$X\alpha = X\beta$	$\text{ran } \alpha = \text{ran } \beta$	$\text{ran } \alpha = \text{ran } \beta$	$\text{ran } \alpha = \text{ran } \beta$
$\alpha \mathcal{D} \beta$	$\text{rank } \alpha_{(N \setminus C)} = \text{rank } \beta_{(N \setminus C)}$	$\text{rank } \alpha = \text{rank } \beta$	$\text{def } \alpha = \text{def } \beta$	$\text{rank } \alpha = \text{rank } \beta$

(тут $\alpha_{(N \setminus C)}$ – обмеження перетворення α на множину $N \setminus C$, де $C = A \cap B$, $A = \{x \in \text{dom } \alpha : \alpha(x) = x\}$ і $B = \{x \in \text{dom } \beta : \beta(x) = x\}$)

Доведення проведемо, наприклад, для тверджень із третього стовпчика таблиці.

1) Нехай $\text{dom } \alpha = \text{dom } \beta$. Визначимо $\varphi \in IS^f(N)$ так, щоб $\text{dom } \varphi = \text{ran } \beta$, $\varphi(\beta(x)) = \alpha(x)$ для $x \in \text{dom } \beta = \text{dom } \alpha$, а також $\text{dom } \psi = \text{dom } \alpha$, $\psi(\alpha(x)) = \beta(x)$ для $x \in \text{dom } \alpha = \text{dom } \beta$. Тоді, очевидно, що $\alpha = \beta \circ \varphi$, $\beta = \alpha \circ \psi$. Це й означає, що $\alpha \mathcal{R} \beta$.

У зворотний бік, якщо виконується $\alpha \mathcal{R} \beta$, то існують $\varphi, \psi \in IS^f(N)$ такі, що $\alpha = \beta \circ \varphi$ та $\beta = \alpha \circ \psi$. З першої рівності маємо $\text{dom } \alpha \subseteq \text{dom } \beta$, а з другої $\text{dom } \beta \subseteq \text{dom } \alpha$.

2) Нехай $\text{ran } \alpha = \text{ran } \beta$. Визначимо $\varphi \in IS^f(N)$ так, щоб $\text{dom } \varphi = \text{dom } \alpha$ та $\varphi(x) = \beta^{-1}(\alpha(x))$ для $x \in \text{dom } \alpha$. Це можливо, бо $\text{ran } \alpha = \text{ran } \beta$ та β є частковою бієкцією. Тоді, очевидно, що $\alpha = \beta \circ \varphi$. Визначимо $\psi \in IS^f(N)$ так, щоб $\text{dom } \psi = \text{dom } \beta$ та $\psi(x) = \alpha^{-1}(\beta(x))$ для $x \in \text{dom } \beta$. Тоді, очевидно, що $\beta = \alpha \circ \psi$. Це й означає, що $\alpha \mathcal{L} \beta$.

У зворотний бік, якщо $\alpha \mathcal{L} \beta$, то існують $\varphi, \psi \in IS^f(N)$, такі, що $\alpha = \beta \circ \varphi$ та $\beta = \alpha \circ \psi$. З першої рівності маємо $\text{ran } \beta \subseteq \text{ran } \alpha$, а з другої $\text{ran } \alpha \subseteq \text{ran } \beta$.

3) Оскільки $\mathcal{D} = \mathcal{L} \circ \mathcal{R}$, то з опису $\mathcal{L}$ та $\mathcal{R}$ одразу випливає, що ранги довільних двох елементів, які знаходяться у відношенні $\mathcal{D}$, збігаються. Нехай $\text{rank } \alpha = \text{rank } \beta$. Тоді існує елемент $\varphi \in S_n \in IS_n$, такий що $\text{ran}(\varphi \alpha) = \text{ran } \beta$. Оскільки $\varphi \in S_n$, то він оборотний, тобто має місце $\alpha \mathcal{R}(\varphi \circ \alpha)$. Але $\text{ran } \beta = \text{ran}(\varphi \alpha)$. Отже, $\alpha \mathcal{L}(\varphi \circ \alpha)$ за вже доведеним описом $\mathcal{L}$, а тому $(\alpha, \beta) \in \mathcal{L} \circ \mathcal{R}$. ■

Автор висловлює щирю подяку доц. О.Г. Ганюшкіну за постановку задачі та цінні поради.

Література

1. Kegel O.H. and Wehrfritz A.F. Locally finite groups // Amsterdam- London, 1973.
2. M. Bhattacharjee, D. Macpherson, R.G. Möller, P.M. Neuman Notes on infinite permutation groups. Lecture Notes in Mathematics // Springer-Verlag, Berlin etc., 1997.
3. Клиффорд А., Престон Г. Алгебраическая теория полугрупп // – М.: Мир, 1972. – т. 1, 2.
4. Общая алгебра. Под ред. Скорнякова, М.: Наука, 1991. – т.2.
5. Ganyushkin O., Mazorchuk V. From IS_n through $\mathcal{T}_n$ to $\mathcal{PT}_n$ // Preprint. Bielefeld, 2001, 52p.

Надійшла до редакції 07.02.2005

УДК 519.21

Юлія. С. Мішура*, Світлана. А.
Ільченко*

Yuliya S. Mishura*, Svitlana A.
Ilchenko*

Побудова вінерівських інтегралів відносно дробових броунівських полів

The construction of Wiener integrals with respect to fractional Brownian fields

В даній статті побудовано вінерівський інтеграл (тобто інтеграл від не випадкової функції) по дробовому броунівському полю та досліджено його властивості, зокрема побудовано сильний мартингал Молчана, що відповідає дробовому броунівському полю.

We construct Wiener integral (the integral with nonrandom integrand) with respect to fractional Brownian field and investigate its properties. In particular, the strong Molchan martingale is constructed and the relations between different Gaussian fields are established.

Ключові слова: вінерівський інтеграл, дробове броунівське поле, сильний мартингал Молчана.

Key Words: Wiener integral, fractional Brownian fields, strong Molchan martingale.

*E-mail: myus@univ.kiev.ua, ilchenko_sv@univ.kiev.ua

1. Вступ

В даній статті побудовано операції інтегрування відносно двопараметричного дробового броунівського руху (ДДБР). Вивчено спосіб представлення двопараметричного сильного мартингалу Молчана через інтеграл відносно ДДБР на скінченному відрізку. Розглянуто допоміжні двопараметричні процеси та виведено інтегральні співвідношення між ними. Знайдено представлення ДДБР у вигляді інтеграла по двопараметричному вінерівському процесу. В однопараметричному випадку аналогічні питання розглянуто в статті [1].

1.1. Означення дробового броунівського поля

Нехай R_+^2 – додатний квадрант площини, $t=(t_1, t_2) \in R_+^2$. Дробові броунівські поля на площині можуть бути означені різними способами [2,3]. А саме, для випадкового поля дробова броунівська властивість може використовуватись або покоординатно, або на кожному промені, що виходить з початку координат. Перший випадок краще моделює процеси зміни явищ в атмосфері Землі, фінансові ринки та моделі в радіоелектроніці [4], другий краще відповідає моделям в гідромеханіці [3]. Ми будемо розглядати поля, які мають дробову броунівську властивість покоординатно.

Означення 1.1. [5] Випадкове поле $B=\{B_t, t \in R_+^2\}$ називається двопараметричним дробовим броунівським полем (ДДБР) з індексами Хюрста H_1 та H_2 , $H_i \in (0,1)$, $i=1,2$, якщо воно задовольняє умови

(1) B_t – гауссівське поле, $B_t=0$, $t \in \partial R_+^2$;

$$(2) \text{EB}_t=0, \text{EB}_t\text{B}_s=\frac{1}{4}\prod_{i=1,2}\left(t_i^{2H_i}+s_i^{2H_i}-|t_i-s_i|^{2H_i}\right), i=1,2;$$

(3) траєкторії поля В неперервні з імовірністю 1;

(4) прирости $\Delta_s\text{B}_t:=\text{B}_t-\text{B}_{s,t_2}-\text{B}_{t,t_2}+\text{B}_s, s\leq t$, стаціонарні.

Зауважимо, що при кожному фіксованому $t_2>0$ процес B_{t,t_2} є дробовим броунівським рухом з індексом Хюрста H_1 , а при кожному $t_1>0$ процес B_{t,t_1} також є дробовим броунівським рухом, але з індексом Хюрста H_2 . В роботі розглядається лише випадок $H_i\in(1/2,1), i=1,2$.

Згідно з результатами статті [2], траєкторії поля В майже напевно належать до класу $H^{H_1-\varepsilon_1, H_2-\varepsilon_2}(R_+^2)$ для будь-якого $0<\varepsilon_i<H_i, i=1,2$.

У роботі [6] наведено означення ДДБР у вигляді інтеграла по вінерівському полю: $\text{B}_t=C_{H_1}C_{H_2}\int_{R_+^2}\prod_{i=1,2}\left((t_i-u_i)_+^{H_i-1/2}-(-u_i)_+^{H_i-1/2}\right)dW_u$, де W_u – дво-параметричне вінерівське поле. З метою нормалізації $\text{E}(\text{B}_t)^2$ обирають

$$C_{H_i}=\left(\frac{2H_i\Gamma(3/2-H_i)}{\Gamma(H_i+1/2)(2-2H_i)}\right)^{1/2}, i=1,2.$$

2. Властивості вінерівського інтеграла за ДБР у двопараметричному випадку

2.1. Інтеграл від невинадкової функції за ДДБР

Позначимо $t=(t_1, t_2), s=(s_1, s_2)\in R_+^2$. Побудуємо вінерівський інтеграл по ДДБР B_t . Вінерівським інтегралом прийнято називати інтеграл з невинадковою підінтегральною функцією. Оскільки виконується умова (2) з означення 1.1: $\text{EB}_t\text{B}_s=\frac{1}{4}\prod_{i=1,2}\left(t_i^{2H_i}+s_i^{2H_i}-|t_i-s_i|^{2H_i}\right)$, тобто має місце розклад дисперсії (кореляційної функції) на добуток одновимірних компонент, то для $H_i>1/2, \forall i=1,2$ можна визначити наступний інтегральний оператор Γ_2 :

$$\Gamma_2 f(t)=\prod_{i=1,2}\left(H_i(2H_i-1)\right)\int_{R_+^2}f(s)\prod_{i=1,2}\left(|s_i-t_i|^{2H_i-2}\right)ds,$$

а також скалярний добуток

$$\langle f, g \rangle_{\Gamma_2}:=\langle f, \Gamma_2 g \rangle=\prod_{i=1,2}\left(H_i(2H_i-1)\right)\int_{R_+^2}f(s)g(t)\prod_{i=1,2}\left(|s_i-t_i|^{2H_i-2}\right)dsdt,$$

де $\langle \cdot \rangle$ – звичайний скалярний добуток в $L_2[0, \infty)^2$.

Позначимо через $L_2^{\Gamma_2}$ простір еквівалентних класів вимірних функцій f таких, що $\langle |f|, |f| \rangle_{\Gamma_2} < \infty$. Тепер ясно, що відображення $\text{B}_t \rightarrow 1_{[0,t_1] \times [0,t_2]}$ можна продовжити до ізометрії між деяким підпростором гауссівського простору, породженого $\text{B}_t, t \in R_+^2$, тобто найменшого замкненого лінійного підпростору $L_2(\Omega, \mathcal{F}, P)$, що містить $\{\text{B}_t, t \in R_+^2\}$, та простором $L_2^{\Gamma_2}$. Для $f \in L_2^{\Gamma_2}$ інтеграл $\int_{R_+^2}f(t)d\text{B}_t$ тепер можна визначити як образ функції f в цій ізометрії.

2.2. Сильний мартингал Молчана

На просторі $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ розглянемо деяке випадкове поле $X = \{X_s, s \in \mathbb{R}_+^2\}$, яке дорівнює нулю на $\partial \mathbb{R}_+^2$. Розглянемо потік σ -алгебр $\mathfrak{F}_s = \{X_u, u \leq s\}$ та $\mathfrak{F}_s^* = \{X_u, s \not\leq u\}, s \in \mathbb{R}_+^2$. Випадкове поле X називається сильним мартингалом (відносно потоку $\mathfrak{F}_s$), якщо:

$$(1) E|X_s| < \infty, \forall s \in \mathbb{R}_+^2;$$

$$(2) \forall s \leq t, E(\Delta_s X_t / \mathfrak{F}_s^*) = 0, \Delta_s X_t = X_t - X_{s_1 t_2} - X_{t_1 s_2} + X_s.$$

Очевидно, будь-яке поле з незалежними приростами – сильний мартингал.

Тепер розглянемо наступну функцію

$$\omega_2(t, s) = \begin{cases} \prod_{i=1,2} C_{H_i}^{(1)} s_i^{1/2-H_i} (t_i - s_i)^{1/2-H_i}, & s_i \in (0, t_i), s_2 \in (0, t_2); \\ 0, & \exists i: s_i \notin (0, t_i), \end{cases} \quad (1)$$

де $C_{H_i}^{(1)} = (2H_i B(3/2 - H_i, H_i + 1/2))^{-1}, i = 1, 2$.

Теорема 2.1. Нехай функція $\omega_2(t, s)$ має вигляд (1). Тоді, для $i=1, 2, j=3-i$

$$\Gamma_2 \omega_2(t, \cdot)(s) = \begin{cases} 1, & s_i \in [0, t_i), s_2 \in [0, t_2); \\ \frac{(H_i - 1/2) s_i^{H_i - 1/2}}{(3/2 - H_i) B(H_i + 1/2, 2 - 2H_i)} \times \\ \times \int_0^{t_i} u_i^{1-2H_i} (s_i - u_i)^{H_i - 3/2} du_i, & s_i \geq t_i, s_j \in [0, t_j); \\ \prod_{i=1,2} \frac{(H_i - 1/2) s_i^{H_i - 1/2}}{(3/2 - H_i) B(H_i + 1/2, 2 - 2H_i)} \times \\ \times \int_{[0, t_i]} \prod_{i=1,2} u_i^{1-2H_i} (s_i - u_i)^{H_i - 3/2} du_i, & s_i \geq t_i, s_2 \geq t_2. \end{cases}$$

Доведення випливає з вигляду функції $\omega_2(t, s)$ та того факту, що

$\Gamma_2 \omega_2(t, \cdot)(s) = \Gamma \omega(t_1, \cdot)(s_1) \Gamma \omega(t_2, \cdot)(s_2)$, де згідно з [5] при $H > 1/2$

$$\Gamma \omega(t, \cdot)(s) = \begin{cases} 1, & s \in [0, t); \\ \frac{(H - 1/2) s^{H - 1/2}}{(3/2 - H) B(H + 1/2, 2 - 2H)} \int_0^t u^{1-2H} (s - u)^{H - 3/2} du, & s > t. \end{cases} \quad s \in [0, t);$$

$$\begin{aligned} \text{Дійсно, } \Gamma_2 \omega_2(t, \cdot)(s) &= \prod_{i=1,2} (H_i (2H_i - 1)) \int_{\mathbb{R}_+^2} \omega_2(t, u) \prod_{i=1,2} (|u_i - s_i|^{2H_i - 2}) du_i = \\ &= \prod_{i=1,2} \int_0^{t_i} \omega(t_i, u_i) |u_i - s_i|^{2H_i - 2} du_i = \Gamma \omega(t_1, \cdot)(s_1) \Gamma \omega(t_2, \cdot)(s_2). \quad \square \end{aligned}$$

Основним результатом цього пункту є наступне твердження.

Теорема 2.2. Нехай функцію $\omega_2(t, s)$ задано формулою (1). Тоді центроване гауссівське поле

$$M_t = \int_{[0, t]} \omega_2(t, s) dB_s \quad (2)$$

має незалежні прирости та дисперсію вигляду:

$$EM_t^2 = \prod_{i=1,2} (C_{H_i}^{(2)})^2 t_i^{2-2H_i}, \text{ де } C_{H_i}^{(2)} = C_{H_i} / (2H_i (2 - 2H_i)^{1/2}) \quad (3)$$

З цього випливає, що M – сильний мартингал. Поле M , за аналогією з однопараметричним випадком [1], назовемо сильним мартингалом Молчана.

Доведення. Спочатку доведемо незалежність приростів M_t .

Розглянемо прирости $\Delta_s M_t$ і $\Delta_u M_v$ у випадку, коли $[s, t] \cap [u, v] = \emptyset$. Нехай, наприклад, $s < t < u < v$ (інші випадки розглядаються цілком аналогічно).

В силу гауссовості поля M , достатньо довести некорельованість його приростів. Тобто достатньо довести, наприклад, що для наших точок $E \Delta_s M_t \Delta_u M_v = 0$, а для цього, в свою чергу, достатньо довести, що

$$E(M_s - M_{t_1, s_1})(M_u - M_{v_1, u_1}) = 0. \quad (4)$$

Порахуємо $EM_s M_u$, де $s < u$ (оскільки інші пари точок знаходяться у такому ж співвідношенні, то інші формули будуть аналогічні).

$$EM_s M_u = \langle \omega_2(s, \cdot), \omega_2(u, \cdot) \rangle_{\Gamma_2} = \langle \omega_2(s, \cdot), \Gamma_2 \omega_2(u, \cdot) \rangle. \quad (5)$$

Зауважимо, що оскільки зараз ми розглядаємо $\omega_2(u, r)$ як ядро в інтегралі $M_u = \int_{[0, u]} \omega_2(u, r) dB_r$, то, очевидно, $r \in [0, u]$, тобто $r_i \in (0, u_i)$, $i=1, 2$. Отже, з теореми 2.1 випливає, що $\Gamma_2 \omega_2(u, \cdot)(r) = 1_{[0, u]}$.

Підставимо (6) в (5) та отримаємо для $u_i > s_i$, $i=1, 2$,

$$\begin{aligned} \langle \omega_2(s, \cdot), 1_{[0, u]} \rangle &= \int_{\mathbb{R}_+^1} \omega_2(s, r) 1_{[0, u]}(r) dr = \int_{[0, u]} \omega_2(s, r) dr = \\ &= \int_{[0, s]} \prod_{i=1, 2} \left(C_{H_i}^{(1)} r_i^{1/2-H_i} (s_i - r_i)^{1/2-H_i} \right) dr_i = \prod_{i=1, 2} \left(C_{H_i}^{(1)} \int_0^{s_i} r_i^{1/2-H_i} (s_i - r_i)^{1/2-H_i} dr_i \right). \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \text{Оскільки} \quad \int_0^s \omega(s, r) dr &= C_H^{(1)} \int_0^s r^{1/2-H} (s-r)^{1/2-H} dr = \\ &= C_H^{(1)} \int_0^1 s^{1/2-H} r^{1/2-H} s^{1/2-H} (1-r)^{1/2-H} s dr = \\ &= C_H^{(1)} s^{2-2H} \int_0^1 r^{1/2-H} (1-r)^{1/2-H} dr = C_H^{(1)} B(3/2-H, 3/2-H) s^{2-2H} = C_H^{(2)} s^{2-2H}, \end{aligned}$$

то, підставляючи отримане в (7), маємо $\prod_{i=1, 2} (C_{H_i}^{(2)} s_i^{2-2H_i}) = C_{H_1}^{(2)} C_{H_2}^{(2)} s_1^{2-2H_1} s_2^{2-2H_2}$.

$$\text{Отже,} \quad \langle \omega_2(s, \cdot), \omega_2(u, \cdot) \rangle_{\Gamma_2} = \prod_{i=1, 2} (C_{H_i}^{(2)} s_i^{2-2H_i}) = C_{H_1}^{(2)} C_{H_2}^{(2)} \prod_{i=1, 2} s_i^{2-2H_i}. \quad (8)$$

Підставимо рівність (8) у ліву частину формули (4) і отримаємо

$$C_{H_1}^{(2)} C_{H_2}^{(2)} \left(\prod_{i=1, 2} s_i^{2-2H_i} - \prod_{i=1, 2} s_i^{2-2H_i} - t_1^{2-2H_1} s_2^{2-2H_2} + t_1^{2-2H_1} s_2^{2-2H_2} \right) = 0.$$

Таким чином, ми довели незалежність приростів M_t . Тепер покажемо, що M_t має дисперсію вигляду (3): $EM_t^2 = \prod_{i=1, 2} (C_{H_i}^{(2)})^2 t_i^{2-2H_i}$.

$$\begin{aligned} EM_t^2 &= EM_t M_t \langle \omega_2(t, \cdot), \omega_2(t, \cdot) \rangle_{\Gamma_2} = \langle \omega_2(t, \cdot), \Gamma_2 \omega_2(t, \cdot) \rangle = \langle \omega_2(t, \cdot), 1_{[0, t_1] \times [0, t_2]} \rangle = \int_0^{t_1} u_1^{1/2-H_1} \\ &\times (t_1 - u_1)^{1/2-H_1} du_1 \int_0^{t_2} u_2^{1/2-H_2} (t_2 - u_2)^{1/2-H_2} du_2 = C_{H_1}^{(2)} t_1^{2-2H_1} C_{H_2}^{(2)} t_2^{2-2H_2} = \prod_{i=1, 2} C_{H_i}^{(2)} t_i^{2-2H_i}. \end{aligned}$$

Отже, теорему 2.2 доведено. $\square$

2.3. Представлення ДДБР у вигляді інтеграла по двопараметричному вінерівському процесу

Для представлення ДДБР у вигляді інтеграла по двопараметричному вінерівському процесу (вінерівському полю) необхідно розглянути допо-

міжний процес Y_t , який має наступний вигляд

$$Y_t = \int_{[0,t]} s_1^{1/2-H_1} s_2^{1/2-H_2} dB_s. \quad (9)$$

Звідси легко отримуємо обернене співвідношення до (9)

$$B_t = \int_{[0,t]} s_1^{H_1-1/2} s_2^{H_2-1/2} dY_s. \quad (10)$$

Тепер розглянемо взаємозв'язок між новим полем Y_t та сильним мартингалом Молчана M_t . З теореми 2.2, використовуючи формули (2) та (10), одержимо

$$\begin{aligned} M_t &= \int_{[0,t]} \omega_2(t,s) dB_s = \int_{[0,t]} \omega_2(t,s) s_1^{H_1-1/2} s_2^{H_2-1/2} dY_s = \\ &= \int_{[0,t]} \prod_{i=1,2} C_{H_i}^{(1)} s_i^{1/2-H_i} (t-s_i)^{1/2-H_i} s_i^{H_i-1/2} dY_s = \prod_{i=1,2} C_{H_i}^{(1)} \int_{[0,t]} \prod_{i=1,2} (t-s_i)^{1/2-H_i} dY_s. \end{aligned}$$

Отже, маємо наступне співвідношення

$$M_t = \prod_{i=1,2} C_{H_i}^{(1)} \int_{[0,t]} \prod_{i=1,2} (t-s_i)^{1/2-H_i} dY_s. \quad (11)$$

Лема 2.1. Обернене до (11) співвідношення має наступний вигляд

$$Y_t = \prod_{i=1,2} 2H_i \int_{[0,t]} \prod_{i=1,2} (t-s_i)^{H_i-1/2} dM_s. \quad (12)$$

Доведення леми 2.1 будемо проводити в два етапи. Нехай $\alpha_i = H_i - 1/2$, $i=1,2$. Розглянемо процеси M_t та Y_t , введені нами у (2) та (9) відповідно.

I. На першому етапі покажемо, що

$$\int_{[0,t]} \prod_{i=1,2} (t-u_i)^{\alpha_i} dM_u = \alpha_1 \alpha_2 \int_{[0,t]} M_u \prod_{i=1,2} (t-u_i)^{\alpha_i-1} du. \quad (13)$$

Дійсно, за формулою інтегрування частинами у двопараметричному випадку, якщо за одну функцію ми візьмемо $f(u) = \prod_{i=1,2} (t-u_i)^{\alpha_i}$, а замість іншої підставимо M_u (інтегрування проводиться від 0 до t_1 та від 0 до t_2), то одержимо наступне

$$\begin{aligned} f(0)M_0 - f(t_1,0)M_{(t_1,0)} - f(0,t_2)M_{(0,t_2)} + f(t)M_t &= \int_{[0,t]} f(u) dM_u + \int_{[0,t]} M_u \times \\ &\times f'_{x,y}(u) du + \int_{[0,t]} f'_x(u) d(M_{(u,t)})_{u_2} du_1 + \int_{[0,t]} f'_y(u) d(M_{(t,u)})_{u_1} du_2 = I_1 + I_2 + I_3 + I_4. \end{aligned}$$

Очевидно, що в силу вигляду функції $f(u)$ та властивостей мартингалу M_u , ліва частина перетворюється у нуль, тобто тепер треба довести рівність $I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = 0$. Отже, дослідимо ці чотири інтеграли.

$$I_1 = \int_{[0,t]} \prod_{i=1,2} (t-u_i)^{\alpha_i} dM_u,$$

$$I_2 = \int_{[0,t]} M_u f'_{x,y}(u) du = \alpha_1 \alpha_2 \int_{[0,t]} M_u \prod_{i=1,2} (t-u_i)^{\alpha_i-1} du.$$

Враховуючи вигляд I_1 та I_2 , рівність (13) набуває вигляду $I_1 - I_2 = 0$.

$$I_3 = \int_{[0,t]} f'_x(u) d(M_{(u,t)})_{u_2} du_1 = -\alpha_1 \int_0^{t_1} (t_1 - u_1)^{\alpha_1-1} \left[\int_0^{t_2} (t_2 - u_2)^{\alpha_2} d(M_{(u,t)})_{u_2} \right] du_1.$$

Застосуємо формулу інтегрування частинами для інтеграла у квадратних дужках, отримаємо

$$\begin{aligned} I_3 &= -\alpha_1 \int_0^{t_1} (t_1 - u_1)^{\alpha_1-1} \left[(t_2 - u_2)^{\alpha_2} M_u \Big|_0^{t_2} - (-1)\alpha_2 \int_0^{t_2} (t_2 - u_2)^{\alpha_2-1} M_u du_2 \right] du_1 = -\alpha_1 \times \\ &\times \int_0^{t_1} (t_1 - u_1)^{\alpha_1-1} \left[\alpha_2 \int_0^{t_2} (t_2 - u_2)^{\alpha_2-1} M_u du_2 \right] du_1 = -\alpha_1 \alpha_2 \int_{[0,t]} \prod_{i=1,2} (t-u_i)^{\alpha_i-1} M_u du = -I_2. \end{aligned}$$

Застосовуючи аналогічні перетворення до I_4 , отримуємо, що $I_4 = -I_2$.

Отже, $I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = I_1 + I_2 - I_2 - I_2 = I_1 - I_2 = 0$, що доводить справедливість формули (13).

П. Використаємо тепер співвідношення (11) для доведення формули (12).

$$\begin{aligned} \text{Маємо: } \int_{[0,t]} \prod_{i=1,2} (t_i - u_i)^{\alpha_i} dM_u &= \alpha_1 \alpha_2 \int_{[0,t]} M_u \prod_{i=1,2} (t_i - u_i)^{\alpha_i-1} du = \\ &= \alpha_1 \alpha_2 \int_{[0,t]} \prod_{i=1,2} (t_i - u_i)^{\alpha_i-1} [\prod_{i=1,2} C_{H_i}^{(1)} \int_{[0,u]} \prod_{i=1,2} (u_i - s_i)^{-\alpha_i} dY_s] du. \end{aligned}$$

Зробимо заміну меж інтегрування і отримаємо

$$\begin{aligned} \prod_{i=1,2} C_{H_i}^{(1)} \alpha_i \int_{[0,t]} [\int_{[s,t]} \prod_{i=1,2} (u_i - s_i)^{-\alpha_i} (t_i - u_i)^{\alpha_i-1} du] dY_s = \\ = \int_{[0,t]} [\prod_{i=1,2} C_{H_i}^{(1)} \alpha_i \int_{[s_i,t_i]} (u_i - s_i)^{-\alpha_i} (t_i - u_i)^{\alpha_i-1} du_i] dY_s. \end{aligned}$$

Зауважимо, що $\int_s^t (u - s)^{-\alpha} (t - u)^{\alpha-1} du = B(1 - \alpha, \alpha)$, де зараз $\alpha = H - 1/2$.

Далі, для будь-якого $H \in (1/2, 1)$,

$$\begin{aligned} (H - 1/2)(2H B(3/2 - H, H + 1/2))^{-1} B(3/2 - H, H - 1/2) = \\ = 1/(2H)(H - 1/2)1/(H - 1/2) = 1/(2H). \end{aligned}$$

Тому $\int_{[0,t]} \prod_{i=1,2} (t_i - u_i)^{\alpha_i} dM_u = (4H_1 H_2)^{-1} \int_{[0,t]} dY_s = (4H_1 H_2)^{-1} Y_t$, звідки випливає доведення формули (12).

Отже, лему 2.1 доведено. □

Тепер розглянемо поле

$$W_t = \prod_{i=1,2} (2H_i / C_{H_i}) \int_{[0,t]} \prod_{i=1,2} s_i^{H_i-1/2} dM_s. \quad (14)$$

Покажемо, що W_t є вінерівським полем. В силу теореми 2.2 (про сильний мартингал Молчана) процес W_t має наступні властивості:

(1) незалежні прирости – як інтеграл по полю M_t з незалежними приростами від не випадкової функції;

(2) $EW_t = 0$;

Покажемо, що має місце властивість

(3) $EW_t^2 = t_1 t_2$.

Справді, використаємо формулу (3), що міститься в теоремі 2.2 і отримаємо $\langle M_t \rangle = EM_t^2 = \prod_{i=1,2} C_{H_i}^{(2)} t_i^{2-2H_i}$.

$$\begin{aligned} EW_t^2 &= \prod_{i=1,2} (2H_i / C_{H_i})^2 \int_{[0,t]} \prod_{i=1,2} (s_i^{H_i-1/2})^2 d\langle M_s \rangle = \prod_{i=1,2} (2H_i C_{H_i}^{(2)} / C_{H_i})^2 \times \\ &\times \prod_{i=1,2} (2 - 2H_i) \int_{[0,t]} \prod_{i=1,2} (s_i^{H_i-1/2})^2 \prod_{i=1,2} s_i^{1-2H_i} ds = \prod_{i=1,2} (2H_i / C_{H_i})^2 \times \\ &\times (C_{H_i} / (2H_i(2 - 2H_i)^{1/2}))^2 \prod_{i=1,2} (2 - 2H_i) \int_{[0,t]} \prod_{i=1,2} s_i^{2H_i-1} s_i^{1-2H_i} ds = \int_{[0,t]} ds = t_1 t_2. \end{aligned}$$

З властивостей (1) – (3) випливає, що W_t – вінерівське поле.

Справедливе також наступне твердження

$$M_t = \prod_{i=1,2} (C_{H_i} / 2H_i) \int_{[0,t]} \prod_{i=1,2} s_i^{1/2-H_i} dW_s.$$

В результаті отримано прості представлення одного двопараметричного процесу через інтеграл по другому, які ведуть від процесу до процесу у наступному порядку $W \rightarrow M \rightarrow Y \rightarrow B$.

Комбінуючи ці кроки, можна отримати представлення ДДБР у вигляді інтеграла по вінерівському полю, тобто прямий перехід $W \rightarrow B$.

Теорема 2.3. Нехай поле B – ДДБР з індексами $H_i \in (1/2, 1)$, W – вінерівське поле з (14).

Тоді B має наступне інтегральне представлення відносно W :

$$B_t = \int_{[0,t]} b_2(t,s) dW_s.$$

$$\text{де } b_2(t,s) = b(t_1,s_1)b(t_2,s_2) = \prod_{i=1,2} \left(C_{H_i} \left[(t_i/s_i)^{H_i-1/2} (t_i-s_i)^{H_i-1/2} - \right. \right. \\ \left. \left. - (H_i-1/2) s_i^{1/2-H_i} \int_{s_i}^{t_i} u_i^{H_i-3/2} (u_i-s_i)^{H_i-1/2} du_i \right] \right). \quad (15)$$

Зауваження 2.1. Оскільки $H_i > 1/2$, $i=1,2$, то підінтегральне ядро $b_2(t,s)$ можна спростити наступним чином

$$b_2(t,s) = \prod_{i=1,2} \left[C_{H_i} (H_i-1/2) s_i^{1/2-H_i} \int_{s_i}^{t_i} u_i^{H_i-1/2} (u_i-s_i)^{H_i-3/2} du_i \right].$$

Це представлення ядра можна отримати з (15) за формулою інтегрування частинами кожного з інтегралів-множників.

3. Висновки

Ми побудували операції інтегрування відносно ДДБР. Вивчили спосіб представлення двопараметричного сильного мартингалу Молчана через інтеграл відносно ДДБР на скінченному відрізку. Розглянули допоміжні двопараметричні процеси та вивели інтегральні співвідношення між ними. Знайшли представлення ДДБР у вигляді інтеграла по двопараметричному вінерівському процесу.

Література

1. Norros I., Valkeila E., Virtamo J. An elementary approach to a Girsanov formula and other analytical results on fractional Brownian motions //Bernoulli. – 1999. – 5(4). – P. 571-587.
2. Kamount A. On the fractional anisotropic Wiener field //Probability and Mathem. Statistics. – 1996. – Vol. 16, Fasc. 1. – P. 85-98.
3. Монин А.С., Яглом А.М. Статистическая гидромеханика. Механика турбулентности. – М.: Наука, 1965, 1967. Ч. I – II. – 639, 720 с.
4. Hu Y., Øksendal B., Sulem A. Optimal portfolio in a fractional Black & Scholes market. // Mathematical physics and stochastic analysis (Lisbon, 1998), World Sci. Publishing River Edge, NJ, – 2000. – P. 267-279.
5. Ільченко С. А., Мішура Ю. С. Узагальнені двопараметричні інтеграли Лебега-Стілтєса та їх застосування до дробових броунівських полів. //Український математичний журнал., – 2004, т. 56, № 4, – с. 435-450.
6. Leger S. Estimation of fractional Brownian sheet's parameters: Preprint / Revue S.I.S.P. Institut de Statistique, France, – 1999.

Надійшла до редакції 10.03.2005

УДК 512.552.1

Євген М. Пірус *

**Слабопервинні кільця та
кускові напівдистрибутивні
області.**

За допомогою O -алгебри шляхів сагайдака для будь-якого простого сагайдака Γ будується напівдосконале нетерове (але не артинове) кільце B таке, що $PQ(B) = \Gamma$. По кожному ациклічному простому сагайдаку Γ будується напівдосконала напівдистрибутивна кускова область $\Lambda(\Gamma)$ з нульовим цоклем така, що $PQ(\Lambda(\Gamma)) = \Gamma$.

Ключові слова: кільце, модуль, граф, сагайдак.

Evgen M. Pirus *

**Weakprime rings and piece
semidistributive fields.**

With the help of O -algebra of ways of a quiver for any simple quiver Γ is under construction a Noetherian (but not Artinian) semiperfect ring B such, that $PQ(B) = \Gamma$. On each acyclic simple quiver Γ is under construction the piece semiperfect semidistributive field $\Lambda(\Gamma)$ with a zero socle such, that $PQ(\Lambda(\Gamma)) = \Gamma$.

Key Words: ring, module, graph, quiver

*E-mail: pirus_em@gala.net, pirus@ukr.net

Означення 1. Простим (первинним в термінології [2]) сагайдаком будемо називати скінчений орієнтований граф без кратних стрілок і кратних петель.

Теорема 1. Для кожного простого сагайдака існує артинове кільце B таке, що $PQ(B) = \Gamma$.

Доведення випливає з теореми 6.6 [1] шляхом розглядання алгебри шляхів $A(\Gamma)$ простого сагайдака Γ . Нехай J - фундаментальний ідеал алгебри $A(\Gamma)$, тобто ідеал породжений всіма стрілками Γ ([1], с.64-66). Нехай $B = A(\Gamma)/J^2$. За теоремою 6.6 [1] сагайдак, а значить і простий сагайдак, алгебри B співпадає з Γ .

Теорема 2. Для кожного простого сагайдаку Γ існує нетерове (але не артинове) напівдосконале кільце A таке, що $PQ(A) = \Gamma$.

Для доведення цієї теореми скористусмося конструкцією O -алгебри шляхів $A(Q, O)$ довільного сагайдаку Q (O - комутативне кільце).

Базис вільного O -модуля $A(Q, O)$ будуть утворювати всі можливі шляхи сагайдаку Q і набір символів $\{\epsilon_i\}$ (по одному для кожної вершини i). Як і в ([1], с.64-66) визначається добуток базисних елементів, який будучи

розширенням "за лінійністю" на довільні елементи $A(Q, O)$, перетворює $A(Q, O)$ в O -алгебру.

Позначимо через J сукупність всіх елементів алгебри $A(Q, O)$, у яких коефіцієнти при ε_i дорівнюють нулю для всіх i . Цей ідеал будемо називати **фундаментальним ідеалом алгебри $A(Q, O)$**

Лема 3. Якщо O - дискретно нормоване кільце, а Q - довільний сагайдак, то первинний радикал $I^{(n)}$ кільця $A^{(n)} = A(Q, O) / J^{n+1}$ співпадає з $\bar{J} = J / J^{n+1}$ і кільце $A^{(n)}$ напівдосконале.

Доведення. Ясно, що $\bar{A}^{(n)} = A^{(n)} / \bar{J}$ є прямим добутком s екземплярів кільця O (s - число вершин в Q). Оскільки кільце $\bar{A}^{(n)}$ напівпервинне, то ідеал $\bar{J}$ містить в собі $I^{(n)}$. Так як ідеал $\bar{J}$ нільпотентний, то є вірним і зворотнє включення, тобто $I^{(n)} = \bar{J}$.

Покажемо, що кільце $A^{(n)}$ напівдосконале. Дійсно, кільце $\varepsilon_i A^{(n)} \varepsilon_i$ ($\varepsilon_i = \varepsilon_i + J^{n+1}$) співпадає або з O , якщо в точці i немає петлі, або з $O[\sigma_{ii}]$ ($\sigma_{ii} = \sigma_{ii} + J^{n+1}$). Ясно, що обидва кільця локальні, звідки і слідує напівдосконалість кільця $A^{(n)}$. Лему доведено.

Для завершення доведення теореми 2 достатньо розглянути кільце $A = A(\Gamma, O) / J^2$, де O - дискретно нормоване кільце, а Γ - простий сагайдак і скористатися лемою 3.

Теореми 3.8 та 4.8 [2] стверджують, що первинні (прості в нашій термінології) сагайдаки спадкових справа напівдосконалих напівдистрибутивних (SPSD) - кілець і артинових напівдистрибутивних кілець є діаграмами скінчених частково впорядкованих множин, тобто ациклічними первинними (простими) сагайдаками без кратних стрілок.

П р и к л а д. Розглянемо простий сагайдак Γ , що задається наступною матрицею $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Покажемо, що простий (первинний)

сагайдак кільця $\Lambda = \begin{pmatrix} O & O & O \\ 0 & O & \pi O \\ 0 & 0 & O \end{pmatrix}$, де O -дискретно нормоване кільце з

єдиним максимальним ідеалом πO співпадає з Γ .

Простий радикал I кільця Λ має вигляд :

$$I = \begin{pmatrix} 0 & O & O \\ 0 & 0 & \pi O \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Ясно, що } I^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \pi O \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, W = I/I^2 = \begin{pmatrix} 0 & O & O/\pi O \\ 0 & 0 & O \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

А тому $PQ(\Lambda) = \Gamma$.

Покажемо, що взагалі, якщо є довільний ациклічний простий сагайдак Γ , то існує кускова область $\Lambda(\Gamma)$, яка задовольняє умовам теореми 4.4 [2] така, що $PQ(\Lambda(\Gamma)) = \Gamma$.

Нехай Γ – довільний ациклічний простий сагайдак. У відповідності з пропозицією 1.9 [2] множину його вершин занумеруємо натуральними числами $\{1, 2, \dots, t\}$ так, що якщо з точки i в точку j йде стрілка, то $i < j$.

Нехай O – дискретно нормоване кільце (для простоти будемо вважати його комутативним); $M = \pi O$ – його єдиний максимальний ідеал, $T_n(O)$ – O -алгебра верхніх трикутних матриць з елементами з O . В якості $\Lambda(\Gamma)$ розглянемо O -підалгебру O -алгебри $T_n(O)$, мультиплікативна система твірних якої складається з елементів, які будуються за наступним правилом: якщо стрілка $\sigma: i \rightarrow j$ є зайвою і $\sigma_1, \dots, \sigma_k$ шлях з точки i в точку j більше одиниці, то кожній стрілці $\sigma_1, \dots, \sigma_{k-1}$ відповідає матрична одиниця, першим індексом якої є початок стрілки, а другим індексом – кінець стрілки, стрілці σ_k відповідає елемент πe_{mj} , де m – початок стрілки σ_k , зайвій стрілці відповідає матрична одиниця e_{ij} , крім того кожній вершині i з Γ відповідає матрична одиниця e_{ii} . В якості кільця $\Lambda(\Gamma)$ розглянемо O -алгебру, яка натягнута на всі можливі ненульові добутки елементів з мультиплікативної системи твірних. Легко перевірити, що $PQ(\Lambda(\Gamma)) = \Gamma$. За теоремою 4.4 [2] кільце $\Lambda(\Gamma)$ є нетеровою кусковою SPSPD-областю з нульовим цоколем.

Література

1. Дрозд Ю.А., Кириченко В.В. Конечномерные алгебры. - Киев: Вища школа, -1989. -192с.
2. Кириченко В.В., Могилева В.В., Пирус Е.М., Хибина М.А. Полусовершенные слабопервичные кольца и кусочные области. // Алгебраические исследования, Сборник статей, Институт математики НАН Украины, Киев, 1996 г. - с. 33 - 65

Надійшла до редакції 28.02.2005

УДК 519.21

Сергій В. Посашков*

Дослідження (B, S)-ринку цінних паперів зі стохастичною волатильністю, керованою дробовим броунівським рухом

В статті досліджується неповнота (B, S)-ринку цінних паперів зі стохастичною волатильністю, керованою дробовим броунівським рухом, та визначається оптимальна ціна мінімізуючого ризик хеджу для європейського платіжного зобов'язання.

Ключові слова: (B, S)-ринок, волатильність, дробовий броунівський рух.

Sergiy V. Posashkov*

Investigation of (B, S) market of security with stochastic volatility driven by fractional Brownian motion

The incompleteness of (B, S) market of security with stochastic volatility driven by fractional Brownian motion is investigated and the risk-minimizing hedge optimal price of European contingent claim is determined.

Key Words: (B, S) market, volatility, fractional Brownian motion.

* E-mail: corlagon@univ.kiev.ua

ВСТУП

У цій роботі розглядається (B, S)-ринок цінних паперів, заданий наступною системою рівнянь:

$$\begin{cases} dS_t = a(t, S_t)S_t dt + \sigma_t S_t dW_t, \\ dB_t = r_t B_t dt, \quad B_0 = 1, \end{cases} \quad t \in [0, T] \quad (1)$$

де W_t є стандартним броунівським рухом, S_0 – задана випадкова величина незалежна від W_t , r_t є обмеженим, невід'ємним, прогресивно вимірним процесом відсоткової ставки.

Вважаємо, що волатильність $\sigma_t = \rho(\tilde{\sigma}_t)$, де $\rho \in C^2_b(\mathbb{R})$ є строго зростаючою функцією, а $\tilde{\sigma}_t$ – стохастичним процесом, який задовольняє рівняння

$$d\tilde{\sigma}_t = \alpha(t, \tilde{\sigma}_t)dt + \beta(t, \tilde{\sigma}_t)dB_t^H,$$

де B_t^H є дробовим броунівським рухом з параметром Хюрста $H \in (1/2, 1)$ (властивості дробового броунівського руху наведено у статті [1]). Процес B_t^H не залежить від процесу W_t в тому сенсі, що варіація $\langle B^*, W \rangle_t \equiv 0$, де B^* – стандартний броунівський рух, асоційований з ДБР B_t^H , який задається формулою

$$B_t^* = \int_0^t s^{1/2-H} dM_s,$$

де M_t – фундаментальний мартингал ДБР B_t^H , пов'язаний з ним наступним інтегральним перетворенням

$$M_t = \int_0^t z(t, s) dB_s^H,$$

$$z(t, s) = \left(H - \frac{1}{2} \right) c_H s^{\frac{1}{2}-H} \int_s^t u^{H-\frac{1}{2}} (u-s)^{H-\frac{3}{2}} du, \quad s \in [0, t],$$

де $c_H = \left(\frac{2H\Gamma(3/2-H)}{\Gamma(H+1/2)\Gamma(2-2H)} \right)^{1/2}$, (детально про B_t^H дивись, напр. в [1]).

Вважаємо, що $\tilde{\sigma}_0$ є заданою випадковою величиною, незалежною від процесів W_t та B_t^H .

З формули Іто випливає, що

$$d\sigma_t = \tilde{\alpha}(t, \sigma_t) dt + \tilde{\beta}(t, \sigma_t) dB_t^H, \quad (2)$$

де ρ' позначає похідну від ρ ,

$$\tilde{\alpha}(t, \sigma) = \rho'(\rho^{-1}(\sigma)) \alpha(t, \rho^{-1}(\sigma)),$$

та

$$\tilde{\beta}(t, \sigma) = \rho'(\rho^{-1}(\sigma)) \tilde{\alpha}(t, \rho^{-1}(\sigma)).$$

Якщо процес відсоткової ставки r_t сталий, то добре відомо, що умовний розподіл $\log S_T$ за еквівалентною мартингальною мірою відносно $\{\sigma_t : t \in [0, T]\}$ є нормальним, і ціну опціону можна обчислити, якщо взяти математичне сподівання у формулі Блека - Шоулса. Ми розглянемо випадок загального процесу відсоткової ставки та загального платіжного зобов'язання.

В першому розділі даної роботи дослідимо питання неповноти ринку, заданого системою (1).

В другому розділі знайдемо справедливую ціну хеджу для європейського зобов'язання, який мінімізує певний ризик.

1. НЕПОВНОТА РИНКУ

Спочатку накладемо певні умови на коефіцієнти системи (1).

Умови (B):

(B1) Існують константи $\sigma^*, \sigma^* \in (0, \infty)$ такі, що

$$\sigma^* \leq \rho(x) \leq \sigma^*, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

(B2) $a(t, s)$ – обмежена функція.

(B3) r_t – обмежений процес.

Умова (C): $\forall M > 0, \exists K_M > 0$ таке, що для будь-якого $t \geq 0, |x| \leq M$ та $|y| \leq M$, ми маємо $|a(t, x) - a(t, y)| \leq K_M |x - y|$.

Теорема 1. При умовах (B2) та (C) перше рівняння системи (1) має

єдиний розв'язок.

Доведення. Щоб довести твердження теореми, визначимо $\tilde{S}_t = \ln S_t$.
Тоді перше рівняння системи (1) еквівалентно рівнянню

$$d\tilde{S}_t = \left(\tilde{a}(t, \tilde{S}_t) - \frac{1}{2} \sigma_t^2 \right) dt + \sigma_t dW_t, \quad (3)$$

де $\tilde{a}(t, \tilde{s}) = a(t, e^{\tilde{s}})$. При виконанні умов (B1), (B2) та (C) легко перевіряється обмеженість та локальна ліпшицевість коефіцієнтів (3).
Тому (3) і, відповідно, перша частина (1) мають єдиний розв'язок. $\square$

При дослідженні неповноти ринку використаємо метод, запропонований в [2]. Для цього розглянемо дисконтований капітал $Z_t = S_t / B_t$. Тоді

$$dZ_t = \frac{S_t}{B_t} (a(t, S_t) - r_t) dt + \frac{\sigma_t S_t}{B_t} dW_t. \quad (4)$$

Нехай

$$\eta_t = \exp \left(\int_0^t \gamma_u dW_u - \frac{1}{2} \int_0^t |\gamma_u|^2 du \right),$$

$$\text{де } \gamma_t = \frac{r_t - a(t, S_t)}{\sigma_t}.$$

Визначимо імовірнісну міру P' за допомогою рівності

$$\frac{dP'}{dP} = \eta_t, \quad P - \text{м.н.} \quad (6)$$

З теореми Гірсанова випливає, що

$$\tilde{W}_t \equiv W_t - \int_0^t \gamma_u du$$

є P' -стандартним броунівським рухом. Відповідно

$$Z_t = Z_0 + \int_0^t \frac{\sigma_u S_u}{B_u} d\tilde{W}_u$$

є P' -мартингалом.

Теорема 1. Нехай (B, S) -ринок цінних паперів задано системою (1), тоді він є неповним.

Доведення. Нехай

$$\eta'_t = \exp \left(B_t^* - \frac{1}{2} t \right).$$

З припущень (B) випливає, що η_t та η'_t є P -квадратично інтегрованими мартингалами. Нехай

$$\frac{d\tilde{P}}{dP} = \eta_t \eta'_t, \quad P - \text{м.н.}$$

Тоді відносно міри $\tilde{P}$ Z_t також буде мартингалом. Таким чином, ми маємо

дві різні мартингальні міри. Отже, ринок неповний. $\square$

2. СПРАВЕДЛИВА ЦІНА ПЛАТІЖНОГО ЗОБОВ'ЯЗАННЯ

Тепер розглянемо оптимальну ціну Європейського платіжного зобов'язання X , яке подається до виконання у момент часу T . Якщо X досягне, то його ціна у момент часу t має такий вигляд

$$v_t = B_t E^{P^*}(XB_T^{-1} | F_t),$$

відносно будь-якої еквівалентної мартингальної міри P^* . Тут $\{F_t, t \in [0, T]\}$ – фільтрація, задана на імовірнісному просторі $\{\Omega, F, P\}$, яка задовольняє стандартним вимогам повноти і неперервності справа, та всі випадкові процеси з (1) є (F_t) -адаптованими.

Якщо X не досягне, то природно використовувати хеджі, які мінімізують певні ризики.

У роботах Фьольмера і Швейцера [3] та Швейцера [4] запропоновано використовувати локально мінімізуючі ризик стратегії.

Означення 1. Дисконтованим процесом-ціною $C_t(\varphi)$ для стратегії $\varphi = (\xi, \mu)$ називається величина

$$C_t(\varphi) = V_t^*(\varphi) - \int_0^t \varphi_u dZ_u, \quad \forall t \in [0, T],$$

де $V_t^*(\varphi) = \varphi_t * Z_t = \xi_t Z_t + \mu_t$.

Означення 2. Нехай $\varphi = (\xi, \mu)$ – стратегія і $t \in [0, T]$. Допустимим продовженням стратегії φ з $[0, t]$ на $[0, T]$ називається стратегія $\tilde{\varphi} = (\tilde{\xi}, \tilde{\mu})$, яка задовольняє наступні умови:

$$\tilde{\xi}_s = \xi_s, \quad \text{for } s \leq t, \quad \tilde{\mu}_s = \mu_s, \quad \text{for } s < t,$$

та

$$V_T(\varphi) = V_T(\tilde{\varphi}) \quad P\text{-м.н.}$$

Допустимою варіацією φ з $[0, t]$ на $[0, T]$ є стратегія $\Delta = (\delta, \varepsilon)$ така, що $\varphi + \Delta$ є допустимим продовженням φ з $[0, t]$ на $[0, T]$.

Наведемо означення мінімізуючої ризик стратегії (хеджу) та локально мінімізуючої ризик стратегії.

Означення 3. Стратегія φ називається мінімізуючою ризик, якщо для будь-якого $t \in [0, T)$ і для будь-якого допустимого продовження $\tilde{\varphi}$ для φ з t маємо

$$R_t(\tilde{\varphi}) \geq R_t(\varphi) \quad P\text{-м.н.},$$

де $R_t(\varphi) = E[(C_T(\varphi) - C_t(\varphi))^2 | F_t], t \in [0, T]$.

Нехай семімартингал Z_t має представлення $Z_t = Z_0 + A_t + M_t$, де A_t – передбачуваний процес, та M_t – мартингал.

Означення 4. Стратегія $\Delta = (\delta, \varepsilon)$ називається малим збуренням,

якщо δ обмежена, $\int_0^T |\delta_u| d|A|_u$ – обмежений, та $\delta_T = \varepsilon_T = 0$.

Означення 5. Нехай φ – стратегія, Δ – мале збурення, та τ – розбиття відрізка $[0, T]$. Визначимо ризик-відношення наступним чином

$$r^\tau[\varphi, \Delta](\omega, t) = \sum_{t_i \leq t} \frac{R_{t_i}(\varphi + \Delta|_{(t_i, t_{i+1}]}) - R_{t_i}(\varphi)}{E[\langle M \rangle_{t_{i+1}} - \langle M \rangle_{t_i} | F_{t_i}]}(\omega) \bullet I_{(t_i, t_{i+1}]}(t).$$

Тоді стратегія φ називається локально мінімізуючою ризик, якщо

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} r^{\tau_n}[\varphi, \Delta] \geq 0 \quad P_M - \text{м.н.},$$

для будь-якого малого збурення Δ та будь-якої зростаючої послідовності розбиттів τ_n такої, що $\lim_{n \rightarrow \infty} |\tau_n| = 0$. Міра P_M визначена як міра $P \times \langle M \rangle$ на просторі $\tilde{\Omega} = \Omega \times [0, T]$, де $\langle M \rangle$ – варіація M відносно міри P .

Також авторами роботи [3] запропоновано техніку знаходження справедливої ціни локально мінімізуючого ризик хеджу для платіжного зобов'язання X Європейського типу за допомогою мінімальної мартингальної міри.

Означення 6. Мартингальна міра $\hat{P}$ для Z називається мінімальною мартингальною мірою для P , якщо будь-який локальний P -мартингал, строго ортогональний (відносно P) до M , є локальним $\hat{P}$ -мартингалом.

Доведемо, що в нашому випадку міра P' буде мінімальною мартингальною мірою.

Лема 1. P' , визначена за допомогою рівності (6), є мінімальною мартингальною мірою, асоційованою з P .

Доведення. З (F_t) -адаптованості дробового броунівського руху B'' випливає (F_t) -адаптованість стандартного броунівського руху B' . Якщо N_t є квадратично інтегрованим локальним P -мартингалом, то, використовуючи представлення Куніта–Ватанабе, маємо

$$N_t = N_0 + \int_0^t l_s dW_s + \int_0^t l'_s dB'_s + L_t,$$

де $\langle W, L \rangle = \langle B', L \rangle = 0$.

Нехай N строго ортогональний процес до мартингалу $\int_0^t \sigma_u dW_u$, тоді ми маємо

$$0 = \left\langle N, \int_0^t \sigma_u dW_u \right\rangle_t = \int_0^t l_u \sigma_u du.$$

Таким чином $l_u = 0$ м. с. $t \in [0, T]$ м. н. Тому

$$\begin{aligned}d(N, \eta) &= N, d\eta + \eta, dN + d\langle N, \eta \rangle, \\&= N, d\eta + \eta, dN + \gamma, l, dt \\&= N, d\eta + \eta, dN.\end{aligned}$$

Отже, N, η є локальним P -мартингалом, тому $N,$ є локальним P' -мартингалом, і P' задовольняє означенню 6. $\square$

Теорема 2. Нехай X – Європейське платіжне зобов'язання для моменту T (не обов'язково досяжне). Тоді справедлива ціна мінімізуючого ризик хеджу дорівнює

$$v_t = B_t E^{P'}(XB_t^{-1} | F_t).$$

Доведення. З леми 1 випливає, що P' є мінімальною мартингальною мірою. А теорема 3.14[3] дає представлення справедливої ціни мінімізуючого ризик хеджу у вигляді $v_t = E^{P'}(X | F_t)$. Для застосування даного результату дисконтуємо модель (1) і отримаємо, що в нашому випадку справедлива ціна локально мінімізуючого ризик хеджу для X дорівнює

$$v_t = B_t E^{P'}(XB_t^{-1} | F_t). \quad \square$$

ВИСНОВОК

Отже, в даній роботі доведено неповноту ринку цінних паперів, заданого системою (1) зі стохастичною волатильністю, керованою ДБР, та знайдено оптимальну ціну мінімізуючого ризик хеджу для платіжного зобов'язання Європейського типу.

ЛІТЕРАТУРА

1. I. Norros, E. Valkeila, J. Virtamo An elementary approach to a Girsanov formula and other analytical results on fractional Brownian motion// Bernoulli. – 1999. – 5(4). – pp. 571-587.
2. Kallianpur G., Karandikar R.L. Introduction to option pricing theory. – Boston: Birkhauser, 2000.
3. Föllmer H., Schweizer M. Hedging of contingent claim under incomplete information// Applied Stochastic Analysis, M.H.A. Davis, R.J. Elliot, eds. Gordon and Breach, London New York, – 1991. – pp. 389-414.
4. Schweizer M. Option hedging for semimartingales// Stochastic Processes and their Applications. – 1991. – 37. – pp. 339-363.

Надійшла до редакції 21.03.2005

УДК 512.552.1

Ірина М. Циганівська

**Індекси частково
впорядкованих множин з 5-ти
елементів.**

В статті дається числовий критерій Q -еквівалентності частково впорядкованих множин з 5-ти елементів зі зв'язною діаграмою.

Ключові слова: частково впорядкована множина, Q -еквівалентність, сагайдак, індекс частково впорядкованої множини.

Iryna M. Cyganivska

**Indexes of finite partially
ordered sets of the fifth
elements.**

The numerical criterion of Q -equivalency of partially ordered sets of the fifth elements with connected diagram is given in this article.

Key Words: finite partially ordered set, Q -equivalency, quiver, index of the finite partially ordered set.

Матриці показників виникли при вивченні черепичних порядків. Між $(0,1)$ – матрицями показників та скінченими частково впорядкованими множинами існує взаємно однозначна відповідність. В [2] встановлено зв'язок між сагайдаками $(0,1)$ – матриць показників та діаграмами відповідних частково впорядкованих множин. У роботі [2] введено поняття індексу матриці показників частково впорядкованих множин.

Мета даної роботи – дати числові критерії еквівалентності частково впорядкованих множин з п'яти елементів зі зв'язною діаграмою.

Означення. a „накриває” b в множині P , це означає, що не існує $x \in P$, такий що $a > x > b$.

Означення. Нехай $P = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ скінчена множина з відношенням порядку $\leq$. Діаграма P – це сагайдак $Q(P)$, який складається з множини вершин $VQ(P) = \{1, \dots, n\}$ і множини стрілок $AQ(P)$, такий що в $AQ(P)$ є стрілка $\sigma: i \rightarrow j$, тоді і тільки тоді, коли α_i накриває α_j .

Означення. Частково впорядковану множину P називають зв'язною, якщо її діаграма $Q(P)$ зв'язний сагайдак.

Дамо конструкцію, яка для даної частково впорядкованої множини $P = \{p_1, \dots, p_n\}$ дозволяє побудувати сильно зв'язний сагайдак без кратних стрілок і кратних петель.

Позначимо через $P_{\max}(P_{\min})$ множину максимальних (мінімальних) елементів P і через $P_{\max} \times P_{\min}$ їх декартів добуток.

Означення. Сагайдак $\tilde{Q}(P)$, що отримується з діаграми $Q(P)$ додаванням стрілок σ_{ij} для всіх $(p_i, p_j) \in P_{\max} \times P_{\min}$ називають сагайдаком, отриманим з частково впорядкованої множини P .

Означення. Дві частково впорядковані множини P_1 і P_2 називають Q -еквівалентними, якщо $\tilde{Q}(P_1)$ і $\tilde{Q}(P_2)$ – ізоморфні.

Означення. Індекс $inxP$ скінченої частково впорядкованої множини P – це найбільше дійсне власне значення матриці суміжності сагайдака $\tilde{Q}(P)$.

Твердження 1. Якщо скінченні частково впорядковані множини S і P Q -еквівалентні, то лівий і правий власні вектори матриці $[\tilde{Q}(S)]$ можна отримати з лівого та правого власних векторів матриці $[\tilde{Q}(P)]$ перестановкою їх координат.

Доведення. За означенням частково впорядкованих множини S і P Q -еквівалентні, якщо сагайдаки $\tilde{Q}(S)$ і $\tilde{Q}(P)$ – ізоморфні. Тоді існує переставна матриця P_τ для деякої підстановки τ , така що

$$[\tilde{Q}(S)] = P_\tau^T [\tilde{Q}(P)] P_\tau.$$

Нехай λ – індекс частково впорядкованих множин S і P , і $\bar{x}_P$ – правий власний вектор матриці $[\tilde{Q}(P)]$, а $\bar{y}_P$ – лівий власний вектор матриці $[\tilde{Q}(P)]$.

Тоді

$$\begin{aligned} [\tilde{Q}(S)] P_\tau^T \bar{x}_P &= P_\tau^T [\tilde{Q}(P)] P_\tau P_\tau^T \bar{x}_P = \lambda (P_\tau^T \bar{x}_P) \\ (\bar{y}_P P_\tau) [\tilde{Q}(S)] &= \bar{y}_P P_\tau P_\tau^T [\tilde{Q}(P)] P_\tau = \lambda (\bar{y}_P P_\tau). \end{aligned}$$

Тобто $P_\tau^T \bar{x}_P = \bar{x}_S$ – правий власний вектор матриці $[\tilde{Q}(S)]$, а $\bar{y}_P P_\tau = \bar{y}_S$ – лівий власний вектор матриці $[\tilde{Q}(S)]$.

Для кожної частково впорядкованої множини з 5-ти елементів зі зв'язною діаграмою обчислюємо індекс цієї частково впорядкованої множини та правий і лівий власні вектори, що йому відповідають.

	$[Q(P)]$	$Q(P)$	$[\tilde{Q}(P)]$	
1.	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$		$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\chi_{[\tilde{Q}(P)]}(\lambda) = \lambda^5 - 1$ $\text{inx}P = 1$ $\bar{x}_P = (1, 1, 1, 1, 1)$
2.	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$		$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\chi_{[\tilde{Q}(P)]}(\lambda) = \lambda^5 - 4\lambda^2$ $\text{inx}P = \sqrt[3]{4}$ $\bar{x}_P = (\frac{1}{\sqrt[3]{2}}, \frac{1}{\sqrt[3]{2}}, \sqrt[3]{2}, 1, 1)$

$$3. \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

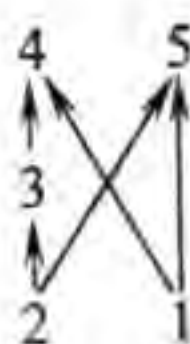
$$\chi_{[\tilde{Q}(P)]}(\lambda) = \lambda^5 - 2\lambda^3 - \lambda^2$$

$$\text{inx}P = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

$$\bar{x}_P = (1, \frac{2}{1+\sqrt{5}}, \frac{2}{1+\sqrt{5}}, 1, 1)$$

$$\bar{y}_P = (1, \frac{2}{1+\sqrt{5}}, 1, 1, \frac{2}{1+\sqrt{5}})$$

$$4. \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

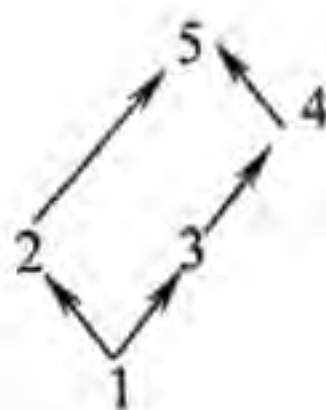


$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\chi_{[\tilde{Q}(P)]}(\lambda) = \lambda^5 - 3\lambda^3 - \lambda^2$$

$$\text{inx}P \approx 1,879385242$$

$$5. \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

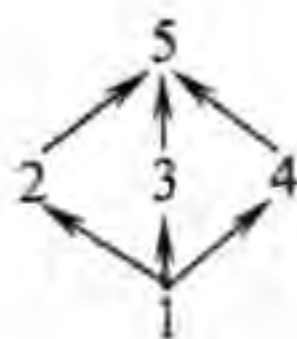


$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\chi_{[\tilde{Q}(P)]}(\lambda) = \lambda^5 - \lambda^2 - \lambda$$

$$\text{inx}P \approx 1,22074$$

$$6. \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

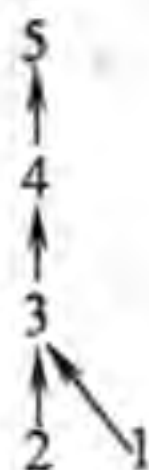
$$\chi_{[\tilde{Q}(P)]}(\lambda) = \lambda^5 - 3\lambda^2$$

$$\text{inx}P = \sqrt[3]{3}$$

$$\bar{x}_P = (\sqrt[3]{3}, \frac{1}{\sqrt[3]{3}}, \frac{1}{\sqrt[3]{3}}, \frac{1}{\sqrt[3]{3}}, 1)$$

$$\bar{y}_P = (1, \frac{1}{\sqrt[3]{3}}, \frac{1}{\sqrt[3]{3}}, \frac{1}{\sqrt[3]{3}}, 1)$$

$$7. \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



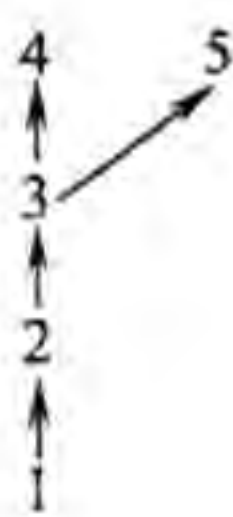
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\chi_{[\tilde{Q}(P)]}(\lambda) = \lambda^5 - 2\lambda$$

$$\text{inx}P = \sqrt[4]{2}$$

$$\bar{x}_P = (\frac{1}{\sqrt[4]{8}}, \frac{1}{\sqrt[4]{8}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt[4]{2}}, 1)$$

8.
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



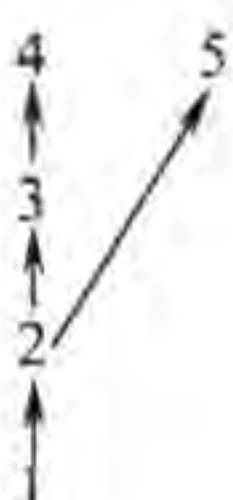
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{aligned} \mathcal{X}_{[\tilde{Q}(P)]}(\lambda) &= \lambda^5 - 2\lambda \\ \text{inx}P &= \sqrt[4]{2} \\ \tilde{x}_P &= (\sqrt[4]{2}, \sqrt{2}, \sqrt[4]{2^3}, 1, 1) \end{aligned}$$

9.
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{aligned} \mathcal{X}_{[\tilde{Q}(P)]}(\lambda) &= \lambda^5 - \lambda^2 - \lambda \\ \text{inx}P &\approx 1,22074 \end{aligned}$$

10.
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{aligned} \mathcal{X}_{[\tilde{Q}(P)]}(\lambda) &= \lambda^5 - \lambda^2 - \lambda \\ \text{inx}P &\approx 1,22074 \end{aligned}$$

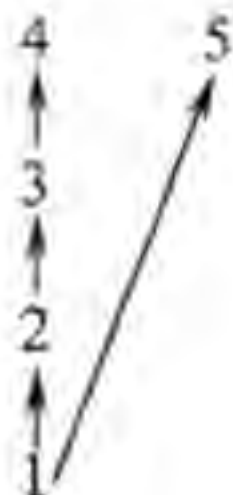
11.
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{aligned} \mathcal{X}_{[\tilde{Q}(P)]}(\lambda) &= \lambda^5 - \lambda^3 - \lambda \\ \text{inx}P &= \sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} \end{aligned}$$

$$\tilde{x}_P = \left(\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}}}, \frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}}}, \frac{2}{1+\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}}}, 1 \right)$$

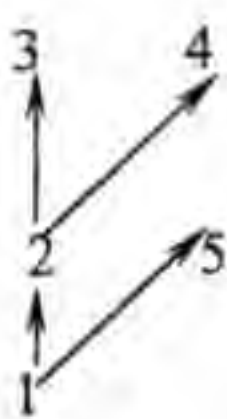
12.
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{aligned} \mathcal{X}_{[\tilde{Q}(P)]}(\lambda) &= \lambda^5 - \lambda^3 - \lambda \\ \text{inx}P &= \sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} \end{aligned}$$

$$\tilde{x}_P = \left(\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}}, \frac{1}{2}(-1+\sqrt{5}), \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}}(-1+\sqrt{5}), 1, 1 \right)$$

$$13. \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

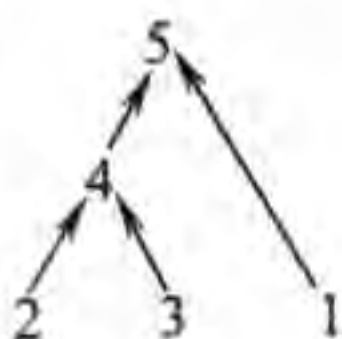
$$\chi_{[\bar{Q}(P)]}(\lambda) = \lambda^5 - \lambda^3 - 2\lambda^2$$

$$\text{inx}P = \sqrt[3]{1 + \frac{\sqrt{78}}{9}} + \sqrt[3]{1 - \frac{\sqrt{78}}{9}}$$

$$\bar{x}_P = (\lambda, \frac{2}{\lambda}, 1, 1, 1)$$

$$\bar{y}_P = (\lambda, 1, \frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\lambda}, 1)$$

$$14. \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\chi_{[\bar{Q}(P)]}(\lambda) = \lambda^5 - \lambda^3 - 2\lambda^2$$

$$\text{inx}P = \sqrt[3]{1 + \frac{\sqrt{78}}{9}} + \sqrt[3]{1 - \frac{\sqrt{78}}{9}}$$

$$\bar{x}_P = (\lambda, 1, 1, \lambda, \lambda^2)$$

$$\bar{y}_P = (1, 1, 1, \frac{2}{\lambda}, \lambda)$$

$$15. \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\chi_{[\bar{Q}(P)]}(\lambda) = \lambda^5 - \lambda^3 - 2\lambda^2$$

$$\text{inx}P = \sqrt[3]{1 + \frac{\sqrt{78}}{9}} + \sqrt[3]{1 - \frac{\sqrt{78}}{9}}$$

$$\bar{x}_P = (\lambda + 1, 1, \lambda, \lambda^2, \lambda^2)$$

$$\bar{y}_P = (1, 1, \frac{2}{\lambda}, \frac{2}{\lambda^2}, \frac{1}{\lambda})$$

$$16. \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\chi_{[\bar{Q}(P)]}(\lambda) = \lambda^5 - \lambda^3 - 2\lambda^2$$

$$\text{inx}P = \sqrt[3]{1 + \frac{\sqrt{78}}{9}} + \sqrt[3]{1 - \frac{\sqrt{78}}{9}}$$

$$\bar{x}_P = (\lambda^2 - 1, 2, 1, \lambda, \lambda)$$

$$\bar{y}_P = (\lambda, 1, \lambda, \frac{\lambda+1}{\lambda}, \frac{1}{\lambda})$$

$$17. \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\chi_{[\tilde{Q}(P)]}(\lambda) = \lambda^5 - 2\lambda^3 - \lambda^2$$

$$\text{inx}P = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

$$\bar{x}_P = \left(\frac{4}{1+\sqrt{5}}, \frac{4}{(1+\sqrt{5})^2}, \frac{2}{1+\sqrt{5}}, 1, 1 \right)$$

$$\bar{y}_P = \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}, \frac{\sqrt{5}+1}{2}, 1, \frac{\sqrt{5}+1}{2}, 1 \right)$$

$$18. \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\chi_{[\tilde{Q}(P)]}(\lambda) = \lambda^5 - 2\lambda^3 - \lambda^2$$

$$\text{inx}P = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

$$\bar{x}_P = \left(1, \frac{2}{1+\sqrt{5}}, \frac{2}{1+\sqrt{5}}, 1, 1 \right)$$

$$\bar{y}_P = \left(\frac{\sqrt{5}+3}{2}, \frac{\sqrt{5}+1}{2}, \frac{\sqrt{5}+3}{2}, \sqrt{5}+1, 1 \right)$$

$$19. \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



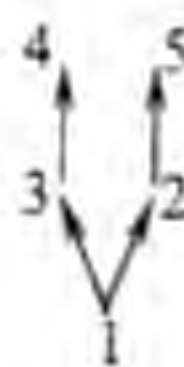
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\chi_{[\tilde{Q}(P)]}(\lambda) = \lambda^5 - 2\lambda^2$$

$$\text{inx}P = \sqrt[3]{2}$$

$$\bar{x}_P = \left(\frac{1}{\sqrt[3]{4}}, \frac{1}{\sqrt[3]{2}}, \frac{1}{\sqrt[3]{4}}, \frac{1}{\sqrt[3]{2}}, 1 \right)$$

$$20. \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



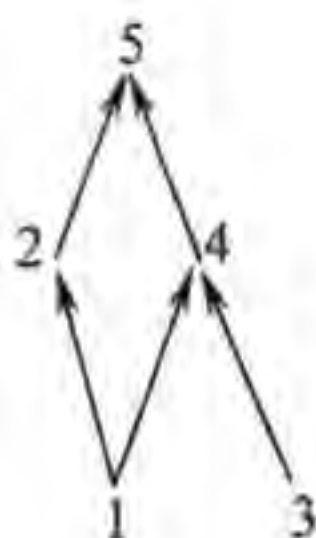
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\chi_{[\tilde{Q}(P)]}(\lambda) = \lambda^5 - 2\lambda^2$$

$$\text{inx}P = \sqrt[3]{2}$$

$$\bar{x}_P = \left(\sqrt[3]{2}, \frac{1}{\sqrt[3]{2}}, \frac{1}{\sqrt[3]{2}}, 1, 1 \right)$$

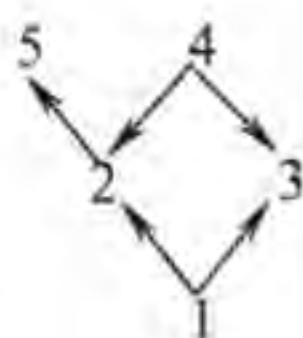
21.
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{aligned} \chi_{[\bar{Q}(P)]}(\lambda) &= \lambda^5 - 3\lambda^2 \\ \ln xP &= \sqrt[3]{3} \end{aligned}$$

$$\bar{x}_p = \left(\frac{2}{\sqrt[3]{9}}, \frac{1}{\sqrt[3]{3}}, \frac{1}{\sqrt[3]{9}}, \frac{1}{\sqrt[3]{3}}, 1 \right)$$

22.
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{aligned} \chi_{[\bar{Q}(P)]}(\lambda) &= \lambda^5 - 3\lambda^2 \\ \ln xP &= \sqrt[3]{3} \end{aligned}$$

$$\bar{x}_p = \left(\sqrt[3]{3}, \frac{2}{\sqrt[3]{3}}, \frac{1}{\sqrt[3]{3}}, 1, 1 \right)$$

23.
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



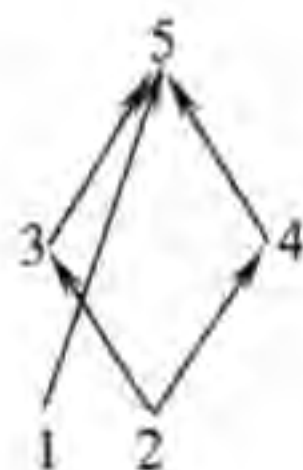
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{aligned} \chi_{[\bar{Q}(P)]}(\lambda) &= \lambda^5 - 2\lambda^3 - 2\lambda^2 \\ \ln xP &\approx 1,769292354 \end{aligned}$$

24.
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



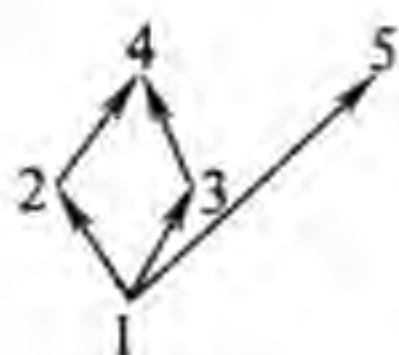
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{aligned} \chi_{[\bar{Q}(P)]}(\lambda) &= \lambda^5 - 2\lambda^3 - 2\lambda^2 \\ \ln xP &\approx 1,769292354 \end{aligned}$$

25.
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{aligned} \chi_{[\bar{Q}(P)]}(\lambda) &= \lambda^5 - \lambda^3 - 2\lambda^2 \\ \ln xP &\approx 1,521379707 \end{aligned}$$

$$26. \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\chi_{[\tilde{Q}(P)]}(\lambda) = \lambda^5 - \lambda^3 - 2\lambda^2$$

$$\text{inx}P \approx 1,521379707$$

$$27. \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



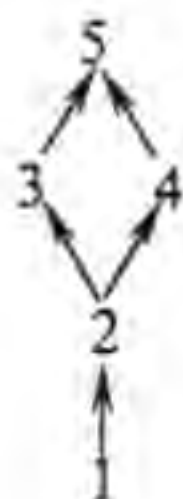
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\chi_{[\tilde{Q}(P)]}(\lambda) = \lambda^5 - 2\lambda$$

$$\text{inx}P = \sqrt[4]{2}$$

$$\bar{x}_P = (\sqrt[4]{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt[4]{2}}, 1)$$

$$28. \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

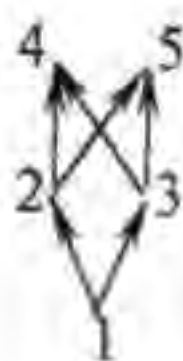


$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\chi_{[\tilde{Q}(P)]}(\lambda) = \lambda^5 - 2\lambda$$

$$\text{inx}P = \sqrt[4]{2}$$

$$29. \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



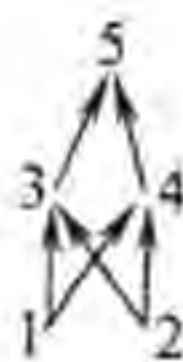
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\chi_{[\tilde{Q}(P)]}(\lambda) = \lambda^5 - 4\lambda^2$$

$$\text{inx}P = \sqrt[3]{4}$$

$$\bar{x}_P = (\sqrt[3]{4}, \sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{2}, 1, 1)$$

$$30. \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



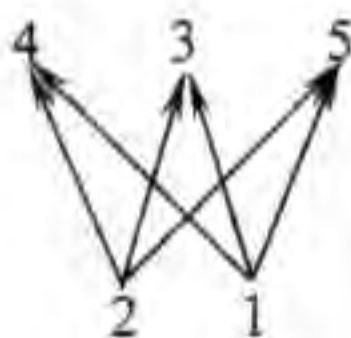
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\chi_{[\tilde{Q}(P)]}(\lambda) = \lambda^5 - 4\lambda^2$$

$$\text{inx}P = \sqrt[3]{4}$$

$$\bar{x}_P = (\frac{1}{\sqrt[3]{2}}, \frac{1}{\sqrt[3]{2}}, \frac{1}{\sqrt[3]{4}}, \frac{1}{\sqrt[3]{4}}, 1)$$

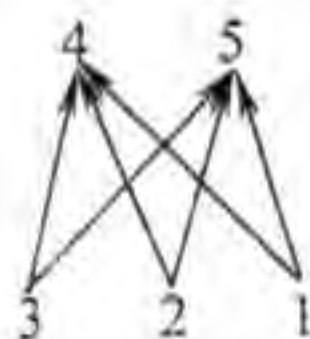
$$31. \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{aligned} \chi_{[\tilde{Q}(P)]}(\lambda) &= \lambda^5 - 6\lambda^3 \\ \text{inx}P &= \sqrt{6} \end{aligned}$$

$$\bar{x}_P = (\sqrt{\frac{3}{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}, 1, 1, 1)$$

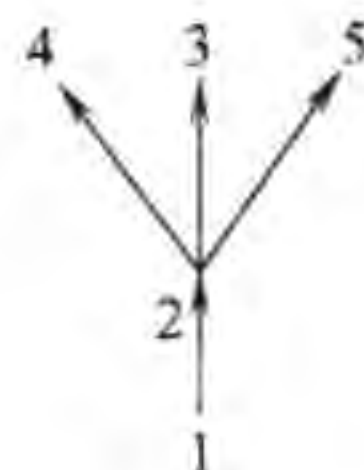
$$32. \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{aligned} \chi_{[\tilde{Q}(P)]}(\lambda) &= \lambda^5 - 6\lambda^3 \\ \text{inx}P &= \sqrt{6} \end{aligned}$$

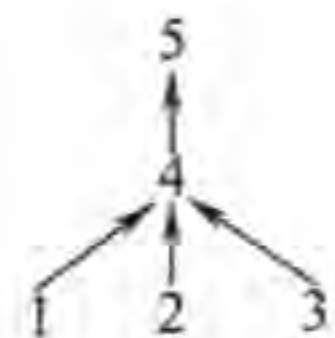
$$\bar{x}_P = (\sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}}, 1, 1)$$

$$33. \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{aligned} \chi_{[\tilde{Q}(P)]}(\lambda) &= \lambda^5 - 3\lambda^2 \\ \text{inx}P &= \sqrt[3]{3} \\ \bar{x}_P &= (\sqrt[3]{3}, \sqrt[3]{3^2}, 1, 1, 1) \end{aligned}$$

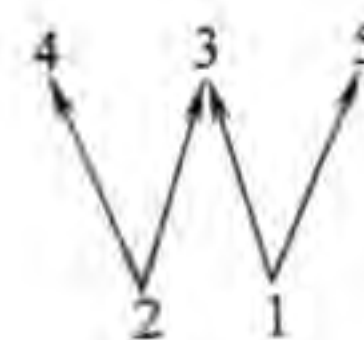
$$34. \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{aligned} \chi_{[\tilde{Q}(P)]}(\lambda) &= \lambda^5 - 3\lambda^2 \\ \text{inx}P &= \sqrt[3]{3} \end{aligned}$$

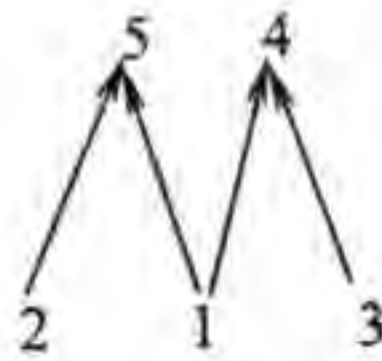
$$\bar{x}_P = (\frac{1}{\sqrt[3]{9}}, \frac{1}{\sqrt[3]{9}}, \frac{1}{\sqrt[3]{9}}, \frac{1}{\sqrt[3]{3}}, 1)$$

$$35. \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



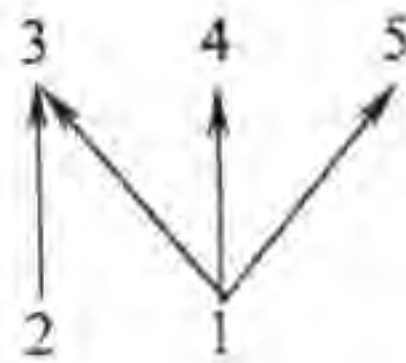
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{aligned} \chi_{[\tilde{Q}(P)]}(\lambda) &= \lambda^5 - 4\lambda^3 \\ \text{inx}P &= 2 \\ \bar{x}_P &= (1, 1, 1, 1, 1) \\ \bar{y}_P &= (2, 2, 2, 1, 1) \end{aligned}$$

36.
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



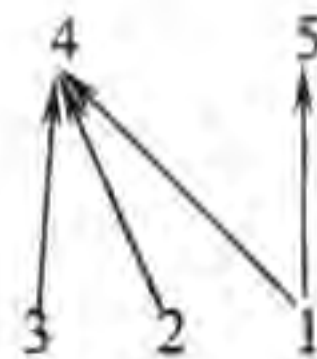
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{aligned} \chi_{[\tilde{Q}(P)]}(\lambda) &= \lambda^5 - 4\lambda^3 \\ \text{inx}P &= 2 \\ \bar{x}_P &= (2,1,1,2,2) \\ \bar{y}_P &= (1,1,1,1,1) \end{aligned}$$

37.
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



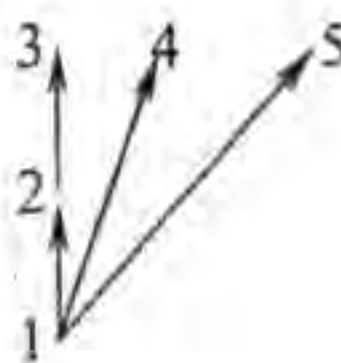
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{aligned} \chi_{[\tilde{Q}(P)]}(\lambda) &= \lambda^5 - 4\lambda^3 \\ \text{inx}P &= 2 \\ \bar{x}_P &= (3,1,2,2,2) \\ \bar{y}_P &= (2,2,2,1,1) \end{aligned}$$

38.
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{aligned} \chi_{[\tilde{Q}(P)]}(\lambda) &= \lambda^5 - 4\lambda^3 \\ \text{inx}P &= 2 \\ \bar{x}_P &= (2,1,1,2,2) \\ \bar{y}_P &= (2,2,2,3,1) \end{aligned}$$

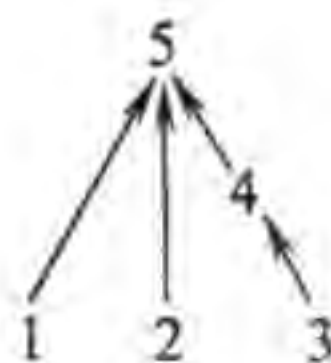
39.
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{aligned} \chi_{[\tilde{Q}(P)]}(\lambda) &= \lambda^5 - 2\lambda^3 - \lambda^2 \\ \text{inx}P &= \frac{\sqrt{5}+1}{2} \end{aligned}$$

$$\bar{x}_P = \left(\frac{1}{2}(1+\sqrt{5}), \frac{1}{2}(-1+\sqrt{5}), 1, 1, 1 \right)$$

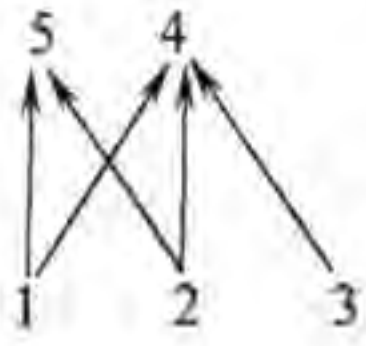
40.
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{aligned} \chi_{[\tilde{Q}(P)]}(\lambda) &= \lambda^5 - 2\lambda^3 - \lambda^2 \\ \text{inx}P &= \frac{\sqrt{5}+1}{2} \end{aligned}$$

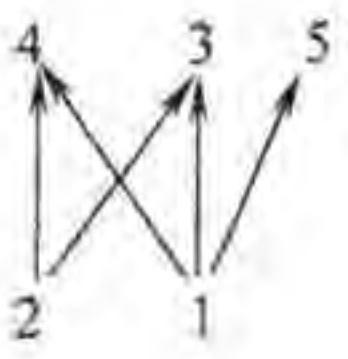
$$\bar{x}_P = \left(\frac{2}{1+\sqrt{5}}, \frac{2}{1+\sqrt{5}}, \frac{4}{(1+\sqrt{5})^2}, \frac{2}{1+\sqrt{5}}, 1 \right)$$

41.
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



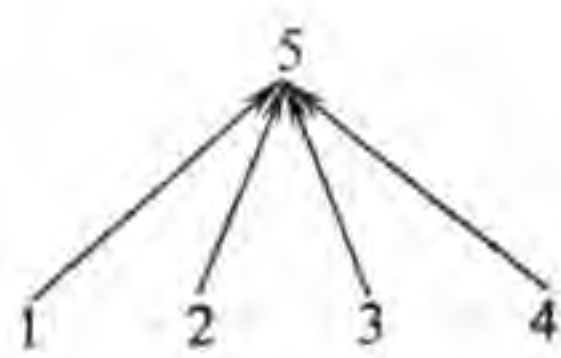
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{aligned} \chi_{[\tilde{Q}(P)]}(\lambda) &= \lambda^5 - 5\lambda^3 \\ \text{inx}P &= \sqrt{5} \\ \bar{x}_P &= \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}, 1, 1\right) \end{aligned}$$

42.
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



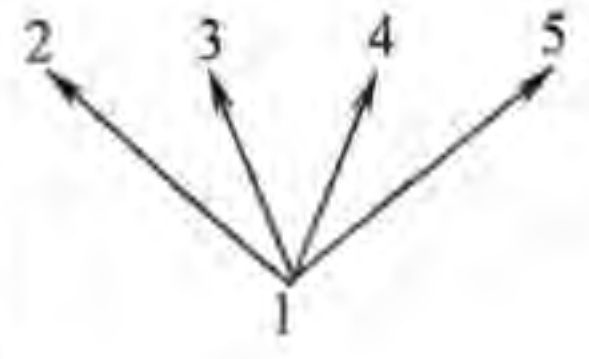
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{aligned} \chi_{[\tilde{Q}(P)]}(\lambda) &= \lambda^5 - 5\lambda^3 \\ \text{inx}P &= \sqrt{5} \\ \bar{x}_P &= \left(\frac{3}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}, 1, 1, 1\right) \end{aligned}$$

43.
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{aligned} \chi_{[\tilde{Q}(P)]}(\lambda) &= \lambda^5 - 4\lambda^3 \\ \text{inx}P &= 2 \\ \bar{x}_P &= (1, 1, 1, 1, 2) \end{aligned}$$

44.
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{aligned} \chi_{[\tilde{Q}(P)]}(\lambda) &= \lambda^5 - 4\lambda^3 \\ \text{inx}P &= 2 \\ \bar{x}_P &= (2, 1, 1, 1, 1) \end{aligned}$$

За теоремою 4.[5] серед наведених 44-ох зв'язних частково впорядкованих множин Q -еквівалентними є вище наведені частково впорядковані множини під номерами: I. 2, 29, 30; II. 39, 40; III. 5, 9, 10; IV. 6, 33, 34; V. 21, 22; VI. 7, 8, 27, 28; VII. 11, 12; VIII. 13, 25; IX. 14, 26; X. 19, 20; XI. 23, 24; XII. 31, 32; XIII. 43, 44.

За Твердженням 1. їх ліві та праві власні вектори можна отримувати перестановкою координат з лівого та правого власних векторів Q -еквівалентних множин.

Аналіз координат лівих та правих власних векторів, що відповідають одному індексу частково впорядкованих множин, які не є Q -еквівалентними, дає наступну теорему.

Теорема 1. Дві частково впорядковані множини S і P з 5-ти елементів зі зв'язною діаграмою Q -еквівалентні, якщо

(a) $\text{inx}S = \text{inx}P$

(b) координати правого $\bar{x}_S$ та лівого $\bar{y}_S$ власного вектора матриці $[\tilde{Q}(S)]$ можна отримати перестановкою координат правого $\bar{x}_P$ та лівого $\bar{y}_P$ власного вектора матриці $[\tilde{Q}(P)]$.

Література

1. Завадский А.Г., Кириченко В.В. Модули без кручения над первичными кольцами // Зап. Науч. семинаров Ленингр. Отд. Мат. ин-та АН СССР. – 1976. – т.57. – с. 100-116.
2. Kirichenko V.V., Chernousova Zh.T., Dokuchaev M.A., Khibina M.A., Miroshnichenko S.G., Zhuravlev V.N. Tiled orders over discrete valuation rings, finite Markov chains and partially ordered sets // I. Algebra and Discrete mathematics, № 1, 2002, с. 32-63.
3. Kirichenko V.V., Chernousova Zh.T., Dokuchaev M.A., Khibina M.A., Miroshnichenko S.G., Zhuravlev V.N. Tiled orders over discrete valuation rings, finite Markov chains and partially ordered sets // II. Algebra and Discrete mathematics, № 2, 2003, с. 47-86.
4. Kirichenko V.V., Zelensky A.V., Zhuravlev V.N. Exponent matrices and their quivers // Buletinul Academiei de Stiinte a Republicii Moldova. Matematica, №1(44), 2004, p. 57-66.
5. Журавльов В.М., Циганівська І.М. Q -еквівалентні скінчені частково впорядковані множини // Вісник Київського університету. Серія: фізико-математичні науки, №1, 2005.

Надійшла до редакції 7.03.2005

УДК 519.21

Ростислав Ямненко*

Про ймовірність виходу суми φ -субгауссових випадкових процесів за криву

У роботі досліджується ймовірність виходу суми φ -субгауссових випадкових процесів за рівень, заданий деякою кривою. Як приклад, наводиться застосування отриманої оцінки до стаціонарних процесів, зокрема узагальненого φ -субгауссового випадкового процесу Орнштейна-Уленбека.

Ключові слова: φ -субгауссовий випадковий процес, розподіл супремума.

*E-mail: yamnenko@univ.kiev.ua

Rostyslav Yamnenko*

On probability of overrunning for an aggregate of φ -subgaussian random processes

In this paper the probability that an aggregate of φ -subgaussian random processes overruns the level specified by some curve is investigated. As an example the obtained estimate is applied to stationary processes, in particular to generalized φ -subgaussian random process of Ornstein-Uhlenbeck.

Key Words: φ -subgaussian stochastic process, suprema distribution.

1. Вступ

У роботі розглядається ймовірність виходу траєкторій скінченної та нескінченної сум φ -субгауссових випадкових процесів, означених на компактній множині, за рівень, заданий деякою неперервною кривою. Оскільки класи φ -субгауссових і строго φ -субгауссових процесів більш загальні, ніж класи гауссових процесів, вони мають велике значення у теорії черг і фінансовій математиці. Зокрема, задача, яка досліджується у даній роботі, має безпосереднє застосування в теорії передачі інформації.

Детальніше про властивості φ -субгауссових і строго φ -субгауссових величин і процесів можна дізнатися з книги Булдигіна В.В. і Козаченка Ю.В. [1], а також з робіт [2-6].

Отримана оцінка також узагальнює результати, отримані раніше в роботах [4-5]. У майбутньому задача знаходження відповідної ймовірності буде поширена для інших типів випадкових процесів або полів.

2. Короткі відомості про φ -субгауссові випадкові величини і процеси

Нехай $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ – стандартний ймовірнісний простір, (T, ρ) – псевдометричний (метричний) сепарабельний простір із псевдометрикою (метрикою) ρ , де T – деяка компактна множина.

Означення 2.1. Функція $u = \{u(x), x \in \mathbb{R}\}$ називається N -функцією Орлича, якщо u – неперервна парна опукла функція, $u(0) = 0$, $u(x)$ монотонно зростає при $x > 0$, $u(x)/x \rightarrow 0$ при $x \rightarrow 0$ та $u(x)/x \rightarrow \infty$ при $x \rightarrow \infty$.

Означення 2.2. [1] Нехай φ така N -функція Орлича, що $\varphi(x) = cx^2$ при $|x| \leq x_0$ для деяких $c > 0$ та $x_0 > 0$. Центрована випадкова величина ξ нале-

жить простору φ -субгауссових випадкових величин, якщо для всіх $\lambda \in \mathbb{R}$ існує константа $r_\xi \geq 0$, для якої має місце нерівність

$$E \exp\{\lambda \xi\} \leq \exp\{\varphi(\lambda r_\xi)\}. \quad (1)$$

Позначимо простір φ -субгауссових випадкових величин, визначених на ймовірнісному просторі $(\Omega, \mathfrak{B}, P)$, через $\text{Sub}_\varphi(\Omega)$.

Теорема 2.3. [1] Простір $\text{Sub}_\varphi(\Omega)$ є банаховим простором з нормою

$\tau_\varphi(\xi) = \sup_{\lambda > 0} \frac{\varphi^{(-1)}(\ln E \exp\{\lambda \xi\})}{\lambda}$, де $\varphi^{(-1)}$ – функція, обернена до функції φ , і для всіх $\lambda \in \mathbb{R}$ виконується наступна нерівність

$$E \exp\{\lambda \xi\} \leq \exp\{\varphi(\lambda \tau_\varphi(\xi))\} \quad (2)$$

та існує константа $c_\varphi > 0$ така, що $(E(\xi)^2)^{1/2} \leq c_\varphi \tau_\varphi(\xi)$.

Означення 2.4. Випадковий процес $Y = (Y(t), t \in T)$ називається φ -субгауссовим, якщо для всіх $t \in T$: $Y(t) \in \text{Sub}_\varphi(\Omega)$ та $\sup_{t \in T} \tau_\varphi(Y(t)) < \infty$.

Означення 2.5. [3] Сім'ю випадкових величин Δ з простору $\text{Sub}_\varphi(\Omega)$ називають строго $\text{Sub}_\varphi(\Omega)$, якщо існує константа $C_\Delta > 0$ така, що для довільної скінченної множини $I: \xi_i \in \Delta, i \in I$, та довільних $\lambda_i \in \mathbb{R}$ має місце нерівність

$$\tau_\varphi\left(\sum_{i \in I} \lambda_i \xi_i\right) \leq C_\Delta \left(E\left(\sum_{i \in I} \lambda_i \xi_i\right)^2\right)^{1/2}. \quad (3)$$

Твердження 2.6. Лінійне замикання сімей строго $\text{Sub}_\varphi(\Omega)$ випадкових величин утворює простір строго $\text{Sub}_\varphi(\Omega)$ ($\text{SSub}_\varphi(\Omega)$) випадкових величин.

Означення 2.7. Випадковий процес $Y = (Y(t), t \in T)$ називається строго φ -субгауссовим, якщо відповідна сім'я випадкових величин $\{Y(t), t \in T\}$ належить простору $\text{SSub}_\varphi(\Omega)$.

Означення 2.8. [1] Якщо існує скінченне ε -покриття множини T , то $N_T(\varepsilon)$ означає кількість елементів в найменшому ε -покритті цієї множини. Крім того, якщо не існує скінченного ε -покриття множини T , покладемо $N_T(\varepsilon) = \infty$. Функцію $N_T(\varepsilon), \varepsilon > 0$ називатимемо метричною масивністю множини T відносно псевдометрики (метрики) ρ .

3. Оцінка ймовірності виходу суми випадкових процесів за криву

3.1. Сума N незалежних φ -субгауссових випадкових процесів. Нехай $Y_i = (Y_i(t), t \in T)$, $i = \overline{1, N}$, – незалежні випадкові φ -субгауссові сепарабельні процеси, $f(t)$ – деяка неперервна функція, T – компактна множина. Застосуємо до процесу $X(t) = \sum_{i=1}^N Y_i(t) - f(t)$ методи з робіт [4-6].

Припустимо, що існують такі неперервні монотонно зростаючі функції $\{\sigma_i(h), h > 0\}$, $i = \overline{1, N}$, що $\sigma_i(h) \rightarrow 0$, коли $h \rightarrow 0$, та

$$\sup_{\rho(t,s) \leq h} \tau_{\varphi}(Y_i(t) - Y_i(s)) \leq \sigma_i(h), i = \overline{1, N}. \quad (4)$$

Введемо наступні позначення:

- $\sigma(h) = \max_{i=\overline{1, N}} \sigma_i(h)$; $\gamma_i(u) = \tau_{\varphi}(Y_i(u)), i = \overline{1, N}$;
- $\beta > 0$ – деяке число, таке що $\beta \leq \sigma(\inf_{t \in T} \sup_{s \in T} \rho(t, s))$.

Лема 3.1.1. Нехай $f(t)$ така неперервна функція, що $|f(u) - f(v)| \leq \delta(|u - v|)$, де $\delta(u), u \geq 0$, – деяка неперервна монотонно зростаюча функція. Тоді для всіх $\lambda > 0$, $p \in (0, 1)$ та послідовності $\{q_k, k = 1, 2, \dots\}$ такої, що $q_k > 1$ і $\sum_{k=1}^{\infty} q_k \leq 1$, виконується нерівність

$$\begin{aligned} E \exp \left\{ \lambda \sup_{t \in T} X(t) \right\} &\leq \prod_{k=1}^{\infty} (N_T(\varepsilon_k))^{\frac{1}{q_k}} \exp \left\{ q_k^{-1} \sup_{u \in T} \left(\sum_{i=1}^N \varphi(\lambda q_i \gamma_i(u)) - \lambda q_i f(u) \right) \right\} \times \\ &\times \prod_{k=2}^{\infty} \exp \left\{ q_k^{-1} N \varphi(\lambda q_k \beta p^{k-1}) + \lambda \delta(\sigma^{(k-1)}(\beta p^{k-1})) \right\}. \end{aligned} \quad (5)$$

Доведення. Нехай $\varepsilon_k = \sigma^{(k-1)}(\beta p^k)$, $p \in (0, 1), k = 0, 1, 2, \dots$. Позначимо через V_k множину центрів замкнених куль радіусу ε_k , які утворюють мінімальне покриття простору (T, ρ) . Кількість точок множини V_k дорівнює $N_T(\varepsilon_k)$. Процеси $Y_i(t), i = \overline{1, N}$, і, відповідно, $X(t)$ сепарабельні, тому множину $V = \bigcup_{k=1}^{\infty} V_k$ можна вважати множиною сепарабельності процесу $X(t)$, та з ймовірністю одиниця виконується рівність

$$\sup_{t \in T} X(t) = \sup_{t \in V} X(t). \quad (6)$$

Розглянемо відображення $\alpha_n = \{\alpha_n(t), n = 0, 1, \dots\}$ множини V у V_{ε_n} . $\alpha_n(t)$ – така точка множини V_{ε_n} , що $\rho(t, \alpha_n(t)) < \varepsilon_n$, якщо таких точок декілька, вибираємо одну з них і позначаємо $\alpha_n(t)$. Якщо $t \in V_{\varepsilon_n}$, то $\alpha_n(t) = t$.

З теореми 2.3 і нерівності Чебишова маємо:

$$P\{|Y_i(t) - Y_i(\alpha_n(t))| > p^{n/2}\} \leq p^{-n} E(Y_i(t) - Y_i(\alpha_n(t)))^2 \leq p^{-n} c_{\varphi}^2 \sigma^2(\varepsilon_n) = c_{\varphi}^2 \beta^2 p^n. \quad (7)$$

Отже, $\sum_{n=1}^{\infty} P\{|Y_i(t) - Y_i(\alpha_n(t))| > p^{n/2}\} < \infty, i = \overline{1, N}$. З леми Бореля-Кантеллі та неперервності функції $f(t)$ випливає, що $X(t) - X(\alpha_n(t)) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ з ймовірністю одиниця. Оскільки множина V злічена, то $X(t) - X(\alpha_n(t)) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ з ймовірністю одиниця для всіх t одночасно. Нехай t – довільна точка з множини V . Для будь-якого $m \geq 1$ позначимо $t_m = \alpha_m(t_{m-1}), \dots, t_1 = \alpha_1(t_2)$. Тоді для довільного $m \geq 2$ маємо

$$X(t) = (X(t) - X(\alpha_m(t))) + \sum_{k=2}^m (X(t_k) - X(t_{k-1})) + X(t_1)$$

$$\leq \max_{u \in V_{\varepsilon_1}} X(u) + \sum_{k=2}^m \max_{u \in V_{\varepsilon_k}} (X(u) - X(\alpha_{k-1}(u))) + (X(t) - X(\alpha_m(t))). \quad (8)$$

З останньої нерівності випливає, що

$$\sup_{t \in T} X(t) \leq \liminf_{m \rightarrow \infty} \left(\max_{u \in V_{\varepsilon_1}} X(u) + \sum_{k=2}^m \max_{u \in V_{\varepsilon_k}} (X(u) - X(\alpha_{k-1}(u))) \right). \quad (9)$$

Зі співвідношень (6), (9), нерівності Гельдера та леми Фату маємо:

$$\begin{aligned} E \exp \left\{ \lambda \sup_{t \in T} X(t) \right\} &\leq E \liminf_{m \rightarrow \infty} \exp \left\{ \lambda \max_{u \in V_{\varepsilon_1}} X(u) + \sum_{k=2}^m \lambda \max_{u \in V_{\varepsilon_k}} (X(u) - X(\alpha_{k-1}(u))) \right\} \\ &\leq \left(E \exp \left\{ q_1 \lambda \max_{u \in V_{\varepsilon_1}} X(u) \right\} \right)^{\frac{1}{q_1}} \prod_{k=2}^{\infty} \left(E \exp \left\{ q_k \lambda \max_{u \in V_{\varepsilon_k}} (X(u) - X(\alpha_{k-1}(u))) \right\} \right)^{\frac{1}{q_k}}. \end{aligned} \quad (10)$$

З теореми 2.3 випливає, що

$$E \exp \{ \lambda q_i Y_i(u) \} \leq \exp \{ \varphi(\lambda q_i \gamma_i(u)) \}, \quad i = \overline{1, N}. \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \text{Тоді} \quad &\left(E \exp \left\{ q_1 \lambda \max_{u \in V_{\varepsilon_1}} X(u) \right\} \right)^{1/q_1} \leq \left(\sum_{u \in V_{\varepsilon_1}} E \exp \left\{ \lambda q_1 \sum_{i=1}^N Y_i(u) \right\} \exp \{ -\lambda q_1 f(u) \} \right)^{1/q_1} \\ &\leq \left(\sum_{u \in V_{\varepsilon_1}} \exp \left\{ \sum_{i=1}^N \varphi(\lambda q_i \gamma_i(u)) - \lambda q_1 f(u) \right\} \right)^{1/q_1} \\ &\leq (N(\varepsilon_1))^{1/q_1} \exp \left\{ q_1^{-1} \sup_{u \in T} \left(\sum_{i=1}^N \varphi(\lambda q_i \gamma_i(u)) - \lambda q_1 f(u) \right) \right\}. \end{aligned} \quad (12)$$

Також з теореми 2.3 і припущення (4) випливає, що

$$E \exp \{ \lambda q_k (Y_i(u) - Y(\alpha_{k-1}(u))) \} \leq \exp \{ \varphi(\lambda q_k \sigma_i(\varepsilon_{k-1})) \}, \quad i = \overline{1, N}. \quad (13)$$

Оскільки $|f(u) - f(v)| \leq \delta(|u - v|)$, то аналогічно до (12)

$$\begin{aligned} &\left(E \exp \left\{ q_k \lambda \max_{u \in V_{\varepsilon_k}} (X(u) - X(\alpha_{k-1}(u))) \right\} \right)^{1/q_k} \\ &\leq (N(\varepsilon_k))^{1/q_k} \left(\max_{u \in V_{\varepsilon_k}} \exp \left\{ \sum_{i=1}^N \varphi(\lambda q_k \sigma_i(\varepsilon_{k-1})) - \lambda q_k (f(u) - f(\alpha_{k-1}(u))) \right\} \right)^{1/q_k} \\ &\leq (N(\varepsilon_k))^{1/q_k} \exp \{ q_k^{-1} N \varphi(\lambda q_k \beta p^{k-1}) + \lambda \delta(\sigma^{(-1)}(\beta p^{k-1})) \}. \end{aligned} \quad (14)$$

І з нерівностей (10), (12) і (14) маємо твердження леми. $\square$

Теорема 3.1.2. Нехай $Y_i = (Y_i(t), t \in T), i = \overline{1, N}$ – незалежні φ -субгауссові сепарабельні випадкові процеси, для яких існують такі неперервні монотонно зростаючі функції $\{\sigma_i(h), h > 0\}, i = \overline{1, N}$, що $\sigma_i(h) \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$, та $\sup_{\rho(t,s) \leq h} \tau_{\varphi}(Y_i(t) - Y_i(s)) \leq \sigma_i(h), i = \overline{1, N}$. Нехай $f(t)$ така неперервна функція, що $|f(u) - f(v)| \leq \delta(|u - v|)$, де $\delta(u), u \geq 0$, – деяка неперервна монотонно зростаюча функція, та $r = \{r(u), u \geq 1\}$ така неперервна неспадна невід'ємна функція, що $r(\exp\{t\})$ опукла. Якщо

$$\int_0^\beta r(N_T(\sigma^{(-1)}(u)))du < \infty, \quad (15)$$

то для всіх $p \in (0,1)$ та $x > 0$ справджується наступна нерівність

$$\begin{aligned} P\left\{\sup_{t \in T} X(t) > x\right\} &\leq r^{(-1)}\left(\frac{1}{\beta p} \int_0^{\beta p} r(N_T(\sigma^{(-1)}(u)))du\right) \times \\ &\times \inf_{\lambda > 0} \exp\left\{\theta_\varphi(\lambda, p) + Np\varphi\left(\frac{\lambda\beta}{1-p}\right) + \lambda\left(\sum_{k=2}^\infty \delta(\sigma^{(-1)}(\beta p^{k-1})) - x\right)\right\}, \end{aligned} \quad (16)$$

$$\text{де } \theta_\varphi(\lambda, p) = \sup_{u \in T} \left[(1-p) \sum_{i=1}^N \varphi\left(\frac{\lambda\gamma_i(u)}{1-p}\right) - \lambda f(u) \right].$$

Доведення. Нехай у нерівності (5) $q_k = p^{1-k}(1-p)^{-1}$, тоді

$$\begin{aligned} E \exp\left\{\lambda \sup_{t \in T} X(t)\right\} &\leq \exp\left\{N \sum_{k=2}^\infty (1-p)p^{k-1} \varphi\left(\frac{\lambda\beta}{1-p}\right) + \lambda\left(\sum_{k=2}^\infty \delta(\sigma^{(-1)}(\beta p^{k-1}))\right)\right\} \times \\ &\times \exp\left\{\theta_\varphi(\lambda, p) + \sum_{k=1}^\infty (1-p)p^{k-1} \log N_T(\sigma^{(-1)}(\beta p^{k-1}))\right\}. \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \text{Також } \exp\left\{\sum_{k=1}^\infty (1-p)p^{k-1} \log N_T(\sigma^{(-1)}(\beta p^{k-1}))\right\} &= r^{(-1)}\left(r\left(\exp\left\{\sum_{k=1}^\infty (1-p)p^{k-1} \log N_T(\sigma^{(-1)}(\beta p^{k-1}))\right\}\right)\right) \\ &\leq r^{(-1)}\left(\exp\left\{\sum_{k=1}^\infty (1-p)p^{k-1} r(\log N_T(\sigma^{(-1)}(\beta p^{k-1})))\right\}\right) \\ &\leq r^{(-1)}\left(\frac{1}{\beta p} \int_0^{\beta p} r(N(\sigma^{(-1)}(u)))du\right). \end{aligned} \quad (18)$$

Таким чином, з леми 3.1.1, (17) і (18) маємо твердження теореми 3.1.2. $\square$

3.2. Ймовірність виходу нескінченної суми φ -субгауссових процесів.

Нехай $Y_i = (Y_i(t), t \in T), i \geq 1$, – послідовність φ -субгауссових сепарабельних випадкових процесів, а $f(t)$ – деяка неперервна функція, (T, ρ) – псевдометричний (метричний) сепарабельний простір, T – деяка компактна множина. Подібно до попереднього розділу розглянемо $X(t) = \sum_{i=1}^\infty Y_i(t) - f(t)$.

Припустимо, що існують такі неперервні монотонно зростаючі функції $\{\sigma_i(h), h > 0\}, i \geq 1$, що $\sigma_i(h) \rightarrow 0$, коли $h \rightarrow 0$, та

$$\sup_{\rho(t,s) \leq h} \tau_\varphi(Y_i(t) - Y_i(s)) \leq \sigma_i(h). \text{ Покладемо } \sigma(h) = \sum_{i=1}^\infty \sigma_i(h); \gamma_i(u) = \tau_\varphi(Y_i(u));$$

$$\gamma(u) = \sum_{i=1}^\infty \gamma_i(u); \beta > 0 - \text{ деяке число, таке що } \beta \leq \sigma(\inf_{t \in T} \sup_{s \in T} \rho(t, s)).$$

Лема 3.2.1. Нехай $f(t)$ така неперервна функція, що $|f(u) - f(v)| \leq$

$\delta(|u-v|)$, де $\delta(u), u \geq 0$, – неперервна монотонно зростаюча функція, $\sigma(h)$ і $\gamma(u)$ – обмежені функції. Тоді для всіх $\lambda > 0$, $p \in (0,1)$ і послідовності $\{q_k, k=1,2,\dots\}$ такої, що $q_k > 1$ і $\sum_{k=1}^{\infty} q_k \leq 1$, має місце оцінка

$$\begin{aligned} E \exp \left\{ \lambda \sup_{t \in T} X(t) \right\} &\leq \prod_{k=1}^{\infty} (N_T(\varepsilon_k))^{\frac{1}{q_k}} \exp \left\{ q_1^{-1} \sup_{u \in T} (\varphi(\lambda q_1 \gamma(u)) - \lambda q_1 f(u)) \right\} \times \\ &\times \prod_{k=2}^{\infty} \exp \left\{ q_k^{-1} \varphi(\lambda q_k \beta p^{k-1}) + \lambda \delta(\sigma^{(-1)}(\beta p^{k-1})) \right\}. \end{aligned} \quad (19)$$

Доведення леми 3.2.1 проводиться аналогічно доведенню леми 3.1.1, зокрема так само визначаються множини V_{ε_k} та відображення $\alpha_n = \{\alpha_n(t), n=0,1,\dots\}$.

Подібно до (6) $\sup_{t \in T} X(t) = \sup_{t \in V} X(t)$, де $V = \bigcup_{k=1}^{\infty} V_{\varepsilon_k}$.

З теореми 2.3 і нерівності Чебишова маємо:

$$\begin{aligned} P \left\{ \left| \sum_{i \geq 1} (Y_i(t) - Y_i(\alpha_n(t))) \right| > p^{n/2} \right\} &\leq p^{-n} E \left(\sum_{i \geq 1} (Y_i(t) - Y_i(\alpha_n(t)))^2 \right) \\ &\leq p^{-n} c_{\varphi}^2 \sum_{i \geq 1} \sigma_i^2(\varepsilon_n) \leq p^{-n} c_{\varphi}^2 \left(\sum_{i \geq 1} \sigma_i(\varepsilon_n) \right)^2 \leq p^{-n} c_{\varphi}^2 \sigma^2(\varepsilon_n) = c_{\varphi}^2 \beta^2 p^n. \end{aligned} \quad (20)$$

$$\text{Отже, } \sum_{n=1}^{\infty} P \left\{ \left| \sum_{i=1}^{\infty} Y_i(t) - Y_i(\alpha_n(t)) \right| > p^{n/2} \right\} < \infty.$$

Аналогічно до (9) маємо

$$\sup_{t \in V} X(t) \leq \liminf_{m \rightarrow \infty} \left(\max_{u \in V_{\varepsilon_1}} X(u) + \sum_{k=2}^m \max_{u \in V_{\varepsilon_k}} (X(u) - X(\alpha_{k-1}(u))) \right), \quad (21)$$

і з нерівності (21), нерівності Гельдера та леми Фату випливає

$$\begin{aligned} E \exp \left\{ \lambda \sup_{t \in T} X(t) \right\} &\leq \\ &\leq \left(E \exp \left\{ q_1 \lambda \max_{u \in V_{\varepsilon_1}} X(u) \right\} \right)^{1/q_1} \prod_{k=2}^{\infty} \left(E \exp \left\{ q_k \lambda \max_{u \in V_{\varepsilon_k}} (X(u) - X(\alpha_{k-1}(u))) \right\} \right)^{1/q_k}. \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \text{Тоді } \left(E \exp \left\{ q_1 \lambda \max_{u \in V_{\varepsilon_1}} X(u) \right\} \right)^{1/q_1} &\leq \left(\sum_{u \in V_{\varepsilon_1}} E \exp \left\{ \lambda q_1 \sum_{i=1}^{\infty} Y_i(u) \right\} \exp \left\{ -\lambda q_1 f(u) \right\} \right)^{1/q_1} \\ &\leq (N(\varepsilon_1))^{1/q_1} \exp \left\{ q_1^{-1} \sup_{u \in T} \left(\varphi \left(\lambda q_1 \tau_{\varphi} \left(\sum_{i=1}^{\infty} Y_i(u) \right) \right) - \lambda q_1 f(u) \right) \right\} \\ &\leq (N(\varepsilon_1))^{1/q_1} \exp \left\{ q_1^{-1} \sup_{u \in T} (\varphi(\lambda q_1 \gamma(u)) - \lambda q_1 f(u)) \right\}. \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \text{Аналогічно до (23)} \quad \left(E \exp \left\{ q_k \lambda \max_{u \in V_{\varepsilon_k}} (X(u) - X(\alpha_{k-1}(u))) \right\} \right)^{1/q_k} &\leq (N(\varepsilon_k))^{1/q_k} \left(\max_{u \in V_{\varepsilon_k}} \exp \left\{ \varphi \left(\lambda q_k \sum_{i=1}^{\infty} \sigma_i(\varepsilon_{k-1}) \right) - \lambda q_k (f(u) - f(\alpha_{k-1}(u))) \right\} \right)^{1/q_k} \\ &\leq (N(\varepsilon_k))^{1/q_k} \exp \left\{ q_k^{-1} \varphi(\lambda q_k \beta p^{k-1}) + \lambda \delta(\sigma^{(-1)}(\beta p^{k-1})) \right\}. \end{aligned} \quad (24)$$

Таким чином, з нерівностей (21)-(24) випливає твердження леми. $\square$

Теорема 3.2.2. Нехай $Y_i = (Y_i(t), t \in T), i \geq 1$, – послідовність ϕ -субгауссових сепарабельних випадкових процесів, для яких існують такі неперервні монотонно зростаючі функції $\{\sigma_i(h), h > 0\}, i \geq 1$, що $\sigma_i(h) \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$, та

$\sup_{\rho(t,s) \leq h} \tau_\phi(Y_i(t) - Y_i(s)) \leq \sigma_i(h)$. Припустимо, що $\sigma(h) = \sum_{i=1}^{\infty} \sigma_i(h) < \infty$ і

$\gamma(u) = \sum_{i=1}^{\infty} \gamma_i(u) = \sum_{i=1}^{\infty} \tau_\phi(Y_i(u)) < \infty$. Нехай $\beta \leq \sigma(\inf_{t \in T} \sup_{s \in T} \rho(t,s))$ – деяка до-

датна константа, $f(t)$ така неперервна функція, що $|f(u) - f(v)| \leq \delta(|u - v|)$, де $\delta(u), u \geq 0$, – неперервна монотонно зростаюча функція, та $r = \{r(u), u \geq 1\}$ така неперервна неспадна невід'ємна функція, що $r(\exp\{t\})$ опукла. Якщо

$$\int_0^\beta r(N_r(\sigma^{(-1)}(u))) du < \infty, \quad (25)$$

то для всіх $p \in (0,1)$ та $x > 0$ справджується наступна нерівність

$$\begin{aligned} P\left\{\sup_{t \in T} X(t) > x\right\} &\leq r^{(-1)}\left(\frac{1}{\beta p} \int_0^{\beta p} r(N_r(\sigma^{(-1)}(u))) du\right) \times \\ &\times \inf_{\lambda > 0} \exp\left\{\theta_\phi(\lambda, p) + p\phi\left(\frac{\lambda\beta}{1-p}\right) + \lambda\left(\sum_{k=2}^{\infty} \delta(\sigma^{(-1)}(\beta p^{k-1})) - x\right)\right\}, \end{aligned} \quad (26)$$

$$\text{де } \theta_\phi(\lambda, p) = \sup_{u \in T} \left[(1-p)\phi\left(\frac{\lambda\gamma(u)}{1-p}\right) - \lambda f(u) \right].$$

Доведення теореми 3.2.2 випливає з леми 3.2.1 і теореми 3.1.2.

4. Застосування до стаціонарних процесів

Розглянемо $T = [a, b], 0 \leq a < b < \infty$, $\rho(t, s)$ – евклідова норма. Тоді

$N(u) = N_{[a,b]}(u) \leq \frac{b-a}{2u} + 1$. Нехай $Y_i(t) = \int_0^t Z_i(u) du$, де $Z_i(u), i = \overline{1, N}$, – незалежні стаціонарні строго ϕ -субгауссові сепарабельні процеси з однаковими коваріаційною функцією $B_z(t-s) = EZ_i(t)Z_i(s)$ і

$$\sigma(h) = \sigma_i(h) = C_\Delta \sup_{|t-s| \leq h} (E(Z_i(t) - Z_i(s))^2)^{1/2} = C_\Delta 2^{1/2} \sup_{|t-s| \leq h} (B_z(0) - B_z(t-s))^{1/2}. \quad (27)$$

Коваріаційна функція процесів $Y_i(t), i = \overline{1, N}$, має вигляд

$$B_Y(t, s) = E \int_0^t \int_0^s B_z(u-v) du dv. \quad (28)$$

Припустимо, що існує така неперервна монотонно зростаюча функція $\{\sigma_Y(h), h > 0\}$, що $\sigma_Y(h) \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$ і

$$\begin{aligned} \sup_{|t-s| \leq h} \tau_\phi(Y_i(t) - Y_i(s)) &= C_\Delta \sup_{|t-s| \leq h} (E(Y_i(t) - Y_i(s))^2)^{1/2} \\ &= C_\Delta \sup_{|t-s| \leq h} (B_Y(t, t) + B_Y(s, s) - 2B_Y(t-s))^{1/2} \leq \sigma_Y(h). \end{aligned} \quad (29)$$

Позначимо $\gamma_r(u) = C_\Delta (B_r(u, u))^{1/2}$, $\beta > 0$ – деяке число, таке що $\beta \leq \sigma_r((b-a)/2)$. Тоді з теореми 3.1.2 випливає наступний

Наслідок 4.1. Нехай $Z_i = (Z_i(u), u \in [a, b]), i = \overline{1, N}$ – незалежні стаціонарні φ -субгауссові сепарабельні випадкові процеси, для функцій $f(t)$ і $r(u)$ виконуються умови теореми 3.2. Якщо

$$\int_0^\beta r \left(\frac{b-a}{2\sigma_r^{(-1)}(u)} + 1 \right) du < \infty, \quad (30)$$

то для всіх $p \in (0, 1)$ та $x > 0$ виконується наступна нерівність

$$\begin{aligned} P \left\{ \sup_{t \in [a, b]} \left(\sum_{i=1}^N Y_i(t) - f(t) \right) > x \right\} &\leq r^{(-1)} \left(\frac{1}{\beta p} \int_0^{\beta p} r \left(\frac{b-a}{2\sigma_r^{(-1)}(u)} + 1 \right) du \right) \times \\ &\times \inf_{\lambda > 0} \exp \left\{ \theta_\varphi(\lambda, p) + N p \varphi \left(\frac{\lambda \beta}{1-p} \right) + \lambda \left(\sum_{k=2}^{\infty} \delta(\sigma_r^{(-1)}(\beta p^{k-1})) - x \right) \right\}, \end{aligned} \quad (31)$$

$$\text{де } \theta_\varphi(\lambda, p) = \sup_{u \in [a, b]} \left[N(1-p) \varphi \left(\frac{\lambda \gamma_r(u)}{1-p} \right) - \lambda f(u) \right].$$

Означення 4.2. [5] Будемо називати випадковий процес $Z = (Z(t), t \in T)$, де T – деяка параметрична множина ($T = [a, b]$), φ -субгауссовим узагальненим процесом Орнштейна-Уленбека, якщо Z є φ -субгауссовим процесом із коваріаційною функцією

$$B_z(t, s) = \exp\{-\tau |t - s|\}, \tau > 0. \quad (32)$$

Застосуємо результати з наслідку 4.1 до суми незалежних строго φ -субгауссових узагальнених процесів Орнштейна-Уленбека. Матимемо:

$$B_r(t, s) = 2\tau^{-1} \min(t, s) + \tau^{-2} (e^{-\tau t} + e^{-\tau s} - e^{-\tau |t-s|}); \quad (33)$$

$$\sup_{|t-s| \leq h} (B_r(t, t) + B_r(s, s) - 2B_r(t-s))^{1/2} = \sqrt{2} (\tau^{-1} h + \tau^{-2} (e^{-\tau h} - 1))^{1/2}. \quad (34)$$

Покладемо $\sigma_r(h) = C_\Delta (2\tau^{-1} h)^{1/2}$ та $\gamma_r(u) = C_\Delta (2\tau^{-1} u)^{1/2}$, тоді $\sigma_r^{(-1)}(u) = \frac{\tau u^2}{2C_\Delta}$.

Якщо $u \leq \beta$, то $\sigma_r^{(-1)}(u) \leq \sigma_r^{(-1)}(\beta) = (b-a)/2$. Нехай $r(u) = u^\alpha, \alpha \in (0; 1/2)$.

Тоді умова (15) виконується, бо $\int_0^\beta \left(\frac{2C_\Delta(b-a)}{\tau u^2} \right)^\alpha du < \infty$.

Нехай $f(t) = ct$, де $c > 0$ – деяка константа. Тоді

$$\left(\frac{1}{\beta p} \int_0^{\beta p} \left(\frac{2C_\Delta(b-a)}{\tau u^2} \right)^\alpha du \right)^{1/\alpha} = \frac{2C_\Delta(b-a)}{\tau(\beta p)^2} (1-2\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} \xrightarrow{\alpha \rightarrow 0} \frac{2C_\Delta e^2(b-a)}{\tau(\beta p)^2}; \quad (35)$$

$$\sum_{k=2}^{\infty} \delta(\sigma_r^{(-1)}(\beta p^{k-1})) = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{c\tau\beta^2 p^{2(k-1)}}{2C_\Delta} = \frac{c\tau\beta^2 p^2}{2C_\Delta(1-p^2)}. \quad (36)$$

Таким чином, маємо узагальнення теореми, доведеної в [5]:

Теорема 4.2. Нехай $Z_i = (Z_i(u), u \in [a, b]), 0 \leq a < b < \infty, i = \overline{1, N}$ – незалежні сепарабельні строго φ -субгауссові узагальнені процеси Орнштейна-Уленбека. Тоді для всіх $p \in (0, 1), \beta \in (0; C_\Delta (\tau^{-1}(b-a))^{1/2})$ та $x > 0$ виконується наступна нерівність

$$P \left\{ \sup_{t \in [a, b]} \left(\sum_{i=1}^N \int_0^t Z_i(u) du - ct \right) > x \right\} \leq \frac{2C_\Delta e^2 (b-a)}{\tau(\beta p)^2} \times \\ \times \inf_{\lambda > 0} \exp \left\{ \theta_\varphi(\lambda, p) + Np\varphi \left(\frac{\lambda\beta}{1-p} \right) + \lambda \left(\frac{c\tau\beta^2 p^2}{2C_\Delta(1-p^2)} - x \right) \right\}, \quad (37)$$
$$\text{де } \theta_\varphi(\lambda, p) = \sup_{u \in [a, b]} \left[N(1-p)\varphi \left(\frac{\lambda C_\Delta (2\tau^{-1}u)^{1/2}}{1-p} \right) - \lambda cu \right].$$

5. Висновки

У роботі досліджено ймовірність розподілу супремума виходу траєкторій як скінченної, так і нескінченної сум φ -субгауссових випадкових процесів за рівень, заданий деякою неперервною кривою. Для обох випадків отримано умови існування та оцінки такої ймовірності. Як приклад, отриману оцінку було застосовано до суми незалежних стаціонарних φ -субгауссових процесів, зокрема суми строго φ -субгауссових узагальнених процесів Орнштейна-Уленбека.

Література

1. Буддыгин В.В., Козаченко Ю.В. Метрические характеристики случайных величин и процессов. – Киев: ТВіМС, 1998. – 289с.
2. Козаченко Ю.В., Островский Е.И. Банаховы пространства случайных величин типа субгауссовых. // Теория вероятн. и матем. статист. – 1985. – №32 – с.42-53.
3. Козаченко Ю.В., Ковальчук Ю.А. Краевые задачи со случайными начальными условиями и функциональные ряды из $\text{Sub}_\varphi(\Omega)$.I. // Укр. матем. Журнал. – 1998. – 50, №4. – ст. 504-515.
4. Kozachenko Yu., Vasylyk O., Yamnenko R. On the probability of exceeding some curve by φ -subGaussian random process // Theory of Stochastic Processes. – Vol. 9(25). – 2004. – No. 3-4 – pp.70-80.
5. Kozachenko Yu., Vasylyk O. and Yamnenko R. Upper estimate of overrunning by $\text{Sub}_\varphi(\Omega)$ random process the level specified by continuous function. // Random Oper. and Stoch. Equ. – Vol.13, No.2 – 2005. – pp. 101-118.
6. Ямненко Р. Про ймовірність виходу траєкторій φ -субгауссового випадкового процесу за криву. // Вісник Київського університету. Серія: фіз.-мат. науки. – №3 – 2004. – ст. 82-86.

Надійшла до редакції 28.02.2005

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ
РІВНЯННЯ,
МАТЕМАТИЧНА ФІЗИКА
ТА МЕХАНІКА

УДК 539.3

Андрушко Н.Ф., Сенченков І.К.
Січко В.М., Бойчук О.В., Кепич Т.Ю.

Оцінка залишкового напружено-деформованого стану в фізично нелінійному диску при імпульсному стисканні.

Чисельно досліджено залишковий деформований стан диску із непружного матеріалу при імпульсному радіальному стисканні. Встановлено, що залишкові непружні деформації в площині диску є стискаючими, і, внаслідок фокусування, їх радіальний розподіл має максимум в центрі диску. Розмір області залишкових деформацій збільшується із підвищенням прикладеного навантаження.

Andrushko N.F., Senchenkov I.K.
Sichko V.M., Boychuk O.V., Kepich T.Y.

The value of residual stress-strains state of nonelastik disk under compressive pulse radial loading.

Residual strains of nonelastik disk under compressive pulse radial loading are numerically investigated. It established that residual strains in disc are compressive and as result of focusing its radial distribution has maximum in the center of the disc. The size of area of residual strains grows when external load is increased.

Дослідження залишкового напружено-деформованого стану в тілах із фізично нелінійних матеріалів при імпульсному навантаженні має важливе теоретичне та практичне значення [8,9]. Зокрема, нині розробляються технології блокування поширення утомної тріщини шляхом створення поля залишкових стискаючих напружень і пластичних деформацій за допомоги імпульсного вибухового впливу з фокусуванням енергії в області вершини тріщини [4,5].

Робота присвячена чисельному моделюванню розповсюдження симетричних хвиль стиску, які збурюються імпульсним радіальним навантаженням, в диску із алюмінієвого сплаву.

Постановка задачі.

Вводиться циліндрична система координат $O r z \theta$, в якій розглядається диск товщини $0 \leq z \leq h$ та радіусу $0 < r \leq R$.

Постановка задачі включає:
кінематичні рівняння Коші для деформацій

$$\varepsilon_z = u_{z,z}, \varepsilon_r = u_{r,r}, \varepsilon_{\theta\theta} = u_r/r, \varepsilon_{rz} = \frac{1}{2}(u_{z,r} + u_{r,z});$$

рівняння руху

$$\sigma_{rr,z} + \sigma_{rz,r} + (\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta})/r = \rho \ddot{u}_r, \sigma_{zz,z} + \sigma_{rz,r} + \sigma_{rz}/r = \rho \ddot{u}_z,$$

Механічна поведінка матеріалу описується динамічним варіантом узагальненої моделі течії Боднера–Партома [6,7]:
закон течії і рівняння пластичної нестисливості

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^p = \lambda s_{ij}, \quad \dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{\varepsilon}_{ij}^p + \dot{\varepsilon}_{ij}^e, \quad \dot{\varepsilon}_{kk}^p = 0, \quad i, j = r, z, \theta;$$

кінетичне рівняння

$$D_2^p = D_0^2 \exp \left[- \left(Z^2 / 3J_2 \right)^n \right],$$

де $J_2 = \frac{1}{2} s_{ij} s_{ij}$, $D_2^p = \frac{1}{2} \dot{\varepsilon}_{ij}^p \dot{\varepsilon}_{ij}^p$, $J_2 = \lambda^{-2} D_2^p$, $\lambda^2 = D_2^p J_2^{-1}$, $Z = K + D$,

$$s_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \sigma_{kk};$$

еволюційне рівняння для параметра K ізотропного зміцнення

$$\dot{K} = m_1 (K_1 - K) \dot{W}_p - A_1 K_1 \left((K - K_2) K_1^{-1} \right)^{r_1}, \quad K(0) = K_0,$$

де $\dot{W}_p = \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}^p$;

еволюційне рівняння для параметра β_{ij} направленої зміцнення

$$\dot{\beta}_{ij} = m_2 (D_1 U_{ij} - \beta_{ij}) \dot{W}_p - A_2 K_1 \left((\beta_{kl} \beta_{kl})^{\frac{1}{2}} K_1^{-1} \right)^{r_2} V_{ij}, \quad \beta_{ij}(0) = 0,$$

де $D = \beta_{ij} U_{ij}$, $U_{ij} = (\beta_{kl} \beta_{kl})^{\frac{1}{2}} \beta_{ij}$, $U_{ij} = (\sigma_{kl} \sigma_{kl})^{\frac{1}{2}} \sigma_{ij}$;

закон Гука

$$\sigma_{kk} = 3k \varepsilon_{kk}, \quad s_{ij} = 2G (\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^p);$$

граничні умови

$$\sigma_{rz}|_{z=h} = 0, \quad \sigma_{zz}|_{z=h} = 0, \\ \sigma_{rr}|_{r=R} = f(t), \quad \sigma_{rz}|_{r=R} = 0;$$

початкові умови

$$u_i|_{t=0} = 0, \quad \dot{u}_i|_{t=0} = 0.$$

Використовуються такі позначення: E – модуль пружності; ν – коефіцієнт Пуасона; G – модуль зсуву; K_v – модуль об'ємного стиску; u_i – компоненти вектора переміщення; $\dot{u}_i = \partial u_i / \partial t$ – швидкість переміщення; ε_{ij}^p – тензор непружних деформацій; $\dot{\varepsilon}_{ij}^p = \partial \varepsilon_{ij}^p / \partial t$; t – час; σ_{ij} , s_{ij} – компоненти тензора та девіатора напружень; $\sigma_{rz} = \partial \sigma_{rz} / \partial z$; ε_{ij} , e_{ij} – компоненти тензора та девіатора деформацій; $f(t)$ – задана функція

навантаження; $D_0, K_0, K_1, K_2, D_1, m_1, m_2, A_1, A_2, r_1, r_2$ – динамічні константи моделі; δ_{ij} – символ Кронекера.

Задача розв'язується методом скінчених елементів. Використовується методика, викладена в роботах [2,3]. Для інтегрування по часу застосовується чисто неявна схема Ньюмарка ($\theta=1$) [10].

Шляхом обробки експериментальних динамічних діаграм навантаження [1] отримані такі значення динамічних параметрів ізотермічної моделі Боднера-Партома для алюмінієвого сплаву АМг-6:

$$D_0 = 10^8 \text{ c}^{-1}, G = 3.04478 \cdot 10^4 \text{ МПа}, E = 0.816 \cdot 10^5 \text{ МПа}, \nu = 0.34, \\ m_1 = 0.1 \text{ МПа}^{-1}, K_0 = 325.0 \text{ МПа}, K_1 = 605.0 \text{ МПа}, n = 4.0.$$

Приймається $A_1 = A_2 = m_2 = 0$.

Геометрія диска характеризується значеннями параметрів $h = 0.001 \text{ м}$ та $R = 0.1 \text{ м}$.

Розрахунки проводяться при розбитті диску на 1920 елементів. Вибір кроку по часу при початковому значенні $5 \cdot 10^{-8} \text{ сек}$ здійснюється автоматично.

Розглядається випадок імпульсного навантаження бокової поверхні диску у радіальному напрямку. Форма імпульсу вибирається у вигляді половини синусоїди

$$f(t) = \begin{cases} \sigma_0 \sin \omega t, 0 < t < t_{im}, \\ 0, t > t_{im}, \end{cases}$$

де t_{im} – тривалість імпульсу; σ_0 – амплітуда імпульсу навантаження, $\omega = \pi/t_{im}$.

В розрахунках приймається $t_{im} = 2 \cdot 10^{-6} \text{ сек}$, $\sigma_0 = -170 \text{ МПа}$.

При такому навантаженні бокової поверхні в диску спочатку поширюються пружні хвилі. Однак, по мірі наближення до центру ($r=0, z=0$) внаслідок фокусування рівень напружень в хвилі зростає і в деякий момент часу в ній починається непружне деформування. Часова поведінка радіальних напружень в центрі диску зображена на рис.1.

Привертає увагу, що напруження у відбитій від центру диска хвилі розтягу дещо вищі, ніж у падаючій хвилі стиску, незважаючи на дисипацію енергії в останній. Аналогічно для хвилі, яка відбилася від зовнішньої радіальної поверхні рівень фокусування в центрі в падаючій хвилі також менший, ніж у відбитій від центру диска.

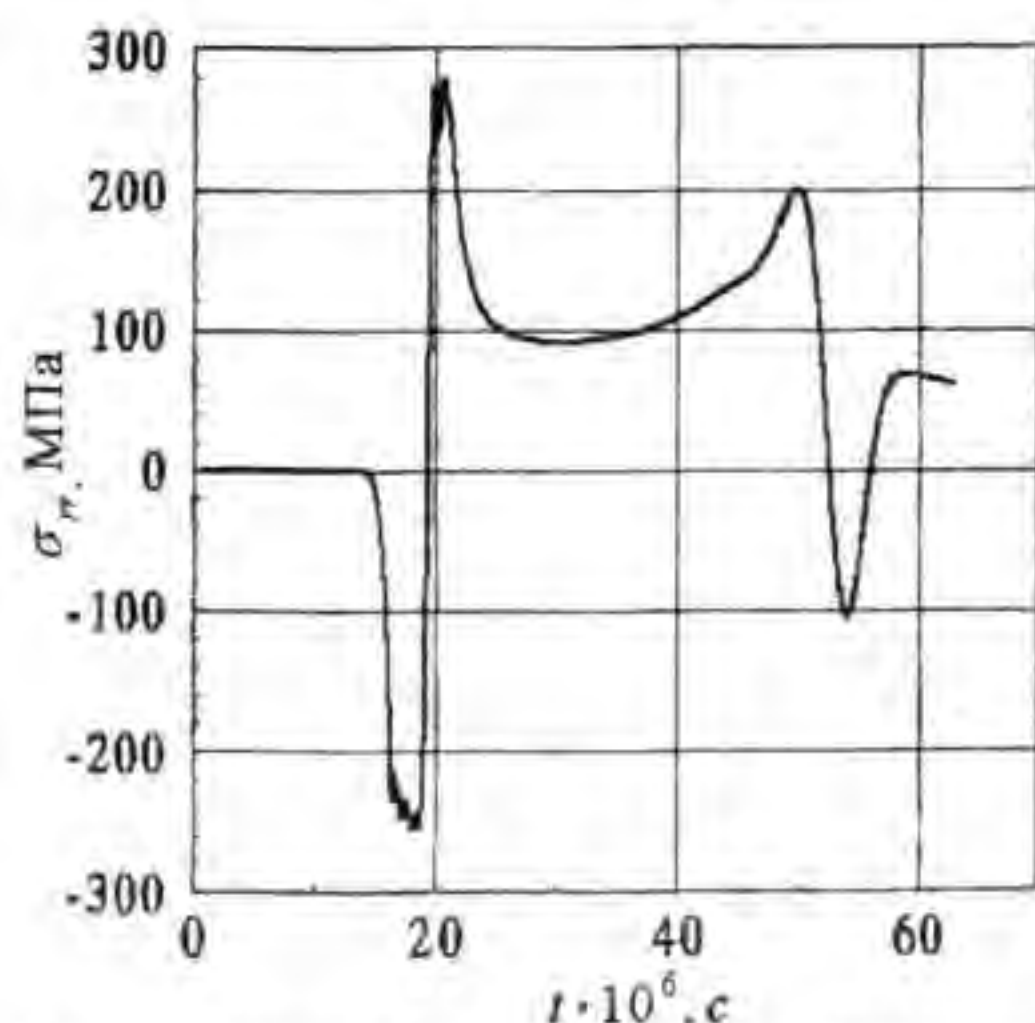


Рис.1. Розподіл радіальних напружень в центрі диску по часу.

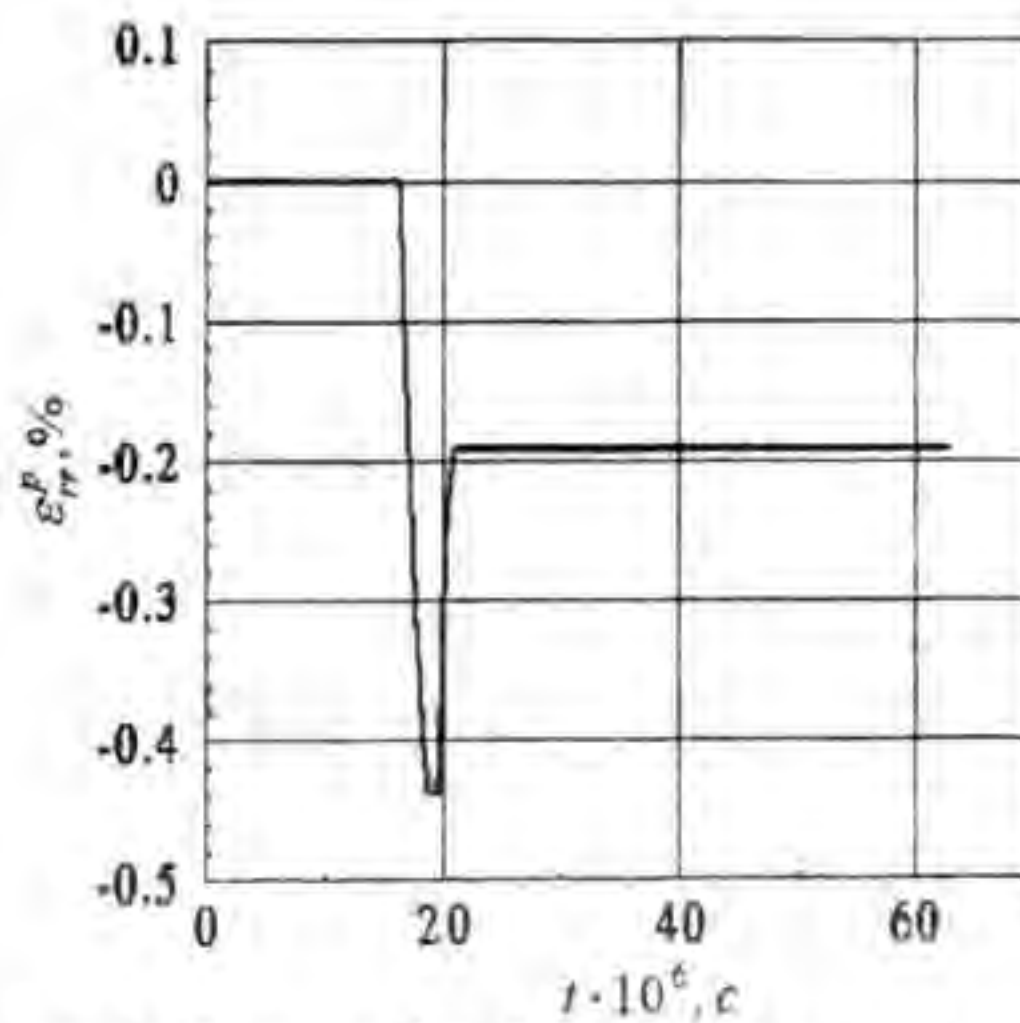


Рис.2. Непружні деформації в центрі.

Непружні деформації в центрі диску (рис.2) формуються одразу після приходу хвилі і досягають значення $\varepsilon_r^p = -0.44\%$, потім знижуються і усталюються на рівні $\varepsilon_r^p = -0.2\%$. Особливість непружного деформування полягає в тому, що нижчому рівню напружень в падаючій хвилі відповідають більші непружні деформації, тоді як при більш високому рівню напружень у відбитій хвилі рівень непружного деформування майже вдвічі нижчий.

Цей ефект пов'язаний із ізотропним зміцненням матеріалу. З рис.3 видно, що параметр зміцнення K в падаючій хвилі становить $K \approx 380$ МПа, тоді як у відбитій $K \approx 410$ МПа. Оскільки K визначає границю текучості σ_T , то у відбитій хвилі її значення суттєво вищі, ніж у падаючій, а значення непружних деформацій – нижчі.

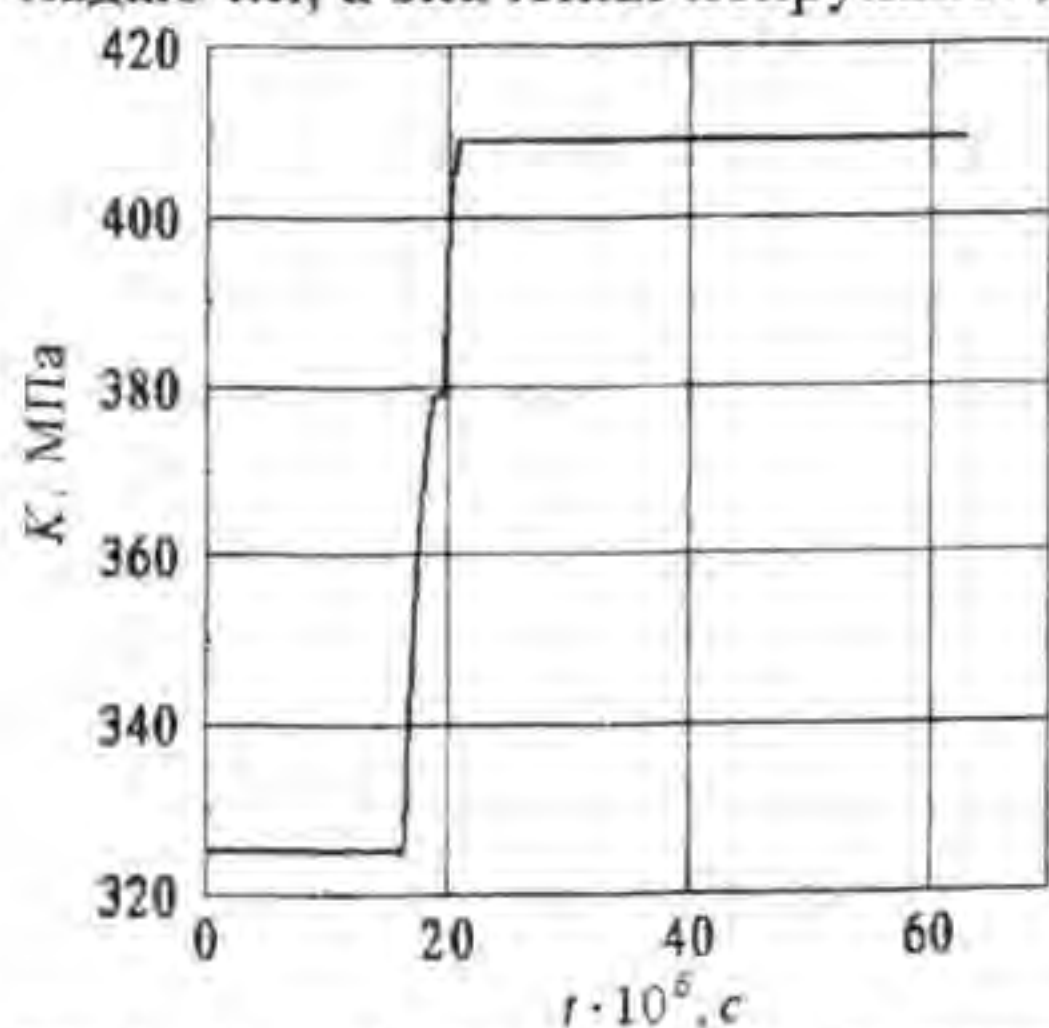


Рис.3. Поведінка параметра ізотропного зміцнення K в центрі диску.

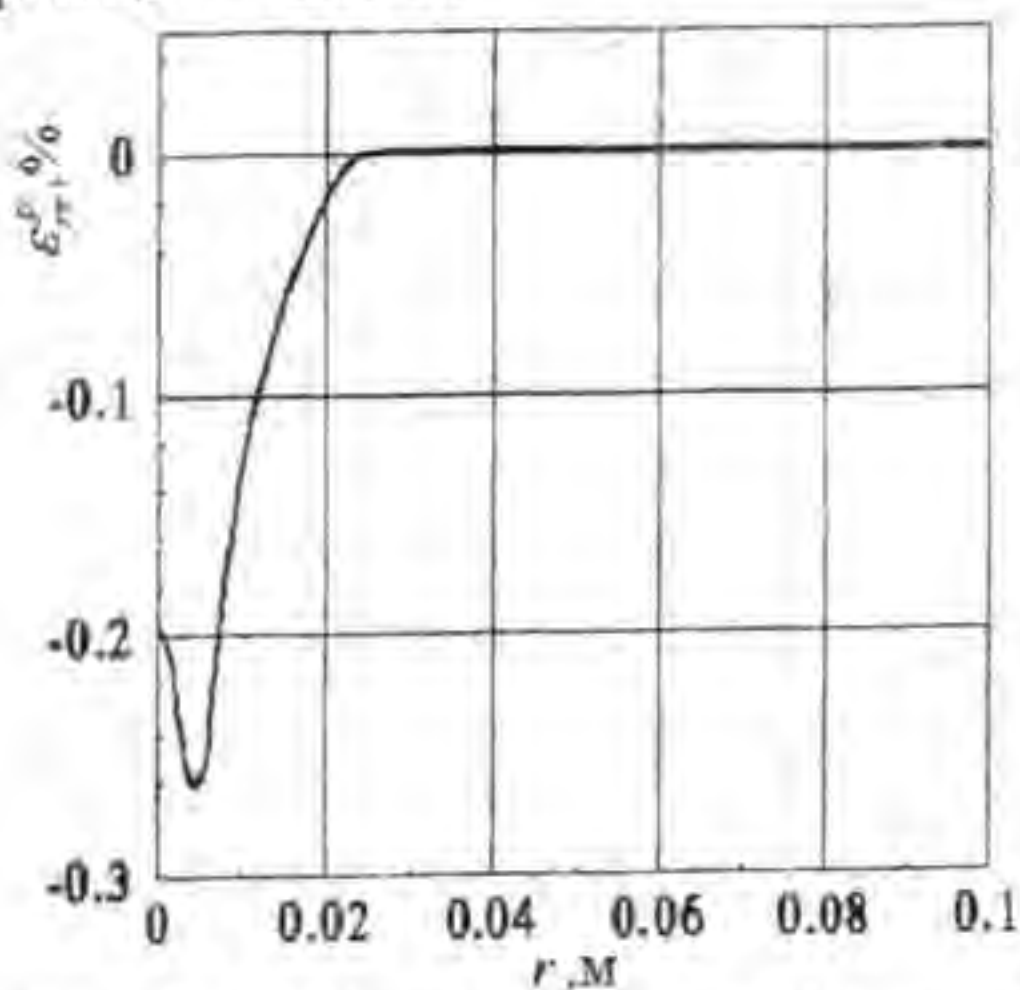


Рис.4. Розподіл залишкових деформацій по радіусу диска.

Зона залишкових деформацій займає область $|r| \leq 0.025$ м (рис.4). При чому максимальні значення досягаються не в центрі диску, а зміщені в сторони.

Використана література

1. Большаков А. П., Новиков С. А., Сеницын В. А. Исследование динамических диаграмм одноосного растяжения и сжатия меди и сплава АМг-6 // Проблемы прочности. – 1979, №10 – С.87-88.
2. Жук Я. А., Сенченков И. К., Табиева Г. А., Червинко О. П. Осесимметричные колебания и диссипативный разогрев слоистого неупругого диска // Прикладная механика. – 2002. – Т.38, №1 – С.117-123.
3. Мотовиловец И. А., Козлов В. И. Термоупругость. – Киев: Наук. думка, 1987. – 264с. – (Механика связанных полей в элементах конструкций: В 5-ти т.; т.1).
4. Повышение усталостной прочности тонколистовых конструкций из алюминиевых сплавов методом локального импульсного воздействия с использованием энергии взрыва / Б.И.Паламарчук, Н.А.Пащин, А.Н.Манченко // Современные проблемы сварки и ресурса конструкций (Киев, ноябрь 2003г.: Тез.стенд.докл./НАН Украины. Ин-т электросварки им.Е.О.Патона. – Киев, 2003.-188с.
5. Совершенствование сварных металлических конструкций /Под ред. М.М.Жербина; НАН Украины. Ин-т электросварки им.Е.О.Патона. – Киев: Наук.думка, 1992.-272с.
6. Чжань, Боднер, Линдхольм. Феноменологическое моделирование упрочнения и теплового возврата в металлах // Теоретические основы инженерных расчетов. – Москва: Мир, 1988. – №4 – С.1-14.
7. Bodner S. R. Unified Plasticity – An Engineering Approach (Final Report), Faculty of Mechanical Engineering, Technion-Israel Inst. of Techn. Haifa 32000, Israel – 2000. – 105p.
8. Proc. of Conf. of the Amer. Phys. Soc. “Shock Compression of Condensed Matter” – 1999. Snowbird, UT 27 Jun – 2 Jul, – Merville, New York, Utah. AIP Conference proceedings. – Pr.1. – p.644.
9. Proc. of Conf. of the Amer. Phys. Soc. “Shock Compression of Condensed Matter” – 1999. Snowbird, UT 27 Jun – 2 Jul, – Merville, New York, Utah. AIP Conference proceedings. – Pr. II, – p.645-1294.
10. Smith I. M., Griffiths D. V. Programming the Finite Element Method. – 1997. John Wiley & Sons – Chichester, New York – 534p.

Надійшла до редакції 23.01.2005

УДК 517.929.7

Ярослав Й. Бігун

Yaroslav I. Bigun

**Усереднення крайових задач
для багаточастотних систем із
сталим запізненням**

**Averaging of a multifrequency
boundary-value problem with
constant delay**

*Встановлено умови існування
розв'язку багаточастотної крайової
задачі із сталим запізненням та
одержано для цієї задачі оцінку
похибки методу усереднення.*

*We establish the existence of a solution
and obtain an estimate of the error of the
averaging method for a multifrequency sys-
tem with delay and boundary conditions.*

*Ключові слова: метод усереднення,
малий параметр, крайова задача.*

*Key Words: averaging method, small pa-
rameter, boundary-value problem.*

E-mail: bigun@chmu.cv.ua

Вступ. Методом усереднення звичайні диференціальні рівняння з крайовими умовами досліджувались в роботах [1 – 4] та ін. Крайові задачі для багаточастотних систем, шляхом зведення їх до систем із початковими умовами, вивчались в [4, 5].

Питанням існування розв'язку й обґрунтування методу усереднення для багаточастотних крайових задач із запізненням присвячені роботи [6, 7]. Але в цих роботах початкова множина при заданні початкових умов зводилась до однієї точки $\tau_0 = 0$. У даній статті розглядаються системи із сталим запізненням і для $\tau < 0$ задається початкова функція. Встановлюється існування і єдиність розв'язку крайової задачі в малому околі розв'язку усередненої задачі, а також дається оцінка відхилення цих розв'язків. Розв'язки задачі вивчаються в просторі абсолютно неперервних функцій, тоді як в [6–8] – у класі неперервно диференційовних.

Усереднена система. Розглянемо систему рівнянь з повільними x і швидкими φ змінними вигляду

$$\frac{dx}{d\tau} = X(\tau, x, x_h, \varphi, \varphi_\Delta), \quad \frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{\omega(\tau)}{\varepsilon} + Y(\tau, x, x_h, \varphi, \varphi_\Delta), \quad (1)$$

Я.Й. Бігун, 2005

де $x \in D$, D – обмежена область в $\mathbb{R}^n$, $\varphi \in \mathbb{R}^m$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, $\varepsilon_0 \ll 1$, $\tau = \varepsilon t \in [0, L]$; $x_h(\tau) = x(\tau - \varepsilon h)$, $\varphi_\Delta(\tau) = \varphi(\tau - \varepsilon \Delta)$, h і Δ – додатні сталі, що характеризують запізнення. Векторна функція $A = [X(\tau, x, z, \varphi, \psi), Y(\tau, x, z, \varphi, \psi)]$ 2π -періодична за змінними φ_ν, ψ_ν , $\nu = 1, \dots, m$, для довільних фіксованих $(\tau, x, z) \in [0, L] \times D \times D$.

Задамо крайові умови вигляду

$$x(\tau, \varepsilon) = x^0(\tau), \tau \in [-\varepsilon h, 0); \quad \varphi(\tau, \varepsilon) = \varphi^0(\tau), \tau \in [-\varepsilon \Delta, 0); \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned} A_1(\varepsilon)x(0, \varepsilon) + B_1(\varepsilon)x(L, \varepsilon) &= d_1(\varepsilon), \\ A_2(\varepsilon)\varphi(0, \varepsilon) + B_2(\varepsilon)\varphi(L, \varepsilon) &= d_2(\varepsilon). \end{aligned} \quad (2.2)$$

Тут $A_\nu(\varepsilon)$, $B_\nu(\varepsilon)$ і $d_\nu(\varepsilon)$ – задані n і m -матриці та вектори відповідно, визначені при $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$; x^0 і φ^0 – відомі неперервні векторні функції, задані на $[-\varepsilon h, 0)$ і $[-\varepsilon \Delta, 0)$ відповідно.

Задача (1), (2) може служити математичною моделлю для коливних систем взаємозв'язаних елементів, запізнення в яких обумовлюється інерційними ланками управління, часом запізнення сигналів у високочастотних пристроях тощо. Зокрема, узагальненням з врахуванням запізненням моделі глобального зв'язаних відображень Канеко [10].

Під розв'язком задачі (1), (2) розумітимемо абсолютно неперервні функції $x(\cdot, \varepsilon): [0, L] \rightarrow D$, $\varphi(\cdot, \varepsilon): [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^m$, що задовольняють систему (1) при майже всіх $\tau \in [0, L]$, і крайові умови (2).

Усереднена для (1) за швидкими змінними система, що враховує резонансні складові, набуває вигляду

$$\frac{d\bar{x}}{d\tau} = \bar{X}(\tau, \bar{x}, \bar{x}_h), \quad \frac{d\bar{\varphi}}{d\tau} = \frac{\omega(\tau)}{\varepsilon} + \bar{Y}(\tau, \bar{x}, \bar{x}_h), \quad (3)$$

де

$$\begin{aligned} \bar{A}(\tau, u, v) &= \frac{1}{(2\pi)^m} \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} A(\tau, u, v, \varphi, \varphi - \theta) d\varphi_1 \dots d\varphi_m = \\ &= \sum_{k+l=0} A_{kl}(\tau, u, v) \exp[-i(k, \theta)], \quad \theta(\tau) = \omega(\tau)\Delta, \end{aligned}$$

$i^2 = -1$, A_{kl} – коефіцієнти Фур'є векторної функції $A(\tau, x, z, \varphi, \psi)$.

Для системи (3) задамо крайові умови

$$\bar{x}(\tau, \varepsilon) = x^0(\tau), \tau \in [-\varepsilon h, 0); \quad \bar{\varphi}(\tau, \varepsilon) = \varphi^0(\tau), \tau \in [-\varepsilon \Delta, 0);$$

$$\begin{aligned} A_1(\varepsilon)\bar{x}(0, \varepsilon) + B_1(\varepsilon)\bar{x}(L, \varepsilon) &= d_1(\varepsilon), \\ A_2(\varepsilon)\bar{\varphi}(0, \varepsilon) + B_2(\varepsilon)\bar{\varphi}(L, \varepsilon) &= d_2(\varepsilon). \end{aligned} \quad (4)$$

Праві частини системи (3) включають також доданки, для яких цілочислові m -вимірні вектори k і l , $k + l = 0$, $\|k\| + \|l\| \neq 0$, є резонансними на $[0, L]$.

Резонанс у системі (1) в точці $\tau \in [\varepsilon\Delta, L]$ означає [8], що співвідношення частот

$$\gamma_{kl}(\tau, \varepsilon) \equiv (k, \omega(\tau)) + (l, \omega(\tau - \varepsilon\Delta)) \approx 0.$$

Якщо $\tau \in [0, \varepsilon\Delta]$, то покладемо $\gamma_{kl}(\tau, \varepsilon) = (k + l, \omega(\tau)) + \mathcal{O}(\|l\|\varepsilon)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Якщо $k + l = 0$, то для всіх $\tau \in [0, L]$ відповідна гармоніка стає резонансною. Тут

$$(k, \omega) = k_1\omega_1 + \dots + k_m\omega_m.$$

Зауважимо, що за відомим розв'язком $\bar{x} = \bar{x}(\tau, \bar{y}, \varepsilon)$ виписується в явному вигляді і компонента розв'язку $\bar{\varphi} = \bar{\varphi}(\tau, \bar{y}, \bar{\psi}, \varepsilon)$, де $\bar{\psi} = (A_2(\varepsilon) + B_2(\varepsilon))^{-1}(d_2(\varepsilon) - \bar{\varphi}(L, \bar{y}, 0, \varepsilon))$.

Умови. Нехай виконуються наступні умови.

1⁰. Функції $\omega_\nu \in C^p[0, L]$, $\nu = 1, \dots, m$; $p \geq m - 1$; за цією системою функцій визначник Вронського $W(\tau) \neq 0$, коли $\tau \in [0, L]$.

2⁰. Векторна функція $A(\tau, u, v, z, \varphi, \psi)$ двічі неперервно диференційовна на множині G й обмежена разом із похідними сталою $a_1 > 0$.

3⁰. Існує єдиний розв'язок $\bar{u} = [\bar{x}(\tau, \varepsilon), \bar{\varphi}(\tau, \varepsilon)]$, $\tau \in [0, L]$, усередненої задачі (3), (4) і $\forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ $x(\cdot, \varepsilon)$ належить області D разом із деяким ρ -околом.

4⁰. Для коефіцієнтів Фур'є $A_{kl}(\tau, x, z)$ вздовж розв'язку $\bar{x}(\tau, \varepsilon)$, коли

$$(\tau, \varepsilon) \in G_2 = [0, L] \times (0, \varepsilon_0],$$

справджується нерівність

$$\sum_{k,l} \sup_{G_2} \|A_{kl}\| + \sum_{k+l \neq 0} \frac{1}{\|k+l\|} \left[\sup_{G_2} \left\| \frac{\partial A_{kl}}{\partial \tau} \right\| + \sup_{G_2} \left\| \frac{\partial A_{kl}}{\partial x} \right\| + \sup_{G_2} \left\| \frac{\partial A_{kl}}{\partial z} \right\| \right] \leq a_2.$$

5⁰. Для $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ матриці

$$Q_1(\varepsilon) = A_1(\varepsilon) + B_1(\varepsilon) \frac{\partial \bar{x}}{\partial \bar{y}}(L, \bar{y}, \varepsilon), \quad Q_2(\varepsilon) = A_2(\varepsilon) + B_2(\varepsilon)$$

невироджені і

$$\|Q_1^{-1}(\varepsilon)B_1(\varepsilon)\| + \|Q_2^{-1}(\varepsilon)B_2(\varepsilon)\| \leq a_3\varepsilon^{-\chi}, \quad 0 < \chi < (2m)^{-1};$$

$$\|Q_2^{-1}(\varepsilon)B_2(\varepsilon)\frac{\partial\bar{\varphi}(L,\bar{y},0,\varepsilon)}{\partial\bar{y}}\| \leq a_4\varepsilon^{\chi_1}, \quad \chi_1 > 0.$$

Теорема. Нехай виконуються умови 1⁰ – 5⁰. Тоді для кожного $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, $0 < \varepsilon_0 \ll 1$, крайова задача (1), (2) має єдиний розв'язок $u(\tau, \varepsilon) = [x(\tau, y, \psi, \varepsilon), \varphi(\tau, y, \psi, \varepsilon)]$, $u(0, \varepsilon) = [y, \psi]$ і для всіх $(\tau, \varepsilon) \in [0, L] \times (0, \varepsilon_0]$ виконується нерівність

$$\|u(\tau, \varepsilon) - \bar{u}(\tau, \varepsilon)\| \leq c_4\varepsilon^\alpha, \quad \alpha = m^{-1} - \chi, \quad (5)$$

зі сталою $c_4 > 0$, незалежною від ε .

Доведення. Нехай $\rho_1 = \rho/2$, $c_1 = \exp(a_1, L)$, $\bar{x}(0, \bar{y}, \varepsilon) = \bar{y}$, $\bar{y} \in D$ і $\bar{\varphi}(0, \bar{y}, \bar{\psi}, \varepsilon) = \bar{\psi}$. Тоді для $\|\mu\| \leq c_1^{-1}\rho_1$ і $\forall(\tau, \varepsilon) \in G_2$

$$\|\bar{x}(\tau, \bar{y} + \mu, \varepsilon) - \bar{x}(\tau, \bar{\mu}, \varepsilon)\| \leq c_1\|\mu\| \leq \rho_1.$$

На підставі теореми 3 [8] для кожного $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1]$, $\varepsilon_1 \leq \varepsilon_0$, існує єдиний розв'язок $u(\tau, \varepsilon) = u(\tau, \bar{y} + \mu, \bar{\psi} + \xi, \varepsilon)$ системи (1) з початковими умовами, визначений на $[0, L]$ і $\forall(\tau, \varepsilon) \in G_2$, $\xi \in \mathbb{R}^m$

$$\|u(\tau, \bar{y} + \mu, \bar{\psi} + \xi, \varepsilon) - \bar{u}(\tau, \bar{y} + \mu, \bar{\psi} + \xi, \varepsilon)\| \leq c_2\varepsilon^{1/m}. \quad (6)$$

Така ж оцінка справджується і для похідних за $\bar{y}$ і $\bar{\psi}$.

Якщо ж до того $\varepsilon_0 \leq \varepsilon_2 = \min(\varepsilon_1, L/(2\max(h, \Delta)))$, то розв'язок системи (1) двічі неперервно диференційовний при

$$\tau > 2\varepsilon_0 \max(h, \Delta).$$

Виберемо μ і ξ так, що

$$\|\mu\| + \|\xi\| \leq c_3\varepsilon^\alpha \leq \rho_1, \quad (7)$$

де $c_3 > 0$. Тоді з (6) і оцінки похибки розв'язку усередненої системи для початкових значень $\bar{y} + \mu$, $\bar{\varphi} + \xi$ і $\bar{y}$, $\bar{\psi}$ при $\tau = 0$ маємо

$$\begin{aligned} & \|u(\tau, \bar{y} + \mu, \bar{\psi} + \xi, \varepsilon) - \bar{u}(\tau, \bar{y}, \bar{\psi}, \varepsilon)\| \leq \\ & \leq (c_1c_3 + c_2\varepsilon^\chi)\varepsilon^\alpha \leq 2c_1c_3\varepsilon^\alpha \equiv c_4\varepsilon^\alpha, \quad (\tau, \varepsilon) \in G_2 \end{aligned} \quad (8)$$

як тільки $c_2\varepsilon^\chi \leq c_1c_3$.

Покажемо, що в разі виконання нерівності (7) єдиним чином можна вказати μ і ξ так, що розв'язок $u(\tau, \varepsilon) = u(\tau, \bar{y} + \mu, \bar{\psi} + \xi, \varepsilon)$ задовольняє крайові умови (2.1).

Підставимо $u(\tau, \varepsilon)$ в (2.2) і враховуючи умову 5⁰ одержимо

$$\text{col}(\mu, \xi) = M(\mu, \xi, \varepsilon) \equiv \text{col}(M_1, M_2),$$

де

$$\begin{aligned} M_1 &= -Q_1^{-1}(\varepsilon)B_1(\varepsilon)[(x(\tau, \bar{y} + \mu, \bar{\psi} + \xi, \varepsilon) - \bar{x}(\tau, \bar{y} + \mu, \varepsilon)) + P_1(\mu, \varepsilon)], \\ M_2 &= -Q_2^{-1}(\varepsilon)B_2(\varepsilon)[(\varphi(L, \bar{y} + \mu, \bar{\psi} + \xi, \varepsilon) - \bar{\varphi}(L, \bar{y} + \mu, \bar{\psi} + \xi, \varepsilon)) + P_2(\mu, \varepsilon)] - \\ &\quad - Q_2^{-1}(\varepsilon)B_2(\varepsilon)\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial \bar{y}}(L, \bar{y}, 0, \varepsilon)\mu. \end{aligned}$$

Тут

$$\begin{aligned} P_1(\mu, \varepsilon) &= \bar{x}(L, \bar{y} + \mu, \varepsilon) - \bar{x}(L, \bar{y}, \varepsilon) - \frac{\partial \bar{x}(L, \bar{y}, \varepsilon)}{\partial \bar{y}}\mu, \\ P_2(\mu, \varepsilon) &= \bar{\varphi}(L, \bar{y} + \mu, 0, \varepsilon) - \bar{\varphi}(L, \bar{y}, 0, \varepsilon) - \frac{\partial \bar{\varphi}(L, \bar{y}, \bar{\psi}, \varepsilon)}{\partial \bar{y}}\mu. \end{aligned}$$

Справджуються оцінки [7]:

$$\|P_1(\mu, \varepsilon)\| + \|P_2(\mu, \varepsilon)\| \leq c_5\|\mu\|^2, \quad (9)$$

$$\left\|\frac{\partial P_1}{\partial \mu}(\mu, \varepsilon)\right\| + \left\|\frac{\partial P_2}{\partial \mu}(\mu, \varepsilon)\right\| \leq c_6\|\mu\|. \quad (10)$$

Нехай:

$$r_0(\varepsilon) = c_3\varepsilon^\alpha, \quad c_3 = 2a_3c_2.$$

Тоді

$$\|M(\mu, \xi, \varepsilon)\| \leq a_3\varepsilon^{-\chi}(c_2\varepsilon^{1/m} + c_5\|\mu\|^2) + a_4\varepsilon^{\chi_1}\|\mu\| \leq c_3\varepsilon^\alpha,$$

якщо

$$\varepsilon \leq \varepsilon_3 = \min(\varepsilon_2, (4a_3c_3c_5)^{\frac{m}{2\chi m - 1}}, (\frac{c_3}{4a_4})^{\frac{1}{\chi_1}}).$$

Отже, $\forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ відображення $M: S \rightarrow S$, де

$$S = \{(\mu, \xi) : \|\mu\| + \|\xi\| \leq r_0(\varepsilon)\}.$$

Доведемо властивість стиску відображення M для всіх $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$. На підставі умови 5⁰ і оцінки (10) для матриці $\frac{\partial M}{\partial z}$, де $z = \text{col}(\mu, \xi)$, маємо

$$\left\|\frac{\partial M}{\partial z}\right\| \leq (\|Q_1^{-1}(\varepsilon)B_1(\varepsilon)\| + \|Q_2^{-1}(\varepsilon)B_2(\varepsilon)\|)(\left\|\frac{\partial}{\partial z}(u(L, \bar{y} + \mu, \bar{\psi} + \xi, \varepsilon) - \right.$$

$$-\bar{u}(L, \bar{y} + \mu, \bar{\psi} + \xi, \varepsilon))\| + \left\| \frac{\partial P_1}{\partial \mu}(\mu, \varepsilon) \right\| + \left\| \frac{\partial P_2}{\partial \mu}(\mu, \varepsilon) \right\| + \\ + \|Q_2^{-1}(\varepsilon)B_2(\varepsilon)\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial \bar{y}}(L, \bar{y}, 0, \varepsilon)\| \leq c_3\varepsilon^\alpha + a_3c_3\varepsilon^{\alpha-\chi} + a_4\varepsilon^{\chi_1} \leq 3/4,$$

Якщо

$$\varepsilon \leq \varepsilon_4 = \min(\varepsilon_3, (\frac{1}{4c_3})^{1/\alpha}, (4a_3c_3)^{\frac{m}{2\chi m-1}}, (4a_4)^{-\frac{1}{\chi_1}}),$$

то розв'язок системи (1) визначений для $\tau \in [0, L]$ і задовольняє крайові умови (2.2). Теорему доведено.

Зауваження 1. Якщо $\chi = 0$ в умові 5⁰, то отримаємо оцінку, порядок якої $\varepsilon^{1/m}$.

Зауваження 2. Замість двоточкових крайових умов (2.2) аналогічно можна розглянути багатоточкові умови вигляду

$$A_1(\varepsilon)x(0, \varepsilon) + \sum_{\nu=1}^N B_{1\nu}(\varepsilon)x(\tau_\nu, \varepsilon) = d_1(\varepsilon),$$

$$A_2(\varepsilon)\varphi(0, \varepsilon) + \sum_{\nu=1}^N B_{2\nu}(\varepsilon)x(\tau_\nu, \varepsilon) = d_2(\varepsilon),$$

де $0 < \tau_1 < \dots < \tau_N \leq L$, $N \geq 1$. У цьому випадку матриці

$$Q_1(\varepsilon) = A_1(\varepsilon) + \sum_{\nu=1}^N B_{1\nu}(\varepsilon)\frac{\partial \bar{x}(\tau_\nu, \bar{y}, \varepsilon)}{\partial y},$$

$$Q_2(\varepsilon) = A_2(\varepsilon) + \sum_{\nu=1}^N B_{2\nu}(\varepsilon).$$

Останню нерівність в умові 5⁰ потрібно замінити такою:

$$\|Q_2(\varepsilon) \sum_{\nu=1}^N B_{2\nu}(\varepsilon)\frac{\partial \bar{\varphi}(\tau_\nu, \bar{y}, 0, \varepsilon)}{\partial y}\| \leq a_4\varepsilon^{\chi_1}, \quad \chi_1 > 0.$$

Зауваження 3. Нехай $h = 0$ і в крайових умовах (2.2)

$$B_2(\varepsilon) = \varepsilon^{\chi_1}\bar{B}_2, \quad \chi_1 > 0;$$

A_1 , A_2 , B_1 , $\bar{B}_2$ і d_1 не залежать від ε . Тоді $\bar{x} = \bar{x}(\tau)$. Якщо матриці

$$A_1 + B_1\frac{\partial \bar{x}}{\partial \bar{y}}(L, \bar{y})$$

і A_2 – невироджені, то умова 5^0 виконується і $\alpha = m^{-1}$.

ЛІТЕРАТУРА

1. *Самойленко А.М., Ронто Н.И.* Численно-аналитические методы в теории краевых задач обыкновенных дифференциальных уравнений. – К.: Наук. думка, 1992. – 279 с.
2. *Плотников В.А.* Метод усреднения в задачах управления. – Киев-Одесса: Лыбидь, 1992. – 188 с.
3. *Лучка А.Ю.* Проективно-итеративные методы. – К.: Наук. думка, 1993. – 315 с.
4. *Самойленко А.М., Петришин Р.І.* Математичні аспекти теорії нелінійних коливань. – К.: Наук. думка, 2004. – 474 с.
5. *Петришин Р.І., Петришин Я.Р.* Усреднения крайових задач для систем дифференціальних рівнянь з повільними та швидкими змінними // Нелінійні коливання – 1998, № 1. – С. 51 – 65.
6. *Бігун Я.Й.* Усреднения в колеблених резонансних системах вищого наближення із запізненням // Укр. мат. журн. – 2000. – 52, № 9. – С. 11-16.
7. *Бігун Я.Й.* Усреднения багатоточкової крайової задачі з лінійно перетвореним аргументом // Наук. вісник Чернівецького ун-ту: Зб. наук. пр. Вип. 76. Математика. – Чернівці: Рута, 2000. – С. 291-299.
8. *Бігун Я.И., Самойленко А.М.* Обоснование принципа усреднения для многочастотных систем дифференциальных уравнений с запаздыванием // Дифференц. уравнения. – 1999. – 35, №1. – С. 7-14.
9. *Бігун Я.Й.* Дослідження багаточастотних коливних систем із запізненням // Наук. вісник Чернівецького ун-ту: Зб. наук. пр. Вип. 150. Математика. – Чернівці: Рута, 2002. – С. 15-20
10. *St.H. Strogatz.* From Kuramoto to Crawford: exploring the onset of synchronization in populations of coupled Oscillators // Physical D. – 2000, N 143. – P. 1 – 20.

Надійшла до редколегії 10.03.05р.

УДК 531.08

Тетяна В. Завражина
Наталія М. Завражина

**Динаміка робота-маніпулятора з
обертальними та поступальним
з'єднаннями ланок**

Поставлено задачі динамічного та кінематичного керування динамікою просторових рухів дволанкового робота-маніпулятора. Ланки маніпулятора, який встановлено на підлозі, з'єднані з рухомою платформою та між собою двома обертальними та одним поступальним зчленуваннями. Для прикладу кінематичного керування роботом-маніпулятором знайдено функції зовнішніх керуючих сил та моментів, які діють в з'єднаннях робота. Ключові слова: робот-маніпулятор, кінематичне керування, динамічне керування.

Tatiana V. Zavrzhina
Natalia M. Zavrzhina

**Dynamics of the robot-manipulator
with rotary and translational joints of
links**

Tasks of dynamic and kinematic control of spatial motions of the two-link robot-manipulator are put. Links of the manipulator, which is established on a floor, are connected to moving platform and among themselves two rotary and translational joints. For an example of kinematic control by robot-manipulator finds functions of external controlling forces and moments, which act in joints of the robot.

Key words: robot-manipulator, kinematic control, dynamic control.

До найпростіших математичних моделей роботів маніпуляторів відносять моделі, які отримані нехтуванням пружністю виконавчих стержньових ланок на динамічні характеристики роботів. Вони дають можливість отримати деякі якісні та кількісні оцінки можливості виникнення коливань робота та перспектив розробки ефективних методів їх демпфірування. Представлення маніпулятора у вигляді ланцюга абсолютно твердих тіл дозволяє використовувати більш прості алгоритми моделювання. Результати побудови алгоритмів керування положенням жорстких ланок маніпуляторів обговорюється в [1-5].

В даній роботі досліджується динаміка встановленого на підлозі керованого робота, конструкція якого включає дволанковий просторово орієнтований маніпулятор, який закріплено на підйомно-поворотній платформі, що переміщується відносно нерухомої стойки. Перша ланка прикріплена до платформи обертальним з'єднанням, друга ланка з'єднана з першою обертальним і поступальним зчленуваннями і може рухатись вздовж своєї напрямної. Математична модель динаміки такого робота, представленого у вигляді системи багатьох абсолютно твердих тіл, побудована на основі формалізму Лагранжа II роду. Вона включає систему 5 нелінійних взаємозв'язаних звичайних рівнянь другого порядку. Поставлені задачі динамічного та кінематичного керування вказаним роботом. Розглянуто приклад чисельного моделювання кінематично керованого робота.

1. Рівняння руху і постановка задач керування. Розглянемо промисловий робот (рис. 1), який транспортує в задану точку простору вантаж скінченних розмірів. Його конструкція складається із встановленого на нерухомій основі вертикально орієнтованого стояка, підйомно-поворотної платформи, яка здійснює поступальне та обертальне переміщення відносно стойки, та прикріпленої до платформи дволанкової руки маніпулятора, до останньої ланки якого жорстко приєднано вантаж, що переноситься маніпулятором. При побудові механічної моделі цього робота всі

розглянуті тіла системи будемо вважати абсолютно твердими і пронумеруємо їх, як показано на рис. 1, у порядку послідовного приєднання один до одного, умовно надав номер "-1" нерухомій основі з вертикальним стояком. Прийmemo також, що рука маніпулятора представляє собою ланцюг двох прямолінійних стержней, з'єднаних послідовно з платформою ідеальним циліндричним шарніром та між собою ідеальним циліндричним шарніром та поступальною парою.

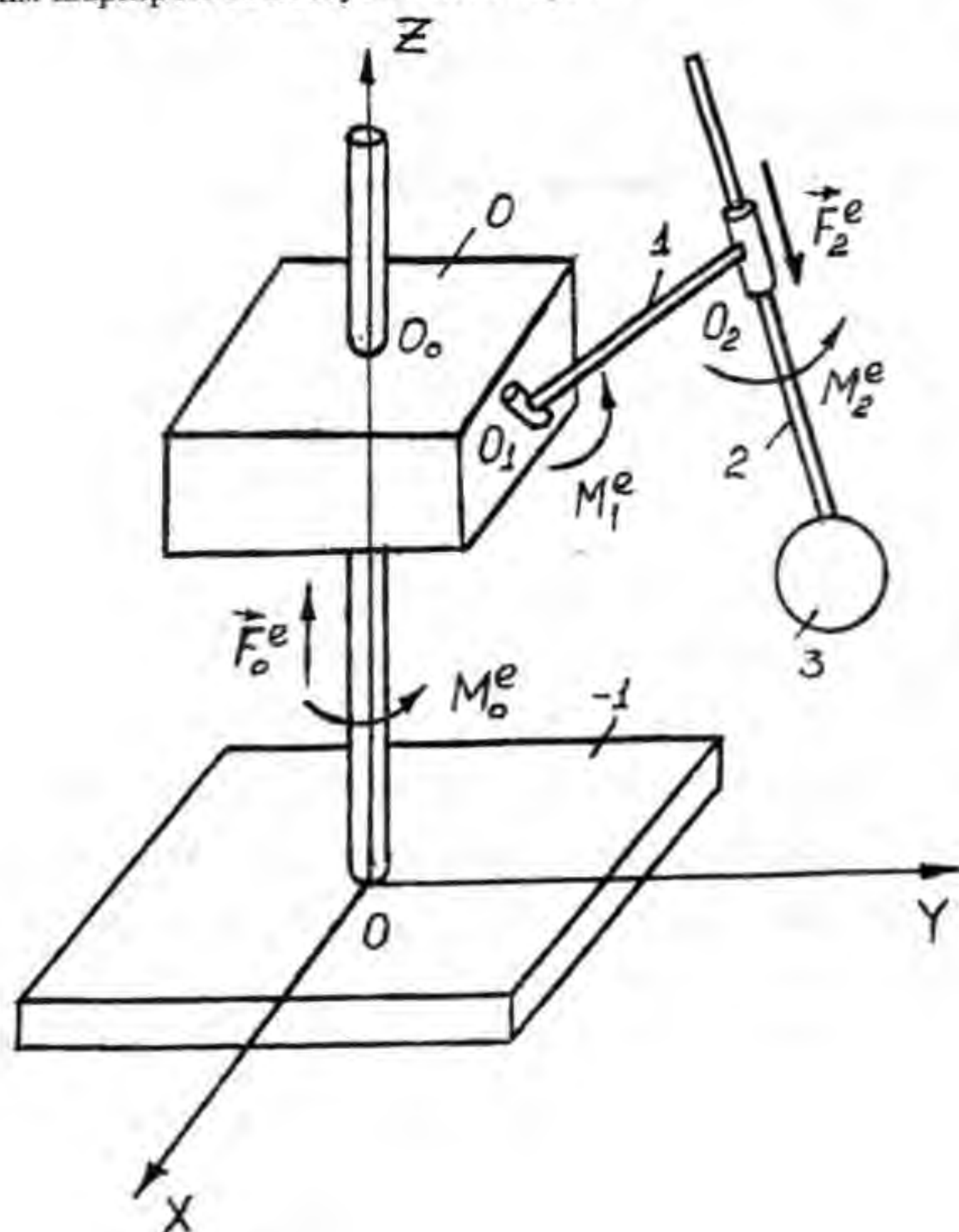


Рис. 1

Для побудови математичної моделі динаміки даної механічної системи введемо жорстко зв'язану з основою нерухому систему координат $OXYZ$ з ортами $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$, вісь OZ спрямуємо вздовж осьової лінії стояки, як показано на рис. 1. З кожним n -им ($n = \overline{0,3}$) рухомим тілом системи зв'яжемо систему координат $C_n x_n y_n z_n$ так, щоб її початок співпадав з центром мас цього тіла і осі були головними центральними осями інерції. Для n -ої ($n = \overline{1,2}$) стержньової ланки маніпулятора координатну вісь $C_n x_n$ сумістимо з його осьовою лінією і введемо додаткову систему координат $O_n x_n y_n z_n$ з ортами $\vec{i}_n$, $\vec{j}_n$, $\vec{k}_n$ та початком в точці O_n ланки, відповідні осі якої паралельні осям системи $C_n x_n y_n z_n$. Для платформи, що несе маніпулятор ($n = 0$), і несомого тіла ($n = 3$) виберемо таку орієнтацію осей системи $C_n x_n y_n z_n$, при якій осі

$C_n x_n, C_n y_n, C_n z_n$ всіх тіл механічної системи паралельні осям OX, OY, OZ нерухомої системи координат, коли кінематичний ланцюг робота витягнутий в одну пряму лінію, паралельну осі OX .

Нехай вісь кожного n -го ($n = \overline{1,2}$) шарніра, який з'єднує кінці $n-1$ -го і n -го тіл системи, що примикають, з ортом $\bar{e}_n$ співпадає з однією з осей місцевої системи координат $O_n x_n y_n z_n$ і, отже, виконується відповідна рівність $\bar{e}_n = \bar{i}_n, \bar{e}_n = \bar{j}_n$ або $\bar{e}_n = \bar{k}_n$. Зазначимо, що поступальне з'єднання першого і другого стержней зорієнтовано вздовж осі $O_n x_n$ і дозволяє другій ланці висуватися в цьому напрямі. Позначимо Z_0 і θ_0 координату центра мас C_0 платформи в нерухомій системі координат $OXYZ$ і кут повороту системи координат $C_0 x_0 y_0 z_0$ відносно системи $OXYZ$ навколо осі $O_0 z_0$; φ_n, ψ_n або θ_n ($n = \overline{1,2}$) – кут повороту системи $O_n x_n y_n z_n$ по відношенню до системи $O_{n-1} x_{n-1} y_{n-1} z_{n-1}$ навколо якої-небудь з осей $O_n x_n, O_n y_n$ або $O_n z_n$, який описує поворот n -го тіла механічної системи відносно $n-1$ -го. Вказані кути поворотів будемо вважати додатними, якщо з кінця відповідних осей обертання ці повороти видно проти руху годинникової стрілки. Позначимо через L функцію висуви другої ланки, яку будемо вважати додатною, якщо вона збільшується вздовж осі $O_n x_n$.

Вважатимемо, що в з'єднанні O_0 до платформи прикладені зовнішні керуючі сила $\bar{F}_0^e$ і момент $\bar{M}_0^e$, в кожному n -му ($n = \overline{1,2}$) шарнірному з'єднанні O_n до n -ої ланки маніпулятора прикладений зовнішній момент $\bar{M}_n^e$ і в поступальному сполученні другої ланки прикладено зовнішню силу $\bar{F}_2^e$. Зовнішні сили $\bar{F}_0^e, \bar{F}_2^e$ вважаються додатними, якщо вони намагаються перемістити платформу в додатному напрямі осі OZ та другу ланку в додатному напрямі осі $O_n x_n$; зовнішній момент $\bar{M}_n^e$ ($n = \overline{0,2}$) буде додатним, якщо намагається повернути розглядуване тіло в додатному напрямі.

Задачі динамічного та кінематичного керування просторовими рухами маніпулятора сформулюємо за умов, що динамічне керування здійснюється шляхом задання 5 функцій керуючих моментів $\bar{M}_n^e = \bar{M}_n^e(t)$ ($n = \overline{0,2}$), які прикладені до ланок у з'єднувальних шарнірах і функцій керуючих сил $\bar{F}_0^e = \bar{F}_0^e(t)$ і $\bar{F}_2^e = \bar{F}_2^e(t)$, які прикладені до ланок у поступальних парах, а кінематичне керування виконується заданням 5 функцій кутів відносних поворотів ланок $\varphi_k = \varphi_k(t), \psi_l = \psi_l(t), \theta_m = \theta_m(t)$ $k \neq l \neq m$, координати $Z_0 = Z_0(t)$ центра мас платформи і функції $L = L(t)$ висуви другої ланки маніпулятора.

Розглянута механічна система має 5 степенів вільності. Для однозначного визначення її положення у просторі введемо сукупність узагальнених координат $q_n = q_n(t)$ ($n = \overline{-1,3}$), які відповідно являють собою координату центра мас 0-го тіла ($n = -1$), кути повороту n -го ($n = \overline{0,2}$) тіла відносно $n-1$ -го та функцію висуви другої ланки маніпулятора ($n = 3$). Тоді в прийнятих позначеннях для керованих тіл системи $q_{-1} = Z_0, q_0 = \theta_0$, в залежності від орієнтації осі n -го ($n = \overline{1,2}$)

з'єднувального шарніра має місце одна з рівностей $q_n = \varphi_n$, $q_n = \psi_n$ або $q_n = \theta_n$ та $q_3 = L$ для висуву другої ланки маніпулятора.

Для виведення рівнянь руху робота-маніпулятора скористаємося рівняннями Лагранжа II роду

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_n} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_n} = Q_n, \quad n = \overline{1,3}, \quad (1.1)$$

де $\dot{q}_n$ - n -на узагальнена швидкість, яка набуває наступні значення: $\dot{q}_{-1} = \dot{Z}_0$, $\dot{q}_0 = \dot{\theta}_0$, для розглядуваного варіанта орієнтації осі з'єднувального шарніра одне зі значень $\dot{q}_n = \dot{\varphi}_n$, $\dot{q}_n = \dot{\psi}_n$ або $\dot{q}_n = \dot{\theta}_n$ ($n = \overline{1,2}$) та $\dot{q}_3 = \dot{L}$; T - кінетична енергія механічної системи; Q_n - узагальнена сила, що відповідає узагальненій координаті q_n . Крапкою позначено диференціювання за часом.

Кінетичну енергію механічної системи визначимо за формулою

$$T = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^3 (m_n v_n^2 + J_{xn} \omega_{xn}^2 + J_{yn} \omega_{yn}^2 + J_{zn} \omega_{zn}^2), \quad (1.2)$$

де для n -го ($n = \overline{0,3}$) тіла системи прийняті позначення: m_n - маса; v_n - модуль вектора абсолютної швидкості $\vec{v}_n$ центра мас C_n ; J_{xn} , J_{yn} , J_{zn} - моменти інерції відносно осей системи $C_n x_n y_n z_n$; ω_{xn} , ω_{yn} , ω_{zn} - проекції вектора абсолютної кутової швидкості $\vec{\omega}_n$ на осі системи $O_n x_n y_n z_n$.

Положення центрів мас ланок маніпулятора і тіла, що переноситься маніпулятором, в нерухомій системі координат $OXYZ$ визначимо радіусами-векторами

$$\begin{aligned} \vec{r}_1 &= \vec{r}_0 + \vec{l}_0 + \frac{1}{2} l_1 \vec{i}_1; \\ \vec{r}_2 &= \vec{r}_0 + \vec{l}_0 + l_1 \vec{i}_1 + \left(L - \frac{1}{2} l_2 \right) \vec{i}_2; \\ \vec{r}_3 &= \vec{r}_0 + \vec{l}_0 + l_1 \vec{i}_1 + L \vec{i}_2 + \vec{l}_3, \end{aligned} \quad (1.3)$$

де $\vec{r}_0$ - радіус-вектор центра мас C_0 0-го тіла в системі координат $OXYZ$; $\vec{l}_0$ - вектор з початком в точці O_0 і кінцем в точці O_1 0-го тіла в системі $O_0 x_0 y_0 z_0$; l_n - довжина n -ої ($n = \overline{1,2}$) ланки маніпулятора; $\vec{l}_3$ - вектор з початком в кінці другої ланки маніпулятора та кінцем в точці C_3 третього тіла в системі координат $O_3 x_3 y_3 z_3$.

Для підрахунку компонент радіусів-векторів $\vec{r}_n$ і векторів швидкостей $\vec{v}_n$, $\vec{\omega}_n$ ($n = \overline{0,3}$) скористаємося матричним методом. Визначимо вектори $\vec{r}_0$ і $\vec{r}_n$ в системі $OXYZ$ векторами стовпцями їх координат $\|0 \ 0 \ Z_0\|^T$ і $\|X_n \ Y_n \ Z_n\|^T$ відповідно; вектори $\vec{l}_0$ і $\vec{l}_3$ в системах $O_0 x_0 y_0 z_0$ і $O_3 x_3 y_3 z_3$ векторами стовпцями координат $\|x_0 \ y_0 \ z_0\|^T$ і $\|x_3 \ y_3 \ z_3\|^T$. Тоді із співвідношення (1.3) отримаємо наступні матричні формули для визначення координат центра мас n -го ($n = \overline{1,3}$) тіла механічної системи

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ q_{-1} \end{pmatrix} + A_{-1,0} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} A_{-1,1} \begin{pmatrix} l_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ q_{-1} \end{pmatrix} + A_{-1,0} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + A_{-1,1} \begin{pmatrix} l_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + A_{-1,2} \begin{pmatrix} q_3 - \frac{1}{2} l_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} X_3 \\ Y_3 \\ Z_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ q_{-1} \end{pmatrix} + A_{-1,0} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + A_{-1,1} \begin{pmatrix} l_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + A_{-1,2} \begin{pmatrix} q_3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + A_{-1,3} \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Тут $A_{-1,n} = B_{-1,0} \cdot B_{0,1} \cdot B_{1,2} \cdot \dots \cdot B_{n-1,n}$ ($n = \overline{0,3}$) – матриця напрямних косинусів кутів $\alpha_{11}^{-1,n} = \cos(X, x_n)$, $\alpha_{12}^{-1,n} = \cos(X, y_n)$, ..., $\alpha_{33}^{-1,n} = \cos(Z, z_n)$ між ортами базисів $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ і $\vec{i}_n, \vec{j}_n, \vec{k}_n$; $B_{n-1,n} = A_{-1,n}^T \cdot A_{-1,n-1}$ матриця переходу від базису $\vec{i}_{n-1}, \vec{j}_{n-1}, \vec{k}_{n-1}$ до базису $\vec{i}_n, \vec{j}_n, \vec{k}_n$, різноманітні варіанти підрахунку якої в залежності від орієнтації осей з'єднувальних шарнірів розглянуті в [6]; символом "Т" позначено операцію транспонування матриць; індекс "-1" відповідає базису $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.

Проекції векторів швидкості $\vec{v}_n$ ($n = \overline{1,3}$) на осі нерухомої системи координат $OXYZ$ знайдемо диференціюванням лівої і правої частин (1.4) за часом

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{X}_1 \\ \dot{Y}_1 \\ \dot{Z}_1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{q}_{-1} \end{pmatrix} + \dot{A}_{-1,0} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \dot{A}_{-1,1} \begin{pmatrix} l_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} \dot{X}_2 \\ \dot{Y}_2 \\ \dot{Z}_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{q}_{-1} \end{pmatrix} + \dot{A}_{-1,0} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + \dot{A}_{-1,1} \begin{pmatrix} l_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \dot{A}_{-1,2} \begin{pmatrix} q_3 - \frac{1}{2} l_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + A_{-1,2} \begin{pmatrix} \dot{q}_3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} \dot{X}_3 \\ \dot{Y}_3 \\ \dot{Z}_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{q}_{-1} \end{pmatrix} + \dot{A}_{-1,0} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + \dot{A}_{-1,1} \begin{pmatrix} l_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \dot{A}_{-1,2} \begin{pmatrix} q_3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \dot{A}_{-1,3} \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix} + A_{-1,2} \begin{pmatrix} \dot{q}_3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Очевидно, виразити значення v_n^2 у виразі (1.1) для кінетичної енергії системи через узагальнені координати і швидкості можна згідно рівностям $v_0^2 = \dot{q}_{-1}^2$, $v_n^2 = \dot{X}_n^2 + \dot{Y}_n^2 + \dot{Z}_n^2$ ($n = \overline{1,3}$).

Представимо вектор кутової швидкості $\vec{\omega}_n$ у відповідності до правила додавання обертальних рухів твердого тіла навколо осей, що перетинаються [7,8].

$$\vec{\omega}_n = \sum_{i=0}^n \vec{\omega}_{i-1,i} \quad (n = \overline{1,2}), \quad \vec{\omega}_3 = \vec{\omega}_3, \quad (1.6)$$

де $\vec{\omega}_{i-1,i} = \dot{q}_i \vec{e}_i$ ($i = \overline{0,2}$) – вектор кутової швидкості обертання i -го тіла системи відносно $i-1$ -го. Визначимо вектори $\vec{\omega}_{-1,0}$ в системі $O_0 x_0 y_0 z_0$, $\vec{\omega}_n$ ($n = \overline{1,3}$) в системі $O_n x_n y_n z_n$ відповідно векторами-стовпцями проєкцій $\begin{bmatrix} 0 & 0 & \dot{\theta}_0 \end{bmatrix}^T$, $\begin{bmatrix} \omega_{xn} & \omega_{yn} & \omega_{zn} \end{bmatrix}^T$. Кожному вектору $\vec{\omega}_{i-1,i}$ ($i = \overline{1,2}$) в системі $O_i x_i y_i z_i$ поставимо у відповідність один з векторів-стовпців $\begin{bmatrix} \dot{q}_i & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$, $\begin{bmatrix} 0 & \dot{q}_i & 0 \end{bmatrix}^T$ або $\begin{bmatrix} 0 & 0 & \dot{q}_i \end{bmatrix}^T$ в залежності від орієнтації осі циліндричного шарніра. Прийmemo для визначеності, що вісь i -го з'єднувального шарніра співпадає з віссю $O_i y_i$. Тоді матричні вирази для проєкцій вектора кутової швидкості обертання n -го тіла на осі жорстко зв'язаної з ним місцевої системи координат приймуть вигляд

$$\begin{bmatrix} \omega_{xn} \\ \omega_{yn} \\ \omega_{zn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{q}_0 \end{bmatrix} + \sum_{i=1}^n A_{n,i} \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{q}_i \\ 0 \end{bmatrix} \quad (n = \overline{1,2}), \quad \begin{bmatrix} \omega_{x3} \\ \omega_{y3} \\ \omega_{z3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_{x2} \\ \omega_{y2} \\ \omega_{z2} \end{bmatrix}, \quad (1.7)$$

де $A_{n,i} = B_{n,n-1} \cdot B_{n-1,n-2} \cdot \dots \cdot B_{i+1,i}$ – матриця напрямних косинусів кутів між осями координат $O_n x_n y_n z_n$ і $O_i x_i y_i z_i$ з компонентами $\alpha_{11}^{n,i} = \cos(x_n, x_i)$, $\alpha_{12}^{n,i} = \cos(x_n, y_i)$, ..., $\alpha_{33}^{n,i} = \cos(z_n, z_i)$; $B_{i+1,i}$ – матриця переходу від базису $\vec{i}_{i-1}$, $\vec{j}_{i-1}$, $\vec{k}_{i-1}$ до базису $\vec{i}_i$, $\vec{j}_i$, $\vec{k}_i$ [6].

Узагальнену силу Q_n ($n = \overline{-1,3}$) подамо у вигляді суми двох доданків

$$Q_n = Q_n^* - \frac{\partial \Pi}{\partial q_n}, \quad (1.8)$$

перший з яких пов'язаний з наявністю непотенціальних сил (керуючих сил та моментів), другий – потенціальних сил (сил тяжіння), що діють на робот-маніпулятор.

Узагальнена сила Q_n^* ($n = \overline{-1,3}$) визначається рівностями

$$Q_{-1}^* = F_1^e, \quad Q_n^* = M_n^e \quad (n = \overline{0,2}), \quad Q_3^* = F_2^e. \quad (1.9)$$

Потенціальну енергію системи обчислимо за формулою

$$\Pi = g \sum_{n=-1}^3 m_n Z_n, \quad (1.10)$$

де $\vec{g}$ – прискорення вільного падіння.

Підставляючи (1.2), (1.8)-(1.10) в рівняння (1.1) і виконуючи необхідні операції диференціювання, отримаємо систему 5 взаємопов'язаних нелінійних звичайних диференціальних рівнянь другого порядку, яка з відповідними початковими умовами при заданому законі динамічного або кінематичного керування однозначно описує динаміку робота-маніпулятора.

Задачу динамічного керування розглядуваною механічною системою сформулюємо так. За заданим програмним законом зміни в часі керуючих сил та моментів $\vec{F}_1^e(t)$, $\vec{M}_n^e(t)$ ($n = \overline{0,2}$), $\vec{F}_2^e(t)$ потрібно визначити закон руху системи (узагальнені координати $q_n(t)$ ($n = \overline{-1,3}$)). Задача кінематичного керування, навпаки, полягає у визначенні за заданим програмним законом зміни узагальнених координат $q_n(t)$ ($n = \overline{-1,3}$), що описує рух механічної системи, керуючих сил і моментів $\vec{F}_1^e(t)$,

$\bar{M}_n^e(t)$ ($n = \overline{0,2}$), $\bar{F}_2^e(t)$, які забезпечують реалізацію заданих залежностей $q_n(t)$ ($n = \overline{-1,3}$).

Запишемо рівняння динаміки промислового робота з дволанковою рукою маніпулятора, що встановлений на підлозі, для випадку, коли осі з'єднувальних шарнірів O_1 , O_2 маніпулятора співпадають з осями O_1y_1 , O_2z_2 відповідних місцевих систем координат. Поступальне з'єднання другої ланки маніпулятора зорієнтовано вздовж осі O_2x_2 і дозволяє ланці висуватися в цьому напрямі. Прийmemo для спрощення, що переносимий маніпулятором вантаж представляє собою шароподібне тіло радіуса r . Тоді у відповідності до викладеного вище підходу для даної керованої механічної системи з п'ятьма степенями вільності можна скласти систему нелінійних взаємозв'язаних звичайних диференціальних рівнянь вигляду

$$\begin{aligned} b_1 \ddot{Z}_0 - f_5 \cos \varphi_1 \ddot{\varphi}_1 + f_1 \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \ddot{\varphi}_2 - a_2 \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 \ddot{L} + f_5 \sin \varphi_1 \dot{\varphi}_1^2 + \\ + f_1 \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 \dot{\varphi}_2^2 + 2a_2 \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \dot{\varphi}_2 \dot{L} + 2 \cos \varphi_1 (-a_2 \cos \varphi_2 \dot{L} + f_1 \sin \varphi_2 \dot{\varphi}_2) \dot{\varphi}_1 = Q_1, \\ (J_{z_0} + b_2(x_0^2 + y_0^2) + b_7 \cos^2 \varphi_1 + 2(x_0 l_1 a_1 \cos \varphi_1 + f_1 f_{10}) + f_2(1 - \cos^2 \varphi_2 \sin^2 \varphi_1) + \\ + f_{21}) \ddot{\varphi}_0 + f_{24} \sin \varphi_1 \ddot{\varphi}_1 + (f_3 \cos \varphi_1 + f_1 f_{12}) \ddot{\varphi}_2 - a_2 f_{13} \ddot{L} - 2 \sin \varphi_1 (f_1 f_8 \cos \varphi_2 + \\ + \cos \varphi_1 (b_7 + f_4 \cos^2 \varphi_2 - b_4) + x_0 l_1 a_1) \dot{\varphi}_0 \dot{\varphi}_1 + 2 f_{25} \dot{\varphi}_0 \dot{\varphi}_2 - 2 \sin \varphi_1 (y_0 f_1 \sin \varphi_2 + \\ + f_2 \sin^2 \varphi_2 + \frac{1}{2} f_{20}) \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 + f_{24} \cos \varphi_1 \dot{\varphi}_1^2 + 2(a_2 f_{10} + f_1(1 - \cos^2 \varphi_2 \sin^2 \varphi_1)) \dot{\varphi}_0 \dot{L} + \\ + 2 \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 (a_2 y_0 + f_1 \sin \varphi_2) \dot{\varphi}_1 \dot{L} + 2(f_1 \cos \varphi_1 + a_2 f_{12}) \dot{\varphi}_2 \dot{L} + f_1 f_{13} \dot{\varphi}_2^2 = Q_2, \end{aligned} \quad (1.11)$$

$$\begin{aligned} - f_5 \cos \varphi_1 \ddot{Z}_0 + f_{24} \sin \varphi_1 \ddot{\varphi}_0 + (b_6 + f_{19} \cos \varphi_2) \ddot{\varphi}_1 + 2 f_{22} \cos \varphi_2 \dot{\varphi}_1 \dot{L} + \\ + 2 \sin \varphi_1 (f_{23} \cos \varphi_2 + \frac{1}{2} f_{20}) \dot{\varphi}_0 \dot{\varphi}_2 + 2 f_{22} \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \dot{\varphi}_0 \dot{L} + \sin \varphi_1 ((b_7 + f_4 \cos^2 \varphi_2 - \\ - b_4) \cos \varphi_1 + x_0 l_1 a_1 + f_1 f_8 \cos \varphi_2) \dot{\varphi}_0^2 - 2 f_{23} \sin \varphi_2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 = Q_3, \\ f_1 \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \ddot{Z}_0 + (f_3 \cos \varphi_1 + f_{10} f_{12}) \ddot{\varphi}_0 + f_3 \ddot{\varphi}_2 + 2 f_1 \dot{\varphi}_2 \dot{L} - f_{25} \dot{\varphi}_0^2 + \sin \varphi_2 (l_1 f_1 + \\ + f_4 \cos \varphi_2) \dot{\varphi}_1^2 - 2 \sin \varphi_1 (f_{16} \cos \varphi_2 + \frac{1}{2} f_{20}) \dot{\varphi}_0 \dot{\varphi}_1 + 2 f_1 \cos \varphi_1 \dot{\varphi}_0 \dot{L} = Q_4, \\ - a_2 \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 \ddot{Z}_0 - a_2 f_{13} \ddot{\varphi}_0 + a_2 \ddot{L} - f_{22} \cos \varphi_2 \dot{\varphi}_1^2 - (a_2 f_{10} + f_1(1 - \\ - \cos^2 \varphi_2 \sin^2 \varphi_1)) \dot{\varphi}_0^2 - f_1 \dot{\varphi}_2^2 - 2 f_{22} \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \dot{\varphi}_0 \dot{\varphi}_1 - 2 f_1 \cos \varphi_1 \dot{\varphi}_0 \dot{\varphi}_2 = Q_5. \end{aligned}$$

В рівняннях (1.11) введені наступні позначення для функцій часу

$$f_1 = m_2(L - \frac{1}{2}l_2) + m_3(L + r), \quad f_2 = m_2(L - \frac{1}{2}l_2)^2 + m_3(L + r)^2, \quad f_3 = f_2 + b_5,$$

$$f_4 = f_2 + b_4 - b_3, \quad f_5 = a_1 l_1 + f_1 \cos \varphi_2, \quad f_6 = f_1 + \frac{1}{2}(b_4 - b_3) \cos 2\varphi_2,$$

$$f_7 = x_0 + l_1 \cos \varphi_1, \quad f_8 = f_7 + l_1 \cos \varphi_1, \quad f_9 = f_7 \sin \varphi_2 + y_0 \cos \varphi_1 \cos \varphi_2,$$

$$f_{10} = f_7 \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 + y_0 \sin \varphi_2, \quad f_{11} = y_0 \cos \varphi_2 + l_1 \sin \varphi_2,$$

$$f_{12} = y_0 \sin \varphi_2 \cos \varphi_1 + f_1 \cos \varphi_2, \quad f_{13} = y_0 \cos \varphi_2 \cos \varphi_1 - f_7 \sin \varphi_2,$$

$$f_{14} = y_0 \cos \varphi_2 - f_7 \sin \varphi_2, \quad f_{15} = y_0 l_1 a_1 + f_1 f_{11}, \quad f_{16} = l_1 f_1 + f_2 \cos \varphi_2,$$

$$f_{17} = l_1 f_1 + f_{16}, f_{18} = y_0 \cos \varphi_2 - f_7 \sin \varphi_2 \cos \varphi_1, f_{19} = 2l_1 f_1 + f_4 \cos \varphi_2, \\ f_{20} = b_5 + (b_4 - b_3) \cos 2\varphi_2, f_{21} = J_{x1} + ((b_3 - b_4) \cos^2 \varphi_2 - b_4) \sin^2 \varphi_1, \\ f_{22} = a_2 l_1 + f_1 \cos \varphi_2, f_{23} = l_1 f_1 + f_4 \cos \varphi_2, f_{24} = f_{15} + \frac{1}{2} f_4 \sin 2\varphi_2,$$

$$f_{25} = f_1 f_{18} + \frac{1}{2} f_4 \sin^2 \varphi_1 \sin 2\varphi_2; \text{ узагальнених сил}$$

$$Q_1 = F_1^e - b_1 g, Q_2 = M_0^e, Q_3 = M_1^e + g f_5 \cos \varphi_1, Q_4 = M_2^e - g f_1 \sin \varphi_1 \sin \varphi_2,$$

$$Q_5 = F_2^e + a_2 g \sin \varphi_1 \cos \varphi_2; \text{ постійних коефіцієнтів}$$

$$a_1 = \frac{1}{2} m_1 + m_2 + m_3, a_2 = m_2 + m_3, a_3 = \frac{J_{x1}}{l_1^2} + m_2 + m_3, a_4 = \frac{J_{z1}}{l_1^2} + m_2 + m_3,$$

$$b_1 = m_0 + m_1 + m_2 + m_3, b_2 = m_1 + m_2 + m_3, b_3 = J_{x2} + J_{x3}, b_4 = J_{x2} + J_{x3},$$

$$b_5 = J_{x2} + J_{x3}, b_6 = a_3 l_1^2 + b_3, b_7 = a_4 l_1^2 - J_{x1} + b_5.$$

Побудову розв'язків задачі динамічного керування роботом-маніпулятором із жорсткими ланками можна здійснити шляхом інтегрування рівнянь вигляду (1.11) (або в загальному випадку (1.1)) з відповідними початковими умовами одним із методів чисельного інтегрування систем звичайних диференціальних рівнянь, які забезпечують потрібну точність обчислень. У даній роботі застосовано явний метод Рунге-Кутта 4-го порядку [9]. Визначення розв'язків задачі кінематичного керування роботом-маніпулятором фактично зводиться до необхідності знаходження невідомих зовнішніх сил і моментів із системи алгебраїчних рівнянь (1.11) (або (1.1)).

2. Обговорення результатів. Наведемо результати дослідження задачі кінематичного керування просторовими рухами робота-маніпулятора, розглянутого на основі рівнянь (1.11) у викладеній вище постановці. Обчислення виконані для наведених нижче геометричних і фізичних параметрів його конструкції. Платформа, що переносить маніпулятор, представляє собою однорідне тверде тіло коробчастої форми, має масу $m_0 = 50$ кг і момент інерції $J_{z0} = 25$ кг·м². Ланки маніпулятора виконані у вигляді сталевих стержней довжиною $l_1 = 1$ м, $l_2 = 0,9$ м кільцевого поперечного перерізу з однаковими внутрішніми $d_1 = d_2 = 6 \cdot 10^{-2}$ м і зовнішніми $D_1 = D_2 = 7 \cdot 10^{-2}$ м діаметрами, маси і моменти інерції яких складають $m_1 = 2,757$ кг, $J_{x1} = 2,929 \cdot 10^{-3}$ кг·м², $J_{y1} = J_{z1} = 2,312 \cdot 10^{-1}$ кг·м² і $m_2 = 2,481$ кг, $J_{x2} = 2,636 \cdot 10^{-3}$ кг·м², $J_{y2} = J_{z2} = 1,688 \cdot 10^{-1}$ кг·м² відповідно. Несомий вантаж має радіус $r = 0,1$ м, масу $m_3 = 32,865$ кг і моменти інерції $J_{x3} = J_{y3} = J_{z3} = 1,315 \cdot 10^{-1}$ кг·м². Прийнято, що осі першого та другого з'єднувальних шарнірів співпадають відповідно з осями $O_1 y_1$ і $O_2 z_2$ місцевих систем координат. Координати точки O_1 прикріплення маніпулятора до платформи дорівнюють $x_0 = 0$ м, $y_0 = 0,2$ м, $z_0 = 0$ м.

Вихідна конфігурація механічної системи, що знаходиться в стані спокою в початковий момент часу, визначається наступними значеннями функцій $Z_0(0) = 0$ м, $\theta_0(0) = 0$ рад, $\psi_1(0) = \pi/2$ рад, $\theta_2(0) = \pi/2$ рад, $L(0) = 0,1; 0,4; 0,7$ м. При цьому осі системи координат $O_0 x_0 y_0 z_0$ колінеарні відповідним осям нерухомої системи координат $OXYZ$, а осі $O_1 x_1 y_1 z_1$ повернуті відносно осей системи $O_0 x_0 y_0 z_0$ навколо

осі O_1y_1 на кут $\pi/2$; осі системи координат $O_2x_2y_2z_2$ повернуті відносно осей системи $O_1x_1y_1z_1$ навколо осі O_2z_2 на кут $\pi/2$.

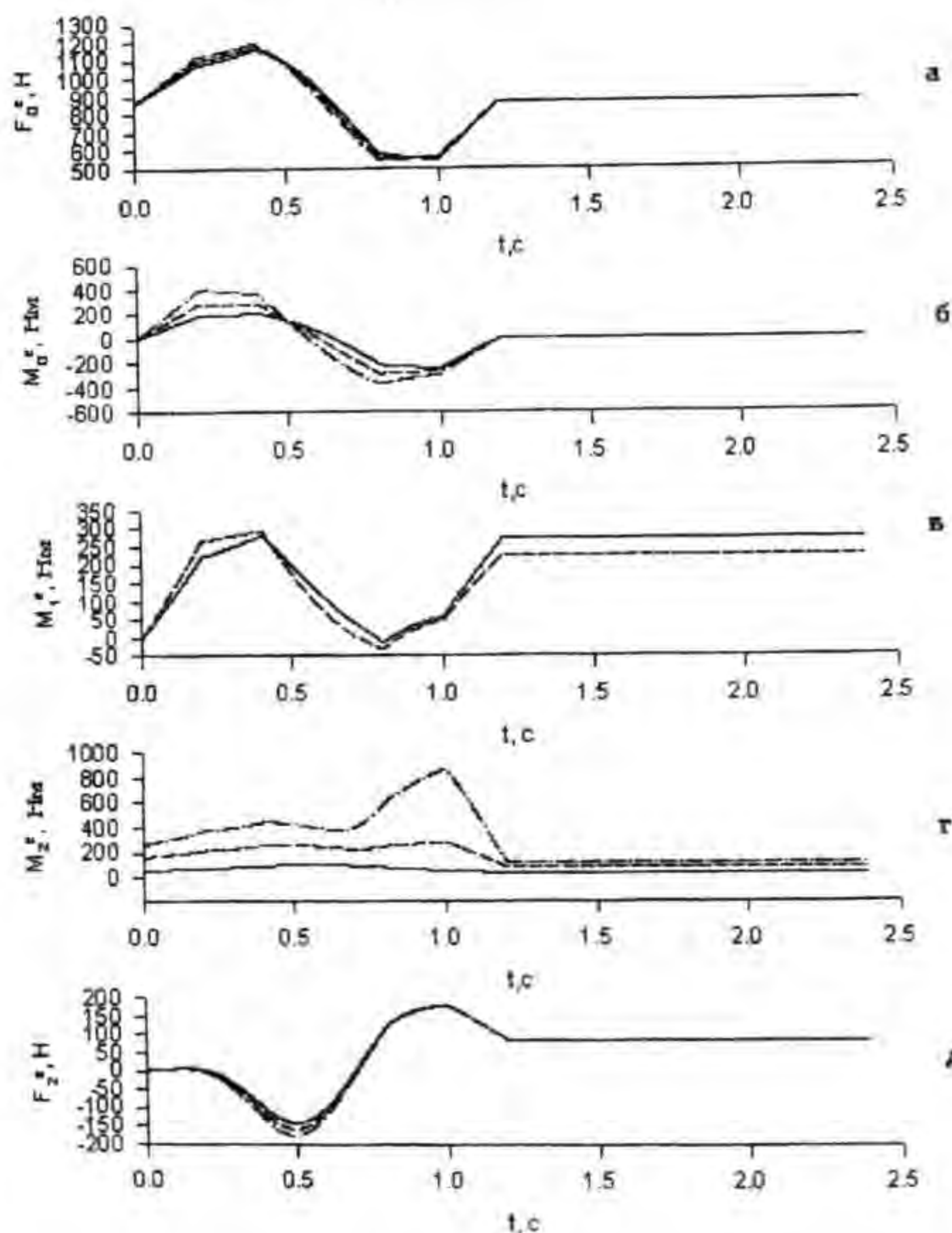


Рис.2

Кінематично керований рух механічної системи досліджувався на відрізку часу $0 \leq t \leq 2,4$ с і здійснювався внаслідок зміни функцій $\ddot{Z}_0(t)$, $\ddot{\theta}_0(t)$, $\ddot{\psi}_1(t)$, $\ddot{\theta}_2(t)$, $\ddot{L}(t)$ на протязі 1,2 с за трапецієподібними законами, які описуються формулами

$$\begin{cases} s_k t, & 0 \leq t \leq \tau, \\ s_k \tau, & \tau \leq t \leq 2\tau, \\ s_k (3\tau - t), & 2\tau \leq t \leq 4\tau, \\ -s_k \tau, & 4\tau \leq t \leq 5\tau, \\ s_k (t - 6\tau), & 5\tau \leq t \leq 6\tau, \\ 0, & t > 6\tau, \end{cases}$$

де $(k=1,5)$, $s_1=0,048 \text{ м с}^{-3}$, $s_2=0,101 \text{ с}^{-3}$, $s_3=0,101 \text{ с}^{-3}$, $s_4=0,051 \text{ с}^{-3}$, $s_5=9,645 \cdot 10^{-3} \text{ м с}^{-3}$, $\tau=0,2 \text{ с}$. Тоді в кінці процесу керування функції керування роботом-маніпулятором складатимуть $Z_0(1,2)=0,5 \text{ м}$, $\theta_0(1,2)=60^\circ$, $\psi_1(1,2)=150^\circ$, $\theta_2(1,2)=120^\circ$, $L(1,2)=0,2;0,5;0,8 \text{ м}$. На рис.2 представлені функції зовнішніх сил та моментів $\bar{F}_0^e(t)$ (а), $\bar{M}_n^e(t)$ ($n=0,2$) (б-г), $\bar{F}_2^e(t)$ (д), які підраховуються в результаті розв'язування задачі кінематичного керування роботом-маніпулятором для трьох випадків початкового видовження його другої ланки. Для випадку початкового видовження $L(0)=0,1 \text{ м}$ графіки вказаних функцій показані на рисунку суцільними лініями; для випадку $L(0)=0,4 \text{ м}$ вони відмічені пунктирними лініями; для випадку $L(0)=0,7 \text{ м}$ – штрих-пунктирними лініями. Зміна початкового видовження другої ланки маніпулятора суттєво впливає на функції керування на етапах розгону та гальмування робота-маніпулятора. При цьому зміна початкового видовження не впливає на функції $\bar{F}_0^e(t)$, $\bar{M}_0^e(t)$, $\bar{F}_2^e(t)$ після зняття керування. Але функції $\bar{M}_1^e(t)$, $\bar{M}_2^e(t)$ при знятті керування приймають різні значення. Найбільше діє зміна початкового видовження другої ланки маніпулятора на вигляд функції $\bar{M}_2^e(t)$. Цей факт спостерігається навіть у початковий момент часу, коли $\bar{M}_2^e(0)$ приймають різні значення в залежності від початкового видовження другої ланки маніпулятора.

Висновки. Вивчення просторового руху робота-маніпулятора на основі математичної моделі багатьох абсолютно твердих тіл дозволяє якісно та кількісно проаналізувати вплив зміни початкового видовження другої ланки маніпулятора на характер функцій зовнішніх керованих сил та моментів.

Література

1. Крутько П.Д. Управление исполнительными системами роботов.- М.: Наука, 1991. – 336 с.
2. Завражина Н.М. Динаміка багатоланкового маніпуляційного механізму з пружно-дисипативними шарнірними сполученнями// Опір матеріалів та теорія споруд. – К.: КНУБА.- Вип. 69, 2001. – С.159-173.
3. Завражина Т.В., Завражина Н.М. Влияние упруго-диссипативных свойств шарнирных соединений на динамику космического манипулятора/Проблемы управления и информатики. – 2001, № 6. – С. 119-131.
4. Завражина Т.В. Вплив пружної піддатливості ланок маніпулятора на точність його позиціювання. I. Математичні моделі динаміки//Математичні методи та фіз.-мех. поля.- 2002.- 45, № 3.- С. 124-133.
5. Завражина Т.В. Вплив пружної піддатливості ланок маніпулятора на точність його позиціювання. II. Методика та результати чисельного моделювання// Математичні методи та фіз.-мех. поля.- 2004.- 47, № 1.- С. 120-128.
6. Накано Э. Введение в робототехнику. – М.: Мир, 1988. – 334 с.
7. Лойцянский Л.Г., Лурье А.И. Курс теоретической механики. – М.: Наука, 1982. – Т.1.- 352 с.
8. Лурье А.И. Аналитическая механика. – М.: Физматгиз, 1961. – 334 с.
9. Хайрер Э., Нерсетт С., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи. – М.: Мир, 1990. – 512 с.

Надійшла до редакції 21.03.2005

УДК 539.3

Оксана С. Келеберденко

Точний розв'язок однієї плоскої контактної задачі для полоси на жорсткій основі. Серія: фізико-математичні науки

За допомогою метода Вінера-Хопфа побудовано точний розв'язок плоскої мішаної контактної задачі для полоси довільної товщини, що лежить на жорсткій основі і знаходиться під дією плоского штампу з скругленим кутом.

Ключові слова: метод Вінера-Хопфа, контактна задача, пружна полоса.

Oksana S. Keleberdenko

Exact solution of a 2-dimensional contact problem for the strip on a rigid base. Series: Physics and Mathematics

Exact solution of 2-dimensional mixed contact problem for the strip of arbitrary thickness, which is located on a rigid base and is enforced by a half-infinite press with rounded edge of arbitrary radius, is obtained by application of Wiener-Hopf method.

Key words: method of Wiener-Hopf, contact problem, elastic strip.

Вступ.

Задачі про напружено-деформований стан тіл, що знаходяться в стані контактної взаємодії належать до актуальних проблем механіки деформівного твердого тіла. Контактна взаємодія твердих тіл, що мають поверхневі шари пружні характеристики яких відрізняються від основи, часто зустрічається на практиці. Дослідження плоских контактних задач для неklasичних областей, зокрема, для полоси, проводяться ще в 30-х роках ХХ століття [1]. Мішані задачі для полоси розглядались в 50-х роках [2] (більш детальну бібліографію можна знайти в [3]), проте слід зазначити, що не дивлячись на широке застосування методів аналітичних функцій конкретні задачі розв'язувались здебільшого наближено. З початком 60-х років розвиваються теорії неklasичних контактних задач з використанням асимптотичних методів, методів ортогональних многочленів і т. д. Переважна кількість досліджень стосується випадків, коли характерні розміри області контакту між тілами задовольняють гіпотезі про малість області контакту. Проте в інженерній практиці досить часто зустрічаються задачі, що не відповідають цій вимозі. Зокрема такою задачею можна вважати задачу про контакт пружної полоси з напівнескінченим плоским штампом [4], в цій роботі авторам вдалося побудувати точний розв'язок.

Нижче розглядається задача про контакт полоси з штампом, що має скруглений кут, це більш відповідає фізичним властивостям реального штампу. Особливу увагу приділено випадку з малим радіусом скруглення ε порівняно з глибиною занурення δ , розв'язок якого при переході $\varepsilon \rightarrow 0$ співпадає з розв'язком, отриманим в [4].

1. Постановка задачі.

Розглянемо пружну полосу товщиною $2h$: $\Omega = \{(x, z) | x \in (-\infty, \infty), z \in [0, 2h]\}$.

з межею: $\partial\Omega = \{(x, z) | z = \{0, 2h\}\}$. Пружні властивості полоси описуються рівнянням Ляме:

$$2 \frac{1-\nu}{1-2\nu} \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{u} - \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{u} = 0, \quad (1)$$

де ν - число Пуассона, $\nu \in [-1/2, 1/2]$

Полоса лежить на жорсткій основі, що зумовлює відсутність переміщень на нижній межі. На полосу тисне плоский напівскінченний штамп зі скругленим кутом (радіус скруглення ε), що має глибину занурення δ , тобто задані переміщення при $x > 0$, на іншій частині полоси навантаження відсутні. Відповідні граничні умови:

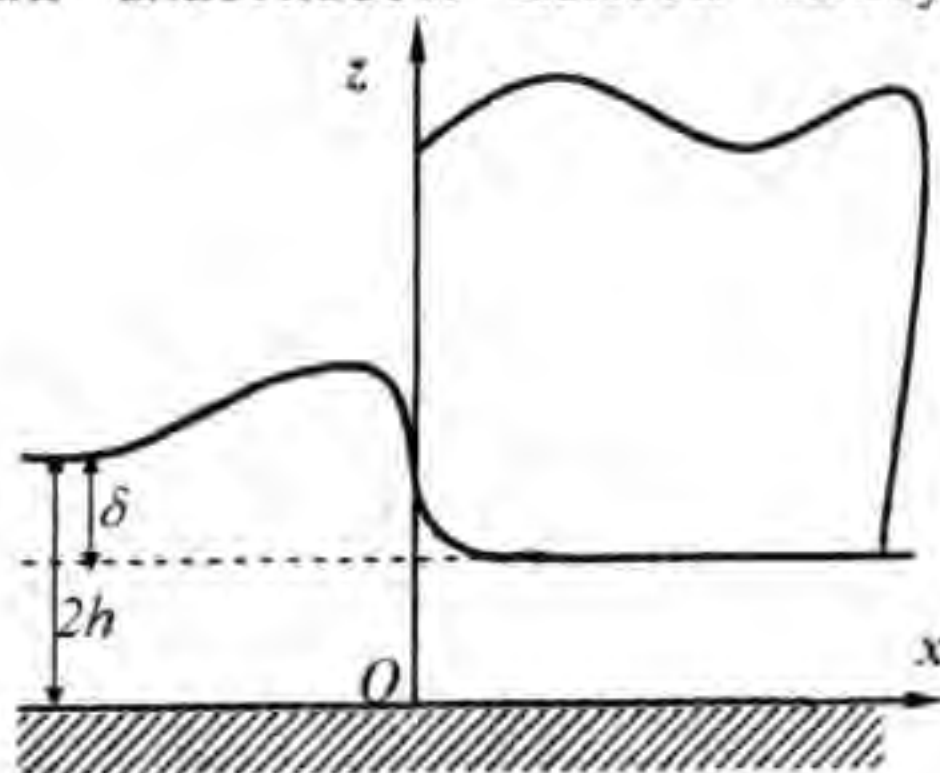


Рис. 1

При $\varepsilon \ll \delta$ контакт відбувається без відриву від основи штампу. В точці $x = 0$ накладемо умову: $\sigma_x|_{z=2h} = 0$.

$$u_x|_{z=0} = 0, \quad u_z|_{z=0} = 0, \quad \tau_{xz}|_{z=2h} = 0 \quad \text{для } x \in \mathbb{R}, \quad (2)$$

$$\begin{cases} u_z|_{z=2h} = g(x), & x > 0 \\ \sigma_x|_{z=2h} = 0, & x < 0 \end{cases}, \quad g(x) = \begin{cases} -\delta - \sqrt{\varepsilon^2 - (x-\varepsilon)^2} + \varepsilon, & 0 < x < \varepsilon \\ -\delta, & \varepsilon \leq x < \infty \end{cases}$$

При $\varepsilon \ll \delta$ контакт відбувається без відриву від основи штампу. В точці $x = 0$ накладемо умову: $\sigma_x|_{z=2h} = 0$.

2. Невласне мішана задача.

Розв'язок рівняння Ляме шукатимемо у наступному вигляді:

$$\begin{cases} u_x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\partial}{\partial x} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{u}(\lambda, z) e^{-i\lambda x} d\lambda, \\ u_z = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{v}(\lambda, z) e^{-i\lambda x} d\lambda. \end{cases}$$

Загальний розв'язок задачі:

$$\begin{aligned} \bar{v}(\lambda, z) &= A(\lambda) \operatorname{ch} \lambda z + B(\lambda) \operatorname{sh} \lambda z + C(\lambda) z \operatorname{ch} \lambda z + D(\lambda) z \operatorname{sh} \lambda z, \\ \lambda^2 \bar{u}(\lambda, z) &= A(\lambda) \lambda \operatorname{sh} \lambda z + B(\lambda) \lambda \operatorname{ch} \lambda z + C(\lambda) (3-4\nu) \operatorname{ch} \lambda z + D(\lambda) \lambda z \operatorname{sh} \lambda z + \\ &\quad - D(\lambda) (3-4\nu) \operatorname{sh} \lambda z + D(\lambda) \lambda z \operatorname{ch} \lambda z \end{aligned}$$

За допомогою введення нової невідомої функції, що має зміст граничних напружень, викликаних штампом

$$\frac{\sigma_z}{2G} \Big|_{z=2h} = f(x), \quad x > 0,$$

перейдемо до невластивої мішаної задачі для рівняння (1) (на верхній межі задані лише напруження, на нижній – переміщення):

$$u_x|_{z=0} = 0, \quad u_z|_{z=0} = 0, \quad \tau_{xz}|_{z=2h} = 0, \quad \sigma_z|_{z=2h} = \begin{cases} f(x), & x > 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases} \quad \text{для } x \in \mathbb{R},$$

розв'язання якої зводиться до системи алгебраїчних рівнянь. Розв'язавши її отримаємо наступні вирази для функцій інтегрування:

$$\begin{cases} A(\lambda) = 0, \\ B(\lambda) = \frac{3-4\nu}{\lambda} \frac{\mu sh\mu + 2(1-\nu)ch\mu}{(3-4\nu)sh^2\mu + \mu^2 + 4(1-\nu)^2} F(\lambda), \\ C(\lambda) = \frac{\mu sh\mu + 2(1-\nu)ch\mu}{(3-4\nu)sh^2\mu + \mu^2 + 4(1-\nu)^2} F(\lambda), \\ D(\lambda) = \frac{\mu ch\mu - (1-2\nu)sh\mu}{(3-4\nu)sh^2\mu + \mu^2 + 4(1-\nu)^2} F(\lambda), \end{cases} \quad (3)$$

де $F(\lambda)$ перетворення Фур'є від $f(x)$, а $\mu = 2\lambda h$.

3. Побудова інтегрального рівняння.

Визначимо невідому функцію $f(x)$ з четвертої граничної умови в (2). Використовуючи вирази (3), після елементарних спрощень отримаємо:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Phi(\mu)}{\mu} F(\lambda) e^{-i\lambda x} d\lambda = \frac{1}{2(1-\nu)} \frac{g(x)}{2h}, \quad x > 0, \quad (4)$$

$$\text{де} \quad \frac{\Phi(\mu)}{\mu} = \frac{1}{\mu} \frac{(3-4\nu)sh2\mu - 2\mu}{(3-4\nu)(ch2\mu - 1) + 2\mu^2 + 8(1-\nu)^2} \quad (5)$$

Зауважимо, що функція $f(x)$ на нескінченості є сталою, що відповідає постійному тиску штампа, тому, щоб забезпечити збіжність інтегралів, доцільно зробити наступне перетворення щільності інтегрування:

$$f(\xi) = -p + \{p + f(\xi)\} = -p + \varphi(\xi) \quad (6)$$

де p — довільна стала, що має зміст постійного тиску штампа рівного тиску на нескінченості, $\varphi(\xi)$ — невідома складова функції граничних напружень, на нескінченості вона зникає.

Перетворення Фур'є від (6) має вигляд:

$$F(\lambda) = -\frac{p}{\sqrt{2\pi}} \left(\pi \delta(\lambda) + \frac{i}{\lambda} \right) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \varphi(\xi) e^{i\lambda \xi} d\xi \quad (7)$$

Підставляючи (7) в (4) відмітимо, що:

$$\frac{p}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Phi(\mu)}{\mu} \pi \delta(\lambda) e^{-i\lambda x} d\lambda = \frac{p}{2} \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)^2} \quad (8)$$

Введемо до розгляду функцію $\tilde{g}(x)$, що на відміну від $g(x)$ є інтегровною на $(0, \infty)$:

$$\tilde{g}(x) = g(x) + \delta = \begin{cases} \varepsilon - \sqrt{\varepsilon^2 - (x - \varepsilon)^2}, & 0 < x < \varepsilon, \\ 0, & \varepsilon \leq x < \infty. \end{cases} \quad (9)$$

Виберемо p таким чином, щоб доданок (8) анулювався з константою в правій частині рівняння (4), що з'являється за рахунок представлення (9):

$$p = \frac{1-\nu}{1-2\nu} \frac{\delta}{2h}.$$

Це є величина граничних напружень при досить великих x (тобто таких що $\varphi(x) = 0$).

Перейдемо до безрозмірних змінних:

$$\eta = 2\lambda h, \quad t = \frac{x}{2h}, \quad \tau = \frac{\xi}{2h}, \quad \text{а також } \tilde{g}(2ht) = \tilde{g}(t), \quad \varphi(2h\xi) = \tilde{\varphi}(\tau).$$

Рівняння (4) після відповідних спрощень зводиться до класичного рівняння типу Вінера-Хопфа:

$$\int_0^\infty \tilde{\varphi}(\tau) K(t-\tau) d\tau = l(t), \quad t > 0, \quad (10)$$

де

$$K(t-\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \frac{\Phi(\eta)}{\eta} e^{-i\eta(t-\tau)} d\eta,$$

$$l(t) = \frac{1}{2(1-\nu)} \frac{\tilde{g}(t)}{2h} - \frac{p}{2} \sum_{k=1}^\infty \left[a_k e^{-s_k t} + b_k e^{-\bar{s}_k t} \right], \quad (11)$$

$$a_k = \frac{1}{s_k^2} \frac{(3-4\nu)\sin 2s_k - 2s_k}{(3-4\nu)\sin 2s_k + 2s_k}, \quad b_k = \frac{1}{\bar{s}_k^2} \frac{(3-4\nu)\sin 2\bar{s}_k - 2\bar{s}_k}{(3-4\nu)\sin 2\bar{s}_k + 2\bar{s}_k},$$

а s_k — корені трансцендентного рівняння:

$$(3-4\nu)(\cos 2z - 1) - 2z^2 + 8(1-\nu)^2 = 0; \quad \text{Im } z > 0, \quad \text{Re } z > 0.$$

4. Функціональне рівняння Вінера-Хопфа.

Довизначимо рівняння (10) на від'ємній піввісі

$$h(t) = \int_0^\infty \tilde{\varphi}(\tau) K(t-\tau) d\tau, \quad t < 0$$

Нове інтегральне рівняння матиме вигляд:

$$\int_0^\infty \tilde{\varphi}_-(\tau) K(t-\tau) d\tau = l_-(t) + h_-(t), \quad t \in \mathbb{R} \quad (12)$$

де

$$\tilde{\varphi}_-(t) = \begin{cases} \tilde{\varphi}(t), & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \quad l_-(t) = \begin{cases} l(t), & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \quad h_-(t) = \begin{cases} 0, & t > 0 \\ h(t), & t < 0 \end{cases}$$

Застосуємо до рівняння (12) комплексне перетворення Фур'є по змінній α , отримаємо функціональне рівняння Вінера-Хопфа

$$K(\alpha) \Phi_-(\alpha) = L_-(\alpha) + H_-(\alpha) \quad (13)$$

де $\Phi_-(\alpha)$ і $H_-(\alpha)$ невідомі функції, а $K(\alpha) = \Phi(\alpha)/\alpha$, де $\Phi(\cdot)$ визначене співвідношенням (5).

$$L_-(\alpha) = G_-(\alpha) + D_-(\alpha), \quad (14)$$

$$G_-(\alpha) = \frac{1}{2(1-\nu)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\varepsilon}{2h\alpha} \left[i \left(1 - e^{i\frac{\alpha\varepsilon}{2h}} \right) - \frac{\pi}{2} e^{i\frac{\alpha\varepsilon}{2h}} W \left(\frac{\alpha\varepsilon}{2h} \right) \right],$$

де $G_-(\alpha)$ — перетворення Фур'є першого доданку (11),

$$W(z) = J_1(z) - iH_1(z)$$

$J_1(\alpha)$ — функція Бесселя першого порядку, а $H_1(\alpha)$ — функція Струве першого порядку,

$$D_-(\alpha) = -\frac{p}{2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=1}^\infty \left[\frac{a_k}{s_k - i\alpha} + \frac{b_k}{\bar{s}_k - i\alpha} \right]$$

Виконаємо факторизацію $K(\alpha)$, тобто знайдемо представлення вигляду $K(\alpha) = K_+(\alpha) \cdot K_-(\alpha)$, де $K_+(\alpha)$ і $K_-(\alpha)$ — функції, що є аналітичними і не перетворюються в нуль відповідно в півплощинах $\text{Im} \alpha > -\text{Im} s_1$ і $\text{Im} \alpha < \text{Im} s_1$. Згідно з теоремою Адамара про розклад мероморфної функції на множники [5], отримаємо представлення:

$$K(\alpha) = K(0) \tilde{K}_+(\alpha) \tilde{K}_-(\alpha), \quad K(0) = \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}, \quad (15)$$

$$\text{де} \quad \tilde{K}_-(\alpha) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{\left(1 + i \frac{z}{\xi_k}\right) \left(1 + i \frac{z}{\bar{\xi}_k}\right)}{\left(1 + i \frac{z}{s_k}\right) \left(1 + i \frac{z}{\bar{s}_k}\right)}, \quad \tilde{K}_+(\alpha) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{\left(1 - i \frac{z}{\xi_k}\right) \left(1 - i \frac{z}{\bar{\xi}_k}\right)}{\left(1 - i \frac{z}{s_k}\right) \left(1 - i \frac{z}{\bar{s}_k}\right)},$$

де ξ_k — корені рівняння:

$$\frac{1}{z} [(3-4\nu) \sin 2z - 2z] = 0 \quad : \quad \text{Im} z > 0, \quad \text{Re} z > 0.$$

Враховуючи представлення (15), подамо рівняння (13), у вигляді:

$$K(0) \tilde{K}_+(\alpha) \Phi_+(\alpha) = \frac{L_+(\alpha)}{\tilde{K}_-(\alpha)} + \frac{H_-(\alpha)}{\tilde{K}_-(\alpha)} \quad (16)$$

Знайдемо наступне представлення:

$$\frac{L_+(\alpha)}{\tilde{K}_-(\alpha)} = P_+(\alpha) + P_-(\alpha) \quad (17)$$

де $P_+(\alpha)$ і $P_-(\alpha)$ — аналітичні функції в півплощинах $\text{Im} \alpha > -\text{Im} s_1$ і $\text{Im} \alpha < \text{Im} s_1$ відповідно. Використовуючи лему про розклад на доданки [6], отримаємо:

$$\begin{aligned} P_+(\alpha) = & \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{K(0)}{4(1-\nu)} \frac{\varepsilon}{2h} \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{A_k C_k}{\alpha - i \xi_k} + \frac{B_k D_k}{\alpha - i \bar{\xi}_k} \right] + \\ & + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{i}{2(1-\nu)} \frac{\varepsilon}{2h} \frac{1}{\tilde{K}_-(\alpha)} \frac{1}{\alpha} \left[i \left(1 - e^{-\frac{\alpha \varepsilon}{2h}} \right) - \frac{\pi}{2} e^{-\frac{\alpha \varepsilon}{2h}} W \left(\frac{\alpha \varepsilon}{2h} \right) \right] - \\ & - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{p}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{a_k}{s_k - i \alpha} \frac{1}{\tilde{K}_-(-is_k)} + \frac{b_k}{\bar{s}_k - i \alpha} \frac{1}{\tilde{K}_-(-i\bar{s}_k)} \right], \end{aligned} \quad (18)$$

$$\text{де} \quad A_k = \xi_k \frac{(3-4\nu)(\cos 2\xi_k - 1) - 2\xi_k^2 + 8(1-\nu)^2}{(3-4\nu)\cos 2\xi_k - 1} \tilde{K}_-(-i\xi_k),$$

$$B_k = \bar{\xi}_k \frac{(3-4\nu)(\cos 2\bar{\xi}_k - 1) - 2\bar{\xi}_k^2 + 8(1-\nu)^2}{(3-4\nu)\cos 2\bar{\xi}_k - 1} \tilde{K}_-(-i\bar{\xi}_k),$$

$$C_k = \frac{1}{\xi_k} \left[i \left(1 - e^{-\frac{\xi_k \varepsilon}{2h}} \right) - \frac{\pi}{2} e^{-\frac{\xi_k \varepsilon}{2h}} W \left(i \frac{\xi_k \varepsilon}{2h} \right) \right], \quad D_k = \frac{1}{\bar{\xi}_k} \left[i \left(1 - e^{-\frac{\bar{\xi}_k \varepsilon}{2h}} \right) - \frac{\pi}{2} e^{-\frac{\bar{\xi}_k \varepsilon}{2h}} W \left(i \frac{\bar{\xi}_k \varepsilon}{2h} \right) \right],$$

Враховуючи (17), запишемо рівняння (16) у вигляді:

$$K(0) \tilde{K}_+(\alpha) \Phi_+(\alpha) - P_+(\alpha) = \frac{H_-(\alpha)}{\tilde{K}_-(\alpha)} + P_-(\alpha) \equiv \Psi(\alpha) \quad (19)$$

З фізичних умов отримаємо, що $\Psi(\alpha)=0$. Тоді

$$\Phi_+(\alpha) = \frac{P_+(\alpha)}{K(0)\bar{K}_+(\alpha)}$$

Шукану функцію $\bar{\varphi}(t)$ знайдемо застосувавши обернене перетворення Фур'є до функції $\Phi_+(\alpha)$. Отримаємо:

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}(t) = & -\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{p}{4} \left(\frac{\tilde{a}_k}{s_k - \xi_n} + \frac{\tilde{b}_k}{\bar{s}_k - \bar{\xi}_n} \right) - \frac{K(0)i}{4(1-\nu)} \frac{\varepsilon}{2h} \left(\frac{A_k C_k}{\xi_k + \xi_n} + \frac{B_k D_k}{\bar{\xi}_k + \bar{\xi}_n} \right) \right] e^{-\xi_k t} - \\ & - \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{p}{4} \left(\frac{\tilde{a}_k}{s_k - \xi_n} + \frac{\tilde{b}_k}{\bar{s}_k - \bar{\xi}_n} \right) - \frac{K(0)i}{4(1-\nu)} \frac{\varepsilon}{2h} \left(\frac{A_k C_k}{\xi_k + \xi_n} + \frac{B_k D_k}{\bar{\xi}_k + \bar{\xi}_n} \right) \right] e^{-\bar{\xi}_k t} + \\ & + \frac{1}{4(1-\nu)} \frac{\varepsilon}{2h} \sum_{n=1}^{\infty} [E_n e^{-\xi_n t} + F_n e^{-\bar{\xi}_n t}] \\ E_n = & \left[i \left(1 - e^{\frac{\xi_n \varepsilon}{2h}} \right) - \frac{\pi}{2} e^{\frac{\xi_n \varepsilon}{2h}} W \left(-i \frac{\xi_n \varepsilon}{2h} \right) \right] \times \frac{A_n}{\xi_n}, \quad F_n = \left[i \left(1 - e^{\frac{\bar{\xi}_n \varepsilon}{2h}} \right) - \frac{\pi}{2} e^{\frac{\bar{\xi}_n \varepsilon}{2h}} W \left(-i \frac{\bar{\xi}_n \varepsilon}{2h} \right) \right] \times \frac{B_n}{\bar{\xi}_n}, \\ \tilde{a}_k = & \frac{a_k}{\bar{K}_+(-i\xi_k)}, \quad \tilde{b}_k = \frac{b_k}{\bar{K}_+(-i\bar{\xi}_k)}. \end{aligned} \quad (20)$$

Знаючи вираз (20) для функції $\bar{\varphi}(t)$, і користуючись (7), можемо знайти функції інтегрування, визначені співвідношеннями (3), а отже вирази для переміщень і напружень.

Висновки.

В роботі побудовано точний розв'язок плоскої мішаної статичної крайової задачі для пружної полоси, що лежить на жорсткій основі і знаходиться під дією плоского напівскінченного штампу зі скругленим кутом. Методом інтегральних перетворень задача зводиться до інтегрального рівняння типу Вінера-Хопфа, яке розв'ягується за класичною схемою.

Автор висловлює глибоку подяку професору А. Ф. Улітку за коректну постановку задачі і цінні обговорення.

Література.

1. Альперин И. Г. Напряжения в бесконечной полосе, равномерно сжатой по половине длины. – П.М.М., 1939, т.2, вып.3.
2. Белецкий М. Я. Смешанная задача теории упругости для бесконечно длинной полосы. – П.М.М., 1952, т.16, вып.3.
3. Галин Л. А. Развитие теории контактных задач в СССР. – М.: Наука 1976 – с.493
4. Улитко А. Ф., Острик В. И. Смешанная задача теории упругости для полосы на жестком основании // Труды III-й Всероссийской конференции по теории упругости с международным участием. – Ростов-на-Дону: Новая книга, 2004 – с.372-375.
5. Титчмарш Е. Теория функций. – М.: Наука, 1980 – с.463.
6. Нобл Б. Метод Вінера-Хопфа. – М.: Изд-во иностр. лит., 1962 – с.280.

Надійшла до редколегії 28.01.2005

УДК 539.3

Ірина В. Лебедева

Iryna V. Lebedyeva

Рівновага пружного двопорожнинного гіперболоїда обертання
Серія: фізико-математичні Науки

The Equilibrium of Elastic Parted Hyperboloid of Revolution
Series: Physics & Mathematics Sciences

Методом власних векторних функцій розв'язано задачу про напружений стан пружного двопорожнинного гіперболоїда обертання. Обчислено компоненти вектора переміщень на поверхні гіперболоїда. Використано векторне перетворення Мелера-Фока. У частинному випадку, коли гіперболоїд розгортається в півпростір, за допомогою знайденого загального розв'язку отримано класичний результат задачі про дію нормальної зосередженої сили на поверхні півпростору.

The problem on stressed state of elastic parted hyperboloid of revolution is solved by the method of vector eigenfunctions. The components of displacement vector on the hyperboloid surface is calculated. Vector Mehler-Fok transform is used. In partial case when the hyperboloid of two sheets transforms into a half-space the obtained solution allowed to find the classic result for the problem on normal force action on the half-space surface.

Ключові слова: пружне середовище, двопорожнинний гіперболоїд

Key Words: elastic medium, parted hyperboloid

*E-mail: Lebedevai@ukr.net

1. Вступ. Розв'язки задач про рівновагу тіл, які моделюються поверхнями обертання другого порядку, ґрунтовані на загальних розв'язках основних граничних задач теорії пружності в ізотермічних криволінійних координатах [1, 2]. Детальна історична довідка щодо таких розв'язків подана в монографіях [2, 3]. Зокрема, розв'язки низки конкретних задач для тіл обертання в сплюснених еліпсоїдальних координатах та важливі практичні висновки з цих розв'язків викладені в монографії Г.Нейбера [4]. Оригінальний метод вирішення просторових задач теорії пружності запропоновано в роботах А.Л.Александрова [5]. Згідно з цим методом загальні розв'язки подаються контурними інтегралами від комплексних потенціалів Колосова-Мусхелішвілі в області меридіонального перерізу тіла обертання. У роботах Ю.М.Подільчука [3] отримано розв'язки основних граничних задач для дво- та однопорожнинного гіперболоїда. Вектор переміщень у цих розв'язках подається сумою трьох частинних розв'язків, два з яких є гармонічними соленоїдними функціями. Третій розв'язок вибирається із загального представлення Папковича-Нейбера з метою точного задоволення граничних умов. Розв'язок аналогічного класу

задач для трансверсально-ізотропного двопорожнинного гіперболоїда обертання методом Александра запропоновано в роботі В.Вольперта [6].

Нижче викладено розв'язок граничних задач для двопорожнинного гіперболоїда обертання на основі методу власних векторних функцій [2]. Достовірність отриманих результатів перевірено порівнянням з відомими результатами класичної задачі про дію нормальної зосередженої сили на поверхні півпростору.

2.Метод власних векторних функцій у задачах для двопорожнинного гіперболоїда обертання. Координати витягнутого еліпсоїда обертання вводяться за допомогою рівностей [2]

$$z + ir = c \operatorname{ch}(\xi + i\eta) = c \operatorname{ch} \xi \cos \eta + i c \operatorname{sh} \xi \sin \eta, \quad z = \alpha(\xi, \eta) = c \operatorname{ch} \xi \cos \eta, \\ r = \beta(\xi, \eta) = c \operatorname{sh} \xi \sin \eta, \quad \varphi = \varphi, \quad (0 \leq \xi < \infty, \quad 0 \leq \eta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi). \quad (1)$$

Масштабні коефіцієнти Ламе дорівнюють

$$h_\xi = h_\eta = h = c \sqrt{\operatorname{sh}^2 \xi + \sin^2 \eta}, \quad h_\varphi = c \operatorname{sh} \xi \sin \eta. \quad (2)$$

У цих координатах поверхня двопорожнинного гіперболоїда задається рівнянням $\eta = \eta_0$. Згідно з методом власних векторних функцій [2] загальний розв'язок рівняння рівноваги Ламе

$$2 \frac{m-1}{m-2} \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} - \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{u} = 0 \quad (3)$$

для осесиметричних задач ($\kappa = 0$) записується у вигляді розкладу

$$\mathbf{u} = \frac{1}{\pi i} \int_{\mu-i\infty}^{\mu+i\infty} \mu \left\{ w_0(\mu, \eta) \mathbf{L}_{\frac{1}{2}+\mu}^{(0)}(\xi, \varphi) + u_0(\mu, \eta) \mathbf{M}_{\frac{1}{2}+\mu}^{(0)}(\xi, \varphi) + v_0(\mu, \eta) \mathbf{N}_{\frac{1}{2}+\mu}^{(0)}(\xi, \varphi) \right\} d\mu \quad (4)$$

за власними вектор-функціями на поверхні двопорожнинного гіперболоїда

$$\mathbf{L}_{\frac{1}{2}+\mu}^{(0)}(\xi, \varphi) = \frac{\mathbf{k}}{\sqrt{2\pi}} Q_{\frac{1}{2}+\mu}(\operatorname{ch} \xi), \quad \mathbf{M}_{\frac{1}{2}+\mu}^{(0)}(\xi, \varphi) = \left(\frac{\mathbf{e}_r}{\sqrt{2}} + i \frac{\mathbf{e}_\varphi}{\sqrt{2}} \right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} Q_{\frac{1}{2}+\mu}^{(-1)}(\operatorname{ch} \xi), \\ \mathbf{N}_{\frac{1}{2}+\mu}^{(0)}(\xi, \varphi) = \left(\frac{\mathbf{e}_r}{\sqrt{2}} - i \frac{\mathbf{e}_\varphi}{\sqrt{2}} \right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} Q_{\frac{1}{2}+\mu}^{(1)}(\operatorname{ch} \xi). \quad (5)$$

У рівностях (3) – (5) $\mathbf{u} = \mathbf{e}_r u_r + \mathbf{e}_\varphi u_\varphi + \mathbf{k} u_z$ – вектор пружних переміщень, m – число Пуассона, $Q_{\frac{1}{2}+\mu}^{(k)}(\operatorname{ch} \xi)$ – функції Лежандра другого роду,

$$w_0(\mu, \eta) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left[\bar{\gamma}_0(\mu, \eta) P_{\frac{1}{2}+\mu} - \left(\frac{3m-4}{m} P_{\frac{1}{2}+\mu} + \left(\mu + \frac{1}{2} \right) \cos \eta P_{\frac{1}{2}+\mu} \right) \bar{\alpha}_0(\mu) \right], \quad (6) \\ \sqrt{2} u_0(\mu, \eta) = -\sqrt{\frac{\pi}{2}} \left(\mu^2 - \frac{1}{4} \right) \left[(\bar{\gamma}_0(\mu, \eta) + \beta_0(\mu)) P_{\frac{1}{2}+\mu}^{(-1)} - \left(\mu + \frac{3}{2} \right) \cos \eta P_{\frac{1}{2}+\mu}^{(-1)} \bar{\alpha}_0(\mu) \right], \\ \sqrt{2} v_0(\mu, \eta) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{(\mu^2 - 1/4)} \left[(\bar{\gamma}_0(\mu, \eta) - \beta_0(\mu)) P_{\frac{1}{2}+\mu}^{(1)} - \left(\mu - \frac{1}{2} \right) \cos \eta P_{\frac{1}{2}+\mu}^{(1)} \bar{\alpha}_0(\mu) \right].$$

Тут для скорочення запису опущено аргумент $\cos \eta$ функції Лежандра, і

$$\bar{\alpha}_0(\mu) = \frac{c}{2\mu}(\alpha_0(1+\mu) - \alpha_0(1-\mu)), \quad \bar{\gamma}_0(\mu) = \gamma_0(\mu) - c \cos^2 \eta \alpha_0(1-\mu). \quad (7)$$

Невідомі щільності $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$ необхідно знайти з граничних умов.

На підставі співвідношення [7]

$$Q_{\frac{1}{2}+\mu}^{(-1)}(\operatorname{ch} \xi) = \frac{1}{\mu^2 - 1/4} Q_{\frac{1}{2}+\mu}^{(1)}(\operatorname{ch} \xi)$$

та формул (4), (5) можемо записати вирази для компонент вектора переміщень

$$\begin{aligned} u_z &= \frac{1}{\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\mu}{\sqrt{2\pi}} w_0(\mu, \eta) Q_{\frac{1}{2}+\mu}(\operatorname{ch} \xi) d\mu, \\ u_r &= \frac{1}{\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\mu}{\sqrt{4\pi}} \left\{ \frac{u_0(\mu, \eta)}{\mu^2 - 1/4} + v_0(\mu, \eta) \right\} Q_{\frac{1}{2}+\mu}^{(1)}(\operatorname{ch} \xi) d\mu, \\ u_\varphi &= \frac{1}{\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\mu}{\sqrt{4\pi}} \left\{ \frac{u_0(\mu, \eta)}{\mu^2 - 1/4} - v_0(\mu, \eta) \right\} Q_{\frac{1}{2}+\mu}^{(1)}(\operatorname{ch} \xi) d\mu. \end{aligned} \quad (8)$$

У випадку осесиметричної деформації $u_\varphi \equiv 0$, тому з останньої формули (8)

$$\text{маємо} \quad v_0(\mu, \eta) = \frac{u_0(\mu, \eta)}{\mu^2 - 1/4}. \quad (9)$$

Рівність (9) буде виконано, якщо у формулах (6) покласти $\beta_0(\mu) \equiv 0$. Після низки перетворень, під час яких опущено також індекс (0) та множник $(1/\sqrt{2\pi})\sqrt{\pi/2} = 1/2$, вирази (8), (6) набудуть вигляду

$$u_z = \frac{1}{\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \mu w(\mu, \eta) Q_{\frac{1}{2}+\mu}(\operatorname{ch} \xi) d\mu, \quad u_r = \frac{1}{\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \mu \frac{u(\mu, \eta)}{\mu^2 - 1/4} Q_{\frac{1}{2}+\mu}^{(1)}(\operatorname{ch} \xi) d\mu, \quad (10)$$

$$\begin{aligned} w(\mu, \eta) &= \left[\gamma_0(\mu) - \frac{c}{2} \cos^2 \eta (\alpha_0(1+\mu) + \alpha_0(1-\mu)) \right] P_{\frac{1}{2}+\mu}(\cos \eta) - \\ &\quad - \bar{\alpha}_0(\mu) \left[\left(\frac{3m-4}{m} + \frac{1}{2} \cos^2 \eta \right) P_{\frac{1}{2}+\mu}(\cos \eta) + \sin \eta \cos \eta P_{\frac{1}{2}+\mu}^{(1)}(\cos \eta) \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u(\mu, \eta) &= \left[\gamma_0(\mu) - \frac{c}{2} \cos^2 \eta (\alpha_0(1+\mu) + \alpha_0(1-\mu)) \right] P_{\frac{1}{2}+\mu}^{(1)}(\cos \eta) + \\ &\quad + \bar{\alpha}_0(\mu) \left[\frac{1}{2} \cos^2 \eta P_{\frac{1}{2}+\mu}^{(1)}(\cos \eta) + \left(\mu^2 - \frac{1}{4} \right) \sin \eta \cos \eta P_{\frac{1}{2}+\mu}(\cos \eta) \right]. \end{aligned} \quad (11)$$

Формули (10), (11) є вихідними при розв'язанні осесиметричної задачі для двопорожнинного гіперболоїда обертання. Обчислення комплексних інтегралів Мелера-Фока (10) можна здійснити або за теорією лишків, або шляхом їх перетворення до дійсних невластних інтегралів.

3. Перетворення комплексних інтегралів Мелера-Фока до дійсних невластних інтегралів. Таке перетворення можна виконати, якщо покласти

в (10), (11) $\mu = i\tau$. Тоді підінтегральні функції в (10) стають дійсними. Співвідношення [7]

$$\sin(\lambda + \nu)\pi Q_{\nu}^{\lambda}(z) + \sin(\lambda - \nu)\pi Q_{-\nu-1}^{\lambda}(z) = \pi e^{i\lambda\pi} \cos \nu\pi P_{\nu}^{\lambda}(z) \quad (12)$$

дає можливість записати при $\lambda = 0$, $\nu = -1/2 + i\tau$

$$-Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(\operatorname{ch}\xi) + Q_{\frac{1}{2}-i\tau}(\operatorname{ch}\xi) = \pi i \operatorname{th} \pi\tau P_{\frac{1}{2}+i\tau}(\operatorname{ch}\xi), \quad (13)$$

а при $\lambda = 1$, $\nu = -1/2 + i\tau$

$$-Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}^{(1)}(\operatorname{ch}\xi) + Q_{\frac{1}{2}-i\tau}^{(1)}(\operatorname{ch}\xi) = \pi i \operatorname{th} \pi\tau P_{\frac{1}{2}+i\tau}^{(1)}(\operatorname{ch}\xi). \quad (14)$$

Скориставшись парністю функцій $u(\mu, \eta)$, $w(\mu, \eta)$ по змінній μ та формулою (13), виконаємо у першому інтегралі (10) вказану заміну змінної:

$$\begin{aligned} u_z &= \frac{1}{\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \mu w(\mu, \eta) Q_{-\frac{1}{2}+\mu}(\operatorname{ch}\xi) d\mu = \left| \mu = i\tau \right| = \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} i\tau w(i\tau, \eta) Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(\operatorname{ch}\xi) d\tau = \\ &= \frac{i}{\pi} \left[\int_{-\infty}^0 \tau w(i\tau, \eta) Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(\operatorname{ch}\xi) d\tau + \int_0^{+\infty} \tau w(i\tau, \eta) Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(\operatorname{ch}\xi) d\tau \right] = \\ &= \frac{i}{\pi} \int_0^{+\infty} \tau \left[-Q_{-\frac{1}{2}+i\tau}(\operatorname{ch}\xi) + Q_{\frac{1}{2}-i\tau}(\operatorname{ch}\xi) \right] w(i\tau) d\tau = \int_0^{+\infty} \tau \operatorname{th} \pi\tau w(i\tau, \eta) P_{\frac{1}{2}+i\tau}(\operatorname{ch}\xi) d\tau. \end{aligned}$$

Аналогічно можна перетворити і другий інтеграл (10). Остаточно формули для обчислення компонент вектора переміщень мають вигляд

$$u_z = \int_0^{+\infty} \tau \operatorname{th} \pi\tau w(i\tau, \eta) P_{\frac{1}{2}+i\tau}(\operatorname{ch}\xi) d\tau, \quad u_r = \int_0^{+\infty} \frac{-\tau \operatorname{th} \pi\tau}{(\tau^2 + 1/4)} u(i\tau, \eta) P_{\frac{1}{2}+i\tau}^{(1)}(\operatorname{ch}\xi) d\tau, \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \text{де } w(i\tau, \eta) &= \left[\gamma_0(i\tau) - \frac{c}{2} \cos^2 \eta (\alpha_0(1+i\tau) + \alpha_0(1-i\tau)) \right] P_{\frac{1}{2}+i\tau}(\cos \eta) - \\ &- \bar{\alpha}_0(i\tau) \left[\left(\frac{3m-4}{m} P_{\frac{1}{2}+i\tau}(\cos \eta) + \frac{1}{2} \cos^2 \eta \right) P_{\frac{1}{2}+i\tau}(\cos \eta) + \sin \eta \cos \eta P_{\frac{1}{2}+i\tau}^{(1)}(\cos \eta) \right], \end{aligned}$$

$$u(i\tau, \eta) = \left[\gamma_0(i\tau) - \frac{c}{2} \cos^2 \eta (\alpha_0(1+i\tau) + \alpha_0(1-i\tau)) \right] P_{\frac{1}{2}+i\tau}^{(1)}(\cos \eta) + \quad (16)$$

$$+ \bar{\alpha}_0(i\tau) \left[\frac{1}{2} \cos^2 \eta P_{\frac{1}{2}+i\tau}^{(1)}(\cos \eta) - \left(\tau^2 + \frac{1}{4} \right) \sin \eta \cos \eta P_{\frac{1}{2}+i\tau}(\cos \eta) \right].$$

4. Рівновага пружного півпростору під дією нормальної зосередженої сили. При значенні $\eta_0 = \pi/2$ гіперболоїд $\eta = \eta_0$ трансформується в півпростір $\eta = \pi/2$. Для задачі про рівновагу пружного півпростору під дією зосередженої сили пружне поле є осесиметричним відносно осі Oz ($\xi = 0$). Тому можна застосувати формули загального розв'язку (15), (16). Звернемося далі до граничних умов. Прикладену в точці $(0; \pi/2)$ зосереджену силу P замінимо еквівалентними до неї рівномірно розподіленими напруженнями $\sigma_z = p_0$ у малому околі точки ($\eta_0 = \pi/2$, $0 \leq \xi \leq \xi_0$, $\xi_0 \rightarrow 0$). Умовою рівності головного вектора рівномірно

розподілених напружень $\sigma_z = p_0$ заданій силі P є рівність $\lim_{\xi_0 \rightarrow 0} p_0 S = P$, де $S = \pi r^2 = \pi c^2 \operatorname{sh}^2 \xi_0 \sin^2 \eta$ – площа околу. На поверхні півпростору, тобто при $\eta = \eta_0 = \pi/2$ згадана умова має вигляд

$$\lim_{\xi_0 \rightarrow 0} p_0 \pi c^2 \operatorname{sh}^2 \xi_0 = P. \quad (17)$$

Нормальні та дотичні напруження на поверхні півпростору дорівнюють

$$\sigma_z|_{\eta=\pi/2} = \begin{cases} -p_0, & 0 \leq \xi \leq \xi_0; \\ 0, & \xi > \xi_0, \end{cases} \quad \tau_{rz}|_{\eta=\pi/2} = 0. \quad (18)$$

Після підстановки цих значень у вирази для компонент тензора напружень, знайдені на підставі формул загального розв'язку (15), (16), дістанемо

$$\begin{aligned} \sigma_z|_{\eta=\pi/2} &= -\frac{2G}{c \operatorname{ch} \xi} \int_0^\infty \tau \operatorname{th} \pi \tau \left[\gamma_0(i\tau) - 2 \frac{m-1}{m} \bar{\alpha}_0(i\tau) \right] P_{\frac{1}{2}+i\tau}^{(1)}(0) P_{\frac{1}{2}+i\tau}(\operatorname{ch} \xi) d\tau = \\ &= \begin{cases} -p_0, & 0 \leq \xi \leq \xi_0; \\ 0, & \xi > \xi_0, \end{cases} \end{aligned} \quad (19)$$

$$\tau_{rz}|_{\eta=\pi/2} = \frac{2G}{c \operatorname{ch} \xi} \int_0^\infty \tau \operatorname{th} \pi \tau \left[\gamma_0(i\tau) - \frac{m-2}{m} \bar{\alpha}_0(i\tau) \right] P_{\frac{1}{2}+i\tau}^{(1)}(0) P_{\frac{1}{2}+i\tau}(\operatorname{ch} \xi) d\tau = 0.$$

З другої рівності (19) випливає, що

$$\gamma_0(i\tau) = \frac{m-2}{m} \bar{\alpha}_0(i\tau). \quad (20)$$

З урахуванням співвідношення (20) друга рівність (19) набуває вигляду

$$\int_0^\infty \tau \operatorname{th} \pi \tau \bar{\alpha}_0(i\tau) P_{\frac{1}{2}+i\tau}^{(1)}(0) P_{\frac{1}{2}+i\tau}(\operatorname{ch} \xi) d\tau = \sigma_z|_{\eta=\pi/2} = \begin{cases} -\frac{cp_0}{2G} \operatorname{ch} \xi, & 0 \leq \xi \leq \xi_0; \\ 0, & \xi > \xi_0. \end{cases} \quad (21)$$

Останній інтеграл можна обчислити за допомогою інтегрального перетворення Мелера-Фока [1], яке задається формулами

$$g(\operatorname{ch} \xi) = \int_0^\infty F(\tau) P_{\frac{1}{2}+i\tau}(\operatorname{ch} \xi) d\tau, \quad F(\tau) = \tau \operatorname{th} \pi \tau \int_0^\infty g(\operatorname{ch} \xi) P_{\frac{1}{2}+i\tau}(\operatorname{ch} \xi) \operatorname{sh} \xi d\xi. \quad (22)$$

Порівнюючи (21) і (22), маємо

$$\bar{\alpha}_0(i\tau) P_{\frac{1}{2}+i\tau}^{(1)}(0) = -\int_0^{\xi_0} \frac{cp_0}{2G} \operatorname{ch} \xi P_{\frac{1}{2}+i\tau}(\operatorname{ch} \xi) \operatorname{sh} \xi d\xi, \quad \xi_0 \rightarrow 0. \quad (23)$$

За теоремою про середнє значення функції існує $\xi \in (0; \xi_0)$, для якого

$$\int_0^{\xi_0} \operatorname{ch} \xi P_{\frac{1}{2}+i\tau}(\operatorname{ch} \xi) \operatorname{sh} \xi d\xi = \operatorname{ch} \xi P_{\frac{1}{2}+i\tau}(\operatorname{ch} \xi) \int_0^{\xi_0} \operatorname{sh} \xi d\xi = \operatorname{ch} \xi P_{\frac{1}{2}+i\tau}(\operatorname{ch} \xi) (\operatorname{ch} \xi_0 - 1).$$

З урахуванням останньої рівності та умови (17) знайдемо границю інтеграла (23):

$$\lim_{\xi_0 \rightarrow 0} \int_0^{\xi_0} \frac{cp_0}{2G} \operatorname{ch} \xi P_{\frac{1}{2}+i\tau}(\operatorname{ch} \xi) \operatorname{sh} \xi d\xi = \lim_{\xi_0 \rightarrow 0} \frac{P(\operatorname{ch} \xi_0 - 1) \operatorname{ch} \xi}{\pi c \operatorname{sh}^2 \xi_0} \frac{1}{2G} P_{\frac{1}{2}+i\tau}(\operatorname{ch} \xi) = \frac{P}{4G\pi c}. \quad (24)$$

На підставі (20), (23), (24) запишемо вирази для шуканих щільностей

$$\bar{\alpha}_0(i\tau) = -\frac{P}{4G\pi c P_{\frac{1}{2}+i\tau}^{(1)}(0)}, \quad \gamma_0(i\tau) = -\frac{m-2}{m} \frac{P}{4G\pi c P_{\frac{1}{2}+i\tau}^{(1)}(0)}, \quad (25)$$

а також для коефіцієнтів (16) на поверхні гіперболоїда

$$u\left(i\tau, \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{m-2}{m} \frac{P}{4\pi G c}, \quad w\left(i\tau, \frac{\pi}{2}\right) = 2 \frac{m-1}{m} \frac{P}{4\pi G c} \frac{P_{\frac{1}{2}+i\tau}^{(1)}(0)}{P_{\frac{1}{2}+i\tau}^{(1)}(0)}, \quad (26)$$

Для знаходження компонент вектора переміщень та тензора напружень застосуємо наступні рівності [7]

$$I_1 = \int_0^\infty \frac{\tau \operatorname{th} \pi \tau}{(\tau^2 + 1/4)} P_{\frac{1}{2}+i\tau}^{(1)}(\operatorname{ch} \xi) d\tau = Q_0(\operatorname{ch} \xi) = \frac{1}{2} \ln \frac{\operatorname{ch} \xi + 1}{\operatorname{ch} \xi - 1}, \quad (27)$$

$$I_2 = \int_0^\infty \frac{\tau \operatorname{th} \pi \tau}{(\tau^2 + 1/4)} P_{\frac{1}{2}+i\tau}^{(1)}(\operatorname{ch} \xi) d\tau = \frac{d}{d\xi} Q_0(\operatorname{ch} \xi) = -\frac{1}{\operatorname{sh} \xi}, \quad (28)$$

$$\frac{P_{\frac{1}{2}+i\tau}^{(1)}(0)}{P_{\frac{1}{2}+i\tau}^{(1)}(0)} = \frac{\operatorname{ch} \pi \tau}{4\pi^2} \left[\Gamma\left(\frac{1}{4} + \frac{i\tau}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{4} - \frac{i\tau}{2}\right) \right]^2, \quad (29)$$

$$I_3 = \int_0^\infty \tau \operatorname{sh} \pi \tau \left[\Gamma\left(\frac{1}{4} + \frac{i\tau}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{4} - \frac{i\tau}{2}\right) \right]^2 P_{\frac{1}{2}+i\tau}^{(1)}(\operatorname{ch} \xi) d\tau = \frac{4\pi^2}{\operatorname{sh} \xi}, \quad (30)$$

$$I_4 = \int_0^\infty \tau \operatorname{th} \pi \tau P_{\frac{1}{2}+i\tau}^{(1)}(\operatorname{ch} \xi) d\tau = 0. \quad (31)$$

Обчислимо компоненти вектора переміщень (15) та тензора напружень, враховуючи (1), (25) – (31):

$$u_r|_{\eta=\frac{\pi}{2}} = \frac{m-2}{m} \frac{P}{4\pi G c} \int_0^\infty \frac{\tau \operatorname{th} \pi \tau}{(\tau^2 + 1/4)} P_{\frac{1}{2}+i\tau}^{(1)}(\operatorname{ch} \xi) d\tau = \frac{m-2}{-m} \frac{P}{4\pi G c \operatorname{sh} \xi} = \frac{2-m}{m} \frac{P}{4\pi G r},$$

$$u_z|_{\eta=\frac{\pi}{2}} = 2 \frac{m-1}{m} \frac{P}{4\pi G c} \int_0^\infty \tau \operatorname{th} \pi \tau \frac{P_{\frac{1}{2}+i\tau}^{(1)}(0)}{P_{\frac{1}{2}+i\tau}^{(1)}(0)} P_{\frac{1}{2}+i\tau}^{(1)}(\operatorname{ch} \xi) d\tau =$$

$$= 2 \frac{m-1}{m} \frac{P}{4\pi G c} \frac{1}{4\pi^2} I_3 = 2 \frac{m-1}{m} \frac{P}{4\pi G c \operatorname{sh} \xi} = 2 \frac{m-1}{m} \frac{P}{4\pi G r};$$

$$\frac{\sigma_r}{2G}|_{\eta=\frac{\pi}{2}} = \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{m-2} \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) \right)_{\eta=\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \frac{1}{c \operatorname{ch} \xi} \int_0^\infty \tau \operatorname{th} \pi \tau \left\{ \gamma_0(i\tau) P_{\frac{1}{2}+i\tau}^{(1)}(0) \left[P_{\frac{1}{2}+i\tau}^{(1)}(\operatorname{ch} \xi) + \frac{\operatorname{cth} \xi}{\tau^2 + 1/4} P_{\frac{1}{2}+i\tau}^{(1)}(\operatorname{ch} \xi) \right] + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{m-2} \left[\frac{3m-4}{m} - 1 \right] \bar{\alpha}_0(i\tau) P_{\frac{1}{2}+i\tau}^{(1)}(0) P_{\frac{1}{2}+i\tau}^{(1)}(\operatorname{ch} \xi) \right\} d\tau =$$

$$\begin{aligned}
 &= -\frac{P}{4\pi Gc} \left\{ \frac{1}{c \operatorname{ch} \xi} I_4 + \frac{m-2}{m} \frac{1}{c \operatorname{sh} \xi} I_2 \right\} = -\frac{m-2}{m} \frac{P}{4\pi G c^2 \operatorname{sh}^2 \xi} = -\frac{m-2}{m} \frac{P}{2\pi r^2}; \\
 &\frac{\sigma_\varphi}{2G} \Big|_{\eta=\frac{\pi}{2}} = \left(\frac{u_r}{r} + \frac{1}{m-2} \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) \right) \Big|_{\eta=\frac{\pi}{2}} = \\
 &= \frac{1}{c \operatorname{sh} \xi} \int_0^\infty \frac{-\tau \operatorname{th} \pi \tau}{\tau^2 + 1/4} \gamma_0(i\tau) P_{\frac{1}{2}+i\tau}^{(1)}(0) P_{\frac{1}{2}+i\tau}^{(1)}(\operatorname{ch} \xi) d\tau + \\
 &+ \frac{2}{m} \frac{1}{c \operatorname{ch} \xi} \int_0^\infty \tau \operatorname{th} \pi \tau \alpha_0(i\tau) P_{\frac{1}{2}+i\tau}^{(1)}(0) P_{\frac{1}{2}+i\tau}^{(1)}(\operatorname{ch} \xi) d\tau = \\
 &= \frac{P}{4\pi Gc} \left\{ \frac{m-2}{m} \frac{1}{c \operatorname{sh} \xi} I_2 - \frac{2}{m} \frac{1}{c \operatorname{ch} \xi} I_4 \right\} = -\frac{m-2}{m} \frac{P}{4\pi G c^2 \operatorname{sh}^2 \xi} = -\frac{m-2}{m} \frac{P}{2\pi r^2}.
 \end{aligned}$$

Отже, у класичній задачі про рівновагу пружного півпростору під дією нормальної зосередженої сили отримано відомий у літературі результат [8].

5. Висновок. Таким чином, розв'язок осесиметричної задачі про рівновагу пружного двопорожнинного гіперболоїда обертання знайдено. Він представлений формулами (15), (16). Правильність цього розв'язку підтверджено тестуванням частинного випадку – відомої задачі про дію нормальної зосередженої сили на поверхні півпростору. Останнє дає підстави застосовувати отримані в даній роботі результати до розробки як фундаментальних, так і прикладних проблем.

Література

1. Лебедев Н.Н. Специальные функции и их приложения. – М.: Физматгиз, 1963. – 358 с.
2. Улитко А.Ф. Векторные разложения в пространственной теории упругости. – Киев: Академперіодика, 2002. – 341 с.
3. Подильчук Ю.Н. Трехмерные задачи теории упругости. – Киев: Наукова думка, 1979. – 240 с.
4. Нейбер Г. Концентрация напряжений. – М.: Гостехиздат, 1947. – 204 с.
5. Александров А.Я., Соловьев Ю.И. Пространственные задачи теории упругости. – М.: Наука, 1978. – 464 с.
6. Вольперт В.С. Решение основных задач теории упругости для трансверсально-изотропных параболоида и двуполостного гиперболоида вращения. – Тр. Новосиб. Ин-та инж. ж.-д. Трансп., 1970, вып.96.
7. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. Дополнительные главы. – М.: Наука, 1986. – 800 с.
8. Хан Х. Теория упругости. – М.: Мир, 1988. – 343 с.

Надійшла до редакції 29.03.05

УДК 534.1+531.38

Віктор П. Лєгеца

**Узагальнений метод визначення
амплітудно-частотних
характеристик віброзахисних
систем із котковими гасниками**

Розроблено новий узагальнений метод визначення амплітудно-частотних характеристик (АЧХ) для спеціального класу віброзахисних систем із геометричними та кінематичними нелінійностями.

Ключові слова: віброзахисна система, котковий гасник, рівняння Аппеля, кінематичні в'язі.

Viktor P. Legeza

**Generalized method of
determination of an amplitude-
frequency characteristics of
vibroprotective systems with
rolling absorbers**

A new generalized method of determination of an amplitude-frequency characteristics (AFC) for the specific category of vibroprotective systems with geometric and kinematical non-linearity has been developed.

Key Words: vibroprotective system, rolling absorber, Appell's equations, kinematic tie.

Вступ. Низькочастотні вимушені коливання крупногабаритних несучих об'єктів (таких, як несучі стволи вітроенергетичних установок, елементи транспортних систем, крупновантажні кораблі, підводні човни, телевежі, витяжні труби електростанцій тощо), які виникають під дією періодичних сил вітру, гідродинамічних сил, кінематичних збурень або віброзбуджень іншої природи, призводять до небезпечного резонансного зростання амплітуд. Це негативно позначається на їх міцності, стійкості та експлуатаційній надійності. Разом із конструктивними рішеннями, які забезпечують найраціональніше проектування зазначених конструкцій, для зменшення рівня динамічних навантажень застосовуються різні технічні пристрої, об'єднані загальним терміном "віброзахист": динамічні гасники вимушених коливань, амортизуючі та демпфірувальні системи, обмежувальні ланки тощо. Серед них найбільш розповсюджені пружні, маятникові і ударні гасники, які використовуються у сполученні із демпферами. Проте застосування зазначених пристроїв у складі віброзахисних систем теоретично обгрунтоване та унормоване тільки у певних діапазонах власних частот несучих об'єктів (середньочастотному та високочастотному) та при порівняно невеликих амплітудах їх вимушених коливань [1-2].

З іншого боку, за своїми динамічними характеристиками значна частина крупногабаритних масивних несучих об'єктів має власні частоти, що знаходяться у низькочастотному діапазоні, та великі амплітуди вимушених коливань. В цих умовах зазначена проблема може бути

вирішена тільки на основі використання віброгасників та амортизуючих систем нетрадиційних конструкцій [3-5].

Останнім часом отримали розвиток альтернативні підходи до розв'язання цієї проблеми на основі використання нових компактних пристроїв, при функціонуванні яких застосовуються інші принципи віброподавлення вимушених коливань різного походження. Вони ґрунтуються на забезпеченні великих взаємних переміщень несучих та несених (робочих) тіл у довільних горизонтальних напрямках, причому для реалізації таких взаємних переміщень найбільш вдалим виявились механічні системи з коченням одних твердих тіл по рухомих поверхнях інших тіл без ковзання (котково-демпфірувальні системи). При цьому в таких системах з коченням коливальні рухи тіл обмежені кінематичними в'язями, аналітичне врахування яких потребує нових підходів та методів для побудови та дослідження математичних моделей їх динамічної поведінки [5 - 8].

В роботі пропонується новий метод визначення АЧХ, розроблений для типового ряду віброзахисних систем із котковими гасниками. Запропонований метод закладає теоретичне підґрунтя для знаходження оптимальних параметрів настроювання коткових гасників. Принципові схеми трьох таких систем показані в попередніх роботах [5-8].

Постановка задачі. Динамічна поведінка зазначених віброзахисних систем із котковими гасниками у загальному вигляді описується такими нелінійними диференціальними рівняннями [5 - 8]:

$$(1 + \nu)\ddot{x} + \omega_0^2 x + 2n_x \dot{x} + \nu p \bar{R}(\sin(\eta) \cdot \dot{\eta}^2 - \ddot{\eta} \cos(\eta)) = \bar{F}_0 \sin(\omega t) \quad (1)$$

$$\cos(\eta)\ddot{x} = q \bar{R} \ddot{\eta} + g \sin(\eta) + 2n_\eta p \bar{R} \dot{\eta} \quad (2)$$

де $2n_x = \frac{C_x}{M}$; $2n_\eta = \frac{C_\eta}{m}$; $\nu = \frac{m}{M}$; $\omega_0^2 = \frac{k}{M}$; $\bar{F}_0 = \frac{F_0}{M}$; p, q - параметри, що ідентифікують кожен з трьох віброзахисних систем, що розглядаються у роботі; R - радіус сферичних виїмок гасників; M - приведена маса несучого тіла; m - маса робочого тіла гасника; F_0 - максимальна амплітуда зовнішнього збудження; $\bar{R} = R - r$; r - радіус кулі; x - величина горизонтального переміщення несучого тіла; η - кут між нормаллю, проведеною у точці контакту кулі та сферичних виїмок гасників, та вертикальною віссю гасника.

Рух кулі та робочих тіл розглядався без ковзання. Вивід рівнянь руху для кожної із віброзахисних систем було виконано за допомогою формалізма Аппеля [9-10]. З'ясувалося, що диференціальні рівняння, що описують їх рух, при деяких припущеннях якісно мають однаковий вигляд (1)-(2). Їх кількісна відмінність враховується за допомогою введення

числових параметрів p, q , що ідентифікують кожну конкретну віброзахисну систему. Для всіх досліджуваних систем несучі тіла мають приведену масу M , робочі тіла мають масу m , причому

$$M = m_1; m = m_3; \frac{m_2}{m_1} \rightarrow 0; \frac{m_2}{m_3} \rightarrow 0; x = x_1; F(t) = F_0 \sin(\omega t).$$

Мета роботи – на основі рівнянь руху (1)-(2) розробити метод визначення АЧХ для зазначеного типового ряду нелінійних віброзахисних систем.

Розробка методу визначення АЧХ віброзахисних систем із котковими гасниками. Для визначення АЧХ досліджуваних систем скористаємось процедурою осереднення Рітца-Гальоркіна [11-14], адаптованою до досліджуваної у роботі задачі. В основі цієї процедури лежить припущення про те, що середнє значення віртуальної роботи за один період при усталених вимушених коливаннях механічної системи дорівнює нулю.

Не звужуючи загальності підходу, будемо вважати, що рух деякої довільної механічної системи описується наступними диференціальними рівняннями:

$$\ddot{Z}_j + f_j(t, Z_1, Z_2, \dots, Z_k, \dot{Z}_1, \dot{Z}_2, \dots, \dot{Z}_k) = 0; j = \overline{1, k} \quad (3)$$

Тоді вираз для елементарної роботи на віртуальному переміщенні δZ_j має вигляд:

$$[\ddot{Z}_j + f_j(t, Z_1, Z_2, \dots, Z_k, \dot{Z}_1, \dot{Z}_2, \dots, \dot{Z}_k)] \cdot \delta Z_j = 0 \quad (4)$$

Далі будемо вважати, що наближений розв'язок задачі про усталені вимушені коливання для кожної узагальненої координати можна представити у вигляді такого скінченного ряду:

$$Z_j(t) = \sum_{i=1}^n A_{ij} \psi_i(t) \quad (5)$$

де ψ_i - деякі функції часу, які вибираються із умови задачі та специфіки руху системи; A_{ij} - вагові коефіцієнти, які визначаються із тої умови, що середнє значення віртуальної роботи за один період дорівнює нулю, тобто:

$$\sum_{i=1}^n \int_0^T [\ddot{Z}_j + f_j(t, Z_1, Z_2, \dots, Z_k, \dot{Z}_1, \dot{Z}_2, \dots, \dot{Z}_k)] \psi_i(t) \delta A_{ij} dt = 0 \quad (6)$$

З огляду на незалежність варіацій δA_{ij} вираз (6) перетворюється на систему нелінійних алгебраїчних рівнянь відносно A_{ij} (з урахуванням виразу (5)):

$$\int_0^T [\ddot{Z}_j + f_j(t, Z_1, Z_2, \dots, Z_k, \dot{Z}_1, \dot{Z}_2, \dots, \dot{Z}_k)] \psi_1(t) dt = 0 \quad (7)$$

$$\int_0^T [\ddot{Z}_j + f_j(t, Z_1, Z_2, \dots, Z_k, \dot{Z}_1, \dot{Z}_2, \dots, \dot{Z}_k)] \psi_2(t) dt = 0 \quad (8)$$

o o o o o o o o o o o o o o o

$$\int_0^T [\ddot{Z}_j + f_j(t, Z_1, Z_2, \dots, Z_k, \dot{Z}_1, \dot{Z}_2, \dots, \dot{Z}_k)] \psi_n(t) dt = 0 \quad (9)$$

Зазвичай для прийнятного [11-14] за точністю розв'язку обмежуються одним-двома членами ряду (5). Для задач, що розглядаються в роботі, виберемо двочленне представлення по кожній змінній:

$$x = A_1 \psi_1(t) + A_2 \psi_2(t) = A \sin(\omega t - \alpha) \quad (10)$$

$$\eta = B_1 \psi_1(t) + B_2 \psi_2(t) = B \sin(\omega t - \beta), \quad (11)$$

де $\psi_1(t) = \sin(\omega t)$ та $\psi_2(t) = \cos(\omega t)$.

Розкладемо в ряди Тейлора тригонометричні функції, що входять до рівнянь (1)-(2). Після цього підставимо відповідні ряди у вказані рівняння. В результаті отримаємо таку систему диференціальних рівнянь:

$$(1 + \nu) \ddot{x} + \omega_0^2 x + 2n_x \dot{x} + \nu p \bar{R} \dot{\eta}^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \eta^{2n-1}}{(2n-1)!} - \nu p \bar{R} \dot{\eta} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \eta^{2m}}{(2m)!} = \bar{F}_0 \sin(\omega t) \quad (12)$$

$$\ddot{x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \eta^{2n}}{(2n)!} = q \bar{R} \dot{\eta} + g \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1} \eta^{2m-1}}{(2m-1)!} + 2n_\eta p \bar{R} \dot{\eta} \quad (13)$$

Підставимо у рівняння (12)-(13) вирази (10)-(11). В результаті отримаємо наступні алгебраїчно-тригонометричні рівняння:

$$\begin{aligned} & [\omega_0^2 - (1 + \nu) \omega^2] A \sin(\omega t - \alpha) + 2n_x A \omega \cos(\omega t - \beta) + \\ & + \nu p \bar{R} B^2 \omega^2 \cos^2(\omega t - \beta) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} B^{2n-1} \sin^{2n-1}(\omega t - \beta)}{(2n-1)!} + \\ & + \nu p \bar{R} B \omega^2 \sin(\omega t - \beta) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m B^{2m} \sin^{2m}(\omega t - \beta)}{(2m)!} = \bar{F}_0 \sin(\omega t) \quad (14) \\ & - A \omega^2 \sin(\omega t - \alpha) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m B^{2m} \sin^{2m}(\omega t - \beta)}{(2m)!} = -q \bar{R} B \omega^2 \sin(\omega t - \beta) + \\ & + 2n_\eta p \bar{R} B \omega \cos(\omega t - \beta) + g \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} B^{2n-1} \sin^{2n-1}(\omega t - \beta)}{(2n-1)!} \quad (15) \end{aligned}$$

Далі застосуємо процедуру осереднення по часу на проміжку $[0, 2\pi]$. Перестановка операцій інтегрування та взяття нескінченної суми

обґрунтована, так як всі зазначені ряди рівномірно збіжні. Операція інтегрування тільки поліпшить збіжність усіх рядів, що використовуються у рівняннях (14) - (15).

Отже, домножимо рівняння (14) та (15) на $\sin(\omega t)$ та проінтегруємо їх в межах від 0 до 2π . Потім те ж саме інтегрування виконаємо після домноження вказаних рівнянь на $\cos(\omega t)$. При перетвореннях були використані наступні проміжні формули ($\psi = \omega t$):

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin(\psi - \theta) \sin \psi \cdot d\psi = \frac{\cos \theta}{2} \quad (16)$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(\psi - \theta) \sin \psi \cdot d\psi = \frac{\sin \theta}{2} \quad (17)$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin(\psi - \theta) \cos \psi \cdot d\psi = -\frac{\sin \theta}{2} \quad (18)$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(\psi - \theta) \cos \psi \cdot d\psi = \frac{\cos \theta}{2} \quad (19)$$

$$\int_0^{2\pi} \sin^{2n+1}(\psi - \beta) \sin(\psi) d\psi = \cos \beta \cdot J(n+1) \quad (20)$$

$$\int_0^{2\pi} \sin^{2n+1}(\psi - \beta) \cos(\psi) d\psi = -\sin \beta \cdot J(n+1) \quad (21)$$

$$\int_0^{2\pi} \sin(\psi - \alpha) \sin^{2n}(\psi - \beta) \sin \psi d\psi = \sin \beta \sin(\beta - \alpha) J(n) + \cos(2\beta - \alpha) J(n+1) \quad (22)$$

$$\int_0^{2\pi} \sin(\psi - \alpha) \sin^{2n}(\psi - \beta) \cos \psi d\psi = \sin(\beta - \alpha) \cos \beta J(n) - \sin(2\beta - \alpha) J(n+1), \quad (23)$$

де $J(n) = \int_0^{2\pi} \sin^{2n}(x) dx = 2\pi \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2^n n!}$.

Після підстановки виразів (16) - (23) та деяких тотожних перетворень, отримаємо наступні чотири алгебраїчно-тригонометричні рівняння:

$$[\omega_0^2 - (1 + \nu)\omega^2] A \cos \alpha + 2n_x A \omega \sin \alpha + \nu p \bar{R} B \omega^2 \cos \beta [\Phi_1(B) + 1 - \Phi_2(B)] = \bar{F}_0 \quad (24)$$

$$[\omega_0^2 - (1 + \nu)\omega^2] A \sin \alpha - 2n_x A \omega \cos \alpha + \nu p \bar{R} B \omega^2 \sin \beta [\Phi_1(B) + 1 - \Phi_2(B)] = 0 \quad (25)$$

$$A \omega^2 [\sin \beta \sin(\alpha - \beta) \Phi_3(B) + \cos(2\beta - \alpha) \Phi_2(B)] - A \omega^2 \cos \alpha =$$

$$= -q\bar{R}B\omega^2 \cos \beta + 2n_\eta p\bar{R}B\omega \sin \beta - gB \cos \beta \Phi_4(B) \quad (26)$$

$$A\omega^2 \sin \alpha + A\omega^2 [\sin(\alpha - \beta) \cos \beta \Phi_3(B) - \sin(2\beta - \alpha) \Phi_2(B)] = \\ = q\bar{R}B\omega^2 \sin \beta + 2n_\eta p\bar{R}B\omega \cos \beta + gB \sin \beta \Phi_4(B) \quad (27)$$

$$\text{де } \Phi_1(B) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} B^{2n}}{2^{2n-1} (n-1)! (n+1)!}; \quad \Phi_2(B) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1} B^{2m} (2m+1)}{2^{2m} m! (m+1)!}; \\ \Phi_3(B) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k B^{2k}}{2^{2k-1} (k!)^2}; \quad \Phi_4(B) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n B^{2n-2}}{2^{2n-2} (n-1)! n!}.$$

На основі рівнянь (24) - (27) знайдемо рівняння амплітудно-частотних характеристик $A = A(\omega)$ віброзахисних систем. Для цього слід звільнитись від зайвих змінних B, α, β методом поступового їх виключення.

Домножимо рівняння (26) на $\sin \beta$, а рівняння (27) - на $\cos \beta$, після чого додамо їх. В результаті після деяких перетворень отримаємо таке рівняння:

$$\sin(\alpha - \beta) = \frac{2n_\eta p\bar{R}B}{A\omega(1 + \Phi_2(B) + \Phi_3(B))} \quad (28)$$

Далі домножимо рівняння (26) на $\cos \beta$, а рівняння (27) - на $\sin \beta$, після чого від першого віднімемо друге. В результаті отримаємо

$$\cos(\alpha - \beta) = \frac{B(g\Phi_4(B) + q\bar{R}\omega^2)}{A\omega^2(1 - \Phi_2(B))} \quad (29)$$

Після елементарних перетворень виразів (28) та (29) отримаємо перше рівняння, яке пов'язує амплітуди вимушених коливань A та B :

$$A = \frac{B\sqrt{(2n_\eta p\bar{R}\omega)^2 (1 - \Phi_2(B))^2 + \Phi_\Sigma^2(B)(g\Phi_4(B) + q\bar{R}\omega^2)^2}}{\omega^2 \Phi_\Sigma(1 - \Phi_2(B))}, \quad (30)$$

де $\Phi_\Sigma(B) = 1 + \Phi_2(B) + \Phi_3(B)$.

Знайдемо друге рівняння, що пов'язує амплітуди вимушених коливань A та B . Піднесемо до квадрату рівняння (24) та (25) і додамо їх. При перетвореннях отриманого виразу використаємо рівняння (28) та (29). В результаті маємо шукане рівняння:

$$A = \sqrt{\frac{\bar{F}_0^2 - \Phi_0^2(B, \omega) - 2B\Phi_0(B, \omega) \left[\Omega(\omega) \frac{g\Phi_4(B) + q\bar{R}\omega^2}{\omega^2(1 - \Phi_2(B))} + \frac{4n_x n_\eta p\bar{R}}{\Phi_\Sigma(B)} \right]}{\Omega^2(\omega) + (2n_x \omega)^2}} \quad (31)$$

де

$$\Omega(\omega) = \omega_0^2 - (1 + \nu)\omega^2; \quad \Phi_\Delta(B) = 1 + \Phi_1(B) - \Phi_2(B); \quad \Phi_0(B, \omega) = \nu p\bar{R}B\omega^2 \Phi_\Delta(B).$$

Після вилучення амплітуди A несучого тіла з рівнянь (30) та (31) отримаємо нелінійне рівняння відносно неявно заданої функції $B = B(\omega)$, яке має такий узагальнений вигляд:

$$F(B(\omega), \omega) = 0 \quad (32)$$

Точний розв'язок рівнянь типу (32) відносно $B = B(\omega)$ знайти неможливо, але його можна розв'язати за допомогою числових методів у потрібному діапазоні частот з використанням сучасних пакетів прикладних програм. Після знаходження залежності $B = B(\omega)$ у числовому вигляді з формули (31) визначають шукану амплітудно-частотну характеристику $A = A(\omega)$ віброзахисної системи в нелінійній постановці.

Розроблений аналітично-числовий метод для визначення АЧХ нелінійних віброзахисних систем, динамічна поведінка яких описується диференціальними рівняннями типу (1) - (2), на основі розкладання тригонометричних функцій у нескінченні ряди запропоновано вперше. При розв'язанні поставленої задачі зазвичай обмежуються скінченим числом (два – три) членів рядів Тейлора $\Phi_i(B)$, бо вказані ряди швидко збіжні. За допомогою отриманих рівнянь (30) та (31) можна знайти АЧХ довільної віброзахисної системи із котковими гасниками, динамічна поведінка якої описується рівняннями (1)-(2).

Висновки. В роботі розроблено новий аналітично-числовий метод визначення АЧХ для типового ряду віброзахисних систем із котковими гасниками, в якому враховано їх геометричні та кінематичні нелінійності. Його розробка була виконана на основі розкладання в ряди членів диференціальних рівнянь руху віброзахисних систем із кінематичними та геометричними нелінійностями із наступним застосуванням процедури осереднення за один період. На основі цього методу отримано нелінійні алгебраїчні рівняння, які в неявній формі визначають АЧХ для спеціального класу віброзахисних систем із конструктивно різними котковими гасниками.

Отримані рівняння АЧХ закладають підґрунтя для подальшої розробки методики визначення оптимальних параметрів налаштування коткових гасників, які потрібні для їх раціонального проектування.

Результати дослідження представляють інтерес для розробників та проектувальників віброгасників низькочастотних вимушених коливань великорозмірних несучих об'єктів при розробці їх конструктивних рішень.

Література

1. Динамический расчет сооружений на специальные воздействия: Справочник проектировщика (под редакцией Б.Г.Коренева, И.М.Рабиновича). - М.: Стройиздат, 1981.- С.149 – 175.
2. Фролов К.В., Фурман А.Ф. Прикладная теория виброзащитных систем. – М.: Машиностроение. –1980. – 320 с.
3. Корнев Б.Г. Динамические гасители колебаний // Тезисы доклада на междунар. Симпозиуме «Виброзащита в строительстве». – Ленинград, 1984. – т.2, С. 7 – 17.
4. Остроумов Б.В. Исследование, разработка и внедрение высотных сооружений с гасителями колебаний // Автореф. д.т.н. – М.: ЗАО «ЦНИИПСК им. Мельникова», 2003. – 48 с.
5. Легеза В.П. Моделі і метод віброзахисту динамічних систем на основі котково-демпфірувальних пристроїв // Автореф. д.т.н. – К.: НТУУ «КПІ», 2004. - 38 с.
6. Легеза В.П. Динамика виброзащитных систем с роликовым гасителем низкочастотных колебаний // Проблемы прочности. – №2. – 2004. – С. 106 – 118.
7. Легеза В.П. Важка куля у сферичній виїмці перевернутого маятника як котковий гаситель його вимушених коливань //Наукові Вісті НТУУ «КПІ». - №6. – 2002. – С. 76 – 83.
8. Легеза В.П. Новый метод виброзахисту висотних гнучких споруд із використанням гасителів коткового типу // Наукові Вісті НТУУ «КПІ». - №2. – 2003. – С. 70 – 80.
9. Лурье А.И. Аналитическая механика. - М.: - Физматгиз, 1961. - 824 с.
10. Неймарк Ю.И., Фуфаев Н.А. Динамика неавтономных систем.- М.: Наука, 1967. - 520 с.
11. Klotter K. Non-linear vibration problem treated by the averaging method of W. Ritz // Proc.1-st U.S. Nation. Congr. Appl. Mech. – Chicago, Illinois: Edwards Brothers Inc., 1951. – P. 125 – 131.
12. Тимошенко С.П., Янг Д.Х., Уивер У. Колебания в инженерном деле. – М.: «Машиностроение». – 1985. – 472 с.
13. Пановко Я.Г. Основы прикладной теории колебаний и удара. Л.: «Машиностроение». – 1976. – 320 с.
14. Василенко М.В., Алексейчук О.М. Теорія коливань і стійкості руху. - К.: «Вища школа». – 2004. – 526 с.

Надійшла до редакції 26.01.2005 р.

УДК 539.3

Володимир Ф. Мейш
Людмила О. Латанська

Vladimir F. Meish
Lyudmila A. Latanskaya

До розрахунку динамічної поведінки тришарових сферичних оболонок з кусково-однорідним заповнювачем при нестационарних навантаженнях.

On solution of dynamical behaviour of the three-layered spherical shells with piecewise-homogeneous filler under nonstationary loads.

Серія: фізико-математичні науки

Series: Physics & Mathematics

Метою даного повідомлення є побудова математичної моделі і чисельне дослідження вимушених осесиметричних коливань тришарових сферичних оболонок з кусково – однорідним заповнювачем при нестационарних навантаженнях.

The paper studies construction of mathematical model and numerical investigation of forced axisymmetric vibrations of three-layered spherical shells with piecewise-homogeneous filler under nonstationary loads.

Ключові слова: тришарові оболонки, кусково – однорідний заповнювач, хвильові процеси.

Key Words: three-layered shells, piecewise homogeneous filler, wave processes.

Вступ. При моделюванні динамічної поведінки тришарових оболонок в рамках прикладних теорій, які базуються на використанні методу гіпотез, існує два основних напрямки. Перший напрямок характеризується застосуванням методу єдиних гіпотез по товщині для всього пакету шарів оболонки. В цьому випадку, порядок розв'язуючих рівнянь не залежить від кількості шарів. При значній різниці фізико – механічних властивостей шарів оболонки використовується підхід, який ґрунтується на застосуванні незалежних кінематичних та статичних гіпотез до кожного шару. В даному випадку порядок розв'язуючої системи рівнянь залежить від кількості шарів оболонки. В рамках останнього підходу було розглянуто задачі динамічної поведінки деформування тришарових оболонкових структур різної геометрії при дії нестационарних навантажень [1, 2].

Метою даної роботи є постановка і чисельний розв'язок задач динамічної поведінки тришарових сферичних оболонок з кусково – однорідним заповнювачем при нестационарному навантаженні.

Постановка задачі. Тришарова пружна оболонкова структура представляє собою зовнішню та внутрішню оболонки (обшивки) у вигляді тонкостінних сферичних оболонок, які з'єднані між собою кусково – однорідним заповнювачем. Кусково – однорідний заповнювач характеризується матеріалом, властивості якого змінюються в залежності від просторової координати.

Побудова математичної моделі, яка описує динамічні процеси в неоднорідній пружній структурі, базується на наступних гіпотезах. Припускається, що напружено – деформований стан вихідної структури може бути визначено в рамках теорії оболонок типу Тимошенка для обшивок та кусково – однорідного заповнювача при прийнятті незалежних кінематичних та статичних гіпотез до кожного шару. При розгляді кусково – однорідного заповнювача враховується вплив поперечного нормального напруження. При виведенні рівнянь коливань тришарової оболонки будемо виходити з наступних припущень. Окремо розглядаються області оболонки з однорідним заповнювачем по просторовій координаті. В області тришарової оболонки з однорідним заповнювачем приймаються незалежні апроксимації переміщень та поперечних зсувних і нормальних напружень по товщині відповідних шарів[1,2]. При цьому, за незалежні шукані функції приймаються компоненти вектора переміщень на поверхнях шарів $\bar{U} = (u_1(s), u_2(s), u_3(s), u_4(s), w_1(s), w_3(s))^T$.

В рамках геометрично нелінійної теорії оболонок в квадратичному наближенні деформаційні співвідношення для кожного шару визначаються згідно формул

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11}^{kz} &= \varepsilon_{11}^k + z\kappa_{11}^k, \quad \varepsilon_{22}^{kz} = \varepsilon_{22}^k + z\kappa_{22}^k, \quad \varepsilon_{13}^{kz} = \varphi_1^k + \theta_1^k, \quad \varepsilon_{33}^2 = \varphi_3^2, \\ \varepsilon_{11}^k &= \frac{\partial u_1^k}{\partial s} + \frac{1}{2}(\theta_1^k)^2 + \frac{u_3^k}{R}, \quad \varepsilon_{22}^k = \frac{u_1^k}{R} \operatorname{ctg} \alpha_1 + \frac{u_3^k}{R}, \\ \kappa_{11}^k &= \frac{\partial \varphi_1^k}{\partial s}, \quad \kappa_{22}^k = \frac{\varphi_1^k}{R} \operatorname{ctg} \alpha_1, \quad \theta_1^k = \frac{\partial u_3^k}{\partial s} - \frac{u_1^k}{R}, \quad s = A_1 \alpha_1, \quad k = \overline{1, 3}. \end{aligned} \quad (1)$$

Для виводу рівнянь коливань та співвідношень між силовими і деформаційними факторами тришарової сферичної оболонки використовується варіаційний принцип Рейсснера для динамічних процесів, згідно якого [1]

$$\int_{t_1}^{t_2} [\delta(R - T) - \delta A] dt = 0, \quad (2)$$

де A – робота зовнішніх сил, R – функціонал Рейсснера, T – кінетична енергія механічної структури.

Після стандартних перетворень в (2) отримаємо рівняння коливань тришарової сферичної оболонки відносно незалежних функцій переміщень на поверхнях шарів $u_1, u_2, u_3, u_4, w_1, w_3$.

$$L_{3m+1}(\bar{U}) = \frac{\rho_{2m+1} h_{2m+1}}{2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{u_{2m+1} + u_{2m+2}}{2} \right) + \quad (3)$$

$$+ (-1)^{m+1} \frac{\rho_{2m+1} h_{2m+1}^2}{12} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{u_{2m+2} - u_{2m+1}}{h_{2m+1}} \right), \quad (m = 0; 1),$$

$$L_3(\bar{U}) = \frac{\rho_{\text{зап}}(s) h_2}{2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{u_1 + u_2}{2} \right) - \frac{\rho_1 h_1^2}{12} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{u_2 - u_1}{h_1} \right) +$$

$$+ \frac{\rho_{\text{зап}}(s) h_2}{2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{u_3 + u_2}{2} \right) + \frac{\rho_{\text{зап}}(s) h_2^2}{12} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{u_3 - u_2}{h_2} \right),$$

$$L_4(\bar{U}) = \frac{\rho_3 h_3}{2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{u_2 + u_3}{2} \right) + \frac{\rho_{\text{зап}}(s) h_2^2}{12} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{u_3 - u_2}{h_2} \right) -$$

$$- \frac{\rho_3 h_3}{2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{u_4 + u_3}{2} \right) + \frac{\rho_3 h_3^2}{12} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{u_4 - u_3}{h_3} \right),$$

$$L_{m+5}(\bar{U}) = \rho_{2m+1} h_{2m+1} \frac{\partial^2 w_{2m+1}}{\partial t^2} + \frac{\rho_{\text{зап}}(s) h_2}{2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{w_1 + w_3}{2} \right) +$$

$$+ (-1)^{m+1} \frac{\rho_{\text{зап}}(s) h_2^2}{12} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{w_3 - w_1}{h_2} \right), \quad (m = 0; 1);$$

де оператори $L_m(\bar{U})$, $m = \overline{1, 6}$ мають наступний вигляд

$$L_{3m+1}(\bar{U}) = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\sin \alpha_1} \frac{\partial}{\partial s} (\sin \alpha_1 T_{11}^{2m+1}) - \frac{T_{22}^{2m+1}}{R} \operatorname{ctg} \alpha_1 \right] -$$

$$- (-1)^m \frac{1}{h_{2m+1}} \left[\frac{1}{\sin \alpha_1} \frac{\partial}{\partial s} (\sin \alpha_1 M_{11}^{2m+1}) - \frac{M_{22}^{2m+1}}{R} \operatorname{ctg} \alpha_1 \right] +$$

$$+ (-1)^m \frac{1}{h_{2m+1}} T_{13}^{2m+1} + \frac{1}{2R} \bar{T}_{13}^{2m+1}, \quad (m = 0; 1),$$

$$L_{m+1}(\bar{U}) = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{\sin \alpha_1} \frac{\partial}{\partial s} [\sin \alpha_1 (T_{11}^m + T_{11}^{m+1})] - \right.$$

$$\left. - \frac{T_{22}^m + T_{22}^{m+1}}{R} \operatorname{ctg} \alpha_1 \right\} + \frac{1}{h_m} \left[\frac{1}{\sin \alpha_1} \frac{\partial}{\partial s} (\sin \alpha_1 M_{11}^m) - \frac{M_{22}^m}{R} \operatorname{ctg} \alpha_1 \right] -$$

$$-\frac{1}{h_{m+1}} \left[\frac{1}{\sin \alpha_1} \frac{\partial}{\partial s} (\sin \alpha_1 M_{11}^{m+1}) - \frac{M_{22}^{m+1}}{R} \operatorname{ctg} \alpha_1 \right] - \frac{1}{h_m} T_{13}^m +$$

$$+ \frac{1}{h_{m+1}} T_{13}^{m+1} + \frac{\bar{T}_{13}^m + \bar{T}_{13}^{m+1}}{2R}, \quad (\text{при } m = 1; 2),$$

$$L_{m+5}(\bar{U}) = \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} (A_2 \bar{T}_{13}^{2m+1}) + \frac{1}{2A_1 A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} (A_2 \bar{T}_{13}^2) -$$

$$- [T_{22}^{2m+1} k_2 + T_{11}^{2m+1} k_1] - \frac{1}{2} [T_{22}^2 k_2 + T_{11}^2 k_1] + (-1)^m \frac{1}{h_2} T_{33}^2 -$$

$$- (-1)^m \frac{1}{h_2} [M_{11}^2 k_1 + M_{22}^2 k_2], \quad (\text{при } m = 0; 1),$$

$$\bar{T}_{13}^i = T_{13}^i + T_{11}^i \theta_1^i, \quad (i = \overline{1, 3}).$$

Інтегральні характеристики напружень для кожного шару задаються згідно формул $(T_{11}^k, T_{22}^k, T_{13}^k, T_{33}^2) = \int_z (\sigma_{11}^{kz}, \sigma_{22}^{kz}, \sigma_{13}^{kz}, \sigma_{33}^2) dz$,

$$(M_{11}^k, M_{22}^k) = \int_z (z^k \sigma_{11}^{kz}, z^k \sigma_{22}^{kz}) dz, \quad k = \overline{1, 3}; \quad z \in [-h/2, h/2].$$

Рівняння коливань (3) доповнюються відповідними крайовими і початковими умовами.

В співвідношеннях (3) величини $E_{\text{зап}}(s)$, $v_{\text{зап}}(s)$, $\rho_{\text{зап}}(s)$ є фізико-механічними параметрами заповнювача, причому

$$\begin{bmatrix} E_{\text{зап}}(s) \\ v_{\text{зап}}(s) \\ \rho_{\text{зап}}(s) \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^N [\eta(s - s_i) - \eta(s - s_{i-1})] \begin{bmatrix} E_{2i} \\ v_{2i} \\ \rho_{2i} \end{bmatrix}, \quad (4)$$

де $\eta(s)$ - функція Хевісайда; величини E_{2i} , v_{2i} , ρ_{2i} - фізико-механічні параметри однорідного заповнювача; s_i - лінії розривів; s_0 і s_N - лінії границь оболонки.

Чисельний алгоритм. Для розв'язку вихідних рівнянь використовується метод скінчених різниць [1-3]. Для побудови скінчено-різницевого співвідношення застосовується інтегро - інтерполяційний метод по просторовій координаті і явна скінчено-різницева схема по часовій координаті. При такому підході виконується закон збереження повної механічної енергії на різницевому рівні. Вихідні рівняння апроксимуються

з другим порядком точності по просторовій координаті s і часовій координаті t . Особливістю вихідної моделі є наявність кусково – однорідного заповнювача, що приводить до просторових розривів у розв'язках. Просторові розриви обумовлені способом врахування кусково – однорідного заповнювача – співвідношення (4). Виходячи з цього, чисельний алгоритм будується наступним чином. Шукається розв'язок окремо в області однорідного заповнювача і на лініях просторових розривів. Алгоритм знаходження розв'язку в області однорідного заповнювача та на лініях розривів викладено в роботах [1,3].

Числовий приклад. Розглядалася задача динамічної поведінки жорстко заземленого по краям сегменту тришарової сферичної оболонки ($\alpha_{10} \leq \alpha_1 \leq \alpha_{1N}$) з кусково однорідним заповнювачем при розподіленому нормальному внутрішньому навантаженні $P_3(t)$. Геометричні та фізико – механічних параметрах вихідної структури наступні:

$$R/h = 30; \alpha_{10} = \pi/12; \alpha_{1N} = 11\pi/12; h = h_1 + h_{\text{зап}} + h_3;$$

$$h_1 = h_3; h_{\text{зап}}/h_1 = 8; \rho_1 = \rho_3 = 2,7 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3;$$

$$E_1^1 = E_2^1 = E_1^3 = E_2^3 = 7 \cdot 10^{10} \text{ Па}; \nu_1^1 = \nu_2^1 = \nu_1^3 = \nu_2^3 = 0,3;$$

- в областях $s_0 \leq s \leq s_0 + \Delta s/4$ і $s_N - \Delta s/4 \leq s \leq s_N$; $\Delta s = s_N - s_0$;

$$E_{\text{зап}} = E_1^1/100; \rho_{\text{зап}} = \rho_1/4; \nu_{\text{зап}} = 0,34;$$

- в області $s_0 + \Delta s/4 \leq s \leq s_N - \Delta s/4$;

$$E_{\text{зап}} = E_1^1/400; \rho_{\text{зап}} = \rho_1/4; \nu_{\text{зап}} = 0,34.$$

Позначення E_1^1 , ν_1^1 , ρ_1 відповідають фізико – механічним параметрам величин матеріалу обшивок, а позначення $E_{\text{зап}}$, $\nu_{\text{зап}}$, $\rho_{\text{зап}}$ відповідають параметрам заповнювача.

Розподілене нормальне навантаження задавалося у вигляді

$$P_3(t) = A \sin\left(\frac{\pi t}{T}\right) [\eta(t) - \eta(t-T)],$$

де $T = 50 \cdot 10^{-6} \text{ с}$ – тривалість навантаження; $A = 10^6 \text{ Па}$ – амплітуда навантаження.

Розрахунки проводилися на часовому інтервалі $t = 100T$. Отримані результати дозволяють проводити детальний аналіз напружено-деформованого стану досліджуваної неоднорідної оболонки в будь-який момент вказаного часового інтервалу. Зокрема, на рис 1. представлено характерний розподіл величини σ_{22} в заповнювачі в залежності від просторової координати в момент часу $t = 10T$ (в силу симетрії вихідної конструкції відносно $\alpha_1 = \pi/2$, результати представлені для

$\alpha_{10} \leq \alpha_1 \leq \pi/2$). На приведених залежностях чітко виділяється лінія розриву, яка розділяє області заповнювача з різними фізико-механічними параметрами - $\alpha_1 \approx 0,8$ рад. Величини u_3 та ε_{22} якісно повторюють представлення величини σ_{22} .

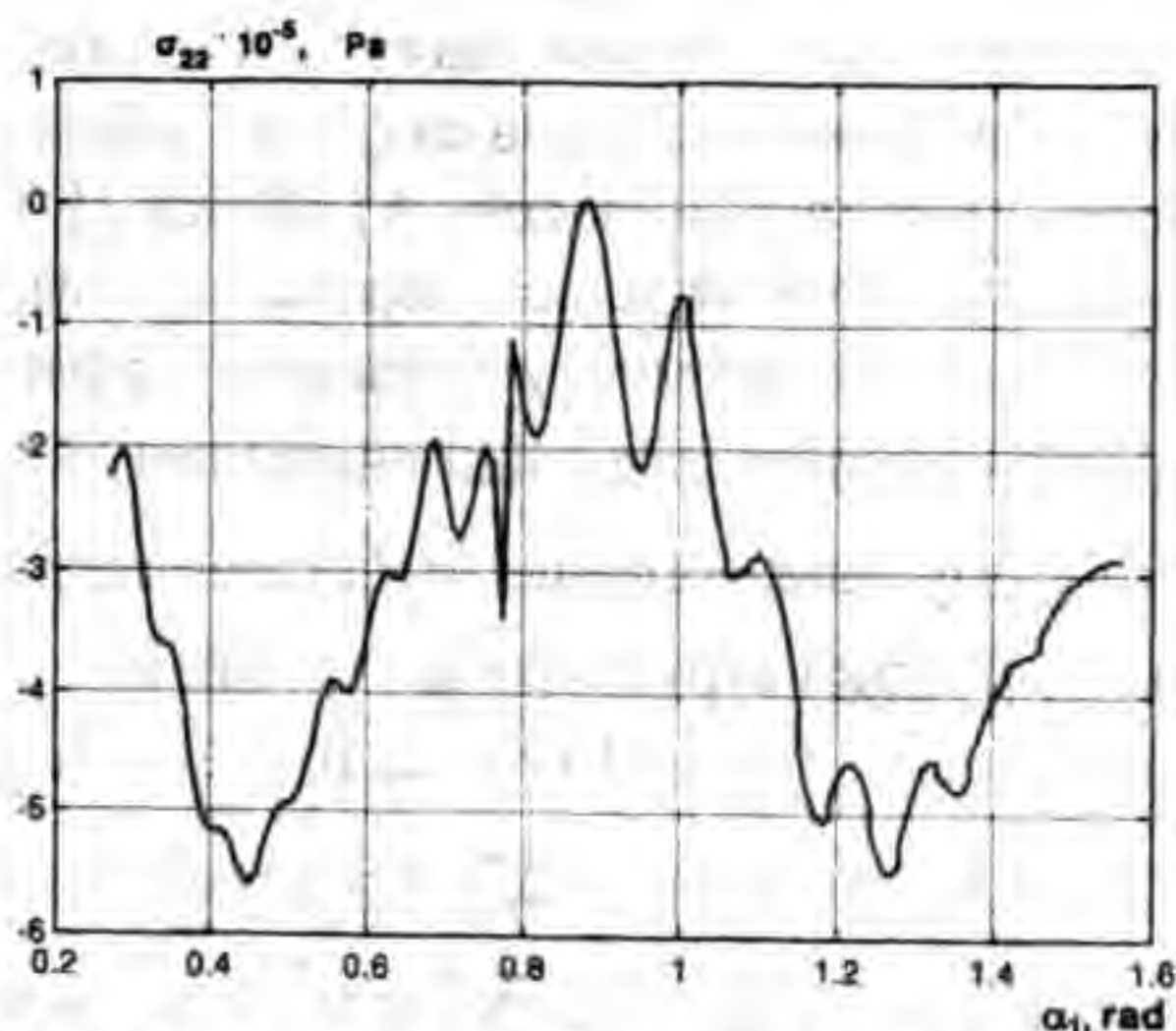


Рис. 1. Залежність величини σ_{22} заповнювача від просторової координати α_1

Висновки. В роботі виконано постановку задачі про коливання тришарових сферичних оболонок з кусково-однорідним заповнювачем в рамках теорії оболонок типу Тимошенка. Для вказаного класу задач розвинуто чисельний метод. Як числовий приклад, розглянуто задачу вимушених коливань неоднорідної сферичної оболонки при внутрішньому розподіленому навантаженні.

Робота виконана за підтримкою Державного фонду фундаментальних досліджень Міністерства освіти і науки України, договір № Ф7/438-2001

Література

1. Шульга Н.А., Мейш В.Ф. Вынужденные колебания трехслойных сферических и эллипсоидальных оболочек при осесимметричных нагрузках // Механика композитных материалов. – 2003. – **39**, №5. – С.659-670.
2. Мейш В.Ф., Хамренко Ю.А. Сравнительный анализ динамического поведения трехслойных оболочек в рамках прикладных теорий при нестационарных нагружениях // Прикладная механика. – 2003. – **39**, №7. – С. 123-130.
3. Мейш В.Ф., Штанцель С.Э. Решение динамических задач теории трехслойных оболочек вращения с дискретным наполнителем при нестационарных нагрузках // Прикладная механика. – 2002. – **38**, №12. – С. 103-110.

Надійшла до редколегії 28.03.05

УДК 519.21

Тетяна В. Шовкопляс

**Властивості розв'язків рівняння,
що описує фінансову модель
Кокса-Інгерсолла-Росса зі
змінними параметрами**

В даній публікації доведені умови існування та єдиності розв'язку стохастичного диференціального рівняння, що описує фінансову модель Кокса-Інгерсолла-Росса зі змінними параметрами у випадку, коли коефіцієнтами рівняння є функції, залежні від часу t .

Доведено неперервність розв'язку рівняння; збіжність розв'язку у випадку збіжності коефіцієнтів.

Знайдено оцінку моментів розв'язку вказаного рівняння.

Ключові слова: фінансова модель, стохастичне диференціальне рівняння, формула Іто, стохастичний процес.

Tetyana V. Shovkoplyas

**The properties of the solution of
the equation which describes
financial model of Cox-Ingersoll-
Ross with variable parameters.**

The conditions of existence and uniqueness of solution of stochastic differential equation which describes financial model of Cox-Ingersoll-Ross with variable parameters in the case when the functions are dependent on time t .

Continuity of solutions of this equation and convergence of solutions in the case of convergence of coefficients are proved.

The estimate of moments of solutions of this equation is established.

Key words: financial model, stochastic differential equation, Ito's formula, stochastic process.

² E-mail: Tet_ShKyiv@ukr.net

Розглянемо стохастичне диференціальне рівняння

$$dr(t) = a(t, r(t))dt + b(t, r(t))dw(t), \quad t \in [0, T], \quad (1)$$
$$a(t, r) = \alpha(t) - \beta(t)r, \quad b(t, r) = \sigma(t)\sqrt{r}, \quad r(t) \geq 0, \quad t \in [0, T], \quad r(0) = 0;$$

$\alpha(t)$, $\beta(t)$, $\sigma(t)$ – не випадкові функції, що змінюються в часі і залежні тільки від t , $t \in [0, T]$, $\alpha(t)$, $\beta(t)$, $\sigma(t) \in C(R^+)$, $\alpha(t) > 0$, $\sigma(t) > 0$, $\forall t \in R^+$.

З фінансової точки зору $r(t)$ можна інтерпретувати як відсоткову ставку в момент t [12]. Відмітимо, що фінансова модель Кокса-Інгерсолла-Росса описана в публікаціях [4-12].

1. Існування та єдиність розв'язку рівняння (1) зі змінними коефіцієнтами.

Покажемо, що стохастичне диференціальне рівняння зі змінними коефіцієнтами (1) має розв'язок $r(t)$ і він єдиний.

Має місце теорема.

Теорема 1. При виконанні умов:

$$\forall T > 0 \quad \exists C > 0: C = C(T): \forall t \in [0, T]: |\alpha(t)| + |\beta(t)| + |\sigma(t)| \leq C, \quad (2)$$
$$\text{і} \quad \forall t \in [0, T]: \alpha(t) > 0, \quad \sigma(t) > 0,$$

рівняння (1) має єдиний сильний розв'язок $r(t)$ на $[0, +\infty)$, такий, що $r(t) \geq 0$ з ймовірністю 1.

Доведення. Для доведення існування та єдиності розв'язку стохастичного диференціального рівняння (1) потрібно показати [1], що виконуються такі умови:

1. умова лінійного росту

$$|a(t, r)|^2 + |b(t, r)|^2 \leq K^2 (1 + r^2), \quad K = \text{const} > 0, \quad (3)$$

2. існує строго зростаюча функція $\rho(u)$ на $[0, +\infty)$:

$$\rho(0) = 0, \quad \int_{0+} \rho^{-2}(u) du = +\infty, \quad (4)$$

і яка задовольняє нерівність:

$$|b(t, x) - b(t, y)| \leq \rho(|x - y|), \quad \forall x, y \in R^1; \quad (5)$$

3. існує зростаюча вігнута функція $k(u)$ на $[0, +\infty)$:

$$k(0) = 0, \quad \int_{0+} k^{-1}(u) du = +\infty, \quad (6)$$

що задовольняє нерівність:

$$|a(t, x) - a(t, y)| \leq k(|x - y|), \quad \forall x, y \in R^1. \quad (7)$$

Спочатку покажемо, що умова лінійного росту (3) виконується.

$$|a(t, r)|^2 + |b(t, r)|^2 = |\alpha(t) - \beta(t)r|^2 + |\sigma(t)\sqrt{r}|^2 \leq 2|\alpha(t)|^2 + 2|\beta(t)|^2 \cdot |r|^2 + |\sigma(t)|^2 (1 + |r|^2) \leq 2C^2 + 2C^2|r|^2 + C^2 \cdot (1 + |r|^2) \leq 3C^2(1 + |r|^2) \leq K^2(1 + |r|^2),$$

дійсно, показано, що умова лінійного росту (3) виконується. При доведенні умови лінійного росту використано нерівності: $|a - b|^2 \leq 2(|a|^2 + |b|^2)$ та $|x| \leq 1 + |x|^2$; а також враховано обмеженість функцій $\alpha(t), \beta(t), \sigma(t)$ (яка є наслідком їх неперервності), тобто, враховано умову (2).

Для чіткості при доведенні умови лінійного росту, вважаємо, що

$$\exists K > 0: 3C^2 \leq K^2.$$

Покажемо, що виконуються умови пункту 2.

Нехай $\rho(u) = C\sqrt{u}$, $C = \text{const} > 1$, – ця функція є строго зростаючою на

$$[0, +\infty): \rho(0) = 0, \quad \int_{0+} C \left(u^{1/2}\right)^{-2} du = +\infty, \quad \text{тобто, для функції } \rho(u) \text{ умови (4)} \quad (4)$$

виконуються;

$$\forall x, y \in R^1 \text{ перевіримо виконання умови (5): } |b(t, x) - b(t, y)| = |\sigma(t)\sqrt{x} - \sigma(t)\sqrt{y}| \leq |\sigma(t)| |\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq C |\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq C \sqrt{|x - y|} = \rho(|x - y|).$$

Таким чином, показано, що нерівність (5) виконується. При доведенні нерівності (5) використано те, що з неперервності функції $\sigma(t)$ випливає її обмеженість на $[0, T]$, а також використано нерівність: $|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq \sqrt{|x - y|}$.

Тепер покажемо, що виконуються умови з пункту 3.

Покладемо $k(u) = Cu^2$, $C = \text{const} > 1$, – це зростаюча вігнута функція на $[0, +\infty)$, для якої мають місце умови (6): $k(0) = 0$, $\int_{0+}^{\infty} C(u^2)^{-1} du = +\infty$.

Перевіримо, чи виконується умова (7) $\forall x, y \in R^1$: $|a(t, x) - a(t, y)| = |(\alpha(t) - \beta(t)x) - (\alpha(t) - \beta(t)y)| \leq |\beta(t)||x - y| < C|x - y|^2 = k(|x - y|)$.

Показано, що нерівність (7) виконується. При доведенні нерівності (7) використано неперервність функції $\beta(t)$, з якої випливає її обмеженість.

Вище показано виконання умов (3)-(7), а це означає [1], що рівняння (1) має розв'язок $r(t)$ з початковою умовою $r(0) = 0$ та він єдиний.

Покажемо, що розв'язок $r(t)$ стохастичного диференціального рівняння (1) невід'ємний з ймовірністю 1. Від рівняння (1) перейдемо до рівняння

$$dr(t) = (\alpha(t) - \beta(t)r(t))dt + \sigma(t)(r(t) \vee 0)^{1/2} dW(t), \quad (8)$$

покажемо, що у випадку, коли $\alpha(t) > 0$, $t \geq 0$, та $r(0) \geq 0$, тоді $r(t) \geq 0$, $t \geq 0$ з $P1$.

Справді, при $\alpha(t) = 0$ величина $r(t) \equiv 0$ у випадку, коли $r(0) \equiv 0$, за умовою єдиності розв'язку.

Для рівняння (8) справедливі умови існування та єдиності, а також необмеженої продовжуваності вправо його сильного розв'язку [1].

Якщо $\alpha(t) > 0$, то вважаємо, що $\exists \alpha_0 > 0$: $\alpha(t) \geq \alpha_0 > 0$. Тоді покладемо $\tau_{-\varepsilon} = \inf \{t; r(t) = -\varepsilon\}$, де $\varepsilon > 0$, – таке, що $\alpha_0 - \varepsilon r > 0$, і $\forall \varepsilon_0 < \varepsilon$: $\alpha_0 - \varepsilon_0 r > 0$, і $\alpha(t) + \beta(t)\varepsilon > 0$. Припустимо, що $P(\tau_{-\varepsilon} < \infty) > 0$, тоді з ймовірністю 1, виберемо будь-яке $\tau_1 < \tau_{-\varepsilon}$ таке, що $r(t) < 0$ при $t \in (\tau_1, \tau_{-\varepsilon})$, і $dr(t) = (\alpha(t) - \beta(t)r(t))dt$ на $(\tau_1, \tau_{-\varepsilon})$, тобто $\alpha(t) - \beta(t)r(t) \geq \alpha(t) - Cr \geq \alpha_0 - Cr \geq \alpha_0 - C\varepsilon > 0$, то це означає, що значення $r(\tau_1) < r(\tau_{-\varepsilon})$, при $\tau_1 < \tau_{-\varepsilon}$, а це неможливо, оскільки $r(\tau_1) > r(\tau_{-\varepsilon})$, при $\tau_1 < \tau_{-\varepsilon}$.

Таким чином, при виконанні умови $\alpha(t) > 0$ всі розв'язки рівняння (8) з ймовірністю одиниця задовольняють умову $r(t) \geq 0$, $t \geq 0$, якщо $r(0) > 0$.

Зрозуміло, що розв'язки рівняння (8) також є розв'язками рівняння (1).

2. Неперервність розв'язку.

Враховуючи, що $a(t, r) = \alpha(t) - \beta(t)r$ і $b(t, r) = \sigma(t)\sqrt{r}$, стохастичне диференціальне рівняння (1) запишемо в інтегральній формі

$$r(t) \equiv r(0) + \int_0^t (\alpha(s) - \beta(s)r(s))ds + \int_0^t \sigma(s)\sqrt{r(s)}dW(s). \quad (9)$$

В рівності (9) в правій частині перший інтеграл є інтегралом Лебега зі змінною верхньою межею інтегрування і, відповідно, він є неперервним;

другий інтеграл є інтегралом по вінерівському процесу і є неперервним за властивістю інтеграла по вінерівському процесу. Відповідно, функція $r(t)$ теж неперервна як сума неперервних функцій.

З а у в а ж е н н я. Відмітимо, що питання єдиності розв'язків рівняння виду (1) розглядалися в роботі [3].

3. **Збіжність розв'язків.** Знайдемо умови, за яких має місце збіжність розв'язків. Сформулюємо та доведемо відповідну теорему. [2]

Теорема 2.

Нехай $a_n(t, r)$ та $b_n(t, r)$, $n \geq 1$, - послідовність деяких функцій, вигляду $a_n(t, r) = \alpha_n(t) - \beta_n(t)r$, $b_n(t, r) = \sigma_n(t)\sqrt{r}$, $n \geq 1$, які збігаються поточково на $[0, T]$, (що в свою чергу означає поточкову збіжність функцій $\alpha_n(t) \rightarrow \alpha(t)$, $\beta_n(t) \rightarrow \beta(t)$, $\sigma_n(t) \rightarrow \sigma(t)$, $n \rightarrow \infty$); і для яких виконуються умови

теорема 1, $r_n(0) \rightarrow r(0)$, $n \rightarrow \infty$, $r(t) = r(0) + \int_0^t a(s, r(s))ds + \int_0^t b(s, r(s))dw(s)$,

де $a(s, r(s)) = \alpha(s) - \beta(s)r(s)$ і $b(s, r(s)) = \sigma(s)\sqrt{r(s)}$.

Нехай також функції $\alpha_n(t)$, $\beta_n(t)$, $\sigma_n(t)$, $n \geq 1$ є обмеженими на $[0, T]$:

$$\forall T > 0 \exists C > 0: C = C(T), \forall t \in [0, T], \forall n \geq 1: |\alpha_n(t)| + |\beta_n(t)| + |\sigma_n(t)| \leq C. \quad (10)$$

Тоді $\sup_{0 \leq t \leq T} |r_n(t) - r(t)| \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$, за ймовірністю, де $r_n(t)$, $n = 0, 1, \dots$, розв'язки стохастичних рівнянь:

$$r_n(t) = r_n(0) + \int_0^t a_n(s, r_n(s))ds + \int_0^t b_n(s, r_n(s))dw(s), \quad r_n(0) \rightarrow r(0), \quad n \rightarrow \infty.$$

Доведення. За умовою теореми функції $\alpha_n(t)$, $\beta_n(t)$ та $\sigma_n(t)$, $n \geq 1$, є збіжними поточково, тобто, за означенням поточної збіжності:

$$\forall t \in [0, T] \forall \varepsilon > 0 \exists N = N(t) \forall n \geq N:$$

$$|\alpha_n(t) - \alpha(t)| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad |\beta_n(t) - \beta(t)| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad |\sigma_n(t) - \sigma(t)| < \frac{\varepsilon}{3}. \quad (11)$$

Враховуючи нерівності (11) та умову (2) для величин $|a_n(t, r) - a(t, r)|$ та $|b_n(t, r) - b(t, r)|$ маємо оцінки:

$$\forall C > 0: |r| \leq C: |a_n(t, r) - a(t, r)| \leq \varepsilon(1 + C), \quad (12)$$

та

$$\forall C > 0: |r| \leq C: |b_n(t, r) - b(t, r)| \leq C\varepsilon. \quad (13)$$

Додамо відповідним чином нерівності (12) та (13):

$$\forall C > 0: |r| \leq C: |a_n(t, r) - a(t, r)| + |b_n(t, r) - b(t, r)| \leq 2\varepsilon C. \quad (14)$$

Звідси

$$\forall t \in [0, T]: \limsup_{n \rightarrow \infty} (|a_n(t, r) - a(t, r)| + |b_n(t, r) - b(t, r)|) = 0. \quad (15)$$

Оцінимо суму $|a_n(t, r)|^2 + |b_n(t, r)|^2$. З умов (11) та з умови (10) випливає: $\forall C > 0: |r| \leq C: |a_n(t, r)|^2 + |b_n(t, r)|^2 = |\alpha_n(t) - \beta_n(t)r|^2 + |\sigma_n(t)\sqrt{r}|^2 \leq K^2(1+r^2)$. (16)

Покажемо, що для функцій $a_n(t, r)$ та $b_n(t, r)$ виконується умова лінійного росту. Для цього використаємо умову (10) та врахуємо умови (11): $|a_n(t, r)|^2 + |b_n(t, r)|^2 = |\alpha_n(t) - \beta_n(t)r|^2 + |\sigma_n(t)\sqrt{r}|^2 \leq 8|\alpha(t)|^2 + 8|\beta(t)|^2|r(t)|^2 + 4|\alpha_n(t) - \alpha(t)|^2 + 2|\beta_n(t) - \beta(t)|^2|r|^2 + |\sigma_n(t)|^2|r| \leq K^2(1+r^2)$, за умови, що $\exists K > 0: 9C^2 + 4\frac{\varepsilon^2}{9} \leq K^2$.

З умов (15) та (16) за теоремою про граничну збіжність [2] випливає, що $\sup_{0 \leq t \leq T} |r_n(t) - r(t)| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$, за ймовірністю.

4. Оцінки моментів розв'язку.

Знайдемо оцінки моментів розв'язку. Покажемо, що $Mr^2(t) < +\infty, t \in [0, T]$. Нехай $t_n = \inf\{t: |r(t)| \geq n\}$ та $Mr^2(0) < +\infty$. Вважаємо, що нерівність (3) має місце. За формулою Іто:

$$dr^2(t) = 2r(t)dr(t) + \sigma^2(t)r(t)dt, \quad (17)$$

підставимо рівність (17) в рівність (1) і отримане стохастичне диференціальне рівняння запишемо в інтегральному вигляді, в правій і лівій частинах якого візьмемо математичне сподівання, та враховуючи властивість стохастичного інтегралу

$$M \int_0^T f(\tau)dw(\tau) = 0, \quad (18)$$

отримаємо рівність

$$Mr^2(s) = Mr^2(0) + M \int_0^{t_n \wedge s} r(\tau)(2(\alpha(\tau) - \beta(\tau)r(\tau)) + \sigma^2(\tau))d\tau. \quad (19)$$

Враховуючи умову (3), для рівності (19) маємо оцінку $M \sup_{s \leq t_n \wedge T} r^2(s) \leq$

$$\leq Mr^2(0) + K^2 \int_0^t \left(1 + M \sup_{s \leq t_n \wedge t} r^2(s)\right)ds, \quad \text{і за лемою Гронуолла-Беллмана} \\ Mr^2(t_n) \leq Mr^2(0)e^{Kt}, \quad \forall n \in N. \quad (20)$$

В нерівності (20) перейдемо до границі при $n \rightarrow \infty$

$$Mr^2(t) \leq Mr^2(0)e^{Kt} < +\infty.$$

Знайдемо оцінку у випадку, коли момент має парний порядок.

За формулою Іто:

$$dr^{2k}(t) = 2kr^{2k-1}(t)dr(t) + k(2k-1)r^{2k-1}(t)\sigma^2(t)dt. \quad (21)$$

Підставимо значення $dr(t)$ вигляду (1) в рівність (21) і отримане стохастичне диференціальне рівняння запишемо в інтегральному вигляді, в лівій і правій

частинах якого візьмемо математичне сподівання, після чого оцінимо величину $Mr^{2k}(t)$, враховуючи умови (2) та властивість стохастичного інтегралу (18). Після чого до отриманої нерівності застосуємо лему Гронуолла-Беллмана. Маємо

$$Mr^{2k}(t) \leq \left(Mr_0^{2k} + k^2 \cdot C^2 \cdot T \cdot \sup_{\tau \in [0, t]} M|r^{2k-1}(\tau)| \right) \cdot e^{2kC^2 t}. \quad (22)$$

Нерівність (22) є оцінкою $2k$ -го моменту.

Проводячи аналогічні міркування, отримаємо оцінку для моменту, що має непарний порядок.

$$Mr^{2k+1}(t) \leq \left(Mr_0^{2k+1} + (2k+1) \cdot C \cdot T \cdot \sup_{\tau \in [0, t]} Mr^{2k}(\tau) \right) \cdot e^{(2k+1)CT}, \quad k \geq 1. \quad (23)$$

Нерівність (23) є оцінкою $(2k+1)$ -го моменту.

Література

1. С. Ватанабэ, Н. Икеда. Стохастические дифференциальные уравнения и диффузионные процессы. Москва, «Наука». Главная редакция физико-математической литературы. – 1986 г. 445 с.
2. И. И. Гихман, А. В. Скороход. Стохастические дифференциальные уравнения. Киев, «Наукова думка». - 1968 г. 353 с.
3. Г. Л. Кулініч. Асимптотичний аналіз нестійких розв'язків одновимірних стохастичних диференціальних рівнянь. ВПЦ «Київський університет», 2003. 55 с.
4. Beaglehole, D. and Tenny, M. (1991) General solutions of some interest rate contingent claim pricing equations, *J. Fixed Income* 1, 69-83.
5. Cox, J. C., Ingersoll, J., and Ross, S. (1985) A theory of the term structure of interest rates, *Econometrica* 53, 385-405.
6. Delbaen, F. (1993) Consols in the CIR model, *Math. Finance* 3, 125-134.
7. Hull, J. and White, A. (1990) Pricing interest-rate derivative securities, *Rev. Financ. Stud.* 3, 573-592.
8. Jamshidian, F. (1995) A simple class of square root interest rate models, *Sacura Global Capital or Appl. Math. Finance* 2, 61-72.
9. Maghsoodi, Y. (1996) Solution of the extended CIR term structure and bond option valuation, *Math. Finance* 6, 89-109.
10. Pitman, J. and Yor, M. (1982) A decomposition of Bessel bridges, *Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und verwandte Gebiete* 59, 425-427.
11. Rogers, L. G. C. (1995) Which model for term structure of interest rates should one use, *Proc. IMA Workshop on Math. Finance*, 93-116.
12. Shirakawa, H. (2003) Squared Bessel Processes and Their Applications to the Square Root Interest Rate Model, *Asia-Pacific Financial Markets* 9: 169-190, *Kluwer Academic Publishers. Printed in the Netherlands*.

Надійшла до редакції 31.03.2005

УДК 519.9

Марина Є. Юрченко

Резонансний метод визначення
неоднорідної густини струни

*Наведено розв'язок задачі про
поперечні коливання неоднорідної
струни, відомий локальний
дефект якої подається у вигляді
фінитної функції*

*Ключові слова: струна, коливання,
низькочастотна томографія*

Marina E. Yurchenko

Resonant method of definition
heterogeneity's density of a
string

*The definition of heterogeneity's
property of a string have local
defect is a finit function*

*Key Words: string, vibration,
tomography*

Відомо, що власні (резонансні) частоти коливань пружних тіл повністю визначаються їхньою геометричною формою й механічними властивостями. Теоретично, за умови, що наявні експериментальні засоби для визначення нескінченної множини власних частот і відповідних їм нормальних мод коливань ідеального пружного тіла, з'являється можливість побудови розв'язків обернених крайових задач теорії коливань, тобто задач по визначенню геометричної форми тіла з відомою щільністю і пружними властивостями з використанням експериментально визначених власних частот коливань, чи, навпаки, визначення щільності і пружних властивостей для тіл заданої геометрії.

Ясно, що коректна постановка обернених задач є обмеженою і для побудови їх розв'язку необхідна додаткова інформація про об'єкт дослідження, а саме, про місцезоташування дефекту та його наближені розміри [1, 2].

Задачі такого типу вже досліджувалися в роботах [3,4] методом низькочастотної томографії для визначення неоднорідності пружних властивостей стержнів.

Як приклад обмеженої оберненої крайової задачі теорії коливань буде наведено розв'язок задачі про поперечні коливання неоднорідної струни з відомим локальним дефектом. Вказаний дефект неоднорідності вибирається у вигляді фінитної функції для того, щоб задовольнити умовам точного розв'язку оберненої задачі (звичайне диференціальне рівняння другого порядку). Стосовно вихідних даних, відомими вважаємо перші 15 – 20 власних частот коливань струни з локальною

неоднорідністю. Ці частоти будуть знайдені теоретично і передбачається, що вони відповідають експериментальним даним.

1. Поперечні коливання неоднорідної струни з заданими граничними умовами. Пряма задача

1.1. Пряма задача. Розглянемо натягнуту струну довжиною l , яка являє собою гнучку пружну нитку.

Вважаємо, що на деякій відстані від лівого жорстко закріпленого краю $x=0$ є локальна область довжиною 2δ , у якій густина струни відрізняється від густини струни $\rho_0 = \text{const}$ за межами цієї області (рис.1), а правий край $x=l$ вільний від навантаження.

Відзначений дефект представимо у вигляді фінітної функції осової координати x

$$\frac{\rho(x)}{\rho_0} = \begin{cases} 1, & 0 \leq x < x_0 - \delta, \\ 1 + \varepsilon(x), & x_0 - \delta \leq x \leq x_0 + \delta, \\ 1, & x_0 + \delta < x \leq l, \end{cases} \quad (1)$$

де $\varepsilon(x)$ поки в загальному вигляді позначена деяка функція осової координати x (рис.1).



Рис. 1.

Як відомо з літератури [5], задача про власні коливання струни з неоднорідною густиною $\rho(x)$ зводиться до інтегрування узагальненого рівняння відносно функції вертикального переміщення точок струни $u(x,t)$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\rho(x)}{T_0} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad (2)$$

яке в даному випадку зручніше представити у вигляді

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\rho(x)}{\rho_0} \frac{\rho_0}{T_0} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad (3)$$

де $T_0 = \text{const}$ - попередній натяг струни.

Граничні умови для функції прогину u_x набувають наступного вигляду

$$u_x|_{x=0} = 0; \quad \frac{du}{dx} \Big|_{x=l} = 0 \quad (4)$$

На власних модах коливань переміщення будуть гармонійними функціями часу, тому покладемо

$$u(x, t) = \hat{u}(x)e^{i\omega t} \quad (5)$$

При цьому рівняння (3) після підстановки в нього співвідношення (5) з урахуванням представлення неоднорідності (1) набуває наступного вигляду

$$\frac{d^2 \hat{u}}{dx^2} + \lambda^2 \begin{pmatrix} 1, & 0 \leq x < x_0 - \delta, \\ 1 + \varepsilon(x), & x_0 - \delta \leq x \leq x_0 + \delta, \\ 1, & x_0 + \delta < x \leq l \end{pmatrix} \hat{u}_x = 0, \quad (6)$$

$$\text{де } \lambda = \frac{\omega}{c_0}, \quad c_0 = \sqrt{\frac{T_0}{\rho_0}}, \quad (7)$$

c_0 – швидкість розповсюдження поперечної хвилі в струні.

Задані граничні умови (4) переносяться на амплітудну функцію $\hat{u}(x)$

$$\hat{u}_x|_{x=0} = 0; \quad \frac{d\hat{u}}{dx} \Big|_{x=l} = 0 \quad (8)$$

Для однорідної струни $\varepsilon(x) = 0$ амплітудна функція визначається з відомого рівняння

$$\frac{d^2 \hat{u}(x)}{dx^2} + \lambda^2 \hat{u}(x) = 0$$

розв'язок якого з урахуванням граничних умов (8) може бути представлений у вигляді

$$\hat{u}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} u_m \sin\left(m + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi x}{l}, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (9)$$

Частоти власних коливань однорідної струни знаходяться як розв'язки рівняння

$$\cos \lambda l = 0 \quad (10)$$

і визначаються елементарною формулою

$$(\lambda l)^{(\text{однор})} = \left(m + \frac{1}{2}\right) \pi, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (11)$$

1.2. Наближений розв'язок. Пряма задача. Відзначимо, що для однорідної струни з заданими граничними умовами (рис.1) функції

$$\theta_n(x) = \sin\left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi x}{l}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (12)$$

$$\gamma_n(x) = \cos\left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi x}{l}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (13)$$

утворюють повну ортогональну систему функцій на проміжку $0 \leq x \leq l$.

Згідно з методом низькочастотної томографії шукана неоднорідність наближено представляється відрізком ряду Фур'є по повній ортогональній системі союзних функцій у вигляді

$$\frac{\rho(x)}{\rho_0} = 1 + \sum_{n=0}^N a_n \cos\left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi x}{l} \quad (N \sim 20) \quad (14)$$

При цьому коефіцієнти ряду Фур'є a_n прямої задачі відомі і визначаються наступним співвідношенням

$$a_n = \frac{2}{l} \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} \varepsilon(x) \cos\left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi x}{l} dx \quad (15)$$

М.Г. Крейном у роботах [5, 6] показано, що функція, яка характеризує зміну густини на струні має бути додатньо визначеною, абсолютно неперервною або кусково – неперервною. Виходячи з цього, як приклад, задамо її у вигляді

$$\frac{\rho(x)}{\rho_0} = \begin{cases} 1, & 0 \leq \bar{x} < \bar{x}_0 - \bar{\delta}, \\ 1 + \frac{1}{2} \bar{\varepsilon} \left[1 + \cos\left(\frac{\pi(\bar{x} - \bar{x}_0)}{\bar{\delta}}\right) \right], & \bar{x}_0 - \bar{\delta} \leq \bar{x} \leq \bar{x}_0 + \bar{\delta}, \\ 1, & \bar{x}_0 + \bar{\delta} < \bar{x} \leq 1 \end{cases} \quad (16)$$

Где $\bar{\delta} = \frac{\delta}{l}$, $\bar{x} = \frac{x}{l}$, $\bar{x}_0 = \frac{x_0}{l}$, $\bar{\varepsilon} = \text{const}$, $\bar{\varepsilon} > 0$.

З урахуванням (15) і вигляду неоднорідності (16) коефіцієнти ряду Фур'є прямої задачі a_n визначаються наступним співвідношенням

$$a_n = \frac{2\bar{\varepsilon}}{\pi} \sin\left[\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi\bar{\delta}\right] \left\{ \frac{\cos\left[\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi\bar{x}_0\right]}{(n + 1/2)} - \bar{\delta}^2 \frac{\cos\left[\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi\bar{\delta}\right]}{[1 - (n + 1/2)^2 \bar{\delta}^2]} \right\} \quad (17)$$

$n = 0, 1, 2, \dots$

і для відносних розмірів $\bar{\delta} = 0,05$, $\bar{\varepsilon} = 0,05$, і $\bar{x}_0$, яке набуває послідовно значення $1/3$, $1/2$, $2/3$, наведені в табл. 1.

Таблиця 1
Коефіцієнти ряду Фур'є a_n . Пряма задача

n	$\bar{x}_0 = 1/3$	$\bar{x}_0 = 1/2$	$\bar{x}_0 = 2/3$
0	0.004319	0.003526	0.002491
1	0	-0.003521	-0.004972
2	-0.004248	-0.003474	0.002408
3	-0.004152	0.003323	0.002339
4	0	0.003206	-0.004635

5	0.003768	-0.003154	0.002157
6	0.003576	-0.002992	0.002048
7	0	0.002739	-0.003953
8	-0.003175	0.002553	0.001799
9	-0.002901	-0.002369	0.001662
10	0	-0.002128	-0.003014
11	0.002357	0.001930	0.001373
12	0.002084	0.001709	0.001222
13	0	-0.001356	-0.001945
14	-0.001362	-0.001098	0.000917
15	-0.001057	0.001041	0.000765
16	0	0.000824	-0.000896
17	0.000723	-0.000372	0.000468
18	0.000473	-0.000159	0.000326
19	0	0.000217	-0.000002
20	0.000228	0.000036	0.000062

Виходячи з записаного раніше рівняння (6), для амплітудної функції у випадку неоднорідної струни отримуємо наступне рівняння

$$\frac{d^2 \hat{u}(x)}{dx^2} + \lambda^2 \frac{\rho(x)}{\rho_0} \hat{u}(x) = 0 \quad (18)$$

Як і для однорідної струни, розв'язок рівняння (18) будемо у вигляді ряду Фур'є

$$\hat{u}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k \sin\left(k + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi x}{l} \quad (19)$$

З урахуванням рівняння (18), подання його розв'язків (19) і умов ортогональності функцій (12), (13) після перетворень одержуємо нескінчену систему однорідних алгебраїчних рівнянь

$$\left[1 - \left(\frac{\left(m + \frac{1}{2}\right)\pi}{\lambda l} \right)^2 + \frac{1}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \alpha_n \alpha_m \right] u_m + \frac{(-1)^m}{2\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \left[(-1)^k \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \alpha_n \gamma_{mn}^{(k)} \right] u_k = 0 \quad (20)$$

$m = 0, 1, 2, \dots, 20 \quad n = 0, 1, 2, \dots, 20 \quad k = 0, 1, 2, \dots, 20 \quad N = 20$

де

$$\alpha_m = \frac{2}{n+1/2} - \frac{1}{2m-n+1/2} + \frac{1}{2m+n+3/2};$$

$$\gamma_{mn}^{(k)} = \frac{1}{m-k+n+1/2} - \frac{1}{m-k-n-1/2} - \frac{1}{m+k-n+1/2} + \frac{1}{m+k+n+3/2}; \quad (21)$$

$$\gamma_{mn}^{(k)} = \alpha_m \text{ при } k = m.$$

Знак «штрих» означає, що в сумі пропущено член з номером $k = m$.
Корені детермінанту системи (20) визначають власні частоти коливань неоднорідної струни. Підставляючи значення α_n (табл.1) у систему (20) з

урахуванням виразів (21), отримуємо чисельні значення спектрів власних частот коливань неоднорідної струни для $m = 0, 1, 2, \dots, 20$, $n = 0, 1, 2, \dots, 20$, $k = 0, 1, 2, \dots, 20$, $N = 20$ у різних перетинах неоднорідності $\bar{x}_0 = 1/3, 1/2, 2/3$ (табл.2). У таблиці для порівняння представлені спектри власних частот коливань однорідної струни, знайдені за допомогою формули (11).

Таблиця 2

Значення частотних спектрів коливань $(\lambda l)_m^{(\text{неоднор.})}$ и $(\lambda l)_m^{(\text{однор.})}$. Наближений розв'язок

m	$(\lambda l)_m^{(\text{однор.})}$	$(\lambda l)_m^{(\text{неоднор.})}$		
		$\bar{x}_0 = 1/3$	$\bar{x}_0 = 1/2$	$\bar{x}_0 = 2/3$
0	1.571	1.56686	1.56298	1.55912
1	4.712	4.66658	4.68894	4.71153
2	7.854	7.83245	7.81491	7.79744
3	10.996	10.96297	10.94087	10.91887
4	14.137	14.01812	14.06684	14.11592
5	17.279	17.21728	17.19281	17.16839
6	20.420	20.34084	20.31877	20.29674
7	23.562	23.40979	23.44473	23.47978
8	26.704	26.58194	26.57069	26.55946
9	29.845	29.70053	29.69666	29.69278
10	32.986	32.83037	32.82262	32.81488
11	36.128	35.93736	35.94859	35.95982
12	39.269	39.05706	39.07455	39.09205
13	42.412	42.24467	42.20051	42.15645
14	45.553	45.30205	45.32648	45.35093
15	48.695	48.42801	48.45244	48.47689
16	51.836	51.62256	51.57840	51.53434
17	54.977	54.68689	54.70437	54.72187
18	58.119	57.81911	57.83033	57.84157
19	61.261	60.96405	60.95632	60.94855
20	64.402	64.08614	64.08226	64.07838

Якщо не враховувати позадіагональні елементи визначника системи рівнянь (20), корені частотного детермінанта можна обчислити з спрощеної системи алгебраїчних рівнянь

$$\left[1 - \frac{\left(\left(m + \frac{1}{2} \right) \pi \right)^2}{\lambda l} + \frac{1}{2\pi} \sum_{n=0}^N (-1)^n a_n a_{mn} \right] = 0 \quad (22)$$

$$m = 0, 1, 2, \dots, 20 \quad n = 0, 1, 2, \dots, 20 \quad N = 20$$

Чисельний розв'язок системи рівнянь (22) для $m = 0, 1, 2, \dots, 20$ наведено в таблиці 3.

Таблиця 3

Значення частот коливань $(\lambda l)_m^{(\text{неоднор})}$, знайдених зі спрощеної системи алгебраїчних рівнянь

$(\lambda l)_m^{(\text{неоднор})}$			
m	$\bar{x}_0 = 1/3$	$\bar{x}_0 = 1/2$	$\bar{x}_0 = 2/3$
0	1.56685	1.56298	1.55915
1	4.66654	4.68896	4.71607
2	7.83238	7.81494	7.79758
3	10.96287	10.94093	10.91906
4	14.01798	14.06691	14.11617
5	17.21711	17.19289	17.16874
6	20.34061	20.31888	20.29721
7	23.40947	23.44487	23.48041
8	26.58148	26.57088	26.56038
9	29.69967	29.69685	29.69445
10	32.82497	32.82051	32.82143
11	35.94902	35.94819	35.94828
12	39.07473	39.07438	39.07443
13	42.20059	42.20043	42.20051
14	45.32648	45.32645	45.32656
15	48.45240	48.45245	48.45259
16	51.57833	51.57843	51.57862
17	54.70426	54.70441	54.70463
18	57.83021	57.83039	57.83064
19	60.95614	60.95638	60.95664
20	64.08208	64.08235	64.08265

2. Обернена задача. Метод низькочастотної томографії

Задача про поперечні коливання струни з неоднорідністю при дослідженні її методом низькочастотної томографії зводиться до знаходження неоднорідності шляхом співставлення частотних спектрів коливань однорідної струни, знайдених за формулою (11), та частот власних коливань неоднорідної струни. Останні будемо називати «експериментальними». Ці частоти визначаємо як корені детермінанту системи (20). Детальний аналіз даних, представлених у табл. 2 і 3 показав, що розходження частотних спектрів коливань неоднорідної струни, отриманих з розв'язку систем алгебраїчних рівнянь (20) і (22) незначне, тому в якості «експериментальних» даних приймаємо значення частотних спектрів, отриманих з розв'язку системи рівнянь діагонального вигляду.

Співставляючи корені рівнянь (11) і (22), отримуємо систему алгебраїчних рівнянь для визначення коефіцієнтів ряду Фур'є, якими наближена шукана неоднорідність

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{n=0}^N (-1)^n a_n \alpha_m = \left(\frac{\left(m + \frac{1}{2}\right)\pi}{\lambda l} \right)^2_{(експер)} - \left(\frac{\left(m + \frac{1}{2}\right)\pi}{\lambda l} \right)^2_{(однор)} \quad (23)$$

$m = 0, 1, 2, \dots, 20$, $n = 0, 1, 2, \dots, 20$, $N = 20$

Шукані значення a_n наведені в табл.4

Таблиця 4

Початкові коефіцієнти ряду Фур'є.

n	$\bar{x}_0 = 1/3$	$\bar{x}_0 = 1/2$	$\bar{x}_0 = 2/3$
0	0.004336	0.003562	0.002551
1	0	-0.003411	-0.004968
2	-0.004164	-0.003651	0.002111
3	-0.004268	0.003074	0.002731
4	0	0.003504	-0.004612
5	0.003602	-0.002789	0.001558
6	0.003767	-0.003381	0.002674
7	0	0.002289	-0.003897
8	-0.002968	0.002991	0.001019
9	-0.003133	-0.001884	0.002383
10	0	-0.002581	-0.002932
11	0.002152	0.001449	0.000582
12	0.002307	0.002128	0.001886
13	0	-0.000937	-0.001864
14	-0.001215	-0.001452	0.000293
15	-0.001235	0.000727	0.001243
16	0	0.001091	-0.000851
17	0.000683	-0.000184	0.000161
18	0.000601	-0.000289	0.000552
19	0	0.000266	-0.000025
20	0.000096	0.000043	0.000059

Відзначимо, що значення коефіцієнтів ряду Фур'є, отриманих з розв'язку системи (23), практично співпадають з відповідними коефіцієнтами, представленими в таблиці 1 (пряма задача), а поновлені графічні зображення неоднорідності, які отримані методом низькочастотної томографії, представлені на рис. 2, 3, 4. Чорною кривою на рисунках зображена істинна залежність неоднорідності (формула 16) і томографічне поновлення неоднорідності з урахуванням значень коефіцієнтів a_n , представлених у таблиці 4 (сіра крива). При цьому параметри задачі наступні: $\bar{\delta} = 0.05$, $\bar{\varepsilon} = 0.05$.

Таким чином, ефективність розвинутого методу проілюстрована на прикладі задачі про поперечні коливання струни, відомий локальний дефект якої подається у вигляді фінітної функції, щоб задовольнити

умовам точного розв'язання оберненої задачі. Для прямих задач обрахунки коефіцієнтів ряду Фур'є співпали з заданими. Подано графіки поновлення дефекту.

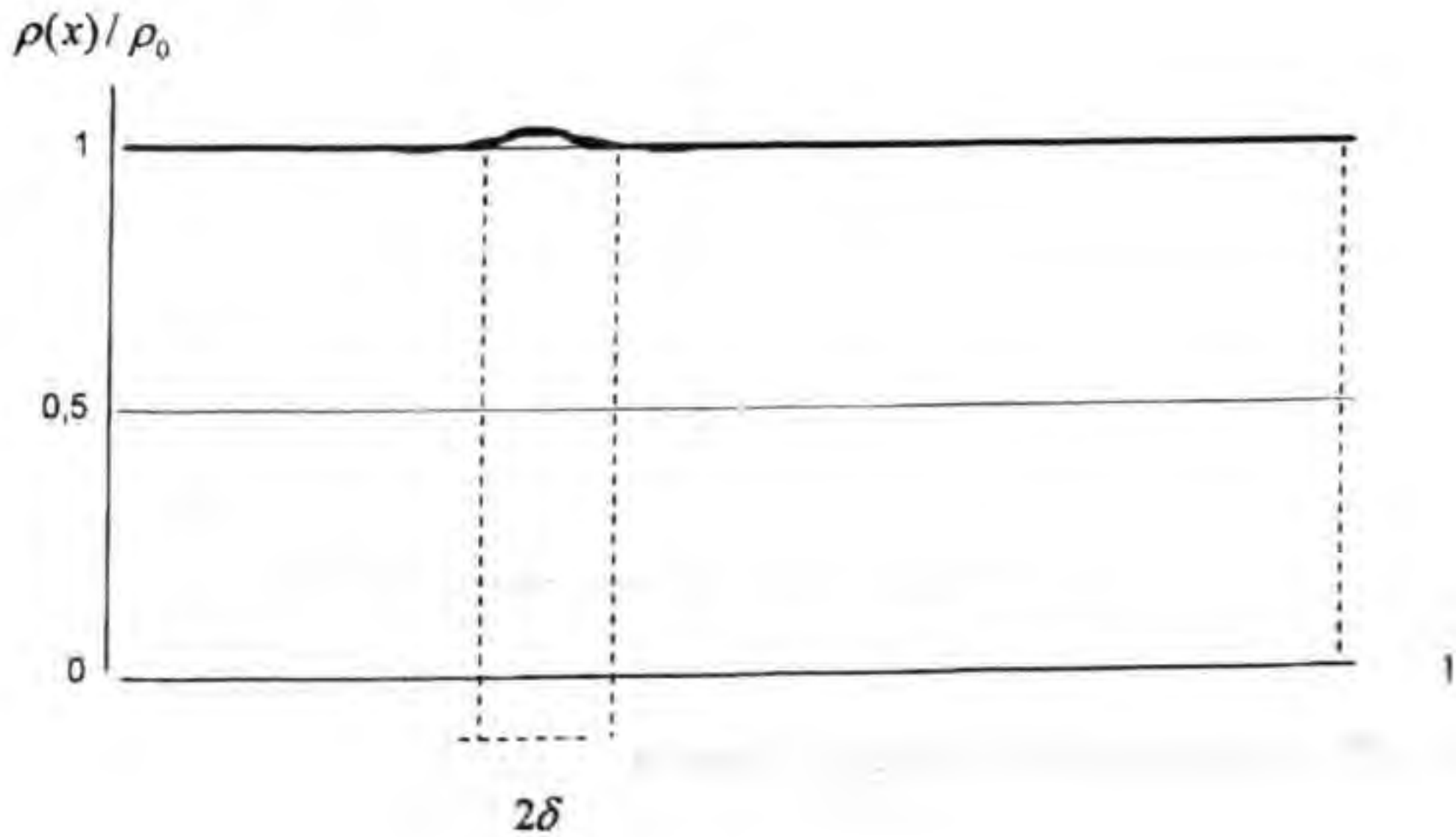


Рис. 2. Томографічне поновлення неоднорідності $\bar{x}_0 = 1/3$.

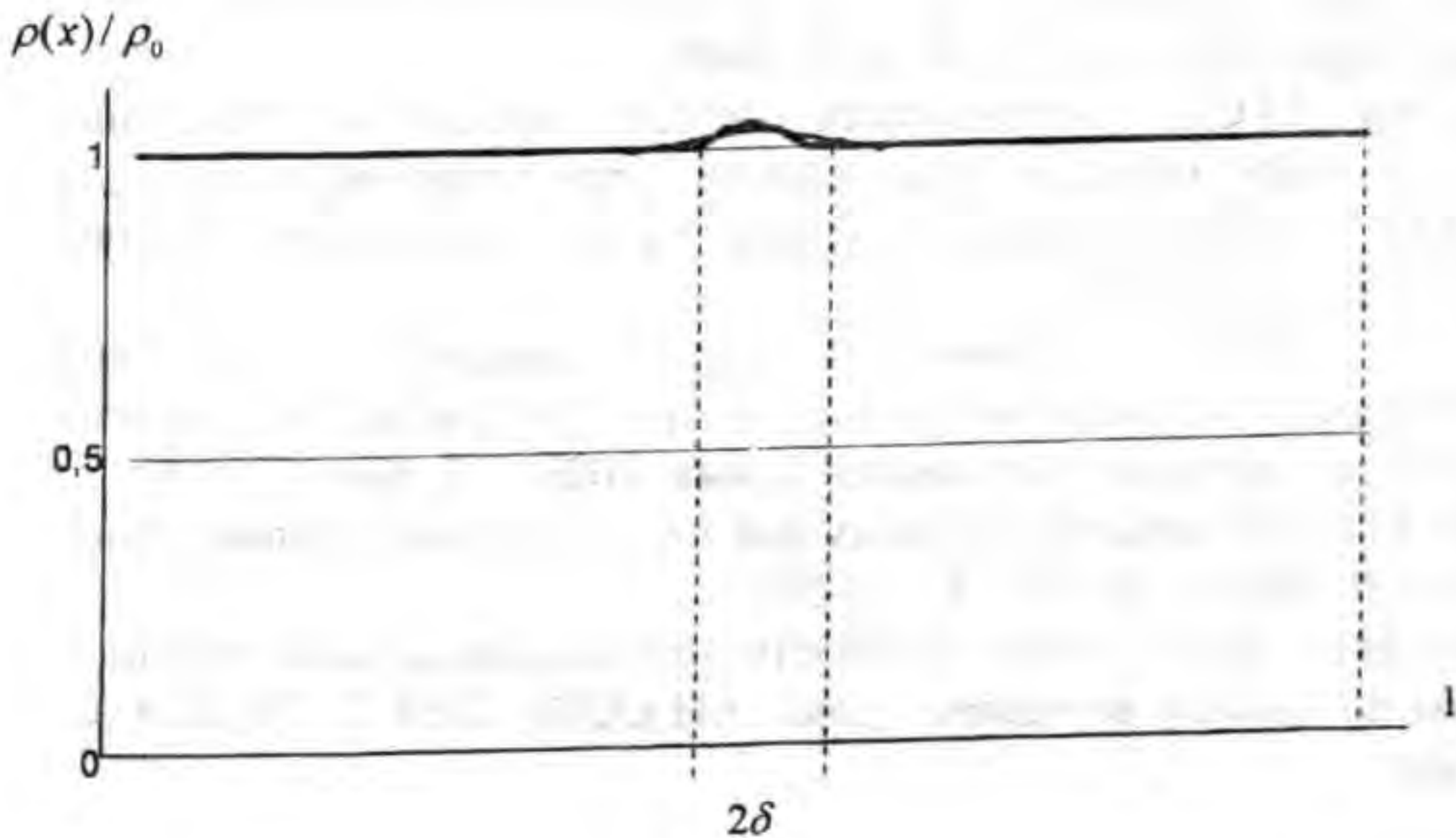


Рис. 3. Томографічне поновлення неоднорідності $\bar{x}_0 = 1/2$.

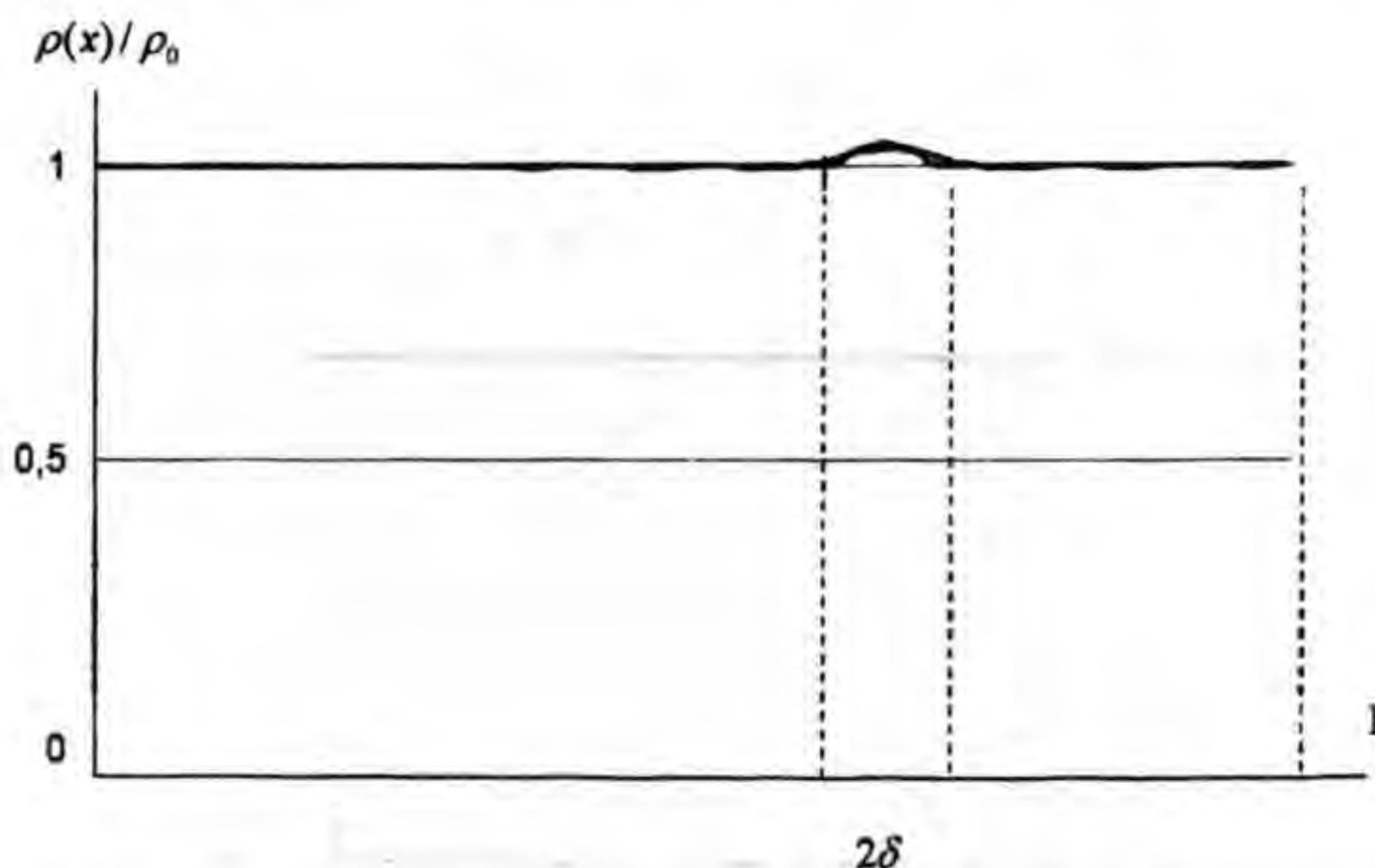


Рис. 4. Томографічне поновлення неоднорідності $\bar{x}_0 = 2/3$.

Література

1. Testardi L.R., Norton S.J. Acoustic dimensional resonance tomography: some examples in one-dimensional system.// J. Appl. Phys.-1986.- Vol. 96, No. 1.- P. 55-58.
2. Testardi L.R., Norton S.J., Hsich T. Dimensional resonance tomography// J. Appl. Phys.-1984.-Vol. 56, No. 2.-P. 68-81.
3. Юрченко М.Є. Резонансний метод визначення локальної неоднорідності пружних властивостей при згинних коливаннях стержня // Вісник Київського університету, Сер.:фіз.-мат. Науки.- 2002.-Вип.2.-С.148-155.
4. Юрченко М.Є. Резонансний метод визначення локальної неоднорідності пружних властивостей при повздовжніх та згинних коливаннях стержня //Акустичний вісник.-2003.-Т.5, № 4.-С.51-60.
5. Крейн М.Г. Об обратных задачах для неоднородной струны// Докл. АН СССР, 1952.-Т. 82, N 5.-С.271-274.
6. Крейн М.Г. Определение плотности неоднородной симметричной струны по спектру ее частот// Докл. АН СССР, 1951.-Т. 76, N 3.-С. 364-368.

Надійшла до редакції 25.02.05

ISSN 2542-2298

ISSN 2542-2298

ISSN 2542-2298

ISSN 2542-2298

Вісник Львівського національного університету
імені Івана Франка

Вісник Львівського національного університету
імені Івана Франка

Вісник Львівського національного університету
імені Івана Франка

Вісник Львівського національного університету
імені Івана Франка

КОМП'ЮТЕРНІ НАУКИ ТА ІНФОРМАТИКА

Вісник Львівського національного університету
імені Івана Франка

Вісник Львівського національного університету
імені Івана Франка

Комп'ютерні науки та інформатика є важливими галузями знань, які впливають на розвиток суспільства та економіки. Вони включають в себе різні напрямки досліджень, такі як алгоритми, структури даних, мережі, безпека тощо. Комп'ютерні науки та інформатика є важливими галузями знань, які впливають на розвиток суспільства та економіки. Вони включають в себе різні напрямки досліджень, такі як алгоритми, структури даних, мережі, безпека тощо.

Беручи до уваги розвиток науки та техніки, можна сказати, що комп'ютерні науки та інформатика є важливими галузями знань, які впливають на розвиток суспільства та економіки.

УДК 519.876

Лариса Ю. Бодачівська,
Іван В.Бейко, Григорій С.Поп

Екологічна та техніко-економічна ефективність глушіння свердловин інвертними системами на рослинній основі

Проведені систематичні дослідження з розробки, вивчення властивостей і впровадження екологічно сприятливих інвертних емульсійно-суспензійних систем на основі рослинної сировини. Встановлені причинно-наслідкові залежності між керуваннями, властивостями та їх наслідками (дебіт, капітальні вкладення, ефективність). Побудована математично-комп'ютерна модель розрахунку техніко-економічної ефективності глушіння газових свердловин за всіма критеріями ефективності.

Ключові слова: інвертні системи, ефективність глушіння, модель.

Larysa U. Bodachivska,
Ivan V. Beyko, Grygory S. Pop,

Ecologically and technicoeconomic efficiency of killing of well of water-in-oil emulsions of renewable vegetable raw material

Systematic researches of development, properties and application of ecologically friendly water-in-oil emulsions and suspensions on the basis of renewable vegetable raw material. Cause-and-effect relationship between the manageable properties and their consequences (debit, capital investments, efficiency) has been determined. Amenably to all criteria of efficiency the mathematical model and method of multicriterion optimization of calculation of technicoeconomic efficiency of killing of gas-well has been made.

Key Words: water-in-oil emulsions, efficiency of killing, model.

Глобалізація економіки і глобалізація екології – два взаємозв'язані аспекти, які визначатимуть долю і подальші шляхи розвитку людства на ближню і віддалену перспективу. Найвагоміший внесок до них належить нафтогазовидобувній і нафтопереробній промисловості, які характеризують рівень сучасної економіки [1]. Водночас вони відносяться до енерго- й ресурсоємних галузей і є одними з найбільших споживачів, а разом з тим і забруднювачів довкілля хімічними продуктами впродовж всього ланцюга видобутку, транспортування, переробки, зберігання і використання вуглеводневої сировини. Необхідність узгодження цілей економічного розвитку і господарської діяльності з екологічними вимогами та обмеженнями, обумовленими глобальною екологічною кризою і виснаженням природних ресурсів, постала перед суспільством, країною і підприємствами гостро і невідкладно. Тому актуальною проблемою сучасності є відшукування відновлюваної природної сировини, всебічні її дослідження і спрямована модифікація з одержанням екологічно сприятливих продуктів, які асимілюються біосферою, та розбудова на їх основі високоефективних технологічних систем для підвищення видобутку нафти і газу.

Беручи до уваги соціально-екологічну концепцію "збалансованого і

усталеного розвитку", впродовж останніх років нами проведені систематичні дослідження рослинних олій, продуктів їх очистки і хімічних перетворень. Виявлені особливості хімічної будови, колоїдної структури і властивостей синтезованих продуктів дозволили розробити методом багатокритеріальної оптимізації низку емульсій та емульсійно-суспензійних систем з регульованими, відповідно до умов застосування, густиною, стійкістю, структурно-механічними і технологічними властивостями [2-3], а у поєднанні з геолого-технічними, пластовими і колекторськими властивостями конкретних газоконденсатних родовищ створити ефективну технологію тимчасового закриття і консервації свердловин [4-5].

Суть її полягає у приготуванні емульсії з визначеними структурно-реологічними параметрами з наступним введенням до неї газонаповнених мікросфер з питомою вагою 200 кг/м^3 . Склад одержаної полегшеної інвертної дисперсії підбирають шляхом математичного моделювання методом багатокритеріальної оптимізації емульсійно-суспензійних систем [6], доведенням до заданих фізико-хімічних параметрів за густиною, в'язкістю, статичним напруженням зсуву, змочуваністю, адгезією.

Техніко-економічна ефективність, запропонованих систем і процесу глушіння в цілому, обумовлена: зміною матеріальних витрат на приготування технологічних систем - Δu_1 , зменшенням часу на приготування технологічних систем - Δu_2 , зменшенням часу на глушіння свердловин - Δu_3 , скороченням терміну освоєння свердловин - Δu_4 , збереженням фільтраційно-ємнісних властивостей ПЗС і виходом свердловин на доремонтну продуктивність одразу після завершення ремонту - Δu_5 , додатковим видобутком газу за період зменшення тривалості процесу глушіння свердловин - Δu_6 .

Запропонований нами метод розв'язування практичних задач оптимізації, прогнозування і керування техніко-технологічним процесом, оснований на побудові і використанні адекватних математично-комп'ютерних моделей досліджуваних причинно-наслідкових залежностей між керуваннями u_i та їх наслідками w_i . Останні включають: дебіт газових свердловин після проведення процесу глушіння (w_1), капітальні вкаладення (w_2), економічна ефективність (w_3).

У загальному випадку моделі причинно-наслідкових залежностей $(u) \rightarrow w$ будуються у класі параметричних p - моделей $A(v, u, w) = b(u, p)$. Наслідки w на заданій множині U допустимих керувань $u \in U$ оцінюються значеннями $w = B(v(u, p), u, p)$, відповідно до заданих функцій B на розв'язках $v = v(u, p)$ рівняння $A(v, u, w) = b(u, p)$. За допомогою методів розв'язуючих і асимптотично-розв'язуючих операторів p -моделі оптимізуються до вигляду граф-операторних моделей, вершинами яких є оптимізовані робочі моделі усіх n підсистем

$$A_k(v^k, u^k, z^k, p^k) = \theta, z^k = Z^k(v^{(k)}, u^{(k)}, p^k), k \in \{1, \dots, n\}, \quad (1)$$

де k – номер підсистеми, v^k – її фазовий стан (траєкторія), u^k – керування k -ою підсистемою, $z^k = Z^k(x^{j(k)}, u^{j(k)}, p^k)$ – вплив на k -ту підсистему її сусідніх підсистем, $v^{j(k)} := \{v^j\}_{j \in I(k)} \subset \{1, \dots, n\} \setminus \{k\}$, $u^{j(k)} := \{u^j\}_{j \in J(k)} \subset \{1, \dots, n\} \setminus \{k\}$, $I(k), J(k)$ – індексні множини номерів тих підсистем, які безпосередньо зв'язані (сусідні) з підсистемою k , а саме, якщо об'єднання $I(k) \cup J(k)$ включає індекс s , то це означає, що s -та підсистема є безпосередньо зв'язаною із k -ою підсистемою, p^k – параметри k -ої підсистеми.

У загальному випадку $v^k \in V^k$, $u^k \in U^k$, V^k – лінійні нормовані простори, U^k , Z^k – метричні простори, A_k – параметричні оператори, що визначають залежність між загальним станом $v := (v^1, \dots, v^n) := (v^1(u, p), \dots, v^n(u, p)) := v(u, p)$, керуваннями $u := (u^1, \dots, u^n) \in U$ ($U := U^1 \times U^2 \times \dots \times U^n$) при заданих значеннях векторних параметрів $p := (p^1, \dots, p^n) \in P$.

Розглянемо крок за кроком вищеописаний узагальнений метод для визначення ефективності запропонованої технології глушіння свердловин із заданими параметрами.

Знаходимо функцію $Y^{lopt} = F(X^{lopt})$, складових технологічних систем глушіння, $X^{lopt} (X^{lopt} = X_1^{lopt}, X_2^{lopt}, \dots, X_n^{lopt})$ як розв'язок оптимізаційної задачі:

$$\min F(x) = \sqrt{\sum_{i=1, \dots, n} (Y^{lopt} - F_i(x^i))^2}, \quad x \in X^i, \quad X^i = \{x \mid \sum_{i=1, \dots, n} x^i = 100\}, \quad (2)$$

виходячи із експериментально знайдених математично-аналітичних залежностей, $Y^{lopt} = F(X^{lopt})$, де відповідно вхідними параметрами X^i є кількісні характеристики складових емульсійно-суспензійної системи, а вихідними функціями Y^i – властивості цієї системи. та відшуковуємо функцію $P(t) = \varphi(Y_6^i(X^{lopt}))$ залежності фільтраційно-ємнісних властивостей колектора від складу оптимізованих технологічних систем.

Розв'язуємо рівняння технологічного режиму експлуатації та глушіння свердловин

$$F(t) = f(v(t), u(t), z(t)) \quad (3)$$

врахувавши фактори впливу $u(t)$, $z(t)$ (в нашому випадку $z(t) = 0$).

Основні показники технологічного режиму роботи свердловин визначається, виходячи із граничного енергозберігаючого дебіту $w_{11}(t)$, як $w_1(t) \geq w_{11}(t)$, що відповідає трьохчленному рівнянню припливу газу [7]:

$$\begin{aligned} v_1^2(t) - v_2^2(t) &= v_3(t) w_1(t) + p_1 w_1(t) w_{12}(t), \\ p_2 &= p_3 p_4 \ln(p_5 / p_6) / p_7 p_8 p_9, \quad p_1 = p_4 p_{10} (1 - (p_5 / p_6)) / (2 p_7^2 p_9^2 p_{11} p_6), \\ v_3(t) &= p_2 - p_1 w_{11}(t), \end{aligned} \quad (4)$$

$$w_{12}(t) = w_1(t) - w_{11}(t) \ln(w_1(t) / w_{11}(t)),$$

де p_1, p_2 – коефіцієнти фільтраційного опору, p_3 – в'язкість газу, p_4 – тиск атмосферний, p_5 – радіус кругового контура свердловини, p_6 – радіус свердловини, $p_7 = \pi$, p_8 – проникність колектора, p_9 – вибір свердловини, p_{10} – густина повітря, p_{11} – діаметр пор колектора.

Поточний тиск на вибої свердловини розраховуємо за рівнянням:

$$v_2(t) = v_4 p_{12}^{\Lambda_3}, \quad (5)$$

де $v_4(t)$ – тиск на гирлі свердловини, p_{12} – основа натурального логарифму, $p_{13} = 0,03415 p_{14} p_9 / v_5(t) v_6(t)$, p_{14} – приведена густина газу, $v_4(t)$ – коефіцієнт над стисливості, $v_5(t)$ – середня температура.

Знаючи зміни в часі тиску на вибої та дебіту з рівняння припливу газу розраховуємо депресію пласта:

$$v_7(t) = \sqrt{v_3(t)w_1(t) + p_1 w_1(t)w_{12}(t) + v_2^2(t)} - v_2(t). \quad (6)$$

У випадку небезпеки руйнування породи-колектора привибійної зони та підтягування контурної води чи утворення конуса підшвенної води експлуатацію бажано проводити в режимі сталої депресії на пласт $v_{11}(t) = \text{const}$. За цієї умови пластовий тиск свердловини визначаємо за формулою:

$$v_1(t) = v_2(t) + v_7(t). \quad (7)$$

Залежність між тиском на гирлі і тиском на вибої свердловини знаходимо з рівняння:

$$v_4(t) = \sqrt{(v_2^2(t) - p_{16} w_{11}^2(t)) / p_{12}^{2p_{13}}}, \quad (8)$$

$$p_{16} = 1,33 \cdot 10^2 p_{17} (v_5(t) v_6^2(t) / p_{18}^5) (p_{12}^{2p_{13}} - 1),$$

де p_{17} – коефіцієнт гідравлічного опору, p_{18} – внутрішній діаметр НКТ, тоді тиск на вибої, відповідно до обчислених параметрів експлуатації свердловини, представимо у вигляді:

$$v_2^2(t) = v_4^2(t) p_{12}^{2p_{13}} + p_{16} w_{11}(t). \quad (9)$$

Підставивши рівняння (9) в рівняння припливу газу отримуємо поточний дебіт свердловини (10):

$$w_1(t) = \left[\frac{\sqrt{(p_2 - p_1 w_{11}(t)) - p_1 w_{11}(t) (\ln(\sqrt{(v_2^2(t) - v_4^2 p_{12}^{2p_{13}}}) / p_{16}}) / w_{11}(t))^2 - 4 p_1 (v_1^2(t) - v_2^2(t) + (p_2 - p_1 w_{11}(t)) - p_1 w_{11}(t) (\ln(\sqrt{(v_2^2(t) - v_4^2 p_{12}^{2p_{13}}}) / p_{16}}) / w_{11}(t)))}}{(p_2 - p_1 w_{11}(t)) - p_1 w_{11}(t) (\ln(\sqrt{(v_2^2(t) - v_4^2 p_{12}^{2p_{13}}}) / p_{16}}) / w_{11}(t))} \right] / 2 p_1$$

Виходячи з одержаних результатів розрахунків параметрів привибійної зони свердловин, розв'язуємо задачу оптимізації процесу з метою одержання максимального дебіту свердловин w_1 з урахуванням терміну окупності капітальних вкладень w_4 :

$$\max w_1(f(F_1(X^k))) \mid w_4 \leq N, \quad (11)$$

де N – кількість років.

Розрахунки фактичної економічної ефективності впровадженої технології проводимо в порівнянні з експериментально-розрахунковим варіантом і базовою технологією глушіння свердловин на ЯГКР інвертною органобентонітовою дисперсією "Емультон". В основу базового варіанта взяті середньостатистичні результати глушіння свердловин на ЯГКР у 2003-2004 роках.

Розрахунок економічного ефекту $w_3(T)$ визначаємо як різницю витрат $w_2(T)$ за базовою та запропонованою технологіями по формулі:

$$\max_{u \in U} w_3(T) = [\sum_{j=1, \dots, n} (u_{1j}^k, c_j) + \sum_{j=1, \dots, n} (u_{2j}^k, u_{3j}^k, u_{3j}^k, c_j) - \int_{0, \dots, u_{5j}} w_1^k(u_{5j}, c_j) du_{5j}] - [\sum_{j=1, \dots, n} (u_{1j}, c_j) + \sum_{j=1, \dots, n} (u_{2j}, u_{3j}, u_{3j}, c_j)] + \int_{t_1, \dots, t_2} w_1(f(F_1(X^{kopt}))), T, c_j) dT_j, \quad (12)$$

$$t^k = \sum_{j=2, \dots, 6} \sum_{i=1, \dots, n} u_{ij}^k, \quad t = \sum_{j=2, \dots, 5} \sum_{i=1, \dots, n} u_{ij},$$

де u_{ij}, c_i і u_{ij}^k, c_i^k – витрати на матеріали (\$ США), та часу (вахт-год.) на приготування технологічної системи, глушіння, і освоєння свердловини, відповідно, по запропонованій і k -ій (базовій) технології глушіння j -ої свердловини; $\int_{0, \dots, u_{5j}} w_1^k(u_{5j}, c_j) du_{5j}$ – функція виходу на технологічний режим k -ої (базової) технології глушіння j -ої свердловини, c_i – вартість i -го фактора технології глушіння, n – кількість свердловин; t^k, t – загальний час процесу глушіння, відповідно k -ої (базової) та запропонованої технологій, вахт-год., $u_6 = w_1(f(F_1(X^{opt}))), T, c_j$ – приріст видобутку газу за рахунок скорочення часу процесу глушіння, $X^{opt} (X^{opt} = X_1^{opt}, X_2^{opt}, \dots, X_m^{opt})$ – складові технології глушіння.

Вихідні дані та результати розрахунків техніко-економічної ефективності базової, запропонованої експериментально-розрахункової та фактичної технологій глушіння свердловин сеноманського газового покладу ЯГКР приведені в таблиці.

Таблиця – Вихідні дані та результати розрахунків техніко-економічної ефективності глушіння свердловин сеноманського газового покладу ЯГКР

№№ св.	Технологія	u_1		u_2	u_3	u_4	u_5	$w_1^k(u_{11}, c_1)$	c_2	W_1		u_6	w_2	w_3
		V_1	c_1							До	Після			
Запропонована експеримент.-розрах.		51	48979	20	28	72	-	-	13500	495	495	8229	101237,06	148828,42
Базова		108	9334	78	84	249	108	20542		0	463	-	188317,97	
1088	Базова	108	9334	78	84	249	108	11620	13500	0	235	-	188317,97	-
	Запропонована	20	19207,45	72	48	288	-	-		0	280	1295	196884,87	-7236,9
5115	Базова	107	9247,68	78	84	249	108	17845	13500	0	378	-	188231,55	-
	Запропонована	35	33613	36	29	96	-	-		0	430	6414	103425,44	130800,61
7174	Базова	105	9074,81	78	84	249	108	19920	13500	680	435	-	59458,68	-
	Запропонована	50	48018,61	20	29	96	-	-		680	480	7446	111153,77	131774,9
Всього по 3 св.:									13500					
Базова		320	27656,49	234	252	747	324	49385		680	1048	-	564608,2	-
Запропонована		105	100839,06	128	106	480	-	-		680	1190	15189	411774,58	255338,61

Аналізуючи результати таблиці бачимо, що матеріальні витрати запропонованої технології перевищують витрати за базовим варіантом 3-х разового глушіння свердловин. Це обумовлено високою вартістю газонаповнених мікросфер та 30 %-вим перевищенням обсягу полегшених інвертних дисперсій у порівнянні з об'ємом свердловини. Разом з тим, з огляду на наступні відчутні втрати часу на приготування технологічних систем, глушіння, освоєння й тривалий вихід свердловин на доремонтний

режим, через глибоку кольматацію порового середовища великими обсягами традиційних базових систем, розроблена комплексна технологія є високорентабельною. Економічний ефект по запропонованому експериментально-розрахунковому варіанту складає біля 149 тис. \$ США.

Перші промислові випробування на св. №1088 через відсутність досвіду, значного перевищення практично всіх нормативних показників нової технології й ускладнень, виявилися збитковими на суму 7237 \$ США. Проте на наступних свердловинах, по мірі вдосконалення всіх ланок технологічного процесу й напрацювання досвіду роботи, економічна ефективність перевищила 130 тис. \$ США на свердловино-операцію і фактично наблизилася до експериментально-розрахункової величини.

Таким чином, нова комплексна технологія з використанням полегшених інвертних систем дозволяє скоротити процес глушіння високопроникних газових свердловин ЯГКР в 3,5 рази. За цей період додатковий видобуток газу з трьох свердловин склав 15,2 млн. м³, а сумарний економічний ефект - 255339 \$ США.

Література

1. Поп Г.С., Бачериков А.В. Глушение скважин с предварительным блокированием продуктивных пластов дисперсными системами / Обз. информ. Сер. Бурение газовых и газоконденсатных скважин. М.: ВНИИЭгазпром.- 1992.- 30 с.
2. Патент РФ №2092516 МКІ⁶ Кл. С 09 К 7/02. Состав для глушения и заканчивания скважин/ И.Г.Зезекало, В.И.Тищенко, В.Ф.Троцкий, О.И.Серга.- Оpubл. 10.10.97. Бюл.№28.
3. Патент №2058989 РФ. МКІ⁶ Кл. С 09 К 7/02, Оpubл. 27.04.96. Жидкость для глушения скважин/ Ю.В.Зейтман, Ю.А.Ермилов, З.Г.Расулев и др.- Оpubл. 27.04.96. Бюл.№6.
4. Патент №2002010317 України. МПК Кл. С 09 К 7/02. Полегшена інвертна дисперсія/ Г.С. Поп, Л.Ю.Бодачівська, В.М.Кучеровський// Заявл. 11.01.2000. Оpubл. 15.01.2003. Бюл. №1.
5. Бодачівська Л.Ю., Поп Г.С., Бейко І.В. Оптимізація дисперсних систем для капітального ремонту свердловин на основі сировини рослинного походження// 7-ма науково-практична конференція УНГА "Нафта і газ України – 2002".-Київ.- 2002.-С.318-321.
6. Bodachivska L., Pop G., Beyko I. Optimisation of emulsions composed with vegetal phosphatides and oil/ Third World Congress on Emulsion // Abstracts.-Lyon - France, 24-27.10.02.- 4-A 216.- P.309; CD.-N P.309.
7. Вяхирев Р.И., Коротаев Ю.П. Теория и опыт разработки месторождений природных газов. – М.: Недра. - 1999. - 414 с.

Надійшла до редакції 25.10.2004

УДК 681.3

Дмитро Б. Буй¹
Олена В. Шишацька²

**Комп'ютерні засоби навчання:
проблеми термінології,
систематизації, створення
програмного забезпечення**

Обговорюються питання термінології в області комп'ютерних засобів навчання. Запропоновано підхід до систематизації систем підтримки учбового процесу. Розглянуто загальні питання проектування програмного забезпечення в цій предметній області.

Ключові слова: комп'ютерні засоби навчання, системи підтримки учбового процесу, проектування систем підтримки учбового процесу.

¹ E-mail: buy@unicyb.kiev.ua

² E-mail: hhsyhsatskaya@ukr.net

Dmytro B. Buy¹
Olena V. Shyshats'ka²

**Computer means of teaching:
problems of terminology, ordering,
creation of the software**

Questions of terminology are discussed in the field of computer means of training. The approach to ordering systems of support of educational process is offered. The general questions of designing of the software in such data domain are considered.

Key words: computer means of teaching, system of support of educational process, designing of systems of support of educational process.

У практиці використання комп'ютерних інформаційних та комунікаційних технологій в освіті на даний час існують дві тенденції:

1. використання промислових універсальних комп'ютерних систем, призначених для широкого кола практичних та наукових задач різних предметних областей і адаптованих до учбових дисциплін;

2. застосування спеціально розроблених для досягнення цілей навчання систем, котрі реалізують відповідні методики, закладені в них розробниками.

Аналіз, вивчення та розробка систем спеціально розроблених для досягнення навчальних цілей якраз і є предметом багатьох досліджень. Запорукою створення якісного продукту даного типу є тісна співпраця фахівців різних наукових галузей: теорії систем, теорії педагогічного проектування, інженерії знань, дидактики, інженерної психології та ін. Наразі ж, в більшості випадків, спостерігаємо чітке розмежування фахових досліджень, внаслідок чого результатом довготривалих розробок є, на жаль, неякісний продукт. Частіше неякісний дидактично – основним недоліком в даному випадку є невідповідність кінцевого продукту – програмної системи, – учбовому процесу.

Системи підтримки учбового процесу як педагогічні програмні засоби

В галузях педагогічних наук системи підтримки учбового процесу розглядаються як педагогічні програмні засоби (інший термін – засоби

комп'ютерних технологій навчання). На нашу думку, їх дослідження розгалужується на такі дві основні складові:

1. Вивчення функціонування комплексних систем навчання (педагогічних систем), під якими, на відміну від „комп'ютерного” чи „комп'ютеризованого навчання”, розуміють також системи, елементами котрих є: учень, комп'ютер, навчальна книга, звичайні технічні засоби навчання та вчитель, роль якого є провідною і організуючою [4]. Присутність комп'ютера в системі залежить від дидактичних задач, що розв'язуються, і програмних засобів, котрі доступні вчителю.

Гусарова Н. Ф. вважає критерієм доцільності застосування комп'ютера в учбовому процесі рівень структуризації знань предметної області [9]. Вона проводить аналогію між рівнями структуризації знань (фактографічної моделі, математичної моделі, інформаційної системи, інтелектуальної системи) і рівнями засвоєння знань. (1) На учнівському рівні засвоєння знань (найпростіший рівень репродуктивної діяльності – „діяльність за впізнаванням”) комп'ютер незамінний, він звільняє вчителя від рутинної роботи, дозволяє учням засвоїти більшу кількість матеріалу; таким чином, його ефективність очевидна. (2) На алгоритмічному рівні використання комп'ютера як тренажера ефективно при виконанні типових завдань за певним алгоритмом. (3) На евристичному рівні (перший рівень продуктивної діяльності) використання комп'ютера можливе, хоча виникають труднощі зі структуруванням учбового матеріалу. (4) Важко уявити використання комп'ютера на четвертому, творчому, рівні засвоєння інформації.

Александров Г. Н. зі співавторами розглядає доцільність застосування комп'ютера в залежності від дидактичних задач, що розв'язуються [4].

(1) Використання комп'ютера недоцільне при засвоєнні нових, погано формалізованих знань.

(2) Комп'ютер може бути використаний в процесі:

- засвоєння нових знань, що добре формалізуються, (зауважимо, при нескладному поясненні);
- навчання розв'язуванню задач різного класу;
- навчання розв'язуванню задач з особливо значущою спільною діяльністю;
- повторення і закріплення знань, що потребує діалогу;
- контролю знань з глибоким аналізом їх якості.

(3) Комп'ютер повинен бути використаний для:

- забезпечення зворотного зв'язку в процесі засвоєння знань з індивідуальною корекцією;
- конструювання образу, наглядної моделі, опори на наглядний образ, тощо;
- контролю знань з безпосередньою обробкою результатів.

2. Вироблення єдиної термінології та повної класифікації педагогічних програмних засобів.

На даний момент не існує загальноприйнятої єдиної термінології та повної класифікації. Бурхливий розвиток комп'ютерних та педагогічних

технологій, суб'єктивний характер вибору класифікаційних ознак та існування англомовної термінології роблять дану задачу нетривіальною. Водночас науковці зазначають, що створення ядра єдиної термінології і класифікації можливе.

Так, Александров Г. Н. оперує терміном „засоби, реалізовані за допомогою ЕОМ для досягнення педагогічних цілей” і поділяє їх на дві основні групи: інструментальні педагогічні засоби (ІПЗ) та програмні педагогічні засоби (ППЗ) [3]. До ІПЗ він відносить: (1) довідково-інформаційні засоби; (2) засоби, що реалізують комунікативні функції; (3) конструкторсько-комбінаторні засоби; (4) комбіновані засоби. ППЗ в свою чергу він поділяє на (1) навчаючі, (2) контролюючі, (3) засоби для експериментальних досліджень та мовні.

Жалдак М. І. розглядає ППЗ, поділяючи їх на дві групи: (1) ППЗ, розраховані на скорочення часу спілкування учня і вчителя або й на навчання зовсім без вчителя, та (2) ППЗ, розраховані на якнайінтенсивніше спілкування учнів і вчителя за рахунок використання засобів інформаційно-комунікаційної технології і звільнення учнів від необхідності витратити час на виконання технічних рутинних операцій [12].

Кирилова Г. І. виділяє основні типи програмних комп'ютерних засобів (ПКЗ): (1) за функціональною спрямованістю – демонстраційні програмні комп'ютерні засоби; імітаційні ПКЗ; моделюючі ПКЗ; програми для контролю (самоконтролю); засоби організації побуту і дозвілля; учбово-ігрові ПЗ; розрахункові програми; засоби пошуку інформації; засоби розробки програм; системні програми; та (2) за суспільною значущістю – засоби супроводу інформаційної діяльності; засоби формування інформаційної культури; засоби удосконалення сучасного інформаційного суспільства; засоби забезпечення механізмів управління [14].

Козлакова Г. О. користується терміном „інформаційно-програмний засіб” і проводить класифікацію, використовуючи вісім класифікаційних ознак: (1) технічна реалізація, (2) ступінь реалізації, (3) загальне призначення, (4) категорія користувачів, (5) призначення, (6) особливості алгоритму, (7) особливості структури, (8) реалізація режиму обробки [15].

Домрачев В. Г. та Ретинська І. В. використовують чотири класифікаційні ознаки: (1) дидактична спрямованість, (2) програмна реалізація, (3) технічна реалізація, (4) предметна область [11].

Кривошеєв А. О. використовує термін „комп'ютерна програма удосконалення і підтримки учбового процесу”, умовно розділяючи такі програми на дві частини: (1) комп'ютерні навчаючі програми (КНП; автор зауважує, що „они могут не только обучать, а и, например, контролировать знания, выдавать справочную информацию или как-то иначе помогать преподавателю или учащемуся” [19, с. 15]), і (2) програми, призначені для розробки КНП (інструментальні системи, предметно-орієнтовані середовища, прикладні пакети та ін.). Під КНП автор розуміє будь-яке програмне

забезпечення, спеціально розроблене чи адаптоване для застосування у навчанні. Він пропонує класифікацію КНП за принципом призначення: (1) комп'ютерні підручники, (2) предметно-орієнтовані середовища; (3) лабораторні практикуми; (4) тренажери; (5) контролюючі програми; (6) довідники та (7) бази даних. Детально класифікація за даним принципом розкрита в колективній праці [10].

Гіркін І. В. виділяє (1) готові до застосування спеціалізовані (дидактичні) програми; (2) комп'ютерні моделі; (3) автоматизовані навчаючі системи (АНС), претендуючи на класифікацію. Принципом класифікації в даному випадку є „наиболее важные и получившие распространение обучающие программы” [7, с. 44].

Гончарова О. М. оперує поняттям „автоматизована навчальна система” не означаючи його, але ототожнюючи з „навчальними програмними засобами” і „комп'ютерними моделями”. Вона пропонує „варіант класифікації автоматизованих навчальних систем, в основі якої лежать принципи полікритеріальності та актуальності для сучасних розробників навчальних програм” [8, с. 196]. Усього автор наводить десять класифікаційних ознак. Однак з даної класифікації випливає, що під терміном „автоматизована навчальна система” об'єднуються (за дидактичним завданням) лекційні, демонстраційні, консультаційні (довідкові), тренувальні, контролюючі, моделюючі системи.

В працях [1, 20] класифікаційними ознаками виступають принцип історичної появи та парадигма, покладена в основу розробки системи. На цьому шляху з'являються: (1) автоматизовані учбові курси (АУК, початок 60-х років); (2) автоматизовані навчаючі системи (від часткових реалізацій на малих і середніх ЕОМ до порівняно розвинених систем колективного користування і мереж ЕОМ учбового призначення, 60-ті – початок 70-х років, парадигма програмованого навчання); (3) інтелектуальні навчаючі системи, експертні системи, системи, розроблені в рамках експертної парадигми (початок 70-х – початок 90-х років); (4) сучасні інтелектуальні системи, побудовані на основі нової парадигми розвитку творчих здібностей учня за рахунок надання йому „дружнього” середовища для самостійної роботи.

Наведені приклади ілюструють неусталеність термінології та різноманітність підходів до класифікації. На жаль, можна констатувати, що часто (1) принципово різні за дидактичним призначенням і реалізацією педагогічні програмні засоби відносяться до однієї категорії, а (2) між спеціалістами-розробниками немає порозуміння. Зокрема, засоби, призначені тільки для ілюстрації явищ (процесів тощо) позиціонують як навчаючі.

Окремо необхідно відмітити проблему неусталеності української термінології. Більшість термінів є перекладом англійської мови російською. При цьому, в багатьох випадках, втрачається семантичний відтінок, а подальше калькування (вже російського терміну) українською мовою повністю спотворює семантику терміну.

Основні терміни та систематизація систем підтримки учбового процесу

Очевидно, що недопустимо навчати, використовуючи засоби навчання (якими б досконаліми вони не були), не враховуючи закономірності учбового процесу, його сутність. Тому розглядатимемо програмні засоби досягнення учбових цілей в співвідношенні з учбовим процесом (в контексті учбового процесу).

З позицій сучасних уявлень педагогічної психології і дидактики кінцевою метою навчання є не лише набуття знань, а й формування способу дій, що реалізується через уміння. Це реалізується лише в процесі учбової діяльності. Зважаючи на це, навчання трактується як процес управління пізнавальною діяльністю учнів. Такий процес реалізується в замкненій системі управління і має всі загальнозначущі характерні особливості даної системи: ціль навчання, об'єкт управління (учень), управляюча (керуюча) частина та канал зворотного зв'язку (зворотної передачі). Зауважимо, що в ролі управляючої частини може виступати викладач або комп'ютер з відповідним програмним забезпеченням.

Проілюструємо це структурною схемою (рис. 1), процеси в якій можна описати в термінах теорії автоматичного керування [24]. Стрілками на схемі показані інформаційні потоки.



Рис. 1. Структурна схема процесу навчання

Зазначимо, що рівень абстракції даної схеми прийнятний – у даному випадку ми використовуємо її для спрощення означення деяких понять і не вимагаємо від схеми уточнення всіх особливостей процесу навчання, що зумовлені властивостями його учасників – живими людьми.

Незважаючи на недосконалість реального учбового процесу, система, що описує його, є адаптивною, адже в раціонально організованому учбовому процесі завжди присутня адаптація. Канал адаптації позначено як блок з двома

входами, на які надходять відомості про цілі навчання (вхід системи) і про його результати (вихід системи) та двома виходами.

По прямому каналу передачі надходить не лише фактологічна (предметна) інформація, що підлягає засвоєнню, а й додаткова інформація, призначена для правильної організації самого процесу управління.

Канал зворотної передачі виконує педагогічні функції корекції. Коли канал діє самостійно і відстрочено в часі, він виконує функції педагогічного контролю. Такий „частковий” процес, коли цикл управління фактично розмикається, не можна назвати процесом навчання. Відстрочене надсилання інформації прямим каналом також не може трактуватися як навчання – це насправді тільки процес пред’явлення інформації.

Зазначимо, що поряд із зовнішнім циклом завжди існує „малий”, внутрішній цикл, коли процес замикання реалізується самим учнем, без виходу в зовнішній цикл (зрозуміло, що цикл формується каналами прямої та зворотної передачі). Необхідне обдумування (осмислення) сприйнятої інформації, котре відбувається шляхом внутрішньої постановки питань і відповідей на них – це завжди має місце. Без цього процесу засвоєння знань немає. Неперервна взаємодія обох циклів – обов’язкова особливість навчання.

Подальше уточнення (конкретизація) прийнятого трактування навчання і схеми, що його описує, виходить за рамки дослідження. Наведене уточнення, незважаючи на його абстрактність, все ж дозволяє правильно підійти до систематизації педагогічних програмних засобів та сприяє правильному виробленню термінології.

Зручно мати узагальнюючий термін, що характеризує довільні програмні засоби, які використовуються в учбових цілях. В якості такого може бути прийнятним термін „**системи підтримки учбового процесу**”.

Користуючись структурною схемою (рис. 1) можна виділити базовий підхід до систематизації (зазначимо, *не класифікації*), де критерієм виступатиме *дидактична спрямованість*. На цьому шляху отримуємо: (1) **інформаційні системи** – системи, що забезпечують канал прямої передачі; (2) **контролюючі системи** – системи, що забезпечують канал зворотної передачі; (3) **навчаючі системи** – системи, що забезпечують замкнутий цикл управління.

Для подальшої систематизації застосовуються системні ознаки нижчих категорій. Наприклад, в класі навчаючих систем розглядаючи:

- *цілі навчання*, можемо виділити (1) системи для формування навиків використання конкретних методів в практичній діяльності, отримання і систематизації різних фактичних даних та (2) системи навчання аналізу інформації, її систематизації, творчості;
- *наявність блоку адаптації*, можемо розподілити системи за ступенем інтелектуалізації та розрізнятимемо (1) адаптивні (інтелектуальні) навчаючі системи та (2) селективні навчаючі системи;

- предметну область, в якій функціонує система, можемо розглядати (1) системи, що функціонують в чітко формалізованій предметній області, та (2) системи, що функціонують в слабоформалізованій предметній області;
- об'єкт управління за кількістю користувачів, отримуємо розподіл систем на індивідуальні, локально-мережні, глобально-мережні;
- способи отримання знань, отримуємо розподіл систем на (1) декларативні та (2) процедурні.

Окремою групою необхідно виділити ознаки реалізації системи:

- за програмною реалізацією: (1) на основі прямого програмування на мові високого рівня; (2) за допомогою авторських інструментальних систем; (3) комбінованими методами; (4) CASE-методами;
- за технічною реалізацією: (1) традиційні; (2) мультимедійні; (3) гіпермедійні; (4) комбіновані.

Зрозуміло, що наведена систематизація не претендує на повноту, а є тільки першим кроком. Усі критерії подальшої систематизації будуть другорядними і набувають пріоритетності в залежності від прагматики – постановки задачі, що розглядається.

Зауважимо, що з огляду на технічну реалізацію систему підтримки учбового процесу треба розглядати як систему, яка своїм ядром має інформаційну систему.

Проектування систем підтримки учбового процесу

В процесі дослідження і розробки систем підтримки учбового процесу виникає ряд проблем: представлення та структуризації знань [21], розробки формального апарату створення і функціонування систем [17, 21], коректності [21, 23], адаптивності [16, 21] та ін. Визначальними тут будуть проблеми, що виникають на прагматичному рівні дослідження систем.

Створення систем підтримки учбового процесу необхідно вважати об'єктом складного багаторівневого процесу проектування. Зазначимо, що і сам процес проектування цих систем є об'єктом вивчення та автоматизації [21, 22].

Наразі існує два основні підходи до проектування систем підтримки учбового процесу – емпіричний та теоретичний. При емпіричному підході проектування спирається на інтуїцію та власний педагогічний досвід розробника. Так, Машбіц Є. І. відмічає, що проектування емпіричним шляхом іде від учбового предмета до учбових впливів і завершується програмною реалізацією [21].

Теоретичний підхід базується на відповідному науковому фундаменті та інтегрує в собі принципи загальної теорії систем, теорії управління, теорії інформації, дидактики та ін. Він, на відміну від емпіричного, передбачає всебічне глибоке обґрунтування структури, змісту системи і логічних взаємозв'язків у ній.

Проектування при теоретичному підході здійснюється від проектування учбового процесу, що розглядається в єдності учбової і навчаючої діяльності,

до технології і методики навчання, і лише після цього здійснюється машинна реалізація (К. Г. Кречетніков [18]).

Машбіц Є. І. виділяє наступні рівні проектування:

- *концептуальний*: визначаються (1) цілі учбової діяльності, створюється модель навчання, що включає в себе моделі навчаючої і учбової діяльності; (2) описуються психологічні механізми та принципи навчання, котрі повинні бути сформульовані у вигляді конкретних алгоритмів; (3) визначаються види пізнавальної активності учнів, що планується програмувати; (4) описуються основні компоненти учбової діяльності та того рівня, котрий має бути сформований в процесі навчання; (5) визначається спосіб управління, вид зворотного зв'язку, ступінь самостійності учнів, рівень допомоги;
- *технологічний*: описується проект системи у вигляді конкретних алгоритмів управління учбовою діяльністю, котрі переводяться на рівень технології навчання; технологія навчання при цьому розглядається як проекція теорії навчання на площину практичної діяльності вчителя і учнів;
- *операційний*: визначаються (1) розмір і ступінь фрагментів навчання, де необхідне чи доцільне використання комп'ютера; (2) ступінь індивідуалізації навчання; (3) необхідність передісторії навчання; (4) типи діалогу, котрі необхідно реалізувати в системі; (5) можливості і ступінь керування системою зі сторони учня; (6) типи управління в системі, (7) типи зворотного зв'язку; (8) склад основних підсистем і способів взаємодій між ними;
- *реалізації*, що має в свою чергу підрівень педагогічної діяльності (система навчаючих впливів, яка описується у вигляді сценаріїв) та підрівень програмної реалізації (поведінка системи під час навчання) [21].

Розробники інформаційних систем, як правило, виділяють (1) концептуальну фазу, фази (2) системного проектування (розробка технічної пропозиції та проектування) та (3) реалізації (розробка та введення системи в експлуатацію).

Проектування програмного забезпечення як процес складається з двох частин: проектування середовища використання програмного забезпечення (в нашому випадку – проектування учбового процесу) та проектування самого програмного забезпечення. Розглянемо ці частини більш докладно.

Проектування учбового процесу

Проектування учбового процесу теоретичною основою має теорії навчання та теорії учбового процесу, котрі разом з тим є теоретичним базисом формування сучасної парадигми освіти і адекватних архітектур програмного забезпечення.

Огляд даних теорій розкрито в [2]. Але для конкретного втілення у відповідних програмно-апаратних системах навчання всі вони занадто невизначені і не можуть бути основою для постановки задачі. Тому для обґрунтування тих чи інших методів і засобів використовують так звані *моделі проектування учбового процесу*. Ці моделі можуть бути визначені як візуалізовані і деталізовані форми представлення: (1) учбового процесу, його

етапів і основних елементів; (2) структури і взаємозв'язків між елементами; (3) методів кількісної і якісної репрезентації елементів; (4) елементів в структурах даних; (5) учбового процесу та його етапів в процедурних формах їх реалізації. Моделі проектування учбового процесу в достатній мірі допускають безпосередню алгоритмізацію, що гарантує можливість їх втілення в програмних системах.

На даний час нараховують більше сотні різних моделей проектування учбового процесу, причому кожна модель має свій власний набір елементів, котрі не обов'язково використовуються в інших моделях. Причиною такого становища є перехід від універсальності моделей до конкретики застосування додатків, завдяки чому моделі проектування учбового процесу фактично стають прототипами постановок задач організації, забезпечення і супроводу учбового процесу на базі інформаційних і комунікаційних технологій.

Ранні моделі проектування учбового процесу (початок 90-х років), як і теорії навчання та учбового процесу, будувалися універсальними і відображали максимальне число аспектів учбового процесу і етапів його проектування; внаслідок цього моделі як прототипи ставали громіздкими, а їх застосування суперечило конкретиці застосування.

Дослідження, пов'язані з типізацією додатків у галузі реструктуризації організаційного управління і управління знаннями, змінили постановку задач навчання, внаслідок чого моделі стали більш диференційованими, ціле- і проблемно-орієнтованими.

Найбільш відомими моделями проектування учбового процесу є ADDIE, Dick-Carey, Kemp, ICARE та ASSURE, котрі акцентують увагу на трьох основних аспектах проектування учбового процесу: (1) аналізі передумов, (2) стратегічному розвитку проектування і (3) оцінці результатів проектування.

Незважаючи на деякі відмінності, що існують між переліченими моделями, можна виділити спільні для багатьох моделей етапи – аналіз, проектування, розвиток, застосування і оцінку учбового процесу.

Аналіз основних сучасних моделей учбового процесу ADDIE, Dick-Carey, Kemp ілюструє зміщення акцентів з рівномірного розподілу діяльності між етапами (ADDIE-модель) на етап аналізу в Dick-Carey-моделі чи на етап управління учбовим процесом в Kemp-моделі [2].

На сучасному етапі розробка моделі учбового процесу, як прототипу задач створення програмного забезпечення для організації і підтримки учбового процесу, є синтезом чи модифікаціями основних моделей учбового процесу, співвідносними з конкретними цілями, задачами, змістом, умовами навчання.

Учбові цілі (тобто цілі, що повинні бути досягнуті в результаті навчання) є початковим системоутворюючим пунктом проектування системи підтримки учбового процесу.

Опис цілей повинен відповідати вимогам діагностичності та верифікованості. Ці вимоги дотримуються при точному визначенні цілей, співвідношенні окремих їх компонент з певними проявами, котрі піддаються прямим чи непрямим вимірам

будь-якою шкалою оцінки. Підхід до опису та задання цілей повинен відповідати тенденціям технологізації, стандартизації та формалізації.

Побудова системи цілей – таксономії, основою якої є їх природний взаємозв'язок, вперше була вирішена в роботах американського вченого Б. Блума. Згідно таксономії Блума виділяється три складові множини цілей: когнітивна (пізнавальна), моральна і психомоторна [27]. Найважливішу для процесу навчання когнітивну ціль складають категорії (знання, розуміння, застосування, аналіз, синтез, оцінка), котрі утворюють ієрархічну структуру. Використання чіткої, впорядкованої ієрархічної класифікації цілей необхідне для виділення пріоритетних задач та створення еталонів оцінки результатів навчання. Для забезпечення відтворення учбового процесу необхідне чітке визначення критеріїв досягнення цілей різних рівнів (забезпечення ідентифікованих цілей).

Розроблені спеціальні алгоритми конкретизації учбових цілей на основі педагогічної таксономії. Відповідно даним алгоритмам від загальних цілей методом послідовної редукції переходять до конкретних, сформульованих як бажаний результат певного періоду навчання. Потім формулюють максимально чіткий опис ідентифікованої цілі, використовуючи лише визначені дієслова.

Отже, цілі навчання повинні бути представлені у вигляді ієрархічної системи: від кінцевих цілей до цілей використання окремих учбових дисциплін, що містять розділи та теми.

В роботах багатьох дослідників система цілей є частиною моделі учня [1, 5].

Модель учня, модель предметної області

Найбільш повно описана модель учня Атановим Г. А. [5]. Він розглядає структуровану модель учня, яка складається з:

- *моделі поведінки* (знання про те, який є той, хто навчається), котра має локальний, поточний, та глобальний рівні;
- *нормативної моделі* (яким ми хочемо бачити того, хто навчається);
- *специфічної моделі*, тобто моделі помилок (яким ми можемо побачити того, хто навчається).

Частину нормативної моделі, яка визначає предметні знання (знання з учбових предметів), автор називає *предметною моделлю* учня. Предметна модель визначає змістовну сторону навчання предмету. В інженерії знань такі знання називають експертними або моделлю предметної області.

Предметна модель учня виділяє з усієї множини предметних областей учбові області, отже це *модель учбової предметної області*, або модель учбового предмету. Автор пропонує п'ятикомпонентну предметну модель учня. Декларативні знання (твердження про властивості об'єктів предметної області і відношень між ними) визначають змістовну, чи семантичну, частину предметних знань і породжують *семантичну предметну модель* учня. Процедурні знання описують порядок і характер перетворення об'єктів предметної області та складають *процедурну предметну модель* учня. Для опису переліку умінь, котрі мають бути сформовані в процесі навчання, призначена

операційна предметна модель учня. Однією із задач при побудові предметної моделі є структуризація предметних знань. Це питання є предметом багатьох досліджень [9, 16]. Спрощено, це перелік тем для вивчення, для опису якого призначена *тематична предметна модель*. Перелік функціональних рубрик, що визначає функціональні знання, складає *функціональну предметну модель учня*.

Деякі розробники відокремлюють модель предметної області і модель учня.

Побудова адекватної моделі учня є однією з задач розробки адаптивних систем підтримки учбового процесу.

Методологія і технологія розробки програмного забезпечення систем підтримки учбового процесу

Традиційне (неавтоматизоване) проектування програмних систем породжує дві глобальні проблеми: (1) відсутність цілісного уявлення про майбутню систему на перших етапах проектування, що спричинює потенційну необхідність перепроєктування на стадіях упровадження та експлуатації системи; та (2) необхідність узгодження проектних рішень, які виконуються різними спеціалістами. Для подолання зазначених проблем у межах нових інформаційних технологій створено CASE-технологію проектування, яка стає все більш поширеною. Досить грубо, CASE-технологія це сукупність методологій аналізу, проектування, розробки та супроводу складних систем програмного забезпечення, котра підтримується комплексом засобів автоматизації. Методологія CASE-технології ґрунтується на спадному підході до проектування і дає змогу стежити за усіма етапами життєвого циклу системи чи її окремих задач. Сутність спадного підходу полягає в тому, що в міру реалізації системи її характеристики конкретизуються все більше й більше. Принциповою особливістю такої методології є наявність наочних моделей для подання компонентів об'єкта управління і самої системи, а також відображення проектних рішень. Такі наочні моделі та нотації дають змогу однозначно інтерпретувати спільні проектні рішення різними учасниками процесу проектування.

На даний час все більшої популярності набувають формальні методи – математичні формалізми для специфікації, розробки та верифікації програмного забезпечення, котрі (формалізми) підтримують увесь життєвий цикл програм. Застосування формальних методів забезпечує однозначність, повноту та внутрішню узгодженість (несуперечливість) відповідних описів системи.

Серед формальних методів можна назвати:

Структурні методології, яскравими представниками яких є методології Гейна-Сарсона та Йодана/Де Марко. Метою цих методологій є перетворення загальних, неявних знань про вимоги до системи у точні (наскільки це можливо) визначення. Головне призначення даних методологій створення документів функціональних вимог, базованих на графіці. Методології підтримуються традиційними спадними методами проектування специфікацій і

забезпечують один з кращих способів зв'язку між аналітиками, розробниками і користувачами системи за рахунок інтеграції таких засобів: діаграми потоку даних (DFD), словників даних та мініспецифікацій обробки, котрі описують DFD-процеси. Необхідно також відмітити методологію SADT (зокрема її підмножину IDEF0); у межах SADT система специфікується у вигляді функціональної, інформаційної та динамічної моделей. Ці моделі відображають відповідно (1) функції описуваної системи, (2) інформаційні зв'язки всередині неї та (3) динаміку роботи системи у часі. Для опису функціональної моделі використовується мова структурного аналізу та конструювання, для опису інформаційної моделі – високорівнева мова моделей даних „сутність – зв'язок”, а для опису динамічної моделі – мова опису систем і мереж масового обслуговування. Зазначимо, що методологія SADT успішно працює лише для реорганізації добре специфікованих і стандартизованих бізнес-процесів, а для задач реорганізації інформації та відношень поза конкуренцією є DFD-орієнтовані методології [25].

Об'єктно-орієнтовані методики, серед яких необхідно відмітити мови Booch (етапи проектування та конструювання моделі), OOSE (аналіз, формування вимог та високорівневе проектування), OMT (аналіз та розробка інформаційних систем, що орієнтовані на обробку великих об'ємів даних). Їх автори Грейди Буч, Айвар Джекобсон та Джеймс Рамбо відповідно об'єднали зусилля і створили уніфіковану мову UML. На даний момент UML – важливий фактичний і юридичний стандарт для об'єктно-орієнтованого моделювання [6].

Слід зазначити, що об'єктно-орієнтований підхід є одночасно і структурним, адже задовольняє основним критеріям – розбиття на „чорні ящики”, ієрархія, графічна нотація. Більше того, зараз чітко простежується тенденція використання в об'єктно-орієнтованому підході базових для класичного структурного підходу нотацій (діаграми потоків даних, діаграми „сутність – зв'язок”, діаграми змін станів), відбувається „поглинання” структурного підходу об'єктно-орієнтованим [25].

Дані методи, озброєні програмними комплексами повноцінної підтримки, є потужними інструментами побудови програмного забезпечення систем підтримки учбового процесу.

Зазначимо, що проектування середовища використання програмного забезпечення залишається прерогативою “ручного” проектування, тобто суто творчою роботою; проектування ж самого програмного забезпечення поступово візьмуть на себе CASE-засоби. Наявність об'єктно-орієнтованого зв'язку між середовищем і програмним забезпеченням – необхідна умова якості та ефективності останнього. Для забезпечення цієї цілісності обов'язково повинно бути проведено проектування середовища використання з достатньою кількістю декомпозицій.

Висновки

Застосування комп'ютерних засобів навчання в учбовому процесі породжує безліч проблем, в першу чергу, проблеми термінології та

систематизації. Вирішення останніх проблем дозволяє оцінити можливості, насамперед дидактичні, комп'ютерних засобів навчання, внести логіку в їх побудову та застосування. Ефективність застосування комп'ютерних засобів навчання визначається в першу чергу рівнем адекватності учбовому процесу, котрий закладається при проектуванні засобів навчання.

Якість комп'ютерного засобу навчання (системи підтримки учбового процесу) залежить від ступеню обґрунтування при проектуванні трьох основних складових: принципів організації учбового процесу, цілей навчання та змісту навчання. Важливим компонентом є вибір методологій та інструменту побудови цих систем.

Робота виконана за фінансової підтримки Державного Фонду Фундаментальних досліджень України (проект 01.07/105).

Література

1. Агеев В. Н. Электронные учебники и автоматизированные обучающие системы: Лекция-доклад. – М.: Исследовательский центр проблем качества подготовки специалистов, 2001. – 80 с.
2. Азарова О. В. Современные теории обучения и учебного процесса // УсиМ. – 2003. – №1. – С. 63-70.
3. Александров Г. Н. Программированное обучение и новые информационные технологии обучения // Информатика и образование. – 1993. – №5. – С. 7-19.
4. Александров Г. Н., Иванкова Н. И., Тимошкина Н. В., Чшиева Т. Л. Педагогические системы, педагогические процессы и педагогические технологии в современном педагогическом знании // Educational Technology & Society. – 2000. – 3(2). – Р. 134-149.
5. Атанов Г. А. Моделирование предметной области или предметная модель обучаемого // Educational Technology & Society. – 2001. – 4(1). – Р. 111-124.
6. Буч Г., Рамбо Д., Джекобсон А. UML. Руководство пользователя: Пер. с англ. – М.: ДМК, 2000. – 432 с.
7. Гиркин И. В. Новые подходы к организации учебного процесса с использованием современных компьютерных технологий // Информационные технологии. – 1998. – №6. – С. 44-47.
8. Гончарова О. М. Класифікація сучасних автоматизованих навчальних систем // Комп'ютерно-орієнтовані системи навчання. Зб. наук. праць. – К: НПУ ім. М. П. Драгоманова, 2001. – Вип. 3. – С. 195-197.
9. Гусарова Н. Ф. Структурирование учебной информации при ее компьютерном представлении // Телекоммуникации и информатизация образования. – 2002. – №2. – С. 21-35.
10. Демушкин А. С., Кириллов А. И., Сливина Н. А., Чубров Е. В., Кривошеев А. О., Фомин С. С. Компьютерные обучающие программы // Информатика и образование. – 1995. – №3. – С. 15-22.
11. Домрачев В. Г., Ретинская И. В. О классификации компьютерных образовательных информационных технологий // Информационные технологии. – 1996. – № 2. – С. 10-14.

12. Жалдак М. І. Педагогічний потенціал комп'ютерно-орієнтованих систем навчання математики // Комп'ютерно-орієнтовані системи навчання. Зб. Наук. праць. – К.: НПУ ім. М. П. Драгоманова. – 2003. – Вип. 7. – С. 3-16.
13. Калянов Г. Н. CASE-технологии. Консалтинг в автоматизации бизнес-процессов. – М.: Горячая линия–Телеком, 2002. – 320 с.
14. Кирилова Г. И. Информационные технологии и компьютерные средства в образовании // Educational Technology & Society. – 2000. – 4(1). – P. 125-136.
15. Козлакова Г. О. Теоретичні і методичні умови застосування інформаційних технологій у вищій технічній освіті. – К.: Інститут змісту і методів навчання, Національний технічний ун-т України „Київський політ. інститут”, 1997. – 177 с.
16. Колос В. В. Концепция создания адаптивных обучающих систем на базе учебных структур знаний. – К., 1992. – 15 с.
17. Коростіль Ю., Басараб Ю. Особливості та застосування методів формалізації компонентних систем // Вісник державного університету „Львівська політехніка”. Комп'ютерна інженерія та інформаційні технології. – Львів, 1999. – №386. – С. 213-217.
18. Кречетников К. Г. Проектирование средств информационных технологий обучения // Educational Technology & Society. – 2002. – 5(1). – P. 222-243.
19. Кривошеев А. О. Разработка и использование компьютерных обучающих программ // Информационные технологии. – 1996. – №2. – С. 14-18.
20. Латышев В. Л. Компьютерная технология обучения: Учебное пособие. – М.: Изд-во МАИ, 1992. – 441 с.
21. Машбиц Е. И. Психолого-педагогические проблемы компьютеризации обучения. – М.: Педагогика, 1988. – 191 с.
22. Нуриев Н. К. Формализация проектирования программного обеспечения и ее использование в учебном процессе / Educational Technology & Society. – 2002. – 5(4). – P. 189-213.
23. Панченко Т. В. Використання формальних специфікацій для розробки програмних систем // Вісник Київського університету. Серія: фізико-математичні науки. – 2002. – №1. – С. 245-256.
24. Попович М. Г., Ковальчук О. В. Теорія автоматичного керування: Підр. – К.: Либідь, 1997. – 544 с.
25. Проектування інформаційних систем: Посібник. – К.: Видавничий центр „Академія”, 2002. – 488 с.
26. Филатов О. К. Основные направления информатизации современных технологий обучения // Информатика и образование. – 1999. – №2. – С. 2-6.
27. Bloom B. S. Taxonomy of Educational objectives; The Classification of Educational Goals: Hand book №1, Cognitive Domain. – N.Y.: Me Kay, 1956. – 207 p.

Надійшла до редакції

УДК 518:517. 944/947

Сергій О. Войцеховський*,
Володимир С. Саженьюк,
Павло О. Сущенко

**Оцінка швидкості збіжності
методу сіток для варіаційних
еліптичних нерівностей другого
порядку з обмеженням усередині
області**

Використовуючи методи штрафу та сіток, побудовано різницеву схему для варіаційних еліптичних нерівностей другого порядку в прямокутнику з обмеженням усередині області, яка має перший порядок точності в нормі $W_2^1(\Omega)$.

Ключові слова: варіаційна нерівність, метод штрафу, різницева схема.

Sergiy O. Voitsekhovsky*,
Vladimir S. Sazhenyuk,
Pavlo O. Suschenko

**Estimate of velocity of convergence
for method of grids in variational
elliptic inequalities of second order
with restriction inside the domain**

Using methods of penalty and grids, difference scheme for variational elliptic inequalities of second order in rectangle with restriction inside the domain was built. First order of accuracy in norm $W_2^1(\Omega)$ was proved.

Key words: variational inequality, method of penalty, difference scheme.

*E-mail: moe@unikyb.kiev.ua

Варіаційні нерівності є важливим класом моделей, що застосовуються при розв'язуванні багатьох практичних задач [1,2,3]. В той же час вони є більш складними з точки зору побудови для їх розв'язування чисельних алгоритмів, ніж крайові задачі. Це пов'язано з наявністю додаткових обмежень на розв'язок.

Таким чином, виникає ситуація, коли необхідно знайти функцію, що є розв'язком крайової задачі для диференційного оператора, яка належить деякій підмножині функціонального простору. Це вимагає застосування, окрім методів сіток або скінченних елементів, методу штрафу. При такому підході важливо встановити оцінки швидкості збіжності та оптимальне співвідношення між відповідними параметрами ε і h методів штрафу та сіток або скінченних елементів. Ці питання для комбінації методів штрафу та сіток стосовно застосування до варіаційних нерівностей з обмеженням усередині області розглядались у роботі [4].

В цій статті досліджуються методи штрафу і сіток при їх застосуванні до варіаційних нерівностей з обмеженням усередині області з оператором більш загального вигляду. Отримані оцінки швидкості

збіжності методів штрафу та сіток. У статті доведено теореми, з яких випливає, що різницева схема, яка побудована на основі методу штрафу, має перший порядок точності в нормі $W_2^1(\Omega)$, коли $\varepsilon = h^2$.

I. Нехай Ω – прямокутник з границею Γ ,

$$a(v_1, v_2) = \sum_{i,j=1}^2 \int_{\Omega} a_{ij} \frac{\partial v_1}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial v_2}{\partial x_j} dx_1 dx_2 + \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} b_i \frac{\partial v_1}{\partial x_i} \cdot v_2 dx_1 dx_2 + \int_{\Omega} q(x_1, x_2) v_1 v_2 dx_1 dx_2, \quad (1)$$

$$(v_1, v_2) = \int_{\Omega} v_1 v_2 dx_1 dx_2, \quad \forall v_1, v_2 \in W_2^1(\Omega),$$

$$q(x_1, x_2) \geq q_0 > 0, \quad a_{11} > 0, \quad a_{12}^2 - a_{11} a_{22} < 0, \quad a_{12} = a_{21}, \quad b_0 = \max(|b_1|, |b_2|),$$

$$v = a_0 \left(1 - \frac{|a_{12}|}{\sqrt{a_{11}} \sqrt{a_{22}}}\right), \quad a_0 = \min(a_{11}, a_{22}), \quad q_0 - \frac{b_0^2}{v} \geq 0, \quad q(x) \in L_{\infty}(\Omega). \quad (2)$$

Легко переконатися, що при виконанні умов (2) білінійна форма $a(v_1, v_2)$ є коерциативною:

$$\exists \mu > 0 : a(v, v) \geq \mu \|v\|_{W_2^1(\Omega)}^2, \quad \forall v \in W_2^1(\Omega). \quad (3)$$

Крім того, $\exists M_1 > 0$, таке що

$$|a(v_1, v_2)| \leq M_1 \|v_1\|_{W_2^1(\Omega)} \cdot \|v_2\|_{W_2^1(\Omega)}, \quad \forall v_1, v_2 \in W_2^1(\Omega), \quad (4)$$

(тут і надалі через M_i будемо позначати додатні сталі, які не залежать від ε та h).

Розглянемо наступну задачу:
знайти функцію $u \in K$, таку, що:

$$a(u, v - u) \geq (f, v - u), \quad \forall v \in K, \quad (5)$$

де $f \in L_2(\Omega)$, $K = \{v \mid v \in W_2^1(\Omega), v \geq 0 \text{ майже всюди в } \Omega\}$.

Задача (5), при виконанні умов (2) має єдиний розв'язок $u \in W_{2,0}^2(\Omega)$ [1, гл.3, §1].

Варіаційній нерівності (5) поставимо у відповідність наступну задачу зі штрафом:

Знайти $u_{\varepsilon} \in W_2^1(\Omega)$ таку, що

$$a(u_{\varepsilon}, v) - \frac{1}{\varepsilon} (u_{\varepsilon}^-, v) = (f, v), \quad \forall v \in W_2^1(\Omega), \quad (6)$$

де

$$u_{\varepsilon}^- = \begin{cases} -u_{\varepsilon}, & u_{\varepsilon} < 0 \\ 0, & u_{\varepsilon} \geq 0 \end{cases}, \quad u_{\varepsilon}^- \in W_2^1(\Omega).$$

Задача (6) при умовах (2)-(4) має єдиний розв'язок, що належить $W_{2,0}^2(\Omega)$ (див. [1], [2]). Крім того, [1] $u_{\varepsilon} \downarrow u$.

Оцінку швидкості збіжності встановлює наступна

Теорема 1. Розв'язок задачі (6) збігається при $\varepsilon \rightarrow 0$ до розв'язку варіаційної нерівності (5), при чому має місце оцінка

$$\|u - u_\varepsilon\|_{W_2^1(\Omega)} \leq M_2 \sqrt{\varepsilon} \|f\|_{L_2(\Omega)}. \quad (7)$$

Доведення теореми аналогічне доведенню відповідної теореми з роботи [4].

II. Задачу зі штрафом перепишемо у еквівалентному вигляді:

$$-\sum_{i,j=1}^2 a_{ij} \frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^2 b_i \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_i} + q(x)u_\varepsilon + g_\varepsilon(u_\varepsilon) = f(x), \quad x \in \Omega, \quad (8)$$

$$u_\varepsilon(x) = 0, \quad x \in \Gamma,$$

де

$$g_\varepsilon(u_\varepsilon) = -\frac{1}{\varepsilon} u_\varepsilon.$$

Для функції $g_\varepsilon(x)$ виконються умови:

$$[g_\varepsilon(v_1) - g_\varepsilon(v_2)](v_1 - v_2) \geq 0, \quad g_\varepsilon(v_1) - g_\varepsilon(v_2) \leq \frac{1}{\varepsilon} v_1 - v_2, \quad \forall v_1, v_2 \in W_2^1(\Omega). \quad (9)$$

У прямокутнику $\bar{\Omega}$ введемо рівномірну сітку $\omega = \omega \cup \gamma$, де ω - множина внутрішніх, а γ - множина граничних вузлів відповідно.

Апроксимуємо задачу (8) різницевою схемою:

$$-\sum_{i,j=1}^2 a_{ij} y_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^2 b_i y_{x_i} + T_1 T_2(q) y + T_1 T_2 g_\varepsilon(\tilde{y}) = T_1 T_2(f), \quad x \in \omega, \quad (10)$$

$$y(x) = 0, \quad x \in \gamma,$$

де [5]

$$T_\alpha v(x) = \int_0^1 (1-t) v(x_1 + (2-\alpha)th_1, x_2 + (\alpha-1)th_2) dt, \quad \alpha = 1, 2,$$

$\tilde{y}(x)$ - полілінійне поповнення сіткової функції $y(x)$.

Використовуючи умови (2)-(4) та (9), можна отримати апріорну оцінку

$$y|_{W_2^1(\omega)} \leq M_3 \|f\|_{L_2(\Omega)}. \quad (11)$$

З оцінки (11) випливає, що існує єдиний розв'язок задачі (10).

Встановимо оцінку швидкості збіжності розв'язку задачі (10) до розв'язку варіаційної нерівності (5). Для цього спочатку знайдемо оцінку швидкості збіжності розв'язку різницевої схеми (10) до розв'язку задачі зі штрафом (8).

Лема. Розв'язок різницевої задачі (10) збігається при $h \rightarrow 0$ до розв'язку задачі (8), при чому має місце оцінка швидкості збіжності:

$$\|y - u_\varepsilon\|_{W_2^1(\omega)} \leq M_4 \left(h + \frac{h^2}{\sqrt{\varepsilon}}\right) \|f\|_{L_2(\Omega)}. \quad (12)$$

Доведення. Похибка $z = y - u_\varepsilon$ є розв'язком наступної задачі:

$$\begin{aligned} - \sum_{i,j=1}^2 a_{ij} z_{\tilde{x}_i \tilde{x}_j} + \sum_{i=1}^2 b_i z_{\tilde{x}_i} + T_1 T_2(q) z + T_1 T_2 g_\varepsilon(\tilde{y}) - T_1 T_2 g_\varepsilon(u_\varepsilon) = \\ = - \sum_{i,j=1}^2 a_{ij} \eta_{\tilde{x}_i \tilde{x}_j}^{(ij)} + \sum_{i=1}^2 b_i \eta^{(i)} + \eta^{(3)} + \eta^{(4)}, \\ z(x) = 0, x \in \gamma, \end{aligned} \quad (13)$$

де

$$\eta^{(ij)} = P_i T_{3-i} \left(\frac{\partial u_\varepsilon(\cdot)}{\partial x_j} - u_{\tilde{x}_j} \right), i, j = 1, 2, \quad \eta^{(i)} = T_i T_{3-i} \left(\frac{\partial u_\varepsilon(\cdot)}{\partial x_i} - u_{\tilde{x}_i} \right), i = 1, 2,$$

$$\eta^{(3)} = T_1 T_2(q u_\varepsilon) - T_1 T_2(q) T_1 T_2(u_\varepsilon), \quad \eta^{(4)} = T_1 T_2(q) (T_1 T_2(u_\varepsilon) - u_\varepsilon),$$

$$P_\alpha u_\varepsilon(x) = \int_{-1}^0 u_\varepsilon(x_1 + (2-\alpha)th_1, x_2 + (\alpha-1)th_2) dt, \quad \alpha = 1, 2.$$

Із співвідношення (13) після нескладних перетворень знаходимо:

$$\|z\|_{W_2^1(\omega)}^2 + (T_1 T_2 g_\varepsilon(\tilde{y}) - T_1 T_2 g_\varepsilon(u_\varepsilon(\cdot)), z) \leq M_5 \left(\sum_{i,j=1}^2 \|\eta^{(ij)}\|_{L_2(\omega)}^2 + \sum_{i=1}^4 \|\eta^{(i)}\|_{L_2(\omega)}^2 \right).$$

Очевидно, що

$$\begin{aligned} (T_1 T_2 g_\varepsilon(\tilde{y}) - T_1 T_2 g_\varepsilon(u_\varepsilon), z) &= T_1 T_2 (g_\varepsilon(\tilde{y}) - g_\varepsilon(u_\varepsilon), y - u_\varepsilon) = \\ &= \int_{\Omega} (g_\varepsilon(\tilde{y}) - g_\varepsilon(u_\varepsilon)) (\tilde{y} - \tilde{u}_\varepsilon) dx = \\ &= \int_{\Omega} (g_\varepsilon(\tilde{y}) - g_\varepsilon(u_\varepsilon)) (\tilde{y} - u_\varepsilon) dx + \int_{\Omega} (g_\varepsilon(\tilde{y}) - g_\varepsilon(u_\varepsilon)) (u_\varepsilon - \tilde{u}_\varepsilon) dx \geq \\ &\geq \frac{1}{\varepsilon} \|(\tilde{y})^- - u_\varepsilon^-\|_{L_2(\Omega)}^2 + \int_{\Omega} (g_\varepsilon(\tilde{y}) - g_\varepsilon(u_\varepsilon)) (u_\varepsilon - \tilde{u}_\varepsilon) dx \end{aligned}$$

Враховуючи це, після застосування нерівності Коші-Буняковського та ε -нерівності, отримаємо оцінку

$$\|z\|_{W_2^1(\omega)}^2 \leq M_6 \left(\sum_{i,j=1}^2 \|\eta^{(ij)}\|_{L_2(\omega)}^2 + \sum_{i=1}^4 \|\eta^{(i)}\|_{L_2(\omega)}^2 + \frac{1}{\varepsilon} \|u_\varepsilon - \tilde{u}_\varepsilon\|_{L_2(\Omega)}^2 \right) \quad (14)$$

Для функціоналів у правій частині останньої нерівності мають місце оцінки

$$\begin{aligned} \|\eta^{(ij)}\|_{L_2(\omega)} &\leq M_7 h \|u_\varepsilon\|_{W_2^2(\Omega)}, i, j = 1, 2, \quad \|\eta^{(i)}\|_{L_2(\omega)} \leq M_8 h \|u_\varepsilon\|_{W_2^2(\Omega)}, i = 1, 2, 3, \\ \|\eta^{(4)}\|_{L_2(\omega)} &\leq M_9 h^2 \|u_\varepsilon\|_{W_2^2(\Omega)}, \quad \|u_\varepsilon - \tilde{u}_\varepsilon\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq M_{10} h^2 \|u_\varepsilon\|_{W_2^2(\Omega)}, \quad h = \max(h_1, h_2). \end{aligned}$$

Підставляючи останні оцінки в (14) та враховуючи, що [3]

$$\|u_\varepsilon\|_{W_2^2(\Omega)} \leq M_{11} \|f\|_{L_2(\Omega)}, \text{ знаходимо}$$

$$\|z\|_{H^1_2(\Omega)} \leq M_4 \left(h + \frac{h^2}{\sqrt{\varepsilon}}\right) \|f\|_{L_2(\Omega)} \quad (15)$$

Лему доведено.

Для функції $(\tilde{y} - u)$, використовуючи (7) і (12) встановлюється оцінка

$$\|\tilde{y} - u\|_{H^1_2(\Omega)} \leq M_{12} \left(h + \frac{h^2}{\sqrt{\varepsilon}} + \sqrt{\varepsilon}\right) \|f\|_{L_2(\Omega)}. \quad (16)$$

Таким чином справедлива

Теорема 2. Розв'язок різницевої схеми (10) збігається при $h \rightarrow 0$ ($\varepsilon = h^2$) до розв'язку варіаційної нерівності (5). При чому має місце оцінка

$$\|\tilde{y} - u\|_{H^1_2(\Omega)} \leq M_{13} h \|f\|_{L_2(\Omega)}. \quad (17)$$

Доведення. В нерівності (16) покладемо $\varepsilon = h^2$ і отримаємо (17).

Теорему доведено.

Висновок. Досліджений метод комбінації методів штрафу та сіток може бути застосований для знаходження наближених розв'язків варіаційних нерівностей, які є моделями широкого класу практичних задач.

Література.

1. Бенсусан А., Лионс Ж.-Л. Импульсное управление и квазивариационные неравенства: Пер. с франц. – М.: Наука, 1987. – 600с.
2. Bensoussan A., Lions J. L. Applications des equations variationnelles en controle stochastique. – Paris: Dunod, 1978. – 380p.
3. Лионс Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач: Пер. с франц. – М.: Мир, 1987. – 600с.
4. Войцеховский С.А., Гаврилюк И.П., Саженок В.С. Оценка скорости сходимости разностных схем для вариационных эллиптических неравенств второго порядка в произвольной области. // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1986. – Т.26. – С. 827-836.
5. Самарский А. А., Лазаров Р. Д., Макаров В. Л. Разностные схемы для дифференциальных уравнений с обобщенными решениями. – М.: Высшая школа, 1987. – 296с.
6. Сьярле Ф. Метод конечных элементов для эллиптических задач: Пер. с англ. – М.: Мир, 1980. – 512с.

Надійшла до редакції 21.02.2005

УДК 519.86

Андрій В. Григоров,
Богдана В. Дідковська

Мінімаксні методи оцінювання та прогнозування в моделі експорту України до Європи.

Розглядається задача прогнозування економічних показників експорту України до Європи із застосуванням багатофакторних моделей та рекурентних алгоритмів оцінювання параметрів лінійної регресійної моделі. Запропоновано математичний алгоритм розв'язку задачі та проведено імітаційне моделювання для оцінки похибки прогнозування.

Ключові слова: прогнозування, багатофакторна модель, регресійної модель.

Andrij V. Grigorov,
Bogdana V. Didkovska

Minimax methods of estimation and forecasting in model of export of Ukraine in Europe.

The task of forecasting of structure of export of Ukraine in Europe with application of multifactor models and recurrent algorithms of estimation of parameters of regression model is considered. The mathematical algorithm of the solution of a task is offered and the imitating modeling for an estimation of an error forecasting is carried out.

Key words: forecasting, multifactor model, regression model.

Метою даної роботи є створення моделі, яка дозволила б отримати якісний прогноз економічних показників, що описують структуру українського експорту до Європейських країн. На основі інформації [6], були отримані часові ряди з квартальною періодичністю за період з 1996 по 2004 рік, які були використані для побудови обґрунтованої моделі структури українського експорту. Весь обсяг українського експорту товарів до країн Європи був дезагрегований на 11 товарних груп згідно класифікації, прийнятої Держкомстатом

В роботі [4] приводяться рівняння моделі експорту України до Європи, які в загальному випадку мають нелінійний характер, але в подальшому обмежимо дослідження випадком лінійної регресійної багатофакторної моделі наступного вигляду:

$$y_i(k) = b_{i0} + b_{i1}F_{1i}(k) + \dots + b_{im}F_{mi}(k) + d_{ki}\bar{f}_i(k) + f_i(k) \quad (1)$$

де $y_i(k)$ - показник i -го експорту за k -й період часу, b_{i0} - показник i -го експорту при умові, що фактори мають нульові значення; $b_{i1}, \dots, b_{im}$ - коефіцієнти чутливості i -го експорту до зміни факторів; $F_{1i}(k), \dots, F_{mi}(k)$ - показники експорту (фактори), що впливають на показник i -го експорту, d_{ki} -

бінарна змінна, яка отримує значення "1" при наявності певної якості і значення "0" при її відсутності, $\bar{f}_i(k)$ – фіктивна змінна.

Спираючись на вищесказане багатофакторну модель можна записати у вигляді векторно-матричного рівняння

$$y_i(k) = H_i(k)\alpha_i + f_i(k), \quad k = 1, \dots, N, \quad (2)$$

де $H_i(k) = (1, F_{i1}(k), \dots, F_{im}(k))$ – $1 \times (m+1)$ – заданий вектор-рядок, $\alpha_i = \text{col}(b_{i0}, b_{i1}, \dots, b_{im})$ – $(m+1) \times 1$ – вектор-стовпець невідомих коефіцієнтів чутливості i -го експорту до відповідних факторів, N – кількість періодів часу спостереження.

Відносно вектора невідомих параметрів α_i та збурень $f_i(k)$ можливі наступні інформаційні ситуації:

1. Збурення вважаються стохастичними процесами з відомими статистичними характеристиками

$$\begin{aligned} Mf_i(k) &= 0, \quad Mf_i(k)f_i(j) = q_i^2(k)\delta(k-j), \quad k = 1, \dots, N, \\ M\alpha_i &= 0, \quad M\alpha_i\alpha_i^T = Q_{0i}^{-1}, \end{aligned} \quad (3)$$

де $q_i^2(k)$, Q_{0i}^{-1} – відомі дисперсія та коваріаційна матриця, δ – символ Кронекера.

2. Збурення та параметри вважаються стохастичними процесами і випадковими величинами з невідомими статистичними характеристиками, відносно яких задані квадратичні обмеження

$$M\alpha_i = 0, \quad Mf_i(k) = 0, \quad M\alpha_i^T Q_{0i} \alpha_i + \sum_{k=1}^N Mf_i^2(k)q_i^2(k) \leq 1, \quad (4)$$

де $q_i^2(k)$, Q_{0i} – задані вагова функція та матриця.

3. Статистична природа збурень та параметрів невідома, натомість задана область, якій належать ці збурення:

$$\alpha_i^T Q_{0i} \alpha_i + \sum_{k=1}^N f_i^2(k)q_i^2(k) \leq 1, \quad (5)$$

де $q_i^2(k)$, Q_{0i} – задані вагова функція та матриця.

Використовуючи відомі факти з теорії оцінювання [3, 5] для моделі (2) можемо отримати наступні рекурентні алгоритми оцінки параметрів багатофакторної моделі.

$$\hat{\alpha}_i(k+1) = \hat{\alpha}_i(k) + K_i(k+1)(y_i(k+1) - H_i(k+1)\hat{\alpha}_i(k)), \quad \hat{\alpha}_i(0) = 0,$$

$$K_i(k+1) = P_i(k+1)H_i^T(k+1)/q_i^2(k+1),$$

$$P_i(k+1) = P_i(k) - P_i(k)H_i^T(k+1)H_i(k+1)P_i(k)/(q_i^2(k+1) + H_i(k+1)P_i(k)H_i^T(k+1))$$

$$P_i(0) = Q_{0i}^{-1}, \quad k = 0, \dots, N-1.$$

В роботі пропонується враховувати динаміку зміни економічних факторів, які входять в рівняння багатфакторної моделі, за допомогою лінійної динамічної системи наступного вигляду:

$$F_i(k+1) = A_i F_i(k) + g_i(k), \quad k=1,2,\dots,N, \quad (6)$$

де $F_i(k) = \text{col}(F_{1i}(k), F_{2i}(k), \dots, F_{mi}(k))$ – $m \times 1$ вектор-стовпець економічних факторів моделі, $A_i = \text{col}(a_1, a_2, \dots, a_m)$ – $m \times m$ – матриця невідомих параметрів, $a_j = (a_{j1}, a_{j2}, \dots, a_{jm})$ – $1 \times m$ j -й вектор-рядок матриці A_i , $g_i(k) = \text{col}(g_1(k), g_2(k), \dots, g_m(k))$ – $m \times 1$ – вектор-стовпець невідомих збурень, відносно яких можливі інформаційні ситуації, аналогічні (3)–(5).

Паралельно з цим алгоритмом обчислюються параметри моделі зміни економічних факторів по рівняннях моделі (6).

$$\hat{\beta}_i(k+1) = \hat{\beta}_i(k) + K_i(k+1)(F_i(k+1) - \hat{A}_i F_i(k)), \quad \hat{\beta}_i(0) = 0,$$

$$K_i(k) = P_i(k) B^T(k) G(k)^{-1},$$

$$P_i(k+1) = P_i(k) - P_i(k) B^T(k) (G(k)^{-1} + B(k) P_i(k) B^T(k))^{-1} B(k) P_i(k)$$

$$P_i(0) = G_0^{-1}, \quad G_0^{-1} = \text{diag}(G_{01}^{-1}, \dots, G_{0m}^{-1}),$$

$$\text{де } B = \begin{pmatrix} F_i^T & 0 & \dots & 0 \\ 0 & F_i^T & \dots & 0 \\ \hline 0 & 0 & \dots & F_i^T \end{pmatrix}.$$

Приклад. Моделювання обсягів експорту з України в товарному розрізі на прикладі експорту хімічної сировини та продуктів.

Чимала стаття українського експорту – хімічна сировина та продукти. У цій галузі Україна має значні перспективи, тому для прикладу обрана група “хімічних” товарів.

Після аналізу коефіцієнтів кореляції і тенденцій, які склалися в зовнішній торгівлі хімічною сировиною та продуктами, було виявлено, що найбільше впливають на обсяги експорту досліджуваної групи товарів (в подальшому y) наступні фактори:

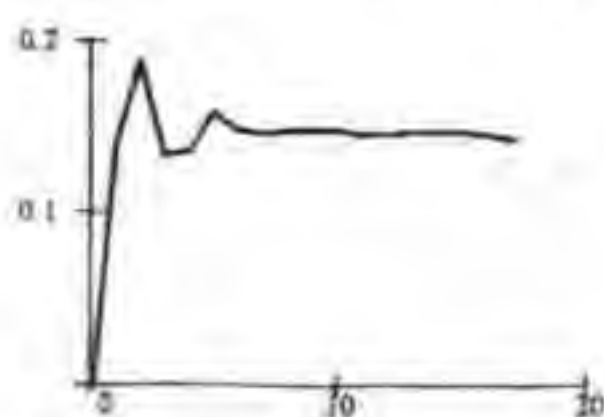
1. Обсяг загального імпорту до України (в подальшому F_1);
2. Різниця між обсягами експорту та імпорту хімічної сировини та продуктів (в подальшому F_2).

Також було помічено, що щороку, у другому кварталі спостерігається певна активізація українського експорту “хімічних” товарів, порівняно з іншими кварталами року. В зв’язку з цим до моделі доречно ввести, так звану, фіктивну змінну (в подальшому F_3), яка б дорівнювала одиниці у других кварталах і нулеві у всіх інших кварталах року. Це дозволить врахувати особливості вітчизняної зовнішньої торгівлі товарами досліджуваної групи.

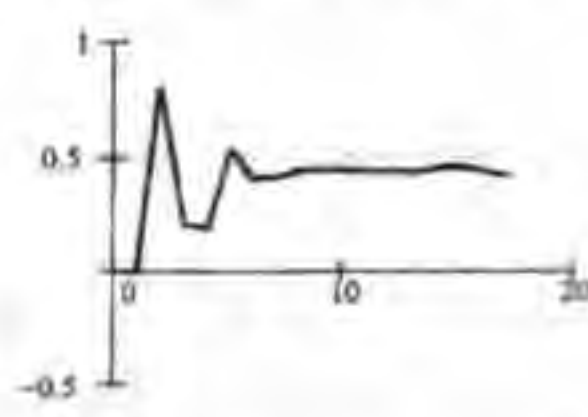
Статистичну базу сформовано з квартальною періодичністю і представлено у тис. дол.

	y	F_1	F_2	F_3
1 кв.96	145417,14	1024489,63	-59587,4	0
2 кв.96	132625,94	1163332,86	-108326,08	1
3 кв.96	133219,85	1209235,17	-67930,11	0
4 кв.96	166892,41	1258161,21	-82653,81	0
1 кв.97	100157,82	1064886,66	-119325,94	0
2 кв.97	119882,4	1428668,44	-246776,04	1
3 кв.97	151370,96	1483630,55	-143183,23	0
4 кв.97	123072,94	1474463,08	-210818,76	0
1 кв.98	114200,47	1161967,49	-116806,85	0
2 кв.98	132970,09	1499521,39	-219355,38	1
3 кв.98	137183,23	1340087,5	-113280,27	0
4 кв.98	107603,31	996948,81	-88474,85	0
1 кв.99	84907,06	687786,61	-57882,89	0
2 кв.99	100620,1	822940,46	-105276,44	1
3 кв.99	85691,85	892605,98	-86178,48	0
4 кв.99	111915,89	1144100,28	-104735,23	0
1 кв.00	112136,2	1007237,47	-50738,25	0
2 кв.00	117929,72	978323,05	-102682,05	1

Таким чином у регресійному вигляді рівняння можна представити наступним чином: $y(k) = \beta_1 F_1(k) + \beta_2 F_2(k) + \beta_3 F_3(k) + f$.



а) оцінка параметра β_1



б) оцінка параметра β_2



в) оцінка параметра β_3

Мал. 1. Динамика оцінок параметрів моделі (2).

У результаті моделювання отримані наступні мінімаксні оцінки параметрів: $\hat{\beta}_1 = 0,144$, $\hat{\beta}_2 = 0,417$, $\hat{\beta}_3 = 12576,69$ (мал.1). Остаточню модель експорту



Мал. 2. Моделювання експорту хімічної сировини і продуктів з України в Європу

набуває вигляду: $\hat{y}(k) = 0,144F_1(k) + 0,417F_2(k) + 12576,69F_3(k)$.

На мал.2 для порівняння приведені: а) графік обсягу експорту з України в Європу хімічної сировини і продуктів, розрахований згідно з одержаною регресійною моделлю; б) реальний експорт за той же період.



Мал. 3. Прогноз експорту хімічної сировини і продуктів на I квартал

На мал.3 наведені результати моделювання прогнозу на один квартал обсягів експорту хімічної сировини і продуктів порівняно з реальними обсягами експорту.

Література

1. Власюк О.С., Ямпольська І.Л. Зовнішня торгівля України: стан та прогноз. – К.: НІСД, 1995. – 63с.
2. Андрійчук В.Г., Власюк О.С., Мокій А.І., Тітаренко В.П.//за редакцією Андрійчука В.Г., Розвиток зовнішньої торгівлі України та її економічна безпека. – К.: НІСД, 1996. – 148с.
3. Григоров А.В., Дідковська Б.В. Деякі методи мінімаксного оцінювання та прогнозування економічних показників. – К.: Вісник Київського університету, сер. фізико-математичні науки, вип. 2, 2003, с. 138-146.
4. Дідковська Б.В. Про застосування мінімаксних методів оцінювання параметрів в моделі експорту України до Європи. – К.: Вісник Київського університету, сер. фізико-математичні науки, вип. 1, 2005, с. 131-138.
5. Наконечный А.Г. Минимаксные оценки параметров. //Респ. межвед. науч. сб. Вычислительная и прикладная математика. – К.: Вища школа, 1979, –В.39.
6. Дані Держкомстату України.

Надійшла до редакції 26.11.2004

УДК 519.633

Анатолій П. Власюк¹, Петро М.
Мартинюк²

**Застосування комплексного
методу граничних елементів до
розв'язання крайових задач для
лінійних рівнянь параболічного
типу**

Застосовано комплексний метод граничних елементів до розв'язання крайової задачі для двовимірного лінійного рівняння параболічного типу. Це здійснено шляхом використання методу Роте і приведенням параболічного рівняння до неоднорідного модифікованого рівняння Гельмгольца. Проведено числові експерименти, які засвідчили ефективність та перспективність запропонованого підходу.

Ключові слова: комплексний метод граничних елементів, лінійні рівняння параболічного типу, метод Роте.

¹ E-mail: A.P.Vlasyuk@rstu.rv.ua

² E-mail: P.M.Martinjuk@rstu.rv.ua

Anatoliy P. Vlasyuk¹, Petro M.
Martinyuk²

**A complex boundary element
method for a linear parabolic
partial differential equation**

A complex variable boundary element method has been proposed for the numerical solution of a boundary value problem governed by a second order linear parabolic partial differential equation. The parabolic equation has been reduced to the two-dimensional modified Helmholtz equation by the Rote method. Numerical experiments testify to efficiency and perspective of offered method.

Key Words: complex variable boundary element method, linear parabolic partial differential equation, Rote method.

1. Вступ. На даний час для розв'язання крайових задач для рівнянь в частинних похідних, що містять похідні по часу, зокрема рівнянь параболічного типу, широкого вжитку набули такі числові методи, як: скінченних різниць (див., наприклад [1-4] та наведену там літературу), скінченних елементів (див., наприклад [4-7] та наведену там літературу) (який є частковим випадком загального проекційного методу [8]) та метод р-трансформації [9]. Для можливості застосування скінченно-різницевих методів в областях з криволінійними та вільними границями використовують числові конформні та квазіконформні відображення даних областей на деяку канонічну область, наприклад, параметричний прямокутник [10-13]. В доповнення до даних методів, все ширшої популярності набуває метод граничних елементів [14, 15]. Також, починаючи з праць Громадки [16], не менш перспективним є комплексний метод граничних елементів (КМГЕ). Однак, на даний час відоме застосування даного методу лише для рівнянь математичної фізики, що

описують стаціонарні процеси. Так, в роботі [17] застосовано комплексний метод граничних елементів для знаходження наближеного розв'язку крайових задач для рівнянь еліптичного типу зі змінними коефіцієнтами. В роботі [18] автори використовують КМГЕ для розв'язання крайових задач для рівняння Гельмгольца. Крім того, все ширшого застосування КМГЕ набуває для знаходження розв'язків крайових задач, якими описуються математичні моделі складних фізичних процесів [19, 20].

Як відомо, багато фізичних процесів є нестаціонарними і значна частина з них описується математичними моделями, в яких основною складовою частиною є рівняння параболічного типу. Зокрема, це процеси тепло-масопереносу, дифузії, фільтрації підземних вод, фільтраційної консолідації ґрунтів, поширення забруднень, розчинення солей та ін. Як правило, дані процеси протікають в областях складної геометричної форми і застосування аналітичних методів до розв'язання відповідних крайових задач можливе лише в окремих випадках і для областей канонічної форми. Тому розвиток числових методів для знаходження наближених розв'язків крайових задач для рівнянь параболічного типу є важливою задачею.

Зважаючи на актуальність, метою даної роботи є числове розв'язання першої мішаної крайової задачі для лінійного рівняння параболічного типу з використанням комплексного методу граничних елементів.

2. Постановка задачі. Розглянемо першу мішану крайову задачу для лінійного рівняння параболічного типу

$$c \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + f(x, y, t) = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad (1)$$

$$u(x, y, t)|_{\Gamma} = u_1(x, y, t), \quad (x, y) \in \Gamma, \quad (2)$$

$$u(x, y, 0) = u_0(x, y), \quad (x, y) \in \Omega, \quad (3)$$

де $t \in (0; T]$ - час, $(x, y) \in \Omega$, Ω - однозв'язна область, в якій шукається розв'язок задачі, Γ - її межа, $u_1(x, y, t)$, $(x, y) \in \Gamma$, $u_0(x, y)$, $(x, y) \in \Omega$ - задані функції, c - деяка відома константа. Вважаємо, що шукана функція $u(x, y, t) \in C(\bar{Q}_T) \cap C^{(2,2,1)}(Q_T)$, де $Q_T = \Omega \times (0; T)$.

3. Обчислювальний алгоритм розв'язання крайової задачі (1)-(3) з використанням КМГЕ. Розбиваючи часовий проміжок $[0, T]$ на n часових шарів з рівномірним кроком τ та використовуючи метод Рунге для рівняння (1), отримаємо

$$c \left(\frac{\partial^2 u^{(j+1)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u^{(j+1)}}{\partial y^2} \right) + f^{(j+1)}(x, y) = \frac{u^{(j+1)} - u^{(j)}}{\tau},$$

або

$$\frac{\partial^2 u^{(j+1)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u^{(j+1)}}{\partial y^2} - \frac{1}{c\tau} u^{(j+1)} = -\frac{1}{c} f^{(j+1)} - \frac{1}{c\tau} u^{(j)}, \quad (4)$$

де $u^{(j+1)} = u(x, y, t_{j+1})$, $f^{(j+1)}(x, y) = f(x, y, t_{j+1})$, $t_{j+1} = (j+1)\tau$, $j = \overline{0, n-1}$.

На часовому шарі $(j+1)$ рівняння (4) є неоднорідним модифікованим рівнянням Гельмгольца. Проведемо в рівнянні (4) заміну

$$u^{(j+1)}(x, y) = v^{(j+1)}(x, y) + I^{(j+1)}(x, y), \quad (5)$$

де $v^{(j+1)}(x, y)$ - нова невідома функція;

$$I^{(j+1)}(x, y) = \frac{1}{2\pi} \iint_{\Omega} \left(\frac{1}{c} f^{(j+1)}(\xi, \eta) + \frac{1}{c\tau} u^{(j)}(\xi, \eta) \right) \cdot K_0\left(\frac{r}{\sqrt{c\tau}}\right) d\xi d\eta - \text{потенціал}$$

площі [21]; $r = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2}$; $K_0(\rho) = \int_1^\infty \frac{e^{-\rho\zeta}}{\sqrt{\zeta^2 - 1}} d\zeta$. Тоді з рівняння (4)

та граничних умов (2) для невідомої функції $v^{(j+1)}(x, y)$ отримаємо наступну крайову задачу:

$$\frac{\partial^2 v^{(j+1)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v^{(j+1)}}{\partial y^2} - \frac{1}{c\tau} v^{(j+1)} = 0, \quad (6)$$

$$v^{(j+1)}|_{\Gamma} = u^{(j+1)}(x, y) - I^{(j+1)}(x, y), \quad (x, y) \in \Gamma. \quad (7)$$

Послідовно при $j = 1, 2, 3, \dots$ з крайової задачі (6), (7) знаходимо $v^{(1)}(x, y)$, $v^{(2)}(x, y)$, $v^{(3)}(x, y)$ і т.д., а повернувшись до заміни (5), знайдемо значення функції $u(x, y, t)$ на відповідних часових шарах.

Для знаходження розв'язку задачі (6), (7) використаємо деякі з ідей, запропонованих в [18].

Згідно [22], загальний розв'язок рівняння (6) можна подати у вигляді

$$v^{(j+1)}(x, y) = \operatorname{Re} \left\{ \Phi(z) + \sum_{l=1}^{\infty} l h_l(x) \int_a^z (z-t)^{l-1} \Phi(t) dt \right\}, \quad (8)$$

де $\Phi(z)$ ($z = x + iy$) - аналітична функція в області Ω ; $h_l(x) = \sum_{r=1}^l \beta_l^{(r)} x^r$,

$$\beta_l^{(r)} = \frac{1}{2lrc\tau} \beta_{l-1}^{(r-1)} \text{ для } l \geq 1, r = \overline{1, l}, \beta_0^{(0)} = 1, \beta_l^{(0)} = 0 \text{ при } l \geq 1.$$

Також відомо, що для довільного комплексного числа z_0 з області Ω та для аналітичної функції $\Phi(z)$ справедлива інтегральна формула Коші

$$\Phi(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{\Phi(\xi) d\xi}{\xi - z_0}. \quad (9)$$

Розіб'ємо межу Γ області Ω вузлами $z_k = x_k + iy_k$, $k = \overline{1, m}$, занумерованими в напрямку обходу проти годинникової стрілки так, щоб в кожній кутовій точці Γ (якщо такі точки існують) знаходився один вузол. Відрізок, який сполучає вузли z_k та z_{k+1} ($k = \overline{1, m}$), де $z_{m+1} \equiv z_1$, позначимо через Γ_k . Визначимо лінійні граничні елементи $\Gamma_k = \{z : z = (1-\lambda)z_k + \lambda z_{k+1}, 0 \leq \lambda \leq 1\}$, причому $\Gamma_{k-1} \cap \Gamma_k = z_k$. Для кожного вузла під номером k визначимо лінійну базисну функцію [16]

$$N_k(z) = \begin{cases} (z - z_{k-1})/(z_k - z_{k-1}), & z \in \Gamma_{k-1}; \\ (z_{k+1} - z)/(z_{k+1} - z_k), & z \in \Gamma_k; \\ 0, & z \notin \Gamma_{k-1} \cup \Gamma_k. \end{cases}$$

На межі Γ функцію $\Phi(z)$ будемо наближати сумою

$$\Phi_m(z) = \sum_{k=1}^m \bar{\Phi}_k N_k(z),$$

де $\bar{\Phi}_k = \bar{\varphi}_k + i\bar{\psi}_k$; $\bar{\varphi}_k, \bar{\psi}_k$ - невідомі константи, які потрібно знайти. Тоді з (9) отримаємо

$$\Phi(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{\Phi_m(\xi) d\xi}{\xi - z_0} = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^m \oint_{\Gamma_k} \frac{\Phi_m(\xi) d\xi}{\xi - z_0}, \quad z_0 \notin \Gamma, \quad z_0 \in \Omega. \quad (10)$$

На кожному граничному елементі Γ_k функція $\Phi_m(z)$ має вигляд

$$\Phi_m(z) = N_k(z) \cdot \bar{\Phi}_k + N_{k+1}(z) \cdot \bar{\Phi}_{k+1}, \quad z \in \Gamma_k. \quad (11)$$

Використовуючи (11), та проводячи аналогічні міркування як в [16], з (10) отримаємо

$$2\pi i \bar{\Phi}_k = \bar{\Phi}_{k+1} - \bar{\Phi}_{k-1} + \bar{\Phi}_k \left(\ln \frac{|z_{k+1} - z_k|}{|z_{k-1} - z_k|} + i \arg \left(\frac{z_{k+1} - z_k}{z_{k-1} - z_k} \right) \right) + \\ + \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq k, \\ s \neq k-1}}^m \left(\bar{\Phi}_{s+1} - \bar{\Phi}_s + \left(\bar{\Phi}_{s+1} \frac{z_k - z_s}{z_{s+1} - z_s} - \bar{\Phi}_s \frac{z_k - z_{s+1}}{z_{s+1} - z_s} \right) \left(\ln \frac{|z_{s+1} - z_k|}{|z_s - z_k|} + i \arg \left(\frac{z_{s+1} - z_k}{z_s - z_k} \right) \right) \right), \quad (12)$$

$k = \overline{1, m}$. Виділяючи в (12) лише дійсну частину, отримаємо систему з m лінійних алгебричних рівнянь на $2m$ невідомих $\bar{\varphi}_k, \bar{\psi}_k, k = \overline{1, m}$. Ще m рівнянь отримаємо з (8) при врахуванні граничної умови (7). Взявши для зручності $a = (z_1 + z_m)/2$ і по чергово покладаючи в (8) змінну z рівною $z_k, k = \overline{1, m}$, та проводячи інтегрування по гранично-елементному розбиттю межі Γ в додатному напрямку, з (7), (8) отримаємо

$$u_1^{(j+1)}(x_k, y_k) - I^{(j+1)}(x_k, y_k) = \operatorname{Re} \left\{ \bar{\Phi}_k + \sum_{l=1}^m l h_l(x_k) I_l \right\}, \quad (13)$$

де

$$I_k = -\bar{\Phi}_1 \frac{(z_k - z_1)^l}{l} + \frac{(\bar{\Phi}_1 + \bar{\Phi}_m)}{2} \frac{(z_k - a)^l}{l} - \left(\bar{\Phi}_1 \frac{dN_1}{dt} + \bar{\Phi}_m \frac{dN_m}{dt} \right) \frac{(z_k - t)^{l+1}}{l(l+1)} \Big|_a + \\ + \sum_{s=2}^k \left(-\bar{\Phi}_s \frac{(z_k - z_s)^l}{l} + \bar{\Phi}_{s-1} \frac{(z_k - z_{s-1})^l}{l} - \left(\bar{\Phi}_{s-1} \frac{dN_{s-1}}{dt} + \bar{\Phi}_s \frac{dN_s}{dt} \right) \frac{(z_k - t)^{l+1}}{l(l+1)} \Big|_{z_{s-1}} \right).$$

При відомих $\bar{\varphi}_k, \bar{\psi}_k, k = \overline{1, m}$, значення функції $\Phi(z)$ у будь-якій внутрішній точці z_0 області Ω обчислюється з використанням (10), (11).

4. Результати числових експериментів. Ефективність застосування КМГЕ до розв'язання крайової задачі для лінійного рівняння параболічного типу була підтверджена на тестовому прикладі. Знайдено числовий розв'язок крайової задачі (1)-(3) в області Ω , яка являє собою трапецію з вершинами у точках $A(-0.5;0)$, $B(0.5;0)$, $C(0.3;1)$, $D(-0.3;1)$

при $c \equiv 1$, $f(x, y, t) = e^{x^2+y} \cdot \left(\frac{t^2 + 2t}{(t+1)^2} - \frac{2t^2(2x^2+1)}{t+1} \right)$, наступних граничних умовах першого роду:

$$u(x, y, t)|_{AB} = e^{x^2} \cdot \frac{t^2}{t+1}, x \in [-0.5; 0.5];$$

$$u(x, y, t)|_{DC} = e^{x^2+1} \cdot \frac{t^2}{t+1}, x \in [-0.3; 0.3];$$

$$u(x, y, t)|_{AD} = e^{x^2+5x+2.5} \cdot \frac{t^2}{t+1}, x \in [-0.5; -0.3];$$

$$u(x, y, t)|_{CB} = e^{x^2-5x+2.5} \cdot \frac{t^2}{t+1}, x \in [0.3; 0.5]$$

та нульовій початковій умові $u_0(x, y) = 0$, $(x, y) \in \Omega$. Точний розв'язок

задачі має вигляд $u(x, y, t) = e^{x^2+y} \cdot \frac{t^2}{t+1}$.

Для обчислення інтегралів використані квадратурні формули Гаусса, а для обчислення $K_0(\rho)$ використані квадратурні формули для невластних інтегралів [23]. Для обчислення інтегралів по області Ω трапеція $ABCD$ розбивалась на трикутні скінченні елементи з подальшим застосуванням квадратурних формул Гаусса для трикутного симплекса.

Проведено дослідження відносної похибки, залежно від кількості k граничних елементів та від кількості M використаних членів нескінченного ряду в (8). В таблиці 1 результати наведені для точки з координатами $x = 0.11$, $y = 0.73$ при $t = 12$, $\tau = 2$. В таблиці 2 результати наведені для точки з координатами $x = -0.17$, $y = 0.95$ при $t = 12$, $\tau = 2$.

Таблиця 1.

	k=108	k=216	k=432
M=5	0,32%	0,31%	0,40%
M=10	0,32%	0,30%	0,37%

Таблиця 2.

	k=108	k=216	k=432
M=5	13,02%	12,52%	10,58%
M=10	13,02%	12,52%	10,58%

5. Висновки. Порівнюючи результати, наведені в таблицях 1 та 2, відмітимо, що при наближенні точки до межі області значення похибки

зростає. Дане явище є характерним для комплексного методу граничних елементів [18]. Однак, при збільшенні кількості граничних елементів похибка в примежових точках зменшується (див. таб. 2).

Як видно з таблиць 1 та 2 зміна кількості членів в нескінченному ряді з (8) від 5 до 10 практично не впливає на зміну відносної похибки наближеного розв'язку. Це пояснюється тим, що вже многочлени $h_5(x)$ мають коефіцієнти порядку 10^{-6} і подальше збільшення кількості многочленів практично не впливає на точність обчислень.

Отже, в даній роботі застосовано комплексний метод граничних елементів до розв'язання першої мішаної крайової задачі для лінійного рівняння параболічного типу. Проведено числові експерименти, які засвідчили перспективність розвитку даного методу.

В якості подальших досліджень, результати яких будуть наведені в наступних роботах авторів, відмітимо, що вимагають розгляду граничні елементи вищих порядків та крайові задачі з граничними умовами другого та третього родів.

Література

1. Самарский А.А. Теория разностных схем. – Москва: Наука, 1989.
2. Березин И.С., Жидков Н.П. Методы вычислений. Т.1, 2. – Москва: Физматгиз, 1962.
3. Яненко Н.Н. Метод дробных шагов для решения многомерных задач математической физики. – Новосибирск, 1967.
4. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы математической физики. – Москва: Научный мир, 2003.
5. Зенкевич О., Морган К. Конечные элементы и аппроксимация. – Москва: Мир, 1986.
6. Молчанов И.Н., Николенко Л.Д. Основы метода конечных элементов. – Киев: Наук. думка, 1989.
7. Савула Я.Г. Метод скінченних елементів. – Київ: НМК ВО, 1993.
8. Марчук Г.И., Агошков В.И. Введение в проекционно-сеточные методы. – Москва: Наука, 1981.
9. Положий Г.Н. Численное решение двумерных и трёхмерных краевых задач математической физики и функций дискретного аргумента. – Киев: Изд-во Киев. гос. ун-та, 1962.
10. Власюк А.П., Михальчук В.Г. Автоматическое построение конформных и квазиконформных отображений четырехугольных областей с помощью разностных сеток с “плавающими” узлами: Препр./АН Украины. Ин-т математики; 89.79. – Киев: 1989.-55 с.
11. Власюк А.П., Михальчук В.Г. Автоматическое построение конформных и квазиконформных отображений двухсвязных и трёхсвязных областей: Препр./АН Украины. Ин-т математики; 91.57. – Киев: 1991.-56 с.

12. Власюк А.П., Михальчук В.Г. Чисельне розв'язання одного класу задач з вільними межами в криволінійних чотирикутниках для еліптичних систем рівнянь: Препр./АН України. Ін-т математики; 94.36. – Київ: 1994. – 23 с.
13. Власюк А.П. Чисельне розв'язання задачі розчинення і винесення пластових солей з основи гідротехнічних споруд// Доп. НАН України. – 1995. – 8. – С.37-39.
14. Бреббия К., Телес Ж., Вроубел Л. Методы граничных элементов. – Москва: Мир, 1987.
15. Ang W.T., Kusuma J., Clements D.L. A boundary element method for a second order elliptic partial differential equation with variable coefficients //Engng. Anal. Boundary Elements. – 1997. – 18. – Pp. 311-316.
16. Громадка П.Т., Лей Ч. Комплексный метод граничных элементов в инженерных задачах. – Москва: Мир, 1990.
17. Park Y.S., Ang W.T. A complex variable boundary element method for an elliptic partial differential equation with variable coefficients //Commun. Numer. Meth. Eng. – 2000. – 16. – Pp. 697-703.
18. Park Y.S., Ang W.T. A note on the CVBEM for the two-dimensional Helmholtz equation or its modified form //Commun. Numer. Meth. Eng. – 2002. – 18. – Pp. 599-604.
19. Гудзь Р., Питльований А. Комплексний метод граничних елементів при моделюванні фізичних процесів у тілах з композиційних матеріалів //Вісник Львів. ун-ту. Сер. прикл. матем. ін форм. – 2003. – 7. – С.148-155.
20. Ang W.T., Clements D.L., Cooke T. A complex variable boundary element method for a class of boundary value problems in anisotropic thermoelasticity //Int. J. Computer Maths. – 1999. – 70. – Pp. 571-586.
21. Положий Г.М. Рівняння математичної фізики. – Київ: Рад. школа, 1959.
22. Clements D.L. A boundary integral equation method for the numerical solution of a second order elliptic partial differential equation with variable coefficients //J. of the Australian Mathematical Society (Series B). – 1980. – 22. – Pp. 218-228.
23. Крылов В.И., Шульгина Л.Т. Справочная книга по численному интегрированию. – Москва: Наука, 1966.

Надійшла до редакції 22.02.2005

УДК 519.63:532.72:532.546

Анатолій П. Власюк¹, Оксана П.
Остапчук, Ольга М. Степанченко

**Монотонна різницева схема
для нелінійного одновимірного
рівняння параболічного типу,
що містить першу похідну**

Побудовано монотонну різницеву
схему порядку апроксимації $O(h^2 + \tau)$
для одновимірного нелінійного рівняння
параболічного типу, що містить першу
похідну. Здійснено її застосування для
розв'язання практичних задач
розчинення пласту солі, що залягає в
основі ГТО, та масопереносу сольових
розчинів фільтраційним потоком в
грунтових масивах.

Ключові слова: математична
модель, крайова задача, монотонна
різницева схема.

¹ E-mail: A.P.Vlasyuk@rdtu.rv.ua

1. Вступ. При розв'язуванні задач тепло-масопереносу в ґрунтових середовищах, хімічної кінетики, плазмі приходить мати справу з числовим розв'язком крайових задач для нелінійних рівнянь параболічного типу, що містять конвективні члени [1-6]. Особливістю їх є те, що при побудові неявних різницевих схем значну роль відіграє число Пекле, при певних значеннях якого різницева схема може бути немонотонною.

В [7] побудована монотонна схема для лінійних диференціальних рівнянь параболічного типу, а в [8] – для рівнянь із змінними коефіцієнтами. В даній роботі побудована монотонна різницева схема порядку $O(h^2 + \tau)$ для нелінійного одновимірного рівняння параболічного типу.

2. Постановка задачі. Розглянемо крайову задачу для одновимірного нелінійного рівняння параболічного типу, що містить першу похідну

$$\frac{\partial \left(p(x, u) \frac{\partial u}{\partial x} \right)}{\partial x} + r(x, u) \frac{\partial u}{\partial x} + f(x, u) = q(x, t) \frac{\partial u}{\partial t}, \quad (1)$$

$$u(x, 0) = U_0(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (2)$$

$$u(0, t) = U_1(t), \quad 0 < t \leq T, \quad (3)$$

Anatoliy P. Vlasyuk¹, Oksana P.
Ostapchuk, Olga M. Stepanchenko

**Monotonic difference scheme
for non-linear one-dimensional
parabolic equation with the first
order derivative**

The article describes monotonic
difference scheme of non-linear one-
dimensional equation with the first order
derivative with the approximation order
 $O(h^2 + \tau)$. The article includes practical
realization of solving the problem of salt
layer dissolution on that is located in a
basis of industrial buildings, and mass
transference of salt solutions by the
filtration stream in soil structures.

Key words: mathematical model,
boundary value problem, monotonic
difference scheme.

$$l_2 u(l, t) = U_2(t), \quad 0 < t \leq T, \quad (4)$$

де $p(x, u), r(x, u), f(x, u), q(x, u)$ - досить гладкі функції, причому $0 < c_1 \leq p(x, u) \leq c_2, q(x, u) \geq c_3 > 0, l_2$ - оператор, що задає одну з граничних умов 1-го, 2-го або 3-го роду.

3. Різницева схема задачі. Побудуємо монотонну різницеву схему для крайової задачі (1)-(4) порядку апроксимації $O(h^2 + \tau)$. Для цього використаємо різницеву схему з направленими різницями [7] для (1):

$$\begin{aligned} & \frac{1}{h} \left(d_{i+1}^k \frac{U_{i+1}^{k+1} - U_i^{k+1}}{h} - d_i^k \frac{U_i^{k+1} - U_{i-1}^{k+1}}{h} \right) + r_{i+}^k \frac{U_{i+1}^{k+1} - U_i^{k+1}}{h} + \\ & + r_{i-}^k \frac{U_i^{k+1} - U_{i-1}^{k+1}}{h} + f_i^k = q_i^k \frac{U_i^{k+1} - U_i^k}{\tau}, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\text{де } d_i^k = \frac{p(x_i, U_i^k) + p(x_{i-1}, U_{i-1}^k)}{2}, \quad d_{i+1}^k = \frac{p(x_{i+1}, U_{i+1}^k) + p(x_i, U_i^k)}{2},$$

$$r_{i+}^k = 0,5(r(x_i, U_i^k) + |r(x_i, U_i^k)|) \geq 0, \quad r_{i-}^k = 0,5(r(x_i, U_i^k) - |r(x_i, U_i^k)|) \leq 0,$$

$$r(x_i, U_i^k) = r_{i+}^k + r_{i-}^k, \quad f_i^k = f(x_i, U_i^k), \quad q_i^k = q(x_i, t_k),$$

$$U_i^0 = U_0(ih), \quad (6)$$

$$U_0^{k+1} = U_1((k+1) \cdot \tau), \quad (7)$$

$$l_2 U_n^{k+1} = U_2((k+1) \cdot \tau) \quad (8)$$

Неважко показати, що побудована таким чином різницева схема є монотонною при будь-яких кроках сітки h і τ , однак має порядок апроксимації $O(h + \tau)$. Для отримання монотонної різницевої схеми, що має порядок апроксимації $O(h^2 + \tau)$, вивчимо детальніше асимптотику похибки апроксимації даної різницевої схеми

$$\Psi_i = L_i U + r_{i+}^k U_{x,i}^{k+1} + r_{i-}^k U_{\bar{x},i}^{k+1} + f_i^k - q_i^k U_{i,k}, \quad (9)$$

$$\text{де } L_i U = \frac{1}{h} \left(d_{i+1}^k \frac{U_{i+1}^{k+1} - U_i^{k+1}}{h} - d_i^k \frac{U_i^{k+1} - U_{i-1}^{k+1}}{h} \right), \quad (10)$$

$$U_{x,i}^{k+1} = \frac{U_{i+1}^{k+1} - U_i^{k+1}}{h}, \quad U_{\bar{x},i}^{k+1} = \frac{U_i^{k+1} - U_{i-1}^{k+1}}{h}, \quad U_{i,k} = \frac{U_i^{k+1} - U_i^k}{\tau}.$$

Використовуючи розклади по формулі Тейлора, отримуємо

$$L_i U = \mathfrak{Z}_i u + O(h^2),$$

$$\text{де } \mathfrak{Z}_i u = \frac{\partial \left(p(x, u) \frac{\partial u}{\partial x} \right)}{\partial x}, \quad U_{x,i}^{k+1} = \frac{\partial U(x_i, t_{k+1})}{\partial x} + \frac{h}{2} \frac{\partial^2 U(x_i, t_{k+1})}{\partial x^2} + O(h^2),$$

$$U_{\bar{x},i}^{k+1} = \frac{\partial U(x_i, t_{k+1})}{\partial x} - \frac{h}{2} \frac{\partial^2 U(x_i, t_{k+1})}{\partial x^2} + O(h^2).$$

Підставляючи дані розклади у вираз (9) і звівши подібні члени, отримаємо

$$\begin{aligned} \Psi_i &= \mathfrak{I}_i u + O(h^2) + r_{i+}^k \left(\frac{\partial U(x_i, t_{k+1})}{\partial x} + \frac{h}{2} \frac{\partial^2 U(x_i, t_{k+1})}{\partial x^2} + O(h^2) \right) + \\ &+ r_{i-}^k \left(\frac{\partial U(x_i, t_{k+1})}{\partial x} - \frac{h}{2} \frac{\partial^2 U(x_i, t_{k+1})}{\partial x^2} + O(h^2) \right) + f_i^k - q_i^k U_{i,k} = \end{aligned} \quad (11)$$

$$= \mathfrak{I}_i U + (r_{i+}^k + r_{i-}^k) \frac{\partial U(x_i, t_{k+1})}{\partial x} + f_i^k - q_i^k U_{i,k} + (r_{i+}^k - r_{i-}^k) \frac{h}{2} \frac{\partial^2 U(x_i, t_{k+1})}{\partial x^2} + O(h^2).$$

Враховуючи (1), матимемо $\mathfrak{I}_i u + r_i^k \frac{\partial U(x_i, t_{k+1})}{\partial x} + f_i^k - q_i^k U_{i,k} = 0$.

$$\text{А отже } \Psi_i = \frac{1}{2} |r_i^k| \cdot h \frac{\partial^2 U(x_i, t_{k+1})}{\partial x^2} + O(h^2). \quad (12)$$

Представимо $\frac{\partial^2 U(x_i, t_{k+1})}{\partial x^2} = U_{\bar{x}i}^{k+1} + O(h^2)$,

$$\text{де } U_{\bar{x}i}^{k+1} = \frac{U_{i-1}^{k+1} - 2U_i^{k+1} + U_{i+1}^{k+1}}{h^2} = \frac{U_{i+1}^{k+1} - U_i^{k+1}}{h^2} - \frac{U_i^{k+1} - U_{i-1}^{k+1}}{h^2}.$$

$$\text{Тоді } \Psi_i = 0,5h|r_i^k| \frac{U_{i+1}^{k+1} - U_i^{k+1}}{h^2} - 0,5h|r_i^k| \frac{U_i^{k+1} - U_{i-1}^{k+1}}{h^2} + O(h^2). \quad (13)$$

А отже, дещо видозмінена різницева схема

$$\begin{aligned} &d_{i+1}^k \frac{U_{i+1}^{k+1} - U_i^{k+1}}{h^2} - d_i^k \frac{U_i^{k+1} - U_{i-1}^{k+1}}{h^2} - 0,5h|r_i^k| \frac{U_{i+1}^{k+1} - U_i^{k+1}}{h^2} + \\ &+ 0,5h|r_i^k| \frac{U_i^{k+1} - U_{i-1}^{k+1}}{h^2} + r_{i+}^k \frac{U_{i+1}^{k+1} - U_i^{k+1}}{h} + r_{i-}^k \frac{U_i^{k+1} - U_{i-1}^{k+1}}{h} + f_i^k = q_i^k \frac{U_i^{k+1} - U_i^k}{\tau}, \\ &(d_{i+1}^k - 0,5h|r_i^k|) \frac{U_{i+1}^{k+1} - U_i^{k+1}}{h^2} - (d_i^k - 0,5h|r_i^k|) \frac{U_i^{k+1} - U_{i-1}^{k+1}}{h^2} + \\ &+ r_{i+}^k \frac{U_{i+1}^{k+1} - U_i^{k+1}}{h} + r_{i-}^k \frac{U_i^{k+1} - U_{i-1}^{k+1}}{h} + f_i^k = q_i^k \frac{U_i^{k+1} - U_i^k}{\tau} \end{aligned} \quad (14)$$

має порядок апроксимації $O(h^2 + \tau)$. Оскільки справедливі рівності

$$\begin{aligned} d_{i+1}^k - 0,5h|r_i^k| &= d_{i+1}^k \left(1 - \frac{0,5h|r_i^k|}{d_{i+1}^k} \right) = d_{i+1}^k \left\{ \frac{1}{1 + \frac{0,5h|r_i^k|}{d_{i+1}^k}} + O(h^2) \right\}, \\ d_i^k - 0,5h|r_i^k| &= d_i^k \left(1 - \frac{0,5h|r_i^k|}{d_i^k} \right) = d_i^k \left\{ \frac{1}{1 + \frac{0,5h|r_i^k|}{d_i^k}} + O(h^2) \right\}, \end{aligned} \quad (15)$$

то порядок апроксимації не зміниться, якщо коефіцієнти

$$1 - \frac{0,5h|r_i^k|}{d_i^k}, \quad 1 - \frac{0,5h|r_i^k|}{d_{i+1}^k} \quad \text{замінити з точністю до } O(h^2 + \tau) \quad \text{додатними}$$

коефіцієнтами

$$\mu_{i1}^k = \frac{1}{1 + \frac{0,5h|r_i^k|}{d_i^k}}, \quad \mu_{i2}^k = \frac{1}{1 + \frac{0,5h|r_{i+1}^k|}{d_{i+1}^k}}. \quad (16)$$

Таким чином, різницева схема

$$\begin{aligned} & \mu_{i2}^k d_{i+1}^k \frac{U_{i+1}^{k+1} - U_i^{k+1}}{h^2} - \mu_{i1}^k d_i^k \frac{U_i^{k+1} - U_{i-1}^{k+1}}{h^2} + \\ & + r_{i+}^k \frac{U_{i+1}^{k+1} - U_i^{k+1}}{h} + r_{i-}^k \frac{U_i^{k+1} - U_{i-1}^{k+1}}{h} + f_i^k = q_i^k \frac{U_i^{k+1} - U_i^k}{\tau}, \end{aligned} \quad (17)$$

має порядок апроксимації $O(h^2 + \tau)$. Записавши її в канонічному вигляді

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{h^2} (d_i^k \mu_{i1}^k + d_{i+1}^k \mu_{i2}^k) + \frac{|r_i^k|}{h} + \frac{q_i^k}{\tau} \right) U_i^{k+1} = \frac{1}{h} \left(\frac{d_i^k \mu_{i1}^k}{h} - r_{i-}^k \right) U_{i-1}^{k+1} + \\ & + \frac{1}{h} \left(\frac{d_{i+1}^k \mu_{i2}^k}{h} + r_{i+}^k \right) U_{i+1}^{k+1} + \frac{q_i^k}{\tau} U_i^k + f_i^k, \end{aligned} \quad (18)$$

переконаємося в її монотонності при будь-яких кроках h і τ .

4. Обчислювальний алгоритм. Для отримання числового розв'язку побудованої різницевої схеми використаємо метод прогонки. Для цього представимо дану різницеву схему в прогоночному вигляді

$$a_i^k U_{i-1}^{k+1} - c_i^k U_i^{k+1} + b_i^k U_{i+1}^{k+1} = -f_i^k, \quad (19)$$

$$U_0^{k+1} = \chi_1 U_1^{k+1} + \mu_1, \quad U_n^{k+1} = \chi_2 U_{n-1}^{k+1} + \mu_2, \quad (20)$$

$$a_i^k = \frac{1}{h} \left(\frac{d_i^k \mu_{i1}^k}{h} - r_{i-}^k \right), \quad b_i^k = \frac{1}{h} \left(\frac{d_{i+1}^k \mu_{i2}^k}{h} + r_{i+}^k \right), \quad (21)$$

де

$$c_i^k = \frac{1}{h^2} (d_i^k \mu_{i1}^k + d_{i+1}^k \mu_{i2}^k) + \frac{|r_i^k|}{h} + \frac{q_i^k}{\tau}, \quad (22)$$

$$\chi_1 = 0, \quad \mu_1 = U_1((k+1) \cdot \tau), \quad (22)$$

$$\chi_2 = 0, \quad \mu_2 = U_2((k+1) \cdot \tau) \text{ або } \chi_2 = 1, \quad \mu_2 = 0. \quad (23)$$

(22) задає граничні умови 1-го роду на лівому кінці, а (23) – 1-го або 2-го роду на правому кінці.

Неважко показати, що умови стійкості методу прогонки виконані, а саме: $a_i^k \neq 0$, $b_i^k \neq 0$, $|c_i^k| > |a_i^k| + |b_i^k|$, $\forall i = \overline{1, n-1}$, $\forall k = \overline{1, K}$.

$$|\chi_1| \leq 1, \quad |\chi_2| \leq 1.$$

5. Приклад 1 модельної задачі масопереносу сольових розчинів при фільтрації підземних вод в ґрунтовому масиві. Математичну модель масопереносу сольових розчинів при одновимірній фільтрації підземних вод до водозабірника з урахуванням залежності параметрів фільтрації і масопереносу від концентрації сольового розчину, координат області фільтрації та впливу осмотичних явищ на процес переносу можна описати наступною крайовою задачею [9]:

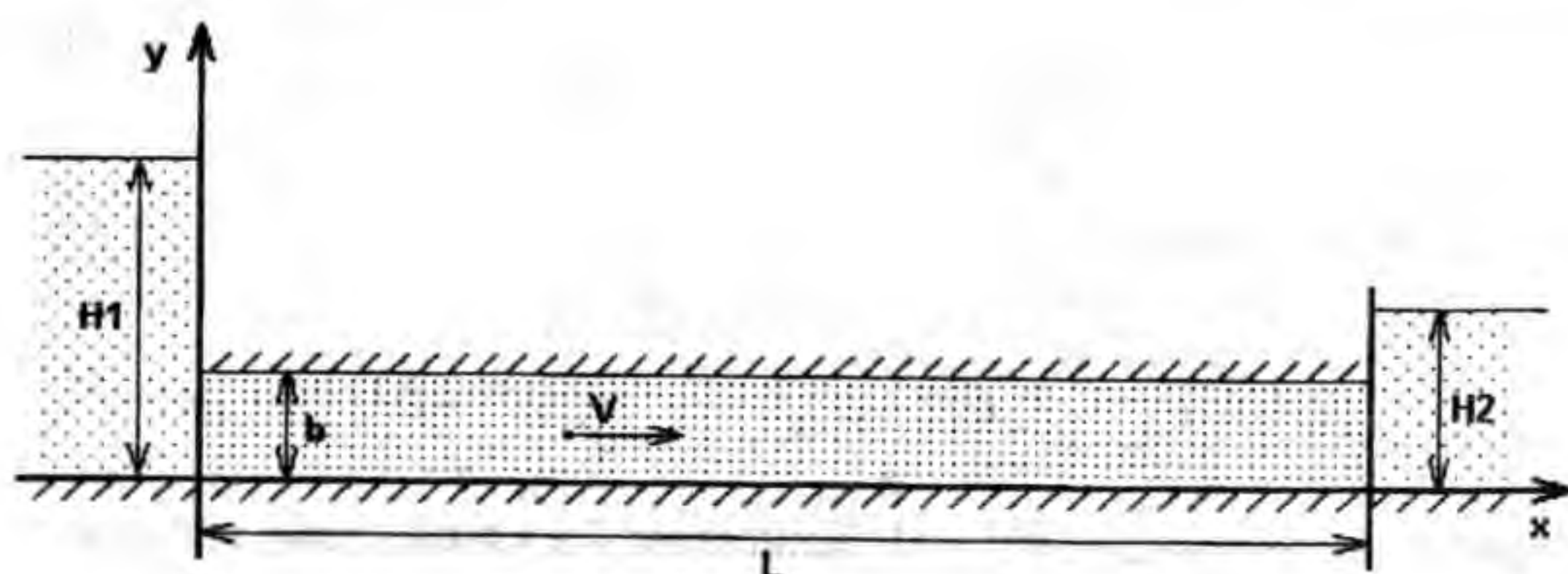


Рис.1. Фільтрація сольового розчину до водозабірника

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(D(x, c) \frac{\partial c}{\partial x} \right) - V(x, c) \frac{\partial c}{\partial x} - \gamma(c - C_*) = \sigma \frac{\partial c}{\partial t}, \quad (24)$$

$$V(x, c) = -k(x, c) \frac{\partial h}{\partial x} \pm v(x, c) \frac{\partial c}{\partial x}, \quad \frac{\partial V}{\partial x} = 0, \quad (25)$$

$$h(0) = H_1, \quad h(L) = H_2, \quad (26)$$

$$c(x, 0) = \tilde{C}_0(x), \quad 0 \leq x \leq L, \quad (27)$$

$$l_1 c(0, t) = \tilde{C}_1(t), \quad t \geq 0, \quad (28)$$

$$l_2 c(L, t) = \tilde{C}_2(t), \quad t \geq 0. \quad (29)$$

Тут l_i , $i = \overline{1, 2}$ оператори, що задають граничні умови на вході і виході фільтраційного потоку, C_* - концентрація граничного насичення, $c(x, y, t)$ - масова концентрація солі у рідкій фазі; $V(x, y, c)$ - швидкість фільтрації сольового розчину; $v(x, y, c)$ - коефіцієнт осмосу; σ - пористість ґрунту; $k(x, y, c)$ - коефіцієнт фільтрації, залежність якого від концентрації солевих розчинів встановлена експериментально; h - п'єзометричний напір, $D(x, y, c) = D_m + \lambda |V(x, y, c)|$ - коефіцієнт конвективної дифузії, де D_m - коефіцієнт молекулярної дифузії, λ - параметр гідродинамічної дисперсії; γ - константа швидкості масообміну; t - час. Знак "+" в (25) відноситься до нормального осмосу, знак "-" - до аномального. l_2 може задавати:

$$l_2 c = \begin{cases} c(L, t) = \tilde{C}_2(t), \\ \frac{\partial c(L, t)}{\partial x} = 0, \\ \left[V(x, c) \cdot (c - \tilde{C}_2) - D(x, c) \cdot \frac{\partial c}{\partial x} \right]_{x=L} = 0. \end{cases} \quad (30)$$

При наявності осмосу швидкість фільтрації обчислюється за формулою

$$V(c(x_*, t), t) = \frac{H_1 - H_2 \pm \int_0^l \frac{v(c(x, t))}{k(c(x, t))} \cdot \frac{\partial c}{\partial x} dx}{\int_0^l \frac{dx}{k(c(x, t))}},$$

де $x_* \in \{0; l\}$.

Різницева схема даної задачі має вигляд (17), (6)-(8) з врахуванням (16) при заміні

$$U = c, \quad p(x, u) = D(x, c), \quad r(x, u) = V(x, c), \quad f(x, u) = -\gamma(c - C_*), \quad q(x, t) = \sigma.$$

На основі програмної реалізації задачі проведено значну кількість числових експериментів, що дало можливість провести аналіз отриманих результатів для різних вхідних даних задачі та детально дослідити процес масопереносу розчинених у воді солей при залежності параметрів фільтраційного потоку від фізико-хімічних властивостей фільтруючого розчину і середовища. У результаті проведення числових експериментів та аналізу результатів зроблено їх порівняння для коефіцієнтів фільтрації $k = \text{const}$ і $k = k(x, c)$. Нижче наведено результати числового експерименту для сталих граничних і початкової умов із наступними вихідними даними: $T = 300$ діб, $l = 100$ м, $\sigma = 0,5$; $\gamma = 0,0005$; $D_m = 0,0001 \text{ м}^2/\text{добу}$; $\lambda = 0,01$ м; $H_1 = 1,5$ м; $H_2 = 0,5$ м; $N_1 = 340$; $N_2 = 200$; $c_* = 0,02$ г/літр; $\tilde{C}_0 = 0$ г/літр; $\tilde{C}_1 = 0,18$ г/літр; $\tilde{C}_2 = 0,01$ г/літр. На виході фільтраційного потоку задана умова швидкого винесення забруднень.

Тут і далі концентрації сольових розчинів вказані у відносних безрозмірних одиницях (фактична концентрація віднесена до концентрації граничного насичення сольового розчину $C_n = 350$ г/літр). Як видно з рис.2, значення швидкостей фільтрації суттєво відрізняються для моделювання масопереносу на фоні фільтрації чистої води ($k = \text{const}$) та у випадку фільтрації сольового розчину ($k = k(x, c)$). Як видно з рис.3, фронт сольових розчинів при $k = k(x, c)$ з часом значно випереджає фронт забруднень при $k = \text{const}$.

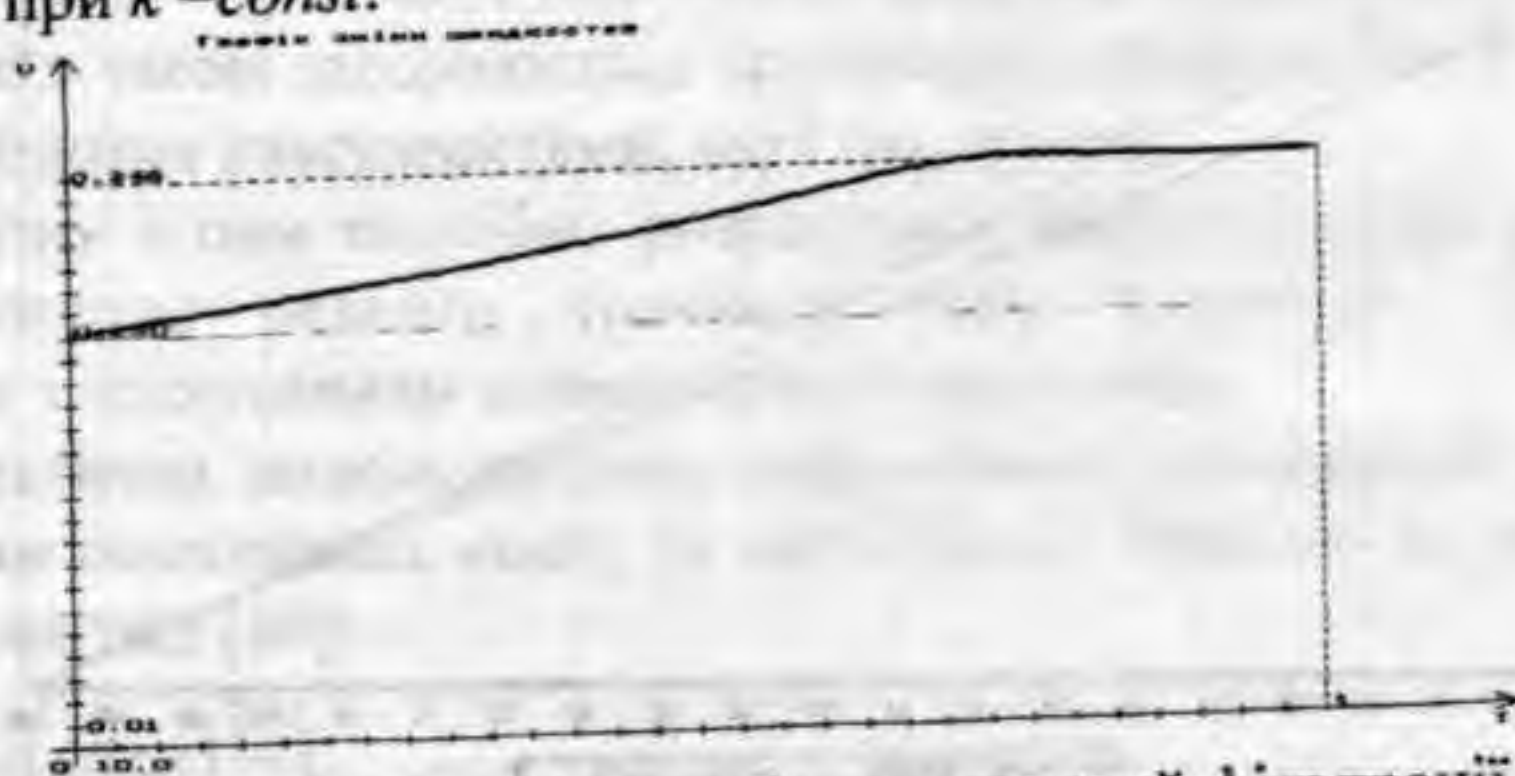


Рис.2. Графіки полів швидкостей фільтрації

— $k = \text{const}$; — $k = k(c)$.

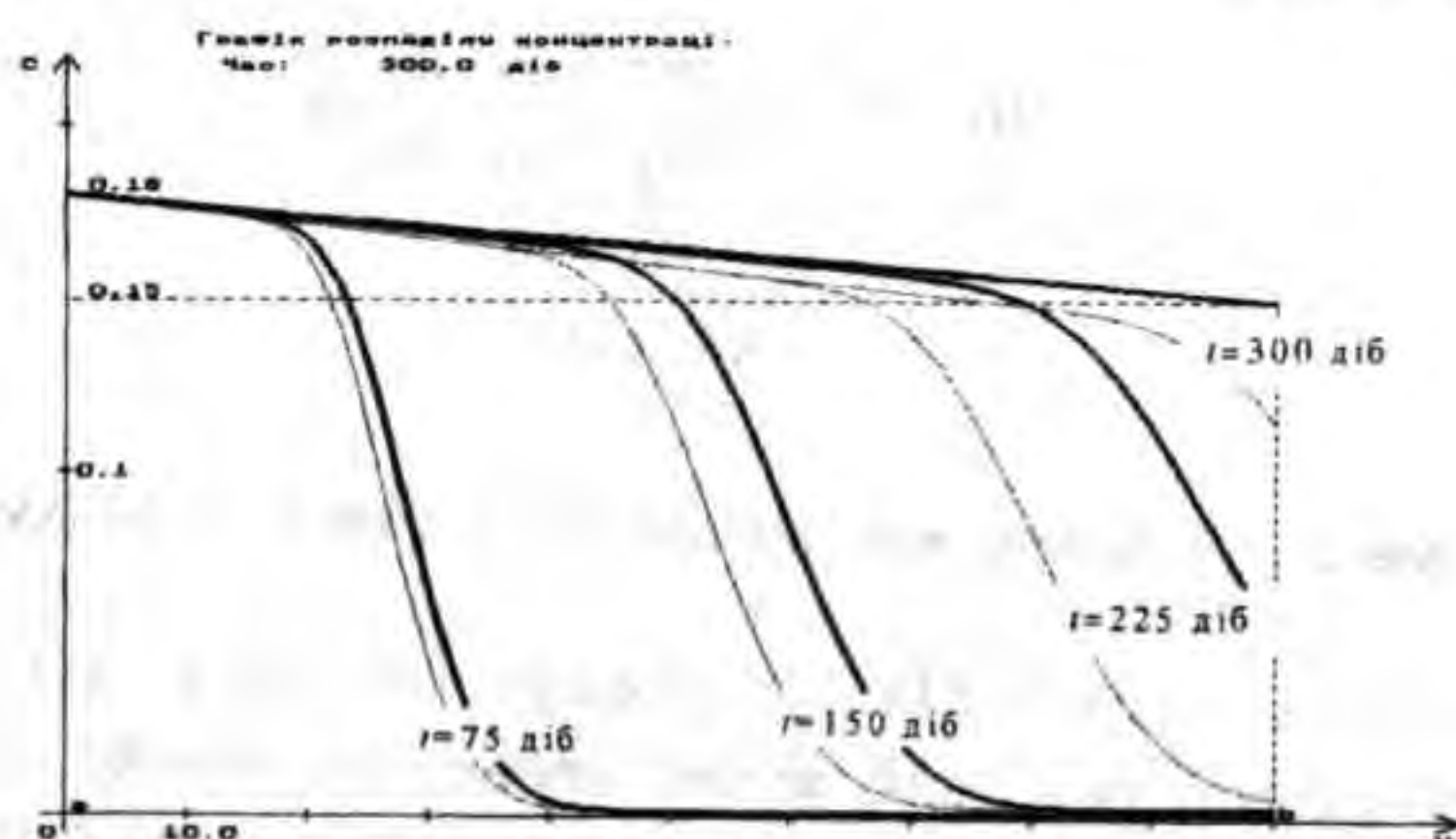


Рис.3. Динаміка руху фронту сольових розчинів

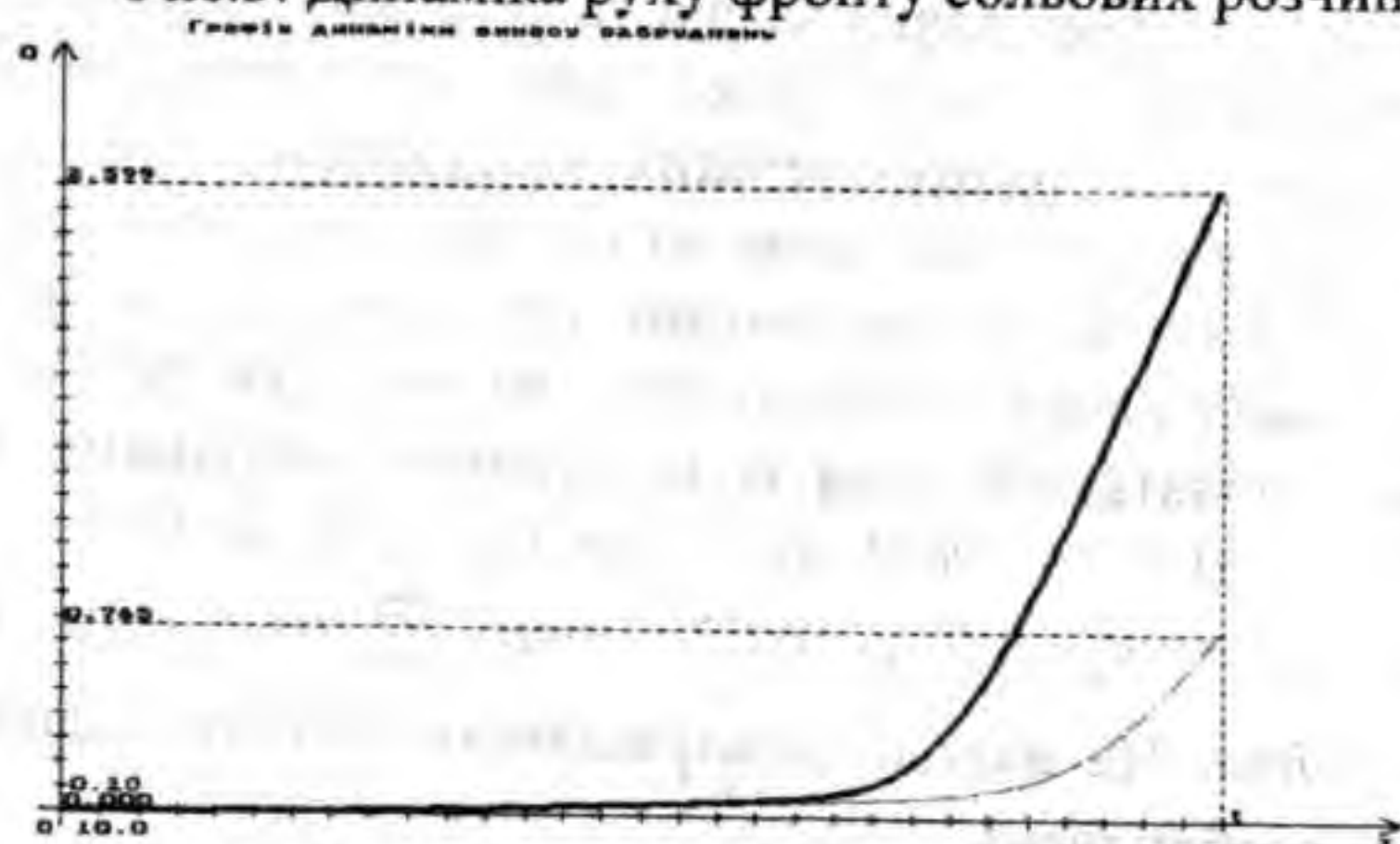


Рис.4. Динаміка винесення забруднень в басейн стічних вод

Кількість винесеної з області фільтрації речовини, яка часто є однією з найважливіших характеристик даного процесу, для задач оцінки та прогнозу ступеня забруднення підземних вод та басейну стічних вод, як видно з рис.4, при $k=k(x,c)$ і $k=const$ може відрізнятися в декілька разів.

Нижче наведені графіки розподілу напорів по області фільтрації для різних значень коефіцієнта осмосу відповідно при $k=k(x,c)$ і $k=const$.

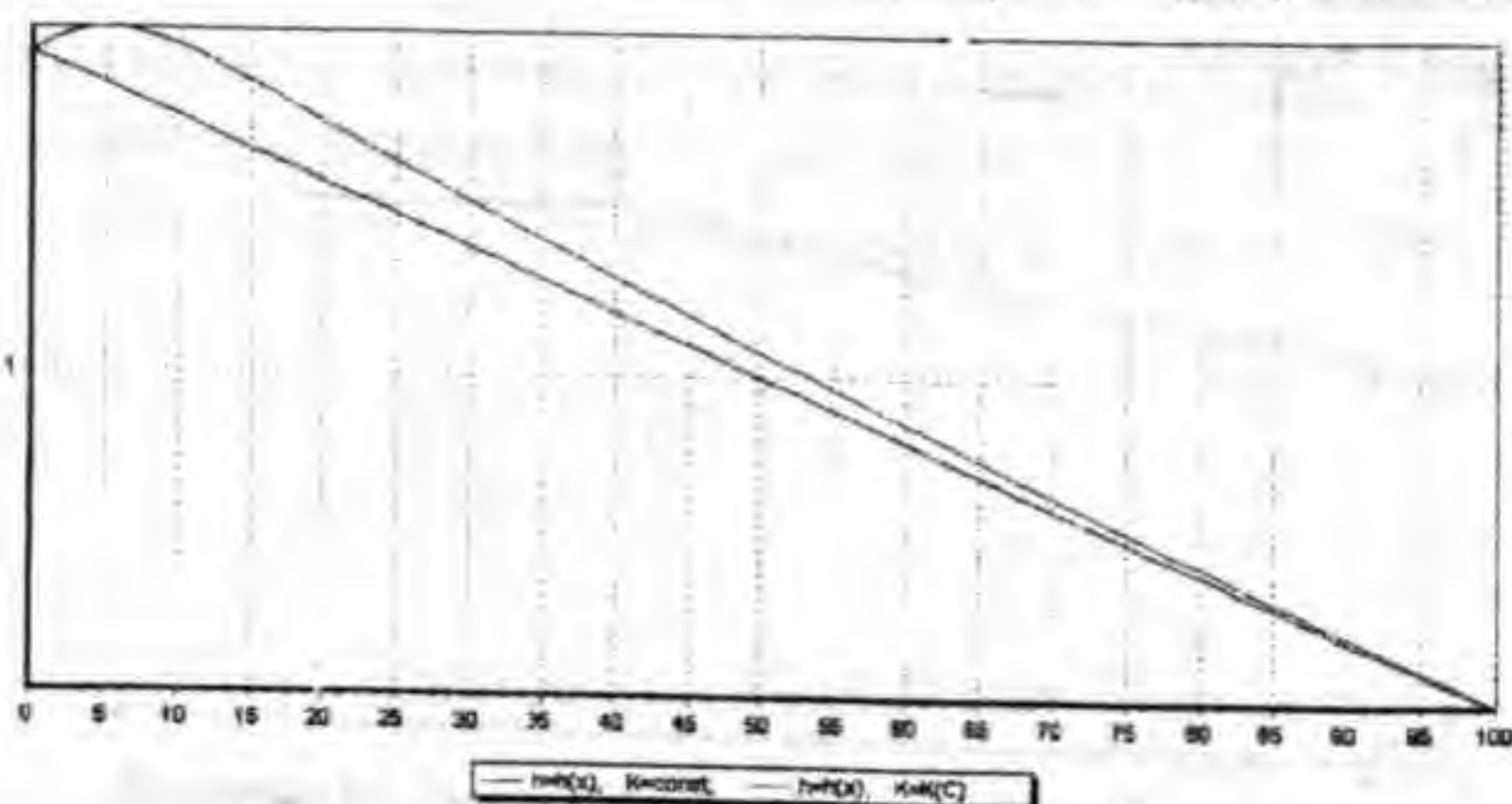


Рис.5. Розподіл напорів $h=h(x)$ при $\nu=0.05$, $t=1470$ дів.

6. Приклад 2 модельної задачі дифузійного розчинення необмеженого монолітного водорозчинного пласта солі, перекритого зверху шаром ґрунту скінченної товщини l_0 , з врахуванням осмотичних явищ, нелінійності процесу дифузійного розчинення та наявності рухомого дифузійного примежевого шару товщиною δ в околі фронту розчинення (рис. 6).

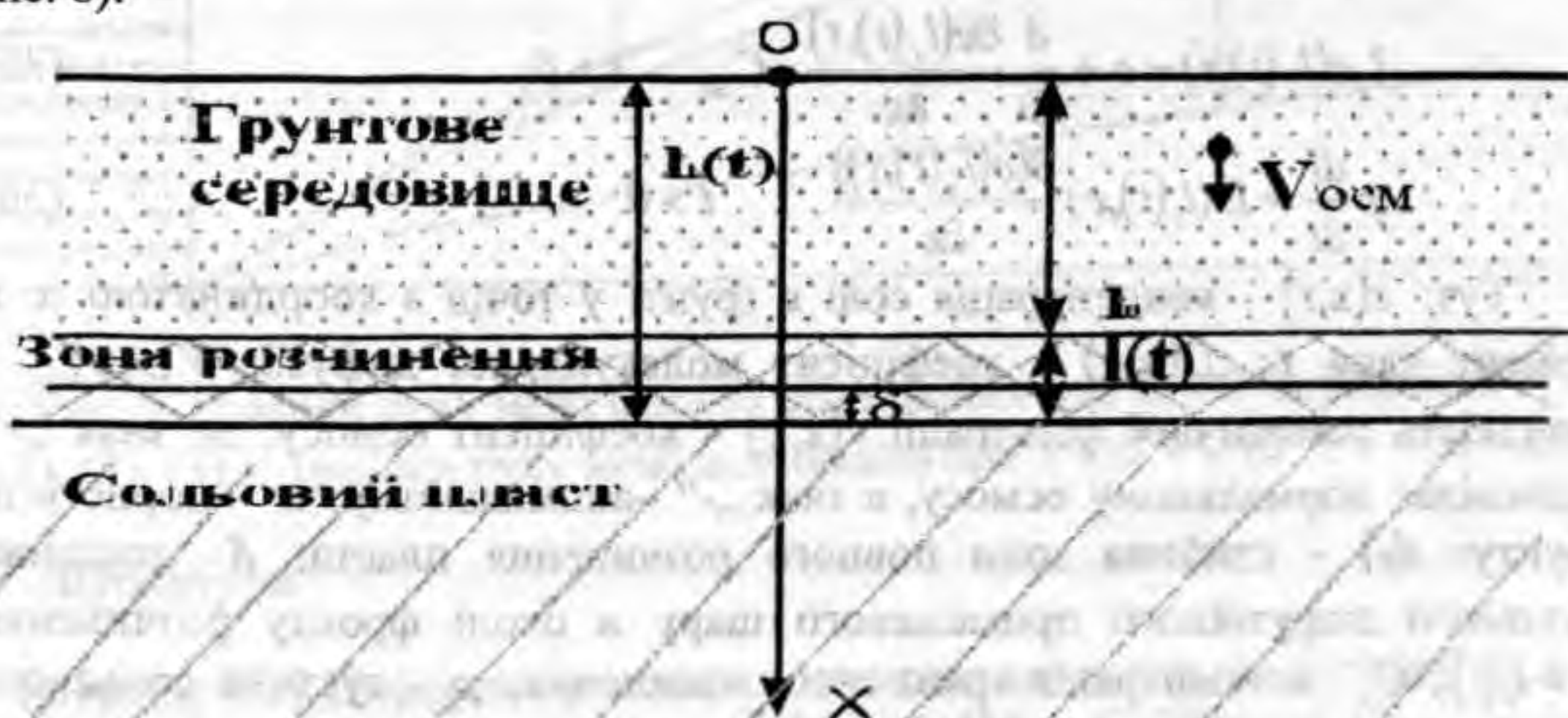


Рис. 6. Дифузійне розчинення монолітного пласта солі

Допускається, що процес розчинення відбувається під впливом молекулярної дифузії за рахунок зміни градієнту концентрації солей в рамках нелінійної моделі. Припустимо, що в момент часу $t=0$ верхній шар ґрунту товщиною l_0 наситився ґрунтовими водами з початковою концентрацією солі $C_0(x)$, яка менша концентрації граничного насичення C_m ($C_0(x) < C_m$). Крім того в ґрунті відбувається осмотична фільтрація розчину з швидкістю $V_{осм}$. В результаті процесу розчинення пласта солі виникає і розвивається з часом зона повного розчинення сольового пласта товщиною $l(t)$, в якій солі повністю перейшли в розчинений стан. Зона розчинення з часом заповнюється ґрунтовим середовищем з тими самими фізико-хімічними властивостями, що і шар ґрунту.

В зв'язку з цим потрібно розрахувати розподіл концентрації солі в ґрунті протягом певного проміжку часу, еволюцію зони повного розчинення з врахуванням впливу осмотичних явищ.

Математична модель процесу дифузійного розчинення пласта солі з врахуванням осмотичних явищ, та нелінійності процесу на основі прийме наступний вигляд [10]:

$$\frac{\partial \left(D(x, c) \frac{\partial c}{\partial x} \right)}{\partial x} - V(x, c)_{осм} \frac{\partial c}{\partial x} = \frac{\partial (\sigma c)}{\partial t}, \quad x \in (0; l_1), \quad t > 0, \quad (31)$$

$$V(x, c)_{\text{осм}} = \pm v(x, c) \frac{\partial c}{\partial x}, \quad (32)$$

$$c(x, 0) = C_0(x), \quad x \in [0; l_0], \quad (33)$$

$$c(0, t) = C_l(t), \quad t > 0, \quad (34)$$

$$l_2 c(l_1(t), t) = c + \frac{\delta}{D} \frac{\partial c(l_1(t), t)}{\partial x} = C_m, \quad t > 0, \quad (35)$$

$$\rho \frac{dl}{dt} = D(l_1(t), c) \frac{\partial (c(l_1(t), t))}{\partial x}, \quad t > 0. \quad (36)$$

Тут: $c(x, t)$ - концентрація солі в ґрунті у точці з координатою x в момент часу t ; $D(x, c)$ - коефіцієнт молекулярної дифузії; $V(x, c)_{\text{осм}}$ - швидкість осмотичної фільтрації; $v(x, c)$ - коефіцієнт осмосу, де знак „+” відповідає нормальному осмосу, а знак „-” - аномальному; σ - пористість ґрунту; $l(t)$ - глибина зони повного розчинення пласта; δ - товщина рухомого дифузійного примежевого шару в околі фронту розчинення $x = l_1(t)$; C_m - концентрація граничного насичення; ρ - густина сольового пласта; $l_1 = l_0 + l(t)$ - товщина ґрунту разом із товщиною розчиненої зони.

Різницева схема даної задачі представляється (17), (6)-(8) з врахуванням того, що

$$U = c, \quad p(x, u) = D(x, c), \quad r(x, u) = -V_{\text{осм}}(x, c), \quad f(x, u) = 0, \quad q(x, t) = \sigma.$$

Причому, (36) дискретизуємо наступним чином

$$\rho \frac{l_i^{k+1} - l_i^k}{\tau} = D(l_i, C_n^{k+1}) \frac{C_n^{k+1} - C_{n-1}^{k+1}}{h}$$

Числові розрахунки для розмірених величин проведено для таких вихідних даних:

$$C_l(t) = 0, \quad C_m = 350 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}, \quad \rho = 2,2 \cdot 10^3 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}, \quad l_0 = 10 \text{ м},$$

$$\sigma = 0,4, \quad D_m = 10^{-3} \frac{\text{м}^2}{\text{доб}}, \quad \tau = 30 \text{ доб}, \quad C_0(x) = \frac{C_m - C_0}{l_0^2} x^2 + C_0.$$

Чисельно досліджувалися різні випадки нелінійності для коефіцієнта дифузії, а саме: $D(x, c) = D_m + \alpha c$, $D(x, c) = D_m e^{(-\alpha c)}$ та інші.

Для більш наглядного представлення результати числових експериментів наведені нижче у вигляді графіків для такого коефіцієнта дифузії: $D(x, c) = D_m + \alpha c$.

На основі проведених числових експериментів встановлено (рис. 7), що наявність нормального осмосу гальмує процес розчинення пласта солі. При збільшенні ступеня нелінійності коефіцієнта дифузії, як показали результати проведених числових експериментів, спостерігається значний ріст концентрації в шарі ґрунту.

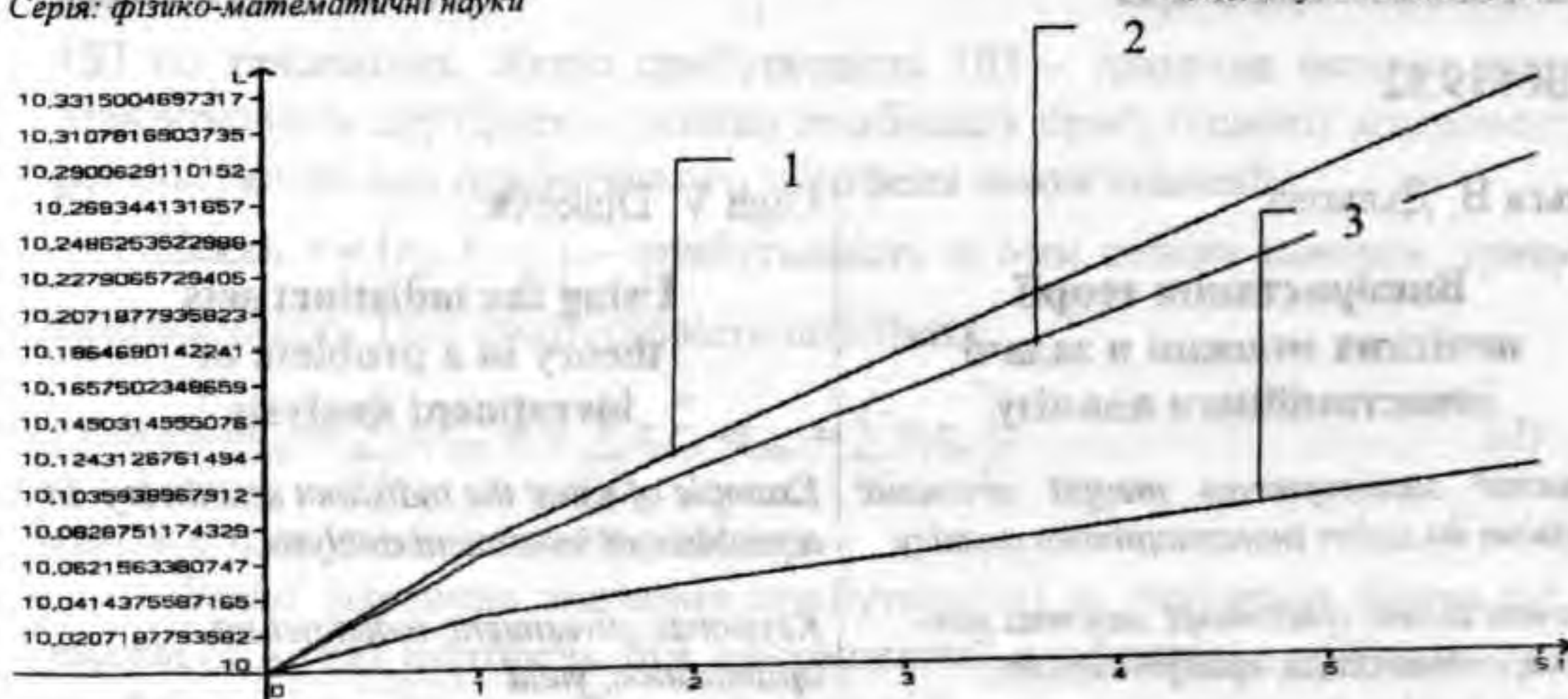


Рис. 7. Графіки руху межі фронту розчинення при $\alpha = 0$ за 50 років.
(1), (2), (3), – графіки руху межі відповідно при $\nu = 0$, $\nu = 10^{-6}$, $\nu = 10^{-5}$ м.

Література

1. Веригин Н.Н. Диффузия у поверхности твёрдого тела, находящегося в жидкости // Журн. физ. химии. – 1958. – 32, №9. – С. 2097 – 2106.
2. Сергиенко И.В., Скопецкий В.В., Дейнека В.С. Математическое моделирование и исследование процессов в неоднородных средах. – Киев: Наук. думка, 1991. – 432 с.
3. Ляшко И.И., Демченко Л.И., Мистецкий Г.Е. Численное решение задач тепло- и массопереноса в пористых средах. – К.: Наук. думка, 1991. – 262 с.
4. Коздоба Л.А. Методы решения нелинейных задач теплопроводности. – М.: изд-во Наука, 1975. – 228 с.
5. Власюк А.П. Чисельне розв'язання задачі розчинення і винесення пластових солей з основи гідротехнічних споруд // Доп. НАН України. – 1995. – №8. – С. 37-39.
6. Власюк А.П. Про деякі нові математичні моделі підземної гідромеханіки // Вісник РДТУ, Рівне. – вип. 3(5). Ч. 2. – 2000. – С. 57-62.
7. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы математической физики. 2-е изд. – М.: Науч. мир, 2003. – 316 с.
8. Гладкий А.В., Ляшко И.И., Мистецкий Г.Е. Алгоритмизация и численный расчёт фильтрационных схем. – Киев: Вища школа, 1981.
9. Власюк А.П., Остапчук О.П. Чисельне дослідження одновимірної задачі масопереносу сольових розчинів у ґрунтових масивах // Вісник Київського університету. Серія: фіз.-мат. науки. – 2004. – Вип. 4.
10. Власюк А.П., Степанченко О.М. Чисельне моделювання однієї задачі розчинення пласта солі // Вісник Київського університету. Серія: фізико-математичні науки. – 2004. – Вип. 4.

Надійшла до редакції 17.03.2005

УДК 519.82

Ольга В. Дьякова

**Використання теорії
нечітких множин в задачі
інвестиційного аналізу**

*Приклад застосування теорії нечітких
множин до задач інвестиційного аналізу*

*Ключові слова: інвестиції, нечітка мно-
жина, оптимізація, прибутковість*

E-mail: oljalja@ukr.net

Olga V. Djakova

**Using the indistinct sets
theory in a problem of
investment analysis**

*Example of using the indistinct sets theory in
a problem of investment analysis*

*Keywords: investment, indistinct set,
optimization, yield*

Інвестиції – це основа сучасної ринкової економіки. Базовою серед класичних моделей є модель Гарі Марковіца. Вона базується на мінімізації ризику портфеля цінних паперів при заданому рівні прибутковості. Також в цій моделі існує обмеження на короткі позиції (short sale), і портфель може складатися лише з довгих активів ($x_i \geq 0$):

$$V_p = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j v_{ij} \rightarrow \min, \text{ при } \sum_{i=1}^n x_i = 1; x_i \geq 0, i = \overline{1, n} \text{ та } \sum_{i=1}^n x_i m_i = m^*. \quad (1)$$

де x_i – представляючий вектор (вектор часток вкладень); m_i – є очікуваним значенням прибутковості i -го цінного паперу; m^* – критичне значення прибутковості портфеля v_{ij} – коваріація прибутковостей i -го та j -го цінних паперів.

Оскільки прибутковість ЦП випадкова, її точне значення в майбутньому невідоме, а імовірнісний опис такого роду випадковості не є цілком коректним [1], тому в якості опису прибутковості ЦП доречно використовувати трикутні нечіткі числа, моделюючи експертне висловлення такого виду: “Прибутковість ЦП по завершенні терміну володіння очікувано дорівнює $\bar{r}$ і знаходиться в розрахунковому діапазоні $[r1, r2]$ ”. При цьому за $\bar{r}$ експерт приймає або найбільш очікуване, або середнє значення прибутковості в розрахунковому коридорі. Функція належності нечіткого числа має трикутний вид, якщо ступінь суб'єктивної впевненості експерта у відношенні прибутковості дорівнює нулю за межами розрахункового коридору значень прибутковості, а максимум цієї впевненості, рівний одиниці, досягається в точці $\bar{r}$. Експерт переконаний, що $\bar{r}$ свідомо потрапить у будь-який розрахунковий коридор прибутковості, як би не змінювалися границі цього коридору.

Наведений спосіб опису очікуваної прибутковості у формі нечіткого числа автоматично знімає всі проблеми, пов'язані з урахуванням зв'язку

ЦП по тенденціях. Якщо прибутковість ЦП – трикутне нечітке число, а прибутковість портфеля – лінійна комбінація прибутковості компонент, то результуючий вид прибутковості портфеля також відомий.

Нехай $r = (r_{1i}, \bar{r}_i, r_{2i})$ – прибутковість за i -им цінним папером, трикутне нечітке число. Тоді прибутковість портфеля:

$$m = \left(m_{\min} = \sum_{i=1}^n x_i r_{1i}, \bar{m} = \sum_{i=1}^n x_i \bar{r}_i, m_{\max} = \sum_{i=1}^n x_i r_{2i} \right), \quad (2)$$

також є трикутним нечітким числом.

Якщо фактичне значення прибутковості m виявиться нижче m^* , то вважається, що портфель був сформований неефективно. Ступінь ризику неефективності інвестицій у припущенні про те, що показник ефективності інвестицій – трикутне нечітке число, визначається за формулами:

$$V_p = \begin{cases} 0, & \text{при } m^* < m_{\min}, \\ R(1 + \frac{1-\alpha}{\alpha} \ln(1-\alpha)), & \text{при } m_{\min} \leq m^* < \bar{m}, \\ 1 - (1-R)(1 + \frac{1-\alpha}{\alpha} \ln(1-\alpha)), & \text{при } \bar{m} \leq m^* < m_{\max}, \\ 1, & \text{при } m^* \geq m_{\max}. \end{cases} \quad (3)$$

де

$$R = \begin{cases} \frac{m^* - m_{\min}}{m_{\max} - m_{\min}}, & \text{при } m^* < m_{\max}, \\ 1, & \text{при } m^* \geq m_{\max}. \end{cases} \quad (4)$$

$$\alpha = \begin{cases} 0, & \text{при } m^* < m_{\min}, \\ \frac{m^* - m_{\min}}{\bar{m} - m_{\min}}, & \text{при } m_{\min} \leq m^* < \bar{m}, \\ 1, & \text{при } m^* = \bar{m}, \\ \frac{m_{\max} - m^*}{m_{\max} - \bar{m}}, & \text{при } \bar{m} < m^* < m_{\max}, \\ 0, & \text{при } m^* \geq m_{\max}. \end{cases} \quad (5)$$

Відмінністю отриманої моделі від стандартної є те, що в якості фактору ризику виступає не стандартне відхилення портфеля, а ступінь ризику неефективності інвестицій.

У сучасній літературі з фінансового аналізу приведена формула чистої поточної цінності інвестицій (NPV – Net Present Value). В подальшому розгляді використовується такий окремий випадок оцінки NPV, де всі інвестиційні надходження приходяться на початок інвестиційного процесу та

оцінка ліквідаційної вартості проекту виконується *post factum*, після закінчення терміну життя проекту.

Тоді співвідношення для NPV має вид:

$$NPV = -I + \sum_{t=1}^T \frac{\Delta V_t}{(1+r_t)^t} + \frac{C}{(1+r_{T+1})^{T+1}}, \quad (6)$$

де I – стартовий обсяг інвестицій; T – число планових інтервалів (періодів) інвестиційного процесу, що відповідає терміну життя проекту; ΔV_t – оборотне сальдо надходжень і платежів у t -ом періоді; r_t – ставка дисконтування, обрана для t -го періоду з урахуванням оцінок очікуваної прибутковості використовуваного в проекті капіталу; C – ліквідаційна вартість чистих активів, що склалася в ході інвестиційного процесу. Інвестиційний проект визнається ефективним, коли NPV, оцінена по (6), більше визначеного проектного рівня G .

Якщо всі параметри в (6) мають “розмитість”, тобто їхнє точне плановане значення невідоме, тоді в якості вихідних даних доречно використовувати трикутні нечіткі числа. Тоді можна задати такий набір нечітких чисел для аналізу ефективності проекту:

$I = (I_{\min}, \bar{I}, I_{\max})$ – інвестор не може точно оцінити, яким обсягом інвестиційних ресурсів він буде оперувати на момент ухвалення рішення;

$r_t = (r_{t,\min}, \bar{r}_t, r_{t,\max})$ – інвестор не може точно оцінити вартість капіталу, використовуваного в проекті (наприклад, співвідношення власних і позикових засобів, а також відсоток по довгостроковим кредитам);

$\Delta V_t = (\Delta V_{t,\min}, \bar{\Delta V}_t, \Delta V_{t,\max})$ – інвестор прогнозує діапазон зміни грошових результатів реалізації проекту з урахуванням можливих коливань цін на реалізовану продукцію, вартості споживаних ресурсів, умов оподаткування, впливу інших факторів;

$C = (C_{\min}, \bar{C}, C_{\max})$ – інвестор нечітко уявляє собі потенційні умови майбутнього продажу діючого бізнесу чи його ліквідації;

$G = (G_{\min}, \bar{G}, G_{\max})$ – інвестор нечітко уявляє собі критерій, за яким проект може бути визнаний ефективним, чи не до кінця усвідомлює, що можна розуміти під “ефективністю” на момент завершення інвестиційного процесу.

Необхідно відзначити, що інвестор, вибираючи очікувану оцінку G , керується, можливо, не тільки тактичними, але і стратегічними міркуваннями. Так, він може дозволити проекту бути навіть трохи збитковим, якщо цей проект диверсифікує діяльність інвестора і підвищує надійність його бізнесу. Або ж варіант навпаки, коли інвестор йде на підвищений ризик, очікуючи приросту середньозваженої прибутковості свого бізнесу.

Саме, задача інвестиційного вибору в наведеній вище постановці є процесом ухвалення рішення в нечітких умовах, коли рішення досягається злиттям цілей і обмежень.

Щоб перетворити формулу (6) до вигляду, придатного для використання нечітких даних, необхідно використовувати сегментний метод. Суть методу, стосовно двопараметричної задачі, полягає в наступному: фіксуємо рівень приналежності α і визначаємо відповідні йому інтервали вірогідності для двох нечітких чисел A і B : $[a_1, a_2]$ і $[b_1, b_2]$ відповідно. Тоді основні операції з нечіткими числами зводяться до операцій з їх інтервалами вірогідності. А операції з інтервалами, у свою чергу, виражаються через операції з дійсними числами – границями інтервалів. Для кожного нечіткого числа в структурі вихідних даних одержуємо інтервали вірогідності $[I_1, I_2]$, $[r_{t,1}, r_{t,2}]$, $[\Delta V_{t,1}, \Delta V_{t,2}]$, $[C_1, C_2]$. І тоді, для заданого рівня α , шляхом підстановки відповідних границь інтервалів у (6), одержуємо:

$$[NPV_1, NPV_2] = -[I_1, I_2](+) \left(\sum_{t=1}^T \left[\frac{\Delta V_{t,1}}{(1+r_{t,2})^t}, \frac{\Delta V_{t,2}}{(1+r_{t,1})^t} \right] (+) \left[\frac{C_1}{(1+r_{T+1,2})^{T+1}}, \frac{C_2}{(1+r_{T+1,1})^{T+1}} \right] \right) =$$

$$= \left[-I_2 + \sum_{t=1}^T \frac{\Delta V_{t,1}}{(1+r_{t,2})^t} + \frac{C_1}{(1+r_{T+1,2})^{T+1}}, -I_1 + \sum_{t=1}^T \frac{\Delta V_{t,2}}{(1+r_{t,1})^t} + \frac{C_2}{(1+r_{T+1,1})^{T+1}} \right]$$

Задавши прийнятний рівень дискретизації для α на інтервалі приналежності $[0, 1]$, можна реконструювати результуюче нечітке число NPV шляхом апроксимації його функції приналежності μ_{NPV} ламаною кривою по інтервальних точках. Це дозволяє розраховувати всі ключові параметри в оцінці ступеня ризику на основі аналітичних співвідношень.

На Рис.1. показано заштриховану зону неефективних інвестицій, що обмежується прямими $G = G_1$, $G = G_2$, $NPV = NPV_1$, $NPV = NPV_2$ і бісектрисою координатного кута $G = NPV$.

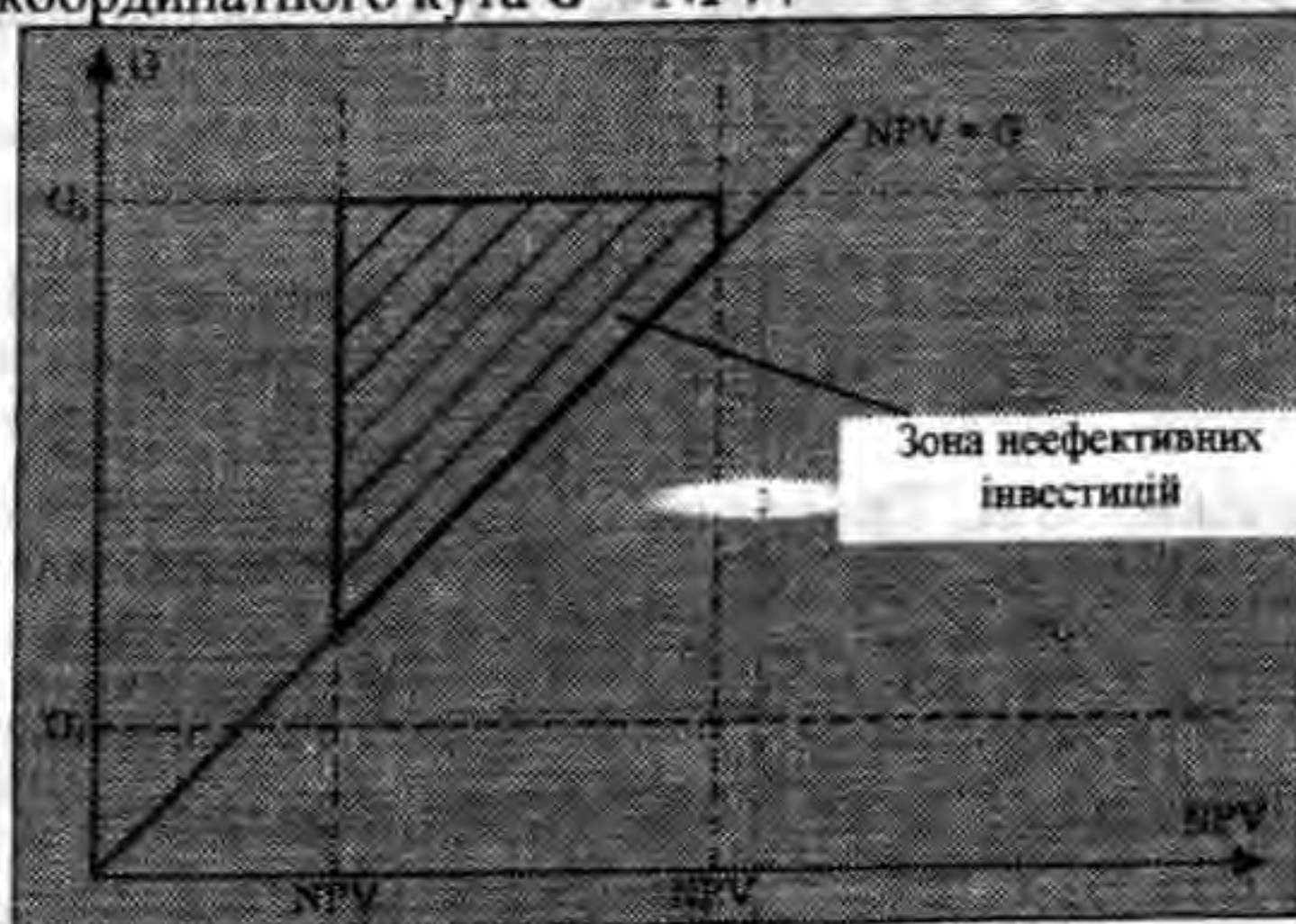


Рис.1 Фазовий простір (NPV, G)

Взаємні співвідношення параметрів $G_{1,2}$ і $NPV_{1,2}$ дають такі формули для розрахунку площі заштрихованої плоскої фігури:

$$S_{\alpha} = \begin{cases} 0, & \text{при } NPV_1 \geq G_2, \\ \frac{(G_2 - NPV_1)^2}{2}, & \text{при } G_2 > NPV_1 \geq G_1, NPV_2 \geq G_2, \\ \frac{(G_1 - NPV_1) + (G_2 - NPV_1)}{2} (G_2 - G_1), & \text{при } NPV_1 < G_1, NPV_2 \geq G_2, \\ (G_2 - G_1)(NPV_2 - NPV_1) - \frac{(NPV_2 - G_1)^2}{2}, & \text{при } NPV_1 < G_1 \leq NPV_2, NPV_2 < G_2, \\ (G_2 - G_1)(NPV_2 - NPV_1), & \text{при } NPV_2 \leq G_1. \end{cases} \quad (7)$$

Оскільки всі реалізації (NPV, G) при заданому рівні приналежності α рівноможливі, то ступінь ризику неефективності проекту $\varphi(\alpha)$ є геометричною імовірністю події потрапляння точки (NPV, G) у зону неефективних інвестицій:

$$\varphi(\alpha) = \frac{S_{\alpha}}{(G_2 - G_1)(NPV_2 - NPV_1)}, \quad (8)$$

де S_{α} оцінюється за (7).

Тоді підсумкове значення ступеня ризику неефективності проекту дорівнює:

$$R = \int_0^1 \varphi(\alpha) d\alpha. \quad (9)$$

Отже, кожен інвестор, виходячи зі своїх інвестиційних переваг, може класифікувати значення R , виділивши для себе відрізок неприйнятних значень ризику.

Література:

1. Недосекин А.О. Применение теории нечётких множеств к задачам управления финансами // Аудит и финансовый анализ. – 2000. – 1 - с. 15-21.
2. Орловский С.А. Проблемы принятия решений при нечеткой исходной информации. – Москва: Наука, 1981.
3. Шарп У, Александр Дж, Бейли К. "Инвестиции.", М. 1997.
4. William N. Goetzmann. In Introduction to Investment Theory // <http://viking.som.yale.edu/will/finman540/classnotes/notes.html>.

Надійшла до редколегії 25.01.05р.

УДК 519.876.2

Юрій В. Загородній,
Оксана І. Гезь

**Системне моделювання та
імітація динаміки погодних умов**

*Розроблена модель і комп'ютерна
система імітації погодних умов
протягом періоду росту біологічних
об'єктів.*

*Досліджено
закономірності динаміки кількісних
показників стану погоди.*

*Ключові слова: імітація, модель
погодних умов, моделі росту.*

Yurij V. Zagorodnij,
Oksana I. Gez

**System modeling and simulation of
the nature conditions dynamics**

*It was constructed the model and
computer system for the nature
conditions simulation during period of
biological objects grow. Dependences
of numeric nature factors dynamics
were researched at the paper.*

*Key words: simulation, model of nature
conditions, models of grow.*

e-mail: yuzagor@unicyb.kiev.ua

Метою роботи була розробка комп'ютерної системи імітації погоди протягом вегетаційного періоду вирощування культурних рослин на основі моделі динаміки кількісних характеристик кліматичних умов [1]. Система імітації погоди проводиться з урахуванням таких показників як час, радіація, температура, вітер, опади, хмарність. Відомо, що клімат (середня погода регіону) визначає типи культур, що вирощуються в даному регіоні, а фактична погода на протязі сезону – врожайність цих культур. Багато моделей росту або окремих аспектів продуктивності тварин та рослин в загальному вигляді можуть бути подані у формі

$$\frac{dW}{dt} = g(W, P, E_M, E_W) \quad (1)$$

де W – біомаса організмів, t – час, P – множина параметрів чи постійних коефіцієнтів, які характеризують організм, E_M – параметри або змінні, що характеризують ті умови навколишнього середовища, які піддаються керуванню, E_W – показники, що описують погоду (температура, сонячна радіація, кількість опадів і т. ін.) і, як правило, не залежні від волі експериментатора.

Функція росту g – це деякий аналітичний вираз, що зв'язує між собою W , P , E_M , E_W . Для того, щоб записати рівняння типу (1) в явному вигляді, необхідно провести експеримент, в ході якого змінилися б умови навколишнього середовища.

Підстановка виміряних погодних показників разом з параметрами, що характеризують живий організм, відкриває можливість для розв'язку рівняння (1), принаймні чисельними методами, тобто для прогнозування зміни маси W на протязі всього періоду спостереження. Щодо адекватності моделі, то вона

може бути оцінена шляхом співставлення прогнозованих та фактичних даних. Втім для деяких цілей (наприклад, аналізу чутливості, розвитку та дослідження моделі) робота з фактичними даними про погоду в силу їх важко доступності або не типовості може виявитися недоцільною. В цьому випадку доцільніше користуватися виразами (детермінованими або стохастичними), які дають наближений опис середньої погоди в досліджуваному регіоні і, до того ж, які є зручними для машинного рахунку. Дана робота присвячена саме такому підходу.

Слід зазначити, що в більшості випадків при описі росту і розвитку тварин та рослин на рівні як окремих органів, так і організму загалом найзручнішою одиницею вимірювання часу є доба. Тому ми користуємося саме цією одиницею, а для опису мало-тривалих процесів – її десятковими частками.

Нехай t – змінна часу. В системі імітації погоди t_i і t_d визначаються як

t_i – ціла частина доби (t);

t_d – дробова частина доби (t).

Тобто змінна t_i дорівнює порядковому номеру доби мінус одиниця, а змінна t_d вказує частку поточної доби, що сплинула.

В даній роботі ми не беремо до уваги вітер, хоча він грає помітну роль при оцінках втрат тепла в сільськогосподарських приміщеннях і при аналізі теплообміну між тваринами та середовищем. Проте вплив вітру на фотосинтез і ріст польових культур незначний, хоча він і проявляється в формі різних захворювань, розповсюдженню яких сприяє. Сильні вітри іноді стають причиною поганої врожайності, внаслідок нанесення рослинам механічного ушкодження. А при використанні споруд з автономним мікрокліматом, наприклад теплиць, що обігріваються, енерговитрати знаходяться в прямій залежності від швидкості вітру: вони пропорційні квадрату (в окремих випадках більш високого ступеня) цього параметра.

Розглянемо динаміку стану погоди.

Нехай J_N – багаторічне середнє значення денної фотосинтетично-активної радіації (ФАР), яка падає на горизонтальну площину за добу з часом $t_i = N$. Згідно спостереженням, сезонні зміни J можуть з задовільною точністю представлені синусоїдою:

$$J_N = (J_{113} + J_{296}) + (J_{113} - J_{296}) \sin\left[\left(\frac{N - 21}{365}\right)360\right], \quad (2)$$

де $N=1$ відповідає 1 березню; $N=113 - 21$ червню; $N=296 - 21$ грудню.

Хоча у виразі (2) реалізується незначна частина доступних даних, результати його розв'язку можна ефективно використовувати для багатьох цілей.

Скористаємося при описі добової зміни радіації повною хвилею синусоїди. Якщо J_N – фотосинтетична активна радіація, яка сприймається в день з порядковим номером N і тривалістю g_N , то густина світлового потоку $I(t_d)$ на інтервалі часу t_d може бути записана у вигляді

$$I(N + t_d) = \begin{cases} \frac{J_N}{g_N} \left\{ 1 + \cos[(t_d - 0,5) \frac{360}{g_N}] \right\}, 0,5 - 0,5g_N \leq t_d \leq 0,5 \\ 0,0 \leq t_d \leq 0,5 - 0,5g_N, 0,5 + 0,5g_N \leq t_d \leq 1 \end{cases} \quad (3)$$

де інтервал t_d задається в десятих долях дня.

Цей вираз побудовано так, що його член, заключений у внутрішні фігурні дужки, змінюється від 0 до 2 а потім знову до 0. Крім того, виконується наступна умова:

$$\int_{0,5-0,5g_N}^{0,5+0,5g_N} I(N + t_d) dt_d = J_N, \quad (4)$$

Більша точність оцінки $I(t_d)$ може бути досягнута шляхом включення додаткових членів у відповідні ряди Фур'є.

Деякі дослідники для опису того ж процесу використовують тільки половину хвилі синусоїди. При цьому рівняння (3) приймає вигляд:

$$I(N + t_d) = \begin{cases} \frac{\pi J_N}{2g_N} \left\{ \sin[(t_d - 0,5 + 0,5g_N) \frac{360}{2g_N}] \right\}, 0,5 - 0,5g_N \leq t_d \leq 0, \\ 0,0 \leq t_d \leq 0,5 - 0,5g_N, 0,5 + 0,5g_N \leq t_d \leq 1 \end{cases} \quad (5)$$

Крім того, в модель можна ввести параметр невизначеності:

$$I_0(N + t_d) = I(N + t_d)(1 + \xi_N),$$

де ξ_N - реалізації випадкової величини з заданим розподілом на інтервалі $[0,1]$.

Рівняння (3) і (5) можна використовувати по-різному. Якщо, наприклад, J_N визначає фактичну радіацію, яка сприймається за N -ту добу, то члени в дужках дають наближене значення добових коливань радіації. Можна прийняти $J_N = \bar{J}_N$, тобто середньому багаторічному значенню радіації на добу N . В цьому випадку доводиться користуватися додатковою апроксимацією, тобто з'являється ймовірність додаткової помилки, так як J_N (фактична радіація) може істотно відрізнятись від $\bar{J}_N$.

Закон річних змін температури повітря і ґрунту в районах з помірним кліматом близький до синусоїдального. Середню температуру $\bar{T}_N$ за добу N можна визначити з виразу:

$$T_N = a_y + b_y \sin[(\frac{N - N_0}{365} 360)], \quad (6)$$

де a_y - середньорічна температура, b_y - її амплітуда, N_0 - фаза апроксимуючої синусоїди.

Аналогічний підхід можливий і для опису добових коливань температури. При цьому варто враховувати, що інтервали часу, які задаються

в десятих частках доби, містяться в межах від 0 до 1. Тому попередня формула матиме вид:

$$T(N + t_d) = T_N(1 + \alpha \sin[(t_d - t_0)360]), \quad (7)$$

з параметрами α і t_0 .

Зміна добових та сезонних температур може бути оцінена наступним чином:

$$T_N := T_N - \varepsilon_N, \quad (8)$$

де ε_N - випадкова змінна з нульовим середнім і стандартним відхиленням σ_N .

Опади – майже завжди головний фактор, який визначає урожайність. Лише на деякі культури вплив кількості атмосферних опадів незначний. Наприклад, плодові культури, або ті, що вирощуються в закритому ґрунті. Реакції росту у рослин – часто результат компромісу між фотосинтезом і транспірацією, тому на перший план висувається задача оптимізації коефіцієнта використання води.

Для того, щоб виключити вплив неоднакової тривалості календарних місяців, відлік часу ведеться в добах. Оскільки тут мають місце виражені сезонні варіації, спроба представити графік опадів у вигляді простої синусоїди дає лише наближені результати:

$$r_N = a + b \sin\left[\left(\frac{N - N_0}{365}\right)360\right](1 + \xi_N), \quad (9)$$

де a , b , N_0 – параметри, які мають той же зміст, що і у виразі (6), ξ_N – випадкова величина з середнім 0. Її розподіл визначається експериментом.



Рис 1. Блок-схема системи імітації

Зміна кількості опадів – доволі важлива для агрономів характеристика. Вона представляє собою істотний компонент в дослідженні проблем іригації та водоспоживання.

Було запропоновано схему моделі імітації погодних умов. Дана система корисна, наприклад, при прогнозі продуктивності сільськогосподарських систем – результату комбінації генетичних характеристик біологічних об'єктів та умов навколишнього середовища, серед яких найголовніша роль належить погоді.

Система імітації погоди проводиться з урахуванням таких показників як час, радіація, температура, вітер, опади, хмарність. Розрахунки всіх показників ведуться за допомогою вище згадуваних формул та спеціальних методів імітації.

В блок-схемі використовуються такі позначення:

- $T_{\min}$, $T_{\max}$ - відповідно мінімальна та максимальна річні температури;
- J_{113} , J_{296} – денна фотосинтетична активна радіація 21 червня та 21 грудня;
- g_N – тривалість дня;
- J – середнє багаторічне значення радіації;
- $I(t_d)$ – густина світлового потоку;
- n – кількість діб;
- K_B – коефіцієнт варіації;
- n_r – середня кількість дощових днів;
- q – ймовірність випадання h мм опадів;
- n_{ef} – ефективна тривалість періоду гарної погоди.

На основі моделі імітації погодних умов були обчислені дані кліматичних умов різних регіонів. В табл. 1 наведені розрахунки по Луганській області.

Вхідні дані		Вихідні дані	
N	30	T_N	1.6967
$T_{\max}$	40	$T(t_d)$	1.1823
$T_{\min}$	-42	r_N	5.8772
t_d	0.2	J_N	1.4168
a	550	$I(t_d)$	4.0531
b	330	$I_0(t_d)$	3.2996
φ	53	g_N	5.7126

Дані можуть використовуватися в моделях прогнозування урожайності різних культур, а також викликати особливу увагу при вивченні сільськогосподарського виробництва та управління його ходом.

Література

1. Франс Дж., Торнли Дж. Математические модели в сельском хозяйстве. – М.: Агропромиздат, 1987. – 400с.
2. Загородній Ю.В., Бойко А.Л. Математичні моделі в дослідженні вірусів рослин. – К. ЕксОб, 2001р. 152 с.

надійшла до редакції 7.02.2005

УДК 519.876.2

Юрій В. Загородній,
Леся П. Зінько

**Про об'єктний метод
комп'ютерного моделювання
впливу фітовірусів на ріст рослин**

В статті розглядається один підхід до розробки і використання системи комп'ютерної імітації росту рослин в умовах вірусного впливу на основі математичних моделей цих процесів.

Ключові слова: модель росту, концентрація вірусу, об'єкти.

Yurij V. Zagorodnij,
Lesya P. Zinko

**On Object Method of Computer
Modeling the Viruses Influence on
Plants' Grow**

It was considered one approach to creating and using system of computer simulation of plants' grow in the viruses influence conditions on the basis of the mathematical model.

Key words: simulation, model of nature conditions, models of grow.

Застосування математичного моделювання до вивчення процесів росту і розвитку біологічних об'єктів в сучасних умовах **екологічної нестійкості** вимагає пошуків нових методів дослідження. Знання, які набуті на протязі тривалого часу про ці складні процеси, можна формалізувати для автоматизації досліджень за допомогою сучасних засобів обчислювальної техніки.

Динамічна модель росту рослин в умовах дії вражаючих факторів (наприклад, ріст рослин в умовах фітовірусної інфекції) описується наступною системою диференціальних рівнянь [1,2]:

$$\begin{aligned}\frac{dW(t)}{dt} &= (c_1 e^{-c_2 t} - c_3)W(t) - \frac{k_2 k_1 (1-a)W(t)V(t)}{1 + (1-a)k_1 V(t)}, \\ \frac{dV(t)}{dt} &= \frac{(ck_2(1-a) - 1)k_1 W(t)V(t)}{1 + (1-a)k_1 V(t)} - b_1 V(t), \\ \frac{dI(t)}{dt} &= c_4 V(t) - c_5 I(t)\end{aligned}\tag{1}$$

при початкових умовах: $W(0) = b_0 m_0$; $V(t_{\text{inf}}) = 1$; $I(0) = 0$, де $t_{\text{inf}} \geq 0$ - час проникнення вірусу в популяцію рослин. Якісний зміст коефіцієнтів моделі (1) наведено в наступній таблиці.

Таблиця 1. Зміст коефіцієнтів моделі (1)

Коефіцієнт	Якісний зміст в моделі
c_1	Найбільший темп росту біомаси, 1/год
c_2	Темп зменшення швидкості росту біомаси протягом вегетаційного періоду
c_3	Темп зменшення швидкості росту біомаси через стресові фактори
c_4	Темп росту інфекційності (кількісного титру вірусної інфекції)
c_5	Темп відновлювання після ураження (можливо, $c_5 = 0$)
k_1	Темп утворення комплексу "патоген-особина"
$0 \leq k_2 \leq 1$	Темп утворення нових патогенів з комплексу "вірус-організм"
$k_3 = 1 - k_2$	Темп "оздоровлення" комплексу "вірус-організм" до безвірусного матеріалу
$1 - a$	Доля рослинного матеріалу, яка уражена патогеном (тобто, утворила з ним комплекс)
c	Темп росту концентрації патогену
b_0	Множник, що перераховує кількість проведеного міроприємства
b_1	Темп оздоровлення популяції за проведеним відповідним міроприємством протягом вегетаційного періоду

Для комп'ютерної імітації росту рослини як складної системи використовується об'єктно-орієнтований підхід на основі середовища програмування Delphi 4. [3].

В комп'ютерну систему імітації росту рослин входять наступні блоки:

- блок імітації значень екологічних факторів протягом періоду дослідження росту популяції, результатом роботи якого є бази даних екологічного стану середовища;
- математичні моделі виду (1);
- програмне забезпечення, яке реалізує алгоритми імітації на базі даних моделей;
- відображення кількісних ознак продуктивності популяції рослин на екрані монітора, аналіз вихідної інформації;
- бази даних, що зберігають якісні характеристики популяцій, які вже імітувалися в системі.



Рис. 1. Рослина як складна система

Виходячи зі складності системи рослини, клас “Рослина” розглядається як нащадок класів “підсистема” і “клітина”.

Клас “Рослина” **Tplant** представлений як спадкоємець класу “підсистема” **Tsubsystem**. Клас підсистем **Tsubsystem** успадковує, в свою чергу, поля і методи класу **Tcell**, який описує характеристики клітин організму. На рис. 1 відображена ієрархія класів, яка є основою для створення алгоритму обрахунку оптимальних процесів росту.

Як приклад, розглянемо імітаційну модель росту печериць в умовах впливу сферичного вірусу [2, 4].

Коефіцієнти моделі підбиралися таким чином, щоб результати імітаційної моделі співпадали з результатами багаторічних досліджень, які проводилися разом зі співробітниками біологічного факультету КНУ імені Тараса Шевченка [4].

За допомогою методів об’єкта класу **Tplant** обраховуються функції $W(t)$ та $W^0(t)$.

Будемо вважати, що відсоток ураження плантації печериць залежить від часу початку ураження t_{inf} . Тому введемо три значення початку вірусної інфекції $\{t_{inf}^1, t_{inf}^2, t_{inf}^3\}$, які “відповідають” за 25%, 50% і більше 50% ураження.

Коефіцієнти моделі, які наведені в таблиці 1, складають вектор коефіцієнтів $P = (c_1, c_2, c_3, k_1, k_2, k_3, a, c)$, значення яких відповідає конкретним умовам вирощування обраного виду грибів. Якщо необхідно імітувати процес росту рослин в залежності від екологічних умов вирощування, деякі з коефіцієнтів вектору P можна описати як функції від параметрів середовища. Наприклад, темп росту ваги плодових тіл можна визначити як функцію від температури за формулою:

$$c_1(T) = c_1^0 (e^{-T_0 b} - e^{-bT}), \quad (2)$$

де $T \geq T_0$ - температура вирощування, c_1^0 темп росту при мінімальній температурі $T = T_0$, b - коефіцієнт прискорення швидкості росту при рості температури (1/град).

Таблиця 2. Значення коефіцієнтів моделі (1)

Коефіцієнт	Значення	Коефіцієнт	Значення
c_1	0,11111	k_1	0,0355
c_2	0,0198	k_2	0,03046
c_3	0,000176	$1 - a$	0,9276
c	130,37	t_{inf}^1	80,7
t_{inf}^2	61,2	t_{inf}^3	10,1

За допомогою рис. 2, можна наглядно оцінити залежність пригнічення росту плодівих тіл в залежності від часу інфікування. Так, якщо при здоровому міцелію вага складала $w = 4,42 - 4,45 \text{ кг/м}^2$ в час $t = 100$, то при ураженні вірусом з часом інфікування $t_{inf} = 10,1$ вона складає приблизно лише $1,0 - 0,8 \text{ кг/м}^2$.

Ріст числа вірусних частинок визначається змінною $v(t)$, яка визначає в скільки раз зросла концентрація вірусу в порівнянні з часом ураження ($v(t_{inf}) = 1$).

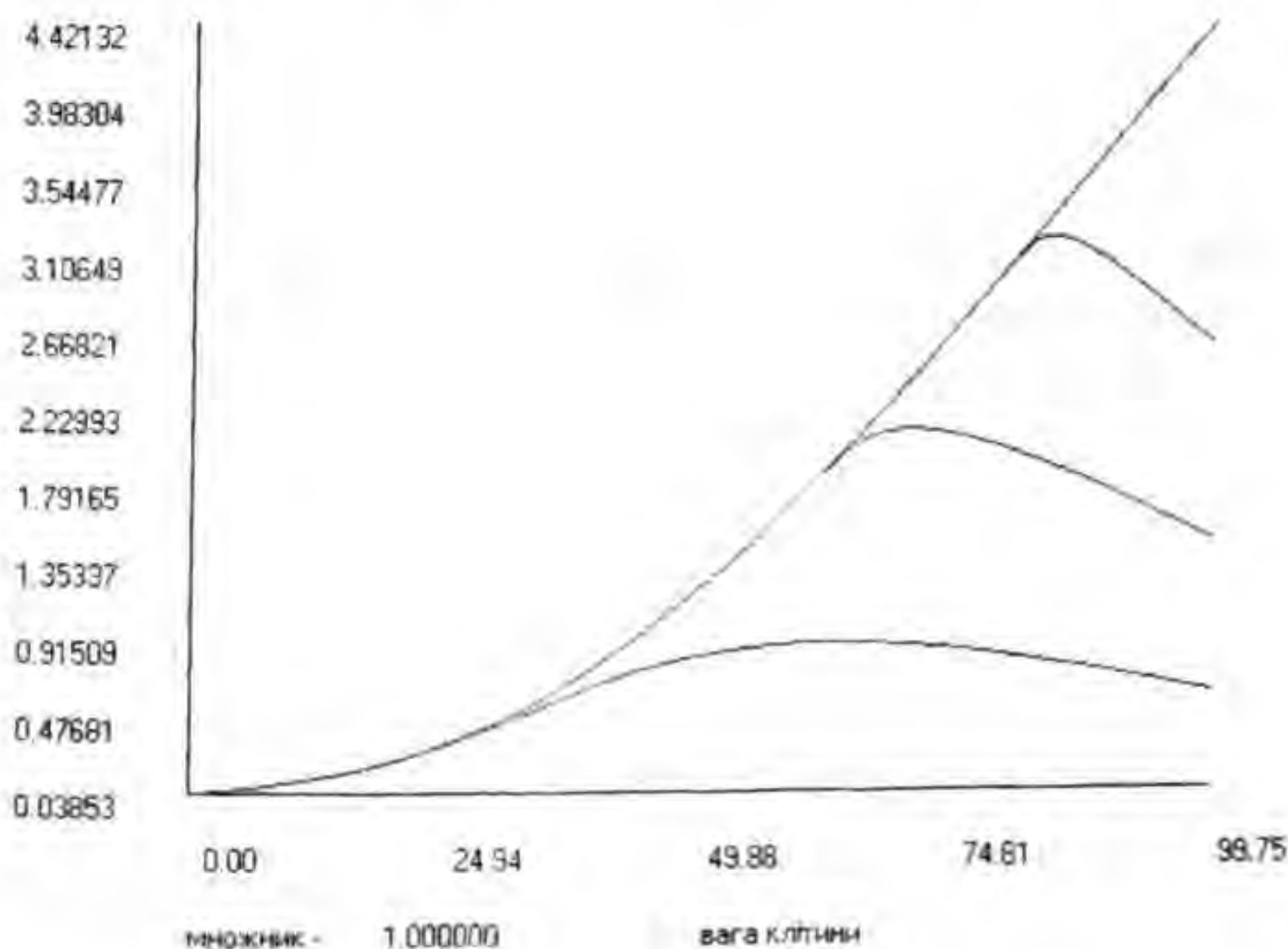


Рис. 2 Графіки росту ваги печериць на 1 м^2

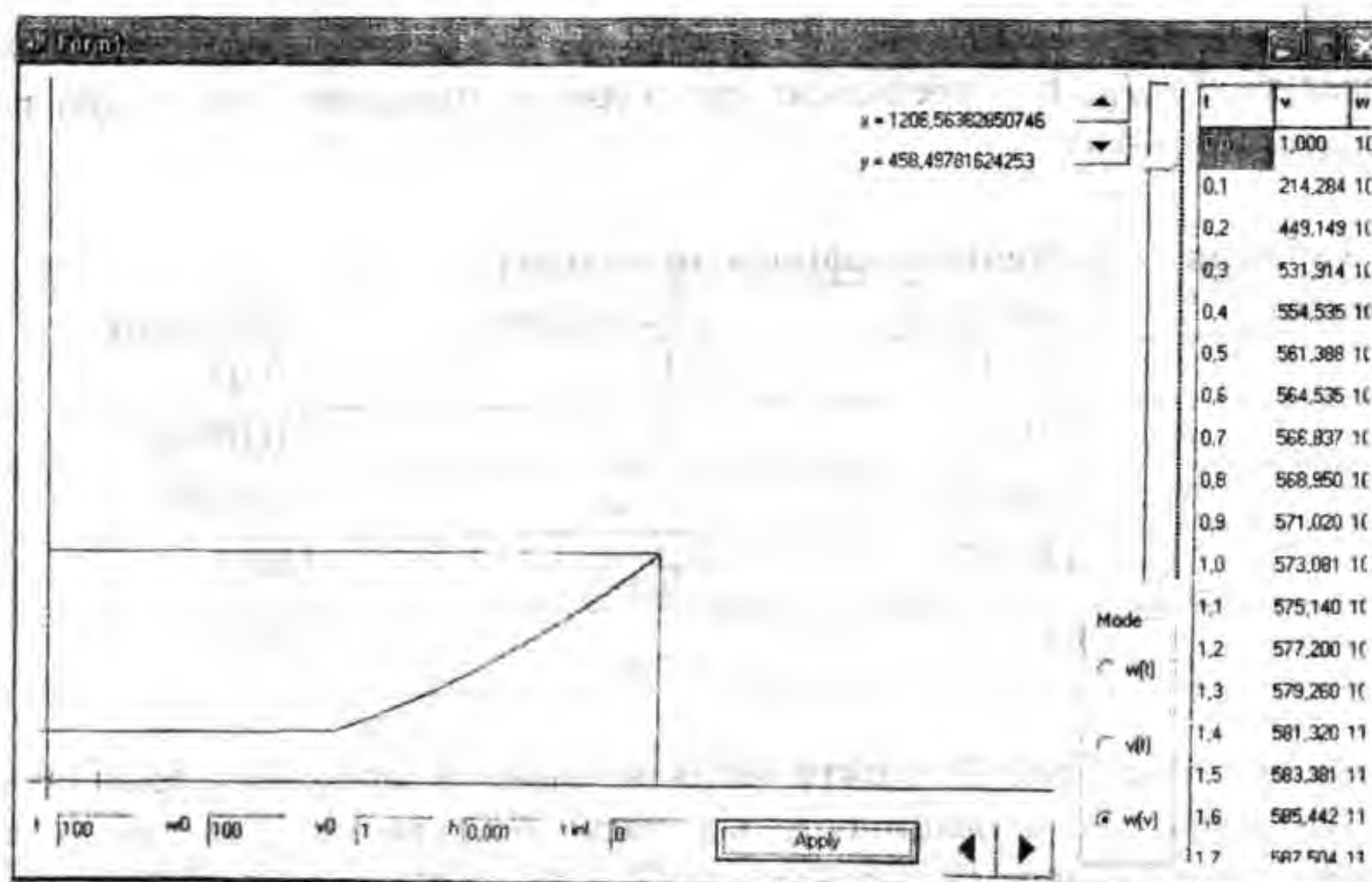


Рис. 3 Вікно роботи програми імітації росту рослин при вірусній інфекції

Підставляючи в модель значення коефіцієнтів з таблиці 2, і, змінюючи їх на незначну величину (порядку 1-10%), можна проаналізувати степінь чутливості значень змінних w, v (ваги печериць і концентрації вірусу) до цих змін.

Така властивість моделі (1) дає змогу описувати коефіцієнти як функції від екологічних факторів середовища (температура, вологість, склад ґрунту тощо), як, наприклад, представлено в формулі (2). Таким чином, ми можемо розв'язувати задачу знаходження оптимальних умов вирощування їстівних грибів.

Алгоритми обрахунків дають можливість отримувати розв'язки системи моделювання росту рослин в певних екологічних умовах, і дозволяють проводити імітацію процесів на будь-якому рівні пізнання системи "рослина-вірус-середовище" на основі об'єктно-орієнтованого підходу.

ЛІТЕРАТУРА

1. Загородній Ю.В., Гезь О.І. Дослідження математичної моделі інфекційних процесів.-Вісник КНУТШ.-2004.-№1.-С.217-222
2. Бойко О.Л., Загородній Ю.В. Математична модель динаміки росту маси плодових тіл печериць *Agaricus Bisporus* у нормі і при вірусній патології// Агроєкологічний журнал.-№1.-2004.
3. Бейко І.В., Войтенко В.В., Загородній Ю.В. Об'єктно-орієнтовний метод проектування складних екологічних систем//Вісник ЖІТІ.-№5.-1997.
4. Загородній Ю.В., Бойко А.Л. Математичні моделі в дослідженні вірусів рослин.-К.:Ексоб, 2001.-152с.

Надійшла до редакції 11.02.2005

УДК 004.056.53

Антон В. Зубенко*

**Про логіку делегувань
повноважень в динамічних
коаліційних системах.**

*В роботі пропонується спеціальна
прикладна логіка, яка описує
особливості авторизаційних процесів в
динамічних коаліційних системах.*

*Ключові слова: динамічні
коаліційні системи, тривала
авторизація, числення предикатів.*

Anton V. Zubenko*

**On logic of delegations authorities
in dynamic coalitional systems.**

*The work proposes special applied
logic that describe characteristics of
authorization processes in dynamic
coalitions.*

*Key Words: dynamic coalition
systems, prolonged authorization, predicate
calculus.*

*E-mail: zubenko@softhome.net

Особливості авторизаційних процесів в динамічних коаліційних системах. Динамічні коаліційні системи є специфічним класом розподілених обчислювальних систем, що застосовуються для захищеного розподілу ресурсів всередині груп динамічно змінюваного складу. Елементи груп є користувачами або програмними агентами, які представляють незалежні адміністративні простори. Детальніше про характеристичні ознаки та структуру динамічних коаліцій можна дізнатися з [1]. Згідно наведених умов динаміки, система контролю доступу певного домену коаліції має авторизувати суб'єкти доступу, що не належать до даного домену. Крім того, в разі динамічної зміни партнерського складу та або рівня довірчих відносин між адміністративними доменами, рівень доступу до об'єктів має бути змінений. З урахуванням даної особливості, авторизаційні процеси в динамічних коаліціях носять тривалий характер, на відміну від класичної одноразової авторизації в більшості розподілених систем. Отже, дійсність гарантованих суб'єктам повноважень має перебувати під постійним контролем на протязі всього періоду співробітництва. В [2] запропонована техніка делегувань повноважень, що враховує дані особливості авторизаційних процесів для систем типу динамічних коаліцій. Делегування повноважень адаптує системи рольового контролю доступу для використання в розподілених системах типу динамічних коаліцій. Як відомо, рольовий контроль доступу визначає права доступу суб'єктів до об'єктів на основі множини ролей, якими володіє в системі суб'єкт. Делегування повноважень дозволяє будувати класи еквівалентності між ролями, визначеними в різних адміністративних доменах. Делегування по суті є криптографічно підписаними посвідченнями, що делегують певні ролі або права надання ролей суб'єктам. Суб'єктом може бути як кінцевий користувач так і група

користувачів, уособлена певною роллю. Делегування зберігаються в спеціальних репозиторіях. Система контролю доступу домену звертається до локального репозиторію аби на основі наявних у ньому делегувань встановити чи можливо надати запитуванні повноваження доступу суб'єкту.

В даній роботі викладена формалізація техніки делегувань повноважень. Як апарат формалізації обрана безкванторна логіка предикатів [3]. Надано опис синтаксису та семантики створеної ДП-логіки, вказано її основні властивості.

Синтаксис ДП-логіки. Задамо мову L ДП-логіки. Алфавіт ДП-логіки Γ складають наступні символи:

а) $Z = \Theta \cup \Sigma \cup O \cup \Xi \cup \Theta^0 \cup \Sigma^0 \cup O^0 \cup \Xi^0$ – об'єднання множин типізованих змінних та констант, де

$\Theta = \{t_0, t_1, \dots\}$ – злічена впорядкована множина часових змінних;

$\Theta^0 = \{t_0^0, t_1^0, \dots\}$ – злічена впорядкована множина часових констант;

$\Sigma = \{\varsigma_0, \varsigma_1, \dots\}$ – скінчена множина змінних-користувачів;

$\Sigma^0 = \{\varsigma_0^0, \varsigma_1^0, \dots\}$ – скінчена множина констант-користувачів;

$O = \{o_0, o_1, \dots\}$ – скінчена множина змінних-організацій;

$O^0 = \{o_0^0, o_1^0, \dots\}$ – скінчена множина констант-організацій;

$\Xi = \{\xi_0, \xi_1, \dots\}$ – скінчена множина змінних-титулів;

$\Xi^0 = \{\xi_0^0, \xi_1^0, \dots\}$ – скінчена множина констант-титулів;

б) $\Pi = \{\Rightarrow, \Rightarrow', \Uparrow, \Downarrow\} \cup \{\therefore\}$ – множина предикатних та функціональних символів, де

$\Rightarrow, \Downarrow$ – тернарні предикатні символи;

$\Rightarrow', \Uparrow$ – предикатні 4-арні символи;

$\therefore$ – бінарний функціональний символ;

в) символи $\neg, \wedge, (,)$.

Довільну змінну або константу $z \in \Theta \cup \Sigma \cup O \cup \Theta^0 \cup \Sigma^0 \cup O^0$ – будемо називати *атомарним термом*. Серед атомарних термів виділимо *терми-принципали*, якими є елементи множини $z \in \Sigma \cup O \cup \Sigma^0 \cup O^0$.

Для $o \in O$, $\xi \in \Xi$, $o^0 \in O^0$, $\xi^0 \in \Xi^0$ вирази $o \therefore \xi$ та $o^0 \therefore \xi^0$ – будемо називати *термами-ролями*.

Довільні терми-принципали та терми-ролі будемо позначати відповідно P та R . Терми-принципали та терми-ролі будемо називати *термами-суб'єктами*. Довільний терм-суб'єкт позначатимемо S .

Сукупність ДП-формул Φ визначається індуктивно.

Нехай P – принципал, S – суб'єкт та R – роль, t – часова змінна.

Ф1. Вирази вигляду $P \overset{t}{\Rightarrow}_R S$, $P \overset{t}{\Downarrow}_R S$ - базові формули-делегування.

Вирази $S \overset{t}{\Rightarrow}_R$, $S \overset{t}{\Downarrow}_R$ - базові формули-повноваження.

Ф2. Якщо φ та ψ - довільні ДП-формули, то вирази $\neg\varphi$, $\varphi \wedge \psi$ - ДП-формули. $\neg\varphi$ називається запереченням φ . $\varphi \wedge \psi$ називається кон'юнкцією φ та ψ .

Вираз $\varphi \vee \psi$ є скороченням виразу $\neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi)$.

Вираз $\varphi \supset \psi$ є скороченням виразу $\neg(\varphi \wedge \neg\psi)$.

Замкненими будемо називати ДП-формули, які не містять змінних.

Семантика ДП-логіки. Визначимо інтерпретацію $\mathcal{I}$ ДП-логіки.

Зафіксуємо:

1) $\Omega_1 = T = \{\tau_0 < \tau_1 < \dots\}$ - лінійно впорядковану злічену множину часових констант;

2) значення часових констант з $\Theta^0: t_i^{0\mathcal{I}} = \tau_i, i \geq 0$;

3) $\Omega_2 = U = \{u_0, u_1, \dots, u_{n_2}\}$ - скінчену множину користувацьких імен;

4) значення констант-користувачів з $\Sigma^0: \varsigma_i^{0\mathcal{I}} = u_i, 0 \leq i \leq n_2$;

5) $\Omega_3 = E = \{e_0, e_1, \dots, e_{n_3}\}$ - скінчену множину назв організацій;

6) значення констант-організацій з $O^0: o_i^{0\mathcal{I}} = e_i, 0 \leq i \leq n_3$;

7) $\Omega_4 = K = \{k_0, k_1, \dots, k_{n_4}\}$ - скінчену множину назв титулів.

8) Значення констант-титулів з $\Xi^0: \xi_i^{0\mathcal{I}} = k_i, 0 \leq i \leq n_4$.

Виберемо рольове відношення $\cdot^{\mathcal{I}} \subseteq E \times K$ як підмножину декартового добутку множин E та K .

Важливим поняттям для визначення інтерпретації ДП-логіки є поняття делегування ролі, або скорочено - делегування.

Введемо поняття репозиторію. Репозиторієм є певний механізм зберігання компонент делегувань, створення, подальшого зберігання та видалення делегувань протягом часу, а також прийому-передачі делегувань до та від інших репозиторіїв.

Розподілена ДП-система складається із скінченної впорядкованої множини репозиторіїв $W = \{w_1, w_2, \dots, w_m\}$. Виходячи з прагматики поняття репозиторію, дану множину W будемо також називати авторизаційним простором.

Покладемо $V = \{\overset{t}{\Downarrow}, \overset{t}{\Rightarrow}\}$, де символ $\overset{t}{\Downarrow}$ означає безпосереднє делегування ролі, а символ $\overset{t}{\Rightarrow}$ - як надання повноважень для подальшого її делегування.

Делегування δ є сімкою $\delta = \langle \bar{P}, \bar{R}, \bar{S}, \tau', \tau'', v, w \rangle$, де $\bar{P} \in U \cup E$, $\bar{R} \in \cdot^3$, $\bar{S} \in U \cup E \cup \cdot^3$, $\tau', \tau'' \in T$, $v \in V$, $w \in W$. Сьома компонента вказує на той репозиторій, що створив дане делегування. Таким чином, сукупність делегувань Δ є скінченою підмножиною декартового добутку $\Delta \subseteq (U \cup E) \times \cdot^3 \times (U \cup E \cup \cdot^3) \times T \times T \times V \times W$.

Станом i -го репозиторію s_i будемо вважати четвірку $s_i = \langle U', E', \cdot', \Delta' \rangle$, де $U' \subseteq U$, $E' \subseteq E$, $\cdot' \subseteq \cdot^3$, $\Delta' \subseteq \Delta$. Множину всіх можливих станів i -го репозиторію позначимо S_i .

Станом авторизаційного простору W є набір $S = (s_1, s_2, \dots, s_m)$, що складається зі станів кожного з репозиторіїв $w_i, i = \overline{1, m}$.

Сукупність всіх станів авторизаційного простору – це декартовий добуток $N = S_1 \times \dots \times S_m$.

Введемо ключове поняття інтерпретації $\mathfrak{I}$ – функцію стану: $F_{st} : T \rightarrow N$. Вона співставляє кожному моменту часу τ_i поточний стан авторизаційного простору $F_{st}(\tau_j) = (s_1(\tau_j), \dots, s_m(\tau_j))$. В подальшому для спрощення позначень замість $F_{st}(\tau_j) = (s_1(\tau_j), \dots, s_m(\tau_j))$ будемо вживати запис $F_{st}(j) = (s_1(j), \dots, s_m(j))$. Компоненти $s_i(j)$ будемо позначати, додаючи індекс j до їх звичайного запису $s_i(j) = \langle U'_j, E'_j, \cdot'_j, \Delta'_j \rangle$. Аби використати одну з компонент стану i -го репозиторію на j -му кроці, використовуватимемо позначення $\langle U'_j \rangle_i, \langle E'_j \rangle_i, \langle \cdot'_j \rangle_i, \langle \Delta'_j \rangle_i$.

Нехай $j \geq 0, 1 \leq i \leq m$ та делегування $\delta = \langle \bar{P}, \bar{R}, \bar{S}, \tau', \tau'', v, w \rangle \in \langle \Delta'_j \rangle_i$.

Функція стану повинна задовольняти наступним умовам:

- 1) в початковий момент часу (на нульовому кроці) значення $F_{st}(0)$ є набором порожніх станів $s_i(0) = \langle \emptyset, \emptyset, \emptyset, \emptyset \rangle$ для всіх $i = \overline{1, m}$, де $\emptyset$ – порожня множина;
- 2) умова коректності визначення терміну дійсності делегування :
 $\tau' \leq \tau_j \leq \tau''$;
- 3) умова коректності завдання значень термів у делегуванні:
якщо значення $\bar{R} = k_j \in K$, значення $\bar{P} = u_h \in U$ або $\bar{P} = e_i \in E$, то значення $\bar{S}$ не дорівнює жодному з значень k_j, u_h, e_i ;
- 4) Умова цілісності розподіленого набору репозиторіїв:
якщо $w = w_h$ для певного $1 \leq h \leq m, h \neq i$, то $\delta \in \langle \Delta'_j \rangle_h$;

Враховуючи зміст функції стану та обрану дискретність її часового аргументу, будемо називати її функцією переходу.

Підсумуємо, що інтерпретацією ДП-логіки є сімка $\mathfrak{I} = \langle \Omega_1, \Omega_2, \Omega_3, \Omega_4, \cdot^3, W, F_{st} \rangle$.

Визначимо тепер істиннісні значення формул в даній інтерпретації $\mathfrak{I}$. Істинність чи хибність формул будемо визначати відносно певного моменту часу та обраного репозиторію. Істинне значення в інтерпретації позначатимемо *True*, хибне - *False*. За визначенням, маючи функцію стану, конкретний стан $s_i(j)$ i -го репозиторію в j -й момент часу визначається як i -та компонента значення $F_{st}(j)$. Зафіксуємо певні значення для всіх змінних в даній інтерпретації. Для довільної змінної X будемо позначати вибране значення $X^{\mathfrak{I}}$. Покладемо $\varphi|_{s_i(j)}^{\mathfrak{I}} = \text{True}$, якщо формула φ приймає значення *True* по відношенню до i -го репозиторію для $t^{\mathfrak{I}} = \tau_j$, та $\varphi|_{s_i(j)}^{\mathfrak{I}} = \text{False}$ - в супротивному.

Істинність ДП-формул визначатимемо індуктивно з урахуванням семантики зв'язок пропозиційної логіки.

Базові формули:

1. $P \Rightarrow_R^t S|_{s_i(j)}^{\mathfrak{I}} = \text{True}$ тоді і тільки, якщо з того, що $R^{\mathfrak{I}} = o^{\mathfrak{I}} \therefore \xi^{\mathfrak{I}}$ для певних $o^{\mathfrak{I}} \in E, \xi^{\mathfrak{I}} \in K$ випливає що існує делегування $\delta = \langle o^{\mathfrak{I}}, R^{\mathfrak{I}}, S^{\mathfrak{I}}, \tau', \tau'', \Rightarrow, w \rangle \in \langle \Delta'_j \rangle_i$.

2. $S \Rightarrow_R^t|_{s_i(j)}^{\mathfrak{I}} = \text{True}$ тоді і тільки, якщо виконується одна з двох умов 2.a)

або 2.b). Нехай що $R^{\mathfrak{I}} = o^{\mathfrak{I}} \therefore \xi^{\mathfrak{I}}$ для певних $o^{\mathfrak{I}} \in E, \xi^{\mathfrak{I}} \in K$.

2.a) $S^{\mathfrak{I}} = o^{\mathfrak{I}}$.

2.b) з того, що $S^{\mathfrak{I}} \neq o^{\mathfrak{I}}$ випливає

2.b') існує Q таке, що $Q \Rightarrow_R^t S|_{s_i(j)}^{\mathfrak{I}} = \text{True}$, або

2.b'') існує Q таке, що $S \Downarrow_Q^t|_{s_i(j)}^{\mathfrak{I}} = \text{True}$ та $Q \Rightarrow_R^t|_{s_i(j)}^{\mathfrak{I}} = \text{True}$

3. $P \Updownarrow_R^t S|_{s_i(j)}^{\mathfrak{I}} = \text{True}$ тоді і тільки, якщо існує делегування $\delta = \langle P^{\mathfrak{I}}, R^{\mathfrak{I}}, S^{\mathfrak{I}}, \tau', \tau'', \Updownarrow, w \rangle \in \langle \Delta'_j \rangle_i$.

4. $S \Downarrow_R^t|_{s_i(j)}^{\mathfrak{I}} = \text{True}$ тоді і тільки, якщо

4.a) існує P таке, що $P \Rightarrow_R^t|_{s_i(j)}^{\mathfrak{I}} = \text{True}$ та $P \Updownarrow_R^t S|_{s_i(j)}^{\mathfrak{I}} = \text{True}$, або

4.b) існує Q , таке, що $S \Downarrow_Q^t|_{s_i(j)}^{\mathfrak{I}} = \text{True}$ та $Q \Downarrow_R^t|_{s_i(j)}^{\mathfrak{I}} = \text{True}$ згідно

умови 4.a.

Структурні формули:

$$1. \varphi \wedge \psi \Big|_{s_i(j)}^{\mathfrak{I}} = \varphi \Big|_{s_i(j)}^{\mathfrak{I}} \wedge \psi \Big|_{s_i(j)}^{\mathfrak{I}}.$$

$$2. (\neg \varphi) \Big|_{s_i(j)}^{\mathfrak{I}} = \neg(\varphi \Big|_{s_i(j)}^{\mathfrak{I}}).$$

Теорія повноважень. Зафіксуємо аксіоми та правила виведення ДП-логіки. Нехай P – принципал, S – суб'єкт, R та Q – ролі, t – часова змінна, o – змінна-організація, ξ – змінна – титул; φ, ψ, γ – довільні ДП-формули.

Сукупність аксіом ДП-логіки A складається з множин логічних аксіом та власних аксіом.

Множина логічних аксіом AL задається наступними схемами аксіом:

A.1. *Пропозиційні аксіоми.*

$$A.1.1. \varphi \supset (\varphi \wedge \varphi)$$

$$A.1.2. (\varphi \wedge \psi) \supset \varphi$$

$$A.1.3. (\varphi \wedge \psi) \supset (\neg(\psi \wedge \gamma) \supset \neg(\gamma \wedge \varphi)).$$

A.2. *Право делегування власних ролей.*

$$o \stackrel{t}{\Rightarrow} o : \xi$$

A.3. *Передача права делегування ролі.*

$$o \stackrel{t}{\Rightarrow} o : \xi S \supset S \stackrel{t}{\Rightarrow} o : \xi$$

A.4. *Застосування повноважень.*

$$S \Downarrow_R^t \wedge R \Rightarrow_Q \supset S \Rightarrow_Q$$

A.5. *Безпосереднє делегування ролі.*

$$P \stackrel{t}{\Rightarrow}_R \wedge P \Uparrow_R^t S \supset S \Downarrow_R^t$$

A.6. *Транзитивне делегування ролі.*

$$S \Downarrow_R^t \wedge R \Downarrow_Q^t \supset S \Downarrow_Q^t$$

Покладемо D – множину всіх замкнених формул-делегувань.

Множина власних аксіом ДП-логіки – це певна підмножина $AD \subseteq D$.

Моделлю будемо називати інтерпретацію, у якій виконуються всі власні аксіоми.

ДП-логіка має єдине правило виведення модус-поненс:

MP. З формул φ та $\varphi \supset \psi$ виводиться ψ .

Теоремою називається формула, що може бути виведеною із аксіом із застосуванням правил виведення.

Під теорією повноважень розуміємо четвірку $TP = \langle L, AL, AD, MP \rangle$. Надалі нас буде цікавити лише власна множина формул-повноважень, що можуть бути виведеними в даній теорії. Будемо позначати дану множину $Th(TP)$. Зауважимо, що усі теореми є замкненими формулами-

повноваженнями.

Наведемо найбільш важливі властивості ДП-логіки.

Нехай $TP = \langle L, AL, AD, MP \rangle$ - довільна теорія повноважень.

Моделлю теорії будемо називати інтерпретацію, у якій виконуються всі її власні аксіоми.

Теорема (коректності): повноваження, що виводяться в теорії є істинними в кожній моделі.

Для доведення достатньо показати, що всі аксіоми логіки є істинними формулами для довільної інтерпретації і істинність зберігається при застосуванні до них правил виведення. Що стосується правил виведення, то єдине наявне правило зберігає істинність.

Теорема (несуперечливості): в теорії не мають місця теореми-повноваження вигляду φ та $\neg\varphi$.

Дана теорема є наслідком теореми коректності.

Формула повноваження називається *всюди істинною* в теорії TP , якщо вона є істиною в кожній моделі $\mathcal{I}$. Сукупність всіх всюди істинних формул теорії TP будемо позначати $Tr(TP)$.

Теорема (повноти): $Th(TP) = Tr(TP)$.

Включення $Th(TP) \subseteq Tr(TP)$ випливає з теореми коректності. Аби довести включення $Th(TP) \supseteq Tr(TP)$ необхідно показати, що всі умови істинності формул-повноважень забезпечуються логічними аксіомами.

Теорема (розв'язності): для довільного замкненого повноваження φ існує алгоритм перевірки твердження $\varphi \in Th(TP)$.

ДП-логіка є частковим випадком безкванторного числення предикатів. Алгоритм побудови доведення формули-повноваження базується на двох взаєморекурсивних процедурах, що перевіряють усі можливі варіанти одержання цілей з логічних аксіом та уніфікацію проміжних цілей-делегувань із власними аксіомами.

Література

1. Анисимов А.В., Зубенко А.В. Динамические коалиции – новая парадигма в области распределенных компьютерно-коммуникационных систем. Ч.1. Основные алгоритмы криптографической защиты. // Проблемы программирования. -2004. - №4. – с. 48-63.
2. Freudenthal E., Karamcheti V. DisCo: Middleware for Securely Deploying Decomposable Services in Partly Trusted Environments. // In proc. of Intern. Conf. On Distributed Comp. Systems, ICDCS'2003. – 2003. – p.10.
3. Черч Л. Введение в математическую логику. Том первый – М. Изд-во иностранной литературы, 1960 – 484 с.

Надійшла до редакції 02.2005

УДК 517.9 : 519.3

Володимир О. Капустян, Олена А.
Капустян*, Юрій К. Подлипенко

**Мінімаксні оцінки
функціоналів від
періодичних за часом
розв'язків крайових задач
Неймана для параболічних
рівнянь**

В даній роботі запропоновані методи мінімаксного середньоквадратичного оцінювання за неповними даними розв'язків періодичної за часом виродженої крайової задачі Неймана для лінійних параболічних рівнянь другого порядку. Доведені теореми про загальний вигляд мінімаксних оцінок.

Ключові слова: мінімаксні оцінки, спостереження, періодичні за часом розв'язки.

Volodymyr O. Kapustyan, Olena A.
Kapustyan*, Yuriy K. Podlipenko

**Minimax estimates of
functionals from time-periodic
solutions of Neumann
boundary value problems for
parabolic equations**

In this paper we elaborate methods of minimax mean-square estimation of time-periodic solutions of Neumann boundary value problems for the second order parabolic equations under incomplete data. The theorems on a general form of minimax estimates are proved.

Key words: minimax estimates, observations, time-periodic solutions.

E-mail: SATR@unicyb.kiev.ua

Задачам мінімаксного оцінювання станів систем, які описуються звичайними диференціальними рівняннями і рівняннями у частинних похідних за умови їх однозначної розв'язності присвячено значна кількість робіт (див., наприклад, [1]-[6]).

У роботах [7], [8] розроблений мінімаксний підхід для розв'язання проблеми оцінювання за неповними даними параметрів виродженої крайової задачі Неймана для лінійних еліптичних рівнянь другого порядку, для якої при певних співвідношеннях на праві частини рівнянь і граничних умов існує безліч розв'язків, будь-які два з яких відрізняються на константу.

У даній роботі запропоновані методи оцінювання розв'язків періодичних за часом лінійних параболічних рівнянь з крайовими умовами Неймана, аналогічні розглянутим у [7], [8].

1. **Попередні відомості.** У роботі використовуються наступні позначення: $x = (x_1, \dots, x_n)$ - просторова змінна, яка змінюється в обмеженій відкритій множині $\Omega \subset R^n$ з гладкою границею Γ класу C^2 ; $L^2(\Omega)$ - простір функцій, сумовних з квадратом в області Ω ; t - часова змінна; $Q = (0, T) \times \Omega$ - відкритий циліндр в R^{n+1} ; $\Sigma = (0, T) \times \Gamma$ - бокова поверхня циліндра; $H^m(\Omega)$ - простір Соболева порядку $m, m \in N$, в області Ω ; через $d\Gamma$ будемо позначати елемент міри на поверхні Γ ; через $L^2((0, T) \times \Gamma)$ позначимо простір

функцій, сумовних з квадратом на поверхні $(0, T) \times \Gamma$; $L^\infty(R^1 \times \Omega)$ - простір вимірних і майже скрізь обмежених на множині $R^1 \times \Omega$ функцій; $L^2(0, T; H^1(\Omega))$ - простір функцій, визначених і вимірних (стосовно міри Лебега dt) на інтервалі $(0, T)$ зі значеннями у гільбертовому просторі $H^1(\Omega)$ і таких, що

$$\int_0^T \|f(\cdot, t)\|_{H^1(\Omega)}^2 dt < \infty;$$

аналогічно визначається простір $L^2(0, T; (H^1(\Omega))')$, де через $(H^1(\Omega))'$ позначений спряжений до $H^1(\Omega)$ простір. Через $W(0, T; \Omega)$ позначимо простір функцій $f \in L^2(0, T; H^1(\Omega))$, таких що $\partial f / \partial t \in L^2(0, T; (H^1(\Omega))')$, де похідна $\partial f / \partial t$ береться від функції f , яка розглядається як розподіл на $(0, T)$ зі значеннями в $H^1(\Omega)$. Цей простір є гільбертовим відносно норми

$$\|f\|_{W(0, T; \Omega)} = \left(\int_0^T (\|f(\cdot, t)\|_{H^1(\Omega)}^2 + \|\partial f(\cdot, t) / \partial t\|_{(H^1(\Omega))'}^2) dt \right)^{1/2}.$$

Через $W^*(R^1; \Omega)$ будемо позначати клас функцій $\tilde{U} \in W(0, T; \Omega)$, які задовольняють умову $\tilde{U}(0, x) = \tilde{U}(T, x) \quad \forall x \in \Omega$, і продовжені за змінною t періодично з періодом $T > 0$, так що $\forall \tilde{U} \in W^*(R^1; \Omega): \tilde{U}(t+T, x) = \tilde{U}(t, x) \quad \forall t \in R^1, x \in \Omega$.

Позначимо через $S := (f_1, f_2)$ множину пар функцій $\tilde{f}_1(t, x)$ і $\tilde{f}_2(t, x)$, заданих відповідно в області $R^1 \times \Omega$ і на її границі $R^1 \times \Gamma$ і таких, що задовольняють умови:

$$(i): \quad \tilde{f}_1(t+T, x) = \tilde{f}_1(t, x) \quad \forall t \in R^1, x \in \Omega,$$

$$\tilde{f}_2(t+T, x) = \tilde{f}_2(t, x) \quad \forall t \in R^1, x \in \Gamma,$$

$$\tilde{f}_1 \in L^2((0, T) \times \Omega), \quad \tilde{f}_2 \in L^2((0, T) \times \Gamma),$$

$$(ii): \quad \int_0^T \int_\Omega \tilde{f}_1(t, x) dt dx + \int_0^T \int_\Gamma \tilde{f}_2(t, x) dt dx = 0.$$

Розглянемо рівняння

$$\frac{\partial U(t, x)}{\partial t} + A(t)U(t, x) = G(t, x), \quad (t, x) \in R^1 \times \Omega, \quad (1)$$

з крайовою умовою Неймана

$$\frac{\partial U(t, x)}{\partial \nu_A} = g(t, x), \quad (t, x) \in R^1 \times \Gamma, \quad (2)$$

де $A = A(t)$ - диференціальний оператор, заданий в області $(0, T) \times \Omega$, вигляду

$$A(t)U(t, x) = - \sum_{i,j=1}^n \partial / \partial x_i (a_{ij}(t, x) \partial U(t, x) / \partial x_j),$$

коефіцієнти $a_{ij}(t, x)$ якого задовольняють умови

$$a_{ij}(t+T, x) = a_{ij}(x, t) \quad \forall t \in R^1, x \in \Omega, a_{ij} \in L^\infty(R^1 \times \Omega),$$

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x, t) \xi_i \xi_j \geq \alpha \sum_{i=1}^n \xi_i^2, \quad \alpha > 0, \quad \forall \xi_i \in R^1$$

майже скрізь в $R^1 \times \Omega$; через $v(x)$ позначена зовнішня по відношенню до області Ω одинична нормаль в точці $x \in \Gamma$,

$$\frac{\partial U(t, x)}{\partial v_A} = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(t, x) \frac{\partial U(t, x)}{\partial x_j} \cos(v, x_i),$$

де $\cos(v, x_i) - i$ -й направляючий косинус нормалі v .

Можна показати, що задача (1), (2) має розв'язок

$$U \in W^*(R^1; \Omega) \quad (3)$$

тоді і лише тоді, коли

$$(G, g) \in S, \quad (4)$$

і цей розв'язок визначений з точністю до константи. При цьому під узагальненим розв'язком задачі (1)-(3) будемо розуміти функцію U , яка задовольняє (3) й інтегральну тотожність

$$\begin{aligned} & \int_{t_0}^T \left(\frac{\partial U(\cdot, t)}{\partial t}, V(\cdot, t) \right) dt + \int_{t_0}^T a(t; U(\cdot, t), V(\cdot, t)) dt = \\ & = \int_{t_0}^T \int_{\Omega} G V dx dt + \int_{t_0}^T \int_{\Gamma} g V d\Gamma dt \quad \forall V \in L^2(t_0, T; H^1(\Omega)), \end{aligned} \quad (5)$$

де

$$a(t; U, V) = \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} a_{ij}(x, t) \frac{\partial U(x)}{\partial x_j} \frac{\partial V(x)}{\partial x_i} dx, \quad \forall t_0 \in (0, T);$$

через $(\cdot, \cdot)$ позначено відношення дуальності на $(H^1(\Omega))' \times H^1(\Omega)$, узгоджене зі скалярним добутком в $L^2(\Omega)$.

Із сформульованого вище твердження безпосередньо випливає, що крайова задача Неймана вигляду

$$-\frac{\partial V(t, x)}{\partial t} + A^*(t)V(t, x) = \tilde{G}(t, x), \quad (t, x) \in R^1 \times \Omega, \quad (6)$$

$$\frac{\partial U(t, x)}{\partial v_{A^*}} = \tilde{g}(t, x), \quad (t, x) \in R^1 \times \Gamma, \quad (7)$$

спряжена до задачі (1), (2), має розв'язок

$$V \in W^*(R^1; \Omega) \quad (8)$$

тоді і лише тоді, коли $(\tilde{G}, \tilde{g}) \in S$ і цей розв'язок визначений з точністю до константи. Під узагальненим розв'язком задачі (6)-(8) будемо розуміти функцію V , яка задовольняє (8) і інтегральну тотожність

$$\begin{aligned} & - \int_0^T \left(\frac{\partial V(\cdot, t)}{\partial t}, U(t, \cdot) \right) dt + \int_0^T a(t; U(t, \cdot), V(t, \cdot)) dt = \\ & = \int_0^T \int_{\Omega} \tilde{G}(t, x) U(t, x) dx dt + \int_0^T \int_{\Gamma} \tilde{g}(t, x) U(t, x) d\Gamma dt \quad \forall U \in L^2(0, T; H^1(\Omega)). \end{aligned} \quad (9)$$

Розв'язки $U(t, x)$ і $V(t, x)$ задач (1)-(3) і (6)-(8) визначаються єдиним чином, якщо їх пронормувати умовами

$$\int_0^T \int_{\Omega} U(t, x) dx dt = 0, \quad \int_0^T \int_{\Omega} V(t, x) dx dt = 0, \quad (10)$$

і для них виконуються нерівності

$$\|U\|_{W(0,T;\Omega)} \leq C_T \left(\|G\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} + \|g\|_{L^2(0,T;L^2(\Gamma))} \right), \quad (11)$$

$$\|V\|_{W(0,T;\Omega)} \leq \tilde{C}_T \left(\|\tilde{G}\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} + \|\tilde{g}\|_{L^2(0,T;L^2(\Gamma))} \right), \quad (12)$$

де C_T і $\tilde{C}_T$ - константи, які залежать лише від T .

2. Постановка задачі мінімаксного оцінювання. Покладемо $H := (L^2(\Omega))^m$.

Позначимо через G_0 множину трійок функцій $\tilde{f}(t, x)$, $\tilde{h}(t, x)$ і $\tilde{\xi}(t, x) := (\tilde{\xi}_1(t, x), \dots, \tilde{\xi}_m(t, x))$, заданих відповідно на множинах $R^1 \times \Omega$, $R^1 \times \Gamma$ і $\bar{Q}_m$, які задовольняють умови:

$$(i1): \quad (\tilde{f}, \tilde{h}) \in S, \quad \tilde{\xi} := (\tilde{\xi}_1, \dots, \tilde{\xi}_m) \in H,$$

$$(ii2): \quad \int_0^T \int_{\Omega} \left((\tilde{f}(t, x) - f_0(t, x))^2 q^2(t, x) + \sum_{k=1}^m \tilde{\xi}_k^2(t, x) r_k^2(t, x) \right) dx dt + \\ + \int_0^T \int_{\Gamma} (\tilde{h}(t, x) - h_0(t, x))^2 q_1^2(t, x) d\Gamma dt \leq 1,$$

де $f_0(t, x)$, $h_0(t, x)$ - задані функції, такі що $(f_0, h_0) \in S$, $q(t, x)$ і $q_1(t, x)$ - неперервні T -періодичні по t функції відповідно на множинах $R^1 \times \bar{\Omega}$ і $R^1 \times \Gamma$, а $r_k \in C(\bar{Q})$, $k = \overline{1, m}$.

Нехай деякий T -періодичний у часі процес описується функцією $\varphi(t, x)$, яка задовольняє крайову задачу Неймана

$$\varphi \in W^*(R^1; \Omega), \quad (13)$$

$$\frac{\partial \varphi(t, x)}{\partial t} + A(t) \varphi(t, x) = f(t, x), \quad (t, x) \in R^1 \times \Omega, \quad (14)$$

$$\frac{\partial \varphi(t, x)}{\partial \nu_A} = h(t, x), \quad (t, x) \in R^1 \times \Gamma, \quad (15)$$

де $(f, h) \in S$.

Припустимо, що в області Ω на протязі проміжка часу, починаючи з моменту $t = 0$ до моменту $t = T$, спостерігаються функції

$$y_k(\varphi, \xi_k; t, x) = \int_0^T \int_{\Omega} g_k(t, x, \tau, y) \varphi(\tau, y) dy d\tau + \xi_k(t, x), \quad (t, x) \in (0, T) \times \Omega, \quad (16)$$

де $\varphi(t, x)$ - розв'язок задачі (1)-(3), $\xi_k \in L^2((0, T) \times \Omega)$, $k = \overline{1, m}$, - похибки у спостереженнях, g_k - функції, задані на множині $[0, T] \times \bar{\Omega} \times R^1 \times \bar{\Omega}$ такі, що $g_k(t, x, \tau + T, y) = g_k(t, x, \tau, y) \quad \forall \tau \in R^1, \quad t \in [0, T], \quad x, y \in \Omega,$

$g_k \in L^2(Q \times Q)$, і, крім того, припускається, що існує хоча б одне число i_0 , $1 \leq i_0 \leq m$, таке що

$$\int_0^T \int_{\Omega} g_{i_0}(t, x, \tau, y) dy d\tau \neq 0. \quad (17)$$

Будемо далі вважати, що функції $f(t, x)$ і $h(t, x)$ у правих частинах рівнянь (14) і (15), а також функції $\xi_k(t, x)$, які описують похибки у спостереженнях (16), не відомі точно, а відомо лише, що

$$F := (f, h, \xi) \in G_0. \quad (18)$$

Нехай в області $Q = (0, T) \times \Omega$ задана функція $l_0 \in L^2(0, T, L^2(\Omega))$, T -періодична по t , $l_0(t, t+T, x) = l_0(t, x)$. Задача оцінювання полягає в тому, щоб за спостереженнями вигляду (16) за станом системи, яка описується крайовою задачею Неймана (1)-(3) при умовах (18), оцінити лінійний функціонал

$$l(\varphi) = \int_0^T \int_{\Omega} l_0(t, x) \varphi(t, x) dx dt \quad (19)$$

в класі лінійних за спостереженнями оцінок вигляду

$$\hat{l}(\varphi) = \int_0^T \int_{\Omega} \sum_{k=1}^m u_k(t, x) y_k(\varphi, \xi_k; t, x) dx dt + c, \quad (20)$$

де $u_k \in L^2(Q)$, $k = \overline{1, m}$, $c \in R^1$. Покладемо $u := (u_1, \dots, u_m)$.

Означення. Оцінку

$$\hat{\hat{l}}(\varphi) = \int_0^T \int_{\Omega} \sum_{k=1}^m \hat{u}_k(t, x) y_k(\varphi, \xi_k; t, x) dx dt + \hat{c},$$

в якій функції $\hat{u}(t, x)$ і число $\hat{c}$ визначаються з умови

$$\inf_{u \in H, c \in R^1} \sup_{\tilde{F} \in G_0, a \in R^1} [l(\tilde{\varphi} + a) - \hat{l}(\tilde{\varphi} + a)]^2, \quad (21)$$

де

$$\hat{l}(\tilde{\varphi}) = \int_0^T \int_{\Omega} \sum_{k=1}^m u_k(t, x) y_k(\tilde{\varphi}, \xi_k; t, x) dx dt + c, \quad (22)$$

а $\tilde{\varphi}$ - деякий розв'язок крайової задачі

$$\tilde{\varphi} \in W^*(R^1; \Omega), \quad (23)$$

$$\frac{\partial \tilde{\varphi}(t, x)}{\partial t} + A(t) \tilde{\varphi}(t, x) = \tilde{f}(t, x), \quad (t, x) \in R^1 \times \Omega, \quad (24)$$

$$\frac{\partial \tilde{\varphi}(t, x)}{\partial \nu_A} = \tilde{g}(t, x), \quad (t, x) \in R^1 \times \Gamma, \quad (25)$$

назвемо мінімаксною оцінкою виразу (19), а величину

$$\sigma(\varphi) := \left\{ \left[l(\varphi) - \hat{l}(\varphi) \right]^2 \right\}^{1/2}$$

- мінімаксною похибкою оцінювання.

$$\sigma(\varphi) \leq \sigma = \sup_{\tilde{F} \in G_0, a \in R^1} \left[l(\tilde{\varphi} + a) - \hat{l}(\tilde{\varphi} + a) \right]^2 = \left\{ \sup_{\tilde{F} \in G_0} \left[l(\tilde{\varphi}) - \hat{l}(\tilde{\varphi}) \right]^2 \right\}^{1/2}.$$

Зауважимо, що дане вище означення мінімаксної оцінки є більш загальним, ніж відповідні означення в [1]-[6], оскільки воно враховує як наявність додаткових співвідношень на дані задачі, так і багатозначність її розв'язку.

3. Зведення задачі мінімаксного оцінювання до задачі оптимального керування. Покажемо, що задача мінімаксного оцінювання зводиться до розв'язання задачі оптимального керування системою, яка описується крайовою задачею, спряженою до задачі (13)-(15) з квадратичною функцією вартості.

З цією метою при фіксованому $u = (u_1, \dots, u_m) \in U$ введемо до розгляду функцію $z(t, x; u) = z(t, x; u_1, \dots, u_m)$ як розв'язок задачі

$$z \in W^*(R^1; \Omega), \quad (28)$$

$$\begin{aligned} -\frac{\partial z(t, x; u)}{\partial t} + A(t)z(t, x; u) &= l_0(t, x) - \\ &- \int_0^T \int_{\Omega} \sum_{k=1}^m u_k(\tau, \xi) g_k(\tau, \xi, t, x) d\xi d\tau, \quad (t, x) \in R^1 \times \Omega, \end{aligned} \quad (29)$$

$$\frac{\partial z}{\partial \nu_{A^*}} = 0, \quad (t, x) \in R^1 \times \Gamma, \quad (30)$$

$$\int_0^T \int_{\Omega} q^{-2}(t, x) z(t, x; u) dx dt + \int_0^T \int_{\Gamma} q_1^{-2}(t, x) z(t, x; u) d\Gamma dt = 0. \quad (31)$$

Функція $z(t, x; u)$ визначається з рівнянь (28)-(31) єдиним чином. Дійсно, умова $u \in U$ співпадає з умовою однозначної розв'язності задачі (28)-(30) у класі функцій $W^*(R^1; \Omega)$, для яких виконується рівність (10). Позначимо цей розв'язок через $z_0(t, x; u)$ і покладемо

$$c_0 = \frac{\int_0^T \int_{\Omega} q^{-2}(t, x) z_0(t, x; u) dx dt + \int_0^T \int_{\Gamma} q_1^{-2}(t, x) z_0(t, x; u) d\Gamma dt}{\int_0^T \int_{\Omega} q^{-2}(t, x) dx dt + \int_0^T \int_{\Gamma} q_1^{-2}(t, x) d\Gamma dt}.$$

Тоді функція $z(t, x; u) = z_0(t, x; u) + c_0$ - єдиний розв'язок задачі (28)-(31). Має місце наступний результат.

Лема 1. Задача знаходження мінімаксної оцінки функціоналу $l(\varphi)$ еквівалентна задачі оптимального керування системою, яка описується крайовою задачею (28)-(31) з функцією вартості вигляду

$$\begin{aligned} J(u) &= \int_0^T \int_{\Omega} q^{-2}(t, x) z^2(t, x; u) dx dt + \int_0^T \int_{\Gamma} q_1^{-2}(t, x) z^2(t, x; u) d\Gamma dt + \\ &+ \sum_{k=1}^m \int_0^T \int_{\Omega} r_k^{-2}(t, x) u_k^2(t, x) dx dt. \end{aligned} \quad (32)$$

Доведення. Враховуючи (28)-(31), (27) і той факт, що другий доданок у правій частині співвідношення (27) обертається в нуль для $u \in U$, знаходимо

$$\begin{aligned} & l(\tilde{\varphi} + a) - \hat{l}(\tilde{\varphi} + a) = \\ & = \int_0^T \int_{\Omega} \left[l_0(t, x) - \int_0^T \int_{\Omega} \sum_{k=1}^m u_k(\tau, \xi) g_k(\tau, \xi, t, x) d\xi d\tau \right] \tilde{\varphi}(t, x) dx dt - \\ & - \int_0^T \int_{\Omega} \sum_{k=1}^m u_k(t, x) \tilde{\xi}_k(t, x) dx dt - c. \end{aligned}$$

Далі, оскільки $\tilde{\varphi}(t, x)$ є розв'язком крайової задачі (23)-(25), то в силу (5) виконується тотожність

$$\begin{aligned} & \int_{t_0}^T \left(\frac{\partial \tilde{\varphi}(t, \cdot)}{\partial t}, V(t, \cdot) \right) dt + \int_{t_0}^T a(t; \tilde{\varphi}(t, \cdot), V(t, \cdot)) dt = \\ & = \int_{t_0}^T \int_{\Omega} \tilde{f} V dx dt + \int_{t_0}^T \int_{\Gamma} \tilde{h} V d\Gamma dt \quad \forall V \in L^2(t_0, T; H^1(\Omega)). \end{aligned} \quad (33)$$

Поклавши у цій тотожності $V(t, x) = z(t, x; u)$, одержимо

$$\begin{aligned} & \int_{t_0}^T \left(\frac{\partial \tilde{\varphi}(t, \cdot)}{\partial t}, z(t, \cdot; u) \right) dt + \int_{t_0}^T a(t; \tilde{\varphi}(t, \cdot), z(t, \cdot; u)) dt = \\ & = \int_{t_0}^T \int_{\Omega} \tilde{f} z dx dt + \int_{t_0}^T \int_{\Gamma} \tilde{h} z d\Gamma dt. \end{aligned}$$

Інтегруючи за частинами перший доданок у лівій частині останньої рівності по t на проміжку $(0, T)$, що є законним через те, що $z, \tilde{\varphi} \in W(0, T; \Omega)$, і враховуючи T -періодичність функцій z і $\tilde{\varphi}$, одержимо

$$\begin{aligned} & - \int_{t_0}^T \left(\tilde{\varphi}(t, \cdot), \frac{\partial z(t, \cdot; u)}{\partial t} \right) dt + \int_{t_0}^T a(t; \tilde{\varphi}(t, \cdot), z(t, \cdot; u)) dt = \\ & = \int_{t_0}^T \int_{\Omega} \tilde{f} z dx dt + \int_{t_0}^T \int_{\Gamma} \tilde{h} z d\Gamma dt. \end{aligned} \quad (34)$$

Оскільки $z(t, x; u)$ є розв'язком задачі (28)-(30), то в силу (15) виконується тотожність

$$\begin{aligned} & - \int_{t_0}^T \left(\frac{\partial z(t, \cdot; u)}{\partial t}, U(t, \cdot) \right) dt + \int_{t_0}^T a(t; U(t, \cdot), z(t, \cdot; u)) dt = \\ & = \int_0^T \int_{\Omega} \left[l_0(t, x) - \int_0^T \int_{\Omega} \sum_{k=1}^m u_k(\tau, \xi) g_k(\tau, \xi, t, x) d\xi d\tau \right] U(t, x) dx dt \end{aligned}$$

$\forall U \in L^2(t_0, T; H^1(\Omega))$, покладаючи в якій $U(t, x) = \tilde{\varphi}(t, x)$, знаходимо

$$\begin{aligned} & - \int_{t_0}^T \left(\frac{\partial z(t, \cdot; u)}{\partial t}, \tilde{\varphi}(t, \cdot) \right) dt + \int_{t_0}^T a(t; \tilde{\varphi}(t, \cdot), z(t, \cdot; u)) dt = \\ & = \int_0^T \int_{\Omega} \left[l_0(t, x) - \int_0^T \int_{\Omega} \sum_{k=1}^m u_k(\tau, \xi) g_k(\tau, \xi, t, x) d\xi d\tau \right] \tilde{\varphi}(t, x) dx dt. \end{aligned} \quad (35)$$

З рівностей (34) і (35) випливає, що

$$\begin{aligned} &= \int_0^T \int_{\Omega} \left[l_0(t, x) - \int_0^T \int_{\Omega} \sum_{k=1}^m u_k(\tau, \xi) g_k(\tau, \xi, t, x) d\xi d\tau \right] \tilde{\varphi}(t, x) dx dt = \\ &= \int_0^T \int_{\Omega} \tilde{f} z dx dt + \int_0^T \int_{\Gamma} \tilde{h} z d\Gamma dt. \end{aligned}$$

Звідси отримуємо, що при $u \in U$

$$\begin{aligned} &\inf_{c \in R^1} \sup_{\tilde{F} \in G_0, a \in R^1} \left[l(\tilde{\varphi} + a) - \hat{l}(\tilde{\varphi} + a) \right]^2 = \\ &= \inf_{c \in R^1} \sup_{\tilde{F} \in G_0} \left\{ \int_0^T \int_{\Omega} z(t, x; u) (\tilde{f}(t, x) - f_0(t, x)) dx dt + \right. \\ &+ \int_0^T \int_{\Gamma} z(t, x; u) (\tilde{h}(t, x) - h_0(t, x)) d\Gamma dt - \int_0^T \int_{\Omega} \sum_{k=1}^m u_k(t, x) \tilde{\xi}_k(t, x) dx dt + \\ &\left. + \int_0^T \int_{\Omega} z(t, x; u) f_0(t, x) dx dt + \int_0^T \int_{\Gamma} z(t, x; u) h_0(t, x) d\Gamma dt - c \right\}^2. \quad (36) \end{aligned}$$

Для знаходження верхньої межі у правій частині (36) введемо позначення

$$\begin{aligned} \Sigma &:= \int_0^T \int_{\Omega} z(t, x; u) (\tilde{f}(t, x) - f_0(t, x)) dx dt + \\ &+ \int_0^T \int_{\Gamma} z(t, x; u) (\tilde{h}(t, x) - h_0(t, x)) d\Gamma dt - \int_0^T \int_{\Omega} \sum_{k=1}^m u_k(t, x) \tilde{\xi}_k(t, x) dx dt \end{aligned}$$

і, скориставшись узагальненою нерівністю Коші-Буняковського і співвідношеннями (ii2), отримаємо, що має місце нерівність

$$\begin{aligned} |\Sigma| &\leq \left\{ \int_0^T \int_{\Omega} q^{-2}(t, x) z^2(t, x; u) dx dt + \int_0^T \int_{\Gamma} q_1^{-2}(t, x) z^2(t, x; u) d\Gamma dt + \right. \\ &\quad \left. + \int_0^T \int_{\Omega} \sum_{k=1}^m r_k^{-2}(t, x) u_k^2(t, x) dx dt \right\}^{1/2} \times \\ &\times \left\{ \int_0^T \int_{\Omega} (\tilde{f}(t, x) - f_0(t, x))^2 q^2(t, x) dx dt + \int_0^T \int_{\Gamma} (\tilde{h}(t, x) - h_0(t, x))^2 q_1^2(t, x) d\Gamma dt + \right. \\ &\quad \left. + \int_0^T \int_{\Omega} \sum_{k=1}^m \tilde{\xi}_k^2(t, x) r_k^2(t, x) dx dt \right\}^{1/2} \leq \\ &\leq \left\{ \int_0^T \int_{\Omega} q^{-2}(t, x) z^2(t, x; u) dx dt + \int_0^T \int_{\Gamma} q_1^{-2}(t, x) z^2(t, x; u) d\Gamma dt + \right. \\ &\quad \left. + \int_0^T \int_{\Omega} \sum_{k=1}^m r_k^{-2}(t, x) u_k^2(t, x) dx dt \right\}^{1/2} =: a, \end{aligned}$$

в якій знак рівності досягається при $\tilde{F}_0 = (\tilde{f}_0, \tilde{h}_0, \tilde{\xi}_0) \in G_0$, де

$$\tilde{f}_0(t, x) = \pm \frac{1}{a} q^{-2}(t, x) z(t, x; u) + f_0(t, x),$$

$$\tilde{h}_0(t, x) = \pm \frac{1}{a} q_1^{-2}(t, x) z(t, x; u)|_{\Gamma} + h_0(t, x),$$

$$\tilde{\xi}_0(t, x) = (\tilde{\xi}_1^{(0)}(t, x), \dots, \tilde{\xi}_m^{(0)}(t, x)), \quad \tilde{\xi}_k^{(0)}(t, x) = \mp \frac{1}{a} r_k^{-2}(t, x) u_k(t, x).$$

Дійсно, в силу (31) маємо

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_{\Omega} \tilde{f}_0(t, x) dx dt + \int_0^T \int_{\Gamma} \tilde{h}_0(t, x) d\Gamma dt = \\ & = \pm \frac{1}{a} \left\{ \int_0^T \int_{\Omega} q^{-2}(t, x) z(t, x; u) dx dt + \int_0^T \int_{\Gamma} q_1^{-2}(t, x) z(t, x; u) d\Gamma dt \right\} + \\ & + \int_0^T \int_{\Omega} f_0(t, x) dx dt + \int_0^T \int_{\Gamma} h_0(t, x) d\Gamma dt = 0. \end{aligned}$$

Тому

$$\begin{aligned} & \inf_{c \in R^1} \sup_{\tilde{F} \in G_0, a \in R^1} \left[l(\tilde{\varphi} + a) - \hat{l}(\tilde{\varphi} + a) \right]^2 = \\ & = \inf_{c \in R^1} \sup_{\tilde{F} \in G_0} \left\{ \int_0^T \int_{\Omega} z(t, x; u) \tilde{f}(t, x) dx dt + \int_0^T \int_{\Gamma} \tilde{h} z d\Gamma dt - \right. \\ & \quad \left. - \int_0^T \int_{\Omega} \sum_{k=1}^m u_k(t, x) \tilde{\xi}_k(t, x) dx dt - c \right\}^2 = \\ & = \inf_{c \in R^1} \sup_{|\Sigma| \leq a} \left(\Sigma + \int_0^T \int_{\Omega} z(t, x; u) f_0(t, x) dx dt + \int_0^T \int_{\Gamma} z(t, x; u) h_0(t, x) d\Gamma dt - c \right)^2 = \\ & = a^2 = \int_0^T \int_{\Omega} q^{-2}(t, x) z^2(t, x; u) dx dt + \\ & + \int_0^T \int_{\Gamma} q_1^{-2}(t, x) z^2(t, x; u) d\Gamma dt + \int_0^T \int_{\Omega} \sum_{k=1}^m r_k^{-2}(t, x) u_k^2(t, x) dx dt = J(u), \end{aligned}$$

де функціонал J визначається формулою (32), а інфімум по c досягається при

$$c = \int_0^T \int_{\Omega} z(t, x; u) f_0(t, x) dx dt + \int_0^T \int_{\Gamma} z(t, x; u) h_0(t, x) d\Gamma dt.$$

4. Представлення для мінімаксних оцінок через розв'язки систем інтегро-диференціальних рівнянь. Розв'язуючи задачу оптимального керування (28)-(32) з використанням міркувань, які містяться в [7] з відповідними модифікаціями, аналогічними тим, які зроблені при доведенні леми 1, що є аналогом леми 1 з [7], прийдемо до наступних результатів.

Теорема 1. Мінімаксна оцінка функціоналу $l(\varphi)$ має вигляд

$$\hat{l}(\varphi) = \int_0^T \int_{\Omega} \sum_{k=1}^m \hat{u}_k(t, x) y_k(\varphi, \xi_k; t, x) dx dt + \hat{c},$$

де

$$\hat{u}_k(t, x) = r_k^2(t, x) \int_0^T \int_{\Omega} p(\tau, \xi) g_k(t, x, \tau, \xi) d\xi d\tau, \quad k = \overline{1, m},$$

$$\hat{c} = \int_0^T \int_{\Omega} z(t, x) f_0(t, x) dx dt + \int_0^T \int_{\Gamma} z(t, x) h_0(t, x) d\Gamma dt,$$

а функції $z(t, x)$ і $p(t, x)$ визначаються з розв'язку задачі (37)-(44):

$$z \in W^*(R^1; \Omega), \quad (37)$$

$$-\frac{\partial z(t, x)}{\partial t} + A^*(t)z(t, x) = l_0(t, x) - \sum_{k=1}^m \int_0^T \int_{\Omega} r_k^2(\tau, \xi) g_k(\tau, \xi, t, x) \times \\ \times \int_0^T \int_{\Omega} p(t', y) g_k(\tau, \xi, t', y) dy dt' d\xi d\tau, \quad (t, x) \in R^1 \times \Omega, \quad (38)$$

$$\frac{\partial z(t, x)}{\partial \nu_{A^*}} = 0, \quad (t, x) \in R^1 \times \Gamma, \quad (39)$$

$$\int_0^T \int_{\Omega} q^{-2}(t, x) z(t, x) dx dt + \int_0^T \int_{\Gamma} q_1^{-2}(t, x) z(t, x) d\Gamma dt = 0, \quad (40)$$

$$p \in W^*(R^1; \Omega), \quad (41)$$

$$\frac{\partial p(t, x)}{\partial t} + A(t)p(t, x) = q^{-2}(t, x)z(t, x), \quad (t, x) \in R^1 \times \Omega, \quad (42)$$

$$\frac{\partial p(t, x)}{\partial \nu_A} = q_1^{-2}z(t, x), \quad (t, x) \in R^1 \times \Gamma, \quad (43)$$

$$\int_0^T \int_{\Omega} \left[l_0(t, x) - \sum_{k=1}^m \int_0^T \int_{\Omega} r_k^2(\tau, \xi) g_k(\tau, \xi, t, x) \times \right. \\ \left. \times \int_0^T \int_{\Omega} p(t', y) g_k(\tau, \xi, t', y) dy dt' d\xi d\tau \right] dx dt = 0. \quad (44)$$

Задача (37)-(44) однозначно розв'язна.

Похибка мінімаксного оцінювання функціоналу $l(\varphi)$ задовольняє нерівність

$$\sigma(\varphi) \leq \sigma = [l(p)]^{1/2} = \left[\int_0^T \int_{\Omega} l_0(t, x) p(t, x) dx dt \right]^{1/2}.$$

Отримані результати, на наш погляд, можуть бути використані при побудові систем автоматизованої обробки результатів спостережень періодичних за часом процесів фільтрації, теплопровідності та інше, при розв'язанні задачі локалізації джерел, які утворюють спостережувані фізичні поля.

Література

1. Красовский Н.Н. Теория управления движением. – М.: Наука, 1968. – 476 с.
2. Куржанский А.Б. Управление и наблюдение в условиях неопределенности. – М.:Наука, 1977. – 392 с.
3. Наконечный А.Г. Минимаксное оценивание функционалов от решений вариационных уравнений в гильбертовых пространствах. – Киев: КГУ, 1985. – 82 с.
4. Наконечный А.Г., Подлипенко Ю.К., Зайцев Ю.А. Минимаксное прогнозное оценивание по неполным данным решений начально-краевых задач для параболических уравнений с разрывными коэффициентами // Кибернетика и системный анализ. - 2000. - № 6, с.68-78.
5. Подлипенко Ю.К., Дабабнех Амер Минимаксное оценивание решений задач трансмиссии для эллиптических уравнений при отсутствии информации относительно условий сопряжения // Проблемы управления и информатики. – 2000. - № 5, с.52-72.
6. Капустян О.А. Регулятори та мінімаксні оцінки для параболічних рівнянь зі швидко осцилюючими коефіцієнтами // Канд. дисертація. – 2000, Київський національний університет імені Тараса Шевченка. – 136 с.
7. Подлипенко Ю.К., Гришук Н.В. Минимаксное оценивание решений вырожденных краевых задач Неймана для эллиптических уравнений по наблюдениям, распределенным на системе поверхностей // Системні дослідження і інформаційні технології. – 2004. - № 2, с.104-128.
8. Подлипенко Ю.К., Гришук Н.В. Оцінювання параметрів вироджених еліптичних крайових задач Неймана в умовах невизначеності // Вісник Київського університету. Серія: фізико-математичні науки. – 2004. – Випуск 1, с.262-269.

Подано до друку 24.02.2004

УДК 681.3

Дмитро Б. Буй¹
Надія Д. Кахута²

Dmytro B. Buy¹
Nadiy D. Kakhuta²

Властивості теоретико-множинних конструкцій повного образу та обмеження

Properties of set-theoretic constructions of a whole image and restriction

Розглядаються загальні властивості (монотонність, дистрибутивність, спадність, розповсюдження бінарних відношень на множини та ін.) теоретико-множинних конструкцій повного образу та обмеження.

The general properties (monotonicity, distributivity, decreasing, extension of binary relations on sets and so on) of set-theoretic constructions such as a whole image and restriction are considered.

Ключові слова: бінарне відношення, повний образ, обмеження.

Key words: binary relation, whole image, restriction.

¹ E-mail: buy@unicyb.kiev.ua

² E-mail: vkahuta@iba.com.ua

Стаття присвячена дослідженню загальних властивостей теоретико-множинних конструкцій повного образу множини відносно бінарного відношення та обмеження бінарного відношення за множиною.

Вибір саме цих конструкцій обумовлений, по-перше, їхньою загальнозначністю та, по-друге, природним застосуванням в теорії реляційних баз даних при дослідженні табличних алгебр, побудованих на основі відомих реляційних алгебр Кодда [1; 2, підрозд. 1.3, с. 22-24]. В статті наведені всі доведення, а також узагальнені деякі твердження, наведені в згаданих роботах.

Символ $\square$ позначає кінець формулювання твердження та кінець доведення, символ $\square$ – кінець логічної частини доведення.

Зафіксуємо універсум D , елементи якого позначимо $x, y, z, \dots$. Підмножини універсуму позначимо $X, Y, \dots$, бінарні відношення на D – $U, V, \dots$.

Як звичайно, бінарне відношення U назовемо функціональним, якщо для всіх елементів x, y, z виконується імплікація $\langle x, y \rangle \in U \& \langle x, z \rangle \in U \Rightarrow y = z$.

Функціональні відношення (за іншою термінологією часткові функції) позначимо $f, g, \dots$. Область означеності функції f позначимо $\text{dom} f$, вона співпадає з проекцією функції за першою компонентою – $\text{dom} f = \pi_1^2 f$. Тут і далі $\pi_i^2 U$ – проекція бінарного відношення за i -ю компонентою, $i = 1, 2$.

Як звичайно, бінарне відношення U назовемо *ін'єктивним*, якщо для всіх елементів x, y, z виконується імплікація $\langle x, y \rangle \in U \& \langle z, y \rangle \in U \Rightarrow x = z$.

Наступне твердження висвітлює природний зв'язок між властивостями функціональності та ін'єктивності за допомогою обернених відношень. Відношення, *обернене до відношення U* , вводиться стандартно –
$$U^{-1} \stackrel{\text{def}}{=} \{\langle x, y \rangle \mid \langle y, x \rangle \in U\}.$$

Твердження 1 (зв'язок між функціональністю та ін'єктивністю). Виконується еквівалентність: U – функціонально $\Leftrightarrow U^{-1}$ ін'єктивно. $\square$

Доведення. Необхідність доведемо від супротивного. Нехай відношення U функціональне, але обернене відношення U^{-1} не є ін'єктивним. Тоді існують елементи x, y, z , такі, що $\langle x, y \rangle, \langle z, y \rangle \in U^{-1}, x \neq z$. Звідси випливає, що $\langle y, x \rangle, \langle y, z \rangle \in U$. Оскільки $x \neq z$, то властивість функціональності порушується для U . Протиріччя. $\square$

Достатність доводиться повністю аналогічно. $\square$

Отже, з точністю до порядку компонентів властивості функціональності та ін'єктивності еквівалентні. З другого боку, очевидно, що існують функціональні відношення, які не є ін'єктивними, та навпаки, – ін'єктивні відношення, які не є функціональними. Крім того, також очевидно, що існують відношення, які не є функціональними та не є ін'єктивними. Нарешті, очевидно, що твердження 1 має еквівалентне формулювання: U – ін'єктивно $\Leftrightarrow U^{-1}$ функціонально; (треба тільки врахувати тривіальну рівність $U = (U^{-1})^{-1}$).

Як звичайно, *повним образом множини X відносно відношення U* (за іншою термінологією *образом множини відносно відношення*) назовемо множину $U[X] \stackrel{\text{def}}{=} \{y \mid \exists x (x \in X \& \langle x, y \rangle \in U)\}$; *композицією відношень U і V* назовемо відношення $U \circ V \stackrel{\text{def}}{=} \{\langle x, y \rangle \mid \exists z (\langle x, z \rangle \in V \& \langle z, y \rangle \in U)\}$. Порожнє відношення позначимо ε . Відношення U назовемо *тотальним*, якщо $\pi_1^2 U = D$.

Твердження 2 (властивості повного образу). Повний образ має властивості:

1. $U_1 \subseteq U_2 \& X_1 \subseteq X_2 \Rightarrow U_1[X_1] \subseteq U_2[X_2]$ (монотонність);
2. $U[\bigcup X_i] = \bigcup U[X_i], (\bigcup U_i)[X] = \bigcup U_i[X]$ (дистрибутивність відносно об'єднань);
3. $U[\bigcap X_i] \subseteq \bigcap U[X_i]$;
4. $U_1[U_2[X]] = (U_1 \circ U_2)[X]$ (повний образ відносно композиції відношень або повний образ повного образу);
5. $U[X] = U[X \cap \pi_1^2 U]$;

6. $U[X] = \emptyset \Leftrightarrow X \cap \pi_1^2 U = \emptyset$ (критерій порожності повного образу); зокрема, $\varepsilon[X] = U[\emptyset] = \emptyset$ (збереження порожнього відношення та порожньої множини) і в припущенні тотальності відношення $U - U[X] = \emptyset \Leftrightarrow X = \emptyset$;

7. $U[X] \setminus U[Y] \subseteq U[X \setminus Y] \subseteq U[X]$ (нижня та верхня оцінка повного образу різниці). $\square$

Доведення. Пп. 1, 2 доводяться безпосередньо. $\square$

П. 3 випливає з монотонності повного образу (п. 1). Дійсно, нехай $X = \bigcap_{i \in I} X_i$, тоді $X \subseteq X_i$ для всіх X_i , тобто, з огляду на монотонність повного образу, $U[X] \subseteq U[X_i]$ для всіх X_i . Таким чином, $U[X] = U[\bigcap_{i \in I} X_i] \subseteq \bigcap_{i \in I} U[X_i]$. $\square$

П. 4 доводиться безпосередньо. Перевіримо, наприклад, включення $U_1[U_2[X]] \subseteq (U_1 \circ U_2)[X]$. Нехай $y \in U_1[U_2[X]]$, тоді існує елемент $z \in U_2[X]$, такий, що $\langle z, y \rangle \in U_1$. В свою чергу з належності $z \in U_2[X]$ випливає існування елементу $x \in X$, такого, що $\langle x, z \rangle \in U_2$. Залишилось врахувати властивість $\langle x, y \rangle \in U_1 \circ U_2$. $\square$

П. 5 доводиться безпосередньо. Дійсно, включення $U[X \cap \pi_1^2 U] \subseteq U[X]$ випливає з монотонності повного образу (п. 1). Обернене включення перевіряється прямо: нехай $y \in U[X]$, оскільки $\langle x, y \rangle \in U$ для деякого $x \in X$, то для цього елемента x виконується належність $x \in X \cap \pi_1^2 U$. $\square$

Доведемо п. 6. Критерій порожності повного образу перевіряється безпосередньо, а рівності $\varepsilon[X] = U[\emptyset] = \emptyset$ випливають з цього критерія, оскільки $X \cap \pi_1^2 \varepsilon = X \cap \emptyset = \emptyset$ та $\pi_1^2 U \cap \emptyset = \emptyset$. Нарешті, остання еквівалентність пункту випливає з критерія порожності повного образу та рівності $X \cap \pi_1^2 U = X \cap D = X$ (нагадаймо, що відношення U тотальне за припущенням). $\square$

Доведемо п. 7. Верхня оцінка повного образу різниці $U[X \setminus Y] \subseteq U[X]$ тривіально випливає з монотонності повного образу (п. 1), доведемо нижню. Нехай $y \in U[X] \setminus U[Y]$, тоді $y \in U[X]$ та $y \notin U[Y]$. Отже, існує елемент $x \in X$, такий, що $\langle x, y \rangle \in U$. Належність $x \in X \setminus Y$ доводиться від супротивного: дійсно, якщо $x \in Y$, то $y \in U[Y]$ – протиріччя. Таким чином, $y \in U[X \setminus Y]$. $\square$

Пп. 3 і 7 (нижня оцінка) ставлять питання про природні достатні умови для виконання відповідних рівностей. Відповідь дає наступне твердження. Нижче, як звичайно, обмеженням відношення U за множиною X називається відношення $U|X = U \cap (X \times D) = U \cap (X \times \pi_1^2 U)$.

Твердження 3 (достатні умови дистрибутивності повного образу відносно перетину та різниці). Повний образ має властивості:

1. $U| \bigcup_{i \in I} X_i$ ін'єктивно $\Rightarrow U[\bigcap_{i \in I} X_i] = \bigcap_{i \in I} U[X_i]$;

$$2. f^{-1}[\bigcap_i X_i] = \bigcap_i f^{-1}[X_i];$$

$$3. U|(X \cup Y) \text{ ін'єктивно} \Rightarrow U[X \setminus Y] = U[X] \setminus U[Y];$$

$$4. f^{-1}[X \setminus Y] = f^{-1}[X] \setminus f^{-1}[Y]. \square$$

Доведення. Почнемо з п. 1. Згідно з твердженням 2 достатньо встановити нерівність $\bigcap_{i \in I} U[X_i] \subseteq U[\bigcap_{i \in I} X_i]$. Нехай $y \in \bigcap_{i \in I} U[X_i]$, тоді для довільного $i \in I$ існує елемент $x_i \in X_i$, такий, що $\langle x_i, y \rangle \in U$. Очевидно, що $\langle x_i, y \rangle \in U|\bigcup_{j \in I} X_j$ для всіх $i \in I$, причому вказане обмеження ін'єктивне. Звідси випливає, що всі елементи вигляду x_i , $i \in I$ співпадають між собою. Позначимо $x_0 \stackrel{\text{def}}{=} x_i$, $i \in I$. Залишається врахувати, що $\langle x_0, y \rangle \in U$, причому $x_0 \in \bigcap_{i \in I} X_i$.^o

П. 2 випливає з п. 1. Дійсно, f – функціональне відношення, тобто за твердженням 1 відношення f^{-1} ін'єктивне. Обмеження вигляду $f^{-1}|\bigcup_i X_i$ тим більше буде ін'єктивним, оскільки властивість ін'єктивності зберігається при переході від відношення до його підмножин.^o

Доведемо п. 3. Згідно з п. 7 твердження 2 достатньо встановити нерівність $U[X \setminus Y] \subseteq U[X] \setminus U[Y]$. Розглянемо елемент $y \in U[X \setminus Y]$, тоді існує елемент $x \in X \setminus Y$, такий, що $\langle x, y \rangle \in U$. Очевидно, що $y \in U[X]$. Заперечення $y \notin U[Y]$ доведемо від супротивного. Нехай $y \in U[Y]$, тоді існує елемент $z \in Y$, такий, що $\langle z, y \rangle \in U$. Очевидно, що $\langle x, y \rangle, \langle z, y \rangle \in U|(X \cup Y)$; причому вказане обмеження ін'єктивне. Тоді $x=z$, тобто $x \in Y$ – протиріччя.^o

П. 4 випливає з п. 3; доведення проводиться аналогічно п. 2.^o□

Як демонструють прості приклади, умови твердження 3 є достатніми, але не необхідними. Дійсно, розглянемо такі множини X_1, X_2 та відношення U :

$$\stackrel{\text{def}}{X_1} = \{x_1, z\}, \stackrel{\text{def}}{X_2} = \{x_2, z\}, \text{ де елементи } x_1, x_2, z \text{ попарно різні,}$$

$$\stackrel{\text{def}}{U} = \{\langle x_1, y \rangle, \langle z, y \rangle, \langle x_2, y \rangle\}.$$

Очевидно, що $U[X_1 \cap X_2] = U[\{z\}] = \{y\} = U[X_1] \cap U[X_2]$, але обмеження $U|X_1 \cup X_2$ не є ін'єктивним. Рис. 1 ілюструє наведений приклад.

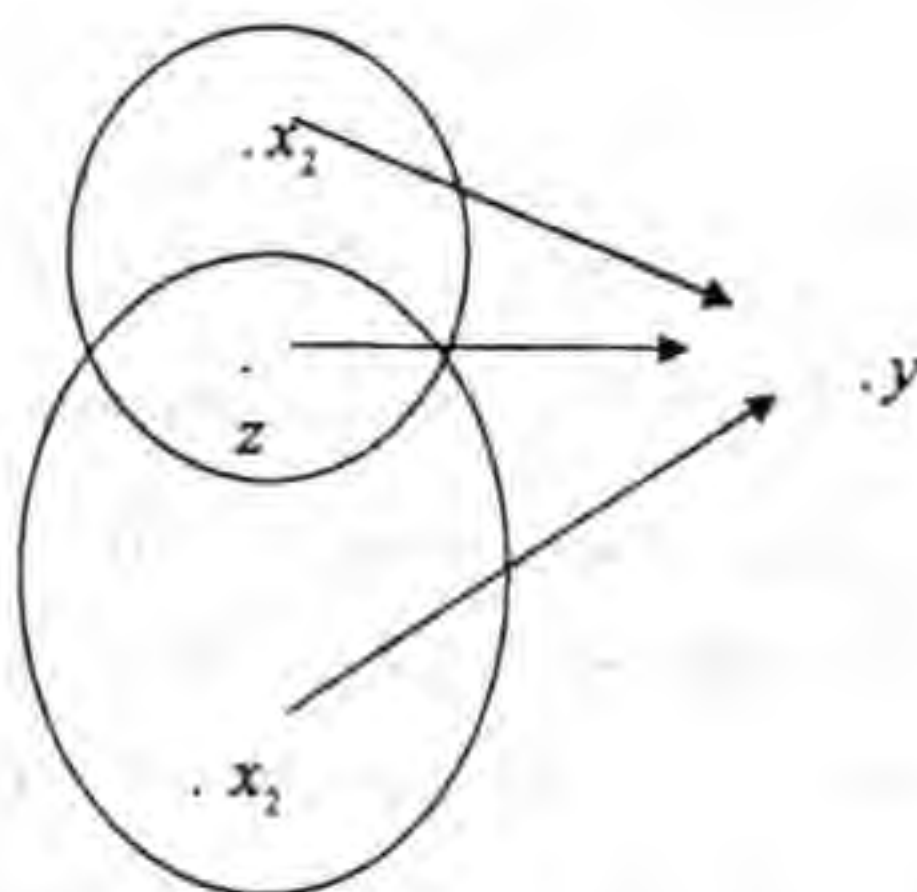


Рис. 1. Приклад неін'єктивного відношення U та множин X_i , таких, що виконується рівність $U[\bigcap X_i] = \bigcap U[X_i]$

Повний образ природно дозволяє за операціями на універсумі будувати операції на його булеані. Через $[f]$ позначимо унарну тотальну операцію на булеані універсуму D , яка індукується частковою функцією f і задається рівністю $[f](X) \stackrel{\text{def}}{=} f[X]$. Нехай F – бінарна часткова операція на D ; вона також індукує бінарну тотальну операцію $[F]$ на булеані D – $[F](X, Y) \stackrel{\text{def}}{=} F[X \times Y]$.

Часткову бінарну операцію F назвемо *комутативною (асоціативною)*, якщо виконується узагальнена рівність $F(x, y) \approx F(y, x)$ для всіх елементів x, y (відповідно $F(F(x, y), z) \approx F(x, F(y, z))$ для всіх елементів x, y, z). Тут і далі під *узагальненою рівністю* розуміється рівність, в якій обидві частини або невизначені, або визначені та мають однакові значення. Перехід від стандартної рівності до узагальненої обумовлений розглядом часткових операцій.

Зв'язок між властивостями вихідних та індукованих операцій на булеані розкривають два наступних твердження.

Твердження 4. Виконується еквівалентність

функція f ін'єктивна та тотальна $\Leftrightarrow$ операція $[f]$ ін'єктивна. $\square$

Доведення. Почнемо з необхідності. Доведення проведемо від супротивного: нехай функція f ін'єктивна та тотальна, але операція $[f]$ не є ін'єктивною. Тоді існують різні множини X_1, X_2 , такі, що $[f](X_1) = [f](X_2)$, тобто $f[X_1] = f[X_2]$. Оскільки множини X_1, X_2 різні, то існує елемент x , який належить одній з цих множин та не належить іншій. Нехай для визначеності $x \in X_1, x \notin X_2$ (дуальний випадок $x \in X_2, x \notin X_1$ розглядається аналогічно).

Функція f тотальна, тому $f(x) \in f[X_1]$. Тоді існує елемент $z \in X_2$, такий, що $f(z) = f(x)$. Очевидно, що $z \neq x$, що суперечить ін'єктивності функції f . $\square$

Доведемо достатність також від супротивного: нехай операція $[f]$ ін'єктивна, але функція f не ін'єктивна або не тотальна. Розглянемо спочатку випадок, коли функція f не тотальна. Тоді існує елемент x , такий, що $x \notin \text{dom} f$. Очевидно, що $f[\{x\}] = f[\emptyset] = \emptyset$; тобто $[f](\{x\}) = [f](\emptyset)$, що суперечить ін'єктивності операції $[f]$.

Тепер розглянемо випадок, коли функція f не є ін'єктивною. Тоді існують такі елементи $x, z \in \text{dom} f$, що $f(x) = f(z)$, причому $x \neq z$. Очевидно, що $f[\{x\}] = \{f(x)\} = f[\{z\}]$, тобто $[f](\{x\}) = [f](\{z\})$, що суперечить ін'єктивності операції $[f]$. $\square$

Очевидно, що тотальність функції f суттєва для необхідності; тобто якщо часткова функція f ін'єктивна, то операція $[f]$, взагалі кажучи, не є ін'єктивною. Разом з тим, переходячи до відношень, необхідність можна узагальнити як імплікацію

відношення U ін'єктивне та тотальне $\Rightarrow$ операція $[U]$ ін'єктивна.

Вище відношення розповсюджується на булеан за тією ж самою схемою: $[U](X) \stackrel{\text{def}}{=} U[X]$. Доведення проводиться аналогічно як в твердженні 4. Отже, функціональність відношення не є суттєвою для необхідності.

Разом з тим, прості приклади для зліченого універсуму показують, що функціональність суттєва для достатності. Відповідний приклад наведений на рис. 2: операція $[U]$ ін'єктивна, але відношення U , яке не є функціональним, не є і ін'єктивним.

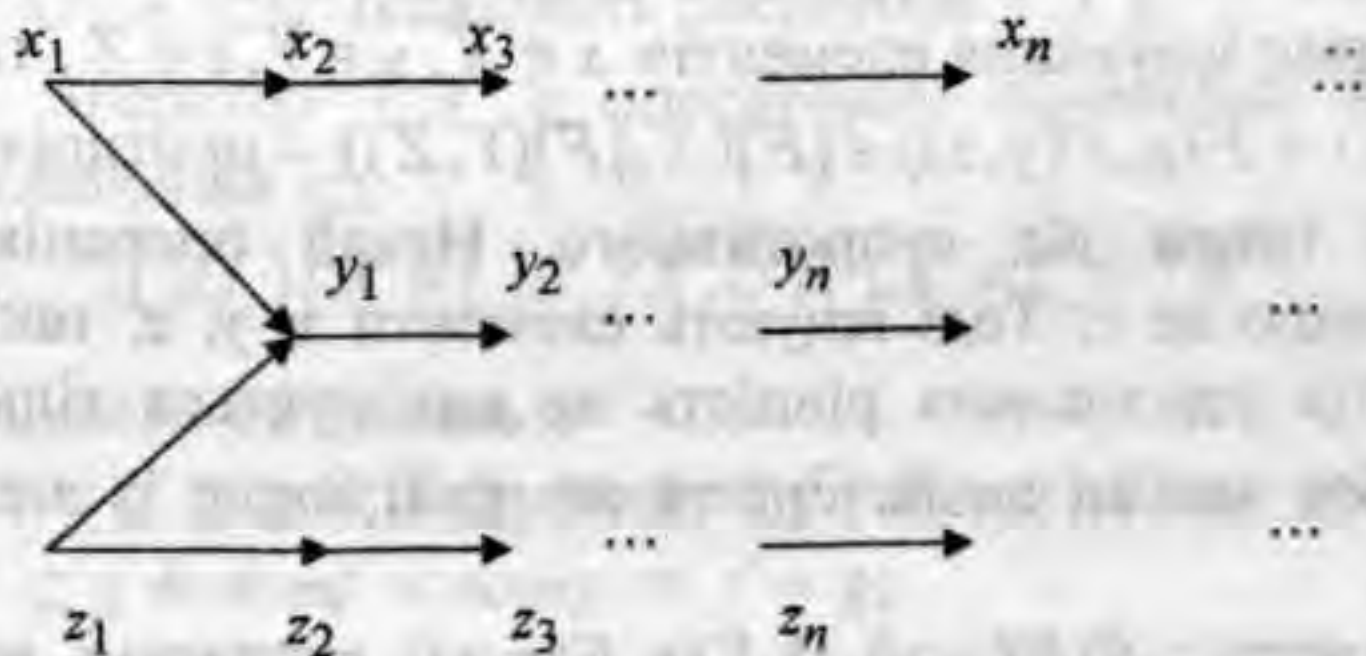


Рис. 2. Приклад неін'єктивного відношення U такого, що операція $[U]$ ін'єктивна

Твердження 5. Виконується еквівалентність

Часткова операція F комутативна (асоціативна) $\Leftrightarrow$ тотальна операція $[F]$ комутативна (асоціативна). $\square$

Доведення. Розглянемо спочатку випадок комутативності і почнемо з необхідності, яку доведемо від супротивного. Отже, нехай операція F комутативна, але операція $[F]$ некомутативна. Тоді існують множини X, Y такі,

що $[F](X, Y) \neq [F](Y, X)$. Значить, існує елемент z , який належить одній з цих множин і не належить іншій. Розглянемо для визначеності випадок $z \in [F](X, Y), z \notin [F](Y, X)$. З означення операції $[F]$ випливає, що існують елементи $x \in X, y \in Y$, такі, що $z = F(x, y)$. Але операція F комутативна, тобто $z = F(x, y) = F(y, x) \in F[Y \times X] = [F](Y, X)$; прийшли до протиріччя. $\square$

Доведемо достатність також від супротивного. Нехай операція $[F]$ комутативна, але операція F некомутативна. Тоді існують елементи x, y , такі, що відповідна узагальнена рівність не виконується – $F(x, y) \neq F(y, x)$. Це може бути тільки в двох випадках: обидва значення визначені та не рівні; одне із значень визначене, а друге ні.

Розглянемо перший випадок: $F(x, y), F(y, x)$ визначені, $F(x, y) \neq F(y, x)$. Але $[F](\{x\}, \{y\}) = \{F(x, y)\}, [F](\{y\}, \{x\}) = \{F(y, x)\}$, тобто $[F](\{x\}, \{y\}) \neq [F](\{y\}, \{x\})$ всупереч комутативності операції $[F]$.

Розглянемо другий випадок. Нехай для визначеності $F(x, y)$ визначене, а $F(y, x)$ невизначене. Тоді $[F](\{x\}, \{y\}) = \{F(x, y)\}$, але $[F](\{y\}, \{x\}) = \emptyset$, що знову ж протирічить комутативності операції $[F]$. $\square$

Перейдемо до розгляду асоціативності та почнемо з необхідності, яку доведемо від супротивного. Нехай операція F асоціативна, а операція $[F]$ – ні. Тоді існують множини X, Y, Z , такі, що $[F]([F](X, Y), Z) \neq [F](X, [F](Y, Z))$. Значить, існує елемент t , який належить одній з цих множин і не належить іншій. Нехай для визначеності $t \in [F]([F](X, Y), Z), t \notin [F](X, [F](Y, Z))$. З означення операції $[F]$ випливає існування елементів $x \in X, y \in Y, z \in Z$, таких, що $t = F(F(x, y), z)$. Але тоді $t = F(x, F(y, z)) \in [F](X, [F](Y, Z))$ – протиріччя.

Достатність доведемо також від супротивного. Нехай операція $[F]$ асоціативна, а операція F такою не є. Тоді існують елементи x, y, z , такі, що $F(F(x, y), z) \neq F(x, F(y, z))$. Ця узагальнена рівність не виконується тільки у двох випадках: значення обох частин визначені та не рівні; одне із значень визначене, а друге ні.

Розглянемо перший випадок: $F(F(x, y), z), F(x, F(y, z))$ визначені, але не рівні. Тоді мають місце рівності:

$$[F]([F](\{x\}, \{y\}), \{z\}) = [F](\{F(x, y)\}, \{z\}) = \{F(F(x, y), z)\},$$

$$[F](\{x\}, [F](\{y\}, \{z\})) = [F](\{x\}, \{F(y, z)\}) = \{F(x, F(y, z))\}.$$

Отже, $[F]([F](\{x\}, \{y\}), \{z\}) \neq [F](\{x\}, [F](\{y\}, \{z\}))$, що суперечить асоціативності операції $[F]$.

Розглянемо другий випадок. Нехай для визначеності значення $F(F(x, y), z)$ визначене (тобто визначене і значення $F(x, y)$, а значення $F(x, F(y, z))$ невизначене (тобто або значення $F(y, z)$ не визначене, або значення $F(y, z)$ визначене, але значення $F(x, F(y, z))$ невизначене). Як і в першому випадку розглянемо значення операції $[F]$ на відповідних одноелементних множинах:

$$[F]([F](\{x\}, \{y\}, \{z\})) = \{F(F(x, y), z)\};$$

$$[F]([F](\{x\}, [F](\{y\}, \{z\}))) = \begin{cases} [F]([F](\{x\}, \emptyset)) = \emptyset, \text{ якщо } \langle y, z \rangle \notin \text{dom} F, \\ [F]([F](\{x\}, \{F(y, z)\})) = \emptyset, \text{ якщо } \langle y, z \rangle \in \text{dom} F. \end{cases}$$

При розгляді другого рядка кускової схеми треба врахувати, що значення $F(x, F(y, z))$ невизначене. Таким чином, асоціативність операції $[F]$ порушується; прийшли до протиріччя. $\square$

В наступному твердженні розглядаються властивості обмеження. Параметричний оператор $U \mapsto U|X$, який відношенню ставить у відповідність його обмеження за множиною-параметром, позначимо $\uparrow X$. Нижче, як звичайно, під оператором замикання на частково впорядкованій множині розуміється ідемпотентний, монотонний та спадний (або зростаючий) оператор.

Твердження 6 (властивості обмеження). Обмеження має властивості:

1. $U_1 \subseteq U_2 \ \& \ X_1 \subseteq X_2 \Rightarrow U_1|X_1 \subseteq U_2|X_2$ (монотонність обмеження, монотонність оператора $\uparrow X$);
2. $\pi_1^2(U|X) = \pi_1^2 U \cap X$ (проекція обмеження);
3. $U|X = \varepsilon \Leftrightarrow \pi_1^2 U \cap X = \emptyset$ (критерій порожності обмеження); зокрема, $\varepsilon|X = U|\emptyset = \varepsilon$ (збереження порожнього відношення та порожньої множини);
4. $U|X = U|(X \cap \pi_1^2 U)$, $U = U|\pi_1^2 U$; зокрема, $\pi_1^2 U \subseteq X \Rightarrow U|X = U$;
5. $(U|X)|Y = U|(X \cap Y)$, або в операторному вигляді $\uparrow Y \circ \uparrow X = \uparrow(X \cap Y)$; зокрема, $\uparrow X \circ \uparrow X = \uparrow X$ (ідемпотентність оператора $\uparrow X$);
6. $U|X \subseteq U$ (спадність оператора $\uparrow X$);
7. оператор $\uparrow X$ є оператором замикання відносно теоретико-множинного включення $\subseteq$;
8. $(\bigcup_i U_i)|X = \bigcup_i U_i|X$, $U|\bigcup_i X_i = \bigcup_i U|X_i$ (дистрибутивність обмеження відносно об'єднань);
9. $f \subseteq g \ \& \ X \subseteq \text{dom} f \Rightarrow f|X = g|X$; зокрема, $f \subseteq g \Rightarrow f = g| \text{dom} f$, $f \subseteq g \ \& \ \text{dom} f = \text{dom} g \Rightarrow f = g$;
10. $(U|X)[Y] = U[X \cap Y]$ (повний образ множини відносно обмеження). $\square$

Доведення. П. 1 доводиться безпосередньо. Зауважимо, що монотонність обмеження впливає також із монотонності теоретико-множинних операцій перетину та декартова добутку, а також із замкненості класу монотонних операцій відносно суперпозиції (нагадаймо, що $U|X = U \cap X \times D$). $\circ$

П. 2 також доводиться безпосередньо. Встановимо, наприклад, одне з потрібних включень: $\pi_1^2(U|X) = \pi_1^2(U \cap X \times D) \subseteq \pi_1^2 U \cap \pi_1^2(X \times D) = \pi_1^2 U \cap X$. Тут скористалися загальними властивостями проекції щодо перетину та декартова добутку. $\circ$

П. 3 впливає з другого та наступної загальної властивості проекції – $U = \varepsilon \Leftrightarrow \pi_1^2 U = \emptyset$. $\circ$

Встановимо першу рівність п. 4:

$$U|(X \cap \pi_1^2 U) = U \cap (X \cap \pi_1^2 U) \times D = U \cap (X \times D) \cap \pi_1^2 U \times D = U \cap X \times D = U|X.$$

Вище скористалися дистрибутивністю декартова добутку відносно перетинів та очевидною нерівністю $U \subseteq \pi_1^2 U \times D$.

Друга рівність пункту доводиться аналогічно: $U|\pi_1^2 U = U \cap \pi_1^2 U \times D = U$.

Нарешті, імплікація доводиться, спираючись на доведені рівності: $U|X = U|(X \cap \pi_1^2 U) = U|\pi_1^2 U = U$ (нагадаймо, що $\pi_1^2 U \subseteq X$ за припущенням). $\square$

Розглянемо п. 5. За означенням обмеження, враховуючи дистрибутивність декартова добутку відносно перетинів, маємо: $(U|X)|Y = U \cap X \times D \cap Y \times D = U \cap (X \cap Y) \times D = U|(X \cap Y)$. $\square$

П. 6 випливає безпосередньо з означення обмеження. П. 7 випливає безпосередньо з встановлених пп. 1, 5, 6. П. 8 випливає з властивостей відповідної дистрибутивності перетину та декартова добутку. Дійсно, перевіримо, наприклад, другу рівність пункту:

$$U|\bigcup_i X_i = U \cap (\bigcup_i X_i) \times D = U \cap \bigcup_i (X_i \times D) = \bigcup_i (U \cap (X_i \times D)) = \bigcup_i U|X_i. \square$$

Доведемо першу імплікацію п. 9. Нехай $f \subseteq g$ та $X \subseteq \text{dom} f$, тоді з врахуванням встановленої дистрибутивності обмеження (п. 8): $g|X = (f \cup (g \setminus f))|X = f|X \cup (g \setminus f)|X = f|X$, оскільки $(g \setminus f)|X = f_\emptyset = \varepsilon$ (всюди невизначена функція). Для встановлення порожності обмеження $(g \setminus f)|X$ скористаємось критерієм п. 3 та очевидною рівністю $\text{dom}(g \setminus f) = \text{dom} g \setminus \text{dom} f$: $\text{dom}(g \setminus f) \cap X = (\text{dom} g \setminus \text{dom} f) \cap X = \emptyset$.

Друга імплікація випливає з першої та рівності $f = f| \text{dom} f$ (п. 4): покладемо в першій імплікації $X = \text{dom} f$, тоді $f| \text{dom} f = f = g| \text{dom} f$. Нарешті, третя імплікація випливає з другої: $f = g| \text{dom} f = g| \text{dom} g = g$. $\square$

Зауважимо, що п. 9 не виконується для відношень, взагалі кажучи; тобто функціональність тут суттєва. $\square$

П. 10 перевіряється безпосередньо. $\square$

Робота виконана за фінансової підтримки Державного Фонду Фундаментальних досліджень України (проект 01.07/105).

Література

1. Редько В. Н., Брона Ю. И., Буй Д. Б. Реляционные алгебры: операции проекции и соединения // Кибернетика и системный анализ. – 1997. – №4. – С. 89-100.
2. Редько В. Н., Брона Ю. Й., Буй Д. Б., Поляков С. А. Реляційні бази даних: табличні алгебри та SQL-подібні мови. – Київ: Видавничий дім "Академперіодика", 2001. – 198 с.

Надійшла до редакції 1.03.05.

Дмитро А. Ключин¹,
Юрій І. Петунін²

Dmitry A. Klyushin¹,
Yuriy I. Petunin²

**Точні довірчі межі для невідомої
ймовірності в класичній та
узагальненій моделях Бернуллі**

**Exact confidence limits for
unknown probability in classic and
generalized Bernoulli models**

Побудовано "точний" довірчий інтервал, що містить невідому імовірність успіху в класичній та узагальненій моделях Бернуллі.

The exact confidence interval covering an unknown success probability in classic and generalized Bernoulli models is constructed.

Ключові слова: довірчий інтервал, модель Бернуллі, біноміальний розподіл.

Key Words: confidence interval, Bernoulli model, binomial distribution.

¹ E-mail: klyushin@unicyb.kiev.ua

WWW: <http://www.om.unicyb.kiev.ua/personnel/13.htm>

² E-mail: vm214@dcp.kiev.ua

WWW: <http://www.om.unicyb.kiev.ua/personnel/06.htm>

В багатьох застосуваннях медичної статистики необхідно будувати точний довірчий інтервал, що містить невідому імовірність p успіху в моделях Бернуллі (так звану біноміальну частку). Ця задача була досліджена в багатьох роботах [1, 2]. Мета цієї статті — побудувати точний довірчий інтервал, що містить невідому імовірність p успіху в класичній та узагальненій моделях Бернуллі.

Розглянемо такий тест для перевірки неоднорідності двох генеральних сукупностей. Нехай G_x і G_y — генеральні сукупності з невідомими неперервними функціями розподілу $F_x(u)$ і $F_y(u)$ відповідно, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ — вибірка із G_x і $y = (y_1, y_2, \dots, y_m)$ — вибірка із G_y . Необхідно перевірити, співпадають невідомі функції розподілу $F_x(u)$ і $F_y(u)$ (гіпотеза H_0) або ні (гіпотеза H_1). Якщо справджується гіпотеза H_0 вибірка $x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m$ є однорідною, в протилежному випадку вибірка є неоднорідною.

Щоб розв'язати поставлену задачу, побудуємо варіаційний ряд $x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \dots \leq x_{(n)}$, вважаючи, що $x_{(0)} = -\infty$ і $x_{(n+1)} = \infty$. Розглянемо випадковий інтервал $I_{i,q} = (x_{(i)}, x_{(i+q)})$, де i і q — фіксовані числа, $0 \leq i \leq n$, $1 \leq q \leq n - i + 1$. Схема випробувань формулюється так: на k -му кроці ($k = 1, 2, \dots, m$) ми перевіряємо, чи належить інтервалу $I_{i,q}$ вибіркоче

значення y_k . Отже, отримуємо множину подій $A_k = \{y_k \in I_{i,q}\}$, $k = 1, 2, \dots, m$. Кожна подія може відбуватися із певною імовірністю $p_k = P(A_k)$, $k = 1, \dots, m$. Введемо в розгляд випадкову змінну κ – кількість подій A_k , що відбуваються в m випробуваннях. Якщо справджується гіпотеза H_0 , то всі імовірності p_k є однаковими і дорівнюють

$$p_q = P(A_k | H_0) = \frac{q}{n+1}. \quad (1)$$

Ця схема називається *узагальненою схемою Бернуллі*. В роботах [3, 4] був визначений розподіл імовірностей випадкової величини κ :

$$P(\kappa = l | H_0) = \frac{C_{l+q-1}^l C_{m+n-l-q}^{m-l}}{C_{m+n}^m}, \quad (2)$$
$$l = 1, 2, \dots, m$$

де n, m — об'єми вибірок x і y відповідно, q — фіксоване число, що дорівнює кількості порядкових статистик в інтервалі $I_{i,q}$, C_r^s — кількість сполучень із r елементів по s .

Побудуємо точний довірчий інтервал $I(\kappa)$, що містить імовірність (2), використовуючи значення випадкової змінної κ . Слово “точний” означає, що рівень значущості цього довірчого інтервалу не перевищує заданого числа β (як правило, $\beta = 0,05$). За допомогою цього інтервалу можна побудувати такий критерій для перевірки гіпотез H_0 і H_1 :

- 1) Будуємо на основі виборки x варіаційний ряд і випадковий інтервал $I_{i,q}$, де i і q — фіксовані числа.
- 2) Обчислюємо статистику κ , що дорівнює кількості елементів із виборки y , які потрапляють в інтервал $I_{i,q}$.
- 3) За допомогою статистики κ будуємо довірчий інтервал $I(\kappa)$, рівень значущості якого дорівнює 2β .
- 4) Якщо інтервал $I(\kappa)$ не містить імовірність p_q , гіпотеза H_0 іс відхиляється, в протилежному випадку вважається, що вибіркові дані не суперечать гіпотезі H_0 .

Побудуємо довірчий інтервал $I(\kappa)$. Нехай x — довільна цілочисельна випадкова величина із розподілом $p_n(k) = p(x = k)$, $k = 0, 1, \dots, n$. Ця випадкова величина породжує функцію $\varphi_x(k)$, визначену на множині $M_x = \{0, 1, \dots, n\}$ за формулою $\varphi_x(k) = p_x(x)$. Розглянемо довільний відрізок $I = \{k : k_0 \leq k \leq k_1, 0 \leq k_0, k_1 \leq n\} \subset M$. Назвемо цей відрізок I *областю монотонності* функції $\varphi_x(k)$, якщо із умови

$k \geq i, (k, i \in I)$ впливає, що $\varphi(k) \geq \varphi(i)$. Цілочисельна випадкова величина x називається *одномодальною*, якщо множину її значень M_x можна подати як об'єднання областей монотонності функції $\varphi_x(k)$. Наприклад, випадкова величина з біноміальним розподілом і випадкова величина з розподілом (2) є одномодальними.

Зауваження 1. Концепція одномодальної цілочисельної випадкової величини, коли $n > 2$, відрізняється від поняття, запропонованого А.Хінчиним. Дійсно, за Хінчиним функція розподілу $F_x(u)$ одномодальної випадкової величини x є опуклою на промені $(-\infty, x_0)$, де x_0 є модою величини x , і угнутою на промені (x_0, ∞) . Отже, функція $F_x(u)$ може мати не більше однієї точки розриву. Водночас функція розподілу дискретної випадкової величини є східчастою, отже, якщо $n > 2$, кількість точок розриву може бути більше двох.

Крім цілочисельної випадкової величини x з розподілом імовірностей $p_n(k) = p(x=k), k=0,1,\dots,n$ розглянемо неперервну випадкову величину y з такою щільністю імовірностей

$$f(u) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } u \leq 0, \\ p_n(k), & \text{якщо } k \leq u \leq k+1, k=0,1,\dots,n, \\ 0, & \text{якщо } u \geq n+1. \end{cases}$$

Називатимемо її функцією, що породжує неперервну випадкову величину. Випадкова величина y породжує випадкову величину x за допомогою функції $x = [y] = \text{Int}(y)$, що відображає кожне число $y \in R^1$ в її цілу частину $[y] = \text{Int}(y)$. Знак рівності в попередній формулі означає наступне. Позначимо через E_x випадкове випробування, що породжує випадкову величину x з визначеним розподілом імовірностей $p_n(k)$, а через E_z — незалежне випадкове випробування, що породжує випадкову величину z , рівномірно розподілену на відрізку $[0,1]$. В складеному випадковому випробуванні $E_y = (E_x, E_z)$ випадкова величина $y = x + z$ має щільність $f(u)$, а випадкова величина $\text{Int}(y)$ набуває значення k тоді і лише тоді, коли $x = k$ в результаті випробування E_x . Отже, ми можемо вважати, що складене випадкове випробування E_y породжує випадкові величини x і y , так що співпадають не лише розподіли величин x і $\text{Int}(y)$, але й значення x і $\text{Int}(y)$.

Нехай x — випадкова величина з біноміальним розподілом, а y — неперервна випадкова величина, що індукує змінну x . В моделі Бернуллі

математичне сподівання $m(y)$ і дисперсія $\sigma^2(y)$ дорівнюють

$$\begin{aligned} m(y) &= \int_0^{n+1} uf(u) du = \sum_{k=0}^n \int_k^{k+1} uf(u) du = \sum_{k=0}^n p_n(k) \int_k^{k+1} u du = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n (2k+1) p_n(k) = \sum_{k=0}^n k p_n(k) + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n p_n(k) = np + \frac{1}{2}; \\ m(y^2) &= \sum_{k=0}^n p_k \int_k^{k+1} u^2 du = \frac{1}{3} \sum_{k=0}^n p_k (3k^2 + 3k + 1) = \sum_{k=0}^n k^2 p_k + \sum_{k=0}^n k p_k + \frac{1}{3} \sum_{k=0}^n p_k = \\ &= m(x^2) + m(x) + \frac{1}{3} = (\sigma^2(x) + (m(x))^2) + np + \frac{1}{3} = npq + (np)^2 + np + \frac{1}{3}. \\ \sigma^2(y) &= npq + \frac{1}{12}, \\ \sigma(y) &= \sqrt{npq + \frac{1}{12}}. \end{aligned}$$

В узагальненій моделі Бернуллі

$$\begin{aligned} m(x) &= mp_q, \\ \sigma^2(x) &= \frac{(m+n+1)m}{n+2} p_q (1-p_q) \end{aligned}$$

Отже, в узагальненій моделі Бернуллі

$$\begin{aligned} m(y) &= mp_q + \frac{1}{2}, \\ \sigma^2(y) &= \frac{(m+n+1)m}{n+2} p_q (1-p_q) + \frac{1}{12}. \end{aligned}$$

Розглянемо довільний фіксований довірчий інтервал (a, b) , що містить основну розподілену масу генеральної сукупності G_y із рівнем значущості α . Оскільки $Int(y)$ є незростаючою функцією, наслідком випадкової події $A_y = \{y \in [a, b]\} = \{a \leq y \leq b\}$ є подія $A_x = \{x = Int(y) \in [Int(a), Int(b)]\}$. Таким чином, рівень значущості замкненого довірчого інтервалу $[Int(a), Int(b)]$ для основної маси генеральної сукупності G_x не перевищує α .

Далі,

$$[Int(a), Int(b)] \subset [a-1, b],$$

отже,

$$p(x \in [Int(a), Int(b)]) \leq p(x \in [a-1, b]).$$

Таким чином, рівень значущості довірчого інтервалу $[a-1, b]$ для основної розподіленої маси генеральної сукупності G_x також не перевищує α :

$$p\{x \notin [a-1, b]\} \leq \alpha.$$

Легко бачити, що цілочисельна випадкова величина x є одномодальною тоді і лише тоді, коли неперервна випадкова величина y є одномодальною за Хінчином. Для таких випадкових величин y справджується нерівність Гаусса–Височанського–Петуніна [5]

$$p(|y - m(y)| \geq \lambda \sigma(y)) \leq \frac{4}{9} \frac{1}{\lambda^2}, \text{ де } \lambda > \sqrt{\frac{8}{3}}.$$

Отже, рівень значущості довірчого інтервала $[m(y) - \lambda \sigma(y), m(y) + \lambda \sigma(y)]$, що містить основну розподілену масу генеральної сукупності G_y , не перевищує $\alpha = \frac{4}{9} \frac{1}{\lambda^2}$. Зокрема, коли $\lambda = 3$, ми отримуємо нерівність

$$\alpha = \frac{4}{81} < 0.05.$$

Покладемо в класичній моделі Бернуллі

$$a = m(y) - \lambda \sigma(y) = np + \frac{1}{2} - \lambda \sqrt{npq + \frac{1}{12}},$$

$$b = m(y) + \lambda \sigma(y) = np + \frac{1}{2} + \lambda \sqrt{npq + \frac{1}{12}}.$$

На основі попередніх міркувань доходимо висновку, що довірчий інтервал $[a-1, b]$ містить основну масу значень випадкової величини x з біноміальним розподілом, тобто довірчий інтервал

$$I = \left[np - \frac{1}{2} - \lambda \sqrt{npq + \frac{1}{12}}, np - \frac{1}{2} + \lambda \sqrt{npq + \frac{1}{12}} \right]$$

має рівень значущості, що не перевищує $\alpha = \frac{4}{9} \frac{1}{\lambda^2}$, де $\lambda > \sqrt{\frac{8}{3}}$.

Випадкову подію $\{x \in I\}$ можна переписати в такій формі:

$$|x - np| \leq \frac{1}{2} + \lambda \sqrt{npq + \frac{1}{12}}.$$

Таким чином, в моделі Бернуллі

$$p\left(|h - p| \leq \frac{1}{2n} + \frac{\lambda}{n} \sqrt{npq + \frac{1}{12}}\right) \geq 1 - \alpha.$$

Для того щоб побудувати довірчий інтервал для невідомої імовірності, що містить невідому імовірність p , на основі частоти h в моделі Бернуллі, яка складається із n випробувань, розглянемо дві функції, що залежать від $p \in [0, 1]$:

$$\varphi(p) = |h - p|$$

i

$$\psi(p) = \frac{1}{2n} + \frac{\lambda}{n} \sqrt{np(1-p) + \frac{1}{12}}.$$

Позначимо

$$\tilde{\psi}(p) = \sqrt{np(1-p) + \frac{1}{12}}, \quad p \in R^1.$$

Легко перевірити, що графік функції $\tilde{\psi}(p)$, $p \in R^1$ являє собою верхню частину еліпса E , що проходить через точки $A = \left(\frac{1}{2n} \left(n + \sqrt{\frac{n}{3} + n^2} \right), 0 \right)$, $B = \left(\frac{1}{2}, \sqrt{\frac{1}{12n} + \frac{1}{4}} \right)$, $C = \left(\frac{1}{2n} \left(n - \sqrt{\frac{n}{3} + n^2} \right), 0 \right)$, $D = \left(\frac{1}{2}, -\sqrt{\frac{1}{12n} + \frac{1}{4}} \right)$ із центром в точці $\left(\frac{1}{2}, 0 \right)$. Графік функції $\psi(p)$ будується на основі графіку $\tilde{\psi}(p)$ на сегменті $[0, 1]$ шляхом його розширення або зтискання із коефіцієнтом $\frac{\lambda}{n}$ і переносом на величину $\frac{1}{2n}$.

Таким чином, графік функції $\psi(p)$, що не залежить від h , являє собою дугу еліпса Γ , яка проходить через точки $(0, \psi(0))$, $\left(\frac{1}{2}, \psi\left(\frac{1}{2}\right) \right)$, $(1, \psi(1))$, так що функція $\psi(p)$ досягає свого мінімуму в точці $p = \frac{1}{2}$ і є симетричною відносно цієї точки.

Нижня довірча межа p_1 є коренем квадратного рівняння

$$\left(1 + \frac{\lambda^2}{n} \right) p^2 - \left(\frac{\lambda^2}{n} - \frac{1}{n} + 2h \right) p + h^2 - \frac{h}{n} + \frac{1}{4n^2} \left(1 - \frac{\lambda^2}{3} \right) = 0. \quad (3)$$

Якщо $h > \psi(0) = \frac{1}{2n} + \frac{\lambda}{n\sqrt{12}}$, то нижня довірча межа p_1 є найменшим коренем рівняння (3). Якщо $h \leq \psi(0)$, то $p_1 = 0$.

Аналогічно, верхня довірча межа p_2 є коренем квадратного рівняння

$$\left(1 + \frac{\lambda^2}{n} \right) p^2 - \left(\frac{\lambda^2}{n} + \frac{1}{n} + 2h \right) p + h^2 + \frac{h}{n} + \frac{1}{4n^2} \left(1 - \frac{\lambda^2}{3} \right) = 0. \quad (4)$$

Якщо $1 - h > \psi(1)$, то верхня довірча межа p_2 є найбільшим

коренем рівняння (4). Якщо $1-h \leq \psi(1)$, то $p_2 = 1$.

Зауваження 2. Оскільки $p_1 \leq h \leq p_2$, частка успіхів завжди лежить в довірчому інтервалі $[p_1, p_2]$.

Для узагальненої схеми Бернуллі аналогічні міркування приводять до такого квадратного рівняння.

$$\left(1 + \frac{(m+n+1)\lambda^2}{(n+2)m}\right)p^2 + \left(\frac{1}{m} - \frac{(m+n+1)\lambda^2}{(n+2)m} - 2h\right)p + h^2 - \frac{h}{m} + \frac{1}{4m^2}\left(1 - \frac{\lambda^2}{3}\right) = 0. \quad (5)$$

Якщо $h > \frac{1}{2m} + \frac{\lambda}{m\sqrt{12}} = \gamma$, то нижня довірна межа p_1 в узагальненій схемі Бернуллі є найменшим коренем рівняння (5). Якщо $h \leq \gamma$, то $p_1 = 0$.

Аналогічно, верхня довірна межа p_2 в узагальненій схемі Бернуллі є коренем рівняння (6).

$$\left(1 + \frac{(m+n+1)\lambda^2}{(n+2)m}\right)p^2 - \left(\frac{1}{m} + \frac{(m+n+1)\lambda^2}{(n+2)m} + 2h\right)p + h^2 + \frac{h}{m} + \frac{1}{4m^2}\left(1 - \frac{\lambda^2}{3}\right) = 0. \quad (6)$$

Якщо $1-h > \gamma$, то верхня довірна межа p_2 є найбільшим коренем рівняння (6). Якщо $1-h \leq \gamma$, то $p_2 = 1$. Внаслідок попередніх результатів доходимо висновку, що рівень значущості побудованого довірчого інтервала не перевищує $\frac{4}{9} \frac{1}{\lambda^2}$ (зокрема, 0,05 для $\lambda = 3$).

Література

1. Yoo S., David H. *Revisiting Clopper-Pirson*. – Technical Report 2002-05. Department of Statistics and Statistical Laboratory. Iowa University, 2002.
2. Brown L.D., Cai T.T., DasGupta A. Interval Estimation for a Binomial Proportion // Stat. Sci. — 2001. — 2(16). — p.101-133.
3. Матвейчук С.А., Петунин Ю.И. Обобщение схемы Бернуллі, возникающее в вариационной статистике. I // Укр. матем. журнал. — 1991, 43(4). — 518-528.
4. Матвейчук С.А., Петунин Ю.И. Обобщение схемы Бернуллі, возникающее в вариационной статистике. II // Укр. матем. журнал. — 1991, 43(6). — 779-785.
5. Высочанский Д.Ф., Петунин Ю.И. Обоснование правила 3σ для одномодальных распределений // Теор. вероятн. и матем. стат. — 1980. — 21. — с.25-36.

Надійшла до редакції 14.12.2004

УДК 517.9

Тетяна В. Колянова

Вплив економічних та психологічних факторів на імунну систему організму

В статті описано основні поняття, функції та механізми роботи природженого та набутого імунітетів. Виділено та систематизовано психологічні та економічні показники (фактори), описано їх вплив на стан імунної системи людини, визначені результати цього впливу. Розроблено дві системи диференціальних рівнянь, перша з яких описує дію природженого імунітету поза організмом людини, а друга – всередині нього.

Tetiana V. Kolianova

Influence of the economic and psychological factors to an immune system of an organism.

In the article the main concepts, functions and mechanisms of work inherent and acquired of immunities are described. Are chosen and are systematized the psychological and economic parameters, their influence to a condition of an immune system of the person is described, the results of this influence are determined. Two systems of the differential equations are developed, first of which describes an operation of inherent immunity outside an organism of the person, and second – in a middle it.

У ряді медичних праць [1] – [3], [5] – [7] визначені наслідки впливу психологічних факторів на імунний стан організму людини. Для узагальнення відповіді імунної системи на той чи інший подразник необхідно визначити основні компоненти психологічного впливу та окреслити елементи соціального впливу (втрата роботи, покращення або погіршення матеріального стану людини, сім'ї та ін.), розглянути їх зв'язки у певній системі, яку можна буде розглядати як комплексну еколого-математичну або навіть як еколого-економічну модель. Поруч з аналізом існуючих моделей важливо розглянути їх зміст поглиблено з введенням необхідних ланцюгів у зв'язку, які раніше вважалися невагомими і тому не бралися до уваги.

1. Природжений та набутий імунітет. Імунна система розвивалася для захисту від інфекцій. Тому почнемо з розгляду механізмів, що лежать в основі природженого імунітету, а саме фагоцитозу, системи комплементу та інших розчинних антимікробних факторів, а також неспецифічних клітин-кіллерів, про підсилення ефективності природного (природженого) імунітету при виникненні надбаного, що спирається на активність лімфоцитів; поговоримо про регуляцію імунної відповіді за допомогою антитіл, Т-клітин, а також про зв'язок цієї регуляції з нервовою та ендокринною системами.

Імунну відповідь здійснюють в першу чергу лейкоцити, які представлені деякими різновидами [6].

Природжений імунітет здійснюється групою лейкоцитів, що є фагоцитуючими клітинами або фагоцитами. Саме фагоцити утворюють першу лінію захисту проти інфекції.

Надбаний імунітет здійснюється іншою групою лейкоцитів – лімфоцитами, яким належить провідна роль в усіх реакціях надбаного імунітету.

Основні популяції лімфоцитів у надбаному імунітеті – це:

- Т-лімфоцити (Т-клітини);
- В-лімфоцити (В-клітини).

У повсякденному житті, коли людина не хворіє, на перешкоді інфекцій постає природжений імунітет. Як він “працює” – можна побачити на схемі 1:



Схема 1. Дія природженого імунітету поза організмом

- Надходження інфекції до організму
- - - -> Залишкова інфекція, що виводиться з організму
- ★ Повне руйнування інфекції
- ★ Часткове руйнування інфекції

Зображені на схемі 1 біологічні процеси можна представити у математичному вигляді. Спочатку введемо деякі позначення і опишемо їх значення. Отже,

N – кількість інфекції, яка “нападає” на організм,
 $B(K, Cл, Мж, C, Л, Ліз, Сц)$ – бактеріальна флора організму людини,
 $B_H(...)$ – нормальна концентрація бактеріальної флори організму людини,
 Φ – фактори зовнішнього середовища (це може бути недостатність їжі, сну, певні стресові ситуації, санітарно-гігієнічні умови і таке інше),
 K – кислота, що знаходиться у шлунку людини,
 $Cл$ – слиз (або війки), які містяться у носі, легенях людського організму,
 $Мж$ – молочні, жирні кислоти, які містить шкіряний покрив людини,
 C – слина, яка міститься у ротовій порожнині,
 $Л$ – лактопероксилаза, що входить до складу грудного молока,
 $Ліз$ – лізоцим – міститься у сльозах, що виділяються очима людини,
 $Сц$ – спермін та цинк, які входять до складу сечі,
 I – стан імунітету людини.
 μ_N – коефіцієнт “росту” інфекції,
 μ_B – коефіцієнт “росту” складових бактеріальної флори організму,
 $\gamma_{ij} (i \neq j)$ – коефіцієнт міжвидової конкуренції.

Взаємодію інфекції з організмом можна представити у вигляді системи з двох диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} \dot{N} = N(\tilde{\mu}_N(\Phi) - \gamma_{12}B), \\ \dot{B} = B(\tilde{\mu}_B(I, \Phi) - \gamma_{23}\Phi). \end{cases} \quad (1)$$

Пояснимо доданки першого та другого рівнянь системи (1):

$\tilde{\mu}_N N$ – ріст кількості інфекції, $\tilde{\mu}_N$ має певну межу насичення, яка залежить від того, де знаходиться джерело інфекції (мається на увазі – чи був це одноразовий вплив, чи людський організм увесь час піддається зараженню, тобто доречно говорити про те, що істотна залежність від Φ);

$-\gamma_{12}NB$ – знищення інфекції за рахунок її взаємодії зі складовими бактеріальної флори (їх було перераховано вище);

$B\tilde{\mu}_B$ – зростання бактеріальної флори організму до деякого рівня B_H , яке залежить від стану імунітету людини, а також від оточуючого середовища;

$-\gamma_{23}B\Phi$ – інактивація бактеріальної флори організму факторами зовнішнього середовища Φ .

Коли ж всередину організму людини потрапляє інфекція, яка може спричинити хворобу людини, то у цьому випадку спочатку починає працювати природжений імунітет, дію якого можна побачити на схемі 2, а потім до нього “підключається” й надбаний імунітет.



Схема 2. Дія природженого імунітету всередині організму

Тепер представимо математичний опис тих процесів, які представлені на схемі 2. Ситуація, що зображена на цій схемі, говорить про те, що “перший бар’єр” не справився з інфекцією, і вона потрапила вже всередину організму, тобто $\dot{N} \neq 0$ у системі (1) щодо схеми 1. Тоді,

$$\begin{cases} \dot{N} = N(\tilde{\mu}_N - \gamma_{14}L(f(S_C)) - \gamma_{15}X(f(S_C))), \\ \dot{L} = L(\tilde{\mu}_L(N, f(S_C), G) - \mu_L - \gamma_{45}G). \end{cases} \quad (2)$$

Пояснимо нові позначення та нові доданки системи рівнянь (2). Отже, L – кількість специфічних лімфоцитів, які приймають участь у фагоцитозі;

$f(S_C)$ – функція системи комплементу, що містить близько 20 видів білків;

X – хімічні фактори, що входять до бактерицидних ферментів, які “працюють” набагато ефективніше при активації системи комплементу, тому була введена математична залежність від $f(S_C)$;

G – вміст глюкокортикоїдів – гормон, що регулює вироблення лімфоцитів;
– $\gamma_{14}NL$ – знищення інфекції за рахунок взаємодії з лімфоцитами;
– $\gamma_{15}NX$ – знищення інфекції за рахунок дії на неї розчинних хімічних факторів;
 $\tilde{\mu}_L L$ – ріст лімфоцитів, залежить від кількості інфекції та активності системи комплементу, має межу насичення;
– $\mu_L L$ – природна загибель лімфоцитів;
– $\gamma_{45}LG$ – зменшення лімфоцитів при збільшенні вмісту гормону (глюкокортикоїдів).

2. Вплив нервової системи на стан імунітету. Давно відомо, що стресові ситуації можуть слугувати причиною пригніблення імунних функцій організму, наприклад зниження його здатності подолати інфекції.

Є багато даних [1] – [5], що вказують на взаємодію між нервовою, ендокринною та імунною системами.

Стан імунодефіциту виникає в результаті “випадання” чи недостатності функцій однієї або декількох елементів імунної системи. Неспецифічні імунодефіцити пов’язані з порушенням в таких елементах імунної системи, як комплемент та фагоцити. При порушеннях, пов’язаних із імуноглобулінами, компонентами комплементу та фагоцитарною активністю, різко зростає схильність до повторних інфекцій, що спричинені бактеріями у вигляді капсул (стрептококи, стафілококи).

Специфічні імунодефіцити пов’язані також із порушенням функцій Т- та В-лімфоцитів [6] та [8]. У випадку порушення у системі клітинного імунітету, тобто у функціях Т-клітин, підвищується чутливість до мікроорганізмів, що широко розповсюджені у оточуючому середовищі та при нормі нешкідливими – для здорових людей. Різні мікроорганізми, від дріжджів до звичайних вірусів (таких як вітряна віспа) у хворих Т-клітковою недостатністю, здатні викликати навіть летальні інфекції.

Хворі із загальними дефектами В-клітинної недостатності схильні до рецидивних інфекцій, таких як пневмонія, запалення середнього вуха, синусит. За відсутності лікування повторні пневмонії можуть спричинити важке захворювання органів дихання (бронхоектаз), наприклад, внаслідок руйнування еластичних тканин бронхіальної стінки. Прикладом може стати трагедія на Чорнобильській АЕС, що спричинило заміну кальцію у кістках на стронцій (ітрій-88), що в результаті призводить до порушень у кістковому мозку, а це в свою чергу до зменшення виробництва В-клітин.

При різних несприятливих діях, що спричиняють в організмі стан напруги (стресу), відбувається підсилення функцій гіпофізу, і як наслідок вивільненням великої кількості кортикотропіну та стимулюванням функції кори надниркових залоз [7].

3. Вплив оточуючого середовища на імунітет людини. У цьому пункті розглядається вплив таких факторів як недостатнє харчування, дія лікарських препаратів на стан імунної системи [6]. Розглянемо наслідки дії означених вище факторів.

Імунна недостатність може виникнути при недостатньому рівні харчування.

На існування зв'язку між харчування та стійкістю до інфекцій [6] вказують історичні відомості про розповсюдження інфекційних захворювань серед населення у голодні роки, а також клінічні спостереження та епідеміологічні дані. Як правило, імунні реакції при недостатньому харчуванні порушуються.

За даними світової статистики, виснаження – це сама основна причина імунодефіцитних станів. Як соціальне явище, недостатність харчування найбільш широко розповсюджена у неблагонадійних країнах, а також серед бідних шарів населення індустриально розвинених країн. Недостатність харчування звичайно погіршує протікання інфекції; у ряді захворювань, деяка недостатність харчування спочатку стимулює імунну відповідь – але врешті решт призводить до послаблення імунітету (пневмонія, кір, туберкульоз). Також до підвищення можливості інфекційних захворювань можуть привести:

- погані санітарні умови;
- забруднення їжі чи брудна неякісна їжа;
- відсутність гігієни;
- велика скупченість у місці проживання.

Особливо чутливими щодо недостатності харчування є лімфоїдні тканини. Для функціонування багатьох ферментів, що відіграють ключову роль в імунних реакціях, необхідно надходження до організму цинку, заліза, вітаміну B₆ та інші мікроелементи та вітаміни.

Досить виявлена ознака недостатності харчування – це атрофія лімфоїдної тканини. У дітей таким барометром є тимус. Зниження ваги та об'єму цього органу – ознака виснаження.

Після порушення функціонування у тимусі відбувається атрофія залежних від нього органів – лімфовузлах та селезінці.

Як поводить себе організм людини, коли він отримує посилене харчування:

- підвищення імунітету,
- відбувається зниження таких ускладнень, як сепсис, погане загоєння ран;
- харчові добавки у похилому віці (вживання в помірній кількості) знижують інфекцію дихальних шляхів та знижує застосування антибіотиків.

4. Висновки. В даній статті проаналізовано функції та механізми роботи природженого та набутого імунітетів. Представлено дві системи диференціальних рівнянь, що описують дію природженого імунітету. Описано вплив нервової системи та оточуючого середовища на стан імунної системи людини.

Л і т е р а т у р а

1. Р. Марри и др. Биохимия человека, том 2. Издательство "Мир", 1993
2. Физиология человека, том 1, под ред. Р. Шмидта и Г. Тевса, Москва, "Мир", 1996.
3. Б. Альберс и др. Молекулярная биология клетки, издательство "Мир", том 1, 1994; том 2, 1994. – 485с.; том 3, 1994. – 215с.
4. Н. Грин и др. Биология, издательство "Мир", том 1, 1993.– 210с.; том 2, 1993.
5. Основи медичних знань, під редакцією Кристофера Р.В. Едварда та ін., Київ, "Кобза", том 1, 1994.– 31с.; том 2, 1994.– 397с.
6. А. Ройт и др. Иммунология. Москва, "Мир", 2000.
7. М. Д. Машковский. Лекарственные средства, том 1, Вильнюс, 1993. – С. 491-492.
8. Дж. Плейфер. Наглядная иммунология, Москва, Медицина, 2000. – 54с.

Надійшла до редколегії 14.12.2004

УДК 519.21:519.6

Ю.В. Козій*

Yury Kozy*

Оцінка параметрів нечітких множин для слабо залежних спостережень.

Estimation of fuzzy sets parameters for small dependence observations.

Робота присвячена обґрунтуванню збіжності оцінок параметрів нечітких множин, у випадку слабкої залежності спостережень.

The article is dedicated to basis of convergence of fuzzy sets estimations in case small dependence of input observations.

*E-mail: www.yurik@ukrpost.net

Поняття нечіткої підмножини з'явилося в роботі Л.Заде [1] в 1965 році та набуло широкого застосування в різних предметних областях, зокрема, таких, як: експертні системи [2], психологія [3], економіка [4], та інші. Вагома частина застосувань теорії припадає на теорію керування та теорію прийняття рішень [5, 6, 7].

Загалом, існують природні статистичні об'єкти, які можуть бути інтерпретовані як нечіткі підмножини. Зокрема, в роботах [8, 9] функція належності інтерпретується як сімейство умовних імовірностей тої чи іншої події за слушною повною групою подій у дискретному варіанті або як значення умовного розподілу на тій чи іншій події у "недискретному" випадку. Плідним прикладом такого сімейства умовних розподілів може слугувати логіт- та пробіт-регресія [8] чи їхні узагальнені варіанти.

В роботі [9] запропоновано підхід до визначення нечітких множин в рамках якого логіт- та пробіт-регресії (УЛПР), а також їхні узагальнення є функцією належності нечіткої множини. Відповідно, задачі оцінювання для УЛПР представляються як задачі оцінювання параметрів нечітких множин.

В [10, 11] обговорювалися властивості оцінок нечітких множин в рамках УЛПР моделі, зокрема, доводилась слушність оцінок узагальненого варіанту методу максимальної вірогідності за незалежних спостережень. В пропонуваній роботі оцінки узагальненого методу максимальної вірогідності моделі УЛПР нечіткої множини досліджуються на слушність в рамках моделі залежних спостережень, точніше – тих, що задовольняють умові сильного перемішування.

Власне, в УЛПР моделі нечіткої множини йдеться про те, що функція належності є певним чином параметризована векторним параметром β , а імовірність реалізації події задається ймовірністю бернулівської випадкової величини y , яка має представлення:

$$\mu^G(x) = P_x\{y=1\} = M_\beta y = G_\beta(x) = G\left(\sum_j x_j \beta_j\right), \quad x_j \in R, \beta \in R^p, \quad (1)$$

$$0 \leq G_\beta(x) \leq 1, \quad x \in R, \quad G_\beta(x) \in C(R),$$

Під спостереженням в нечіткій множині, як це визначено в [9], будемо розуміти пару (x, y) , де $x = (x_1, \dots, x_p) \in R^p$, $p \in \mathbf{N}$ – набір умов, за яких спостерігається певна подія, а y є індикатором того, відбулася подія чи ні, а тому, будемо вважати, що вона відповідно приймає значення одиниця або нуль.

Задача оцінювання параметрів нечіткої множини полягає в оцінюванні параметру β за послідовністю спостережень (залежних чи незалежних) нечіткої множини $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n), \dots$ $x_i \in R^p, y_i \in \{0, 1\}$.

Слушність оцінок, отриманих узагальненням методом максимальної вірогідності для параметру β нечіткої множини для незалежних спостережень досліджувалась в [11]. В пропонованій роботі буде розглядатися задача оцінювання для слабо залежних випадкових величин.

Розглянемо та визначимо відповідним чином деякі σ -алгебри породжені випадковою частиною y_i , $i \geq 1$ спостереження (x_i, y_i) $i \geq 1$ нечіткої множини. Нагадаємо, що y_i – бернулівська випадкова величина, така що, $P_{x_i}\{y_i = 1\} = G(\beta^T x_i)$, $x_i, \beta \in R^p$. Позначимо

$\mathcal{F} = \sigma\{y_i, i \geq 1\}$ – σ -алгебра породжена послідовністю $(y_i, i \geq 1)$

$\mathcal{F}_n = \sigma\{y_i, 1 \leq i \leq n\}$ – σ -алгебра породжена послідовністю $y_i, i \geq 1$ аж до моменту n включно.

$\mathcal{F}_m^n = \sigma\{y_i, m \leq i \leq n\}$, $n, m \in \mathbf{N} \cup \{+\infty\}$ – σ -алгебра, породжена набором випадкових величин.

$\mathcal{F}_0^{-1}$ – минуле випадкової величини y_i , $i \in \mathbf{N}$, а $\mathcal{F}_\infty^0$ відповідно її майбутнє.

Як вже відзначалося, під залежністю спостережень будемо розуміти виконання для них умови сильного перемішування.

Означення. Послідовність випадкових величини $y_1, \dots, y_n, \dots$ задовольняє умові сильного перемішування, якщо існують сталі $c > 0$ та $\varepsilon > 0$ такі, що для всіх $n \in \mathbf{N}$ виконана умова

$$a(n) = \sup_{i \in \mathbf{N}} \sup_{A \in \mathcal{F}_i, B \in \mathcal{F}_\infty^i} |P(AB) - P(A)P(B)| \leq \frac{c}{n^{1+\varepsilon}} \quad (2)$$

Функція $a(n)$ називається коефіцієнтом перемішування. Очевидно, що $a(n) \rightarrow 0$ за $n \rightarrow \infty$.

Зауважимо, що для кожного спостереження розподіл бернулівської величини y_i з параметром, що визначається значенням $G_\beta(x_i)$ описується співвідношенням:

$$P_{x_i}\{y_i\} = G_\beta^{y_i}(x_i) (1 - G_\beta(x_i))^{1-y_i} \quad x_i \in R^p, \quad y_i \in \{0, 1\}. \quad (3)$$

Означення. Функціонал f на банаховому просторі B називається нормальним інтегрантом, якщо він є вимірним щодо пари борелівських σ -алгебр в області визначення та області можливих значень, а також є напівнеперервним знизу, тобто множина $\{x \mid f(x) \leq C\}$ є замкнутою для довільної сталої C .

Розглянемо наступний функціонал:

$$l_n(\beta) = \sum_{i=1}^n y_i \ln G_\beta(x_i) + (1 - y_i) \ln(1 - G_\beta(x_i)), \quad (4)$$

Нагадаємо, що функція G – неперервна.

Зауважимо, що для незалежних спостережень $l_n(\beta)$ є логарифмічною функцією правдоподібності.

Очевидним чином, за фіксованих значень вибірки (x_i, y_i) $i = \overline{1, N}$ та неперервності $G_\beta(x)$ за β , $l_n(\beta)$ є нормальним інтегрантом. Дійсно, так як функція $G_\beta(x)$ є неперервною, а тому вимірною та напівнеперервною знизу, тому вона є нормальним інтегрантом. Аналогічно, так як $l_n(\beta)$ є неперервною в силу неперервності композиції неперервних функцій, тому вона також є нормальним інтегрантом.

В подальшому будемо використовувати наступні твердження з робіт [12] та [13].

Лема 1. [12] Нехай $I_n(\beta) = l_n(\beta^{(0)}) - l_n(\beta)$ – послідовність функцій, які є нормальними інтегрантами, та існує $\beta^n = \arg \min_{\beta \in B} I_n(\beta)$, де B – компактна множина та виконані умови:

1. для довільного $\beta \neq \beta^{(0)}$ $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n(\beta) > 0$ P – м.н.
2. для довільного $\tilde{\beta} \in B$ $\lim_{\delta \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\{\beta \mid \|\beta - \tilde{\beta}\| \leq \delta\}} |l_n(\beta) - l_n(\tilde{\beta})| = 0$ P – м.н.

Тоді $P\{\lim_{n \rightarrow \infty} \|\beta^{(n)} - \beta^{(0)}\| = 0\} = 1$

Лема 2. [13] Нехай $\{\xi_i, i \in N\}$ – послідовність дійсних випадкових величин, таких що $E\xi_i = 0$ та $E(\xi_i)^2 \leq K$ для всіх $i \in N$.

Нехай існують такі $C = \text{const}$ та $\varepsilon > 0$, що для довільного $i \in N$

$$\sup_{i \in N} \sup_{\substack{\xi_1 \in \mathfrak{Z}(\mathcal{F}_1^i) \\ \xi_2 \in \mathfrak{Z}(\mathcal{F}_2^{\sigma_i})}} \frac{E(\xi_1 \xi_2)}{[E(\xi_1)^2 E(\xi_2)^2]^{1/2}} \leq \frac{C}{r^{1+\varepsilon}}$$

де $\mathfrak{Z}(\mathcal{F})$ – множина всіх випадкових величин з кінцевими другими моментами, вимірних відносно σ -алгебри.

Тоді $P\left\{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \xi_i = 0\right\} = 1$.

Наступна теорема є основним результатом статті.

Теорема. Нехай $\{y_i, i \in N\}$ – послідовність дійсних випадкових величин, які задовольняють умові сильного перемішування, з рівномірно обмеженою дисперсією. Позначимо $\eta_i = y_i - Ey_i$; Нехай $I_n(\beta) = l_n(\beta^0) - l_n(\beta)$ і виконані такі умови:

1. для довільного $\beta \neq \beta^0$ $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n(\beta) > 0$ P – м.н.
2. для довільного $\tilde{\beta} \in B$ $\lim_{\delta \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\{\beta: \|\beta - \tilde{\beta}\| \leq \delta\}} |l_n(\beta) - l_n(\tilde{\beta})| = 0$ P – м.н.
3. існують такі $C = \text{const}$ та $\varepsilon > 0$, що для довільного $i \in N$

$$\sup_{i \in N} \sup_{\substack{\eta_1 \in \mathcal{D}(\mathcal{F}_1^i) \\ \eta_2 \in \mathcal{D}(\mathcal{F}_2^i)}} \frac{[E(\eta_1 - E\eta_1)(\eta_2 - E\eta_2)]}{[E(\eta_1 - E\eta_1)^2 E(\eta_2 - E\eta_2)^2]^{1/2}} \leq \frac{C}{r^{1+\varepsilon}}$$

$$\text{Тоді } P\left\{\lim_{n \rightarrow \infty} \|\beta^n - \beta^0\| = 0\right\} = 1$$

Доведення теореми.

Перш за все зауважимо, що функція l_n є нормальним інтегрантом в силу своєї неперервності, а також, що для неї виконані умови леми 1. Дійсно, щодо першої умови маємо:

$$\begin{aligned} I_n &= l_n(\beta^0) - l_n(\beta) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i \ln \frac{G_{\beta^0}(x_i)}{G_{\beta}(x_i)} + (1 - y_i) \ln \frac{1 - G_{\beta^0}(x_i)}{1 - G_{\beta}(x_i)} = \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln \left[\frac{(G_{\beta^0}(x_i))^{y_i} (1 - G_{\beta^0}(x_i))^{1-y_i}}{(G_{\beta}(x_i))^{y_i} (1 - G_{\beta}(x_i))^{1-y_i}} \right] \end{aligned}$$

оскільки точка β^0 — точка максимуму [11], тому для довільного i виконана нерівність:

$$\ln \frac{(G_{\beta^0}(x_i))^{y_i} (1 - G_{\beta^0}(x_i))^{1-y_i}}{(G_{\beta}(x_i))^{y_i} (1 - G_{\beta}(x_i))^{1-y_i}} > \ln \frac{(G_{\beta^0}(x_i))^{y_i} (1 - G_{\beta^0}(x_i))^{1-y_i}}{(G_{\beta^0}(x_i))^{y_i} (1 - G_{\beta^0}(x_i))^{1-y_i}} = \ln 1 = 0$$

зідки $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n(\beta) > 0$. Отже умова (1) першої леми виконана.

Відносно умови (2) розглянемо вираз

$$\Delta_n = \sup_{\|\beta - \tilde{\beta}\| < \delta} |l_n(\beta) - l_n(\tilde{\beta})| \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left| y_i \ln \frac{G_{\beta}(x_i)}{G_{\tilde{\beta}}(x_i)} + (1 - y_i) \ln \frac{1 - G_{\beta}(x_i)}{1 - G_{\tilde{\beta}}(x_i)} \right|$$

Так як функція G – неперервна, то

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \forall \beta^1, \beta^2 : \|\beta^1 - \beta^2\| \leq \delta : \ln \frac{G_{\beta^1}(x_i)}{G_{\beta^2}(x_i)} < \varepsilon, \quad \ln \frac{1 - G_{\beta^1}(x_i)}{1 - G_{\beta^2}(x_i)} < \varepsilon, \text{ звідки}$$

$$\Delta_n \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i \left| \ln \frac{G_\beta(x_i)}{G_{\tilde{\beta}}(x_i)} \right| + (1 - y_i) \left| \ln \frac{1 - G_\beta(x_i)}{1 - G_{\tilde{\beta}}(x_i)} \right| \leq \varepsilon$$

а тому $\lim_{\delta \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} \Delta_n = 0$, що доводить умову (2) леми 1.

Отже, відповідно до леми 1 виконується співвідношення

$$P\left\{\lim_{n \rightarrow \infty} \|\beta^n - \beta^0\| = 0\right\} = 1 \text{ що і доводить теорему.}$$

Література.

1. Zadeh, Lotfi. Fuzzy Sets/Information and Control, 8(3). June 1965. pp. 338-53.
2. Малышев Н.Г., Берштейн Л.С., Боженюк А.В. Нечеткие модели для экспертных систем в САПР. М.: Энергоатомиздат, 1991
3. Андрейчиков А.В., Андрейчикова О.Н. Анализ, синтез, планирование решений в экономике.- М.: Финансы и статистика, 2000. - 368 с.
4. Борисов А.Н., Крумберг О.А., Федоров И.П. Принятие решений на основе нечетких моделей. Примеры использования. Рига:/ "Зинатне", 1990.
5. Аверкин А.Н., Батыршин И.З., Блишун А.Ф., Силов В.Б., Тарасов В.Б. Нечеткие множества в моделях управления и искусственного интеллекта // Под ред. Д.А. Поспелова.- М.:Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986.- 312 с.
6. Донченко В.С. "Умовні розподіли та нечіткі множини". Вісник київського університету. 1998. №3.
7. Донченко В.С. "Імовірність та нечіткі множини". Вісник київського університету. 1998. №4.
8. Iversen, Gudmund R. and Norpoth, Helmut. Analysis of Variance. 1976.
9. Донченко В.С. "Статистичні моделі спостережень та нечіткі множини" Вісник київського університету. 2004. №1.
10. Донченко В.С., Козій Ю.В. "Оцінювання параметрів для нечітких множин". Вісник київського університету. 2003. №4.
11. Донченко В.С., Козій Ю.В. "Асимптотична збіжність оцінок параметрів нечітких множин". Вісник київського університету. 2004. №1.
12. Касицкая Е.И., Кнопов П.С. "О сходимости эмпирических оценок в задачах стохастической оптимизации". Кибернетика. – 1991. №2. С.104-107, 112.
13. Кнопов П.С. Касицкая Е.И. "Состоятельность оценок наименьших квадратов параметров гауссовской регрессионной модели". Кибернетика и системный анализ. – 1991. №1. С. 21 – 26.

Надійшла до редколегії 23.02.2005

УДК 517.929

Олена І. Кузьмич, Денис Я. Хусаїнов

Helen I. Kuzmich, Denys Ya. Khusainov

Оцінки динаміки гібридних систем, що описуються дискретними рівняннями

У даній статті методом функцій Ляпунова проводяться оцінки розв'язків гібридних систем, описаних лінійними дискретними рівняннями.

Ключові слова: гібридна система, перемикання, квадратична форма, функція Ляпунова.

*E-mail: Khusainov@stab.univ.kiev.ua

The estimations of gibrud systems dynamic are described with discrete equations

In this article we estimate a gibrud systems solutions. The gibrud systems are described with linear discrete equations.

Key Words: dyfferential system, quadratic form, Lyapunov functions

Вступ

Дослідженню динаміки систем, структура яких змінюється при їх функціонуванні, присвячена значна кількість робіт. Системи такого типу одержали назву гібридних (логіко-динамічних) систем. Основна їх особливість – це поєднання неперервних складових, що описуються системами диференціальних рівнянь і логічних законів перемикання [1,2]. Оскільки диференціальні складові функціонують на скінченному проміжку часу, то для одержання часових характеристик суттєве значення мають оцінки практичної стійкості [3-5]. Запропонована робота є продовженням роботи [5]. На відміну від [6] динаміка неперервної частини замінена дискретними процесами, перемикання яких відбувається в задані фіксовані моменти часу.

Оцінки збурень гібридних систем

Розглянемо гібридну систему, представлену набором лінійних різницевих рівнянь зі сталими коефіцієнтами

$$x(k+1) = B_i x(k), \quad i = \overline{1, N}, \quad x(k) \in R^n, \quad (1)$$

які діють на проміжках $k_{i-1} \leq k \leq k_i$, $i_0 = 0$. Підсистеми можуть бути як стійкими так і нестійкими. У моменти перемикання k_i фазові координати зберігають неперервність у тому сенсі, що закінчення попередньої траєкторії є початком наступної

$$x(k_i - 0) = x(k_i + 0), \quad i = \overline{1, N-1}.$$

Оцінимо розбіжність системи в момент часу k_N якщо початкові збурення задовольняють умові $|x(0)| < \delta$. І навпаки, для заданого збурення ε в кінцевий момент $k = k_N$ знайдемо допустиме початкове збурення $\delta(\varepsilon)$ таке, що $|x(k_N)| < \varepsilon$, як тільки $|x(0)| < \delta(\varepsilon)$.

Для лінійної різницевої системи зі сталими коефіцієнтами

$$x(k+1) = Bx(k), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad x(k) \in R^n \quad (2)$$

загальний розв'язок має вигляд

$$x(x_0, k) = B^k x(0).$$

Найбільш точно динаміка такої системи може бути описана квадратичною функцією Ляпунова, побудованою (як і для диференціальних систем) на основі квадрату інтеграла

$$V(x, k) = (B^{-k} x)^T (B^{-k} x),$$

або у вигляді неавтономної функції Ляпунова

$$V(x, k) = x^T H(k) x, \quad H(k) = (B^{-k})^T (B^{-k}).$$

Функція Ляпунова, побудована таким чином, найбільше точно описує динаміку системи. Область $V(x, k) < \alpha$ при кожному фіксованому $k = 0, 1, 2, \dots$ являє собою внутрішність еліпсоїда, що виходить з кулі $|x(0)| < \alpha$ і "скачкоподібно" деформується вздовж розв'язків $x = x(x_0, k)$ системи (2).

Теорема 1. Нехай початковий стан гібридної системи (1) задовольняє умові $|x(0)| < \delta$. Тоді при $k = k_N$ буде виконуватися

$$|x(k_N)| < \frac{\delta}{\sqrt{\prod_{i=1}^N \lambda_{\min}[H_i(k_i)]}}, \quad (3)$$

де

$$H_i(k_i) = (B_i^{-(k_i - k_{i-1})})^T (B_i^{-(k_i - k_{i-1})}). \quad (4)$$

Доведення. Розглянемо першу ділянку динаміки системи

$$x(k+1) = B_1 x(k), \quad k = 0, 1, 2, \dots, k_1, \quad x(k) \in R^n. \quad (5)$$

В якості функції Ляпунова виберемо

$$V_1(x, k) = x^T H_1(k) x, \quad H_1(k) = (B_1^{-k})^T (B_1^{-k}),$$

для якої мають місце двосторонні оцінки

$$\lambda_{\min}[H_1(k)] |x(k)|^2 \leq V_1(x(k), k) \leq \lambda_{\max}[H_1(k)] |x(k)|^2, \quad k = 0, 1, 2, \dots, k_1.$$

Тут $\lambda_{\min}(\cdot)$, $\lambda_{\max}(\cdot)$ - мінімальне і максимальне власні числа симетричної матриці $H_1(k)$. Оскільки функція будується як квадрат інтеграла, то для її першої різниці буде виконуватися

$$\begin{aligned} \Delta V_1(x(k), k) &= V_1(x(k+1), k+1) - V_1(x(k), k) = \\ &= x^T(k+1) (B_1^{-(k+1)})^T (B_1^{-(k+1)}) x(k+1) - x^T(k) (B_1^{-k})^T (B_1^{-k}) x(k) = \\ &= x^T(k) B_1^T (B_1^{-(k+1)})^T (B_1^{-(k+1)}) B_1 x(k) - x^T(k) (B_1^{-k})^T (B_1^{-k}) x(k) \equiv 0 \end{aligned}$$

Крім того, для всіх $k = 0, 1, 2, \dots, k_1$ функція $V_1(x(k), k)$ на розв'язках стала, тобто

$$V_1(x(k), k) \equiv V_1(x(0), 0) \equiv \text{const}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, k_1.$$

Звідси

$$\lambda_{\min}[H_1(k)]|x(k)|^2 \leq V_1(x(k), k) \equiv V(x(0), 0) \leq \lambda_{\max}[H_1(0)]|x(0)|^2 = |x(0)|^2.$$

Тому для першої ділянки функціонування гібридної системи одержуємо наступну оцінку

$$|x(k_1)| < \frac{|x(0)|}{\sqrt{\lambda_{\min}[H_1(k_1)]}}$$

Для другої ділянки функціонування

$$x(k+1) = B_2 x(k), \quad k = k_1, k_1+1, k_1+2, \dots, k_2, \quad x(k) \in R^n \quad (6)$$

функцію Ляпунова вибираємо також у вигляді квадрату інтеграла

$$V_2(x, k) = x^T H_2(k) x, \quad H_2(k) = (B_2^{-(k-k_1)})^T (B_2^{-(k-k_1)}).$$

Для неї мають місце аналогічні двосторонні оцінки

$$\lambda_{\min}[H_2(k)]|x(k)|^2 \leq V_2(x(k), k) \leq \lambda_{\max}[H_2(k)]|x(k)|^2, \quad k = k_1, k_1+1, k_1+2, \dots, k_2,$$

а для першої різниці уздовж розв'язків одержимо

$$\Delta V_2(x(k), k) \equiv 0, \quad k = k_1, k_1+1, k_1+2, \dots, k_2.$$

Звідси

$$V_2(x(k), k) \equiv V_2(x(k_1), k_1) \equiv \text{const}, \quad k = k_1, k_1+1, k_1+2, \dots, k_2,$$

а також

$$\lambda_{\min}[H_2(k_2)]|x(k_2)|^2 \leq V_2(x(k_2), k_2) = V(x(k_1), k_1) \leq \lambda_{\max}[H_2(k_1)]|x(k_1)|^2 = |x(k_1)|^2.$$

І для другої ділянки маємо

$$|x(k_2)| < \frac{|x(k_1)|}{\sqrt{\lambda_{\min}[H_2(k_2)]}}.$$

Враховуючи неперервність при перемиканні одержуємо:

$$|x(k_2)| < \frac{|x(0)|}{\sqrt{\lambda_{\min}[H_2(k_2)]\lambda_{\min}[H_1(k_1)]}}.$$

Продовжуючи процес далі, маємо

$$|x(k_N)| < \frac{|x(0)|}{\sqrt{\prod_{i=1}^N \lambda_{\min}[H_i(k_i)]}},$$

що і треба було довести.

При доведенні теореми 1. поверхня рівня i -ї функції Ляпунова $V_i(x(k), k)$ в момент k_{i-1} являла собою сферу, що містить усередині себе еліпсоїд попередньої функції Ляпунова. Розглянемо можливість “зшивання” поверхонь рівня.

Теорема 2. Нехай початковий стан гібридної системи (1) задовольняє умові $|x(0)| < \delta$. Тоді при $k = k_N$ виконується нерівність

$$|x(k_N)| < \frac{\delta}{\sqrt{\lambda_{\min}[H_N(k_N)]}}, \quad (7)$$

де

$$H(k_N) = (B_N^{-(k_N-k_{N-1})})^T \dots (B_2^{-(k_2-k_1)})^T (B_1^{-k_1})^T B_1^{-k_1} B_2^{-(k_2-k_1)} \dots B_N^{-(k_N-k_{N-1})}. \quad (8)$$

Доведення. По аналогії з першою теоремою на першому проміжку функцію Ляпунова $V(x, k)$ виберемо у вигляді квадрата інтеграла

$$V_1(x, k) = x^T H_1(k) x, \quad H_1(k) = (B_1^{-k})^T (B_1^{-k}).$$

І на першій ділянці, тобто при $k = 0, 1, 2, \dots, k_1$ буде виконуватися

$$\Delta V_1(x(k), k) \equiv 0.$$

Звідси

$$x^T(k_1) H(k_1) x(k_1) = V_1(x(k_1), k_1) = V_1(x(0), 0) = |x(0)|^2.$$

На другій ділянці $k = k_1, k_1 + 1, k_1 + 2, \dots, k_2$ будемо функцію Ляпунова у вигляді

$$V_2(x, k) = (C_2 B_2^{-k} x)^T (C_2 B_2^{-k} x) = x^T (B_2^{-k})^T C_2^T C_2 (B_2^{-k}) x,$$

де C_2 - деяка невироджена матриця, що визначається з умови "склеювання" у момент $k = k_1$ у такий спосіб

$$\begin{aligned} V_1(x(k_1), k_1) &= x^T(k_1) (B_1^{-k_1})^T (B_1^{-k_1}) x(k_1) = \\ &= x^T(k_1) (B_2^{-k_1})^T C_2^T C_2 (B_2^{-k_1}) x(k_1) = V_2(x(k_1), k_1) \end{aligned}$$

Звідси одержуємо, що

$$B_1^{-k_1} = C_2 B_2^{-k_1} \quad \text{і} \quad C_2 = B_1^{-k_1} B_2^{k_1}.$$

Функція Ляпунова на другій ділянці має вигляд:

$$\begin{aligned} V_2(x, k) &= x^T H_2(k) x, \\ H_2(k) &= (B_2^{-k})^T (B_1^{-k_1} B_2^{k_1})^T B_1^{-k_1} B_2^{k_1} B_2^{-k}, \end{aligned}$$

або

$$H_2(k) = (B_2^{-(k-k_1)})^T (B_1^{-k_1})^T B_1^{-k_1} B_2^{-(k-k_1)}$$

Оскільки для функції Ляпунова $V_2(x, k)$ на другій ділянці також виконується

$$\Delta V_2(x(k), k) \equiv 0, \quad k = k_1, k_1 + 1, k_1 + 2, \dots, k_2,$$

то

$$\lambda_{\min}[H_2(k_2)] |x(k_2)|^2 \leq V_2(x(k_2), k_2) = V_2(x(k_1), k_1) = V_1(x(k_1), k_1) = V_1(x(0), 0) = |x(0)|^2.$$

Звідси

$$|x(k_2)| \leq \frac{|x(0)|}{\sqrt{\lambda_{\min}[H(k_2)]}}, \quad H(k_2) = (B_2^{-(k_2-k_1)})^T (B_1^{-k_1})^T B_1^{-k_1} B_2^{-(k_2-k_1)}.$$

Продовжуючи процес далі для $k = k_N$ одержуємо

$$|x(k_N)| \leq \frac{|x(0)|}{\sqrt{\lambda_{\min}[H(k_N)]}},$$

$$H(k_N) = (B_N^{-(k_N-k_{N-1})})^T \dots (B_2^{-(k_2-k_1)})^T (B_1^{-k_1})^T B_1^{-k_1} B_2^{-(k_2-k_1)} \dots B_N^{-(k_N-k_{N-1})},$$

тобто твердження (7), (8) теореми 2.

Розглянемо одержання оцінок збурень розв'язків гібридної системи при виконанні умов асимптотичної стійкості матриць B_i , $i = \overline{1, N}$. У цьому випадку можна використовувати автономні функції Ляпунова $V_i(x) = x^T H_i x$, де додатно визначені матриці H_i є розв'язками відповідних дискретних матричних рівнянь Ляпунова

$$B_i^T H_i A_i - B_i = -C, \quad i = \overline{1, N} \quad (9)$$

при довільних додатно визначених матрицях $C = C_i$, $i = \overline{1, N}$.

Теорема 3. Нехай кожна з підсистем логіко-динамічної системи (1) асимптотично стійка. Тоді при $k = k_N$ виконується нерівність

$$|x(k_N)| \leq \sqrt{\prod_{i=1}^N \varphi(H_i)} |x(0)| \prod_{i=1}^N \gamma^{\frac{1}{2}(k_i-k_{i-1})}(H_i) \quad (10)$$

де

$$\varphi(H_i) = \frac{\lambda_{\max}(H_i)}{\lambda_{\min}(H_i)}, \quad \gamma(H_i) = 1 - \frac{\lambda_{\min}(C_i)}{\lambda_{\max}(H_i)}. \quad (11)$$

Доведення. Розглянемо першу ділянку динамічної системи (1). Оскільки матриця A_i асимптотично стійка (за припущенням), то для довільної додатно визначеної матриці C_i матричне різницеве рівняння Ляпунова

$$B_i^T H B_i - H = -C_i$$

має єдиний розв'язок H_i . І на проміжку $k_0 \leq k \leq k_1$ виконується

$$\lambda_{\min}(H_i) |x(k)|^2 \leq V_i(x(k)) \leq \lambda_{\max}(H_i) |x(k)|^2,$$

$$\Delta V(x(k)) = V_i(x(k+1)) - V_i(x(k)) \leq -\lambda_{\min}(C_i) |x(k)|^2,$$

Звідси

$$V_i(x(k+1)) \leq \left[1 - \frac{\lambda_{\min}(C_i)}{\lambda_{\max}(H_i)} \right] V_i(x(k)).$$

І для розв'язків $x(k)$ на першій ділянці справедлива оцінка

$$|x(k)| \leq \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(H_1)}{\lambda_{\min}(H_1)}} |x(0)| \left[1 - \frac{\lambda_{\min}(C_1)}{\lambda_{\max}(H_1)} \right]^{\frac{k}{2}}.$$

А в кінцевий момент $k = k_1$ буде виконуватися

$$|x(k_1)| \leq \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(H_1)}{\lambda_{\min}(H_1)}} |x(0)| \left[1 - \frac{\lambda_{\min}(C_1)}{\lambda_{\max}(H_1)} \right]^{\frac{k_1}{2}}. \quad (12)$$

Розглянемо другу ділянку $k_1 \leq k \leq k_2$. Для розв'язків $x(k)$ на цій ділянці мають місце аналогічні оцінки

$$|x(k_2)| \leq \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(H_2)}{\lambda_{\min}(H_2)}} |x(k_1)| \left[1 - \frac{\lambda_{\min}(C_2)}{\lambda_{\max}(H_2)} \right]^{\frac{1}{2}(k_2 - k_1)}.$$

Використовуючи оцінку першої ділянки (12) одержуємо

$$\begin{aligned} |x(k_2)| &\leq \\ &\leq \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(H_1)\lambda_{\max}(H_2)}{\lambda_{\min}(H_1)\lambda_{\min}(H_2)}} |x(0)| \left[1 - \frac{\lambda_{\min}(C_1)}{\lambda_{\max}(H_1)} \right]^{\frac{k_1}{2}} \left[1 - \frac{\lambda_{\min}(C_2)}{\lambda_{\max}(H_2)} \right]^{\frac{1}{2}(k_2 - k_1)} \end{aligned}$$

Продовжуючи процес далі, одержимо, що в момент $k = k_N$ буде виконуватися

$$|x(k_N)| \leq \sqrt{\prod_{i=1}^N \frac{\lambda_{\max}(H_i)}{\lambda_{\min}(H_i)}} |x(0)| \prod_{i=1}^N \left[1 - \frac{\lambda_{\min}(C_i)}{\lambda_{\max}(H_i)} \right]^{\frac{1}{2}(k_i - k_{i-1})},$$

тобто твердження теореми.

Одержимо оцінки збурень гібридної системи без вимоги асимптотичної стійкості матриць B_i , $i = \overline{1, N}$.

Теорема 4. Нехай початкові умови системи (1) задовольняють нерівності $|x(0)| < \delta$. Тоді при $k = k_N$ справедлива нерівність

$$|x(k_N)| \leq \prod_{i=1}^N |B_i|^{k_i - k_{i-1}} \left[1 - \lambda_{\min} \left(I - \frac{B_i^T B_i}{|B_i|^2} \right) \right]^{\frac{1}{2}(k_i - k_{i-1})} \cdot \delta, \quad k = \overline{1, N}, \quad k_0 = 0. \quad (13)$$

І навпаки, для того щоб при $k = k_N$ була виконана нерівність $|x(k_N)| < \varepsilon$ достатньо, щоб виконувалося $|x(0)| < \delta(\varepsilon)$, де

$$|\delta(\varepsilon)| = \left\{ \prod_{i=1}^N |B_i|^{k_i - k_{i-1}} \left[1 - \lambda_{\min} \left(I - \frac{B_i^T B_i}{|B_i|^2} \right) \right]^{\frac{1}{2}(k_i - k_{i-1})} \right\}^{-1}, \quad i_0 = 0 \quad (14)$$

Доведення. Для одержання оцінок збіжності (або розбіжності) розв'язків гібридної системи будемо використовувати другий метод Ляпунова з функцією виду $V(x, k) = \gamma^k x^T x$, тобто $V(x, k) = \gamma^k |x|^2$. Сталий параметр $\gamma > 0$ буде визначати збіжність розв'язків (у випадку $\gamma > 1$) або розбіжність (у випадку $0 < \gamma < 1$). Обчислимо першу різницю функції $V_1(x, k)$ уздовж розв'язків системи на першій ділянці $k_0 \leq k \leq k_1$. Одержуємо

$$\begin{aligned}\Delta V(x(k), k) &= V(x(k+1), k+1) - V(x(k), k) = \\ &= \gamma^{k+1} x^T(k+1)x(k+1) - \gamma^k x^T(k)x(k) = \\ &= -\gamma^k x^T(k) [I - \gamma B^T B] x(k)\end{aligned}$$

Виберемо $\gamma > 0$ таким чином, щоб матриця $I - \gamma B_1^T B_1$ була додатно визначеною. Тоді буде виконуватися

$$\Delta V_1(x(k), k) \leq -\lambda_{\min}(I - \gamma B_1^T B_1) V(x(k), k).$$

Звідси одержуємо різницеву диференціальну нерівність

$$V(x(k+1), k+1) \leq [1 - \lambda_{\min}(I - \gamma B_1^T B_1)] V(x(k), k).$$

Ця різницєва нерівність має розв'язок

$$V(x(k), k) \leq [1 - \lambda_{\min}(I - \gamma B^T B)]^k V(x(0), 0),$$

Або, підставивши замість $V(x(k), k)$ і $V(x(0), 0)$ їх значення, одержимо

$$\gamma^k |x(k)|^2 \leq [1 - \lambda_{\min}(I - \gamma B_1^T B_1)]^k |x(0)|^2.$$

Звідси

$$|x(k)| \leq \left[\frac{1}{\gamma} - \lambda_{\min} \left(\frac{1}{\gamma} I - B^T B \right) \right]^{\frac{k}{2}} |x(0)|. \quad (15)$$

Оскільки, завжди виконується нерівність

$$\lambda_{\min}(I - \gamma B_1^T B_1) \geq 1 - \gamma \lambda_{\max}(B_1^T B_1) = 1 - \gamma |B_1|^2$$

де $|B_1|$ - спектральна матрична норма, то можна покласти $\gamma = |B_1|^{-2}$.

Підставивши вибране значення γ в нерівність (15) одержимо, що на першій ділянці в кінцевий момент часу $k = k_1$ буде виконуватися

$$|x(k)| \leq |B_1|^{k_1} \left[1 - \lambda_{\min} \left(I - \frac{B_1^T B_1}{|B_1|^2} \right) \right]^{\frac{1}{2} k_1} |x(0)|. \quad (16)$$

Розглянемо другу ділянку системи $k_1 \leq k \leq k_2$. Вибравши функцію Ляпунова $V(x) = \gamma^k |x|^2$ і провівши аналогічні перетворення, одержимо

$$|x(k_2)| \leq |B_2|^{k_2-k_1} \left[1 - \lambda_{\min} \left(I - \frac{B_2^T B_2}{|B_2|^2} \right) \right]^{\frac{1}{2}(k_2-k_1)} |x(k_1)|.$$

І, підставивши замість $|x(k_1)|$ його значення, одержане в (16), запишемо

$$|x(k_2)| \leq |B_2|^{k_2-k_1} |B_1|^{k_1} \left[1 - \lambda_{\min} \left(I - \frac{B_2^T B_2}{|B_2|^2} \right) \right]^{\frac{1}{2}(k_2-k_1)} \left[1 - \lambda_{\min} \left(I - \frac{B_1^T B_1}{|B_1|^2} \right) \right]^{\frac{1}{2}k_1} |x(0)|.$$

Повторивши аналогічні процедури для всіх проміжків, одержимо

$$|x(k_N)| \leq |B_N|^{k_N-k_{N-1}} \dots |B_2|^{k_2-k_1} |B_1|^{k_1} \left[1 - \lambda_{\min} \left(I - \frac{B_N^T B_N}{|B_N|^2} \right) \right]^{\frac{1}{2}(k_N-k_{N-1})} \times \\ \dots \times \left[1 - \lambda_{\min} \left(I - \frac{B_2^T B_2}{|B_2|^2} \right) \right]^{\frac{1}{2}(k_2-k_1)} \left[1 - \lambda_{\min} \left(I - \frac{B_1^T B_1}{|B_1|^2} \right) \right]^{\frac{1}{2}k_1} |x(0)|,$$

що і потрібно було довести.

Розв'язавши одержану нерівність відносно $|x(0)|$, одержимо твердження (14).

Література

1. Глушков В.М. Синтез цифровых автоматов. – М., Физматгиз, 1962. – 476с.
2. Branicky Michael S. Stability of Switched and Hybrid Systems // Proceedings of the 33rd Conference on Decision and Control Lake Buena Vista, FL-December 1994.
3. Бублик Б.Н., Гаращенко Ф.Г., Кириченко Н.Ф. Структурно-параметрическая оптимизация и устойчивость динамики пучков. – Киев, Наукова думка, 1985. – 304с.
4. Башняков О.М., Гаращенко Ф.Г., Пічкур В.В. Практична стійкість та структурна оптимізація динамічних систем. – Київ, Київський університет, 2000. – 197с.
5. Гаращенко Ф.Г., Пічкур В.В. Оптимальные множества практической устойчивости дифференциальных включений // Проблемы управления и информатики, №2, 2003. – с.10-19.
6. Хусаинов Д.Я., Кузьмич О.І. Оцінки стійкості логіко-динамічних систем з часовим перемикуванням // Вісник Київського університету. Фіз.-мат.науки, 2005, №1.
7. Branicky Michael S. Stability of Switched and Hybrid Systems // Proceedings of the 33rd Conference on Decision and Control Lake Buena Vista, FL-December 1994.

Надійшла до редакції 28.02.2005 р.

УДК 519.21

Євген О. Лебедєв*
Ірина Я. Усар*

Eugene A. Lebedev*
Irina Ya. Usar*

**Про матричне подання
стаціонарних імовірностей для
двовимірної міграції**

**On a matrix representation of
stationary probabilities for two-
dimensional migration**

Досліджено процес міграції спеціального типу в обмеженій області першого ортанту площини. Формулами матричного типу стаціонарні імовірності подані явно через параметри міграції. Наведені застосування до процесу обслуговування в системах з повторними викликами.

The migration process of special type in bounded region of the first plane orthant is studied. By formulas of matrix type the stationary probabilities are represented in explicit form through migration parameters. Applications to the service process in retrial queues are given.

Ключові слова: процес міграції, стаціонарний режим, потік імовірностей, система з повторними викликами.

Key Words: migration process, stationary regime, probability flow, retrial queue.

*E-mail: leb@unicyb.kiev.ua, usar@unicyb.kiev.ua

1. Вступ

Міграція є узагальненням процесу народження і загибелі на випадок багатовимірного фазового простору. Формальне визначення процесу міграції наведено, наприклад, в [1]. Розвиток цих моделей стимулюється їх застосуваннями в біології, фізиці, генетиці та інших областях ([2]). Особливо слід відзначити їх роль при дослідженні стохастичних мереж обробки інформації та сучасних систем зв'язку ([1],[3],[4]). Багатовимірність моделі дозволяє проводити системний аналіз стохастичних мереж, досліджувати інтегральні характеристики їх роботи.

Природньо, що з ускладненням моделей з'являються нові математичні проблеми, які треба розв'язувати. Для процесів міграції такою проблемою є пошук методів розрахунку для характеристик процесу в умовах стаціонарного режиму функціонування. Важливі результати в цьому напрямку містить монографія [4], де описано клас процесів міграції, для яких стаціонарні імовірності мають мультиплікативну форму. Ця форма представляє собою ефективний алгоритм розрахунку стаціонарних характеристик. У випадку, коли умови мультиплікативності не виконуються, проблема залишається актуальною. В першу чергу до таких

випадків приводять потреби практики, а не бажання мати завершені теоретичні результати.

Робота, що пропонується, робить свій внесок в цю проблематику. В ній вводиться клас двовимірних процесів міграції, в рамках якого можна описувати процес обслуговування для різних систем з повторними викликами. Спосіб надходження і обслуговування вимог (тип системи) обирається за рахунок керуючих параметрів міграції. Головна мета роботи – пошук замкнених формул для стаціонарних імовірностей двовимірного процесу обслуговування.

Основну модель, яка розглядається в роботі, визначимо як двовимірний ланцюг Маркова з неперервним часом $Q(t) = (Q_1(t), Q_2(t))$, $t \geq 0$ в обмеженій множині станів $S = \{0, 1, \dots, m\} \times \{0, 1, \dots, N\}$. Інфінітезимальні характеристики $q_{\alpha\beta}$, $\alpha, \beta \in S$, $\alpha \neq \beta$ для $Q(t)$ задамо системою співвідношень:

$$\text{при } \alpha = (i, j) \text{ та } i \neq m \quad q_{\alpha\beta} = \begin{cases} \lambda_{ij}, & \text{якщо } \beta = (i+1, j), \\ \mu_{ij}, & \text{якщо } \beta = (i-1, j), \\ \nu_{ij}, & \text{якщо } \beta = (i+1, j-1), \end{cases}$$

$$\text{при } \alpha = (m, j) \quad q_{\alpha\beta} = \begin{cases} \mu_{mj}, & \text{якщо } \beta = (m-1, j), \\ \lambda_{mj}, & \text{якщо } \beta = (m, j+1). \end{cases}$$

За домовленістю інтенсивності тих переходів, які виводять за обмежену область S дорівнюють нулю $\mu_{0j} = \nu_{i0} = \nu_{mj} = \lambda_{mN} = 0$.

Процеси міграції типу $Q(t)$ моделюють роботу марковських систем з повторними викликами та обмеженням числом джерел повторних викликів. Так при $\lambda_{ij} = \lambda_{mj} = \lambda$, $\mu_{ij} = i \cdot \mu$, $\nu_{ij} = j \cdot \nu$ отримаємо класичну модель $M/M/m/N$ системи з повторними викликами ([1]), для якої m – число обслуговуючих приладів, N – максимально можливе число джерел повторних викликів. Відповідним вибором інтенсивностей ν_j можна отримати систему з повторними викликами та лінійною інтенсивністю для повторних спроб зайняти вільний прилад ([5]).

Перейдемо до аналізу стаціонарного режиму процесу $Q(t)$, $t \geq 0$. Ми маємо на меті отримати для стаціонарних імовірностей π_{ij} , $(i, j) \in S$ подання, яке зручно використовувати як для їх обчислення, так і для вивчення їх аналітичних властивостей.

Для того, щоб сформулювати основний результат, для $j=0, 1, \dots, N-1$ введемо позначення: $A(j) = \|a_{\alpha\beta}(j)\|_{\alpha, \beta=0}^{m-1}$ – тридіагональна матриця,

$$a_{\alpha\beta} = \begin{cases} \lambda_{\alpha\beta} + \mu_{\alpha\beta} + \nu_{\alpha\beta}, & \beta = \alpha, \\ -\lambda_{\alpha\beta}, & \beta = \alpha + 1, \alpha = 0, 1, \dots, m-2, \\ -\mu_{\alpha\beta}, & \beta = \alpha - 1, \alpha = 1, 2, \dots, m-1, \\ 0, & \text{в інших випадках,} \end{cases}$$

$$B(j) = \|b_{\alpha\beta}(j)\|_{\alpha,\beta=0}^{m-1}, \quad b_{\alpha\beta}(j) = \begin{cases} v_{\alpha+1}, & \beta = \alpha + 1, \alpha = 0, 1, \dots, m-2, \\ 0, & \text{в інших випадках,} \end{cases}$$

$$C(j) = \|c_{\alpha\beta}(j)\|_{\alpha,\beta=0}^{m-1}, \quad c_{\alpha\beta}(j) = \begin{cases} \frac{\mu_{mj}}{\lambda_{mj}} v_{\alpha+1}, & \beta = m-1, \alpha = 0, 1, \dots, m-1, \\ 0, & \text{в інших випадках.} \end{cases}$$

Через $A(N)$ будемо позначимо трикутну матрицю

$$A(N) = \begin{pmatrix} \mu_{1N} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -(v_{1N} + \lambda_{1N}) & \mu_{2N} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -v_{1N} & -(v_{2N} + \lambda_{2N}) & \mu_{3N} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -v_{1N} & -v_{2N} & -v_{3N} & \dots & -(v_{m-2N} + \lambda_{m-2N}) & \mu_{m-1N} \end{pmatrix}$$

Нам також необхідні будуть вектори:

$$\pi'(j) = (\pi_{0j}, \pi_{1j}, \dots, \pi_{m-1j}), \quad Q(j) = \frac{\pi(j)}{\pi_{0N}},$$

$$v'(j) = (v_{0j}, v_{1j}, \dots, v_{m-1j}), \quad j = 0, 1, \dots, N,$$

$\bar{1}(m-1)$ – $(m-1)$ -вимірний вектор, що складається з одиниць,
 $e_i(m-1)$ – $(m-1)$ -вимірний вектор, i – та компонента якого дорівнює одиниці, а інші дорівнюють нулю. Через $\bar{1}, e_i$ будемо позначати такі ж вектори розмірності m .

Теорема 1. Якщо для $Q(t)$ існує стаціонарний режим і матриці $A(j)$, $j = 0, 1, \dots, N-1$ мають обернену, то стаціонарні імовірності π_{ij} , $(i, j) \in S$ можна подати у вигляді

$$\pi'(N) = S_Q^{-1} Q'(N), \quad \pi_{mN} = S_Q^{-1} \frac{1}{\mu_{mN}} Q'(N) (v(N) + \lambda_{m-1N} e_m), \quad (1)$$

$$\pi'(j) = S_Q^{-1} Q'(N) T(N-1) \times \dots \times T(j) \quad (2)$$

$$\pi_{mj} = S_Q^{-1} \frac{1}{\lambda_{mj}} Q'(N) T(N-1) \times \dots \times T(j+1) v(j+1), \quad j = 0, 1, \dots, N-1, \quad (3)$$

$$\text{де } S_Q = Q'(N) \left\{ \left[\bar{1} + \frac{1}{\mu_{mN}} (v(N) + \lambda_{m-1N} e_m) + \sum_{j=0}^{N-1} T(N-1) \times \dots \times T(j+1) \left[T(j) \bar{1} + \frac{1}{\lambda_{mj}} v(j+1) \right] \right] \right\}, \quad (4)$$

$$Q(N) = \begin{pmatrix} 1 \\ A^{-1}(N) (v_{0N} \bar{1}(m-1) + \lambda_{0N} e_1(m-1)) \end{pmatrix}, \quad (5)$$

$$T(j) = [B(j) + C(j)] A^{-1}(j), \quad j = 0, 1, \dots, N-1.$$

Доведення. Для кожного $k=0,1,\dots,m-1$ розіб'ємо S на дві підмножини $E_k=\{(0,N),(1,N),\dots,(k,N)\}$ та $\bar{E}_k=S\setminus E_k$. В силу рівності потоків імовірності через замкнений контур у стаціонарному режимі ([4], стор.49), будемо мати

$$v_{0N}\pi_{0N} + v_{1N}\pi_{1N} + \dots + v_{k-1N}\pi_{k-1N} + (v_{kN} + \lambda_{kN})\pi_{kN} = \mu_{k+1N}\pi_{k+1N}, \quad (6)$$

$$k=0,1,\dots,m-1$$

$$\text{Для } Q_{ij} = \frac{\pi_{ij}}{\pi_{0N}}, \quad (i,j) \in S \quad \text{перші "m-1" рівняння із системи (6)}$$

мають вигляд

$$\begin{cases} \mu_{1N}Q_{1N} = v_{0N} + \lambda_{0N} \\ -(v_{1N} + \lambda_{1N})Q_{1N} + \mu_{2N}Q_{2N} = v_{0N} \\ -v_{1N}Q_{1N} - (v_{2N} + \lambda_{2N})Q_{2N} + \mu_{3N}Q_{3N} = v_{0N} \\ \dots \\ -v_{1N}Q_{1N} - \dots - v_{m-3N}Q_{m-3N} - (v_{m-2N} + \lambda_{m-2N})Q_{m-2N} + \mu_{m-1N}Q_{m-1N} = v_{0N} \end{cases} \quad (7)$$

Відносно $Q_{1N}, \dots, Q_{m-1N}$ розв'язком (7) буде

$$\begin{pmatrix} Q_{1N} \\ \dots \\ Q_{m-1N} \end{pmatrix} = A^{-1}(N)(v_{0N}\mathbf{1}(m-1) + \lambda_{0N}e_1(m-1)).$$

Таким чином (5) доведено.

З (6) при $k=m-1$ знаходимо

$$Q_{mN} = \frac{1}{\mu_{mN}} Q'(N)(v(N) + \lambda_{m-1N}e_m). \quad (8)$$

Узагальнимо співвідношення (8) на випадок $j = N-1, \dots, 0$. Розіб'ємо S на дві підмножини $S_j = \{(\alpha, \beta) \in S : \beta \leq j\}$ і $\bar{S}_j = S \setminus S_j$. Знову використовуючи рівність потоків імовірності через замкнений контур, маємо

$$\begin{aligned} \lambda_{mj}Q_{mj} &= v_{0j+1}Q_{0j+1} + \dots + v_{m-1j+1}Q_{m-1j+1} \quad \text{або} \\ Q_{mj} &= \frac{1}{\lambda_{mj}} Q'(j+1)v(j+1), \quad j = N-1, \dots, 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Розглянемо тепер $m \times N$ замкнених контурів, які містять одну точку (i,j) з області $\tilde{S} = \{0,1,\dots,m-1\} \times \{0,1,\dots,N-1\}$. Відповідні рівняння для Q_{ij} , $(i,j) \in \tilde{S}$ мають вигляд

$$(\lambda_{0j} + \nu_{0j})Q_{0j} = \mu_{1j}Q_{1j}, \quad i = 0, \quad (10)$$

$$(\lambda_{ij} + \mu_{ij} + \nu_{ij})Q_{ij} = \nu_{i-1j+1}Q_{i-1j+1} + \lambda_{i-1j}Q_{i-1j} + \mu_{i+1j}Q_{i+1j}, \quad i = 1, 2, \dots, m-2. \quad (11)$$

При $i=m-1$ з урахуванням (9)

$$(\lambda_{m-1j} + \mu_{m-1j} + \nu_{m-1j})Q_{m-1j} = \nu_{m-2j+1}Q_{m-2j+1} + \lambda_{m-2j}Q_{m-2j} + \frac{\mu_{mj}}{\lambda_{mj}}Q'(j+1)\nu(j+1). \quad (12)$$

Систему (10) - (12) можна подати у векторно-матричному вигляді

$$Q'(j)A(j) = Q'(j+1)[B(j) + C(j)],$$

або

$$Q'(j) = Q'(j+1)[B(j) + C(j)]A^{-1}(j) = Q'(j+1)T(j), \quad j = N-1, \dots, 1, 0, \quad (13)$$

оскільки за умовою $A^{-1}(j)$ існує.

Розв'язком рекурентного співвідношення (13) буде послідовність векторів

$$Q'(j) = Q'(N)T(N-1) \times \dots \times T(j), \quad j = N-1, \dots, 1, 0. \quad (14)$$

Підставляючи праву частину (14) в (9), маємо

$$Q_{mj} = \frac{1}{\lambda_{mj}}Q'(N)T(N-1) \times \dots \times T(j+1)\nu(j+1), \quad j = N-1, \dots, 1, 0. \quad (15)$$

Тепер умова нормування для стаціонарних імовірностей π_{ij} , $(i, j) \in S$ дозволяє знайти

$$\begin{aligned} \pi_{0N} = & \{Q'(N)\bar{I} + \sum_{j=0}^{N-1} Q'(N)T(N-1) \times \dots \times T(j)\bar{I} + \frac{1}{\mu_{mN}}Q'(N)(\nu(N) + \lambda_{m-1N}e_m) + \\ & + \sum_{j=0}^{N-1} \frac{1}{\lambda_{mj}}Q'(N)T(N-1) \times \dots \times T(j+1)\nu(j+1)\}^{-1}. \end{aligned} \quad (16)$$

Співвідношення (1)-(3) є безпосереднім наслідком (8), (14)-(16).

Теорему доведено.

Застосуємо отриманий результат до системи $M/M/m/N$ з повторними викликами. У даному випадку залежність локальних характеристик від точки $(i, j) \in S$ фазового простору має простий явний вигляд і можна провести більш детальний аналіз.

Лема 1. Для системи $M/M/m/N$ з повторними викликами

$$Q_{kN} = \frac{(\lambda/\mu)^k}{k!} \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} \prod_{j=0}^{i-1} (j \frac{\mu}{\lambda} + N \frac{\nu}{\lambda}), \quad k = 0, 1, \dots, m-1, \quad (17)$$

де $\binom{k}{i} = \frac{k!}{i!(k-i)!}$ і за домовленістю $\prod_i \dots = 1$, при $j < i$.

Доведення. Для точок $(0, N), (1, N), \dots, (m-1, N)$ верхньої границі області S маємо рівняння

$$(\lambda + N\nu)\pi_{0N} = \mu\pi_{1N},$$

$$(\lambda + i\mu + N\nu)\pi_{iN} = \lambda\pi_{i-1N} + (i+1)\mu\pi_{i+1N}, \quad i = 1, \dots, m-1,$$

звідки

$$\left(\frac{\lambda}{\mu} + i + N\frac{\nu}{\mu}\right)Q_{iN} = \frac{\lambda}{\mu}Q_{i-1N} + (i+1)Q_{i+1N}, \quad i = 1, \dots, m-1, \quad (18)$$

$$Q_{0N} = 1, \quad Q_{1N} = \frac{\lambda}{\mu} + N\frac{\nu}{\mu}.$$

У зв'язку з (18) розглянемо послідовність $\{Q_i\}_0^\infty$, яка задається рекурентним співвідношенням

$$\left(\frac{\lambda}{\mu} + i + N\frac{\nu}{\mu}\right)Q_i = \frac{\lambda}{\mu}Q_{i-1} + (i+1)Q_{i+1}, \quad i = 1, 2, \dots, \quad (19)$$

і початковими умовами

$$Q_0 = 1, \quad Q_1 = \frac{\lambda}{\mu} + N\frac{\nu}{\mu}. \quad (20)$$

Очевидно, за побудовою $Q_i = Q_{iN}$, $i = 0, 1, \dots, m-1$.

Для розв'язку (19), (20) застосуємо метод генератрис. Поставимо у відповідність рекурентному співвідношенню диференціальне рівняння

$$F'(z)(1-z) = \left[N\frac{\nu}{\mu} + \frac{\lambda}{\mu}(1-z)\right]F(z),$$

$$F(0) = 1,$$

розв'язком якого є функція

$$F(z) = (1-z)^{-N\nu/\mu} e^{\lambda z/\mu}. \quad (21)$$

Оскільки в області $|z| < 1$ біноміальний ряд для $(1-z)^{-N\nu/\mu}$ абсолютно збігається, то для $|z| < 1$ функцію $F(z)$ можна подати рядом $F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} F_k z^k$,

причому послідовність $\{F_k\}_0^\infty$, задовольняє (19), (20) і співпадає з $\{Q_i\}_0^\infty$. З рівності (21) маємо

$$\{F_k\}_0^\infty = \left\{ \frac{1}{k!} \prod_{i=0}^{k-1} \left(i + N\frac{\nu}{\mu}\right) \right\}_0^\infty * \left\{ \frac{(\lambda/\mu)^k}{k!} \right\}_0^\infty,$$

де “*” – операція згортки послідовностей. Звідси випливає (17) і лему доведено.

Для $M/M/m/N$ – системи з повторними викликами

$$B(j) = (j+1)\nu B, \quad C(j) = (j+1)\nu \rho^{-1}C,$$

де $\rho = \frac{\lambda}{m\mu}$ – завантаженням системи первинними викликами,

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ & & & & \\ & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ & & & & \\ & & & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрицю $A(j)$ можна подати у вигляді

$$A(j) = \Delta(j)[I - P(j)], \quad j = 0, 1, \dots, N-1,$$

де $\Delta(j) = \|(\lambda + \alpha\mu + j\nu)\delta_{\alpha\beta}\|_{\alpha,\beta=0}^{m-1}$ – діагональна матриця, $P(j) = \|p_{\alpha\beta}(j)\|_{\alpha,\beta=0}^{m-1}$,

$$p_{\alpha\beta}(j) = \begin{cases} \frac{\lambda}{\lambda + \alpha\mu + j\nu}, & \beta = \alpha + 1, \quad \alpha = 0, 1, \dots, m-2, \\ \frac{\alpha\mu}{\lambda + \alpha\mu + j\nu}, & \beta = \alpha - 1, \quad \alpha = 1, 2, \dots, m-1, \\ 0, & \text{в інших випадках,} \end{cases}$$

підстохастична матриця ($p_{\alpha\beta}(j) \geq 0$ і для будь-якого α $\sum_{\beta=0}^{m-1} p_{\alpha\beta}(j) \leq 1$).

Оскільки для $j = 0, 1, \dots, N-1$ $\sum_{\beta=0}^{m-1} p_{m-1\beta}(j) = \frac{(m-1)\mu}{\lambda + (m-1)\mu + j\nu} < 1$ і матриця

$P(j)$ є нерозкладною, то її спектральний радіус строго менше 1 ([6], стор.362). Звідси випливає, що матриця $A(j)$ має обернену матрицю $A^{-1}(j) = [I - P(j)]^{-1} \Delta^{-1}(j) = [I + P(j) + P^2(j) + \dots] \Delta^{-1}(j)$.

Таким чином, умови теореми 1 виконуються і ми маємо наступний результат.

Наслідок 1. Стаціонарні імовірності $M/M/m/N$ – системи з повторними викликами можуть бути подані у вигляді (1)-(4), де матриця

$$T(j) = (j+1)\nu[B + \rho^{-1}C][I - P(j)]^{-1} \Delta^{-1}(j), \quad j = 0, 1, \dots, N-1,$$

а компоненти вектора $Q(N)$ визначаються співвідношенням (17).

Очевидно, формули (1)-(4) і (17) представляють собою ефективну рекурентну процедуру для обчислення стаціонарного розподілу. У випадку одного обслуговуючого приладу ($m=1$) векторно-матричне подання стаціонарних імовірностей значно спрощується.

Наслідок 2. Стаціонарні імовірності для $M/M/1/N$ – системи з повторними викликами мають вигляд

$$\pi(0, k) = S_Q^{-1} \prod_{j=0}^{k-1} \left(\rho \frac{j + \lambda/\nu}{j+1} \right), \quad (22)$$

$$\pi(1, k) = S_Q^{-1} \rho \left(1 + k \frac{\nu}{\lambda} \right) \prod_{j=0}^{k-1} \left(\rho \frac{j + \lambda/\nu}{j+1} \right), \quad k = 0, 1, \dots, N, \quad (23)$$

$$\text{де } S_Q = \sum_{m=0}^N \left[1 + \rho \left(1 + m \frac{\nu}{\mu} \right) \right] \prod_{j=0}^{m-1} \left(\rho \frac{j + \lambda/\nu}{j+1} \right).$$

На завершення зауважимо, що прості формули, подібні (22), (23) можуть бути отримані для інших типів міграцій, що визначаються вибором залежності локальних характеристик від фазової точки області S .

Література

1. Falin G.I., Templeton J.G.C. Retrial queues. – London Chapman & Hall, 1997. – 331 p.
2. Карлин С. Основы теории случайных процессов. – М.: Мир, 1971. – 536 с.
3. Бочаров П.П., Печинкин А.В. Теория массового обслуживания. – М.: РУДН, 1995. – 529 с.
4. Уолрэнд Дж. Введение в теорию массового обслуживания. – М.: Мир, 1993. – 336 с.
5. Anisimov V.V., Artalejo J.R. Analysis of Markov multiserver retrial queues with negative arrivals// Queuing Systems. – 2001. – Vol.39. – P. 157-182.
6. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. – М.: Наука, 1967. – 574 с.

Надійшла до редакції 25.01.2005

УДК 517:532.5

Олег Л. Лєвошич*,
Аліна В. Рєдка*

**Дослідження формування полів
домішок в атмосфері
при викиді з стаціонарних джерел**

Розглянуто метод розв'язку еволюційних задач переносу і дифузії в просторі суміші, яка викидається промисловими підприємствами. Вибрана відповідна математична модель. Основним алгоритмом розв'язку задачі є метод розщеплення. Зона розповсюдження забруднення умовно ділиться на "ближню" і "дальню" області. Такий гіпотетичний поділ дозволяє використовувати як чисельні так і аналітичні методи розв'язку поставленої задачі. Побудований метод може застосовуватися для розв'язку задач дослідження стану атмосфери в умовах забруднення.

Ключові слова: стаціонарне джерело, поля домішок, перенос, дифузія, концентрація, скінченно-різницевий метод.

*E-mail: mss@unicyb.kiev.ua

Oleg L. Levoshych*,
Alina V.Redka*

**Investigations of forming of the
fields of admixtures in an
atmosphere at the pollution from
stationary sources**

The method of decision of evolutionary problems of transfer and diffusion is considered in space mixtures, which is throwing out by industrial plants. Chosen proper mathematical model. The method of breaking up is the basic algorithm of decision of problem. The area of distribution of contamination divides by "near" and "distant" to the region. The such hypothetical division allows to use as analytical methods of decision of the set problem numeral so. The built method can be used for the decision of problem of research of the atmosphere state under the conditions of contamination.

Keywords: stationary source, fields of admixtures, transfer, diffusion, concentration, finite-difference method.

В роботі розглядається проблема впливу рельєфу та процесів атмосферної циркуляції на розповсюдження домішок при стаціонарному викиді. Така задача представляє практичну цінність. Підстилаюча поверхня є одним з важливих чинників, що впливають на характер розповсюдження забруднення. Також процес розповсюдження домішок природно залежить від характеристик атмосфери таких як вітер, тиск, турбулентність. Маніпулюючи цими показниками, можна побудувати не лише прогноз забруднення, а й розв'язати задачу раціонального розміщення виробничих підприємств. Отже, математичне моделювання поширення газоаерозольного факелу від джерела викиду в реальній атмосфері є складною комплексною проблемою, що у свою чергу є частиною більш загальної задачі збереження зовнішнього середовища і раціонального використання природних ресурсів [1].

Розглянемо в прямокутній декартовій системі координат $X=(x_1, x_2, x_3)$ рівняння переносу і дифузії деякої субстанції $q(x_1, x_2, x_3, t)$ аерозолі, що викидається точковим джерелом [1,2]:

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \sigma q = Q_q + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{v_j}{\xi} \frac{\partial q}{\partial x_j} - v_j q \right), \quad (j=1,2,3) \quad (1)$$

де передбачається сумування по двічі повторюваним індексам. Рівняння (1) описує міграцію концентрації аерозольної субстанції q разом з потоком повітря в атмосфері зі швидкістю $V=(v_1, v_2, v_3)$ і її дифузії за рахунок турбулентності атмосфери з коефіцієнтом обміну $d=(d_1, d_2, d_3)$; Q_q характеризує відтік ($Q_q > 0$) чи приплив ($Q_q < 0$) субстанції аерозолі q через граничну поверхню області розв'язку задачі; ξ – фізична константа, що характеризує турбулентність атмосфери; σq – внутрішнє джерело (стік), зумовлене природними домішок. Швидкість суміші в рівнянні (1) може бути визначена з рівняння динаміки однорідного середовища зі значеннями фізичних констант, що відповідають суміші [2].

При моделюванні процесів забруднення атмосфери підприємствами, що працюють в проектних режимах, джерело викидів можна вважати стаціонарним (прийняти $\partial q / \partial t = 0$). Тому будемо розглядати стаціонарне рівняння, що не залежать від часу t :

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left(v_j q - \frac{v_j}{\xi} \frac{\partial q}{\partial x_j} \right) + \sigma q = Q_q, \quad (j=1,2,3). \quad (2)$$

Точкове джерело описується δ -функцією і, якщо ефективні координати позначити через $x_1^{ef} = x_1^0 + \Delta x_1$, $x_2^{ef} = x_2^0 + \Delta x_2$, $x_3^{ef} = x_3^0 + \Delta x_3$, то початкова умова набуває вигляду

$$Vq = M \delta(x_1 - x_1^{ef}) \delta(x_2 - x_2^{ef}) \delta(x_3 - x_3^{ef}), \quad (3)$$

де M – викид речовини від джерела в одиницю часу (інтенсивність джерела).

Задача (2) моделює перенос і дифузію домішок в нескінченному просторі для факелу, розташованого на великій висоті від підстилаючої поверхні. На верхній границі області можна поставити крайову умову вигляду

$$q \rightarrow q_{\phi} \text{ при } x_1 \rightarrow \pm\infty, x_2 \rightarrow \pm\infty, x_3 \rightarrow +\infty, \quad (4)$$

оскільки на нескінченності концентрація зменшується і прямує до фонового значення q_{ϕ} .

Нижня гранична умова, записана у формі рівняння балансу домішок на рівні підстилаючої поверхні, має вигляд

$$v_3 \frac{\partial q}{\partial x_3} = \beta q + \gamma \text{ при } x_3 = 0, \text{ де } \beta, \gamma \text{ — емпіричні коефіцієнти.} \quad (5)$$

Сформульована задача (2)-(5) залежить від значень фактичних метеорологічних величин v_j, d_j ($j=1,2,3$), які, як правило, є складними нелінійними функціями координат (x_1, x_2, x_3) і часу t . Аналітичні методи її розв'язку в загальному випадку виявляються практично непридатними, оскільки їхнє застосування вимагає значних спрощень у постановці задачі. Тому для реальних погодних умов така задача може бути розв'язана тільки чисельно разом з реалізацією гідродинамічної моделі циркуляції атмосфери. Метод розв'язання пов'язаний з розбиттям області розв'язку дифузійної задачі на ряд підобластей, перетворенням у кожній підобласті умови початкової задачі з урахуванням опису лише основних процесів і зшиванням розв'язку на границях [2]. Цей шлях представляється більш економічним, тому основні алгоритми будуються з урахуванням розбиття загальної області на дві підобласті — “ближню” і “дальню”, і з використанням для розв'язку дифузійної задачі як аналітичного методу [2, 3] так і скінченно-різницевого методу [4].

Ділянка факелу з горизонтальним масштабом $L = ut_s$ ($L \approx 3600$ м при $u \approx 10$ м/с і $t_s = 60$ хв) називається “ближньою зоною”.

Використання припущень про сталість деяких атмосферних характеристик протягом певного проміжку часу в "ближній" зоні дає можливість розв'язати задачу аналітично. У більш загальному випадку дану задачу необхідно доповнити додатковою граничною умовою, яка враховує вплив підстилаючої поверхні [2, 3]. Аналітичний розв'язок задачі атмосферної дифузії дозволяє одержати ряд важливих результатів, що стосуються встановлення вигляду функціональних залежностей концентрації домішок від основних діючих чинників.

Для чисельного розв'язання задачі при побудові різницевих схем можна використовувати різноманітні апроксимації: явні, неявні, симетричні та однобічні для окремих членів рівняння моделі. В результаті можна отримати різні схеми [4]: явну чотирьохточкову, неявну чотирьохточкову, неявну шеститочкову симетричну, трикрокову неявну.

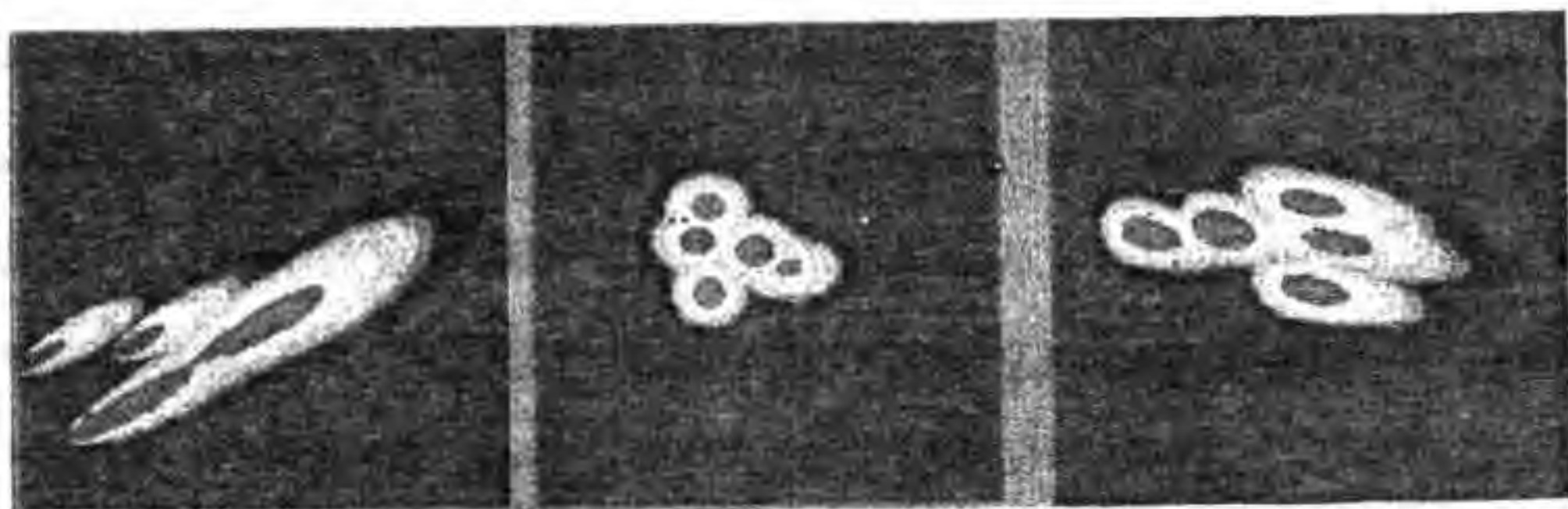
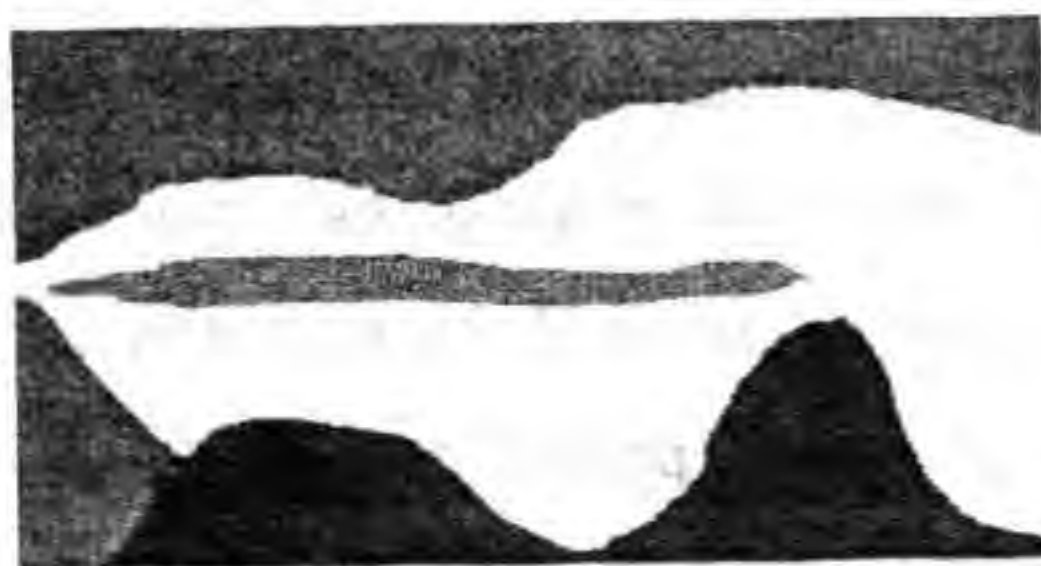
В результаті застосування вказаного вище підходу розщеплення задачі та тестувань за різних припущень щодо параметрів атмосфери і характеристик забруднюючої суміші було досліджено вплив діючих чинників рельєфу та атмосферних процесів на розподіл концентрації домішок та отримано ряд залежностей, основні з яких наведені нижче.

Вплив вітру. Від швидкості вітру залежить як відстань, на яку переносяться субстанції аерозолі, так і концентрація домішок у факелі при його переносі та витягуванні вздовж потоку.

Вплив рельєфу. Форма факелу майже повторює форму рельєфу з невеликим запізненням.

Вплив турбулентності. Чим більший коефіцієнт турбулентності, тим більше розпоршуються домішки вгору та донизу.

Вигляд полів концентрації домішок для різних значень параметрів зображений на малюнках. На першому малюнку зображено загальний вигляд факелу. На наступних трьох малюнках зображено вигляд перерізу поля площиною, яка перпендикулярна осям z, x, y відповідно.



Література

1. Прусов В.А. До питання прогнозування надзвичайних ситуацій природного та техногенного характеру з різною завчасністю. Екологія і ресурси: Зб. праць Укр. ін-ту дослідж. навколиш. середовища і ресурсів/ Редкол.: В.Я. Шевчук (голов. ред.) та ін. – К.: АВС, 2001. – 234с.
2. Довгий С.А., Прусов В.А., Копейка О.В. Математическое моделирование техногенных загрязнений окружающей среды –К.: Наукова думка, 2000. – 284 с.
3. Фарлоу С. Уравнения с частными производными для научных работников и инженеров. Пер. с англ. – М.: Мир, 1985. – 383с.
4. Белов П.Н., Борисенков Е.П., Панин Б.Д. Численные методы прогноза погоды – Л.: Гидрометеиздат, 1989. – 375с.

Надійшла до редакції 02.02.2005

УДК 621.391.7: 510.56

Оксана Г. Мекуш*

Групова верифікація цифрових підписів

В роботі розглянуто алгоритми групової верифікації модулярного експоненціювання та їх застосування до групової верифікації цифрового підпису DSS. Пропонується загальний тест "малих експонент" для прискорення групової верифікації цифрового підпису DSS.

Ключові слова: цифровий підпис DSS, групова верифікація, мульти-експоненціювання, обчислювальна складність.

* E-mail: mog@bigmir.net

Oksana G. Mekush*

Batch verification for digital signatures

The paper deals with batch verification algorithms for modular exponentiation. These methods are applied for batch verification of DSS digital signature. General Small Exponents test for speed up batch verification of digital signature DSS is proposed.

Key Words: digital signatures DSS, batch verification, multi-exponentiation, complexity of algorithm.

З виникненням криптографічних систем з відкритими ключами найбільш актуальним постало завдання аутентифікації повідомлень, яке було вирішено створенням алгоритмів цифрового підпису. В загальному випадку цифровий підпис представляє собою деяке число зі спеціальною структурою, яке допускає перевірку з допомогою відкритого ключа того факту, що воно було вироблено для деякого повідомлення з використанням секретного (закритого) ключа.

Більшість криптографічних систем з відкритим ключем базуються на одній з двох обчислювально важких задач: 1) дискретне логарифмування; 2) розклад числа на множники. Аналогічно цьому проводять класифікацію схем цифрового підпису. Так, цифрові підписи RSA, Рабіна, ESIGN та ін. базуються на проблемі розкладу великого числа на множники, а DSS, Шнорра, Ель-Гамала та ін. на проблемі дискретного логарифмування.

Одним із методів прискорення верифікації цифрових підписів, базованих на проблемі дискретного логарифму є метод групової верифікації, що базується на ймовірносних тестах групової верифікації операції модулярного експоненціювання в деякій циклічній групі, які запропоновані в [1].

Нехай g -генеруючий елемент циклічної групи G , q -порядок групи, $x \in \mathbb{Z}_q$, $y \in G$. Задача верифікації модулярного експоненціювання полягає в перевірці наступної рівності: $g^x = y$ (1)

Нехай дано множину пар (x_i, y_i) , $i = \overline{1, n}$, де n -достатньо велике число, тоді перевірка (1) прямим методом піднесення до степеня для кожної з пар

(x_i, y_i) буде потребувати значно більше часу, ніж "гуртова" ймовірнісна перевірка, базована на наступних тестах.

Дано: g -генеруючий елемент циклічної групи G порядку q , (x_i, y_i) -аргументи, $i = \overline{1, n}$, $x_i \in Z_q$, $y_i \in G$, $l \in N$ - таємний параметр.

Перевірити: $\forall i \in \{1, \dots, n\} : y_i = g^{x_i}$.

1. Тест випадкових підмножин: повторювати наступний елементарний тест l -раз.

1.1. Для всіх $i = \overline{1, n}$ вибрати $b_i \in \{0, 1\}$ випадково;

1.2. Нехай $S = \{i : b_i = 1\}$;

1.3. Обчислити $x = \sum_{i \in S} x_i \bmod q$, $y = \prod_{i \in S} y_i$;

1.4. Якщо $g^x = y$, то тест прийнятий, інакше-відхилений.

2. Тест малих експонент

2.1. Вибрати $s_1, \dots, s_n \in \{0, 1\}^l$ випадково;

2.2. Обчислити $x = \sum_{i=1}^n x_i s_i \bmod q$, $y = \prod_{i=1}^n y_i^{s_i}$;

2.3. Якщо $g^x = y$, то тест прийнятий, інакше-відхилений.

3. Тест "ковша"

m -додатковий параметр, $m \geq 2$, $M = 2^m$.

Повторювати наступний елементарний тест незалежно $\lceil l/(m-1) \rceil$ -раз.

Тест вважається прийнятим, якщо усі підтести-прийняті.

3.1. Для всіх $i = \overline{1, n}$ вибрати $t_i \in \{1, \dots, M\}$ випадково;

3.2. Для всіх $j = \overline{1, M}$ нехай $B_j = \{i : t_i = j\}$;

3.3. Для всіх $j = \overline{1, M}$ нехай $c_j = \sum_{i \in B_j} x_i \bmod q$ і $d_j = \prod_{i \in B_j} y_i$;

3.4. Проходити тест малих експонент для аргументів $(c_1, d_1), \dots, (c_M, d_M)$ із секретним параметром M .

В [1] доведено, що ймовірність помилки для кожного з тестів 1-3 дорівнює 2^{-l} . На практиці l встановлюється порядку 60, ймовірність помилки 2^{-60} вважається задовільною. При визначеному k -порядку 1024 бітів оптимальним може бути кожен із тестів в залежності від величини n . Так, для $5 \leq n \leq 200$ оптимальним є тест малих експонент; для n порядку 500 і більше перевагу віддаємо тесту "ковша".

Нехай $Exp_g(k)$ -кількість множень необхідних для піднесення до k -бітного степеня деякого числа $a \in G$ (залежить від обраного методу експоненціювання), а $Exp'_g(k)$ -кількість множень, необхідних для t різних піднесенень. Кількість множень, які необхідно виконати для кожного методу для порівняння обчислювальної ефективності наведено в табл.1.

Розглянемо застосування методу групової верифікації на прикладі схеми електронного цифрового підпису DSS. Ця схема була затверджена в

1991 році NIST (National Institute of Standards and Technology) [2].

Табл.1

Тест	Кількість множень
1.Пряме піднесення до степеня	$Exp_G^n(k)$
2.Тест випадкових підмножин	$nl/2 + Exp_G^l(k)$
3.Тест малих експонент	$l + n + nl/2 + Exp_G(k)$
4.Тест "ковша"	$\min_{m \geq 2} \lceil l/(m-1) \rceil \cdot (n + m + 2^{m-1}m + Exp_G(k))$

Формування підпису

1. Відправник А повідомлення m надає широкому колу абонентів (отримувачам його повідомлень) доступ до наступних параметрів:

p -просте число, $2^{512} < p < 2^{1024}$, бітова довжина p кратна 64;

q -просте число, $2^{159} < q < 2^{160}$, дільник $p-1$;

$g = h^{(p-1)/q} \bmod p$, де h - таке ціле число, що $0 < h < p$ і $h^{(p-1)/q} \bmod p > 1$;

y - відкритий ключ, $y = g^x \bmod p$;

x -таємний ключ користувача $0 < x < q$;

$H(m)$ -хеш-функція, яка по вихідному значенню m формує ціле число від 1 до q ;

2. Користувач А генерує випадкове число k -секретний номер, $0 < k < q$;

3. А знаходить $\lambda = g^k \bmod p$, $r = \lambda \bmod q$ і $s = k^{-1}(xr + H(m)) \bmod q$, (r, s) -підпис до повідомлення.

Верифікація підпису. Користувач В отримує m' і підпис (r', s') .

1. Обчислює $w = (s')^{-1} \bmod q$;

2. Обчислює $r = (g^{H(m)w} y^{(r'w) \bmod q} \bmod p) \bmod q$;

3. Перевіряє $r = r'$.

Для застосування алгоритмів групової верифікації експоненціювання до групової верифікації схеми DSS замість підпису (r, s) в якості підпису розглядається пара (λ, s) [3]. Дана процедура додає до підпису 160 бітів, але основної суті підпису не змінює. В даному випадку верифікаційне співвідношення матиме вигляд: $\lambda = g^{H(m)w} y^{(sw) \bmod q} \bmod p$ (2)

Нехай маємо множину підписів (λ_i, s_i) , $i = \overline{1, n}$. Ввівши позначення $a_i = s_i^{-1} \cdot H(m_i) \bmod q$, $b_i = s_i^{-1} \cdot \lambda_i \bmod q$ верифікаційне співвідношення (2) матиме вигляд: $\lambda_i = g^{a_i} y^{b_i} \bmod p$. (3)

Тести групової верифікації модулярного експоненціювання застосовані до DSS наступні.

Дано: p, q, g -відкриті параметри DSS, y -відкритий ключ, (λ_i, a_i, b_i) -аргументи, $i = \overline{1, n}$, l -таємний параметр.

Перевірити: $\forall i \in \{1, \dots, n\} : \lambda_i = g^{a_i} y^{b_i} \bmod p$.

1. Тест малих експонент

1.1. Вибрати $l_1, \dots, l_n \in \{0, 1\}^l$ випадково;

1.2. Обчислити $A = \sum_{i=1}^n a_i l_i \bmod q$, $B = \sum_{i=1}^n b_i l_i \bmod q$ і $R = \prod_{i=1}^n \lambda_i^{l_i} \bmod p$;

1.3. Якщо $R = g^A y^B \bmod p$, то тест прийнятий, інакше-відхилений.

2. Тест "ковша"

m -додатковий параметр, $m \geq 2$, $M = 2^m$.

Повторювати наступний елементарний тест незалежно $\lceil l/(m-1) \rceil$ -раз.

Тест вважається прийнятим, якщо усі підтести-прийняті.

2.1. Для всіх $i = 1, \dots, n$ вибрати $t_i \in \{1, \dots, M\}$ випадково;

2.2. Для всіх $j = 1, \dots, M$ нехай $B_j = \{i : t_i = j\}$;

2.3. Для всіх $j = 1, \dots, M$ нехай $c_j = \prod_{i \in B_j} \lambda_i \bmod p$, $d_j = \sum_{i \in B_j} a_i \bmod q$ і

$e_j = \prod_{i \in B_j} b_i \bmod q$;

2.4. Проходити тест малих експонент для аргументів $(c_1, d_1, e_1), \dots, (c_M, d_M, e_M)$ із секретним параметром M .

Узагальнимо метод групової верифікації цифрового підпису DSS для випадку, коли повідомлення і підписи до них згенеровані n різними користувачами, на відміну від попереднього випадку, коли відправник A згенерував і підписав n різних повідомлень m_i . Аргументами групової верифікації згідно поданих вище позначень будуть трійки (λ_i, a_i, b_i) , але верифікаційне співвідношення (3) матиме вигляд: $\lambda_i = g^{a_i} y_i^{b_i} \bmod p$ (4)

Для співвідношення (4) необхідно здійснити модифікацію тесту малих експонент, яку ми пропонуємо.

Загальний тест малих експонент

Дано: p, q, g -відкриті параметри DSS, y_i -відкриті ключі користувачів, (λ_i, a_i, b_i) -аргументи, $i = \overline{1, n}$, l -таємний параметр.

Перевірити: $\forall i \in \{1, \dots, n\} : \lambda_i = g^{a_i} y_i^{b_i}$.

1. Вибрати $l_1, \dots, l_n \in \{0, 1\}^l$ випадково;

2. Обчислити $A = \sum_{i=1}^n a_i l_i \bmod q$, $B_i = -l_i \cdot b_i \bmod q$ і $R = \prod_{i=1}^n y_i^{B_i} \lambda_i^{l_i} \bmod p$ (5)

3. Якщо $R = g^A \bmod p$, то тест прийнятий, інакше-відхилений.

Теорема. Ймовірність помилки загального тесту малих експонент дорівнює 2^{-l} .

Доведення. Нехай (λ_i, a_i, b_i) -невірний набір цифрових підписів і $a'_i = \log_b(\lambda_i \cdot y_i^{-b_i})$, $i = \overline{1, n}$. Для $i = \overline{1, n}$ нехай $\alpha_i = a_i - a'_i$. Вважаємо, що тест приймається для фіксованого набору $l_1, \dots, l_n$, тоді

$$g^{l_1 a_1 + \dots + l_n a_n} = y_1^{-l_1 b_1} y_2^{-l_2 b_2} \dots y_n^{-l_n b_n} \cdot \lambda_1^{l_1} \dots \lambda_n^{l_n} \quad (6),$$

але $g^{l_1 a_1' + \dots + l_n a_n'} = y_1^{-l_1 b_1} y_2^{-l_2 b_2} \dots y_n^{-l_n b_n} \cdot \lambda_1^{l_1} \cdot \dots \cdot \lambda_n^{l_n}$, тобто $g^{l_1 a_1' + \dots + l_n a_n'} = g^{l_1 a_1' + \dots + l_n a_n'}$, а звідси маємо, що $g^{l_1 \alpha_1 + \dots + l_n \alpha_n} = 1$. Оскільки g -генеруючий примітивний елемент групи G , то $l_1 \alpha_1 + \dots + l_n \alpha_n \equiv 0 \pmod{q}$. Так як (λ_i, a_i, b_i) -невірний набір цифрових підписів, то $\exists i$ таке, що $\alpha_i \neq 0$. Не втрачаючи загальності вважатимемо, що $\alpha_1 \neq 0$. q -просте число, то для α_1 існує обернений елемент β_1 : $\alpha_1 \beta_1 \equiv 1 \pmod{q}$, тобто можна записати:

$$l_1 \equiv -\beta_1(l_2 \alpha_2 + \dots + l_n \alpha_n) \pmod{q} \quad (7)$$

Це означає, що для фіксованих $l_2, \dots, l_n$ точно існує не більше одного $l_1 \in \{0, 1\}^l$ для якого рівність (7) справедлива. Таким чином, для фіксованих $l_2, \dots, l_n$ і випадково вибраного l_1 ймовірність того, що рівність (6) є вірною не більша 2^{-l} . Цілком аналогічно діємо для $l_2, \dots, l_n$. Теорема доведена.

Кількість множень, необхідних для прямої перевірки співвідношення (4) піднесенням до степеня дорівнює $2 \text{Exp}_G^n(k) + n$, а загальний тест малих експонент виконується за $\text{Exp}_G(k) + T(R) + 2n$ множень, де k -бітова довжина числа q , а $T(R)$ -кількість множень, необхідних для виконання операції мультиекспоненціювання (5). Якщо для обчислення (5) застосувати простий бінарний метод, то $T(R) = \sum_{i=1}^n (H(B_i) + H(l_i)) + n(k + l - 1)$, $H(B_i)$ -вага Хемінга B_i , але й цю оцінку можна покращити застосовуючи більш швидкі методи мультиекспоненціювання з [4], [5].

В и с н о в о к. У даній роботі запропоновано загальний тест малих експонент, який дозволяє прискорення виконання верифікації цифрового підпису DSS методом групової верифікації.

Література

1. Bellare M., Garay J.A., Rabin T. Fast batch verification of modular exponentiation and digital signatures, Advances in Cryptology-EUROCRYPT'98, LNCS 1403, Springer-Verlag, 1998, pp.236-250.
2. National Institute for Standards and Technology. Digital Signature Standard (DSS). Federal Register, Vol. 56, No. 169, August 30, 1991.
3. Naccache D., M'Raihi D., Vaudenay S., Raphaëli D. Can D.S.A be improved? Complexity trade-offs with the digital signature standard. Advances in Cryptology - Eurocrypt 94 Proceedings, Lecture Notes in Computer Science Vol. 950, A. De Santis ed., Springer-Verlag, 1994.
4. Mekush O. Modular Multi-Exponentiation Methods // International conference of science and technology "Scalnet'04".- Kremenchuk-2004.- С. 94-98.
5. Мекуш О.Г. Паралельні методи мультиекспоненціювання// Вісник Київського університету. Сер. фіз.-мат. науки. - 2004. - Вип. 4.- С.217-222.

Надійшла до редакції 28.02.2005

УДК 519.9

Микола С. Нікітченко¹, Сергій І.
Мілько²

**Алгебра багатозначних
еквітонних предикатів.**

У роботі досліджується клас еквітонних предикатів, заданих на довільній передупорядкованій множині, областю значень для яких є деяка повна решітка з інволюцією. Будується алгебра таких предикатів та визначається система її твірних.

Ключові слова: еквітонний предикат, алгебра еквітонних предикатів.

Mykola S. Nikitchenko¹, Sergiy I.
Milko²

**Algebra of multivalued equiton
predicates.**

In the current work the class of equiton predicates is investigated. Predicates are defined on the semi-ordered set and take values from the complete lattice with involution. The algebra of such predicates is built and the set of generatrices for it is defined.

Key Words: equiton predicate, algebra of equiton predicates.

¹E-mail: nikitchenko@unicyb.kiev.ua

²E-mail: smilko@gmail.com

ВСТУП

Еквітонними називаються предикати спеціального вигляду, що зберігають свої значення на великих (розширених) даних. Такі предикати виникають природним чином при побудові і дослідженні різних логік часткових предикатів. Наприклад, предикати, розглянуті в класичних і неокласичних логіках [1], є еквітонними. Далі, еквітонними будуть також предикати, що задають детермінанти різних класів композицій часткових предикатів [2-4]. Властивість еквітонності предикатів і функцій є дуже важливою і для програмування [5], оскільки семантика програм багатьох класів задається еквітонними відображеннями. З огляду на широку область застосовності еквітонних відображень, їх природність і значимість для математичної логіки і програмування, проблема дослідження таких відображень є дуже актуальною.

ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМИ

Нехай $\langle D, \leq \rangle$ - довільна передупорядкована множина (множина із заданим рефлексивним і транзитивним бінарним відношенням $\leq$), $L = \{l_i \mid i \in I\}$ - повна решітка з інволюцією, $PL = D \rightarrow L$ - множина часткових предикатів. Для $p \in PL, d \in D, l \in L$ вираз $p(d) \uparrow$ означає, що предикат p не визначений на d , $p(d) \downarrow$ - p визначений на d , $p(d) \downarrow = l$ - p визначений на d зі значенням l .

Лема 1. Елементи решітки L задовольняють наступним властивостям:

$$(\forall l \in L)(\sim(\sim(l)) = l) - \text{інволюція}$$

$$(\{l_i \mid i \in I\} \subseteq L)(\sim(\bigcup\{l_i \mid i \in I\}) = \bigcap\{\sim(l_i) \mid i \in I\}) - \text{правило де Моргана}$$

$$(\{l_{ij}\}, j \in J, i \in I, l_{ij} \in L)(\bigcup_{i \in I}(\bigcup_{j \in J_i}(l_{ij})) = \bigcup_{j \in J, i \in I}(l_{ij})) - \text{асоціативність}$$

$$(l_1, l_2 \in L, l_1 \leq l_2)(\bigcup\{l_1, l_2\} = l_2, \bigcap\{l_1, l_2\} = l_1)$$

$$(l_1, l_2 \in L, l_1 < l_2)(\sim(l_1) > \sim(l_2))$$

$$\text{Введемо позначення } T = \bigcup(L), F = \bigcap(L).$$

Означення 1. Предикат $p \in PL$ називається *еквітонним предикатом*, якщо для всіх $d, d' \in D, l \in L$ з того, що $p(d) \downarrow = l$ і $d \leq d'$ випливає, що $p(d') \downarrow = l$. Клас еквітонних предикатів позначимо $PLE = D \rightarrow L$.

Як видно з означення, еквітонні предикати є спеціальними монотонними відображеннями, для яких у якості відношення передпорядку на множині значень береться рівність. Сам термін "еквітонний" був введений у [5] як похідний термінів "екваційний" і "монотонний", що говорять про монотонність, у якій важливу роль грає рівність. У літературі відношення $\leq$ часто називають інформаційним відношенням [6, 7]. Викликано це тим, що для логік монотонних міркувань вхідні дані часто інтерпретуються як задана (доступна) інформація. У цих термінах еквітонні предикати виникають зовсім природним чином - тоді, коли значення предиката обчислюється тільки на основі деякої частини доступної інформації. Тоді частина, що залишилася, на одержуване значення не впливає і тим самим значення предиката не змінюється на більшому даному. Область застосовності таких предикатів, як і еквітонних відображень у цілому, надзвичайно широка. Пов'язано це з тією обставиною, що такі відображення визначаються на дуже високому рівні абстракції, який задається дуже слабкою вимогою наявності довільного відношення передпорядку на множини даних.

Приклади еквітонних відображень і їхніх застосувань для дослідження й оптимізації програм приведені в [1-5].

Проблема, що досліджується в роботі, полягає в побудові алгебри еквітонних предикатів та знаходженні системи її твірних.

ВЛАСТИВОСТІ ЕКВІТОННИХ ПРЕДИКАТІВ

Означення та властивості передупорядкованих множин наведені в роботах [7, 8, 11]. Сформулюємо їх у вигляді леми для подальшого використання.

Лема 2. Нехай $\langle D, \leq \rangle$ - довільна передупорядкована множина, $a, b, d \in D$, $A, B, A_i \subseteq D (i \in I)$. Тоді справедливі наступні твердження.

- Оператор ∇ - оператор замикання [9], тобто

$$A \subseteq A^\nabla; A^\nabla = A^{\nabla\nabla}; A \subseteq B \Rightarrow A^\nabla \subseteq B^\nabla.$$

- Оператор ∇ - монотонний оператор, тобто $a \leq b \Rightarrow a^\nabla \geq b^\nabla$
- Оператор ∇ дистрибутивний відносно $\cup$, тобто

$$(\cup\{A_i | i \in I\})^\nabla = \cup\{A_i^\nabla | i \in I\}.$$

Зокрема, $A^\nabla = (\cup\{a | a \in A\})^\nabla = \cup\{a^\nabla | a \in A\}$

- Якщо множини $A_i (i \in I)$ - зростаючі, то $\cup\{A_i | i \in I\}, \cap\{A_i | i \in I\}$ - також зростаючі.

- Множини $a^\#$ і $A^\#$ - зростаючі, тобто $a^\# = a^{\#\nabla}$ і $A^\# = A^{\#\nabla}$

• Для оператора $\#$ справедлива наступна формула де Моргана:

$$(\cup\{A_i | i \in I\})^\# = \cap\{A_i^\# | i \in I\}.$$

Зокрема, $A^\# = (\cup\{a | a \in A\})^\# = \cap\{a^\# | a \in A\}$

- Для введених понять справедливі наступні співвідношення:

$$\begin{aligned} a \equiv b &\Leftrightarrow a^\nabla \cap b^\nabla \neq \emptyset; \\ a \not\equiv b &\Leftrightarrow a^\nabla \cap b^\nabla = \emptyset \Leftrightarrow a^\nabla \subseteq b^\# \Leftrightarrow b^\nabla \subseteq a^\#; \\ A \not\equiv B &\Leftrightarrow A^\nabla \cap B^\nabla = \emptyset \Leftrightarrow B^\nabla \subseteq A^\# \Leftrightarrow A^\nabla \subseteq B^\#; \\ a \leq b &\Rightarrow a^\# \subseteq b^\#; A \subseteq B \Rightarrow B^\# \subseteq A^\#; a^\nabla \cap a^\# = \emptyset; A^\nabla \cap A^\# = \emptyset; \end{aligned}$$

Доведення використовують звичайні методи теорії впорядкованих множин (див. [7, 8]), тому тут не приводяться.

Для дослідження еквітонних предикатів будемо поряд з теоретико-функціональними методами застосовувати і теоретико-множинні методи, представляючи кожен предикат множиною прообразів значень $l \in L$ [4].

Означення 2. Нехай $p \in PL$. Областю l -значення предиката p називається множина $p^l = \{d \mid p(d) \downarrow = l, d \in D\}, l \in L$.

Очевидне наступне твердження.

Лема 3. Нехай $p \in PL$. Тоді $(\forall l_1, l_2 \in L, l_1 \neq l_2) (p^{l_1} \cap p^{l_2} = \emptyset)$. Обернено, нехай $A_l \subseteq D, l \in L$ та $A_{l_1} \cap A_{l_2} = \emptyset, l_1, l_2 \in L, l_1 \neq l_2$. Тоді існує єдиний предикат $p \in PL$, для якого $p^l = A_l, l \in L$.

Для еквітонного предиката його області l -значень є зростаючими множинами. Ці множини несумісні, що у даному випадку еквівалентно тому, що вони не перетинаються (лема 2).

Лема 4. Нехай $p \in PLE$. Тоді $p^l, l \in L$ - зростаючі множини, що не перетинаються. Обернено, нехай $A_l \subseteq D, l \in L$ - зростаючі множини, що не перетинаються. Тоді існує єдиний $p \in PLE$, для якого $p^l = A_l, l \in L$.

Використаємо введені позначення для визначення операцій на множині PL . Основними операціями над частковими предикатами є унарна операція заперечення $\neg: PL \rightarrow PL$ і аналоги операцій сильної диз'юнкції $\vee$ і сильної кон'юнкції $\wedge$, введених Кліні [10]. На відміну від традиційних алгебр із n -арними операціями, введені операції є множинними - їхніми аргументами є не n -ки предикатів, а множини предикатів, тобто ці операції мають тип $2^{PL} \xrightarrow{l} PL$. Тут функціональна стрілка $\xrightarrow{l}$ задає клас тотальних (всюди визначених) відображень.

Означення 3. Інфінітарні операції множинної диз'юнкції $\vee: 2^{PL} \xrightarrow{l} PL$, множинної кон'юнкції $\wedge: 2^{PL} \xrightarrow{l} PL$ і унарна операція $\neg: PL \xrightarrow{l} PL$ задаються наступними формулами, у яких $p, p_i \in PL (i \in I), l \in L$:

$$(\vee \{p_i \mid i \in I\})^T = \{d \mid d \in D; \bigcup_{i \in I} \{p_i(d)\} = T\} \cup \{d \mid d \in D; \exists i^* \in I (p_{i^*}(d) = T)\}$$

$$(\vee \{p_i \mid i \in I\})^l = \{d \mid d \in D, \bigcup_{i \in I} \{p_i(d)\} = l, l \neq T\}$$

$$(\wedge \{p_i \mid i \in I\})^F = \{d \mid d \in D; \bigcap_{i \in I} \{p_i(d)\} = F\} \cup \{d \mid d \in D; \exists i^* \in I (p_{i^*}(d) = F)\}$$

$$(\wedge \{p_i \mid i \in I\})^l = \{d \mid d \in D, \bigcap_{i \in I} \{p_i(d)\} = l, l \neq F\}$$

$$(\neg p)^l = \{d \mid d \in D, l = \sim(p(d))\}, \text{ де } \sim(l) - \text{інволюція на решітці } L$$

Записуючи $\bigcap_{i \in I} \{p_i(d)\} = l, \bigcup_{i \in I} \{p_i(d)\} = l, N(p(d)) = l$ маємо на увазі, що $\forall i \in I(p_i(d) \downarrow) \text{ і } p(d) \downarrow$.

Слід зауважити, що:

$$\begin{aligned} \cup \{p_i^T \mid i \in I\} &\subseteq (\vee \{p_i \mid i \in I\})^T; \\ \cap \{p_i^F \mid i \in I\} &= (\vee \{p_i \mid i \in I\})^F; \\ \cup \{p_i^F \mid i \in I\} &\subseteq (\wedge \{p_i \mid i \in I\})^F; \\ \cap \{p_i^T \mid i \in I\} &= (\wedge \{p_i \mid i \in I\})^T \end{aligned}$$

де $T = \bigcup(L), F = \bigcap(L)$.

Очевидно, що зазначені формули задають відповідні операції коректно.

Означення 4. Алгебра $AKL(PL, D, L) = \langle PL, \vee, \wedge, \neg \rangle$ називається інфінітарною L -значною предикатною алгеброю Кліні [2].

Додатково будемо використовувати бінарні диз'юнкцію і кон'юнкцію, розуміючи їх як скорочення формул $p \vee q = \vee \{p, q\}, p \wedge q = \wedge \{p, q\}$, а також елементи ґратки $L - T, F$. Всюди невизначений предикат позначимо $\perp$. Якщо $l \in L$, то через $\bar{l}$ позначимо предикат такий, що $\bar{l}(d) \downarrow = l, \forall d \in D$. Зазначимо також, що $\bar{T} = \wedge \emptyset, \bar{F} = \vee \emptyset$.

Теорема 1. Множина еквітонних предикатів PLE утворює підалгебру алгебри $AKL(PL, D, L)$.

Доведення. Необхідно показати замкненість класу PLE відносно операцій алгебри.

І. Нехай $\{p_i \mid i \in I\} \subseteq PLE$. З однозначності $\vee \{p_i \mid i \in I\}$ випливає, що множини $(\vee \{p_i \mid i \in I\})^l, l \in L$ не перетинаються. Покажемо, що вони зростаючі.

Нехай $d_1 \geq d_2, d_1, d_2 \in D$ та $d_2 \in (\vee \{p_i \mid i \in I\})^l, l \in L$. Доведемо, що $d_1 \in (\vee \{p_i \mid i \in I\})^l, l \in L$.

1) Зафіксуємо $l \neq T$

$d_2 \in \{d \mid l = \bigcup_{i \in I} \{p_i(d)\}\}$, тобто $l = \bigcup_{i \in I} \{p_i(d_2)\}$. Оскільки $\{p_i \mid i \in I\}$ - еквітонні і $d_1 \geq d_2$, то $p_i(d_1) \downarrow = p_i(d_2), \forall i \in I$. Звідки $l = \bigcup_{i \in I} \{p_i(d_1)\}$, а отже $d_1 \in \{d \mid l = \bigcup_{i \in I} \{p_i(d)\}\}$

2) Нехай тепер $l = T$.

$d_2 \in \{d \mid d \in D, \bigcup_{i \in I} \{p_i(d)\} = T\} \cup \{d \mid d \in D, \exists i^* \in I(p_{i^*}(d) = T)\}$. Випадок, коли $d_2 \in \{d \mid d \in D, \bigcup_{i \in I} \{p_i(d)\} = T\}$, доводиться аналогічно 1). Розглянемо іншу

альтернативу $d_2 \in \{d \mid d \in D; \exists i^* \in I(p_{i^*}(d) = T)\}$. З еквітонності p_{i^*} і умови $d_1 \geq d_2$ випливає $p_{i^*}(d_1) \downarrow = p_{i^*}(d_2) = T$. Тобто $d_1 \in \{d \mid d \in D; \exists i^* \in I(p_{i^*}(d) = T)\}$.

Таким чином множини $(\bigvee \{p_i \mid i \in I\})', l \in L$ задають деякий $p^* \in PLE$ (лема 4).

II. Нехай $\{p_i \mid i \in I\} \subseteq PLE$. З однозначності $\bigwedge \{p_i \mid i \in I\}$ випливає, що множини $(\bigwedge \{p_i \mid i \in I\})', l \in L$ не перетинаються. Те, що вони зростаючі доводиться аналогічно до I.

III. Нехай $p \subseteq PLE$. З однозначності $\neg p$ випливає, що множини $(\neg p)', l \in L$ не перетинаються. Покажемо, що вони зростаючі.

Нехай $d_1 \geq d_2, d_1, d_2 \in D$ та $d_2 \in (\neg p)', l \in L$. Доведемо, що $d_1 \in (\neg p)', l \in L$.

$d_2 \in (d \mid l = \sim(p(d)))$, тобто $l = \sim(p(d_2))$. Оскільки p - еквітонний і $d_1 \geq d_2$, то $p(d_1) = p(d_2)$. Звідки $l = \sim(p(d_1))$, а отже $d_1 \in (d \mid l = \sim(p(d)))$.

Таким чином множини $(\neg p)', l \in L$ задають деякий $p^* \in PLE$ (лема 4).

Означення 5. Алгебра $APLE(PLE, D, L) = \langle PLE, \vee, \wedge, \neg \rangle$ називається інфінітарною алгеброю L -значних еквітонних предикатів.

Саме алгебра $APLE(PLE, D, L)$ є центральним об'єктом дослідження у даній роботі.

СИСТЕМА ТВІРНИХ АЛГЕБРИ ЕКВІТОННИХ ПРЕДИКАТІВ

Для представлення класів предикатів звичайно використовують характеристичний предикат χ_d , що однозначно визначає елемент $d \in D$. У термінах областей істинності і хибності цей предикат задається наступними формулами: $\chi_d^T = \{d\}, \chi_d^F = D \setminus \{d\}$. Однак цей предикат не є еквітонним, якщо відношення передпорядку нетривіальне. Тому замість характеристичного предиката будемо використовувати його найкраще еквітонне наближення.

Означення 6. Еквіхарактеристичним предикатом елемента $d \in D$ називається предикат η_d , що задається в такий спосіб:

$$\eta_d^T = d^\nabla, \eta_d^F = d^\#.$$

Маючи еквіхарактеристичний предикат елемента, можна визначити еквіхарактеристичний предикат множини A .

Означення 7. Еквіхарактеристичним предикатом множини $A \subseteq D$ називається предикат $E(A)$, що задається формулою $E(A) = \bigvee \{\eta_a \mid a \in A\}$.

У роботі [14] досліджені властивості часткових булевих еквітонних предикатів PE , що відображають передупорядковану множину (множину із заданим рефлексивним і транзитивним бінарним відношенням $\leq$) даних $\langle D', \leq \rangle$ у множину булевих значень $Bool = \{True, False\}$ та побудована їх алгебра $APe(PE, D) = \langle PE, \vee', \wedge', \neg' \rangle$. У даному випадку покладемо $True = T = \sqcup(L)$, $False = F = \sqcap(L)$. Оскільки $T > F$, то така конкретизація є коректною. Множину даних D' ототожнимо з вказаною вище D , щоб області визначення предикатів з PE та PLE співпадали.

Лема 5. Інфінітарна алгебра булевих еквітонних предикатів $APe(PE, D)$ [14] ізоморфно вкладається в інфінітарну алгебру L -значних еквітонних предикатів $APLe(PE, D, L) = \langle PLE, \vee, \wedge, \neg \rangle$.

Доведення. З множини PLE виділимо підмножину PLE_1 наступним чином:

$$PLE_1 = \{p \mid p \in PLE, p: D \rightarrow \{T, F\}, \text{ де } T = \sqcup(L), F = \sqcap(L)\}$$

Визначимо бієктивне відображення $\varphi: PE \leftrightarrow PLE_1$:

$$(\forall p_b \in PE) \left(\varphi(p_b) = p : \begin{cases} p \in PLE, p(d) = \begin{cases} T, \text{ якщо } p_b(d) = True \\ F, \text{ якщо } p_b(d) = False \\ \uparrow, \text{ якщо } p_b(d) \uparrow \end{cases}, \forall d \in D \end{cases} \right).$$

Операціям $\vee', \wedge', \neg'$ з $APe(PE, D)$ ставимо у відповідність $\vee, \wedge, \neg$ з $APLe(PE, D, L)$. Неважко переконатися, що вказане відображення є ізоморфізмом PLE_1 та PE , а отже згадане ізоморфне вкладення має місце.

Лема 6. Нехай $A \subseteq D$. Тоді

$$E(A)^T = A^\vee, E(A)^F = A^\#, E(A)^I = \emptyset, I \in L \setminus \{T, F\}.$$

Доведення. $E(A)^T = (\bigvee_{a \in A} \eta_a)^T = \{d \mid T = \bigvee_{a \in A} \{\eta_a(d)\}\}$. Оскільки $\eta_a(d) \in \{T, F\}, d \in D, a \in A$, то за лемою 5

$$\begin{aligned} \{d \mid T = \bigvee_{a \in A} \{\eta_a(d)\}\} &= \{d \mid \exists a^* \in A : \eta_{a^*}(d) = T\} = \{d \mid \exists a^* \in A : d \in (a^*)^\vee\} = \\ &= \{d \mid d \in \bigcup_{a \in A} a^\vee\} = A^\vee. \end{aligned}$$

$$E(A)^F = (\bigvee_{a \in A} \eta_a)^F = \{d \mid F = \bigvee_{a \in A} \{\eta_a(d)\}\}. \text{ За лемою 5}$$

$$\begin{aligned} \{d \mid F = \bigvee_{a \in A} \{\eta_a(d)\}\} &= \{d \mid \forall a \in A : \eta_a(d) \downarrow = F\} = \{d \mid \forall a \in A : d \in a^\#\} = \\ &= \{d \mid d \in \bigcap_{a \in A} a^\#\} = A^\#. \end{aligned}$$

За лемою 5 $E(A)(d) = (\bigvee_{a \in A} \eta_a)(d) \in \{T, F\}$. Звідки $E(A)^I = \emptyset, I \notin \{T, F\}$.

Еквіхарактеристичний предикат $E(A)$ є найкращим еквітонним предикатом, що характеризує множину A своєю областю істинності. Введемо також еквіхарактеристичний предикат множини множин $\{A_l | l \in L\}, A_l \subseteq D$ такий, що A_l характеризується його областю l -значення.

Означення 8. Еквіхарактеристичним предикатом множини несумісних l -індексованих множин $\{A_l | l \in L\}, A_l \subseteq D$ називається предикат $NF(\{A_l | l \in L\})$, що задається наступним чином:

$$NF(\{A_l | l \in L\}) = \bigvee_{l \in L \setminus \{F\}} \{E(A_l) \wedge \bar{l}\} \vee (\bigwedge_{l \in L} \{\neg E(A_l)\} \wedge \perp)$$

Твердження 1.

$$\forall d \in D: (\bigwedge_{l \in L} \{\neg E(A_l)\} \wedge \perp)(d) \downarrow = F \text{ або } (\bigwedge_{l \in L} \{\neg E(A_l)\} \wedge \perp)(d) \uparrow$$

Доведення. За лемою 5 $(\bigwedge_{l \in L} \{\neg E(A_l)\} \wedge \perp)(d) \in \{T, F\}, \forall d \in D$. Припустимо

$\exists d^* \in D: (\bigwedge_{l \in L} \{\neg E(A_l)\} \wedge \perp)(d^*) = T$, тоді за лемою 5 $\perp(d^*) \downarrow = T$. Суперечність.

Твердження 2. Нехай $\{A_l | l \in L\}$ - множина l -індексованих підмножин D ($A_l \subseteq D$), причому $A_{l_1} \not\equiv A_{l_2}, l_1 \neq l_2$. Зафіксуємо деяке $d^* \in D$. Нехай $L_1 \subseteq L, L_1 \neq \emptyset: E(A_l)(d^*) \downarrow = T, \forall l \in L_1$. Тоді $|L_1| = 1$.

Доведення. Припустимо $|L_1| > 1$. Тоді $\exists l_1, l_2 \in L_1, l_1 \neq l_2: \begin{cases} E(A_{l_1})(d^*) \downarrow = T \\ E(A_{l_2})(d^*) \downarrow = T \end{cases}$

Звідки $\begin{cases} d^* \in A_{l_1}^\nabla \\ d^* \in A_{l_2}^\nabla \end{cases}$, тобто $A_{l_1}^\nabla \cap A_{l_2}^\nabla \neq \emptyset$ і $A_{l_1} \equiv A_{l_2}$. Супречить умові

$A_{l_1} \not\equiv A_{l_2}, l_1 \neq l_2$.

Лема 7. Нехай $\{A_l | l \in L\}$ - множина l -індексованих підмножин D ($A_l \subseteq D$), причому $A_{l_1} \not\equiv A_{l_2}, l_1 \neq l_2$. Тоді $NF(\{A_l | l \in L\})^I = A_l^\nabla, l \in L$.

Доведення.

$$NF(\{A_l | l \in L\})^{I^*} = (\bigvee_{l \in L \setminus \{F\}} \{E(A_l) \wedge \bar{l}\} \vee (\bigwedge_{l \in L} \{\neg E(A_l)\} \wedge \perp))^{I^*} =$$

$$\{d | (\bigvee_{l \in L \setminus \{F\}} \{E(A_l) \wedge \bar{l}\} \vee (\bigwedge_{l \in L} \{\neg E(A_l)\} \wedge \perp))(d) = I^*\} - \text{фіксуємо дане з цієї}$$

множини.

а) Розглянемо випадок $I^* \notin \{T, F\}$. Тоді $(E(A_l) \wedge \bar{l})(d) \downarrow, l \in L \setminus \{F\}$ і

$(\bigwedge_{l \in L} \{\neg E(A_l)\} \wedge \perp)(d) \downarrow$. Використовуючи твердження 1 маємо

$(\bigwedge_{l \in L} \{\neg E(A_l)\} \wedge \perp)(d) \downarrow = F$. Також $\exists L_1 \subseteq L \setminus \{F\} : (E(A_l) \wedge l)(d) \downarrow \neq F$. Це

еквівалентно $\exists L_1 \subseteq L \setminus \{F\} : (E(A_l) \wedge \bar{l})(d) \downarrow = \bar{l}$. Причому $L_1 \neq \emptyset$, оскільки в протилежному разі $\bigvee_{l \in L} \{(E(A_l) \wedge l)(d) \mid l \in L \setminus \{F\}\}, (\bigwedge_{l \in L} \{\neg E(A_l)\} \wedge \perp)(d) = F$.

Зауважемо: якщо $(E(A_l) \wedge \bar{l})(d) \downarrow = \bar{l}, l \in L$, то $E(A_l)(d) \downarrow = T$. Тобто

виконуються умови твердження 2, звідки маємо $\exists l' \in L : E(A_{l'})(d) \downarrow = T$.

Таким чином $\exists l' \in L : (E(A_{l'}) \wedge \bar{l'})(d) \downarrow = l'$. Решта $(E(A_l) \wedge \bar{l})(d) \downarrow = F, \forall l \in L \setminus \{l', F\}$. В результаті маємо: $l^* = \bigvee_{l \in L} \{(E(A_l) \wedge \bar{l})(d) \mid l \in L \setminus \{F\}\}, (\bigwedge_{l \in L} \{\neg E(A_l)\} \wedge \perp)(d) = l'$,

тобто $l^* = l'$ і $A_{l^*} = A_{l'}$, а оскільки $E(A_{l'})(d) \downarrow = T$, то $E(A_{l^*})(d) \downarrow = T$ і $d \in A_{l^*}^\nabla$.

b) Нехай $l^* = T$. Тоді за лемою 5 $\exists l' \in L \setminus \{F\} : (E(A_{l'}) \wedge \bar{l'})(d) = T$, а отже $E(A_{l'})(d) = T$ і $\bar{l'}(d) = T$. Тобто $d \in A_{l'}^\nabla$ і $l^* = l' = T$, а оскільки $d \in A_{l'}^\nabla$, то $d \in A_{l^*}^\nabla$.

c) Нехай $l^* = F$. Тоді за лемою 5 $\forall l \in L \setminus \{F\} (E(A_l) \wedge l)(d) \downarrow = F$ і $(\bigwedge_{l \in L} \{\neg E(A_l)\} \wedge \perp)(d) \downarrow = F$. Звідки $\forall l \in L \setminus \{F\} E(A_l)(d) \downarrow = F$ і $(\bigwedge_{l \in L} \{\neg E(A_l)\})(d) \downarrow = F$. Таким чином необхідно, щоб виконувалось $E(A_F)(d) \downarrow = T$, тобто $d \in A_F^\nabla$.

Тепер все підготовлено для того, щоб визначити будь-який еквітонний предикат за допомогою еквіхарактеристичних предикатів η_d і всюди невизначеного предиката $\perp$. Дійсно, будь-який еквітонний предикат однозначно характеризується зростаючими несумісними множинами $A_l \subseteq D, l \in L$ (лема 4), тому він задається формулою $NF(\{A_l \mid l \in L\})$ (лема 7). Ця формула побудована з (символів) всюди невизначеного предиката $\perp$, константних предикатів $\{\bar{l} \mid l \in L\}$ і квазіхарактеристичних предикатів η_d , де $d \in D$. Одержуємо наступне твердження.

Теорема 2. Множина предикатів $\{\perp\} \cup \{\eta_d \mid d \in D\} \cup \{\bar{l} \mid l \in L\}$ є системою твірних алгебри $APLE(PLE, D, L)$.

ЛІТЕРАТУРА

1. Никитченко Н.С., Шкильняк С.С. Неоклассические логики предикатов // Проблемы программирования. - 2000.- № 3-4.- С. 3 - 17.
2. Никитченко Н.С. Пропозициональные композиции частичных предикатов // Кибернетика и системный анализ.- 2000.- № 2.- С. 3-19.
3. Никитченко Н.С. Аппликативные композиции частичных предикатов // Кибернетика и системный анализ.- 2001.- № 2.- С. 14-33.
4. Никитченко Н.С. Предикатные композиционно-номинативные системы // Проблемы программирования.- 1999.- № 2.- С. 3-19.
5. Никитченко Н.С. Композиции программ, индуцирующих монотонные функции специального вида // Программирование.- 1987.- № 1.- С. 3-17.
6. Ryan M., Sadler M. Valuation Systems and Consequence Relations. In: Handbook of Logic in Computer Science / Eds. S.Abramsky, Dov. M. Gabbay, and T.S.E.Maibaum. - Oxford: Clarendon Press, vol 1, 1992. - P. 1- 79.
7. Davey B.A., Priestley H.A. Introduction in Lattices and Order. - Cambridge: Cambridge University Press, 1990. - 248 p.
8. Биркгоф Г. Теория решеток.- М.: Наука, 1984.- 568 с.
9. Кон П. Универсальные алгебры.- М.: Мир, 1968.- 351 с.
10. Клини С.К. Введение в метаматематику.- М.: Издательство иностранной литературы, 1957.- 526 с.
11. Нікітченко М.С. Алгебри еквітонних предикатів.

УДК 519.9

Вікторія.Н.Омардибірова*,

**Моделювання процесів
ціноутворення: оцінювання
параметрів та прогноз.
Серія: фізико-математичні
науки**

*Стаття присвячена оцінюванню параметрів зносу та волатильності. Розв'язана задача прогнозування для ціни акції в дискретній моделі.
Ключові слова: економічний броунівський рух, оцінювання, волатильність, прогноз.*

Victoria.N. Omardybirova*,

**Pricing processes modeling:
parameter estimation and
forecast.
Series: Physics & Mathematics**

*The article deals with the parameter estimation for volatility and trend. The solution of the forecasting problem for the price of the shares within discrete model is represented.
Key words: economic brownian motion, estimation, volatility, forecast.*

*E-mail: vika@ufgo.org

Стаття присвячена оцінюванню параметрів μ , σ : зносу та волатильності відповідно, - в моделі Самуельсона еволюції ціни $S(t)$ фінансового ресурсу, яка описується стохастичним диференціальним рівнянням

$$dS(t) = S(t)(\mu dt + \sigma dW(t)), \quad (1)$$

$S(0)=S_0$, розв'язком якого є процес $S(t)$:

$$S(t) = S_0 e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W(t)}, \quad (2)$$

що називається процесом економічного чи геометричного броунівського руху, $W(t)$ -вінерівський.

Крім задачі оцінювання для зазначеного процесу розглядається задача прогнозу, коли за спостереженнями (t_i, y_i) , $y_i=S(t_i)$, $i = \overline{1, n}$: $t_1 < \dots < t_n$ - треба спрогнозувати значення процесу $S(t)$ для одного чи декількох моментів часу більших за t_n .

Розв'язок задачі оцінювання детально розглядається за методом максимальної правдоподібності. Результати оцінювання за цим методом виявляються такими самими, що і за методом моментів.

Адекватність оцінювання перевірялася методом Монте-Карло.

І. Загальноприйнятим у моделюванні процесів ціноутворення на фінансовому ринку є моделі на основі дифузійних процесів. Перша спроба використання вінерівського процесу для моделювання процесу ціноутворення належить Л.Башельє (1902р.). Запропонована модель була адитивною за вінерівським процесом і мала вигляд: $S(t) = S_0 + \mu t + \sigma W(t)$, де S_0 - початкова вартість акції. Модель Л.Башельє виявилася неадекватною

модельованим процесам, тому що, як виявилось пізніше, модель адитивного за вінерівським процесом типу слушно застосовувати не до самого процесу $S(t)$, а до його логарифму. Згодом ідеї Л.Башельє були розвинуті П. Самуельсоном і втілилися 1965 року у поняття процесу економічного броунівського руху. Відправною точкою було зауваження, що опис процесу $S(t)$ за Л.Башельє не є цілком задовільним, тому що вінерів процес W_t може приймати які завгодно великі за абсолютною величиною від'ємні значення, тобто в деякі моменти часу S_t може бути від'ємною, що не узгоджується з економічним змістом S_t як вартості акцій. Економічний чи геометричний броунівський рух, запропонований Самуельсоном має вигляд (2).

Процес еволюції у часі ціни на акції ефективно описується стохастичним диференціальним рівнянням (1) чи, в еквівалентній формі

$$S(t) = x + \sigma \int_0^t S(\tau) dW(\tau) + \mu \int_0^t S(\tau) d\tau \quad (3)$$

де μ , σ -як і раніше, параметри моделі, які називаються відповідно коефіцієнтом зносу (росту) та волатильністю акцій

Моделі типу (3) є основою для побудови тих чи інших стратегій, зокрема – геджів, що є основою ринку вторинних гарантій, який бурхливо розвивається.

Важливим у рамках моделі типу (3) є знання параметрів відповідних процесів, а отже – задача оцінювання цих параметрів в тому чи іншому вигляді.

Точніше, під задачею оцінювання параметрів для моделі процесу (1) будемо розуміти задачу статистичної оцінки параметрів процесу за вибіркою його значень:

$$(t_1 y_1), \dots, (t_n y_n), \text{ де } y_i = S(t_i), i=1, \dots, n, \quad t_1 < t_{n+1} \quad (4)$$

Отже, за спостереженнями значень процесу треба для послідовних моментів часу $t_1 < t_2 < \dots < t_n$ оцінити μ та σ^2 .

II. Природнім методом оцінювання для марківського процесу є метод максимуму правдоподібності [2, стор.266]. Як відомо, в основі цього методу лежить функція правдоподібності L , яка є відповідно спільною щільністю спостережень $y_1, \dots, y_n$ на цих спостереженнях, чи логарифмом цієї щільності.

Функція правдоподібності, в силу марковості, для скінченновимірного розподілу записується через p – щільності імовірностей переходів для послідовних пар моментів часу:

$$L(t_1, \dots, t_n, y_1, \dots, y_n, \lambda) = p(t_1, x, y_1) p(t_2 - t_1, y_1, y_2) \dots p(t_n - t_{n-1}, y_{n-1}, y_n).$$

Щільність $p(t, x, y)$ для процесу $S(t)$ з початковим значенням $S(0) = x$, обчислюється безпосередньо і має вигляд:

$$p(t, x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \sqrt{\frac{x}{y^3}} \exp \left\{ -\frac{\ln^2 \frac{y}{x}}{2\sigma^2 t} - \frac{\sigma^2 t}{8} + \frac{\mu}{\sigma^2} \ln \frac{y}{x} + \left(\frac{\mu}{2} - \frac{\mu^2}{2\sigma^2} \right) t \right\}$$

Таким чином, функція правдоподібності набуває вигляду:

$$\begin{aligned} L(t_1, \dots, t_n, y_1, \dots, y_n) &= p(t_1, x, y_1) p(t_2 - t_1, y_1, y_2) \dots p(t_n - t_{n-1}, y_{n-1}, y_n) = \\ &= \frac{\sqrt{x}}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} \sigma^n \sqrt{t_1(t_2 - t_1) \dots (t_n - t_{n-1}) y_1 \dots y_{n-1} y_n^2}} \times \\ &\times \exp \left\{ -\frac{A}{2\sigma^2} \left(\frac{\ln^2 \frac{y_1}{x}}{t_1} + \dots + \frac{\ln^2 \frac{y_n}{y_{n-1}}}{t_n - t_{n-1}} \right) + \frac{\mu}{\sigma^2} \ln \frac{y}{x} + \left(\frac{\mu}{2} - \frac{\mu^2}{2\sigma^2} - \frac{\sigma^2}{8} \right) t_n \right\} = \\ &= \sqrt{\frac{x}{(2\pi)^n \sigma^n}} \exp \left\{ -\frac{B}{2\sigma^2} + \frac{\mu}{2\sigma^2} \ln^2 \frac{y_n}{x} + \left(\frac{\mu}{2} - \frac{\mu^2}{2\sigma^2} - \frac{\sigma^2}{8} \right) t_n \right\} \end{aligned}$$

$$\text{де } A = \frac{1}{\sqrt{t_1(t_2 - t_1) \dots (t_n - t_{n-1}) y_1 \dots y_{n-1} y_n^2}};$$

$$B = \frac{\ln^2 \frac{y_1}{x}}{t_1} + \dots + \frac{\ln^2 \frac{y_n}{y_{n-1}}}{t_n - t_{n-1}}.$$

Відзначимо, що для довільного $x > 0$ функція правдоподібності $L > 0$. Прологарифмувавши та продиференціювавши за значеннями μ та σ^2 та прирівнявши відповідні похідні до нуля, отримуємо наступний вигляд для системи рівнянь правдоподібності:

$$\begin{cases} -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{B}{2\sigma^4} - \frac{\mu}{\sigma^4} \ln \frac{y_n}{x} + \left(\frac{\mu^2}{2\sigma^4} - \frac{1}{8} \right) t_n = 0 \\ \frac{1}{\sigma^2} \ln \frac{y_n}{x} + \left(\frac{1}{2} - \frac{\mu}{\sigma^2} \right) t_n = 0 \end{cases}$$

Розв'язки $\hat{\mu}$, $\hat{\sigma}^2$ цієї системи щодо μ та σ^2 мають вигляд:

$$\begin{cases} \hat{\sigma}^2 = \frac{\ln^2 \frac{y_n}{x}}{n} = \frac{1}{n} \left(\frac{\ln^2 \frac{y_1}{x}}{t_1} + \frac{\ln^2 \frac{y_2}{y_1}}{t_2 - t_1} + \dots + \frac{\ln^2 \frac{y_n}{y_{n-1}}}{t_n - t_{n-1}} - \frac{\ln^2 \frac{y_n}{x}}{t_n} \right) \\ \hat{\mu} = \frac{\ln^2 \frac{y_n}{x}}{t_n} + \frac{\hat{\sigma}^2}{2} \end{cases}$$

Безпосередня перевірка показує, що оцінка волатильності $\hat{\sigma}^2$ та оцінка зносу $\hat{a}$ зміщені та конзистентні [2, стор.248].

III. Оцінити параметри μ та σ також можна за допомогою методу моментів[2,стор.275]. Детальне виконання для оцінювання параметрів за цим методом не приводиться, оскільки відповідні оцінки, співпадають з оцінками, отриманими за методом максимальної правдоподібності.

IV. Адекватність оцінювання перевірялася методом Монте-Карло. Для цього була розроблена процедура імітації процесу $S(t)$ для дискретного набору моментів часу $t_1 < t_2 < \dots < t_n$ за заданими значеннями параметрів μ , σ^2 . Для чого у відповідність до цієї процедури вектор значень процесу представлявся у вигляді:

$$S(t_1) = x \exp \left\{ \sigma W(t_1) + \left(a - \frac{\sigma^2}{2} \right) t_1 \right\}$$

$$S(t_2) = S(t_1) \exp \left\{ \sigma \tilde{W}(t_2 - t_1) + \left(a - \frac{\sigma^2}{2} \right) (t_2 - t_1) \right\}$$

$$S(t_n) = S(t_{n-1}) \exp \left\{ \sigma \tilde{W}(t_n - t_{n-1}) + \left(a - \frac{\sigma^2}{2} \right) (t_n - t_{n-1}) \right\}$$

де $W(t)$, $\tilde{W}(t_2 - t_1)$, ..., $\tilde{W}(t_n - t_{n-1})$ – незалежні між собою випадкові величини, розподілені так само, як вінерівський процес з тими самими значеннями часу.

Результати чисельних експериментів показали, що існує оптимальний інтервал значень, де параметри μ , σ та $\hat{\mu}$, $\hat{\sigma}$ майже співпадають.

V. Прогнозування ціни у майбутній момент часу стає можливим за наявності побудованої та перевіреної на адекватність математичної моделі процесу ціноутворення відповідного фінансового ресурсу, зокрема, на основі дифузійних процесів, що розглянуті вище. Для розв'язання задачі прогнозу ціни акції можна використати теорему про нормальну кореляцію [3,стор.323] $\hat{\theta} = M_{\xi} + \text{cov}_{\xi\zeta} \cdot \text{cov}_{\xi\xi}^{-1} \cdot (\xi - M_{\xi})$.

Задача прогнозу для $S(t_{n+1})$ чи для вектору $S(t_{n+1}), \dots, S(t_{n+p})$, де $t_n < t_{n+1} < \dots < t_{n+p}$ здійснюється із зрозумілих причин через прогноз $\ln S(t_n)$:

$$\hat{S}(t_{n+1}) = e^{\ln \hat{S}(t_n)}$$

Позначимо $\ln S(t_k)$ через $\xi(t_k)$, $k = 1, \dots, n+p$ та частину $(\xi(t_1), \dots, \xi(t_n))^T$ цього вектора через ξ^T , а $(\xi(t_{n+1}), \dots, \xi(t_{n+p}))^T$ через θ . Безпосередніми підрахунками встановлюємо параметри спільного гаусівського вектору $(\xi(t_1), \dots, \xi(t_{n+p}))^T = (\xi^T, \theta^T)^T$:

Прогноз на один крок: $p=1$;

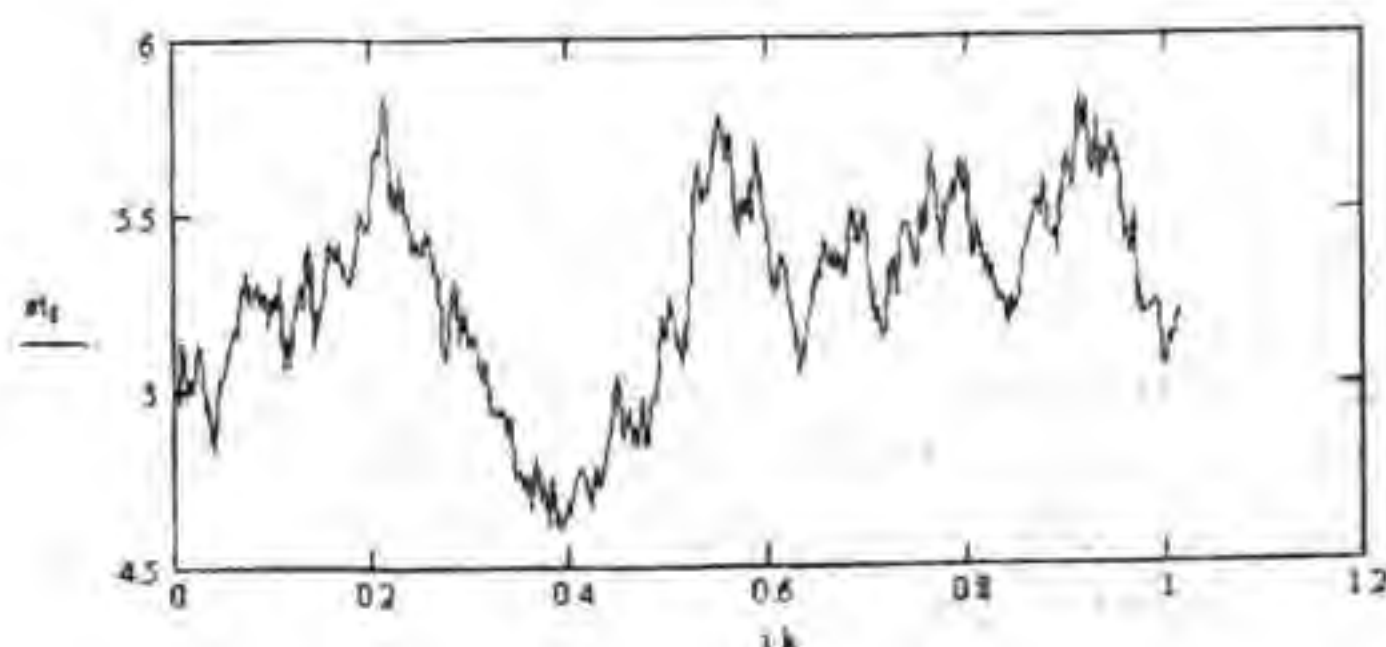


Рис.2. Імітація процесу економічного броунівського руху: знос $\mu=0,08369337$ та волатильність $\sigma^2=0,27779577$. Оцінка волатильності $\hat{\sigma}^2=0,268$, оцінка зносу $\hat{\mu}=0,08$).



Рис.3. Прогноз на один крок (штрих-пунктирною лінією).



Рис.4. Прогноз на один крок у збільшеному масштабі.

Література

1. Гіхман, А.В. Скороход Стохастические дифференциальные уравнения, наукова думка, К.1968. 354с.
2. Айвазян С.А., Енюков И.С., Мешалкин Л.Д. Основы моделирования и первичная обработка данных, М.1983, Финансы и статистика, 470 с.
3. Ширяев А.Н. Вероятность. - М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1980, 678 с.

УДК 519.8

Юрій К. Подлипенко,*
Олег Л. Лєвошич

**Мінімаксне оцінювання
невідомих правих частин
граничних умов в еліптичних
крайових задачах**

Доведені теореми про загальний вигляд мінімаксних оцінок значень функціоналів від правих частин граничних умов, що входять в постановку крайових задач для лінійних еліптичних рівнянь другого порядку.

Ключові слова: мінімаксні оцінки, спостереження, функціонали від правих частин граничних умов.

Yuri K. Podlipenko,*
Oleg L. Levoshych

Minimax estimation of unknown right-hand sides of boundary conditions for elliptic equations

The theorems on a general form of minimax estimates of values of functionals from right-hand sides of boundary conditions entering to the statement of boundary value problems for the linear second order elliptic equations are proved.

Key words: minimax estimates, observations, functionals from right-hand sides.

*E-mail: yourip@mail.ru

Дана стаття є продовженням роботи [1]. При цьому зберігаються всі позначення, що прийняті в [1]. Посилання вигляду (1.1) буде всюди надалі означати посилання на формулу (1) із роботи [1].

Далі, в припущенні, що виконуються умови (1.14), за результатами спостережень (1.5) – (1.7) розв'язку крайової задачі (1.2) – (1.4) будуть одержані мінімаксні оцінки значень лінійних функціоналів

$$l(h) = \int_{\Gamma} l_0(x)h(x) d\Gamma \quad (1)$$

від невідомої правої частини h граничної умови (1.4). Тут $l_0 \in L^2(\Gamma)$ – задана функція.

Визначимо на розв'язках задачі Неймана (1.2') – (1.4') функціонали вигляду

$$\widetilde{l(\tilde{\varphi})} := \sum_{i=1}^N \int_{\gamma_i} \left(u_i^{(1)}(x) y_i^{(1)}(\tilde{\varphi}, \tilde{\eta}_i^{(1)}; x) + u_i^{(2)}(x) y_i^{(2)}(\tilde{\varphi}, \tilde{\eta}_i^{(2)}; x) \right),$$

де $u_i^{(1)}, u_i^{(2)} \in L^2(\gamma_i)$, $i = \overline{1, N}$, $c \in \mathbb{R}^1$. Позначимо через

$$\widetilde{\widetilde{l(\varphi)}} = \sum_{i=1}^N \int_{\gamma_i} \left(\hat{u}_i^{(1)}(x) y_i^{(1)}(\varphi, \eta_i^{(1)}; x) + \hat{u}_i^{(2)}(x) y_i^{(2)}(\varphi, \eta_i^{(2)}; x) \right) d\gamma_i + \hat{c}$$

функціонал, для якого функції $\hat{u}_i^{(1)}(x)$, $\hat{u}_i^{(2)}(x)$ і константа $\hat{c}$ визначаються із умови

$$\inf_{\substack{u_i^{(1)}, u_i^{(2)} \in L^2(\gamma_i), \\ i=\overline{1, N}, c \in \mathbb{R}^1}} \sup_{\tilde{F} \in G_0, \tilde{\eta} \in G_1} M[l(\tilde{h}) - \widetilde{l(\tilde{\varphi})}]^2 = \sup_{\tilde{F} \in G_0, \tilde{\eta} \in G_1} M[l(\tilde{h}) - \widetilde{\widetilde{l(\tilde{\varphi})}}]^2 =: \sigma.$$

Вираз

$$\widetilde{\widetilde{l(h)}} := \widetilde{\widetilde{l(\varphi)}}$$

назвемо мінімаксною оцінкою значення функціоналу (1) від правої частини граничної умови (1.3), а величину

$$\sigma(h) := \{M[l(h) - \widetilde{\widetilde{l(h)}}]^2\}^{1/2}$$

назвемо похибкою мінімаксного оцінювання.

Очевидно, що

$$\sigma(h) \leq \sigma = \left\{ \sup_{\tilde{F} \in G_0, \tilde{\eta} \in G_1} M[l(\tilde{h}) - \widetilde{\widetilde{l(\tilde{\varphi})}}]^2 \right\}^{1/2}.$$

Використовуючи методи, розроблені в роботах [1] – [3], можна пересвідчитись у справедливості наступних тверджень.

Теорема 1. *Мінімаксна оцінка функціоналу $l(h)$ має вигляд*

$$\begin{aligned} \widetilde{\widetilde{l(h)}} = & \sum_{i=1}^N \int_{\gamma_i} \left(\hat{u}_i^{(1)}(x) y_i^{(1)}(\varphi, \eta_i^{(1)}; x) + \hat{u}_i^{(2)}(x) y_i^{(2)}(\varphi, \eta_i^{(2)}; x) \right) d\gamma_i + \\ & + \sum_{j=1}^{N_1} \int_{\Gamma_j} \hat{u}_j(x) y_j(\varphi, \eta_j; x) d\Gamma_j + \hat{c}, \end{aligned}$$

де $\hat{c} = 0$,

$$\begin{aligned} \hat{u}_i^{(1)}(x) &= (r_i^{(1)}(x))^2 \int_{\gamma_i} \left[K_i^{(1,1)}(x, \xi) p(\xi) + K_i^{(1,2)}(x, \xi) \frac{\partial p(\xi)}{\partial \nu_A} \right] d\gamma_{i\xi}, \\ \hat{u}_i^{(2)}(x) &= (r_i^{(2)}(x))^2 \int_{\gamma_i} \left[K_i^{(2,1)}(x, \xi) p(\xi) + K_i^{(2,2)}(x, \xi) \frac{\partial p(\xi)}{\partial \nu_A} \right] d\gamma_{i\xi}, \quad i = \overline{1, N}, \end{aligned} \quad (2)$$

$$\hat{u}_j(x) = r_j^2(x) \int_{\Gamma_j} K_j(x, \xi) p(\xi) d\Gamma_{j\xi} \quad j = \overline{1, N_1}, \quad (3)$$

а функція $p(x)$ знаходиться із розв'язку задачі

$$z \in H^1(\Omega', A^*), \quad (4)$$

$$A^* z(x) = 0 \quad \text{в} \quad \Omega', \quad (5)$$

$$\frac{\partial z(x)}{\partial \nu_{A^*}} = - \int_{\Gamma_j} K_j(\xi, x) \hat{u}_j(\xi) d\Gamma_{j\xi} \quad \text{на } \Gamma_j, \quad j = \overline{1, N_1},$$

$$\frac{\partial z(x)}{\partial \nu_{A^*}} = 0 \quad \text{на } \Gamma \setminus \left(\bigcup_{j=1}^{N_1} \Gamma_j \right), \quad (6)$$

$$[z(x)]_{\gamma_i} = \int_{\gamma_i} \left[K_i^{(1,2)}(\xi, x) \hat{u}_i^{(1)}(\xi) + K_i^{(2,2)}(\xi, x) \hat{u}_i^{(2)}(\xi) \right] d\gamma_{i\xi},$$

$$\left[\frac{\partial z(x)}{\partial \nu_{A^*}} \right]_{\gamma_i} = - \int_{\gamma_i} \left[K_i^{(1,1)}(\xi, x) \hat{u}_i^{(1)}(\xi) + K_i^{(2,1)}(\xi, x) \hat{u}_i^{(2)}(\xi) \right] d\gamma_{i\xi} \quad \text{на } \gamma_i, \quad i = \overline{1, N}, \quad (7)$$

$$p \in H^1(\Omega', A), \quad (8)$$

$$Ap(x) = q^{-2}(x)z(x) \quad \text{в } \Omega', \quad (9)$$

$$\frac{\partial p}{\partial \nu_A} = q_1^{-2}(z + l_0) \quad \text{на } \Gamma, \quad (10)$$

$$[p]_{\gamma_i} = 0, \quad \left[\frac{\partial p}{\partial \nu_A} \right]_{\gamma_i} = 0, \quad i = \overline{1, N}, \quad (11)$$

де $[z(x)]_{\gamma_i}$, $\left[\frac{\partial z(x)}{\partial \nu_A} \right]_{\gamma_i}$, $[p(x)]_{\gamma_i}$ і $\left[\frac{\partial p(x)}{\partial \nu_A} \right]_{\gamma_i}$ мають той же смисл, як і в теоремі 1 із роботи [1], а рівності (5) – (7) та (9) – (11) слід розуміти як рівності елементів із просторів $L^2(\Omega')$, $H^{-1/2}(\Gamma)$, $H_{00}^{1/2}(\gamma_i)$, $H^{-1/2}(\gamma_i)$ та $L^2(\Omega')$, $L^2(\Gamma)$, $L^2(\gamma_i)$, $i = \overline{1, N}$, відповідно і в співвідношеннях (2) через $p(y)$ і $\frac{\partial p(y)}{\partial \nu_A}$ позначені спільні значення слідів функції p і граничних значень її конормальних похідних на різних сторонах поверхонь γ_i , $p(x)|_{\gamma_i}$, $\frac{\partial p(x)}{\partial \nu_A}|_{\gamma_i} \in L^2(\gamma_i)$. Задача (4) – (11) однозначно розв'язна.

Потім мінімаксного оцінювання $\sigma(h)$ значення функціоналу $l(h)$ задовольняє нерівність

$$\sigma(h) \leq \left[\int_{\Gamma} l_0(x) q_1(x) [l_0(x) + z(x)] d\Gamma \right]^{1/2}.$$

Зауваження. Якщо в рівняннях (1) і (7) замінити функції $\hat{u}_j(x)$, $j = \overline{1, N_1}$, і $\hat{u}_i^{(1)}(x)$, $\hat{u}_i^{(2)}(x)$, $i = \overline{1, N}$, на їх вирази в правих частинах (3) і (2), то ці функції можна виключити з системи рівнянь (4) – (11).

Альтернативне представлення для мінімаксної оцінки через розв'язок системи інтегро-диференціальних рівнянь спеціального вигляду знайдено в поданій нижче теоремі. Цей розв'язок не залежить від конкретного вигляду функціоналу (1).

Теорема 2. Мінімаксна оцінка виразу (1) має вигляд

$$\widehat{l(\hat{h})} = l(\hat{h}) = \int_{\Omega'} l_0(x) \hat{h}(x) d\Gamma, \quad (12)$$

де $\hat{h}(x) = q_1^{-2}(x) \hat{p}(x)|_{\Gamma}$, а функція $p(x)$ визначається із розв'язку задачі (1.31)-(1.38).

Відзначимо, що результати, отримані в роботі, можуть знайти використання при розв'язанні деяких обернених задач математичної фізики.

Література

1. Подлипенко Ю.К., Ковалюк А., Левощич О.Л. Оптимальне оцінювання розв'язків еліптичних рівнянь в умовах невизначеності. // Вісник Київського університету – 2005. – №1.

2. Ковалюк А., Наконечный А.Г., Подлипенко Ю.К. Минимаксное оценивание решений краевых задач Неймана для эллиптических уравнений в условиях неопределенности. // Проблемы управления и информатики. №6, 2001, с.77-95.

3. Подлипенко Ю.К., Грищук Н.В. Минимаксное оценивание решений вырожденных краевых задач Неймана для эллиптических уравнений по наблюдениям, распределенным на системе поверхностей. // Системні дослідження і інформаційні технології. – 2004. – №2 с. 104 – 128.

Надійшла до редакції 12.11.2004

УДК [311:316](075.8)

Михайло П. Семесенко, Олександр
О. Тимашов¹

**Задача вибору моделі вимірів в
інформаційно-керуючих
системах.**

*У статті розглядається
постановка задачі оцінювання процесу
спостереження і вибору моделі вимірів в
інформаційно-керуючих системах.*

*Ключові слова: динамічні системи
управління, стохастичні процеси
системи, канали вимірів.*

Myhaylo P. Semesenko, Olexandr
O. Tymashov¹

**Problem of selection of model of
measurements in the ICS.**

*In the article the formulation of
estimation of process of observation and
selection of model of measurements in a
Information Control Systems is esteemed*

*Key words: Dynamic systems,
equilibrium processes, channels of
measurements.*

¹E-mail: alex_timashov@mail.ru

При проектуванні математичного забезпечення систем керування вимірювальними комплексами важливим питанням є вибір ефективних алгоритмів обробки вимірів і керування вимірювальною апаратурою комплексу.

Ця задача ускладнюється у випадку, коли процес обробки інформації ведеться в реальному масштабі часу, а джерела інформації розподілені в просторі і сигнал є функцією, що залежить від часу і числа об'єктів, які спостерігаються. По результатам спостережень будуються наближення функцій виміру параметрів, прогнозуються значення параметрів, знаходяться коефіцієнти заздалегідь відомого виду функцій зміни параметрів і т.п. При обробці результатів спостережень природно виникає питання, з яким дискретом за часом необхідно забезпечувати попит вимірювальної апаратури комплексу і яка кількість попередніх спостережень треба враховувати для оптимального рішення зазначених вище задач.

У сучасній теорії керування важливе місце займає питання оцінювання стану досліджуваного об'єкта керування по деякій інформації, одержуваної в результаті спостережень за процесом функціонування реального об'єкта, причому потрібно одержати ефективні оцінки згідно обраного критерію якості оцінок.

Нехай досліджуємо деяку динамічну систему, стан якої являє собою n -мірний стохастичний процес $\bar{x}(s)$, $S \in [t_0, t]$, описуваний стохастичним диференціальним рівнянням виду

$$\dot{\bar{x}}(t) = \bar{f}(\bar{x}(t), \bar{u}(t), \bar{\xi}(t), t), \quad t \geq t_0, \quad \bar{x}(t_0) = \bar{x}_0,$$

де $\bar{\xi}(t)$ - p -мірний вектор збурювань, $\bar{u}(t)$ - r -мірний вектор керування, $\bar{f}(\cdot)$ - n -мірна векторна функція зазначених аргументів. Припустимо також, що $\bar{\eta}(t)$ - m -мірний вектор спостережень, одержуваний на виході вимірювально-перетворюючого пристрою й описується функціональним рівнянням

$$\bar{\eta}(t) = \bar{g}(\bar{x}(t), \bar{\theta}(t), t),$$

де $\bar{g}(\cdot)$ - m -мірна векторна функція своїх аргументів, $\bar{\theta}(t)$ - m -мірний вектор помилок спостережень (перешкода).

Позначимо через H_t безліч значень стохастичного процесу $\bar{\eta}(t)$, тобто

$$H_t = \{\bar{\eta}(S), S \in [t_0, t]\}.$$

Потрібно визначити значення $\bar{x}(\tau)$ для кожного заданого $\tau \geq t_0$, якщо в силу присутності перешкод стан $\bar{x}(t)$ недоступний безпосередньому вимірові, тобто знайти оцінку $\hat{\bar{x}}(\tau/t)$ стану системи $\bar{x}(t)$ для кожного $\tau \geq t_0$ як деяку функцію спостережень $\hat{\bar{x}}(\tau/t) = F(H_t)$. Таким чином, задача оцінки стану є задача визначення оператора F , оптимального в деякому змісті.

Якщо $\tau < t$, то сформульовану задачу називають задачею згладжування (або інтерполяцією), якщо $\tau = t$, - маємо задачу фільтрації, а якщо $\tau > t$, - задачу прогнозування. Звичайно, у всіх цих задачах важливо досліджувати величину помилки оцінювання $\tilde{\bar{x}}(\tau/t) = \bar{x}(t) - \hat{\bar{x}}(\tau/t)$, що у літературі називають оновлюючим процесом [2].

У найкращому випадку оцінювання $\hat{\bar{x}}(\tau/t)$ і всіх оцінок є точними. Якщо ж $\tilde{\bar{x}}(\tau/t) \neq 0$, що практично має місце, то потрібно брати деяку обґрунтовану міру близькості або функцію втрат [2]. Надалі як критерій оптимальності будемо використовувати умову

$$E\left\{\|\bar{x}(t) - \bar{y}(t)\|^2 / H_t\right\} \Rightarrow \min_{\bar{y}}.$$

Відомо, [1] що оптимальною оцінкою в цьому випадку буде умовне математичне чекання $\hat{\bar{x}}(\tau/t) = E\{\bar{x}(t) / H_t\}$, що у загальному випадку використовувати неможливо.

Математичну модель процесу вимірів (іспитів), що піддається оптимальній обробці, представимо у виді МАС типу

$$\eta(t) = A(t)\xi(t) + \varphi(t) \quad (1)$$

Тут $A(t)$, $\xi(t)$, $\varphi(t)$ - стохастичні незалежні випадкові стаціонарні в широкому змісті процеси з кореляційними функціями, математичними чеканнями і дисперсіями $B_A(\tau)$, $B_\xi(\tau)$, $B_\varphi(\tau)$, m_A , m_ξ , m_φ , σ_A^2 , σ_ξ^2 , σ_φ^2 .

Виразення (1) - це більш широкий клас процесів, що спостерігаються, у порівнянні з використовуваними адитивними або мультиплікативними процесами. Крім того, воно дає більш широкий клас процесів для рівнянь каналу спостереження при рішенні задачі оцінювання стану динамічних систем методом Стратоновича-Калмана-Бьюсі, що

представляється як $\eta(t) = c(t)x(t) + \varphi(t)$, де $c(t)$ – задана детермінована функція, $x(t)$, $\varphi(t)$ – стохастичні процеси.

Розглянемо загальну модель процесу, що спостерігається, у якій усі складові носять стохастичний характер:

$$\eta_{\alpha}(t) = [(1 - \alpha)C_0(t) + \alpha C_1(t)\xi(t)]x(t) + \varphi(t); \quad 0 \leq \alpha \leq 1$$

При цьому $C_0(t)$, $C_1(t)$ – детерміновані матриці розмірності $m \times 1$, відповідно,

$\xi(t)$ – стохастична матриця розмірності $1 \times n$;

$x(t)$ – стохастичний вектор-стовпець розмірності $n \times 1$;

$\eta_{\alpha}(t)$, $\varphi(t)$ – стохастичні вектори-стовпці розмірності $m \times 1$, причому щодо процесів $\xi(t)$, $x(t)$ і $\varphi(t)$ справедливі деякі пропозиції стохастичного характеру: стаціонарність процесів, що спостерігаємо, у широкому змісті, наявність моментів до другого порядку включно і т.п.

Очевидно, що вираження $\eta_0(t) = C_0(t)x(t) + \varphi(t)$ дає калмановську модель спостережень, а у випадку представлення $\eta_{1/2}(t) = 0,5[C_0(t) + C_1(t)\xi(t)]x(t) + \varphi(t)$ маємо нестационарний процес при стохастичній структурі каналу вимірів. Якщо процес представити як $\eta_1(t) = C_1(t)\xi(t)x(t) + \varphi(t)$, одержимо модель переривчастих спостережень. Для оцінки цих моделей необхідно визначити міру впливу самої мультиплікативної складовій, кінцівки інтервалу спостереження, кроку попередження на якість рішення задачі фільтрації і прогнозування реальних процесів.

При використанні зазначеної моделі процесу, що спостерігається, як оцінки при квадратичному критерії оптимальності, візьмемо функцію

$$\hat{\bar{x}}(t, \Delta) = \int_0^T h(\tau) \eta_{\alpha}(t + \Delta - \tau) d\tau, \quad t \geq 0, \Delta \geq 0,$$

де $h(\tau)$ – матрична вагова функція розмірності $n \times m$; $[0, T]$ – інтервал спостереження, Δ – крок попередження.

Для дослідження мультиплікативного компонента на точність оцінок розглянемо моделі процесу, що спостерігається, у скалярній формі:

$$\eta_0(t) = C_0(t)x(t) + \varphi(t) \quad (2)$$

і

$$\eta(t) = [C_0(t) + \xi(t)]x(t) + \varphi(t) \quad (3)$$

Виразення (2) – калмановська модель, а (3) – модель типу МАСП, причому

$$\eta(t) = \eta_0 + \xi(t)x(t) \quad (4)$$

Нехай для зручності стохастичний процес $\xi(t)$ має нульове середнє, тобто $m_{\xi} = 0$. З огляду на функцію $\hat{\bar{x}}(t, \Delta)$ і моделі (2), визначимо дисперсію помилки незміщеної оцінки

$$\sigma^2(h, t, \Delta, T) = K_x(0) - 2 \int_0^T B(t, \Delta, \tau) h(\tau) d\tau + \int_0^T \int_0^T D(t, \Delta, \tau, S) h(S) d\tau dS$$

Тут для складових характерно

$$\begin{aligned} B(t, \Delta, \tau) &= B_0(t, \Delta, \tau) = E \{ h_0(t + \Delta - \tau) x(t + \Delta) \} = C_0(t + \Delta - \tau) K_x(\tau) + m_0 m_x; \\ D(t, \Delta, \tau, S) &= D_0(t, \tau, \Delta, S) + R_\xi(\tau - S) K_x(\tau - S); \\ D_0(t, \Delta, \tau, S) &= E \{ \eta_0(t + \Delta - \tau) \eta_0(t + \Delta - S) \}. \end{aligned}$$

Таким чином

$$\begin{aligned} \sigma^2(h; t, \Delta, T) &= K_x(0) - 2 \int_0^T B_0(t, \Delta, \tau) h(\tau) d\tau + \int_0^T \int_0^T [D_0(t, \Delta, \tau, S) + R_\xi(\tau - S) K_x(\tau - S)] h(\tau) h(S) d\tau dS = \\ &= \sigma_0^2(h; t, \Delta, T) + \int_0^T \int_0^T h(\tau) h(S) R_\xi(\tau - S) K_x(\tau - S) d\tau dS = \sigma_0^2(h; t, \Delta, T) + E \left[\int_0^T h(\tau) \xi(\tau) x(\tau) d\tau \right]^2 \end{aligned} \quad (5)$$

де $\sigma_0^2(h; t, \Delta, T)$ - дисперсія помилки оцінки для моделі без урахування мультиплікативної складової.

З формули (5) випливає, що

$$\sigma^2(h; t, \Delta, T) \geq \sigma_0^2(h; t, \Delta, T) \quad (6)$$

тобто не уточнений вплив мультиплікативної складової при її наявності приводить до росту дисперсії помилки оцінки на величину $E \left[\int_0^T h(\tau) \xi(\tau) x(\tau) d\tau \right]^2$.

Застосовуючи умови оптимальності для випадків моделей (2) і у формі

$$\int_0^T D_0(t, \Delta, \tau, S) \bar{h}(S) dS = B_0(t, \Delta, \tau), \tau \in [0, T], \quad t, \Delta \geq 0 \quad \text{і} \quad \int_0^T D(t, \Delta, \tau, S) \bar{h}(S) dS = B(t, \Delta, \tau), \tau \in [0, T], \quad t, \Delta \geq 0, \quad \text{одержимо:}$$

$$\sigma_{\min}^2(\bar{h}; t, \Delta, T) = \sigma_{0, \min}^2(\bar{h}; t, \Delta, T) - \int_0^T \int_0^T \bar{h}(\tau) \bar{h}(S) R_\xi(\tau - S) K_x(\tau - S) d\tau dS \quad (7)$$

тобто $\sigma_{\min}^2(\cdot) \leq \sigma_{0, \min}^2(\cdot)$. Остання нерівність показує, що при обліку мультиплікативної складової точність одержуваних оцінок вище, ніж у калмановської моделі спостереження (4).

Відзначимо, що формули (5) і (7) встановлюють і залежність дисперсії помилки оцінки від інтервалу спостереження T і кроку пророкування Δ (3). Додаткові складові, які входять в оцінки, записуються так:

$$f(t) = \int_0^t \int_0^t h(\tau) h(S) R_\xi(\tau - S) K_x(\tau - S) d\tau dS;$$

$$\bar{f}(T) = \int_0^T \int_0^T \bar{h}(\tau) \bar{h}(S) R_\xi(\tau - S) K_x(\tau - S) d\tau dS.$$

Вони мають властивості:

1) $f(T), \bar{f}(T) \geq 0$;

$$2) \hat{f}(T) \leq \sigma_{0,\min}(\cdot, T) \forall T;$$

3) $f(T)$ і $\hat{f}(T)$ - монотонно зростаючі функції, тому що при $\text{sign } h(T) = \text{sign } R(T)$.

Тут $R(T) = \int_0^T h(\tau) R_{\xi_x}(T - \tau) d\tau$ - вихід деякої системи з імпульсною перехідною

функцією $h(\tau)$ і входом $R_{\xi_x}(T - \tau) \stackrel{\Delta}{=} R_{\xi}(T - \tau) R_x(T - \tau)$, а функція $f(T)$ - зростаюча для будь-якого T .

Якщо T_1 - корінь рівняння $h(T) = 0$ і $\text{sign } h(T) \neq \text{sign } R(T)$, то функція $f(T)$ досягає максимуму в точці T_1 , якщо ж T_1 - двохкратний корінь рівняння $h(T) = 0$, точка T_1 є точкою перегину функції $f(T)$.

Отже, у функції $f(T)$ при виборі інтервалу спостереження T залишаються в силі властивості (1-3).

Таким чином, побудова оптимальних лінійних фільтрів для оцінювання процесів, відрізняються від $\eta(t) = A(t)\bar{x}(t) + \theta(t)$, де $A(t)$ - детермінована матриця вимірів, а вектор-перешкода $\bar{\theta}(t)$ враховується тільки адитивно. Канал вимірів у системах керування описується більш загальною моделлю мультиплікативно-адитивної суміші

$$\eta_{\alpha}(t) = A_{\alpha}(t)\bar{x}(t) + \varphi(t);$$

$$A_{\alpha}(t) = (1 - \alpha)C_0(t) + \alpha_1 C_1(t)\xi(t).$$

Тут $\xi(t)$ - стохастична матриця розмірності $1 \times n$; $C_0(t), C_1(t)$ - детерміновані матриці розмірності $m \times n$ і $m \times 1$, відповідно; $\bar{x}(t) \in R_n$ - стохастичний процес; $\varphi(t) \in R_m$ - стохастичний вектор-перешкода; $0 \leq \alpha \leq 1$.

Значить для значень $\alpha = 0$ має калмановську модель вимірів; якщо $\alpha = 0,5$, одержуємо клас нестационарних процесів зі стохастичною структурою каналу вимірів; при $\alpha = 1$ знаходимо модель каналу вимірювань із перериванням спостережень по деякому ймовірносному закону.

Таким чином одержана загальна модель виміру і спостереження експериментально отриманих реалізацій у виді мультиплікативно-адитивних стохастичних випадкових процесів, яку можливо використовувати для побудови оптимальних фільтрів і побудови рівнянь оптимальності.

Література.

1. Бююль Ахим, Цефель Петер Искусство обработки информации. Анализ статистических данных и восстановление скрытых закономерностей. Пер. с нем. -СПб., 2001
2. Липцер Р.Ш., Ширяев А.Н. Статистика случайных процессов. Нелинейная фильтрация и смежные вопросы, М, Наука, 1974, 696 с.

Надійшла до редакції 19.02.2005

УДК 681.3 06

Василь М. Терещенко,
Євгеній О. Чернишов

Автоматичний аналіз властивостей програмного коду на прикладі розв'язання задач обчислювальної геометрії.

Дана робота присвячена розробці та побудові комплексу інструментальних засобів для дослідження та аналізу користувацьких програм, визначенню основних характеристик ефективності та коректності їх виконання.

Ключові слова: задача, програма, код, компілятор.

Vasyl M. Tereshenko,
Eugene A. Chernyshov

The program code automatic analysis for computation geometry solutions tasks as the example.

This work observes the development process of instruments for research and analysis user programs, determining speed properties and proofing.

Key Words: task, program, code, compiler.

У даній роботі розглядаються проблеми розробки та побудови комплексу інструментальних засобів для дослідження та аналізу користувацьких програм, визначенню основних характеристик ефективності та коректності їх виконання. На прикладі перевірки написання та виконання лабораторних робіт студентами з курсу "Обчислювальна геометрія та комп'ютерна графіка" вивчалися питання обчислювальної та ємнісної складності алгоритмів та їх програмної реалізації, а також питання класифікації використаних алгоритмів.

Особливістю задач, які розглядаються є те, що задачі обчислювальної геометрії маніпулюють складними геометричними об'єктами, які представляються у вигляді складних структур даних (списків, стеків, черг, дерев та ін.). Окрім того, виконання лабораторних робіт не обмежується якимось одним програмним середовищем. Тому, зважаючи на вище зазначене, поставлена задача являється не простою для розв'язання.

Метою роботи є спрощення процесу написання та перевірки лабораторних робіт студентів, тим самим поліпшити якість розуміння вивченого матеріалу.

Для розв'язання поставленої задачі розроблено комплекс інструментальних засобів, основними елементами якого є різнофункціональні компілятори. Структура розробленого комплексу подана на схемі, рис 1. Розглянемо основні компоненти структури:

Декомпозиція(можливі шляхи вирішення)

A. Розробка оболонки.

B. Використання готового компілятора деякої мови програмування, його середовища розробки, візуальних засобів, відладчика. Переваги: звичний

для програміста стиль розробки, відсутність додаткового пристосування та навчання. Вихідні дані: текст програми.



Рисунок 1

C. Написання власної оболонки у вигляді редактора композицій чи блок-схем абстрактних алгебраїчних понять. Переваги: простота та зрозумілість запису алгоритму, незалежність від мови програмування та апаратного забезпечення.

D. Інструмент генерує код, який володіє властивостями аналізу.

E. Інструмент аналізує структуру алгоритмів, виконує аналіз та генерує простий за структурою програмний код.

F. Вихідний програмний код компілюється стороннім компілятором використовує заздалегідь написану бібліотеку шаблонів програмування C++, які на етапі компіляції виконують аналіз.

G. Використання готового компілятора деякої мови програмування для компіляції та подальшого виконання програми.

H. Оболонка є безпосередньою частиною готового компілятора, що надає можливість розширення (GNU). При цьому для аналізу можна використовувати структури як візуального модуля так і компілятора безпосередньо.

I. Написання іншого компілятора для тієї ж мови програмування який би давав змогу виконати аналіз.

J. Написання компілятора із середовищем розробки, відладчиком, необхідними сервісними засобами та можливістю виконати аналіз.

На діаграмі, рис.2, представлені аналітичні дані, які свідчать про ефективність визначення основних характеристик програм тим чи іншим способом. Розглянемо детальніше можливі шляхи розв'язання задачі та їх порівняльні особливості показані в діаграмі.

A-B-I. Рішення представляє собою комбіноване використання двох компіляторів (основного B та допоміжного I). Основний компілятор є програмним продуктом деякого виробника, зручний у використанні та має зрозумілий для користувача інтерфейс, що надає змогу повноцінного на-

писання *програм*, включаючи редагування тексту, відлагоджування та тестування.

Очікувані властивості

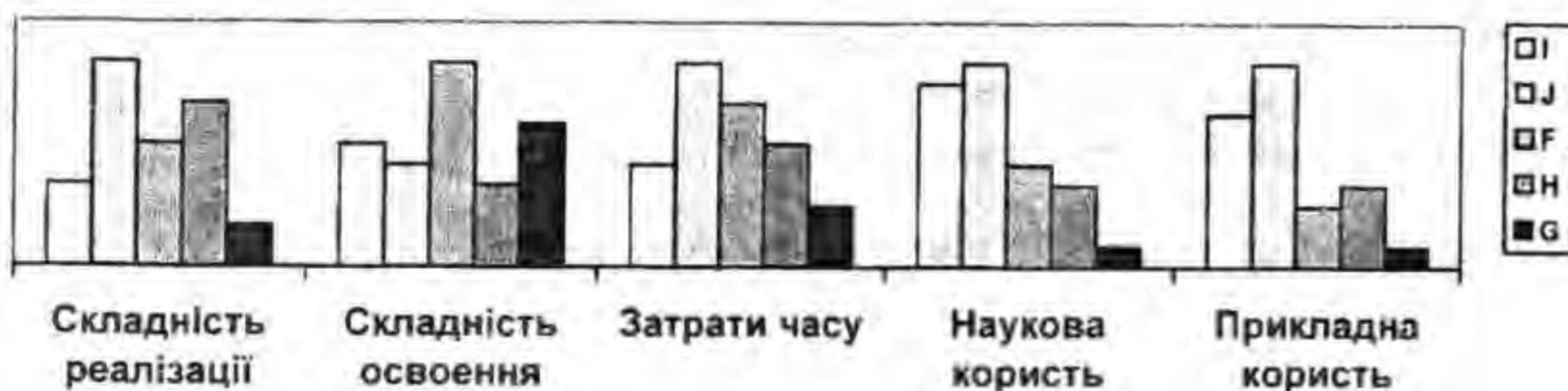


Рисунок 2

Потім у процесі *аналізу* вироблена *користувачем* програма (її програмний код) передається у вигляді даних допоміжному компілятору, який виконує деякі його перетворення та визначає властивості. Складність реалізації полягає у виробленні зручного абстрактного представлення програмного коду (ПК) та алгоритмів його перетворення, а також у написанні самого компілятора, включаючи синтаксичний аналізатор, оптимізатор та генератор вихідного об'єктного коду. Складність освоєння визначена як середня з причини не цілісності *інструменту*, а також відсутності інтерфейсу користувача у допоміжного компілятора. Цей підхід може бути застосований до багатьох мов програмування та великої кількості алгоритмів аналізу показників. Спосіб вважається оптимальним, так як у ролі допоміжного компілятора можна використати уже розроблений компілятор [1], що значно зменшить необхідний для його реалізації час.

A-J. Це рішення подібне до вищезазначеного, але передбачає цілісність інструменту. Його складність реалізації більша, так як окрім самого компілятора потрібно реалізувати ще й допоміжні інструментальні засоби та інтерфейс користувача, що потребує багато часу на розробку.

A-C-D-F. Це рішення базується на застосуванні шаблонів кодогенерації C++. Воно не є пріоритетним (разом із двома наступними), бо програмування за допомогою такого засобу не є класичним і перетворюється на примітивне зображення алгоритму у графічному (подібному до блок-схем) вигляді, де кожен структурний елемент перетворюється на код C++. Подальший аналіз виконує сторонній компілятор. Таке рішення має низьку гнучкість і модифікація його для внесення нових алгоритмів *аналізу* за складністю наближується до реалізації комплексу з початку.

A-C-H. Реалізація цього варіанту передбачає вмонтування редактора «блок-схем» в деякий готовий компілятор з відкритим кодом в ролі інтерфейсу користувача, і тому використовує вже перевірені абстракції представлення ПК, що можливо є більш універсальним рішенням.

A-C-E-G. Цей спосіб не представляє практичного інтересу. Весь процес аналізу впливає з побудови коду «блок-схеми».

Для розуміння самого підходу до аналізу та вирішення поставленої задачі в цілому варто розглядати усі вказані підходи. Але з усіх розглянутих вище методів як оптимальний в даній роботі для реалізації обрано спосіб A-B-I так, як в ролі допоміжного компілятора у даній схемі використовується уже розроблений одним із авторів компілятор [1], рис. 3.

I. Структура допоміжного компілятора та опис процесу аналізу

Визначимо таку структуру компілятора.



Рисунок 3

Очевидно що основна задача аналізу складності програми полягає у розробці зручного проміжного представлення (ПП) програми. Представимо програму у вигляді орієнтованого ациклічного графу, вершинами якого будуть операції, алгоритмічні структури (цикли, розгалуження, функції), оператори (виклики функцій, присвоєння значень змінним) та значення(константи, змінні та параметри функцій). Таким чином задачу визначення ємкісної та часової складності програми можна звести до аналізу суперпозиції вершин алгоритмічних структур у графі ПП. Запропонований алгоритм аналізу спрямований на створення, на основі вхідної програми іншої(яка б обраховувала складність) шляхом усунення незалежних дій, або заміни їх на відповідні лічильники.

Скористаємось алгоритмом інтерполяції для отримання функції.

Звісно, рішення виглядає простим та достатньо ефективним лише для примітивних прикладів, але існують класи задач для яких обрахування складності є досить нетривіальною задачею навіть на аналітичному рівні. Для задачі сортування масиву чисел методом Хоора, часова складність залежить від вхідних даних. У найкращому випадку можна отримати $O(n)$, у найгіршому $O(n^2)$, а середньою часовою складністю є $O(n \log n)$.

Також проблему ускладнює застосування рекурсії. Наприклад для рекурсивного обчислення факторіала виконується n викликів функції, для

пошуку в глиб на графі $O(2^n)$ і алгоритм сортування Хоора теж часто має рекурсивно задану реалізацію.

Реалізація алгоритму. Обраний компілятор побудований на принципах об'єктно орієнтованого проектування. Тож всі концептуальні поняття такі як вершина дерева ПП, тип, змінна, функція і т.п., реалізовані як відповідні класи. Для виконання компілятора було обрано мову програмування C++ з міркування досягнення компромісу між швидкодією процесів виконання програми та її розробки. На жаль для досягнення достатньої гнучкості у розробці алгоритмів маніпулювання вершинами дерева ПП, C++ не надає необхідних інструментів. Тому доцільно використати менш строгу мову програмування з класу інтерпретаторів мови Python. Такий вибір зроблено з наступних міркувань. Для неї існують реалізації інтерпретаторів з відкритим кодом на C++, тож один з них можна вбудувати без особливих затрат у компілятор. Для зв'язку C++ та Python є спеціально розроблена бібліотека з відкритим кодом boost.Python, дозволяє побудувати перетворювачі коду так що відповідні класи можуть бути використані в C++ та Python одночасно. Подальше написання великої кількості гнучких алгоритмів перетворення дерева ПП не потребує багато часу.

Список літератури.

1. Є.О.Чернишов, В.М. Волохов. Розробка оптимізуючого компілятора процедурно орієнтованої мови програмування, курсова робота. – К: КНУ ім. Тараса Шевченка, 2003
2. Dave Abrahams, Ralf W. Grosse-Kunstleve. Building Hybrid Systems With Boost Python, 2002.
3. Г.Россум, Ф.Л.Дж.Дрейк, Д.С.Откидач. Язык программирования Python.
4. А.В.Анісімов, В.М.Терещенко, І.В.Кравченко. Основні алгоритми обчислювальної геометрії: Навчально методичний посібник. – К: Видавничо-поліграфічний центр „Київський університет”, 2002.

УДК 517.988

Володимир В.Хлобистов *

Олена Ф.Кашпур

Volodimir V. Khlobystov *

Olena F. Kashpur

Операторний інтерполянт типу Ерміта в гільбертовому просторі, що є асимптотично точним на поліномах

В гільбертовому просторі побудовано поліном типу Ерміта у випадку, коли задані значення нелінійного оператора та його перші диференціали Гато у вузлах. Доведено, що інтерполянт має мінімальну норму на множині поліномів типу Ерміта з тими ж інтерполяційними умовами та асимптотично зберігає поліноми відповідного степеня.

Ключові слова: нелінійний оператор, диференціал Гато, гільбертовий простір, поліном типу Ерміта, мінімальна норма.

khl@i.com.ua

moe@unicyb.kiev.ua

Hermite interpolant in Hilbert space asymptotically accurate on polynomials

In Hilbert space Hermite interpolation polynomial in a case of given the nonlinear operator value and Gateaux differentials of first order in nodes are constructed. The minimal norm interpolant asymptotically retains operator polynomials of the same degree.

Key words: nonlinear operator, Gateaux differential, Hilbert space, Hermite polynomial, minimal norm.

Інтерполювання є одним із методів розв'язання задач про наближення операторів. В [1] побудовано загальну теорію операторної інтерполяції, де, зокрема, приділено увагу операторним поліномам типу Ерміта [2]. Але побудований ермітовий інтерполянт асимптотично не зберігає поліноми (тобто не є точним на поліномах того ж степеня в разі необмеженого збільшення кількості вузлів інтерполяції), отже проблематично одержати оцінки точності та теореми збіжності навіть для поліномів.

Метою роботи є побудова інтерполянта типу Ерміта, який має властивість асимптотичного збереження поліномів відповідного степеня в разі, коли задані значення нелінійного оператора у вузлах та його перші диференціали Гато в них. Для цього була обрана спеціальним чином послідовність вузлів інтерполювання та напрямків, за якими задаються перші диференціали Гато. Показано, що побудований інтерполянт асимптотично зберігає поліноми відповідного степеня та має мінімальну норму серед усіх інтерполянтів, які використовують таку ж саме інтерполяційну інформацію. Розглянуто питання про точність та збіжність інтерполяційного процесу до поліноміального оператора другого степеня в разі зростання числа вузлів.

Нехай X, Y – гільбертові простори (X – сепарабельний), Π_n – множина операторів на них поліномів $P_n: X \rightarrow Y$ степеня n :

$$\Pi_n = \{P_n(x) : P_n(x) = L_0 + L_1x + \dots + L_nx^n\}, \quad (1)$$

де $L_0 \in Y$, $L_k(x_1, x_2, \dots, x_k)$ – неперервна k -лінійна симетрична операторна форма, $L_kx^k = L_k(\underbrace{x, x, \dots, x}_k)$; $\{x_i\}_{i=1}^m$, $\{h_i\}_{i=1}^m$ – системи елементів із X .

Нехай у вузлах x_i , $i = \overline{1, m}$ задані значення оператора $F: X \rightarrow Y$, в загальному випадку нелінійного, і перші диференціали Гато за напрямками h_i , $i = \overline{1, m}$ в цих вузлах. Операторна інтерполяційна задача типу Ерміта полягає у наступному: необхідно знайти такий поліном $P_n \in \Pi_n$, що відповідає умовам:

$$P_n(x_i) = F(x_i), \quad P'_n(x_i)h_i = F'(x_i)h_i, \quad i = \overline{1, m}, \quad (2)$$

де $F'(x_i)h_i = \left. \frac{d}{d\gamma} F(x_i + \gamma h_i) \right|_{\gamma=0}$ – перший диференціал Гато оператора $F(x)$ у вузлі x_i за напрямком h_i .

Розглянемо більш детально розв'язок задачі для $n = 2$. Зауважимо, що такі операторні поліноми застосовуються у разі дослідження нелінійних систем [3]. Надалі нехай $\{e_i\}_{i=1}^m$ – ортонормована система елементів, $x_i = e_i$, $i = \overline{1, m}$, що належать базису в X . Розв'язком задачі (2) є поліном вигляду:

$$P_2(x) = \sum_{k=0}^2 \sum_{i_1, \dots, i_k=1}^m L_k^i(e_{i_1}, \dots, e_{i_k})(x, e_{i_1}) \dots (x, e_{i_k}), \quad m \geq 2. \quad (3)$$

де $L_k^i(e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_k})$ – значення деяких k -лінійних неперервних симетричних операторних форм, які потребують визначення. Система вузлів інтерполювання була обрана ортонормованою по-перше, для забезпечення виконання інтерполяційних умов (2), по-друге, базисною – для обґрунтування асимптотичного збереження поліномів відповідного степеня в гільбертовому просторі. Для конструктивної побудови (3) потрібно визначити значення всіх операторних форм $L_k^i(e_{i_1}, \dots, e_{i_k})$, $0 \leq k \leq 2$, $1 \leq i_j \leq m$. Зауважимо, що кількість інтерполяційних умов повинна бути парною, тому необхідно знайти таку множину $\mathcal{M}$, що належність $m \in \mathcal{M}$ забезпечує кількість N невідомих

$L_k^i(e_{i_1}, \dots, e_{i_k})$, де $N = 2m + 1 + C_m^2 = \frac{m(m+3)}{2} + 1$, парним.

$$\text{Ця множина має вигляд: } \mathcal{M} = \{4k + i + 2, \quad i = 0, 1\}_{k=0}^\infty. \quad (4)$$

Для розв'язання інтерполяційної задачі (2) оберемо довільне $m \in \mathcal{M}$, тобто зафіксуємо значення сталих i та k , що містяться в (4). Правило вибору вузлів і напрямків інтерполювання наступне: спочатку задамо $(m+1)$ вузол, а саме: $0, e_1, e_2, \dots, e_m$ і такі інтерполяційні умови в них

$$\begin{aligned} P_2(0) &= F(0), & P'_2(0)e_m &= F'(0)e_m, \\ P_2(e_j) &= F(e_j), & P'_2(e_j)e_j &= F'(e_j)e_j, & j &= \overline{1, m-1}, \\ P_2(e_m) &= F(e_m), & P'_2(e_m)e_{m-1} &= F'(e_m)e_{m-1}. \end{aligned} \quad (5)$$

Надалі необхідно визначити решту $N - 2(m+1) = \frac{(m-2)(m+1)}{2}$ інтерполяційних умов. Оберемо їх такими:

$$P_2(e_q + e_{q+p+1}) = F(e_q + e_{q+p+1}), \quad P'_2(e_q + e_{q+p+1})e_{q+p+2} = F'(e_q + e_{q+p+1})e_{q+p+2}, \quad (6)$$

$p = 2l, \quad l = \overline{0, 2k+i-1}, \quad q = \overline{1, m-p-2}$. Якщо $l = 2b+1, \quad b \in N$, то задамо:

$$P_2(e_{m-p-1} + e_m) = F(e_{m-p-1} + e_m), \quad P'_2(e_{m-p-1} + e_m)e_{m-p-3} = F'(e_{m-p-1} + e_m)e_{m-p-3}. \quad (7)$$

Так, наприклад, якщо $m = 6$, тоді $N = 28$, а інтерполяційні умови (5) будуть мати вигляд:

$$\begin{aligned} P_2(0) &= F(0), & P'_2(0)e_6 &= F'(0)e_6, \\ P_2(e_j) &= F(e_j), & P'_2(e_j)e_j &= F'(e_j)e_j, & j &= \overline{1, 5} \\ P_2(e_6) &= F(e_6), & P'_2(e_6)e_5 &= F'(e_6)e_5. \end{aligned}$$

Необхідно визначити ще 7 вузлів та напрямків. Оберемо їх за викладеним вище алгоритмом. Умови (6), (7) запишуться наступним чином:

$$\begin{aligned} P_2(e_1 + e_2) &= F(e_1 + e_2), & P'_2(e_1 + e_2)e_3 &= F'(e_1 + e_2)e_3, \\ P_2(e_2 + e_3) &= F(e_2 + e_3), & P'_2(e_2 + e_3)e_4 &= F'(e_2 + e_3)e_4, \\ P_2(e_3 + e_4) &= F(e_3 + e_4), & P'_2(e_3 + e_4)e_5 &= F'(e_3 + e_4)e_5, \\ P_2(e_1 + e_4) &= F(e_1 + e_4), & P'_2(e_1 + e_4)e_5 &= F'(e_1 + e_4)e_5, \\ P_2(e_2 + e_5) &= F(e_2 + e_5), & P'_2(e_2 + e_5)e_6 &= F'(e_2 + e_5)e_6, \\ P_2(e_3 + e_6) &= F(e_3 + e_6), & P'_2(e_3 + e_6)e_1 &= F'(e_3 + e_6)e_1. \end{aligned}$$

Для знаходження операторних форм $L_k^l(e_{i_1}, \dots, e_{i_k})$ застосуємо систему рівнянь (5) – (7), враховуючи, що $P'_2(e_i)h_i = L_k^l(h_i) + 2L_2(e_i, h_i)$. Дістанемо:

$$\begin{aligned} L_0^l &= F(0), & L_1^l(e_m) &= F'(0)e_m, & L_2^l(e_m, e_m) &= F(e_m) - F'(0)e_m - F(0), \\ L_2^l(e_i, e_i) &= F'(e_i)e_i - F(e_i) + F(0), & L_1^l(e_i) &= F(e_i) - L_2^l(e_i, e_i) - F(0), & i &= \overline{1, m-1}, \\ L_2^l(e_{m-1}, e_m) &= \frac{1}{2} [F'(e_m)e_{m-1} - L_1^l(e_{m-1})] \end{aligned} \quad (8)$$

Значення $L_2^l(e_q, e_{q+p+1}), \quad p = 2l, \quad q = \overline{1, m-p-2}, \quad l = \overline{0, 2k+i-1}$ та $L_2^l(e_{m-p-1}, e_m)$, коли $l = 2b+1, \quad b \in N$ одержимо із формул

$$L_2^l(e_i, e_j) = \frac{1}{2} [F(e_i + e_j) - F(e_i) - F(e_j) + F(0)], \quad (9)$$

замінюючи індекси i та j відповідними значеннями, а $L_2^l(e_q, e_{q+p+1})$ і $L_2^l(e_m, e_{m-p-3}), \quad p = 2l, \quad q = \overline{1, m-p-2}, \quad l = \overline{0, 2k+i-1}$ таким чином

$$\begin{aligned} L_2^l(e_q, e_{q+p+1}) &= \frac{1}{2} [F'(e_q + e_{q+p+1})e_{q+p+2} - L_1^l(e_{q+p+2}) - 2L_2^l(e_{q+p+1}, e_{q+p+2})], \\ L_2^l(e_m, e_{m-p-3}) &= \frac{1}{2} [F'(e_{m-p-1} + e_m)e_{m-p-3} - L_1^l(e_{m-p-3}) - 2L_2^l(e_{m-p-1}, e_m)]. \end{aligned} \quad (10)$$

Отже, знайдені всі операторні форми $L_k^l(e_{i_1}, \dots, e_{i_k})$, $1 \leq i_j \leq m$, $k = \overline{0, 2}$, які входять в (3), а це означає, що інтерполяційний поліном (3) повністю визначений.

Якщо $F(x) \equiv F_2(x) \in \Pi_2$, тобто $F_2(x) = L_0 + L_1x + L_2x^2$ то побудований інтерполяційний поліном $P_2(x)$ при $m \rightarrow \infty$ співпадає з $F_2(x)$, оскільки $\{e_i\}_{i=1}^m$ — ортонормований базис в X , а інтерполянт (3) має вигляд

$$P_2(x) = \sum_{k=0}^2 L_k \left(\sum_{i=1}^m (x, e_i) e_i \right)^k.$$

Нехай надалі μ — деяка гауссова міра на X , перший момент якої дорівнює нулю, а другий обмежений; B — кореляційний оператор цієї міри, ядерний і $\text{Ker} B = \emptyset$. На множині Π_n введемо скалярний добуток [1]

$$(P_1, P_2)_H = \sum_{k=0}^n \int \dots \int (L_k^{(1)}(v_1, v_2, \dots, v_k), L_k^{(2)}(v_1, v_2, \dots, v_k))_Y \mu(dv_k) \dots \mu(dv_2) \mu(dv_1)$$

і норму $\|P\|_H^2 = (P, P)_H$. Тут $L_k^{(1)}, L_k^{(2)}$ — k -ті операторні степені поліномів P_1 і P_2 відповідно.

Нижче буде показано, що побудований інтерполянт має мінімальну норму серед усіх поліномів типу Ерміта для даного оператора з однаковими інтерполяційними умовами, але спочатку доведемо теорему про інтерполянт типу Ерміта із мінімальною нормою, який є розв'язком задачі

$$P_n(Be_i) = F(Be_i), \quad P'_n(Be_i)Bh_i = F'(Be_i)Bh_i, \quad i = \overline{1, L}. \quad (11)$$

В [1] побудовано інтерполянт

$$P_n(x) = Q_n(x) + \langle \bar{F}_n - \bar{Q}_n, H^* \bar{g}_H(x) \rangle, \quad Q_n \in \Pi_n, \quad (12)$$

що є розв'язком задачі (11) при довільному n . Тут

$$\bar{F}_H = \left\{ F(Bx_i), \frac{\partial}{\partial \gamma} F(Bx_i + \gamma Bh_i) \Big|_{\gamma=0} \right\}_{i=1}^{2L}, \quad \bar{Q}_H = \left\{ Q_n(Bx_i), \frac{\partial}{\partial \gamma} Q_n(Bx_i + \gamma Bh_i) \Big|_{\gamma=0} \right\}_{i=1}^{2L},$$

$$g(u, v) = \sum_{p=0}^n (Bu, v)^p, \quad \bar{g}_H = \left\{ g(x_i, x), \frac{\partial}{\partial \gamma} g(x_i + \gamma h_i, x) \Big|_{\gamma=0} \right\}_{i=1}^{2L},$$

H^* — псевдообернена матриця Мура-Пенроуза до симетричної матриці

$$H = \|H^{ls}\|_{l,s=1}^L, \quad \text{де } \|H^{ls}\| - \text{матричний блок розмірності } 2 \times 2: \|H^{ls}\| = \|t_{ij}^{ls}\|_{i,j=0}^1,$$

$$t_{ij}^{ls} = \frac{\partial^{i+j}}{\partial \alpha_1 \dots \partial \alpha_i \partial \beta_1 \dots \partial \beta_j} g(x_i + \sum_{p=1}^i \alpha_p h_p^{(l)}, x_s + \sum_{p=1}^j \beta_p h_p^{(s)}) \Big|_{\alpha_1 = \dots = \alpha_i = \beta_1 = \dots = \beta_j = 0},$$

$$\langle \bar{a}, \bar{b} \rangle = \sum_{i=1}^{2L} \alpha_i \beta_i, \quad \alpha_i \in Y, \quad \beta_i \in R^1, \quad \bar{a} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{2L}), \quad \bar{b} = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{2L}).$$

Нехай Z – матриця, рядками якої є координати ортонормованих власних векторів матриці H із нульовим власним числом. В [1] показано, що інтерполяційна задача (11) має розв'язок тоді і тільки тоді, коли

$$Z\bar{F} = \bar{0}. \quad (13)$$

Надалі будемо вважати, що рівність (13) справедлива. Поліном $P_n(x)$, що визначається формулою (12), надамо у вигляді

$$P_n(x) = P^*(x) + Q_0(x), \quad (14)$$

де

$$P^*(x) = \langle \bar{F}_H, H^+ \bar{g}_H(x) \rangle, \quad (15)$$

$$Q_0(x) = Q_n(x) - \langle \bar{Q}_H, H^+ \bar{g}_H(x) \rangle. \quad (16)$$

Неважко бачити, що $\bar{Q}_{0H} = \bar{0}$. Нехай Π_n^{IH} – множина інтерполяційних операторних поліномів n -го степеня типу Ерміта. Справедлива

Теорема 1. Нехай виконується умова (13). Тоді поліном $P^*(x)$, що визначається формулою (15) є розв'язком екстремальної задачі

$$\|P^*\|_H = \min_{P_n \in \Pi_n^{IH}} \|P_n\|_H = \left(\langle H^+ \bar{F}_H, \bar{F}_H \rangle \right)^{1/2} \quad (17)$$

і цей розв'язок єдиний. Тут $\langle \bar{a}, \bar{b} \rangle = \sum_{i=1}^{2L} (\alpha_i, \beta_i)_Y, \quad \alpha_i, \beta_i \in Y, \quad \bar{a} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{2L}), \quad \bar{b} = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{2L}).$

Доведення. Маємо

$$\|P_n\|_H^2 = \|P^* + Q_0\|_H^2 = \|P^*\|_H^2 + \|Q_0\|_H^2 + 2(P^*, Q_0)_H. \quad (18)$$

Позначимо $\bar{W} = (w_1, w_2, \dots, w_{2L}) = H^+ \bar{F}_H, \quad Q_0 = L_0^{(0)} + L_1^{(0)}x + \dots + L_n^{(0)}x^n$. Розглянемо скалярний добуток $(P^*, Q_0)_H$ і надалі врахуємо рівність [1]:

$$\int \dots \int \prod_{j=1}^p (x_j, v_j)(y, L_p(v_1, v_2, \dots, v_p))_Y \mu(dv_1) \mu(dv_2) \dots \mu(dv_p) = \\ = (y, L_p(Bx_1, Bx_2, \dots, Bx_p))_Y, \quad \forall y \in Y,$$

$$(P^*, Q_0)_H = \left\langle \bar{F}_H, H^+ \left\{ \frac{\partial}{\partial \alpha_i} g(x_j + \alpha h_j, x) \Big|_{\alpha=0}, i=0,1 \right\}_{j=1}^L, Q_0(x) \right\rangle_H = \\ = \left\langle H^+ \bar{F}_H, \left\{ \frac{\partial}{\partial \alpha_i} g(x_j + \alpha h_j, x) \Big|_{\alpha=0}, i=0,1 \right\}_{j=1}^L, Q_0(x) \right\rangle_H =$$

$$= \sum_{k=1}^L \left(w_{2k-1} \sum_{p=0}^n (x_k, x)^p, Q_0(x) \right)_H + \sum_{k=1}^L \left(w_{2k} \sum_{p=0}^n \frac{\partial}{\partial \alpha} (x_k + \alpha h_k, x)^p \Big|_{\alpha=0}, Q_0(x) \right)_H. \quad (19)$$

Розглянемо перший доданок в (19): $\sum_{k=1}^L \left(w_{2k-1} \sum_{p=0}^n (x_k, x)^p, Q_0(x) \right)_H =$

$$= \sum_{k=1}^L \sum_{p=0}^n \int \dots \int \prod_{i=1}^p (x_k, v_i) (w_{2k-1}, L_p^{(0)}(v_1, v_2, \dots, v_p))_Y \mu(dv_1) \mu(dv_2) \dots \mu(dv_p) =$$

$$= \sum_{k=1}^L \sum_{p=0}^n (w_{2k-1}, L_p^{(0)}(Bx_k, Bx_k, \dots, Bx_k))_Y = \sum_{k=1}^L (w_{2k-1}, Q_0(Bx_k))_Y = 0, \quad (20)$$

оскільки $Q_0(Bx_k) = 0$, $k = \overline{1, L}$. Другий доданок в (19) перетворимо наступним чином:

$$\sum_{k=1}^L \left(w_{2k} \sum_{p=0}^n \frac{\partial}{\partial \alpha} (x_k + \alpha h_k, x)^p \Big|_{\alpha=0}, Q_0(x) \right)_H =$$

$$= \sum_{k=1}^L \sum_{p=0}^n \left(w_{2k} \frac{\partial}{\partial \alpha} (x_k + \alpha h_k, x) \Big|_{\alpha=0}, L_p^{(0)} x^p \right)_H = \sum_{k=1}^L \sum_{p=0}^n p (w_{2k} (x_k, x)^{p-1} (h_k, x), L_p^{(0)} x^p)_H =$$

$$= \sum_{k=1}^L \sum_{p=0}^n \frac{p}{p!} \int \dots \int \left(w_{2k} \frac{\partial^p}{\partial \alpha_1 \dots \partial \alpha_p} (x_k, \sum_{i=1}^p \alpha_i v_i)^{p-1} (h_k, \sum_{i=1}^p \alpha_i v_i) \Big|_{\alpha_1 = \dots = \alpha_p = 0}, L_p^{(0)}(v_1, v_2, \dots, v_p) \right)_Y \times$$

$$\times \mu(dv_1) \mu(dv_2) \dots \mu(dv_p) =$$

$$= \sum_{k=1}^L \sum_{p=1}^n \frac{1}{(p-1)!} \int \dots \int (w_{2k} (p-1)! [(h_k, v_1)(x_k, v_2) \dots (x_k, v_p) +$$

$$+ (x_k, v_1)(h_k, v_2)(x_k, v_3) \dots (x_k, v_p) + \dots + (x_k, v_1) \dots (x_k, v_{p-1})(h_k, v_p)]$$

$$L_p^{(0)}(v_1, v_2, \dots, v_p))_Y \mu(dv_1) \mu(dv_2) \dots \mu(dv_p) =$$

$$= \sum_{k=1}^L \sum_{p=1}^n (w_{2k} [L_p^{(0)}(Bh_k, Bx_k, \dots, Bx_k) + L_p^{(0)}(Bx_k, Bh_k, \dots, Bx_k) + \dots +$$

$$+ L_p^{(0)}(Bx_k, Bx_k, \dots, Bh_k)])_Y = \sum_{k=1}^L \sum_{p=1}^n (w_{2k}, L_p^{(0)'}(Bx_k, Bx_k, \dots, Bx_k) Bh_k)_Y =$$

$$= \sum_{k=1}^L (w_{2k}, Q_0'(Bx_k) Bh_k)_Y = 0, \quad (21)$$

оскільки $Q_0'(Bx_k) Bh_k = 0$, $k = \overline{1, L}$. На підставі (20), (21) із (19) дістанемо

$$(P^*, Q_0)_H = 0. \text{ Рівність (18) буде мати вигляд } \|P_n\|_H^2 = \|P^*\|_H^2 + \|Q_0\|_H^2 \geq \|P^*\|_H^2.$$

Якщо в (19) – (21) покладемо $Q_0(x) = P^*(x)$, то одержимо

$$\|P^*\|_H^2 = (P^*, P^*)_H = \langle \langle H^* \tilde{F}_H, \tilde{F}_H \rangle \rangle.$$

Доведемо єдиність розв'язку екстремальної задачі. Припустимо, що існує поліном $S(x) \in \Pi_n^H$ такий, що: $S(x) \neq P^*(x)$ і $\|S\|_H^2 = \langle\langle H^+ \bar{F}_H, \bar{F}_H \rangle\rangle$. Тоді, враховуючи (19) – (21), отримаємо

$$\begin{aligned} \|S - P^*\|_H^2 &= \|S\|_H^2 + \|P^*\|_H^2 - 2(S, P^*)_H = \\ &= \langle\langle H^+ \bar{F}_H, \bar{F}_H \rangle\rangle + \langle\langle H^+ \bar{F}_H, \bar{F}_H \rangle\rangle - 2\langle\langle H^+ \bar{F}_H, \bar{F}_H \rangle\rangle = 0, \end{aligned}$$

що протирічить припущенню. Отже інтерполянт мінімальної норми єдиний. Теорему доведено. Зауважимо, що схема доведення використовує аналогічну схему в [1].

Нехай $n = 2$, $\{e_i\}_{i=1}^m$ ортонормована система власних елементів оператора B , $m \in \mathcal{M}$. Оберемо в (11) вузли інтерполювання Bx_j , $j = \overline{0, N/2}$ наступним чином: $Bx_0 = 0$, $Bx_i = e_i$, $i = \overline{1, m}$, $Bx_j = e_q + e_{p+q+1}$, $p = 2l$, $l = \overline{0, 2k+i-1}$, $q = \overline{1, m-p-2}$, $m \in \mathcal{M} = \{4k+i+2, i = \overline{0, 1}\}_{k=0}^\infty$ (k, i – фіксовані сталі), якщо $l = 2b+1$, $b \in N$, то $Bx_j = e_{m-p-1}$. Напрямки Bh_j , $j = \overline{0, N/2}$ перших диференціалів Гато, що задані в цих вузлах такими: $Bh_0 = e_m$, $Bh_i = e_i$, $i = \overline{1, m-1}$, $Bh_m = e_{m-1}$, $Bh_j = e_{q+p+2}$, $p = 2l$, $l = \overline{0, 2k+i-1}$, $q = \overline{1, m-p-2}$ та $Bh_j = e_{m-p-3}$, якщо $l = 2b+1$, $b \in N$. При цьому x_j та h_j визначаються так, як і Bx_j та Bh_j відповідно, але за системою елементів $\frac{e_j}{\lambda_j}$, де λ_j – власні числа оператора B , що відповідають елементам e_j . В цьому випадку інтерполянт (3) є розв'язком задачі типу Ерміта (11). Значення операторних форм $L_k^j(e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_k})$ визначаються однозначно за допомогою системи (5) – (7), отже матриця цієї системи має обернену.

Розглянемо тепер розв'язок задачі (11) на послідовностях вузлів Bx_j , $j = \overline{0, N/2}$, $m \in \mathcal{M}$ та напрямків диференціалів Гато Bh_j , $j = \overline{0, N/2}$, $m \in \mathcal{M}$ за допомогою інтерполяційного полінома мінімальної норми (15). Зауважимо, що інтерполянт (3) є розв'язком (11) на послідовностях вузлів Bx_j , $j = \overline{0, N/2}$, $m \in \mathcal{M}$ та напрямків Bh_j , $j = \overline{0, N/2}$, $m \in \mathcal{M}$ при довільних значеннях $F(Bx_i)$ та $F'(Bx_i)Bh_i$, тобто задача операторного поліноміального інтерполювання інваріантно розв'язувана. Звідси випливає, що $Z\bar{F}_H \equiv \vec{0}$ при будь-якому $\bar{F}_H$, отже $Z \equiv 0$. Остання рівність означає, що матриця H має обернену. Якщо в (15) розкриємо $\langle \cdot, \cdot \rangle$, то інтерполянт (15) можна привести до вигляду (3), де замість

$L_k^I(e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_k})$ будуть коефіцієнти $a_{i_1 i_2 \dots i_k}$. Їх можна знайти із системи (11).
Отримаємо, що $L_k^I(e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_k}) = a_{i_1 i_2 \dots i_k}$. Таким чином нами доведена

Теорема 2. Інтерполяційний поліном $P_2(x)$, який визначається формулою (3), та поліном мінімальної норми $P^*(x)$, що побудовані на послідовностях вузлів $Bx_j, j = 0, \overline{N/2}, m \in \mathcal{M}$ та напрямків $Bh_j, j = 0, \overline{N/2}, m \in \mathcal{M}$ за якими задані перші диференціали Гато, тотожно співпадають.

Надалі розглянемо питання про збіжність інтерполяційного процесу мінімальної норми, коли $m \rightarrow \infty$ до операторного полінома другого степеня, що інтерполіюємо. Нехай $F_2 \in \Pi_2$. Сформулюємо два результати, доведення яких засновано на тих самих міркуваннях, що і доведення теорем 2 [4] та 1 [5] для інтерполяційного поліному типу Лагранжа, оскільки при цьому безпосередньо використовували вигляд інтерполянта, а поліном типу Ерміта, що побудований в даній роботі, має таку ж структуру, за винятком алгоритму визначення значень операторних форм $L_k^I(e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_k})$

Теорема 3. Справедлива рівність $\lim_{m \rightarrow \infty} \|F_2 - P^*\|_H = 0$.

Теорема 4. Оцінка точності інтерполіювання поліноміального оператора другого степеня поліномом (3) визначається нерівністю

$$\|F_2 - P_2\|_H^2 < \sum_{k=1}^2 k^2 \|L_k\|^2 (Tr B)^{k-1} \sum_{i=m+1}^{\infty} \lambda_i,$$

де $\|L_k\|$ – традиційна норма k -лінійного оператора, $Tr B = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i$.

Зауважимо, що наведені вище результати для $n=2$ досить нетривіальні. Предметом подальших досліджень буде загальний випадок (n – довільне число).

ЛІТЕРАТУРА

1. В.Л.Макаров, В.В.Хлобыстов, Л.А.Янович. Интерполирование операторов. Киев „Наукова думка”. – 2000. – 468с.
2. В.Л.Макаров, В.В.Хлобыстов. Эрмитова интерполяция операторов в гильбертовых пространствах// ДАН России. – 1992. – т.327, №2. – С.183–186.
3. W.A.Porter. An overview of polynomial system theory. // IEEE Proc. Special issue on system theory. – v.64, №1. – 1976. – P 18 – 26.
4. В.Хлобыстов, Е.Кашпур. О сходимости интерполяционного процесса с минимальной нормой в гильбертовом пространстве. // Журн. обчисл. та прикл. матем. – 1999. – №1(84). – С.124–128.
5. В.В.Хлобыстов, Е.Ф.Кашпур. О точности полиномиального интерполирования в гильбертовом пространстве в случае возмущенных значений оператора в узлах. // Кибернетика и системный анализ. – 2002. – №1. – С.168–173.

УДК 517.988

Володимир В. Хлобистов*,
Тетяна М. Поповічева

**Інтерполяційне наближення
полінома Тейлора для
диференційованих операторів у
гільбертовому просторі**

Отримано інтерполяційне наближення полінома Тейлора для диференційованих операторів у гільбертовому просторі. Досліджена точність цього наближення у випадку аналітичного оператора та оператора, що має скінчену кількість похідних Фреше.

Ключові слова: гільбертів простір, диференційований оператор, диференціал Гато, диференціал Фреше, операторний поліном, інтерполант, кореляційний оператор, гауссова міра, точність.

*E-mail: khl@i.com.ua

Volodimir V. Khlobystov*,
Tetyana M. Popovicheva

**Interpolation approximation of
Taylor polynomial for
differentiable operators in Hilbert
space**

In Hilbert space we obtained interpolation approximation of Taylor polynomial for differentiable operators. Additionally, we investigated an accuracy of this approximation in the case of analytical operator and operator containing a finite number of Frechet derivatives.

Key Words: Hilbert space, differentiable operator, differential Gâteaux, differential Frechet, operator polynomial, interpolant, correlation operator, Gaussian measure, accuracy.

Проблема поліноміального інтерполювання операторів, оцінки точності та теореми збіжності є важливим класом задач теорії та практики операторного наближення. Дана стаття присвячена питанням побудови, аналізу точності та збіжності інтерполяційних процесів у гільбертових просторах і є продовженням досліджень [1-6]. В роботі [2] побудовано операторний поліном типу Лагранжа на спеціальним чином обраній множині вузлів $\mathcal{L}(m)$, проведено аналіз точності інтерполяційних формул для поліноміальних та цілих операторів та доведено відповідні теореми про збіжність таких інтерполяційних процесів. В статті розглядається задача побудови інтерполяційного наближення до поліному Тейлора як деякий тип ермітової інтерполяції. Авторами показано, що на множині вузлів $\mathcal{L}(m)$ для поліноміальних операторів дана інтерполяція еквівалентна лагранжевій. Для аналітичних за Гато операторів наведено більш сильні результати про збіжність інтерполяційних процесів, а для операторів, що мають скінчену кількість вищих похідних Фреше, отримано оцінки точності наближень, що неможливо було здійснити раніше, застосовуючи інтерполяцію Лагранжа.

Нехай X, Y – гільбертові простори (X – сепарабельний), $F: X \rightarrow Y$ – оператор, аналітичний за Гато у просторі X . Тоді $F(x)$ можна подати у вигляді

$$F(x) = T_n(x) + R_n(x), \quad (1)$$

$$T_n(x) = F(0) + \frac{1}{1!}F'(0)x + \frac{1}{2!}F''(0)x^2 + \dots + \frac{1}{n!}F^{(n)}(0)x^n, \quad (2)$$

$$R_n(x) = \frac{1}{(n+1)!}F^{(n+1)}(0)x^{n+1} + \frac{1}{(n+2)!}F^{(n+2)}(0)x^{n+2} + \dots, \quad \forall x \in X, \quad (3)$$

де $T_n(x)$ – поліном Тейлора n -го степеня для оператора $F(x)$, $F^{(k)}(0)x^k$, $k = 0, 1, 2, \dots$, – диференціал Гато k -го порядку. Нехай $e_1, e_2, \dots, e_m$ – перші m елементів ортонормального базису простору X , $m \geq n$,

$$F^{(k)}(0)e_{i_1} \dots e_{i_k}, \quad i_j = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, k}, \quad k = \overline{0, n},$$

– диференціал Гато k -го порядку для F в нулі за напрямками $e_{i_1}, \dots, e_{i_k}$.

Розглянемо оператор

$$T_{m,n}(x) = \sum_{k=0}^n \sum_{i_1, \dots, i_k=1}^m \frac{1}{k!} F^{(k)}(0)e_{i_1} \dots e_{i_k} (x, e_{i_1}) \dots (x, e_{i_k}), \quad (4)$$

де $(\cdot, \cdot)$ – скалярний добуток в X . Неважко помітити, що даний оператор задовольняє інтерполяційним умовам типу Ерміта

$$T_{m,n}^{(k)}(0)e_{i_1} \dots e_{i_k} = F^{(k)}(0)e_{i_1} \dots e_{i_k}, \quad k = \overline{0, n}. \quad (5)$$

Для подальшого викладення введемо гауссову міру μ на X , перший момент якої дорівнює нулю [7], а лінійний оператор $B: X \rightarrow X$

$$Bx = \sum_{i=1}^{\infty} q^i(x, e_i)e_i, \quad q \in (0, 1),$$

є кореляційним оператором цієї міри (в [8] показано, що B – ядерний оператор [9], для якого $\{e_i\}_{i=1}^{\infty} \subset X$ – власні елементи, q^i – власні значення відповідно). Нехай Y – гільбертів простір зі скалярним добутком $(\cdot, \cdot)_Y$, H – гільбертів простір аналітичних за Гато операторів $F: X \rightarrow Y$ зі скалярним добутком [5]

$$(P, Q)_H = \sum_{k=0}^{\infty} \int_X \dots \int_X \left(\frac{1}{k!} P^{(k)}(0)h_k \dots h_1, \frac{1}{k!} Q^{(k)}(0)h_k \dots h_1 \right)_Y \mu(dh_k) \dots \mu(dh_1)$$

та нормою

$$\|P\|_H = (P, P)_H^{1/2} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \int_X \dots \int_X \left\| \frac{1}{k!} P^{(k)}(0)h_k \dots h_1 \right\|_Y^2 \mu(dh_k) \dots \mu(dh_1) \right)^{1/2}, \quad (6)$$

де $P, Q \in H$, $P^{(k)}(0)h_k \dots h_1$ – диференціал Гато k -го порядку оператора P в нулі за напрямками $h_1, \dots, h_k \in X$, μ – гауссова міра на X , яка була введена раніше. Дослідимо збіжність інтерполяційного процесу (4) до оператора $F(x)$ при збільшенні числа вузлів.

- **Теорема 1.** Нехай $F(x)$ – аналітичний за Гато оператор та $\frac{\|F^{(k+1)}(0)\|}{\|F^{(k)}(0)\|} = O(k^s)$, $0 \leq s < 1$, $k \rightarrow \infty$. Тоді

$$\lim_{\substack{m \rightarrow \infty \\ n \rightarrow \infty}} \|F - T_{m,n}\|_H = 0, \quad (7)$$

тобто інтерполяційний процес $T_{m,n}$ збігається до F у метриці H .

- **Доведення.** Вважаючи, що

$$\frac{1}{k!} F^{(k)}(0) v_k \dots v_1 = L_k(v_1, \dots, v_k), \quad (8)$$

де $L_k(v_1, \dots, v_k)$ – k -лінійна неперервна симетрична операторна форма [10], поліном $T_n(x)$ можна подати у вигляді

$$T_n(x) = L_0 + L_1 x + \dots + L_n x^n. \quad (9)$$

Тут $L_0 \in Y$, а операторний степінь $L_k x^k = L_k(x, \dots, x): X \rightarrow Y$ отримано із $L_k(v_1, \dots, v_k)$ при $v_1 = \dots = v_k = x$, $k = \overline{1, n}$. Виходячи з (2), (4) з урахуванням (8), інтерполант типу Ерміта $T_{m,n}(x)$ можна записати як поліном $T_n(x)$ замінивши аргумент відрізком його ряду Фур'є за ортонормальним базисом e_i , $i = 1, 2, \dots$, тобто

$$T_{m,n}(x) = \sum_{k=0}^n \sum_{i_1, i_2, \dots, i_k=1}^m (x, e_{i_1})(x, e_{i_2}) \dots (x, e_{i_k}) \frac{1}{k!} F^{(k)}(0) e_{i_1} \dots e_{i_k}.$$

Згідно з (1)

$$\|F - T_{m,n}\|_H \leq \|T_n - T_{m,n}\|_H + \|R_n\|_H. \quad (10)$$

Виконавши перетворення, аналогічні перетворенням у [1], виходячи з означення норми у метриці H та використовуючи формулу $\int_X \|v_k\|^2 \mu(dv_k) = \text{Tr} B$ [7], маємо

$$\|T_n - T_{m,n}\|_H < \left[\sum_{k=1}^n \left(\frac{\|F^{(k)}(0)\|}{(k-1)!} \right)^2 (\text{Tr} B)^k q^m \right]^{1/2}, \quad q \in (0, 1), \quad 0! = 1. \quad (11)$$

Далі, на основі (3), (8) та (6), отримуємо

$$\|R_n\|_H^2 = \sum_{k=n+1}^{\infty} \|L_k\|_H^2. \quad (12)$$

Оцінивши, з урахуванням того, що $\int_X \|v\|^2 \mu(dv) = \text{Tr} B$, k -й доданок у правій частині (12), маємо

$$\|L_k\|_H^2 \leq \left(\frac{\|F^{(k)}(0)\|}{k!} \right)^2 (\text{Tr} B)^k,$$

звідки

$$\|R_n\|_H \leq \left[\sum_{k=n+1}^{\infty} \left(\frac{\|F^{(k)}(0)\|}{k!} \right)^2 (TrB)^k \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (13)$$

Враховуючи (10), (11) та (13) маємо оцінку

$$\|F - T_{m,n}\|_H < \left[\sum_{k=1}^n \left(\frac{\|F^{(k)}(0)\|}{(k-1)!} \right)^2 (TrB)^k q^m \right]^{\frac{1}{2}} + \left[\sum_{k=n+1}^{\infty} \left(\frac{\|F^{(k)}(0)\|}{k!} \right)^2 (TrB)^k \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (14)$$

де $q \in (0,1)$, а $\|\cdot\|_H$ обчислюється континуальним інтегралом (6) за гауссовою мірою μ . При переході у нерівності (14) до границі маємо

$$\lim_{\substack{m \rightarrow \infty \\ n \rightarrow \infty}} \|F - T_{m,n}\|_H \leq \lim_{\substack{m \rightarrow \infty \\ n \rightarrow \infty}} \left(\left[\sum_{k=1}^n \left(\frac{\|F^{(k)}(0)\|}{(k-1)!} \right)^2 (TrB)^k q^m \right]^{\frac{1}{2}} + \left[\sum_{k=n+1}^{\infty} \left(\frac{\|F^{(k)}(0)\|}{k!} \right)^2 (TrB)^k \right]^{\frac{1}{2}} \right), q \in (0,1). \quad (15)$$

В умовах теореми ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\|F^{(k)}(0)\|}{k!} (TrB)^k$ збігається, тому границя правої частини нерівності (15), як неважко помітити, дорівнює нулю. Теорему доведено.

В [2] доводиться аналог теореми 1 про збіжність інтерполяційного процесу Лагранжа мінімальної норми до цілого оператора на спеціальному чині обраній послідовності вузлів $\mathcal{L}(m)$, але за більш жорстких умов у порівнянні з умовою теореми 1.

Відмітимо, що $T_n(x)$ є операторним поліномом n -го степеня найкращого наближення до аналітичного за Гато оператора F на множині неперервних операторних поліномів n -го степеня у метриці простору H [5].

- Зауваження 1. Згідно (11) маємо збіжність $T_{m,n}$ до T_n у метриці H , тобто

$$\|T_n - T_{m,n}\|_H \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0.$$

Крім того, слід відзначити, що для будь-якого $\varepsilon > 0$ можна вибрати метрику H таку, що нерівність

$$\|T_n - T_{m,n}\|_H < \varepsilon$$

є справедливою при фіксованому m . Іншими словами, оператор T_n можна наблизити оператором $T_{m,n}$ із заданою точністю у метриці H , вибираючи її відповідним чином.

У випадку обмеженості норм $\|F^{(k)}(0)\|$, $k = 1, 2, \dots$, шляхом нескладних перетворень у правій частині нерівності (14) приходимо до наступного результату.

• **Теорема 2.** Нехай оператор F – аналітичний за Гато в X та $\|F^{(k)}(0)\| \leq M = \text{const}$, $k = 1, 2, \dots$. Тоді

$$\|F - T_{m,n}\|_H < q^{m/2} M (\text{Tr} B)^{1/2} S_n^{1/2} + M r_n^{1/2}, \quad (16)$$

де $q \in (0, 1)$, $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{(\text{Tr} B)^{k-1}}{((k-1)!)^2} < e^{\text{Tr} B}$, $r_n = \frac{(\text{Tr} B)^{n+1}}{(n+1)!} e^{\theta \text{Tr} B}$, $0 < \theta < 1$.

• **Зауваження 2.** Для аналітичного за Гато оператора в умовах теореми 2 інтерполяційний процес $T_{m,n}$ збігається до F у метриці H .

Нехай тепер X – сепарабельний гільбертів простір, Y – лінійний нормований простір, а $F: X \rightarrow Y$ – оператор, $(n+1)$ раз диференційований за Фреше в X . Для $F(x)$ має місце формула Тейлора із залишковим членом $R_n(x)$ в інтегральній формі [10]

$$\begin{aligned} F(x) &= T_n(x) + R_n(x), \\ T_n(x) &= F(0) + \frac{1}{1!} F'(0)x + \frac{1}{2!} F''(0)x^2 + \dots + \frac{1}{n!} F^{(n)}(0)x^n, \\ R_n(x) &= \frac{1}{n!} \int_0^1 (1-t)^n F^{(n+1)}(tx) x^{n+1} dt, \quad x \in X, \end{aligned} \quad (17)$$

де $F^{(k)}(0)x^k$ – диференціал Фреше k -го порядку оператора $F(x)$. Нехай, як і раніше, $e_1, e_2, \dots, e_m$ – перші m елементів ортонормального базису простору X ,

$$F^{(k)}(0)e_{i_1} \dots e_{i_k}, \quad i_j = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, k}, \quad k = \overline{0, n},$$

– диференціал Фреше k -го порядку оператора $F(x)$ у нулі за напрямками $e_{i_1}, \dots, e_{i_k}$, $T_{m,n}(x)$ – наближення до $T_n(x)$, що задане формулою (4) та задовольняє інтерполяційним умовам типу Ерміта (5). Наведемо оцінку точності наближення оператора $F(x)$ поліномом $T_{m,n}(x)$ у метриці простору Y .

• **Теорема 3.** Нехай $F(x)$ – оператор, $(n+1)$ раз диференційований за Фреше в X . Тоді справедлива оцінка

$$\|F(x) - T_{m,n}(x)\|_Y \leq \varepsilon_m(x) S_n(x) + o(\varepsilon_m) + \|R_n(x)\|_Y, \quad (18)$$

де $S_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{\|F^{(k)}(0)\|}{(k-1)!} \|x\|^{k-1} < M \exp(\|x\|)$, $M = \max_{1 \leq k \leq n} \|F^{(k)}(0)\|$,

$\varepsilon_m^2(x) = \left\| x - \sum_{i=1}^m (x, e_i) e_i \right\|^2 = \sum_{i=m+1}^{\infty} (x, e_i)^2$, $\|x\|^2 = (x, x)$, а $R_n(x)$ визначається формулою (17).

• *Доведення.* Як і раніше, вважаємо, що

$$\frac{1}{k!} F^{(k)}(0) v_k \dots v_1 = L_k(v_1, \dots, v_k), \quad k = \overline{1, n}, \quad (19)$$

де $F^{(k)}(0) v_k \dots v_1$ – диференціал Фреше k -го порядку в нулі за напрямками $v_1, \dots, v_k$, $L_k(v_1, \dots, v_k)$ – k -лінійна неперервна симетрична операторна форма. Тоді, аналогічно попереднім міркуванням, $T_n(x)$ можна подати у вигляді (9), а на основі (5) та (19) побудувати поліном $T_{m,n}(x)$, який є наближенням до $T_n(x)$ у метриці простору Y . Маємо

$$\|F(x) - T_{m,n}(x)\|_Y \leq \|T_n(x) - T_{m,n}(x)\|_Y + \|R_n(x)\|_Y. \quad (20)$$

Використовуючи техніку оцінювання в роботі [1], з урахуванням (19) знаходимо

$$\begin{aligned} \|T_n(x) - T_{m,n}(x)\|_Y &\leq \sum_{k=1}^n \left\| L_k x^k - L_k \left(\sum_{i=1}^m (x, e_i) e_i \right)^k \right\| \leq \\ &\leq \varepsilon_m(x) \sum_{k=1}^n \frac{\|F^{(k)}(0)\|}{(k-1)!} \|x\|^{k-1} + o(\varepsilon_m). \end{aligned} \quad (21)$$

З (20) та (21) маємо нерівність (18), що і доводить твердження теореми.

• *Зауваження 3.* На основі попередньої теореми інтерполяційний процес $T_{m,n}$ збігається до T_n , тобто

$$\|T_n(x) - T_{m,n}(x)\|_Y \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0, \quad \forall x \in X.$$

Відзначимо, що розглянуте інтерполяційне наближення до поліному Тейлора (4) за складністю та інформативністю своєї конструкції посідає проміжне місце між інтерполяційними операторними поліномами Лагранжа [1,5] та Ньютона [4,5]. Для його побудови необхідно знати похідні вищих порядків оператора за напрямками ортонормального базису, тоді як конструкція інтерполянту лагранжевого типу вимагає лише інформації про значення оператора у вузлах. Однак, інтерполяційна формула (4), на відміну від лагранжевої, дозволяє отримати оцінку точності інтерполяційного процесу для операторів, що мають скінчену кількість вищих похідних Фреше. Конструкція інтерполянту типу Ньютона містить розділені різниці вищих порядків, які можуть бути заданими у вигляді кратних інтегралів від операторних диференціалів відповідних порядків за напрямками, що визначаються лінійним оператором, який залежить від скалярного аргументу [4,5]. Але інтерполяційна формула ньютонівського типу має властивість збереження поліному того ж степеня, в той час як для інтерполяції Лагранжа [2] та інтерполяційного наближення до поліному Тейлора (4) дана властивість виконується лише в асимптотиці.

На закінчення зауважимо, що при інтерполюванні поліноміального оператора інтерполяційна лагранжева інформація на множині $\mathcal{L}(m)$ в [2] еквівалентна ермітовій інформації (5). Дійсно, згідно з [2], значення операторних форм цього поліному $L_k(e_1, e_2, \dots, e_k) = \frac{1}{k!} F^{(k)}(0) e_k \dots e_2 e_1$, $k = 0, \dots, n$, однозначно визначаються через значення оператора у вузлах множини $\mathcal{L}(m)$ лінійним перетворенням. Отже, матриця переходу від значень оператора на множині $\mathcal{L}(m)$ до значень $L_k(e_1, e_2, \dots, e_k)$ є невідродженою, тому й зворотнє твердження також справедливе. Крім того, за результатами цієї роботи можна зробити висновок, що на поліномах відповідного степеня у скінченновимірних просторах наближення $T_{m,n}(x)$ буде точним, а у нескінченновимірних – асимптотично точним.

Література

1. Хлобыстов В. В., Кашпур Е. Ф. К задаче интерполирования полиномиальных операторов // Кибернетика и системный анализ. – 1996. – № 3. – С. 106 – 108.
2. Хлобыстов В. В. К вопросу о сходимости интерполяционных процессов в гильбертовом пространстве // Кибернетика и системный анализ. – 2000. – № 6. – С. 166–172.
3. Хлобыстов В. В., Кашпур Е. Ф. Анализ точности интерполирования целых операторов в гильбертовом пространстве при возмущенных узловых значениях // Укр. мат. журн. – 2003. – 55, № 7. – С. 953 – 960.
4. Егоров А. Д., Соболевский П. Н., Янович Л. А. Приближенные методы вычисления континуальных интегралов. – Минск: Наука и техника, 1985. – 310 с.
5. Макаров В. Л., Хлобыстов В. В., Янович Л. А. Интерполирование операторов. – К.: Наукова думка, 2000. – 407 с.
6. Fillipson L. Kergin interpolation in Banach Spaces // Journal of Approximation Theory 127 (2004), 108–123.
7. Гихман И. И., Скороход А. В. Теория случайных процессов: В 3 т. – М.: Наука, 1971. Т.1 – 664 с.
8. Хлобыстов В. В., Поповичева Т. М. Про двосторонні оцінки норми операторного полінома в гільбертовому просторі // Вісник Київського університету. Серія: фіз.-мат. науки. – 2004. – вип. №2. – С. 356–361.
9. Ахиезер Н. И., Глазман И. М. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. – М.: Наука, 1966. – 543 с.
10. Треногин В. А. Функциональный анализ. – М.: Наука, 1980. – 495 с.

Надійшла до редакції 21.02.2005 р.

УДК 519.9

Катерина В. Шевченко¹

Слабкий розв'язок параболічних систем з сингулярними правими частинами

Дана робота, присвячена знаходженню умов для існування і єдиного розв'язку для параболічних систем з сингулярними правими частинами, що дозволяє нам вирішувати задачі теплосолевого переносу.

Ключові слова: параболічні системи, слабкий розв'язок

Katerina V. Shevchenko¹

Weak solution of parabolic systems with singular right parts

The subject of the paper is finding conditions for unique existence solution for parabolic systems with singular right parts; that will allow us to solve problems of heat-salt-moisture transfer;

Key Words: parabolic systems, weak solution.

¹ E-mail: vm214@dcp.kiev.ua

В параболічних задачах відновлення потужності локальних джерел виникає ряд проблем, пов'язаних з існуванням і єдиністю розв'язку рівняння стану системи. Існуюча теорія [1] не дозволяє розв'язувати такі задачі. В згаданій роботі доведені теореми існування розв'язків з $L_2((0, T) \times \Omega)$ для правих частин з простору $W_2^{-1}((0, T) \times \Omega)$, але δ -функція, зосереджена в точці, яка природно виникає в задачах ідентифікації точкових джерел, належить більш широкому простору ніж $W_2^{-1}((0, T) \times \Omega)$, коли $\Omega \in R^n$, $n > 1$.

1. Постановка задачі і основні функціональні простори.

Нехай $\Omega \in R^n$ - обмежена область з гладкою межею $\partial\Omega$. Розглянемо в циліндричній області $Q = \{(0 < t < T) \times \Omega\}$ початково-крайову задачу:

$$Lu = u_t + Au = f, \quad Au = -\sum_{i,j=1}^n (a_{ij}(x)u_{x_i})_{x_j} + \sum_{i=1}^n a_i(x)u_{x_i} + a(x)u \quad (1)$$

$$u(x, t) = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad 0 < t \leq T, \quad u(x, 0) = 0, \quad x \in \Omega. \quad (2)$$

Де Ω - обмежена область в R^n з гладкою межею $\partial\Omega$.

Припустимо, що коефіцієнти диференціального виразу (1) задовольняють умовам: $a_{ij}(x) = a_{ji}(x) \in C^1(\bar{\Omega})$, $a_i(x) \in C^1(\bar{\Omega})$, $a(x) \in C^1(\bar{\Omega})$ і виконуються нерівності:

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij} \xi_i \xi_j \geq k_0 \sum_{i=1}^n \xi_i^2, \quad \sum_{i=1}^n a_i(x) \leq a(x), \quad \sum_{i=1}^n (a_i(x))_{x_i} \leq a(x), \quad a(x) \geq 0.$$

Областю визначення $D(L)$ оператора L є множина функцій з

$C^\infty(\bar{Q})$, що задовольняють умовам (2).

Формально спряжений оператор записується у вигляді:

$$L^*v = -v_t - \sum_{i,j=1}^n (a_{ij}(x)v_{x_i})_{x_j} - \sum_{i,j=1}^n (a_i(x)v)_{x_j} + a(x)v, \quad (3)$$

Областю визначення $D(L^*)$ оператора L^* є множина функцій з $C^\infty(\bar{Q})$, що задовольняють умовам:

$$v(x,t) = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad 0 < t \leq T, \quad v(x,T) = 0, \quad x \in \Omega. \quad (4)$$

Для дослідження задачі (1),(2) введемо наступні гільбертові простори. Простір H – поповнення простору $D(L)$ за соболевською нормою

$$\|u\|_H^2 = \int_Q \left(u_t^2 + \sum_{i=1}^n u_{x_i}^2 + \sum_{i,j=1}^n u_{x_i x_j}^2 \right) dQ.$$

Простір H_+ – поповнення простору $D(L^*)$ по аналогічній нормі.

По парам $H, L_2(Q)$ та $H_+, L_2(Q)$ побудуємо негативні простори, $(H)^*$ та $(H_+)^*$ поповнюючи $L_2(Q)$ за нормами:

$$\|f\|_{(H)^*} = \sup_{\substack{u \in H \\ u \neq 0}} \frac{|(f,u)_{L_2(Q)}|}{\|u\|_H}, \quad \text{або} \quad \|f\|_{(H_+)^*} = \sup_{\substack{v \in H_+ \\ v \neq 0}} \frac{|(f,v)_{L_2(Q)}|}{\|v\|_{H_+}}, \quad \text{відповідно.}$$

Має місце ланцюжок щільних вкладень просторів [2]:

$$H \subset L_2(Q) \subset (H)^*, \quad H_+ \subset L_2(Q) \subset (H_+)^*$$

Позначимо C та $C_i, i=1,2,3,\dots$ – додатні константи, що не залежать від функцій $u(t,x)$ та $v(t,x)$.

2. Априорні оцінки.

Дослідимо властивості оператора (1) та формально спряженого до нього:

Лема 1. Для довільної функції $u(t,x) \in D(L)$ має місце оцінка

$$\|Lu\|_{L_2(Q)} \leq C_1 \|u\|_H.$$

Доведення. Для довільного $u(t,x) \in D(L)$ розглянемо:

$$\begin{aligned} \|Lu\|_{L_2(Q)}^2 &= \int_Q (Lu)^2 dQ = \int_Q (u_t + Au)^2 dQ = \int_Q (u_t^2 + 2u_t Au + (Au)^2) dQ = \\ &= \int_Q \left(u_t^2 + 2u_t \left(- \sum_{i,j=1}^n (a_{ij}(x)u_{x_i})_{x_j} + \sum_{i=1}^n a_i(x)u_{x_i} + au \right) + (Au)^2 \right) dQ \end{aligned}$$

тобто розглянемо:

$$\|Lu\|_{L_2(Q)}^2 = I_1 + I_2 + I_3, \quad (5)$$

де

$$I_1 = \int_Q u_t^2 dQ \leq C \|u\|_H^2,$$

$$I_2 = \int_Q 2u_i \left(- \sum_{j=1}^n (a_{ij}(x) u_{x_j})_{x_i} + \sum_{i=1}^n a_i(x) u_{x_i} + au \right) dQ,$$

$$I_3 = \int_Q (Au)^2 dQ.$$

Оцінимо інтеграли I_2 та I_3 в (5) за допомогою нерівності:

$$ab \leq \frac{\varepsilon}{2} a^2 + \frac{1}{2\varepsilon} b^2, \text{ при } \varepsilon > 0, \text{ тоді}$$

$$\begin{aligned} I_2 &\leq \int_Q \varepsilon u_i^2 + \frac{1}{\varepsilon} \left(- \sum_{j=1}^n (a_{ij}(x) u_{x_j})_{x_i} + \sum_{i=1}^n a_i(x) u_{x_i} + au \right)^2 dQ \leq \\ &\leq \varepsilon \|u\|_H^2 + \frac{1}{\varepsilon} \int_Q \left(\left(\sum_{j=1}^n (a_{ij}(x) u_{x_j})_{x_i} \right)^2 + \left(\sum_{i=1}^n a_i(x) u_{x_i} \right)^2 + (au)^2 \right) dQ + \\ &+ \frac{1}{\varepsilon} \int_Q \left(- \left(\sum_{j=1}^n (a_{ij}(x) u_{x_j})_{x_i} \right) \left(\sum_{i=1}^n a_i(x) u_{x_i} \right) \right) dQ \\ &+ \frac{1}{\varepsilon} \int_Q \left(- 2au \left(\sum_{j=1}^n (a_{ij}(x) u_{x_j})_{x_i} \right) + 2au \sum_{i=1}^n a_i(x) u_{x_i} \right) dQ \end{aligned}$$

Розглянемо наступний вираз:

$$\frac{1}{\varepsilon} \int_Q \left(\sum_{j=1}^n (a_{ij}(x) u_{x_j})_{x_i} \right)^2 dQ = \frac{1}{\varepsilon} \int_Q \left(\sum_{j=1}^n (a_{ij}(x))_{x_i} u_{x_j} + \sum_{j=1}^n a_{ij}(x) u_{x_j x_i} \right)^2 dQ.$$

Розкриваючи дужки та оцінюючи зверху одержимо:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varepsilon} \int_Q \left(\sum_{j=1}^n (a_{ij}(x) u_{x_j})_{x_i} \right)^2 dQ &\leq C_2 \int_Q \left(\left(\sum_{j=1}^n u_{x_j} \right)^2 + 2 \sum_{i,j=1}^n u_{x_i} u_{x_j x_i} + \left(\sum_{i,j=1}^n u_{x_i x_j} \right)^2 \right) dQ \leq \\ &\leq C_3 \int_Q \left(\left(\sum_{j=1}^n u_{x_j} \right)^2 + \left(\sum_{i,j=1}^n u_{x_i x_j} \right)^2 \right) dQ \leq C_4 \|u\|_H^2 \end{aligned}$$

Аналогічно розглядаючи інші доданки, отримаємо

$$I_2 \leq \varepsilon \|u\|_H^2 + \frac{1}{\varepsilon} \|u\|_H^2 \leq C \|u\|_H^2, \quad I_3 = \int_Q (Au)^2 dQ \leq C \|u\|_H^2. \text{ Отже } \|Lu\|_{L_2(Q)} \leq C_1 \|u\|_H.$$

Зауваження 1. Отримана нерівність дозволяє розширити по неперервності оператор L на весь простір H , при цьому нерівність леми виконується для довільної функції $u(t, x) \in H$. Під L розуміємо вже розширений оператор.

Лема 2. Для довільної функції $v(t, x) \in D(L^*)$ має місце оцінка

$$\|L^* v\|_{L_2(Q)} \leq C_1 \|v\|_{H_2}.$$

Доведення. Леми 2 проводиться аналогічно доведенню леми 1.

Зауваження 2. Отримана нерівність дозволяє розширити по неперервності оператор L^* на весь простір H_2 , при цьому нерівність леми виконується для довільної функції $v(t, x) \in H_2$. Під L^* розуміємо вже

розширений оператор.

Лема 3. Для довільної функції $u(t, x) \in H$ має місце оцінка

$$C_1 \|u\|_H \leq \|Lu\|_{L_2(Q)}$$

Доведення. Для довільного $u(t, x) \in D(L)$ розглянемо:

$$\|Lu\|_{L_2(Q)}^2 = \int_Q (Lu)^2 dQ = \int_Q (u_t + Au)^2 dQ = \int_Q (u_t^2 + 2u_t Au + (Au)^2) dQ =, \quad (6)$$

$$= \int_Q \left(u_t^2 + 2u_t \left(- \sum_{i,j=1}^n (a_{ij}(x) u_{x_i})_{x_j} + \sum_{i=1}^n a_i(x) u_{x_i} + au \right) + (Au)^2 \right) dQ =$$

$$= \int_Q \left(u_t^2 + 2 \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) u_{x_i} u_{x_j} + (Au)^2 + 2u_t \left(\sum_{i=1}^n a_i(x) u_{x_i} + au \right) \right) dQ =$$

$$= \int_Q \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) u_{x_i} u_{x_j} \right)_{t=T} d\Omega + \int_Q \left(u_t^2 + (Au)^2 + 2u_t \left(\sum_{i=1}^n a_i(x) u_{x_i} + au \right) \right) dQ$$

Перенесемо останній доданок вліво:

$$\|Lu\|_{L_2}^2 - \int_Q \left(2 \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) u_{x_i} u_{x_j} + 2au_t u \right) dQ =$$

$$= \int_Q \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) u_{x_i} u_{x_j} \right)_{t=T} d\Omega + \int_Q (u_t^2 + (Au)^2) dQ$$

Скористуємось наступною нерівністю: $ab \leq \frac{\varepsilon}{2} a^2 + \frac{1}{2\varepsilon} b^2$, при $\varepsilon > 0$,

тоді:

$$\|Lu\|_{L_2(Q)}^2 - \int_Q \left(2 \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) u_{x_i} u_{x_j} + 2au_t u \right) dQ \leq \quad (7)$$

$$\leq \|Lu\|_{L_2(Q)}^2 + \int_Q \left(\varepsilon u_t^2 + \frac{1}{2\varepsilon} \sum_{i,j=1}^n u_{x_i}^2 + \frac{1}{2\varepsilon} (u)^2 \right) dQ$$

Мають місце наступні нерівності [2]:

$$\int_Q \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) u_{x_i} u_{x_j} \right)_{t=T} d\Omega \geq \alpha \int_Q \sum_{i,j=1}^n u_{x_i}^2|_{t=T} d\Omega \quad (8)$$

$$\|Au\|_{L_2(\Omega)}^2 \geq C_1 \|u\|_{W_2^1(\Omega)}^2 - C_2 \|u\|_{L_2(\Omega)}^2, \quad C_1 > 0, C_2 > 0 \quad (9)$$

Використовуючи нерівності (7), (8), (9) маємо:

$$\begin{aligned} C_1 \int_Q u^2 dQ + \sum_{i=1}^n u_{x_i}^2 + \sum_{i,j=1}^n u_{x_i x_j}^2 dQ + \int_Q u_t^2 dQ \leq \\ \leq C_2 \int_Q u^2 dQ + \|Lu\|_{L_2(Q)}^2 + \int_Q \left(\varepsilon u_t^2 + \frac{1}{2\varepsilon} \sum_{i,j=1}^n u_{x_i}^2 + \frac{1}{2\varepsilon} (u)^2 \right) dQ \end{aligned}$$

Візьмемо $\varepsilon = \frac{1}{2C_1}$, та використовуючи нерівність Фрідрікса

$(\|u\|_{L_2(Q)} \leq C \|u\|_{W_2^{0,1}(Q)})$ отримаємо:

$$C_1 \left(\|u\|_{L_2(Q)}^2 + \|u\|_{W_2^{0,1}(Q)}^2 + \|u\|_{W_2^{0,2}(Q)}^2 \right) + \frac{1}{2} \|u\|_{L_2(Q)}^2 \leq$$

$$\leq C_2 \|u\|_{L_2(Q)}^2 + \frac{1}{2} \|u\|_{W_2^{0,1}(Q)}^2 + \frac{1}{2} \|u\|_{L_2(Q)}^2 + \|Lu\|_{L_2(Q)}^2 \leq$$

$$\leq C_3 \|u\|_{W_2^{0,1}(Q)}^2 + \|Lu\|_{L_2(Q)}^2, C_1, C_2, C_3 > 0.$$

$$\text{Тобто } C_1 \|u\|_H^2 \leq C_3 \|u\|_{W_2^{0,1}(Q)}^2 + \|Lu\|_{L_2(Q)}^2.$$

За допомогою граничного переходу отримаємо нерівність, що виконується для довільної функції $u(t, x) \in H$. Припустимо, що нерівність

$$C_1 \|u\|_H \leq \|Lu\|_{L_2(Q)} \text{ не виконується, тобто } \forall n \exists u_n \in H: \|Lu_n\|_{L_2(Q)} < \frac{1}{n} \|u_n\|_H.$$

Вважаємо, що $\|u\|_H = 1$. Оператор вкладення $H \subset W_2^{0,1}(Q)$ - компактний. З

послідовності $u_n \in H$ можна виділити підпослідовність $u_{n_k}: u_{n_k} \rightarrow \varphi \in W_2^{0,1}(Q)$ сильно в $W_2^{0,1}(Q)$. Разом з тим

$$\|Lu_{n_k}\|_{L_2(Q)} < \frac{1}{n_k} \|u_{n_k}\|_H = \frac{1}{n_k} \rightarrow 0.$$

$$\text{Отже, } C \|u_{n_k} - u_{n_l}\|_H^2 \leq C_3 \|u_{n_k} - u_{n_l}\|_{W_2^{0,1}}^2 + \|Lu_{n_k} - Lu_{n_l}\| \rightarrow 0 \text{ при}$$

$k \rightarrow \infty, l \rightarrow \infty$. Отже u_{n_k} фундаментальна в H та збіжна до $\varphi \in H$. Тоді

$\varphi \in H$ та $u_{n_k} \rightarrow \varphi$ в H і $\|\varphi\|_H = 1$. Але $L\varphi = \lim_{k \rightarrow \infty} Lu_{n_k} = 0$ та $0 \neq \varphi \in H$,

$\text{Ker} L \neq \{0\}$. Тобто оператор L не є ін'єктивним, що суперечить постановці

задачі, а отже маємо: $C_1 \|u\|_H \leq \|Lu\|_{L_2(Q)}$.

Лема 4. Для довільної функції $v(t, x) \in H_+$ має місце оцінка

$$C_1 \|v\|_{H_+} \leq \|L^* v\|_{L_2(Q)}$$

Доведення. Лема 4 проводиться аналогічно доведенню леми 3.

3. Існування і єдність слабкого розв'язку.

Позначимо через $\langle \cdot, \cdot \rangle$ білінійну форму побудовану розширенням скалярного добутку в $L_2(Q)$ за неперервністю до білінійної форми на $(H)^* \times H$, та позначимо через $\langle \cdot, \cdot \rangle_+$ білінійну форму побудовану розширенням скалярного добутку в $L_2(Q)$ за неперервністю до білінійної форми на $(H_+)^* \times H_+$.

Розглянемо операторні рівняння:

$$Lu = f \tag{10}$$

$$L^* v = g \tag{11}$$

Означення 1. $u \in L_2(Q)$ - називається слабким розв'язком рівняння (10), якщо

$$(u, L^*v)_{L_2(Q)} = \langle f, v \rangle_+, \forall v \in H_+. \quad (12)$$

Зауваження 3. Аналогічно можна визначити слабкий розв'язок $v \in L_2(Q)$ рівняння (11).

Теорема 1. Для будь-якого елемента $f \in L_2(Q)$ існує єдиний розв'язок $u \in H$ операторного рівняння (10) в нормі простору $L_2(Q)$.

Доведення.

В силу нерівностей Лема 1 та Лема 3, а саме: $\|u\|_H \leq C_1 \|Lu\|_{L_2(Q)} \leq C_2 \|u\|_H$, оператор $L(\cdot)$ діє як лінійний неперервний оператор з простору H в $L_2(Q)$. З нерівності $\|u\|_H \leq C_1 \|Lu\|_{L_2(Q)}$ Лема 1, випливає, що область значення оператора $L(\cdot)$ замкнена в $L_2(Q)$: $R(L) \subseteq L_2(Q)$. Залишається довести щільність її в $L_2(Q)$. Для цього треба показати для будь-якої $u \in H$ рівність $(g, Lu)_{L_2(Q)} = 0$ виконується тільки у

випадку коли $g = 0$. Для цього візьмемо $g: g = I_t u = \int_T^t -e^{-\frac{nC_B^2}{k_1} \tau} u(\tau, x) d\tau$, де

C_B — константа, що мажорує $|a_i(x)|$, яка існує в силу неперервності $a_i(x)$ в $\overline{\Omega}$ ($i = \overline{1, n}$), n — розмірність області Ω . Ясно, що функція $g(t, x)$ задовільняє умовам (4). Представляючи $u(t, x)$ через $g(t, x)$, отримаємо

$$u(t, x) = -e^{\frac{nC_B^2}{k_1} t} v_t(t, x).$$

Розглянемо:

$$(Lu, g)_{L_2} = (u, L^*g)_{L_2} = \left(-e^{\frac{nC_B^2}{k_1} t} g_t(t, x), L^*g \right)_{L_2} = I_1 + I_2 + I_3 + I_4, \text{ де}$$

$$I_1 = \int_Q e^{\frac{nC_B^2}{k_1} t} g_t^2 dQ;$$

$$I_2 = \int_Q e^{\frac{nC_B^2}{k_1} t} g_t \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} g_{x_j} \right)_{x_i} dQ = \int_Q \left(e^{\frac{nC_B^2}{k_1} t} g_t \sum_{j=1}^n a_{ij} g_{x_j} \right)_{x_i} dQ - \int_Q \sum_{j=1}^n e^{\frac{nC_B^2}{k_1} t} a_{ij} g_{x_j} g_{x_i} dQ.$$

Користуючись формулою Остроградського-Гауса, можна довести, що перший справа інтеграл дорівнює нулю ($g_t|_{x \in \partial \Omega} = 0$). До другого інтегралу застосуємо формулу інтегрування по частинам:

$$I_2 = - \int_Q \sum_{j=1}^n e^{\frac{nC_B^2}{k_1} t} a_{ij} g_{x_j} g_{x_i} dQ = - \frac{1}{2} \int_Q \left(\sum_{j=1}^n e^{\frac{nC_B^2}{k_1} t} a_{ij} g_{x_j} g_{x_i} \right)_i dQ + \frac{1}{2} \int_Q \sum_{j=1}^n \frac{nC_B^2}{\alpha_j} e^{\frac{nC_B^2}{k_1} t} a_{ij} g_{x_j} g_{x_i} dQ.$$

Користуючись формулою Остроградського-Гауса, перейдемо в першому справа доданку до інтегралу по поверхні. До другого доданку застосуємо нерівність $\sum_{j=1}^n a_{ij} \xi_j \xi_j \geq k_A \sum_{j=1}^n \xi_j^2$, маємо

$$\begin{aligned}
 I_2 &= -\frac{1}{2} \int_Q \left(\sum_{j=1}^n e^{\frac{nC_B^2}{k_j}} a_{ij} g_{x_i} g_{x_j} \right) dQ + \frac{1}{2} \int_Q \sum_{j=1}^n \frac{nC_B^2}{k_j} e^{\frac{nC_B^2}{k_j}} a_{ij} g_{x_i} g_{x_j} dQ \geq \\
 &\geq \frac{1}{2} \int_Q \sum_{j=1}^n a_{ij} g_{x_i} g_{x_j} \Big|_{t=0} d\Omega + \int_Q \sum_{j=1}^n nC_B^2 e^{\frac{nC_B^2}{k_j}} g_{x_i}^2 dQ; \\
 I_3 &= \int_Q \sum_{j=1}^n e^{\frac{nC_B^2}{k_j}} b_j g_i g_{x_j} dQ \geq - \int_Q \sum_{j=1}^n C_B e^{\frac{nC_B^2}{k_j}} |g_i| |g_{x_j}| dQ; \\
 I_4 &= - \int_Q e^{\frac{nC_B^2}{k_i}} \left(C - \sum_{i=1}^n \frac{\partial b_i}{\partial x_i} \right) g_i v dQ = - \frac{1}{2} \int_Q \left(e^{\frac{nC_B^2}{k_i}} \left(C - \sum_{i=1}^n \frac{\partial b_i}{\partial x_i} \right) g^2 \right) dQ + \\
 &+ \frac{1}{2} \int_Q \frac{nC_B^2}{k_i} e^{\frac{nC_B^2}{k_i}} \left(C - \sum_{i=1}^n \frac{\partial b_i}{\partial x_i} \right) g^2 dQ \geq \frac{1}{2} \int_Q \left(C - \sum_{i=1}^n \frac{\partial b_i}{\partial x_i} \right) g^2 \Big|_{t=0} dQ \geq 0
 \end{aligned}$$

Таким чином,

$$\begin{aligned}
 (Lu, g)_{L_2} &\geq \int_Q e^{\frac{nC_B^2}{k_i}} \left(g_i^2 + \sum_{j=1}^n \frac{nC_B^2}{2} g_{x_j}^2 - \sum_{j=1}^n C_B |g_i| |g_{x_j}| \right) dQ = \\
 &= \sum_{i=1}^n \int_Q \frac{1}{n} e^{\frac{nC_B^2}{k_i}} \left[\left(\frac{\sqrt{3}}{2} |g_i| - \frac{nC_B}{\sqrt{3}} |g_{x_i}| \right)^2 + \frac{1}{4} g_i^2 + \frac{n^2 C_B^2}{6} g_{x_i}^2 \right] dQ \geq \\
 &\geq C \int_Q \left(g_i^2 + \sum_{j=1}^n g_{x_j}^2 \right) dQ \geq C \|g\|_{L_2(Q)},
 \end{aligned}$$

де C — деяка додатня константа.

Оскільки $0 = (Lu, g)_{L_2} \geq C \|g\|_{L_2(Q)}$, то $\|g\|_{L_2(Q)} = 0$

Тобто область значення оператора $L(\cdot)$ замкнена та щільна в $L_2(Q)$, з чого слідує, що область значення оператора $L(\cdot)$ співпадає з $L_2(Q)$ — $R(L) \subseteq L_2(Q)$. А значить існує єдиний розв'язок $u \in H$ операторного рівняння (10) в нормі простору $L_2(Q)$ для будь-якого елемента $f \in L_2(Q)$.

Теорема 2. Для будь-якого елемента $g \in L_2(Q)$ існує єдиний розв'язок $v \in H$ операторного рівняння (11).

Теорема 3. Для будь-якого елемента $f \in (H_*)'$ існує єдиний слабкий розв'язок $u \in L_2(Q)$ задачі (10).

Доведення. Розглянемо $F(v) = \langle f, v \rangle_{(H_*)'}$. Очевидно, що $|F(v)| \leq \|f\|_{(H_*)'} \|v\|_{H_*}$.

З Лемми 4 $\|v\|_{H_*} \leq C \|L^* v\|_{L_2}$, де $L^* v \in L_2(Q)$, маємо $|F(v)| \leq \bar{C} \|L^* v\|_{L_2(Q)}$. В силу цієї нерівності та Теорема 2 $F(v)$ можемо розглядати як лінійний неперервний функціонал визначений на $L_2(Q)$. За теоремою Рісса про представлення лінійного неперервного функціонала в гільбертовому

просторі, існує і єдиний елемент
 $u \in L_2(Q): (u, L^* v)_{L_2(Q)} = \langle f, v \rangle_+, \quad \forall v \in H_+.$

Теорема 4. Для будь-якого елемента $g \in (H)^*$ існує єдиний слабкий розв'язок $v \in L_2(Q)$ задачі (11).

Для розв'язків рівняння (10) мають місце апріорні оцінки:

$$\|u\|_H \leq C \|f\|_{L_2(Q)}, \quad f \in L_2(Q), \quad \|u\|_{L_2(Q)} \leq C \|f\|_{(H_+)^*}, \quad f \in (H_+)^*$$

Висновок

Отже в даній роботі доведено існування і єдиність розв'язку крайової задачі в просторі для достатньо широких класів сингулярних функцій джерел.

Література

1. Ляшко С.І. Обобщенное управление линейными системами. – Київ: Наукова думка, 1998.
2. Березанский Ю.М. Разложение по собственным функциям самоспряженных операторов. – Київ: Наукова Думка, 1965. – с. 49, с. 125.
3. Михайлов В.П. Дифференциальные уравнения в частных производных. – Москва: Наука, 1983 –с. 405.

Надійшла до редакції 14.12.2004

УДК 519.67

Світлана І. Яремчук,
Лідія В. Рудюк¹

Алгоритми розв'язання задачі розміщення прямокутників в прямокутній області

Обґрунтовується можливість заміни розв'язання вихідної задачі оптимізації розв'язанням ряду підзадач. Доводиться теорема про кількість побудованих підзадач. Наводиться ідея розробленого методу G-проекції для розв'язання підзадачі. Наводиться побудований метод спрямованого перебору підзадач для розв'язання вихідної задачі.

Ключові слова: математичне моделювання, розміщення, прямокутник.

Svitlana I. Yaremchuk,
Lidia V. Rudyuk¹

The algorithms of a solving of rectangles placement in rectangular area problem

The possibility of given problem replacement by series of subproblems is proved. The theorem about the number of subproblems is proved. The developed method of G-projection for subproblems solving is given. The developed method of directional choosing of subproblems for initial problem solving is given.

Key Words: mathematical modeling, placement, rectangles

¹ E-mail: edaina@zet.zhitomir.ua

Задачі, пов'язані з розміщенням геометричних об'єктів прямокутної форми у заданих прямокутних областях виникають в різних галузях народного господарства. Наприклад, в мікроелектроніці, при проектуванні розміщення елементів на мікросхемі, чи в енергетиці при проектуванні машинних зал електростанції. До класу таких задач також належать і задачі оптимального розкрою матеріалів.

Розроблені на цей час підходи [1, 2] до розв'язання оптимізаційних задач розміщення ґрунтуються на модифікаціях методу гілок та меж, евристичних методах та лінійному. В даній статті запропоновано підхід, що використовує градієнтні методи, базуються на специфічних рисах поставленої задачі та працює для диференційованих функцій цілі.

1. Нехай маємо m геометричних об'єктів прямокутної форми $D_j, j = 1, \dots, m$, основними характеристиками кожного з яких є його розміри $l_j (l_j^1, l_j^2, \dots, l_j^n)$ та положення у просторі, що визначається координатами полюсу $Z_j (\xi_j^1, \xi_j^2, \dots, \xi_j^n)$ [3]. Очевидно, розміщення m прямокутних об'єктів буде визначатись вектором $Z = (Z^1, Z^2, \dots, Z^m)$.

Також є прямокутна область розміщення прямокутників Ω , розміри якої визначається вектором $a(a_1, a_2, \dots, a_n)$.

На розміщення геометричних об'єктів в області накладено умови:

- взаємного неперетинання прямокутників: для кожної пари D_i, D_p прямокутників існує хоча б одне $i \in \{1, \dots, n\}$ таке, що

$$|\xi_i' - \xi_i''| \geq \frac{l_i' + l_i''}{2}, \quad s = 1, \dots, m-1; \quad p = s+1, \dots, m; \quad (1)$$

- належності прямокутників області розміщення Ω : для кожного прямокутника D_j виконується

$$\frac{l_j'}{2} \leq \xi_j' \leq a_j - \frac{l_j'}{2}, \quad i = 1, \dots, n; \quad j = 1, \dots, m. \quad (2)$$

Необхідно знайти таке розміщення прямокутників в області Ω , при якому досягає екстремуму обраний критерій якості

$$f(Z) \rightarrow \text{extr}, Z \in G, \quad (3)$$

де $f(Z)$ – неперервна та неперервно диференційована на G функція.

Обмеження (1-2) описують множину припустимих розв'язків G поставленої задачі, яка є багатовимірною та має складну структуру.

Умовою застосування методів умовної оптимізації для розв'язання поставленої задачі є опуклість множини припустимих розв'язків. Тому множину припустимих розв'язків поставленої задачі представимо у вигляді об'єднання опуклих підмножин наступним чином [4, 5].

Нерівність (1) перепишемо у вигляді

$$\left(\xi_i' - \xi_i'' \geq \frac{l_i' + l_i''}{2} \right) \vee \left(\xi_i'' - \xi_i' \geq \frac{l_i' + l_i''}{2} \right), \quad s = 1, \dots, m-1; \quad p = s+1, \dots, m. \quad (1')$$

Оберемо для кожної пари прямокутників одну з n координат, за якою буде задана умова неперетинання, та для обраної координати визначимо одну з двох умов неперетинання (1'). До побудованих таким чином умов додамо нерівності (2), що визначають умови належності прямокутників області Ω .

$$\begin{cases} \xi_i' - \xi_i'' \leq \frac{l_i' + l_i''}{2}, \\ -\xi_i' \leq \frac{l_i'}{2}, \\ \xi_i' \leq a_i - \frac{l_i'}{2}, \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} \xi_i'' - \xi_i' \leq \frac{l_i' + l_i''}{2}, \\ -\xi_i' \leq \frac{l_i'}{2}, \\ \xi_i' \leq a_i - \frac{l_i'}{2}, \end{cases} \quad \begin{matrix} s = 1, \dots, m-1, \\ p = s+1, \dots, m, \\ j = 1, \dots, m. \end{matrix} \quad (1'')$$

Кожна з (1'') є системою лінійних нерівностей і тому визначає опуклу підмножину припустимих розв'язків поставленої задачі.

Теорема 1. Кількість опуклих підмножин, що описуються системами (1''), дорівнює

$$r = (2n)^{C_m},$$

де n – вимірність простору, m – кількість прямокутників.

Об'єднання цих підмножин є множина G :

$$G = \bigcup_{k=1}^r G_k, \text{ де } r = (2n)^{1/2}.$$

Тобто, розв'язання задачі оптимізації розміщення прямокутників в прямокутній області можна замінити розв'язанням r підзадач оптимізації тієї ж функції цілі на кожній з підмножин G_k ($k = 1, 2, \dots, r$), які являють собою опуклі багатогранники:

$$f(Z) \rightarrow \text{extr}, \quad Z \in G_k, \quad k = 1, \dots, r. \quad (4)$$

До розв'язання кожної з побудованих підзадач (4) можна застосувати різні класичні методи умовної оптимізації.

2. Для задач оптимізації, що належать до класу, який розглядається, було розроблено спеціальний чисельний метод, який було названо методом G -проекції. Основна ідея методу G -проекції полягає у наступному. Розглянемо матрицю активних обмежень.

Рядки цієї матриці, які відповідають обмеженням (2), описують умови належності прямокутників області розміщення і містять $2m-1$ нульових елементів та один одиничний елемент з відповідним знаком. Номер стовпчика, що містить одиничний елемент, визначає координату вектора розміщення прямокутників, на яку накладена умова належності прямокутника області розміщення.

Рядки матриці активних обмежень, які відповідають обмеженням (1), описують умови неперетинання прямокутників і містять $2m-2$ нульових елементів та два одиничних елементи з протилежними знаками. Нумери стовпчиків, що містять одиничні елементи визначають координати вектора розміщення прямокутників, на які накладені умови неперетинання прямокутників.

Розглянемо одночасно координати антиградієнта функції цілі в поточному наближенні та відповідні стовпчики матриці активних обмежень.

Якщо k -тий стовпчик матриці активних обмежень крім нульових елементів містить хоча б один елемент, знак якого збігається зі знаком k -тої координати антиградієнта функції цілі, то обрана координата вважається «стримуваною».

Якщо k -тий стовпчик матриці активних обмежень крім нульових елементів містить хоча б один елемент, знак якого протилежний знакові k -тої координати антиградієнта функції цілі та умова 1 не виконується, то обрана координата вважається «стримуючою».

Якщо k -тий стовпчик матриці активних обмежень нульовий, то обрана координата вважається «вільною», її зміна не виведе за множину припустимих розв'язків.

Очевидно, що для того щоб наступне наближення до розв'язку задачі оптимізації належало множині припустимих розв'язків цієї задачі.

потрібно заборонити зміну «стримуваних» координат. Тобто, в векторі спуску «стримувані» координати прирівнюються нулю. Інші співпадають з відповідними координатами антиградієнту.

Алгоритм методу G-проекції є таким.

1. Для поточного наближення до розв'язку задачі x^k визначається матриця A_k – матриця обмежень, активних в даному наближенні.
2. Наступне наближення до розв'язку задачі x^{k+1} знаходиться за правилом:
$$x^{k+1} = x^k + \beta_k d^k.$$

β_k знаходиться з умови $f(x^k + \beta_k \cdot d^k) = \min_{0 \leq \beta \leq 1} f(x^k + \beta \cdot d^k)$;

d^k визначається наступним чином:

На початку покладається $d^k = -\nabla f(Z^k)$. Якщо A_k не порожня, то кожної координати антиградієнта функції цілі ($i = 1, \dots, n \cdot m$) перевіряється відповідний стовпчик матриці A_k .

Якщо s -тий ($s \in \{1, \dots, n \cdot m\}$) стовпчик матриці A_k містить хоча б один одиничний елемент, знак якого збігається зі знаком антиградієнта функції цілі, то s -та координата вектора Z вважається «стримуваною» (тобто її зміну необхідно заборонити). В векторі спуска елемент $-\partial f(x^k) / \partial \xi_s$ покладається рівним 0.

Проведено порівняльний аналіз розробленого методу G-проекції із класичними методами умовної оптимізації та зроблено висновок, що розв'язок даної підзадачі оптимізації знаходиться методом G-проекції за меншу кількість ітерацій, та за значно коротший проміжок часу на кожній ітерації.

3. Для того щоб формально розв'язати задачу оптимального розміщення геометричних об'єктів прямокутної форми в прямокутній області на всій множині припустимих розв'язків потрібно розв'язати кожен з підзадач (4), тобто провести повний перебір. Кількість таких підзадач визначена теоремою 1.

Але вже у випадку 6 прямокутників кількість підзадач настільки велика, що всі їх розв'язати за якийсь прийнятний термін неможливо.

Для розв'язання поставленої задачі оптимізації було розроблено алгоритм, який полягає в спрямованому переборі підмножин множини припустимих розв'язків: наступна підзадача для розв'язування обирається з тих підзадач, до множини припустимих розв'язків яких належить розв'язок Z^{k-1} попередньої підзадачі.

Алгоритм методу спрямованого перебору є таким.

1. Задається початкова точка $Z^0 \in G_1$; k присвоюється значення 1.
2. Знаходиться розв'язок задачі на підмножині G_k , отримується точка Z^k .
3. Знаходиться номер підмножини припустимих розв'язків G_k , якій належить знайдений розв'язок Z^k і для якої виконується умова $k \neq 1$.

4. Якщо розв'язок Z^* належить тільки підмножині G_i , то процес розв'язання припиняється, і знайдене наближення Z^* приймається за розв'язок задачі. Інакше Z^* вважається початковою точкою, з присвоєються значення t і здійснюється перехід до пункту 2 алгоритму.

Для підвищення ефективності роботи алгоритму спрямованого перебору робиться кілька проб оптимізації, в кожній з яких за початкову G_i обираються різні підмножини з G_i , $k = 1, \dots, r$, а потім за розв'язок обирається найкращий.

Таким чином по роботі можна зробити наступні висновки:

1. Побудована математична модель задачі оптимізації розміщення прямокутників шляхом представлення множини припустимих розв'язків задачі у вигляді об'єднання опуклих підмножин.
2. Розроблено метод побудови опуклих підмножин множини припустимих розв'язків. Доведено теорему про кількість таких підмножин та про можливість заміни розв'язання вихідної задачі оптимізації на множині складної структури розв'язання ряду побудованих підзадач на опуклих підмножинах.
3. Побудовано спеціальний чисельний метод G-проекції для розв'язання обраної підзадачі оптимізації, що використовує специфічні риси поставленої задачі.
4. Розроблено метод спрямованого перебору побудованих підзадач для розв'язання вихідної задачі оптимізації.

Література

1. Рвачев В.Л. Геометрические приложения алгебры логики. – Киев: Техника, 1967. – 212с.
2. Стоян Ю.Г., Гиль И.Н. Методы и алгоритмы размещения плоских геометрических объектов. – Киев: Наук.думка, 1976. – 248с.
3. Стоян Ю.Г., Путятин В.П. Размещение источников физических полей. – Киев: Наук. думка, 1981. – 186с.
4. Жовновський Д.О., Рудюк Л.В., Саваневич К.С., Ярешчук С.І. Оптимізація розміщення джерел фізичного поля модифікованим методом Розена // Вісн. Житомир. інж.-технол. ін-ту. Технічні науки. 2000. № 13. С. 188-191.
5. Svetlana I. Yaremchuk, Lidia V. Ruduyk. Practical solution of the problem of rectangular physical field sources arrangement in rectangle // Proceedings of the Fifth international scientific conference "electronic, Computers and Informatics" 2002, October 10-11, 2002 Kosice-Herľany, Slovakia. P.93-97.

Надійшла до редакції 25.01.2005

РАДІОФІЗИКА

УДК 621.38

Олександр С. Баужа^{1*},
Олександр М. Воскобойніков²,
Олег В. Третяк¹

Вплив спін-орбітальної взаємодії на намагніченість квантових точок

В роботі представлені теоретичні розрахунки впливу спін-орбітальної взаємодії на намагніченість електронів в мало розмірних квантових точках. Отримані нами характеристики демонструють незвичну поведінку при температурі рівній нулю. Різкі зміни намагніченості при низьких магнітних полях пов'язані з перетином енергетичних рівнів електронів. Ці перетини виникають за рахунок спін-орбітальної та електрон-електронної взаємодії. Детальні розрахунки проведені для InAs та InSb квантових точок демонструють збільшення парамагнетизму цих точок.

Ключові слова: квантові точки, спін-орбітальна взаємодія, електрон-електронна взаємодія, намагніченість.

Oleksandr S. Bauzha^{1*},
Oleksandr M. Voskobyonikov²,
Oleg V. Tretyak¹

Influence of spin-orbit interaction on quantum dots magnetization.

We present a theoretical study of the effect of the spin-orbit interaction on the electron magnetization of small semiconductor quantum dots. Those characteristics demonstrate quite interesting behavior at zero temperature. The abrupt changes of the magnetization at low magnetic fields are attributed to the alternative crossing between the spin-split electron levels in the energy spectrum, essentially due to the spin-orbit and electron-electron interaction. Detailed calculation using parameters of InAs and InSb semiconductor quantum dot demonstrates an enhancement of paramagnetism of the dots.

Key Words: quantum dots, spin-orbit interaction, electron-electron interaction, magnetization.

¹ Kyiv Taras Shevchenko University, 64 Volodymyrska st., 01033 Kyiv, Ukraine

² National Chiao Tung University, 1001 Ta Hsueh Rd., Hsinchu 300, Taiwan

*E-mail: asb@univ.kiev.ua

1. Вступ

Внаслідок покращення нанотехнологій стало можливим створювати системи квантових точок, що відрізняються одна від одної кількістю точок та величиною хімічного потенціалу в них. Це зробило актуальним ретельне вивчення енергетичного спектру електронів у різноманітних квантових точках [1,2]. Для магнітних квантових точок також важливими є дослідження процесів намагнічування, які інтенсивно проводилися протягом останнього десятиліття [3-12]. Ці дослідження, по-перше, надають важливу інформацію про спінову динаміку атомних кластерів в зовнішньому магнітному полі, й, по-друге, утворюють науковий базис для подальшого розвитку нової галузі електроніки – спінтроніки [13-16]. З її точки зору спінові стани електронів в квантових точках розглядаються як елементи, що роблять можливим реалізацію qubit-масивів пам'яті в квантових комп'ютерах [17]. Це вимагає вивчення магнітних властивостей

квантових точок для ефективного керування їх спіновим станом і подальшого використання у промислових наноструктурах.

Мета даної роботи полягає у вивченні впливу спин-орбітальної взаємодії на магнітні властивості квантових точок в слабкому магнітному полі. В роботі було розглянуто намагніченість циліндричних квантових точок з параболічним обмежуючим потенціалом за наявності спин-орбітальної (SO) та електрон-електронної взаємодії. Такий розгляд дозволив описати властивості малих квантових точок у напівпровідниках. Більш детальні розрахунки виконані для напівпровідника InAs та InSb. Показано, що отримані характеристики намагніченості демонструють дуже цікаву поведінку в області низьких температур та малих магнітних полів.

2. Загальний розгляд проблеми

Спин-орбітальна взаємодія відіграє велику роль у формуванні електронного спектру напівпровідникових наноструктур $A^{III}-B^V$ [18,19]. Навіть в разі симетричної потенціальної ями для електронів, ця взаємодія спричиняє спінове виродження в нульовому магнітному полі. Це змінює електронні властивості напівпровідникової наноструктури [20-25].

Ефективний параболічний потенціал для однієї частинки гарно описує спостережені на експерименті властивості квантових точок з невеликою кількістю електронів [26-27]. Магнітне поле, прикладене вздовж осі симетрії точки, змінює електронні енергетичні рівні та призводить до виникнення багатьох цікавих фізичних ефектів. Поведінка енергетичних рівнів та термодинамічні властивості параболічних квантових точок в магнітних полях вже була досліджена експериментально [4,6,11,12]. Нещодавно явище спінового розщеплення було теоретично передбачено для параболічного потенціалу квантової точки з параметрами, що притаманні напівпровідникам InSb та InAs [25]. Спин-орбітальне розщеплення призводить до перетину енергетичних рівнів в разі прикладення слабого зовнішнього магнітного поля (аналог ефекту Пашена-Бака).

Ми вирішуємо рівняння Кона-Шема чисельно для двовимірної параболічної квантової точки [35]:

$$\left[H_1 + \frac{e^2}{\kappa} \int \frac{w(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\mathbf{r}' + \frac{\delta E_{xc}(w, \zeta)}{\delta w^\sigma(\mathbf{r})} \right] \times \psi_{n,l}^\sigma(\mathbf{r}) = \varepsilon_{n,l}^\sigma \psi_{n,l}^\sigma(\mathbf{r}), \quad (1)$$

$$w(\mathbf{r}) = \sum_{\sigma} w^\sigma(\mathbf{r}) = \sum_{\sigma} \sum_{n,l} \left| \psi_{n,l}^\sigma(\mathbf{r}) \right|^2, \quad (2)$$

де H_1 - гамільтоніан одного електрона з врахуванням SO взаємодії, κ - діелектрична проникність, $w(\mathbf{r})$ - функціонал густини.

Другий та третій доданки рівняння (1) відповідають за електрон-електронну взаємодію. Використаємо наближення локальної густини, та

запишемо $\zeta(r)$ - локальну спінову поляризацію та E_{xc} обмінно-кореляційна енергію[35,36]:

$$E_{xc} = \int w(\mathbf{r}) \varepsilon_{xc} [w(\mathbf{r}), \zeta(\mathbf{r})] d\mathbf{r}, \quad (3)$$

$$\zeta(\mathbf{r}) = \frac{w^\uparrow(\mathbf{r}) - w^\downarrow(\mathbf{r})}{w(\mathbf{r})}, \quad (4)$$

де $\varepsilon_{xc} [w(r), \zeta(r)]$ обмінно-кореляційна енергія, що приходить на одну частинку однорідного спін-поляризованого газу. В свою чергу $\varepsilon_{xc} [w(r), \zeta(r)]$ розглядається як сума обмінної та кореляційної енергії [36]:

$$\varepsilon_{xc} [w(\mathbf{r}), \zeta(\mathbf{r})] = \varepsilon_x [w(\mathbf{r}), \zeta(\mathbf{r})] + \varepsilon_c [w(\mathbf{r}), \zeta(\mathbf{r})]. \quad (5)$$

При врахуванні електрон-електронної взаємодії обмежимося обмінною енергією. Для двовірного електронного газу обмінна енергія набуває вигляду

$$\varepsilon_x [w, \zeta] = -\frac{4}{3r_B} \left(\frac{2w}{\pi} \right)^{1/2} \left[(1+\zeta)^{3/2} + (1-\zeta)^{3/2} \right], \quad (6)$$

де r_B -радіус Бора.

Рівняння 3,4,6 записані в атомних одиницях.

Магнітне поле $\mathbf{B}$ прикладене вздовж осі симетрії точки. Запишемо гамільтоніан H_1 в циліндричній системі координат $\{\rho, \phi\}$ [28]:

$$H_1 = -\frac{\hbar^2}{2m(E)} \left[\frac{\partial}{\partial \rho} \rho \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right] - \frac{i}{2} m \omega_c(E, B) \frac{\partial}{\partial \phi} + \frac{1}{8} m(E) \omega_c^2(E, B) \rho^2 + V_c(\rho) + V_{so}^R(\rho, \phi) + \frac{1}{2} \sigma_z \mu_B g(E) B, \quad (7)$$

де

$$V_c(\rho) = \frac{1}{2} m(E) \omega_0^2 \rho^2, \quad (8)$$

– ефективний параболічний потенціал, $\hbar \omega_0$ - характерна енергія зв'язку електрона у квантовій точці, σ_z – матриця Паулі. Ефективна маса електрона визначається формулою [22,28]

$$\frac{1}{m(E)} = \frac{1}{m(0)} \frac{E_g (E_g + \Delta)}{(3E_g + 2\Delta)} \left[\frac{2}{E + E_g} + \frac{1}{E + E_g + \Delta} \right], \quad (9)$$

де E – енергія електрона в зоні провідності, $m(0)$ ефективна маса електрона біля дна зони провідності, E_g та Δ ширина забороненої зони та смуга розщеплення спін-орбітальної взаємодії відповідно,

$$\omega_c(E, B) = \frac{eB}{m(E)}$$

– циклотронна частота електрона,

$$g(E) = 2 \left[1 - \frac{m_0}{m(E)} \frac{\Delta}{3(E_g + E) + 2\Delta} \right] \quad (10)$$

– ефективний фактор Ланде [29], $\mu_B = e\hbar/2m_0$ – магнетон Бора, e та m_0 – заряд та маса вільного електрона, відповідно.

Складова Рашба у спин-орбітальній взаємодії визначається формулою:

$$V_{so}^R(\rho, \phi) = \sigma_z \alpha \frac{dV_c(\rho)}{d\rho} \left(k_\phi + \frac{e}{2\hbar} B\rho \right), \quad (11)$$

де $k_\phi = -i(1/\rho)\partial/\partial\phi$, α – параметр спин-орбітального зв'язку, введений Рашбою (див. [22,24,30,31]). При впливі зовнішнього електричного поля $V_c(\rho)$ замінюється на суму ефективний параболічний потенціалу з потенціалом зовнішнього поля. Розглянемо випадок коли зовнішнє електричне поле відсутнє.

Розглянемо вплив SO взаємодії на магнітні властивості системи з квантовою точкою. При нульовій температурі, намагніченість шукаємо у вигляді [10]:

$$M = -\frac{\partial E_{tot}}{\partial B} \quad (12)$$

де E_{tot} – повна енергія системи для даної кількості електронів – N , що визначається так:

$$E_{tot}(N) = \sum_{n,l,\sigma} \varepsilon_{n,l}^\sigma + \frac{e^2}{2\kappa} \int \frac{w(\mathbf{r})w(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} d\mathbf{r}d\mathbf{r}' - \sum_{\sigma} \int w^\sigma(\mathbf{r}) \frac{\delta E_{xc}(w, \zeta)}{\delta w^\sigma(\mathbf{r})} d\mathbf{r} + E_{xc} \quad (13)$$

3. Магнітні властивості квантових точок у напівпровідниках InAs та InSb.

Розв'язання рівняння (1) проводиться методом самоузгодженого поля, тобто послідовним наближенням, у якому при вирішенні рівняння для даного електрона стани інших електронів вважається відомим. Отриманий розв'язок потім використовується для уточнення станів інших електронів і створеного ними потенціалу. Використовувалась схема Бройдена самоузгоджених розрахунків.

Для InAs квантових точок обираємо $m(0)=0.04m_0$ (параметр настройки [33]), $E_g=0.42\text{eV}$, $\Delta=0.38\text{eV}$, $\alpha=1.1\text{nm}^2$, $\hbar\omega_0=0.019\text{eV}$ [25,28,32]). Для InSb квантових точок обираємо $m(0)=0.014m_0$, $E_g=0.24\text{eV}$, $\Delta=0.81\text{eV}$, $\alpha=5.0\text{nm}^2$, $\hbar\omega_0=0.025\text{eV}$ [25,28]. Розрахуємо намагніченість точки.

Для випадку, коли в точці 2,6 електронів рис 1a,b (закрита зовнішня оболонка) сумарний орбітальний та спіновий моменти дорівнюють нулю. Отже, при нульовому магнітному полі намагніченість рівна нулю. Що співпадає з теоретичними розрахунками. При збільшенні зовнішнього магнітного поля намагніченість зменшується. При 3-х електронах у

квантовій точці (рис 1b) зміна магнітного поля приводить до простих змін намагніченості. Для точки з чотирма та п'ятьма електронами результати виявляються набагато цікавішими.

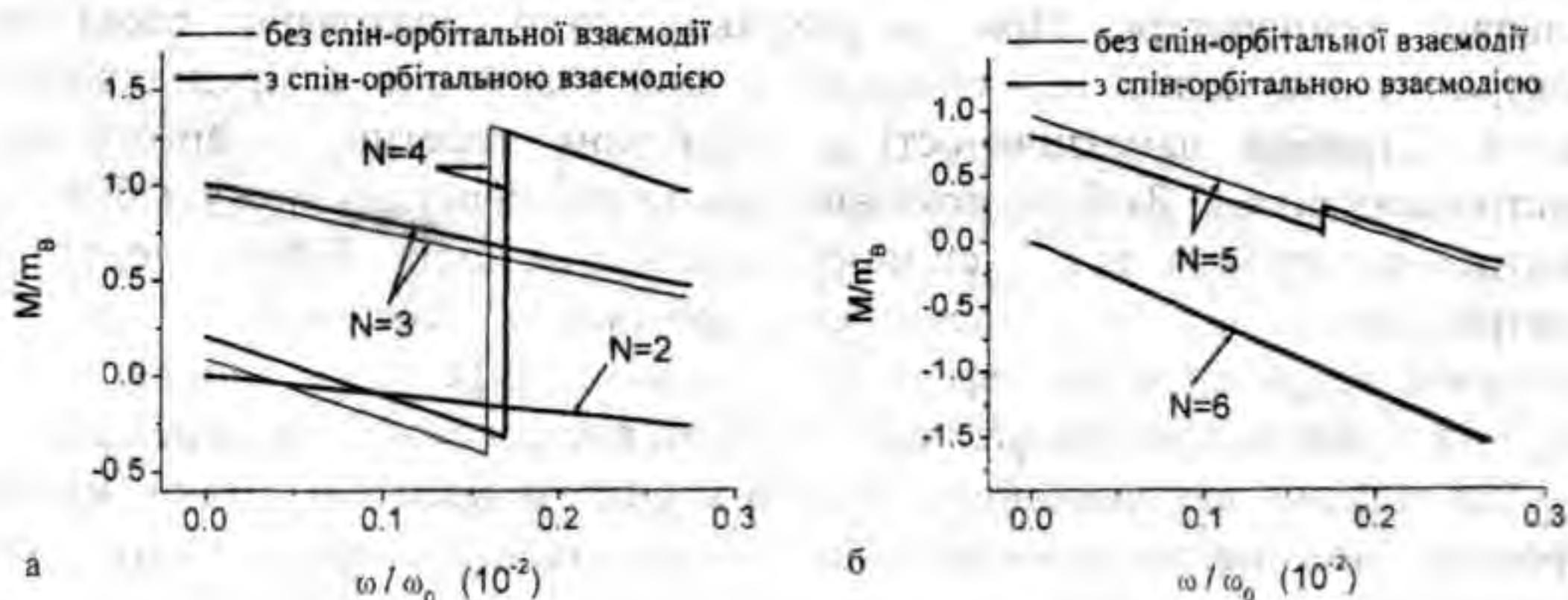


Рис 1. Залежність намагніченості InAs квантових точок від магнітного поля, при $T=0\text{K}$. Розрахунки проведені для випадків $N=2-6$ електронів в квантовій точці.

Як видно з рис 1a навіть у відсутності SO взаємодії (враховуючи тільки електрон електронну взаємодію) ми маємо стрибок намагніченості в квантових точках з 4-ма електронами. Стрибок пов'язаний з перетином енергетичних рівнів в квантових точках при збільшенні магнітного поля. Однак, як видно з рисунку, SO взаємодія зміщує цей стрибок в область більших магнітних полів. Для 5-и електронів в точці рис 1b електрон-електронна взаємодія не приводить до стрибка намагніченості. Тільки при врахуванні SO взаємодії маємо ефект перетину енергетичних рівнів, отже, і стрибок намагніченості. Аналогічно поведуть себе криві і для InSb квантової точки рис 2.

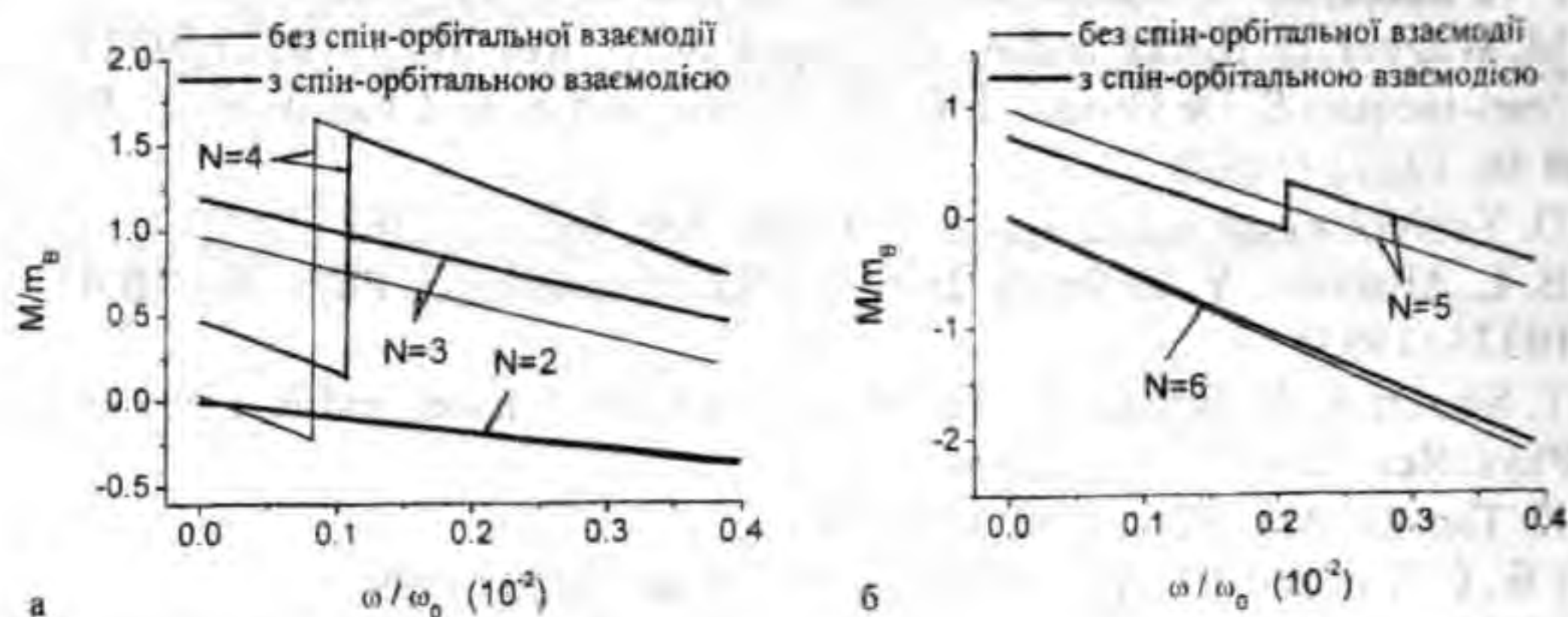


Рис 2. Залежність намагніченості InSb квантових точок від магнітного поля, при $T=0\text{K}$. Розрахунки проведені для випадків $N=2-6$ електронів в квантовій точці.

4. Обговорення результатів та висновки

Розраховано енергії основного стану та намагніченість квантових точок для випадків заповнення квантових точок 2-6 електронами при нульовій температурі. При розрахунках було враховано електрон-електронну взаємодію та спин-орбітальної взаємодію в представленні Рашба. Стрибки намагніченості є наслідком перетину енергетичних електронних рівнів. Як було показано, причиною перетину можуть бути як електрон-електронна так і спин-орбітальна взаємодія. Ефект перетину електронних рівнів за рахунок спин-орбітальної взаємодії відомий з атомарної теорії спектрів (ефект Пашена-Бака [34]). Тому описані вище результати мають прозоре фізичне значення, але повинні бути перевірені.

На відміну від звичайних атомних систем квантові точки мають переваги - можливість керування магнітними властивостями за допомогою зовнішнього електричного поля. Зміна електричного поля призводить до зміни SO взаємодії, що в свою чергу змінює і магнітні властивості квантової точки. Тому спин - орбітальну взаємодію можна розглядати як інструментарій для керування магнітними властивостями в точках при низьких температурах.

Був знайдений аналог ефекту Пашена-Бака для точок з частково заповненими електронними оболонками. Описані вище особливості $A^{III}-B^V$ квантових точок можуть бути корисні в майбутньому для досліджень в напрямі спінтроники.

Література

- [1] D. Bimberg, Semiconductors 33, 951 (1999).
- [2] L. P. Kouwenhoven, D. G. Austing, and S. Tarucha, Rep. Prog. Phys. 64, 701 (2001).
- [3] P. A. Maksym, T. Chakraborty, Phys. Rev. B 45, 1947 (1992).
- [4] M. Wagner, U. Merkt, and A. V. Chaplik, Phys. Rev. B 45, 1951 (1992).
- [5] Jean-Jacques S. De Groote, J. E. M. Hornos, and A. V. Chaplik, Phys. Rev. B 46, 12773 (1992).
- [6] D. Yoshioka and H. Fukuyama, J. Theor. Soc. Jap. 61, 2368 (1992).
- [7] B. L. Altshuler, Y. Gefen, Y. Imry, and G. Montambaux, Phys. Rev. B 47, 10335 (1993).
- [8] T. Swahn, E. N. Bogachev, Yu. M. Galperin, M. Jonson, and R. I. Shekhter, Phys. Rev. Lett. 73, 162 (1994).
- [9] K. Tanaka, Ann. Phys. 268, 28 (1998).
- [10] W. C. Tan and J. C. Inkson, Phys. Rev. B 60, 5626 (1999).
- [11] I. Magnusdottir and V. Gudmundsson, Phys. Rev. B 61, 10229 (2000).
- [12] Y. P. Krasny, N. P. Kovalenko, U. Krey, and L. Jacak, J. Phys.: Cond. Matter 13, 4341 (2001).
- [13] G. A. Prinz, Science, 282, 1660 (1998).

- [14] B. E. Kane, Nature, 393, 133 (1998).
- [15] D. D. Awschalom, J. M. Kikkawa, Phys. Today 52, 33 (1999)
- [16] S. Das Sarma, J. Fabian, X. Hu, and I. Zutic, Solid State communications 119, 207 (2001).
- [17] D. Loss and D. P. DiVincenzo, Phys. Rev. A 57, 120 (1998).
- [18] G. Dresselhaus, Phys. Rev. 100, 580 (1955).
- [19] Yu. A. Bychkov and E. I. Rashba, J. Phys. C. 17, 6039 (1984).
- [20] D. Richards and B. Jusserand, Phys. Rev. B 59, R2506 (1999).
- [21] C. M. Hu, J. Nitta, T. Akazaki, H. Takayanagai, J. Osaka, P. Pfeffer, and W. Zawadzki, Phys. Rev. B 60, 7736 (1999).
- [22] E. A. de Andrada e Silva, G. C. La Rocca, and F. Bassani, Phys. Rev. B 55, 16 293 (1997).
- [23] A. Voskoboynikov, Shiue Shin Liu, C. P. Lee and Tretyak, J. App. Phys. 87, 1 (2000).
- [24] A. V. Moroz and C. H. W. Barnes, Phys. Rev. B 61, R2464 (2000), Phys. Rev. B 60, 14 272 (2000).
- [25] O. Voskoboynikov, C. P. Lee, and O. Tretyak, Phys. Rev. B 63, 165306 (2001).
- [26] V. Fock, Z. Phys, 47, 446 (1928).
- [27] P. A. Maksym, H. Imamura, G. P. Mallon, and H. Aoki, J. Phys.: Condens. Matter 12, R299 (2000).
- [28] G. Bastard, Wave Mechanics Applied to Semiconductor Heterostructures (Les Edition de Physique, Les Ulis, 1990).
- [29] L. M. Roth, B. Lax, and S. Zwerdling, Phys. Rev. 114, 90 (1959).
- [30] L. I. Magaril, D. A. Romanov and Chaplik, Zh. Eks. Teor. Fiz. 113, 1411 (1998)[JETP 86, 771 (1998)].
- [31] L. I. Magaril and Chaplik, JETP Lett. 64, 460 (1996), Zh. Eks. Teor. Fiz. 115, 1478 (1999)[JETP 88, 815 (1999)].
- [32] M. A. Cusack, P. R. Briddon, and M. Jaros, Phys. Rev. B 54, 2300 (1996).
- [33] Guang-Hong Chen and M. E. Raikh, Phys. Rev. B 60, 4826 (1999).
- [34] I. I. Sobelman, Atomic Spectra and Radiative Transitions (Springer-Verlag, Berlin, 1991).
- [35] Kenji Hirose and Ned S. Wingreen, Phys. Rev. B 59, 4604 (1999).
- [36] B. Tanatar and D.M. Ceperley, Phys. Rev. B 39, 5005 (1989).

Надійшла до редакції 14 лютого 2005 року.

УДК 621.391

Вадим В. Кирилюк¹, Андрій В.
Коваленко²

**Статистично оптимальне
відновлення сигналу з
гаусівською кореляційною
функцією за його
скінченновимірною проекцією**

Розглянуто задачу про статистично найкращу оцінку реалізації мінімально невизначеного випадкового процесу за послідовністю його миттєвих та усереднених значень. Показана залежність похибки відновлення від способу проектування. Продемонстровано, що точність оптимального відновлення за миттєвими значеннями наближається до тої, що досягається апроксимацією сигналу відповідною кількістю перших членів ряду Карунена – Лоева.

Ключові слова: оптимальна фільтрація, оптимальне відновлення сигналу, базис Карунена-Лоева.

Vadim V Kirilyuk¹, Andriy V.
Kovalenko²

**Statistically optimal reconstruction
of a signal with Gaussian
correlation function from its finite-
dimensional projection**

The problem of statistically the best evaluation of a realization of minimally undetermined random process from sequences of its momentary and averaged values was considered. The dependence of the restoration error on projection method was shown. It was demonstrated that the precision of optimal reconstruction from momentary values was approaching to that obtained by approximation of a signal with a correspondent quantity of the first members of Karhunen-Loeve series.

Key Words: optimal filtration, optimal restoration of a signal, Karhunen-Loeve basis.

¹ E-mail: quad@univ.kiev.ua ² E-mail: Andrey_Kovalenko@univ.kiev.ua

Вступ

У фізиці, зокрема оптиці, радіотехніці часто виникають задачі, коли необхідно дослідити деяку неперервну характеристику або неперервний сигнал. При цьому інформація про сигнал надходить до спостерігача у дискретному вигляді, оскільки принципово неможливо виміряти та зберегти весь континуум значень. Процес дискретизації має математичний зміст відображення сигналу із простору більшої розмірності у простір меншої розмірності. У випадку вимірювання неперервних характеристик – це переведення сигналу із нескінченновимірного простору у простір, розмірність якого дорівнює кількості вимірів.

Практичними прикладами лінійного відображення або проектування є такі різні за фізичною реалізацією операції як форматування радіотехнічного сигналу у аналого-цифровому перетворенні, реєстрація оптичного хвильового фронту тощо. Так, підчас форматування аналоговий

сигнал замінюється на його періодично вимірювані значення (на результат фільтрації сигналу певними фільтрами) [1]. При реєстрації хвильового фронту значення двовимірної функції його поверхні представляється дискретною матрицею значень відхилення зображення мікролінз від їх оптичної осі у сенсорі Шека-Хартмана [2].

Відображення сигналу у простір вимірів супроводжується частковою втратою інформації і тому є необоротною операцією. Це означає, що відновлення сигналу за його проекцією може бути здійснене лише наближено. Задача оптимального відновлення полягає у тому, щоб побудувати оцінку сигналу, найкращу за обраним критерієм, причому вибір останнього залежить від апріорних відомостей про сигнал. Зокрема, якщо сигнал $\Theta(t)$ є реалізацією випадкового процесу із відомою кореляційною функцією $G_\Theta(t, \tau)$, то доцільно прийняти середньоквадратичний критерій і шукати таку оцінку $\tilde{\Theta}(t)$, що мінімізує середньоквадратичну похибку відновлення $\sigma^2(t)$:

$$\sigma^2(t) = \Theta(t) - \tilde{\Theta}(t)^2 = \min \quad (1)$$

В [3] показано, що такий спосіб відновлення може розглядатись як оптимальна фільтрація випадкової послідовності вимірних значень сигналу. При цьому якість відновлення сигналу оптимальним оберненим фільтром залежить від способу його вимірювання (проекування), величини випадкової похибки вимірювань та статистичних властивостей самого сигналу. Метою цієї роботи є дослідження залежності точності відновлення від способу проектування на прикладі сигналу із відомою кореляційною функцією. Дослідження проводилось методом чисельного моделювання. Аналізуються такі способи проектування, що відповідають форматуванню радіотехнічного сигналу при аналогово-цифровому перетворенні: визначення послідовності відлікових значень амплітуди та послідовності амплітудних значень, усереднених за малим інтервалом часу (так зване природне форматування [1]).

2. Умови чисельного експерименту

Приймемо, що сигнал $\Theta(t)$ спостерігається у інтервалі часу $0 \leq t \leq T$. Його вимірювання полягає у визначенні N значень u_n лінійних функціоналів $H_n\{\Theta(t)\}$:

$$u_n = H_n\{\Theta(t)\} + \eta_n \quad (2)$$

де η_n - похибка вимірювань, що є випадковою змінною із нульовим середнім і статистично не залежить від сигналу. Згідно [3], оптимальна за

середньоквадратичним критерієм оцінка отримується фільтрацією виміряних значень оптимальним оберненим фільтром $\tilde{h}(t, n)$:

$$\tilde{\Theta}(t) = \sum_{n=1}^N \tilde{h}(t, n) u_n \quad (3)$$

причому відгук фільтра задовольняє системі рівнянь:

$$\sum_{m=1}^N \tilde{h}(t, m) u_m = \mathbf{H}_n \{G_{\Theta}(t, \tau)\}(t), \quad n = 1, N \quad (4)$$

Якщо вимірюються миттєві значення сигналу, то функціонал вимірювань у (2) представляється як:

$$\mathbf{H}_n \{\Theta(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t_n - t) \Theta(t) dt \quad (5)$$

Якщо ж u_n є середніми значеннями сигналу на послідовних інтервалах часу тривалістю Δ , то слід прийняти

$$\mathbf{H}_n \{\Theta(t)\} = \frac{1}{\Delta} \int_{t_n - \frac{\Delta}{2}}^{t_n + \frac{\Delta}{2}} \Theta(t) dt, \quad t_n = \Delta \left(n - \frac{1}{2} \right), \quad n = \overline{1, N}, \quad N = \frac{T}{\Delta} \quad (6)$$

В комп'ютерних експериментах звичайно використовують одну із добре відомих моделей випадкового процесу: процес із частотно обмеженим спектром, із дробово-раціональним спектром, мінімально невизначений процес [4,5]. Оскільки для стаціонарних випадкових процесів довільної природи найзагальнішою уявляється остання модель, то саме вона прийнята у цій роботі.

Отже, випадковий процес $\Theta(t)$ має кореляційну функцію:

$$G_{\Theta}(\tau) = G(0) \exp \left\{ -\frac{\tau^2}{2\tau_0^2} \right\} \quad (7)$$

Для визначеності покладемо, що час кореляції τ_0 складає 1 с, а дисперсія $G(0) = 1$. Тривалість спостереження оберемо істотно більшою за час кореляції: $T = 10$ с. Тоді значення сигналу на початку і закінченні інтервалу спостереження будуть некорельованими, а для якісного відновлення сигналу необхідно отримати достатньо велику кількість його значень на всьому інтервалі. При цьому мінімізується значення „крайових спотворень” у відновленому сигналі, а висновки щодо якості відновлення будуть справедливими для як завгодно довгого спостереження.

Для обраних параметрів були отримані обернені фільтри та розрахована похибка відновлення сигналу в залежності від розмірності його проекції (кількості виміряних значень) N . Відновлення оптимальним фільтром порівнювалось із теоретично найкращою N -вимірною апроксимацією сигналу обірваним рядом Карунена-Лоева [4], а також із його інтерполяцією sinc-функціями.

отримати порядку 500 миттєвих значень сигналу на інтервалі спостереження та виконати значний об'єм обчислень. Тому оптимальну обернену фільтрацію можна розглядати як альтернативу КЛ розвиненню у випадках, коли застосування останнього є неможливим через апаратні обмеження або обчислювальну складність.

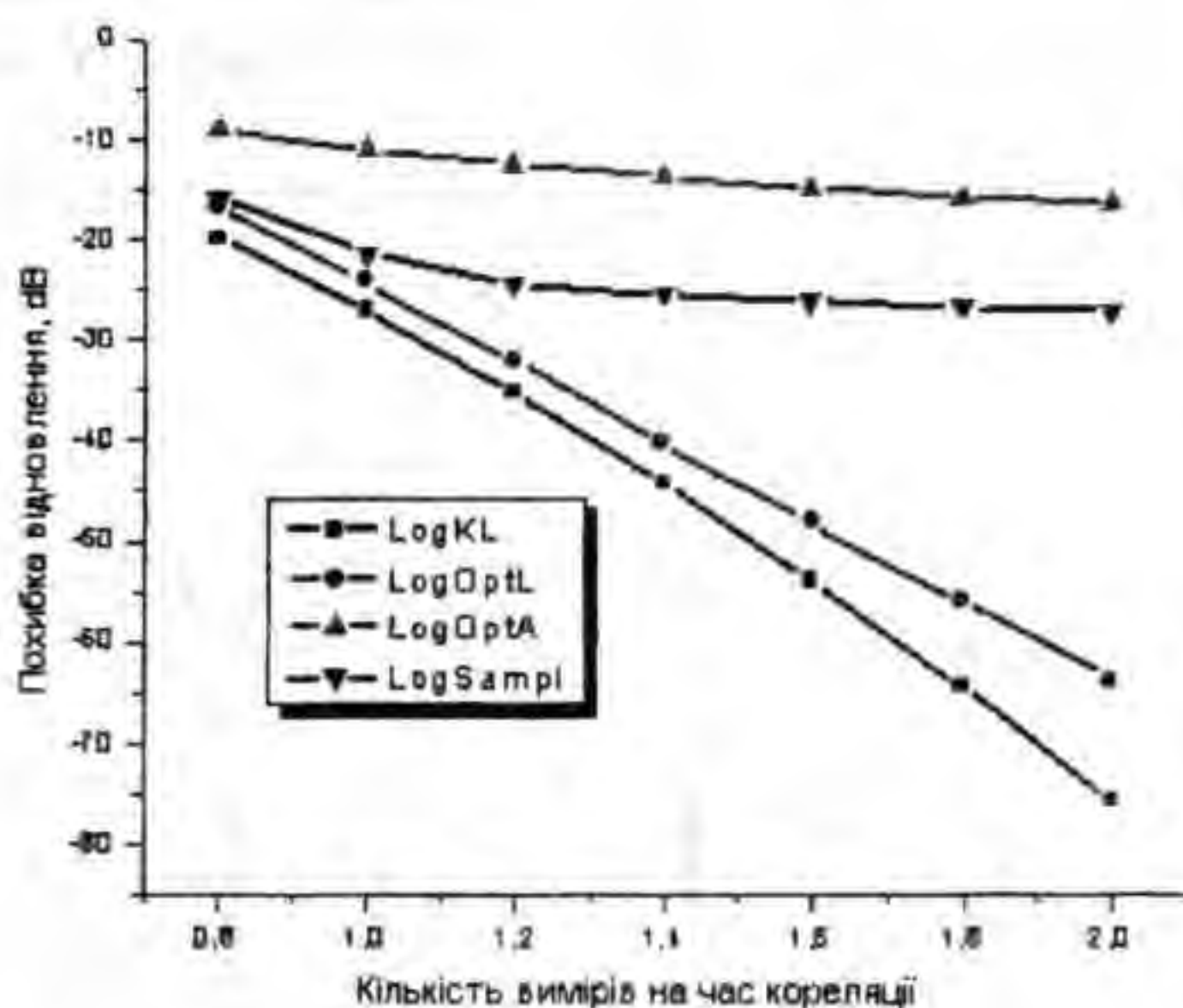


Рис. 2. Залежність похибки відновлення від кількості вимірів на час кореляції. LogKL – похибка представлення рядом КЛ, LogOptL – відновлення за миттєвими значеннями, LogOptA – відновлення за усередненими значеннями, LogSampl – відновлення за sinc-функціями.

Література

1. Б. Скляр. Цифровая связь. Теоретические основы и практическое применение, 2-е издание. : Пер. с англ. – М. : «Вильямс», 2003.
2. М. В. Капулло, А. В. Коваленко, В. Н. Курашов. Вплив розмірності простору проектування на відновлення оптичного фронту за тестом Хартмана // Вісник Київського університету. Серія: фізико-математичні науки. – 2003. – 2 – с.264-273.
3. А. В. Коваленко, В. Н. Курашов. Оптимальне відновлення сигналу із набору лінійних вимірювань. // Радиоелектроника. – 2004 – №7 – с.75-80.
4. Л. Фрэнкс. Теория сигналов. : Пер. с англ. – М., “Сов. радио”, 1974.
5. Shiang-Hwua Yu, Jwu-Sheng Hu. Optimal Synthesis of a Fractional Delay FIR Filter in a Reproducing Kernel Hilbert Space // IEEE Signal Processing Lett. – June 2001. – Vol. 8 – pp.160-162.

Надійшла до редакції 6.04.2005

УДК 620.18:546.28

Микола Г. Находкін, Микола П.
Куліш, Петро М. Литвин, Ніна О.
Новохацька, Тетяна В. Родіонова¹

**Вплив легування фосфором на
структурні характеристики
дендритних полікремнієвих
плівок**

*Методами атомної силової
мікроскопії та просвічуючої електронної
мікроскопії досліджено особливості
стиків границь зерен та поверхневі
неоднорідності в нелегованих та
легованих фосфором полікремнієвих
плівках з дендритною структурою.
Проаналізована роль фосфору у
формуванні стиків границь зерен.*

*Ключові слова: полікремнієві
плівки; структура; стики зерен; атомна
силова мікроскопія; просвічуюча
електронна мікроскопія*

Nikolay G. Nakhodkin, Nikolay P.
Kulish, Petro M. Lytvyn, Nina O.
Novokhatska, Tatyana V. Rodionova¹

**The influence of phosphorus
doping on the structure
characteristics of dendritic
polysilicon films.**

*Atomic force microscope and
transmission electron microscopy were
used for the investigation of grain
boundaries joints and surface roughness in
undoped and phosphorus doped dendritic
polysilicon films. The effect of phosphorus
in the formation of grain boundaries joints
have been analyzed*

*Key Words: polysilicon films;
structure; joints of grain boundaries;
atomic force microscopy; transmission
electron microscopy*

¹ E-mail: rodty@.kiev.ua

Вступ

Відомо, що полікристалічні плівки кремнію в залежності від умов отримання та подальших технологічних обробок можуть існувати в трьох основних структурних модифікаціях: рівноосьовій, дендритній та волокнистій [1]. З точки зору практичних застосувань важливо отримувати плівки з великими розмірами зерен та малою густиною внутрізеренних дефектів, оскільки границі зерен та дефекти являють собою бар'єри, які сприяють зменшенню рухливості носіїв заряду та збільшенню струмів витоку [2]. В зв'язку з цим становлять великий інтерес плівки з дендритною структурою, що формуються в процесі кристалізації аморфної фази [1-4]. Такі плівки характеризуються значно більшими розмірами зерен, в порівнянні з тими, що в початковому стані були полікристалічними [2,3]. Крім того, на відміну від останніх, плівки з дендритною структурою мають властивості, що важливі для практичного використання. Зокрема, ці плівки мають поверхню з меншою шорсткістю [3,5], більш високу провідність (навіть за умови однакової концентрації

домішок) [2-3], високу напругу пробою в системах окисел-полікремній [4], менші внутрішні напруги [4].

Раніше було встановлено [2-4], що розміри зерен в легованих фосфором дендритних плівках значно більші, ніж у нелегованих. Що ж стосується дефектної структури, то одними з найменш досліджених дефектів є стики границь зерен в плівках.

В даній роботі методами атомної силової мікроскопії та просвічуючої електронної мікроскопії досліджено вплив легування фосфором на особливості стиків границь зерен та величину поверхневих неоднорідностей в полікремнієвих плівках з дендритною структурою.

Методика

Плівки полікремнію одержували методом хімічного осадження з газової фази в реакторі зниженого тиску на підкладки монокристалічного кремнію з шаром SiO_2 товщиною $\sim 0,1$ мкм. Товщина плівок полікремнію 0,5-0,7 мкм. Плівки легували фосфором (рівень легування – 10^{21} см^{-3}). Для одержання дендритної структури плівки, що були осаджені в аморфній фазі (при температурі 560°C), відпалювали при 950°C .

Для одержання набору статистичних даних при аналізі стиків зерен використовували метод атомної силової мікроскопії (АСМ). Зображення поверхні плівок одержували в скануючому атомному силовому мікроскопі NanoScope IIIa у режимі періодичного контакту (Tapping Mode). В нелегованих полікремнієвих плівках було проаналізовано 391 стик, у легованих фосфором - 328.

Для одержання більш детальної інформації про природу стиків зерен, особливо множинних стиків, був використаний метод просвічуючої електронної мікроскопії (ПЕМ).

Результати й обговорення

Аналіз зображень поверхні полікремнієвих плівок, отриманий в атомному силовому мікроскопі (рис. 1), показав, що в плівках, які були досліджені, переважна кількість стиків границь зерен складають потрійні стики. Проте, як видно з Таблиці 1, в нелегованих плівках більшість потрійних стиків є спеціальними стиками, тобто до їх складу входять спеціальні границі зерен (стики типу 3b 3c (детальний опис типів стиків приведено в роботі [6])). В то й же час в плівках, легованих фосфором, більшість потрійних стиків утворено границями загального типу (стики типу 3a). Кількість множинних стиків також більша в нелегованих плівках.

Більш детальна інформація про природу стиків границь зерен була отримана з електронно-мікроскопічних зображень. На жаль, даним методом не можливо проаналізувати таку ж велику площу плівок, як за допомогою атомного силового мікроскопа, тому не всі типи стиків, які

присутні на АСМ-зображеннях, присутні на рис. 2. Проте видно, що деякі

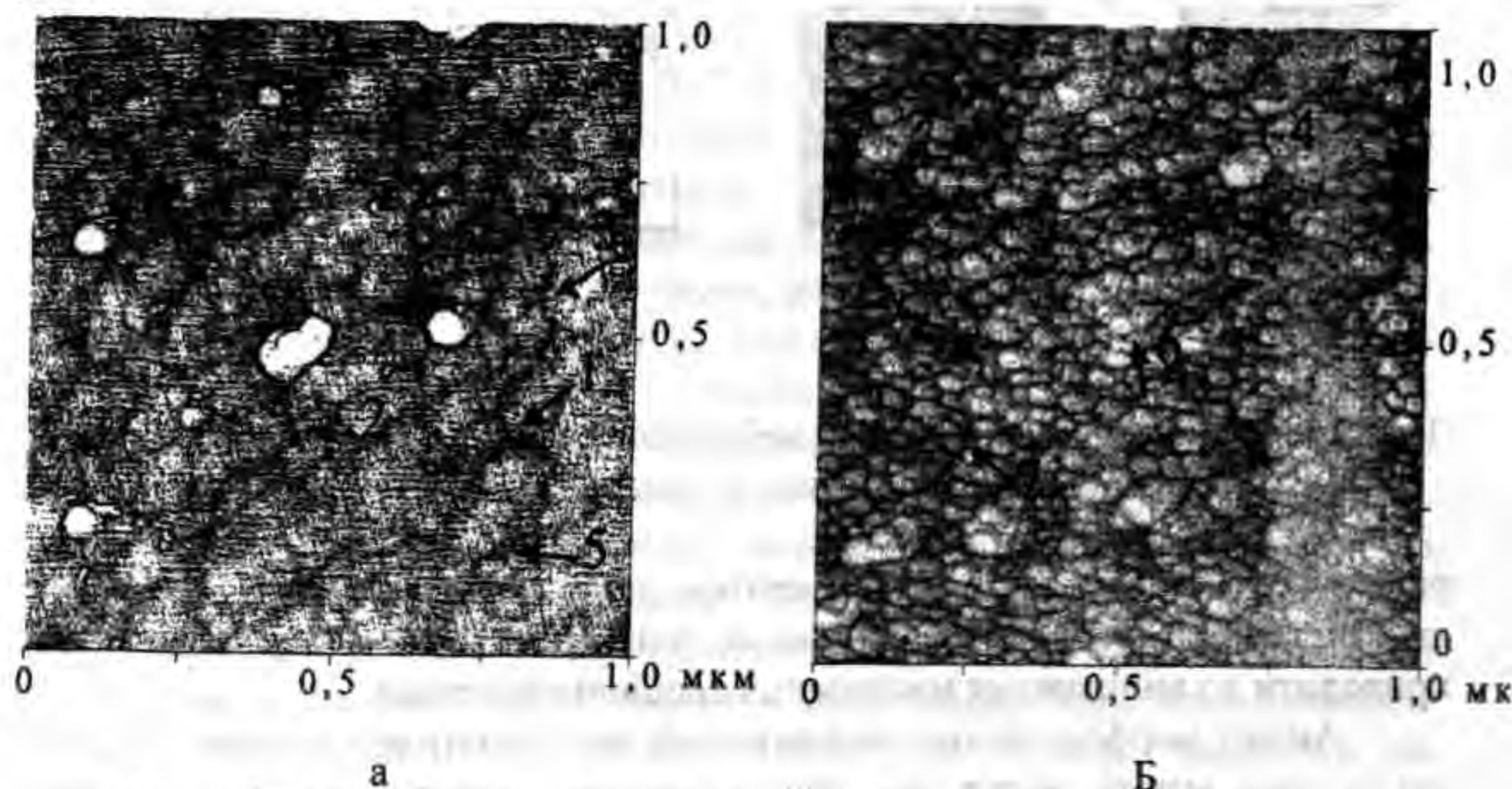


Рис. 1. АСМ зображення нелегованих (а) та легованих фосфором (б) полікремнієвих плівок з дендритною структурою.

Приклади стиків границь зерен: 1 – 3а; 2 – 3б; 3 – 3с; 4 – 4а; 5 – 4б; 6 – 4с; 7 – 5.

множинні стики (зокрема, 4а, 4с) сформовані границями зерен, які мають дислокаційну структуру. На електронно-мікроскопічних зображеннях такі границі мають вигляд переривчастих ліній.

Існує кілька механізмів, за допомогою яких можна пояснити виникнення спеціальних стиків в структурі полікристалів [7]. По-перше, це може відбуватись за рахунок розщеплення границь зерен. У матеріалах з низькою енергією дефектів пакування, до яких належить і кремній, розщеплення границь зерен спостерігається досить часто. Розщеплюватися можуть границі зерен, разорієнтація яких є сумою поворотів, що приводять до формування низькоенергетичних границь [7,8]. По-друге, може мати місце випадкова зустріч трьох спеціальних границь. По третє, характерною

Таблиця 1. Відносна кількість (%) потрійних та множинних стиків зерен у нелегованих та легованих фосфором полікремнієвих плівках.

Структура	Стики зерен						
	Потрійні			Множинні			
	3а	3б	3с	4а	4б	4с	5
Нелеговані плівки	19,9	24,6	18,7	7,9	15,3	9,5	4,1
Леговані фосфором плівки	80,2	10,1	3,0	1,8	2,8	1,5	0,6

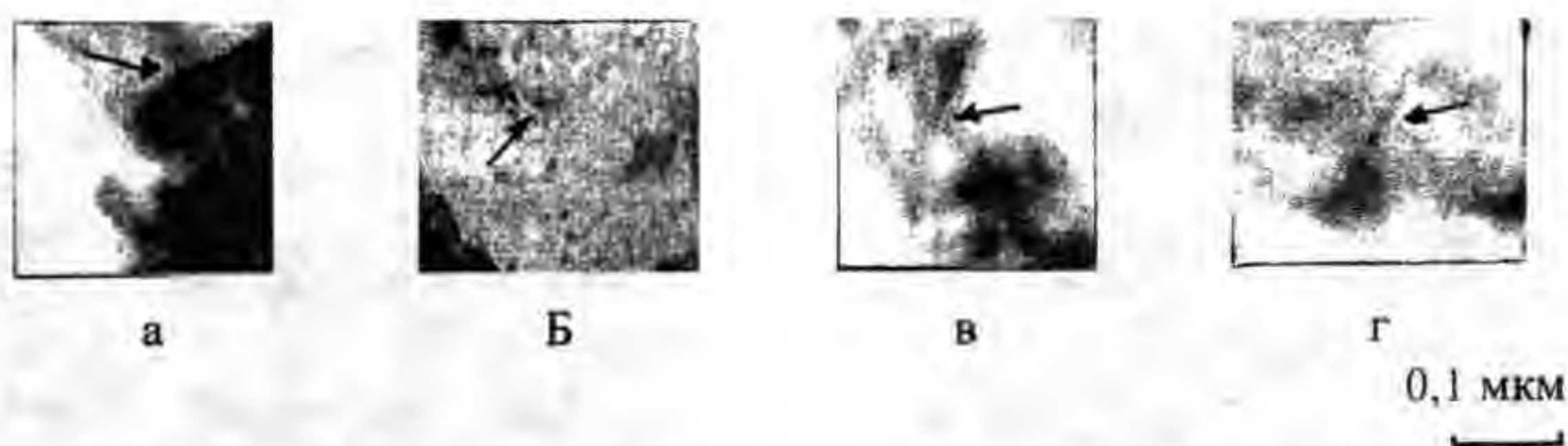


Рис. 2. Електронно-мікроскопічні зображення деяких типів стиків границь зерен в дендритних полікремнієвих плівках: а – 3б; б – 4а; в – 4б; г – 4с.

рисою ГЦК металів з низькою енергією дефектів пакування є множинне двійникування [4,7], тому взаємодія двійників різних порядків може приводити до виникнення множинних спеціальних стиків.

Аналіз морфологічних особливостей полікремнієвих плівок показав, що в них мають місце всі три механізми формування спеціальних множинних стиків, проте для плівок з дендритною структурою переважними є другий та третій механізми. Як було показано в попередніх дослідженнях [4], зерна-дендрити являють собою складні двійникові комплекси з великою кількістю двійникових границь. Взаємодія двійникових границь в процесі множинного двійникування приводить до формування спеціальних стиків границь зерен. Наприклад, відомо [9], що при контакті двох границь $\Sigma 3$, які розташовані в різних площинах $\{111\}$, третьою границею в стику завжди є границя $\Sigma 9$. При цьому формується спеціальний потрійний стик типу 3с. Подальша взаємодія границі $\Sigma 9$ з наступною границею $\Sigma 3$, яка не є паралельною першим двом, приводить до створення границі $\Sigma 27$ і так далі. Крім того, велика кількість двійникових границь обумовлює велику імовірність їх випадкової зустрічі та формування спеціальних стиків.

Різниця в кількості спеціальних стиків та стиків загального типу в нелегованих та легованих фосфором полікремнієвих плівках обумовлена впливом фосфора на процеси, що мають місце при формуванні структури плівок. Як відомо [1,3], легування плівок фосфором супроводжується зростанням кількості заряджених вакансій, що приводить до збільшення коефіцієнту самодифузії атомів кремнію, підвищення рухливості границь зерен та зростання швидкості руху дислокацій. Перші дві обставини обумовлюють більші розміри зерен в легованих фосфором плівках в порівнянні з нелегованими. Що стосується руху дислокацій, то воно безпосередньо пов'язано з формуванням границь і, відповідно, стиків зерен. Дислокаційна структура границь зерен в дендритних плівках (рис. 2,

стики 4а, 4с) свідчить про наявність в плівках внутрішніх напружень. Як відомо [3], леговані фосфором дендритні плівки характеризуються значно меншими внутрішніми напруженнями, ніж нелеговані. Можна вважати, що зростання рухливості дислокацій в присутності фосфора сприяє протіканню в плівках релаксаційних процесів, які супроводжуються перебудовою системи міжзеренних границь. Релаксація напружень відбувається за рахунок переходу від малокутових границь, що мають дальнодіючі поля пружних напружень, до висококутових границь, в яких дальнодіючі напруги зменшуються майже до нуля [9]. Це відбувається внаслідок зміни приграничного спряження. Для висококутових границь воно відбувається внаслідок локальних непружних зміщень вузлів кристалічної ґратки, що не описуються законом Гука [9]. Таким чином, релаксацію напружень в плівках можна вважати рушійною силою перебудови міжзеренних границь. Можна також припустити, що механізмом перебудови зернограничної структури в полікремнієвих плівках, як і для металів, є ковзання дислокацій. Зростання кількості великокутових границь в легованих фосфором плівках приводить до збільшення в них числа потрійних стиків загального типу (типу 3а), в порівнянні з нелегованими плівками.

Легування фосфором має вплив не тільки на зернограничну структуру, але й на мікрорельєф поверхні дендритних полікремнієвих плівок, що має особливий інтерес з точки зору практичного застосування полікремнієвих плівок. Дослідження, проведені за допомогою атомного силового мікроскопу, показали, що висота поверхневих неоднорідностей в легованих фосфором плівках майже втричі більше, ніж у нелегованих плівках.

Висновки

Проведені дослідження показали:

1. Як в нелегованих, так і в легованих фосфором полікремнієвих плівках з дендритною структурою більшу частину стиків границь зерен складають потрійні стики. Проте в легованих плівках серед них переважають стики з границями загального типу, в той час як в нелегованих плівках переважають потрійні стики, які містять спеціальні границі зерен. Крім того, в нелегованих плівках частка множинних спеціальних стиків значно більша, ніж у плівках, що леговані фосфором.
2. Розміри поверхневих неоднорідностей у плівках, що леговані фосфором, майже втричі перевищують відповідні розміри в нелегованих плівках, що є результатом впливу фосфора на зростання швидкості міграції міжзеренних границь.

Робота виконана при частковому фінансуванні Київського національного університету імені Тараса Шевченка (тема № 01БФ052-02), та Міністерства освіти та науки України (грант М/240-2004).

Література

1. Nakhodkin N.G., Rodionova T.V. Formation of different types of polysilicon film structures and their grain growth under annealing// Phys. Stat. Sol.(a). - 1991. V. 123, № 2. P. 431-439.
2. Bo X.-Z., Yao N., Shieh S.R., Duffy T.S., Sturm J.C. Large-grain polycrystalline silicon films with low intragranular defect density by low-temperature solid-phase crystallization without underlying oxide / J. Appl. Phys. 2002. V. 91, № 5. P. 2910-2915.
3. Waechter D., Tarr N.G. Low-temperature crystallization of in situ phosphorus-doped low-pressure chemical-vapor deposited amorphous silicon / Can. J. Phys. 1987. V. 65, № 8. P. 1030-1032.
4. Находкин Н.Г., Кулиш Н.П. Родионова Т.В. Ориентационные соотношения в дендритных поликремниевых пленках // Поверхность. Рентгеновские, синхротронные и нейтронные исследования. 2003, № 6. С. 19-22.
5. Nakhodkin N.G., Rodionova T.V. Interface analysis in polysilicon thin films and poly-Si/SiO₂ systems // Surface and interface analysis. 1992. V. 18. P. 709-712.
6. Находкин Н.Г., Кулиш Н.П., Литвин П.М., Родионова Т.В. Тройные и множественные специальные стыки границ зерен в поликремниевых пленках с разным типом структуры//Сборник научных трудов «Наносистемы, наноматериалы, нанотехнологии» Т.2, № 3 2004 с. 793-801.
7. Копецкий Ч.В., Орлов А.Н., Фионова Л.К. Границы зерен в чистых материалах - М.: "Наука", 1987.
8. Сухомлин Г.Д. Андреева А.В. Топологические особенности развития структуры поликристаллов, обусловленные процессами двойникования // Физика металлов и металловедение (ФММ) 1988, том 66, вып. 3, с. 509-516.
9. Косевич В.М., Иевлев В.М., Палатник Л.С., Федоренко А.И. Структура межкристаллитных и межфазных границ - М.: «Металлургия», 1980.

Надійшла до редакції 25.03.200

УДК 621.272.832.01

Володимир С. Сидоренко,
Юрій О. Гайдай, Сергій В. Жила¹

Особливості ближнього поля диполя Герца

У роботі запропоновано розглянути диполь Герца як систему двох зарядів, що коливаються, та розглянути поле диполя, з точки зору полів створюваних окремими зарядами, що рухаються прискорено.

Виділено дві компоненти ближнього поля: еванесцентну хвилю, та активне зв'язане поле. Показано, що енергія усіх компонент ближнього поля має спільне походження – енергії поля стаціонарних зарядів.

Ключові слова: активне зв'язане поле, еванесцентна хвиля, ближнє поле.

Volodymyr S. Sydorenko,
Yuriy O. Gayday, Sergiy V. Zhyla¹

Peculiarity of near-field of Hertz dipole

We have considered Hertz's dipole fields as an interference of two accelerated charge's fields.

Two parts of near field are marked out: evanescent wave and active inseparable field. Common electrostatic origin of all parts of near field is shown.

Key Words: active inseparable field, evanescent wave, near-field.

¹ E-mail: s.v.zhyla_pub.pr@univ.kiev.ua

Вступ

Ближньопольова техніка є перспективним напрямком, що бурхливо розвивається. Тому питання аналізу та пояснення фізичних процесів, що відбуваються у ближньому полі є актуальним та цікавим як з теоретичної так і з практичної точок зору. Проте, при великій кількості інформації, що з'являється у періодичній пресі, практично всі дослідження в цьому напрямку, мають емпіричний характер. Теоретичні питання ближньопольового напрямку лишаються недостатньо висвітленими у літературі. У більшості випадків, це певні електростатичні методики розрахунку полів у системах зразок – зонд. Аналізу ж та поясненню фізики ближнього поля, з історичних причин, уваги майже не приділяється. Тому метою роботи, що представляється, є пояснення фізичної суті компонент ближнього поля диполя Герца.

Основна частина

Визначимо ближнім полем системи (випромінювача) усі електричні та магнітні поля, що створює система (випромінювач), окрім поля випромінювання (фотонів).

Відомі вирази для ближнього поля, що створює диполь Герца [1]:

$$\dot{H}_m(r) = a_0 \frac{\dot{I}_m l}{4\pi} \frac{1}{r^2} e^{-ikr} \sin \theta; \quad (1)$$

$$\dot{E}_m(r) = -\frac{\dot{I}_m l}{4\pi\omega\epsilon_0\epsilon} \left[r_0 \frac{2}{r^2} \left(\frac{i}{r} - k \right) \cos \theta + \theta_0 \frac{1}{r} \left(\frac{i}{r^2} - \frac{k}{r} \right) \sin \theta \right] e^{-ikr}. \quad (2)$$

Перші спроби більш детально проаналізувати ближнє поле, що генерує диполь Герца, були зроблені нами у [2], де на основі виразів (1), (2) було побудовано кінограми процесів, що відбуваються у ближньому полі. Проте, ні з прямого аналізу виразів (1) та (2), ні з їх виводу не зрозуміло фізичний зміст деяких доданків, присутніх у них. Тому диполь, як цілісний об'єкт, є незручним для розгляду сутності фізичних процесів, що відбуваються у ближньому полі.

У даній роботі було запропоновано розглянути диполь як систему двох окремих зарядів протилежного знаку, що коливаються, та використати поля, створювані кожним з цих зарядів, для пояснення процесів, що відбуваються у ближньому полі такої системи.

Для аналізу полів, створюваних такою системою, спочатку розглянемо поле, створюване одним зарядом – електроном, що рухається з прискоренням.

Відомо, що поля, створювані електроном, що рухається по заданій траєкторії $r_0(t)$, описуються потенціалами Лієнара-Віхерта, а вирази для полів обчислених на їх основі мають наступний вигляд [3]:

$$E = e \frac{1 - \frac{v^2}{c^2}}{(R - \frac{Rv}{c})^3} (R - \frac{v}{c} R) + \frac{e}{c^2 (R - \frac{Rv}{c})^3} [R[(R - \frac{v}{c} R) \dot{v}]]; \quad (3)$$

$$H = \frac{1}{R} [RE]; \quad (4)$$

Тут v – швидкість руху заряду, R – радіус-вектор, проведений з точки знаходження заряду у точку спостереження P . Всі величини у правих частинах мають бути взяті у момент часу t' , що визначається, виходячи з принципу запізнення потенціалів – поле у точці спостереження P у момент часу t визначається станом руху та положенням заряду у попередній момент часу t' , для якого час розповсюдження сигналу від точки $r_0(t')$ до точки спостереження P співпадає з різницею $t - t'$.

Бачимо, що як і у диполя електричне поле одного заряду, що рухається прискорено, завжди перпендикулярне магнітному. Воно складається з двох частин різного характеру.

Перший доданок залежить лише від швидкості частки, та на великих відстанях змінюється пропорційно $1/R^2$. Обравши певним чином систему відліку координат, можна показати, що поле описуване цим доданком

відповідає (еквівалентне) полю заряду, що рухається рівномірно та прямолінійно, або, що теж саме у випадку *одного заряду*, звичайному електростатичному полю нерухомого заряду. Зауважимо, що у випадку *системи зарядів*, що рухаються рівномірно, але з різними швидкостями неможливо підібрати таку систему відліку в якій усі заряди будуть нерухомими – у будь-якій системі матимемо принаймні один заряд швидкість якого не дорівнюватиме нулю. Енергія поля цього доданку є енергією електростатичного поля заряду, що не залежить від його швидкості.

Величина другого доданку залежить від прискорення, та на відстанях більших за R змінюється як $1/R$. Зрозуміло, що цей доданок безпосередньо пов'язаний з випромінюванням. Енергія

Отже ближнє поле одного заряду, що рухається з прискоренням, еквівалентне полю заряду, що рухається прямолінійно та рівномірно.

Розглянемо систему двох нерухомих зарядів протилежного знаку. У випадку великої відстані між ними (заряди не відчують одне одного), маємо електростатичні поля окремих зарядів, що змінюється з відстанню пропорційно $1/R^2$. Енергія зв'язку такої системи дорівнює нулю, а енергія поля у вільному просторі – сумі енергій електростатичних полів зарядів. Якщо тепер наблизити заряди на малу відстань отримаємо поле електростатичного диполя (між зарядами існує зв'язок), що змінюється з відстанню пропорційно $1/R^3$. Енергія зв'язку, порівняно з попереднім випадком, збільшилася, а енергія поля у навколишньому просторі, відповідно, зменшиться, на величину, що дорівнює енергії зв'язку між зарядами.

У випадку, коли заряди в системі коливаються один відносно одного, поля, що створює кожний з зарядів описуються виразами (3), (4). При цьому, їх поля випромінювання, як *активні вільні поля* (фотони) що відірвалися від системи, не змінюють свого характеру у вільному просторі, а лише інтерферують між собою, як поля випромінювання двох синфазних джерел (заряди мають протилежний знак та рухаються у протилежних напрямках).

Ближні поля, маючи електростатичне походження та будучи нерозривно зв'язані з зарядами, мали б додаватися та як і у статичному випадку давати поле, що змінюється з відстанню пропорційно $1/R^3$. Але якщо врахувати принцип запізнення потенціалів, то в точці спостереження P , до якої час розповсюдження сигналів від обох часток менший проміжку $t - t'$ ми будемо мати у момент t поле пропорційне $1/R^3$ (поле зв'язку між частками системи – диполя), у точці ж спостереження P' , до якої час розповсюдження сигналу від одної частки більший проміжку $t - t'$, а від іншої частки менший проміжку $t - t'$ ми будемо мати у момент часу t поле

пропорційне $1/R^2$ (поле поодинокого заряду). Спрямовуючи проміжок часу $t - t'$ до нуля, отримуємо наявність полів $1/R^2$ та $1/R^3$ у будь-якій точці біля

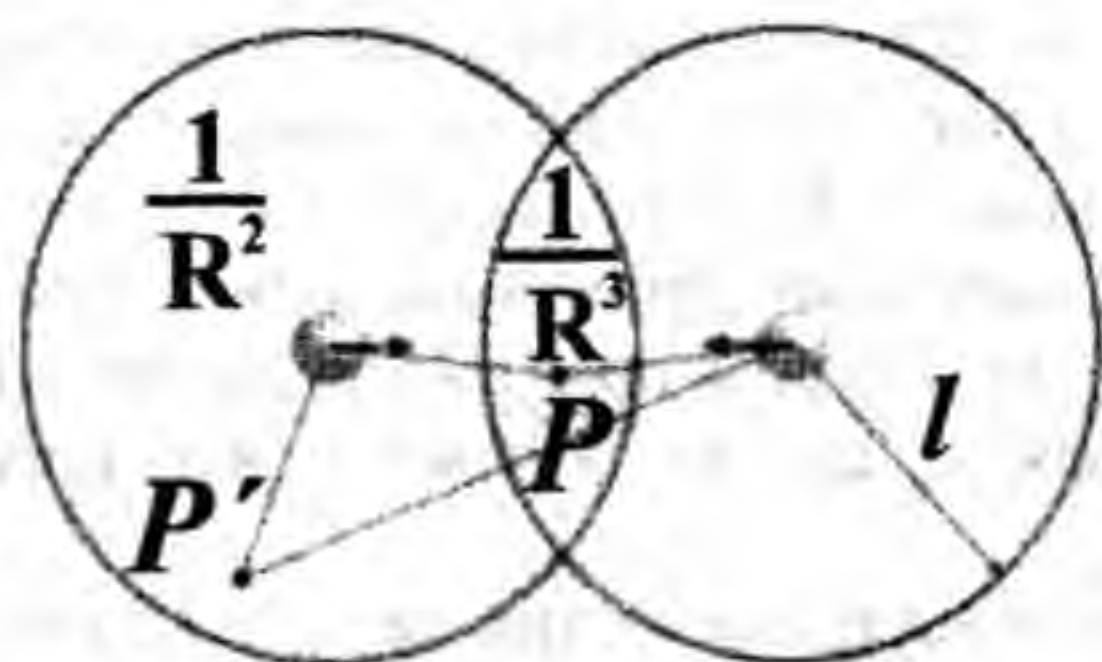


Рис. 1 Утворення ближнього поля системи зарядів.

пропорційним $1/R^2$.

Отже ближнє поле диполя Герца як системи зарядів, що коливаються – це поле, що утворюється за рахунок енергії електростатичного поля

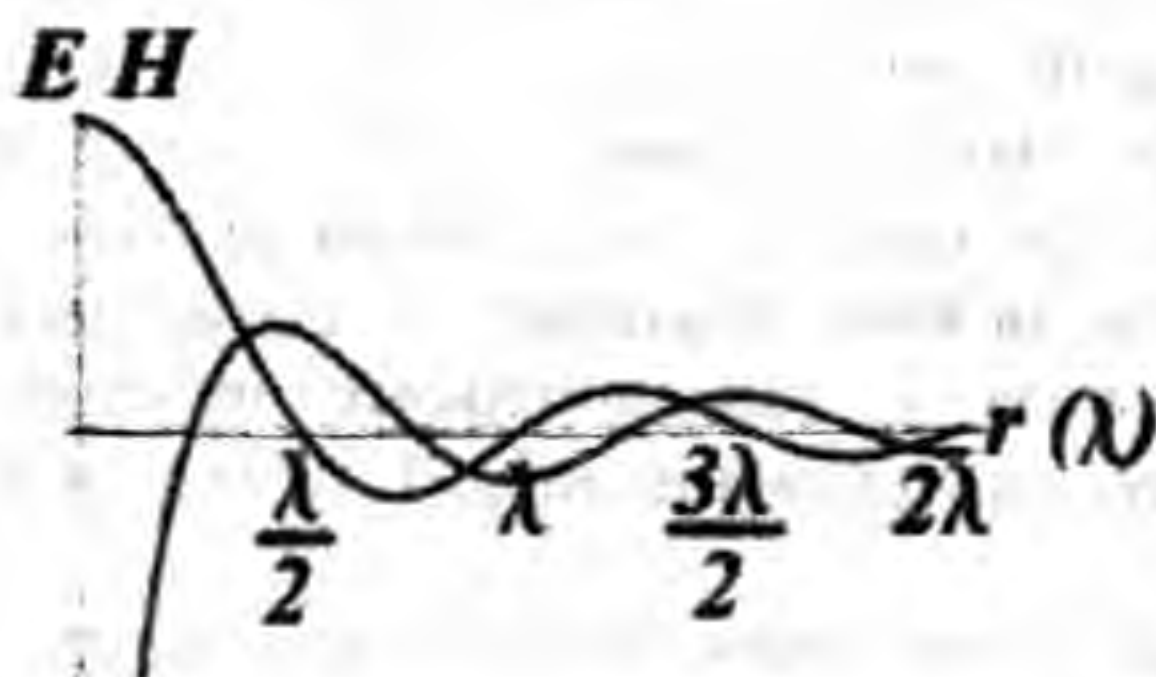


Рис. 2 Реактивний характер вектора Пойнтінга еванесцентної хвилі (E та H зсунуті за фазою на $\pi/2$).

зарядів додаються аналогічним чином. Проте вони у будь-якій точці обох вищезазначених областей є паралельними та спів напрямленими, а тому результуюче поле не змінює свого характеру і також є

зарядів, що входять до системи, та, зрозуміло, роботи сторонньої сили, яка витрачається на зміну енергії зв'язку системи. Це поле має дві складові електричного поля і одну складову магнітного. Складові електричного поля пропорційна $1/R^2$ вказує на наявність у системі, що розглядається, зарядів що рухаються (елементу току). Складові пропорційна $1/R^3$ говорить про те, що рухаються не поодинокі заряди, а заряди зв'язані між собою.

Розглянемо більш детально рух енергії ближнього поля диполя Герца, та обчислимо середній потік енергії, що переноситься ближнім полем:

$$\bar{P} = \frac{(I_m^2 l^2)}{16\pi^2 \omega \epsilon_0 \epsilon r^4} (r_0 \sin^2 \theta - \theta_0 \sin(2\theta)). \quad (5)$$

Вираз (5) має лише один доданок, що утворюється магнітним полем та складовою електричного поля пропорційною $1/R^2$. Він описує середній потік *активного зв'язаного електромагнітного поля*, тобто поля, що не відривається від зарядів, проте має активний характер (поля E та H

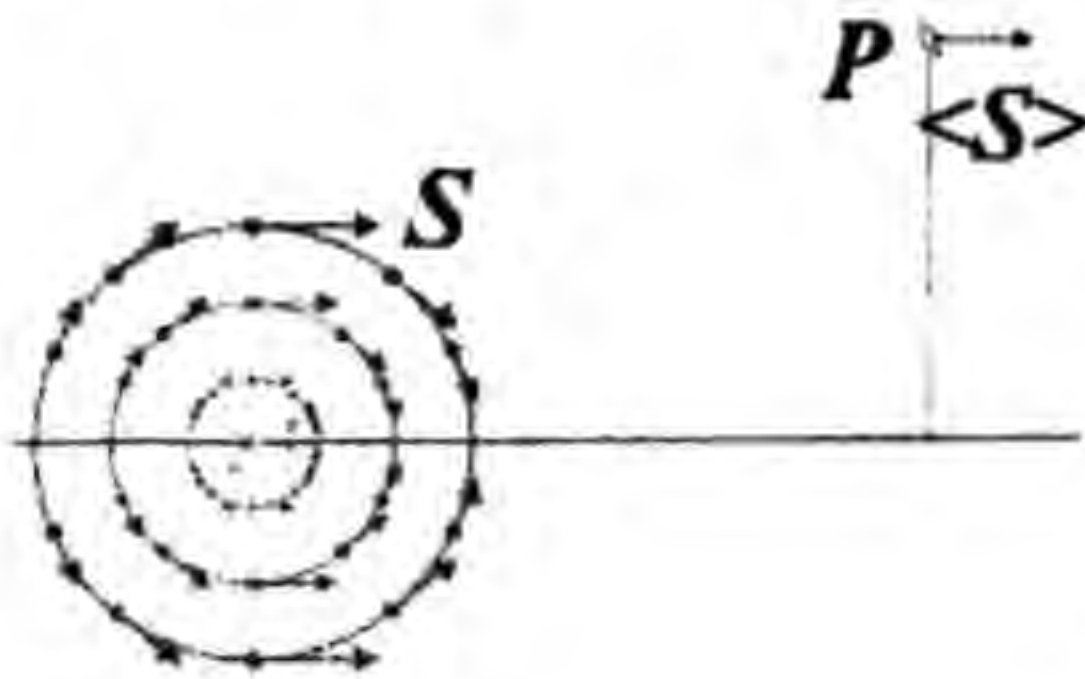


Рис. 3 Рух енергії електромагнітного поля у випадку прямолінійного рівномірного руху.

синфазні). Складові електричного поля $1/R^3$ зсунута за фазою на $\pi/2$ відносно магнітного поля (рис. 2), тобто це електромагнітне поле має реактивний характер, а отже середнє значення його вектора Пойнтінга дорівнює нулю. Це так звана *еванесцентна хвиля*. Таким чином, середні значення вектора Пойнтінга дають нам мінімум інформації про процеси, що відбуваються у ближньому полі системи зарядів. Тому для детального аналізу процесів, що відбуваються у ближньому полі,

необхідно розглядати миттєві значення векторів Пойнтінга його компонент.

Розглянемо спочатку перенос енергії одним зарядом, що рухається прямолінійно та рівномірно відносно точки спостереження.

Нехай ми спостерігаємо за потоком енергії крізь малу площадку P , що лежить у площині перпендикулярній до траєкторії заряду та не лежить на самій траєкторії. Відомо, що у випадку прямолінійного та рівномірного руху заряду електромагнітне поле рухається по сферичним поверхням, що співпадають з поверхнями рівних потенціалів електричного поля заряду [4] (рис. 3). Зрозуміло, що у випадку руху заряду з мінус нескінченності до плюс нескінченності потік поля крізь площадку не буде дорівнювати нулю, причому, у випадку, коли точка спостереження лежить на значній відстані l від траєкторії руху заряду, спостерігач помітить зміну електромагнітного поля, направлену вздовж напрямку руху заряду, тільки через час l/c . Цей процес є сутністю *активного зв'язаного електромагнітного поля*, що несе у простір інформацію про рівномірний рух заряду, його швидкість, та зв'язану з ним енергію.

Як було показано вище, складові ближнього поля диполя Герца, мають *спільне походження*, яке пов'язано із *статичним полем* зарядів та *взаємодією зарядів у системі*. Тому аналіз енергетичних властивостей компонент ближнього поля диполя Герца, через їх спільне походження, треба проводити лише разом. Тому побудуємо і проаналізуємо миттєві значення векторів Пойнтінга для *еванесцентної хвилі* та *активного зв'язаного поля* диполя Герца. (рис. 5, рис. 4).

X

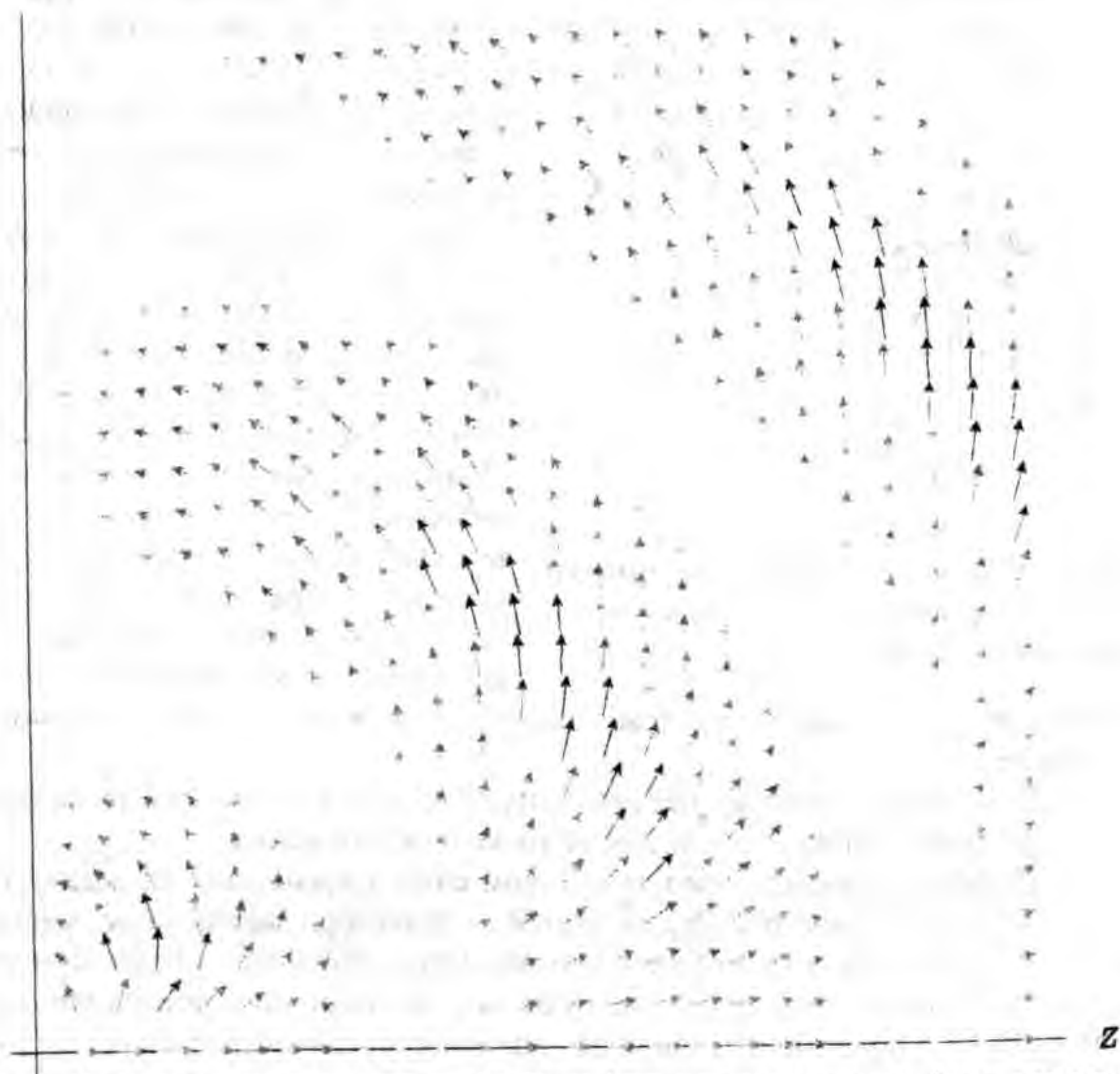


Рис. 4 Миттєві значення векторів Пойнтінга для активного зв'язаного поля диполя Герца.

Бачимо, що значення модуля вектора Пойнтінга активного зв'язаного поля, у певний момент часу t , є пропорційним швидкості зарядів у системі в цей самий момент часу. Тобто, коли заряди знаходяться на мінімальній відстані та мають максимальну швидкість, модуль миттєвого значення вектора Пойнтінга також має максимальне значення. У момент коли заряди розходяться на максимальну відстань та зупиняються модуль миттєвого значення вектора Пойнтінга також дорівнює нулю. З іншого боку, напрямок вектора Пойнтінга активного зв'язаного поля диполя Герца, не відповідає повністю напрямку вектора Пойнтінга аналогічного поля одного заряду – має складову напрямлену вздовж орта r_0 . Це пояснюється перекачкою через спільне магнітне поле частини енергії з еванесцентної хвилі у активне зв'язане поле, а саме, енергії, яка з'явилась за рахунок роботи сторонньої сили, що змінює енергію зв'язку системи.

X

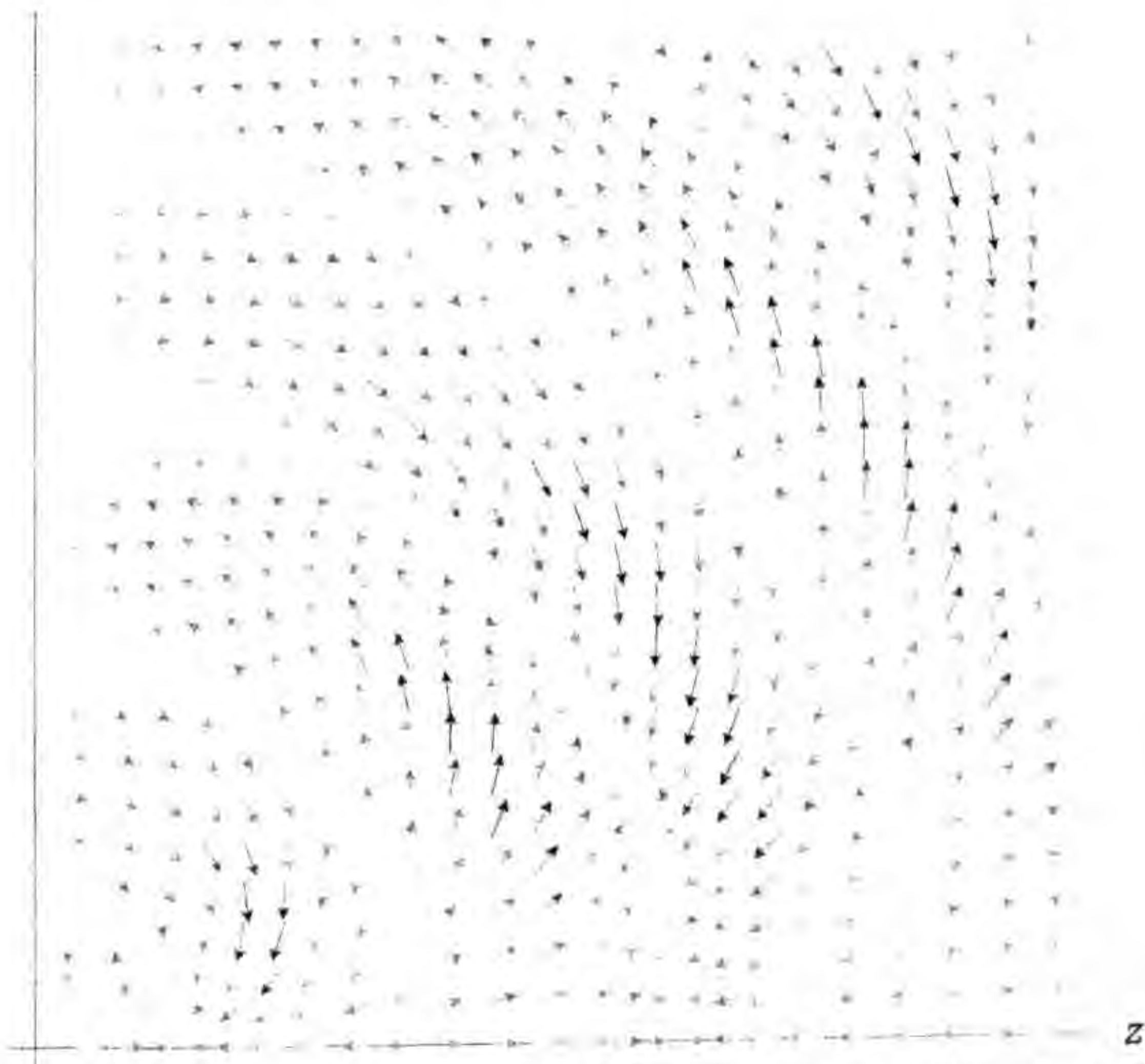


Рис. 5 Миттєве значення вектора Пойнтінга для еванесцентної хвилі диполя Герца.

Вектор Пойнтінга еванесцентної хвилі змінює свій напрямок чотири рази за період, та у середньому дорівнює нулю. Практично вся енергія, за винятком вищезазначеної, що виходить із випромінювача у вигляді поля еванесцентної хвилі, повертається назад у випромінювач, несучи з собою інформацію про зовнішнє середовище. Така особливість еванесцентної хвилі ближнього поля робить можливим використання його для дослідження об'єктів, що знаходяться поза випромінювачем.

Висновки

Проведений аналіз ближнього поля диполя Герца показав, що:

1. Природа ближнього поля пов'язана зі *статичним* полем як самих зарядів так і полем *системи* двох зарядів, з яких складається диполь Герца.

2. Ближнє поле *одного заряду*, що рухається з прискоренням, еквівалентне полю статичного заряду та не має еванесцентної хвилі.
3. Ближнє поле, що створює *система зарядів* (диполь Герца) має дві складові електромагнітного поля: реактивну *еванесцентну хвилю*, та *активне зв'язане поле*.
4. Активне зв'язане поле ближнього поля диполя Герца пов'язане з рухом зарядів (елементом току) у системі, що розглядається.
5. Наявність в ближньому полі еванесцентної хвилі, пов'язана *лише* з полем *системи зарядів*.

Зауваживши, що будь-який випромінювач можна розкласти на систему диполів з певними фазами, то усі висновки зроблені про природу ближнього поля диполя Герца можна перенести на ближнє поле довільної системи.

Список використаних джерел

1. В. В. Никольский, Т. И. Никольская, Электродинамика и распространение радиоволн. – М.: "Наука", 1989.
2. В.С. Сидоренко, Ю.О. Гайдай, С.В Жила, О.В. Сінькевич, Розподіл вектора Пойнтінга у ближньому полі диполя Герца// Вісник Київського університету. Серія: Радіофізика та електроніка. – 2003. – 1. – с. 55-59.
3. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц Механика, електродинамика – М.: Наука 1969
4. И. Е Тамм, Основы теории электричества. – М.: "Наука", 1989.

Надійшло до редакції 04.04.2005 р.

УДК 519.9

Анатолій Г. Шкавро*,
Ольга В. Товпеко*

Шумова спектроскопія глибоких рівнів сульфіду кадмію.

Розглянуто застосування методу шумової спектроскопії для визначення параметрів глибоких рівнів, зокрема сталої часу та енергетичної глибини залягання. Досліджено температурну залежність спектру генераційно-рекомбінаційного шуму CdS

Ключові слова. шумова спектроскопія, генераційно-рекомбінаційний шум.

Anatoly G. Shkavro*,
Olga V. Tovpeko*

Noise Spectroscopy of Deep Levels in Cadmium Sulphide.

The application of the method of noise spectroscopy for determination some parameters as characteristic generation-recombination time constant and activation energies of the electronic levels is described. The investigation of temperature dependence of generation-recombination noise spectra in CdS is observed.

Key Words: noise spectroscopy, generation-recombination noise.

*E-mail: shkavro@rpd.univ.kiev.ua

Вступ. Відомо, що одним з кращих методів визначення параметрів глибоких центрів у напівпровідниках є метод релаксаційної спектроскопії (РСГР) [1,2]. Однак для його реалізації необхідно створити тестову структуру з бар'єрним шаром, наприклад, $p-n$ - перехід або бар'єр Шоткі. Оскільки деяким напівпровідникам, зокрема CdS, притаманне явище самокомпенсації, яке не дозволяє створити в них $p-n$ - перехід, метод РСГР для них не застосовний. Для дослідження глибоких рівнів у таких напівпровідниках використовують суто оптичні методи, методи термостимульованого струму (ТСС), термостимульованої провідності (ТСП) та інші [1,3]. У [4] показано, що надзвичайно чутливим методом визначення та дослідження глибоких рівнів є шумова спектроскопія. Однак, незважаючи на принципову простоту та очевидні достоїнства, метод шумової спектроскопії використовується для дослідження глибоких центрів рідко порівняно з іншими методами.

Методика шумової спектроскопії глибоких рівнів.

Теоретичні основи метода шумової спектроскопії викладені в [4]. Звичайно експериментально досліджується залежність спектральної густини шумового струму (або фотоструму) $S_i(\omega)$ від частоти в діапазоні температур. В загальному випадку для генераційно-рекомбінаційного шуму напівпровідникового резистора (або фоторезистора):

$$S_i(\omega) \sim i^2 \frac{\tau}{1 + \omega^2 \tau^2}.$$

де i - струм, що протікає у напівпровідниковому резисторі, а τ - стала часу, яка визначається механізмом флуктуації струму, та параметрів глибоких рівнів. Видно, що в області відносно високих частот ($\omega \gg 1/\tau$) спектральна густина шумового струму спадає пропорційно квадрату частоти, а в низькочастотній області ($\omega \ll 1/\tau$) має місце насичення. При $\omega = 1/\tau$ спектральна густина шумового струму дорівнює половині значення на ділянці насичення (низькочастотного плато). З температурної залежності τ , (або спектральної густини шумового струму в області насичення) можна визначити параметри глибоких центрів[4].

Експериментальне дослідження CdS та аналіз методики шумової спектроскопії.

Отже, експериментальне дослідження глибоких рівнів в напівпровідниках методом шумової спектроскопії полягає в одержанні ряду шумових спектрів при різних температурах. Як зазначалося, спектральна густина шумового струму являє собою суперпозицію членів типу $\tau/(1 + \omega^2 \tau^2)$, обумовлених різними центрами. Величини τ для рівнів, розташованих на різній енергетичній глибині, як правило, суттєво відрізняються між собою через больцманівський фактор [5].

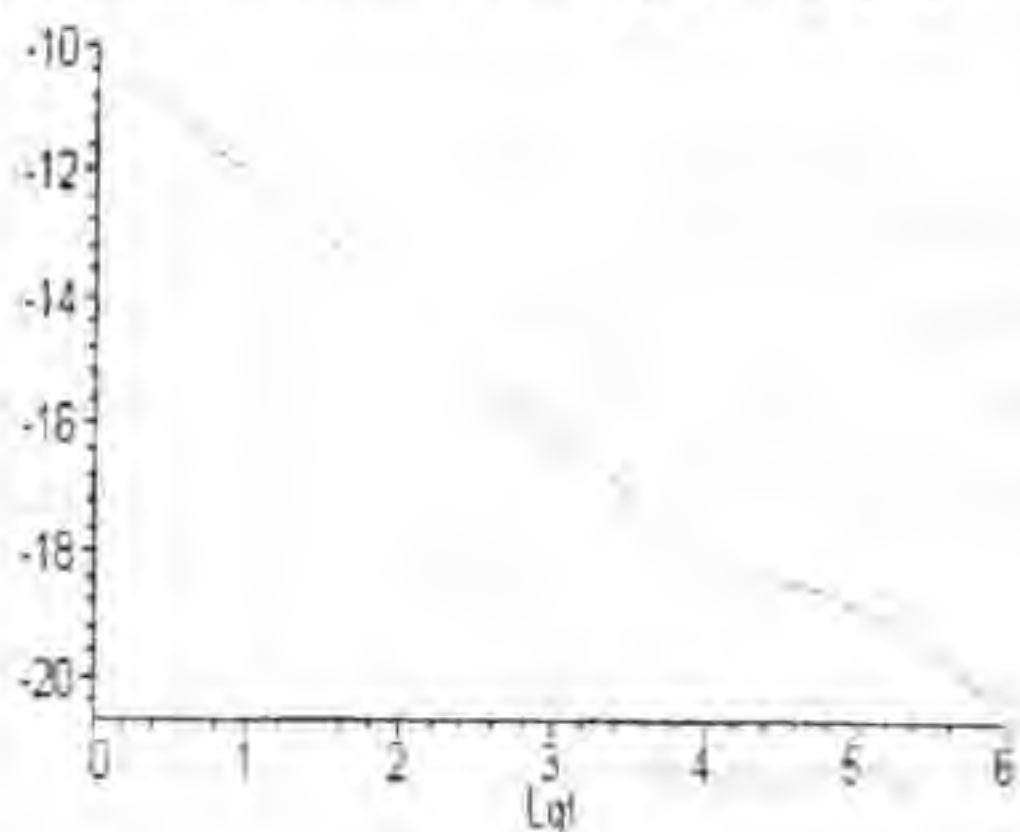


Рис.1. Залежність спектральної густини $S(f)$ при $T=80K$

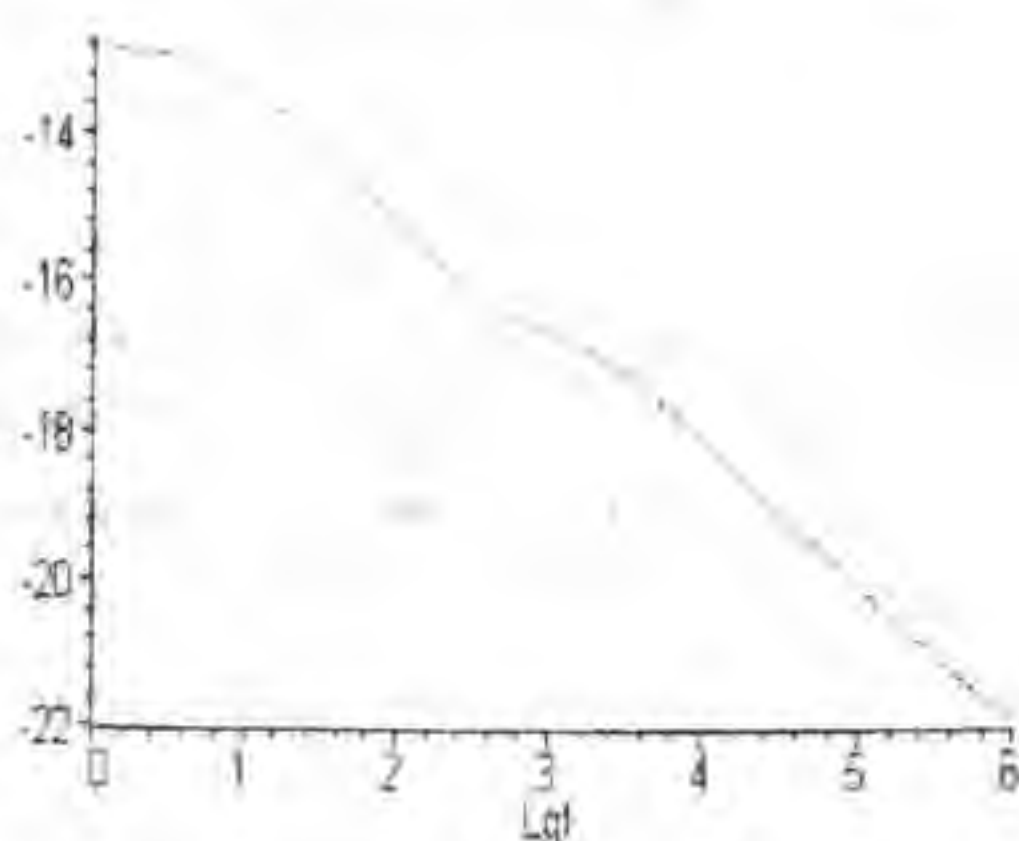


Рис.2. Залежність спектральної густини $S(f)$ при $T=250K$

Оскільки із зміною температури сталі часу змінюються експоненційно, то для різних досить вузьких температурних інтервалів домінуючий внесок в шумовий спектр буде давати той чи інший рівень. При досить низькій температурі, шумовий струм визначається параметрами наймілкішого рівня, оскільки більш глибокі рівні повністю заповнені електронами (для напівпровідника n -типу). З підвищенням температури стала часу τ , що відповідає цьому рівню, експоненційно спадає і внесок від нього в шумовий спектр швидко зменшується, а відповідна сходинка зміщується в область більш високих частот (рис.1). При цьому рівень Фермі наближається до другого, більш глибокого рівня, який і буде визначати величину шумового струму. Перший рівень тепер відіграє роль додаткового мілкого

донора. Отже, відповідний член стане домінуючим в шумовому спектрі в області низьких частот. Аналогічно, з подальшим підвищенням температури в шумових спектрах послідовно себе проявляють більш глибокі рівні (рис.2).

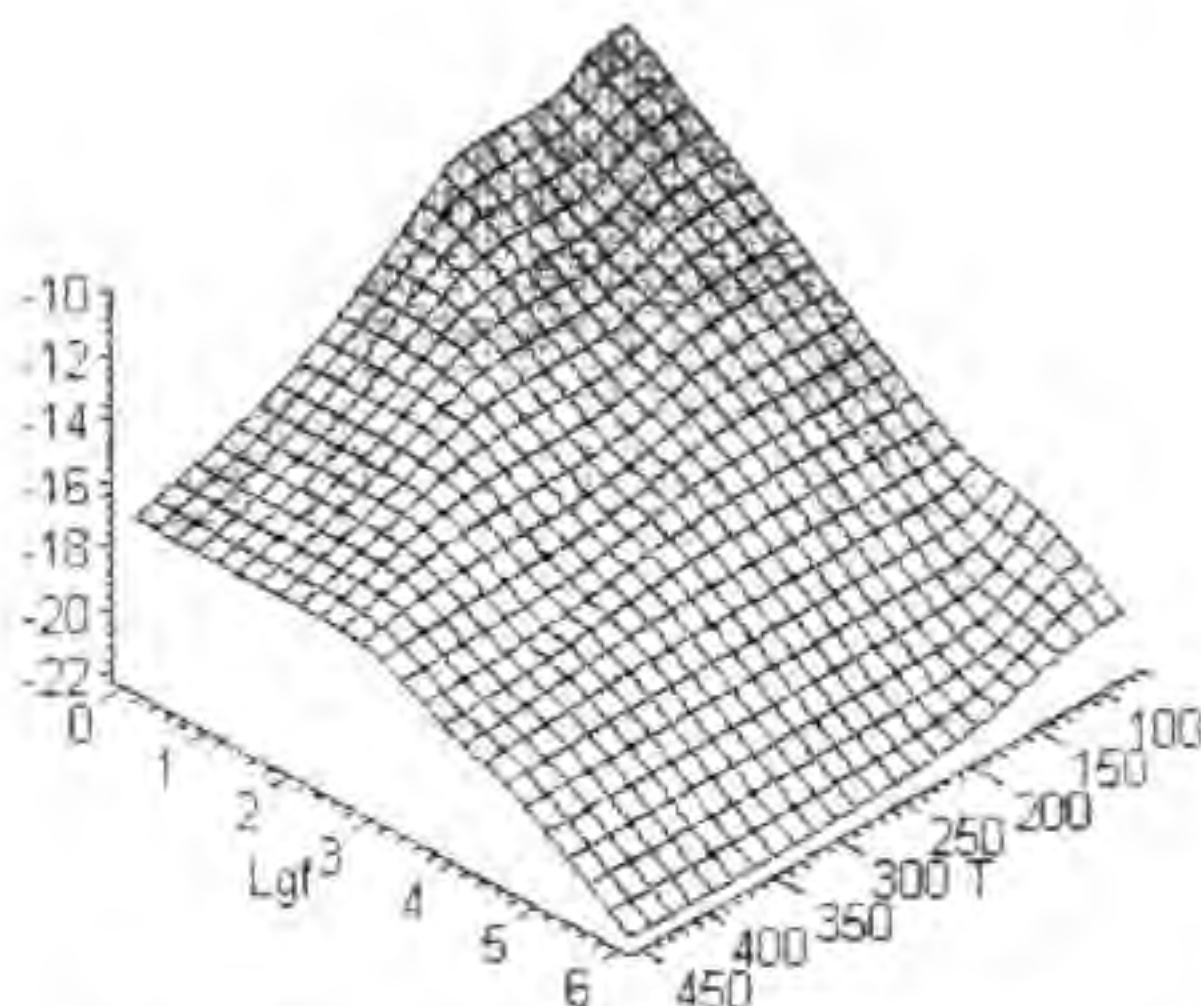


Рис.3. Температурно-частотна залежність спектральної густини шумового струму.

Для одержання вичерпної інформації про наявність та параметри глибоких центрів в напівпровіднику результатом експериментальних досліджень має бути температурно-частотна залежність спектральної густини шумового струму на зразок наведеної на рис.3 (одержана за допомогою модельних розрахунків). Аналіз залежності $S(f)$ при фіксованих температурах дозволяє одержати залежність $\tau(T)$, з якої визначається глибина залягання відповідного рівня.

Таким чином, з одержаних залежностей спектральної густини шумового струму в області насичення визначаються параметри глибоких центрів. Це так, коли шумові спектри характеризуються сталими часу τ , які суттєво відрізняються між собою ($\tau_1 \neq \tau_2 \neq \tau_3$). В цьому разі в спектрах генераційно-рекомбінаційного шуму в досліджуваному частотному діапазоні $1.5 \div 1.5 \cdot 10^5$ Гц проявляються одночасно внески не більше ніж від двох (рідко від трьох) рівнів, які легко відрізнити один від одного, оскільки відповідні сходинок досить далеко рознесені по частоті. У випадку, коли сталі часу відносно близькі, спектральна залежність в області високих частот часу змінюється як $1/\omega^a$, де $a < 2$ [5]. За таких обставин виникають труднощі в ідентифікуванні спектру генераційно-рекомбінаційного шуму. Але слід враховувати, що процес проведення шумової спектроскопії досить складний, оскільки необхідно вимірювати спектр в діапазоні частот $1.5 \div 1.5 \cdot 10^5$ Гц при зміні температури $77^\circ \div 420^\circ$ К. При цьому не завжди вдається виявити наявність глибоких центрів, оскільки внесок від того чи

іншого рівня спостерігається в досить вузькому частотному та температурному інтервалах або взагалі лежить за межами досліджуваних областей.

Застосування даної методики розглянемо на прикладі дослідження глибоких центрів в сульфіді кадмію CdS. Виміри шумових характеристик проводилися на установці (рис. 4), до складу якої входили: селективний нановольтметр (СП) "Uniran-233", попередній підсилювач (ПП) "Uniran-233.5" та цифровий вольтамперометр (ЦВ) Щ1518, (який дозволяє при кожному вимірюванні проводити усереднення по заданій кількості спостережень)

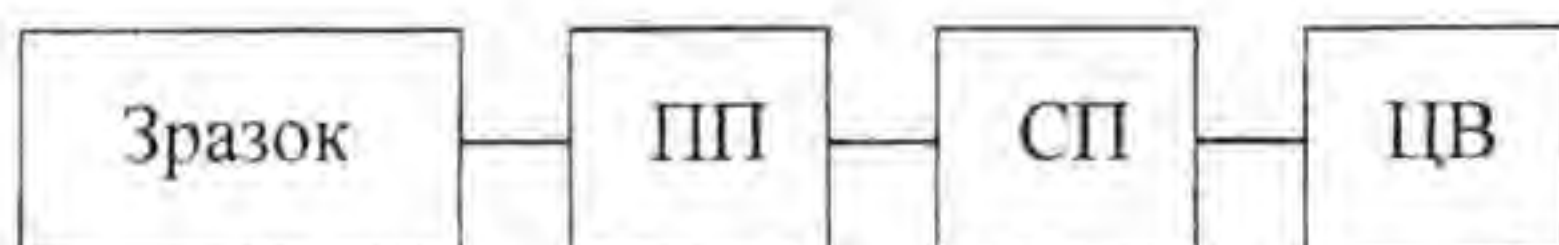


Рис. 4. Спрощена блок – схема вимірювальної установки.

При прикладеному до зразка На рис. 5. Представлено ряд експериментальних залежностей величини $S_i(f)$ знятих при різних значеннях струму, що протікає. По характеру цих залежностей встановлено, що в діапазоні частот від 10 Гц до 1 кГц спектральна густина

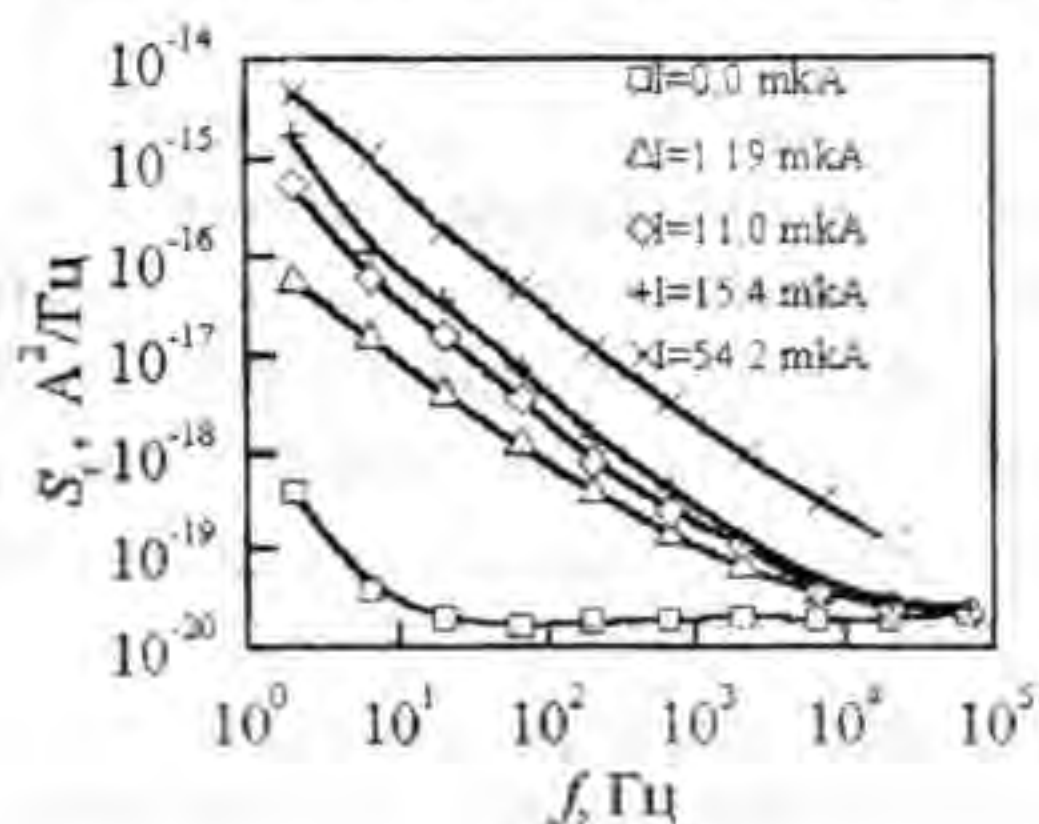


Рис.5. Залежність спектральної густини $S_i(f)$ при різних значеннях струму зміщення.



Рис.6. Залежність спектральної густини $S_i(f)$ від величини струму зміщення

шумового струму пропорційна квадрату струму, що свідчить про наявність генераційно-рекомбінаційного шуму (рис.6).

Після виявлення у напівпровіднику генераційно-рекомбінаційного шуму, були виміряні залежності спектральної густини шумового струму від температури. Вимірювання у такий спосіб скорочує час проведення експерименту. З температурної залежності величини $S_i(f)$ було одержано частотну залежність спектральної густини при фіксованих температурах (рис.7). Глибину залягання рекомбінаційних центрів можна визначити з температурної залежності спектральної густини шумового струму в облас-

ті насичення (рис. 8), або часу життя від оберненої температури.

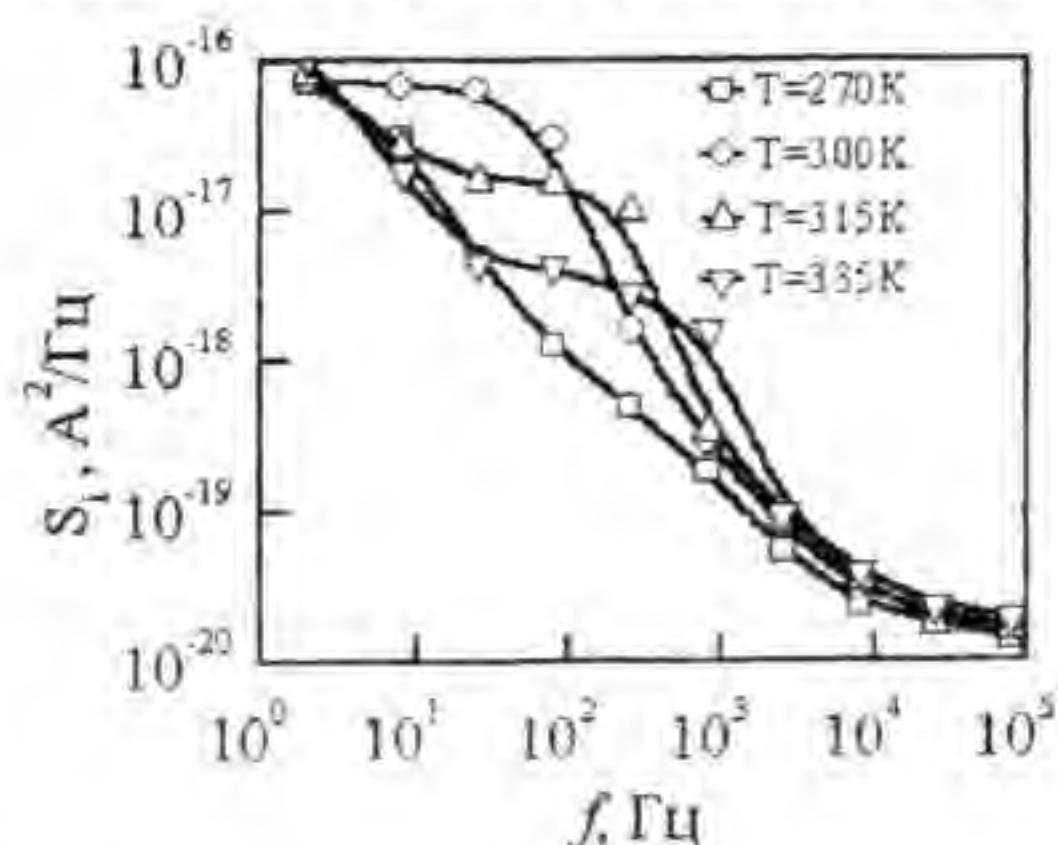


Рис. 7. Залежність шумових спектрів при фіксованому струмі від температури.

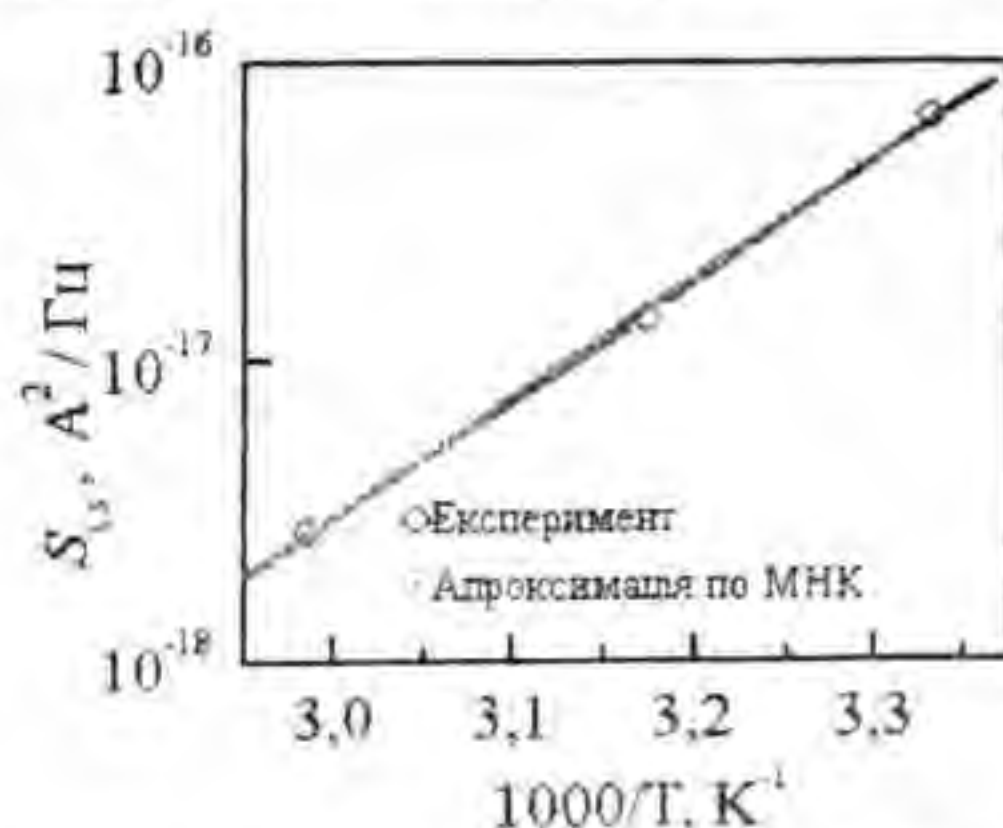


Рис. 8. Залежність спектральної густини шумового струму в області насичення $S_{1s}(f)$ оберненої температури.

Отримане в такий спосіб значення глибини залягання рівня, яка становить близько 0,6 eV. Слід відзначити, що рівні з такою енергією визначаються в CdS і іншими методами [7].

Отже, в даному випадку метод шумової спектроскопії вдалося виявити один рівень, хоча відомо, що сульфід кадмію містить їх значно більше. Можливо це пов'язане з тим, що в даному експерименті не досягнуто достатньої роздільної здатності для виявлення близько розташованих рівнів.

Таким чином, слід зазначити, що, безперечно, методика шумової спектроскопії є досить корисною для вивчення природи фізичних процесів, що обумовлюють явища провідності. Вона дозволяє виявляти в напівпровідниках глибокі центри з досить малими концентраціями. Крім того, на відміну від інших методів, метод шумової спектроскопії визначає параметри в рівноважних умовах. З іншого боку, процес проведення шумової спектроскопії досить складний і тривалий в часі. Існують обмеження нижньої та верхньої межі досліджуваного температурного інтервалу. Якщо ж проводити виміри в області досить високих температур для визначення параметрів відносно глибоких (близьких до середини забороненої зони) рівнів, то в спектрах генераційно-рекомбінаційного шуму можуть з'являтися ефекти, пов'язані з існуванням генераційно-рекомбінаційних потоків між глибокими рівнями і зоною неосновних носіїв, а також зона-зонними переходами. З пониженням температури в більшості випадків в шумовому спектрі починають переважати особливості, обумовлені наявністю пасток [4,6]. Врахування цих ефектів призводить до більш складних розрахунків.

Окрім цього існують досить жорсткі вимоги до експериментального обладнання (низький рівень власних шумів, висока ступінь стабілізації температури). Та й трактування результатів досить складне і не завжди однозначне. Суттєве підвищення достовірності результатів можливе за рахунок автоматизації збору та попередньої обробки експериментальних даних, що

призводить до значного збільшення їх об'єму. Оскільки, застосування методу шумової спектроскопії, як самостійного для визначення параметрів глибоких центрів у напівпровідниках, не завжди призводить до очікуваних результатів, для одержання більш вичерпної інформації доцільно його використовувати в комбінації з іншими методами.

Висновки.

Методика шумової спектроскопії глибоких рівнів принципово проста, але передбачає великий об'єм роботи та висуває високі вимоги до параметрів установки (чутливості, вхідного опору та рівня власних шумів попереднього підсилювача, діапазону частот та ширини смуги селективного підсилювача) та гарантує успіх у випадку коли у зразку є рівні одного сорту, а при наявності різних рівнів їх характерні сталі часу достатньо (хоча б на порядок) відрізняються у досліджуваному діапазоні температур.

Зростання вимог до експериментальної установки та збільшення об'єму досліджень при наявності в напівпровіднику набору глибоких рівнів з близькими параметрами може призвести до недоцільності використання методу шумової спектроскопії

Враховуючи великий об'єм експерименту та обробки його результатів ці дослідження доцільно автоматизувати.

Література

1. Воробьев Ю.В., Добровольский В.Н., Стриха В.И. Методы исследования полупроводников. – Киев: Выща школа, 1988.
2. Берман Л.С., Лебедев А.А. Емкостная спектроскопия глубоких центров в полупроводниках. – Ленинград: Наука, 1981.
3. Павлов Л.П. Методы измерения параметров полупроводниковых материалов. – Москва: Высшая школа, 1987.
4. Лукьянчикова Н.Б. Флуктуационные явления в полупроводниках и полупроводниковых приборах. – Москва: Радио и связь, 1990.
5. Ван-дер-Зил А. Флуктуационные явления в полупроводниках. – Москва: ИЛ, 1990.
6. Букингом М. Шумы в электронных приборах и системах. – Москва: Мир, 1986.
7. Шейнкман М. К., Маркович И. В., Хвостов В. А. Модель остаточной проводимости в полупроводниках и ее параметры в $\text{CdS}:\text{Ag}:\text{Cl}$ // ФТП - 1971, Том 5, в. 10 стр.1904-1909.

Надійшла до редакції 20.03.2005

СУЧАСНА ФІЗИКА

УДК 532.536

Альошін О.Д., проф., д.ф.-м.н.

Alekhin O.D., Prof., Dr.Sc.

**Величини критичних показників
теплоємності і кореляційної
функції**

**Critical indexes of heat capacity and
correlation function**

В роботі на основі рівнянь флуктуаційної теорії фазових переходів за допомогою введення в ці рівняння малих параметрів розраховані величини критичних показників польової і температурної залежностей радіуса кореляції, теплоємності, кореляційної функції. Одержані результати близькі до розрахунків цих величин на основі 3-вимірної моделі Ізінга і метода ϵ -розкладів.

The critical indexes of temperature and field dependences of correlation length, heat capacity, correlation function have been calculated in the work on the basis of the fluctuation theory of phase transitions by including small parameters to these equations. The obtained results are close to these values calculated on the basis of three-dimensional Ising model and ϵ -expansion method.

Ключові слова: критичні показники, флуктуаційна теорія

Keywords: critical indexes, fluctuation theory

e-mail: alekhin@univ.kiev.ua

В роботах [1, 2] для визначення величин критичних показників флуктуаційної теорії фазових переходів ФТФП [3] був запропонований метод, що базується на використанні малих параметрів. Ці малі параметри впливають з відомих нерівностей, які характеризують величини критичних показників [3]:

$$\beta > 1/3, \nu < 2/3, \xi > 2/5, \gamma < 4/3, \delta < 5, \beta\delta < 5/3. \quad (1)$$

Виходячи з (1) малі параметри представляються у вигляді:

$$\begin{aligned} \beta_0 &= \beta - 1/3 \ll \beta; \nu_0 = 2/3 - \nu \ll \nu; \xi_0 = \xi - 2/5 \ll \xi; \\ \delta_0 &= 5 - \delta \ll \delta; \gamma_0 = 4/3 - \gamma \ll \gamma. \end{aligned} \quad (2)$$

Тоді на основі цих нерівностей в [1,2] було показано, що на доданок до відомих шести незалежних співвідношень між критичними показниками [3] виконуються також і два наступних

$$\begin{aligned} \nu^2 &= \xi; \\ \eta &= 2 - 3(\delta - 1)/(\delta + 1) = 5 - 2/\xi = 5 - 2/\nu^2 = \alpha_\mu(1 + \alpha_t). \end{aligned} \quad (3)$$

Ці співвідношення в межах похибок, які значно менші експериментальних [4], поєднують між собою критичні показники

польової і температурної залежності радіуса кореляції: ξ ; v ($R_c \sim \Delta\mu^{-\xi}$, $R_c \sim t^{-v}$); сингулярної частини теплоємності: α_μ і α_t ($C_v \sim \Delta\mu^{-\alpha_\mu}$; $C_v \sim t^{-\alpha_t}$); кореляційної функції: η ($G(r) \sim 1/r^{1+\eta}$, $kR_c \Rightarrow \infty$).

Виходячи з співвідношень [3] і (3) в [1,2] були одержані рівняння, які дозволили розрахувати величини всіх критичних показників ФТФП [3].

Мета даної роботи полягає в продовженні досліджень величин критичних показників [3], зокрема в розрахунках величин показників температурної і польової залежності теплоємності – α_t і α_μ , а також критичного показника кореляційної функції – η . Це пов'язано з тим, що на даний час в визначеності величини цих показників існують суттєві відмінності [4] ($\alpha_t = 0,08 \div 0,12$, $\eta = 0,03 \div 0,07$). Критичний показник польової залежності теплоємності α_μ експериментально зовсім не визначався.

Для вирішення цієї задачі також використаємо малі параметри і систему нерівностей між ними (2). Результати експериментальних досліджень і теоретичні розрахунки величин критичних показників [4,5] дозволяють звести систему нерівностей (2) до єдиної, а саме:

$$\delta_0 \gg \gamma_0 > \alpha_t > \alpha_\mu \approx \eta \gg v_0 \gg \xi_0 \approx \beta_0 \approx (3 \div 4) 10^{-3}. \quad (4)$$

Припущення про приблизну рівність малих параметрів $\xi_0 \approx \beta_0$, виходячи з їх малості, не впливає на точність розрахунків величин критичних показників [3]. Однак, це припущення на основі рівнянь ФТФП [3] і рівнянь (2) приводить до зв'язку між малими параметрами радіуса кореляції v і ξ у вигляді: $v_0 = 25/4 \xi_0$.

В той же час нерівність $\beta\delta = v/\xi = \alpha_t/\alpha_\mu < 5/3$ (1) на основі рівняння Мигдала [3] може бути визначене більш точно, як $3/2 < \beta\delta < 5/3$.

Тоді з цієї нерівності і співвідношення $\gamma + 2\beta + \alpha_t = 2$ [3] слідують нерівності, які визначають величини критичних показників теплоємності: $\alpha_t > 0,067$ і $\alpha_\mu < 0,067$, які повністю підтверджуються існуючими теоретичними розрахунками і експериментальними даними [4,5].

Ці нерівності за допомогою малих параметрів α_t^0 і α_μ^0 можна перетворити в рівності, а саме:

$$\alpha_t = 2 - 3v = 0,067 + \alpha_t^0; \quad (6)$$

$$\alpha_\mu = 2 \xi/v - 3 \xi = 0,067 - \alpha_\mu^0. \quad (7)$$

Тоді використання (6) і (7), а також співвідношень $\alpha_t/\alpha_\mu = v/\xi$ [3] і $v_0 = 25/4 \xi_0$ дозволяє розрахувати величини малих параметрів: α_t^0 , α_μ^0 , v_0 , ξ_0 , а саме:

$$\begin{aligned}\alpha_t^0 &= 0,024; & \alpha_\mu^0 &= 0,011; \\ \nu_0 &= 0,03; & \xi_0 &= 0,005.\end{aligned}\tag{8}$$

Тоді на основі (6)–(8) і (2) знаходимо величини критичних показників радіуса кореляції – $\nu = 0,623$, $\xi = 0,405$; теплоємності – $\alpha_t = 0,091$; $\alpha_\mu = 0,058$; кореляційної функції – $\eta = 0,062$.

Одержані результати підтверджують справедливість запропонованих раніше рівнянь (3) [2] і близькі до результатів розрахунків тривимірної моделі Ізінга і методу ϵ -розкладів [4,5].

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Альохін О.Д. Рівняння для критичних показників неоднорідних систем в гравітаційному полі. // Вісник Київського університету. Серія: фізико-математичні науки – 2003 – Вип. 2. – С. 319-321.
2. Альохін О.Д. Критичні показники і відповідні їм малі критичні показники 3-вимірних систем. // Вісник Київського університету. Серія: фізико-математичні науки – 2004. – Вип. 2. – С. 319-321.
3. Паташинский А.З., Покровский В.Л. Флуктуационная теория фазовых переходов. – М.: Наука. 2-е изд., перераб., 1982. – 382 с.
4. Анисимов М.А. Критические явления в жидкостях и жидких кристаллах. – М.: Наука. 1987. – 271 с.
5. Стенли Г. Фазовые переходы и критические явления. Пер. с англ.–М.: Мир, 1973. – 419с.

Надійшла до редколегії 11.04.2005

УДК 539.17

Олег А. Безшийко,
Лариса О. Голінка-Безшийко,
Ігор М. Каденко,
Володимир А. Плюйко,
Олена С. Шашко

Використання фотоядерних реакцій для вивчення структури ядра та механізмів ядерних реакцій

Оглядом розглянуто основні переваги та особливості використання фотоядерних реакцій для вивчення структури ядра та механізмів ядерних реакцій. Проведено оцінку сучасного стану в цій області та перспективи з огляду розробки нових методів отримання високо інтенсивних пучків квазімоноенергетичних гамма-квантів. Розроблено програмні інструменти для ефективною оптимізації параметрів моделей ядерних реакцій на основі програмного пакету Empire II.

Ключові слова: Empire II, фотоядерні реакції, зворотнє комптонівське розсіяння.

Oleg A. Bezshyyko,
Larisa O. Golinka-Bezshyyko,
Igor M. Kadenko,
Vladimir A. Plujko,
Olena S. Shashko

Using the photonuclear reactions to study the nuclear structure and nuclear reaction mechanisms

Main advantages and features of using the photonuclear reactions to study the nuclear structure and nuclear reaction mechanisms are discussed. The current state in this area and prospects for the near future is reviewed, taking into account progress in the development of intense gamma-ray sources with Compton backscattering. Tools for effective optimization of the parameters for nuclear reaction calculations based on Empire II code are developed.

Key Words: Empire II, photonuclear reactions, Compton backscattering.

Дослідження фотоядерних реакцій є потенційно потужним інструментом вивчення структури ядра та механізмів ядерних реакцій. Збудження ядер за допомогою електромагнітного випромінювання (γ -квантів) має цілий ряд особливостей і переваг порівняно із збудженням різними типами частинок (протонами, нейтронами, α -частинками і т.д.):

- Початкове збудження ядра γ -квантами має електромагнітну природу, на відміну від ядерної взаємодії для нейтронів чи змішаної електромагнітно-ядерної взаємодії для налітаючих заряджених ядерних частинок. Електромагнітна взаємодія є значно слабшою за ядерну, що дозволяє її розгляд за теорією збурень.
- На відміну від нейтронів γ -кванти не вносять додаткової енергії зв'язку при їхньому поглинанні ядром; для γ -квантів також відсутній кулонівський бар'єр. Це дає змогу за допомогою фотоядерних реакцій більш надійно вивчати характеристики ядер при енергіях збудження.

менших за енергію відділення частинок, а також при енергіях, що менші за енергії кулонівських бар'єрів заряджених частинок.

- При енергіях збудження, вищих за енергію зв'язку на кілька сот кеВ, практично дуже важко досліджувати залежності параметрів ядерних моделей від повного кутового моменту (спіну) збудженого ядра при їх взаємодії з ядерними частинками. В результаті такої взаємодії утворюється ядро з великим значенням середнього спіну та широким спіновим розподілом, а значення цих характеристик збільшуються із зростанням кінетичної енергії налітаючих частинок. У випадку ж взаємодії з дипольними гамма-квантами (яка є домінуючою в області енергій гігантського дипольного резонансу 10 – 20 МеВ) останні можуть змінити спін ядра при його збудженні максимум на одну одиницю. Це дає змогу більш надійно визначити середнє значення спіну і його розподіл і тим самим більш надійно перевірити уявлення про механізми ядерних реакцій. Конкуренцію γ -квантам з цієї точки зору може скласти тільки реакція радіаційного захоплення нейтронів з енергією, близькою до теплової. Але в цьому випадку доступний для вивчення тільки дуже вузький інтервал енергій збудження ядра поблизу енергії зв'язку нейтрона.

Для реалізації наведених вище переваг дослідження фотоядерних реакцій необхідні потужні джерела моноенергетичних γ -квантів. Відносно просто і дешево можна було б отримувати інтенсивні потоки гальмівних γ -квантів при гальмуванні пучка електронів на мішені, використовуючи потужні електронні прискорювачі. Але енергетичний спектр γ -квантів при цьому неперервний, що дуже ускладнює як відтворення спостережних характеристик фотоядерних реакцій з фіксованою енергією гамма-квантів, так і вивчення енергетичних залежностей параметрів ядерних моделей, які відіграють ключову роль для побудови коректних моделей ядра та ядерної взаємодії. Зокрема за останні сорок років отримано експериментальні дані з перерізів фотоядерних реакцій з використанням гальмівного випромінювання тільки для найпростіших типів ядерних реакцій ((γ, xn) , (γ, sn) , частково (γ, p)) і для обмеженого кола ядер. Для значної кількості ізотопів ядер ці дані взагалі відсутні. Не краща ситуація з експериментальними даними з використанням низькоінтенсивних квазімоноенергетичних пучків. Як приклад, в таблиці 1 наведено ряд поширених ізотопів, для яких відсутні експериментальні дані з перерізів фотоядерних реакцій для гамма-квантів гальмівного спектру. Даних з характеристик продуктів реакцій та диференційних спектрів мало і вони носять фрагментарний характер для переважної більшості ядер.

Інформацію з наявних експериментальних даних та частково їх теоретичного опису сконцентровано в кількох центрах, де створено бази фотоядерних даних [1-3]. Останнім часом інтерес до систематизації даних з фотоядерних реакцій зростає [4-6]. Існує обмежений вибір програмних

пакетів, які дозволяють досліджувати фотоядерні реакції. Окрім вже достатньо давно відомих кодів [1] можна вказати нові програмні пакети MCGNASH та TALYS [7]. Однак доступ та інформація про ці коди носить обмежений характер. Реально тільки програмний пакет Empire II [9] (тому що при його створенні були враховані сучасні уявлення про структуру ядра і механізми ядерних реакцій, і до його кодів є відкритий доступ) дозволяє ефективно вивчати фотоядерні реакції [8].

В останні роки ситуація з джерелами гамма випромінювання докорінно міняється. За цей час розроблено і доведено до реальних технічних проектів метод зворотного комптонівського розсіяння фотонів на електроні, що рухається, для отримання інтенсивних пучків γ -квантів [10]. Для цього планується використання потужних стандартних лазерів та лазерів на вільних електронах, які зараз активно розробляються для багатьох задач. Вже досягнуто інтенсивності γ -квантів 10^8 c^{-1} , в 2006 році почне працювати прискорювач з інтенсивністю γ -квантів 10^9 c^{-1} [11], активно розглядаються проекти з інтенсивністю γ -квантів 10^{12} c^{-1} [12] і навіть 10^{15} c^{-1} [13], і їх реалізація - питання найближчих років. Такі прискорювальні комплекси при відносно невеликих коштах на їх побудову матимуть унікальні властивості: майже всі γ -кванти вилітають у вузький суцільний кут (практично формується пучок γ -квантів), спектр випромінювання близький до моноенергетичного з енергетичною роздільною здатністю біля 1%, енергію випромінювання можна неперервно змінювати в діапазоні від одиниць кілоелектронвольт до сотень MeV (і навіть GeV при спеціальних зусиллях), майже автоматично досягається висока поляризація γ -квантів у пучку (майже 100%). Висока поляризація γ -квантів у пучку дозволяє вивчати залежності параметрів ядерної структури від парності рівнів, а також більш точно досліджувати залежності характеристик ядерних реакцій від спінів. Крім того, дуже важливим при постановці експериментів є відносно низьке поглинання γ -квантів у речовині мішені та зберігання достатнього рівня моноенергетичності після проходження мішені. Такі привабливі характеристики пучків γ -квантів можуть поставити фотоядерні реакції в ряд найкращих інструментів з дослідження ядерної структури та механізмів ядерної взаємодії.

Таблиця 1

Елемент	^{79}Br	^{81}Br	^{200}Hg	^{69}Ga	^{71}Ga	^{137}Ba	^{95}Mo	^{147}Sm	^{149}Sm
Вміст ізотопу по масі в природній суміші, %	50,54	49,46	23,13	60,4	39,6	11,32	15,72	14,97	13,83

Для теоретичного аналізу нових експериментальних даних необхідно буде використання потужних, зручних, доступних і достатньо перевірених програмних пакетів, в яких закладено алгоритми розрахунків згідно основних сучасних моделей ядра та ядерних реакцій. Для цього як найкраще підходить код *Empire II*. Для оптимізації роботи з цим колом нами додатково розроблено набір програмних продуктів *AUTOEMP* для автоматичного вибору оптимальних параметрів ядерних моделей, систематизації та напівавтоматичного аналізу даних. Програмні модулі написано на скриптовій мові *UNIX*. Програми формують вхідні дані у вигляді стандартних текстових файлів для програмного пакету *Empire II* та запускають код на виконання. Після закінчення роботи коду скрипт обробляє текстові дані стандартних вихідних файлів, відбираючи звідти необхідні розраховані характеристики. Побудовано декілька програмних модулів різного призначення. Наприклад, в одному з випадків на основі алгоритму пошуку екстремумів цільових функцій змінюються параметри у вхідному файлі даних і знову запускається на виконання пакет аж до досягнення необхідних величин розрахованих характеристик. У такій ситуації код *Empire II* за допомогою скриптового модуля використовується для числових розрахунків складної функції для знаходження її необхідних значень. В якості змінної може виступати будь який стандартний вхідний параметр *Empire II*. Для реалізації алгоритму пошуку екстремуму можна використовувати як спеціалізовані, так і стандартні програми, обмін даними з якими проходить через файли. Запуск цих програм та підготовка даних в потрібному форматі забезпечуватиметься скриптовим модулем. В іншому випадку в конфігураційному файлі можна задавати діапазони зміни, крок (або набір конкретних значень) для визначених параметрів, а скриптовий модуль в циклі дозволяє перебирати всі значення вхідних параметрів, кожний раз запускаючи код *Empire II* і записуючи вибрані вихідні дані в текстовий файл для подальшого візуального вивчення систематичної поведінки чи спеціалізованої математичної обробки результатів. Такий підхід дозволяє адаптувати розрахунковий код *Empire II* для конкретних задач без зміни його файлів (які написані на мові *FORTRAN 77*), швидко врахувати зміни коду в нових версіях *Empire II* та відслідковувати його модифікації. При цьому при роботі тільки з вхідними і вихідними текстовими файлами значно зменшується ймовірність внесення помилок у розрахунки, так як такі файли, як правило, не дуже сильно змінюються від версії до версії *Empire II*. Крім того, у даному підході дуже легко використовувати зовнішні програмні модулі (написані на довільній мові програмування) для реалізації різних алгоритмів пошуку оптимальних параметрів та візуального аналізу даних.

Автори висловлюють подяку *MAGATE* за часткову підтримку роботи: IAEA Research Contract No.12492/R0/Regular Budget Fund(RBF).

Література

1. Handbook on photonuclear data for applications. IAEA-TECDOC-1178, Handbook of photonuclear data for applications: Cross sections and spectra. – IAEA Vienna, 2000; <http://www-nds.iaea.org/photonuclear/>
2. <http://www-nds.iaea.org/exfor/exfor00.htm>
3. Varlamov V.V., Sapunenko V.V., Stepanov M.E. Photonuclear Data Index 1976 – 1995. M.: MSU. 1996; <http://cdfc.sinp.msu.ru/>
4. P. Oblozinsky. Recent Advances in the ENDF/B Library // Abstr. Int. Conf. on Nucl. Data for Scien.&Tech. Sept. 26 - Oct.1. 2004. Santa Fe. USA. P.10
5. M. L. Giacri-Mauborgne, D. Ridikas, J. C. David, D. Dore, M. B. Chadwick, W. B. Wilson. Status of the Photonuclear Data Library for CINDER'90 // Abstr. Int. Conf. on Nucl. Data for Scien.&Tech. Sept. 26 - Oct.1. 2004. Santa Fe. USA. P.112
6. N. Kishida, T. Murata, T. Asami et all. JENDL Photonuclear Data File // Abstr. Int. Conf. on Nucl. Data for Scien.&Tech. Sept. 26 - Oct.1. 2004. Santa Fe. USA. P.113
7. A. J. Koning, S. Hilaire, M. C. Duijvestijn. TALYS: Comprehensive nuclear reaction modeling // Abstr. Int. Conf. on Nucl. Data for Scien.&Tech. Sept. 26 - Oct.1. 2004. Santa Fe. USA. P.71
8. V. A. Plujko, O. A. Bezshyyko, I. M. Kadenko. Implantation and testing of photonuclear channel in code EMPIRE II // Abstr. Int. Conf. on Nucl. Data for Scien.&Tech. Sept. 26 - Oct.1. 2004. Santa Fe. USA. P.244
9. M. Herman, R. Capote, P. Oblozinsky et all. Recent Development of the Nuclear Reaction Model Code Empire // Abstr. Int. Conf. on Nucl. Data for Scien.&Tech. Sept. 26 - Oct.1. 2004. Santa Fe. USA. P.72; <http://www.nndc.bnl.gov/empire219/index.html>
10. A. D'Angelo, O. Bartalini, V. Bellini et all. Generation of Compton backscattering γ -ray beams // Nucl. Instr. and Meth. in Phys. Res. A. V.455. 2000. P.1
11. T. Scott Carman, V. Litvinenko, J. Madey et all. The TUNL-FELL inverse Compton γ -ray source as a nuclear physics facility // Nucl. Instr. and Meth. in Phys. Res. A. V.378. 1996. P.1
12. Y. Miyahara. An intense gamma-ray source with Compton backscattering // Proc. of EPAC, Vienna, 2000, WEP5A04
13. Y. Miyahara. Intense gamma-ray generation for a polarized positron beam in a linear collider // Phys. Rev. ST Accel. Beams 4, 121001 (2001)

Надійшла до редакції 07.04.2005

УДК 664.1

Л.А.Булавін*, С.В.Храпатий*

**Дослідження скейлінгових
властивостей шерохватості
поверхні осадів в моделі
направленого росту випадкової
послідовної адсорбції**

Запропонована нова модель випадкової послідовної адсорбції для систем різних розмірів та з різними радіусами відштовхування частинок. Проведене її комп'ютерне моделювання, досліджені скейленгові властивості шерохватості поверхні та поведінка коефіцієнта заповнення поверхні. встановлено, що скейленговий показник шерохватості поверхні α не залежить від радіусу відштовхування частинок в системі, а скейленговий показник β зі збільшенням радіусу відштовхування частинок зменшується, обчисленні їх значення.

Ключові слова: балістичне осадження, випадкове осадження, випадкова послідовна адсорбція, скейлінговий показник, шерохватість поверхні.

L.A.Bulavin*, S.V.Khrapaty*

**Research of scaling properties of the
sediment interface width in the
model of purposeful growth of
random sequential adsorption**

A new model of the random sequential adsorption has been proposed for the systems of different sizes and with different radii of repulsion of particles. It is simulated by computer, scaling properties of the interface width and the behavior of the coefficient of surface filling are examined, established that scaling exponent of the interface width α does not depend upon radius of the repulsion of the particles within the system, and scaling exponent β with increase of repulsion radius of particles is being decreased, their meanings are calculated.

Key words: ballistic deposition, random deposition, random sequential adsorption, scaling exponent, interface width.

*Kyiv Taras Shevchenko National University

Дослідження нерівноважних процесів формування осадів частинок на поверхнях викликає великий теоретичний і практичний інтерес. Істотний прогрес в цій області було досягнуто із застосуванням комп'ютерних методів для дослідження задач адсорбції, формування тонких плівок і покриттів, механізмів протікання реакцій на поверхнях.

Формування осадів на поверхнях відбувається під впливом великої кількості різноманітних факторів. Однак, вчені завжди сподіваються, що є небагато «основних» законів, які б визначали морфологію і динаміку утворення

(росту) осадів. Мікроскопічні властивості дії цих «основних» законів можна описати за допомогою дискретних моделей росту - моделей, що відображають фізичну суть процесів формування поверхонь, але не враховують деякі менш істотні деталі.

Однією з таких найпростіших моделей є модель балістичного осадження (ballistic deposition) на ґратці [1]. Частинка падає з довільно обраного положення над поверхнею, розташованого на відстані більшій ніж максимальна висота осаду, що утворюється. Частинка рухається по прямій вертикальній траєкторії, доки не досягне поверхні. Осаджені частинки формують сукупність з дуже специфічною геометрією.

Поверхню означають, як набір частинок у сукупності, що є найвищими в кожному стовпчику. Щоб описувати ріст кількісно вводять два параметри:

- середня висота поверхні

$$\bar{h}(t) = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L h(i, t), \quad (1)$$

- та шероховатість поверхні

$$w(L, t) \equiv \sqrt{\frac{1}{L} \sum_{i=1}^L [h(i, t) - \bar{h}(t)]^2}, \quad (2)$$

де $h(i, t)$ - висота стовпчика в час t . За одиницю часу оберають час, за який осаджується на поверхні L частинок (де L - кількість частинок в одній стрічці).

Якщо розряд осадження (кількість частинок, що попадають у ділянку) постійний, то збільшення середньої висоти з часом лінійне:

$$\bar{h}(t) \sim t. \quad (3)$$

Шероховатість поверхні є функцією часу. Ріст починається з горизонтальної лінії; поверхня в нульовий момент часу - просто пряма лінія, з нульовою шероховатістю. Оскільки відбувається осадження, поверхня поступово змінює свою шероховатість.

Спочатку шероховатість збільшується з часом за степеневим законом:

$$w(L, t) \sim t^\beta. \quad (4)$$

Збільшення шероховатості продовжується до моменту, в який вона досягає насиченості w_{sat} .

Зі збільшенням L шероховатість, при якій досягається насиченість w_{sat} , теж збільшується, і ця залежність також описується степеневим законом:

$$w_{sat}(L) \sim L^\alpha. \quad (5)$$

Час t_x (іноді називаний часом насиченості), в який поверхня переходить від поведінки (4) до (5), залежить від розміру системи:

$$t_x \sim L^z, \quad (6)$$

де z називають динамічним показником.

Прийняття $w(L, t)/w_{sat}(L)$ функцією від часу дасть криві, що насичуються таким же самим чином, незалежно від розмірів системи L .

Прийняття шероховатості як функції від L/t_x змусить криві насичуватись таким же самим чином.

Звідси маємо, що $w(L, t)/w_{sat}(L)$ є функцією t/t_s , тобто

$$\frac{w(L, t)}{w_{sat}(L)} \sim f\left(\frac{t}{t_s}\right), \quad (7)$$

$$u = \frac{t}{t_s},$$

де $f(u)$ називається скейлінговою функцією. Заміняючи w_{sat} і t_s в (7) на їх форми з (5) і (6), одержуємо скейлінгове відношення [2]

$$w(L, t) \sim L^z f\left(\frac{t}{L^z}\right) \quad (8)$$

Для u , скейлінгова функція $f(u)$ змінюється за степеневим законом:

$$f(u) \sim u^\beta \quad [u \ll 1] \quad (9)$$

Коли $t \rightarrow \infty$, шерохватість насичується. Насиченість досягається для $t \gg t_s$, тобто аргумент скейлінгової функції $u \gg 1$. Отже маємо

$$f(u) = \text{const} \quad [u \gg 1] \quad (10)$$

Степеневі показники α , β і z - не є незалежними [2]. Якщо наближатись до точки t_s ліворуч, згідно (4) маємо, що $w(t_s) \sim t_s^\beta$. Однак, наближаючи до тієї ж точки t_s справа, маємо з (5), $w_{sat}(t_s) \sim L^\alpha$. З цих двох відношень випливає: $t_s^\beta \sim L^\alpha$, що згідно (6) означає

$$z = \frac{\alpha}{\beta}. \quad (11)$$

Рівняння (11) зв'язує степеневі показники α , β і z та вірне для будь-якого процесу росту, що описується (8).

Цікаво відмітити, що скейлінгове рівняння (8) можливо одержати, якщо прийняти основне положення скейлінгової теорії критичних явищ про однорідність термодинамічного потенціалу [3]. Дійсно, якщо припустити, що $w(L, t)$ є узагальненою однорідною функцією, то повинне виконуватись рівняння

$$w(\lambda^a L, \lambda^b t) = \lambda w(L, t), \quad (12)$$

Оскільки рівняння (12) повинне виконуватись при будь-яких значеннях масштабуючого множника λ , то повинне також виконуватись і при спеціальному виборі $\lambda = L^{-1/a}$, тобто (12) можна записати у вигляді

$$L^{1/a} w\left(1, \frac{t}{L^{b/a}}\right) = w(L, t). \quad (13)$$

Якщо ввести позначення $\alpha = 1/a$, $\beta = 1/b$, $z = \alpha/\beta = b/a$, а функцію w в лівій частині рівняння (13) розглядати як функцію одного аргумента f , то отримаємо рівняння (8). Можливість такого існування виводу рівняння (8) на основі припущення (12) свідчить про глибокий зв'язок між критичними явищами і формуванням поверхні в процесі осаду частинок.

Чому шерохватість поверхні насичується у випадку балістичного осадження? Це питання може здаватись елементарним, але воно не має простої відповіді. Той факт, що час насиченості t_s і шерохватість w_{sat} збільшуються

при збільшенні розмірів системи, говорить про те, що явище насиченості – ефект, який диктується розмірами системи. Але який механізм насиченості? Як система «знає», коли насичуватись? Щоб відповісти на ці питання, потрібно врахувати той момент, що в системі існують кореляції.

Важлива властивість процесу балістичного осадження те, що кореляції поширюються по поверхні, мається на увазі, що різні ділянки поверхні не є цілком незалежними, а залежать від висот сусідніх ділянок. Яке мікроскопічне походження цих кореляцій? Частинка, щойно впавша на поверхню, «прилипає» до першої найближчої сусідньої частинки. Таким чином висота положення нової частинки буде дорівнювати чи більшою ніж у її сусідів. Коливання висоти поширюється з боку, тому що наступна частина, депонована біля цієї повинна мати висоту рівну чи також більшу. Хоча процес росту місцевий, через це бічне поширення «інформація» про висоту поширюється глобально.

Поверхня, утворена моделлю балістичного осадження називається нерівноважною поверхнею. Слово нерівноважна використовується, щоб підкреслити далекий від рівноваги характер процесу росту.

Випадкове осадження (random deposition) [1] є найпростішою з моделей росту. З випадковим чином обраної ділянки над поверхнею вертикально падає частина, доки не досягне вершини стовпчика під нею, після чого частина осаджується.

Найважливішою відмінністю між випадковим і балістичним осадженням є те, що поверхня випадкового осадження некорельована. Стовпчики ростуть незалежно, тому що немає механізму, який би міг утворювати кореляції на поверхні. В моделі балістичного осадження частинки здатні «прилипати» до краю сусіднього стовпчику, що призводить до бічного росту і поширення кореляцій на поверхні.

Оскільки, немає ніяких кореляцій між стовпчиками, то кожен стовпчик росте незалежно з ймовірністю $p=1/L$, де L - розмір системи. З [1], [4] маємо: $w(t) \sim t^{1/2}$. Отже,

$$\beta = \frac{1}{2}, \quad [\text{для випадку випадкового осадження}] \quad (14)$$

В моделі випадкового осадження шереховатість поверхні росте з часом без насиченості, тому що немає кореляцій, і степеневий показник α не визначений.

Модель випадкової послідовної адсорбції (random sequential adsorption), аналог послідовних процесів доповнення, - це стохастичний процес, у якому частинки осаджуються послідовно на D -розмірний об'єм у навмання обране положення з умовою, що частина не може накладатись на попередньо осаджену частинку.

Одномірна версія моделі, відома по аналогії з випадком автомобільної стоянки, була вперше запропонована А.Рені [5]. Розглянемо нескінченну лінію, яка є порожньою в момент часу $t=0$. Відрізки довжини σ опускаються випадковим чином і послідовно з темпом осадження k_a на лінію, і адсорбуються, якщо вони не накладаються на вже попередньо адсорбовані

відрізки. Інакше, вони відкидаються. Якщо $\rho(t)$ позначити заповненість (густину) частинок на лінії в момент часу t , то кінетику цього процесу можна описати рівнянням:

$$\frac{\partial \rho(t)}{\partial t} = k_a \Phi(t), \quad (15)$$

де $\Phi(t)$ – ймовірність вставити нову частинку в момент часу t на вільне місце на підложці.

Рені отримав вираз для обчислення коефіцієнта заповнення (густини) $\rho(t)$ для одновірної моделі випадкової послідовної адсорбції [5]:

$$\rho(t) = \frac{1}{\sigma} \int_0^{k_a \sigma} du \exp \left\{ -2 \int_0^u dv \frac{1 - e^{-v}}{v} \right\}. \quad (16)$$

Перша нетривіальна властивість моделі, що процес досягає “межі насичення” (при $t \rightarrow \infty$), коли коефіцієнт заповнення досягає значення $\rho_\infty = 0.7476\dots$; це значення значно нижче від повністю “запакованого” випадку ($\rho_\infty \sigma = 1$), який має місце, коли поверхні дозволяють реструктуризуватись між адсорбційними кроками.

Кінетика довготривалого процесу, протягом якого відбувається незначна кількість адсорбційних подій, може описати наступним чином:

$$\rho_\infty \sigma - \rho(t) \sigma \cong \frac{e^{-2\gamma}}{k_a \sigma^2} \frac{1}{t}, \quad (17)$$

де γ – постійна Ейлера.

Структура конфігурацій, утворених цим незворотним процесом має кілька значних властивостей. При насиченості функція розподілу проміжку показує логарифмічну розбіжність при $h \rightarrow 0$,

$$G(h, t \rightarrow \infty) \cong -e^{-2\gamma} \ln \left(\frac{h}{\sigma} \right). \quad (18)$$

Величезна кількість реальних ситуацій, у яких великі частинки (білки, кластери, ...) адсорбуються в рідині (твердих тілах), відповідають двовірній моделі випадкової послідовної адсорбції. Чому тоді вивчають одновірні моделі? По-перше, фазові переходи в адсорбованому шарі відсутні, незалежно від його розмірності. По-друге, головні властивості випадкових послідовних адсорбційних процесів, типу існування межі стиснення, насиченість, коротке (експоненційне) розповсюдження просторових кореляцій серед адсорбованих частинок, і багатьох інших властивостей теж незалежні від розмірності. По-третє одновірні моделі часто мають точні аналітичні розв'язки. Основна причина існування таких розв'язків – властивість екранування, яка полягає в тому, що на адсорбцію в одній області не впливає конфігурація частинок в іншій області [6]. В результаті, можна записати закриту систему, що має скінченну кількість кінетичних рівнянь і, часто, розв'язується.

Головні властивості випадкової послідовної адсорбції, які спостерігаються в одновірній моделі, зберігаються і для моделей більших

розмірностей: насичування коефіцієнта заповнення (для 2D $\theta_{\infty} = \rho_{\infty} \frac{\pi \sigma^2}{4} \approx 0,547$ [7]), кінетика при осадженні частинок (для 2D $\theta(t) \sim t^{-1/2}$ [7]), логарифмічна розбіжність парних кореляцій при насиченості в контакті.

На жаль, не має точного розв'язку для процесу випадкової послідовної адсорбції, коли розмірність D системи два або більше. Для опису кінетики адсорбційного процесу і структури адсорбованих конфігурацій використовують комп'ютерне моделювання. Також застосовують наближені методи обчислення, що дозволяють вивчати широкий діапазон параметрів, розмаїтість взаємодій, зовнішніх полів і механізмів.

Нами запропонована модель направленного росту випадкової послідовної адсорбції. Частинка вертикально падає з довільно обраного положення над поверхнею, розташованого на висоті більшій ніж максимальна висота осаду, що утворюється. На рис. 1 зображені три можливі ситуації: (1) частинка потрапляє на найвищу частинку на поверхні; (2) частинка потрапляє праворуч від найвищої частинки на поверхні; (3) частинка потрапляє ліворуч від найвищої частинки на поверхні. В (1) частинка нависає над поверхнею на висоті $d+1$, в (2) і (3) – на висоті d від відповідно правого чи лівого краю найвищої частинки.

Алгоритм моделі можна зобразити наступним чином:

$d=0$ (випадок балістичного осадження), $d=1, 2, 3, 4, 5$

$x = \text{INT}(L * \text{RND} + 1)$

$x_l = x - 1$

$x_r = x + 1$;

$h(x) = h(x) + d + 1$

IF $h(x_l) \geq h(x)$ THEN $h(x) = h(x_l) + d$

IF $h(x_r) \geq h(x)$ THEN $h(x) = h(x_r) + d$

Випадок, коли $d=0$, відповідає моделі балістичного осадження.

$h(x) > h_l, h_r$

$h_l > h(x-1)$

$h_r > h(x+1)$

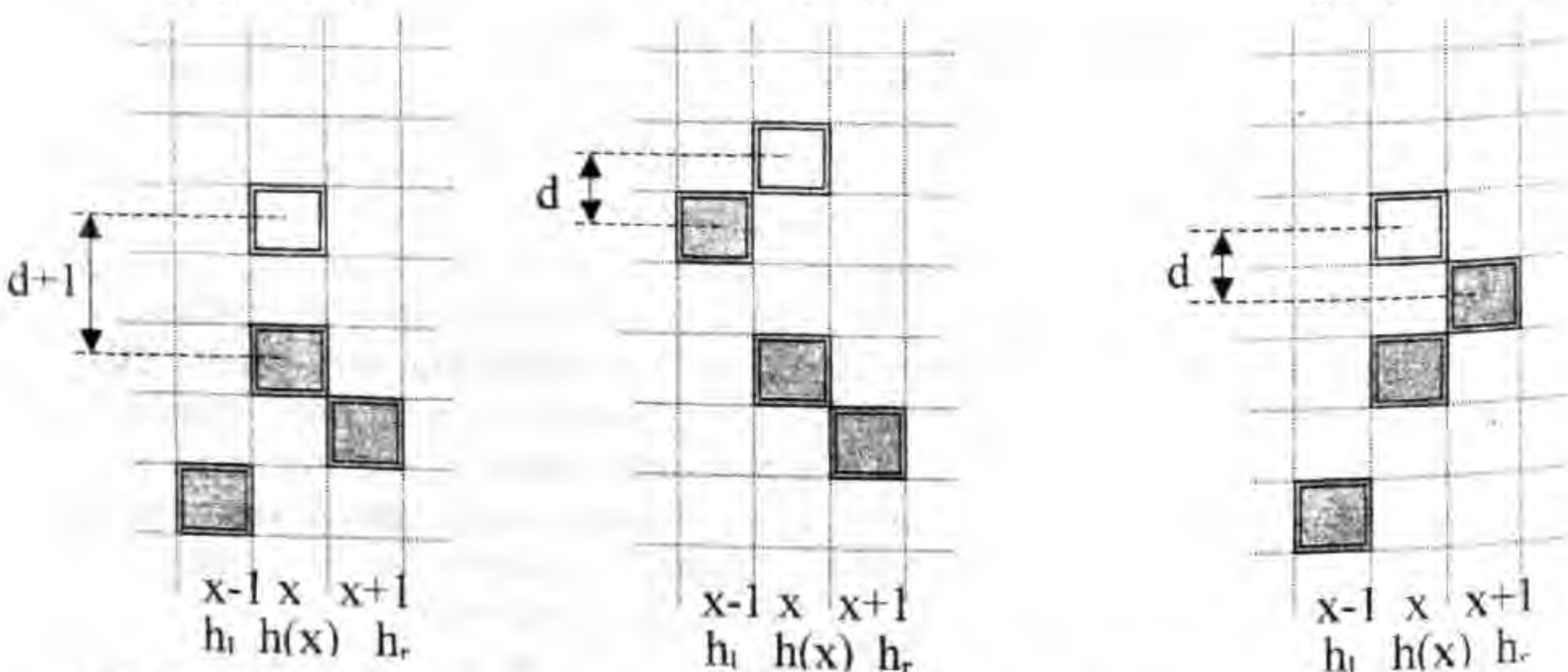


Рис. 1. Модель направленного роста випадкової послідовної адсорбції

Дослідження скейлінгових властивостей шероховатості поверхні в запропонованій в роботі моделі направленого росту випадкової послідовної адсорбції дало наступні результати.

Випадкова послідовна адсорбція моделювалась для систем різних розмірів L ($L=64, 128, 256, 512, 1024, 2048, 4096$), а кожна система моделювалась для різних радіусів відштовхування частинок d ($d=0, 1, 2, 3, 4, 5$).

На рис. 2 зображено залежність шероховатості поверхні w_{sat} від розміру системи L в режимі насичування.

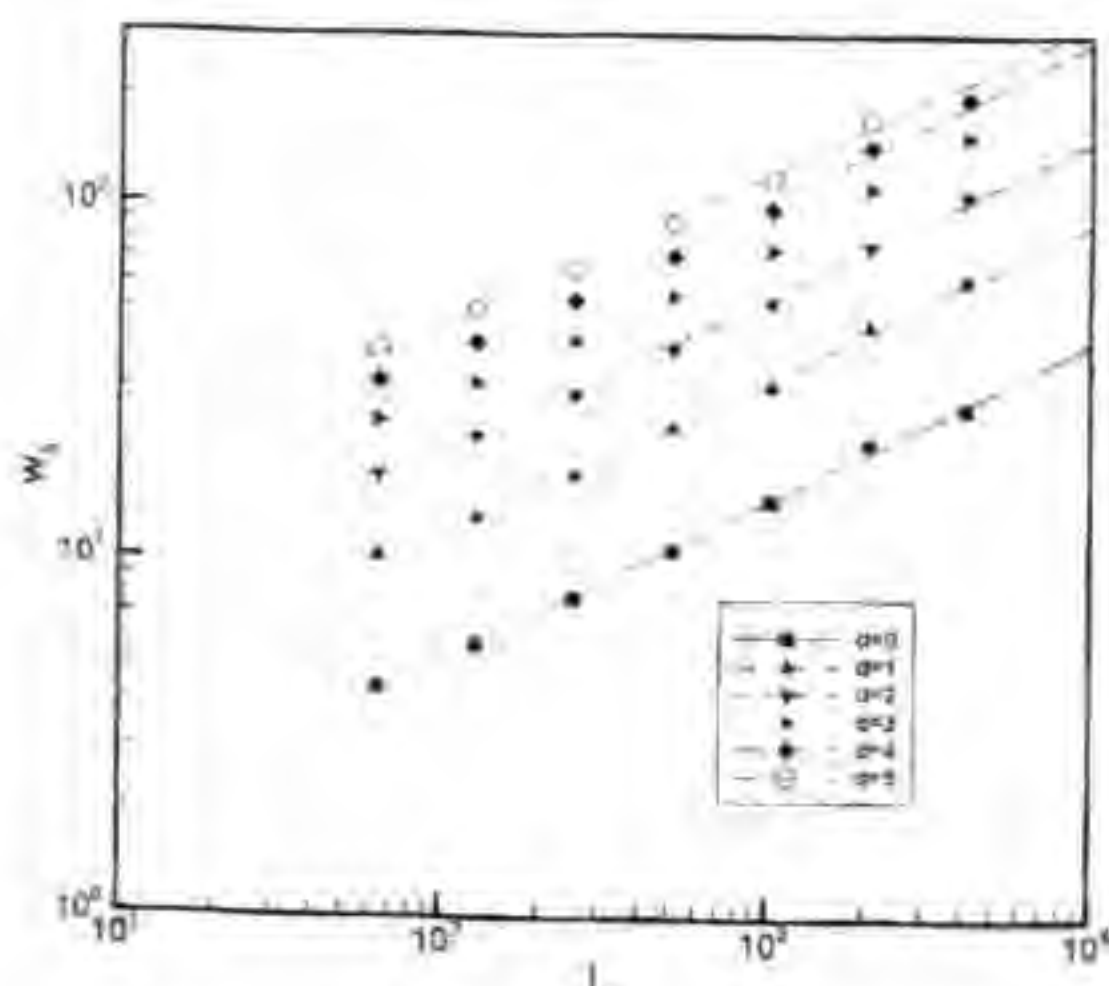


Рис. 2 Залежність шероховатості поверхні w_{sat} від розміру системи L в режимі насичування

З рис. 2 бачимо, що при різних радіусах відштовхування частинок d для моделі направленого росту випадкової послідовної адсорбції виконується скейлінгове співвідношення (5). Ці залежності були використані для обчислення скейлінгового показника α .

В таблиці 1 приведені отримані значення скейлінгового показника α для різних радіусів відштовхування частинок d , а в таблиці 2 – одержані значення скейлінгового показника β .

Таблиця 1

d	α	$\Delta\alpha$
0	0,44	0,01
1	0,46	0,01
2	0,46	0,01
3	0,48	0,02
4	0,47	0,01
5	0,46	0,02

Таблиця 2

d	β	$\Delta\beta$
0	0,315	0,007
1	0,29	0,01
2	0,28	0,02
3	0,26	0,02
4	0,25	0,02
5	0,23	0,04

На рис. 3 та рис.4 наведено залежність скейлінгових показників α та β від радіуса відштовхування частинок d відповідно.

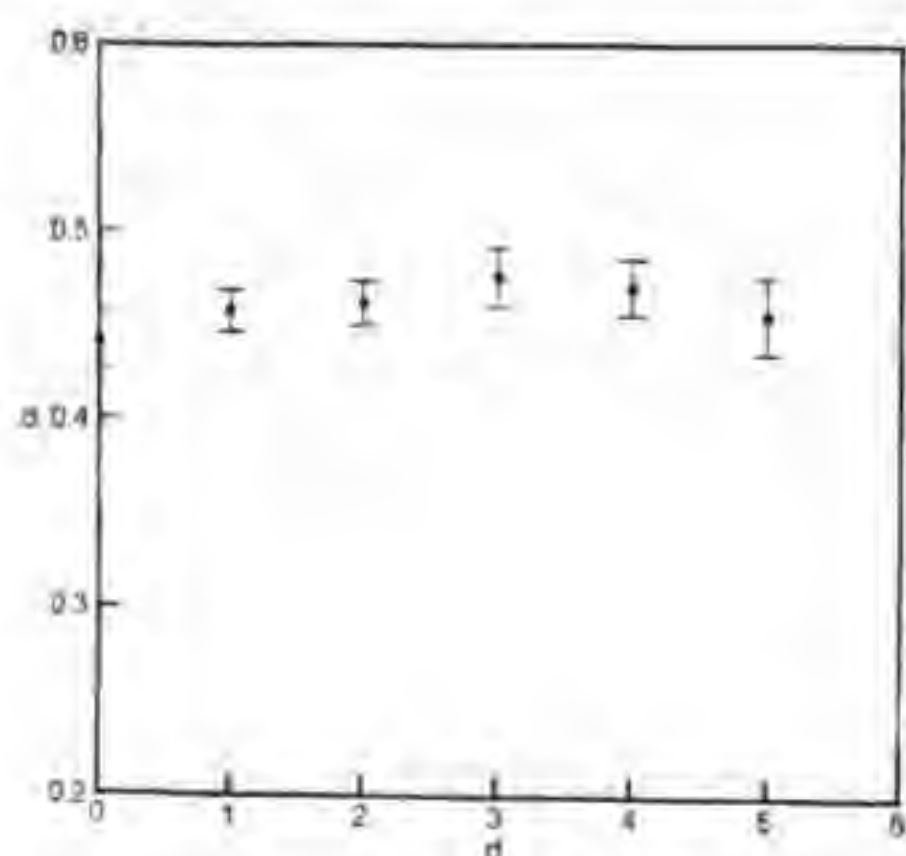


Рис. 3. Залежність $\alpha(d)$ для моделі направленого росту моделі випадкової послідовної адсорбції

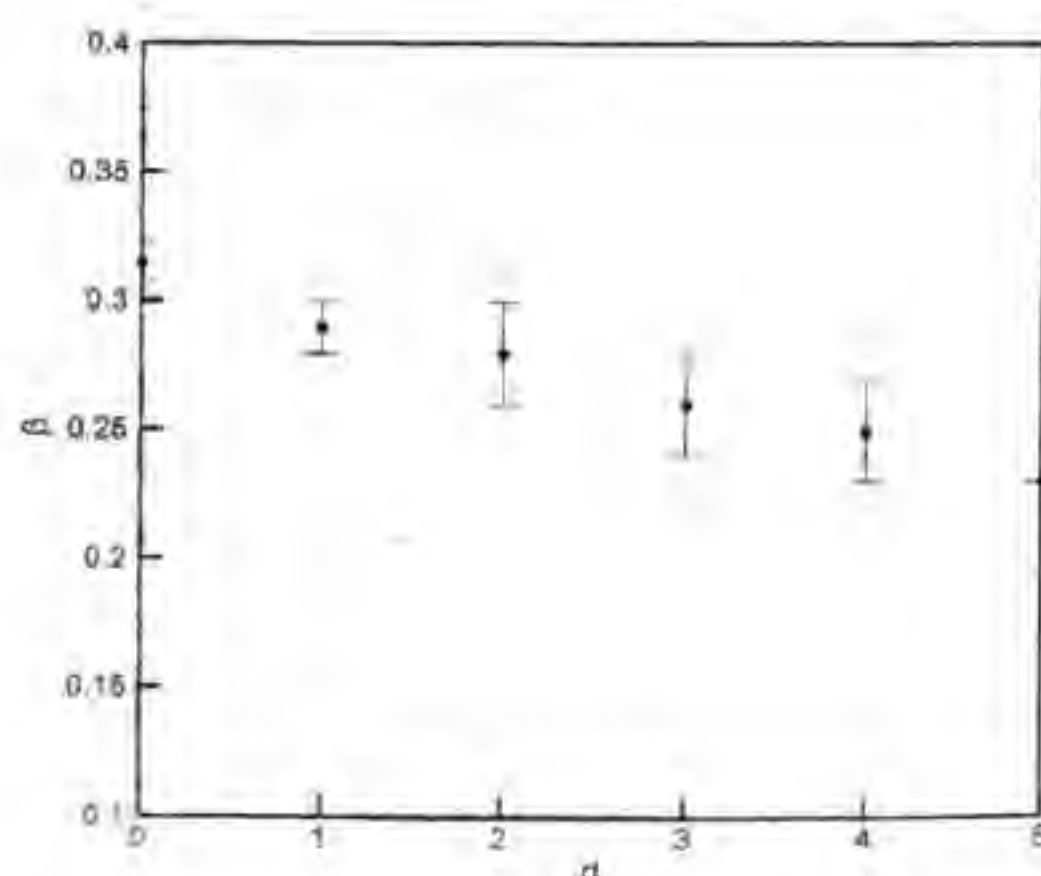


Рис. 4. Залежність $\beta(d)$ для моделі направленого росту моделі випадкової послідовної адсорбції

Отже, з рис. 3, 4 можемо зробити висновок, що скейлінговий показник шероховатості поверхні α , який задається (5), не залежить від радіуса відштовхування частинок в системі. Середнє значення $\alpha_{\text{сер}} = 0,46 \pm 0,01$. Інакше справа обстоїть для скейлінгового показника β , з рис. 4 бачимо, що зі збільшенням радіуса відштовхування частинок, β зменшується від $0,315 \pm 0,007$ (для $d=0$) до $0,23 \pm 0,04$ (для $d=5$).

Також для запропонованої в роботі моделі направленого росту випадкової послідовної адсорбції були проведенні дослідження коефіцієнта заповнення поверхні.

На рис. 5 зображено одержану залежність коефіцієнта заповнення поверхні $\rho = \frac{N}{L(h)}$ від часу осадження $t = N/L$ для різних радіусів відштовхування частинок d .

Нами були отримані залежності $\rho(t)$ для різних значень L і всі вони накладаються одна на одну при фіксованому значенні радіуса відштовхування частинок d . Регресійний аналіз, зображених на рис. 5 залежностей, показав, що кінетику заповнення осаду частинками можна описати скейлінговим рівнянням

$$|\rho - \rho_{\infty}| \sim t^{\gamma}, \quad (20)$$

де γ - деякий скейлінговий степеневий показник.

На рис. 6 представлені залежності $\rho(t)$ для різних значень d в координатах скейлінгового рівняння (20). Чисельні значення γ для $d=0 \div 5$ відповідно дорівнюють: $0,75 \pm 0,03$; $0,77 \pm 0,03$; $0,80 \pm 0,03$; $0,82 \pm 0,03$; $0,83 \pm 0,03$; $0,84 \pm 0,04$

Потрібно відзначити, що скейлінговий показник γ слабо залежить від d і, напевне, є універсальною константою.

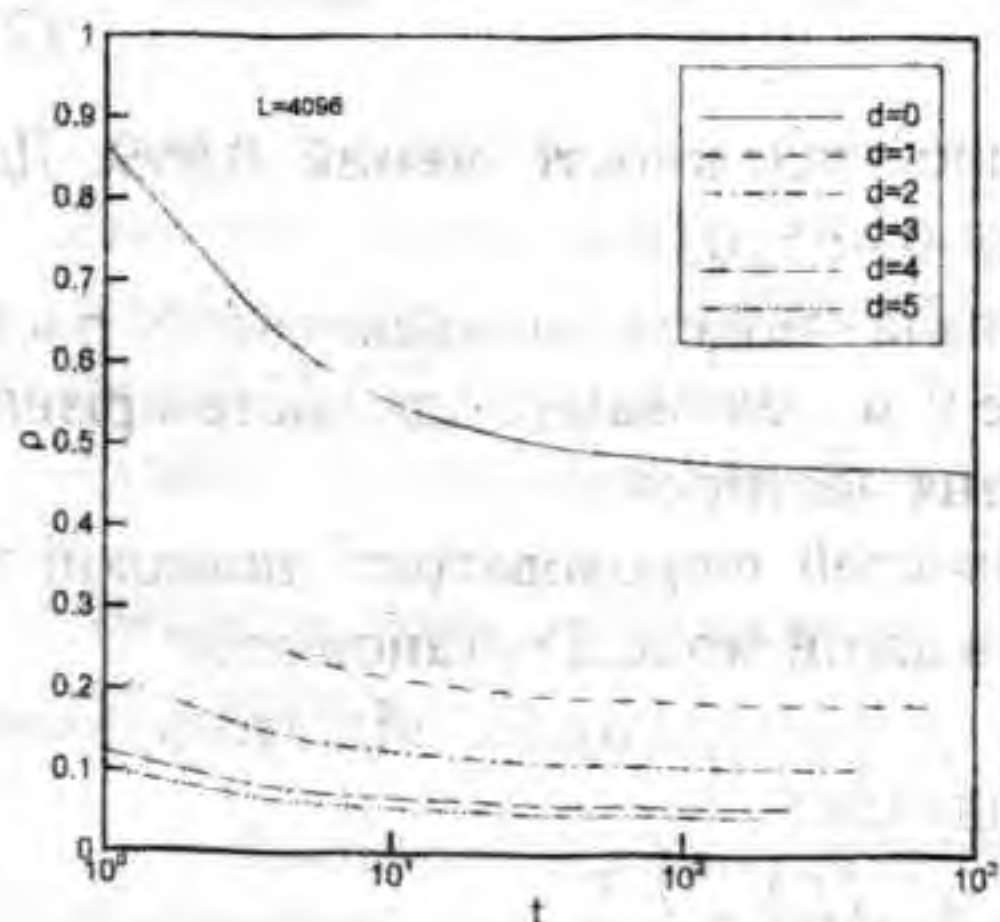


Рис. 5. Залежність коефіцієнта заповнення поверхні ρ від часу осадження t для різних радіусів відштовхування частинок d .
Розмір системи $L=4096$

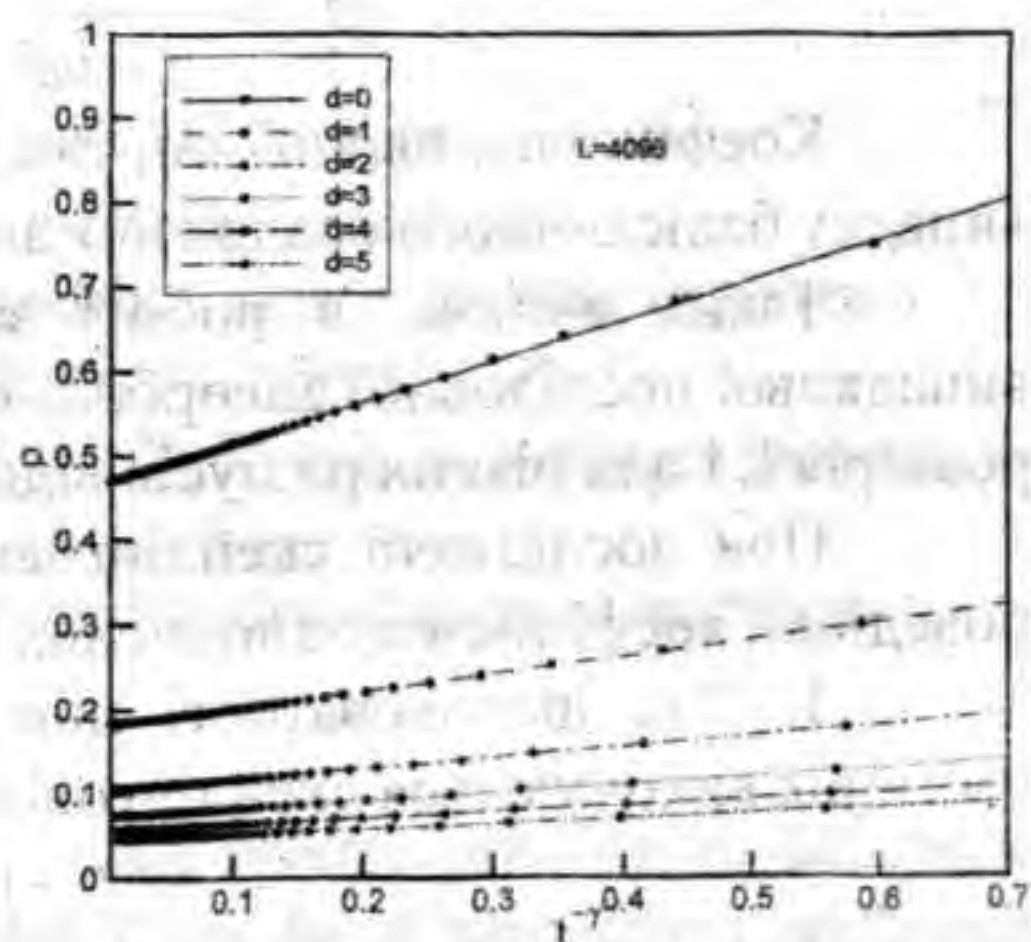


Рис. 6. Залежність $\rho(t)$ для різних значень d в координатах скейлінгового рівняння (20).

На рис. 7 зображено залежність коефіцієнта заповнення поверхні ρ_∞ від радіусу відштовхування частинок d , а в таблиці 3 наведені значення коефіцієнта заповнення поверхні ρ для різних радіусів відштовхування частинок d .

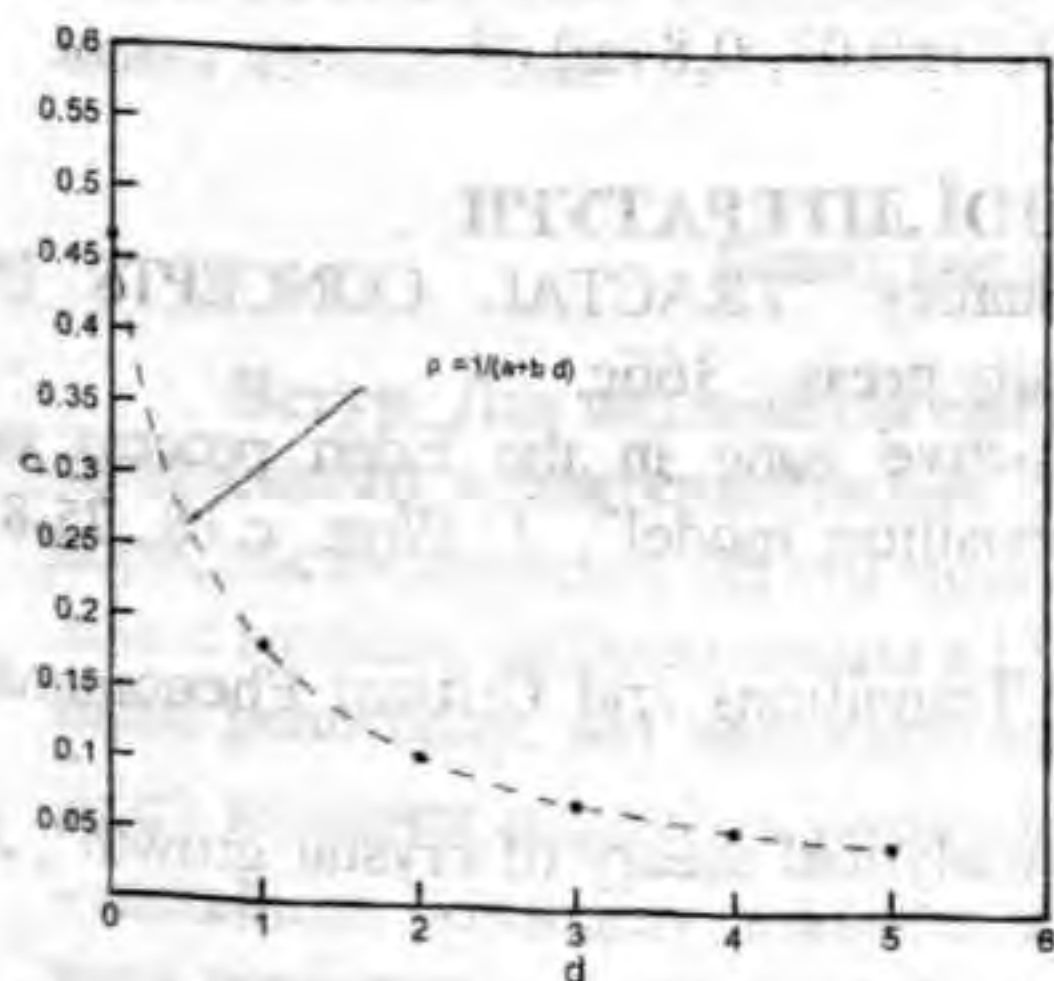


Рис. 7. Залежність коефіцієнта заповнення поверхні ρ_∞ від радіусу відштовхування частинок d

Таблиця 3

d	ρ	$\Delta\rho$
0	0,47	0,04
1	0,182	0,001
2	0,105	0,001
3	0,074	0,001
4	0,057	0,001
5	0,046	0,001

Було встановлено, що залежність коефіцієнта заповнення поверхні ρ_∞ від радіуса відштовхування частинок d (зображена на рис. 7) добре описується рівнянням:

$$\rho_{\infty} = \frac{1}{a + bd} \quad (21)$$

Коефіцієнт парної кореляції для даної залежності рівний 0,999. Для випадку балістичного осадження значення $\rho_{\infty}=0,465\pm0,004$.

Таким чином, в роботі запропонована модель направленого росту випадкової послідовної адсорбції. Проведене її моделювання для систем різних розмірів L і для різних радіусів відштовхування частинок d .

При дослідженні скейлінгових властивостей шероховатості поверхні та поведінки коефіцієнта заповнення поверхні в даній моделі встановлено:

1. Для шероховатості поверхні при різних радіусах відштовхування частинок виконуються скейлінгові співвідношення:

$$w(L, t) \sim t^{\beta}, \quad w_{sat}(L) \sim L^{\alpha}.$$

2. Скейлінговий показник шероховатості поверхні α не залежить від радіуса відштовхування частинок в системі, обчислене його середнє значення $\alpha_{сер}=0,46\pm0,01$.

3. Скейлінговий показник β зі збільшенням радіуса відштовхування частинок зменшується, обчислені межі його змін: від $0,315\pm0,007$ (для $d=0$) до $0,23\pm0,04$ (для $d=5$).

4. Кінетику заповнення осаду частинками можна описати скейлінговим рівнянням:

$$|\rho - \rho_{\infty}| \sim t^{-\gamma},$$

де для скейлінгового показника γ , в роботі отримані значення в залежності від різних радіусів відштовхування частинок в системі $d=0\div5$ відповідно: $0,75\pm0,03$; $0,77\pm0,03$; $0,80\pm0,03$; $0,82\pm0,03$; $0,83\pm0,03$; $0,84\pm0,04$.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

- [1] Albert-Laszlo Barabasi, H. Eugene Stanley "FRACTAL CONCEPTS IN SURFACE GROWTH" Cambridge university press – 366c.
- [2] F. Family, T. Vicsek, "Scaling of the active zone in the Eden process on percolation networks and the ballistic deposition model", *J. Phys.* c.18, 75-81 (1985).
- [3] H.Eugene Stanley, Introduction to Phase Transitions and Critical Phenomena, Clarendon Press, Oxford, 1971.
- [4] J. D. Weeks, G. H. Gilmer, K. Jackson, "Analytical theory of crystal growth", *J. Chem. Phys.* c.65, 712-720 (1976).
- [5] A. Renyi, *Sel. Trans. Math. Stat. Prob.* 4, 205 (1963).
- [6] J.W. Evans, *Rev. Mod. Phys.* 65, 1281 (1993).
- [7] J. Feder, *J. Theor. Biol.* 87, 237 (1980).
- [8] J. Talbot, G. Tarjus, P.R. Van Tassel, P. Viot "From car parking to protein adsorption: an overview of sequential adsorption processes" c.51 (1999).

Надійшла до редакції 17.03.2005

УДК 535:537:539:546

Леонід Г. Гречко, докт. ф.-м. наук,
Леонід Б. Лерман, канд. техн. наук,
Андрій І. Лесьо, провідний інженер,
Сергій В. Шостак, доцент,
Юрій П. Склярів, асистент.

Діелектрична проникність пористих середовищ

Знайдена функція розподілу перколяційної складової, яка визначає внесок зв'язаних пор в значення ефективної комплексної діелектричної проникності зволоженого пористого середовища як розв'язок оберненої задачі. Шукана дійсна функція знаходиться з інтегрального рівняння Фредгольма I-го роду з комплексним ядром. Отримані розв'язки порівнюються з розв'язками прямої задачі.

Ключові слова: пористе середовище, діелектрична проникність, рівняння Фредгольма

Leonid G. Grechko, Dr. Sc.,
Leonid B. Lerman, Ph. D.,
Andriy I. Les'o, leading engineer,
Sergiy V. Shostak, Ph. D
Yuriy P. Sklyarov, assistant lecturer.

Permittivity of porous medium

An inverse problem to determination of the local percolation probability function is solved. The unknown real function is founded from the Fredholm integral equation of first kind. After transition to real kernels solution is constructed in the form of polynomials. Obtained solutions are compared with the solutions of the right task.

Key words: permittivity, porous medium, Fredholm equations

E-mail: user @ surfchem.freenet.kiev.ua)

Вступ. Для визначення ефективних характеристик пористих середовищ за відомими характеристиками скелету та провідною рідини, яка заповнює пори, застосовується багато моделей [1-4]. На наш погляд найбільш досконалою є модель, запропонована в [3]. Згідно цієї моделі необхідно знати дві функції розподілу, які залежать від локальної пористості ϕ . Перша функція $\mu(\phi)$ визначає щільність розподілу ймовірності розмірів пор, а функція $\lambda(\phi)$ - щільність розподілу довжини зв'язаних між собою пор (перколяційна частина пористих середовищ). Функція $\mu(\phi)$ може бути визначена експериментально після обробки фотографій перерізів зразків, але для функції $\lambda(\phi)$ можливо отримати тільки деякі теоретичні оцінки [3]. Розв'язки відповідного інтегрального рівняння прямої задачі в наближенні локальної пористості були докладно досліджені в [4]. З іншого боку, з рівняння прямої задачі, яке описує залежність ефективної діелектричної проникності $\varepsilon = \varepsilon(\omega)$ пористого середовища від частоти ω , може бути отримане інтегральне рівняння обер-

неної задачі для знаходження функцій розподілу при відомій (наприклад з експерименту) частотній залежності $\varepsilon = \varepsilon(\omega)$. Оскільки функцію $\mu(\varphi)$ можна вважати відомою, то це рівняння в принципі дозволяє визначити перколяційну функцію $\lambda(\varphi)$.

В роботах [3,4] пропонується розв'язувати це рівняння загальним методом симетризації ядра з використанням розкладів за власними функціями [5], але чисельні розв'язки не наведені. Зауважимо, що рівняння оберненої задачі – це рівняння Фредгольма I роду. Аналіз властивостей цього ядра показує, що в даному випадку матимемо некоректну (у розумінні А.Н. Тихонова [6]) задачу. Тому для отримання стійких чисельних результатів [6,7] необхідна розробка спеціальних заходів, пов'язаних з регуляризацією задачі.

В цьому повідомленні використовується чисельно-аналітичний метод розв'язання рівняння. Перехід від комплексного ядра і комплексної правої частини рівняння до пари інтегральних рівнянь з дійсними ядрами і дійсними правими частинами показує, що розв'язки цих рівнянь повинні співпадати. Регуляризація задачі і отримання стійких розв'язків досягається при переході до одного рівняння, ядро і права частина якого є лінійна комбінація вихідних рівнянь. Невідома функція $\lambda(\varphi)$ розшукується у вигляді деякого поліному з невизначеними коефіцієнтами. Коефіцієнти поліному визначаються з нескінченної системи лінійних алгебраїчних рівнянь, яка будується методом колокації. Отримані розв'язки порівнюються з розв'язками прямої задачі.

1. Діелектрична функція пористого середовища. Рівняння оберненої задачі та деякі його властивості. Ефективну діелектричну проникність зволоженого пористого середовища $\varepsilon = \varepsilon(\omega)$ будемо визначати з рівняння

$$\int_0^1 \frac{\varepsilon_C(\omega, \varphi) - \varepsilon(\omega)}{\varepsilon_C(\omega, \varphi) + 2\varepsilon(\omega)} \lambda(\varphi) \mu(\varphi) d\varphi + \int_0^1 \frac{\varepsilon_B(\omega, \varphi) - \varepsilon(\omega)}{\varepsilon_B(\omega, \varphi) + 2\varepsilon(\omega)} [1 - \lambda(\varphi)] \mu(\varphi) d\varphi = 0, \quad (1)$$

де $\varepsilon_B = \varepsilon_B(\omega)$, $\varepsilon_C = \varepsilon_C(\omega)$ – діелектричні проникності, що характеризують скелетну і перколяційну частини обраної комірки характерного розміру і визначаються за формулами [3]:

$$\varepsilon_B = \varepsilon_R \frac{2\varepsilon_R + \varepsilon_W - 2(\varepsilon_R + \varepsilon_W)\varphi}{2\varepsilon_R + \varepsilon_W + 2(\varepsilon_R - \varepsilon_W)\varphi}, \quad (2) \quad \varepsilon_C = \varepsilon_W \frac{\varepsilon_R + (2/3)(\varepsilon_R - \varepsilon_W)\varphi}{\varepsilon_W - (1/3)(\varepsilon_W - \varepsilon_R)\varphi} \quad (3)$$

В свою чергу ε_R , ε_W – діелектричні проникності скелету та включень відповідно. Усі діелектричні проникливості вважаються комплексними величинами.

Формула (1) дозволяє обчислити ефективну діелектричну проникність при відомих проникностях скелету та зволожуючої рідини і функціях розподілу $\mu(\varphi)$, $\lambda(\varphi)$. Для цього потрібно при фіксованому значенні частоти розв'язати рівняння (1) відносно $\varepsilon = \varepsilon(\omega)$. В цьому полягає пряма задача теорії пористих середовищ.

Для її розв'язання доцільно використовувати метод Ньютона, який можна застосовувати і для комплексних функцій. Невідоме значення діелектричної проникності знаходиться ітеративно за формулою

$$\varepsilon_{k+1} = \varepsilon_k - \frac{F(\varepsilon_k)}{\partial F / \partial \varepsilon(\varepsilon_k)}. \quad (4)$$

В якості початкового наближення можна прийняти, наприклад діелектричну проникність скелету, або середнє арифметичне між проникностями скелету і включень. З фізичних міркувань очевидно, що процес буде завжди збіжним.

Застосування формули (4) згідно з (1) пов'язано з знаходженням значень функції, аргумент якої входить під знак визначених інтегралів як параметр. Ці інтеграли при фіксованих значеннях ε, ω можна обчислити чисельно за допомогою відомих квадратурних формул.

Обернена задача полягає в знаходженні функції $\lambda(\varphi)$ за відомою функцією $\varepsilon = \varepsilon(\omega)$ та розподілом $\mu(\varphi)$.

Виходячи з рівняння (1), запишемо рівняння оберненої задачі в операторному вигляді

$$K\lambda = f, \quad (5)$$

де K - лінійний інтегральний оператор Фредгольма, діючий за правилом

$$K\lambda = \int_0^1 K(\varphi, \omega) \lambda(\varphi) d\varphi.$$

Ядро $K(\varphi, \omega)$ та праву частину $f = f(\omega)$ після деяких тотожних перетворень (в порівнянні з [4]) запишемо у вигляді

$$K(\varphi, \omega) = 3\varepsilon(\omega) \frac{\varepsilon_C(\omega, \varphi) - \varepsilon_B(\omega, \varphi)}{(\varepsilon_C(\omega, \varphi) + 2\varepsilon(\omega)) \cdot (\varepsilon_B(\omega, \varphi) + 2\varepsilon(\omega))} \mu(\varphi), \quad (6)$$

$$f(\omega) = \int_0^1 g(\omega, \varphi) d\varphi, \quad g(\omega, \varphi) = - \frac{\varepsilon_B(\omega, \varphi) - \varepsilon(\omega)}{(\varepsilon_B(\omega, \varphi) + 2\varepsilon(\omega))} \mu(\varphi) \quad (7)$$

Для визначеності, як і в [3], приймемо, що щільність $\mu(\varphi)$ описується Вета-розподілом

$$\mu(\varphi) = w \frac{\Gamma(\mu_1 + \nu_1)}{\Gamma(\mu_1)\Gamma(\nu_1)} (1-\varphi)^{\mu_1-1} \varphi^{\nu_1-1} + (1-w) \frac{\Gamma(\mu_2 + \nu_2)}{\Gamma(\mu_2)\Gamma(\nu_2)} (1-\varphi)^{\mu_2-1} \varphi^{\nu_2-1}, \quad (8)$$

де $\Gamma(x)$ - Гама-функція, w - деяке число ($0 \leq w \leq 1$). Зауважимо, що $\int_0^1 \mu(\varphi) d\varphi = 1$.

Рівняння (5) - це інтегральне рівняння Фредгольма I-го роду з комплексним ядром і комплексною правою частиною та дійсною невідомою функцією $\lambda(\varphi)$. При цьому інтервали значень змінних φ, ω різні і визначаються не-

рівностями $0 \leq \varphi \leq 1$, а $0 \leq \omega \leq \infty$. Оскільки $K = L + iM$, $f = p + iq$, то, відокремлюючи дійсну та уявну частини в рівнянні (5), отримаємо два рівняння з дійсними ядрами і дійсними правими частинами

$$L\lambda = p \quad (9), \quad M\lambda = q, \quad (10)$$

Оператори L, M діють за правилом

$$L\lambda = \int_0^1 \operatorname{Re}(K(\varphi, \omega)) \lambda(\varphi) d\varphi, \quad M\lambda = \int_0^1 \operatorname{Im}(K(\varphi, \omega)) \lambda(\varphi) d\varphi.$$

Зауважимо, що якщо розв'язки рівнянь (9) та (10) існують, то вони повинні співпадати. Це означає, що мають місце тотожності

$$ML^{-1}p = q, \quad LM^{-1}q = p, \quad (11)$$

де через L^{-1}, M^{-1} позначені відповідні обернені оператори. При дискретизації задачі це будуть деякі обернені матриці, і умови (11) можуть бути використані для контролю обчислень.

З рівностей (2) та (3) випливає, що $\varepsilon_B \rightarrow \varepsilon_R$ та $\varepsilon_C \rightarrow \varepsilon_R$, коли $\varphi \rightarrow 0$. При цьому згідно з (6) і ядро $K(\varphi, \omega) \rightarrow 0$ для довільної частоти та щільності розподілу $\mu(\varphi)$. Це означає, що задача розв'язання рівняння (5), кажучи взагалі, некоректна. Зауважимо, що при обраній щільності у вигляді (8) маємо $\mu(\varphi) \rightarrow 0$ при $\varphi \rightarrow 0$, і права частина теж прямує до нуля.

2. Розв'язування рівняння оберненої задачі. Спочатку розглянемо частинний випадок, коли $\lambda(\varphi) = \lambda = \text{const}$. Тоді λ виноситься за знак інтегралу, і задача зводиться до простого обчислення відношення інтегралів при фіксованих значеннях частоти ω за формулою

$$\lambda = \int_0^1 g(\omega, \varphi) d\varphi / \int_0^1 K(\omega, \varphi) d\varphi. \quad (12)$$

Зауважимо, що в правій частині стоїть відношення комплексних чисел, а в лівій дійсне число. Тому уявна частина відношення повинна обертатися на нуль. Крім того права частина залежить від частоти, а ліва – ні. Звідси випливає, що розв'язок $\lambda = \text{const}$ існує не завжди, але внаслідок простоти його побудови може бути використаний на початкових стадіях досліджень.

Тепер розглянемо загальний випадок. Оскільки рівняння (9) та (10) повинні мати однаковий розв'язок, то замість двох рівнянь будемо розглядати їх лінійну комбінацію, тобто рівняння вигляду

$$\int_0^1 [\alpha \operatorname{Re}(K(\varphi, \omega)) + \beta \operatorname{Im}(K(\varphi, \omega))] \lambda(\varphi) d\varphi = \int_0^1 [\alpha \operatorname{Re} g(\omega, \varphi) + \beta \operatorname{Im} g(\omega, \varphi)] d\varphi, \quad (13)$$

де α, β - деякі дійсні сталі.

Розв'язок рівняння (13) будемо шукати у вигляді полінома

$$\lambda(\varphi) = \lambda_1 + \lambda_2 \varphi + \lambda_3 \varphi^2 + \dots + \lambda_n \varphi^{n-1}. \quad (14)$$

Підстановка розкладу (14) в (13) приводить до рівняння вигляду

$$\lambda_1 a_1(\omega) + \lambda_2 a_2(\omega) + \lambda_3 a_3(\omega) + \dots + \lambda_n a_n(\omega) = b(\omega), \quad (15)$$

де використані позначення

$$a_j(\omega) = \int_0^1 [\alpha \operatorname{Re}(K(\varphi, \omega)) + \beta \operatorname{Im}(K(\varphi, \omega))] \varphi^{j-1} d\varphi, \quad (16)$$

$$b(\omega) = \int_0^1 [\alpha \operatorname{Re} g(\omega, \varphi) + \beta \operatorname{Im} g(\omega, \varphi)] d\varphi. \quad (17)$$

Рівняння (13) повинно справджуватися при будь-якій частоті з проміжку $0 \leq \omega \leq \infty$. Для його розв'язку застосуємо метод колокації. Будемо вважати, що рівняння (13) точно задовольняється у окремих точках ω_i , ($i = 1, 2, \dots, n$). Тоді воно зводиться до системи лінійних алгебраїчних рівнянь, яку зручно записати у матричному вигляді

$$A\lambda = b. \quad (18)$$

Вектор невідомих $\lambda^* = [\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n]$ складається з шуканих коефіцієнтів розкладу (14), вектор правої частини $b^* = [b_1, b_2, \dots, b_n]$ (зірочка означає транспонування), а матриця системи $A = [a_{ij}]$. При цьому використані позначення $a_{ij} = a_j(\omega_i)$, $b_i = b(\omega_i)$.

Після розв'язання системи (18) коефіцієнти в (15) становляться відомими, і ми одержуємо апроксимацію шуканої функції $\lambda(\varphi)$. Якщо прийняти $n = 1$, то повинні отримати розв'язок, який дається формулою (12).

3. Чисельні результати. Викладені в попередньому розділі формули складають основу розробленого обчислювального алгоритму. При його реалізації для обчислення інтегралів застосовувались прості квадратурні формули типу прямокутників або трапецій, а лінійна система в оберненій задачі розв'язувалась методом Гауса. Наведемо деякі результати виконаних розрахунків.

Як і в [3], розглянемо пористе середовище з дійсною відносною діелектричною проникністю матеріалу скелету $\varepsilon_R' = 7$, який заповнений водою з дійсною частиною проникності $\varepsilon_W' = 79$ і провідністю $\sigma = 1$ См.

Для оцінки достовірності розроблених алгоритмів розв'язання оберненої задачі використаємо розв'язки прямої задачі. Приймаємо у залежності (8) такі значення параметрів: $w = 1$, $\mu_1 = \lambda_1 = 1$. Неважко побачити, що в цьому випадку $\mu(\varphi) = \text{const}$, а сама функція, як і в [3], приймається кусочно-сталою

$$\mu(\varphi) = \begin{cases} 4, & 0 \leq \varphi \leq 0,2 \\ 0, & 0,2 \leq \varphi \end{cases} \quad (17)$$

Випадок $\lambda(\varphi) = \text{const}$ відповідає моделі однорідно зв'язаних пор [3, 4]. Інший, більш складний випадок дає, так звана, центрально пориста модель [3]. Ця модель передбачає, що перколяційна функція $\lambda(\varphi)$ описується залеж-

ністю $\lambda(\varphi, R) = 1 - [1 - a(\varphi, R)]^5$, де $a(\varphi, R)$ - корінь деякого кубічного рівняння, R - параметр, що характеризує форму пор [3].

Залежності дійсної частини діелектричної проникності та провідності пористого середовища від безрозмірної частоти $f = \omega / \omega_0$ для цих випадків наведені на рис. 1, 2 відповідно. Частота ω_0 відповідає частоті релаксації води, тобто $\omega_0 = 1/(\varepsilon_0 \varepsilon_w') = 1,43 \text{ ГГц}$, $\varepsilon_0 = 8,8542 \cdot 10^{12} \text{ Ф/м}$. Як і в [3], для моделі однорідно зв'язаних пор було прийнято, що $\lambda = 0,5$, а для центрально пористої моделі, що $R = 0,922$. В обох випадках розрахунки виконані в діапазоні $0,03\omega_0 \leq \omega \leq \omega_0$. На графіках використано подвійну логарифмічну шкалу з десятинною основою. При проведенні розрахунків корені рівняння (1) знаходились з точністю до $1 \cdot 10^{-7}$ (по модулю), а при інтегруванні використовувалась формула трапецій.

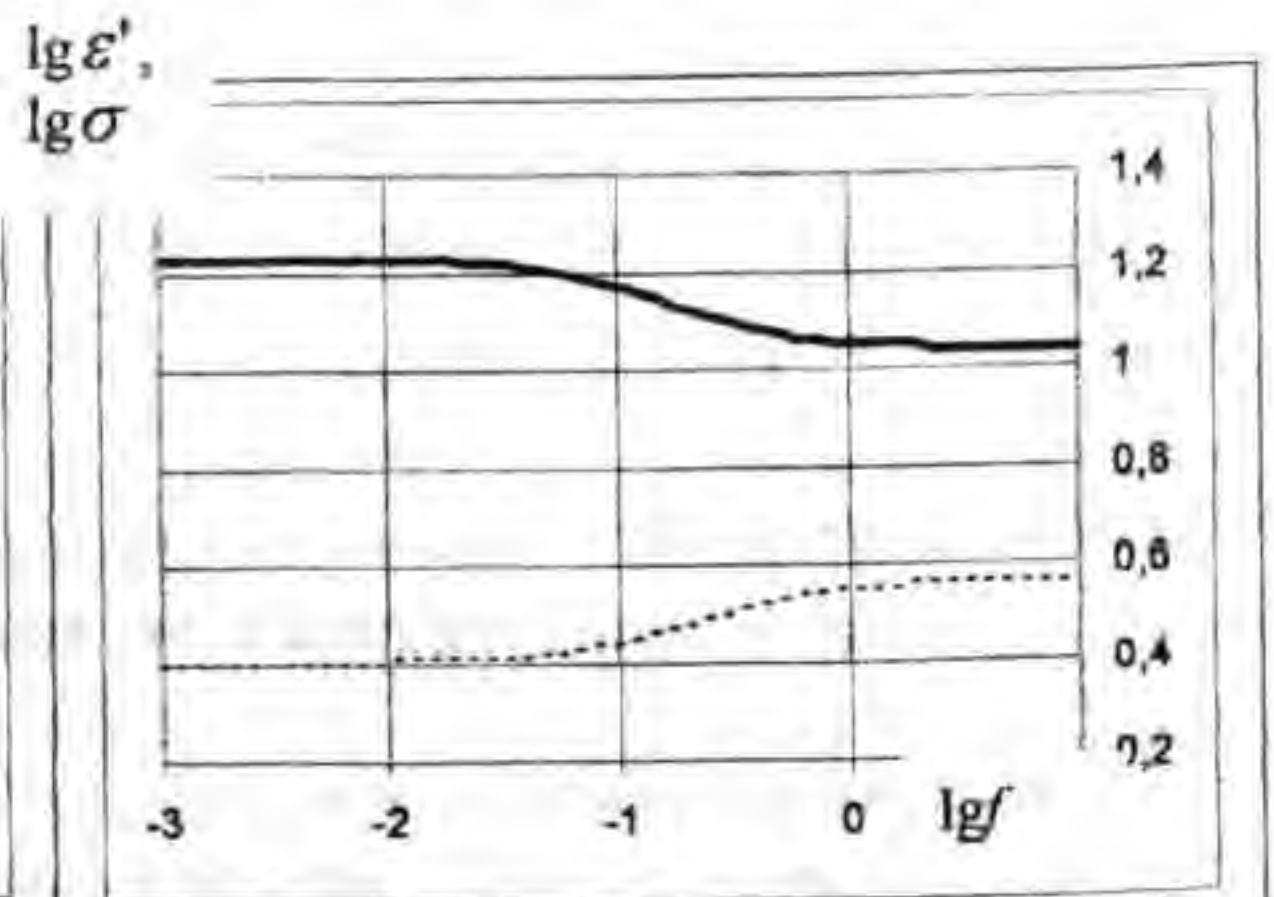
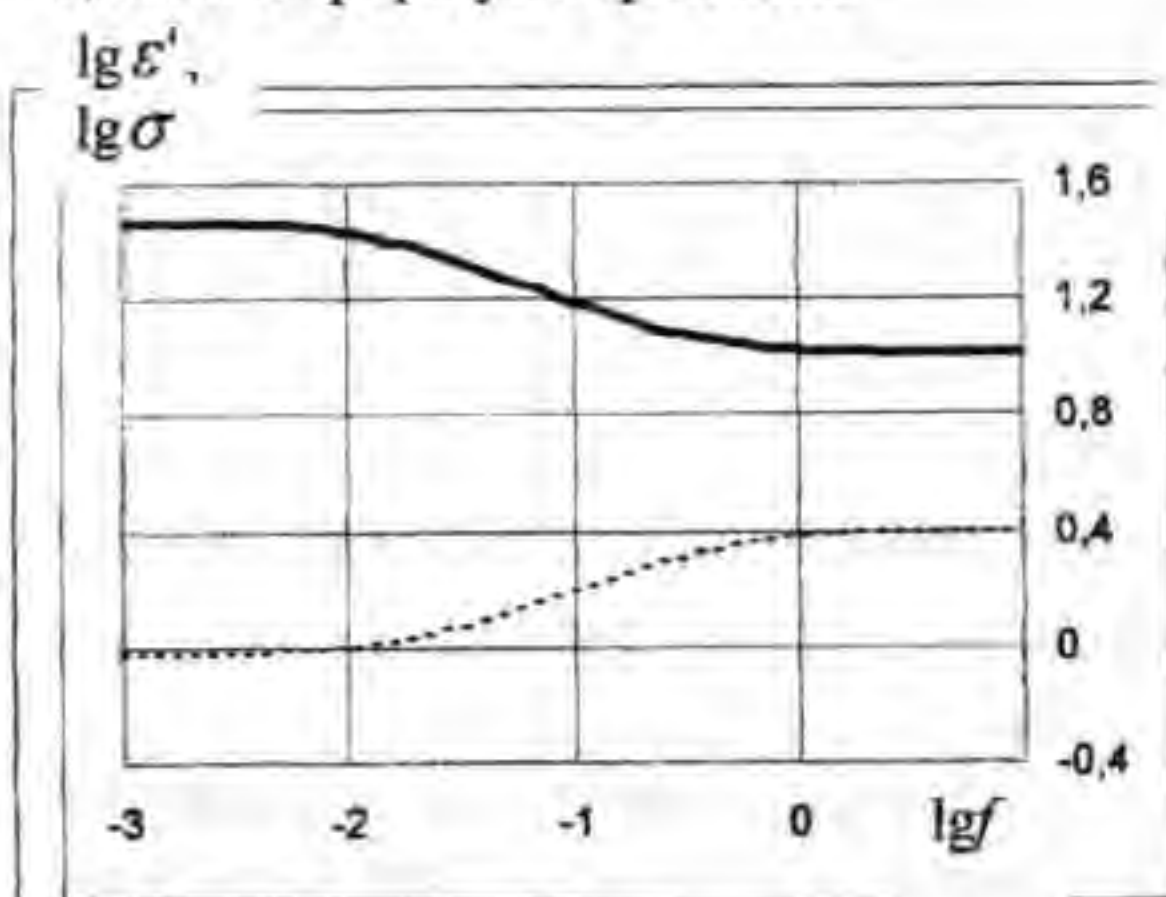


Рис. 1. Частотна залежність дійсної частини діелектричної проникності та провідності для моделі однорідно зв'язаних пор.

Рис. 2. Частотна залежність дійсної частини діелектричної проникності та провідності для моделі центрально пористого середовища.

— ε' , - - - σ

Отримані результати добре узгоджуються з результатами, що наведені в [3].

Як приклад практичного застосування викладеної методики розглянемо задачу визначення впливу насичення вологою склопластикових оболонок радіо-прозорих конструкцій на їх радіотехнічні характеристики. Склопластики - це армовані діелектрики, що складаються з скляних волокон, полімерної матриці і пір, що у процесі експлуатації конструкцій поглинають вологу. Через незначну відмінність (у порівнянні з діелектричної проникністю води) діелектричних проникностей скла та полімерів, склопластик можна розглядати як пористе середовище, яке складається з каркаса та пір, заповнених водою.

Розрахунки були виконані в діапазоні радіохвиль від 70 МГц до 1 ГГц в межах моделі центрально-пористого середовища, а для каркаса були прий-

няті такі діелектричні характеристики: $\varepsilon_R' = 4,2$, $\operatorname{tg} \delta = 0,02$. На рис. 3 приведені частотні залежності дійсної частини ефективної діелектричної проникності ε' і провідності σ' .

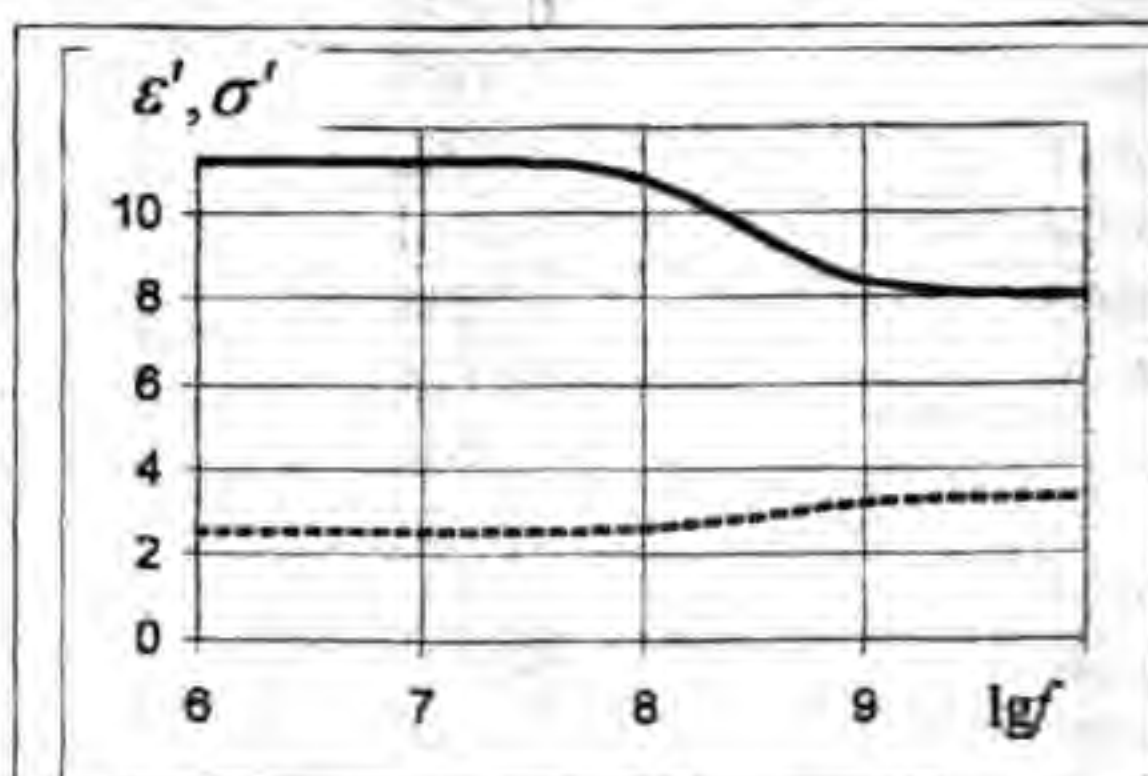


Рис. 3. Частотна залежність дійсної частини діелектричної проникності та провідності для склопластику, насиченого вологою (— ε' , - - - σ).

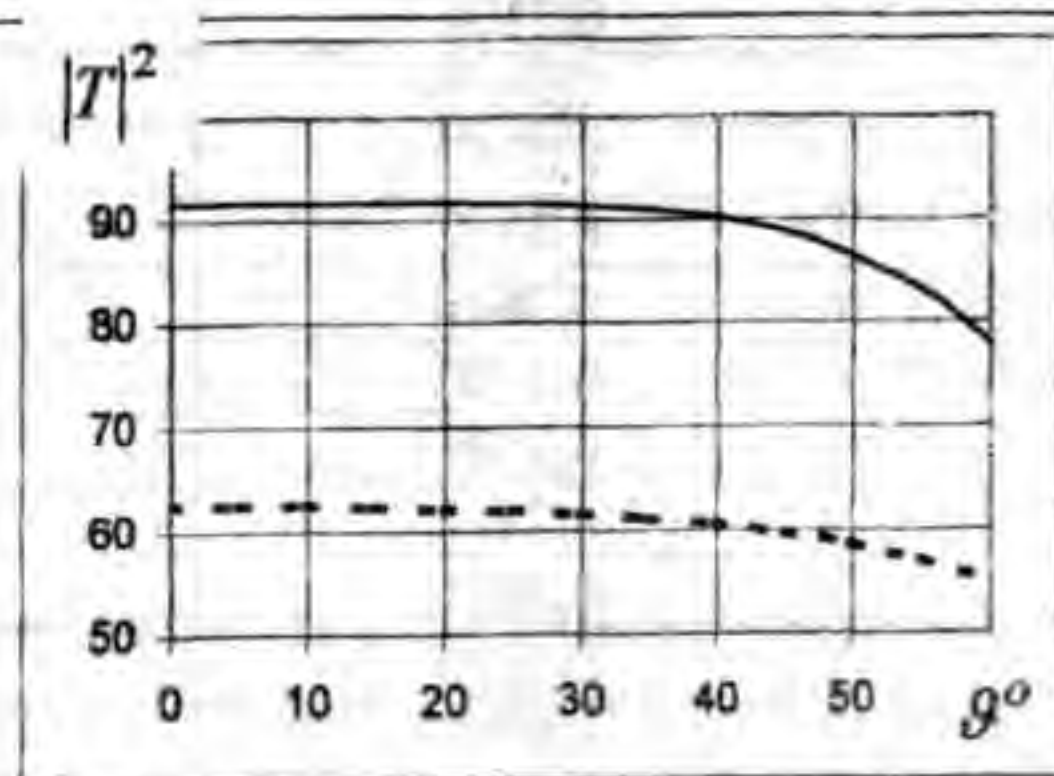


Рис. 4. Залежність коефіцієнта прозорості по потужності (%) від кута сканування (— без врахування проникнення води, - - - при врахування водопоглинання).

З цих даних випливає, що наявність води в порах склопластику істотно змінює характеристики матеріалу у діапазоні частот від 70 МГц до 1 ГГц. В області низьких і надвисоких частот частотні залежності практично відсутні. Таким чином особливо небезпечним таке явище стає для конструкцій, призначених для міліметрового і субміліметрового діапазонів хвиль. Цей випадок і було розглянуто.

Для розрахунку характеристик проходження радіохвиль (коефіцієнти прозорості і відбивання, фазовий набіг) через конструкції була використана загальна теорія поширення хвиль у шаруватих середовищах [8]. Графіки, представлені на рис. 4, дозволяють оцінити вплив проникнення води в матеріал на коефіцієнт прозорості конструкції по потужності $|T|^2$. Розрахунки виконані для хвилі довжиною 8 мм при різних кутах сканування θ у випадку перпендикулярної поляризації. Згідно з рис. 3 для ефективних характеристик насиченого вологою склопластику можна прийняти, що $\varepsilon' = 8$, $\operatorname{tg} \delta = 0,05$. Розглядалася одношарова конструкція, з товщиною стінки 2 мм. Передбачалося, що вода проникла на чверть товщини стінки, тобто на 0,5 мм, і розрахунок у цьому випадку виконувався за схемою двошарової стінки.

З цих результатів випливає, що за прийнятих припущеннях коефіцієнт прозорості конструкції зменшується більш, ніж на 30%.

При розгляді оберненої задачі використовуємо залежність $\varepsilon = \varepsilon(\omega)$, отриману для випадку $\lambda = 0,5$. Розв'язок задачі за формулою (10) для деяких частот наведений у таблиці. При цьому частоти нормовані частотою $\omega_0 = 1/(\varepsilon_0 \varepsilon_W') = 1,43 \text{ ГГц}$.

Таблиця.

Розв'язок оберненої задачі у випадку моделі однорідно зв'язаних пор.

ω / ω_0	$\text{Re } \lambda$	$\text{Im } \lambda \cdot 10^3$
0,0100	0,4944	0,5120
0,0158	0,4943	0,7333
0,0251	0,4941	1,0062
0,0398	0,4938	1,3321
0,0631	0,4935	1,7218
0,1000	0,4930	2,1920
0,1585	0,4924	2,7616
0,2512	0,4916	3,4521
0,3981	0,4905	4,2693
0,6310	0,4889	5,1131
1,0000	0,4867	5,5981

З цієї таблиці випливає, що розв'язок оберненої задачі практично збігається з початковим значенням $\lambda = 0,5$, закладеним у пряму задачу. Похибка визначення дійсної частини не перевищує 2%. Уявна частина повинна обертатися на нуль, а отримане значення для уявної частини має порядок 10^{-3} , що само по собі значно менше дійсної частини, а відхилення від нуля не перевищує 0,6%.

Як другий приклад розв'яжемо цю ж задачу за допомогою апроксимацією поліномом. Результати розрахунків залежності $\lambda(\varphi)$, які отримані при різних значеннях сталих α, β в рівнянні (13), наведені на рис.3. Суцільною тонкою лінією позначена крива, отримана для значень $\alpha = 1, \beta = 0$, тобто для розв'язків тільки дійсного рівняння; пунктирною – для $\alpha = 0, \beta = 1$, тобто для розв'язків тільки уявного рівняння; суцільною жирною - для $\alpha = 1, \beta = -10$. При цьому в поліномі (14) було утримано три члена. Розрахунки виконувалися у частотному діапазоні $0,01\omega_0 \leq \omega \leq \omega_0$.

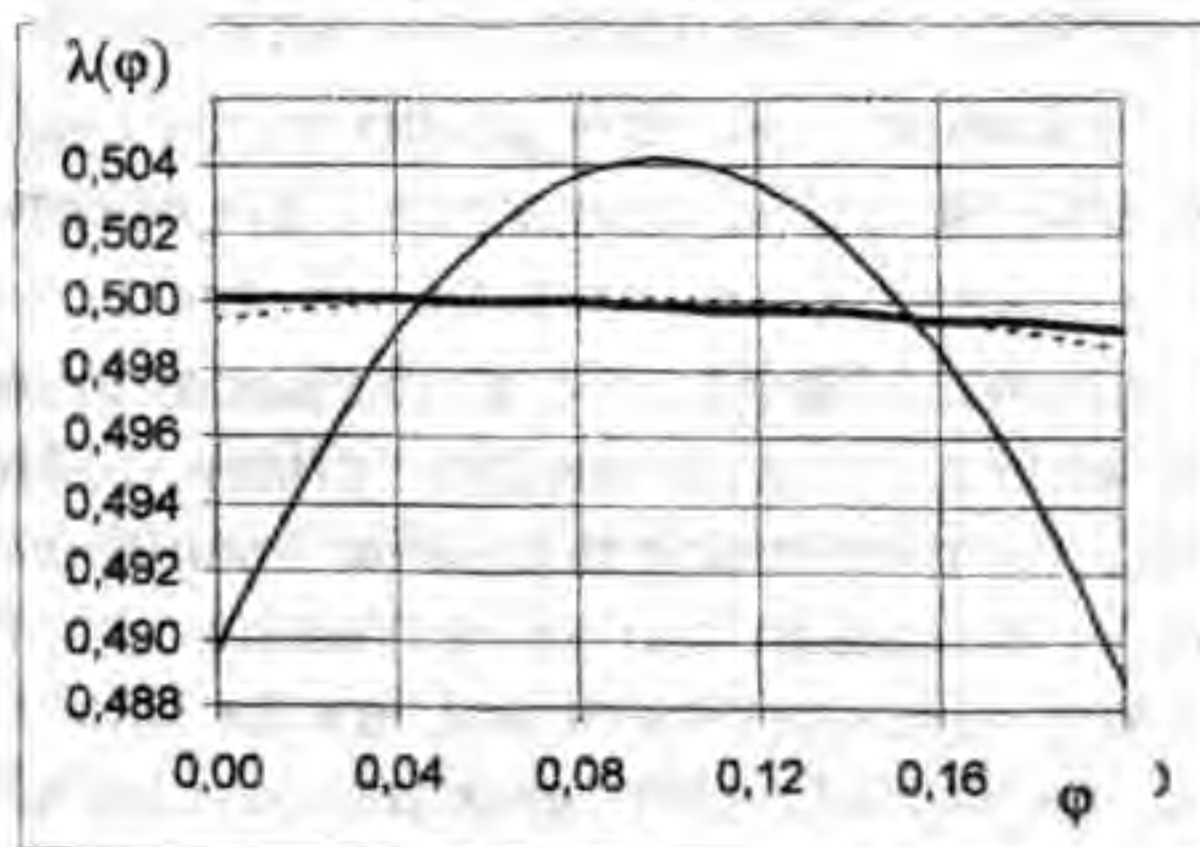


Рис. 5. Функція перколяції $\lambda(\varphi)$ в залежності від пористості, знайдена за розв'язками прямої задачі для моделі однорідно зв'язаних пор.

З наведених результатів випливає, що в першому випадку розв'язок стає нестійким; другий варіант, в принципі, є задовільним, але найкращі результати дає рівняння, отримане за допомогою лінійної комбінації дійсної та уявної частин при вказаних значеннях коефіцієнтів лінійної комбінації. Зауважимо, що результати можуть бути покращені при застосуванні в апроксимації невідомої функції систем ортогональних поліномів Лежандра або Чебишева та більш точних квадратурних формул. Також корисним може виявитися при пошуку коефіцієнтів розкладів узагальнений метод мінімізації нев'язки із застосуванням методу випадкового пошуку, як це було зроблено при розв'язанні оберненої задачі діелектричної спектроскопії [9].

Висновки. З викладеного вище випливає, що розроблено досить ефективний підхід до розв'язування складного інтегрального рівняння, який дає розв'язок оберненої задачі для визначення щільності розподілу перколяційної складової. Ця складова фактично визначає ефективну діелектричну проникність пористого середовища з провідними включеннями. Особливо така схема важлива при визначенні вологості та внутрішньої структури різноманітних ґрунтів в системі точного землеробства за допомогою безконтактних радіолокаційних методів зондування.

Література.

1. Венгер Є.Ф., Гончаренко А.В., Дмитрук М.Л. Оптика малих частинок і дисперсних середовищ. – Київ: Наук. Думка. – 1999. – 348 с.
2. Эффективные электродинамические параметры гетерогенных систем / Гречко Л.Г., Митрич В.В., Морозов А.Н., Огенко В.М., Решетняк В.Ю. // Препринт Ин-та теор. Физики АН УССР № 90-73Р. – Киев, 1990. – 31 с.
3. Hilfer R. Dielectric response of porous medium // Phys. Rev. – 1991, 44. – P. 60 – 76.
4. Бойко В.В., Гречко Л.Г., Шкода Н.Г., Шостак С.В. Ефективна діелектрична проникність зволжених дисперсних систем в наближенні локальної пористості // Механізація сільськогосподарського виробництва. – 2002, . – Т. XII. – С. 103 – 113.
5. Смирнов В.И. Курс высшей математики. Т. IV. Часть первая. – М.: Наука, 1974. – 336 с.
6. Тихонов А.Н., В.Я. Арсенин. Методы решения некорректных задач. – М.: Наука, 1986 г. – 288 с.
7. Верлань А.Ф., Сизиков В.С. Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы. – К.: Наук. Думка, 1986. – 543 с.
8. Бреховских Л.М. Волны в слоистых средах. – М.: Наука, 1973. – 343 с.
9. Гречко Л.Г., Лерман Л. Б., Шкода Н.Г. Ефективна діелектрична проникність матричних дисперсних систем з багаточисловими включеннями: пряма та обернена задачі // Вісник Київського університету. Серія: фізико-математичні науки. - 2004, 2. – С. 181-186.

Надійшла до редколегії 25.02.2005

УДК 538.22

Д. Ю. Карамян*, аспірант.
С.Л. Рево, с.н.с., зав. НДЛ "Фізика
металів та керамік", к. ф.-м. н.

**Механічні властивості
композиційних матеріалів
терморозширений графіт –
полімер.**

Досліджено залежності
напруження – деформація при лінійному
розтязі зразків композиційних
матеріалів (КМ) з матрицями на основі
фторопласту-3 марки "В" та
полівінілхлоридного пластизолю. В
якості наповнювача використовували
терморозширений графіт.

Виявлено, що концентраційні
залежності границі міцності та
деформації руйнування можна
розділити на 3 області. Запропоновано
механізми руйнування в кожній з
областей стираючись на результати
електронномікроскопічних досліджень.

Ключові слова: композиційні матеріали,
терморозширений графіт, полімери,
механічні властивості.

D.Yu. Karaman,
S. L. Revo.

**Mechanical properties of thermally
expanded graphite – polymer
composite materials.**

The tension–deformation dependences
under linear tension of composite materials
with different matrixes on the base of
fluoroplastic-3 "V" and polyvinylchloride
plastisol have been studied. Thermally
expanded graphite was used as a stuff.

It has been established that
concentration dependencies of strength and
demolition deformation can be parted into
three areas. Demolition mechanisms in
each area have been offered basing on the
results of electron microscope analysis.

Keywords: composite materials, thermally
expanded graphite, polymers, mechanical
properties.

*E-mail: karaman@univ.kiev.ua

Для підсилення механічної міцності полімерів в промисловості часто використовують їх армування волокнами більш міцних матеріалів [1,2], зокрема, графітовими [3]. Лускоподібні частинки жорсткого наповнювача збільшують механічну міцність композиційних матеріалів (КМ) з полімерною матрицею в випадку хорошої адгезії з нею [1]. Однак теоретичне описання механічних властивостей таких КМ ускладнене за причинами, що пов'язані з труднощами заданої орієнтації частинок і забезпечення оптимального перекриття між ними.

Для термічно розширеного графіту (ТРГ) характерними є високі значення питомої поверхні (до 60 м²/г) [4], що є сприятливим для хорошої спорідненості з полімерами. Оскільки при формуванні зразків КМ черв'якоподібні частинки ТРГ розколюються по площинах зсуву, змінюючи свою форму на лускоподібну [5], являло інтерес

зміннюючи свою форму на лускоподібну [5], являло інтерес проаналізувати вплив концентрації ТРГ на механічні властивості КМ з полімерною матрицею. Для досліджень були виготовлені зразки, де в якості матриці використано полівінілхлоридний пластизоль (ПВХП) та фторопласт (ФП).

На відміну від ПВХП, ФП має низьку пластичність, руйнується крихко. Окрім цього, для ФП характерна низька адгезія з графітом.

Новизна роботи полягає в отриманні нових перспективних КМ та нових наукових даних щодо впливу наповнювача з ТРГ на механічні властивості КМ з полімерною матрицею.

Густину ТРГ при розрахунку об'ємного вмісту (θ) брали рівною $2,0 \text{ кг/м}^3$, густину ФП – $2,16 \text{ кг/м}^3$, а ПВХП – $1,35 \text{ кг/м}^3$. Вихідні суміші компонентів ретельно перемішували з допомогою міксера (при використанні в якості матриці ФП, вихідні суміші порошків попередньо зволожували етиловим спиртом, після перемішування висувували на повітрі при температурі $40...60^\circ\text{C}$), після чого під тиском 10^7 Па нагрівали до температури $(180 \pm 5)^\circ\text{C}$. Час нагріву становив 5 хв, загальний час становив 20 хв. Даний технологічний режим є оптимальним по відношенню як до ПВХП, так і до ФП [6,7]. Зразки після зняття тиску охолоджувались в пресформі до кімнатної температури на протязі 30 хв.

Знімки мікроструктури зрізів та поверхонь руйнування зразків отримували на растровому електронному мікроскопі JSM-840. Залежності напруження при розтязі (σ) від величини відносної деформації (ϵ) знімали на модифікованій установці на стандартних за геометрією (згідно ГОСТ 1497-73 [8]) зразках, які лінійно розтягували до розриву зі швидкістю $2,96 \text{ \% / хв}$ (швидкість руху захватів $0,8 \text{ мм / хв}$). Одночасно, з допомогою оптичного мікрометра, вимірювали зміну площі поперечного перерізу зразків при збільшенні прикладеної до захватів розривної машини розтягуючої сили.

Концентраційні залежності відносної деформації руйнування (ϵ_b) та границі міцності при розтязі (σ_b) для зразків КМ ТРГ-ПВХП умовно можна розділити на три області (рис.1).

В області I, де θ змінюється від 0 до 4 об. %, частинки ТРГ в КМ розміщені хаотично і не доторкаються одна одної. При цьому міцність КМ визначається міцністю його матриці, для якої характерний високопластичний механізм деформації ($\epsilon_b \approx 550 \text{ \%}$). Збільшення θ призводить до різкого пониження σ_b та ϵ_b , що обумовлено значно нижчою пластичністю та механічною міцністю частинок ТРГ в порівнянні з відповідними характеристиками "чистої" матриці. Зразки КМ в даній концентраційній області є ізотропними – коефіцієнт Пуасона однаковий у перпендикулярному і паралельному напрямках до осі, що співпадає з напрямком пресування при виготовленні зразків.

При $\theta \geq 4$ об. % (область II) частинки починають доторкатись одна одної, що підтверджується результатами електронномікроскопічних досліджень. При цьому, вони вишиковані в КМ ще хаотично, і між ними ще не існує міцних механічних зв'язків. Зі збільшенням концентрації ТРГ, впорядкованість розташування його частинок збільшується, між ними збільшується когезійна міцність, і, утворена з ТРГ своєрідна сітка, починає виконувати армуючі функції. Величина σ_b зростає, ε_b зменшується менш стрімко. Цей механізм працює до $\theta \approx 50$ об. %.

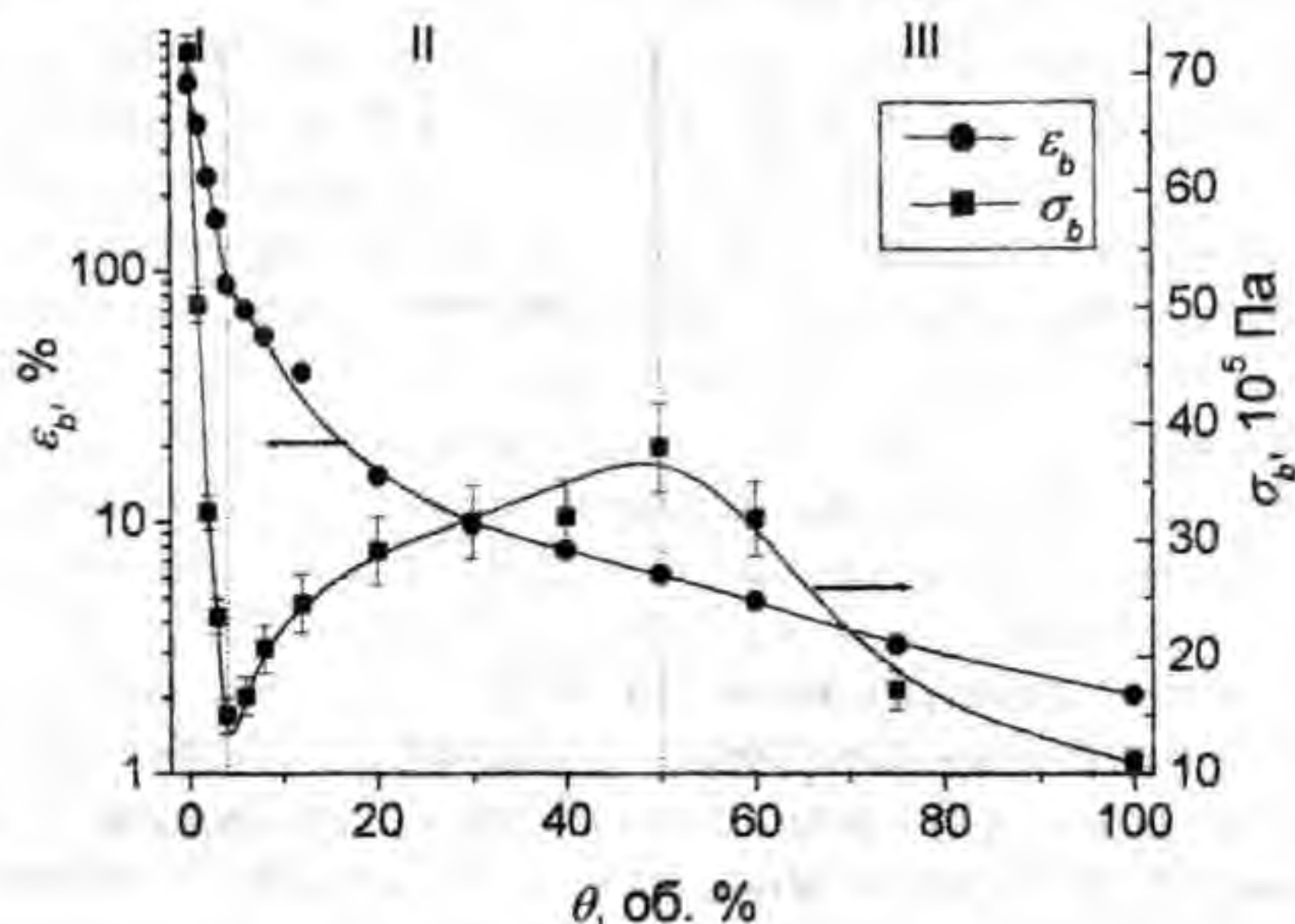


Рис. 1. Концентраційні залежності величин границі міцності при розриві (σ_b) та відносної деформації розриву (ε_b) зразків ТРГ-ПВХП.

Міцність зразків КМ, як і в області I обумовлена міцністю матриці і міцністю зв'язків наповнювач-наповнювач і наповнювач-матриця, а характер руйнування – пластичний. При вмісті ТРГ, що відповідає початку області II, відносне звуження матеріалу у напрямках перпендикулярному і паралельному до осі пресування зразків відрізняється, і зі збільшенням θ дана відмінність проявляється сильніше.

В цій області відбувається перехід від пластичного до пружньо-пластичного характеру деформації із зниженням пластичності КМ внаслідок появи міцного механічного зв'язку між частинками ТРГ.

Підвищення впливу механічного зчеплення частинок ТРГ на міцність КМ при $\theta > 50$ об. % (область III) відбувається внаслідок суттєвого зменшення товщини прошарків ПВХП між частинками ТРГ. Воно характеризує перехід від пружньо-пластичного характеру деформації до крихкого. При цьому, площа перерізу зразків під час деформації

залишається майже незмінною, і, відповідно, $\nu \approx 0$ як в паралельному, так і в перпендикулярному напрямках до осі пресування зразків. Збільшення θ в області III призводить до зменшення значень як ε_b , так і σ_b , оскільки міцність матеріалу в цій області визначається вже суто зчепленням частинок ТРГ між собою.

Для КМ ТРГ-ФП, як показали дослідження, збільшення θ призводить до збільшення ε_b (рис. 2). Але за рахунок високого рівня випадкової похибки конкретний характер залежності $\varepsilon_b(\theta)$ встановити неможливо, тому на цьому рисунку зростання ε_b умовно зображено лінійним. Характерним є зменшення похибки з підвищенням θ , яка становила $\sim 40\%$ при $\theta = 0$ і $\sim 4\%$ при $\theta = 100$. Коефіцієнт Пуасона для КМ ТРГ-ФП рівний нулю при всіх значеннях θ .

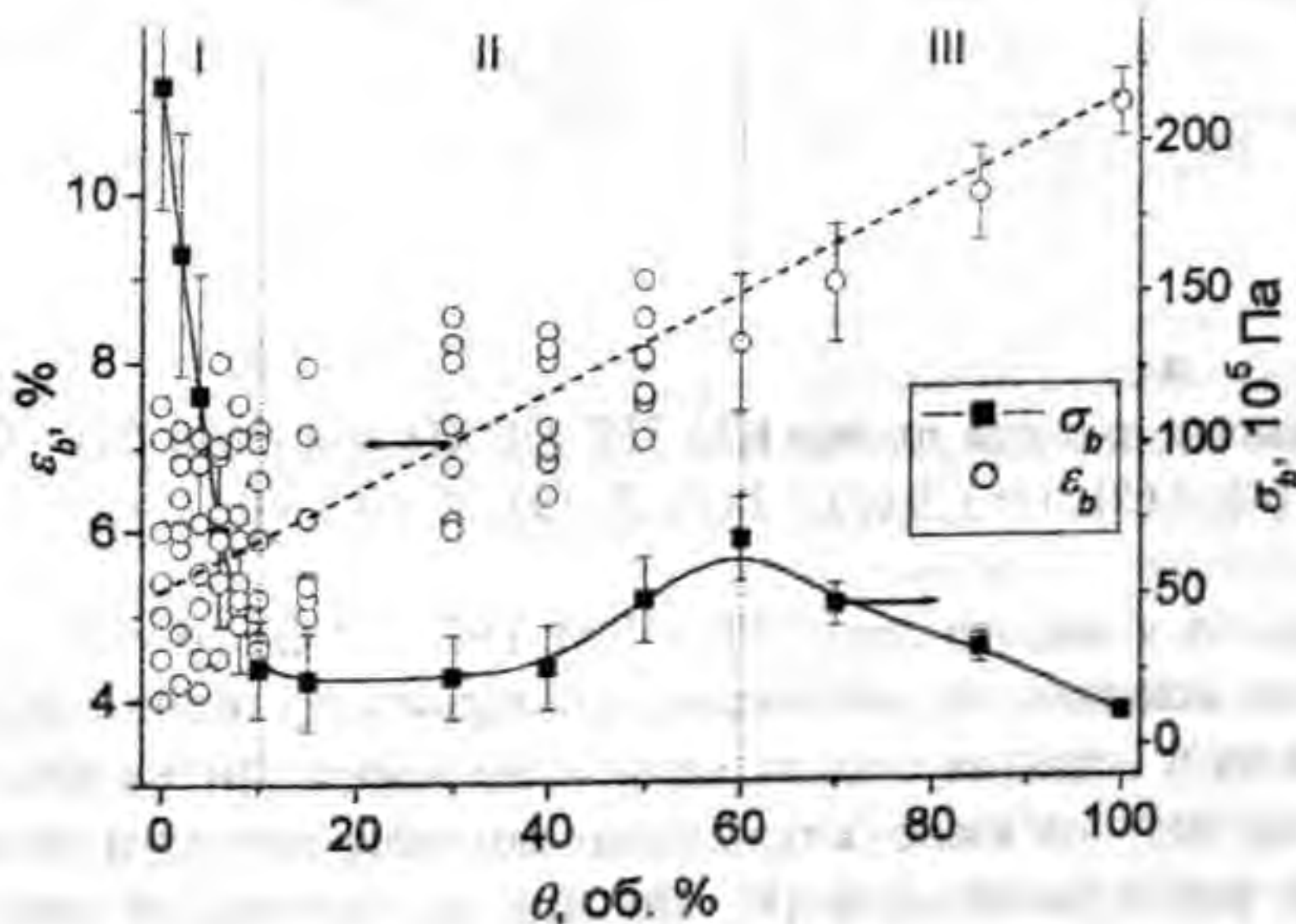


Рис. 2. Концентраційні залежності величини напруження руйнування при розриві σ_b зразків ТРГ-ФП.

Концентраційна залежність σ_b , що була описана для КМ ТРГ-ПВХП, в деякому наближенні характерна також для КМ ТРГ-ФП (рис. 2). Її відмінності обумовлені крихкістю матриці та порівняно низькою адгезійною міцністю між матрицею та наповнювачем, що пов'язано з фізико-хімічними особливостями ФП:

- Межі концентраційних областей зсунуті у бік більших значень θ .
- В області II (рис. 2), де основний вклад в міцність КМ дає адгезія між матрицею та наповнювачем не спостерігали суттєвого підвищення значень σ_b .

Аналіз фрактографічних знімків для зразків з різною θ показав, що

руйнування може відбуватись як внаслідок відшарування полімерної матриці від частинок ТРГ, так і безпосередньо по його частинкам. Таким чином, для одержання зразків КМ з оптимальним рівнем заданих властивостей необхідно враховувати як особливості виявлених залежностей σ_b і ϵ_b від θ , так і можливості керування адгезійною і когезійною міцностями компонентів.

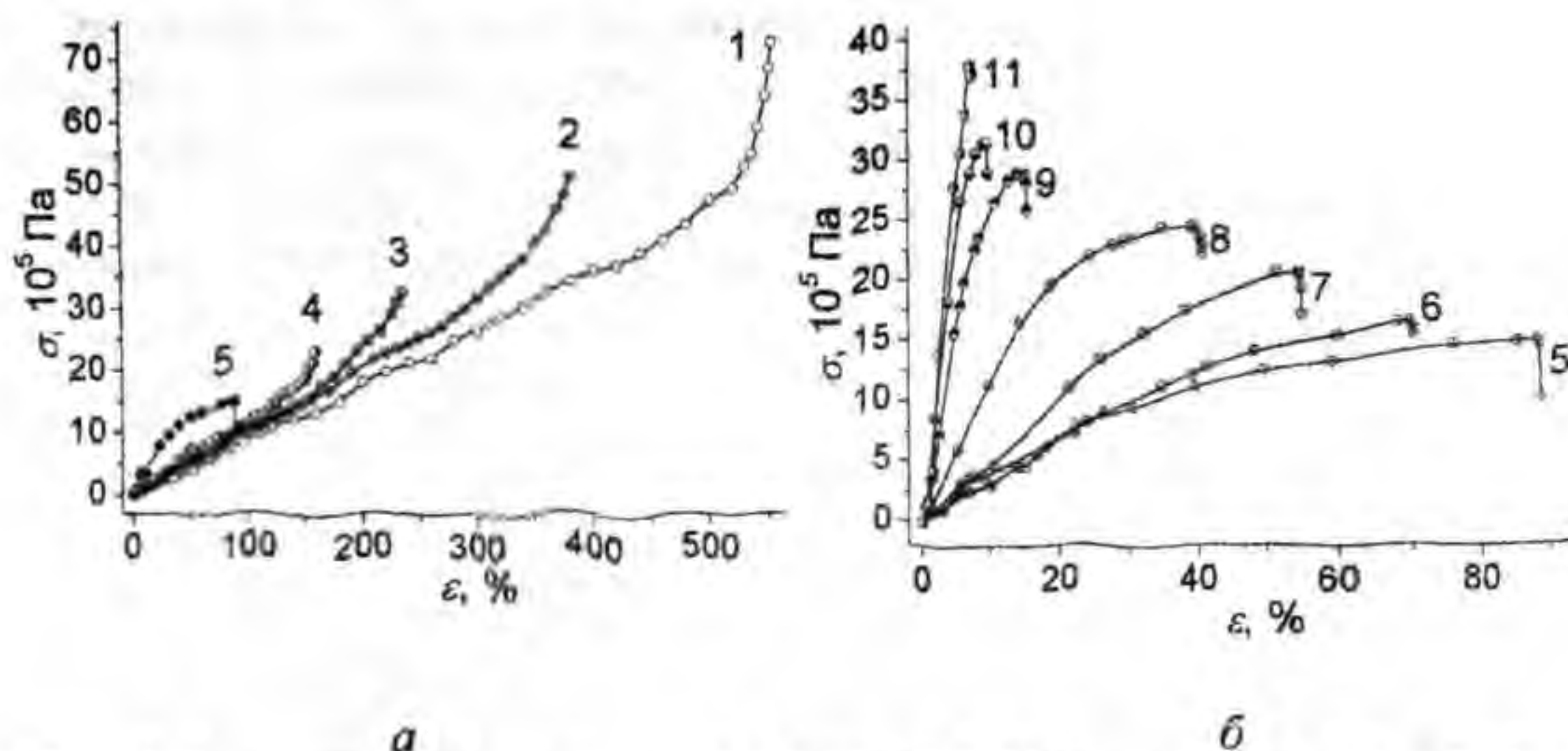


Рис. 3. Залежності $\sigma(\epsilon)$ для зразків КМ ТРГ-ПВХП при θ (об. %) = 0 (1), 1 (2), 2 (3), 3 (4), 4 (5), 6 (6), 8 (7), 12 (8), 20 (9), 30 (10), 40 (11).

При низьких концентраціях ТРГ в КМ ТРГ-ПВХП ($\theta = 0 \dots 3$ об. %) (рис. 3, а), для залежностей напруження від відносної лінійної деформації розтягування на її останніх стадіях характерне асимптотичне зростання σ до значень σ_b , що пов'язано з орієнтуванням макромолекул полімера в напрямку дії розтягуючої сили [8]. По мірі підвищення θ дане явище проявляється в меншому ступені, оскільки пластичність та питома міцність частинок ТРГ є низькою в порівнянні з відповідними характеристиками волокон ПВХП.

При $\theta \geq 4$ об. % на діаграмах з'являються "полички" виходу σ на насичення, що передують руйнуванню зразків і пов'язано з відшаруванням частинок ТРГ від матриці.

З діаграм напруження-деформація, наведених на рис. 3, б видно, що з підвищенням вкладу в міцність КМ адгезійної міцності між частинками матриці і наповнювача, кут нахилу залежностей $\sigma(\epsilon)$ зростає до значень, що відповідають $\theta = 40$ об. %. При подальшому збільшенні θ кут нахилу залишається незмінним.

При $\theta \geq 8$ об. %, тобто при вмісті ТРГ, при якому починається утворення областей з паралельним вишиковуванням його частинок на кривих $\sigma(\epsilon)$ у деяких випадках спостерігали появу максимуму,

аналогічного зубу плинності для металів.

На рис. 4 наведений фрагмент залежностей $\sigma(\varepsilon)$ для трьох видів зразків з $\theta = 12$ об. %, що були виготовлені з одних і тих самих вихідних матеріалів, але відрізнялись за геометрією розташування частинок наповнювача.

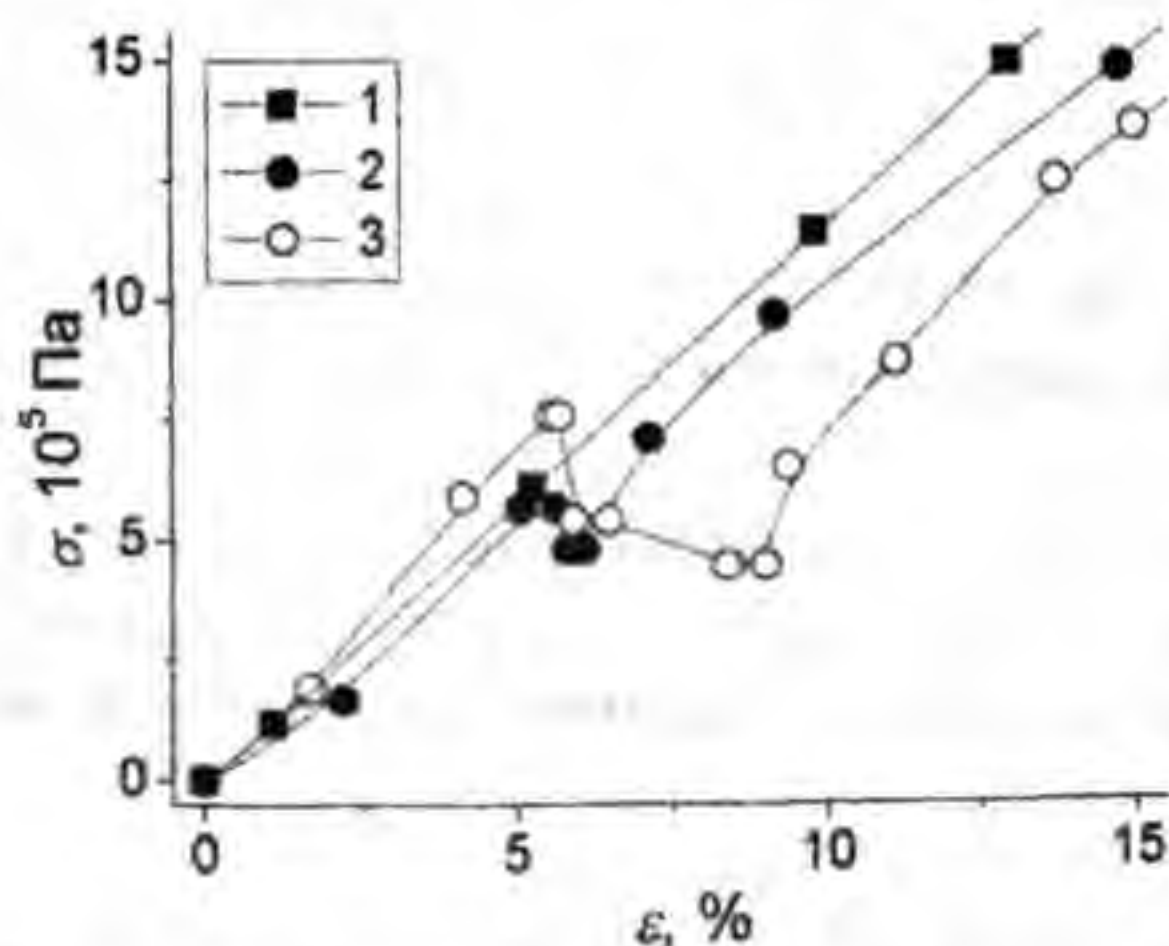


Рис. 4. Фрагменти кривих $\sigma(\varepsilon)$ для трьох зразків з $\theta = 12$ об. %: без появи зубу плинності (1), з невеликим зубом плинності (2), з яскраво вираженим зубом плинності (3).

перпендикулярно осі розтягування (рис 5, б). Проміжний випадок – коли існують області з паралельним і перпендикулярним вишиковуванням частинок. Напрямок розтягування на рисунку зазначений стрілками, напрямок осі пресування зразків при їх виготовленні перпендикулярний площині рисунка. У першому випадку міцність матеріалу вища за рахунок його армування частинками ТРГ. При збільшенні σ в даній області при деякому критичному його значенні настає момент, при якому частинки наповнювача починають відшаровуватись від полімерної матриці, розсуваючись одна від одної (вершина зуба), проте при цьому вклад у міцність матеріалу надає ще один фактор, який обумовлений силою тертя між частинками ТРГ. Подальша деформація призводить до зменшення напруження, що пов'язано з тим, що в даному об'ємі міцність матеріалу визначається виключно полімерною матрицею. У другому випадку міцність зчеплення частинок нижча, ніж у першому. Основний внесок у міцність КМ дає полімерна матриця, можливість ковзання частинок ТРГ одна по одній відсутня, і, як наслідок, зуб плинності на залежностях $\sigma(\varepsilon)$ не виникає. Таким чином, величина зубу плинності залежить від розміру областей паралельного вишиковування частинок.

Появу зубу плинності можна пояснити в рамках наступної моделі. Як уже було сказано, у цій області концентрацій міцність матеріалу обумовлена як адгезійною міцністю зв'язків матриця – наповнювач, так і міцністю матриці. При формуванні зразків КМ черв'якоподібні частинки ТРГ розколюються по площинах зсуву, після чого в даній області θ здатні утворювати області з паралельним їх вишиковуванням. При цьому, в об'ємі матеріалу можливі два крайніх випадки орієнтації частинок: паралельно осі розтягування (рис. 5, а) і

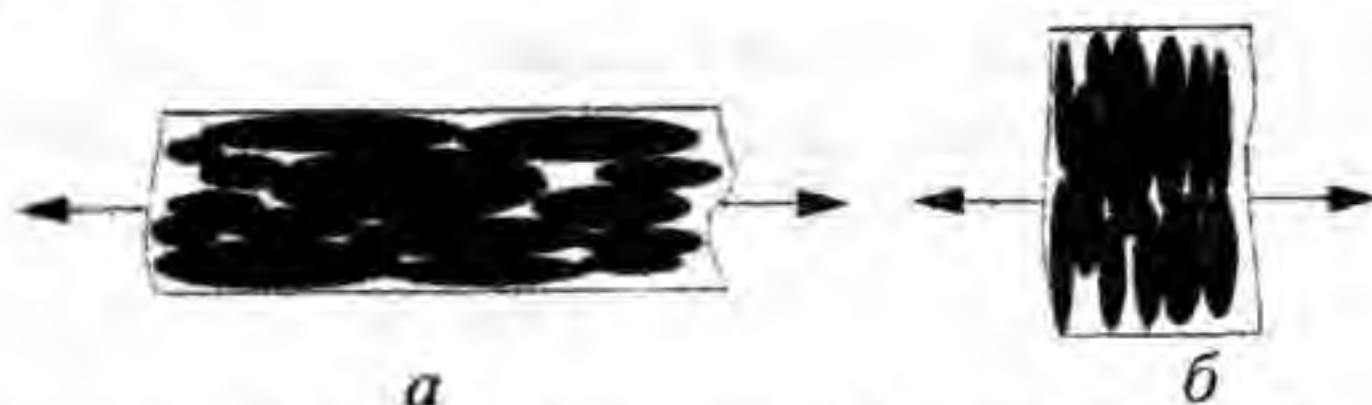


Рис. 5. Крайні випадки можливої орієнтації частинок ТРГ.

Висновки.

1. Для зразків КМ ТРГ–полімер характерні три механізми деформації і руйнування, які обумовлюють появу особливостей на залежностях $\varepsilon_b(\theta)$ і $\sigma_b(\theta)$.

2. Підвищення θ в КМ ТРГ–ПВХП призводить до монотонного пониження ε_b . При цьому, залежність $\sigma_b(\theta)$ має характерні точки перегину, обумовлені специфікою когезійної та адгезійної взаємодії компонентів в композиції.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Нильсен Л. Механические свойства полимеров и композиционных материалов на их основе. – М.: Химия, 1979. – 311 с.
2. Овчинский А. С. Процессы разрушения композиционных материалов. – М.: Наука, 1988. – 278 с.
3. Кулачинская О. Б., Айзинсон И. Л. Композиционные материалы на основе термопластов с волокнистыми наполнителями // Пласт. массы. – 2001. – № 6. – С. 9-12.
4. Семенцов Ю. И., Приходько Г. П., Рево С. Л., Мележик А. В., Пятковский М. Л., Янченко В. В. Наноразмерный композиционный материал терморасширенный графит – углеродное волокно // Наносистемы, наноматериалы, нанотехнологии. – 2003. – Т. 1, № 1. – С. 173-183.
5. Chen G. H., Wu D. J., Weng W. G., Yan W. L. Dispersion of graphite nanosheets in a polymer matrix and the conducting property of the nanocomposites // Polym. eng. and sci. – 2001. – Vol. 41, № 12. – P. 2148 – 2154.
6. Фторопласты / Под. ред. М. И. Гарбара. – Л.: ГНТИХЛ, 1954. – 40 с.
7. Штаркман Б. П. Пластификация поливинилхлорида. – М.: Химия, 1975. – 248 с.
8. Гуль В. Е., Кулезнев В. Н. Структура и механические свойства полимеров. – М.: Высшая школа, 1972. – 320 с.

Надійшло до редакції 20.04.2005.

УДК 537.32

Копань В.С., професор
Хуторянська Н.В., пров. інженер
Копань Ю.В., асистент.

Наведена деформацією термо-е.р.с. мікрофольг

Термо-е.р.с. $E(h)$ мікрофольг (Pb, Al, Ag, Au, Cu, Pt, Ni), що наведена деформацією,

$$E(h) \cong \beta \frac{Gb}{h},$$

де $h < (3 \div 7)$ мкм – товщина фольги, G – модуль зсуву, b – вектор Бюргерса, β – параметр стану поверхні фольги.

Швидкість зміни $E(\varepsilon)$ зі зростанням пластичної деформації ε
 $\frac{\Delta E(\varepsilon)}{\Delta \varepsilon_5} = -1,3 \cdot 10^{-9} \text{ В/\%}$ для макрофольги

Cu ($h > 10 - 40$ мкм) та
 $\frac{\Delta E(\varepsilon)}{\Delta \varepsilon_6} = -20 \cdot 10^{-9} \text{ В/\%}$ для мікрофольги Cu.

Ключові слова: мікрофольги, термоелектрорушійна сила, дислокація.

E-mail: kopa@pulsary.com.ua

В роботах [1-3] досліджувалась термо-е.р.с., наведена пластичною деформацією макрозразків, діаметр (дроти) чи товщина (фольги) яких значно перевершували розміри зерна (10 – 100 мкм). Зараз в мікроелектроніці використовують струмові доріжки товщиною $h < 1$ мкм. Питомий опір, термо-е.р.с. та інші параметри мікрофольг можуть змінюватись завдяки впливу поверхні на електричні явища в об'ємі.

Мета роботи – дослідити залежність термо-е.р.с. та енергії руху дислокацій від товщини зразків в діапазоні $h = 1 - 10$ мкм.

Техніка експерименту.

Дислокації у великій кількості (до 10^{12} см^{-2}) найлегше вводити у фольговий зразок вальцюванням. При цьому необхідно забезпечити сталість хімічного складу фольг. За товщин $h \sim 1$ мкм можливе дифузійне насичення поверхні атомами заліза (з валків прокатного стану) навіть при кімнатній температурі, бо дифузія стимулюється пластичною

V.S. Kopań,
N. V. Hutoryanska,
U. V. Kopań

The deformation - induced thermoelectric power of microfoils

The deformation-induced
thermoelectric power $E(h)$ of microfoils
(Pb, Al, Ag, Au, Cu, Pt, Ni)

$$E(h) \cong \beta \frac{Gb}{h},$$

where $h < (3 \div 7) \mu$ is the foil's thickness, b – Burgers' vector, G – the shear modulus, β – surface state coefficient. For Cu macrofoil

($h > 10 - 40 \mu$) $\frac{\Delta E(\varepsilon)}{\Delta \varepsilon_5} = -1,3 \cdot 10^{-9} \text{ V/\%}$,

and for Cu microfoil
 $\frac{\Delta E(\varepsilon)}{\Delta \varepsilon_6} = -20 \cdot 10^{-9} \text{ V/\%}$, where $\varepsilon\%$ is cold rolling deformation.

Key Words: microfoil, thermoelectric power, dislocation.

деформацією. Тому зразки катали в обкладинках з того ж матеріалу, що і сам зразок. Щоб не було приварювання мікрофольг до обкладинок, їх змащували солідолом. Молекули солідолу (C_xH_y) при повільному (поздовжня швидкість 1-3 см/с) вальцюванні не розкладаються, бо енергія валентного зв'язку C-H набагато перевершує енергію, що виділяється при вальцюванні. Тому маємо надію, що мікро фольги не насичувались воднем та вуглецем у процесі холодної деформації. Використовували метали: Pb (99,97%), Al (99,98%), Cu (99,96%), Au (99,99%), Ag (99,99%). Термо-е.р.с. вимірювали компенсаційним методом за допомогою потенціометру з вхідним опором 20 Ом та ціною поділки 10^{-8} В. Зразки затискали у клеммах [4], відносна температура яких була однаковою з похибкою $0,0001^\circ\text{C}$. Цим зменшувались паразитні термо-е.р.с. в контактах до $10^{-9} - 10^{-10}$ В, що забезпечувало точність вимірювання наведеної деформацією термо-е.р.с. до 1-2%. Температура холодного кінця термопары становила $T_x=20\pm0,1^\circ\text{C}$, нагрітого $T_n=64\pm0,05^\circ\text{C}$.

Експериментальні результати та їх обговорення.

На рис. 1 наведено залежність $E(\varepsilon)$ для мідних (а) та алюмінієвих (б),

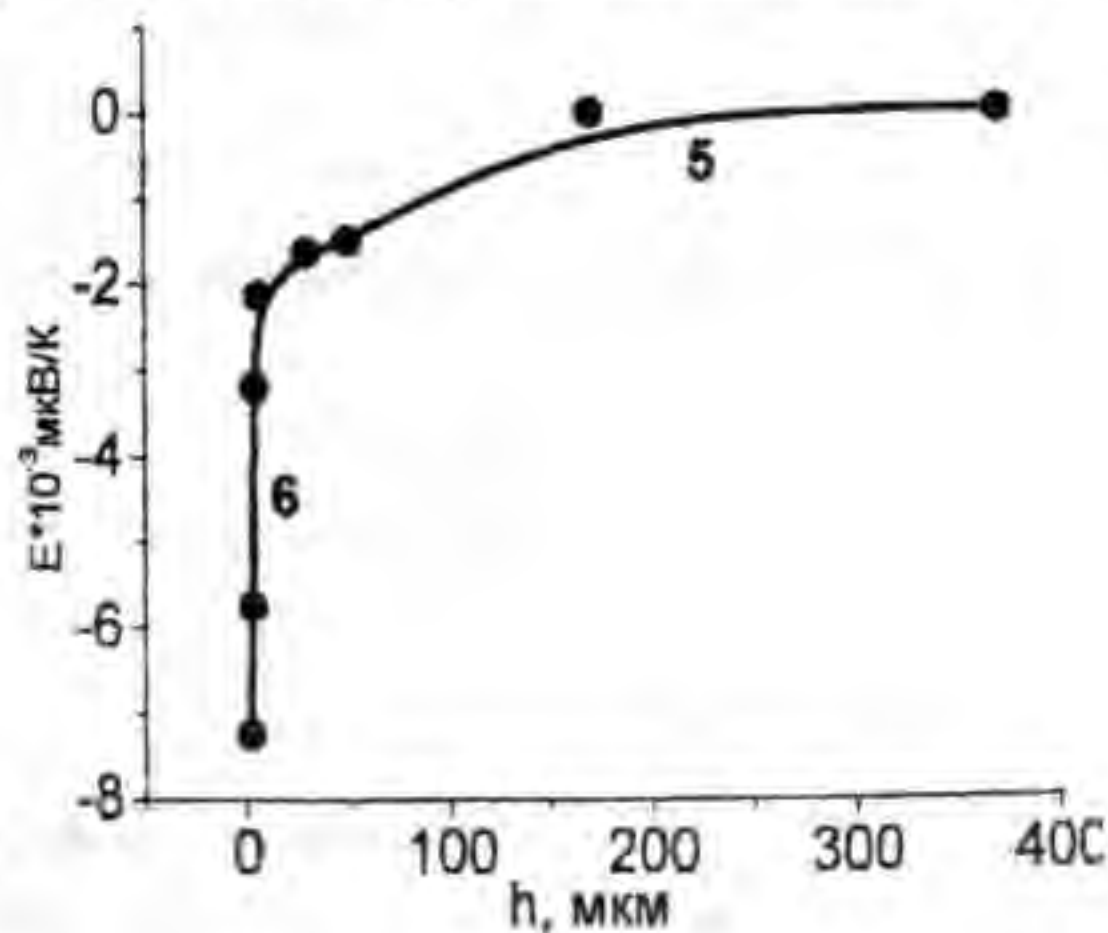
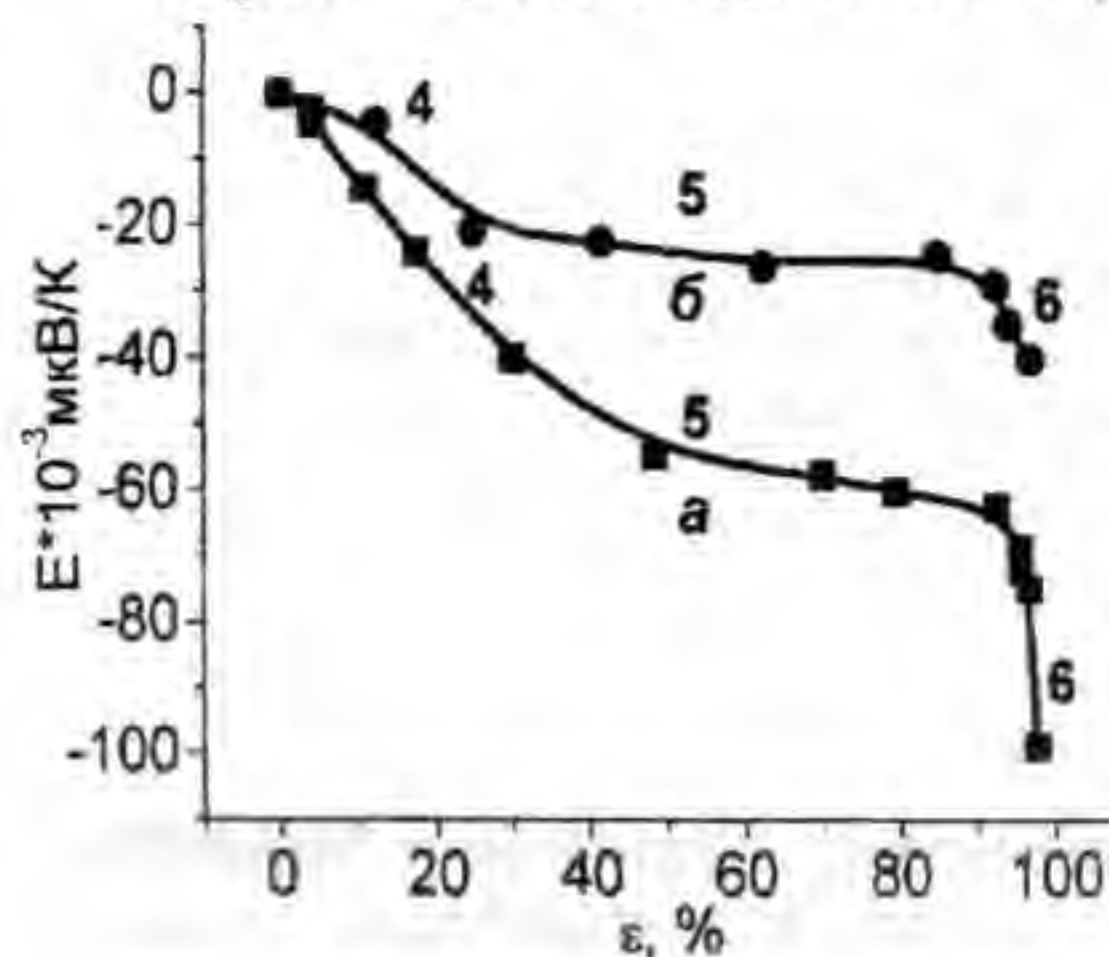


Рис.1. Залежність термо-е.р.с. E від величини пластичної деформації вальцюванням ε . а – мідь, б – алюміній, 4-5-6 – характерні стадії на кривих $E(\varepsilon)$.

Рис.2. Залежність термо-е.р.с. E , наведеної вальцюванням свинцевих фольг, від їх товщини h : 5-6 – характерні стадії на кривій $E(h)$.

продеформованих вальцюванням, фольг відносно відпалених фольг – еталонів (Cu та Al, відповідно). До сьогодні були відомі п'ять температурних стадій на кривих відпалу мідних зразків [5]. Три стадії можна вивчати, деформуючи зразки при $T=4 - 273\text{K}$. Ми деформували їх при $T\sim 293\text{K}$. Вивчали при температурі гарячого кінця термопары $T_n=337\text{K}$. Тому стадії 4 – 5 на кривих деформацій (рис.1) приблизно відповідають накопиченню тих дефектів, що аніглюють на 4 – 5 стадії відпалу

(дислокації, дефекти пакування, границі зерен тощо). Шоста стадія на кривих деформацій спостерігається навіть у свинцевих фольгах (рис. 2). У свинцю неможливо при $T \sim 60^\circ\text{C}$ виміряти E , обумовлену деформацією, бо дислокації відпалюються і здійснюється рекристалізація вже при переносі зразка від прокатного стану до установки термо-е.р.с. Отже, шоста стадія характерна лише для мікрофольг, причому у мідній фользі швидкість зміни $E(\varepsilon)$ $\Delta E/\Delta E_5 \approx 1,3 \cdot 10^{-9}$ В/% та $\Delta E/\Delta E_6 \approx 20 \cdot 10^{-9}$ В/% для п'ятої і шостої стадій, відповідно (рис.1). Раніше [6-8] шостої стадії не спостерігали, бо не досліджували ні електроопору ні термо-е.р.с. мікрофольг.

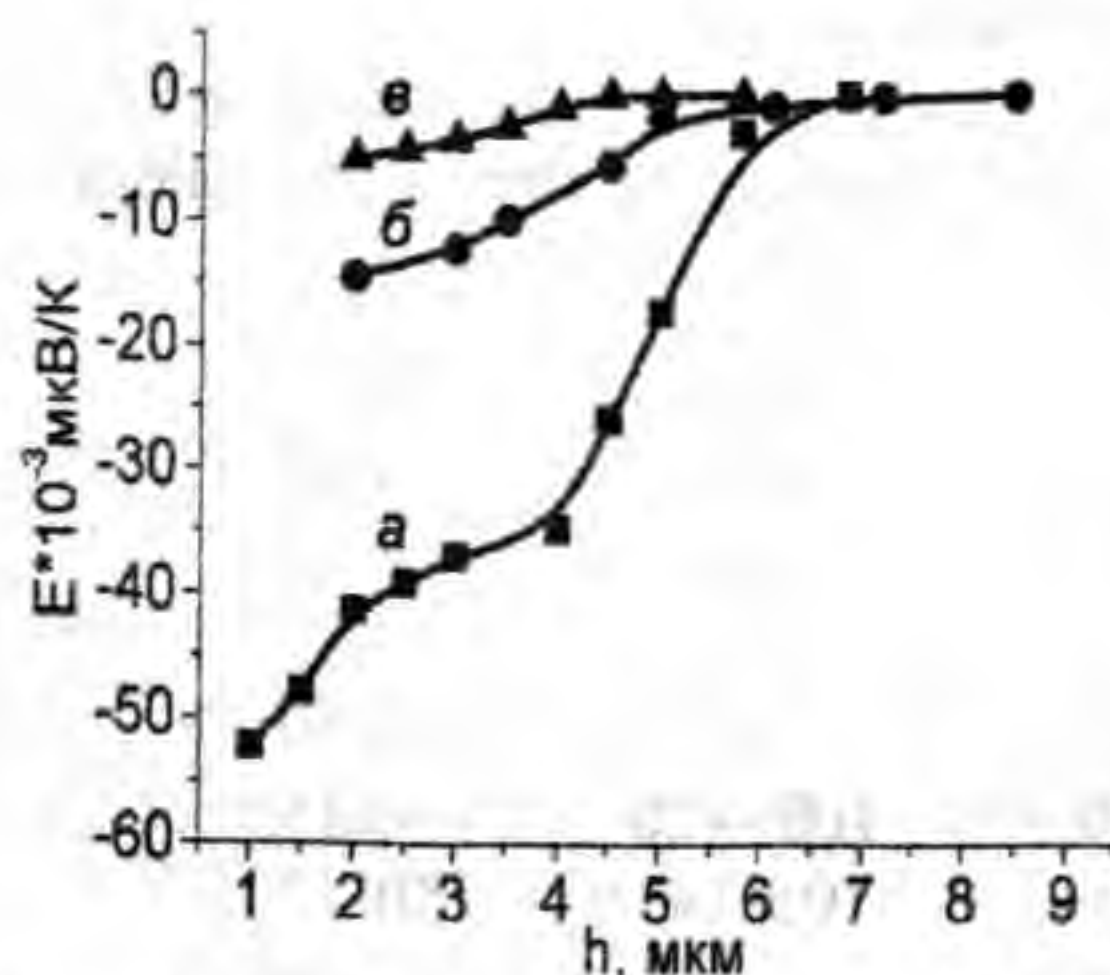


Рис. 3. Залежність термо-е.р.с. E , наведеної деформацією, від товщини мікрофольги h : а – мідь, б – алюміній, в – свинець.

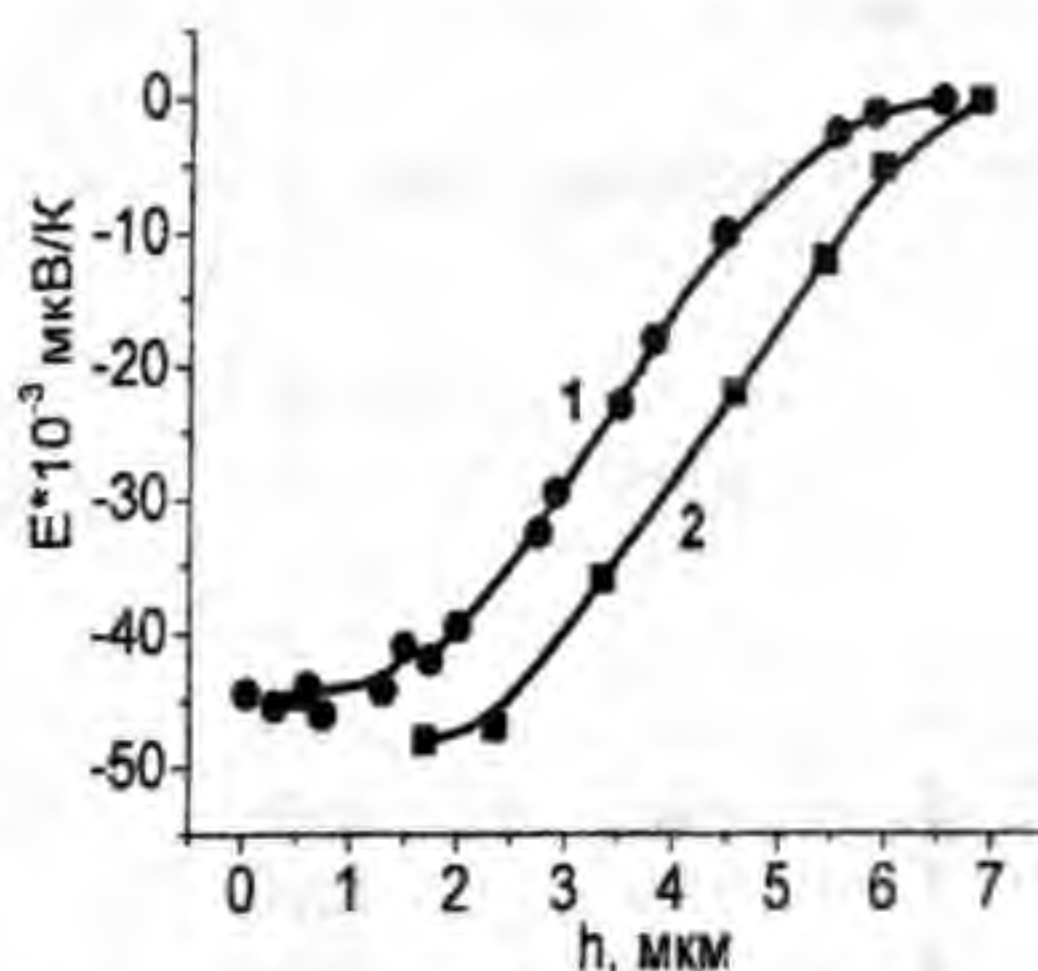


Рис.4. Залежність термо-е.р.с. E , наведеної деформацією, від товщини золотої фольги h та способу деформації: 1 – проковування, 2 – вальцювання.

Причина цього – експериментальні труднощі при виготовленні мікрофольг вальцюванням та їх дослідженні. Дефекти кристалічної будови, наприклад, необхідно вивчати на вільних, відокремлених від твердої підкладки зразках [9]. При товщині фольг $h \sim 2 - 3$ мкм та довжині 20 – 30 мм вони розтягуються і розриваються навіть повільними конвекційними повітряними потоками. Рекомендації по маніпулюванню з мікрофольгами містяться у книзі [10].

На рис. 3 наведено залежності $E(h)$ для Cu, Al, Pb. Фольги спочатку були відпалені 10 хвилин при температурі 400°C (Cu та Al) і 200°C (Pb). Потім їх вальцювали поетапно, вимірюючи $E(h)$ відносно відпаленої фольги – еталона, товщиною $h = 8 - 10$ мкм. Особливістю мікрофольг є те, що вони з самого початку деформації переходять у стан, для якого характерна шоста ділянка. П'ята ділянка (рис. 1) на кривих $E(h)$ мікрофольг відсутня. Вивчаючи рисунки, переходимо до висновків:

1. Існує критична деформація ε_k , при якій розпочинається шоста стадія: $\varepsilon_{Cu}=70 - 80\%$, $\varepsilon_{Al}=85 - 80\%$, $\varepsilon_{Pb}=90 - 95\%$. Проте ε неоднозначне з фізичної точки зору. Дійсно, $\varepsilon = \frac{h_0 - h}{h_0} * 100\%$ (де h_0 – початкова товщина фольги, h – поточна (після якогось етапу вальцювання). Отже, можна одержати однакові ε як для $h > 100$ мкм (взявши велику початкову товщину h_0), так і для $h < 10$ мкм. Тому краще розглядати криві $E(h)$.
2. Шоста стадія $E(\varepsilon)$ розпочинається при менших критичних товщинах h_k , якщо модуль зсуву G менший (таблиця 1).

Таблиця 1.

Критичні товщини мікро фольг h_k , модулі зсуву G та енергії активації відпалу дислокацій для п'ятої (Q_5) та шостої (Q_6) стадій кривої $E(\varepsilon)$.

№ пп	метал	модуль зсуву $G * 10^7$ Па	h_k , мкм	Q_5 , кДж г * ат	Q_6 , кДж г * ат
1	Pb	700	4-5	-	30-50
2	Al	2600	5-6	100-120	130-150
3	Au	2600	5-6	105-145	150-170
4	Ag	2650	5-6	110-140	130-165
5	Cu	4240	6-7	150-200	170-250
6	Pt	6700	7-8	230-270	250-300
7	Ni	7300	10-15	200-280	250-320

Виникає запитання: як залежить $E(h)$ на шостій стадії від способу деформації? Мікрофольгу можна потоншувати, наприклад, старовинним методом – проковуванням між плівками з телячого кишкового [10]. У нашому розпорядженні були лише фторопластові плівки, між якими ми і кували сусальне золото. Фольги після чергового стану потоншення розрізали на смужки і вимірювали $E(h)$, не відділяючи фольгу від фторопластової плівки. Результати подані на рис. 4. Невелике розходження кривих 1 – 2 можна пояснити деяким нагріванням фольги при куванні (у порівнянні з вальцюванням).

Наявність шостої стадії на кривих $E(\varepsilon)$ та $E(h)$ можна пояснювати наступним чином.

1. Дифузійні шляхи у мікрофользі малі, тому можлива дифузія домішок з середовищ, з якими контактує фольга. Наприклад, можлива дифузія азоту, водню, кисню по дислокаціях, якими пересичена фольга. Якби це було так, то не було б насичення $E(h)$ при $h < 1 - 2$

мкм, яке спостерігаємо (рис. 4). Крім того, при зберіганні фольг $E(h)$ зростала б з часом.

2. Початковий хід кривих $E(h)$ та $E(\varepsilon)$ при зменшенні h та зростанні ε має приблизно гіперболічний характер:

$$E(h) \sim \frac{1}{h}. \quad (1)$$

Це можна пояснити так. Напруга τ , необхідна для активації руху дислокацій, що закріплені між двома точками з відстанню h між ними,

$$\tau \sim \frac{Gb}{h}, \quad (2)$$

де $b \sim 3 \cdot 10^{-8}$ см – вектор Бюргерса. В мікрофольгах значна частина дислокацій закріплена кінцями на поверхні, на якій завжди є оксидна плівка (навіть, якщо фольга золота чи платинова), що ще більше сприяє закріпленню дислокацій.

В золотій мікрофользі при $h \sim 5$ мкм знаходимо $\tau \sim 0,2 \cdot 10^7$ Па. А для наддислокацій, де $b = (9-15) \cdot 10^{-8}$ см, $\tau \sim 10^7$ Па. Границя пружності на зсув золотого макродроту $\tau \sim 1 \cdot 10^7$ Па. Отже, закріплення дислокацій поверхнею в золотій мікрофользі достатньо велике. Тому ми і спостерігаємо крутий хід $E(h)$ на шостій стадії. Оскільки $E(h)$ тим більша, чим більша густина дислокацій N , а τ зростає зі зростанням N , то можна записати, що

$$E(h) \sim \beta \frac{Gb}{h}, \quad (3)$$

де β – параметр, який залежить від типу кристалічної ґратки та стану поверхні мікрофольги. Вираз (3) пояснює, чому $E(h)$, наприклад, для золота (рис. 4) на початку гіперболічно змінюється з h , чому h_k наростає (таблиця 1) зі збільшенням G .

В таблиці 1 наведено значення енергій активації анігіляції дислокацій Q_5 і Q_6 для п'ятої та шостої стадій $E(\varepsilon)$, відповідно, при відпалі мікрофольг. Енергії розраховані по кривим зміни $E(\varepsilon)$ в залежності від часу ізотермічного відпалу по методиці [11]. Бачимо, що $Q_6 > Q_5$. Цим засвідчується, що рухливість дислокацій в мікрофольгах ускладнена за рахунок додаткового закріплення дислокаційних згущень поверхнею.

Висновки

1. Мікрофольги Г.Ц.К. металів (Pb, Al, Au, Ag, Cu, Ni, Pt), товщина яких h менша критичної h_k , загартовуються деформацією набагато інтенсивніше у порівнянні зі звичайними фольгами. Це пояснюється додатковим закріпленням дислокацій поверхнями мікрофольг.
2. Термо-е.р.с. мікрофольг, наведена деформацією,

$$E(h) \cong \beta \frac{Gb}{h},$$

де h – вектор Бюргерса, G – модуль зсуву, β – параметр стану поверхні мікрофольги.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Герцрикен С.Д., Новиков Н.Н., Копань В.С.. О природе термо-э.д.с., возникающей в результате деформации металла // УФЖ – 1959. – Т. 4, №3. – С. 293 - 299.
2. Лухвич А.А. Влияние дефектов на электрические свойства металлов. Минск. – 1976. – С. 104.
3. Лухвич А.А., Каролик А.С., Шарандо В.И. Структурная зависимость термоэлектрических свойств и неразрушающий контроль. Минск. – 1990. – С. 192.
4. Борисенко В.Д., Копань В.С., Бессонов В.Б. Термоэлектрическое устройство для контроля неоднородности материалов. А.С.СССР №750357. Бюллетень изобретений. – 1980, №27.
5. Блатт Ф. Фізика електронної проводимості в твердих телах. М. – 1971. - 470 с.
6. Рево С.Л., Копань В.С., Майборода В.П.. Исследование плотности дислокаций и энергии активации диффузионных процессов методом термо-э.д.с. в многослойных материалах // Порошковая металлургия. – 1981. - №4 – С. 61 – 65.
7. Рево С.Л., Іваненко К.О., Дашевський М.М., Шевченко І.П.. Дослідження наведеної деформацією термо-е.р.с. у багат шарових наноконпозиційних матеріалах Fe – Ag та Ni – Ag // Вісник Київського університету. Серія: фізико – математичні науки. - 2004 №2. - с. 482 – 487.
8. Іваненко К.О.. Термо-е.р.с. та електроопір наноструктурних композиційних матеріалів. Автореферат кандидатської дисертації. Київ. - 2004. – 20 с.
9. Копань В.С.. Исследование несовершенств кристаллического строения на микропроводах. Автореферат кандидатської дисертації. Київ. – 1966. - С. 13.
10. Апгерер Э.В. Техника физического эксперимента. Физ. мат. гиз. М., 1962. - С. 452.
11. Копань В.С. Про рух дислокацій при відпалі дроту Волластона. УФЖ – 1964. – Т. IX, №8. – С.890.

Надійшла до редколегії

.03.2005.

УДК 537.32

Копань В.С., професор
Хуторянська Н.В., пров. інженер
Копань Ю.В., асистент.

П'єзотермо-е.р.с. міді та алюмінію

П'єзотермо-е.р.с. міді можна подати рівняннями $E_T = -0,76 \cdot 10^{-16} \sigma_T$, де σ_T - механічна напруга розтягу, та $E_C = 3,5 \cdot 10^{-16} \sigma_C$ при одноосному стисканні напругою σ_C . Для алюмінію $E_T = 0,7 \cdot 10^{-16} \sigma_T$ і $E_C = -1,1 \cdot 10^{-16} \sigma_C$. Для кожного металу $|E_C| > |E_T|$. Електрорушійна сила Cu-Cu₂O, що виникає в результаті електрон - фононного розсіювання (при частоті 100 МГц), рівна $(8 \pm 1) \cdot 10^{-8}$ В. Ключові слова: термо-е.р.с., одноосне стискання.

V.S. Kopan,
N. V. Hutoryanska,
U. V. Kopan

Piezo - thermoelectric power of Copper and Aluminium

The Cu piezo - thermoelectric power change (p-TEP) is given by $E_T = -0,76 \cdot 10^{-16} \sigma_T$, where σ_T is the tensile stress, and by $E_C = 3,5 \cdot 10^{-16} \sigma_C$ under the longitudinal compression σ_C . The Al p-TEP $E_T = 0,7 \cdot 10^{-16} \sigma_T$, and $E_C = -1,1 \cdot 10^{-16} \sigma_C$. For each metal $|E_C| > |E_T|$. The Cu-Cu₂O electric power, that is result of electron - phonons scattering (at frequency 100 MHz), is $(8 \pm 1) \cdot 10^{-8}$ V. Key Words: Thermoelectric power, longitudinal compression.

E-mail: kopa@pulsary.com.ua

У працях [1, 2, 3] досліджено вплив пластичної деформації на термо-е.р.с. міді. Вивчалась також дія на термо-е.р.с. всестороннього стискання та пружної деформації розтягу [2, 3]. Невідомі роботи, де б повідомлялось про вплив одноосного стискання на термо-е.р.с. Дослідження п'єзотермо-е.р.с. під дією пружного одноосного стискання, а також змінних напруг розтяг-стискання складне з експериментальної точки зору. Проте нам вдалося дослідити ці явища, про що повідомляємо у статті.

Техніка експерименту

Вимірювання термо-е.р.с. здійснювали на потенціометрі з малим входним опором (20 Ом) та ціною поділки 10^{-8} В. Клеми, що компенсують паразитні е.р.с. у контактах зі зразком, були винайдені раніше [4]. Форма зразка та схема навантаження наведені на рис. 1. Термопара складена з еталону А та зразка ВСД. Ліві кінці фольг закріплені в клемах 2 - 3, що з'єднані з потенціометром П. Праві кінці затиснені в клемі 4 - 5. Температура клем 2 - 3 становить $20 \pm 0,1^\circ\text{C}$, але різниця температур клем 2 - 3 підтримується стабільною з точністю $0,0001^\circ\text{C}$. Клема 4 - 5 має температуру $64 \pm 0,05^\circ\text{C}$. Ліва половина зразка ВС гнучка (товщина фольги $10 \div 15$ мкм, довжина ВС ~ 30 мм). Права половина CD виконана у вигляді тонкостінної трубки (діаметр 3 - 6 мм, товщина стінки 20 - 200 мкм, довжина 30 - 35 мм), якщо

досліджується вплив стискання на термо-е.р.с., або має форму полоски потрібного поперечного перерізу. Середина С зразка прикріплена до п'єзовібратора 6, що встановлений на коромислі 7. Навантажуючи

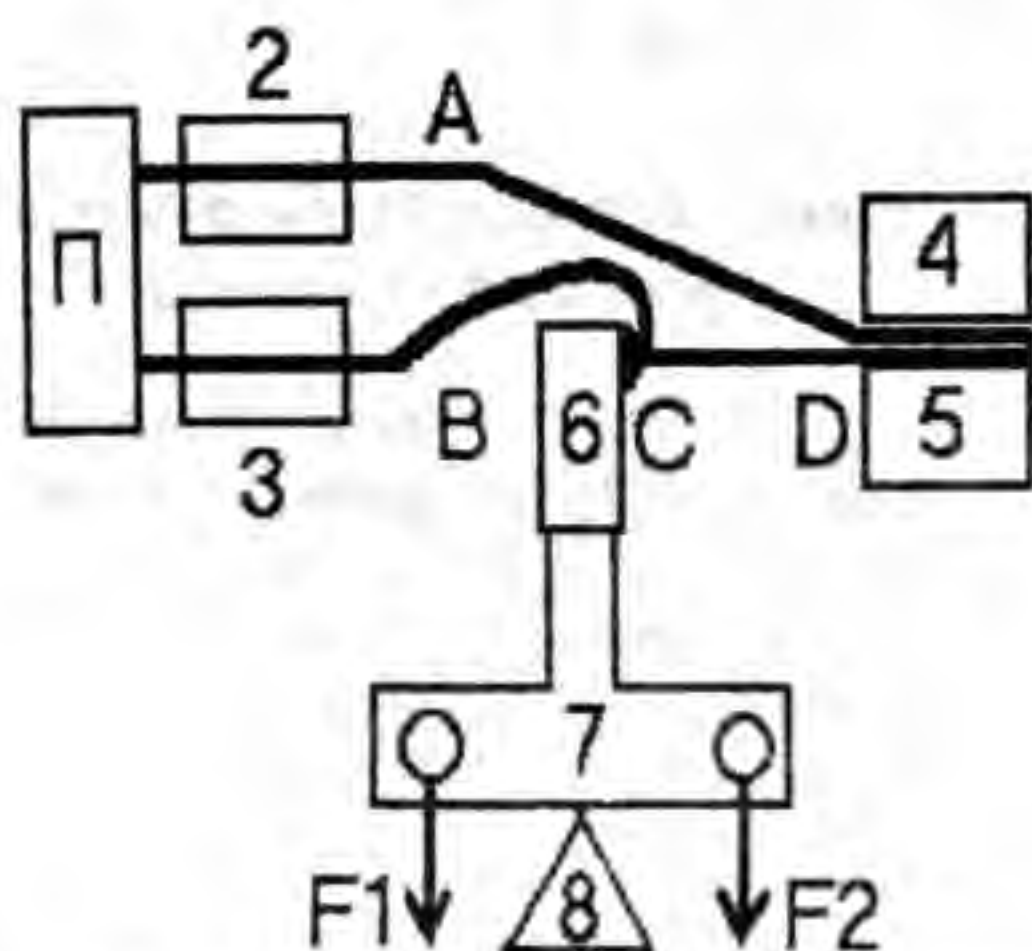


Рис.1. Схема навантаження зразка BCD та вимірювання термо-е.р.с. відносно еталону А. П – потенціометр; 2-5 – клемми; 6 – п'єзовібратор; 7 – коромисло на призмі 8.

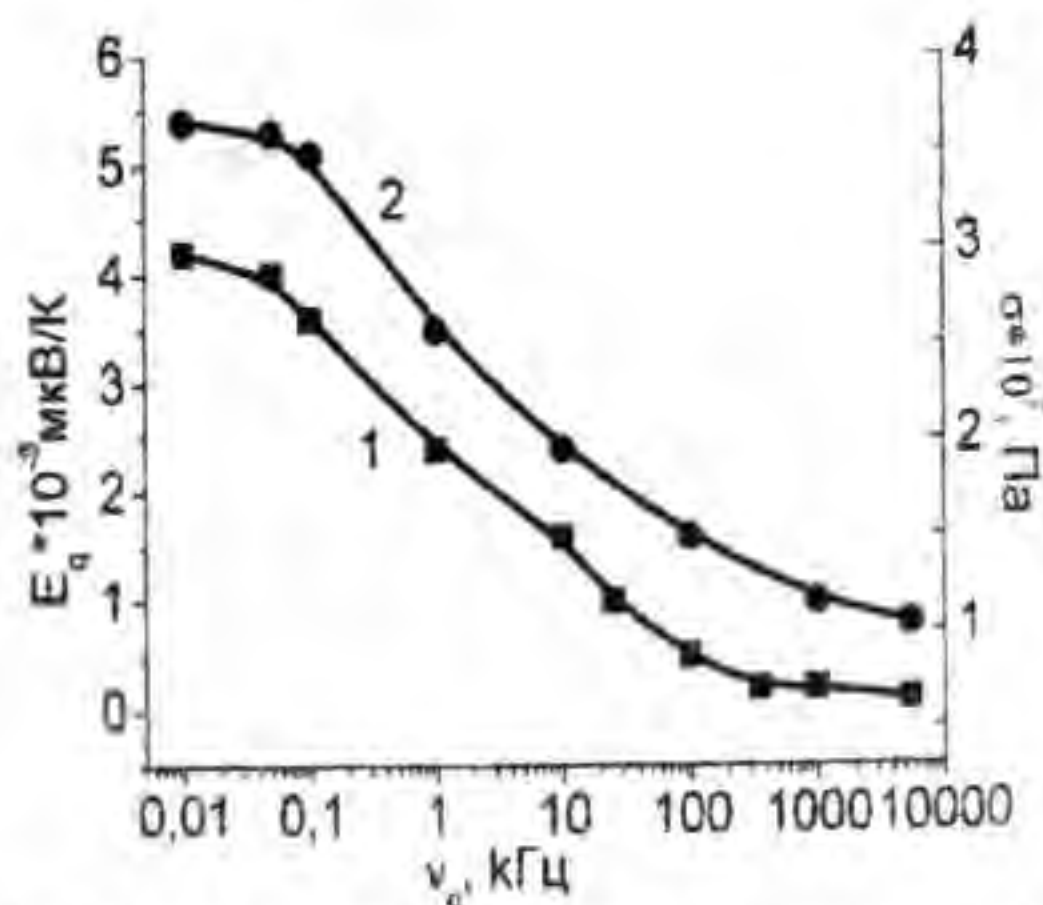


Рис.2. Залежність п'єзотермо-е.р.с. E_q міді від частоти ν навантаження стискання – розтяг (1) та зміна амплітуди напруг σ при зміні частоти ν (крива 2).

коромисло 7 силою F_1 , можна міняти натяг ділянки CD, настраюючи її в резонанс до п'єзовібратора 6 в діапазоні 100 – 10000 Гц. Змінюючи силу F_2 , механічно, можна змінювати навантаження стискання ділянки CD при частотах до 100 Гц.

В роботі використані метали чистотою 99,99 – 99,97. Еталон завжди був у відпаленому стані і мав той же хімічний склад, що і зразок.

Експериментальні результати та їх обговорення

Термо-е.р.с. металів, як відомо [5, 6], виникає внаслідок дифузії електронів (чи дірок) з розігрітої ділянки зразка в холодну, а також внаслідок розсіяння електронів на фононах. Фонони можна збудити і штучно, наприклад, з допомогою п'єзовібратора. За рахунок цього повинна виникнути додаткова термо-е.р.с. E_q . Максимум E_q , що виникає в металах при взаємодії теплових фононів з електронами, спостерігається [7] в інтервалі температур $(0,1 \div 0,3) \vartheta$, де ϑ – температура Дебая, причому

$$E_q = vT^3, \quad T \ll \vartheta; \quad (1)$$

$$E_q = BT^{-1}, \quad T \geq \vartheta, \quad (2)$$

де B і v – сталі.

В алюмінії при $T=700\text{K}$ ($\vartheta=215\text{K}$) $E_q \sim 0,2$ мкВ/К при загальній термо-е.р.с. $2,4$ мкВ/К [7]. В міді $\vartheta=315\text{K}$, тому слід чекати виникнення додаткової E_q за рахунок дії фононів, збуджених п'єзовібратором („штучні“ фонони) при більшій, ніж в алюмінію температурі.

На рис. 2 показана частотна залежність приросту E_q термо-е.р.с. в міді при дії на ділянку CD (рис. 1) термopари пружних напруг розтяг – стиск. Проте E_q не можна вважати як такою, що виникає за рахунок захоплення електронів штучними фононами, виходячи з наступних міркувань.

Середня енергія штучних фононів $h\nu \sim kT_s$, де $h=6,6 \cdot 10^{-34}$ Дж*с, $k=1,4 \cdot 10^{-23}$ Дж/К, T_s – ефективна температура, яку можна приписати штучним фононам. При $\nu=10^7$ Гц $T_s \sim 5 \cdot 10^{-3}$ К. Фононе захоплення в алюмінію, наприклад, максимальне при $21 - 66$ К [7]. Отже, справедлива формула (1). Оскільки T_s наростає при зростанні ν , то мусить наростати і E_q . Експериментально спостерігаємо протилежне (крива 1, рис. 2).

Для міді максимальне E_q реалізується при $32 - 92$ К. Частота штучних фононів, що відповідають тепловим фононам, повинна бути $\nu \geq 30 \cdot 1,4 \cdot 10^{-23} / 6,6 \cdot 10^{-34} = 6,4 \cdot 10^{11}$ Гц. Ми шукали появу E_q в діапазоні

$\nu=10 \div 10^7$ Гц, сподіваючись, що „недостачу“ частоти можна компенсувати великою амплітудою $\sigma=[1 \div 3] \cdot 10^7$ Па, яка в $30 - 100$ разів перевершує амплітуди, що виникають в нанооб'ємах зразка при теплових коливаннях в околі температур Дебая.

Окрім вище сказаного, є ще деякі міркування, згідно яких E_q не можна вважати як такою, що обумовлена штучними фононами. Так, на ділянці CD (рис. 1) теплові фонони дифундують справа наліво і при цьому термо-е.р.с. мідного зразка $E=0$ відносно мідного еталона. Тому ми повинні були б

вимірювати $E_q < 0$, бо штучні фонони вібратор б посиляє у напрямку від С до D. На експерименті маємо $E_q > 0$. При $\Delta T=0$ $E_q=0$, і вона повинна залишатись незмінною, коли $\Delta T \rightarrow 0$, адже зобумовлена, (згідно припущення) не градієнтом температур, а штучними фононами.

На рис. 3 наведено результати досліджень E_q при частотах $\nu=20 - 100$ МГц. Штучні фонони такої великої частоти збуджували кварцевими

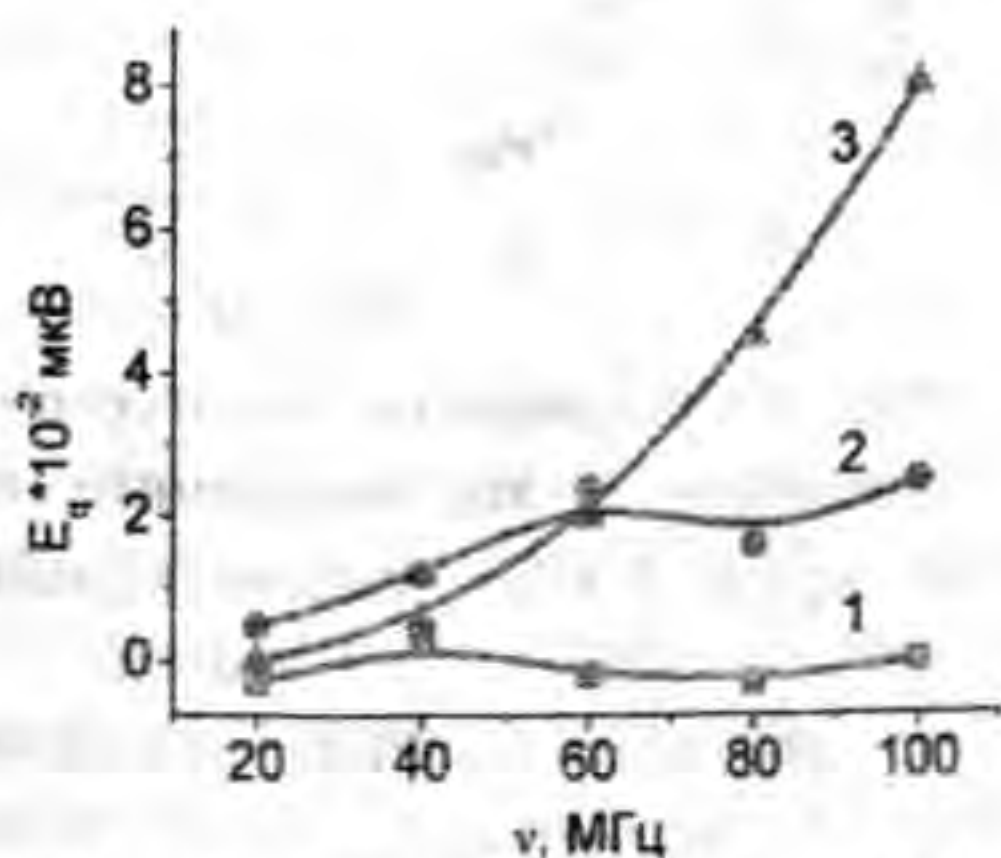


Рис.3. Залежність термо- е.р.с. E_q , індукованої штучними фононами, від частоти ν . 1 – Cu, 2 і 3 – Cu, прокалена на повітрі при 473-493 К протягом 1 та 3 годин відповідно.

вібраторами. Ділянка CD зразка (рис. 1) була виготовлена з мідної фольги товщиною 2 мкм, шириною 3 мм, довжиною 15 мм. Така мала товщина потрібна була у зв'язку з тим, що вібратори на великих частотах мають малі маси кристалів. Щоб штучні фонони мали велику частоту, необхідно мати масу зразка в 20 – 100 разів меншу за масу кристалу. Вимірювання E_q здійснено при $\Delta T \sim 0$. На щойно виготовленій мідній фользі $E_q \sim 0$ (крива 1). Після окислення на повітрі при $T = 473 - 493\text{K}$ $E_q \neq 0$. Як і очікувалось, вона наростає з частотою ν , бо $kT_s \sim h\nu$, отже, рівняння (1) можна переписати у вигляді

$$E_q = b \left(\frac{h\nu}{k} \right)^3. \quad (3)$$

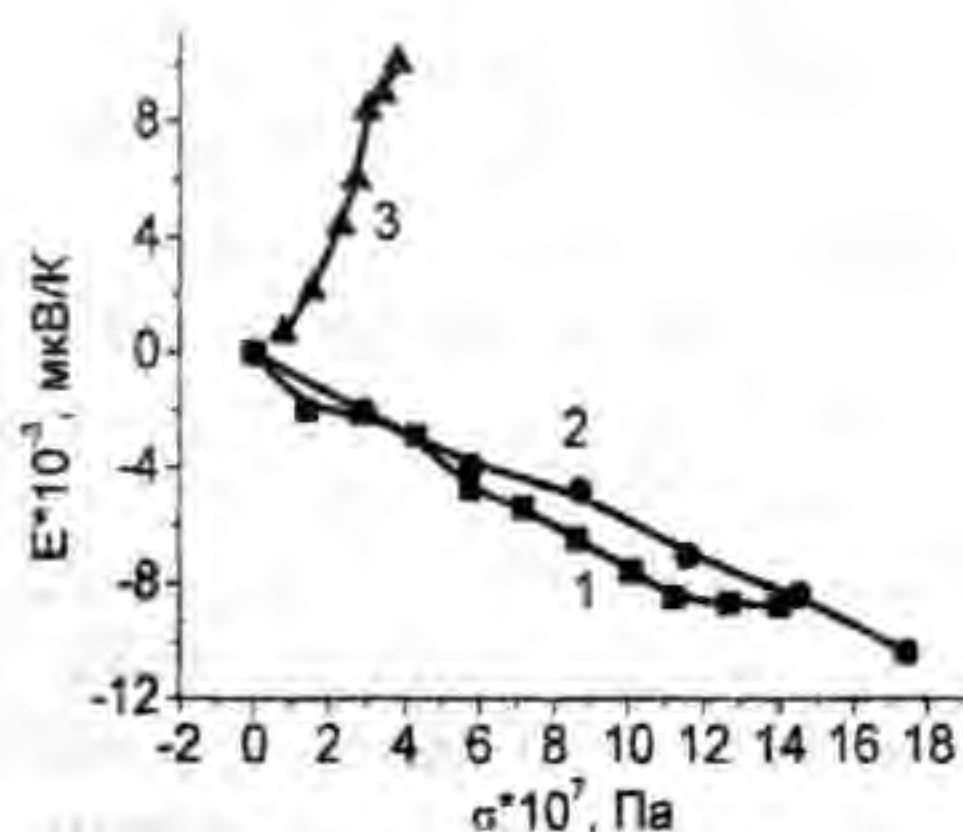


Рис. 4. Залежність п'єзотермо-е.р.с. E міді від механічних напруг σ . криві 1 – 2 - розтяг відпаленого зразка при 400°C , або продеформованого холодним вальцюванням на 50%, відповідно; 3 – одноосне стискання.

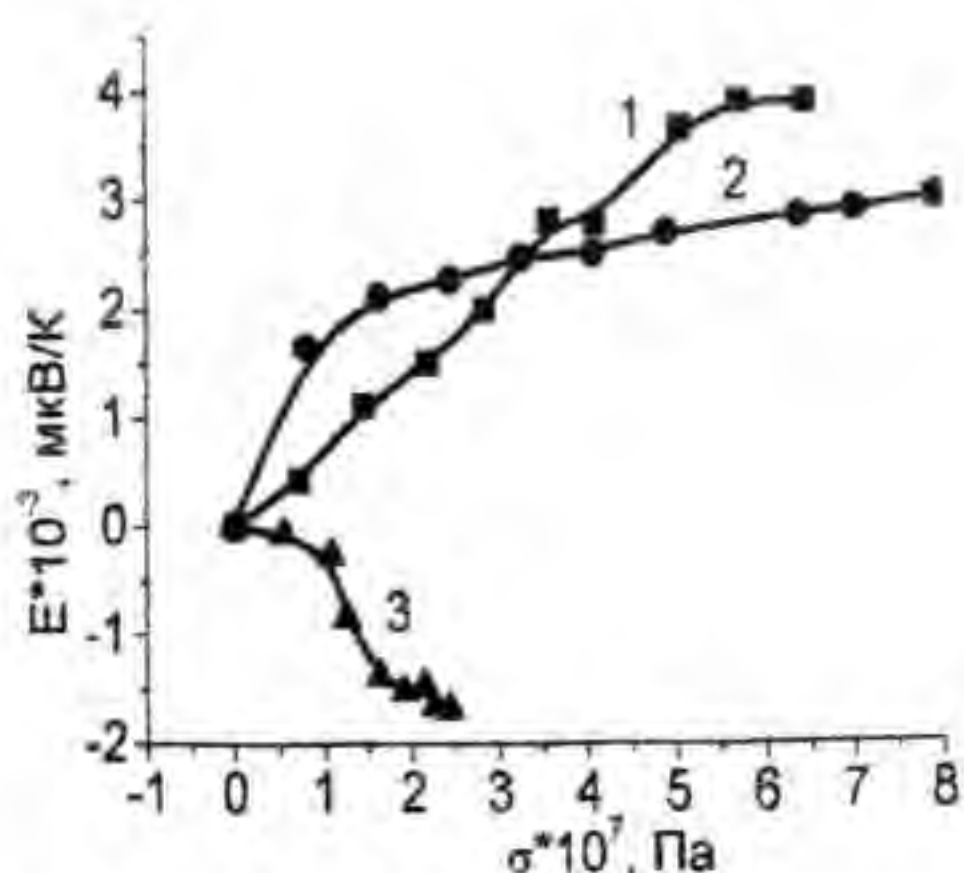


Рис. 5. Залежність п'єзотермо-е.р.с. алюмінію E від механічних напруг σ . криві 1 і 2 – розтяг відпаленого при 400°C зразка, або продеформованого вальцюванням на 50%, відповідно; 3 – одноосне стискання.

Причиною появи E_q на окисленій мідній фользі є наявність окалини, що складається на 75% з Cu_2O та на 25% з CuO [8], а термо-е.р.с. оксидів міді становить $1000\text{ мВ}\cdot\text{К}^{-1}$ та $-696\text{ мВ}\cdot\text{К}^{-1}$ відносно платини [9], тоді як чистої міді – лише $7,6\text{ мВ}\cdot\text{К}^{-1}$. Оскільки в окаліні така велика термо-е.р.с., то в неї велика і E_q , яку нам і вдалось виміряти.

Крива 1 рис. 2 корелює з кривою 2. Тому E_q може бути обумовлена пружними деформаціями типу стиск – розтяг, що виникають на ділянці CD (рис. 1) при прикладанні до неї механічних напруг. Для уточнення причини виникнення E_q (рис. 2) нами були здійснені дослідження впливу на

п'єзотермо-е.р.с. однознакових напруг Результати наведені на рис. 4 – 5. Головні висновки наступні.

1. П'єзотермо-е.р.с. E міді та алюмінію при розтягові зразка протилежна по знаку E при його стисканні.
2. При напругах σ , що значно перевершують границю пружності, E приблизно лінійно залежить від σ , а саме: для міді $E_p = -0,76 \cdot 10^{-16} \sigma$ (розтягування), $E_c = 3,5 \cdot 10^{-16} \sigma$ (стискання); для алюмінію $E_p = 0,7 \cdot 10^{-16} \sigma$, а $E_c = -1,1 \cdot 10^{-16} \sigma$.
3. Після нагартування зразків холодним вальцюванням до деформацій в 50% зростає область σ , де виконується лінійна залежність $E = \alpha \sigma$. Раніше спостерігали лінійні залежності $E_p = \alpha \sigma$ лише при розтягові в області пружності [2 - 3]. Пояснювали їх особливостями електронної будови металів. Нами вперше досліджено $E_c = \beta \sigma$ при одноосному стисканні та при високочастотних знакозмінних навантаженнях в пружній області. Якби крутизни $E_p = \alpha \sigma$ і $E_c = \beta \sigma$ були однаковими ($\alpha = \beta$), то E_q (рис. 2) була б нульовою. Оскільки для міді, наприклад, $|\beta| \sim 4,6 |\alpha|$, то і спостерігаємо (рис. 2) при $\nu = (10 \div 100)$ Гц $E_q \sim 3,5$. В потенціометрі нуль-індикатором є гальванометр. Він не може коливатись на частоті $\nu > 3 - 5$ Гц і працює при $\nu > 10$ Гц як балістичний, реагуючи на різницю $E_c - E_p$. При $\sigma \sim 3 \cdot 10^7$ Па $E_c = 8 \cdot 10^{-9}$ В/К, а $E_p = -2 \cdot 10^{-9}$ В/К (рис. 4). Різниця $E_c - E_p = 8 \cdot 10^{-9}$ В/К. Експериментально при $\nu < 10$ Гц (рис. 2) $E_c - E_p > E_q = 4 \cdot 10^{-9}$ В/К, бо E_q зменшилась за рахунок балістичного ефекту гальванометра. При $\nu > 100$ Гц E_q спадає зі зростанням ν завдяки зменшенню (по технічним причинам) σ .

На закінчення необхідно пояснити, бодай якісно, чому E_c протилежна по знаку E_p . В пружно розтягнутому зразку змінюються всі характеристики кристалу: параметр кристалічної ґратки, сила зв'язку між атомами, швидкість звуку, енергія Фермі, кількість вільних електронів і т. і. В одноосно стисненому зразку ці зміни протилежні по знаку змінам у розтягнутому. Оскільки термо-е.р.с. металів виникає внаслідок електрон – фононної взаємодії та дифузії електронів з гарячого кінця зразка в холодний, вона повинна змінювати свій знак при переході зразка з пружнорозтягнутого стану в одноосно стиснений. Щоб пояснити, чому $|E_p| < |E_c|$, необхідно здійснити відповідні теоретичні розрахунки.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Герцрикен С.Д., Новиков Н.Н., Копань В.С.. О природе термо-э.д.с., возникающей в результате деформации металла// УФЖ – 1959. – Т. 4, №3. – С. 293 - 299.

2. Лухвич А.А.. Влияние дефектов на электрические свойства металлов. Минск. – 1976. – С. 104.
3. Лухвич А.А., Каролик А.С., Шарандо В.И. Структурная зависимость термоэлектрических свойств и неразрушающий контроль. Минск. – 1990. – С. 192.
4. Борисенко В.Д., Копань В.С., Бессонов В.Б.. Термоэлектрическое устройство для контроля неоднородности материалов. А.С.СССР №750357. Бюллетень изобретений. – 1980, №27.
5. Бете Г., Зоммерфельд А.. Электронная теория металлов. М. ОНТИ. - 1938. – С. 340.
6. Зейтц Ф.. Современная теория твердого тела. М. ИИЛ. – 1957. – С. 740.
7. Блатт Ф. Дж., Шредер П.А., Фойлз К.Л., Грейг Д.. Термоэлектродвижущая сила металлов. М. Металлургия. – 1980. – С. 248.
8. Техническая энциклопедия. М. – 1930, 12. – С. 763.
9. Температурные измерения. Довідник, Київ. «Наукова думка». - 1989. - С 704.

Надійшла до редколегії 10 02 2005.

УДК 535.36+535.337

Кошеленко В.П., Охріменко Б.А.,
Макаренко О.В.

**Комбінаційні частоти та ефект
Доплера при розсіянні хвилі
шорсткою поверхнею, що
рухається**

Показано, що при розсіянні монохроматичної хвилі шорсткою поверхнею, що рухається спектр розсіяних хвиль в дальній зоні містить дві лінії, які відповідають когерентно та дифузно розсіяним компонентам. Останні, в загальному випадку центровані на різних частотах.

Ключові слова: ефект Доплера, шорстка поверхня, дифракція.

V.P. Koshelenko, B.A. Okhrimenko,
O.V. Makarenko

**Combinative frequencies and
Doppler effect under scattering of
waves by moving rough surface**

It is shown that under scattering of monochromatic wave by a moving rough surface the spectrum of scattered waves in a distant zone consists of the two lines, corresponding to coherent and diffusively scattered components. The latter in the general case are centered on different frequencies.

Key words: Doppler effect, rough surface, diffraction.

E-mail: altakar@univ.kiev.ua

Відомо, що зміна в часі оптичної довжини шляху викликає фазову модуляцію хвилі та веде до зміни її спектра. Зміна фази за законом $\varphi(t) = \varphi_0 + Vt$ відповідає ефекту Доплера. Якщо плоска межа поділу двох середовищ рухається з постійною швидкістю, то спектральна густина амплітуди плоскої хвилі, що падає $E_p(\omega)$ та хвилі $E_r(\omega)$, яка дзеркально відбита від межі, пов'язані простим співвідношенням [1]

$$E_r(\omega) = \bar{r} E_p(\psi \cdot \omega) \quad (1)$$

Тут $\psi = 1 + 2(v/c) \cos \alpha \cdot \cos \varphi_1$, α – кут між внутрішньою нормаллю $\vec{n}$ до межі відбивного середовища та швидкістю $\vec{v}$, φ_1 – кут падіння (Рис.1), $\bar{r}$ – коефіцієнт відбивання.

З (1) випливає, що дзеркально відбиваюча поверхня, яка рухається у власній площині $\alpha = \pi/2$ не може бути причиною зміни частоти. В той же час, шорстка поверхня, здійснюючи фазову модуляцію, змінює як енергетичний коефіцієнт відбивання, так і спектр.

Незважаючи на численну літературу [2,4-7,10] присвячену питанням взаємодії хвиль з статистично нерівною поверхнею, доплерівському зсуву частоти при розсіянні хвилі шорсткою поверхнею, яка рухається поступально, приділено мало уваги. Як нам відомо, питання про зв'язок доплерівського зсуву з розмірами освітленої області, радіусом кореляції шорсткостей, анізотропією кореляційної функції нерівностей, швидкістю

$\bar{v}_r$ руху освітленої області та швидкістю $\bar{v}_z$ руху поверхні в освітленій області не розглядались. Відповідь на ці питання є метою нашої статті.

Нехай в полі монохроматичної хвилі

$$\bar{E}_p(t) = \bar{e} E_0 \exp \left[i \left(\bar{s}_p \bar{R} \omega / c - \omega t \right) \right]$$

рухається зі швидкістю $\bar{v}$ шорстка площина $X'O'Y'$. З останньою пов'яжемо систему координат K' . Шорсткості задамо відхиленням $\xi(x', y')$ поверхні від площини $X'O'Y'$. Якщо $\bar{r}$ координата точки на поверхні $\xi(x', y')$ в системі K' , то в нерухомій системі K , яка пов'язана з спостерігачем, та ж точка задається вектором

$$\bar{R}(t) = \bar{R}_0 + \bar{r}' + \bar{v}t$$

Тут $\bar{R}_0$ – вектор, що задає положення центру освітленої області в нерухомій системі координат.

Нехай ρ та r_0 – середній радіус кривини та радіус кореляції нерівностей в площині $X'O'Y'$. Тоді у випадку плавних $(\omega\rho/c)^{1/3} \gg 1$ та крупномасштабних $\omega r_0/c \gg 1$ нерівностей поле відбитої хвилі на поверхні $\xi(x', y')$ може бути знайдено [2] в припущенні, що френелівські формули для коефіцієнта відбивання локально справджуються. В дальній зоні в лабораторній системі координат це поле згідно теореми Кірхгофа може бути представлене інтегралом:

$$\bar{E}_R = \bar{U}(\bar{s}_p, \bar{s}_R, \bar{e}) E_0 \exp \left[-i\omega(1 - \bar{v}\bar{s}_0/c)t \right] \times \int f(\bar{r}' + \bar{v}_z t) \exp(i\bar{s}\bar{r}') d^2\bar{r}' \quad (2)$$

де $\bar{s}_0 = \bar{s}_p - \bar{s}_R$, $\bar{s} = \omega\bar{s}_0/c$, $\bar{s}_p$ та $\bar{s}_R$ – одиничні вектори в напрямку хвилі, яка падає та яка розсіюється відповідно.

$$\bar{r}' = i x' + j y' + k \xi(x', y'); \bar{r}'_z = i x' + j y' = \bar{r}' - k \xi(x', y') = \bar{r}' - k \xi(\bar{r}'_z)$$

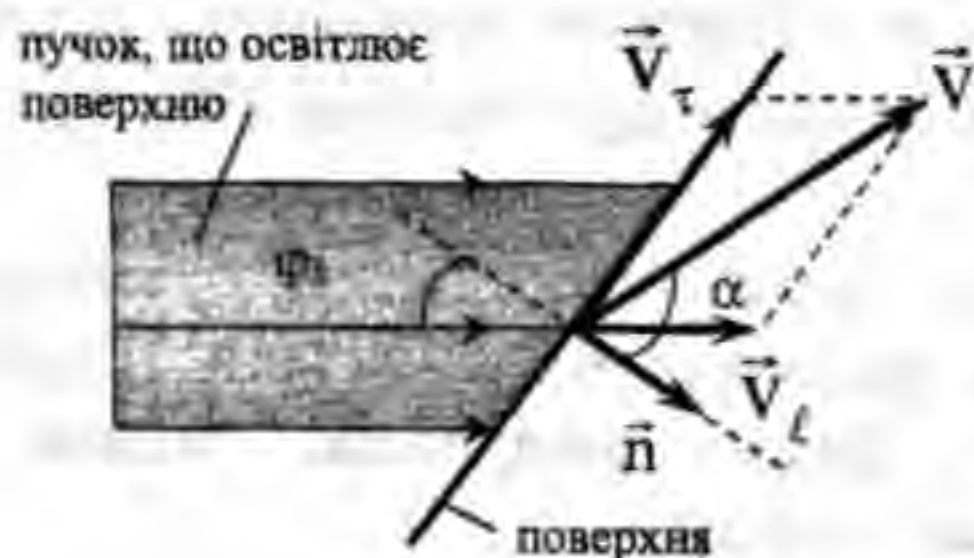


Рис.1

Швидкість $\bar{v}$ представлена сумою двох компонент $\bar{v}_r$ и $\bar{v}_z$ (Рис.1). $\bar{v}_r$ – швидкість руху поверхні відносно освітленої області. Останню надалі називатимемо зіницею. $\bar{v}_z$ – швидкість зіниці відносно джерела. При цьому $\bar{v}_r$ паралельна площині $X'O'Y'$, $\bar{v}$ колінеарна $\bar{s}_p$, а джерело та приймач вважаються взаємно нерухомими. $f(\bar{r}_z)$ – функція зіниці,

яка описує залежність амплітуди хвилі, що падає від координати в площині $X'O'Y'$. $\bar{U}(\bar{s}_p, \bar{s}_R, \bar{e})$ – фактор, який плавно залежить від $\bar{s}_p$, $\bar{s}_R$ та поляризації $\bar{e}$ хвилі, яка падає [2-6]. В $\bar{U}$ входить амплітудний коефіцієнт відбивання, який при фіксованих $\bar{s}_p$, $\bar{s}_R$ можна вважати сталим. Останнє виправдано,

оскільки основний внесок в поле, що розсіяне в напрямку $\vec{s}_R$, дадуть квазіплоскі ділянки $\xi(x', y')$ навколо точок, де виконується рівність кутів падіння та відбивання, а такі ділянки однаковим образом орієнтовані до $\vec{s}_R$. Це дозволяє знехтувати уширенням спектра внаслідок амплітудної модуляції розсіяної хвилі і робить $\bar{U}$ - фактор несуттєвим в подальшому розгляді.

Заміною $\vec{r}_\tau = \vec{r}'_\tau + \vec{v}_\tau t$ представимо (2) у вигляді

$$\vec{E}_R = \bar{U} E_0 \exp[-i\omega(1 - \vec{v}_\tau \vec{s}_0/c)t] \times \int f(\vec{r}_\tau) \exp(i\vec{s} [\vec{r}_\tau + \vec{k} \xi(\vec{r}_\tau - \vec{v}_\tau t)]) d^2 \vec{r}_\tau \quad (3)$$

і розглянемо частинні випадки.

СИНУСОЇДАЛЬНА ПОВЕРХНЯ

Нехай $\xi(x, y) = \xi_0 \sin qx$, $\vec{v}_\tau = \{v_x, 0\}$. Тоді

$$\begin{aligned} \vec{E}_R = \bar{U} E_0 \exp\left[-i\omega\left(1 - \frac{\vec{v}_\tau \vec{s}_0}{c}\right)t\right] \times & \left\{ J_0(A) Z(\vec{s}_\tau) + \right. \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} J_{2n}(A) \left[Z(\vec{B}_{2n}) \exp(-i\omega_{2n}t) + Z(\vec{B}'_{2n}) \exp(i\omega_{2n}t) \right] + \\ & \left. + \sum_{n=0}^{\infty} J_{2n+1}(A) \left[Z(\vec{B}'_{2n+1}) \exp(i\omega_{2n+1}t) + Z(\vec{B}_{2n+1}) \exp(-i\omega_{2n+1}t) \right] \right\} \end{aligned} \quad (4)$$

Тут $J_l(x)$ - функція Беселя першого роду,

$$Z(\vec{\eta}) = \int f(\vec{r}_\tau) \exp(-i\vec{\eta} \vec{r}_\tau) d^2 \vec{r}_\tau; A = \vec{s} \vec{k} \xi_0 = s_k \xi_0; \vec{s}_\tau = \{s_x, s_y\}$$

$$\omega_p = v_x p q, \vec{B}_p = \{s_x + p q, s_y\}; \vec{B}'_p = \{s_x - p q, s_y\}$$

Видно, що синусоїдальна поверхня, яка рухається, здійснює фазову модуляцію хвилі, що падає і породжує в розсіяній хвилі комбінаційні частоти. При цьому роль $\vec{v}_\tau$ та $\vec{v}_\tau$ різні: $\vec{v}_\tau$ (швидкість руху зіниці) веде до доплерівського зсуву, $\vec{v}_\tau$ (швидкість руху поверхні відносно зіниці) породжує рівновіддалені від зсунутої частоти $\omega(1 - \vec{v}_\tau \vec{s}_0/c)$ стоксові $(+p'q v_x)$ та антистоксові $(-p q v_x)$ компоненти (p, p' - цілі числа). З них найбільш інтенсивними будуть ті, для яких $s_x - p q = 0$ тобто, кожній компоненті відповідає свій напрямок найбільшої спектральної яскравості.

ДЗЕРКАЛЬНА ПОВЕРХНЯ З ШОРСТКОЮ ДІЛЯНКОЮ

Не конкретизуючи вигляд $\xi(x', y')$, вимагатимемо лише виконання умов: $\xi(x', y') \neq 0$ в області, малій в порівнянні з розмірами зіниці області δS_0 в околі точки з координатою $\vec{r}'_{\tau 0} = \{x'_0, y'_0\}$ та $\xi(x', y') \equiv 0$ поза нею. При цьому

$$\vec{E}_R = \bar{U} E_0 Z(\vec{s}_\tau) \exp[-i\omega(1 - \vec{v}_\tau \vec{s} / c)t] + \bar{U}_\xi E_0 f(x'_0 + v_x t, y'_0) \theta(\vec{s}_\tau) \exp[-i\omega(1 - \vec{v}_\tau \vec{s}_0/c)t] \quad (5)$$

тут $\theta(\vec{s}_\tau) = \exp(i\vec{s}_\tau \vec{r}'_{\tau 0}) \int \left[\exp(i\vec{s}_\tau \xi(\vec{r}_\tau)) - 1 \right] \exp(i\vec{s}_\tau \vec{r}'_\tau) d^2 \vec{r}_\tau$

Як впливає з (5) доплерівський зсув дзеркально відбитої компоненти (перший доданок) обумовлений швидкістю руху зіниці $\bar{v}_t$, в той час як за частотний зсув хвилі, яка дифрагувала на шорсткостях (другий доданок), відповідальна повна швидкість поверхні $\bar{v}$.

Звернемо увагу на те, що елементи дзеркальної поверхні перевипромінюють з частотою $\omega(1 - \bar{v}\bar{s}_0/c)$, а сума полів від всіх елементів, тобто поле, яке відбите всім дзеркалом, змінюється з частотою $\omega(1 - \bar{v}_t\bar{s}_0/c)$. Цю обставину розглянемо більш детально на прикладі одновимірного дзеркала. Тоді

$$E_R \sim \exp[-i\omega(1 - \bar{v}\bar{s}_0/c)t] \sum A_i \exp(ix'_i s_x) \quad (6)$$

Тут x'_i те ж, що і x'_0 в (5) – координата елементу поверхні в системі координат, яка пов'язана з рухомим дзеркалом. Сумування ведеться по всім елементам, які потрапили в поле зіниці, тобто по елементам, для яких $-a - \bar{v}_t t < x'_i < a - \bar{v}_t t$, оскільки покладемо $f(x'_i) = 1$ при $|x'_i| < a$ та $f(x'_i) = 0$ при $|x'_i| > a$. Звідси видно, що сума в (6), взагалі кажучи, є функцією часу. Поклавши $A_i = A = \text{const}$, ввівши густину елементів на одиницю довжини $\gamma = \text{const}$ при $\gamma s_x^{-1} \gg 1$ від сумування можемо перейти до інтегрування. В результаті

$$E_R \sim A\gamma \exp\left[-i\omega\left(1 - \frac{\bar{v}\bar{s}_0}{c}\right)t\right] \int_{-a-\bar{v}_t t}^{a-\bar{v}_t t} \exp(ix'_i s_x) dx' = A\gamma \cdot 2a \frac{\sin s_x a}{s_x a} \exp\left[-i\omega\left(1 - \frac{\bar{v}_t \bar{s}_0}{c}\right)t\right] \quad (7)$$

Якщо розміри дзеркальної поверхні менші за зіниці області, то сума в (6) не буде залежати від часу, поки дзеркало рухається в полі зіниці, та

$$E_R \sim \exp[-i\omega(1 - \bar{v}\bar{s}_0/c)t]$$

Варто підкреслити, що лише при $A\gamma = \text{const}$ та $\gamma s_x^{-1} \gg 1$ (останнє є умовою оптичної нерозділеності структури) реалізується (7). Тоді біг початкової фази, з якою починають перевипромінювати елементи, потрапивши в поле зіниці, компенсує зсув фази, що виникає за рахунок ефекта Доплера, який викликаний компонентою $\bar{v}_t$.

ШОРСТКА ПОВЕРХНЯ

Розглянемо спектральні характеристики хвилі, що розсіюється нерівностями, які задані випадковою функцією $\xi(x', y')$. Про спектр хвилі, що розсіюється поверхнею, яка рухається судять, як правило [9], за спектром биття $S(t) = \text{Re} E_p(t) E_R^*(t)$ між хвилею розсіяною E_R та падаючою E_p на поверхню. $S(t)$, являючись функціоналом від $\xi(\bar{r}_t - \bar{v}_t t)$ також буде випадковою функцією часу. При цьому спектр $G(\nu)$ потужності сигналу $S(t)$ задається Фур'є-образом від усередненої за часом [8] (в загальному випадку) кореляційної функції $M(\tau)$

$$G(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} M(\tau) \exp(-i\nu\tau) d\tau; \quad M(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \langle S(t+\tau) S^*(t) \rangle dt$$

Згідно (3)

$$M(\tau) = (\mathfrak{I}_0^2 / 2) \exp(i\bar{\nu}_t \bar{s} \tau) \iint f(\bar{\rho} + \bar{r}_t) f(\bar{r}_t) \exp(i\bar{s} \bar{\rho}) \langle \exp(i\bar{s} \bar{k} (\xi' - \xi)) \rangle d^2 \bar{\rho} d^2 \bar{r}_t + \text{к.с.}$$

Тут

$$\xi' = \xi(\bar{r}'_t - \bar{\nu}_t, t); \quad \xi = \xi(\bar{r}_t - \bar{\nu}_t, t); \quad \bar{\rho} = \bar{r}' - \bar{r}; \quad \tau = t' - t$$

$$\langle \exp(i s_k (\xi' - \xi)) \rangle = \iint \exp(i s_k (\xi' - \xi)) w_{2\xi}(\xi', \xi) d\xi' d\xi$$

$w_{2\xi}(\xi', \xi)$ – двомірна функція розподілу випадкової величини ξ

$\mathfrak{I}_0$ – несуттєвий для нас множник, який пропорційний інтенсивності хвилі, що падає.

Введемо $\varphi(\xi) = \exp(i s_k \xi) - \langle \exp(i s_k \xi) \rangle$. Тоді

$$\langle \exp[i s_k (\xi' - \xi)] \rangle = \langle \exp(i s_k \xi) \rangle^2 + B_\varphi(\bar{\rho}')$$

$$B_\varphi = \langle \varphi(\xi') \varphi(\xi) \rangle = B_\varphi(\rho_x - \nu_x \tau, \rho_y - \nu_y \tau)$$

так як припускається однорідність та стаціонарність функції ξ . Після чого

$$G(\nu) = \pi \mathfrak{I}_0^2 \langle \exp(i s_k \xi) \rangle^2 |Z(\bar{s}_t)|^2 [\delta(\bar{\nu}_t \bar{s} - \nu) + \delta(\bar{\nu}_t \bar{s} + \nu)] + \\ + \frac{\mathfrak{I}_0^2}{2\nu_t} \int \left[\left| Z\left(\frac{\bar{\nu}_t \bar{s} - \nu}{\nu_t}, \eta_y \right) \right|^2 g\left(\frac{\bar{\nu}_t \bar{s} - \nu}{\nu_t}, \eta_y \right) + \left| Z\left(\frac{\bar{\nu}_t \bar{s} + \nu}{\nu_t}, \eta_y \right) \right|^2 g\left(\frac{\bar{\nu}_t \bar{s} + \nu}{\nu_t}, \eta_y \right) \right] d\eta_y$$

де $g(\bar{\eta}) = \int B_\varphi(\bar{\rho}) \exp(-i\bar{\eta} \bar{\rho}) d^2 \bar{\rho}$, $\bar{\nu}_t = \{\nu_x, 0\}$, $Z(\bar{\eta})$ як і раніше Фур'є-образ освітленої області; $\delta(x)$ – узагальнена функція Дірака.

У випадку нормального двомірного розподілу випадкової функції ξ

$$w_{2\xi} = \frac{1}{2\pi\sigma^2 \sqrt{1-K^2}} \exp\left[-\frac{\xi^2 + \xi'^2 - 2K\xi\xi'}{2\sigma^2(1-K^2)}\right]$$

Тоді $\langle \exp(i s_k \xi) \rangle = \exp(-s_k^2 \sigma^2)$; $B_\varphi = \exp(-s_k^2 \sigma^2) [\exp(s_k^2 \sigma^2 K) - 1]$

Тут $s_k = \bar{s} \bar{k}$, $\sigma^2 = \overline{\xi^2}$, $K(\rho_x - \nu_x \tau, \rho_y) = \frac{\langle \xi \xi' \rangle}{\sqrt{\overline{\xi^2} \overline{\xi'^2}}}$ – коефіцієнт кореляції.

Для достатньо різко спадаючої кореляційної функції $K(\rho)$ та зіниці,

яка задана у вигляді $f(\bar{r}_t) = \exp\left[-\left(\frac{r_x^2}{a^2} + \frac{r_y^2}{b^2}\right)\right]$ оцінка $G(\nu)$ методом перевалу дає

$$G(\nu) = A_d [G_d(-\nu) + G_d(+\nu)] + A_r [G_r(-\nu) + G_r(+\nu)] \quad (8)$$

$$A_d = \pi \mathfrak{I}_0^2 Q^2 \exp\left[-\left(s_k^2 \sigma^2 + \frac{s_x^2 a^2}{2} + \frac{s_y^2 b^2}{2}\right)\right]; \quad A_r = \pi \mathfrak{I}_0^2 Q_\xi^2 N T_0 [1 - \exp(-s_k^2 \sigma^2)]$$

$$G_r(\mp v) = \exp \left\{ - \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\bar{v}_t \bar{s} \mp v}{v_t} r_\xi \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\bar{v}_t \bar{s} \mp v}{v_t} a \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\bar{v}_t \bar{s} \mp v}{v_t} \varepsilon - s_y \right)^2 \frac{r_\xi^2 \mu^2 b^2}{r_\xi^2 \mu^2 + b^2} \right] \right\}$$

$$G_d(\mp v) = \delta(\bar{v}_t \bar{s} \mp v)$$

де

$$r_\xi^2 = \frac{[1 - \exp(-s_k^2 \sigma^2)] r_0^2}{s_k^2 \sigma^2}; \quad \varepsilon = \frac{K_{xy}}{K_{xx}}; \quad \frac{1}{\mu^2} = \left| \frac{K_{yy}}{K_{xx}} \right| - \varepsilon; \quad r_0^2 = \frac{1}{|K_{xx}|}$$

$$Q = \pi a b; \quad Q_\xi = \pi r_\xi^2 \mu; \quad N = \frac{Q}{Q_\xi}; \quad T_0 = \frac{Q}{v_t \sqrt{\pi \frac{b^2 + r_0^2 \mu^2}{2}}}; \quad K_{xy} = \frac{\partial^2 K}{\partial x \partial y}$$

Згідно (8) енергетичний спектр сигналу $S(t)$ складається з двох ліній: дискретної компоненти, що центрована на частоті $\bar{v}_t \bar{s}$ та неперервного спектру з максимумом на деякій частоті v_0 .

Інтенсивність дискретної компоненти пропорційна інтенсивності дзеркально відбитої (когерентної) хвилі, яка дифрагує в напрямку спостереження. Будучи пропорційною фактору $|Z(\bar{s}_t)|^2 \exp(-s_k^2 \sigma^2)$, вона різко спадає із збільшенням висоти нерівностей та відхилення від кута дзеркального відбивання.

Неперервний спектр обумовлений неперервністю спектру просторових частот шорсткостей. При цьому, незважаючи на те, що кожна хвиля комбінаційної частоти має свій напрямок розповсюдження (див. коментар до (4)) в будь-який заданий напрямок внаслідок дифракції на зіниці дають внесок хвилі всіх частот. Так, зіниця з фільтра просторових частот із смугою пропускання $\sim a^{-1}$ перетворюється в фільтр часових частот із смугою пропускання $\Delta v \sim v_t / a$. Дифракційний механізм уширення є єдиним, якщо плоска хвиля, що падає монохроматична. Спостереження ведеться в дальній зоні і неперервний спектр просторових частот широкий ($r_0^{-1} \gg a^{-1}$). При великому відхиленні від напрямку дзеркального відбиття ($\exp(-s_k^2 a^2) \ll r_0^2 a^{-2}$) спектральне положення максимуму в неперервному спектрі дається формулою

$$v_0 = \frac{\alpha_1 \bar{v}_t \bar{s} + \alpha_2 \bar{v} \bar{s} + \alpha_3 \left[\bar{v}_t \bar{s} \frac{\varepsilon}{v_t} - s_y \right]}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \frac{\varepsilon}{v_t}} \quad (9)$$

$$\text{де } \alpha_1 = \frac{r_\xi^2}{v_t^2}; \quad \alpha_2 = \frac{a^2}{v_t^2}; \quad \alpha_3 = \frac{\varepsilon}{v_t} \frac{b^2 r_\xi^2 \mu^2}{r_\xi^2 \mu^2 + b^2}$$

Таким чином, в загальному випадку v_0 визначається повною швидкістю $\bar{v}$ розсіюючої поверхні, швидкістю $\bar{v}_t$ руху зіниці в

лабораторній системі координат і параметрами (ε, μ) анізотропії коефіцієнта кореляції шорсткостей.

Якщо освітлена область (не поверхня!) нерухома ($\vec{v}_t = 0$) і кореляційна функція нерівностей ізотропна ($\varepsilon = 0$) з (8) випливає

$$r_{\xi}^2 = a^2 \frac{|\vec{v}_t \vec{s}| - v_0}{v_0} \quad (9)$$

Тобто, якщо a та $\vec{v}_t$ відомі, то за достатньо точними вимірами v_0 при двох різних $\vec{s}$ маємо принципову можливість оцінити радіус кореляції r_0 нерівностей та їх висоту $\sigma = \sqrt{\xi^2}$. В експерименті при цьому необхідно вимагати, щоб час когерентності τ_0 хвилі, що падає був набагато більшим за час прольоту a/v_t , точки поверхні через апертуру зіниці.

Література

1. Франкфурт У.И., Френк А.М. Оптика движущихся тел., М. "Наука", 1972., 212с.
2. Басс Ф.Г., Фукс И.М. Рассеяние волн на статически неровной поверхности., М. "Наука", 1972, 424с.
3. Басс Ф.Г., Вербицкий И.Л. О спектре волн, рассеянных неровной поверхностью. Известия вузов. Радиофизика, 1963., 6, №2, с.290-296.
4. Фрейндлих В.Д., Фукс И.М. Спектр сигнала, рассеянного колеблющейся поверхностью раздела. Известия вузов. Радиофизика, 1969., 12, №1, с.114-121.
5. Басс Ф.Г. К теории комбинационного рассеяния волн на неровной поверхности. Известия вузов. Радиофизика., 1961., 4, №1, с.58-66.
6. Калинин В.А., Меркулов В.В. К вопросу о рассеянии электромагнитных волн шероховатой поверхностью. Радиофизика и электроника. 1964., 9, №9, с.1578-1580.
7. Рыгов С.М., Кравцов Ю.А., Татарский В.И. Введение в статистическую радиофизику. ч.II. Случайные поля. М."Наука", 1978., с.463.
8. Левин Б.Р. Статистическая радиотехника., М."Сов. радио", 1974., 463с.
9. Василенко Ю.Г., Дубнищев Ю.Н., Коронкевич В.П., Соболев В.С., Столповский А.А., Уткин Е.Н. Лазерные доплеровские измерители скорости., М."Наука", 1975., 161с.
10. Исимару А. Распространение и рассеяние волн в случайнонеоднородных средах: В 2 т. -Пер. с англ. - М.: Мир, 1981. - Т.2: Многократное рассеяние, турбулентность, шероховатые поверхности и дистанционное зондирование. - 317с.

Надійшла до редакції 6.04.2005

УДК 519.9

Макара В.А., зав.кафедри фізики металів,
Стебленко Л.П., старший науковий співробітник,
Кольченко Ю.Л., аспірантка,
Науменко С.М., провідний інженер
Патран О.А., аспірантка,
Руденко О.В., старший науковий співробітник

Розподіл величини мікротвердості та магніто механічного ефекту по глибині зразків кремнію

На основі експериментальних даних по впливу постійного магнітного поля на мікротвердість монокристалічного кремнію встановлено немонотонний характер розподілу по глибині зразка магніто механічного ефекту.

Ключові слова: кремній, мікротвердість, магнітне поле, спин, домішки.

E-mail: yu_l_kolchenko@univ.kiev.ua

V. A. Makara, head of the physics of metals department,
L. P. Steblenko, senior research worker,
Yu. L. Kolchenko, post-graduate student,
S. M. Naumenko, principal engineer,
O.A. Patran, post-graduate student,
O.V. Rudenko, senior research worker

The depth distribution of microhardness and magnetomechanical effect in silicon crystals

The non-monotonic behavior of the depth distribution of magnetomechanical effect is established on the basis of experimental data according to effect of constant magnetic field on the microhardness of silicon crystals.

Key Words: silicon, microhardness, magnetic field, spin, impurities.

Останнім часом виявлений і активно обговорюється ряд ефектів впливу магнітного поля (МП) з індукцією $B \leq 1$ Тл на стан комплексів точкових дефектів в кристалах з різними типами міжатомного зв'язку. Такі магніточутливі комплекси (МЧК) виявлені в іонних [1, 2], іонно-ковалентних кристалах [3], в ковалентних кристалах Si і Ge [4], в структурах метал-оксид-напівпровідник [5] та ін.

Модифікація МЧК під дією МП впливає на багаточисельні структурно-чутливі макровластивості твердих тіл: механічні, оптичні, електричні [6, 7].

Знання механізму формування відбитку під дією індентора має велике значення не тільки для оцінки мікротвердості H , але і для розуміння тих фізичних процесів, які впливають на механічні властивості і які відбуваються при руйнуванні кристалу під впливом індентора. Не дивлячись на те, що питанню дослідження механічних властивостей кристалів присвячено достатня кількість робіт і досягнуті значні успіхи [6-16], на жаль, воно до цих пір не вирішене до кінця [6, 7]. Зокрема, не досягнуто чіткого уявлення про розподіл величини H по глибині зразка.

Даний розподіл, згідно уявленням, які існують в літературі [17, 18], може бути двояким: 1) H зменшується поступово до досягнення стаціонарного значення або 2) біля поверхні існує тонкий шар високої твердості, який впливає на значення H і при більш глибокому зануренні індентора.

Дана робота присвячена подальшому дослідженню в напрямку вивчення характеру розподілу мікротвердості по глибині зразка.

Метою роботи було встановити характер розподілу по глибині зразку Si як величини мікротвердості, так і величини відкритого нами [19] магніто механічного ефекту (ММЕ).

Експерименти проводились на бездислокаційних монокристалічних зразках Si р-типу провідності легованих бором, з питомим опором $\rho = 10 \text{ Ом} \cdot \text{см}$. Зразки вирізались по поверхневим площинам $\{111\}$. Вимірювання мікротвердості здійснювалось на мікротвердомірі типу ПМТ-3. Мікротвердість визначалась при навантаженнях на індентор (136-градусна алмазна піраміда з квадратною основою) $P=20\text{г}, 30\text{г}, 40\text{г}, 50\text{г}, 60\text{г}, 70\text{г}, 80\text{г}, 100\text{г}, 110\text{г}$. Відносна експериментальна похибка вимірювань мікротвердості складала $\sim 5\%$. Для магнітної обробки (МО) зразків кремнію використовувалось постійне магнітне поле з індукцією $B \approx 0,15 \text{ Тл}$. Вимірювання H здійснювалось на зразках Si до початку МО і після її завершення. Латентний період витримки зразків Si в МП складав величину $t \geq 7$ діб. Глибина h занурення індентора визначалась із співвідношення $h=c/7$ (c – діагональ відбитка в мм). Розрахунки проведені з використанням співвідношення між глибиною занурення індентора і діагоналлю відбитка показали, що навантаження $P=20\text{г}$ характеризується глибиною відбитка $\Delta h=0,95 \text{ мкм}$, навантаження $P=30\text{г}$ відповідає глибині занурення індентора $\Delta h=1,15 \text{ мкм}$, при $P=40\text{г}$ $\Delta h=1,25 \text{ мкм}$, при $P=50\text{г}$ глибина відбитка має значення $\Delta h=1,45 \text{ мкм}$, при $P=60\text{г}$ $\Delta h=1,65 \text{ мкм}$, при $P=70\text{г}$ $\Delta h=1,75 \text{ мкм}$, при $P=80\text{г}$ $\Delta h=1,9 \text{ мкм}$, при 100г відповідно $\Delta h=2,15 \text{ мкм}$, при $P=110\text{г}$ $\Delta h=2,2 \text{ мкм}$. Наші дослідження, на жаль, не дозволили визначити зміни в величині мікротвердості в більш віддалених від поверхні шарах в силу того, що при великих навантаженнях на індентор ($P=200\text{г}$) в зразках в місці індентування виникали виколи поверхні, а отже було неможливо здійснити виміри.

Як видно з рис.1, мікротвердість в зразках Si , які пройшли МО, практично не залежить від навантаження на індентор. Останнє вказує на те, що після МО в приповерхневому шарі $h=0 \div 2,2 \text{ мкм}$ (в якому саме і здійснювалось визначення H) мікротвердість залишається незмінною. На відміну від зразків, які не проходили МО, в зразках Si , що зазнали магнітного впливу, мікротвердість залежить від навантаження досить складним чином. H змінюється пошарово з певним значенням товщини шару h_j та H_j . При зростанні навантаження P від 20г до 30г , тобто на глибині $h_j = 0,95 \div 1,15 \text{ мкм}$, H зростає, при подальшому зростанні

навантаження на індентор i , відповідно, при зростанні h_j від 1,15 мкм до 1,75 мкм H зменшується поступово до досягнення стаціонарного значення при $h_j \approx 1,75$ мкм. Ця залежність вказує, по-перше, на те, що в вихідних зразках приповерхневий шар сам по собі має складну структуру. Існування цього шару може бути пов'язане з наявністю різноманітних дефектів. По-друге, саме наявність подібного «слабо деформованого приповерхневого шару» виявляє вплив на значення мікротвердості при більш глибокому зануренні індентора. Таким чином, розподіл мікротвердості в вихідних (еталонних) зразках Si носить немонотонний характер.

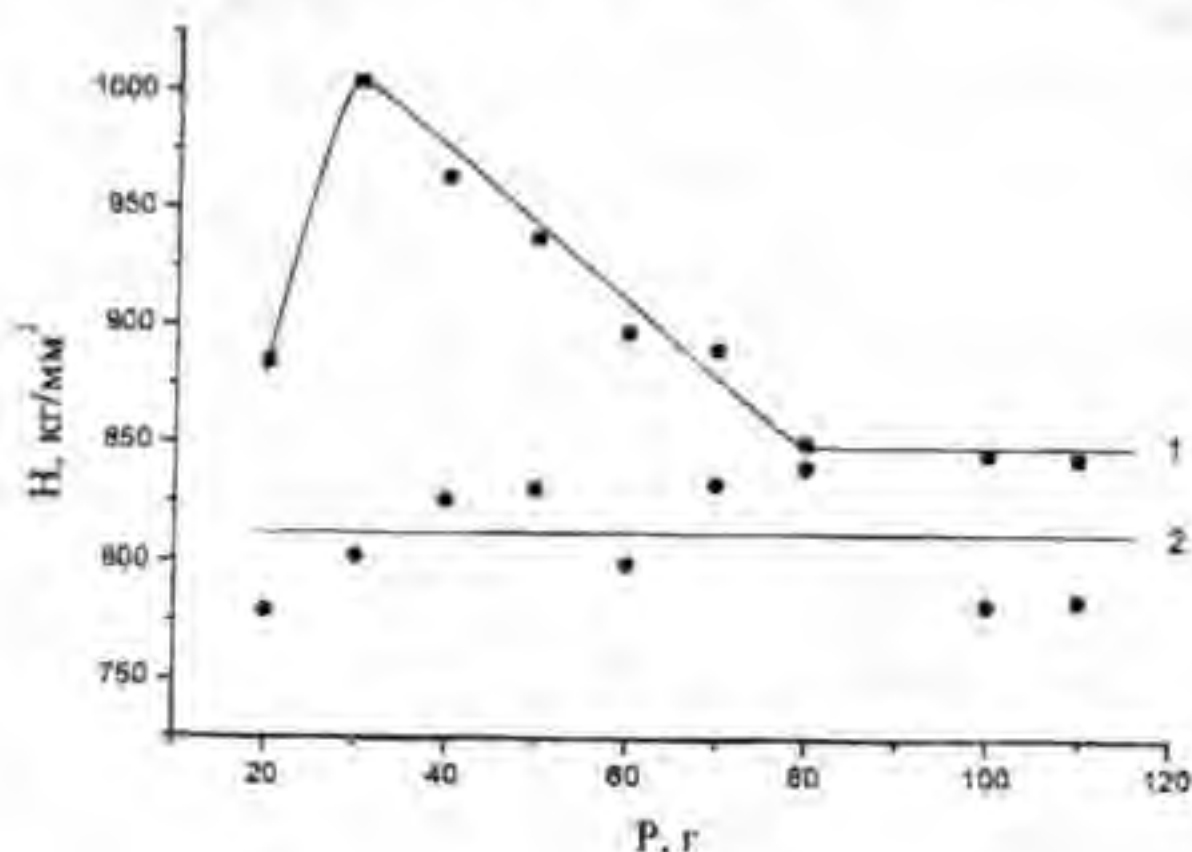


Рис.1. Залежність мікротвердості зразків кремнію від глибини вдавлювання індентора: 1 – мікротвердість вихідних (еталонних) зразків; 2 – мікротвердість зразків, що пройшли магнітну обробку.

Одержані результати розрахунків відносної мікротвердості (або величини ММЕ) та її залежності від глибини залягання шарів під поверхнею (рис.2), свідчать про те, що вказана залежність носить також немонотонний характер. Найбільших змін (близько 20%) ММЕ досягає в шарах глибиною $\sim 1,15$ мкм. По мірі зростання глибини залягання шарів під поверхнею ММЕ зменшується, фактично нівелюючись на глибині 1,9 мкм (80 г). При подальшому заглибленні від поверхні ММЕ знову починає дещо збільшуватись (величина зростання ММЕ досягає $\sim 7\%$) і, нарешті, на глибині $h_j \approx 2,15$ мкм (100 г) величина ММЕ перестає змінюватись і досягає деякого стаціонарного значення.

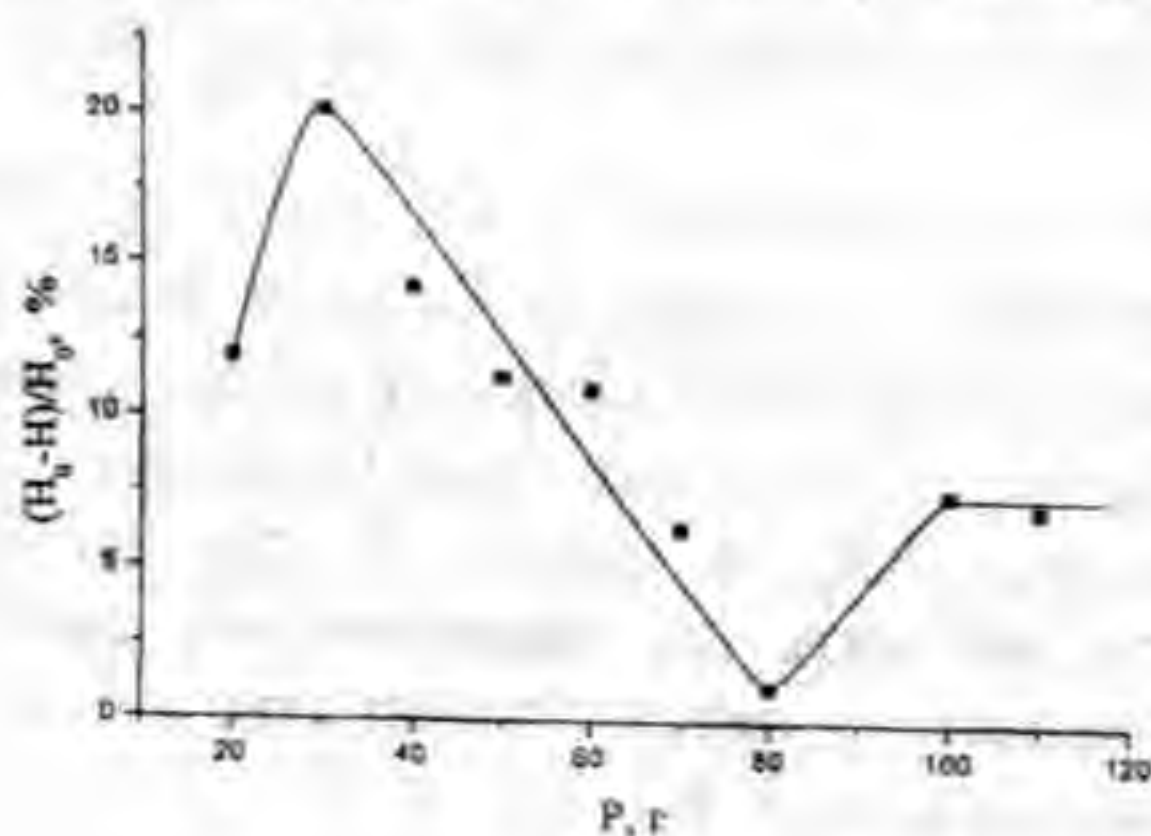


Рис.2. Залежність відносної мікротвердості зразків кремнію від глибини вдавлювання індентора: H_0 – мікротвердість вихідних (еталонних) зразків; H – мікротвердість зразків, що пройшли магнітну обробку.

В основі виявленого ММЕ може лежати дія цілого ряду механізмів. Найбільш прийнятним нам представляється механізм запропонований авторами в [4]. Згідно цьому механізму, дія МП на кристали кремнію ініціює явище дифузійної нестійкості. Високу рухливість атомів забезпечує спінова заборона на відновлення розірваних хімічних зв'язків. Як відмічається в [4], розрив хімічних зв'язків є наслідком релаксації поляризації спінів ядер ізотопу ^{29}Si в магнітному полі. При цьому припускається, що релаксація поляризованих в МП ядер може відбуватись за рахунок переорієнтації ядерного спіна і спіна електрона орієнтованого на парамагнітній домішці (так звані flip-flop переходи).

Переорієнтація спіна електрона, захопленого на домішці, забезпечує заповнення антизв'язуючого стану, який володіє меншою енергією, ніж зв'язуючий. Однак, для такого переходу в антизв'язуючий стан необхідне поглинання фононів, тому релаксація іде з поглинанням енергії, і отже, має ендотермічний характер. Заповнення антизв'язуючого стану приводить до розриву хімічного зв'язку. З нашої точки зору, під впливом магнітного поля може відбуватись дисоціація присутніх в кремнії груп Si-OH та оксидних преципітатів SiO_x . Можна припустити, що основною стадією розпаду груп Si-OH є розрив зв'язку O-H з утворенням дефекту типу $\equiv\text{Si-O}$. Таким чином, магнітне поле може стимулювати метастабільність груп OH та метастабільність SiO_x -преципітатів, внаслідок чого можлива дисоціація даних груп та преципітатів в процесі магнітної обробки з утворенням немостикових кисневих дефектів і водню. Після розриву одиночні домішкові атоми – водень, кисень та інші – дифундують по кристалу і захоплюються на деформованих зв'язках приповерхневої області, аналогічно гетеруванню домішок, яке проводиться при високій температурі.

Як видно з рис.2, розподіл ММЕ з глибиною має немонотонний характер. Природа явища, яке виникає і прослідковується в кристалах кремнію в результаті магнітної обробки, на нашу думку, може бути пов'язана з немонотонним характером розподілу з глибиною концентрації тих домішок, які утворились після дисоціації гідроксильних груп та оксидних преципітатів.

Одержані в роботі результати носять піонерський характер, і вони, безумовно, потребують подальших досліджень, перевірок і уточнень.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Головин Ю.И., Моргунов Р.Б., Иванов В.Е., Жуликов С.Е., Дмитриевский А.А. Электронный парамагнитный резонанс в подсистеме структурных дефектов как фактор пластификации кристаллов NaCl // Письма в ЖЭТФ. – 1998. – Т.68, №5/6. – С.400-405.

2. Урусовская А.А., Альшиц В.И., Смирнов А.Е., Беккауер Н.Н. Эффекты магнитного воздействия на механические свойства и реальную структуру немагнитных кристаллов. // Кристаллография. – 2003. – Т.48, №5. – С.855-872.
3. Головин Ю.И., Моргунов Р.Б., Баскаков А.А., Бадылевич М.В., Шмурак С.З. Влияние магнитного поля на пластичность, фото- и электролюминесценцию монокристаллов ZnS // Письма в ЖЭТФ. – 1999. – Т.69, №2. – С.114-118.
4. Левин М. Н., Зон Б. А. Воздействие импульсных магнитных полей на кристаллы Cz – Si. // ЖЭТФ. – 1997. – Т.111, №4. – С.1373-1397.
5. Левин М. Н., Личманов Ю. О., Масловский В. М. Изменение зарядовой стабильности МДП структур, индуцированное импульсным магнитным полем // Письма в ЖТФ. – 1994. – Т.20, №4. – С.27-32.
6. Головин Ю.И. Магнитопластичность твердых тел. // ФТТ. – 2004. – Т.46, №5. – С.769-803.
7. Моргунов Р.Б. Спиновая микромеханика в физике пластичности. // УФН. – 2004. – Т.174, №2. – С.131-153.
8. Кузьменко П.П., Новиков Н.Н., Горидько Н.Я., Федоренко Л.И. Фотомеханический эффект в Ge с примесью слабо растворимых элементов // ФТТ. – 1966. – Т.8, № 6. – С.1732-1738.
9. Глазов В.М., Вигдорович В.Н. Микротвердость металлов и полупроводников. – Москва: Металлургия, 1969. – 248с.
10. Алехин В.П. Фізика прочности и пластичности поверхностных слоев материалов. – Москва: Наука, 1983. – 280с.
11. Вальковская М.И., Пушкаш Б.М., Марончук Э.Е. Пластичность и хрупкость полупроводниковых материалов при испытаниях на микротвердость. – Кишинев: АН Молд.ССР, Ин-т прикладной физики, 1984. – 107с.
12. Галанов Б.А., Григорьев О.Н., Мильман Ю.В. и др. Определение твердости и модуля Юнга при упругопластическом внедрении индентора в материалы // Докл. АН СССР. – 1984. – Т.274, №4. – С.815-817.
13. Мильман Ю.В., Галанов Б.А., Чугунова С.И. Характеристика пластичности, получаемая при измерении твердости: Зб. наук. пр. – К.: АН Украины, Ин-т проблем материаловедения им. И. Н. Францевича, 1992. – 25с.
14. Новиков Н.В., Дуб С.Н., Мильман Ю.В., Гриднева И.В., Чугунова С.И. Применение метода наноиндентирования для изучения фазового превращения полупроводник-металл в кремнии // Сверхтвердые материалы. – 1996. – Т.18, №3. – С.37-46.

15. Галанов Б.А., Мильман Ю.В., Чугунова С.И., Гончарова И.В. Исследование механических свойств высокотвердых материалов методом индентирования // Сверхтвердые материалы. – 1999. – №3. – С.25-38.
16. Герасимов А.Б., Чирадзе Г.Д. Влияние рода и концентрации мелких примесей на температурную зависимость микротвердости и фотомеханического эффекта в полупроводниках. // ФТП. – 2002. – Т.36, №4. – С.1191-1193.
17. Григорович В.К. Методы испытания на микротвердость. – Москва: Наука, 1965. – с.35.
18. Герасимов А.Б., Чирадзе Г.Д., Кутивадзе Н.Г., Бибилашвили А.П., Бохочадзе З.Г. О распределении величины микротвердости по глубине образца. // ФТТ. – 1999. – Т.41, №7. – С.1225-1227.
19. Макара В.А., Кольченко Ю.Л., Стебленко Л.П., Руденко О.В., Науменко С.М. Вплив постійного магнітного поля на мікротвердість кристалів кремнію // Вісник КУ, Серія: Фізико-математичні науки. – 2003. - № 1. – С.377-383.

Надійшла до редколегії 17.03.05

УДК 532.5, 539.172.17

Про можливий механізм стабілізації нестійких гідродинамічних вихорів у збуджених газах

Р.О. Нарішкін*

Досліджено рівняння балансу для збудженого газу, в якому можуть утворюватися квазімолекули при зіткненнях збудженого та незбудженого атомів. Знайдено стаціонарні значення концентрацій атомів газу та квазімолекул.

Показано, що такі квазімолекули можуть чинити стабілізуючий ефект на вихоровий рух газу за рахунок збільшення моменту інерції ядра вихора.

Ключові слова: збуджений газ, квазімолекули, рівняння балансу, вихоровий рух.

*E-mail: naryshkin@univ.kiev.ua

1. Вступ

В роботах [1-3] були розглянуті механізми зародження нестійких гідродинамічних вихорів у системах із об'ємним стоком речовини. Теорія нестійких гідродинамічних вихорів становить великий інтерес, особливо у зв'язку з такими екологічними проблемами як потужні атмосферні вихори: торнадо і тайфуни [1]. Тому актуальним є знаходження механізмів стабілізації таких нестійких вихорів.

У вище зазначених роботах показано, що знайдений механізм нестійкості вихорового руху може бути застосований до багатьох абсолютно різних фізичних систем, тобто він є в певній мірі універсальним.

В даній роботі ми розглядаємо один із можливих механізмів стабілізації вихорового руху за рахунок утворення квазімолекул у збудженому газі і збільшення моменту інерції вихорів.

2. Рівняння балансу для збудженого газу

Розглянемо газ із атомів, які не утворюють молекул в основному стані. При зовнішній лазерній накачці у такому газі можуть утворюватися метастабільні квазімолекули із часом життя τ_a порядку 10^{-5} с [4]. Визначимо динамічно-рівноважну концентрацію квазімолекул, яка встановлюється після перехідних процесів.

Позначимо n, n^* – концентрації атомів в основному та збудженому станах, і n_m – концентрація квазімолекул у газі. Тоді, для замкнутої системи повинно виконуватися співвідношення

$$n(t) + n^*(t) + 2n_m(t) = n_0 = \text{const}, \quad (1)$$

On possible stabilization mechanism of unstable hydrodynamic vortices in excited gases

R.O. Naryshkin*

Balance equations for excited gas, in which quasimolecules may be generated in the collisions of excited and non-excited atoms, are investigated. Stationary concentrations of atoms and quasimolecules in the gas are found.

It is shown that quasimolecules may cause a stabilizing effect on the rotational motion of the gas due to increase of the moment of inertia of vortex core.

Key Words: excited gas, quasimolecules, balance equations, rotational motion.

де n_0 – початкова концентрація атомів газу. При цьому початкові умови вибираємо у вигляді

$$n(0) = n_0, \quad n^*(0) = 0, \quad n_M(0) = 0. \quad (2)$$

Запишемо рівняння балансу в збудженому газі, який знаходиться під зовнішньою накачкою „інтенсивності” α , із врахуванням утворення квазімолекул:

$$\frac{dn}{dt} = -Kn^2n^* + \frac{2n_M}{\tau_d} - \alpha n + \frac{n^*}{\tau_r}, \quad (3)$$

$$\frac{dn^*}{dt} = -Kn^2n^* + \alpha n - \frac{n^*}{\tau_r}, \quad (4)$$

$$\frac{dn_M}{dt} = Kn^2n^* - \frac{n_M}{\tau_d}, \quad (5)$$

де K – стала потрійної рекомбінації процесу $A + (A + A^*) \rightarrow A + A_2^*$, α – ймовірність збудження атомів лазерною накачкою в одиницю часу, τ_d – час життя квазімолекул, після якого вони розпадаються згідно $A_2^* \rightarrow 2A + h\nu$, τ_r – характерний час випромінювання збудженого атома.

Числові значення параметрів ми вибираємо наступні:

$$K \sim 0.3 \cdot 10^{-33} \text{ см}^6 / \text{с} [5], \quad \tau_r \sim 10^{-9} \text{ с} [4], \quad \tau_d \sim 10^{-5} \text{ с} [4], \quad \alpha = (0.01 \div 1) \tau_r^{-1}. \quad (6)$$

Для числового розв'язання системи рівнянь (1)–(5), зручно представити її у безрозмірному вигляді. Для цього введемо наступні безрозмірні змінні

$$t' = t / \tau_r, \quad x = n / n_0, \quad y = n^* / n_0, \quad z = 2n_M / n_0. \quad (7)$$

Тоді, з урахуванням (1), рівняння балансу записуються у вигляді

$$\frac{dx}{dt'} = -Bx^2y - Ax + y + w(1 - x - y), \quad (8)$$

$$\frac{dy}{dt'} = -Bx^2y + Ax - y, \quad (9)$$

$$z = 1 - x - y, \quad (10)$$

де $A = \alpha \tau_r \sim 0.01 \div 1$, $B = K \tau_r n_0^2 \sim 10^{-3}$, $w = \tau_r / \tau_d \sim 10^{-4}$. Звідси видно, що розв'язки $x(t)$, $y(t)$ та $z(t)$ будуть визначатися характерними часами $A^{-1} \sim 1 \div 100$, $B^{-1} \sim 10^3$ та $w^{-1} \sim 10^4$ (в одиницях τ_r). Початкові умови (2) в безрозмірних змінних (7) мають вигляд

$$x(0) = 1, \quad y(0) = 0, \quad z(0) = 0. \quad (11)$$

На рис. 1 показано числовий розв'язок рівнянь (8)–(10) в логарифмічному (по часу t') масштабі при двох різних значеннях накачки $A = 0.5$, та $A = 0.03$.

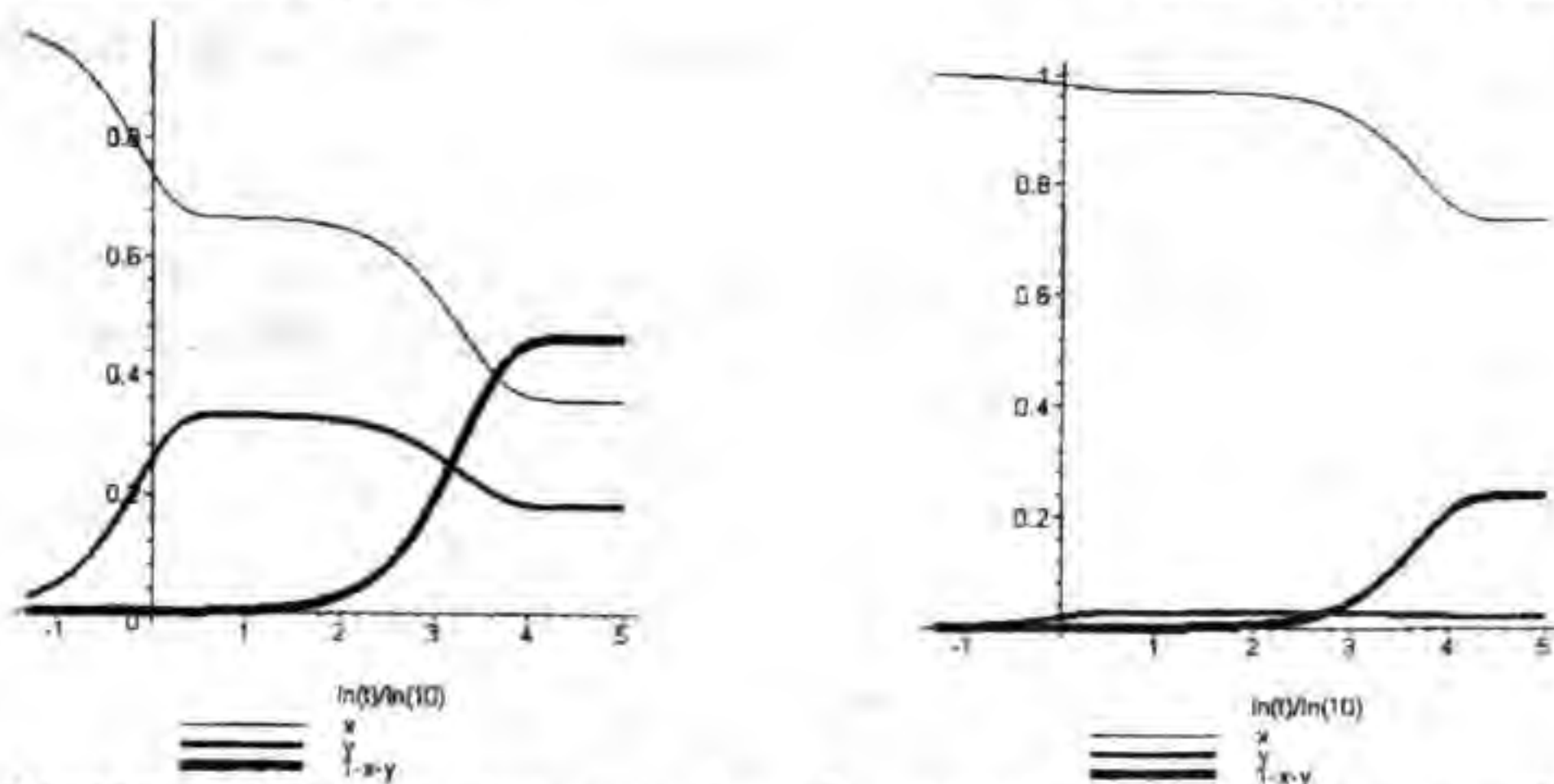


Рис. 1. Поведінка відносних концентрацій незбуджених $x(t')$ та збуджених $y(t')$ атомів та квазімолекул $z(t')=1-x(t')-y(t')$ у збудженому газі з часом в логарифмічному масштабі. По осі абсцис відкладено величину $\lg t' = \ln t' / \ln 10$. На графіку зліва прийнято значення $A = 0.5$, а на графіку справа $A = 0.03$.

З рис. 1 видно, що в стаціонарному стані, який досягається за характерний час $t' = w^{-1} \sim 10^4$ або $t_s = \tau_r / w = t_d \sim 10^{-5}$ с, квазімолекули мають досить велику відносну концентрацію. Можна показати, що при $A > 0.02$ концентрація квазімолекул складає не менше 20%, тобто навіть для досить малої накачки кількість квазімолекул є достатньо значною для того, щоб її потрібно було враховувати із необхідністю при розгляді руху збудженого газу.

Якщо $A > 0.1$, то стаціонарні значення концентрацій наближено дорівнюють:

$$n_s \approx n_0 \left(\frac{w}{2AB} \right)^{\frac{1}{3}} \left[1 - \frac{1}{3} \left(\frac{w}{2AB} \right)^{\frac{1}{3}} \right], \quad n_s^* \approx A n_s, \quad n_{\text{abs}} \approx n_0 \frac{AB}{w} \frac{n_s^3}{n_0^3}. \quad (12)$$

3. Стабілізація вихорового руху при утворенні квазімолекул

Перейдемо до розгляду механізму стабілізації у збудженому газі. Нехай лазерна накачка подається тільки у деяку циліндричну область радіуса R і висоти H , яка знаходиться у цьому газі. Тоді всередині циліндра ($r < R$) тиск газу $p = (n + n^* + n_{\text{abs}})kT$ падає за час t , на величину $\Delta P = n_{\text{abs}} kT$, що викликає гідродинамічні потоки із зовнішньої області ($r > R$), які існують до вирівнювання тиску $p = p_0$ (p_0 – тиск газу зовні циліндра). При цьому початковий момент інерції циліндра J_0 збільшується на величину $\Delta J = m n_{\text{abs}} \pi R^2 H$, де m – маса атомів газу, а n_{abs} – стаціонарна концентрація квазімолекул згідно (12).

Якщо початкова кутова швидкість всередині циліндра газу була відмінною від нуля $\omega_0 \neq 0$ (ядро вихора), то після цього вона дуже швидко (фактично за час $t_s \sim 10^{-5}$ с) зменшується, згідно закону збереження моменту імпульсу, на величину

$$\omega = \omega_0 \frac{J_0}{J_0 + \Delta J} = \frac{\omega_0}{1 + n_{\text{abs}} / n_0}, \quad (13)$$

тобто відбувається „стабілізація” вихорового руху всередині циліндра.

4. Висновки

При утворенні квазімолекул у збудженому газі, на відміну від робіт [1-3], не відбувається фазового переходу, який супроводжувався би виносом нової фази із області вихорового руху. Тому в збудженому газі при утворенні квазімолекул відбувається сповільнення його обертового руху за рахунок майже стрибкоподібного зростання моменту інерції газу всередині області дії стаціонарної лазерної накачки, якщо він мав ненульову початкову кутову швидкість.

Зміна кутової швидкості не є великою (20%–40%), але вона може відігравати суттєву роль поблизу порога спонтанного зародження гідродинамічних вихорів, коли важливу роль грає дисипація. Справа в тому, що в реальних ситуаціях „виживають” лише такі вихори, які мають кутову швидкість більшу за деяку порогову ω_k . У зв'язку з цим, рання стабілізація флуктуаційно-виникаючих гідродинамічних вихорів може значно зменшувати кількість вихорів, кутова швидкість яких досягає або перевищує ω_k .

Автор висловлює подяку проф. В.М. Мальнєву за обговорення результатів роботи.

Література

- [1] Е.А. Пашицкий // Прикладна гідродинаміка 4(76) (2002) 50.
- [2] Э.А. Пашицкий, В.Н. Мальнев, Р.А. Нарышкин, *О зарождении вихрей в процессе расслоения пересыщенного раствора ^3He - ^4He* // ФНТ 31, N2 (2005) 141-147.
- [3] Е.А. Пашицкий, В.М. Мальнев, Д.В. Анчишкін, Р.О. Нарышкін, *Гідродинамічна вихорова нестійкість ядерної матерії при зіткненнях високозбуджених важких ядер* // Вісник Київського Університету, серія фіз.-мат. науки, N1 (2005) 371-377.
- [4] V.N. Malnev and R.A. Naryshkin, *Metastable Quasimolecules in Excited Gases* // Ukr. J. Phys. 50, N4 (2005) 333-339.
- [5] Б.М. Смирнов, *Ионы и возбужденные атомы в плазме* // Москва, Атомиздат, 1974.

Надійшла до редакції 08.04.2005

УДК 548: 539.32

Анатолій П. Онанко, с.н.с.

**Метод обробки амплітудної
залежності внутрішнього тертя**

*Пропонується графічний метод
обробки амплітудної залежності
внутрішнього тертя складного
п'єзоелектричного вібратора.*

Ключові слова: амплітудна
залежність, внутрішнє тертя,
деформація.

Anatoliy P. Onanko, Sen. Sci. Res.

**Method of the rearrangement
amplitude dependence of internal
friction**

*The graphic method of treating of
amplitude dependence of internal
friction of the component piezo-electric
vibrator is offered.*

Key words: amplitude dependence,
internal friction, deformation.

E-mail: onanko@mail.univ.kiev.ua

Вступ.

Пружна, електрична взаємодії характеризуються ефективною енергією взаємодії дислокацій з домішковими атомами. Цю енергію можна визначити, досліджуючи внутрішнє тертя (ВТ), залежне від амплітуди деформації. Процес відриву від точок закріплення і збільшення дислокаційних сегментів, здатних здійснювати коливання, може пояснити перехід від амплітуднонезалежного (АНЗ) до амплітуднозалежного (АЗ) ВТ. При напруженнях, що не призводять до відриву дислокацій від точкових дефектів, маємо АНЗВТ, зумовлене резонансним затуханням. Гістерезисне затухання призводить до АЗВТ, яке спостерігається при досягненні напружень, при яких дислокації відриваються від точкових дефектів. Експериментальні результати свідчать, що виміри АЗВТ є чутливим засобом контролю мікропластичної деформації не тільки пластичних металів, але і крихких напівпровідникових кристалів.

А.П.Онанко, 2005

Експеримент.

В роботі пропонується графічний метод обробки експериментальних даних амплітудної залежності внутрішнього тертя (АЗВТ) у координатах електричної напруги на кварці-генераторі в залежності від напруги на кварці-приймачі $U_r = f(U_n)$ чотирьохскладного п'єзоелектричного вібратора.

Запропонований графічний метод обробки результатів вимірів АЗВТ у координатах $U_r = f(U_n)$, які є аналогом вольт-амперних характеристик, має перевагу у тому, що лінійна залежність амплітудно-незалежного внутрішнього тертя (АНЗВТ) повинна проходити крізь початок координат.

На рис.1 приведена амплітудна залежність ВТ монокристала CdTe, легованого Se, орієнтації (111)[110] з щільністю дислокацій $N_d \sim 5 \cdot 10^4 \text{ см}^{-2}$ після механічної різки.

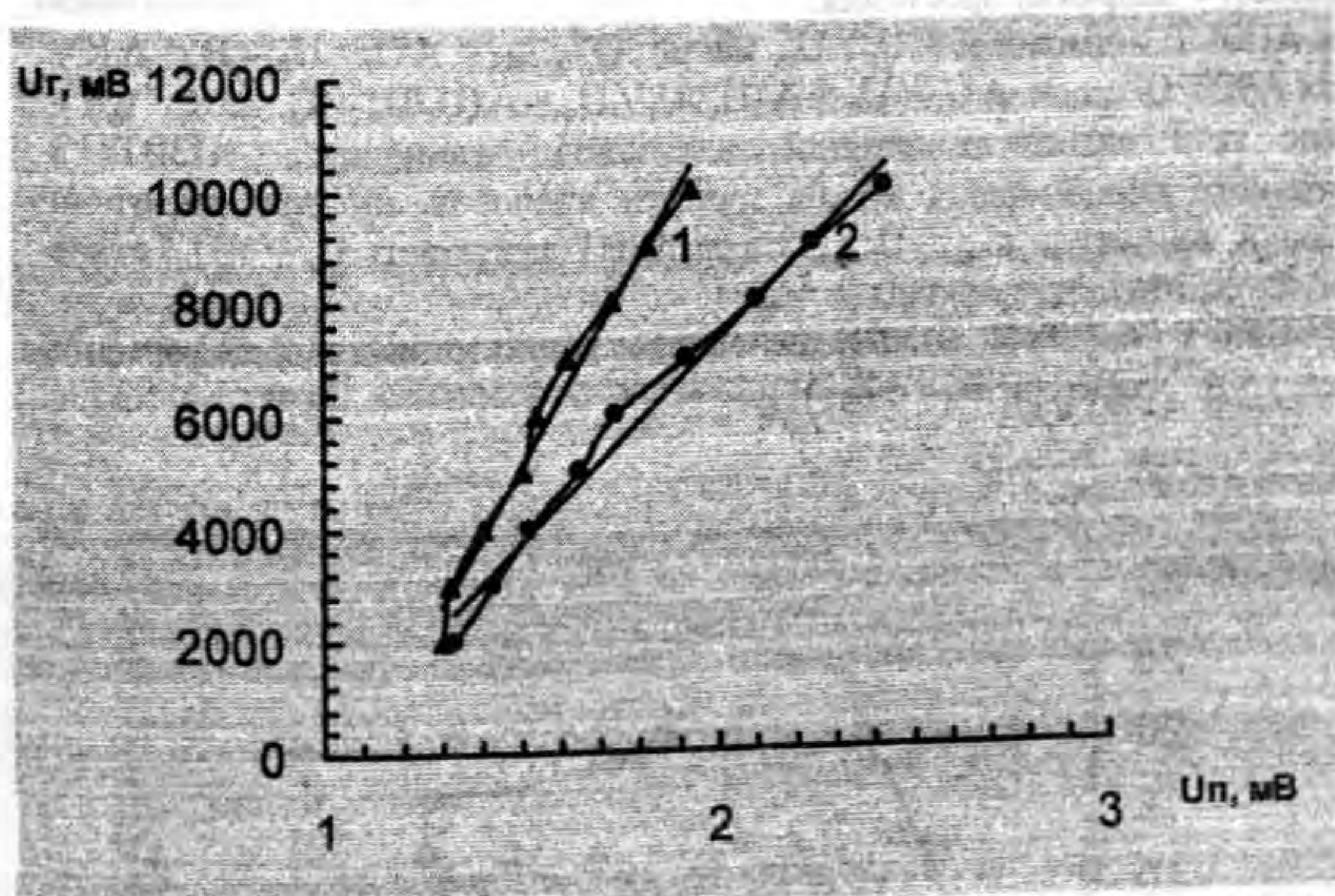


Рис.1. Амплітудна залежність внутрішнього тертя CdTe, легованого Se, у координатах $U_r - U_n$ складного п'єзоелектричного вібратора. 1- прямий хід, 2- обернений хід.

Величина АЗВТ та його малі зміни можуть більш точно визначити по відхиленню від лінійної залежності $\text{tg} \alpha$ – тангенсу кута нахилу α початкової лінійної залежності при АНЗВТ $U_r = f(U_n)$, вирахованого за допомогою метода найменших квадратів. Таким чином, методично спрощуються виміри АЗВТ зразка тому, що непотрібно проведення

допоміжних попередніх кропінкових калібрувальних вимірів ВТ Q_k^{-1} склеєних кварців без зразка.

З співвідношень $Q^{-1} = A \cdot U_r / U_n$ та $Q_{зр}^{-1} = (M \cdot Q^{-1} - M_k \cdot Q_k^{-1}) / M_{зр}$ випливає залежність $Q_{зр}^{-1} = B \cdot U_r / U_n - C$, де $B = A \cdot M / M_{зр}$, $C = M_k \cdot Q_k^{-1} / M_{зр}$, $M = M_k + M_{зр}$. A , B і C є постійними при одній і тій же температурі в експериментально використаній області ультразвукової знакозмінної деформації внаслідок незначної величини ВТ $Q_k^{-1} \sim 10^{-6}$ склеєних кварців чотирьохскладного п'єзоелектричного вібратора.

Представимо ВТ зразка у вигляді АНЗ і АЗ складових ВТ: $Q_{зр}^{-1} = Q_{зрАНЗ}^{-1} + Q_{зрАЗ}^{-1}$, тоді U_r представимо у вигляді $U_r = (Q_{зрАЗ}^{-1} + B) \cdot U_n / A + Q_{зрАНЗ}^{-1} \cdot U_n / A$ або $U_r = U_r' + U_r''$. Таким чином, у випадку АНЗВТ - $Q_{зрАНЗ}^{-1}$ повинна виконуватися лінійна залежність між напругою U_r , яка подається на кварц-генератор, і напругою U_n , яка вимірюється на кварці-приймачі. А у випадку АЗВТ - $Q_{зрАЗ}^{-1}$ повинно спостерігатися відхилення від лінійної залежності у напрямку зростання.

Для АНЗВТ, відмітив $K = U_r' / U_n$, маємо: $Q_{зрАНЗ}^{-1} = A \cdot U_r' / U_n - B = A \cdot K - B$. Для АЗВТ $Q_{зрАЗ}^{-1} = A \cdot U_r'' / U_n = A \cdot (U_r - U_r' / U_n) = A \cdot (U_r / U_n - K)$, де $K = \tan \alpha$ - тангенс кута нахилу α лінійної залежності у випадку АНЗВТ. З приведенного співвідношення можна зробити висновок, що при досягненні критичної амплітуди $\epsilon'_{кр} = U'_{кр}$ і появи АЗВТ залежність $U_r = f(U_n)$ стане нелінійною, що підтверджується рис.1.

Як видно з рис.2, при збільшенні амплітуди ультразвукової деформації більше $15 \cdot 10^{-5}$ спостерігався спад ВТ.

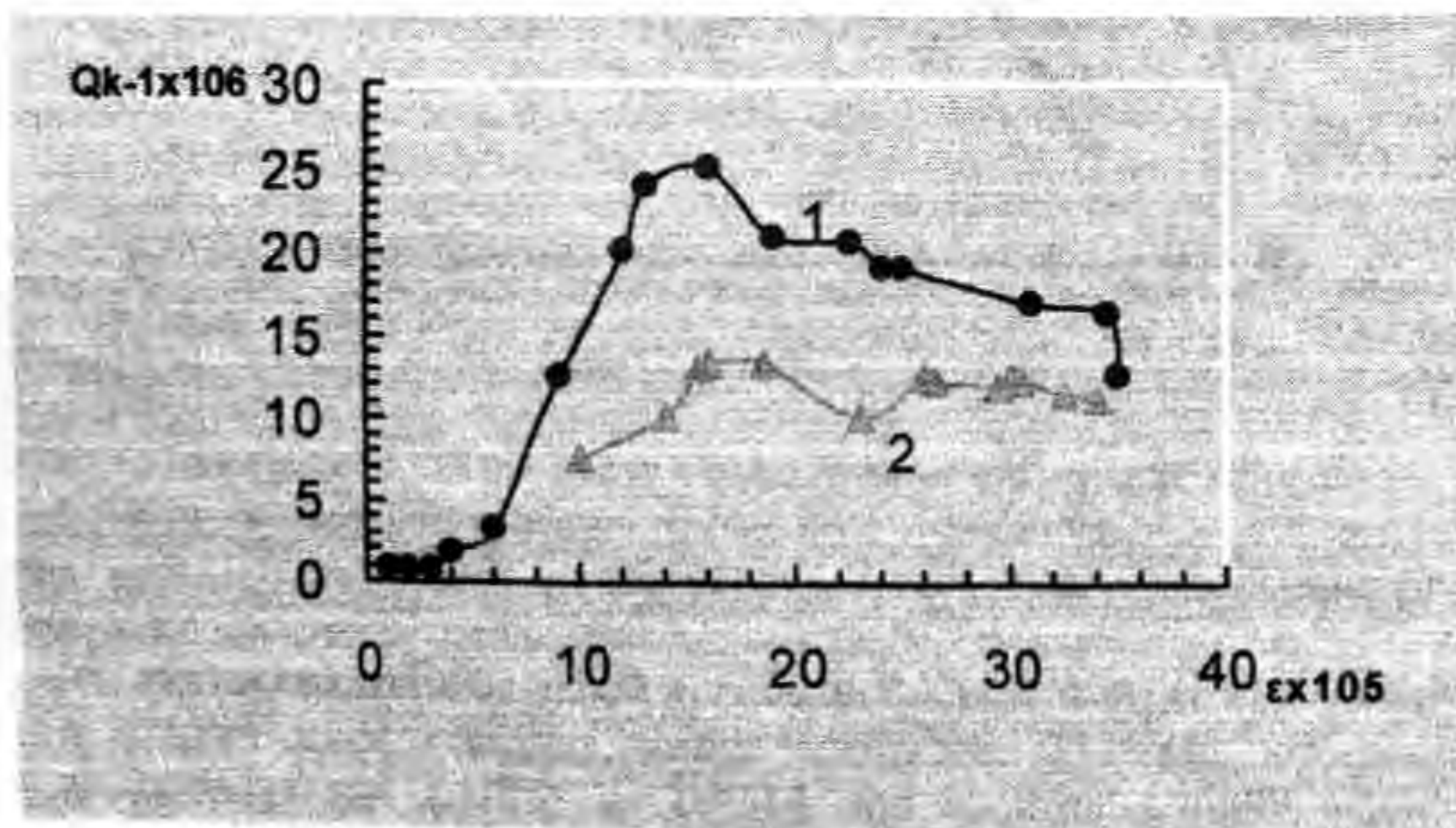


Рис.2. Амплітудна залежність внутрішнього тертя склеєних кварців Q_k^{-1} при 290 К. 1- прямий хід, 2- обернений хід.

Така поведінка АЗВТ може бути пов'язана з рухом дислокаційних перегинів [1,2]. Зменшення величини ВТ обумовлене зменшенням "заметаної" дислокаційними сегментами площі. При русі геометричних дислокаційних перегинів ця площа визначається сумарним переміщенням перегинів дислокаційних сегментів. Збільшення зовнішньої ультразвукової змінної напруги призводить до зростання лінійного натягу дислокацій та ширини перегину, але середнє переміщення дислокаційних перегинів зменшується, що і обумовлює падіння ВТ.

Зменшення величини ВТ склеєних кварців, яке спостерігалось після тривалої ультразвукової деформації протягом ~ 3600 сек може бути також пов'язано з активацією домішок, котрі дифундують до дислокаційних сегментів, осаджуються і закріплюють їх, в результаті чого густина активних дислокаційних петель зменшується, що і викликає зменшення величини ВТ.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Александров Л.Н., Зотов М.И. Внутреннее трение и дефекты в полупроводниках.- Новосибирск: Наука, 1979.- 159с.
2. Онанко А.П., Подолян А.А., Островский И.В. Влияние ультразвуковой обработки на внутреннее трение в кремнии // Письма в ЖТФ – 2003.- Т. 29, вып. 15.- с.40-44.

Надійшла до редколегії 08.04.2005



УДК 550.388.2

Yuriy G. Rapoport, doctorant

Response of unstable near-equatorial plasma in the F ionospheric region to the spatial packet of acoustic-gravity waves of the lithospheric origin.

For the near-equatorial region, ionospheric response to the spatial packet of acoustic-gravity waves (AGW), radiated by the lithospheric source elongated in the direction parallel to the (horizontal) geomagnetic field, is evaluated. In this case AGW packet is the seeding factor for the Rayleigh-Taylor instability. Ionospheric response could be very effective due to the resonant character of the excitation of AGW (with characteristic wavelength ~ 800 km) and the development of the Rayleigh-Taylor instability even outside the spatial resonance between the most intense mode of the AGW packet and unstable plasma mode.

Ключові слова: ionosphere, acoustic-gravity wave packet, Rayleigh-Taylor instability.

E-mail:

Юрій Г. Рапопорт, докторант

Відгук нестійкої біля-екваторіальної плазми в області F іоносфери на просторовий пакет акусто-гравітаційних хвиль літосферного походження.

Оцінений відгук біля-екваторіальної плазми на просторовий пакет акусто-гравітаційних хвиль (АГХ), що випромінюються літосферним джерелом, витягнутим у напрямку, паралельному (горизонтальному) геомагнітному полю літосферного походження. В цьому випадку пакет АГХ є ініціюючим фактором для розвитку нестійкості Релея-Тейлора. Іоносферний відгук може бути дуже ефективним завдяки резонансному характеру збудження АГХ (з характерною довжиною хвилі ~ 800 км) та розвитку нестійкості Релея-Тейлора навіть у відсутності просторового резонансу між найбільш інтенсивною модою пакету АГХ і нестійкою плазмовою модою.

Ключові слова: іоносфера, пакет акусто-гравітаційних хвиль, нестійкість Релея-Тейлора.

laser@i.kiev.ua

Introduction. During last time, first experimental evidences appeared concerning the direct transform of the energy by the acoustic-gravity waves (AGW) [1] from the lower atmosphere (or the lithosphere) into the ionosphere [2, 3, 4]. Possible sources of AGW are atmospheric processes such as cyclones or atmospheric turbulence, seismic processes [2-4] and others. It is important for the AGW channel of the seismoionospheric coupling that variations with the characteristic AGW periods (~ 1 hour) have been found before earthquakes in the near-ground electric field [2, 3] and in the variations of the amplitudes of electromagnetic waves propagating in the Earth-Ionosphere waveguide. Excitation of AGW before strong earthquakes ($M > 5$) could be connected with seismogravity pulsations which are intensified before strong earthquakes [5] and non-stationary release of green-house effect gases (CO_2 etc.) from the Earth

crust into the ionosphere. Gas release is intensified before earthquakes and could be modulated by seismogravity pulsations [5, 6]. Increase of the infrared radiation from the near-ground atmosphere which may correspond to the release of green-house effect gases was observed from the satellites [7]. Some ionospheric effects of the AGW, in particular in the F region, are known. There are, for example, plasma bubbles, connected with the development of the corresponding decrease of density and increase of ion temperature and variations of the intensity of the ionosphere glows observed before earthquakes [8] and some other phenomena. Because AGW with relatively small amplitudes are generated before earthquakes near the ground, it is interesting to investigate possible mechanisms of AGW amplification in the atmosphere and ionosphere. Few possible mechanisms are known, see for example mechanism connected with the atmospheric wind and magnetohydrodynamic interaction of AGW [9] and photochemical instability [10]. Present paper is dedicated to the theory of the development of the Rayleigh- Taylor instability (RTI) in the plasma of the ionospheric F region under the influence of the driving force caused by the AGW packet of the lithospheric origin. The model developed before [11] is used for the modeling the excitation of the AGW packet by the lithospheric gas source and their penetration into the ionosphere. Then, some important characteristics of the development of RTI in the near-equatorial region in the presence of the AGW are estimated. Two important and new factors are taken into account when the RTI is examined : the resonant character of the excitation of the "reactive modes" of the AGW [12] and the presence of the spatial packet of the AGW, instead of the single monochromatic AGW, as in the all previous works (see, for example, [13]). A possibility of the RTI development outside the spatial resonance between AGW and unstable (drift) plasma mode is examined. As a result, a possibility of very effective development of the plasma instability in the F region in the presence of the AGW packet of the lithospheric origin is shown.

Packet of the AGW of the lithospheric origin as a "seeding factor" of the RTI development in the equatorial region. Consider (Fig. 1) coordinate system for the F region of the ionosphere, where axis Z is directed upward, and geomagnetic field $\vec{H}_0 = \vec{e}_x H_0$, free-fall acceleration $\vec{g} = -\vec{e}_z g$, electric field $\vec{E} = \vec{e}_y E_y + \vec{e}_z E_z$ and the velocity of the neutral atmosphere $\vec{U} = \vec{e}_y U_y + \vec{e}_z U_z$ are shown. $\vec{e}_{x,y,z}$ are unit vectors in the corresponding directions, respectively.

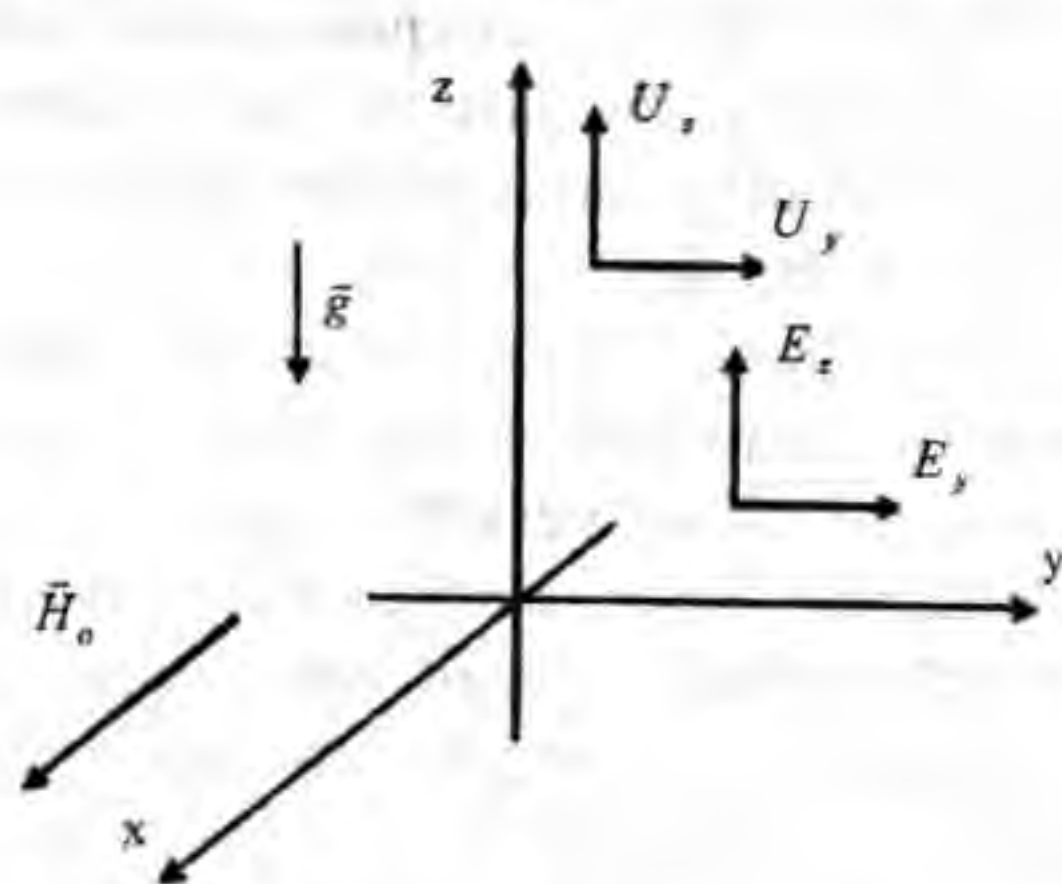


Fig. 1: The geometry of the problem of the RTI in the ionospheric F region in the presence of the AGW packet.

Consider AGW propagating in the direction, perpendicular to the geomagnetic field direction. Therefore $U_x = 0$; velocity of the AGW is equal to $\vec{U} = \vec{e}_y U_y + \vec{e}_z U_z$. Using expressions for the stationary values of the charged particles and small deviations of these values [13, 14] and linearised equations of electrostatics and conservation of the number of the charged particles and the small deviations from these values, the equations described the dynamics of the concentration of the unstable plasma mode in the presence of the RTI and in the presence of AGW as "seeding factor":

$$n = n_0(t) e^{i(\omega_{AGW} t - k_y y - k_z z)}, \quad \frac{\partial n_0}{\partial t} = \gamma n_0 - i \Delta \omega n_0 + F. \quad (1a)$$

Here k_z , k_y are the vertical and horizontal components of AGW wave number,

$$\gamma \equiv \omega'_{RTI} \quad (1b)$$

is the increment of the RTI for the plasma mode with the same values of the horizontal and vertical wave numbers as these of the AGW mode under consideration,

$$\Delta \omega = \omega_{AGW} - \omega'_{RTI} \quad (1c)$$

is the mismatch between the frequencies of the AGW

$$\omega_{AGW} \equiv \omega \quad (1d)$$

and unstable plasma mode, ω'_{RTI} , F is «driving force», connected with considered AGW mode. Each term of the eq. (4) depends on the number of AGW mode in the Fourier expansion by the horizontal wavenumber. This number is omitted here for the simplification of the denotations in the formulas presented below. The following expressions are obtained for coefficients in the eq. (1a):

$$\gamma = \omega''_{RTI} \approx \frac{(k_y/L_{ef})[k_y(-\frac{1}{L_{ef}}\frac{T_i+T_e}{m_i} + g - \nu_{in0}U'_{0z}) + k_z\nu_{in0}U'_{0y}]}{\nu_{in0}[(k_y^2 + k_z^2)^2 + \frac{k_z^2}{L_{ef}^2}]}(k_y^2 + k_z^2) - \alpha_0, \quad (2a)$$

$$\omega'_{RTI} \approx \bar{k}\bar{V}_{i0} + \frac{2}{L_{ef}}\frac{1}{\omega_{Hi}}k_y\frac{T_i}{m_i} - \frac{(k_y/L_{ef})[k_y(-\frac{1}{L_{ef}}\frac{T_i+T_e}{m_i} + g - \nu_{in0}U'_{0z}) + k_z\nu_{in0}U'_{0y}]}{\nu_{in0}[(k_y^2 + k_z^2)^2 + \frac{k_z^2}{L_{ef}^2}]} \cdot \frac{k_z}{L_{ef}}. \quad (26)$$

Here $U'_{0y} = U_{0y} + \frac{e}{m_i|\omega_{Hi}|}E_{0z}$, $U'_{0z} = U_{0z} - \frac{e}{m_i|\omega_{Hi}|}E_{0y}$, $\bar{U}_0, \bar{E}_0$ are the speed of wind and the stationary electric field, respectively, ω_{Hi} is ion cyclotron frequency, $\bar{V}_{i0}$ is ion drift velocity [13, 14], $\frac{1}{L_{ef}} = \frac{1}{N_{e0}}\frac{dN_{e0}}{dz}$, N_{e0} is stationary value of the electron concentration, and expression for the recombination constant, α , and ion-neutral collision frequency, ν_{in} , are taken from [15, 16], namely: $\alpha = \alpha_0(T/300)^2 N_n$, где $T = (T_i + T_n)/2$, where T_n and T_i are temperatures of neutrals and ions, respectively; N_n is neutral concentration; $\nu_{in} = \nu_{in0}(1 + \rho'/\rho_0)$, ν_{in0} is stationary ion-neutral collision frequency, ρ_0 and ρ' are stationary and perturbed (due to AGW) values of neutral atmosphere density. «Driving force» in the eq. (10) has the following form:

$$F \approx F_{U_z}U_z + F_{U_y}U_y + F_\rho\frac{\rho'}{\rho_0} - \alpha_0(\frac{T'}{T_0} + \frac{P'}{P_0}), \quad (2c)$$

where T', P' and T_0, P_0 are variable parts and stationary values of the temperature and pressure, respectively. The main «driving force» term in the right part of (2c) is $F_{U_y}U_y$, where

$$F_{U_y} \approx i(k_z + \frac{i}{L_{ef}})\{\frac{\frac{1}{L_{ef}}ik_y}{[k_y^2 + k_z(k_z + \frac{i}{L_{ef}})]} - 2\frac{\nu_{in0}}{\omega_{Hi}}\}. \quad (3a)$$

The other terms in the right part of (2c) are not presented here in details. Note that if AGW are absent ($F = 0$) and, for example, $k_z = 0$ (horizontal plasma mode is considered), the standard equations [13] for the real and imagine parts of plasma mode frequency are obtained from (2a, b):

$$\omega_{RTI}' = k_y\bar{V}_{i0} + k_y\frac{2}{L_{ef}}\frac{1}{\omega_{Hi}}\frac{T_i}{m_i} \approx k_y\bar{V}_{i0}, \quad \gamma \equiv \omega_{RTI}'' = (\frac{g}{\nu_{in0}} - U_{z0})\frac{1}{L_{ef}} - \alpha_0. \quad (3b)$$

Note that in the previous works (see [13] and the references in this paper), the term $F_{U_y} U_y$, which is the main in the right-hand side of (2c), had not been taken into account. This is the main difference of the present calculations for the RTI in the presence of AGW from the previous works. At the same time, our result is not too surprising, because, in accordance with [1], the relation

$$U_x \ll U_y \quad (4)$$

is valid for the gravity waves, the long-wavelength branch of the AGW with the periods of order of dozens of minutes, what is necessary for the most effective interaction between AGW and plasma modes [13]. Therefore, the term $F_{U_y} U_y$ in the driving force (2c) is really (and the most) important.

Spectral distribution of "driving force" $F_{U_y} U_y$ at the altitude $Z=250$ km (in the F region of the ionosphere) is shown in the Fig. 2b. Spatial distribution of the vertical AGW velocity in the region of 1D lithospheric source (infinite in the X direction, in other words along the geomagnetic field, see Fig. 1) is shown in the Fig. 2a, together with the parameters of the source.

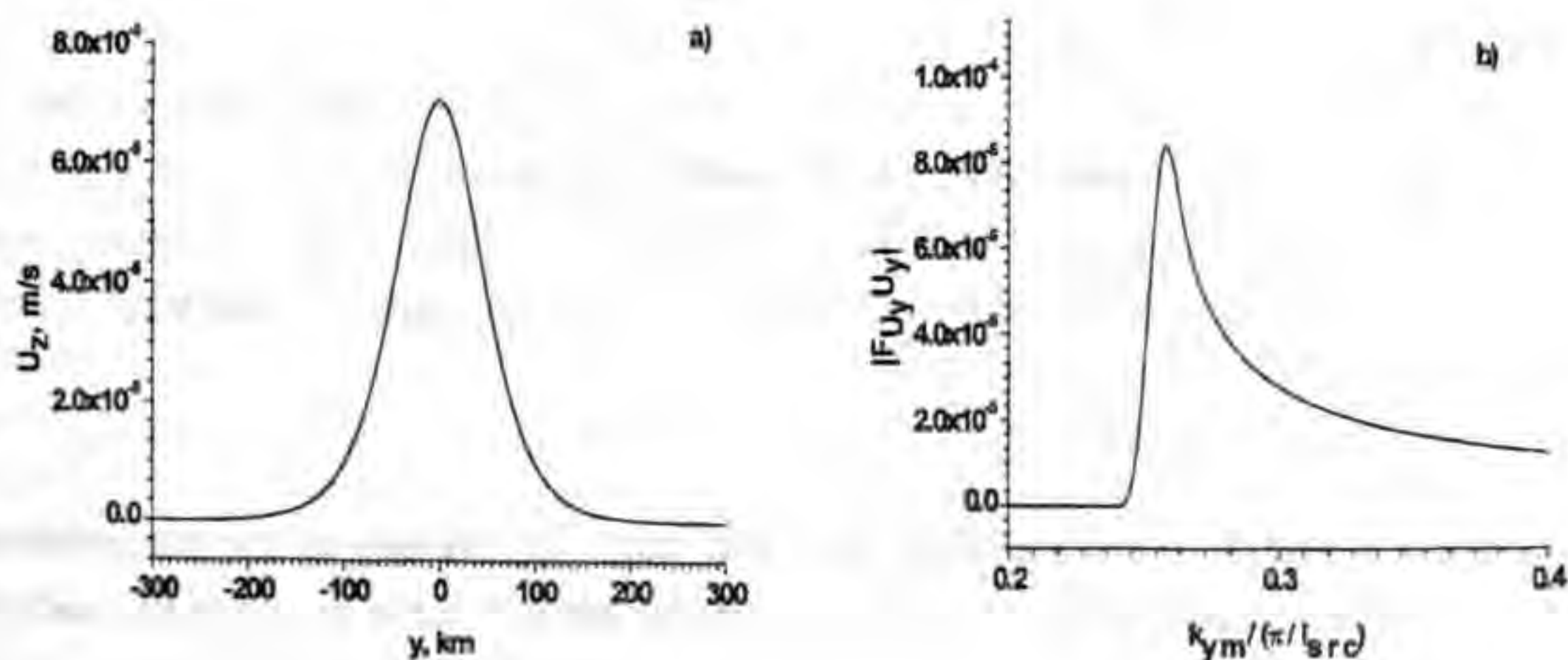


Fig. 2 a) Spatial distribution of vertical velocity for 1D elongated AGW source with characteristic dimension $l_{src}=100$ km and period 40 min.; b) spectral distribution of "driving force" $|F_{U_y} U_y|$ at the altitude $Z=250$ km.

To model the excitation of AGW by the lithospheric gas source and to compute AGW velocity at the altitude $Z=250$ km, the model [11] was used. The shape of this spectral distribution is connected with the presence in the AGW spectrum of

the "reactive modes". These modes do not propagate in the vertical direction (they have purely imaginary vertical wavenumbers), in distinction to the propagating modes. Reactive modes in the spectrum of AGW excited by the lithospheric source were not taken into account, in particular, in the model [6], but considered in details in [12, 11]. An existence of these modes was mentioned in the classic paper [1]. As seen from the dispersion equation for the AGW [1, 11, 12], under definite value of the horizontal wavenumber, $k_y = k_{y0}$, the vertical wavenumber, k_z , is equal to zero. Respective value of the horizontal wavenumber is [1, 11, 12]:

$$k_y = k_{y0} \approx \frac{\omega}{2H\omega_b}, k_z(k_{y0}) = 0. \quad (5a)$$

Here, H and ω_b are the atmospheric scale height and Brunt-Vaisala frequency [1], respectively. For $k_y > k_{y0}$, the value k_z is real, and corresponding AGW modes propagate by height, while for $k_y < k_{y0}$ the value k_z is imaginary and corresponding (reactive) mode decay by the height (without dissipation) in comparison with propagating modes which have the amplitudes increasing by height proportionally to $\exp(z/2H)$ [1]. Therefore we can refer to the horizontal wavenumber $k_y = k_{y0}$ as to the "boundary" between reactive and propagating modes. As a result, in the spectrum of "driving force" $|F_U, U_y|$, computed at the large enough altitude ($Z=250$ km), the region of the wavenumbers $k_y < k_{y0}$ is "cut", see Fig. 2a. If the values of k_y are large enough, corresponding driving force also tends to zero, because corresponding spectrum components of $U_{y,z}$ decrease fast enough with the increase of k_y . Therefore, a presence of the maximum in the spectrum of $|F_U, U_y|$ (Fig. 2b) is rather natural. To understand the location of this peak, remind one of the "polarization relations" for the AGW [1, 12], namely, $U_y/U_z = -i\gamma_0 H \omega (i\gamma_0 K_z + 1/H) / (\gamma_0 g H k_y^2 - \omega^2)$. Here $K_z = k_z + i/2H$, γ_0, g are adiabatic constant and free-fall acceleration, respectively. Therefore, for the given source with the smooth dependence of U_z on the horizontal wavenumber, the resonant excitation of U_x takes place under the condition

$$k_y = k_{y1} = \frac{\omega}{\sqrt{\gamma_0 g H}}. \quad (5b)$$

It is important that

$$k_{y1} < k_{y0}; k_{y0} - k_{y1} \ll k_{y0}. \quad (5c)$$

The first of the inequalities (5 c) means that "resonant" AGW mode with $k_y = k_{y0}$ is reactive, and its amplitude would be small on the large enough altitude in the presence of finite dissipation. The second inequality means that the amplitude would be rather large for the mode with the value of the horizontal wavenumber $k_y = k_{y0}$ which is on the boundary of the reactive modes, in

accordance with (5a). In the real atmosphere, the reactive modes have rather small amplitude on the height large enough above the source, taking into account both the dissipation in the atmosphere and reactive non-dissipative "decay" of the reactive modes.. The dissipation causes the finiteness of the excited amplitudes even under the condition of resonant excitation in the lithosphere. In the present work, reactive modes (with $|k_y| < k_{y0}$) are just cut from the spectrum of $|F_{U_y} U_y|$ artificially at the altitude $Z=250$ km, where the ionospheric response is studied. Taking into account that, in the accordance with (5c), the "boundary" $k_y = k_{y0}$ is very closed to the resonant value $k_y = k_{y1}$ and that the reactive modes with $|k_y| < k_{y0}$ are "cut" from the spectrum of AGW at the altitude $Z=250$ km, we could understand the shape of the spectral distribution of the $|F_{U_y} U_y|$ in the Fig. 2b.

Evaluation of the development of the Rayleigh-Taylor instability in the presence of AGW packet. We do not intend to present in this paper the comprehensive theory of the development of the RTI in the presence of the AGW packet. To do this, it would be necessary to solve the eq. (1a) for each mode separately with the consequent summation by all the spectrum and getting the total perturbation of the electron concentration. Instead of this, in the present work, taking into account above mentioned spectral peculiarities of the AGW packet and "driving force in the right-hand of the eqs. (1a, 2c), the evaluation is done for the definite mode of the AGW packet, which characterizes, nevertheless, to definite extent, the influence of the wave packet "as a whole" on the unstable ionospheric plasma modes. For the evaluations, remind that although the wind was not taken into account in the present calculations of the AGW, it exists, in particular in the ionospheric E region and restricts the penetration of the AGW into the altitudes of the region F [17]. If we suppose that the typical wind velocity is of order of 100 m/s, we get, using the calculations [17], that only AGW modes with horizontal phase velocity V_f exceeding this threshold value could penetrate into the region F of the ionosphere and become a driving force for the plasma instability development.. To be sure that AGW really penetrate into the F region of the ionosphere, we could demand, that the minimum phase velocity of the AGW mode should be, say, 150 m/s. Taking into account the presence of the wind, we include corresponding Doppler shift into the value of the "frequency mismatch" $\Delta\omega$. As a result, we would have:

$$\Delta\omega = \omega_{AGW} + \vec{k}\vec{U}_0 - \omega'_{RTI} \approx \omega_{AGW} + k_y U'_{0y} + k_x U'_{0x}, \quad (6)$$

where ω_{AGW} is the frequency of AGW which is included into the calculations of AGW in the absence of wind, in particular, into the calculations used to obtain Fig. 2b. In the spectrum of "driving force", the mode corresponding to the maximum with the horizontal wave number which lies on the "boundary"

between reactive and propagating modes, $k_y \sim k_{y0}$ reveals clearly. For this mode, $V_f \sim 300 \text{ m/s}$ what is much more than the value $\sim 100 \text{ m/s}$. Detail analysis shows that this mode leads to a very effective development of the RTI instability, in spite of that for this mode, the condition of spatial resonance [13] between the AGW and plasma mode does not satisfy (in the terminology of [13] this means that $\Delta\omega \neq 0$). Therefore, we present below the evaluation of the development of unstable plasma mode connected with only mode of AGW which has the horizontal wavenumber $k_y \sim k_{y0}$. Taking into account that corresponding value of $k_y \sim k_{y0}$ is relatively small and putting

$$U'_{0y} = 0, k_{y0} \sim 7.75 \cdot 10^{-3} \text{ km}^{-1}, \lambda_{y0} \sim 810 \text{ km}, k_z \rightarrow 0, \text{ when } k_y \rightarrow k_{y0}; \Delta\omega \gg \gamma, \quad (7a)$$

where $\lambda_{y0} = 2\pi/k_{y0}$, we get from the eqs. (2a), (3a) and the expressions from [1, 11] for U_y , or using directly the value of driving force $|F_U U_y|$ shown in Fig. 2b:

$$\gamma \sim \frac{1}{L_{ef}} \left(\frac{g}{v_m} - U'_{0z} \right) - \alpha_0, |F_U U_y| \sim \frac{U_y}{L_{ef}^2 k_y}, \Delta\omega \sim \omega_{AGW} \sim 2.5 \cdot 10^{-3} \text{ c}^{-1}. \quad (7b)$$

Using, in accordance with [16, 13, 14], the values $L_{ef} \sim 10 \text{ km}$, $v_m \sim 1 \text{ c}^{-1}$, $\alpha_0 \sim 0.5 \cdot 10^{-3} \text{ c}^{-1}$, $U'_{0z} \sim -15 \text{ M/c}$, we get:

$$|N'(t)| \equiv \frac{N'_e(t)}{N_{e0}} \sim \frac{|F_U U_y|}{\Delta\omega} e^{\gamma t}; \gamma \sim 2 \cdot 10^{-3} \text{ s}^{-1}. \quad (7c)$$

Introduce characteristic "growth time" t_{char} of the $|N'(t)|$ in such a way, that during a time $t \sim t_{char}$, we get $|N'(t)| \sim 1$ (naturally, only in linear approximation). Note, that in this case ionospheric response in the equatorial region exceeds the response to the AGW from the same source (shown in Fig. 1a) in the middle-latitude region (calculations not presented here show that in the middle-latitude region, $|N'(t)| \sim 0.2$). Finally, we get from (7b, c)

$$t_{char} \sim 0.5 \text{ hour}. \quad (7d)$$

Therefore, in this case the development of the RTI in the presence of AGW packet is rather effective.

Discussion and conclusions. Note that the great effectiveness of the RTI development is connected with the near-resonant character of the excitation of the AGW mode with the horizontal wavenumber on the boundary between reactive and propagating modes ($k_y = k_{y0}$); in this case, in accordance with (5a), $k_z \rightarrow 0$. At the same time, with finite k_z , the value of γ decreases rapidly, see eq. (2a). Therefore, for the AGW mode with $k_y = k_{y0}$, the spatial resonance between this and plasma mode is absent, but, nevertheless, the value of "driving force" increases remarkably. This is connected with the resonant excitation of AGW mode as such and with the considerable value of instability increment under the condition $k_y = k_{y0}$. For the AGW with period $\sim 40 \text{ min.}$, the mode

from the wave packet of the lithospheric origin with $\lambda_y \sim 800 \text{ km}$ corresponds to the conditions discussed above. Seismogenic perturbations of the electron concentration with such a wavelength had been observed in the F region of the ionosphere [18]. As far as we know, peculiarities of the AGW packet considered in the present paper have not been discussed before in connection with the response of unstable plasma of ionospheric F region. At the same time, more detail analysis of the experimental data is necessary to determine whether the observed seismogenic perturbations of the electron concentration with the characteristic wavelength $\sim 800 \text{ km}$ in the equatorial region F were connected with the development of RTI or with the response of the *stable* ionosphere to the mode of AGW, but, again, to the mode, excited in the vicinity of the resonance of AGW in the near-ground atmosphere. Finally, we can make the following conclusions.

1. A considerable effectiveness of the development of Rayleigh- Taylor instability (RTI) in the plasma of the ionospheric F region in the presence of driving force caused by the packet of acoustic-gravity waves (AGW) excited by the lithospheric source is shown.
2. In particular, the mode of AGW packet which is on the boundary between reactive and propagating modes is excited by the lithospheric source very effectively and the increment of the corresponding plasma mode is rather considerable, in spite of that in this case AGW and plasma modes are *not* in the spatial resonance. These modes have a horizontal wavelength of order of 800 km. Corresponding seismogenic perturbations of the electron concentration are rather typical for the F region of the ionosphere, in accordance with the results of observations [18].
3. The considerable distinctions of the theory developed in the present paper from those presented in the previous works (see, for example, [13] and references in this paper) are: (1) we took into account the driving force for the RTI connected not only with vertical, but also with horizontal component of the AGW velocity; moreover, the driving force connected with the horizontal velocity component exceeds the other components of the driving force; (2) we evaluated the development of the plasma instability in the presence of not a single harmonic AGW, as in [13], but of a wave packet excited by the lithospheric source.

References

1. Hines C.O., Internal atmospheric gravity waves at ionospheric heights. // *Can. J. Phys.* -1960.- vol. 38, p.1441-1481.
2. Mikhailov Yu. M., Mikhailova G. A., Kapustina O. V., Buzevich A. V., Smirnov S. E. Variations of the power spectra of electric field in the near-ground atmosphere on Kamchatka. // *Geomagnetizm and aeronomy.*- 2003.- 43, N 3,- C.422-428.

3. Mikhailov Yu. M., Mikhailova G. A., Druzin G. I., Kapustina O. V. Detection of the atmospheric waves in the power spectra of atmospheric noise // *Geomagnetism and aeronomy*. - 2004. - 44, № 2. - PP. 245-253.
4. Molchanov O. A., M. Hayakawa and K. Miyaki, VLF/LF sounding of the lower ionosphere to study the role of atmospheric oscillations in the lithosphere-ionosphere coupling, // *Adv. Polar Upper Atmos. Res.*, - 2001.-15, -p.146-158.
5. Linkov E. M., Petrova L. N., Osipov K. C. Seismogravity pulsations of the Earth and perturbations of the atmosphere as possible earthquake precursors. // *Reports of Acad, of Sci. USSR, Geophysics*, -1990, -313, N 5. -C.1095-1098.
6. Gokhberg M. B., Nekrasov A. K., Shalimov S. L. On the influence of unstable release of green-house effect gases in the seismically active regions on the ionosphere. // *Physics of the Earth*. -1996. -№8. -C.52-55.
7. Tronin A. A., Satellite thermal survey application for earthquake prediction, // *in: Atmospheric and ionospheric electromagnetic phenomena: associated with earthquakes*. Eds. M. Hayakawa. - TERRAPUB -Tokyo -1999.-pp. 717-746.
8. Gladishev V. A., Fishkova L. M. Optical research of seismoactivity effects of the ionosphere. // *In: Electromagnetic phenomena related to earthquake prediction*. Ed. M. Hayakawa, Y. Fujinawa.. -TERRAPUB Tokyo.- 1994.- pp. 375-380.
9. Sorokin V. M., Fedorovich G. V. Physics of the slow magnetohydrodynamic waves in the ionospheric plasma. // *Moscow., Energoizdat*.- 1982.-P. 465.
10. De Jager P. C. An instability of acoustic waves caused by radiation and the influence of chemical reactions on it. // *J. Geophys. Res.*-1990. -95-10- 017.
11. Gotynyan O. E., Ivchenko V. M., Rapoport Yu. G. Connection between the characteristics of single lithospheric source of acoustic-gravity waves and ionospheric response. // *Space Science and technology*. - 2003. -T. 9, № 5.6.-P. 124-129.
12. Gotynyan O. E., Ivchenko V. M., Rapoport Yu. G. Model of the internal gravity waves excited by lithospheric greenhouse effect gases. // *Space Science and technology*. - 2001. T. 7. Suppl., № 2. P. 26-33.
13. Huang C.S., Kelley C., Nonlinear evolution of equatorial spread of F2. Gravity wave seeding of Rayleigh-Taylor instability. // *J. Geophys. Res.* -1996.- A101.- 293.
14. Kendall P.C., and W. M. Pickering, Magnetoplasma diffusion at F2-region altitudes. // *Planet Space Sci.*- 1967.- 15.- C.825,.
15. Genkin L. G., Eruhimov L. M., Myasnikov E. N., Shvarts M. M. To the question of formation and buoyancy of non-isothermal ionospheric and

- chromospheric "bubbles". // Proceedings of the higher educational institutions, Radiophysics. -1987. –V. 30, -P. 567-577.
- 16.Sekar. R., Raghavarao. R. Role of the vertical winds on the Rayleigh-Taylor mode instabilities of the night-equatorial ionosphere. //J. Atmos. Terrestr. Phys.-1987. – 49. –p.981-985.
- 17.Ding F., Wan W., Yuan H. The influence of background winds and attenuation on the propagation of atmospheric gravity waves // Journ. Atmos. Solar-Terrestr. Phys.- 2003.- 65.-p. 857-869.
- 18.Fedorenko A. K., Lizunov G. V. Spectral analysis of the quasiwave perturbations of the region F2 of the ionosphere: high-scale perturbations on the terminator and middle-scale perturbations from the powerful earthquakes. //Collection of abstracts of the Forth Ukraine conference on the perspective space reasearches.- Ponizovka, Crimea, 19-26 Sept. 2004, P. 54.

Надійшла до редакції 18. 04. 2004

УДК 520.17

Євген П. Удалов¹, Юрій А.
Хомич²

**Визначення коефіцієнтів
концентрації та інтенсивності
напружень з використанням
явища рефракції світла.**

Спираючись на попередні роботи де була викладена теорія градієнтної фотопружності заснована на явищі рефракції і побудована на базі взаємозв'язку тензора діелектричної проникності і тензора напружень, показано можливість визначення коефіцієнтів концентрації і інтенсивності напружень.

Новизна запропонованої методики полягає у вимірюванні кутів рефракції лазерного випромінювання у досліджуваній точці і вже на основі цього проведення розрахунків коефіцієнтів концентрації та інтенсивності напружень.

У порівнянні з поляризаційно-оптичним методом градієнтна фотопружність має переваги в більшій точності даних що обраховуються (відносно теоретичних).

Ключові слова: тензор діелектричної проникності, градієнтне поле напружень, рефракція лазерного випромінювання, нормальні напруження, коефіцієнт інтенсивності напружень.

¹ E-mail: udalov@univ.kiev.ua

² E-mail: homich@rada.gov.ua

Evgen P. Udalov¹, Yuri A.
Khomich²

**Definitions of Stress
Concentration and Intensity
Coefficients with Light Refraction
Phenomena Using**

On the base of previous works, in which was described theory of gradient photoelasticity, based on light refraction phenomenon and proceed from permittivity tensor and stress tensor interconnection, the possibility of stress concentration and stress intensity coefficients determination is demonstrated.

Novelty of proposed method is in laser beam refraction angles measuring in investigation point and than, on the base of this, concentration and intensity stresses coefficients calculating.

In comparison with polarizing-optical method, gradiental photoelasticity method has preferences in the greater precision of calculated data (respective to theoretical).

Key Words: tensor of permittivity, gradient stress of fields, refraction lasers light, normal stresses, stress intensity coefficients.

Уведення

Підвищення якості, надійності і довговічності сучасних машин і конструкцій, що працюють у великих діапазонах навантажень, висуває в якості однієї з найважливіших проблем критерій їхньої міцності. Експериментальні методи механіки і фізики деформованого середовища широко використовуються для оцінки міцності виробів при статичних, динамічних і теплових режимах навантаження. Вони мають переважające значення в тих випадках, коли аналітичні чи чисельні підходи до рішення задачі малоефективні чи відсутні.

Одним з найбільш розвинутих і часто застосовуваних експериментальних методів дослідження напружено-деформованого стану (НДС) конструкцій і їхніх елементів є метод фотопружності.

Особливо ефективно його застосування при дослідженні концентрації напружень. З огляду на існуючі тенденції оптимального проектування відповідальних деталей машин, зниження їхньої матеріалоемності застосуванням нових композитних матеріалів, розвиток методу фотопружності в дослідженні локальних деформацій з великими градієнтами напружень стає особливо актуальним. Важливого значення набуває розвиток нових фізичних підходів до оптичних ефектів у фотопружних тілах.

Розрахунок НДС, коефіцієнтів концентрації і інтенсивності напружень на основі рефрактометрії.

На базі рефрактометрії існує можливість визначення коефіцієнтів інтенсивності та коефіцієнтів концентрації напружень. Майже усі складні елементи машин та конструкцій мають отвори, ребра і т.п., в околі яких значно зростають напруження. Ці області, як правило, є градієнтними по напруженнях. Згідно з [4] коефіцієнт концентрації при хрумкому руйнуванні має вигляд :

$$K_t = \delta_{\max} / \delta_{\text{ном}}; K_{\tau} = \tau_{\max} / \tau_{\text{ном}}, \quad (1.1)$$

де $\delta_{\max}$ - максимальні напруження, існуючі в зразку з дефектом;

$\delta_{\text{ном}}$ - напруження в цих же точках зразка без дефекту;

K_t - коефіцієнт концентрації напружень при дії нормальних напружень (розтяг, згин);

K_{τ} - коефіцієнт концентрації напружень при дії дотичних напружень (кручення).

Визначивши експериментальні точки на досліджуваній моделі де $\delta = \delta(x, y)$ має максимальне значення, а самі значення отримавши на базі виразів (2.7), (2.8) [7], коефіцієнт концентрації можна подати як:

$$K_i = \left(r/2\right)^{1/2} / \cos \theta / 2 \left[\delta_x(x_0, y_0) + \delta_y(x_0, y_0) + \frac{1}{c_s} \int_{x_0, y_0}^{x, y} (\gamma_s \cos \alpha \mp \theta_s \sin \alpha) dx + \right. \\ \left. + \frac{1}{c_s} \int_{x_0, y_0}^{x, y} (\theta_s \cos \alpha \pm \gamma_s \sin \alpha) dy \right];$$

$$K_i^x = \frac{1}{\delta_{ном}} \left[\delta_x(x_0, y_0) + \frac{1}{2c_R} \int_{x_0}^x (\gamma_s \cos \alpha \mp \theta_s \sin \alpha) dx + \right. \\ \left. + \frac{1}{2c_R} \int_{x_0}^x (\gamma_R \cos \alpha \mp \theta_R \sin \alpha) \cos 2\alpha dx + \right. \\ \left. + \frac{1}{2c_s} \int_{y_0}^y (\theta_s \cos \alpha \pm \gamma_s \sin \alpha) dy - \right. \\ \left. - \frac{1}{2c_R} \int_{y_0}^y (\theta_R \cos \alpha \pm \gamma_R \sin \alpha) \cos 2\alpha dy \right]. \quad (1.2)$$

де K_i^x - коефіцієнт концентрації напружень для компоненти нормальних напружень.

Спираючись на попередні статті та проведені в них викладки, слід визначити, що:

$$\gamma_R = \gamma_i - \gamma_j; \theta_R = \theta_i - \theta_j; c_R = c_1 - c_2; \gamma_i^* = \gamma_i / L; \gamma_j^* = \gamma_j / L; \quad (1.3)$$

$$\gamma_s = \gamma_i + \gamma_j; \theta_s = \theta_i + \theta_j; c_s = c_1 + c_2; \theta_i^* = \theta_i / L; \theta_j^* = \theta_j / L;$$

θ_i, θ_j - кути рефракції в досліджуваній точці при проходженні крізь модель товщиною L світлових потоків i і j поляризації, α - кут ізокліни.

Рішенням багатьох просторових задач механіки руйнування є визначення КІН (коефіцієнту інтенсивності напружень) у зонах великих концентрацій напружень. Дослідження процесів, пов'язаних з особливо великими градієнтами напружень, такими як тріщиноутворення , перерозподіл навантажень при зсуві тріщин, також потребує визначенням КІН.

Згідно з [1,4,5,7], напружений стан досліджуваного тіла з концентратором напружень описується рівнянням:

$$\delta_{i,j}^* = \delta_{i,j}^0 + \delta_{i,j} \quad (1.4)$$

де $\delta_{i,j}^*$ - компоненти загального напруженого стану (утворюються в тілі з тріщиною чи іншим концентратором напружень під дією прикладеної системи зовнішніх сил);

$\delta_{i,j}^0$ - компоненти основного напруженого стану (виникають у такому ж тілі без тріщин чи концентратора при тому самий навантаженні);

$\delta_{i,j}$ - компоненти додаткового напруженого стану, викликані наявністю концентратора напружень і характеризують концентрацію напружень у локальній точці збурення.

У загальному випадку для компоненти додаткового напруженого стану поблизу локального збурення, яке знаходиться в полі напружень, що піддано розтягу, можна записати [6]:

$$K_I = \left(\frac{r}{2}\right)^{1/2} / \cos \theta / 2 \left[\delta_x(x_0, y_0) + \delta_y(x_0, y_0) + \frac{1}{c_s} \int_{x_0, y_0}^{x, y} (\gamma_s \cos \alpha \mp \theta_s \sin \alpha) dx + \frac{1}{c_s} \int_{x_0, y_0}^{x, y} (\theta_s \cos \alpha \pm \gamma_s \sin \alpha) dy \right], \quad (1.5)$$

де r, θ - полярні координати з полюсом у вершині тріщини чи збурення;

K_I - коефіцієнт інтенсивності напружень;

$\delta_x(x_0, y_0) + \delta_y(x_0, y_0)$ - стала складова напруження.

Рівняння (2.15) подає КІН для руйнування 1-го типу в залежності від безпосередньо вимірюваних значень кутів рефракції θ_s, γ_s та полярних координат r, θ .

У випадку довільно орієнтованої тріщини в пластинці, яка навантажена розтягом у віддаленій від тріщини області, асимптотичний розподіл напружень в околі вершини тріщини можна подати [2,4] у вигляді:

$$\delta_x = K_I / (32r)^{1/2} (3 \cos \theta/2 + \cos 5\theta/2) + K_{II} / (32r)^{1/2} (-7 \sin \theta/2 - \sin 5\theta/2) + \delta_{ax};$$

$$\delta_y = K_I / (32r)^{1/2} (5 \cos \theta/2 - \cos 5\theta/2) + K_{II} / (32r)^{1/2} (-\sin \theta/2 + \sin 5\theta/2) + \delta_{ay}; \quad (1.6)$$

$$\tau_{xy} = K_I / (32r)^{1/2} (-\sin \theta/2 + \sin 5\theta/2) + K_{II} / (32r)^{1/2} (3 \cos \theta/2 + \cos 5\theta/2) + \tau_{ax},$$

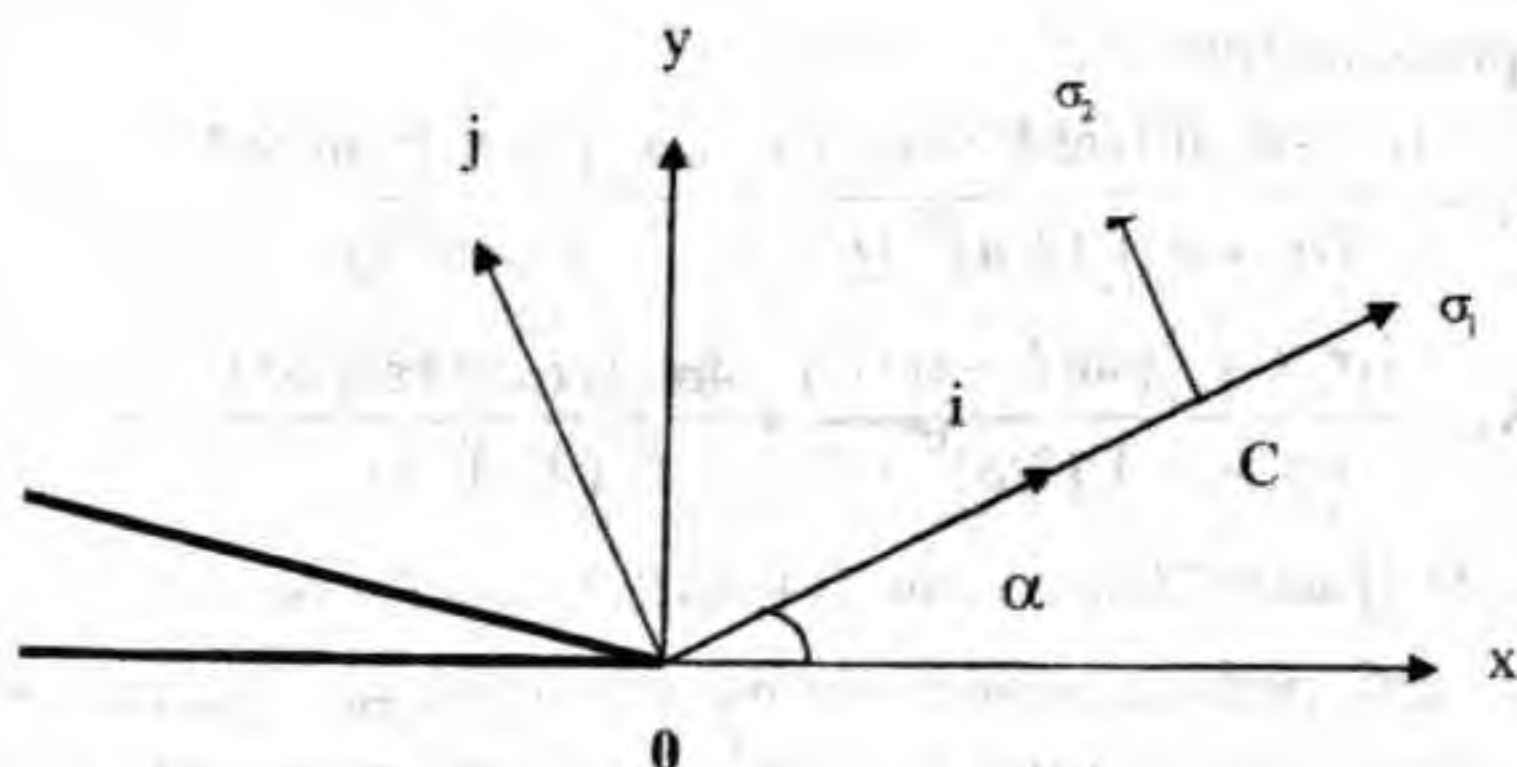
де r та θ полярні координати точок у системі координат пов'язаною з верхівкою тріщини.

Нехай через точку C проходить ізокліна параметру α . Тоді площадка головних напружень у досліджуваній точці зорієнтована під кутом α до вісі тріщини. У точці θ розглянемо нову систему координат $i, 0, j$ розгорнуту на кут α по відношенню до вісі тріщини.

Тоді компоненти напруженого стану $\sigma_i, \sigma_j, \tau_{ij}$, зв'язані з $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ співвідношеннями:

$$\sigma_x + \sigma_y = \sigma_i + \sigma_j;$$

$$\sigma_x - \sigma_y + \tau_{xy} = (\sigma_i - \sigma_j + 2i\tau_{ij}) \exp 2i\alpha \quad (1.7)$$



Малюнок. 1. Місцева система координат для тріщини.

Переходячи до нової системи координат, пов'язаною з тріщиною отримаємо :

$$\begin{aligned}\sigma_i &= \frac{K_I}{(32r)^{1/2}} (4 \cos \theta/2 + \cos F - \cos N) + \frac{K_{II}}{(32r)^{1/2}} (4 \sin \theta/2 + 3 \sin F + \sin N) - \\ &\quad - (1/2) \sigma_{ox}^* \cos 2\alpha; \\ \sigma_j &= \frac{K_I}{(32r)^{1/2}} (4 \cos \theta/2 - \cos F + \cos N) - \frac{K_{II}}{(32r)^{1/2}} (4 \sin \theta/2 + 3 \sin F + \sin N) - \\ &\quad + (1/2) \sigma_{ox}^* \cos 2\alpha; \\ \tau_{ij} &= \frac{K_I}{(32r)^{1/2}} (-\cos F + \cos N) + \frac{K_{II}}{(32r)^{1/2}} (3 \cos F + \cos N) - (1/2) \sigma_{ox}^* \sin 2\alpha,\end{aligned}\quad (1.8)$$

де $F = \theta/2 - 2\alpha$; $N = 5\theta/2 - 2\alpha$.

Зрозуміло, що в точці C $\tau_{xy} = 0$, це дає спрощення :

$$\frac{K_I}{(32r)^{1/2}} (-\sin F + \sin N) + \frac{K_{II}}{(32r)^{1/2}} (3 \cos F + \cos N) - (1/2) \sigma_{ox}^* \sin 2\alpha = 0; \quad (1.9)$$

З іншого боку, у точці C $\sigma_i = \sigma_j$ згідно з (1.8)

$$\sigma_x + \sigma_y = \sigma_i + \sigma_j = K_I (2/r)^{1/2} \cos \theta/2 - K_{II} (2/r)^{1/2} \sin \theta/2; \quad (1.10)$$

Рівняння (1.9) та (1.10) можна розв'язувати сумісно відносно K_I та K_{II} .

$$K_I = (\sigma_x + \sigma_y) (3 \cos F + \cos N) / D + 4 \sigma_{ox}^* \sin \theta/2 \sin 2\alpha / D; \quad (1.11)$$

$$K_{II} = (\sigma_x + \sigma_y) (\sin F - \sin N) / D + 4 \sigma_{ox}^* \cos \theta/2 \sin 2\alpha / D;$$

$$\text{Де } D = (2/r)^{1/2} [(\sin N - \sin F) \sin \theta/2 + (3 \cos F + \cos N) \cos \theta/2]; \quad (1.12)$$

Подаючи коефіцієнти інтенсивності як :

$$K_i = (\sigma_x + \sigma_y)_0 l^{1/2} K_i \quad (i = I, II) \quad (1.13)$$

де $(\sigma_x + \sigma_y)_a$ - сума напружень у віддаленій від тріщини області, а l - половина довжини тріщини. Вирази (1.11) і (1.12) можна подати в безрозмірних величинах:

$$K_I = \frac{(\sigma_x + \sigma_y)(3 \cos F + \cos N)}{(\sigma_x + \sigma_y)_0 (2/a)^{1/2} Q} + \frac{4\sigma_{\alpha} (\sin \theta/2 \sin 2\alpha)}{(2/a)^{1/2} Q}; \quad (1.14)$$

$$K_{II} = \frac{(\sigma_x + \sigma_y)(\sin N - \sin F)}{(\sigma_x + \sigma_y)_0 (2/a)^{1/2} Q} + \frac{4\sigma_{\alpha} (\cos \theta/2 \sin 2\alpha)}{(2/a)^{1/2} Q}; \quad (1.15)$$

де $Q = [\sin \theta/2 (\sin N - \sin F) + \cos \theta/2 (3 \cos F + \cos N)]$.

Надалі, рефрактометричним методом вимірявши на одній з ізоклін, яка має достатньо велику (порядку чверті довжини тріщини) область з прямолінійним відрізком, починаючи з верхівки, декілька значень сум напружень для 8-10 точок (виміряючи при цьому α та θ) обраховують значення функцій

$$\begin{aligned} f &= f(\theta, \alpha) = (3 \cos F + \cos N)/Q; \\ g &= g(\theta, \alpha) = (3 \sin F - \sin N)/Q; \end{aligned} \quad (1.16)$$

За допомогою ЕОМ, на координатну сітку наносять обраховані значення

$$(\sigma_x + \sigma_y) f, f, g = F(a_l/2)^{1/2} \quad (1.17)$$

Безрозмірні коефіцієнти інтенсивності напружень K_I та K_{II} тепер можна визначити як тангенси кутів нахилу χ до осі абсцис. $(\sigma_x + \sigma_y)$ обраховують з виразу (2.11) [7], використовуючи рефрактометричні дослідження.

$$\sigma_x + \sigma_y = \sigma_0 + \frac{1}{c_s x_0} \int (\gamma_s \cos \alpha \mp \theta_s \sin \alpha) dx + \frac{1}{c_s y_0} \int (\theta_s \cos \alpha \pm \gamma_s \sin \alpha) dy, \quad (1.18)$$

де

$$\sigma_0 = \sigma_x(x_0, y_0) + \sigma_y(x_0, y_0).$$

$$K_I = f \operatorname{tg} \chi; \quad K_{II} = g \operatorname{tg} \chi; \quad (1.19)$$

Розглянемо практичний приклад визначення K_I , K_{II} , на тестовому експерименті по чистому згину балки з прорізом, виконаної з матеріалу Э-2.

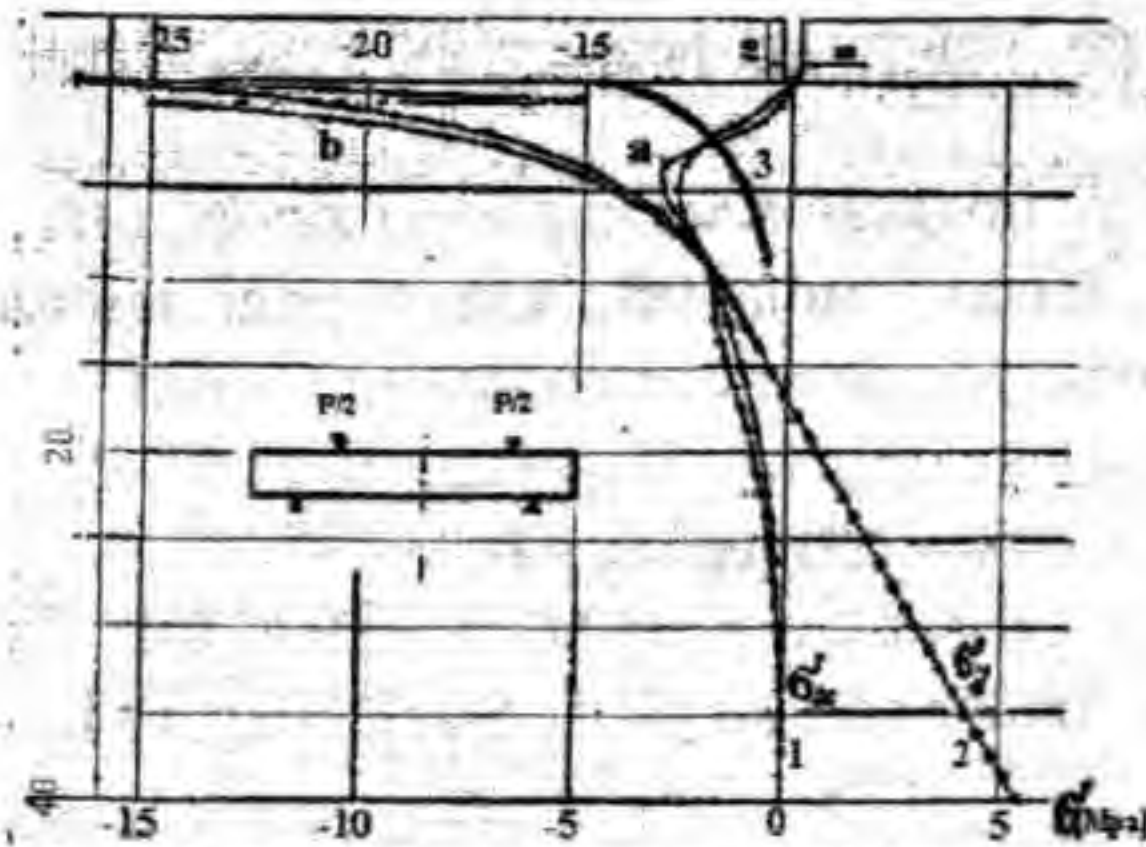
Параметри балки: висота $2b = 1.7 \times 10^{-2}$ м; товщина $L = 4.4 \times 10^{-2}$ м; довжина прорізу $l = 0.5 \times 10^{-2}$ м; радіус округлення прорізу $\rho = 0.17 \times 10^{-2}$ м. До балки прикладалась сила $P = 68.2$ Н, що утворює момент $M = 68.2 \times 10^{-2}$ м.

$$\sigma_{ном} = 6My / L(2b)^3 \quad (1.20)$$

Коефіцієнт концентрації напружень (ККН) можна визначити як

$$K = \sigma_y / \sigma_{ном}$$

Розподіл напружень, отриманих методом градієнтної фотопружності та поляризаційно - оптичним методом подано на малюнку 2.



Малюнок 2. Розподіл діючих номінальних напружень у балці з прорізом навантаженої чистим згином.

Розподіл напружень σ_x, σ_y (криві 1, 2 відповідно) у балці з прорізом виконаної з матеріалу Э-2, розрахований за допомогою а) градієнтної фотопружності, б) поляризаційно - оптичного методу; крива 3 - коефіцієнт концентрації напружень, розрахований за допомогою рефрактометричних вимірів.

Теоретичні значення ККН, отримані при застосуванні методів Патерсона [4,7] такі:

$$\sigma_{max} = 16.4 \text{ МПа}, \sigma_{ном} = 3.42 \text{ МПа}.$$

Ці значення не відрізняється від значення, отриманого на експерименті при застосуванні методу градієнтної фотопружності.

Уявляючи проріз як тріщину з урахуванням її геометрії згідно методики Когаєва [2,3], можна розрахувати коефіцієнти інтенсивності напружень (КІН)

$$K_I = \sigma_{ном} (\pi l)^{1/2} f(k) = 1.65 \times 10^{-1} \text{ МПа/м}.$$

КІН, отриманий на ґрунті експерименту градієнтної фотопружності, по σ_{max}^y дорівнює:

$$K_I = \sigma_{max} (\pi l)^{1/2} / 2 = 1.78 \times 10^{-1} \text{ МПа/м}.$$

Розбіг сягає 7.8%, що виправдано для експерименту. Для порівняння вирахуємо КІН по даним поляризаційно - оптичного експерименту

$$K_I = 1.53 \times 10^{-1} \text{ МПа/м}.$$

Висновки

У цілому, наведені виміри і подані розрахунки відносно методу градієнтної фотопружності свідчать про те, що усі оптичні виміри (мається

на увазі поляризаційно - оптичний метод), які проводять у фотопружних моделях чи їх зрізах, обов'язково повинні враховувати явища рефракції світла в області градієнтних полів напружень (ОГПН). Традиційні методи вимірювань, прийняті у фотопружності в областях ОГПН, таких як відчини, тріщини, дають занижені значення максимальних напружень КІН, ККН. Це приводить до невірних розрахунків усієї конструкції при її реальному втіленні.

Обмеження методу полягає в можливості проводити дослідження на плоских моделях чи „зрізах” моделей, але в ряді випадків цю вимогу можна виключити використовуючи спеціальні прийоми.

Література

1. Photoelastic analysis. /under edition N. A. Strelchuks, G.L. Hesins. Moscow, Building publishing, 1975, 317 s.
2. Neyber. Stress concentration. OGIZ. State publishing house of the Technical & Theoretical literature, M., 1947, 204 s.
3. Kogaev B.V., Mashutov N.A., Gusenkov A.L. Calculations of details of machines both designs on strength and longevity. M.: engineering, 1985, 224 s.
4. Peterson R. Factors of stress concentration. Moscow, World, 1977, 304 s.
5. Udalov E.P., Kepich T.Y. Separation of stresses with usage of a refraction of light. The theses of the reports I of an All-Union symposium "Mechanics and physics of destruction of composite materials and designs ", Ujgorod,, 1988, т.1, s. 32-33.
6. E.Udalov, A.Oliynic. Determination of all stress tensor components on the object surfaces using holographic interferometer. The volume "Current Research on Holography and interferometric methods for object properties measurements" is received by SPIE. 2003, N 5134.
7. Євген Удалов. Рефракція лазерного випромінювання в області високих градієнтів напружень анізотропних середовищ. Голографические методы в науке и технике. Л. РТІ ЛІЯФ, 1990, 1-33с.
8. Savin G.I. Stress concentration about curvilinear holes in slices and shells. The receiving tank "Stress concentration". K.: Kiev, Naukova Dumka, 1965, s. 5-38.

Надійшла до редакції 15.02.2005

УДК 520.17

Євген П. Удалов¹, Юрій А. Хомич²

Експериментальне дослідження рефракції лазерного випро- мінювання у високоградієнтних полях фотопружних матеріалів

У роботі подано новий підхід щодо проходження електромагнітного випромінювання у фотопружних середовищах, що включають в себе градієнтні поля напружень. Підхід заснований на розгляді взаємозв'язку тензора діелектричної проникності і тензора напружень у досліджуваній точці середовища.

Описано експериментальну установку яка вимірює кути рефракції з використанням голографічних, муарових та оптоелектронних методів досліджень.

Ключові слова: тензор діелектричної проникності, градієнтне поле напружень, рефракція, нормальні напруження, голографія.

¹ E-mail: udalov@univ.kiev.ua

² E-mail: homich@rada.gov.ua

Evgen P. Udalov¹, Yuri A. Khomich²

Experimental Research Laser Radiation Refraction in Photoelastic Material's Area with High Gradients of Stresses

In the work the new approach to passing electromagnetic radiation in photoelastic media on containing gradient stresses of fields, is stated. The approach is based on consideration of permittivity tensor and stress tensor correlation in tested point of medium.

The experimental unit for refraction angle's measurements with holographic, moiré and optoelectronic methods usage is described.

Key Words: tensor of permittivity, gradient stress of fields, refraction, normal stresses, holographic.

Уведення

Експериментальні методи механіки і фізики деформованого середовища широко використовуються для оцінки міцності виробів при статичних, динамічних і теплових режимах навантаження. Вони мають переважające значення в тих випадках, коли аналітичні чи чисельні підходи до рішення задачі малоефективні чи відсутні.

Розглядаючи явища рефракції в неоднорідному ізотропному середовищі були отримані дозвільні рівняння для нормальних напружень та їх суми в областях із градієнтними полями напружень на основі вимірів кутів рефракції лазерного світла [12]. Подана робота присвячена експериментальному підтвердженню попередньо зроблених теоретичних висновків.

Експериментальні дослідження рефракції світла у фотопружних тілах з високими градієнтами напружень на основі застосування голографічних, муарових і оптоелектронних методів

Виходячи з загальних міркувань про проходження електромагнітних хвиль в оптично прозорому середовищі зі штучно створеною анізотропією, ми прийшли до висновку, що вони потерпають рефракцію [1]. Кількісні виміри величини рефракції зводяться до вимірів малих кутів відхилення світлових променів від свого первісного напрямку. Для практичної реалізації точних вимірів кутів рефракції було використано:

- а. голографічний принцип одержання світлового растру, що записується на термопластичний носій;
- б. муаровий ефект при порівнянні періоду світлового растру з періодом еталонного растру;
- в. оптоелектронне збільшення муарових смуг з виводом на телемонітор;
- г. введення телевізійної інформації в ЕОМ з наступною її обробкою.

З урахуванням дисперсійних залежностей досліджуваних матеріалів вибиралася довжина хвилі, а відповідно, і тип лазера застосованого в експерименті.

1. Експериментальна установка для досліджень явищ рефракції

На експериментальній установці, схемний вигляд якої представлений на рис.1.1, джерелами світла служили два лазери з довжинами хвиль: $\lambda=0,6328$ мкм і $\lambda=0,44$ мкм (ЛГ-215 і ЛГ-70 відповідно). Випромінювання ОКГ падає на чверть хвильову пластинку, здобуває кругову поляризацію, створення якої необхідно для можливості виділення з неї знову лінійної, але вже з орієнтацією, пов'язаною з напрямком головних напружень у досліджуваній точці фотопружної моделі. Для збільшення точності вимірів випромінювання ОКГ "стискається" телескопічною системою й у вигляді світлової голки націлюється на модель. Зміна місця розташування досліджуваної моделі відносно "об'єктного" променя здійснюється за допомогою мікрометричного електромеханічного координатного пристрою. Коли до моделі, виконаної з фотопружного матеріалу що знаходиться в імерсійній ванні, не прикладені зовнішні навантаження - у ній відсутні внутрішні градієнти напружень і явище рефракції не виявляється. При цих умовах здійснюється первісний запис періоду T_0 муарових смуг, що надалі використовується для розрахунків кутів рефракції.

При наявності зовнішніх зусиль, що навантажують фотопружну модель в ній виникають градієнтні поля напружень і "об'єктний" промінь потерпає рефракцію при проходженні крізь модель. Рефракція об'єктного променя викликає зміну кута сходження об'єктного й опорного світлових

пучків. Змінюється період сформованого голографічного світлового растра, а відповідно, і період муарових смуг T .

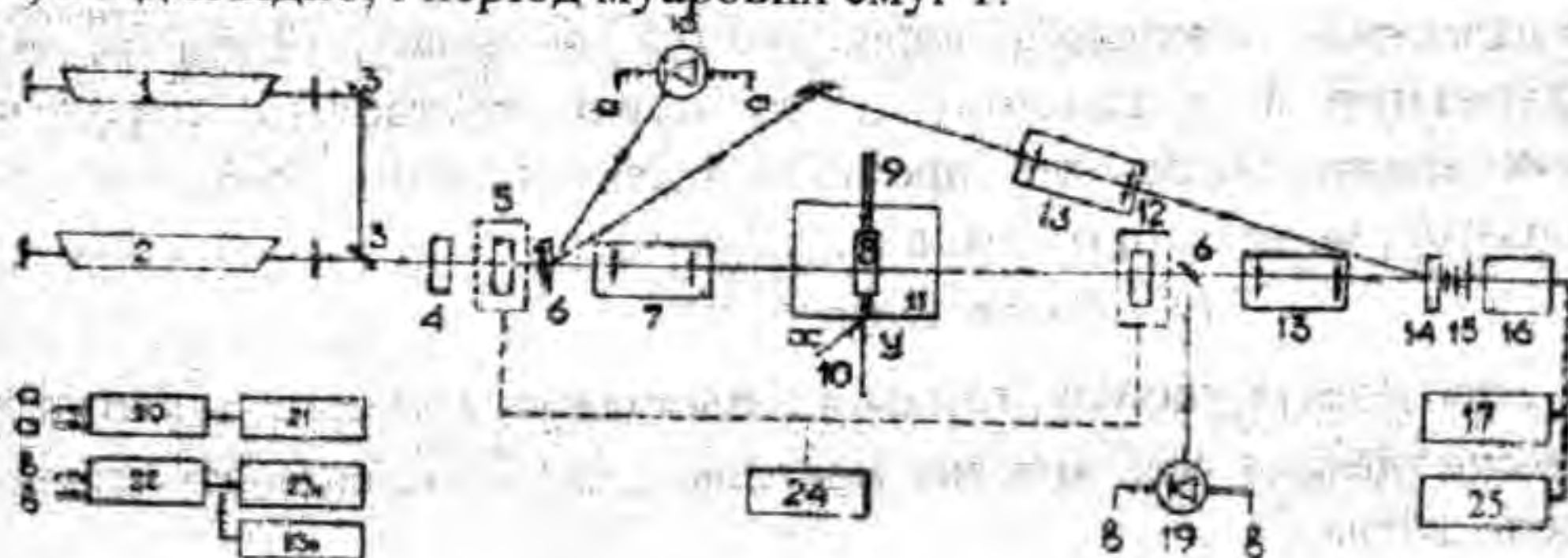


Рис.1.1. Експериментальна установка для дослідження явищ рефракції:

1.	Лазер ЛГ-215.	9.	Пристрій навантаження.	17	Телемонітор.
2.	Лазер ЛГ-70.	10.	Електромеханічний пристрій мікропереміщення	18, 19	Фотоприймачі.
3.	Дзеркала 100 %	11.	Імерсійна ванна	20, 22	Підсилювачі постійного струму.
4.	Пластика - $\lambda/4$.	12.	Сельсин з аналізатором.	21, 23 ₁	Цифрові вольтметри.
5.	Сельсин з поляризатором.	13.	Позитивна телескопічна система	23 ₂	Стрілочний вольтметр.
6.	Дзеркала - 40%/	14.	Дифракційна ґратка	24	Сельсин датчик з показником кута повороту.
7.	Негативна телескопічна система	15.	Об'єктив	25	Вхід на блок спряження з ЕОМ
8.	Досліджуваний зразок	16.	Телекамера		

Розглянемо аналітичні вирази і фізику процесів, які використовуються у розрахунках для визначення кутів рефракції.

Відомим фактом є те, що кожній точці фотопружної моделі, що знаходиться в навантаженому стані, належать свої напруження δ_i , напрям головних площадок яких повернено на кут α_i стосовно головної декартової системи координат x, y, z . Тому для виключення явища дволучезаломлення, вимір кутів рефракції необхідно проводити при

поляризації світла, що збігається по напрямку з однією з головних півосей еліпсоїда хвильових нормалей (для випадку плоскої моделі, що розглядається - еліпсоїд вироджується в еліпс). Оскільки поляроїди (поляризатор і аналізатор) в установці виставлені паралельно, то інтенсивність світла, що пройшло крізь систему поляризатор-модель-аналізатор, може бути описана виразом [5] :

$$I = I_0 (1 - \sin^2 2\beta \sin^2 \delta/2) \quad (1.1)$$

де β - кут нахилу головних площадок стосовно аналізатора, δ - відносна різниця фаз, внесена моделлю, I_0 - інтенсивність падаючого на модель світла.

Різниця фаз, у свою чергу, визначається як

$$\delta = L(c_1^* - c_2^*)(\sigma_1 - \sigma_2) \quad (1.2)$$

де $c_1^* = a_{11}n_0^3/2$; $c_2^* = a_{22}n_0^3/2$, ν - коефіцієнт Пуассона, E - модуль Юнга, n_0 - показник заломлення ненапруженого середовища для фіксованої довгі хвилі λ , a_{11}, a_{22} - абсолютні п'єзооптичні сталі досліджуваного матеріалу, σ_1, σ_2 - головні напруження в досліджуваній точці.

Виходячи з (1.1) I може мати максимальне значення, коли $\beta = 0$. Це положення поляроїдів підбирається оператором за показниками вольтметрів, що знімають величину світлового сигналу за аналізатором. Одночасно визначається кут нахилу головних площадок α стосовно осі x . Показники α зчитується з ноніусної шкали сельсин-датчика. Визначивши напрям головних напружень і розгорнувши аналізатор і поляризатор на 45° стосовно одного з них, можна записати, що [2,4]

$$\delta = 2 \arccos(I/I_0)^{1/2} \quad (1.3)$$

Вираз (1.2), (1.3) дають можливість обчислити величини дотичних і різницю нормальних напружень так-само, як це робиться в традиційному методі фотопружності [5]:

$$\tau_{xy} = \frac{\arccos(I/I_0)^{1/2}}{Lc_R} \sin 2\alpha \quad (1.4)$$

$$\sigma_x - \sigma_y = \frac{2 \arccos(I/I_0)^{1/2}}{Lc_R} \cos 2\alpha. \quad (1.5)$$

де L - товщина досліджуваної моделі, $c_R = c_1^* - c_2^*$

Знаючи кут нахилу головних площадок α (кут ізокліни), роблять два виміри періоду муарових смуг відповідні двом поляризаціям падаючого світла, що збігає по напрямку з напрямками головних напружень у досліджуваній точці фотопружної моделі.

Взаємозв'язок між періодом муарових смуг (за умови паралельності утворюючих світлового й еталонного растру) і величиною кута сходження

інтерферуючих пучків φ , що формують світловий растр, може бути представлена як

$$T = P_1 P_2 / (P_1 - P_2). \quad (1.6)$$

де $P_1 = \lambda / 2 \sin \varphi / 2$ - період світлової інтерференційної картини, P_2 - період еталонного растра, φ - кут сходження інтерферуючих пучків, λ - довжина світлової хвилі.

З виразу (1.6) виводиться рівняння для кута сходження інтерферуючих пучків:

$$\varphi = \arcsin \left[\frac{\lambda (T - P_2)}{2TP_2} \right]. \quad (1.7)$$

Кути рефракції на підставі рівняння (1.7) можна представити, врахувавши малість їхньої абсолютної величини, як

$$\xi_{i,j} = \varphi_{i,j} - \varphi_0 = \frac{\lambda (T_{i,j} - T_0)}{T_{i,j} T_0}. \quad (1.8)$$

де $T_{i,j}$ - періоди муарових смуг для відповідних поляризацій при наявності рефракції, T_0 - період муарових смуг при відсутності рефракції, φ_0 - кут сходження інтерферуючих пучків при відсутності рефракції.

Переходячи до позначень, прийнятих раніше [10-13], запишемо:

$$\gamma'_{i,j} = \xi_{i,j} \sin \omega_{i,j}; \quad \theta'_{i,j} = \xi_{i,j} \cos \omega_{i,j}. \quad (1.9)$$

де $\omega_{i,j}$ - кути між віссю x (вибрана система координат пов'язана з системою координат для досліджуваної моделі, а відповідно і з напрямками головних і нормальних напружень) і прямою, ортогональною до утворюючої еталонного растра для відповідних поляризацій.

Вираз для нормальних напружень через кути рефракції подається у вигляді [10-13]

$$\begin{aligned} \sigma_x = \sigma_x(x_0, y_0) + \frac{1}{2c_s} \int_{x_0}^x (\gamma_s \cos \alpha \mp \theta_s \sin \alpha) dx + \frac{1}{2c_R} \int_{x_0}^x (\gamma_R \cos \alpha \mp \theta_R \sin \alpha) \cos 2\alpha dx + \\ \frac{1}{2c_s} \int_{y_0}^y (\theta_s \cos \alpha \pm \gamma_s \sin \alpha) dy + \frac{1}{2c_R} \int_{y_0}^y (\theta_R \cos \alpha \pm \gamma_R \sin \alpha) \cos 2\alpha dy - 2(H + T), \end{aligned} \quad (1.10)$$

$$\begin{aligned} \sigma_y = \sigma_y(x_0, y_0) + \frac{1}{2c_s} \int_{x_0}^x (\gamma_s \cos \alpha \mp \theta_s \sin \alpha) dx - \frac{1}{2c_R} \int_{x_0}^x (\gamma_R \cos \alpha \mp \theta_R \sin \alpha) \cos 2\alpha dx + \\ \frac{1}{2c_s} \int_{y_0}^y (\theta_s \cos \alpha \pm \gamma_s \sin \alpha) dy - \frac{1}{2c_R} \int_{y_0}^y (\theta_R \cos \alpha \pm \gamma_R \sin \alpha) \cos 2\alpha dy + 2(H + T), \end{aligned} \quad (1.11)$$

$$\tau_{xy} = \tau_{xy}(x_0, y_0) + \frac{1}{2c_R} \int_{x_0}^x (\gamma_R \cos \alpha \mp \theta_R \sin \alpha) \sin 2\alpha dx + \int_{x_0}^x (\delta_1 - \delta_2) \cos \alpha \frac{\partial \alpha}{\partial x} dx +$$

$$\frac{1}{2c_R} \int_{y_0}^y (\theta_R \cos \alpha \pm \gamma_R \sin \alpha) \sin 2\alpha dy + \int_{y_0}^y (\delta_1 - \delta_2) \cos \alpha \frac{\partial \alpha}{\partial y} dy. \quad (1.12)$$

де

$$\gamma_R = \gamma_i^* - \gamma_j^*; \theta_R = \theta_i^* - \theta_j^*; c_R = c_1^* - c_2^*; \gamma_i^* = \gamma_i / L; \gamma_j^* = \gamma_j / L; \quad (1.13)$$

$$\gamma_s = \gamma_i^* + \gamma_j^*; \theta_s = \theta_i^* + \theta_j^*; c_s = c_1^* + c_2^*; \theta_i^* = \theta_i / L; \theta_j^* = \theta_j / L;$$

θ_i, θ_j - кути рефракції в досліджуваній точці при проходженні крізь модель товщиною L світлових потоків i і j поляризації, α є кутом ізокліни, рівним куту повороту локальної системи координат пов'язаної з нормальними напруженнями $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{x,y}$ у розглянутій точці щодо загальної системи координат x, y (у фотопружності прийнято вважати його кутом нахилу головних площадок відносно осі x декартової системи координат) пов'язаної з головними напруженнями σ_1, σ_2 .

Тоді використовуючи вирази (1.8) – (1.13) і величини, $\alpha, T_{i,j}, T_0, \omega_{i,j}$ що заміряються експериментально, можна розрахувати величини нормальних напружень у досліджуваній точці на основі рефракційних вимірів. Градієнтна фотопружність, до якої можна віднести запропонований метод, дозволяє більш точно визначати напружено-деформований стан (НДС) досліджуваних моделей, з огляду на явище рефракції світлового випромінювання і відхилення від закону Вертгейма для випадків переходу матеріалу в пружно-пластичний стан.

2. Вимірювання абсолютних сталих градієнтної фотопружності

Для розрахунків НДС досліджуваних моделей необхідно знати величини коефіцієнтів градієнтної фотопружності c_1^* і c_2^* . Їхні величини визначають на тестовому експерименті по стиску диска двома зосередженими силами (задача Герца), використовуючи співвідношення [6]:

$$\delta_x = \frac{P}{LR\pi} \left[1 - 2Rx^2 \left(\frac{R-y}{r_1^4} + \frac{R+y}{r_2^4} \right) \right]; \quad (2.1a)$$

$$\delta_y = \frac{P}{LR\pi} \left[1 - \frac{2R(R-y)^3}{r_1^4} - \frac{2R(R+y)^3}{r_2^4} \right]; \quad (2.1b)$$

$$\tau_{xy} = -\frac{2Px}{L\pi} \left[\frac{(R-y)^2}{r_1^4} - \frac{(R+y)^2}{r_2^4} \right], \quad (2.1c)$$

де $r_1^2 = (R - y)^2 + x^2$; $r_2^2 = (R + y)^2 + x^2$; R - радіус диска, L - товщина диска.

З рівнянь (2.4) [10-12] знаходимо:

$$c_1^* = \frac{\frac{\partial \delta_1}{\partial y} \theta_i^* - \frac{\partial \delta_1}{\partial y} \theta_j^*}{\left(\frac{\partial \delta_1}{\partial y}\right)^2 - \left(\frac{\partial \delta_1}{\partial y}\right)^2}; \quad c_2^* = \frac{\frac{\partial \delta_1}{\partial y} \theta_j^* - \frac{\partial \delta_1}{\partial y} \theta_i^*}{\left(\frac{\partial \delta_1}{\partial y}\right)^2 - \left(\frac{\partial \delta_1}{\partial y}\right)^2}; \quad (2.2)$$

Якщо усі виміри проводимо на вертикальному діаметрі диска (де: $x = 0, \frac{\partial \delta_2}{\partial y} = 0$), тоді: $c_1^* = \frac{\theta_i^*}{\frac{\partial \delta_1}{\partial y}}; \quad c_2^* = \frac{\theta_j^*}{\frac{\partial \delta_1}{\partial y}}; \quad (2.3)$

Виходячи з (2.1), обчислимо похідну $\frac{\partial \delta_1}{\partial y}$, з огляду на те, що координата $x = 0$, а центр декартової системи поміщено у центр диска, що стискають:

$$\frac{\partial \delta_1}{\partial y} \Big|_{x=0} = \frac{2P}{\pi L} \left[\frac{1}{(R + y)^2} - \frac{1}{(R - y)^2} \right]. \quad (2.4)$$

Тепер, використовуючи (2.3), (2.4) і (1.9), можна легко визначити величини C_1^* і C_2^* . Експериментальні графіки $\theta_{i,j} = f\left(\frac{y}{R}\right)$ представлені на мал.1.2.

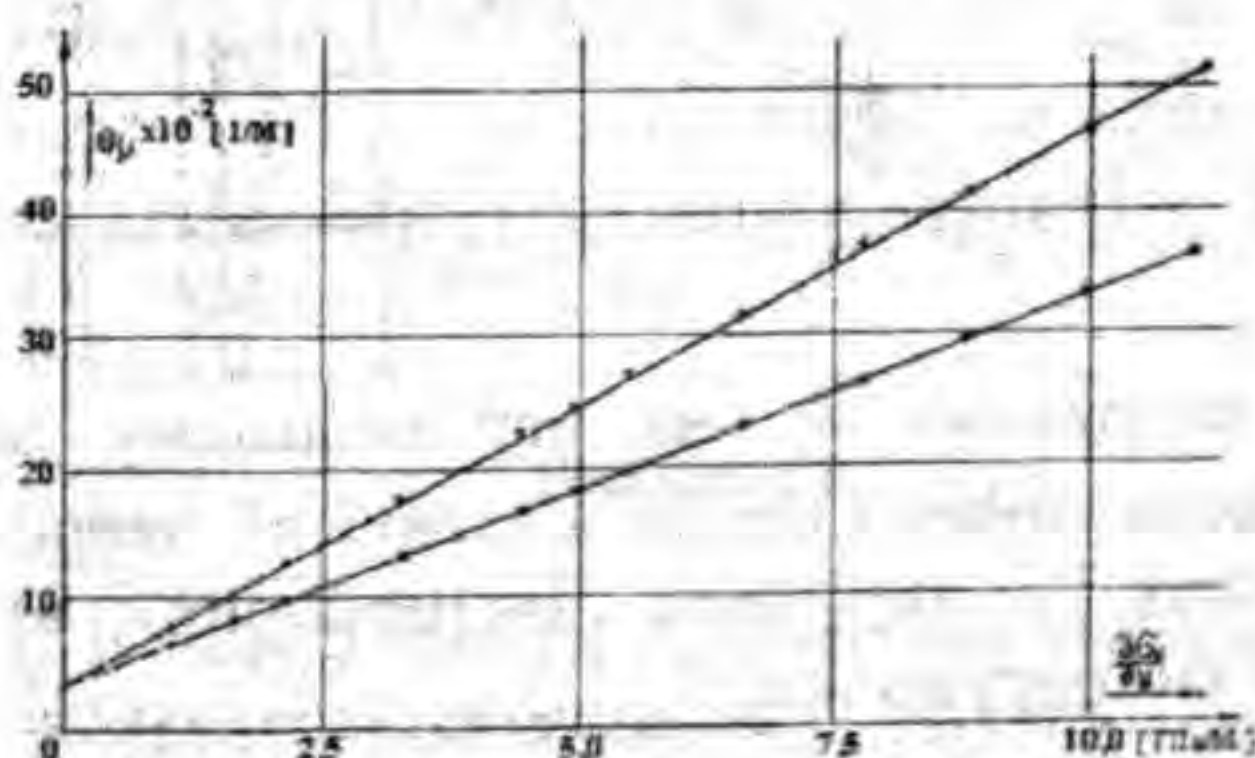


Рис. 1.2. Залежність кутів рефракції $\theta_{i,j}$ від значень стискаючої сили (при діаметральному стисненні диска).

Значення констант C_1^* і C_2^* визначають з графіків мал. 1.2 як тангенси кутів нахилу до осі абсцис.

Середнє значення абсолютних констант градієнтної фотопружності для матеріалу Э-2 при $\lambda = 0,6328 \text{ мкм}$ дорівнює: $c_1^* = 4,32 \times 10^{-5} \text{ ГПа}$, $c_2^* = 3,00 \times 10^{-5} \text{ ГПа}$. Апробація запропонованої методики градієнтної фотопружності була проведена на тестовій задачі Герца [6]. Був обчислений розподіл $\delta_{x,y} = f(y)$ при заданій силі P і відомій геометрії диска (R, L), використовуючи раніше викладену теорію, мал.1.3. Диск був

виготовлений з матеріалу Э-2, $R = 4 \cdot 10^{-2} \text{ м}$, товщиною $L = 1,245 \times 10^{-2} \text{ м}$, навантаження диска дорівнювало 1.05 кН.

Як видно з мал.1.3, експериментальні дані градієнтної фотопружності для $\delta_x = f\left(\frac{y}{R}\right)$ дають кращу відповідність з теоретичною кривою, розрахованою за допомогою рівняння (2.1), у порівнянні з даними поляризаційно-оптичного методу. Середня помилка експериментальних даних до теоретичних для рефрактометричного і поляризаційно-оптичного методу складає 1,22% і 12,6%, відповідно. Дані градієнтної фотопружності для $\delta_x = f\left(\frac{y}{R}\right)$ мають істотно велику помилку в порівнянні з теоретичними, розрахованими на підставі рівняння (2.1 а), особливо в області

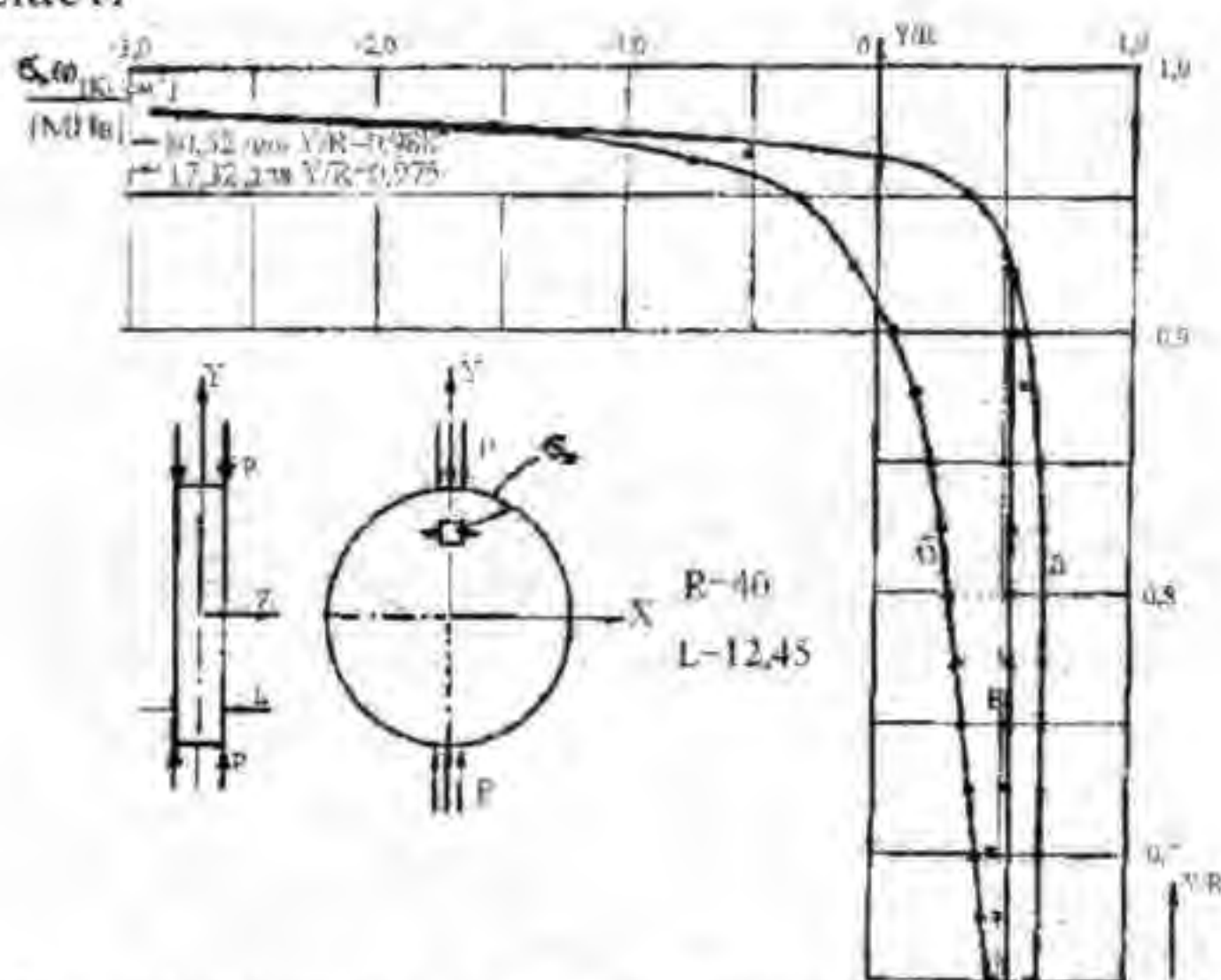


Рис.1.3.Розподіл напружень δ_x на вертикальному діаметрі диска, навантаженого зосередженою силою: а) теоретичні дані, б) поляризаційно - оптичний експеримент, в) експеримент градієнтної фотопружності.

постійних значень δ_x (область $y/R = 0.65 \div 0.85$). Це можна пояснити тим, що градієнтна фотопружність дає гарні результати у випадку наявності градієнтів напружень. В області $y/R = 0.85 \div 0.075$ помилка рефрактометрії значно менше, в той час як поляризаційно-оптичний метод дає тут істотне відхилення від теорії[7].

Розподіл напружень σ_x, σ_y (криві 1, 2 відповідно, Рис1.4) у балці з прорізом виконаної з матеріалу Э-2, розрахований за допомогою а) градієнтної фотопружності, б) поляризаційно - оптичного методу; крива 3 - коефіцієнт концентрації напружень, розрахований за допомогою рефрактометричних вимірів.

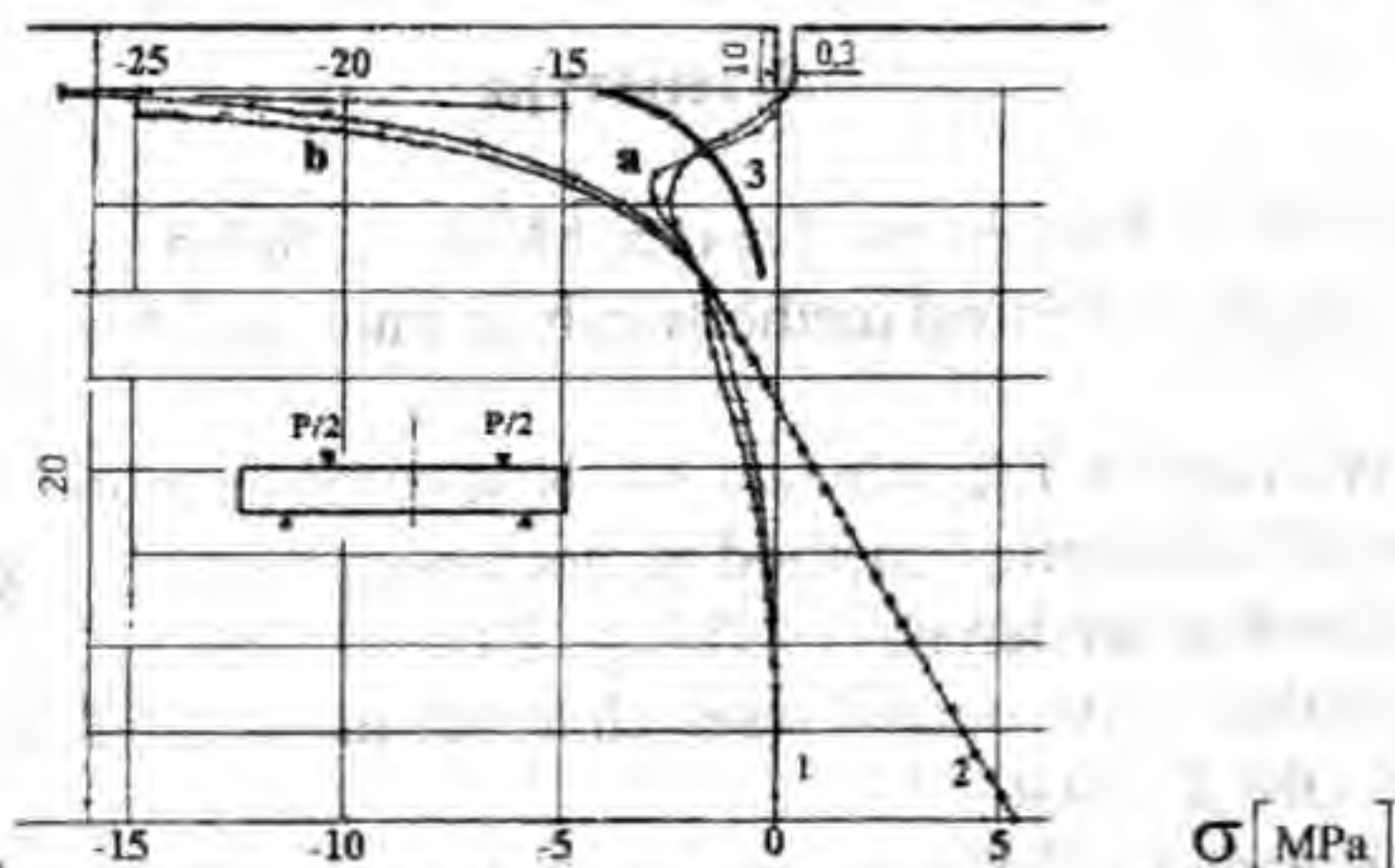


Рис.1.4. Розподіл діючих номінальних напружень у балці з прорізом навантаженої чистим згином

Теоретичні значення ККН, отримані при застосуванні методів Патерсона [9,13] такі: $\sigma_{\max} = 16.4$ МПа, $\sigma_{\min} = 3.42$ МПа.

Ці значення не відрізняються від значення, отриманого на експерименті при застосуванні методу градієнтної фотопружності.

Уявляючи проріз як тріщину з урахуванням її геометрії згідно методикою Когаєва [8], можна розрахувати коефіцієнти інтенсивності напружень (КІН) $K_I = \sigma_{\min} (\pi l)^{1/2} f(k) = 1.65 \times 10^{-1}$ МПа/м.

КІН, отриманий на ґрунті експерименту градієнтної фотопружності, по $\sigma_{\max}^y$ дорівнює: $K_I = \sigma_{\max} (\pi l)^{1/2} / 2 = 1.78 \times 10^{-1}$ МПа/м.

Розбіг сягає 7.8%, що виправдано для експерименту. Для порівняння вирахуємо КІН по даним поляризаційно – оптичного експерименту $K_I = 1.53 \times 10^{-1}$ МПа/м.

Висновки

У цілому, наведені виміри і подані розрахунки відносно методу градієнтної фотопружності свідчать про те, що усі оптичні виміри (мається на увазі поляризаційно - оптичний метод), які проводять у фотопружних моделях чи їх зрізах, обов'язково повинні враховувати явища рефракції світла в області градієнтних полів напружень (ОГПН). Традиційні методи вимірювань, прийняті у фотопружності в областях ОГПН, таких як відчини, тріщини, дають занижені значення максимальних напружень КІН, ККН. Це приводить до невірних розрахунків усієї конструкції при її реальному втіленні.

Обмеження методу полягає в можливості проводити дослідження на плоских моделях чи „зрізах” моделей, але в ряді випадків що вимогу можна виключити використовуючи спеціальні прийоми.

Література

1. M. Born, E. Wolf. Principles of optics. Moscow, Science, 1973, 720 s.
2. Hauff B., Grigul U. Optical methods in heat transfer. Moscow, World, 1973, 240 s.
3. Hecher F.W., Kepich T.Y, Pindera J.T. Non-rectilinear optical effete in mechanics of Solid optical method in mechanics // Ed. A. Lagarde Sijthoff Noordhoff alphen, an den Rijn, 1981, p.123.
4. Koker E., Failon L. An optical research technique of pressure stresses. Leningrad, ONGI., 1936, 633 s.
5. Photoelastic analysis. /under edition N. A. Strelchuks, G.L. Hesins. Moscow, Building publishing, 1975, 317 s.
6. Timochenko S. The theory of elasticity. Moscow -Leningrad, ONGI., 1934, 119 s.
7. Neyber. Stress concentration. OGIZ. State publishing house of the Technical & Theoretical literature, M., 1947, 204 s.
8. Kogaev B.V., Mashutov N.A., Gusenkov A.L. Calculations of details of machines both designs on strength and longevity. M.: engineering, 1985, 224 s.
9. Peterson R. Factors of stress concentration. Moscow, World, 1977, 304 s.
10. Udalov E.P. A technique of laser measurement value of a contact in metal slices with filled holes and research their stressed-deformed a condition. The theses of the reports III of All-Union conference "Laser Application in the technology both transmission systems and information processing ", Tallinn, 1987p. т.2, s. 162-164.
11. Udalov E.P., Kepich T.Y. Influence of a refraction of light to accuracy of photoelastic measurements in models imitating composite materials. The theses of the reports I of an All-Union symposium "Mechanics and physics of destruction of composite materials and designs", Ujgorod, 1988, т. 1, s. 31.
12. Євген Удалов. Рефракція лазерного випромінювання в області високих градієнтів напружень анізотропних середовищ. Голографические методы в науке и технике. Л. РТП ЛИЯФ, 1990, 1-33с.
13. E. Udalov, Oliynik. Determination of all stress tensor components on the object surfaces using holographic interferometer. The volume "Current Research on Holography and interferometric methods for object properties measurements" is received by SPIE. 2003, N 5134.
14. Savin G.I. Stress concentration about curvilinear holes in slices and shells. The receiving tank "Stress concentration". K.: Kiev, Naukova Dumka, 1965, s. 5-38.

Надійшла до редакції 15.02.2005

УДК 535.39

І.А. Шайкевич, проф.
Л.Ю. Мельниченко, с.н.с.
Я.А. Шибіко, аспір.

Поляритонні властивості тонких металічних плівок

Розглянуті поляритонні властивості тонких металічних плівок двох типів, а саме плівок з високою провідністю таких, як Al, Au, Ag і Cu і плівок перехідних металів з меншою провідністю таких, як Cr, Ti, Ni. Розраховувались залежності еліпсометричних параметрів вищевказаних плівок від кута падіння світла при збудженні поверхневих поляритонів за методом Кречмана. Показано, що для плівок першого типу з високою провідністю і плівок другого типу поляритонні властивості сильно відрізняються. Дано пояснення цих відмінностей на основі електромагнітної теорії світла.

Ключові слова: поляритонні властивості, тонкі плівки, еліпсометричні параметри.

I.A. Shaykevich, prof.
L.Yu. Melnichenko, senior research.
Ya.A. Shybiko, post grad.stud.

Polariton properties of thin metals films

The polariton properties of thin metal films of two types of conductivity were considered. Films with high conductivity such as Al, Au, Ag and Cu, films of transitive metals with smaller conductivity, such as Cr, Ti, Ni. The dependences of ellipsometric parameters on angle of incidence of light at excitation of surface polariton by Krechman's method for above stated films were designed. It is shown, that for films of the first type with high conductivity and films of the second type the polariton properties considerably differ. The explanation of these differences on the base of the electromagnetic theory of light is given.

Key Words: polaritons properties, thin films, ellipsometric parameters.

*E-mail: shaykevi@univ.kiev.ua

Вступ

Поляритонні властивості тонких металічних плівок при збудженні поверхневих поляритонів по методу Кречмана [1] широко використовуються для дослідження надтонких адсорбованих шарів різних молекулярних з'єднань, які утворюються на поверхні тонкої металічної плівки. Останнє має важливе значення для мікроелектроніки, інтегральної оптики і ін. Останнім часом створені оптичні сенсори на базі цих властивостей.

Тому дослідження оптичних властивостей тонких металічних плівок при збудженні поляритонів за методом Кречмана є важливою задачею.

Найбільш часто досліджуються такі оптичні характеристики як коефіцієнт відбивання і еліпсометричні параметри, а саме азимут

відновленої лінійної поляризації Ψ і зсув фаз між p - та s -компонентами Δ . Але якщо експериментальні дослідження цих параметрів поставлені на фундаментальну основу [1,2], то цього не можна сказати про теоретичні розрахунки. В той же час існують давно відомі формули Ейрі [3] для розрахунку коефіцієнтів відбивання і пропускання тонких плівок, які використовуються при проходженні світла крізь плівку з боку повітря без збудження поверхневих поляритонів. Ці формули можна легко використати і для розрахунку еліпсометричних параметрів відбитого світла при збудженні поверхневих поляритонів за методом Кречмана. Нами була експериментально перевірена можливість використання формул Ейрі при збудженні поверхневих поляритонів за методом Кречмана. Експериментальні результати добре узгоджувались з теоретичними розрахунками. Тому в даній роботі представлені результати теоретичних розрахунків еліпсометричних параметрів для цілого ряду металічних плівок сильнопровідних металів, таких як Ag, Au, Cu, Al і перехідних металів Cr, Ti, Ni.

Методика розрахунку еліпсометричних параметрів

Розглянемо систему діелектрична підкладка-3, тонка металічна плівка-2 і повітря-1. (рис.1).

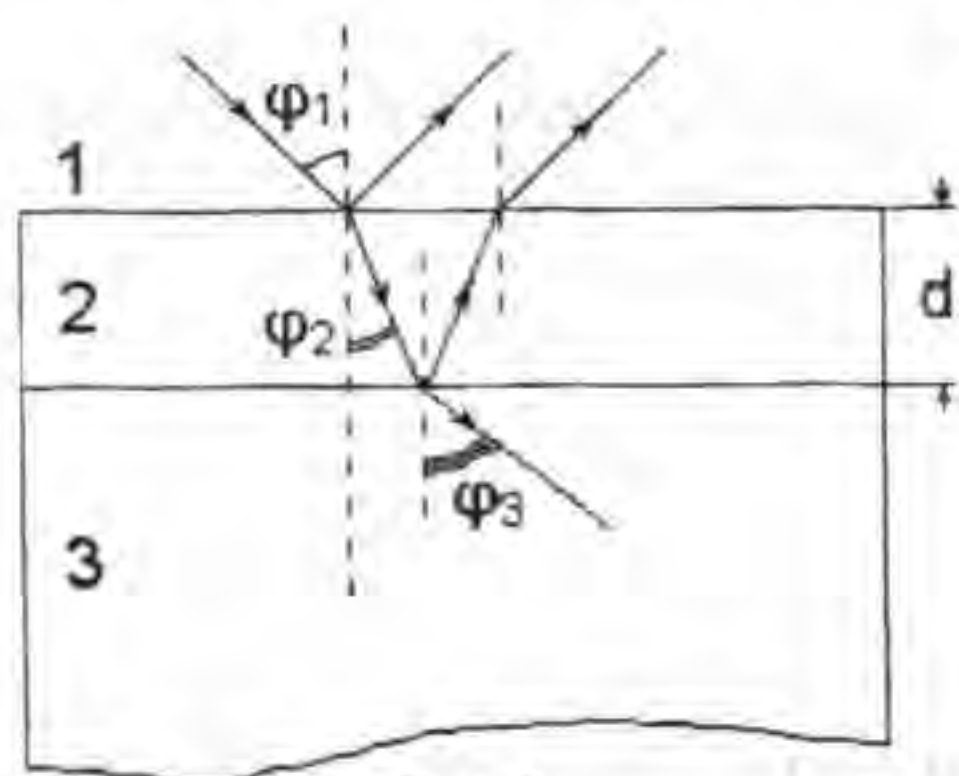


Рис.1.

Для такої системи формули Ейрі при нехтуванні відбиванням від нижньої грані підкладки 3 мають вигляд [3]:

$$\begin{aligned}\tilde{R}_p &= \frac{\tilde{r}_{12}^p + \tilde{r}_{23}^p e^{2i\tilde{\beta}}}{1 + \tilde{r}_{12}^p \tilde{r}_{23}^p e^{2i\tilde{\beta}}}; \\ \tilde{R}_s &= \frac{\tilde{r}_{12}^s + \tilde{r}_{23}^s e^{2i\tilde{\beta}}}{1 + \tilde{r}_{12}^s \tilde{r}_{23}^s e^{2i\tilde{\beta}}};\end{aligned}\tag{1}$$

де $\tilde{R}_p, \tilde{R}_s$ - p - та s -компоненти відбитої від системи плівка-підкладка хвилі;

$\tilde{r}_{12}^{p,s}$ - френелівські коефіцієнти відбивання p - та s -компонент на межі поділу 1-повітря, 2-плівка;

$\tilde{r}_{23}^{p,s}$ - френелівські коефіцієнти відбивання p - та s -компонент на межі поділу 2-плівка, 3-підкладка;

$$\tilde{\beta} = \frac{2\pi}{\lambda} \tilde{n}_2 d \cos \tilde{\varphi}_2;$$

λ - довжина світлової хвилі;

$\tilde{n}_2$ - комплексний показник заломлення плівки;

$\tilde{\varphi}_2$ - комплексний кут заломлення хвилі на межі поділу повітря-плівка (рис.1).

Для металічної плівки $\tilde{n}_2$ комплексна величина:

$$\tilde{n}_2 = n_2 + i\kappa_2, \quad (2)$$

де n_2 - дійсний показник заломлення металу;

κ_2 - показник поглинання металу.

Візьмемо відношення першої формули до другої співвідношень (1)

$$\frac{\tilde{R}_p}{\tilde{R}_s} = \frac{|R_p|}{|R_s|} e^{i(\delta_p - \delta_s)} = \operatorname{tg} \Psi e^{i\Delta} = \frac{(\tilde{r}_{12}^p + \tilde{r}_{23}^p e^{2i\tilde{\beta}})(1 + \tilde{r}_{12}^s \tilde{r}_{23}^s e^{2i\tilde{\beta}})}{(1 + \tilde{r}_{12}^p \tilde{r}_{23}^p e^{2i\tilde{\beta}})(\tilde{r}_{12}^s + \tilde{r}_{23}^s e^{2i\tilde{\beta}})}, \quad (3)$$

де $|R_p|$ і $|R_s|$ - амплітуди відбитої хвилі для p- та s-компонент;

δ_p і δ_s - стрибки фаз для p- та s-компонент.

При збудженні поверхневих поляритонів за методом Кречмана необхідно взяти зворотній хід променів, ніж на рис.1, тобто необхідно взяти $n_1 = 1,52$ (показник заломлення скла), $\tilde{n}_2 = n_2 + i\kappa_2$, $n_3 = 1$ (повітря). Потім з допомогою ЕОМ можна розрахувати кутові залежності еліпсометричних параметрів по відомих λ , n , κ , d та φ .

Поляритонні властивості тонких плівок Al, Au, Ag і Cu

При проведенні розрахунків ми брали оптичні сталі різних металів з [4]. Для розрахунків кутових залежностей еліпсометричних параметрів Al при різних товщинах плівки була взята $\lambda = 6200 \text{ \AA}$. Для цієї довжини хвилі для Al $n = 1,304$ і $\kappa = 7,48$. На рис.2 наведено залежність величини $\operatorname{tg} \Psi$ від кута падіння φ для Al при товщині плівки $d = 2 \text{ \AA}$. З рис.2 випливає, що якісно ця залежність повністю співпадає з тією, що спостерігається при повному внутрішньому відбиванні [3]. Єдиною відмінністю є те, що мінімум при куті Брюстера, а точніше псевдобрюстера не досягає нуля, як це спостерігається при повному внутрішньому відбиванні. Така ситуація спостерігається для всіх досліджуваних плівок при малих товщинах d . Аналогічно подібно явищу повного внутрішнього відбивання веде себе і величина $\cos \Delta$ при малих товщинах плівок металів.

При збільшенні товщини плівки **Al** спостерігається поступове збільшення величини $\text{tg}\Psi$ при псевдобрюстерівському куті, тобто зменшення мінімуму і з'являється новий мінімум, що пов'язується із збудженням поверхневого поляритону, при куті падіння близькому до 44° . Це добре демонструє рис.3, де наведені кутові залежності величини $\text{tg}\Psi$ для плівки алюмінію товщиною $d=50\text{\AA}$.

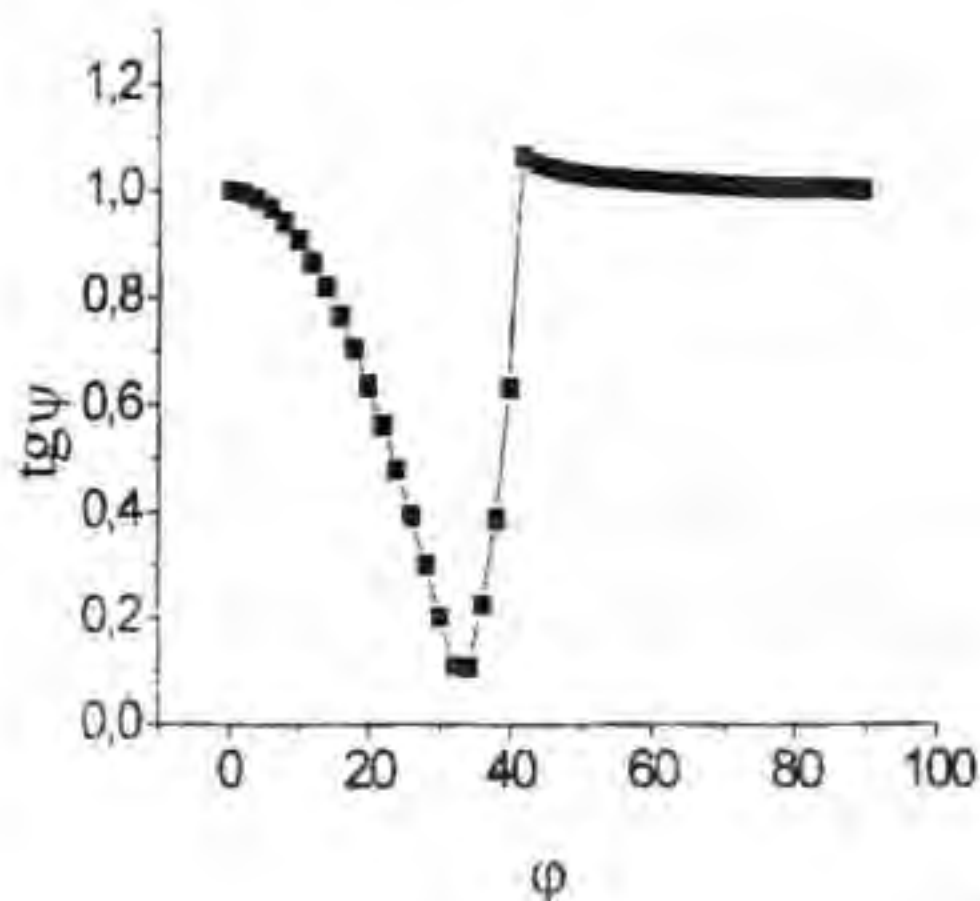


Рис.2.

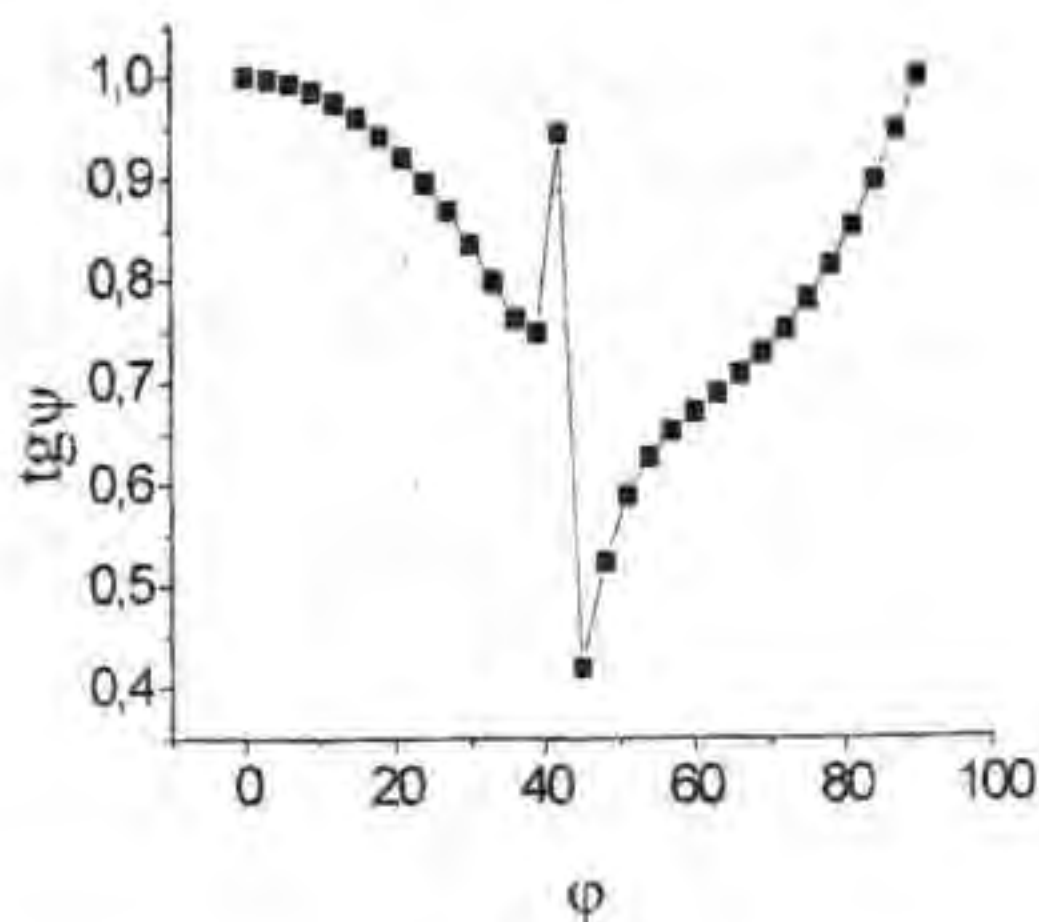


Рис.3.

При подальшому збільшенні товщини плівки **Al** спостерігається поступове зменшення як псевдобрюстерівського так і поляритонного мінімуму, і з'являється ще один мінімум, який відповідає головному куту падіння масивного **Al**. Останнє добре видно з рис.4. для товщини плівки **Al** $d=200\text{\AA}$.

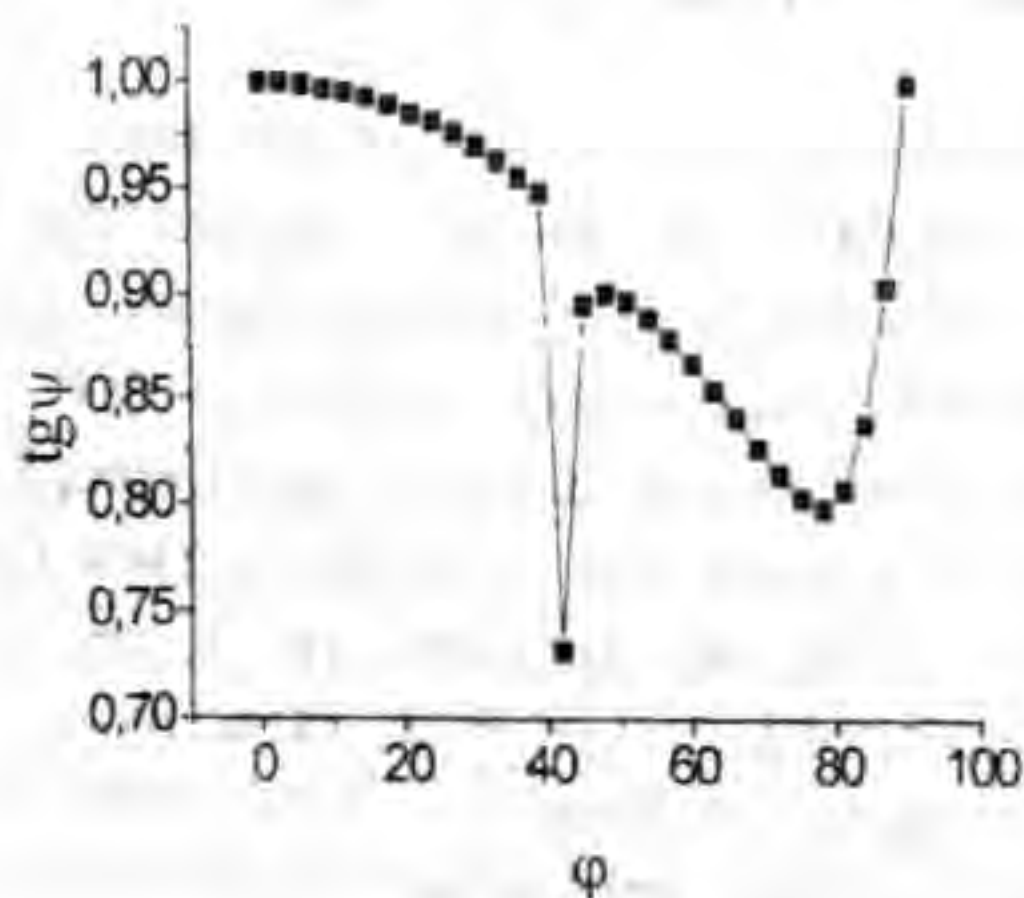


Рис.4.

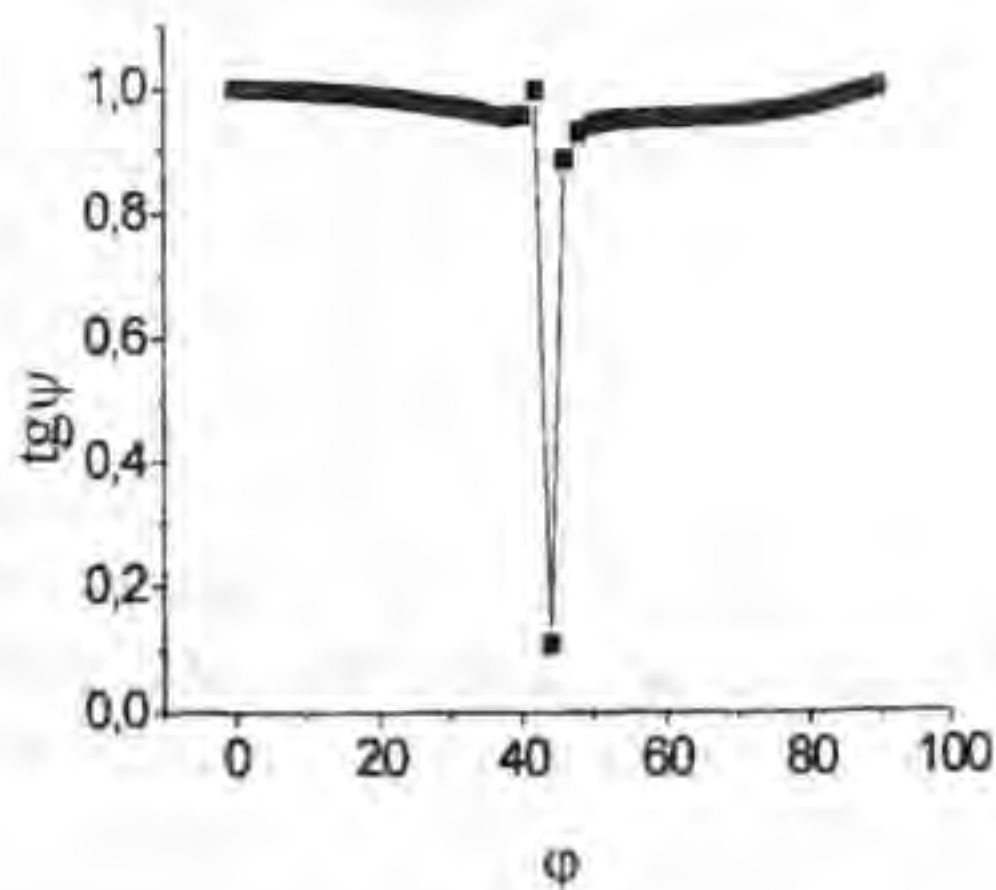


Рис.5.

При збільшенні товщини плівки до $500\text{\AA}$ обидва мінімуми (і псевдобрюстерівський, і полярний тонний) зникають і залишається тільки глибокий мінімум при головному куті падіння, тобто спостерігається просте відбивання на межі поділу скло-метал від практично масивного алюмінію.

Для **Au** спостерігається цілком аналогічна картина, що і для **Al**. Різниця полягає лише в різних товщинах плівок. Для товщини плівки золота $2\text{\AA}$ залежність $\text{tg}\Psi$ від кута падіння ϕ повністю нагадує таку, що показана на рис.2, тобто повне внутрішнє відбивання. Із збільшенням товщини з'являється поляритонний мінімум в районі кута падіння 44° - 45° , а псевдобрюстерівський мінімум зменшується. На рис.5 показана залежність $\text{tg}\Psi$ від кута падіння ϕ для золотої плівки $d=560\text{\AA}$. Для цієї товщини плівки поляритонний мінімум найбільш глибокий. Крім того на цьому рисунку видно незначний мінімум при псевдобрюстерівському куті. Слід відзначити, що для плівки **Au** поляритонний мінімум практично зникає лише при товщині плівки $d=1600\text{\AA}$. Для цієї товщини залишається лише глибокий мінімум при головному куті падіння, тобто плівка товщиною $1600\text{\AA}$ для **Au** може вважатися вже масивним металом, від якого світлова хвиля відбивається на межі поділу скло-метал. Слід відзначити, що для плівок **Ag** і **Cu** картина повністю аналогічна. Відмінність знову ж в різних товщинах плівок. Максимально глибокий мінімум залежності $\text{tg}\Psi$ від кута падіння ϕ має місце при товщині плівки **Ag** $d=230\text{\AA}$. Саме для цієї товщини плівки **Ag** приведена залежність $\text{tg}\Psi$ від кута падіння ϕ на рис.6. Тут явно видно всі три мінімуми, а саме при куті псевдобрюстера, поляритонний в районі $\phi=44^\circ$ - 45° і при головному куті падіння. Відзначимо, що поляритонний мінімум для плівки **Ag** в районі $\phi=45^\circ$ експериментально вперше спостерігався Абелесом [5]. При товщині плівки **Ag** $d=1000\text{\AA}$ вона веде себе вже як масивний метал.

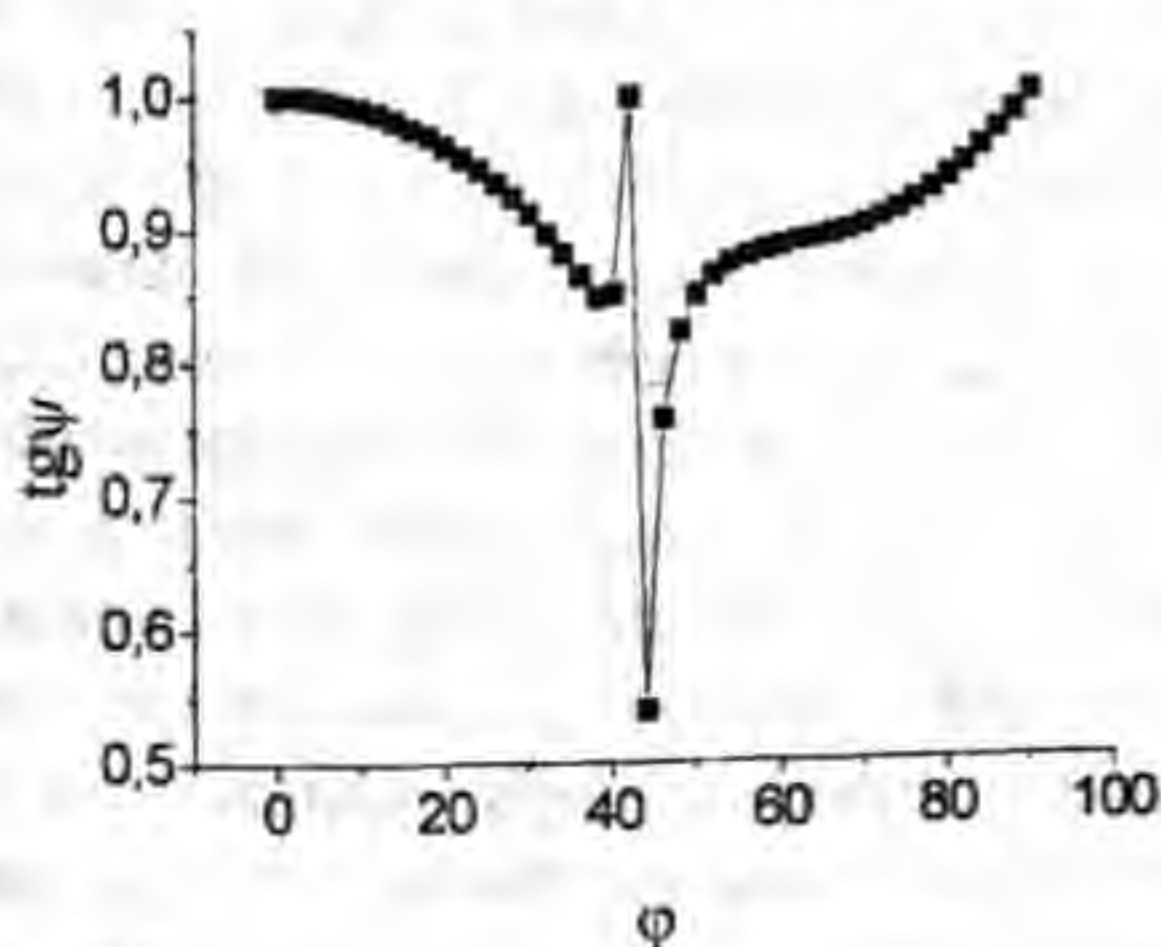


Рис.6.

Як вже відзначалося вище, плівка **Cu** має ті ж поляритонні властивості. Як масивний метал плівка **Cu** при відбиванні з боку скла починає себе поводити при товщині $d=1300\text{\AA}$. Слід відзначити, що для плівок **Au**, **Ag** і **Cu** розрахунки проводились для тієї ж довжини світлової хвилі $\lambda=6200\text{\AA}$, що і для **Al**. Оптичні сталі були взяті для цієї довжини хвилі з [4]. Для **Au** $n=0,13$ і $\kappa=3,16$. Для **Ag** $n=0,27$

і $\kappa=4,18$. І нарешті для **Cu** $n=0,27$ і $\kappa=3,24$. Аналіз результатів показує, що товщини, при яких зникає псевдобрюстерівський мінімум, товщини при яких виникає найбільша глибина поляритонного мінімуму і, нарешті, товщини, при яких плівка поводить себе як масивний метал в основному зумовлені показником поглинання κ . У золота найменший показник поглинання κ і це дає найглибший поляритонний мінімум і найбільшу товщину, при якій плівка веде себе як масивний метал. У **Al** κ найбільша і це дає найменшу товщину, при якій плівка починає вести себе, як масивний метал.

Таким чином слід відзначити, що у всіх металів з високою провідністю, які досліджені в даній статті, спостерігається поляритонний мінімум в районі кута падіння $\phi \sim 44^\circ - 45^\circ$. Виникнення цього мінімуму можна пояснити специфічними фазовими співвідношеннями у хвилях відбитих на межах поділу 1-2 і 2-3 (рис.1) і різницею фаз між ними за рахунок пройденого шляху в плівці. Інтерференція цих хвиль і дає поляритонний мінімум. Хоча можна стверджувати, що те, що поляритонний мінімум практично не зміщується по куту падіння, а лише змінюється по величині із зміною товщини плівки для всіх досліджених металів, свідчить про те, що найбільший вплив на цей мінімум вносять стрибки фаз на межі поділу 1-2 і 2-3.

Поляритонні властивості тонких плівок **Cr**, **Ti** та **Ni**

Розрахунки еліпсометричних параметрів перехідних металів **Cr**, **Ti** та **Ni** проводились на основі оптичних сталих n і κ , взятих з [4]. Для розрахунків кутових залежностей еліпсометричних параметрів цих металів була взята довжина хвилі $\lambda=6200\text{\AA}$ так само, як і для групи високопровідних металів у попередньому розділі. Лише для **Cr** $\lambda=6110\text{\AA}$, бо саме для неї були n і κ в [4]. Вони для **Cr** складали $n=3,48$ і $\kappa=4,36$. Розрахунки проводились для різних товщин плівок d . Для **Cr**, як і для високопровідних металів для малої товщини плівки $d=2\text{\AA}$ спостерігається картина, аналогічна рис.2, тобто ця картина характерна для повного внутрішнього відбивання, при чому не тільки для $\text{tg}\Psi$, але і для $\cos\Delta$. При збільшенні товщини для плівки **Cr** з'являється широкий поляритонний мінімум, який поступово зміщується в бік більших кутів падіння ϕ і заглиблюється при збільшенні товщини. Найглибший мінімум відповідає товщині плівки $d=100\text{\AA}$. Залежність $\text{tg}\Psi$ від кута падіння ϕ для цієї товщини показана на рис.7. На цьому рисунку мінімум відповідає куту падіння $\phi=62^\circ$. При подальшому зростанні товщини плівки мінімум стає менш глибоким і неперервно зміщується в бік більших кутів ϕ , наближаючись до головного кута.

Так для плівок **Cr** товщиною $d=300\text{\AA}$ він відповідає куту падіння $\varphi=76^\circ$ і, нарешті, при товщині плівки $d=600\text{\AA}$ крива залежності $\text{tg}\Psi$ від кута падіння φ повністю відповідає відповідній кривій для масивного **Cr**. Дуже цікавим на рис.7 є максимум для $\text{tg}\Psi$ при куті падіння $\varphi=42^\circ$. Його величина значно перевищує тангенс азимуту падаючої хвилі, який рівний одиниці. Це можна пояснити тим, що поверхневі поляритони сильно збуджуються для **p**-компоненти і менше для **s**-компоненти, при чому згідно [1] максимальне збудження поверхневих поляритонів відбувається поблизу граничного кута повного внутрішнього відбивання. Відміною поведінки кутової залежності $\text{tg}\Psi$ від кута падіння φ для плівок **Cr** від плівок сильнопровідних металів **Al**, **Au**, **Ag** і **Cu** є та особливість, що для вищенаведених металічних плівок сильнопровідних металів поляритонний мінімум і мінімум при головному куті падіння існують незалежно один від одного, а для плівок **Cr** спостерігається неперервний перехід при збільшенні товщини плівки від поляритонного мінімуму до мінімуму при головному куті падіння.

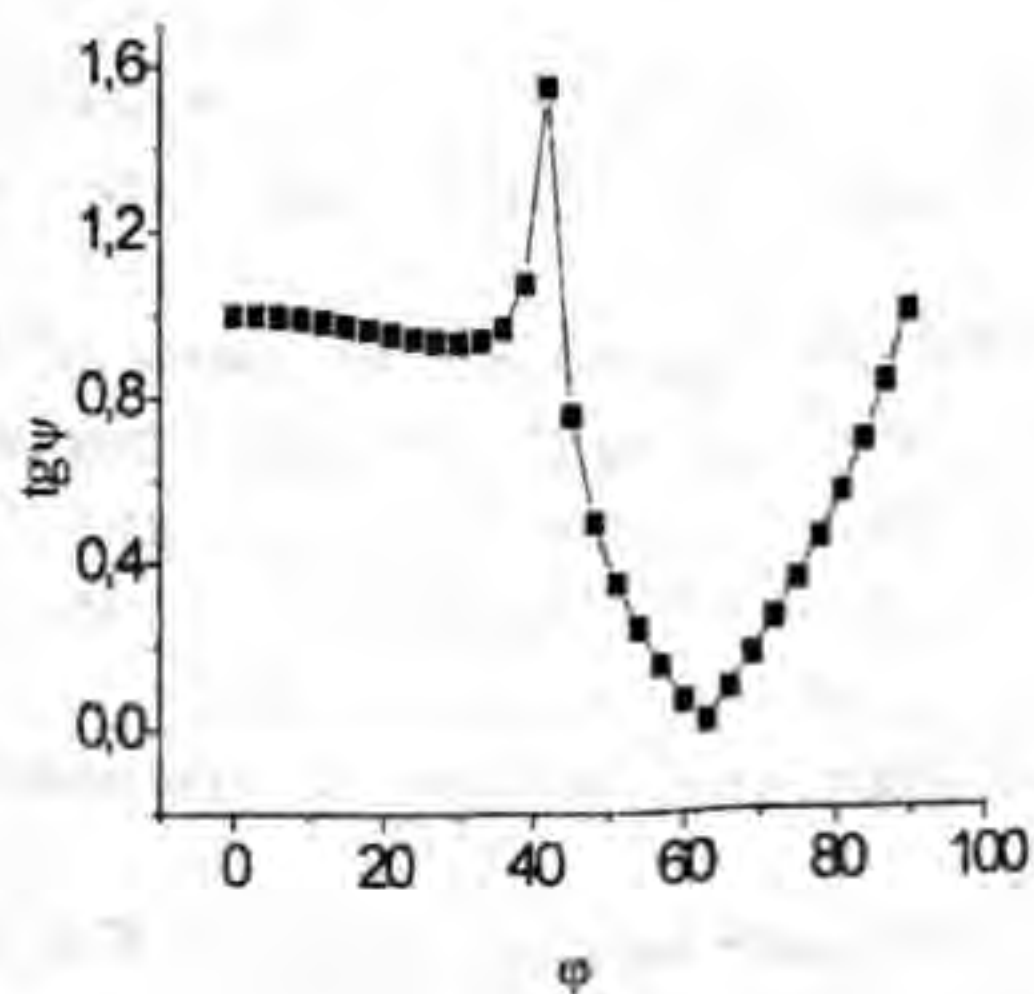


Рис.7.

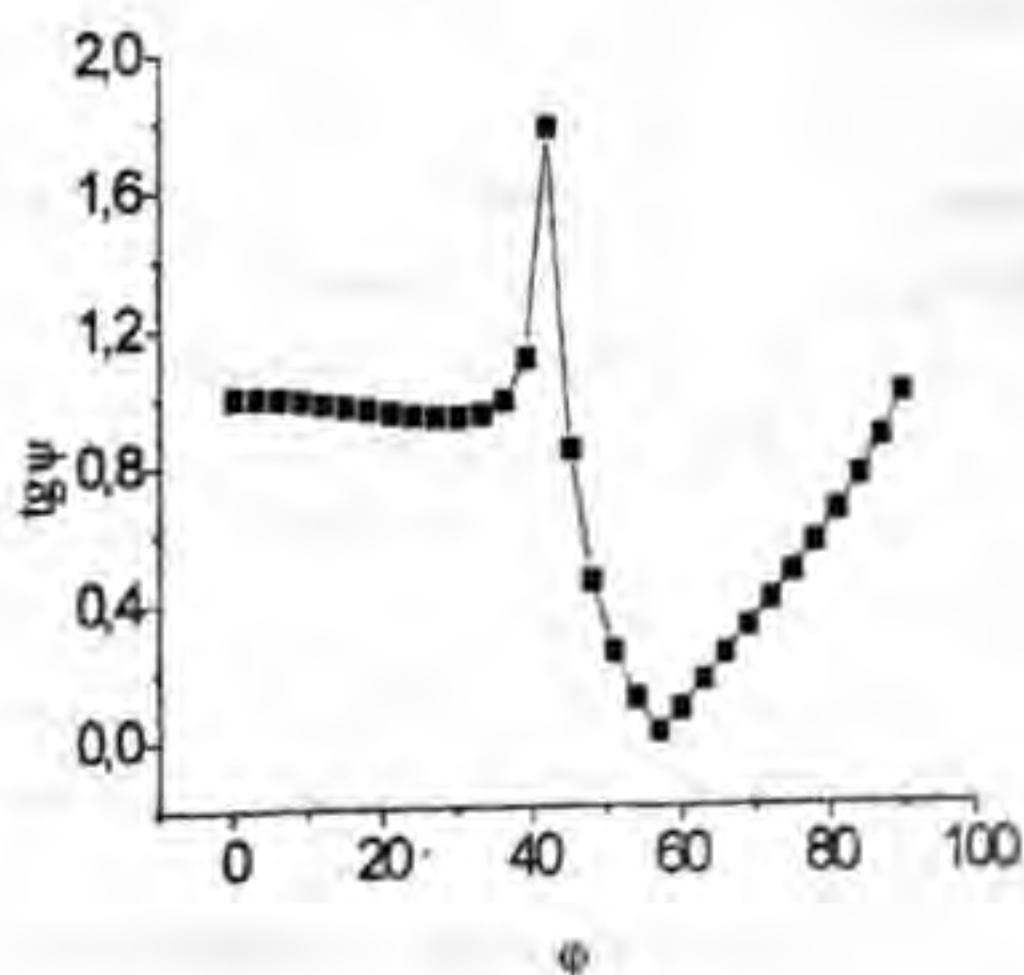


Рис.8.

Аналогічні властивості спостерігаються і на залежностях $\text{tg}\Psi$ від кута падіння φ для інших досліджуваних перехідних металів, а саме **Ti** і **Ni**.

На рис.8 показана залежність $\text{tg}\Psi$ від кута падіння φ для плівки **Ti** товщиною $d=200\text{\AA}$ при збудженні поверхневих поляритонів. Так само, як і на рис.7 для плівки **Cr**, на рис.8 спостерігається максимум, який перевищує одиницю при $\varphi=42^\circ$ і глибокий поляритонний мінімум при куті $\varphi=58^\circ$. Єдина відміна рис.7 і 8 полягає в різних товщинах плівок **Cr** і **Ti**, при яких спостерігається найглибший мінімум і в куті падіння, при якому цей мінімум існує. При збільшенні товщини плівки цей мінімум зміщується по куту падіння і зменшується по глибині. Наприклад при

товщині плівки Ti $400\text{\AA}$ цей мінімум спостерігається при $\varphi=68^\circ$. При товщині плівки $900\text{\AA}$ форма кривої $tg\Psi$ від кута падіння φ повністю відповідає масивному металу без поляритонних особливостей.

Так само поводять себе і кутові залежності еліпсометричних параметрів для Ni . Так найбільш глибокий мінімум $tg\Psi$ спостерігається для товщини плівки Ni $150\text{\AA}$ при куті падіння $\varphi=50^\circ$. Цей мінімум поступово зсувається в бік головного кута падіння із збільшенням товщини плівки d і зменшується по глибині. Наприклад при $d=300\text{\AA}$ мінімум існує при куті $\varphi=68^\circ$. При товщині плівки $d=750\text{\AA}$ плівка Ni вже поводить себе як масивний метал. Максимум на кривій залежності $tg\Psi$ від кута падіння φ знову ж таки спостерігається при $\varphi=42^\circ$ і не зміщується при зміні товщини плівки, а тільки зменшується по величині при збільшенні товщини.

Висновки

1. Для всіх досліджених плівок при малих товщинах порядку $2\text{\AA}$ при збудженні поверхневих поляритонів за методом Кречмана хід залежностей еліпсометричних параметрів, а саме $tg\Psi$ і $\cos\Delta$ від кута падіння φ повністю нагадують хід залежностей цих параметрів при повному внутрішньому відбиванні.

2. При збільшенні товщини плівки із значною провідністю, таких як Al , Au , Ag і Cu , спостерігається на кривих залежності $tg\Psi$ від кута падіння φ з'явлення поляритонного мінімуму, а потім окремо мінімуму при головному куті падіння. При подальшому збільшенні товщини поляритонний мінімум поступово зникає, а мінімум при головному куті залишається і стає більш чітким при наближенні плівки до масивного металу.

3. При збільшенні товщини плівок перехідних металів, таких як Cr , Ti , Ni , на кривих залежності $tg\Psi$ від кута падіння φ спостерігається з'явлення одного поляритонного мінімуму, який при подальшому збільшенні товщини плівки поступово переходить в мінімум при головному куті падіння.

4. Для тонких плівок перехідних металів Cr , Ti , Ni на кривій залежності $tg\Psi$ від кута падіння φ при збудженні поверхневих поляритонів за методом Кречмана спостерігається максимум в районі кута падіння $\varphi=42^\circ$, який значно перевищує за величиною одиницю, тобто $tg\Psi_0$ (Ψ_0 – азимут падаючої хвилі, який рівний 45°). Останнє пояснюється тим, що поверхневі поляритони краще збуджуються для p -компоненти, ніж для s -компоненти.

5. З точки зору електромагнітної теорії світла (без залучення мікроелектронної теорії) поляритонні мінімуми зумовлені різницею фаз

між хвилею, відбитою на межі поділу скло-плівка, і хвилею, відбитою на межі поділу плівка-повітря, а також оптичною різницею ходу інтерферуючих хвиль в металевій плівці. Але слід відзначити, що для плівок з великою провідністю різниця ходу в металічний плівці відіграє незначну роль у формуванні поляритонного мінімуму, бо він практично не змінюється по куту падіння φ при збільшенні товщини плівки, а тільки змінюється по глибині. Останнє зумовлено дуже малим показником заломлення для цих плівок. Для плівок перехідних металів, навпаки, різниця ходу інтерферуючих хвиль в плівці відіграє значну роль завдяки великому показнику заломлення. Про це свідчить зміщення поляритонного мінімуму при зростанні товщини плівки вздовж осі φ .

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Поверхностные поляритоны (Под ред. В.М.Аграновича и Д.Л. Миллса) М.Наука, 1985.- 525 с.
2. Н.Л. Дмитрук, В.Г. Литовченко, В.Л. Стрижевский. Поверхностные поляритоны в полупроводниках и диэлектриках. Киев. Наукова думка. 1989.- 375 с.
3. Борн М., Вольф Э. Основы оптики. М.Наука, 1973,- 719 с.
4. Weaner J.N., Krafka C., Lynch D.W., Koch E.E. Optical properties of metals.// V.I, II. Internal report D.E.S.S. F 41, 1981.- 172 p.
5. Abeles F. Surface electromagnetic waves ellipsometry.// Surface Science.- 1976.- V.56.- P.237-251.

Надійшла до редколегії 15.03.05

УДК 532.62

Кирило О. Чалий

Класи універсальності для просторово-обмежених систем різної природи в контексті розвитку нанотехнологій та наномедицини

Обговорені деякі аспекти теоретичних досліджень просторово-обмежених систем різної природи у зв'язку з пріоритетним розвитком нанотехнологій та наномедицини. Запропонований перелік ознак, які характеризують певний клас універсальності для просторово-обмежених систем. При одночасному виконанні всіх вказаних ознак критична поведінка просторово-обмежених систем різної природи повинна бути ізоморфною, тобто носити універсальний характер.

Ключові слова: просторово-обмежені системи, нанотехнології, класи універсальності.

E-mail: kirchal@univ.kiev.ua

Kyrylo A. Chalyy

Universality classes for the finite-size systems of the different nature in the context of nanotechnology and nanomedicine development

Some aspects of theoretical research of the finite-size systems of a different nature are discussed in connection with primary development of nanotechnology and nanomedicine. The number of defining features of universality for the finite-size systems is proposed. At simultaneous implementation of all indicated characteristics, the critical behavior of the confined systems of a different nature have to be isomorphous and it must belong to the matching universality class.

Key Words: finite-size systems, nanotechnology, universality classes.

Фізичні властивості речовин сильно залежать від геометричного розміру тих об'ємів, в яких вони знаходяться. Зменшення розмірів твердотільних та рідинних систем до мікро- і наномасштабів викликає глибокі зміни в їх властивостях. Тонкі плівки та пори малого діаметру є типовими об'єктами, де можна спостерігати незвичайні стани і фазові переходи, деякі з яких походять на теоретичні моделі двох- і одновимірних систем. Певні особливості поведінки речовин в таких просторово-обмежених системах не мають аналогів у звичайних об'ємних фазах.

Вивчення унікальних властивостей мікроструктур і їх статичних та динамічних характеристик стали ключовою задачею для різних галузей науки та техніки. Зростаючий інтерес до цього напрямку досліджень зумовлений потребами пріоритетного розвитку нанотехнологій. Нанотехнології бурхливо розвиваються завдяки сучасним досягненням у фізиці, хімії, біології, медицині. Цей розвиток сприяє створенню умов для

поглиблення міждисциплінарної наукової інтеграції у 21-ому сторіччі.

Протягом останніх декількох десятиріч років нові структури, явища і процеси спостерігалися в нано- та мікротематичному масштабі (від десятків нанометрів до десятків і сотень мікрон). Враховуючи досягнення в технологіях нановиробництва [1], вивчення поведінки речовин в мікро- та нанотематичних масштабах перестає бути лише темою фундаментальних досліджень, але набуває суто практичного значення. Нові експериментальні та теоретичні методи, а також інструменти моделювання були розроблені для проведення відповідних досліджень. Ці розробки забезпечують нові можливості не тільки для наукового і технологічного прогресу в області наночастинок, наноструктурних матеріалів, нанопристроїв і наносистем, але і для глибокого розуміння біологічних процесів.

В 2000 році в США була проголошена Національна Нанотехнологічна Ініціатива (ННІ) [2], яка визначена вищим пріоритетом серед багатьох національних програм. Передбачається, що нанотехнології будуть мати глибокий вплив на економіку і суспільство 21-ого сторіччя, який, можливо, можна порівняти по значущості з інформаційними технологіями чи розвитком молекулярної біології.

Американська ННІ зосереджена на шести напрямках у дослідницькій роботі та освіті, де існують особливі можливості для прориву в фундаментальних розробках. Ці шість напрямків такі: (а) біосистеми в нанотематичному масштабі; (б) нанотематичні структури, нові явища і квантовий контроль; (в) нанотематичні пристрої та архітектура нанотематичних систем; (г) нанотематичні процеси в навколишньому середовищі; (д) моделювання в нанотематичних масштабах; (е) застосування наукових і технологічних досягнень в галузі нанотехнологій у соціальній сфері та освіті.

Зважаючи на роль рідини (зокрема, води) для живих організмів, проведення досліджень в області фізики рідин в мікро- і нанотематичних масштабах сприяє розвитку фундаментального розуміння нанобіоструктур, екологічних біотехнологій, нанобіотехнологій і методів для їхнього широкого застосування в області біоматеріалів, біосистемно-побудованих електроніки й охороні здоров'я, зокрема в перспективній галузі наномедицини. Прогрес в цій сфері вимагає глибокого вивчення і принципового розуміння складних взаємин між фізичними властивостями і хімічною структурою на рівні нанотематичних масштабів, з одного боку, та біологічними функціями систем, з іншого.

Розвиток нових медичних технологій залежить від прогресу в розумінні механізмів функціонування живих систем на рівні мікро- та нанотематичних масштабів. Застосування нанотехнологій в медицині, що називають наномедициною [3], в майбутньому дасть нові інструменти для вивчення біологічних тканин в безпрецедентно тонких деталях [3-5]. Одну з провідних ролей в цьому напрямку досліджень грає US NASA – Національна Адміністрація з Аеронавтики і Космонавтики США.

Наномедична програма NASA [4] націлена на розробку компактних мобільних засобів для діагностики та лікування хвороб, що можуть бути викликані підвищеним рівнем радіації. NASA і американський Національний Інститут Раку (NCI) [5] співробітничать в розробці інноваційних стратегій мало-інвазійного втручання в перебіг онкологічних хвороб, які стануть великою проблемою під час тривалих космічних польотів в майбутньому. На цей час наномашини і наносенсори [4,6] ще не побудовані, але перспективні дослідження щодо особливостей їх функціонування необхідні. Передбачається, що такі медичні наноінструменти діятимуть усередині дуже тонких каналів тканин тіла, по яких плин timer біологічні рідини. Рідке середовище буде певним чином впливати на роботу таких нанопристроїв. Тому виникає необхідність збору та аналізу всіх можливих відомостей, що стосуються фізичних властивостей рідин в мікро- і нанопорах. Оскільки експериментальне вивчення таких динамічних малих об'єктів дуже ускладнено, існує висока потреба в теоретичних дослідженнях в цій галузі з метою забезпечення подальшого вирішення конкретних інженерних завдань щодо розробки реальних наномедичних пристроїв.

Користь від вивчення властивостей рідинних систем в мікро- і наномасштабах [7,8] також включає краще розуміння молекулярних процесів в рідких розчинах, можливість створення нового устаткування для очищення води та розробки прогресивних технологій, що сприяють зменшенню забруднення навколишнього середовища. В зв'язку з необхідністю вирішення технічних проблем, виникає потреба в забезпеченні інженерів і вчених інформацією щодо характеристик і специфічних властивостей рідин в мікро- і наномасштабі. Для цього стає доцільним розширення існуючих баз даних щодо фізичних властивостей речовин (подібних, наприклад, до американської Програми стандартних еталонних даних (SRDP) [9]), а також створення нових баз даних, які будуть містити інформацію щодо залежності властивостей від розміру системи.

Просторове обмеження суттєво впливає на фізичні властивості систем, що перебувають в околі критичного стану чи стану фазового перетворення. Багато систем, що мають експериментальний і теоретичний інтерес, як, наприклад, тонкі плівки, циліндричні пори, інтерфази, біомембрани, синаптичні щілини, іонні канали і таке інше, мають обмежену геометрію. Експериментальні дослідження таких об'єктів, які можуть демонструвати фазові перетворення другого роду, характер яких залежить від розміру, забезпечують принципові результати для перевірки теорії просторово-обмежених систем. Особливості поведінки таких обмежених систем є предметом активного вивчення протягом досить тривалого часу. Незважаючи на значну кількість експериментів (див., наприклад, [10,11], огляд [12] та посилання в ньому) залишається стійка

потреба в проведенні більш точних перевірок існуючих теоретичних передбачень. Нові горизонти в цій галузі мають відкритися з проведенням низки експериментів з фундаментальної фізики [13] що розроблені для реалізації на МКС - Міжнародній космічній станції.

Проведення експериментів з рідинами в обмеженій геометрії на Землі дуже ускладнене рядом факторів, головним з яких є гравітація, що за певних обставин може призводити до явищ, які є дуже схожими на ефект просторової обмеженості [14,15]. Це створює високий попит на теоретичні дослідження, наприклад [16-20], які є адекватними існуючим експериментальним результатам і котрі можна використовувати для обчислень властивостей рідин в широкому інтервалі розмірів та для різних форм геометрії системи. Зазначимо, що найбільш поширеним засобом аналізу і інтерпретації експериментальних даних є гіпотеза просторово-обмежених масштабних перетворень [21,22] та її модифікації.

Далі, для ілюстрації можливостей теоретичного підходу до обговорюваної проблеми, наведемо результати обчислення ізотермічної стисливості просторово-обмеженої рідини, яка заповнює малі об'єми у формі достатньо довгого циліндру, пори квадратного перерізу чи плоскої щілини. Залежність ізотермічної стисливості β_T від температурної змінної $\tau = (T - T_c)/T_c$ описується виразом:

$$\beta_T \sim [\tau + (\psi/K_G)^{1/\nu} (1 + \tau)]^{-\gamma}.$$

В наведеній формулі ν і γ – критичні індекси, ψ – константа, що визначається геометрією системи, а $K_G = d/\xi_0$ – геометричний фактор, який характеризує кількість мономолекулярних шарів вздовж напрямку просторової обмеженості. Зокрема: (А) у випадку геометрії плоскої щілини $\psi = \pi$, а d – це товщина щілини; (В) у випадку геометрії пори квадратного перерізу $\psi = \sqrt{2}\pi$, де $\pi \approx 3.14$, а d – це ширина перерізу (сторона квадрату); (С) у випадку циліндричної геометрії $\psi = 2\mu_1^*$, де $\mu_1^* \approx 2.4048$ – перший нуль циліндричної функції Беселя, а d – це діаметр циліндра d_{cyl} .

В таблиці наведені значення β_T (в відносних одиницях) для трьох різних G - типів геометрії A_{film} , B_{bar} , C_{cyl} при трьох значеннях геометричного фактору $K_G = 10^2, 10^3, 10^4$. Будемо вважати $\nu = 0.63$ і $\gamma = 1.25$, а $\tau = 0$. Слід зауважити, що в просторово-обмежених системах при $\tau = 0$, тобто при критичній температурі об'ємної фази, β_T має скінченне значення.

K_G	G	A_{film}	B_{bar}	C_{cyl}
10^2		$9.591 \cdot 10^2$	$4.822 \cdot 10^2$	$4.120 \cdot 10^2$
10^3		$9.246 \cdot 10^4$	$4.649 \cdot 10^4$	$3.972 \cdot 10^4$
10^4		$8.915 \cdot 10^6$	$4.482 \cdot 10^6$	$3.829 \cdot 10^6$

Можна побачити, що при однакових умовах результати для та

циліндру C_{cyl} та пори V_{bar} є близькими оскільки обидві системи при граничному зменшенні характерного розміру перетворюються в одновимірні. Результати для плоскої щілини A_{film} , що в граничному випадку відповідає моделі двовимірної системи, є суттєво відмінними.

На жаль, можливості теоретичного вивчення питання про вплив геометрії системи на перебіг критичних явищ є суттєво обмеженими, оскільки лише декілька типів так званих „добре визначених” геометрій дозволяють аналітичне розв’язання складної задачі впливу малих розмірів систем на зміну їх фізичних властивостей.

Разом з тим отримані результати та висновки, які з них випливають, дають підстави для важливого твердження щодо існування певних класів універсальності просторово-обмежених систем. Як відомо, поняття класу універсальності для об’ємних систем поблизу критичних точок і точок фазових переходів 2-го роду (або, краще кажучи, неперервних фазових переходів) включає в себе такі 4 основні ознаки: 1) однакову просторову розмірність; 2) однакову розмірність параметра порядку; 3) однаковий тип міжмолекулярної взаємодії в розумінні її короткосяжності або далекосяжності; 4) однакову симетрію гамільтоніана (флуктуаційної частини відповідного термодинамічного потенціалу). У випадку просторово-обмежених систем в цей перелік, як стає зараз зрозумілим, слід включити такі додаткові ознаки: 5) геометричний фактор(и), котрий(і) визначає(ють) просторову обмеженість системи в одному (або в декількох) напрямку(ах); 6) тип геометрії системи; 7) нарешті (що є досить несподіваним), тип фізичної властивості, яка вивчається. Необхідність включення останньої ознаки викликається тим відомим фактом [23], що критичні параметри (критичні температура, густина, поле та ін.) в просторово-обмежених системах відрізняються для різних фізичних властивостей (сприйнятливості, теплоємності, параметру порядку тощо). Таким чином, критична поведінка просторово-обмежених систем різної природи є універсальною (ізоморфною) при одночасному виконанні всіх вказаних 7 ознак.

В межах певного класу універсальності, проведені дослідження (див. наприклад, [15,24]) свідчать про те, що властивості просторово-обмежених рідин в околі критичного стану демонструють універсальну залежність від температури та характерного розміру системи, як це і передбачається відповідною масштабною гіпотезою. Проте, амплітуди цих залежностей є відповідними до геометричної форми системи, як було обговорено вище.

Використання ідей ізоморфізму критичних явищ і фазових переходів дозволяє вивчати можливість узагальнення і застосування результатів вивчення властивостей обмежених рідин в системах не тільки фізичної, але також й іншої природи. Так, безсумнівний науковий і практичний інтерес представляє сфера дослідження спільних (кооперативних) явищ при міжклітинній взаємодії (синаптичній передачі нервових сигналів) у

медико-біологічних об'єктах, котрі є мало-розмірними за своєю природою [25]. Ці життєво-важливі явища у ряді випадків можна розглядати як процеси, що є ізоморфними критичним явищам у малих об'ємах просторово-обмежених бінарних рідких сумішей в околі критичного стану "змішання-розшарування".

Автор щиро вдячний професору Л.А.Булавіну з Київського національного університету та професору О.В.Чалому з Національного медичного університету за критичне обговорення змісту статті та корисні поради.

Література

1. G. Fasol, Nanowires: Small Is Beautiful// Science, 1998, 280, P. 545-550.
2. Web-site <http://www.nano.gov>
3. R.A. Freitas, Nanomedicine, Vol. 1: Basic Capabilities, -Landes Bioscience Publishing, 1999.
4. Web-site http://science.nasa.gov/headlines/y2002/15jan_nano.htm
5. Web-site <http://nasa-nci.arc.nasa.gov>
6. R.C. Merkle, In book: Advances in Anti-Aging Medicine, Vol. 1, Ronald M. Klatz (Eds.), -Liebert Press, 1996.
7. J.A. Lipa, M. Coleman, D.R. Swanson, J.A. Nissen, Z.K. Geng, K. Kim. Specific heat of helium confined to micron-scale geometries near the lambda point// Physica, 2000, B 280, P. 50-54.
8. T.Truskett, P.Debenedetti, S.Torquato. Thermodynamic implications of confinement in a waterlike fluid, J. Chem. Phys., 2001, 114, P. 2401-2418.
9. Web-site <http://physics.nist.gov/PhysRefData/contents.html>
10. J. A. Lipa, M. Coleman, D. A. Stricker, Specific Heat of Helium Confined to Cylinders Near the Lambda Point// J. Low Temp. Phys., 2001, 124 (3-4), P. 443.
11. M. Diaz-Avila, F.M. Gasparini, M.O. Kimball, Behavior of ^4He Near T_λ in Films of Infinite and Finite Lateral Extent// J. Low Temp. Phys., 2004, 134 (1/2), P. 613-618.
12. I. Brovchenko, A.Oleinikova, Molecular organization of gases and liquids at solid surfaces. Handbook Theor. Comput. Nanotechnology, 2005, 62, P. 1-98.
13. C. Lammerzahl, G. Ahlers, N. Ashby, M. Barmatz, P. L. Biermann, H. Dittus, V. Dohm, R. Duncan, K. Gibble, J. Lipa, N. Lockerbie, N. Mulders and C. Salomon, Review: Experiments in Fundamental Physics Scheduled and in Development for the ISS// General Relativity and Gravitation, 2004, 36 (3), P. 615-649.
14. G. Ahlers, Opportunities for High-Resolution Measurements and Microgravity Research near the Superfluid Transition of Liquid ^4He // J. Low Temp. Phys., 1998, 113 (5-6), P. 835.

- 15.K.A. Chalyy, Influence of Gravitation on the Heat Capacity of Liquids in the Critical Region// Ukr. J. Phys., 2004, 49 (10), P. 971-974.
- 16.M. Krech, S. Dietrich, Finite-Size Scaling for Critical Films// Phys. Rev. Lett., 1991, 66, P. 345-348.
- 17.R.A. Ferrell, J.K. Bhattacharjee, Lambda Point Thermodynamics of Confined Liquid Helium: Negative Surface Specific Heat// Fiz. Nizk. Temp., 1998, 24, P. 104-107.
- 18.U. Mohr, V. Dohm, Surface Specific Heat of Confined ^4He above and below T_λ // Physica B, 2000, 284-288, P. 43-44.
- 19.K. Nho, E. Manousakis, Scaling of thermal conductivity of helium confined in pores// Phys. Rev., 2001, B 64, P. 144513.
- 20.K.A. Chalyy, Heat capacity of cylindrically confined helium: theoretical predictions versus experimental data// Fiz. Nizk. Temp., 2004, 30, P. 913-919.
- 21.M.E. Fisher, in Critical phenomena, Proceedings of the International School of Physics "Enrico Fermi" Course 51, edited by, M.S. Green. -New York: Academic Press, 1971.
- 22.V. Privman, M.E. Fisher, Universal critical amplitudes in finite-size scaling// Phys. Rev. B, 1984, 30, P. 322.
- 23.K. Binder, Phase Transitions in Reduced Geometry// Annu. Rev. Phys. Chem., 1992, 43, P. 33.
- 24.K.A.Chalyy, Model of Choline Receptor: Properties of Liquid System With Geometry of the Long Bar// Phys. Alive, 2003, 11, P. 51-57.
- 25.A.V.Chalyi, Ya.V. Tsehmister, K.A.Chalyy, Processes of ordering and self-organization in fluctuational models of the open systems, -Kiev: Vipol, 2001.

Надійшла до редакції 16.05.2005

